

Medidas cuánticas: el principio de incertidumbre de Heisenberg y las desigualdades de Bell

1. Introducción

El objetivo de esta práctica va a ser el análisis de algunas de las implicaciones más famosas del especial comportamiento de los sistemas cuánticos respecto a las medidas en el laboratorio.

Hemos visto ya en los postulados III, IV y V que, de forma necesaria, la formulación de la Mecánica Cuántica lleva aparejado un componente estadístico en lo que se refiere a las posibles medidas de un sistema físico. Así, hemos aprendido que al medir una magnitud física en el laboratorio, vamos necesariamente a obtener un autovalor del endomorfismo autoadjunto con el que modelizamos la magnitud, y lo haremos con una probabilidad que está asociada a la proyección del estado del sistema respecto al subespacio propio correspondiente. Esta propiedad, que tiene profundas implicaciones desde el punto de vista filosófico respecto a las propiedades de la Naturaleza (ver, por ejemplo, el análisis de Karl Popper [19]); lleva también aparejadas propiedades realmente fundamentales cuando se combinan con otros aspectos. Queremos analizar ahora dos de ellos, ambos muy conocidos:

- el principio de indeterminación de Heisenberg: ¿podemos medir con precisión arbitraria magnitudes cualesquiera en un sistema cuántico?
- el teorema (o desigualdades) de Bell y sus implicaciones: ¿es compatible la Mecánica Cuántica con el principio de localidad, asumiendo las propiedades de la Relatividad Especial?

Analicemos cada una de las dos preguntas por separado:

2. Principio de incertidumbre de Heisenberg

A pesar de ser uno de los aspectos más conocidos, a nivel popular, de la Mecánica Cuántica, suele enfocarse de una forma un poco confusa. El enfoque que presentaremos ahora es el debido originalmente a Robertson [21] y Schrödinger (ver [20] y la referencia original), y utilizado en un contexto más moderno en el libro de texto de Griffiths [13]. El enfoque original de Heisenberg [14], es ligeramente diferente aunque a grandes rasgos equivalente. Como vamos a ver, se puede explicar completamente empleando los postulados vistos más arriba: se obtendrán como una consecuencia de las propiedades estadísticas del proceso de medida y las propiedades algebraicas del conjunto de observables del sistema.

Consideremos entonces dos observables \hat{A} y \hat{B} del sistema físico. Por sencillez, consideraremos el caso de un sistema de *qubits*, para que el espacio de Hilbert tenga dimensión finita. En el caso más general, es necesario exigir algunas propiedades más

a los dominios de los operadores para que no haya complicaciones técnicas en los desarrollos que presentamos a continuación.

En virtud del producto de operadores, vamos a poder escribir:

$$\hat{A}\hat{B} = \frac{1}{2}(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}) + \frac{1}{2}(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) = \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]_+ + \frac{i}{2}[\hat{A}, \hat{B}],$$

donde $[\hat{A}, \hat{B}]_+$ representa el anticonmutador de ambos operadores y $[A, B] = -i(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$ su conmutador. Consideremos ahora un estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ y evaluemos el correspondiente valor esperado de la expresión anterior. Obtendremos así que:

$$\langle\psi|\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle = \frac{1}{2}\langle\psi|[\hat{A}, \hat{B}]_+|\psi\rangle + \frac{i}{2}\langle\psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle$$

Recordemos que, en virtud de los postulados, la anterior es una relación entre los valores medios de tres sistemas estadísticos. Además, recordemos también que, en general, es una relación entre números complejos:

- el producto de los operadores autoadjuntos $\hat{A}\hat{B}$ no tiene por qué ser autoadjunto a su vez, sólo lo será en el caso de que ambos operadores conmuten
- el anticonmutador de dos operadores autoadjuntos siempre es autoadjunto
- el conmutador de dos operadores autoadjuntos, tal como se ha definido (con la unidad imaginaria), es siempre autoadjunto.

