기하와 벡터 개념정리

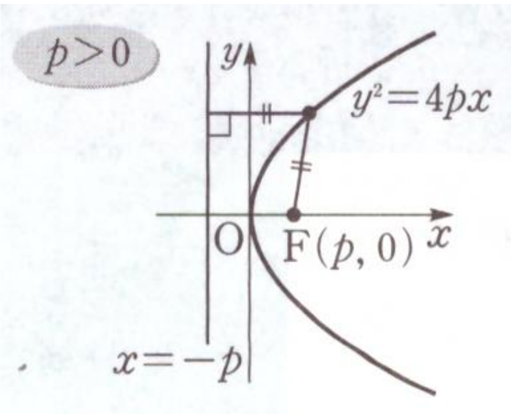
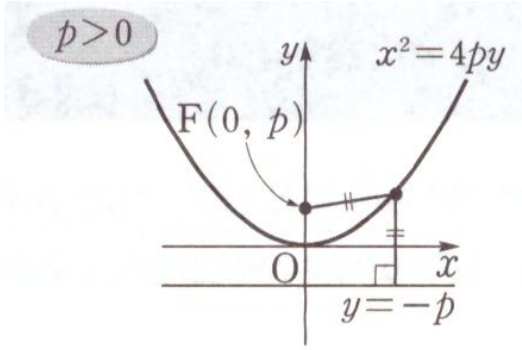
(개념원리 기하와 벡터 핵심요약)

1005 MATH

차 례

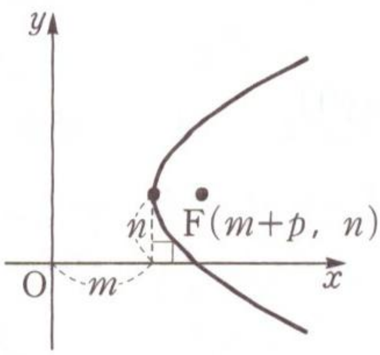
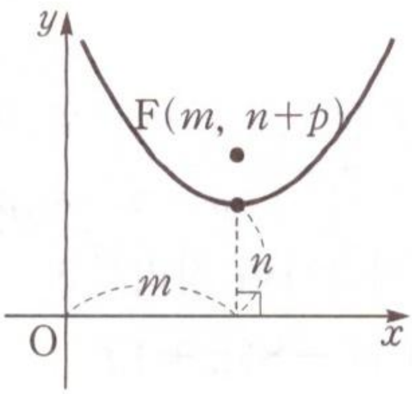
< 이차곡선 : 포물선의 방정식 >

1. 포물선 : 초점과 준선으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취

$y^2 = 4px$	$x^2 = 4py$
그래프  	그래프 
초　점 : $F(p,0)$ 준　선 : $x=-p$ 꼭짓점 : $(0,0)$ 축의 방정식 : $y=0$ (x축)	초　점 : $F(0,p)$ 준　선 : $y=-p$ 꼭짓점 : $(0,0)$ 축의 방정식 : $x=0$ (y축)

ex) 초점 (-2,0), 준선 $x=2$ 인 포물선의 방정식을 구하여라.

2. 포물선의 평행이동

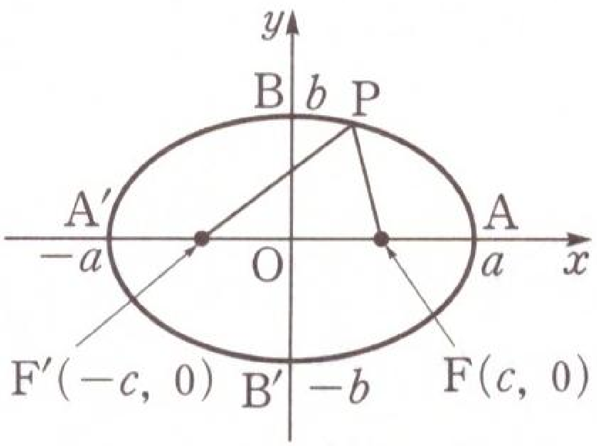
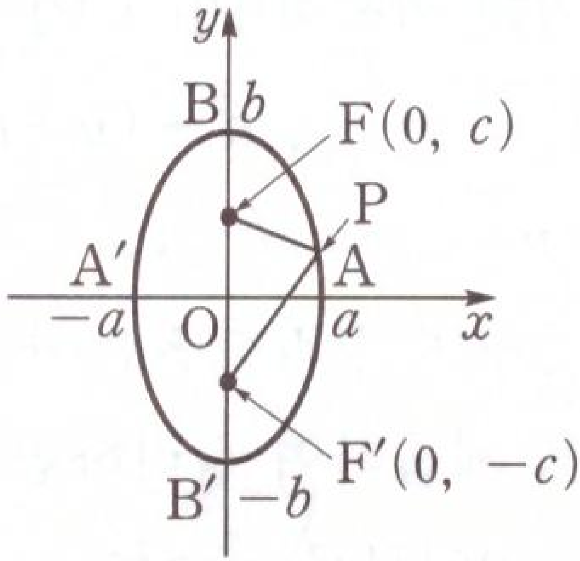
$(y-n)^2 = 4p(x-m)$ => $y^2 = 4px$를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동 y축의 방향으로 n만큼	$(x-m)^2 = 4p(y-n)$ => $x^2 = 4py$를 x축의 방향으로 m만큼, 평행이동 y축의 방향으로 n만큼
그래프  	그래프 
초　점 : $F(m+p,n)$ 준　선 : $x=-p+m$ 꼭짓점 : (m,n) 축의 방정식 : $y=n$	초　점 : $F(m,n+p)$ 준　선 : $y=-p+n$ 꼭짓점 : (m,n) 축의 방정식 : $x=m$

ex) 포물선 $y^2-8x-2y+17=0$ 의 초점의 좌표 , 준선의 방정식 , 꼭지점의 좌표를 구하여라.

< 이차곡선 : 타원의 방정식 >

1. **타원** : 두 정점 F 와 F' 으로부터의 거리의 합이 일점한 점 P 전체의 집합

$\overline{PF}+\overline{PF'}=(\text{일정})$

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad a>c>0 \quad (b^2=a^2-c^2)$	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad b>c>0 \quad (a^2=b^2-c^2)$
그래프 	그래프 
거리의 합 : $\overline{PF}+\overline{PF'}=2a$ 초　점 : $F(c,0)$, $F'(-c,0)$ 중　심 : $O(0,0)$ 꼭짓점 : $(a,0)$, $(-a,0)$, $(0,b)$, $(0,-b)$ 장축의 길이 : $2a$ 단축의 길이 : $2b$	거리의 합 : $\overline{PF}+\overline{PF'}=2b$ 초　점 : $F(0,c)$, $F'(0,-c)$ 중　심 : $O(0,0)$ 꼭짓점 : $(a,0)$, $(-a,0)$, $(0,b)$, $(0,-b)$ 장축의 길이 : $2b$ 단축의 길이 : $2a$

ex) 두 점 $F(3,0), F'(-3,0)$ 으로부터의 거리의 합이 12인 타원의 방정식을 구하여라.

2. **타원의 평행이동**

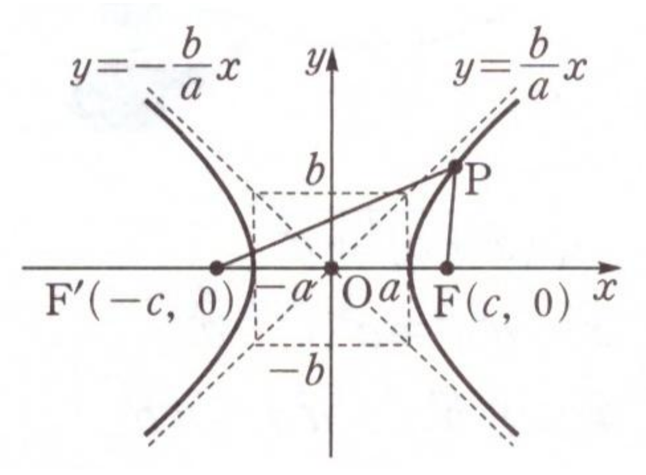
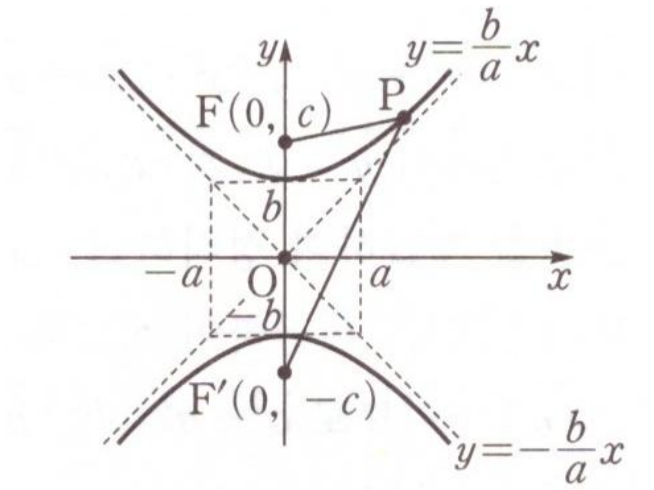
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \xrightarrow[y\text{축의 방향으로 }n\text{만큼}]{x\text{축의 방향으로 }m\text{만큼}} \text{평행이동} \quad \frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

ex) $\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$ 의 중심의 좌표와 초점의 좌표를 구하여라.

< 이차곡선 : 쌍곡선의 방정식 >

1. 쌍곡선 : 두 정점 F 와 F' 으로부터의 거리의 차가 일정한 점 P 전체의 집합

$|\overline{PF}-\overline{PF'}|=$ (일정)

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad c>a>0 \quad (b^2=c^2-a^2)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \quad c>b>0 \quad (a^2=c^2-b^2)$
그래프 	그래프 
거리의 차 : $|\overline{PF}-\overline{PF'}|=2a$ 초 점 : $F(c,0)$, $F'(-c,0)$ 중 심 : $O(0,0)$ 꼭짓점 : $(a,0)$, $(-a,0)$ 주축의 길이 : $2a$ 점근선의 방정식 : $y=\pm\frac{b}{a}x$	거리의 차 : $|\overline{PF}-\overline{PF'}|=2b$ 초 점 : $F(0,c)$, $F'(0,-c)$ 중 심 : $O(0,0)$ 꼭짓점 : $(0,b)$, $(0,-b)$ 주축의 길이 : $2b$ 점근선의 방정식 : $y=\pm\frac{b}{a}x$

ex) 두 초점 $F(4,0), F'(-4,0)$ 으로부터의 거리의 차가 6인 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

2. 쌍곡선의 평행이동

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \xrightarrow[y\text{축의 방향으로 }n\text{만큼}]{x\text{축의 방향으로 }m\text{만큼}} \text{평행이동} \quad \frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

ex) 쌍곡선 $4x^2-9y^2-8x+36y-68=0$ 의 초점의 좌표, 꼭지점의 좌표, 중심의 좌표, 주축의 길이, 점근선의 방정식을 각각 구하여라.

