貨幣数量説型の均衡価格関数の導出について

uncorrelated@yahoo.co.jp

2014 年 2 月 20 日

概要

Lucas (1972) のインプリケーションが予め仮定した「貨幣数量説型の均衡価格関数」に依存していると言う主張がインターネット上に流布されている。本稿では、この表現が適切とは言えないことを、マクロ金融の教科書に載っているような単純な世代重複モデル（OLG）では貨幣数量説が導出される事を示すことで喚起してみたい。

目次

1 はじめに

松井 (2011a)、松井 (2011b) が Lucas (1972) に関して「予め貨幣数量説が成り立つと，仮定している」と批判を行っている事を、マルクス経済学者の松尾匡氏があるエッセイ[*1]で紹介している。しかし、この二つの松井氏の論文は、議論に心もとない部分があるように感じる。世間一般に広めてよいものであろうか。

[*1] 反ケインズ派マクロ経済学が着目したもの——フリードマンとルーカスと「予想」
松尾匡：連載『リスク・責任・決定、そして自由！』
http://synodos.jp/economy/6795/4

松井 (2011b)、松井 (2011a) の主張は、世代重複モデルの仮定から導出される技術的要件を、天下り式に仮定した条件だと誤って認識している可能性がある。本稿では、Lucas (1972) のサブセットとなるモデルを提示しつつ、貨幣数量説が導出される条件だと示すことで、一つの疑義を提示してみたい。

なお、本稿では Lucas (1972) のモデルが複雑であり直観的な理解を妨げる可能性があることから、Lucas (1972) のモデルに沿った厳密な証明を与えない。しかし、モデルを拡張していっても同様の結論が得られることは容易に類推できることであり、本稿の目的としては十分であろう。

2 モデルの仮定

t 世代の若者は労働者として t 期に生産と貯蓄を行い、$t+1$ 期に老人になって貯蓄を使い消費を行う経済を考えたい。簡略化のために、t 期での消費は行わない。生産物は蓄積できないとして、人生が重なる $t-1$ 世代と t 世代、t 世代と $t+1$ 世代は財と貨幣の交換を行う。貯蓄手段は貨幣のみだ。また、資本ストックは存在しないし、遺産も残さない（図 1）。マクロ金融理論の教科書で見かける典型的な世代重複モデルになると思う。

