

123

## Резонанс токов

Нугманов Булат

15 декабря 2019 г.

### Оборудование

Генератор синусоидального напряжения, осциллограф, вольтметры, магазин ёмкостей.

### Теория

$I = \frac{E}{R_I} = \frac{E_0 \cos(\omega t + \varphi_0)}{R_I} = I_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$  — ток на генераторе.

$$R_S = \frac{U_{RS}}{I} = \frac{U_{RS}}{\omega C U_{CS}} = \frac{1}{\omega C} \operatorname{tg} \delta$$

где  $R_S$  - эквивалентное последовательное сопротивление (ЭПС).

Для используемых емкостей  $C_n$  выполнено  $\operatorname{tg} \delta < 10^{-3}$ .

$$R_{\Sigma} = R + R_L + R_S$$

где  $R_{\Sigma}$  - суммарное активное сопротивление контура.

Воспользуемся методом комплексных амплитуд:

$$Z_L = R_L + i\omega L, \quad Z_C = R_S - i\frac{1}{\omega C}, \quad Z = R_{\Sigma} + i(\omega L - \frac{1}{\omega C}).$$

Тогда напряжение на контуре и токи на индуктивной и емкостной частях контура при нулевой начальной фазе можно представить в виде:

$$\begin{aligned} I_c &= I \frac{Z_L}{Z_C + Z_L} = iQI_0 \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1 - i \frac{R + R_L}{\rho} \frac{\omega_0}{\omega}}{1 + iQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} \\ I_L &= I \frac{Z_c}{Z_C + Z_L} = iQI_0 \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1 + itg\delta}{1 + iQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} \\ U &= I \frac{Z_L Z_c}{Z_C + Z_L} = Q\rho I_0 \frac{(1 - i \frac{R + R_L}{\rho} \frac{\omega_0}{\omega})(1 + itg\delta)}{1 + iQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} \end{aligned}$$

где  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  - собственная частота,  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$  - реактивное сопротивление контура,  $Q = \frac{\rho}{R_{\Sigma}}$  — добротность контура.

Рассмотрим случай, когда  $|\Delta\omega| = |\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ . Тогда

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}$$

Пренебрегая поправками порядка  $Q^{-2}$ , получим:

$$I_c = QI_0 \frac{\omega}{\omega_0} \frac{e^{i\phi_c}}{\sqrt{1 + (\tau\Delta\omega)^2}}, \phi_c = \frac{\pi}{2} - \frac{R + R_L}{\rho} - \arctg(\tau\Delta\omega)$$

$$I_L = QI_0 \frac{\omega_0}{\omega} \frac{e^{i\phi_L}}{\sqrt{1 + (\tau\Delta\omega)^2}}, \phi_L = -\frac{\pi}{2} + \delta \arctg(\tau\Delta\omega)$$

$$U = Q\rho I_0 \frac{\omega}{\omega_0} \frac{e^{i\phi_U}}{\sqrt{1 + (\tau\Delta\omega)^2}}, \phi_U = -\frac{\omega}{\omega_0} \frac{R + R_L}{\rho} + \delta - \arctg(\tau\Delta\omega)$$

где  $\tau = \frac{2L}{R_\Sigma} = \frac{2Q}{\omega_0}$  - время затухания.

При резонансе, т.е. когда  $\Delta\omega = 0$ :

$$I_c(\omega_0) = QI_0, \phi_c(\omega_0) = \frac{\pi}{2} - \frac{R + R_L}{\rho}$$

$$I_L(\omega_0) = QI_0, \phi_L(\omega_0) = -\frac{\pi}{2} + \delta$$

$$U(\omega_0) = Q\rho I_0 = Q^2 R_\Sigma I_0, \phi_U \omega_0 = -\frac{R + R_L}{\rho} + \delta$$

$$\phi'_c(\omega_0) = \phi'_L(\omega_0) = \phi'_U(\omega_0) = -\tau$$

## Эксперимент

В работе исследуется следующая схема:

