符号学习简介

一阶逻辑与逻辑程序（上）

(Press ? for help, n and p for next and previous slide)

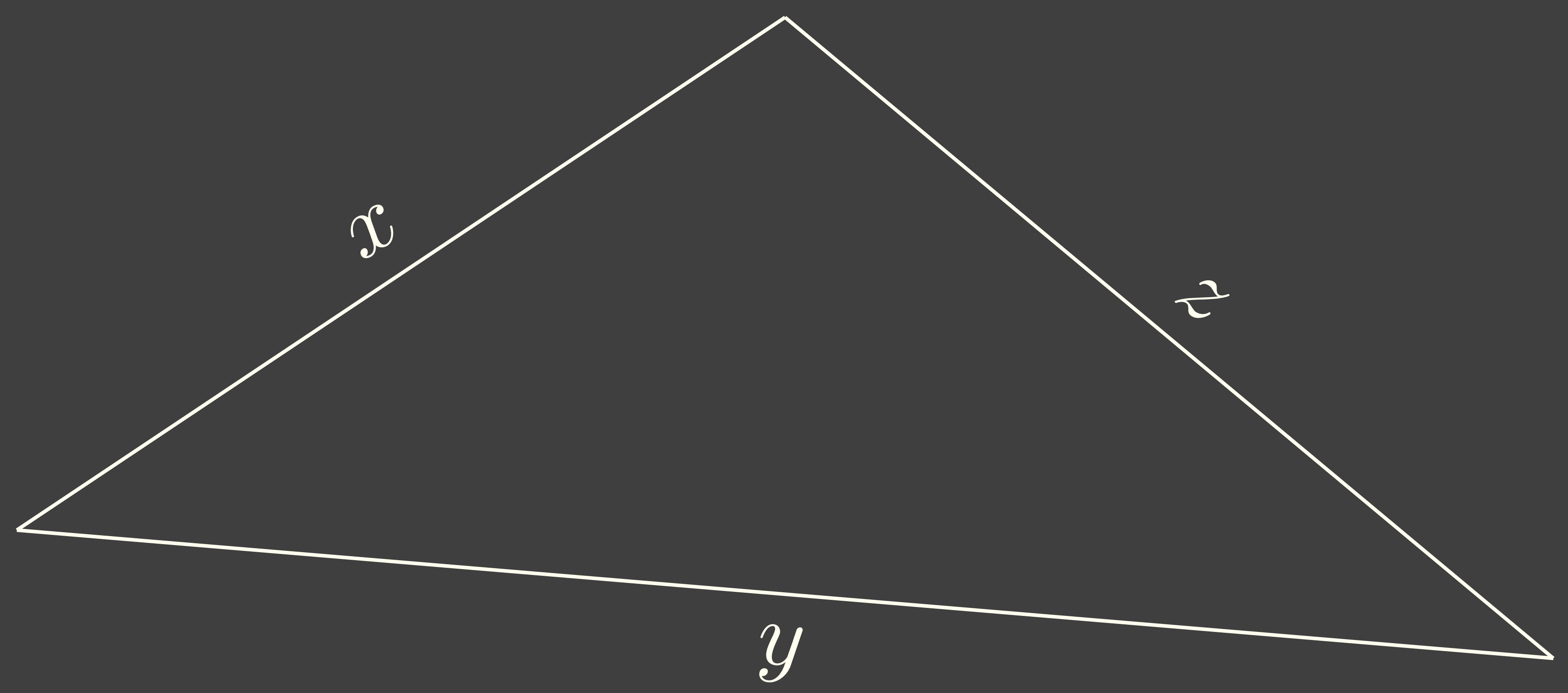
戴望州

南京大学智能科学与技术学院

2025年-秋季

https://daiwz.net

