1

首先这是一个内向基环树森林，强连通分量只有一个点和一个环（特指基环树的环）两种情况。

容易发现有一个等式：强连通分量数$=$点数$-$环上的点数和$+$环数。

这三个部分的期望都是容易计算的，于是这道题就做完了。

时间复杂度 $O(n)$。

2

初始时把所有数模 k，把 $a[i]/k$ 乘上 2^{N-1} 相加，从而让 $a[i] < k$

可以用 $f[i][j]$ 表示考虑了前 i 个数，这些数共有 $2^i - 1$ 个子序列，其中子序列中所有数之和模 k 为 j 的有多少个。

考虑从 i 转移到 $i+1$，有两种可能

> 1. $j + a[i+1] \geq k$，此时会多出 1 的贡献，把答案乘上 $2^{N-i-1} \times f[i][j]$，即后面每个数任取的方案，再进行正常DP转移。
> 2. $j < k$ 直接正常DP转移即可。

把所有贡献相加即为答案。

3

考虑二分答案，即判定是否存在一个好的区间，满足

$$\frac{\sum_{i=l}^{r} a_i}{r-l+1} \geq ans$$

即

$$\sum_{i=l}^{r} (a_i - ans) \geq 0$$

问题变成了令 $a_i' = a_i - ans$，判定是否存在一个好的区间，其中所有元素之和 ≥ 0。

记录 a_i' 前缀和为 s_i，即找到一组 $p_l \oplus p_r \geq k$，使得 $s_r - s_{l-1} \geq 0$。

可以利用 $Trie$ 树快速求解。

4

题干等价于 $x \& y = 0$

考虑将 N 像数位DP一样分 $O(\log_2 N)$ 种数字去分类。

例如$(10101)_2$ 可以拆成 $(0xxxx), (100xx), (10100), (10101)$。

会发现只有第一种数可以和其他匹配，因为除了第一种数其他数最高位均为 1。

不妨假设 x 为第一种数， y 为非第一种数，假设 y 有 c 个 0，那么 x 有 2^c 种取法。

假设第 t 类数有 a 个 0，b 个 x，答案为

$$\sum_{i=0}^{b} \binom{b}{i} \times 2^{i+a} \times 1^{b-i} = 3^b \times 2^a$$

若 x, y 均为第一类数，即为 $a = 0$ 的情况。

直接代入即可。

5

首先注意到每一位是独立的。

如果用第 0 行来计算 (x, y)，$(0, i)$ 对 (x, y) 的贡献系数是 $\binom{x}{i-y} \mod 2$.

对于 $\binom{n}{k} \bmod 2$，可以利用 lucas 定理知道 $\binom{n}{k} \mod 2 = \binom{n/2}{k/2} \times \binom{n\%2}{k\%2}$.

其实就是要求 $\binom{n\%2}{k\%2} \bmod 2$ 总是为 1，才能使得 $\binom{n}{k} \bmod 2$ 为 1.

也就是 k 应当是 n 的子集，所以有贡献的位置仅有 $2^{popcount(x)}$ 个，至此我们可以通过枚举子集得到一个 $2^{popcount(x)}$ 的单次做法。

那么更一般的，我们可以用第 t 行来计算 (x, y)，对于 (t, i) 对 (x, y) 的贡献系数是 $\binom{x-t}{i-y}$，这启发我们可以令 $t = x \mod 512$.

通过预处理 $[0, 512)$ 行，我们可以得到一个 $2^{popcount(x/512)}$ 的单次做法.

总复杂度 $O(NB + \frac{QN}{B})$可以通过本题（其中 $B = 512$）.

6

题目等价于给一颗内向树，若有边 $x->y$，那么 x 先于 y 删除。

考虑给一颗以 1 为根的外向树怎么做，那么发现 1 必须第一个被删除，概率为 $\frac{w_1}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$。

把 1 删除以后分裂成了若干颗外向树，按照上面的思路继续递归即可，答案其实为

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{w_i}{\sum_{j \in sub_i} w_j}$$

sub_i 表示 i 的子树。

考虑怎么把外向树和内向树联系起来，可以考虑容斥。

一条边内向其实等于没有这条边-外向，所以我们可以容斥每条边，选择删除或是把这条边改为外向，那么最终会得到若干棵外向森林，按上述方式可以得到答案，复杂度为 2^N。

注意到容斥的过程中我们只关心当前子树内所有 w 的乘积，所以可以用 $f[i][j]$ 表示现在考虑了 i 子树内所有边的容斥情况，且 w 之和为 j 的所有答案概率之和。

转移的时候是一个树上背包的形式，总体复杂度为 $O(N^2)$。