Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный
инженерно-экономический университет»

Кафедра высшей математики

ЗАОЧНОЕ ОБУЧЕНИЕ

УТВЕРЖДАЮ
Проректор
по учебно-методической работе
и качеству образования
д.э.н., профессор

_______________В.И. Малюк

Рег. № **М-625**

МАТЕМАТИКА

Методические указания к изучению дисциплины и выполнению контрольных работ №1,2 для студентов I курса заочной формы обучения

Для всех специальностей

Санкт-Петербург
2009

Допущено
редакционно-издательским советом СПбГИЭУ
в качестве методического издания

Составители:
канд. технических наук, доцент *В.Н. Ассаул*
канд. технических наук, доцент *А.В. Соколова*
старший преподаватель *А.М. Васильев*
старший преподаватель *Н.А. Полозенко*

Рецензент
канд. физ.-мат. наук, доц. *А.М. Балонишников*

Подготовлено на кафедре высшей математики

Одобрено научно-методическим советом университета

Отпечатано в авторской редакции с оригинал-макета,
представленного составителями

Содержание

1. Общие положения

Цель курса – дать необходимый математический аппарат и привить навыки его использования при решении инженерно-экономических задач.

Задачи дисциплины - освоение методов математи-ческого моделирования экономических ситуаций, математических методов их исследования и решения (аналитически и при помощи вычислительной техники), методов анализа полученных результатов. Это способствует также развитию логического и алгоритмического мышления.

Значительная часть материала выносится на самостоятельную проработку, что служит развитию навыков самостоятельного изучения литературы по математике и ее приложениям.

Математика как учебная дисциплина в системе обучения бакалавров и дипломированных специалистов опирается на школьный курс математики, используя все его разделы.

По завершении изучения курса математики студент должен освоить предложенный теоретический материал и уметь решать практические задачи в рамках данного курса.

Изученные в курсе математики методы и алгоритмы используются во всех параллельных с ним и следующих за ним дисциплинах. Формой контроля являются **зачет (1 курс), зачет (2 курс), экзамен (3 курс).**

2. Методические указания к изучению дисциплины

Рекомендуется изучение методического пособия в порядке изложения материала. Возможно изучение отдельной темы. В качестве дополнительной литературы рекомендуется использовать издания, указанные в списке литературы.

В методических указаниях приведены краткие теоретические сведения по каждому типу задач с подробными пояснениями к их решению. Методические указания могут быть использованы студентами заочной формы обучения при выполнении контрольных работ, а также при подготовке к экзамену и зачету.

Контрольная работа №1 включает задания по следующим темам:

1. Решение матричных уравнений (1 задание);
2. Решение систем линейных уравнений (1 задание);
3. Основы дифференциального исчисления (2 задания);
4. Функции двух переменных (1 задание);
5. Неопределенный интеграл (2 задания);
6. Определенный интеграл (1 задание);
7. Дифференциальные уравнения (2 задания);
8. Ряды (1 задание).

Контрольная работа №2 включает по одному заданию по следующим темам:

1. Случайные события;
2. Случайные величины;
3. Графический метод решения задачи линейного программирования;
4. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования;
5. Транспортная задача.

Целостное представление о содержании курса дает Приложение 1. Содержание дисциплины (извлечение из рабо-чей программы дисциплины), где показаны принципы и логика построения дисциплины.

Необходимость выпуска настоящего пособия вызвана особенностями заочной формы обучения.

3. Методические указания к выполнению контрольной работы

Выполнение контрольной работы служит решению задачи получения студентами необходимых практических навыков по решению заданий из курса математики. Прежде чем приступить к их выполнению, необходимо внимательно изучить соответствующие разделы Методических указаний, попробовав самостоятельно решить разобранные примеры. В случае возникновения затруднений, а также при необходимости более глубокого изучения вопроса, следует обратиться к рекомендованной учебно-методической литературе.

Процесс работы над контрольной работой является важным этапом подготовки к зачету.

Номер выполняемой работы определяется путем деления шифра (номера зачетной книжки) на 20 и равен остатку, получающемуся при делении. Например, для зачетной книжки №1972 это вариант №12.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

ТЕМА 1. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Задача 1 связана с действиями над матрицами. Для решения этой задачи следует использовать следующие сведения.

Система $m \cdot n$ чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов, называется *матрицей* размера $m \times n$ и записывается в виде:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} = \left\{ a_{ij} \right\} \begin{matrix} i = 1 \div m \\ j = 1 \div n \end{matrix}$$

Матрица размера $m \times m$ называется квадратной матрицей порядка m. Диагональ квадратной матрицы, идущая от левого верхнего угла к правому нижнему, называется *главной диагональю*, а вторая диагональ называется побочной.

Квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а остальные цифры нули, называется *единичной матрицей* и обозначается следующим образом:

$$E_{m \times m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ . & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 \end{pmatrix}$$

Две матрицы одной размерности равны друг другу, если равны все элементы этих матриц, стоящие на одинаковых местах.

Произведением матрицы на число α называется матрица, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента матрицы на число α .

Суммой двух матриц одной размерности называется матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов двух матриц.

Пусть даны две матрицы $A_{m \times n}$ и $B_{n \times k}$, таких что число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . Тогда произведением матриц $A_{m \times n}$ и $B_{n \times k}$ называется матрица $C_{m \times k}$,каждый элемент которой C_{ij} равен сумме попарных произведений элементов i-той строки матрицы A на соответствующие элементы j-того столбца матрицы B, т.е.

$$C_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \ldots + a_{in} b_{nj} \quad i = 1 \ldots m, \; j = 1 \ldots к.$$

Заметим, что $A \cdot B \neq B \cdot A$

Каждой квадратной матрице ставится в соответствие число

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{vmatrix}$$

Рассмотрим определители для матриц первого, второго и третьего порядков:

а) Пусть $A = (a_{11})$, тогда $\Delta_A = |a_{11}| = a_{11}$ (1)

Из формулы (1) следует, что определитель для матрицы первого порядка совпадает с элементом матрицы $A_{1 \cdot 1}$

б) Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{pmatrix}$,тогда $\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ (2)

Из формулы (2) следует, что определитель для матрицы второго порядка равен разности произведений элементов матрицы, стоящих на главной и побочной диагоналях.

в.) Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix}$, тогда

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + \qquad (3)$$

$$+ a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Для удобства запоминания формулы (3) можно использовать «правило треугольников», которое условно показано на схемах 1 и 2 .

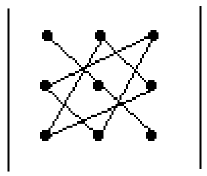

схема 1

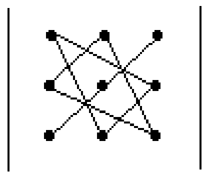

схема 2

Первые три слагаемые, входящие в формулу (3) со своим знаком, подсчитываются в соответствии со схемой 1 , а следующие три слагаемые, входящие с противоположным знаком, подсчитываются по схеме 2 .

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} квадратной матрицы $A_{m\times m}$ называется число A_{ij}, вычисляемое по формуле:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где M_{ij} –определитель, полученный из определителя матрицы $A_{m\times m}$ удалением строки с номером i и столбца с номером j .

Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E - единичная матрица. Из определения следует, что матрицы A и A^{-1} - квадратные матрицы одного порядка. Квадратная матрица имеет обратную, если ее определитель отличен от нуля и $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta_A} \begin{pmatrix} A_{11} A_{21} \ldots\ldots A_{m1} \\ A_{12} A_{22} \ldots\ldots A_{m2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1m} A_{2m} \ldots\ldots A_{mn} \end{pmatrix}$, где A_{ij} -алгебраические дополнения элемента a_{ij} матрицы $A_{m\times m}$.

Рассмотрим матричное уравнение $A \cdot X = B$, где A и B - заданные матрицы, причем A - квадратная матрица, определитель которой не равен 0. Тогда $X = A^{-1} \cdot B$.

Для уравнения $X \cdot A = B$, где A и B - заданные матрицы, причем A - квадратная матрица, определитель которой не равен нулю, имеем $X = B \cdot A^{-1}$.

Пример1. Найти A^{-1} , если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение.

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 2 = -11 \neq 0.$ Следовательно, обратная матрица существует.

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |-3| = -3$ $\qquad$ $\mathrm{A}_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |2| = -2$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot |1| = -1$ $\qquad$ $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot |3| = 3$

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{-11}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{2}{11} & -\frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

Сделаем проверку. Для этого умножим A на A^{-1} и убедимся, что получим единичную матрицу.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{2}{11} & -\frac{3}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} + \frac{2}{11} & \frac{3}{11} - \frac{3}{11} \\ \frac{6}{11} - \frac{6}{11} & \frac{2}{11} + \frac{9}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример2.

Решить уравнение $AX - B = C$, где

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Решение. $AX = C + B \qquad X = A^{-1}(C+B)$

$$C+B=\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\3\\1\end{pmatrix} \quad \Delta_A=\begin{vmatrix}-3 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=$$

$$= -3\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot(-1)\cdot 2 + 1\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 1 - 0\cdot(-1)\cdot(-3) - 1\cdot 2\cdot 2 = -16$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-4,\ A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-4,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-8,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=4,\ A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-5$$

*Т*огда $$A^{-1}=-\frac{1}{16}\begin{pmatrix}2 & -4 & -2\\ -4 & -8 & 4\\ -3 & -2 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{3}{16} & \frac{1}{8} & \frac{5}{16}\end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{8} & \frac{5}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{13}{4} \\ \frac{35}{16} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Проверка}: \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{13}{4} \\ \frac{35}{16} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} + \frac{13}{4} + \frac{35}{8} \\ -\frac{1}{4} + \frac{13}{4} \\ -\frac{1}{8} - \frac{13}{4} + \frac{35}{8} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ}: X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{13}{4} \\ \frac{35}{16} \end{pmatrix}.$$

Контрольные задания

1.1-1.20. Решить матричные уравнения и сделать проверку.

