

# Дифракция Фраунгофера

В данной работе изучается явление дифракции на таких объектах как щель, тонкая проволока и дифракционная решетка.

## а. Дифракция на одной щели

Пусть щель расположена в плоскости  $XY$ , бесконечно вытянута вдоль оси  $y$ , а её края находятся в прямых  $x = \pm b/2$ , здесь  $b$  – ширина щели (см. рис. 1); плоская монохроматическая волна с волновым вектором  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  падает перпендикулярно к плоскости щели.

В точку наблюдения вторичные волны, излучаемые каждой точкой щели, приходят с различными фазами. Здесь мы считаем, что точка наблюдения достаточно удалена от щели, поэтому вторичные волны можно считать практически параллельными (рис. 1). Тогда разность фаз между волнами, излучаемыми точками с координатой  $x$  и точками с координатой  $x = 0$ , равна  $\delta_1 = -kx \sin \tilde{\Theta}$ .

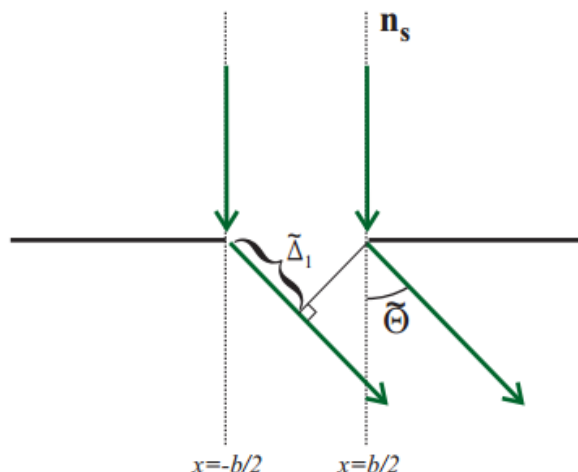


Рис. 1: Дифракция на одной щели.

Суммарный вклад всех вторичных волн, излучаемых точками щели, в амплитуду электрического поля в точке наблюдения с точностью до постоянного множителя определяется следующим выражением:

$$E_{slit}(\tilde{\Theta}) \propto \int_{-b/2}^{b/2} e^{-i\delta_1(x)} dx = \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ikx \sin \tilde{\Theta}} dx \propto \frac{\sin(\frac{kb}{2} \sin \tilde{\Theta})}{\frac{kb}{2} \sin \tilde{\Theta}}. \quad (1)$$

Интенсивность  $I$  в точке наблюдения под углом  $\tilde{\Theta}$  получается при возведении (1) во вторую степень:

$$I \propto \left( \frac{\sin(\frac{kb}{2} \sin \tilde{\Theta})}{\frac{kb}{2} \sin \tilde{\Theta}} \right)^2 = \left( \frac{\sin(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \tilde{\Theta})}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \tilde{\Theta}} \right)^2. \quad (2)$$

$I$  обращается в ноль при условии  $\frac{kb}{2} \sin \tilde{\Theta} = m\pi \rightarrow b \sin \tilde{\Theta} = m\lambda$ , где  $m$  – целое число. Положения максимумов являются решением трансцендентного уравнения, но практически можно считать, что максимумы располагаются посередине между соседними минимумами.

## б. Дифракция на проволоке. Принцип Бабинне.

Для нахождения дифракционной картины от проволоки толщиной  $b$  проведем следующие рассуждения. При расчете дифракционной картины от щели той же ширины  $b$  мы искали суммарный вклад от вторичных источников, расположенных на открытой части исследуемого объекта. Для проволоки, наоборот, данная часть объекта будет закрытой, а остальное пространство открытым. Такие объекты, как бы дополняющие друг друга, носят название **дополнительных**.

Обозначим распределение поля на экране в случае дифракции на щели  $E_{щ}(x')$ , а на проволоке –  $E_n(x')$ , где  $x'$  – координата в плоскости экрана. Тогда сумму полей  $E_{щ}(x') + E_n(x')$  можно представить как сумму интегралов по открытым областям для каждого из этих объектов, или как интеграл от суммы открытых областей. Но отверстия для дополнительных объектов располагаются так, что полностью "открывают" весь волновой фронт падающего излучения, следовательно

$$E_{щ}(x') + E_n(x') = E_0(x')$$

где  $E_0(x')$  – волновое возмущение на экране в случае отсутствия какого-либо препятствия. Таким образом, сумма распределений полей от дополнительных объектов равна полю, наблюдаемому на экране при отсутствии препятствия. Полученный результат носит название **принципа Бабинне**.

Если в качестве источника плоской волны используется лазер, размеры пучка которого много больше ширины щели  $b$ , то на экране в случае отсутствия препятствия будет наблюдаться яркое пятно, а в остальной области экрана поле можно считать равным нулю.