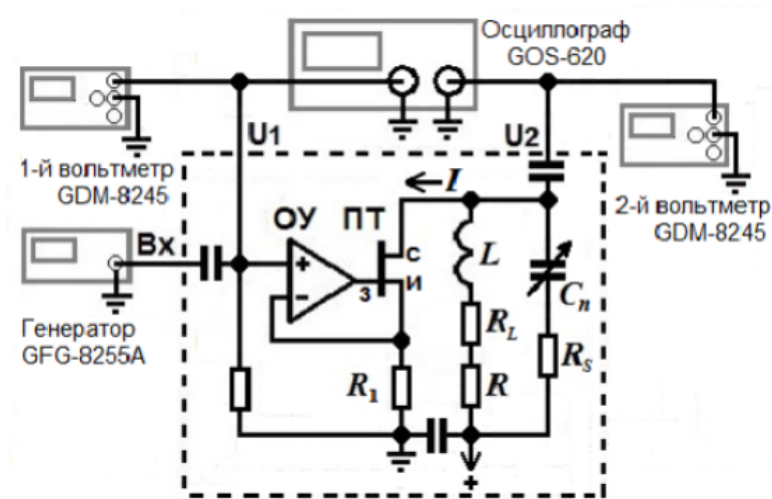


Рис. 1 Установка.

$$R = 3.5 \text{ Ом}, R_1 = 1008 \text{ Ом}.$$

## Параметры установки

Установим такую амплитуду колебаний на генераторе, чтобы на 1 вольтметре было среднеквадратическое значение  $E$ . Проведём эксперимент при  $E = 0.2$  В и  $E = 0.1$  В для 7 различных ёмкостей. Также определим суммарное сопротивление, активное сопротивление катушки, ёмкость катушки, максимальное сопротивление конденсатора. Результаты представлены в таблице.

$C, \text{ мкФ}$						
25.1	33.2	47.3	57.4	67.5	82.7	101.6

$$L = \frac{1}{C(2\pi f)^2}$$

$$\rho = \frac{1}{2\pi f C}$$

$$Z_{\text{рез}} = \frac{U}{E_0} R_1$$

$$Q = \frac{U R_1}{E_0} 2\pi f C$$

$$R_{\Sigma} = \frac{E_0}{U R_1} \frac{1}{(2\pi f C)^2}$$

$$R_{Smax} = 10^{-3} \cdot \frac{1}{\omega_0 C}$$

$$R_L = \frac{E_0}{U R_1} \frac{1}{(2\pi f C)^2} - R - 10^{-3} \cdot \frac{1}{\omega_0 C}$$

Таблица 1:  $E = 0.2$  В

	$E, \text{ В} \cdot 10^{-3}$	$U, \text{ В} \cdot 10^{-3}$	$f, \text{ кГц}$	$L, \text{ мГн}$	$\rho, \text{ Ом}$	$Z_{\text{рез}}, \text{ Ом} \cdot 10^3$	$Q$	$R_L, \text{ Ом}$	$R_{\Sigma}, \text{ Ом}$
1	200	1000	32	970	200	5.2	26	3.7	7.4
2	200	810	28	970	170	4.1	24	3.5	7.2
3	200	590	24	970	140	3	21	3.2	6.9
4	200	490	21	960	130	2.5	19	3.1	6.7
5	200	420	20	970	120	2.1	18	3.1	6.7
6	200	350	18	970	110	1.8	16	3	6.6
7	200	290	16	970	97	1.5	15	2.9	6.5

Усреднив полученные значения, получаем, что  $L = 966 \pm 6$  мГн,  $R_L = 3.20 \pm 0.05$  Ом.

## Резонансная кривая

Теперь снимем резонансную кривую. Для определения точки резонанса проведём параболу по трём верхним точкам. Точку максимума параболы будем считать максимумом нашей кривой.

Таблица 2:  $E = 0.1$  В

	$E, \text{В} \cdot 10^{-3}$	$U, \text{В} \cdot 10^{-3}$	$f, \text{кГц}$	$L, \text{мкГн}$	$\rho, \text{Ом}$	$Z_{res}, \text{Ом} \cdot 10^3$	$Q$	$R_L, \text{Ом}$	$R_{\Sigma}, \text{Ом}$
1	100	520	32	970	200	5.2	27	3.6	7.4
2	100	410	28	970	170	4.1	24	3.4	7.1
3	100	300	24	960	140	3	21	3.2	6.8
4	100	250	21	960	130	2.5	19	3.1	6.7
5	100	210	20	960	120	2.1	18	3.1	6.7
6	100	180	18	960	110	1.8	16	3	6.6
7	100	140	16	970	97	1.5	15	3	6.5

