

Работа 1.2.5

Исследование прецессии уравновешенного гироскопа

Подлесный Артём
группа 827

16 сентября 2019 г.

1 Цель работы

Исследовать вынужденную прецессию гироскопа. Установить зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа. Определить скорость вращения ротора гироскопа и сравнить ее со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.

2 Оборудование

Гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка.

3 Отчёт о работе

3.1 Общая теория

Уравнения движения твердого тела можно записать в виде:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (2)$$

Здесь (1) выражает закон движения центра масс тела, а (2) – уравнение моментов. Если сила \vec{F} не зависит от угловой скорости, а момент сил – от поступательного движения, то уравнения (1) и (2) можно рассматривать независимо друг от друга. В данной работе мы рассматриваем вращение твердого тела относительно неподвижной точки. Момент импульса твердого тела в XYZ равен

$$\vec{L} = \vec{i}I_x\omega_x + \vec{j}I_y\omega_y + \vec{k}I_z\omega_z, \quad (3)$$

где I_x, I_y, I_z – главные моменты инерции, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, – компоненты вектора угловой скорости $\vec{\omega}$. Быстро вращающееся тело, для которого, например,

$$I_x\omega_x \gg I_y\omega_y, I_z\omega_z,$$

Принято называть гироскопом. Гироскоп называют уравновешенным, если его центр масс неподвижен.

Так как приращение момента импульса по (2) определяется, как

$$\Delta \vec{L} = \int \vec{M} dt, \quad (4)$$

то если момент сил действует короткий промежуток времени, изменение момента импульса очень мало, по сравнению с ним, с этим связана устойчивость, которую приобретает движение гироскопов, после приведение их в быстрое вращение.

Рассмотрим для примера маховик, вращающийся вокруг оси z .

Пусть ось вращения повернулась в плоскости xu по направлению к оси x на бесконечно-малый угол $d\varphi$. Такой поворот означает добавочное вращение вокруг оси y , где Ω — угловая скорость такого вращения. Будем предполагать, что

$$L_{\Omega} \ll L_{\omega_0}. \quad (5)$$

Таким образом:

$$|d\vec{L}| = Ld\varphi = L\Omega dt. \quad (6)$$

Но это изменение направлено по оси x , поэтому вектор $d\vec{L}$ можно представить, как

$$d\vec{L} = [\vec{\Omega}; \vec{L}] dt,$$

т.е. в силу (2) имеем

$$\vec{M} = [\vec{\Omega}; \vec{L}]. \quad (7)$$

Формула (7) справедлива, когда справедлива формула (5). Она позволяет определить момент сил, который надо приложить к маховику для того, чтобы вызвать вращение маховика с угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Видно, что для поворота оси вращающегося маховика к оси x необходимо приложить силы, направленные не вдоль оси x , а вдоль оси y , так, чтобы их момент был направлен вдоль оси x .

Под действием момента внешних сил ось гироскопа медленно вращается вокруг оси y с

угловой скоростью Ω . Такое движение называют регулярной прецессией. В частности, создающей момент внешней силой может быть сила тяжести, если центр масс гироскопа не совпадает с точкой подвеса. Для гироскопа массой m_r , ось которого наклонена на угол α от вертикали, скорость прецессии равна:

$$\Omega = \frac{M}{I_z \omega_0 \sin \alpha} = \frac{m_r g l_{\text{ц}} \sin \alpha}{I_z \omega_0 \sin \alpha} = \frac{m_r g l_{\text{ц}}}{I_z \omega_0}, \quad (8)$$

где $l_{\text{ц}}$ – расстояние от точки подвеса до ц.м. гироскопа, то есть от угла α скорость прецессии не зависит.

Для изучения уравновешенного гироскопа, к его оси подвешивают дополнительные грузы, в этом случае

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z \omega_0}, \quad (9)$$

где m – масса груза, а l – расстояние от центра карданова подвеса, до точки крепления груза на оси гироскопа.