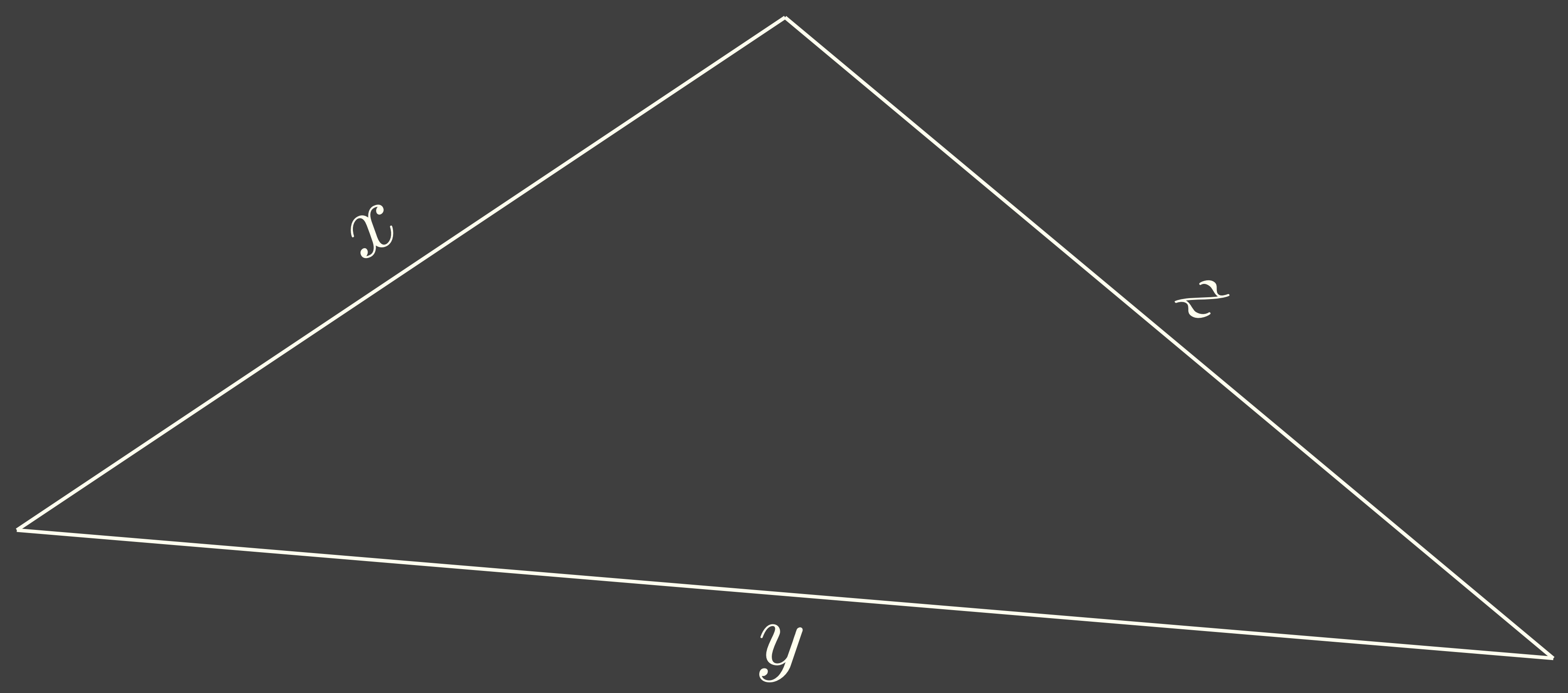
FOIL的缺点



目标概念：$triangle(X, Y, Z)$

- **正样例**：$triangle(3, 4, 5), triangle(8, 12, 7)$
- **负样例**：$triangle(1, 2, 9), triangle(4, 5, 10)$