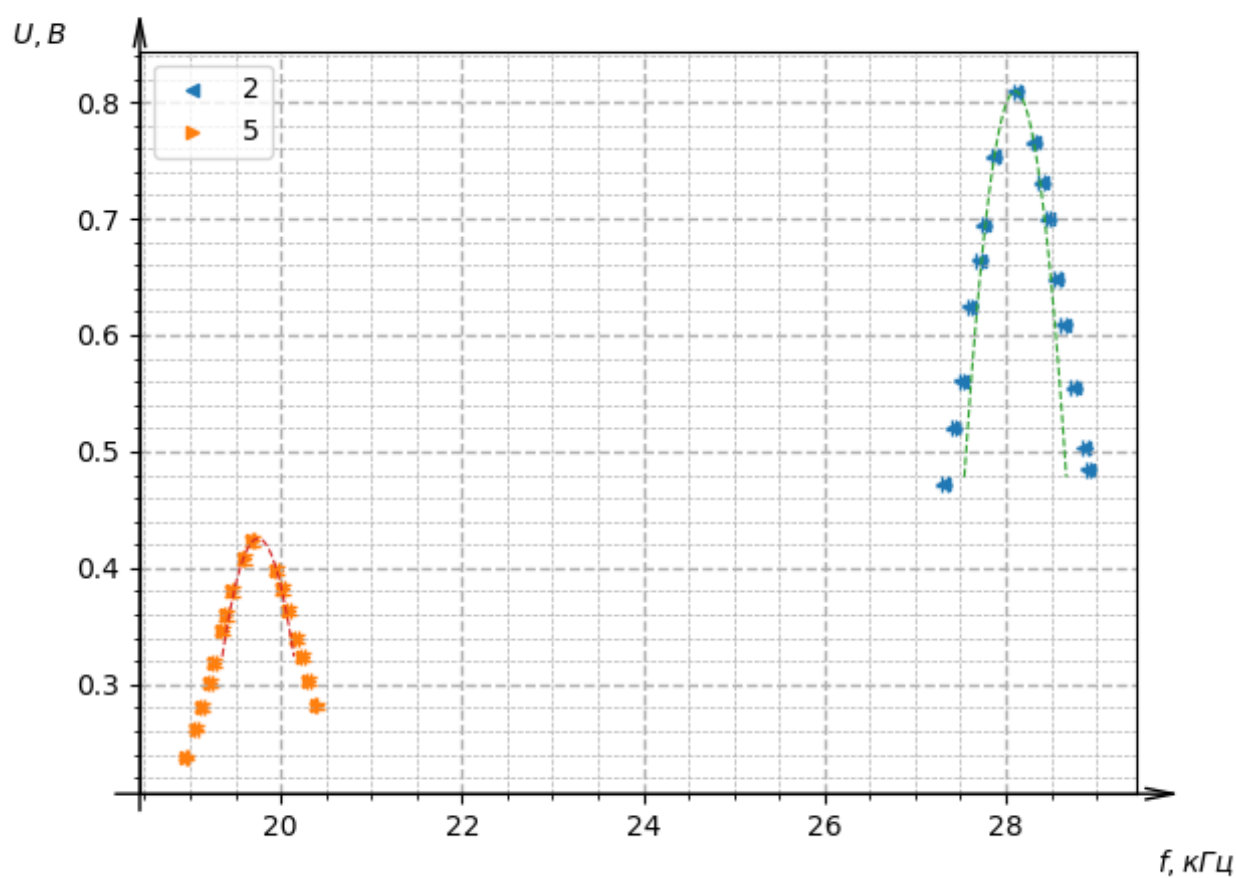
