

# Работа 1.4.1

## Изучение физического маятника

Нугманов Булат  
Подлесный Артём  
группа 827

15 ноября 2018 г.

### Цель работы

Исследовать зависимость периода колебаний физического маятника от его момента инерции.

### Оборудование

Физический маятник (однородный стальной стержень), опорная призма, математический маятник, счетчик числа колебаний, линейка, секундомер.

### Отчёт о работе

#### Общая теория

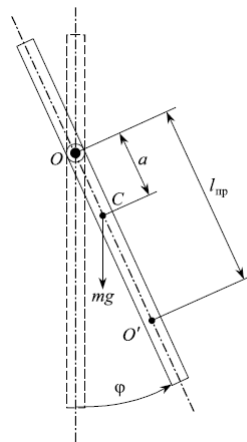
Физический маятник — любое тело, которое может свободно качаться вокруг вертикальной оси под действием силы тяжести. Движение маятника описывается уравнением:

$$M = I \frac{d^2 \varphi}{dt^2}, \quad (1)$$

где  $I$  — момент инерции маятника,  $\varphi$  — угол отклонения маятника от положения равновесия,  $t$  — время,  $M$  — момент сил, действующих на маятник.

На стержне закрепляется опорная призма, острое ребро которой является осью качания маятника. Призму можно перемещать вдоль ОС, меняя таким образом расстояние от точки опоры маятника до его

Рис. 1:



центра масс. По теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции маятника:

$$I = \frac{ml^2}{12} + ma^2, \quad (2)$$

где  $m$  – масса маятника,  $l$  – длина стержня,  $a$  – указано на рисунке. Момент силы тяжести:

$$M = -mg \sin \varphi \approx -mg\varphi, \quad (3)$$

т.к. угол  $\varphi$  мал. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем, что

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi &= 0 \\ \omega^2 &= \frac{ga}{a^2 + \frac{l^2}{12}} \\ \varphi(t) &= A \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (4)$$

Период колебаний равен

$$T = 2\pi = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + \frac{l^2}{12}}{ag}} \quad (5)$$

Видно, что период малых колебаний не зависит ни от фазы, ни от амплитуды колебаний. Период колебаний математического маятника определяется формулой

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}}$$

где  $l'$  – длина математического маятника. Поэтому величину

$$l_{\text{пр}} = a + \frac{l^2}{12a} \quad (6)$$

называют приведенной длиной физического маятника. Тогда исследование зависимости периода колебаний математического маятника заданной длины и физического маятника соответствующей приведенной длины будет хорошим методом проверки теории.

## Период при малых колебаниях

### Проверка чистоты условий эксперимента

Однако нетрудно заметить, что полученные выражения выполняются только при малых углах и небольшом моменте сил трения. Для проверки этих предположений, на данной установке проведём эксперимент, заключающийся в проверке постоянства периода при малых углах и относительно среднем значении  $a = 17,5$  см. При различных малых углах мы измеряли время совершения 100 колебаний. В данном эксперименте и далее, нажатие на счётчик проходило в момент, когда маятник проходил положение равновесия. Результаты приведены в таблице 1. Отдельно отметим явно неверные измерения 2-го значения. Время сильно завышено! Оказалось, что иногда счётчик не всегда срабатывал на нажатие. Однако, в остальном значения отличаются в пределах погрешности, значит при углах  $\varphi \leq 10^\circ$  наши предположения верны. Стоит так же отметить, что в теоретическом выводе формул не учитывалось, что в точке опоры стержень подвешен с использованием шайбы, которая может влиять на положение центра масс стержня ( $x_{\text{ц.м.}}$ ) и его момент инерции ( $I$ ), и, как следствие, на длину  $l_{\text{пр}}$ . Следует проверить, что вклад этой шайбы действительно мал. Для этого посчитаем отношение разности  $l_{\text{пр}}$  посчитанной с учетом шайбы, и без, с самой  $l_{\text{пр}}$ . Вывод формулы для  $l'_{\text{пр}}$  достаточно громоздкий, поэтому здесь я выпишу лишь конечную формулу

$$l'_{\text{пр}} = \frac{Ml^2 + 12Ma^2 + 4mr^2}{12Ma - 6mr} \quad (7)$$

Здесь – масса стержня,  $m$  – шайбы,  $l, r$  – длины стержня и шайбы соответственно. Данные о них в таблице 3. Таким образом из формулы можно найти  $\Delta l_{\text{пр}}$

$$\Delta l_{\text{пр}} = l'_{\text{пр}} - l_{\text{пр}} = \frac{Ml^2 + 12Ma^2 + 4mr^2}{12Ma - 6mr} - \frac{12a^2 + l^2}{12a}$$

