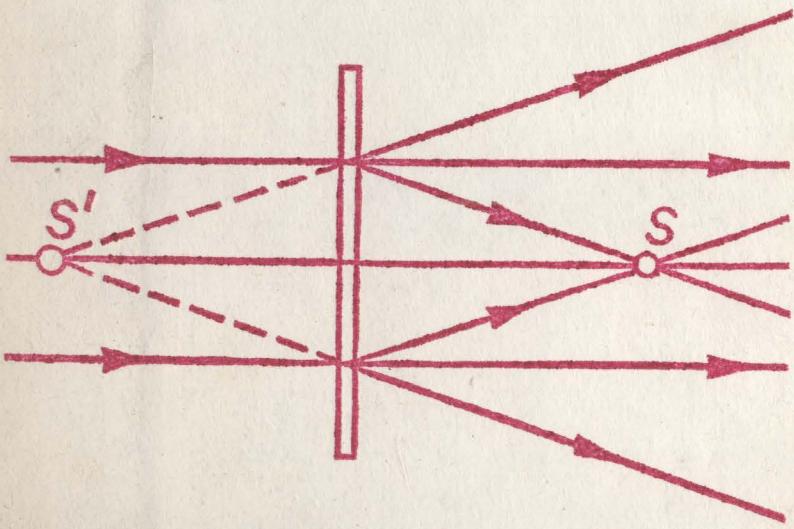


СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ



С.М.КОЗЕЛ
Э.И.РАШБА
С.А.СЛАВАТИНСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ



С. М. КОЗЕЛ
Э. И. РАШБА
С. А. СЛАВАТИНСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

ЗАДАЧИ МФТИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов физических специальностей
высших учебных заведений*



МОСКОВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987

ББК 22.3

К 59

УДК 53(075.8)

КОЗЕЛ С. М., РАШБА Э. И., СЛАВАТИНСКИЙ С. А. Сборник задач по физике: Учеб. пособие — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 304 с., ил.

Включает свыше 800 задач повышенной трудности из числа предлагавшихся на экзаменах по физике студентам Московского физико-технического института. Это, как правило, задачи с глубоким физическим содержанием, приближенные к практике и возникающие из эксперимента. Многие задачи имеют оценочный характер и охватывают одновременно различные разделы физики. Новое издание (1-е изд. — 1978 г.) дополнено экзаменационным материалом последнего десятилетия.

Для студентов физических специальностей вузов, а также преподавателей физики высшей и средней школ.

Ил. 220

Р е ц е н з е н т
кафедра общей физики Московского инженерно-физического
института

К — 1704010000—166
053(02)-87 115-87

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы,
1978, 1987, с изменениями

СОДЕРЖАНИЕ

	Задачи	Ответы и решения
Pредисловие	5	
От авторов	9	
I. Механика		
§ 1.1. Движение материальной точки	11	187
§ 1.2. Реактивное движение. Гравитация	18	191
§ 1.3. Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. Неинерциальные системы отсчета	23	195
§ 1.4. Движение твердого тела и жидкости	29	197
II. Термодинамика и молекулярная физика		
§ 2.1. Газовые законы. Первое и второе начала термодинамики. Термодинамические циклы	39	200
§ 2.2. Реальные газы. Теплопроводность. Вязкость	39	200
§ 2.3. Молекулярно-кинетическая теория. Явления переноса	46	206
§ 2.4. Флуктуации. Фазовые переходы. Поверхностное натяжение	49	209
§ 2.4. Флуктуации. Фазовые переходы. Поверхностное натяжение	54	213
III. Электричество и магнетизм		
§ 3.1. Электростатика	59	218
§ 3.2. Постоянный электрический ток	69	224
§ 3.3. Магнитное поле	72	225
§ 3.4. Электромагнитные поля	94	236
§ 3.5. Квазистационарные токи. Колебания в электрических цепях	98	238
IV. Оптика		
§ 4.1. Геометрическая оптика и элементы фотометрии	115	242
§ 4.2. Интерференция	117	243
§ 4.3. Дифракция. Элементы голограммии и фурье-оптики	124	245

	Задачи	Ответы и решения
§ 4.4. Дифракционный предел разрешения оптических инструментов и спектральных приборов	132	247
§ 4.5. Поляризация. Оптические явления в кристаллах	137	252
§ 4.6. Дисперсия и распространение света	143	254
V. Атомная физика	148	259
§ 5.1. Кванты света. Фотоэффект. Эффект Комptonа	148	259
§ 5.2. Волны де Бройля. Волновые функции	150	260
§ 5.3. Атомы и их излучение	154	261
VI. Излучение	159	264
VII. Твердое тело	163	266
§ 7.1. Свойства кристаллических решеток. Фононы. Теплопроводность	163	266
§ 7.2. Электроны в металлах	166	269
§ 7.3. Электроны в полупроводниках	171	275
VIII. Ядерная физика	174	279
§ 8.1. Элементарные частицы	174	279
§ 8.2. Структура ядра и ядерные реакции	178	281
Приложения	286	
I. Фундаментальные физические константы	286	
II. Некоторые астрофизические постоянные	288	
III. Некоторые внесистемные единицы	290	
IV. Приставки и множители для образования десятичных кратных и дольных единиц	291	
V. Единицы некоторых физических величин в системах СИ и СГС и соотношения между ними	292	
VI. Таблица лептонов (спин $\frac{1}{2}$)	294	
VII. Таблица夸克 (спин $\frac{1}{2}$)	294	
VIII. Таблица некоторых адронов	295	
IX. Таблица экзотических частиц	296	
X. Таблица свойств изотопов	297	
XI. Периодическая система элементов Д. И. Менделеева	300	

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сказки помогают детям познать мир взрослых, задачи же служат аналогичной цели при знакомстве студента с физикой. Действительно, у задач много общего с фольклором. Так же как и сказки, задачи дают студенту первое представление о мире физическом, о методах его описания и путях познания. Элементарные задачи описывают условный мир точечных масс, невесомых нитей, идеальных газов и других совершенных тел, подобный сказочному миру, населенному свирепыми змиями и прекрасными принцами, путешествующими на коврах-самолетах в поисках жар-птиц. В таком мире силы добра и зла четко очерчены и нравственные проблемы отличаются ясностью и однозначностью ответа. В задачах мы также можем рассматривать условия малореальные, даже фантастические; так же как сказки, такие задачи развиваются наше воображение. Более жизненные задачи постепенно приближают нас к сложной картине реального научного поиска, где многие вопросы требуют значительного труда даже для их формулировки, и, наконец, более глубокое исследование часто приводит к расширению наших представлений и дает возможность по-новому осмыслить проблему, поставленную вначале. Так и с задачами в этом сборнике: часто более углубленное рассмотрение потребует либо новых расчетов, либо может послужить поводом к более серьезным размышлениям.

У задач есть еще одно сходство с фольклором. Это вопрос о том, кто автор первоначальной идеи той или иной задачи. На это редко можно дать точный ответ, а в таких установившихся разделах, как механика, особенно много «традиционных сюжетов», которые каждое поколение аранжирует на свой лад. Большинство представленных задач извлечено из архива кафедры физики Московского физико-технического института. Составители задачника профессора С. М. Козел, Э. И. Рашба и С. А. Славатинский проделали большую работу, впервые систематически обработав и отредактировав этот обширный материал: до сих пор в литературу попадали лишь отдельные задачи. При редактировании составителям удалось сохранить тот живой и непосредственный подход к задачам, который, быть может, характерен для современного стиля мышления работающих физиков-исследователей.

Задачник МФТИ своей связью с физикой наших дней передает то, что мы отождествляем с «системой Физтеха». По этой системе активно работающие учёные принимают непосредственное участие в воспитании и подготовке следующего поколения исследователей и инженеров. Эта прямая связь особенно важна в преподавании фундаментальных естественнонаучных дисциплин, из которых физика и математика являются главными. При этом сокращается разрыв между специальной и общей подготовкой и исключается то запаздывание в требованиях и подходе, которое возникает тогда, когда дело преподавания общих курсов передается исключительно профессиональным педагогам. Таким образом, этот задачник продолжает традиции преподавания физики, которые были заложены при основании МФТИ академиками П. Л. Капицей и Л. Д. Ландау. Хорошо известны как оригинальные задачи П. Л. Капицы, опубликованные в ряде изданий, так и то место, которое задачи за-

нимают в курсе теоретической физики Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица.

Уровень задач в известных пределах отвечает тем требованиям, которые ставит перед студентами курс общей физики МФТИ. В гораздо большей мере, чем программы, задачи могут служить мерилом уровня требований, и их можно рассматривать как реальную, в операционном смысле, меру этих требований. Поэтому не случайно, что многие задачи возникли на основе заключительного экзамена, которым завершается курс общей физики в МФТИ. Заключительный экзамен принимается авторитетными комиссиями, в которые входят физики всех основных специальных кафедр и базовых институтов МФТИ. Экзамен состоит из письменного решения задач и доклада реферата на избранную студентом тему. Задачи, предлагаемые на этом экзамене, часто построены так, что охватывают сразу несколько разделов физики. При решении задач студенты должны проявить знание общей физики, т. е. умение идеализировать явления, применение законов сохранения, условий симметрии и инвариантности, принципов подобия, выделение безразмерных параметров, осмысливание результатов при переходе к предельным условиям. Другое требование, которое мы постоянно выдвигаем перед студентами, — это необходимость доводить решение до числа, давать числовой ответ. При этом важно, чтобы числа не только имели реальный смысл, но были бы полезны и помогали студенту накапливать нужные данные в своей памяти.

В еще большей мере, чем содержание курса, новые задачи отражают время и обстоятельства их создания. Действительно, буквально каждый значительный шаг в физике мы можем и, наверное, должны отражать в задачах, если хотим в преподавании поспеть за быстротекущим развитием научной мысли. Неисчерпаемым источником тем и вдохновения для задач

по общей физике могут служить два наиболее активных участка фундаментальных исследований: физика космоса и астрофизика, с одной стороны, и физика элементарных частиц — с другой. Многолетняя практика человечества в познании явлений природы учит, что наиболее важные фундаментальные свойства вещества проявляются в предельных формах его существования. Именно экстремальные условия природы дают исключительный простор творческому воображению и служат ареной для оценок и выводов, основанных на прямом и часто очень поучительном применении основных законов физики.

Можно надеяться, что многие задачи, приведенные в настоящем сборнике, послужат основой для подробного разбора на семинаре; другие будут использованы при самостоятельной работе студентов над курсом общей физики.

В заключение хотелось бы призвать как преподавателей, так еще в большей степени студентов к тому, чтобы искать и придумывать задачи самим. При современной, несколько прагматичной направленности образования, вернее, способа обучения, решению готовых задач уделяется большое внимание. Но очень важно, чтобы при необходимом приобретении навыков решения задач, в которых мы видим зародыши научной работы, не происходило торможения воображения и не подавлялась бы творческая интуиция.

Из всех проблем самая важная — это правильная постановка задач — как при образовании ученого, так и в его работе в будущем, но научить этому труднее всего.

С. П. Капица

ОТ АВТОРОВ

В настоящий сборник включены задачи, преддавшиеся в течение многих лет студентам Московского физико-технического института на экзаменах по физике. Инициатива издания сборника главным образом принадлежит заведующему кафедрой физики С. П. Капице.

Составители отобрали и отредактировали для сборника те задачи из обширного архива кафедры физики МФТИ, которые казались наиболее интересными с физической точки зрения.

При составлении сборника отдавалось предпочтение задачам, приближенным к практике, родившимся под влиянием физического эксперимента. В таких задачах рассматриваются не идеализированные схемы, а реальные физические объекты. Многие задачи носят оценочный характер; они должны способствовать развитию у студентов ясности физического мышления и ощущения масштабов физических величин и явлений. При решении большинства задач необходимо не только формальное знание законов, но и достаточно широкий физический кругозор.

При подготовке 2-го издания в сборник были внесены существенные изменения. Значительно расширен круг задач. Исключены некоторые задачи, использованные в других изданиях. Хотя в сборнике по-прежнему довольно много задач повышенной трудности, в него включены и более простые задачи, рассчитанные на менее подготовленного читателя. В настоящем издании сборник в большей степени ориентирован на самостоятельную работу студентов. Именно поэтому было признано целесообразным, как правило, не указывать хода решения задач и ограничиться только приведением окончательных ответов и кратких пояс-

нений. Лишь некоторые, наиболее трудные задачи снабжены полным решением. В сборнике преимущественно использована система единиц СИ, а также гауссова система.

Большинство задач, включенных в сборник, являются оригинальными. В разные годы они были предложены преподавателями кафедры физики МФТИ. В этом смысле сборник можно рассматривать как коллективный труд всей кафедры, хотя ответственность за возможные недосмотры целиком ложится на авторов. Сборник содержит некоторое число задач, не претендующие на оригинальность, но имеющих общефизический интерес.

Значительное число задач, включенных в сборник, было предложено Л. Л. Гольдиным, Б. Г. Ерозолимским, С. П. Капицей, И. П. Крыловым, Г. Р. Локшиным, Л. А. Микаэляном, И. Ф. Щеголевым, Д. Б. Диатраповым, А. П. Кирьяновым, Л. Б. Луганским, А. В. Францессоном и многими другими преподавателями кафедры физики.

При работе над сборником были широко использованы задачники по различным разделам физики, изданные в МФТИ в 1976—1983 гг. Большой труд при подготовке этих задачников был выполнен Л. П. Баканиной, Н. С. Берюловой, Д. А. Заикиным, А. В. Степановым, М. А. Тулайковой, Н. И. Петеримовой.

Всем перечисленным лицам, а также тем, кто прислал свои замечания к 1-му изданию сборника, авторы выражают свою искреннюю благодарность.

Работа между авторами при подготовке настоящего издания была распределена следующим образом: разделы III и IV подготовлены С. М. Козелом, разделы II, VI и VII — Э. И. Рашибой, а разделы I, V и VIII — С. А. Славатинским.

Авторы с благодарностью примут все замечания, которые неизбежно возникнут у читателей, и советы по улучшению сборника.

ЗАДАЧИ

I. МЕХАНИКА

§ 1.1 Движение материальной точки

1.1. Теннисный мяч падает на тяжелую ракетку под углом $\varphi = 60^\circ$ к нормали и упруго отскакивает. Масса мяча пренебрежимо мала по сравнению с массой ракетки. С какой скоростью v должна двигаться ракетка, чтобы мяч отскочил под прямым углом к первоначальной траектории?

1.2. Автомобиль движется с постоянной скоростью $v = 90$ км/ч по замкнутой горизонтальной дороге, имеющей форму эллипса с полуосами $a = 500$ и $b = 250$ м. Найти максимальное a_{\max} и минимальное a_{\min} ускорения. Каков должен быть коэффициент трения k между полотном дороги и шинами автомобиля, чтобы автомобиль при движении по эллипсу не заносило?

1.3. Хоккейная шайба падает на лед с начальной скоростью v_0 под углом α и продолжает скользить по льду. Найти скорость скольжения как функцию времени $v(t)$, если считать, что коэффициент трения k шайбы о лед не зависит от скорости и силы давления шайбы на лед.

1.4. Метатель посыпает молот массой $m = 5$ кг на расстояние $l = 70$ м по траектории, обеспечивающей максимальную дальность броска при данной начальной скорости. Какая сила F действует на спортсмена при ускорении молота? Разгон ведется по окружности радиусом $R = 2$ м. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.5. Какой максимальной кинетической энергией $W_{k\max}$ может обладать маховик объемом $V = 1$ м³, если предел прочности материала на разрыв $\sigma_{\text{пр}} = 1 \cdot 10^9$ Па. Всю массу маховика считать заключенной

в его ободе (тонком по сравнению с его радиусом). Показать, что при неизменной прочности материала маховика максимальная кинетическая энергия зависит только от объема, но не от массы маховика.

1.6. Ядерные силы определяются взаимодействием между нуклонами (протонами и нейтронами). Потенциальная энергия взаимодействия двух нуклонов на расстоянии r с хорошей точностью может быть представлена формулой, предложенной японским физиком Юкавой: $U(r) = -(r_0/r) W_0 \exp(-r/r_0)$, где $W_0 = 50$ МэВ, а $r_0 = 1,5 \cdot 10^{-13}$ см. Найти выражение для соответствующей силы $F(r)$. На каком расстоянии r_1 сила уменьшится до 1 % от величины, которую она имеет при $r = r_0$?

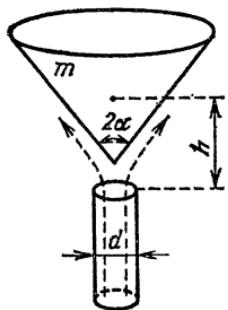


Рис. 1.1

также постоянным, оценить высоту h , на которой будет парить конус. Плотность алюминия $\rho = 2,8$ г/см³.

1.8. Центр масс O автомобиля расположен на равном расстоянии от передних и задних колес на высоте $h = 0,4$ м над поверхностью земли. Коэффициент трения равен $k = 0,8$, расстояние между осями $l = 5h$. На какой угол α наклонится автомобиль при резком торможении (рис. 1.2)? Упругость всех пружин подвески одинакова и такова, что

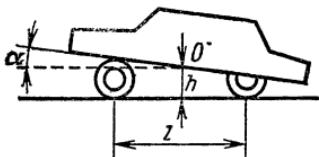


Рис. 1.2

у неподвижного автомобиля на горизонтальной площадке их прогиб равен $\Delta = 10$ см.

1.9. При торможении всеми четырьмя колесами тормозной путь автомобиля равен L . Найти тормозные пути этого же автомобиля при торможении только передними (L_1) и только задними (L_2) колесами. Коэффициент трения скольжения равен $k = 0,8$. Центр масс автомобиля расположен на равном расстоянии от передних и задних колес на высоте $h = l/4$ над по-

верхностью земли, l — расстояние между осями автомобиля.

1.10. Длинная однородная балка массой m и длиной l перевозится на двух санях (рис. 1.3). Сила тяги приложена к балке и направлена по горизонтали на высоте h над поверхностью земли. Коэффициент трения для передних саней равен k_1 , для задних — k_2 . Какую силу тяги F нужно приложить для равномерного перемещения этого груза по горизонтали? Массами саней пренебречь.

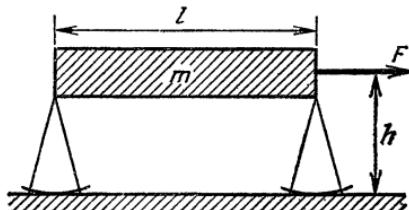


Рис. 1.3

1.11. Автомобиль «Жигули» массой $m = 1200$ кг способен на скорости $v = 50$ км/ч двигаться по дороге с наибольшим уклоном к горизонту, равным $\alpha = 16^\circ$. При движении по ровной дороге с таким же покрытием и на той же скорости мощность, расходуемая двигателем, равна $P = 14,7$ кВт. Найти максимальную мощность P_{\max} двигателя.

1.12. Руда насыпается из бункера в вагон, катящийся по рельсам без трения. Начальная скорость вагона равна v_0 , длина — l , масса пустого вагона — m_0 , вес загруженной руды — m_1 . Подача руды из бункера происходит таким образом, что руда ложится на пол вагона слоем постоянной высоты. Найти время загрузки t .

1.13. Футболист забивает гол с 11-метрового штрафного удара (L) точно под перекладину. Какую минимальную энергию W_{\min} в этом случае необходимо было сообщить мячу? Под каким углом α должен был вылететь мяч? Высота ворот равна $h = 2,5$ м, масса мяча $m = 0,5$ кг.

1.14. Атлет толкает ядро с разбега. Считая, что скорость ядра относительно атлета равна скорости разбега, найти угол α , под которым следует выпустить ядро относительно земли, чтобы дальность полета была максимальной. Рост самого атлета не учитывать.

1.15. Лазер излучает направленный световой поток в виде короткого импульса. Какова скорость v отдачи кристалла лазера, если его масса равна $m = 100$ г, а излученная энергия $W = 10^3$ Дж?

1.16. Определить импульс p отдачи ядра ^{57}Fe при излучении γ -кванта с энергией $W = 14,4$ кэВ.

1.17. Математическому маятнику с гибкой нерастяжимой нитью длиной l сообщают в начальный момент горизонтальную скорость v_0 . Определить максимальную высоту h_{\max} подъема маятника, если $(5gl)^{1/2} > v_0 > (2gl)^{1/2}$. По какой траектории будет двигаться шарик маятника после того, как он достиг максимальной высоты h_{\max} на окружности? Определить максимальную высоту H_{\max} , достигаемую шариком при этом движении.

1.18. Гимнаст падает с высоты $H = 12$ м в упругую сетку. Во сколько раз максимальная сила F_{\max} , действующая на гимнаста со стороны сетки, больше его первоначального веса mg , если прогиб сетки под действием первоначального веса гимнаста равен $\Delta = 1$ м?

1.19. На баржу вдоль нее с берега забрасывается груз массой m с горизонтальной составляющей скоростью v_0 (рис. 1.4). Найти конечную скорость v баржи с грузом и расстояние l , пройденное грузом вдоль поверхности баржи (относительно баржи), если масса баржи M , а коэффициент трения между грузом и поверхностью баржи равен k . Сопротивление воды не учитывать.

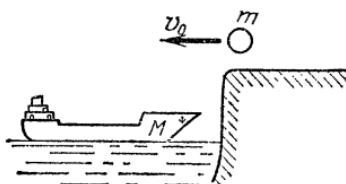


Рис. 1.4

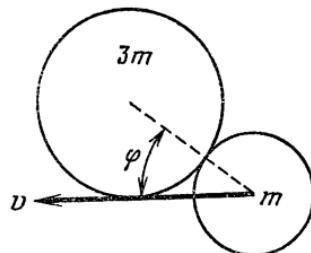


Рис. 1.5

1.20. Шар, летящий со скоростью v , ударяется в другой, покоящийся шар, масса которого в три раза больше массы налетающего шара (рис. 1.5). Найти скорости v_1 и v_2 шаров после удара, если в момент столкновения угол между линией, соединяющей центры шаров, и скоростью налетающего шара до удара равен $\phi = 60^\circ$. Удар абсолютно упругий.

1.21. Альфа-частица с кинетической энергией $W_k = -4$ МэВ упруго рассеивается на первоначально покоящемся протоне. Определить расстояние r_{\min} между

этими частицами в момент максимального сближения. Столкновение считать центральным.

1.22. Альфа-частица массой m , летящая со скоростью v_0 , испытывает упругое столкновение с неподвижным ядром массой M и летит под углом 90° к первоначальному направлению движения. При каком соотношении масс α -частицы и ядра это возможно? Определить скорости α -частицы v и ядра u после столкновения, а также угол φ между направлением скорости отлетевшего ядра и первоначальным направлением движения α -частицы.

1.23. Во сколько раз энергия отдачи ядра ^{226}Ra при α -распаде больше, чем при γ -распаде, если полная энергия, освобождаемая при α -распаде, равна $W_1 = 4,9 \text{ МэВ}$, а при γ -распаде — $W_2 = 0,2 \text{ МэВ}$?

1.24. Может ли произойти ионизация атома ^{133}Cs ударом атома ^{16}O с энергией $W = 4 \text{ эВ}$? Энергия ионизации атома ^{133}Cs равна $W_n = 3,9 \text{ эВ}$.

1.25. При каких энергиях W_k α -частиц возможно их неупругое рассеяние на ядрах ^{14}N , если энергия 1-го возбужденного состояния этого ядра равна $W = 2,31 \text{ МэВ}$? Какова энергия W_1 α -частицы, если ядро ^{14}N переходит в это возбужденное состояние, а сама α -частица останавливается?

1.26. Какова энергия W α -частицы, если при попадании в ядро азота ^{14}N происходит реакция $^{14}\text{N} + {}^4\text{He} = {}^{17}\text{O} + {}^1\text{H}$, сопровождающаяся поглощением энергии $W_1 = 1 \text{ МэВ}$, а образовавшийся протон покится в лабораторной системе координат?

1.27. Ядрадейтерия с энергией $W_D = 0,17 \text{ МэВ}$ движутся навстречу друг другу. При соударении происходит реакция $D + D = {}^3\text{He} + n$, при которой выделяется дополнительная энергия W . Определить W , если нейtron уносит кинетическую энергию $W_n = 2,7 \text{ МэВ}$.

1.28. Ядродейтерия с энергией $W_D = 3,25 \text{ МэВ}$ сталкивается с таким же неподвижным ядром. При соударении происходит реакция $D + D \rightarrow {}^3\text{He} + n$, при которой выделяется дополнительная энергия W . Определить W , если в лабораторной системе отсчета нейтрон покится.

1.29. Маленький шарик движется со скоростью v в пространстве между неподвижной стенкой и массивным поршнем, находящимися на расстоянии l друг от друга (рис. 1.6). Соударения шарика с поршнем и

стенкой происходят упруго. Найти адиабатический инвариант движения, т. е. вид функции $f(v, l)$, сохраняющейся постоянной при медленном движении поршня.

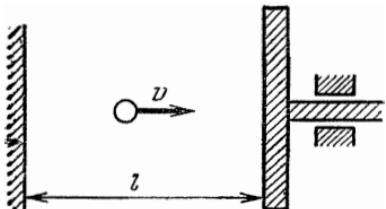


Рис. 1.6



Рис. 1.7

1.30. Под действием веса прыгуна упругая доска статически прогибается на $\Delta = 0,5$ м (рис. 1.7). Пренебрегая массой доски, найти период T малых колебаний рассматриваемой системы около положения равновесия.

1.31. Два груза массами m_1 и m_2 , находящиеся на гладком горизонтальном столе, связаны пружиной жесткостью k . Найти период T колебаний системы. Массой пружины пренебречь.

1.32. Небольшая муфта массой m может скользить без трения по горизонтальной штанге (рис. 1.8).

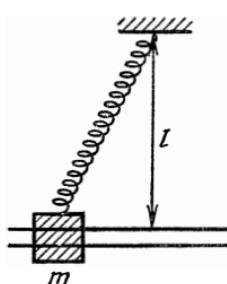


Рис. 1.8

К муфте прикреплена пружина, второй конец которой закреплен в точке, отстоящей на расстояние l от штанги, которое больше длины пружины в нерастянутом состоянии. Имея длину l , пружина растянута с силой F . Определить период T малых колебаний муфты. Массой пружины пренебречь.

1.33. Найти частоту ω малых колебаний шарика массой m , подвешенного на пружине с начальной длиной l_0 , если сила растяжения пружины пропорциональна квадрату растяжения, т. е. $F = k(l - l_0)^2$. Массой пружины пренебречь.

1.34. Как изменится ход карманных часов, если их положить на горизонтальный абсолютно гладкий стол? Считать, что ось крутильного маятника проходит через центр часов, а момент инерции \mathcal{J}_0 часов в 500 раз больше момента инерции \mathcal{J} маятника.

1.35. Система из двух шариков равных масс, соединенных невесомой пружиной, налетает с энергией W_0 на стенку. Пружина все время остается перпендикулярной стенке, и в начальном состоянии ее колебания не возбуждены. Удар шарика о стенку абсолютно неупругий. Найти кинетическую энергию W_k и энергию колебаний системы $W_{\text{кол}}$ после отскока. Полем тяжести пренебречь.

1.36. На качелях, раскачивающихся с угловой амплитудой Φ_0 , сидит человек. Когда качели проходят через положение равновесия, человек резко встает, а в момент максимального отклонения качелей он снова садится. На сколько изменится угловая амплитуда $\Delta\Phi$ за период? Центр масс человека поднимается и опускается на высоту h . Длина веревок качелей равна l . При расчетах считать, что $l \gg h$, массой качелей пренебречь.

1.37. Часы с маятником, будучи установленными на столе, показывали верное время. Как изменится ход часов, если их установить на свободно плавающем поплавке? Масса часов вместе с поплавком равна $10^3 m$, где m — масса маятника.

1.38. Система состоит из двух одинаковых грузов, скрепленных пружиной жесткостью κ . На одну из масс действует гармоническая сила с амплитудой A_0 , направленная вдоль пружины. Найти амплитуду A установившихся колебаний системы, если частота вынуждающей силы вдвое превышает собственную частоту системы.

1.39. Горизонтальный диск массой m и радиусом R подвешен в атмосфере некоторого газа на упругой нити с модулем кручения f на расстоянии h ($h \ll R$) от горизонтальной неподвижной поверхности. Найти вязкость η газа по результатам измерения логарифмического декремента затухания δ крутильных колебаний. Движение газа между диском и неподвижной поверхностью считать ламинарным; краевыми эффектами и трением с другой стороны диска пренебречь.

1.40. Оценить время t соударения футбольного мяча при слабом ударе о стенку.

1.41. Одним из абсолютных методов определения энергии, излучаемой импульсными квантовыми генераторами, является измерение механического импульса, возникающего при отражении или поглощении света твердой поверхностью. Для этой цели можно

использовать крутильный баллистический маятник. Момент инерции маятника принять равным $\mathcal{J} = 2 \cdot 10^{-6}$ кг·м², а расстояние от оси вращения до отражающего зеркала $L = 50$ мм. Рассчитать период колебаний T такого маятника с чувствительностью $\eta = 10$ мм/(Дж·м). Вычислить диаметр d кварцевой нити подвеса длиной $l = 0,1$ м, позволяющей обеспечить такую чувствительность. Модуль сдвига кварца равен $G = 10^{11}$ Па.

§ 1.2. Реактивное движение. Гравитация

1.42. Сосуд конической формы, наполненный водой, первоначальная высота уровня которой равна h_0 , может перемещаться без трения вдоль горизонтальных рельсов. Вблизи дна сосуда сбоку сделано маленькое

отверстие, закрытое пробкой. Если вынуть пробку, то через отверстие будет вытекать струя воды (рис. 1.9). Определить скорость v , которую приобретет сосуд, после того как вся вода вытечет из него. Массой сосуда по сравнению с массой воды, находящейся в нем, пренебречь во все время ее вытекания. (В конце истечения жидкости условие малости массы сосуда по сравнению с массой жидкости выполняться не может.)

1.43. В игрушечную ракету наливается вода, занимающая малую часть внутренней полости ракеты. В остальную часть полости ракеты накачивается воздух до давления p . Найти высоту h подъема ракеты, считая, что масса воды m много меньше массы ракеты M , время истечения воды много меньше времени полета, сечение сопла ракеты много меньше сечения полости.

1.44. По какому закону должна меняться во времени масса M ракеты (вместе с топливом), чтобы она во время работы оставалась неподвижной в поле тяжести Земли, если скорость газовой струи относительно ракеты постоянна и равна $u = 2$ км/с. Определить время $t_{1/2}$, через которое полная масса системы уменьшится вдвое, а также время t , по истече-

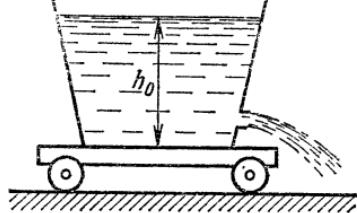


Рис. 1.9

вытекания. (В конце истечения жидкости условие малости массы сосуда по сравнению с массой жидкости выполняться не может.)

1.43. В игрушечную ракету наливается вода, занимающая малую часть внутренней полости ракеты. В остальную часть полости ракеты накачивается воздух до давления p . Найти высоту h подъема ракеты, считая, что масса воды m много меньше массы ракеты M , время истечения воды много меньше времени полета, сечение сопла ракеты много меньше сечения полости.

1.44. По какому закону должна меняться во времени масса M ракеты (вместе с топливом), чтобы она во время работы оставалась неподвижной в поле тяжести Земли, если скорость газовой струи относительно ракеты постоянна и равна $u = 2$ км/с. Определить время $t_{1/2}$, через которое полная масса системы уменьшится вдвое, а также время t , по истече-

нии которого ракета израсходует весь запас топлива. Масса ракеты без топлива равна $m_1 = 1000$ кг, а масса топлива $m_2 = 9000$ кг.

1.45. На ракете установлены два двигателя с различным топливом. Один дает газовую струю со скоростью u_1 относительно ракеты, другой — со скоростью u_2 . Сначала работает один двигатель, пока не израсходует весь запас топлива. Затем включается другой, пока также не будет израсходован весь запас его топлива. Что выгоднее: сначала включить двигатель с большей скоростью газовой струи, а затем с меньшей или поступить наоборот? Скорости u_1 и u_2 считать постоянными.

1.46. Ракета массой $m_0 = 10$ кг стартует с вершины горы высотой $h = 2$ км и летит так, что газы все время выбрасываются горизонтально. Пренебрегая сопротивлением воздуха, подсчитать кинетическую энергию W_k ракеты во время удара о землю. Скорость газов равна $u = 300$ м/с, расход топлива $\mu = 0,03m_0$ в секунду.

1.47. На сколько процентов уменьшилась масса ракеты, которая в течение времени $t = 10$ мин поднималась с поверхности Земли вертикально вверх с постоянной скоростью $v = 5$ км/с? Скорость истечения газов относительно ракеты равна $u = 2$ км/с. Трением о воздух пренебречь.

1.48. Поднимаясь вертикально вверх от поверхности Земли с постоянной скоростью $v = 5$ км/с, ракета достигла высоты, равной диаметру Земли $2R_z$. На сколько процентов уменьшилась при этом масса ракеты, если скорость истечения газов относительно ракеты равна $u = 2$ км/с? Трением о воздух пренебречь.

1.49. Масса второй ступени двухступенчатой ракеты составляет от массы первой $M_2/M_1 = \alpha = 0,1$, а отношение массы горючего к полной массе ступени в случаях одно- и двухступенчатой ракет равно $M_r/M = k = 0,9$. Скорость истечения газов в сравниваемых ракетах одна и та же и равна $u = 2$ км/с. На сколько максимальная скорость, достижимая в свободном космическом пространстве с помощью двухступенчатой ракеты, больше, чем в случае одноступенчатой ракеты?

1.50. Двухступенчатая ракета поднимается с поверхности Земли вертикально вверх. Масса второй

ступени ракеты составляет от массы первой $M_2/M_1 = a = 0,1$, а отношение массы горючего в обеих ступенях к полной массе ступени равно $M_r/M = k = 0,9$. Найти минимальную скорость v_{\min} выбрасываемых газов, необходимую для достижения 2-й космической скорости v_2 , рассмотрев для этого предельный случай сколь угодно малой общей массы ракеты ($M \rightarrow 0$). Считать, что на всем протяжении пути разгона ускорение свободного падения и масса выбрасываемых в единицу времени газов постоянны. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.51. В начальный момент ракета покоялась. Затем под действием реактивной силы ракета начинает двигаться, при этом скорость v истечения газов относительно ракеты постоянна. Найти скорость v ракеты, при которой кинетическая энергия, приобретенная ракетой, будет максимальной. Действием внешних сил пренебречь.

1.52. Можно ли измерить гравитационную постоянную G с относительной погрешностью $\delta = 10\%$, подкатывая свинцовый шар к пробному грузу, подвешенному к чашке пружинных аналитических весов с наибольшей относительной чувствительностью $\eta = 10^{-7}$ ($0,1 \text{ мг}/\text{кг}$)?

1.53. Двойная звезда имеет период $T = 3$ года, а расстояние между ее компонентами постоянно и равно

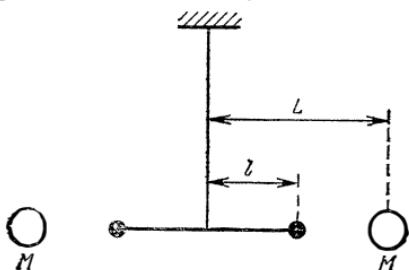


Рис. 1.10

$L = 2$ а. е. Выразить массу двойной зезды M через массу Солнца M_S .

1.54. На концах легкой спицы длиной $2l = 10$ см укреплены два небольших шарика (рис. 1.10). Спica подвешена за середину на неупругой нити и может

свободно поворачиваться в горизонтальной плоскости. Спica расположена между двумя неподвижными шарами массой $M = 1$ кг каждый. Расстояние между центрами шаров равно $2L = 20$ см. Найти период T малых колебаний спицы.

1.55. Один и тот же маятник помещен сначала на башне, а затем в глубокой шахте. Высота башни относительно уровня моря равна $h = 500$ м, глубина

шахты $H = 2$ км. Найти относительное изменение периодов колебаний $\Delta T/T$ маятника. Считать Землю однородным шаром радиусом $R_3 = 6400$ км. Влиянием притяжения башни пренебречь.

1.56. Математический маятник расположен на поверхности Земли над тоннелем метро (рис. 1.11). Тоннель находится на глубине $H = 15$ м, его диаметр равен $2R = 10$ м. Оценить относительное изменение периодов колебаний $\Delta T/T$ маятника, вызванное наличием тоннеля. Считать среднюю плотность грунта равной $\rho = 2 \text{ г}/\text{см}^3$.

1.57. Считая Землю однородным шаром радиусом R_3 и плотностью $\rho = 5,5 \text{ г}/\text{см}^3$, найти зависимость гравитационного давления от расстояния до центра Земли $p(r)$. Оценить давление $p(0)$ в центре Земли.

1.58. Маленький шарик массой m , имеющий на бесконечности скорость v_0 , пролетает через большой шар массой M и радиусом R , в котором вдоль диаметра просверлен канал в направлении движения шарика. Принимая во внимание гравитационное взаимодействие между шарами, определить их относительную скорость $v - V$ (v — скорость маленького шарика, V — большого) в момент, когда маленький шарик пролетает через центр большого шара. Считать начальную скорость большого шара равной нулю.

1.59. Космонавт массой $m = 70$ кг связан со спутником массой M ($m \ll M$) шнуром длиной $l = 63$ м при полете спутника по круговой орбите вблизи Земли. Определить наибольшую силу натяжения F шнура. При каком расположении космонавта, спутника и Земли осуществимо это натяжение?

1.60. Оценить отношение массы планеты Марс к массе Земли по параметрам эллиптической орбиты советской автоматической станции «Марс-2», обращающейся вокруг этой планеты: максимальное удаление от поверхности планеты в апоцентре равно $a = 25\,000$ км, минимальное удаление вperiцентре $b = 1380$ км. Период обращения Марса равен $T_m = 18$ ч, диаметр $2R_m = 6800$ км.

1.61. В одном из фантастических проектов предлагалось использовать для движения поездов силу

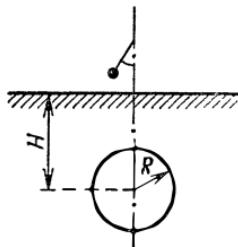


Рис. 1.11

земного тяготения, соединив пункты отправления и назначения прямым подземным тоннелем, проходящим через центр Земли. Найти время t , за которое поезд (без двигателя) пройдет такой тоннель. Считать плотность Земли постоянной и пренебречь трением.

1.62. Со спутника, движущегося по круговой орбите со скоростью v_0 , стреляют в направлении, составляющем угол $\varphi = 120^\circ$ к курсу. Найти скорость v пули относительно спутника, чтобы пуля ушла на бесконечность.

1.63. Оценить период обращения T близкого спутника нейтронной звезды (пульсара), плотность которой равна ядерной: $\rho \approx 10^{17}$ кг/м³.

1.64. При посадке ракеты на Луну ее тормозной двигатель включается на время t_1 на высоте h над Луной ($h \ll R_L$, где R_L — радиус Луны). Скорость истечения газов относительно ракеты равна u , масса ракеты без топлива равна m_0 . Определить минимальную массу M топлива, необходимую для мягкой посадки ракеты на Луну. Считать, что скорость $v_\infty \ll v_0$ (v_0 — скорость ракеты на высоте h , которую она приобретает только за счет притяжения Луны, v_∞ — скорость на бесконечности).

1.65. Определить, какую дополнительную скорость Δv необходимо кратковременно сообщить спутнику Земли, движущемуся по очень высокой круговой орбите, чтобы он смог достичь Марса. Орбиты Земли и Марса считать круговыми, диаметр орбиты Земли равен $3 \cdot 10^8$ км, а диаметр орбиты Марса в 1,52 раза больше, чем у Земли.

1.66. Спутник движется по круговой орбите на высоте $h_1 = 250$ км от поверхности Земли. Для посадки спутнику сообщается кратковременный импульс, направленный против его скорости, после чего орбита становится эллиптической с высотой перигея $h_2 = 100$ км. Дальнейший спуск спутника происходит за счет торможения в атмосфере. Найти изменение скорости Δv спутника для такого изменения его орбиты.

1.67. Спутник массой $m = 10$ кг, поперечным сечением $S = 0,5$ м² летит на высоте $H = 400$ км, где плотность атмосферы $\rho \approx 1,6 \cdot 10^{-11}$ кг/м³. Найти силу сопротивления $F_{\text{сопр}}$, испытываемую спутником. Как изменяются скорость Δv и высота ΔH спутника за один оборот?

1.68. Средняя относительная скорость двух звезд типа Солнца в звездном скоплении равна $u = 60$ км/с, а число звезд в кубическом световом годе $N \sim 10$. Оценить среднее время $t_{\text{ср}}$ между столкновениями этих двух звезд.

1.69. Космический аппарат запущен с Земли со скоростью v_0 в направлении, перпендикулярном линии, соединяющей центр Земли с центром Солнца, в сторону вращения Земли вокруг Солнца. Определить скорость v , с которой он покинет Солнечную систему.

1.70. Два спутника A и B следуют друг за другом на расстоянии $L = 45$ км по общей круговой орбите вблизи Земли. Чтобы стыковаться, они должны сблизиться и продолжить движение по общей орбите. Какой простейшей последовательностью коротких включений двигателя отстающего спутника B можно осуществить этот маневр, если его двигатель ориентирован касательно к орбите и каждое включение может изменить его скорость на величину $\Delta v \leq 8$ км/ч?

1.71. Масса газового облака, состоящего из водорода, равна $M = 2 \cdot 10^{36}$ кг, его температура $T = 50$ К. Оценить максимальный радиус R облака, при котором оно будет сжиматься под действием сил гравитации.

1.72. Сможет ли космонавт, подпрыгнув, покинуть навсегда астероид, масса которого равна $M = 1,1 \cdot 10^{16}$ кг и радиус $R = 11,1$ км?

1.73. В момент выведения искусственного спутника Земли на круговую орбиту скорость спутника отклонилась от расчетной на $\Delta v/v = 0,1$ при неизменном направлении. Найти отношение b/a — малой и большой полуосей реальной эллиптической орбиты.

§ 1.3. Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса.

Неинерциальные системы отсчета

1.74. Небольшое тело, привязанное к нитке, проредой через отверстие O в гладком горизонтальном столе, движется равномерно со скоростью v на расстоянии r от отверстия. В некоторый момент нить начинают плавно протягивать через отверстие, и за время t тело делает оборот, описав заштрихованную на рис. 1.12 фигуру. Найти ее площадь S . Показать, что

если нить протягивать медленно по сравнению с периодом обращения тела, то отношение W/ω остается постоянным (W — энергия тела, ω — угловая скорость вращения).

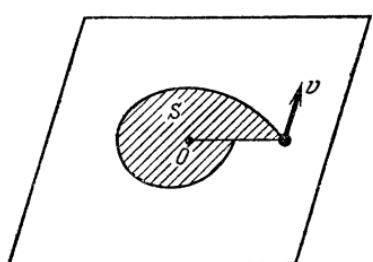


Рис. 1.12

1.75. Трамплин, используемый в цирке, представляет собой горизонтальную доску, шарнирно закрепленную в середине. На один конец доски с достаточно большой высоты прыгает гимнаст массой m_1 . Клоун массой m_2 , стоящий на другом конце доски, при этом подбрасывается в воздух. Расстояние от клоуна до шарнира равно l_2 . Определить, на каком расстоянии l_1 от шарнира должен прыгнуть гимнаст, чтобы клоун был подброшен на максимальную высоту. Доску считать невесомой.

1.76. По внутренней поверхности конической воронки, стоящей вертикально, скользит без трения небольшое тело (рис. 1.13). В начальный момент тело находится на высоте h , направление его скорости v лежит в горизонтальной плоскости. При своем дальнейшем движении тело опускается до высоты $h/2$, а затем начинает подниматься. Найти скорость тела в верхней (v_b) и нижней (v_n) точках траектории.

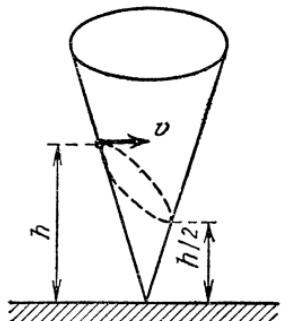


Рис. 1.13

1.77. Земля сталкивается с головой кометы, состоящей из метеорного роя диаметром 50 000 км.

Относительная скорость Земли и кометы равна 2,8 км/с. Какая часть роя упадет на Землю?

1.78. По направлению к Земле из глубин космоса движется метеоритное облако, скорость которого на значительном удалении от Земли равна $v = 5$ км/с. Поперечные размеры этого облака много больше диаметра Земли, глубина облака (по направлению движения) составляет $h = 1000$ км, средняя концентрация $n = 0,1$ км⁻³, а центр облака движется в направлении центра Земли. Найти общее число N метеоритов, которые попадут на Землю.

1.79. Спутник массой $M = 50$ кг летит по круговой орбите на небольшом расстоянии от поверхности Земли. В спутник попадает и застревает в нем метеорит массой $m = 0,1$ г, который летел к центру Земли со скоростью $v = 80$ км/с. Считая удар центральным, найти расстояние l между апогеем и перигеем новой орбиты спутника.

1.80. Спутник Земли состоит из двух масс m_1 и m_2 , соединенных упругой конструкцией длиной x_0 жесткостью κ . Для перехода на новую орбиту включают двигатель с постоянной силой тяги F , связанный с массой m_1 , в результате чего возникают колебания системы. В какой момент и как надо изменить силу тяги, чтобы погасить возникшие колебания? Как изменится при этом расстояние Δl между m_1 и m_2 ?

1.81. Корабль вместе с ракетой-носителем поднимается вертикально вверх с постоянным ускорением и за время $t = 4$ с набирает скорость $v = \alpha v_1$, где v_1 — 1-я космическая скорость, а $\alpha = 0,03$. Какую перегрузку испытывает при старте космонавт в космическом корабле на самом начальном участке полета?

Указание. Перегрузкой называется отношение $(P - P_0)/P_0$, где P_0 — вес космонавта на Земле, а P — «вес», который показали бы пружинные весы призвешивании космонавта в ракете.

1.82. По круговой окололунной орбите с радиусом, равным утроенному радиусу Луны, движется стартовая «платформа» с космическим кораблем. Корабль покидает «платформу» в направлении ее движения с относительной скоростью, равной первоначальной орбитальной скорости «платформы», после чего «платформа» падает на Луну. Определить угол α , под которым «платформа» врезается в лунную поверхность. Масса «платформы» в два раза больше массы корабля.

1.83. По круговой окололунной орбите с радиусом, равным удвоенному радиусу Луны, движется орбитальная станция с космическим кораблем. Корабль покидает станцию в направлении ее движения, «отталкиваясь» от станции с относительной скоростью, равной половине начальной орбитальной скорости станции. Найти отношение масс M/m корабля и станции, при котором станция не упадет на Луну.

1.84. Со спутника, движущегося вокруг Земли по круговой орбите радиусом R , выстреливают в

направлении к центру Земли контейнер. Какую минимальную начальную скорость v_{\min} в направлении к центру Земли нужно сообщить контейнеру, чтобы он, перейдя на эллиптическую орбиту, коснулся Земли? Торможением в атмосфере пренебречь.

1.85. Спутник движется вокруг Земли по эллиптической орбите, в одном из фокусов которой находится центр Земли. Пользуясь только законами сохранения энергии и момента импульса, выразить период обращения спутника T через энергию W , приходящуюся на единицу его массы. Потенциальную энергию при бесконечном удалении спутника от Земли принять равной нулю. В предположении, что орбита спутника близка к круговой, найти приближенное приращение ΔT его периода, если на спутник действует малая тормозящая сила, направленная против скорости (сила торможения, отнесенная к единице массы спутника, равна $F_{\text{тр}}$).

1.86. Показать, что период T спутника, обращающегося вокруг планеты (или любого другого тела со сферическим симметричным распределением масс) в непосредственной близости от ее поверхности, зависит только от средней плотности планеты ρ .

1.87. Космический корабль подходит к Луне по параболической траектории, почти касающейся поверхности Луны. Чтобы перейти на стелящуюся круговую орбиту, в момент наибольшего сближения включают тормозной двигатель, выбрасывающий газы со скоростью $u = 4 \text{ км/с}$ относительно корабля в направлении его движения. Какую часть общей массы должно составить сожженное горючее? Оценить температуру T горения, если удельная теплоемкость выбрасываемых газов равна $c_p = 2,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$.

1.88. Ракета стартует с вершины самой высокой лунной горы. Угол между направлением струи вылетающих газов и горизонтом поддерживается равным $\phi = 0,1$ рад. Скорость струи относительно ракеты равна $u = 4 \text{ км/с}$. Найти изменение массы ракеты в зависимости от времени $M(t)$ при условии, что ракета будет двигаться горизонтально. За какое время t она наберет 1-ю космическую скорость? Во сколько раз за это время уменьшится масса ракеты? Какова будет перегрузка космонавтов?

1.89. Около звезды массой M по круговой орбите движется звезда-спутник массой m ($m \ll M$). В не-

который момент времени центральная звезда вспыхивает как сверхновая и выбрасывает массу qM . Считая, что эта масса выходит за орбиту спутника мгновенно, описать возможные виды последующего движения спутника.

1.90. Ракета массой $M = 10$ т движется вокруг Земли по эллиптической орбите. Расстояние от ракеты до центра Земли в апогее равно $L_1 = 11\,000$ км, а в перигее $L_2 = 6600$ км. В апогее ракета взрывается, распадаясь на две части массами m_1 (эта часть ракеты переходит на круговую орбиту) и m_2 (эта часть вертикально падает на Землю). Найти массы m_1 и m_2 . Массой газов, образовавшихся при взрыве, пренебречь.

1.91. В условиях предыдущей задачи ракета взрывается в перигее, распадаясь на две части массами m_1 и m_2 . Масса m_1 , двигаясь в первоначальном направлении, переходит на параболическую орбиту, а m_2 меняет направление движения и начинает двигаться по окружности. Найти массы m_1 и m_2 . Массой газов, образовавшихся при взрыве, пренебречь.

1.92. Двойная звезда, одна из которых является звездой типа Солнца, массой $m = 2 \cdot 10^{33}$ г, а другая — нейтронной звездой радиусом $R = 14$ км, вращается с периодом $T = 5$ сут. Определить расстояние L между компонентами звезды. Считать плотность вещества нейтронной звезды равной плотности ядерной материи: $\rho = 10^{17}$ кг/м³.

1.93. Оценить разность расстояний от центра Земли до уровня моря на полюсе и на экваторе Земли, связанную с вращением Земли.

1.94. Артиллерийский снаряд движется с горизонтальной скоростью $v = 900$ м/с по настильной траектории (т. е. траектории, которую приближенно можно считать горизонтальной прямой). Снаряд должен попасть цель на расстоянии $L = 18$ км. Географическая широта места $\varphi = 60^\circ$ с. ш. Определить боковое отклонение l снаряда от цели, обусловленное вращением Земли. Зависит ли это отклонение от направления стрельбы? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.95. В абсолютно гладкой трубке на двух одинаковых пружинах жесткостью x закреплен шарик массой m (рис. 1.14). Шарик колеблется с амплитудой l_0 . Трубку начинают медленно раскручивать с угловой

скоростью ω относительно оси, перпендикулярной трубке и проходящей через положение равновесия шарика. Определить зависимость периода и амплитуды колебаний от угловой скорости вращения трубы: $T(\omega)$, $l(\omega)$.

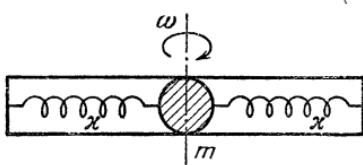


Рис. 1.14

n оборотов в минуту. Определить угол наклона α велосипедиста и направление наклона.

1.97. Муфта массой m может скользить без трения по горизонтальной штанге (рис. 1.15). К муфте с обеих сторон прикреплены одинаковые невесомые пружины жесткостью x . Штанга вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω . Муфту сдвигают от положения равновесия на величину l , а затем отпускают. Определить, как будет двигаться муфта.

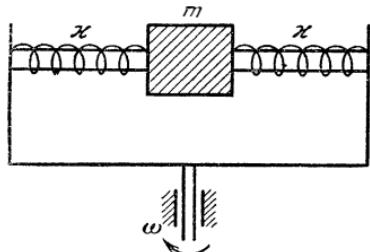


Рис. 1.15

1.98. По диаметру диска радиусом R высверлен канал, в котором в начальный момент времени вблизи центра вращения помещен шарик. Угловая скорость вращения диска равна ω . Найти скорость v , с которой вылетит помещенный внутрь канала шарик. Трением пренебречь.

1.99. На широте $\phi = 60^\circ$ в землю вертикально закрыт рельс длиной $l = 10$ м. Оценить разность потенциалов U , возникающую между концами рельса из-за вращения Земли.

1.100. В центре неподвижной карусели находится человек. Он переходит с постоянной скоростью к краю карусели, двигаясь при этом с юга на север. Считая карусель однородным диском, определить, при каком соотношении масс человека и карусели m/M последняя приобретет угловую скорость, равную половине угловой скорости суточного вращения Земли. Считать, что карусель находится на широте $\phi = 60^\circ$, трением в подшипниках карусели пренебречь.

1.96. Велосипедист движется с постоянной скоростью v по радиусу горизонтального диска, вращающегося с частотой

§ 1.4 Движение твердого тела и жидкости

1.101. В одном из фантастических проектов предлагалось изменить скорость вращения Земли с помощью снаряда, запущенного по касательной к экватору. Какова должна быть разность $c - v$ скоростей света и снаряда, чтобы остановить вращение Земли вокруг собственной оси? Найти отношение кинетической энергии снаряда и кинетической энергии вращения Земли. Массу покоя снаряда принять равной $m = 10^6$ кг, радиус Земли $R_3 = 6370$ км, масса $M_3 = 6 \cdot 10^{24}$ кг. Момент инерции Земли относительно оси вращения с учетом неоднородности ее плотности с большой точностью выражается формулой $\mathcal{I}_3 = M_3 R_3^2 / 3$.

1.102. Определить максимальную линейную скорость v в точке на поверхности электрона в классической (и неверной) модели, предполагая, что масса электрона $m_e = 9,1 \cdot 10^{-28}$ г однородно заполняет сферу радиусом $r_0 = e^2 / (m_e c^2) = 2,8 \cdot 10^{-18}$ см. Собственный момент количества движения электрона (спин) равен $\hbar/2$, где \hbar — постоянная Планка.

1.103. На тяжелый барабан, вращающийся вокруг горизонтальной оси, намотан легкий гибкий шнур. По шнуру лезет вверх обезьяна массой m . Определить ее ускорение a относительно шнура, если ее скорость относительно земли постоянна. Момент инерции барабана равен \mathcal{I} , его радиус R .

1.104. Шар скатывается по плоскости, наклоненной под углом α к горизонту. Определить, при каком значении α начнется качение со скольжением, если коэффициент трения скольжения между катящимся шаром и плоскостью равен k . Рассмотреть два случая: 1) шар сплошной, 2) шар полый.

1.105. Катушка с ниткой находится на плоскости с углом наклона, равным α (рис. 1.16). Свободный конец нитки прикреплен к стене так, что нитка параллельна наклонной плоскости. Определить ускорение a , с которым катушка движется по наклонной

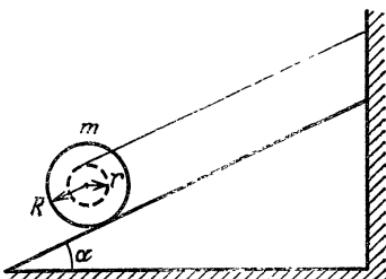


Рис. 1.16

плоскости. Масса катушки равна m , момент инерции катушки относительно ее оси равен \mathcal{I} , коэффициент трения катушки с наклонной плоскостью k , радиусы катушки R и r .

1.106. Определить ускорение a , с которым катушка движется по наклонной плоскости, в условиях предыдущей задачи, если нитка намотана на катушку так, как показано на рис. 1.17.

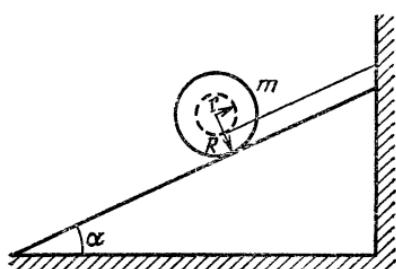


Рис. 1.17

дущей задачи, если нитка намотана на катушку так, как показано на рис. 1.17.

1.107. Полый цилиндр массой M , внутри которого находится сплошной цилиндр радиусом $r = 0,6R$ и массой m , скатывается без скольжения с наклонной пло-

скости, образующей угол α с горизонтом. Внутренний цилиндр катится по поверхности внешнего также без скольжения. Начальные скорости обоих цилиндров равны нулю. Определить ускорение a системы.

1.108. Табуретку наклоняют так, что она опирается о пол двумя ножками, и отпускают, после чего она «встает» опять на все четыре ножки. Коэффициент трения между табуреткой и полом равен k . Оценить перемещение l табуретки по полу. Считать длину, ширину и высоту табуретки одинаковыми, а массу сосредоточенной в сидении.

1.109. С колеса движущегося автомобиля соскаивает декоративный колпак, который, попрыгав по дороге, начинает катиться сразу без скольжения. При какой скорости v_0 автомобиля это возможно? Радиус колеса равен $R = 40$ см, колпак можно рассматривать как однородный диск радиуса $r = 20$ см, коэффициент трения между колпаком и дорогой $k = 0,2$.

1.110. С автомобиля, движущегося со скоростью v , соскочило колесо и покатилось по земле. Наблюдение показало, что колесо описало по земле окружность радиусом R . Определить угол наклона φ оси колеса к горизонту. Всю массу колеса считать сосредоточенной на периферии. Известно, что R много больше радиуса колеса.

1.111. Заводской кран, масса которого вместе со стрелкой равна $M = 73$ т, стоит на рельсах. Стрела

крана массой $m = 20$ т составляет с вертикалью угол $\alpha = 60^\circ$ и находится в плоскости, перпендикулярной рельсам. Центр масс стрелы отстоит на расстояние $l = 5$ м от ее основания. Оставаясь в плоскости, перпендикулярной рельсам, стрела поворачивается на угол 2α . Какую скорость v приобретет при этом кран? Рельсы направлены по меридиану, географическая широта равна $\phi = 60^\circ$. Трением качения и трением в осях колес крана пренебречь.

1.112. Определить максимальное гирокопическое давление быстроходной турбины, установленной на корабле. Корабль подвержен килевой качке с амплитудой $\phi = 9^\circ$ и периодом $T = 15$ с вокруг оси, перпендикулярной оси ротора. Ротор турбины массой $m = 3500$ кг и радиусом $R = 0,6$ м вращается с частотой $n = 3000$ об/мин. Расстояние между подшипниками равно $l = 2$ м.

1.113. По внутренней поверхности вертикальной цилиндрической стены едет мотоцикл. Чтобы обеспечить возможность движения в строго горизонтальном положении, к мотоциклу приделан маховик с моментом инерции \mathcal{J} , вращающийся вокруг оси, которая вертикальна, когда мотоцикл стоит на земле. Масса мотоцикла с ездоком равна m , а центр масс находится на расстоянии l от поверхности стены (радиус цилиндрической стены много больше размеров мотоцикла). Каков должен быть коэффициент k передачи вращения от колес к маховику, чтобы мотоцикл мог без проскальзывания колес двигаться, не теряя высоты? Радиус колес равен r , коэффициент трения между колесами и стеной k .

1.114. Два одинаковых точечных груза массой m вращаются вокруг неподвижной жесткой оси на штанге с постоянной угловой скоростью ω (рис. 1.18). Ось и штанга — невесомые. Найти момент импульса \mathcal{L} системы относительно точки O ; зависит ли \mathcal{L} от выбора точки отсчета? Определить силу F , удерживающую ось в подшипниках A : 1) из элементарных соображений, 2) найдя сначала их момент $M = d\mathcal{L}/dt$.

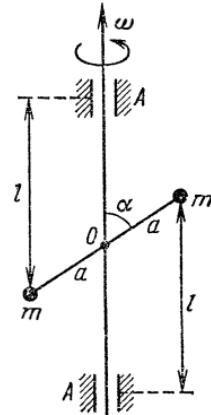


Рис. 1.18

1.115. Обруч радиусом R бросают вперед со скоростью v и сообщают ему одновременно угловую скорость ω . Определить минимальную угловую скорость ω_{\min} , при которой обруч после движения с проскальзыванием покатится назад. Найти конечную скорость v_k , если $\omega > \omega_{\min}$. Трением качения пренебречь.

1.116. По шару массой m радиусом R , лежащему на горизонтальном столе, наносится короткий горизонтальный удар, сообщающий ему импульс p (рис. 1.19). Высота удара над центром масс шарика равна kR ($k \leq 1$). Найти энергию поступательного (W_p) и вращательного (W_v) движения шарика. При каком значении k шарик покатится без скольжения?

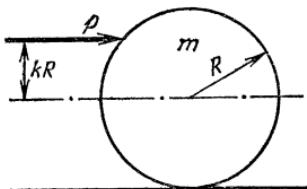


Рис. 1.19

Высота удара над центром масс шарика равна kR ($k \leq 1$). Найти энергию поступательного (W_p) и вращательного (W_v) движения шарика. При каком значении k шарик покатится без скольжения?

1.117. Биллиардный шар катится без скольжения по горизонтальному столу перпендикулярно вертикальной стене и ударяется об нее. Деформация шара и стены во время удара упругая. Коэффициент трения между шаром и стеной равен k . Пренебрегая действием силы тяжести за время удара и трением качения, определить, под каким углом α к горизонту шар отразится от стены. Исследовать зависимость результата от коэффициента трения k .

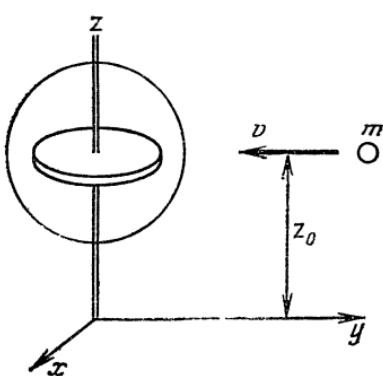


Рис. 1.20

1.118. Упругий мяч массой $m = 0,2$ кг ударяется со скоростью $v = 20$ м/с в центр неподвижного гладкого кожуха гироскопа, обладающего моментом импульса $\mathcal{L} = \mathcal{L}_z = 40$ кг·м²/с и имеющего одну неподвижную точку $x = y = z = 0$ (рис. 1.20). Координаты точки удара $x_0 = 0$, $z_0 = 0,2$ м. Какое положение примет ось гироскопа после удара?

1.119. Раскрученный до частоты вращения $n = 1000$ об/мин стальной диск радиусом $R_1 = 10$ см опускается на первоначально покоявшийся стальной диск радиусом $R_2 = 20$ см (рис. 1.21). Толщина дисков

равна $d_1 = 1$ см, $d_2 = 2$ см. Какое количество теплоты Q выделится во время проскальзывания дисков друг относительно друга? Моментом инерции оси и трением в подшипниках пренебречь. Плотность стали равна $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³.

1.120. Тонкий однородный стержень длиной $l = 0,3$ м лежит на шероховатой поверхности с коэффициентом трения $k = 0,1$

(рис. 1.22). Один из его концов нанизан на вертикальную ось O , вокруг которой он может вра-

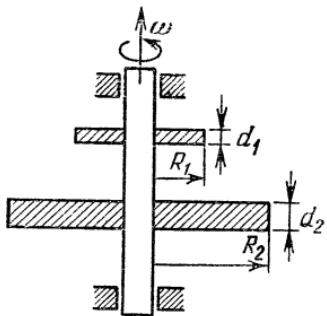


Рис. 1.21

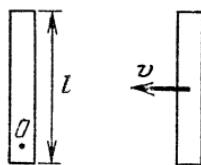


Рис. 1.22

щатьсяся, причем трением в оси можно пренебречь. В начальный момент с этим стержнем сталкивается точно такой же стержень, который двигался поступательно со скоростью $v = 3$ м/с. Удар абсолютно неупругий. В момент удара стержни параллельны. Через сколько оборотов n прекратится их вращение?

1.121. Тонкий стержень массой M и длиной l лежит на гладкой горизонтальной плоскости и может свободно без трения вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через один из его концов. В начальный момент стержень покоится. В стержень ударяется шар массой m , движущийся со скоростью v перпендикулярно стержню. Удар абсолютно упругий, точка удара находится на расстоянии x от оси стержня. Найти угловую скорость вращения ω стержня после удара. Соотношение между массами M , m и расстоянием x такое, что после удара шар остановился, а стержень получил максимально возможную угловую скорость вращения.

1.122. Шарик массой m подвешен на нерастяжимой нити длиной l и отклонен на малый угол из положения равновесия. К той же точке, что и нить, подведен одним концом однородный стержень длиной $l_1 = (3/2)l$. Какова должна быть масса стержня m_1 , чтобы в результате столкновения шарик остановился?

Удар абсолютно упругий. Каково будет движение стержня после столкновения? Определить период колебаний шарика T .

1.123. Вертикальная винтовая шпилька длиной l может вращаться без трения вокруг своей оси. Шаг резьбы равен h , момент инерции шпильки \mathcal{J}_1 , гайки \mathcal{J}_2 , масса гайки m . Найти время t , за которое со шпильки свинтится гайка, если она начинает двигаться из верхней точки шпильки без начальной скорости. Трением в резьбе пренебречь.

1.124. Стержень, расположенный горизонтально, падает с высоты h и упруго ударяется одним концом о край стола. Определить скорость v центра инерции стержня непосредственно после удара.

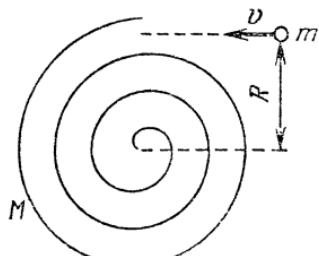


Рис 1.23

1.125. Шарик массой m влетает в спиральный лабиринт, который может свободно двигаться в пространстве, и останавливается в его центре (рис. 1.23). Начальная скорость шарика равна v , радиус

лабиринта R , его масса M , момент инерции \mathcal{J} . Найти угловую скорость ω лабиринта после того, как шарик остановится. Размерами шарика пренебречь.

1.126. Стержень закреплен на потолке шарниром. По его нижнему концу наносят короткий удар, импульс которого равен p в горизонтальном направлении. Определить импульс силы реакции p_1 в подвесе.



Рис 1.24

1.127. Два одинаковых стержня соединены шарниром и лежат на гладком горизонтальном столе (рис. 1.24). По концу одного из стержней наносится удар в направлении, перпендикулярном оси стержней. Найти отношение угловых скоростей ω_1/ω_2 и скоростей v_1/v_2 центров масс стержней после удара.

1.128. С помощью очень короткой нити однородный стержень длиной l привязан одним концом к потолку. Стержень отводят на угол 45° от вертикали и сообщают его нижнему концу скорость в направлении, перпендикулярном вертикальной плоскости отклоне-

ния стержня. Найти минимальную скорость v_{\min} , которую нужно сообщить стержню, чтобы при дальнейшем движении он смог коснуться потолка.

1.129. В районе Северного полюса на Землю падает метеорит массой $m = 1000$ т со скоростью $v = 20$ км/с под углом $\varphi = 45^\circ$ к вертикали. Найти, на какой угол α повернется земная ось в результате соударения с метеоритом.

1.130. Два одинаковых шара катятся без скольжения навстречу друг другу с одной и той же скоростью $v_0 = 14$ м/с. Предполагая, что удар является упругим и центральным и за время соударения шаров угловые скорости не изменяются, вычислить скорость v каждого шара после столкновения, когда установится чистое качение. Трением качения пренебречь.

1.131. Пуля массой m , летящая горизонтально со скоростью v_0 , попадает в покоящийся на горизонтальном шероховатом столе деревянный шар массой M и радиусом R на расстоянии l ниже центра масс шара и застrevает в нем. Найти установившуюся скорость v шара. Считать, что $m \ll M$.

1.132. Пуля массой m , летящая горизонтально со скоростью v_0 , попадает в покоящийся на горизонтальном шероховатом столе металлический шар массой M и радиусом R на расстоянии $R/2$ выше центра масс шара и рикошетом от него вертикально вверх (рис. 1.25). Спустя некоторое время движение шара по столу переходит в равномерное качение со скоростью v_1 . Определить скорость v пули после удара по шару.

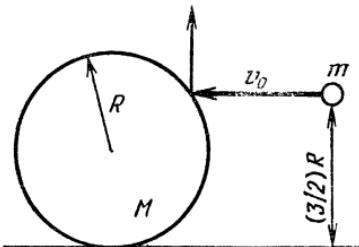


Рис. 1.26

1.133. В лежащий на столе шар массой M и радиусом R попадает пуля массой m , летящая со скоростью v_0 и вращающаяся вокруг своей оси с угловой скоростью ω_0 . Радиус инерции пули равен r . Пуля застrevает в центре шара. Найти энергию W , потерянную при проникновении пули в шар. За время проникновения пули смещением шара пренебречь.

1.134. Однородный шар радиусом R , вращающийся с угловой скоростью ω_0 , положен на горизонтальную

плоскость так, что ось его вращения наклонена под углом φ к вертикали. Определить скорость v и угловую скорость ω вращения шара, которые устанавливаются после того, как проскальзывание шара по плоскости прекратится. Трением качения пренебречь.

1.135. К середине однородного стержня массой m и длиной l , верхний конец которого подвешен на шарнире, прикреплена горизонтальная пружина жесткостью κ . В положении равновесия пружина не деформирована. Найти период T малых колебаний стержня в плоскости, проходящей через пружину и стержень.

1.136. В центре обруча массой m_1 и радиусом R с помощью легких спиц укреплен сплошной шар радиусом $R/2$ и массой $m_2 = 2m_1$ (рис. 1.26). Обруч висит на гвозде A . Найти период T его малых колебаний.

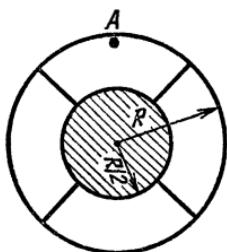


Рис. 1.26

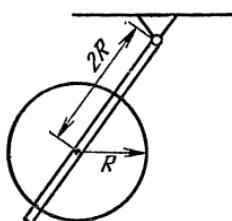


Рис. 1.27

1.137. Маятник имеет вид обруча, висящего на легкой планке (рис. 1.27). Радиус обруча равен R , расстояние от центра обруча до точки подвеса маятника $2R$. Найти период T малых колебаний маятника.

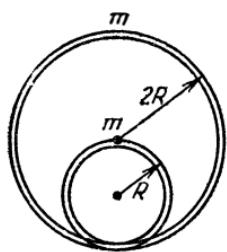


Рис. 1.28

1.138. Обруч массой m и радиусом R приварен к другому обручу такой же массы и радиуса $2R$ (рис. 1.28). Система стоит на горизонтальном столе. Определить период T ее малых колебаний.

1.139. Ось дверцы шкафа шириной b образует с вертикалью угол α . Считая дверцу однородной тонкой пластиной и пренебрегая трением, найти период T ее малых колебаний относительно положения равновесия.

1.140. На абсолютно гладкой винтовой шпильке с шагом резьбы h и внутренним диаметром d находится

цилиндрическая гайка массой M с внешним диаметром D (рис. 1.29). Гайка зажата с торцов двумя спиральными пружинами жесткостью x_1 и x_2 . При вращении гайки концы пружин свободно проскальзывают по торцевым поверхностям гайки. Найти период T колебаний гайки.

1.141. Орбитальная станция, совершающая оборот вокруг планеты за период $T_0 = 1,5$ ч, состоит из двух одинаковых отсеков, соединенных тросом длиной 100 м. Найти положение равновесия системы относительно продольного радиуса планеты и период T колебаний вокруг этого положения.

1.142. Ворот представляет собой деревянный цилиндр с ручкой, изготовленной из металлического прута с линейной плотностью $\rho_l = 2$ кг/м, радиус которого можно считать пренебрежимо малым по сравнению с радиусом ворота (рис. 1.30). Определить период T малых колебаний колодезного ворота около положения равновесия. Линейные размеры ворота: $l = 1$ м, $2r = 0,2$ м, $a = 0,3$ м. Плотность дерева принять равной $\rho = 700$ кг/м³. Тремием в подшипниках пренебречь.

1.143. Два одинаковых стальных бруска длиной $l = 0,1$ м (плотность $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, модуль Юнга $E_\text{ю} = 2 \cdot 10^{11}$ Па) сталкиваются торцами. Рассматривая упругие волны, оценить время t соударения брусков. При каких скоростях v брусков возникнут неупругие явления, если предельное давление стали $p = 2 \cdot 10^8$ Па?

1.144. Найти упругую энергию W , запасенную в шаре радиусом R , имеющем модуль объемного сжатия K и подвергнутом всестороннему давлению p .

1.145. На абсолютно гладкой поверхности лежит брускок длиной l квадратного сечения со стороной b , изготовленный из однородного материала, модуль Юнга $E_\text{ю}$ которого известен. Начиная с определенного момента на один из концов бруска начинает

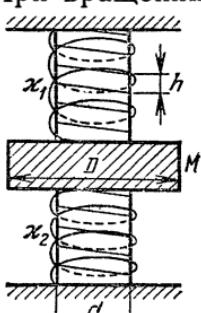


Рис. 1.29

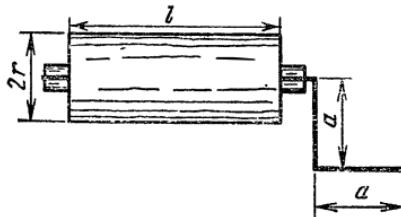


Рис. 1.30

действовать сила F , равномерно распределенная по всему сечению бруска. Найти изменения длины Δl и объема ΔV бруска.

1.146. Однородный круглый резиновый жгут длиной l и диаметром D помещен в стальную трубку с закрытым концом того же диаметра (рис. 1.31). На конец жгута со стороны открытого конца трубы начинает действовать сила F , равномерно распределенная по сечению жгута. Определить, насколько уменьшится при этом длина Δl жгута? Упругие константы резины считать известными.

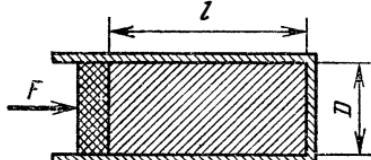


Рис. 1.31

1.147. Определить максимальное давление p , которое может произвести вода при замерзании. Плотность льда равна $\rho_l = 0,917 \text{ г/см}^3$, модуль Юнга $E_\infty = 2,8 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$.

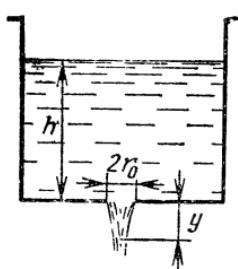


Рис. 1.32

1.148. В цилиндрический сосуд налиты водой до высоты h . В дне сосуда проделано круглое отверстие радиусом r_0 (рис. 1.32). Найти радиус струи воды, вытекающей из отверстия, в зависимости от расстояния до дна сосуда, $r(y)$.

1.149. Однородный тонкий упругий стержень вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через один из его концов, с постоянной угловой скоростью. В некоторый момент времени стержень срывается с оси.

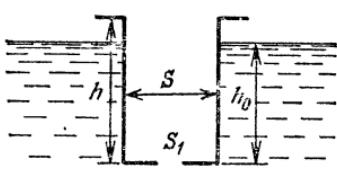


Рис. 1.33

Во сколько раз изменится при этом его относительное удлинение (рассчитанное по отношению к длине покоящегося стержня)?

1.150. В цилиндрическом сосуде с площадью основания S_1 налиты водой до высоты h . Возле дна сосуда проделано небольшое отверстие площадью S_2 . Определить время t вытекания воды.

1.151. Цилиндрический сосуд высотой h погружен в воду на глубину h_0 (рис. 1.33). В дне сосуда пло-

щадью S появилось маленькое отверстие площадью S_1 . Определить время t , через которое сосуд утонет.

1.152. В бассейне испытывается модель корабля в 0,01 натуральной величины. Проектная скорость корабля равна $v = 36$ км/ч. Найти скорость u , с которой надо буксировать модель, чтобы картина гравитационных волн была подобна натуре.

1.153. Оценить методом размерностей фазовую скорость волн на поверхности жидкости, пренебрегая влиянием поверхностного натяжения и конечной глубины.

II. ТЕРМОДИНАМИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

§ 2.1. Газовые законы. Первое и второе начала термодинамики.

Термодинамические циклы

2.1. Три сосуда объемами V_0 , V_1 , V_2 , содержащие идеальный газ, соединены тонкими трубками. Вначале все три сосуда находятся при одной и той же температуре T_0 , давление в них равно p_0 . Затем сосуд объемом V_0 оставляют при температуре T_0 , а сосуды объемами V_1 и V_2 нагревают до температур T_1 и T_2 . Найти давление p , установившееся в сосудах. Объемом трубок пренебречь.

2.2. Температура между двумя оконными рамами изменяется по линейному закону от T_1 до $T_2 > T_1$. Площадь окна равна S , расстояние между рамами l , молярная масса воздуха μ . Определить массу m воздуха, заключенного между рамами при атмосферном давлении p_0 .

2.3. Вычислить молярную теплоемкость $C(V)$ идеального газа, совершающего процесс, показанный на рис. 2.1. Его параметры p_0 и V_0 определены на рисунке. Значение параметра $\gamma = C_p/C_V$ считать известным. Какой максимальной температуры T_{\max} достигает газ в этом процессе? Указать политропические процессы, графики которых на pV -диаграмме касаются прямой, представленной на рис. 2.1, в точках, соответствующих $C(V) = 0$ и $C(V) = \infty$.

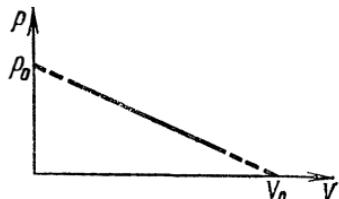


Рис. 2.1

✓ 2.4. Молярная теплоемкость газа в некотором процессе постоянна и равна $C = (17/6)R$, а $\gamma = 7/5$. Как зависит давление газа p от его температуры T в этом процессе?

✓ 2.5. Для идеального газа с произвольным показателем адиабаты γ найти уравнение процесса, при котором молярная теплоемкость C зависит от температуры T по закону $C = \xi T^2$, где $\xi = \text{const}$.

✓ 2.6. Идеальный газ сжимается под поршнем в цилиндре так, что уходящая в окружающую среду теплота равна приращению внутренней энергии газа. Определить работу A внешних сил, затраченную на сжатие одного моля газа при изменении объема в два раза. Чему равна теплоемкость C в этом процессе? Начальная температура газа равна T_0 , теплоемкость при постоянном объеме — C_V , показатель адиабаты — γ .

2.7. Доказать, что для вещества с произвольным уравнением состояния температурный коэффициент объемного расширения β , температурный коэффициент давления γ_d и изотермический коэффициент всестороннего сжатия χ_T связаны соотношением $\beta = \gamma_d \chi_T$.

2.8. Теплоизолированный сосуд разделен тонкой неподвижной теплопроводящей перегородкой AB на

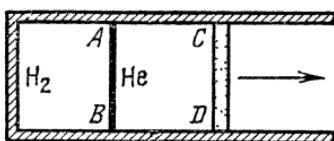


Рис. 2.2

две части (рис. 2.2). В одной находится моль газообразного водорода H_2 , в другой — моль газообразного гелия He . Начальное состояние системы равновесное, причем оба газа имеют одинаковое давление и

одинаковую температуру $T_0 = 293$ К. Затем поршень CD адиабатически и квазистатически выдвигают, в результате чего объем гелия увеличивается в два раза. Какова будет установившаяся температура T обоих газов после расширения?

2.9. Теплоизолированный сосуд закрыт подвижным поршнем. Исходный объем под поршнем разделен непроницаемой перегородкой на две равные части. В одну часть помещен идеальный газ, а вторая откачана до высокого вакуума. Затем перегородка убирается, и газ заполняет весь объем сосуда. После этого газ нагревают, заставляя его последовательно совершать два процесса: 1 — процесс при постоянном

давлении, в результате которого объем газа увеличивается в четыре раза, 2 — процесс при постоянном объеме, в результате которого восстанавливается исходное давление газа. В обоих процессах газу сообщается одинаковое количество теплоты. Определить показатель адиабаты газа γ .

2.10. Положительную или отрицательную работу A совершают идеальный газ при круговом процессе 1—2—3—1 (рис. 2.3)? Чему равна эта работа для m граммов газа? Начальный и конечный объем и температура газа равны V_1 , T_1 и V_2 , T_2 .

2.11. Две органные трубы одинаковой длины продувают: одну воздухом при комнатной температуре T_0 , а другую — гелием. Определить температуру T гелия, при которой тоны второй трубы будут на одну октаву выше (отношение частот равно двум) соответствующих тонов первой трубы. Показатели адиабаты воздуха и гелия, а также их молярные массы известны.

2.12. Найти скорость v адиабатического истечения струи идеального газа из сосуда через маленькое отверстие в вакуум, если известны скорость s звука в газе и показатель адиабаты γ .

2.13. Вычислить, во сколько раз стартовая масса одноступенчатой ракеты m_0 должна превышать ее конечную массу m , чтобы ракета могла достичь первой космической скорости v_1 . Принять, что истечение в вакуум продуктов горения в двигателе ракеты происходит по идеальному адиабатическому процессу с показателем адиабаты $\gamma = 1,2$. Средняя молярная масса продуктов горения равна $\mu = 30$ г/моль, температура горения $T = 3000$ К. Влиянием силы тяжести и трения о воздух на участке ускорения ракеты пренебречь.

2.14. Оценить давление p у самого «носса» ракеты, если число Маха $M = 5$, а давление на высоте полета ракеты $p_0 = 0,3$ атм. Считать процесс сжатия газа адиабатическим с показателем адиабаты γ , а скорость газа относительно ракеты у ее «носса» равной нулю.

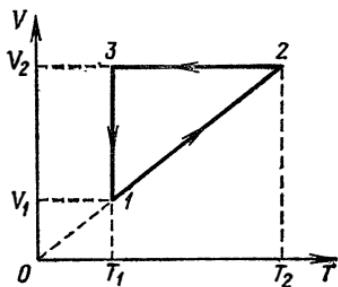


Рис. 2.3

2.15. Определить к. п. д. цикла K , проходящего последовательно через состояния: 1) $2p, V$; 2) $2p, 8V$; 3) $p, 4V$; 4) $p, 2V$. Газ одноатомный, все участки цикла политропические. (Под к. п. д. понимается отношение полной работы за цикл к сумме теплот по всем участкам цикла, где рабочее тело поглощает тепло.)

2.16. Одноатомный идеальный газ, находящийся при давлении p_1 и объеме V_1 , изобарически сжимается до объема $V_2 = V_1/4$, а затем по политропе переводится в состояние $p_3 = 8p_1$ и $V_3 = V_1/8$. После этого происходит изобарическое расширение до объема $V_4 = V_1/4$. Далее газ по политропе возвращается в первоначальное состояние. Найти к. п. д. цикла K .

2.17. При адиабатическом сжатии жидкости относительное изменение объема составляет $\Delta V/V = 0,1\%$, а температура поднимается на $\Delta T = 1\text{ К}$. Найти по этим данным отношение C_p/C_v , если температурный коэффициент объемного расширения жидкости $\beta = 10^{-4}\text{ К}^{-1}$. Чему равно приращение давления Δp в жидкости, если ее температурный коэффициент давления $\gamma_d = 10^5\text{ Па/К}$?

2.18. Во сколько раз изменится к. п. д. двигателя внутреннего сгорания, если коэффициент сжатия n увеличить с $n_1 = 5$ до $n_2 = 10$?

Указание. Реальный цикл двигателя заменить идеальным замкнутым циклом, состоящим из двух изохор и двух адиабат, а рабочее вещество считать многоатомным идеальным газом.

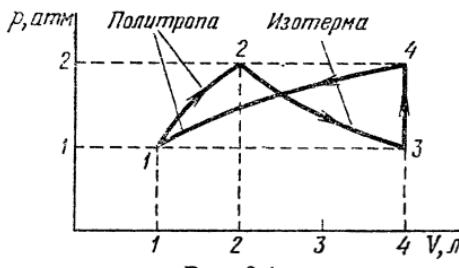


Рис. 2.4

2.19. Идеальный двухатомный газ совершает цикл, изображенный на рис. 2.4. Найти полную работу A за цикл и вычислить к. п. д. K .

2.20. Атмосфера Земли может рассматриваться как гигантская тепловая «машина», в которой роль нагревателя и холодильника играют экваториальная зона

и зоны полюсов, а источником энергии является солнечная радиация. Считая, что полный поток солнечной энергии, поступающей на Землю, равен $\mathcal{J}_w = 1,7 \cdot 10^{17}$ Вт, а к. п. д. K рассматриваемой «машины» на порядок меньше максимально возможного, оценить среднюю мощность \bar{P} , расходуемую на образование ветров, в расчете на 1 м² земной поверхности. Обсудить физические причины, вследствие которых $K < K_{\max}$.

2.21. Доказать, что для вещества с произвольным уравнением состояния, описываемым однозначной функцией $T = T(p, V)$, две политропы не могут встречаться более чем в одном состоянии.

2.22. Изобразить на pV -диаграмме и проанализировать с помощью термодинамических тождеств цикл Карно для тепловой машины, работающей на веществе, для которого во всей рабочей области $(dp/dT)_V < 0$. Указать расположение «горячей» и «холодной» изотерм и установить знаки теплоты на обеих изотермах.

2.23. Имеется N молей льда при температуре плавления $T_{\text{пл}}$ и окружающая среда, находящаяся при температуре $T > T_{\text{пл}}$. Найти максимальную работу A_{\max} , которая может быть совершена в подобной ситуации, считая, что вся система адиабатически изолирована и масса льда пренебрежимо мала в сравнении с массой среды. Зависимостью молярной теплоемкости воды C_v от температуры пренебречь.

2.24. Какую максимальную работу A_{\max} можно получить от циклически действующей машины, нагревателем которой служит масса $m_1 = 1$ кг воды при начальной температуре $T_1 = 373$ К, а холодильником — $m_2 = 1$ кг льда при температуре $T_2 = 273$ К, к моменту, когда весь лед растает? Чему будет равна температура воды T в этот момент? Удельная теплота плавления льда равна $q = 335$ кДж/кг, зависимостью удельной теплоемкости воды от температуры пренебречь.

2.25. В объеме $V_1 = 3$ л находится $N_1 = 0,5$ моль кислорода O_2 , а в объеме $V_2 = 2$ л находится $N_2 = 0,5$ моль азота N_2 при температуре $T = 300$ К. Найти максимальную работу A_{\max} , которая может быть совершена при смешивании этих газов в суммарном объеме $V_1 + V_2$ в изотермическом и адиабатическом процессах. Оба газа считать идеальными.

2.26. Найти приращение энтропии ΔS одноатомного идеального газа при политропическом сжатии вдвое от первоначального объема, если в ходе всего процесса приращение внутренней энергии равно половине работы сжатия, совершенной над газом.

2.27. В двух сосудах находится по одному молю идеального газа. Температура газа в обоих сосудах одинакова, давление в первом сосуде p_1 , а во втором — p_2 . Найти приращение энтропии ΔS системы после соединения сосудов для случаев, когда газы одинаковы и когда различны.

2.28. В замкнутой трубе объемом V находится смесь двух идеальных газов по N молей каждого.

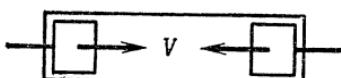


Рис. 2.5

У краев трубы находятся поршни (рис. 2.5), каждый из них «прозрачен» для одного из газов. При перемещении поршней в среднюю точку газы полностью

разделяются. Найти работу A , совершающую внешними силами при изотермическом квазистатическом перемещении поршней, и сравнить отношение A/T (где T — термодинамическая температура) с приращением полной энтропии газов.

2.29. Адиабатически изолированный сосуд разделен перегородкой на две равные части, одна из которых пуста, а в другой находится 1 моль двухатомного идеального газа при температуре T_0 . Перегородку удаляют, и после того как газ равномерно заполняет весь сосуд, этот газ квазистатически сжимают до начального объема теплонепроницаемым поршнем. Чему равны приращения энтропии ΔS и температуры ΔT газа по сравнению с их первоначальными значениями?

2.30. Воздух, находящийся в замкнутом теплоизолированном объеме $V = 100 \text{ м}^3$, является нагревателем идеальной холодильной машины, потребляющей мощность $P = 100 \text{ Вт}$. Начальная температура воздуха $T_{\text{возд}} = 300 \text{ К}$, начальное давление $p = 1 \text{ атм}$, температура холодильной камеры $T_x = 273 \text{ К}$. Оценить, какое время t должна проработать машина, чтобы температура воздуха в этом объеме повысилась на $\Delta T = 1 \text{ К}$.

2.31. Серебряная проволока диаметром $d = 1 \text{ мм}$ адиабатически нагружается силой $F = 10 \text{ Н}$ при комнатной температуре $T = 300 \text{ К}$. Полагая, что удель-

ная теплоемкость серебра равна $c = 234 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, плотность $\rho = 10^4 \text{ кг}/\text{м}^3$, а температурный коэффициент линейного расширения $\alpha = 1,9 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$, определить изменение температуры ΔT проволоки.

2.32. В расположенному вертикально теплоизолированном цилиндре радиусом r имеется теплопроводящий поршень массой m . Первоначально он закреплен так, что делит цилиндр на две равные части. В каждой из этих частей содержится N молей одного и того же идеального газа при давлении p и температуре T . Крепление поршня удаляется, и под действием силы тяжести он опускается. Определить приращение энтропии ΔS системы к моменту установления равновесия. Считать, что $\pi r^2 p \gg mg$.

2.33. Гелий, первоначально находившийся в сосуде объемом $V = 20 \text{ л}$ при давлении $p = 1 \text{ атм}$, продиффундировал наружу. Найти приращение энтропии ΔS гелия и вычислить минимальную работу A_{\min} , которую нужно затратить, чтобы собрать из атмосферы в сосуд такое же количество гелия.

Указание. В обычном воздухе на 1 атом гелия приходится 10^7 молекул других газов.