(이차곡선 방정식 유도)

<table>
<tr><td>포물선</td><td>

1. 포물선의 방정식

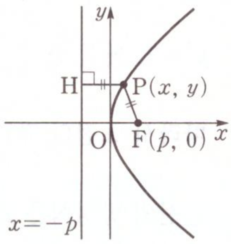
(1) 0이 아닌 실수 p에 대하여 초점이 $\mathrm{F}(p,\ 0)$이고, 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식을 구해 보자.

포물선 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하고, 점 P에서 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(-p,\ y)$

포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$에서

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x+p|$$

양변을 제곱하여 정리하면 $y^2=4px$



</td></tr>
<tr><td>타 원</td><td>

1. x축 위의 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)(c>0)$을 초점으로 하고 거리의 합이 $2a$인 타원의 방정식

⇨ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>c>0$, $b^2=a^2-c^2$)

타원 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2a$이므로

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

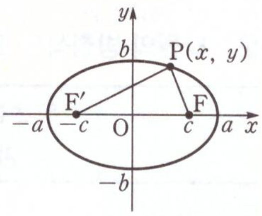
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $a^2+cx=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

다시 양변을 제곱하여 정리하면 $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$

이때 $a>c>0$이므로 $b^2=a^2-c^2(b>0)$으로 놓고 양변을 a^2b^2으로 나누면

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



</td></tr>
<tr><td>쌍곡선</td><td>

1. 쌍곡선의 방정식

(1) 오른쪽 그림과 같이 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$에서의 거리의 차가 $2a(c>a>0)$인 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=2a$ (일정)

$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=\pm 2a$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\pm 2a$$

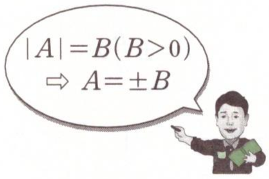
양변을 제곱하여 정리하면 $-a^2-cx=\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

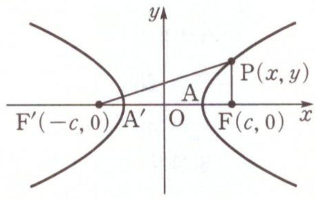
다시 양변을 제곱하여 정리하면 $(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$

$c>a>0$이므로 $c^2-a^2=b^2\ (b>0)$으로 놓으면 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

양변을 a^2b^2으로 나누면

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$





</td></tr>
</table>

< 이차곡선 : 이차곡선의 정의를 이용한 대표문제 >

1. 포물선의 정의의 활용

ex) 그림과 같이 점 A(8 , 4)를 지나고 x축에 평행한 직선과 포물선 $y^2=8x$의 교점을 P,
이 포물선의 초점을 F 라 할 때, $\overline{AP}+\overline{PF}$ 의 값을 구하여라.

2. 타원의 정의의 활용 (삼각형의 둘레의 길이)

ex) 점 (1, 0)을 지나고 기울기가 1인 직선이 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$ 과 만나는 두점 A , B라 할 때,
두 점 A , B와 점 C(-1, 0)을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 둘에의 길이를 구하여라.

3. 쌍곡선의 정의의 활용

ex) 점 (2, 0)을 지나는 직선이 쌍곡선 $3x^2-y^2=3$의 $x \geq 0$인 부분과 두점 A, B에서 만난다.
두 점 A , B와 점 C(-2, 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 22일 때,
두 점 A , B 사이의 거리를 구하여라.

< 평면곡선의 접선 : 음함수의 미분법 >

1. 음함수

양함수 :	$y=f(x)$
음함수 :	$f(x,y)=0$

ex) $x^2+y^2=1$, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ $\cdots$

2. 음함수의 미분법

$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$, $\frac{d}{dx}y^n=ny^{n-1}\frac{dy}{dx}$

ex) $4x^2+9y^2=36$ 에서 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라.

3. 음함수의 미분법을 이용한 접선의 방정식

평면곡선 $f(x,y)=0$ 위의 점 P 에서의 접선의 방정식 구하기

① 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

② $\frac{dy}{dx}$에 점 P의 좌표를 대입하여 접선의 기울기를 구한다.

③ 점 P의 좌표와 기울기를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

ex) $xy=6$ 위의 점 (3, 2) 에서의 접선의 방정식을 구하여라.

< 평면곡선의 접선 : 이차곡선의 접선의 방정식 > (음함수의 미분법 이용)

1. 위의 점 (x_1, y_1)이 주어진 경우

포물선	$y^2 = 4px$	접선의 방정식 : $y_1 y = 2p(x + x_1)$
	$x^2 = 4py$	접선의 방정식 : $x_1 x = 2p(y + y_1)$
타 원	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	접선의 방정식 : $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$
쌍곡선	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	접선의 방정식 : $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$	접선의 방정식 : $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = -1$

ex) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$ 위의 점 (1 , -3)에서의 접선의 방정식을 구하여라.

1) 음함수의 미분법 이용　　　　2) 공식을 이용

2. 기울기 (m) 가 주어진 경우

포물선	$y^2 = 4px$	접선의 방정식 : $y = mx + \frac{p}{m}$
	$x^2 = 4py$	접선의 방정식 : $y = mx - m^2 p$
타 원	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	접선의 방정식 : $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$
쌍곡선	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	접선의 방정식 : $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$	접선의 방정식 : $y = mx \pm \sqrt{-a^2 m^2 + b^2}$

ex) $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에 접하고, 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하여라.

1) 음함수의 미분법 이용　　2) 접점 이용　　　3)기울기 공식 이용

3. 밖의 점이 주어진 경우

① 접점을 (x_1, y_1)로 놓고 접선의 방정식을 구한 뒤, 밖의 점을 x 와 y에 대입한다.

② 접점을 이차곡선 식에 대입한다.

③ ①, ②에서 구한 두 식을 연립하여 x_1 과 y_1을 구한다.

④ x_1 과 y_1를 ①에서 구한 접선의 방정식에 대입한다.

ex) 점 (1 , 6)에서 타원 $4x^2 + y^2 = 8$에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

< 평면곡선의 접선 : 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법 >

1. 매개변수 미분법

$x=f(t)$, $y=g(t)$ 일 때, $\dfrac{dy}{dx}$ = $\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$

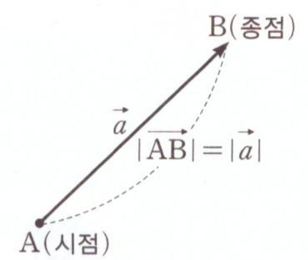
ex) $x=2t+3$, $y=t^2+4t+5$ 일 때, $\dfrac{dy}{dx}$를 구하여라.

ex) 평면곡선 $x=t^2-2t$, $y=3t+2$ 위의 점 (3, -1)에서의 접선의 방정식을 구하여라.

< 벡터의 연산 : 벡터의 뜻 >

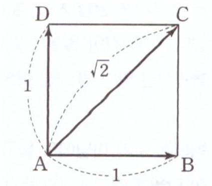
1. 벡터의 뜻 : 크기와 방향을 동시에 갖는 양

벡터 AB : $\overrightarrow{AB}$ = $\vec{a}$
벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기 : $|\overrightarrow{AB}|$ = $|\vec{a}|$
벡터 $\overrightarrow{AB}$의 시점 : 점 A
벡터 $\overrightarrow{AB}$의 시점 : 점 B



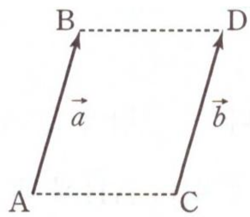
* 크기가 1인 벡터 : 단위벡터

ex) 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 $|\overrightarrow{AB}|$ 와 $|\overrightarrow{AC}|$ 를 구하여라.



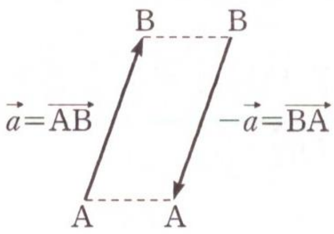
① 서로 같은 벡터 : 크기와 방향이 같은 벡터

$\vec{a}=\vec{b}$



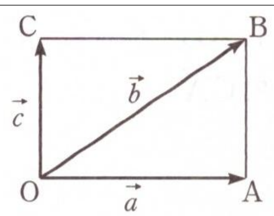
② 크기가 같고 방향이 반대인 벡터

$|-\vec{a}|=|\vec{a}|$, $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$



ex) 그림과 같은 직사각형 OABC에서 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ 라 할 때,
다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 로 나타내어라.

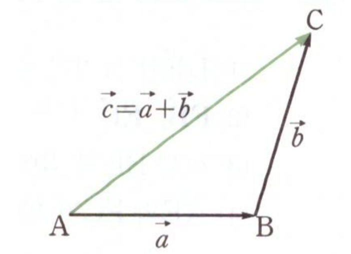
1> $\overrightarrow{AB}$
2> $\overrightarrow{BO}$
3> $\overrightarrow{BA}$
4> $\overrightarrow{AO}$ 와 크기가 같고 방향이 반대인 벡터



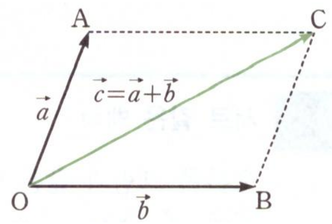
< 벡터의 연산 : 벡터의 덧셈과 뺄셈 >

1. 벡터의 덧셈

① 삼각형 법칙

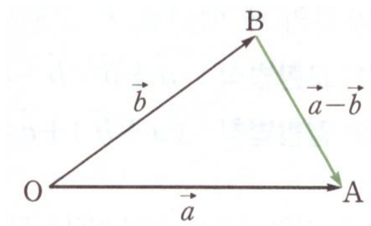
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ ⇔ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$	

② 평행사변형의 법칙

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ ⇔ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$	

* 영벡터 : $\overrightarrow{AA}$와 같이 시점과 종점이 일치하는 벡터 $\vec{0}$

2. 벡터의 뺄셈

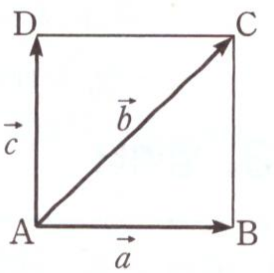
$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$	

ex) 그림과 같이 정사각형 ABCD에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$ 라 할 때, 다음을 구하여라.