1.1 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

1.2 $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.3 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.4 $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1.5 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

1.6 $$2\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot X+3\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$$

1.7 $$X\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

1.8 $$X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 5 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

1.9 $$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ -4 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}4\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$$

1.10 $$3\cdot X\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 4\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 1 & -1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

1.11 $$X\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 3\\ 1 & 4 & -2\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}5 & -1 & -3\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

1.12 $$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}$$

1.13 $$\begin{pmatrix}-3 & -1 & -4\end{pmatrix}-X\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

1.14 $$5\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 4 & 2\\ 3 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot X=2\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

1.15 $$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}-X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 1\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

1.16 $$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}-2X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

1.17 $$3\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot X=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

1.18 $$4\cdot\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot X-=2\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 4\end{pmatrix}$$

1.19 $$2\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\end{pmatrix}-X\cdot\begin{pmatrix}-1 & -4 & -2\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

1.20 $$\begin{pmatrix}5\\ 1\\ -1\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$$

ТЕМА 2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Уравнение называется линейным, если неизвестные величины входят в него только в первой степени и с постоянными коэффициентами. Система линейных алгебраических уравнений может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+........+a_{1j}x_j+.....+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+.......+a_{2j}x_j+.....+a_{2n}x_n=b_2\\ ----------------------\\ a_{m1}x_1+.......+a_{mj}x_j+.....+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases} \qquad (1)$$

где $x_1,.......x_n$ – переменные, а a_{ij} и b_i $(i=1..m;\ j=1..n)$ – известные числа.

Среди различных методов решения системы (1) наиболее эффективным и важным для дальнейшего является метод Жордана−Гаусса.

Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Жордана−Гаусса заключается в последовательном исключении переменных при помощи тождественных преобразований, приводящих систему к эквивалентной ей системе с базисом.

Система линейных алгебраических уравнений называется системой с базисом, если в каждом ее уравнении имеется неизвестное, входящее в данное уравнение с коэффициентом, равным единице, и не входящее ни в одно из остальных уравнений. Если предположить, что в k-м уравнении выделенной служит неизвестная x_k, то систему с базисом можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_1 + \ldots\ldots + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad x_2 + \ldots + a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ -------------------- \\ \qquad x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

Неизвестные $x_1, x_2, \ldots\ldots x_m$ называют *базисными*, а остальные $(x_{m+1}, x_{m+2, \ldots\ldots\ldots} x_n)$ – свободными. Если члены, содержащие свободные неизвестные, перенести в правые части уравнений, то система (2) запишется в следующей форме:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - a_{1m+1}x_{m+1} - \ldots\ldots - a_{1n}x_n \\ x_2 = b_2 - a_{2m+1}x_{m+1} - \ldots\ldots - a_{2n}x_n \\ ----------------- \\ x_m = b_m - a_{mm+1}x_{m+1} - \ldots - a_{mn}x_n \end{cases} \qquad (3)$$

Соотношения (3) дают *общее решение* системы (2): свободные переменные могут принимать произвольные значения, а значения базисных переменных определяются системой (3).

Если все свободные переменные положить равными нулю, то базисные переменные будут равны правым частям уравнениям. Такое решение называют *базисным*.

Для получения решения системы линейных алгебраических уравнений достаточно привести эту систему к виду системы с базисом, то есть в каждом уравнении выделить базисную переменную.

Весь алгоритм метода Жордана−Гаусса оформляется в виде последовательных таблиц, отражающих выполняемые преобразования системы. Каждая строка таблицы соответствует одному из уравнений. В первом столбце записывают правые части уравнений, в остальных – коэффициенты при неизвестных.

Приведем основные правила метода Жордана−Гаусса и затем проиллюстрируем его применение на конкретном примере.

Каждый шаг преобразований по методу Жордана−Гаусса требует выполнения следующих действий:

1.*Выбор ключевого (главного) элемента.*

За *ключевой элемент* строки можно принять любой отличный от нуля коэффициент при одном из неизвестных. Строку и столбец ключевого элемента называют *ключевыми*.

2.*Преобразование ключевой строки.*

Все элементы ключевой строки делятся на ключевой элемент, при этом на месте ключевого элемента появляется единица. Ключевую строку помечают, например, символом * слева от таблицы. Это позволяет в дальнейшем контролировать количество уже преобразованных ключевых строк.

3.*Назначение дополнительных множителей.*

Каждой неключевой строке исходной таблицы ставится в соответствие множитель, равный взятому с обратным знаком ее элементу, стоящему в ключевом столбце. Эти множители приписывают справа от таблицы.

4.*Преобразование неключевых строк.*

Для преобразования неключевой строки нужно каждый элемент преобразованной ключевой строки умножить на дополнительный множитель преобразуемой строки и сложить с соответствующим элементом неключевой строки.

5.*Появление нулевой строки.*

Если в ходе вычислений появляется строка, состоящая из одних нулей, то такая строка вычеркивается из таблицы, поскольку соответствующее ей уравнение является следствием остальных уравнений системы.

6.*Окончание преобразования таблицы.* Преобразование строк таблицы продолжается до тех пор, пока не останется непомеченных строк. При этом возможны три случая:

а) количество меток равно количеству переменных; в этом случае решение задачи единственно и ключевые переменные равны правым частям последней таблицы.

б) количество меток меньше количества переменных; в этом случае существует бесконечное число решений задачи; ключевые переменные при этом выражаются через остальные, т.е. свободные переменные, которые могут принимать произвольные значения.

в) в ходе преобразования строк появляется противоречивая строка, в которой все коэффициенты при неизвестных равны нулю, а свободный член отличен от нуля; в этом случае система не имеет решений, поскольку соответствующее уравнение системы не выполняется ни при каких значениях переменных.

Пример. Решить систему уравнений методом Жордана-Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + \;\; x_3 - 2x_4 + \;\; x_5 \; = -4 \\ 2x_1 - \;\; x_2 + \;\; 5x_3 - \;\; x_4 + \;\; 7x_5 = 12 \\ 3x_1 - 6x_2 + \;\; x_3 - 4x_4 - \;\; 3x_5 = -9 \\ 7x_1 - 8x_2 + 11x_3 - 6x_4 + 11x_5 = 15 \end{cases} \tag{4}$$

Решение. Занесем коэффициенты системы в таблицу согласно описанным выше правилам (см. Табл.1).

В Таблице 1 приведены промежуточные таблицы Т.1–Т.4, соответствующие последовательным этапам решения данной задачи.

В Т.1-Т.4 звездочками отмечены строки, в которых уже был выбран ключевой элемент. В Т.4 появляется строка, в которой все коэффициенты при неизвестных равны нулю. Эта строка исключается, после чего уже в каждой строке таблицы имеется ключевой элемент.

Таблица 1

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**Дополнит. множитель**
	-4	**1**	-5	1	-2	1	--
Т.1	12	2	-1	5	-1	7	-2
	-9	3	-6	1	-4	-3	-3
	15	7	-8	11	-6	11	-7
*	-4	1	-5	1	-2	1	2
	20	0	9	3	**3**	5	--
Т.2	3	0	9	-2	2	-6	-2
	43	0	27	4	8	4	-8
*	28/3	1	1	3	0	13/3	-1
*	20/3	0	3	1	1	5/3	-3
Т.3	-31/3	0	**3**	-4	0	-28/3	--
	-31/3	0	3	-4	0	-28/3	-3
*	115/9	1	0	13/3	0	67/9	
*	17	0	0	5	1	11	
*	-31/9	0	1	-4/3	0	-28/9	
Т.4	0	0	0	0	0	0	

Таблица Т.4 дает запись системы с базисом, эквивалентной исходной:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{13}{3}x_3 + \frac{67}{9}x_5 = \frac{115}{9} \\ 5x_3 + x_4 + 11x_5 = 17 \\ x_2 - \frac{4}{3}x_3 - \frac{28}{9}x_5 = -\frac{31}{9} \end{cases}$$

Общее решение этой системы, а значит и исходной, дается формулами:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{115}{9} - \frac{13}{3}x_3 - \frac{67}{9}x_5 \\ x_4 = 17 - 5x_3 - 11x_5 \\ x_2 = -\frac{31}{9} + \frac{4}{3}x_3 + \frac{28}{9}x_5 \\ x_3, x_5 - \textit{произвольные числа}. \end{cases}$$

Положив свободные переменные равными нулю $x_3 = x_5 = 0$, получаем базисное решение $X_{баз.} = (\frac{115}{9}; -\frac{31}{9}; 0; 17; 0)$.

Чтобы убедиться в правильности полученного решения, следует сделать проверку. Для этого нужно подставить общее решение в исходные уравнения системы. Все уравнения должны при этом обратиться в тождества. Если этого не происходит, следует искать ошибку в вычислениях.

В нашем примере подстановка общего решения в уравнения системы (4) приводит к следующим соотношениям:

$$\frac{115}{9} - \frac{13}{3}x_3 - \frac{67}{9}x_5 - 5\cdot(-\frac{31}{9} + \frac{4}{3}x_3 + \frac{28}{9}x_5) + x_3 - 2\cdot(17 - 5x_3 -$$
$$-11x_5) + x_5 = -4$$

$$2\cdot(\frac{115}{9} - \frac{13}{3}x_3 - \frac{67}{9}x_5) - (-\frac{31}{9} + \frac{4}{3}x_3 + \frac{28}{9}x_5) + 5x_3 - (17 - 5x_3 -$$
$$11x_5) + 7x_5 = 12$$

$$3\cdot(\frac{115}{9} - \frac{13}{3}x_3 - \frac{67}{9}x_5) - 6\cdot(-\frac{31}{9} + \frac{4}{3}x_3 + \frac{28}{9}x_5) + x_3 - 4\cdot(17 -$$
$$-5x_3 - 11x_5) - 3x_5 = -9$$

$$7\cdot\left(\frac{115}{9}-\frac{13}{3}x_3-\frac{67}{9}x_5\right)-8\cdot\left(-\frac{31}{9}+\frac{4}{3}x_3+\frac{28}{9}x_5\right)+11x_3-6\cdot(17-$$
$$-5x_3-11x_5)+11x_5=15.$$

Нетрудно убедиться, что все уравнения превращаются в тождества. Следовательно, задача решена верно.

Если бы в условиях рассмотренного примера правая часть последнего уравнения системы (4) была равна числу, отличному от 15, в таблице Т.4 вместо нулевой появилась бы противоречивая строка и система не имела бы решений.

Контрольные задания

2.1–2.20. Решить систему методом Жордана–Гаусса. Найти общее решение и два частных решения. Сделать проверку.