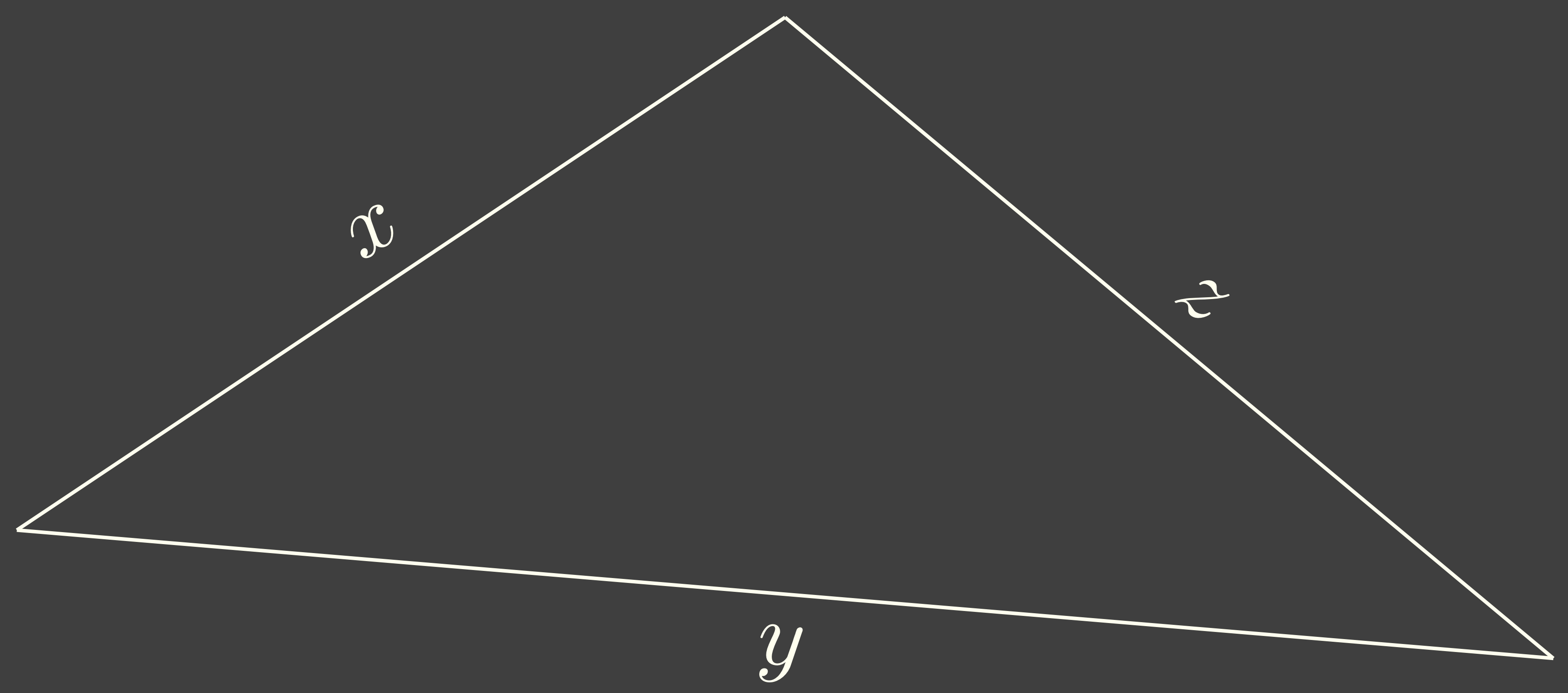
FOIL的缺点



背景知识：

$$
\begin{aligned}
larger\_than(X,Y) &\leftarrow success(Y,X) \\
larger\_than(X,Y) &\leftarrow success(Y,Z), larger\_than(X,Z) \\
sum(X,Y,Z) &\leftarrow Z = X + Y
\end{aligned}
$$