1> $\vec{b}-\vec{a}$

2> $\vec{b}-\vec{c}$

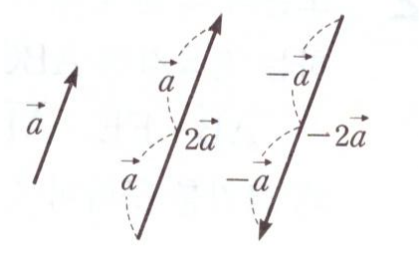
3> $(\vec{b}-\vec{a})-\vec{c}$



< 벡터의 연산 : 벡터의 실수배 >

1. 벡터의 실수배

$k\vec{a}$: 벡터 $\vec{a}$의 실수배

$\vec{a}+\vec{a}=2\vec{a}$ $(-\vec{a})+(-\vec{a})=-2\vec{a}$	

2. 벡터의 실수배에 대한 성질

① $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$ (결합법칙)

② $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ (분배법칙)

③ $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ (분배법칙)

ex) $3(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})+2(-\vec{a}+2\vec{b}+4\vec{c})$ 를 간단히 하여라.

3. 두 벡터의 평행조건

① $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$의 방향이 같거나 반대일 때 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 는 서로 평행하다 => $\vec{a}\,//\,\vec{b}$

② 벡터의 평행 조건 (중요함)

$\vec{a}\,//\,\vec{b}=\vec{a}=k\vec{b}$

4. 두 벡터가 서로 같은 조건

$\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 가 서로 평행하지 않을 때,

① $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$ ⇔ $m=n=0$

② $m\vec{a}+n\vec{b}=m'\vec{a}+n'\vec{b}$ ⇔ $m=m'$, $n=n'$

5. 세 점이 한 직선 위에 있을 조건 (중요)

세 점 A , B , C 가 한 직선 위에 있을 조건

① $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$

② $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ $(단,\ m+n=1)$

ex) 평면 위의 네 점 O, A, B, C 에 대하여 $\overrightarrow{OA}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=5\vec{a}+m\vec{b}$ 일 때,
세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 하는 실수 m의 값을 구하여라.

< 평면벡터 : 위치벡터 >

1. 위치벡터

① 위치벡터 : 한 점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OA}$ 를 점 A의 위치벡터

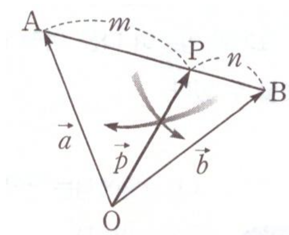
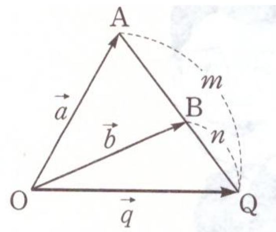
② 위치벡터의 성질 : 두 점 A , B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 라고 하면

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$

ex) 세 점 A , B , C의 위치벡터를 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 라고 할 때, $3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CA}$ 를 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$로 나타내라.

2. 선분의 내분점과 외분점의 위치벡터

두 점 A , B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}$ 라고 할 때,

선분 AB를 $m : n$ 내분하는 점 P의 위치벡터 $\vec{p}$:	$\vec{p} = \dfrac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$	
선분 AB를 $m : n$ 외분하는 점 P의 위치벡터 $\vec{q}$:	$\vec{q} = \dfrac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$	
선분 AB의 중점 M의 위치벡터 $\vec{m}$	$\vec{m} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$	

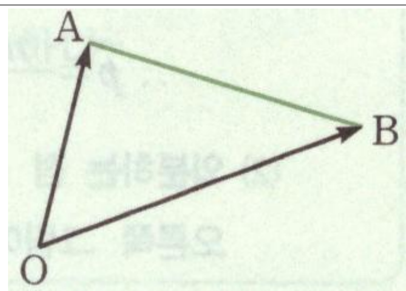
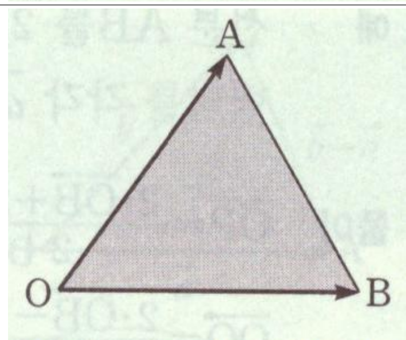
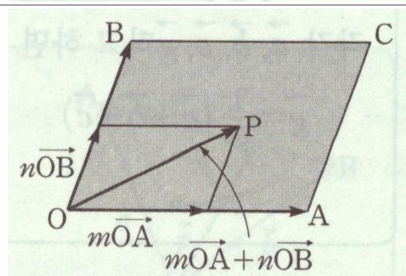
ex) 선분 AB를 2:3으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q 라 하고 점 A , B, P , Q의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}, \vec{q}$ 라고 할 때, $\vec{p}$, $\vec{q}$ 를 $\vec{a}, \vec{b}$ 로 나타내라.

3. 삼각형의 무게중심의 위치벡터

삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하고 점 A, B, C, G의 위치벡터를 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{g}$ 하고 하면,

$\therefore \ \vec{g} = \dfrac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

< 평면벡터 : $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ 를 만족시키는 점 P의 자취 >

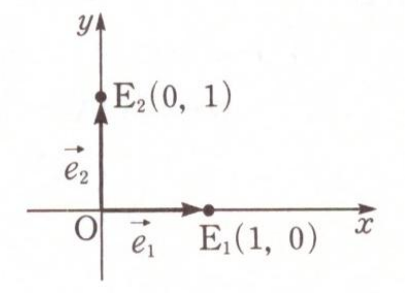
$m+n=1$	점P는 직선 AB위의 점	
$0 \le m \le 1, 0 \le n \le 1$ $m+n=1$	점P는 선분 AB위의 점	
$0 \le m \le 1, 0 \le n \le 1$ $m+n \le 1$	점P는 $\triangle AOB$의 둘레와 내부	
$0 \le m \le 1, 0 \le n \le 1$	점P는 평행사변형 OABC 둘레와 내부	

< 평면벡터 : 평면벡터의 성분 >

1. 평면의 단위벡터

원점 O를 시점으로 하고 두점 $E_1(1,0)$, $E_2(0,1)$을 각각 종점으로 하는 두 단위벡터 $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_2}$ 를 각각 $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ 로 나타낸다.

$\therefore$ $\overrightarrow{OE_1} = \overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{OE_2} = \overrightarrow{e_2}$

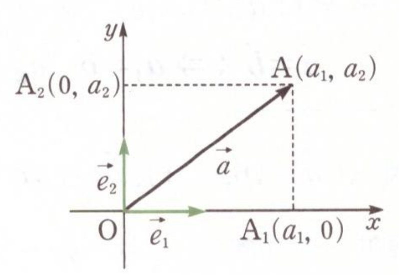


2. 평면벡터의 성분 표시

$\vec{a} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2}$

$\vec{a} = (a_1, a_2)$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$



3. 두 평면벡터가 서로 같을 조건

$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 일 때,

$\vec{a} = \vec{b}$ $\Leftrightarrow$ $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$

4. 평면벡터의 성분에 의한 연산

$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 일 때,

① $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

② $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$

③ $k\vec{a} = (ka_1, ka_2)$

5. 두 점에 대한 평면벡터의 성분과 크기

$A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ 에 대하여

① $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1 , b_2 - a_2)$

② $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

6. 평면벡터의 성분과 평행

$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 일 때,

$\vec{a} // \vec{b}$ 일조건 $\Leftrightarrow$ $\vec{a} = k\vec{b}$

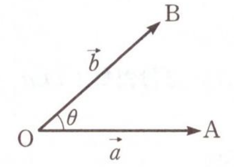
$\Leftrightarrow$ $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$

< 평면벡터 : 평면벡터의 내적 > (중요)

1. 평면벡터의 내적의 뜻

$\vec{a}, \vec{b}$의 내적

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$



① $\vec{a} = \vec{0}$ 또는 $\vec{b} = \vec{0}$ 일 때 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

② $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

③ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 은 벡터가 아니고 실수임

2. 평면벡터의 내적과 성분

$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 일 때, => $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

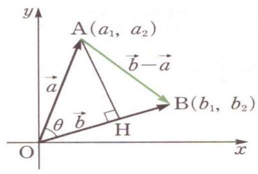
증명

1. **평면벡터의 내적과 성분**

오른쪽 그림과 같이 영벡터가 아닌 두 평면벡터

$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = (b_1, b_2)$

가 이루는 예각의 크기를 θ라고 하자.



삼각형 AOB의 꼭짓점 A에서 $\overline{OB}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

직각삼각형 AHB에서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{AH}^2 + \overline{HB}^2 & \longleftarrow \overline{AH} = \overline{OA}\sin\theta \\ &= \overline{OA}^2 \sin^2\theta + (\overline{OB} - \overline{OA}\cos\theta)^2 & \longleftarrow \overline{OH} = \overline{OA}\cos\theta \\ &= \overline{OA}^2 \sin^2\theta + \overline{OB}^2 + \overline{OA}^2\cos^2\theta - 2\overline{OA} \times \overline{OB}\cos\theta \\ &= \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{OA} \times \overline{OB}\cos\theta\end{aligned}$$

여기서 $\overline{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$, $\overline{OA}^2 = |\overrightarrow{OA}|^2$, $\overline{OB}^2 = |\overrightarrow{OB}|^2$이므로

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2\overline{OA} \times \overline{OB}\cos\theta$$

따라서 $\overline{OA} \times \overline{OB}\cos\theta = a_1 b_1 + a_2 b_2$이고 $\overline{OA} = |\overrightarrow{OA}|$, $\overline{OB} = |\overrightarrow{OB}|$이므로

$$\overline{OA} \times \overline{OB}\cos\theta = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

따라서 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적은 다음과 같다.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

위의 식은 $\theta = 0$, $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$일 때에도 성립한다.

3. 평면벡터의 내적의 연산법칙

① 교환법칙 : $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

② 분배법칙 : $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

③ 결합법칙 : $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$

⋆ $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

⋆ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$

4. 두 평면벡터가 이루는 각의 크기

$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

< 평면벡터 : 벡터의 내적을 이용한 삼각형의 넓이 >

1. 삼각형의 넓이 구하기

① $\frac{1}{2}\times(\text{밑변})\times(\text{높이})$	
② $\frac{1}{2}bc\sin\theta$	
③ $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s=\frac{a+b+c}{2}$	
④ $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 x_2 x_3 x_1 \\ y_1 y_2 y_3 y_1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\lvert(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)\rvert$	

2. 벡터의 내적을 이용한 삼각형의 넓이

① $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ 일 때, ⇒ $\triangle AOB=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

② $\overrightarrow{OA}=(a_1, a_2)$, $\overrightarrow{OB}=(b_1, b_2)$ 일 때, ⇒ $\triangle AOB=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$ * 신발끈 정리

< 평면벡터 : 평면벡터의 평행과 수직 >

1. 평면벡터의 평행과 수직 조건

① 평행조건 : $\vec{a}//\vec{b} \Leftrightarrow \pm|\vec{a}||\vec{b}|$

$\Leftrightarrow \vec{a}=k\vec{b}$ 또는 $\vec{b}=k\vec{a}$

ex) 두 벡터 $\vec{a}=(1,-1)$ 과 $\vec{b}=(3,\ x)$ 가 평행할 때, 실수 x의 값을 구하여라.