2.1.
$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + 6x_3 + 7x_4 = -9 \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -4 \\ 29x_1 - 43x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -21 \end{cases}$$

2.2.
$$\begin{cases} 37x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 2x_4 = -11 \\ 34x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 17x_4 = -9 \\ -5x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 2 \end{cases}$$

2.3.
$$\begin{cases} 16x_1 - 3x_2 + 11x_3 + 2x_4 = -15 \\ 14x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 3x_4 = -5 \\ 6x_1 - 4x_2 - 16x_3 - 5x_4 = -43 \end{cases}$$

2.4.
$$\begin{cases} 9x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 18 \\ x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 16 \\ 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 9 \end{cases}$$

2.5.
$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 + 23x_3 + 11x_4 = -15 \\ 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 5x_4 = -6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 12x_4 = 9 \end{cases}$$

2.6.
$$\begin{cases} 9x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 26 \\ 2x_1 - 3x_2 + 37x_3 - 7x_4 = 10 \\ 17x_1 - 5x_2 - 34x_3 + 2x_4 = 44 \end{cases}$$

2.7.
$$\begin{cases} 13x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 11x_4 = -5 \\ 7x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 11x_4 = -23 \\ 15x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -27 \end{cases}$$

2.8.
$$\begin{cases} 23x_1 - 11x_2 - 7x_3 - 5x_4 = 4 \\ 10x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 11x_1 - 12x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -21 \end{cases}$$

2.9.

2.10.

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 16x_3 + 23x_4 = 16 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 7x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8x_1 + 11x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 9 \\ 7x_1 + 14x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 11 \\ 3x_1 - 16x_2 - 5x_3 - 4x_4 = -11 \end{cases}$$

2.11. 2.12.

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 6 \\ 19x_1 - 10x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -17 \\ 13x_1 - 12x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -19 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x_1 - x_2 + 6x_3 - 10x_4 = -26 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 = -6 \\ 5x_1 + 43x_2 - 3x_3 - 29x_4 = -4 \end{cases}$$

2.13. 2.14.

$$\begin{cases} 29x_1 - 17x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -28 \\ 15x_1 + 11x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -6 \\ 38x_1 - 16x_2 - 3x_3 + 7x_4 = -34 \end{cases} \qquad \begin{cases} 16x_1 - 23x_2 + 6x_3 - 5x_4 = -48 \\ x_1 + 7x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -3 \\ 8x_1 - 9x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -24 \end{cases}$$

2.15. 2.16.

$$\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 15 \\ 3x_1 + 8x_2 - 19x_3 + 10x_4 = 5 \\ 5x_1 + 4x_2 - 13x_3 + 12x_4 = 13 \end{cases} \qquad \begin{cases} 11x_1 - 13x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -21 \\ 11x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -9 \\ 5x_1 + 15x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

2.17. 2.18.

$$\begin{cases} 37x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 3x_4 = 10 \\ 34x_1 - 17x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -44 \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 26 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 - 10x_2 + 29x_3 - 17x_4 = -3 \\ 5x_1 + 8x_2 - 15x_3 - 11x_4 = -14 \\ 3x_1 - 14x_2 + 38x_3 - 16x_4 = 1 \end{cases}$$

2.19. 2.20.

$$\begin{cases} 6x_1 - 8x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 3 \\ 22x_1 - 15x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 11 \\ 20x_1 - 13x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x_1 - 7x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 17 \\ 4x_1 + 3x_2 + 22x_3 + 15x_4 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 20x_3 + 13x_4 = 2 \end{cases}$$

ТЕМА 3. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Пусть на интервале (a,b) задана функция $y = f(x)$. Возьмем некоторое число $x \in (a,b)$ и придадим аргументу x приращение Δx. Тогда значение функции получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Рассмотрим отношение

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Если при $\Delta x \to 0$ существует конечный предел дроби $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, то этот предел называют *производной функции* $y=f(x)$ в точке x и обозначают символом $y'(x)$ (или $f'(x)$):

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Нахождение производной называют *дифференцированием* функции.

Функцию $f(x)$ называют *дифференцируемой* в точке x, если в окрестности этой точки ее приращение может быть представлено в виде:

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + o(\Delta x).$$

Можно доказать, что для дифференцируемости функции необходимо и достаточно, чтобы существовала и была конечной ее производная, при этом $A=y'(x)$.

Выражение $A\cdot\Delta x = y'(x)\cdot\Delta x$ называют *дифферен-циалом функции* и обозначают dy. Приращение аргумента Δx называют дифференциалом независимой переменной и обозначают dx $(dx\equiv\Delta x)$. Таким образом, $dy=y'(x)\cdot dx$.

Геометрически дифференциал dy есть приращение касательной, проведенной к графику функции в точке x, и может быть как меньше, так и больше приращения функции Δy. Для линейной функции $y=k\cdot x+b$ $\Delta y=dy$.

Если производная существует для всех x из интервала (a,b), то тем самым производная определена как функция $f'(x)$ в этом интервале, и можно говорить о производной от этой функции, называемой второй производной функции $f(x)$: $y''=f''(x)$. Аналогично вводится понятие высших производных (третья производная и т.д.)

Для освоения техники дифференцирования, то есть нахождения производных, необходимо использовать правила дифференцирования и таблицу производных наиболее часто встречающихся функций.

Основные правила дифференцирования

1. $y = u \pm v$ $\qquad y' = u' \pm v'$.
2. $y = c \cdot u$ (c – постоянная) $\qquad y' = c \cdot u'$.
3. $y = u \cdot v$ $\qquad y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
4. $y = \dfrac{u}{v}$ $\qquad y' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.
5. Производная сложной функции: если $y = f(z(x))$, то $y'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$, где производные функций в правой части равенства берутся по аргументам z и x соответственно.

Приведем *таблицу производных* наиболее часто используемых функций:

1. $y = c$ (c – постоянная) $\qquad y' = 0$
2. $y = x$ $\qquad y' = 1$
3. $y = x^{\alpha}$ $\qquad y' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$
4. $y = a^x$ (a – постоянная) $\qquad y' = a^x \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$
5. $y = e^x$ $\qquad y' = e^x$
6. $y = \log_a x$ $\qquad y' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$
7. $y = \ln x$ $\qquad y' = \dfrac{1}{x}$
8. $y = \sin x$ $\qquad y' = \cos x$
9. $y = \cos x$ $\qquad y' = -\sin x$
10. $y = \mathrm{tg} x$ $\qquad y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $y = \mathrm{ctg} x$ $\qquad y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12. $y = \arcsin x$ $\qquad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
13. $y = \arccos x$ $\qquad y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
14. $\mathrm{y} = \mathrm{arctg} x$ $\qquad y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$
15. $\mathrm{y} = \mathrm{arcctg} x$ $\qquad y' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

Логарифмической производной функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции: $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$, при $y > 0$. Нахождение производных от многих функций значительно упрощается, если эти функции предварительно прологарифмировать, а затем воспользоваться логарифмической производной. При этом логарифмическую производную применяют формально, не учитывая, что формула имеет смысл лишь при $y > 0$.

Функция $y(x)$ называется *неявной*, если зависимость между x и y выражена уравнением $F(x,y)=0$, неразрешенным относительно y. Чтобы найти производную от неявной функции, надо данное уравнение продифференцировать, считая y функцией от x, а затем полученное уравнение решить относительно производной y'.

Рассмотрим примеры вычисления производных.

Пример1. Найти производную функции $y = \dfrac{x^3+3}{x^2+x+1}$.

Решение. Применяя правила 4,1 и таблицу производных, получим:

$$y' = \frac{3x^2 \cdot (x^2+x+1) - (x^3+3)\cdot(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x^4+2x^3+3x^2-6x-4}{(x^2+x+1)^2}.$$

Пример2. Найти y', если $y = 3\cos^2(\sin^5(\frac{1}{x}))$.

Решение. Последовательно применяя правило дифференцирования сложной функции, получим:

$$y' = 3\cdot 2\cos(\sin^5(\frac{1}{x}))\cdot\left(\cos(\sin^5(\frac{1}{x}))\right)' = 6\cos(\sin^5(\frac{1}{x}))\cdot$$

$$(-\sin(\sin^5(\frac{1}{x})))\cdot(\sin^5(\frac{1}{x}))' = -6\cos(\sin^5(\frac{1}{x}))\cdot\sin(\sin^5(\frac{1}{x}))\cdot$$

$$5\sin^4(\frac{1}{x})\cdot(\sin(\frac{1}{x}))' = -30\cos(\sin^5(\frac{1}{x}))\cdot\sin(\sin^5(\frac{1}{x}))\cdot$$

$$\sin^4(\frac{1}{x})\cdot\cos(\frac{1}{x})\cdot(\frac{1}{x})' = 30\cos(\sin^5(\frac{1}{x}))\cdot\sin(\sin^5(\frac{1}{x}))\cdot$$

$$\sin^4(\frac{1}{x})\cdot\cos(\frac{1}{x})\cdot\frac{1}{x^2}.$$

Пример3. Найти производную функции $y=(x+3)^{\sin 2x}$.

Решение. Применим логарифмическую производную:

$$\ln y=\ln(x+3)^{\sin 2x}=\sin 2x\cdot\ln(x+3)$$

$$\frac{y'}{y}=2\cos 2x\cdot\ln(x+3)+\frac{\sin 2x}{x+3}$$

$$y'=y\cdot\left(2\cos 2x\cdot\ln(x+3)+\frac{\sin 2x}{x+3}\right)$$

$$y'=(x+3)^{\sin 2x}\left(2\cos 2x\cdot\ln(x+3)+\frac{\sin 2x}{x+3}\right).$$

Пример4. Найти производную функции $y=\dfrac{e^{-x^2}\cdot\sin^3(x+4)\cdot arctg(x^3)}{tg^4(x-1)}$.

Решение. В случае произведения нескольких сомножителей применение логарифмической производной также эффективно:

$$\ln y=\ln e^{-x^2}+\ln\sin^3(x+4)+\ln arctg(x^3)-\ln tg^4(x-1)=$$
$$=-x^2+3\ln\sin(x+4)+\ln arctg(x^3)-4\ln tg(x-1).$$

$$\frac{y'}{y}=-2x+3\frac{\cos(x+4)}{\sin(x+4)}+\frac{3x^2}{arctg(x^3)\left(1+x^6\right)}-\frac{4}{tg(x-1)\cos^2(x-1)}.$$

$$y'=\frac{e^{-x^2}\cdot\sin^3(x+4)\cdot arctg(x^3)}{tg^4(x-1)}\cdot$$
$$\left(-2x+3\frac{\cos(x+4)}{\sin(x+4)}+\frac{3x^2}{arctg(x^3)\left(1+x^6\right)}-\frac{4}{tg(x-1)\cos^2(x-1)}\right).$$

Пример5. Найти производную функции $y(x)$, если $x^2-3xy^2=\dfrac{2y-1}{x^2+y}$.