2.34. В ударной волне нагревание газа происходит настолько быстро, что первоначально нагревание от исходной температуры T_0 до высокой температуры T_1 происходит лишь по внешним поступательным и вращательным степеням свободы. После этого постепенно возбуждаются внутренние, т. е. колебательные, степени свободы; этот процесс называется «колебательная релаксация». Найти отношение температур двухатомного газа после колебательной релаксации (T_2) и до нее (T_1), а также изменение энтропии моля газа при релаксации в условиях, когда $k_B T_1 \gg \hbar\omega$ и $k_B T_0 \leq \hbar\omega$, где ω — круговая частота внутримолекулярных колебаний, k_B — постоянная Больцмана. Считать, что релаксация происходит при постоянном давлении и в условиях тепловой изоляции.

2.35. Два цилиндра, заполненных одинаковым идеальным двухатомным газом, сообщаются с помощью узкой трубки; оба они закрыты поршнями, которые поддерживают в газе постоянное давление $p = 3 \text{ атм}$ (рис. 2.6). Первоначально цилиндры разделены

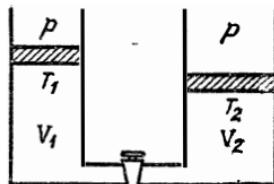


Рис. 2.6

лесны, причем значения объемов и температур равны $V_1 = 1$ л, $V_2 = 2$ л, $T_1 = 300$ К, $T_2 = 600$ К. После соединения цилиндров происходит выравнивание температур. Найти конечную температуру T_k , совершающую работу A и приращение энтропии ΔS . Считать процесс адиабатическим.

2.36. Давление насыщенного водяного пара при $T = 290$ К равно $p = 0,02$ атм. Пар первоначально занимает объем 10 л. Затем он изотермически сжимается, так что половина его конденсируется. Удельная теплота парообразования при этой температуре равна $\Lambda = 2460$ кДж/кг. Найти приращение энтропии ΔS системы. Пар считать идеальным газом.

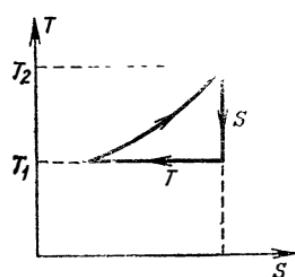


Рис. 2.7

$T = 300$ К, повышая давление от 0 до $p = 10$ атм Масса ртути $m = 1$ кг. Найти работу A , совершенную над ртутью, и количество теплоты Q , полученное ею. Изотермический коэффициент всестороннего сжатия ртути равен $\chi_T = 4 \cdot 10^{-6}$ атм $^{-1}$. Температурный коэффициент объемного расширения $\beta = 2 \cdot 10^{-4}$ К $^{-1}$, плотность ртути $\rho = 13,6$ г/см 3 .

2.37. Найти к. п. д. цикла K , изображенного на рис. 2.7. Все процессы политропические, S — адиабата, T — изотерма, $T_2 = 2T_1$. Уравнение состояния является произвольным.

2.38. Ртуть сжимают изотермически при температуре

$T = 300$ К, повышая давление от 0 до $p = 10$ атм Масса ртути $m = 1$ кг. Найти работу A , совершенную над ртутью, и количество теплоты Q , полученное ею. Изотермический коэффициент всестороннего сжатия ртути равен $\chi_T = 4 \cdot 10^{-6}$ атм $^{-1}$. Температурный коэффициент объемного расширения $\beta = 2 \cdot 10^{-4}$ К $^{-1}$, плотность ртути $\rho = 13,6$ г/см 3 .

§ 2.2. Реальные газы. Теплопроводность. Вязкость

2.39. Моль гелия занимает объем $V = 0,1$ л и находится при температуре $T = 0$ °С. Измерение величины $C_p/C_v - 1$ в этих условиях показало, что она превышает на 3 % свое значение для разреженного газа. Найти постоянную a для гелия, используя уравнение Ван-дер-Ваальса. Членами высшего порядка (пропорциональными a^2 , ab , b^2) пренебречь.

2.40. Атмосфера Венеры почти целиком состоит из углекислого газа CO₂. На поверхности планеты плотность газа $\rho = 0,07$ г/см 3 , его температура $T = 750$ К. Найти давление p газа. Газ считать вандерваальсовским с критическими параметрами $p_{kp} = 73$ атм,

$V_{kp} = 94$ см³/моль. Провести сравнение с давлением p_{id} идеального газа при тех же условиях.

2.41. Один моль газа Ван-дер-Ваальса расширяется по политропе $(V - b)T = \text{const}$. Определить приращение энтропии ΔS газа, если его температура изменилась от T_1 до T_2 . Считать, что теплоемкость C_V задана и не зависит от температуры.

2.42. Цикл состоит из двух изохор с объемами V_1 и V_2 и двух адиабат. Рабочим веществом является газ Ван-дер-Ваальса, постоянная b которого задана, а теплоемкость C_V не зависит от температуры. Определить к. п. д. цикла K .

2.43. Один моль ($N = 1$ моль) азота сжат при температуре $T_0 = 273$ К до объема, равного $V_0 = 1$ л. Критические параметры азота равны $T_{kp} = 126$ К, $V_{kp} = 0,12$ л/моль. Найти приращение его энтропии ΔS при расширении до атмосферного давления без подвода теплоты и без совершения работы. Считать, что в сжатом состоянии азот подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса, а в расширенном ведет себя как идеальный газ. Теплоемкость C_V задана и не зависит от температуры.

2.44. В вертикальном цилиндре под массивным поршнем площадью S находится 1 моль газа Ван-дер-Ваальса, для которого постоянная b известна. Найти частоту ω малых колебаний поршня около положения равновесия, считая процесс сжатия и разрежения изотермическим, причем $T = 2T_{kp}$. Равновесный объем газа в условиях опыта принять равным критическому. Внешним давлением пренебречь.

2.45. Найти адиабатическую скорость s звука в газе Ван-дер-Ваальса в критической точке. Постоянные a и b газа и его молярную массу μ считать известными. Теплоемкость C_V задана и не зависит от температуры.

2.46. В два стоящих рядом сосуда опущен U-образный медный стержень с поперечным сечением $S = 1$ см². В каждый сосуд налита вода массой $m = 900$ г. Начальные температуры воды в сосудах $(T_1)_0 = 65^\circ\text{C}$, $(T_2)_0 = 10,6^\circ\text{C}$. Находящаяся в воздухе часть стержня имеет длину $l = 24$ см. Через какое время t разность температур между сосудами сделается равной $T_1 - T_2 = 20^\circ\text{C}$? Считать, что теплообмен между сосудами осуществляется исключительно через стержень и без потерь, а внутри каждого сосуда

температура быстро выравнивается. Теплопроводность меди равна $k_t = 3,9 \text{ Вт}/(\text{см} \cdot \text{К})$, теплоемкостью стержня пренебречь.

2.47. Жидкий гелий при температуре T_1 и давлении насыщенных паров течет по цилиндрической кварцевой трубке (внутренний радиус трубы r_1 , внешний — r_2), наружная поверхность которой омыается жидким азотом при температуре T_2 . При таких низких температурах теплопроводность кварца сильно зависит от температуры: $k_t = \xi T^3$, $\xi = \text{const}$. На какую максимальную длину l может быть рассчитан такой трубопровод для подачи жидкого гелия с массовым расходом на выходе m_t (в $\text{г}/\text{с}$), если допустимые потери жидкости на испарение составляют 50 %? Удельная теплота парообразования равна Λ .

2.48. Найти приращение энтропии ΔS 132 г углекислого газа в процессе, в результате которого его динамическая вязкость уменьшилась в два раза, а число ударов молекул в расчете на 1 см^2 стенки сосуда за 1 с уменьшилось в четыре раза.

2.49. Найти приращение энтропии ΔS 64 г газообразного кислорода в процессе, в результате которого его теплопроводность возросла в два раза, а коэффициент диффузии остался неизменным.

2.50. В дне сосуда с жидким гелием образовалась щель шириной $d_0 = 10^{-4} \text{ см}$ и длиной $l = 5 \text{ см}$. Толщина дна сосуда $d = 0,5 \text{ мм}$. Найти максимальную скорость v_{\max} гелия в щели и массовый расход m_t жидкости в единицу времени, если высота столба гелия над дном сосуда равна $h = 20 \text{ см}$. Плотность и динамическая вязкость гелия равны $\rho = 0,15 \text{ г}/\text{см}^3$, $\eta = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ П}$. Считать течение ламинарным.

2.51. Проволоку радиусом $r_1 = 1 \text{ мм}$ протягивают с постоянной скоростью $v_0 = 10 \text{ см}/\text{с}$ вдоль оси трубы радиусом $r_2 = 1 \text{ см}$, которая заполнена жидкостью с динамической вязкостью $\eta = 10^{-2} \text{ П}$. Найти силу трения $F_{\text{тр}}$, приходящуюся на единицу длины проволоки, и распределение скоростей $v(r)$ жидкости вдоль радиуса трубы. Считать течение ламинарным.

2.52. Длинная вертикальная трубка длиной l и радиусом r_0 заполнена жидкостью, для которой кинематическая вязкость равна ν . За какой промежуток времени t вся жидкость вытечет из трубы под действием силы тяжести? Влиянием сил поверхностного натяжения пренебречь. Процесс установления скo-

ности жидкости считать мгновенным, а течение ламинарным.

2.53. Вода вытекает из широкого открытого сосуда через горизонтальный цилиндрический капилляр радиусом $r_0 = 1$ мм и длиной $l = 10$ см, расположенный у дна сосуда. Какая мощность P расходуется на выделение теплоты, если высота воды в сосуде $h = 5$ см. Считать течение ламинарным, динамическую вязкость $\eta \approx 10^{-2}$ П.

2.54. В плоской камере, доверху заполненной водой, вращается горизонтальный диск радиусом $r = 20$ см (рис. 2.8). Какая мощность P необходима для его вращения с частотой $\nu = 5$ с⁻¹, если диск находится на расстояниях $l_1 = 5$ мм от верхней и $l_2 = 10$ мм от нижней стенок камеры? Эффектами, связанными с радиальными потоками воды и краевыми явлениями, пренебречь. Считать течение ламинарным, динамическую вязкость воды $\eta = 10^{-2}$ П.

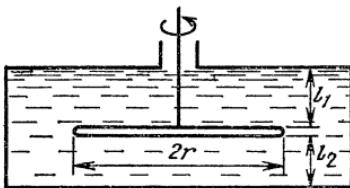


Рис. 2.8

§ 2.3. Молекулярно-кинетическая теория. Явления переноса

2.55. Давление молекулярного водорода при температуре $T_0 = 350$ К составляет $p_0 = 1$ Торр. Оценить, каким будет давление p газа, если при постоянном объеме нагреть его до температуры T такой, что $k_B T = 300$ эВ (k_B — постоянная Больцмана). Энергия ионизации атома водорода равна $W_n = 13,6$ эВ.

2.56. Мишень для получения термоядерной реакции представляет собой шарик радиусом $r_0 = 50$ мкм из замороженной смеси, содержащей равное число атомовдейтерия и трития. Она подвергается кратковременному (порядка 10^{-11} с) всестороннему облучению светом лазера. Поглощенная энергия составляет $W = 10^2$ Дж. Оценить температуру T мишени и давление p в ней после вспышки лазера, считая, что вещество еще не успело разлететься, но температура успела установиться. Плотность мишени равна $\rho = 0,2$ г/см³.

2.57. Написать выражение для давления dp , производимого на стенку сосуда молекулами идеального газа, скорости которых заключены между v и $v + dv$. Считать распределение молекул по скоростям максвелловским. Найти значение v_0 , для которого dp максимально при заданном dv . Концентрация молекул равна n , температура газа T , масса молекул m .

2.58. В условиях предыдущей задачи написать выражение для среднего числа ударов dN , производимого на единицу площади стенки сосуда в единицу времени молекулами идеального газа, скорости которых заключены между v и $v + dv$. Найти значение v_0 , для которого dN максимально при заданном dv .

2.59. Вычислить полное число молекул N , приходящееся на единицу площади стенки в единицу времени, а также их среднюю тепловую скорость \bar{v} . Концентрация молекул в сосуде равна n , их масса m , температура T .

2.60. Через отверстие тонкостенного сосуда, содержащего газ при температуре T , вылетают в вакуум молекулы. При какой скорости v_0 полная кинетическая энергия молекул, вылетающих через отверстие в единицу времени в интервале скоростей $v_0, v_0 + dv$, будет максимальной при заданном dv ? Найти среднюю кинетическую энергию \bar{W}_k вылетающей молекулы.

2.61. Электроны, движущиеся в тонких пленках и в тонких приповерхностных слоях кристаллов, могут рассматриваться как «двумерный» электронный газ. Вычислить для них отношение наивероятнейшей и среднеквадратичной скоростей $v_{\text{нв}}/(\bar{v}^2)^{1/2}$. Считать распределение молекул по скоростям максвелловским.

2.62. В условиях предыдущей задачи вычислить Z — частоту ударов электронов в расчете на единицу длины периметра границы в единицу времени. Выразить Z через поверхностную концентрацию электронов n , их температуру T и массу m .

2.63. В центре сферы радиусом r в момент времени $t = 0$ создается N_0 молекул газа, скорости которых имеют максвелловское распределение с температурой T . Затем молекулы разлетаются без столкновений и оседают на стенках сферы. Найти $J(t)$ — плотность потока молекул на сферу как функцию времени. Определить момент времени t_0 , когда поток максимальен, и

найти скорость v_0 молекул, подлетающих к стенке в этот момент. Масса молекул газа равна m .

2.64. Ракета с термостатированной кабиной, представляющей собой цилиндр высотой h , движется с ускорением a вдоль оси цилиндра. Масса воздуха внутри кабины равна M . Как изменяется температура и энтропия воздуха в кабине после выключения двигателя? Воздух рассматривать как идеальный газ с молярной массой μ . Считать, что $\mu ah/(RT_0) \ll 1$, где T_0 — температура воздуха в кабине. Рассмотреть два случая: 1) двигатель выключается медленно, так что процессы идут квазистатически, и 2) двигатель выключается мгновенно, так что распределение концентрации газа в кабине не успевает измениться.

2.65. Как изменится энтропия моля идеального газа, находящегося в термостатированном цилиндрическом сосуде радиусом r , в результате быстрого раскручивания сосуда до значения угловой скорости $\omega \ll r^{-1}(RT/\mu)^{1/2}$, где μ — молярная масса газа.

2.66. Неподвижный тонкостенный сосуд объемом V наполнен идеальным одноатомным газом и поддерживается при постоянной температуре T . В стенке сосуда имеется отверстие площади S , через которое молекулы газа вылетают в вакуум. Размеры отверстия малы и в сравнении с размерами сосуда, и в сравнении с длиной свободного пробега. Определить закон изменения во времени потока тепла $J_Q(t)$, подводимого к сосуду для поддержания в нем постоянной температуры. Начальная концентрация атомов равна n_0 , масса атомов m .

2.67. Идеальный газ из атомов массой m находится в неподвижном тонкостенном сосуде объемом V с теплоизолированными стенками. В стенке сосуда имеется отверстие площадью S , через которое молекулы вылетают в вакуум. Размеры отверстия малы и в сравнении с размерами сосуда, и в сравнении с длиной свободного пробега. Определить закон изменения во времени температуры газа $T(t)$ в сосуде. Считать начальную температуру газа T_0 и все необходимые параметры газа известными. Теплоемкостью стенок сосуда пренебречь.

2.68. Пользуясь распределением Больцмана, найти среднюю потенциальную энергию атомов \bar{U} идеального газа при температуре T в поле $U(x)=Ax^2$, $A > 0$.

2.69. В замкнутом тонкостенном сосуде находится разреженный идеальный газ под давлением p . В стенке сосуда сделано отверстие площадью S , через которое происходит молекулярная эфузия газа. Определить реактивную силу F , испытываемую сосудом при истечении газа через отверстие.

2.70. Оценить, при каком давлении p воздуха в нем может распространяться звук с частотой $v = 100$ кГц при температуре T .

2.71. Оценить радиус r алюминиевой частицы, взвешенной в жидкости плотностью $\rho_0 = 1$ г/см³ и динамической вязкостью $\eta = 1$ П, для которой скорость вязкого падения сравнивается со скоростью ее теплового движения при комнатной температуре. Будут ли выпадать в осадок такие частицы в алюминиевой краске?

2.72. При измерении вязкости методом Стокса стальные шарики плотностью $\rho_{\text{ст}}$ и радиусом r_0 сбрасывают точно в центре сосуда в жидкость (плотность ρ_j , температура T). Каково среднеквадратичное расстояние $(\Delta r)^2$ точек удара шариков о дно сосуда от его центра, если высота столба жидкости равна h ? При выводе считать h сколь угодно большим, но в ответе привести критерии справедливости результата.

2.73. При наблюдении за каплей жидкости, несущей на себе элементарный заряд, было обнаружено, что сила тяжести, действующая на каплю, уравновешивается электрическим полем напряженностью $E = 10^4$ В/см. Наблюдение за каплей при включенном поле показало, что ее среднеквадратичное броуновское смещение за время $t = 100$ с составляет $r = 10^{-2}$ см. Оценить скорость v установившегося падения капли при выключенном поле. Капля находится в камере, заполненной водородом, с давлением $p = 1$ атм и плотностью $\rho = 0,09$ г/л.

2.74. Зная, что средняя длина свободного пробега однозарядного иона аргона-40 в тяжелом газе равна $l = 10^{-5}$ см, оценить среднюю дрейфовую скорость $v_{\text{др}}$ движения иона в этом газе под действием однородного электрического поля напряженностью $E = 300$ В/см. Считать температуру газа комнатной.

2.75. Первоначально вода при температуре $T = 300$ К заполняла трубку длиной $l = 10$ см, запаянную с одного конца, наполовину. Относительная влажность воздуха 50 %, а давление насыщенных паров $p_{\text{нас}} \approx 27$ мм рт. ст. Длина свободного пробега в си-

стеме воздух — пар составляет $l_{\text{пр}} \approx 10^{-5}$ см. Оценить время t испарения воды из трубки. Считать пар у поверхности воды насыщенным, капиллярными явлениями пренебречь.

2.76. Сосуд через длинную трубку откачивается идеальным (т. е. улавливающим все попадающие в него молекулы) высоковакуумным насосом. Из-за течи в стенках сосуда давление в нем не падает до нуля, а после длительной откачки устанавливается на уровне, при котором длина свободного пробега $l_{\text{пр}} \gg d$, где d — диаметр трубки. Как изменится этот предельный вакуум, если диаметр трубки уменьшить вдвое?

2.77. Из большого объема откачивается воздух при давлении $p = 10^{-4}$ мм рт. ст. и комнатной температуре через трубопровод длиной $l = 2$ м и радиусом $r = 10$ см. Насос имеет производительность (т. е. объемный расход) $V_t^{(1)} = 1$ м³/с. При какой производительности V_t насоса будет обеспечена такая же скорость откачки сосуда, если насос присоединен непосредственно к откачиваемому объему?

2.78. Найти поток молекул жидкости J , испаряющихся с единицы площади поверхности в единицу времени в вакуум при температуре T , если известно давление насыщенных паров $\rho_{\text{нас}}$ при этой температуре и коэффициент прилипания K . Последний равен отношению числа молекул пара, прилипающих к поверхности жидкости, к полному числу молекул пара, ударяющихся за это время о поверхность жидкости.

2.79. Узкий цилиндрический сосуд, диаметр которого мал в сравнении с его высотой $h = 20$ см, целиком заполнен водой при комнатной температуре. Сосуд обдувается сверху поперечным потоком сухого воздуха, так что давление пара на верхнем конце сосуда можно считать равным нулю. Учитывая диффузию пара в сосуде, найти промежуток времени t , через который испарится вся вода. Плотность насыщенного пара равна $\rho_{\text{нас}} = 3 \cdot 10^{-5}$ г/см³, а коэффициент диффузии молекул воды в воздухе $D = 0,3$ см²/с. Считать, что давление пара непосредственно над поверхностью жидкости равно $\rho_{\text{нас}}$.

2.80. Две части сосуда разделены пористой перегородкой. В начальный момент первый сосуд наполняется гелием ($\mathcal{A}_1 = 4$), а второй — ксеноном ($\mathcal{A}_2 = 131$) при нормальных условиях. Перегородка не влияет на скорость диффузии, она лишь препятствует

перемешиванию газов при заполнении системы. Через некоторое время концентрация Хе в Не на расстоянии $l = 1$ см от перегородки стала равной 0,01 ат.%. На каком расстоянии x от перегородки в этот момент концентрация Не в Хе также составит 0,01 ат.%? Сравнить также частоту соударений Z_1 атомов гелия в ксеноне с частотой соударений Z_2 атомов ксенона в гелии.

2.81. По распространению радиоактивных газов после ядерных взрывов известно, что благодаря турбулентности время перемешивания по всей земной атмосфере составляет около одного года. Во сколько раз быстрее происходит процесс турбулентного перемешивания в условиях атмосферы по сравнению с молекулярной диффузией?

§ 2.4. Флуктуации. Фазовые переходы. Поверхностное натяжение

2.82. Газообразный гелий вытекает в вакуум через отверстие площадью $S = 0,1$ мм² из тонкостенного сосуда, в котором давление и температура поддерживаются равными $p = 10^{-6}$ атм, $T = 273$ К. В эксперименте измеряется полное число N атомов, прошедших через отверстие за интервал времени $t = 10^{-3}$ с. Оценить относительную среднеквадратичную флуктуацию полного числа атомов, а также вероятность ω того, что при одном из измерений число вылетевших из сосуда атомов будет равно нулю.

2.83. Найти относительную среднеквадратичную флуктуацию потенциальной энергии внутримолекулярных колебаний: 1) двухатомной молекулы, 2) N -атомной молекулы и 3) моля идеального газа, состоящего из двухатомных молекул. Считать колебания гармоническими.

2.84. Два одинаковых сообщающихся сосуда заполнены газом при нормальных условиях. Каким должен быть объем V каждого сосуда, чтобы вероятность состояния, при котором давление в сосудах изотермически изменится на $10^{-7}\%$, была в e^{100} раз меньше, чем вероятность исходного состояния?

2.85. Каким должен быть объем V_1 , выделенный в большом сосуде с газообразным гелием, чтобы относительная среднеквадратичная флуктуация температуры в нем составляла 10^{-6} ? Гелий находится при нормальных условиях.

2.86. Пучок атомов гелия выводится из камеры с давлением $p = 10^{-4}$ Торр и температурой $T = 300$ К в высокий вакуум через систему из двух коаксиальных круглых отверстий радиусом $r = 0,1$ мм, разделенных расстоянием $l = 1$ см. Найти поток атомов J , проходящих через 2-е отверстие в единицу времени, и относительную среднеквадратичную флуктуацию числа частиц в импульсах продолжительностью $t = 10^{-3}$ с.

2.87. Предел чувствительности пружинных весов ограничивается тепловым движением механизма. Найти ту малую массу m , которая может быть определена при однократном взвешивании на пружинных весах, если жесткость пружины равна κ , а температура — T .

2.88. В сосуде находится газ Ван-дер-Ваальса в условиях, когда средний молярный объем равен критическому, а температура T превышает критическую $T_{\text{кр}}$. Найти изотермическую среднеквадратичную флуктуацию объема $(\bar{\Delta}V)^2$ небольшого элемента этого газа, имеющего равновесный объем V .

2.89. В сосуде объемом 1 л при комнатной температуре находится равное число N атомов двух различных газов. Оценить значение N , при котором вероятность для этих газов хоть один раз разделиться на протяжении эпохи порядка возраста наблюдаемой части Вселенной (около 10^{10} лет) сравнима с единицей.

2.90. Предполагая, что температура атмосферы постоянна и равна T_a , температура кипения воды на поверхности Земли равна T_0 , определить температуру T кипения воды на высоте h от поверхности Земли. Считать, что удельная теплота парообразования Λ не зависит от температуры.

2.91. При определении влажности по точке росы было установлено, что конденсация водяного пара наблюдается при охлаждении поверхности гигрометра до температуры 10°C . Найти абсолютную влажность, считая, что удельная теплота парообразования воды не зависит от температуры, $\Lambda = 2260$ кДж/кг. Пары воды считать идеальным газом.

2.92. Найти приращение $\Delta\Lambda$ удельной теплоты парообразования воды при повышении температуры от 323 до 373 К. Считать теплоемкость воды постоянной, а водяной пар классическим идеальным газом.

2.93. На дне сосуда, заполненного воздухом, разлиты вода. Сосуд закрыт поршнем, который выдвигают настолько медленно, что пар все время остается насыщенным. Температуру сосуда поддерживают постоянной. Когда объем увеличивается в два раза, вода исчезает. Определить давление $p_{\text{нас}}$ насыщенного пара, полную массу $m_{\text{в}}$ воды (в жидкой и газообразной фазах) и массу воздуха $m_{\text{возд}}$ в камере, если известно, что в начале процесса полное давление было $p_1 = 3$ атм, а в конце процесса $p_2 = 2$ атм. Начальный объем равен $V_0 = 22,4$ л.

2.94. Насыщенный водяной пар, находящийся в цилиндре под поршнем при 100°C , нагревают на 1°C и перемещают поршень так, что пар остается насыщенным, а конденсации не происходит. Найти относительное приращение объема пара, считая его идеальным газом. При 100°C удельная теплота парообразования воды равна $\Lambda = 2260$ кДж/кг.

2.95. В Антарктиде под трехкилометровой толщей льда обнаружены озера пресной воды. Определить температуру T воды в этих озерах, если удельная теплота плавления льда $q = 336$ кДж/кг, а отношение плотности льда к плотности воды составляет 0,917.

2.96. Терморегулятор автомобильного двигателя представляет собой цилиндрический сосуд с гофрированными стенками (сильфон),

наполненный этиловым спиртом и его паром (рис. 2.9). При низкой температуре воды давление в сильфоне мало, он сжат и закрывает клапан, ослабляя таким образом циркуляцию воды в системе охлаждения двигателя. При достаточно высокой температуре воды сильфон растягивается и открывает клапан, вода начинает циркулировать сильнее,

охлаждается и т. д. Какова должна быть сила давления F пружины клапана, чтобы он открывался при $T = 363$ К? Диаметр сильфона $d = 2$ см, температура кипения спирта при давлении $p_0 = 1$ атм равна $T_0 = 351$ К, удельная теплота парообразования спирта $\Lambda_{\text{уд}} = 850$ Дж/г, его химическая формула $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$.

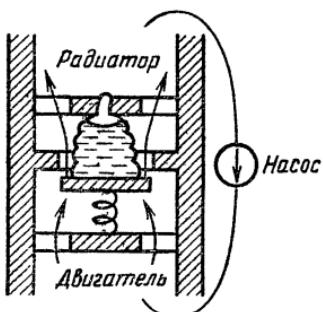


Рис. 2.9

2.97. Гейзеры могут рассматриваться как большие подземные резервуары, наполненные грунтовой водой и прогреваемые подземным теплом (рис. 2.10). Выход из них на поверхность земли осуществляется через

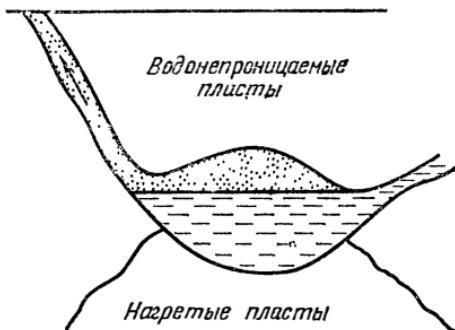


Рис. 2.10

узкий канал, который в «спокойный» период заполнен водой. Считая, что «активный» период наступает, когда закипает вода в подземном резервуаре, и что во время извержения гейзера канал заполнен только паром, который и выбрасывается наружу, оценить, какую часть воды теряет резервуар гейзера во время одного извержения. Глубина канала $h = 90$ м. Молярная теплота парообразования воды равна $\Lambda = 41$ кДж/моль.

2.98. Гелий-3 (${}^3\text{He}$) при нормальном давлении остается жидким вплоть до абсолютного нуля температур. Минимальное давление, при котором он затвердевает, $p_{\min} = 28,9$ атм. Энтропия жидкого гелия-3 в расчете на моль в интересующей нас области температур меняется по закону $S_{\text{ж}} = RT/T_0$, а $T_0 = 0,22$ К (см. задачу 7.61). Энтропия твердого гелия-3 в рассматриваемом диапазоне температур не зависит от температуры и равна $S_{\text{тв}} = R \ln 2$ на моль (см. задачу 7.16). Разность объемов жидкого и твердого гелия $\Delta V = V_{\text{ж}} - V_{\text{тв}} \approx 1,25$ см³/моль. Найти температуру T_{\min} , соответствующую на кривой плавления давлению p_{\min} , температурную зависимость теплоты плавления $q(T)$, а также давление затвердевания гелия-3 при $T = 0$.

2.99. Согласно одной из моделей, центральная часть Земли (так называемое ядро) состоит из железа. Внешняя часть ядра расплавлена, а внутренняя часть радиусом $R_t \approx 1200$ км твердая. Ядро остывает

со скоростью $u \approx 10^{-7}$ К/год; различием температуры в пределах ядра можно пренебречь. На сколько изменится радиус ΔR_t твердой части ядра Земли за время $t = 10^9$ лет? Считать, что удельная теплота плавления железа при условиях, соответствующих поверхности ядра, приближенно равна $q \approx 125$ Дж/г, температура на поверхности ядра $T \approx 3700$ К, а изменение плотности железа при затвердевании $\Delta\rho = 0,3$ г/см³. Из-за того что $\Delta\rho \ll \rho$, можно пренебречь изменением распределения давления $p(r)$ по мере затвердевания ядра.

2.100. В замкнутом сосуде находится вода в равновесии с насыщенным паром при температуре 100 °C. Отношение масс пары и воды $\xi = 0,1$. Удельная теплоемкость воды равна $c_w = 4,2$ Дж/(г·К). Найти удельную теплоемкость c_s такой системы. Пар считать идеальным газом. Удельная теплота парообразования воды равна $\Lambda_{ud} = 2260$ Дж/г.

2.101. Найти удельную теплоемкость c_v редкого тумана (т. е. насыщенного пара с капельками воды, полная масса которых много меньше массы пара) при постоянном объеме и температуре 100 °C. Молярная теплота парообразования воды при 100 °C и постоянном давлении равна $\Lambda = 41$ кДж/моль.

2.102. В вакуумной камере на двух концах тонкой трубки находятся два почти одинаковых по размеру

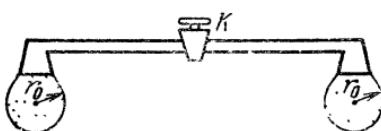


Рис. 2.11

масляных пузыря, наполненных воздухом (рис. 2.11). В начальный момент трубка перекрыта краном K . Что произойдет после открытия крана? Считая процесс изотермическим,

вычислить полное приращение ΔS энтропии газа. Начальные радиусы пузырей $r_0 = 5$ см. Поверхностное натяжение масла $\sigma = 30$ дин/см. Температура $T = 300$ К.

2.103. Мыльный пузырь радиусом r при понижении давления во внешней среде увеличил свой радиус вдвое. Считая процесс изотермическим, найти полное приращение энтропии пузыря, включая энтропию мыльной пленки. Начальное давление равно p_0 , поверхностное натяжение мыльной пленки σ , удельная теплота образования каждой поверхности мыльной пленки q . Считать, что $2\sigma/r \ll p_0$.

2.104. Сосуд с водой нагревают при постоянном давлении $p_0 = 1$ атм. Найти, на сколько температура вскипания воды будет выше $T = 100^\circ\text{C}$, если в ней содержатся песчинки с максимальным радиусом $r = 10$ мкм. Поверхностное натяжение равно $\sigma = 60$ эрг/см², молярная теплота парообразования воды равна $\Lambda = 41$ кДж/моль.

2.105. Капелька воды радиусом $r = 10$ мкм находится в замкнутой полости в равновесии с паром. При каком объеме V полости это равновесие будет устойчивым? Стенки полости считать несмачиваемыми, других капель и центров конденсации нет. Система изотермическая ($T = 293$ К). Насыщенный пар считать идеальным газом, его давление $p_{\text{нас}} = 17,5$ Торр.

2.106. Пары воды, находящиеся в помещении, начинают конденсироваться на гладкой поверхности при охлаждении ее до $T_1 = 10^\circ\text{C}$. Начиная с какой температуры T они начнут конденсироваться на пористой поверхности с радиусом пор $r = 10^{-5}$ см? Удельная теплота парообразования воды равна $\Lambda_{\text{уд}} = 2480$ кДж/кг, поверхностное натяжение $\sigma = 70$ дин/см. Угол смачивания равен нулю.

III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

§ 3.1. Электростатика

3.1. Электрический квадруполь состоит из двух положительных и двух отрицательных одинаковых по модулю точечных зарядов q , расположенных в вершинах квадрата со стороной a , как указано на рис. 3.1. Найти напряженность электрического поля E такого квадруполя в точке A , находящейся на расстоянии $l \gg a$ от его центра O , если линия OA параллельна одной из сторон квадрата.

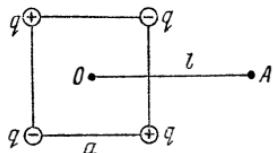


Рис 3.1

3.2. В модели атома Томсона предполагалось, что положительный заряд q распределен внутри шара радиусом $r = 10^{-8}$ см. Как должна зависеть объемная плотность ρ положительного заряда от расстояния до центра шара, чтобы электрон, помещенный внутри шара, мог совершать гармонические колебания? Найти частоту v колебаний электрона.

3.3. Точечные заряды q_1 и q_2 находятся на расстоянии l друг от друга. Определить силы F_1 и F_2 , которые будут действовать на эти заряды после того, как посередине между ними будет расположена бесконечная металлическая пластина толщиной $l/2$.

3.4. Две взаимно перпендикулярные проводящие плоскости образуют двугранный угол. На биссектрисе этого угла на расстоянии a от вершины помещен электрический диполь с моментом p_3 . Ось диполя направлена к вершине угла. Найти силу F , действующую на диполь.

3.5. Над листом металла перпендикулярно к нему расположен равномерно заряженный тонкий стержень длиной $l = 1$ см с зарядом $q = 10^{-8}$ Кл. Нижняя точка стержня удалена от листа на $h = 1$ см. Найти поверхностную плотность σ индуцированного заряда в точке, расположенной на листе непосредственно под стержнем.

3.6. На высоте $h = 1$ см над плоскостью горизонтально лежащего металлического листа расположен равномерно заряженный диск радиусом $r = 1$ см с зарядом $q = 10^{-9}$ Кл. Плоскость диска параллельна плоскости листа. Найти поверхностную плотность σ индуцированного заряда в точке, расположенной на листе непосредственно под центром диска.

3.7. В плоском конденсаторе с напряженностью поля $E = 10^3$ В/м из отрицательно заряженной пластины в результате термоэмиссии вылетают электроны. Учитывая действие поля электрического изображения, оценить, на каком расстоянии l от этой пластины скорость электронов будет минимальной.

3.8. Точечный заряд q помещен на расстоянии $r/2$ от центра полой тонкостенной металлической изолированной сферы радиусом r , на которой расположен заряд $-2q$. Определить поверхностную плотность заряда на внутренней и внешней поверхностях сферы в точках, наиболее удаленных от этого заряда. Как изменится результат, если сферу заземлить?

3.9. Точечный заряд q помещен на расстоянии $r/2$ от центра полой тонкостенной металлической изолированной сферы радиусом r , на которой расположен заряд Q . Определить силу, действующую на заряд q , а также поверхностную плотность заряда на внутренней и внешней поверхностях сферы в точках, ближайших к этому заряду.

3.10. В поле точечного заряда q внесли проводящую сферу радиусом r . Во сколько раз изменилась при этом напряженность поля в точках A и B (рис. 3.2), если расстояние между центром сферы и зарядом $l = 10r$?

3.11. В однородное электрическое поле напряженностью E_0 вносится незаряженный проводящий шар. Указать на его поверхности точки, в которых поле по модулю: 1) остается прежним, 2) удваивается.

3.12. Металлическая незаряженная сфера радиусом r вносится в однородное электрическое поле напряженностью E_0 . Найти точки пространства, в которых поле стало равно: 1) $2E_0$, 2) $E_0/3$.

3.13. Небольшой незаряженный металлический шарик может свободно перемещаться вдоль оси тонкого однородно заряженного кольца радиусом r . Найти равновесные положения шарика и рассмотреть их устойчивость по отношению к осевым смещениям.

3.14. На внутренней поверхности одной из пластин плоского заряженного конденсатора имеется полусферический бугорок. Вдали от бугорка напряженность электрического поля в конденсаторе равна E_0 . Используя принцип суперпозиции полей, найти поле у вершины и у основания бугорка. Будет ли происходить разряд с бугорка радиусом 1 мкм, если $E_0 = 1$ кВ/см, а напряженность, при которой наступает пробой воздуха, равна 30 кВ/см?

3.15. Параллельно оси длинного металлического цилиндра радиусом r на расстоянии $l > r$ от его оси расположена длинная тонкая проволочка. Вдали от краев линейный заряд проволочки равен τ , цилиндра $-\tau$. Найти силу взаимодействия F между проволочкой и цилиндром, приходящуюся на единицу длины.

3.16. Длинная медная проволока помещена в однородное электрическое поле напряженностью E_0 , перпендикулярное оси проволоки. Найти распределение поверхностного заряда $\sigma(\theta)$ на проволоке.

3.17. Найти модуль и направление силы взаимодействия F между двумя незаряженными проводящими сферами радиусом r каждая, помещенными в однородное электрическое поле напряженностью E_0 ,

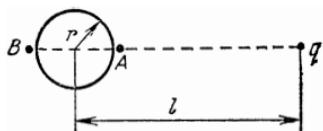


Рис. 3.2

направленное параллельно линии, соединяющей центры сфер. Расстояние между центрами сфер $l \gg r$.

3.18. Найти модуль и направление силы взаимодействия F между двумя незаряженными проводящими сферами радиусом r каждая, находящимися в однородном электрическом поле напряженностью E_0 , направленном перпендикулярно линии, соединяющей центры сфер. Расстояние между центрами сфер $l \gg r$.

3.19. На расстоянии $2r$ от центра заземленной металлической сферы радиусом r расположен электрический диполь с моментом \mathbf{p}_0 , причем ось диполя лежит на прямой, проходящей через центр сферы. Считая диполь точечным, определить, какой системе зарядов-изображений эквивалентна сфера. Найти силу взаимодействия F между диполем и сферой.

3.20. Два одинаковых по модулю точечных заряда q и $-q$ расположены на расстоянии $2l$ друг от друга. Посредине между ними расположена незаряженная проводящая сфера радиусом r . Считая $l \gg r$, определить, какой системе зарядов-изображений эквивалентна сфера. Найти относительное изменение силы $\Delta F/F$, действующей на каждый заряд, обусловленное взаимодействием со сферой.

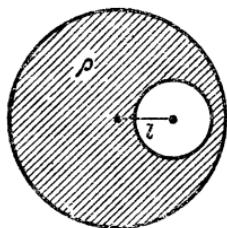


Рис. 3.3

3.21. Найти напряженность электрического поля \mathbf{E} в шаровой полости однородно заряженного шара (рис. 3.3). Объемная плотность заряда равна ρ . Расстояние между центром полости и центром шара равно l .

3.22. Найти распределение заряда $\sigma(\theta)$ по поверхности сферы радиусом r , при котором поле внутри нее однородно и его напряженность равна E . Каково при этом поле вне сферы?

3.23. Три электрона в состоянии покоя помещены в вершинах правильного треугольника со стороной $a = 1$ см. Они начинают двигаться под действием взаимного отталкивания. Определить их предельную скорость v .

3.24. Решить задачу 3.23 для релятивистских скоростей. При каких расстояниях a можно пользоваться нерелятивистским приближением?

3.25. В результате импульсного разряда конденсатора через разреженный газ — водород происходит на-

гревание газа до температуры T . Оценить величину T , считая, что вся энергия разряда пошла на нагревание газа. Указать возможные причины понижения температуры. Провести численные оценки для $U = 3 \cdot 10^4$ В, $C = 1,8 \cdot 10^{-5}$ Ф, полагая, что до разряда водород находился при комнатной температуре $T_0 = 293$ К и занимал объем $V = 10^{-2}$ м³ при давлении $p = 1,29$ Па. Оценить, на сколько нагрелись бы обкладки конденсатора, если бы вся энергия разряда пошла на их нагревание. Удельная теплоемкость меди равна $c = 4,2 \cdot 10^2$ Дж/(К·кг), масса обкладок $m = 0,1$ кг.

3.26. Считая, что масса электрона определяется из соотношения $W = m_e c^2$, где W — электростатическая энергия электрона, найти радиус r электрона, приняв, что заряд электрона распределен по всему его объему с постоянной плотностью.

3.27. Вывести выражение для энергии малого диполя во внешнем электрическом поле напряженностью E . Рассмотреть случаи жесткого диполя с электрическим моментом p_e и упругого диполя с поляризостью α ($p_e = \alpha \epsilon_0 E$).

3.28. Для инжекции в термоядерную установку используется цилиндрический пучок дейtronов с энергией $W = 500$ кэВ, имеющий диаметр $D = 1$ см. Ток в пучке составляет $I = 1$ А и равномерно распределен по его сечению. Найти напряженность E электрического поля на поверхности пучка и разность потенциалов U между поверхностью пучка и его центром.

3.29. Металлический шар радиусом $r_1 = 100$ см несет заряд $q = 10^{-6}$ Кл. На расстоянии $l = 100$ см от его поверхности расположен незаряженный металлический шарик массой $m = 10^{-3}$ г и радиусом $r_2 = 1$ см, которому сообщают некоторую начальную скорость в направлении от центра шара. Найти минимальную скорость v_{\min} , при которой шарик может удалиться на бесконечность.

3.30. Керн длиной $l = 25$ см потерял скорость, пробив броню толщиной $d = 5$ см. Скорость снаряда в момент соприкосновения с броней равна $v_0 = 1000$ м/с. Найти разность потенциалов U между головной и хвостовой частями стального керна бронебойного снаряда, возникающую вследствие его торможения в преграде.

3.31. Для измерения напряженности электрического поля у поверхности Земли используют две

параллельные проводящие пластины, расположенные горизонтально с небольшим зазором между ними (рис. 3.4). Верхняя плата заземлена и вращается с частотой $n = 1200$ об/мин вокруг вертикальной оси,

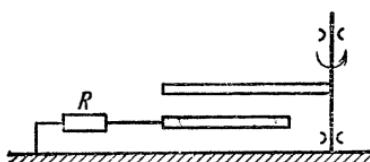


Рис. 3.4

проходящей через край пластины, периодически закрывая нижнюю пластину. При этом перезарядка нижней пластины вызывает падение напряжения на сопротивлении $R = 10^7$ Ом, соединяющем нижнюю пластину с Землей. Найти среднее значение падения напряжения \bar{U} , если напряженность электрического поля у поверхности Земли $E = 1,5$ В/см. Считать, что нижняя пластина успевает полностью перезарядиться за один цикл вращения. Площадь пластины $S = 600$ см².

3.32. В центре диэлектрического шара радиусом r с проницаемостью ϵ_1 помещен точечный заряд q . Шар окружен безграничным диэлектриком с проницаемостью ϵ_2 . Определить поверхностную плотность σ поляризационных зарядов на границе раздела диэлектриков.

3.33. Проводящий шар помещен в однородную изотропную диэлектрическую среду с проницаемостью ϵ . Вне шара на расстоянии l от его центра находится точечный заряд q . Определить потенциал φ шара относительно бесконечности.

3.34. Диэлектрик с проницаемостью ϵ заполняет полупространство. На расстоянии l от плоской границы диэлектрика в вакууме находится точечный заряд q . Найти распределение зарядов $\sigma(r)$ по поверхности диэлектрика, полный заряд $q_{\text{полн}}$ и силу F , действующую на точечный заряд.

3.35. Конденсатор состоит из двух тонкостенных коаксиальных металлических цилиндров, пространство между которыми заполнено жидким диэлектриком с проницаемостью $\epsilon = 2$. На конденсатор подано напряжение, которое медленно увеличивается. Определить, что наступит раньше: механическое разрушение внутренней обкладки или пробой диэлектрика. Считать, что пробой диэлектрика наступает при напряженности поля $E_{\text{пр}} = 30$ кВ/мм, предельное (разрывное) механическое напряжение стенок цилиндров

$\sigma_p = 500$ Па. Радиус внутренней обкладки конденсатора $r = 3$ см.

3.36. Пустотелый металлический шар, заряд которого q , а радиус r , плавает в жидкости с диэлектрической проницаемостью ϵ так, что его центр находится на уровне поверхности жидкости. Найти плотность свободных зарядов на поверхности шара.

3.37. В плоский конденсатор, на пластинах которого распределен заряд с поверхностной плотностью σ , вставляется диэлектрик, заряженный положительным пространственным зарядом так, что объемная плотность заряда изменяется от нуля у одной пластины (положительной) до ρ_0 у другой по закону $\rho = (\sigma/d^2)x$, где d — расстояние между пластинами. Найти распределение напряженности $E(x)$ в конденсаторе, если проницаемость диэлектрика ϵ .

3.38. Внутри плоского конденсатора, обкладки которого соединены между собой, помещена диэлектрическая пластина толщиной h с «замороженной» поляризованностью P , направление которой перпендикулярно боковым граням пластины и обкладкам конденсатора. Определить напряженность электрического поля и электрическое смещение внутри и вне пластины. Расстояние между обкладками конденсатора равно d .

3.39. Имеется тонкий длинный диэлектрический цилиндр длиной $2l$ и радиусом r с «замороженной» поляризованностью P (рис. 3.5).

Найти напряженность поля E_A в точке A . Во сколько раз это поле сильнее поля в точке B ?

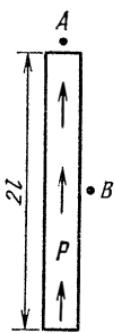


Рис. 3.5

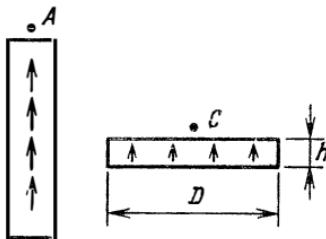


Рис. 3.6

3.40. Длинный цилиндр изготовлен из диэлектрика с «замороженной» поляризованностью, направленной вдоль его оси (рис. 3.6). Напряженность поля в точке A оказалась равной $E_A = 300$ В/см. Найти

напряженность поля E_C вблизи торца короткого цилиндра, сделанного из того же материала, если $h = 2 \cdot 10^{-2} D$.

3.41. В тонком круглом диске радиусом r_1 из диэлектрика создана однородная «замороженная» поляризованность P , так что ее направление параллельно поверхности диска (рис. 3.7). Определить напряженность E электрического поля в центре круглого отверстия радиусом r_2 , вырезанного в таком диске. Толщина диска $h \ll r_2$.

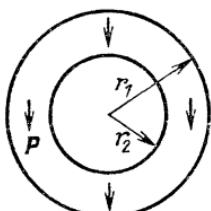


Рис. 3.7

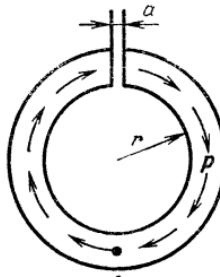


Рис. 3.8

3.42. Диэлектрический образец с «замороженной» поляризованностью P имеет форму полого цилиндра с разрезом. На рис. 3.8 показано сечение этого цилиндра и направление поляризованности. Толщина стенки цилиндра $h \ll r$ (r — радиус цилиндра), ширина разреза $a \ll r$. Найти напряженность электрического поля E_A и электрическое смещение D_A в точке A .

3.43. В тонкой длинной рейке из диэлектрика шириной $2a$ создана однородная «замороженная» поляризованность P , так что ее направление параллельно поверхности рейки (рис. 3.9). Найти напряженность E электрического поля в центре круглого отверстия радиусом r , вырезанного в такой рейке. Считать толщину рейки $h \ll r$.

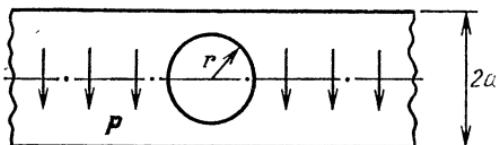


Рис. 3.9

ризованность P , так что ее направление параллельно поверхности рейки (рис. 3.9). Найти напряженность E электрического поля в центре круглого отверстия радиусом r , вырезанного в такой рейке. Считать толщину рейки $h \ll r$.

3.44. Пластина пьезодиэлектрика толщиной $2d$ вследствие неоднородной деформации поляризована так, что поляризованность в ее середине равна P_0 , направлена вдоль оси x и изменяется по закону $P = P_0(1 - x^2/d^2)$, где x отсчитывается от средней плоскости пластины. Определить напряженность электрического поля внутри и вне пластины, а также разность потенциалов U между ее боковыми поверхностями. Краевыми эффектами пренебречь.

3.45. На сколько отличается от единицы диэлектрическая проницаемость ϵ «идеального газа», состоящего из большого числа проводящих шариков радиусом r ? Концентрация n шариков мала, так что $nr^3 \ll 1$.

3.46. Для газообразного аргона при нормальных условиях $\epsilon - 1 \approx 6 \cdot 10^{-4}$. Пользуясь этим, вычислить смещение «центра масс» электронной оболочки атома аргона относительно ядра в статическом электрическом поле напряженностью $E = 300$ В/см. Атомный номер аргона $Z = 18$. Считать, что в отсутствие внешнего поля электроны распределены вокруг ядра сферически симметрично.

3.47. Идеальный газ, поляризуемость молекул которого $\alpha = 4 \cdot 10^{-3}$ м³, находится в большом сосуде при температуре $T = 300$ К. В сосуде находится плоский заряженный конденсатор с напряженностью поля $E = 3 \cdot 10^6$ В/м. Найти относительную разность концентраций молекул в конденсаторе и вне его.

3.48. В плоский конденсатор введена пластина из оптического стекла ($\epsilon = 9$) так, что остался воздушный зазор $a = 1$ мм. Расстояние между обкладками конденсатора равно $d = 1$ см. К конденсатору приложена разность потенциалов $U_1 = 100$ В. Найти разность потенциалов, если после отключения конденсатора от источника тока стеклянная пластинка будет убрана.

3.49. Пластина из сегнетоэлектрика ($\epsilon = 200$) имеет толщину, равную зазору между обкладками плоского конденсатора. Площадь обкладок конденсатора $S_1 = 1$ м². Какова должна быть площадь S_2 основания пластины для того, чтобы смещение сделалось в $n = 40$ раз больше, чем до введения пластины? Конденсатор изолирован.

3.50. В подключенный к батарее плоский конденсатор вставляются две пластины из сегнетоэлектрика ($\epsilon = 100$) таким образом, что между ними остается

небольшой зазор a (рис. 3.10). Найти зазор, при котором поле в нем будет в $n = 50$ раз больше, чем в отсутствие сегнетоэлектрика. Расстояние между обкладками конденсатора равно $d = 2$ см.

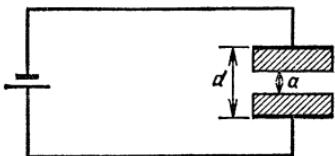


Рис. 3.10

объемную плотность заряда ρ внутри диска, возникающую из-за вращения, а также заряд q на его поверхности.

3.52. Конденсатор, заполненный жидким диэлектриком с проницаемостью ϵ , зарядили, затратив на это энергию W_1 . Затем конденсатор отсоединили от источника, слили из него диэлектрик и разрядили. Определить энергию W_2 , которая выделилась при разрядке.

3.53. К батарее с э. д. с. \mathcal{E} подключен последовательно с некоторым сопротивлением плоский конденсатор емкостью C . Пластины конденсатора быстро сближают, так что расстояние между ними уменьшается в два раза. Предполагая, что за время перемещения пластин заряд конденсатора практически не изменился, найти количество теплоты Q , выделяющееся на сопротивлении к моменту окончания перезарядки. Оценить порядок сопротивления R , при котором условия задачи могут быть практически выполнены. Считать время сближения $\Delta t \approx 10^{-2}$ с, $C = 10^{-10}$ Ф.

3.54. Плоский конденсатор с квадратными пластинами (расстояние между пластинами d , площадь пластин S) заржен до разности потенциалов U и отсоединен от источника тока. После этого в конденсатор вдвинута до половины широкая пластина из диэлектрика с проницаемостью ϵ . Толщина пластины равна d . Найти силу F , с которой пластина втягивается в конденсатор.

3.55. Оценить силу F , действующую на атом, находящийся на расстоянии $l = 20$ нм от поверхности острия металлической иглы с радиусом закругления $r = 10$ нм. Считать потенциал на игле $\varphi = 10$ кВ, поляризуемость α атома порядка его объема.

3.56. Электрический заряд q равномерно распределен по тонкому кольцу радиусом r . Точечный диполь массой m с дипольным моментом p_d может перемещаться вдоль оси кольца, перпендикулярной его плоскости, причем направление дипольного момента параллельно оси кольца (рис. 3.11). В начальный момент времени диполь находился в центре кольца и имел нулевую скорость. Определить: 1) максимальную скорость v_{\max} диполя при его движении вдоль оси кольца, 2) положение равновесия x_0 диполя и период T его малых колебаний около этого положения.

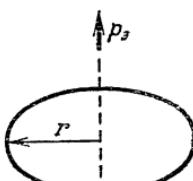


Рис. 3.11

3.57. Одна из пластин конденсатора жестко закреплена, а вторая, имеющая массу m , связана с пружиной жесткостью κ (рис. 3.12). Расстояние между пластинами при ненапряженной пружине равно d_0 . К конденсатору подключили батарею. В новом положении равновесия расстояние между пластинами равно $d = (4/5)d_0$. Найти период T малых колебаний пластины.

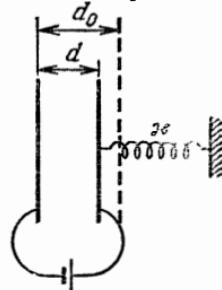


Рис. 3.12

§ 3.2. Постоянный электрический ток

3.58. Найти ток, проходящий через резистор сопротивлением R_0 в схеме, изображенной на рис 3.13, считая все параметры заданными.

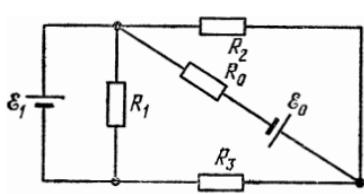


Рис. 3.13

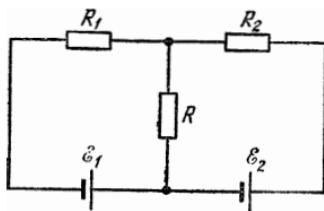


Рис. 3.14

3.59. В схеме, изображенной на рис. 3.14, заданы сопротивления R_1 и R_2 . Определить сопротивление R , при котором рассеиваемая на нем мощность будет

максимальной. Каково условие того, что ток, проходящий через сопротивление R , будет равен нулю?

3.60. Электрическая цепь составлена из двух батарей с э. д. с. \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 и четырех одинаковых резисторов сопротивлением R каждый (рис. 3.15). Какая мощность рассеивается на этих резисторах?

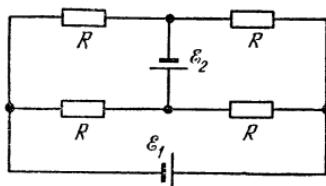


Рис. 3.15

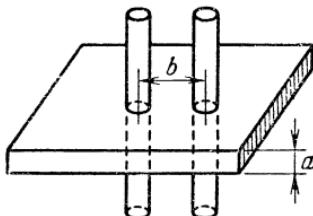


Рис. 3.16

3.61. К большому металлическому листу толщиной a приварены на расстоянии b друг от друга два цилиндрических проводника радиусом r_0 (рис. 3.16). Найти сопротивление R между проводниками, если $a \ll r_0 \ll b$. Считать, что удельная проводимость λ_1 проводников значительно больше удельной проводимости λ материала листа.

3.62. На поверхности двух одинаковых диэлектрических конусов, соприкасающихся основаниями, нанесен тонкий проводящий слой толщиной δ с удельной проводимостью λ . К вершинам конусов припаяны цилиндрические электроды диаметром d . Определить сопротивление R между вершинами, если $\delta \ll d$. Размеры конусов указаны на рис. 3.17.

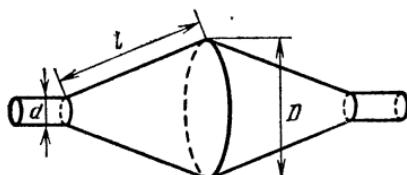


Рис. 3.17

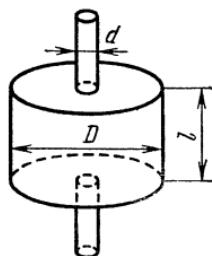


Рис. 3.18

3.63. К центрам противоположных торцов тонкостенной цилиндрической банки диаметром D и высотой l припаяны провода диаметром d (рис. 3.18). Определить сопротивление R банки, если она сделана

из фольги толщиной $\delta \ll d$ с удельной проводимостью λ .

3.64. Определить проводимость Λ изоляции в сферическом конденсаторе емкостью C с утечкой, заполненном диэлектриком. Удельная проводимость диэлектрика равна λ , диэлектрическая проницаемость ϵ .

3.65. Пространство между двумя концентрическими сферами заполнено диэлектриком, проводимость которого зависит только от расстояния до сфер. Найти закон изменения удельной проводимости $\lambda(r)$, если объемная плотность джоулевых потерь при прохождении тока была одинакова во всех точках.

3.66. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами заполнено диэлектриком, обладающим некоторой проводимостью. Найти закон изменения удельной проводимости $\lambda(r)$, если при наличии некоторой разности потенциалов поле между цилиндрами было везде одинаково.

3.67. Заземление концов телеграфной линии осуществлено посредством металлических шаров радиусами r_1 и r_2 , очень глубоко зарытых в землю. Удельная проводимость почвы вблизи них равна λ_1 и λ_2 . Найти сопротивление R земли между шарами. Считать почву в окрестности каждого шара однородной на расстояниях, больших по сравнению с радиусами шаров.

3.68. Постоянная времени разряда плоского масляного конденсатора через некоторое сопротивление равна τ_1 . После того как масло конденсатора отсырело, постоянная времени разряда через то же сопротивление оказалась равной τ_2 . Определить удельное сопротивление ρ отсыревшего масла, если его диэлектрическая проницаемость ϵ не изменилась.

3.69. Сферический конденсатор с радиусами сфер r_1 и r_2 заполнен слабо проводящей средой. Емкость конденсатора оказалась равной C , а разность потенциалов на конденсаторе после отключения его от батареи уменьшилась в два раза за время t . Определить диэлектрическую проницаемость ϵ среды и ее удельное сопротивление ρ .

3.70. В генераторе Ван-де-Граафа, схематически изображенном на рис. 3.19, заряды переносятся диэлектрической лентой и заряжают высоковольтный сферический электрод. Поверхностные заряды передаются ленте от источника вблизи нижнего шкива.

Найти максимальный потенциал и максимальный ток, которые можно получить от такого генератора, если радиус высоковольтного электрода $r = 1,5$ м, скорость движения ленты $v = 20$ м/с, а ширина ленты $l =$

$= 100$ см. Лента и высоковольтный электрод находятся в атмосфере газа, в котором пробой возникает при напряженности электрического поля $E_{\text{пр}} = 30$ кВ/см.

3.71. Когда напряжение на катодроне равно 500 В, температура анода достигает 800°C . Определить температуру анода при повышении анодного напряжения до 1000 В в случаях, если: 1) при 500 В анодный ток уже достигает насыщения, 2) при 1000 В еще не наступает насыщение.

Указание. Принять во внимание, что в отсутствие насыщения анодный ток $I \sim U^{3/2}$.

3.72. Атомный электрический элемент представляет собой две концентрические проводящие сферы. Внутренняя сфера сделана из радиоактивного материала, испускающего быстрые электроны. В пространстве между сферами скорость электронов и, следовательно, их ионизирующее действие можно считать постоянными. Пролетев воздушный зазор, электроны поглощаются на внешней сфере. В отключенной батарее устанавливается равновесие между потоком заряда, переносимым быстрыми электронами, и током проводимости в ионизованном воздухе. Найти напряженность электрического поля E в пространстве между сферами, если э. д. с. элемента равно \mathcal{E} , радиусы сфер равны r_1 и r_2 .

§ 3.3. Магнитное поле

3.73. По проводнику, имеющему форму эллипса, течет постоянный ток $I = 10$ А. Большая и малая полуоси эллипса равны $a = 50$ см, $b = 30$ см. Определить индукцию B магнитного поля в вакууме в фокусе проводника.

Указание. Уравнение эллипса в полярной системе координат: $r = p/(1 + e \cos \varphi)$, где $p = b^2/a$ — параметр, а $e < 1$ — эксцентриситет.

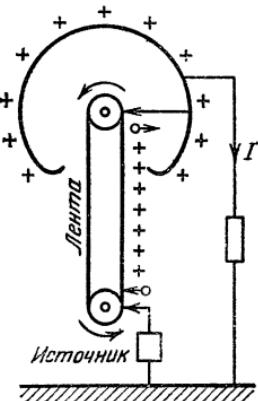


Рис. 3.19

3.74. По проводнику, имеющему форму гофрированной окружности, течет постоянный ток $I = 10$ А (рис. 3.20). Определить индукцию B магнитного поля в вакууме в центре O проводника.

Указание. Уравнение этой фигуры в полярной системе координат: $1/r = 1/a + b \cos m\varphi$, где $a = 50$ см, m — целое число, b — постоянная.

3.75. Вдоль плазменного цилиндра радиусом a с параболическим распределением удельной проводимости $\lambda = \lambda_0(1 - r^2/a^2)$ течет постоянный ток I . Найти распределение индукции магнитного поля $B(r)$ внутри и вне цилиндра в зависимости от расстояния r от оси цилиндра.

3.76. На тонкий латунный прут, свернутый в кольцо, намотано равномерно $N = 10^4$ витков провода. Во сколько раз индукция B_1 на оси прута больше, чем B_2 в центре кольца?

3.77. Над большим горизонтальным латунным листом помещена магнитная стрелка с магнитным моментом p_m . Стрелка укреплена на вертикальной оси и связана со спиральной пружиной, модуль кручения которой равен f . Как изменится положение равновесия стрелки, если по листу потечет ток с поверхностной плотностью j ? Направление тока совпадает с начальным равновесным положением стрелки. Рассмотреть случай малых углов закручивания.

3.78. На расстоянии $L = 10$ см от прямого провода, по которому течет ток $I_1 = 10$ А, расположена квадратная рамка со стороной $l = 1$ см таким образом, что две ее стороны параллельны проводу и вся система лежит в одной плоскости (рис. 3.21). По рамке течет ток $I_2 = 1$ А. Найти силу взаимодействия F между проводом и рамкой.

3.79. При производстве полиэтиленовой пленки широкая полоса протягивается до роликам со скоростью $v = 15$ м/с (рис. 3.22). В процессе обработки (главным образом из-за трения) поверхность пленки приобретает равномерно распределенный заряд. Найти

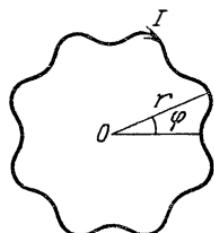


Рис. 3.20

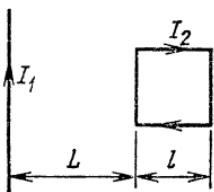


Рис. 3.21

максимальные значения поверхности плотности заряда σ_{\max} и индукции магнитного поля B_{\max} вблизи поверхности пленки, принимая во внимание, что при напряженности электрического поля $E_{\text{пр}} = 20 \text{ кВ/см}$

в воздухе возникает электрический разряд.

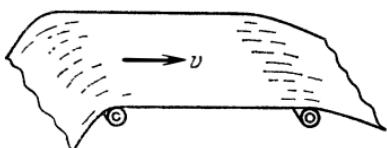


Рис. 3.22

$v = 1 \text{ м/с}$ (см. рис. 3.22). В процессе обработки поверхность пленки приобретает равномерно распределенный заряд $\sigma = 10^{-7} \text{ Кл/м}^2$. Над пленкой на расстоянии, малом по сравнению с шириной пленки, расположен прямой провод, по которому протекает ток $I = 10 \text{ А}$. Направление тока совпадает с направлением движения пленки. Найти силу F , действующую на единицу длины пленки.

3.81. Вдоль эвакуированной длинной цилиндрической трубы радиусом R создан стационарный аксиально симметричный поток электронов, ускоренных при прохождении разности потенциалов U . Найти распределение концентрации электронов $n(r)$, где r — рас-

стояние до оси пучка, если результаты измерения индукции магнитного поля $B(r)$ оказалось возможным описать выражением $B = B_0(r/R)^q$ при $r < R$ (B_0 и $q > 0$ — постоянные). Найти распределение напряженности электрического поля $E(r)$, предполагая, что параметры пучка не изменяются вдоль его оси.

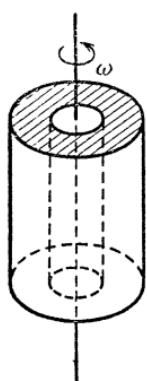


Рис. 3.23

3.82. По оси полого цилиндра натянута нить, на единицу длины которой приходится заряд $\tau = 1 \text{ ед. СГС}$. Цилиндр вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 1000 \text{ рад/с}$ (рис. 3.23).

Определить индукцию магнитного поля в материале цилиндра вдали от его торцов, пренебрегая пьезоэффеектом и всеми эффектами, вызываемыми центробежной силой, а также магнитное поле в полости цилиндра и во внешнем пространстве, если цилиндр: 1) металлический немагнитный, 2) диэлектрический ($\epsilon = 3$).

3.83. Тонкостенная длинная дюралевая трубка за-

ряжается электрически и приводится в быстрое вращение вокруг продольной оси. Предел скорости вращения трубы ограничивает механическая прочность дюрали ($f_{\max} = 5,9 \cdot 10^8$ Па). Какова будет конфигурация создавшегося магнитного поля? Найти наибольшее отношение объемных плотностей энергий магнитного поля (ω_m) внутри трубы и электрического поля (ω_e) на внешней поверхности трубы. Плотность дюраля $\rho = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³.

3.84. Однородно заряженное непроводящее тонкое кольцо массой m и с зарядом q быстро вращается с угловой скоростью ω вокруг своей оси во внешнем однородном магнитном поле с индукцией B (рис. 3.24). Найти угловую скорость прецессии Ω .

3.85. Искусственный спутник Земли массой $m = 10^3$ кг выполнен в виде тонкостенного шара. Для сообщения ему угловой скорости можно использовать магнитное поле Земли, индукция которого равна $B = 0,5$ Гс. Найти угловую скорость ω , которую приобретает спутник при быстрой разрядке аккумуляторов, имеющих заряд $q = 5$ А·ч, через обмотку $N = 20$ витков,ложенную на поверхности спутника вдоль окружности большого круга. Считать магнитное поле Земли параллельным плоскости обмотки.

3.86. Согласно современным данным, допустимое из опытов различие зарядов электрона q_e и протона q_p таково, что $(q_p - q_e)/q_p < 10^{-21}$. Не может ли это различие объяснить существование наблюдаемого магнитного поля Земли? Магнитное поле Земли равно $B \approx 3 \cdot 10^{-5}$ Тл. Считать, что для атомов, составляющих Землю, отношение атомной массы к атомному номеру $A/Z = 2$.

3.87. Для исключения потерь энергии на джоулево тепло в линиях передачи постоянного тока предложено использовать коаксиальный кабель, внутренняя жила и наружная оболочка которого выполнены из сверхпроводника. Максимально допустимая индукция магнитного поля на поверхности сверхпроводника $B_{\max} = 500$ Гс, максимально допустимая напряженность электрического поля в изолирующей прослойке кабеля $E_{\max} = 30$ кВ/см. При каком соотношении диаметров d/D жилы и оболочки можно передать

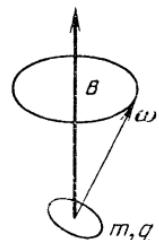


Рис. 3.24

максимальную мощность P_{\max} ? Найти мощность P_{\max} , приняв диаметр наружной оболочки $D = 20$ см.

3.88. Тороидальный сердечник составлен из двух половинок, сделанных из различных ферромагнитных материалов с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 (рис. 3.25). Общая длина сердечников, включая два зазора размером l каждый, равна L . По обмотке сердечника, имеющей N витков, течет ток I . Определить индукцию B магнитного поля в зазоре.

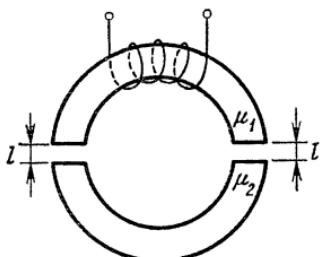


Рис. 3.25

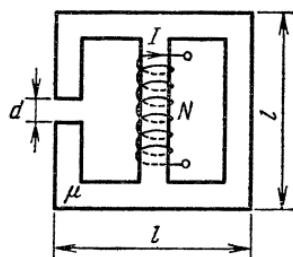


Рис. 3.26

3.89. По обмотке электромагнита, имеющего N витков, протекает ток I . Определить индукцию B магнитного поля в зазоре, если все участки сердечника имеют одинаковые сечения, а магнитная проницаемость материала равна μ . Геометрические размеры электромагнита указаны на рис. 3.26.

3.90. Требуется построить электромагнит, который создает в зазоре магнитное поле с индукцией $B = 10^4$ Гс. Длина железного сердечника $l = 140$ см, ширина воздушного зазора $d = 1$ см, диаметр сердечника $D = 6$ см. Какое наименьшее число витков N должна иметь обмотка, если используется медный провод площадью сечения $S = 1 \text{ mm}^2$, по которому можно пропустить ток, не превышающий $I = 3 \text{ A}$? Определить напряжение U , которое нужно подавать на обмотку для получения максимального поля. Магнитная проницаемость железа $\mu = 10^3$, удельное сопротивление меди $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

3.91. Некоторый ферромагнитный материал имеет остаточную намагниченность $J_r = 500 \text{ Э}$, а коэрцитивную силу $H_c = 500 \text{ Э}$, причем кривая размагничивания $J(H)$ представляет собой четверть окружности (рис. 3.27). Из этого материала изготовлен постоян-

ный магнит, представляющий собой тор квадратного сечения с поперечным зазором. Внутренний радиус тора $r_1 = 1,5$ см, внешний — $r_2 = 2,5$ см, ширина зазора $l = 5$ мм. Определить индукцию B магнитного поля в зазоре. Рассеянием магнитного поля пренебречь.

3.92. Стальной шарик намагничивается до насыщения во внешнем поле, после чего поле выключается. Найти остаточную намагниченность шарика J_r , если B и H связаны уравнением $B = B_0(1 + H/H_c)$ и для данного сорта стали $H_c = 4 \cdot 10^3$ А/м, $B_0 = 1$ Тл. Коэффициент размагничивания сферы $\beta = 1/3$.

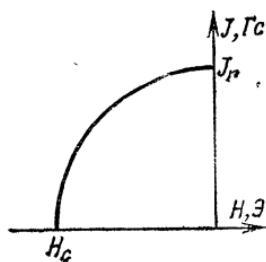


Рис. 3.27

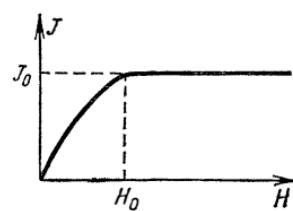


Рис. 3.28

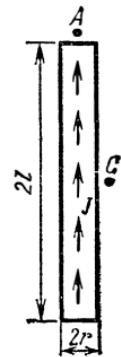


Рис. 3.29

3.93. На рис. 3.28 изображена зависимость намагниченности J от напряженности поля H для некоторого магнитного материала. Из этого материала изготовлены сердечник тонкой тороидальной катушки, имеющей N витков. Длина катушки (периметр) равна L . В сердечнике имеется узкий поперечный воздушный зазор, равный l . Определить, при каком значении тока I_0 в катушке наступит насыщение сердечника. Как будет изменяться магнитная индукция B в зазоре сердечника при $I > I_0$? Величины J_0 и H_0 считать заданными.

3.94. Какой ток I нужно пустить по длинному и тонкому однослойному соленоиду с плотностью обмотки n витков на единицу длины, чтобы индукция всюду была равна индукции постоянного магнита тех же размеров? Намагниченность J однородна и направлена по оси.

3.95. Имеется тонкий длинный постоянный магнит длиной $2l$ и радиусом r , намагниченность которого J однородна и направлена по оси (рис. 3.29). Найти

магнитную индукцию B_A в точке A . Во сколько раз она больше индукции B_C в точке C ?

3.96. Длинный цилиндр изготовлен из материала с «замороженной» однородной намагниченностью, направленной по его оси. Индукция в точке A оказалась равной $B_A = 10^3$ Гс (рис. 3.30). Найти индукцию B_C вблизи торца короткого цилиндра, изготовленного из того же материала, если $h = 5 \cdot 10^{-2} D$.

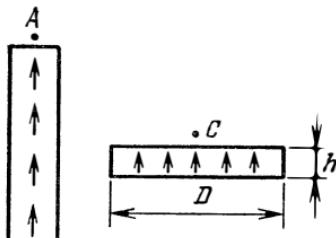


Рис. 3.30

3.97. Бесконечная плоская пластина изготовлена

из однородно намагниченного ферромагнетика, причем направление намагниченности J перпендикулярно плоскости пластины. Найти поля B и H внутри и вне пластины.

3.98. Бесконечная плоская пластина изготовлена из однородно намагниченного ферромагнетика, причем направление намагниченности J параллельно плоскости пластины. Найти поля B и H внутри и вне пластины.

3.99. Стержень из магнитного материала ($\mu \gg 1$), имеющий форму цилиндра радиусом r , помещен во внешнее однородное магнитное поле B_0 , направленное вдоль его оси (рис. 3.31). В бесконечно длинном ци-

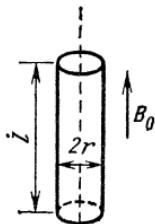


Рис. 3.31

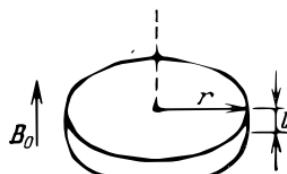


Рис. 3.32

линdre индукция B , как известно, была бы равна μB_0 . Оценить, при какой минимальной длине l_{\min} индукция в центре цилиндра отличается от этого значения не более чем на 1 %.

3.100. Круглый диск радиусом r из магнитного материала ($\mu \gg 1$) помещен во внешнее однородное магнитное поле B_0 , направленное вдоль его оси (рис. 3.32). В бесконечно тонком диске индукция, как

известно, была бы равна B_0 . Оценить, при какой максимальной толщине l_{\max} индукция в центре диска отличается от этого значения не более чем на 1 %.

3.101. Компас располагают над проводом, по которому течет постоянный ток, на расстоянии $l = 0,1$ м от оси провода. Найти ток I , при котором стрелка поднимается над своим шпеньком. Остаточная индукция стали стрелки равна индукции насыщения $B_r = 2$ Тл. Плотность стали $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³.

3.102. Магнитный бруск сечением $S = 1$ см² и длиной $l = 10$ см подносят к компасу на расстояние $L = 1$ м. С какой стороны надо подносить магнит и как его ориентировать, чтобы отклонение компаса Φ_{\max} было максимальным? Найти значение Φ_{\max} , если остаточная индукция материала бруска $B_r = 10^4$ Гс, горизонтальная составляющая земного поля $B_3 = 0,2$ Гс.

3.103. Определить период малых колебаний свободно подвешенного за середину тонкого магнитного бруска длиной $l = 0,1$ м в магнитном поле Земли ($B_3 = 2 \cdot 10^{-5}$ Тл). Плотность стали $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, остаточная индукция $B_r = 1$ Тл.

3.104. По двум вертикальным рейкам, соединенным внизу резистором сопротивлением $R = 2$ Ом, а вверху — батареей с э. д. с. $\mathcal{E} = 1$ В и внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом, скользит без трения проводник, длина которого $l = 10$ см, масса $m = 10$ г (рис. 3.33). Система находится в однородном магнитном поле, индукция которого равна $B = 10^4$ Гс, перпендикулярна плоскости рисунка и направлена к читателю. Найти установившуюся скорость v проводника в поле силы тяжести, пренебрегая сопротивлением реек и проводника. При каком соотношении между параметрами задачи установившаяся скорость направлена вниз и при каком — вверх?

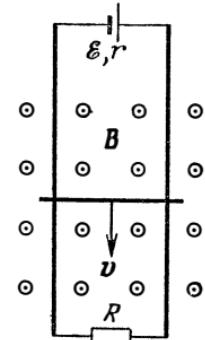


Рис. 3.33

3.105. По двум вертикальным рейкам, соединенным вверху и внизу резисторами сопротивлением $R = 0,01$ Ом, скользит без трения проводник, длина которого $l = 100$ см, масса $m = 100$ г, сопротивление $R = 0,01$ Ом (рис. 3.34). Система находится в однородном магнитном поле, индукция которого равна

$B = 1000$ Гс, перпендикулярна плоскости рисунка и направлена к читателю. Найти максимальную скорость v_{\max} проводника в поле силы тяжести, пренебрегая сопротивлением реек.

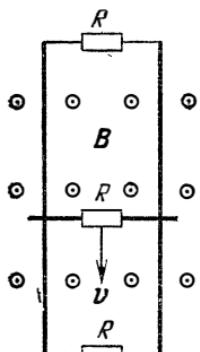


Рис. 3.34

3.106. Два диска радиусами r_1 и r_2 вращаются с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B , перпендикулярной их плоскости. Центры дисков присоединены к обкладкам конденсатора емкостью C_1 , ободы — через скользящие контакты к обкладкам конденсатора емкостью C_2 (рис. 3.35). Найти разности потенциалов U_1 и U_2 на конденсаторах.

3.107. Короткозамкнутой проволочной рамке в форме квадрата со стороной a , находящейся в магнитном поле, сообщена начальная скорость v_0 в направлении, перпендикулярном одной из сторон в плоскости рамки. Магнитная индукция B направлена перпендикулярно плоскости рамки, а ее значение линейно изменяется в направлении начальной скорости так,

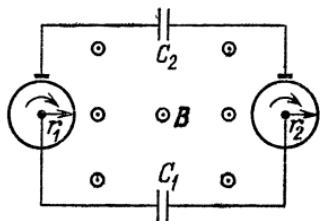


Рис. 3.35

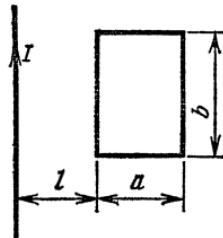


Рис. 3.36

что $dB/dx = K$. Найти скорость v рамки через время t после начала движения. Масса рамки равна m , сопротивление R . Коэффициентом самоиндукции пренебречь.

3.108. Прямоугольная рамка со сторонами a и b находится на расстоянии l от прямого провода с током I (рис. 3.36). Какой импульс p получит рамка при выключении тока, если активное сопротивление рамки равно R , а реактивным можно пренебречь?

3.109. Коаксиальный кабель состоит из внутреннего провода радиусом r_1 и внешней оболочки радиусом

сом r_2 . Найти индуктивность L кабеля на единицу длины.

3.110. Квадратная рамка со стороной a , по которой течет ток I , находится на расстоянии b от границы полуплоскости (рис. 3.37). Найти поток магнитной индукции Φ , пронизывающий эту полуплоскость.

3.111. Внутри длинной катушки-соленоида длиной l , площадью сечения S и плотностью намотки n расположена небольшая катушка с площадью витков S_1 и полным числом витков N , индуктивность которой равна L_0 . Обе катушки соединены последовательно. Как изменяется индуктивность L такой системы в зависимости от угла θ между осями катушек?

3.112. Внутри длинной катушки-соленоида индуктивностью L_0 расположен другой соленоид меньших размеров, все линейные размеры которого в β раз меньше линейных размеров большого соленоида (подобные катушки). Катушки соединены последовательно, их оси совпадают, число витков обоих соленоидов одинаково. Найти индуктивность L такой системы.

3.113. В длинном соленоиде с плотностью намотки n вдали от его концов расположена намагниченный стержень, имеющий магнитный момент p_m , ориентированный вдоль оси соленоида. Размер стержня мал по сравнению с диаметром обмотки соленоида. Найти поток магнитной индукции Φ , пронизывающий соленоид.

3.114. Две небольшие одинаковые катушки расположены так, что их оси лежат на одной прямой (рис. 3.38). Расстояние l между катушками, равное 10 см, значительно превышает их линейные размеры. Число витков каждой катушки $N = 100$, площадь

витков $S = 1 \text{ см}^2$. Найти силу взаимодействия F катушек и коэффициент их взаимной индукции M при $I = I_1 = I_2 = 0,1 \text{ A}$.

3.115. Намагниченная пуля пролетает вдоль оси тонкой (плоской) катушки, соединенной с баллистическим гальванометром через идеальный выпрямляющий элемент. Пуля намагничена вдоль своей оси, ее

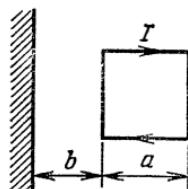


Рис. 3.37

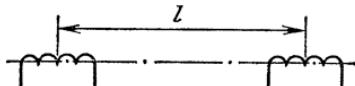


Рис. 3.38

размеры малы по сравнению с диаметром катушки D . Определить магнитный момент p_m пули, если известно, что гальванометр отклонился после пролета пули на угол ϕ . Известны баллистическая постоянная гальванометра b , число витков катушки N и сопротивление цепи R .

3.116. Прямолинейный магнит расположен на оси круглого кольца радиусом a , состоящего из N витков проволоки, концы которой соединены

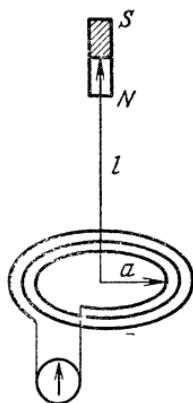


Рис. 3.39

с баллистическим гальванометром (рис. 3.39). Расстояние между центрами кольца и магнита равно l . Размеры магнита малы по сравнению с l и радиусом кольца. Его ось перпендикулярна плоскости кольца. Определить магнитный момент p_m магнита, если при его быстром удалении от кольца баллистический гальванометр отклонился на угол ϕ . Баллистическая постоянная равна b , сопротивление цепи (включая сопротивление гальванометра) R .

3.117. Электрический заряд q равномерно распределен по длине твердого непроводящего тонкого кругового кольца массой m . Кольцо может свободно вращаться вокруг своей оси. Вначале кольцо покоялось, а магнитное поле было равно нулю. Затем было включено однородное магнитное поле $B = B(t)$, перпендикулярное плоскости кольца и произвольно меняющееся во времени. Найти угловую скорость ω вращения кольца.

3.118. Простейший генератор постоянного тока состоит из прямоугольной рамки площадью S с числом витков N и внутренним сопротивлением r , вращающейся с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B . Определить средний врашающий момент сил $\bar{\mathcal{M}}$, приложенных к рамке, и среднюю мощность \bar{P} , идущую на вращение генератора. Генератор работает на нагрузку сопротивлением R .

3.119. Для измерения магнитной восприимчивости длинных цилиндрических образцов применена установка, показанная на рис. 3.40. При быстром удалении образца, заполнившего всю катушку, на ней воз-

никает импульс напряжения, который измеряется с помощью осциллографа. Определить магнитную восприимчивость χ образца, если $\mathcal{E} = 4,5$ В, $R = 10$ Ом, $L = 1$ Гн, $U = 6,8$ мВ.

Каким должно быть время t удаления образца, чтобы от него не зависела амплитуда импульса напряжения, измеряемого осциллографом?

3.120. На каком расстоянии l от Солнца плотность энергии солнечного света станет равной плотности энергии межзвездного магнитного поля с индукцией $B = 2 \cdot 10^{-6}$ Гс?

3.121. Два одинаковых соленоида длиной $l = 50$ см, приставленных торцами друг к другу (рис. 3.41) притягиваются с силой $F = 1$ Н, когда по их обмоткам течет одинаковый ток $I = 10$ А. Найти коэффициент самоиндукции L каждого соленоида.

3.122. Длинный сердечник из материала с магнитной проницаемостью $\mu = 100$ втягивается с силой $F = 10$ Н в длинный соленоид, по которому течет ток $I = 10$ А. Сердечник занимает все сечение соленоида и вставлен на глубину, значительно превышающую его диаметр. Найти коэффициент самоиндукции L соленоида (без сердечника), если его длина $l = 50$ см.

3.123. Вдоль оси цилиндрического жидкого проводника радиусом a равномерно по сечению течет ток I . Найти давление $p(r)$, обусловленное взаимодействием тока с созданным им магнитным полем.

3.124. Длинный цилиндрический стержень с магнитной проницаемостью μ и площадью поперечного сечения S расположен вдоль оси соленоида так, что один его конец находится внутри, а другой — вне соленоида. Найти силу F , с которой втягивается стержень в соленоид с индукцией B .

3.125. Длинный соленоид, намотанный на тонкостенный капилляр, погружен одним концом в парамагнитную жидкость с плотностью ρ и магнитной про-

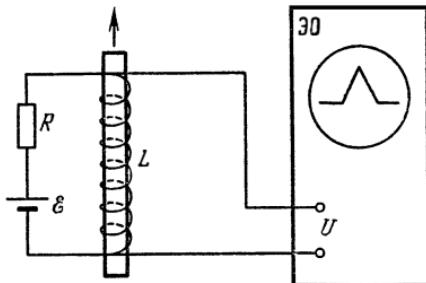


Рис. 3.40

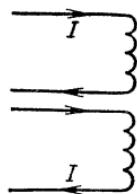


Рис. 3.41

ницаемостью μ . Число витков на единицу длины соленоида равно n . Определить изменение уровня жидкости Δh в капилляре, если по соленоиду пропустить ток I .

3.126. Вблизи длинного прямого провода, по которому протекает ток $I_1 = 10 \text{ A}$, расположена квадратная рамка с протекающим по ней током $I_2 = 1 \text{ A}$ (рис. 3.42). Рамка и провод лежат в одной плоскости; стороны рамки равны $a = 6,8 \text{ см}$, расстояние $b = 4 \text{ см}$.

Найти работу A , которую нужно совершить, чтобы передвинуть прямой провод в положение, указанное штриховой линией.

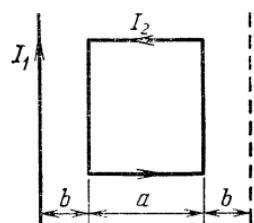


Рис. 3.42

3.127. В сердечнике электромагнита имеется малый зазор l , в который помещена пластинка из того же материала. Длина сердечника равна L , сечение всюду одинаково и равно S , магнитная проницаемость $\mu \gg 1$. Обмотка электромагнита имеет N витков, по которым протекает ток I . Найти работу A , которую нужно совершить, чтобы удалить пластину из зазора. Рассеянием магнитного потока пренебречь.

3.128. Катушка, имеющая N витков, намотана на железный торроидальный сердечник с магнитной проницаемостью μ . Радиус тора R , радиус сечения сердечника $r \ll R$. Тор разрезан на две половины, раздвинутые так, что между ними образовался воздушный зазор шириной l (рис. 3.43). Определить силу

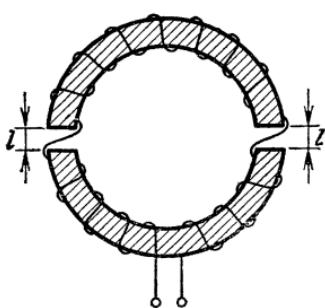


Рис. 3.43

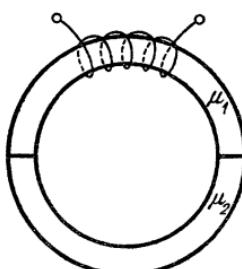


Рис. 3.44

притяжения F между половинами тора, если в обмотке протекает ток I . Рассмотреть случай $l = 0$.

3.129. Как изменится подъемная сила электромагнита, изображенного на рис. 3.44, если его нижнюю

подкову изготавливать из материала с магнитной проницаемостью $\mu_2 \neq \mu_1$ верхней подковы?

3.130. Для определения магнитной восприимчивости χ диамагнитного материала измеряют с помощью весов силу, выталкивающую маленький образец из зазора между полюсами электромагнита (рис. 3.45). Пусть индукция магнитного поля в зазоре изменяется в радиальном направлении по закону $B = B_0 \exp(-\alpha r^2)$, где r — расстояние от оси симметрии (в см), B_0 — поле на оси, равное 10^3 Гс, α — константа, равная 10^{-2} см $^{-2}$. На каком расстоянии r от оси нужно расположить диамагнитный образец, чтобы выталкивающая сила была максимальной, и чему равна эта максимальная сила для образца в виде небольшого тонкого диска объемом $V = 0,1$ см 3 ? Магнитную восприимчивость материала принять равной $\chi = -1,4 \cdot 10^{-5}$ (висмут). Диск ориентирован перпендикулярно магнитному полю.

3.131. Из энергетических соображений оцените самоиндукцию L круглой петли длиной l из тонкой проволоки радиусом r .

3.132. По длинному плазменному цилиндру радиусом $r = 5$ см течет ток $I = 10^5$ А, сосредоточенный в поверхностном слое. Давление в плазме равно $p = 10^5$ Па. Определить магнитное давление $p_{\text{маг}}$ на боковую поверхность плазменного цилиндра, возникающее под действием тока. Найти ток I , необходимый для того, чтобы давления стали равными.

3.133. Сверхсильные магнитные поля получаются взрывным сжатием отрезка проводящей трубы, в которой создано начальное магнитное поле с индукцией B_0 . Определить индукцию B конечного магнитного поля и радиус трубы r , если при сжатии давление магнитного поля уравновешивается давлением 1 млн. атм от взрыва. Рассмотреть случай $B_0 = 5$ Тл, начальный радиус трубы $r_0 = 0,05$ м. Механическим и электрическим сопротивлениями пренебречь.

