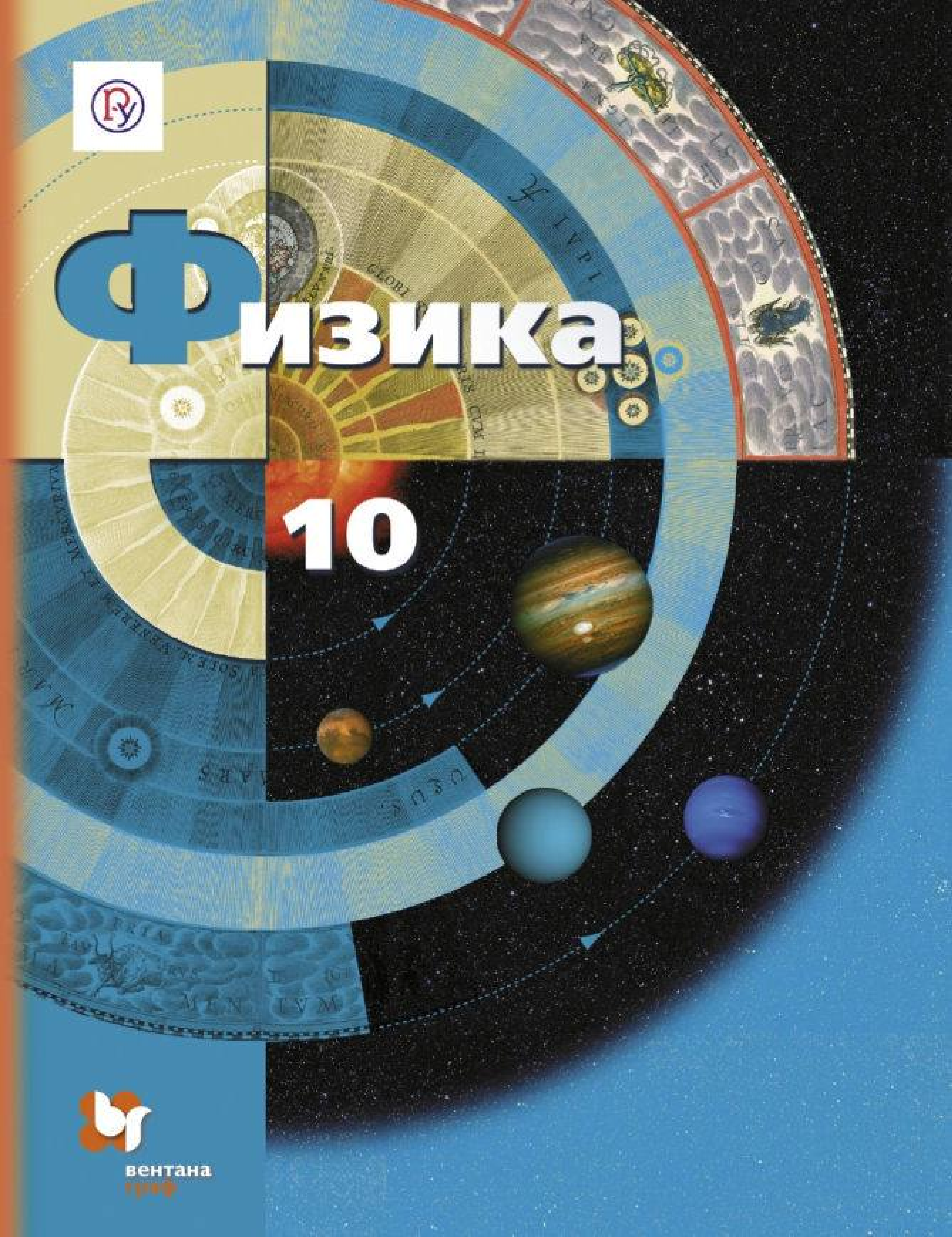
Физика

10



вентана
граф

российский
учебник

А. В. Грачёв
В. А. Погожев
А. М. Салецкий
П. Ю. Боков

Физика

Базовый и углублённый уровни

10 класс

Учебник

Рекомендовано
Министерством просвещения
Российской Федерации

5-е издание, переработанное

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2019

Механика

Знакомство с физикой, наукой об окружающем нас мире, начинают с изучения самого простого вида движения материи — *механического движения*.

Механическим движением называют изменение положения тела или его частей в пространстве относительно других тел с течением времени.

Науку о механическом движении называют *механикой*. Классическая механика является фундаментальной физической теорией. Она позволяет описывать механические явления в макромире, даёт объяснения происходящим явлениям, прогнозирует протекание механических явлений и процессов и позволяет использовать научные знания в практической области.

По характеру решаемых задач механику делят на *кинематику* и *динамику*.

Глава 1 Кинематика

Кинематика — раздел механики, в котором рассматривают способы описания механического движения тел.

Как же описывают движение тела? Прежде всего отметим, что любое реальное тело имеет размеры и форму и в общем случае его части могут двигаться по-разному. *Если различие в движении частей тела имеет принципиальное значение* (например, необходимо установить, как движутся части тела спринтера во время бега), *то требуется описание движения разных точек тела*. Решение подобной задачи является весьма сложным и трудоёмким. Поэтому при изучении механического движения тел мы будем, как правило, рассматривать задачи, в которых можно *пренебречь различием в движении отдельных частей тела*. Например, при составлении туристического маршрута для велосипедиста нет необходимости детально описывать движение колёс, педалей велосипеда или частей тела туриста. Для решения поставленной задачи достаточно рассмотреть движение какой-либо одной точки велосипедиста или вообще считать его точкой. Другими словами, при решении некоторых задач реальное тело можно заменить на *точечное тело*.

Точечное тело — объект, размерами которого можно пренебречь по сравнению с характерными масштабами решаемой задачи.

Отметим особо, что, в отличие от реального, *точечное тело не имеет размеров и в каждый момент времени находится в определённой точке пространства*.

Понятно, что в природе точечных тел нет. Точечное тело — это *модель*. Процесс замены реальной ситуации на модель в физике называют *выбором модели*. Решение поставленной задачи во многом зависит от правильного выбора модели. Например, при расчёте траектории движения космической станции вокруг Земли допустимо считать её точечным телом. Однако для ориентации космической станции в пространстве её размеры и форма имеют принципиальное значение. Поэтому при описании такого движения станции нужно использовать более сложную модель.

Изучение механики начинают с изучения кинематики и динамики точечных тел. В дальнейшем, если не сделано специальных оговорок, под словом «тело» мы будем подразумевать точечное тело.

§ 1 Положение тела в пространстве. Системы отсчёта. Способы описания механического движения

Из определения механического движения следует, что для его описания необходимо научиться отвечать на два вопроса: «*Где* (в какой точке пространства) и *когда* (в какой момент времени) находилось, находится или будет находиться тело в процессе своего движения?» Начнём с ответа на первый вопрос — выясним, как описать положение тела в пространстве.

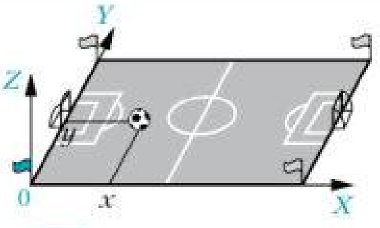


Рис. 1

Договариваясь с друзьями по телефону о месте встречи, вы наверняка будете использовать фразы «я буду стоять *напротив* такого-то объекта» или «я буду находиться *с южной стороны* здания» и т. п. Таким образом, при описании положения в пространстве вы используете другое тело — *тело отсчёта*, относительно которого задаёте своё положение. Тело отсчёта должно быть таким, чтобы с ним можно было связать *систему координат*, т. е. выбрать *начало отсчёта* и *направления координатных осей* с указанными на них *единицами длины*. Пример выбора тела отсчёта и связанной с ним системы координат показан на рис. 1.

С помощью системы координат положение любой точки пространства относительно тела отсчёта можно однозначно описать соответствующим набором координат.

При механическом движении положение точечного тела в пространстве изменяется с *течением времени*. Следовательно, чтобы описывать это изменение во времени, необходимо иметь устройство для отсчёта времени — *часы*.

Совокупность тела отсчёта, связанной с ним системы координат и часов называют системой отсчёта.

После выбора системы отсчёта можно описать механическое движение. Для этого необходимо привести *законы движения — зависимости координат тела от времени*: $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$.

Законы движения могут быть представлены в табличном, аналитическом или графическом виде.

С табличным способом описания движения тел вы встречаетесь, изучая, например, расписание движения электропоездов по станциям (табл. 1).

Таблица 1

Станция	Дубки	Ёлочки	Солнечная	Луговая	Весёлое
Прибытие	7:15	7:28	7:45	8:10	8:22
Отправление	7:18	7:30	7:48	8:12	8:24

Этот способ является достаточно простым и наглядным. Однако он обладает существенным недостатком: по расписанию движения электропоезда невозможно, например, точно указать момент времени, *когда* поезд проезжает мимо посёлка на участке пути между двумя соседними станциями. Также невозможно точно определить место, *где* находился поезд в моменты времени между отправлением с одной станции и прибытием на следующую станцию. Таким образом, при табличном способе движение тела описано не полностью.

Для полного описания движения тела используют аналитический или графический способ. При аналитическом описании законы движения — зависимости координат тела от времени — представляют в виде формул. При этом аргументом каждой функции является время t, а значением функции — соответствующая координата тела в выбранной системе отсчёта. Например, пусть тело движется вдоль координатной оси X и его координата x изменяется с течением времени по закону $x(t) = 4t$, где t измеряют в секундах, а x — в метрах. В этом случае, подставив в закон движения заданное значение времени t, мы можем определить координату x тела в этот момент времени и, следовательно, ответить на вопрос «*где*».

Напротив, если подставить в закон движения заданную координату x, то, решив полученное уравнение, можно определить, в какой момент времени тело имело эту координату (в этом случае можно ответить на вопрос «*когда*»).

Таким образом, если законы движения заданы в аналитическом виде, то движение тела описано полностью. К[1]

При графическом способе описания движения законы движения задают в виде графиков. Они представляют собой зависимости координат тела от времени. Одна ось графика — соответствующая координата в выбранной системе координат, другая ось — время. Для примера на рис. 2 показано, как, используя графическое описание, можно определить координату тела в некоторый момент времени (т. е. ответить на вопрос «*где*») или найти, в какой момент времени тело имело заданную координату (т. е. ответить на вопрос «*когда*»). Понятно, что если график зависимости $x(t)$ представляет собой непрерывную линию, то движение тела вдоль оси X описано полностью. К[2]

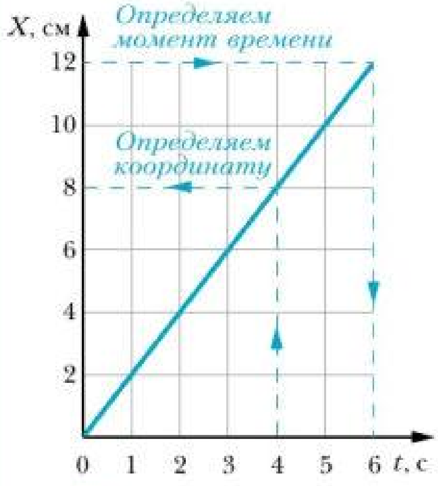


Рис. 2

Вы уже знаете, что, помимо координатного, в физике существует ещё один способ описания движения тела — *векторный*. При его использовании положение тела в пространстве в любой момент времени t задают радиусом-вектором $\vec{r}(t)$. Начало радиуса-вектора совпадает с началом отсчёта выбранной системы координат. Конец радиуса-вектора совпадает с той точкой пространства, в которой находится в данный момент времени t рассматриваемое точечное тело (рис. 3).

Таким образом, положение точечного тела определяется *направлением* и *модулем* вектора $\vec{r}(t)$. При движении тела направление и модуль радиуса-вектора в общем случае изменяются с течением времени. Если известны

К

1 Напомним, что если тело движется по плоскости, то его положение описывают с помощью двух координат x и y соответственно по осям X и Y, которые перпендикулярны друг другу и лежат в плоскости движения тела (*см.* рис. 1). Для полного описания такого движения потребуются две зависимости координат от времени: $x(t)$ и $y(t)$. В случае же движения в пространстве потребуются уже три зависимости: $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$.

2 Если тело движется по плоскости, то для описания его движения графическим способом потребуются два графика: $x(t)$ и $y(t)$. Если же тело движется в пространстве, то для описания необходимы три графика: $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$.

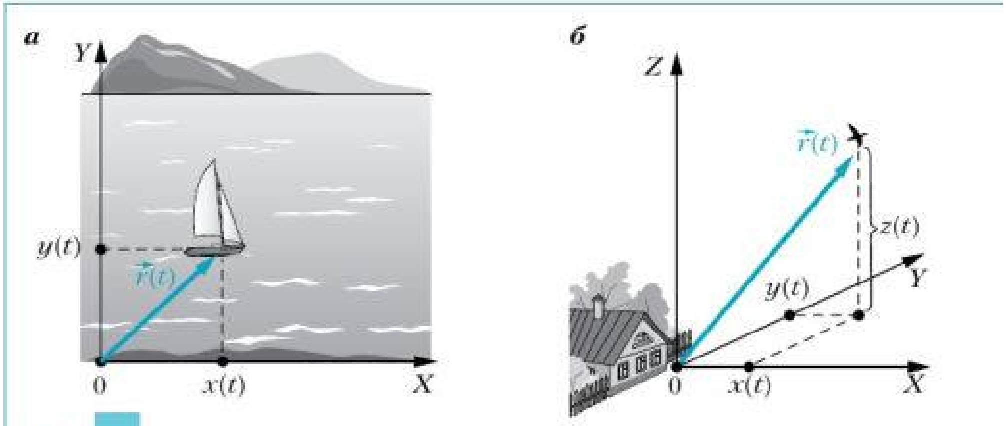


Рис. 3

(заданы) законы этих изменений, то движение тела описано полностью. Такой способ описания механического движения зачастую оказывается весьма удобным. Например, его часто используют при описании движения точечного тела по окружности (рис. 4, *а*). С помощью радиуса-вектора может быть описано и движение точки по земной сфере (рис. 4, *б*).

При механическом движении тело с течением времени изменяет своё положение в пространстве относительно других тел.

Линию, в каждой точке которой последовательно находилось, находится или будет находиться движущееся тело (точка), называют траекторией этого тела (этой точки).

Если траектория точечного тела в выбранной системе отсчёта представляет собой прямую линию, то движение тела называют *прямолинейным*, а если кривую – *криволинейным* (рис. 5).

В заключение подчеркнём, что движение любого тела *относительно*. Другими словами, нельзя сказать, покоится тело или движется и каков закон

Координатный и векторный методы описания движения взаимосвязаны. Проекции радиуса-вектора на координатные оси в любой момент времени t равны координатам тела в этот момент времени (*см.* рис. 3).

Напомним, что **проекцией вектора на координатную ось называют длину отрезка (измеренную в единицах модуля этого вектора) между проекциями начала и конца этого вектора на эту ось, взятую с соответствующим знаком: если направление от проекции начала к проекции конца вектора совпадает с положительным направлением координатной оси, то проекция положительна, в противном случае — отрицательна.**

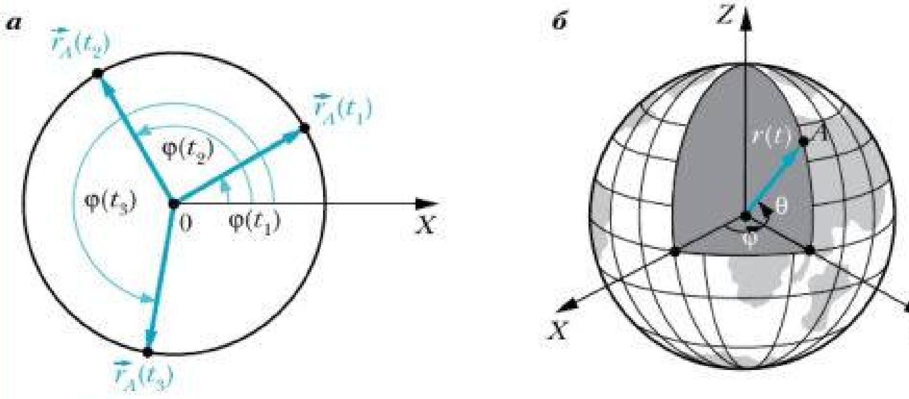


Рис. 4 При векторном способе описания движения положение точечного тела на окружности (*а*) задают с помощью угла $\varphi(t)$. Положение точки на земной сфере (*б*) может быть задано с помощью широты θ, отсчитываемой от экватора, и долготы φ, отсчитываемой от нулевого меридиана

его движения, если не сказать, в какой системе отсчёта (т. е. относительно какого тела отсчёта и какой системы координат) рассматривают его положение в пространстве. Действительно, ведь всегда можно выбрать такую систему отсчёта, в которой тело будет неподвижным. При этом в других системах отсчёта это тело будет изменять своё положение в пространстве, т. е. будет двигаться. Так, пассажир, сидящий в автобусе, будет неподвижен в системе отсчёта, связанной с движущимся по улице автобусом (рис. 6). Тот же пассажир будет двигаться, как и весь автобус, в системе отсчёта, связанной с Землёй.

Рис. 5

Рис. 6

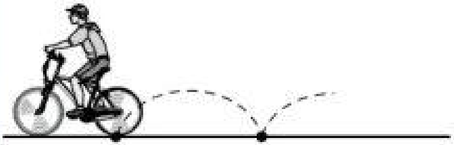


Рис. 7

Понятно, что от выбора системы отсчёта зависят не только законы движения тела, но и вид его траектории. Например, траектория точки обода вращающегося колеса относительно оси его вращения представляет собой окружность. На рис. 7 изображена траектория точки обода вращающегося колеса в другой системе отсчёта — связанной с Землёй.

Вопросы

1. Что называют механическим движением?
2. Что изучает кинематика?
3. Что называют системой отсчёта?

*4. Может ли тело отсчёта быть точечным?

5. Что называют законами движения?
6. Сколько способов описания механического движения вам известно? Перечислите их.
7. Что называют траекторией точечного тела?
8. Какое движение тела называют: а) прямолинейным; б) криволинейным?
9. Что означает утверждение, что движение тела относительно?

Упражнения

1. Координаты движущегося по плоскости XY точечного тела изменяются по законам: 1) $x(t) = 2 + 4t$; $y(t) = 4 - 7t$; 2) $x(t) = 3 + 6t$; $y(t) = 5t$, где x измеряют в метрах, а t — в секундах. Выполните следующие задания: а) определите для этих случаев начальные координаты тел, а также значения координат для моментов времени $t = 1$ с и 2 с; б) постройте графики движения $x(t)$ и $y(t)$; в) получите уравнения траекторий $y(x)$ для каждого из тел; г) постройте траектории для каждого из тел на плоскости XY.
2. На рис. 8 показаны графики движения точечного тела, движущегося по плоскости XY. Запишите законы движения $x(t)$ и $y(t)$ в аналитическом виде. Определите начальные координаты тела,

а также их значения для моментов времени $t = 0{,}2$ с и $0{,}4$ с. Получите уравнение траектории $y(x)$. Постройте траекторию на плоскости XY.

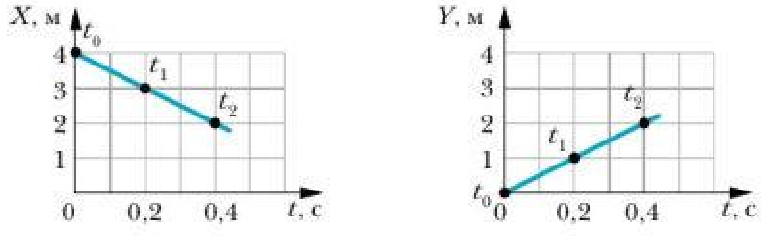


Рис. 8

§ 2 Перемещение. Путь

Рассмотрим тело, которое движется по криволинейной траектории. Пусть за промежуток времени от t_1 до $t_2 = t_1 + \Delta t$ тело перемещается из точки A с координатами $(x_1; y_1)$ в точку B с координатами $(x_2; y_2)$ (рис. 9). *Результат движения* за рассматриваемый промежуток време-

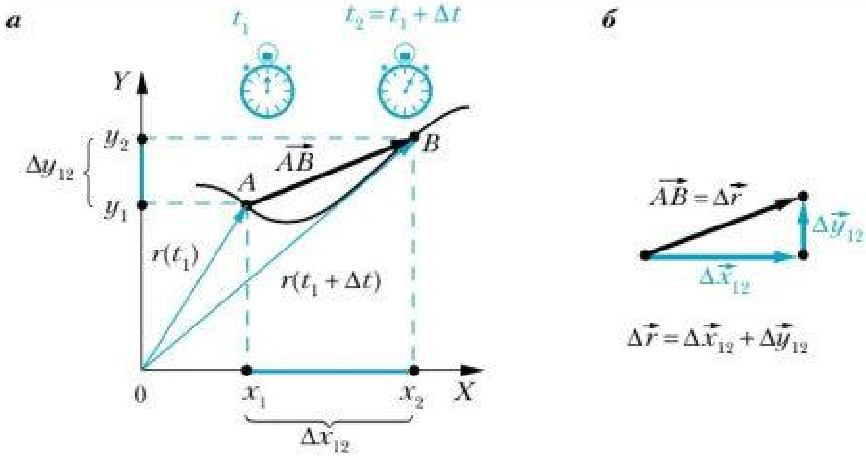


Рис. 9

ни Δt может быть задан векторной величиной — *перемещением* (вектором перемещения).

Перемещением тела называют вектор, начало которого совпадает с начальным положением тела, а конец — с его конечным положением.

В рассмотренном случае перемещение тела за время Δt представляет собой вектор $\overrightarrow{AB}$ (*см.* рис. 9). Из рисунка видно, что радиус-вектор $\vec{r}(t_1 + \Delta t)$, задающий положение тела в конечный момент времени, равен сумме радиуса-вектора $\vec{r}(t_1)$, задающего начальное положение тела, и вектора перемещения $\overrightarrow{AB}$:

$$\vec{r}(t_1 + \Delta t) = \vec{r}(t_1) + \overrightarrow{AB}.$$

Следовательно, *вектор перемещения* $\overrightarrow{AB}$ *за время* Δt *равен изменению* $\Delta\vec{r}$ *радиуса-вектора за это время*:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}(t_1 + \Delta t) - \vec{r}(t_1) = \Delta\vec{r}.$$

! **Вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ показывает, в каком направлении и на какое расстояние перемещается тело за рассматриваемый промежуток времени.**

От векторного описания движения тела легко перейти к координатному. Действительно, из рис. 9, *а* видно, что проекции вектора перемещения на координатные оси системы отсчёта равны соответствующим приращениям координат, т. е. разностям конечной и начальной координат по осям X и Y:

$$\Delta r_x = \Delta x_{12} = x_2 - x_1;$$
$$\Delta r_y = \Delta y_{12} = y_2 - y_1.$$

Таким образом, знак проекции перемещения показывает, увеличивается или уменьшается соответствующая координата. При этом модуль проекции перемещения на ось координат равен модулю изменения соответствующей координаты.

Можно совершить и обратный переход — от координатного способа описания движения перейти к векторному. Действительно, если известны приращения координат Δx_{12} и Δy_{12}, то известны векторы $\Delta\vec{x}_{12}$ и $\Delta\vec{y}_{12}$ перемещения проекций тела вдоль координатных осей. Используя правило сложения векторов (правило треугольника), легко убедиться в том, что перемещение $\Delta\vec{r}$ тела равно сумме перемещений его проекций на координатные оси (*см.* рис. 9, *б*):

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{x}_{12} + \Delta\vec{y}_{12}.$$

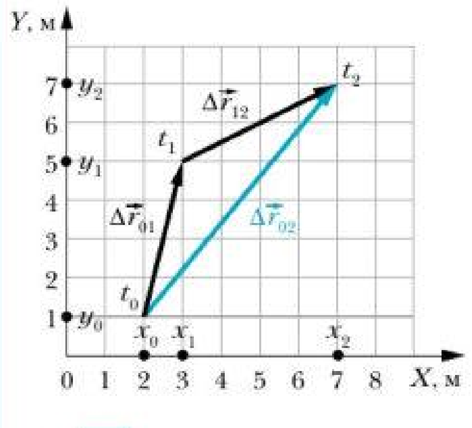


Рис. **10** При сложении перемещений их проекции складывают

Перемещение – вектор. Поэтому последовательные перемещения тела можно складывать по правилам сложения векторов (по правилам треугольника и параллелограмма). Поясним сказанное на примере. Пусть тело за промежуток времени от t_0 до t_1 совершает перемещение $\Delta\vec{r}_{01}$. Затем за промежуток времени от t_1 до t_2 тело перемещается на $\Delta\vec{r}_{12}$. В этом случае результирующее перемещение $\Delta\vec{r}_{02}$ за промежуток времени от t_0 до t_2 будет равно сумме перемещений $\Delta\vec{r}_{01}$ и $\Delta\vec{r}_{12}$ (рис. 10): $\Delta\vec{r}_{02} = \Delta\vec{r}_{01} + \Delta\vec{r}_{12}$.

Из рисунка видно, что при сложении перемещений их проекции также складываются. При этом складываются и соответствующие приращения координат.

В повседневной жизни для описания конечного результата движения вместо перемещения, векторной величины, часто используют скалярную величину – путь.

Путь — это всё расстояние, пройденное телом за рассматриваемый промежуток времени.

Обычно путь обозначают символом s.

Легко понять, что *если тело движется по траектории в одном направлении*, то *путь равен длине участка траектории, пройденного телом за рассматриваемый промежуток времени*.

Если же тело в процессе движения, не сходя с заданной траектории, разворачивается, т. е. изменяет направление своего движения на противоположное, то пройденный телом путь будет равен сумме длин всех участков траектории, по каждому из которых тело двигалось в одном направлении. Например, если вы по дороге из дома (точка A) в школу (точка C) в точке B вспомнили, что забыли рабочую тетрадь по физике, развернулись, пришли домой и вновь по той же дороге пришли в школу, то ваш путь будет равен сумме длин участков траектории AB, BA и AC (рис. 11).

Рассмотрим, как соотносятся путь и модуль перемещения тела.

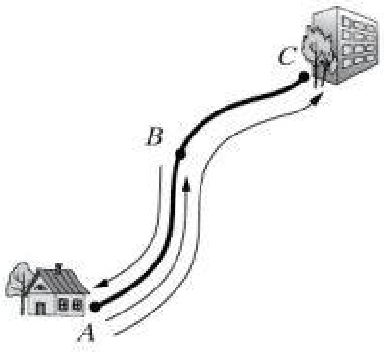


Рис. 11

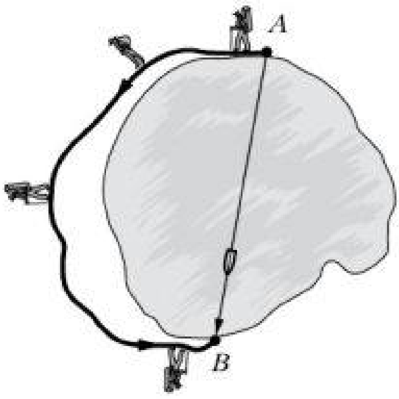


Рис. 12 Путь по криволинейной траектории между двумя точками больше модуля перемещения между этими точками

При прямолинейном движении в одном направлении пройденный телом путь всегда равен модулю перемещения. Если же тело в процессе движения изменяет направление движения, то путь всегда больше модуля перемещения.

Это легко понять, обратившись к рис. 12, на котором показаны траектории лодки, движущейся по озеру прямолинейно из пункта A в пункт B, и туристов, идущих из A в B вдоль берега озера по криволинейной траектории. Путь лодки равен модулю её перемещения. Путь же, пройденный туристами, будет больше модуля их перемещения, так как путь равен длине криволинейной траектории AB. Ясно, что модуль перемещения $\overrightarrow{AB}$ всегда меньше длины кривой линии, соединяющей точки A и B.

Вопросы

1. Что называют перемещением тела?
2. Что такое путь?
3. Может ли путь быть: а) положительным; б) нулевым; в) отрицательным? Ответ поясните.

4 Может ли модуль вектора перемещения: а) быть больше пройденного телом пути; б) быть равным пройденному пути; в) быть меньше его? Приведите примеры, поясняющие ответ.

Упражнения

1 Точечное тело движется вдоль оси X по закону: 1) $x(t) = 3 + 6t$; 2) $x(t) = 1 + 5t - t^2$, где x измеряют в метрах, а t — в секундах. Определите координаты тела в моменты времени $t = 0$ с, 1 с и 4 с. Определите модули и направления перемещения тела: а) за первую секунду движения; б) за первые четыре секунды движения; в) за промежуток времени с первой по четвёртую секунду движения. Изобразите эти векторы, соблюдая масштаб.

2 Координаты движущегося по плоскости точечного тела изменяются по законам: $x(t) = 2 + 4t$, $y(t) = 4 - 7t$, где x и y измеряют в метрах, а t — в секундах. Изобразите на графике траекторию движения тела и векторы его перемещений за первую, за вторую секунду движения и за первые три секунды движения. Определите пройденные телом пути за указанные промежутки времени.

§ 3 Скорость

В предыдущем параграфе мы описывали результат движения тела за промежуток времени Δt двумя способами: с помощью скалярной величины — *пути* и векторной величины — *перемещения*. Однако знание этих величин не позволяет полностью охарактеризовать движение, например ответить на вопрос, как быстро происходит движение тела. Чтобы ответить на него, в физике вводят понятие *скорость*. Что же такое скорость?

Скорость — привычное для каждого понятие. Однако когда в обыденной жизни говорят, что, например, автомобиль движется со скоростью 60 километров в час, то с точки зрения строгой физической терминологии совершают ошибку. Под словом «скорость» в этом утверждении подразумевается другая физическая величина — *средняя путевая скорость*.

Средней путевой скоростью тела называют физическую величину, равную отношению пути s, пройденного телом за рассматриваемый промежуток времени Δt, к длительности этого промежутка:

$$v_{\text{ср. п}} = \frac{s}{\Delta t}.$$

Обратим внимание на то, что путь s не имеет направления и является скалярной неотрицательной величиной. Поэтому и *средняя путевая скорость* $v_{\text{ср. п}}$ всегда *является скалярной неотрицательной величиной.* Она не имеет направления, так как не является вектором.

Кроме средней путевой скорости, в физике вводят *среднюю скорость перемещения*, которую для краткости называют *средней скоростью.*

Средней скоростью тела называют физическую величину, равную отношению перемещения $\Delta\vec{r}$, совершённого телом за рассматриваемый промежуток времени Δt, к длительности этого промежутка:

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Поскольку перемещение $\Delta\vec{r}$ — вектор, то из определения следует, что *средняя скорость тоже вектор.* Направление вектора средней скорости $\vec{v}_{\text{ср}}$ совпадает с направлением перемещения $\Delta\vec{r}$.

Наблюдая за показаниями спидометра в движущемся автомобиле, мы видим, что в каждый момент времени он показывает определённую величину, которая изменяется с течением времени. Это означает, что средние путевые скорости, измеренные за различные промежутки времени, отличаются друг от друга. Понятно, что отличаются друг от друга и средние скорости автомобиля за эти промежутки времени. Автомобиль мог поворачивать, изменяя направление движения. В этом случае средние скорости будут различаться не только по модулю, но и по направлению. Таким образом, мы приходим к выводу, что *средняя скорость автомобиля всё время изменяется.* Как же тогда охарактеризовать скорость автомобиля? Можно ли дать определение, что такое скорость автомобиля в каждый конкретный момент времени t?

Оказывается, можно. Для этого преобразуем определение средней скорости. Рассмотрим промежуток времени Δt, следующий сразу за интересующим нас моментом времени t. Определим среднюю скорость тела за этот промежуток времени. После этого уменьшим промежуток времени Δt и вновь определим скорость за уже меньший промежуток Δt. Будем повторять эту процедуру, уменьшая промежуток времени Δt до тех пор, пока он не станет достаточно малым. Под достаточно малым подразумевают настолько малый промежуток времени, что при его дальнейшем уменьшении полученные новые значения средней скорости практически не изменяются. При этом говорят, что промежуток времени Δt стремится к нулю ($\Delta t \to 0$).

Таким образом, *достаточно малый промежуток времени – это такой промежуток, на котором движение тела практически неотличимо от равномерного прямолинейного движения с постоянной скоростью.* Понятно, что чем быстрее исследуемое тело изменяет свою скорость, тем меньший промежуток времени будет удовлетворять условию достаточной малости. Именно среднюю скорость за достаточно малый промежуток времени Δt, начинающийся сразу после момента времени t, и считают скоростью (мгновенной скоростью) тела в данный момент времени t.

Скоростью (мгновенной скоростью) тела в данный момент времени t называют физическую величину, равную отношению перемещения $\Delta\vec{r}$ тела за достаточно малый промежуток времени Δt, начинающийся сразу после момента времени t, к длительности этого промежутка:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \text{ где } \Delta t \to 0.$$

Из определения мгновенной скорости видно, что её направление совпадает с направлением вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ за достаточно малый промежуток времени. Из этого следует, что

! мгновенная скорость тела всегда направлена по касательной к траектории в той её точке, где находится тело.

Действительно, рассмотрим движение точечного тела по криволинейной траектории (рис. 13). Пусть в момент времени t тело находится в точке A, а в момент $t + \Delta t$ – в точке B_1. Направление вектора средней скорости $\vec{v}_{ср1}$ совпадает с направлением вектора перемещения $\Delta\vec{r}_1$. Этот вектор направлен вдоль хорды AB_1. При уменьшении длительности рассматриваемого промежутка времени Δt до достаточно малого хорда «стягивается» в точку, а направление вектора $\vec{v}_{ср}$ стремится к направлению касательной в точке A. При этом средняя скорость $\vec{v}_{ср}$ становится мгновенной скоростью $\vec{v}$.

Для реальных тел при стремлении промежутка времени Δt к нулю средняя скорость (отношение $\Delta\vec{r}/\Delta t$) стремится к определённому предельному значению, которое имеет название *предел*. Это записывают так:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Обозначение $\lim$ следует читать как «предел».

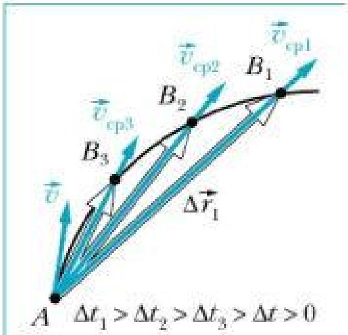


Рис. 13

Приведём пример, который позволяет лучше понять различия между средней путевой скоростью, средней скоростью и мгновенной скоростью. Представьте, что утром вы выехали со стоянки на автомобиле. Проехав за $\Delta t = 10$ ч путь $s = 600$ км, вы вечером вернулись на стоянку, припарковав автомобиль на том же самом месте. В данном случае средняя путевая скорость автомобиля равна отношению пройденного пути к затраченному на этот путь времени:

$$v_{ср.\,п} = \frac{s}{\Delta t} = \frac{600}{10} = 60 \left(\frac{км}{ч}\right).$$

Это скалярная величина, которая не имеет направления. Напротив, средняя скорость равна отношению перемещения автомобиля за время 10 часов к этому промежутку времени. Так как автомобиль через 10 часов вернулся на прежнее место, то его перемещение за этот промежуток времени равно нулю и $\vec{v}_{ср} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{0}{10} = 0$. Таким образом, в рассмотренном примере вектор средней скорости равен нулю. Мгновенная же скорость (или просто скорость) автомобиля в процессе его движения непрерывно изменялась. В какой-то момент времени автомобиль ехал на север со скоростью, модуль которой был равен, например, 100 км/ч, в какой-то — на восток с другой по модулю скоростью, а в какие-то моменты времени автомобиль стоял перед светофором и его скорость была равна нулю.

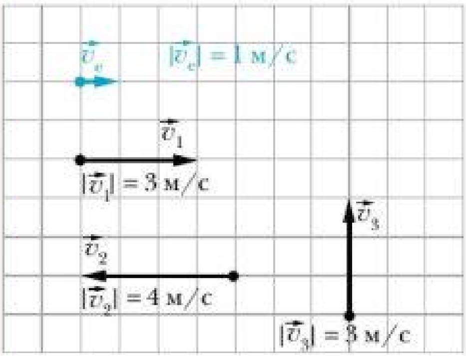


Рис. 14

Скорость (мгновенная скорость) — вектор. Единица модуля скорости в СИ — *метр в секунду* (м/с). Поэтому, чтобы изобразить вектор скорости графически, обычно задают соответствующий масштаб изображения, например с помощью вектора единичной скорости. При этом вектор единичной скорости, модуль которого равен 1 м/с, изображают в виде направленного отрезка $\vec{v}_e$ определённой

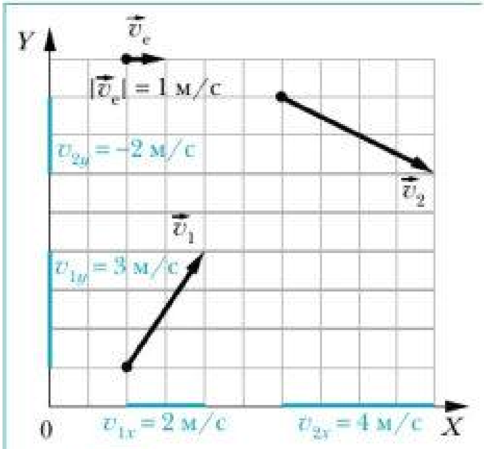


Рис. 15

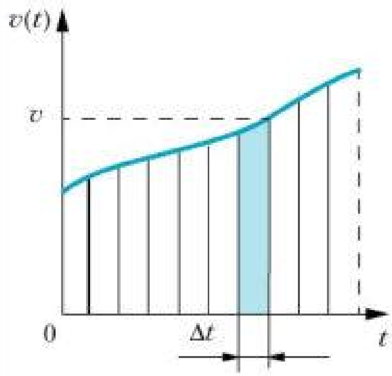


Рис. 16

длины. Тогда длина вектора, изображающего скорость $\vec{v}$, во столько раз больше (меньше) длины единичного отрезка $\vec{v}_e$, во сколько раз модуль этой скорости $|\vec{v}|$ больше (меньше) модуля единичной скорости. Примеры таких изображений показаны на рис. 14. Можно сказать, что длины векторов, изображающих скорости, измеряются в единицах скорости (м/с, км/ч и т. п.).

Понятно, что при таком изображении вектора скорости его проекции на координатные оси в выбранном масштабе измеряются в тех же единицах (рис. 15).

В заключение скажем, что если известна зависимость модуля скорости тела от времени $v(t)$, то можно определить путь s, пройденный телом за время t. Для этого надо построить график $v(t)$ (рис. 16).

! **Путь s, пройденный телом, всегда численно равен площади под графиком зависимости модуля скорости от времени $v(t)$.**

Покажем это. Разобьём весь промежуток времени от 0 до t на достаточно малые промежутки времени Δt. Тогда на каждом участке Δt движение тела неотличимо от равномерного прямолинейного. Рассмотрим один из таких участков Δt. На этом участке движение тела неотличимо от равномерного прямолинейного со скоростью, модуль которой равен v. Поэтому путь $\Delta s = v \cdot \Delta t$, пройденный телом, будет численно равен площади закрашенного прямоугольника со сторонами v и Δt. Весь искомый путь s, пройденный телом за время t, равен сумме всех путей Δs, пройденных за все достаточно малые промежутки времени Δt. В свою очередь, сумма площадей всех прямоугольников при стремлении каждого из промежутков времени Δt к нулю стремится к площади фигуры под графиком $v(t)$.

Вопросы

1. Сформулируйте определения средней путевой скорости, средней скорости и скорости. Какие из этих величин скалярные, а какие — векторные?
2. Сравните единицы модуля скорости тела и средней путевой скорости в СИ.
3. Как определить направление средней скорости, если известно положение тела в начальный и конечный моменты времени?
4. Куда направлена скорость тела при криволинейном движении?
5. Как по графику зависимости модуля скорости точечного тела от времени определить путь, пройденный телом?

*6. Что показывает спидометр движущегося автомобиля?

Упражнения

1. Точечное тело всё время двигалось в одном направлении. Половину пути оно двигалось со скоростью, модуль которой равен 10 м/с, а вторую половину — со скоростью, модуль которой равен 20 м/с. Определите среднюю путевую скорость тела.
2. Точечное тело движется вдоль оси Y по закону $y(t) = 2 + 3t$. Определите мгновенную скорость тела (модуль и направление) в моменты времени $t = 0$ и $t = 2$ с. Определите средние скорости (модуль и направление) тела за первую и вторую секунды движения. Сравните полученные результаты.
3. Точечные тела *1*, *2* и *3* движутся вдоль оси X. Графики их движения представлены на рис. 17. Определите средние путевые скорости, средние скорости и скорости этих тел.
4. Точечное тело всё время двигалось в одном и том же направ-

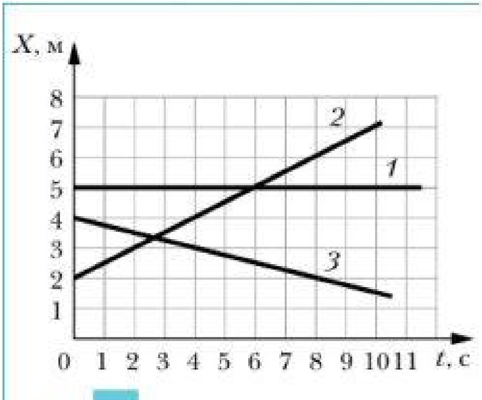


Рис. 17

лении. Половину времени оно двигалось со скоростью, модуль которой равен 15 м/с, а вторую половину времени — со скоростью, модуль которой равен 30 м/с. Определите среднюю путевую скорость тела.

§ 4 Равномерное прямолинейное движение

С точки зрения задачи описания движения самым простым его видом является *равномерное прямолинейное движение.*

Движение тела называют равномерным прямолинейным, если скорость тела не изменяется ($\vec{v}$ = const).

Рассмотрим пример такого движения. Пусть по прямой дороге едет автомобиль (рис. 18). Скорость $\vec{v}$ автомобиля относительно Земли постоянна, а её модуль равен 5 м/с. Опишем движение автомобиля, считая его точечным телом.

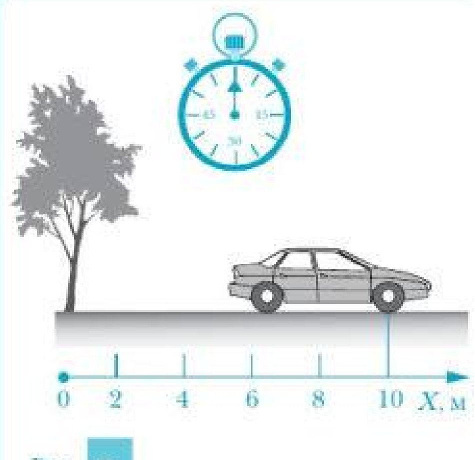


Рис. 18

Выберем в качестве тела отсчёта Землю. За начало отсчёта примем то место, где растёт дерево на обочине дороги. При описании прямолинейного движения координатную ось удобно направить таким образом, чтобы она была параллельна скорости $\vec{v}$ движения. Поэтому ось X направим от начала отсчёта параллельно дороге в направлении движения автомобиля. Пусть в момент включения часов (при $t = 0$) *начальная координата* автомобиля $x_0 = 10$ м.

В выбранной системе отсчёта направление скорости $\vec{v}$ автомобиля совпадает с положительным направлением оси X. Поэтому проекция скорости $\vec{v}$ на эту ось положительна и равна модулю скорости: $v_x = v = 5$ м/с.

За время t автомобиль проезжает путь $s = v_x \cdot t = 5t$ в положительном направлении оси X. Поэтому к моменту времени t координата $x(t)$ автомобиля:

$$x(t) = x_0 + s = x_0 + v_x \cdot t = 10 + 5t.$$

Зависимость координаты x тела от времени t

$$x(t) = x_0 + v_x \cdot t \qquad (1)$$

называют *законом равномерного прямолинейного движения* тела вдоль оси X. В этом законе x_0 — начальная координата тела, а v_x — проекция скорости $\vec{v}$ равномерного прямолинейного движения.

Если в закон движения (1) подставить конкретное значение времени t, то он превратится в уравнение, позволяющее вычислить координату x в этот момент времени t.

Если в закон движения (1) подставить заданную координату x, то из полученного уравнения можно определить момент времени t, в который тело будет находиться в точке с заданной координатой.

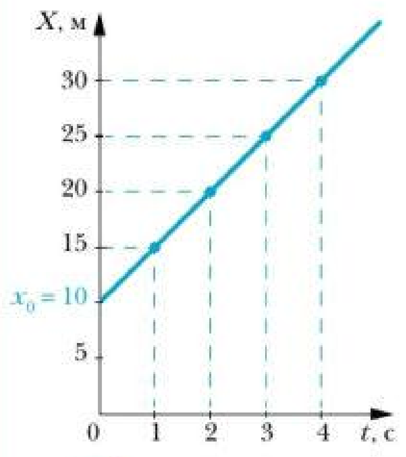


Рис. 19

Закон равномерного прямолинейного движения может быть представлен и в виде графика, описывающего зависимость координаты x тела от времени t. Для примера на рис. 19 показан график движения рассмотренного автомобиля. Понятно, что для любых значений начальной координаты x_0 и проекции скорости v_x график равномерного прямолинейного движения вдоль оси X будет представлять собой прямую линию, которая является графиком известной вам линейной функции.

Проведём анализ закона (1) равномерного прямолинейного движения.

Из закона следует, что изменение Δx координаты тела за время t равно разности его конечной координаты $x(t)$ и начальной координаты x_0:

$$\Delta x = x(t) - x_0 = v_x \cdot t.$$

Следовательно, изменение Δx координаты за время t пропорционально этому времени. Кроме того, изменение Δx координаты пропорционально проекции v_x скорости тела на ось X. Поэтому чем больше модуль проекции v_x скорости, тем быстрее изменяется координата тела с течением времени.

Отметим, что при равномерном прямолинейном движении путь s, пройденный телом, всегда будет равен модулю разности конечной $x(t)$ и начальной x_0 координат тела. С учётом записи закона (1) получаем:

$$s = |x(t) - x_0| = v \cdot t,$$

где v – модуль скорости равномерного движения.

Данное выражение для расчёта пройденного за время t пути s можно получить и из графика зависимости модуля v скорости тела от времени t (рис. 20). Действительно, площадь прямоугольника под графиком равномерного прямолинейного движения равна произведению его сторон: $v \cdot t$. Эта площадь равна пройденному телом пути s (*см.* § 3).

В некоторых задачах необходимо описывать равномерное прямолинейное движение тела, направление скорости которого не совпадает с направлением ни одной из координатных осей. Пример такого движения по плоскости XY показан на рис. 21. В этом случае для описания движения тела используют законы движения, которые представляют собой зависимости от времени всех изменяющихся координат. Например, для равномерно прямолинейно движущегося тела, траектория которого показана на рис. 21, это зависимости от времени двух координат:

$$x(t) = x_0 + v_x \cdot t;$$

$$y(t) = y_0 + v_y \cdot t,$$

где x_0 и y_0 – начальные координаты тела (т. е. координаты в момент времени $t = 0$), v_x и v_y – проекции постоянной скорости $\vec{v}$ соответственно на координатные оси X и Y.

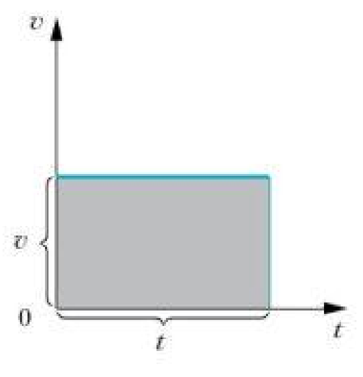


Рис. 20

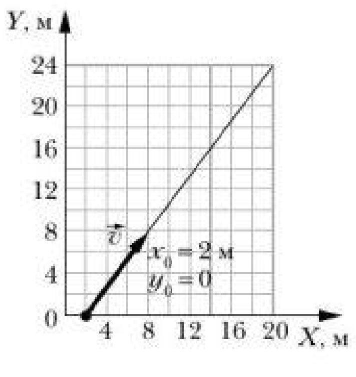


Рис. 21

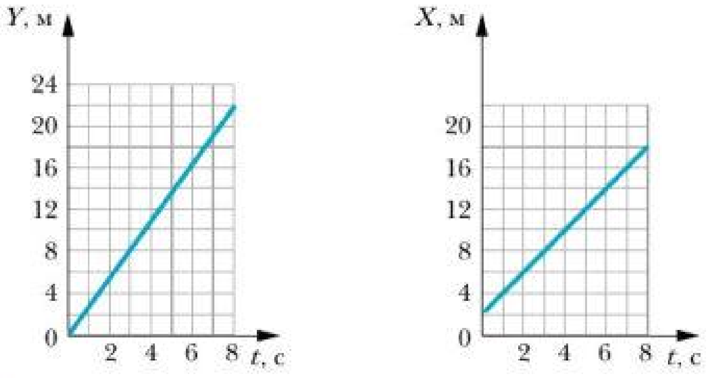


Рис. 22

В этом случае законы движения тела также могут быть представлены в графическом виде. При этом число графиков движения равно числу изменяющихся координат (рис. 22).

Вопросы

1. Какое движение называют равномерным прямолинейным?
2. Чему равен путь при равномерном прямолинейном движении вдоль оси X, если известны начальные и конечные координаты?
3. Как изменяется координата тела при равномерном прямолинейном движении вдоль оси X, если проекция скорости на эту ось: а) положительна; б) отрицательна; в) равна нулю?
4. Чему равен путь при равномерном прямолинейном движении вдоль оси X, если известны проекция скорости на эту ось и время движения?

*5. Как рассчитать модуль скорости тела, которое движется равномерно прямолинейно по плоскости XY, если известны проекции его скорости на координатные оси?

Упражнения

1. Точечные тела A и $Б$ движутся вдоль оси Y так, что их координаты изменяются по законам: 1) $y(t) = 2 + 3t$; 2) $y(t) = 5 - 2t$, где y

измеряют в метрах, а t — в секундах. Постройте графики движения тел. Определите по графикам координаты тел в моменты времени 1, 3 и 4 с. Определите по графикам моменты времени, в которые координаты тел равны 2 м и 4 м.

2 На рис. 23 показаны графики движения двух тел вдоль оси X. Определите начальные координаты и скорости этих тел. Запишите законы их движения.

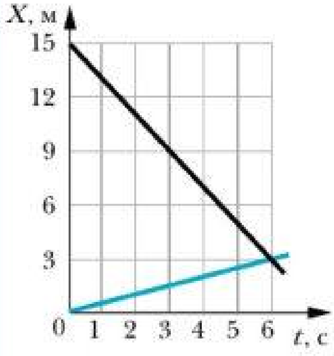


Рис. 23

3 Точечное тело движется по плоскости XY. На рис. 22 показаны графики его движения. Запишите законы движения этого тела в проекциях на координатные оси в аналитическом виде. Определите модуль скорости этого тела и проекции скорости на координатные оси.

§ 5 Решение задач кинематики равномерного прямолинейного движения. Графический и аналитический способы решения

Теперь, когда мы знаем, как описывать движение тел, примéним наши знания для решения задач. Вам известно, что существуют два способа решения кинематических задач: графический и аналитический. При использовании каждого из этих способов все кинематические задачи решают по одинаковым схемам. Рассмотрим эти схемы на конкретных примерах. Начнём с графического способа решения.

Графический способ решения

Задача 1. Пусть по прямолинейной дороге едет велосипедист со скоростью, модуль которой $v_в = 5$ м/с (рис. 24). Вслед за ним в том же направлении движется мотоциклист со скоростью, модуль которой $v_м = 20$ м/с. Расстояние между ними в начальный момент времени равно $s = 150$ м. Определите, где (на каком расстоянии от начального положения) мотоциклист догонит велосипедиста и когда (через какое время t) это произойдёт.

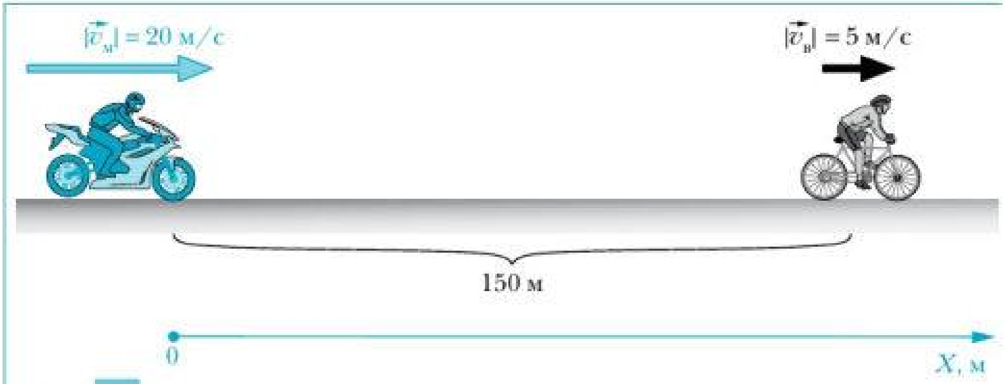


Рис. 24

Решение.

Шаг 0. Выбор модели.

Будем считать мотоциклиста и велосипедиста точечными телами.

Шаг 1. Выбор системы отсчёта.

В качестве тела отсчёта выберем Землю, а за начало отсчёта примем точку дороги, в которой находился мотоциклист в начальный момент времени. Координатную ось X направим вдоль дороги в направлении движения мотоциклиста. Часы (секундомер) включим в начальный момент времени $t = 0$.

Шаг 2. Определение начальных координат тел.

В выбранной системе отсчёта начальная координата мотоциклиста $x_{м0} = 0$, а велосипедиста – $x_{в0} = 150$ м.

Шаг 3. Определение проекций скоростей тел на координатную ось.

В выбранной системе отсчёта проекция скорости мотоциклиста на ось X положительна и поэтому равна модулю скорости мотоциклиста: $v_м = 20$ м/с. Проекция скорости велосипедиста на ось X также положительна и равна модулю скорости велосипедиста: $v_в = 5$ м/с.

Шаг 4. Построение графиков движения.

Строим координатную сетку, состоящую из оси времени t (в секундах) и оси координаты X (в метрах). Отметим на оси X начальные координаты мотоциклиста $x_{м0} = 0$ и велосипедиста $x_{в0} = 150$ м (рис. 25).

По условию задачи мотоциклист и велосипедист движутся равномерно. Поэтому графики их движения представляют собой прямые линии. Для построения графиков необходимо определить координаты тел ещё в какой-либо момент времени, отличный от нуля. Рассмотрим, например, момент времени $t = 5$ с. Вычислим координаты велосипедиста и мотоциклиста в этот момент времени:

$$x_в(t) = x_{в0} + v_в \cdot t = 150 + 5 \cdot 5 = 175 \text{ (м)};$$

$$x_м(t) = x_{м0} + v_м \cdot t = 0 + 20 \cdot 5 = 100 \text{ (м)}.$$

Нанесём на координатную сетку точки с координатами (5 с; 175 м) и (5 с; 100 м). Проведя через точки (0 с; 0 м) и (5 с; 100 м) прямую линию, получим график движения мотоциклиста. Аналогичным образом, проведя прямую линию через точки (0 с; 150 м) и (5 с; 175 м), получим график движения велосипедиста.

Из рис. 25 видно, что графики движения мотоциклиста и велосипедиста пересекаются в точке ($t_{встр}$ = 10 с; $x_{встр}$ = 200 м). Следовательно, в момент времени $t_{встр}$ = 10 с (т. е. через 10 с после включения секундомера) координаты мотоциклиста и велосипедиста станут равными:

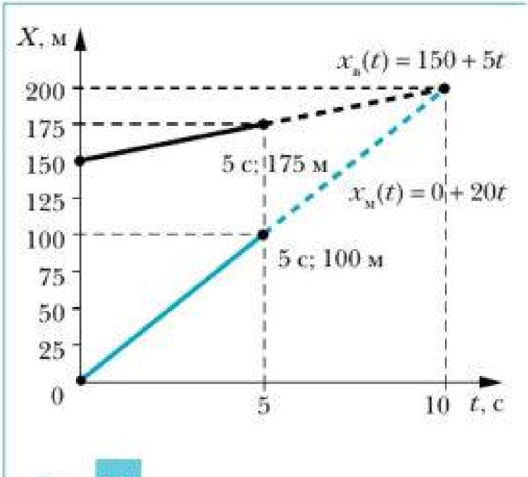


Рис. 25

$$x_м(t = 10 \text{ с}) = x_в(t = 10 \text{ с}) = x_{встр} = 200 \text{ (м)}.$$

Таким образом, мы получили ответы на вопросы, *«где»* и *«когда»* мотоциклист догонит велосипедиста.

Теперь рассмотрим пример решения задачи аналитическим способом.

Аналитический способ решения

Задача 2. Пусть два автомобиля *1* и *2* движутся навстречу друг другу относительно Земли со скоростями, модули которых равны соответственно v_1 = 20 м/с и v_2 = 30 м/с (рис. 26). В момент начала наблюдения расстояние между автомобилями было L = 300 м. Определите, через какое время $t_в$ после начала наблюдения произойдёт встреча этих автомобилей.

Будем решать задачу в общем виде.

Решение.

Шаг 0. Выбор модели.

Будем считать автомобили точечными телами.

