Постановка задачи

Требуется решить уравнение (т.е. найти функцию φ):

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-a\varphi=\rho\,,\ a\geq 0\,, \qquad (1)$$

$$\varphi=\varphi(x,y,z)\,,\ \rho=\rho(x,y,z)\,,$$

в области Ω с краевыми условиями 1-го рода (т.е. на границе G известны значения искомой функции φ):

$$\varphi|_G=F(x,y,z)\,.$$

Область Ω имеет вид прямоугольного параллелепипеда с размерами $D_x \times D_y \times D_z$.

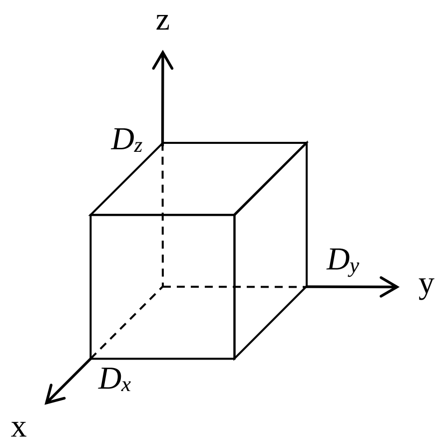

Рис. 1. Область решения Ω

Для численного решения задачи необходимо перейти к ее дискретному аналогу. Для этого введем в области Ω равномерную прямоугольную сетку размером $N_x \times N_y \times N_z$ узлов. Шаги сетки (расстояния между соседними узлами) по осям X, Y, Z будут равны:

$$h_x=\frac{D_x}{N_x-1}\,,\quad h_y=\frac{D_y}{N_y-1}\,,\quad h_z=\frac{D_z}{N_z-1}\,.$$

Тогда координаты узла с произвольными индексами i, j, k вычисляются следующим образом:

$$x_i = x_0 + i\cdot h_x,\ \ y_j = y_0 + j\cdot h_y,\ \ z_k = z_0 + k\cdot h_z,$$

где x_0, y_0, z_0 – начальные координаты области Ω, $i = 0,…,N_x$, $j = 0,…,N_y$, $k = 0,…,N_z$. Вместо непрерывных функций $\varphi(x,y,z)$, $\rho(x,y,z)$, $F(x,y,z)$ в области Ω вводятся сеточные функции $\varphi_{i,j,k}$, $\rho_{i,j,k}$, $F_{i,j,k}$, заданные в узлах сетки:

$$\varphi_{i,j,k} = \varphi(x_i, y_j, z_k),\ \rho_{i,j,k} = \rho(x_i, y_j, z_k),\ F_{i,j,k} = F(x_i, y_j, z_k).$$

На выбранной сетке запишем разностную схему – дискретный аналог уравнения (1):

$$\frac{\varphi_{i+1,j,k} - 2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i-1,j,k}}{h_x^2} + \frac{\varphi_{i,j+1,k} - 2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i,j-1,k}}{h_y^2} + \frac{\varphi_{i,j,k+1} - 2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i,j,k-1}}{h_z^2} - a\varphi_{i,j,k} = \rho_{i,j,k}.$$

Полученная разностная схема связывает значения искомой функции в узлах сетки в некоторой локальной окрестности. Если выразить из нее $\varphi_{i,j,k}$, можно получить формулу для итерационного процесса метода Якоби (здесь m – номер итерации):

$$\varphi_{i,j,k}^{m+1} = \frac{1}{\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} + \frac{2}{h_z^2} + a}\left[\frac{\varphi_{i+1,j,k}^m + \varphi_{i-1,j,k}^m}{h_x^2} + \frac{\varphi_{i,j+1,k}^m + \varphi_{i,j-1,k}^m}{h_y^2} + \frac{\varphi_{i,j,k+1}^m + \varphi_{i,j,k-1}^m}{h_z^2} - \rho_{i,j,k}\right]. \qquad (2)$$

Если, начиная с некоторого начального приближения, многократно перевычислять значения $\varphi_{i,j,k}$ по формуле (2), то они будут постепенно приближаться к искомому решению. Условие завершения итерационного процесса по достижению некоторого порога сходимости:

$$\max_{i,j,k}\left|\varphi_{i,j,k}^{m+1} - \varphi_{i,j,k}^m\right| < \varepsilon. \qquad (3)$$

В целом алгоритм решения задачи методом Якоби выглядит следующим образом.

Вход алгоритма:

- параметры области моделирования: x_0, y_0, z_0, D_x, D_y, D_z,
- параметр уравнения a,
- значения функции правой части $\rho(x,y,z)$ в области Ω,
- значения искомой функции $\varphi(x,y,z)$ на границе области Ω,
- начальное приближение решения во внутренней части области Ω,
- порог сходимости ε.

Шаги алгоритма:

1. Задать значения искомой функции на границе области Ω: $\varphi_{i,j,k} = F(x_i, y_j, z_k)$, при $i=0$, $i=N_x$, $j=0$, $j=N_y$, $k=0$ и $k=N_z$.
2. Задать начальное приближение во внутренней части области Ω: $\varphi_{i,j,k}^0$, для $i=1,…,N_x-1$, $j=0,…,N_y-1$, $k=0,…,N_z-1$.
3. Многократно вычислять очередное приближение искомой функции по формуле (2) до достижения условия (3).

Выход алгоритма:

- Значения искомой функции $\varphi_{i,j,k}$ в области Ω.

Дополнительно в качестве оценки точности полученного решения вычислим значение:

$$\Delta = \max_{i,j,k} \left| \varphi^{m}_{i,j,k} - \varphi^{*}_{i,j,k} \right|,$$

где $\varphi^{m}_{i,j,k}$ – вычисленное значение функции φ в узле i,j,k, а $\varphi^{*}_{i,j,k}$ – точное значение функции φ в узле i,j,k.

Так как обмен данными между процессами является времяемкой операцией, имеет смысл выполнять коммуникации на фоне вычислений. В этом случае порядок действий на каждой итерации в каждом процессе выглядит следующим образом:

- вычисляются сеточные значения, прилегающие к границе локальной подобласти,
- запускается асинхронный обмен граничных значений,
- выполняется вычисление остальных точек подобласти,
- ожидание завершения обменов.

Исходные данные задачи

Исходные данные для тестирования реализаций представленного метода и выполнения лабораторной работы можно взять следующие:

область моделирования: [-1;1] × [-1;1] × [-1;1],

искомая функция: $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$,

правая часть уравнения: $\rho(x, y, z) = 6 - a \cdot \varphi(x, y, z)$,

параметр уравнения: $a = 10^5$,

порог сходимости: $\varepsilon = 10^{-8}$,

начальное приближение: $\varphi^0_{i,j,k} = 0$.