Ejercicio 2.1. *Probar las tres afirmaciones anteriores.*

En estas circunstancias, vemos que la parte derecha de la igualdad anterior es un número complejo, con una parte real que representa el anticonmutador y una parte imaginaria que representa el conmutador. Vamos a considerar entonces el módulo de ese número y escribir:

$$|\langle\psi|\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{4}|\langle\psi|[\hat{A}, \hat{B}]_+|\psi\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle\psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle|^2. \quad (21)$$

De aquí, concluimos inmediatamente, que:

$$|\langle\psi|\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle| \geq \frac{1}{2}|\langle\psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle|. \quad (22)$$

Consideremos ahora el término del lado izquierdo. Denominando

$$|\phi_1\rangle = \hat{A}|\psi\rangle, \quad |\phi_2\rangle = \hat{B}|\psi\rangle,$$

vemos que lo que tenemos es el módulo del producto escalar de dos vectores de \mathcal{H} . Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, podemos escribir

$$|\langle\phi_1|\phi_2\rangle|^2 \leq |\langle\phi_1|\phi_1\rangle|^2 |\langle\phi_2|\phi_2\rangle|^2. \quad (23)$$

Esto supone que, recuperando la ecuación (22) podemos escribir:

$$\sqrt{|\langle\psi|\hat{A}^2|\psi\rangle| |\langle\psi|\hat{B}^2|\psi\rangle|} \geq \frac{1}{2}|\langle\psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle|. \quad (24)$$

Esta relación tiene que ser cierta para cualquier par de observables \hat{A}, \hat{B} . Nótese que, escrita de esta forma, se puede interpretar simplemente como una desigualdad entre las medias estadísticas de las medidas en un laboratorio de tres magnitudes físicas: dos observables del sistema y su conmutador. Si consideramos ahora una elección particular de los observables como:

$$\hat{C} = \hat{A} - \langle A \rangle \hat{1}; \quad \hat{D} = \hat{B} - \langle B \rangle \hat{1},$$

y verificamos trivialmente que

$$[\hat{C}, \hat{D}] = [\hat{A}, \hat{B}];$$

la expresión anterior se traduce en

$$\sqrt{|\langle \psi | \hat{C}^2 \psi \rangle| |\langle \psi | \hat{D}^2 \psi \rangle|} \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | [\hat{C}, \hat{D}] \psi \rangle|, \quad (25)$$

o, equivalentemente:

$$\Delta \hat{A} \Delta \hat{B} \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] \psi \rangle|. \quad (26)$$

¿Cómo podemos interpretar esta última relación desde un punto de vista estadístico? Vemos que podemos leer que el producto de las varianzas de las medidas de dos magnitudes físicas en un laboratorio va a estar siempre acotada por el valor medio de las medidas del su conmutador. Concluimos entonces que sólo se podrá tener una varianza nula en la medida de dos magnitudes físicas para un estado arbitrario del sistema, si los observables correspondientes conmutan. Esta es la relación obtenida por W. Heisenberg ([14]) para la posición y el momento de un sistema cuántico (aunque en ese caso se trataba de un sistema de dimensión infinita). Nótese que la relación se ha obtenido sólo a partir de relaciones algebraicas, sin necesidad de considerar la potencial alteración de un sistema físico en el proceso de medida, que es como se suele justificar el efecto en determinados contextos. Este otro fenómeno, la separación entre sistema y observador, también comentado por Heisenberg, resulta muchísimo más complejo de analizar y, si bien existe, no tiene una relación directa con la relación de incertidumbre.

3. Las desigualdades de Bell

Este es también otro aspecto famoso por las controversias generadas entre grandísimos nombres de la Física Teórica. En particular, este resultado se relaciona con las consecuencias del famoso *Gedankenexperiment* propuesto por A. Einstein, B. Podolsky y Nathan Rosen en 1935, para intentar encontrar incongruencias en las consecuencias que la llamada Interpretación de Copenhague daba de la Mecánica Cuántica.