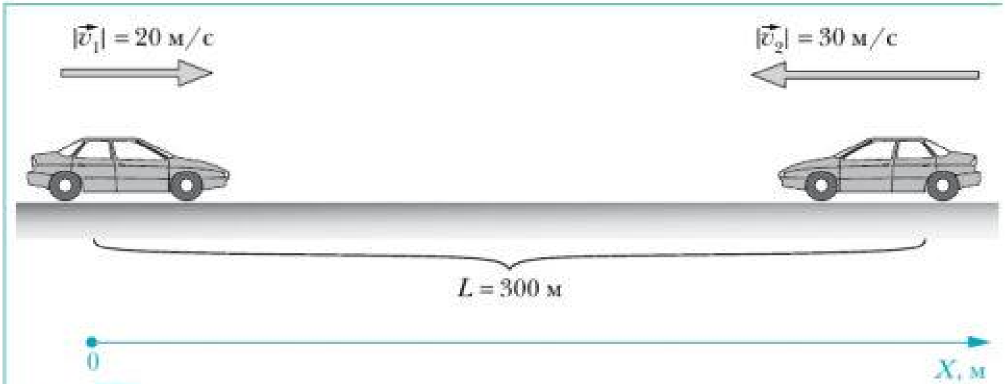


Рис. 26

Шаг 1. Выбор системы отсчёта.

В качестве тела отсчёта выберем Землю, за начало отсчёта примем точку дороги, в которой находился первый автомобиль. Координатную ось X направим от этой точки вдоль дороги в направлении второго автомобиля. Часы включим в момент начала наблюдения.

Шаг 2. Определение начальных координат тел.

В выбранной системе отсчёта начальная координата первого автомобиля $x_{10} = 0$, а второго – $x_{20} = L$.

Шаг 3. Определение проекций скоростей тел на координатную ось.

В выбранной системе отсчёта направление скорости первого автомобиля совпадает с положительным направлением оси X. Поэтому её проекция на ось X положительна и равна модулю скорости первого автомобиля: $v_{1x} = v_1$. Направление же скорости второго автомобиля противоположно положительному направлению оси X. Поэтому проекция скорости второго автомобиля на ось X отрицательна и равна взятому со знаком «минус» модулю скорости второго автомобиля: $v_{2x} = -v_2$.

Шаг 4. Запись законов движения тел.

Законы движения равномерно движущихся первого и второго автомобилей с учётом полученных данных имеют вид:

$$x_1(t) = x_{10} + v_{1x} \cdot t = 0 + v_1 \cdot t;$$

$$x_2(t) = x_{20} + v_{2x} \cdot t = L - v_2 \cdot t.$$

Шаг 5. Запись условия задачи в виде уравнения.

В условии задачи сказано, что в искомый момент времени $t_в$ автомобили встретились, т. е. в этот момент времени их координаты стали равными:

$$x_1(t_в) = x_2(t_в).$$

Шаг 6. Сведéние полученных уравнений в систему и присвоение им названий.

$x_1(t) = v_1 \cdot t;$ (1) (*закон движения первого автомобиля*)

$x_2(t) = L - v_2 \cdot t;$ (2) (*закон движения второго автомобиля*)

$x_1(t_в) = x_2(t_в).$ (3) (*условие встречи*)

Шаг 7. Решение системы.

Подставив уравнения (1) и (2) для момента времени $t = t_в$ в условие (3), получим:

$$v_1 \cdot t_в = L - v_2 \cdot t_в.$$

Отсюда $t_в = \dfrac{L}{v_1 + v_2}$.

Шаг 8. Анализ полученного результата и расчёт ответа.

Прежде всего *необходимо проверить размерность полученного результата.* Поскольку в СИ длину измеряют в метрах (м), а модули скоростей — в метрах в секунду (м/с), размерность дроби соответствует размерности времени:

$$\frac{[\text{м}]}{\left[\dfrac{\text{м}}{\text{с}}\right]} = [\text{с}].$$

Таким образом, *с точки зрения размерности полученный результат верен*.

Теперь исследуем, как будет изменяться полученное нами значение $t_в$ при разных изменениях величин, входящих в полученную зависимость.

Если расстояние L увеличить, например, в 10 раз, а скорости автомобилей оставить неизменными, то числитель дроби увеличится в 10 раз, а знаменатель дроби останется неизменным. Тогда сама дробь увеличится в 10 раз. Следовательно, время $t_в$ также увеличится в 10 раз. Таким образом, *чем больше начальное расстояние L между движущимися навстречу друг другу автомобилями, тем позже они встретятся.*

Если модули скоростей обоих автомобилей увеличить, например, в 2 раза, то их сумма $(v_1 + v_2)$, стоящая в знаменателе, также увеличится в 2 раза. В этом случае вся дробь при неизменном числителе L уменьшится в 2 раза. Следовательно, время встречи $t_в$ уменьшится также в 2 раза. Таким образом, *чем больше модули v_1 и v_2 скоростей движущихся навстречу друг другу автомобилей, тем раньше они встретятся.*

Полученные нами выводы соответствуют результатам, обычно наблюдаемым в экспериментах. В этом случае говорят, что в задаче получен ответ, который имеет физический смысл. На этом решение задачи в общем виде можно считать законченным. Теперь следует провести численный расчёт, подставив в полученное выражение числовые данные: К

$$t_в = \frac{L}{v_1 + v_2} = \frac{300}{20 + 30} = 6 \text{ (с)}.$$

Ответ: автомобили встретятся через 6 с.

К При подстановке в формулу числовых значений следят за тем, чтобы все значения были выражены в СИ. В данном случае: расстояние — в метрах, скорость — в метрах в секунду. При использовании кратных и дольных единиц величин следят за их соответствием: например, если бы скорость в данной задаче была задана в километрах в час, то расстояние должно быть выражено в километрах. В этом случае числовой ответ к данной задаче будет получен в часах.

Вопросы

1. Как по графикам движения определить: а) место встречи тел; б) время встречи тел?
2. Поясните, зачем необходимо анализировать размерность полученного ответа.

*3. Какие выводы позволяет сделать анализ полученного ответа?

Упражнения

1. Автомобиль и мотоцикл движутся навстречу друг другу со скоростями, модули которых равны 30 м/с и 20 м/с соответственно. Расстояние между ними в начальный момент времени равно 150 м. Найдите аналитическим способом время встречи автомобиля с мотоциклом и расстояние, которое проехал мотоцикл.
2. Решите задачу 1 графическим способом.
3. Муравей и черепаха движутся вдоль стены здания друг за другом. Муравей догоняет черепаху. В начальный момент времени расстояние между ними равно 75 см. Модуль скорости муравья равен 5 см/с, а модуль скорости черепахи равен 2,5 см/с. Когда муравей догонит черепаху? Решите задачу аналитическим и графическим способами.

4 Моська погналась за разозлившим её слоном. Модуль скорости слона равен 2 м/с, а модуль скорости Моськи — 12 м/с. Когда Моська догонит слона, если в начальный момент времени расстояние между ними равно 300 м?

§ 6 Сложение движений. Преобразования Галилея

Описание положения тела в пространстве зависит от выбора системы отсчёта, т. е. такое описание *относительно*. Другими словами, координаты одного и того же тела относительно двух разных тел отсчёта (в двух разных системах координат) могут быть разными (*см.* § 2).

Если же одно тело отсчёта движется относительно другого тела отсчёта, то различаться будут не только координаты изучаемого тела, но и изменения координат.

! Следовательно, и перемещение тела, и скорость, и законы движения зависят от выбора системы отсчёта.

Исследуем, как изменяются перемещение и скорость тела при переходе из одной системы отсчёта в другую. Пусть по озеру *поступательно* относительно берегов движется льдина (рис. 27). По льдине от палатки к флагу идёт человек. Будем считать палатку, флаг и человека точечными телами. В начальный момент наблюдения человек находился в точке A льдины (рядом с палаткой).

Рассмотрим движение человека в двух системах отсчёта. Первую систему отсчёта XY свяжем с берегом озера (*см.* рис. 27). Эта система отсчёта неподвижна относительно поверхности Земли. Её называют *лабораторной* системой отсчёта. Вторую систему отсчёта $X'Y'$ свяжем с льдиной. Начало отсчёта этой системы поместим в точку A льдины, координатные оси X' и Y' направим параллельно соответствующим осям X и Y. Вторую систему отсчёта назовём *движущейся*, так как она вместе с льдиной движется относительно лабораторной системы отсчёта.

Пусть человек проходит по льдине от палатки до флага за некоторый промежуток времени Δt. При этом относительно льдины (т. е. в движущейся системе отсчёта) он совершает перемещение $\Delta\vec{r}\,'$ (*см.* рис. 27). За это же время Δt точка A льдины совершает, как и вся льдина, перемещение $\Delta\vec{r}_{\text{отн}}$ относительно берега (т. е. относительно лабораторной системы отсчёта). Точка A льдины совпадает с началом отсчёта движущейся системы отсчёта

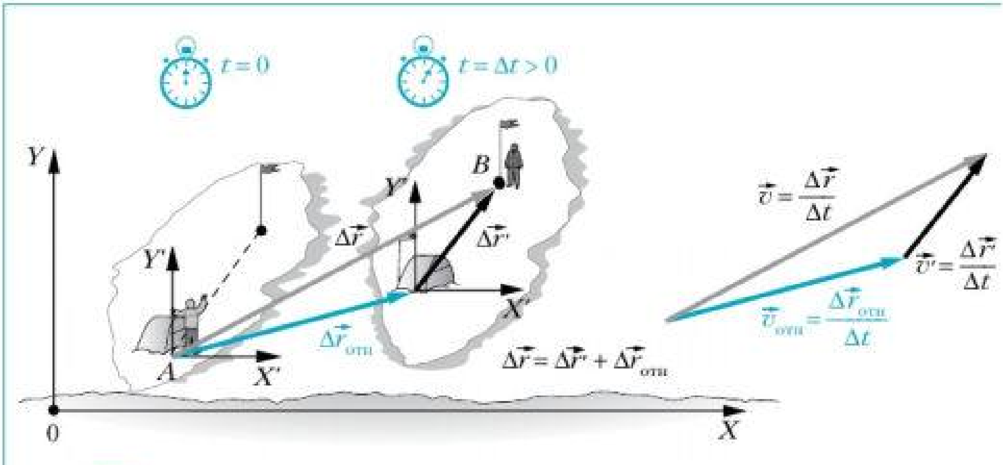


Рис. 27 Система отсчёта $X'Y'$, связанная с льдиной, движется поступательно относительно лабораторной системы отсчёта XY

$X'Y'$. Поэтому $\Delta\vec{r}_{\text{отн}}$ – это перемещение начала отсчёта движущейся системы $X'Y'$ относительно берега.

В результате относительно берега (т. е. в лабораторной системе отсчёта XY) человек за время Δt перемещается из точки A в точку B. Из рисунка видно, что в системе отсчёта XY вектор его перемещения равен:

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}' + \Delta\vec{r}_{\text{отн}}. \qquad (1)$$

Таким образом, *перемещение* $\Delta\vec{r}$ *человека относительно берега равно сумме перемещения человека* $\Delta\vec{r}'$ *относительно льдины и перемещения самой льдины* $\Delta\vec{r}_{\text{отн}}$ *относительно берега.*

! Можно сказать, что движение человека относительно берега есть суперпозиция (сумма) движений льдины относительно берега и человека относительно льдины.

Понятно, что при движении льдины и человека соотношение (1) будет выполняться для любого промежутка времени Δt, в том числе и для достаточно малого. Рассмотрим перемещения $\Delta\vec{r}$, $\Delta\vec{r}_{\text{отн}}$ и $\Delta\vec{r}'$ за достаточно малый промежуток времени Δt, следующий сразу за некоторым моментом времени t. Тогда, разделив обе части соотношения (1) на Δt, получаем:

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}'}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{r}_{\text{отн}}}{\Delta t}.$$

Следовательно, в соответствии с определением скорости,

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{\text{отн}},$$

где $\vec{v}$ — скорость человека относительно берега, $\vec{v}'$ — скорость человека относительно льдины, $\vec{v}_{\text{отн}}$ — скорость льдины относительно берега.

Подведём итог. Пусть система отсчёта $X'Y'$ движется поступательно относительно системы отсчёта XY. В этом случае выполняются два закона, которые называют *преобразованиями Галилея*.

Закон сложения перемещений

Перемещение $\Delta\vec{r}$ точечного тела в системе отсчёта XY равно сумме перемещения $\Delta\vec{r}'$ этого тела в системе отсчёта $X'Y'$ и перемещения $\Delta\vec{r}_{\text{отн}}$ начала системы отсчёта $X'Y'$ относительно системы отсчёта XY:

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}' + \Delta\vec{r}_{\text{отн}}. \qquad (2)$$

Закон сложения скоростей

Скорость $\vec{v}$ точечного тела в системе отсчёта XY равна сумме скорости $\vec{v}'$ этого тела в системе отсчёта $X'Y'$ и скорости $\vec{v}_{\text{отн}}$, с которой система отсчёта $X'Y'$ движется относительно системы отсчёта XY:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{\text{отн}}. \qquad (3)$$

Отметим, что если координатные оси X' и Y' системы отсчёта $X'Y'$ параллельны координатным осям X и Y системы отсчёта XY, то соотношения (1) и (2) можно записать не только в векторном виде, но и в виде соотношения между проекциями перемещений и скоростей:

$$\Delta x = \Delta x' + \Delta x_{\text{отн}},\ \Delta y = \Delta y' + \Delta y_{\text{отн}}; \qquad (2')$$

$$v_x = v'_x + v_{\text{отн}\,x},\ v_y = v'_y + v_{\text{отн}\,y}. \qquad (3')$$

Рассмотрим несколько примеров применения полученных соотношений.

Пример 1. Вывод законов движения тела в разных системах отсчёта

Пусть по прямолинейной дороге равномерно относительно Земли движется поезд со скоростью $\vec{v}_{\text{отн}}$ (рис. 28). По вагону поезда в направлении его движения со скоростью $\vec{v}'$ относительно вагона идёт человек. Будем считать человека точечным телом. Выберем две системы отсчёта, которые связаны с разными телами отсчёта и движутся друг относительно друга. В качестве первого тела отсчёта выберем Землю. За начало отсчёта примем место дороги (точка O), над которым в начальный момент време-

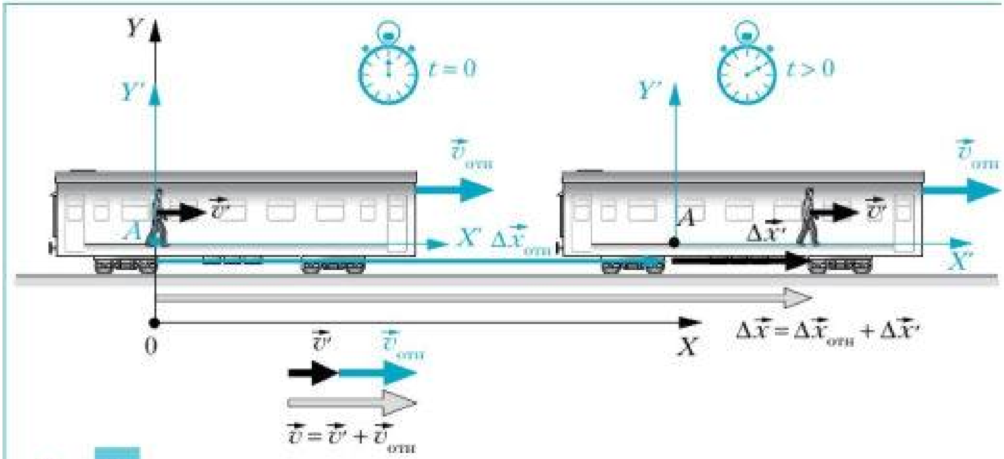


Рис. 28

ни $t = 0$ находился человек. Оси X и Y этой системы отсчёта направим так, как показано на рис. 28. Система отсчёта XY – лабораторная.

Вторую систему отсчёта свяжем с вагоном. За начало отсчёта примем место на полу вагона (точку A), на котором стоял человек в момент времени $t = 0$. Оси X' и Y' второй системы отсчёта также показаны на рис. 28. Система отсчёта $X'Y'$ – движущаяся.

Определим законы движения человека в каждой из систем отсчёта. Рассмотрим вначале движение человека в движущейся системе отсчёта. Начальная координата человека в момент времени $t = 0$ равна $x'_0 = 0$. Человек равномерно движется в положительном направлении оси X' со скоростью $\vec{v}'$. Поэтому проекция v'_x его скорости на ось X' положительна и равна модулю скорости $\vec{v}'$. За время t проекция $\Delta x'$ его перемещения на ось X' равна $\Delta x' = v'_x \cdot t$. В результате к моменту t его координата $x'(t)$ станет равной $x'(t) = x'_0 + v' \cdot t = v' \cdot t$.

Мы получили закон движения человека в движущейся системе отсчёта, связанной с вагоном.

Теперь рассмотрим движение точки A пола вагона в лабораторной системе отсчёта. Начальная координата точки A в момент времени $t = 0$ равна $x_{A0} = 0$. Точка A вагона равномерно движется относительно Земли со скоростью $\vec{v}_{\text{отн}}$ в положительном направлении оси X. Поэтому проекция $v_{\text{отн}\,x}$ её скорости на ось X положительна и равна модулю скорости $\vec{v}_{\text{отн}}$. За время t проекция $\Delta x_{\text{отн}}$ перемещения точки A на ось X равна $\Delta x_{\text{отн}} = v_{\text{отн}\,x} \cdot t$. В результате к моменту t координата точки A станет равной:

$$x_A(t) = x_{A0} + v_{\text{отн}} \cdot t = v_{\text{отн}} \cdot t.$$

Теперь рассмотрим движение человека в лабораторной системе отсчёта. Его начальная координата при $t = 0$ равна $x_0 = 0$. За время t проекция Δx перемещения человека в системе отсчёта XY (*см.* рис. 28) равна сумме проекции $\Delta x_{\text{отн}}$ перемещения точки A — начала отсчёта движущейся системы отсчёта $X'Y'$ — и проекции $\Delta x'$ перемещения человека в этой движущейся системе отсчёта за то же время t:

$$\Delta x = \Delta x_{\text{отн}} + \Delta x'. \qquad (3)$$

Следовательно, к моменту времени t координата $x(t)$ человека с учётом соотношения (3) будет равна:

$$x(t) = x_0 + \Delta x = \Delta x_{\text{отн}} + \Delta x' = v_{\text{отн}} \cdot t + v' \cdot t = (v_{\text{отн}} + v') \cdot t. \qquad (4)$$

Таким образом, закон движения человека в лабораторной системе отсчёта имеет вид:

$$x(t) = v \cdot t, \text{ где } v = v_{\text{отн}} + v'. \qquad (5)$$

Из соотношения (5) видно, что человек относительно Земли движется равномерно и прямолинейно вдоль оси X со скоростью $\vec{v}$, модуль которой равен сумме модулей скорости $\vec{v}_{\text{отн}}$ вагона относительно Земли и скорости $\vec{v}'$ человека относительно вагона.

Отметим, что этот результат можно было получить сразу, воспользовавшись соотношением (2′). Таким образом, в рассмотренном примере

! движение человека относительно Земли можно представить в виде суперпозиции (суммы) двух движений: его движения относительно вагона и движения вагона относительно Земли.

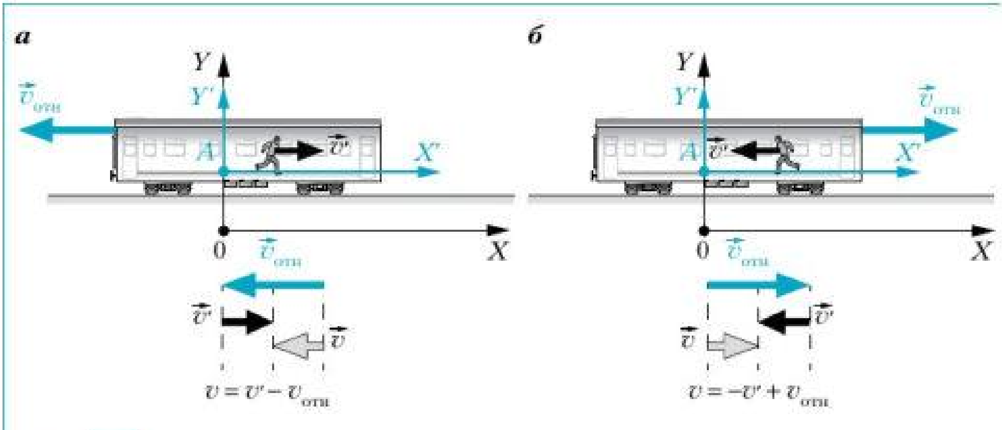


Рис. 29

Легко понять, что если в рассмотренном примере человек или поезд движется не в положительном, а в отрицательном направлении координатной оси, то проекция соответствующей скорости в соотношении (2′) будет отрицательной. Примеры таких движений показаны на рис. 29.

Пример 2. Движение связанных тел

Пусть по морю движется катер со скоростью $\vec{v}_2$ относительно воды и берега. С берегом связана система отсчёта XY (рис. 30, *а*). К катеру прикреплён трос, за другой конец которого держится спортсмен на водных лыжах. Скорость спортсмена относительно воды равна $\vec{v}_1$. Определим скорость $\vec{v}'$ движения катера относительно спортсмена.

Будем считать катер и спортсмена точечными телами. В качестве начала отсчёта движущейся системы $X'Y'$ выберем спортсмена. Ось X' проведём от спортсмена в направлении катера, а ось Y' – перпендикулярно оси X'. Тогда скорость $\vec{v}_{\text{отн}}$ движения этой системы отсчёта относительно системы отсчёта XY равна скорости движения спортсмена $\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_1$. Скорость $\vec{v}_2$ катера относительно воды и берега, с которым связана система отсчёта XY, равна сумме скорости $\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_1$ спортсмена относительно берега и искомой скорости $\vec{v}'$ катера относительно спортсмена (рис. 30, *б*):

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}' = \vec{v}_1 + \vec{v}'.$$

Следовательно, искомая скорость $\vec{v}'$ катера относительно спортсмена равна:

$$\vec{v}' = \vec{v}_2 - \vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1. \qquad (6)$$

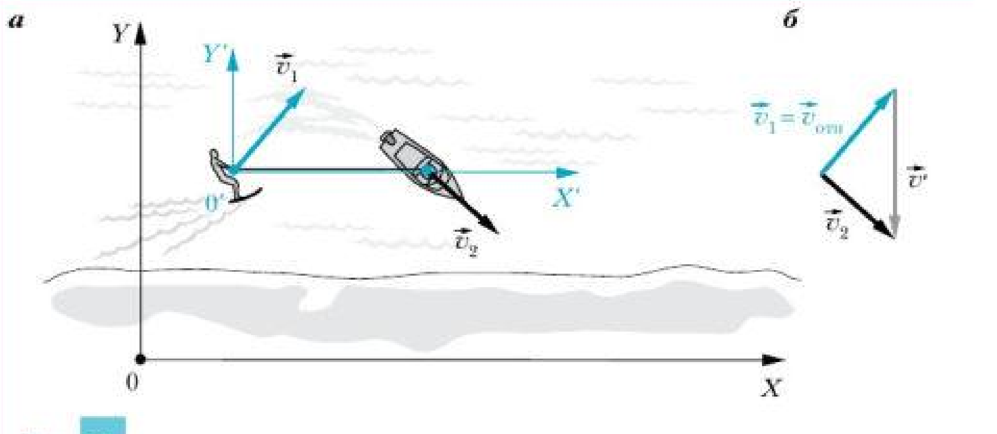


Рис. 30

Этот результат можно получить иначе: в системе отсчёта $X'Y'$ спортсмен находится в покое, а вода движется со скоростью $-\vec{v}_1$. Относительно воды катер перемещается со скоростью $\vec{v}_2$. В результате сложения этих двух движений мы получаем соотношение (6).

Из соотношения (6) следует важный вывод, который часто используют при решении широкого круга задач. Пусть направление оси X связанной с берегом системы отсчёта XY выбрано таким образом, что она параллельна оси X' (*см.* рис. 30). Тогда, рассматривая проекцию скорости $\vec{v}'$ на оси X' и X, получаем:

$$v'_x = v_{2x} - v_{1x}. \qquad (7)$$

Отметим, что ось X' направлена от спортсмена к катеру. Поэтому проекция v'_x представляет собой не что иное, как скорость сближения, т. е. скорость изменения расстояния между катером и спортсменом. Однако в рассмотренном примере это расстояние равно длине прикреплённого к катеру троса, за другой конец которого держится спортсмен. Следовательно, если длина троса неизменна, то это расстояние постоянно, и $v'_x = 0$. В этом случае из соотношения (7) следует, что

$$v_{2x} = v_{1x}.$$

Таким образом, мы приходим к важному с практической точки зрения выводу.

! Если расстояние между двумя движущимися телами не изменяется с течением времени, то проекции скоростей этих тел на ось, которая параллельна прямой, соединяющей эти тела, равны друг другу.

Вопросы

1. Сформулируйте закон сложения: а) перемещений; б) скоростей.
2. Какую систему отсчёта принято называть: а) лабораторной; б) движущейся?
3. Чему равен модуль скорости сближения двух движущихся навстречу друг другу тел?

Упражнения

1 Автомобиль и мотоцикл движутся относительно Земли навстречу друг другу со скоростями, модули которых равны соответственно 20 м/с и 15 м/с. Расстояние между ними в начальный момент времени равно 250 м. Найдите графическим и аналитическим способами время встречи автомобиля с мотоциклом, связав систему отсчёта с автомобилем.

2 Через какое время автомобиль, движущийся со скоростью, модуль которой равен 108 км/ч, догонит велосипедиста, едущего в том же направлении со скоростью, модуль которой равен 10 м/с, если расстояние между ними в начальный момент времени равно 700 м? Решите задачу аналитическим способом, связав систему отсчёта с автомобилем.

*3 Моторная лодка переплывает реку шириной 100 м. Модуль скорости течения реки равен 2 м/с, а модуль скорости лодки относительно воды равен 4 м/с (рис. 31). Под каким углом α к течению должен быть направлен вектор скорости лодки, чтобы она оказалась на противоположном берегу точно напротив места старта? Определите скорость движения лодки относительно берегов и время переправы.

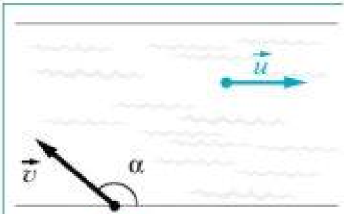


Рис. 31

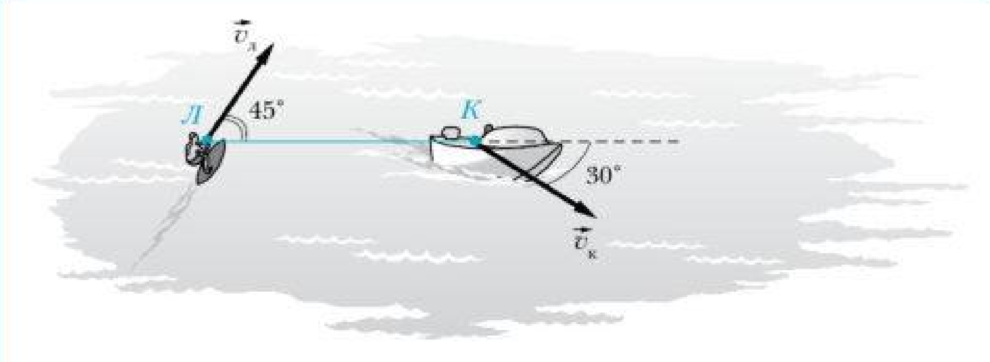


Рис. 32

Для углублённого уровня

4 По озеру движется катер со скоростью, модуль которой $v_к = 10$ м/с (рис. 32). К катеру прикреплён трос, за другой конец которого держится спортсмен на водных лыжах. Скорость катера направлена под углом $30°$ к тросу, а скорость спортсмена — под углом $45°$ к тросу. Определите модуль скорости спортсмена.

*5 В вершинах квадрата со стороной l находятся четыре черепахи (рис. 33). Первая черепаха смотрит на вторую, вторая — на третью, третья — на четвёртую, а четвёртая — на первую. В некоторый момент времени они начинают двигаться с одинаковыми по модулю скоростями $\vec{v}$. Каждая черепаха в любой момент времени движется в направлении той черепахи, на которую она смотрит. Определите время движения черепах до их встречи в центре квадрата.

*6 Определите модуль перемещения первой черепахи из задачи 5 и пройденный ею путь.

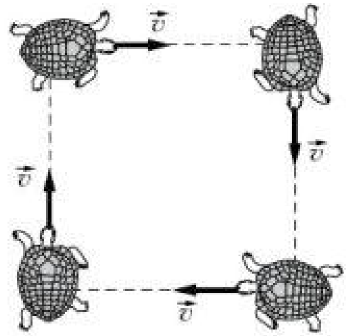


Рис. 33

§ 7 Ускорение. Равноускоренное прямолинейное движение. Свободное падение

Ускорение

Вы научились описывать равномерное прямолинейное движение, при котором скорость тела постоянна. В реальных условиях такое движение встречается крайне редко. Обычно при движении скорость тела непрерывно изменяется. Причём она может изменяться как по модулю, так и по направлению. Для того чтобы характеризовать изменение скорости с течением времени, вводят физическую величину, которую называют *ускорением*.

Рассмотрим, например, движение автомобиля, который будем считать точечным телом (рис. 34). Пусть за промежуток времени от t до $t + \Delta t$ скорость автомобиля изменяется от $\vec{v}$ до $\vec{v} + \Delta\vec{v}$.

Средним ускорением за промежуток времени Δt называют отношение изменения скорости $\Delta\vec{v}$ за промежуток времени Δt к длительности этого промежутка:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \qquad (1)$$

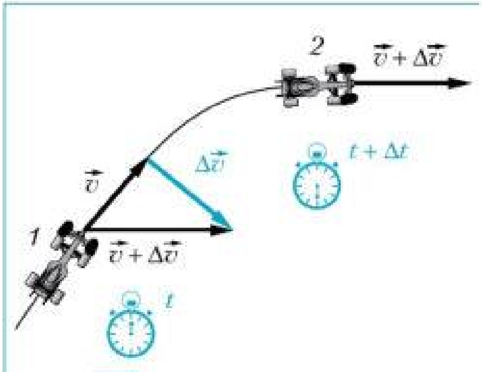


Рис. 34 При движении с ускорением скорость тела может меняться как по модулю, так и по направлению

Из формулы (1) следует несколько выводов. Во-первых, направление вектора среднего ускорения $\vec{a}_{\text{ср}}$ совпадает с направлением вектора изменения скорости $\Delta\vec{v}$. Во-вторых, модуль среднего ускорения тем больше, чем больше модуль изменения скорости и чем меньше промежуток времени, за который это изменение произошло.

Уменьшение в формуле (1) рассматриваемого промежутка времени Δt до достаточно малого позволяет перейти от среднего ускорения за промежуток Δt к понятию ускорения (мгновенного ускорения) в момент времени t.

Ускорением (мгновенным ускорением) тела в момент времени t называют физическую величину, равную отношению изменения $\Delta\vec{v}$ скорости тела за достаточно малый промежуток времени Δt, начинающийся сразу после момента времени t, к длительности этого промежутка:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}, \text{ где } \Delta t \to 0.$$

Единица модуля ускорения и его проекций в СИ – *метр на секунду в квадрате* (м/с^2).

Если известны ускорение $\vec{a}$ точечного тела и его начальная скорость $\vec{v}_0$, то можно определить скорость этого тела в любой последующий момент времени. Покажем, как это делается в самом простом случае, когда тело движется с постоянным ускорением.

При стремлении промежутка времени Δt к нулю среднее ускорение (отношение $\Delta\vec{v}/\Delta t$) стремится к определённому предельному значению:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Будем считать, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ скорость тела равна $\vec{v}_0$. Определим скорость $\vec{v}(t)$ тела в момент времени t. Обозначим $\Delta t = t - t_0$, т. е. $\Delta t = t$, и обозначим $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}_0$. Тогда формула (1) для случая постоянного ускорения примет вид:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}_0}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}_0}{t}. \qquad (2)$$

Следовательно,

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t. \qquad (3)$$

Равноускоренное прямолинейное движение

Пусть тело движется прямолинейно с постоянным ускорением. Тогда его движение будет *равноускоренным прямолинейным*.

Прямолинейное движение тела называют равноускоренным прямолинейным, если в процессе движения ускорение тела остаётся постоянным, т. е. не изменяется с течением времени.

Такое движение удобно рассматривать в системе отсчёта, где координатная ось X параллельна направлению движения тела. При таком выборе системы отсчёта выражение (3) превращается в *закон изменения проекции скорости при равноускоренном прямолинейном движении вдоль оси X*:

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x \cdot t, \qquad (4)$$

где v_{0x} — проекция на ось X начальной скорости тела, a_x — проекция на ось X ускорения тела, а $v_x(t)$ — проекция на ту же ось скорости тела в момент времени t.

При равноускоренном прямолинейном движении в выбранной системе отсчёта векторы скорости и ускорения параллельны координатной оси X. Модули проекций этих векторов соответственно равны модулям самих векторов. Знак же проекции каждого вектора зависит от того, совпадает ли его направление с положительным направлением оси X или его направление противоположно.

Пусть, например, направления векторов начальной скорости $\vec{v}_0$ и ускорения $\vec{a}$ тела совпадают с положительным направлением координатной оси X (рис. 35, *а*). Тогда проекции этих векторов v_{0x} и a_x будут положительными. В этом случае из уравнения (4) следует, что с течением времени значение $v_x(t)$ будет увеличиваться, т. е. *тело будет разгоняться.*

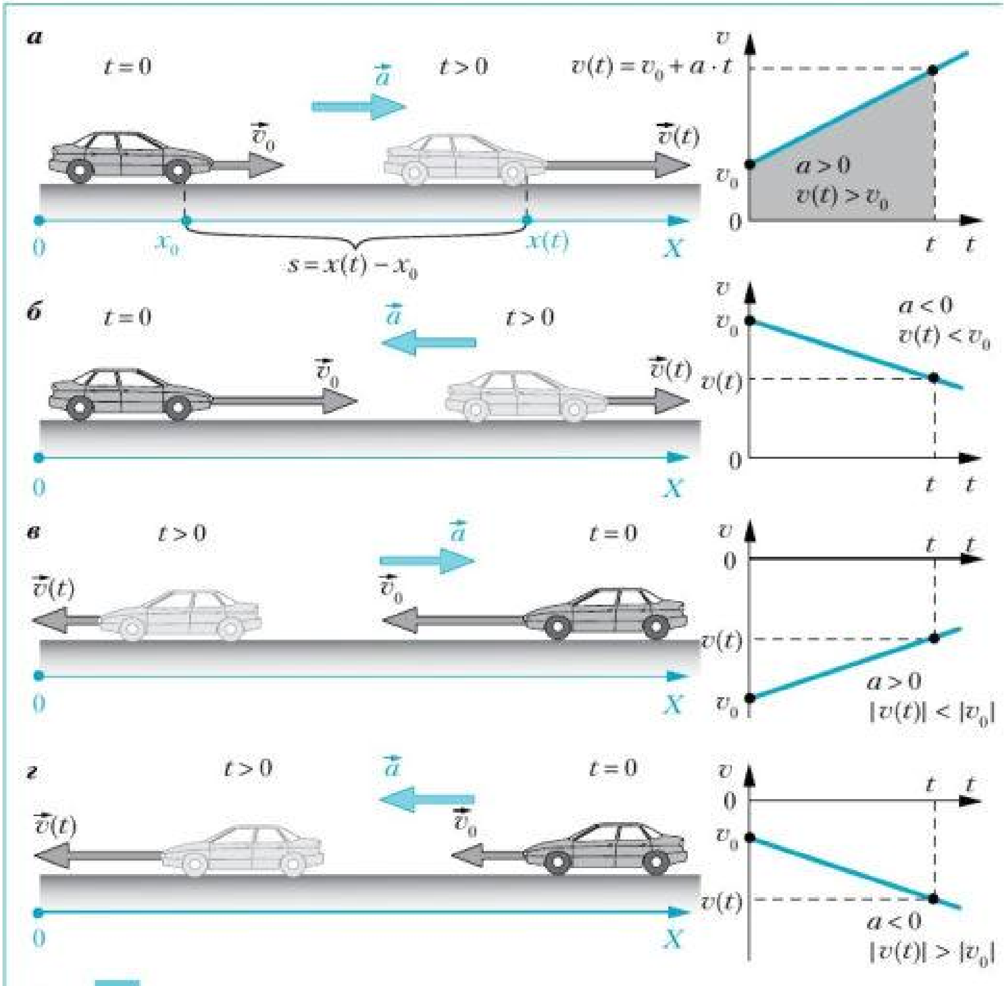


Рис. 35

Если же вектор начальной скорости $\vec{v}_0$ сонаправлен положительному направлению координатной оси X, а вектор ускорения $\vec{a}$ тела противонаправлен координатной оси (рис. 35, *б*), то проекция $v_{0x} > 0$, а проекция $a_x < 0$. В этом случае значение $v_x(t)$ с течением времени будет равномерно уменьшаться, т. е. *тело будет замедляться*. Отметим, что такое движение иногда называют *равнозамедленным*. Другие варианты направлений векторов $\vec{v}_0$ и $\vec{a}$ в выбранной системе отсчёта показаны на рис. 35, *в* и *г*.

Выведем формулу для расчёта пути s, который проходит тело при равноускоренном прямолинейном движении в одном направлении за время t. Будем для определённости считать, что система отсчёта выбрана таким образом, что тело движется в положительном направлении оси X и проекция ускорения тела на ось X положительна: $a_x > 0$, т. е. тело разгоняется в положительном направлении оси X. В этом случае график зависимости модуля v скорости тела от времени t имеет вид, показанный на рис. 35, *а*. Следовательно (*см.* § 3), путь s, пройденный телом за время t, будет численно равен площади закрашенной трапеции на рис. 35, *а*.

Основания этой трапеции равны v_0 и $(v_0 + a \cdot t)$, а её высота равна t. Поэтому площадь трапеции, а следовательно, и пройденный телом за время t путь s равны:

$$s = \frac{v_0 + (v_0 + a \cdot t)}{2} \cdot t = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}.$$

Если тело совершает равноускоренное прямолинейное движение всё время в положительном направлении оси X, имея значения начальной скорости v_0 и ускорения a, то пройденный телом за время t путь составляет:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}. \qquad (5)$$

Вместе с тем при заданных условиях пройденный путь s равен разности конечной $x(t)$ и начальной x_0 координат тела:

$$s = x(t) - x_0. \qquad (6)$$

Сопоставляя выражения (5) и (6), получаем зависимость координаты x от времени t:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}. \qquad (7)$$

Мы вывели зависимость координаты тела от времени для случая, когда тело движется прямолинейно, равномерно ускоряясь в положительном направлении оси X, т. е. когда проекции начальной скорости $\vec{v}_0$ и ускорения $\vec{a}$ тела положительны: $v_{0x} > 0$, $a_x > 0$.

Можно показать, что полученное соотношение (7) применимо не только для случаев, когда направления начальной скорости $\vec{v}_0$ и ускорения $\vec{a}$ совпадают с положительным направлением оси X. При этом входящие в соотношение (7) значения проекций начальной скорости v_{0x} и ускорения a_x должны иметь соответствующие знаки. Например, если вектор $\vec{v}_0$ или $\vec{a}$ направлен в отрицательном направлении оси X, то в соотношении (7) значение проекции соответствующего вектора будет отрицательным. С учётом сказанного

закон равноускоренного прямолинейного движения тела вдоль координатной оси X в общем случае имеет вид:

$$x(t) = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2}. \qquad (8)$$

Свободное падение

Ярким примером равноускоренного прямолинейного движения является *свободное падение* тела, которое роняют без начальной скорости или бросают вертикально (вверх или вниз). К[1]

Понятно, что в реальности на любое падающее тело действует не только сила тяжести, но и другие силы (например, сила сопротивления воздуха). Таким образом, свободное падение – это модель. Однако в некоторых случаях, если падающее тело движется с небольшой скоростью и обладает достаточно большой плотностью и малыми размерами, при описании его полёта можно пренебречь всеми силами, кроме силы тяжести, и считать движение тела *свободным падением*. При этом, если тело движется вблизи поверхности Земли, считают, что ускорение тела в любой момент времени направлено вертикально вниз и по модулю равно $g = 10$ м/с^2. К[2]

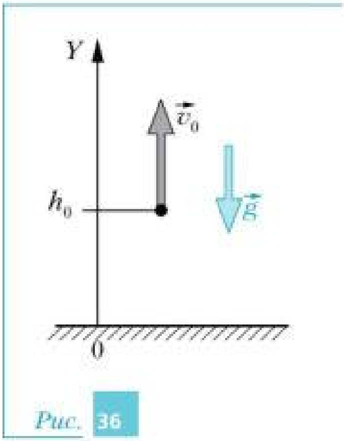


Рис. 36

Пусть, например, с высоты h_0 над поверхностью Земли вертикально вверх с начальной скоростью $\vec{v}_0$ бросают камень (рис. 36). Если считать, что камень совершает свободное падение, то его движение в изображённой на рисунке системе отсчёта, связанной с Землёй, будет прямолинейным равноускоренным с ускорением свободного падения $\vec{g}$.

К
[1] Напомним, что свободное падение — это движение тела под действием только силы тяжести.
[2] Модуль ускорения свободного падения зависит от высоты над поверхностью Земли и широты местоположения тела, например, на широте Москвы вблизи поверхности Земли модуль ускорения свободного падения $g = 9{,}82$ м/с^2.

Начальная скорость $\vec{v}_0$ камня направлена вертикально вверх — в положительном направлении оси Y. Поэтому проекция скорости на эту ось положительна и равна модулю скорости: $v_{0y} = v_0$. Напротив, ускорение $\vec{a}$ камня, равное ускорению свободного падения $\vec{g}$, направлено вертикально вниз, т. е. в отрицательном направлении оси Y. Поэтому проекция ускорения на эту ось будет отрицательной: $a_y = -g$.

С учётом соотношений (3) и (8) *закон свободного падения* и закон изменения скорости брошенного вертикально вверх камня имеют вид:

$$y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{a_y \cdot t^2}{2} = h_0 + v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}; \qquad (9)$$

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y \cdot t = v_0 - g \cdot t. \qquad (10)$$

Вопросы

1. Что называют ускорением точечного тела?
2. В каких единицах в СИ измеряют модуль ускорения?
3. Как соотносятся направления векторов скорости и ускорения тормозящего тела; разгоняющегося тела?
4. Какое движение называют равноускоренным прямолинейным?
5. Запишите закон движения для равноускоренного прямолинейного движения.
6. Какое движение называют свободным падением?
7. Чему приблизительно равен модуль ускорения свободного падения вблизи поверхности Земли на широте Москвы?

Упражнения

1. Тело начинает двигаться вдоль оси X с ускорением, модуль которого равен 1 м/с^2, в положительном направлении этой оси. Запишите закон движения тела и закон изменения проекции его скорости на ось X, если начальная координата тела равна 3 м.
2. Закон движения тела вдоль оси X имеет вид: $x(t) = 7 + 9t - 4t^2$, где x измеряется в метрах, а t — в секундах. Определите начальную координату, проекции начальной скорости и ускорения тела на эту ось. Запишите закон изменения проекции скорости тела на ось X.

3 Тело начинает двигаться из начала координат вдоль оси X. Закон изменения проекции его скорости на эту ось имеет вид: $v(t) = 3 + 4t$. Запишите закон движения тела.

4 Камень бросили с высоты 45 м вертикально вниз с начальной скоростью, модуль которой равен 6 м/с. Запишите закон движения камня и закон изменения проекции его скорости в системе отсчёта, связанной с поверхностью Земли.

§ 8 Решение задач о равноускоренном движении. Аналитический и графический способы решения

Применим полученные знания для решения задач. Напомним, что существуют два способа решения кинематических задач: графический и аналитический. Причём при использовании каждого из этих способов кинематические задачи о равноускоренном движении решают по схеме, сходной с той, которую мы использовали в § 5. Однако, так как при равноускоренном движении скорость тела изменяется с течением времени, при решении появляется новый шаг, содержащий законы изменения проекции скорости на координатные оси. Рассмотрим решение задач по этим схемам на конкретных примерах. Начнём с аналитического способа решения.

Аналитический способ решения

Рассмотрим пример решения задачи о свободном падении тела.

Задача 1

Пусть с высоты h над поверхностью Земли вертикально вверх с начальной скоростью $\vec{v}_0$ бросают камень (*см.* рис. 36). Определите время полёта $t_п$ камня и скорость $\vec{v}_{пад}$ его падения на Землю.

Решение.

Шаг 0. Выбор модели.

Будем считать камень свободно падающим точечным телом.

Шаг 1. Выбор системы отсчёта.

В качестве тела отсчёта выберем Землю. Начало отсчёта поместим на поверхность Земли. Координатную ось Y направим вертикально вверх. Часы включим в момент начала движения ($t = 0$).

Шаг 2. Определение начальной координаты.

В выбранной системе отсчёта начальная координата камня $y_0 = h$.

Шаг 3. Определение проекций начальной скорости и ускорения.

Начальная скорость $\vec{v}_0$ камня направлена в положительном направлении оси Y. Поэтому её проекция на эту ось положительна и равна модулю её скорости: $v_{0y} = v_0$. Напротив, ускорение $\vec{a}$ камня, равное ускорению свободного падения $\vec{g}$, направлено вертикально вниз — в отрицательном направлении оси Y. Поэтому проекция ускорения на эту ось будет отрицательна, а её модуль равен модулю ускорения свободного падения: $a_y = -g$.

Шаг 4. Запись закона движения.

С учётом полученных данных закон движения камня имеет вид:

$$y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{a_y \cdot t^2}{2} = h + v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}.$$

Шаг 4*. Запись зависимости проекции скорости от времени.

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y \cdot t = v_0 - g \cdot t.$$

Шаг 5. Запись условия задачи в виде уравнения.

Для того чтобы определить время $t_п$ полёта камня, т. е. узнать, в какой момент времени $t_п$ камень упадёт на поверхность Земли, надо координату y в момент падения приравнять к нулю:

$$y(t_п) = 0.$$

В момент времени $t_п$ проекция искомой скорости на ось Y равна:

$$v_{пад} = v_y(t_п).$$

Шаг 6. Объединение уравнений в систему.

$y(t) = h + v_0 \cdot t - \dfrac{g \cdot t^2}{2}$; (1) (*закон движения по оси Y*)

$v_y(t) = v_0 - g \cdot t$; (2) (*закон изменения проекции скорости*)

$y(t_п) = 0$; (3) (*условие падения*)

$v_{пад} = v_y(t_п)$. (4) (*проекция скорости в момент падения*)

Шаг 7. Решение системы уравнений.

Подставив уравнение (1) в (3), получим:

$$h + v_0 \cdot t_п - \frac{g \cdot t_п^2}{2} = 0.$$

Решение этого уравнения даёт два корня. Один из этих корней положительный, другой — отрицательный. Нас интересует момент времени падения, наступающий после броска, когда $t_п > 0$. Поэтому условию задачи удовлетворяет только положительный корень:

$$t_п = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2g \cdot h}}{g}.$$

Подстановка полученного значения времени полёта $t_п$ камня в уравнение (4) с учётом закона изменения проекции скорости (2) позволяет вычислить проекцию искомой скорости $\vec{v}_п$:

$$v_{пад} = v_y(t_п) = v_0 - g \cdot t_п = -\sqrt{v_0^2 + 2g \cdot h}.$$

Отметим, что полученное значение проекции скорости камня отрицательно. Это означает, что скорость камня в момент падения направлена вертикально вниз.

Ответ: время полёта камня $t_п = \dfrac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2g \cdot h}}{g}$, скорость камня в момент падения направлена вертикально вниз, её модуль $\left|\vec{v}_{пад}\right| = \sqrt{v_0^2 + 2g \cdot h}$.

Следует сказать, что во многих задачах о свободном падении тела, брошенного вертикально вверх, требуется определить время $t_в$ взлёта, в течение которого тело поднимается вверх после броска. Для определения этого времени используют тот факт, что в верхней точке траектории скорость тела становится равной нулю. С учётом этого записывают условие задачи в шаге 5 в виде $v_y(t_в) = 0$. Из этого уравнения и закона изменения проекции скорости (2) следует: $v_0 - g \cdot t_в = 0$. Отсюда находят: $t_в = \dfrac{v_0}{g}$. Таким образом, чем больше модуль v_0 скорости, с которой брошено тело вверх, тем дольше оно будет подниматься.

Графический способ решения

На рис. 37 и 38 показаны графики движения $y(t)$ и зависимости проекции $v_y(t)$ скорости камня из задачи 1 от времени.

Проведём анализ движения камня исходя из этих графиков. Из графика $v_y(t)$ видно, что проекция на ось Y скорости брошенного вверх камня вначале положительна и с течением времени уменьшается. При этом координата y камня увеличивается, но всё с меньшей скоростью. К моменту времени $t_п$ проекция скорости становится равной нулю. Видно, что в этот момент времени камень достигает верхней точки траектории — координата y достигает максимума. После этого момента камень движется вниз — в отрицательном направлении оси Y. При этом проекция скорости камня отрицательна, а её модуль увеличивается с течением времени. В то же время координата y камня уменьшается со всё большей скоростью. К моменту времени $t_п$ координата камня становится равной нулю, а модуль скорости достигает максимального значения.

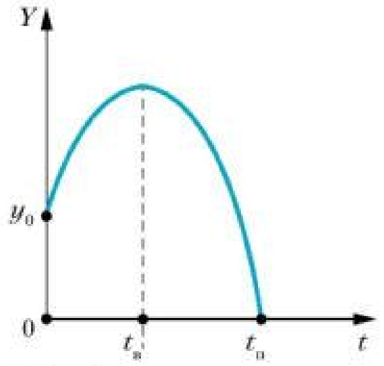


Рис. 37

Рассмотрим пример решения задачи о равноускоренном движении графическим способом.

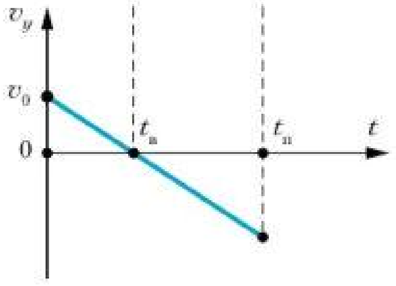


Рис. 38

Задача 2

Водитель автобуса, движущегося по прямолинейной дороге со скоростью, модуль которой $v_0 = 30$ м/с (108 км/ч), нажимает на педаль тормоза. Определите минимальную длину тормозного пути автобуса, если максимально возможное ускорение при торможении равно по модулю $a = 5$ м/с^2.

Решение.

Шаг 0. Выбор модели.

Будем считать автобус точечным телом, а его движение равнозамедленным с максимально возможным по модулю ускорением.

Шаг 1. Выбор системы отсчёта.

В качестве тела отсчёта выберем Землю, а за начало отсчёта — ту точку дороги, в которой находился автобус в момент начала торможения (рис. 39). Координатную ось X проведём вдоль дороги в направлении движения автобуса. Часы (секундомер) включим в момент начала торможения.

Шаг 2. Определение начальной координаты тела.

В выбранной системе отсчёта начальная координата автобуса $x_0 = 0$.

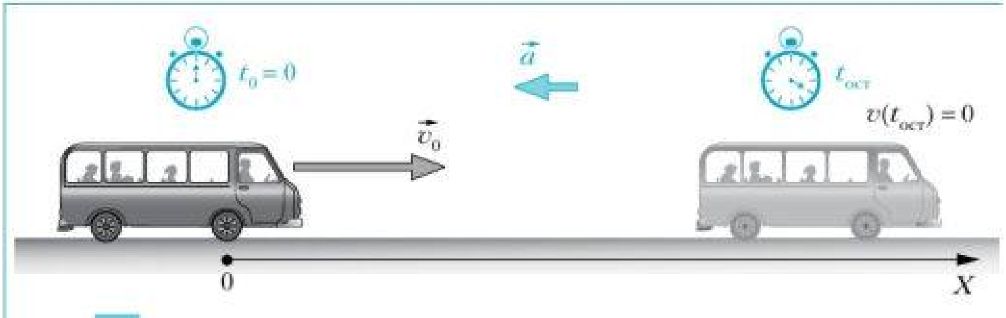


Рис. 39

Шаг 3. Определение проекций начальной скорости и ускорения тела на координатную ось.

В выбранной системе отсчёта направление начальной скорости автобуса совпадает с положительным направлением оси X. Поэтому проекция скорости на эту ось положительна и равна модулю скорости: $v_{0x} = v_0 = 30$ м/с. Направление ускорения автобуса, напротив, противоположно положительному направлению оси X. Поэтому проекция ускорения на эту ось отрицательна, а её модуль равен модулю ускорения: $a_x = -5$ м/с^2.

Шаг 4. Построение графиков.

Вы уже знаете, что для равноускоренного движения тела можно построить два графика: график зависимости координаты x тела от времени t (парабола в осях x и t) и график зависимости проекции v_x скорости от времени t (прямая в осях v_x и t). Какой из этих графиков надо построить для получения искомого ответа, определяют из условия задачи.

В рассмотренном примере нас интересует путь, пройденный автобусом до полной остановки. Следовательно, нас интересует тот момент времени $t_{ост}$, когда скорость автобуса станет равна нулю: $v(t_{ост}) = 0$. Поэтому в данном случае следует строить график $v_x(t)$.

Отметим на оси v_x значение проекции начальной скорости автобуса $v_{0x} = 30$ м/с в начальный момент времени — точку (0 с; 30 м/с). Автобус движется равнозамедленно. Поэтому график зависимости проекции скорости от времени представляет собой прямую линию. Для построения этой линии необходимо определить проекцию скорости автобуса в какой-либо ещё момент времени, например через $t = 1$ с после начала торможения. Так как проекция ускорения отрицательна: $a_x = -5$ м/с^2, то проекция скорости автобуса к моменту времени $t = 1$ с уменьшится на 5 м/с и станет равна 25 м/с. Следовательно, искомая прямая (рис. 40) будет проходить через точку (1 с; 25 м/с).

Видно, что прямая $v_x(t)$ пересекает ось времени t в точке (6 с; 0 м/с). Следовательно, проекция скорости станет равной нулю (автобус остановится) через $t_{ост} = 6$ с после начала торможения.

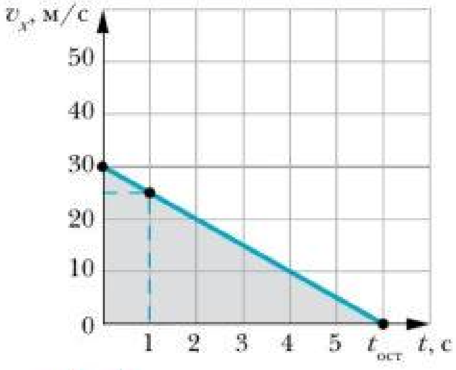


Рис. 40

Для того чтобы определить минимальную длину тормозного пути автобуса, вспомним, что пройденный телом путь численно равен площади фигуры под графиком зависимости модуля скорости от времени. В данном случае этот график построен с учётом максимального по модулю ускорения автобуса при его торможении (*см.* рис. 40). Фигура под этим графиком представляет собой прямоугольный треугольник. Поэтому искомый тормозной путь равен половине произведения катетов этого треугольника:

$$L = \frac{v_{0x} \cdot t_{ост}}{2} = \frac{30 \cdot 6}{2} = 90 \ (\text{м}).$$

Ответ: минимальная длина тормозного пути $L = 90$ м.

Задача 3. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Камень бросили с горизонтальной площадки с начальной скоростью $\vec{v}_0$ под углом α к горизонту (рис. 41). Определите время полёта $t_п$ и дальность полёта L камня по горизонтали от точки бросания камня до места его падения на эту площадку, а также высоту H максимального подъёма камня.

Решение.

Шаг 0. Будем считать камень точечным телом, а его движение свободным падением. Поэтому в любой момент времени ускорение камня направлено вертикально вниз и по модулю равно g.

Шаг 1. Систему отсчёта свяжем с Землёй. Начало отсчёта поместим в точку бросания. Ось X направим горизонтально в направлении точки падения. Ось Y направим вертикально вверх. Часы включим в момент бросания.

Шаг 2. В выбранной системе отсчёта начальные координаты камня: $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$.

Шаг 3. Проекции начальной скорости $\vec{v}_0$ камня на координатные оси X и Y соответственно равны: $v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$ и $v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$.

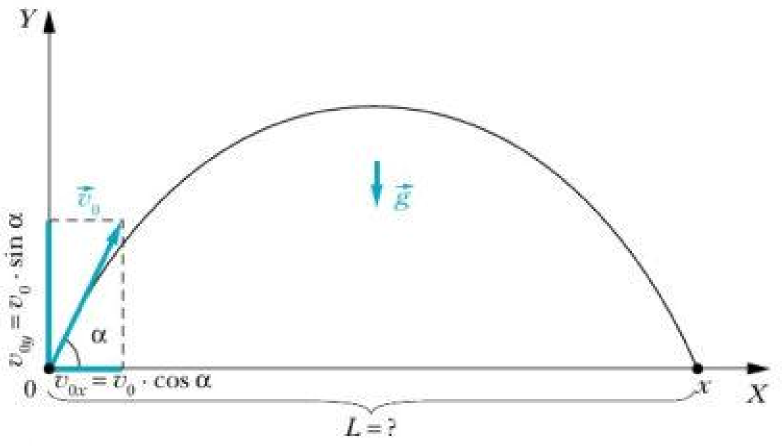


Рис. 41

Шаг 4. Ускорение $\vec{a}$ камня в любой момент времени равно $\vec{g}$. Поэтому проекция a_x ускорения камня на ось X равна нулю, так как ускорение свободного падения перпендикулярно этой оси. Поэтому *движение камня вдоль оси X является равномерным*, а координата x камня изменяется по закону равномерного прямолинейного движения:

$$x(t) = x_0 + v_{0x} \cdot t = (v_0 \cdot \cos\alpha) \cdot t.$$

Ускорение камня направлено вертикально вниз — в отрицательном направлении оси Y. Следовательно, проекция a_y на ось Y постоянна, отрицательна и её модуль равен модулю ускорения свободного падения: $a_y = -g$. Таким образом, координата y камня изменяется по закону равноускоренного прямолинейного движения:

$$y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} = (v_0 \cdot \sin\alpha) \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}.$$

Шаг 4*. Проекция скорости $\vec{v}$ камня на ось X не изменяется с течением времени:

$$v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha.$$

Проекция скорости $\vec{v}$ камня на ось Y изменяется со временем:

$$v_y(t) = v_{0y} - g \cdot t = v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t.$$

Шаг 5. В момент $t_п$ падения камня на Землю его координата по оси Y равна нулю. Поэтому условие падения имеет вид:

$$y(t_п) = 0.$$

В момент t_H достижения максимальной высоты H проекция скорости камня на ось Y равна нулю:

$$v_y(t_H) = 0.$$

Шаг 6. Объединим полученные уравнения в систему, присвоив каждому номер и название.

