# 人文系のためのベイズ意思決定理論の簡単な紹介

uncorrelated@yahoo.co.jp

2024 年 12 月 20 日

科学哲学を専門としない人文系の少なくない人々が、ベイズ統計学や合理的意思決定理論について、ぼんやりとしたイメージしか持っていないか、そもそも存在を認識していない気がするので、簡単な例を通して説明していきます。Kelly (2016) のような科学と証拠に関する哲学的議論と強く関連しており、人文系の人々が好きな、科学や近代的合理性への批判を考える上で、有用な予備知識になります。

ベイズと言うとモンティ・ホール問題を例として紹介するような事が多い気がするのですが、あれはベイズ統計学やベイズ意思決定理論の俯瞰どころか、ベイズの定理の説明になっているのかも分かりません。すべての組みあわせを列挙したら、客観的な確率の問題になってしまうからです。もっと実践的な例が必要です。

そこで、格闘ゲーム『鉄拳 2』のカンガルーのロジャーと恐竜のアレックスの繰り返される対戦を考え、ロジャーの勝利[*1]確率をベイズ統計学に沿って逐次推定し、どちらに賭けるかと言う意思決定を、ベイズ意思決定理論に基づいて行う例を考えてみました。単純な例ですが、ベイズ意思決定理論を俯瞰できる例になっていると思います。


図 1　鉄拳 2 ロジャー vs アレックス

[*1] なお、数理的にややこしくなるので引き分けは考慮しません。引き分けたらやり直しと思ってください。

# 目次



# 1 ベイズの定理

牧師トーマス・ベイズが着想を得て、友人の数学者リチャード・プライスが世に送り出し、独自に発見したピエール＝シモン・ラプラスが実用的に使い出したと言われるベイズの定理ですが、歴史的な経緯は覚えなくて大丈夫です*2。大事なのは定理を表す式です。

$$P(\theta \mid D)P(D) = P(D \mid \theta)P(\theta) \tag{1}$$

$D$ はデータ、すなわち観測値、$\theta$ はパラメーターですが、観測値とパラメーターが何かは後にまわして、まずは漠然と何か値だと捉えましょう。$P(D)$ は $D$ が生じる確率（もしくは確率密度）*3、$P(\theta)$ は $\theta$ が生じる確率（密度）です。$P(\theta \mid D)$ は $D$ のときに $\theta$ が生じる条件付確率（密度)、$P(D \mid \theta)$ は $\theta$ のときに $D$ が生じる条件付確率（密度）です。

*2 興味があれば McGrayne (2013) を参照してください。

*3 確率密度をある区間で積分したものが確率になり、身長や体重など連続した値を考えるときは確率密度を計算してから、積分して確率にすることが多いです。

左辺も右辺も $\theta$ かつ $D$ のときの確率（密度）になっているので等号が成立しています[*4]。

式 (1) の両辺を $P(D)$ で割って、

$$P(\theta \mid D) = \frac{P(D \mid \theta)P(\theta)}{P(D)} \tag{2}$$

式 (2) をつくります。一般にこれがベイズの定理と呼ばれます。これだけ見せられても、だからどうしたと言う感じですね。

## 2 ベイズ更新

$D$ が観測値で、$\theta$ はパラメーターであることを思い出しましょう。観測値からパラメーターの値に応じた確率、つまりパラメーターの分布を推定するのが、今回実践するベイズ統計学の作業の中核です。$D$ が分かっているときの $\theta$ の確率 $P(\theta \mid D)$ の計算をします。

これから推定するパラメーターは、確率分布の特徴をあらわす数で、母数と訳語がつけられています[*5]。例えば正規分布であれば、母平均と母分散がパラメーターになります。今回の実例では、ロジャーとアレックスの対戦成績を考えますから、ロジャーが勝つ確率がパラメーターになる二項分布を考えます。

観測値ごとの確率を考える離散確率分布と、観測値がある区間の範囲に入る確率を考える連続確率分布があります。離散確率はある値の確率がそのまま出て来ますが、連続確率分布は確率密度関数を考え、ある区間でそれを積分した値が、その区間に値が入る確率となります。図 2 は確率密度関数のプロットで、ピンク斜線の面積が $\theta$ が $a$ から $b$ の確率になります。

二項分布は離散ですが、そのパラメーターであるロジャーが勝つ確率は 0 から 1 までの間の実数なので、パラメーターの分布は連続となります。よって、パラメーターの分布は確率密度関数で表されることになります。また、これにより、

$$P(\theta \mid D) = \frac{P(D \mid \theta)P(\theta)}{\int P(D \mid \theta)P(\theta)d\theta} \tag{3}$$

と、$P(D)$ を積分を使った式に書き換えることができます[*6]。$\int P(D \mid \theta)P(\theta)d\theta$ は、あらゆる $\theta$ において $D$ が出る確率密度を $\theta$ が出る確率密度を乗じして積分したものですから、$P(D)$ に等しくなります。

式 (3) の中の $P(\theta)$ は事前確率と呼ばれ、ベイズ統計学の意味で主観的に決定します。理屈の上ではパラメーターが取りうる値において、確率密度が 0 以上であれば何でもよいと言うことになりますが、実用上は先行研究で得られた分布や、数理モデルから予測される分布か[*7]、何か分散がとても大きな分布を使うことが多いです。そうでないと恣意的だと非難されることでしょう[*8]。

---

[*4] 日本全国の犬の集合を想像してみましょう。オス犬の比率を調べた後に、オス犬の中の柴犬の比率を調べて掛ければ、日本の犬の中のオスの柴犬の比率になります。柴犬の比率を調べたあとに、柴犬の中のオス犬の比率を調べて掛けても、日本の犬の中のオスの柴犬の比率になります。

[*5] 分母の数や、母集団の要素数をさして母数と言うと誤用になります。

[*6] 離散の場合はすべての可能性の確率を合計することになります。

[*7] 客観ベイズ（Objective Bayesianism）では無差別の原理（Principle of Indifference）を事前分布に要求します。あるパラメーターの値が、他の別のパラメーターの値よりも可能性が高いという情報がなければ、二つのパラメーターの値に与える信念は同じでなければならないと言うものです。数理モデルからの事前分布は、これと整合的な方針でしょう。

