

# Работа 1.4.8

## Измерение модуля Юнга методом акустического резонанса

Подлесный Артём  
группа 827

12 сентября 2020 г.

### Содержание

<b>1</b>	<b>Цель работы</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Оборудование</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Отчёт о работе</b>	<b>2</b>
3.1	Общая теория . . . . .	2
3.1.1	Распространение продольных волн в тонких стержнях . . . . .	2
3.1.2	Собственные колебания стержня . . . . .	3
3.1.3	Измерение скорости распространения продольных волн в стержне . .	4
3.1.4	Описание экспериментальной установки . . . . .	4
3.2	Снятие экспериментальных данных . . . . .	5
3.2.1	Медь . . . . .	5
3.2.2	Сталь . . . . .	5
3.2.3	Дюраль . . . . .	6
3.2.4	Добротность . . . . .	8
3.3	Обработка экспериментальных данных . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Вывод</b>	<b>10</b>

# 1 Цель работы

Исследование явления акустического резонанса. Измерение скорости распространения продольных колебаний в тонких стержнях. Измерение модуля Юнга различных материалов.

# 2 Оборудование

Генератор звуковых частот, частотомер, осциллограф, электромагнитные излучатель и приемник колебаний, набор стержней из различных материалов (стали, алюминия, меди).

# 3 Отчёт о работе

## 3.1 Общая теория

### 3.1.1 Распространение продольных волн в тонких стержнях

Распространение продольных волн в тонких стержнях. Акустические волны, распространяющиеся в металлических стержнях, существенно отличаются от волн в неограниченной среде. Строгий анализ распространения таких волн связан с довольно громоздкими математическими расчетами. Будем рассматривать волны, длина  $\lambda$  которых велика по сравнению с радиусом  $R$  стержня. Опишем распространение продольной волны вдоль оси тонкого стержня постоянного сечения площадью  $S$ . Стержень считается тонким в том случае, когда радиус стержня  $R$  мал по сравнению с длиной волны  $\lambda$ , т.е.  $R/\lambda \ll 1$ .

Направим ось  $x$  вдоль геометрической оси стержня (рис. 1). Под действием продольной

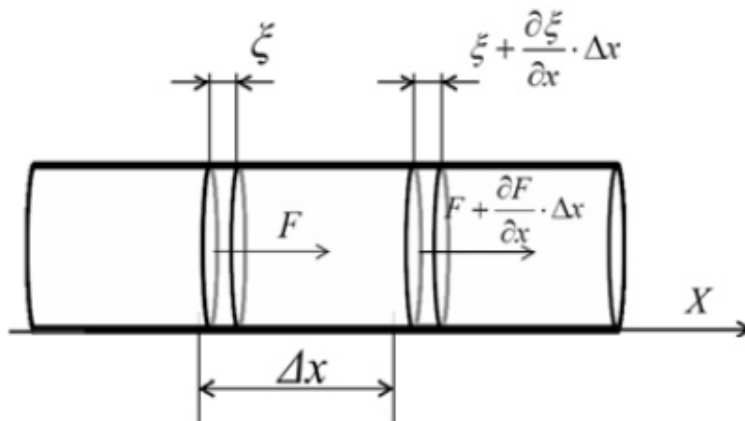


Рис. 1: Силы, действующие на элемент стержня при продольных колебаниях

силы  $F$  элементарный отрезок стержня  $\Delta x$ , ограниченный плоскостями  $x$  и  $(x + \Delta x)$ , растянется или сожмется на величину  $\Delta \xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x$ , где  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  — относительное удлинение, т. е. деформация элемента стержня. Напряжение  $\sigma$  (т. е. сила, действующая на единицу поперечного сечения стержня) согласно закону Гука равно

$$\sigma = \frac{F}{S} = E \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (1)$$

Коэффициент пропорциональности  $E$  носит название модуля Юнга и имеет размерность Н/м<sup>2</sup>. В результате переменной деформации вдоль оси стержня будет распространяться