FOIL的缺点

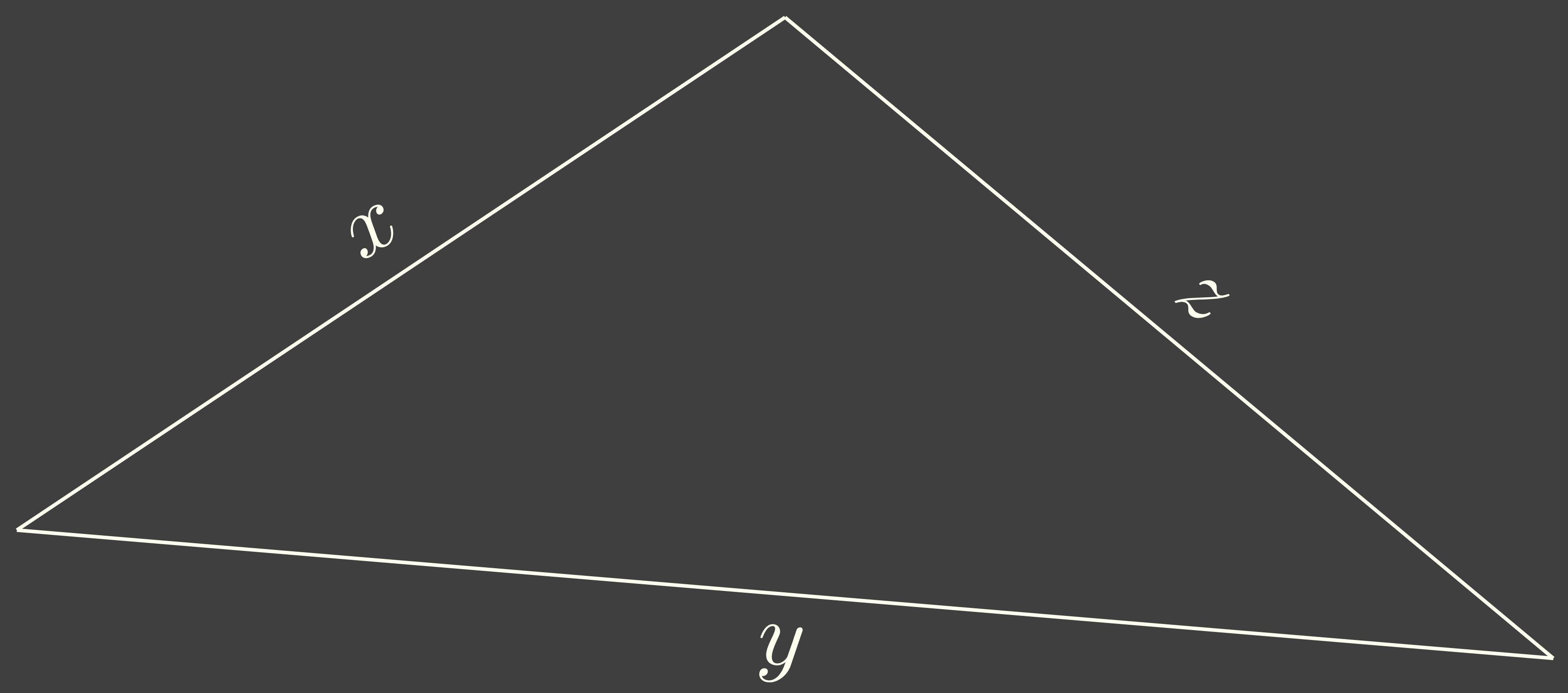


假设概念：$triangle(X, Y, Z) \leftarrow sum(X, Y, A), larger\_than(Z, A)$

覆盖样例：$\langle X, Y, Z, A\rangle$

- **正样例**：$\langle 3, 4, 5, 4\rangle, \langle 3, 4, 5, 5\rangle, \langle 3, 4, 5, 6\rangle, \ldots$
- **负样例**：$\langle 1, 2, 9, 2\rangle, \langle 1, 2, 9, 3\rangle, \langle 1, 2, 9, 4\rangle, \ldots$