[*8] ハチャメチャな事前分布を置いたことが無いので、実際にどうなるかは分かりません。

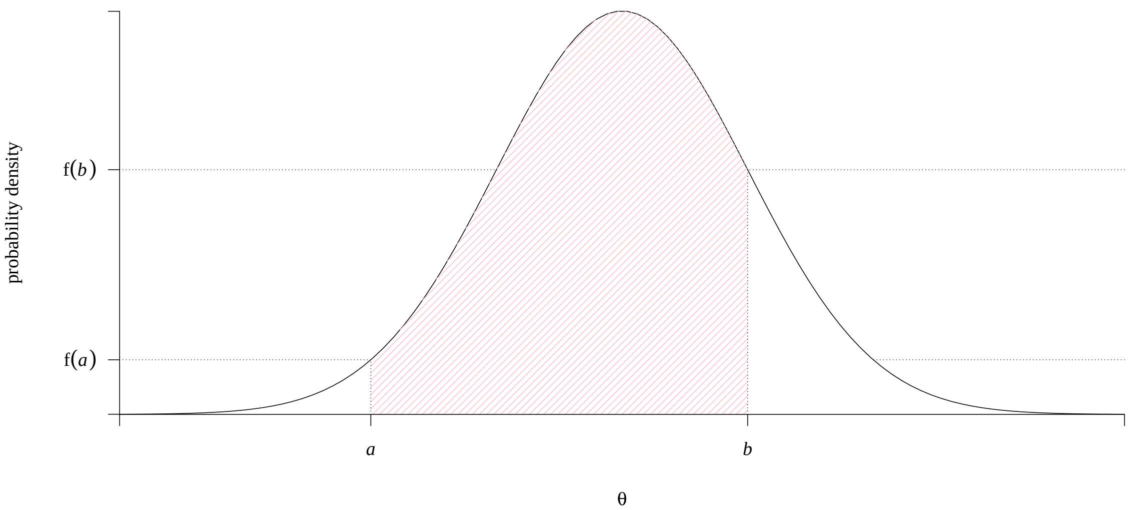


図 2　確率密度関数と確率

$P(D \mid \theta)$ は尤度関数と呼ばれます。正規分布や二項分布などの確率分布と制約条件[*9]を仮定した確率モデルにおいて、あるパラメーター $\theta$ のときにあるデータ $D$ が観測される確率をあらわします。この関数で計算される確率である尤度が最大になるようにパラメーターを求める方法を最尤法[*10]と呼びますが、パラメーターのもっともらしさを表していると捉えられています。どういう分布でどういう制約がつくかで尤度関数は定まりますが、これも先行研究や理論的考察に基づき、ベイズ統計学の意味で主観的に決定されます。もちろん、理屈なく分布や制約を選ぶと恣意的だと非難されます。

ベイズ統計学は分析の前提が主観的だと言われていますが、実用上はやはり（口語的な意味での）客観性が求められることに注意してください。これまで一般的でった非ベイズ統計学である頻度論でも確率モデルなどは主観的に置くので、この批判は実用上は濡れ衣です[*11]。

$P(\theta \mid D)$ は事後確率と呼ばれます。式 (3) に基づく推定は、事前確率 $P(\theta)$ を事後確率 $P(\theta \mid D)$ に更新すると捉えることができるので、ベイズ更新と呼ばれます。

## 2.1　逐次ベイズ推定

事前確率 $P(\theta)$ は、先行研究で得られた分布や、その分散を大きくした分布を用いるのが望ましいです。先行研究で得られた情報を推定に反映させることができるからです。同様に、最初の推定で得られた $P(\theta \mid D)$ を 2 回目の推定に用いる $P(\theta)$ に、2 回目の推定で得られた $P(\theta \mid D)$ を 3 回目の推定に用いる $P(\theta)$ に…と、

[*9] 説明変数と被説明変数の関係のことです。

[*10] ベイズ統計学では最大事後確率（MAP）推定。

[*11] 頻度主義では確率を、ある確率モデルにおいて試行回数が無限大のときの相対頻度として定義します。客観確率と呼ばれるものです。ベイズ統計学では確率を、観測値によって更新されていく主観的な信念として定義します。客観と主観ですから全く違うもののように感じるかも知れませんが、試行回数が増えて相対頻度が収束する先と、観測値が増えて主観的な信念が収束する先は、数値的には同じものなのになります。

どんどんベイズ更新を行い、逐次的に推定することができます。スポーツのように刻々と対戦成績が更新されていく場合は、刻々と推定結果を更新したいですよね*12。そういう場合にもベイズ統計学は力を発揮します。

# 3 推定方法

ここまでは大枠なので単純な話をしてきたのですが、ここから具体的な計算についてやや煩雑な話に入ります。計算できれば推定方法は何でもよく、選択肢があるので個々の手法は（不可欠と言う意味で）本質的では無いわけですが、実践できると言うことは本質的に重要な性質です。

## 3.1 数値解析

実は式 (3) の計算は困難なことが多く、事前分布と尤度関数がちょっと複雑になるだけで、マルコフ連鎖モンテカルロ法（MCMC 法）と呼ばれる確率分布のサンプリング手法たち*13を駆使して計算機に依存した推定になります。数値解析のアルゴリズムとして MCMC 法は決して複雑なことはなく、数理的な意味もハチャメチャな数学力が無いと理解できないと言うわけではないのですが*14、やたらと計算量が多いので 1990 年代後半までは気軽に用いることは困難でした。現在、2020 年代ではローエンド PC で余裕で計算することができますが、今回は簡素なモデルなので、MCMC は用いないことにします。

## 3.2 共役事前分布

特定の組み合わせの事前分布と尤度関数では、サンプリング手法に頼らず計算が可能になります。そのとき、パラメーターの事前分布と事後分布がハイパーパラメーター*15が異なる以外は同じ分布になるときの事前分布は、共役事前分布と呼ばれます。