$x(t) = (v_0 \cdot \cos\alpha) \cdot t;$ (1) (*закон движения по оси X*)

$y(t) = (v_0 \cdot \sin\alpha) \cdot t - \dfrac{g \cdot t^2}{2};$ (2) (*закон движения по оси Y*)

$v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha;$ (3) (*закон изменения проекции скорости на ось X*)

$v_y(t) = v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t;$ (4) (*закон изменения проекции скорости на ось Y*)

$y(t_п) = 0;$ (5) (*условие падения*)

$v_y(t_H) = 0.$ (6) (*условие достижения максимальной высоты*)

Шаг 7. Для решения системы уравнений и определения времени $t_п$ полёта камня подставим закон движения (2) в условие (5):

$$(v_0 \cdot \sin\alpha) \cdot t_п - \frac{g \cdot t_п^2}{2} = 0.$$

Это уравнение имеет два корня. Первый ($t_п = 0$) соответствует моменту начала движения камня. Нас же интересует второй корень, т. е. момент времени, когда координата камня по оси Y снова стала равной нулю. Получаем время полёта камня:

$$t_п = 2\frac{v_0}{g} \cdot \sin\alpha.$$

Теперь определим искомое расстояние L. Подставив время полёта $t_п$ в закон движения (1), находим:

$$L = 2\frac{v_0^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha.$$

Для определения максимальной высоты подъёма H определим время t_H, в течение которого камень поднимался до верхней точки траектории. Для этого подставим уравнение (4) в условие (6):

$$v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t_H = 0.$$

Следовательно,

$$t_H = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g}.$$

Подставив значение t_H в закон движения (2), получим:

$$H = \frac{(v_0 \cdot \sin\alpha)^2}{2g}.$$

Шаг 8. Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы.

1. Чем больше проекция $v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$ начальной скорости на ось Y, тем больше время $t_п$ полёта камня.

2. Чем больше произведение проекций $v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$ и $v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$ начальной скорости $\vec{v}_0$ на координатные оси X и Y, тем больше дальность полёта L. *Максимальной дальность полёта будет при* $\alpha = 45°$.

3. Время подъёма камня до максимальной высоты равно половине времени его полёта. Это время и высота подъёма камня будут максимальны, если камень брошен вертикально вверх, т. е. при $\alpha = 90°$.

4. Максимальная высота подъёма увеличивается при увеличении модуля начальной скорости и угла бросания.

Упражнения

1. Сосулька сорвалась с крыши дома высотой 45 м. Определите время, за которое сосулька упадёт на Землю. Решите задачу аналитически.
2. Камень бросили вертикально вверх с поверхности Земли. Определите модуль начальной скорости камня, если максимальная высота его подъёма равна 20 м.
3. Моська начала погоню по прямой за разозлившим её слоном. Известно, что в начальный момент времени расстояние между слоном и Моськой равно 30 м, модуль скорости равномерно движущегося слона равен 2 м/с, модуль ускорения Моськи равен 1 м/с^2. Когда Моська догонит слона?

4 С башни высотой 10 м горизонтально со скоростью, модуль которой равен 15 м/с, бросили камень. Определите, через какое время после броска и на каком расстоянии от основания башни упадёт камень.

Для углублённого уровня

5 Из орудия, находящегося у подножия горы, ведут обстрел снежных шапок на её склоне. Угол между склоном горы и горизонтом равен $30°$. Модуль скорости вылетающего из ствола орудия снаряда равен 300 м/с, вектор скорости снаряда направлен под углом $45°$ к склону горы. При этом снаряд попадает в цель. Определите по этим данным расстояние до цели.

6 С крыши дома с интервалом 2 с последовательно падают вниз две сосульки. Определите расстояние между сосульками через 3 с после начала падения первой из них, считая, что к этому моменту первая сосулька ещё не достигла поверхности Земли.

7 Мимо стоящего на обочине автомобиля ДПС проезжает грузовик, модуль скорости которого равен 72 км/ч. Сразу после этого автомобиль ДПС начинает преследование грузовика с ускорением, модуль которого равен 5 м/с^2. Определите пути, которые пройдут машины к тому моменту, когда расстояние между ними станет максимальным.

§ 9 Равномерное движение по окружности

Движение по окружности

Движение по окружности — очень распространённый вид движения. Так, например, движутся точки вращающегося на оси колеса (рис. 42), все точки поверхности Земли в системе отсчёта, связанной с осью вращения Земли и достаточно удалёнными звёздами (рис. 43). Также по траектории, близкой к окружности, движется и сама Земля (если считать её точечным телом) в системе отсчёта, которая связана с Солнцем и достаточно удалёнными звёздами.

Движение точечного тела, при котором его траектория в выбранной системе отсчёта представляет собой окружность, называют движением по окружности.

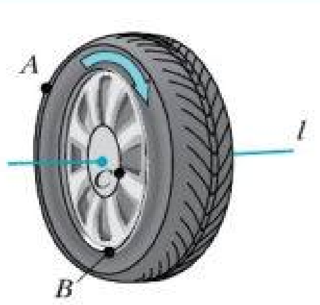


Рис. 42

Рис. 43

Положение движущегося по окружности точечного тела A удобно описывать векторным способом (рис. 44). Это связано с тем, что если начало отсчёта поместить в центр окружности, то *модуль радиуса-вектора* $\vec{r}_A(t)$ *остаётся неизменным*, так как он равен радиусу окружности: $\left|\vec{r}_A(t)\right| = r$. При изменении положения тела A на окружности *изменяется только направление радиуса-вектора*. Это направление задают с помощью угла φ между радиусом-вектором $\vec{r}_A$ и осью X (*см.* рис. 44). При этом, как и в математике, угол φ считают положительным, если его отсчитывают от оси X в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки. В противном случае угол φ считают отрицательным.

С течением времени положение движущегося по окружности тела изменяется. Соответственно изменяется и угол φ, описывающий это положение

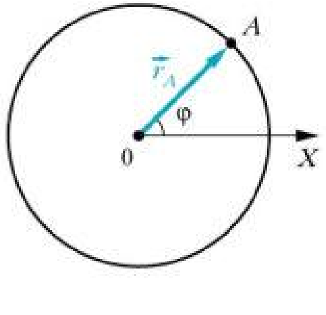


Рис. 44

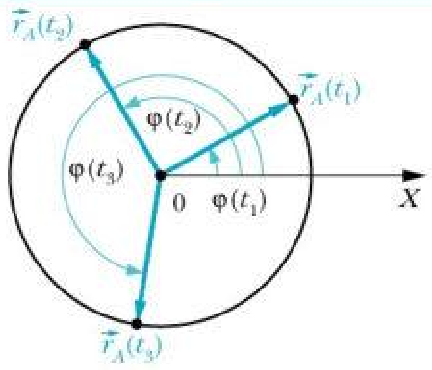


Рис. 45

(рис. 45). Поэтому закон движения тела может быть задан в виде функции $\varphi(t)$, представляющей собой зависимость угла φ от времени t.

! Если задан закон $\varphi(t)$, то движение тела по окружности описано полностью.

Угол φ удобно измерять в *радианах* (рад). **К**

Угловая скорость. Период и частота вращения

Чтобы отвечать на вопрос, как быстро происходит поворот радиуса-вектора $\vec{r}_A$, вводят понятие *угловая скорость*.

Угловой скоростью движущегося по окружности точечного тела в момент времени t называют физическую величину, равную отношению угла поворота $\Delta\varphi$ его радиуса-вектора за достаточно малый промежуток времени Δt, начинающийся сразу после момента времени t, к длительности этого промежутка:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \text{ где } \Delta t \to 0. \quad (1)$$ **С**

Единица угловой скорости в СИ – *радиан в секунду* (рад/с).

Рассмотрим движущееся по окружности точечное тело A, угловая скорость движения которого постоянна и равна ω (рис. 46). В этом случае говорят, что тело A движется по окружности равномерно.

Движение точечного тела по окружности называют равномерным, если его угловая скорость не изменяется с течением времени.

Выведем закон движения $\varphi(t)$ для тела A. Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ угол между радиусом-вектором $\vec{r}_A$ и осью X равен φ_0, т. е. $\varphi(t_0) = \varphi_0$. Этот угол называют начальным углом. Определим угол $\varphi(t)$ в момент времени t. Обозначим промежуток времени от $t_0 = 0$ до t как Δt ($\Delta t = t - t_0 = t$). Изменение угла, описывающего положение тела за Δt, равно $\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t_0)$. Так как угловая скорость постоянна, то формула (1) принимает вид:

К Напомним, что *один радиан* — это величина центрального угла окружности, опирающегося на дугу, длина которой равна радиусу окружности.

С При стремлении промежутка времени Δt к нулю отношение $\Delta\varphi/\Delta t$ стремится к определённому предельному значению:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

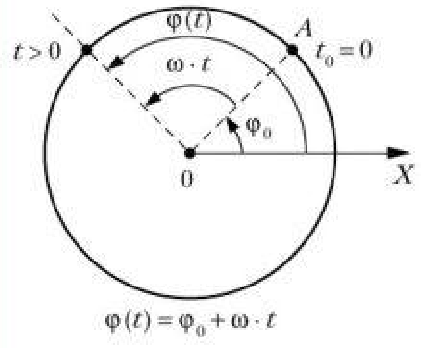


Рис. 46

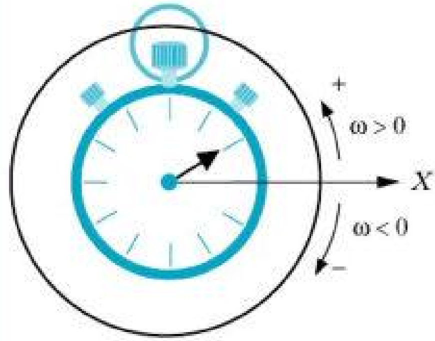


Рис. 47

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} = \frac{\varphi(t) - \varphi_0}{t}.$$

Следовательно,

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega \cdot t, \qquad (2)$$

где φ_0 — начальный угол, ω — постоянная угловая скорость.

Полученное выражение (2) представляет собой *закон равномерного движения по окружности*.

Отметим, что если движение радиуса-вектора происходит против направления движения часовой стрелки (рис. 47), то $\Delta\varphi > 0$. Поэтому при таком движении угловая скорость положительна ($\omega > 0$). Если же движение радиуса-вектора происходит по направлению движения часовой стрелки, то в этом случае $\Delta\varphi < 0$, а угловая скорость отрицательна ($\omega < 0$).

Исследуем, как изменяется с течением времени скорость $\vec{v}$ тела, которое равномерно движется по окружности радиусом r в соответствии с законом (2).

Вначале определим направление вектора $\vec{v}$. Вы уже знаете, что при движении по криволинейной траектории в любой момент времени вектор $\vec{v}$ направлен по касательной к траектории в той её точке, где находится тело. Поэтому вектор $\vec{v}$ направлен по касательной к окружности, по которой движется тело (рис. 48). Касательная к окружности в точке нахождения тела перпендикулярна радиусу-вектору $\vec{r}_A(t)$, проведённому в эту точку.

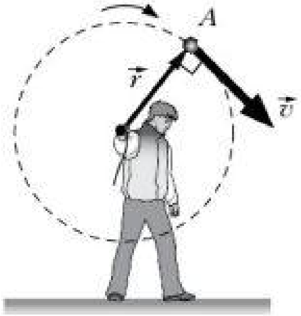


Рис. 48

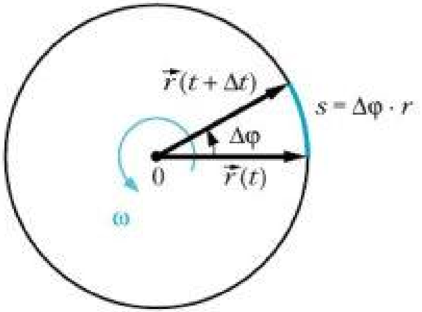


Рис. 49

! **Скорость $\vec{v}$ тела в любой момент времени перпендикулярна радиусу-вектору, определяющему положение этого тела на окружности.**

Теперь определим модуль v скорости тела в произвольный момент времени t. Для этого рассмотрим достаточно малый промежуток времени Δt, следующий сразу за моментом t. За этот промежуток Δt радиус-вектор повернётся на угол $\Delta\varphi$ (рис. 49). При этом тело пройдёт путь s, равный длине дуги, на которую опирается угол $\Delta\varphi$ (она отмечена на рисунке синим цветом). В свою очередь, длина дуги окружности равна произведению угла $\Delta\varphi$ на радиус r окружности. Поэтому $s = \Delta\varphi \cdot r$. Средняя путевая скорость за рассматриваемый промежуток времени Δt в соответствии с определением равна:

$$v_{\text{ср. п}} = \frac{s}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi \cdot r}{\Delta t} = \omega \cdot r. \qquad (3)$$

Так как мы рассмотрели достаточно малый промежуток Δt, то движение на этом промежутке неотличимо от равномерного прямолинейного. Поэтому искомый модуль v скорости тела в момент времени t равен найденной средней путевой скорости: $v = v_{\text{ср. п}} = \omega \cdot r$. Полученное выражение не зависит от времени t. Следовательно,

! **модуль v скорости равномерно движущегося по окружности тела не изменяется с течением времени и в любой момент равен произведению угловой скорости ω на радиус r окружности:**

$$v = \omega \cdot r. \qquad (4)$$

Равномерное движение тела по окружности можно охарактеризовать с помощью ещё двух физических величин — периода T и частоты ν.

Периодом T вращения называют время, за которое тело совершает один оборот.

Угол, на который поворачивается радиус-вектор за один оборот, равен 2π. В свою очередь, путь s, который тело проходит за один оборот, равен длине окружности $2\pi \cdot r$. Поэтому период T вращения равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \cdot r}{v}.$$

Частотой ν вращения называют число оборотов за единицу времени.

Частота вращения — величина, обратная периоду вращения. Единица частоты вращения в СИ — секунда в минус первой степени ($с^{-1}$).

В соответствии с определениями период вращения $T = \frac{\Delta t}{N}$, где N — число оборотов за время Δt, а частота вращения $\nu = \frac{N}{\Delta t} = \frac{1}{T}$. Угол одного полного оборота радиуса-вектора равен 2π. Поэтому за время Δt радиус-вектор совершает поворот на угол $\Delta\varphi = 2\pi \cdot N$. Таким образом,

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi \cdot N}{\Delta t} = 2\pi \cdot \nu.$$

Ускорение при равномерном движении по окружности

Мы установили, что направление вектора $\vec{v}$ равномерно движущегося по окружности тела непрерывно изменяется. Поэтому вектор изменения $\Delta\vec{v}$ скорости за промежуток времени Δt *отличен от нуля*.

Следовательно,

! равномерно движущееся по окружности тело имеет отличное от нуля ускорение $\vec{a}$.

Определим вначале направление вектора $\vec{a}$. Рассмотрим промежуток времени от t до $t + \Delta t$. Из рис. 50 видно, что угол поворота $\Delta\varphi$ радиуса-вектора за время Δt равен углу поворота вектора $\vec{v}$ скорости за то же время. Вектор изменения скорости $\Delta\vec{v}$ (синяя стрелка CD на рис. 50) за время Δt перпендикулярен отрезку AB, соединяющему точки A и B, в которых находилось тело в начальный t и конечный $(t + \Delta t)$ моменты времени. Для нахождения ускорения в момент времени t будем уменьшать промежуток времени Δt, пока он не станет достаточно малым. При этом точка B будет приближаться к точке A, а вектор $\Delta\vec{v}$, перпендикулярный отрезку AB, окажется направленным к центру окружности. В результате вектор ускорения $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ окажется также направленным к центру O окружности.

При равномерном движении тела по окружности его ускорение в любой момент времени направлено к её центру. Поэтому такое ускорение называют центростремительным и обозначают $\vec{a}_{цс}$.

Определим модуль $a_{цс}$ центростремительного ускорения. Для этого рассмотрим равнобедренные треугольники $\triangle OAB$ и $\triangle BCD$, показанные на рис. 50. Поскольку $\angle AOB$, равный $\Delta\varphi$, и $\angle DBC$ равны, то эти треугольники подобны. Из подобия треугольников следует пропорциональность их соответствующих сторон: $CD/AB = BC/OA$, или $\Delta v/AB = v/r$.

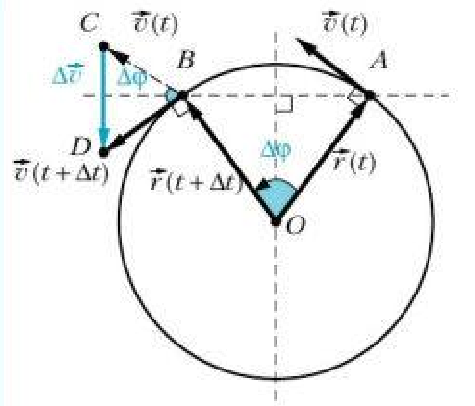


Рис. 50 При уменьшении промежутка времени Δt вектор $\Delta\vec{v}$ окажется направленным к центру окружности

При уменьшении Δt до достаточно малого промежутка длина дуги окружности, по которой движется тело, стремится к длине отрезка AB. Поэтому можно считать, что $AB = v \cdot \Delta t$. В результате полученное соотношение принимает вид:

$$\frac{\Delta v}{v \cdot \Delta t} = \frac{v}{r}, \text{ или } \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}.$$

Модуль мгновенного центростремительного ускорения равен:

$$a_{цс} = \frac{v^2}{r}.$$

Поскольку при равномерном движении по окружности $v = \omega \cdot r$, то для расчёта модуля центростремительного ускорения можно также использовать формулы:

$$a_{цс} = \frac{v^2}{r} = v \cdot \omega = \omega^2 \cdot r.$$

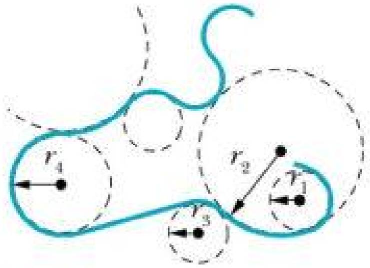


Рис. 51

В заключение отметим, что любое криволинейное движение за достаточно малые промежутки времени можно рассматривать как движение по дугам соответствующих окружностей разных радиусов (рис. 51).

Вопросы

1. Какое движение называют движением по окружности?
2. Куда направлена скорость движущегося по окружности тела?
3. Как соотносятся угловая скорость и модуль скорости тела, движущегося по окружности?
4. Почему тело, равномерно движущееся по окружности, движется с ускорением?
5. Куда направлен вектор центростремительного ускорения?
6. Что называют: а) периодом вращения; б) частотой вращения?
7. Как связаны период и частота вращения?

Упражнения

1. Определите модули скорости и центростремительного ускорения точки обода велосипедного колеса радиусом 40 см, вращающегося с угловой скоростью 4π рад/с.
2. Определите радиус R маховика, если при его вращении модуль скорости точки его обода равен 10 м/с, а модуль скорости точки, расположенной на 10 см ближе к оси, равен 8 м/с.
3. Определите модули скорости и центростремительного ускорения точек земной поверхности на широте $\varphi = 60°$, обусловленные суточным вращением Земли вокруг своей оси. Радиус Земли считайте равным $R = 6400$ км.
4. Спутник движется с периодом $T = 120$ мин по круговой орбите вокруг планеты. Определите радиус этой орбиты, если модуль ускорения спутника $a = 1$ м/с^2.

5 Определите частоту вращения колеса автомобиля, движущегося со скоростью 72 км/ч. Радиус колеса равен 30 см.

Для углублённого уровня

§ 10 Равноускоренное движение по окружности

Рассмотрим движущееся по окружности точечное тело A. Пусть его угловая скорость ω не постоянна, а изменяется со временем. Для того чтобы характеризовать изменение угловой скорости с течением времени, вводят физическую величину, которую называют *угловым ускорением*. Его обозначают символом ε.

Угловым ускорением движущегося по окружности точечного тела в момент времени t называют физическую величину, равную отношению изменения $\Delta\omega$ угловой скорости этого тела за достаточно малый промежуток времени Δt, начинающийся сразу после момента времени t, к длительности этого промежутка:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \text{ где } \Delta t \to 0. \qquad (1)$$

Единица углового ускорения в СИ — радиан на секунду в квадрате (рад/с^2).

Если известны начальная угловая скорость ω_0 и угловое ускорение ε, то можно определить угловую скорость движущегося по окружности точечного тела в любой последующий момент времени. Рассмотрим, как это делается в сáмом простом случае, когда *угловое ускорение постоянно*. При этом говорят, что тело движется по окружности равноускоренно.

Движение точечного тела по окружности называют равноускоренным, если в процессе движения его угловое ускорение остаётся постоянным (не изменяется с течением времени).

Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ угловая скорость тела равна ω_0. Определим его угловую скорость $\omega(t)$ в момент времени t. Рассмотрим промежуток времени $\Delta t = t - t_0 = t$. Изменение угловой скорости за про-

При стремлении промежутка времени Δt к нулю отношение $\Delta\omega/\Delta t$ стремится к определённому предельному значению:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

межуток времени Δt равно: $\Delta\omega = \omega(t) - \omega_0$. Поэтому в случае постоянного углового ускорения соотношение (1) принимает вид:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega(t) - \omega_0}{t}.$$

В результате мы приходим к соотношению, которое называют *законом изменения угловой скорости при равноускоренном движении по окружности*:

$$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon \cdot t, \qquad (2)$$

где ω_0 — начальная угловая скорость, ε — постоянное угловое ускорение, $\omega(t)$ — угловая скорость в момент времени t.

Из соотношения (2) следует, что модуль угловой скорости при равноускоренном движении по окружности с течением времени может как увеличиваться, так и уменьшаться. Это зависит от того, совпадают ли знаки начальной угловой скорости и углового ускорения. Будем далее для определённости считать, что начальная угловая скорость положительна: $\omega_0 > 0$. Тогда если угловое ускорение в соотношении (2) также положительно ($\varepsilon > 0$), то угловая скорость $\omega(t)$ с течением времени будет увеличиваться (рис. 52). Напротив, если $\varepsilon < 0$, то из соотношения (2) следует, что с течением времени угловая скорость будет уменьшаться.

Пусть точечное тело движется по окружности равноускоренно. Рассмотрим достаточно малый промежуток времени Δt, следующий сразу за моментом времени t. В течение этого промежутка движение тела неотличимо от равномерного движения с постоянной угловой скоростью $\omega(t)$. Следовательно, для расчёта модуля $v(t)$ скорости тела в этот момент времени t можно воспользоваться формулой $v(t) = r \cdot \omega(t)$, связывающей угловую скорость ω с модулем v скорости, так как эта формула была получена для равномерного движения по окружности (*см.* § 9).

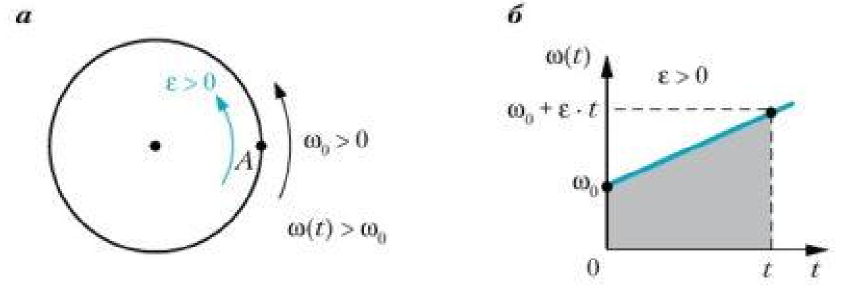


Рис. 52

Умножая обе части уравнения (2) на r, получаем, что при равноускоренном движении по окружности модуль v скорости изменяется по закону:

$$v(t) = r \cdot \omega_0 + r \cdot \varepsilon \cdot t. \qquad (3)$$

В полученном соотношении введём обозначения: $r \cdot \omega_0 = v_0$; $r \cdot \varepsilon = a_\tau$. В результате мы получим *закон изменения значения скорости равноускоренно движущегося по окружности тела*:

$$v(t) = v_0 + a_\tau \cdot t, \qquad (4)$$

где v_0 — значение начальной скорости в момент времени $t_0 = 0$.

В законе (4) a_τ — значение постоянного тангенциального ускорения, которое берётся с соответствующим знаком: если $\varepsilon > 0$, то $a_\tau > 0$ (рис. 53), если $\varepsilon < 0$, то $a_\tau < 0$ (рис. 54).

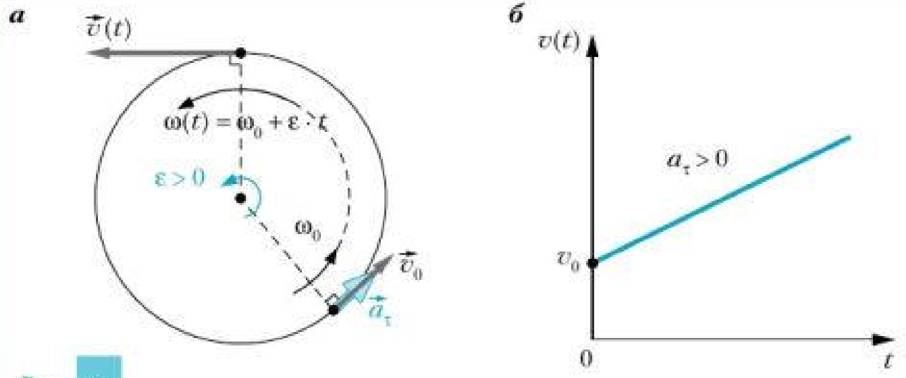


Рис. 53

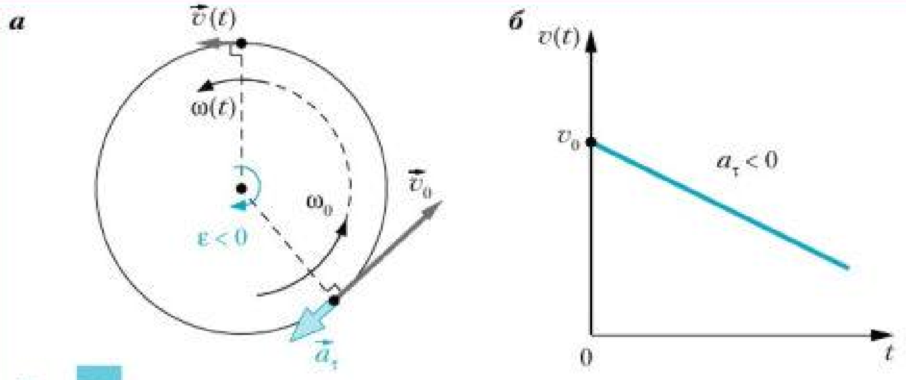


Рис. 54

Тангенциальным ускорением тела в момент времени t называют вектор, который параллелен вектору скорости тела и значение которого равно отношению Δv изменения значения скорости тела за достаточно малый промежуток времени Δt, начинающийся сразу после момента времени t, к длительности этого промежутка:

$$a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \text{ где } \Delta t \to 0.$$

Если значение скорости v тела положительно и увеличивается (*см.* рис. 53), то направление вектора $\vec{a}_\tau$ совпадает с направлением вектора $\vec{v}$ ($\vec{a}_\tau \uparrow\uparrow \vec{v}$). Напротив, если значение скорости v тела положительно и уменьшается (*см.* рис. 54), то направление вектора $\vec{a}_\tau$ противоположно направлению вектора $\vec{v}$ ($\vec{a}_\tau \uparrow\downarrow \vec{v}$).

! Тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ всегда параллельно вектору скорости $\vec{v}$ тела и изменяет только значение v этой скорости. В отличие от тангенциального, центростремительное ускорение $\vec{a}_{цс}$ всегда перпендикулярно вектору скорости $\vec{v}$ и изменяет только направление вектора $\vec{v}$.

При равноускоренном движении по окружности скорость $\vec{v}$ тела изменяется и по направлению, и по модулю. Поэтому *при равноускоренном движении тела по окружности в любой момент времени t тело имеет ускорение $\vec{a}$, которое представляет собой векторную сумму* (рис. 55) *тангенциального $\vec{a}_\tau$ ускорения и перпендикулярного ему ускорения, определяемого скоростью изменения направления вектора скорости.* Это ускорение направлено к центру окружности, поэтому его называют *центростремительным*. При этом, так как векторы $\vec{a}_{цс}$ и $\vec{a}_\tau$ перпендикулярны друг другу, то согласно теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_{цс}^2 + a_\tau^2}.$$

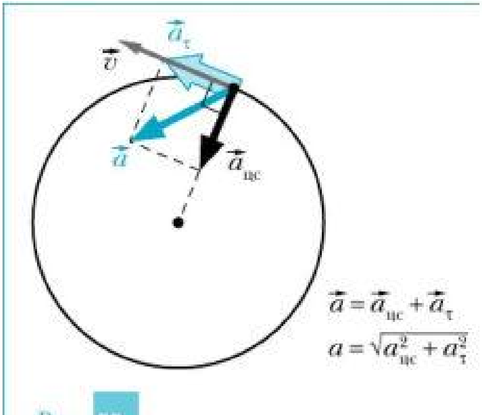


Рис. 55

Отметим, что при равноускоренном движении по окружности модуль a_τ тангенциального ускорения постоянен. Напротив, из уравнений (2) и (3) следует, что модуль центростремительного ускорения, равный $a_{цс} = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}$, непрерывно изменяется с течением времени. Поэтому непрерывно изменяется и модуль a ускорения тела.

Выведем формулу для расчёта угла $\Delta\varphi$, на который поворачивается радиус-вектор за промежуток времени от 0 до t при равноускоренном движении по окружности. Будем для определённости считать, что начальная угловая скорость ω_0 и угловое ускорение ε в уравнении (2) положительны ($\omega_0 > 0$; $\varepsilon > 0$). В этом случае график зависимости $\omega(t)$ имеет вид, показанный на рис. 52, *б*. По аналогии с выводом формулы пути s для равноускоренного прямолинейного движения можно показать, что искомый угол $\Delta\varphi$ (в радианах) численно равен площади трапеции под графиком $\omega(t)$. Основания трапеции равны ω_0 и $(\omega_0 + \varepsilon \cdot t)$, выраженным в радианах в секунду, а её высота равна времени t, выраженному в секундах.

$$\Delta\varphi = \frac{\omega_0 + (\omega_0 + \varepsilon \cdot t)}{2} \cdot t = \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}. \qquad (5)$$

Обозначим начальный угол радиуса-вектора в момент времени $t_0 = 0$ как φ_0, а угол в момент времени t как $\varphi(t)$. Тогда, так как $\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi_0$, из уравнения (5) получаем *закон равноускоренного движения по окружности*:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}, \qquad (6)$$

где φ_0 — начальный угол радиуса-вектора, ω_0 — начальная угловая скорость тела, ε — постоянное угловое ускорение.

В тех случаях, когда *известна траектория* движения точечного тела, часто используют траекторный способ описания движения. Для этого вводят понятие *траекторной координаты*.

Рассмотрим траекторный способ описания движения на примере точечного тела, которое движется равноускоренно по окружности в соответствии с уравнением (6). Введём координатную ось l, начало которой совпадает с точкой O — точкой пересечения окружности и оси X (рис. 56). Направим ось l от точки O вдоль окружности против часовой стрелки. Отметим, что, в отличие от привычных координатных осей, данная ось l не является прямолинейной, а совпадает с траекторией движения тела, в данном случае с окружностью. Умножим левую и правую части уравнения (6) на радиус r окружности:

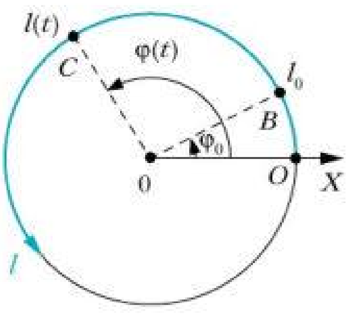


Рис. 56

$$r \cdot \varphi(t) = r \cdot \varphi_0 + r \cdot \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot r \cdot t^2}{2}. \qquad (7)$$

Видно, что левая часть полученного соотношения $r \cdot \varphi(t)$ равна длине дуги окружности от точки O, совпадающей с началом отсчёта, до точки C окружности, в которой находится тело в момент времени t. Обозначим эту величину $l(t)$. Одночлен $r \cdot \varphi_0$ в правой части соотношения (7) равен длине дуги окружности от начала отсчёта O до точки B, в которой тело находилось в начальный момент времени $t_0 = 0$. Обозначим эту величину l_0. Понятно, что сумма двух других одночленов в правой части соотношения (7) представляет собой разность $l(t)$ и l_0. С учётом введённых обозначений эта разность равна:

$$l(t) - l_0 = r \cdot \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot r \cdot t^2}{2} = v_0 \cdot t + \frac{a_\tau \cdot t^2}{2}. \qquad (8)$$

Поэтому закон равноускоренного движения по окружности может быть записан в виде зависимости траекторной координаты от времени:

$$l(t) = l_0 + v_0 \cdot t + \frac{a_\tau \cdot t^2}{2}, \qquad (9)$$

где l_0 — начальная траекторная координата (она равна длине дуги от точки O до точки B), v_0 — значение начальной линейной скорости, a_τ — значение постоянного тангенциального ускорения. К

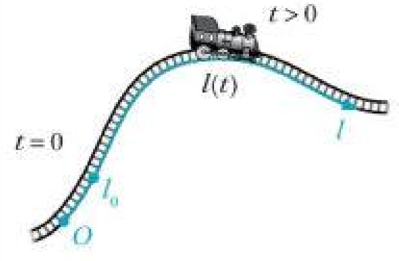


Рис. 57

Как уже отмечалось, введение траекторной координаты удобно при описании движения тела по известной траектории. Самым наглядным примером такого движения является движение по рельсам поезда или трамвая (рис. 57). Напомним, что любое криволинейное движение в течение достаточно малого промежутка времени можно рассматривать как движение по дуге окружности соответствующего ра-

К Отметим, что значение начальной линейной скорости v_0 может быть как положительной (если $\omega_0 > 0$), так и отрицательной (если $\omega_0 < 0$) величиной. Значение тангенциального ускорения a_τ может быть как положительной (если $\varepsilon > 0$), так и отрицательной (если $\varepsilon < 0$) величиной.

диуса. Знание центростремительного ускорения $a_{цс}$ и линейной скорости v тела позволяет определить радиус этой окружности, который называют *радиусом кривизны* $R_{кр}$ траектории в данной точке: $R_{кр} = \frac{v^2}{a_{цс}}$.

Вопросы

1. Что называют угловым ускорением тела?
2. Какое движение тела по окружности называют равноускоренным?
3. Что называют тангенциальным ускорением?
4. Куда может быть направлен вектор тангенциального ускорения?
5. Какое ускорение изменяет значение скорости тела, а какое — направление скорости?
6. Как рассчитать ускорение точечного тела, которое равноускоренно движется по окружности?

Упражнения

1. Точечное тело движется по окружности, равномерно увеличивая свою скорость. Начальная угловая координата равна 3 рад, значение начальной угловой скорости равно 5 рад/с, значение углового ускорения равно 2 рад/с^2. Запишите закон движения этого тела.
2. Маховик, вращавшийся с частотой $\nu = 20$ с$^{-1}$, равнозамедленно останавливается за время $\Delta t = 1$ мин. Оцените число оборотов маховика за это время.
3. Точечное тело начинает двигаться по окружности радиусом $r = 20$ см с постоянным тангенциальным ускорением, значение которого $a_\tau = 10$ см/с^2. Определите, через какое время τ модуль центростремительного ускорения тела станет больше модуля его тангенциального ускорения в 3 раза. Определите модуль скорости тела в этот момент времени.

*4. Камень бросили горизонтально с высокой башни со скоростью, модуль которой равен 10 м/с. Определите тангенциальное и центростремительное ускорения камня через 1 с после начала движения. Оцените радиус кривизны траектории камня в точке, где он находился в указанное время.

КИНЕМАТИКА

МЕХАНИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ — это изменение положения тела или его частей относительно других тел с течением времени

Для его описания необходима

СИСТЕМА ОТСЧЁТА = **СИСТЕМА КООРДИНАТ** + **ТЕЛО ОТСЧЁТА** + **ЧАСЫ**

ТРАЕКТОРИЯ — линия, в каждой точке которой последовательно находилось, находится или будет находиться движущееся точечное тело (точка).

Скорость точечного тела в момент времени t:

$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \text{ где } \Delta t \to 0.$$

Ускорение точечного тела в момент времени t:

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \text{ где } \Delta t \to 0.$$

РАВНОМЕРНОЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВДОЛЬ ОСИ X

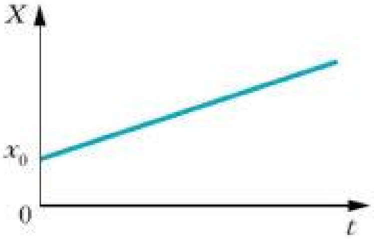
Закон движения:

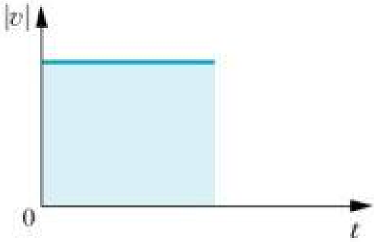
$x(t) = x_0 + v_x \cdot t$,

где $v_x = \text{const}$.

Путь за время от 0 до t:

$s = |x(t) - x_0| = |v_x| \cdot t$.





РАВНОУСКОРЕННОЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВДОЛЬ ОСИ X

Закон движения:

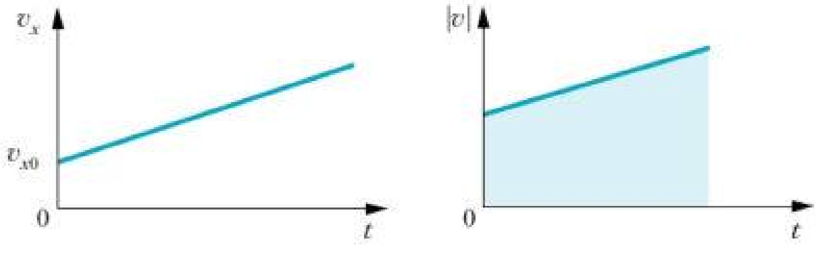
$$x(t) = x_0 + v_{x0} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2},\ a_x = \text{const.}$$

Путь за время от 0 до t:

$$s = v_{x0} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2}.$$

Закон изменения проекции скорости:

$v_x(t) = v_{x0} + a_x \cdot t.$



РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПО ОКРУЖНОСТИ

Закон движения:

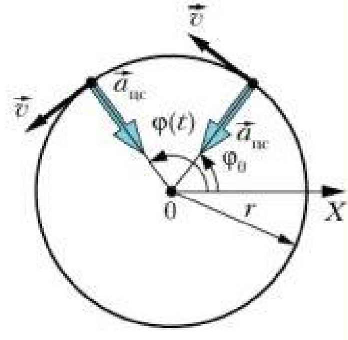
$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega \cdot t$, где $\omega = \text{const.}$

Угловая скорость: $\omega = \dfrac{\varphi(t) - \varphi_0}{t} = \dfrac{\Delta\varphi}{t}$.

Модуль линейной скорости: $v = \omega \cdot r$.

Частота вращения: $\nu = \dfrac{N}{t}$.

Период вращения: $T = \dfrac{1}{\nu} = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{t}{N}$.



Движущееся равномерно по окружности точечное тело (точка) имеет ускорение, направленное к центру окружности (центростремительное ускорение), модуль которого $a_{цс} = \omega^2 \cdot r = \dfrac{v^2}{r}$.

Глава 2

Кинематика твёрдого тела

§ 11 Поступательное и вращательное движения твёрдого тела

В предыдущей главе рассказывалось об описании движения точечных тел. Однако в физике приходится решать и более сложную задачу — описывать движение реального тела, имеющего размеры. В общем случае различные части реального тела могут двигаться по-разному. По этой причине *движение реального тела считают описанным полностью лишь тогда, когда известно, как движется каждая его точка.*

Реальное тело состоит из огромного числа точек (строго говоря, их бесконечно много). Понятно, что привести законы движения для каждой точки такого тела не представляется возможным. Как же описывают движение реального тела?

Довольно часто реальное тело может деформироваться в процессе движения, т. е. расстояния между различными его точками могут изменяться с течением времени. Движение такого тела описывать особенно сложно. По этой причине мы ограничимся рассмотрением движения тел, деформации которых пренебрежимо малы по сравнению с размерами самих тел. Такие тела можно считать *твёрдыми* (иногда используют термин *абсолютно твёрдые тела*).

Тело называют твёрдым (абсолютно твёрдым), если расстояние между любыми двумя точками тела не изменяется с течением времени.

Другими словами, тело называют твёрдым, если не изменяется взаимное расположение его частей. Разумеется, в природе абсолютно твёрдых тел нет. Твёрдое тело — это модель, которую используют для упрощения описания движения реального тела. Правомерность применения такой модели (как и любой другой модели) определяется в каждом конкретном случае путём сопоставления результатов теоретического и экспериментального исследований.

Рассмотрение движения твёрдых тел начинают с самых простых видов движения: *поступательного* и *вращательного*.

Движение твёрдого тела называют поступательным, если прямая, проведённая через любые две точки этого тела, в процессе движения не изменяет своей ориентации в пространстве (остаётся параллельной своему начальному положению).

Из определения следует, что все точки поступательно движущегося твёрдого тела движутся одинаково (рис. 58). За любой один и тот же промежуток времени все они совершают одинаковые перемещения. Из этого следует, что *в каждый момент времени все точки поступательно движущегося твёрдого тела имеют одинаковые скорости и ускорения*. В результате мы приходим к очень важному выводу.

! Для описания поступательного движения твёрдого тела достаточно описать движение (задать закон движения) какой-либо одной его точки.

Другими словами, если известны закон движения одной точки поступательно движущегося твёрдого тела и начальное положение этого тела, то можно определить положение любой другой точки этого тела в каждый последующий момент времени. В этом случае можно говорить, что движение тела описано полностью.

Рис. 58 При поступательном движении тела прямая, проведённая через любые две его точки, не изменяет своей ориентации

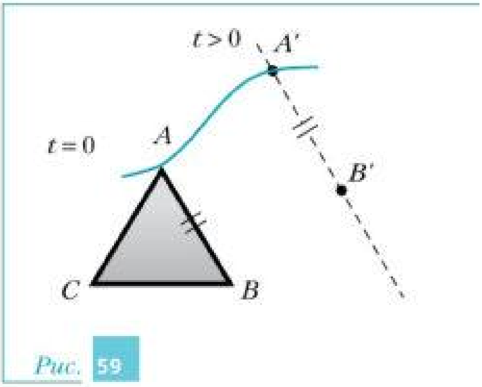


Рис. 59

Поясним сказанное на примере. Пусть известны начальное положение (при $t = 0$) поступательно движущейся твёрдой треугольной плиты ABC и закон движения её точки A (рис. 59). В этом случае в любой последующий момент времени $t > 0$ будет известно положение A' точки A в пространстве. Определим, например, положение B' точки B плиты в этот же момент времени. Для этого построим прямую $A'B'$, проходящую через точку A' и параллельную прямой AB. Отложим на ней отрезок $A'B'$, длина которого равна длине отрезка AB. В результате мы определим положение точки B в момент времени $t > 0$. Аналогичным образом можно определить положение любой точки плиты в каждый момент времени.

Другой вид движения твёрдого тела — вращательное движение.

Движение твёрдого тела называют вращательным, если все точки этого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной неподвижной прямой. Эту прямую называют осью вращения.

При вращательном движении твёрдого тела угловые скорости всех его точек равны. Эту скорость и называют *угловой скоростью вращения* ω *твёрдого тела*.

Пример вращательного движения приведён на рис. 60. На нём изображено вращение лопастей вертолётного винта.

Скорость движения каждой точки вращающегося твёрдого тела направлена по касательной к окружности, по которой движется эта точка. Поэтому вектор скорости перпендикулярен радиусу-вектору, проведённому в эту точку из центра окружности. Например, для точек A, B и C вращающихся лопастей винта вертолёта $\vec{v}_A \perp \vec{r}_A$, $\vec{v}_B \perp \vec{r}_B$, $\vec{v}_C \perp \vec{r}_C$ (*см.* рис. 60).

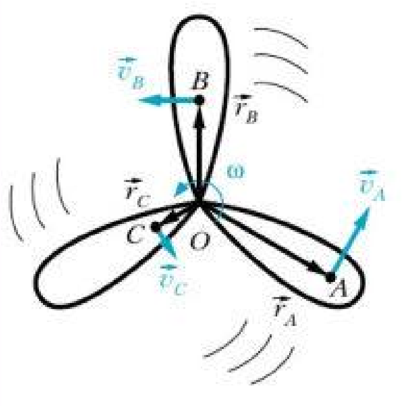


Рис. 60

Модуль скорости каждой из этих точек определяется так же, как модуль скорости точечного тела, которое движется по окружности соответствующего радиуса. То есть модуль скорости зависит не только от угловой скорости вращения ω, но и от расстояния от этой точки до оси вращения. Например, модуль скорости точки A вращающейся лопасти вертолёта $v_A = \omega \cdot r_A = \omega \cdot OA$, модуль скорости точки B $v_B = \omega \cdot r_B = \omega \cdot OB$, а модуль скорости точки C $v_C = \omega \cdot r_C = \omega \cdot OC$. Так как $OA > OB > OC$, то, следовательно, $v_A > v_B > v_C$.

! Чем дальше от оси вращения расположена точка вращающегося твёрдого тела, тем больше модуль её скорости, обусловленной вращательным движением.

Вопросы

1. В каком случае говорят, что движение реального тела описано полностью?
2. Какое тело называют твёрдым?
3. Какое движение твёрдого тела называют поступательным?
4. Что необходимо задать для описания поступательного движения твёрдого тела?
5. Какое движение твёрдого тела называют вращательным?
6. Приведите примеры поступательного и вращательного движений твёрдых тел.

Упражнения

1. Колесо велосипеда вращается с частотой 3 об/с. Определите модуль скорости точки обода колеса относительно оси вращения. Радиус обода равен 80 см.
2. Точка обода катушки швейной машинки движется со скоростью, модуль которой равен $0,1$ см/с. Определите угловую частоту вращения катушки, если её радиус равен $1,5$ см.
3. Шестерёнка колеса велосипедного тренажёра вращается с частотой 2 об/с. Диаметр шестерёнки равен 15 см, а диаметр колеса — 1 м. Определите, на сколько модуль скорости точки обода колеса превышает максимальный модуль скорости движущихся точек шестерёнки.

Для углублённого уровня

§ 12 Сложение поступательного и вращательного движений. Плоское движение. Мгновенная ось вращения

Рассмотрим примеры поступательного и вращательного движений одного и того же тела.

Пусть колесо насажено на жёсткую ось OO'. Вначале закрепим колесо на этой оси так, чтобы оно не могло вращаться. Будем перемещать ось OO' вместе с колесом со скоростью $\vec{v}_O$ в горизонтальном направлении, перпендикулярном оси OO' (рис. 61). Движение колеса будет поступательным. Поскольку колесо не вращается и не деформируется, то все его точки за любой промежуток времени Δt совершают одинаковые перемещения и в каждый момент времени имеют одинаковые скорости. Эти скорости равны скорости $\vec{v}_O$ движения оси колеса: $\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C = \vec{v}_D = \vec{v}_O$ (рис. 62).

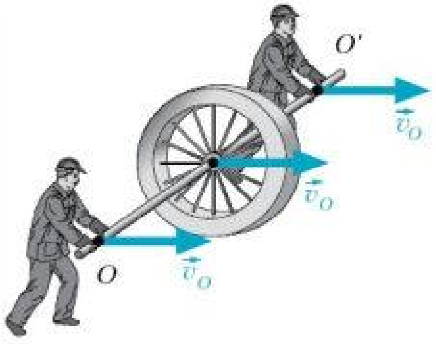


Рис. 61

Пусть это же колесо может свободно вращаться относительно неподвижной оси OO'. Раскрутим колесо вокруг оси OO' до угловой скорости ω (рис. 63). Если ось оставить неподвижной, то все точки колеса будут

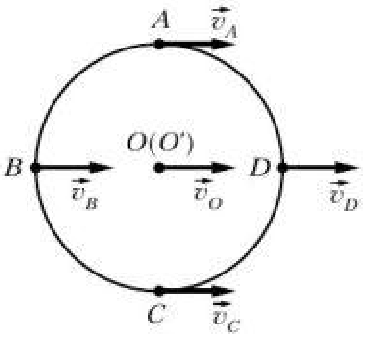


Рис. 62

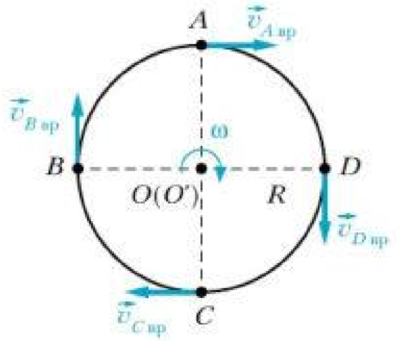


Рис. 63

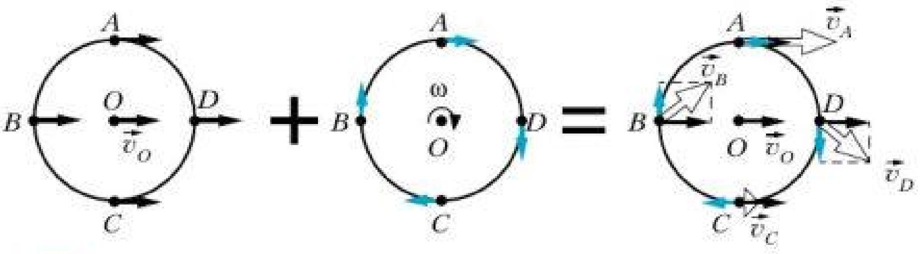


Рис. 64

двигаться по окружностям, центры которых лежат на этой оси. В этом случае движение колеса будет вращательным. Модули скоростей точек обода колеса обусловлены его вращением и равны $\omega \cdot R$.

Теперь, не прекращая вращения колеса, будем опять перемещать ось OO' вместе с колесом со скоростью $\vec{v}_O$ так, как мы это делали вначале. Такое движение колеса можно рассматривать как суперпозицию двух движений: поступательного движения со скоростью, равной скорости движения оси OO', и вращательного движения вокруг этой оси (рис. 64).

Для определения результирующей скорости какой-либо точки колеса необходимо в этом случае к скорости, обусловленной поступательным движением (чёрные стрелки на рис. 64), прибавить скорость, обусловленную вращательным движением (синие стрелки на рис. 64). В итоге получится результирующая скорость данной точки (контурные стрелки на рис. 64).

Теперь рассмотрим движение колеса автомобиля, который едет прямолинейно по горизонтальной дороге. Используя полученные знания, можно представить движение колеса в виде суммы поступательного и вращательного движений. Отметим, что в зависимости от соотношения модулей скоростей v_O и $\omega \cdot R$ можно выделить три принципиально различающихся вида движения автомобильного колеса.

1) Пусть $v_O > \omega \cdot R$. Подобным образом движутся, например, колёса автомобиля, водитель которого вынужден был прибегнуть к экстренному торможению. В этих условиях колёса почти не вращаются — угловая скорость ω очень мала, а модуль v_O скорости оси колеса ещё достаточно велик. Исследуем, как движется при этом точка C колеса, которая в рассматриваемый момент времени касается дороги (рис. 65, *а*).

Результирующая скорость $\vec{v}_C$ равна сумме противоположно направленных скоростей $\vec{v}_O$ и $\vec{v}_{\text{вр}}$, обусловленных соответственно поступательным и вращательным движениями. Так как $v_O > \omega \cdot R$, то скорость $\vec{v}_C$ направлена так же, как $\vec{v}_O$, а её модуль $v_C = v_O - \omega \cdot R$. Таким образом, точка C колеса

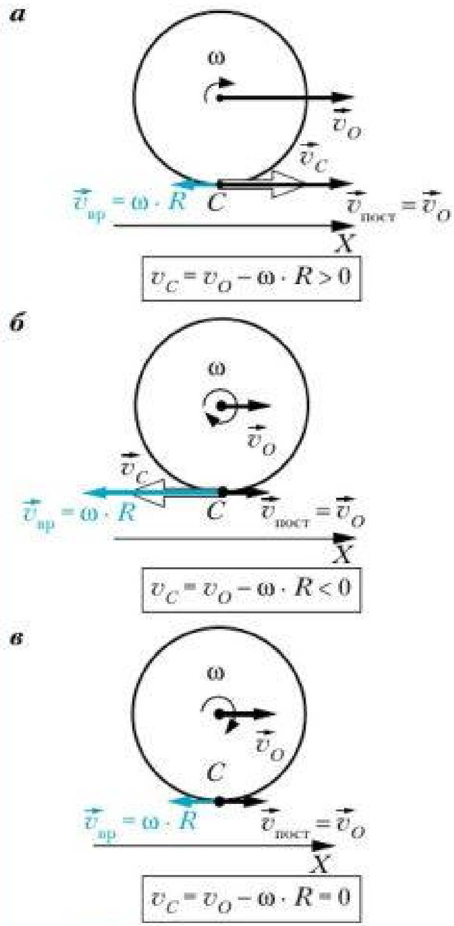


Рис. 65

скользит по дороге в направлении движения оси OO' колеса и корпуса автомобиля. Поэтому на скользящее колесо со стороны полотна дороги в месте касания действует сила трения скольжения, направленная против движения автомобиля. В результате скорость движения автомобиля уменьшается: автомобиль тормозит. Такое движение называют *торможением с проскальзыванием*.

2) Пусть $v_O < \omega \cdot R$. В этом случае модуль v_O скорости движения оси колеса мал, а угловая скорость ω его вращения велика. Подобным образом движутся колёса резко стартующих автомобилей. При таком движении результирующая скорость касающейся полотна дороги точки C колеса равна сумме противоположно направленных векторов $\vec{v}_O$ и $\vec{v}_{вр}$ (рис. 65, *б*). Так как $v_O < \omega \cdot R$, то скорость $\vec{v}_C$ направлена против скорости $\vec{v}_O$, а её модуль $|v_C| = \omega \cdot R - v_O$. Следовательно, точка C колеса скользит по дороге в направлении, противоположном направлению движения оси колеса и корпуса автомобиля. На проскальзывающее колесо со стороны дороги в месте касания действует сила трения скольжения, которая направлена в сторону движения автомобиля. В результате действия этой силы автомобиль разгоняется. Такой вид движения называют *пробуксовкой*.

3) Теперь рассмотрим случай $v_O = \omega \cdot R$. Легко видеть (рис. 65, *в*), что в этом случае скорость движения касающейся дороги точки C колеса равна нулю, так как $v_O - v_{вр} = v_O - \omega \cdot R = 0$. Следовательно, точка C не скользит по дороге. Такой вид движения катящегося колеса называют *движением без проскальзывания*. Подобным образом движутся колёса автомобиля, за рулём которого сидит опытный аккуратный водитель. Отметим особо, что

при таком движении автомобиль может и ускоряться, и тормозить. Однако силы трения, действующие на колёса и обеспечивающие ускорение автомобиля, в отличие от предыдущих случаев, являются *силами трения не скольжения, а покоя*.

Обратим внимание на особенности рассмотренных выше случаев движения колеса. Во-первых, ось вращения колеса всегда перпендикулярна плоскости рисунка, в которой происходит движение. Во-вторых, перемещения, связанные с поступательным движением точек колеса, лежат в плоскости рисунка (или параллельных ей плоскостях). Таким образом, в рассмотренных случаях ось, вокруг которой происходит вращательное движение тела, не изменяет своей ориентации в пространстве и движется поступательно. Кроме того, она всегда перпендикулярна перемещению, связанному с поступательным движением тела. Любое движение твёрдого тела, которое обладает такими свойствами, будет *плоским* движением.

Движение твёрдого тела называют плоским, если все точки этого тела движутся в параллельных друг другу плоскостях.

Из определения следует, что плоское движение можно изобразить на плоскости (на листе бумаги), если расположить этот лист параллельно плоскостям, в которых движутся точки твёрдого тела.

! Любое плоское движение твёрдого тела в каждый момент времени можно рассматривать как суперпозицию поступательного и вращательного движений.