3.134. Длина цилиндрического однослойного соленоида много больше его радиуса r . Провод обмотки соленоида имеет квадратное сечение со стороной $a < r$. Витки плотно прилегают друг к другу. При прохожде-

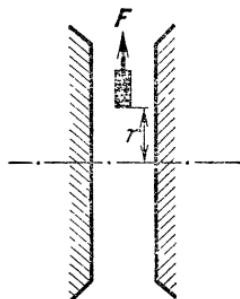


Рис. 3.45

нии тока через соленоид возникает сила, стремящаяся разорвать обмотку. Определить предельный ток I , при котором наступит разрыв проволоки обмотки в центральном сечении соленоида, если проволока выдерживает нагрузку на растяжение, не превышающую F .

3.135. В пространстве между двумя плоскими параллельными электродами зажигается электрический разряд (так называемый линейный « z -пинч») и образуется сжимаемый силами магнитного давления плазменный шнур радиуса $r = 1$ см с концентрацией электронов и ионов $n = n_e = n_i = 10^{19}$ см $^{-3}$, ток разряда $I = 10^6$ А. Оценить температуру T плазмы.

3.136. Тонкое металлическое кольцо быстро вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его диаметр и перпендикулярной однородному магнитному полю с индукцией $B = 100$ Гс. Пренебрегая трением в оси, найти, через какое время t угловая скорость вращения уменьшается в e раз. Плотность материала кольца $\rho = 9$ г/см 3 , удельная проводимость $\lambda = 5 \cdot 10^5$ Ом $^{-1} \cdot$ см $^{-1}$. Потери энергии за один оборот считать малыми.

3.137. В скрещенных однородных полях E_y и B_z из некоторой точки x_0 разлетаются электроны с одинаковыми скоростями $v \ll c$, лежащими в плоскости xy . Считая $E_y \ll B_z$ и пренебрегая взаимодействием электронов друг с другом, найти, на каком расстоянии l и через какое время t они снова соберутся в одну точку.

3.138. Смоделировать траекторию заряженной частицы в магнитном поле можно, натянув в зазоре магнита проволоку с током. С какой силой F надо натянуть проволоку с током $I = 1$ А, чтобы имитировать траекторию протона с энергией $W = 1$ МэВ?

3.139. Две щели S_1 и S_2 шириной $d = 0,1$ см каждая, установленные в эвакуированном сосуде, выделяют «плоский» пучок электронов с энергией $W = 400$ эВ (рис. 3.46). На каком расстоянии x от щели S_2 ширина электронного пучка удвоится из-за кулоновского расталкивания электронов, если ток, приходящий на единицу длины щели

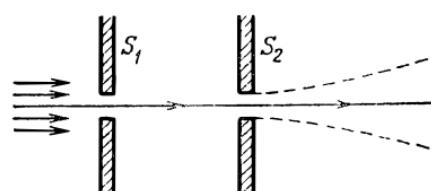


Рис. 3.46

86

(за щелью S_2), равен $I = 10^{-4}$ А/см? Считать щели бесконечно длинными.

3.140. В омегатроне ион остаточного газа раскручивается по спирали в скрещенных переменном электрическом (с амплитудой $E = 1$ В/см) и постоянном магнитном ($B = 3 \cdot 10^3$ Гс) полях (рис. 3.47). Найти частоту, при которой ионы N_2^+ будут достигать коллектора K . При этой частоте радиус спиралей будет возрастать до тех пор, пока ион не достигнет коллектора на радиусе $r = 1$ см. Если частоту немного изменить, то ион будет некоторое время раскручиваться, а потом начнет скручиваться обратно к источнику. Оценить, насколько надо изменить частоту, чтобы ток на коллектор прервался.

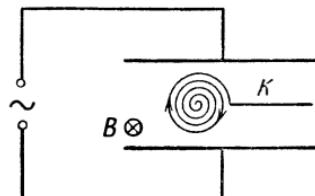


Рис. 3.47

3.141. В ускорителе электронов — бетатроне роль ускоряющего напряжения играет э. д. с. индукции, возбуждаемая изменением магнитного потока, пронизывающего орбиту электронов. Электроны движутся при этом по орбитам приблизительно постоянного радиуса. Принимая радиус орбиты электрона неизменным, определить необходимое для этого в данный момент времени соотношение между средним магнитным полем $\bar{B}(t)$, пронизывающим орбиту электрона, и магнитным полем $B(t)$ на орбите электрона. Считать магнитное поле параллельным оси симметрии вакуумной камеры бетатрона.

3.142. В цилиндрическом пропорциональном счетчике пучок частиц создает объемную ионизацию. Радиус катода $r_1 = 1$ см, радиус анода $r_2 = 2 \cdot 10^{-2}$ см, разность потенциалов между анодом и катодом $U = 2500$ В, подвижность положительных ионов аргона $\beta = 1,4 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$. Оценить время t сортирования ионов в таком счетчике, наполненном аргоном при нормальном давлении.

3.143. В установке для разделения изотопов ^{235}U и ^{238}U пучок однократно ионизованных ускоренных ионов урана с энергией $W = 5$ кэВ попадает от источника через щель S в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рис. 3.48. В магнитном поле ионы разных масс движутся по различным

окружностям и, совершив полуоборот, попадают в приемники. Конструкция последних такова, что расстояние между пучками ионов ^{235}U и ^{238}U на выходе должно быть не меньше $l = 5$ мм. Найти индукцию B магнитного поля, удовлетворяющего этому условию, а также время t , необходимое для полного разделения $M = 1$ кг природного урана, если ионный ток, создаваемый источником, равен $I = 5$ мА.

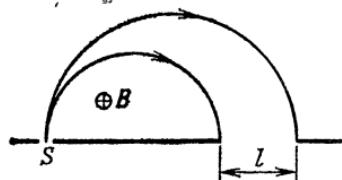


Рис. 3.48

3.144. Один из предложенных путей получения высоких температур, необходимых для осуществления термоядерных реакций, использует так называемую магнитную термоизоляцию. Уход быстрых частиц из зоны высокой температуры предотвращается магнитным полем. Оценить ток I в столбе газового разряда радиусом $r = 3$ см, необходимый для того, чтобы электроны, обладающие средней скоростью хаотического движения, соответствующей температуре $T = 10^6$ К, не могли удаляться от поверхности столба на расстояние, большее чем $l = 3 \cdot 10^{-3}$ см.

3.145. Частица массой m с зарядом e движется по равновесной круговой орбите радиусом r_0 в горизонтальной плоскости зазора магнита (рис. 3.49), в котором магнитное поле спадает по радиусу по закону $B_z(r) = A/r^n$ ($0 < n < 1$). Центр орбиты совпадает с осью симметрии zz' . Определить частоту ω_z вертикальных колебаний частицы на такой равновесной

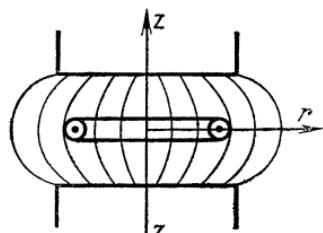


Рис. 3.49

орбите в случае малых отклонений от горизонтальной плоскости.

3.146. В условиях задачи 3.145 определить частоту ω_r радиальных колебаний частицы в случае малых отклонений от равновесной орбиты.

3.147. Электрический диполь движется в однородном магнитном поле с индукцией B со скоростью v , перпендикулярной B . Электрический момент диполя p_e составляет малый угол ϕ с направлением $[vB]$ (рис. 3.50). Найти круговую частоту ω малых ко-

лебаний диполя, считая известным его момент инерции \mathcal{J} .

3.148. Из ускорителя выводится пучок протонов с энергией $W = 4 \text{ МэВ}$, который затем проходит в вакууме расстояние $l = 4 \text{ м}$, прежде чем попасть на мишень. Вследствие кулоновского взаимодействия частиц размеры пучка увеличиваются. Оценить максимальную плотность тока j_{\max} в пучке, если допускается увеличение радиуса пучка на $\delta = 10\%$ по сравнению с исходным. Считать распределение частиц в пучке аксиально симметричным, их начальными поперечными скоростями пренебречь.

3.149. В ускорителе прямого действия протоны движутся в практически однородном электрическом поле внутри вакуумной трубки. Посторонние магнитные поля искривляют их траекторию, в результате чего они могут попасть на стенку, не дойдя до конца трубы. Допустимое отклонение протонов от осевой линии в конце трубы равно $b = 1 \text{ см}$. Оценить допустимый уровень индукции B однородного внешнего магнитного поля в таком ускорителе, если длина трубы $l = 2 \text{ м}$, а протоны ускоряются до энергии $W = 4 \text{ МэВ}$. Начальной скоростью протонов пренебречь.

3.150. Какое число неподвижных однозарядных положительных ионов n_i нужно поместить в единице объема пространства, занимаемого параллельным однородным пучком электронов кругового сечения, движущихся со скоростью v , чтобы радиус пучка при его движении не изменился? Концентрация электронов в пучке равна n_e . Столкновениями электронов с ионами пренебречь.

3.151. Длинная незаряженная пластинка из немагнитного металла движется равномерно в однородном магнитном поле $B = 1800 \text{ Гс}$ со скоростью $v = 6,28 \text{ см/с}$. Направления B и v взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости пластиинки (рис. 3.51). Определить поверхностную плотность σ электрических зарядов на плоскостях пластиинки, возникших

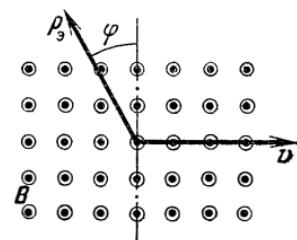


Рис. 3.50

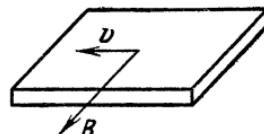


Рис. 3.51

вследствие ее движения. Магнитным полем возникающих зарядов пренебречь.

3.152. В однородном магнитном поле перпендикулярно индукции \mathbf{B} расположен замкнутый круглый виток радиусом r , индуктивность которого L , а омическое сопротивление R . Начиная с момента $t = 0$ поле начинает убывать по линейному закону со скоростью $d\mathbf{B}/dt = -a$. Найти закон изменения потока магнитной индукции $\Phi(t)$, пронизывающего контур витка.

3.153. Диэлектрическая жидкость проницаемостью ϵ протекает между пластинами плоского конденсатора со скоростью $v \ll c$. Перпендикулярно направлению движения жидкости и параллельно пластинам конденсатора, расстояние между которыми равно d , приложено однородное постоянное магнитное поле с индукцией B . Определить напряжение U между пластинами конденсатора и поверхностную плотность σ зарядов диэлектрика.

3.154. В простейшей схеме магнитного гидродинамического генератора плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием d между ними помещен в поток проводящей жидкости с удельной проводимостью λ , движущейся с постоянной скоростью v параллельно пластинам. Конденсатор находится в магнитном поле с индукцией \mathbf{B} , направленной перпендикулярно скорости жидкости

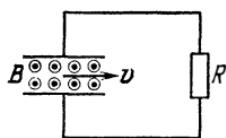


Рис. 3.52

помещен в поток проводящей жидкости с удельной проводимостью λ , движущейся с постоянной скоростью v параллельно пластинам. Конденсатор находится в магнитном поле с индукцией \mathbf{B} , направленной перпендикулярно скорости жидкости

(рис. 3.52). Найти мощность P , которая выделяется во внешней цепи, имеющей сопротивление R .

3.155. Металлический шарик массой m с зарядом e подвешен на нити длиной l и вращается вокруг вертикальной оси (конический маятник). Угол между нитью и вертикалью равен α . Шарик подвешен между полюсами электромагнита. Что произойдет при включении однородного магнитного поля с индукцией B ? На какую величину и за счет чего изменится кинетическая энергия ΔW_k шарика? Что произойдет при выключении поля?

3.156. Рассматривая движение электрона в атоме с классической точки зрения, показать, что его механический (\mathcal{L}) и магнитный (p_m) моменты связаны соотношением $p_m = -(e/2mc)\mathcal{L}$.

3.157. Вспомнив теорию гирокопа и воспользовавшись результатом предыдущей задачи, показать, что

во внешнем поле с индукцией \mathbf{B} атом прецессирует с частотой $\omega = -(e/2mc)\mathbf{B}$.

3.158. Определить частоту ω поперечных колебаний протонов, захваченных релятивистским электронным пучком, имеющим сечение $\pi R^2 = 3,14 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$ и ток $I = 10^3 \text{ А}$.

3.159. Плазменный шнур удерживается с помощью магнитного поля, параллельного оси шнура, вследствие того, что поле не проникает внутрь плазмы. Оценить индукцию B магнитного поля, необходимого для удержания плазмы, если концентрация частиц плазмы равна $n = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, а ее температура $T = 10^8 \text{ К}$.

3.160. В замкнутой сверхпроводящей обмотке электромагнита возбужден ток I_0 . В стальном магнитопроводе длиной l с магнитной проницаемостью μ имеется небольшой зазор l_0 такой, что рассеянием магнитного поля в зазоре можно пренебречь. Как изменится ток в обмотке, если путем деформации сердечника зазор уменьшить в два раза?

3.161. Во сколько раз изменится ток I_0 в круговой петле из сверхпроводника, если ее поместить внутрь длинного сверхпроводящего соленоида, замкнутого накоротко? Диаметры петли и соленоида считать равными, а их оси — параллельными. В отсутствие круговой петли ток в соленоиде был равен нулю. Индуктивность петли равна L , соленоида — L_c , число витков соленоида N .

3.162. Кольцо из сверхпроводника одевают на длинный однородно намагниченный стержень, индукция которого на полюсе, в точке C , равна B (рис. 3.53). При этом затрачивают работу A . Найти ток I в кольце, если площадь сечения магнита равна S .

3.163. Сверхпроводящий шар радиусом R помещен в однородное магнитное поле с индукцией \mathbf{B}_0 . Найти магнитное поле \mathbf{B} вне шара и распределение поверхностной плотности тока $j(\theta)$ на шаре.

3.164. На сколько отличается от единицы магнитная проницаемость μ идеального газа, состоящего из большого числа сверхпроводящих шариков радиусом r ? Концентрация n шариков мала, так что $nr^3 \ll 1$.

3.165. Длинный короткозамкнутый соленоид сверхпроводящего магнита выполнен из проволоки диамет-



Рис. 3.53

тром $d = 0,2$ мм, плотно намотанной в один слой. Диаметр соленоида $D = 2$ см. Известно, что сверхпроводимость разрушается во внешнем магнитном поле, равном $B_{\text{кр}} = 15$ кГс. Найти максимальный ток I_{max} , который можно возбудить в сверхпроводящей обмотке, если прочность проволоки на разрыв равна $F_p = 10$ Н.

3.166. Какую работу A надо совершить для того, чтобы круговую петлю из сверхпроводника вставить внутрь длинного сверхпроводящего соленоида, замкнутого накоротко? Диаметры петли и соленоида считать равными, а их оси — параллельными. В отсутствие круговой петли ток в соленоиде был равен нулю, начальный ток в петле I_0 . Индуктивность петли равна L , соленоида — L_c , число витков соленоида N .

3.167. Длинная сверхпроводящая проволока помещена в однородное магнитное поле с индукцией B , перпендикулярное оси проволоки. Найти распределение поверхностной плотности тока $j(\theta)$ на проволоке.

3.168. Сверхпроводящий соленоид деформируют так, что происходит адиабатическое сжатие магнитного поля. Каким уравнением (аналогичным уравнению адиабаты в теории газов) можно описать поведение магнитного давления при изменении площади сечения соленоида?

3.169. Определить силу натяжения проволоки F в сверхпроводящем кольце радиусом r_1 из цилиндрической проволоки радиусом r_2 ($r_2 \ll r_1$), по которому течет ток I . Индуктивность кольца в гауссовой системе равна $L = 4\pi r_1 [\ln(8r_1/r_2) - 2]$.

3.170. В короткозамкнутый длинный сверхпроводящий соленоид с начальным внутренним полем (вдали от концов) B и площадью сечения S_1 вставляют длинный сверхпроводящий сердечник с площадью сечения S_2 . Найти (пренебрегая краевыми эффектами) магнитное давление $p_{\text{маг}}$ на боковую поверхность сердечника.

3.171. Вдоль оси полого цилиндра из сверхпроводника с радиусами цилиндрических поверхностей r_1 и r_2 расположен длинный проводник. Найти плотность тока j на внутренней и наружной цилиндрических поверхностях сверхпроводящего образца, если по проводнику пропустить ток I , а также магнитное давление $p_{\text{маг}}$ на стенки цилиндра.

3.172. Токи, текущие по поверхности сверхпроводящего тела, приводят к тому, что магнитное поле внутри сверхпроводника всегда равно нулю. Однако если вокруг тела магнитное поле слишком велико, то сверхпроводимость разрушается и металл переходит в нормальное состояние. Для свинца при температуре 2 К критическое поле равно $B_{\text{кр}} = 750$ Гс. Оценить максимальный радиус шарика r_{max} , который можно подвесить на «магнитной подушке» при этой температуре. Плотность свинца равна $\rho = 11,3$ г/см³.

3.173. Тонкая тороидальная катушка, намотанная на полый немагнитный каркас (рис. 3.54) радиусом r_1 , имеет N витков, по которым протекает ток I . Найти индукцию B_0 магнитного поля в центре тора (точка O). Как изменится магнитное поле в точке O , если внутрь катушки поместить небольшой сверхпроводящий шарик радиусом $r_0 \ll r_1$?

3.174. Длинный тонкий соленоид радиусом r_0 подключен к батарее, и по нему течет постоянный ток I_0 . Сердечником в соленоиде служит сплошной цилиндр из сверхпроводника. Радиус сердечника $r_1 = 0,5 r_0$. Сердечник быстро выдергивают из соленоида. Найти ток I в обмотке непосредственно после удаления сердечника.

3.175. Сверхпроводящий шарик массой m и радиусом r подлетает с некоторой скоростью к области, в которой имеется постоянное магнитное поле с индукцией B . Найти максимальную скорость v_{max} , при которой шарик отразится от поля.

3.176. Сверхпроводящий шарик массой $m = 10^{-3}$ кг и радиусом $r = 0,02$ м летит по направлению к соленоиду вдоль его оси. Индукция магнитного поля соленоида равна $B_0 = 0,1$ Тл. Найти начальную скорость v_0 шарика, при которой он может влететь в соленоид.

3.177. Небольшой сверхпроводящий шарик может свободно перемещаться вдоль оси тонкого кольца радиусом r , по которому течет ток. Найти расстояние l между шариком и плоскостью кольца, при котором

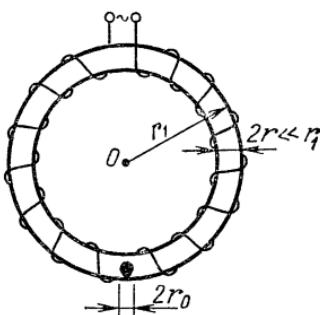


Рис. 3.54

сила, действующая на шарик, принимает максимальное значение.

3.178. На расстоянии $l = 9$ см над поверхностью сверхпроводника «парит» в поле тяжести тонкий постоянный магнит, длина которого мала по сравнению с расстоянием l . Если магнит слегка вывести из равновесия, то он совершает малые колебания в вертикальной плоскости. Найти период T колебаний, при которых отсутствует вращательное движение диполя.

3.179. Над сверхпроводящей плоскостью расположен тонкий прямой проводник, по которому течет постоянный ток. Полагая линейную плотность проводника $\rho_l = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/м, найти, на какой высоте h над плоскостью будет свободно висеть проводник, по которому течет ток $I = 20$ А.

3.180. Два параллельных цилиндрических провода из сверхпроводника находятся в однородном постоянном магнитном поле с индукцией B , направленной вдоль проводов. Найти магнитное давление $p_{\text{маг}}$ на боковую поверхность проводников, а также силу f , действующую на единицу длины каждого провода.

§ 3.4. Электромагнитные поля

3.181. Обкладками плоского воздушного конденсатора являются два круглых диска, расположенных на расстоянии d друг от друга. Внутри конденсатора находится проволочная прямоугольная рамка, одна сторона которой совпадает с осью симметрии конденсатора. Сторона рамки, параллельная пластинам конденсатора, равна $2a$, перпендикулярная — $2b$ (рис. 3.55).

К обкладкам конденсатора приложено переменное напряжение $U = U_0 \cos \omega t$. Найти ток I в рамке в предположении, что ее активное сопротивление R велико по сравнению с индуктивным.

3.182. В длинном воздушном соленоиде с радиусом намотки $r_0 = 1$ см, содержащем $n = 10$ витков/см, течет ток, нарастающий с постоянной скоростью $dI/dt = 100$ А/с. Какова будет форма линий напряженности соответствующего ему вихревого электрического поля напряженностью E ? 1) Найти напряжен-

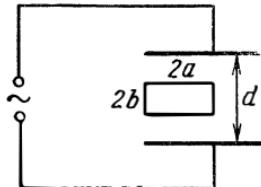


Рис. 3.55

нность E на расстоянии $2r_0$ от оси соленоида. 2) Как изменится напряженность E и смещение D , если соленоид погрузить в однородный немагнитный диэлектрик с проницаемостью $\epsilon = 2$?

3.183. Алюминиевое кольцо, сопротивление которого пренебрежимо мало, надето на сердечник электромагнита и лежит на подставке в верхней его части. Магнитный поток, посыпаемый сердечником через кольцо, нарастает от нуля до конечного значения $\Phi = 10^5 \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$. Нарастание потока происходит настолько быстро, что за время нарастания кольцо практически не успевает сместиться. Найти высоту h , на которую подскочит от подставки кольцо (рис. 3.56), если его масса равна $m = 100 \text{ г}$, а индуктивность $L = 100 \text{ см}$.

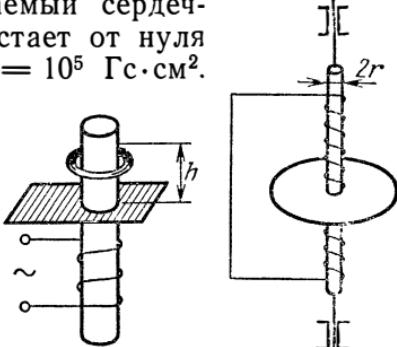


Рис. 3.56

Рис. 3.57

3.184. Длинный сверхпроводящий соленоид радиусом $r = 2 \text{ см}$ укреплен в центре диска из изолятора, который может свободно вращаться вокруг своей оси (рис. 3.57). Соленоид замкнут накоротко, и в нем циркулирует ток, создающий в центре соленоида индукцию $B = 10^4 \text{ Гс}$. На диск вне соленоида нанесены заряды, суммарная величина которых составляет $q = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$. Соленоид разогревается, и ток в нем прекращается. Найти механический момент количества движения \mathcal{L} , который получает в результате этого вся система.

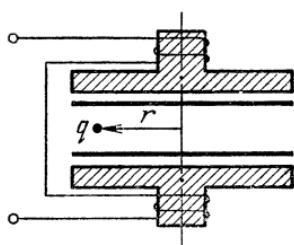


Рис. 3.58

3.185. Плоский воздушный конденсатор помещен параллельно круглым горизонтальным наконечникам электромагнита. Между обкладками конденсатора в однородном электрическом поле напряженностью E на расстоянии r от оси полюсных наконечников неподвижно висит масляная капля с зарядом q (рис. 3.58). В обмотке был включен ток и магнитное поле доведено до постоянного значения B . Предполагая, что за время нарастания магнитного

поля смещение капли пренебрежимо мало, найти скорость v капли и траекторию ее движения после включения магнитного поля.

3.186. Конденсатор, состоящий из двух одинаковых дисков радиусом a , расположенных на расстоянии d друг от друга, заполнен диэлектриком с проницаемостью ϵ и заряжен до напряжения U . Затем конденсатор начинает разряжаться через внешнее сопротивление R . Пренебрегая краевыми эффектами, найти вектор Пойнтинга $S(r, t)$ в конденсаторе как функцию расстояния от оси и времени. Найти полную электромагнитную энергию W , вытекающую через боковую поверхность конденсатора за все время разряда.

3.187. Постоянный ток I течет по цепи, состоящей из резистора сопротивлением R , длинной катушки радиусом r_2 с плотной намоткой (плотность витков n)

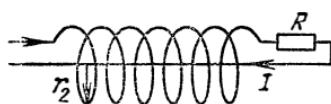


Рис. 3.59

и соосного с катушкой прямого провода радиусом r_1 (рис. 3.59). Пренебрегая сопротивлением катушки и провода, найти аксиальную (S_z) и азимутальную (S_ϕ)

составляющие вектора Пойнтинга внутри катушки вдали от ее торцов. Найти полную электромагнитную энергию W через сечение катушки.

3.188. Медный цилиндр радиусом $r = 1$ см и высотой $h = 10$ см помещен в переменное однородное магнитное поле с индукцией $B = B_0 \cos \omega t$, параллельное оси цилиндра. Амплитуда поля равна $B_0 = 100$ Гс, частота $f = 50$ Гц. Определить среднюю тепловую мощность P , выделяющуюся в цилиндре из-за токов Фуко. Удельная проводимость меди равна $\lambda = 5,14 \times 10^{17}$ с $^{-1}$.

3.189. В плоский конденсатор, состоящий из двух круглых дисков площадью S , помещена квадратная проволочная рамка со стороной a и сопротивлением R (ее индуктивное сопротивление можно считать малым). Одна из сторон рамки совпадает с осью конденсатора, а две другие направлены по радиусу диска. Конденсатор заряжается от источника постоянной э. д. с. до заряда q , причем постоянная времени равна τ . Найти количество теплоты Q (джоулево тепло), выделяющееся в рамке при зарядке конденсатора.

3.190. Длинный соленоид (длина l , радиус r , число витков N) подключается к источнику постоянной э. д. с. \mathcal{E} через резистор сопротивлением R (сопротивлением соленоида можно пренебречь). Найти электромагнитную энергию W , втекающую в соленоид за время установления тока, и сравнить ее с магнитной энергией соленоида $LI^2/2$.

3.191. Заряженный плоский воздушный конденсатор с напряженностью электрического поля между пластинами $E = 282 \text{ В/см}$ помещен внутри соленоида, поперечное сечение которого имеет форму прямоугольника со сторонами, параллельными и перпендикулярными пластинам конденсатора. В цепи обмотки соленоида имеется батарея постоянного тока и ключ. Вся система (вместе с батареей) помещена на горизонтальных рельсах, параллельных пластинам конденсатора, и может перемещаться по ним без трения. Вначале цепь соленоида разомкнута. Затем ключ замыкается и в соленоиде создается постоянное магнитное поле с индукцией $B = 2000 \text{ Гс}$. Найти изменение механического импульса Δp системы после замыкания ключа. Объем воздушного пространства между пластинами конденсатора равен $V = 200 \text{ см}^3$.

3.192. Провода системы Лехера находятся в емкостной связи с генератором синусоидальных колебаний, который поддерживает между концами A и B переменное напряжение $U_0 \cos \omega t$, где U_0 и ω — постоянные. Концы C и D закорочены (рис. 3.60). Длина лехеровой системы $AC = BD = l$. Найти распределение напряжения $U(x, t)$ между проводами как функцию координаты x и времени t , предполагая, что колебания

установились, а активное сопротивление всех проводов равно нулю. Исследовать амплитуду A установившихся колебаний напряжения в пучностях в зависимости от длины l лехеровой системы.

3.193. Мощный СВЧ-генератор через волновод питает нагрузку, посыпая в волновод мощность $P_0 = 100 \text{ кВт}$. Часть этой мощности поглощается в нагрузке ($P_n = 75 \text{ кВт}$), а часть отражается. В результате в волноводе возникает суперпозиция прямой и отраженной волн, распространяющихся навстречу

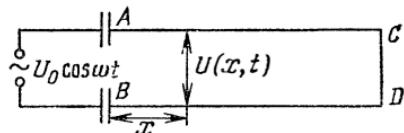


Рис. 3.60

друг другу. Найти коэффициент K стоячей волны в волноводе, т. е. отношение максимальной напряженности поля (в пучности) к минимальной (в узле).

3.194. Мощный СВЧ-генератор через волновод питает передающую антенну. Генератор посылает в волновод мощность $P_0 = 100$ кВт, которая частично излучается антенной в окружающее пространство, а частично отражается и поглощается в специальных нагрузках обратной волны. В результате в волноводе возникает суперпозиция прямой и отраженной волн, распространяющихся навстречу друг другу. Найти мощность $P_{изл}$, излучаемую антенной, если известно, что коэффициент стоячей волны, т. е. отношение максимальной напряженности поля (в пучности) к минимальной (в узле), равен $K = 2$.

3.195. Отрезок коаксиального кабеля длиной $l = 14$ м подключен ко входу усилителя с очень высоким входным сопротивлением. Другой конец кабеля замкнут накоротко. Межпроводное пространство кабеля заполнено диэлектриком ($\epsilon = 2$), характеризующимся малой удельной проводимостью $\lambda = 10^{-6} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1} \approx 0,9 \cdot 10^4$ ед. СГС. Найти добротность Q контура, эквивалентного отрезку данного кабеля, и минимальную резонансную частоту v_{min} , считая, что потери связаны только с проводимостью диэлектрика.

3.196. Торцы отрезка волновода сечением $a \times b = 10 \times 22$ мм и длиной $l = 100$ мм запаяны, и волновод заполнен диэлектрической средой ($\epsilon = 2$), обладающей слабой удельной проводимостью $\lambda = 10^{-7} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1} \approx 900$ ед. СГС. Найти добротность Q полученного СВЧ-резонатора для минимальной резонансной частоты v_{min} , считая, что потери энергии вызваны только проводимостью диэлектрика.

§ 3.5. Квазистационарные токи. Колебания в электрических цепях

3.197. К заряженному до напряжения U конденсатору емкостью C_1 подключается незаряженный конденсатор емкостью C_2 ; сопротивление цепи равно R . Найти зависимость тока в цепи от времени $I(t)$. Индуктивностью цепи пренебречь.

3.198. Конденсатор емкостью C несет заряд q . При параллельном соединении этого конденсатора с незаряженным конденсатором той же емкости часть энер-

гии выделяется в соединительных проводах в виде теплоты. Найти количество теплоты Q , выделенной в проводах, прямым расчетом, не прибегая к закону сохранения энергии. Индуктивностью проводов пренебречь.

3.199. В цепи, содержащей батарею с э. д. с. \mathcal{E} , резистор сопротивлением R и конденсатор, из последнего быстро извлекают пластину с диэлектрической проницаемостью ϵ , которая заполняла весь объем конденсатора (рис. 3.61). При этом емкость конденсатора скачкообразно меняется до значения C . Найти зависимость тока в цепи от времени $I(t)$.

3.200. Конденсатор емкостью C заряжается от батареи с э. д. с. \mathcal{E} через нелинейное сопротивление, ток в котором связан с напряжением соотношением $I = \beta U^{3/2}$ (β — постоянная величина). Найти зависимость тока в цепи от времени $I(t)$, если батарея включена при $t = 0$.

3.201. Сверхпроводящие катушки с самоиндукциями L_1 и L_2 соединены параллельно и включены через сопротивление R в цепь батареи с э. д. с. \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r (рис. 3.62). Найти токи в

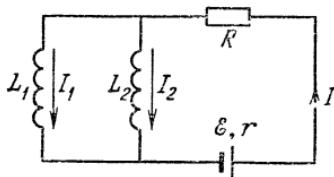


Рис. 3.62

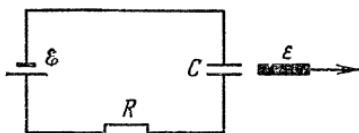


Рис. 3.61

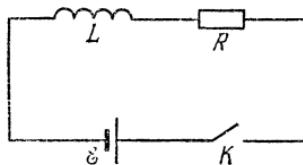


Рис. 3.63

катушках I_1 и I_2 и ток в общей цепи I . Взаимной индуктивностью катушек пренебречь.

3.202. При размыкании ключа K в электрической цепи, изображенной на рис. 3.63, возник дуговой разряд. Вольт-амперная характеристика дугового разряда имеет вид $U = a + b/I$, где a и b — известные постоянные величины. Определить ток I в цепи.

3.203. Длинный соленоид, длина которого равна l , а площадь витков S , замыкается в некоторый момент времени последовательно с сопротивлением R на источник постоянного напряжения с э. д. с. \mathcal{E} . В средней части соленоида находится небольшое

короткозамкнутое кольцо, плоскость которого перпендикулярна оси соленоида. Площадь кольца равна S_1 , сопротивление — R_1 . Определить максимальное радиальное давление $(f_p)_{\max}$ на кольцо, т. е. радиальную силу, действующую на единицу длины кольца. Самоиндукцией кольца пренебречь.

3.204. Тороидальная катушка с радиусом тора r и радиусом витка r_1 ($r_1 \ll r$) замыкается в некоторый момент последовательно с сопротивлением R на источник постоянного тока с э. д. с. \mathcal{E} . Внутри катушки находится небольшое короткозамкнутое кольцо, площадь которого равна S_1 , а сопротивление — R_1 . Плоскость кольца совпадает с плоскостью одного из витков тора. Определить количество теплоты Q (двоулево тепло), выделившееся в кольце за все время установления тока в цепи тора. Самоиндукцией кольца пренебречь.

3.205. Два соленоида имеют одинаковые геометрические размеры, но один из них изготовлен из провода вдвое большей площади поперечного сечения и вдвое меньшей длины, чем другой. Материал проводов обоих соленоидов одинаков. В обмотке какого из соленоидов будет выделяться большее количество теплоты, если магнитные поля в них одинаковы? У какого из соленоидов меньше время установления магнитного поля?

3.206. В схеме, изображенной на рис. 3.64, в некоторый момент времени замыкают ключ K и конденсатор емкостью C , имеющий первоначальный заряд q_0

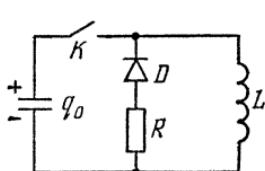


Рис. 3.64

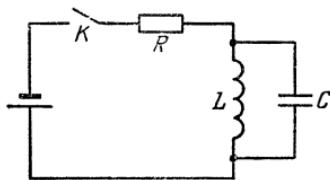


Рис. 3.65

q_0 , начинает разряжаться через катушку индуктивностью L . Когда ток заряда достигает максимального значения, ключ K вновь размыкают. Найти заряд q , который протечет через резистор сопротивлением R . Сопротивление диода D в прямом направлении много меньше R , в обратном — бесконечно велико.

3.207. В схеме, изображенной на рис. 3.65, ключ K размыкают и в контуре возникают колебания. Какой

должна быть емкость C конденсатора, чтобы напряжение на емкости не более чем в $n = 100$ раз превосходило напряжение батареи?

3.208. После размыкания ключа в схеме, изображенной на рис. 3.66, в контуре возникают медленно затухающие колебания, максимальная амплитуда напряжения которых в $n = 100$ раз превосходит напряжение батареи. Найти собственную частоту ω_0 колебаний контура, если уменьшение амплитуды колебаний в e раз происходит за время $t = 0,1$ с.

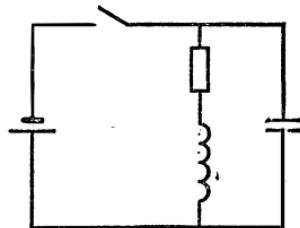


Рис. 3.66

3.209. С помощью осциллографа наблюдают свободные затухающие колебания в колебательном контуре. Найти соотношение между числом колебаний N_1 и N_2 , совершаемых за время, в течение которого амплитуда затухает в e раз, если в два раза уменьшить индуктивность контура и в два раза увеличить его емкость, сохранив неизменным активное сопротивление.

3.210. Колебательный контур помещен в постоянное магнитное поле, создающее в катушке магнитный поток Φ_0 . В момент времени $t = 0$ магнитное поле выключается. Время выключения пренебрежимо мало по сравнению с периодом собственных колебаний контура. Найти зависимость тока в контуре от времени $I(t)$ после выключения поля.

3.211. Конденсатор емкостью $C = 0,1$ мкФ, заряженный до напряжения $\mathcal{E} = 1$ кВ, в момент времени $t = 0$ замыкается на катушку индуктивностью $L = 100$ мГн и сопротивление, равное критическому для образовавшегося контура (рис. 3.67). Определить время t , за которое ток достигнет максимального значения, и найти этот ток I_{\max} .

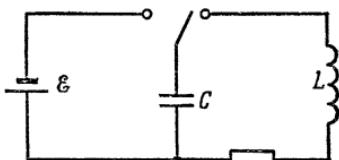


Рис. 3.67

3.212. Цепь, состоящая из последовательно соединенных резистора сопротивлением R и катушки большой индуктивностью L , присоединена к источнику постоянного тока, поддерживающему на зажимах

постоянное напряжение U_0 (рис. 3.68). Для ограничения перенапряжений во время отключения источника параллельно с цепью включен конденсатор емкостью C . Определить напряжение на конденсаторе $U(t)$ после отключения источника.

Параметры удовлетворяют условию $L/C > R^2/4$.

3.213. В колебательном контуре с малым затуханием одновременно увеличивают емкость конденсатора и самоиндукцию катушки в одно и то

же число раз, равное n . Увеличение производится в произвольный момент за время, малое по сравнению с периодом собственных колебаний контура. Найти соотношение между амплитудами тока I_1 и I_2 до и после изменения параметров контура.

3.214. Генератор с малым внутренним сопротивлением посыпает в контур с известными параметрами L и C прямоугольный импульс напряжения (рис. 3.69).

Пренебрегая затуханием, найти, при какой длительности T после прекращения импульса: 1) колебания в контуре отсутствуют, 2) амплитуда колебаний напряжения на емкости максимальна. Чему равна максимальная амплитуда колебаний напряжения?

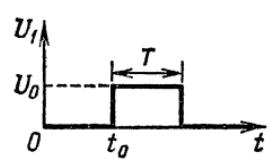


Рис. 3.68

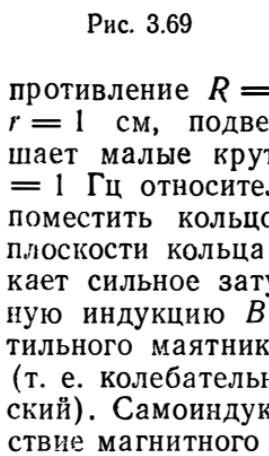


Рис. 3.69

3.215. Кольцо из тонкой проволоки, имеющее активное сопротивление $R = 10^{-3}$ Ом, массу $m = 1$ г и радиус $r = 1$ см, подвешено на упругой нити и совершает малые крутильные колебания с частотой $f = 1$ Гц относительно вертикального диаметра. Если поместить кольцо в магнитное поле, параллельное плоскости кольца в положении равновесия, то возникает сильное затухание колебаний. Оценить магнитную индукцию B поля, при которой движение крутильного маятника происходит в критическом режиме (т. е. колебательный режим переходит в апериодический). Самоиндукцией кольца и затуханием в отсутствие магнитного поля пренебречь.

3.216. Резонансный контур L , C , R раскачивается периодически следующими импульсами такими, что

каждый отдельный импульс создает на конденсаторе дополнительное напряжение U . Промежутки времени между последовательными импульсами в целое число n раз больше периода собственных колебаний. Определить амплитуду U_0 установившихся колебаний. Считать декремент затухания контура малым.

3.217. При пропускании кратковременного импульса тока через баллистический гальванометр его рамка отклоняется на угол ϕ . Спустя половину периода, когда рамка гальванометра вернется в исходное положение, через гальванометр пропускается такой же импульс тока, но в противоположном направлении, и т. д. Таким образом, всякий раз, когда рамка гальванометра проходит через положение равновесия, она испытывает одинаковые толчки в направлении своего движения. Найти максимальный угол отклонения рамки при установившихся колебаниях. Период (затухающих) колебаний гальванометра равен T , коэффициент затухания γ .

3.218. В вольтметре для измерения постоянного напряжения ток поступает в катушку, которая может вращаться во внешнем постоянном магнитном поле. Определить показания такого вольтметра, если его включить через идеальный диод в розетку переменного тока с напряжением 220 В (рис. 3.70).

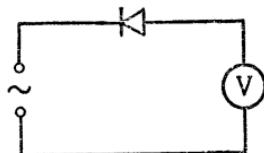


Рис. 3.70

3.219. В вольтметрах для измерения постоянного или переменного напряжения используется принцип взаимодействия двух катушек, из которых одна подвижная. Катушки соединены последовательно, так что через них проходит один и тот же ток. Какую величину измеряет такой вольтметр? Вольтметр такого типа для переменного тока включен через идеальный диод в розетку с напряжением 220 В (рис. 3.70). Какое напряжение покажет вольтметр?

3.220. Дан черный ящик с двумя внешними клеммами. Внутри него собрана схема из катушки индуктивностью L с малыми омическими потерями, конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R . Известно, что если подать на клеммы постоянное напряжение 1 В, то ток будет равен 10 мА. При переменном напряжении 1 В на частоте 50 Гц ток равен

1 мА. С ростом частоты ток падает и достигает минимума на частоте 500 Гц, а затем постепенно возрастает до предельного значения 10 мА. Нарисовать схему черного ящика и определить ее параметры.

3.221. Дан черный ящик с двумя внешними клеммами. Внутри него собрана схема из катушки индуктивностью L с малыми омическими потерями, конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R . Известно, что если подать на клеммы постоянное напряжение 1 В, то ток будет равен 1 мА. При переменном напряжении 1 В на частоте 50 Гц ток равен 10 мА. С ростом частоты ток растет и достигает максимума на частоте 500 Гц. Нарисовать схему черного ящика и определить ее параметры.

3.222. В цепь переменного тока с напряжением $\mathcal{E} = 440$ В и частотой $f = 50$ Гц включены последовательно нормально горящая лампочка накаливания и конденсатор. Определить емкость C конденсатора, если лампочка рассчитана на напряжение $U = 220$ В и ток $I = 1$ А. Найти сдвиг фаз ϕ между током и напряжением в цепи.

3.223. Удельное сопротивление некоторой жидкости равно $\rho = 10^{11}$ Ом·см. При переходе от постоянного тока к 50-периодному (при том же эффективном напряжении) ток, текущий через конденсатор, заполненный этой жидкостью, возрастает в $n = 7$ раз. Определить диэлектрическую проницаемость ϵ этой жидкости.

3.224. Длинный однослойный реостат из никромовой проволоки с удельным сопротивлением $\rho =$

$= 1,1 \cdot 10^{-6}$ Ом·м намотан виток к витку с плотностью $n = 10$ витков/см на керамический стержень диаметром $D = 5$ см и включен в цепь переменного тока с частотой $f = 50$ Гц. Найти сдвиг фаз ϕ между током и напряжением на реостате. Толщиной изоляции проволоки пренебречь.

3.225. В схеме, представленной на рис. 3.71, емкость C конденсатора подобрана таким образом, что при замыкании ключа K ток, показываемый амперметром, не изменяется. Определить индуктивность L катушки, если известно, что $I = 0,5$ А, $U = 380$ В, $f = 50$ Гц.

3.226. Вблизи катушки колебательного контура с параметрами L_1 , C и R расположена вторая катушка индуктивностью L_2 . Коэффициент взаимной индукции между катушками равен M . Найти резонансную частоту $\omega_{рез}$ контура, если выводы второй катушки замкнуть накоротко. Считать, что индуктивное сопротивление второй катушки на частоте колебаний контура значительно больше ее активного сопротивления.

3.227. Две одинаковые катушки, намотанные на общий каркас, соединены последовательно и включены в колебательный контур с емкостью C двумя способами, изображенными на рис. 3.72. Резонансные

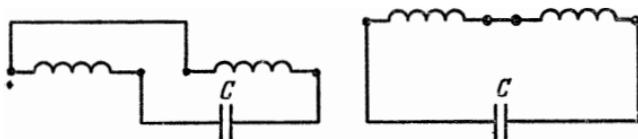


Рис. 3.72

частоты контуров оказались равными ω_1 и ω_2 . Найти индуктивность L каждой из катушек и коэффициент их взаимной индукции M .

3.228. Две одинаковые катушки, намотанные на общий каркас, соединены параллельно и включены в колебательный контур с емкостью C двумя способами, изображенными на рис. 3.73. Резонансные частоты

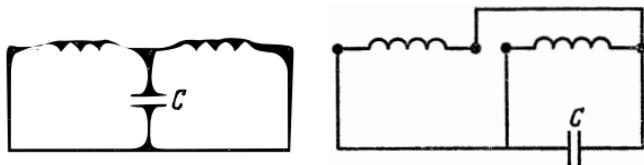


Рис. 3.73

контуров оказались равными ω_1 и ω_2 . Найти индуктивность L каждой из катушек и коэффициент их взаимной индукции M .

3.229. Входной контур радиоприемника имеет добротность $Q = 100$ и настроен на частоту $f_0 = 1 \text{ МГц}$. Во сколько раз напряжение частоты $f_1 = 2f_0$ (мешающая станция) при условии, что амплитуды сигналов, возбуждаемых в контуре, одинаковы?

3.230. При снятии резонансной кривой колебательного контура (рис. 3.74) с малым затуханием найдено, что напряжение на конденсаторе максимально при частоте $f_0 = 1,6$ кГц; при частотах $f \ll f_0$ это напряжение равно $U_0 = 1$ В. Чему равно выходное напряжение U_1 при частоте $f_1 = 16$ кГц?

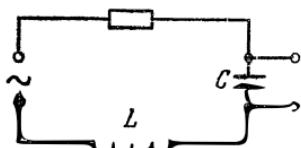


Рис. 3.74

гается при частоте генератора $f_0 = 1,6$ кГц, ток при частоте $f_1 = 16$ кГц равен $I_1 = 10^{-4}$ А. Входное напряжение в обоих случаях равно $U = 1$ В. Найти по этим данным приближенные значения параметров контура R , L , C .

3.232. При измерении добротности резонансного контура из параллельно включенных катушки индуктивностью $L = 0,1$ Гн и сопротивлением $r = 30$ Ом и конденсатора емкостью $C = 3 \cdot 10^3$ пФ поступили следующим образом. Контур подключили к клеммам осциллографа и, включая и выключая э. д. с. постоянного тока, наблюдали затухающие колебания в контуре (рис. 3.75). Сравнить добротность Q контура при разомкнутой цепи батареи в случаях, когда входное сопротивление осциллографа равно $R = 100$ кОм и когда оно очень велико.

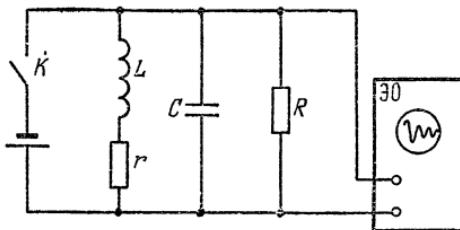


Рис. 3.75

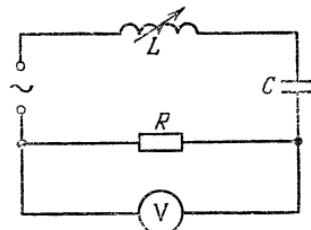


Рис. 3.76

3.233. Индуктивный датчик является радиотехническим устройством для регистрации небольших изменений индуктивности. Обычно такой датчик представляет собой электрический колебательный контур с изменяющейся индуктивностью (рис. 3.76). Найти минимально измеряемое относительное изменение индуктивности $\Delta L/L$, если контур настроен в резонанс.

Напряжение источника питания равно $U = 100$ В, минимально измеряемое изменение напряжения на сопротивлении $\Delta U = 10$ мкВ, добротность контура $Q = 10^2$.

3.234. Емкостный датчик — одно из наиболее чувствительных радиотехнических устройств, применяемых для регистрации малых механических смещений. Обычно емкостный датчик представляет собой электрический колебательный контур с воздушным конденсатором, одна из пластин которого подвижна (рис. 3.77). Найти минимально измеряемое перемещение Δd пластины конденсатора, если контур настроен в резонанс. Напряжение источника питания равно $U = 100$ В, минимально измеряемое изменение напряжения на сопротивление $\Delta U = 10$ мкВ, добротность контура $Q = 10^2$ и зазор между пластинами $d = 1$ мм.

3.235. При каком условии амплитуда тока в цепи, изображенной на рис. 3.78, зависит только от амплитуды приложенного напряжения $U = U_0 \cos \omega t$, но не от его частоты? Найти при этом условии разность фаз φ между приложенным напряжением и напряжением на концах RC -цепочки.

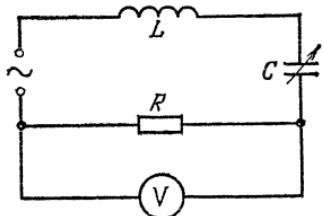


Рис. 3.77

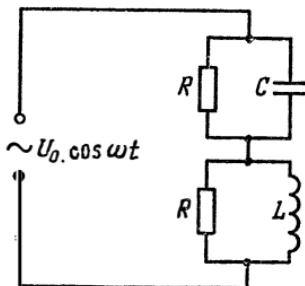


Рис. 3.78

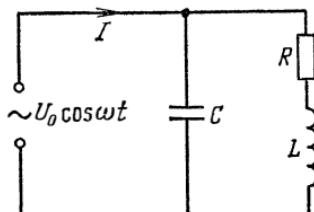


Рис. 3.79

3.236. На рис. 3.79 изображена электрическая схема, в которой $R = 6$ Ом, $L = 0,01$ Гн. Круговая частота равна $\omega = 300$ с⁻¹. Определить, при какой емкости C конденсатора ток находится в фазе с напряжением.

3.237. С помощью схемы, изображенной на рис. 3.80, требуется получить сдвиг фаз на угол $\pi/2$ между напряжением на входе $U = U_0 \cos \omega t$ и напряжением на выходе U_1 . Какому условию при этом должны удовлетворять параметры схемы R и C , если частота входного напряжения равна ω ?

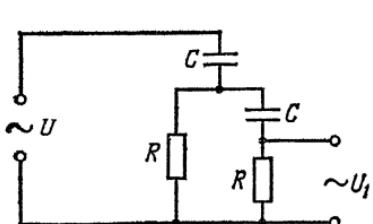


Рис. 3.80

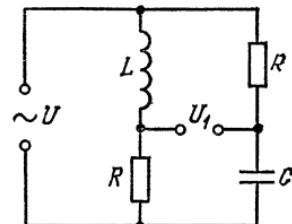


Рис. 3.81

3.238. При каком соотношении между параметрами схемы, изображенной на рис. 3.81, напряжение на выходе U_1 находится в фазе с напряжением на входе $U = U_0 \cos \omega t$? Какова при этом амплитуда напряжения U_{01} на выходе?

3.239. В схеме, изображенной на рис. 3.82, наблюдается сдвиг фаз на угол $\pi/2$ между входным напряжением $U = U_0 \cos \omega t$ и выходным напряжением U_1 . При каком соотношении между параметрами схемы это возможно? Какова при этом амплитуда напряжения U_{01} на выходе?

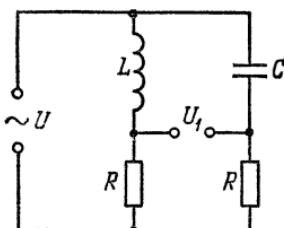


Рис. 3.82

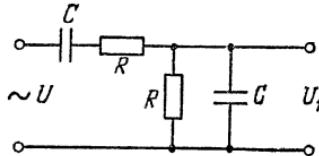


Рис. 3.83

3.240. Параметры R и C схемы, изображенной на рис. 3.83, заданы. При какой частоте ω выходное напряжение U_1 будет находиться в фазе с входным напряжением U ? Каким при этом будет отношение амплитуд напряжений U_1 и U ?

3.241. На вход фильтра подано напряжение $U = U_0 \cos \omega t$, где $\omega = 1/(RC)$ (рис. 3.84). Определить амплитуду напряжения на выходе U_{01} .

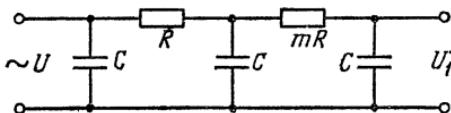


Рис. 3.84

3.242. При каком соотношении между параметрами моста, изображенного на рис. 3.85, напряжение U_1 на его выходе находится в фазе с входным напряжением $U = U_0 \cos \omega t$? Определить при этом амплитуду напряжения на выходе U_{01} .

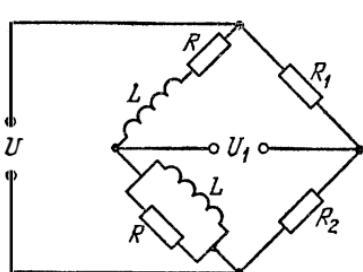


Рис. 3.85

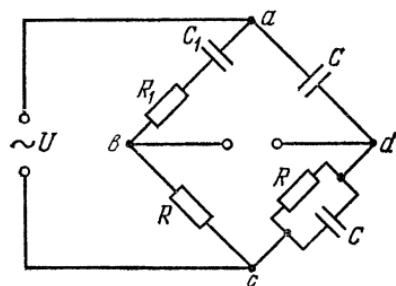


Рис. 3.86

3.243. Мост переменного тока, изображенный на рис. 3.86, сбалансирован. Определить соотношение между постоянными времени плеч ab и cd . Является ли найденное соотношение достаточным условием баланса моста?

3.244. Найти условия, при которых мост переменного тока, изображенный на рис. 3.87, будет сбалансирован (т. е. $U_1 = 0$) при подаче на его вход периодического напряжения $U(t)$ любой формы.

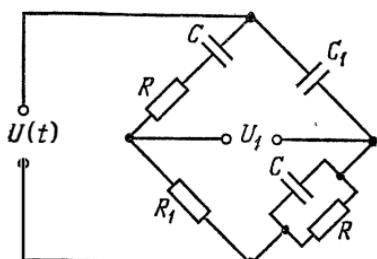


Рис. 3.87

3.245. Два электрических колебательных контура с известными параметрами связаны индуктивной связью. В одном из контуров действует синусоидальная

э. д. с. с круговой частотой ω . Определить сдвиг фаз между токами в контурах.

3.246. Найти условие, при котором в схеме рис. 3.88 ток, протекающий через некоторую нагрузку Z , не будет зависеть от этой нагрузки.

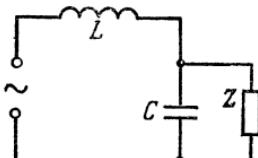


Рис. 3.88

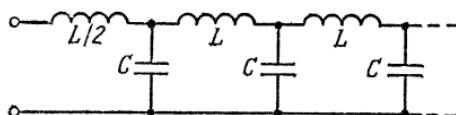


Рис. 3.89

3.247. Найти входной импеданс Z бесконечной цепи, показанной на рис. 3.89. При каких частотах ω цепь не будет потреблять мощность от источника?

3.248. В одной из схем радиочастотного лампового генератора наличие электронной лампы с нелинейной характеристикой и цепи обратной связи эквивалентно включению в колебательный контур двухполюсника, комплексное сопротивление Z которого зависит от амплитуды тока I_0 и на частоте ω равно $Z = a/I_0 + ibI_0^2/\omega$, где a и b — известные константы (рис. 3.90). При каких условиях возникнут автоколебания в такой схеме? Каковы частота ω и амплитуда A установившихся колебаний тока?

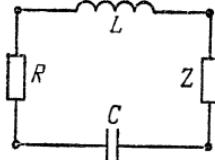


Рис. 3.90

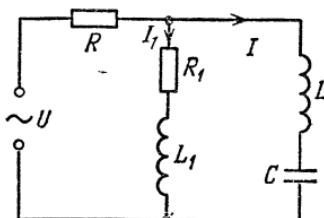


Рис. 3.91

3.249. В схеме, изображенной на рис. 3.91, действует переменное напряжение $U = U_0 \cos^2 \omega t$. Определить токи I и I_1 , если известно, что параметры цепи удовлетворяют соотношению $\omega^2 = 1/(4LC)$.

3.250. Найти спектры следующих колебаний:
 1) $f(t) = A \cos^2 \omega_0 t$ (квадратичное преобразование монохроматического сигнала);
 2) $f(t) = A(1+m \cos \Omega t) \times \cos \omega_0 t$ ($\Omega \ll \omega_0$, $m < 1$) (амплитудная модуляция);
 3) $f(t) = A \cos [\omega_0 t + m \cos \Omega t]$ ($\Omega \ll \omega_0$, $m \ll 1$) (фазовая модуляция).

3.251. В приемниках радиоизлучения обычно осуществляется квадратичное преобразование принимаемого сигнала с последующим усреднением за некоторое время Δt , подчиняющееся условию $2\pi/\omega_0 \ll \Delta t \ll 2\pi/\Omega$, где ω_0 — радиочастота, Ω — частота модуляции ($\omega_0 \gg \Omega$). Что зарегистрирует такой приемник в следующих случаях: 1) на вход подано амплитудно-модулированное колебание (задача 3.250, п. 2); 2) на вход подано колебание, модулированное по фазе (задача 3.250, п. 3); 3) на вход подано колебание, модулированное по фазе с отфильтрованной частотой ω_0 (т. е. без несущей); 4) на вход подано колебание, модулированное по фазе, в котором фаза спектральной компоненты частоты ω_0 изменена на $\pi/2$ (т. е. фаза несущей изменена на $\pi/2$)?

3.252. Колебательный контур (рис. 3.92) возбуждается синусоидальным напряжением $U = U_0 \cos \omega t$, частота которого ω отличается от собственной частоты ω_0 , причем расстройка $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$ больше ширины резонансной кривой ($|\Delta\omega| > \delta$). Можно ли «раскачать» колебания в контуре периодическим замыканием и размыканием

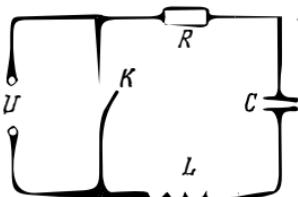


Рис. 3.92

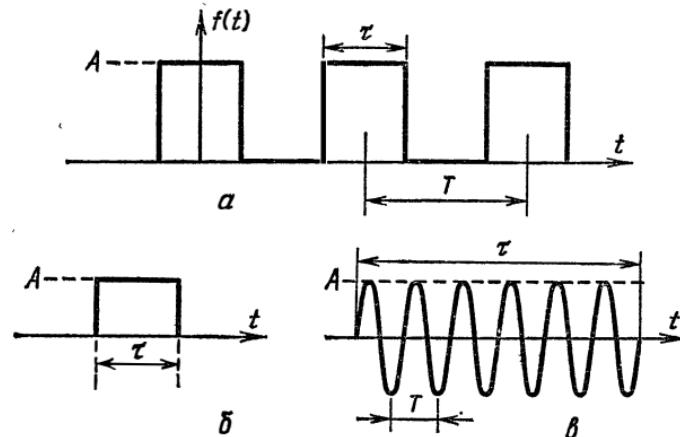


Рис. 3.93

ключа K ? При какой частоте переключений Ω амплитуда колебаний в контуре будет максимальной?

3.253. Найти спектр следующих сигналов: 1) периодическая последовательность прямоугольных

импульсов (рис. 3.93 a); 2) прямоугольный импульс (рис. 3.93 b); 3) прямоугольный цуг (рис. 3.93 c).

3.254. Найти спектральный состав выходного напряжения U_1 (т. е. амплитуды и фазы спектральных компонент) в схеме, изображенной на рис. 3.94, если обе емкости одновременно изменяются по закону $1/C = (1 + m \cos \Omega t)/C_0$. Считать, что $m \leq 1$, $\omega \gg \Omega$ и $\omega R C_0 \gg 1$.

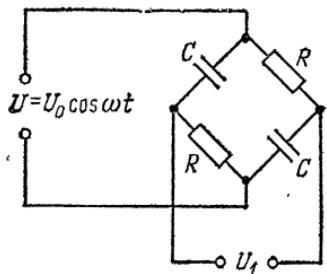


Рис. 3.94

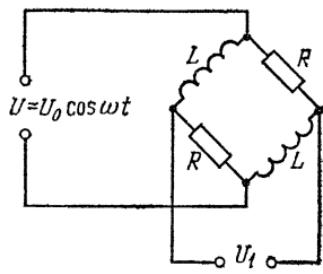


Рис. 3.95

3.255. Найти спектральный состав выходного напряжения U_1 (т. е. амплитуды и фазы спектральных компонент) в схеме, изображенной на рис. 3.95, если обе индуктивности одновременно изменяются по закону $L = L_0(1 + m \cos \Omega t)$. Считать, что $m \leq 1$, $\omega \gg \Omega$ и $\omega L_0 \ll R$.

3.256. На RC -цепочку (рис. 3.96) подается синусоидальное напряжение $U = U_0 \cos \omega t$. Параметры цепочки подобраны так, что сдвиг фаз между U_1 и U составляет 60° . Определить спектральный состав

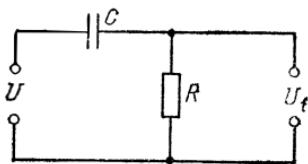


Рис. 3.96

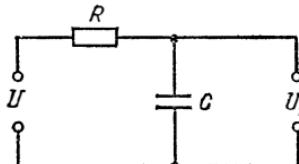


Рис. 3.97

выходного напряжения и фазовые сдвиги между спектральными компонентами для случая, когда расстояние между пластинами конденсатора (конденсатор плоский) изменяется по закону $d = d_0(1 + a \cos \Omega t)$, причем $\Omega \ll \omega$ и $a \ll 1$.

3.257. На RC -цепочку (рис. 3.97) подается синусоидальное напряжение $U = U_0 \cos \omega t$. Параметры це-

почки подобраны так, что сдвиг фаз между U_1 и U составляет -45° . Определить спектральный состав выходного напряжения и фазовые сдвиги между спектральными компонентами для случая, когда расстояние между пластинами конденсатора (конденсатор плоский) изменяется по закону $d = d_0(1 + a \cos \Omega t)$, причем $\Omega \ll \omega$, $a \ll 1$.

3.258. Высокодобротный колебательный контур находится под действием внешнего амплитудно-модулированного сигнала, изменяющегося по закону $U(t) = A(1 + m \cos^2 \Omega t) \cos \omega t$. Резонансная частота контура может перестраиваться при помощи изменения емкости. Считая коэффициент затухания контура γ заданным, определить амплитуду вынужденных колебаний в следующих случаях: 1) контур настроен на несущую частоту ω ; 2) контур настроен на частоту $\omega + 2\Omega$.

3.259. Амплитудно-модулированное колебание $U(t) = A(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega t$ подается на вход высокодобротного колебательного контура. При перестройке несущей частоты ω наблюдается несколько резонансов. Указать резонансные частоты. Определить глубину модуляции m , если известно, что амплитуда вынужденных колебаний в контуре уменьшилась в $n = 4$ раза при перестройке частоты ω от значения ω_0 до $\omega_0 + \Omega$ (ω_0 — собственная частота колебаний).

3.260. Тороидальная катушка радиусом r , имеющая N витков, равномерно намотана на ферритовый сердечник площадью сечения S (рис. 3.98).

Из-за насыщения дифференциальная магнитная проницаемость материала сердечника зависит от напряженности магнитного поля по закону $\mu = dB/dH = \mu_1 - \mu_2 H^2$. Катушка охвачена проводником, замкнутым на конденсатор емкостью C . Определить спектральный состав тока, протекающего через конденсатор, если в катушке протекает переменный ток $I = I_0 \sin \omega t$. Гистерезис в магнетике пренебречь.

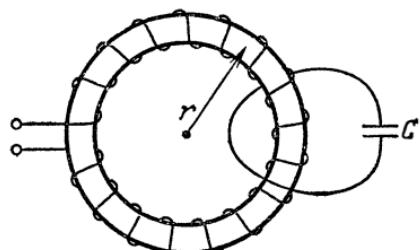


Рис. 3.98

3.261. В схеме, изображенной на рис. 3.99, анодный ток I_a при малых колебаниях в контуре линейно зависит от напряжения на сетке U_c по закону $I_a = SU_c + I_0$, где S и I_0 — постоянные величины. Катушка колебательного контура индуктивностью L и

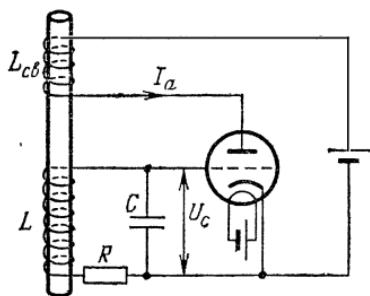


Рис. 3.99

катушка связи индуктивностью L_{cv} намотана на общий магнитный сердечник. Считая величины L , L_{cv} , C и S заданными, определить, при каком максимальном активном сопротивлении R_{max} контур α возможно возбуждение автоколебаний. Какова будет эффективная добротность Q контура,

если выбрать $R = 2R_{max}$? Провести числовой расчет для $L = 4 \cdot 10^{-4}$ Гн, $L_{cv} = 4 \cdot 10^{-6}$ Гн, $C = 10^{-8}$ Ф, $S = 2 \cdot 10^{-3}$ А/В.

3.262. Индуктивность колебательного контура периодически изменяется во времени по закону, указанному на рис. 3.100. Определить, при какой емкости C

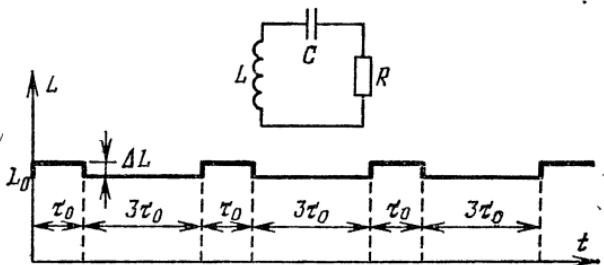


Рис. 3.100

колебательного контура возможен параметрический резонанс. При каком максимальном активном сопротивлении R_{max} контура произойдет возбуждение параметрических колебаний? Провести числовой расчет для $L_0 = 4 \cdot 10^{-4}$ Гн, $\Delta L = 4 \cdot 10^{-5}$ Гн, $\tau_0 = 10^{-6}$ с.

3.263. С помощью высокочувствительной измерительной схемы, которая проводит усреднение за время $\tau \approx 1$ с, регистрируются малые изменения ΔI постоянного тока, текущего через вакуумный диод

(рис. 3.101), вызванные, например, изменением напряжения батареи. Оценить минимальное регистрируемое на фоне дробового шума диода значение ΔI_{\min} , если средний ток диода $I \approx 10^{-8} \text{ А}$.

3.264. Сигнал от радиопередатчика, принятый на расстоянии $l_1 = 1 \text{ км}$, равен по мощности уровню собственных шумов приемника. Считая, что шумы обусловлены только тепловыми флуктуациями во входном контуре радиоприемника, определить, с какого расстояния l_2 можно было бы вести прием с тем же соотношением уровней сигнала и шума, если охладить входные цепи радиоприемника до температуры жидкого гелия $T_2 = 4 \text{ К}$.

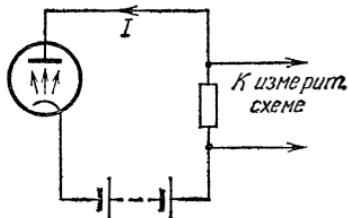


Рис. 3.101

IV. ОПТИКА

§ 4.1. Геометрическая оптика и элементы фотометрии

4.1. На плоскопараллельную стеклянную пластинку под углом φ падает узкий пучок света шириной a (рис. 4.1), содержащий две спектральные компоненты. Показатели преломления стекла для этих длин волн различны: n_1 и n_2 . Определить минимальную

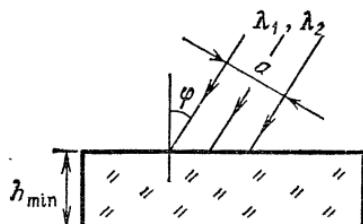


Рис. 4.1

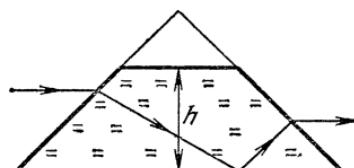


Рис. 4.2

толщину h_{\min} пластиинки, при которой свет, пройдя через пластиинку, будет распространяться в виде двух отдельных пучков, каждый из которых содержит только одну спектральную компоненту.

4.2. Для обращения изображения часто используют так называемую призму Дове (рис. 4.2), пред-

ставляющую собой усеченную прямоугольную равнобедренную призму. Определить длину l основания призмы, если ее высота равна $h = 2,11$ см, а показатель преломления стекла $n = 1,41$. Призма должна оборачивать пучок света максимального сечения.

4.3. Перед торцом стеклянного цилиндрического световода, показатель преломления которого равен n , на его оси расположен точечный источник света. Найти угловую апертуру α пучка света, проходящего через световод.

4.4. В оптической системе, предназначеннной для задержки во времени короткого светового импульса, используется многократное отражение света от двух

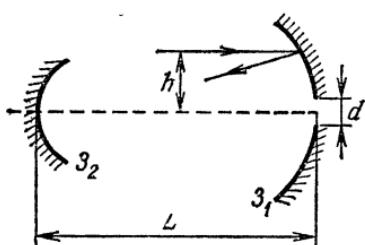


Рис. 4.3

вогнутых сферических зеркал Z_1 (радиус кривизны $r_1 = 10$ м) и Z_2 (радиус кривизны $r_2 = 1$ м), расположенных на расстоянии $L = 5,5$ м друг от друга (рис. 4.3). В центре зеркала Z_1 имеется отверстие диаметром $d = 2$ мм. На это зеркало на высоте $h =$

$= 15$ см от оси системы падает короткий световой импульс в виде тонкого луча, параллельного оси. Оценить, через какой промежуток времени Δt этот луч выйдет через отверстие.

4.5. При фотографировании на пленке из-за конечной разрешающей способности получаются резко изображенными не только те предметы, на которые сфокусирован объектив фотоаппарата, но также и предметы, находящиеся несколько ближе и несколько дальше этого расстояния. Оказалось, что при наведении объектива фотоаппарата на предмет, находящийся на расстоянии $L_0 = 10$ м, ближняя граница глубины резкости расположена на расстоянии $L_1 = 7,8$ м. Определить дальнюю границу L_2 .

4.6. Человек с нормальным зрением рассматривает удаленный предмет с помощью зрительной трубы Галилея. В качестве объектива и окуляра используются линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 40$ см и $F_2 = -2$ см. При каких расстояниях L между объективом и окуляром наблюдатель увидит четкое изображение предмета, если глаз может аккомодироваться от 10 см до бесконечности?

4.7. Спектрограф имеет объектив коллиматора диаметром D с фокусным расстоянием F_1 и объектив камеры того же диаметра с фокусным расстоянием F_2 . Источник с яркостью B резко отображается на входную щель спектрографа при помощи конденсора один раз с увеличением (расстояние от конденсора до щели равно L), другой раз с уменьшением. Каков должен быть диаметр конденсора D_k , чтобы в обоих его положениях освещенность на фотопластинке была одинаковой? Чему равна освещенность E в этом случае, если пренебречь потерями на отражение и поглощение?

4.8. Тепловой фотоприемник (рис. 4.4) представляет собой полуую камеру с площадью внутренней поверхности $S = 2 \text{ см}^2$, имеющую небольшое отверстие площадью $S_1 = 1 \text{ мм}^2$. Внутренняя поверхность камеры незначительную часть света поглощает (коэффициент поглощения $k_p = 0,01$), а остальную часть рассеивает. В этих условиях внутри полости создается равномерно распределенное по всем направлениям излучение. Какая часть светового потока Φ/Φ_0 (где Φ_0 — световой поток, попадающий на входное отверстие камеры) выходит через отверстие обратно?

4.9. Линза с относительным отверстием $1:3,5$ собирает солнечный свет на поверхности черного шарика, помещенного в вакууме. До какой температуры T может нагреться шарик, диаметр которого равен диаметру изображения Солнца, если Солнце видно с Земли под углом $\alpha_c = 0,01$ рад и солнечная постоянная E_c известна?

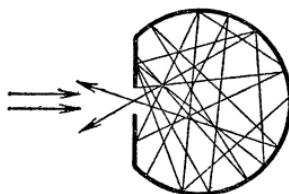


Рис. 4.4

§ 4.2. Интерференция

4.10. Спутник Земли, поднимаясь над горизонтом, излучает радиоволны длиной $\lambda = 10 \text{ см}$. Микроволновый детектор расположен на берегу озера на высоте $h = 1 \text{ м}$ над уровнем воды. Рассматривая поверхность воды как идеальный проводник, определить, при каком угле α спутника над горизонтом детектор зарегистрирует 1-й и 2-й максимумы интенсивности

сигнала. Рассмотреть случаи горизонтальной и вертикальной поляризации.

4.11. Радиоизлучение космического источника длины волны λ , имеющего угловой размер ϕ , принимается горизонтальным вибратором, служащим антенной. Вибратор расположен на отвесном берегу на высоте h над уровнем моря. Рассматривая поверхность воды как плоское зеркало, определить, как будет меняться интенсивность принимаемого сигнала в зависимости от угла α возвышения источника над горизонтом. При каких значениях углового размера источника интенсивность принимаемого сигнала не будет зависеть от α ? Для простоты расчета провести для малых значений α и ϕ .

4.12. Радиоизлучение от точечного космического источника, находящегося в плоскости экватора, принимается с помощью двух одинаковых антенн, расположенных по направлению восток-запад на расстоянии $L = 200$ м друг от друга. На входной контур приемника подается сумма сигналов, приходящих от обеих антенн по кабелям одинаковой длины. Как меняется в результате вращения Земли амплитуда напряжения U_0 на входном контуре приемника, если принимаемая длина волны будет равна $\lambda = 1$ м?

4.13. Тонкая симметричная двояковыпуклая линза сложена с тонкой симметричной двояковогнутой линзой так, что в некоторой точке они соприкасаются. Показатель преломления обеих линз равен $n = 1,6$.

Наблюдается интерференционная картина в отраженном свете на длине волны $\lambda = 0,6$ мкм. Определить фокусное расстояние F системы линз, если радиус 5-го светлого кольца равен $r = 2$ мм.

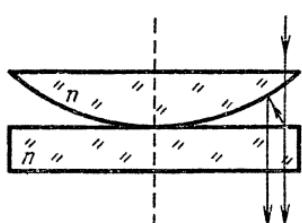


Рис. 4.5

те (рис. 4.5). Показатель преломления линзы и пластиинки равен $n = 1,5$. Найти отношение интенсивностей $\mathcal{I}_{\max}/\mathcal{I}_{\min}$ света в максимуме и минимуме интерференционной картины. Можно ли увидеть картину глазом, если контрастная чувствительность глаза равна 0,05?

4.14. Интерференционная картина (кольца Ньютона) наблюдается в проходящем свете

4.15. Источник света S расположен на расстоянии $L = 1$ м от тонкой слюдяной пластиинки толщиной $h = 0,1$ мм с показателем преломления $n = 1,4$ (рис. 4.6). На таком же расстоянии от пластиинки расположен небольшой экран \mathcal{E} , ориентированный перпендикулярно отраженным лучам, на котором наблюдаются интерференционные полосы. Угол $i = 60^\circ$. Найти порядок m интерференционной полосы в центре экрана и ширину Δl интерференционных полос. Оценить допустимый размер b и допустимую немонохроматичность $\Delta\lambda$ источника. Используется зеленый свет с длиной волны $\lambda = 560$ нм.

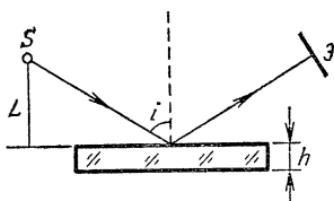


Рис. 4.6

4.16. С помощью зрительной трубы, установленной на бесконечность, наблюдают интерференционные полосы в тонкой плоскопараллельной стеклянной пластинке толщиной $h = 0,2$ мм с показателем преломления $n = 1,41$; при этом угол наблюдения i может изменяться от 0 до 90° (рис. 4.7). Найти максимальный и минимальный порядок интерференционных полос. Оценить допустимую немонохроматичность $\Delta\lambda$ источника, при которой будут достаточно четко наблюдаться все интерференционные полосы. Каков допустимый размер источника света в этом интерференционном эксперименте? Используется зеленый свет с длиной волны $\lambda = 560$ нм.

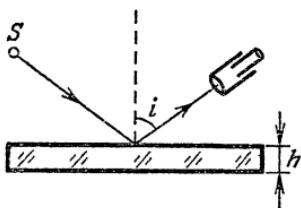


Рис. 4.7

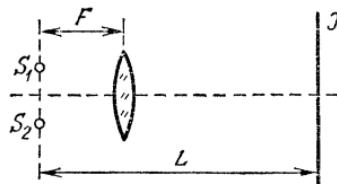


Рис. 4.8

4.17. От двух когерентных источников света S_1 и S_2 получена система интерференционных полос на экране \mathcal{E} , удаленном от источников на расстояние $L = 2$ м (рис. 4.8). Во сколько раз изменится ширина интерференционных полос, если между источниками и экраном поместить собирающую линзу с фокусным

расстоянием $F = 40$ см так, чтобы источники S_1 и S_2 оказались в фокальной плоскости линзы?

4.18. Интерференция света от двух малых отверстий в непрозрачном экране наблюдается в точке P (рис. 4.9). Позади отверстий на пути лучей поставлены две одинаковые кюветы, наполненные воздухом

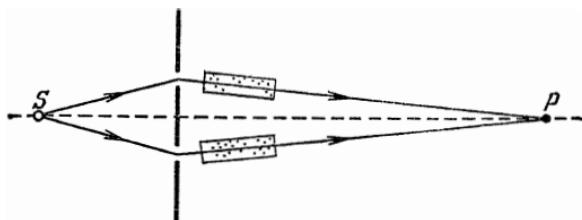


Рис. 4.9

при одинаковом начальном давлении. При изменении давления в одной из кювет изменение интенсивности света в точке P имеет осциллирующий характер. Определить разность давлений Δp газа в кюветах, при которой амплитуда осцилляций становится равной нулю, если 1-й минимум интенсивности наступает

при разности давлений $\Delta p_1 = 10^{-3}$ мм рт. ст. Спектр излучения точечного источника S равномерен в полосе $\Delta\omega$ и имеет относительную ширину $\Delta\omega/\omega = 10^{-5}$.

4.19. Оценить неточность, которую можно допускать в установке углов наклона зеркал в интерферометре Майкельсона (рис. 4.10) для того, чтобы можно было наблюдать полосы равного наклона. Ширина зеркал $D = 5$ см, длина волны света $\lambda = 0,55$ мкм.

4.20. Рассчитать, какую ширину b может иметь источник света в интерферометре Майкельсона, если зеркала интерферометра расположены на неодинаковых расстояниях от делительной пластинки и разность этих расстояний равна $L = 2$ см. Фокусное расстояние коллиматора равно $F = 25$ см. Немонохроматич-

ностью источника пренебречь, длина волны света $\lambda = 0,5$ мкм. Наблюдаются линии равной толщины.

4.21. В интерферометре Рэлея плоская волна испытывает дифракцию на двух щелях. Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости линзы с фокусным расстоянием $F = 100$ см (рис. 4.11). Одну из щелей закрывают плоской параллельной пластинкой диспергирующего вещества толщиной $h = 0,01$ мм с законом дисперсии $n(\lambda) = A - B\lambda$, где A и B — некоторые постоянные. При этом белая (ахроматическая) полоса смещается на расстояние $l = 4$ мм. Определить постоянную A , если известно, что расстояние между щелями равно $d = 1$ см.

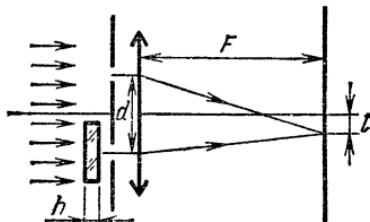


Рис. 4.11

4.22. Найти относительное смещение $\Delta l/l$ интерференционных полос, полученных с помощью пластиинки Луммера — Герке, при изменении температуры на 1°C ? Толщина пластиинки равна $h = 2$ см, показатель преломления $n = 1,5$, температурный коэффициент линейного расширения стекла $\alpha = 8,5 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$, длина волны света $\lambda = 500$ нм. Зависимость показателя преломления от температуры пренебречь.

4.23. Интерферометр Фабри — Перо состоит из двух плоских зеркал с коэффициентом отражения (по интенсивности) $\rho = 99\%$, расположенных на расстоянии $L = 10$ см друг от друга. На интерферометр, используемый в качестве оптического резонатора, падает плоская монохроматическая волна. Оценить ширину Δf резонансной кривой (в мегагерцах) и определить частотный интервал $\Delta\nu$ между двумя соседними резонансами.

4.24. Свет от протяженного монохроматического источника S падает на непрозрачный экран \mathcal{E} , в котором имеются два маленьких отверстия. Интерференция света, прошедшего через отверстия, наблюдается в точке P (рис. 4.12). Источник света S и точка P находятся на одинаковом расстоянии L от экрана. При увеличении расстояния d между отверстиями изменение интенсивности в точке P имеет осциллирующий характер. Определить линейный размер b источника света, если 1-й минимум интенсивности в точке P

наблюдается при $d = d_1 = 1$ см, а амплитуда осцилляций становится равной нулю при $d = d_2 = 20$ см (условие $d \ll L$ выполняется всегда).

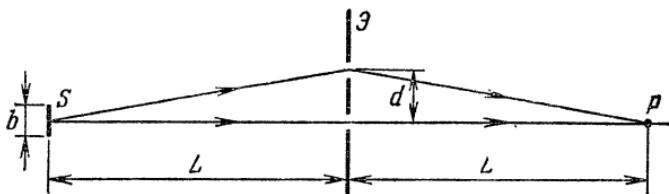


Рис. 4.12

4.25. Два пучка белого света, полученные от одного точечного источника, сходятся на входной щели оптического спектрального прибора. Разность хода равна $\Delta = 300$ м. Оценить разрешающую способность R спектрального прибора, который может обнаружить интерференцию этих пучков.

4.26. Два пучка белого света от одного источника приходят в точку наблюдения P (рис. 4.13 а) с раз-

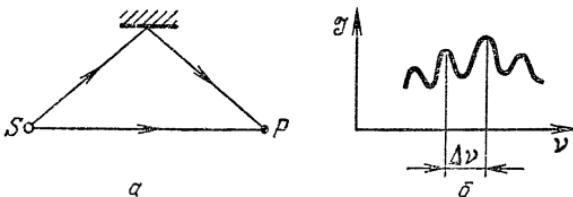


Рис. 4.13

ностью хода Δ . С помощью спектроскопа высокой разрешающей способности исследуется распределение энергии в спектре колебания, возникающего в точке P

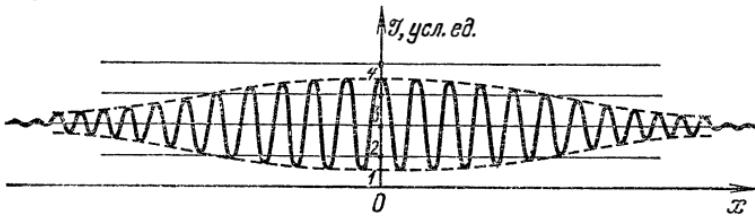


Рис. 4.14

при наложении обоих пучков. Оказалось, что наблюдаются чередующиеся максимумы и минимумы спектральной интенсивности $I(v)$, причем частотный интервал между соседними максимумами $\Delta v = 10$ МГц (рис. 4.13 б). Определить разность хода Δ .

4.27. Интерференционная картина, полученная при интерференции двух пучков одинаковой интенсивности при апертуре интерференции $\Omega = 10^{-3}$ рад, изображена на рис. 4.14. Оценить немонохроматичность источника $\Delta\lambda$ и его линейный размер b . Средняя длина волны равна $\lambda = 500$ нм.

4.28. В двухлучевой интерференционной схеме с равными интенсивностями интерферирующих лучей используется источник белого света, размер которого $b = 0,025$ см. Интерференционная картина, наблюдаемая через светофильтр, изображена на рис. 4.15. Оце-

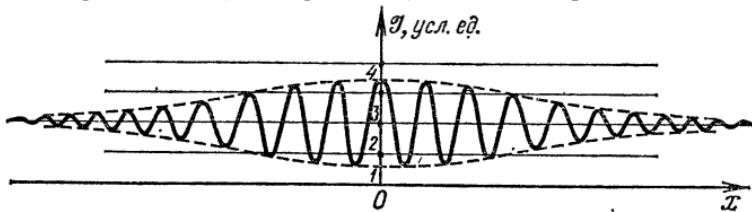


Рис. 4.15

нить полосу пропускания фильтра $\Delta\lambda$ и апертуру интерференции Ω . Средняя длина волны равна $\lambda = 500$ нм.

4.29. Найти видность γ интерференционной картины в опыте Юнга при использовании протяженного источника света. Размер источника света b , расстояние от источника до экрана со щелями L , расстояние между щелями d . Средняя длина волны равна $\lambda = 500$ нм.

4.30. Три плоские монохроматические волны с амплитудами $1, a$ и a ($a \ll 1$) падают на плоскость

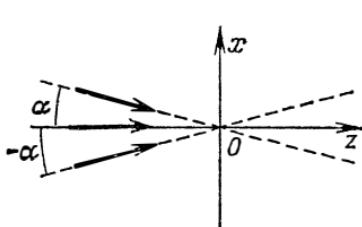


Рис. 4.16

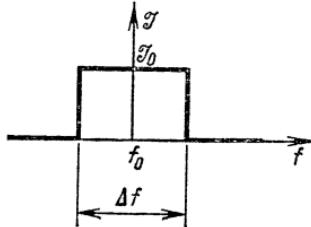


Рис. 4.17

$z = 0$ под углами $0, \alpha$ и $-\alpha$ (рис. 4.16) так, что в точке $x = 0$ колебания оказываются синфазными. При смещении плоскости наблюдения в область $z > 0$ происходят периодические изменения контраста интер-

ференционной картины. Объяснить явление. Найти положения плоскости наблюдения, в которых контраст картины максимальный и минимальный. Чему он равен?

4.31. Определить видность \mathcal{V} интерференционной картины от двух точечных источников, спектр излучения которых одинаков и изображен на рис. 4.17. Как зависит видность \mathcal{V} от ширины спектра Δf ?

§ 4.3. Дифракция. Элементы голограммы и фурье-оптики

4.32. Вдали от точечного источника S стоит бесконечный идеально отражающий экран. Из экрана удален диск диаметром $d_1 = 2r_1 \sqrt{2/3}$, где r_1 — радиус 1-й зоны Френеля, и поставлен другой диаметром $d_2 = d_1/\sqrt{2}$. Найти интенсивность \mathcal{I} отраженной волны в точке S , если диск диаметром d_2 стоит в плоскости экрана.

4.33. В плоскопараллельной стеклянной пластинке с показателем преломления n , на которую нормально падает плоская волна, вырезано круглое отверстие размером в одну зону Френеля для некоторой точки P , лежащей на оси системы. Определить, при какой толщине пластинки h интенсивность \mathcal{I} колебаний в точке P будет максимальной. Найти \mathcal{I}_{\max} , если в отсутствие пластинки интенсивность равна \mathcal{I}_0 . Длина волны падающего света равна λ .

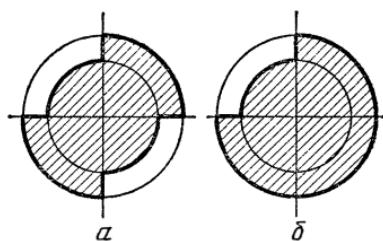


Рис. 4.18

стоящий из секторов двух кругов (рис. 4.18). Радиус одного из них равен радиусу 1-й зоны Френеля, другого — радиусу 2-й зоны Френеля. Определить интенсивность света в точке наблюдения, если в отсутствие экрана она равна \mathcal{I}_0 .

4.35. Круглое отверстие радиусом r в непрозрачном экране содержит для точки наблюдения три зоны Френеля. К отверстию без нарушения осевой симметрии вплотную прижимают тонкую собирающую

4.34. Между точечным монохроматическим источником света и точкой наблюдения перпендикулярно соединяющей их линии помещен экран, состоящий из секторов двух кругов (рис. 4.18). Радиус одного из них равен радиусу 1-й зоны Френеля, другого — радиусу 2-й зоны Френеля. Определить интенсивность света в точке наблюдения, если в отсутствие экрана она равна \mathcal{I}_0 .

линзу. Найти фокусное расстояние F , при котором интенсивность света в точке наблюдения остается прежней. Опыт проводится в монохроматическом свете с длиной волны λ .

4.36. Источник света и точка наблюдения расположены на одинаковых расстояниях от круглого отверстия в непрозрачном экране. Радиус отверстия равен радиусу 1-й зоны Френеля. Интенсивность колебаний в точке наблюдения равна \mathcal{I}_0 . Найти интенсивность \mathcal{I} колебаний в точке наблюдения, если посередине между источником и экраном расположить без нарушений осевой симметрии тонкую собирающую линзу, такую, что источник при этом оказывается в ее фокусе.

4.37. Точечный источник света и точка наблюдения P расположены симметрично на расстоянии $2L$ на оси круглого отверстия в непрозрачном экране. Отверстие оставляет открытой одну зону Френеля для точки P . Во сколько раз изменится интенсивность света в точке P , если к отверстию без нарушения осевой симметрии приложить тонкую линзу с фокусным расстоянием $F = L$?

4.38. Точечный источник света с двумя монохроматическими линиями $\lambda_1 = 560$ нм и $\lambda_2 = 280$ нм одинаковой интенсивности, расположен на расстоянии $L = 1$ м от экрана. Перед экраном на расстоянии $a = 0,2$ м расположен прозрачный диск диаметром $D = 0,6$ мм, вносящий фазовую задержку в π для обеих компонент, причем источник света, центры диска и экрана лежат на общей оси. Как отличаются интенсивности света в центре экрана при наличии и отсутствии диска?

4.39. Зонная пластина, вырезанная из стекла с показателем преломления n , представляет собой тело вращения, сечение которого показано на рис. 4.19. Пластина помещена в непрозрачную оправу. Радиусы равны $r_1 = 2$, $r_2 = 4$ и $r_3 = 6$ мм. Толщина ступенек h одинакова. Определить максимальное фокусное расстояние F_{\max} пластины для света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Указать, при какой толщине h интенсивность в фокусе будет наибольшей. Какой максимальный

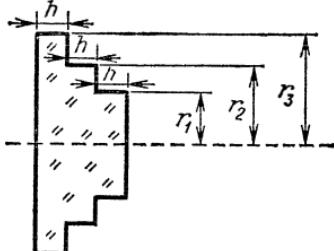


Рис. 4.19

выигрыш в интенсивности будет давать такая система?

4.40. Линза с фокусным расстоянием $F = 50$ см и диаметром $D = 5$ см освещается параллельным монохроматическим пучком света с длиной волны $\lambda = 630$ нм. Найти, во сколько раз интенсивность волны \mathcal{I} в фокусе линзы превышает интенсивность волны \mathcal{I}_0 , падающей на линзу. Оценить размер b пятна в фокальной плоскости.