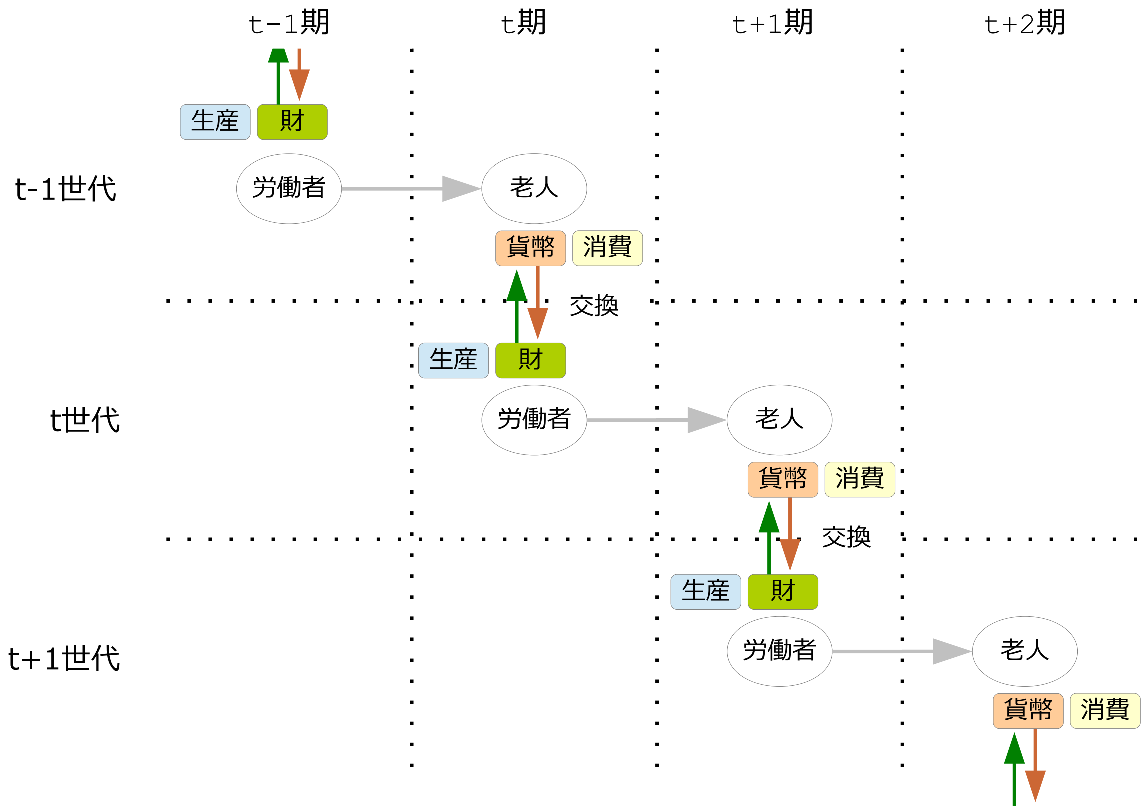

図 1　モデルの構造

t 世代は、t 期の余暇 L_t と $t+1$ 期の消費 C_{t+1} のバランスを取ろうとするように効用関数

$U(L_t, C_{t+1})$ の最大化を行う。つまり凸選好なので、C^2 級の強凹関数を仮定しておこう。

$$\frac{\partial U(L_t, C_{t+1})}{\partial L_t} > 0, \qquad \frac{\partial^2 U(L_t, C_{t+1})}{\partial L_t^2} < 0, \qquad \frac{\partial U(L_t, C_{t+1})}{\partial C_{t+1}} > 0, \qquad \frac{\partial^2 U(L_t, C_{t+1})}{\partial C_{t+1}^2} < 0$$

t 期には最大で 1 の労働が可能で、n_t の労働で、n_t の財を生産できるとする。余暇は $1 - n_t$ となる。関係を整理しておこう。

$$L_t = 1 - n_t \tag{1}$$

貯蓄 S_t は、t 期に価格 p_t で財を販売し、貨幣を手に入れて行う。t 時点での貨幣量は m とする。ただし、貨幣を入手後に、政府が保有貨幣を x 倍してくれる。これは資産分布の比を保ったまま、貨幣供給量を増やすことを意味する。

$$S_t = p_t \cdot n_t \cdot x \tag{2}$$

消費 C_{t+1} は、$t+1$ 期に貯蓄で価格 p_{t+1} で財を購入し行う。

$$C_{t+1} = \frac{S_t}{p_{t+1}} \tag{3}$$

モデルの仮定は以上になる。

3　均衡条件の導出

これらの仮定から、均衡条件の導出を行っていこう。

3.1　競争均衡における物価

$t+1$ 時点では、政府が配った分の影響から、貨幣量は $x \cdot m$ となっている。生産物の量が n だと言う事に注意すると、ここから t 時点と、$t+1$ 時点の価格が分かる。

$$p_t = \frac{m}{n_t}, \qquad p_{t+1} = \frac{x \cdot m}{n_{t+1}} \tag{4}$$

ここが仮定から貨幣数量説になっていると思うかも知れないが、人々は遺産を残さないと言う仮定がある事を思い出して欲しい。全ての貨幣が出回るので、貨幣供給量は価格に関係なく、貨幣供給曲線は垂直になる。

3.2　効用最大化の条件

この経済の効用最大化問題は、静学モデルと同様に解ける。

$$\mathscr{L} = U(L_t, C_{t+1}) + \lambda(1 - L_t - n_t)$$

上のラグランジュアンに、余暇 L_t と消費 C_{t+1} の一階条件を導出しよう。

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial L_t} = \frac{\partial U(L_t, C_{t+1})}{\partial L_t} - \lambda = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial C_{t+1}} = \frac{\partial U(L_t, C_{t+1})}{\partial C_{t+1}} - \lambda \frac{\partial n_t}{\partial C_{t+1}} = 0 \tag{6}$$

(1) 式、(2) 式、(3) 式を整理すると、以下のように L_t と C_{t+1} の関係を整理できる。

$$C_{t+1}=\frac{p_t(1-L_t)x}{p_{t+1}},\qquad L_t=1-\frac{p_{t+1}}{p_t}\frac{1}{x}C_{t+1}$$