今回は尤度関数を二項分布から導出し、パラメーターの事前分布をベータ分布とするので、事後分布もベータ分布となります。ベイズ更新が暗算でできるほど簡単になります。汎用性が乏しすぎるため、共役分布が単独で使われることはほぼ無い*16のですが、説明には便利なので今回は計算に利用します。

### 3.2.1 二項分布

二項分布は、ある事象が起きるか起きないかが確率的に観察されるときの分布です。試行回数が $m$、生起回数 $n$ のとき、パラメーターとなる生起確率を $\theta$ としたときの二項分布の尤度関数は、

$$\mathscr{L}(m,n,\theta) = {}_m\mathrm{C}_n\ \theta^n(1-\theta)^{m-n}$$

となります。$n$ 回生起する確率 $\theta$ と $m-n$ 回生起しない確率 $(1-\theta)$ を乗じて確率をつくるわけですが、生起、生起、不生起…と言うような場合や、生起、不生起、生起…と言うような場合など、生起と不生起の順序

*12 新型コロナウイルス感染症の感染者数が毎日報道されていた頃、その基本再生産数 $R_0$ の推定が逐次ベイズ推定されていました。
*13 Gibbs sampling と Metropolis-Hastings 法が代表で、他にも手法があります。代表的なベイジアン向けのソフトウェアでは、これらの他にも、Slice Sampler や Hamiltonian Monte Carlo 法や No U-turn Sampler（Martin et al. (2011), Thomas and Tu (2020), Hoffman and Gelman (2011)）が使われています。
*14 興味がある方は中妻 (2003) を参照してください。2023 年 8 月 1 日に、出版元が無料でダウンロードできるようにしてくれました。
*15 パラメーターの分布のパラメーターになるため、ハイパーをつけて区別します。
*16 複数の共役分布の同時確率密度である事前分布は、Gibbs Sampler で推定できるので重宝されています。

は様々な組み合わせがあるので、組み合わせの数 ${}_m\mathrm{C}_n$ をかけています。

#### 3.2.2 ベータ分布

ベータ分布は 2 つのパラメーターで特徴付けられる台が 0 から 1 までの確率分布です。中央付近が厚い分布から、一様分布、短点付近が厚い分布までを表現できる柔軟性があります。ベータ分布を Be と表すと、$P(\theta) \sim \mathrm{Be}(a, b)$ なので、

$$P(\theta) = \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}$$

となります。B はベータ関数です。

#### 3.2.3 事後分布の計算

尤度関数 $P(D \mid \theta) = \mathscr{L}(m, n, \theta)$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} P(D \mid \theta)P(\theta) &= {}_m\mathrm{C}_n\ \theta^n(1-\theta)^{m-n}\frac{1}{\mathrm{B}(a,b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1} \\ &= \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)}\frac{m!}{n!(m-n)!}\theta^{n+a-1}(1-\theta)^{m-n+b-1} \end{aligned} \tag{4}$$

となります。

同様に、

$$\begin{aligned} \int P(D \mid \theta)P(\theta)d\theta &= \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)}\frac{m!}{n!(m-n)!}\int \theta^{n+a-1}(1-\theta)^{m-n+b-1}d\theta \\ &= \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)}\frac{m!}{n!(m-n)!}\mathrm{B}(n+a, m-n+b) \end{aligned} \tag{5}$$

$P(\theta \mid D)$ を求めるのには、式 (4) を式 (5) で割ればよいです。

$$P(\theta \mid D) = \frac{1}{\mathrm{B}(n+a, m-n+b)}\theta^{n+a-1}(1-\theta)^{m-n+b-1} \tag{6}$$

つまり、$P(\theta \mid D) \sim \mathrm{Be}(n+a, m-n+b)$ になります。これは観測値が $m$ 回試行で $n$ 回生起だとすると、事前分布のハイパーパラメーター $a$ と $b$ に $n$ と $m-n$ をそれぞれ足せば、事後分布のハイパーパラメーターになると言うことです。計算は、足し算になりました。

## 4 逐次ベイズ推定の実践

数値を計算する方法が整理できたので、実際に推定してみましょう。

最初の事前分布 $P(\theta)$ は $\mathrm{Be}(1, 1)$ とします。これは区間 $[0, 1]$ が台[*17]の一様分布と同じ形になります。ロジャーが 100% 勝つことも、50% 勝つことも、全く勝てないことも、その他の勝率になることも、同様の確率で起きうるという主観的な信念を表しています。6 勝 3 敗のような過去の対戦成績がある場合は $\mathrm{Be}(6, 3)$ とし

[*17] ここではゼロより大きい確率の区間を意味します。

たり、分散を大きくして $\mathrm{Be}(2,1)$ としてもよいのですが、ここでは情報が乏しい状態からはじめます。なお、これから分析するデータに基づいて事前分布をつくってはいけません。データに含まれる情報が二重に推定結果に影響してしまうからです。

最初の対戦で、ロジャーが勝ったとしましょう。前節で整理した $P(\theta \mid D)$ の計算方法から、$\mathrm{Be}(1,1)$ は、$\mathrm{Be}(2,1)$ にベイズ更新されます。次の対戦でも、ロジャーが勝ったとしましょう。$\mathrm{Be}(2,1)$ は、$\mathrm{Be}(3,1)$ にベイズ更新されます。その次の対戦では、アレックスが勝ったとしましょう。$\mathrm{Be}(3,1)$ は $\mathrm{Be}(3,2)$ にベイズ更新されます。その次の次の対戦でも、アレックスが勝ったとしましょう。$\mathrm{Be}(3,2)$ は $\mathrm{Be}(3,3)$ にベイズ更新されます。