4.41. Зонная пластинка с радиусом 1-й зоны Френеля $r_1 = 0,5$ мм помещена перед отверстием в экране диаметром $D = 1$ см. Пластинка освещается параллельным монохроматическим пучком света с длиной волны $\lambda = 500$ нм и интенсивностью \mathcal{I}_0 . Определить интенсивность \mathcal{I} волны в фокусе пластиинки. Оценить размер b пятна в фокальной плоскости.

4.42. На щель шириной a нормально падает плоская волна с длиной волны λ . Щель закрыта двумя стеклянными пластинками шириной $a/2$ и толщиной h с показателями преломления n_1 и n_2 и коэффициентами пропускания (по интенсивности) τ_1 и τ_2 . Найти распределение интенсивности в дифракционной картине Фраунгофера. При каком условии в центре картины получится темная полоса?

4.43. Рассчитать и проанализировать дифракционную картину при нормальном падении света на пи-

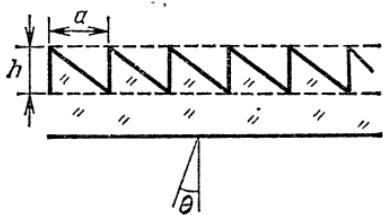


Рис. 4.20

лообразную решетку (рис. 4.20), сделанную из стекла с показателем преломления n . Число зубьев решетки равно N , $a \gg h$. Длина волны падающего света равна λ .

4.44. Параболическое зеркало диаметром $D = 1$ м используется как

антенна для волн длиной $\lambda = 3$ см. Оценить наименьшее расстояние L_{\min} , на котором следует поместить приемник для снятия диаграммы направленности.

4.45. В непрозрачной пластинке имеется отверстие диаметром $d = 1$ мм. Оно освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 500$ нм от удаленного точечного источника. Найти расстояние L_{\max} от отверстия, на котором будет наблюдаться наибольшая освещенность.

4.46. Дифракция Фраунгофера плоской волны на щели наблюдается в фокальной плоскости линзы. Во сколько раз изменится интенсивность в фокусе линзы, если щель накрыть плоскопараллельной пластинкой, амплитудный коэффициент пропускания которой имеет вид $\tau(x) = \sin(\pi x/a)$? Ось x направлена перпендикулярно щели, точки $x = 0$ и $x = a$ — координаты краев щели.

4.47. В интерферометре Майкельсона источником света служит круглая диафрагма S диаметром $d = 0,05$ мм, которая освещается параллельным пучком монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм. Длины плеч интерферометра равны $AB = 30$, $AC = 10$ см (рис. 4.21). Интерференционная картина в виде концентрических колец наблюдается на экране \mathcal{E} , помещенном в фокальной плоскости линзы. Оценить число m интерференционных колец, наблюдавшихся в пределах главного дифракционного максимума источника.

4.48. Оценить, с какого расстояния L можно увидеть раздельно свет от двух фар автомобиля.

4.49. Найти спектр плоских волн $F(u)$ за синусоидальной решеткой с амплитудным коэффициентом пропускания $\tau(x) = 1 + a \cos \Omega x$ ($a < 1$), освещаемой нормально падающей плоской волной.

4.50. Найти спектр плоских волн за щелью шириной a , освещаемой нормально падающей плоской волной. Решить ту же задачу, если щель перекрыть решеткой с периодом d и размером прозрачных участков b ($a = Nd$, где N — число штрихов решетки).

4.51. Два плоских когерентных монохроматических пучка света с длиной волны $\lambda = 500$ нм и с амплитудами A_0 и $2A_0$ падают под углами $\alpha = \pm 0,05$ рад на синусоидальную решетку с амплитудным коэффициентом пропускания $\tau(x) = 1 + (1/2)\cos \Omega x$. В точке $x = 0$ эти волны создают противофазные колебания (рис. 4.22). Период решетки равен $d = 10^{-3}$ см. Определить пространственный спектр волны за решеткой.

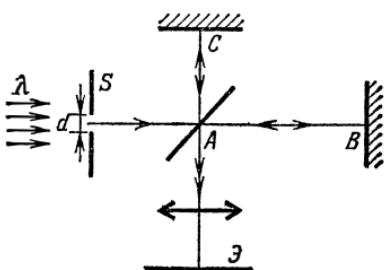


Рис. 4.21

4.52. Два плоских монохроматических когерентных пучка света с длиной волны $\lambda = 600$ нм и равными амплитудами A_0 падают под углом $\alpha = \pm 0,06$ рад на синусоидальную решетку с амплитудным коэффициентом пропускания $\tau(x) = 1 + (1/2)\sin \Omega x$ (см. рис. 4.22).

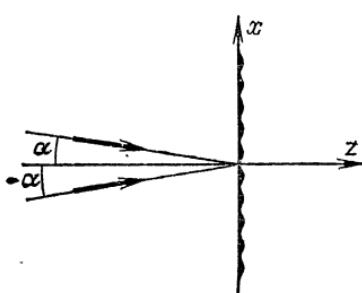


Рис. 4.22

В точке $x = 0$ эти волны создают синфазные колебания. Период решетки равен $d = 10^{-3}$ см. Определить пространственный спектр волн за решеткой.

4.53. Плоский монохроматический пучок света интенсивностью I_0 и длины волны λ дифрагирует на двух последовательно расположенных синусоидальных решетках с амплитудным коэффициентом пропускания $\tau_1(x) = \tau_2(x) = (1/2)(1 + \cos \Omega x)$ (рис. 4.23). Определить, при каких расстояниях Δz между решетками интенсивность дифракционных максимумов 1-го порядка максимальна и минимальна. Найти эти значения.

На рисунке 4.23 изображены две синусоидальные решетки, расположенные на расстоянии Δz друг от друга. Пучок света с длиной волны λ падает на первую решетку. Амплитудный коэффициент пропускания для обеих решеток одинаков: $\tau_1(x) = \tau_2(x) = (1/2)(1 + \cos \Omega x)$.

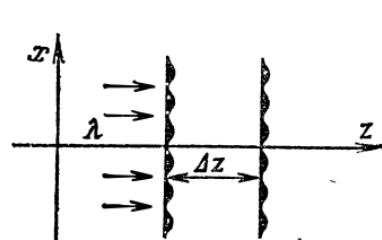


Рис. 4.23

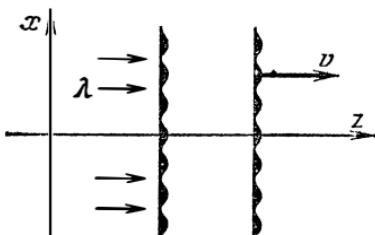


Рис. 4.24

4.54. Плоский монохроматический пучок света длины волны λ дифрагирует на двух последовательно расположенных синусоидальных решетках с амплитудным коэффициентом пропускания $\tau_1(x) = \tau_2(x) = (1/2)(1 + \cos \Omega x)$. При смещении одной из решеток вдоль оси z со скоростью v (рис. 4.24) интенсивность нулевого дифракционного максимума периодически изменяется. Определить частоту ω этих изменений, а также отношение максимальной и минимальной интенсивностей.

4.55. Один из методов наблюдения фазовых (прозрачных) объектов состоит в следующем: в общей

фокальной плоскости линз L_1 и L_2 на оптической оси устанавливается прозрачная пластина Π_L , вносящая фазовую задержку в $\pi/2$ (рис. 4.25). Найти распределение интенсивности $\mathcal{I}(x)$ в плоскости изображения (в задней фокальной плоскости линзы L_2), если предмет — фазовая синусоидальная решетка с амплитудным коэффициентом пропускания $\tau(x) = \exp(im \cos \Omega x)$,

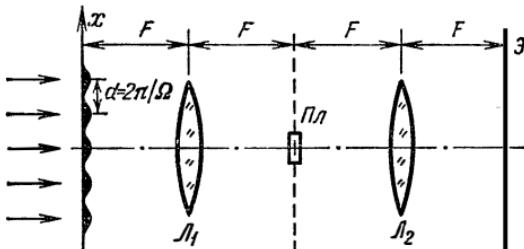


Рис. 4.25

$m \ll 1$ — расположен в передней фокальной плоскости линзы L_1 . Как изменится картина интенсивности, если использовать пластиинку с задержкой в $3\pi/2$? Как изменится контраст, если пластиинка обладает коэффициентом поглощения k_p ?

4.56. Один из методов наблюдения фазовых (прозрачных) объектов состоит в том, что плоскость наблюдения P смещается на некоторое расстояние l

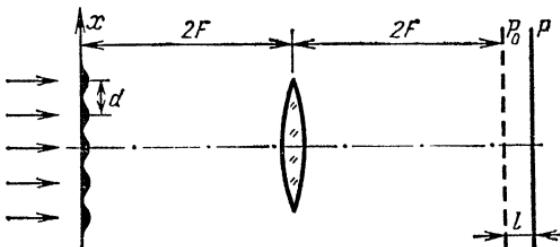


Рис. 4.26

относительно плоскости P_0 , сопряженной с объектом (т. е. плоскости, в которой в соответствии с геометрической оптикой располагается его изображение) (рис. 4.26). При этом контрастность наблюдаемой картины периодически изменяется при изменении l . Найти период d фазовой синусоидальной решетки, если в схеме, представленной на рисунке, ее контрастное изображение в первый раз возникло при $l_1 = \Delta L$. При

каких других значениях l изображение будет контрастным?

4.57. Оптическая система состоит из двух одинаковых линз с общей фокальной плоскостью; F — фокусное расстояние линз. Амплитудная синусоидальная решетка находится в передней фокальной плоскости 1-й линзы, а изображение рассматривается в задней фокальной плоскости 2-й линзы. Как зависит характер изображения от соотношения между частотой решетки Ω и диаметром линзы D ?

4.58. При наблюдении фазовых (прозрачных) структур методом темного поля в общей фокальной плоскости линз L_1 и L_2 (рис. 4.27) на оптической оси

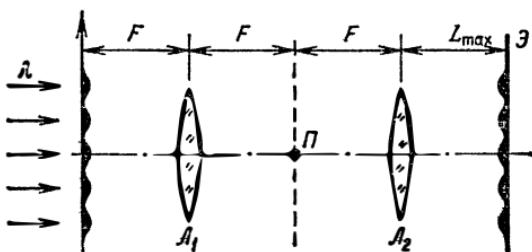


Рис. 4.27

устанавливается проволока Π . Фазовая решетка создается в жидкости стоячей ультразвуковой волной частоты $f = 20$ МГц. Найти расстояние Δl между интерференционными полосами на экране \mathcal{E} , а также максимально допустимое удаление L_{\max} экрана от линзы L_2 , при котором еще возможно наблюдение интерференционной картины. Диаметр линзы L_2 равен $D = 4$ см, скорость звука в жидкости $v = 1,5$ км/с. Решетка освещается нормально падающей плоской волной ($\lambda = 0,5$ мкм).

4.59. При наблюдении фазовых (прозрачных) структур методом темного поля в общей фокальной плоскости линз L_1 и L_2 (см. рис. 4.27) на оптической оси устанавливается проволока Π . Оценить ее допустимый диаметр (d_{\max} и d_{\min}) для наблюдения на экране \mathcal{E} интерференционной картины от фазовой синусоидальной решетки с периодом $\Lambda = 2$ мм, освещаемой нормально падающей плоской волной длины $\lambda = 0,5$ мкм. Диаметр линзы L_2 равен $D = 2$ см, фокусное расстояние $F = 20$ см.

4.60. При голограммировании в лазерном излучении плоского предмета A опорный пучок света создавался с помощью призмы Pr , находящейся в плоскости предмета (рис. 4.28). Где расположены мнимое и

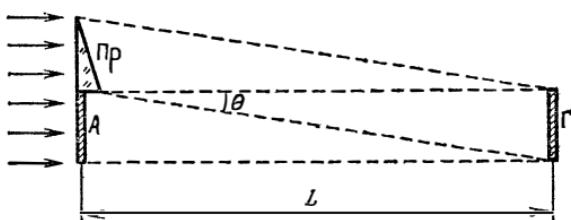


Рис. 4.28

действительное изображения предмета при просвечивании голограммы Γ ? Излучение лазера считать плоской монохроматической волной. Угол отклонения луча призмой равен θ . Расстояние от предмета до голограммы равно L .

4.61. Найти амплитудный коэффициент пропускания $\tau(x)$ голограммы точечного источника света, если в качестве опорной волны используется нормально падающая на плоскость голограммы плоская волна. Расстояние от источника до голограммы равно L . Считать, что прозрачность голограммы пропорциональна интенсивности света при записи. Найти положение действительного и мнимого изображений при восстановлении изображения нормально падающей плоской волной. Как изменится положение восстановленных изображений, если при записи использовать наклонный опорный пучок с углом наклона θ ? Оценить минимальный размер a_{\min} голограммы, при котором полностью используется разрешающая способность фотоматрицы, равная n (линий на mm). Найти размер b восстановленного изображения.

4.62. Голограмма записана на пластинке радиусом $r = 5$ см. Она освещается монохроматическим светом длины волны $\lambda = 0,5$ мкм, а изображение получается на расстоянии $L = 1$ м. Найти допустимую немонохроматичность света $\Delta\lambda$, при которой еще полностью используется теоретическая разрешающая способность голограммы.

4.63. Получена голограмма небольшого предмета, расположенного на расстоянии $L = 50$ см от нее.

Каким должен быть размер D фотопластиинки, чтобы записать на голограмме детали размером $b \approx 0,01$ мм? Какая немонокроматичность света $\Delta\lambda$ допустима при записи голограммы? Длина волны света $\lambda = 0,5$ мкм.

§ 4.4. Дифракционный предел разрешения оптических инструментов и спектральных приборов

4.64. При аэрофотосъемке местности используется объектив с фокусным расстоянием $F = 10$ см и диаметром $D = 5$ см. Съемка производится на фотопленку, имеющую разрешающую способность $R = 100 \text{ mm}^{-1}$. Определить, какие детали местности могут быть разрешены на фотографиях, если съемка производилась с высоты $h = 10$ км.

4.65. Объектив телескопа имеет фокусное расстояние $F_1 = 3$ м и диаметр $D = 15$ см. Определить фокусное расстояние F_2 окуляра, при котором полностью используется разрешающая способность объектива, если диаметр зрачка глаза $d = 3$ мм. Предполагая, что в системе телескоп — глаз отсутствуют aberrации, оценить, на каком расстоянии L с помощью такого телескопа можно читать книгу с размером букв $b \approx 2$ мм.

4.66. Космонавты прибыли на Луну. Чтобы сообщить об этом на Землю, они растягивают на поверхности Луны черный круглый тент. Каким должен быть радиус r этого тента, чтобы его можно было заметить с Земли в телескоп с объективом $D = 5$ м? Контрастная чувствительность приемника 0,01.

4.67. Блестящий металлический межпланетный корабль попечного размера $d = 10$ м опустился на поверхность Луны в полнолуние. Оценить диаметр D зеркала телескопа, в который можно с Земли увидеть прибытие корабля, если контраст, надежно обнаруживаемый глазом, принять равным $k = 0,15$. Считать коэффициент отражения лунной поверхности равным $\rho_1 = 0,1$, а металла — $\rho_2 = 1$; наблюдение ведется в свете с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм.

4.68. Оценить длительность τ светового импульса от одной грани 8-гранного вращающегося зеркала, расположенного на расстоянии $L = 200$ м от точечного источника света S . Световой импульс регистрируется фотоумножителем с малой шириной входной щели,

расположенным вблизи источника (рис. 4.29). Ширина грани зеркала равна $a = 1$ см. Считать длину волны света равной $\lambda = 500$ нм. Зеркало вращается с частотой $f = 16$ Гц.

4.69. Угловая апертура электронного микроскопа равна $\Omega_{\text{эл}} = 10^{-4}$, а оптического — $\Omega_{\text{опт}} \approx 1$. Оценить напряжение U , ускоряющее электроны, при котором разрешающая способность этих приборов будет одинакова.

4.70. Луч лазера фокусируется идеальной оптической системой с отношением $F/D = 1$. Оценить мощность P лазера, при которой в электрическом поле в фокусе системы электроны смогут приобретать энергию порядка энергии покоя $m_0 c^2$.

4.71. Ракета удаляется от Земли и перестает быть видимой на фоне неба в телескоп с объективом диаметром $D_1 = 80$ мм, когда она находится на расстоянии $L_1 = 2 \cdot 10^4$ км от Земли. На каком расстоянии L_2 от Земли удается заметить эту ракету в телескоп с объективом диаметром $D_2 = 200$ мм при той же контрастной чувствительности глаза?

4.72. Излучение лазера непрерывного действия на длине волны $\lambda = 0,63$ мкм мощностью $P = 10$ мВт направляется на спутник с помощью телескопа, объектив которого имеет диаметр $D = 30$ см. Свет, отраженный спутником, улавливается другим таким же телескопом и фокусируется на фотоприемник с пороговой чувствительностью $P_{\text{пор}} = 10^{-14}$ Вт. Оценить максимальное расстояние L_{max} до спутника, на котором отраженный сигнал еще может быть обнаружен. Поверхность спутника равномерно рассеивает падающий свет с коэффициентом отражения $\rho = 0,9$. Диаметр спутника $d = 20$ см.

4.73. Оценить расстояние L , с которого можно увидеть невооруженным глазом свет лазера, генерирующего в непрерывном режиме мощность $P = 10$ Вт на частоте $v = 4 \cdot 10^{15}$ Гц, если для формирования луча используется параболическое зеркало диаметром $D = 50$ см. Глаз видит источник в зеленой части спектра, если в зрачок (диаметр зрачка $d = 5$ мм) попадает $n = 60$ квантов в секунду.

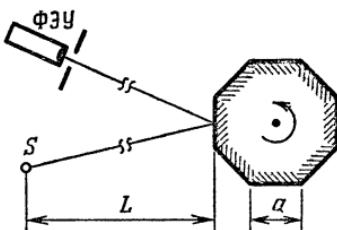


Рис. 4.29

4.74. Свет далекого точечного источника S падает на фотоприемник непосредственно и отразившись от горизонтальной плоскости (рис. 4.30). При вертикальном перемещении источника фотоприемник $\Phi П$ регистрирует изменение интенсивности падающего на него света. Оценить максимальный угол α возвышения

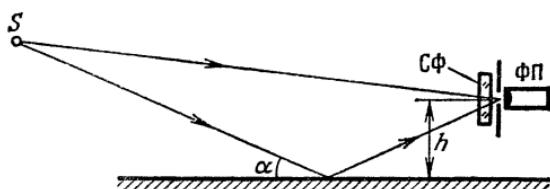


Рис. 4.30

источника над горизонтом, при котором еще заметны изменения фототока, если перед фотоприемником установлен светофильтр $С\Phi$ с полосой пропускания $\Delta f = 3 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$. Входное отверстие фотоприемника находится на высоте $h = 1 \text{ см}$ над отражающей плоскостью.

4.75. Параллельный пучок света падает на призму с угловой дисперсией $d\phi/d\lambda = 10^3 \text{ см}^{-1}$. Свет, прошедший через призму, нормально падает на дифракционную решетку с периодом d . Размер решетки превышает поперечное сечение пучка лучей, выходящих из призмы. При каком значении d разрешающая способность системы в спектре 2-го порядка будет в два раза больше разрешающей способности одной призмы? Считать дифракционные углы малыми.

4.76. Определить разрешающую способность спектрометра инфракрасного диапазона, работающего по следующему принципу. Излучение исследуемого ИК-источника в диапазоне $\lambda_{\text{ИК}} \approx 3 \text{ мкм}$ смешивается в нелинейном кристалле с излучением стабильного аргонового лазера. При этом возникает излучение на суммарной частоте, лежащей в оптическом диапазоне. Последнее анализируется с помощью интерферометра Фабри—Перо, зеркала которого отстоят друг от друга на расстояние $L = 1 \text{ см}$ и имеют коэффициент отражения $\rho = 0,9$.

4.77. Свет от газоразрядной трубки, диаметр которой $D = 1 \text{ см}$, непосредственно падает на дифракционную решетку, расположенную на расстоянии $L =$

$= 100$ см. Оценить, какой будет в этих условиях максимальная разрешающая способность $R_{\max} = \lambda/\delta\lambda$.

4.78. Свет от газоразрядной трубки, диаметр которой $D = 0,1$ см, непосредственно падает на дифракционную решетку. Оценить, на каком минимальном расстоянии L_{\min} от трубки нужно расположить решетку, чтобы при этом можно было разрешить две спектральные линии с расстоянием между ними $\delta\lambda = 5$ нм при $\lambda = 500$ нм.

4.79. Свет от удаленного источника, угловой размер которого составляет $\psi = 10^{-3}$ рад, непосредственно падает на дифракционную решетку. Оценить, какую максимальную разрешающую способность R_{\max} можно получить в таких условиях.

4.80. Удаленный протяженный источник испускает две узкие спектральные линии $\lambda_1 = 500$ нм и $\lambda_2 = 500,2$ нм равной интенсивности. Свет от источника непосредственно падает на дифракционную решетку. Оценить угловой размер ψ источника, при котором можно разрешить эти две линии.

4.81. Одним из условий стабильности дифракционной картины, полученной с помощью дифракционной решетки, является постоянство температуры. Оценить максимально допустимое изменение температуры ΔT решетки, при котором еще практически полностью используется ее разрешающая способность, если фотографирование спектров ведется в 1-м порядке. Температурный коэффициент линейного расширения материала решетки $\alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, полное число штрихов $N = 10^5$.

4.82. Импульсное излучение лазера с длительностью импульсов $\tau = 10^{-12}$ с проходит через спектрометр с дифракционной решеткой с максимальной оптической разностью хода $\Delta = 10$ см. Найти изменение ширины полосы излучения $\Delta\omega_2/\Delta\omega_1$.

4.83. Наблюдается дифракция параллельного пучка монохроматического излучения с частотой $v = 10^{15}$ Гц, падающего нормально на дифракционную решетку с числом штрихов $N = 1,5 \cdot 10^4$. Во сколько раз изменится угловая расходимость в 1-м порядке, если падающее на решетку излучение промодулировать так, чтобы были сформированы короткие импульсы длительностью $\tau = 10^{-12}$ с?

4.84. Электрон движется в вакууме со скоростью v вблизи поверхности дифракционной решетки с

периодом d . Скорость электрона параллельна поверхности решетки и перпендикулярна ее штрихам. Определить длины волн, которые могут излучаться под углом θ к нормали решетки из-за взаимодействия электрона с решеткой (эффект Смита — Парселла).

4.85. Дифракционная решетка с числом штрихов $N = 10^5$ имеет заводской дефект: ее период на разных участках не одинаков и изменяется в пределах 0,1 %. Можно ли с помощью такой решетки обнаружить простой эффект Зеемана в магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл на длине волны $\lambda = 600$ нм? Найти минимальное расстояние между линиями, которое может разрешить такая решетка.

4.86. Для дифракционной решетки с числом штрихов $N = 500$ штрих/мм предел разрешения в спектре 1-го порядка равен $\delta\lambda = 0,1$ нм при средней длине волны $\lambda = 600$ нм. Изображение спектра получается с помощью линзы на экране. Определить минимальный допустимый диаметр D_{\min} линзы, при котором изображение спектра может быть разрешено.

4.87. В интерферометре Фабри — Перо с открытым воздушным промежутком между зеркалами при температуре $T_1 = 293$ К наблюдается одно из колец равного наклона, угловой размер которого $\phi_1 = 0,01$ рад. При повышении температуры кольцо стягивается к центру и исчезает. Найти температуру T_2 , при которой это произойдет, если для воздуха при $T_1 = 293$ К разность $n - 1 = 0,00029$, где n — показатель преломления. (Для воздуха разность $n - 1$ пропорциональна его плотности.)

4.88. С помощью интерферометра Фабри — Перо исследуется выделенный системой фильтров участок спектра шириной $\Delta\lambda = 0,2$ нм. Минимальная разность длин волн соседних спектральных линий $\delta\lambda = 0,001$ нм. Оценить максимальное значение коэффициента пропускания $\tau = 1 - \rho$ (где ρ — коэффициент отражения зеркал), при котором разрешаются соседние линии.

4.89. На резонатор Фабри — Перо с расстоянием между зеркалами (базой) $L = 0,5$ см и разрешающей способностью $R = 10^6$ падает ультракороткий световой импульс длительностью $\tau = 10^{-11}$ с и с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Определить зависимость от времени сигнала, который регистрирует фотоприемник, установленный за резонатором Фабри — Перо.

4.90. Для выделения одной моды из большого числа мод, генерируемых газовым лазером, предлагается использовать модифицированный резонатор Фабри—Перо, одно из зеркал которого заменено наклонной отражательной дифракционной решеткой DP (рис. 4.31). Внутри резонатора располагается наряду

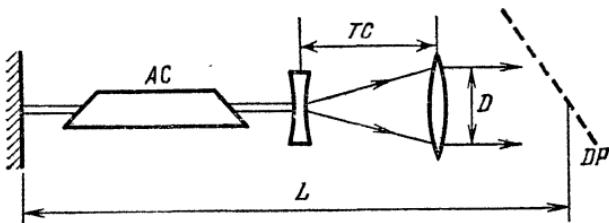


Рис. 4.31

с активной средой AC телескопическая система TC , предназначенная для расширения светового пучка, падающего на решетку. Найти минимальный размер D , до которого нужно расширить пучок, чтобы было можно выделить одну моду. Длина резонатора равна $L = 15$ см, длина волны генерации $\lambda = 1,2$ мкм, решетка имеет $N = 1600$ штрих/мм. Используется дифракция в 1-м порядке.

§ 4.5. Поляризация. Оптические явления в кристаллах

4.91. Плоская поляризованныя по кругу монохроматическая волна света длины λ интенсивности \mathcal{I}_0 падает на диск, вырезанный из идеального поляроида, показатель преломления которого равен n . Диск закрывает для некоторой точки P одну зону Френеля. Какова должна быть толщина d диска, чтобы интенсивность света в точке P была максимальной? Найти эту интенсивность \mathcal{I}_{\max} .

4.92. Круглое отверстие в непрозрачном экране содержит для точки наблюдения P одну зону Френеля. Отверстие закрыто поляроидами так, что направления колебаний в первой и второй половинах зон взаимно перпендикулярны. Отверстие освещается светом, поляризованным по кругу. Определить интенсивность света \mathcal{I} в точке P , если в отсутствие экрана она равна \mathcal{I}_0 . Как будет поляризован свет в точке

наблюдения? Считать, что в поляроидах нет поглощения света разрешенной поляризации.

4.93. Определить интенсивность света \mathcal{I} в точке P экрана, на который падает монохроматический свет интенсивности \mathcal{I}_0 , если на пути поставить диск из оптически активного вещества, закрывающего полторы зоны Френеля и поворачивающего плоскость поляризации на 90° . Отражением и поглощением света пренебречь.

4.94. Параллельный пучок неполяризованного монохроматического света падает на пластинку в $\lambda/4$. Интенсивность света в некоторой точке P за пластинкой равна \mathcal{I}_0 . Из пластинки вырезают диск, закрывающий одну зону Френеля для точки P . Диск повернули вокруг луча на угол 90° и поставили на место. Какой стала интенсивность \mathcal{I} в точке P ?

4.95. Параллельный пучок неполяризованного монохроматического света падает на пластинку в $\lambda/2$. Интенсивность света в некоторой точке наблюдения P за пластинкой равна \mathcal{I}_0 . Из пластинки вырезают диск, закрывающий полторы зоны Френеля для точки P . Диск повернули вокруг луча на угол $\pi/2$ и поставили на место. Какой стала интенсивность \mathcal{I} в точке P ?

4.96. Из кристаллической пластинки $\lambda/2$ вырезаны диски диаметром в одну и в две зоны Френеля для точки P . Диски вносят в пучок света вплотную друг к другу, так что у них совпадают: 1) разноименные главные направления, 2) одноименные главные направления. При этом для света, поляризованного по одному из главных направлений, ни амплитуда, ни фаза колебаний не изменились. Во сколько раз изменится интенсивность света той же поляризации в случаях 1) и 2), если малый диск повернуть на 90° ?

4.97. Показатель преломления кристаллического кварца для длины волны $\lambda = 589$ нм равен $n_o = 1,544$ для обыкновенного луча и $n_e = 1,553$ для необыкновенного луча. На пластинку из кварца, вырезанную параллельно оптической оси, нормально падает линейно поляризованный свет указанной длины волны, занимающий спектральный интервал $\Delta\lambda = 40$ нм. Найти толщину пластинки d и направление поляризации падающего света, если свет после пластинки оказался неполяризованным.

4.98. На плоский экран, состоящий из двух поляридных полуплоскостей, граничащих друг с другом

вдоль прямой, перпендикулярно падает пучок параллельных лучей, поляризованных по кругу (рис. 4.32). Оси поляроидов взаимно перпендикулярны. Интенсивность падающего света равна \mathcal{I}_0 . Определить интенсивность \mathcal{I} света в точке P , расположенной в плоскости, перпендикулярной плоскости экрана и проходящей через границу раздела между поляроидами. Как будет поляризован свет в точке P ?

4.99. Плоская волна монохроматического света длины λ , поляризованного по кругу, создает в точке P интенсивность \mathcal{I}_0 . На пути волны ставят большую пластинку из идеального поляроида, как показано на рис. 4.33. Показатель преломления вещества поляроида n . Найти толщину d пластиинки, при которой интенсивность света в точке P будет максимальной. Чему равна \mathcal{I}_{\max} ?

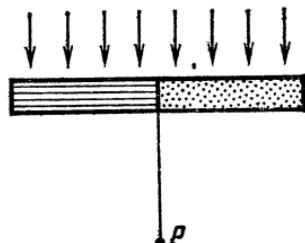


Рис. 4.32

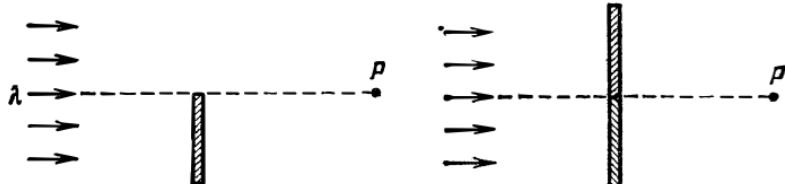


Рис. 4.33

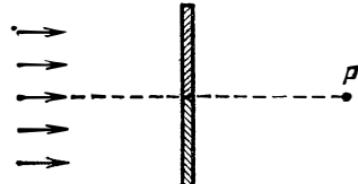


Рис. 4.34

4.100. Плоская волна монохроматического света, поляризованного по кругу, создает в точке P интенсивность \mathcal{I}_0 . На пути волны ставят две большие пластиинки в $\lambda/4$, как показано на рис. 4.34. Главные направления пластиинок ориентированы взаимно перпендикулярно. Найти интенсивность \mathcal{I} в точке P .

4.101. Один поляроид пропускает 30 % света, если на него падает естественный свет. После прохождения света через два таких поляроида интенсивность падает до 9 %. Найти угол ϕ между осями поляроидов.

4.102. Определить, во сколько раз изменится интенсивность частично поляризованного света, рассматриваемого через николь, при повороте николя на 60° по отношению к положению, соответствующему максимальной интенсивности. Степень поляризации света $a = (\mathcal{I}_{\max} - \mathcal{I}_{\min}) / (\mathcal{I}_{\max} + \mathcal{I}_{\min}) = 0,5$.

4.103. Расположив пластинку, вырезанную из исландского шпата, параллельно его оптической оси, между скрещенными николями, можно осуществить монохроматор, позволяющий, например, задержать одну из линий дублета натрия и пропустить другую. Найти, какой должна быть при этом минимальная толщина d_{\min} пластиинки и как ее нужно ориентировать. Показатели преломления исландского шпата для линии $\lambda_1 = 589,0$ нм равны $n_{e1} = 1,48654$ и $n_{o1} = 1,65846$, для линии $\lambda_2 = 589,6$ нм $n_{e2} = 1,48652$ и $n_{o2} = 1,65843$.

4.104. Имеется горизонтальный параллельный пучок эллиптически поляризованного света. Обнаружено, что при прохождении пучка через пластинку в $\lambda/4$ при определенной ее ориентации свет оказывается линейно поляризованным под углом $\alpha_1 = 23^\circ$ к вертикали. Если пластинку повернуть на угол 90° , то свет снова оказывается линейно поляризованным под углом $\alpha_2 = 83^\circ$ к вертикали. Найти отношение a/b полуосей эллипса поляризации и угол ϕ наклона большой оси.

4.105. Параллельный пучок естественного света интенсивностью \mathcal{I}_0 и длины волны λ падает на систему из двух скрещенных поляроидов P_1 и P_2 и клина K из кварца с малым преломляющим углом α . Показатели преломления кварца равны n_e и n_o . Оптическая ось клина параллельна его ребру и составляет угол 45° с разрешенными направлениями поляроидов (рис. 4.35). Пройдя через систему, свет падает на белый экран \mathcal{E} .

Найти распределение интенсивности света $\mathcal{I}(x)$ на экране. Что увидит наблюдатель на экране \mathcal{E} , если между ним и поляроидом P_2 расположить линзу так, чтобы экран оказался в ее фокальной плоскости?

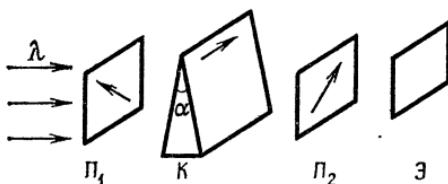


Рис. 4.35

интенсивности света $\mathcal{I}(x)$ на экране. Что увидит наблюдатель на экране \mathcal{E} , если между ним и поляроидом P_2 расположить линзу так, чтобы экран оказался в ее фокальной плоскости?

4.106. На систему, состоящую из чередующихся $N+1$ поляроидов и N пластинок кварца, вырезанных параллельно оптической оси, падает плоская монохроматическая волна длины λ (рис. 4.36). Главные направления всех поляроидов параллельны и составляют угол 45° с оптической осью пластинок. Волна

поляризована вдоль главного направления поляроида. Толщины пластинок равны d , $2d$, ..., $2^{N-1}d$. Показатели преломления кварца равны n_o и n_e . Определить амплитуду волны A на выходе из системы, если на входе она равна A_0 . Отражением света на границах

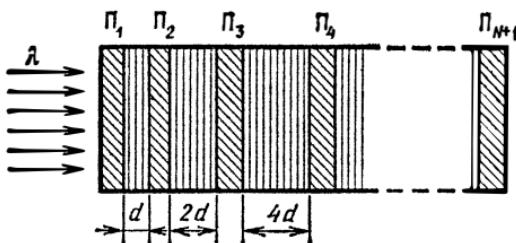


Рис. 4.36

пластинок и поляроидов пренебречь. Является ли такая система спектральным прибором?

4.107. На периодическую структуру, состоящую из тонких параллельных диэлектрических пластин, падает плоская монохроматическая волна (рис. 4.37). Толщина пластин равна d_0 , расстояние между ними d , диэлектрическая проницаемость пластин ϵ_1 , окружающей среды ϵ . Длина волны значительно больше d_0 и d . Показать, что структура аналогична одноосному кристаллу, и определить показатели преломления обыкновенного n_o и необыкновенного n_e лучей.

4.108. Предлагается следующая схема измерения спина фотона. Пучок циркулярно поляризованного света длины волны $\lambda = 0,5$ мкм падает на зачерненный диск, подвешенный на тонкой нити так, что он может совершать крутильные колебания относительно оси. При этом измеряется установившийся угол поворота диска массой m и радиусом $r = 5$ см. Найти период собственных колебаний диска T , если при мощности светового потока $P = 10$ Вт угол поворота диска составил $\alpha = 1'$.

4.109. Абсолютно черная пластинка площадью $S = 10$ см 2 освещается монохроматическим светом длины волны $\lambda = 600$ нм, поляризованным по кругу.

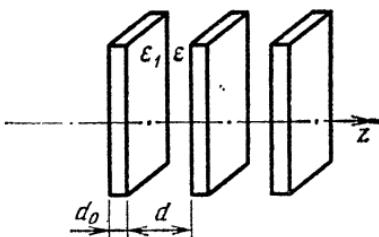


Рис. 4.37

Интенсивность света равна $\mathcal{I} = 30 \text{ Вт/см}^2$. Какой врачающий момент \mathcal{M} испытывает пластинка? Зависит ли \mathcal{M} от распределения интенсивности в пучке? Как изменится врачающий момент, если черную пластинку заменить на кристаллическую пластинку в $\lambda/4$? Какую надо взять кристаллическую пластинку, чтобы врачающий момент \mathcal{M} удвоился??

4.110. Эллиптически поляризованный параллельный световой поток длины волны $\lambda = 600 \text{ нм}$ и интенсивностью $\mathcal{I} = 30 \text{ Вт/см}^2$ падает перпендикулярно на абсолютно черную пластинку. Площадь поперечного сечения светового потока $S = 10 \text{ см}^2$. Отношение длин главных полуосей эллипса поляризации в световом пучке составляет $a/b = 2$. Найти врачающий момент \mathcal{M} , который испытывает пластинка при поглощении света.

4.111. Поляризованный по правому кругу световой поток длины волны $\lambda = 500 \text{ нм}$, интенсивность которого составляет $\mathcal{I} = 1,4 \cdot 10^6 \text{ эрг/(с}\cdot\text{см}^2)$ (такой интенсивностью обладает солнечное излучение на границе земной атмосферы), падает на двоякотрепомляющую пластинку в $\lambda/2$. Как будет поляризован свет после прохождения пластинки? Определить врачающий момент на единицу площади (\mathcal{M}/S) такой пластинки.

4.112. На кварцевую пластинку в $\lambda/4$ перпендикулярно падает пучок линейно поляризованного света с длиной волны $\lambda = 628 \text{ нм}$ и мощностью $P = 3 \text{ Вт}$. При каких условиях пластинка будет испытывать врачающий момент и каковы его значение и направление?

4.113. Некогерентная смесь естественного и линейно поляризованного света с длиной волны $\lambda = 500 \text{ нм}$ и интенсивностью $\mathcal{I} = 1,4 \cdot 10^6 \text{ эрг/(с}\cdot\text{см}^2)$ (такой интенсивностью обладает солнечное излучение на границе земной атмосферы) падает на двоякотрепомляющую пластинку в $\lambda/4$. Определить врачающий момент на единицу площади (\mathcal{M}/S) такой пластинки, если направление колебаний в линейно поляризованном свете составляет угол 45° с главными направлениями пластинки. Известно, что при анализе падающего излучения с помощью поляризатора найдено $\mathcal{I}_{\max}/\mathcal{I}_{\min} = 3$.

4.114. Две одинаковые плоские густые решетки из параллельных тонких идеально проводящих проволок

расположены в параллельных плоскостях на расстоянии $l = 1,5$ см одна от другой так, что образующие их проволоки взаимно перпендикулярны. Плоскость поляризации волны $\lambda = 8,5$ см, падающей на систему решеток под углом $\alpha = 45^\circ$, наклонена на угол $\theta = 45^\circ$ к плоскости падения. Определить характер поляризации отражённой волны для случая, когда плоскость падения параллельна направлению проволок 1-й решетки.

§ 4.6. Дисперсия и распространение света

4.115. Лазер на CO_2 со средней длиной волны $\lambda = 10,6$ мкм излучает две близкие частоты v_1 и v_2 . Излучение такого лазера смешивают в нелинейном кристалле с излучением лазера на Nd ($\lambda_3 = 1,06$ мкм). Анализ излучения на комбинационных частотах ($v_1 + v_3$ и $v_2 + v_3$) показал, что соответствующие им длины волн отличаются на $\delta\lambda = 0,5$ нм. Определить разность длин волн $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ излучения лазера.

4.116. Показатель преломления ионосферы для радиоволн с частотой $v = 10$ МГц равен $n = 0,90$. Найти концентрацию N электронов в ионосфере, а также фазовую v и групповую u скорости для этих радиоволн.

4.117. При изучении прохождения плоской электромагнитной волны частотой $v = 8$ МГц через плоские однородные слои плазмы с концентрацией свободных электронов $N = 10^6 \text{ см}^{-3}$ найдено, что энергетические коэффициенты пропускания волн отличаются в 10 раз для слоев плазмы, толщины которых отличаются в два раза. Пренебрегая интенсивностью волн, отраженных от задней границы каждого слоя, найти их толщины d_1 и d_2 .

4.118. Для оценки интегральных и средних характеристик межзвездной плазмы можно использовать экспериментальный факт, установленный сразу же после открытия пульсаров. Оказалось, что из-за дисперсии плазмы импульсы радиоизлучения пульсаров на более низких частотах всегда запаздывают по отношению к импульсам более высоких частот. Рассмотрите следующий идеализированный пример. Два монохроматических сигнала с длинами волн $\lambda_1 = 3$ см и $\lambda_2 = 5$ см распространяются в плазме. Определить

полное число n свободных электронов на пути сигналов (т. е. их число в цилиндре площадью 1 см^2 и высотой, равной расстоянию источник — приемник), если испущенные одновременно сигналы запаздывают относительно друг друга на время $\Delta t = 10^{-5} \text{ с}$. Концентрация электронов хотя и не постоянна вдоль пути сигналов, но показатель преломления везде весьма близок к единице. Определить также среднюю концентрацию N свободных электронов на пути сигналов, если их относительное запаздывание $\Delta t/t_0 = 10^{-15}$ (t_0 — время распространения от источника до приемника).

4.119. Импульсное излучение пульсара CP 1919+21 на частоте $v_1 = 80 \text{ МГц}$ достигает Земли на $\Delta t = 7 \text{ с}$ позже, чем соответствующий импульс на частоте $v_2 = 2000 \text{ МГц}$. Оценить расстояние L до пульсара, если принять среднюю концентрацию электронов в межзвездном пространстве равной $N \approx 0,05 \text{ см}^{-3}$.

4.120. Измерение скорости ракеты при вертикальном взлете проводится импульсным радиолокатором, расположенным в точке старта. На экране локатора по оси времени фиксируются моменты послылок двух последовательных радиоимпульсов и их приема после отражения от ракеты. Поскольку скорость распространения радиоволн в ионосфере точно неизвестна, возникает погрешность в определении скорости ракеты. Найти относительную погрешность в определении скорости ($\Delta v/v$) ракеты, принимая максимальную концентрацию электронов в ионосфере равной $N = 10^6 \text{ см}^{-3}$, а рабочую частоту радиолокатора — $v = 400 \text{ МГц}$.

4.121. С целью проверки теории относительности предполагается с помощью радиоволн точно измерить параметры орбиты спутника Земли. Однако из-за преломления радиоволн в ионосфере, где средняя концентрация электронов $N = 10^5 \text{ см}^{-3}$, возникают ошибки измерений. Оценить минимальную частоту v_{\min} , на которой следует проводить такие наблюдения.

4.122. Определить число свободных электронов на атом Ag, если пленка серебра прозрачна для ультрафиолета, начиная с энергии $W = 5 \text{ эВ}$. Для серебра относительная атомная масса равна $\mathcal{A} = 108$, плотность $\rho = 10,5 \text{ г/см}^3$.

4.123. Параллельный пучок рентгеновского излучения длины волны $\lambda = 0,1 \text{ нм}$ падает на тонкую

двойковыпуклую линзу из берилля (плотность берилля $\rho = 1,82 \text{ г}/\text{см}^3$, порядковый номер $Z = 4$, относительная атомная масса $A = 9$) с поверхностями одинакового радиуса кривизны $r = 40 \text{ см}$. Диаметр линзы считать равным $d = 9 \text{ см}$. Найти угол расхождения ϕ пучка после линзы.

4.124. Оценить мощность P , при которой лазерный луч диаметром $d = 1 \text{ мм}$ вызывает электрический пробой газа. Свободный пробег электронов в газе при условиях опыта равен $l_{\text{пр}} = 10^{-4} \text{ см}$, потенциал ионизации газа $U = 10 \text{ В}$.

4.125. Зеркало в виде сильно вытянутого параболоида вращения фокусирует мягкие рентгеновские лучи благодаря полному внутреннему отражению при скользящих углах падения α на далекие от вершины части параболоида (рис. 4.38). Оценить угол схождения лучей ϕ в фокусе параболоида для рентгеновского излучения с энергией 2 кэВ, если зеркало изготовлено из берилля (плотность берилля $\rho = 1,82 \text{ г}/\text{см}^3$, порядковый номер $Z = 4$, относительная атомная масса $A = 9$).

4.126. Найти показатель преломления n газа и его градиент по высоте на поверхности Венеры, атмосфера которой состоит из углекислого газа CO_2 с поляризаемостью молекул $\alpha = 2,7 \cdot 10^{-23} \text{ см}^3$. Давление на Венере $p_0 = 100 \text{ атм}$, температура $T = 500^\circ\text{C}$. Найти радиус кривизны r светового луча, пущенного горизонтально. К каким особенностям атмосферной оптики планеты приводит найденное значение?

Указание. Радиус r кривизны горизонтального луча определяется соотношением $1/r = (1/n)dn/dh$.

4.127. Во сколько раз должна увеличиться плотность атмосферы Земли для того, чтобы в ней, как на Венере, возникла круговая рефракция, при которой луч света обойдет Землю? Показатель преломления воздуха при атмосферном давлении равен $n_0 = 1,0003$ (см. задачу 4.126).

4.128. Излучение рубинового лазера рассеивается на звуковых колебаниях в воде. При рассеянии света происходит доплеровское смещение частоты. Оценить число штрихов N дифракционной решетки, с помощью

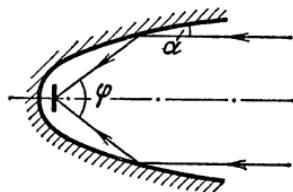


Рис. 4.38

которой в 1-м дифракционном порядке можно обнаружить смещение частоты в свете, рассеянном под прямым углом. Скорость звука в воде равна $v = 1400$ м/с, показатель преломления $n = 1,3$. Считать, что в воде есть звуковые волны всевозможных направлений.

4.129. Какое число штрихов N должна иметь дифракционная решетка, чтобы с ее помощью в спектре испускания Солнца (во время полного солнечного затмения) можно было обнаружить гравитационное смещение спектральных линий во 2-м порядке? Данные, необходимые для численных расчетов, можно получить зная угловой диаметр Солнца (при наблюдении с Земли) $\alpha_S \approx 0,01$ рад и скорость движения Земли по орбите $v_3 = 30$ км/с.

4.130. Спектральные линии, излучаемые нагретым газом, оказываются уширенными вследствие того, что атомы газа движутся с разными скоростями относительно наблюдателя (эффект Доплера). Считая распределение скоростей атомов газа максвелловским, оценить размеры L дифракционной решетки с периодом $d = 1$ мкм, которую надо использовать для изучения формы спектральных линий, излучаемых неоном ${}^{20}\text{Ne}$ при температуре $T = 1000$ К.

4.131. Двойная звезда состоит из двух близких по массе звезд, вращающихся относительно общего центра с периодом $\tau = 10$ сут и отстоящих друг от друга на расстояние $L = 2 \cdot 10^7$ км. Определить, какое число штрихов N дифракционной решетки необходимо для того, чтобы при наблюдении видимого спектра водорода в излучении этих звезд можно было во 2-м порядке заметить вращение системы. Можно ли, в принципе, таким способом заметить относительное вращение таких звезд, если период $\tau = 10$ лет? Температура поверхности звезд $T = 6000$ К.

4.132. Оценить порядок скорости v , с которой должен удаляться от Солнца космический корабль, чтобы находящийся в нем космонавт, имея в распоряжении спектрометр с дифракционной решеткой, мог заметить движение корабля относительно Солнца при наблюдении видимой части спектра солнечного водорода во 2-м порядке. Какое число штрихов N должна иметь при этом дифракционная решетка? Температура поверхности Солнца $T = 6000$ К.

4.133. В оптическом резонаторе, состоящем из четырех плоских зеркал (рис. 4.39), световые волны

могут распространяться во встречных направлениях по периметру квадрата, сторона которого равна l . Если такой резонатор привести во вращение с угловой скоростью Ω вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка, резонансные частоты v для встречных волн оказываются неодинаковыми. Объяснить явление и определить разность Δv этих частот.

4.134. Вслед космическому кораблю, удаляющемуся от Земли со скоростью $v = 0,8 \text{ c}$, каждую секунду посылают сигналы точного времени. Какое время между поступлением двух сигналов будет проходить по корабельным часам?

4.135. С космического корабля, приближающегося к Земле со скоростью $v = 0,6 \text{ c}$, ведется прямая телевизионная передача, позволяющая видеть на экране телевизора циферблат корабельных часов. Сколько оборотов сделает на экране секундная стрелка за 1 минуту по земным часам?

4.136. После 16 оборотов вблизи Земли спутник опустился обратно на космодром. На сколько разошлись часы на спутнике и на космодроме и с какой погрешностью можно заметить этот эффект, если стабильность и воспроизводимость часов составляют 10^{-13} (водородный мазер)? Влиянием кривизны траектории, силы притяжения к Земле и ускорения во время взлета и посадки спутника на ход часов пренебречь.

4.137. Известно, что ускорение космической ракеты тем больше, чем выше скорость истечения газа из ее сопла. С этой точки зрения наилучшей является так называемая фотонная ракета, испускающая из сопла поток фотонов. Найти скорость v , которую может приобрести такая ракета при разгоне от нулевой скорости, если половина ее массы превратится в фотоны. Считать к. п. д. двигателя равным единице.

4.138. Из точки A (рис. 4.40) на спутник, летящий со скоростью v , падает лазерный луч с частотой v_0 . Отраженный луч регистрируется в точке B . Найти

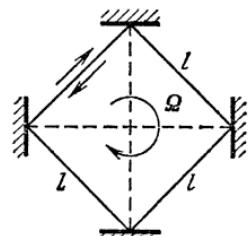


Рис. 4.39

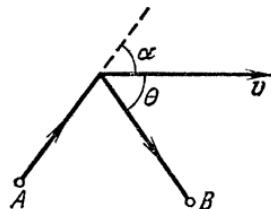


Рис. 4.40

частоту v принимаемого на Земле сигнала. Оценить разрешающую способность R регистрирующего спектрального прибора, необходимую для обнаружения релятивистской поправки к смещению частоты.

V. АТОМНАЯ ФИЗИКА

§ 5.1. Кванты света. Фотоэффект. Эффект Комптона

5.1. Оценить угол ϕ , на который отклоняется фотон вследствие гравитационного взаимодействия, проходя у поверхности Солнца.

5.2. Вакуумный фотоэлемент имеет в режиме насыщения чувствительность к свету $K = 0,12 \text{ A/Bt}$. Какова относительная флуктуация α числа электронов, выбиваемых при падении на фотоэлемент светового потока мощностью $P = 1,3 \cdot 10^{-11} \text{ Bt}$? Время регистрации равно $t = 10^{-3} \text{ с}$.

5.3. Электромагнитная волна с круговой частотой $\Omega = 2 \cdot 10^{16} \text{ c}^{-1}$ промодулирована синусоидально по амплитуде с круговой частотой $\omega = 2 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$. Найти энергию W фотоэлектронов, выбиваемых этой волной из атомов с энергией ионизации $W_i = 13,5 \text{ эВ}$.

5.4. Позитрон e^+ с кинетической энергией W_k аннигилирует на мишени, содержащей практически покоящиеся электроны, в результате чего рождаются два одинаковых γ -кванта. Под каким углом α разлетятся γ -кванты?

5.5. Фотон рассеивается на покоящемся протоне. Энергия рассеянного фотона равна кинетической энергии протона отдачи, а угол разлета между рассеянным фотоном и протоном отдачи равен 90° . Оценить энергию W_γ падающего фотона.

5.6. Фотон с энергией $W_\gamma = 2m_e c^2$ при рассеянии на покоящемся электроне теряет половину своей энергии (m_e — масса покоя электрона). Найти угол разлета α между рассеянным фотоном и электроном отдачи.

5.7. Найти максимальный угол θ_{\max} рассеяния γ -квантов при комптон-эффекте на неподвижных электронах, вне которого рассеянный квант не может породить электрон-позитронную пару при последующем взаимодействии с веществом. Рождение электрон-по-

зитронной пары возможно, если энергия γ -кванта превышает $2m_e c^2$ (m_e — масса покоя электрона).

5.8. При трехфотонной аннигиляции орто-позитрона оказалось, что один из фотонов имеет энергию $W_1 = (1/2) W_0$, а другой — $W_2 = (2/3) W_0$ (W_0 — энергия покоя электрона). Найти углы θ_{12} , θ_{13} , θ_{23} между направлениями вылета фотонов. Считать, что орто-позитроний вначале покоялся; его энергия покоя равна удвоенной энергии покоя электрона. Возможна ли двухфотонная аннигиляция орто-позитрония?

Указание: орто-позитроний представляет собой атомную систему, состоящую из электрона и позитрона, спины которых направлены в одну сторону.

5.9. Фотон ($\lambda = 0,4$ нм) рассеивается на электроне (масса покоя электрона m_e), движущемся навстречу ему, и после рассеяния движется в обратном направлении (рассеяние на 180°). С какой скоростью v должен двигаться электрон, чтобы частота фотона при рассеянии не изменилась?

5.10. Фотон от рубинового лазера ($\lambda = 0,6943$ мкм) испытывает лобовое соударение с электроном, имеющим кинетическую энергию $W_k = 500$ МэВ. Оценить энергию W_γ фотона, испускаемого в результате «обратного «комптон-эффекта» и движущегося вдоль траектории электрона.

5.11. Определить энергию γ -квантов, претерпевших комптоновское рассеяние назад ($\theta = 180^\circ$), если известно, что вылетающий электрон ультраполятивистский ($W_e \gg m_e c^2$).

5.12. Определить длину волны λ рентгеновского излучения, для которого комптоновское рассеяние на электроне на угол 90° удваивает длину волны.

5.13. В результате комптоновского рассеяния фотона на покоящемся электроне последний получил импульс отдачи p . Определить, под какими углами по отношению к направлению падающего фотона может вылететь электрон с таким импульсом.

5.14. При прохождении γ -квантов через вещество образуются две группы быстрых электронов: одна в результате фотоэффекта, а другая — комптоновского рассеяния. Каково должно быть энергетическое разрешение регистрирующей аппаратуры, чтобы отличать фотоэлектроны от комптоновских электронов с максимальной энергией? Энергия γ -квантов известна: $W_\gamma = 5$ МэВ.

5.15. Если допустить, что масса покоя фотона $m_\gamma \neq 0$, то скорость электромагнитных волн в вакууме будет зависеть от длины волн λ . До настоящего времени по данным локационных измерений среднего расстояния между Луной и Землей ($L_L = 3,8 \cdot 10^5$ км) такая зависимость не обнаружена. Измерения были проведены при $\lambda_1 = 20$ см и в оптическом диапазоне, точность измерений определялась в основном неровностью поверхности Луны $\delta l = \pm 100$ м. Исходя из этих данных, оценить возможную верхнюю границу значений массы покоя фотона m_γ .

§ 5.2. Волны де Броиля. Волновые функции

5.16. Электроны с энергией $W_k = 100$ эВ падают под углом $\phi = 30^\circ$ к нормали на систему, состоящую из двух параллельных сеток, между которыми создана разность потенциалов $U_1 = 36$ В (рис. 5.1). Найти относительный показатель преломления n сред, расположенных по обе стороны от сеток. При какой разности потенциалов U_2 произойдет полное отражение электронов от второй сетки?

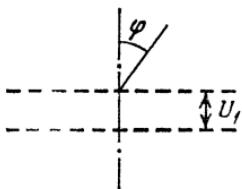


Рис. 5.1

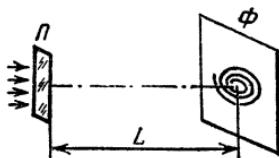


Рис. 5.2

5.17. Пучок электронов падает перпендикулярно на поликристаллическую пластинку P из хлористого натрия, постоянная решетки которого $d = 56$ нм. В результате брэгговского рассеяния пучка на фотопластинке Φ , расположенной на расстоянии $L = 25$ см от пластиинки P , возникают концентрические дифракционные кольца (рис. 5.2). Определить энергию электронов, зная, что радиус первого кольца равен $R = 0,5$ см.

5.18. Параллельный пучок моноэнергетических нейтронов, движущихся со скоростью v , падает на плоскую поверхность кристалла под углом скольжения ϕ_0 и испытывает на ней брэгговское отражение n -го порядка (рис. 5.3). Источник нейтронов A при-

водят в движение с постоянной скоростью v в направлении нормали к отражающей плоскости. Под каким углом ϕ к отражающей плоскости надо направить теперь пучок нейтронов, чтобы наблюдалось брэгговское отражение в прежнем порядке m ?

5.19. Один из способов монохроматизации медленных нейтронов состоит в следующем: в цилиндре радиусом $R = 10$ см и длиной $L = 1,0$ м делается винтовой паз ширины $b = 1$ см с поворотом на угол $\varphi = 30^\circ$ (рис. 5.4). Цилиндр вращается с частотой $n = 3000$ об/мин. Определить длину волны λ нейтронов, пропускаемых описанным монохроматором, и оценить степень их монохроматичности $\Delta\lambda/\lambda$. Пучок нейтронов направлен вдоль оси цилиндра.

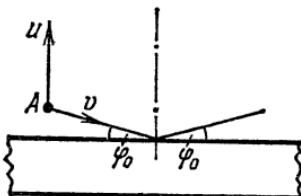


Рис. 5.3

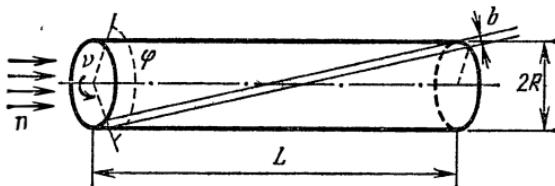


Рис. 5.4

5.20. Нейтроны со скоростью $v_0 = 5 \cdot 10^5$ см/с падают на брэгговский интерферометр, состоящий из трех тонких монокристаллических пластинок, вырезанных перпендикулярно главным кристаллическим плоскостям. На каждой из пластинок волна де Броиля разделяется на прошедшую и отраженную (рис. 5.5). Результат интерференции фиксируется счетчиком нейтронов C , скорость счета которого зависит от разности фаз в плечах интерферометра. В одном из плеч с помощью электродов (не показанных на рисунке) на участке длиной $l = 1$ см создается электрическое поле с разностью потенциалов $U = 300$ В. Если бы у нейтрона был электрический заряд, то включение поля

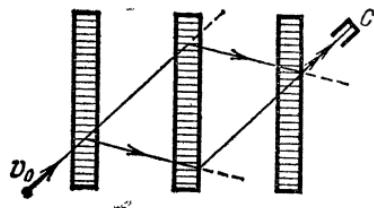


Рис. 5.5

изменило бы скорость счета счетчика C . Найти, какой предельный заряд q может быть обнаружен в таком опыте, если напряженность поля параллельна предполагаемому направлению дипольного момента, а чувствительность интерферометра к сдвигу фаз составляет $\Delta\phi = 0,1$ рад.

5.21. Коллимированный пучок электронов с кинетической энергией $W_k = 1,65$ кэВ пропускается через резонатор лазера, который генерирует на длине волны $\lambda = 0,63$ мкм. При некоторых углах падения пучка относительно оси лазера, близких к прямому, может наблюдаться брэгговское рассеяние электронов на электромагнитной волне (эффект Капицы — Дирака). Найти возможные углы отклонения электронов.

5.22. Оценить минимальный диаметр d пятна, создаваемого на детекторе пучком атомов серебра, испускаемых печью с температурой $T = 1200^\circ\text{C}$. Расстояние от выходной щели печи до детектора равно $L = 1$ м.

5.23. В одномерной потенциальной яме шириной b с бесконечными стенками находятся N электронов. Определить полную энергию W и силу F давления электронов на стенки ямы. Взаимодействием электронов пренебречь.

5.24. Оценить нижнюю границу кинетической энергии W_k нуклона в ядре, предполагая, что радиус ядра $r_y \approx 10^{-12}$ см.

5.25. Предполагая, что ядерные силы обусловлены обменом между нуклонами квантами ядерного поля — пионами, оценить радиус Δr действия ядерных сил, если известно, что масса покоя пионов $m_\pi \approx \approx 100$ МэВ, а их скорость близка к скорости света.

5.26. Электрон движется со скоростью v в плоско-параллельном слое вещества толщиной d с показателем преломления n перпендикулярно к ограничивающим плоскостям. Скорость электрона $v > c/n$, так что наблюдается излучение Вавилова — Черенкова. Определить угловую расходимость $\Delta\phi$ излучения, обусловленную конечной толщиной слоя (рис. 5.6).

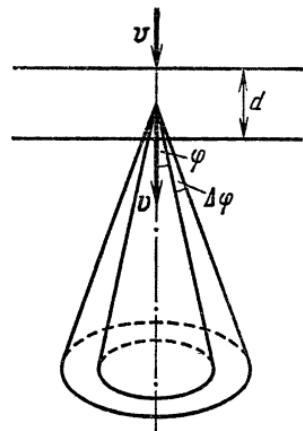


Рис. 5.6

5.27. Электрон притягивается к поверхности жидкого гелия электростатическими силами, потенциальная энергия которых, как известно, равна $W_n(x) = [e^2(\epsilon - 1)/4(\epsilon + 1)]x^{-1}$, где x — кратчайшее расстояние от электрона до поверхности, ϵ — заряд электрона, $\epsilon = 1,057$ — диэлектрическая проницаемость гелия (рис. 5.7). В то же время медленный электрон не может проникнуть внутрь гелия из-за отталкивания (так называемое отрицательное сродство гелия к электрону). Поэтому можно считать, что на поверхности ($x = 0$) потенциальная энергия испытывает бесконечный скачок и электрон оказывается в потенциальной яме (см. рис. 5.7). Пользуясь этой моделью и соотношением неопределенности, оценить по порядку величины среднее расстояние x электрона от поверхности гелия в основном состоянии и энергию связи W_{cb} электрона вблизи поверхности гелия.

5.28. Волновая функция частицы массой m , совершающей одномерное движение в поле с потенциалом $W_n(x)$, есть $\psi(x) = Ax \exp(-x/a)$ ($x > 0$), $\psi(x) = 0$ ($x \leq 0$). Оценить с помощью соотношения неопределенности среднюю кинетическую энергию \bar{W}_k частицы. Найти $W_n(x)$ при $x > 0$ и полную энергию W , если известно, что $W_n(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

5.29. Найти энергию электрона, при которой он беспрепятственно пройдет над прямоугольным барьером высотой $W_0 = 5$ эВ и шириной $d = 10^{-8}$ см.

5.30. Электрон находится в одномерной потенциальной яме, изображенной на рис. 5.8, и имеет энергию $W = 1,5$ эВ. Ширина ямы равна $d = 3 \cdot 10^{-8}$ см. Найти высоту потенциального барьера W_n и его проницаемость D . За какое время t вероятность найти частицу в яме уменьшится в два раза? Отражением волновой функции на задней границе потенциального барьера пренебречь.

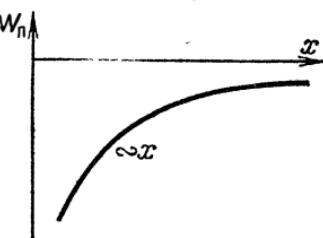


Рис. 5.7

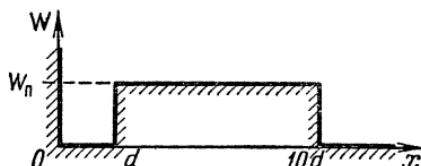


Рис. 5.8

5.31. Действие времяпролетного масс-спектрометра основано на разделении ионов по времени пролета ими определенного расстояния l . Но из-за разброса начальных скоростей Δv даже одинаковые ионы должны приходить к приемнику с некоторым разбросом Δt по времени. Для устранения этого недостатка используется электростатический отражатель, на выходе которого указанный разброс компенсируется (рис. 5.9).

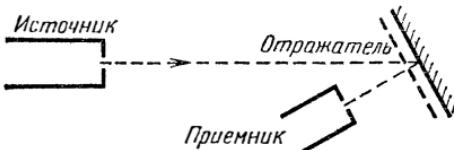


Рис. 5.9

Оценить напряженность E поля отражателя, необходимую для регистрации однозарядных ионов азота N^+ , имевших на выходе из источника разброс начальных скоростей $\Delta v \approx 10^6$ см/с и прошедших путь с разбросом по времени $\Delta t \approx 100$ нс. Угол отражения в отражателе считать малым.

§ 5.3. Атомы и их излучение

5.32. Длина волны линии H_{α} водородной серии Бальмера равна $\lambda = 0,656$ мкм. Определить энергию ионизации W_i мезоатома водорода, находящегося в основном состоянии.

5.33. Рассчитать энергию излучения ΔW , испускаемого в атоме водорода при переходе отрицательного μ^- -мезона с N - на M -оболочку. При расчете учесть, что масса μ^- -мезона приблизительно в 10 раз меньше массы протона. Как велик радиус 1-й боровской орбиты в этом случае?

5.34. Положительно заряженный мюон, образовавший вместе с электроном водородоподобный атом — мюоний, распался на позитрон и нейтрино, быстро разлетевшиеся в разные стороны. Какова средняя кинетическая энергия \bar{W}_k оставшегося после этого электрона, если в момент распада мезона мюоний находился в состоянии $2S$? Волновая функция основного состояния электрона в атоме водорода равна $\psi = (8\pi r_B^3)^{-1/2} (1 - r/2r_B) \exp(-r/2r_B)$, где r_B — радиус 1-й боровской орбиты.

5.35. Задача об отыскании уровней энергии атома решается обычно в предположении, что заряд ядра точечный. На самом деле ядро имеет размер, а радиус ядра равен $r_{\text{я}} = 1,3 \cdot 10^{-13} \mathcal{M}^{1/3}$ см, где \mathcal{M} — атомная масса. Оценить знак и порядок величины относительной поправки к энергии $\Delta W/W$ мюона на K -оболочке в мезоатоме неона ($Z = 10$, $\mathcal{M} = 20$), связанной с тем, что часть времени мезон находится внутри ядра, т. е. в поле, отличном от кулоновского. Волновая функция основного состояния электрона в атоме водорода равна $\psi = (\pi r_{\text{B}}^3)^{-1/2} \exp(-r/r_{\text{B}})$, где r_{B} — радиус 1-й боровской орбиты.

5.36. При комптоновском рассеянии квантов на атомных электронах явление осложняется тем, что электроны в атомах не находятся в покое. Оценить связанный с этим разброс в углах разлета электронов отдачи, выбиваемых из атомов водорода при рассеянии рентгеновских квантов ($\lambda = 0,1$ нм) строго назад.

5.37. Оценить минимальную ширину L_{\min} , которую должна иметь дифракционная решетка, чтобы с ее помощью можно было обнаружить естественную ширину линии, испускаемой атомами с временем жизни возбужденного состояния $\tau = 0,1$ нс. (Все условия постановки опыта предполагаются идеальными.)

5.38. Температуру газовых облаков в межзвездном пространстве можно оценить по доплеровскому уширению спектральных линий, испускаемых атомами, входящими в состав газа. Для этой цели обычно используют водородную линию с длиной волны $\lambda = 21$ см. Оценить температуру T газового водородного облака, если испускаемая им водородная линия имеет ширину $\Delta f = 5$ кГц.

5.39. Моноэнергетический параллельный пучок возбужденных атомов движется вдоль оси вакуумной трубы со скоростью $v = 10^8$ см/с. В стенках трубы сделаны окошки для регистрации излучения атомов пучка в зависимости от пути, пройденного пучком. Результаты этих измерений изображены на рис. 5.10 (по оси абсцисс отложено расстояние x , пройденное пучком вдоль

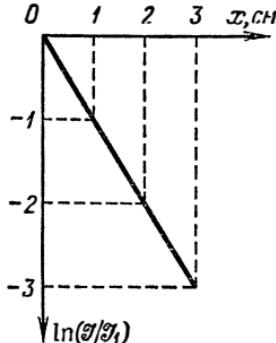


Рис. 5.10

трубки, отсчитанное от 1-го окошка, а по оси ординат — натуральный логарифм отношения интенсивности света \mathcal{I} к интенсивности \mathcal{I}_1 , измеренной детектором, стоящим в 1-м окошке. Определить естественную ширину линии Δf , излучаемой атомами пучка.

5.40. На рис. 5.11 изображено распределение энергии в спектральной линии дважды ионизованного углерода ^{12}C (этую спектральную линию можно наблюдать в дуговом разряде в сильном магнитном поле).

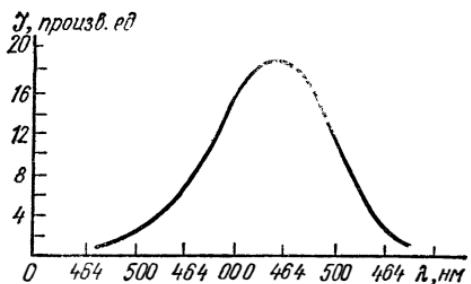


Рис. 5.11

Уширение спектральной линии обусловлено движением излучающих атомов (эффект Доплера). Оценить температуру T излучающих атомов.

5.41. Оценить минимальные массу m и размер b железной пылинки, при которых можно наблюдать эффект Мёссбауэра с энергией перехода $W = 14 \text{ кэВ}$ и временем жизни $\tau = 1 \text{ мс}$, если отдача пылинки приведет к доплеровскому смещению, равному собственной ширине линии.

Указание. Эффект Мёссбауэра заключается в том, что при достаточно низкой температуре отдачу испытывает не отдельное излучившее ядро, а весь кристалл (в данном случае — пылинка).

5.42. На какой высоте H надо поместить поглотитель относительно источника для проверки красного смещения, выведенного общей теорией относительности? Используется эффект Мёссбауэра на изотопе ^{67}Zn , время жизни возбужденного уровня с энергией $W = 93 \text{ кэВ}$ равно $\tau = 10 \text{ мкс}$. Считать, что для достижения необходимой точности эффект смещения должен в 10 раз превышать ширину линии резонансного поглощения.

5.43. На опыте измерены энергии перехода между тремя последовательными уровнями энергии вращательной полосы двухатомной молекулы (рис. 5.12). Найти квантовые числа l этих уровней и момент инерции I молекулы.

5.44. Определить напряжение U на рентгеновской трубке с никелевым анодом, если разность длин волн между K_{α} -линией и коротковолновой границей сплошного рентгеновского спектра равна $\Delta\lambda = 84$ пм.

5.45. Оценить размер b железной пылинки, при котором она будет выдуваться из Солнечной системы световым давлением Солнца.

5.46. Одна из причин уширения спектральных линий атомов в газе связана со столкновениями, которые ограничивают время жизни возбужденного состояния. Оценить вклад этого механизма в относительную ширину линии перехода в неоне на длине волн $\lambda = 0,63$ мкм, используемой в Не—Не-газовом лазере, в условиях, когда коэффициент диффузии атомов неона $D = 100$ см 2 /с. Температуру газа принять равной $T = 400$ К.

5.47. В опытах Шалла (1968 г.) наблюдалось расщепление пучка нейтронов на два пучка при преломлении на границе однородного магнитного поля. Найти малый угол θ между направлениями преломления пучков. Однородное магнитное поле имеет индукцию $B = 2,5$ Тл. Нейтроны с дебройлевской длиной волны $\lambda = 0,5$ нм падают под углом в 30° к достаточно резкой границе магнитного поля.

5.48. Пучок атомов натрия вылетает из печи, температура которой $T = 350$ К. Пучок расщепляется в поперечном неоднородном магнитном поле с градиентом $dB/dx = 50$ Тл/м на пути $l = 1$ см. Детектор удален от магнита на расстоянии $L = 6,5$ м. Найти расстояние s между пятнами на экране.

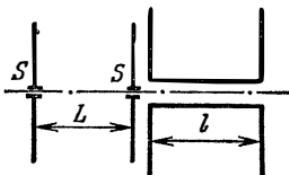


Рис. 5.13

5.49. Пучок атомов лития в основном состоянии с максимальной кинетической энергией $W_k = 0,1$ эВ проходит через магнит типа Штерна — Герлаха длиной $l = 6$ см с градиентом поля $dB/dx = 5$ Тл/см. Перед магнитом стоят две

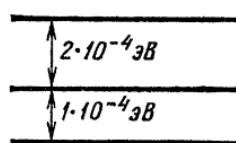


Рис. 5.12

одинаковые диафрагмы S на расстоянии $L = 1$ м одна от другой (рис. 5.13). При каком максимальном размере d_{\max} диафрагм компоненты разделенного пучка полностью разойдутся?

5.50. Определить верхний предел расстояния L_{\max} между зеркалами интерферометра Фабри — Перо, чтобы с его помощью можно было исследовать (без перекрытия спектров разных порядков) простой эффект Зеемана в магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл.

5.51. Оценить, какую индукцию B магнитного поля звезды типа Солнца (период вращения $\tau = 10^6$ с, радиус $R = 10^{10}$ см, температура поверхности $T = 6 \cdot 10^3$ К) можно обнаружить в оптической области спектра ($\omega = 10^{15} \text{ c}^{-1}$) на основании измерения эффекта Зеемана.

5.52. Найти зеемановское расщепление $\Delta\omega$ спектральной линии ${}^2D_{3/2} \rightarrow {}^2P_{1/2}$. Указать число компонент в расщепленной линии.

5.53. Цезий принадлежит к числу щелочных металлов. При $P - S$ -переходе в атомарном цезии испускается широкий дублет, состоящий из двух линий: $\lambda_1 = 0,455$ мкм и $\lambda_2 = 0,459$ мкм. Найти расщепление термов этого дублета в магнитном поле. Какими формулами описывается в этом случае расщепление линий в магнитном поле с индукцией $B = 3$ Тл: формулами для нормального или аномального эффектов Зеемана?

5.54. В спектре лития две первые линии главной серии принадлежат переходам ${}^2P_{1/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$ и ${}^2P_{3/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$. Длины волн этих линий равны $\lambda_1 = 0,670780$ мкм и $\lambda_2 = 0,670795$ мкм. Оценить индукцию B магнитного поля, которое создает орбитальное движение электрона в атоме лития в состоянии $2P$.

5.55. Оценить по порядку величины энергию расщепления ΔW головной линии серии Бальмера в спектре водорода за счет взаимодействия магнитного момента электрона и магнитного момента ядра (сверхтонкое расщепление спектральных линий). Можно ли обнаружить это расщепление с помощью спектрального прибора, если среднее время жизни возбужденных атомов водорода порядка 10 нс? Магнитный момент протона равен $\mu_p = 2,8\mu_a$.

5.56. Оценить длину волны λ излучения межзвездного атомарного водорода в радиодиапазоне. Межзвездный водород находится в основном состоянии, и его излучение обусловлено переориентацией спина электрона. Магнитный момент протона равен $\mu_p = 2,8\mu_a$.

5.57. Свободные атомы могут обладать магнитным моментом, но не имеют дипольного электрического момента. Атомы, входящие в состав кристаллической решетки, при известных условиях могут иметь такой момент. В этом случае возможен паразелектрический резонанс, аналогичный парамагнитному. Найти дипольный момент $p_{\text{ат}}$ атома, если известно, что резонансное поглощение электромагнитных волн с длиной волны $\lambda = 5$ мм наблюдается при напряженности постоянного электрического поля $E = 2,5 \cdot 10^3$ кВ/м. Оценить размер l атомного диполя.

VI. ИЗЛУЧЕНИЕ

6.1. Рассматривая равновесное тепловое излучение как идеальный газ фотонов, получить формулу $\rho = \rho_{\text{изл}}/3$, связывающую плотность энергии теплового излучения $\rho_{\text{изл}}$ с давлением излучения ρ .

6.2. Используя тот факт, что плотность энергии теплового излучения $\rho_{\text{изл}}$ не зависит от объема системы, а также формулу $\rho = \rho_{\text{изл}}/3$ (см. задачу 6.1), найти с помощью законов термодинамики зависимость $\rho_{\text{изл}}$ и энтропии s единицы объема от температуры T .

6.3. Пользуясь той же моделью, что и в задаче 6.1, найти связь между энергетической светимостью M , абсолютно черного тела и плотностью энергии теплового излучения $\rho_{\text{изл}}$.

6.4. При какой температуре T давление теплового излучения равно $\rho = 1$ атм?

6.5. При какой концентрации n молекул газа газокинетическое давление равно давлению теплового излучения при той же температуре $T = 300$ К?

6.6. Над плоскостью, зачерненной с обеих сторон, на высоте h расположен круглый диск радиусом R , являющийся источником равновесного теплового излучения с температурой T_0 . Радиус диска $R \ll h$, диск расположен параллельно плоскости. Найти стационарное распределение температуры $T = T(r)$ на плоскости, где r — расстояние от проекции центра диска. Считать, что система находится в вакууме, фон теплового излучения отсутствует и теплопроводностью вдоль плоскости можно пренебречь.

6.7. Найти то же, что и в задаче 6.6, считая излучателем сферу радиусом R , центр которой находится на расстоянии h от плоскости.

6.8. Найти отношение плотностей потоков энергии корпускулярного и электромагнитного излучения Солнца в околоземном пространстве. Считать, что корпускулярный поток представляет собой нейтральную плазму из протонов и электронов с концентрацией $n = 5 \text{ см}^{-3}$ частиц каждого сорта и скоростью потока $v = 300 \text{ км/с}$, а Солнце — источник равновесного теплового излучения с температурой $T = 6000 \text{ К}$. Выразить результат через угловой диаметр α_c Солнца, видимый с Земли.

6.9. Солнечная постоянная E_c означает мощность излучения, падающего на единицу площади, помещенной перпендикулярно солнечным лучам за пределами земной атмосферы на расстоянии от Солнца, равном среднему расстоянию между Землей и Солнцем $L_3 = 1,5 \cdot 10^8 \text{ км}$. Принимая $E_c = 0,14 \text{ Вт/см}^2$ и радиус Солнца $R_c = 6,9 \cdot 10^5 \text{ км}$, определить радиационную температуру $T_{\text{рад}}$ излучающей поверхности Солнца.

6.10. В настоящее время мощность всех промышленных источников энергии на Земле составляет $P \approx 10^{13} \text{ Вт}$, в то время как средняя мощность солнечной энергии, поступающей на Землю, $\bar{P} \approx 10^{17} \text{ Вт}$. К какому перегреву ΔT поверхности Земли приводят промышленные источники? Оценить максимальное значение P_{max} , если предельный перегрев, допустимый из экологических соображений, составляет 0,1 К.

6.11. Объектив диаметром $d = 5 \text{ см}$ фокусирует солнечный свет на абсолютно черный шар диаметром $d_w = 1 \text{ мм}$, обладающий высокой теплопроводностью

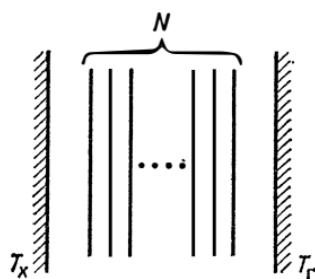


Рис. 6.1

и находящийся в высоком вакууме. Определить температуру T_w шара. Принять, что плотность потока солнечной энергии равна $j_w = 0,14 \text{ Вт/см}^2$, температура стенок сосуда $T_c = 300 \text{ К}$. Потерями энергии в объективе пренебречь.

6.12. В криогенной технике для уменьшения теплопотерь, связанных с тепловым излуче-

нием, в вакуумный промежуток между более холодной (T_x) и более нагретой (T_r) стенками вводят систему тепловых экранов (рис. 6.1). Считая обе стеки, как и все экраны, бесконечно протяженными и абсолютно черными, найти уменьшение радиацион-

ного теплообмена между стенками за счет введения N экранов в стационарных условиях.

6.13. Используя формулы для энергии и энтропии равновесного теплового излучения, показать, что свободная энергия излучения записывается в виде $\mathcal{F} = -\xi_0 VT^4$, где V — объем, T — температура. Воспользовавшись законом Стефана — Больцмана, выразить ξ_0 через постоянную Стефана — Больцмана $\sigma_{\text{СБ}}$. Пользуясь термодинамическими формулами, определить по найденному \mathcal{F} теплоемкость c_V фотонного газа в расчете на единицу объема и давление излучения p . Сравнить ее с теплоемкостью c_V^r единицы объема идеального одноатомного газа при одинаковых значениях p и T .

6.14. Газообразный неон находится в замкнутом сосуде с постоянным объемом в равновесии с тепловым излучением. При каком давлении p неона его теплоемкость и теплоемкость теплового излучения в том же объеме при $T = 500$ К сравняются?

6.15. Найти теплоемкость c_p и уравнение адиабаты фотонного газа, заключенного в сосуд с переменным объемом.

6.16. Вселенная, возраст которой $t_1 \approx 10^{10}$ лет, заполнена равновесным реликтовым излучением, температура которого в настоящее время равна $T_1 \approx 3$ К. Начиная с эпохи, когда его температура составляла $T_0 \approx 3000$ К и образовались нейтральные атомы, излучение слабо взаимодействовало с веществом, расширяясь вместе с Вселенной. Оценить ее возраст t к моменту образования нейтральных атомов. Скорость линейного расширения Вселенной считать постоянной.

6.17. Тепловое излучение Солнца регистрируется селективным приемником на длине волны $\lambda = 300$ нм с относительной шириной области чувствительности $\Delta\lambda/\lambda = 10^{-3}$ за промежутки времени $\Delta t = 10^{-3}$ с. Найти относительную среднеквадратичную флуктуацию принимаемого сигнала. Солнце считать абсолютно черным телом с температурой $T = 6000$ К и видимым угловым диаметром α_C . Площадь приемной площадки равна $S = 1$ мм².

Указание. Так как энергия кванта $\hbar\omega \gg k_B T$, то среднее планковское число заполнения $\bar{n}_\omega \ll 1$, и поэтому к фотонам можно применять классическую (не квантовую) статистику.

6.18. Напряжение в сети возросло на 5 %. На сколько увеличится освещенность, создаваемая вакуумной лампой накаливания с температурой нити 1500 К, на длине волны 500 нм? Нить считать абсолютно черной.

6.19. Слой вещества поглощает практически все фотоны солнечного спектра с энергией $W \geq 0,2$ эВ и полностью прозрачен для фотонов с меньшей энергией. Оценить, какую долю солнечной энергии пропускает вещество. Считать спектр Солнца планковским с температурой $T = 6500$ К.

6.20. Слой вещества поглощает практически все фотоны солнечного спектра с энергией $W \geq 12$ эВ и полностью прозрачен для фотонов с меньшей энергией. Оценить, какую долю солнечной энергии поглощает вещество. Считать спектр Солнца планковским с температурой $T = 6500$ К.

6.21. Возбужденный атом с энергией возбуждения $W = 1$ эВ находится в поле равновесного излучения с температурой $T = 300$ К. Найти отношение вероятностей индуцированного и спонтанного излучений атома. Найти аналогичное отношение для электронного спина в магнитном поле с индукцией $B = 10^3$ Гс.

6.22. Определить диапазон частот излучения, при котором вероятность спонтанного перехода более чем в 100 раз превосходит вероятность индуцированного перехода под влиянием равновесного излучения температуры $T = 293$ К.

6.23. Система, состоящая из атомов, имеющих два невырожденных уровня энергии W_1 и $W_2 > W_1$, находится в тепловом равновесии. Выразить коэффициент поглощения $k_{\text{п}}(T)$ света этой системой на частоте $\omega = (W_2 - W_1)/\hbar$ через его значение $k_{\text{п}}^0$ при $T = 0$. Рассмотреть два предельных случая: 1) $k_B T \gg \hbar\omega$ и 2) $k_B T \ll \hbar\omega$.

6.24. Оценить вероятность $\omega_{\text{сп}}$ спонтанного излучения молекулы при переходе с возбужденного уровня W_m на уровень W_n в случае, когда молекула помещена внутрь объемного резонатора, настроенного на частоту $\omega = (W_m - W_n)/\hbar$. Соответствующая вероятность спонтанного излучения в свободном пространстве равна $w_{\text{сп}}^0$. Объем резонатора равен V , его добротность — Q . Считать, что ширина Γ молекулярных

уровней все время остается меньше ширины ω/Q линии резонатора: $\Gamma < \omega/Q$.

6.25. Резонатор лазера с кристаллом рубина имеет одно зеркало с 100 %-ным отражением, а другое — с коэффициентом пропускания $\tau = 0,1$ на длине волны, отвечающей генерации лазера. Длина кристалла $l = 12$ см. Известно, что коэффициент поглощения света в невозбужденном кристалле рубина в максимуме рабочей линии равен $k_n = 0,4$ см⁻¹. Найти, какую часть атомов хрома нужно привести в возбужденное состояние, чтобы лазер начал работать. Рассеянием света в кристалле пренебречь.

VII. ТВЕРДОЕ ТЕЛО

§ 7.1. Свойства кристаллических решеток. Фононы. Теплопроводность

7.1. Рассматривая атомы, из которых построены кристаллические решетки, как твердые шары, найти плотность упаковки (т. е. заполненную часть объема) для простой, гранецентрированной и объемно-центрированной кубических решеток.

7.2. Рентгеновское излучение с частотой $v = 1,1 \cdot 10^{18}$ с⁻¹, падающее на кубический кристалл в направлении [100], испытывает сильное брэгговское рассеяние в направлении [122]. Считая, что кристалл состоит из одной гранецентрированной решетки Бравэ и наблюдаемое рассеяние связано с интерференцией 1-го порядка, найти наименьшее межатомное расстояние a в кристалле.

7.3. Оценить температурный коэффициент линейного расширения α кристалла, используя в качестве модели двухатомную молекулу, в которой потенциальная энергия взаимодействия составляющих ее атомов имеет вид $W_n(x) = \kappa x^2/2 - \kappa_1 x^3/3$, где x — расстояние между атомами. Ангармонический член $\kappa_1 x^3/3$ ответствен за тепловое расширение. Оценить величины κ и κ_1 и α через фундаментальные физические константы. Считать, что движение ядер подчиняется законам классической механики.

7.4. Замкнув цепочку из N одинаковых атомов в кольцо, подсчитать число различных бегущих волн.

Рассмотреть случаи продольных и поперечных колебаний (смещения атомов вдоль цепи и перпендикулярно ей). Сравнить с числом степеней свободы системы.

Указание. При $N \gg 1$ замыкание цепочки практически не влияет на спектр ее колебаний.

7.5. Рассмотреть одномерную цепочку, состоящую из атомов массой m , среднее расстояние между которыми равно a . Атомы взаимодействуют с ближайшими соседями по закону $\kappa(x_{n+1} - x_n)^2/2$, где x_n — координата n -го атома. Найти все продольные нормальные колебания (фононы) и спектр их частот $\omega(k)$, k — волновое число. Найти фазовую и групповую скорости волн как функции волнового числа k . Построить графики полученных зависимостей. Указать область, отвечающую звуковым волнам, и выразить скорость звука s через m и κ .

7.6. В одномерной цепочке, построенной из одинаковых атомов, скорость звука равна $s = 2 \cdot 10^5$ см/с, а постоянная решетки $a = 0,3$ нм. При какой частоте колебаний ω сдвиг фаз между двумя атомами, находящимися на расстоянии $10a$, составит $\pi/2$?

7.7. Найти закон дисперсии $\omega(k)$ для продольных фононов в бесконечной цепочке, содержащей в элементарной ячейке два атома массами m_1 и m_2 . Расстояние между соседними атомами равно a , а жесткость связей между ними κ . Построить график полученной зависимости. Проследить предельный переход к одноатомной цепочке при $m_1/m_2 \rightarrow 1$.

7.8. Найти поляризуемость $\alpha(\omega)$ (в расчете на одну элементарную ячейку) для цепочки, содержащей в ячейке два разноименных однозарядных иона. Остальные условия такие же, как и в задаче 7.7. Электрический вектор возбуждающей электромагнитной волны с частотой ω ориентирован вдоль цепочки.

7.9. Пользуясь законами сохранения энергии и импульса, рассмотреть в идеальном кристалле неупругое рассеяние нейтронов с рождением фононов. Обсудить возможность восстановления закона дисперсии фононов $\omega(q)$ по нейтронному рассеянию.

7.10. Используя аналогию между фотонами и длинноволновыми фононами, выразить низкотемпературную решеточную теплоемкость кристаллов через скорость поперечного (s_t) и продольного (s_l) звука.

7.11. Найти температурную зависимость решеточной теплоемкости одномерных (C_1) и двумерных (C_2) кристаллов в области низких температур.

7.12. В ${}^4\text{He}$, который при атмосферном давлении остается жидким при $T = 0$, колебания в области низких температур целиком описываются продольными акустическими фононами. Получить формулу для низкотемпературной теплоемкости и вычислить ее для гелия при $T = 0,1 \text{ K}$, приняв для скорости звука значение $s = 240 \text{ м/с}$.

7.13. В кристалле поваренной соли NaCl при температуре $T = 10 \text{ K}$ теплоемкость единицы объема $c_V = 8,3 \cdot 10^{-4} \text{ Дж/(см}^3 \cdot \text{К)}$. Оценить скорость звука s в кристалле и его дебаевскую температуру T_D . Постоянная решетки равна $a = 0,3 \text{ нм}$.

7.14. Одинаковые массы свинца ${}^{207}\text{Pb}$ и кремния ${}^{28}\text{Si}$ охлаждают с помощью жидкого гелия от температуры $T_1 = 20$ до $T_2 = 4,2 \text{ K}$. Оценить отношение масс жидкого гелия, необходимых для охлаждения свинца и кремния, если известно, что дебаевские температуры равны: $T_D(\text{Pb}) = 95 \text{ K}$ и $T_D(\text{Si}) = 645 \text{ K}$. Теплоемкостью электронов пренебречь.

7.15. Кристаллы существуют благодаря тому, что среднее межатомное расстояние в них a велико в сравнении с амплитудой «нулевых колебаний» a_0 , т. е. колебаний атомов с амплитудой, определяемой соотношением неопределенности Гайзенберга. Это неравенство выполняется вследствие существования «адиабатического параметра» $(m/M)^{1/4} \sim 10^{-1} \ll 1$, где m и M — массы электрона и ядер. Пользуясь моделью двухатомной молекулы, показать, что для колебательной частоты ω справедлива оценка $\hbar\omega \sim (m/M)^{1/2}W_{\text{ат}}$, где $W_{\text{ат}} \sim me^4/\hbar^2 \sim 10 \text{ эВ}$. Пояснить, почему эту же оценку можно применять для дебаевской частоты в кристаллах. Показать также, что $a_0/a \sim (m/M)^{1/4}$.