Для этой "незасвеченной" области справедливо

$$E_{щ}(x') + E_n(x') = 0,$$

следовательно

$$E_{щ}(x') = -E_n(x'),$$

а для интенсивностей

$$I_{щ}(x') = I_n(x').$$

В области основного пятна  $I_n(x') \cong I_0(x')$ , так как в данной области  $U_0(x') \gg U_{щ}(x')$ .

Таким образом, для дополнительных объектов - щели и проволоки одинаковых размеров, распределение интенсивности на экране одинаково всюду, за исключением области, куда попадает исходный пучок в случае отсутствия препятствия. Если толщина проволоки такова, что размер первого дифракционного максимума для щели такой же ширины, как и проволока, превышает размер пучка лазера, то для обоих объектов будут совпадать координаты как всех минимумов, так и всех максимумов дифракционной картины.

## Задачи работы.

В данной работе предлагается изучить дифракционную картину от одной щели с помощью программы TopView, а также определить по дифракционной картине диаметр нескольких тонких проволок.

1. Соберите установку для наблюдения дифракции на щели. Установите зеленый лазер, щель и столик с камерой.
2. Пронаблюдайте дифракционную картину, когда камера стоит близко к щели – в этом случае будет наблюдаться наибольшее количество максимумов.
3. Увеличивайте расстояние между камерой и щелью. Обработав данные с камеры для различных величин смещения камеры относительно начального положения, постройте график зависимости положения первого минимума от величины смещения  $\Delta d$  камеры. Из наклона прямой определите ширину щели  $b$ , из точки пересечения прямой с осью абсцисс определите начальное расстояние между камерой и щелью  $d_0$ . Оцените погрешность измерений.
4. Для случая, когда наблюдается наибольшее количество максимумов, постройте на одном графике наблюдаемые интенсивности максимумов  $I(x)$  (исключив главный максимум) и приведенные интенсивности, вычисленные по формуле (2). Используйте значения  $d_0$  и  $b$ , полученные в предыдущем пункте. Размер пикселя камеры составляет 4,5 мкм. Фотографирование осуществляется кнопкой «кадр». Затем можно выбрать в меню «измерения»/«линия», провести линию между минимумами и получить расстояние в пикселях. Если выбрать затем «обработка»/«профиль линии», можно получить ее профиль.
5. Соберите установку для наблюдения дифракции на проволоке. Установите гелий-неоновый лазер (длина волны в воздухе 632,816 нм), рамку с проволокой в держателе и столик с камерой.
6. Получите дифракционную картину, выбрав подходящее расстояние от объекта до камеры. Измерьте это расстояние, расстояние между минимумами дифракционной картины и по формуле (1) вычислите диаметр проволоки. Оцените погрешность измерений.
7. Проведите аналогичные измерения для второй проволоки.

## в. Дифракция на решетке с N щелями.

Пусть плоская монохроматическая волна (с длиной волны  $\lambda$ , волновой вектор  $k = 2\pi/\lambda$ ) падает перпендикулярно решётке с периодом  $d$  (см. рисунок 2). Точка наблюдения находится под углом  $\Theta$  (угол дифракции) к  $n_s$ . Тогда разность хода между вторичными волнами, исходящими из соседних щелей решётки, будет равна  $d \sin \Theta$ , а разность фаз этих волн  $\delta$  равна  $\Delta_2 - \Delta_1 = d \sin \Theta \cdot k = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \Theta$ .

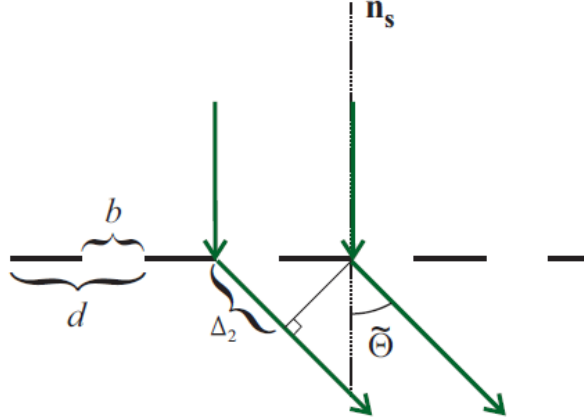


Рис. 2: Дифракция Фраунгофера на решётке.