Уравновешенный гироскоп, закрепленный в кольцах карданова подвеса:

Получается, что гироскоп как бы подвешен а центр масс.

Экспериментальная установка для исследования прецессии уравновешенного гироскопа:

Момент силы трения, связанной с ротором гироскопа скомпенсирован действием электромотора. Для осей карданова подвеса компенсации нет, поэтому нужно оценить погрешность, связанную с постепенным опусканием оси гироскопа в направлении действия груза.

В первой части работы исследуется зависимость скорости прецессии гироскопа от момента силы, приложенной к его оси. Эта зависимость позволяет вычислить угловую скорость вращения ротора по формуле (9). Момент инерции ротора относительно оси симметрии I_0 измеряется по крутильным колебаниям точной копии ротора, подвешиваемой вдоль оси симметрии на жесткой проволоке. Период крутильных колебаний:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{f}}, \quad (10)$$

где f – модуль кручения проволоки. Чтобы их исключить, к той же проволоке подвесим цилиндр известного момента инерции $I_{\text{ц}}$, тогда имеем:

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2}, \quad (11)$$

где $T_{\text{ц}}$ – период крутильных колебаний цилиндра.

Во второй части работы скорость вращения ротора гироскопа измеряется с помощью фигур Лиссажу, получаемых на осциллографе с обмотки гироскопа и прокалиброванного генератора.

3.2 Экспериментальные данные

3.2.1 Момент сил трения

Соберем экспериментальную установку, и приведем её к виду рис.3. Проверяя устойчивость гироскопа при легком постукивании по рычагу С, можно убедиться, что вращение ротора происходит достаточно быстро. Эта устойчивость связана с тем, что при небольшом времени воздействия момента внешних сил, приращение момента импульса гироскопа очень мало, данный факт подробнее объяснен в теории. По реакции гироскопа на нажатие на рычаг С определим, в какую сторону вращается ротор:

При нажатии на рычаг гироскоп начал вращаться по направлению против часовой стрелки в горизонтальной плоскости.

Из распределения моментов сил на рис.4 можно определить направление вектора угловой скорости вращения ротора. Отсюда видно, что он вращается против часовой стрелки в вертикальной плоскости, представленной на рисунке.

Из рис.5 можно видеть, в какой оси возникает трение, которое приводит к тому, что рычаг С начинает медленно опускаться:

Рычаг опускается, когда возникает небольшая прецессия, вызванная моментом сил трения, как показано на рисунке. Из векторных уравнений можно определить, как направлен момент, а из этого найти точку его приложения (в каждый момент времени) \Rightarrow найти ось. Из рисунка понятно, что это ось ОО.

Трение присутствует и в других осях ротора гироскопа, однако его действие компенсирует электрогенератор. Момент силы трения можно посчитать, используя следующую формулу:

$$M_{\text{тр}} = I_z \omega_0 \Omega_{\text{тр}} \sin \alpha = I_z \omega_0 \Omega_{\text{тр}}, \quad (12)$$

Т.к. в данном случае угол α примерно равен 90° . Здесь ω_0 – угловая скорость собственного вращения ротора, которую еще необходимо определить.

3.2.2 Скорость регулярной прецессии

Измерение скорости регулярной прецессии проводилось следующим образом: на рычаг С по очереди на определенном расстоянии $l_{\text{ц}} = 121$ мм от центра карданова подвеса надевались грузы различной массы. Для каждого из грузов проводилась серия из 3-5 повторений, в которых секундоммером измерялось время, за которое гироскоп совершит какое-то число оборотов прецессии, из чего вычислялась скорость прецессии: $\Omega = \frac{n}{\tau}$, где n – число оборотов за время τ . Сразу были вычислены и погрешности для каждого значения Ω . Результаты эксперимента представлены в таблице 1.