продольная волна. Действительно, в сечениях  $x$  и  $x + \Delta x$  напряжения будут различными, а их разность можно записать следующим образом:

$$\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x) = \frac{1}{S} \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{F}{S} \right) \Delta x. \quad (2)$$

Эта разность напряжений вызовет движение элемента стержня массой  $m = S\rho\Delta x$  вдоль оси  $x$  ( $\rho$  — плотность материала стержня). Используя соотношения (1) и (2), на основании второго закона Ньютона уравнение движения этого элемента можно записать в виде:

$$S\rho\Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = SE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x. \quad (3)$$

Обозначив  $E/\rho$  через  $c_{\text{ст}}^2$ , выражение (3) запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_{\text{ст}}^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Это уравнение носит название волнового уравнения. Оно, в частности, описывает распространение продольных волн в стержне. Общее решение волнового уравнения можно представить в форме двух бегущих волн, распространяющихся в обе стороны вдоль оси  $x$  со скоростью  $c_{\text{ст}}^2$ :

$$\xi(x, t) = f(c_{\text{ст}}t - x) + g(c_{\text{ст}}t + x), \quad (5)$$

где  $f$  и  $g$  — произвольные функции (определяемые начальными и граничными условиями). Параметр  $c_{\text{ст}}$  в выражениях (4) и (5) имеет смысл скорости распространения волны. В рассматриваемом нами случае  $R/\lambda \rightarrow 0$  скорость распространения упругой продольной волны стремится к величине

$$c_{\text{ст}} \approx \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (6)$$

В данной работе исследуются именно такие волны.

Отметим, что в высокочастотном (т. е. коротковолновом) пределе при  $\lambda \ll R$  скорость акустических волн в стержне стремится к скорости продольных волн в неограниченной среде ( $\mu$  — коэффициент Пуассона):

$$c_i = \sqrt{\frac{E(1 + \mu)}{\rho(1 + \mu)(1 - 2\mu)}}. \quad (7)$$

### 3.1.2 Собственные колебания стержня

В случае гармонического возбуждения колебаний с частотой  $f$  продольная волна в тонком стержне может быть представлена в виде суперпозиции двух бегущих навстречу друг другу синусоидальных волн:

$$\xi(x, t) = A_1 \sin(\omega t - kx + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + kx + \varphi_1), \quad (8)$$

где  $\omega = 2\pi f$  — циклическая частота, коэффициент  $k = 2\pi/\lambda$  называют волновым числом или пространственной частотой. Здесь первое слагаемое описывает волну, бегущую в положительном направлении по оси  $x$ , второе — в отрицательном. Скорость их распространения равна

$$c_{\text{ст}} = \omega/k.$$

Несложно показать, что при отражении синусоидальной волны от свободного конца стержня, её фаза не изменяется. Тогда

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}. \quad (9)$$

Таким образом, на длине стержня должно укладываться целое число полуволн.

### 3.1.3 Измерение скорости распространения продольных волн в стержне

Зная плотность материала и величину скорости  $c_{ст}$  можно по формуле (6) вычислить модуль Юнга материала  $E$ . Для определения скорости  $c_{ст}$  в данной работе используется метод акустического резонанса. Это явление состоит в том, что при частотах гармонического возбуждения, совпадающих с собственными частотами колебаний стержня  $f \approx f_n$ , резко увеличивается амплитуда колебаний, при этом в стержне образуется стоячая волна. В данной работе возбуждение колебаний происходит посредством воздействия на торец стержня периодической силой, направленной вдоль его оси. Зная номер гармоники  $n$  и частоту  $f_n$ , на которой наблюдается резонансное усиление амплитуды колебаний, вызванных периодическим воздействием на торец стержня, можно рассчитать скорость распространения продольных волн в стержне:

$$c_{ст} = f_n \lambda_n = \frac{2L f_n}{n}. \quad (10)$$

Таким образом, для того, чтобы измерить скорость  $c_{ст}$ , нужно измерить частоты резонансных гармоник для различных  $n$ , и зная геометрические размеры стержня, рассчитать скорость по формуле (15). Далее, по формуле (6) можно рассчитать и модуль Юнга материала, из которого изготовлен стержень. Этот метод определения модуля Юнга материала является одним из самых точных.