7.16. Ядро ${}^3\text{He}$ имеет спин $I = 1/2$. Найти молярную энтропию S кристаллического ${}^3\text{He}$ при низкой температуре T . Считать, что температура $T \ll T_D$ (T_D — дебаевская температура), так что практически все колебательные степени свободы «выморожены», но ядерные спины остаются тем не менее полностью разупорядоченными. При этих же предположениях найти энтропию кристаллического аргона-37; спин ядра аргона равен $I = 3/2$.

§ 7.2. Электроны в металлах

7.17. Вычислить фермиевские энергию, импульс и скорость при $T = 0$ для металла с изотропным квадратичным законом дисперсии электронов с эффективной массой, равной 0,8 массы свободного электрона, и концентрацией электронов 10^{23} см^{-3} .

7.18. Для электронов с квадратичным законом дисперсии найти связь между средней энергией \bar{W} и фермиевской энергией W_F при температуре $T = 0$.

7.19. Металлический Na кристаллизуется в кубической объемно-центрированной решетке с расстоянием между ближайшими атомами 0,37 нм. Найти среднюю кинетическую энергию электронов, предполагая, что их закон дисперсии является квадратичным.

7.20. Найти фермиевский импульс p_F в Na, если максимальное отклонение от 180° для угла разлета γ -квантов, возникающих при двухфотонной аннигиляции позитронов с электронами проводимости, равно $\phi = 0,20^\circ$. Поверхность Ферми считать сферической, а скорость позитронов перед аннигиляцией равной нулю.

7.21. Давление электронного газа является одним из основных факторов, определяющих сжимаемость металлов. Найти давление p и сжимаемость K^{-1} электронного газа для меди при температуре $T = 0$, если концентрация электронов равна $n = 8,5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$.

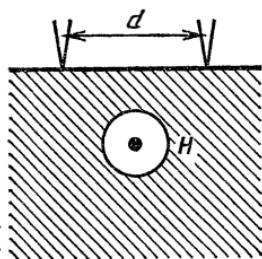


Рис. 7.1

Эффективную массу m считать равной массе свободного электрона.

7.22. При температуре $T \neq 0$ электроны в металле рассеиваются, испуская или поглощая фононы. Считая, что $T \ll T_D$, оценить средний угол ϕ , на который рассеиваются электроны.

7.23. Свойства электронов в монокристаллических образцах металлов с большими длинами свободного пробега электронов могут изучаться с помощью двух микроконтактов, прижатых к поверхности металла вдоль линии, перпендикулярной напряженности магнитного поля H (рис. 7.1). Один из контактов является эмиттером электронов, а второй — зондом (коллектором), регистрирующим приход электронов.

Определить максимальное значение H_{\max} , при котором электроны доходят до коллектора. Концентрация электронов равна $n = 8,5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, а расстояние между микроконтактами $d = 1 \text{ мм}$. Воспользоваться моделью свободных электронов с произвольной эффективной массой.

7.24. Электронный спектр щелочных металлов хорошо описывается моделью свободных электронов с концентрацией 1 электрон на атом. В магнитном поле напряженностью H траектории электронов являются спиральами. Определить максимальный диаметр d_{\max} спирали для электронов в калии при $H = 100 \text{ Э}$. Объем, приходящийся на атом, равен $V = 74 \cdot 10^{-21} \text{ мм}^3$.

7.25. Получить закон преломления для электронов, проходящих через границу двух металлов с концентрацией электронов $n_1 = 1 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ и $n_2 = 8 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$. Закон дисперсии, одинаковый в обоих металлах, изотропен. Найти угол полного внутреннего отражения электронов.

7.26. Вычислить частоту обращения электрона ω_c (циклотронную частоту) в постоянном однородном произвольно ориентированном магнитном поле напряженностью H при квадратичном анизотропном законе дисперсии $W(p) = p_x^2/(2m_x) + p_y^2/(2m_y) + p_z^2/(2m_z)$.

7.27. Найти фермиевскую скорость электронов v_F в металле с одним электроном на элементарную ячейку и «одномерным» законом дисперсии $W(k_z) = W_0 \cos(k_z a)$ при $W_0 = 0,5 \text{ эВ}$ и $a = 0,3 \text{ нм}$ ($k = p/\hbar =$ волновой вектор).

7.28. В металле, кристаллическая решетка которого обладает осью симметрии z не ниже 3-го порядка, закон дисперсии электронов в простейшем случае может быть представлен в виде $W(p) = (p_x^2 + p_y^2)/(2m^*)$. Считать, что на элементарную ячейку приходится один электрон проводимости, постоянная решетки вдоль оси z равна $a = 0,3 \text{ нм}$, объем элементарной ячейки $V = 0,85 a^3$, а эффективная масса $m^* = m_e$ — массе свободного электрона. Найти фермиевскую скорость электронов v_F и определить частоту обращения электронов ω_c в магнитном поле в зависимости от угла ϕ между напряженностью магнитного поля H и осью z .

7.29. Электрон с законом дисперсии $W = W_0 \cos(k_x a)$ движется в постоянном однородном

электрическом поле напряженностью E , направленном вдоль оси x . Решить уравнение движения и дать физическую интерпретацию результата.

7.30. Простейший модельный закон дисперсии электронов в металле с кубической симметрией имеет вид $W(p) = W_0[3 - \cos(k_x a) - \cos(k_y a) - \cos(k_z a)]$, $p = \hbar k$, где a — постоянная решетки. Металл находится в постоянном однородном магнитном поле напряженностью H , направленном вдоль оси z . Рассматривается электрон, квазимпульс которого в заданный момент времени направлен вдоль оси x и равен $p = 5\pi\hbar/(6a)$. Найти скорость v и ускорение \dot{v} в этот момент.

Указание. Использовать уравнения движения $\dot{p} = (e/c)[vH]$, $v = \partial W/\partial p$.

7.31. В металле, описанном в задаче 7.30, концентрация электронов такова, что фермиевский импульс в направлении оси x равен $p_F = \pi\hbar/(2a)$. Чему равна энергия Ферми W_F ? Чему равны фермиевские импульсы в направлениях [110] и [111]? Найти скорости электронов на уровне Ферми с импульсами, ориентированными в направлениях [100], [110] и [111].

7.32. Для типичных значений параметров металлов оценить температуру T^* , при которой электронная и решеточная теплоемкости становятся равными.

7.33. Оценить решеточный и электронный вклады в теплоемкость серебра при температурах 300 и 3 К. Дебаевская температура равна $T_D = 220$ К. Электронную теплоемкость считать по модели свободных электронов, концентрация которых равна $n = 5,9 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$.

7.34. В тонких металлических проволоках длины свободного пробега электронов при низких температурах обычно лимитируются диаметром проволоки. Исходя из этого оценить эффективную удельную проводимость $\sigma_{\text{эфф}}$ тонкой металлической проволоки с диаметром 0,1 мм, приняв для остальных необходимых параметров значения, типичные для металлов.

7.35. Электронная теплопроводность k_t тонких металлических проволок, как и их электрическая проводимость (задача 7.34), при низких температурах лимитируется диаметром проволоки. Оценить в этих условиях $(k_t)_{\text{эфф}}$ для проволоки диаметром $d = 0,1$ мм при температуре $T = 10$ К, приняв для остальных параметров значения, типичные для металлов.

7.36. В металле, помещенном в магнитное поле напряженностью H , полная энергия электрона включает зеемановскую энергию $\pm \mu_B H$, где μ_B — магнетон Бора. В условиях термодинамического равновесия энергия Ферми W_F одинакова для электронов с различным направлением спина. Исходя из этого определить относительную разность фермиевских импульсов $\delta p/p_F = (p_+ - p_-)/p_F$ и относительную разность концентраций $\delta n/n = (n_+ - n_-)/n$ (где $n = n_+ + n_-$) для электронов с противоположным направлением спина, а также удельный магнитный момент p_m электронного газа (парамагнетизм Паули). Считать, что $\mu_B H \ll W_F$. Вычислить парамагнитную восприимчивость χ_{Na} для натрия, где $n = 2,5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, а отношение эффективной массы к массе свободного электрона $m^*/m \approx 0,8$.

7.37. Считая, что электроны в проводниках имеют эффективную массу m и находятся в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ , а их концентрация равна n , найти частоту их собственных длинноволновых продольных колебаний — плазменную частоту ω_p . «Трением» электронов о решетку пренебречь.

7.38. Найти энергию плазмона (кванта плазменных колебаний) в металле, в котором фермиевская энергия равна $W_F = 5,5 \text{ эВ}$. Эффективная масса равна массе свободных электронов, диэлектрической восприимчивостью атомных остовов пренебречь.

7.39. Найти частотную зависимость комплексной диэлектрической проницаемости $\epsilon(\omega)$ проводника. Объяснить прозрачность металлов в ультрафиолетовой области спектра. Считать, что электроны проводимости описываются эффективной массой m и временем свободного пробега τ .

7.40. В отсутствие электрического тока внешнее статическое электрическое поле проникает лишь в тонкий приповерхностный слой металла. Определить закон, по которому поле убывает в глубь металла, считая, что полное падение потенциала $\Phi \ll W_F/e$. Оценить глубину проникновения поля (длину экранирования Томаса — Ферми l_{TF}) для обычного металла ($n_0 \approx 10^{23} \text{ см}^{-3}$, $W_F \approx 5 \text{ эВ}$, диэлектрическая проницаемость $\epsilon \approx 1$) и полуметалла типа Bi ($n_0 \approx \approx 3 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, $W_F \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}$, $\epsilon \approx 100$). Температура равна $T = 0$. (Диэлектрическая проницаемость ϵ

определяется поляризумостью внутренних электронов, не участвующих в электропроводности.)

7.41. Определить толщину скин-слоя δ , т. е. глубину проникновения в металл с удельной проводимостью σ электромагнитного поля с частотой ω . Считать $\omega t \ll 1$. Вычислить δ для меди при комнатной температуре ($\sigma \approx 0,6 \cdot 10^6 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$) на частоте $v = 10^{10} \text{ Гц}$.

Указание. Пренебречь током смещения по сравнению с током проводимости.

7.42. Вычислить форму кривой циклотронного резонанса (т. е. зависимость проводимости от частоты) для электронов с изотропной эффективной массой m^* и временем свободного пробега τ . Электромагнитная волна циркулярно поляризована в плоскости, перпендикулярной постоянному магнитному полю.

7.43. Считая электроны в металле свободными и движущимися без «трения», вычислить глубину λ_L — лондоновскую длину, на которую проникает в сверхпроводник низкочастотное электромагнитное поле. Оценить ее величину для характерных параметров металлов.

7.44. Вычислить плотность тока $j(T)$ термоэлектронной эмиссии с поверхности металла (формула Ричардсона). Считать, что работа выхода $A \gg k_B T$, A — разность между энергией электрона в вакууме и на уровне Ферми металла. Эффективная масса электронов в металле равна m^* .

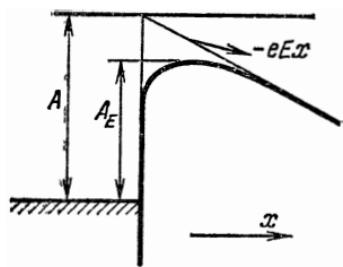


Рис. 7.2

7.45. Термоэлектроны, эмиттированные из металлического катода, движутся в вакууме под действием внешнего электрического поля напряженностью E и сил зеркального изображения. Совместное действие

этих сил приводит к понижению работы выхода на границе металл — вакуум. Найти зависимость работы выхода (рис. 7.2) и плотности термоэмиссионного тока от поля: $A(E)$ и $j(T, E)$.

7.46. Рассмотреть движение электрона в кристалле в скрещенных электрическом (E) и магнитном (H) полях ($E \perp H$). Эффективная масса электронов равна m^* , а время свободного пробега — τ . Применить полу-

ченные результаты к вычислению удельной проводимости как функции магнитного поля $\sigma(H)$ в следующих случаях: ток течет через диск Корбино (в диске Корбино электроды имеют форму концентрических окружностей, а магнитное поле прикладывается перпендикулярно плоскости диска); ток течет по бесконечной пластине, причем E и H лежат в плоскости пластины. Пояснить физическую причину возникновения магнитосопротивления (т. е. уменьшения $\sigma(H)$ с ростом H) в диске Корбино и причину отсутствия магнитосопротивления в пластине.

7.47. Найти закон распределения объемного заряда в проводниках и характерное время этого процесса — максвелловское время релаксации τ_m . Определить τ_m для кристалла чистого германия при комнатной температуре ($\sigma = 0,014 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$, $\epsilon = 16$). Считать, что избыточная концентрация электронов, создающих объемный заряд, мала по сравнению со средней концентрацией электронов проводимости.

§ 7.3. Электроны в полупроводниках

7.48. В полупроводниках, как и в металлах (см. задачу 7.40), внешнее электрическое поле экранируется электронами проводимости. Отличие состоит в том, что в полупроводниках электронный газ обычно является невырожденным, т. е. подчиняется распределению Больцмана. Определить закон, по которому в этих условиях поле убывает в глубь невырожденного полупроводника, считая внешнее поле слабым. Оценить глубину проникновения l_{DH} (длину экранирования Дебая — Хюкеля) для полупроводника с диэлектрической проницаемостью $\epsilon \approx 15$ и концентрацией электронов $n_0 \approx 10^{14} \text{ см}^{-3}$ при температуре $T \approx 350 \text{ К}$.

7.49. Используя известные формулы для энергии связи электрона в атоме водорода и боровского радиуса r_B , получить аналогичные формулы для примесного центра большого радиуса в полупроводнике с диэлектрической постоянной ϵ и эффективной массой электрона m^* . Оценить эти величины для донорных центров в кристалле InSb, где $m^* \approx 0,013m$, m — масса свободного электрона, а $\epsilon \approx 16$.

Указание. Считать радиус центра больший если он значительно превышает постоянную решетки.

7.50. Найти энергию связи $W_{\text{эк}}$, радиус $r_{\text{эк}}$ и эффективную массу $M_{\text{эк}}$ экситона, т. е. водородоподобного образования, построенного из электрона и дырки. Эффективные массы электрона и дырки равны m_- и m_+^* , диэлектрическая проницаемость ϵ .

7.51. Вывести формулу для концентрации электронов в зоне проводимости невырожденного полупроводника, в котором уровень Ферми расположен ниже дна зоны проводимости на энергию $W_F > 0$. Эффективная масса электронов равна m^* , температура полупроводника T .

7.52. Найти связь между концентрацией зонных электронов n_- и зонных дырок n_+ в невырожденном полупроводнике при произвольном положении уровня Ферми. Ширина запрещенной зоны W_G , температура полупроводника T .

7.53. Исследовать и схематически изобразить на графике температурную зависимость концентрации электронов $n_-(T)$ и дырок $n_+(T)$ в полупроводнике с мелкими донорными уровнями. Энергия связи электрона на донорах $W_d \ll W_G$, W_G — ширина запрещенной зоны.

7.54. В полупроводнике, содержащем мелкие донорные уровни, все они ионизированы, если температура T не слишком низкая. Найти концентрацию электронов n_- и дырок n_+ , если известна концентрация n_i носителей в чистом полупроводнике (см. задачу 7.52). Концентрация доноров равна N .

7.55. Как изменится ток насыщения полупроводникового диода при понижении температуры от 20 до 0°C ? За счет какого механизма возникает этот ток? Вследствие какого процесса и примерно при какой температуре T^* эффект выпрямления начнет исчезать? Диод изготовлен из материала с шириной запрещенной зоны $W_G = 0,7$ эВ и эффективными массами электронов и дырок $m^* = 0,3m$, m — масса свободного электрона. Концентрация примесей по обе стороны перехода равна $n_{\text{пр}} = 10^{15}$ см $^{-3}$. Считать, что время жизни неравновесных носителей тока от температуры не зависит.

7.56. В полуметалле существует слабое перекрытие зон, равное $W_0 = 0,04$ эВ. В результате при $T = 0$ в одной из них имеется небольшое число электронов проводимости, в другой — такое же число дырок (рис. 7.3). Найти концентрацию электронов и дырок

n и их энергии Ферми W_F^- и W_F^+ , если эффективные массы равны: электронов — $m_-^* = 0,05m$ и дырок — $-m_+^* = 0,03m$, где m — масса свободного электрона.

7.57. Рассмотреть рассеяние медленного электрона в полупроводнике с поглощением и испусканием длинноволнового акустического фона, пользуясь законами сохранения энергии и импульса. Найти зависимость угла φ между волновым вектором фона \mathbf{q} и начальным импульсом электрона \mathbf{p} от p и q . Показать,

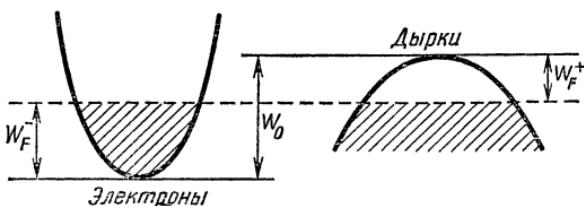


Рис. 7.3

что при $v < s$ (v — скорость электрона, s — скорость звука) электрон не может испустить фонон, а при $v \gg s$ электроны рассеиваются почти упруго, т. е. энергия при рассеянии меняется мало. Считать, что энергия электрона $W = p^2/(2m)$, а энергия фона $\hbar\omega(\mathbf{q}) = \hbar sq$.

7.58. В некоторых полупроводниках длина свободного пробега электронов оказывается порядка межатомных расстояний. В такой ситуации движение электронов можно рассматривать как случайные «прыжки» между соседними узлами. Оценить при температуре $T \approx 300$ К удельную проводимость σ такого полупроводника, если концентрация электронов $n \approx 10^{18} \text{ см}^{-3}$, средняя частота прыжков $v \approx 10^{13} \text{ с}^{-1}$, а межатомное расстояние $a \approx 0,3 \text{ нм}$.

7.59. Дырки, создаваемые при освещении у поверхности электронного полупроводника, диффундируют в объем, имеющий температуру $T = 300$ К, где они рекомбинируют с электронами проводимости. Определить эффективную глубину проникновения $l_{\text{эфф}}$ дырок, если их время жизни равно $\tau = 10^{-3}$ с, подвижность $\mu = 2000 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

7.60. Решить задачу 7.29 при наличии силы трения, пропорциональной скорости: $\mathbf{F} = -kv$. Исследовать возможные режимы движения электрона и вычислить удельную проводимость такого проводника. Выяснить

физический смысл результатов, получающихся в области слабого и сильного электрических полей.

7.61. При не слишком высоких давлениях гелий остается жидким вплоть до температуры $T = 0$. Так как изотоп ^3He имеет полуцелый спин (см. задачу 7.16), к нему применим принцип Паули, и атомы, составляющие жидкий гелий-3, подчиняются статистике Ферми и в этом отношении ведут себя подобно электронам в металле. Определить температурную зависимость молярной теплоемкости $C(T)$ жидкого гелия-3 при низких температурах и оценить числовое значение коэффициента в этой зависимости, полностью пренебрегая межатомным взаимодействием. Объем моля жидкого гелия при нормальном давлении равен $V = 37 \text{ см}^3/\text{моль}$.

VIII. ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

§ 8.1. Элементарные частицы

8.1. Пользуясь кварковой моделью, определить, из каких夸克ов состоят протон, нейтрон, Ω -гиперон.

8.2. Построить кварковую схему положительно заряженного пиона и положительно заряженного каона.

8.3. Построить кварковую схему нейтрального каона.

8.4. Построить кварковую схему Ξ^0 - и Λ^0 -гиперона.

8.5. В результате аннигиляции夸克ов $q_u + q_d$ возможно образование пары мюонов $\mu^+ + \mu^-$. При соударении каких заряженных мезонов с протонами можно ожидать появления мюонных пар?

8.6. Какая частица обязана образоваться одновременно с K^0 -мезоном при соударении π^- -мезона с протоном в двухчастичной реакции?

8.7. Возможны ли следующие схемы распада частиц и если нет, то по какой причине:

- 1) $\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$;
- 2) $\Xi^- \rightarrow n + \pi^-$;
- 3) $n \rightarrow p + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$;
- 4) $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$;
- 5) $p \rightarrow \mu^+ + \bar{\nu}_\mu$;
- 6) $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \mu^-$?

8.8. «Экспериментом века» недавно называли опыты по определению времени жизни протона. Теория предсказывала, что протон распадается на пион и

лектоны со временем жизни $\tau \sim 10^{31}$ лет. Оценить, какую массу m_{Fe} вещества железа необходимо использовать, чтобы за время эксперимента $t = 1$ год зарегистрировать $N = 10$ распадов.

8.9. В Серпухове начато создание уникального ускорительно-накопительного комплекса (УНК), включающего кольцевой ускоритель протонов на энергию $W = 3 \cdot 10^{12}$ эВ и накопительное кольцо для осуществления встречных пучков протонов, ускоренных до такой же энергии. Найти, какие из самых тяжелых ядер и антиядер могут образоваться в реакции $p + p$ при соударении протона с энергией $W_p = 3 \cdot 10^{12}$ эВ с неподвижным протоном и на встречных кольцах УНК.

8.10. В 1983 г. были открыты бозоны W^+ и W^- . В одном из первых обнаруженных распадов $W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ наблюдался след электрона с энергией $W = 58,5$ ГэВ и углом вылета его относительно направления движения распадной частицы $\theta = 45^\circ$. Определить минимальное значение массы m_{W^-} W^- -бозона.

8.11. В 1983 г. был открыт Z^0 -бозон. При анализе его распада $Z^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ найдены два следа мюонов с импульсами $p = 85$ ГэВ/с при угле разлета $\theta = 70^\circ$. Найти массу и скорость Z^0 -бозона.

8.12. В 1984 г. была обнаружена новая ξ -частица как продукт распада покоящейся Y -частицы в реакции $Y \rightarrow \xi + \gamma$, причем энергия γ -кванта оказалась равной $W_\gamma = 1072$ МэВ. Найти массу и скорость ξ -частицы, если масса покоя Y -частицы равна $m_Y c^2 = 9460$ МэВ.

8.13. В 1974 г. была открыта новая элементарная частица, названная чармонием, J/ψ . В одном из опытов были зарегистрированы продукты ее распада «на лету»: $J/\psi \rightarrow e^+ + e^-$. Найти массу и скорость чармония, если энергии и электрона, и позитрона были равны $W = 3,1$ ГэВ, а угол разлета между ними составил $\theta = 60^\circ$.

8.14. В 1976 г. были получены первые указания о существовании заряженной «очарованной» $\tilde{\Lambda}_c^-$ -частицы, распадающейся по схеме

$$\tilde{\Lambda}_c^- \rightarrow \tilde{\Lambda}^0 + \pi^- + \pi^+ + \pi^-.$$

Найти кинетическую энергию W_k , уносимую продуктами распада $\tilde{\Lambda}_c^-$ -частицы в системе ее покоя.

8.15. Определить, выше какой минимальной энергии W_{\min} встречных электрон-позитронных пучков, имевших одинаковую энергию, могут рождаться «красивые», т. е. В-частицы. Их масса равна $m_{\text{В}}c^2 = 5300 \text{ МэВ}.$

8.16. Определить пороговую энергию $W_{\text{пор}}$ рождения пары Σ -гиперонов при облучении протонами жидколоводородной мишени.

8.17. Найти, чему равно наибольшее число пионов, которое может быть образовано при столкновении протона с энергией $W_p = 5 \text{ ГэВ}$ с покоящимся протоном.

8.18. Оценить пробег протона до ядерного взаимодействия в жидколоводородной камере. Плотность водорода равна $\rho = 0,07 \text{ г/см}^3$.

8.19. Определить максимальную энергию W_{\max} электрона при распаде покоящегося мюона.

8.20. Определить в лабораторной системе минимальную и максимальную энергию электрона, образованного при распаде мюона, имевшего энергию 10,5 ГэВ.

8.21. Определить время жизни τ мюона, образовавшегося при распаде положительно заряженного каона. До распада каон покоялся.

8.22. Нейтральный пион распался на два γ -кванта с энергиями $W_1 = 3,1$ и $W_2 = 2,0 \text{ ГэВ}.$ Найти угол разлета θ между квантами.

8.23. Оценить, при какой энергии W ультракрелятивистского заряженного пиона его пробег до распада равен пробегу до ядерного взаимодействия в воздухе при плотности $\rho = 10^{-5} \text{ г/см}^3.$

8.24. D^0 -Мезон распадается на лету на K^+ и π^- -мезоны. Расстояние от точки его рождения до точки распада равно $L = 90 \text{ мкм}.$ Импульсы каона и пиона равны $p_K = 3,6 \text{ ГэВ/с}$ и $p_\pi = 1,8 \text{ ГэВ/с}$ и направлены под углами $\theta_K = 10^\circ$ и $\theta_\pi = 20^\circ$ к направлению импульса D^0 -мезона. Определить массу, скорость и время жизни D^0 -мезона. Считать каон и пион ультракрелятивистскими.

8.25. При распаде «на лету» Ω^- -гиперона ($\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + K^-$) измерены импульсы частиц распада $p_\Lambda = 5,7 \text{ ГэВ/с}$ и $p_K = 2,0 \text{ ГэВ/с}$ и угол разлета между ними $\theta = 28,5^\circ.$ Определить массу Ω^- -гиперона.

8.26. За распадом остановившегося в ядерной фотозмульсии K^+ -мезона по схеме $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ после-

довал распад π^0 -мезона по схеме $\pi^0 \rightarrow \gamma + e^+ + e^-$, причем вершина пары e^+ — e^- находилась на расстоянии $L = 0,1$ мкм от места остановки K^+ -мезона. Оценить собственное время жизни π^0 -мезона из этих данных.

8.27. Какова средняя длина пути L до распада Λ -гиперона в воздухе, если его энергия $W_\Lambda = 7$ ГэВ?

8.28. Коллимированный монохроматический пучок заряженных пионов, энергия которых $W_\pi = 10$ ГэВ, вследствие распада постепенно превращается в пучки мюонов и нейтрино. На каком расстоянии L от области формирования пучка число образовавшихся мюонов в 1,7 раз превышает число пионов?

8.29. Заряженный пion, имеющий энергию $W_\pi = 420$ МэВ, распадается на лету на мюон и нейтрино. Определить энергию мюона W_μ в лабораторной системе, если в системе покоя пиона мюон вылетел под углом 90° к направлению полета пиона.

8.30. Оценить примесь мюонов в слабо коллимированном пучке заряженных каонов на расстоянии $L = 10$ м от места формирования пучка каонов. Каоны в пучке имеют энергию $W = 3$ ГэВ. Выходом мюонов из пучка в процессе распада пренебречь.

8.31. Для получения пучков пионов на ускорителях на пути пучка ускоренных протонов ставится тонкая мишень. В мишени генерируются мезоны. Определить число пионов N_π , образовавшихся в мишени в секунду, если на расстоянии $l = 5$ м от мишени регистрируется число пионов, равное $n = 5 \cdot 10^2$ с⁻¹. Регистрация осуществляется детектором, площадь которого равна $S = 100$ см². Энергия пионов равна $W_\pi = 500$ МэВ. Считать, что из мишени пионы вылетают изотропно, т. е. равновероятно под любыми углами.

8.32. В процессе рождения на внутренней мишени мезонов с импульсом $p = 2$ ГэВ/с, число пионов n_π превышает число каонов n_K в 100 раз. Найти отношение их чисел N_π/N_K на расстоянии $l = 50$ м от мишени.

8.33. Определить пороговую энергию $W_{\text{пор}}$ для реакции $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$.

8.34. В некоторых опытах по измерению времени жизни протона используются протоны, упакованные в атомные ядра, например ядра атомов железа. Производится поиск продуктов распада для одной из возможных мод, в частности $p \rightarrow e^+ + \pi^0$. Оценить

характерный угол θ между импульсами продуктов распада с учетом фермиевского импульса протона в ядре p_F .

8.35. Найти угол θ между импульсами γ -квантов — продуктов распада нейтрального пиона, который сам образовался при распаде покоящегося протона на позитрон и пион. Считать импульсы γ -квантов одинаковыми.

8.36. В одном из экспериментов со встречными пучками электронов используются два одинаковых накопительных кольца, в которых пучки ультрарелятивистских частиц движутся в противоположных направлениях, сталкиваясь друг с другом на длине взаимодействия $l = 0,5$ м (рис. 8.1). Система счетчиков, окружающих область взаимодействия, установлена так, что она регистрирует одно из 10 событий ($e = 0,1$) взаимодействия частиц. Площадь сечения циркулирующих пучков в кольцах равна $S = 5 \text{ мм}^2$, эффективное сечение взаимодействия двух соударяющихся частиц $\sigma = 10^{-5}$ б. Найти циркулирующий ток I , который нужно накопить в каждом кольце, чтобы системой счетчиков наблюдать число отсчетов не менее $K = 10 \text{ с}^{-1}$. Считать, что плотность числа частиц вдоль орбиты постоянна.

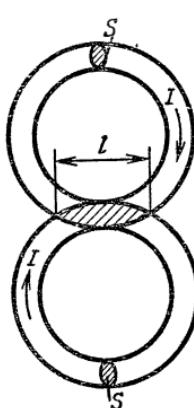


Рис. 8.1

8.37. Во сколько раз уменьшается пороговая кинетическая энергия протона при генерации пары протон и антiproтон, если в качестве мишени использовать не покоящийся протон жидкого водорода, а протон, входящий в состав тяжелого ядра.

§ 8.2. Структура ядра и ядерные реакции

8.38. Исходя из формулы Вейцзеккера оценить поверхностное натяжение ядерного вещества.

8.39. С помощью формулы Вейцзеккера найти заряд Z_0 наиболее устойчивого ядра — изобары при заданном нечетном значении A . Выяснить, каков характер активности у ядра ^{27}Mg .

8.40. С помощью полуэмпирической формулы Вейцзеккера найти минимальное значение параметра Z^2/A , при котором становится энергетически возмож-

ным деление ядра с четным A и Z на две одинаковые части.

8.41. На рис. 8.2 изображен спектр низколежащих возбужденных уровней ядра ^{234}U , где W — энергия уровня, \mathcal{L} — момент импульса. Показать, что эти уровни соответствуют возбуждению вращения ядра как целого относительно оси симметрии ядра. Оценить из этих данных момент инерции I ядра.

8.42. Предполагая, что нуклоны внутри ядра движутся независимо в парabolической потенциальной яме, определить число нуклонов n , которые могут располагаться на трех первых ядерных оболочках.

8.43. Полагая, что перед α -распадом в ядре образуется самостоятельная α -частица, оценить отношение интенсивностей $\mathcal{I}_1/\mathcal{I}_2$ двух групп α -частиц с кинетическими энергиями $W_1 = 6,3$ и $W_2 = 5,7$ МэВ, испускаемых ядрами ^{220}Rn . В обоих случаях частоту ударов о «стенку» потенциального барьера считать одинаковой.

8.44. Оценить период полураспада $\tau_{1/2}$ четно-четного радиоактивного ядра, испускающего α -частицы с энергией 1 МэВ, если ядро $^{232}_{90}\text{Th}$ имеет период распада $\tau_{1/2} = 1,4 \cdot 10^{10}$ лет и испускает α -частицы с энергией 4 МэВ, а для ядра $^{212}_{84}\text{Po}$ период полураспада равен $\tau_{1/2} = 3 \cdot 10^{-7}$ с и $W_\alpha = 8,8$ МэВ.

8.45. При радиоактивном распаде ^{60}Co испускается электрон, спин которого параллелен импульсу. Оценить, на какой угол ϕ повернется диск, подвешенный на нити, если образец кобальта нанесен на одну из поверхностей диска. Толщина диска достаточна для полного поглощения в нем электронов, вылетающих в сторону диска. Активность препарата равна 0,3 ТБк модуль кручения нити равен $f = 10^{-11}$ Н·см/рад.

8.46. Образец тефлона (полимера с химической формулой $(\text{CF}_2)_n$, где n — целое число) намагничивается в магнитном поле с индукцией $B = 2$ Тл при температуре $T = 0,05$ К. Намагничивание обусловлено расщеплением основного состояния ядра фтора $^{19}_{9}\text{F}$.

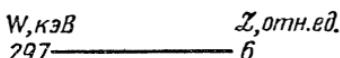


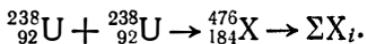
Рис. 8.2

в магнитном поле на два подуровня. При выключении поля образец получает момент импульса $\mathcal{L} = 24,2 \times 10^{-6}$ г·см²/с (аналог эффекта Эйнштейна — де Гааза в ферромагнетиках). Определить магнитный момент μ ядра фтора.

8.47. Толстая мишень, содержащая n ядер/см³, облучается α -частицами. Зависимость дифференциального выхода исследуемой реакции от энергии α -частиц в интервале 1—10 МэВ оказалась квадратичной: $d\eta/dW = cW^2$. Определить приближенно характер зависимости эффективного сечения реакции от энергии $\sigma(W)$. При этом в выражении для ионизационных потерь энергии пренебречь логарифмическим и релятивистским членами, т. е. положить $dW/dx = A/W$, где $A = \text{const}$.

8.48. Хорошо сколлимированный пучок γ -квантов с энергией $W_\gamma = 250$ МэВ падает на мишень, содержащую дейтерий. Вследствие фоторасщепления дейтерия вторичный пучок содержит нуклоны. Оценить средний угол разлета ϕ нуклонов после реакции. Радиус ядра дейтерия приблизительно равен $r_d \approx 2 \cdot 10^{-13}$ см.

8.49. Один из перспективных методов получения новых изотопов — синтез тяжелых ядер с их последующим распадом. Найти пороговую скорость v ядер урана, бомбардирующих урановую мишень, для реакции



8.50. Определить энергию W_n нейтрона и ядра $W_{\text{ядра}}$ ^6Li , образующихся при фоторасщеплении ядра ^7Li под действием γ -кванта с энергией $W_\gamma = 15$ МэВ, если нейтрон вылетает «вперед», т. е. по направлению пучка γ -квантов.

8.51. При какой кинетической энергии W_k налетающего протона на покоящийся протон в реакции $p + p \rightarrow d + \pi^+$ некоторые из возникающих пионов покоятся в лабораторной системе?

8.52. Найти среднее эффективное сечение σ реакции $\alpha + ^{27}_{13}\text{Al} \rightarrow p + ^{30}_{14}\text{Si}$. Известно, что при облучении толстой алюминиевой мишени α -частицами с энергией 8 МэВ выход протонов равен $\eta = 8 \cdot 10^{-6}$. Длина пробега α -частиц в воздухе равна $l_\alpha = 7,0$ см.

8.53. Оценить эффективное сечение σ взаимодействия ультрарелятивистского нейтрона с ядром урана.

8.54. В урановом реакторе мощностью $P = 1$ МВт образуется в среднем $n = 6$ антинейтрино на один акт деления ядра урана. Энергия антинейтрино $W_{\bar{\nu}} = 1,5$ МэВ. Реактор окружен биологической защитой (бетон). Оценить поток антинейтрино $J_{\bar{\nu}}$ за биологической защитой на расстоянии $L = 5$ м и долю энергии η , уносимой антинейтрино из реактора.

8.55. Для получения термоядерной энергии многообещающей является реакция соударения двух дейтонов. Реакция может происходить по двум каналам. Определить продукты реакции в обоих случаях. В каком из них выделяется больше энергии и насколько?

8.56. Какая энергия W выделится в реакции $d + t \rightarrow$? Какое количество теплоты Q будет получено при сгорании 1 кг такого топлива?

8.57. Согласно современным представлениям на Солнце осуществляется звездный углеродный цикл, в результате которого из четырех протонов образуется α -частица. Конечной реакцией этого цикла является реакция $p + {}^{15}N \rightarrow {}^{12}C + {}^4He$. Оценить, какая доля энергии η от полной энергии цикла выделяется в указанной реакции.

8.58. Определить максимальную кинетическую энергию нейтронов W_{max} , возникающих в реакции $t + d \rightarrow n + {}^4He$ под действием трития t , который сам получается при поглощении медленных нейтронов в 6Li согласно реакции $n + {}^6Li \rightarrow t + \alpha$.

8.59. Концентрация дейтерия в реакторе поддерживается на постоянном уровне с помощью внешнего источника дейтонов. Найти мощность P , выделяемую в 1 см^3 плазмы, и полный поток частиц J от внешнего источника, необходимый для стационарной работы реактора. Температура плазмы составляет 60 кэВ, концентрация дейтерия $n_d = 2,5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$.

Указание. При такой температуре среднее значение произведения сечения реакции σ на скорость частиц равно $\sigma v_{dd} = 2,5 \cdot 10^{-17} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$.

8.60. Оценить радиус R плазменного шара из дейтерия, при котором термоядерная реакция станет самоподдерживающейся. Предполагается, что основные потери энергии плазмы — потери на излучение через поверхность. Концентрация дейтерия равна $n_d = 3,0 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$, температура $T = 10$ кэВ, $\sigma v_{dd} = 10^{-20} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$.

Указание. Плазму можно рассматривать как черное тело, непрозрачное для излучения.

8.61. Оценить минимальное значение силы тока I_{\min} , который необходимо пропустить вдоль плазменного столба радиусом $R = 5$ см для удержания его в равновесии. Концентрация плазмы равна $n = 7 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$, температура $T = 3 \cdot 10^7 \text{ К}$.

8.62. Оценить запас термоядерной энергии W в 1 м³ воды, если использовать 10 % дейтерия, содержащегося в воде, для осуществления реакции $d + d$. Число атомов дейтерия в природной смеси изотопов равно 0,015 %.

8.63. Удельное содержание изотопа ^{14}C , усвоенное деревом при его росте, затем уменьшается вследствие β -распада. Определить возраст t деревянного предмета, обнаруженного при раскопках, если удельная активность ^{14}C этого предмета составляет 0,1 от удельной активности свежесрубленного дерева.

8.64. Быстрые нейтроны, попав в воду, быстро замедляются до тепловых скоростей $v = 2 \text{ км/с}$ и диффундируют в ней, пока не захватятся ядрами водорода (захватом кислородом можно пренебречь). Оценить время жизни τ нейtronов в воде. Сечение захвата равно $\sigma = 0,3 \text{ б}$.

8.65. Определить, во сколько раз уменьшается интенсивность узкого пучка тепловых нейтронов после прохождения пластиинки Al толщиной $d = 3 \text{ см}$. На выходе из пластиинки регистрируется пучок первоначальной ширины. Сечение рассеяния и поглощения равно $\sigma = 2,5 \text{ б}$.

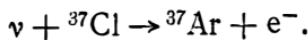
8.66. Два цилиндрических стержня с одинаковыми диаметрами, один из графита, другой из висмута, совмещены основаниями. Через открытый торец графитового стержня вдоль оси стержня падает поток тепловых нейтронов. Полагая рассеяние нейтронов в графите и висмуте брэгговским, оценить, во сколько раз средняя кинетическая энергия нейтронов W_k , выходящих из висмутового цилиндра через его боковую поверхность, меньше энергии падающих нейтронов W_0 . Максимальное расстояние между кристаллическими плоскостями для графита $d_{\text{C}} = 33,5 \text{ нм}$ и для висмута $d_{\text{Bi}} = 40,5 \text{ нм}$. Длина стержней много больше их диаметров, которые сравнимы со средним пробегом нейтронов.

8.67. Определить отношение начальной кинетической энергии частиц дейтериевой плазмы, нагретой до $T = 10^9$ К, к энергии, выделившейся после «выгорания» всего дейтерия в результате реакции термоядерного синтеза.

8.68. Оценить, какая доля протонов космического излучения дойдет до поверхности Земли, не испытав ядерного взаимодействия. Сечение ядерного взаимодействия протонов с веществом атмосферы приближенно можно считать равным геометрическому сечению ядер азота.

8.69. Оценить пробег l_N ультраквантитативистских ядер азота до ядерного взаимодействия в жидколовородной камере.

8.70. Ядерные реакции, проходящие на Солнце, можно изучать, измеряя поток нейтрино от Солнца. Нейтрино с энергией в несколько мегаэлектрон-вольт (эти нейтрино образуются при распаде ядер ^{8}B на заключительной стадии превращения водорода в гелий) детектируются в реакции



Сечение такой реакции, усредненное по энергетическому спектру рассматриваемых нейтрино, равно $\sigma = 1,4 \cdot 10^{-42}$ см 2 . Считая, что в секунду Солнце испускает число нейтрино, равное $N_\nu = 3 \cdot 10^{33}$ с $^{-1}$, определить, какова должна быть масса m четыреххлористого углерода CCl_4 (естественной смеси изотопов), чтобы в нем за время $t = 1$ год произошло $n = 100$ актов образования атомов ^{37}Ar . В естественной смеси изотопов хлора содержится $\eta = 25\%$ (по весу) ядер ^{37}Cl .

8.71. Считая, что сечение взаимодействия нейтрино с нуклонами σ_{vn} (в см 2) зависит от энергии W_ν нейтрино (в ГэВ) как $\sigma_{vn} = AW_\nu$, где коэффициент $A = 10^{-35}$ см $^2/\text{ГэВ}$, оценить энергию W_ν нейтрино, необходимую для его эффективного поглощения Землей.

8.72. Оценить, насколько толща Земли ослабляет поток нейтрино, приходящих с противоположной стороны земного шара. Усредненное по энергетическому спектру сечение поглощения нейтрино на атомных ядрах грунта равно $\sigma \approx 10^{-35}$ см 2 , средняя плотность грунта $\rho = 5,5$ г/см 3 , эффективная атомная масса $\mathcal{A} = 50$.

8.73. Определить кинетическую энергию W_k протона, если при движении в азоте он начинает испускать свечение Вавилова — Черенкова при давлении $p = 5,0 \text{ МПа}$ и выше. Показатель преломления азота при нормальном давлении равен $n = 1,0003$.

8.74. С какой относительной скоростью v надо сближать кристаллический источник, содержащий возбужденные ядра ^{191}Ig (энергия возбуждения $W = 129 \text{ кэВ}$), с мишенью, содержащей свободные ядра ^{191}Ig , чтобы наблюдать максимальное поглощение γ -квантов в мишени?

8.75. В цилиндрическом пропорциональном счетчике пучок частиц образует объемную ионизацию. Оценить время t собирания ионов в таком счетчике, наполненном при нормальном давлении. Радиус катода равен $R = 1 \text{ см}$, радиус анода $r = 2 \cdot 10^{-2} \text{ см}$, разность потенциалов между анодом и катодом $U = 2500 \text{ В}$, подвижность положительных ионов аргона $\mu = 1,4 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$.

8.76. Для фокусировки протонов высоких энергий можно использовать цилиндрическую тбковую линзу, представляющую собой аксиально-симметричный газоразрядный промежуток (длина $l = 0,5 \text{ м}$, однородная плотность тока $j = 10^3 \text{ А/см}^2$). Частицы входят в линзу параллельно линиям тока, а после выхода из нее фокусируются. Считая линзу тонкой, найти ее фокусное расстояние F . Энергию протонов принять равной $W_p = 12 \text{ ГэВ}$.

8.77. Один из самых современных методов определения времени жизни нейтронов по отношению к β -распаду состоит в измерении числа протонов, образующихся при про-
лете медленных нейтронов че-
рез промежуток a фокусирующ-
щей системы детектора протонов \bar{D} (рис. 8.3). Найти

число протонов N_p , поступающих на детектор, если длина промежутка, в котором протоны распадаются, равна $a = 20 \text{ см}$, поток медленных нейтронов $J_n = 10^{13} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$, скорость нейтронов $v = 2 \text{ км/с}$, эффективность сбора протонов 100 %.

8.78. Много лет тому назад в урановом месторождении в Окло (Габон, Африка) «работал» природный

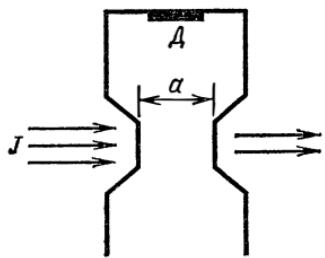


Рис. 8.3

ядерный реактор на уране-235. Из массы $M = 200$ т имевшегося там урана выделилась энергия $W = 3,6 \cdot 10^5$ ТДж. Оценить, какая часть массы урана-235 $\Delta M/M$ была при этом израсходована, если его начальная концентрация составляла $n_0 = 3,5\%$. Время «работы» реактора много меньше периода полураспада урана. Энергию, выделяющуюся при делении ядра урана-235, принять равной $W_0 = 200$ МэВ.

8.79. Естественный уран состоит из 99,3 % изотопа урана-238 и 0,7 % урана-235. При обогащении смеси изотопов ураном-235 до 3 % возможна цепная реакция деления. Какое время t тому назад такой природный реактор мог «загореться»?

8.80. Под действием нейтронной компоненты космического излучения на поверхности Земли из урана-238 образуется плутоний-239. Считая, что поток космических нейтронов равен $J_n = 1 \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ и эффективное сечение захвата нейтронов ядром урана равно $\sigma = 3 \text{ б}$, определить отношение концентрации плутония-238 и урана-238 при временах $t \gg \tau_{1/2}$ от начала облучения ($\tau_{1/2}$ — период полураспада плутония).

8.81. Ядра кислорода ^{16}O облучаются пучком протонов с импульсом $p = 10 \text{ ГэВ/с}$. Отбираются такие события, когда в результате реакции



возбужденные ядра кислорода ${}^{16}\text{O}^*$ с энергией возбуждения, равной $W = 1 \text{ МэВ}$, вылетают в направле-

ниях, практически перпендикулярных пучку, и испускают монохроматические γ -кванты вдоль

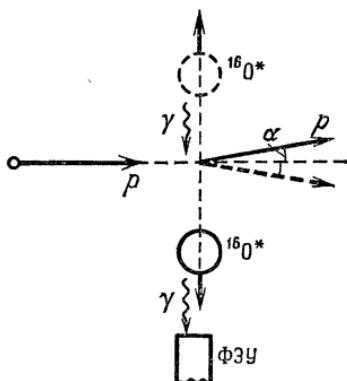


Рис. 8.4

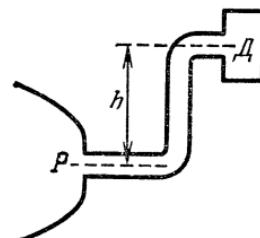


Рис. 8.5

траектории ядер кислорода (рис. 8.4). Детектор γ -квантов регистрирует две линии, расстояние между

которыми $\Delta W = 200$ кэВ. Оценить импульс p_{0*} вылетевших ядер кислорода и малый угол α , на который отклоняются протоны.

8.82. В реакторах, работающих на тепловых нейтронах, имеются очень медленные ультрахолодные нейтроны (УХН). Особенностью УХН является то, что при скоростях $v < v_{rp}$ (обычно граничная скорость $v_{rp} \approx 10$ м/с) нейтроны упруго отражаются от стенок при любых углах падения. Для вывода УХН из реактора используют полые трубы — нейtronоводы. На рис. 8.5 изображен реактор P , нейtronовод специальной формы и на его конце — детектор нейtronов D . Полагая, что распределение нейtronов по скоростям в реакторе максвелловское (при температуре $T \sim 400$ К), найти, как зависит поток нейtronов, доходящих до детектора, от высоты его поднятия h . Оценить высоту h_{rp} , на которой поток нейtronов исчезает.

I. МЕХАНИКА

§ 1.1 Движение материальной точки

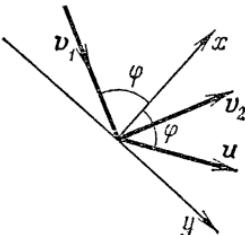
1.1. Направим ось координат x нормально к поверхности ракетки, а ось y — параллельно поверхности (в плоскости падения) (рис. 1). Пусть в системе, связанной с Землей, скорость мяча есть v_1 ($v_{1x} = v_1/2$, $v_{1y} = 3^{1/2}v_1/2$), а скорость ракетки — u . Предполагается, что ракетка движется поступательно. Тогда в системе, связанной с ракеткой, скорость мяча v' имеет составляющие

$$v'_{1x} = v_{1x} - u_x, \quad v'_{1y} = v_{1y} - u_y.$$

После столкновения скорость мяча в движущейся системе

$$v'_{2x} = -v'_{1x}, \quad v'_{2y} = v'_{1y}$$

Рис. 1



(условие зеркального отражения). Переходя снова к неподвижной системе, запишем выражения для составляющих скорости v_2 мяча после отражения от ракетки:

$$v_{2x} = -v_{1x} + 2u_x, \quad v_{2y} = v_{1y}.$$

По условию задачи $(v_1 v_2) = 0$, т. е.

$$v_{1x}(-v_{1x} + 2u_x) + v_{1y}^2 = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$u_x = -v_{1x}, \quad u_y \text{ произвольно.}$$

Следует, однако, подчеркнуть, что при ударе ракетки по мячу условие зеркального отражения выполняется достаточно строго только в случае нормального падения (в системе, связанной с ракеткой). Этот случай реализуется при $u_y = v_{1y}$. Поэтому окончательный ответ следует записать в виде

$$u = v_1.$$

1.2. $a_{\max} = v^2/R_{\min} = 5 \text{ м/с}^2$, $a_{\min} = v^2/R_{\max} = 0,62 \text{ м/с}^2$,
где $R_{\min} = b^2/a = 125 \text{ м}$, $R_{\max} = a^2/b = 10^3 \text{ м}$.

$$k \geq v^2/(gR_{\min}) = 0,5.$$

$$1.3. v(t) = v_0 \cos \alpha - k(v_0 \sin \alpha + gt).$$

$$1.4. F = mg/l/R \approx 1,7 \text{ кН.}$$

$$1.5. W_{\kappa \max} = (1/2) E_{\text{IO}} V = 5 \text{ ГДж.}$$

$$1.6. F(r) = -(r_0/r) W_0 [(1/r) + (1/r_0)] \exp(r_0/r); r_1 = 6 \text{ фм.}$$

$$1.7. h = (1/2g) \{v^2 - 4mg/[\pi \rho v d^2 (1 - \cos \alpha)]^2\} \approx 0,6 \text{ м}$$

$$1.8. \alpha = 4kh\Delta/l^2 \approx 0,03 \text{ рад.}$$

$$1.9. L_1 = 2L(1 - kh/l) = 1,6L, \quad L_2 = 2L(1 + kh/l) = 2,4L.$$

$$1.10. F = mgl(k_1 + k_2)/[2(l - h(k_1 - k_2))].$$

$$1.11. P_{\max} = P + mgv \sin \alpha = 59,6 \text{ кВт.}$$

$$1.12. t = (l/v_0)(1 + m_1/2m_0).$$

$$1.13. W_{\min} = (mg/2) [h + (L^2 + h^2)^{1/2}] = 34 \text{ Дж.}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = v_y/v_x = h/L + (h^2 + L^2)^{1/2}/L = 1,25.$$

$$1.14. \alpha = 30^\circ.$$

$$1.15. v \approx W/(mc) \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ м/с.}$$

$$1.16. p \approx W/c \approx 8 \cdot 10^{-24} \text{ кг} \cdot \text{м/с.}$$

$$1.17. h_{\max} = (v_0^2 + gl)/(3g). \text{ По параболе.}$$

$$H_{\max} = (v_0^2/2g) - (l/2) [(v_0^2/3gl) - 2/3]^3.$$

$$1.18. F_{\max}/(mg) = 1 + [1 + (2H/\Delta)]^{1/2} = 6$$

$$1.19. v = mv_0/(M + m), \quad l = Mv_0^2/[2kg(M + m)].$$

$$1.20. v_1 = v(3^{1/2})/4, \quad v_2 = (1/4)v.$$

$$1.21. r_{\min} = Ze^2/W_{\kappa} \approx 1 \text{ фм.}$$

1.22. Из закона сохранения энергии и импульса следует

$$mv_0^2/2 = mv^2/2 + Mu_{\perp}^2/2 + Mu_{\parallel}^2/2,$$

$$mv_0 = Mu_{\parallel}, \quad mv = Mu_{\perp},$$

где u_{\perp} и u_{\parallel} — поперечная и продольная составляющие скорости ядра. Отсюда вытекает, что $M > m$. Скорости после столкновения равны

$$v = v_0 [(M - m)/(M + m)]^{1/2}, \quad u = (mv_0/M) [2M/(M + m)]^{1/2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = [(M - m)/(M + m)]^{1/2}.$$

1.23. Согласно закону сохранения импульса в случае γ -распада имеем

$$mv_2 = W_2/c.$$

Здесь $m = 226 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 3,75 \cdot 10^{-25} \text{ кг}$ — масса ядра ^{226}Ra , W_2 — энергия γ -кванта, которая практически совпадает с полной энергией, освобождаемой при γ -распаде, c — скорость света в вакууме.

кууме. Отсюда для кинетической энергии $W_{\text{к2}}$ ядра отдачи имеем

$$W_{\text{к2}} = W_2^2 / (2mc^2) = 0,095 \text{ эВ.}$$

В случае α -распада законы сохранения импульса и энергии запишутся в виде

$$(m - m_a)v_1 = m_a v_a, \quad (m - m_a)v_1^2/2 + m_a v_a^2/2 = W_1,$$

где v_a и v_1 — скорости α -частицы и ядра отдачи, а m_a — масса α -частицы. Отсюда, исключая v_a , для кинетической энергии $W_{\text{к1}}$ ядра отдачи получим

$$W_{\text{к1}} = (m_a/m) W_1 = 87 \text{ кэВ.}$$

Окончательно находим отношение кинетических энергий:

$$W_{\text{к1}}/W_{\text{к2}} = 2m_a c^2 W_1 / W_2^2 = 9 \cdot 10^5.$$

1.24. Максимальная энергия, которая может пойти на ионизацию, соответствует кинетической энергии, потерянной в абсолютно неупругом лобовом соударении Перейдя в систему центра масс, получим эту потерянную кинетическую энергию:

$$\Delta W_{\text{max}} = W m_{\text{Cs}} / (m_{\text{Cs}} + m_{\text{O}}) = 3,56 \text{ эВ,}$$

где m_{Cs} и m_{O} — массы атомов ^{133}Cs и ^{16}O . Энергия $\Delta W_{\text{max}} < W_n$, т. е. ионизация невозможна.

$$1.25. \quad W_{\text{k}} = \left(\frac{m_a + M_N}{M_N} \right) W \geq 3 \text{ МэВ.} \quad W_1 = 3,23 \text{ МэВ.}$$

$$1.26. \quad W = W_1 m_{^{16}\text{O}} / (m_{^{16}\text{O}} - m_a) = 1,3 \text{ МэВ.}$$

$$1.27. \quad W = W_n (1 + m_n / m_{\text{He}}) - 2W_D = 3,3 \text{ МэВ.}$$

$$1.28. \quad W = (1 - m_D / m_{\text{He}}) W_D \approx 1,08 \text{ МэВ.}$$

$$1.29. \quad f(v, l) = vl = \text{const.}$$

$$1.30. \quad T = 2\pi (\Delta/g)^{1/2} = 1,4 \text{ с.}$$

$$1.31. \quad T = 2\pi [(m_1 m_2 / \kappa (m_1 + m_2)]^{1/2}.$$

$$1.32. \quad T = 2\pi (ml/F)^{1/2}.$$

$$1.33. \quad \omega = (4kg/m)^{1/4}.$$

$$1.34. \quad \Delta T/T \approx -\mathcal{I}/(2\mathcal{I}_0) \approx -10^{-3}, \text{ т. е. ход часов ускоряется.}$$

$$1.35. \quad W_{\text{k}} = W_0/4, \quad W_{\text{кол}} = W_0/4.$$

1.36. Пусть скорость качелей при прохождении положения равновесия равна v_0 и связана с начальной амплитудой Φ_0 соотношением $v_0^2 \approx gl\Phi_0^2$ (в предположении, что углы отклонения качелей от положения равновесия малы). Полная энергия качелей в этот момент равна $W_0 = mv_0^2/2$, где m — масса человека. После того как человек резко встал, полная энергия равна

$$W_1 = mv_1^2/2 + mgh \approx mg(l-h)\Phi_1^2/2 + mgh,$$

где φ_1 — новая амплитуда. Изменение полной энергии произошло за счет работы, произведенной человеком против центробежных сил и сил тяжести: $W_1 - W_0 \approx mgh + (mv_0^2/l)h$. Сравнивая это выражение с разностью энергий W_1 и W_0 , найденных ранее, получаем

$$\varphi_1^2(1 - h/l) = \varphi_0^2(1 + 2h/l), \quad \text{или} \quad \varphi_1 - \varphi_0 \approx 3\varphi_0h/(2l),$$

что представляет собой приращение угловой амплитуды за половину периода. Следовательно, за период искомое приращение угловой амплитуды равно

$$\Delta\varphi \approx 3\varphi_0h/l.$$

$$1.37. \Delta T/T = -m/[2m(1+10^3)] = -5 \cdot 10^{-4}.$$

$$1.38. A = A_0/(6\pi).$$

1.39. Момент упругих сил $\mathcal{M}_y = -f\varphi$, где φ — угол поворота диска. Момент сил внутреннего трения в газе

$$\mathcal{M}_{tr} = - \int_0^R \frac{\eta v(r) r \cdot 2\pi r}{\hbar} dr,$$

где $v(r) = \dot{\varphi}r$ — скорость точек диска на расстоянии r от центра. Элементарное интегрирование дает

$$\mathcal{M}_{tr} = -2k\dot{\varphi}, \quad \text{где} \quad k = \pi\eta R^4/(4\hbar).$$

Как видно, при возрастании h момент сил трения \mathcal{M}_{tr} быстро убывает. Это позволяет в первом приближении не учитывать трение на верхней поверхности диска.

Уравнение движения диска имеет вид

$$\mathcal{I}\ddot{\varphi} + 2k\dot{\varphi} + f\varphi = 0.$$

Здесь $\mathcal{I} = mR^2/2$ — момент инерции диска. Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\varphi = \varphi_0 \exp(-\gamma t) \exp(\pm i\omega t).$$

Тогда получим

$$\gamma = k/\mathcal{I}, \quad \omega = 2\pi/T = [(f/\mathcal{I}) - \gamma^2]^{1/2} \approx (f/\mathcal{I})^{1/2},$$

где T — период колебаний. Логарифмический декремент затухания

$$\delta = \gamma T \approx 2\pi k/(\mathcal{I}f) = \pi^2 \eta R^3 / [\hbar (2fm)^{1/2}],$$

следовательно,

$$\eta = \delta h (2fm)^{1/2} / (\pi^2 R^3).$$

1.40. Для простоты оценок пренебрежем жесткостью покрышки и камеры и предположим, что деформацию мяча можно харак-

теризовать только одним параметром x (рис. 2), много меньшим радиуса мяча R (слабый удар). Тогда с хорошим приближением можно считать, что избыточное давление p в мяче в течение удара сохраняется постоянным. При этом сила, действующая на мяч со стороны стенки, $F = pS$ (S — площадь поверхности соприкосновения мяча и стеки), может быть представлена в виде

$$F = p\pi r^2 \approx 2\pi pR x.$$

Поскольку сила F оказалась пропорциональной деформации мяча x , уравнение движения мяча у стенки имеет вид уравнения колебаний:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = 4\pi^2/T^2 = 2\pi pR/m,$$

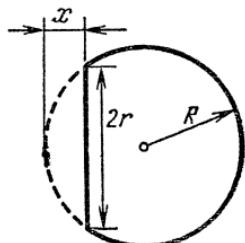


Рис. 2

где m — масса мяча. Время столкновения t равно половине периода колебаний, т. е. $t \approx (2\pi m/pR)^{1/2}$. Беря для оценок $m = 0,5$ кг, $p = 10^5$ Па, $R = 0,1$ м, получим $t \approx 2 \cdot 10^{-2}$ с.

1.41. Угол φ поворота маятника удовлетворяет уравнению $\mathcal{I}\ddot{\varphi} + f\dot{\varphi} = 0$, где $f = \pi GD^4/(32l)$ — модуль кручения нити. Согласно закону сохранения момента импульса начальные условия имеют вид

$$\varphi(0) = 0, \quad \mathcal{I}\dot{\varphi}(0) = 2WL/c,$$

где W — энергия, излученная квантовым генератором. Решение уравнения движения можно представить в виде

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega t,$$

где $\varphi_0 = \dot{\varphi}(0)/\omega$, $\omega = (f/\mathcal{I})^{1/2}$. Для чувствительности $\eta = 2\varphi_0/W$ получим

$$\eta = 4L/(\omega c \mathcal{I}).$$

Отсюда найдем период колебаний:

$$T = 2\pi/\omega = \pi c \eta \mathcal{I}/(2L) = 19 \text{ с.}$$

Далее, поскольку $T = 2\pi(\mathcal{I}/f)^{1/2}$, имеем

$$d = 4(\pi \mathcal{I} l / 2G T^2)^{1/4} = 22 \text{ мкм.}$$

§ 1.2. Реактивное движение. Гравитация

1.42. $v = 6(2gh_0)^{1/2}$.

1.43. $h = (p/\rho g)(m/M)^2$, где ρ — плотность воды.

1.44. $M = m_0 \exp(-gt/u)$, где $m_0 = m_1 + m_2$.
 $t_{1/2} \approx 140$ с, $t = 470$ с.

1.45. Выгоднее сначала включить двигатель с меньшей скоростью газовой струи.

1.46. $W_k = (m_0 - \mu t) (v_r^2 + v_b^2)/2 = 2,3$ МДж, где $t = (2h/g)^{1/2} = 20$ с, $v_b = gt = 200$ м/с, $v_r = u \ln(m_0/m) = 275$ м/с.

1.47. $\Delta m/m = 1 - \exp[-gR_3t/u(R_3 + vt)] = 86,5\%$, где R_3 — радиус Земли.

1.48. $\Delta m/m = 1 - \exp[-gR_3/(2uv)] = 95,7\%$.

1.49. $\Delta v = u \ln[(1+\alpha)/(1+\alpha-k)] = 3,4$ км/с.

1.50. $u_{\min} = v_2 [\ln(1+\alpha)/(1+\alpha-k)(1-k)]^{-1} = 2,8$ км/с.

1.51. $|v| = 2u$.

1.52. Сила, действующая на пробный груз массой m со стороны Земли, равна

$$F = [Gm(4\pi/3)\rho_3 R_3^3]/R_3^2 = (4\pi/3)G\rho_3 R_3 m,$$

где G — гравитационная постоянная, ρ_3 — средняя плотность, а R_3 — радиус Земли. Изменение этой силы в связи с приближением свинцового шара радиусом R_c равно

$$\Delta F = (4\pi/3)G\rho_c R_c m,$$

где $\rho_c = 11 \cdot 10^3$ кг/м³ — плотность свинца. Для измерения гравитационной постоянной с заданной погрешностью δ необходимо, чтобы

$$\Delta F/F \geq \eta/\delta = 10^{-6}, \text{ или } R_c \geq 10^{-6}R_3\rho_3/\rho_c \approx 3 \text{ м};$$

масса свинцового шара должна быть больше 10^3 т.

1.53. Пусть m_1 и m_2 — массы компонент двойной звезды, l_1 и l_2 — соответственно расстояния от их центров до центра масс и v_1 и v_2 — их скорости. Тогда, предполагая для простоты, что движение происходит по круговым орбитам, для частоты обращения ω получим

$$\omega = v_1/l_1 = v_2/l_2 = (v_1 + v_2)/L,$$

где $L = l_1 + l_2$, $\omega = 2\pi/T$.

Из рассмотрения сил, действующих на компоненты звезды, вытекает, что

$$m_1 v_1^2/l_1 = m_2 v_2^2/l_2 = Gm_1 m_2/L^2,$$

$$v_1^2/l_1 + v_2^2/l_2 = G(m_1 + m_2)/L^2.$$

Далее легко получить, что $G(m_1 + m_2) = 4\pi^2 L^3 T^{-2}$.

Аналогично для системы Солнце — Земля (масса Земли M_3 пренебрежимо мала по сравнению с массой Солнца M_C) получим $GM_C = 4\pi^2 L_3^3 T_3^{-2}$, где $T_3 = 1$ год, а расстояние от Земли до Солнца равно, по определению, $L_3 = 1$ а. е. Таким образом,

$$M = m_1 + m_2 = M_C (T_3/T)^2 (L/L_3)^3 = (8/9)M_C.$$

$$1.54. T = 2\pi [(L^2 - l^2)^3 / 2GML (3L^2 + l^2)]^{1/2} = 93 \text{ мин.}$$

$$1.55. \Delta T/T = (H - 2h)/(2R_3) \approx 8 \cdot 10^{-5}.$$

1.56. Поскольку период колебаний маятника $T \propto g^{-1/2}$, то $\Delta T/T = \Delta g/(2g)$, где Δg — поле тяготения, создаваемое грунтом, вынутым из тоннеля. Считая тоннель достаточно длинным, не-трудно найти Δg , используя теорему Гаусса. В результате имеем

$$\Delta g = 2\pi G\rho R^2/H.$$

Численная оценка приводит к результату $\Delta T/T \approx 10^{-7}$.

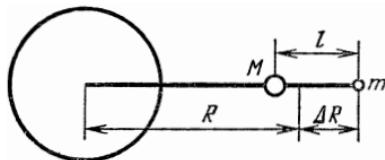
$$1.57. p(r) = (2\pi/3)\rho^2 G(R_3^2 - r^2). \quad p(0) \approx 0,2 \text{ ТПа.}$$

$$1.58. v - V = [v_0^2 + 3G(M+m)/R]^{1/2}.$$

1.59. Если космонавт и спутник летят по одной и той же орбите, то сила натяжения шнура $F = 0$. Эта сила максимальна, когда космонавт, спутник и центр Земли находятся на одной прямой (рис. 3). Период обращения T системы спутник—космонавт около Земли связан с радиусом R орбиты центра масс этой системы соотношением

$$4\pi^2 R/T^2 = GM_3/R^2,$$

Рис. 3



где M_3 — масса Земли. Для удержания космонавта на орбите радиусом $R + \Delta R$ необходима дополнительная сила F , определяемая из условия

$$4\pi^2 (R + \Delta R)/T^2 = [GM_3/(R + \Delta R)^2] + F/m.$$

Отсюда с точностью до членов порядка $(\Delta R/R)^2$ имеем

$$F \approx 3GM_3m\Delta R/R^3 \approx 3ng\Delta R/R \approx 3n gl/R \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ Н}$$

(здесь учтено, что массы спутника M и космонавта m много меньше M_3 , и так как $M \gg m$, то $\Delta R \approx l$). Такая же сила натяжения потребуется для удержания космонавта, расположенного между спутником и Землей. В заключение отметим, что гравитационная сила притяжения космонавта к спутнику на шесть порядков меньше F .

$$1.60. M_M/M_3 \approx (L_M/R_3)^3 (T_3/T_M)^2 \approx 0,11,$$

$$\text{где } T_3 = 2\pi(R_3/g)^{1/2}, \quad L_M = (1/2)(2R_M + a + b).$$

$$1.61. t = \pi(R_3/g)^{1/2} = 42 \text{ мин.}$$

$$1.62. v = (v_0/2)[1 + 2 \cos(180^\circ - \varphi)].$$

$$1.63. T = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

1.64. Уравнение движения ракеты в поле притяжения Луны имеет вид

$$m(dv/dt) = mg_{\text{Л}} + (dm/dt) u.$$

Интегрирование его по времени t дает ($g_{\text{Л}}$ — ускорение свободного падения на поверхности Луны)

$$m(t_1) = m_0 \exp [-(v_0 + g_{\text{Л}} t_1)/u],$$

где $m(t_1)$ масса ракеты после работы двигателя в течение интервала времени t_1 . Таким образом, искомый запас топлива равен

$$M = m_0 \{1 - \exp [-(v_0 + g_{\text{Л}} t_1)/u]\}.$$

1.65. $\Delta v = v_3 \{[2R_M/(R_3 + R_M)]^{1/2} - 1\} \approx 3 \text{ км/с}$, где v_3 — средняя скорость движения Земли по орбите.

$$1.66. \Delta v = (h_1 - h_2) g^{1/2}/(4R_3^{1/2}) \approx 47 \text{ м/с.}$$

$$1.67. F_{\text{сопр}} = S\rho v^2 = 0,5 \text{ мН.}$$

$\Delta v = 2\pi HF/(mv) \approx 0,5 \text{ м/с}$ (где $v = 8 \text{ км/с}$ — скорость спутника).

$$\Delta H = -4\pi H^3 F/(GmM_3) \approx 0,4 \text{ км.}$$

1.68. Время между столкновениями одной и той же звезды равно $T = 1/(n\sigma u) = u(ct_1)^3/(8\pi N R_C G M_C) = 2,2 \cdot 10^{21} \text{ с} = 7 \cdot 10^{13} \text{ лет}$, где M_C и R_C — масса и радиус Солнца, $t_1 = 1 \text{ год}$, c — скорость света. В одном кубическом световом году одно столкновение происходит за время $t_{\text{ср}} = 2T/N = 1,4 \cdot 10^{13} \text{ лет}$.

1.69. $v = \{\left[v_3 + (v_0^2 - v_2^2)^{1/2}\right]^2 - 2v_3^2\}^{1/2}$, где v_3 — средняя скорость движения Земли по орбите, v_2 — 2-я космическая скорость.

1.70. При движении в гравитационном поле справедливы следующие соотношения:

$$T^2 b^{-3} = \text{const}, \quad bW = \text{const},$$

где T — период обращения, b — большая полуось орбиты, а W — полная энергия. Отсюда имеем $T^2 W^3 = \text{const}$ или для малых изменений периода и скорости v получим

$$\Delta T/T = -3\Delta W/(2W) = 3mv\Delta v/(2W),$$

где m — масса спутника. Поэтому, учитывая, что W — отрицательная величина, для уменьшения периода обращения нужно уменьшить скорость спутника ($\Delta v < 0$). Тогда он перейдет на эллиптическую орбиту с меньшим значением b и через n оборотов определит свое первоначальное положение на круговой орбите на расстояние

$$L = -nv\Delta T = 3nmv^2 T \Delta v/(2W) = -3nT\Delta v$$

(здесь мы учли, что для круговых орбит $W = -mv^2/2$). Увеличив затем скорость спутника на $-\Delta v$, можно снова перевести его

на исходную круговую орбиту, и относительная скорость спутников станет равной нулю.

Определим n и Δv при $L = 45$ км и $T = 1,5$ ч. При $n = 1$ $|\Delta v| > 8$ км/ч; при $n = 2$ $|\Delta v| = 5$ км/ч. Таким образом, $n_{\min} = 2$. Для стыковки нужно сначала уменьшить скорость отстающего спутника B на 5 км/ч, а через два оборота вновь увеличить ее до прежнего значения.

1.71. $R < 2GMm_p/(3k_B T) \approx 4 \cdot 10^{22}$ см, где k_B — постоянная Больцмана.

1.72. Не сможет, так как

$$v_2 = (2GM/R)^{1/2} = 11,5 \text{ м/с} > v_{\text{прыжка}} = (2g_3 h_3)^{1/2} = 7 \text{ м/с}$$

для $h_3 = 2,5$ м, где g_3 и h_3 — ускорение свободного падения и высота прыжка на Земле.

$$1.73. b/a = 1 - 2(\Delta v/v)^2 = 0,98.$$

§ 1.3. Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса.

Неинерциальные системы отсчета

$$1.74. S = vtr/2.$$

$$1.75. l_1 = l_2 (m_2/m_1)^{1/2}.$$

$$1.76. v_B = (gh/3)^{1/2}, \quad v_H = (4gh/3)^{1/2}.$$

1.77. На Землю упадет весь рой.

$$1.78. N = \pi R_3^2 hn \left(1 + 2gR_3/v^2 \right) = 7,75 \cdot 10^{10}.$$

1.79. $I \approx 2R_3 (mv/Mv_{\text{орб}})^2 \approx 1$ см, где $v_{\text{орб}}$ — орбитальная скорость спутника.

$$1.80. t = \pi [m_1 m_2 / \kappa (m_1 + m_2)]^{1/2}, \quad F' = 2F. \\ \Delta l = 2Fm_2 / [\kappa (m_1 + m_2)].$$

$$1.81. (P - P_0)/P_0 = (a/t) (R_3/g)^{1/2} = 6.$$

$$1.82. \operatorname{tg} \alpha = v_{\perp}/v_{\parallel} = 2^{1/2} v_0 / (1,5 v_0) \approx 0,9.$$

1.83. $M/m < 2(1 - v_1/v_0) \approx 0,3$, где v_0 — орбитальная скорость станций, а $v_1 = (2/3)^{1/2} v_0$.

$$1.84. v_{\min} = (g/R)^{1/2} (R - R_3).$$

$$1.85. T = \pi GM_3 / |W| \cdot (2|W|)^{1/2}.$$

$$\Delta T/T = -6\pi F_{\text{тр}}/g.$$

$$1.86. T = [3\pi/(G\rho)]^{1/2}.$$

1.87. Масса корабля должна уменьшиться от M_0 до M :

$$M = M_0 \exp[-(v_2 - v_1)/u] \approx 0,84 M_0.$$

Температура горения равна $T = u^2/(2c_p) = 3600$ К.

1.88. Уравнения для вертикальной v_z и горизонтальной v_x составляющих скорости ракеты имеют вид

$$M\dot{v}_z = -\dot{M}u \sin \varphi - g_{\text{Л}}M, \quad M\dot{v}_x = -\dot{M}u \cos \varphi,$$

где M — масса ракеты в момент времени t , $g_{\text{Л}}$ — ускорение свободного падения на поверхности Луны. По условию $v_z = 0$, поэтому из первого уравнения имеем

$$\dot{M} = -Mg_{\text{Л}}/(u \sin \varphi) = -M/T,$$

где через T обозначена постоянная величина, имеющая размерность времени и равная $T = u \sin \varphi/g_{\text{Л}} \approx 235$ с. Отсюда находим

$$M = M_0 \exp(-t/T).$$

Подставляя \dot{M} и M во второе уравнение, имеем

$$\dot{v}_x = g_{\text{Л}} \operatorname{ctg} \varphi \approx g_{\text{Л}}/\varphi, \quad v_x = g_{\text{Л}} t \operatorname{ctg} \varphi \approx g_{\text{Л}} t/\varphi.$$

Время t , необходимое для достижения 1-й космической скорости $v_1 = (R_{\text{Л}} g_{\text{Л}})^{1/2} = 1,7$ км/с, равно

$$t = v_1/(g_{\text{Л}} \operatorname{ctg} \varphi) \approx v_1 \varphi / g_{\text{Л}} \approx 100 \text{ с},$$

где $R_{\text{Л}}$ — радиус Луны.

Полученное выражение для t справедливо и при $\varphi \rightarrow 0$. Это вытекает из условия $v_z = 0$. При $\varphi \rightarrow 0$ расход массы бесконечно растет и, следовательно, время разгона до 1-й космической скорости стремится к нулю

Относительное изменение массы ракеты за счет сожженного горючего

$$[M(0) - M(t)]/M(0) = 1 - \exp(-t/T) \approx 0,35.$$

Перегрузка космонавтов равна

$$g_{\text{зф}} = (g_{\text{Л}}^2 + \dot{v}_x^2)^{1/2} \approx \dot{v}_x \approx g_{\text{Л}}/\varphi = 17 \text{ м/с.}$$

1.89. На круговой орбите радиусом R полная W , потенциальная $W_{\text{п}}$ и кинетическая W_{k} энергии связаны соотношениями

$$W = W_{\text{п}}/2 = -W_{\text{k}} = -GmM/(2R).$$

После взрыва полная энергия W_1 оказывается равной

$$W_1 = W_{\text{k}} + W_{\text{п}}(1 - q) = -(GmM/R)(0,5 - q).$$

При $q > 1/2$ эта энергия больше нуля и спутник покидает звезду по гиперболической орбите. При $q = 1/2$ $W = 0$ и орбита спутника будет параболой. При $q < 1/2$ спутник будет двигаться по эллиптической орбите, в одном из фокусов которой будет находиться остаток центральной звезды, а большая полуось b может быть определена из известного условия

$$2W_1 b = -GmM(1 - q).$$

Принимая во внимание выражение для W_1 , получим

$$b = R(1 - q)/(1 - 2q).$$

1.90. $m_1 = M[2L_2/(L_1 + L_2)] = 8,66 \text{ т},$

$$m_2 = M\{1 - [2L_2/(L_1 + L_2)]^{1/2}\} = 1,34 \text{ т}.$$

1.91. $m_1 = M\{[2L_2(L_1 + L_2)^{-1}]^{1/2} + 1\}/(2^{1/2} - 1) = 8,8 \text{ т},$

$$m_2 = M\{2^{1/2} - [2L_2(L_1 + L_2)^{-1}]^{1/2}/(2^{1/2} + 1)\} = 1,2 \text{ т}.$$

1.92. $L = [T^2 G(m + 4\pi R^3 \rho/3)/(4\pi^2)]^{1/3} = 1,1 \cdot 10^7 \text{ км}.$

1.93. $R_3 - R_{\text{п}} \approx 10 \text{ км}.$

1.94. $l = \omega_3 L^2 \sin \varphi / v = 23,6 \text{ м}$, где ω_3 — угловая скорость вращения Земли. Не зависит, если пренебречь влиянием центробежных сил.

1.95. $T(\omega) = 2\pi/\left[\omega_0(1 - \omega^2 \omega_0^{-2})^{1/2}\right]$, $l(\omega) = l_0/(1 - \omega^2 \omega_0^{-2})^{1/2}$,

где $\omega_0^2 = 2\kappa/m$.

Указание. Пренебречь величинами, пропорциональными $\dot{\omega}(t)$.

1.96. $\alpha = \operatorname{arctg} [\pi nv/(15g)]$.

1.97. При $\omega^2 < 2\kappa/m$ уравнение движения имеет вид

$$x = l \cos \omega_0 t,$$

где $\omega_0 = (2\kappa/m - \omega^2)^{1/2}$; при $\omega^2 = 2\kappa/m$ наступает равновесие; при $\omega^2 > 2\kappa/m$

$$x = l \operatorname{ch}[(\omega^2 - 2\kappa/m)^{1/2} t].$$

1.98. $v = 2^{1/2} \omega R$.

1.99. $U \approx m_e(l/e)\omega_3^2 R_3 \sin \varphi \approx 5 \cdot 10^{-13} \text{ В}$.

1.100. $m/M = (2\sin \varphi - 1)/2 = 0,35$.

§ 1.4. Движение твердого тела и жидкости

1.101. $c - v \approx m^2 c^3 R_3^2 / (2\mathcal{I} \omega_3^2) = (9/2)(mc/M_3 R_3 \omega_3)^2 c =$

$$= 1,56 \cdot 10^{-17} \text{ м/с. } W_{\text{к с}}/W_{\text{к з}} = 2c/(\omega_3 R_3) = 1,3 \cdot 10^6,$$

где ω_3 — угловая скорость вращения Земли.

1.102. $v \approx 5\hbar/(4m_e r_0) \approx 4 \cdot 10^{12} \text{ м/с} \gg c$.

1.103. $a = mgR^2/\mathcal{I}$.

1.104. 1) $\operatorname{tg} \alpha > (7/2) k$, 2) $\operatorname{tg} \alpha > (5/2) k$.

1.105. $a = mgr[r \sin \alpha - (r + R)k \cos \alpha]/(\mathcal{I} + mr^2)$.

1.106. $a = mgr[r \sin \alpha - k(R - r) \cos \alpha]/(\mathcal{I} + mr^2)$.

1.107. $a = 2g(M + m) \sin \alpha / [(M + 3m)]$.

1.108. $l = 3(2 - k)^2 h/(16k)$, где h — высота, на которую был поднят центр масс табуретки.

1.109. $v_0 \leqslant 3kR[2g/(R - r)]^{1/2} \approx 8,6 \text{ км/ч.}$

1.110. $\varphi = \operatorname{arctg} [2v^2/(gR)]$.

1.111. $v = 4m\omega_3 l \sin \varphi \sin \alpha / M = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$

1.112. $F_{\max} = 2\pi\varphi n R^2 m / (Tl) = 2 \text{ кН.}$

1.113. $\kappa \geqslant mlkr/\mathcal{I}.$

1.114. $\mathcal{L} = 2m[\omega x^2 - a(\omega x)];$ не зависит.

1) $|\mathbf{F}| = ma^2\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha/l.$

2) $\mathbf{F} = m(\omega x)[\omega(\omega x) - a\omega^2]/(l\omega).$ Здесь \mathbf{F} относится к верхнему креплению.

1.115. $\omega_{\min} = \omega/R.$ $v_K = (\omega R - v)/2.$

1.116. $W_{\text{п}} = p^2/(2m), W_{\text{в}} = 5p^2k^2/(4m).$ $k = 2/5.$

1.117. В задаче следует различать два случая: 1) $\operatorname{tg} \alpha = 2k$ при $k < 1/7$ (скольжение), 2) $\operatorname{tg} \alpha = 2/7$ при $k > 1/7$ (чистое качение).

1.118. Ось наклоняется в плоскости zx в сторону x на угол относительно оси $z,$ равный

$$\varphi = 2mvz_0/\mathcal{L}_z \approx 0,04 \text{ рад.}$$

1.119. $Q = \pi^3 \rho n^2 (R_1 R_2)^4 d_1 d_2 / (R_1^4 d_1 + R_2^4 d_2) = 62 \text{ Дж.}$

1.120. $n = 3v^2/(32\pi kgl) \approx 1 \text{ об.}$

1.121. $\omega = 2mxv/(Ml^2 + 3mx^2),$ где $x = l(M/3m)^{1/2}.$

1.122. $m_1 = 3m(l/l_1)^2 = (4/3)m.$ $T = 2\pi(l/g)^{1/2}.$

1.123. $t = \{(2l/g)[1 + 4\pi^2\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2/mh^2(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2)]\}^{1/2}.$

1.124. $v = (gh/2)^{1/2}.$

1.125. $\omega = mMRv/[(m + M)\mathcal{I}].$

1.126. $p_1 = p/2.$

1.127. $\omega_1/\omega_2 = -3,$ $v_1/v_2 = -5.$

1.128. $v_{\min} = (6 \cdot 2^{1/2}gl)^{1/2}.$

1.129. $\alpha \approx 5mv \sin \varphi / (2M_3 R_3 \omega_3) = 1,27 \cdot 10^{-17} \text{ рад.}$

1.130. $v = -3v_0/7 = -6 \text{ м/с.}$

1.131. $v = (5mv_0/7M)(1 - l/R).$

1.132. $v = 3^{1/2}v_0 - 14Mv_1/(5 \cdot 3^{1/2}m).$

1.133. $W = (1/2) [(mMv_0^2)/(M + m) + \mathcal{I}mr^2\omega_0^2/(\mathcal{I} + mr^2)],$ где $\mathcal{I} = (2/5)MR^2.$

1.134. $v = (2\omega_0 R \sin \varphi)/7,$ $\omega = (\omega_b^2 + \omega_r^2)^{1/2},$ где $\omega_r = (2\omega_0 \sin \psi)/7,$ $\omega_b = \omega_0 \cos \varphi.$

1.135. $T = 4\pi [3(\kappa/m + 2g/l)]^{-1/2}.$

1.136. $T = 2\pi(7R/5g)^{1/2}.$

1.137. $T = 2\pi(5R/2g)^{1/2}.$

1.138. $T = 2\pi(10R/g)^{1/2}.$

1.139. $T = 2\pi(2b/3g \sin \alpha)^{1/2}.$

1.140. $T = (2\pi/h) \{M[2h^2 + \pi^2(D^2 + d^2)]/[2(\kappa_1 + \kappa_2)]\}^{1/2}.$

1.141. При устойчивом равновесии угол между тросом и продолжением радиуса планеты равен $\theta_1 = 0,$ а период малых коле-

баний вокруг него $T = T_0/3^{1/2} \approx 0,9$ ч; при $\theta = \pi/2$ равновесие неустойчивое.

$$1.142. T = 2\pi [(3\pi r^4 \rho l + 8\rho_l a^3)/(9g\rho_l a^2)]^{1/2} = 1,6 \text{ с.}$$

1.143. Скорость упругих волн $v_0 = (E_{\text{Ю}}/\rho)^{1/2} = 5 \text{ км/с.}$ Для оценки за время соударения t примем время прохождения волны от одного торца стержня до другого и обратно, т. е. $t \approx 2l/v_0 = 4 \cdot 10^{-5} \text{ с.}$ Неупругие явления возникнут тогда, когда в каких-либо точках стержня давление достигнет p , т. е. потенциальная энергия, отнесенная к единице объема, достигнет величины $p^2/(2E_{\text{Ю}})$. Такими точками являются точки на поверхности соприкосновения стержней. В этих точках в момент удара вся кинетическая энергия полностью переходит в потенциальную энергию (отнесенную к тому же объему). Таким образом,

$$\rho v^2/2 \approx p^2/(2E_{\text{Ю}}),$$

и, следовательно,

$$v \approx p (\rho E_{\text{Ю}})^{-1/2} = p v_0 / E_{\text{Ю}} = 5 \text{ м/с.}$$

$$1.144. W = 2\pi R^3 p^2 / (3K).$$

1.145. $\Delta l = -Fl/(2b^2 E_{\text{Ю}})$, $\Delta V = Fl(1 - 2\mu)/(2E_{\text{Ю}})$, где μ — коэффициент Пуассона.

$$1.146. \Delta l = 4Fl(1 - \mu - 2\mu^2)/[\pi d^2 E_{\text{Ю}}(1 - \mu)].$$

1.147. Относительное изменение объема

$$\Delta V/V = 3(1 - 2\mu) p/E_{\text{Ю}},$$

где $\Delta V = m(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})/(\rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}})$ ($\rho_{\text{в}}$ — плотность воды, m — масса). Следовательно, $\Delta V/V = (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})/\rho_{\text{в}}$, а максимальное давление равно

$$p = E_{\text{Ю}}(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})/[3(1 - 2\mu)\rho_{\text{в}}] = 2 \text{ ГПа.}$$

$$1.148. r(y) = r_0 [h/(h + y)]^{1/2}.$$

1.149. В четыре раза.

$$1.150. t = (S_1/S_2)(2h/g)^{1/2}.$$

$$1.151. t = S_1(h - h_0)/[S_2(2gh_0)^{1/2}].$$

1.152. Для гравитационных волн скорость u и расстояние L связаны соотношением $u = (gL/2\pi)^{1/2}$. Поэтому волновые картины будут подобны, если все размеры изменить пропорционально квадрату скорости движения. Следовательно, скорость модели должна быть равной $3,6 \text{ км/ч} = 1 \text{ м/с.}$ Отметим, что в данной задаче безразмерными параметрами подобия являются отношения $u/v = (gL)^{1/2}/v$ и L/l , где v — скорость корабля, l — его линейный размер.

1.153. Фазовая скорость поверхностных волн может зависеть от плотности жидкости ρ , ускорения свободного падения g и длины волны λ : $v \propto \rho^n g^m \lambda^p$. Сравнивая размерности левой и правой частей этого уравнения, получим $n = 0$, $m = 1/2$, $p = 1/2$. Таким образом, $v = A(g\lambda)^{1/2}$, где A — некоторый числовой безразмерный множитель.

II. ТЕРМОДИНАМИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

§ 2.1. Газовые законы. Первое и второе начала термодинамики.

Термодинамические циклы

$$2.1. p = (p_0/T_0) (V_0 + V_1 + V_2) (V_0/T_0 + V_1/T_1 + V_2/T_2)^{-1}.$$

$$2.2. m = [\mu p_0 S l / R (T_2 - T_1)] \ln (T_2/T_1), \text{ где } R \text{ — универсальная газовая постоянная.}$$

2.3. Используя первое начало термодинамики, уравнение Менделеева — Клапейрона и уравнение процесса (рис. 2.1), получаем

$$C(V) = R(\gamma - 1)^{-1} [\gamma - (\gamma + 1)V/V_0] [1 - 2V/V_0]^{-1}.$$

$$T_{\max} = p_0 V_0 / (4R).$$

В точке $C(V) = 0$ прямая на рис. 2.1 касается адиабаты, а в точке $C(V) = \infty$ — изотермы.

$$2.4. pT^{-2/3} = \text{const.}$$

$$2.5. VT^{1/(\gamma-1)} \exp [-\xi T^2/(2R)] = \text{const.}$$

2.6. Согласно условию задачи $dQ = -dU$, где U — внутренняя энергия газа. Поэтому теплоемкость $C = dQ/dT = -C_V$. Используя это соотношение, первое начало термодинамики и уравнение Менделеева — Клапейрона, находим уравнение процесса:

$$TV^{(\gamma-1)/2} = \text{const}$$

и выражение для работы внешних сил, затрачиваемой на сжатие газа от объема V_0 до V :

$$A = 2C_V T_0 [(V_0/V)^{(\gamma-1)/2} - 1].$$

При $V = V_0/2$ работа равна

$$A = 2C_V T_0 (2^{(\gamma-1)/2} - 1).$$

2.7. При произвольном уравнении состояния $p = p(V, T)$

$$dp = (\partial p / \partial V)_T dV + (\partial p / \partial T)_V dT.$$

В изобарическом процессе $dp = 0$, отношение дифференциалов dV/dT равно частной производной $(\partial V / \partial T)_p$ и поэтому

$$(\partial p / \partial V)_T (\partial V / \partial T)_p (\partial T / \partial p)_V = -1.$$

Вводя обычным образом

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p, \quad \gamma_{\text{ад}} = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V, \quad \alpha_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T,$$

получаем $\beta = \gamma_{\text{ад}} \alpha_T$.

2.8. $T = T_0 (1/2)^{1/4} \approx 246 \text{ К.}$

2.9. $\gamma = 4/3.$

2.10. $A = (m/\mu) RT_1 [(T_2/T_1) - \ln(T_2/T_1)] > 0$, где μ — молярная масса газа.

2.11. $T = T_0 (\gamma_{\text{возд}}/\gamma_{\text{гел}}) (\mu_{\text{гел}}/\mu_{\text{возд}}) \approx 136 \text{ К.}$

2.12. Обычная формула для скорости адиабатической струи при истечении в вакуум имеет вид $v = (2C_p T / \mu)^{1/2}$, где μ — молярная масса, C_p — молярная теплоемкость при постоянном давлении. Используя уравнение состояния $p = \rho R T / \mu$ и формулу для скорости звука $s^2 = \gamma p / \rho$, получаем $v = s [2/(\gamma - 1)]^{1/2}$.