確率密度関数で見た事前/事後分布の更新をプロットをすると以下の図 3 のようになります。

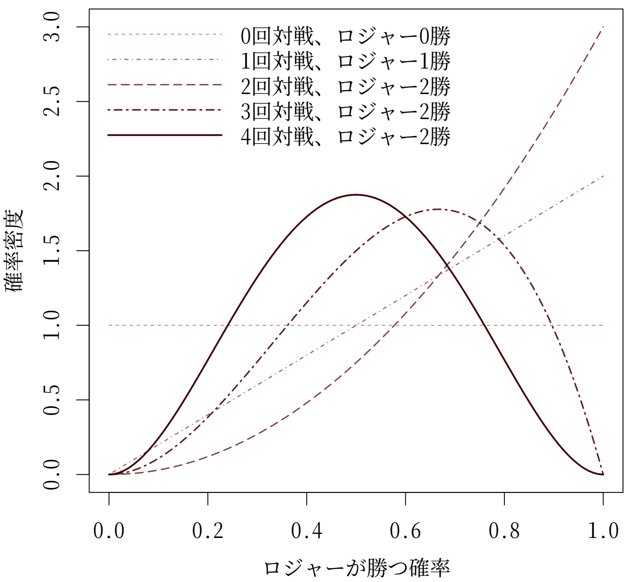


図 3　$\mathrm{Be}(1,1)$ からの逐次ベイズ推定

## 4.1　信用区間

計算されたパラメーターの事後分布は、平均値や中央値などの一点の他、信用区間（もしくはベイズ信頼区間）と言う区間に要約されることが多いです。図 4 は、事後分布が $\mathrm{Be}(3,2)$ のときの信用区間のプロットです。信用区間には、等裾事後信用区間と最高事後密度信用（HPD）区間があります[*18]。等裾事後信用区間は、$0 < \alpha < 1$ を考え、事後分布を面積で見て左から $100\alpha/2$ から $100(1-\alpha)/2$ までを $100\alpha\%$ 信用区間とするものです。両側の裾野の面積が同じになります。慣習的に、95% 信用区間が参照されることが多いです。伝統的な頻度論の信頼区間と異なり、パラメーターが 95% の確率で入っている区間と解釈できます[*19]。HPD 区

[*18] 他に無いかは存じません。

[*19] 95% 信頼区間の場合、その計算に用いるアルゴリズムは 95% の確率でパラメーターが入っている区間を計算結果として返すと看做すものの、計算された個々の信頼区間にパラメーターが含まれる確率は 95% ではないです。Wasserman (2004) の例 6.14 が、パラメーターが入る確率が 0% の区間が計算されることもある 75% 信頼区間（の計算方法）の紹介になっていて、これを考えると信頼区間の性質が理解できると思います。

間は、積分した値が $\alpha$ となるように、確率密度が高い区間を選ぶものです。等裾事後信用区間だと確率密度が高い領域が信用区間から外れてしまうことがあり、特に単峰ではない分布で非直感的な指標となりますが、HPD 区間だと直感にあう要約統計量になります。

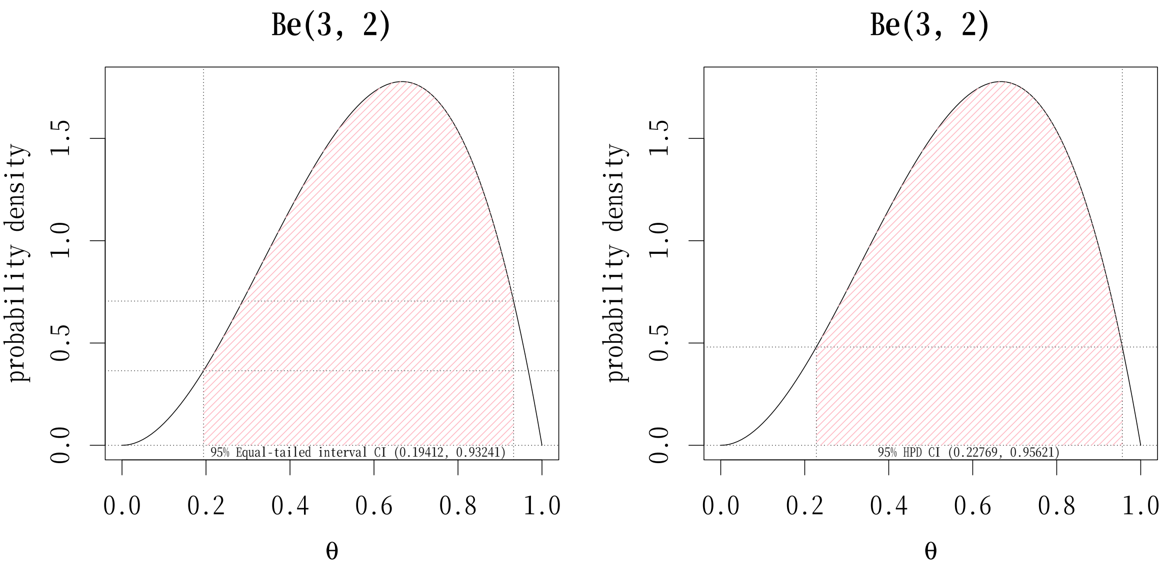


図 4　等裾事後信用区間と最高事後密度信用区間

## 4.2　主観的事前分布の影響

今回の例ではベイズ更新回数が多くなるほど、一般的にはサンプルサイズが大きくなるほど主観的事前分布の影響は小さくなっていきます。主観的事前分布が $\mathrm{Be}(3,1)$ と $\mathrm{Be}(1,3)$ ではじまった場合を並べてみますが、大きく異なる信念であったのに、最終的には似たような信念になっています。なお、もし真なるロジャーの勝率があるとすれば[*20]、サンプルサイズが無限になったとき、確率密度関数は真の値となる一点に収束することになります。

哲学ではエビデンスを誰もが観察でき結論をひとつに導く情報と説明していますが[*21]、事前分布が異なっていても事後分布が漸近していくところから、観測値が哲学用語のエビデンスとして機能していることが分かります。