m , г	M , Н*м	T , с	N , дел	n , об	Ω , c^{-1}	Ω_{cp} , c^{-1}	σ_{Ω} , c^{-1}
268	0,31779	136	1	3	0,022059	0,02207	0,00024
268	0,31779	228	2	5	0,02193		
268	0,31779	183	2	4	0,021858		
268	0,31779	90	1	2	0,022222		
268	0,31779	217	2	4,83	0,022258		
335	0,39724	183	2	5	0,027322	0,02733	0,00020
335	0,39724	220	2	6	0,027273		
335	0,39724	146	2	4	0,027397		
215	0,25495	229	2	4	0,017467	0,01695	0,00056
215	0,25495	187	2	3,25	0,01738		
215	0,25495	125	1	2	0,016		
173	0,20514	73	1	1	0,013699	0,01406	0,00027
173	0,20514	78	1	1,08	0,013846		
173	0,20514	142	1	2	0,014085		
173	0,20514	200	2	2,92	0,0146		
141	0,16720	85	1	1	0,011765	0,01158	0,00014
141	0,16720	167	2	1,92	0,011497		
141	0,16720	87	1	1	0,011494		
141	0,16720	173	2	2	0,011561		
116	0,13755	108	1	1	0,009259	0,0093	0,00009
116	0,13755	215	2	2	0,009302		
116	0,13755	106	1	1	0,009434		
93	0,11028	100	1	0,75	0,0075	0,00751	0,00014
93	0,11028	164	2	1,25	0,007622		
93	0,11028	135	1	1	0,007407		

Так же эти результаты представлены в виде графика зависимости Ω от M .

Экспериментальные точки аппроксимируются прямой, построенной по методу наименьших квадратов. Теоретическая зависимость для этой прямой такая:

$$\Omega = \frac{M}{2\pi I_0 \omega_0}.$$

Отсюда, зная коэффициент наклона графика получаем:

$$I_0 \omega_0 = (2.29 \pm 0.02) \text{ Дж*с.}$$

Осталось только найти момент инерции ротора I_0 .

3.2.3 Момент инерции ротора

Он вычислялся из формулы (11). К проволоке прикрепляли обычный цилиндр и ротор, и смотрели период крутильных колебаний этих тел. Для каждого из тел была снята серия времён, за которые происходили 10 колебаний. Результаты представлены в таблице: Это – геометрические размеры цилиндра, с помощью которых можно найти его момент инерции.