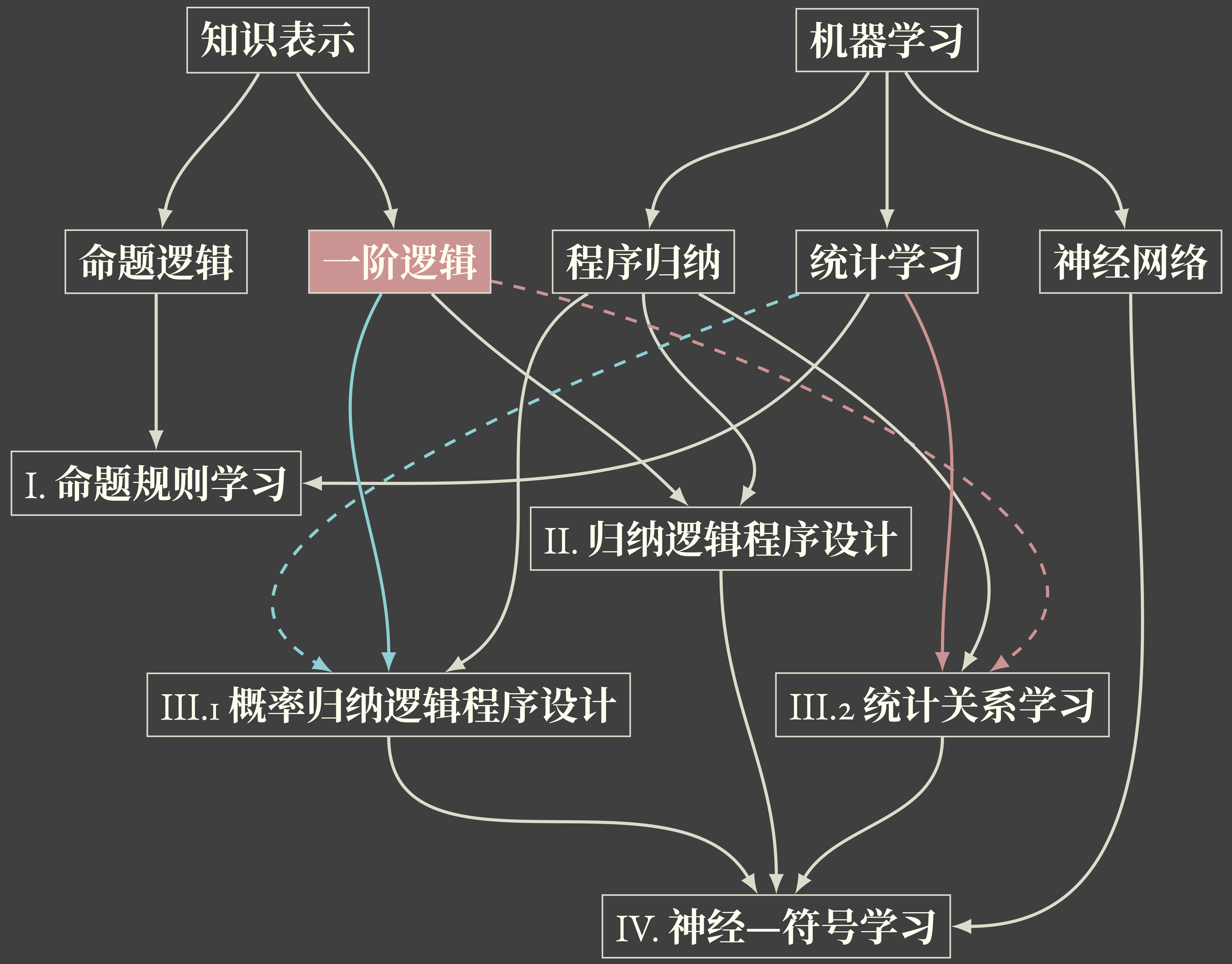
FOIL的缺点



背景知识**不能是一阶逻辑公式**:

$$
\begin{aligned}
larger\_than(X,Y) &\leftarrow success(Y,X)\\
larger\_than(X,Y) &\leftarrow success(Y,Z), larger\_than(X,Z)\\
sum(X,Y,Z) &\leftarrow Z = X + Y
\end{aligned}
$$

路径图


知识表示
机器学习
命题逻辑
一阶逻辑
程序归纳
统计学习
神经网络
I. 命题规则学习
II. 归纳逻辑程序设计
III.1 概率归纳逻辑程序设计
III.2 统计关系学习
IV. 神经–符号学习