Решение. Применим правило дифференцирования неявной функции:

$$2x-3\cdot\left(1\cdot y^2+x\cdot 2y\cdot y'\right)=\frac{2y'\cdot(x^2+y)-(2x+y')(2y-1)}{(x^2+y)^2}$$

$$2x-3y^2-6xyy'=\frac{2y'\cdot(x^2+y)-2x(2y-1)+y'(2y-1)}{(x^2+y)^2}$$

$$2x-3y^2-6xyy'=\frac{y'(2x^2+2y-2y+1)-2x(2y-1)}{(x^2+y)^2}$$

$$2x-3y^2+\frac{2x(2y-1)}{(x^2+y)^2}=\frac{y'(2x^2+1)}{(x^2+y)^2}+6xyy'$$

$$y'\left(\frac{(2x^2+1)}{(x^2+y)^2}+6xy\right)=\frac{2x(2y-1)}{(x^2+y)^2}+2x-3y^2$$

$$y'=\frac{2x(2y-1)+(2x-3y^2)(x^2+y)^2}{(2x^2+1+6xy(x^2+y)^2)}.$$

Функция $y=f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на интервале (a,b), полностью входящем в область ее определения, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала из неравенства $x_1<x_2$ следует выполнение неравенства $f(x_1)\le f(x_2)$ ($f(x_1)\ge f(x_2)$). Если неравенства выполняются как строгие, то говорят о строгом возрастании (убывании) функции. Интервалы, на которых функция возрастает или убывает, называются интервалами монотонности функции.

Внутренняя точка x_0 интервала (a,b) называется точкой максимума (минимума) функции $f(x)$, если существует такое $\delta>0$, что для всех x из интервала $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, содержащегося внутри интервала (a,b), выполняется неравенство $f(x_0)\ge f(x)$ ($f(x_0)\le f(x)$). Точки максимума и минимума называют точками экстремума функции.

Приведем формулировки теорем, используемых при исследовании функций.

Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции.
Если $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) в интервале (a,b), то $f(x)$ строго возрастает (убывает) в этом интервале.

Необходимое условие экстремума функции.
Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и достигает в этой точке максимума (минимума), то $f'(x_0)=0$.

Точками экстремума могут быть только точки, в которых производная равна нулю, либо производная не существует. Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называют точками, подозрительными на экстремум, или критическими точками.

Достаточное условие экстремума функции.

Если при переходе через точку x_0, подозрительную на экстремум, производная меняет знак, то точка x_0 является точкой экстремума. При этом если в некоторой окрестности точки x_0 $f'(x) > 0$ для $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ для $x > x_0$, то x_0 является точкой максимума. Если же в этой окрестности $f'(x) < 0$ для $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ для $x > x_0$, то x_0 – точка минимума.

При исследовании функции на экстремум рекомендуется придерживаться следующего плана.

1. Найти область определения функции.
2. Найти производную функции.
3. Найти корни производной $(y'(x) = 0)$ и точки ее разрыва, принадлежащие области определения функции (то есть точки, подозрительные на экстремум).
4. Определить интервалы знакопостоянства производной, границами которых служат точки, подозрительные на экстремум.
5. Определить знак производной на каждом из образовавшихся интервалов. Если при переходе через точку, подозрительную на экстремум, производная меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то эта точка – точка максимума (минимума). Если же при переходе через точку, подозрительную на экстремум, производная знака не меняет, то экстремума в этой точке нет.

Пример 6. Найти область определения и экстремумы функции $y = x^3(x-2)^2$.

Решение.

1. Областью определения функции является вся действительная ось, т.е. $x \in R$.
2. Найдем производную функции.

$$y' = 3 \cdot x^2(x-2)^2 + x^3 \cdot 2 \cdot (x-2) = x^2 \cdot (x-2) \cdot (5x-6)$$

3. Корнями производной являются точки: $x = 0$, $x = 2$, $x = \frac{6}{5}$.

Точек разрыва у производной нет.

4. Область определения разбивается найденными точками на промежутки:

$(-\infty;0)$, $(0;\frac{6}{5})$, $(\frac{6}{5};2)$, $(2;+\infty)$.

5. Определим знак производной в каждом из промежутков. Так как производная непрерывна при всех x, то в каждом интервале она сохраняет знак, и для определения ее знака достаточно найти ее знак в любой точке интервала.

Рассмотрим интервал $(-\infty;0)$. Возьмем точку $x=-1$. Так как $y'(-1)=33>0$, то на интервале $(-\infty;0)$ производная y' будет положительной. Аналогично определяем знак производной на остальных интервалах. На интервале $(0;\frac{6}{5})$ производная положительна. На интервале $(\frac{6}{5};2)$ производная отрицательна. На интервале $(2;+\infty)$ производная положительна. Так как при переходе через точку $x=0$ производная знака не меняет, в этой точке экстремума нет.

При переходе через точку $x=\frac{6}{5}$ производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, $x=\frac{6}{5}$ является точкой максимума и $y(\frac{6}{5})\approx 1{,}11$. При переходе через точку $x=2$ производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно, в этой точке у функции минимум и $y(2)=0$;

Результат удобно представить в виде схемы (рис.1).

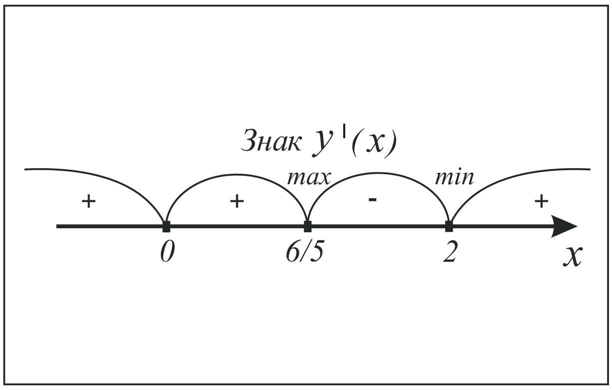

Рис. 1

Пример 7. Найти экстремумы функции $y = \dfrac{x^2+4}{x}$.

Решение.

1. Областью определения функции – вся действительная ось, кроме точки $x=0$, т.е. $x \in R$, $x \neq 0$.

2. Найдем производную функции:

$$y' = \frac{2x \cdot x - (x^2+4)\cdot 1}{x^2} = \frac{(x^2-4)}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}.$$

3. Производная обращается в ноль при $x=-2$ и $x=2$ и не существует в точке $x=0$, которая не принадлежит области определения функции.

4. Область определения разбивается на следующие интервалы: $(-\infty;-2)$, $(-2;0)$, $(0;2)$, $(2;+\infty)$.

5. На промежутке $(-\infty;-2)$ $y'(x)>0$. На промежутке $(-2;0)$ $y'(x)<0$. На промежутке $(0;2)$ $y'(x)<0$. На промежутке $(2;+\infty)$ $y'(x)>0$.

Таким образом, при переходе через точку $x=-2$ производная меняет знак с плюса на минус, а это означает, что, в точке $x=-2$ функция имеет максимум и $y(-2)=-4$. Точка $x=0$ не входит в область определения функции и не может быть точкой экстремума. При переходе через точку $x=2$ производная меняет знак с минуса на плюс, поэтому в точке $x=2$ функция имеет минимум и $y(2)=4$. Иллюстрация полученного решения представлена на рис. 2.

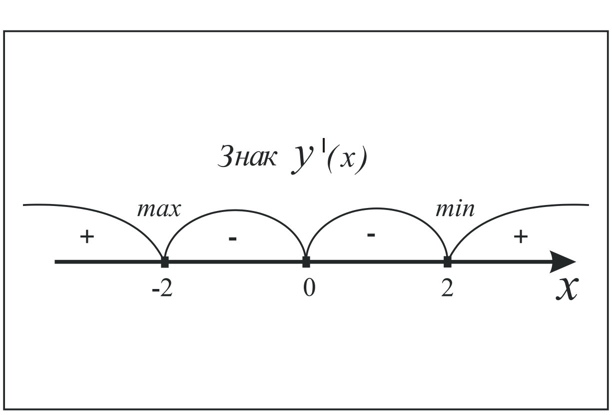

Рис. 2

Пример 8. Найти область определения и экстремумы функции $y=(x-5)^2\cdot\sqrt[3]{x^2}$.

Решение.

1. Областью определения функции является вся действительная ось, т.е. $x\in R$.

2. Найдем производную функции.

$$y'=2\cdot(x-5)\cdot\sqrt[3]{x^2}+(x-5)^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{6\cdot x\cdot(x-5)+2\cdot(x-5)^2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}=$$

$$=\frac{2\cdot(x-5)\cdot(4x-5)}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$$

3. Корнями производной являются точки $x=\frac{5}{4}$ и $x=5$, при $x=0$ производная терпит разрыв.

4. Область определения разбивается найденными точками на 4 промежутка:

$(-\infty;0)$, $(0;\frac{5}{4})$, $(\frac{5}{4};5)$ и $(5;+\infty)$.

5. Определим знак производной в каждом из промежутков.

Рассмотрим интервал $(-\infty;0)$. В нем y' отрицательна. На интервале $(0;\frac{5}{4})$ производная положительна. На интервале $(\frac{5}{4};5)$ производная отрицательна. На интервале $(5;+\infty)$ производная положительна. При переходе через точку $x=\frac{5}{4}$ производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, эта точка является точкой максимума и $y(\frac{5}{4})\approx 16{,}32$. При переходе через точку $x=5$ производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно, эта точка является точкой минимума и $y(5)=0$. В точке $x=0$ производная не существует, однако эта точка входит в область определения функции. Поскольку слева от точки $x=0$ производная y' отрицательна, а справа положительна, то эта точка является точкой минимума и $y(0)=0$ (см. рис.3).

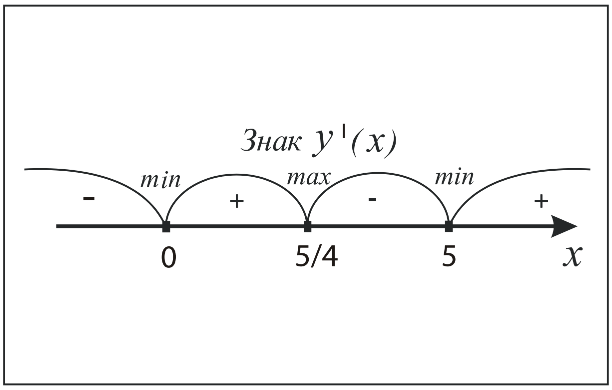

Рис.3

Контрольные задания

а) Найти производную функций;

б) Найти область определения функции и точки экстремума.

3.1. $a)\ y = 5\arcsin^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{1-5x^2}$; $b)\ y = x^4 - 2x^3 + 1$.

3.2. $a)\ y = (5-3x)^{\cos x}$; $b)\ y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$.

3.3. $a)\ y = \dfrac{1}{tg^4\sqrt{3-6x+5x^3} + 1}$; $b)\ y = x^2 \cdot (x^2 - 12)$.