Поясним это на примере. Пусть твёрдый прямой стержень движется по плоскости (это может быть, например, ученическая линейка, скользящая по поверхности стола). Допустим, что за некоторый промежуток времени Δt стержень переходит из положения AB в положение $A'B'$ (рис. 66). Новое положение может быть достигнуто в результате двух движений стержня: поступательного и вращательного. Примем, что поступательное движение стержня совпадает, например, с движением его конца A. На рис. 67, *а* это движение показано пунктирными стрелками. Тогда для достижения конечного положения $A'B'$ стержень, кроме поступательного, должен совершить и вращательное движение — поворот на угол $\Delta\varphi_A$ вокруг оси, которая перпендикулярна плоскости рисунка и проходит через конец стержня — точку $A'(A)$.

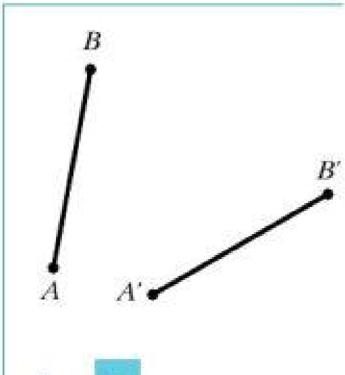


Рис. 66

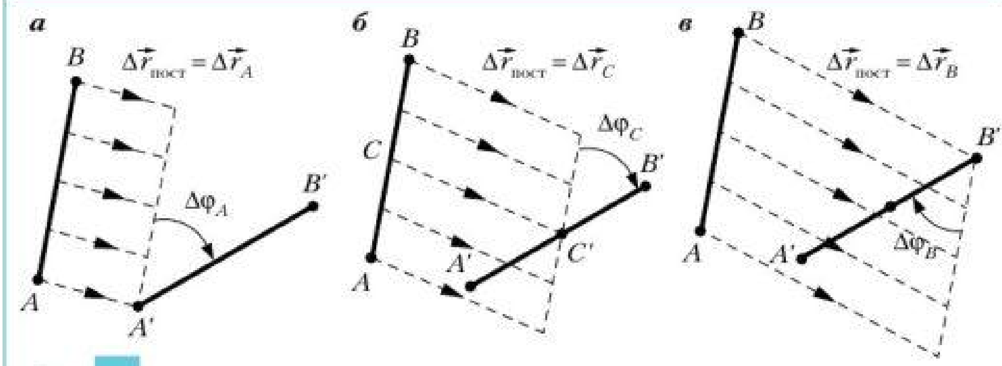


Рис. 67 Варианты разложения плоского движения на поступательное и вращательное

Понятно, что предложенный вариант разложения плоского движения стержня на поступательное и вращательное не является единственным. Например, если принять, что поступательное движение стержня совпадает с движением его середины — точки C, то вращение стержня будет происходить вокруг оси, перпендикулярной рисунку и проходящей через эту точку (рис. 67, *б*). Можно предложить множество подобных разложений плоского движения (один из вариантов показан на рис. 67, *в*).

Отметим особо, что при любом разбиении плоского движения стержня на поступательное и вращательное поворот стержня за рассматриваемый промежуток времени Δt будет осуществляться на один и тот же угол $\Delta\varphi$ (сравните углы $\Delta\varphi_A$, $\Delta\varphi_B$ и $\Delta\varphi_C$ на рис. 67).

! **Угловая скорость ω вращения твёрдого тела при любом разбиении его плоского движения на поступательное и вращательное будет одной и той же:**

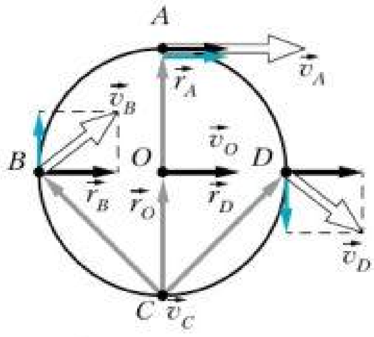
$$\frac{\Delta\varphi_A}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi_B}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi_C}{\Delta t} = \omega.$$

Напротив, скорости поступательного движения твёрдого тела при различных разложениях его плоского движения будут различаться как по модулю, так и по направлению. Это связано с тем, что перемещения за время Δt, обусловленные поступательным движением, отличаются друг от друга (сравните векторы $\Delta\vec{r}_A$, $\Delta\vec{r}_B$ и $\Delta\vec{r}_C$ на рис. 67).

! **Плоское движение твёрдого тела в каждый момент времени можно представить как чисто вращательное, которое совершается вокруг так называемой мгновенной оси вращения.**

Проиллюстрируем это на примере уже знакомого колеса, катящегося по дороге без проскальзывания (рис. 68).

Мы уже отмечали, что при движении без проскальзывания скорость точки C, касающейся дороги в данный момент времени, равна нулю ($v_C = v_O - \omega \cdot R = 0$). Рассмотрим скорости движения точек O, A, B и D. Видно, что скорость каждой из этих точек, во-первых, перпендикулярна соответствующему радиусу-вектору, проведённому в эту точку из точки C. Во-вторых, эта скорость равна по модулю произведению модуля этого вектора на угловую скорость вращения ω. Можно показать, что это выполняется и для всех остальных точек колеса.



$v_O = \omega \cdot R$

$v_A = v_O + \omega \cdot R = \omega \cdot 2R = \omega \cdot r_A$

$v_B = \omega \cdot \sqrt{2}R = \omega \cdot r_B$

$v_C = 0$

$v_D = \omega \cdot \sqrt{2}R = \omega \cdot r_D$

Рис. 68

Таким образом, можно считать, что *в данный момент времени колесо совершает только вращательное движение вокруг оси, которая перпендикулярна плоскости рисунка и проходит через точку C.*

Понятно, что в любой последующий момент времени положение оси, проходящей через точку касания дороги колесом, будет иным. Следовательно, утверждение о том, что колесо совершает только вращательное движение вокруг оси, проходящей через точку C, справедливо только для данного момента времени (данного мгновения). На этом основании такую ось и называют *мгновенной осью вращения*.

Вопросы

1. Какое движение твёрдого тела называют плоским?
2. На какие виды движения можно разложить плоское движение? Является ли такое разложение единственно возможным?
3. Опишите три варианта движения колеса по дороге.
4. Можно ли плоское движение представить в виде только вращательного? Как в этом случае называют ось вращения?
5. Через какую точку в каждый момент времени проходит мгновенная ось вращения катящегося без проскальзывания колеса?

Упражнения

1. Колесо автомобиля радиусом $0{,}4$ м движется по Земле так, что модуль скорости движения его оси равен 2 м/с, а угловая скорость вращения колеса равна 4π рад/с. Определите скорость движения точки колеса, касающейся дороги. Тормозит, разгоняется или движется равномерно данный автомобиль?
2. Колесо радиусом $0{,}4$ м катится без проскальзывания по Земле так, что модуль скорости движения его оси равен 2 м/с. Определите скорости точек обода колеса, расположенных в некоторый момент времени на вертикальном и горизонтальном диаметрах, для чего представьте движение колеса в виде суммы поступательного и вращательного движений.
3. Колесо радиусом $0{,}6$ м катится без проскальзывания по Земле, вращаясь вокруг своей оси с частотой 2 рад/с. Определите скорости точек обода колеса, расположенных в некоторый момент времени на вертикальном и горизонтальном диаметрах, для чего используйте мгновенную ось вращения.

Для углублённого уровня

§ 13 Примеры решения задач о плоском движении твёрдых тел

Задача 1. Движение твёрдого стержня по плоскости

Твёрдый тонкий стержень AB скользит по плоскости. Известно, что в некоторый момент времени скорость точки A стержня равна по модулю v_A и составляет со стержнем угол α (рис. 69). Скорость точки B в этот же момент времени составляет со стержнем угол β. Определите модуль скорости движения точки B в данный момент времени.

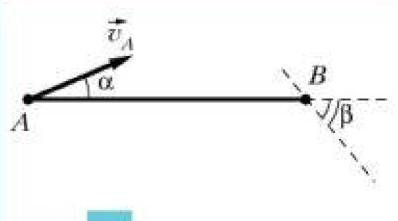


Рис. 69

Решение.

Представим плоское движение твёрдого стержня AB в рассматриваемый момент времени в виде суперпозиции поступательного и вращательного движений. Пусть скорости всех точек стержня, обусловленные его поступательным движением, совпадают со скоростью движения точки A (рис. 70). На рисунке эти скоро-

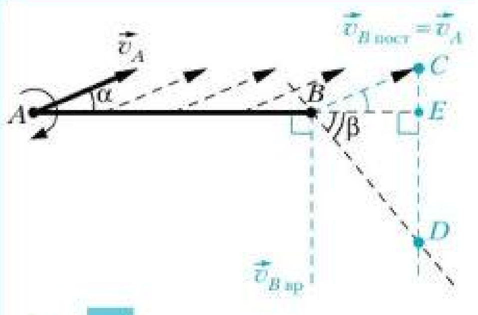


Рис. 70

сти показаны пунктирными векторами, равными $\vec{v}_A$. Обозначим скорость точки B, обусловленную поступательным движением стержня, символом $\vec{v}_{B\,пост} = \vec{v}_A$.

Если принять, что поступательное движение тела совпадает с движением какой-либо его точки, то вращение этого тела (*см.* § 12) происходит вокруг оси, проходящей через эту точку. Эту точку называют *полюсом вращения*.

В данном случае вращение стержня происходит вокруг оси, которая перпендикулярна плоскости рисунка и проходит через точку A. Скорость, обусловленную вращением вокруг полюса вращения A, обозначим для точки B как $\vec{v}_{B\,вр}$. Модуль этой скорости нам неизвестен, так как неизвестны ни угловая скорость вращения ω, ни длина L стержня. Однако нам известно направление $\vec{v}_{B\,вр}$ — эта скорость направлена перпендикулярно прямой AB (*см.* рис. 70).

Искомая скорость точки B равна сумме скоростей, обусловленных поступательным и вращательным движениями: $\vec{v}_B = \vec{v}_{B\,пост} + \vec{v}_{B\,вр}$. Воспользуемся правилом сложения векторов (правилом треугольника), чтобы определить искомую скорость $\vec{v}_B$. Для этого из конца вектора $\vec{v}_{B\,пост}$ (точка C на рис. 70) проведём луч, направление которого совпадает с направлением $\vec{v}_{B\,вр}$. Этот луч будет перпендикулярен прямой AB. Определим точку D пересечения этого луча с лучом, направление которого совпадает с направлением искомой скорости $\vec{v}_B$. Вектор $\overrightarrow{BD}$ и будет искомой скоростью $\vec{v}_B$, так как $\vec{v}_B = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{v}_{B\,пост} + \vec{v}_{B\,вр}$.

Для определения модуля скорости $\vec{v}_B$ рассмотрим отрезок BE. Треугольник BCE прямоугольный. Следовательно, $BE = BC \cdot \cos\alpha = v_{B\,пост} \cdot \cos\alpha = v_A \cdot \cos\alpha$. Треугольник BDE также прямоугольный, поэтому $BE = BD \cdot \cos\beta = v_B \cdot \cos\beta$.

Следовательно,

$$v_A \cdot \cos\alpha = v_B \cdot \cos\beta. \quad (1)$$

Откуда находим: $v_B = \dfrac{v_A \cdot \cos\alpha}{\cos\beta}$.

Ответ: $v_B = \dfrac{v_A \cdot \cos\alpha}{\cos\beta}$.

Полученный результат очень важен с точки зрения решения прикладных физических задач. Поэтому проведём его анализ, чтобы лучше понять

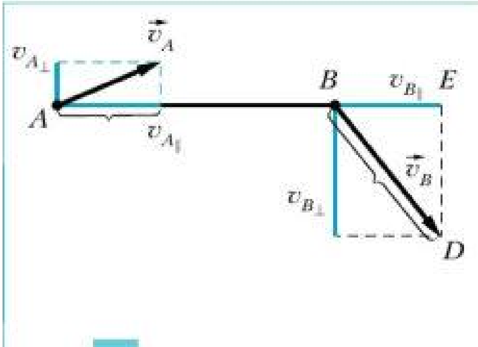


Рис. 71

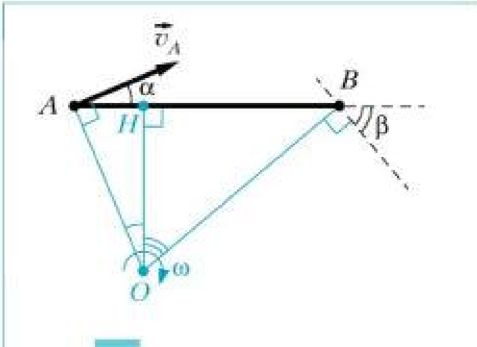


Рис. 72

смысл соотношения (1). Разложим каждую из скоростей точек A и B стержня на две составляющие: параллельную стержню AB и перпендикулярную ему (рис. 71). Из соотношения (1) следует, что $v_{A_\parallel} = v_A \cdot \cos\alpha = v_B \cdot \cos\beta = v_{B_\parallel}$, т. е. $v_{A_\parallel} = v_{B_\parallel}$.

При любом плоском движении тонкого твёрдого стержня проекции скоростей его концов на ось, параллельную оси стержня, равны.

Действительно, если бы эти проекции различались, то, очевидно, длина твёрдого стержня изменялась бы с течением времени. Отметим, что составляющие скоростей концов стержня, которые перпендикулярны его оси, не влияют на изменение его длины (подумайте почему).

Приведём ещё один способ решения задачи 1. Будем рассматривать плоское движение твёрдого стержня AB в данный момент времени как чисто вращательное движение вокруг так называемой мгновенной оси вращения. Напомним, что эта ось перпендикулярна плоскости движения, т. е. плоскости рисунка. Определим положение точки пересечения этой оси с плоскостью рисунка — положение полюса вращения (рис. 72). При чисто вращательном движении все точки стержня движутся по концентрическим окружностям, центры которых совпадают с полюсом. Поэтому скорость любой точки стержня перпендикулярна радиусу-вектору, проведённому в данную точку из полюса вращения. Таким образом, необходимо построить перпендикуляры к известным направлениям скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ и определить точку их пересечения. Эта точка и будет искомым полюсом вращения O — центром концентрических окружностей, по которым движутся все точки стержня.

Пусть ω — угловая скорость вращения стержня. Тогда $v_A = \omega \cdot OA$, $v_B = \omega \cdot OB$. Опустим из точки O перпендикуляр на AB и обозначим его OH

(*см.* рис. 72). Из построения следует, что $\angle AOH = \alpha$ и $\angle BOH = \beta$. Поэтому $OH = OA \cdot \cos\alpha = OB \cdot \cos\beta$. Следовательно $v_A = \dfrac{\omega \cdot OH}{\cos\alpha}$, $v_B = \dfrac{\omega \cdot OH}{\cos\beta}$. Выражая из этих двух уравнений произведение $\omega \cdot OH$, мы приходим к соотношению (1):

$$\omega \cdot OH = v_A \cdot \cos\alpha = v_B \cdot \cos\beta.$$

Рассмотрим, как можно использовать соотношение (1) и разложение плоского движения твёрдого тела на поступательное и вращательное при решении задачи о движении катушки с намотанной на неё нитью.

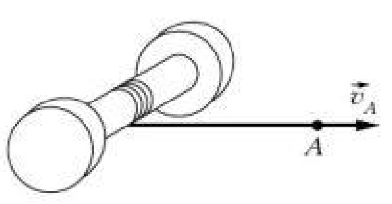


Рис. 73

Перед этим проведём эксперимент. Возьмём катушку с намотанной на неё нитью. Положим катушку на стол так, как показано на рис. 73. Потянем нить за свободный конец параллельно поверхности стола. Если тянуть нить без резких рывков, так, чтобы катушка катилась без проскальзывания, то результат удивит многих из вас. Катушка покатится в сторону руки и достаточно быстро догонит руку. Попробуем разобраться, что при этом происходит.

Задача 2. Движение катушки с нитью

Катушку, лежащую на горизонтальной крышке стола, тянут за конец A нерастяжимой нити, которая намотана на среднюю часть катушки. При этом катушка катится без проскальзывания и её ось не изменяет своей ориентации относительно стола (рис. 74). Скорость движения точки A нити постоянна и равна $\vec{v}_A$. Определите скорость движения оси O катушки, если радиус r её средней части в 2 раза меньше радиуса R её щёк.

Решение.

Пусть точка B — точка касания горизонтальной части нити и средней части катушки. Нить нерастяжима. Следовательно (*см.* задачу 1), горизонтальная составляющая скорости точки B равна горизонтальной составляющей скорости точки A:

$$v_{B\ \text{гор}} = v_{A\ \text{гор}} = v_A. \qquad (2)$$

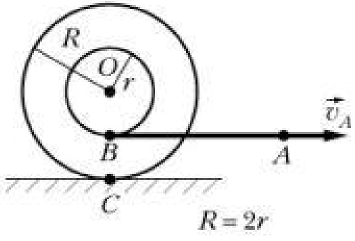


Рис. 74

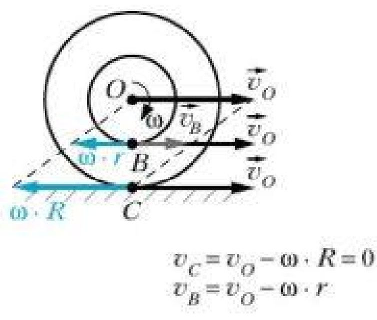


Рис. 75

Теперь определим скорость точки B, исходя из движения катушки. Пусть $\vec{v}_O$ – скорость оси O катушки. Будем рассматривать плоское движение катушки как суперпозицию поступательного движения со скоростью $\vec{v}_O$ и вращательного движения вокруг оси O с угловой скоростью ω (рис. 75). При таком рассмотрении скорость каждой точки катушки равна векторной сумме скорости $\vec{v}_O$ и скорости, обусловленной вращательным движением. Например, скорость $\vec{v}_C$ точки C касания катушки и стола равна сумме $\vec{v}_O$ и вектора $\vec{v}_{C\text{ вр}}$, который направлен в противоположную сторону и равен по модулю $\omega \cdot R$. Поэтому $v_C = v_O - \omega \cdot R$. По условию задачи катушка движется без проскальзывания. Следовательно, скорость точки C равна нулю: $v_C = v_O - \omega \cdot R = 0$.

Поэтому

$$\omega = \frac{v_O}{R}. \qquad (3)$$

Скорость $\vec{v}_B$ точки B катушки складывается из направленной горизонтально скорости $\vec{v}_O$ и скорости $\vec{v}_{B\text{ вр}}$, обусловленной вращением катушки. Скорость $\vec{v}_{B\text{ вр}}$ направлена в сторону, противоположную поступательному движению катушки, и равна по модулю $\omega \cdot r$. Следовательно, скорость точки B направлена горизонтально и с учётом соотношения (3) равна по модулю: $v_B = v_O - \omega \cdot r = v_O - \dfrac{r \cdot v_O}{R} = v_{B\text{ гор}}$. Отсюда с учётом соотношения (2) и того, что $R = 2r$, получаем:

$$v_O = \frac{v_A \cdot R}{R - r} = 2v_A.$$

Ответ: $v_O = 2v_A$.

Видно, что при плоском движении катушки без проскальзывания скорость движения её оси по модулю больше, чем скорость движения руки, которая тянет нить. Этим объясняется, почему катушка догоняет руку, тянущую нить.

Упражнения

1 По озеру движется катер. К катеру прикреплён трос, за другой конец которого держится спортсмен на водных лыжах. Угол между тросом и скоростью катера равен 30°, а угол между тросом и скоростью лыжника — 60° (рис. 76). Определите скорость лыжника, если модуль скорости катера равен 54 км/ч.

2 Катушку, лежащую на горизонтальной крышке стола, тянут за конец A нерастяжимой нити, намотанной на её среднюю часть, так, что катушка катится без проскальзывания и её ось не изменяет своей ориентации относительно стола (рис. 77). Скорость движения точки A нити постоянна и равна $\vec{v}_A$. Определите скорость движения оси O катушки, если радиус r её средней части в 3 раза меньше радиуса R её щёк.

3 Вырезанный из однородного листа металла равносторонний треугольник ABC движется по гладкой горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени скорость $\vec{v}_A$ вершины A этого треугольника оказалась перпендикулярной биссектрисе угла A, а скорость вершины B оказалась направленной вдоль стороны AB. Определите для этого момента времени направление и модуль скорости вершины C и центра O треугольника.

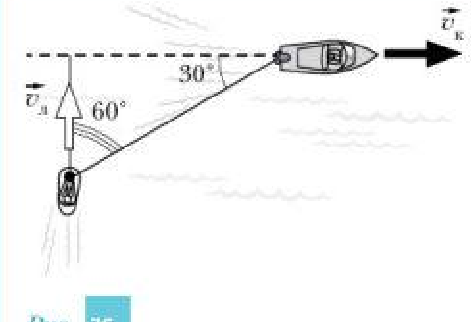


Рис. 76

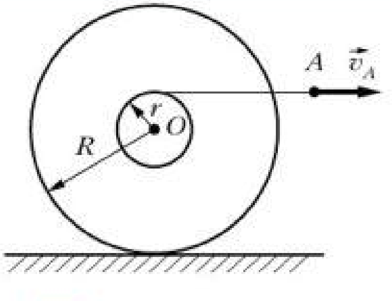


Рис. 77

Глава 3 Динамика

Задачей кинематики является описание механического движения тел без выяснения причин изменения характера такого движения. Теперь нам предстоит выяснить, почему в одних случаях тело движется равномерно прямолинейно, а в других его движение происходит с ускорением. Ответы на подобные вопросы и составляют содержание раздела механики, который называют *динамикой*.

Динамика — раздел механики, в котором изучают движения тел под действием приложенных к ним сил.

Отметим, что в этой главе мы будем рассматривать только такое движение реальных тел, при котором их можно считать точечными телами. Поэтому в дальнейшем, если не будет сделано специальных оговорок, под словом «тело» мы будем подразумевать точечное тело. Напомним, что это возможно в том случае, если при движении реального тела различия в движении отдельных его частей не имеют значения или все части тела движутся одинаково (при поступательном движении тела).

§ 14 Закон инерции. Инерциальная система отсчёта. Первый закон Ньютона

Опыт подсказывает нам, что *в системе отсчёта, связанной с Землёй, для того чтобы изменить скорость тела (ускорить, затормозить тело или изменить направление его скорости), необходимо на это тело подействовать* (рис. 78). Другими словами, для изменения своей скорости тело должно испытать *механическое действие* со стороны другого тела (или тел). Вы уже знаете, что если у тела изменяется скорость, то у него имеется отличное от нуля ускорение. Таким образом, мы приходим к выводу:

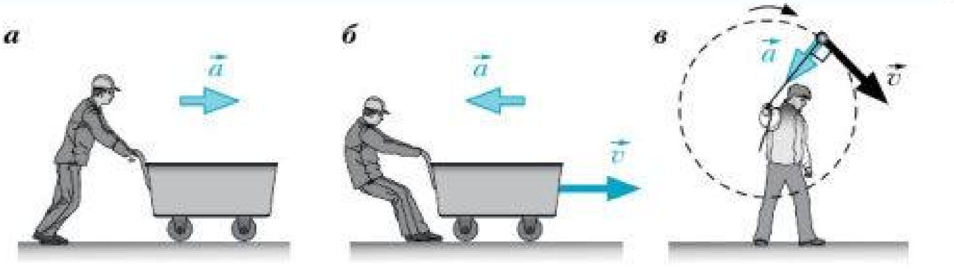


Рис. 78 Тело изменяет свою скорость (*а* – ускоряется, *б* – тормозится, *в* – изменяет направление движения) в результате действия на него другого тела

! чтобы в связанной с Землёй системе отсчёта у тела появилось ускорение, на это тело необходимо подействовать.

А что будет происходить со скоростью равномерно прямолинейно движущегося относительно Земли тела, если на него не действовать?

Этот кажущийся простым вопрос интересовал ещё древних учёных и философов. На протяжении почти двух тысячелетий со времён древнегреческого философа Аристотеля (384–322 до н. э.) считалось, что для поддержания равномерного прямолинейного движения тела на него необходимо *действовать постоянно*. В качестве довода приводился такой наглядный пример: чтобы телега ехала по горизонтальной дороге с постоянной скоростью, её всё время должна тянуть лошадь. Если же лошадь перестанет тянуть телегу, та достаточно быстро остановится. Правда, древние учёные не могли таким же образом объяснить, как при отсутствии постоянного действия происходит движение брошенного камня или выпущенной из лука стрелы.

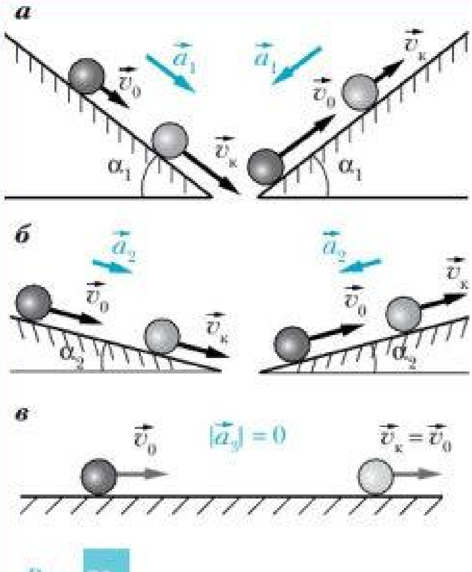


Рис. 79

Первый серьёзный шаг в разрешении этого вопроса сделал в XVII в. великий итальянский учёный Галилео Галилей (1564–1642). Изучая движение тел (тяжёлых шаров) по разным наклонным плоскостям (рис. 79, *а* и *б*), он экспериментально установил следующие закономерности:

1) при движении тела вниз по наклонной плоскости его скорость увеличивается;

2) напротив, при движении тела вверх по наклонной плоскости его скорость уменьшается;

3) при уменьшении угла наклона плоскости скорость движущегося по ней вниз или вверх тела изменяется меньше.

На основании этих закономерностей Галилей сделал вывод, что *при стремлении угла наклона плоскости к нулю изменение скорости должно также стремиться к нулю*. Таким образом, при движении тела по горизонтальной плоскости скорость тела должна оставаться постоянной (рис. 79, *в*).

Однако опыты показали, что при движении по *реальной* горизонтальной плоскости скорость тела всё-таки уменьшается (тело тормозится). При этом величина торможения зависит от материалов, из которых изготовлены тело и плоскость. Галилей выдвинул гипотезу, что *реальная* горизонтальная плоскость, действуя на тело против его движения, вызывает торможение тела. Однако можно представить себе, что тело движется по *идеально гладкой* горизонтальной плоскости, которая не вызывает торможения (противодействия движению). В этом случае при отсутствии действия со стороны других тел это тело будет двигаться относительно Земли с постоянной скоростью, т. е. равномерно прямолинейно.

Проведённые эксперименты и их анализ позволили Галилею выдвинуть смелую гипотезу – закон о движении тела *по инерции*, т. е. при отсутствии действия на тело со стороны других тел (от лат. *inertia* – «бездеятельность»). В настоящее время этот закон называют **законом инерции**.

Если на точечное тело не действуют другие тела, то такое тело покоится или движется с постоянной скоростью.

Сразу отметим, что *сформулированный закон инерции выполняется не во всех системах отсчёта*. Действительно, вы уже знаете, что движение тел относительно и в разных системах отсчёта одно и то же тело может двигаться по-разному.

Рассмотрим движение тела по идеально гладкой горизонтальной плоскости (как в мысленном эксперименте Галилея) в разных системах отсчёта. Пусть тело A движется по инерции относительно Земли (рис. 80, *а*) с постоянной скоростью $\vec{v}_A$, т. е. равномерно прямолинейно. Затем рассмотрим это же движение тела A в системе отсчёта $X'Y'$, связанной с телом B (рис. 80, *б*). При этом относительно Земли тело B движется прямолинейно равномерно с постоянной скоростью $\vec{v}_B$. В системе отсчёта $X'Y'$ скорость $\vec{v}\,'_A$ тела A будет также постоянна $(\vec{v}\,'_A = \vec{v}_A - \vec{v}_B)$. Следовательно, в системах отсчёта, которые связаны с Землёй или движутся относительно неё с постоянной скоростью, закон инерции выполняется.

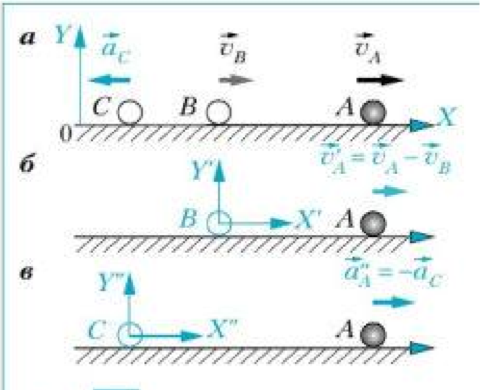


Рис. 80 Проверка выполнения закона инерции в различных системах отсчёта

Наконец, рассмотрим движение тела A в системе отсчёта, связанной с телом C (рис. 80, *в*), которое движется относительно Земли с ускорением $\vec{a}_C$ (*см.* рис. 80, *а*). В этой системе отсчёта у тела A ускорение отлично от нуля, несмотря на то что в горизонтальном направлении на тело A ничто не действует. Следовательно, в системе отсчёта $X''Y''$ закон инерции не выполняется.

В результате мы приходим к очень важному выводу: с точки зрения опытов, подобных опытам Галилея, все системы отсчёта можно разделить на два вида. В системах отсчёта первого вида, которые связаны с Землёй или движутся относительно неё с постоянной скоростью, закон инерции выполняется. Напротив, в системах отсчёта второго вида, которые движутся относительно Земли с ускорением, закон инерции не выполняется. При этом в системах отсчёта второго вида тело, на которое ничто не действует, изменяет свою скорость (имеет отличное от нуля ускорение), как если бы на него оказывалось механическое действие.

Более тщательные исследования показывают, что закон инерции даже в системах отсчёта, связанных с Землёй, выполняется лишь приближённо. Это объясняется, в частности, тем, что Земля вращается вокруг своей оси и движется вокруг Солнца. Отметим, что Солнце, в свою очередь, движется относительно других звёзд нашей Галактики, а сама Галактика движется относительно других галактик.

Как же выбрать систему отсчёта, в которой закон инерции выполняется точно? Для этого прежде всего необходимо найти тело, про которое заранее известно, что на него не действуют никакие другие тела. Но где взять такое тело?

Рассмотрим точечное тело, которое находится очень далеко от всех других тел (например, где-то в космосе вдали от всех звёзд). Такое тело принято называть *свободным*. Можно считать, что действие других тел на это тело практически равно нулю. Имея такое тело, ищут систему отсчёта, в которой это свободное тело движется равномерно прямолинейно (или покоится). Такое движение, как вы знаете, называют движением по инерции. Поэтому выбранную таким образом систему отсчёта называют *инерциальной*.

Систему отсчёта называют инерциальной, если в ней свободное (удалённое от всех других объектов) точечное тело покоится или движется равномерно прямолинейно.

Другими словами, можно сказать, что *инерциальной называют систему отсчёта, в которой выполняется закон инерции*.

Системы отсчёта, в которых свободное тело движется с ускорением (в которых закон инерции не выполняется), называют *неинерциальными*. Пример неинерциальной системы отсчёта показан на рис. 81. В системе отсчёта X', связанной с резко тормозящим на дороге автобусом, пассажиры автобуса получают ускорение (их внезапно бросает вперёд по ходу движения) при отсутствии воздействия на них в этом направлении.

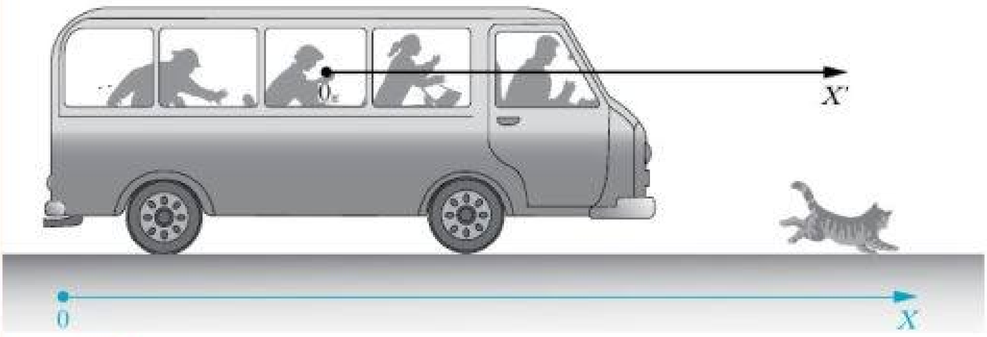


Рис. 81

Но существуют ли инерциальные системы отсчёта (ИСО)? Можно ли найти их в природе? Эксперименты показывают, что в различных системах отсчёта закон инерции выполняется с разной степенью точности. Для многих физических задач неподвижную относительно поверхности Земли систему отсчёта можно считать инерциальной. С ещё большей точностью соблюдается закон инерции в системе отсчёта, центр которой совпадает с центром Солнца, а оси направлены на удалённые звёзды.

В современной физике постулируется:

инерциальные системы отсчёта существуют.

В честь великого английского физика Исаака Ньютона (1643–1727) это утверждение называют **первым законом Ньютона**. Этот закон является фундаментальным законом природы, важным не только в механике, но и во всех других разделах физики. С точки зрения современной науки первый закон Ньютона означает, что *всегда можно найти (выбрать) систему отсчёта, которую с требуемой степенью точности можно считать инерциальной*.

Например, при решении многих задач о движении тел на небольшие расстояния в течение не очень длительных промежутков времени вблизи поверхности Земли можно считать инерциальной систему отсчёта, которая связана с поверхностью Земли. Эту систему отсчёта часто называют *лабораторной*. Понятно, что системы отсчёта, которые движутся относительно лабораторной системы отсчёта с постоянной скоростью, также можно считать инерциальными (для подобных задач). При исследовании законов движения планет Солнечной системы и других небесных тел инерциальной можно считать *гелиоцентрическую* систему отсчёта. С

С Отметим, что введение понятия свободного тела, удалённого от других тел, необходимо для построения строгой аксиоматики механики Ньютона. Это связано с тем, что используемое в сформулированном выше законе инерции понятие действия одного тела на другое может быть строго определено *только после* введения понятия инерциальной системы отсчёта.

Вопросы

1. Что изучает динамика?
2. Сформулируйте закон инерции Галилея.
3. Какую систему отсчёта называют инерциальной?
4. В каких системах отсчёта выполняется закон инерции? Как называют системы отсчёта, в которых закон инерции не выполняется?
5. Приведите свой пример неинерциальной системы отсчёта.
6. Какое тело называют свободным?
7. Сформулируйте первый закон Ньютона.
8. Какую систему отсчёта называют лабораторной?

Упражнения

1 Система отсчёта *1* движется равномерно прямолинейно относительно системы отсчёта *2*. Можно ли утверждать, что система отсчёта *1* является инерциальной?

2 Про точечное тело известно, что в одной системе отсчёта оно покоится, в другой — движется равномерно прямолинейно. Можно ли утверждать, что эти системы отсчёта являются инерциальными? (*Подсказка:* рассмотрите движение мухи, сидящей на свободно падающем камне, в системах отсчёта, связанных с этим камнем и камнем, который начал свободно падать раньше.)

§ 15 Сила. Измерение сил

После выбора ИСО можно судить о наличии или отсутствии механического действия на точечное тело со стороны другого тела или тел.

Признаком наличия механического действия на точечное тело является изменение его скорости (появление отличного от нуля ускорения) в инерциальной системе отсчёта.

Для количественной характеристики механического действия вводят векторную физическую величину – *силу*.

Силой в механике называют векторную физическую величину, характеризующую действие одного тела на другое, в результате которого это другое тело получает ускорение в инерциальной системе отсчёта.

Отметим особо, что понятие силы относится не к одному, а к двум телам: помимо тела, на которое действует сила, всегда есть тело, со стороны которого сила действует.

В приведённом определении силы не указан способ измерения или расчёта этой величины.

Прежде чем указать этот способ, постулируем два принципиально важных свойства сил, которые подтверждаются всеми известными экспериментами.

Во-первых, сила – векторная величина. При действии на точечное тело только одной силы *направление этой силы совпадает с направлением ускорения тела в ИСО* (рис. 82).

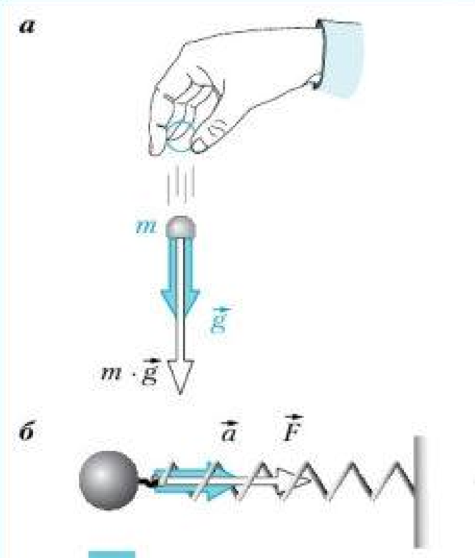


Рис. 82

Во-вторых, при действии на точечное тело нескольких сил *ускорение этого тела в ИСО будет таким же, как если бы на него действовала одна сила, равная сумме всех действующих на тело сил* (рис. 83). Другими словами, действующие на точечное тело силы складывают по правилам сложения векторов и они могут быть заменены одной силой, равной сумме всех действующих на тело сил.

Эти утверждения позволяют ввести понятие равенства двух сил друг другу. Действительно, пусть на точечное тело одновременно действуют две силы в противоположных направлениях (рис. 84). Причём эти силы таковы, что в результате их действия ускорение данного тела в ИСО равно нулю. Тогда из сформулированных выше утверждений следует, что вектор суммы этих сил также равен нулю: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$, или $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ и $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right|$.

Таким образом, *если одновременное действие на точечное тело двух противоположно направленных сил не изменяет его скорости в ИСО,*

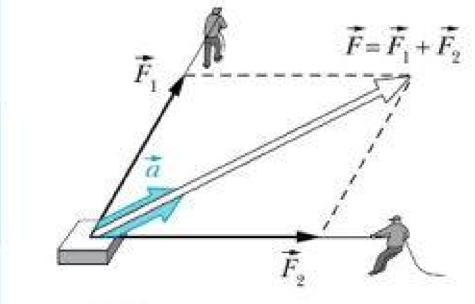


Рис. 83 Действующие на точечное тело силы складывают по правилам сложения векторов

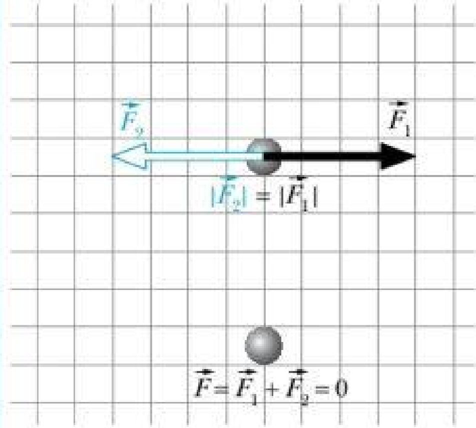


Рис. 84

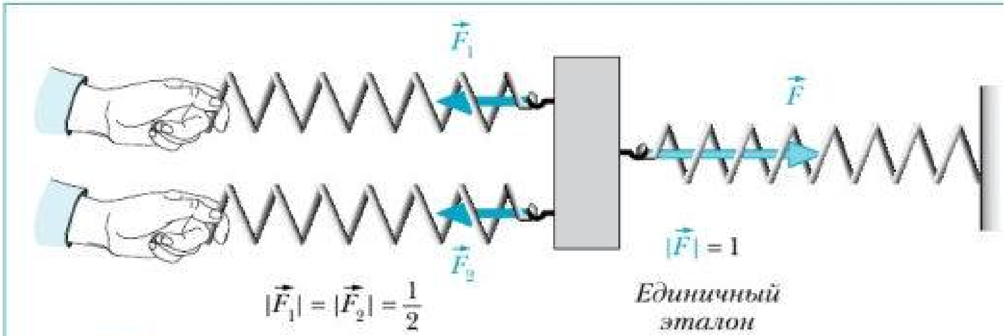


Рис. 85 Две одинаковые пружины уравновешивают эталон силы

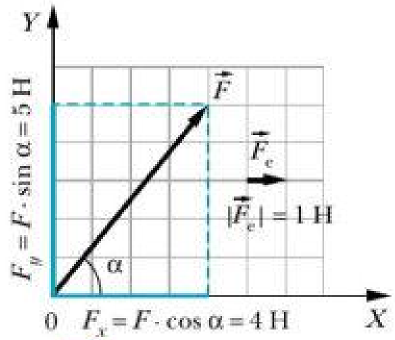


Рис. 86

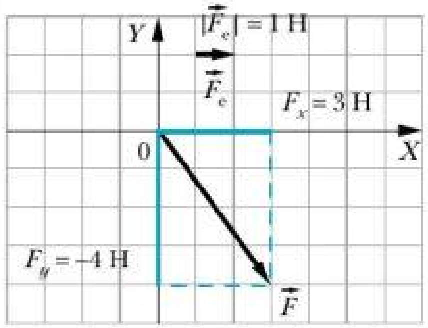


Рис. 87

то эти силы равны по модулю. Это утверждение позволяет ввести способ измерения сил.

Для измерения силы вначале выбирают *эталон силы*. Это может быть, например, сила, с которой действует на тело некоторая пружина, растянутая на фиксированную величину Δl. Если действие эталона силы на тело скомпенсировать действием другой пружины, то можно утверждать, что модули обеих действующих на тело сил равны: $\left|\vec{F}_2\right| = \left|\vec{F}\right|$. Подобным образом можно получить сколько угодно эталонов силы.

На рис. 85 показано, как с помощью двух одинаковых пружин можно получить силу, модуль которой равен половине модуля эталона силы. Каждая из двух пружин, растянутых на фиксированную величину и компенсирующих таким образом действие на тело эталона силы, будет являться эталоном силы с модулем $\frac{1}{2}$. Подобным образом можно создать набор эталонных пружин, которые при известных растяжениях действуют с силами, пропорциональными *эталону силы с разными коэффициентами*. После этого не составит труда измерить модуль любой неизвестной силы. Для этого достаточно уравновесить её действие действием соответствующего набора эталонных пружин.

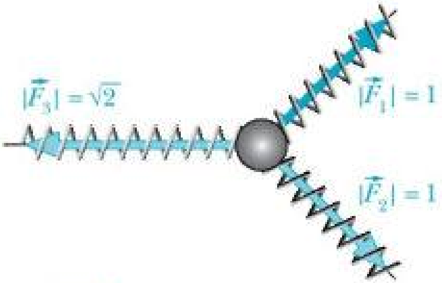


Рис. 88

В заключение отметим, что если известна сила, то в выбранной системе отсчёта можно определить её проекции на координатные оси (рис. 86). Можно выполнить и обратную операцию: по известным проекциям силы на координатные оси определить модуль и направление вектора этой силы (рис. 87).

Понятие проекции силы позволяет измерять неизвестную силу, модуль которой равен иррациональному числу модулей эталонов силы. Например, на рис. 88 показано, как измерить силу, модуль которой в $\sqrt{2}$ раз больше модуля эталона силы.

Вопросы

1. Что является признаком наличия механического действия на тело?
2. Что в механике называют силой?
3. Куда направлен вектор силы?
4. Что может быть эталоном силы?
5. Приведите примеры сил, известных вам из курса физики 7–9 классов.

Упражнения

1. На точечное тело действуют только две противоположно направленные силы. Модуль первой силы равен четверти эталона силы. Определите модуль второй силы, если ускорение этого тела в ИСО равно нулю.
2. На точечное тело действуют только две силы, направленные в положительном направлении оси X инерциальной системы отсчёта. Модуль первой силы равен трети эталона силы, а модуль второй — эталону силы. Определите сумму этих сил. Куда направлено ускорение тела?

3 На точечное тело действуют только две равные по модулю силы, угол между которыми равен 60°. Каждая из этих сил по модулю равна двум эталонам силы. Определите сумму этих сил. Куда направлено ускорение тела?

§ 16 Инертность. Масса. Второй закон Ньютона

Эксперименты показывают (рис. 89), что при действии одной и той же силы на разные тела эти тела *приобретают разные ускорения в ИСО*. Про такие тела говорят, что они обладают разной *инертностью*. Подчеркнём, что речь, как и прежде, идёт о телах, которые можно считать точечными. В противном случае используемые понятия скорости и ускорения этих тел теряют смысл, так как в общем случае скорости и ускорения разных точек тела могут быть различны.

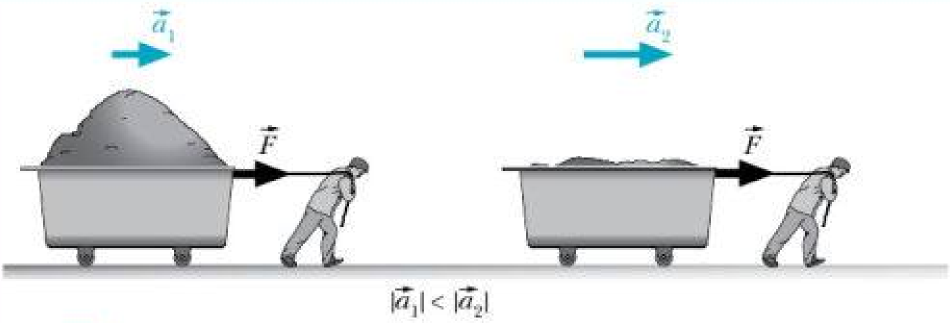


Рис. 89

Под инертностью тела понимают свойство тела препятствовать изменению скорости под действием приложенной силы в ИСО. Чем меньше ускорение (чем медленнее изменяется скорость) первого тела по сравнению с ускорением (изменением скорости) второго тела при одной и той же действующей на них силе, тем больше инертность первого тела по сравнению с инертностью второго.

Для количественной характеристики инертности тела вводят физическую величину, которую называют *массой*.

Масса — физическая величина, количественно характеризующая инертность тела.

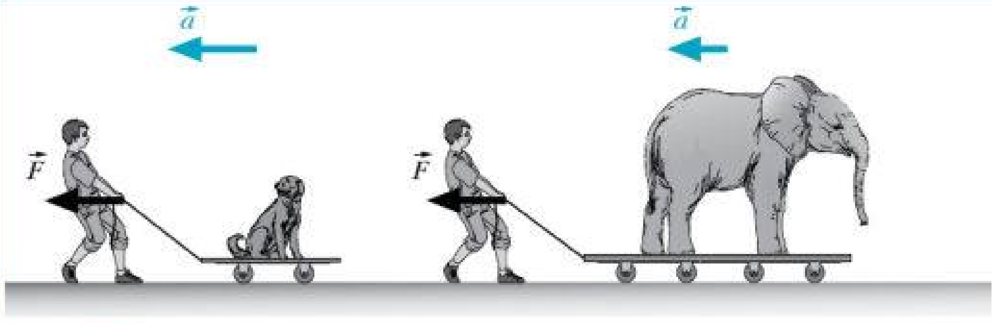


Рис. 90

Чем больше масса тела, тем больше его инертность.

Под действием одной и той же силы в ИСО тело с большей массой приобретает меньшее ускорение, чем тело с меньшей массой.

Другими словами, чем больше масса тела, тем сложнее его разогнать, затормозить или изменить направление его скорости (рис. 90).

Как и в случае с силой, в приведённом определении массы не указан способ измерения или расчёта этой величины.

Прежде чем определить способ измерения массы, необходимо постулировать её важное свойство. Масса — величина аддитивная, т. е. масса скреплённых вместе двух тел всегда равна сумме масс этих тел. Многочисленные эксперименты подтверждают это свойство массы.

Для измерения массы вначале выбирают *эталон массы*. В СИ массу тела измеряют в *килограммах* (кг). За эталон массы 1 кг принята масса цилиндра из сплава платины и иридия, который хранится в Международном бюро мер и весов в г. Севре, близ Парижа.

Будем подбирать тела так, чтобы при действии на них такой же силой, как и на эталон массы, они приобретали бы одинаковые с эталоном массы ускорения в ИСО. В этом случае если каждое тело будет состоять из одинаковых частей, имеющих одинаковые массы, то можно получить набор тел с известными массами (рис. 91). После этого процесс измерения неизвестной массы тела может быть сведён к подбору группы тел с известными массами. Соединённые вместе, они должны обладать той же инертностью, что и тело с неизвестной массой (рис. 92).

В 2018 г. на 26-й Генеральной конференции по мерам и весам было принято решение об отказе от материального эталона килограмма. Теперь для улучшения точности измерений единицу массы определяют через постоянную Планка.

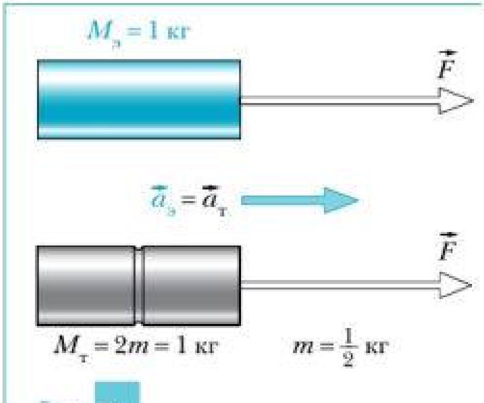


Рис. 91

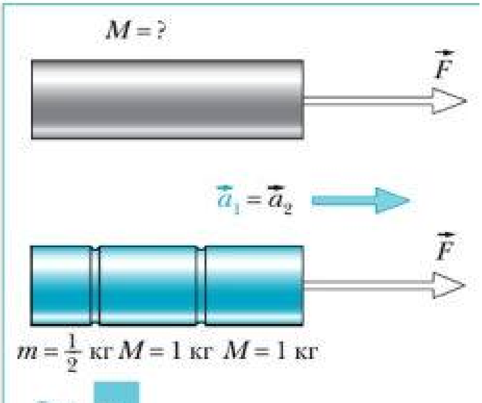


Рис. 92

При замене реального тела массой m точечным телом массу точечного тела считают равной m.

Точечное тело, имеющее массу, называют материальной точкой.

Понятно, что материальных точек, как и точечных тел, в природе нет. Материальная точка – это модель, на которую заменяют реальное тело, обладающее массой, в случае, если данное тело в рассматриваемой задаче можно считать точечным.

Теперь, после введения эталона массы, можно ввести единицу силы, используя указанный способ измерения массы тела. За единицу силы в СИ принята сила, которая придаёт первоначально покоившейся в ИСО материальной точке массой 1 кг ускорение, модуль которого равен 1 м/с^2. Как вы знаете, такую единицу силы называют *ньютон* (Н). Из сказанного следует, что единица силы в СИ является производной, т. е. полученной с помощью других единиц СИ.

Если известна сумма всех действующих на материальную точку сил, то можно определить её ускорение в ИСО. Для этого используют **второй закон Ньютона**.

В инерциальной системе отсчёта ускорение $\vec{a}$ материальной точки равно отношению суммы $\vec{F}$ всех действующих на неё сил к её массе m:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \qquad (1)$$

Второй закон Ньютона является фундаментальным законом природы и подтверждается всеми известными на сегодняшний день экспериментами.

Обратим внимание на несколько важных моментов, необходимых для правильного понимания этого закона.

Во-первых, если сумма $\vec{F}$ всех действующих на материальную точку сил равна нулю, то из уравнения (1) следует, что ускорение $\vec{a}$ этой точки в ИСО также равно нулю, т. е. материальная точка движется равномерно и прямолинейно. Однако это ни в коем случае не означает, что из второго закона Ньютона следует первый, который говорит о *существовании* инерциальных систем отсчёта.

Во-вторых, закон сформулирован для *материальной точки* – для тела, которое в рамках рассматриваемой задачи можно считать точечным. Если же при описании движения тела различие в движении его частей имеет принципиальное значение, то к такому телу второй закон Ньютона в общем случае применять нельзя. Это связано с тем, что при действии на реальное тело сил ускорения разных точек этого тела, вообще говоря, могут быть различными. Например, разные точки вертолётного винта движутся с разными ускорениями (*см.* рис. 60 в § 11).

В-третьих, сумма $\vec{F}$, входящая в уравнение (1), – это *сумма всех сил*, действующих на материальную точку. Если, используя уравнение (1), при расчёте $\vec{F}$ вы забудете хотя бы одну из действующих сил, то, скорее всего, придёте к неверному результату.

В-четвёртых, отметим особо, что ***уравнение (1) выполняется только в инерциальных системах отсчёта***. В неинерциальных системах отсчёта это равенство не выполняется (подробнее об этом *см.* § 27).

В-пятых, из второго закона Ньютона следует, что $1\ \text{Н} = 1\ \dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$.

Отметим, что уравнение (1) позволяет решить и обратную задачу: по известному в ИСО ускорению $\vec{a}$ материальной точки массой m можно определить сумму $\vec{F}$ всех действующих на эту точку сил:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}. \qquad (2)$$

Из равенства в ИСО векторов $\vec{F}$ и $m \cdot \vec{a}$ следует равенство их проекций на координатные оси ИСО:

$$F_x = m \cdot a_x,\ F_y = m \cdot a_y,\ F_z = m \cdot a_z. \qquad (3)$$

Уравнения (3), представляющие собой запись уравнения (2) в проекциях на координатные оси ИСО, часто называют *уравнениями движения* материальной точки по координатным осям. Именно в таком виде второй закон Ньютона применяют при решении задач.

Рассмотрим пример применения второго закона Ньютона.

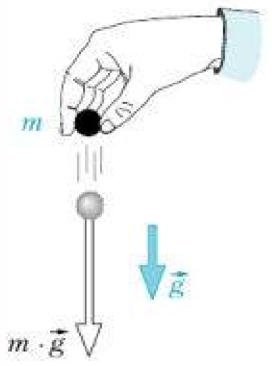


Рис. 93

Пусть имеется достаточно тяжёлое и малое по размерам тело массой m. Если такое тело отпустить из состояния покоя вблизи поверхности Земли, то оно начнёт двигаться относительно Земли вертикально вниз с ускорением. При этом если пренебречь взаимодействием тела с окружающим воздухом, то его движение можно считать свободным падением (рис. 93). Тело будет двигаться с постоянным ускорением, равным $\vec{g}$. Будем считать неподвижную относительно Земли систему отсчёта инерциальной. Тогда из второго закона Ньютона следует, что на свободно падающее тело действует сила, равная произведению массы тела на ускорение свободного падения. Эту силу называют *силой тяжести*.

Сила тяжести действует не только на падающие тела, но и на любое тело, находящееся вблизи поверхности Земли. Вы легко убедитесь в этом, если рукой будете удерживать какое-либо тяжёлое тело неподвижным относительно Земли.

! На любое тело массой m, находящееся вблизи поверхности Земли, действует сила тяжести, равная произведению массы тела на ускорение свободного падения: $\vec{F}_т = m \cdot \vec{g}$.

Таким образом, тело, на которое *действует только сила тяжести*, движется относительно связанной с Землёй ИСО с ускорением свободного падения $\vec{g}$.

Свободное падение — это движение тела под действием только силы тяжести.

Отметим, что если на падающее тело действуют и другие силы, например сила сопротивления со стороны воздуха, то из второго закона Ньютона $\left(\vec{F}_т + \vec{F}_С = m \cdot \vec{a}\right)$ следует, что ускорение $\vec{a}$ тела уже не будет равно ускорению $\vec{g}$ свободного падения. При этом если тело движется вниз, то сила $\vec{F}_С$ сопротивления воздуха направлена вверх, т. е. противоположно направлению действия силы тяжести (рис. 94, *а*). В этом случае второй закон Ньютона в проекции на ось Y имеет вид:

$$m \cdot g - F_С = m \cdot a.$$

Следовательно,

$$a = g - \frac{F_C}{m} < g. \qquad (4)$$

Таким образом, при падении тела вниз модуль a его ускорения будет меньше g. Другими словами, скорость тела будет увеличиваться медленнее, чем при падении тела в вакууме, где $\vec{F}_C = 0$.

Напротив, если брошенное тело движется вверх, то сила $\vec{F}_C$ сопротивления воздуха направлена вниз, т. е. её направление совпадает с направлением силы тяжести (рис. 94, *б*). Поэтому второй закон Ньютона в проекции на ось Y имеет вид:

$$m \cdot g + F_C = m \cdot a.$$

Следовательно,

$$a = g + \frac{F_C}{m} > g. \qquad (5)$$

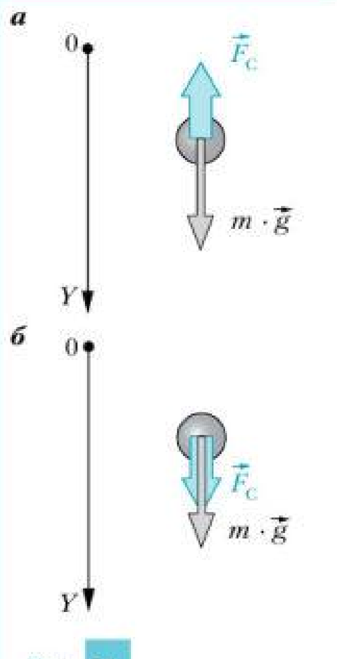


Рис. 94

Таким образом, при подъёме тела модуль a ускорения тела больше модуля ускорения свободного падения. Другими словами, скорость тела при таком движении уменьшается быстрее, чем при подъёме в вакууме, где $\vec{F}_C = 0$.

Из уравнений (4) и (5) следует, что при увеличении массы m тела слагаемое $\frac{F_C}{m}$ уменьшается. Следовательно, чем больше масса m тела (при неизменной форме и размерах тела, а следовательно, и модуле F_C силы сопротивления воздуха), тем меньше влияние воздуха на его движение. Поэтому падение тел, изготовленных из материалов с большой плотностью, при движении с небольшими скоростями (падении с небольшой высоты) можно считать свободным.