[*20] プレイヤーの疲労や習熟、さらにはプレイヤーが入れ替わる場合を考えると、ある一つの真なるロジャーの勝率は無いとすべきでしょう。

[*21] 近年の社会科学の計量分析では因果効果を示唆する情報に限って用いられるようになっており、哲学用語よりは狭く捉えられています。

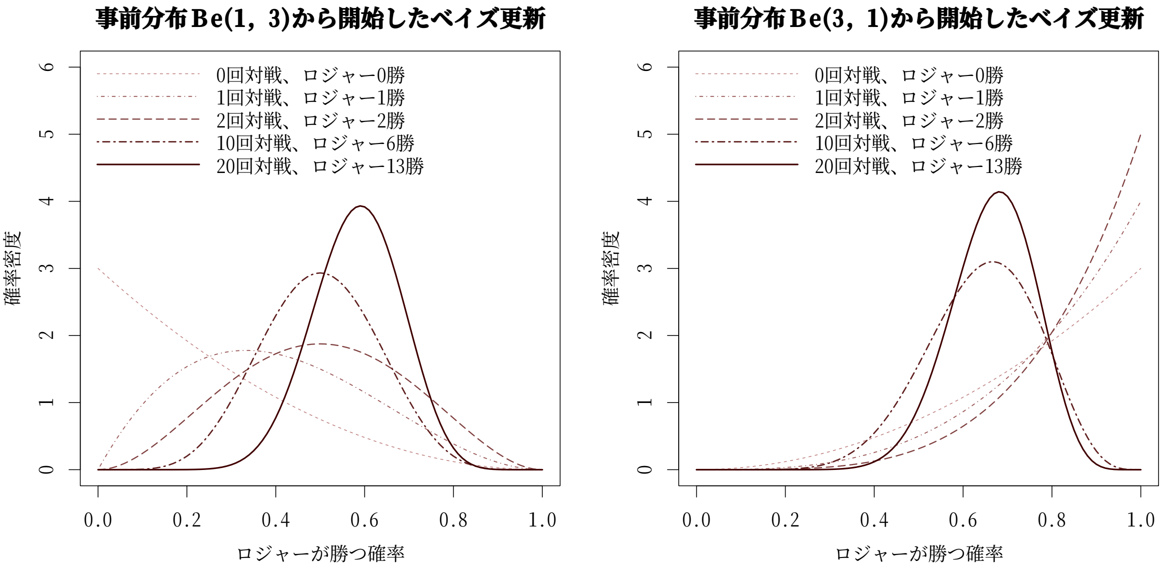


図 5　異なる事前分布からの逐次ベイズ推定

## 4.3 尤度原理

ベイズ統計学には、尤度原理と言う運用方針があります[*22]。尤度原理とは、パラーメーターの推論において、データが観察されたあと、すべての関係する実験情報は、観測されたデータによる尤度関数の中にあり、相互に比例した 2 つの尤度はパラメーターに関して同じ情報を持つと考えることです。何を言っているのか分からないかもですが、これに従っていると分析の哲学的な一貫性が保てます。また、実践上、注意すべきことは難しくはありません。

### 4.3.1 事前分布

尤度原理は（これから分析する）データの情報は尤度にあるべしと言っているので、データから事前分布を構成したり選択すると、尤度原理に反することになります。ベイズ統計学においても、データに依存するジェフリーズ事前分布と言う無情報事前分布があったりするのですが、ある種の数理的な議論において重宝するだけで尤度原理に反しているので、データ解析で使うのはやめておきましょう。データの情報が二重に推定結果

[*22] 原理と聞くと自然法則のように思うわけですが、指針と理解したほうがよいと思います。なお、（強い）尤度原理は Birnbaum の定義した十分原理と弱い条件付け原理（Conditionality Principle）から導出されるため、現在では正確には定理であって原理ではないです。十分原理は、十分統計量が同じ観測値からは同じパラメーターの推定値が出てくるべきと言う考えです。ベイジアンにも、頻度論者にも広く受け入れられています。弱い条件付け原理は、実施される確率はあったが実際には実施されなかった実験があったとして、それを考慮しない推定と、考慮した推定の結果が同じでなければならないと言う考えです。ややこしいので Vidakovic (2004) にあった具体的な例をあげます。数字 $\theta + 1$ が 50% の確率で、数字 $\theta - 1$ が 50% の確率で観察されるときに、それぞれどちらかになる 2 つの数字 $X_1$ と $X_2$ を観察してから、パラメーター $\theta$ を推定し、信頼度を出すことを考えましょう。推定方法は $X_1 \neq X_2$ ならば $(X_1 + X_2)/2$ を $\hat{\theta}$ に、$X_1 = X_2$ ならば $X_1 - 1$ を $\hat{\theta}$ になります。弱い条件付け原理を受け入れている場合、$X_1 \neq X_2$ のときの信頼度は 100% で、$X_1 = X_2$ のときは 50% となります。$X_1 \neq X_2$ のときは $X_1 = X_2$ のことは考慮せず、$X_1 = X_2$ のときは $X_1 \neq X_2$ を考慮しないからです。一方、弱い条件付け原理を拒絶する場合、信頼度は 75% となります。弱い条件付け原理はベイジアンは受け入れていますが、頻度主義者は受け入れていません。

に影響するのを防止する御利益もあります。

#### 4.3.2 停止規則

今回の設定において、$m$ 試合したところロジャーが $n$ 勝した場合と、ロジャーが $n$ 勝をしたので $m$ 試合で分析を終了した場合のパラメーター $\theta$ の推定を考えます。前者と後者では尤度関数が ${}_mC_n\theta^n(1-\theta)^{m-n}$ と ${}_{m-1}C_n\theta^n(1-\theta)^{m-n}$ と微妙に異なりますが、$\theta$ に関わらず値の比は一定なので推定量は同じになります[*23]。ベイズ統計学では、停止規則を気にしません[*24]。

統計的仮説検定を用いる頻度論では停止規則は問題になります。検定に用いる p 値の計算では、実験計画を考慮する必要があるからです。p 値とは、帰無仮説が正しいときに、観察結果と同じかより極端なデータが得られる確率のことを指します。実際に、帰無仮説 $H_0$ を $\theta=\theta_H$ とすると、前者と後者の p 値は、

$$P_F(x \geq n \mid H_0) = \sum_{x=n}^{m} {}_mC_x\theta_H^x(1-\theta_H)^{m-x}$$

$$P_L(x \geq m \mid H_0) = \sum_{x=m}^{\infty} {}_{x-1}C_{n-1}\theta_H^n(1-\theta_H)^{x-n}$$