② 수직조건 : $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

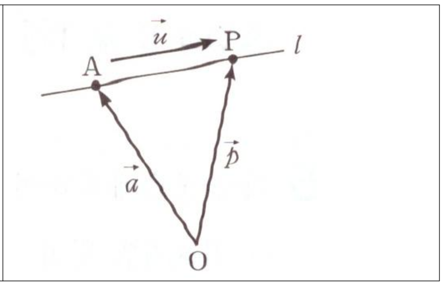
ex) 두 벡터 $\vec{a}=(1,-1)$ 과 $\vec{b}=(3,\ x)$ 가 수직일 때, 실수 x의 값을 구하여라.

< 평면벡터 : 직선의 방정식 >

1. 직선의 벡터방정식

위치벡터가 $\vec{a}$ 인 점 A를 지나고 벡터 $\vec{u}$에 평행한 직선의 방정식

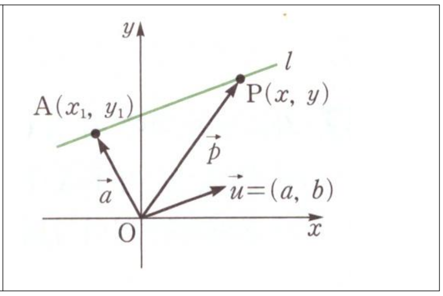
=> $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}$ (단, t는 실수)



2. 한 점을 지나고 주어진 벡터에 평행한 직선의 방정식

점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 벡터 $\vec{u}=(a,b)$에 평행한 직선의 방정식

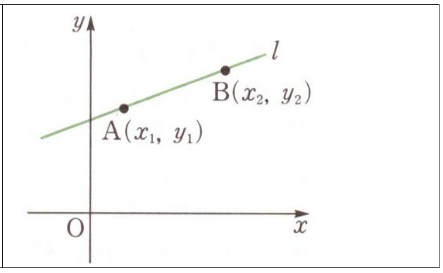
=> $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}$



3. 두 점을 지나는 직선의 방정식

점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 직선의 방정식

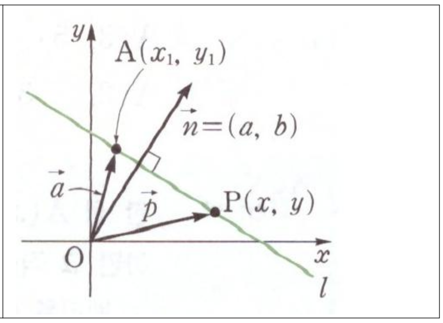
=> $\dfrac{x-x_1}{x_1-x_2}=\dfrac{y-y_1}{y_1-y_2}$



4. 한 점을 지나고 주어진 벡터에 수직인 직선의 방정식

점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 벡터 $\vec{n}=(a,b)$에 수직인 직선의 방정식

=> $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

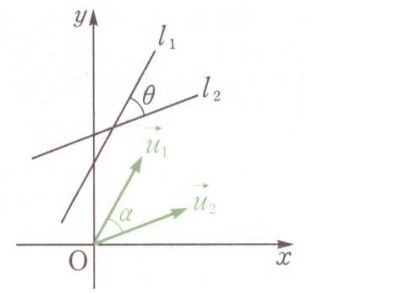


ex) 두 점 $A(2,3), B(5,-1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

ex) 점 $A(-1,3)$을 지나고 벡터 $\vec{n}=(2,1)$에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

< 평면벡터 : 두 직선이 이루는 각의 크기 >

1. 두 직선이 이루는 각의 크기

두 직선 l_1 , l_2의 방향벡터가 각각 $\overrightarrow{u_1}=(a_1, b_1)$, $\overrightarrow{u_2}=(a_2, b_2)$ 일 때 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 => $\cos\theta=\dfrac{\lvert\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}\rvert}{\lvert\overrightarrow{u_1}\rvert\lvert\overrightarrow{u_2}\rvert}$	

ex) 두 직선 l_1: $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{3}$, l_2: $\dfrac{x+2}{5}=3-y$ 가 이루는 각의 크기를 구하여라.

2. 두 직선의 평행과 수직

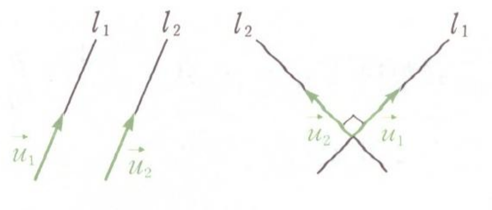
두 직선 l_1 , l_2의 방향벡터가 각각 $\overrightarrow{u_1}=(a_1, b_1)$, $\overrightarrow{u_2}=(a_2, b_2)$ 일 때

① $l_1 // l_2$ ⇔ $\overrightarrow{u_1}=k\overrightarrow{u_2}$

⇔ $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$

② $l_1 \perp l_2$ ⇔ $\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}=0$

⇔ $a_1a_2+b_1b_2=0$

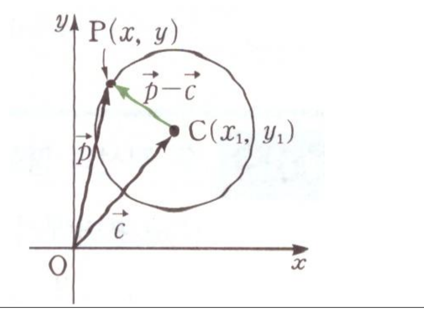


< 평면벡터 : 평면벡터를 이용한 원의 방정식 >

1. 원의 벡터방정식

위치벡터가 $\vec{c}$ 인 점 C를 지나고 반지름이 r인 원의 방정식

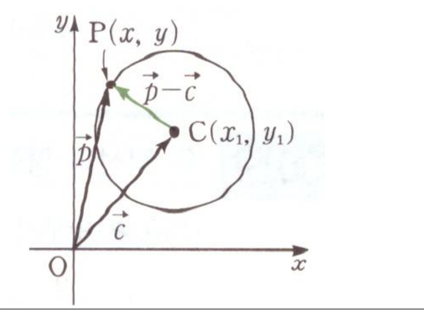
=> $|\vec{p}-\vec{c}|=r$



2. 원의 방정식

점 $C(x_1, y_1)$을 중심으로 하고 반지름이 r 인 원의 방정식

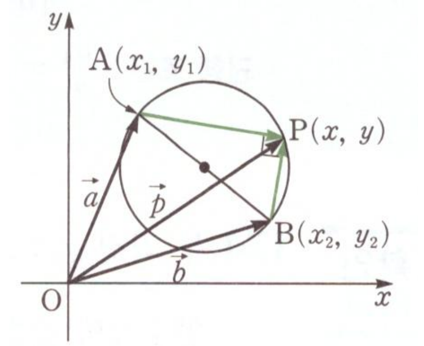
=> $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$



3. 지름의 양 끝점이 주어진 원의 방정식

점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식

=> $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

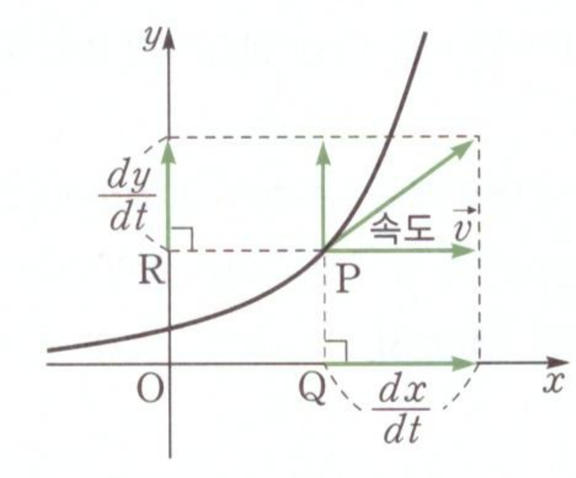


ex) 두 점 $A(5,1)$, $B(-1,7)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 구하여라.

< 평면운동 : 평면 운동에서의 속도와 가속도 >

1. 평면 위의 운동에서의 속도와 가속도

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x,y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$ 로 나타낼 때,	
① 속도 :	$\vec{v}=(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt})=(f'(t),g'(t))$
② 속력 :	$\lvert\vec{v}\rvert=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$
③ 가속도 :	$\vec{a}=(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{d^2y}{dt^2})=(f''(t),g''(t))$
④ 가속도의 크기 :	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{(\frac{d^2x}{dt^2})^2+(\frac{d^2y}{dt^2})^2}=\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$



ex) 좌표평면 위의 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x,y)가 다음과 같을 때,
시각 t에서의 점 P의 속도 , 속력 , 가속도의 크기를 구하여라.
$x=t^2+3t$, $y=t^3-t^2$ $[t=1]$

< 평면운동 : 평면 위에서의 속도와 거리 >

1. 평면 위의 운동에서 점이 움직인 거리

<table>
<tr><td colspan="2">좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가
$x=f(t)$, $y=g(t)$ 로 나타낼 때,</td></tr>
<tr><td>① $t=a$에서 $t=b$까지 점P가
움직인 거리 s</td><td>$s=\int_{b}^{a}\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,dt$</td></tr>
</table>

ex) 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x, y)$의 시각 t에서의 위치가 $x=t^3-3t$, $y=3t^2$ 일 때,
$t=0$에서 $t=1$까지 점P 가 움직인 거리 s를 구하여라.

2. 곡선의 길이

곡선 $y=f(x)$의 $x=a$에서 $x=b$까지의 길이 l :	$l=\int_{a}^{b}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx=\int_{a}^{b}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$

$x=f(t)$, $y=g(t)$의 $t=a$에서 $t=b$까지의 곡선의 길이 l	$l=\int_{a}^{b}\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,dt=\int_{a}^{b}\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$

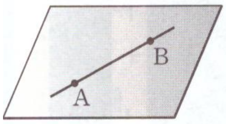
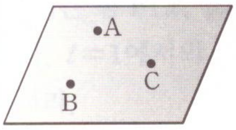
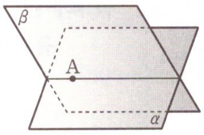
ex) 곡선 $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ 의 $x=0$에서 $x=3$까지의 길이 l을 구하여라.

ex) 곡선 $x=3t^2$, $y=1-t^2$ $(0\leq t\leq 2)$ 의 길이 l을 구하여라.