Вопросы

1. Что подразумевают под инертностью тела?
2. Что называют: а) массой тела; б) материальной точкой?
3. Сформулируйте второй закон Ньютона.

4 При каких условиях тело, движущееся вертикально вниз в атмосфере Земли, можно считать свободно падающим?

*5 Можно ли считать свободно падающим тело, движущееся вертикально вверх вблизи поверхности Земли, если сопротивление воздуха не учитывать?

*6 Равна ли сумма всех действующих на материальную точку сил произведению её массы на её ускорение в неинерциальной системе отсчёта?

Упражнения

1 На точечное тело массой 100 г действует в положительном направлении оси X инерциальной системы отсчёта единственная сила, модуль которой равен 5 Н. Определите ускорение этого тела.

2 Материальная точка массой 300 г движется прямолинейно в отрицательном направлении оси Y инерциальной системы отсчёта с ускорением, модуль которого равен 6 м/с^2. Определите сумму всех действующих на материальную точку сил.

3 Самолёт массой 30 т летит в ИСО прямолинейно равномерно со скоростью, модуль которой равен 700 км/ч. Определите сумму всех сил, действующих на самолёт.

4 Оцените, чему равен модуль действующей на вас силы тяжести.

§ 17 Взаимодействие тел. Третий закон Ньютона

Все известные эксперименты показывают, что *силы в природе всегда возникают парами*. Если тело *1* действует на тело *2*, то при этом тело *2* действует на тело *1*. Таким образом, действие двух тел друг на друга всегда имеет взаимный характер (рис. 95). Поэтому про такие *два тела* говорят, что они *взаимодействуют друг с другом*. Силы взаимодействия двух тел подчиняются **третьему закону Ньютона**.

Два тела взаимодействуют друг с другом с силами:
1) равными по модулю;
2) противоположными по направлению;
3) лежащими на одной прямой.

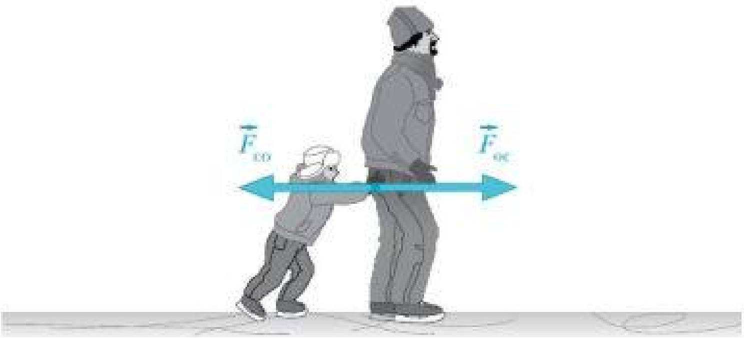


Рис. 95 Сила, с которой сын действует на отца, равна по модулю и противоположна по направлению силе со стороны отца, действующей на сына

Отметим, что *силы взаимодействия двух тел всегда являются силами одной природы.*

Силы взаимодействия двух тел, о которых говорится в третьем законе Ньютона, приложены к разным телам и поэтому не могут уравновесить друг друга.

Итак, третий закон Ньютона описывает *взаимодействие двух тел*. Второй закон Ньютона определяет динамику движения отдельного точечного тела. Совместное использование законов Ньютона позволяет решать задачи о движении взаимодействующих друг с другом точечных тел. Рассмотрим пример такого использования.

Пусть на горизонтальной крышке стоящего на Земле стола лежит камень массой m (рис. 96, *а*). На этот камень действует сила тяжести $\vec{F}_т = m \cdot \vec{g}$. Ускорение камня в ИСО, связанной с Землёй, равно нулю. Поэтому по второму закону Ньютона сумма всех действующих на камень сил также равна нулю. Следовательно, действие на камень силы тяжести $\vec{F}_т$ скомпенсировано какой-то другой силой (или силами). Если убрать стол, то

Согласно современным представлениям все силы взаимодействия по своей природе можно разделить на *четыре фундаментальных взаимодействия*: гравитационное, электромагнитное, сильное (ядерное) и слабое. Последние два вида взаимодействия проявляются только на малых расстояниях ($\sim 10^{-15}$ м) между так называемыми элементарными частицами. Поэтому все рассматриваемые в классической механике силы имеют либо гравитационную, либо электромагнитную природу.

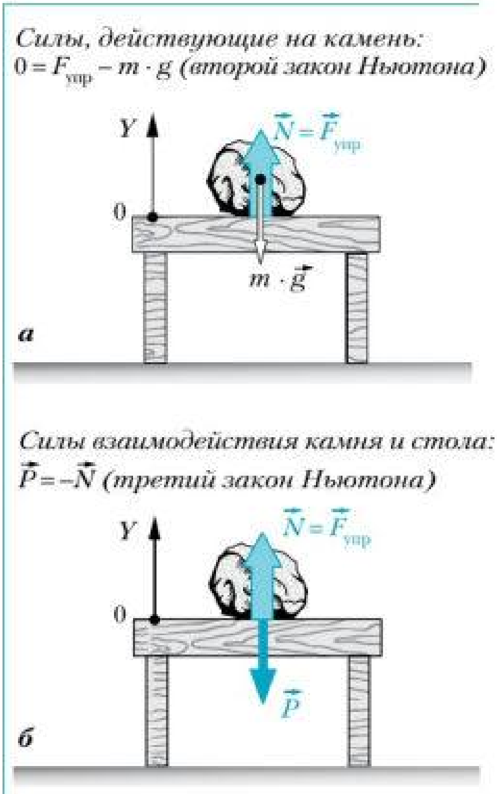


Рис. 96 Под действием камня крышка стола деформируется, и на камень действует сила упругости. С такой же по модулю силой и камень действует на крышку стола. Эту силу называют *весом тела*

камень начнёт совершать свободное падение. Значит, сила, которая компенсирует силу тяжести, — это сила, действующая со стороны крышки стола. Эту силу называют *силой реакции опоры*. Её принято обозначать латинской буквой $\vec{N}$. Найдём эту силу. Для этого запишем второй закон Ньютона для камня в векторной форме:

$$\vec{F}_т + \vec{N} = m \cdot \vec{a} = 0. \qquad (1)$$

Из уравнения (1) находим:

$$\vec{N} = -\vec{F}_т = -m \cdot \vec{g}. \qquad (2)$$

Таким образом, действующая на камень сила $\vec{N}$ реакции опоры по модулю равна силе тяжести. Знак «минус» в правой части уравнения (2) означает, что сила $\vec{N}$ направлена в сторону, противоположную направлению действия силы тяжести, т. е. вертикально вверх. В проекции на ось Y второй закон Ньютона для камня имеет вид:

$$-m \cdot g + N = 0.$$

В отличие от отрицательной проекции на ось Y силы тяжести, проекция силы $\vec{N}$ на эту ось положительна и равна модулю силы тяжести: $N = m \cdot g$.

Итак, мы установили, что крышка стола действует на камень с силой $\vec{N}$, направленной вертикально вверх. По третьему закону Ньютона камень должен действовать на крышку стола с такой же по модулю силой $\vec{P}$, которая направлена в противоположную сторону — вертикально вниз (рис. 96, *б*).

$$\vec{P} = -\vec{N}. \qquad (3)$$

Эту силу называют *весом тела*.

Весом тела называют силу, с которой это тело действует на опору (или подвес), находясь относительно этой опоры (или этого подвеса) в неподвижном состоянии.

Из уравнений (1) и (3) следует, что в рассмотренном случае $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$. Таким образом, если тело покоится на опоре, неподвижной относительно Земли, то его вес равен силе тяжести. Это же равенство $\left(\vec{P} = m \cdot \vec{g}\right)$ выполняется, если тело покоится на подвесе, неподвижном относительно Земли (рис. 97).

Отметим, что вес тела и сила реакции опоры не уравновешивают друг друга, так как эти силы приложены к разным телам: вес тела действует на опору, а сила реакции опоры – на тело. В разобранном примере компенсируют друг друга сила тяжести и сила реакции опоры. Обе эти силы приложены к камню, их сумма равна нулю, и поэтому камень по второму закону Ньютона неподвижен в инерциальной системе отсчёта.

Если тело и опора (или подвес) движутся вместе относительно Земли с постоянной скоростью, то вес тела также будет равен силе тяжести. Одна-

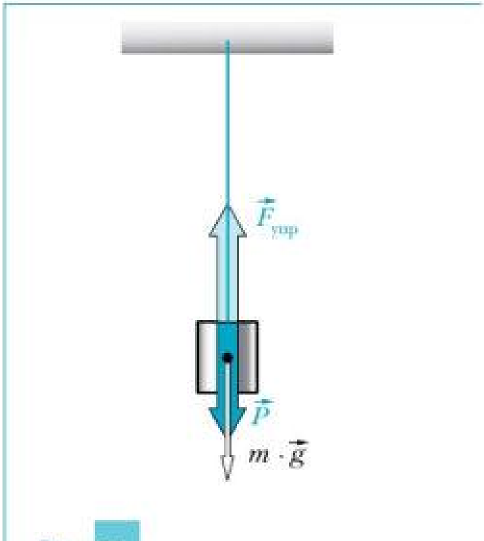


Рис. 97 На груз, покоящийся относительно Земли, действуют две силы: сила тяжести и сила упругости нити подвеса. Вес тела действует не на груз, а на нить

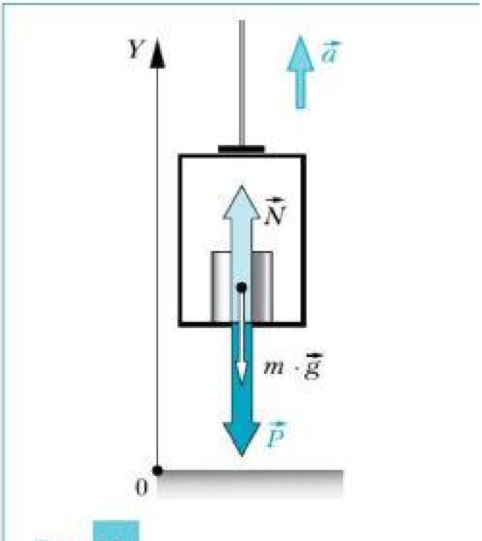


Рис. 98 Модуль веса тела в лифте, который движется с направленным вверх относительно Земли ускорением $\vec{a}$, больше модуля силы тяжести ко ситуация изменяется, если тело и опора (подвес), оставаясь неподвижными относительно друг друга, движутся вместе относительно Земли с ускорением. Рассмотрим пример такого движения.

Пусть тело массой m лежит на полу лифта, ускорение $\vec{a}$ которого направлено вертикально вверх (рис. 98). Тогда, если считать, что на тело действуют только сила тяжести $m \cdot \vec{g}$ и сила $\vec{N}$ реакции пола лифта, второй закон Ньютона в проекции на ось Y связанной с Землёй ИСО имеет вид:

$$N - m \cdot g = m \cdot a.$$

Следовательно, $N = m \cdot (g + a)$. Таким образом, если лифт имеет направленное вверх ускорение, то модуль N силы реакции пола будет больше модуля силы тяжести. В самом деле, ведь в рассматриваемом случае сила $\vec{N}$ должна не только скомпенсировать действие силы тяжести $m \cdot \vec{g}$, но и сообщить телу ускорение $\vec{a}$ в положительном направлении оси Y.

При этом согласно третьему закону Ньютона тело будет давить на пол лифта с силой $\vec{P}$, равной по модулю силе $\vec{N}$. Следовательно, модуль веса рассматриваемого тела $P = N = m \cdot (g + a)$. Таким образом,

если тело и опора движутся вместе относительно Земли с направленным вверх ускорением, то модуль веса тела больше модуля действующей на него силы тяжести.

Это явление называют *перегрузкой*. Отношение модуля веса тела к модулю действующей на него силы тяжести называют *коэффициентом перегрузки*.

Теперь рассмотрим тело массой m, лежащее на полу лифта, который движется с ускорением $\vec{a}$, направленным вертикально вниз (рис. 99). Рассмотрение начнём со случая, когда модуль a ускорения лифта меньше модуля g ускорения свободного падения ($a < g$). Проекция ускорения тела на ось Y отрицательна. Поэтому уравнение движения тела по оси Y имеет вид:

$$N - m \cdot g = -m \cdot a.$$

Следовательно, $N = m \cdot (g - a)$. Так как $a < g$, то проекция силы реакции опоры $N > 0$. Значит, сила $\vec{N}$ реакции опоры по-прежнему направлена вверх. Однако её модуль теперь меньше модуля силы тяжести. В соответствии с третьим законом Ньютона модуль веса тела — силы, с которой тело давит на пол, — равен: $P = N = m \cdot (g - a)$. Таким образом, в этом случае и модуль P веса, и модуль N силы реакции пола будут меньше модуля силы тяжести.

Если же направленное вниз ускорение лифта будет по модулю больше ускорения свободного падения ($a > g$), то тело окажется прижатым к потол-

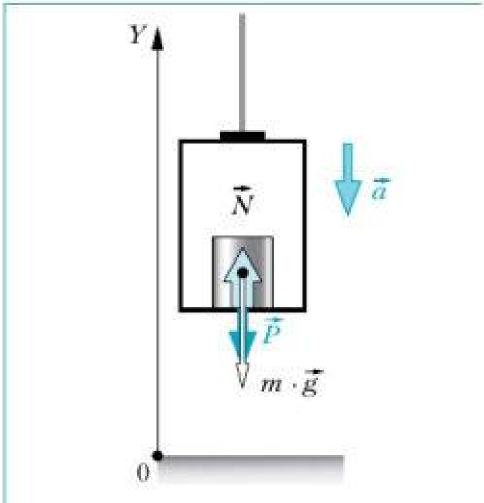


Рис. 99 Модуль веса тела в лифте, который движется с направленным вниз относительно Земли ускорением $\vec{a}$, меньше модуля силы тяжести

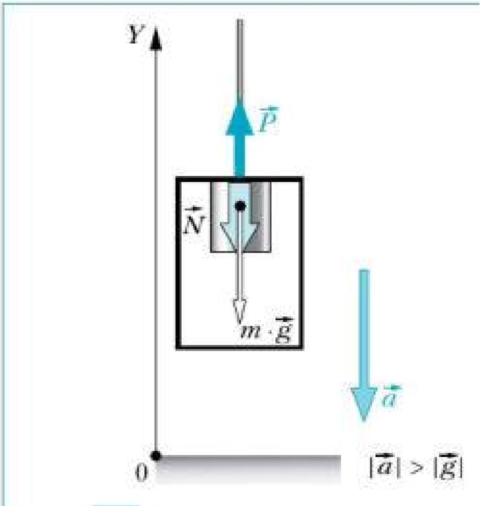


Рис. 100

ку лифта. В этом случае на тело будет давить не пол лифта, а потолок. При этом тело будет также давить на потолок. Поэтому вес тела изменит своё направление на противоположное и будет направлен вертикально вверх. Пример такого движения показан на рис. 100.

Особый интерес представляет случай, когда лифт, в котором находится тело массой m, движется с ускорением, равным ускорению свободного падения $(\vec{a} = \vec{g})$. Из второго закона Ньютона следует, что при этом действующая на тело сила реакции пола будет равна нулю: $N = m \cdot (g - a) = m \cdot (g - g) = 0$. Таким образом, пол не давит на тело. В свою очередь, по третьему закону Ньютона и тело не будет давить на пол лифта, совершая вместе с лифтом свободное падение. Следовательно, в этом случае вес тела равен нулю: $P = N = 0$.

Состояние, при котором вес тела равен нулю, называют невесомостью.

Как взаимодействуют тело и опора в состоянии невесомости, можно понять из репортажей с космической станции, находящейся на околоземной орбите. И станция, и живущие в ней космонавты непрерывно находятся в состоянии свободного падения (подробнее *см.* § 26). При этом вес космонавта (сила, с которой он действует на опору внутри станции, находясь относительно неё в неподвижном состоянии) равен нулю. В свою очередь, равна нулю и сила реакции опоры на космонавта. Поэтому космонавты могут «парить» внутри станции.

Вопросы

1. Сформулируйте третий закон Ньютона.
2. Что называют весом тела?
3. Приведите пример тела, находящегося в состоянии невесомости.

Упражнения

1. Верёвка выдерживает силу натяжения, модуль которой равен 100 Н. Порвётся ли верёвка, если её тянуть за концы в противоположные стороны с силами, каждая из которых по модулю равна 70 Н?
2. Представьте, что вы стоите на полу лифта. Определите действующую на вас силу нормальной реакции опоры и ваш вес в случаях, когда лифт: а) равномерно поднимается; б) равномерно опускается; в) свободно падает; г) поднимается, разгоняясь с ускорением, модуль которого равен 5 м/с^2; д) поднимается, тормозя с ускорением, модуль которого равен 5 м/с^2; е) опускается, разгоняясь с ускорением, модуль которого равен 5 м/с^2; ж) опускается, тормозя с ускорением, модуль которого равен 5 м/с^2.

§ 18 Деформации. Сила упругости. Закон Гука

До сих пор мы рассматривали действие сил только на точечные тела. Из второго закона Ньютона следует, что если сумма всех действующих на точечное тело сил равна нулю, то ускорение этого тела в ИСО будет также равно нулю, как если бы на него не действовали никакие силы.

Ситуация в корне меняется, если тело нельзя считать точечным, т. е. его форма и размеры имеют принципиальное значение. Если действующие на это тело силы приложены к разным его точкам, то их действие может проявиться в виде изменения формы и объёма тела. Говорят, что в этом случае *тело испытывает деформацию*.

! Под деформацией понимают изменение формы или объёма тела.

Поясним сказанное на примере. Пусть на концы резинового шнура начинают действовать две противоположно направленные и равные по модулю силы (рис. 101). Под действием этих сил шнур растягивается, т. е. деформируется, изменяя свою длину. Такую деформацию называют *растяжением*.

Рассмотрим подробнее, что происходит с разными частями шнура после того, как на его концы начинают действовать растягивающие силы. Под действием этих сил левые части шнура смещаются влево, а правые – вправо (*см.* рис. 101). При этом чем ближе расположена часть шнура к его концу, тем больше смещение этой части. Середина же шнура при растяжении вовсе остаётся на месте. Таким образом, в результате действия растягивающих сил разные части шнура смещаются по-разному. С точки зрения движения частей тела *деформация возникает, когда перемещения, совершаемые разными частями тела, отличаются друг от друга*.

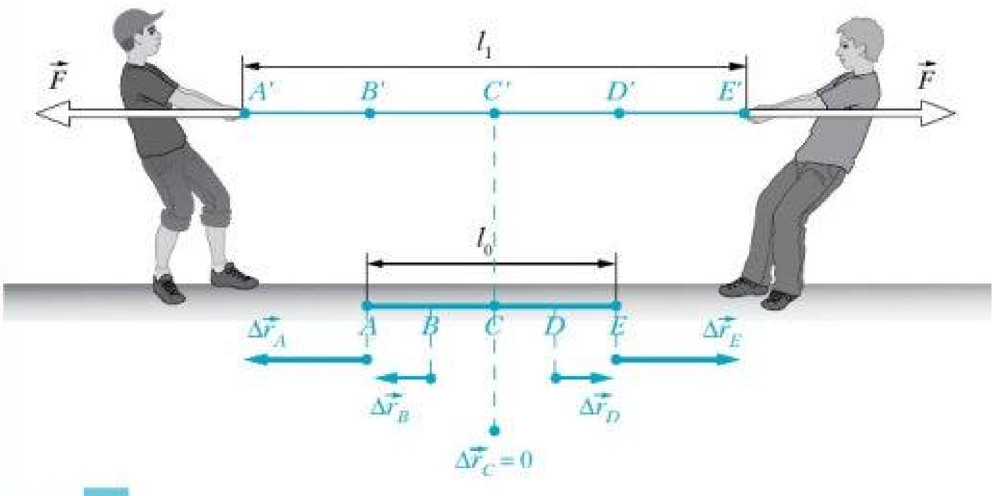


Рис. 101 При деформации шнура разные части шнура перемещаются неодинаково

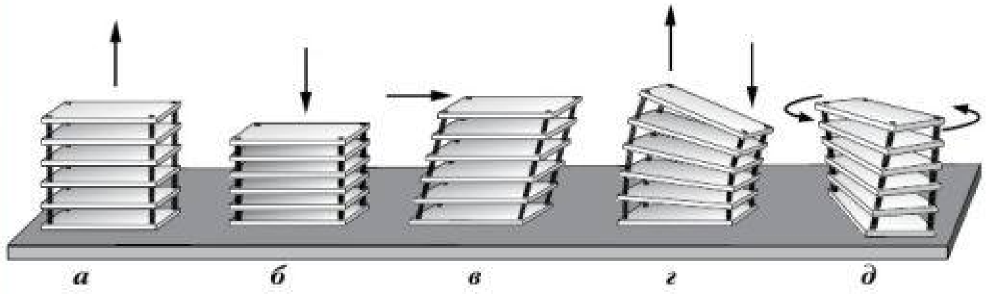


Рис. 102

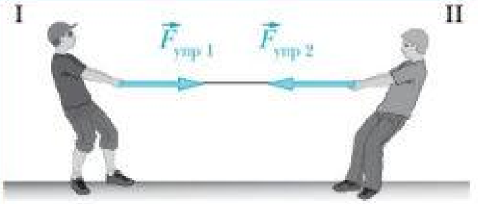


Рис. 103

На рис. 102 на примере моделей упругих тел (твёрдых пластин, соединённых пружинами) показаны различные виды деформаций: *растяжение (а)*, *сжатие (б)*, *сдвиг (в)*, *изгиб (г)*, *кручение (д)*.

Деформации в теле возникают в результате действия на него со стороны других тел (в случае со шнуром – со стороны двух людей). На рис. 101 действующие на шнур силы обозначены контурными стрелками. По третьему закону Ньютона деформируемое тело действует на деформирующие его тела с такими же по модулю, но противоположно направленными силами. Эти силы называют *силами упругости*. На рис. 103 они обозначены синими стрелками.

Силы упругости всегда препятствуют деформации. Они стремятся вернуть тело в исходное (недеформированное) состояние.

Отметим, что силы упругости действуют не только на тела, которые деформируют рассматриваемое тело. Они существуют и внутри деформированного тела, действуя со стороны одних частей тела на другие. Поэтому эти силы часто называют *внутренними силами упругости*. Именно действие внутренних сил упругости приводит к смещению разных частей тела при увеличении (или уменьшении) деформации. Эти же силы удерживают разные части деформированного тела в равновесии.

Если после исчезновения сил, вызвавших те или иные деформации тела, оно возвращается в исходное (недеформированное) состояние, то такие деформации называют *упругими*. Если же тело не возвращается в исходное состояние после исчезновения деформировавших его сил, то говорят, что деформации тела были *пластическими (неупругими)*.

При упругих деформациях связь между деформацией тела и вызвавшими эту деформацию силами может быть установлена экспериментально. Впервые такую связь установил современник Ньютона английский физик Роберт Гук (1635–1703).

Для любого тела при упругих деформациях величины деформаций прямо пропорциональны вызвавшим их силам.

Это утверждение называют **законом Гука**.

Рассмотрим, как используют этот закон, на примере деформации растяжения. Пусть к потолку комнаты подвешен лёгкий шнур (рис. 104). Прикрепим к нижнему концу шнура груз. В результате шнур растянется под действием силы $\vec{F}$ со стороны груза. Деформация шнура представляет собой удлинение, равное изменению Δl длины шнура. В этом случае закон Гука может быть записан в виде:

$$F = k \cdot \Delta l, \qquad (1)$$

где F – проекция на ось X силы, вызвавшей деформацию, k – коэффициент упругости шнура (жёсткость), Δl – изменение длины шнура, равное смещению конца шнура.

Отметим, что препятствующая деформации сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$ направлена против вызвавшей деформацию силы $\vec{F}$. Поэтому проекция на ось X силы упругости и изменение Δl длины имеют разные знаки. Так как модули силы упругости и силы $\vec{F}$ равны, то с учётом уравнения (1) получаем:

$$F_{\text{упр}} = -k \cdot \Delta l. \qquad (2)$$

Смысл знака «минус» в формуле (2) заключается в том, что направление действия сил упругости всегда противоположно направлению смещения, которое вызвано деформацией. Другими словами, сила упругости стремится вернуть тело в исходное (недеформированное) состояние. Например, если тело растянуто, то сила упругости

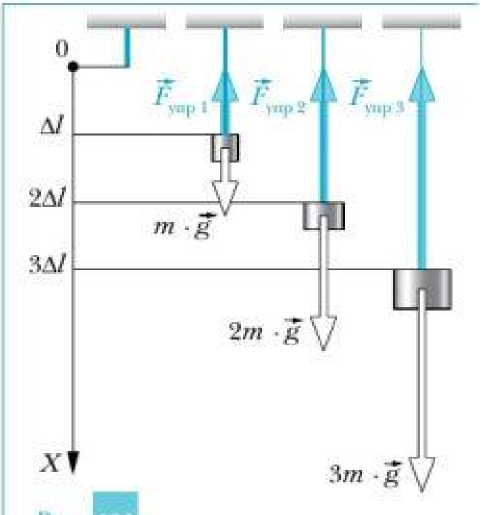


Рис. 104

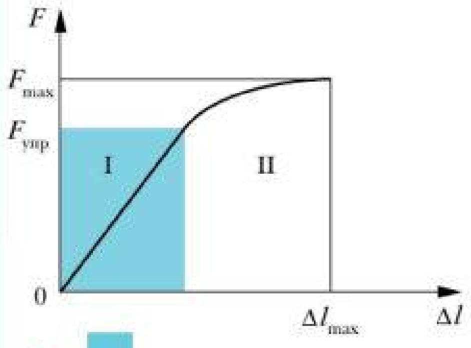


Рис. **105**

препятствует растяжению и стремится сжать тело, и наоборот, если тело сжато, то сила упругости препятствует сжатию и стремится растянуть тело.

Ещё раз обратим внимание на то, что *закон Гука выполняется только для упругих деформаций.* Обычно это деформации, при которых изменение Δl длины тела мало́ по сравнению с его первоначальной длиной l_0. При существенном увеличении Δl деформации перестают быть упругими и силы упругости перестают быть прямо пропорциональными деформациям (область II на рис. 105).

Отметим, что закон Гука, записанный в виде формулы (2), применим не только для нитей и стержней, но и для пружин. В этом случае входящее в формулу (2) изменение длины Δl является изменением длины пружины вдоль её оси.

В твёрдых телах препятствующие деформации силы упругости возникают всегда при попытках изменить форму или объём твёрдых тел. Это связано с тем, что, как вы знаете, в недеформированных твёрдых телах атомы расположены таким образом, что силы их взаимного притяжения и отталкивания скомпенсированы. В качестве упрощённой модели твёрдого тела можно рассмотреть систему из шариков, скреплённых друг с другом пружинами (рис. 106, *а*). В недеформированном состоянии все пружины в соответствующей телу модели также не деформированы. При попытке растянуть какую-то часть тела, т. е. увеличить расстояние между его атомами, преобладающими силами взаимодействия между ними становятся силы взаимного притяжения. В результате силы упругости стремятся вернуть тело в исходное состояние (рис. 106, *б*). Напротив, при попытке сжать тело, т. е. уменьшить расстояние между его атомами, преобладающими силами взаимодействия между ними становятся силы отталкивания. В результате силы упругости противодействуют сжатию, стремясь вернуть тело в исходное состояние (рис. 106, *в*).

Возникающие при деформациях твёрдых тел внутренние силы упругости обусловлены силами взаимодействия между атомами этих тел, т. е. эти силы имеют электромагнитную природу.

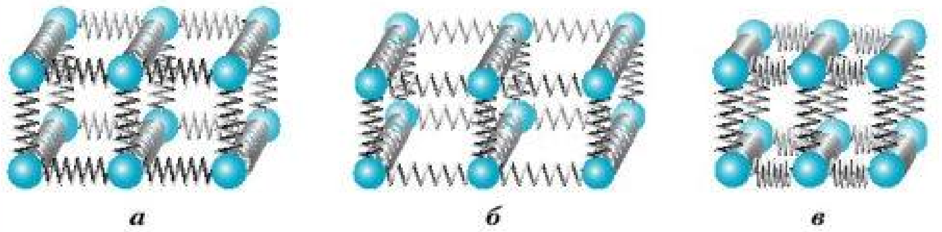


Рис. 106 Модель твёрдого тела: атомы кристаллической решётки заменяют твёрдые шарики, силы взаимодействия между атомами – силы упругости пружин. На рисунке представлены: *а* – недеформированное состояние твёрдого тела; *б* – деформация растяжения; *в* – деформация сжатия

Понятно, что знакомые вам *сила реакции опоры и сила натяжения нити (верёвки, пружины и т. п.) представляют собой силы упругости.* Сила реакции опоры возникает в результате деформации (прогиба) опоры под действием давящего на неё тела. Сила натяжения нити возникает в результате деформации растяжения под действием растягивающих нить сил.

К силам упругости относится и вес тела. Чтобы лучше понять природу этой силы, рассмотрим упрощённую модель твёрдого тела, состоящую из шариков, скреплённых невесомыми пружинами. Поместим это тело на горизонтальную крышку стола (рис. 107). Воспользуемся законами Ньютона, чтобы определить модуль силы, с которой тело давит на стол (вес). Рассмотрим правый ближний к нам столбик из шариков и пружинок. Пусть масса каждого шарика равна m. Тогда на верхний шарик *1* (рис. 108) действует сила тяжести $m \cdot \vec{g}$. Шарик покоится в ИСО, связанной с Землёй, поэтому по второму закону Ньютона сумма действующих на него сил равна нулю. Следовательно, уравновешивающая силу тяжести сила упругости $\vec{F}_{упр1}$ верхней пружины направлена вертикально вверх и по модулю равна $m \cdot \vec{g}$. Эта сжатая под действием шарика *1* пружина I дей-

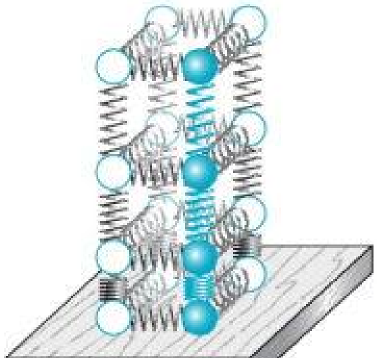


Рис. 107

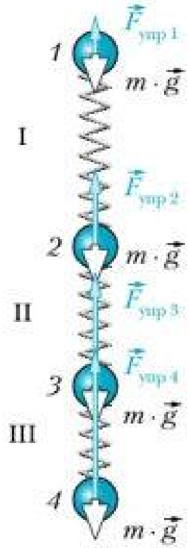


Рис. 108

ствует на шарик *2* с такой же по модулю, но направленной вертикально вниз силой $\vec{F}_{упр1}$. Кроме того, на шарик *2* действует сила тяжести $m \cdot \vec{g}$. Поэтому уравновешивающая действие этих двух сил и направленная вверх сила упругости $\vec{F}_{упр2}$ пружины II по модулю равна: $F_{упр1} + m \cdot g = m \cdot g + m \cdot g = 2m \cdot g$. Таким образом, эта пружина сжата в два раза больше первой. Значит, она действует на шарик *3* с силой, которая по модулю равна $2m \cdot g$. Чтобы уравновесить это действие и действие силы тяжести шарика *3*, следующая пружина III должна быть сжата так, чтобы модуль её силы упругости был равен $3m \cdot g$, и т. д.

В результате самая нижняя пружина сжата таким образом, что модуль её силы упругости практически равен сумме модулей сил тяжести, действующих на все расположенные над ней шарики. Поэтому сумму сил упругости всех пружин в нижнем ряду можно считать равной по модулю силе тяжести $M \cdot \vec{g}$, действующей на всё тело. Следовательно, деформированные пружины нижнего ряда все вместе (включая силы тяжести шариков нижнего ряда) действуют на крышку стола с силами упругости, сумма которых равна силе тяжести $M \cdot \vec{g}$, действующей на всё тело. Эта сумма сил и является весом тела. Аналогичную природу имеет вес любого тела.

! Таким образом, сила реакции опоры, сила натяжения и вес являются силами упругости, которые обусловлены межмолекулярным взаимодействием и имеют одинаковую (электромагнитную) природу.

При изменении формы жидких или газообразных тел силы упругости в них не возникают. Однако они возникают при попытке уменьшить их объём – при сжатии жидкости или газа. Силы межмолекулярного взаимодействия в жидкостях и газах мы рассмотрим позже.

Вопросы

1. Что понимают под деформацией тела?
2. Приведите примеры известных вам видов деформаций.

3. Какие деформации называют упругими? Приведите примеры.
4. Какие деформации являются пластическими? Приведите примеры.
5. Сформулируйте закон Гука.
6. Приведите примеры сил упругости. Какова их природа?

Упражнения

1. Лёгкий шнур прикреплён одним концом к потолку неподвижного лифта. К другому его концу подвесили груз массой 5 кг. В результате длина шнура увеличилась на 2 см. Определите коэффициент упругости шнура.
2. Определите удлинение шнура из задачи 1, если лифт поднимается, разгоняясь с постоянным ускорением, модуль которого 5 м/с^2.
3. Концы двух лёгких пружин одинаковой длины, но разного диаметра, вставленных одна в другую, скрепляют между собой. Коэффициенты упругости пружин равны k_1 и k_2. К скреплённым концам полученной системы прикладывают противоположно направленные силы, модуль каждой из которых равен F. Определите: а) удлинение системы пружин; б) коэффициент упругости (жёсткость) полученной системы пружин.
4. Две лёгкие пружины с коэффициентами упругости k_1 и k_2 скрепляют, соединив конец первой с началом второй. К началу первой пружины и концу второй пружины прикладывают противоположно направленные силы, модуль каждой из которых равен F. Определите: а) удлинение каждой из пружин; б) коэффициент упругости (жёсткость) полученной системы пружин.

Для углублённого уровня

§ 19 Механическое напряжение. Модуль Юнга

Эксперименты показывают, что чем больше длина упругого стержня (или шнура), тем легче его растянуть на заданную величину. Вместе с тем чем толще этот стержень, тем сложнее это сделать. Следовательно, жёсткость тела зависит от его геометрических характеристик.

Исследуем эту зависимость для самого простого вида деформации — растяжения (сжатия) однородного стержня длиной l_0 с площадью поперечного сечения S. Воспользуемся законами Ньютона и будем считать, что возникающие в стержне деформации являются упругими.

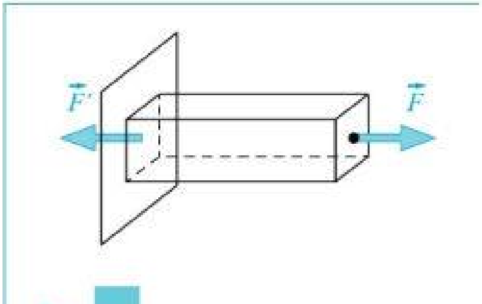


Рис. 109

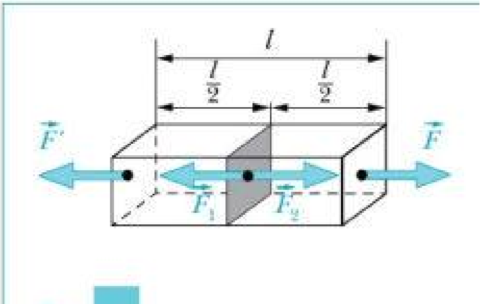


Рис. 110

Проведём мысленный эксперимент. Пусть левый торец стержня закреплён, а к правому торцу перпендикулярно ему приложена сила $\vec{F}$ (рис. 109). Поскольку стержень покоится, то со стороны поверхности, к которой прикреплён левый торец стержня, на него действует сила $\vec{F}'$, равная по модулю силе $\vec{F}$, но направленная в противоположную сторону. Под действием сил $\vec{F}'$ и $\vec{F}$ стержень растянут. Поэтому в любом поперечном сечении стержня действуют силы упругости. Под действием этих сил, согласно закону Гука, длина стержня увеличилась на величину $\Delta l = \frac{F}{k}$, где k – коэффициент упругости (жёсткость) стержня.

Разделим мысленно стержень на две равные части (рис. 110). Определим силы, с которыми эти части действуют друг на друга. Так как правая часть находится в равновесии, то по второму закону Ньютона сумма действующих на неё сил равна нулю. Поэтому $\vec{F}_1 = -\vec{F}$. В свою очередь, по третьему закону Ньютона на левую часть стержня со стороны правой действует сила $\vec{F}_2$, равная по модулю силе $\vec{F}_1$, но направленная в противоположную сторону: $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = \vec{F}$. Таким образом, каждая из частей стержня, как и весь стержень, испытывает и с правой, и с левой стороны растягивающее действие сил, модуль каждой из которых равен F. Так как обе части стержня одинаковы, то и растяжения $\Delta l_л$ левой части и $\Delta l_п$ правой части равны: $\Delta l_л = \Delta l_п = \Delta l'$. Общее увеличение длины всего стержня очевидно равно сумме растяжений $\Delta l_л$ и $\Delta l_п$:

$$\Delta l = \Delta l_л + \Delta l_п = 2\Delta l'.$$

Полученный результат позволяет сделать вывод: если уменьшить первоначальную длину l_0 данного стержня в 2 раза, то его растяжение $\Delta l'$ под действием тех же сил также уменьшится в 2 раза: $\Delta l' = \frac{\Delta l}{2}$. Обозначим жёсткость половины стержня k'. Тогда по закону Гука имеем:

$$k' = \frac{F}{\Delta l'} = \frac{F}{\left(\frac{\Delta l}{2}\right)} = \frac{2F}{\Delta l} = 2k.$$

Таким образом, при уменьшении первоначальной длины l_0 стержня в 2 раза его коэффициент упругости (жёсткость), напротив, увеличивается в 2 раза: $k' = 2k$.

Аналогичным образом можно показать, что увеличение длины l_0 стержня в заданное число раз приводит к уменьшению его коэффициента упругости k в такое же число раз.

При упругих деформациях жёсткость k стержня обратно пропорциональна его первоначальной длине l_0:

$$k \sim \frac{1}{l_0}. \quad (1)$$

Действительно, растянуть, например, стержень длиной 1 м на 5 мм легче, чем растянуть на такую же величину стержень длиной 10 см.

Выясним теперь, как зависит при упругих деформациях растяжения (сжатия) коэффициент упругости от площади S поперечного сечения однородного стержня.

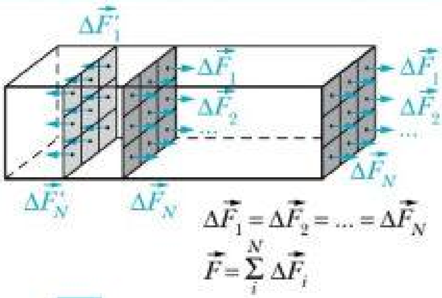


Рис. 111

Будем считать, что приложенные к торцам стержня силы действуют на поверхности торцов *равномерно*, т. е. действующая сила распределена по всей поверхности торца. В таком случае логично считать, что и силы упругости в любом поперечном сечении стержня *равномерно* распределены по всей поверхности этого сечения. Другими словами, отношение силы $\Delta\vec{F}_i$, действующей на любой участок этого поперечного сечения, к площади ΔS_i этого участка не зависит от выбора участка (рис. 111).

Механическим напряжением на данном участке называют физическую величину, равную отношению силы $\Delta\vec{F}_i$ к площади участка ΔS_i, на который она действует.

В рассматриваемом случае все силы $\Delta\vec{F}_i$ направлены перпендикулярно плоскости сечения (по нормали к плоскости сечения). Поэтому создаваемое этими силами напряжение называют *нормальным напряжением* $\vec{\sigma}_i$:

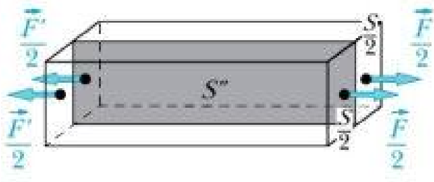


Рис. **112**

$$\vec{\sigma}_i = \frac{\vec{F}_i}{S_i}. \qquad (2)$$

Отметим, что формула (2) напоминает известную вам формулу для расчёта давления. Однако, *в отличие от давления, механическое напряжение — векторная величина.*

С учётом введённого определения утверждение о *равномерном* распределении силы упругости по всей поверхности сечения означает, что в различных участках этого сечения механические напряжения одинаковы по модулю и по направлению (*см.* рис. 111). Следовательно, если стержень мысленно разделить на две равные части (рис. 112) сечением S'', то мы получим два одинаковых стержня: каждый длиной l_0 с площадью поперечного сечения, в 2 раза меньшей, — $\frac{S}{2}$. Поскольку нормальные механические напряжения во всех точках сечения одинаковы, действующие на торцы каждого из образовавшихся стержней силы упругости по модулю равны $\frac{F}{2}$. При этом растяжения обоих стержней равны друг другу и равны растяжению всего стержня: $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l$. Следовательно, коэффициент упругости каждого стержня в соответствии с законом Гука равен:

$$k_1 = \frac{\left(\frac{F}{2}\right)}{\Delta l} = \frac{F}{2\Delta l} = \frac{k}{2}.$$

! Таким образом, уменьшение площади поперечного сечения стержня в 2 раза приводит к уменьшению его коэффициента упругости (жёсткости) также в 2 раза.

Аналогичным образом можно показать, что увеличение площади поперечного сечения стержня в заданное число раз приводит к увеличению его коэффициента упругости k в такое же число раз.

! Жёсткость k однородного стержня прямо пропорциональна площади S его поперечного сечения:

$$k \sim S. \qquad (3)$$

Из формул (1) и (3) следует, что $k \sim \frac{S}{l_0}$. Коэффициент пропорциональности в полученном выражении является характеристикой материала (вещества), из которого изготовлен стержень. Этот коэффициент называют *модулем Юнга* и обозначают буквой E:

$$k = E \cdot \frac{S}{l_0}. \tag{4}$$

В таблице 2 приведены значения модуля Юнга для ряда металлов.

Таблица 2

Материал	Сталь	Золото	Вольфрам	Медь	Свинец	Серебро
Модуль Юнга E, 10^{10} Па	20	8	35	11,2	1,62	8

Подставив формулу (4) в закон Гука и поделив левую и правую части на S, получим:

$$\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}. \tag{5}$$

Величину, равную отношению растяжения (сжатия) Δl стержня к его первоначальной (до деформации) длине l_0, называют относительным растяжением (сжатием) ε стержня:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \tag{6}$$

С учётом введённых понятий, согласно закону Гука, модуль нормального механического напряжения σ можно вычислить по формуле:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \tag{7}$$

Полученное соотношение часто называют *законом Гука для деформации растяжения (сжатия)*.

Вопросы

1. Что называют механическим напряжением?
2. Какое механическое напряжение называют нормальным?
3. В каких единицах в СИ измеряют механическое напряжение?
4. Куда направлен вектор нормального механического напряжения?
5. Что называют модулем Юнга?

6 Что называют относительным растяжением (сжатием) стержня?

7 Сформулируйте закон Гука для деформации растяжения (сжатия).

Упражнения

1 Серебряную проволоку длиной 10 м с площадью поперечного сечения 0,5 см² растягивают, приложив к её концам противоположно направленные силы, модуль каждой из которых равен 100 Н. Определите растяжение проволоки.

2 Медный стержень длиной 20 см с площадью поперечного сечения 2 см² сжимают, приложив к его концам противоположно направленные силы. В результате модуль механического напряжения внутри стержня стал равен $\sigma = 10^6$ Н/м². Определите: а) сжатие стержня; б) относительное сжатие стержня.

§ 20 Сила трения

Попробуем сдвинуть деревянный брусок, лежащий на горизонтальной крышке стола, неподвижного относительно Земли. Для этого подействуем на брусок силой $\vec{F}$ в горизонтальном направлении так, как показано на рис. 113. Эксперимент показывает, что, пока модуль силы $\vec{F}$ меньше некоторого определённого значения F_{max}, брусок не стронется с места. Это означает, что со стороны крышки стола на брусок действует сила, препятствующая его движению. Эту силу называют *силой сухого трения покоя*. Сила сухого трения покоя $\vec{F}_{тр}$ компенсирует действие силы $\vec{F}$ (или суммы $\vec{F}$ нескольких сил), стремящейся сдвинуть брусок вдоль поверхности крышки. Из второго закона Ньютона следует, что сила $\vec{F}_{тр}$ равна по модулю, но противоположна по направлению силе $\vec{F}$ $\left(\vec{F}_{тр} = -\vec{F}\right)$.

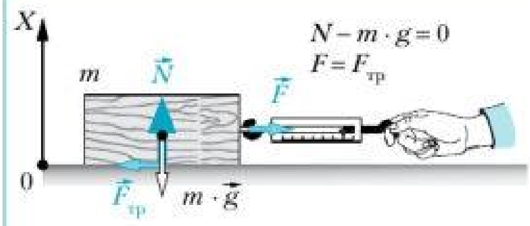


Рис. 113 Чтобы стронуть брусок с места, необходимо преодолеть силу сухого трения покоя бруска о стол. При $|\vec{F}| > |\vec{F}_{max}|$ брусок начнёт двигаться по поверхности стола

Рис. 114 При увеличении массы в 2 раза максимальная сила сухого трения покоя бруска о стол возрастает вдвое

Если медленно увеличивать силу $\vec{F}$ действия на брусок, то по достижении ею некоторого значения, равного по модулю F_{max}, брусок начнёт скользить по крышке стола. Полученное экспериментально значение F_{max} называют *максимальным* модулем силы сухого трения покоя.

Эксперименты показывают, что если поставить исследуемый брусок на крышку того же стола другой гранью, то значение F_{max}, при котором брусок стронется с места, будет таким же. Следовательно, *модуль максимальной силы трения покоя не зависит от площади соприкосновения тел*.

Чтобы выяснить, от чего зависит значение F_{max}, поставим на исследуемый брусок гирю, масса m которой равна массе бруска (рис. 114). В результате действия на брусок веса $\vec{P}$ гири, равного $m \cdot \vec{g}$, модуль действующей на брусок силы реакции опоры $\vec{N}_2$ со стороны стола увеличится в 2 раза: $N_2 = 2m \cdot g$. Эксперимент показывает, что в этом случае модуль F_{max} максимальной силы сухого трения покоя также увеличится в 2 раза.

Исследования с гирями разных масс позволили установить, что при увеличении (уменьшении) модуля силы реакции опоры $\vec{N}$ в несколько раз модуль F_{max} максимальной силы сухого трения покоя увеличивается (уменьшается) в такое же число раз.

! Модуль F_{max} максимальной силы сухого трения покоя прямо пропорционален модулю силы реакции опоры N:
$F_{max} \sim N.$

Отношение модуля максимальной силы сухого трения покоя к модулю силы реакции опоры называют коэффициентом трения.

Коэффициент трения обозначают греческой буквой μ. Его значение определяют экспериментально. *Коэффициент трения зависит от материалов соприкасающихся поверхностей и качества их обработки.*

Таким образом, модуль силы сухого трения покоя может изменяться в пределах от нуля до $F_{max} = \mu \cdot N$.

Если модуль силы $\vec{F}$ превысит значение F_{max}, то брусок начнёт скользить по крышке стола. При этом для поддержания неизменной скорости скольже-

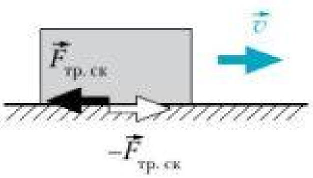


Рис. 115

Рис. 116

ния бруска необходимо продолжать действовать на брусок в направлении его движения с определённой силой. Следовательно, и при движении бруска по крышке стола со стороны крышки на брусок продолжает действовать сила, препятствующая его движению относительно поверхности. Эту силу называют силой *сухого трения скольжения* $\vec{F}_{тр.\,ск}$.

Отметим особо, что, во-первых, *силы трения скольжения действуют на обе трущиеся поверхности*, т. е. на оба тела, и, во-вторых, каждая из этих сил всегда *направлена противоположно относительной скорости движения соответствующего тела* (рис. 115).

Модуль силы трения скольжения зависит не только от материалов, из которых изготовлены трущиеся поверхности, но и от относительной скорости их движения. Обычно (но не всегда), если эта скорость мала, модуль силы трения скольжения немного меньше F_{max}. Однако с увеличением относительной скорости модуль силы трения скольжения увеличивается и может превысить F_{max}. Приблизительный график такой зависимости модуля силы трения скольжения $F_{тр.\,ск}$ от модуля относительной скорости v показан на рис. 116.

При не очень больших относительных скоростях $F_{тр.\,ск}$ мало отличается от F_{max}. Поэтому в большинстве задач, если это не оговаривается специально, модуль силы трения скольжения считают постоянным и равным F_{max}:

$$F_{тр.\,ск} = F_{max} = \mu \cdot N.$$ **К**

Природа сил сухого трения покоя и скольжения весьма сложна, и её изучение активно продолжается и в настоящее время. Поэтому мы не будем

К В некоторых задачах, когда силы сухого трения покоя и скольжения малы, ими можно пренебречь. В этом случае поверхность, по которой скользит тело, называют *гладкой*. Также гладким называют само тело.

подробно останавливаться на этом вопросе. Отметим лишь, что силы сухого трения обусловлены силами межмолекулярного взаимодействия двух трущихся поверхностей. Следовательно, *силы сухого трения имеют электромагнитную природу*.

Силы сухого трения скольжения можно многократно уменьшить с помощью *смазки* – слоя жидкости или газа между движущимися друг относительно друга поверхностями.

В заключение рассмотрим ещё один вид сил трения, возникающих при движении твёрдого тела в жидкости или газе. Это *сила вязкого трения*, обусловленная трением поверхности тела об окружающую среду, и *сила лобового сопротивления*, обусловленная возникающей при движении тела разностью давлений перед движущимся телом и непосредственно за ним. Сумму этих сил называют *силой сопротивления среды*.

Главное отличие силы сопротивления среды от сил сухого трения состоит в том, что при уменьшении скорости движения тела относительно среды эта сила также уменьшается и спадает до нуля при отсутствии относительного движения. Именно по этой причине даже лёгкий ветерок может привести в движение плавающую в воде многотонную баржу. Однако, если эта баржа в результате движения села на мель, потребуются очень большие усилия, чтобы сдвинуть её.

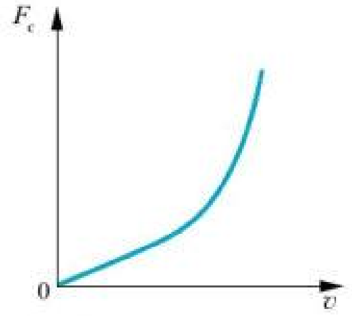


Рис. 117

Примерный характер зависимости модуля силы сопротивления среды от модуля скорости тела относительно среды показан на рис. 117. При малых скоростях модуль силы сопротивления среды можно считать прямо пропорциональным модулю скорости тела относительно среды:

$$F_c = k_1 \cdot v,$$

где k_1 – коэффициент пропорциональности, зависящий от размеров, формы, материала поверхности тела, а также от вязкости и плотности среды.

При больших скоростях движения тела относительно среды модуль силы сопротивления среды приближённо можно считать пропорциональным квадрату скорости движения:

$$F_c = k_2 \cdot v^2.$$

Отметим, что k_2 не равен k_1.

Для уменьшения сопротивления среды скоростным аппаратам, предназначенным для движения в среде, придают обтекаемую форму.

Вопросы

1. Что называют силой сухого трения покоя? Куда она направлена?
2. Что называют коэффициентом трения? От чего он зависит?
3. Куда направлена сила сухого трения скольжения?
4. Как зависит модуль силы сухого трения скольжения от модуля относительной скорости?
5. Что называют силой сопротивления среды?
6. Как зависит модуль силы сопротивления среды от модуля относительной скорости?

Упражнения

1. На горизонтальной крышке стола лежит брусок массой $m = 1$ кг. Коэффициент трения бруска о крышку $\mu = 0{,}2$. С какой минимальной по модулю и направленной горизонтально силой надо подействовать на этот брусок, чтобы сдвинуть его с места?
2. Лежащий на доске кирпич начинает соскальзывать с неё, когда угол между доской и горизонтом увеличивают до $60°$. Определите коэффициент трения между кирпичом и доской.
3. Парашютист с раскрытым парашютом опускается равномерно со скоростью, модуль которой $v = 5$ м/с. Считая, что сила сопротивления прямо пропорциональна относительной скорости с коэффициентом $k_1 = 200$ Н · с/м, определите массу парашютиста с парашютом.
4. Шайба массой $m = 0{,}1$ кг скользит по льду замёрзшего озера. При этом скорость шайбы с течением времени изменяется в СИ по закону: $v = 20 - 3t$. Определите, чему равен коэффициент трения скольжения шайбы о лёд.

§ 21 Решение задач о движении тела под действием нескольких сил

Рассмотрим, как используют второй закон Ньютона при решении задач динамики движения при действии нескольких сил на тело, которое можно считать материальной точкой. Отметим, что все такие задачи решают по одной схеме.

Задача 1

По горизонтальной дороге разгоняется автомобиль массой m (рис. 118). Все колёса автомобиля ведущие. Коэффициент трения между колёсами и поверхностью дороги равен μ. Определите максимально возможное ускорение автомобиля.

Решение.

Шаг 0. Выбор модели.

Будем считать автомобиль материальной точкой, а влияние воздуха на движение пренебрежимо малым.

Шаг 1. Выбор ИСО.

Выберем в качестве тела отсчёта Землю. Ось X направим горизонтально вдоль дороги по ходу движения автомобиля, ось Y – вертикально вверх (рис. 119). Часы включим в момент начала разгона.

Шаг 2. Изображение на рисунке сил, действующих на тело.

Прежде чем изображать действующие на автомобиль силы, выясним причину появления у автомобиля ускорения. Каждый из вас знает, что если автомобиль с изношенными (практически гладкими) покрышками колёс стоит на гладком льду, то он не может стронуться с места без посторонней помощи. При этом работающий двигатель раскручивает колёса, которые проскальзывают, не создавая силы, вызывающей ускоре-

Рис. 118

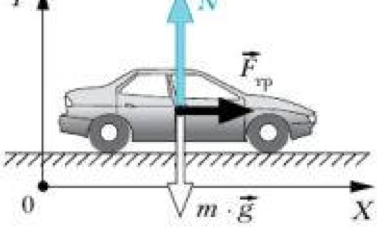


Рис. 119

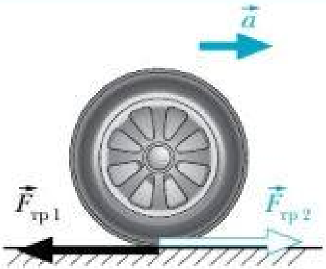


Рис. **120**

ние автомобиля. Если же сила трения между покрышками колёс и поверхностью дороги отлична от нуля, то вращаемые двигателем колёса толкают поверхность дороги с силой трения $\vec{F}_{тр\,1}$ в направлении, противоположном направлению движения автомобиля (рис. 120). В соответствии с третьим законом Ньютона поверхность дороги также действует на вращаемые двигателем колёса в противоположном направлении с силой $\vec{F}_{тр\,2}$, равной по модулю силе $\vec{F}_{тр\,1}$. Действие этой силы и приводит к появлению у автомобиля ускорения. Именно по этой причине в гололёд рекомендуется использовать покрышки с шипами.

! Автомобиль разгоняется в результате действия на его ведущие колёса сил трения со стороны дороги.

Изобразим силы, действующие на автомобиль: силу тяжести $m \cdot \vec{g}$, силу реакции опоры $\vec{N}$, силу трения $\vec{F}_{тр}$ со стороны дороги (*см.* рис. 119).

Шаг 3. Определение проекций сил на координатные оси.

Рассмотрим вначале проекции сил на ось Y. Сила $\vec{F}_{тр}$ перпендикулярна этой оси, поэтому её проекция на ось Y равна нулю.

Направление силы $\vec{N}$ совпадает с положительным направлением оси Y. Поэтому её проекция на эту ось положительна и равна модулю этой силы: $N_y = N$. Напротив, направление силы тяжести $m \cdot \vec{g}$ противоположно положительному направлению оси Y. Поэтому её проекция на ось Y отрицательна: $m \cdot g_y = -m \cdot g$.

Таким образом, сумма проекций на ось Y всех сил, действующих на автомобиль, равна $N - m \cdot g$.

Теперь рассмотрим проекции сил на ось X. Проекция силы $\vec{F}_{тр}$ на ось X положительна и равна её модулю: $F_{тр\,x} = F_{тр}$. Проекции сил $\vec{N}$ и $m \cdot \vec{g}$ на ось X равны нулю, так как эти силы перпендикулярны оси X.

Следовательно, сумма проекций на ось X всех действующих на автомобиль сил равна $F_{тр}$.

Шаг 4. Запись уравнений движения по координатным осям.

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на координатные оси:

$$F_{тр} = m \cdot a_x; \qquad (\textit{на ось } X)$$

$$N - m \cdot g = m \cdot a_y. \qquad (\textit{на ось } Y)$$

Шаг 5. Использование индивидуальных свойств сил.

На этом шаге в виде уравнений записывают выражения для сил, которые известны. Ускорение автомобиля в направлении движения создаётся только силой $\vec{F}_{тр}$. Поэтому чем больше модуль силы трения, тем бо́льшим будет ускорение автомобиля. Поскольку по условию задачи все колёса автомобиля ведущие, то модуль максимально возможной силы трения определяется модулем действующей на автомобиль суммарной силы реакции опоры и коэффициентом трения μ:

$$F_{тр} = \mu \cdot N.$$

Шаг 6. Уравнения кинематических связей.