$$m_{ц} = (1617,9 \pm 0,1) \text{ г.}$$

$$r_{ц} = (3,89 \pm 0,01) \text{ см.}$$

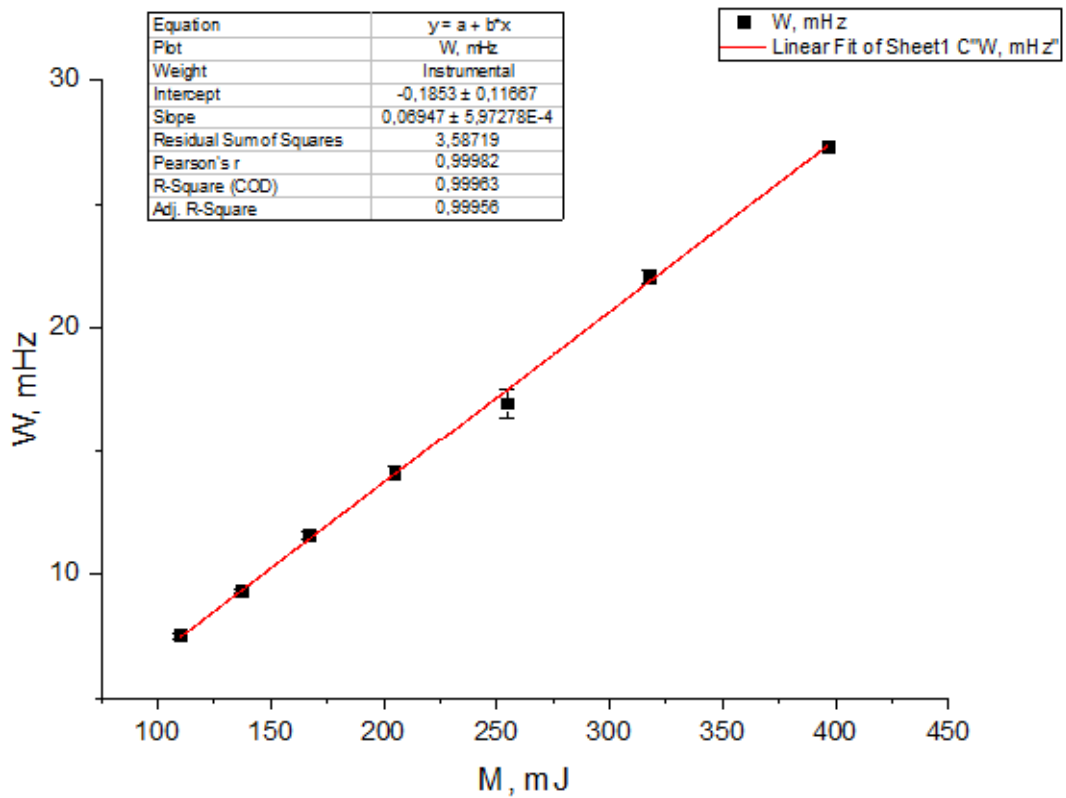


Рис. 1: Зависимость Ω от M .

$T_{r10}, \text{с}$	$T_p, \text{с}$	$\sigma_{T_p}, \text{с}$	$T_{c10}, \text{с}$	$T_{\text{ц}}, \text{с}$	$\sigma_{T_{\text{ц}}}, \text{с}$
32,31	3,24	0,02	40,75	4,09	0,02
32,37			40,72		
32,28			40,84		
32,5			41,05		
32,38			40,97		

По формуле

$$I_{\text{ц}} = \frac{mr^2}{2},$$

получаем:

$$I_{\text{ц}} = (1.22 \pm 0.01) \text{ мДж.}$$

Таким образом момент инерции ротора:

$$I_p = (0.77 \pm 0.02) \text{ мДж.}$$

3.2.4 Частота вращения ротора

По известным нам соотношениям легко вычислить ω_0 – собственную частоту вращения ротора:

$$\omega_0 = (473.54 \pm 16.27) \text{ об/сек.}$$

Зная эту частоту, можно оценить момент сил трения.

3.2.5 Оценка момента сил трения

С помощью формулы (12) оценим момент сил трения, но для начала построим график скорости прецессии из-за трения $\Omega_{\text{тр}}$ от скорости прецессии из-за момента силы тяжести $\Omega_{\text{ср}}$, используя данные таблицы 1.