$n_t=1-L_t$ に注意して、(6) 式を書き直すと、以下のようになる。

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial C_{t+1}}=\frac{\partial U(L_t,C_{t+1})}{\partial C_{t+1}}-\frac{1}{x}\frac{p_{t+1}}{p_t}\lambda=0 \tag{7}$$

(5) 式と (7) 式を整理して λ を消去した上で、t 期と $t+1$ 期の価格比と余暇と消費と限界効用の関係を見てみよう。

$$x\frac{p_t}{p_{t+1}}=\frac{\frac{\partial U(L_t,C_{t+1})}{\partial L_t}}{\frac{\partial U(L_t,C_{t+1})}{\partial C_{t+1}}}$$

上式は効用最大化の条件になるが、これに (4) 式を代入すると x と p_t と p_{t+1} は消えてしまう上に、m も出てこない所まで均衡条件を整理できる。

$$\frac{n_{t+1}}{n_t}=\frac{\frac{\partial U(L_t,C_{t+1})}{\partial L_t}}{\frac{\partial U(L_t,C_{t+1})}{\partial C_{t+1}}} \tag{8}$$

ここで定常状態であれば $n_t=n_{t+1}$ になり、余暇と消費の限界効用の比が等しくなることが分かる。なお、t 世代の行動は $t-1$ 世代の生産量に依存しないことに注意すると、初期時点より後は常に定常状態になる。

3.3 均衡の一意性

初期時点を抜かせば、均衡は定常状態 $n^*=n_t=n_{t+1}$ となる。t 世代は無限の未来の状態から、n_{t+1} を予測し、n_t を決定するのだが、無限の未来の状態がゼロより大であれば、n_{t+1} の計算は n^* に収束するためである。また、n_t は過去に依存しないジャンプ変数であるため、$n_1\neq n^*$ のときに、$t\longrightarrow\infty$ で n^* に収束する経路は存在しない。

3.3.1 $t\longrightarrow\infty$ で n^* に収束する経路

$n_t<n_{t+1}<n^*$ と $n_t>n_{t+1}>n^*$ は成立しない。背理法で簡単に確認することができる。(8) 式を整理しておく。

$$n_t=A_{t+1}n_{t+1},\ \text{where}\ A_{t+1}=\frac{\frac{\partial U(L_t,C_{t+1})}{\partial C_{t+1}}}{\frac{\partial U(L_t,C_{t+1})}{\partial L_t}} \tag{9}$$

$n_t<n_{t+1}<n^*$ を仮定すると、右辺の n_{t+1} の係数 A_t は 1 未満になる必要がある。しかし、$L_t=1-n_t$ に注意すると、

$$\frac{\partial^2U(L_t,C_{t+1})}{\partial L_t\partial n_t}=-\frac{\partial^2U(L_t,C_{t+1})}{\partial L_t^2}>0$$

$$\frac{\partial^2U(L_t,C_{t+1})}{\partial C_t^2}<0$$

となり、$n_t=n_{t+1}$ のときより分母が小さく、分子が大きくなるため、右辺の係数は 1 より大になる。これは矛盾なので、$n_t<n_{t+1}<n^*$ だと均衡にならない。同様に、$n_t>n_{t+1}>n^*$ も均衡しないことを示せる。

3.3.2　$t \longrightarrow 0$ で n^* に収束する経路

次に $n^* > n_t > n_{t+1}$ は成立しうる。$C_{t+1} = n_{t+1}$ であり、(9) 式右辺の n_{t+1} の係数は、分子が大きく 1 より大になる。より一般に、$n^* > n_t > n_{t+1} > n_{t+2} > \cdots > n_\infty > 0$ と言う系列を作る事ができる。3.3.1 節の議論から、n_t の系列の上界は n^* であり、n_t は n^* に収束する。これは無限の未来に何か定常状態よりも少ない量が生産されることがあれば、現在は定常状態にある事を示す。