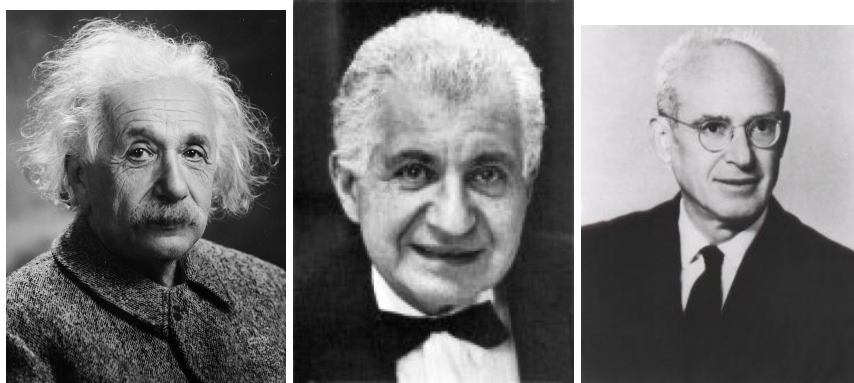
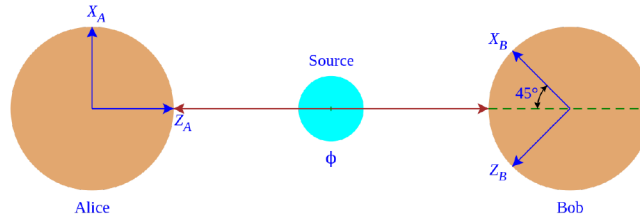


Figura 1. Retratos de A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen (fuente, [Wikipedia](#))

3.1. El experimento EPR. En 1935, y dentro de la serie de varias controversias entre Einstein y los grupos alemanes (sobre todo) trabajando en la entonces joven teoría cuántica, propuso un experimento ideal, que debiera probar las inconsistencias de la interpretación “ortodoxa” de la Mecánica Cuántica.



Enmarcándolo en un contexto más adecuado a un sistema de dimensión finita (el artículo original [7] se refiere a posición y momento de operadores), y formulándolo como hizo D. Bohm [4] en 1951, resultaría como sigue:

Experimento EPR: Consideremos una fuente de pares de partículas que son emitidas en un singlete de espín (ver sección siguiente), y enviadas cada una a un observador diferente A y B.

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle). \quad (27)$$

Si el observador A decide medir la componente z del espín de su partícula, sabemos que va a obtener resultados positivos y negativos con igual probabilidad. Sin embargo, al hacerlo, sabemos también que el estado del par de partículas colapsará y pasará a estar en el estado $|+\rangle \otimes |-\rangle$ si ha obtenido un resultado positivo o en el estado $|-\rangle \otimes |+\rangle$, si el resultado es negativo. En consecuencia, si ahora el observador B mide la componente z del espín de su partícula del par, el resultado será el opuesto al resultado que haya medido A, con una probabilidad del 100%. En cambio, si A hubiera decidido medir la componente x del espín de su partícula, el resultado hubiera sido análogo: B siempre obtendrá un resultado opuesto al obtenido por A.

Supongamos que los observadores están lo suficientemente alejados entre sí como para que B mida su partícula antes de que una señal a la velocidad de la luz pudiera llegar desde A. La paradoja es entonces evidente: ¿cómo es posible que la partícula del observador B sepa la dirección de espín que ha decidido medir A, si los dos observadores no están conectados causalmente, dado que nada puede viajar más rápido que la luz?

3.2. La noción de entrelazamiento. La noción de entrelazamiento está asociada a la noción de producto tensorial de espacios vectoriales, o, en nuestro caso, de espacios de Hilbert. Y la noción de producto tensorial de espacios de Hilbert es la forma en que se implementa en Mecánica Cuántica la composición de sistemas físicos.