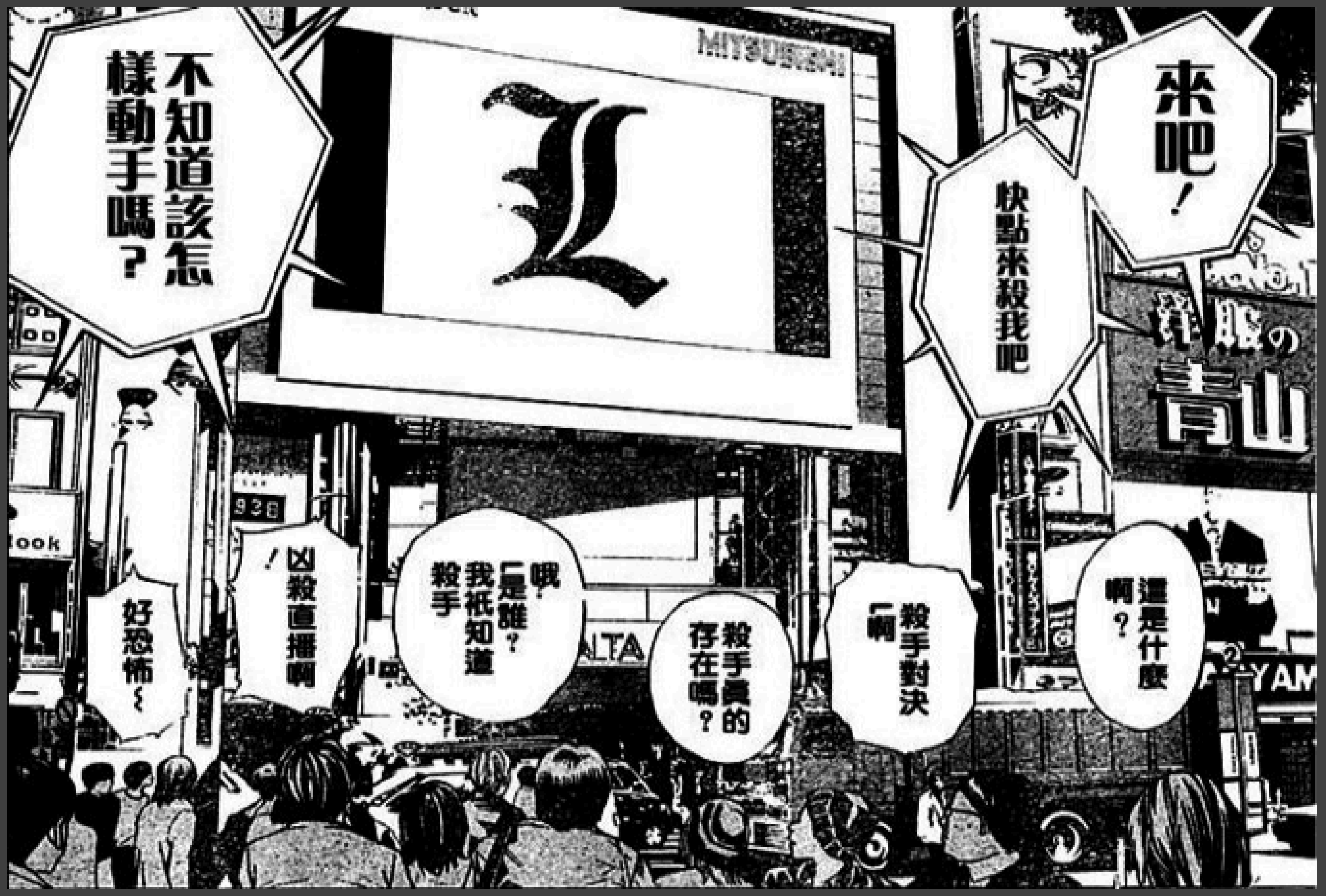
符号学习简介・一阶逻辑与逻辑程序（上）

1. **什么是逻辑**
2. 一阶逻辑语言

这算逻辑吗?

L的推理:

- 所有心脏麻痹的被害人都是罪犯
  - KILLER具有强烈的正义感
- 被害人姓名、样貌几乎都被公开过
  - KILLER杀人需要知道姓名、样貌
- 第一起案件在新宿，罪犯在行凶时暴毙
- 电视只在关东地区直播，假L当场死亡
  - KILLER存在
  - KILLER是日本人



这算逻辑吗?

因果关系不是逻辑

这算逻辑吗?

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

这算逻辑吗?

特定领域的知识不是逻辑

这算逻辑吗?

黄金戒律：己所不欲勿施于人

这算逻辑吗?

道德律令不是逻辑

亚里士多德三段论

快乐 是 短暂的
永恒 是 快乐的

亚里士多德三段论

快乐 是 短暂的
永恒 是 快乐的

永恒 是 短暂的

命题逻辑

A	B	$A \to B$
真	真	真
真	假	假
假	真	真
假	假	真

一阶逻辑（谓词逻辑）

快乐 是 短暂的
永恒 是 快乐的

永恒 是 短暂的

一阶逻辑（谓词逻辑）

$$\frac{\begin{array}{r}\forall X(p(X) \to q(X)) \\ p(c)\end{array}}{q(c)}$$

到底什么是逻辑?

什么是逻辑?

逻辑是关于**真**的

苏格拉底（Socrates）：

- 辩论是为了寻找**真**
- 就算被驳倒了也可能有所收获——**真**

我们预设

在一些情况下,我们可以谈论**真(Truth)**

下述预设大概没什么问题

- 如果我们可以有意义地谈论命题A和B是否为真，那么我们也可以有意义地谈论“**并非**A”、“A**并且**B”等等是否为真。
- 如果我们可以谈论，某个人，例如“苏格拉底会死”是否为真，那么我们也可以有意义地谈论“**所有人**都会死”或“**存在一个**不会死的人”是否为真。

作为“终极”概念的真概念

对任何概念/性质/集合P以及对象a，当我们问a是不是落在概念P之下，我们可以问Pa是不是**真**的。

作为“终极”概念的真概念

- 令$T = \{\sigma \mid \sigma \text{ 是真的}\}$，考虑句子$\tau$说的是$\neg T\tau$
- **问题**：τ是不是真的?