На этом шаге в виде уравнений записывают условия для проекций ускорения (кинематических величин) тела, которые следуют из данных задачи. В задаче проекция $a_y = 0$. Это следует из того, что в выбранной системе отсчёта автомобиль движется только вдоль оси X.

Отметим, что шаги 5 и 6 не всегда используют при решении задач. Необходимость применения этих шагов определяется условием каждой конкретной задачи.

Шаг 7. Составление системы уравнений.

Сведём полученные уравнения в систему и присвоим каждому из них номер и название:

$N - m \cdot g = m \cdot a_y;$ (1) (*проекция второго закона Ньютона на ось Y*)

$F_{тр} = m \cdot a_x;$ (2) (*проекция второго закона Ньютона на ось X*)

$F_{тр} = \mu \cdot N;$ (3) (*выражение для модуля максимальной силы трения*)

$a_y = 0.$ (4) (*отсутствие ускорения вдоль оси Y*)

Шаг 8. Решение системы уравнений.

Подставив уравнение (4) в (1), получим: $N = m \cdot g$. Отсюда с учётом уравнения (3) определяем модуль максимальной силы трения: $F_{тр} = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g$. Подставив это значение $F_{тр}$ в уравнение (2), получаем:

$$\mu \cdot m \cdot g = m \cdot a_x.$$

Следовательно, $a_x = \mu \cdot g$.

Шаг 9. Анализ полученного результата и расчёт численного ответа. Прежде всего отметим, что размерность ответа имеет размерность ускорения. Поэтому с точки зрения размерности полученный ответ верен.

Кроме того, из полученного выражения для a_x видно, что при заданных условиях и выбранной модели ускорение автомобиля не зависит от его массы. При этом чем больше коэффициент трения, тем большее по модулю ускорение может приобрести автомобиль. Поскольку коэффициент трения автомобильных шин о поверхность дороги обычно лежит в пределах от 0,5 до 0,9, то при наличии достаточно мощного двигателя модуль ускорения автомобиля теоретически может достигать значения 5–9 м/с^2.

Ответ: модуль максимально возможного ускорения автомобиля $a = \mu \cdot g$.

Задача 2

К потолку вагона железнодорожного поезда на лёгкой нити подвешен маленький шарик массой m. Вагон движется по горизонтальному прямолинейному участку пути, разгоняясь с постоянным ускорением. В результате нить, удерживающая шарик, отклонена во время разгона от вертикали на угол α. Определите модуль ускорения вагона и силу, с которой нить действует на шарик.

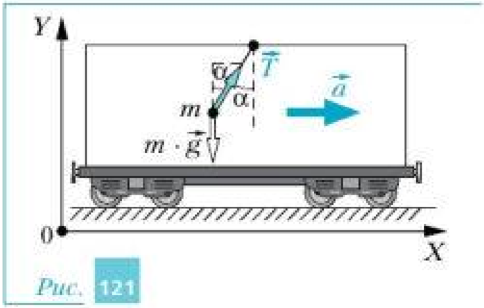


Рис. 121

Решение.

Шаг 0. Будем считать шарик материальной точкой массой m.

Шаг 1. Выберем в качестве тела отсчёта Землю. Ось X направим горизонтально вдоль дороги по ходу движения вагона, ось Y — вертикально вверх (рис. 121).

Шаг 2. Изобразим действующие на шарик силы: силу тяжести $m \cdot \vec{g}$, силу натяжения нити $\vec{T}$.

Шаг 3. Определим проекции сил на координатные оси.

Начнём с оси X. Проекция силы тяжести на ось X равна нулю, так как сила тяжести перпендикулярна этой оси. Проекция силы $\vec{T}$ натяжения нити положительна и равна $T_x = T \cdot \sin\alpha$.

Теперь определим проекции сил на ось Y. Проекция силы тяжести на эту ось отрицательна и равна $m \cdot g_y = -m \cdot g$. Проекция силы $\vec{T}$ натяжения нити положительна и равна $T_y = T \cdot \cos\alpha$. Следовательно, сумма проекций сил на ось Y равна $T \cdot \cos\alpha - m \cdot g$.

Шаг 4. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на координатные оси:

$T \cdot \sin\alpha = m \cdot a_x$; (*на ось X*)

$T \cdot \cos\alpha - m \cdot g = m \cdot a_y$. (*на ось Y*)

Шаг 5. Не используется.

Шаг 6. По условию задачи шарик неподвижен относительно вагона. Поэтому в выбранной системе отсчёта шарик движется равноускоренно вдоль оси X вместе с вагоном. Следовательно, проекция его ускорения на ось X равна проекции на эту ось искомого ускорения $\vec{a}$ вагона: $a_x = a$. Вдоль оси Y шарик не движется. Поэтому проекция его ускорения на эту ось равна нулю: $a_y = 0$.

Шаг 7. Система уравнений имеет вид:

$T \cdot \sin\alpha = m \cdot a_x$; (1) (*проекция второго закона Ньютона на ось X*)

$T \cdot \cos\alpha - m \cdot g = m \cdot a_y$; (2) (*проекция второго закона Ньютона на ось Y*)

$a_x = a$; (3) (*равенство ускорений шарика и вагона*)

$a_y = 0$. (4) (*отсутствие ускорения вдоль оси Y*)

Шаг 8. Решая систему уравнений, подставим уравнение (4) в (2). Получим:

$T \cdot \cos\alpha = m \cdot g$. (5)

Следовательно, $T = \dfrac{m \cdot g}{\cos\alpha}$.

Подставляя это значение в (1), с учётом (3) получаем: $a = g \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

Шаг 9. Проведём анализ полученного результата. Из ответа следует, что *угол отклонения от вертикали нити, на которой висит шарик, при равноускоренном движении вагона не зависит от массы шарика*, а определяется только отношением модуля ускорения вагона к модулю ускорения свободного падения. Чем больше модуль ускорения вагона, тем больше угол отклонения нити от вертикали. Сила же натяжения нити пропорциональна массе шарика и увеличивается по мере роста угла α, т. е. при увеличении модуля ускорения вагона. Все эти выводы соответствуют известным экспериментальным фактам. Поэтому полученные результаты имеют физический смысл.

Ответ: модуль ускорения вагона $a = g \cdot \operatorname{tg}\alpha$, модуль силы натяжения нити $T = \dfrac{m \cdot g}{\cos\alpha}$.

Упражнения

1 На горизонтальной крышке стола лежит учебник массой $m = 0{,}5$ кг. В некоторый момент времени на него начинает действовать горизонтально направленная сила $\vec{F}$. В результате учебник начинает двигаться поступательно с ускорением, модуль которого равен $a = 0{,}5$ м/с^2. Определите модуль силы $\vec{F}$, если коэффициент трения μ между учебником и поверхностью стола равен $0{,}3$.

*2 Как изменится ответ в задаче 1, если сила $\vec{F}$, действующая на учебник, будет направлена не горизонтально, а под углом $30°$ к горизонту: а) вверх; б) вниз?

3 По плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha = 60°$, соскальзывает вниз брусок, двигаясь поступательно. Найдите ускорение бруска, если известно, что коэффициент его трения о плоскость $\mu = 0{,}1$.

§ 22 Решение задач о движении взаимодействующих тел

При решении задач о движении взаимодействующих тел используют законы Ньютона: *второй закон Ньютона для каждого из тел и третий закон Ньютона для каждой пары взаимодействующих тел*. Все подобные задачи решают по одной схеме. Рассмотрим примеры решения таких задач.

Задача 1

На льду озера лежит доска массой M. На доске стоит человек массой m (рис. 122). Коэффициент трения между доской и льдом равен μ. Определите минимальное по модулю относительно поверхности льда ускорение, с которым должен начать двигаться по доске человек, чтобы доска начала скользить по льду.

Решение.

Шаг 0. Будем считать человека и доску материальными точками.

Шаг 1. Инерциальную систему отсчёта XY свяжем с поверхностью льда. Ось X направим горизонтально в направлении ускорения человека. Ось Y направим вертикально вверх.

Шаг 2. Изобразим силы, действующие на человека: силу тяжести $m \cdot \vec{g}$, силу реакции опоры $\vec{N}_1$ и силу трения $\vec{F}_{\text{тр}1}$ со стороны доски, которая позволяет человеку ускориться (рис. 123).

Рис. 122

Изобразим силы, действующие на доску: силу тяжести $M \cdot \vec{g}$, силу $\vec{P}$ (вес человека), силу реакции опоры $\vec{N}_2$ со стороны поверхности льда и силы трения $\vec{F}_{тр\,2}$ со стороны человека и $\vec{F}_{тр}$ со стороны льда.

Шаг 3. Определим проекции сил на координатные оси.

Проекции сил реакции опоры $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ на ось Y положительны и равны модулям этих сил: $N_{1y} = N_1$, $N_{2y} = N_2$. Проекции сил тяжести $m \cdot \vec{g}$ и $M \cdot \vec{g}$, а также веса $\vec{P}$ человека отрицательны. Поэтому $m \cdot g_y = -m \cdot g$, $M \cdot g_y = -M \cdot g$, $P_y = -P$.

Теперь определим проекции сил на ось X. Проекция силы трения $\vec{F}_{тр\,1}$, действующей на человека, положительна: $F_{тр\,1x} = F_{тр1}$. Проекция силы трения $\vec{F}_{тр\,2}$, действующей на доску со стороны человека, отрицательна и равна $F_{тр\,2x} = -F_{тр\,2}$. В свою очередь, проекция силы трения $\vec{F}_{тр}$, действующей на доску со стороны льда, положительна и равна $F_{тр\,x} = F_{тр}$.

Шаг 4. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на координатные оси для человека и для доски:

$$F_{тр\,1} = m \cdot a_x; \qquad (1)$$

$$F_{тр} - F_{тр\,2} = M \cdot A_x; \qquad (2)$$

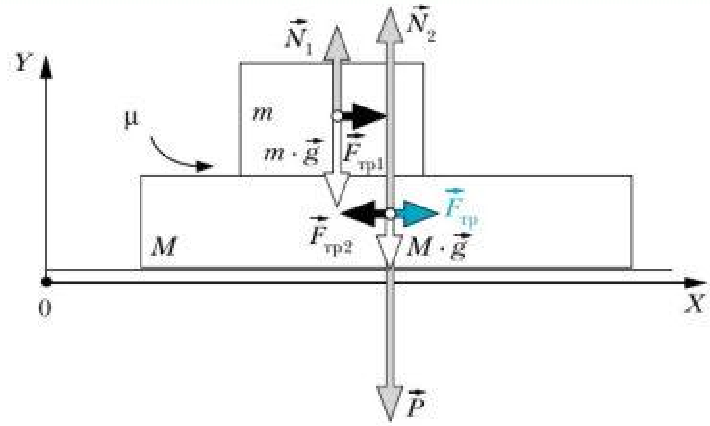


Рис. 123

$$N_1 - m \cdot g = m \cdot a_y; \qquad (3)$$

$$N_2 - M \cdot g - P = M \cdot A_y, \qquad (4)$$

где A_x и A_y – проекции ускорения доски, a_x и a_y – проекции ускорения человека.

Шаг 4* (новый). По третьему закону Ньютона модули сил взаимодействия человека и доски вдоль оси X (т. е. модули сил трения) равны: $F_{тр\,1} = F_{тр\,2}$. Отметим, что по третьему закону Ньютона равны и модули сил взаимодействия человека и доски вдоль оси Y: $P = N_1$.

Шаг 5. То, что доска начинает скользить по льду, означает, что модуль действующей на неё силы трения покоя $\vec{F}_{тр}$ со стороны льда достиг своего максимального значения: $F_{тр} = \mu \cdot N_2$.

Шаг 6. В выбранной системе отсчёта человек и доска движутся только вдоль оси X. Поэтому $a_y = A_y = 0$.

По условию задачи доска должна начать скользить по льду, т. е. проекция её ускорения на ось X должна стать отрицательной: $A_x < 0$. Однако мы ищем *минимальное* по модулю ускорение человека, при котором доска *только начинает* скользить по льду. Поэтому при искомом ускорении человека ускорение доски можно считать приблизительно равным нулю: $A_x = 0$. Обозначим через a проекцию искомого ускорения на ось X: $a_x = a$.

Шаг 7. С учётом результатов предыдущих шагов решения система уравнений принимает вид

$$F_{тр\,1} = m \cdot a; \qquad (1)$$

$$F_{тр} - F_{тр\,1} = 0; \qquad (2)$$

$$N_1 - m \cdot g = 0; \qquad (3)$$

$$N_2 - M \cdot g - P = 0; \qquad (4)$$

$$P = N_1; \qquad (5)$$

$$F_{тр} = \mu \cdot N_2. \qquad (6)$$

Шаг 8. Из уравнений (3) и (5) следует, что $P = N_1 = m \cdot g$. Поэтому из уравнения (4) получаем: $N_2 = (M + m) \cdot g$. Следовательно, из уравнения (6): $F_{тр} = \mu \cdot (M + m) \cdot g$. Подставляя полученное выражение в (2) и складывая результат с (1), получаем:

$$a = \mu \cdot \left(1 + \frac{M}{m}\right) \cdot g. \qquad (7)$$

Шаг 9. Проведём анализ полученного результата.

Прежде всего отметим, что размерность правой части уравнения (7) – это размерность ускорения. Поэтому с точки зрения размерности полученный результат верен.

Теперь исследуем полученный результат с точки зрения жизненного опыта. Из уравнения (7) следует, что чем больше коэффициент трения между доской и льдом, тем с бóльшим ускорением должен начать двигаться человек, чтобы доска начала скользить. Кроме того, из уравнения (7) видно, что ускорение человека должно быть тем больше, чем больше отношение массы доски к массе человека. Все полученные выводы соответствуют жизненному опыту. Следовательно, полученный результат имеет физический смысл.

Ответ: модуль искомого ускорения человека $a = \mu \cdot \left(1 + \frac{M}{m}\right) \cdot g$.

Задача 2

Через неподвижный относительно Земли блок перекинута гладкая лёгкая нерастяжимая нить, к концам которой прикрепляют грузы массами m_1 и m_2 (рис. 124). К грузу массой m_2 снизу прикрепляют также лёгкую нерастяжимую нить, на другом конце которой висит груз массой M. Грузы одновременно отпускают. Определите ускорение груза массой m_1 и модуль силы натяжения нити, действующей на груз M.

Решение.

Шаг 0. Условимся, что все грузы движутся поступательно. Поэтому будем считать их материальными точками.

Шаг 1. Инерциальную систему отсчёта свяжем с Землёй, направив координатную ось Y вертикально вниз, как показано на рис. 124.

Шаг 2. Изобразим на рисунке силы, действующие на грузы: силы тяжести $m_1 \cdot \vec{g}$, $m_2 \cdot \vec{g}$, $M \cdot \vec{g}$, а также силы натяжения нитей $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{T}_3$ и $\vec{T}_4$.

Шаг 3. Отметим, что все эти силы действуют вдоль оси Y. Определим проекции изображённых сил на эту координатную ось. Проекции сил тяжести положительны и равны: $m_1 \cdot g_y = m_1 \cdot g$, $m_2 \cdot g_y = m_2 \cdot g$, $M \cdot g_y = M \cdot g$. Проекции сил натяжения $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ и $\vec{T}_4$ отрицательны и равны соответственно взятым со знаком «минус» модулям этих сил: $T_{1y} = -T_1$, $T_{2y} = -T_2$, $T_{4y} = -T_4$. Проекция же силы $\vec{T}_3$ положительна и равна модулю этой силы: $T_{3y} = T_3$.

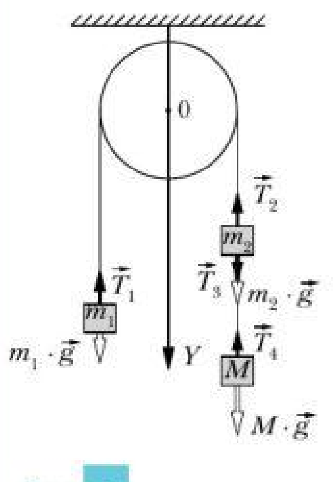


Рис. 124

Шаг 4. Запишем для каждого из грузов второй закон Ньютона в проекциях на координатную ось Y:

$$m_1 \cdot g - T_1 = m_1 \cdot a_{1y};$$
$$m_2 \cdot g - T_2 + T_3 = m_2 \cdot a_{2y};$$
$$M \cdot g - T_4 = M \cdot a_{3y},$$

где a_{1y}, a_{2y} и a_{3y} — проекции ускорений грузов на ось Y.

Шаг 4*. По условию задачи нити не только нерастяжимые, но и лёгкие. Поэтому массу каждой из них можно считать равной нулю. Кроме того, первая нить гладкая. Поэтому она скользит по блоку без трения. В этом случае, используя второй и третий законы Ньютона, можно показать, что *модули сил натяжения каждой нити во всех её точках одинаковы*. Следовательно, $T_1 = T_2$, а $T_3 = T_4$.

Шаг 5. Не используется.

Шаг 6. Нити по условию задачи нерастяжимы. Поэтому модули перемещений всех грузов равны: на какое расстояние сместится один груз, на такие же расстояния сместятся и другие грузы. Следовательно, модули ускорений грузов также равны. Однако при опускании, например, первого груза два других поднимаются. Поэтому проекции ускорений второго и третьего грузов на ось Y будут иметь одинаковые знаки, а проекция ускорения первого — противоположный знак. Следовательно, $a_{1y} = -a_{2y} = -a_{3y}$. Отметим особо, что заранее мы не знаем, какие из этих проекций положительны, а какие — отрицательны. Это может быть установлено только после решения всей системы уравнений.

Шаг 7. С учётом полученных результатов система уравнений принимает вид:

$$m_1 \cdot g - T_1 = m_1 \cdot a_{1y}; \quad (1)$$
$$m_2 \cdot g - T_2 + T_3 = m_2 \cdot a_{2y}; \quad (2)$$
$$M \cdot g - T_4 = M \cdot a_{3y}; \quad (3)$$
$$T_1 = T_2; \quad (4)$$
$$T_3 = T_4; \quad (5)$$
$$a_{1y} = -a_{2y} = -a_{3y}. \quad (6)$$

Шаг 8. Решая систему уравнений, вычтем из уравнения (1) сумму уравнений (2) и (3). Тогда с учётом уравнений (4), (5) и (6) получим:

$$a_{1y} = \frac{(m_1 - m_2 - M) \cdot g}{m_1 + m_2 + M}. \quad (7)$$

Подставив полученное значение в уравнение (6), определим a_{2y} и a_{3y}. Подставив результаты в уравнение (3), получаем:

$$T_4 = \frac{2M \cdot m_1}{M + m_1 + m_2} \cdot g. \qquad (8)$$

Шаг 9. Проведём анализ полученных результатов.

Начнём с уравнения (7). Видно, что если $m_1 > m_2 + M$, то проекция a_{1y} ускорения первого груза положительна, т. е. более тяжёлый груз m_1 опускается, а более лёгкие m_2 и M поднимаются. В случае если $m_2 + M = 0$, ускорение первого груза станет равным ускорению свободного падения: $a_{1y} = g$. Напротив, если $m_1 < m_2 + M$, то проекция a_{1y} ускорения первого груза будет отрицательна, т. е. более лёгкий груз m_1 будет подниматься. Если же $m_1 = m_2 + M$, то $a_{1y} = 0$, и в этом случае грузы будут двигаться равномерно или покоиться.

Теперь проанализируем уравнение (8). Из него следует, что при $M = 0$ натяжение прикреплённой к этому грузу нити равно нулю. Другими словами, эта нить не будет натянута, и вес груза нулевой массы равен нулю. При $m_1 = 0$ натяжение нити, прикреплённой к грузу массой M, также получается равным нулю. Действительно, из уравнения (7) следует, что при этом условии ускорение первого груза $a_{1y} = -g$. При этом второй и третий грузы вместе с соединяющей их нитью в соответствии с уравнением (6) будут совершать свободное падение, т. е. находиться в состоянии невесомости. Понятно, что в этом случае вес груза массой M будет также равен нулю, а прикреплённая к нему нить не будет натянута. Если же $m_2 = 0$, а $m_1 = M$, то из уравнения (8) следует, что $T_4 = M \cdot g$. Действительно, при таких условиях вся система будет находиться в состоянии равновесия, а сила натяжения рассматриваемой нити будет уравновешивать действующую на груз массой M силу тяжести.

Отметим, что решение задач с блоками будет таким же, когда нить не будет гладкой, при условии, что масса блока достаточно мала (блок невесом) и трением в оси блока можно пренебречь. Однако доказательство этого утверждения потребует привлечения понятий, выходящих за рамки школьного курса физики.

Задача 3

На рис. 125 показана система, состоящая из неподвижного и подвижного лёгких блоков. Массы грузов равны m_1 и m_2. Прикреплённые к грузам нити можно считать нерастяжимыми, лёгкими и гладкими. Определите ускорения грузов.

Эта задача, как и предыдущая, решается по стандартной схеме. Поэтому мы не будем приводить её полное решение, а ограничимся рассмотрени-

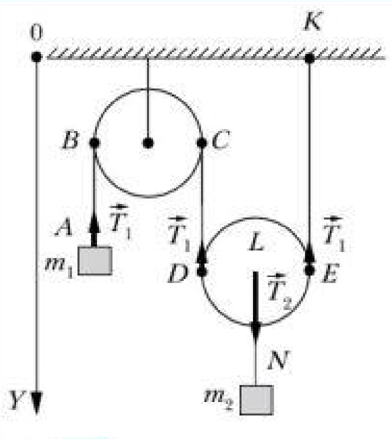


Рис. 125

ем на её примере двух незнакомых вам приёмов, которые могут потребоваться при решении более сложных задач.

К шагу 4. По условию задачи нити не только нерастяжимые, но и лёгкие. Кроме того, первая нить $ABCDEK$ – гладкая. Следовательно, она скользит по блокам без трения. В этом случае модули сил натяжения нити во всех её точках одинаковы. Поэтому на рисунке силы натяжения нити $ABCDEK$ в разных точках обозначены одинаково: $\vec{T}_1$. Сила натяжения нити LN обозначена $\vec{T}_2$. Определим, как соотносятся модули сил $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$. Для этого запишем второй закон Ньютона для подвижного блока в проекции на ось Y инерциальной системы отсчёта: $T_2 - 2T_1 = m_{бл} \cdot a$. По условию задачи блок лёгкий. Поэтому его массу $m_{бл}$ можно считать равной нулю. Поскольку ускорение блока по модулю – конечное число, получаем: $T_2 = 2T_1$. Таким образом, модуль силы натяжения нити LN в два раза больше модуля силы натяжения нити $ABCDEK$. Отметим, что полученный результат уже известен вам из курса физики 7 класса (*см.* тему «Простые механизмы»).

К шагу 6. Определим, как связаны между собой проекции на ось Y ускорений первого и второго грузов. Пусть второй груз, например, опустился на Δy_2. Так как нить LN нерастяжима, то подвижный блок также опустится на Δy_2. В результате участок EK первой нити увеличится на Δy_2. Поскольку другой блок неподвижен, то участок CD первой нити также увеличится на Δy_2. Нить $ABCDEK$ нерастяжима. Поэтому увеличение длин участков EK и CD приведёт к уменьшению длины участка AB на $2\Delta y_2$. В результате первый груз поднимется, а изменение его координаты будет равно $\Delta y_1 = -2\Delta y_2$. Следовательно, соотношение проекций скоростей грузов на ось Y в любой момент времени будет иметь вид: $v_{1y} = -2v_{2y}$. Поэтому соотношение проекций ускорений грузов на ось Y имеет вид: $a_{1y} = -2a_{2y}$.

Упражнения

1 На горизонтальной поверхности стола удерживают два маленьких гладких бруска массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 4$ кг. Бруски связаны друг

с другом лёгкой нерастяжимой нитью, которая натянута. В некоторый момент времени бруски отпускают. Одновременно на первый брусок начинает действовать сила $\vec{F}$ так, как показано на рис. 126.

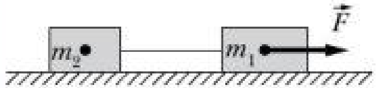


Рис. 126

В результате бруски начинают поступательно двигаться в направлении действия этой силы. Определите модуль силы натяжения нити, действующей на второй брусок, если модуль силы $\vec{F}$ равен 6 Н. Получите ответ в общем виде и проведите его анализ.

2 Через неподвижный относительно Земли блок перекинута гладкая лёгкая нерастяжимая нить, к концам которой прикрепляют грузы с одинаковыми массами M. Удерживая грузы, на один из них кладут грузик массой m. Грузы одновременно отпускают. Определите, с какой силой будет действовать грузик на груз под ним после того, как вся система придёт в движение.

3 Решите полностью задачу 3 из этого параграфа.

Для углублённого уровня

§ 23 Решение задач, требующих анализа возможных вариантов движения и взаимодействия тел

Проведём эксперимент. Положим на парту рабочую тетрадь, а сверху – учебник физики (рис. 127). Аккуратно потянем учебник с малой силой в горизонтальном направлении. Тетрадь начнёт перемещаться вместе с учебником. Почему? Дело в том, что на тетрадь со стороны учебника будет действовать сила трения, которая «потянет» тетрадь вслед за учебником. Если вы будете тянуть учебник с незначительной по модулю силой, то действующая на тетрадь со стороны учебника сила трения будет силой трения покоя. Её будет достаточно для того, чтобы тетрадь двигалась вместе с учебником. Однако если вы подействуете на учебник с большой по модулю силой, то учебник соскользнёт с тетради, хотя она тоже будет двигаться по парте.

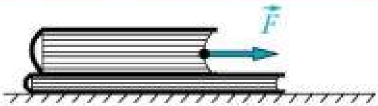


Рис. 127

Исследуем, как будут двигаться и взаимодействовать тела в подобной ситуации. Для этого решим следующую задачу.

Задача

Доска массой M лежит на гладкой горизонтальной поверхности, неподвижной относительно Земли. На доске лежит брусок массой m (рис. 128). Коэффициент трения между бруском и доской равен μ. Брусок начинают тянуть в горизонтальном направлении с силой $\vec{F}$. Определите ускорение, с которым начнёт двигаться доска относительно поверхности.

Решение.

Шаг 0. Будем считать, что брусок и доска движутся поступательно. Поэтому их можно рассматривать как материальные точки.

Шаг 1. Инерциальную систему отсчёта XY свяжем с горизонтальной поверхностью. Ось X направим вдоль действия силы $\vec{F}$ (*см.* рис. 128). Ось Y направим вертикально вверх.

Шаг 2. Изобразим силы, действующие на брусок: силу тяжести $m \cdot \vec{g}$, силу реакции опоры $\vec{N}_1$, действующую на брусок силу $\vec{F}$ и силу трения $\vec{F}_{тр\,1}$ со стороны доски, которая препятствует движению бруска. Изобразим силы, действующие на доску: силу тяжести $M \cdot \vec{g}$, силу $\vec{P}$ (вес бруска), силу реакции опоры $\vec{N}_2$ со стороны поверхности и силу трения $\vec{F}_{тр\,2}$ со стороны бруска.

Шаг 3. Определим проекции сил на координатные оси.

Начнём с оси Y. Проекции сил реакции опоры $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ положительны и равны модулям этих сил: $N_{1y} = N_1$, $N_{2y} = N_2$. Проекции сил тяжести $m \cdot \vec{g}$ и $M \cdot \vec{g}$, а также силы $\vec{P}$ отрицательны, поэтому $m \cdot g_y = -m \cdot g$, $M \cdot g_y = -M \cdot g$, $P_y = -P$.

Теперь определим проекции сил на ось X. Проекция силы $\vec{F}$ положительна и равна модулю этой силы: $F_x = F$. Проекция силы трения $\vec{F}_{тр\,2}$, дей-

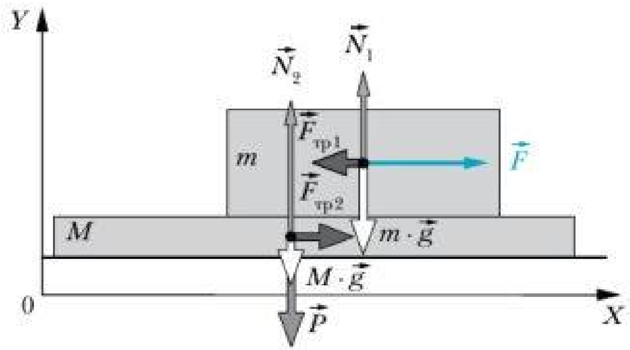


Рис. 128

ствующей на доску, положительна, поэтому $F_{тр2x} = F_{тр2}$. Проекция силы трения $\vec{F}_{тр1}$, действующей на брусок, отрицательна: $F_{тр1x} = -F_{тр1}$.

Шаг 4. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на координатные оси для доски и бруска:

$$F - F_{тр\,1} = m \cdot a_x; \qquad (1)$$

$$F_{тр\,2} = M \cdot A_x; \qquad (2)$$

$$N_1 - m \cdot g = m \cdot a_y; \qquad (3)$$

$$N_2 - M \cdot g - P = M \cdot A_y, \qquad (4)$$

где A_x и A_y — проекции ускорения доски, a_x и a_y — проекции ускорения бруска на соответствующие оси.

Шаг 4* (новый). По третьему закону Ньютона модули сил взаимодействия бруска и доски вдоль оси X (т. е. модули сил трения) равны. Поэтому запишем: $F_{тр\,1} = F_{тр\,2} = F_{тр}$. Отметим, что по третьему закону Ньютона равны и модули сил взаимодействия бруска и доски вдоль оси Y: $P = N_1$.

Шаги 5–9. Мы заранее не знаем, будет ли брусок скользить по доске после приложения силы $\vec{F}$. Следовательно, нам неизвестно, какой будет сила трения между доской и бруском: силой трения покоя или скольжения. Поэтому при решении задач подобного типа *необходимо рассматривать все возможные варианты движения и взаимодействия тел*.

В связи с этим в подобных задачах *решение и анализ проводят одновременно: шаги решения с 5-го по 9-й объединяют*. В данной задаче возможны два принципиально различных варианта:

1) либо брусок и доска начинают двигаться вместе, и тогда сила трения между ними является силой трения покоя;

2) либо ускорения тел различны, и тогда действующая между ними сила трения является силой трения скольжения.

Прежде всего необходимо определить, при каких условиях реализуется первый, а при каких — второй вариант движения и взаимодействия тел. Для этого проведём анализ возможных движений и взаимодействий тел.

При реализации первого варианта проекции ускорений бруска и доски на ось X равны: $a_x = A_x$. В этом случае сила трения между ними является силой трения покоя. Поэтому её модуль удовлетворяет неравенству: $F_{тр} \leqslant \mu \cdot N_1$.

При реализации второго варианта проекции ускорений бруска и доски на ось X различны. В этом случае сила трения между ними является силой трения скольжения. Поэтому её модуль $F_{тр} = \mu \cdot N_1$.

Из второго закона Ньютона для доски видно, что модуль её ускорения ограничен модулем силы трения. Поэтому если модуль силы $\vec{F}$ больше некоторого критического значения $F_{кр}$, то модуль ускорения бруска будет больше модуля ускорения доски. При этом сила трения будет силой трения скольжения. В случае если $F < F_{кр}$, брусок и доска будут двигаться вместе и сила трения является силой трения покоя (модуль которой тем больше, чем больше F).

Определим $F_{кр}$, считая, что при $F = F_{кр}$ брусок и доска ещё движутся вместе, а модуль силы трения покоя уже достиг своего максимального значения $F_{тр} = \mu \cdot N_1$. В этом случае с учётом предыдущих шагов и того, что $a_y = A_y = 0$, система уравнений примет вид:

$$F_{кр} - F_{тр\,1} = m \cdot a_x; \qquad (5)$$

$$F_{тр\,2} = M \cdot A_x; \qquad (6)$$

$$N_1 - m \cdot g = 0; \qquad (7)$$

$$N_2 - M \cdot g - P = 0; \qquad (8)$$

$$F_{тр\,1} = F_{тр\,2} = F_{тр} = \mu \cdot N_1; \qquad (9)$$

$$a_x = A_x. \qquad (10)$$

Из уравнений (7) и (9) следует, что $F_{тр} = \mu \cdot m \cdot g$. Поэтому из уравнения (6) получаем: $A_x = \dfrac{\mu \cdot m \cdot g}{M}$. Подставляя это выражение с учётом (10) в уравнение (5), имеем:

$$F_{кр} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \left(1 + \frac{m}{M}\right). \qquad (11)$$

При $F > F_{кр}$ брусок скользит по доске. В результате на доску в горизонтальном направлении действует постоянная сила трения скольжения, модуль которой $F_{тр} = \mu \cdot m \cdot g$. Поэтому из уравнения (2) получаем, что модуль искомого ускорения доски $A = A_x = \dfrac{\mu \cdot m \cdot g}{M}$.

При $F \leqslant F_{кр}$ брусок и доска движутся вместе. Поэтому, складывая уравнения (1) и (2), с учётом (10) получаем: $A = \dfrac{F}{m + M}$.

С учётом (11) *ответ* имеет вид:

при $F > \mu \cdot m \cdot g \cdot \left(1 + \dfrac{m}{M}\right)$ модуль искомого ускорения доски равен: $A = \dfrac{\mu \cdot m \cdot g}{M}$;

при $F \leqslant \mu \cdot m \cdot g \cdot \left(1 + \dfrac{m}{M}\right)$ модуль искомого ускорения доски: $A = \dfrac{F}{m + M}$.

Упражнения

1 Рабочая тетрадь по физике массой M лежит на гладкой горизонтальной поверхности стола, неподвижного относительно Земли. На тетради лежит учебник массой m (*см.* рис. 127). Коэффициент трения между тетрадью и учебником равен μ. Учебник начинают тянуть в горизонтальном направлении с силой $\vec{F}$. Используя решение задачи из учебника, запишите выражения для модуля ускорения, с которым начнёт двигаться тетрадь относительно стола, считая учебник и тетрадь материальными точками.

2 На льду озера лежит доска массой M. На доске стоит модель автомобиля со всеми ведущими колёсами массой m (*см.* задачу 1 в § 22). Коэффициент трения между доской и льдом равен μ_1. Определите, при каком минимальном коэффициенте трения μ_2 между доской и колёсами автомобиля доска начнёт скользить по льду в результате того, что модель автомобиля начинает двигаться по доске.

3 На гладком горизонтальном столе лежит доска массой M. На доске находится груз массой m. К грузу прикреплена невесомая гладкая нерастяжимая нить, перекинутая через лёгкий блок, закреплённый на доске (рис. 129). Свободный конец нити тянут с силой $\vec{F}$. Отрезки нити, не лежащие на блоке, горизонтальны. Коэффициент трения между грузом и доской равен μ. Определите ускорение груза относительно стола, считая, что все тела движутся поступательно.

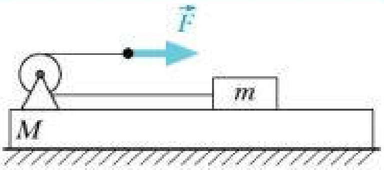


Рис. 129

§ 24 Динамика равномерного движения материальной точки по окружности

Рассмотрим равномерно движущееся по окружности тело (рис. 130), которое можно считать материальной точкой. Напомним, что при таком движении модуль v скорости материальной точки остаётся всё время неизменным, а направление вектора скорости $\vec{v}$ непрерывно изменяется. Во-первых, ускорение этой материальной точки в любой момент

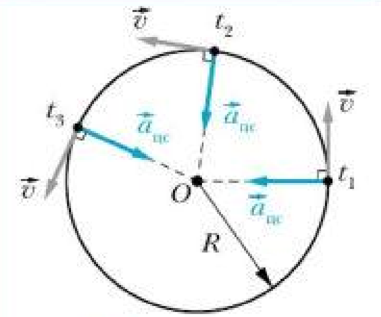


Рис. **130**

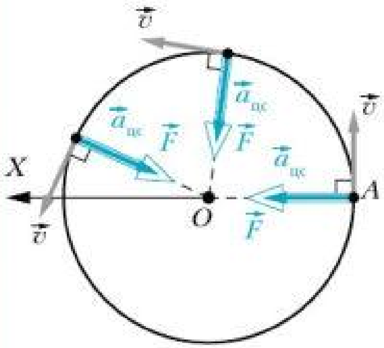


Рис. **131**

времени направлено к центру окружности, по которой она движется (поэтому его и называют центростремительным); во-вторых, модуль центростремительного ускорения не изменяется с течением времени и может быть рассчитан по формулам:

$$\left|\vec{a}_{цс}\right| = \omega^2 \cdot R = \frac{v^2}{R},$$

где ω – угловая скорость, R – радиус окружности.

В соответствии со вторым законом Ньютона в инерциальной системе отсчёта сумма $\vec{F}$ всех сил, действующих на материальную точку, равна произведению её массы m на ускорение: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Следовательно, если материальная точка равномерно движется по окружности, то сумма $\vec{F}$ всех действующих на неё сил в любой момент времени равна произведению её массы m на центростремительное ускорение $\vec{a}_{цс}$:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}_{цс}.$$

Таким образом, при равномерном движении материальной точки массой m по окружности радиусом R сумма $\vec{F}$ всех действующих на неё сил должна удовлетворять двум условиям (рис. 131):

1) эта сумма должна быть направленной к центру окружности;
2) модуль F суммы всех действующих сил должен быть равен:

$$F = m \cdot \left|\vec{a}_{цс}\right| = m \cdot \omega^2 \cdot R = m \cdot v \cdot \omega = m \cdot \frac{v^2}{R}.$$

При решении задач о движении материальной точки по окружности за начало отсчёта ИСО удобно выбирать центр O этой окружности (*см.* рис. 131). При этом координатную ось X проводят через центр O этой окружности и точку A, в которой в данный момент времени находится рассматриваемая материальная точка. За положительное направление оси X обычно принимают направление от точки A к центру O окружности.

При таком выборе системы отсчёта проекция центростремительного ускорения на ось X положительна: $a_{\text{цс}\,x} = |\vec{a}_{\text{цс}}|$. Поэтому проекция на ось X суммы $\vec{F}$ всех сил, действующих на материальную точку в данный момент времени, также положительна: $F_x = |\vec{F}| = m \cdot |\vec{a}_{\text{цс}}| = m \cdot \omega^2 \cdot R$. Так как проекции ускорения $\vec{a}_{\text{цс}}$ на другие координатные оси равны нулю, то и проекции $\vec{F}$ на другие координатные оси в этот момент времени также равны нулю.

Рассмотрим примеры решения задач о равномерном движении материальной точки по окружности.

Задача

Маленький шарик массой m подвешен к потолку на лёгкой нерастяжимой нити длиной L. Шарик равномерно движется по окружности вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса, как показано на рис. 132. Определите угловую скорость движения шарика, если нить всё время составляет с вертикалью угол α.

Решение.

Шаг 0. Так как нас не интересуют различия в движении разных точек шарика, будем считать его материальной точкой. При решении задачи будем пренебрегать действием сил трения со стороны воздуха на движущиеся тела. Кроме того, по условию задачи нить лёгкая, и её можно считать невесомой.

Шаг 1. Выберем инерциальную систему отсчёта, связав её с Землёй. За начало отсчёта примем неподвижный относительно Земли центр окружности, по которой движется шарик (точка O на рис. 132). Координатную ось X проведём в направлении от точки A, в которой в рассматриваемый момент времени находится шарик, к началу отсчёта – точке O. Ось Y направим вертикально вверх.

Шаг 2. Изобразим силы, действующие на шарик: силу тяжести $m \cdot \vec{g}$, силу натяжения нити $\vec{F}$.

Шаг 3. Определим проекции сил на координатные оси.

Проекция силы $\vec{F}$ на ось X положительна: $F_x = F \cdot \sin\alpha$. Проекция силы $\vec{F}$ на ось Y положительна: $F_y = F \cdot \cos\alpha$. Проекция силы тяжести $m \cdot \vec{g}$ на ось Y отрицательна и равна взятому со знаком «минус» модулю силы тяжести: $m \cdot g_y = -m \cdot g$.

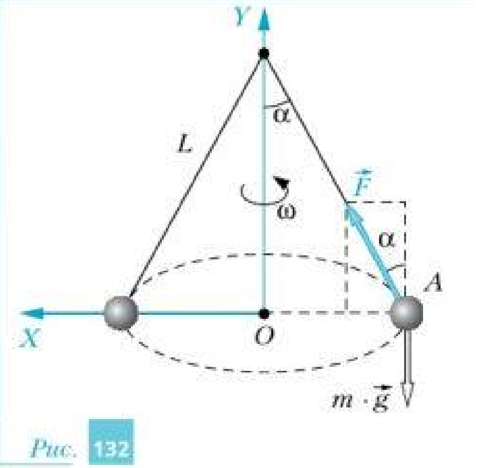


Рис. 132

Шаг 4. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на координатные оси:

$$F \cdot \cos\alpha - m \cdot g = m \cdot a_y;$$

$$F \cdot \sin\alpha = m \cdot a_x.$$

Шаг 5. Не используют.

Шаг 6. Шарик равномерно движется по окружности с центром в точке O. Радиус этой окружности $R = L \cdot \sin\alpha$. Поэтому в выбранной системе отсчёта проекция его ускорения на ось X положительна и равна модулю его центростремительного ускорения:

$$a_x = a_{\text{цс}} = \omega^2 \cdot R = \omega^2 \cdot L \cdot \sin\alpha.$$

Вдоль оси Y шарик не движется, поэтому $a_y = 0$.

Шаг 7. С учётом полученных результатов система уравнений имеет вид:

$$F \cdot \cos\alpha - m \cdot g = 0; \qquad (1)$$

$$F \cdot \sin\alpha = m \cdot \omega^2 \cdot L \cdot \sin\alpha. \qquad (2)$$

Шаг 8. Выразив F из уравнения (1) и подставив его в (2), получаем:

$$\frac{m \cdot g}{\cos\alpha} = m \cdot \omega^2 \cdot L.$$

Следовательно, $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L \cdot \cos\alpha}}$. Отметим, что угловая скорость движения шарика не зависит от его массы.

Ответ: угловая скорость движения шарика $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L \cdot \cos\alpha}}$.

Вопросы

1. Куда направлено центростремительное ускорение при равномерном движении материальной точки по окружности?
2. Куда направлена сумма всех сил, действующих на материальную точку, которая равномерно движется по окружности?
3. Чему равен модуль суммы всех сил, действующих на равномерно движущуюся по окружности материальную точку?
4. Приведите примеры сил, которые могут обеспечивать телу центростремительное ускорение.

Упражнения

1 Автомобиль со всеми ведущими колёсами равномерно движется по участку дороги, представляющему собой дугу окружности радиусом $R = 50$ м. Известно, что колёса автомобиля начинают проскальзывать, когда модуль его скорости превышает 72 км/ч. Определите коэффициент трения между колёсами и дорогой.

2 Автомобиль (рис. 133) массой $m = 1$ т равномерно движется по выпуклому мосту, поверхность которого представляет собой дугу окружности радиусом $r = 200$ м. Определите силу $\vec{P}$, с которой автомобиль действует на мост в той точке, направление на которую из центра O кривизны моста составляет с вертикалью угол $\alpha = 30°$. Модуль скорости автомобиля $v = 72$ км/ч.

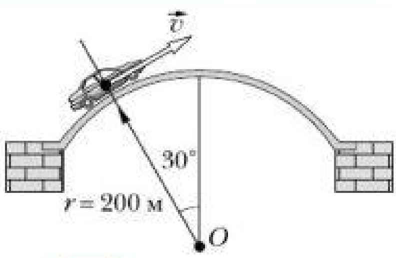


Рис. 133

Для углублённого уровня

§ 25 Динамика равноускоренного движения материальной точки по окружности

Вы уже знаете, что при равноускоренном движении точки по окружности в любой момент времени эта точка имеет ускорение $\vec{a}$, которое представляет собой векторную сумму центростремительного $\vec{a}_{цс}$ и тангенциального $\vec{a}_\tau$ ускорений (рис. 134). При этом модуль центростремительного ускорения $a_{цс} = \omega^2 \cdot R$, где ω – угловая скорость в данный момент времени, а R – радиус окружности. В свою очередь, модуль тангенциального ускорения $a_\tau = \varepsilon \cdot R$, где ε – угловое ускорение. Так как векторы $\vec{a}_{цс}$ и $\vec{a}_\tau$ всё время перпендикулярны друг другу, то модуль a ускорения точки может быть найден по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_{цс}^2 + a_\tau^2}. \qquad (1)$$

При равноускоренном движении по окружности модуль a_τ тангенциального ускорения постоянен. Напротив, угловая скорость ω непрерывно из-

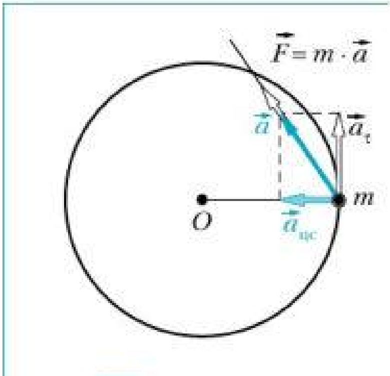


Рис. 134

меняется с течением времени. Поэтому непрерывно изменяется и модуль $a_{цс}$ центростремительного ускорения. Следовательно, как модуль, так и направление ускорения $\vec{a}$ равноускоренно движущейся по окружности материальной точки непрерывно изменяются.

В соответствии со вторым законом Ньютона в инерциальной системе отсчёта сумма $\vec{F}$ всех сил, действующих на материальную точку, равна произведению её массы m на ускорение:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}. \qquad (2)$$

Из сказанного следует, что при равноускоренном движении материальной точки массой m по окружности радиусом R модуль и направление суммы $\vec{F}$ всех действующих на неё сил непрерывно изменяются. При этом модуль F этой суммы сил может быть рассчитан по формулам:

$$F = m \cdot a = m \cdot \sqrt{a_{цс}^2 + a_\tau^2} = m \cdot \sqrt{(\omega^2 \cdot R)^2 + (\varepsilon \cdot R)^2} = m \cdot \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + a_\tau^2}.$$

Рассмотрим пример решения задачи о равноускоренном движении тела по окружности.

Задача

Гоночный автомобиль со всеми ведущими колёсами начинает движение по трассе, которая представляет собой дугу окружности радиусом R (рис. 135). Модуль скорости автомобиля равномерно нарастает с течением времени так, что модуль его тангенциального ускорения равен a_τ. Коэффициент трения между колёсами автомобиля и дорогой равен μ. Определите, через какой промежуток времени t после старта автомобиль, двигаясь равноускоренно, соскользнёт с трассы.

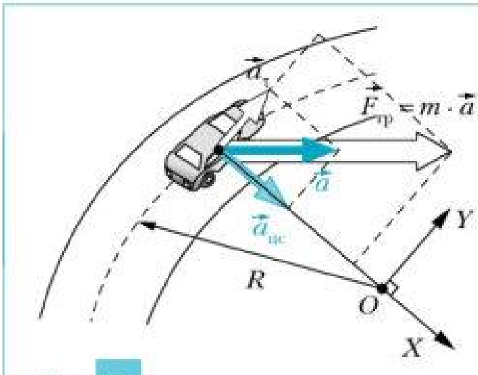


Рис. 135

Решение.

Шаг 0. Будем считать автомобиль материальной точкой массой m.

Шаг 1. Систему отсчёта свяжем с Землёй. За начало отсчёта примем центр O окружности, по дуге которой движется автомобиль. Ось X проведём в направлении от точки дороги, где находится автомобиль в момент начала скольжения, к центру O окружности. Ось Y направим горизонтально, перпендикулярно оси X, по ходу движения автомобиля, а ось Z — вертикально вверх.

Шаг 2. В вертикальном направлении на автомобиль действуют сила тяжести $m \cdot \vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. Так как до момента соскальзывания автомобиль движется равноускоренно по дуге окружности, то его ускорение $\vec{a}$ представляет собой векторную сумму центростремительного $\vec{a}_{цс}$ и тангенциального $\vec{a}_\tau$ ускорений (*см.* рис. 135). Автомобиль приобретает ускорение $\vec{a}$ в результате действия на его колёса силы трения $\vec{F}_{тр}$ со стороны дороги. Поэтому сила трения $\vec{F}_{тр}$ направлена туда же, куда направлено ускорение $\vec{a}$.

Шаг 3. В выбранной системе отсчёта сумма проекций сил на ось Z $N_z + m \cdot g_z = N - m \cdot g$. В горизонтальной плоскости XY на автомобиль действует только сила трения $\vec{F}_{тр}$. Её проекции на оси X и Y положительны. Обозначим их соответственно $F_{тр\,x}$ и $F_{тр\,y}$. Тогда $F_{тр} = \sqrt{F^2_{тр\,x} + F^2_{тр\,y}}$.

Шаг 4. Второй закон Ньютона для автомобиля в проекциях на оси координат имеет вид:

$$F_{тр\,x} = m \cdot a_x;$$

$$F_{тр\,y} = m \cdot a_y;$$

$$N - m \cdot g = m \cdot a_z.$$

Шаг 5. Пока автомобиль не начнёт соскальзывать с дороги, $\vec{F}_{тр}$ — это сила трения покоя. Поэтому её модуль удовлетворяет неравенству $F_{тр} \leqslant \mu \cdot N$. Составляющая $F_{тр\,y}$ обеспечивает постоянное тангенциальное ускорение. Поэтому её значение не изменяется с течением времени. Составляющая $F_{тр\,x}$ обеспечивает центростремительное ускорение, которое увеличивается с течением времени, так как модуль скорости автомобиля возрастает. Поэтому модуль $F_{тр}$ будет увеличиваться, пока не достигнет своего максимального значения. Следовательно, в интересующий нас момент времени t, когда начнётся соскальзывание, неравенство превратится в равенство:

$$F_{тр} = \mu \cdot N.$$

Шаг 6. Запишем уравнения кинематических связей. В выбранной системе отсчёта проекция ускорения автомобиля на ось Y равна модулю постоянного тангенциального ускорения: $a_y = a_\tau$. К моменту времени t модуль скорости автомобиля достигает значения $v = a_\tau \cdot t$. Поэтому к моменту времени t проекция его ускорения на ось X (равная модулю центростремительного ускорения) станет равна: $a_x = |\overline{a}_{\text{цс}}| = \frac{v^2}{R} = \frac{a_\tau^2 \cdot t^2}{R}$. Проекция ускорения автомобиля на ось Z равна нулю: $a_z = 0$.

Шаг 7. С учётом результатов предыдущих шагов решения задачи получаем систему уравнений:

$$F_{\text{тр}\,x} = m \cdot \frac{a_\tau^2 \cdot t^2}{R}; \qquad (1)$$

$$F_{\text{тр}\,y} = m \cdot a_\tau; \qquad (2)$$

$$N - m \cdot g = 0; \qquad (3)$$

$$F_{\text{тр}} = \mu \cdot N; \qquad (4)$$

$$F_{\text{тр}} = \sqrt{F_{\text{тр}\,x}^2 + F_{\text{тр}\,y}^2}. \qquad (5)$$

Шаг 8. Из уравнения (3) следует, что $N = m \cdot g$. Подставляя выражение для N в уравнение (4), получаем: $F_{\text{тр}} = \mu \cdot m \cdot g$. Подставив уравнения (1), (2) и полученное выражение для $F_{\text{тр}}$ в уравнение (5), получаем:

$$\mu \cdot m \cdot g = m \cdot \sqrt{a_\tau^2 + \left(\frac{a_\tau^2 \cdot t^2}{R}\right)^2}.$$

Следовательно,

$$t = \frac{\sqrt[4]{\left(\mu^2 \cdot g^2 - a_\tau^2\right) \cdot R^2}}{a_\tau}.$$

Шаг 9. Отметим, что если выражение в скобках под корнем будет отрицательным, то автомобиль не сможет двигаться с заданным тангенциальным ускорением a_τ, так как максимальный модуль ускорения автомобиля не может превышать $\mu \cdot g$. Поэтому из условия задачи следует, что a_τ должно быть меньше $\mu \cdot g$. В этом случае задача всегда имеет решение.

Ответ: момент, в который автомобиль начнёт соскальзывать с трассы,

$$t = \frac{\sqrt[4]{\left(\mu^2 \cdot g^2 - a_\tau^2\right) \cdot R^2}}{a_\tau}.$$

Упражнение

На карусели, ось вращения которой вертикальна, лежит кубик массой $m = 1$ кг. Расстояние от оси вращения до кубика $R = 2$ м. Коэффициент трения между кубиком и поверхностью карусели $\mu = 0,1$. Карусель начинают раскручивать с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0,2$ рад/с^2. Определите, через какое время τ после начала раскручивания кубик начнёт соскальзывать с карусели.

§ 26 Закон всемирного тяготения. Движение планет и искусственных спутников

В 1685 г. Ньютон высказал идею, что свободное падение яблока с яблони и движение Луны вокруг нашей планеты имеют одну причину – притяжение Земли.

Глубокий анализ известного из астрономических наблюдений характера движения Луны вокруг Земли и планет вокруг Солнца позволил Ньютону сделать вывод, что не только Земля и любое тело вблизи её поверхности, но и *все тела во Вселенной притягиваются друг к другу*.

! Все тела во Вселенной притягиваются друг к другу. Силы этого притяжения называют *силами всемирного тяготения* или *гравитационными силами*. Радиус действия гравитационных сил не ограничен.

Проведённые Ньютоном расчёты позволили ему в 1687 г. открыть **закон всемирного тяготения**. В настоящее время этот закон формулируют следующим образом.

Две материальные точки массами m_1 и m_2 притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния R между ними:

$$|\vec{F}| = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2},$$

где коэффициент пропорциональности G — гравитационная постоянная.

В настоящее время значение этой постоянной принято примерно равным $6,67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2.

Экспериментально гравитационная постоянная впервые была измерена английским физиком Генри Кавендишем (1731–1810) в 1798 г. Этот эксперимент был подробно описан в учебнике 9 класса.

Обратим внимание на то, что закон всемирного тяготения сформулирован для случая, когда взаимодействующие тела являются материальными точками, т. е. размеры этих тел много меньше расстояния между ними.

Ньютон показал, что приведённая формула для модуля силы гравитационного взаимодействия справедлива не только для материальных точек, но и для шарообразных тел, вещество которых равномерно распределено по объёму. В этом случае R – расстояние между центрами шаров. Для тел более сложной формы расчёт силы гравитационного взаимодействия требует привлечения специальных математических приёмов.

Вы знаете, что Земля и другие планеты Солнечной системы движутся вокруг Солнца. Траектории их движения представляют собой эллипсы, которые мало отличаются от окружностей. Поэтому, выполняя на уроках физики приближённые вычисления, можно считать, что все планеты движутся равномерно по окружностям, центром которых является центр Солнца.

Знание закона всемирного тяготения и законов динамики движения по окружности позволяет проводить приближённые расчёты различных кинематических и динамических характеристик движения планет и их спутников.

Рассмотрим примеры применения подобных расчётов при решении задач.

Задача 1

Из астрономических наблюдений известно, что период обращения Марса вокруг Солнца $T = 1{,}88$ земного года, а удаление Марса от Солнца (радиус орбиты Марса) $R = 2{,}25 \cdot 10^{11}$ м. Определите на основании этих данных массу Солнца.

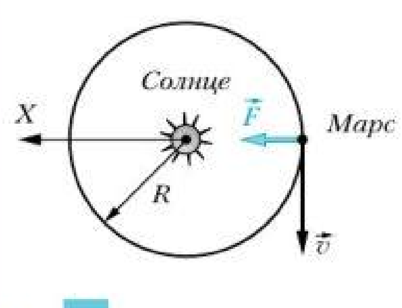


Рис. 136

Решение.

Шаг 0. Будем считать Солнце и Марс материальными точками, а гравитационное действие других планет пренебрежимо малым.

Шаг 1. Инерциальную систему отсчёта свяжем с Солнцем и удалёнными звёздами. За начало отсчёта примем центр Солнца. За положительное направление оси X выберем направление от Марса к центру Солнца в некоторый момент времени (рис. 136).

Шаг 2. Изобразим на рисунке единственную действующую на Марс силу $\vec{F}$ — силу гравитационного притяжения со стороны Солнца.

Шаг 3. Проекция силы $\vec{F}$ на ось X положительна и равна модулю силы гравитационного притяжения: $F_x = F$.

Шаг 4. Второй закон Ньютона в проекции на ось X для Марса имеет вид: $F = m \cdot a$, где m – масса Марса, a – проекция его центростремительного ускорения на ось X.

Шаг 5. В соответствии с законом всемирного тяготения модуль силы $\vec{F}$ равен:

$$F = \frac{G \cdot m \cdot M}{R^2}, \text{ где } M \text{ — масса Солнца.}$$

Шаг 6. Марс движется равномерно по окружности с постоянной по модулю скоростью. Поэтому за время T полного обращения Марса вокруг Солнца он проходит путь, равный длине окружности радиусом R. Следовательно, модуль его скорости $v = \frac{2\pi \cdot R}{T}$. Модуль ускорения Марса равен модулю его центростремительного ускорения: $a = \frac{v^2}{R}$.

Шаг 7. С учётом результатов предыдущих шагов решения система уравнений принимает вид:

$$F = m \cdot \frac{v^2}{R}; \quad (1)$$

$$F = \frac{G \cdot m \cdot M}{R^2}; \quad (2)$$

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T}. \quad (3)$$

Шаг 8. Подставляя уравнение (1) в (2), получаем:

$$m \cdot \frac{v^2}{R} = \frac{G \cdot m \cdot M}{R^2}.$$

Следовательно, с учётом уравнения (3) масса Солнца:

$$M = \frac{4\pi^2 \cdot R^3}{G \cdot T^2} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ (кг)}. \quad (4)$$

Ответ: масса Солнца примерно равна $2 \cdot 10^{30}$ кг.