3.4. $a)\ y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{x - \frac{1}{x}}$; $b)\ y = x \cdot \ln x$.

3.5. $a)\ y = \dfrac{\lg(x+1) \cdot tg^2(2x) \cdot e^{-x^3}}{(x^2-1)^3}$ $b)\ y = (x+1)(x^2+4)$.

3.6 $a)\ y = 4\cos^3\sqrt{arcctg(x^2 - 3x)}$; $b)\ y = 2^{x^2+4x}$.

3.7. $a)\ y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{\sin 2x}$ $b)\ y = \dfrac{(x-2)\cdot(8-x)}{x^2}$.

3.8. $a)\ y = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 1}{\sqrt[3]{1 - \sin 2x}}$; $b)\ y = x^2 \cdot e^{-x}$.

3.9. $a)\ y = (\arcsin 3x)^{\frac{x}{3}}$; $b)\ y = 2x^4 - 4x^2 + 5$.

3.10. $a)\ y = \dfrac{2^{x^2} \cdot arctg^2 x \cdot \ln(x^2+1)}{\sin^3 x}$; $b)\ y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

3.11. $a)\ y=\sin^3(x+\frac{1}{e^{3x}})$; $b)\quad y=\frac{4}{\sqrt{x^2+8}}$.

3.12. $a)\ y=\left(ctg\,\frac{x}{2}\right)^{3-x^2}$; $b)\quad y=x\cdot(x+4)^2$.

3.13. $a)\ y=\sqrt[3]{3x+\sqrt{5x}}$; $b)\ y=(3x-2)\cdot e^{-3x}$.

3.14. $a)\ y=\left(1+\frac{x-1}{x+1}\right)^{\sqrt{2+x^2}}$; $b)\ y=x-\mathrm{arctg}x$.

3.15. $a)\ y=\frac{\sqrt{x^3+2}\cdot\ln^5(2x+3)}{\sqrt[3]{\arcsin x}}$; $b)\quad y=x^3-3x^2+3x+2$.

3.16. $a)\ y=3\ln^4(\arcsin^2 x)$; $b)\quad y=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

3.17. $a)\ y=\left(arctg(x^2)\right)^{\arcsin(x^2)}$; $b)\ y=3x+7-(1-x)^2$.

3.18. $a)\ y=\frac{\sqrt[3]{2x^2-1}}{\sin^2 x+1}$; $b)\quad y=x\cdot\ln^2 x$.

3.19. $a)\ y=(\ln x)^{\lg^3 x}$; $b)\ y=\frac{16}{x\cdot(4-x^2)}$.

3.20. $a)\ y=\frac{3^{x^2}\cdot 2^{x^3}}{\ln^3 x\cdot\ln^2(x+1)}$; $b)\ y=\frac{x^3}{x^2+2}$.

ТЕМА 4. ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим функцию двух переменных $z=f(x,y)$, определенную в некоторой области D, являющейся частью плоскости (x,y). *Частной производной от функции* $z=f(x,y)$ *по независимой переменной* x называется производная

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=f_x{}'(x,y),$$

вычисленная при постоянном y.

Частной производной по y называется производная

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}=f_y(x,y),$$

вычисленная при постоянном *x*.

Для частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования.

При изменении x и y частные производные сами являются функциями, и можно вычислять частные производные от этих функций. Частные производные второго порядка обозначают следующим образом:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Последнюю из трех частных производных второго порядка называют *смешанной производной*. Если частные производные второго порядка непрерывны в точке (x, y), тогда $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, то есть не важно, в какой последовательности вычисляется смешанная производная.

Градиентом функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется вектор, составленный из частных производных:

$$grad\ z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}(M_0), \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) \right).$$

Этот вектор указывает в точке *M₀* направление наискорейшего роста функции $z = f(x, y)$.

Для функции двух переменных вводится понятие производной по направлению, аналогичное понятию частной производной, когда приращение аргумента задается вдоль данного направления. Для любого направления, задаваемого вектором $\vec{l}$, производная функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению этого вектора может быть выражена следующим образом:

$$\frac{\partial z}{\partial l}(M_0) = \left| grad\ z_{M_0} \right| \cos\alpha,$$

где знак модуля означает длину вектора градиента в точке M_0, а α – угол между градиентом и направлением $\vec{l}$.

Пример. Найти градиент функции $z = arctg \frac{y}{1 + x^2}$ в точке $M(-1; 2)$.

Решение. Рассматривая *y* как постоянную величину, дифференцируем функцию по переменной *x*.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{(1+x^2)^2}}\cdot\frac{-2xy}{(1+x^2)^2}=\frac{-2xy}{(1+x^2)^2+y^2}\ .$$

Аналогично, рассматривая *x* как постоянную величину, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{(1+x^2)^2}}\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2+y^2}\ .$$

Находим значения частных производных в точке $M(-1;2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M)=\frac{-2\cdot(-1)\cdot 2}{(1+(-1)^2)^2+2^2}=\frac{1}{2}\ ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M)=\frac{1+(-1)^2}{(1+(-1)^2)^2+2^2}=\frac{1}{4}.$$

Таким образом, $grad\, z(M)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right).$

Контрольные задания

Найти градиент функции Z в точке M.

4.1 $z=x^2-3x^2y^2+y^3+15\sqrt{x^2+y^2},\ M(3;4).$

4.2 $z=12\cdot\sqrt[3]{8-x^2+y^2}-2x^2y^2+\dfrac{8y}{x^2}-2x,\ M(-2;2).$

4.3 $z=xy-y+2x+ctg(\dfrac{\pi}{4}-3x+2y),\ M(2;3).$

4.4 $z = x^2 y - xy^2 - 16 \cdot \sqrt[4]{2x^2 + y}, \; M(3;-2).$

4.5 $z = 2\sin(y^2 - x^2 - 3) + xy + \frac{y}{x}, \; M(1;2).$

4.6 $z = 12 \cdot \arccos\frac{y}{x} - 4xy - 2y^3 + x, \; M(5;3).$

4.7 $z = e^{6x+3y} + x^2 y^2 - \frac{y}{x^3}, \; M(1;-2).$

4.8 $z = e^{\frac{y-x}{x}} + \frac{x}{3x - 2y - 2} - 2x, \; M(1;1).$

4.9 $z = 4x^3 y - 3xy^3 + 10 \cdot arctg\,\frac{y}{x}, \; M(-3;4).$

4.10 $z = x^2 + 3xy^2 + e^{3y-2x}, \; M(3;2).$

4.11 $z = 4 \cdot \frac{x^2 + y^2}{x - \frac{1}{2}} - \sqrt{x^2 + 3y^2}, \; M(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}).$

4.12 $z = \sqrt{2} \cdot \sin^3(\frac{\pi}{4} - x + 2y) - x^2 y + 4y, \; M(-2;-1).$

4.13 $z = xy + x^3 - 2y^2 + 15 \cdot \ln(x^2 + y^2) - y, \; M(1;2).$

4.14 $z = \sqrt[3]{x^2 - y^2 + 27} - 3x^2 y^2 + \frac{x}{y} - 4y, \; M(2;-2).$

4.15 $z = ctg^2(\frac{\pi}{4} - 2x + 3y) - x^2 y - 2y, \; M(3;2).$

4.16 $z=\sin(x^2-y^2-3)+\dfrac{x}{y+1}+2xy,\ M(2;1).$

4.17 $z=\dfrac{1}{\pi^2}\arcsin^2\dfrac{y}{x}+3y^3+5x,\ M(2;\sqrt{3}).$

4.18 $z=e^{\frac{y-x^2}{y}}-\dfrac{y}{2x-3y+2}-4xy^2,\ M(1;1).$

4.19 $z=\dfrac{3^{2x+3y}}{\ln 3}+x^2y+\dfrac{x}{x^2+3y}-2,\ M(2;-1).$

4.20 $z=x^2-3xy^3+4y^2+e^{3x-4y},\ M(4;3).$

ТЕМА 5. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x)=f(x)$.

Например, функция $\sin x$ является первообразной для функции $\cos x$, так как при любом $x\in(-\infty;\infty)$ $(\sin x)'=\cos x$.

Можно заметить, что первообразной для $\cos x$ является не только, $\sin x$ но и функция $\sin x$ + C, где C ─ любая постоянная. Это справедливо для любой функции $f(x)$, имеющей первообразную.

Теорема. Пусть $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ в некотором интервале (a,b); тогда функция $F(x)+C$, где C ─ любая постоянная, также будет первообразной для $f(x)$.

Из теоремы следует, что любые две первообразные для одной и той же функции могут отличаться друг от друга только на постоянное слагаемое.

Если $F(x)$─ первообразная для функции $f(x)$, то совокупность всех первообразных $F(x)+C$, где C ─ произвольная постоянная, называется *неопределенным интегралом* от функции

$f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$. Таким образом, $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, произведение $f(x)dx$ — подынтегральным выражением, переменная x- переменной интегрирования, а символ $\int$ - знаком интеграла.

Операция нахождения неопределенного интеграла от данной функции называется *интегрированием* функции $f(x)$. Операция интегрирования является обратной к операции дифференцирования.

Свойства неопределенного интеграла

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
2. $\int d\left(F(x)\right) = F(x) + C$
3. $\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, $a \neq 0$, $a = const$
5. Если $F(x)$ первообразная для $f(x)$, тогда

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,\ a,b - const$$

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int u^m du = \dfrac{u^{m+1}}{m+1} + C;\ m \neq -1$
2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$
3. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$
4. $\int e^u du = e^u + C$
5. $\int \sin u du = -\cos u + C$
6. $\int \cos u du = \sin u + C$
7. $\int \dfrac{du}{a^2+u^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{u}{a} + C = -\dfrac{1}{a} arcctg\dfrac{u}{a} + C,\ \ a \neq 0$
8. $\int \dfrac{du}{a^2-u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u+a}{u-1}\right| + C = -\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C$

9. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C,\ a \neq 0$

10. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C = -\arccos\frac{u}{a} + C,\ a > 0$

11. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$

12. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$

13. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C$

14. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right| + C$

Интегралы от некоторых элементарных функций не являются элементарными функциями, например:

$$\int e^{-x^2}dx, \int \sin x^2 dx, \int \frac{dx}{\ln x}, \int \frac{\sin x}{x}dx, \int \frac{e^x}{x}dx.$$

Основные методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

Непосредственным интегрированием называется вычисление интегралов путем использования таблицы основных неопределенных интегралов, их свойств, а также тождественных преобразований подынтегрального выражения.

Пример1. Найти $\int (x^2 + \frac{1}{x})^3 dx$.