Efectivamente, como complemento al Postulado I se puede indicar que cuando un sistema cuántico está formado por la composición de dos subsistemas (dos partículas, dos espines, etc) el espacio de Hilbert que contiene el conjunto de estados del par de partículas corresponde al producto tensorial de los espacios de Hilbert correspondientes a los estados de cada uno de los sistemas. Esto implica que tendremos, a priori, una multiplicación de los grados de libertad. Así, si una partícula de spin $1/2$ tiene un

espacio de estados isomorfo a \mathbb{C}^2 , una pareja de ellas tendrá un espacio de estados isomorfo a \mathbb{C}^4 y el de un sistema de tres partículas lo será a \mathbb{C}^8 .

La noción de producto tensorial implicará también la aparición de otro concepto: el **entrelazamiento**. *Grosso modo* la propiedad es la siguiente: existen estados del sistema compuesto en los que es posible individualizar a los subsistemas que lo contienen. Es decir, hay estados en un sistema de dos partículas en los que podemos “ver” cada una de ellas de forma independiente. Por ejemplo, si asociamos una propiedad física como la masa, el espín o la energía a los elementos de la base, el estado

$$|e_a^1\rangle \otimes |e_b^2\rangle$$

tendrá como constituyentes el estado “a” de la partícula 1 y el “b” de la partícula 2. Análogamente, en el estado

$$|e_c^1\rangle \otimes |e_d^2\rangle$$

el estado de la primera partícula es el *c* y el de la segunda es el “d”. Pero, ¿qué podemos decir del estado $|e_a^1\rangle \otimes |e_b^2\rangle + |e_c^1\rangle \otimes |e_d^2\rangle$?

Vemos que hay estados del espacio producto tensorial que no se pueden escribir como un producto de los subsistemas individuales. Llegamos así a la definición siguiente:

Definición 2.1. Sean dos sistemas definidos sobre los espacios vectoriales V_1 y V_2 , y un sistema compuesto definido sobre el espacio $V_1 \otimes V_2$. Diremos que un estado $|w\rangle \in V_1 \otimes V_2$ es **separable** si existen estados $|w_1\rangle \in V_1$ y $|w_2\rangle \in V_2$ tales que

$$|w\rangle = |w_1\rangle \otimes |w_2\rangle.$$

Cualquier otro estado se dirá entrelazado.

Para sistemas de dos espines sabemos que los posibles estados pertenecerán al espacio vectorial \mathbb{C}^4 . Tomando los vectores de la base habitual para el espacio de Hilbert de un espín, como los autoestados de su componente *z*: $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, el producto tensorial de dos copias de estos estados va a definir una base del producto tensorial de los dos espines. Así, podríamos considerar una base para \mathbb{C}^4 como

$$\{|+\rangle \otimes |+\rangle, |+\rangle \otimes |-\rangle, |-\rangle \otimes |+\rangle, |-\rangle \otimes |-\rangle\}.$$

Estos cuatro vectores son separables y están asociadas a propiedades físicas de los espines individuales. No obstante, el sistema compuesto tiene también un espín asociado, y sus estados propios no están asociados siempre a estados separables. Así, se introducen:

$$\mathcal{B} = \{|1, 1\rangle, |1, -1\rangle, |1, 0\rangle, |0, 0\rangle\}, \quad (28)$$

que representan a los vectores $|l, m\rangle$ que tienen:

- un valor propio $l(l+1)$ para el operador de espín total $\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2$
- un valor propio m para el operador \hat{S}_z

Los tres primeros estados corresponden al *triplete* de estados de espín 1, y el cuarto al estado *singlete* de espín 0. Vemos que estas son propiedades físicas del par de partículas y no de las partículas individuales. La relación entre las dos bases se escribe

de forma sencilla:

$$|1,1\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle \quad |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle + |-\rangle \otimes |+\rangle) \quad (29)$$

$$|1,-1\rangle = |-\rangle \otimes |-\rangle \quad |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle) \quad (30)$$

Evidentemente, $|1,1\rangle$ y $|1,-1\rangle$ son estados separables del producto tensorial, mientras que el estado $|1,0\rangle$ y el singlete de espín $|0,0\rangle$ corresponden a estados entrelazados. Vamos a ver que esta diferencia va a tener trascendentales diferencias en muchos aspectos, en particular en teoría cuántica de la información.