となり[*25]、$P_F \neq P_L$ で異なります。20 戦 13 勝 7 敗だと、$H_0=0.5$ として、$P_F$ は約 0.132 で、$P_L$ は約 0.084 です。試合数が同じで、ロジャーの勝利数が同じなのにもかかわらず、帰無仮説が棄却されたり、されなかったりすることになります。

ベイズ統計学では統計的仮説検定を行わないので、これは問題とはなりません。上に示したように、p 値の計算では実験計画を考慮するので、尤度原理に反するからです。統計解析のための道具が減るように感じるかも知れませんが、ベイズ統計学では後述する方法で誤差と効果量の両方を考慮して意思決定するので、p 値に頼る必要はありません。

そもそも p 値が 0.0501 と 0.0499 で判断を大きく変えるような推論は、合理的な推論と言えるでしょうか。近年は p 値だけで是非を判断しないように呼びかけられていますし[*26]、医療統計の同等性・非劣性の解析では、以前から p 値だけではなく効果量の大きさも考慮しています。また、p 値は実験計画に応じて計算を変える必要があり、典型的には多重比較を行うときに補正しないといけませんが、適切には行えていないケースも多くあり[*27]、さらに近似公式で値を求めることも多いので、実際的には厳密な値ではありません。

#### 4.3.3 推定量に求める性質

ベイズ統計学ではパラメーターの推定方法に関し尤度原理に即することが優先されるため、推定量の不偏性は（頻度論ほど）重視しない傾向があります。不偏性がないと、推定量は大きめか、小さめかのどちらかに偏って推定されます。

ロジャーが $n$ 勝をしたので $m$ 試合で分析を終了した場合のパラメーター $\theta$ の推定を尤度原理に即した最尤法で行うと、$n/m$ となりますが、これにはバイアスがあります。尤度原理に即さない最小分散不偏推定量で

---

*23 ベイズの定理の右辺の分母が分子の積分なのに注意してください。2 つの尤度関数の値が違ってもその比が一定であれば、分子と分母が同じ率で増えるだけの違いになるので、事後分布の計算には影響しません。

*24 分析者の社会的地位のためなどの目的で、推定結果を操作することを肯定しているわけではないです。

*25 $P_L$ は勝率 $1-\theta$ のアレックスが $n$ 敗するのに $m$ 以上の試合数がかかる確率です。

*26 統計的仮説検定が禁止になり、信頼区間を見たり、Cohen'd や $\eta^2$ や $\eta_p^2$ を見るようにした学術雑誌もあります。

*27 多重比較補正をかければよいと思われるかも知れませんが、補正方法が複数あり、それによっても p 値が変わって来ます。

は $(n-1)/(m-1)$ となります。$n/m$ と言う推定量は、教科書的に良い性質とされる不偏性と有効性がないことになります。有効性がないと、理論的な下限[*28]よりも誤差が大きめに推定されることになります。

このように書くと大問題な気がしてくるでしょうが、実用上はほぼ問題になりません。$n/m$ もサンプルサイズが大きくなればなるほど母集団のパラメーター $\theta$ に漸近していく一致推定量であること、分散の方もサンプルサイズが大きくなればなるほど最小分散推定量の $(n-1)/(m-1)$ に漸近していく漸近的に有効な推定量であるからです。今回の推定でも、10 戦で 6 勝のときの $\hat{\theta}$ は 0.6 と約 0.556 ですが、20 戦で 13 勝のときは 0.65 と約 0.632 で、両者の差が縮まっていることが分かります。

頻度論者の多くも不偏性はさほど気にしていません[*29]。被説明変数が数量ではないときに用いられるロジスティック回帰にはバイアスが入るのですが、そんなことは全く気にせず広く利用されています。サンプルサイズが大きくなれば問題にならなくなりますし、そこで入るバイアスよりもモデル特定化の誤りによるバイアスの方が大きいからでしょう。

## 4.4 モデル選択

確率分布や制約などによって規定される推定モデルですが、データから選択することもできます。ベイズファクター[*30]などの複数の手法が提案されています。ただし、同じデータからモデルの選択とパラメーターの推定を同時に行うのは原則としてやめましょう。統計哲学的には尤度原理に反すると言うことになるのですが、実用的にはデータに過適合した推定結果をもたらし結果の再現性が低くなることが問題になります。

## 4.5 頻度論との違い

詳細に比較した本（Samaniego (2010)[*31]）があるので詳細はそちらを参照して欲しいのですが、哲学的な正当化が異なるのが、頻度論とベイズ統計学の違いの根本になります。ベイズ統計学には尤度原理（もしくはベイズ認識論）と言う正当化があり、そこから主観的なものが観察によって客観的になっていく信念として確率を定義します。頻度論は母集団とその真のパラメータが存在することを仮定した上でのパラメーターの推定方法の雑多な集合体となっており、事象が生じる相対頻度として確率を定義しています。この哲学の違いにより、ベイズ統計学はパラメーターの推定量は信念、つまり確率的な値として解釈することができますが、頻度論では真のパラメーターは確率変数ではなく定数と考えているので、統計学的仮説検定で用いる p 値や信頼区間のややこしい説明が生じます。p 値は、効果ゼロなどの帰無仮説が正しいときに、分析したデータから計算したパラメーターの推定量と同じかより極端な推定量が観察される相対頻度で、95% 信頼区間は、95% の確率で真のパラメーターを含む区間を生成するアルゴリズムが、分析したデータから計算した区間のことになるわけですが、どちらも真のパラメーターの値に関する確率ではないのです。一方、ベイズ統計学ではパラメーターが $(a, b)$ に入る確率を言うことができます。

---

[*28] クラメール＝ラオ限界もしくは下限と呼ばれるものです。

[*29] 頻度論では、不偏性、一致性、有効性、頑強性といった基準で推定方法を評価しますが、どの基準をより重視すべきかなどの指標はありません。伝統的な統計学では一般線形回帰の不偏性と一致性と有効性を強調して教えていますが、近年は一致性のないラッソ回帰が実用で人気です。