Решение. $\int (x^2 + \frac{1}{x})^3 dx = \int (x^6 + 3x^3 + 3 + \frac{1}{x^3})dx =$

$$= \int x^6 dx + 3\int x^3 dx + 3\int dx + \int x^{-3}dx = \frac{x^7}{7} + \frac{3x^4}{4} + 3x - \frac{1}{2x^2} + C.$$

Пример2. Найти $\int \cos(3x - 5)dx$.

Решение. Воспользуемся свойством 5:

$$\int \cos(3x-5)dx = \frac{1}{3}\sin(3x-5)+C.$$

Пример3. Найти. $\int tg^2 xdx$.

Решение Воспользуемся формулами тригонометрии:

$$\int tg^2 xdx = \int (\frac{1}{\cos^2 x} - 1)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + C.$$

Интегрирование путем подведения под знак дифференциала

Все формулы таблицы основных интегралов справедливы, когда переменная интегрирования не является независимой, а представляет функцию от некоторой другой переменной: $u = \varphi(x)$.

Тогда $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$ или $\int f(u)du = F(u) + C$.

Пример4. Вычислить интеграл $\int \sin^3 x \cos xdx$.

Решение. Так как $\cos xdx = d\sin x$,

то $\int \sin^3 x \cos xdx = \int \sin^3 xd\sin x = \dfrac{\sin^4 x}{4} + C$.

Здесь мы применили формулу 1 таблицы интегралов.

Пример5. Вычислить интеграл $\int \dfrac{xdx}{x^2+3}$.

Решение. Заметим, что $d(x^2+3) = 2xdx$, тогда имеем:

$$\int \frac{xdx}{x^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+3)}{x^2+3} = \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + C.$$

Замена переменой в неопределенном интеграле

Замена переменной или метод подстановки, состоит в том что, при вычислении интеграла $\int f(x)dx$ вместо переменной x вводится новая переменная t, связанная с x определенной зависимостью: $x = \varphi(t)$. При этом функцию $\varphi(t)$ следует выбирать так, чтобы подынтегральная функция становилась более удобной для интегрирования.

Введем новую переменную $x = \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ определена и дифференцируема. Тогда будет справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример6. Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$.

Решение. Применим подстановку $x=t^6$, а затем продифференцируем это равенство: $dx=6t^5dt$.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx=$$

$$=\int \frac{t^3 6t^5}{t^2+1}dt=6\int \frac{t^8}{t^2+1}dt=6\int (t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1})dt=$$

$$=6\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+arctg\, t\right)+C=$$

$$=6\left(\frac{1}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{1}{3}\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}+arctg\sqrt[6]{x}\right)+C.$$

Пример7. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$.

Решение. Применяем подстановку $t=\frac{1}{x}$, тогда $dt=-\frac{dx}{x^2}$.

$$\int \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int e^t dt=-e^t+C=-e^{\frac{1}{x}}+C.$$

Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Теорема. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на интервале (a,b), то $\int udv=uv-\int vdu$.

Эта формула называется формулой *интегрирования по частям.* Она позволяет свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться более простым.

Метод интегрирования по частям применяется при вычислении следующих интегралов:

A) $\int P_n(x)e^{ax+b}dx$, $\int P_n(x)\sin(ax+b)dx$, $\int P_n(x)\cos(ax+b)dx$, где $P_n(x)$- многочлен степени n. В этих интегралах за $u(x)$ принимается $P_n(x)$ и интегрируется по частям n раз.

B) $\int P_n(x)\ln x\ dx$, $\int P_n(x)\arcsin xdx$, $\int P_n(x)\arccos xdx$, $\int P_n(x)arctg\, xdx$, $\int P_n(x)arcctg\, xdx$.

В этих интегралах за dv принимается $P_n(x)dx$.

Пример8. Вычислить $\int xe^x dx$.

Решение. Положим $u = x, dv = e^x dx$, тогда $v = \int e^x dx = e^x$, $du = dx$ и по формуле интегрирования по частям получаем:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Пример9. Вычислить $\int arctg\, xdx$.

Решение. Положим $u = arctg\, x, dv = dx$.

Отсюда $du = \dfrac{dx}{1+x^2}, v = x$. Используя формулу интегрирования по частям, имеем:

$$\int arctg\, xdx = xarctgx - \int \frac{xdx}{1+x^2} = xarctgx - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Пример10. Вычислить $\int (4x+3)\sin\dfrac{x}{2}dx$.

Решение. Примем $u = 4x+3, dv = \sin\dfrac{x}{2}dx$, тогда $du = 4dx$,

$v = \int \sin\dfrac{x}{2}dx = -2\cos\dfrac{x}{2}$. Окончательно получаем:

$$\int (4x+3)\sin\frac{x}{2}dx = -2(4x+3)\cos\frac{x}{2} + 8\int \cos\frac{x}{2}dx =$$

$$= -2(4x+3)\cos\frac{x}{2} + 16\sin\frac{x}{2} + C.$$

Пример11. Вычислить $\int x\ln xdx$.

Решение. Сделаем предварительные преобразования:

$u = \ln x,\ dv = xdx,\ du = \dfrac{dx}{x},\ v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2}$, отсюда

$$\int x\ln xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью $R(x)$ называется функция, равная отношению двух многочленов:

$$R(x) = \frac{Pm(x)}{Qn(x)} = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + ... + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + ... + b_n},$$

где, m, n – целые положительные числа, b_j, a_i - действительные числа $(i = 0,..., m; j = 0,..., n)$.

Если $m < n$, то $R(x)$ называется правильной рациональной дробью, если $m \geq n$ - неправильной дробью.

Всякую неправильную дробь путем деления $P_m(x)$ на $Q_n(x)$ можно представить в виде суммы некоторого многочлена и правильной дроби.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = L_{n-m}(x) + \frac{P_k(x)}{Q_n(x)},$$

где $L_{n-m}(x)$, $P_k(x)$ - многочлены; $\frac{P_k(x)}{Q_n(x)}$ - правильная рациональная дробь $(k < m)$

Интегрирование правильной рациональной дроби основано на следующей теории.

Каждая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы конечного числа простейших дробей следующих четырех видов:

$$\frac{A}{x-a}, \frac{A}{(x-a)^k}, \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$$

где, A, a, M, N, p, q – действительные числа, k – натуральное число $\left(k \geq 2, p^2 - 4q < 0\right)$.

В алгебре устанавливается, что если знаменатель дроби представить в виде:

$$Q(x) = (x-a_i)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}...(x-a_s)^{k_s} \cdot$$
$$\left(x^2+p_1x+q\right)^{r_1}...\left(x^2+p_mx+q_m\right)^{r_m},$$

то в разложении самой дроби:

а) каждому множителю вида $x-a$ соответствует одна простейшая дробь вида $\frac{A}{x-a}$;

б) каждому множителю вида $(x-a)^k$ соответствует сумма простейших дробей вида: $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_k}{(x-a)^k}$;

в) каждому множителю x^2+px+q соответствует одна простейшая дробь вида $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$.

Пример12. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}dx$.

Решение. Разложим правильную рациональную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю и приравнивая числители, получим:

$$x^3-2x+2=A_1(x-1)\left(x^2+1\right)+A_2\left(x^2+1\right)+(Mx+N)(x-1)$$

Так как данное тождество должно выполняться для любого x, то зададим аргументу значение $x=1$ и получим $1=2A_2 \Rightarrow A_2=\dfrac{1}{2}$.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в тождестве, находим:

При x^3: $1=A_1+M$

При x^2: $0=-A_1+A_2-2M+N$

При x: $-2=A_1+M-2N$

При x^0: $2=-A_1+A_2+N$

Подставив значение $A_2=\dfrac{1}{2}$, находим: $N=\dfrac{3}{2}$, $A_1=0$, $M=1$.

Поэтому:

$$\int \frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{x+\frac{2}{3}}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{3}{2}arctgx+C.$$

Контрольные задания

Вычислить неопределенные интегралы.

5.1 $a)\ \int x(2x+5)^{10}dx$ $b)\ \int \frac{xdx}{(x^2+4)(x-1)}$

5.2 $a)\ \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ $b)\ \int \frac{x^5-x+3}{x^3-1}dx$.

5.3 $a)\ \int x^3\sqrt[5]{x^4+1}dx$ $b)\ \int \frac{2x^2-x+3}{x(x-1)(x+3)}dx$.

5.4 $a)\ \int \frac{xdx}{1+x^4}$ $b)\ \int \frac{3x+5}{(x+1)(x^2+1)}dx$.

5.5 $a)\ \int \frac{\sin^3 xdx}{\cos^4 x}$ $b)\ \int \frac{x^5+x-3}{x^2-1}dx$.

5.6 $a)\ \int \frac{\sqrt{tgx}}{\cos x\sin x}dx$ $b)\ \int \frac{x^2-3}{(x-4)x^2}dx$.

5.7 $a)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ $b)\ \int \frac{xdx}{x^3-8}$.

5.8 $a)\ \int \frac{dx}{1-\cos x}$ $b)\ \int \frac{xdx}{x^3+8}$.

5.9 $a)\ \int \frac{e^{\sqrt{x^2+1}}x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ $b)\ \int \frac{x^3+1}{x^2(x+2)}dx$.

5.10 $a)\ \int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$ $\quad b)\ \int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$.

5.11 $a)\ \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ $\quad b)\ \int \frac{x+1}{(x^2+4)x}dx$.

5.12 $a)\ \int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$ $\quad b)\ \int \frac{(x+4)dx}{(x-1)(x+1)(x-2)}$.

5.13 $a)\ \int e^{\sin^2 x}\sin 2x dx$ $\quad b)\ \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

5.14 $a)\ \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad b)\ \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$.

5.15 $a)\ \int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$ $\quad b)\ \int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$.

5.16 $a)\ \int \frac{xdx}{1-\sqrt[3]{x}}$ $\quad b)\ \int \frac{dx}{x(x+1)^2}$.

5.17 $a)\ \int \frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[4]{x}}$ $\quad b)\ \int \frac{dx}{x^3(x-1)^2}$.

5.18 $a)\ \int \sin^3 x\cos^2 xdx$ $\quad b)\ \int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx$.

5.19 $a)\ \int \frac{1+tgx}{\sin 2x}dx$ $\quad b)\ \int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$.

5.20 $a)\ \int \frac{dx}{5+4\sin x}$ $\quad b)\ \int \frac{x^2+3}{(x+2)(x^2+x+1)}dx$.