3.3. El teorema de Bell. Vamos a retomar el análisis del experimento EPR, pero desde un punto de vista ligeramente diferente. Para un análisis profundo, aunque también muy detallado, recomendamos [12].

El experimento, propuesto en 1935, dió lugar a una amplia controversia en los años siguientes, por la aparente incompatibilidad que implicaba, entre la Teoría de la Relatividad Especial y la Mecánica Cuántica. En particular, una de las consecuencias teóricas más reseñables para lo que nos ocupa fue la introducción de las llamadas *teorías de variables ocultas*, que toman como punto de partida el trabajo de D. Bohm.



Figura 2. Retrato de David Bohm (fuente: [Wikipedia](#))

En ellas, se introducen grados de libertad adicionales que permiten convertir la teoría cuántica en determinista: la aparente distribución de probabilidad asociada al proceso de medida se debe al desconocimiento del valor de una variable complementaria, que existe y permite acomodar los resultados en un modelo completamente determinista. En ese contexto se enmarca el trabajo original de J. Bell [3] de 1964: Bohm reformuló el experimento propuesto por Einstein, Podolsky y Rosen en términos de espines, y es en esa forma en la que pretendió establecer limitaciones a las posibles teorías de variables ocultas de carácter local.



Figura 3. Retrato de John S. Bell (fuente, [Wikipedia](#))

Bell presentó un resultado válido para mediciones de espín en A y en B en direcciones antiparalelas y pudo formular una desigualdad que debía satisfacer cualquier teoría que aspirara a reproducir los resultados de la Mecánica Cuántica asumiendo que:

- C1 la teoría fuera local, es decir, las propiedades de un sistema en un punto se ven afectadas sólo por los puntos próximos, y no por puntos arbitrariamente alejados. Esto implica que, al poder considerar que los puntos A y B pueden estar arbitrariamente alejados, las medidas de A no pueden afectar a las de B.
- C2 Las mediciones de las propiedades de cada partícula de forma independiente tenían significado en cualquier circunstancia, se midan o no.

Sin embargo, la perfecta anticorrelación entre dos sistemas de espines (es decir, medir resultados opuestos en las dos partículas), es muy difícil de verificar experimentalmente, aunque en principio sea posible. Por ello, a lo largo de los años que siguieron se plantearon diferentes reformulaciones del problema. La versión que vamos a discutir aquí es la introducida unos pocos años más tarde, en 1969, por Clauser, Horne, Shimony y Holt, que se suele conocer con las iniciales CHSH [5], y que ha sido verificada experimentalmente [10, 1, 2].

Consideremos un sistema análogo al anterior, donde un cierto estado de dos partículas se genera y dos observadores, no conectados causalmente, van a medir valores del espín en una partícula cada uno. Consideremos magnitudes Q, R, S y T , cada uno de los cuales toma valores $q, r, s, t = \pm 1$ en cada una de las partículas. Consideremos entonces el producto

$$C(q, r, s, t) = qs + rs + rt - qt = (q + r)s + (r - q)t. \quad (31)$$

La cantidad está escogida para que, al tomar todas las variables valores ± 1 , se deba cumplir necesariamente que

$$\begin{cases} (q+r)=0 & \text{y} & (r-q)=\pm 2 \\ (q+r)=\pm 2 & \text{y} & r-q=0 \end{cases}$$

De estas relaciones, concluimos que

$$|C(q, r, s, t)| = 2, \quad \forall q, r, s, t \in \{-1, 1\} \quad (32)$$

Supongamos ahora que se generan un gran número de pares de partículas, y existe una probabilidad $\mathcal{P}(q, r, s, t)$ de generar cada una de las posibles ternas de valores (q, r, s, t) . ¿Cuál será entonces el valor esperado de la magnitud C ? Es inmediato probar que