同様に、$n^* < n_t < n_{t+1}$ も成立しうる。(9) 式右辺の n_{t+1} の係数は、分子が小さく 1 より小になる。より一般に、$n^* < n_t < n_{t+1} < n_{t+2} < \cdots < n_\infty < 1$ と言う系列を作る事ができる。よって、n_t は下界になる n^* に収束する。これは無限の未来に何か定常状態よりも多い量が生産されることがあれば、現在は定常状態にある事を示す。

3.3.3　具体的な例

よって t 世代は、初期時点を抜かせば、常に n_{t+1} は定常状態にあると考える。つまり、均衡は定常状態 $n^* = n_t = n_{t+1}$ となる。直感的に理解しやすいように、具体的な例を図示しておこう。

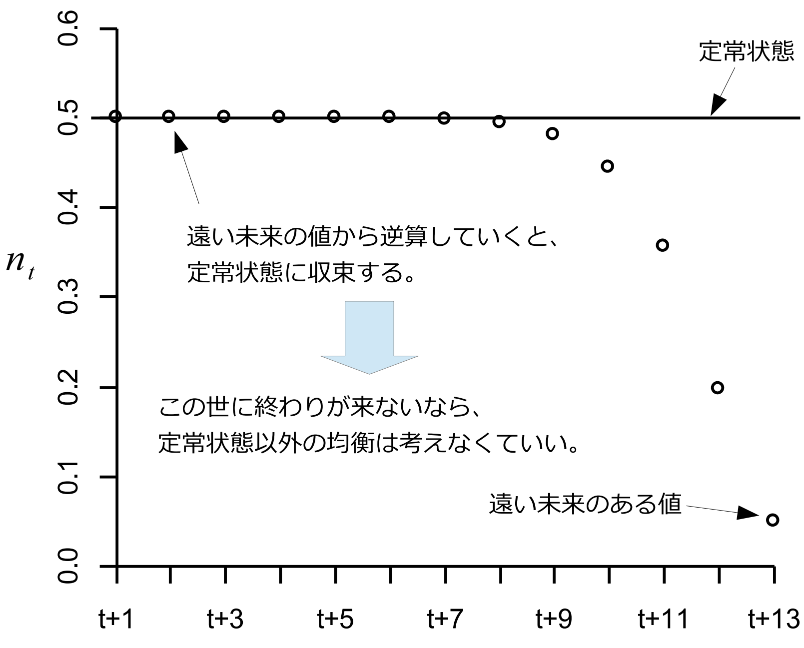

図 2　将来の状態からの予測

4　物価が貨幣量に比例する妥当性

(8) 式から貨幣量は生産量に影響を与えないことが分かる一方で、(4) 式から物価は生産量と貨幣量によって決定される。つまり貨幣量を k 倍にすれば、物価は k 倍になる貨幣数量説が成

り立っている。このような定式化を行えば、このような結論が出ると言うだけの話だが、貨幣数量説は最初から仮定されているわけではない。

4.1 C_{t+1} が確率的に決定される場合

Lucas (1972) に大雑把に習えば、以下のように p_{t+1} を確率変数 θ を用いて定義することになる。

$$p_{t+1} = \frac{x \cdot m}{\theta n_{t+1}}$$

計算自体は煩雑なのだが $E[xp_t/p_{t+1}]$ を計算すると、m と x が消える。非確率的なときと議論は大きくは変わらず、m は実質の均衡点や定常点とは関係が無くなる。

実際に計算してみよう。まずは複合確率変数 ψ を定義する。

$$\psi = \frac{x}{\theta}$$

x と ψ の確率密度関数を $f(x)$ と $h(\psi)$ と置くと、θ の条件付確率分布を以下のように書ける。

$$g(\theta \mid \psi) = \int \psi f(\psi\theta) h(\psi) d\psi$$

以上を使って $E[xp_t/p_{t+1}]$ を書く。

$$E\left[x\frac{p_t}{p_{t+1}}\right] = \frac{n_t}{n_{t+1}} \int \frac{1}{\theta} g(\theta \mid \psi) d\theta$$

m が均衡に与える影響が無い事は確認できて目的は達しているのだが、x を k 倍しても $g(\theta \mid \psi)$ が同一なことを示しておこう。

$\psi_k = kx/\theta$、確率密度関数の形状も変化するため $h_k(\psi_k)$、$f_k(kx)$、$g_k(\theta)$ と書き直す。

$$g_k(\theta \mid \psi_k) = \int \psi_k f_k(\psi_k\theta) h_k(\psi_k) d\psi_k$$

確率変数の変換を使い、右辺を $k\psi$、$h(\psi)$、$f(x)$ で書き直してみる。

$$\int \psi_k f_k(\psi_k\theta) h_k(\psi_k) d\psi_k = \int k\psi \frac{f(\psi\theta)}{k} \frac{h(\psi)}{k} d(k\psi)$$