塔斯基（Tarski）：

- 我们只能谈论特定领域的真：$\mathrm{Th}\,\mathfrak{A} = \{\sigma \mid \mathfrak{A} \models \sigma\}$
- $\mathrm{Th}\,\mathfrak{A}$不是$\mathfrak{A}$中可定义的
- 日常语言的**真**是不可定义的

很遗憾

我们无法一劳永逸地把握**真**

什么是逻辑

逻辑谈论的只是关于**真**的一些规律

什么是逻辑

逻辑谈论的只是关于**真**的一些**普遍性**规律

什么是逻辑

“要让我们的推理有规可循，唯一方法是把它做得像数学那样扎扎实实，这样我们一眼就可以看到错误所在，当人们之间产生争议的时候，我们只要说：让我们坐下来算一算（let us calculate），不需要更多的忙乱就可以看到谁是对的。”

——**莱布尼茨（The Art of Discovery）**

符号学习简介・一阶逻辑与逻辑程序（上）

1. 什么是逻辑
2. **一阶逻辑语言**

一阶逻辑的语言

符号:

- **逻辑符号**
  - 括号:$($, $)$
  - 命题连词:$\neg$, $\to$
  - **量词**:$\forall$
  - **变元**:V_1, V_2, $\ldots$

一阶逻辑的语言

符号:

- **非逻辑符号（参数符号）**
  - (*)常数符号：c_1，c_2，$\ldots$
  - (*)函数符号：f_1，f_2，$\ldots$
  - (*)谓词符号：p_1，p_2，$\ldots$
  - 等词：$\equiv$（可有可无）
- (*)可以没有，也可以有无穷多
- 存在能行的函数$g, h : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}^+$告诉我们:
  - 每个f_i是$g(i)$-元函数符号
  - 每个p_i是$h(i)$-元函数符号

各种一阶逻辑语言

我们说“给定一个一阶逻辑语言”就是规定各类参数符号的集合。

- 集合论语言：$\{\equiv, \in\}$
- 初等数论的语言：$\{\equiv, 0, s, <, +, \cdot\}$
- 序关系的语言：$\{\equiv, R\}$

各种一阶逻辑语言

我们说"给定一个一阶逻辑语言"就是规定各类参数符号的集合。

- 集合论语言：$\{\equiv, \in\}$
- 初等数论的语言：$\{\equiv, 0, s, <, +, \cdot\}$
- 序关系的语言：$\{\equiv, R\}$

项（TERM）

给定一个一阶逻辑语言$\mathcal{L}$，定义$\mathcal{L}$中的**项**为:

- 每个变元V_i是项
- 每个$\mathcal{L}$中的常数符号是项
- 如果$t_1, \ldots, t_n$是项且f是$\mathcal{L}$中的n元函数符号，那么$f(t_i, t_2, \ldots, t_n)$也是项

例子：初等数论语言$\{\equiv, 0, s, <, +, \cdot\}$中的项

- V_3
- $s(0)$
- $s(V_1) + s(s(0))$

合式公式（W.F.F.）

给定一个一阶逻辑语言$\mathcal{L}$，定义$\mathcal{L}$中的**合式公式**（well-formed formula）为：

- 如果t_1, t_2是项，那么$t_1 \equiv t_2$是公式（若$\mathcal{L}$中有等词）
- 如果$t_1, \ldots, t_n$是项，且p是一个n元谓词符号，那么$p(t_1, \ldots, t_n)$是公式
- 上述公式被称为**原子公式**（atomic formulae, atoms）
- 如果α, β是合式公式，那么$(\neg\alpha), (\alpha \to \beta)$也是
- 如果α是合式公式，X是变元，那么$\forall X\alpha$也是