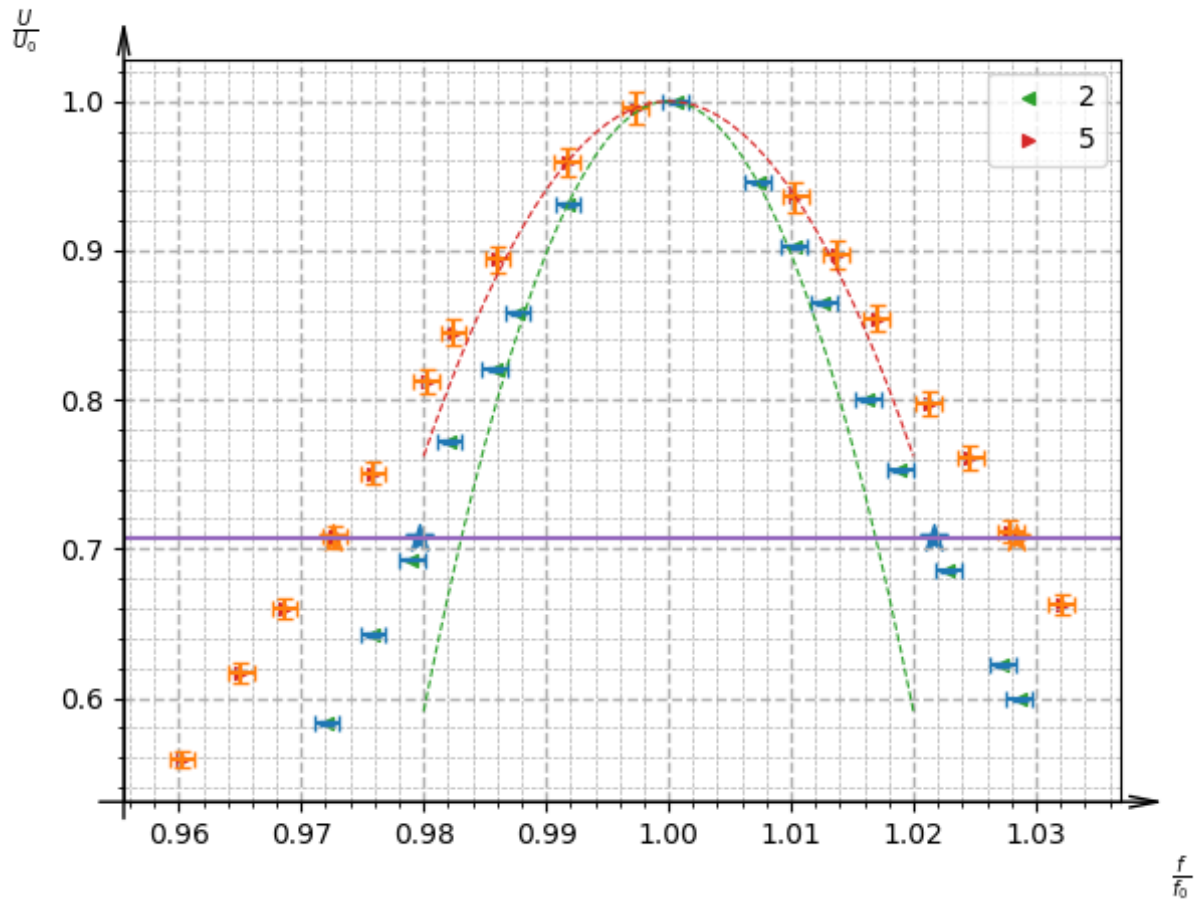