ТЕМА 6. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть на отрезке $[a\ ,\ b]$ определена некоторая функция $f(x)$. Будем говорить, что задано разбиение отрезка $[a\ ,\ b]$, если заданы точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$, такие, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

Разбиение отрезка $[a\ ,\ b]$ будем обозначать символом $\{x_k\}$. Отрезки $[x_{k-1}\ , x_k\ ]$, $k = 1, \ldots, n$, называются частичными отрезками. Обозначим длины этих отрезков символами Δx_k: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = 1, \ldots, n.$

Диаметром разбиения называется число $d_n = \max\limits_{k=1,\ldots,n} \Delta x_k$.

На каждом частичном отрезке выберем произвольным образом точку $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ и вычислим значение функции в этой точке $f(\xi_k)$. По данному разбиению $\{x_k\}$ построим сумму: $\delta_n(x_k, \xi_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$, которая называется интегральной суммой или суммой Римана.

Функция $f(x)$ называется интегрируемой (по Риману) на отрезке $[a,b]$, если для любого разбиения $\{x_k\}$, для которого $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$, и для любого выбора точек ξ_k существует предел последовательности интегральных сумм $\delta_n(x_k, \xi_k)$, и он равен A: $\lim\limits_{d_n\to 0} \delta_n(x_k, \xi_k) = A.$

В этом случае число A называется определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Рассмотрим геометрический смысл интегральной суммы в случае непрерывной неотрицательной функции $f(x) \ge 0, x \in [a,b]$.

Криволинейной трапецией назовем фигуру, ограниченную графиком функции $y=f(x)$, прямыми $x=a$ и $x=b$ и отрезком $[a,b]$ оси OX (Рис.4).

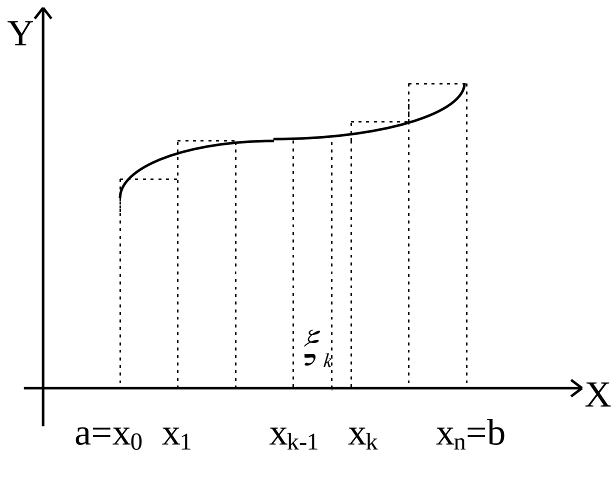

Рис. 4

Сделаем разбиение $\{x_k\}$ отрезка $[a,b]$ и в каждом частичном отрезке $[x_{k-1},x_k]$ выберем точку ξ_k. Тогда каждое слагаемое интегральной суммы равно площади прямоугольника с основанием длины Δx_k и высотой $f(\xi_k)$. Вся же сумма $\delta_n(x_k,\xi_k)$ равна площади «ступенчатой фигуры», получающейся объединением всех указанных прямоугольников.

Из определения следует, что определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ является пределом, при $d_n \to 0$, последовательности площадей соответствующих ступенчатых фигур, поэтому он равен площади криволинейной трапеции.

Можно доказать, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на $[a,b]$, т.е. предел интегральной суммы существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1},x_k]$ и выбора наших точек ξ_k.

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то ее интеграл является числом, не зависящим от обозначения переменной интегрирования: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt.$

Для любой функции $f(x)$, определенной в точке a, $\int_a^a f(x)dx = 0.$

Для функции $f(x)$, интегрируемой на $[a,b]$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

Свойства определенного интеграла

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то для любых вещественных чисел α и β справедливо равенство:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha\int_b^a f(x)dx + \beta\int_b^a g(x)dx.$$

2. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, то она интегрируема и на отрезке $[a,b]$, причем $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx +. \int_c^b f(x)dx.$

3. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ - какая-нибудь первообразная для $f(x)$ на этом отрезке, то справедлива формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Символ $\Big|_a^b$ называется знаком двойной подстановки. С его помощью формула (1) записывается так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Пример 1. Вычислить следующие определенные интегралы по формуле (1):

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2};$$

$$\int_{-1}^{2} \sqrt{x+1}dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{3} - 0 = 2\sqrt{3}.$$

Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть функция *f(x)* непрерывна на отрезке *[a,b],* а функция $\varphi(t)$ определена и непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем $a \le \varphi(t) < b$ для любого $t \in [\alpha,\beta]$ и $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b.$ Тогда выполняется соотношение:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (2)$$

Формула (2) называется формулой замены переменной в определенном интеграле.

Пример 2. Вычислить определенный интеграл $\int_1^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Сделаем замену переменной $t = \sqrt{x}, x = t^2, dx = 2tdt$

и пересчитаем пределы интегрирования: при *x=1* *t=1*; при *x=9* *t=3*.

$$\int_1^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_1^3 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_1^3 \frac{(t+1-1)dt}{t+1} =$$

$$= 2\int_1^3 [1 - \frac{1}{t+1}]dt = 2[t - \ln(t+1)]\Big|_1^3 =$$

$$= 2[2 - (\ln 4 - \ln 2)] = 4 - 2\ln 2.$$

Заметим, что при вычислении определенного интеграла по формуле (2) мы не возвращаемся к старой переменной.

Если функции *U(x)* и *V(x)* дифференцируемы на отрезке *[a,b]*, то справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU \qquad (3)$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_1^e x\ln^2 x dx$.

Применим формулу интегрирования по частям, обозначив:

$U = \ln^2 x,\ dU = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}dx,\ dV = xdx,\ V = \frac{1}{2}x^2.$

Тогда:

$$\int_1^e x\ln^2 xdx = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x\Big|_1^e - \int_1^e x\ln xdx =$$

$$U = \ln x,\ dU = \frac{dx}{x},\ dV = xdx,\ V = \frac{1}{2}x^2$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{dx}{x}\right) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\int_1^e xdx = \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{1}{4}(e^2 - 1).$$

Контрольные задания

6.1-6.20. Вычислить определенные интегралы.

6.1 $\int_1^e x\ln^2 xdx$

6.2 $\int_0^1 arctg\sqrt{x}dx$

6.3 $\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\pi^2} \sin\sqrt{x}dx$

6.4 $\int\limits_{-1}^{0} x^2 \cdot e^{-3x} dx$

6.5 $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} (2x^2 - 3x + 2)e^{-2x} dx$

6.6 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (5x + 6)\cos 2x dx$

6.7 $\int\limits_{0}^{\pi} x\cos^2 x dx$

6.8 $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (3x - 2)\sin 3x dx$

6.9 $\int\limits_{1}^{4} \sqrt{x} \ln x dx$

6.10 $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} (2x - 1)2^{-x} dx$

6.11 $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{\sin^2 x}$

6.12 $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\cos^2 x}$

6.13 $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}(5-x)e^{2x}dx$

6.14 $\int\limits_{e}^{e^2}\frac{\ln x}{x^2}dx$

6.15 $\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}}x\arcsin xdx$

6.16 $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x^2\cos xdx$

6.17 $\int\limits_{1}^{2}x^2e^{-x}dx$

6.18 $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{1}xarctgxdx$

6.19 $\int\limits_{2}^{e}x^2\ln xdx$

6.20 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}x^2\sin xdx$.

ТЕМА 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимые переменные, искомую функцию (или дифференциал) и ее производные. Обыкновенное дифференциальное уравнение имеет следующий вид:

$$F[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)] = 0 \qquad (1)$$

Здесь x – независимая переменная, $y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ – искомая функция и ее производные вплоть до производной порядка n.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в уравнение (число n в формуле (1)). Так, уравнение $y'' + y' = \cos x$ является дифференциальным уравнением второго порядка.

Решением дифференциального уравнения называется такая функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Общим решением дифференциального уравнения называется решение, содержащее столько произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид:

$$y = y(x; C_1, C_2, \ldots, C_n), \qquad (2)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные, или *постоянные интегрирования.*

Если решение уравнения (1) получено в неявном виде

$$\varphi(x; C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \qquad (3)$$

то такое решение называется *общим интегралом уравнения* (1).

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего выбором конкретных значений произвольных постоянных.

Задачей Коши для дифференциального уравнения (1) называется задача отыскания решения $y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющего следующим начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \ldots\ y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}. \qquad (4)$$

Число начальных условий равно порядку уравнения, что позволяет определить все произвольные постоянные в общем решении (2).

График каждого частного решения в плоскости (x, y) представляет линию, называемую *интегральной кривой,* а совокупность всех интегральных кривых образует семейство интегральных кривых.

Рассмотрим уравнение (1) в виде, разрешенном относительно старшей производной:

$$y^{n}(x) = f(x, y, ..., y^{(n-1)}). \tag{5}$$

Теорема. Если в некоторой окрестности точки x_0 функция $f(x, y, ..., y^{(n-1)})$ определена и имеет непрерывные частные производные по переменным $y, ..., y^{(n-1)}$, то в этой окрестности задача Коши имеет единственное решение.

Особым решением дифференциального уравнения называется решение, в каждой точке которого нарушаются условия теоремы существования и единственности. Оно не может быть получено из общего подбором значений произвольных постоянных.

Линейным называется дифференциальное уравнение, линейное относительно искомой функции и ее производных:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x),$$

где $a_1(x), ..., a_n(x), f(x) -$ некоторые функции, непрерывные в некоторой области D.

При $f(x) \equiv 0$ уравнение называется *однородным*, в остальных случаях *неоднородным*.

При постоянстве коэффициентов $a_1, ..., a_n$ уравнение называется *уравнением с постоянными коэффициентами.*

Дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида:

$$f_1(x)g_1(y)dx = f_2(x)g_2(x)dy$$

Для его решения следует сначала разделить переменные, то есть разнести их в разные стороны уравнения:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \frac{g_2(x)}{g_1(x)}dy \quad (f_2(x) \neq 0;\ g_1(y) \neq 0),$$

а затем проинтегрировать обе части уравнения:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \int \frac{y_2(x)}{y_1(x)}dy.$$

Следует иметь в виду, что полученные неопределенные интегралы могут различаться на произвольную постоянную C.

Пример1. Решить задачу Коши: $\frac{2}{3}e^{-x}dy = xy^{1/3}dx$, $y(1) = 8$.

Решение. Поделим обе части уравнения на $y^{1/3}e^{-x}$ $(y \neq 0)$.

Тогда $\frac{2}{3}y^{-1/3}dy = xe^{x}dx$ и $\frac{2}{3}\int y^{-1/3}dy = \int xe^{x}dx$.