Teorema 2.1. *En las condiciones anteriores, se cumple que el valor esperado de la magnitud C satisface que*

$$\bar{C} = \overline{QS + RS + RT - QT} \leq 2 \quad (33)$$

Ejercicio 2.2. *Probar el resultado anterior considerando la distribución de probabilidad $\mathcal{P}(q, r, s, t)$ y las propiedades vistas arriba.*

Nótese que para la demostración anterior sólo se necesita asumir la independencia estadística de las magnitudes entre sí (lo que se consigue con la exigencia de localidad del modelo, es decir, la condición C1 anterior), y la existencia objetiva de las magnitudes independientemente del proceso de medida (la condición C2). Estas condiciones se conocen como teorías de **realismo local**.

Veamos, sin embargo, que un sistema cuántico de dos espines no va a satisfacer la propiedad anterior. Consideremos así las siguientes elecciones de operadores y estados:

Operadores

$$\hat{Q} = \hat{\sigma}_z^1 \otimes \mathbb{I}; \quad \hat{R} = \hat{\sigma}_x^1 \otimes \mathbb{I}; \quad \hat{S} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbb{I} \otimes (\hat{\sigma}_z^2 + \hat{\sigma}_x^2); \quad \hat{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbb{I} \otimes (\hat{\sigma}_z^2 - \hat{\sigma}_x^2).$$

Nótese que los superíndices 1 o 2 especifican la partícula, no representan potencias.

Estados

Para los operadores Q, R, S, T anteriores, se va a considerar el singlete de espín

$$|\Psi\rangle = |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle). \quad (34)$$

Es inmediato verificar que, con estas elecciones particulares:

$$\langle \Psi | \hat{Q} \hat{S} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{R} \hat{S} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{Q} \hat{T} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{R} \hat{T} | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (35)$$

De aquí deducimos que, al ser una operación lineal, podemos escribir que:

$$\langle C \rangle = \langle \hat{Q} \hat{S} + \hat{R} \hat{S} + \hat{R} \hat{T} - \hat{Q} \hat{T} \rangle = 2\sqrt{2} \quad (36)$$

Esto evidentemente, viola el teorema anterior. Concluimos por tanto que cualquier teoría determinista (de variables ocultas, por ejemplo) que quiera reproducir los resultados de la Mecánica Cuántica deberá también violar las condiciones C1 y C2 anteriores, pues, de cumplirlas, no podría reproducir correctamente los resultados del experimento descrito.

4. Práctica 1

El objetivo de esta práctica es familiarizarse con los conceptos anteriores al mismo tiempo que se aprende a utilizar las librerías `qutip`. El punto de partida será un *notebook* que se podrá encontrar en la página *moodle* de la asignatura. Cada grupo deberá completarlo, para responder a las siguientes tareas, agrupadas en tres grandes bloques (entre paréntesis se indica la valoración máxima de cada uno):

4.1. La medida cuántica (3 puntos). El objetivo es familiarizarse con el marco probabilístico asociado al proceso de medida y asumir la imposibilidad de obtener información directa del estado si no es por medidas experimentales. Para ello se hará uso de la función de python `numpy.random.choice(results, number of points, probabilities)`, que genera una muestra de *number of points* eventos, con entradas pertenecientes a la lista *results*, y una distribución de probabilidad dada por *probabilities*. Este conjunto de puntos representa un estimador finito del sistema cuántico definido por un espín (o un *qubit*). A este conjunto de puntos *data* se le pueden aplicar funciones que determinen sus parámetros, en particular

- la media muestral: `data.mean()`
- la varianza muestral: `data.var()`
- histograma: que represente gráficamente los resultados generados con la función `plt.hist(real(data))`.