< 공간도형 : 직선과 평면의 위치관계 >

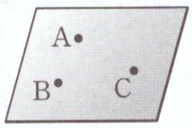
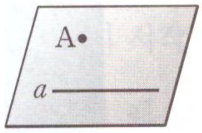
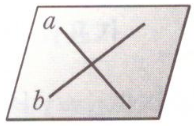
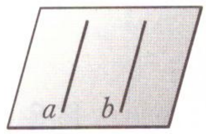
1. 공간도형의 기본 성질

① 한 평면 위의 서로 다른 두 점을 지나는 직선 위의 모든 점은 이 평면 위에 있다
② 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점을 지라는 평면은 오직 하나 존재한다.
③ 서로 다른 두 평면이 한 점을 공유하면 이 두 평명은 그 점을 지나는 한 직선을 공유한다.

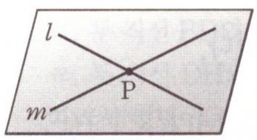
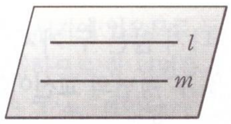
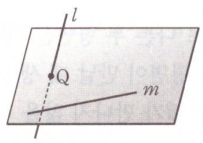
		

2. 평면의 결정조건

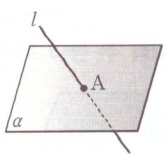
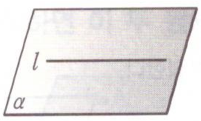
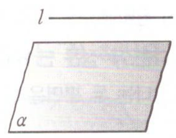
① 한 직선 위에 있지 않은 세 점을 포함하는 평면은 오직 하나뿐이다.
② 한 직선과 그 직선 위에 있지 않은 한 점을 포함하는 평면은 오직 하나뿐이다.
③ 한 점에서 만나는 두 직선을 포함하는 평면은 오직 하나뿐이다.
④ 서로 평행한 두 직선을 포함하는 평면은 오직 하나뿐이다.

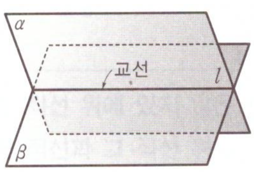
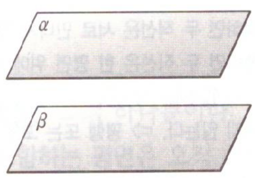
3. 두 직선의 위치 관계

① 한 점에서 만난다. 	② 평행하다. 	③ 꼬인 위치에 있다. 

4. 직선과 평면의 위치 관계

① 한 점에서 만난다. 	② 직선이 평면에 포함된다. 	③ 평행하다. 

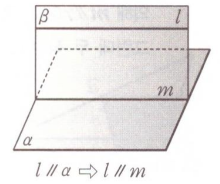
5. 두 평면의 위치 관계

① 만난다. 	② 평행하다. 

< 공간도형 : 직선과 평면의 평행 >

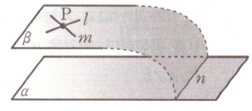
1. 정리 1

직선 l과 평면 α가 평행할 때, 직선 l을 포함하는
평면 β와 평면 α의 교선 m은 l과 평행하다.



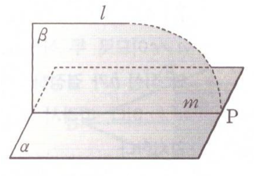
2. 정리 2

평면 α 위에 있지 않은 한 점 P를 지나는 두 직선 l, m 이 모두
평면 α에 평행하면 두 직선 l, m을 포함하는 평면 β는 평면 α와 평행



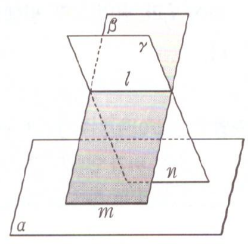
3. 정리 3

두 직선 l, m이 평행할 때, m을 포함하고 l을 포함하지 않는
평면 α는 직선 l과 평행하다.



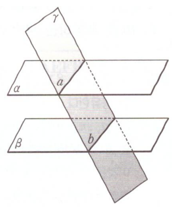
4. 정리 4

직선 l이 평면 α에 평행하면, 직선 l을 포함하는 평면 β , γ 와
평면 α의 교선을 각각 m,n이라 할 때, 두 직선 m, n은 평행하다.



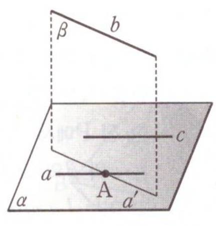
5. 정리 5

평면 γ 가 평행한 두 평면 α , β와 만날 때, 생기는 두 교선은 평행하다



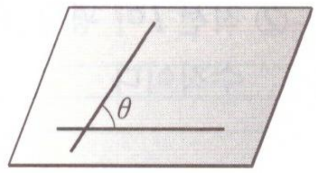
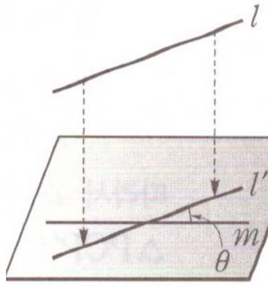
6. 정리 6

세 직선 a, b, c 에 대하여 $a//c$, $b//c$ 이면 $a//b$ 이다

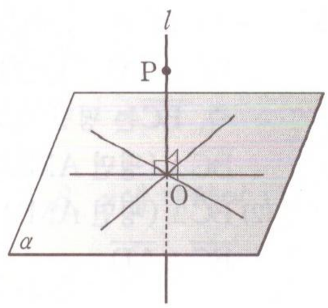


< 공간도형 : 직선과 평면의 수직 >

1. 두 직선이 이루는 각

① 두 직선이 한 점에서 만나는 경우	
② 두 직선이 꼬인 위치에 있는 경우	

2. 직선과 평면의 수직

직선과 평면의 수직	

① 직선 l 이 평면 α 위의 서로 다른 두 직선 m, n 의 교점 O를 지나고 두 직선 m, n과 각각 수직이면 직선 l 은 평면 α 와 수직이다. 즉 $l \perp \alpha$

② 직선 l 이 평면 α 와 수직이면 직선 l 은 평면 α 위의 모든 직선과 수직이다.

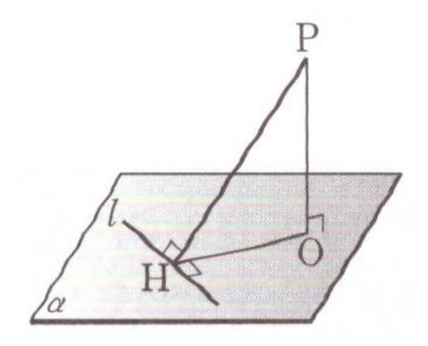
< 공간도형 : 삼수선의 정리 > (중요)

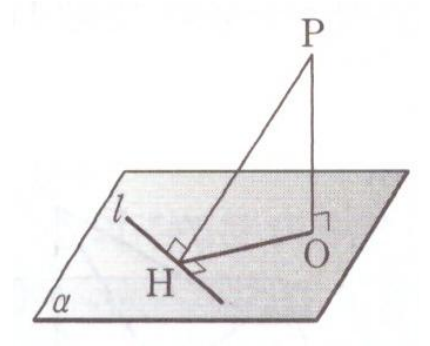
1. 삼수선의 정리

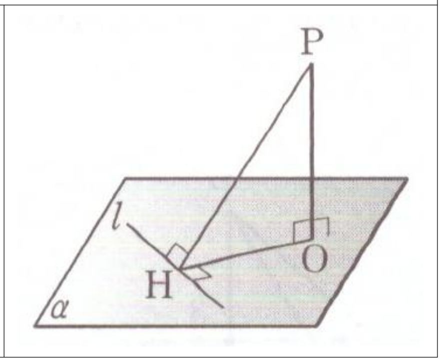
① 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O, O에서 l에 그은 수선의 발을 H라 하면
$\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp l$ 이면 $\overline{PH} \perp l$

② 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O, P에서 l에 그은 수선의 발을 H라 하면
$\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{PH} \perp l$ 이면 $\overline{OH} \perp l$

② 점 P에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H, 평면 α 위에서 H를 지나 l에 수직인 직선을 긋고
점 P에서 이 직선에 내린 수선의 발을 O라 하면
$\overline{PH} \perp l$, $\overline{OH} \perp l$, $\overline{PO} \perp \overline{OH}$ 이면 $\overline{PO} \perp \alpha$



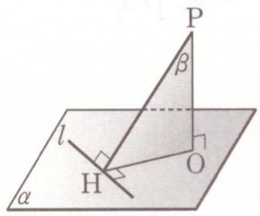




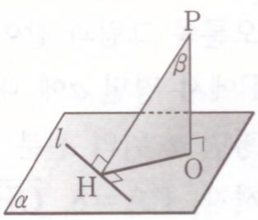
증명

삼수선의 정리의 증명

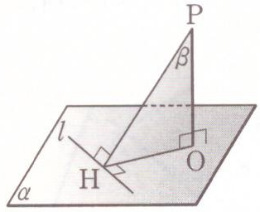
(1) $\overline{PO} \perp \alpha$이고 직선 l은 평면 α 위에 있으므로 $\overline{PO} \perp l$이다. $\overline{OH} \perp l$이므로 $\overline{PO}$와 $\overline{OH}$로 결정되는 평면을 β라고 하면 직선 l은 평면 β와 수직이다. 즉, $\beta \perp l$이다. 그런데 $\overline{PH}$는 평면 β 위에 있으므로 $\overline{PH} \perp l$이다.



(2) $\overline{PO} \perp \alpha$이고 직선 l은 평면 α 위에 있으므로 $\overline{PO} \perp l$이다. $\overline{PH} \perp l$이므로 $\overline{PO}$와 $\overline{PH}$로 결정되는 평면을 β라고 하면 직선 l은 평면 β와 수직이다. 즉, $\beta \perp l$이다. 그런데 $\overline{OH}$는 평면 β 위에 있으므로 $\overline{OH} \perp l$이다.



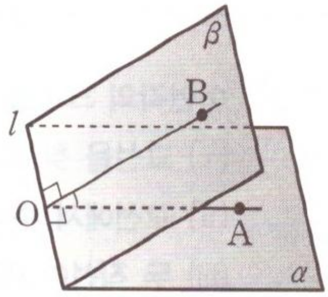
(3) $\overline{PH} \perp l$, $\overline{OH} \perp l$이므로 $\overline{PH}$와 $\overline{OH}$로 결정되는 평면 β에 대하여 $\beta \perp l$이다. 따라서 평면 β 위에 있는 $\overline{PO}$에 대하여 $\overline{PO} \perp l$이다. 그런데 $\overline{PO} \perp \overline{OH}$이므로 $\overline{PO}$는 두 직선 OH와 l로 결정되는 평면 α와 수직이다. 즉, $\overline{PO} \perp \alpha$이다.



< 공간도형 : 두 평면이 이루는 각의 크기 >

1. 이면각

두 평면이 이루는 각



* 이면각의 크기를 구하는 순서

① 교선을 찾는다.