Шаг 9. Проведём анализ полученного ответа. Преобразуем уравнение (4) к виду:

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2}.$$

Обратим внимание на то, что *отношение куба радиуса орбиты планеты к квадрату периода её обращения не зависит от массы плане-*

ты, а определяется только массой звезды (Солнца), вокруг которой она движется.

Это отношение одинаково для всех планет Солнечной системы. Данный факт был установлен немецким астрономом Иоганном Кеплером (1571–1630) при обработке результатов астрономических наблюдений ещё до открытия Ньютоном закона всемирного тяготения. Постоянство отношения куба радиуса орбиты планеты к квадрату периода её обращения называют *третьим законом Кеплера.*

В заключение рассмотрим движение геостационарного искусственного спутника Земли. Напомним, что искусственными спутниками Земли называют созданные людьми объекты, которые, подобно Луне, движутся вокруг Земли под действием её гравитационной силы. Геостационарным называют спутник Земли, период обращения которого равен периоду вращения Земли вокруг своей оси. Такой спутник находится всё время над одной и той же точкой поверхности Земли. Подобные спутники используют для приёма и передачи информации: телевизионных трансляций, космической связи, работы систем навигации и т. п.

Задача 2

Рассчитайте радиус круговой орбиты геостационарного спутника. Оцените модуль v скорости этого спутника относительно инерциальной системы отсчёта, связанной с центром Земли и удалёнными звёздами.

Решение.

Шаг 0. Будем считать Землю и спутник материальными точками, взаимодействующими только между собой.

Законы движения планет были открыты И. Кеплером на основе результатов астрономических наблюдений, в частности результатов, полученных датским астрономом Тихо Браге (1546–1601). Кеплер сформулировал **три закона движения планет**. Согласно первому закону *каждая планета движется по эллиптической орбите, в одном из фокусов которой находится Солнце*. По второму закону *каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, и площадь сектора орбиты, описанная радиусом-вектором планеты, пропорциональна времени движения*, т. е. за равные промежутки времени радиус-вектор планеты описывает в плоскости орбиты равные площади (рис. 137). Согласно третьему закону *отношение куба большой полуоси орбиты планеты к квадрату периода её обращения не зависит от массы планеты.*

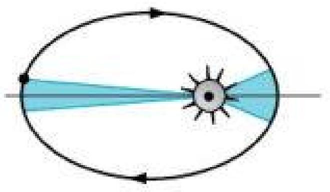


Рис. 137

Шаг 1. Инерциальную систему отсчёта свяжем с Землёй и удалёнными звёздами. За начало отсчёта примем центр Земли. За положительное направление оси X выберем направление от спутника в некоторый момент времени к центру Земли (рис. 138).

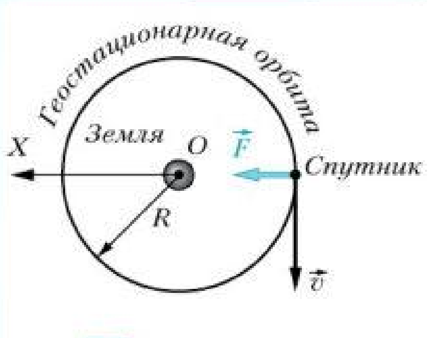


Рис. 138

Шаг 2. Изобразим на рисунке единственную действующую на спутник силу $\vec{F}$ — силу гравитационного притяжения со стороны Земли.

Шаг 3. Проекция силы $\vec{F}$ на ось X положительна и равна её модулю: $F_x = F$.

Шаг 4. Второй закон Ньютона в проекции на ось X для спутника имеет вид: $F = m \cdot a$, где m — масса спутника, a — проекция его центростремительного ускорения на ось X.

Шаг 5. В соответствии с законом всемирного тяготения модуль силы $F = \frac{G \cdot m \cdot M}{R^2}$, где M — масса Земли, R — искомый радиус орбиты спутника.

Шаг 6. Спутник движется равномерно по окружности с постоянной по модулю скоростью. Период T полного обращения геостационарного спутника равен периоду вращения Земли вокруг своей оси. За время $T = 24$ ч спутник проходит путь, равный длине окружности радиусом R. Следовательно, модуль его скорости $v = \frac{2\pi \cdot R}{T}$. Модуль ускорения спутника $a = \frac{v^2}{R}$.

Шаг 7. Система уравнений имеет вид:

$$F = m \cdot \frac{v^2}{R}; \tag{1}$$

$$F = \frac{G \cdot m \cdot M}{R^2}; \tag{2}$$

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T}. \tag{3}$$

Шаг 8. Подставляя уравнение (1) в (2), получаем:

$$m \cdot \frac{v^2}{R} = \frac{G \cdot m \cdot M}{R^2}. \tag{4}$$

Подставляя уравнение (3) в (4), имеем:

$$R = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}} \approx 42{,}3 \cdot 10^3 \text{ км}. \tag{5}$$

Таким образом, геостационарный спутник «висит» на высоте примерно 35 900 км над поверхностью Земли. С учётом полученного значения R из уравнения (4) находим:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R}} \approx 3{,}1 \ (\text{км/с}). \qquad (6)$$

Шаг 9. Проведём анализ полученных результатов.

Из уравнения (5) следует, что чем больше период T движения спутника вокруг Земли, тем больше радиус R орбиты, по которой он движется. В свою очередь, из уравнения (6) видно, что чем больше радиус R орбиты, тем меньше модуль скорости спутника.

Модуль скорости, которую надо сообщить телу, чтобы оно стало двигаться вокруг Земли по круговой орбите вблизи её поверхности только под действием силы гравитационного притяжения Земли, называют первой космической скоростью.

Для расчёта модуля v_1 первой космической скорости можно воспользоваться формулой (6). С учётом того что модуль ускорения свободного падения вблизи поверхности Земли приблизительно равен $g = G \cdot M_З/R^2_З \approx 9{,}8$ (м/с^2), получаем:

$$v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot M_З}{R_З}} = \sqrt{\left(\frac{G \cdot M_З}{R_З^2}\right) \cdot R_З} = \sqrt{g \cdot R_З} \approx 7{,}9 \ (\text{км/с}).$$

Вопросы

1. Сформулируйте закон всемирного тяготения.
2. Чему равна гравитационная постоянная?
3. От чего зависит сила гравитационного взаимодействия двух однородных шарообразных тел?
4. Действием каких сил обусловлено движение планет Солнечной системы вокруг Солнца?
5. Что представляют собой траектории планет Солнечной системы в системе отсчёта, связанной с Солнцем и удалёнными звёздами?
6. Что называют искусственным спутником Земли?
7. Чем определяется модуль скорости спутника вокруг Земли?
8. Что называют первой космической скоростью?

Упражнения

1. Определите массу Земли, используя значения гравитационной постоянной и модуля ускорения свободного падения вблизи поверхности Земли.
2. Оцените модуль силы гравитационного взаимодействия двух свинцовых шаров в опыте Кавендиша по измерению гравитационной постоянной. Считайте, что шары однородные, масса каждого из шаров равна 1 кг, а расстояние между их центрами равно 20 см.
3. Определите модуль силы, с которой Солнце притягивает Землю. Считайте, что расстояние от Солнца до Земли равно $1{,}5 \cdot 10^8$ км.
4. Определите ускорение свободного падения на поверхности Луны, считая её однородным шаром, радиус которого в $3{,}7$ раза меньше радиуса Земли, а масса в 81 раз меньше массы Земли. Оцените, какую минимальную по модулю скорость надо сообщить телу на поверхности Луны, чтобы оно стало спутником Луны, движущимся по круговой орбите вблизи её поверхности.
5. Определите период обращения и модуль скорости движения искусственного спутника Земли, радиус круговой орбиты которого равен десяти радиусам Земли.

§ 27 Принцип относительности Галилея. Инерциальные и неинерциальные системы отсчёта

До сих пор при изучении различных явлений и свойств тел, обусловленных их движением и взаимодействием, а также при решении задач мы применяли законы динамики, рассматривая движение тел только в инерциальных системах отсчёта. При этом, как правило, мы использовали лабораторную систему отсчёта, связанную с поверхностью Земли, считая, что такая система отсчёта является инерциальной.

В связи с этим необходимо выяснить следующее. Во-первых, изменится ли характер движения тел и способы применения законов динамики, если движение рассматривать в других ИСО? Во-вторых, является ли лабораторная система отсчёта строго инерциальной? И наконец, в-третьих, возможно ли при описании движения тел в неинерциальных системах отсчёта (НИСО) применение законов динамики? Если да, то как это сделать?

Начнём с первого вопроса. Прежде всего отметим:

любая система отсчёта, которая движется относительно данной ИСО поступательно равномерно и прямолинейно, сама является инерциальной.

Докажем это. Пусть свободное тело движется с постоянной скоростью $\vec{v}$ в данной ИСО. Тогда в другой системе отсчёта, которая поступательно движется относительно данной ИСО с постоянной скоростью $\vec{v}_{отн}$, в соответствии с законом сложения скоростей (*см.* § 6) это свободное тело будет также двигаться с постоянной скоростью, равной $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{отн}$. Следовательно, по определению эта другая система отсчёта также будет инерциальной.

Таким образом, если считать, что лабораторная (связанная с поверхностью Земли) система отсчёта — инерциальная, то инерциальной будет и любая другая система отсчёта, которая движется относительно лабораторной поступательно равномерно и прямолинейно.

Так будет ли различаться характер движения и взаимодействия тел при их рассмотрении в различных ИСО? Оказывается, нет. Первым на это указал Галилей, отметив, что *движение с постоянной скоростью относительно поверхности Земли не сказывается на течении любых механических явлений*.

Например, если в вагоне поезда, который движется равномерно по прямолинейной дороге, вы будете играть в бадминтон или бросать мяч в баскетбольную корзину, то все предметы относительно пола вагона будут двигаться точно так же, как если бы игра происходила на поверхности Земли. Следовательно, если окна вагона закрыты и плотно занавешены, никаких вибраций или тряски нет, то никакие эксперименты не позволят вам определить, покоится ли поезд на поверхности Земли или движется относительно неё с постоянной скоростью.

Обобщение подобных наблюдений позволяет сформулировать один из фундаментальных законов природы — **принцип относительности Галилея**.

Все механические процессы протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчёта при одинаковых начальных условиях.

Другими словами, *во всех ИСО законы динамики имеют один и тот же вид*. При этом все ИСО равноправны.

Надо понимать, что выполнение принципа относительности Галилея не означает тождественности движения тела в разных ИСО. *Одинаковы лишь законы динамики*. Законы же движения тел определяются не только законами динамики, но и координатами тел и их скоростями в начальный момент времени. Эти величины, как вы понимаете, относительно разных систем отсчёта могут быть различны. Например, если в вагоне движущегося

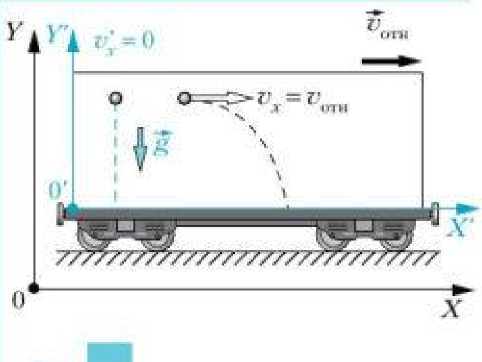


Рис. 139

равномерно и прямолинейно поезда уронить тяжёлый шарик, то относительно вагона он будет свободно падать вертикально вниз. Это объясняется тем, что проекция его начальной скорости на горизонтальную ось X' системы отсчёта, связанной с вагоном, равна нулю (рис. 139). Однако в системе отсчёта, связанной с Землёй, траектория этого же шарика будет представлять собой не прямую, а параболу. Это становится понятным, если вспомнить, что относительно Земли начальная скорость шарика равна скорости движения вагона. Поэтому шарик в этой системе отсчёта движется, как любое свободно падающее тело, которое бросили с горизонтальной начальной скоростью. Таким образом, в рассмотренном примере законы динамики применительно к шарику одинаковы в обеих системах отсчёта. Однако законы движения и траектории шарика различны в этих системах отсчёта.

В общем случае, если в данной ИСО закон движения материальной точки (зависимость её радиуса-вектора от времени) имеет вид $\vec{r}(t)$, то в другой ИСО, которая поступательно движется относительно данной ИСО с постоянной скоростью $\vec{v}_{\text{отн}}$, закон движения этой точки имеет вид:

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{v}_{\text{отн}} \cdot t. \qquad (1)$$

Соотношение (1) называют *преобразованием Галилея*.

Отметим, что если рассмотренный выше вагон поезда в некоторый момент времени начнёт разгоняться, тормозить или поворачивать, т. е. приобретёт ускорение относительно Земли, то находящийся в вагоне наблюдатель сразу заметит это по изменяющемуся характеру движения тел внутри вагона. Например, при резком торможении стоящие на столе предметы начнут двигаться относительно стола, т. е. приобретут ускорение относительно вагона, несмотря на то, что на них не действовали никакие тела в направлении появившегося ускорения.

Итак, с момента появления у вагона ускорения относительно Земли связанная с вагоном система отсчёта перестаёт быть инерциальной, т. е. становится неинерциальной.

! В неинерциальной системе отсчёта (НИСО) у тел появляются ускорения, не связанные с действием на них других тел. Следова-

тельно, в НИСО сумма $\vec{F}$ всех действующих на материальную точку сил *не равна* произведению её массы m на её ускорение $\vec{a}'$ в этой НИСО.

Другими словами, в НИСО равенство $\vec{F} = m \cdot \vec{a}'$, которое мы использовали в ИСО, не выполняется. *Это свойство НИСО позволяет экспериментально отличать её от ИСО.* Например, из географии известно, что в Северном полушарии нашей планеты у рек, текущих в направлении меридиана, правый берег выше левого. Это является следствием того, что правый берег сильнее подмывается текущей водой. В Южном полушарии, наоборот, у таких рек сильнее подмывается левый берег. Это явление в физике называют законом Бэра (в честь немецкого учёного, члена Петербургской академии наук Карла фон Бэра (1792–1876), который описал его в своей работе «О всеобщем законе образования речных русел»), оно объясняется вращением Земли вокруг своей оси и доказывает, что связанную с поверхностью Земли лабораторную систему отсчёта можно считать инерциальной лишь приближённо.

Мы установили, что равенство $\vec{F} = m \cdot \vec{a}'$ не выполняется в НИСО. Как же можно записать уравнения движения при решении задачи в НИСО? Оказывается, для этого необходимо преобразовать равенство $\vec{F} = m \cdot \vec{a}'$. В случае если НИСО движется относительно инерциальной системы отсчёта не поступательно прямолинейно, то это преобразование имеет весьма сложный вид. Поэтому мы ограничимся рассмотрением только случая *поступательного прямолинейного движения НИСО относительно ИСО с постоянным ускорением* $\vec{a}_{\text{отн}}$.

Пусть лифт поднимается в вертикальной шахте, разгоняясь с постоянным ускорением $\vec{a}_{\text{отн}}$. В лифте закреплён динамометр, на пружине которого висит груз массой m (рис. 140).

Рассмотрим движение груза в двух системах отсчёта: инерциальной, связанной с шахтой лифта, и неинерциальной, связанной с разгоняющимся в шахте лифтом.

В ИСО груз вместе с лифтом движется вверх с постоянным ускорением, равным ускорению лифта: $\vec{a} = \vec{a}_{\text{отн}}$ (*см.* рис. 140, *а*). При этом на груз действуют две силы: направленная вниз сила тяжести $m \cdot \vec{g}$ и направленная вверх сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$ пружины динамометра. Поэтому второй закон Ньютона для груза в данной ИСО имеет вид:

$$\vec{F}_{\text{упр}} + m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}_{\text{отн}}. \qquad (2)$$

В проекции на ось Y закон (2) принимает вид: $F_{\text{упр}} - m \cdot g = m \cdot a_{\text{отн}}$.

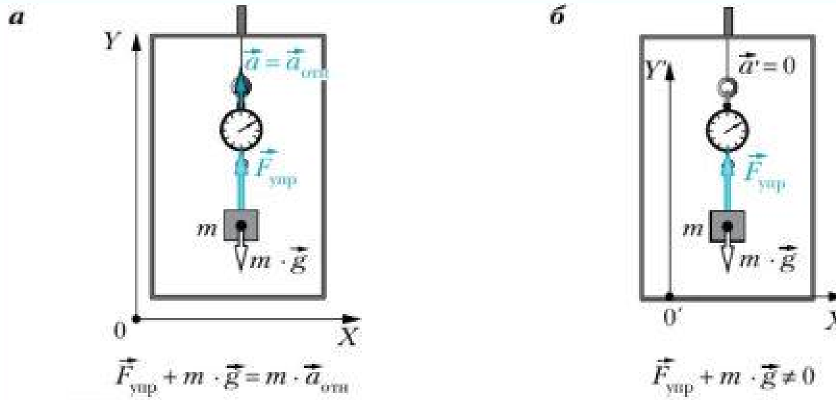


Рис. **140**

Следовательно, динамометр показывает значение, равное модулю силы упругости: $F_{\text{упр}} = m \cdot (g + a_{\text{отн}})$. Отметим, что модуль силы упругости больше модуля силы тяжести на величину $m \cdot a_{\text{отн}}$.

Теперь рассмотрим движение груза в НИСО, связанной с лифтом (*см.* рис. 140, *б*). Будем считать, что действующие на груз сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$, модуль которой измеряет динамометр, и сила тяжести $m \cdot \vec{g}$ не изменились при переходе в НИСО. Тогда сумма $\vec{F}$ этих двух сил отлична от нуля. Однако груз в системе отсчёта, связанной с лифтом, покоится. Поэтому его ускорение в НИСО равно нулю: $\vec{a}' = 0$. Следовательно, $\vec{F} \neq m \cdot \vec{a}'$. Таким образом, привычная для нас форма записи уравнения движения тела в виде $\vec{F} = m \cdot \vec{a}'$ в НИСО неприменима.

Однако ситуация не является безвыходной. Вернёмся к уравнению (2). Перенесём $m \cdot \vec{a}_{\text{отн}}$ из правой части уравнения в левую:

$$\vec{F}_{\text{упр}} + m \cdot \vec{g} - m \cdot \vec{a}_{\text{отн}} = 0. \qquad (3)$$

Обозначим $(-m \cdot \vec{a}_{\text{отн}})$ как $\vec{F}_{\text{ин}}$. Тогда с учётом того, что ускорение $\vec{a}'$ груза в НИСО равно нулю, можно переписать уравнение (3) в виде:

$$\vec{F}_{\text{упр}} + m \cdot \vec{g} + \vec{F}_{\text{ин}} = m \cdot \vec{a}'. \qquad (4)$$

! Векторную величину $\vec{F}_{\text{ин}}$, равную взятому со знаком «минус» произведению массы m груза на ускорение $\vec{a}_{\text{отн}}$ НИСО относительно ИСО ($\vec{F}_{\text{ин}} = -m \cdot \vec{a}_{\text{отн}}$), называют *силой инерции*. Полученное уравнение (4) называют уравнением движения тела (материальной точки) в НИСО.

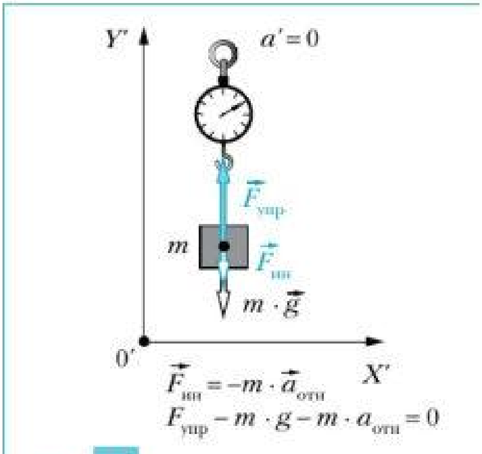


Рис. **141**

Силу инерции $\vec{F}_{ин}$ изображают так же, как и другие известные вам силы, в виде вектора (рис. 141). Этот вектор направлен в сторону, противоположную направлению ускорения $\vec{a}_{отн}$ НИСО относительно ИСО. В рассмотренном случае сила инерции $\vec{F}_{ин}$ как бы компенсирует в НИСО действие на груз суммы сил тяжести $m \cdot \vec{g}$ и упругости $\vec{F}_{упр}$. В результате этого груз в НИСО, движущейся с ускорением $\vec{a}_{отн}$ относительно ИСО, покоится, т. е. его ускорение равно нулю: $\vec{a}' = 0$.

Отметим, что *сила инерции не является силой в привычном для нас смысле, так как она не является силой действия одного тела на другое*. Действительно, для этой силы нельзя указать тело, со стороны которого она действует. Однако во всём остальном эта сила не отличается от «привычных» сил, с которыми вы имели дело, рассматривая движения тел в ИСО. На примере уравнения (4) видно, что введение силы инерции позволяет записывать уравнение движения тела в НИСО в привычном виде. Кроме того, действием сил инерции в НИСО наравне с действием других сил можно объяснить с привычных позиций различные явления.

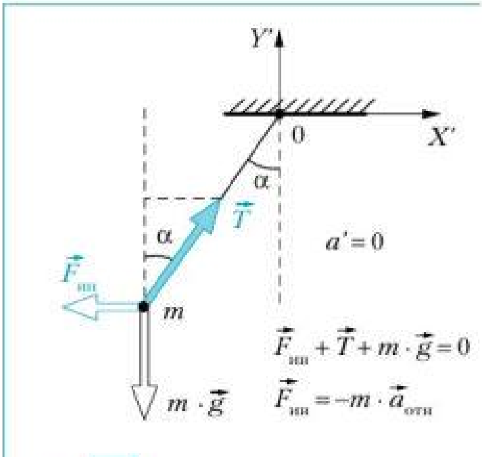


Рис. **142**

Поясним сказанное на примере. В § 21 вы рассматривали шарик, который был подвешен на нити к потолку вагона. При разгоне вагона относительно Земли наблюдалось отклонение нити с шариком от вертикали. Рассмотрим это явление, используя понятие силы инерции, возникающей в связанной с вагоном НИСО (рис. 142). В НИСО на шарик действует сила инерции $\vec{F}_{ин}$, равная произведению массы m шарика на ускорение вагона относительно поверхности Земли $\vec{a}_{отн}$, взятому со знаком «минус»: $\vec{F}_{ин} = -m \cdot \vec{a}_{отн}$. Эта сила и приводит к отклонению шарика на нити от вертикали. Сумма действующих на шарик сил тяжести $m \cdot \vec{g}$, натяжения нити $\vec{T}$ и $\vec{F}_{\text{ин}}$ равна нулю. Поэтому шарик в связанной с вагоном НИСО находится в состоянии покоя, а его ускорение относительно вагона равно нулю: $\vec{a}' = 0$. Уравнение движения шарика в НИСО с учётом $\vec{F}_{\text{ин}}$ имеет привычный для вас вид:

$$m \cdot \vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{ин}} = 0 = m \cdot \vec{a}'.$$

В заключение отметим два важных момента.

1. Если в какой-либо системе отсчёта действует сила инерции, то эта система отсчёта является неинерциальной. Действительно, так как сила инерции не обусловлена действием какого-либо конкретного тела, то даже свободное тело (удалённое от всех других тел) будет под её действием двигаться в такой системе отсчёта с ускорением. Следовательно, такая система отсчёта не будет инерциальной.

2. Сила инерции, действующая на любое тело, пропорциональна его массе. Поэтому действие этой силы сходно с действием сил гравитации. Например, космонавт, находящийся внутри закрытого космического корабля, не может никакими экспериментами определить, покоится ли его корабль на поверхности Земли, где модуль ускорения свободного падения равен g, или движется с ускорением $\vec{g}$ в космосе вдали от массивных объектов, т. е. при практическом отсутствии сил гравитации со стороны звёзд и планет. Поэтому силы инерции могут быть использованы для создания «искусственной» гравитации, например на космических станциях.

Вопросы

1. Изменяется ли характер движения тела, если его рассматривать в разных ИСО?
2. Сформулируйте принцип относительности Галилея.
3. Означает ли принцип относительности Галилея, что движения тела в разных ИСО тождественны? Объясните почему.
4. При каких условиях лабораторную систему отсчёта можно считать инерциальной?

Для углублённого уровня

5. С какой целью вводят силы инерции в НИСО?

Упражнения

1. В поезде, движущемся равномерно и прямолинейно в системе отсчёта, связанной с Землёй, со скоростью, равной по модулю

$v_1 = 72$ км/ч, пассажир роняет вертикально вниз на пол вагона массивный шарик. С какой по модулю начальной скоростью будет двигаться шарик: а) в системе отсчёта, связанной с вагоном данного поезда; б) в системе отсчёта, связанной с Землёй; в) в системе отсчёта, связанной с проходящим в противоположном направлении встречным поездом, скорость которого относительно Земли постоянна и равна по модулю 54 км/ч? Зависит ли от выбора перечисленных систем отсчёта: 1) время падения шарика на пол вагона; 2) скорость, с которой шарик упадёт на пол вагона; 3) координата точки падения шарика на пол вагона?

Для углублённого уровня

2 На полу лифта лежит брусок массой M. Лифт опускается, разгоняясь с постоянным ускорением, модуль которого равен $g/2$. Определите модуль и направление действующей на брусок силы инерции в НИСО, связанной с лифтом. Используя полученное значение силы инерции, определите действующую на брусок силу реакции пола лифта и вес бруска.

3 Вагон поезда, двигавшийся по прямолинейному горизонтальному участку пути, начинает тормозить с постоянным по модулю ускорением $g/5$. В результате лежавший на полу вагона шарик прижимается к передней стенке вагона. Определите модуль и направление действующей на шарик силы инерции в НИСО, связанной с вагоном. Используя полученное значение силы инерции, определите, с какой силой шарик давит на стенку.

ДИНАМИКА

Первый закон Ньютона

Инерциальные системы отсчёта существуют.

Систему отсчёта называют инерциальной (ИСО), если в ней свободное (удалённое от всех других объектов) точечное тело покоится или движется равномерно прямолинейно.

Силой в механике называют векторную физическую величину, характеризующую действие одного тела на другое, в результате которого это другое тело получает ускорение в инерциальной системе отсчёта.

Второй закон Ньютона

В ИСО ускорение $\vec{a}$ материальной точки равно отношению суммы $\vec{F}$ всех действующих на неё сил к её массе: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$.

Третий закон Ньютона

Два тела взаимодействуют друг с другом с силами:
1) равными по модулю;
2) противоположными по направлению;
3) лежащими на одной прямой.

Силы взаимодействия двух тел всегда являются силами одной природы.

Силы взаимодействия приложены к разным телам и поэтому не могут уравновешивать друг друга.

Закон всемирного тяготения

Все тела во Вселенной притягиваются друг к другу. Силы этого притяжения называют *силами всемирного тяготения* или *гравитационными силами*.

Две материальные точки массами m_1 и m_2 притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния R между ними: $|\vec{F}| = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$, где гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н · м²/кг².

Принцип относительности Галилея

Все механические процессы протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчёта при одинаковых начальных условиях.

Другими словами, *во всех ИСО законы динамики имеют один и тот же вид.*

Название силы	Обозначение	На какое тело действует	Какое тело действует	Чему равна по модулю	Куда направлена	Проявление действия силы
Сила тяжести	$m \cdot \vec{g}$	На тело у поверхности Земли	Земля	$m \cdot g$	Вертикально вниз	Притягивает тело к Земле
Сила упругости	$\vec{F}_{упр}$	На тело, вызвавшее деформацию	Деформированное тело	Пропорциональна деформации: $k \cdot \Delta l$	В сторону, противоположную деформации	Стремится восстановить форму деформируемого тела
Сила реакции горизонтальной опоры	$\vec{N}$	На тело, лежащее на горизонтальной опоре	Горизонтальная опора	Силе тяжести тела	Вертикально вверх	Уравновешивает силу тяжести
Вес тела, лежащего на опоре	$\vec{P}$	На опору	Тело, лежащее на опоре	Силе реакции опоры	Вертикально вниз	Деформирует опору
Вес тела, на подвесе	$\vec{P}$	На подвес	Висящее тело	Силе упругости подвеса	Вертикально вниз	Растягивает подвес
Сила сухого трения скольжения	$\vec{F}_{тр}$	На тело, скользящее по поверхности	Поверхность, по которой скользит тело	$\mu \cdot N$	В сторону, противоположную движению тела	Препятствует относительному движению
Сила Архимеда	$\vec{F}_{A}$	На тело, погружённое в жидкость (газ)	Окружающая жидкость (газ)	$\rho \cdot g \cdot V$	Вертикально вверх	Выталкивает тело

Глава **4**

Законы сохранения в механике

В предыдущей главе мы установили, что если известны все действующие на тела силы, то можно определить ускорения этих тел в ИСО. Если при этом известны начальные координаты и скорости тел, то можно получить законы движения этих тел. В результате будет полностью описано движение тел. А как быть, если какие-то силы неизвестны? Можно ли при этом определить, как будут двигаться тела? Оказывается, при определённых условиях это можно сделать. Для этого используют законы сохранения в механике: закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии.

§ 28 Импульс. Изменение импульса материальной точки

Пусть имеется материальная точка массой m, которая движется в выбранной системе отсчёта со скоростью $\vec{v}$.

Импульсом $\vec{p}$ материальной точки называют произведение её массы m на её скорость $\vec{v}$:
$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}.$$

Из определения следует, что импульс материальной точки – вектор. Его направление совпадает с направлением вектора скорости. Модуль этого вектора тем больше, чем больше масса материальной точки и модуль её скорости.

Импульс в СИ измеряют в *килограмм-метрах в секунду* (кг · м/с).

Изменение импульса материальной точки связано с изменением её скорости $\vec{v}$, т. е. с её ускорением $\vec{a}$. По второму закону Ньютона ускорение $\vec{a}$ материальной точки массой m в ИСО определяется суммой $\vec{F}$ всех действующих на неё сил: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. По определению ускорения

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_к - \vec{v}_н}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t},$$

где Δt – достаточно малый промежуток времени. В течение этого промежутка времени сумму $\vec{F}$ всех действующих на материальную точку сил можно считать постоянной. Поэтому второй закон Ньютона для этой материальной точки можно записать в следующем виде:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{\vec{v}_к - \vec{v}_н}{\Delta t} = \frac{m \cdot \vec{v}_к - m \cdot \vec{v}_н}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_к - \vec{p}_н}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}.$$

! В инерциальной системе отсчёта изменение $\Delta \vec{p}$ импульса материальной точки за достаточно малый промежуток времени Δt равно произведению суммы $\vec{F}$ всех действующих на неё сил на длительность этого промежутка времени Δt:

$$\Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t. \qquad (1)$$

Это утверждение называют **законом изменения импульса материальной точки в ИСО**.

Произведение постоянной силы на время её действия называют импульсом силы.

Единица импульса силы в СИ – *ньютон-секунда* (Н · с).

С учётом введённого понятия импульса силы закон изменения импульса материальной точки можно сформулировать так:

изменение импульса материальной точки в ИСО за достаточно малый промежуток времени Δt равно импульсу суммы всех действующих на эту точку сил за тот же промежуток времени.

Отметим, что при выводе соотношения (1) мы предполагали, что сумма $\vec{F}$ всех действующих на материальную точку сил в течение промежутка времени Δt не изменялась.

Если сумма $\vec{F}$ всех действующих на материальную точку сил постоянна, то изменение импульса $\Delta \vec{p}$ этой точки за промежуток времени от 0 до t равно $\vec{F} \cdot t$. Тогда, зная массу m и начальную скорость $\vec{v}_0$ материальной точки, можно определить её конечную скорость. Действительно, так как

$$\Delta \vec{p} = m \cdot \vec{v}_к - m \cdot \vec{v}_0 = \vec{F} \cdot t,$$

получаем:

$$\vec{v}_к = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F} \cdot t}{m}.$$

Изменение импульса материальной точки можно определить и в случае, если сумма $\vec{F}$ всех действующих на неё сил изменяется с течением времени. Для расчёта изменения импульса за рассматриваемый промежуток времени этот промежуток разбивают на достаточно малые промежутки так, чтобы на каждом из них сумму $\vec{F}$ можно было бы считать постоянной. Изменения импульса материальной точки за каждый такой промежуток времени рассчитывают по формуле (1). После этого все рассчитанные изменения импульса материальной точки векторно складывают.

Рассмотрим случай, когда вектор суммы $\vec{F}$ всех действующих на материальную точку сил не изменяет своего направления с течением времени и известен график зависимости модуля суммы сил от времени (рис. 143). В этом случае модуль изменения импульса материальной точки будет численно равен площади под этим графиком. Действительно, разобьём рассматриваемый промежуток времени на достаточно малые промежутки так, чтобы на каждом из них (от t до $t + \Delta t$) модуль F можно было считать постоянным. Тогда модуль изменения импульса точки за время Δt можно считать равным площади прямоугольника со сторонами $F(t)$ и Δt. Модуль суммарного изменения импульса будет численно равен сумме площадей всех прямоугольников под графиком функции. Эта сумма площадей при стремлении каждого Δt к нулю будет стремиться к площади под графиком функции.

Рассмотрим следующий пример. Пусть автомобиль массой M разгоняется из состояния покоя под действием силы, модуль которой возрастает с течением времени по закону $F = k \cdot t$, где k – постоянный коэффициент. Эта зависимость представлена на рис. 144. Определим скорость автомобиля к моменту времени τ. Для этого вычислим площадь под графиком функции $F(t)$ на промежутке времени от 0 до τ.

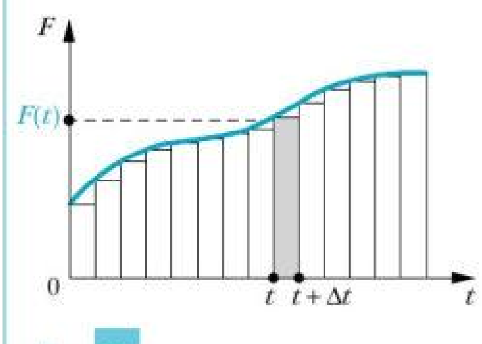


Рис. 143

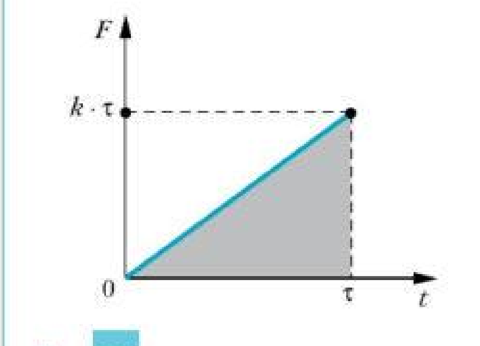


Рис. 144

Искомая площадь равна $\frac{k \cdot \tau^2}{2}$. С учётом того что изначально автомобиль покоился, модуль изменения его импульса за время τ равен:

$$\Delta p = M \cdot v - 0 = \frac{k \cdot \tau^2}{2}.$$

Следовательно, модуль искомой скорости автомобиля $v = \frac{k \cdot \tau^2}{2M}$.

Вопросы

1. Что называют импульсом материальной точки? От чего зависит модуль импульса?
2. В каких единицах измеряют импульс материальной точки в СИ?
3. Что называют импульсом силы? В каких единицах измеряют импульс силы в СИ?
4. Что является причиной изменения импульса материальной точки в ИСО?

Упражнения

1. Материальная точка массой 1 кг движется равномерно в положительном направлении оси X ИСО со скоростью, модуль которой равен 3 м/с. В некоторый момент времени на неё начинает действовать сила, модуль которой равен 4 Н. Время действия силы равно 1 с. Определите начальный и конечный импульсы этой точки, а также её конечную скорость в двух случаях: а) сила действует в положительном направлении оси X; б) сила действует в положительном направлении оси Y. Изобразите полученные результаты на плоскости XY.
2. Мальчик толкает санки, на которых сидит его друг, по обледенелой горизонтальной дороге со скоростью, модуль которой равен $v = 20$ км/ч. В некоторый момент мальчик перестаёт толкать санки, и они останавливаются после этого через $\tau = 2$ с. Оцените коэффициент трения санок о дорогу. Решите задачу двумя способами: используя понятие импульса силы трения и законы Ньютона.

Для углублённого уровня

3. Определите импульс однородного диска, вращающегося вокруг своей неподвижной оси, перпендикулярной плоскости диска.

§ 29 Система тел. Закон сохранения импульса

Пусть два тела взаимодействуют друг с другом. Например, это могут быть космическая станция и стыкующийся с ней корабль. Силы, с которыми взаимодействуют станция и корабль, нам неизвестны. Можно ли при этом определить скорости тел после их взаимодействия, если известны массы этих тел и их начальные скорости? Оказывается, можно.

Для этого тела, взаимодействующие между собой с неизвестными силами, рассматривают как нечто целое. Другими словами, их объединяют в *систему тел* (рис. 145). В этом случае все силы, действующие на тела системы, можно разделить на два вида: *внутренние* и *внешние*.

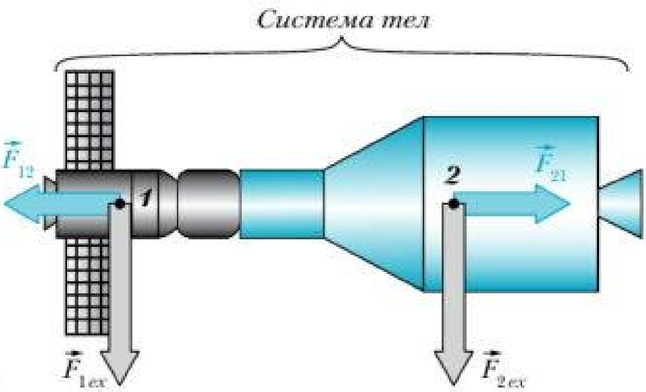


Рис. 145

Силы взаимодействия между телами, принадлежащими системе, называют внутренними силами.

Силы, действующие на тела системы со стороны тел, не входящих в эту систему, называют внешними силами.

Внешние силы обычно обозначают индексом «*ex*» (от англ. *external* – «внешний»).

Пусть наша система состоит из двух взаимодействующих между собой тел – космической станции и стыкующегося с ней корабля, на которые действуют и внешние силы (*см.* рис. 145). Обозначим силу, действующую на тело *1* со стороны тела *2*, как $\vec{F}_{12}$, а силу, действующую на тело *2* со стороны тела *1*, как $\vec{F}_{21}$. Эти силы – внутренние. Сумму всех внешних сил, действующих на первое тело, обозначим $\vec{F}_{1ex}$, а сумму всех внешних сил, действующих на второе тело, – $\vec{F}_{2ex}$. На рис. 145 внутренние силы показаны синими стрелками, а внешние силы – серыми стрелками.

На тело *1* действуют силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{1ex}$, а на тело *2* – силы $\vec{F}_{21}$ и $\vec{F}_{2ex}$. Следовательно, изменения импульсов тел *1* и *2* за достаточно малый промежуток времени Δt равны:

$$\Delta\vec{p}_1 = \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{1ex}\right)\cdot\Delta t;\ \ \Delta\vec{p}_2 = \left(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{2ex}\right)\cdot\Delta t. \qquad (1)$$

Отметим, что

импульсом $\vec{p}$ системы тел называют сумму импульсов всех тел, входящих в эту систему.

Поэтому импульс рассматриваемой системы тел равен:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \qquad (2)$$

С учётом соотношений (1) и (2) изменение импульса $\Delta\vec{p}$ системы, состоящей из тел *1* и *2*, равно:

$$\Delta\vec{p} = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{1ex} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{2ex}\right)\cdot\Delta t. \qquad (3)$$

Силы взаимодействия $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ по третьему закону Ньютона равны по модулю и направлены в противоположные стороны. Следовательно, их сумма равна нулю. Поэтому

$$\Delta\vec{p} = \left(\vec{F}_{1ex} + \vec{F}_{2ex}\right)\cdot\Delta t. \qquad (4)$$

Таким образом, изменение импульса системы тел в ИСО равно произведению постоянной суммы всех внешних сил на время их действия.

Это утверждение называют **законом изменения импульса системы тел в ИСО**.

Из закона изменения импульса следует, что если $\vec{F}_{1ex} + \vec{F}_{2ex} = 0$, то $\Delta\vec{p} = 0$.

В результате получаем **закон сохранения импульса**.

Если сумма всех внешних сил, действующих на тела системы, равна нулю, то суммарный импульс системы тел в инерциальной системе отсчёта не изменяется с течением времени (сохраняется).

Из закона сохранения импульса следует, что если сумма всех внешних сил равна нулю, то начальный импульс $\vec{p}_0$ системы тел равен конечному импульсу $\vec{p}_к$ этой системы:

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_к. \qquad (5)$$

В таком виде обычно применяют закон сохранения импульса при решении задач.

В некоторых случаях импульс системы тел не сохраняется. Однако при этом может сохраняться его проекция на одну из координатных осей. Для того чтобы определить, когда это происходит, рассмотрим закон изменения импульса (4) в проекции на ось X инерциальной системы отсчёта:

$$\Delta p_x = (F_{1\,ex\,x} + F_{2\,ex\,x}) \cdot \Delta t. \qquad (6)$$

Из формулы (6) следует, что если $F_{1\,ex\,x} + F_{2\,ex\,x} = 0$, то $\Delta p_x = 0$.

В результате мы приходим к **закону сохранения проекции импульса на координатную ось ИСО**.

Если проекция на координатную ось ИСО суммы всех внешних сил, действующих на тела системы, равна нулю, то проекция импульса системы тел на эту ось не изменяется с течением времени (сохраняется).

Отметим ещё раз, что изменение проекции импульса на координатную ось ИСО определяется только проекцией суммы всех внешних сил на ту же ось. Поэтому изменение проекции импульса, например, на ось X никак не связано с изменением проекции импульса на оси Y и Z.

Используя закон сохранения импульса, достаточно просто можно объяснить принцип *реактивного движения*.

Реактивным движением называют движение тела, возникающее за счёт отталкивания от этого тела его вещества.

Примером реактивного движения является движение ракеты. В космическом пространстве ракета отбрасывает от себя часть своего вещества в виде сгорающего топлива. Внешние силы отсутствуют. Поэтому суммарный импульс системы «ракета – отброшенное сгоревшее топливо» не изменяется. В результате увеличение импульса ракеты по модулю равно модулю импульса отброшенного топлива. Чем бóльшую массу

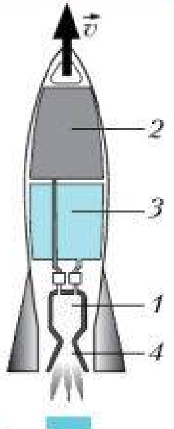


Рис. 146

и с большей скоростью отбрасывает от себя ракета, тем больше увеличение импульса ракеты.

На рис. 146 показано схематическое устройство ракеты. В камеру сгорания *1* поступают топливо *2* и окислитель *3*. Продукты сгорания с большой скоростью выбрасываются из сопла *4*.

В заключение рассмотрим решение задачи с использованием закона сохранения проекции импульса.

Задача

Ядро массой $m = 10$ кг летит вниз под углом $\alpha = 30°$ к горизонтали, попадает в стоящую на гладких горизонтальных рельсах платформу с песком и застревает в песке (рис. 147). После этого платформа скользит поступательно. Модуль скорости ядра в момент падения $v = 400$ м/с. Масса платформы с песком $M = 9{,}99$ т. Определите модуль скорости скольжения платформы с застрявшим в песке ядром.

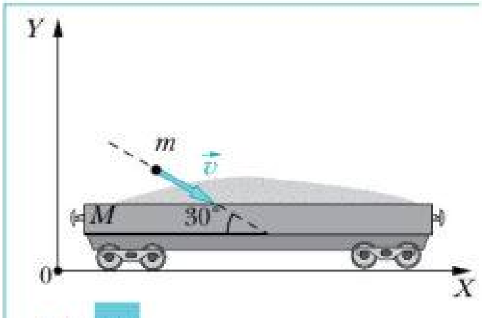


Рис. 147

Решение.

Шаг 0. Будем считать платформу с песком и ядро материальными точками.

Шаг 1. Инерциальную систему отсчёта свяжем с поверхностью Земли.

Шаг 2. Будем рассматривать платформу с песком и ядро как систему тел. Поскольку поверхность рельсов гладкая, то в течение интересующего нас промежутка времени торможения ядра в песке на тела системы вдоль горизонтальной оси X действуют только силы их взаимодействия. Поэтому проекция суммы всех внешних сил на эту ось равна нулю.

Шаг 3. Из шага 2 по закону сохранения проекции импульса следует, что проекция на ось X начального импульса $\vec{p}_0$ системы (в момент времени перед касанием ядром песка) равна проекции на ту же ось конечного импульса $\vec{p}_к$ системы (в момент времени сразу после застревания ядра в песке):

$$p_{0x} = p_{кx}. \tag{7}$$

Шаг 4. В начальный момент времени, когда ядро движется со скоростью $\vec{v}$, платформа покоится. Поэтому проекция начального импульса системы тел на ось X равна:

$$p_{0x} = m \cdot v \cdot \cos\alpha + M \cdot 0 = m \cdot v \cdot \cos\alpha. \tag{8}$$

3. Что является причиной изменения импульса системы тел в ИСО?
4. Сформулируйте закон сохранения: а) импульса; б) проекции импульса.
5. Какое движение тела называют реактивным?
6. Что называют абсолютно неупругим ударом?

Упражнения

1. Акробат стоит на помосте и держит над собой на вытянутых вверх руках своего партнёра. Рассмотрите систему тел «акробат — партнёр». Укажите, какие из сил, действующих на тела системы, являются внешними, а какие — внутренними.
2. Два пластилиновых шара движутся навстречу друг другу со скоростями, модули которых равны 10 м/с и 20 м/с. Массы шаров равны $0{,}2$ кг и $0{,}4$ кг. Определите модуль скорости шаров после их абсолютно неупругого соударения.
3. Плот массой $m = 30$ кг движется по инерции вдоль берега озера со скоростью, модуль которой $v = 0{,}5$ м/с. Человек массой $M = 80$ кг прыгает с плота на берег в направлении, перпендикулярном скорости плота. Модуль горизонтальной составляющей скорости человека в направлении берега сразу после отрыва от плота $V = 0{,}5$ м/с. Определите импульс и скорость плота сразу после прыжка человека. Трением плота о воду пренебречь.
4. Лодка массой M с находящимся в ней человеком массой m неподвижно стоит на поверхности озера. Человек встаёт и идёт по лодке. Определите скорость, с которой будет двигаться человек относительно воды, если относительно лодки он движется со скоростью, модуль которой равен v. Трением лодки о воду пренебречь.

§ 30 Центр масс. Теорема о движении центра масс

Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек, массы которых равны m_1, m_2, ..., m_N. Пусть положения этих точек в выбранной системе отсчёта определяются их радиусами-векторами $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ..., $\vec{r}_N$ (рис. 148). Для такой системы можно ввести понятие *центра масс*.

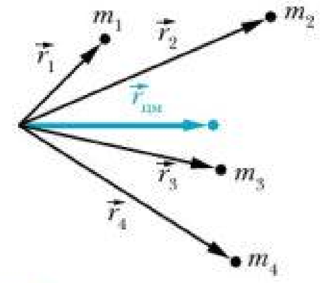


Рис. 148

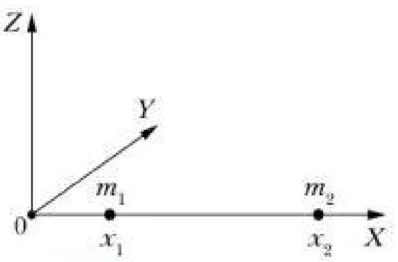


Рис. 149

Центром масс системы, состоящей из N материальных точек, называют точку, радиус-вектор которой равен отношению суммы произведений массы каждой точки на её радиус-вектор к сумме масс этих точек:

$$\vec{r}_{цм} = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + \ldots + m_N \cdot \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}. \qquad (1)$$

Из определения следует, что координаты центра масс можно определить по формулам:

$$x_{цм} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \ldots + m_N \cdot x_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}; \qquad (2)$$

$$y_{цм} = \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + \ldots + m_N \cdot y_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}; \qquad (3)$$

$$z_{цм} = \frac{m_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot z_2 + \ldots + m_N \cdot z_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}. \qquad (4)$$

В качестве примера использования формул (2)—(4) определим положение центра масс системы из двух материальных точек массами m_1 и m_2, расположенных на оси X и имеющих координаты x_1 и x_2 соответственно (рис. 149).

Из формулы (2) следует:

$$x_{цм} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}. \qquad (5)$$

Поскольку координаты обеих точек по осям Y и Z равны нулю, то из формул (3) и (4) следует, что координаты центра масс системы по осям Y и Z равны нулю: $y_{цм} = 0$, $z_{цм} = 0$.

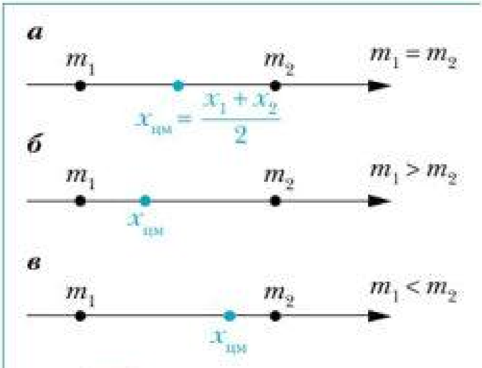


Рис. 150

Следовательно, центр масс рассматриваемой системы лежит на оси X между точками с координатами x_1 и x_2. Если $m_1 = m_2$, то уравнение (5) принимает вид:

$$x_{цм} = \frac{x_1 + x_2}{2}. \qquad (6)$$

Таким образом, при равенстве масс двух материальных точек центр масс системы будет расположен в середине отрезка, соединяющего эти точки (рис. 150, *а*). Если же $m_1 > m_2$, то из формулы (5) следует, что центр масс будет расположен ближе к точке с координатой x_1 (рис. 150, *б*). Если $m_1 < m_2$, то центр масс будет расположен ближе к точке с координатой x_2 (рис. 150, *в*).

Центр масс системы материальных точек обладает замечательным свойством.

Ускорение центра масс системы, состоящей из N материальных точек, равно в ИСО отношению суммы всех внешних сил, действующих на материальные точки этой системы, к сумме масс всех материальных точек системы:

$$\vec{a}_{цм} = \frac{\vec{F}_{1ex} + \vec{F}_{2ex} + \ldots + \vec{F}_{Nex}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}. \qquad (7)$$

Это утверждение называют *теоремой о движении центра масс*. Мы будем пользоваться этой теоремой в дальнейшем, например при рассмотрении условий равновесия твёрдого тела.

Докажем эту теорему. Рассмотрим достаточно малый промежуток времени Δt такой, что в течение этого промежутка движение каждой материальной точки системы можно считать равномерным прямолинейным. Тогда перемещение, например, первой точки за этот промежуток времени равно:

$$\Delta\vec{r}_1 = \vec{v}_1 \cdot \Delta t. \qquad (8)$$

Аналогичным образом можно записать перемещения всех других точек и центра масс системы. Из выражения (1) следует, что перемещение центра масс системы за рассматриваемый промежуток времени равно:

$$\Delta\vec{r}_{\text{цм}} = \frac{m_1 \cdot \Delta\vec{r}_1 + m_2 \cdot \Delta\vec{r}_2 + \ldots + m_N \cdot \Delta\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}. \quad (9)$$

Подставляя в уравнение (9) выражения, аналогичные (8), записанные для перемещений за время Δt, и сокращая левую и правую части на Δt, получаем:

$$\vec{v}_{\text{цм}} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + m_N \cdot \vec{v}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}. \quad (10)$$

Теперь рассмотрим такой достаточно малый промежуток времени Δt, в течение которого действующие на каждую из материальных точек системы силы можно считать постоянными. Тогда изменение импульса, например, первой точки за этот промежуток времени будет равно:

$$m_1 \cdot \Delta\vec{v}_1 = \Delta\vec{p}_1 = \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots + \vec{F}_{1N} + \vec{F}_{1ex}\right) \cdot \Delta t. \quad (11)$$

Аналогичным образом можно записать изменения импульсов и всех других точек. Из уравнения (10) следует, что изменение скорости центра масс системы за рассматриваемый промежуток времени равно:

$$\Delta\vec{v}_{\text{цм}} = \frac{m_1 \cdot \Delta\vec{v}_1 + m_2 \cdot \Delta\vec{v}_2 + \ldots + m_N \cdot \Delta\vec{v}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}. \quad (12)$$

Подставим в уравнение (12) выражения, аналогичные (11), записанные для изменения импульса за время Δt. Тогда, поделив левую и правую части полученного уравнения на Δt, в соответствии с определением ускорения получим:

$$\vec{a}_{\text{цм}} = \frac{\Delta\vec{v}_{\text{цм}}}{\Delta t} = \frac{\vec{F}_{1ex} + \vec{F}_{2ex} + \ldots + \vec{F}_{Nex}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}. \quad (13)$$

В числителе правой части уравнения (13) все внутренние силы попарно сократились в соответствии с третьим законом Ньютона. Теорема доказана. Обратим внимание, что выражение (10) можно переписать в виде:

$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_N) \cdot \vec{v}_{\text{цм}} = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + m_N \cdot \vec{v}_N. \quad (14)$$

Следовательно, *суммарный импульс системы материальных точек равен произведению суммы масс этих точек на скорость центра масс этой системы.*

Обозначим сумму масс всех материальных точек системы через M, а сумму всех действующих на них внешних сил через $\vec{F}_{ex}$. Тогда выражение (7) принимает вид:

$$\vec{a}_{цм} = \frac{\vec{F}_{ex}}{M}. \qquad (15)$$

Полученное соотношение аналогично формуле для расчёта ускорения материальной точки по второму закону Ньютона.

Любое тело, имеющее размеры, можно рассматривать как систему, состоящую из большого числа материальных точек. Поэтому к такому телу можно применять теорему о движении его центра масс:

$\vec{a}_{цм} = \frac{\vec{F}_{ex}}{M}$, где $\vec{F}_{ex}$ — сумма всех сил, действующих на это тело со стороны других тел, M — масса этого тела.

Следовательно, если известны $\vec{F}_{ex}$ и M, то можно определить ускорение центра масс тела в ИСО. Таким образом, когда при решении задач динамики реального тела его заменяют материальной точкой, то рассчитывают ускорение центра масс этого тела, а не какой-либо иной его точки.

Особо отметим, что *действие внутренних сил, т. е. сил взаимодействия между частями тела, никак не влияет на ускорение центра масс тела в ИСО.*

Применение теоремы о движении центра масс позволяет существенно упростить решение многих задач, используя законы сохранения или изменения импульса. Приведём пример решения подобной задачи.

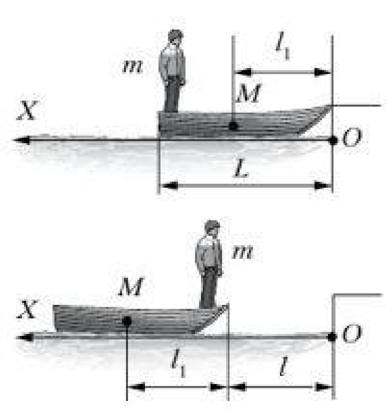


Рис. 151

Задача

Человек массой m стоит на корме лодки массой M и длиной L, которая причалила к пристани (точка O). Расстояние от носа лодки до её центра масс по горизонтали равно l_1. Человек переходит на нос лодки. Определите расстояние l, на которое сместится лодка (рис. 151).

Решение.

Шаг 0. Будем пренебрегать силами сопротивления движению лодки.

Шаг 1. Инерциальную систему отсчёта свяжем с пристанью, направив ось X горизонтально.

Шаг 2. Будем считать человека и лодку системой материальных точек.

Шаг 3. Поскольку сил сопротивления движению нет, то проекция суммы всех внешних сил на ось X равна нулю. Следовательно, ускорение центра масс системы равно нулю. Поскольку изначально лодка и человек покоились, то положение центра масс системы не изменяется:

$$x_{\text{цм }0} = x_{\text{цм к}}. \tag{16}$$

Шаг 4. Так как начальная координата человека по оси X равна L, а начальная координата центра масс лодки – l_1, в начальный момент времени в соответствии с формулой (5) координата центра масс системы равна:

$$x_{\text{цм }0} = \frac{m \cdot L + M \cdot l_1}{m + M}. \tag{17}$$

Конечная координата человека по оси X равна l, а центра масс лодки – $(l + l_1)$. Поэтому в конечный момент времени в соответствии с формулой (5) координата центра масс системы равна:

$$x_{\text{цм к}} = \frac{m \cdot l + M \cdot (l + l_1)}{m + M}. \tag{18}$$

Шаг 5. Подставив уравнения (17) и (18) в (16), получаем:

$$l = \frac{m \cdot L}{m + M}. \tag{19}$$

Шаг 6. Проведём анализ полученного результата.

Выражение имеет размерность длины, поэтому с точки зрения размерности полученный результат верен. Из формулы (19) следует, что чем больше длина лодки и меньше её масса, тем на большее расстояние сместится лодка. Напротив, чем меньше масса человека, тем меньшим будет смещение лодки.

Вопросы

1. Что называют центром масс системы, состоящей из N материальных точек?
2. Сформулируйте теорему о движении центра масс.
3. Можно ли тело, имеющее размеры, рассматривать как систему материальных точек?
4. Чему равно ускорение центра масс тела, если известны его масса и сумма всех действующих на него сил?