2.13. Согласно формуле Циолковского $m_0/m = \exp(v_1/v_0)$, где $v_0 = (2C_p T / \mu)^{1/2}$ — скорость истечения газов в системе ракеты (см. задачу 2.12). Поэтому

$$m_0/m = \exp \{v_1 [\mu (\gamma - 1) / (2\gamma R T)]^{1/2}\} \approx 11.3.$$

2.14. $p = p_0 [1 + \mathcal{M}^2 (\gamma - 1)/2]^{1/(\gamma-1)} \approx 160 \text{ атм.}$

2.15. $K = 2(3 - \ln 2)/35 \approx 13 \%$.

2.16. $K = 50 \%$.

2.17. Легко видеть, что первое начало термодинамики можно представить в виде

$$dQ = (C_p - C_V) (\partial T / \partial V)_p dV + C_V dT.$$

Действительно, при $V = \text{const}$ правая часть превращается в $C_V dT$, а при $p = \text{const}$, когда $dV = (\partial V / \partial T)_p dT$, в $C_p dT$. Отсюда следует, что для адиабатического процесса

$$(\partial T / \partial V)_{\text{ад}} = (C_p / C_V - 1) (\partial T / \partial V)_p,$$

поэтому

$$C_p / C_V \approx 1 + \beta V \Delta T / \Delta V = 1.1.$$

Переходя в первой формуле от переменных V, T к переменным p, T , с учетом тождества

$$(\partial T / \partial V)_p (\partial V / \partial p)_T (\partial p / \partial T)_V = -1$$

получаем

$$dQ = C_p dT - (C_p - C_V) (\partial T / \partial p)_V dp.$$

Отсюда приращение давления равно

$$\Delta p \approx (\partial p / \partial T)_V (C_p / C_V) (C_p / C_V - 1)^{-1} \Delta T \approx 1.1 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

2.18. $[1 - n_2^{(1-\gamma)}] / [1 - n_1^{(1-\gamma)}] \approx 1.3.$

$$2.19. A = NRT (\ln 2 - 19/24) \approx -40 \text{ Дж},$$

$K = (\ln 2 - 19/24)/(\ln 2 + 19/4) \approx 1,8\%$, N — число молей газа.

2.20. Принимая для разности температур между тропической и полярной областями $\Delta T \approx 50 \text{ К}$, получаем по теореме Карно $K_{\max} = \Delta T/T \approx 0,16$, где T — средняя температура на поверхности Земли. Отсюда $\bar{P} = 0,1K_{\max}J_{\text{W}}/(4\pi R_3^2) \approx 5 \text{ Вт}/\text{м}^2$, где R_3 — радиус Земли.

2.21. Допустим противное. Изобразим участки политроп A и B между двумя соседними состояниями 1 и 2 , в которых политропы встречаются, и составим из них замкнутый цикл, как

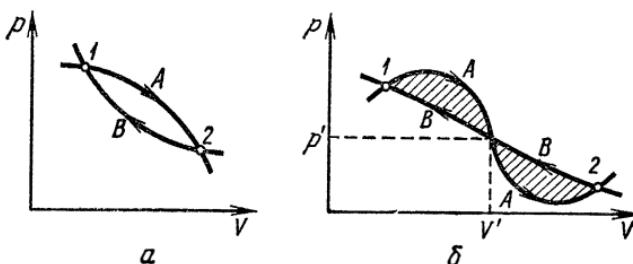


Рис. 4

показано на рис. 4а. Тогда вычисляя интегралы по этому циклу с учетом того, что на политропах $dQ = CdT$, получаем

$$\oint dS = (C_A - C_B) \ln(T_2/T_1), \quad A = \oint dQ = (C_A - C_B)(T_2 - T_1).$$

Здесь T_1 и T_2 — температуры в точках 1 и 2 , а C_A и C_B — теплоемкости на политропах A и B . Первый из интегралов аннулируется, так как энтропия является функцией состояния и поэтому интеграл от нее по замкнутому контуру равен нулю. Непосредственно видно, что при этом автоматически аннулируется и второй интеграл вне зависимости от того, за счет какого фактора обращается в нуль первый интеграл ($C_A = C_B$ или $T_1 = T_2$). Но так как работа A равна площади на pV -диаграмме, ограниченной циклом, то это означает полное совпадение кривых A и B .

Если функция $T(p, V)$ неоднозначна, то это доказательство теряет силу, так как возможна ситуация, представленная на рис. 4б. Здесь в точке p' , V' обеим политропам отвечают различные температуры, а $\oint p dV$ аннулируется за счет сокращения интегралов по двум заштрихованным областям. Что же касается интегралов по контурам, охватывающим одну из заштрихованных областей, то $\oint dS$ и $\oint dA$ отличны от нуля, так как эти контуры не отвечают замкнутым циклам.

2.22. Прежде всего надо показать, что адиабаты всегда идут круче, чем изотермы. Вдоль адиабаты $dS = 0$ и

$$C_V dT + [(\partial U / \partial V)_T + p] dV = 0,$$

где U — внутренняя энергия. Согласно известному термодинамическому тождеству выражение в квадратной скобке равно $T (\partial p / \partial T)_V$. Подставляя полный дифференциал функции $T = T(V, p)$, учитывая, что выписанное равенство справедливо вдоль адиабаты $S = \text{const}$, и воспользовавшись тождеством из задачи 2.7, получаем

$$(\partial p / \partial V)_S = (\partial p / \partial V)_T - (T/C_V) (\partial p / \partial T)^2 < (\partial p / \partial V)_T,$$

т. е. адиабата спускается круче изотермы при произвольном знаке $(\partial p / \partial T)_V$. Поэтому в целом цикл имеет обычный вид (рис. 5). Направление обхода (по часовой стрелке) диктуется исключительно знаком работы $A > 0$. Из $(\partial p / \partial T)_V < 0$ следует, что «горячая» изотерма T_1 расположена ниже «холодной» T_2 . Вдоль изотермы $dS = (\partial q / \partial T)_V dV$, и поэтому при движении по нижней изотерме влево ($dV < 0$) приращение теплоты равно $dQ_1 = T_1 dS > 0$, т. е. система, получает теплоту. На верхней («холодной») изотерме система теплоту отдает.

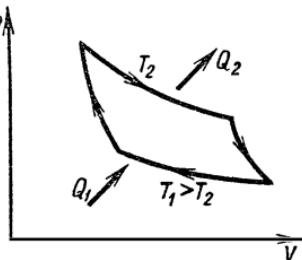


Рис. 5

2.23. Элементарная совершающаяся работа dA связана с элементарным количеством теплоты dQ_2 , передаваемым холодильнику, выражением $dA = (T_1/T_2 - 1)dQ_2$, следующим из теоремы Карно. Здесь T_1 и T_2 — температуры нагревателя и холодильника. Теплота Q_2 состоит из двух вкладов. Первый связан с плавлением льда, а второй — с нагреванием воды, образовавшейся при плавлении льда, от температуры $T_{\text{пл}}$ до T . Вычисление работы, отвечающей этим обоим вкладам, дает

$$A_{\max} = qN (T/T_{\text{пл}} - 1) + NC_{\text{в}} [T \ln (T/T_{\text{пл}}) - (T - T_{\text{пл}})],$$

где q — молярная теплота плавления льда.

2.24. Максимальная работа совершается при изоэнтропическом процессе. Из равенства энтропии системы в начальном и конечном состояниях следует

$$cm_1 \ln (T/T_1) + qm_2/T_2 = 0,$$

где c — удельная теплоемкость воды; отсюда

$$T = T_1 \exp [-qm_2/(cm_1 T_2)] \approx 278 \text{ К.}$$

Далее, из первого начала термодинамики вытекает, что

$$A_{\max} = cm_1(T_1 - T_2) - qm_2 \approx 63 \text{ кДж.}$$

2.25. Для обратимого изотермического процесса ($T = \text{const}$) из второго начала термодинамики следует, что $dA = -d\mathcal{F}$, где $\mathcal{F} = U - TS$ — свободная энергия. Поэтому $A_{\max} = -\Delta\mathcal{F}$. Так как для идеального газа в изотермическом процессе $U = \text{const}$, то $A_{\max} = T\Delta S$. Отсюда непосредственно вытекает, что максимальная работа, совершенная при изотермическом процессе, равна $A_{\max}^{T=\text{const}} = RT [N_1 \ln(V_1 + V_2)/V_1 + N_2 \ln(V_1 + V_2)/V_2] \approx 1,8 \text{ кДж.}$

Для обратимого адиабатического процесса ($dQ = 0$) из первого начала следует, что $A_{\max} = -\Delta U$. Этот процесс является изоэнтропическим, и условие $S = \text{const}$ приводит к следующему уравнению для определения конечной температуры T_k :

$$(N_1 C_{V1} + N_2 C_{V2}) \ln(T_k/T) + A_{\max}^{T=\text{const}}/T = 0.$$

Отсюда $T_k \approx 225 \text{ К}$. Максимальная работа, совершенная при адиабатическом процессе, равна

$$\begin{aligned} A_{\max}^{S=\text{const}} &= U(T) - U(T_k) = (N_1 C_{V1} + N_2 C_{V2})(T - T_k) = \\ &= [(T - T_k)/T \ln(T/T_k)] A_{\max}^{T=\text{const}} \approx \\ &\approx [(T + T_k)/(2T)] A_{\max}^{T=\text{const}} \approx 1,6 \text{ кДж.} \end{aligned}$$

2.26. $\Delta S = -(R/2) \ln 2$.

2.27. $\Delta S = R \ln [(p_1 + p_2)^2/(4p_1 p_2)] + 2R \ln 2$. Если газы одинаковые, то второе слагаемое отсутствует.

2.28. Каждый из поршней совершает работу по изотермическому сжатию того газа, для которого он непрозрачен, от объема V до объема $V_1 = V/2$; другой газ свободно проходит сквозь поршень. Полная работа внешних сил в этом процессе равна

$$A = 2NRT \ln(V/V_1) = (2 \ln 2) NRT.$$

Непосредственное вычисление изменения полной энтропии (как суммы изменения энтропий обоих газов) показывает, что $\Delta S = -A/T$ в соответствии с общей теорией (см. задачу 2.25).

2.29. $\Delta S = R \ln 2$, $\Delta T = (2^{\gamma-1} - 1) T_0 \approx 0,32 T_0$.

2.30. $t = (C_{\text{возд}} pV/RT_{\text{возд}} P)(1 - T_x/\Gamma_{\text{возд}}) \Delta T \approx 75 \text{ с}$, где $C_{\text{возд}}$ — молярная теплоемкость воздуха.

2.31. Записывая

$$T dS = d\mathcal{H} - V dp = [(\partial\mathcal{H}/\partial p)_T - V] dp + (\partial\mathcal{H}/\partial T)_p dT,$$

где \mathcal{H} — энтальпия, и воспользовавшись тем, что dS является полным дифференциалом, получаем термодинамическое тождество

$$(\partial\mathcal{H}/\partial p)_T - V \equiv -T (\partial V/\partial T)_p.$$

Воспользовавшись им, для адиабатического процесса ($dS = 0$) получаем

$$(\partial T / \partial p)_S = (T / C_p) (\partial V / \partial T)_p.$$

Для растяжения проволоки совершенно аналогично

$$(\partial T / \partial F)_S = -\alpha T / (c\rho S).$$

Здесь $S = \pi d^2/4$ — площадь поперечного сечения проволоки. Окончательно находим

$$\Delta T = -\alpha T F / (c\rho S) \approx -0,03 \text{ К.}$$

2.32. $\Delta S \approx (NR/4) [mg/(\pi r^2 p)]^2$.

2.33. Заключим сосуд объемом V_1 , содержащий N_1 молей гелия, внутрь большого объема V_2 , содержащего N_2 молей гелия и N молей воздуха при той же температуре T и полном давлении p (для простоты не учитываем, что воздух сам является смесью газов — результат от этого не зависит). Тогда энтропия в исходном состоянии, когда гелий находится в сосуде, равна

$$S_1 = RN_1 \ln(V_1/N_1) + RN_2 \ln(V_2/N_2) + RN \ln(V_2/N),$$

а в конечном состоянии, когда весь гелий продиффундировал наружу, равна

$$S_2 = R(N_1 + N_2) \ln[(V_1 + V_2)/(N_1 + N_2)] + RN \ln[(V_1 + V_2)/N].$$

Изменение энтропии $\Delta S = S_2 - S_1$ нужно вычислить в пределе, когда $N, N_2, V_2 \rightarrow \infty$, причем V_2/N и V_2/N_2 сохраняют конечные значения. Простое вычисление дает

$$\Delta S = RN_1 \ln(N_1 V_2 / N_2 V_1) = (pV_1/T_1) \ln(n_1/n_2) \approx 110 \text{ Дж/К},$$

где n_1 и n_2 — молярные концентрации гелия в сосуде и в окружающей атмосфере.

Минимальная изотермическая работа, необходимая для того, чтобы снова собрать такое количество гелия, равна (ср. задачу 2.25):

$$|A_{\min}| = T \Delta S = pV_1 \ln(n_1/n_2) \approx 32 \text{ кДж.}$$

2.34. $T_2 = (7/9)T_1$. Изменение энтропии ΔS аддитивно складывается из ΔS_{ext} и ΔS_{int} , отвечающих внешним и внутренним степеням свободы. В изобарическом процессе

$$\Delta S_{\text{ext}} = C_p \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad \Delta S_{\text{int}} = \int_{T_0}^{T_2} C_0(T) \frac{dT}{T},$$

где $C_0(T)$ — колебательная теплоемкость. Но теплоемкость гармонического осциллятора в квантовой области (т. е. при $k_B T \ll \hbar\omega$) экспоненциально мала, и поэтому основной вклад в интеграл дает

область интегрирования $T \gg \hbar\omega/k_B$, в которой $C_0 \approx R$. Следовательно,

$$\Delta S_{\text{int}} \approx R \ln(k_B T_2 / \hbar\omega) \gg \Delta S_{\text{ext}},$$

и поэтому с той же точностью

$$\Delta S \approx R \ln(k_B T_1 / \hbar\omega).$$

Физически преобладание колебательного вклада в ΔS связано с тем, что в ходе релаксации наибольшее относительное изменение температуры происходит в колебательной подсистеме.

$$2.35. T_k = (T_1 + T_2)/2 = 450 \text{ K}, \quad A = 0,$$

$$\Delta S = NC_V \ln [(T_1 + T_2)^2 / (4T_1 T_2)] + \\ + NR \ln [(V_1 + V_2)^2 / (4V_1 V_2)] \approx 0,8 \text{ Дж/К},$$

где $N = pV_1 / (RT_1)$.

2.36. Из вывода уравнения Клапейрона — Клаузуса следует, что Λ/T равно разности удельных энтропий пара и жидкости. Поэтому

$$\Delta S = -\Lambda m/T = -\Lambda \mu p \Delta V / (RT^2) \approx -0,67 \text{ Дж/К},$$

где m — масса конденсирующегося газа, а ΔV — его объем.

$$2.37. K = 1 - \ln 2.$$

$$2.38. A = mx_T p^2 / (2\rho) \approx 1,44 \text{ мДж}, \quad Q = -m\beta pT/\rho \approx -4,33 \text{ Дж}.$$

§ 2.2. Реальные газы. Теплопроводность. Вязкость

2.39. $a \approx 1,5 \cdot 10^{-2} RTV \approx 3,6 \text{ мПа} \cdot \text{м}^6/\text{моль}^2$, где R — универсальная газовая постоянная.

2.40. Используем уравнение соответственных состояний для газа Ван-дер-Ваальса:

$$\left[\frac{p}{p_{\text{кр}}} + 3 \left(\frac{V_{\text{кр}}}{V} \right)^2 \right] \left[3 \frac{V}{V_{\text{кр}}} - 1 \right] = 8 \frac{T}{T_{\text{кр}}}$$

и следующее из него соотношение $p_{\text{кр}} V_{\text{кр}} = (3/8) RT_{\text{кр}}$. Тогда

$$p = \frac{\rho}{\mu} RT \left(1 - \frac{\rho}{3\rho_{\text{кр}}} \right)^{-1} - 3p_{\text{кр}} \left(\frac{\rho}{\rho_{\text{кр}}} \right)^2,$$

где μ — молярная масса, а $\rho_{\text{кр}}$ — плотность в критическом состоянии; очевидно, что $\rho_{\text{кр}} = \mu V_{\text{кр}}$. Окончательно находим: $p \approx 90 \text{ атм}$, $p_{\text{ид}} \approx 100 \text{ атм}$.

$$2.41. \Delta S = (C_V - R) \ln(T_2 - T_1).$$

$$2.42. K = 1 - [(V_1 - b)/(V_2 - b)]^{R/C_V}.$$

$$2.43. \Delta S = NC_V \ln(T/T_0) + NR \ln[V/(V_0 - NV_{\text{кр}}/3)],$$

где $T = T_0 - (9/8)(R/C_V) T_{\text{кр}} (NV_{\text{кр}}/V_0)$, $V = NRT/p_{\text{атм}}$. Окончательно получим

$$\Delta S = -25,5 \text{ Дж/К}.$$

2.44. Используя уравнение газа Ван-дер-Ваальса, находим, что $p = 5p_{\text{кр}}$, а изотермический коэффициент всестороннего сжатия $\kappa_T = (6p_{\text{кр}})^{-1}$. Записывая уравнение колебаний поршня массой m , получаем

$$\omega^2 = 6S^2 p_{\text{кр}} / (mV).$$

Учитывая известное соотношение $V = V_{\text{кр}} = 3b$ и условие равновесия поршня $mg = 5p_{\text{кр}}S$, находим окончательно

$$\omega = [2gS/(5b)]^{1/2}.$$

2.45. Адиабатическая (лапласовская) скорость звука определяется формулой $s^2 = (\partial p / \partial \rho)S$. Дифференцируя выражение для давления газа Ван-дер-Ваальса и подставляя в коэффициенты критические значения параметров ($T_{\text{кр}} = 8a / (27bR)$, молярный объем $V_{\text{кр}} = 3b$), убеждаемся, что коэффициент при dV аннулируется и $d_p = (R/2b)dT$. Обращение в нуль коэффициента при dV означает, что $(\partial p / \partial \rho)_T = 0$, т. е. в критической точке обращается в нуль изотермическая (ニュートンовская) скорость звука. Дифференцируя в критической точке энтропию и полагая затем $dS = 0$ (адиабатический процесс), находим

$$C_V dT + (4a/27b^2) dV = 0.$$

Поскольку плотность $\rho = \mu/V$, где μ — молярная масса, для адиабатической скорости звука в газе получаем окончательно

$$s = [2aR/(3b\mu C_V)]^{1/2}.$$

2.46. $t = [mcl/(2Sk_T)] \ln \{[(T_1)_0 - (T_2)_0]/(T_1 - T_2)\} \approx 3,2$ ч,
где c — удельная теплоемкость воды.

$$2.47. I = [2m_t \Lambda / (\pi \xi)] (T_2^4 - T_1^4)^{-1} \ln (r_2/r_1).$$

$$2.48. \Delta S = -15R \ln 2 \approx -86,5 \text{ Дж/К.}$$

$$2.49. \Delta S = 8R \ln 2 \approx 46 \text{ Дж/К.}$$

$$2.50. v_{\text{max}} = \rho g h d_0^2 / (8d\eta) \approx 2,3 \text{ см/с,}$$

$$m_t = (2/3) d_0 l \rho v_{\text{max}} \approx 0,12 \text{ мг/с.}$$

2.51. Мысленно выделим в жидкости цилиндрический слой с произвольными внутренним и наружным радиусами и осью, совпадающей с осью трубы. Так как движение жидкости в нем стационарно, а давления на обоих торцах равны, то полные потоки импульса через его внутреннюю и наружную поверхности также равны. Поэтому поток импульса $\Pi(r)$ через цилиндрическую поверхность радиусом r , взятый в расчете на единицу длины,

$$\Pi = -2\pi r \eta dv/dr = \text{const},$$

не зависит от r . Здесь $v(r)$ — скорость потока жидкости. Интегрируя это соотношение, находим

$$v + (\Pi/2\pi\eta) \ln r = \text{const}$$

и, используя граничные условия $v(r_1) = v_0$, $v(r_2) \approx 0$, получаем окончательно

$$F_{\text{тр}} = \Pi = \frac{2\pi\eta v_0}{\ln(r_2/r_1)} = 0,27 \text{ дин/см}, \quad v(r) = v_0 \frac{\ln(r_2/r)}{\ln(r_2/r_1)}.$$

2.52. Выделим в жидкости цилиндр радиусом r , ось которого совпадает с осью трубы. Условие стационарного движения жидкости внутри цилиндра — равенство потока импульса через боковую поверхность разности сил, действующих на торцы:

$$-2\pi r \eta dv/dr = \pi r^2 p/l,$$

где p — перепад давления между концами трубы, η — динамическая вязкость, а $v(r)$ — скорость потока жидкости. Интегрируя это уравнение с граничным условием $v(r_0) = 0$, получаем

$$v(r) = (p/4\eta l)(r_0^2 - r^2).$$

Интегрируя $\rho v(r)$ по сечению трубы, находим поток массы (формула Пуазейля)

$$-dm/dt = \pi r_0^4 p / (8\nu h),$$

где $h(t)$ — высота столба жидкости, а $p = \rho gh$ — перепад давления. Интегрирование этого уравнения дает

$$m(t) = m_0 - \rho g \pi r_0^4 t / (8\nu),$$

что, совместно с начальным условием $m_0 = \pi r_0^2 l \rho$, приводит к $t = 8\nu l / (gr_0^2)$.

2.53. Пусть узкий слой толщиной Δz между двумя плоскостями заполнен жидкостью с динамической вязкостью η , а сами плоскости движутся в направлении оси x со скоростями v_x и $v_x + \Delta v_x$ (рис. 6). Тогда силы трения, действующие на эти плоскости, соответственно будут равны $\eta \Delta v_x / \Delta z$ и $-\eta \Delta v_x / \Delta z$ (в расчете на единицу площади). Полная диссилируемая мощность в слое определяется соотношением

$$\begin{aligned} -\eta (\Delta v_x / \Delta z) v_x + \eta (\Delta v_x / \Delta z) (v_x + \Delta v_x) &= \\ &= \eta (\Delta v_x / \Delta z)^2 \Delta z \approx \eta (dv_x / dz)^2 \Delta z. \end{aligned}$$

Поскольку разность давлений на концах капилляра $p = \rho gh$, то распределение скоростей в нем (см. решение задачи 2.52) $v(r) = (pgh/4\eta l)(r_0^2 - r^2)$.

Выделяя в жидкости тонкие цилиндрические слои и применяя полученную выше формулу для диссилиации, получаем для полной

мощности, диссилируемой в капилляре:

$$P = \eta l \int_0^{r_0} \left(\frac{dv_x}{dr} \right)^2 \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi}{8} \frac{(\rho g h r_0^2)^2}{\eta l} \approx 10^{-3} \text{ Вт.}$$

$$2.54. P = 2\pi^3 (l_1^{-1} + l_2^{-1}) \eta^2 r^4 \approx 0.75 \text{ Вт.}$$

§ 2.3. Молекулярно-кинетическая теория. Явления переноса

$$2.55. p \approx 4(T/T_0) p_0 \approx 5 \text{ МПа.}$$

$$2.56. T \approx (\mathcal{A}_D + \mathcal{A}_T) W / (8\pi r_0^3 R) \approx 10^8 \text{ К,}$$

$$p \approx W / (2\pi r_0^3) \approx 10^{14} \text{ Па,}$$

где \mathcal{A}_D и \mathcal{A}_T — атомные массыдейтерия и трития, R — универсальная газовая постоянная

$$2.57. dp = (4\pi/3) mn (m/2\pi k_B T)^{3/2} \exp(-mv^2/2k_B T) v^4 dv,$$

$$v_0 = (2(k_B T/m))^{3/2}.$$

$$2.58. dN = \pi n (m/2\pi k_B T)^{3/2} \exp(-mv^2/2k_B T) v^3 dv,$$

$$v_0 = (3k_B T/m)^{1/2}$$

$$2.59. N = \bar{n}\bar{v}/4, \quad \bar{v} = (8k_B T/\pi m)^{1/2}.$$

$$2.60. v_0 = (5k_B T/m)^{1/2} = (5\bar{v}^2/3)^{1/2}, \quad \bar{W}_\kappa = 2k_B T.$$

$$2.61. v_{HB}/(\bar{v}^2)^{1/2} = 2^{-1/2}.$$

$$2.62. Z = n (k_B T/2\pi m)^{1/2}.$$

$$2.63. J(t) = (N_0 r/t^4) (m/2\pi k_B T)^{3/2} \exp(-mr^2/2k_B T t^2),$$

$$t_0 = (r/2)(m/k_B T)^{1/2}, \quad v_0 = 2(k_B T/m)^{1/2}.$$

2.64. При работающем двигателе пространственное распределение газа в кабине неоднородно из-за наличия сил инерции в системе, связанной с ракетой. При выключении двигателя оно постепенно переходит к однородному.

1) При квазистатическом переходе к однородному распределению газ совершает работу против сил инерции. Работа, связанная с перемещением газа при бесконечно малом изменении ускорения Δa , равна

$$\Delta A = - \sum_i F_i \Delta x_i = \sum_i m_i a \Delta x_i = Ma \Delta X = ma (dX/da) \Delta a,$$

где суммирование по i распространено на все элементарные объемы, m_i — их массы, Δx_i — их перемещения, $X(a)$ — координата

центра тяжести газа. При $\mu ah/(RT_0) \ll 1$ легко получить

$$X \approx \frac{h}{2} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{\mu ah}{RT_0} \right).$$

В этом же приближении при вычислении dX/da можно пренебречь изменением температуры, которое вносит поправки высшего порядка малости Следовательно,

$$dX/da = -\mu h^2/(12RT_0).$$

Работа

$$A = M \int_a^0 a (dX/da) da = M \mu h^2 a^2 / (24RT_0)$$

в условиях теплоизоляции ($Q = 0$) определяет изменение внутренней энергии:

$$NC_V(T_1 - T_0) + A = 0,$$

где N — число молей. Окончательно находим

$$T_1 - T_0 = -\frac{1}{24} \frac{RT_0}{C_V} \left(\frac{\mu ah}{RT_0} \right)^2.$$

Так как процесс протекает обратимо, то энтропия неизменна: $S_1 = S_0$

2) При мгновенном изменении ускорения газ за время выключения двигателя не успевает переместиться и поэтому не совершает работы против внешних сил. В результате $Q = A = 0$, и поэтому энергия, а следовательно и температура, не изменяются. Энтропия может быть вычислена согласно общей формуле

$$S = R \sum_i N_i \ln \left(\frac{\Delta V_i}{\Delta N_i} \right) = R \int v^{-1}(\mathbf{r}) \ln v(\mathbf{r}) dV$$

где $v(\mathbf{r})$ — молярный объем в точке \mathbf{r} . Но проще воспользоваться тем фактом, что начальные (исходные) состояния газа в обоих случаях совпадают, а конечные состояния различаются температурой на $T_0 - T_1$. Поэтому изменение энтропии

$$S_2 - S_0 = (NC_V/T_0)(T_0 - T_1) = (1/24)(MR/\mu)(\mu ah/RT_0)^2.$$

2.65. $\Delta S = -(R/24)(\mu \omega^2 r^2 / 2RT)^2$ (см. решение задачи 2.64).

2.66. Из-за малости отверстия можно считать, что его существование не влияет на распределение атомов газа (по объему и по скоростям) и что поток идея по типу молекулярной эфузии. Поэтому поток частиц равен $J = Sn\bar{v}/4$, где n — концентрация, а \bar{v} — средняя тепловая скорость. Средняя энергия, уносимая каж-

дым вылетающим атомом массой m

$$\overline{W}_B = \frac{\iint_{-\infty}^{+\infty} dv_x dv_y \int_0^{\infty} \frac{mv^2}{2} v_z \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv_z}{\iint_{-\infty}^{+\infty} dv_x dv_y \int_0^{\infty} v_z \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv_z} = 2k_B T$$

превышает среднюю тепловую энергию $\overline{W} = 3k_B T/2$ на $k_B T/2$. Поэтому для того чтобы поддерживать постоянной температуру газа, надо подводить поток тепла $J_Q = (k_B T/2) J$. Уменьшение концентрации во времени определяется уравнением

$$d(nV)/dt = -J = -S\bar{v}/4,$$

откуда $n(t) = n_0 \exp(-t/\tau)$, $\tau = 4V/(S\bar{v})$, следовательно,

$$J_Q(t) = (k_B T/8) S\bar{v} n_0 \exp(-t/\tau).$$

2.67. Задача очень близка к предыдущей. Записывая законы сохранения числа частиц и энергии:

$$d(nV)/dt = -J, \quad d(3k_B T n V/2)/dt = -2k_B T J,$$

исключаем из них n и dn/dt . Тогда для $T(t)$ получается уравнение

$$dT/dt = -ST\bar{v}(T)/(12V),$$

которое с начальным условием $T(0) = T_0$ дает

$$T(t) = T_0 [1 + (S/6V) (k_B T_0 / 2\pi m t)^{1/2}]^{-2}.$$

2.68. $\bar{U} = k_B T/2$.

2.69. $F = pS/2$.

2.70. $p \gg (\nu/4\pi r^2) (mk_B T/2\nu)^{1/2} \approx 10^{-5}$ атм,

где m — средняя масса молекулы воздуха, r — ее радиус, $\gamma = C_p/C_V$.

2.71. Применяя формулу Стокса для силы сопротивления при вязком движении, получаем

$$r^{7/2} \sim \frac{2\eta}{g(\rho - \rho_0)} \left(\frac{k_B T}{\rho}\right)^{1/2}, \quad r \sim 10^{-3} \text{ см},$$

где ρ — плотность алюминия. В осадок выпадают частицы, для которых средняя высота столба, оцененная по барометрической формуле, $h \sim k_B T/(mg) \lesssim r$ (m — масса частиц за вычетом массы жидкости в том же объеме),

$$r \gtrsim [k_B T/4(\rho - \rho_0) g]^{1/4} \sim 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ см}.$$

Следовательно, в алюминиевой краске такие частицы выпадут в осадок.

2.72. $\overline{(\Delta r)^2} = 3k_B Th / [\pi r_0^3 (\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{ж}}) g]$. Критериями являются условия

$$h \gg k_B T / (m^* g), \quad (m^*)^2 g (6\pi\eta r_0)^{-2},$$

где $m^* = (4\pi/3) (\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{ж}}) r_0^3$, η — динамическая вязкость.

2.73. $v = \rho N_A r^2 e E / (6\mu p t) \approx 7.2 \cdot 10^{-2}$ см/с, где e — элементарный заряд, N_A — постоянная Авогадро, μ — молярная масса

2.74. $v_{\text{др}} = e \bar{v} l E / (mv^2) \approx 15$ м/с, где m — масса иона аргона, \bar{v} и $(v^2)^{1/2}$ — его средняя и среднеквадратичная тепловые скорости.

2.75. Так как по условию задачи пар у поверхности воды является насыщенным, то темп испарения лимитируется скоростью диффузии пара по трубке. Уравнение, определяющее баланс массы при испарении и диффузии, имеет вид

$$-\frac{dh}{dt} = \frac{\rho_{\text{нас}}}{2\rho} \frac{D}{l - h},$$

где $h(t)$ — высота столба жидкости в трубке, ρ — плотность воды, D — коэффициент диффузии молекул пара. Интегрируя его с начальным условием $h(0) = l/2$ и используя $D \approx (1/3) \bar{v} l_{\text{пр}}$, находим для времени испарения:

$$t = 9RT\rho l^2 / (4\bar{v} l_{\text{пр}} \rho_{\text{нас}} \mu) \approx 160 \text{ сут},$$

где μ — молярная масса воды.

2.76. Так как $l_{\text{пр}} \gg d$, то при течении газа по трубке роль длины пробега будет играть диаметр d и поэтому эффективный коэффициент диффузии $D_{\text{эфф}} \propto \bar{v} d$. Поток газа, протекающий по трубе, равен

$$J = -(\pi d^2/4) D_{\text{эфф}} (dn/dx) \propto d^3,$$

поэтому при уменьшении диаметра трубы вдвое концентрация газа в сосуде возрастает в $2^3 = 8$ раз.

2.77. При давлении $p = 10^{-4}$ мм рт. ст. длина свободного пробега $l_{\text{пр}} \sim 1 \text{ м} \gg r$, т. е. течение будет кнудсеновским. В этих условиях поток частиц равен

$$J = (2/3) \pi r^3 \bar{v} (n - n_1)/l,$$

где n — концентрация в объеме, n_1 — концентрация на выходе из трубопровода, а \bar{v} — средняя тепловая скорость. Этот поток связан с производительностью насоса, работающего на выходе из трубопровода, соотношением $J = n_1 V_t^{(1)}$. Производительность V_t , которая обеспечивает протекание того же потока при откачке не-

посредственно из объема, удовлетворяет условию $N = nV_t$. Исключая из полученных трех уравнений n и n_1 , находим

$$V_t = V_t^{(1)} \left(1 + \frac{3}{2\pi} \frac{IV_t^{(1)}}{r^8 \bar{v}} \right)^{-1} \approx 0,33 \text{ м}^3/\text{с.}$$

2.78. $J = \bar{v} K p_{\text{нас}} / (4k_B T)$, где \bar{v} — средняя тепловая скорость.

2.79. $t = h^2 \rho_{\text{в}} / (2D_{\text{нас}}) \approx 257$ сут, где $\rho_{\text{в}}$ — плотность воды.

2.80. $x = (\mathcal{A}_2 / \mathcal{A}_1)^{1/2} l \approx 5,7$ см. $Z_1 = Z_2$.

2.81. $t_{\text{диф}} \sim 10^{11} t_{\text{турб}}$.

§ 2.4. Флуктуации. Фазовые переходы. Поверхностное натяжение

$$2.82. \frac{[(\overline{\Delta N})^2]^{1/2}}{\overline{N}} = \overline{N}^{-1/2} = 2 \left(\frac{k_B T}{p \bar{v} S t} \right)^{1/2} \approx 10^{-6},$$

$$\omega(N=0) = \exp(-\overline{N}) \approx \exp(-10^{12}),$$

где \bar{v} — средняя тепловая скорость.

2.83. Используя определение средних и распределение Больцмана, получаем

$$1) \frac{[(\overline{\Delta U})^2]^{1/2}}{\overline{U}} = \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} (U(\xi) - \overline{U})^2 \exp(-U(\xi)/k_B T) d\xi \right]^{1/2}}{\int_{-\infty}^{\infty} U(\xi) \exp(-U(\xi)/k_B T) d\xi} = 2^{1/2},$$

где $U(\xi) = \kappa \xi^2 / 2$;

$$2) \frac{[(\overline{\Delta U})^2]^{1/2}}{\overline{U}} = \left[\frac{2}{(3N-5)} \right]^{1/2} \quad \text{и} \quad \left[\frac{2}{3(N-1)} \right]^{1/2}$$

для молекул с линейным и нелинейным расположением атомов;

$$3) \frac{[(\overline{\Delta U})^2]^{1/2}}{\overline{U}} = \left(\frac{2}{N_A} \right)^{1/2}.$$

2.84. Так как температура остается неизменной, то флуктуация давления целиком связана с флуктуацией числа частиц. Воспользуемся связью между вероятностью и энтропией. Энтропия начального и конечного состояний равна

$$S_0 = 2RN \ln(V/N),$$

$$S = R(N + \Delta N) \ln \frac{V}{N + \Delta N} + R(N - \Delta N) \ln \frac{V}{N - \Delta N}$$

где N — число молей газа в каждом из сосудов, а $\Delta N = V\Delta p/(RT)$ — число молей, перешедших из одного сосуда в другой при флюктуации, R — универсальная газовая постоянная. При $|\Delta N| \ll N$ получаем

$$\Delta S = -R(\Delta N)^2/N, \quad w/w_0 = \exp\{-nV(\Delta p/p)^2\},$$

где n — равновесная концентрация молекул газа. Окончательно находим

$$V = (k_B T/p)(p/\Delta p)^2 \ln(w_0/w) \approx 4 \text{ см}^3.$$

2.85. Поместим объем V_1 внутрь резервуара с объемом $V_2 \gg V_1$, также находящегося при нормальных условиях. Рассматривая флюктуации температуры, считаем число молей в объеме V_1 и вне его (N_1 и N_2 соответственно) фиксированными. Вначале будем считать резервуар полностью изолированным, так что $Q = A = 0$, тогда постоянство внутренней энергии выражается формулой

$$\Delta U = N_1 C_V \Delta T_1 + N_2 C_V \Delta T_2 = 0.$$

Изменение энтропии, связанное с флюктуацией температуры,

$$\Delta S = N_1 C_V \ln(1 + \Delta T_1/T) + N_2 C_V \ln(1 + \Delta T_2/T)$$

при $N_1 \ll N_2$ в области малых флюктуаций приводится к

$$\Delta S = -(1/2) N_1 C_V (\Delta T_1/T)^2.$$

Таким образом, распределение вероятностей является гауссовским:

$$w(\Delta T_1) \propto \exp\{-(1/2) N_1 (C_V/k_B) (\Delta T_1/T)^2\}.$$

Но для гауссовского распределения $w(\xi) \propto \exp(-\xi^2/2\lambda^2)$ среднеквадратичная флюктуация произвольной величины ξ равна

$$\overline{\xi^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \exp(-\xi^2/2\lambda^2) d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2/2\lambda^2) d\xi} = \lambda^2.$$

Поэтому применительно к нашей задаче $\overline{(\Delta T_1)^2} = k_B T^2/(N_1 C_V)$. Так как еще $pV_1 = N_1 RT$, то окончательно находим

$$V_1 = (R/C_V)(k_B T/p)(T/\Delta T)^2 \approx 2.5 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3.$$

Размер резервуара V_2 из последних формул выпадает. Отсюда легко понять, что условие изолированности резервуара является

несущественным: процессы протекающие на очень больших расстояниях, не могут влиять на местные флуктуации.

$$2.86. J = (p\bar{v}/4k_B T) (\pi r^4/l^2) \approx 3 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1},$$

$$[(\Delta N)^2]^{1/2}/\bar{N} \approx 6 \cdot 10^{-4}.$$

$$2.87. m \approx (xk_B T)^{1/2}/g.$$

2.88. Энергия, связанная с возникновением изотермической флуктуации объема, определяется работой против квазиупругой силы $(\partial p/\partial V)_T \Delta V$. Поэтому энергия равна

$$W(\Delta V) = (1/2) |(\partial p/\partial V)_T| (\Delta V)^2,$$

а вероятность флуктуации в соответствии с распределением Больцмана равна

$$w(\Delta V) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2k_B T} \left| \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right| (\Delta V)^2 \right\},$$

т. е. распределение вероятностей является гауссовским. Среднеквадратичная флуктуация (ср. задачу 2.85) равна

$$\overline{(\Delta V)^2} = k_B T |(\partial V/\partial p)_T|.$$

Вычисляя $(\partial p/\partial V)_T$ для газа Ван-дер-Ваальса и полагая затем в производной молярный объем равным критическому, находим

$$\overline{(\Delta V)^2}/V^2 = (4b/3N_A V) T/(T - T_{kp}),$$

где N_A — постоянная Авогадро. Видно, что флуктуации резко нарастают при приближении к критической точке. Если $T \approx T_{kp}$, то $N_A V \approx 3bN$, где N — число молекул газа в объеме V . Тогда

$$\overline{(\Delta V)^2}/V^2 \approx (4/9N) T/(T - T_{kp}).$$

2.89. Длительности времени пребывания системы в однородном и разделенном состояниях (t_0 и t_1) относятся как соответствующие вероятности, которые в свою очередь могут быть выражены через разность энтропий этих состояний $S_0 - S_1 = 2Nk_B \ln 2$:

$$\frac{t_0}{t_1} = \frac{w_0}{w_1} = \exp \frac{S_0 - S_1}{k_B} = 2^{2N}.$$

Время t_1 разрушения разделенного состояния по порядку величины равно времени разлетания молекул: $t_1 \sim l/\bar{v} \sim 10^{-4}$ с ($l \sim 10$ см — размер сосуда). Время t_0 имеет смысл времени ожидания для образования разделенного состояния: $t_0 \sim 10^{10}$ лет $\sim 10^{17}$ с. Отсюда находим

$$N \approx \frac{\lg(t_0/t_1)}{2 \lg 2} \approx 35.$$

2.90. $(T_0 - T)/T_0 \approx gh\mu_{\text{возд}}T_0/(\Lambda\mu_p T_a)$,
где $\mu_{\text{возд}}$ и μ_p — молярные массы воздуха и водяного пара.

2.91. 11,6 г/м³.

2.92. $\Delta\Lambda = 2,3$ кДж/кг.

2.93. $p_{\text{нас}} = 1$ атм, $m_{\text{в}} = 26,3$ г, $m_{\text{возд}} = 42,3$ г.

2.94. $-3,2\%$.

2.95. $T = -2$ °С.

2.96. В соответствии с известной формулой для температурной зависимости давления насыщенного пара запишем

$$p(T) = p_0 \exp \left\{ \frac{\Lambda}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right\},$$

где $\Lambda = \Lambda_{\text{уд}}\mu$ — молярная теплота испарения. Условие открывания клапана: $F = (\pi d^2/4)(p(T) - p_0) \approx 18$ Н.

2.97. Давление в подземном резервуаре $p = p_0 + \rho gh$, где p_0 — атмосферное давление. Кипение наступит при $p(T) = p$, где давление насыщенных паров равно

$$p(T) = p_0 \exp \left\{ \frac{\Lambda}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right\}.$$

Кипение прекратится, когда температура воды, поникающаяся за счет кипения, сравняется с T_0 . Это произойдет после того, как выкипит масса воды

$$\Delta m \approx (mC/\Lambda)(T - T_0),$$

где C — молярная теплоемкость воды. Определяя из первого уравнения T , затем из второго находим $\Delta m/m \approx 0,14$.

2.98. Согласно уравнению Клапейрона — Клаузиуса, вдоль кривой плавления выполняются соотношения

$$dp/dT = q/(T \Delta V), \quad q = T(S_{\text{ж}} - S_{\text{тв}}),$$

где ΔV — изменение молярного объема при плавлении. Минимуму давления $dp/dT = 0$ соответствует $q = 0$. Из данных по энтропии обеих фаз следует, что соответствующая температура

$$T_{\min} = T_0 \ln 2 \approx 0,15 \text{ K}.$$

Теплота плавления $q = RT^2/T_0 - RT \ln 2$ описывается параболой, которая проходит через нуль при T_{\min} . При более низких температурах $q < 0$. Изменение знака теплоты плавления является уникальным фактом и называется эффектом Померанчука. Отрицательному q отвечает падающий участок на кривой $p(T)$. Подчеркнем, что для гелия-3 он возникает в условиях $\Delta V > 0$ (в отличие от обычной ситуации, когда он возникает вследствие $\Delta V < 0$, как это имеет место для системы вода — лед).

Интегрирование уравнения Клапейрона — Клаузиуса дает

$$p(T) = p_{\min} + (RT_0/2\Delta V)(T/T_0 - \ln 2)^2.$$

Отсюда $p(0) \approx 32.5$ атм.

2.99. Уравнение механического равновесия, определяющее распределение давления внутри ядра:

$$dp/dr = -\rho g(r) = -4\pi G \rho^2 r / 3,$$

где G — гравитационная постоянная, а $g(r)$ — ускорение свободного падения. Согласно уравнению Клапейрона — Клаузиуса, для кривой равновесия фаз можно записать

$$dp/dT = q/(T \Delta V) = -\rho^2 q/(T \Delta \rho),$$

где ΔV — изменение удельного объема при плавлении. Разделив эти уравнения друг на друга (в точке $r = R_t$, где они справедливы одновременно), находим

$$dT/dR_t = (4\pi/3)(\gamma \Delta \rho/q) RT.$$

Это уравнение связывает радиус R_t твердой части с температурой T . Учитывая также, что

$$\frac{dR_t}{dT} = \frac{dR_t/dt}{dT/dt} = -\frac{1}{u} \frac{dR_t}{dt},$$

находим

$$\Delta R_t = -(3/4\pi)(qut/G \Delta \rho RT) \approx -35 \text{ км}.$$

2.100. Внутренняя энергия системы

$$U = m_{\text{п}} U_{\text{п}} + m_{\text{ж}} U_{\text{ж}}$$

где $U_{\text{п}}$ и $U_{\text{ж}}$ — удельные внутренние энергии пара и жидкости. Дифференцируя U по T с учетом сохранения полной массы $m_{\text{п}} + m_{\text{ж}} = \text{const}$, получаем

$$(m_{\text{п}} + m_{\text{ж}}) c_c = (U_{\text{п}} - U_{\text{ж}}) dm_{\text{п}}/dT + (3Rm_{\text{п}}/\mu + c_{\text{в}} m_{\text{ж}}).$$

В первом члене $U_{\text{п}} - U_{\text{ж}} = \Lambda_{\text{уд}} - RT/\mu$ ($\Lambda_{\text{уд}} = \Lambda/\mu$ — удельная теплота парообразования, т. е. разность энталпий в расчете на единицу массы), и в соответствии с уравнением Клапейрона — Клаузиуса находим

$$dm_{\text{п}}/dT = (\mu/RT^2)(\Lambda_{\text{уд}} - RT/\mu)m_{\text{п}}.$$

Окончательно получим

$$c_c = (1 + \xi)^{-1} \{c_{\text{в}} + \xi [3R/\mu + (\mu/RT^2)(\Lambda_{\text{уд}} - RT/\mu)^2]\} \approx \\ \approx 10^4 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}).$$

2.101. Ответ получается из решения предыдущей задачи предельным переходом $\xi \rightarrow \infty$:

$$c_V = 3R/\mu + (\mu/RT^2)(\Lambda/\mu - RT/\mu)^2 \approx 7 \cdot 10^4 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}).$$

2.102. После открытия крана больший пузырь увеличится — в него перейдет воздух из меньшего пузыря, который превратится в пленку, закрывающую выход из трубы. Полное приращение энтропии газа равно

$$\Delta S = (16\pi \ln 2) \sigma r_0^2 / (3T).$$

2.103. Полное приращение энтропии складывается из приращения объемной и поверхностной энтропий. Приращение объемной энтропии

$$(\Delta S)_{\text{об}} = NR \ln (V'/V) = (4\pi \ln 2) p_0 r^3 / T,$$

N — число молей газа, V' и V — его конечный и начальный объем. В принятом приближении давление внутри пузыря равно p_0 . Удельная поверхностная энтропия $S_{\text{уд}} = qT$, где q — теплота изотермического образования единицы поверхности, что следует из обычного определения $dQ = TdS$. Поэтому

$$(\Delta S)_{\text{пов}} = 2 \cdot 4\pi [(r')^2 - r^2] q / T = 24\pi r^2 q / T.$$

Окончательно получим

$$\Delta S = (24\pi r^2 / T) [q + (1/6) p_0 r \ln 2].$$

2.104. $\Delta T = (RT^2 / \Lambda) \ln [1 + 2\sigma/(p_0 r)] \approx 3,5$ К.

2.105. $V \leq (RT/\mu)^2 [2\pi r^4 \rho_b^2 / (\sigma p_{\text{нас}})] \approx 8$ см³,

ρ_b — плотность воды, μ — ее молярная масса.

Указание. Имеется в виду устойчивость по отношению к испарению капли с усилением пересыщения пара.

2.106. $T = T_1 [1 + 2\sigma / (r \rho_b \Lambda_{\text{уд}})] \approx 10,16$ °С, где ρ_b — плотность воды.

III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

§ 3.1. Электростатика

3.1. $E = \frac{3qa^2}{4\pi\epsilon_0 l^4}.$

3.2. $\rho(r) = \frac{3q}{4\pi r^3} = \text{const.}$ $v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^3 m_e}} = 2,5 \cdot 10^{15}$ Гц,

где m_e — масса электрона. Найденное значение частоты v относится к оптическому диапазону.

3.3. $F_1 = \frac{q_1^2}{\pi\epsilon_0 l^2}, \quad F_2 = \frac{q_2^2}{\pi\epsilon_0 l^2}.$

3.4. $F = \frac{3(3\sqrt{2} - 1)}{16\pi} \frac{\rho_3^2}{\epsilon_0 a^4}.$

$$3.5. \sigma = -\frac{q}{2\pi h(h+l)} = -8 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/см}^2.$$

$$3.6. \sigma = -\frac{q}{4\pi r^2} \left[1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} \right] = -2,6 \cdot 10^{-11} \text{ Кл/см}^2.$$

3.7. На электроны, вылетевшие из отрицательно заряженной пластины, действуют сила со стороны электрического поля в конденсаторе $F_1 = eE$ и сила электрического изображения $F_2 = -e^2/(4\pi\epsilon_0 \cdot 4x^2)$. Полная сила, действующая на электроны, есть

$$F = eE - \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 x^2}.$$

Из этого выражения следует, что электроны замедляются до тех пор, пока $x < \sqrt{e/(16\pi\epsilon_0 E)}$. Скорость электронов минимальна на расстоянии от пластины, равном

$$l = x_0 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{e}{\pi\epsilon_0 E}} \approx 10^{-6} \text{ м.}$$

(Отметим, что приведенное решение не учитывает пространственного заряда, который может образоваться вблизи заряженной пластины.)

3.8. На внутренней поверхности сферы $\sigma_1 = q/(18\pi r^2)$, на внешней — $\sigma_2 = -q/(4\pi r^2)$. После заземления $\sigma'_1 = \sigma_1$, $\sigma'_2 = 0$.

$$3.9. F = \frac{2q^2}{9\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \sigma_1 = -\frac{3q}{2\pi r^2}, \quad \sigma_2 = \frac{q+Q}{4\pi r^2}.$$

3.10. Для изолированной сферы

$$\left(\frac{E}{E_0} \right)_A = 3 - \frac{r}{l} = 2,9; \quad \left(\frac{E}{E_0} \right)_B = 3 + \frac{r}{l} = 3,1.$$

Для заземленной сферы

$$\left(\frac{E}{E_0} \right)_A = 1 + \frac{l}{r} = 11; \quad \left(\frac{E}{E_0} \right)_B = \frac{l}{r} - 1 = 9.$$

3.11. Поле на поверхности шара $E = 3E_0 \frac{r}{r} \cos \theta$;

1) $E = E_0$ при $\cos \theta = 1/3$;

2) $E = 2E_0$ при $\cos \theta = 2/3$

3.12. 1) $E = 2E_0$ в точках, лежащих на расстоянии $l = \pm \sqrt[3]{2} r$ от центра шара по направлению поля;

2) $E = E_0/3$ в точках окружности радиусом $r_1 = \sqrt[3]{3/2} r$, плоскость которой перпендикулярна E_0 и проходит через центр шара.

3.13. На оси кольца на расстояниях $l = \pm r/\sqrt{2}$ равновесие устойчиво, в центре кольца — неустойчиво.

3.14. У вершины бугорка напряженность поля равна $E_1 = 3E_0$, у основания — $E_2 = 0$. Пробоя не будет.

$$3.15. F = \frac{\tau^2}{2\pi\epsilon_0 r (1 - r^2/l^2)}.$$

$$3.16. \sigma(\theta) = \frac{E_0}{2\pi} \cos \theta.$$

$$3.17. F = -\frac{24\pi\epsilon_0 E_0^2 r^6}{l^4} \quad (\text{притяжение}).$$

$$3.18. F = \frac{12\pi\epsilon_0 E_0^2 r^6}{l^4} \quad (\text{отталкивание})$$

3.19. Изображение состоит из диполя $p_1 = p_3/8$ и заряда $q_1 = -p_3/(4r)$, расположенных на расстоянии $r/2$ от центра сферы.

$$F = \frac{2p_3^2}{27\pi\epsilon_0 r^4}.$$

3.20. При $l \gg r$ в центре сферы будет располагаться диполь-изображение с моментом $p_3 = 2r^3 q/l^2$.

$$\frac{\Delta F}{F} = 16 \left(\frac{r}{l} \right)^3.$$

3.21. $E = \rho l / (3\epsilon_0)$, где \mathbf{l} — вектор, направленный от центра шара к центру полости

3.22. $\sigma(\theta) = 3\epsilon_0 E \cos \theta$. Вне сферы — поле диполя с электрическим моментом $p_3 = -4\pi\epsilon_0 r^3 E$

3.23. $v = e \sqrt{2/(m_e a)} = 2,2 \cdot 10^4$ см/с, где e и m_e — заряд и масса электрона.

3.24. $v = c \frac{(1 + 2m_e c^2 a/e^2)^{1/2}}{(1 + m_e c^2 a/e^2)}$. Нерелятивистское приближение справедливо при $a \gg e^2/(m_e c^2) = 2,8 \cdot 10^{-13}$ см.

$$3.25. T = T_0 \frac{C U^2}{12\rho V} = 3 \cdot 10^7 \text{ К}. \quad \Delta T = \frac{C U^2}{2cm} \approx 200 \text{ К}.$$

$$3.26. r = \frac{3}{5} \frac{e^2}{m_e c^2} = 1,7 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

3.27. Для жесткого диполя $W = -(p_3 \cdot \mathbf{E})$, для упругого диполя $W = -\frac{1}{2} (p_3 \cdot \mathbf{E}) = -\frac{\alpha \epsilon_0 E^2}{2}$.

$$3.28. E = \frac{4I}{D} \sqrt{\frac{m_p}{W}} = 17 \text{ ед. СГС} = 5,1 \text{ кВ/см},$$

$U = I \sqrt{\frac{m_p}{W}} = 4,3 \text{ ед. СГС} = 1,3 \text{ кВ}$, где m_p — масса протона.

$$3.29. v_{\min} = \frac{qr_2}{(l+r_1)^2} \sqrt{\frac{r_2}{m}} = 240 \text{ см/с}.$$

$$3.30. U = \frac{m_e v_0^2}{2e} \frac{l}{d} \approx 14 \text{ мкВ.}$$

$$3.31. \bar{U} = \frac{ESRn}{2\pi} = 10^{-4} \text{ ед. СГС} = 0,03 \text{ В.}$$

$$3.32. \sigma = \frac{q}{4\pi r^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right).$$

$$3.33. \varphi = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon l}.$$

$$3.34. \sigma(r) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{qL}{(r^2 + l^2)^{3/2}}, q_{\text{полн}} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} q,$$

$$F = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{qq_{\text{полн}}}{4l^2} = -\frac{1}{16\pi \varepsilon_0} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{q^2}{l^2} \quad (\text{притяжение}).$$

3.35. Механическое напряжение перед пробоем $\sigma =$

$$= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_{\text{пп}}^2}{2} r \approx 240 \text{ Па; так как } \sigma < \sigma_p, \text{ произойдет пробой.}$$

$$3.36. \sigma_1 = \frac{q}{2\pi r^2 (1 + \varepsilon)}, \quad \sigma_2 = \varepsilon \sigma_1 = \frac{\varepsilon q}{2\pi r^2 (1 + \varepsilon)}.$$

$$3.37. E(x) = \begin{cases} (\sigma/4\varepsilon_0\varepsilon)(3 + 2x^2/d^2), & 0 < x < d, \\ -\sigma/(4\varepsilon_0), & x < 0, \\ +\sigma/(4\varepsilon_0), & x > d. \end{cases}$$

$$3.38. E_2 = -\frac{P}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{h}{d} \right), \quad D_1 = D_2 = \varepsilon_0 E_2 + P = P \frac{h}{d},$$

$$E_1 = E_2 + \frac{P}{\varepsilon_0} = \frac{Ph}{\varepsilon_0 d}.$$

$$3.39. E_A = P/(2\varepsilon_0), \quad E_A/E_B = (l/r)^2.$$

$$3.40. E_C = E_A \cdot 2h/D = 12 \text{ В/см.}$$

$$3.41. E = \frac{h}{4\varepsilon_0 r_1} \left(\frac{r_1}{r_2} - 1 \right) P.$$

$$3.42. E_A = -\frac{ha}{8\pi \varepsilon_0 r^2} P_A, \quad D_A = \varepsilon_0 E_A + P_A = \left(1 - \frac{ha}{8\pi r^2} \right) P_A.$$

$$3.43. E = \frac{h}{\pi \varepsilon_0 r} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{r}{a} \right) P.$$

3.44. Напряженность поля в пластине пьезодиэлектрика равна

$$E_1 = -\frac{P}{\varepsilon_0} = -\frac{P_0}{\varepsilon_0} \left[1 - \frac{x^2}{d^2} \right],$$

вне пластины $E_2 = 0$.

Разность потенциалов между боковыми гранями пластины

$$U = - \int_{-d}^d E_1 dx = \frac{P_0}{\varepsilon_0} \int_{-d}^d \left(1 - \frac{x^2}{d^2} \right) dx = \frac{4}{3\varepsilon_0} P_0 d.$$

3.45. Проводящий шарик радиусом r приобретает во внешнем однородном поле E электрический дипольный момент

$$p_s = 4\pi\epsilon_0 r^3 E.$$

Здесь вследствие малости концентрации шариков пренебрегаем их взаимодействием. Единица объема идеального газа, состоящего из проводящих шариков, приобретает во внешнем поле электрический момент P , равный

$$P = np_s = 4\pi\epsilon_0 nr^3 E.$$

Теперь можно записать

$$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 (1 + 4\pi nr^3) E = \epsilon_0 \epsilon E.$$

Отсюда следует

$$\epsilon = 1 + 4\pi nr^3.$$

3.46. Дипольный момент p_s атома аргона во внешнем поле напряженностью E можно записать в виде

$$p_s = Zxe = \epsilon_0 \alpha E,$$

где x — смещение электронной оболочки, Z — число электронов в атоме, α — атомная поляризуемость:

$$\alpha = Zxe/(\epsilon_0 E).$$

Дизэлектрическая проницаемость ϵ связана с атомной поляризуемостью α соотношением

$$\epsilon = 1 + n_0 \alpha,$$

где $n_0 = 2,69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ — концентрация атомов при нормальных условиях (постоянная Лошмидта). Следовательно,

$$x = (\epsilon - 1) \epsilon_0 E / (n_0 Ze) \approx 2 \cdot 10^{-18} \text{ м} = 2 \cdot 10^{-16} \text{ см}.$$

Обратим внимание, что атомы имеют размер порядка 10^{-8} см, что значительно превышает их деформации в электрических полях.

3.47. В электрическом поле молекулы газа приобретают дипольный момент $p_s = \epsilon_0 \alpha E$ и энергию $W = -p_s E/2 = -\epsilon_0 \alpha E^2/2$. В силовом поле молекулы имеют Больцмановское распределение:

$$n = n_0 \exp(-W/k_B T) = n_0 \exp(\epsilon_0 \alpha E^2 / 2k_B T),$$

где n_0 — концентрация молекул вне конденсатора, k_B — постоянная Больцмана. Подстановка числовых значений показывает, что показатель экспоненты мал по сравнению с единицей. Поэтому можно записать

$$\frac{\Delta n}{n_0} \approx \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \alpha E^2}{k_B T} \approx 4 \cdot 10^{-8}.$$

Концентрация молекул (а следовательно, и давление) в конденсаторе выше, чем в остальной части сосуда. Физической при-

чиной увеличения давления в конденсаторе является втягивание молекул, обладающих дипольным моментом, в область сильного поля.

$$3.48. U = \frac{\epsilon U_1}{1 + (\epsilon - 1) a/d} = 500 \text{ В.}$$

$$3.49. S_2 = \frac{\epsilon - n}{\epsilon - 1} \frac{S_1}{n} = 200 \text{ см}^2.$$

$$3.50. a = \frac{\epsilon - n}{\epsilon - 1} \frac{d}{n} = 0,2 \text{ мм.}$$

$$3.51. \rho = 2\pi e n^2 (m_e/e) = 6 \cdot 10^{-13} \text{ ед. СГС,}$$

$$q = (2\pi)^3 \epsilon r^2 h n^2 (m_e/e) = 2,35 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГС.}$$

$$3.52. W_2 = \epsilon W_1.$$

3.53. Применим закон сохранения энергии к процессу перезарядки конденсатора после сближения пластин:

$$Q = A_6 - \Delta W_9.$$

Здесь Q — джоулево тепло, выделившееся на сопротивлении, A_6 — работа сторонних сил в батарее, ΔW_9 — изменение электрической энергии конденсатора. Обозначая через Δq изменение заряда конденсатора в процессе перезарядки, можно записать

$$\Delta q = \Delta C \mathcal{E} = (2C - C) \mathcal{E} = C \mathcal{E}, \quad A_6 = \Delta q \mathcal{E} = C \mathcal{E}^2.$$

При написании выражения для ΔW_9 , следует учесть, что после сближения пластин емкость конденсатора стала равной $2C$ и, следовательно, разность потенциалов при неизменном заряде — равной $\mathcal{E}/2$. После окончания процесса перезарядки разность потенциалов вновь будет равна \mathcal{E} . Поэтому

$$\Delta W_9 = \frac{2C \mathcal{E}^2}{2} - \frac{2C (\mathcal{E}/2)^2}{2} = \frac{3}{4} C \mathcal{E}^2.$$

Таким образом,

$$Q = \frac{1}{4} C \mathcal{E}^2.$$

Для того чтобы за время Δt сближения пластин заряд конденсатора практически не изменился, необходимо выполнить условие

$$\Delta t \ll RC, \quad \text{или} \quad R \gg \Delta t/C = 10^8 \text{ Ом.}$$

$$3.54. F = \frac{(\epsilon - 1)}{(\epsilon + 1)^2} \frac{\sqrt{S} U^2}{2\pi d}.$$

$$3.55. F \approx \frac{2\alpha \epsilon r_1^2 \Phi^2}{r^5} \approx 10^{-11} \text{ Н} = 10^{-6} \text{ дин.}$$

Здесь $r_1 = r + l = 3 \cdot 10^{-8}$ м — расстояние от атома до центра кривизны острия; $\alpha \approx a^3$, где $a \approx 10^{-10}$ м — размер атома

$$3.56. 1) v_{\max} = \frac{2}{3^{3/4} r} \sqrt{\frac{q p_3}{m}};$$

$$2) x_0 = \pm r/\sqrt{2}, \quad T = \frac{3^{5/4} \pi r^2}{2} \sqrt{\frac{m}{q p_3}}.$$

$$3.57. T = 2\pi \sqrt{2m/\kappa}.$$

§ 3.2. Постоянный электрический ток

$$3.58. I = \frac{\mathcal{E}_0 (1 + R_3/R_2) - \mathcal{E}_1}{R_0 (1 + R_3/R_2) + R_3}.$$

$$3.59. R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2). \quad I_R = 0 \text{ при условии } \mathcal{E}_1 / \mathcal{E}_2 = R_1 / R_2.$$

$$3.60. P_1 = P_4 = \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)^2}{4R}, \quad P_2 = P_3 = \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2}{4R}.$$

3.61. Поскольку $\lambda_1 \gg \lambda$, можно с хорошим приближением считать, что цилиндрические проводники по всей своей длине имеют постоянные потенциалы, и для определения поля рассматривать электростатическую задачу. Пусть линейная плотность зарядов на проводниках есть $\pm \rho$. Применяя теорему Гаусса к одному из стержней, найдем, что напряженность поля стержня на расстоянии r от его оси равна

$$E = \pm \rho / (2\pi \epsilon_0 r).$$

Разность потенциалов между стержнями получим путем интегрирования напряженности поля:

$$U = \frac{\rho}{2\pi \epsilon_0} \int_{r_0}^{b-r_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b-r} \right) dr = \frac{\rho}{\pi \epsilon_0} \ln \frac{b-r_0}{r_0} \approx \frac{\rho}{\pi \epsilon_0} \ln \frac{b}{r_0}.$$

Полный ток I легко найти, если принять во внимание, что вблизи каждого из стержней поле практически не зависит от заряда другого стержня ($b \gg r_0$). Полагая, что плотность тока постоянна по толщине листа, получим для полного тока, вытекающего из цилиндрического проводника:

$$I = 2\pi r_0 a j = 2\pi r_0 a \lambda E = \frac{a \lambda \rho}{\epsilon_0}.$$

Следовательно,

$$R = \frac{U}{I} \approx \frac{1}{\pi \lambda a} \ln \frac{b}{r_0}.$$

$$3.62. R = \frac{l}{\lambda \delta (D-d)} \ln \frac{D}{d}.$$

$$3.63. R = \frac{1}{\pi \lambda \delta} \left(\frac{l}{D} + \ln \frac{D}{d} \right).$$

3.64. $\Lambda = 1/R = 4\pi\lambda C/e$. Результат справедлив для конденсатора любой формы, заполненного однородной проводящей средой.

3.65. $\lambda(r) \sim 1/r^4$.

3.66. $\lambda(r) \sim 1/r$.

3.67. $R = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1 \lambda_1} + \frac{1}{r_2 \lambda_2} \right)$.

3.68. $\rho = 4\pi\tau_1\tau_2/[e(\tau_1 - \tau_2)]$.

3.69. $e = \frac{C}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}, \quad \rho = \frac{4\pi r_1 r_2}{C(r_2 - r_1)} \frac{t}{\ln 2}$.

3.70. В стационарном режиме ток нагрузки равен току, переносимому лентой:

$$I = \sigma l v,$$

где σ — поверхностная плотность заряда. Максимальное значение тока определяется электрической прочностью газа:

$$\sigma_{\max} = 2\epsilon_0 E_{\text{пр}}, \quad I_{\max} = \sigma_{\max} l v = 2\epsilon_0 E_{\text{пр}} l v \approx 10^{-3} \text{ А} = 1 \text{ мА.}$$

Максимальный потенциал сферы также определяется электрической прочностью газа. Для сферического электрода

$$\varphi = r E,$$

где E — напряженность поля вблизи электрода. Поэтому

$$\varphi_{\max} = r E_{\text{пр}} = 4,5 \cdot 10^6 \text{ В.}$$

3.71. В случае 1) при увеличении напряжения ток не изменится. Поэтому мощность, выделяемая на аноде, возрастает в два раза. В стационарном состоянии эта мощность при достаточно высокой температуре анода рассеивается главным образом в виде излучения, и поэтому $W \propto T^4$, где T — термодинамическая температура (мы будем пренебрегать при оценках теплоотдачей через проводники и другие конструктивные элементы кенотрона). Таким образом, в этом случае температура (по абсолютной шкале) возрастает в $2^{1/4} \approx 1,2$ раза, т. е. достигнет значения около 1014 °С. В случае 2) ток увеличится в $2^{3/2}$ раза (закон «3/2»), так что мощность возрастает в $2 \cdot 2^{3/2}$ раза и температура поднимется в $(2^{5/2})^{1/4} = 2^{5/8}$ раза, т. е. достигнет приблизительно 1400 °С.

3.72. $E = \mathcal{E}/(r_2 - r_1)$.

§ 3.3. Магнитное поле

3.73. $B = 2\pi I a / (cb^2) = 0,33 \text{ Гс.}$

3.74. $B = 2\pi I / (ca) = 0,13 \text{ Гс.}$

3.75. $B(r) = (\mu_0 I r / \pi a^2) (1 - r^2 / 2a^2) \quad \text{при } r < a,$
 $B(r) = \mu_0 I / (2\pi r) \quad \text{при } r \geq a.$

3.76. $B_1 / B_2 = N / \pi \approx 3 \cdot 10^3$.

3.77. $\Phi = \mu_0 j p_M / (2f)$.

3.78. $F = (2I_1 I_2 / c^2) (l/L)^2 = 2 \cdot 10^{-3}$ дин.

3.79. $\sigma_{\max} = 2\epsilon_0 E_{\text{пр}} = 3,5 \cdot 10^{-5}$ Кл/м²,

$B_{\max} = (\mu_0/2) \sigma_{\max} v = \epsilon_0 \mu_0 E_{\text{пр}} v \approx 3,3 \cdot 10^{-10}$ Тл = $= 3,3 \cdot 10^{-6}$ Гс.

3.80. $F = \mu_0 I v \sigma / 2 = 6 \cdot 10^{-13}$ Н/м.

3.81. $n(r) = \frac{1}{v \epsilon \mu_0} \frac{dB}{dr} = \frac{q}{R \mu_0 e} \sqrt{\frac{m_e}{2eU}} B_0 \left(\frac{r}{R} \right)^{q-1}$,

$E(r) = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 v} B(r) = c^2 \sqrt{\frac{m_e}{2eU}} B_0 \left(\frac{r}{R} \right)^q$. Здесь $v = \sqrt{2eU/m_e}$ — скорость электронов в пучке.

3.82. 1) $B = \frac{2\tau\omega}{c} = 6,7 \cdot 10^{-8}$ Гс в металле, $B = 0$ в воздухе;

2) $B = \frac{2\tau\omega}{c} \frac{(\epsilon - 1)}{\epsilon} = 4,4 \cdot 10^{-8}$ Гс в диэлектрике, $B = 0$

в воздухе.

3.83. Растигивающее напряжение в стенках вращающейся трубы может быть определено из условия равновесия упругих сил и центробежных сил инерции. Оно оказывается равным $f = \rho v^2$, где ρ — плотность материала трубы, v — скорость вращения. Предельная скорость вращения $v_{\max} = \sqrt{f_{\max}/\rho} = 4,7 \cdot 10^2$ м/с. При вращении трубы возникает ток переноса, поверхностная плотность которого j дается формулой $j = \sigma v$, где σ — поверхностная плотность заряда. По теореме Гаусса напряженность электрического поля на поверхности равна $E = \sigma/\epsilon_0$, так что для плотности тока имеем $j = \epsilon_0 E v$. По конфигурации токов вращающаяся трубка напоминает соленоид, поэтому индукция магнитного поля вне трубы равно плюю, а внутри трубы $B = \mu_0 j$. Подставляя $j = \epsilon_0 E v_{\max}$ и учитывая, что $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$, получаем

$$\frac{w_m}{w_s} = \frac{B^2 / (2\mu_0)}{\epsilon_0 E^2 / 2} = \frac{v_{\max}^2}{c^2} \approx 2,4 \cdot 10^{-12}.$$

3.84. $\Omega = \frac{qB}{2mc}$. Обратите внимание, что угловая скорость пресессии не зависит от скорости вращения кольца и от угла между направлениями \mathbf{B} и ω .

3.85. $\omega = \frac{3}{2} \frac{\pi N B q}{m} \approx 0,1$ с⁻¹.

3.86. Магнитный момент равномерно заряженного шара радиусом R , вращающегося с частотой ω , равен

$$p_m = \frac{1}{5} q_{\text{полн}} R^2 \omega,$$

где $q_{\text{полн}}$ — полный заряд шара. Действительно, магнитный момент кольца с током I равен IS , где S — площадь кольца. Вводя сферические координаты r, θ, ϕ , получим, что магнитный момент кольца, имеющего координаты r, θ, ϕ , равен

$$dP_m = \rho \omega r^4 \sin^3 \theta \, dr \, d\theta,$$

где ρ — объемная плотность заряда. Интегрируя по r от 0 до R и по θ от 0 до π , придем к написанной выше формуле для P_m .

Введем величину $y = (q_p - q_e)/q_p$ и запишем заряд одного атома в виде $Z(q_p - q_e) = yZq_p$. Если Земля состоит из атомов с атомным номером Z и относительной атомной массой A , то отношение ее полного заряда $q_{\text{полн}}$ к массе M_3 равно

$$\frac{q_{\text{полн}}}{M_3} = \frac{yZq_p}{m_0 A},$$

где m_0 — масса нуклона. С помощью этого соотношения выражение для магнитного момента Земли можно представить в виде

$$P_m = y \frac{Zq_p}{m_0 A} \frac{4\pi}{15} \omega_3 R_3^5 \rho_3,$$

где ρ_3 — средняя плотность Земли, ω_3 — угловая скорость ее вращения. Если бы Земля обладала таким магнитным моментом, то индукцию магнитного поля на полюсе можно было бы определить из выражения $B = 2\mu_0 P_m / (4\pi R_3^3)$. Отсюда

$$y = \frac{A}{Z} \frac{15m_0 B}{2\mu_0 G q_p \omega_3 R_3^3} \approx 2,4 \cdot 10^{-19}.$$

Таким образом, высказанная в условии задачи гипотеза о происхождении магнитного поля Земли противоречит экспериментальным данным.

$$3.87. P_{\max} = \frac{cD^2}{16e} B_{\max} E_{\max} = 1,4 \cdot 10^{18} \text{ эрг/с} = 1,4 \cdot 10^9 \text{ Вт}$$

при $D/d = \sqrt{e}$, где $e = 2,72$.

$$3.88. B = \frac{IN\mu_0\mu_1\mu_2}{[2l\mu_1\mu_2 + (L/2 - l)(\mu_1 + \mu_2)]}.$$

$$3.89. B \approx \frac{IN\mu_0\mu}{4l[1 + (3/8)(d/l)(\mu - 1)]}.$$

$$3.90. N = \frac{B}{I\mu_0} \left(\frac{l}{\mu} + d \right) = 3 \cdot 10^3. \quad U = \frac{\pi I N D \rho}{9} = 25 \text{ В.}$$

3.91. $B = 4\pi J_r \left(\frac{2\pi r}{l} - 1 \right) \left[1 + \left(\frac{r}{2l} \right)^2 \right]^{-1/2} = 5,4 \text{ кГс. Здесь } r = (r_1 + r_2)/2.$

$$3.92. J_r = \frac{B_0 H_c}{\mu_0 (1 - \beta) H_c + \beta B_0} \approx 1,2 \cdot 10^4 \text{ А/м.}$$

$$3.93. I_0 = \frac{1}{N} (LH_0 + lJ_0).$$

$$B = \mu_0 \left[H_0 + J_0 + \frac{N}{L} (I - I_0) \right] \text{ при } I > I_0.$$

$$3.94. I = J/n.$$

$$3.95. B_A = \frac{\mu J}{2}, \quad \frac{B_A}{B_C} = \left(\frac{l}{r} \right)^2.$$

$$3.96. B_C = B_A \frac{2h}{D} = 100 \text{ Гс.}$$

$$3.97. \text{ Внутри пластины } \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{H} = -4\pi\mathbf{J}, \quad \text{вне пластины } \mathbf{B} = \mathbf{H} = 0.$$

$$3.98. \text{ Внутри пластины } \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{J}, \quad \mathbf{H} = 0, \quad \text{вне пластины } \mathbf{B} = \mathbf{H} = 0.$$

$$3.99. l_{\min} \approx 14r.$$

$$3.100. l_{\max} \approx 2 \cdot 10^{-2} r.$$

$$3.101. I > \frac{2\pi\rho gl^2}{B_r} = 2,4 \cdot 10^3 \text{ А.}$$

$$3.102. \Phi_{\max} = \frac{1}{2\pi} \frac{B_r}{B_3} \frac{lS}{L^3} \approx 0,1 \text{ рад} \approx 6^\circ.$$

$$3.103. T = 2\pi l \sqrt{\frac{\mu_0 \rho}{12B_r B_3}}.$$

$$3.104. v = \frac{c^2 m g r - c \mathcal{E} l B}{B^2 l^2 (1 + r/R)}.$$

$$3.105. v_{\max} = \frac{3mgRc^2}{2B^2l^2} \approx 1,5 \text{ см/с.}$$

$$3.106. U_1 = \frac{\omega Br_1^2}{2c} \frac{1 - (r_2/r_1)^2}{1 + C_1/C_2}, \quad U_2 = \frac{C_1}{C_2} U_1.$$

$$3.107. v = v_0 \exp \left(-\frac{a^4 K^2 t}{c^2 R m} \right).$$

$$3.108. p = \frac{2b^2 l^2}{R l c^4} \frac{\ln(1 + a/b)}{1 + a/b}.$$

$$3.109. L = \frac{\mu_0}{8\pi} [1 + 4 \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)],$$

$$3.110. \Phi = \frac{\mu_0 a l}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{b}{a} \right)$$

$$3.111. L = L_0 + 4\pi n (nSl + 2S_1 N \cos \theta).$$

$$3.112. L = L_0 \left(1 + \frac{1}{\beta} + \frac{2}{\beta^2} \right).$$

$$3.113. \Phi = 4\pi n p_m.$$

$$3.114. F = 6 \left(\frac{ISN}{cl^2} \right)^2 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ дин}, \quad M = \frac{2S^2 N^2}{l^3} = 20 \text{ см.}$$

$$3.115. p_m = \frac{R D b c}{4\pi N} \Phi.$$

$$3.116. p_m = \frac{Rbc}{2\pi Na^2} (l^2 + a^2)^{3/2} \varphi.$$

$$3.117. \omega = \frac{qB(t)}{2mc}.$$

$$3.118. \bar{\mathcal{M}} = \frac{(BSN)^2 \omega}{2(R+r)}, \quad \bar{P} = \bar{\mathcal{M}} \omega.$$

$$3.119. \chi = U/\mathcal{F} = 1,5 \cdot 10^{-3}, \quad t \ll L/R \approx 0,1 \text{ с.}$$

$$3.120. l = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2\pi E_C}{c}} = 1,6 \cdot 10^4 \text{ а. е., где } E_C \text{ — солнечная}$$

постоянная.

$$3.121. L = \frac{2c^2 Fl}{I^2} = 10^7 \text{ см} = 10^{-2} \text{ Гн.}$$

$$3.122. L = \frac{2c^2 Fl}{(\mu - 1) I^2} = 10^6 \text{ см} = 10^{-3} \text{ Гн.}$$

$$3.123. p(r) = \frac{I^2}{\pi c^2 a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right).$$

$$3.124. F = \frac{\mu - 1}{8\pi} SB^2.$$

$$3.125. \Delta h = \frac{2\pi (\mu - 1) n^2 I^2}{c^2 \rho g}.$$

3.126. Работа, совершаемая магнитными силами при перемещении контура с током I в магнитном поле, выражается соотношением

$$A = I \Delta \Phi,$$

где $\Delta \Phi$ — изменение магнитного потока. В нашем случае $\Delta \Phi = \Phi_{21} - \Phi_{12}$ — изменение потока, пронизывающего контур прямого тока. В силу теоремы взаимности $\Delta \Phi_{21} = \Delta \Phi_{12}$, если $I_1 = I_2$. Поскольку $\Delta \Phi_{12} = -2\Phi_{12}$, задача сводится к определению магнитного потока, пронизывающего рамку в поле прямого тока:

$$\Phi_{12} = - \int_b^{a+b} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} a dr = - \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{b}\right).$$

Знак минус определяется выбором положительных направлений токов на рис. 3.42. Окончательно получим

$$A = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{b}\right) = 2,72 \cdot 10^{-7} \text{ Дж} = 2,72 \text{ эрг.}$$

$$3.127. A = \frac{2\pi S}{L(\mu + L/l)} \left(\frac{\mu NI}{c}\right)^2.$$

$$3.128. F = \left(\frac{\partial W_m}{\partial l}\right)_{I=\text{const}} = - \left(\frac{\mu_0 r NI}{4}\right)^2 \frac{1}{[(\pi R/\mu) + l]^2},$$

где W_m — магнитная энергия катушки. Знак минус указывает, что обе половинки тороидальной катушки притягиваются друг к другу.

При $l = 0$ получим

$$F = - \left(\frac{\mu_0 \mu r N I}{4\pi R} \right)^2.$$

$$3.129. \frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2.$$

3.130. Сила, действующая на образец в неоднородном магнитном поле, определяется выражением

$$F = p_m \frac{dB}{dr},$$

где p_m — магнитный момент образца, $p_m = \chi BV$. Эта сила принимает максимальное значение при $r = 1/(2\sqrt{\alpha}) = 5$ см. Максимальное значение силы F_{\max} есть

$$F_{\max} = \chi V B_0^2 \sqrt{\alpha} e^{-1/2} \approx 0,1 \text{ дин.}$$

$$3.131. L = 2l \ln(l/r) \text{ при } l \gg r.$$

3.132. Индукция магнитного поля внутри цилиндра равна $B = 0$; вне цилиндра вблизи поверхности $B = \mu_0 I / 2\pi r$. Давление, которое испытывает плазменный цилиндр в магнитном поле,

$$p_{\text{маг}} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 r^2}.$$

Подставляя числовые значения, получим $p_{\text{маг}} \approx 6,4 \cdot 10^4$ Па. В нашем случае $p_{\text{маг}} < p$ и, следовательно, плазменный цилиндр будет расширяться. Легко подсчитать, что условие $p = p_{\text{маг}}$ будет выполнено при токе $I = 1,25 \cdot 10^5$ А.

3.133. При сжатии трубы магнитный поток сохраняется:

$$\pi r_0^2 B_0 = \pi r^2 B. \quad r = r_0 \sqrt{B_0/B}.$$

Увеличение магнитной индукции в трубе обусловлено появлением тока в ее стенках. Таким образом, труба ведет себя подобно соленоиду. Давление магнитного поля определяется соотношением

$$p_{\text{маг}} = B^2 / (2\mu_0).$$

Подставляя числовые значения, получим

$$B = \sqrt{2\mu_0 p_{\text{маг}}} = 5 \cdot 10^2 \text{ Тл}, \quad r = r_0 \sqrt{B_0/B} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,5 \text{ см.}$$

$$3.134. I = \left(\frac{2aF}{\mu_0 r} \right)^{1/2}.$$

$$3.135. T \approx \frac{I^2}{4\pi c^2 n k_B r^2} = 6 \cdot 10^5 \text{ К, где } k_B \text{ — постоянная Больцмана.}$$

$$3.136. t = 4c^2 \rho / (\lambda B^2) \approx 7,2 \text{ с.}$$

3.137. $I = 2\pi c^2 \frac{E}{B^2} \frac{m_e}{e}$, $t = 2\pi \frac{c}{B} \frac{m_e}{I}$, где m_e и e — масса и заряд электрона.

3.138. $F = \frac{I}{q_p} \sqrt{2W m_p} \approx 0,14$ Н, где m_p и q_p — масса и заряд протона.

3.139. При $v \ll c$ можно пренебречь магнитной составляющей силы Лоренца, действующей на заряды в пучке, по сравнению с электрической составляющей. Напряженность электрического поля на границе пучка равна

$$E = \frac{ne}{2\epsilon_0} = \frac{I}{2\epsilon_0 v},$$

где n — число электронов, приходящихся на единицу площади плоского потока, v — скорость электронов. Время, за которое ширина пучка увеличится в два раза, есть

$$t = \sqrt{2d/a} = \sqrt{\frac{4\epsilon_0 d v}{I} \frac{m_e}{e}}.$$

Здесь a — поперечное ускорение электронов под действием кулоновских сил. Окончательно получим

$$x = vt = \left(\frac{2W}{m}\right)^{3/4} \left(\frac{4\epsilon_0 d}{I} \frac{m_e}{e}\right)^{1/2} \approx 17 \text{ см.}$$

3.140. Раскручивание будет происходить при условии, что частота переменного электрического поля совпадает с частотой вращения ионов N_2^+ в магнитном поле (условие синхронизма):

$$v_0 = \frac{eB}{2\pi m} \approx 170 \text{ кГц.}$$

В этом выражении $m = 28 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг — масса иона N_2^+ .

Для оценки изменения частоты необходимо найти сначала шаг спирали. Изменение скорости на соседних витках может быть оценено из второго закона Ньютона

$$m\Delta v \approx eET/2,$$

где T — период обращения. Принимая во внимание, что $r = (T/2\pi)v$, получим

$$\Delta r = (T/2\pi) \Delta v \approx (T^2/4\pi) (eF/m).$$

Условие синхронизма будет нарушено, если $\Delta v/v_0 \geq \Delta r/r$. Отсюда следует

$$\Delta v \approx E/(2rB) \approx 15 \text{ кГц.}$$

$$3.141. B(t) = \overline{B(t)}/2,$$

$$3.142. t = \frac{r_1^2}{2} \frac{\ln(r_1/r_2)}{\beta U} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

$$3.143. B \leq \frac{(\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1) m_p}{q_p l} \sqrt{\frac{2W}{\mathcal{A}_2 m_p}} \approx 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ Тл} = 130 \text{ Гс},$$

где \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 — атомные массы изотопов урана, m_p и q_p — масса и заряд протона; время, необходимое для полного разделения изотопов урана, равно

$$t = \frac{M q_p}{m_p \mathcal{A}_2 l} = 8 \cdot 10^7 \text{ с} \approx 2,5 \text{ год.}$$

3.144. Оценку легко выполнить для частиц, покидающих столб газового разряда со среднеквадратичной скоростью $v = \sqrt{3k_B T/m_e}$, направленной перпендикулярно поверхности столба. Магнитное поле вблизи поверхности столба есть

$$B = \mu_0 I / (2\pi r).$$

В этом поле вылетевшая из столба частица будет двигаться по окружности, радиус которой определяется выражением

$$m_e v^2 / l = evB.$$

В итоге получим

$$I = \frac{2\pi r}{\mu_0 e l} \sqrt{3k_B T m_e} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ А.}$$

3.145. При отклонении частиц от горизонтальной плоскости возникает возвращающая (квазиупругая) сила, зависящая от компоненты магнитного поля B_z . Поскольку в зазоре магнита $\mathbf{B} \propto \mathbf{H}$ и $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, имеем

$$\partial B_r / \partial z = \partial B_z / \partial r,$$

откуда при малых z получим, что

$$B_r = \frac{\partial B_z}{\partial r} z = - \frac{n}{r_0} B_z z.$$

Составляющая силы Лоренца F_z запишется в виде

$$F_z = evB_r = -e\omega_0 n B_z z = -\omega_0^2 n m z,$$

где v — линейная скорость частицы на орбите, $\omega_0 = eB_z(r_0)/m$ — круговая (циклотронная) частота. Из уравнения вертикальных колебаний

$$m\ddot{z} = -n\omega_0^2 m z$$

следует

$$\omega_z = \omega_0 \sqrt{n} = eB_z(r_0) \sqrt{n}/m.$$

3.146. Равновесная орбита устойчива по отношению к малым радиальным отклонениям частицы, если сила Лоренца изменяется с изменением радиуса r медленнее, чем центробежная сила. При

малых отклонениях $\rho = r - r_0$ можно записать

$$B_z(r) = B_z(r_0) + \frac{\partial B_z}{\partial r}(r - r_0) = B_z(r_0) - \frac{n}{r_0} B_z(r_0) \rho.$$

Радиальная составляющая силы Лоренца имеет вид

$$\begin{aligned} F = evB_z(r) &= e\omega r B_z(r) = e\omega_0 \frac{r_0^2}{r} B_z(r_0) \left(1 - \frac{n}{r_0} \rho\right) = \\ &= e\omega_0 r_0 B_z(r_0) \left(1 - \frac{\rho}{r_0}\right) \left(1 - \frac{n}{r_0} \rho\right) \approx F(r_0) - m\omega_0^2 (1+n) \rho. \end{aligned}$$

При написании этого выражения использован закон сохранения момента импульса: $\omega_0 r_0^2 = \omega r^2$, где $\omega_0 = eB_z(r_0)/m$ — круговая (циклотронная) частота вращения частицы на равновесной орбите.

Запишем теперь выражение для центробежной силы

$$F_{ц. б} = m\omega^2 r = \frac{m\omega_0^2 r_0^4}{r^3} \approx m\omega_0^2 r_0 \left(1 - 3 \frac{\rho}{r_0}\right).$$

Уравнение радиальных колебаний частицы примет вид

$$m\ddot{\rho} = -m\omega_0^2 (2-n) \rho.$$

Видно, что колебательный режим (устойчивость стационарной орбиты) возможен при $n < 2$. В этом случае

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{2-n}.$$

3.147. $\omega^2 = p_3 v B / \mathcal{I}.$

3.148. $j_{\max} \approx \frac{4e_0 \delta m_p}{q_p l^2} \left(\frac{2W}{m_p}\right)^{3/2} \approx 40 \text{ A/m}^2 = 4 \text{ mA/cm}^2$, где m_p

и q_p — масса и заряд протона.

3.149. $B \leq \frac{3b}{q_p l^2} \sqrt{\frac{m_p W}{2}} \approx 10^{-3} \text{ Т.л.} = 10 \text{ Гс.}$

3.150. $n_i/n_e = 1 - v^2/c^2.$

3.151. $\sigma = \frac{B}{4\pi} \frac{v}{c} = 3 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГС.}$

3.152. $\Phi(t) = \Phi(0) - a\pi r^2 \left\{ t - \frac{L}{R} \left[1 - \exp \left(-\frac{R}{L} t \right) \right] \right\}.$

3.153. $U = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \frac{v}{c} Bd, \quad \sigma = \frac{\epsilon - 1}{4\pi\epsilon} \frac{v}{c} B.$

3.154. $P = \frac{v^2 B^2 d^2 R}{[d/(\lambda S) + R]^2}.$

3.155. При включении однородного магнитного поля частота вращения шарика изменяется на величину $\Delta\omega = \pm Be/(2mc)$. Кинетическая энергия шарика уменьшается на

$$\Delta W_k = \frac{Be l^2 \sin^2 \alpha}{4c} \left(\frac{Be}{2mc} + 2 \sqrt{\frac{g}{l}} \right),$$

если ω и B параллельны, и возрастает на ту же величину, если ω и B антипараллельны. При включении и выключении поля B возникает вихревое электрическое поле, тормозящее (или ускоряющее) движение шарика.

3.158. Уравнение радиального движения протона в поле электронного пучка записывается в виде (если пренебречь действием магнитного поля)

$$m_p \ddot{r} + q_p E_r = 0.$$

Здесь E_r — радиальная составляющая электрического поля пучка, определяемая из теоремы Гаусса: $2\pi r e_0 E_r = Q$, где $Q = en\pi r^2$ — заряд на единицу длины трубы радиусом r (n — концентрация электронов в пучке). Таким образом, $E_r = ner/(2e_0)$. Принимая во внимание, что $I = en\pi R^2$, где для релятивистского пучка $v \approx c$, выражение для E_r может быть записано в виде

$$E_r = \frac{I}{2\pi e_0 c R^2} r$$

Уравнение движения протона принимает вид

$$m_p \ddot{r} + \frac{q_p I}{2\pi e_0 c R^2} r = 0,$$

откуда для частоты собственных колебаний ω находим

$$\omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{q_p I}{2\pi e_0 m_p c}} = 3,9 \cdot 10^8 \text{ Гц}$$

3.159. Газодинамическое давление в плазме уравновешивается магнитным давлением:

$$nk_B T = B^2/(2\mu_0),$$

откуда

$$B = \sqrt{2\mu_0 n k_B T} \approx 6 \text{ Тл} = 6 \cdot 10^4 \text{ Гс.}$$

$$3.160. I = I_0 \frac{1 + \mu l_0/(2l)}{1 + \mu l_s/l}.$$

$$3.161. I = I_0 \frac{L}{L - L_c/N^2}.$$

$$3.162. I = \frac{cA}{BS}.$$

$$3.163. B = \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right) B_0 - \frac{3R^3 (B_0 r) r}{2r^5}, \quad j(\theta) = \frac{3B_0 \sin \theta}{2\mu_0}.$$

3.164. В магнитном поле B каждый шарик приобретает магнитный момент

$$\mathbf{p}_M = -\frac{2\pi}{\mu_0} R^3 \mathbf{B} = -2\pi R^3 \mathbf{H}.$$

Магнитный момент единицы объема (намагниченность) газа, состоящего из сверхпроводящих шариков, есть

$$\mathbf{J} = n \mathbf{p}_m = -2\pi n R^3 \mathbf{H}.$$

Отсюда следует, что магнитная восприимчивость χ , определяемая в СИ выражением $J = \chi \mu_0 H$, равна

$$\chi = -\frac{2\pi}{\mu_0} n r^3.$$

Таким образом,

$$\mu = 1 + \chi = 1 - \frac{2\pi}{\mu_0} n r^3 < 1.$$

Идеальный газ из сверхпроводящих шариков обладает диамагнитными свойствами. Условие $n r^3 \ll 1$ означает, что шарики находятся далеко друг от друга и их взаимодействием можно пренебречь.