### 3.1.4 Описание экспериментальной установки

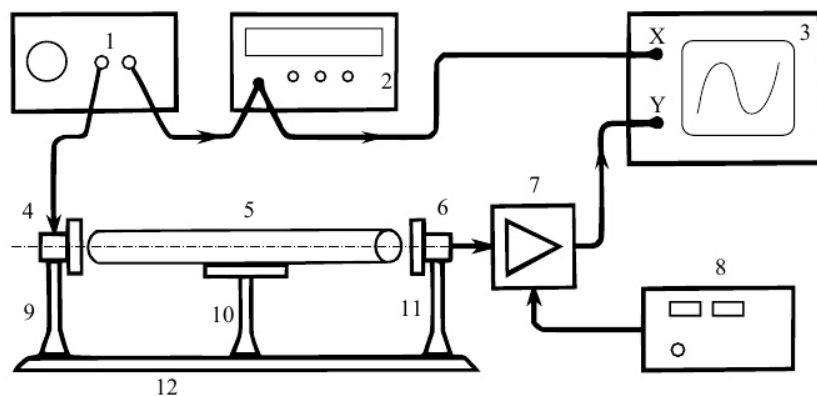


Рис. 3. Схема установки: 1 — генератор звуковой частоты, 2 — частотомер, 3 — осциллограф, 4 — электромагнит-возбудитель, 5 — образец, 6 — электромагнит-приемник, 7 — усилитель звуковой частоты, 8 — блок питания усилителя, 9, 11 — стойки крепления электромагнитов, 10 — стойка крепления образца, 12 — направляющая.

Рис. 2: Установка с описанием

## 3.2 Снятие экспериментальных данных

Для начала мы собрали экспериментальную установку так как, показано в предыдущем разделе. После приготовления всех элементов и настройки осциллографа мы приступили к снятию экспериментальных данных. Для каждого стержня данные представлены в отдельном пункте.

### 3.2.1 Медь

**Размер 1** Линейные размеры представлены с помощью этой таблицы:

Медь1	$L, \text{ mm}$	$d, \text{ mm}$	$M, \text{ gr}$	$V, \text{ cm}^3$
Значение	605	12,0	636,34	68,424
Погрешность	1	0,2	0,3	0,024

Исходя из этого, плотность стержня:

$$\rho = (9,30 \pm 0,01) \text{ gr/cm}^3. \quad (11)$$

На данной таблице представлена зависимость частоты резонанса для соответственных гармоник:

$n$	1	2	3	4	5
$f, \text{ Hz}$	3214,7	6444,8	9646,4	12884	16048,4

**Размер 2** Линейные размеры представлены с помощью этой таблицы:

Медь2	$L, \text{ mm}$	$d, \text{ mm}$	$M, \text{ gr}$	$V, \text{ cm}^3$
Значение	532	10,0	375,1	41,78
Погрешность	1	0,2	0,3	0,03

Исходя из этого, плотность стержня:

$$\rho = (8,98 \pm 0,02) \text{ gr/cm}^3. \quad (12)$$

На данной таблице представлена зависимость частоты резонанса для соответственных гармоник:

### 3.2.2 Сталь

**Размер 1** Линейные размеры представлены с помощью этой таблицы:

Исходя из этого, плотность стержня:

$$\rho = (7,712 \pm 0,008) \text{ gr/cm}^3. \quad (13)$$

На данной таблице представлена зависимость частоты резонанса для соответственных гармоник:

$n$	1	2	3	4	5
$f$ , Hz	3804,4	7606	11391,3	15234,2	19005

Сталь1	$L$ , mm	$d$ , mm	$M$ , gr	$V$ , $cm^3$
Значение	605	12,2	545,43	70,724
Погрешность	1	0,2	0,3	0,026

$n$	1	2	3	4	5
$f$ , Hz	4127,4	-	12380,6	16556,4	20602,2

Сталь2	$L$ , mm	$d$ , mm	$M$ , gr	$V$ , $cm^3$
Значение	401	8,0	157,53	20,16
Погрешность	1	0,2	0,3	0,03