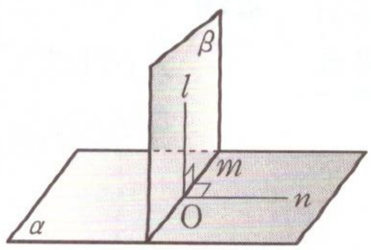
② 교선에서 수직으로 뻗어나간 두 직선을 찾는다.

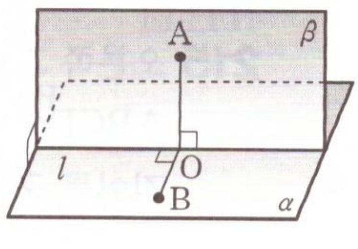
③ 두 직선이 이루는 각을 구한다.

2. 두 평면의 수직에 대한 정리

① 한 평면 α 에 수직인 직선 l을 포함하는 평면을 β 라고 하면 $\alpha \perp \beta$

② 두 평면 α, β 가 서로 수직일 때, 평면 β 위의 한 점 A에서 두 평면 α, β 의 교선에 내린 수선의 발을 O 라 하면 $\overline{AO} \perp \alpha$





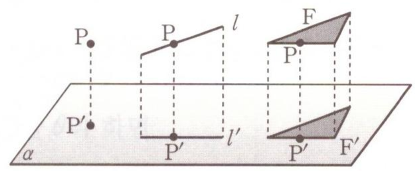
ex) 정사면체의 이웃하는 두 면이 이루는 $\cos\theta$ 값을 이면각을 이용하여 구하여라

< 공간도형 : 정사영 > (중요)

1. 정사영

① 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P 에서 평면 α에 내린 수선의 발 P'을 점 P의 평면 α 위로의 정사영이라 한다.

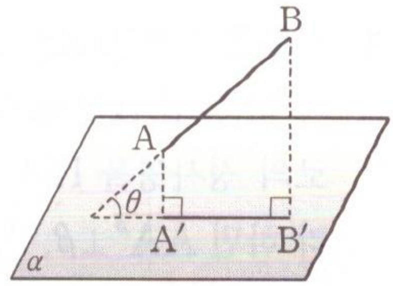
② 일반적으로 도형 F의 각 점에서 평면 α에 내린 수선의 발들로 이루어진 도형 F'을 도형 F의 평면 α위로의 정사영



2. 정사영의 길이

선분 AB의 평면 α위로의 정사영을 선분 $A'B'$ 이라 하고
직선 AB가 평면 α와 이루는 각의 크기를 θ라 하면

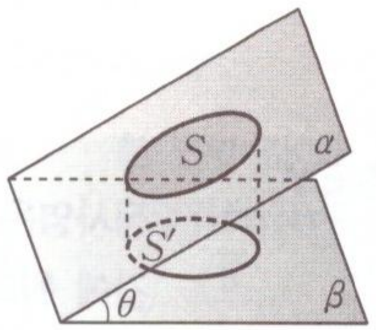
$$\overline{A'B'} = \overline{AB}\cos\theta \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$



3. 정사영의 넓이

평면 α 위에 있는 도형의 넓이를 S , 이 도형의 평면 β 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하고 두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

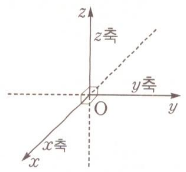
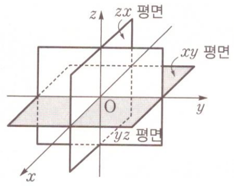
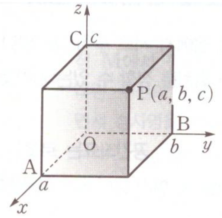
$$S' = S\cos\theta \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$



ex) 정사면체의 이웃하는 두 면이 이루는 $\cos\theta$ 값을 정사영을 이용하여 구하여라.

< 공간좌표 : 공간에서의 점의 좌표 >

1. 공간에서의 점의 좌표

① 좌표축 : x축 , y축 , z축	
② 좌표공간 : xy평면, yz평면, zx평면	
③ 공간좌표 : $P(a, b, c)$	

2. 점의 대칭이동 $P(a, b, c)$

① x축 대칭인 점	$(a, -b, -c)$
② y축 대칭인 점	$(-a, b, -c)$
③ z축 대칭인 점	$(-a, -b, c)$
④ 원점 대칭인 점	$(-a, -b, -c)$
⑤ xy평면에 대칭인 점	$(a, b, -c)$
⑥ yz평면에 대칭인 점	$(-a, b, c)$
⑦ zx평면에 대칭인 점	$(a, -b, c)$

3. 수선의 발의 좌표 $P(a, b, c)$

① x축에 내린 수선의 발	$(a, 0, 0)$
② y축에 내린 수선의 발	$(0, b, 0)$
③ z축에 대칭인 점	$(0, 0, c)$
④ xy평면에 내린 수선의 발	$(a, b, 0)$
⑤ yz평면에 내린 수선의 발	$(0, b, c)$
⑥ zx평면에 내린 수선의 발	$(a, 0, c)$

* 좌표공간에서 xy평면, yz평면, zx평면은 공간을 8개의 부분으로 나눈다.
* xy평면은 z축에 수직
  yz평면은 x축에 수직
  zx평면은 y축에 수직

< 공간좌표 : 두 점 사이의 거리 >

1. 두 점 사이의 거리

$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리 : $\overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

ex) $A(2,5,-3), B(3,-3,1)$ 두 점 사이의 거리를 구하여라.

< 공간좌표 : 선분의 내분점과 외분점 >

1. 선분의 내분점과 외분점

두 점 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$에 대하여

① 선분 AB를 $m:n$으로 내분한 점 : $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}, \dfrac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$

② 선분 AB를 $m:n$으로 외분한 점 : $\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}, \dfrac{my_2-ny_1}{m-n}, \dfrac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$

③ 선분 AB 의 중점 : $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}, \dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$

ex) $A(4,1,-3)$, $B(1,-2,3)$에 대하여 선분 AB를 2:1로 내분하는 점 P 와 외분점 Q 중점 M 좌표는?

2. 삼각형의 무게중심

세 점 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$에 대하여

=> $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}, \dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$

ex) $A(1,1,2), B(-1,2,3), C(0,3,1)$ 을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는?

< 공간좌표 : 구의 방정식 >

1. 구의 방정식 (표준형)

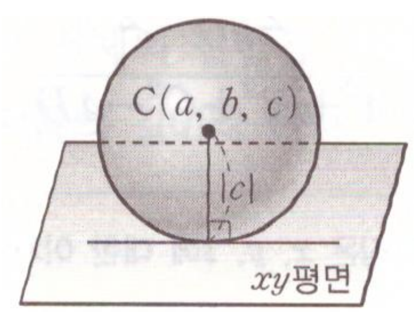
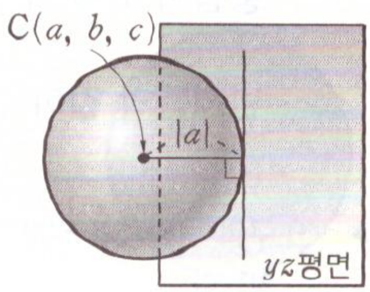
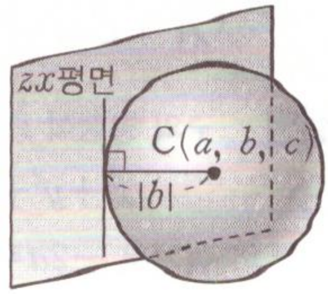
중심 : (a, b, c) , 반지름 : r

=> $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

ex) 중심이 (2 , -1 , 3)이고 반지름의 길이가 2인 구의 방정식은?

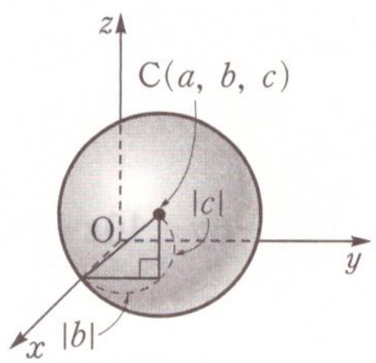
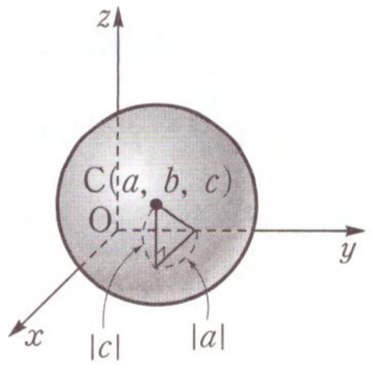
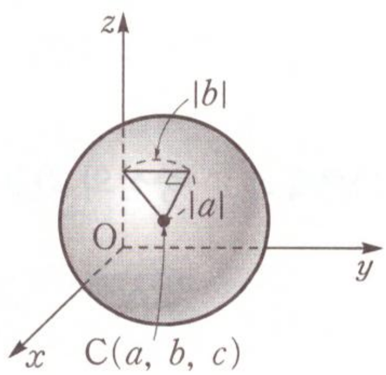
2. 좌표평면에 접하는 구의 방정식

중심 (a, b, c) 인 구

xy 평면에 접할 때	yz 평면에 접할 때	zx 평면에 접할 때
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=c^2$	$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2$	$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=b^2$
	 [그림 2]	 [그림 3]

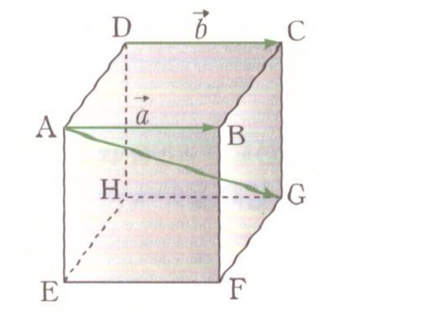
3. 좌표축에 접하는 구의 방정식

중심 (a, b, c) 인 구

x축에 접할 때	y축에 접할 때	z축에 접할 때
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=b^2+c^2$	$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+c^2$	$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2$
		