Рис. 2 Резонансные кривые для 2 режимов.



**Рис. 3** Отнормированные резонансные кривые.

Как известно, добротность можно найти графически. На уровне  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  проведём прямую и определим "ширину" кривой. Для нахождения точки пересечения кривой с "уровнем" применим аппроксимацию прямой по двум близлежащим точкам. Таким образом, по ширине  $\delta$ , добротность находится так:

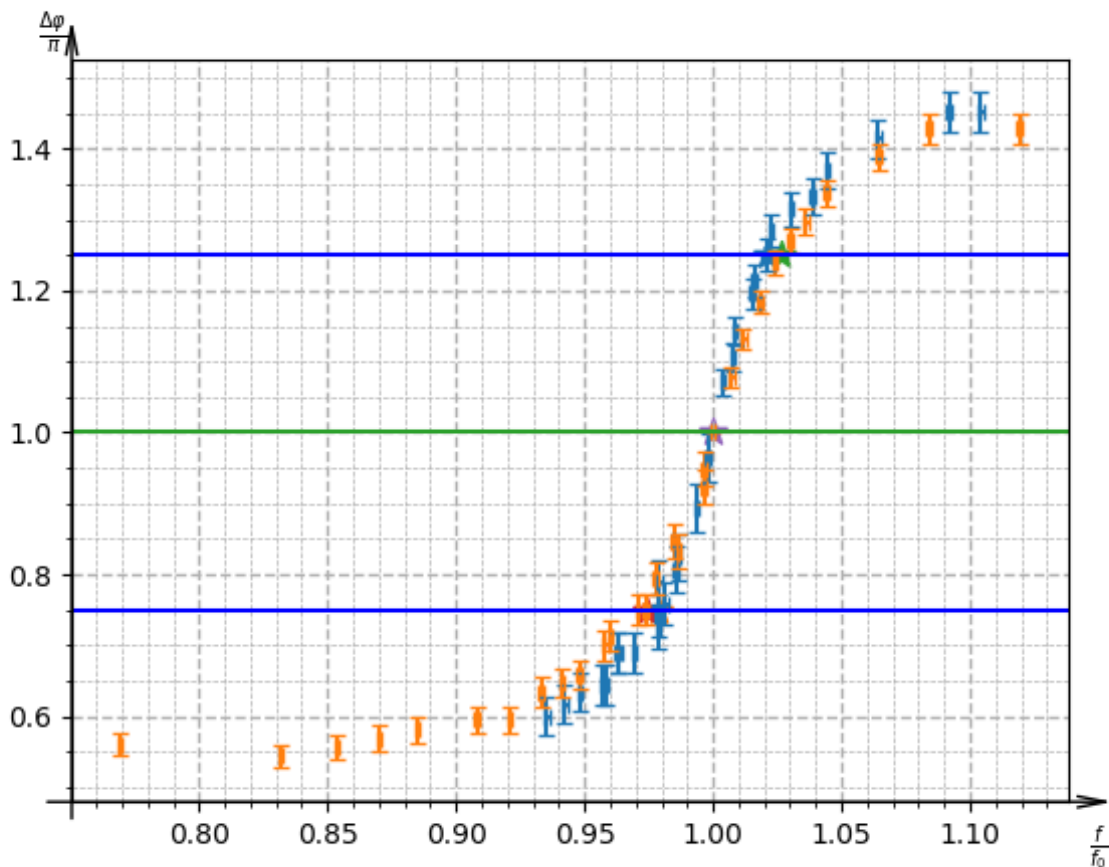
$$Q = \frac{1}{\delta}$$

Для наших кривых:  $Q_2 \approx 23.6$ ,  $Q_5 \approx 19.1$ .

## Сдвиг фаз

Перейдём к следующей части эксперимента.

В точке резонанса сдвиг фаз определим, как  $\pi$ . По сути это безразлично, так как все фазы определяются с точностью до  $\pi$ .



**Рис. 4** Сдвиг фаз в зависимости от отнормированной частоты.

Также определим добротность графически. Для этого посчитаем точки пересечения с линиями уровней  $\frac{3\pi}{4}$  и  $\frac{5\pi}{4}$ .

Для нахождения точки пересечения "уровня" с кривой всё также применяем аппроксимацию прямой по близлежащим точкам. Считая  $Q$  по той же формуле, находим  $Q_2 \approx 23.8$ ,  $Q_5 \approx 18.0$ .

$$R_L(f)$$

Напоследок заметим, что  $R_L(f)$ , рассчитанное нами в первой части, не является в самом деле константой. Из-за скин-эффекта при повышении частоты, повышается также и эффективное сопротивление катушки.