3.165. $I_{max} = \frac{c d B_{kp}}{4\pi} \approx 240$ А. Предельный ток определяется разрушением сверхпроводимости.

$$3.166. A = \frac{LI_0^2}{2} \left(\frac{L_c/N^2}{L - L_c/N^2} \right).$$

$$3.167. j(\theta) = \frac{cB}{2\pi} \sin \theta.$$

3.168. $p_{mag} S^2 = \text{const}$, где $p_{mag} = B^2/(2\mu_0)$ — магнитное давление на стенки соленоида.

$$3.169. F = \frac{I^2}{c^2 r_1} \left[\ln \left(\frac{8r_1}{r_2} \right) - 1 \right].$$

$$3.170. p_{mag} = \frac{B^2}{2\mu_0} \left(\frac{S_1}{S_1 - S_2} \right)^2.$$

$$3.171. j = I/(2\pi r), p_{mag} = I^2/(2\pi c^2 r^2), \text{ где } r = r_1, r_2.$$

$$3.172. r_{max} \approx 3B_{kp}^2/(8\mu_0 \rho g) = 1.7 \text{ см.}$$

3.173. Без сверхпроводящего шарика индукция равна $B_0 = 2\pi I/(cr_1)$ и перпендикулярна плоскости тора. При внесении шарика появляется дополнительная составляющая в плоскости тора:

$$B = \frac{NI}{cr_1} \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^3.$$

$$3.174. I = (1 - r_1^2/r_0^2) I_0 = (3/4) I_0.$$

$$3.175. v_{max} = rB \sqrt{r/(2m)}.$$

3.176. На диполь, находящийся в магнитном поле, действует сила

$$F_x = p_m \frac{\partial B_x}{\partial x} = -\frac{2\pi Br^3}{\mu_0} \frac{\partial B_x}{\partial x}.$$

Работа против этой силы

$$A = - \int_{-\infty}^0 F_x dx = \frac{2\pi r^3}{\mu_0} \int_0^{B_0} B dB = \frac{\pi B_0^2 r^3}{\mu_0}$$

равна начальной кинетической энергии шарика

$$\bar{m}v_0^2/2 = \pi B_0^2 r^3 / \mu_0,$$

откуда

$$v_0 = B_0 \sqrt{\frac{2\pi r^3}{m\mu_0}} = 20 \text{ м/с.}$$

Таким образом, при начальной скорости $v_0 \geq 20$ м/с шарик влетит в соленоид.

3.177. При $l = r/\sqrt{7}$ сила отталкивания максимальна.

3.178. $T = \pi \sqrt{l/g} = 0,3$ с.

3.179. Внутри сверхпроводника магнитное поле равно нулю. Из граничных условий следует, что на его поверхности обращается в нуль нормальная составляющая индукции магнитного поля. Для определения магнитного поля, создаваемого плоскостью, можно воспользоваться методом изображений — мысленно поместить под плоскостью на таком же расстоянии прямой ток, текущий в обратном направлении. Сила, действующая на единицу длины тока со стороны изображения, есть $f = IB$, где B — магнитная индукция поля, создаваемого изображением. Эта сила направлена вверх. Условие, при котором проводник будет свободно висеть над плоскостью на высоте h , запишется в виде

$$f = \rho_l g, \text{ или } \mu_0 I^2 / (4\pi h) = \rho_l g.$$

Отсюда следует, что

$$h = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi \rho_l g} \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Отметим, что решение может быть легко обобщено на случай плоского витка любой формы, если только радиус кривизны витка во всех точках существенно превышает h .

3.180. $\rho_{\text{маг}} = B^2/(2\mu_0)$, $f = 0$.

§ 3.4. Электромагнитные поля

3.181. $I = 2 \frac{\omega^2 a^2 b}{c^2 dR} U_0 \cos \omega t$

3.182. 1) $E = \frac{\pi r_0}{c^2} n \frac{dI}{dt} = 10^{-8}$ ед. СГС = $3 \cdot 10^{-4}$ В/м.

2) $E_1 = E$, $D_1 = 2D$.

$$3.183. h = \frac{\Phi^2}{2mgL} = 500 \text{ см.}$$

$$3.184. \mathcal{L} = \frac{q}{2c} r^2 B = 8 \cdot 10^{-3} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{с.}$$

3.185. Капля движется по окружности радиусом $r/2$ с постоянной скоростью $v = (qr/2c)(B/E)$.

$$3.186. S(r, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{U^2 r}{a^2 d R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \text{ где}$$

$$\tau = RC = \frac{\epsilon a^2 R}{4d}, \quad W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon a^2 U^2}{2d}.$$

$$3.187. S_z = \frac{1}{2\pi} \frac{I^2 R}{r^2 \ln(r_2/r_1)}, \quad S_\phi = \frac{I^2 R n}{r \ln(r_2/r_1)}.$$

$$W = \int_{r_1}^{r_2} S_z \cdot 2\pi r dr = I^2 R.$$

$$3.188. P = \lambda \pi h \left(\frac{\pi f B_0 r^2}{2c} \right)^2 = 1,1 \cdot 10^5 \text{ эрг/с} \approx 0,01 \text{ Вт.}$$

$$3.189. Q = \left(\frac{a^3 \pi}{c^2 S} \right)^2 \frac{q^2}{2R\tau^3}.$$

$$3.190. W = \frac{\mu_0 N^2 \mathcal{E}^2 \pi r^2}{2lR^2} = \frac{LI^2}{2}.$$

$$3.191. \Delta p = \frac{EV B}{4\pi c} = 10^{-6} \text{ Г} \cdot \text{см}/\text{с.}$$

$$3.192. U(x, t) = U_0 \frac{\cos(kx + \delta) \cos \omega t}{\cos[(m + 1/2)\pi - kl]}.$$

$$A = \frac{U_0}{\cos[(m + 1/2)\pi - kl]},$$

где $k = \omega/c$ — волновое число, δ определяется из условия $kl + \delta = (m + 1/2)\pi$ при $m = 0, 1, 2, \dots$ (узел напряжения на конце линии).

3.193. $K = (1 + \rho)/(1 - \rho) = 3$. Здесь $\rho^2 = (P_0 - P_h)/P_0$ — коэффициент отражения по мощности.

3.194. $P_{\text{изл}} = P_0(1 - \rho^2) = 89 \text{ кВт}$, где $\rho^2 = (K-1)^2/(K+1)^2 = 1/9$ — коэффициент отражения по мощности.

3.195. Средняя энергия электрического поля за период T равна

$$\bar{W} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int \frac{\epsilon E^2}{8\pi} dV = \frac{1}{2} W,$$

потери за период

$$\Delta W_{\text{tp}} = \int_0^T dt \int \sigma E^2 dV.$$

Отсюда для добротности получим выражение

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W_{\text{тр}}} = \frac{\epsilon}{2T\sigma}.$$

Для минимальной резонансной частоты закороченного с одного конца отрезка коаксиального кабеля имеем

$$\lambda = 4l \sqrt{\epsilon} = 80 \text{ м}, \quad v_{\min} = 1/\Gamma = c/\lambda = 3,75 \text{ МГц}.$$

$$Q = \frac{\epsilon}{2T\sigma} = 4 \cdot 10^2.$$

3.196. Наименьшая резонансная частота отрезка прямоугольного волновода может быть найдена из дисперсионного соотношения для H_{10} -моды. Имеем для пустого волновода

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/2b)^2}} = 2l,$$

где λ и λ_0 — длина волны в волноводе и в свободном пространстве. Отсюда с учетом диэлектрической проницаемости среды получим

$$v = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda_0 \sqrt{\epsilon}} = \frac{c \sqrt{1 + (b/l)^2}}{2b \sqrt{\epsilon}} \approx \frac{c}{2b \sqrt{\epsilon}} = 5 \text{ ГГц}.$$

Для добротности Q имеем (см. решение задачи 3.195)

$$Q = \frac{\epsilon}{2T\sigma} \approx \frac{c \sqrt{\epsilon}}{4b\sigma} = 5 \cdot 10^6.$$

§ 3.5. Квазистационарные токи. Колебания в электрических цепях

$$3.197. I(t) = \frac{U}{R} \exp \left(-\frac{C_1 + C_2}{RC_1C_2} t \right).$$

$$3.198. Q = q^2/(4C).$$

$$3.199. I(t) = \frac{\mathcal{E}(\epsilon - 1)}{R} \exp \left(-\frac{t}{RC} \right).$$

$$3.200. I(t) = \frac{\beta \mathcal{E}^{3/2}}{[1 + \beta \sqrt{\mathcal{E}} t/(2C)]^3}.$$

$$3.201. I_1 = I \frac{L_1}{L_1 + L_2}, \quad I_2 = I \frac{L_2}{L_1 + L_2}, \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

$$3.202. I = \frac{(\mathcal{E} - a) + \sqrt{(\mathcal{E} - a)^2 - 4Rb}}{2R}.$$

$$3.203. (f_p)_{\max} = \frac{2\pi \mathcal{E}^2 S_1}{c^2 R R_1 l S}.$$

$$3.204. Q = \frac{2\mathcal{E}^2 S_1^2}{c^2 \pi r_1^2 r R R_1}.$$

3.205. $Q_1 = Q_2$, $t_1 = t_2$.

3.206. $q = \frac{q_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

3.207. $C \geq \frac{L}{R^2 n^2} = 1 \text{ мкФ}$.

3.208. $\omega_0 = 2n/l = 2 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ ($\approx 320 \text{ Гц}$).

3.209. $N_2 = N_1/2$.

3.210. $I(t) = (\Phi_0/L) \cos \omega_0 t$, где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

3.211. $t = \sqrt{LC} = 10^{-4} \text{ с}$, $I_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{c} \sqrt{\frac{C}{L}} = 0,37 \text{ А}$.

Здесь $e = 2,72$.

3.212. $U(t) = U_0 \exp(-\delta t) [\cos \omega t + (\delta/\omega - 1/\omega R c) \sin \omega t]$, где $\delta = R/(2L)$, $\omega^2 = 1/(LC) - R^2/(4L^2)$.

3.213. $I_2 = I_1/n$.

3.214. 1) $T_1 = n \cdot 2\pi \sqrt{LC}$, где $n = 1, 2, 3 \dots$,

2) $T_2 = (2n+1)\pi \sqrt{LC}$. $U_{\max} = 2U_0$.

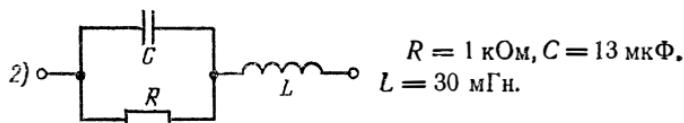
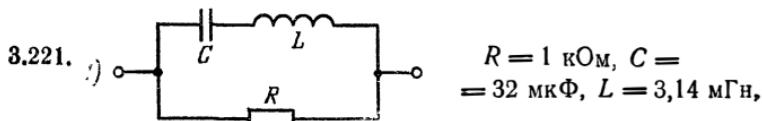
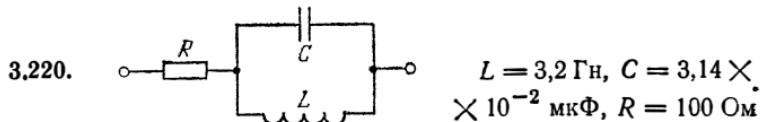
3.215. $B = (c/\pi r) \sqrt{2\pi f m R} \approx 800 \text{ Гс}$.

3.216. $U_0 = \frac{U}{\pi n R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

3.217. $\Phi_{\max} = \frac{\Phi_0}{1 - \exp(-\gamma T/2)}$.

3.218. $U = \frac{\sqrt{2} U_{\phi}}{\pi} \approx 100 \text{ В}$.

3.219. Вольтметр измеряет $U_{\phi} = \sqrt{U^2}$. При включении через диод вольтметр покажет $U = U_{\phi}/\sqrt{2} \approx 155 \text{ В}$.



3.222. $C = \frac{I}{2\pi f (\mathcal{E}^2 - U^2)^{1/2}} = 8,4 \text{ мкФ}$. $\varphi = 60^\circ$.

3.223. $\varepsilon = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{2\pi f \varepsilon_0 \rho} = 2,5$. Здесь $f = 50$ Гц — частота переменного тока.

3.224. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\pi^2 f \mu_0 D}{8 \rho n} = 5 \cdot 10^{-3}$.

3.225. $L = \frac{U}{4\pi f I} = 1,2$ Гн.

3.226. $\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{L_{\text{экв}} C}}$, где $L_{\text{экв}} = L_1 - M^2/L_2$ — эквивалентная индуктивность контура с учетом влияния короткозамкнутой катушки.

3.227. $L = \frac{1}{4C} \left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} \right)$, $M = \frac{1}{4C} \left| \frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right|$.

3.228. $L = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} \right)$, $M = \frac{1}{C} \left| \frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right|$.

3.229. $\frac{U(f_0)}{U(f_1)} \approx Q \left[\left(\frac{f_1}{f_0} \right)^2 - 1 \right] = 300$.

3.230. $U_1 \approx (f_0/f_1)^2 U_0 = 10$ мВ.

3.231. $R = \frac{U}{I_0} = 10$ Ом, $L = \frac{U}{2\pi f_1 I_1} = 0,1$ Гн,

$$C = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 L} = \frac{f_1 I_1}{2\pi f_0^2 U} = 0,1 \text{ мкФ.}$$

3.232. $Q/Q_\infty = (1 + L/CrR)^{-1} \approx 0,08$.

3.233. $\Delta L/L = Q^{-1} \sqrt{2 \Delta U/U} = 4,5 \cdot 10^{-6}$.

3.234. $\Delta d = \frac{d}{Q} \sqrt{\frac{2 \Delta U}{U}} = 4,5 \cdot 10^{-7}$ см.

3.235. $L/R = RC$. $\operatorname{tg} \varphi = -\omega RC$.

3.236. $C = L/(R^2 + \omega^2 L^2) = 220$ мкФ.

3.237. $\omega RC = 1$.

3.238. $\omega^2 LC = 1$. $U_{01} = U_0 \frac{CR^2 - L}{CR^2 + L}$.

3.239. $\omega^2 LC = 1$. $U_{01} = U_0 = \frac{2R \sqrt{LC}}{L + CR^2}$.

3.240. $\omega = 1/(RC)$. $U_{01} = U_0/3$.

3.241. $U_{01} = U_0 (2m^2 + 2m + 5)^{-1/2}$.

3.242. $\omega L = R$. $U_{01} = U_0 \left(\frac{1}{3} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$.

3.243. $\tau = RC = R_1 C_1$. Достаточное условие баланса: $R_1 = R$, $C_1 = C$.

3.244. $R_1 C = RC_1$.

3.245. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{R_2}{\omega L_2 - 1/(\omega C_2)}$.

3.246. $\omega^2 LC = 1$.

3.247. $Z = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}}$. При $\omega > 2/\sqrt{LC}$

3.248. $Z_{\text{конт}} + Z = 0$. $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{a^2 b}{R^2 L}$, $A = \frac{a}{R}$.

3.249. $I = \frac{U_0}{2R} \cos 2\omega t$, $I_1 = \frac{U_0}{2(R + R_1)}$.

3.250. 1) $f(t) = A \cos^2 \omega_0 t = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} \cos 2\omega_0 t$;

2) $f(t) = A(1+m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t \approx A \cos \omega_0 t + \frac{mA}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t + \frac{mA}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t$;

3) $f(t) = A \cos [\omega_0 t + m \cos \Omega t] \approx A \cos \omega_0 t + \frac{mA}{2} \cos \left[(\omega_0 - \Omega)t + \frac{\pi}{2} \right] + \frac{mA}{2} \cos \left[(\omega_0 + \Omega)t + \frac{\pi}{2} \right]$.

3.251. 1) $g(t) \sim A^2(1 + m \cos \Omega t)^2$,
при $m \ll 1$ $g(t) \sim A^2(1 + 2m \cos \Omega t)$;

2) $g(t) \sim A^2 = \text{const}$;

3) $g(t) \sim (mA)^2 + (mA)^2 \cos 2\Omega t$;

4) $g(t) \sim A^2(1 + 2m \cos \Omega t)$.

3.252. Можно. Это электрический аналог опыта Мандельштама. Амплитуда колебаний в контуре максимальна при $\Omega = |\omega_0 - \omega|$.

3.253. 1) $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n \exp(i\omega_n t)$, где $C_n = A \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\pi\tau/T)}{(n\pi\tau/T)}$,

$\omega_n = n \frac{2\pi}{T}$;

2) $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt = A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)}$;

3) $F(\omega) = A \frac{\tau}{2} \frac{\sin[(\omega - \omega_0)\tau/2]}{[(\omega - \omega_0)\tau/2]} + A \frac{\tau}{2} \frac{\sin[(\omega + \omega_0)\tau/2]}{[(\omega + \omega_0)\tau/2]}$.

3.254. $U_1 = U_0 \cos \left(\omega t + \frac{2m}{\omega C_0 R} \cos \Omega t + \alpha \right)$, где $\alpha = \frac{2}{\omega C_0 R} \ll 1$.

Спектр выходного напряжения содержит три компоненты на частотах ω , $\omega - \Omega$ и $\omega + \Omega$ с амплитудами U_0 , $mU_0/\omega C_0 R$, $mU_0/\omega C_0 R$ и фазами 0 , $\pi/2$ и $\pi/2$ соответственно.

3.255. $U_1 = U_0 \cos \left(\omega t + \frac{2m\omega L_0}{R} \cos \Omega t + \alpha \right)$, где $\alpha = \frac{2\omega L_0}{R} \ll 1$.

Спектр выходного напряжения содержит три компонента на частотах ω , $\omega - \Omega$ и $\omega + \Omega$ с амплитудами U_0 , $m\omega L_0 U_0 / R$, $m\omega L U_0 / R$ и фазами 0 , $\pi/2$ и $\pi/2$ соответственно.

3.256. Спектр выходного напряжения содержит три компонента на частотах ω , $\omega - \Omega$ и $\omega + \Omega$ с амплитудами $U_0/2$, $\sqrt{3} aU_0/4$ и $\sqrt{3} aU_0/4$ соответственно. Боковые компоненты сдвинуты по фазе на $(5/6)\pi$ относительно основной частоты.

3.257. Спектр выходного напряжения содержит компоненту основной частоты ω с амплитудой $U_0/\sqrt{2}$ и две боковые компоненты на частотах $\omega \pm \Omega$ с амплитудами $aU_0/4$, сдвинутые по фазе на $\pi/4$ относительно основной частоты.

$$3.258. 1) A_1 = \frac{\omega}{2\gamma} \left(1 + \frac{m}{2} \right) A,$$

$$2) A = \frac{\omega + 2\Omega}{2\gamma} \frac{mA}{4}.$$

3.259. Резонанс наступает на частотах ω_0 и $\omega_0 \pm \Omega$. $m = 2/n = 0.5$.

3.260. Спектр тока имеет две компоненты: на частоте ω с амплитудой $(1/c) SC\omega^2 H_0 (\mu_1 - \mu_2 H_0^2/4)$ и на частоте 3ω с амплитудой $(3/4c) SC\omega^2 \mu_2 H_0^3$, где $H_0 = 2NI/(cr)$.

$$3.261. R_{\max} = S \sqrt{LL_{\text{cb}}}/C = 8 \text{ Ом.}$$

При $R = 2R_{\max} = 16 \text{ Ом}$, $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 12$ (без обратной связи). При наличии обратной связи $Q_1^* = 25$ (положительная связь), $Q_2^* = 8$ (отрицательная связь).

$$3.262. C = 4\tau_0^2/(\pi^2 L_0) = 10^{-9} \Phi. R_{\max} = \Delta L/4\tau_0 = 10 \text{ Ом.}$$

$$3.263. \Delta I_{\min} \approx \sqrt{\frac{2eI}{\tau}} = 1.7 \cdot 10^{-11} \text{ А.}$$

3.264. $I_2 = I_1 \sqrt{T_1/T_2} \approx 8$ км. Здесь T_1 — комнатная температура.

IV. ОПТИКА

§ 4.1. Геометрическая оптика и элементы фотометрии

$$4.1. h_{\min} = a \left[\sin \varphi \cos \varphi \left(1/\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \varphi} - 1/\sqrt{n_2^2 - \sin^2 \varphi} \right) \right]^{-1}.$$

$$4.2. l = 10 \text{ см.}$$

$$4.3. \alpha = 2 \arcsin \sqrt{n^2 - 1} \quad \text{при } n < \sqrt{2}, \\ \alpha = \pi \quad \text{при } n \geq \sqrt{2}.$$

4.4. $\Delta t \approx 1,1 \cdot 10^{-7}$ с.

4.5. $L_2 \approx 14$ м.

4.6. $37,5$ см $\leq L \leq 38$ см.

$$4.7. D_K = D \frac{L}{F_1}, E = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{F_2} \right)^2 B.$$

$$4.8. \Phi/\Phi_0 = 1/[1 + (S - S_1) k_{\text{п}}/S_1] = 1/3.$$

4.9. В линзу, а следовательно, и на шарик направляется мощность излучения, равная $E_C \pi D^2 / 4$, где D — диаметр объектива. Радиус шарика равен радиусу изображения Солнца $a_C F / 2$, где F — фокусное расстояние линзы. Шарик излучает мощность, равную $\sigma_{\text{СВ}} T^4 \cdot 4\pi a_C^2 F^2 / 4$ ($\sigma_{\text{СВ}}$ — постоянная Стефана — Больцмана).

Установившуюся температуру T можно найти из уравнения баланса энергий

$$E_C \frac{\pi D^2}{4} = \sigma_{\text{СВ}} T^4 \cdot 4\pi \frac{a_C^2 F^2}{4}.$$

Отсюда

$$T = \sqrt[4]{\frac{E_C}{4\sigma_{\text{СВ}} a_C^2}} \left(\frac{D}{F} \right)^2 \approx 1,7 \cdot 10^3 \text{ К.}$$

§ 4.2. Интерференция

4.10. Для горизонтальной поляризации $\alpha_1 = \lambda/(4h) = 1^\circ 20'$, для вертикальной поляризации $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \lambda/(2h) = 2^\circ 40'$.

$$4.11. \mathcal{I} = 2\mathcal{I}_0 \left[1 + \frac{\sin 2\pi\psi(h/\lambda)}{2\pi\psi(h/\lambda)} \cos \frac{4\pi h \alpha}{\lambda} \right].$$

При $\psi = \frac{\lambda}{2h} m$ ($m = 1, 2, 3 \dots$) $\mathcal{I} = 2\mathcal{I}_0$, где \mathcal{I}_0 — интенсивность принимаемого сигнала в отсутствие отражения.

4.12. $U_0 \propto 1 + \cos \frac{2\pi L \sin \alpha}{\lambda}$, где $\alpha = \omega_3 t$ — угол отклонения источника над горизонтом, ω_3 — угловая скорость вращения Земли. При малых значениях α период изменения амплитуды напряжения равен $T = \lambda T_3 / (2\pi L) = 1,15$ мин.

$$4.13. F = r^2 / [10\lambda(n-1)] = 1,1 \text{ м}$$

4.14. $\mathcal{I}_{\text{max}}/\mathcal{I}_{\text{min}} = [(n^2 + 1)/(2n)]^2 = 1,17$. Интерференционная картина имеет достаточный контраст, так что ее можно увидеть глазом

4.15. $m = \Delta/\lambda \approx 400$ (где $\Delta = 2h \sqrt{n^2 - \sin^2 \Phi} \approx 2,2 \cdot 10^{-2}$ см — разность хода),

$\Delta t \approx \lambda/\omega = 2,8$ см (где $\omega = (h/L) \operatorname{tg} \psi \cos^2 \Phi = 2 \cdot 10^{-5}$ — угол схождения интерферирующих лучей на экране, ψ — угол преломления).

$b \approx \Delta l = 2,8$ см, $\Delta \lambda \approx \lambda/m \leq 1,4$ нм.

4.16. $m_{\max} \approx 1000$, $m_{\min} \approx 720$. $\Delta \lambda \leq 0,5$ нм. Источник света может иметь любые размеры.

4.17. Ширина полос уменьшится в $L/F = 5$ раз.

4.18. $\Delta p = \frac{2\omega}{\Delta\phi} \Delta p_1 = 200$ мм рт. ст.

4.19. $\Delta\theta < \lambda/D = 2''$.

4.20. $b < F \sqrt{\lambda/L} = 1,25$ мм.

4.21. $A = 1 + dl/(Fh) = 5$.

4.22. $\frac{\Delta l}{l} = \frac{2ha \sqrt{n^2 - 1}}{\lambda} = 0,75$.

4.23. $\Delta f \approx \frac{c(1-\rho)}{2\pi L} = 4,8$ МГц, $\Delta v = \frac{c}{2L} = 1500$ МГц.

4.24. $b = 2d_1^2/d_2 = 0,1$ см.

4.25. Излучение источника белого света занимает широкий спектральный диапазон. Максимумы интенсивности при интерференции будут давать спектральные компоненты, для которых выполнено условие $\Delta = m\lambda$, минимумы — для которых выполнено условие $\Delta = (m + 1/2)\lambda$, где m — целое число

Таким образом, в результате интерференции на вход спектрального прибора будет поступать излучение, спектр которого имеет чередующиеся максимумы и минимумы. Расстояние между соседними спектральными максимумами может быть найдено из соотношения

$$(m+1)\lambda_{m+1} = m\lambda_m, \quad m(\lambda_m - \lambda_{m+1}) = \lambda_{m+1}, \\ \Delta\lambda = \lambda_m - \lambda_{m+1} = \lambda/m = \lambda^2/\Delta.$$

Спектральный прибор должен иметь разрешающую способность R , достаточную для обнаружения двух максимумов на расстоянии $\Delta\lambda$:

$$R \geq \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m = \frac{\Delta}{\lambda} \approx 5 \cdot 10^8.$$

4.26. $\Delta = c/(\Delta v) = 30$ м.

4.27. $\Delta\lambda \approx \lambda/m \approx 40$ нм, $m \approx 12$ — максимальный порядок наблюдаемых интерференционных полос. При малых m видность интерференционной картины

$$\gamma = (\mathcal{I}_{\max} - \mathcal{I}_{\min}) / (\mathcal{I}_{\max} + \mathcal{I}_{\min}) \approx 0,65.$$

Из соотношения $\gamma = \frac{\sin \pi \Omega / \Omega_{\max}}{\pi \Omega / \Omega_{\max}} = 0,65$, где $\Omega_{\max} \approx \lambda/b$ — максимально допустимая апертура интерференции при заданном размере источника, получаем

4.28. Решение аналогично решению задачи 4.27.

$$\Delta\lambda \approx \lambda/m \approx 100 \text{ нм}, \quad \Omega = 0.5\lambda/b = 10^{-3} \text{ рад.}$$

$$4.29. \gamma = \frac{\mathcal{I}_{\max} - \mathcal{I}_{\min}}{\mathcal{I}_{\max} + \mathcal{I}_{\min}} = \frac{\sin(\pi bd/\lambda L)}{\pi bd/\lambda L}.$$

4.30. $\mathcal{I}_{\max} \approx 4a$ при $z = (n\lambda/2)(1 - \cos\alpha)^{-1}$, $\mathcal{I}_{\min} = 0$ при $z = (n\lambda/2 \pm \lambda/4)(1 - \cos\alpha)^{-1}$.

$$4.31. \gamma = \frac{\sin(\pi\Delta f/c)\Delta}{(\pi\Delta f/c)\Delta}, \text{ где } \Delta \text{ — разность хода.}$$

§ 4.3. Дифракция. Элементы голограмии фурье-оптики

$$4.32. \mathcal{I} = 0.$$

$$4.33. h = \frac{(2m+1)}{2(n-1)}\lambda, \quad (m = 0, 1, 2). \quad \mathcal{I}_{\max} = 9\mathcal{I}_0.$$

$$4.34. \mathcal{I} = 0 \text{ (a)}, \quad \mathcal{I} = \mathcal{I}_0/4 \text{ (б).}$$

$$4.35. F = r^2/(2m\lambda) \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

$$4.36. \mathcal{I} = 8\mathcal{I}_0.$$

4.37. Интенсивность света увеличится в два раза.

4.38. $\mathcal{I}_1 = 9\mathcal{I}_0$, $\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_0$, где \mathcal{I}_0 — интенсивность каждой из спектральных компонент.

$$4.39. F_{\max} = r_1/\lambda = 8\text{м}. \quad h = \frac{(2m+1)}{2(n-1)}\lambda \quad (m = 0, 1, 2 \dots).$$

$$\mathcal{I}_{\max} = 36\mathcal{I}_0.$$

$$4.40. \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}_0} \approx \left(\frac{D^2}{2\lambda F} \right)^2 = 1.5 \cdot 10^7. \quad b \approx \frac{2\lambda F}{D} = 10^{-3} \text{ см.}$$

4.41. Фокусное расстояние пластиинки $F = r_1^2/\lambda = 50$ см. Полное число зон Френеля $m = D^2/(4\lambda F) = 100$.

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}_0 = m^2 = 10^4. \quad b \approx \frac{2\lambda F}{D} = \frac{2r_1^2}{D} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

4.42. $\mathcal{I} \propto \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 (\tau_1 + \tau_2 + 2\sqrt{\tau_1\tau_2} \cos \Delta\phi)$, где $u = \frac{ka \sin \theta}{4}$, $\Delta\phi = k[h(n_1 - n_2) + \frac{a}{2} \sin \theta]$, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число.

В центре получится темная полоса при условии $kh(n_1 - n_2) = (2m+1)\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$).

4.43. $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \left[\frac{\sin(kNb \sin \theta/2)}{\sin(kb \sin \theta/2)} \right]^2 \left[\frac{\sin(k\Delta/2)}{(k\Delta/2)} \right]^2$, где $k = 2\pi/\lambda$, $\Delta = [h(n-1) - a \sin \theta]$. Направления на главные максимумы определяются формулой $a \sin \theta_m = m\lambda$.

$$4.44. L_{\min} > D^2/(4\lambda) \approx 10 \text{ м.}$$

$$4.45. L = d^2/[4(2m+1)\lambda] \quad (m=0, 1, 2 \dots);$$

при $m=0 \quad L_{\max} = 0,5 \text{ м.}$

$$4.46. \mathcal{I}_1/\mathcal{I}_2 = \pi^2/4.$$

4.47. $m \approx (1,22)^2 \frac{l\lambda}{d^2} \approx 70$, где $l = 20 \text{ см}$ — разность длин плеч интерферометра.

4.48. $L \approx ld/\lambda \approx 10 \text{ км}$, где $l \approx 1 \text{ м}$ — расстояние между фарами, $d \approx 5 \text{ мм}$ — диаметр зрачка глаза.

4.49. $F(u) = \delta(u) + \frac{a}{2}\delta(u-\Omega) + \frac{a}{2}\delta(u+\Omega)$, где δ — дельта-функция, $u = k \sin \theta$. Спектр состоит из трех плоских волн, распространяющихся в направлениях $k \sin \theta = 0, \pm \Omega$ с амплитудами $1, a/2$ и $a/2$ соответственно.

$$4.50. F_1(u) \sim \frac{\sin(au/2)}{(au/2)}, \quad \text{где } u = k \sin \theta, k \text{ — волновое число.}$$

$$F_2(u) \sim \frac{\sin(bu/2)}{(bu/2)} \frac{\sin(Ndu/2)}{\sin(du/2)}.$$

4.51. Комплексная амплитуда волны за решеткой равна

$$A = A_0 e^{i\Omega x} + \frac{A_0}{4} e^{i2\Omega x} - 2A_0 e^{-i\Omega x} - \frac{A_0}{2} e^{-i2\Omega x} - \frac{A_0}{4}.$$

За решеткой распространяются пять плоских волн в направлениях $k \sin \theta = 0, \pm \Omega$ и $\pm 2\Omega$. Здесь $\Omega = 2\pi/d = 2\pi \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$.

4.52. Комплексная амплитуда волны за решеткой равна

$$A = A_0 e^{i\Omega x} + \frac{A_0}{4} e^{i(2\Omega x - \pi/2)} + A_0 e^{-i\Omega x} + \frac{A_0}{4} e^{-i(2\Omega x - \pi/2)}.$$

За решеткой распространяются четыре плоские волны в направлениях $k \sin \theta = \pm \Omega$ и $\pm 2\Omega$.

4.53. $\Delta z_{\max} = \frac{4\pi k}{\Omega^2} m, \quad \Delta z_{\min} = \frac{4\pi k}{\Omega^2} \left(m + \frac{1}{2}\right) (m=1, 2, 3, \dots).$

$$\mathcal{I}_{\max} = \mathcal{I}_0/16, \quad \mathcal{I}_{\min} = 0.$$

$$4.54. \omega = \Omega^2 v/(2k), \quad \mathcal{I}_{\max}/\mathcal{I}_{\min} = 9.$$

$$4.55. \mathcal{I}(x) \propto 1 - 2m \cos \Omega x \quad (\text{для пластинки } \pi/2),$$

$$\mathcal{I}(x) \propto 1 + 2m \cos \Omega x \quad (\text{для пластинки } 3\pi/2).$$

Для поглощающей пластинки контраст возрастет в $1/k_n$ раз.

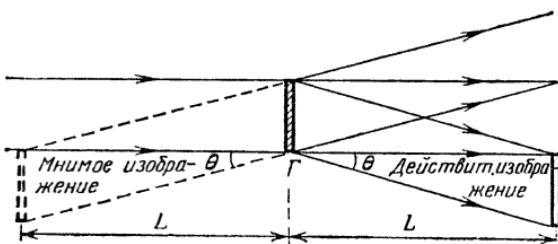
$$4.56. d = \sqrt{2\lambda \Delta L}, \quad l = l_1 + 2\Delta L m = (1+2m)\Delta L \quad (m=1, 2, 3 \dots).$$

4.57. Изображение подобно предмету при условии $2\pi/D < \Omega < \pi D/(\lambda F)$, или $2\lambda F/D < d < D$, где $d = 2\pi/\Omega$ — период решетки.

$$4.58. \Delta l = v/(2f) = 37,5 \text{ мкм}, \quad L_{\max} = Dv/(2\lambda f) = 3 \text{ м.}$$

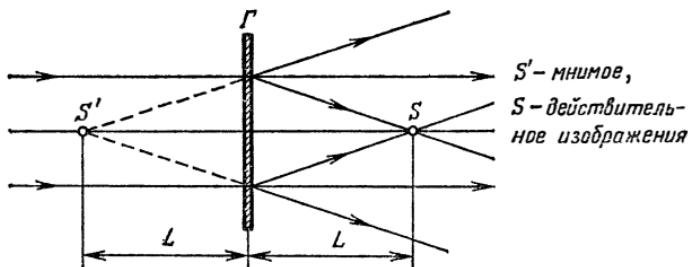
$$4.59. d_{\max} \approx 2\lambda F/\Lambda = 0,1 \text{ мм}, \quad d_{\min} \approx 2\lambda F/D = 0,01 \text{ мм.}$$

4.60.

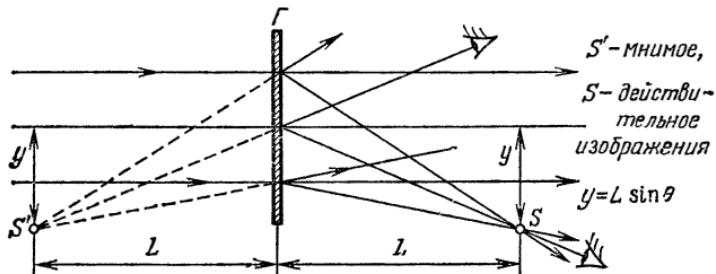


$$4.61. \tau(x) \propto 1 + \cos [kL + kx^2/(2L)].$$

Положение изображений при записи с нормально падающей плоской волной.



Положение изображений при записи с наклонной волной:



Минимальный размер голограммы $a_{\min} \approx n\lambda L$. Размер восстановленного изображения равен $b \approx 1/n$.

$$4.62. \Delta\lambda < 2L\lambda^2/r^2 = 0,2 \text{ нм.}$$

$$4.63. D > \lambda L/b = 2,5 \text{ см}; \quad \Delta\lambda < 8b^2/L = 1,6 \text{ нм.}$$

§ 4.4. Дифракционный предел разрешения оптических инструментов и спектральных приборов

$$4.64. l_{\min} \approx 1 \text{ м.}$$

4.65. Разрешающая способность объектива полностью используется при нормальном увеличении;

$$\gamma_n = D/d = F_1/F_2,$$

следовательно,

$$F_2 = \frac{d}{D} F_1 = 6 \text{ см.}$$

Угловое разрешение телескопа при визуальном наблюдении в γ_n раз выше, чем у невооруженного глаза. Минимальное расстояние, на котором с помощью телескопа можно читать книгу, определяется условием

$$\frac{b}{L} \geq \frac{\lambda}{D}.$$

Отсюда вытекает, что

$$L \leq \frac{D}{\lambda} b \approx 600 \text{ м.}$$

4.66. Предельному разрешению 5-метрового телескопа соответствует площадь поверхности Луны $S_{Л} \approx \pi (\lambda L/D)^2$, где $L \approx \approx 4 \cdot 10^5$ км — расстояние от Земли до Луны. Это означает, что освещенность любой точки изображения Луны в фокальной плоскости объектива телескопа создается за счет излучения всех элементов поверхности Луны, лежащих в пределах площади $S_{Л}$. Если часть этой площади будет закрыта черным (неотражающим) тентом, то освещенность изображения точки прилунения в фокусе телескопа изменится на величину, пропорциональную $S_{Л} - S$, где S — площадь круга. По условию $(S_{Л} - S)/S_{Л} \leq 0,99$. Отсюда

$$r^2 \geq 0,01 \left(\frac{\lambda}{D} L \right)^2, \quad r \geq 4 \text{ м.}$$

4.67. $D \approx \sqrt{\frac{k\rho_1}{\rho_2}} \frac{2\lambda L_{Л}}{d} \approx 6,5 \text{ м}$, где $L_{Л}$ — среднее расстояние от Земли до Луны.

$$4.68. \tau \approx \frac{1}{2\pi f} \left(\frac{\lambda}{a} + \frac{a}{2L} \right) \approx 10^{-6} \text{ с.}$$

$$4.69. U = \frac{12,24 \sin \Omega_{\text{опт}}}{\lambda \sin \Omega_{\text{зл}}} \approx 600 \text{ В.}$$

4.70. Диаметр пятна в фокусе системы равен

$$\frac{\lambda}{D} F \approx \lambda.$$

Ускорение электрона обусловлено электрическим полем напряженностью E . Конечная скорость электрона найдется из условия $\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 2m_0 c^2$, откуда $\beta^2 = (v/c)^2 = 3/4$. Таким образом, средняя скорость электрона близка к $c/2$. Поскольку ускорение происходит в течение времени порядка $T/4$, пройденный путь будет порядка $(c/2)(T/4) = \lambda/8$, т. е. меньше размера фокуса.

Оценим теперь ускоряющее поле E :

$$\frac{4c}{T} = \frac{4c^2}{\lambda} \approx \frac{eE}{m_0}, \quad E \approx \frac{4m_0 c^2}{\lambda e}.$$

Мощность лазера P есть

$$P \approx (\epsilon_0 E^2) c \lambda^2 = \frac{16 \epsilon_0 m_0^2 c^5}{e^2} \approx 10^{10} \text{ Вт.}$$

4.71. В первом случае в объектив телескопа попадет излучение мощностью

$$P_1 = P_0 \left(\frac{D_1}{L_1} \right)^2.$$

Эта мощность распределяется по площади S_1 дифракционного пятна $\left(S_1 \approx \frac{\lambda^2}{D_1^2} F_1^2 \right)$ и создает освещенность, равную

$$E_1 \approx \frac{P_0}{L_1^2} \frac{D_1^4}{\lambda^2 F_1^2}.$$

Освещенность фона в фокальной плоскости пропорциональна светосиле объектива:

$$E_1^0 = a \left(\frac{D_1}{F_1} \right)^2,$$

где a — некоторый коэффициент. Таким образом, контраст изображения

$$\gamma_1 = \frac{E_1 + E_1^0}{E_1^0} = 1 + \frac{P_0 D_1^4 F_1^2}{L_1^2 \lambda^2 F_1^2 a D_1^2} = 1 + \frac{P_0 D_1^2}{a L_1^2 \lambda^2}.$$

При наблюдении в телескоп с объективом диаметром D_2

$$\gamma_2 = \frac{E_2 + E_2^0}{E_2^0} = 1 + \frac{P_0 D_2^2}{a L_2^2 \lambda^2}.$$

Следовательно, $\gamma_1 = \gamma_2$ при условии

$$\frac{L_1^2}{D_1^2} = \frac{L_2^2}{D_2^2}, \quad \text{откуда} \quad L_2 = L_1 \frac{D_2}{D_1} = 5 \cdot 10^4 \text{ км.}$$

4.72. Угловая расходимость пучка света равна λ/D . Поэтому мощность излучения, рассеянного спутником,

$$P' = \rho P \frac{d^2}{4(\lambda L/D)^2} = \frac{\rho P}{4} \left(\frac{dD}{\lambda L} \right)^2.$$

Так как спутник равномерно рассеивает оптическую мощность P' в телесный угол 2π , то принимаемая мощность будет равна

$$P' \frac{\pi (D^2/4)}{2\pi L^2} = \frac{P'}{8} \left(\frac{D}{L}\right)^2$$

Записывая теперь условие обнаружения рассеянного сигнала, получим

$$\frac{P'}{8} \left(\frac{D}{L}\right)^2 = \frac{\rho P}{32} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{D}{L}\right)^4 \geq P_{\text{пор}},$$

$$L \leq L_{\text{max}} = \frac{D}{2} \sqrt[4]{\frac{\rho P d^2}{2 P_{\text{пор}} \lambda^2}} \approx 70 \text{ км.}$$

4.73. $L \leq \frac{dD}{2\lambda} \sqrt{\frac{P}{n\hbar\nu}} \approx 5 \cdot 10^7 \text{ км. Здесь } h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} —$
постоянная Планка.

4.74. Изменения фототока заметны при условии $2h \sin \alpha \leq c/\Delta f$. Отсюда $\sin \alpha \leq 0,05$.

$$4.75. d = m (d\phi/d\lambda)^{-1} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

4.76. Разрешающая способность R интерферометра Фабри — Перо может быть оценена из следующих соображений. Минимальная разность хода между лучами, участвующими в образовании интерференционной картины в интерферометре Фабри — Перо, равна $2L$. Следовательно, порядок интерференции $m = 2L/\lambda$. Эффективное число лучей на выходе интерферометра есть $N \approx 1/(1 - \rho)$. Проводя аналогию с дифракционной решеткой, запишем

$$R = \frac{\omega}{\Delta\omega} = mN \approx \frac{2L}{\lambda} \frac{1}{(1 - \rho)} = \frac{\omega L}{c(1 - \rho)}.$$

Отсюда

$$\Delta\omega \approx \frac{c(1 - \rho)}{L}.$$

Так как $\omega = \omega_{\text{ик}} + \omega_{\text{л}}$, где $\omega_{\text{л}} = \text{const}$ — частота лазерного излучения, $\omega_{\text{ик}}$ — частота исследуемого источника в ИК-диапазоне, можно записать $\Delta\omega = \Delta\omega_{\text{ик}}$. Следовательно,

$$R_{\text{ик}} = \frac{\omega_{\text{ик}}}{\Delta\omega_{\text{ик}}} = \frac{\omega_{\text{ик}}}{\Delta\omega} = \frac{\omega_{\text{ик}}}{\omega} R \approx \frac{\omega_{\text{ик}} L}{c(1 - \rho)} = \frac{2\pi L}{\lambda_{\text{ик}}(1 - \rho)} \approx 2 \cdot 10^6.$$

4.77. Радиус пространственной когерентности в плоскости решетки

$$r_{\text{ког}} \approx \frac{\lambda L}{D}.$$

Эффективно работающее число щелей $N_{\text{эф}} \approx r_{\text{ког}}/d$, где d — период решетки. Разрешающая способность решетки равна

$$R = \lambda/\delta\lambda = mN_{\text{эф}}, \quad m_{\text{max}} \approx d/\lambda.$$

Отсюда максимальная разрешающая способность равна

$$R_{\max} \approx \frac{d}{\lambda} \frac{r_{\text{кор}}}{d} \approx \frac{L}{D} = 100.$$

4.78. $L_{\min} \approx D \frac{\lambda}{\delta\lambda} = 10$ см.

4.79. $R_{\max} \approx 1/\psi = 10^3$.

4.80. $\psi \leq \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = 4 \cdot 10^{-4}$ рад.

4.81. $\Delta T < (Nma)^{-1} = 1$ °C.

4.82. $\Delta\omega_2/\Delta\omega_1 \approx c\tau/\Delta = 3 \cdot 10^{-3}$.

4.83. $\delta\varphi_2/\delta\varphi_1 \approx N/(v\tau) = 15$.

4.84. Условие синхронизма: $d(c/v - \sin \theta) = m\lambda$ ($m = 1, 2, 3 \dots$).

4.85. Зеемановское расщепление $\Delta\lambda = \lambda^2 eB/(4\pi m_e c) = 0,016$ нм. Для бездефектной решетки $\delta\lambda = \lambda/(mN) = 0,006$ нм $< \Delta\lambda$. Для решетки с дефектом максимум 1-го порядка размыт и имеет угловую полуширину

$$\frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\Delta d}{2d^2} \lambda,$$

где $\Delta d/d = 10^{-2}$ — относительное изменение периода решетки. Принимая во внимание, что при малых дифракционных углах угловая дисперсия в 1-м порядке есть $d\varphi/d\lambda = 1/d$, получим

$$\delta\lambda_{\text{деф}} \approx d \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\Delta d}{2d} \lambda = 0,3 \text{ нм} > \Delta\lambda.$$

Таким образом, зеемановское расщепление обнаружить нельзя.

4.86. $D_{\min} \approx \frac{1}{N} \frac{\lambda}{\delta\lambda} \approx 1$ см.

4.87. Условие максимума в интерферометре Фабри — Перо с воздушным промежутком имеет вид $2Ln \cos \varphi = m\lambda$, где φ — угол наклона лучей, L — база интерферометра. Для выбранного кольца $m = \text{const}$, поэтому при изменении температуры будем иметь

$$n_1 \cos \varphi_1 = n_2 \cos \varphi_2, \quad \text{или} \quad n_1 \left(1 - \frac{\varphi_1^2}{2} \right) = n_2 \quad (\varphi_2 = 0).$$

Поскольку давление $p = \text{const}$, имеем

$$n - 1 = A/T.$$

Постоянная A найдется по значению разности $n - 1$ при $T_1 = 293$ К. Это дает $A = 0,08497$. Таким образом,

$$n_1 \left(1 - \frac{\varphi_1^2}{2} \right) = n_2 = 1 + A/T_2 = 1,00024.$$

Отсюда

$$T_2 = 354 \text{ K}.$$

- 4.88. Дисперсионная область интерферометра Фабри — Перо
 $\Delta\lambda = \lambda/m = \lambda^2/(2L),$

где $m = 2L/\lambda$ — порядок интерференции, L — база интерферометра. Отсюда следует

$$L = L_{\max} = \lambda^2/(2\Delta\lambda).$$

Разрешающая способность интерферометра равна

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \approx \frac{2\pi L}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\pi\lambda}{\Delta\lambda(1-\rho)}.$$

Таким образом, максимальное значение коэффициента пропускания есть

$$\tau = 1 - \rho \approx \pi \frac{\delta\lambda}{\Delta\lambda} \approx 1,5 \text{ \%}.$$

- 4.89. Серия затухающих импульсов длительностью $\tau = 10^{-11}$ с, следующих через интервалы $\Delta t = 2L/c = 3 \cdot 10^{-11}$ с. Импульсы затухают по экспоненциальному закону со временем затухания $t = R\lambda/c = 1,6 \cdot 10^{-9}$ с.

- 4.90. Условие автоколлимации (обратного отражения на дифракционной решетке) в 1-м порядке $2d \sin \varphi = \lambda$, где $d = 1/N$, φ — угол наклона решетки. Отсюда получаем

$$\sin \varphi = \lambda N/2, \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - (\lambda N/2)^2}.$$

Относительное расстояние между модами в интерферометре
 $\Delta v/v = \Delta\lambda/\lambda = \lambda/(2L).$

Для выделения одной моды в 1-м порядке необходимо выполнение условия

$$\Delta v/v = \lambda/(2L) \geqslant 1/N_1,$$

где $N_1 = DN/\cos \varphi$ — число освещенных штрихов решетки. Отсюда

$$D \geqslant \frac{2L}{N\lambda} \cos \varphi = L \frac{[1 - (\lambda N/2)^2]^{1/2}}{(\lambda N/2)} \approx 4,4 \text{ см}.$$

§ 4.5. Поляризация. Оптические явления в кристаллах

- 4.91. $d = (2m + 1) \lambda/[2(n - 1)]$ ($m = 1, 2, 3 \dots$).

$$\mathcal{I}_{\max} = 5\mathcal{I}_0.$$

- 4.92. $\mathcal{I} = 2\mathcal{I}_0$. Свет поляризован линейно.

- 4.93. $\mathcal{I} = 3\mathcal{I}_0$.

- 4.94. $\mathcal{I} = 5\mathcal{I}_0$.

- 4.95. $\mathcal{I} = 5\mathcal{I}_0$.

4.96. Интенсивность света возрастет в 25 раз (1), интенсивность вета возрастет в 9 раз (2).

4.97. $d > \lambda^2/[\Delta\lambda(n_e - n_o)] = 1$ мм, падающий свет должен быть поляризован под углом 45° к оптической оси пластинки.

4.98. $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0/4$. Свет поляризован по кругу.

4.99. $d = m\lambda/(n - 1)$ ($m = 1, 2, 3 \dots$).

$$\mathcal{I}_{\max} = (5/8) \mathcal{I}_0.$$

4.100. $\mathcal{I} = (1/2) \mathcal{I}_0$.

4.101. $\varphi = 45^\circ$.

4.102. $\mathcal{I}_2/\mathcal{I}_1 = 0,5$.

4.103. Оптическая ось пластинки должна быть ориентирована под углом 45° к разрешенным направлениям поляроидов. Для одной из линий дублета натрия пластинка должна быть пластинкой в полволны $\lambda/2$, а для другой — в целую длину волны λ . Минимальная толщина пластинки $d_{\min} = 5,06$ мм.

4.104. $a/b = \sqrt{3}$, $\varphi = 53^\circ$.

4.105. $\mathcal{I} = \frac{\mathcal{I}_0}{4} [1 - \cos kax (n_e - n_o)]$,

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, координата x отсчитывается от ребра клина.

При установке линзы будут наблюдаться два светлых пятна на расстоянии $L = \alpha(n_e - n_o)F$, где F — фокусное расстояние линзы.

4.106. $A = \frac{A_0}{2^N} \left| \frac{\sin(2^N \varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \right|$,

где $\varphi = (2\pi/\lambda) d (n_e - n_o)$. Такая система является интерференционно-поляризационным фильтром.

4.107. $n_o = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 d_0 + \varepsilon d}{d + d_0}}$, $n_e = \sqrt{\varepsilon \varepsilon_1 \frac{d + d_0}{\varepsilon d_0 + \varepsilon_1 d}}$.

Ось z является оптической осью.

4.108. $T = 2\pi r \sqrt{\frac{\pi a m c}{P\lambda}} = 5$ мин.

4.109. $\mathcal{M} = \mathcal{I} S \lambda / (2\pi c) = 0,95 \cdot 10^{-6}$ дин·см. От распределения интенсивности в пучке \mathcal{M} не зависит.

Для пластинки в $\lambda/4$ врачающий момент такой же, как и для поглощающей пластинки. Вращающий момент удвоится, если взять пластинку в $\lambda/2$.

4.110. $\mathcal{M} = \frac{\mathcal{I} S \lambda}{2\pi c} \frac{2ab}{a^2 + b^2} = 0,76 \cdot 10^{-6}$ дин·см.

4.111. Свет будет поляризован по левому кругу.

$$\mathcal{M}/S = \mathcal{I} \lambda / (\pi c) = 7,7 \cdot 10^{-9}$$
 дин/см.

4.112. Максимальный вращающий момент возникает, когда главные направления пластиинки ориентированы под углом 45° к плоскости поляризации света.

$$\mathcal{M} = P\lambda/c = 6,3 \cdot 10^{-7} \text{ дин}\cdot\text{см}.$$

4.113. Из условия $\mathcal{I}_{\max}/\mathcal{I}_{\min} = 3$ следует, что линейно поляризованный свет переносит половину всей мощности.

$$\mathcal{M}/S = \mathcal{I}\lambda/(4\pi c) = 1,9 \cdot 10^{-9} \text{ дин}/\text{см}.$$

4.114. Падающую волну можно представить как сумму двух линейно поляризованных компонент одинаковой амплитуды. Компонента, поляризованная в плоскости падения, отражается от 1-й решетки; компонента, поляризованная перпендикулярно плоскости падения, отражается от 2-й решетки. Фазовый сдвиг между ними после отражения

$$\Delta\phi = (2\pi/\lambda) \cdot 2l \sin \alpha = \pi/2.$$

Таким образом, отраженная волна будет поляризована по кругу.

§ 4.6. Дисперсия и распространение света

$$4.115. \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{\lambda_3^2} \delta\lambda = 50 \text{ нм}.$$

4.116. Диэлектрическая проницаемость ε плазмы определяется выражением

$$\varepsilon = n^2 = 1 - \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m_e \omega^2},$$

где e и m_e — заряд и масса электрона, N — концентрация электронов. Отсюда

$$N = \frac{(1 - n^2) m \omega^2 \varepsilon_0}{e^2} \approx 2,4 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3}.$$

Найдем теперь фазовую скорость радиоволн:

$$v = c/n \approx 3,3 \cdot 10^8 \text{ м}/\text{с}.$$

Для определения групповой скорости u нужно знать зависимость $v(\lambda)$. Эта зависимость может быть легко установлена из выражения для n^2 , если принять во внимание, что $n = c/v$, $\omega = 2\pi v/\lambda$:

$$v = \sqrt{c^2 + \frac{Ne^2}{4\pi^2 \varepsilon_0 m_e} \lambda^2}.$$

Используя соотношение Рэлея

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda},$$

получим

$$u = \frac{c^2}{v} = cn \approx 2,7 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

4.117. $d_1 = c \ln 10 / (4\pi v k) = 13,5 \text{ м}, \quad d_2 = 2d_1 = 27 \text{ м.}$

Здесь $ik = \sqrt{1 - Ne^2 / (\pi m_e v^2)}$.

4.118. $n = \frac{2\pi c}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \frac{\Delta t}{r_0} \approx 4 \cdot 10^{17}.$

$$\bar{N} = \frac{n}{ct_0} = \frac{2\pi}{r_0 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \frac{\Delta t}{t_0} \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-3}. \text{ Здесь } r_0 =$$
$$= \frac{e^2}{m_e c^2} \approx 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

4.119. $L = \frac{2\pi m_e c \Delta t}{Ne^2} \frac{v_2^2 - v_1^2}{v_1^2 v_2^2} \approx 7 \cdot 10^{20} \text{ см} \approx 700 \text{ св. лет.}$

4.120. $\Delta v/v = Ne^2 / (2\pi m_e v^2) = 2,5 \cdot 10^{-4}.$

4.121. Поправки, обусловленные теорией относительности, составляют $(v/c)^2$ часть от измеряемых величин. Показатель преломления $n = \sqrt{\epsilon}$ для плазмы отличен от единицы на величину

$$\Delta n = \sqrt{\epsilon} - 1 \approx \frac{e^2 N}{2\epsilon_0 m_e \omega^2},$$

где e и m_e — заряд и масса электрона. Поскольку состояние ионосферы (плотность электронов) меняется неконтролируемым образом, для надежного обнаружения эффектов, предсказываемых теорией относительности, ошибка измерения параметров орбиты не должна превышать Δn . Таким образом,

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 \geq \Delta n \approx \frac{e^2 N}{2\epsilon_0 m_e \omega^2}.$$

Отсюда

$$v_{\min} = \frac{\omega}{2\pi} \approx \frac{ec}{2\pi v} \sqrt{\frac{N}{2\epsilon_0 m_e}} \approx 0,8 \cdot 10^{11} \text{ Гц.}$$

4.122. Фотону с энергией $W = 5 \text{ эВ}$ соответствует длина волны $\lambda = 3 \cdot 10^{-5} \text{ см}$. Граница прозрачности определится из условия

$$\epsilon = 1 - \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m_e \omega^2} = 0.$$

Отсюда

$$N = \frac{\epsilon_0 m_e \omega^2}{e^2} = \frac{4\pi^2 \epsilon_0 c^2 m_e}{\lambda^2 e^2} \approx 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Концентрация атомов в серебре

$$n = N_A \rho / \mathcal{A} \approx 6 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Здесь N_A — постоянная Авогадро. Таким образом,

$$N/n \approx 1/6.$$

4.123. $\Phi = \frac{Z\rho N_A e^2 \lambda^2 d}{2\pi \mathcal{A} m_e c^2} \approx 4,5 \cdot 10^{-7}$ рад; дифракционная расходимость $\Delta\phi \approx \lambda/d \approx 10^{-9}$ рад $\ll \Phi$.

4.124. Электрический пробой наступит в том случае, когда электрон в результате действия на него электрического поля световой волны приобретет энергию $10 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$. Эта энергия значительно меньше энергии покоя электрона $m_0 c^2 \approx 10^{-18} \text{ Дж}$, т. е. скорость электрона v при пробое много меньше c . За один период колебания электрон смещается на расстояние порядка v/ω , где v — частота света. Это значительно меньше длины волны света $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ и длины свободного пробега электрона $l_{\text{пр}} \approx 10^{-4} \text{ см}$.

Таким образом, целесообразно рассмотреть действие световой волны на свободный электрон:

$$m\ddot{x} = -eE_0 \cos \omega t,$$

где E_0 — амплитуда световой волны. Интегрируя, получаем выражение для скорости электрона: $v = -(eE_0/m\omega) \sin \omega t$. Максимальная кинетическая энергия электрона равна

$$\frac{m_e v^2}{2} = \frac{m_e}{2} \left(\frac{eE_0}{m_e \omega} \right)^2 = eU.$$

Отсюда

$$E_0^2 = 2Um_e\omega^2/e.$$

Плотность потока энергии лазерного луча равна

$$P/S = c\epsilon_0 \bar{E}^2,$$

где $S = (\pi/4) d^2$, $\bar{E}^2 = E_0^2/2$. Окончательно получаем

$$P = c\epsilon_0 S \frac{E_0^2}{2} = \frac{c\epsilon_0 S U m_e \omega^2}{e} \approx 2 \cdot 10^{12} \text{ Вт.}$$

4.125. Принимая во внимание, что при скользящих углах падения $\Phi \approx 4\alpha$, получим из условия полного внутреннего отражения

$$\cos \alpha = \cos(\Phi/4) = n = 1 - \Phi^2/32.$$

Показатель преломления есть

$$n = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{1 - \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m_e \omega^2}} \approx 1 - \frac{e^2 N}{2\epsilon_0 m_e \omega^2}, \quad N = Z N_A \rho / \mathcal{A}.$$

Отсюда находим

$$\Phi \approx \sqrt{4 \frac{\lambda^2 e^2 Z N_A \rho}{\epsilon_0 m_e c^2 \pi^2 \mathcal{A}}} \approx 5 \cdot 10^{-2} \text{ рад} \approx 2,9^\circ$$

4.126. Показатель преломления газа определяется соотношением

$$n = \sqrt{1 + 4\pi\alpha N},$$

где α — поляризуемость молекул газа (в гауссовой системе), а N — их концентрация. Принимая во внимание, что

$$N(h) = \frac{p_0}{k_B T} \exp\left[-\frac{mg_B h}{k_B T}\right],$$

где $p_0/(k_B T)$ — концентрация молекул при $h = 0$, получим

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{1 + 4\pi\alpha \frac{p_0}{k_B T} \exp\left[-\frac{mg_B h}{k_B T}\right]} \approx \\ &\approx 1 + 2\pi\alpha \frac{p_0}{k_B T} \left(1 - \frac{mg_B h}{k_B T}\right). \end{aligned}$$

Радиус кривизны луча, пущенного горизонтально вблизи поверхности планеты, есть

$$r = \frac{n}{dn/dh} \approx -\frac{(k_B T)^2}{2\pi\alpha p_0 m g_B} \approx -10^2 \text{ км.}$$

Так как $r < 0$, центр кривизны располагается при $h < 0$. Таким образом, горизонтальные и близкие к ним лучи не могут выйти за пределы атмосферы Венеры ($|r| < r_V$).

В атмосфере Венеры возможна круговая рефракция, при которой луч света огибает планету на некоторой высоте.

4.127. Радиус кривизны горизонтального луча в атмосфере Земли равен $r = -1/(n_0 - 1) (k_B T/mg) \approx -2,9 \cdot 10^4$ км. Для круговой рефракции давление (и плотность) должно быть в 4,5 раза больше.

4.128. Интерференционное отражение света происходит только от тех звуковых волн, для которых выполнено условие Брэгга — Вульфа. Доплеровской сдвиг частоты рассеянного света определяется соотношением

$$\Delta v = 2v \frac{\sigma}{c/n} \sin \frac{\theta}{2},$$

где θ — угол рассеяния.

Условие разрешения $R = mN \geq v/\Delta v$. Отсюда при $m = 1$ получим

$$N \geq \frac{c}{2vn \sin(\theta/2)} \approx 1,2 \cdot 10^5.$$

$$\text{4.129. } N \geq \frac{\alpha_C}{4} \left(\frac{c}{v_3}\right)^2 \approx 2,5 \cdot 10^5.$$

4.130. Дифракционная решетка должна обладать разрешающей способностью $R \geq (c/2) \sqrt{m_{\text{Ne}}/k_B T} \approx 10^5$, где m_{Ne} — масса атома неона. При работе в 1-м порядке $L = Rd \geq 10$ см.

4.131. При $\tau = 10$ сут $N \geq 10^8$. При $\tau = 10$ лет расщепление спектральных линий значительно меньше их ширины.

4.132. Для надежного обнаружения движения космического корабля по доплеровскому сдвигу спектральных линий необходимо, чтобы этот сдвиг был больше ширины спектральной линии, обусловленной тепловым движением молекул на поверхности Солнца (т.е. чтобы линейная скорость корабля превосходила среднеквадратичную скорость молекул водорода, равную при температуре $T = 6000$ К $v_t \approx 10^4$ м/с). Отсюда следует, что

$$v \geq v_t \approx 10^4 \text{ м/с.}$$

Минимальное число штрихов дифракционной решетки определяется соотношением

$$R = mN \geq \frac{\lambda}{\delta\lambda} \approx \frac{c}{v}.$$

При $m = 2$ получим $N \geq 1,5 \cdot 10^4$. Приведенная оценка не учитывает доплеровский сдвиг, обусловленный вращением Солнца.

4.133. Эффект обусловлен изменением оптических длин путей для встречных волн: $\Delta v = \frac{\Omega l}{c} v$.

4.134. По формуле для релятивистского доплер-эффекта найдем

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = 3\text{с},$$

где $\beta = v/c = 0,8$, $\Delta t = 1$ с.

4.135. Решение аналогично решению задачи 4.134. Стрелка совершил два оборота

4.136. $\Delta t = 3 \cdot 10^{-5}$ с, $\delta(\Delta t)/\Delta t \approx 0,06\%$.

4.137. $v = (3/5)c$.

4.138. Перейдем в систему, в которой спутник покойится. Частота приходящего на спутник сигнала равна

$$v_1 = v_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + (v/c) \cos \alpha} = v_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \alpha}.$$

Такую же частоту в системе, связанной со спутником, будет иметь отраженный сигнал. Пересядя теперь снова к системе, связанной с Землей, обнаружим в точке B сигнал с частотой

$$v_2 = v_1 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta} = v_0 \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta \cos \alpha)(1 - \beta \cos \theta)}.$$

Релятивистская поправка к частоте есть

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu_0}\right)_{\text{рел}} \approx \beta^2 = \frac{v^2}{c^2} \approx 10^{-9}.$$

Отсюда следует, что разрешающая способность R спектрального прибора должна быть

$$R \geq \left(\frac{\nu_0}{\Delta\nu}\right)_{\text{рел}} \approx 10^9.$$

V. АТОМНАЯ ФИЗИКА

§ 5.1. Кванты света. Фотоэффект. Эффект Комптона

5.1. $\Phi \approx 2GM_C/(R_C c^2) \approx 50$ мкрад, где M_C и R_C — масса и радиус Солнца, G — гравитационная постоянная.

5.2. $\alpha = (PKt/e)^{-1/2} = 0,01$, где e — заряд электрона.

5.3. $W = \hbar(\omega + \Omega) - W_n = 0,25$ эВ.

5.4. $\alpha = \arccos [W_k/(W_k + 2m_e c^2)]^{1/2}$, где m_e — масса покоя электрона.

5.5. $W_\gamma = 2m_p c^2 \approx 1,9$ ГэВ, где m_p — масса покоя протона.

5.6. $\alpha = 90^\circ$.

5.7. $\theta_{\max} = 60^\circ$.

5.8. $\theta_{12} = 90^\circ$, $\theta_{13} \approx 127^\circ$, $\theta_{23} = \pi - \operatorname{arctg}(3/4) \approx 143^\circ$.

5.9. $v = c [1 + (m_e \lambda c / \hbar)^2]^{-1/2} = 1,54 \cdot 10^{10}$ см/с.

5.10. $W_\gamma \approx 4hcW_k^2 / (\lambda m_e^2 c^4) \approx 7,2$ МэВ.

5.11. $W_\gamma \approx m_e c^2 / 2 \approx 0,25$ МэВ.

5.12. $\lambda = 2,4$ пм.

5.13. Обозначим начальную энергию фотона $\hbar\omega$, конечную — $\hbar\omega'$, угол рассеяния фотона θ , кинетическую энергию электрона W_k , импульс p , угол вылета электрона φ . Запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$\hbar\omega = \hbar\omega' + W_k, \quad \frac{\hbar\omega'}{c} \sin \theta = p \sin \varphi,$$

$$\frac{\hbar\omega}{c} = \frac{\hbar\omega'}{c} \cos \theta + p \cos \varphi;$$

отсюда найдем

$$\left(\frac{\hbar\omega'}{c}\right)^2 = \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 + p^2 - \frac{2\hbar\omega}{c} p \cos \varphi,$$

$$\hbar\omega' = \frac{p^2 c^2 + W_k^2 - 2pcW_k \cos \varphi}{2(p c \cos \varphi - W_k)},$$

если $(pc \cos \varphi - W_k) > 0$. Окончательно получим

$$\cos \varphi > W_k/(pc) = [1 + m_e^2 c^4 / (p^2 c^2)]^{1/2} - m_e c^2 / (pc).$$

$$5.14. W'_\gamma/W_\gamma = (1 + 2W_\gamma/m_e c^2)^{-1} = 0,05.$$

$$5.15. m_\gamma < (h/c\lambda_1) (4\delta l/L_{\text{Д}})^{1/2} \approx 10^{-44} \text{ кг.}$$

§ 5.2. Волны де Броиля. Волновые функции

5.16. $n = [(W_k + eU_1)/W_k]^{1/2} = 1,17$. $U_2 = -75$ В, где e — заряд электрона.

$$5.17. W = 150 (L/R)^2 d^{-2} \approx 12 \text{ кэВ.}$$

5.18. Условие отражения m -го порядка в системе, связанной с кристаллом, запишется в виде

$$2d \sin \varphi = m\lambda = mh/(m_n v),$$

где h — постоянная Планка, m_n — масса покоя нейтрона, v — скорость нейронов относительно кристалла. В первом случае источник нейронов неподвижен, а во втором — движется со скоростью u . Поэтому

$$\sin \varphi_0 / \sin \varphi = |v + u| / |v|.$$

В дальнейшем будем полагать, что $u < v$. В этом случае имеем приближенно

$$|u + v| / |v| \approx 1 + (u/v) \sin \varphi_0,$$

и, следовательно,

$$\sin \varphi \approx [1 + (u/v) \sin \varphi_0] \sin \varphi_0.$$

$$5.19. \lambda = \hbar \varphi / (m_n L n) = 0,6 \text{ нм. } \Delta \lambda / \lambda = b / (R \varphi) = 0,2.$$

$$5.20. q = \Delta \varphi \hbar v_0 / (U l) \approx 10^{-13} e.$$

$$5.21. \sin(\varphi/2) = mh/\lambda (2m_e W_k)^{1/2} \quad (m = 1, 2, 3 \dots), \\ \varphi_{\min} = 0,1 \text{ мрад.}$$

5.22. $d = 2 \{ \hbar L / (2mk_B T) \}^{1/2} \approx 2 \text{ мкм, где } m \text{ — атомная масса серебра.}$

5.23. Энергия электрона на n -м уровне равна

$$W_n = \pi^2 \hbar^2 n^2 / (2m_e b^2).$$

На каждом уровне находятся два электрона. Поэтому полная энергия всех электронов равна

$$W = (2\pi^2 \hbar^2 / 2m_e b^2) \sum_{n=1}^{N/2} n^2,$$

и сила давления на стенки ямы

$$F = \frac{\partial W}{\partial b} = - \frac{2\pi^2 \hbar^2}{m_e b^3} \sum_{n=1}^{N/2} n^2.$$

$$5.24. W_{\kappa} \geq h^2/(2m_p r_B^2) \approx 0,2 \text{ МэВ.}$$

$$5.25. \Delta r = \hbar c/(m_{\pi} c^2) = 2 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

5.26. Угол φ между направлением полета частицы и направлением излучения определяется из равенства

$$\cos \varphi = c/(nv).$$

Электрон, находясь в слое вещества толщиной d , имеет неопределенность импульса $\Delta p \approx \hbar/d$ и неопределенность скорости $\Delta v = -\hbar/(dm_e)$. Связанная с этим неопределенность угла φ равна

$$\Delta\varphi \approx \hbar/(m_e d nv^2 \sin \varphi).$$

$$5.27. x \approx 4\hbar^2(e+1)/[m_e e^2(e-1)] = 7 \cdot 10^{-7} \text{ см.}$$

$$W_{\text{св}} \approx m_e e^4 (e-1)^2 / [32\hbar^2 (e+1)^2] = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ эВ.}$$

$$5.28. \bar{W}_{\kappa} \approx \hbar^2/(8ma^2), \text{ точное решение: } \bar{W}_{\kappa} = \hbar^2/(2ma^2).$$

$$W_{\pi}(x) = -\hbar^2/(xma), \quad W = -\hbar^2/(2ma^2).$$

$$5.29. W_n = W_0 + (\pi^2 \hbar^2 / 2m_e d^2) n^2 \quad (n = 0, 1, 2 \dots), \\ W_0 = 5 \text{ эВ}, \quad W_1 = 39 \text{ эВ.}$$

$$5.30. W_{\pi} = W / \sin^2 [d(2m_e W)^{1/2} / \hbar] = 1,64 \text{ эВ,}$$

$$D = \exp \{-2\hbar^{-1} [2m_e (W_{\pi} - W)]^{1/2} \cdot 9d\} = 3,5 \cdot 10^{-5}.$$

$t = \ln 2/(nD) = 0,16$ пс, где n — число ударов о стенку.

$$5.31. E = 2m_{N+} \Delta v / (l \Delta t) \approx 280 \text{ В/см.}$$

§ 5.3. Атомы и их излучение

$$5.32. W_{\pi} = 2,6 \text{ кэВ.}$$

$$5.33. \Delta W = \frac{m_{\text{пр}} e^4 (1/3^2 - 1/4^2)}{2\hbar^2} \approx 125 \text{ эВ,}$$

где $m_{\text{пр}} = m_{\mu} m_p / (m_{\mu} + m_p)$ — приведенная масса мезоатома.

$$r_{\mu} = (m_e/m_{\mu}) r_B = 2,8 \cdot 10^{-11} \text{ см.}$$

5.34. Среднее значение потенциальной энергии электрона в момент распада мюона найдем из соотношения

$$\bar{W}_{\pi} = \frac{1}{8\pi r_B^3} \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{r}{r_B} \right) \left(1 - \frac{r}{2r_B} \right)^2 \left(-\frac{e^2}{r} \right) \cdot 4\pi r^2 dr = -\frac{e^2}{4r_B}.$$

Средняя кинетическая энергия равна

$$\bar{W}_{\kappa} = W - \bar{W}_{\pi} = -e^2/(8r_B) + e^2/(4r_B) = e^2/(4r_B) \approx 1 \text{ эВ.}$$

5.35. Вероятность найти мюон на расстоянии r от центра ядра равна

$$w(r) = (4\pi r^2 / \pi r_B^3) \exp(-2r/r_B) dr.$$

Поправка к энергии будет

$$\Delta W = \int_0^{r_{\text{я}}} \frac{Ze^2}{r} \frac{4r^2}{r_{\text{Б}}^3} \exp\left(-\frac{2r_{\text{я}}}{r_{\text{Б}}}\right) dr = \\ = \frac{ze^2}{r_{\text{Б}}} \left[1 - \left(1 + \frac{2r_{\text{я}}}{r_{\text{Б}}} \right) \exp\left(-\frac{2r_{\text{я}}}{r_{\text{Б}}}\right) \right].$$

Поскольку $r_{\text{я}} = 1,3 \cdot 10^{-13} \text{ а} \approx 3,5 \cdot 10^{-13} \text{ см}$, $r_{\text{Б}} = \hbar^2 / (Zm_{\mu}e^2) \approx 2,5 \cdot 10^{-12} \text{ см}$, то $r_{\text{Б}} > r_{\text{я}}$ и

$$\Delta W \approx (Ze^2/r_{\text{Б}}) (2r_{\text{я}}/r_{\text{Б}})^2$$

Так как $\bar{W} = 2\bar{W}_{\text{п}} = 2Ze^2/r_{\text{Б}}$, где $W_{\text{п}}$ — потенциальная энергия, то окончательно получим

$$\Delta W/W \approx 2(r_{\text{я}}/r_{\text{Б}})^2 \approx 4 \cdot 10^{-2}.$$

5.36. Для оценки положим, что начальный импульс p_0 электрона был направлен перпендикулярно линии полета фотона. Величину p_0 найдем из условия

$$p_0 r \propto \hbar. \quad (1)$$

Продольный импульс p_l электрона после соударения с фотоном найдем из закона сохранения импульса:

$$\hbar\omega/c = \hbar\omega'/c + p_l, \quad (2)$$

а $\Delta\omega$ — из формулы Комptonа:

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 2\pi\Lambda_e (1 - \cos\varphi), \quad (3)$$

где Λ_e — комптоновская длина волны электрона. Окончательно получим

$$\tan\theta = p_0/p_l \approx 0,14, \quad \theta \approx 10^\circ.$$

5.37. $L_{\text{мин}} = c\tau = 3 \text{ см.}$

5.38. $T \approx m_p \lambda^2 (\Delta f)^2 / (3k_{\text{Б}}) \approx 44 \text{ К.}$

5.39. $\Delta f \approx \tau^{-1} = 10 \text{ МГц}$, где $\tau = -\Delta x / [v\Delta \ln(\mathcal{J}/\mathcal{J}_1)]$.

5.40. $T = (\Delta\lambda/\lambda)^2 M c^2 (4R)^{-1} = 7,8 \cdot 10^5 \text{ К}$, где M — масса атома ^{12}C , R — универсальная газовая постоянная.

5.41. $m = W^2 \tau / (2\pi c^2 \hbar) \approx 1,6 \cdot 10^{-14} \text{ г}$, $b = (3m/4\pi\rho)^{1/3} \approx 0,2 \text{ мкм}$,

5.42. $H = 10 \hbar c^2 / (g\tau W) \approx 400 \text{ м.}$

5.43. $I = 0, 1, 2$, $I = 6,3 \cdot 10^{-39} \text{ г} \cdot \text{см}^2$.

5.44. $U = ch/(e \Delta\lambda) = 15 \text{ кВ.}$

5.45. $b \approx 3L_C / (16\pi G c \rho_{\text{Fe}} M_C) \approx 0,4 \text{ мкм}$, где L_C — светимость Солнца.

5.46. $\Delta f/f = k_B T \lambda / (m_{\text{Ne}} Dc) = 3,6 \cdot 10^{-8}$.

5.47. Расщепление пучка нейтронов в однородном магнитном поле обусловлено переориентацией спинов нейтронов по полю и против него. Изменение энергии нейтрона при пересечении границы магнитного поля равно $\Delta W_k = \pm \mu B$, где знак плюс соответствует случаю, когда спин нейтрона параллелен полю, минус — когда спин антипараллелен, а μ — проекция магнитного момента на направление поля, равная магнетону Бора μ_B . Кинетическая энергия связана с длиной волны де Броиля λ соотношением $W_k = 2\pi^2\hbar^2/(m_n\lambda^2)$. Показатель преломления равен

$$n_{\pm} = (1 \pm \mu B / W_k)^{1/2} \approx 1 \pm \mu B / (2W_k).$$

Для углов преломления на границе можно записать

$$\sin 60^\circ / \sin \varphi = 1/n_{\pm}.$$

Для малого угла расщепления $\theta = \varphi_+ - \varphi_-$ окончательно имеем $\theta \approx (\sin 60^\circ / \cos \varphi) (n_+ - n_-) = \mu B \operatorname{tg} 60^\circ / W_k =$

$$= \sqrt{3} m \lambda^2 \mu B / (2\pi^2 \hbar^2) \approx 80 \text{ мкрад}$$

(φ — средний угол преломления, т. е. около 60°).

5.48. Атомы Na при заданной температуре находятся в основном ${}^2S_{1/2}$ состоянии. Проекция магнитного момента атома на направление поля

$$\mu_H = mg\mu_B = \mu_B,$$

так как $m = \pm 1/2$, $g = 2$ — фактор Ланде, μ_B — магнетон Бора. Сила, расщепляющая пучок атомов, летящих вдоль оси y ,

$$F_x = \pm \mu_B dB/dx$$

за время $t = l/v$ сообщает атомам скорость

$$v_x = \pm \mu_B \frac{dB}{dx} \frac{l}{mv},$$

приводящую к смещению пучков на детекторе

$$x' = \pm \mu_B \frac{dB}{dx} \frac{l(l/2 + L)}{mv^2}.$$

Кинетическая энергия атомов равна

$$mv^2/2 = (3/2) k_B T.$$

Окончательно находим расстояние между пятнами на экране:

$$s = 2x' = 2\mu_B \frac{dB}{dx} \frac{l(l/2 + L)}{3k_B T} \approx 2 \text{ см.}$$

5.49. $d_{\max} = \mu_B \frac{dB}{dx} \frac{lL}{2W_k} = 0,9 \text{ см.}$

5.50. $L_{\max} = 2\pi m_e c^2 / (eB) = 1,1 \text{ см.}$

5.51. Зеемановское расщепление должно быть больше доплеровского уширения за счет теплового движения атомов (в основном водорода) и вращения звезды, т. е.

$$\Delta\omega/\omega = 2\mu_B B/(\hbar\omega_0) \geq (\Delta\omega/\omega)_{\text{тепл}} + (\Delta\omega/\omega)_{\text{вращ}} = \\ = v_{\text{тепл}}/c + v_{\text{вращ}}/c \approx v_{\text{тепл}}/c.$$

Окончательно получим

$$B \geq (\hbar\omega/2\mu_B c) (2k_B T/m_p)^{1/2} \approx 0,18 \text{ Тл.}$$

5.52. Четыре компоненты с $m_l = +3/2; +1/2; -1/2; -3/2$ для терма $^2D_{3/2}$ и две компоненты с $m_l = +1/2$ и $-1/2$ для терма $^2P_{1/2}$. В расщепленной линии шесть компонент, так как $g_1 \neq g_2$. Окончательно находим

$$\Delta\omega = \{\pm 13/15; \pm 11/15; \pm 1/15\} eB/(2m_e c).$$

5.53. Терм $P_{3/2}$ расщепится на четыре, а $S_{1/2}$ — на два подуровня. В расщепленной линии $P_{3/2} \rightarrow S_{1/2}$ шесть компонент, а для $P_{1/2} \rightarrow S_{1/2}$ — четыре компонента. Расщепление в магнитном поле равно $\Delta\lambda \approx \Delta W \lambda^2 / (2\pi\hbar c) \approx 0,03$ нм. Эффект аномальный.

$$5.54. B \approx \frac{\Delta W}{2\mu_B} = \frac{2\pi\hbar c \Delta\lambda}{2\lambda^2 \mu_B} \approx 0,3 \text{ Тл.}$$

5.55. $\Delta W \approx 10^{-8}$ эВ. Обнаружить это расщепление нельзя.

5.56. Изменение энергии при переориентации спина равно

$$\Delta W \approx 2\mu_p \mu_e / r_B^3 \approx 1 \text{ мкэВ.}$$

Окончательно находим

$$\lambda = hc/\Delta W \approx 1 \text{ м.}$$

$$5.57. p_{\text{ат}} = 2\pi\hbar c/(\lambda E) \approx 4,3 \cdot 10^{-18} \text{ ед. СГСЕ,} \\ l = p_{\text{ат}}/e \approx 10 \text{ нм.}$$

VI. ИЗЛУЧЕНИЕ

6.2. Так как свойства равновесного излучения не зависят от объема системы, то $W(V, T) = V\rho_{\text{изл}}(T)$ и $S(V, T) = Vs(T)$. Из термодинамических тождеств

$$(\partial S/\partial V)_T = (\partial p/\partial T)_V, \quad T(\partial S/\partial T)_V = C_V = (\partial W/\partial T)_V$$

в сочетании с уравнением состояния получаем

$$s = (1/3) d\rho_{\text{изл}}/dT, \quad ds/dT = T^{-1} d\rho_{\text{изл}}/dT.$$

Решение этой системы уравнений дает

$$\rho_{\text{изл}}(T) = \xi T^4, \quad s(T) = (4/3) \xi T^3.$$

Так как интегральная плотность энергии излучения ризл (T) связана с интегральной плотностью потока $\sigma_{\text{СБ}} T^4$ соотношением $\sigma_{\text{СБ}} T^4 = c\rho_{\text{изл}}(T)/4$, аналогичным газокинетической формуле для молекулярного потока, то $\sigma_{\text{СБ}} = c\xi/4$. Здесь $\sigma_{\text{СБ}}$ — постоянная Стефана — Больцмана. Из вывода видно, что константа ξ не может быть найдена термодинамически; используя результаты решения задачи 6.1, мы выразили ее через экспериментально измеряемую постоянную $\sigma_{\text{СБ}}$.

$$6.3. M_9 = c\rho_{\text{изл}}/4.$$

$$6.4. T = (3cp/4\sigma_{\text{СБ}})^{1/4} \approx 1,4 \cdot 10^5 \text{ К.}$$

6.5. $n = 4\sigma_{\text{СБ}} T^3/(3ck_B) \approx 1,8 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}$, где k_B — постоянная Больцмана.

$$6.6. T^4(r) = T_0^4 R^2 h^2 / [2(r^2 + h^2)^2].$$

$$6.7. T^4(r) = T_0^4 R^2 h / [2(r^2 + h^2)^{3/2}].$$

6.8. $(j_W)_{\text{кор}}/(j_W)_{\text{эм}} = n(m_p + m_e)v^3/(2\alpha_C^2 \sigma_{\text{СБ}} T^4) \approx 6 \cdot 10^{-8}$, m_p и m_e — массы протона и электрона.

$$6.9. T_{\text{рад}} = (E_C/\sigma_{\text{СБ}})^{1/4} (L_3/R_C)^{1/2} \approx 5900 \text{ К.}$$

6.10. $\Delta T = T_3 P/(4\bar{P}) \approx 7 \cdot 10^{-3} \text{ К}$, где T_3 — средняя температура поверхности Земли.

$$P_{\text{max}} \approx 1,5 \cdot 10^{14} \text{ Вт} \approx 15 \text{ } P.$$

$$6.11. T_{\text{ш}} = T_c (1 + j_W d^2 / 4\sigma_{\text{СБ}} d_{\text{ш}}^2 T_c^4)^{1/4} \approx 2000 \text{ К.}$$

6.12. Теплообмен падает в $N+1$ раз.

$$6.13. \xi_0 = 4\sigma_{\text{СБ}}/(3c).$$

$$c_V = 16\sigma_{\text{СБ}} T^3/c, \quad p = 4\sigma_{\text{СБ}} T^4/(3c), \quad c_V = 8c_V^r.$$

$$6.14. p = 32\sigma_{\text{СБ}} T^4/(3c) \approx 1,26 \cdot 10^{-3} \text{ дин/см}^2 \approx 10^{-6} \text{ Торр.}$$

$$6.15. c_p = \infty, \quad VT^3 = \text{const.}$$

$$6.16. t = t_1 T_1 / T_0 \sim 10^7 \text{ лет.}$$

$$6.17. \frac{[(\Delta N)^2]^{1/2}}{\bar{N}} = \frac{\lambda}{a_C} \left[\frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{cSt} \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{k_B T \lambda}\right) \right]^{1/2} \approx 4 \cdot 10^{-5}.$$

6.18. Приблизительно на 38 %.

$$6.19. (5/\pi^4)(W/k_B T)^3 \approx 0,2 \text{ %.}$$

$$6.20. (15/\pi^4)(W/k_B T)^3 \exp(-W/k_B T) \approx 0,8 \cdot 10^{-6}.$$

6.21. $w_{\text{инд}}/w_{\text{сп}} = \bar{n}(W) = \{\exp(W/k_B T) - 1\}^{-1}$, где \bar{n} — средние планковские числа заполнения для осцилляторов. Для атома $W \gg k_B T$ и

$$w_{\text{инд}}/w_{\text{сп}} \approx \exp(-W/k_B T) \approx 1,6 \cdot 10^{-17},$$

а для спина $W \ll k_B T$ и

$$w_{\text{ннд}}/w_{\text{сп}} \approx k_B T/W \approx k_B T/(2\mu_B B) \approx 2,2 \cdot 10^3.$$

6.22. $\omega > (k_B T/\hbar) \ln 10^2 \approx 1,8 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$

6.23. $k_{\text{п}}(T) = k_{\text{п}}^0 \operatorname{th}(\hbar\omega/2k_B T);$

1) $k_{\text{п}}(T) \approx k_{\text{п}}^0 (\hbar\omega/k_B T),$

2) $k_{\text{п}}(T) = k_{\text{п}}^0 [1 - 2 \exp(-\hbar\omega/k_B T)].$

6.24. Спонтанное излучение возникает из-за возмущающего влияния на молекулу нулевых колебаний электромагнитного поля. Поэтому вероятность спонтанного излучения пропорциональна произведению площади S под спектральной кривой поглощения молекулы (которая является мерой связи «внутримолекулярного осциллятора» с электромагнитным полем) на среднюю спектральную плотность $\rho_0(\omega)$ энергии нулевых колебаний электромагнитного поля на частоте, отвечающей переходу в молекуле, и в той точке пространства, где находится молекула. В вакууме подсчет числа нормальных осцилляторов на интервал частоты производится точно так же, как при выводе формулы Рэлея — Джинса, и в итоге получаем

$$w_{\text{сп}} \sim AS\rho_0(\omega) = AS(\hbar\omega^3/2\pi^2c^3),$$

где A — некоторая константа.

В резонаторе в актуальной области частот имеется одно нормальное колебание с шириной порядка ω/Q . Поэтому если ширина молекулярных уровней $\Gamma < \omega/Q$, спектральная плотность ρ_0 имеет порядок $(\hbar\omega/2)(V\omega/Q)^{-1}$. Из-за изменения спонтанного времени жизни ширина уровней Γ в резонаторе может значительно отличаться от ширины в вакууме, однако существенно, что, как и для обычного осциллятора с затуханием, амплитуда в резонансе и ширина меняются одновременно — так, что площадь под кривой поглощения остается неизменной. Поэтому

$$w_{\text{сп}} \propto AS(\hbar Q/2V), \quad w_{\text{сп}}/w_{\text{сп}}^0 \propto \pi^2 Q c^3 / (V \omega^3).$$

6.25. $\frac{N_{\text{возв}}}{N_{\text{полн}}} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\ln(1-\tau)}{2k_{\text{п}}l} \right] \approx 0,505.$

VII. ТВЕРДОЕ ТЕЛО

§ 7.1. Свойства кристаллических решеток. Фононы. Теплопроводность

7.1. Простая — $\pi/6$, гранецентрированная — $2^{1/2}\pi/6$, объемно-центрированная — $3^{1/2}\pi/8$.