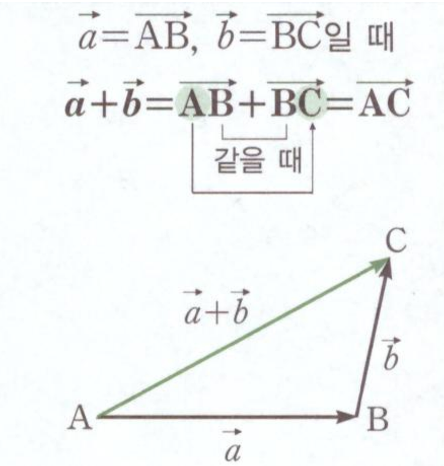
< 공간벡터 : 공간벡터의 뜻과 연산 >

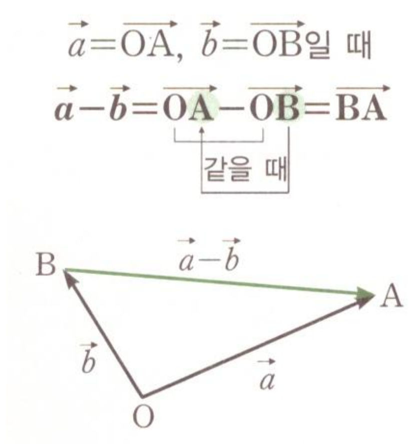
1. 공간벡터의 뜻

① 점 A를 시점, 점 G를 종점으로 하는 벡터 : $\overrightarrow{AG}$	
② 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기 : $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$ (선분 AB의 길이)	
③ 서로 같은 벡터 : 크기와 방향이 같은 벡터	
④ $\vec{a}$와 크기가 같고 방향이 반대인 벡터 : $-\vec{a}$	
⑤ 시점과 종점이 같은 벡터 : $\vec{0}$ (영벡터)	
⑥ 크기가 1인 벡터 : 단위벡터	

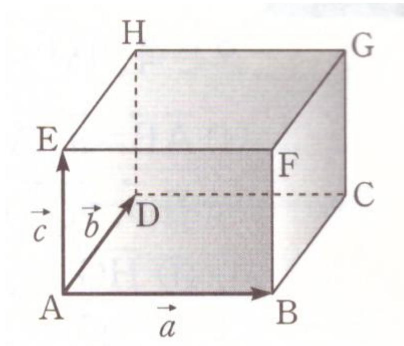
2. 공간벡터의 덧셈과 뺄셈

덧셈	뺄셈





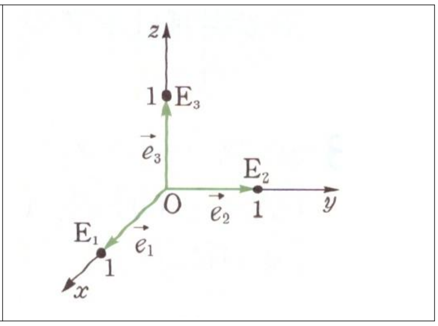
ex) 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ 라 할 때,
다음 벡터를 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 로 나타내어라.



< 공간벡터 : 공간벡터의 성분 >

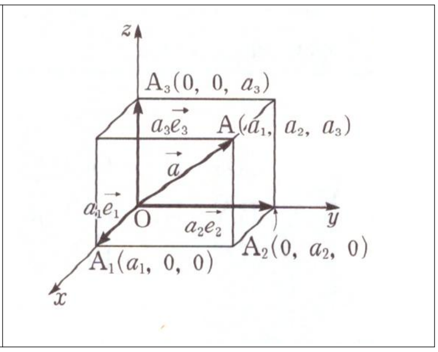
1. 공간벡터의 단위벡터

원점 O를 시점으로 하고
세 점 $E_1(1,0,0)$, $E_2(0,1,0)$, $E_3(0,0,1)$ 을 각각 종점으로 하는 세 단위벡터 $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_2}$, $\overrightarrow{OE_3}$ 를 각각 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ 로 나타낸다.
$\therefore\ \overrightarrow{OE_1}=\vec{e_1}$, $\overrightarrow{OE_2}=\vec{e_2}$, $\overrightarrow{OE_3}=\vec{e_3}$



2. 공간벡터의 성분 표시

$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3}$
$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$
$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$



3. 두 공간벡터가 서로 같을 조건

$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 일 때,
$\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $a_3=b_3$

4. 공간벡터의 성분에 의한 연산

$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 일 때,
① $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$
② $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)$
③ $k\vec{a}=(ka_1, ka_2, ka_3)$

5. 두 점에 대한 공간벡터의 성분과 크기

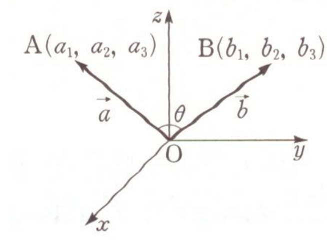
$A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ 에 대하여
① $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)$
② $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

ex) $\vec{a}=(-2,1,3)$ 일 때, 벡터 $\vec{a}$ 의 크기 $|\vec{a}|$ 를 구하여라.

ex) $\vec{a}=(3,-2,1)$, $\vec{b}=(2,3,-4)$ 에 대하여 $3\vec{a}+2\vec{b}$ 를 성분으로 나타내어라.

< 공간벡터 : 공간벡터의 내적 >

1. 공간벡터의 내적의 뜻

$\vec{a}, \vec{b}$ 의 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta$	

① $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$ 일 때 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
② $\vec{a}\cdot\vec{a}=\lvert\vec{a}\rvert^2$
③ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 은 벡터가 아니고 실수임

2. 평면벡터의 내적과 성분

$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 일 때, => $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

3. 공간벡터의 내적의 연산법칙

① 교환법칙 : $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
② 분배법칙 : $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
③ 결합법칙 : $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

* $\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert^2=\lvert\vec{a}\rvert^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\lvert\vec{b}\rvert^2$
* $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\lvert\vec{a}\rvert^2-\lvert\vec{b}\rvert^2$

4. 두 공간벡터가 이루는 가의 크기

$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

5. 평면벡터의 성분과 평행

$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 일 때,

① 평행조건 : $\vec{a}//\vec{b}$ 일조건 ⇔ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert$ ⇔ $\vec{a}=k\vec{b}$
② 수직조건 : $\vec{a}\perp\vec{b}$ ⇔ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

ex) $\vec{a}=(1,2,-3), \vec{b}=(-2,1,1)$ 일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 의 값을 구하여라

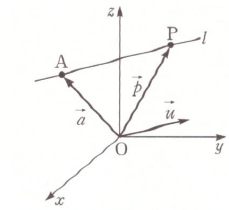
ex) $\vec{a}=(-1,2,1), \vec{b}=(2,-1,1)$이 이루는 각의 크기를 구하여라.

< 직선과 평면의 방정식 : 직선의 방정식 >

1. 직선의 벡터방정식

점 A를 지나고 방향벡터 $\vec{u}$ 인 직선의 방정식

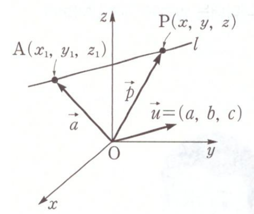
=> $\vec{p} = \vec{a} + t\,\vec{u}$



2. 한 점을 지나고 주어진 벡터에 평행한 직선의 방정식

점A(x_1, y_1, z_1) 을 지나고 벡터 $\vec{u} = (a, b, c)$ 평행한 직선의 방정식

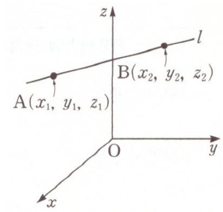
=> $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$



3. 두 점을 지나는 직선의 방정식

점A(x_1, y_1, z_1) , 점B(x_2, y_2, z_2) 을 지하는 직선의 방정식

=> $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$



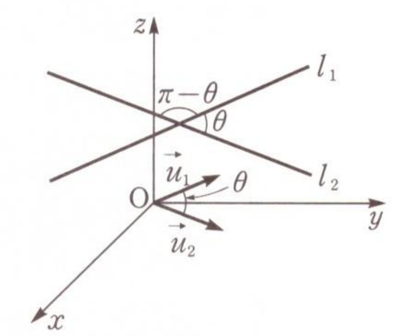
4. 좌표평면 또는 좌표축에 평행한 직선의 방정식

좌표평면에 평행한 직선의 방정식	
xy평면에 평행	$\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b}, z = z_1$
yz평면에 평행	$x = x_1, \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$
zx평면에 평행	$\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{z - z_1}{c}, y = y_1$

좌표축에 평행한 직선의 방정식	
x축에 평행	$y = y_1$, $z = z_1$
y축에 평행	$x = x_1$, $z = z_1$
z축에 평행	$x = x_1$, $y = y_1$

< 직선과 평면의 방정식 : 두 직선이 이루는 각의 크기 >

1. 두 직선이 이루는 각의 크기

두 직선 l_1 , l_2의 방향벡터가 각각 $\overrightarrow{u_1}=(a_1, b_1, c_1)$, $\overrightarrow{u_2}=(a_2, b_2, c_2)$ 일 때 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 => $\cos\theta=\dfrac{\lvert\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}\rvert}{\lvert\overrightarrow{u_1}\rvert\,\lvert\overrightarrow{u_2}\rvert}$	

ex) $1-x=\dfrac{y-2}{10}=\dfrac{z}{7}$, $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-2}{4}$ 가 이루는 각의 크기 θ를 구하여라.

2. 두 직선의 평행과 수직

두 직선 l_1 , l_2의 방향벡터가 각각 $\overrightarrow{u_1}=(a_1, b_1, c_1)$, $\overrightarrow{u_2}=(a_2, b_2, c_2)$ 일 때

① $l_1 // l_2$ ⇔ $\overrightarrow{u_1}=k\overrightarrow{u_2}$

⇔ $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$

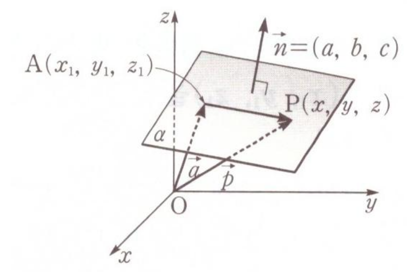
② $l_1 \perp l_2$ ⇔ $\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}=0$

⇔ $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

ex) 두 직선 $\dfrac{x-2}{m}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-3}{2}$, $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{n}=\dfrac{z-2}{1}$ 에 대하여 두 직선이 평행할 때, m, n 의 값을 구하고 , 두 직선이 수직일 때, m , n 의 관계식을 각각 구하여라.

< 직선과 평면의 방정식 : 평면의 방정식 >

1. 평면의 방정식

점A(x_1, y_1, z_1) 을 지나고 벡터 $\vec{n}=(a,b,c)$ 수직인 평면의 방정식 => $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$	

ex) 점 (2, -3, 4) 를 지나고 벡터 $\vec{n}=(3,-2,1)$에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.