$n$	1	2	3	4	5
$f$ , Hz	6438,6	12885	19317	25749	32142

**Размер 2** Линейные размеры представлены с помощью этой таблицы:  
Исходя из этого, плотность стержня:

$$\rho = (7,81 \pm 0,03) gr/cm^3. \quad (14)$$

На данной талице представлена зависимость частоты резонанса для соответсвтенных гармоник:

### 3.2.3 Дюраль

**Размер 1** Линейные размеры представлены с помощью этой таблицы:

Дюраль1	$L$ , mm	$d$ , mm	$M$ , gr	$V$ , $cm^3$
Значение	604	11,8	192,04	66,053
Погрешность	1	0,2	0,3	0,025

Исходя из этого, плотность стержня:

$$\rho = (2,907 \pm 0,006) gr/cm^3. \quad (15)$$

На данной талице представлена зависимость частоты резонанса для соответсвтенных гармоник:

$n$	1	2	3	4	5
$f$ , Hz	4244,5	8495	12730	16976	21204

**Размер 2** Линейные размеры представлены с помощью этой таблицы:

Дюраль2	$L$ , mm	$d$ , mm	$M$ , gr	$V$ , $cm^3$
Значение	436	9,9	93,451	33,562
Погрешность	1	0,2	0,3	0,036

Исходя из этого, плотность стержня:

$$\rho = (2,782 \pm 0,012) \text{ gr/cm}^3. \quad (16)$$

На данной таблице представлена зависимость частоты резонанса для соответственных гармоник:

$n$	1	2	3	4	5
$f, \text{ Hz}$	5834,9	-	-	-	-

**Половинный резонанс** Для дюрала 1 размера мы так же померили частоту резонанса для "половинной гармоники". Это значение равно 2122,1 герца. Это – фотография рисунка, получившаяся на осциллографе в момент резонанса: Этот результат можно объяснить

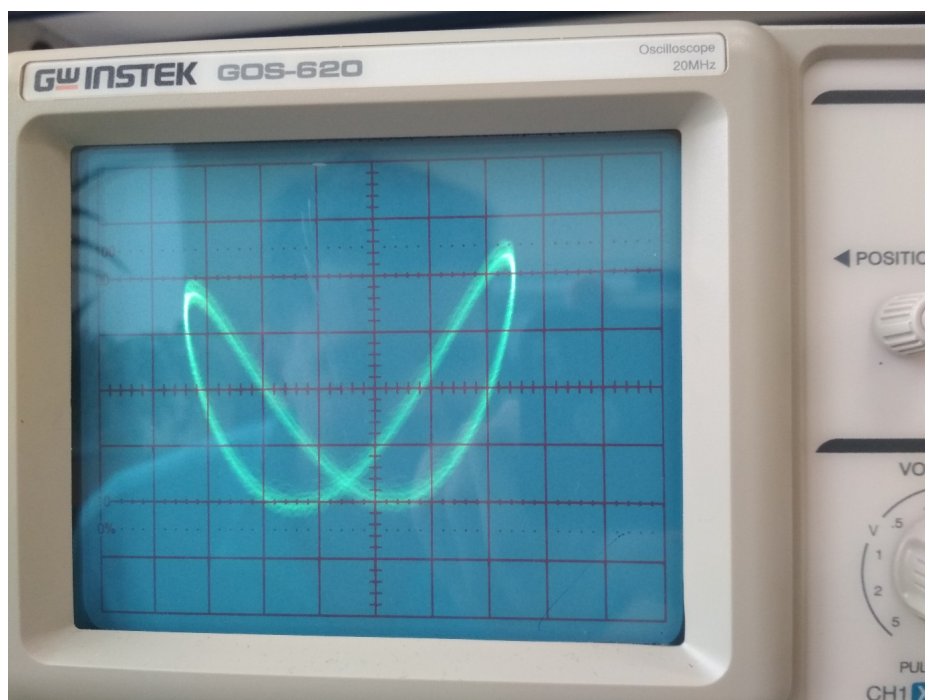


Рис. 3: Узор на осциллографе

следующим образом: как уже было сказано ранее, общее решение волнового уравнения можно представить в форме двух бегущих волн, распространяющихся в обе стороны вдоль оси  $x$  со скоростью  $c_{\text{ст}}^2$ :