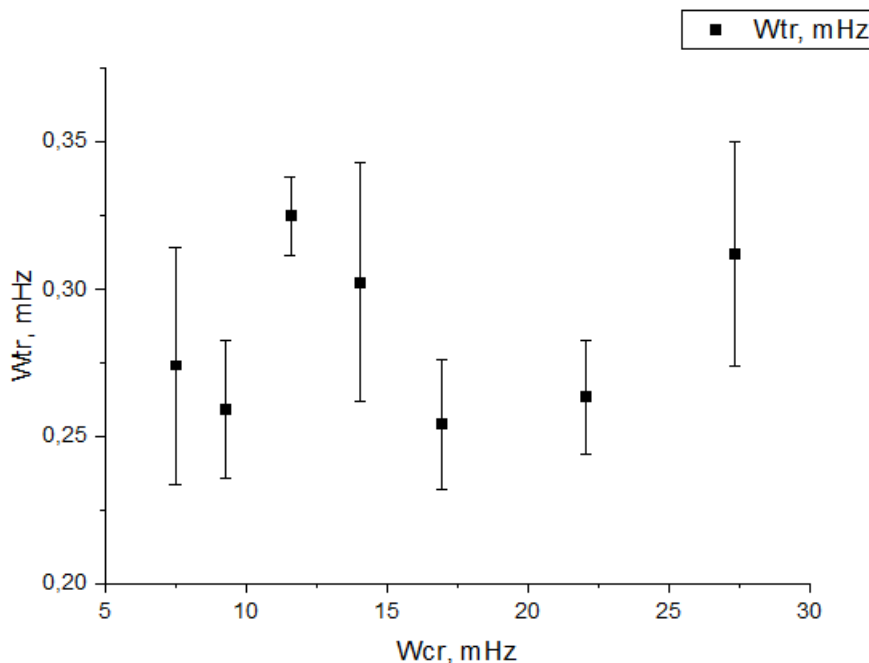


Рис. 2: Зависимость $\Omega_{\text{тр}}$ от $\Omega_{\text{ср}}$.

По этому рисунку видно, что данные по скорости прецессии носят лишь оценочный характер, потому что они сняты с очень большой неточностью, что связано с утановкой, поэтому имеет смысл лишь оценивать значение момента сил трения и его вклад по сравнению с моментом сил тяжести груза. Как видно из таблицы, он очень мал.

$M_{\text{тр}}, \text{мДж}$	3,777	4,48	3,644	4,341	4,663	3,72	3,933
$M, \text{мДж}$	317,8	397,2	255	205	167	138	110
%	1,19	1,13	1,43	2,12	2,79	2,70	3,58

Таким образом, момент сил трения меньше момента сил тяжести груза примерно на 2 порядка и составляет $\approx 10^{-3}$ Дж.

3.3 Определение частоты через фигуры Лиссажу

После того, как установка была приведена в нужное положение, были получены результаты резонансной частоты для включенного генератора:

$$\omega_r = (489 \pm 1) \text{ Гц},$$

и только что выключенного:

$$\omega_r = (464 \pm 1) \text{ Гц}.$$

Так как когда генератор включен, он мешает измерению (наводит ЭДС в обмотке выхода, ведущего к осциллографу), то следует считать более достоверным результат, который был получен сразу при выключении генератора, то есть 464 Гц. Он должен совпадать с частотой вращения ротора. Фигура Лиссажу при этом результате:

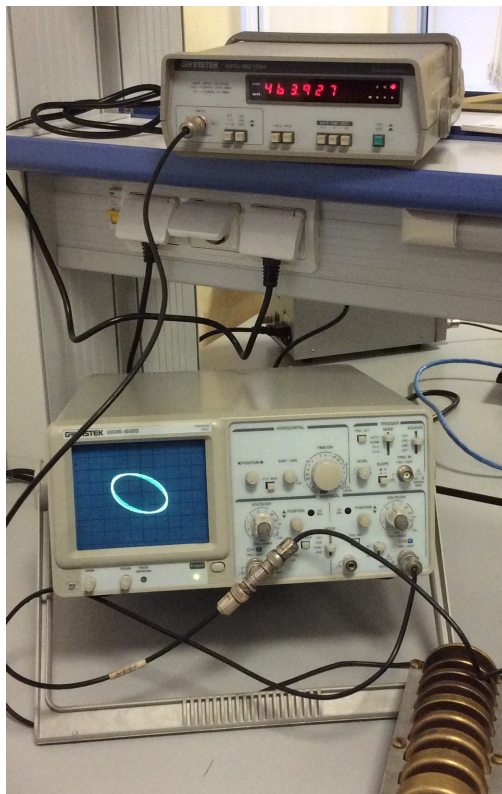


Рис. 3: Фигура Лиссажу, и резонансная частота.

4 Вывод

Таким образом была исследована вынужденная прецессия гироскопа под действием силы тяжести и сил трения. Была определена скорость вращения ротора гироскопа двумя разными способами, и с учетом погрешности, скорость, определенная через скорость прецессии от силы тяжести, совпадает со скоростью, определенной более точным методом. Исходя из этого можно сделать вывод о том, что соотношение (5) здесь вполне применимо. Так же был оценен момент сил трения, и было показано, что его вклад в прецессию гироскопа мал по сравнению с исследуемым моментом сил тяжести.