[*30] 周辺尤度 $\int P(D \mid \theta)P(\theta)d\theta$ が大きいモデル $P(D \mid \theta)$ ほど当てはまりがよいとするものです。理屈は明快ですが、MCMC 法を用いて推定したときに周辺尤度の計算がテクニカルに煩雑で、サンプリングからの推定量ではなく、強い仮定を置いた近似計算や情報量規準で代用することも多いです。

[*31] フィッシャー情報量やクラーメル・ラオ下限あたりは復習として扱われているので、社会科学系の大学院の計量分析のコースワークぐらいは終えてから読まれる方が良さそうです。

# 5　合理的な意思決定

意思決定理論に発展させましょう。胴元に 100 円を払い、勝者を当てると配当が貰えることを考えます。ロジャーの配当は 160 円、アレックスの配当は 180 円とします。このとき、ロジャーに賭けたときの期待損失は、

$$E[\mathrm{loss_r}] = \int (100 - 160\theta) P(\theta) d\theta$$

となり、アレックスに賭けたときの期待損失は、

$$E[\mathrm{loss_a}] = \int (100 - 180(1-\theta)) P(\theta) d\theta$$

となります。期待利益ではなく期待損失であること、アレックスが勝つ確率は $1-\theta$ になることに注意してください。意思決定者がリスク中立的であれば、$E[\mathrm{loss_r}] > E[\mathrm{loss_a}]$ であればアレックスに、$E[\mathrm{loss_r}] < E[\mathrm{loss_a}]$ であればロジャーに賭けるのが合理的となります。もちろん、この期待損失の大小関係は、ベイズ更新ごとに変化していきます（図 6)。

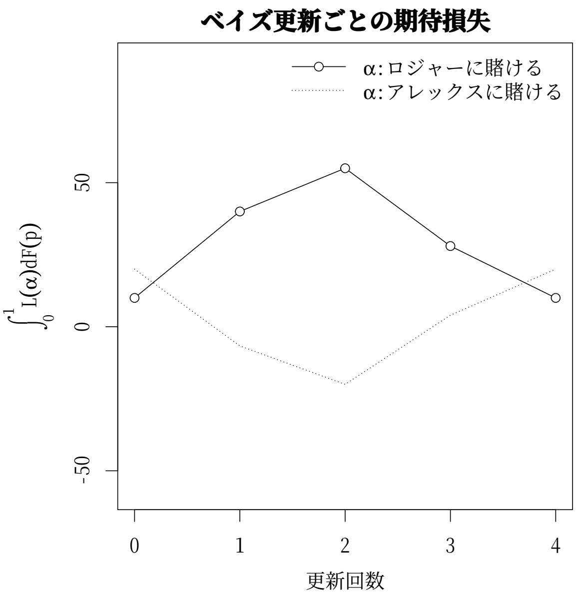


図 6　ベイズ更新ごとの期待損失

## 5.1　ベイズリスク

ロジャーに賭けるか、アレックスに賭けるかの選択は、データに依存するので $\delta(D)$ と書く事ができ、二つの損失関数は $L(\theta, \delta(D))$ とまとめることができます。

$\theta$ を定数、$D$ を確率変数と見なすと、尤度関数を使って期待損失を定義でき、これをリスク関数と呼びます。

$$R(\theta, \delta(D)) = \int L(\theta, \delta(D)) P(D \mid \theta) dD$$

$\theta$ は確率変数なので、このリスク関数の期待値（ベイズリスク）をとることができます。

$$\begin{aligned} r(\delta(D)) &= \int R(\theta, \delta(D)) P(\theta) d\theta \\ &= \int \left( \int L(\theta, \delta(D)) P(D \mid \theta) dD \right) P(\theta) d\theta \\ &= \int \left( \int L(\theta, \delta(D)) P(D \mid \theta) P(\theta) dD \right) d\theta \end{aligned}$$

ベイズの定理 $P(\theta \mid D)P(D) = P(D \mid \theta)P(\theta)$ から、

$$= \int \left( \int L(\theta, \delta(D)) P(\theta \mid D) P(D) dD \right) d\theta$$

とし、さらに積分値は有限の定数以下であるため、積分の順序を入れ替えます。

$$\begin{aligned} &= \int \left( \int L(\theta, \delta(D)) P(\theta \mid D) P(D) d\theta \right) dD \\ &= \int \left( \int L(\theta, \delta(D)) P(\theta \mid D) d\theta \right) P(D) dD \end{aligned}$$

内側の積分は配当の期待値が高い方に賭けた場合の期待損失になります。また、内側の積分の値を最小化する $\delta(D)$ は、外側の積分の値も最小化します。賭けの方針が、ベイズリスク最小化になっていることが示されました。

## 5.2 ベイズ推定量

ここまでは賭けを前提にした意思決定なので損得勘定をしましたが、パラメーターをある一点だとする場合の推定方法の正当化も、同様にベイズリスクの最小から行えます。

例えば、損失関数に二乗損失 $L(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$ を用いるとして、せっせと計算すると事後分布の平均値が $\hat{\theta}$ として選ばれることになります。絶対誤差損失 $L(\theta, \hat{\theta}) =\mid \theta - \hat{\theta} \mid$ を用いる場合は、事後分布の中央値が $\hat{\theta}$ として選ばれることになります。

このようにベイズ統計学の枠組みで正当化された推定量を、ベイズ推定量と呼びます。意思決定理論の観点で、合理的な推定量になるわけです。

## 5.3 合理的な選好であるための条件

合理的と言うとリスク中立的で金勘定に細かいイメージがあるかも知れませんが、上のリスク評価に分散を加えてもよいですし、好きな選手に賭けること自体に一定の効用を与えることもできます。一貫性があれば大丈夫です。

### 5.4 デ・フィネッティの定理

将来の状態の生起確率を予想できているので、将来の状態に応じた利得の集合（と言うかどちらに賭けるかに）に合理的な選好順序をつけることができるわけですが、実のところは逆も成立します。