注意：$t_1, t_2, \ldots$、$\alpha, \beta, \ldots$、$X, Y, \ldots$是元语言中的符号

缩写规定

常见的缩写：

- $\alpha \vee \beta =_{\mathsf{abbr}} \neg\alpha \to \beta$
- $\alpha \wedge \beta =_{\mathsf{abbr}} \neg(\alpha \to \neg\beta)$
- $\alpha \leftrightarrow \beta =_{\mathsf{abbr}} (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$
- $\exists X\alpha =_{\mathsf{abbr}} \neg\forall X\neg\alpha$

我们习惯称$\forall X$为**全称量词**，称$\exists X$为**存在量词**

一阶逻辑的例子

鬼的存在性：

1. 如果存在存在着的鬼，则鬼存在
2. 存在着的鬼当然存在
3. 鬼存在

一阶逻辑的例子

一阶算数语言：$\{0, \equiv, <, s, +, \cdot\}$

1. 零不是任何数的后继
2. 两个数后继相等，当且仅当它们相等
3. 数学归纳法
4. X是素数

自由出现与约束出现

例子:

给定$\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

$$b = \sum_{i=0}^{k} a_i$$

自由出现与约束出现

例子:

给定$\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

$$b = \sum_{i=0}^{k} a_i$$

自由出现与约束出现

例子：

给定$\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

$$b = \sum_{j=0}^{k} a_j$$

自由出现与约束出现

对公式α递归定义X**在α中自由出现（free）**：

- **当α是原子公式**：X在α中自由出现
- **当**$\alpha = \neg\beta$：X在β中自由出现
- **当**$\alpha = \beta \to \gamma$：$X$在$\beta$或$\gamma$中自由出现
- **当**$\alpha = \forall Y\beta$：X在β中自由出现，且$X \neq Y$

X在$\forall X\alpha$中的出现称做**约束出现（bound）**

我们称一个合式公式α是**语句 (sentence)**，当且仅当没有变元在 α中自由出现

替换（SUBSTITUTION）

我们定义元语言中的一个表达方式$\alpha\theta$，其中$\theta = \{V_1/t_1, V_2/t_2, \ldots\}$

首先对**项**u递归定义$u\theta$，其中$\theta = \{X/t\}$

- **当**$u = Y$：

$$u\theta = \begin{cases} t, & \text{若} X = Y \\ Y, & \text{否则} \end{cases}$$

- **当**$u = f(t_1, \ldots, t_n)$：$u\theta = f(t_1\theta, \ldots, t_n\theta)$

替换（SUBSTITUTION）

例子:

- $u = V_1, \theta = \{V_1 / f(V_1, V_2)\}, u\theta = f(V_1, V_2)$
- $u = V_2, \theta = \{V_1 / c\}, u\theta = V_2$
- $u = f(V_1, g(V_2)), \theta = \{V_2 / g(c)\}, u\theta = f(V_1, g(g(c)))$

替换（SUBSTITUTION）

其次对公式α递归定义$\alpha\theta$，其中$\theta = \{X/t\}$

- **当**$\alpha = t_1 \equiv t_2$：$\alpha\theta = t_1\theta \equiv t_2\theta$
- **当**$\alpha = p(t_1, \ldots, t_n)$：$\alpha\theta = p(t_1\theta, \ldots, t_n\theta)$
- **当**$\alpha = \neg\beta$：$\alpha\theta = (\neg\beta)\theta = \neg\beta\theta$
- **当**$\alpha = \beta \to \gamma$：$\alpha\theta = (\beta \to \gamma)\theta = \beta\theta \to \gamma\theta$
- **当**$\alpha = \forall Y\beta$:

$$\alpha\theta = (\forall Y\beta)\theta = \begin{cases} \alpha, & \text{若} X = Y \\ \forall Y(\beta\theta), & \text{否则} \end{cases}$$

替换（SUBSTITUTION）

例子:

- $\alpha = p(V_1, f(V_2)) \rightarrow \exists V_2 p(V_1, V_2), \theta = \{V_1/c\}$
- $\alpha = p(V_1, f(V_2)) \rightarrow \exists V_2 p(V_1, V_2), \theta = \{V_2/c\}$
- $\alpha = p(V_1, f(V_2)) \rightarrow \exists V_2 p(V_1, V_2), \theta = \theta_1\theta_2, \theta_1 = \{V_1/V_2\}, \theta_2 = \{V_2/V_1\}$

小结

一阶逻辑部分的小结

1. 逻辑是什么
2. 一阶逻辑与命题逻辑的区别