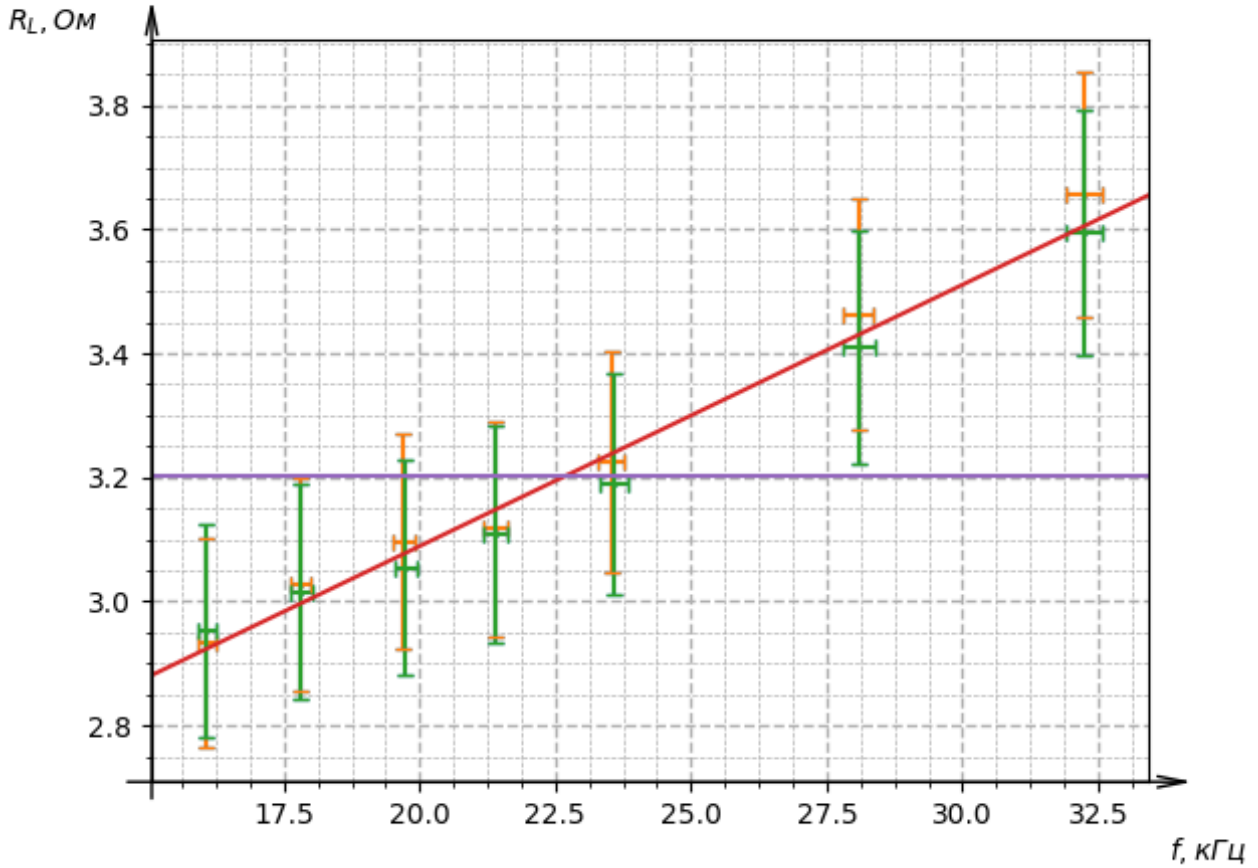
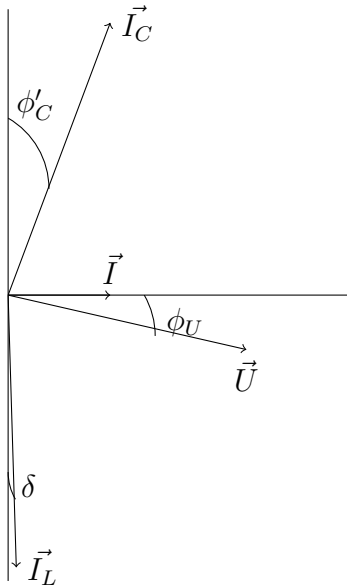


Рис. 5 Рост  $R_L$  из-за скин-эффекта.

Если это как-то полезно, то при аппроксимации зависимости прямой, в 0 она достигает  $2.246 \pm 0.038$  Ом.

## 0.1 Векторная диаграмма

Теперь построим векторную диаграмму.



Посчитаем ток  $I = \frac{E}{R_1} = \frac{0,2\text{В}}{1008\text{Ом}} \approx 0,1$  мА. Его вектор равен сумме:  $\vec{I} = \vec{I}_L + \vec{I}_C$ , причем сам  $\vec{I}$  расположен на оси абсцисс, а его компоненты расположены к нему под углами

$$\phi_C = \frac{\pi}{2} - \frac{R + R_l}{\rho}, \quad \phi_L = -\frac{\pi}{2} + \delta$$

Здесь  $\delta \simeq 10^{-3}$  — очень малый параметр установки, которым допустимо пренебречь при расчёте, однако можно изобразить для наглядности. Подсчитаем угол  $\phi'_C = \frac{R + R_L}{\rho} \approx 0,03$ .

Аналогичный угол у напряжения  $\vec{U}$ :  $\phi_U = -\frac{R + R_L}{\rho}$ .

Т.е. оно незначительно отклоняется от оси абсцисс на отрицательный угол.

Изобразим это на рисунке.

## Вывод

Две методики определения добротности дали весьма схожие результаты, что не может не радовать. Мы также убедились, что  $R_L$  действительно зависит от частоты. В общем, что просили показать, то показали. А чего не просили — только мельком.