Если электрическое поле в точке наблюдения, излучаемое первой щелью, равно  $E_1(\Theta)$  (см. выражение 1), то поля, излучаемые щелями с номерами  $n$ , равны:

$$E_n(\Theta) = E_1(\Theta)e^{-i\delta n},$$

а результирующее поле в точке наблюдения, излучаемое всеми  $N$  щелями, определяется суммой всех полей  $E_n$ :

$$E(\Theta) = E_1(\Theta) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\delta n}. \quad (3)$$

Сумму в выражении 3 можно вычислить, пользуясь формулой для суммы геометрической прогрессии:

$$E(\Theta) = E_1(\Theta) \cdot \frac{e^{-i\delta N} - 1}{e^{-i\delta} - 1} = E_1(\Theta) \cdot e^{i\delta(N/2-1)} \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}. \quad (4)$$

Далее полагается, что  $\Theta_i = 0$ . Распределение интенсивности по углам определяется следующим соотношением:

$$\begin{aligned} I \propto E^2(\Theta) &\propto \left[ \frac{\sin(\delta_1/2)}{\delta_1/2} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right]^2 = \\ &= \left[ \frac{\sin(\frac{kb}{2} \sin \Theta)}{\frac{kb}{2} \sin \Theta} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\sin(N\frac{kd}{2} \sin \Theta)}{\sin(\frac{kd}{2} \sin \Theta)} \right]^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Правый множитель определяет положения наблюдаемых максимумов, левый - распределение интенсивности дифрагированного излучения по углам наблюдения.

Положения максимумов определяются из условия:

$$d \sin \Theta = m\lambda, \quad (6)$$

где  $m$  – целое число, называемое порядком максимума.

## г. Дифракция на концентрирующей отражательной решетке (blazed grating, решетка с углом блеска).

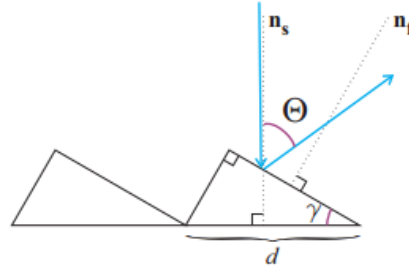


Рис. 3: Дифракция на концентрирующей отражающей решётке.

Для практических целей часто используются отражающие решётки с треугольным профилем. Такие решётки позволяют концентрировать дифрагированное излучение в ненулевом порядке. Концентрирующая отражающая решётка характеризуется углом скоса ( $\gamma$ ), определяющим, в каком порядке  $m$  будет наблюдаться максимум дифрагированного излучения в зависимости от длины волны. Профиль такой решётки изображён на Рис. 3.

Распределение интенсивности по углам (5) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} I \propto E^2(\Theta) &\propto \left[ \frac{\sin(\delta_1/2)}{\delta_1/2} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right]^2 = \\ &= \left[ \frac{\sin(\frac{\pi d \cos \gamma}{\lambda} (\sin(\Theta - \gamma) - \sin(\gamma)))}{\frac{\pi d \cos \gamma}{\lambda} (\sin(\Theta - \gamma) - \sin(\gamma))} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\sin(N\frac{\pi d}{\lambda} \sin \Theta)}{\sin(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \Theta)} \right]^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Первый множитель определяет распределение интенсивности по углам. Второй множитель определяет положения наблюдаемых дифракционных максимумов:  $d \sin \Theta = m\lambda$ .

Обычно в техническом паспорте решётки указаны  $\lambda_p$  и  $\gamma$ , соответствующие наблюдению максимума интенсивности в первом порядке,  $m = 1$ . При  $\lambda = \lambda_p$  геометрия наблюдения максимумов в случае концентрирующей отражающей решётки определяется условием (6), как и для обычной решётки, а наиболее яркий максимум наблюдается под углом  $\phi_B = 2\gamma$ . В общем случае, когда  $\lambda \neq \lambda_p$ , понятие угла блеска теряет смысл, но при длинах волн, близких к  $\lambda_p$ , как нетрудно убедиться, максимум интенсивности будет наблюдаться в  $m = 1$ .

## Задачи работы.

1. Соберите установку для наблюдения дифракции на отражательной решетке. Возьмите гелий-неоновый лазер с известной длиной волны 6328А, направьте луч на дифракционную решетку №1 под прямым углом, так чтобы дифракционные максимумы расположились вдоль линейки на стене. Определите положения максимумов.
2. Постройте на графике положения максимумов  $\sin(\Theta)(m)$ . Из коэффициента наклона прямой определите постоянную решетки  $d$ . Определите число штрихов на единицу длины  $a$ .
3. Замените гелий-неоновый лазер на зеленый, повторите пункты 1-2. Используя постоянную решетки  $d$ , найденную в предыдущем пункте, определите длину волны зеленого лазера. Оцените погрешность.
4. Замените решетку на концентрирующую решетку №3. С помощью измерителя мощности измерьте интенсивность света в максимумах. Постройте график зависимости  $I(\Theta)$ . Аппроксимировав полученную зависимость (см. (7)), определите угол скоса решетки  $\gamma$ .