Con ello, se proporciona una función que genera estimadores finitos para las medidas de las tres componentes del espín, *datax*, *datay*, *dataz* para un estado *random* que la función no devuelve y que, obviamente, cambia cada vez que se ejecuta la función (¡tened cuidado con no mezclar datos de distintos estados!). La media y la varianza de los estimadores generados aproximan por tanto el comportamiento de las funciones `expect(operador, estado)` y `variance(operador, estado)` que ofrece `qutip` para modelizar el comportamiento de la distribución de probabilidad asociada al estado *estado* cuando se mide el operador *operador*.

Se asume que la función de python proporcionada representa la medida de un haz de partículas en el mismo estado que pueden medirse de forma independiente. Se pide que, a partir de los tres estimadores que genera:

- M1 Se identifique el estado con el que se han generado las medidas. ¿Es posible determinar completamente el vector de \mathbb{C}^2 que determina el estado, según el postulado I? ¿Por qué?
- M2 Estudiar cómo depende del tamaño de la muestra de puntos el error cometido al estimar los valores medios de las tres componentes del espín con la función anterior, que emplea una muestra finita.

4.2. El principio de incertidumbre (3 puntos). El siguiente aspecto a considerar es la verificación del principio de incertidumbre para un *qubit*. Para ello, a partir de lo expuesto en la Sección 2 se pide responder razonadamente a las siguientes preguntas:

- I1 Resolver el Ejercicio 2.1
- I2 Empleando las funciones de `qutip` (`expect(operator, state)` y `variance(operator, state)`) Construir un pequeño programa para verificar la fórmula (26) para el caso

$$\hat{A} = \hat{\sigma}_x; \quad \hat{B} = \hat{\sigma}_z;$$

y evaluarlo en los estados:

- a) $|\psi_1\rangle = |+\rangle$
- b) $|\psi_2\rangle = (0,160 + 0,801i)|+\rangle - (0,320 + 0,480i)|-\rangle$
- c) $|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$

Responder razonadamente:

- ¿En qué ocasiones existirá la posibilidad de medir experimentalmente componentes del espín de una partícula de forma absolutamente precisa?
- ¿Es posible medir simultaneamente dos componentes cualesquiera en algún estado? ¿Y las tres?
- ¿Existe esa posibilidad para los operadores posición y momento actuando en un espacio de Hilbert funcional $(\mathcal{L}^2(D), d\mu)$? ¿Por qué?

4.3. El teorema de Bell (4 puntos). Finalmente, queremos verificar las conclusiones de las desigualdades de Bell analizadas en la Sección 3. En particular, se debe responder razonadamente a las preguntas siguientes:

B1 Resolver el Ejercicio 2.2.

B2 Construir un programa para estudiar el Teorema 2.1 para la siguiente elección de operadores:

$$\hat{Q} = \hat{\sigma}_z^1 \otimes \mathbb{I}; \quad \hat{R} = \hat{\sigma}_x^1 \otimes \mathbb{I}; \quad \hat{S} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbb{I} \otimes (\hat{\sigma}_z^2 + \hat{\sigma}_x^2); \quad \hat{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbb{I} \otimes (\hat{\sigma}_z^2 - \hat{\sigma}_x^2),$$

y los estados

- $|\Psi_1\rangle = |0, 0\rangle$
- $|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, +\rangle - |-, -\rangle)$
- $|\Psi_3\rangle = |1, 1\rangle$
- $|\Psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle + |-, +\rangle)$

Para ello, las herramientas fundamentales serán:

- la función *tensor*(A,B): que calcula el producto tensorial de cualquier objeto de tipo *QObject*, sean vectores u operadores,
- y la función *expect(operator, state)* (que calcula el valor esperado del operador en el estado).

¿En qué estados de los anteriores se verifica el teorema? ¿Por qué?

B3 ¿Cualquier sistema cuántico va a violar la desigualdad de Bell para cualquier conjunto de operadores? ¿Siempre lo hará si se encuentra en un estado entrelazado? ¿Existe un conjunto de operadores adaptados al estado $|\Psi_2\rangle$?