置換積分を思い出すと、右辺の k は全て消すことができる。結局、

$$g_k(\theta \mid \psi_k) = \int \psi f(\psi\theta) h(\psi) d\psi = g(\theta \mid \psi)$$

となる。x を k 倍しても、$E[xp_t/p_{t+1}]$ は同一で均衡に変化が無い事が分かる。この計算から、政策的なインフレ加速が生産活動に影響を与えないと言うインプリケーションを導き出すことが出来る。

なお $p_{t,t+1}$ は x/θ の単調増加関数になるようにしておかないと、逆写像が一つと保証されないので複数均衡の可能性があるらしく、Lucas (1983) で仮定が追加されていた。

4.2 m を $\pi(m)$ に拡張するとミクロ的基礎が無くなる

(8) 式を念頭に置いてもらえば、説明なしに $p^*(m,x,\theta) = m\varphi^*(x/\theta)$ を $\pi(m) = \varphi^*(x/\theta)$ に拡張した松井 (2011b) が理論的に理解し難いものか分かると思う。均衡条件から導出される式を、均衡条件を満たさない式に変形できるようにしている。ミクロ的基礎を放棄しているた

め、合理的期待の前提に立っているとは言い難い。

4.3 Lucas (1972) は所得分配を考慮していない

Otani (1985) が Lucas (1972) に、貨幣供給によって所得再配分が発生しうるように修正を行い[*2]、貨幣の非中立性を示しているが、これは Lucas (1972) の問題意識と合致しない。Lucas (1972) の脚注 9 に、所得分配が発生しないケースでの考察だと書かれている。

5 おわりに

本稿を書くのには手元に無かったので参照しなかったのだが、学部向けマクロ金融のテキスト Champ et al. (2011) の第 1 部が Lucas Islands Model まで続く世代重複モデルの説明になっていて、本稿で紹介したような簡易な計算が紹介されている。間違いなく広く知られている議論なので、金融理論に多少詳しい人が見たら違和感が残る可能性が高い。

Lucas (1972) の議論が絶対と言うわけではなく、例えばゼロ金利制約などを考え出すと色々な発展が可能なのは広く知られていると思う。しかし、短期と長期のフィリップス曲線を綺麗に説明できたという大きな功績があるモデルを、勘違いで貶しているのは問題であろう。

そもそも Lucas (1972) が"To decide whether it is plausible that m should factor out of the quilibrium price function, the reader should ask himself: what are the consequences of a fully announced change in the quantity of money which does not alter the distribution of money over persons?" と言う謎々しか手がかりを残さなかったのが悪いのだと思うが、松井 (2011b) は紀要にも見えるのだが査読論文だそうだし、どうしてこうなったと言う感じが強く残る。

参考文献

Champ, Bruce, Scott Freeman, and Joseph Haslag (2011) *Modeling Monetary Economies*: Cambridge University Press.

Lucas, Robert Jr. (1972) "Expectations and the neutrality of money," *Journal of Economic Theory*, Vol. 4, pp. 103-124.

Lucas, Robert Jr. (1983) "Corrigendum," *Journal of Economic Theory*, Vol. 31, pp. 197-199.

Otani, Kiyoshi (1985) "Rational expectations and non-neutrality of money," *Review of World Economics (Weltwirtschaftliches Archiv)*, Vol. 121, No. 2, pp. 203-216, June.

松井宗也 (2011a) 「Lucas (1972) のモデルにおける貨幣の非中立性：労働供給量に上限が存在するケース」,『南山経営研究』, 第 26 巻, 255-286 頁, 3 月.

松井宗也 (2011b) 「Lucas(1972) のモデルにおける貨幣の非中立性」,『社会科学研究』, 第 1 巻, 91-109 頁, 11 月.

[*2] ベーシック・インカム制度となっている。