Таблица 1:

n	$\alpha, ^\circ$	$T_{100}, \text{с}$
1	10	162,63
2	5	171,25
3	3	162,71
4	5	162,53

n	a, см	N	$T_N, \text{с}$	$T_{\text{ср.}}, \text{с}$	$N_1$	$T_{N_1}, \text{с}$	$T_{\text{ср.}}, \text{с}$	$T_{\text{ср.}} - T_{\text{ср.}}$
1	17,5	100	162,62	1,626	50	-	-	-
2	47,0	100	161,50	1,615	50	-	-	-
3	43,0	100	168,94	1,689	50	89,17	1,783	0,0940
4	39,0	100	156,31	1,563	50	78,00	1,560	-0,0031
5	35,0	100	154,00	1,540	50	77,00	1,540	0,0000
6	43,0	100	158,63	1,586	50	79,13	1,583	-0,0037
7	31,0	100	153,21	1,532	50	76,00	1,520	-0,0121
8	27,0	100	153,00	1,530	50	76,17	1,523	-0,0066
9	23,0	100	155,37	1,554	50	77,50	1,550	-0,0037
10	19,0	100	160,00	1,600	50	80,10	1,602	0,0020
11	15,0	50	84,85	1,697	25	42,50	1,700	0,0030
12	11,0	50	94,00	1,880	30	57,00	1,900	0,0200
13	7,0	40	91,75	2,294	34	78,00	2,294	0,0004

Для допустимых значений  $a \in [7; 40]$  можно найти максимально возможную ошибку для  $l_{\text{пр}}$

$$\left( \frac{\Delta l_{\text{пр}}}{l_{\text{пр}}} \right)_{\text{max}} \approx 0,001 \quad (8)$$

Эта оценка позволяет утверждать, что влиянием шайбы на  $l_{\text{пр}}$  можно пренебречь.

### Проведение эксперимента и обработка полученных результатов

На таблице 2 продемонстрированы результаты нашего эксперимента по снятию зависимости периода малых колебаний от расстояния до точки опоры  $a$ . Для определенного угла мы измеряли время совершения 100 колебаний. В данном эксперименте и далее, нажатие на счётчик проходило в момент, когда маятник проходил положение равновесия. Так же были проведены промежуточные измерения, где мы замечали время для 50 колебаний. По полученным данным вычислялся период, и мы сравнивали период за полное число колебаний, и за половину. Как видно из таблицы, эта разница много меньше самого периода, поэтому можно считать, что со временем период почти не изменяется. Отдельно отметим явно неверные измерения значения для  $a = 43$ , произошло это по той же причине, что и раньше, и в дальнейшем это значение мы перемерили. Из формулы (5) следует

$$aT^2 = \frac{4\pi^2}{g}a^2 + \frac{4\pi^2 l^2}{12g} \quad (9)$$

Значит зависимость  $aT^2(a^2)$  будет линейна. График этой зависимости представлен на рис. 2. Как видно, прямая получилась с очень хорошей точностью. С помощью этого графика можно найти такие вещи: если  $b = 4\pi^2/g$ ,  $a = 4\pi^2 l^2/12g = bl^2/12$ , то

$$g = \frac{4\pi^2}{b} = 9,869 \pm 0,021 \text{ (м/с}^2\text{)}$$

$$l = \sqrt{\frac{12a}{b}} = 101,266 \pm 0,026 \text{ (см)}$$

Как видно, теоретически известные значения неплохо согласуются с полученными экспериментальными данными.

## Математический маятник

Из теории видно, что длина нити математического маятника заданного периода должна быть равна приведенной длине физического маятника. Для того, чтобы это проверить, мы одновременно запускали физический и математический маятники, добиваясь того, чтобы они колебались одинаково. Действительно нам это удалось только тогда, когда длина математического маятника стала в точности равной приведенной длине физического маятника.