2. 좌표평면에 평행한 평면의 방정식

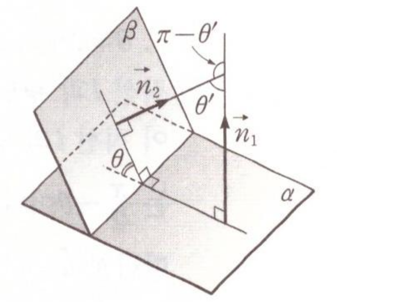
xy평면에 평행한 평면	z축에 수직인 평면 법선벡터 $\vec{n}=(0,0,1)$	$z=z_1$
yz평면에 평행한 평면	x축에 수직인 평면 법선벡터 $\vec{n}=(1,0,0)$	$x=x_1$
zx평면에 평행한 평면	y축에 수직인 평면 법선벡터 $\vec{n}=(0,1,0)$	$y=y_1$

< 직선과 평면의 방정식 : 두 평면이 이루는 각의 크기 >

1. 두 평면이 이루는 각의 크기

두 평면 α, β의 법선벡터가 각각 $\overrightarrow{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$, $\overrightarrow{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$
두 평면이 이루는 각의 크기는 θ

=> $\cos\theta = \dfrac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\,|\overrightarrow{n_2}|}$



ex) 두 평면 $\alpha : x + y + 2z + 3 = 0$, $\beta : 2x - y + z - 4 = 0$ 이 이루는 각의 크기를 구하여라.

2. 두 평면의 평행과 수직

두 평면 α, β의 법선벡터가 각각 $\overrightarrow{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$, $\overrightarrow{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$ 일 때

① $\alpha // \beta \Leftrightarrow n_1 // n_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} = k\overrightarrow{n_2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

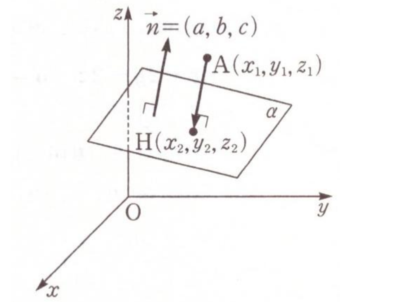
② $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow n_1 \perp n_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$

$\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

ex) 두 평면 $2x + ay + bz - 5 = 0$, $4x - 3y + 8z + 3 = 0$ 이 평행할 때, a, b 의 값을 구하여라.

< 직선과 평면의 방정식 : 점과 평면 사이의 거리 >

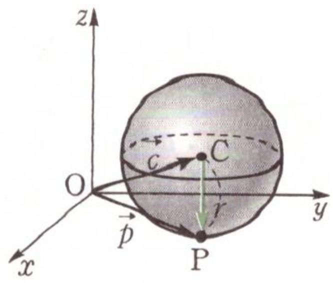
1. 점과 평면 사이의 거리

점$\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리 => $\dfrac{\lvert ax_1+by_1+cz_1+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$	

ex) 점 (1 , 3, -2)에서 평면 $3x-2y+6z+1=0$ 까지의 거리를 구하여라.

< 직선과 평면의 방정식 : 벡터를 이용한 구의 방정식 >

1. 좌표공간에서 구의 방정식

점 C를 중심 , 반지름 r $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ 일 때 , 이 구의 벡터방정식 => $\lvert\vec{p}-\vec{c}\rvert=r \Leftrightarrow (\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$ 점 C (x_1, y_1, z_1) , 반지름 r 인 구의 방정식 => $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r^2$	

ex) 두 점 $C(-3,1,2)$, $P(x,y,z)$ 의 위치벡터를 각각 $\vec{c}, \vec{p}$ 라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 점P가 나타내는 도형을 말하여라.

(1) $\lvert\vec{p}-\vec{c}\rvert=5$

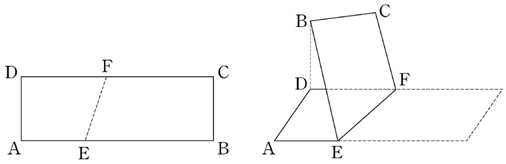
(2) $\lvert\vec{p}\rvert=3$

< 이루는 각 $\cos\theta$ 문제 유형 > (특강)

1. 직각 삼각형 (피타고라스 & 삼각비)

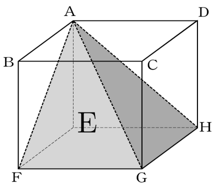
$\overline{AB}=9$, $\overline{AD}=3$인 직사각형 ABCD 모양의 종이가 있다. 점 B의 평면 AEFD 위로의 정사영이 점 D가 되도록 종이를 접었다.

$\overline{AE}=3$일 때, 두 평면 AEFD와 EFCB가 이루는 각의 크기가 θ이다. $60\cos\theta$의 값을 구하시오.[1]



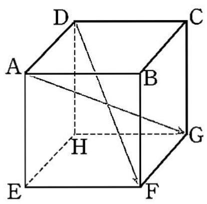
2. 일반 삼각형 (제2 cos 법칙)

정육면체 ABCD－EFGH에서 평면 AFG와 평면 AGH가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta$의 값은? [2]



3. 공간 좌표화 (벡터의 내적)

그림과 같은 정육면체에서 두 벡터 $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{DF}$ 가 이루는 각을 θ라고 할때, $\cos\theta$의 값을 구하라.



4. 직방/평방 (벡터의 내적)

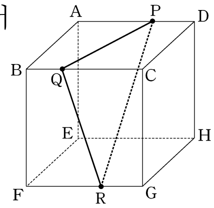
좌표공간에서 구

$(x-5)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=5$에 접하고 x축을 포함하는 두 평면이 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3]

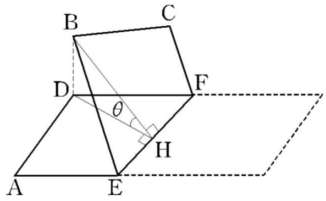
5. 정사영

오른쪽 그림과 같이한 모서리의 길이가 3 인 정육면체 ABCD－EFGH의 세 모서리 AD, BC, FG 위에 $\overline{DP}=\overline{BQ}=\overline{GR}=1$인 세 점 P, Q, R이 있다.

평면 PQR와 평면 CGHD가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos\theta$ 의 값은?



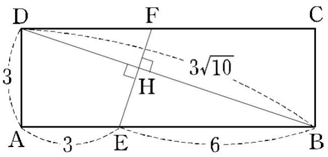
1) 정답 40



B에서 $\overline{\mathrm{EF}}$에 내린 수선의
발을 H라 하면
삼수선의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{DH}} \perp \overline{\mathrm{EF}}$
두 평면 AEFD와 EFCB가
이루는 각 θ는 두 평면의 교선 $\overline{\mathrm{EF}}$에 수직인 $\overline{\mathrm{BH}}$와
$\overline{\mathrm{DH}}$가 이루는 각의 크기와 같다.

$$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{DH}}}{\overline{\mathrm{BH}}}$$

이제 종이를 다시 펼치면 그림과 같다.



$\triangle \mathrm{BDA} \backsim \triangle \mathrm{BEH}$이므로

$\overline{\mathrm{EB}} : \overline{\mathrm{HB}} = \overline{\mathrm{DB}} : \overline{\mathrm{AB}}$

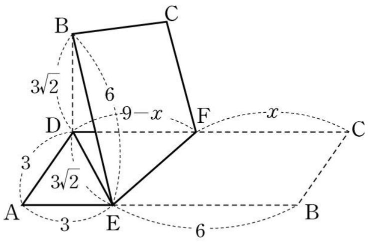
$$\overline{\mathrm{HB}} = \frac{9\cdot 6}{3\sqrt{10}} = \frac{18}{\sqrt{10}}$$

$$\overline{\mathrm{DH}} = \overline{\mathrm{DB}} - \overline{\mathrm{BH}} = 3\sqrt{10} - \frac{18}{\sqrt{10}} = \frac{12}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \ \cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{DH}}}{\overline{\mathrm{BH}}} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \ 60\cos\theta = 60 \times \frac{2}{2} = 40$$

[다른 풀이]



$\overline{\mathrm{AE}} = 3$이므로 $\overline{\mathrm{BE}} = 9-3 = 6$

$\overline{\mathrm{DE}} = 3\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BD}} = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{FC}} = x$라 하면 $\overline{\mathrm{DF}} = 9-x$

한편, $\triangle$ BDF, $\triangle$ BCF는 모두 직각삼각형이므로

$$\overline{\mathrm{BF}}^2 = (3\sqrt{2})^2 + (9-x)^2 = x^2 + 3^2$$

$$18 + 81 - 18x + x^2 = x^2 + 9$$

$$18x = 90 \quad \therefore \ x = 5$$

$$\therefore \ \triangle \mathrm{DEF} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6, \ \triangle \mathrm{BEF} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$

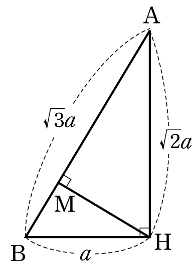
이때, $\triangle$ BEF의 평면 ABCD 위로의 정사영이 $\triangle$ DEF
이므로

$$\cos\theta = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \ 60\cos\theta = 60 \cdot \frac{2}{3} = 40$$

2) 정답 ③

한 모서리의 길이를 a라 하고 H, F에서 $\overline{\mathrm{AG}}$에 그은 수선의 발을 M이라 하면 오른쪽 그림에서



$\triangle \mathrm{AGH} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{GH}} \cdot \overline{\mathrm{AH}}$

$= \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AG}} \cdot \overline{\mathrm{HM}}$ 이고

$\overline{\mathrm{AH}} = \sqrt{2a}$, $\overline{\mathrm{BH}} = a$, $\overline{\mathrm{AG}} = \sqrt{3a}$ 이므로

$\overline{\mathrm{HM}} = \frac{\sqrt{6}}{3}a = \overline{\mathrm{FM}}$

또, $\overline{\mathrm{FH}} = \sqrt{2a}$ 에서

$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{HM}}^2 + \overline{\mathrm{FM}}^2 - \overline{\mathrm{FH}}^2}{2 \cdot \overline{\mathrm{HM}} \cdot \overline{\mathrm{FM}}}$

$= \frac{\frac{6}{9}a^2 + \frac{6}{9}a^2 - 2a^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a} = \frac{-\frac{6}{9}a^2}{\frac{12}{9}a^2} = -\frac{1}{2}$

$\therefore \cos^2\theta = \frac{1}{4}$

3) x축을 포함하는 평면의 방정식을 $by + cz = 0$이라고 하면 구의 중심 $(5,\ 3,\ 4)$와 평면 사이의 거리가 구의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|3b+4c|}{\sqrt{b^2+c^2}} = \sqrt{5}$

양변을 제곱하면

$(3b+4c)^2 = 5(b^2+c^2)$

$4b^2 + 24bc + 11c^2 = 0, \quad (2b+11c)(2b+c) = 0$

$\therefore \ b = -\frac{11}{2}c$ 또는 $b = -\frac{1}{2}c$

따라서 구에 접하는 평면의 방정식은

$-\frac{11}{2}cy + cz = 0$ 또는 $-\frac{1}{2}cy + cz = 0$

$\therefore \ 11y - 2z = 0$ 또는 $y - 2z = 0$

두 평면의 법선벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라고 하면

$\vec{u} = (0,\ 11,\ -2)$, $\vec{v} = (0,\ 1,\ -2)$

이므로

$\cos\theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{|15|}{\sqrt{125}\sqrt{5}} = \frac{3}{5}$