Вычисляя интегралы, находим: $y^{2/3} = e^{x}(x-1) + C$.

Отсюда $y(x) = \left(e^{x}(x-1) + C\right)^{3/2}$ – общее решение.

Подставим в это решение начальное условие: $y(1) = C^{3/2} = 8$; Следовательно, $C = 4$ и $y(x) = \left(e^{x}(x-1) + 4\right)^{3/2}$ – искомое частное решение, то есть решение задачи Коши.

Однородное уравнение первого порядка

Однородным уравнением первого порядка называется уравнение вида:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (6)$$

Для его решения введем новую переменную $z = \frac{y}{x}$. Тогда $y = z \cdot x$ и $y' = z' \cdot x + z$. Подставляя эти соотношения в (6), получаем: $z' \cdot x + z = f(z)$ или $\frac{dz}{dx} \cdot x = f(z) - z$. Это уравнение с разделяющимися переменными, и оно легко интегрируется. Найдя $z(x)$, получаем искомое решение $y(x) = z(x) \cdot x$.

Пример2. Решить уравнение: $y' = \frac{y}{x} + \cos^2 \frac{y}{x}$.

Решение. Полагая $y = z \cdot x$ и $y' = z' \cdot x + z$, получим:

$$z' \cdot x + z = z + \cos^2 z, \text{ или } \frac{dz}{\cos^2 z} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части последнего уравнения, получим:

$$tgz = \ln x + \ln C.$$

Произвольная постоянная здесь взята в виде $\ln C$ для удобства. Тогда $z = arctg \ln(Cx)$ и окончательно общее решение принимает вид:

$$y = x \cdot arctg \ln(Cx).$$

Пример3. Решить уравнение: $x^2 y' = xy - y\sqrt{y^2 - x^2}$.

Решение. Пусть $y \neq 0$. Тогда разделим обе части уравнения на x^2:

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{y}{x}\sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}.$$

После замены переменной $y = z \cdot x$ это уравнение приводит-ся к виду:

$$\frac{dz}{dx} = -z\sqrt{z^2 - 1}, \text{ или } \int \frac{dz}{z\sqrt{z^2 - 1}} = -\int dx.$$

Вычислим интеграл в левой части последнего уравнения:

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dz^2}{z^2\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t\sqrt{t - 1}} = \int \frac{du}{1 + u^2} = arctgu =$$

$$= arctg\sqrt{z^2 - 1}.$$

Тогда $arctg\sqrt{z^2 - 1} = -x + C$, и общее решение уравнения записывается в следующем виде:

$$y = x \cdot \sqrt{1 + tg^2(C - x)} = x \cdot \cos^{-1}(C - x).$$

Линейное уравнение первого порядка

Решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка можно с помощью введения двух новых искомых функций $u(x)$ и $v(x)$, положив $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, и дополнительного условия на одну из них, выбираемую произвольно. Рассмотрим применение этого метода на следующем примере.

Пример4. Решить дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$.

Решение. Будем искать решение в виде: $y=u\cdot v$;

Тогда $y'=\frac{dy}{dx}=u'v+uv'$; Подставляя выражения для искомой функции и ее производной в рассматриваемое дифференциальное уравнение, получим:

$$u'v+uv'-\frac{2uv}{x+1}=(x+1)^3, \text{ или}$$

$$u'v+(v'-\frac{2v}{x+1})u=(x+1)^3. \tag{7}$$

Поскольку одну из функций u и v мы вправе выбрать произвольно, выберем ее так, чтобы выполнялось условие: $v'-\frac{2v}{x+1}=0.$ Тогда уравнение (7) запишется в виде: $\frac{dv}{v}=\frac{2dx}{x+1}$. Это уравнение легко интегрируется: $\int\frac{dv}{v}=2\int\frac{dx}{x+1}$; $\ln|v|=2\ln|x+1|$.

Произвольную постоянную здесь можно положить равной нулю, так как мы выбираем частное решение. Тогда $v=(x+1)^2$.

После подстановки v в исходное уравнение получим (при $x\neq-1$):

$u'(x+1)^2=(x+1)^3$; $u'=x+1$; $u=\frac{x^2}{2}+x+C$.

Таким образом, $y=u\cdot v=(x+1)^2(\frac{x^2}{2}+x+C)-$ искомое общее решение.

Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение следующего вида:

$$y'+a_1(x)y=f(x)y^n. \tag{8}$$

Здесь $n\neq0$ и $n\neq1$, так как в этих случаях уравнение (8) превращается в линейное уравнение.

Уравнение Бернулли, как и линейное уравнение, решается с помощью представления этой функции в виде $y(x) = u(x) \cdot v(x)$.

Пример5. Решить уравнение:

$$y' + tgx \cdot y = y^2 \cdot \sin x. \qquad (9)$$

Решение. Это уравнение Бернулли и $n = 2$. Положим $y = u \cdot v$. Тогда уравнение (9) запишется в виде:

$$u'v + u(v' + v \cdot tgx) = u^2 v^2 \sin x. \qquad (10)$$

Будем искать функцию $v(x)$ как решение уравнения:

$$v' + v \cdot tgx = 0.$$

Тогда $\dfrac{dv}{dx} = -v \cdot tgx$ и $\int \dfrac{dv}{v} = -\int tgx \cdot dx$. Вычисляя интегралы, получим:

$$\ln v = \ln \cos x \text{ и } v = \cos x.$$

Подставляя полученное выражение в (10), получим:

$$u' = u^2 \cos x \cdot \sin x.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \cos x \cdot \sin x \cdot dx.$$

Выполняя интегрирование, приходим к выражению:

$$-\frac{1}{u} = \frac{\sin^2 x}{2} + C, \text{ или } u = \frac{2}{-\sin^2 x - 2C}.$$

Окончательно получаем: $y = \dfrac{2\cos x}{-\sin^2 x - 2C}$.

Контрольные задания

а) Найти общее решение дифференциального уравнения.

б) Найти решение задачи Коши.

7.1. а) $yy' = \dfrac{2-x}{y}$;

б) $(x+1)(y'+y^2) = -y;\ y(0) = 1;$

7.2. а) $xy' + y = y^2$;

б) $2x^3y' - 3x^2y + y^3x^3 = 0;\ y(0) = 1;$

7.3. а) $x^2dy = (xy + x^2 + y^2)dx$;

б) $y'x + y = -3x^2y^2;\ y(1) = 1;$

7.4. а) $y' = e^{x+y}$;

б) $xy' - y = \cos x;\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi;$

7.5. а) $x^2y' = xy + y\sqrt{y^2 - x^2}$;

б) $y' + \dfrac{3x^2y}{x^3+1} = (x^3+1)\sin x;\ y(0) = 2;$

7.6. а) $xdy + y(\ln\dfrac{y}{x} - 1)dx$;

б) $y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2}{x-1};\ y(2) = 1;$

7.7. а) $y' = \dfrac{x}{2y^2+1}$;

б) $y' + y = e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{y};\quad y(0) = 1;$

7.8. а) $xdy = (x\ln x - y)dx$;

б) $xy' - y = \ln x;\ y(1) = 1;$

7.9. а) $xydx + \sqrt{1-x^2}dy = 0$;

б) $y' + y\,tgx + \dfrac{y^2}{\cos x} = 0;\ y(0) = 1;$

7.10. а) $x^2y' + y^2 = xyy'$;

б) $(x+1)y' + y = -y^2(x+1);\ y(0) = 1;$

7.11. а) $(1+x^2)y' + xy = 0$;

б) $y'x + y = -xy^2$; $y(0)=1$;

7.12. а) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$;

б) $xy' = (x^5y^2 - 2y)$; $y(1)=1$;

7.13. а) $(1+y^2)xdx + (1+x^2)dy$;

б) $y' = xy + x^3$; $y(1)=0$;

7.14. а) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$;

б) $y' - xy = y^3e^{-x^2}$; $y(0)=0.5$;

7.15. а) $y^2y' + x^2 = 1$;

б) $xy' + y = \ln x$; $y(1)=2$;

7.16. а) $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$;

б) $y' + 2xy = 2x^3y^3$; $y(1)=1$;

7.17. а) $xy' + y(1+\ln y) = 0$;

б) $y' - y\,tgx + y^2\cos x = 0$; $y(0)=1$;

7.18. а) $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$;

б) $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$; $y(1)=1$;

7.19. а) $\sqrt{4-x^2}dx - xy\sqrt{1-y^2}dy = 0$;

б) $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$; $y(0)=1$;

7.20. а) $(y+2)dx = (2x+y-4)dy$;

б) $y' + \dfrac{y}{x} = 2\ln x + 1$; $y(0)=0$;

ТЕМА 8. РЯДЫ

Рассмотрим выражение вида

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad (1)$$

называемое бесконечным рядом, где $u_1, u_2, \ldots u_n \ldots$— члены ряда.

Ряд называется *числовым*, если членами ряда являются числа, и *функциональным*, если членами ряда являются функции.

Сумма конечного числа первых n членов называется n *–ой частичной суммой ряда*:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} S_k$, то его называют *суммой ряда* и ряд называется *сходящимся*. Если предел не существует, то *ряд расходится* и суммы не имеет.

Отметим следующие *свойства рядов*.

1. На сходимости ряда не сказывается отбрасывание конечного числа его членов.

2. Сходимость ряда не нарушится, если все члены умножить на одно и то же ненулевое число.

3. Сумма (разность) сходящихся рядов есть ряд сходящийся.

Необходимый признак сходимости рядов

Если ряд сходится, то предел n-ого члена равен нулю при неограниченном возрастании n, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \qquad (2)$$

Условие (2) является необходимым, но не достаточным условием сходимости, поэтому если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

Однако, если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2n+1}$.

Решение. Рассмотрим предел общего члена ряда u_n:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2} \neq 0$, поэтому ряд расходится.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n+1} = 0$. Необходимый признак не дает ответа на вопрос о сходимости данного ряда.

Сформулируем достаточные признаки сходимости некоторых рядов и вернемся к решению примера.

В первую очередь рассмотрим числовые ряды.

Числовые ряды

Знакоположительные ряды

Рассмотрим два ряда с положительными членами:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{3}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots, \tag{4}$$

называемых *знакоположительными*.

Для них справедливы следующие признаки сходимости.

Признаки сравнения

*Признак 1***.** Если, начиная с некоторого n, выполняется условие $u_n \le v_n$ и ряд (4) сходится, то ряд (3) тоже сходится.

*Признак 2***.** Если, начиная с некоторого n, выполняется условие $u_n \ge v_n$, и ряд (4) расходится, то ряд (3) тоже расходится.

*Признак 3***.** Если существует конечный и отличный от нуля предел