7.2. Согласно условию задачи волновые векторы падающего и рассеянного лучей равны $\mathbf{k} = k(1, 0, 0)$ и $\mathbf{k}' = (1/3)\mathbf{k}(1, 2, 2)$

соответственно; здесь $k = 2\pi v/c$. Поэтому изменение волнового вектора при рассеянии равно

$$\mathbf{k}' - \mathbf{k} = (2/3) k (-1, 1, 1).$$

С другой стороны, при брэгговском рассеянии

$$\mathbf{k}' - \mathbf{k} = 2\pi \mathbf{b},$$

где \mathbf{b} — целочисленный вектор обратной решетки. В кубической гранецентрированной решетке базисные векторы прямой решетки выбираются в виде $\mathbf{a}_1 = 2^{-1/2} a (1, 1, 0)$ и аналогично \mathbf{a}_2 и \mathbf{a}_3 ; здесь a — межатомное расстояние. При этом базисные векторы обратной решетки построены по типу $\mathbf{b}_1 = 2^{-1/2} a^{-1} (1, 1, 1)$. Отсюда видно, что в интерференции 1-го порядка вектор \mathbf{b} должен быть просто отождествлен с одним из минимальных векторов \mathbf{b}_l и поэтому

$$2k/3 = 2\pi/(2^{1/2} a).$$

Окончательно находим, что

$$a = 3c/2^{3/2}v \approx 2.9 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

7.3. Уравнение колебаний ангармонического осциллятора с потенциальной энергией $W_n(x)$ имеет вид

$$m\ddot{x} = -\kappa x - \kappa_1 x^2.$$

Коэффициенты в нем можно оценить, учитывая, что $W_n(x)$ возникает вследствие взаимодействия электронных оболочек, имеющих атомный порядок величины a , и само взаимодействие имеет атомный порядок W_{at} . Поэтому

$$\kappa \propto W_{at}/a^2. \quad \kappa_1 \propto W_{at}/a^3.$$

Усредненное уравнение движения по периоду колебаний τ ($0 < t < \tau$), имеем по определению среднего и с учетом периодичности движения

$$\bar{x} = \frac{1}{2} [\dot{x}(\tau) - \dot{x}(0)] = 0.$$

Поэтому $\bar{x} = \kappa_1 \bar{x}^2 / \kappa$. При слабом ангармонизме можно \bar{x}^2 взять в гармоническом приближении: $\kappa \bar{x}^2 / 2 = k_B T / 2$. Поэтому

$$\bar{x} = (\kappa_1 / \kappa^2) k_B T,$$

где k_B — постоянная Больцмана.

Если принять $W_{at} \sim 10$ эВ, то температурный коэффициент линейного расширения

$$\alpha \sim (\kappa_1 / \kappa^2) (k_B/a) \sim k_B/W_{at} \sim 10^{-5} \text{ К}^{-1}.$$

Он не зависит от температуры во всей классической области $k_B T \gg \hbar\omega$ ($\omega \approx (\kappa/m)^{1/2}$ — круговая частота колебаний).

7.4. N продольных колебаний и $2N$ поперечных.

$$7.5. \omega(k) = 2(\kappa/m)^{1/2} |\sin(ka/2)|, \quad s = a(\kappa/m)^{1/2}.$$

$$7.6. \omega = (\pi/20)(s/a) \approx 1,05 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}.$$

7.7. Решая уравнения собственных колебаний цепочки, получаем две ветви частот:

$$\omega_{1,2}^2(k) = \frac{\kappa}{m_{\text{пр}}} \left[1 \pm \left(1 - \frac{4m_{\text{пр}} \sin^2 ka}{m_1 + m_2} \right)^{1/2} \right], \quad |ka| \leq \pi/2.$$

Здесь $m_{\text{пр}} = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведенная масса. На нижней ветви при $|ka| \ll 1$ частота $\omega_1 \propto k$, и поэтому эта ветвь называется акустической. На верхней ветви $\omega_2^2(k=0) = 2\kappa/m_{\text{пр}}$, она называется оптической. Между ветвями существует щель, так как $\omega_2(\pi/2a) > \omega_1(\pi/2a)$. При $m_1 = m_2$ частоты равны:

$$\omega_{1,2}^2(k) = (\kappa/m_{\text{пр}}) [1 \pm \cos(ka)],$$

и щель при $k = \pi/2a$ исчезает; период цепочки уменьшается вдвое, и поэтому можно рассматривать одну ветвь

$$\omega^2 = (\kappa/m_{\text{пр}}) [1 - \cos(ka)]$$

в удвоенной области волновых чисел $|ka| \leq \pi$.

7.8. Решая уравнения вынужденных колебаний цепочки и вычисляя дипольный момент, находим поляризуемость:

$$\alpha(\omega) = (e^2/m_{\text{пр}}) (2\kappa/m_{\text{пр}} - \omega^2)^{-1}.$$

Поляризуемость расходится на частоте длинноволновых оптических колебаний $\omega = (2\kappa/m_{\text{пр}})^{1/2}$.

7.9. Запишем законы сохранения энергии и импульса при рассеянии нейтрона:

$$\hbar^2 \mathbf{k}^2 / (2m) = \hbar^2 (\mathbf{k}')^2 / (2m) \pm \hbar \omega(\mathbf{q}), \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}' \pm \mathbf{q} + 2\pi \mathbf{b};$$

здесь знак плюс отвечает за испускание, а минус — за поглощение фонона. Во втором равенстве \mathbf{b} — произвольный вектор обратной решетки. Экспериментально измеряя \mathbf{k} и \mathbf{k}' , можно из первого равенства непосредственно получить $\omega(\mathbf{q})$, а из второго — \mathbf{q} ; при этом вектор \mathbf{b} определяется из того условия, что \mathbf{q} принадлежит первой бриллюэновской зоне. Это позволяет восстановить зависимость $\omega(\mathbf{q})$.

7.10. Теплоемкость единицы объема:

$$c_V = (2\pi^2/15) k_B (2/s_t^3 + 1/s_t^3) (k_B T/\hbar)^3.$$

$$7.11. C_1 \propto T, \quad C_2 \propto T^2.$$

$$7.12. c_V = (2\pi^2/15) k_B (k_B T/\hbar s)^3 \approx 30 \text{ эрг/(см}^3 \cdot \text{К}).$$

$$7.13. s \approx (2\pi^2 k_B / 5c_V)^{1/3} (k_B T/\hbar) \approx 5,3 \cdot 10^5 \text{ см}/\text{с},$$

$$T_D \approx (6\pi^2)^{1/3} (\hbar s / k_B a) \approx 520 \text{ К.}$$

7.14. Используя результат решения задачи 7.10, можно получить приближенное выражение для удельной теплоемкости:

$$C_{\text{уд}} \approx (\rho s^3)^{-1} \approx a^3 (\mathcal{A} s^3)^{-1} \approx (\mathcal{A} T_D^3)^{-1};$$

здесь a — постоянная решетки, \mathcal{A} — атомная масса. Отсюда вытекает отношение масс гелия, необходимых для охлаждения свинца и кремния:

$$m_{\text{Pb}}/m_{\text{Si}} = (\mathcal{A}_{\text{Pb}}/\mathcal{A}_{\text{Si}}) [T_D(\text{Pb})/T_D(\text{Si})]^3 \approx 42.$$

7.15. Указание. Воспользоваться аргументами, использованными в решении задачи 7.3.

7.16. $S = R \ln(2I + 1)$, $S_{\text{He}} = R \ln 2$, $S_{\text{Ar}} = 2R \ln 2$, где R — универсальная газовая постоянная. Энтропия полностью упорядоченного состояния принята равной нулю.

§ 7.2. Электроны в металлах

7.17. $W_F \approx 9,8 \text{ эВ}$, $p_F \approx 1,5 \cdot 10^{-19} \text{ г} \cdot \text{см}/\text{с}$, $v_F \approx 2,1 \cdot 10^8 \text{ см}/\text{с}$.

7.18. $\bar{W} = 3W_F/5$.

7.19. $\bar{W}_k \approx 1,93 \text{ эВ}$.

7.20. За время жизни позитрона в кристалле до его аннигиляции с одним из электронов позитрон успевает растерять свою исходную энергию. Поэтому его скорость является тепловой и ею можно пренебречь в сравнении со скоростями электронов порядка фермиевской скорости. Следовательно, при написании закона сохранения импульса достаточно учесть в начальном состоянии только импульс электрона p_e :

$$p_e = p_{\gamma 1} + p_{\gamma 2}$$

где $p_{\gamma 1}$, $p_{\gamma 2}$ — импульсы фотонов (γ -квантов). Так как энергия, выделяющаяся при аннигиляции электрон-позитронной пары, в расчете на один γ -квант равна $mc^2 \approx 0,5 \text{ МэВ}$ (m — масса покоя электрона), что намного превышает фермиевскую энергию электрона $W_F \approx 10 \text{ эВ}$, то импульс каждого γ -кванта с высокой точностью равен mc . Так как $mc \gg p_F$, то угол между разлетающимися γ -квантами будет близок к π . Отклонение ϕ от этого угла будет тем больше, чем больше импульс аннигилирующего электрона, а он максимальен, когда импульс электрона равен p_F . Из закона сохранения импульса следует

$$p_F = mc\phi \approx 10^{-19} \text{ г} \cdot \text{см}/\text{с}.$$

7.21. $p = (1/5)(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n^{5/3}/m \approx 3,8 \cdot 10^5 \text{ атм}$,
 $K^{-1} = d(\ln n)/dp = 3/(5p) = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ атм}^{-1}$.

7.22. $\Phi \sim k_B T / (sp_F) \ll 1$ рад, так как в типичном металле с одним электроном на ячейку $p_F \sim \hbar/a$, а поэтому $sp_F \sim k_B T_D$. Здесь p_F — импульс Ферми, a — межатомное расстояние, s — скорость звука.

$$7.23. H_{\max} = (2c\hbar/e)d (3\pi^2 n)^{1/3} \approx 179 \text{ Э.}$$

$$7.24. d_{\max} = (2c\hbar/eH) (3\pi^2/V)^{1/3} \approx 1 \text{ мм.}$$

$$7.25. \sin \varphi_1 / \sin \varphi_2 = (n_2/n_1)^{1/3} = 2, (\varphi_2)_{\text{по}} = 30^\circ.$$

7.26. Решая уравнения движения

$$\frac{dp}{dt} = \frac{e}{c} [vH], v = \frac{\partial W(p)}{\partial p},$$

получаем

$$\omega_c^2 = \frac{e^2}{c^2} \frac{H_x^2}{m_y m_z} + \frac{H_y^2}{m_x m_z} + \frac{H_z^2}{m_x m_y}.$$

$$7.27. (v_F)_z = W_0 a / \hbar \approx 2.3 \cdot 10^7 \text{ см/с, } (v_F)_x = (v_F)_y = 0.$$

$$7.28. v_F = (\hbar/m_e) (2\pi a/V) \approx 1.05 \cdot 10^8 \text{ см/с.}$$

$$\omega_c = (eH/m_e c) \cos \varphi.$$

7.29. Из $\dot{p}_x = eE$ следует

$$k_x = p_x / \hbar = (eE/\hbar)(t - t_0),$$

отсюда с учетом $\dot{x} = v_x$ и $v_x = \partial W / \partial p_x$ получаем

$$x(t) = x_0 + (W_0/eE) \cos [eEa(t - t_0)/\hbar].$$

Таким образом, электрон осциллирует около равновесного положения x_0 с частотой $\omega = eEa/\hbar$, и средний ток равен нулю. Причина этого состоит в том, что кинетическая энергия $W_0 \cos(k_x a)$ является ограниченной функцией k_x . В результате движение электрона с потенциальной энергией $U(x) = -eEx$ ограничено конечной областью (вследствие закона сохранения энергии).

$$7.30. v_x = W_0 a / 2\hbar, v_y = v_z = 0;$$

$$\dot{v}_y = -(eH/c\hbar) (W_0^2 a^3 / 2\hbar^2), \dot{v}_x = \dot{v}_z = 0.$$

$$7.31. W_F = W_0 \cdot p_F [110] = 2^{1/2} \pi \hbar / (3a) \approx 1.48 \hbar / a,$$

$$p_F [111] = 3^{1/2} (\hbar/a) \arccos(2/3) \approx 1.46 \hbar / a.$$

$$v_F [100] = W_0 a / \hbar, v_F [110] = (3/2)^{1/2} W_0 a / \hbar,$$

$$v_F [111] = (5/3)^{1/2} W_0 a / \hbar.$$

7.32. Используя формулу для электронной теплоемкости $c_{\text{эл}} = \pi^2 k_B^2 T n / (2W_F)$ в расчете на единицу объема и формулу для решеточной теплоемкости, вытекающую из решения задачи 7.10, получаем

$$k_B T^* = [5(\hbar s)^3 n / (4W_F)]^{1/2}.$$

Пользуясь оценкой для s , следующей из решения задачи 7.5, и полагая $W_F \sim W_{\text{ат}}$, получаем

$$k_B T^* \sim (m/M)^{3/4} W_{\text{ат}},$$

что дает $T^* \sim 10$ К. Здесь m и M — электронная и атомная массы, $W_{\text{ат}} \sim 10$ эВ.

7.33. В расчете на один атом:

$$c_{\text{реш}}(T) \approx (12\pi^4/5) (T/T_D)^3 k_B;$$

$$c_{\text{реш}}(3 \text{ К}) \approx 6 \cdot 10^{-4} k_B, \quad c_{\text{реш}}(300 \text{ К}) \approx 3 k_B.$$

$$c_{s,\text{л}}(T) \approx (\pi/3n)^{2/3} (mk_B T/\hbar^2) k_B;$$

$$c_{s,\text{л}}(3 \text{ К}) \approx 2,3 \cdot 10^{-4} k_B, \quad c_{s,\text{л}}(300 \text{ К}) \approx 2,3 \cdot 10^{-2} k_B.$$

7.34. $\sigma_{\text{эф}} \sim 10^9 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$.

7.35. $(k_T)_{\text{эф}} \sim (k_B^2 T/W_F) n v_F d \sim 10^2 \text{ Вт}/(\text{см} \cdot \text{К})$, где n — концентрация электронов.

7.36. $\delta p/p_F = \mu_B H/W_F, \quad \delta n/n = (3\pi/2) (\mu_B H/W_F),$

$$\rho_M = (m^* \mu_B^2 H / \pi^2 \hbar^2) (3\pi^2 n)^{1/3}. \quad \chi_{\text{Na}} \approx 3,8 \cdot 10^{-7}.$$

7.37. Согласно уравнениям Максвелла из условия $H = B = 0$ следует

$$\text{rot } E = 0, \quad \dot{D} + 4\pi j = 0.$$

Из первого соотношения вытекает, что электрическое поле такой волны является продольным, т. е. в уравнении

$$E(r, t) = E_0 \exp \{i(kr - \omega t)\}$$

амплитуда $E_0 \parallel k$. Величины D и j связаны с E материальными уравнениями

$$D = \epsilon E, \quad j = \sigma E,$$

где ϵ — статическая диэлектрическая проницаемость, а σ — удельная проводимость. Для зонных электронов $mv = eE$, где v — средняя скорость потока электронов во внешнем поле. Отсюда

$$j_0 = ev_0 = i(e^2 n/m\omega) E_0;$$

подстановка в $\dot{D} + 4\pi j = 0$ определяет частоту собственных продольных колебаний электронов:

$$\omega_p^2 = 4\pi e^2 n / (\epsilon m).$$

Для металлов $\omega_p \sim 2 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$.

7.38. $\hbar\omega_p \approx 9,2$ эВ.

7.39. Чтобы ввести комплексную диэлектрическую проницаемость $\epsilon(\omega)$, надо следующим образом переписать уравнение

Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \equiv \frac{\epsilon(\omega)}{c} \dot{\mathbf{E}}.$$

Тогда в соответствии с материальными уравнениями

$$\epsilon(\omega) = \epsilon + i 4\pi\sigma/\omega,$$

ϵ — статическая диэлектрическая проницаемость (см. задачу 7.37). Вводя в уравнение движения электрона «трение», описываемое временем свободного пробега τ ,

$$m\ddot{\mathbf{v}} = -(m/\tau)\mathbf{v} + e\mathbf{E},$$

получаем

$$\sigma(\omega) = \frac{e^2 n \tau}{m(1 - i\omega\tau)}, \quad \epsilon(\omega) = \epsilon \left[1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 + i/(\omega\tau)} \right].$$

Исходя из экспериментальных значений статической электрической проводимости металлов легко оценить, что в оптическом диапазоне частот $\omega\tau \gg 1$, и поэтому комплексная диэлектрическая проницаемость

$$\epsilon(\omega) \approx \epsilon \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right).$$

При $\omega < \omega_p$ $\epsilon(\omega) < 0$, т. е. имеет место полное («металлическое») отражение. В ультрафиолетовой области при $\omega > \omega_p$ (см. задачу 7.37) $\epsilon(\omega) > 0$ и пропускание резко возрастает.

7.40. Распределение потенциала внутри проводника описывается уравнением Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi e(n - n_0)/\epsilon, \quad (1)$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость, возникающая за счет электронов заполненных зон (т. е. всех электронов, за исключением электронов проводимости). В состоянии термодинамического равновесия уровень химического потенциала ζ электронов постоянен во всем кристалле. Однако из-за электрического поля дно зоны проводимости, отвечающее просто потенциальной энергии электрона, меняется от точки к точке (рис. 7); в результате $W_F = W_F(x)$. Если изгиб зон мал в сравнении с W_F , то

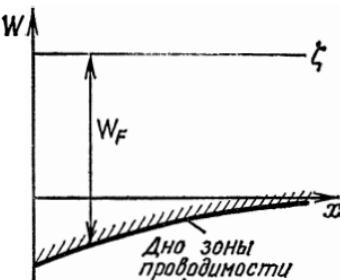


Рис. 7

$$n - n_0 \approx (dn/dW_F) \Delta W_F = (dn/dW_F) e\Phi. \quad (2)$$

Объединяя уравнения (1) и (2), получаем

$$\Delta\varphi = (4\pi e^2/\epsilon)/(dn/dW_F) \Phi.$$

Решая это уравнение, находим

$$\varphi \propto \exp\left(\pm \frac{x}{l_{TF}}\right), \quad \text{где } l_{TF} = \left(\frac{\epsilon}{4\pi e^2} \frac{dW_F}{dn}\right)^{1/2}.$$

При квадратичном законе дисперсии $W_F \propto p_F^2$, $n \propto p_F^3$, и поэтому

$$dW_F/dn = 2W_F/(3n);$$

следовательно,

$$l_{TF} = (\epsilon W_F / 6\pi e^2 n)^{1/2}.$$

Для указанных значений параметров $l_{TF} \approx 4 \cdot 10^{-9}$ см для металлов и $1,5 \cdot 10^{-6}$ см для полуметаллов. В первом случае полученное значение l_{TF} показывает, что внешнее поле практически полностью экранируется уже на одной постоянной решетки и внутри металла не проникает.

7.41. При не слишком высоких частотах ($\omega t \ll 1$) удельная проводимость σ вещественна, причем ток проводимости значительно превышает ток смещения (при $\omega_0^2 t/\omega \gg 1$ — см. задачу 7.39). Тогда комплексное волновое число равно

$$k = (\omega/c) \epsilon^{1/2}(\omega) = (1 + i)/\delta,$$

где $\delta = c/(2\pi\omega)^{1/2}$ — скиновая глубина проникновения (толщина скин-слоя). Для меди $\delta \approx 2 \cdot 10^{-4}$ см.

7.42. $\sigma(\omega) = \sigma_0/[1 + (\omega - \omega_c)^2 \tau^2]$, $\sigma_0 = e^2 n \tau / m^*$, где ω_c — циклотронная частота, n — концентрация электронов.

7.43. В сверхпроводниках $B \approx H$ и током смещения можно пренебречь по сравнению с током сверхпроводящих электронов. Поэтому уравнения Максвелла принимают вид

$$\operatorname{rot} E = -\dot{H}/c, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} H = 4\pi j/c. \quad (2)$$

Уравнение движения электронов $m\ddot{v} = eE$ в сочетании с $j = ev$ дает

$$E = (m/e^2 n) \partial j / \partial t. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), получаем $\operatorname{rot} j = -(e^2 n/mc) H$. Исключая отсюда j с помощью (2), находим уравнение для H :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} H = -H/\lambda_{JL}^2, \quad \lambda_{JL} = (mc^2/4\pi e^2 n)^{1/2} = c/\omega_p.$$

Преобразуя левую часть с учетом $\operatorname{div} H = 0$, получаем окончательно

$$\Delta H = H/\lambda_{JL}^2.$$

Для плоской поверхности металла последнее уравнение имеет решения $H \propto \exp(\pm x/\lambda_{JL})$, т. е. магнитное поле экспоненциально

затухает в глубь сверхпроводника. Поскольку частота внешнего поля не входит в $\lambda_{\text{Л}}$, результат в полной мере относится к постоянному магнитному полю. Искомая глубина $\lambda_{\text{Л}} \sim 10^{-5} - 10^{-6}$ см.

$$7.44. j(T) = (em^*k_B^2T^2/2\pi^2\hbar^3) \exp(-A/k_B T).$$

$$7.45. A(E) = A - e^{3/2}E^{1/2}, \quad j(T, E) = j(T) \exp(e^{3/2}E^{1/2}/k_B T).$$

7.46. Уравнение движения электрона:

$$\begin{aligned} m^*\ddot{\mathbf{v}} &= e\mathbf{E} + (e/c)[\mathbf{v}\mathbf{H}] - (m^*/\tau)\mathbf{v}, \\ \mathbf{H} \parallel \mathbf{z}, \quad \mathbf{E} &\perp \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Ищем только среднюю скорость дрейфа \mathbf{v} , опуская вращение вокруг направления \mathbf{H} , не дающее вклада в средний поток; для этого полагаем $\dot{\mathbf{v}} = 0$. Тогда

$$j_x = \sigma \frac{E_x + \omega_c \tau E_y}{1 + (\omega_c \tau)^2}, \quad j_y = \sigma \frac{E_y - \omega_c \tau E_x}{1 + (\omega_c \tau)^2}, \quad j_z = 0,$$

где $\sigma = e^2 n \tau / m^*$ — удельная проводимость при $H = 0$, $\omega_c = eH/(m^*c)$ — циклотронная частота.

При $E_y = 0$ продольная составляющая плотности тока равна

$$j_x = \frac{\sigma}{1 + (\omega_c \tau)^2} E_x.$$

Уменьшение тока в этом направлении с ростом H определяет магнитосопротивление. Составляющая плотности тока в перпендикулярном направлении равна

$$j_y = -\sigma \frac{\omega_c \tau}{1 + (\omega_c \tau)^2} E_x$$

и является холловской. Наблюдения в этих условиях производятся в диске Корбино.

В пластине ток вдоль нормали отсутствует ($j_z = 0$), поэтому холловское поле $E_y = \omega_c \tau E_x$, и $j_x = \sigma E_x$. Надо подчеркнуть полное отсутствие магнитосопротивления; причина состоит в том, что ток течет не только под действием внешнего поля E_x , но и под действием холловского поля E_y . В сильных полях ($\omega_c \tau \gg 1$) доминирует второй вклад.

7.47. Растекание заряда описывается уравнением непрерывности $\dot{\rho} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ и материальным уравнением $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. В хороших проводниках изменение проводимости, связанное с избыточными носителями, образующими объемный заряд, ничтожно мало по сравнению с равновесной проводимостью, поэтому $\sigma = \text{const}$. Используя соотношения $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, где ϵ — диэлектрическая проницаемость, связанная с электронами заполненных зон, и $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$, получаем окончательно

$$\dot{\rho} + (4\pi\sigma/\epsilon) \rho = 0.$$

Решение этого уравнения есть

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}) \exp(-t/\tau_m),$$

где $\tau_m = e/(4\pi\sigma)$, а $\rho_0(\mathbf{r})$ — распределение заряда в начальный момент $t = 0$. Из решения видно, что плотность ρ , не деформируясь, экспоненциально падает во времени, так что в тех областях пространства, где заряд при $t = 0$ отсутствует, постоянно сохраняется нейтральность. При этом ток, естественно, течет во всем пространстве. Для германия $\tau_m \approx 10^{-10}$ с.

§ 7.3. Электроны в полупроводниках

7.48. В отличие от задачи 7.40, здесь равновесное распределение электронов определяется формулой

$$n(\mathbf{r}) = n_0 \exp[-W_n(\mathbf{r})/(k_B T)],$$

где $W_n(\mathbf{r}) = -e\phi(\mathbf{r})$, $\phi(\mathbf{r})$ — электростатический потенциал, а n_0 — концентрация электронов вне области объемного заряда. Слабость внешнего поля означает выполнение условия $|e\phi| \ll k_B T$. При этом уравнение Пуассона сводится к выражению

$$\Delta\phi = (4\pi e^2 n_0 / e k_B T) \phi.$$

Его решение имеет вид

$$\phi \propto \exp(-x/l_{DH}), \quad \text{где } l_{DH} = (8k_B T / 4\pi e^2 n_0)^{1/2}.$$

При указанных значениях параметров $l_{DH} \approx 5 \cdot 10^{-5}$ см.

7.49. $W_{cb} = m^* e^4 / (2\epsilon^2 \hbar^2) = (m^*/em) R_\infty \approx 0,7$ мэВ ≈ 8 К, где R_∞ — постоянная Ридберга

$$r = \hbar^2 e / (m^* e^2) = (\epsilon m / m^*) r_B \approx 65 \text{ нм}.$$

$$7.50. W_{ek} = M_{np} e^4 / (2\epsilon^2 \hbar^2), r_{ek} = \epsilon \hbar^2 / (M_{np} e^2), M_{ek} = m_+^* + m_-^*,$$

где $M_{np} = m_+^* m_-^* / (m_+^* + m_-^*)$ — приведенная масса.

7.51. В объеме V в обычном r -пространстве и объеме V_k в пространстве волновых векторов содержится $VV_k/(2\pi)^3$ состояний. Так как для невырожденных электронов числа заполнения равны $n(W) = \exp[-(W + W_F)/k_B T]$, то концентрация электронов в зоне проводимости равна

$$n = 2 \int (2\pi)^{-3} \exp[-(W_F + W)/k_B T] d^3 k = \\ = (2/h^3) (2\pi m^* k_B T)^{3/2} \exp(-W_F/k_B T) = Q \exp(-W_F/k_B T).$$

Величина Q называется статистическим фактором зоны, $h = 2\pi\hbar$.

7.52. $n_+n_- = n_i^2$, $n_i^2 = Q_-Q_+ \exp(-W_G/k_B T)$, Q_- и Q_+ — статистические факторы электронной и дырочной зон (см. задачу 7.51), n_i — концентрация носителей в полупроводнике без примесей (собственном полупроводнике).

7.53. При не слишком высоких температурах обмен электронами осуществляется только между донорами и электронной зоной. При этом условие электрической нейтральности имеет вид

$$Q_- \exp(\zeta/k_B T) + n_d \left[\exp\left(-\frac{W_d + \zeta}{k_B T}\right) + 1 \right]^{-1} = n_d,$$

где n_d — концентрация доноров; для его получения достаточно записать число электронов в зоне и на донорах. Здесь $\zeta < 0$ — уровень химического потенциала (уровень Ферми). Таким образом, для $\exp(\zeta/k_B T)$ получается квадратное уравнение, которое легко решается.

При низких температурах, таких, что $n_- \ll n_d$, имеем

$$n_- = (n_d Q_-)^{1/2} \exp(-W_d/k_B T),$$

а при более высоких — $n_- \approx n_d$ (область истощения примесей). Концентрация дырок n_+ выражается через n_- с помощью соотношения $n_+n_- = n_i^2$ (см. задачу 7.52). При высоких температурах доминирует возбуждение электронов из заполненной зоны, и тогда

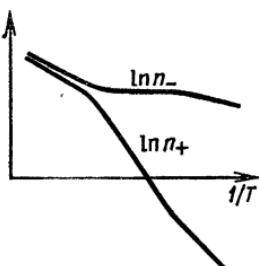


Рис. 8

$$n_- \approx n_+ \approx (Q_- Q_+)^{1/2} \exp(-W_G/2k_B T).$$

Это имеет место при $n_i(T) \gg n_d$.

Схематически температурная зависимость концентрации электронов $n_-(T)$ и дырок $n_+(T)$ показана на рис. 8.

$$7.54. n_- \approx N, \quad n_+ \approx n_i^2/N.$$

7.55. Ток насыщения в полупроводниковом диоде с $p-n$ -переходом определяется в первую очередь равновесной концентрацией неосновных носителей по обе стороны $p-n$ -перехода. Концентрация неосновных носителей зависит от температуры по закону

$$n_{\text{неосн}} \propto \exp(-W_G/k_B T),$$

как это следует из задач 7.52 и 7.54. Поэтому изменение тока насыщения определяется соотношением

$$I_{\text{нас}}(T - \delta T)/I_{\text{нас}}(T) \approx \exp(-W_G \delta T/k_B T^2) \approx 0.4.$$

Ток насыщения возникает за счет тепловой генерации неосновных носителей вблизи $p-n$ -перехода, где из-за запирающего

напряжения, приложенного к переходу, концентрация носителей меньше равновесной. Темп этой генерации, стремящейся восстановить нарушенное равновесие, пропорционален равновесной концентрации неосновных носителей.

Выпрямление значительно падает с ростом температуры, когда концентрации основных носителей, существующих из-за присутствия примесей, и неосновных носителей, возникающих вследствие теплового возбуждения через запрещенную зону, сближаются между собой. При $n_i(T) \sim n_{\text{пп}}$ запорный слой заполняется носителями и выпрямление исчезает. Это происходит при

$$T^* \sim (W_G/2k_B) \ln \{Q(T^*)/n_{\text{пп}}\} \approx 400 \text{ К.}$$

7.56. Фермиевские импульсы $p_F^+ = p_F^- = (2m_{\text{пп}} W_0)^{1/2}$, где $m_{\text{пп}} = m_+^* m_-^* / (m_+^* + m_-^*)$. Остальные величины вычисляются через импульсы по стандартным формулам. В результате получаем $n = 9,3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$, $W_F^- = 0,015 \text{ эВ}$, $W_F^+ = 0,025 \text{ эВ}$.

7.57. Согласно условию задачи электрон является медленным, т. е. $ka, k'a \ll 1$, где \mathbf{k} и \mathbf{k}' — волновой вектор электрона до и после рассеяния, а a — постоянная решетки. Аналогично для длинноволновых фононов также $qa \ll 1$. Поэтому закон сохранения импульса можно записать в виде $\mathbf{k} = \mathbf{k}' \pm \mathbf{q}$ (ср. решение задачи 7.9 — из-за малости k, k' и q следует положить $\mathbf{b} = 0$). Угол φ между \mathbf{p} и \mathbf{q} определяется формулой

$$\cos \varphi = s/v \pm q/(2k),$$

где верхний знак отвечает испусканию, а нижний — поглощению фона.

7.58. Удельная проводимость σ выражается через подвижность μ соотношением $\sigma = e\mu n$. Подвижность в свою очередь связана с коэффициентом диффузии D соотношением Эйнштейна: $eD = k_B T \mu$. Оценивая D как $D \sim a^2 v$, получаем

$$\sigma \sim ne^2 a^2 v / (k_B T) \approx 0,1 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}.$$

7.59. $l_{\text{эфф}} \sim (k_B T \mu \tau / e)^{1/2} \approx 0,2 \text{ см.}$

7.60. В уравнении движения электрона

$$\dot{p}_x = \hbar \dot{k}_x = eE - kv_x = eE + kaW_0 \sin(k_x a)$$

переменные разделяются, и оно непосредственно интегрируется в элементарных функциях. Вид решения различен в зависимости от значения параметра $\Gamma = kaW_0/(eE)$.

1) $\Gamma > 1$. Решение имеет вид

$$\frac{\cos [(k_x a - \varphi)/2]}{\sin [(k_x a + \varphi)/2]} = \exp [-(\Gamma^2 - 1)^{1/2} eE a (t - t_0)/\hbar],$$

$$\varphi = \arcsin(\Gamma^{-1}) \quad (0 < \varphi < \pi/2).$$

При $t \rightarrow \infty$ оно переходит в $\Gamma \sin k_x a = -1$, что отвечает стационарным значениям k_x и v_x . Его можно непосредственно получить, положив в исходном уравнении $k_x = 0$, что дает $v_x = eE/k$ и проводимость $\sigma = e^2 n/k$. При $\Gamma \gg 1$ справедливо неравенство $k_x a \ll 1$, т.е. электрон остается вблизи дна зоны; поэтому можно, как обычно (ср., например, задачу 7.46), положить $k = m/\tau$, и тогда σ принимает стандартную форму:

$$\sigma = e^2 n \tau / m.$$

2) $\Gamma < 1$. Решение имеет вид

$$\operatorname{tg}(k_x a/2) = (1 - \Gamma^2)^{1/2} \operatorname{tg} [(1 - \Gamma^2)^{1/2} eEa(t - t_0)/(2\hbar)] - \Gamma.$$

Из этого выражения следует, что с ростом t волновое число k_x также неограниченно растет, причем на этот рост накладываются осцилляции Тангенс справа обращается в бесконечность через интервалы времени $\Delta t = 2v\hbar/[eEa(1 - \Gamma^2)^{1/2}]$. За каждый такой промежуток времени фаза аргумента тангенса, стоящего слева, возрастает на π и, следовательно, k_x возрастает на $\Delta k_x = 2\pi/a$. Интегрируя исходное уравнение движения за промежуток времени Δt , находим

$$\hbar \Delta k_x = eE \Delta t - k \int v_x dt = eE \Delta t - k \Delta x,$$

где Δx — смещение электрона за время Δt . Отношение $\Delta x/\Delta t$ является средней скоростью дрейфа, а средняя плотность тока равна

$$j = (e^2 n E/k) [1 - (1 - \Gamma^2)^{1/2}].$$

В сильных полях, когда $\Gamma \ll 1$, получаем

$$j \approx e^2 n \Gamma^2 E / (2k) \propto k/E,$$

т. е. ток возникает только благодаря наличию силы «трения»; он возрастает по мере уменьшения времени свободного пробега.

7.61. Пользуясь формулами для вырожденного ферми-газа, для молярной теплоемкости получаем

$$C(T) = \pi^2 R T / (2W_F),$$

где энергия Ферми

$$W_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 N_A}{V} \right)^{2/3},$$

здесь m — масса атома, а N_A — постоянная Авогадро. Определяя T_0 так, чтобы $C = RT/T_0$, находим $T_0 \sim 1\text{K}$.

VIII. ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

§ 8.1. Элементарные частицы

8.1. Протон состоит из夸克ов u, u, d , нейтрон — u, d, d , Ω -гиперон — s, s, s .

8.2. $\pi^+ \leftrightarrow u, \bar{d}$, $K^+ \leftrightarrow u, \bar{s}$.

8.3. $K^0 \leftrightarrow d, \bar{s}$.

8.4. $\Xi^0 \leftrightarrow u, s, s$, $\Lambda^0 \leftrightarrow u, d, s$.

8.5. π^- , K^-

8.6. Λ -гиперон или Σ^0 -гиперон.

8.7. 1) Нет так как $\Delta S = 2$;

2) нет, так как $\Delta S = 2$;

3) нет, так как $(m_n - m_p) < m_\mu$;

4) нет, не сохраняется лептонный заряд;

5) нет, не сохраняется барионный заряд;

6) нет, не сохраняется лептонный заряд.

8.8. $m_{Fe} = N\tau\mathcal{A}/(tN_A) \approx 10^3$ т, где N_A — постоянная Авогадро, \mathcal{A} — атомная масса железа.

8.9. На неподвижной мишени $\mathcal{A}^{\max} = 38$, на УНК — любые \mathcal{A} .

8.10. $(m_W - c^2)_{\min} = 2W \sin \theta = 84$ ГэВ.

8.11. $m_{Z^0}c^2 \approx 90$ ГэВ, $\beta = 0,9$.

8.12. $m_{\Xi}c^2 = 8,3$ ГэВ, $\beta = W_\gamma/(m_Yc^2 - W_\gamma) \approx 0,14$.

8.13. Для нахождения массы чармоная воспользуемся релятивистской инвариантностью квадрата четырехимпульса:

$$m_{J/\Psi}^2 c^4 = (W_1 + W_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2.$$

По условию задачи $W_1 = W_2 = W$ и, следовательно, $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$, $a \cos(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) = \cos \theta = 1/2$. Поскольку e^+ и e^- ультрарелятивистские ($v \approx c$), то $W \approx pc$ и $m_{J/\Psi}c^2 = 3,1$ ГэВ.

Скорость найдем из значений импульса чармоная $p_{J/\Psi} = 2\beta \cos 30^\circ$ и массы: $\beta = 0,9$.

8.14. $W_k = m_{\Lambda_c^0}c^2 - m_{\Lambda_c^0}c^2 - 3m_{\pi^\pm}c^2 = 714$ МэВ.

8.15. $W_{\min} > 2m_Bc^2 = 10,6$ ГэВ.

8.16. $W_{\text{пор}} = 4m_\Sigma c^2 + 3m_p c^2 = 7,7$ ГэВ.

8.17. $N = (W_{\text{ц.м.}} - 2m_p c^2)/(m_\pi c^2) = 11$, где $W_{\text{ц.м.}}$ — энергия в системе центра масс.

8.18. $\lambda = 1/(\rho N_A \sigma) = 14$ м.

8.19. $W_{\max} = (m_\mu^2 c^4 - 4m_e^2 c^4)/(2m_e c^2) = 52$ МэВ.

8.20. $W_{\min} = 0,25$ МэВ, $W_{\max} = 10,5$ ГэВ.

8.21. Найдем энергию мюона из законов сохранения энергии и импульса:

$$W_\mu = (m_K^2 + c^4 + m_\mu^2 c^4) / (2m_K c^2).$$

Отсюда найдем искомое время жизни мюона:

$$\tau = W_\mu \tau_0 / (m_\mu c^2) = 5,4 \text{ мкс},$$

где τ_0 — собственное время жизни мюона.

$$8.22. \operatorname{tg} \theta = m_{\pi^0} c^2 / (W_1 W_2)^{1/2} = 0,06.$$

$$8.23. W = m_{\pi^0} c^2 \mathcal{A}_{\text{возд}} / (c \tau_0 \rho N_A \sigma) = 1,4 \text{ ТэВ.}$$

$$8.24. m_D c^2 = (W_{K^+} + W_{\pi^-})^2 - (p_{K^+} + p_{\pi^-})^2 c^2 = \\ = 1,8 \text{ ГэВ, } \beta = 0,9, \quad \tau = L/\beta = 0,1 \text{ пс.}$$

$$8.25. m_{\Omega^-} c^2 = (W_{\Lambda^0} + W_{K^-})^2 - (p_{\Lambda^0} + p_{K^-})^2 c^2 = 1,7 \text{ ГэВ}$$

8.26. $\tau_0 = L/v \approx 2 \cdot 10^{-16}$ с, где v — скорость π^0 -мезона находится из законов сохранения энергии и импульса.

$$8.27. L = c \tau_0 W_{\Lambda^0} / (m_{\Lambda^0} c^2) = 45 \text{ см.}$$

$$8.28. L = c \tau_0 W_{\pi^0} / (m_{\pi^0} c^2) = 600 \text{ м.}$$

$$8.29. W_\mu = (W_\pi / m_\pi c^2) [(m_\pi^2 c^4 - m_\mu^2 c^4)] / (2m_\mu c^2) = 330 \text{ МэВ.}$$

$$8.30. N_\mu / N_K = 1 - \exp(-L/\tau_{K^\pm} c \gamma) \simeq 0,4, \quad \text{где } \gamma = W/(m_K c^2).$$

8.31. Число пионов, достигших детектора,

$$n = N_\pi \Omega \exp(-t/\tau),$$

где N_π — число всех генерированных пионов, $\Omega = S/L^2$ — телесный угол, под которым виден детектор из точки генерации мезонов, t — время пролета пионом пути L , τ — время жизни пиона в лабораторной системе, равное

$$\tau = \tau_0 W_\pi / (m_\pi c^2) \approx \tau_0 (1 + W_K / m_\pi c^2),$$

где W_K — кинетическая энергия. Окончательно получим

$$N_\pi = (nL^2/S) \exp \{L m_\pi c^2 / [c \tau_0 (W_K^2 + 2W_K m_\pi c^2)^{1/2}] \} \approx 1,4 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}.$$

$$8.32. N_\pi / N_K = (n_\pi / n_K) \exp[-l(L_K - L_\pi)/(L_K L_\pi)] \approx 1800,$$

где $L_K = \tau_K p / m_K c$, $L_\pi = \tau_\pi p / m_\pi c$ — пробеги каона и пиона до распада.

$$8.33. W_{\text{поп}} = 1,8 \text{ МэВ.}$$

$$8.34. \theta \sim 180^\circ - 120^\circ (p_F / p_{\pi^0}) \approx 150^\circ.$$

$$8.35. \operatorname{tg} \theta = 4m_\pi m_p c^4 / [(m_p^2 + m_\pi^2) c^4] \approx 0,3.$$

8.36. Число взаимодействий в объеме dV за время dt

$$d\eta = \sigma u_{12} \rho_1 \rho_2 dV dt,$$

где $u_{12} = |u_1 - u_2|$, плотности частиц $\rho_1 = \rho_2 = n/c$ (n — поток, c — скорость света). В нашем случае разность скоростей частиц $u_{12} = 2c$, так как $u_1 = -u_2$ и $|u_1| = |u_2| \approx c$. Число отсчетов (с учетом эффективности их регистрации $\varepsilon = 0,1$)

$$K = \varepsilon d\eta/dt = 2\varepsilon\sigma n^2 dV/c.$$

Учитывая, что $dV = Sl$, найдем

$$n = (Kc/2\varepsilon l\sigma S)^{1/2}$$

и, окончательно, ток в кольце

$$I = enS = (KSce^2/2\varepsilon l\sigma)^{1/2} \approx 2 \text{ А.}$$

8.37. В 1,26 раза.

§ 8.2. Структура ядра и ядерные реакции

8.38. Энергия связи ядра, т. е. формула Вайцзеккера:

$$U = 14,0\mathcal{A} - 13,0\mathcal{A}^{2/3} - 0,584Z^2/\mathcal{A}^{1/3} \text{ — малые члены.}$$

Известно, что радиус ядра $r_a = r_0\mathcal{A}^{1/3}$, где $r_0 \approx 1,25 \cdot 10^{-13}$ см. Поэтому

$$U (\text{МэВ}) \approx 14,0\mathcal{A} - 13,0S/(4\pi r_0^2) - 0,584Z^2/\mathcal{A}^{1/3} + \dots,$$

где S — поверхность ядра. Поверхностное натяжение равно

$$\sigma = \left| \frac{\partial U}{\partial S} \right| \approx \frac{13,0}{4\pi r_0^2} \text{ МэВ/см}^2 \approx 10^{11} \text{ Н/м.}$$

8.39. $Z_0 = (\mathcal{A}/2)(1 + 7,5 \cdot 10^{-3}\mathcal{A}^{2/3})^{-1}$. ^{27}Mg испускает электроны.

8.40. $Z^2/\mathcal{A} > 18$.

8.41. $I = 0,44 \cdot 10^{-44} \text{ г} \cdot \text{см}^2$.

8.42. $n = 40$.

8.43. $\mathcal{J}_1/\mathcal{J}_2 \propto \exp \{(8m_a/h^2)^{1/2} [(W - W_1)^{1/2} - (W - W_2)^{1/2}] \} \approx 2 \cdot 10^3$, где W — высота потенциального барьера ядра радона: $W = Ze^2/r_a$.

8.44. Зависимость периода полураспада от энергии (в МэВ) определяется приближенным законом Гейгера — Нэттола

$$\lg \tau_{1/2} \approx C + D/W_a^{1/2}.$$

Константы C и D определим из условий задачи: $D = 149$ и $C = -57$. Искомый период полураспада равен $\tau_{1/2} = 10^{84}$ лет.

8.45. Момент импульса, получаемый диском в 1 секунду, равен суммарному моменту поглощенных частиц;

$$\mathcal{M} = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{1}{4} \frac{N\hbar}{2}.$$

Коэффициент $1/4$ возникает вследствие учета углов падения электронов на диск:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\Omega = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\cos \theta.$$

Угол поворота диска равен

$$\varphi = M/f = N\hbar/(8f) \approx 50 \text{ прад.}$$

8.46. Пусть при намагничивании число спинов ядер фтора, направленных по полю, равно N_1 , против поля — N_2 , их разница ΔN равна

$$\Delta N = N_1 [1 - \exp(-2\mu B/k_B T)] = N_1 \cdot 2\mu B/(k_B T) = N_0 \mu B/k_B T \ll 1,$$

где μ — магнитный момент ядер фтора, k_B — постоянная Больцмана, N_0 — число ядер фтора. При выключении поля половина избытка ядер $\Delta N/2$ изменит ориентацию и образец получит момент импульса

$$\mathcal{L} = (1/2) \Delta N (\hbar/2) = \mu B \hbar N_0 / (k_B T), \quad N_0 = 2N_A,$$

где N_A — постоянная Авогадро. Отсюда

$$\mu = \mathcal{L} \cdot 2k_B T / (N_A \hbar) = 1,3 \cdot 10^{-26} \text{ Дж/Тл} = 2,62 \mu_\text{я},$$

где $\mu_\text{я}$ — ядерный магнетон.

$$8.47. \sigma(W) = AcW/n.$$

8.48. Поскольку энергия связи нуклона мала, для оценки можно считать, что продольный импульс нуклонов $p_l \propto W_\gamma/c$. Поперечный импульс нуклонов в ядре обусловлен фермиевским движением нуклонов. Ферми-импульс оценим из соотношения неопределенности

$$p_F \approx \Delta p \sim \hbar/r_d \approx 100 \text{ МэВ/с.}$$

Оценку для угла рассеяния нуклонов получим из соотношения

$$\Phi \approx p_F/p_l \approx 0,4 \text{ рад.}$$

8.49. $v = Ze(mr)^{-1/2} \approx 3,5 \cdot 10^7 \text{ м/с, где } Z, m, r — \text{порядковый номер, масса и радиус урана.}$

$$8.50. W_n = 6 \text{ МэВ; } W_\text{я} = 1 \text{ МэВ.}$$

$$8.51. W_\text{k} = (M_d^2 - 2m_p^2 + 2m_p m_\pi - m_\pi^2)c^2/[2(m_p - m_\pi)] = 1,25 \text{ ГэВ,}$$

8.52. Найдем сначала пробег α -частицы в алюминии l_{Al} . Так как потери энергии на ионизацию пропорциональны NZ , где N — число атомов в 1 см^3 , Z — заряд ядра, то

$$l_{Al}/l_B = (NZ)_B/(NZ)_{Al}.$$

Число ядерных реакций, происходящих в тонком слое dx , равно $d\nu = n_a N_{\text{Al}} \sigma dx = n_p$, а $dx \approx l_{\text{Al}}$. Окончательно получим

$$\sigma = n_p / (n_a N_{\text{Al}} l_{\text{Al}}) = n_p Z_{\text{Al}} / n_a (N Z)_b l_b = 40 \text{ мб.}$$

$$8.53. \sigma \approx \pi r_{\text{U}}^2 = 3.4 \text{ мб.}$$

8.54. $\dot{\nu} = nP / (4\pi L^2 Q) \approx 10^{12} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$, $\eta = nW_{\text{q}} / Q = 0.05$, где энергия, выделяемая при делении ядра урана, равна $Q = 200 \text{ МэВ}$

8.55. В 1-м случае с вылетом протона ($d + d \rightarrow t + p$) энерговыделение на 0.7 МэВ больше, чем во 2-м случае с вылетом нейтрона ($d + d \rightarrow {}^3\text{He} + n$).

$$8.56. W = 17.6 \text{ МэВ} \quad Q = 3.4 \cdot 10^{11} \text{ кДж.}$$

$$8.57. \eta = 0.20$$

$$8.58. W_{\text{max}} = 19 \text{ МэВ.}$$

8.59. $P = (J/2) Q = 57 \text{ Вт/см}^3$, где $Q = 3.65 \text{ МэВ}$ — энергия, выделяемая при реакции $d + d$.

$$J = (5/4) n_d^2 \overline{\sigma v}_{dd} \approx 2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}.$$

8.60. $R = 3\sigma_{\text{СБ}} T^4 / P \approx 3 \cdot 10^8 \text{ км}$, где P — мощность, выделяемая в 1 см^3 плазмы (см. задачу 8.59), $\sigma_{\text{СБ}}$ — постоянная Стефана — Больцмана.

$$8.61. I_{\text{min}} \approx (2\pi n k_B T)^{1/2} R = 0.7 \text{ мА.}$$

$$8.62. W = 3 \cdot 10^7 \text{ кДж.}$$

$$8.63. t = 1.9 \cdot 10^4 \text{ лет.}$$

8.64. $\tau = 1/(n\sigma v) \approx 0.17 \text{ мс}$, где n — концентрация ядер атомов водорода.

$$8.65. \mathcal{I}_0 / \mathcal{I} = \exp(d\rho N_A \sigma / \mathcal{A}) = 2.1$$

8.66. $W_k / W_0 = (\hbar^2 / 16m_n) (d_C^{-2} + d_{\text{Bi}}^{-2}) (2k_B T)^{-1} = 34$, где $T = 300 \text{ К}$.

8.67. $\overline{W}_1 / \overline{W}_2 = 2k_B T / \overline{W}_2 \approx 0.06$, где \overline{W}_1 — средняя газокинетическая, $\overline{W}_2 = 3.6 \text{ МэВ}$ — средняя термодинамическая энергия.

8.68. Убыль протонов (в г/см^2) вследствие взаимодействия в слое азота толщиной dx равна

$$-dN_0 = N dx / l,$$

где l — средний свободный пробег до взаимодействия. Обозначим x_0 толщину атмосферы Земли ($x_0 \approx 1000 \text{ г/см}^2$). Из решения уравнения получим ($x = x_0$)

$$N = N_0 \exp(-x_0/l).$$

Здесь $l = \mathcal{A}/(\sigma N_A)$, где $\sigma = \pi R^2$, R — радиус ядра азота. Отсюда окончательно находим

$$N(x = x_0)/N_0(x = 0) = 7 \cdot 10^{-6}.$$

8.69. $I_N \approx 0,3$ м.

8.70. Число атомов $^{37}_{18}\text{Ar}$

$$n = J_v \sigma t N_{\text{Cl}},$$

где $t = 1$ год = $3,2 \cdot 10^7$ с, N_{Cl} — число атомов хлора, $J_v = N_v / (4\pi R_3^2)$ — поток нейтрино, падающий в единицу времени на единицу площади поверхности Земли. Отсюда находим

$$N_{\text{Cl}} = 4\pi R_3^2 n / (N_v \sigma t).$$

Окончательно получим, что в эксперименте необходимо использовать массу CCl_4 , равную

$$m = \mu N_{\text{Cl}} / (4\eta) \approx 560 \text{ т},$$

где μ — молярная масса CCl_4 ,

8.71. $W_v = (m_p / 2R_3 \rho_3) \cdot 10^{38} \approx 23$ ТэВ, где R_3 , ρ_3 — радиус и плотность Земли.

8.72. Ослабление потока нейтрино $\Delta N/N \approx \sigma N_A \rho \cdot 2R_3 / \mathcal{A} \approx 10^{-4}$.

8.73. Свечение Вавилова — Черенкова начинается при скорости частицы $v = c/n$. Соответствующая кинетическая энергия протона равна

$$W_k = m_0 c^2 [(1 - v^2/c^2)^{-1/2} - 1] = m_0 c^2 [n/(n^2 - 1)^{1/2} - 1] \approx 4,8 \text{ ГэВ}.$$

Показатель преломления n найдем из следующего соотношения: $n^2 = 1 + 4\pi\alpha N$, где N — число атомов в единице объема, а α — поляризуемость молекул азота. Поскольку при постоянной температуре $N \propto p$, где p — давление, а $n^2 - 1 \approx 2(n - 1)$, то

$$(n - 1)/(n_0 - 1) \approx p/p_0,$$

где $p_0 = 0,1$ МПа.

8.74. $v = W/(2mc) \approx 10^4$ см/с.

8.75. $t \approx (1/2) R^2 [\ln(R/r)] (\mu U)^{-1} \approx 0,7$ мс.

8.76. $F = 12$ м.

8.77. $N_p = J_{\text{п}} [1 - \exp(-a/\tau_n v)] \approx 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$, где τ_n — время жизни нейтрона.

8.78. $\Delta M/M = W \mathcal{A}_U \cdot m_p / n_0 M W_0 = 0,6$, где $\mathcal{A}_U = 235$.

8.79. $t \approx 1,7 \cdot 10^9$ лет.

8.80. $n_{\text{Pu}}/n_U = 3,2 \cdot 10^{-16}$.

8.81. $p_{O^*} = m_{O^*} c \Delta W / (2W) \approx 1 \text{ ГэВ}$, $\alpha \approx p_{O^*}/p \approx 0,1$ рад.

8.82. Для УХН $mv^2/2 \ll k_B T$ — энергии теплового движения, и поэтому их спектр, т. е. распределение по скоростям, есть

$$dN(v) \propto [\exp(-mv^2/2k_B T)] v^2 dv \sim v^2 dv.$$

Спектр потока нейтронов будет

$$dJ \propto v \, dN(v) \propto v^3 \, dv \propto W \, dW,$$

где W — энергия нейтронов. Максимальная энергия УХН: $W_{\text{гр}} = mv_{\text{гр}}^2/2$. До детектора дойдут лишь те нейтроны, энергия которых

$$W = mv^2/2 \geq mgh.$$

Таким образом, скорость счета детектора равна суммарному потоку:

$$J = \int_{mgh}^{W_{\text{гр}}} dJ \propto W_{\text{гр}}^2 - m^2 g^2 h^2.$$

Окончательно при $J = 0$ получим высоту, на которой поток нейтронов исчезает:

$$h_{\text{гр}} = W_{\text{гр}}/(mg) \approx v_{\text{гр}}^2/(2g) \approx 5 \text{ м.}$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ

Скорость света в вакууме

$$c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 2,998 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$$

Постоянная Планка

$$\hbar = h/2\pi = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} = 1,05 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с} = 6,58 \cdot 10^{-22} \text{ МэВ} \cdot \text{с}$$

Постоянная Больцмана

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/К} = 8,62 \cdot 10^{-11} \text{ МэВ/К}$$

Молярная газовая постоянная

$$R = 8,31 \text{ Дж/(К} \cdot \text{моль}) = 8,31 \cdot 10^7 \text{ эрг/(К} \cdot \text{моль})$$

Объем моля идеального газа при нормальных условиях ($T_0 = 273,15 \text{ К}$, $p_0 = 101325 \text{ Па}$)

$$V_0 = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль} = 22,4 \cdot 10^3 \text{ см}^3/\text{моль}$$

Элементарный заряд

$$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} = 4,80 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГС}$$

Масса покоя электрона

$$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг} = 9,11 \cdot 10^{-28} \text{ г}$$

Отношение заряда электрона к его массе

$$e/m_e = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг} = 5,28 \cdot 10^{17} \text{ ед. СГС}$$

Масса покоя протона

$$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1,67 \cdot 10^{-24} \text{ г}$$

Отношение заряда протона к его массе

$$e/m_p = 0,959 \cdot 10^8 \text{ Кл/кг} = 2,87 \cdot 10^{14} \text{ ед. СГС}$$

Гравитационная постоянная

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2 = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ дин} \cdot \text{см}^2/\text{г}^2$$

Постоянная Авогадро

$$N_A = 6,025 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

Постоянная Лошмидта

$$n_0 = 2,69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3} = 2,69 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$$

Постоянная Фарадея

$$F = 9,65 \cdot 10^4 \text{ Кл/моль} = 2,90 \cdot 10^{14} \text{ ед. СГС}$$

Постоянная Стефана — Больцмана

$$\sigma_{\text{СБ}} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4) = 5,67 \cdot 10^{-5} \text{ эрг/(с} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{К}^4)$$

Постоянная Вина

$$b = \lambda_{\max} T = 0,29 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{К} = 0,29 \text{ см} \cdot \text{К}$$

Постоянная Ридберга

$$R_\infty = 1,0973732 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1} = 1,0973732 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$$

Постоянная электрическая

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

Постоянная магнитная

$$\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$$

Постоянная тонкой структуры

$$\alpha = e^2/(\hbar c) = 7,297 \cdot 10^{-3} \approx 1/137$$

Радиус 1-й боровской орбиты

$$r_B = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0,53 \cdot 10^{-8} \text{ см}$$

Классический радиус электрона

$$r_0 = e^2/(m_e c^2) = 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ м} = 2,82 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

Магнетон Бора

$$\mu_B = e\hbar/(2m_e c) = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ Дж/Тл} = 9,27 \cdot 10^{-21} \text{ эрг/Гс} = \\ = 0,579 \cdot 10^{-14} \text{ МэВ/Гс}$$

Ядерный магнетон

$$\mu_n = e\hbar/(2m_p c) = 5,05 \cdot 10^{-27} \text{ Дж/Тл} = 5,05 \cdot 10^{-24} \text{ эрг/Гс} = \\ = 3,15 \cdot 10^{-18} \text{ МэВ/Гс}$$

Комптоновская длина волны электрона

$$\Lambda_e = \hbar/(m_e c) = 3,86 \cdot 10^{-13} \text{ м} = 3,86 \cdot 10^{-11} \text{ см}$$

Энергия покоя электрона

$$m_e c^2 = 0,511 \text{ МэВ}$$

Энергия покоя протона

$$m_p c^2 = 938 \text{ МэВ}$$

Энергия, соответствующая 1 а. е. м.,

$$(1 \text{ а. е. м.}) c^2 = 931,5 \text{ МэВ}$$

Температура, соответствующая энергии 1 эВ,

$$T_1 = 11\,606 \text{ К}$$

II. НЕКОТОРЫЕ АСТРОФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Масса Солнца

$$M_C = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ кг} = 1,99 \cdot 10^{33} \text{ г}$$

Энергия, испускаемая Солнцем в 1 секунду, или светимость

$$L_C = 3,86 \cdot 10^{26} \text{ Вт} = 3,86 \cdot 10^{33} \text{ эрг/с}$$

Солнечная постоянная

$$E_C = 1,35 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2 = 1,35 \cdot 10^6 \text{ эрг/(с} \cdot \text{см}^2)$$

Радиус Солнца

$$R_C = 6,96 \cdot 10^5 \text{ км} = 6,96 \cdot 10^8 \text{ м}$$

Угловой диаметр Солнца на среднем расстоянии от Земли

$$\alpha_C = 0,92 \cdot 10^{-2} \text{ рад}$$

Температура Солнца вблизи поверхности

$$T_C = 5,9 \cdot 10^3 \text{ К}$$

Масса Земли

$$M_3 = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ кг} = 5,98 \cdot 10^{27} \text{ т}$$

Средняя плотность Земли

$$\rho_3 = 5,52 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 = 5,52 \text{ г/см}^3$$

Радиус Земли (на экваторе)

$$R_3 = 6,38 \cdot 10^3 \text{ км} = 6,38 \cdot 10^6 \text{ м}$$

Среднее расстояние от Земли до Солнца

$$L_3 = 1 \text{ а. е.} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ км} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ м}$$

Среднее расстояние от Земли до Луны

$$L_L = 4 \cdot 10^5 \text{ км}$$

Средняя температура поверхности Земли

$$T_3 = 300 \text{ К}$$

Средняя скорость движения Земли по орбите

$$v_3 = 30 \text{ км/с} = 3 \cdot 10^4 \text{ м/с}$$

Угловая скорость вращения Земли

$$\omega_3 = 0,727 \cdot 10^{-4} \text{ рад/с}$$

Космические скорости (1-я и 2-я) на поверхности Земли

$$v_1 = \sqrt{GM_3/R_3} = 7,9 \text{ км/с} = 7,9 \cdot 10^3 \text{ м/с},$$

$$v_2 = \sqrt{2} v_1 = 11,2 \text{ км/с} = 11,2 \cdot 10^3 \text{ м/с}$$

Масса Венеры

$$M_B = 0,82M_3 = 4,87 \cdot 10^{24} \text{ кг} = 4,87 \cdot 10^{27} \text{ г}$$

Среднее расстояние от Венеры до Солнца

$$L_B = 1,08 \cdot 10^8 \text{ км} = 1,08 \cdot 10^{11} \text{ м}$$

Период обращения Венеры вокруг Солнца

$$T_B = 225 \text{ сут}$$

Радиус Венеры

$$R_B = 0,99R_3 = 6,3 \cdot 10^3 \text{ км} = 6,3 \cdot 10^6 \text{ м}$$

Средняя плотность Венеры

$$\rho_B = 4,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 = 4,7 \text{ г/см}^3$$

Ускорение свободного падения на поверхности Венеры

$$g_B = 0,84g_3 = 8,2 \text{ м/с}^2$$

Масса Марса

$$M_M = 0,11M_3 = 0,66 \cdot 10^{24} \text{ кг} = 0,66 \cdot 10^{27} \text{ г}$$

Расстояние от Марса до Солнца

$$L_M = (2,06 \div 2,49) \cdot 10^8 \text{ км}$$

Расстояние от Марса до Земли

$$L_{M3} = (0,55 \div 4,0) \cdot 10^8 \text{ км}$$

Средняя плотность Марса

$$\rho_M = 4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 = 4 \text{ г/см}^3$$

Ускорение свободного падения на поверхности Марса

$$g_M = 0,37 g_3 = 3,6 \text{ м/с}^2$$

Масса Луны

$$M_L = 7,4 \cdot 10^{22} \text{ кг} = 7,4 \cdot 10^{25} \text{ г}$$

Диаметр Луны

$$D_L = 3,48 \cdot 10^3 \text{ км} = 3,48 \cdot 10^6 \text{ м}$$

Среднее расстояние между Луной и Землей

$$L_L = 3,84 \cdot 10^5 \text{ км} = 3,84 \cdot 10^8 \text{ м}$$

Средняя плотность Луны

$$\rho_L = 3,3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 = 3,3 \text{ г/см}^3$$

Ускорение свободного падения на поверхности Луны

$$g_L = 1,64 \text{ м/с}^2$$

III. НЕКОТОРЫЕ ВНЕСИСТЕМНЫЕ ЕДИНИЦЫ

Единица длины:

световой год

$$1 \text{ св. год} = 9,5 \cdot 10^{16} \text{ м} = 9,5 \cdot 10^{17} \text{ см},$$

парсек

$$1 \text{ пк} = 3,1 \cdot 10^{16} \text{ м} = 3,1 \cdot 10^{18} \text{ см},$$

астрономическая единица

$$1 \text{ а. е.} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ м} = 1,5 \cdot 10^{13} \text{ см},$$

ангстрем

$$1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м} = 10^{-8} \text{ см},$$

ферми

$$1\Phi = 10^{-15} \text{ м} = 10^{-13} \text{ см}$$

Единица площади:

барн

$$1 \text{ б} = 10^{-28} \text{ м}^2 = 10^{-24} \text{ см}^2$$

Единица времени:

год

$$1 \text{ год} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ с}$$

Оптическая сила:

диоптрия

$$1 \text{ дptr} = 1 \text{ м}^{-1}$$

Единица массы:

атомная единица массы

$$1 \text{ а. е. м.} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г}$$

Единица энергии:

электрон-вольт

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$$

IV. ПРИСТАВКИ И МНОЖИТЕЛИ ДЛЯ ОБРАЗОВАНИЯ ДЕСЯТИЧНЫХ КРАТНЫХ И ДОЛЬНЫХ ЕДИНИЦ.

Наимено- вание	Обозна- чение	Множи- тель	Наимено- вание	Обозна- чение	Множи- тель
тера	Т	10^{12}	санти	с	10^{-2}
гига	Г	10^9	милли	м	10^{-3}
мега	М	10^6	микро	мк	10^{-6}
кило	к	10^3	нано	н	10^{-9}
гекто	г	10^2	пико	п	10^{-12}
дека	да	10^1	фемто	ф	10^{-15}
деци	д	10^{-1}	атто	а	10^{-18}

V. ЕДИНИЦЫ НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН В СИСТЕМАХ СИ⁻ И СГС И СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НИМИ

Физическая величина	Система СИ			Гауссова система (СГС)			Соотношение между единицами	
	Единица		Размерность	Единица		Размерность		
	Наименование	Обозначение		Наименование	Обозначение			
Частота	герц	Гц	T^{-1}	герц	Гц	T^{-1}	1	
Плотность	килограмм на кубический метр	$\text{кг}/\text{м}^3$	$L^{-3}M$	грамм на кубический сантиметр	$\text{г}/\text{см}^3$	$L^{-3}M$	$1 \text{ кг}/\text{м}^3 = 10^3 \text{ г}/\text{см}^3$	
Скорость	метр в секунду	м/с	LT^{-1}	сантиметр в секунду	см/с	LT^{-1}	$1 \text{ м}/\text{с} = 10^2 \text{ см}/\text{с}$	
Ускорение	метр на секунду в квадрате	$\text{м}/\text{с}^2$	LT^{-2}	сантиметр на секунду в квадрате	$\text{см}/\text{с}^2$	LT^{-2}	$1 \text{ м}/\text{с}^2 = 10^2 \text{ см}/\text{с}^2$	
Угловая скорость	радиан в секунду	рад/с	T^{-1}	радиан в секунду	рад/с	T^{-1}	1	
Угловое ускорение	радиан на секунду в квадрате	рад/с ²	T^{-2}	радиан на секунду в квадрате	рад/с ²	T^{-2}	1	
Сила	ньютон	Н	LMT^{-2}	дина	дин	LMT^{-2}	$1 \text{ Н} = 10^5 \text{ дин}$	
Работа, энергия, количество теплоты	дюйуль	Дж	L^2MT^{-2}	эрз	эрз	L^2MT^{-2}	$1 \text{ Дж} = 10^7 \text{ эрг}$	
Мощность	ватт	Вт	L^2MT^{-3}	эрз в секунду	эрз/с	L^2MT^{-3}	$1 \text{ Вт} = 10^7 \text{ эрг}/\text{с}$	

Количество электричества, электрический заряд	кулон	Кл	ТI	единица заряда СГС	ед. СГС	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$1 \text{ Кл} = 3 \cdot 10^9 \text{ ед. СГС}$
Сила электрического тока	ампер	A	I	единица силы тока СГС	ед. СГС	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$	$1 \text{ А} = 3 \cdot 10^9 \text{ ед. СГС}$
Электрическое напряжение, разность потенциалов, электродвижущая сила	вольт	B	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	единица напряжения СГС	ед. СГС	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$1 \text{ В} = \frac{1}{300} \text{ ед. СГС}$
Напряженность электрического поля	вольт на метр	B/m	$LMT^{-3}I^{-1}$	единица напряженности СГС	ед. СГС	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$1 \text{ В/м} = \frac{1}{3 \cdot 10^4} \text{ ед. СГС}$
Электрическое сопротивление	ом	Ом	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	единица сопротивления СГС	ед. СГС	$L^{-1}T$	$1 \text{ Ом} = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \text{ ед. СГС}$
Индуктивность	генри	Гн	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	единица индуктивности СГС	ед. СГС	L	$1 \text{ Г} = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \text{ ед. СГС}$
Электрическая ёмкость	фарад	Ф	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	сантиметр	см	L	$1 \text{ Ф} = 9 \cdot 10^{11} \text{ см}$
Магнитный поток	вебер	Вб	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	максвелл	Мкс	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$1 \text{ Вб} = 10^8 \text{ Мкс}$
Магнитная индукция	tesла	Тл	$MT^{-2}I^{-1}$	гаусс	Гс	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс}$
Напряженность магнитного поля	ампер на метр	A/m	$L^{-1}I$	эрстед	Э	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$1 \text{ А/м} = 4 \pi \cdot 10^{-3} \text{ Э}$
Световой поток	люмен	лм	J	люмен	лм	J	$\frac{1}{10^4}$
Яркость	кандела на квадратный метр	$kд/m^2$	$L^{-2}J$	кандела на квадратный сантиметр	$kд/cm^2$	$L^{-2}J$	$1 \text{ кд}/m^2 = 10^{-4} \text{ кд}/cm^2$
Освещенность	люкс	лк	$L^{-2}J$	фот		$L^{-2}J$	$1 \text{ лк} = 10^{-4} \text{ фот}$

VI. ТАБЛИЦА ЛЕПТОНОВ (спин $\frac{1}{2}$)

Название частицы	Символ		Масса, МэВ	Электрический заряд, ед. e^-	Лептонный заряд			Время жизни, с	Преодолевающая схема распада
	частицы	анти-частицы			L_e	L_μ	L_τ		
Электронное нейтрино	ν_e	$\bar{\nu}_e$	0	0	+1	0	0	∞	—
Мюонное нейтрино	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	0	0	0	+1	0	∞	—
Тау-нейтрино	ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	0	0	0	0	+1	∞	—
Электрон	e^-		0,51	-1	+1	0	0	∞	—
Позитрон		e^+	0,51	+1	-1	0	0	∞	—
			105,7	-1	0	+1	0	$2,1 \cdot 10^{-6}$	$e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$
			105,7	+1	0	-1	0	$2,2 \cdot 10^{-6}$	$e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$
Мюон	μ^-	μ^+	1782	-1	0	0	+1	$3,5 \cdot 10^{-12}$	$\mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau$
Тау	τ^-	τ^+	1782	+1	0	0	-1	$3,5 \cdot 10^{-12}$	

VII. ТАБЛИЦА КВАРКОВ (спин $\frac{1}{2}$)

Название кварка	Символ	Масса, МэВ	Электрический заряд, ед. e^-	Заряд					
				барионный B	страница S	очарование C	красота b	правда t	
Верхний	u	336	+2/3	1/3	0	0	0	0	0
Нижний	d	338	-1/3	1/3	0	0	0	0	0
Странный	s	540	-1/3	1/3	+1	0	0	0	0
Очарованный	c	1500	+2/3	1/3	0	+1	0	0	0
Красивый	b	>2000	-1/3	1/3	0	0	+1	0	0
Правдивый	t	$\gg 2000$	+2/3	1/3	0	0	0	0	+1

П р и м е ч а н и я. 1. Первые пять кварков составляют всю совокупность известных алронов, шестой введен из соображений симметрии лептонных и кварковых пар. Кварковыми парами являются (ud) , (sc) и (bt) .

2. У антикварков все приведенные в таблице числа, характеризующие аромат, изменяют знак на противоположный.

3. Каждый из кварков помимо квантовых чисел, составляющих аромат, имеет еще одно квантовое число — цвет: желтый, красный или синий. Сумма этих цветов дает белый цвет.

VIII. ТАБЛИЦА НЕКОТОРЫХ АДРОНОВ

Название частицы	Символ	Масса, МэВ	Спин, ед. \hbar	Электрический заряд, ед. e	Заряд					Время жизни, с	Преобла-щающая схема распада	
					барион-ный B	стран-ность S	очарование C	красота b	правда t			
Мезоны												
Пион	π^\pm	139,6	0	± 1	0	0	0	0	0	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$\mu^+ \bar{\nu}_\mu, \mu^- \bar{\nu}_\mu$	
	π^0	135,0	0	0	0	0	0	0	0	$8 \cdot 10^{-17}$	$\gamma\gamma, \gamma e^+ e^-$	
Каон заряженный	K^+	493,7	0	+1	0	+1	0	0	0	$1,23 \cdot 10^{-8}$	$\mu^+ \bar{\nu}_\mu, \mu^- \bar{\nu}_\mu$	
	K^-			-1	0	-1	0	0	0			
Каон нейтральный	K^0	497,7	0	0	0	+1	0	0	0	$0,9 \cdot 10^{-10}$	$\pi^+ \pi^-$	
	\bar{K}^0			0	0	-1	0	0	0	$5,8 \cdot 10^{-8}$	$\pi^- \mu^+ \bar{\nu}_\mu$	
Эта	η	548,8	0	0	0	0	0	0	0	$2,5 \cdot 10^{-19}$	$\pi^+ \pi^-$	
Фи	φ	1019	1	0	0	0	0	0	0	$\sim 10^{-18}$	$\pi^+ \pi^-$	
Барионы												
Протон	p	938,3	1/2	+1	+1	0	0	0	0	$> 10^{31}$ лет		
Нейтрон	n	939,6	1/2	0	+1	0	0	0	0	945	$p e^- \bar{\nu}_e$	
Лямбда	Λ	1115,6	1/2	0	+1	-1	0	0	0	$2,5 \cdot 10^{-10}$	$p \pi^- \bar{\nu}_\pi^0$	
Сигма-плюс	Σ^+	1189,4	1/2	+1	+1	-1	0	0	0	$0,8 \cdot 10^{-10}$	$p \pi^0 \bar{\nu}_\pi^+$	
Сигма-минус	Σ^-	1197,4	1/2	-1	+1	-1	0	0	0	$1,5 \cdot 10^{-10}$	$\pi \pi^-$	
Сигма-нуль	Σ^0	1198,5	1/2	0	+1	-1	0	0	0	$< 10^{-14}$	$\Lambda \gamma$	
Кси-минус	Ξ^-	1321,3	1/2	-1	+1	-2	0	0	0	$1,6 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda \pi^-$	
Кси-нуль	Ξ^0	1314,9	1/2	0	+1	-2	0	0	0	$3,0 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda \pi^0$	
Омега-гиперон	Ω^-	1672	3/2	-1	+1	-3	0	0	0	$1,3 \cdot 10^{-10}$	$\Delta K^-; \Xi - \pi^0$	

IX. ТАБЛИЦА ЭКЗОТИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

Название частицы	Символ	Масса, МэВ	Электрический заряд, ед. e^-	Заряд			Время жизни (или ширина резонанса)	Кварковый состав
				странность S	очарование C	красота b		
Чармопий	J/ψ	3098	0	0	0	0	69 кэВ	$c\bar{c}$
	ψ'	3684	0	0	0	0	220 кэВ	$c\bar{c}$
	ψ''	4100	0	0	0	0	150 МэВ	$c\bar{c}$
Очарованные частицы	D^0	1863	0	0	+1	0	10^{-15} с	$c\bar{s}$
	D^+	1868	+1	0	+1	0	10^{-13} с	$c\bar{d}$
	F^+	2030	+1	+1	+1	0	10^{-13} с	$c\bar{s}$
	Λ_c^+	2226	+1	-1	+1	0	10^{-13} с	$us\bar{c}$
Ипсилон	Γ	9460	0	0	0	0	25 кэВ	$b\bar{b}$
	Γ'	10 016	0	0	0	0	50 кэВ	$b\bar{b}$
	Γ''	10 380	0	0	0	0		$b\bar{b}$
Красивые частицы (B-частицы)	B	5300	-1	0	0	+1	10^{-14} с	$b\bar{u}$
	B	»	0	0	0	+1	10^{-14} с	$b\bar{d}$
	B	»	0	+1	0	+1	10^{-14} с	$b\bar{s}$
	B	»	-1	0	-1	+1	10^{-14} с	$b\bar{c}$

Х. ТАБЛИЦА СВОЙСТВ ИЗОТОПОВ

Атомный номер	Изотоп	Спин ядра	Избыток массы атома, а. е. м.	Атомы в природной смеси, %	Распад	Период полу-распада	Энергия α -, β -частиц, МэВ
1	H	1/2	0,007825	99,985	β^-	12,3 года	0,018
	D	1	0,014102	0,015			
	T	1/2	0,016049	—			
2	^3He	1/2	0,016030	$3 \cdot 10^{-4}$	β^-	12,3 года	0,018
	^4He	0	0,002604	~ 100			
3	^6Li	1	0,015126	7,52	K	53 дня	0,039
	^7Li	3/2	0,016005	92,48			
4	^7Be	3/2	0,016931	—	2α	10^{-16} с	0,039
	^8Be	0	0,005308	—			
	^9Be	3/2	0,012186	100			
	^{10}Be	0	0,013535	—			
5	^{10}B	3	0,012939	20	β^+	2,5 $\cdot 10^6$ лет	0,555
	^{11}B	3/2	0,009305	80			
6	^{11}C	3/2	0,011431	—	β^+	20,4 мин	0,97
	^{12}C	0	0	98,89			
	^{13}C	1/2	0,003354	1,11			
7	^{14}C	0	0,003942	—	β^-	5570 лет	0,155
	^{13}N	—	0,005739	—			
	^{14}N	1	0,003074	99,63			
8	^{15}N	1/2	0,000108	0,37	β^+	10 мин	1,2
	^{15}O	—	0,003072	—			
9	^{16}O	0	-0,005085	99,76	β^+	2,1 мин	1,68
	^{17}O	5/2	-0,000867	0,037			
	^{18}O	0	-0,000840	0,204			
10	^{18}F	—	0,000950	—	β^+	1,87 ч	0,649
	^{19}F	1/2	-0,001595	100			
	^{20}F	—	-0,000015	—			
11	^{20}Ne	0	-0,007560	90,92	β^-	12 с	5,42
	^{21}Ne	—	-0,006151	0,26			
	^{22}Ne	0	-0,008616	8,82			
12	^{22}Na	3	-0,005565	—	β^+	2,6 года	0,540
	^{23}Na	3/2	-0,010227	100			
12	^{24}Na	4	-0,009033	—	β^-	15 ч	1,39
	^{23}Mg	—	-0,005865	—			
	^{24}Mg	0	-0,014956	78,60			
12	^{25}Mg	5/2	-0,014160	10,11	β^+	11 с	2,95

Продолжение

Атомный номер	Изотоп	Спин ядра	Избыток массы атома, а. е. м.	Атомы в природной смеси, %	Распад	Период полу-распада	Энергия α , β -частиц, МэВ
12	^{26}Mg	0	-0,017409	11,29	β^-		
	^{27}Mg	1/2	-0,015655	-		9,5 мин	1,75; 1,59
13	^{20}Al	-	-0,013100	-	β^+	6,7 с	3,20
	^{27}Al	5/2	-0,018465	100			
	^{28}Al	3	-0,018092		β^-	2,3 мин	2,86
14	^{28}Si	0	-0,023073	92,27			
	^{29}Si	1/2	-0,023509	4,68			
	^{30}Si	0	-0,026239	3,05			
	^{31}Si	-	-0,024651	-	β^-	2,65 ч	1,47
15	^{30}P	-	-0,021680	-	β^+	2,5 мин	3,24
	^{31}P	1/2	-0,026237	100			
	^{32}P	-	-0,026092	-	β^-	14,3 дня	1,71
16	^{32}S	0	-0,027926	95,02			
	^{33}S	3/2	-0,028540	0,75			
	^{34}S	0	-0,032136	4,21			
	^{35}S	3/2	-0,030966	-	β^-	87 дней	0,167
17	^{35}Cl	3/2	-0,031146	75,4			
	^{36}Cl	2	-0,031688	-	β^-, K	$3,1 \cdot 10^5$ лет	0,714
	^{37}Cl	3/2	-0,034104	24,6			
18	^{36}Ar	0	-0,032452	0,34			
	^{37}Ar	3/2	-0,033228	-	K	32 дня	
	^{39}Ar	-	-0,035679	-	β^-	265 лет	0,565
	^{40}Ar	0	-0,037616	99,60			
19	^{39}K	3/2	-0,036286	93,08			
	^{42}K	2	-0,037583	-	β^-	1,52 ч	3,55; 1,99
	^{51}Cr	7/2	-0,055214	-	K	28 дней	
24	^{55}Mn	5/2	-0,061946	100			
25	^{58}Co	2	-0,064246	-	K, β^+	72 дня	0,47
	^{59}Co	7/2	-0,066811	100			
	^{60}Co	4	-0,066194	-	β^-	5,2 года	0,31
29	^{63}Cu	3/2	-0,070406	69,1			
	^{65}Cu	3/2	-0,072214	30,9			
30	^{65}Zn	5/2	-0,070766	-	K, β^+	245 дней	0,325
35	^{82}Br	6	-0,083198	-	β^-	36 ч	0,456
38	^{88}Sr	0	-0,09436	82,56			

Продолжение

Атомный номер	Изотоп	Спин ядра	Избыток массы атома, а. е. м.	Атомы в природной смеси, %		Распад	Период полу-распада	Энергия α -, β -частиц, МэВ
38	^{89}Sr	5/2	-0,09257	—		β^-	51 день	1,45
	^{90}Sr	0	-0,09223	—		β^-	28 лет	0,535
39	^{90}Y	2	-0,09282	—		β^-	64 ч	2,24
47	^{107}Ag	1/2	-0,09303	51,35				
53	^{127}I	5/2	-0,09565	100				
	^{128}I	1	-0,09418	—		$\beta^- \cdot K$	25 мин	2,12; 1,67
79	^{197}Au	3/2	-0,03345	100				
	^{198}Au	2	-0,03176	—		β^-	2,7 дня	0,96
81	^{204}Tl	—	-0,02611	—		β^-	4,1 года	
82	^{206}Pb	0	-0,02554	23,6				
	^{207}Pb	1/2	-0,02410	22,6				
	^{208}Pb	0	-0,02336	52,3				
83	^{209}Bi	9/2	-0,01958	100				
	^{210}Bi	4	-0,01589	—		α	$2,6 \cdot 10^6$ лет	4,97
84	^{210}Po	—	-0,01713	—		α	138 дней	5,3
86	^{222}Rh	—	0,01753	—		α	3,8 дня	5,49
88	^{222}Ra	0	0,02536	—		α	1620 лет	4,777; 4,589
90	^{232}Th	0	0,03821	100		α	$1,4 \cdot 10^{10}$ лет	4,00; 3,98
	^{233}Th	—	0,04143			β^-	22 мин	1,23
92	^{234}U	0	0,04090	0,006		α	$2,5 \cdot 10^6$ лет	4,76; 4,72
	^{235}U	7/2	0,04393	0,71		α	$7,1 \cdot 10^8$ лет	4,20— 4,58
	^{236}U	0	0,04573	—		α	$2,4 \cdot 10^7$ лет	4,45; 4,50
	^{238}U	0	0,05076	99,28		α	$4,5 \cdot 10^9$ лет	4,13; 4,18
	^{239}U	—	0,05432	—		β^-	23,5 мин	1,21
94	^{238}Pu	—	0,04952	—		α	89,6 лет	5,50; 5,45
	^{239}Pu	1/2	0,05216	—		α	$2,4 \cdot 10^4$ лет	5,15— 5,10

XI. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

	I	II	III	IV	V	
1	[H]					
2	Li литий 6,941	³ Be бериллий _{9,01218}	⁴ B бор _{10,81}	⁵ C углерод _{12,011}	⁶ N азот _{14,0067}	
3	Na натрий _{22,9897}	¹¹ Mg магний _{24,305}	¹² Al алюминий _{26,98154}	¹³ Si кремний _{28,085}	¹⁴ P фосфор _{30,97376}	
4	K калий _{39,098}	¹⁹ Ca кальций _{40,08}	²⁰ Sc скандий _{44,9559}	²¹ Ti титан _{47,90}	²² V ванадий _{50,9415}	
	29 63,546 медь	³⁰ Cu цинк _{65,38}	³¹ Zn галлий _{69,72}	³² Ge германий _{72,59}	³³ As мышьяк _{74,9216}	
5	Rb рубидий _{85,468}	³⁷ Sr стронций _{87,62}	³⁸ Y иттрий _{88,9059}	³⁹ Zr цирконий _{91,22}	⁴⁰ Nb ниобий _{92,9064}	
	47 107,868 серебро	⁴⁸ Ag кадмий _{112,41}	⁴⁹ Cd индий _{114,82}	⁵⁰ In индий _{118,69}	⁵¹ Sn олово _{121,7}	⁵² Sb сурьма
6	Cs цезий _{132,9054}	⁵⁵ Ba барий _{137,33}	⁵⁶ La * лантан _{138,905}	⁵⁷ Hf гафний _{178,49}	⁷² Ta тантал _{180,947}	
	79 196,9665 золото	⁸⁰ Au ртуть _{200,59}	⁸¹ Hg таллий _{204,37}	⁸² Tl таллий _{207,2}	⁸³ Pb свинец _{208,9804}	⁸⁴ Bi висмут
7	Fr франция ₍₂₂₃₎	⁸⁷ Ra радий _{226,0254}	⁸⁸ Ac ** актиний ₍₂₂₇₎	⁸⁹ Ku курчатовий ₍₂₆₁₎		¹⁰⁵

* ЛАНТАНОИДЫ

Ce _{140,12} церий	⁵⁸ Pr празеодим _{140,9077}	⁵⁹ Nd неодим _{144,24}	⁶⁰ Pm ₍₁₄₅₎ прометий	⁶¹ Sm _{150,4} самарий	⁶² Eu _{151,96} европий	⁶³ Gd _{157,25} гадолиний
----------------------------------	---	--	---	--	---	---

** АКТИНОИДЫ

Th _{232,0381} торий	⁹⁰ Pa протактиний _{231,0359}	⁹¹ U уран _{238,029}	⁹² Np нептуний _{237,0482}	⁹³ Pu ₍₂₄₄₎ плутоний	⁹⁴ Am ₍₂₄₃₎ америций	⁹⁵ Cm ₍₂₄₇₎ курний
------------------------------------	---	--	--	---	---	---

ЭЛЕМЕНТОВ Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

VI	VII	VIII	
	1 1,0079 водород	H 2 4,00260 гелий	Обозначение элемента
8 15,999 кислород	9 18,998403 фтор	F 10 20,179 неон	Li 3 литий Атомный номер 5,941 Атомная масса
16 32,06 сера	17 35,453 хлор	Cl 18 39,948 аргон	Целое число в скобках — массовое число наиболее устойчивого радиоизотопа
Cr хром 51,996	Mn марганец 54,9380	Fe железо 55,847	Co 27 кобальт 58,9332
Se 78,95 селен	Br 79,904 бром	Kr 83,80 криптон	Ni 28 никель 58,70
Mo молибден 95,94	Tc технеций 98,9062	Ru рутений 101,07	Rh 45 родий 102,9055
Te теллур 127,60	I иод 126,9045	Xe ксенон 131,30	Pd 46 палладий 106,4
W вольфрам 183,85	Re рений 186,207	Os осмий 190,2	Ir 77 иридий 192,2
Po (209) полоний	At (210) астат	Rn (222) радон	Pt 78 платина 195,09

Tb 158,9254 тербий	Dy 162,50 диспрозий	Ho 164,9304 гольмий	Er 167,26 эрбий	Tm 168,9342 тулий	Yb 173,04 иттербий	Lu 174,967 лютеций
--------------------------	---------------------------	---------------------------	-----------------------	-------------------------	--------------------------	--------------------------

Bk (247) берклий	Cf (251) калифорний	Es (254) эйнштейний	Fm (257) фермий	Md (258) менделевий	[No] (255) [нобелий]	[Lr] (256) [лоуренсий]
------------------------	---------------------------	---------------------------	-----------------------	---------------------------	----------------------------	------------------------------

*Станислав Миронович Козел
Эммануил Иосифович Раиба
Сергей Анатольевич Славатинский*

**СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ
задачи МФТИ**

*Редактор Н. А. Михалина
Художественный редактор Т. Н. Кольченко
Технический редактор А. П. Колесникова
Корректоры Е. Ю. Рычагова, М. Л. Медведская,
О. М. Березина*

ИБ № 12940

Сдано в набор 11.03.87. Подписано к печати 12.08.87.
Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура лите-
ратурная. Печать высокая. Усл. печ. л. 15,96. Усл.
кр.-отт. 16,17. Уч.-изд. л. 16,77. Тираж 93000 экз.
Зак.№ 215. Цена 75 коп.

**Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15**

Отпечатано с матриц Ленинградской типографии
№ 2 головного предприятия ордена Трудового Крас-
ного Знамени Ленинградского объединения «Техни-
ческая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграф-
прома при Государственном комитете СССР по делам
издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052,
г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29
в Ленинградской типографии № 6 ордена Трудового
Красного Знамени Ленинградского объединения
«Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союз-
полиграфпрома при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торгов-
ли. 193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Редакция литературы по общей и прикладной физике готовит к изданию в 1988 году:

I. НАУЧНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Андреев А. В., Емельянов В. И., Ильинский Ю. А. Кооперативные явления в оптике: Сверхизлучение. Бистабильность. Фазовые переходы. — (Соврем. probl. физики). — № 99.

Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. — (Соврем. probl. физики). — № 100.

Беляков В. А. Дифракционная оптика периодических сред сложной структуры. — № 103.

Пайерлс Р. Сюрпризы в теоретической физике: Пер. с англ./Под ред. М. И. Каганова и Д. В. Ширкова. — (Б-ка теорет. физики). — № 111.

Светосильные спектральные приборы/Вагин В. А., Гершун М. А., Жижин Г. Н., Тарасов К. И.; Под ред. К. И. Тарасова. — (Физика и техн. спектроск.). — № 113.

Сухоруков А. П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике. — № 115.

II. НАУЧНО-ПОПУЛЯРНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Басов Н. Г. О квантовой электронике: Статьи и выступления. — (Наука. Мировоззрение. Жизнь). — № 120.

Воронцов М. А., Корябин А. В., Шмальгаузен В. И. Управляемые оптические системы.—(Пробл. науки и техн. прогресса).—№ 121.

Гиваргизов Е. И. Искусственная эпитаксия — перспективная технология элементной базы микроэлектроники. — (Пробл. науки и техн. прогресса). — № 122.

Звездин А. К., Котов В. А. Магнитооптика тонких пленок. — (Пробл. науки и техн. прогресса). — № 124.

III. СПРАВОЧНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Аленицын А. Г., Бутиков Е. И., Кондратьев А. С. Краткий физико-математический справочник. — № 125.

Сена Л. А. Единицы физических величин и их размерности. — 3-е изд., перераб. — № 127.

IV. КНИГИ, РЕКОМЕНДОВАННЫЕ ДЛЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Воронцов Ю. А. Теория и методы макроскопических измерений/Под ред. В. Б. Брагинского. — № 134.

Гольдин Л. Л., Новикова Г. И. Введение в квантовую физику. — № 135

Задков В. Н., Пономарев Ю. В. Компьютер в эксперименте: Архитектура и программные средства систем автоматизации. — № 136.

Карлов Н. В. Лекции по квантовой электронике. — 2-е изд., испр. и доп. — № 137.

Основы теории колебаний/Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н.; Под ред. В. В. Мигулина. — 2-е изд., перераб. — № 139.

Обращаем Ваше внимание на то, что тираж каждой выпускляемой книги, включенной в тематический план, определяется книготорговой сетью и издательством на основе заказов индивидуальных покупателей и организаций. Срок для приема таких заказов — 60 дней со дня поступления тематического плана в книготорговую сеть. Вы можете с уверенностью рассчитывать на приобретение заинтересовавшей вас книги только в случае, если своевременно оформите на нее предварительный заказ.

Не откладывайте оформление предварительного заказа!

Предварительные заказы принимаются магазинами «Академкниги» и «Союзкниги», распространяющими литературу данной тематики. Там же вы можете ознакомиться с Аннотированным тематическим планом выпуска Главной редакции физико-математической литературы издательства «Наука» на 1988 год.

75 коп.