$$\xi(x, t) = f(c_{\text{ст}}t - x) + g(c_{\text{ст}}t + x),$$

где  $f$  и  $g$  — произвольные функции (определяемые начальными и граничными условиями). Далее было получено упрощенное решение этого уравнения, однако полное решение этого уравнения – это произведение двух рядов Фурье волновой функции, и из этого уравнения получается, что при половине собственной частоты стержня для его первой гармоники все равно возникает резонанс, а фигура, показанная на фото – это фигура Лиссажу, которая показывает, что частота волны, поступающей со стержня в 2 раза больше частоты волны, поступающей с генератора частот. Это объясняется тем же решением уравнений Фурье, из которых получается интерференция половинных волн первой гармоники, которые вместе дают резонансную частоту.

### 3.2.4 Добротность

Для измерения добротности системы, для каждого из стержней мы снимали в амплитудно-частотную характеристику  $A(f - f_1)$  колебаний вблизи первого резонанса. Ширина максимума  $A(f - f_n)$ , как известно из теории колебаний, связана с добротностью  $Q$  стержня как колебательной системы: если  $\Delta f$  — ширина амплитудно-частотной характеристики на уровне  $A = \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$ , то

$$Q = \frac{f}{\Delta f} \quad (17)$$

Для каждого из стержней мы смотрели ширину пика первой гармоники. Полученные значения указаны в таблице:

Медь		Сталь		Дюраль	
$f_r$ , Hz	3214,6	$f_r$ , Hz	4127,2	$f_r$ , Hz	4242,12
$f_1$ , Hz	3214,2	$f_1$ , Hz	4125,4	$f_1$ , Hz	4241,7
$f_2$ , Hz	3214,8	$f_2$ , Hz	4128	$f_2$ , Hz	4242,6
$Q_1$	8037	$Q_1$	2293	$Q_1$	10100
$Q_2$	16073	$Q_2$	5157	$Q_2$	8838

Мы измеряли ширину пика "с двух сторон", при меньшем значении  $f_1$ , и большем —  $f_2$ . Как видно из таблицы, погрешности такого измерения добротности уже не меньше 50%, поэтому данные служат лишь для оценки порядка добротности нашей системы. Такая неточность в измерении связана в первую очередь с тем, что система для выставления частоты на генераторе очень неустойчивая, а пик резонанса по ширине имеет порядок единиц Гц.

### 3.3 Обработка экспериментальных данных

Построим графики для каждого стержня размера 1.

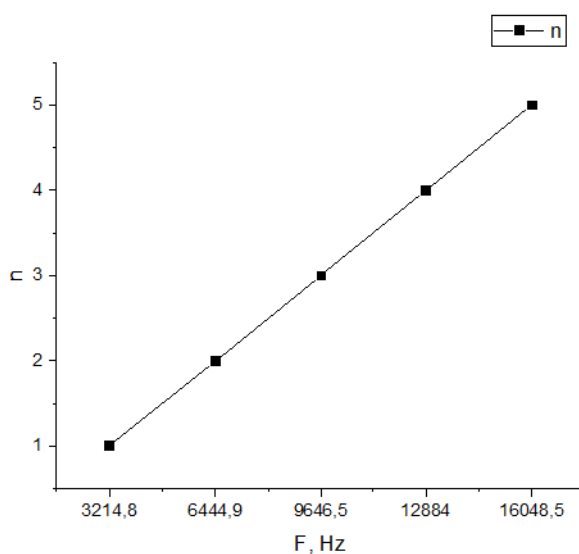


Рис. 4: Гармоники Меди



**Медь** Отсюда находим  $c_{ст}$ :

$c_{ст1}$ , М/с	$\sigma_{c1}$ , М/с	$c_{ст2}$ , М/с	$\sigma_{c2}$ , М/с
3892	15	4046	24

Здесь результаты для двух размеров меди.