ロジャーとアレックスの配当金を次々と変えて、意思決定者（agent）にどちらに賭けるかの聞いてみましょう。ロジャーとアレックスの配当金がそれぞれ $R_r$ 円と $R_a$ 円のとき、どちらに賭けても無差別な選好になるとすると、

$$\int R_r \theta d\theta = \int R_a (1-\theta) d\theta$$

つまり $R_r \bar{\theta} = R_a(1-\bar{\theta})$ となるので、ロジャーが勝つ確率の期待値 $\bar{\theta}$ は $R_a/(R_r + R_a)$ と計算できます。デ・フィネッティの定理は、こういう計算が可能なことを保証するものです[*32]。

証明は、分離超平面定理が必要になったりと学部一般教養の数学からは作業が長くなるので、学部上級から大学院生向けの経済数学の教科書を読んだ後に、Gilboa (2009)[*33]などの意思決定理論の教科書を参照してください。なお、今回の意思決定者はリスク中立的な選好を持っていましたが、リスク回避的な場合などもサヴェッジの定理から同様のことが言えます。

本稿の目的からすると冗長なのですが、誤解を招きそうな表現でこの定理の紹介を（定理の名前を出さずに）していた人文系の人を見かけたので紹介しました。

## 6 まとめ

対戦成績からどちらが強いかを見極めて、配当金を考慮に入れて賭ける方を決めるだけですが、ベイズ意思決定理論の概要が掴めたと思います。

ヒュームの呪いで有名ですが、哲学的に正しい帰納の方法は人類未解決問題です。しかし、科学哲学の議論では必要となる性質が整理されています[*34]。まず、意見が分かれているときに、それぞれが合理的であることが肯定されなければなりません。次に、証拠が提供されれれば、考えの差異が縮まらなければなりません。そして、証拠が十分に蓄積されれば、意見の相違は解消されなければなりません。ベイズ統計学はこれらの要請を満たしています。このような推論が十分科学的かは分かりませんが、近代合理性の要件を満たしているとは言えるでしょう。

科学哲学を専門としない人文系の皆さんは、科学にも主観[*35]や恣意性[*36]が残ると指摘し[*37]、近代合理性に懐疑的な主張をすることを好みますが、こと推論に関してはそれらの主張は自明ではありません。合理的推論がどういうものか把握されておらず、説明が十分では無いか、そもそも誤解に基づく非難になっている可能性があります。これまで見てきた例で、主観（信念）はエビンデンスによって消されていきます。逆に言うと、

[*32] 今回に当てはめた定理の主張自体は、あらゆる $R_r$ と $R_a$ の組み合わせに対して、$R_r \succeq R_a \iff \bar{\theta}R_r \geq (1-\bar{\theta})R_a$ となる $\bar{\theta}$ がひとつ存在すると言うだけのものですが、ここからこのように解釈できます。

[*33] 電子版は無料でダウンロードできます。

[*34] Kelly (2016) の第 4 節の客観的探求の議論を参照してください。

[*35] ここではベイズ統計学の意味での主観と捉えてください。

[*36] ここでは論理的ではない推論を指します。

[*37] 科学哲学の人はこんなことを言わない気がします。

エビンデンスによって信念が更新されなければ、恣意的な議論だと分かります。主観的、恣意的だと批判するときに、本当にそのように言えるか検討されているのでしょうか？

本稿は、実際に簡単なモデルでざっと推定と意思決定をする過程をなぞっただけなので、細部の説明は至らないところだらけですが、詰めて考えてみたい場合は Robert (2007)*38などの教科書を読んだあと、統計哲学界隈の議論を追いかけるとよいと思います*39。

# 参考文献


Gilboa, Itzhak (2009) *Theory of Decision under Uncertainty*: Cambridge University Press, DOI: 10.1017/CBO9780511840203.

Hoffman, Matthew D. and Andrew Gelman (2011) “The No-U-Turn Sampler: Adaptively Setting Path Lengths in Hamiltonian Monte Carlo,” URL: `https://arxiv.org/abs/1111.4246`.

Kelly, Thomas (2016) “Evidence,” in Zalta, Edward N. ed. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Winter 2016 edition: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2024 年 3 月 11 日閲覧.

Lin, Hanti (2024) “Bayesian Epistemology,” in Zalta, Edward N. and Uri Nodelman eds. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Summer 2024 edition: Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Martin, Andrew D., Kevin M. Quinn, and Jong Hee Park (2011) “MCMCpack: Markov Chain Monte Carlo in R,” *Journal of Statistical Software*, Vol. 42, No. 9, p. 22, DOI: 10.18637/jss.v042.i09.

McGrayne, Sharon Bertsch (2013) 『異端の統計学ベイズ』，草思社，冨永, 星（訳）.

Robert, Christian P. (2007) *The Bayesian Choice: From Decision Theoretic Foundations to Computational Implementation*: Springer-Verlag.

Samaniego, F.J. (2010) *A Comparison of the Bayesian and Frequentist Approaches to Estimation*, DOI: 10.1007/978-1-4419-5941-6.

Thomas, Samuel and Wanzhu Tu (2020) “Learning Hamiltonian Monte Carlo in R,” URL: `https://arxiv.org/abs/2006.16194`.

Vidakovic, Brani (2004) 「ISyE8843A, Brani Vidakovic ー Handout 2」, , `https://www2.isye.gatech.edu/isyebayes/bank/handout2.pdf`，8 月.

Wasserman, Larry (2004) *All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference*, Springer Texts in Statistics, New York: Springer, DOI: 10.1007/978-0-387-21736-9.

中妻照雄 (2003) 「ファイナンスのための MCMC 法によるベイズ分析」,『三菱経済研究所 経済研究書』，第 2003 巻，第 65 号，1–369 頁，DOI: https://10.60246/merierb.2003.65.


*38 書籍版はそこそこ高いのですが、電子版は無料で合法ダウンロードできます。

*39 無料で読めるスタンフォード哲学辞典の Lin (2024) あたりからが良いかもです。