## Немалые колебания

Рассмотрим теперь немалые колебания для этого в уравнении (3) не будем приближать  $\sin x \approx x$ . Тогда наше уравнение будет выглядеть так:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0$$
$$\omega_0^2 = \frac{ga}{a^2 + \frac{l^2}{12}} \quad (10)$$

Естественно, период уже будет зависеть от амплитуды, а в пределе, при малых углах, мы получим период, соответствующий  $\omega_0$ . Решая данный дифур, получаем, что:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)$$
$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi}} \quad (11)$$

$K(x)$  - называется полным эллиптическим интегралом первого рода, а  $\alpha$  - амплитуда колебаний. Разлагая полученную специальную функцию по малости аргумента, получаем:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots\right) \quad (12)$$

Как видно из графика, теория неприменима при больших углах. На графике указаны кресты лишь экспериментальных ошибок. А всё потому, что мы сделали допущение об отсутствии трения.

## Вязкое трение

Закон Стокса из теории вязкого трения гласит, что при малых скоростях сила трения, действующая на шарик в среде выражается так:

$$F_{\text{тр.}} = -6\pi r v \mu, \quad (13)$$

где  $r$  - радиус шарика,  $v$  - скорость шарика,  $\mu$  - вязкость. Для экспериментальной проверки формулы, оценим вязкость воздуха, полученную из данной формулы. 2-ой закон Ньютона будет написан в виде:

$$\ddot{x} - 2p\dot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0, \text{ где } p = \frac{3\pi r \mu}{m} \quad (14)$$

В ходе решения для малых колебаний выражение для амплитуды:

$$A = Ae^{-pt} \quad (15)$$

Получается, самый простой метод оценить  $p$  - построить график  $-\ln(A)$  от  $t$ , что мы и сделаем. ("у" в таблице означает проекцию шарика на горизонтальную ось)  $p$  из графика по МНК получается  $(3.14 \pm 0.36)\text{с}^{-1}$ , что соответствует  $\mu = 13,2 \text{ мПа}\cdot\text{с}$  ( $m=100 \text{ г}$ ,  $r=2.52 \text{ см}$ ).

Однако, полученное значение, на сильно расходится от указанного в таблице ( $18,6 \text{ мкПа}\cdot\text{с}$ ). Понятно, что мы использовали теорию малых колебаний там, где она неприменима, но расхождение относительно синуса не очень велико. По крайней мере это не должно давать расхождение на 3 порядка. Самое время задуматься о применимости нашей формулы, то есть о малости скорости. Онослительным безразмерным показателем "малости" является число Рейнольдса. Выражение для числа Рейнольдса:

$$Re = \frac{\rho_{\text{среды}} v d}{\mu} \quad (16)$$

Рис. 2:

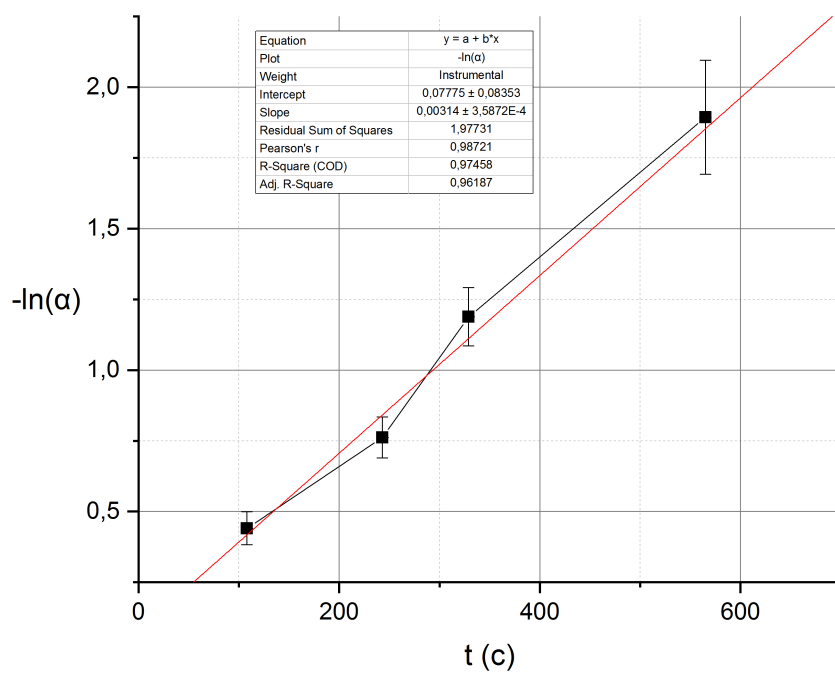
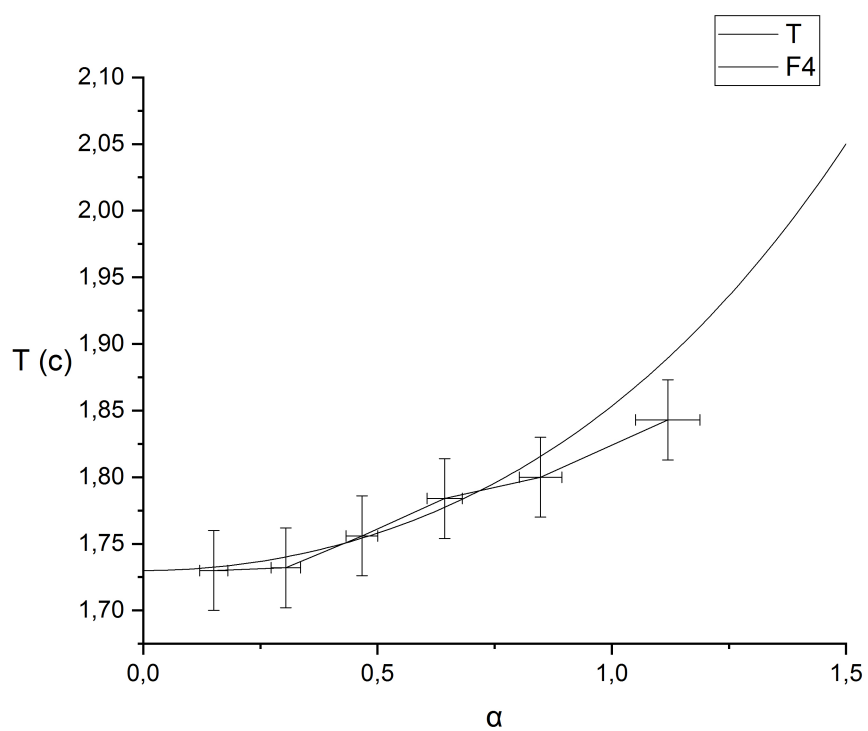