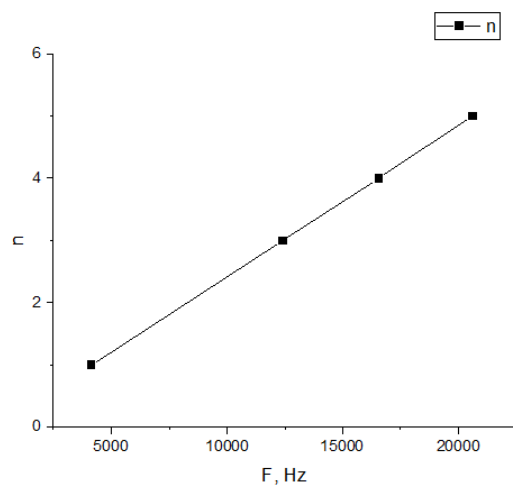


Рис. 5: Гармоники Стали

**Сталь** Отсюда находим  $c_{ст}$ :

$c_{ст1}$ , М/с	$\sigma_{c1}$ , М/с	$c_{ст2}$ , М/с	$\sigma_{c2}$ , М/с
4995	20	5163	26

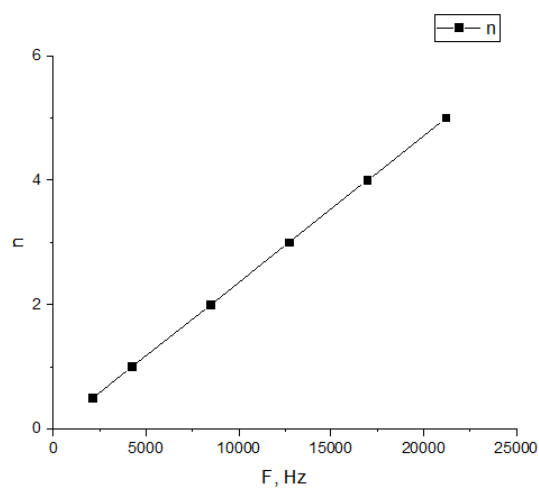


Рис. 6: Гармоники Дюрэли

$c_{ст1}$ , М/с	$\sigma_{с1}$ , М/с	$c_{ст2}$ , М/с	$\sigma_{с2}$ , М/с
5127	21	5088	48

**Дюраль** Отсюда находим  $c_{ст}$ :

Таким образом, мы можем найти модуль Юнга для каждого из стержней, воспользовавшись формулой:

$$E = \rho c_{ст}^2. \quad (18)$$

Таким образом запишем результаты в таблицу и сравним с табличными значениями.

№	Медь	Табличные данные для меди
$E_1$ , Па	$(1.409 \pm 0.012) \times 10^{11}$	$(1.30 \pm 0.15) \times 10^{11}$
$E_2$ , Па	$(1.470 \pm 0.014) \times 10^{11}$	
№	Сталь	Табличные данные для стали
$E_1$ , Па	$(1.924 \pm 0.015) \times 10^{11}$	$(2.1 \pm 0.1) \times 10^{11}$
$E_2$ , Па	$(2.082 \pm 0.018) \times 10^{11}$	
№	Дюраль	Табличные данные для Дюралья
$E_1$ , Па	$(0.763 \pm 0.009) \times 10^{11}$	$(0.73 \pm 0.05) \times 10^{11}$
$E_2$ , Па	$(0.720 \pm 0.010) \times 10^{11}$	

## 4 Вывод

Таким образом мы исследовали свойства акустического резонанса и измерили модуль Юнга для трех металлов с достаточно хорошей точностью. Как видно, данные соотносятся с табличными с учетом погрешности. Многие характеристики для стержней разных размеров не совпадают, даже с учетом погрешности, из чего можно сделать вывод, что они были сделаны из разных партий сплавов, или с разной термической обработкой. Так же мы показали, что оборудование недостаточно чувствительное для того, чтобы измерить добротность системы, однако позволяет оценить ее порядок.