Таблица 2:

у, см	$\alpha$	Т, с
40	0,643501	565
30	0,466765	329
20	0,304693	243
10	0,150568	108
50	18	1,8
60	18,43	1,843

$d$  – здесь некоторый параметр, характеризующий размеры движущегося тела. Мы возьмём его равным диаметру шарика. Вязкость воздуха возьмём из таблицы, считая что температура воздуха близка к  $27^{\circ}\text{C}$ . Скорость шарика вставим как половину амплитудного значения. Полученное число Рейнольдса  $\sim 2800$  ( $\mu = 18,6 \text{ мкПа} \cdot \text{с}$ ,  $\rho = 1,18 \text{ кг/м}^3$ ,  $v = 1,8 \text{ м/с}$ ), что никак нельзя считать малым значением. (Для данного случая малым может быть значение порядка 1 или меньше.)

Этим объясняется неприменимость написанных выше формул.

## Вывод

Таким образом, мы изучили зависимость периода физического маятника от его параметров: положения центра масс, момента инерции. Также мы убедились, что период при малых колебаниях почти не зависит от амплитуды. Мы подтвердили, что теория малых колебаний физического маятника очень хорошо описывает экспериментальные данные, а так же исследовали возможный вклад в погрешность наших измерений многих факторов, присущих нашей установке.

Также мы измерили зависимость между периодом и амплитудой в модели немалых колебаний. В пределах применимости, теоретическая кривая хорошо фитингуется полученные точки, хотя и заявлять о полном подтверждении теории тоже нельзя – погрешность слишком большая. Однако уменьшить её в данном методе было трудно. Погрешность времени можно уменьшить лишь увеличив количество колебаний, но это при этом нельзя пренебрегать трением, а теория немалых колебаний нами не разработана. Погрешность в определении угла вносила простая неточность нашей системы. Угол мерился при помощи определения проекции колеблющегося маятника на горизонтальную ось! Очевидно, установка не подходит для проведения подобного эксперимента.

И хотя мы использовали кривые руки и установку, мы отметили, что затухание колебаний по экспоненте с натяжкой (прямая еле касается границ погрешностей точек), но может быть применима. Однако причина этого точно не в наличии вязкого трения, ведь оно формируется при ламинарных, то есть устойчивых, течениях воздуха, а число Рейнольдса в эксперименте очень велико. В подтверждение этому говорит в тысячу раз расходящееся с табличным значение вязкости воздуха.