Упражнения

1. Определите положение центра масс системы, состоящей из двух материальных точек массами m и $3m$, если расстояние между ними равно L.
2. Определите ускорение центра масс системы из упражнения 1, если на первую точку действует сила $\vec{F}_1$, а на вторую — сила $\vec{F}_2$. Известно, что модули сил равны, а направления сил противоположны.
3. Докажите, что центр масс симметричного тела, имеющего более одной оси симметрии, находится в точке пересечения этих осей.

§ 31 Работа силы. Мощность

Во многих случаях необходимо вычислять, как изменяется модуль скорости материальной точки, которая под действием известных сил совершает определённое перемещение. Для решения этой задачи в механике вводят физическую величину, которую называют работой силы.

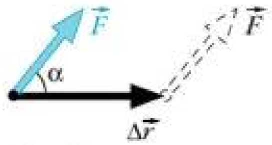


Рис. 152

Пусть материальная точка совершает перемещение $\Delta\vec{r}$ при действии на неё постоянной силы $\vec{F}$, направление которой составляет угол α с направлением перемещения $\Delta\vec{r}$ (рис. 152).

Работой постоянной силы $\vec{F}$, действующей на материальную точку, при перемещении этой точки на $\Delta\vec{r}$ называют произведение модулей силы и перемещения, умноженное на косинус угла между ними:

$$\boldsymbol{A = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha}. \qquad (1)$$

В СИ единица работы — *джоуль* (Дж).

Один джоуль — это работа постоянной действующей на материальную точку силы, модуль которой равен одному ньютону, при перемещении этой точки на 1 метр в направлении действия силы.

Чтобы выяснить физический смысл работы, проведём анализ выражения (1) на примере саней, показанных на рис. 153. Пусть на сани действует постоянная сила $\vec{F}$ натяжения верёвки. При этом сани перемещаются поступательно вдоль гладкой горизонтальной поверхности на $\Delta\vec{r}$. Будем считать сани материальной точкой.

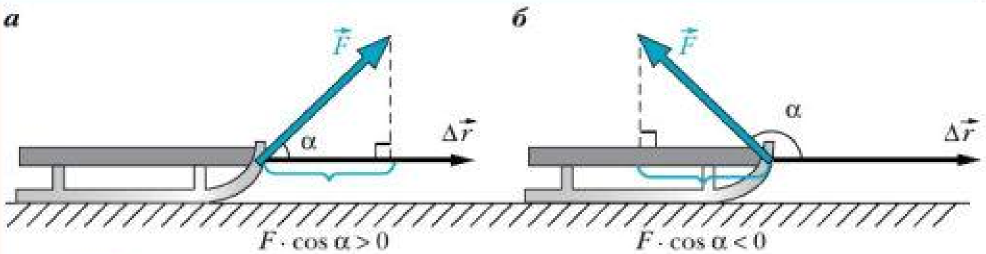


Рис. 153

Если угол α между направлениями силы $\vec{F}$ и перемещения $\Delta\vec{r}$ саней меньше 90°, то $\cos\alpha > 0$ (*см.* рис. 153, *а*). В этом случае работа A силы $\vec{F}$ положительна, а результатом этой работы будет *увеличение скорости саней в ИСО*. Если же угол α больше 90°, то $\cos\alpha < 0$ (*см.* рис. 153, *б*). Поэтому и работа A силы $\vec{F}$ отрицательна. Результатом работы в этом случае будет *уменьшение скорости саней в ИСО*.

Если же сила $\vec{F}$ будет направлена перпендикулярно перемещению саней, то угол $\alpha = 90°$, а $\cos\alpha = 0$. В этом случае работа $A = 0$. *При таком направлении силы $\vec{F}$ скорость саней в ИСО не будет изменяться.* В таких случаях говорят, что действие силы не приводит к изменению скорости и сила $\vec{F}$ не совершает работы.

Отметим, что на сани действуют также сила тяжести и сила нормальной реакции опоры. Направления этих сил перпендикулярны направлению перемещения саней. Поэтому работа каждой из этих сил равна нулю, а их действие не приводит к изменению скорости саней.

Величина $F \cdot \cos\alpha$ в выражении (1) – проекция силы $\vec{F}$ на направление перемещения $\Delta\vec{r}$. Поэтому можно сказать, что работа A силы $\vec{F}$ равна произведению модуля перемещения Δr и проекции $F \cdot \cos\alpha$ этой силы на направление перемещения.

Пусть на материальную точку действуют несколько постоянных сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и т. д., сумма которых равна $\vec{F}$. При этом материальная точка совершает перемещение $\Delta\vec{r}$. Сумма проекций сил на направление перемещения $\Delta\vec{r}$ равна проекции на это направление суммы этих сил: $F_{1r} + F_{2r} + \ldots + F_{Nr} = F_r$. Умножив правую и левую части этого равенства на модуль Δr перемещения, получим:

$$F_{1r} \cdot \Delta r + F_{2r} \cdot \Delta r + \ldots + F_{Nr} \cdot \Delta r = F_r \cdot \Delta r.$$

Следовательно, *сумма работ действующих на материальную точку сил равна работе суммы этих сил*:

$$A_1 + A_2 + \ldots = A. \qquad (2)$$

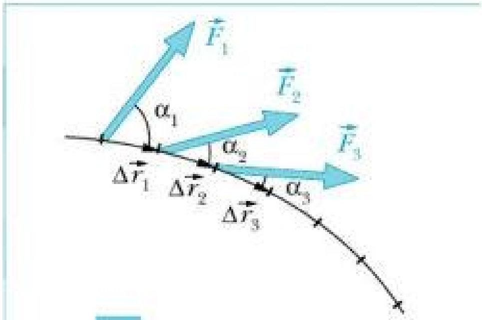


Рис. 154

Подчеркнём, что мы дали определение работы только *постоянной силы*, для которой модуль и угол α не изменяются. А как быть, если в процессе перемещения материальной точки действующая на неё сила изменяется с течением времени?

В этом случае перемещение $\Delta\vec{r}$ материальной точки разбивают на достаточно малые перемещения $\Delta\vec{r}_1$, $\Delta\vec{r}_2$, $\Delta\vec{r}_3$ и т. д. — так, чтобы на каждом из этих перемещений можно было считать постоянными: 1) модуль силы, совершающей работу; 2) угол между векторами силы и перемещения (рис. 154). Работу на каждом из таких достаточно малых перемещений называют *элементарной работой*.

Каждую элементарную работу вычисляют по формуле (1):

$$\Delta A_1 = F_1 \cdot \Delta r_1 \cdot \cos\alpha_1; \quad \Delta A_2 = F_2 \cdot \Delta r_2 \cdot \cos\alpha_2 \text{ и т. д.}$$

Суммируя все элементарные работы, получают полную работу A.

В качестве примера рассмотрим расчёт работы изменяющейся по модулю силы упругости лёгкой деформированной пружины. Пусть сжатую на Δl пружину жёсткостью k удерживают в деформированном состоянии с помощью бруска (рис. 155). На брусок со стороны пружины действует сила упругости $\vec{F}_{\text{упр }1}$, модуль которой $F_{\text{упр }1} = k \cdot \Delta l$. После отпускания бруска пру-

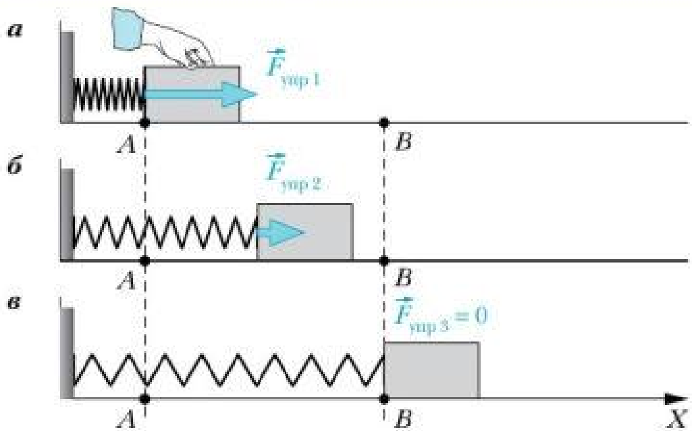


Рис. 155

жина будет толкать его, пока не разожмётся полностью.

В процессе движения бруска модуль силы упругости пружины будет уменьшаться пропорционально уменьшению её деформации от максимального значения $k \cdot \Delta l$ до нуля. Зависимость модуля силы упругости $F_{упр}$ пружины от модуля перемещения бруска показана на рис. 156.

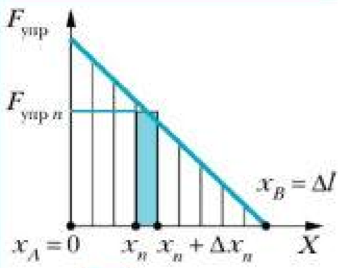


Рис. 156

Чтобы вычислить работу силы упругости, разобьём отрезок AB на достаточно малые отрезки Δx_0, Δx_1 и т. д. Элементарная работа силы упругости на каждом участке Δx_n приблизительно равна: $\Delta A_n = F_{упр\ n} \cdot \Delta x_n$.

Другими словами, элементарная работа ΔA_n численно равна площади закрашенного на рис. 156 прямоугольника. Работа силы упругости равна сумме всех элементарных работ. Поэтому эта работа будет численно равна сумме площадей всех прямоугольников под графиком функции. При стремлении каждого промежутка Δx_n к нулю сумма этих площадей будет стремиться к площади под графиком функции, т. е. к площади прямоугольного треугольника, катеты которого равны Δl и $k \cdot \Delta l$. Следовательно, работа силы упругости пружины по перемещению бруска из положения A в положение B равна:

$$A = \frac{k \cdot \Delta l \cdot \Delta l}{2} = \frac{k \cdot \Delta l^2}{2}.$$

Таким образом, мы показали, что *если сила $\vec{F}$, действующая на материальную точку, не изменяет своего направления, а точка движется в направлении действия силы, то работа этой силы численно равна площади под графиком зависимости модуля силы от модуля перемещения этой точки.*

Одна и та же работа над данным телом может быть совершена разными источниками силы (т. е. разными другими телами). Например, человек может поднять тонну кирпичей на двадцатый этаж строящегося здания за несколько дней. Эти же кирпичи на двадцатый этаж строительный кран может поднять за несколько минут. Таким образом, кран может выполнить ту же работу, что и человек, во много раз быстрее. Поэтому говорят, что кран имеет бо́льшую мощность, чем человек.

Мощность — физическая величина, равная отношению работы A, совершённой за достаточно малый промежуток времени Δt, к длительности этого промежутка:

$$N = \frac{A}{\Delta t}, \text{ где } \Delta t \to 0.$$

В СИ единица мощности — *ватт* (Вт), 1 Вт = 1 Дж/1 с.

В некоторых случаях, когда нас не интересует, с какой скоростью совершается работа в каждый конкретный момент времени, используют понятие *средняя мощность*.

Средняя мощность — физическая величина, равная отношению работы A, совершённой за промежуток времени Δt, к длительности этого промежутка:

$$N = \frac{A}{\Delta t}.$$

Мощность постоянной силы $\vec{F}$ можно вычислить, зная силу и скорость $\vec{v}$ материальной точки, на которую она действует. За достаточно малый промежуток времени Δt перемещение точки $\Delta\vec{r} = \vec{v} \cdot \Delta t$. Поэтому элементарная работа силы $\vec{F}$ за промежуток Δt будет равна: $A = F \cdot v \cdot \Delta t \cdot \cos\alpha$, где α — угол между направлениями силы и скорости. Следовательно, мощность силы равна:

$$N = F \cdot v \cdot \cos\alpha.$$

Вопросы

1. Что называют работой постоянной силы?
2. Как определить работу суммы всех сил, действующих на материальную точку, если известна работа каждой из этих сил?
3. Как рассчитывают работу изменяющейся силы, которая действует на движущуюся материальную точку?
4. Какую работу совершает сила тяжести над летящей горизонтально птицей?

*5. Зависит ли работа силы от выбора системы отсчёта?

Упражнения

1. Определите работу, которую совершает сила тяжести, действующая на груз массой 10 кг, в случаях: а) его падения с высоты 20 м; б) его подъёма на высоту 10 м.
2. Определите работу, которую совершит сила натяжения верёвки санок (*см.* рис. 153, *а*) при их разгоне в горизонтальном направлении, если модуль этой силы равен 30 Н, а модуль перемещения санок равен 10 м. Сила натяжения направлена под углом 45° к направлению движения саней.

3 Брусок массой m соскальзывает с наклонной плоскости высотой H. Угол наклона плоскости к горизонту равен α. Коэффициент трения между бруском и плоскостью равен μ. Определите проекции на направление движения бруска: а) силы тяжести; б) силы реакции опоры; в) силы трения. Определите работу каждой из этих сил и суммы этих сил за время соскальзывания бруска.

4 Катер движется по озеру прямолинейно с постоянной скоростью, модуль которой равен 15 м/с. Модуль силы сопротивления движению катера равен: $F = k \cdot v$, где $k = 140$ Н · с/м. Оцените мощность, развиваемую двигателем катера.

***5** Лёгкая пружина жёсткостью k, изначально сжатая на Δl_1, частично разжимается так, что её конечное сжатие становится равным Δl_2. Определите работу сил упругости пружины.

***6** На материальную точку, двигавшуюся в положительном направлении оси X инерциальной системы отсчёта, в том же направлении начинает действовать сила, зависимость модуля которой от координаты x материальной точки показана на рис. 157. Определите работу этой силы.

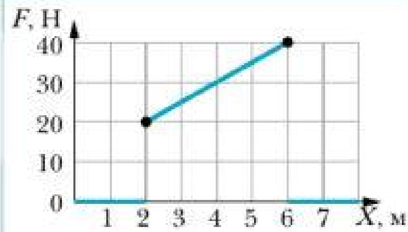


Рис. 157

§ 32 Кинетическая энергия

Мы выяснили, что при совершении над материальной точкой работы скорость материальной точки в ИСО изменяется. Определим связь работы с изменением скорости. Пусть в положительном направлении координатной оси X инерциальной системы отсчёта движется материальная точка массой m с начальной скоростью $\vec{v}_0$ (рис. 158). В момент времени $t = 0$ на неё начинают действовать силы, сумма которых постоянна и равна $\vec{F}$. Пусть

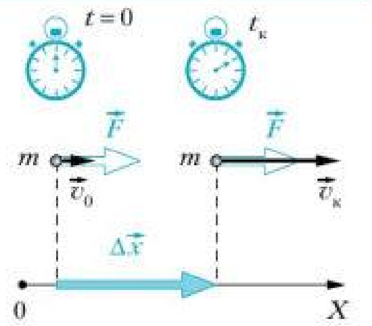


Рис. 158

направление $\vec{F}$ совпадает с направлением перемещения материальной точки. Тогда по второму закону Ньютона модуль её ускорения $\vec{a}$ равен:

$$a = \frac{F}{m}. \qquad (1)$$

К моменту времени $t_к$ модуль скорости точки станет равен:

$$v_к = v_0 + a \cdot t_к, \qquad (2)$$

а модуль её перемещения будет равен:

$$\Delta x = v_0 \cdot t_к + \frac{a \cdot t_к^2}{2}. \qquad (3)$$

Выразив $t_к$ из уравнения (2) и подставив его в (3), получим:

$$t_к = \frac{v_к - v_0}{a};$$

$$\Delta x = \frac{v_0 \cdot (v_к - v_0)}{a} + \frac{a \cdot (v_к - v_0)^2}{2a^2} = \frac{2v_0 \cdot (v_к - v_0)}{2a} + \frac{a \cdot (v_к - v_0)^2}{2a^2};$$

$$\Delta x = \frac{v_к^2 - v_0^2}{2a}. \qquad (4)$$

Умножив левую и правую части равенства (4) на $F = m \cdot a$, имеем:

$$A = F \cdot \Delta x = F \cdot \frac{v_к^2 - v_0^2}{2a} = m \cdot a \cdot \frac{v_к^2 - v_0^2}{2a} = \frac{m \cdot v_к^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2};$$

$$A = \frac{m \cdot v_к^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2}. \qquad (5)$$

Величину $K = \dfrac{m \cdot v^2}{2}$ называют кинетической энергией материальной точки массой m, движущейся в инерциальной системе отсчёта со скоростью $\vec{v}$.

В СИ единица кинетической энергии — *джоуль* (Дж).

С использованием понятия «кинетическая энергия» выражение (5) принимает вид:

$$A = K_к - K_0. \qquad (6)$$

Работа A постоянной суммы $\vec{F}$ всех сил, действующих на материальную точку в направлении её перемещения, равна изменению её кинетической энергии в инерциальной системе отсчёта.

Можно показать, что соотношение (6) справедливо не только в случае действия постоянной суммарной силы $\vec{F}$ и прямолинейного движения, но и в случаях, когда движение материальной точки происходит по произвольной траектории, а сумма сил $\vec{F}$ изменяется как по модулю, так и по направлению. В результате мы приходим к утверждению, которое называют *теоремой о кинетической энергии*:

изменение кинетической энергии материальной точки в инерциальной системе отсчёта равно совершённой над материальной точкой работе:
$A = K_к - K_0$.

Воспользуемся этой теоремой, чтобы выяснить физический смысл кинетической энергии. Пусть начальная скорость материальной точки в ИСО равна нулю. Тогда её начальная кинетическая энергия равна нулю: $K_0 = 0$. Если над этой материальной точкой совершить работу A, то её кинетическая энергия в соответствии с теоремой о кинетической энергии будет равна этой работе: $A = K_к$. Следовательно,

кинетическая энергия $K = \frac{m \cdot v^2}{2}$ материальной точки равна работе A, которую надо совершить, чтобы разогнать эту точку из состояния покоя до скорости $\vec{v}$ в ИСО.

Вместе с тем если над двигавшейся в ИСО со скоростью $\vec{v}$ материальной точкой совершить отрицательную работу, равную по модулю её начальной кинетической энергии, то эта точка остановится. При этом сама материальная точка *совершит над тормозящими её телами такую же по модулю положительную работу*.

Следовательно,

кинетическая энергия материальной точки в ИСО равна работе, которую она может совершить над другими телами за счёт только уменьшения своей скорости до нуля.

Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек. В инерциальной системе отсчёта каждая из этих точек имеет массу и скорость, а следовательно, обладает кинетической энергией. Первая материальная точка при торможении до полной остановки совершит работу $A_1 = K_1$, вторая — $A_2 = K_2$ и т. д. Поэтому при торможении до нулевой скорости всех материальных точек системы они все вместе совершат работу:

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_N = K_1 + K_2 + \dots + K_N.$$

Будем считать, что полученная работа A равна кинетической энергии K всей системы. Тогда *кинетическая энергия системы N материальных точек равна сумме их кинетических энергий*:

$$K = K_1 + K_2 + \ldots + K_N.$$

В заключение рассмотрим пример решения задачи с использованием теоремы о кинетической энергии.

Задача

Пусть с высоты h над поверхностью Земли вертикально вниз с начальной скоростью $\vec{v}_0$ бросают камень. Определите скорость $\vec{v}_п$ его падения на Землю.

Решение.

Шаг 0. Будем считать камень материальной точкой. Силами сопротивления движению камня со стороны воздуха пренебрежём.

Шаг 1. Систему отсчёта свяжем с поверхностью Земли, направив координатную ось Y вертикально вниз.

Шаг 2. На камень действует только сила тяжести $m \cdot \vec{g}$, направленная вертикально вниз.

Шаг 3. Камень перемещается вертикально вниз вдоль оси Y. Угол между действующей на него силой тяжести и его перемещением равен нулю. Косинус этого угла равен единице. Поэтому проекция силы тяжести на направление перемещения камня положительна: $m \cdot g_y = m \cdot g$. Модуль перемещения камня равен разности начальной и конечной высот: $h - 0 = h$.

Шаг 4. Работа единственной действующей на камень силы тяжести равна: $A = m \cdot g \cdot h$.

Запишем выражения для начальной и конечной кинетической энергии камня:

$$K_0 = \frac{m \cdot v_0^2}{2}; \; K_к = \frac{m \cdot v_п^2}{2}.$$

Шаг 5. Используем теорему о кинетической энергии для камня:

$$K_0 + A = K_к, \text{ или}$$

$$\frac{m \cdot v_0^2}{2} + m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot v_п^2}{2}.$$

Шаг 6. Решение полученного уравнения позволяет определить модуль скорости падения:

$$v_п = \sqrt{v_0^2 + 2g \cdot h}. \qquad (7)$$

4 Определите кинетическую энергию тонкого обруча массой M и радиусом R, вращающегося вокруг своей неподвижной в ИСО оси с угловой скоростью ω. (*Подсказка:* представьте обруч как систему большого числа материальных точек.)

§ 33 Потенциальная энергия

Работа, которую могут совершить тела системы, определяется не только их кинетической энергией. Между телами системы обычно существуют силы взаимодействия (притяжения или отталкивания). Поэтому при *изменении взаимного расположения тел эти силы могут совершать работу*.

Пусть материальная точка массой m перемещается вблизи поверхности Земли из точки B в точку C по произвольной траектории (рис. 159). Высота точки B над поверхностью Земли в выбранной системе отсчёта равна h_0, высота точки C равна $h_к$. Рассчитаем работу A, которую совершит над этой материальной точкой сила тяжести.

Поскольку точка движется криволинейно, то угол между силой тяжести и малыми перемещениями непрерывно изменяется. Поэтому для расчёта работы необходимо разбить траекторию точки на достаточно малые участки так, чтобы каждый из них можно было считать прямолинейным. Вычислим элементарную работу силы тяжести на одном из таких участков. Пусть материальная точка перемещается прямолинейно, например, из точки *1*

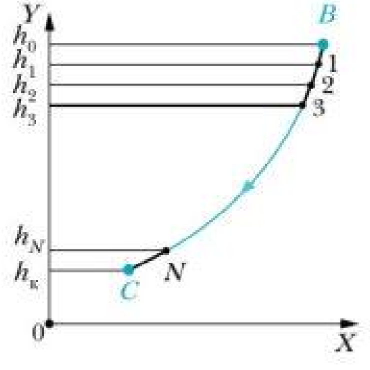


Рис. 159

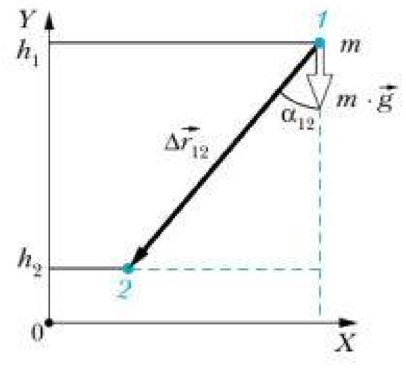


Рис. 160

в точку *2* на величину $\Delta\vec{r}_{12}$ (рис. 160), при этом угол между силой тяжести и перемещением $\Delta\vec{r}_{12}$ равен α_{12}. В этом случае элементарная работа силы тяжести на этом участке $\Delta A_{12} = m \cdot g \cdot \Delta r_{12} \cdot \cos\alpha_{12}$. Поскольку $\Delta r_{12} \cdot \cos\alpha_{12} = h_1 - h_2$, получаем:

$$\Delta A_{12} = m \cdot g \cdot (h_1 - h_2).$$

Таким образом, *элементарная работа силы тяжести на каждом участке не зависит от угла между направлениями силы тяжести и перемещения, а определяется только разностью начальной и конечной высот.* К

Суммируя все элементарные работы, находим искомую работу A силы тяжести по перемещению материальной точки с высоты h_0 на высоту $h_к$:

$$A = \Delta A_{01} + \Delta A_{12} + \ldots + \Delta A_{Nк} = m \cdot g \cdot (h_0 - h_1) + m \cdot g \cdot (h_1 - h_2) + \ldots + m \cdot g \cdot (h_N - h_к).$$

После раскрытия скобок получаем:

$$A = m \cdot g \cdot (h_0 - h_к). \quad (1)$$

! Работа силы тяжести не зависит от формы траектории движения материальной точки и всегда равна произведению модуля силы тяжести на разность высот в начальном и конечном положениях.

Силы, работа которых не зависит от вида траектории, а определяется только начальным и конечным положениями материальной точки, на которую эти силы действуют, называют потенциальными силами.

Можно показать, что *работа потенциальной силы по любой замкнутой траектории равна нулю.*

Вы уже знаете (*см.* § 31), что пружина жёсткостью k, растянутая или сжатая на Δl, при возвращении в недеформированное состояние совершает работу:

$$A = \frac{k \cdot \Delta l^2}{2}. \quad (2)$$

К Как вы уже знаете, с удалением от поверхности Земли сила её гравитационного притяжения уменьшается. Однако если высота h много меньше радиуса Земли, то этим изменением можно пренебречь. Другими словами, ускорение свободного падения можно считать одинаковым во всех точках.

Можно показать (*см.*, например, задание 5 в § 31), что при изменении сжатия (или растяжения) пружины от Δl_1 до Δl_2 сила её упругости совершает работу, равную:

$$A_{12} = \frac{k \cdot \Delta l_1^2}{2} - \frac{k \cdot \Delta l_2^2}{2}. \qquad (3)$$

Таким образом, работа сил упругости, как и сил тяжести, определяется только начальным и конечным положениями системы. Поэтому *силы упругости, как и силы тяжести, являются потенциальными.*

Работа, совершаемая потенциальными силами, приводит к изменению *потенциальной энергии системы взаимодействующих тел.*

Потенциальной энергией $\varPi$ системы тел называют физическую величину, равную работе, которую совершают потенциальные силы взаимодействия её тел при переходе системы из данного состояния в состояние, потенциальная энергия которого принята за нуль.

Потенциальную энергию, так же как работу и кинетическую энергию, в СИ измеряют в *джоулях* (Дж).

! Потенциальная энергия $\varPi$ системы тел определяется взаимным расположением тел системы или их частей и потенциальными силами взаимодействия между ними.

Обычно потенциальную энергию рассмотренной выше системы взаимодействующих тел «материальная точка массой m – Земля» принимают равной нулю ($\varPi = 0$), когда эта точка находится на поверхности Земли. Определим потенциальную энергию этой системы, когда материальная точка находится на высоте h. Работа, совершаемая силой тяжести при опускании точки с высоты h на поверхность Земли, равна: $A = m \cdot g \cdot (h - 0) = m \cdot g \cdot h$. Следовательно, потенциальная энергия $\varPi_h$ рассматриваемой системы в состоянии, когда материальная точка находится на высоте h, равна:

$$\varPi_h = A = m \cdot g \cdot h. \qquad (4)$$

Таким образом, из уравнений (4) и (1) следует, что работа силы тяжести над материальной точкой массой m при её перемещении по произвольной траектории вблизи поверхности Земли с высоты h_0 на высоту $h_к$ равна разности начальной $\varPi_0$ и конечной $\varPi_к$ потенциальной энергии системы:

Помимо сил упругости и сил гравитационного взаимодействия (т. е. и силы тяжести), к потенциальным силам относят силы электростатического взаимодействия зарядов. Подробнее об этом будет рассказано в главе 10 учебника.

$$A = П_0 - П_к. \qquad (5)$$

Выражение (5) справедливо для любых систем взаимодействующих тел. К

Разность начальной $П_0$ и конечной $П_к$ потенциальной энергии системы взаимодействующих тел равна работе всех внутренних потенциальных сил системы.

Обратим особое внимание на то, что, в отличие от формулы для изменения кинетической энергии ($A = K_к - K_0$), *изменение потенциальной энергии* (т. е. разность конечной и начальной потенциальной энергии) *равно работе всех внутренних потенциальных сил системы, взятой со знаком «минус»*:

$$П_к - П_0 = -A_п. \qquad (7)$$

К Например, если принять, что потенциальная энергия недеформированной пружины равна нулю, то из формулы (2) следует, что потенциальная энергия пружины жёсткостью k, деформированной на Δl, равна:

$$П_{\Delta l} = \frac{k \cdot \Delta l^2}{2}. \qquad (6)$$

Поэтому с учётом (6) соотношение (3) представляет собой соотношение (5), записанное для упруго деформированной пружины.

Вопросы

1. Какие силы называют потенциальными?
2. Что называют потенциальной энергией?
3. Чему равно изменение потенциальной энергии системы тел?
4. Может ли потенциальная энергия упруго деформированной пружины быть отрицательной?
5. Может ли потенциальная энергия системы «тело — Земля» быть отрицательной? Приведите примеры.
6. Какие потенциальные силы вы знаете?

Упражнения

1. Как изменяется потенциальная энергия пружины жёсткостью $k = 200$ Н/м при изменении её растяжения от $\Delta l_1 = 1$ см до $\Delta l_2 = 3$ см?
2. Тело массой m переводят с начальной высоты h_0 на конечную высоту $h_к = 4h_0$ по произвольной траектории. Чему равна на-

чальная потенциальная энергия системы «тело массой m — Земля»? Чему равна конечная потенциальная энергия этой системы? Чему равна разность начальной и конечной потенциальной энергии? Чему равна работа силы тяжести при переводе тела из начального состояния в конечное?
Сравните работу силы тяжести и разность начальной и конечной потенциальной энергии системы «тело — Земля».

3 На горизонтальной площадке лежит однородный стальной стержень длиной $l = 2$ м. Масса стержня $m = 250$ кг. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы поставить этот стержень вертикально на этой площадке? На сколько при этом изменится потенциальная энергия системы «стержень — Земля»? (*Подсказка*: рассмотрите стержень как систему материальных точек.)

§ 34 Механическая энергия системы тел. Изменение механической энергии. Закон сохранения механической энергии

Вы уже знаете, что механическое состояние системы тел (массы тел, их скорости, взаимное расположение тел) определяет кинетическую и потенциальную энергию этой системы.

Сумму потенциальной и кинетической энергий системы тел называют механической энергией этой системы тел.

Механическую энергию системы тел обозначают буквой E. В соответствии с определением:

$$E = K + \Pi. \qquad (1)$$

Выведем формулу изменения механической энергии E системы тел. Пусть работа всех сил, действующих на тела системы, равна A. Тогда в соответствии с теоремой о кинетической энергии начальная K_0 и конечная $K_к$ кинетическая энергия системы связаны с работой A соотношением:

$$K_0 + A = K_к. \qquad (2)$$

Представим работу A всех сил в виде суммы работы $A_п$ всех внутренних потенциальных сил, работы $A_{тр}$ всех внутренних сил трения и работы A_{ex} всех внешних сил:

$$A = A_п + A_{тр} + A_{ex}. \qquad (3)$$

Подставив уравнение (3) в уравнение (2), получаем:

$$K_0 + A_п + A_{тр} + A_{ex} = K_к. \qquad (4)$$

Работа $A_п$ всех внутренних потенциальных сил равна разности начальной $П_0$ и конечной $П_к$ потенциальной энергии системы:

$$A_п = П_0 - П_к. \qquad (5)$$

Подставив уравнение (5) в уравнение (4), получаем:

$$K_0 + П_0 - П_к + A_{тр} + A_{ex} = K_к. \qquad (6)$$

Перенесём слагаемое $П_к$ из левой части равенства (6) в правую:

$$K_0 + П_0 + A_{тр} + A_{ex} = K_к + П_к. \qquad (7)$$

Перепишем равенство (7) с использованием соотношения $E = K + П$ в виде:

$$E_0 + A_{тр} + A_{ex} = E_к. \qquad (8)$$

Таким образом, если к начальной механической энергии системы $E_0 = K_0 + П_0$ прибавить работу $A_{тр}$ внутренних сил трения и работу A_{ex} внешних сил над телами системы, то получится конечная механическая энергия системы $E_к = K_к + П_к$.

! Изменение механической энергии системы тел равно сумме работ внутренних сил трения $A_{тр}$ и внешних сил A_{ex} над телами системы.

Это утверждение называют **законом изменения механической энергии системы тел**.

Отметим, что этот закон справедлив только в инерциальных системах отсчёта.

Из закона изменения механической энергии следует **закон сохранения механической энергии**.

Если суммарная работа внутренних сил трения и внешних сил над телами системы равна нулю, то механическая энергия системы тел в ИСО не изменяется (сохраняется).

Если $A_{тр} + A_{ex} = 0$, то $E_0 = E_к$,

или $П_0 + K_0 = П_к + K_к$.

Рассмотрим применение законов сохранения и изменения механической энергии при решении задач.

Задача

Лёгкая пружина длиной L жёсткостью k стоит на горизонтальной площадке вертикально. С высоты H на неё падает маленький брусок массой m (рис. 161). Определите модуль максимальной скорости бруска при его движении вниз.

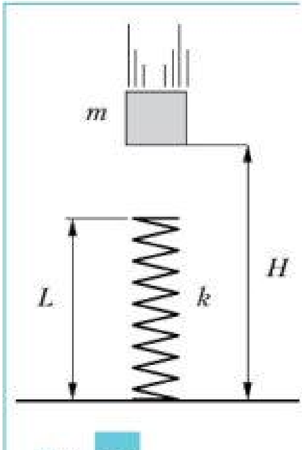


Рис. 161

Решение.

Шаг 0. Рассмотрим систему тел «пружина – брусок – Земля». Будем считать брусок материальной точкой. Влиянием сил сопротивления со стороны воздуха пренебрежём.

Шаг 1. Инерциальную систему отсчёта свяжем с Землёй.

Шаг 2. На брусок действует сила тяжести $m \cdot \vec{g}$. Кроме того, после касания бруском пружины на него начнёт действовать нарастающая по мере деформации пружины сила упругости. Пока модуль силы упругости будет меньше модуля силы тяжести, брусок будет продолжать разгоняться. После того как модуль силы упругости станет больше модуля силы тяжести, модуль скорости бруска начнёт уменьшаться. Таким образом, модуль скорости бруска достигнет максимума в тот момент, когда модуль силы тяжести станет равным модулю силы упругости:

$$m \cdot g = k \cdot \Delta L, \tag{9}$$

где ΔL – сжатие пружины в интересующий нас момент времени.

Шаг 3. Внешних сил нет.

Шаг 4. Брусок в начальный момент времени покоился. Обозначим максимальный модуль скорости бруска в интересующий нас момент времени v. По условию задачи массой пружины можно пренебречь. Поэтому выражение для начальной и конечной кинетической энергии имеет вид:

$$K_0 = 0; \ K_к = \frac{m \cdot v^2}{2}.$$

За промежуток времени от начального до интересующего нас момента брусок опускается с высоты H до высоты $L - \Delta L$. При этом изначально недеформированная пружина сжимается на ΔL. Поэтому выражения для начальной и конечной потенциальной энергии имеют вид:

$$\varPi_0 = m \cdot g \cdot H;\ \varPi_к = m \cdot g \cdot (L - \Delta L) + \frac{k \cdot \Delta l^2}{2}.$$

Шаг 5. Запишем закон изменения механической энергии:

$$K_0 + \varPi_0 + A_{тр} + A_{вс} = K_к + \varPi_к.$$

С учётом полученных результатов имеем:

$$0 + m \cdot g \cdot H + 0 + 0 = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{k \cdot \Delta l^2}{2} + m \cdot g \cdot (L - \Delta L). \qquad (10)$$

Выразив ΔL из уравнения (9) и подставив его значение в (10), получим:

$$v = \sqrt{2g \cdot (H - L) + \frac{m \cdot g^2}{k}}.$$

Ответ: $v = \sqrt{2g \cdot (H - L) + \frac{m \cdot g^2}{k}}$.

Вопросы

1. Что называют механической энергией системы тел?
2. Чему равно изменение механической энергии системы тел в ИСО?
3. Сформулируйте закон сохранения механической энергии. Следствием какого закона является этот закон?

Упражнения

1. С башни высотой H бросают камень массой m вверх под углом α к горизонту. Модуль начальной скорости камня равен v_0. Используя закон сохранения механической энергии, определите: а) максимальную высоту подъёма камня; б) модуль скорости камня в верхней точке траектории; в) модуль скорости падения камня на Землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.
2. Ядро массой 5 кг вылетело из ствола пушки под углом 30° к горизонту со скоростью, модуль которой равен 800 м/с. Через некоторое время ядро упало на Землю со скоростью, модуль которой равен 300 м/с. Определите работу, совершённую силой сопротивления воздуха над ядром.
3. К телу массой 2 кг прикладывают постоянную направленную вертикально вверх силу, модуль которой равен 50 Н. Определи-

те кинетическую энергию и модуль скорости тела в тот момент, когда оно поднимется на высоту 10 м. Сопротивлением воздуха пренебречь.

4 Определите максимальное сжатие пружины, рассмотренной в задаче этого параграфа.

Для углублённого уровня

§ 35 Решение задач с использованием законов сохранения импульса и механической энергии

В некоторых задачах требуется одновременно использовать оба закона сохранения. Рассмотрим примеры решения подобных задач.

Задача 1

На гладкой горизонтальной поверхности лежат два связанных нитью бруска (рис. 162). Масса первого бруска равна M, а второго — $2M$. Между брусками вставлена лёгкая пружина жёсткостью k. Пружина сжата на величину Δl. После того как нить пережигают, бруски под действием пружины разъезжаются в противоположные стороны. Определите скорости движения брусков, если известно, что они движутся поступательно.

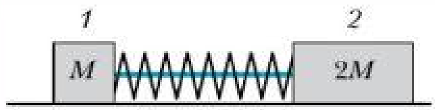


Рис. 162

Решение.

Шаг 0. Рассмотрим систему тел «бруски — пружина». После пережигания нити бруски движутся поступательно, поэтому будем считать их материальными точками. Силами сопротивления со стороны воздуха пренебрежём.

Шаг 1. Инерциальную систему отсчёта свяжем с поверхностью стола. Ось X направим параллельно нити и оси пружины от первого бруска ко второму.

Шаг 2. На бруски действуют силы тяжести, силы реакции опоры и силы упругости пружины.

Шаг 3. Силы тяжести и реакции опоры перпендикулярны направлению движения брусков, а действующие на бруски силы упругости направлены вдоль оси X.

Шаг 4. По условию задачи массой пружины следует пренебречь. Поэтому её кинетическая энергия и импульс равны нулю. Сразу после пережигания нити (в начальный момент времени) бруски покоятся. Поэтому начальная кинетическая энергия и начальный импульс системы равны нулю:

$$K_0 = 0;\ p_0 = 0.$$

В начальный момент времени пружина сжата на Δl. Поэтому начальная потенциальная энергия пружины равна:

$$П_0 = \frac{k \cdot \Delta l^2}{2}.$$

Пусть v_1 и v_2 — проекции на ось X скоростей первого и второго брусков после того, как пружина разожмётся и перестанет действовать на них. Тогда кинетическая энергия системы, потенциальная энергия пружины и проекция импульса системы на ось X в этот момент времени будут соответственно равны:

$$K_к = \frac{M \cdot v_1^2}{2} + \frac{2M \cdot v_2^2}{2}; \quad П_к = 0; \quad p_к = M \cdot v_1 + 2M \cdot v_2.$$

Шаг 5. Поскольку внешние силы — силы тяжести и реакции опоры перпендикулярны направлению движения брусков, то работа этих сил равна нулю. Сумма внешних сил равна нулю. Поэтому импульс системы тел сохраняется. Силы упругости пружины являются внутренними потенциальными силами. Поэтому они не изменяют механическую энергию системы. Силы трения отсутствуют. Запишем законы сохранения механической энергии и проекции импульса на ось X:

$$K_0 + П_0 = K_к + П_к; \quad p_0 = p_к.$$

С учётом результатов шага 4 имеем:

$$0 + \frac{k \cdot \Delta l^2}{2} = \frac{M \cdot v_1^2}{2} + \frac{2M \cdot v_2^2}{2} + 0; \qquad (1)$$

$$0 = M \cdot v_1 + 2M \cdot v_2. \qquad (2)$$

Выразив v_1 из уравнения (2) и подставив его в (1), получаем:

$$v_1 = -\sqrt{\frac{2k}{3M}} \cdot \Delta l; \ v_2 = \sqrt{\frac{k}{6M}} \cdot \Delta l.$$

Шаг 6. Проанализируем полученный результат. Прежде всего отметим, что полученные выражения имеют размерность скорости:

$$\left[\frac{м}{с}\right] = \sqrt{\frac{[Н/м]}{[кг]}} \cdot [м] = \sqrt{\frac{[кг \cdot м]}{[кг \cdot с^2 \cdot м]}} \cdot [м].$$

Таким образом, с точки зрения размерности полученный ответ верен.

Видно, что чем больше жёсткость пружины и её начальное сжатие, тем бóльшие скорости приобретут бруски.

Напротив, чем больше массы брусков, тем меньше будут их скорости. Отдельно отметим, что бруски движутся в противоположные стороны (проекция скорости первого бруска на координатную ось отрицательна), причём брусок с большей массой (второй брусок) приобретает меньшую по модулю скорость.

Ответ: $v_1 = -\sqrt{\dfrac{2k}{3M}} \cdot \Delta l$; $v_2 = \sqrt{\dfrac{k}{6M}} \cdot \Delta l$.

Законы сохранения можно использовать, например, для определения скоростей двух шаров после их *абсолютно упругого удара*.

Абсолютно упругим ударом называют такое взаимодействие, при котором суммарная кинетическая энергия соударяющихся тел непосредственно перед ударом и сразу после него равны.

Задача 2

Пусть два однородных шара массами m_1 и m_2 движутся поступательно навстречу друг другу вдоль линии, соединяющей их центры. Модули их скоростей равны v_1 и v_2 (рис. 163). Если начальные скорости шаров направлены вдоль линии, соединяющей их центры, то удар таких шаров называют *центральным*. Определите скорости шаров после удара, считая его центральным и абсолютно упругим.

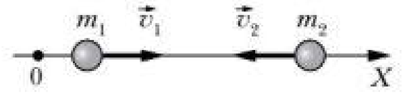


Рис. 163

Решение.

Шаг 0. Рассмотрим систему тел, состоящую из двух шаров. Будем считать шары материальными точками, на которые не действуют внешние силы. Будем также считать, что шары взаимодействуют упруго, причём только во время их соприкосновения.

Шаг 1. Инерциальную систему отсчёта выберем так, чтобы ось X совпадала с линией, вдоль которой движутся шары, и была направлена от первого шара ко второму.

Шаг 2. На шары действуют только силы их взаимодействия друг с другом во время их соприкосновения.

Шаг 3. Поскольку удар центральный, то силы упругого взаимодействия шаров направлены вдоль оси X, проходящей через центры шаров. Отметим, что до удара первый шар двигался в положительном направлении оси X, а второй — в отрицательном направлении. Поэтому проекция на эту ось импульса первого шара до удара положительна, а проекция импульса второго шара — отрицательна.

Шаг 4. Начальная кинетическая энергия системы и проекция её импульса на ось X соответственно равны:

$$K_0 = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2}; \quad p_{0x} = m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2.$$

Пусть u_{1x} и u_{2x} — проекции на ось X скоростей соответственно первого и второго шаров после удара. Тогда кинетическая энергия системы и проекция её импульса на ось X после удара будут соответственно равны:

$$K_к = \frac{m_1 \cdot u_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 \cdot u_{2x}^2}{2}; \quad p_{кx} = m_1 \cdot u_{1x} + m_2 \cdot u_{2x}.$$

Отметим, что мы заранее не знаем направления движения шаров. Поэтому мы не знаем, будут ли проекции скоростей шаров после удара положительными или отрицательными. Ответ на этот вопрос мы получим только после решения задачи!

Отметим также, что шары взаимодействуют упруго. Поэтому потенциальная энергия системы до удара равна потенциальной энергии после него:

$$П_0 = П_к.$$

Шаг 5. Внешних сил нет. Внутренние силы являются силами упругости, т. е. потенциальными силами. Поэтому в рассматриваемом случае сохраняются и импульс, и механическая энергия системы.

Запишем законы сохранения:

$$K_0 + П_0 = K_к + П_к; \quad p_{0x} = p_{кx}.$$

С учётом результатов шага 4 имеем:

$$\frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} = \frac{m_1 \cdot u_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 \cdot u_{2x}^2}{2};$$
$$m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_{1x} + m_2 \cdot u_{2x}.$$

Перепишем полученную систему уравнений в виде:

$$m_1 \cdot (v_1 - u_{1x}) = m_2 \cdot (v_2 + u_{2x}); \qquad (1)$$

$$m_1 \cdot (v_1^2 - u_{1x}^2) = m_2 \cdot (u_{2x}^2 - v_2^2). \qquad (2)$$

Разделив уравнение (2) на уравнение (1), получаем:

$$v_1 + u_{1x} = u_{2x} - v_2. \qquad (3)$$

Умножая уравнение (3) на m_2 и вычитая результат из уравнения (1), имеем:

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_1 - 2m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}. \qquad (4)$$

Аналогично получаем:

$$u_{2x} = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_2 + 2m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}. \qquad (5)$$

Шаг 6. Проведём анализ полученного результата. Пусть массы шаров равны. Тогда уравнения (4) и (5) приобретают вид: $u_{1x} = -v_2$, $u_{2x} = v_1$. Таким образом, ***при равенстве масс шары при абсолютно упругом центральном ударе обмениваются скоростями.***

Пусть масса второго шара пренебрежимо мала по сравнению с массой первого шара. Тогда из полученных уравнений следует, что: $u_{1x} = v_1$, $u_{2x} = v_2 + 2v_1$. В этом случае скорость первого шара остаётся неизменной, а второй шар отлетает от первого со скоростью, модуль которой равен сумме модуля его скорости и удвоенного модуля скорости тяжёлого шара.

Если второй шар покоился до удара, то из уравнений (4) и (5) получаем:

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_1}{m_1 + m_2}; \; u_{2x} = \frac{2m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}.$$

При таком условии, если $m_1 > m_2$, то после удара первый шар сохранит направление своего движения. Если же $m_1 < m_2$, то после удара первый шар отскочит, изменив направление своего движения на противоположное.

Задача 3

В заключение исследуем, что изменится, если удар шаров, рассмотренный в предыдущей задаче, будет не абсолютно упругим, а *абсолютно неупругим* (*см.* задачу из § 29). Согласно закону сохранения импульса, после абсолютно неупругого удара шары будут двигаться как единое целое вдоль оси X со скоростью, проекция которой u_x на эту ось удовлетворяет уравнению:

$$m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u_x. \qquad (1)$$

При этом в процессе абсолютно неупругого удара силы вязкого трения между частями слипающихся шаров совершают работу $A_{тр}$. Для определения этой работы запишем закон изменения механической энергии рассматриваемой системы тел:

$$\frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} + A_{\text{тр}} = \frac{(m_1 + m_2) \cdot u_x^2}{2}. \qquad (2)$$

Выразив u_x из уравнения (1) и подставив в уравнение (2), получим выражение для работы сил трения:

$$A_{\text{тр}} = \frac{-m_1 \cdot m_2 \cdot (v_1 + v_2)}{2(m_1 + m_2)}. \qquad (3)$$

Из выражения (3) видно, что работа сил вязкого трения будет отрицательной при любых значениях скоростей и масс шаров, сталкивающихся абсолютно неупруго. Понятно, что модуль этой работы будет равен уменьшению кинетической энергии системы.

Упражнения

1 Гладкий клин массой M стоит на горизонтальной поверхности стола (рис. 164). На клин кладут брусок массой m. Наклонная грань клина имеет плавный переход к горизонтальной плоскости. Определите скорость клина после того, как брусок соскользнёт с высоты H на поверхность стола.

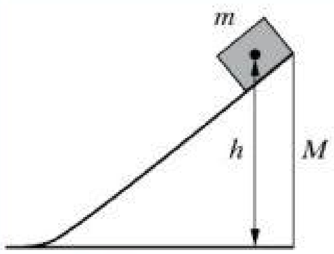


Рис. 164

2 Спортсмен массой M прыгает под углом α к горизонту со скоростью, модуль которой равен v. В верхней точке траектории он бросает вертикально вниз груз массой m со скоростью, модуль которой равен u. Определите максимальную высоту взлёта спортсмена.

3 Пять одинаковых гладких шариков покоятся на горизонтальной плоскости на одной прямой на некоторых расстояниях друг от друга. На первый шарик налетает движущийся поступательно вдоль этой прямой ещё один такой же шарик. Модуль скорости этого шарика равен 5 м/с. Определите скорости всех шариков после всех их абсолютно упругих соударений.

4 Проведите анализ выражения (3) из задачи 3 для расчёта работы сил вязкого трения при абсолютно неупругом ударе. Изменится ли это выражение, если один из соударяющихся шаров будет догонять другой шар?

ИМПУЛЬС. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Импульс материальной точки в ИСО:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}.$$

Импульс системы материальных точек:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N.$$

Изменение импульса материальной точки в ИСО:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t,$$

где $\vec{F}$ — сумма всех действующих на неё сил, Δt — время их действия.

Изменение суммарного импульса системы материальных точек в ИСО:

$$\Delta\vec{p} = (\vec{F}_{1\,ex} + \vec{F}_{2\,ex} + \ldots + \vec{F}_{N\,ex}) \cdot \Delta t,$$

где $\vec{F}_{1\,ex} + \vec{F}_{2\,ex} + \ldots + \vec{F}_{N\,ex}$ — сумма всех внешних сил.

Закон сохранения импульса

Если сумма всех внешних сил, действующих на тела системы, равна нулю, то импульс системы тел в ИСО не изменяется с течением времени (сохраняется).

Если $\vec{F}_{1\,ex} + \vec{F}_{2\,ex} + \ldots + \vec{F}_{N\,ex} = 0$, то $\Delta\vec{p} = 0$.

Закон сохранения проекции импульса

Если проекция на координатную ось ИСО суммы всех внешних сил, действующих на тела системы, равна нулю, то проекция импульса системы тел на эту ось не изменяется с течением времени (сохраняется).

Центром масс системы, состоящей из N материальных точек, называют точку, радиус-вектор которой равен отношению суммы произведений массы каждой точки на её радиус-вектор к сумме масс этих точек:

$$\vec{r}_{\text{цм}} = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + \ldots + m_N \cdot \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}.$$

Теорема о движении центра масс системы

Ускорение $\vec{a}$ центра масс системы, состоящей из N материальных точек, в ИСО равно отношению суммы всех внешних сил, действующих на точки этой системы, к сумме масс всех её точек:

$$\vec{a}_{\text{цм}} = \frac{\vec{F}_{1\,ex} + \vec{F}_{2\,ex} + \ldots + \vec{F}_{N\,ex}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}.$$

Глава 5 Статика. Гидро- и аэростатика

Статика — раздел механики, в котором изучают условия равновесия тела, т. е. условия, при которых тело остаётся неподвижным в некоторой ИСО. При изучении статики мы ограничимся рассмотрением только *твёрдого тела*, т. е. тела, расстояние между любыми двумя точками которого не изменяется при любых воздействиях на тело. Понятно, что твёрдое тело — модель. В природе таких тел не существует. Реальное тело можно считать твёрдым, если его деформации при любых воздействиях на него пренебрежимо малы по сравнению с размерами тела.

§ 36 Условия равновесия твёрдого тела. Момент силы

Если твёрдое тело покоится в ИСО, то говорят, что оно находится в равновесии. Определим условия, при которых твёрдое тело будет находиться в равновесии.

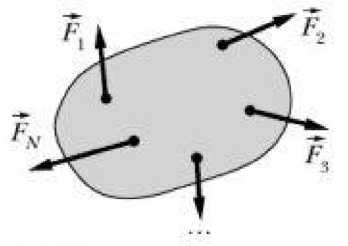


Рис. 165

Пусть на твёрдое тело массой M действуют несколько сил, приложенных к разным его точкам (рис. 165). Будем считать тело системой материальных точек. Тогда по теореме о движении центра масс (*см.* § 30) ускорение центра масс этого тела равно отношению суммы $\vec{F}$ всех действующих на него сил к его массе:

$$\vec{a}_{\text{цм}} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N}{M} = \frac{\vec{F}}{M}. \qquad (1)$$

Из соотношения (1) следует, что если сумма $\vec{F}$ всех действующих сил не равна нулю, то центр масс движется с ускорением относительно любой ИСО. В этом случае тело не может находиться в равновесии.

Следовательно, твёрдое тело может находиться в равновесии только в случае, если сумма всех действующих на него сил равна нулю:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N = \vec{F} = 0. \qquad (2)$$

Соотношение (2) называют *первым условием равновесия твёрдого тела*.

При решении задач это условие записывают в виде уравнений для проекций суммы $\vec{F}$ всех действующих сил на координатные оси:

$$F_x = 0;\ F_y = 0;\ F_z = 0. \qquad (3)$$

Пусть для рассматриваемого твёрдого тела выполнено первое условие равновесия. Тогда если скорость центра масс этого тела в ИСО равна нулю, то центр масс тела будет и далее покоиться в данной ИСО.

Вы уже знаете, что *движение твёрдого тела можно представить в виде суперпозиции поступательного и вращательного движений*. Следовательно, если центр масс твёрдого тела покоится, то тело не может двигаться поступательно, но может совершать вращательное движение вокруг центра масс.

Определим условие, при котором изначально покоившееся в ИСО тело начнёт раскручиваться вокруг своего неподвижного центра масс. Для этого рассмотрим твёрдое тело, например велосипедное колесо, закреплённое на оси O.

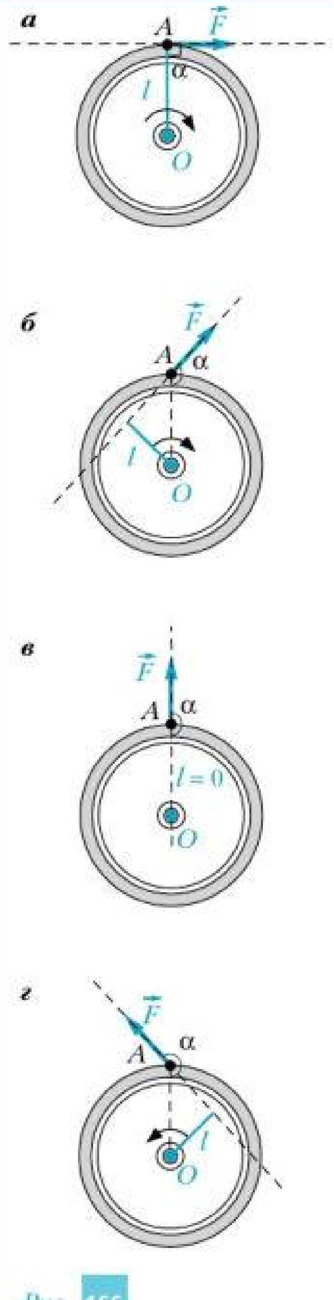


Рис. 166

Будем действовать на колесо в точке A с разными силами $\vec{F}$ (рис. 166). Эксперименты показывают, что раскручивающее действие силы зависит как от направления, так и от модуля силы. Для описания зависимости этого действия от направления силы вводят понятия *линии действия* и *плеча силы*.

! Линию, вдоль которой действует сила, называют линией действия этой силы.

На рис. 166, *а–г* линии действия силы $\vec{F}$ изображены пунктирами.

! Кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы называют плечом этой силы относительно данной оси.

Плечи сил показаны на рис. 166 отрезками, длины которых обозначены l.

Раскручивающее действие силы характеризуют *моментом силы*.

Моментом M силы $\vec{F}$ относительно данной оси называют физическую величину, равную произведению модуля силы на её плечо:

$$\boldsymbol{M = F \cdot l.} \qquad (4)$$

Если сила стремится раскручивать тело *против часовой стрелки*, то её момент считают *положительным* ($M > 0$). Если же сила стремится раскручивать тело *по часовой стрелке*, то её момент считают *отрицательным* ($M < 0$). При нулевом моменте силы раскручивающее действие отсутствует (*см.* рис. 166, *в*).

Из формулы (4) следует, что чем больше модуль силы и её плечо, тем больше её вращающий момент, а следовательно, тем больше её раскручивающее действие. В СИ момент силы измеряют в *ньютон-метрах* (Н · м).

Момент силы — величину, характеризующую раскручивающее действие силы, — можно описать исходя из энергетических соображений. Пусть велосипедное колесо (рис. 167), раскручиваясь вокруг оси O под действием приложенной в точке A силы $\vec{F}$, поворачивается на достаточно малый угол $\Delta\varphi$. В этом случае движение точки A можно считать прямолинейным, а величину её перемещения, равной $|OA| \cdot \Delta\varphi$. Это перемещение направлено по ка-

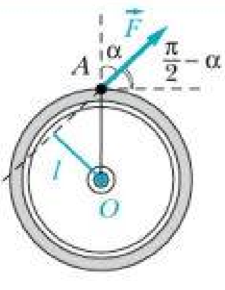


Рис. 167

сательной к ободу колеса, а следовательно, перпендикулярно OA. Пусть угол между лучом OA и направлением действия силы $\vec{F}$ равен α. Тогда проекция силы $\vec{F}$ на достаточно малое перемещение точки её приложения равна: $F \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = F \cdot \sin\alpha$. Поэтому элементарная работа силы $\vec{F}$ при этом достаточно малом перемещении равна:

$$\Delta A = (F \cdot \sin\alpha) \cdot |OA| \cdot \Delta\varphi = F \cdot (|OA| \cdot \sin\alpha) \cdot \Delta\varphi = F \cdot l \cdot \Delta\varphi = M \cdot \Delta\varphi. \qquad (5)$$

Совершённая над колесом положительная работа увеличивает кинетическую энергию его вращательного движения. Следовательно, чем больше работа силы $\vec{F}$, тем больше её раскручивающее действие. Из выражения (5) следует, что элементарная работа силы $\vec{F}$ над колесом определяется углом достаточно малого поворота и произведением модуля силы на её плечо, т. е. *моментом силы*. Понятно, что если направление раскручивающего действия силы и направление вращения колеса противоположны, то элементарная работа такой силы будет отрицательной.

Эксперименты показывают, что *если на твёрдое тело действует несколько сил, то их суммарное раскручивающее действие относительно любой выбранной оси определяется алгебраической суммой моментов этих сил относительно этой оси.*

Поэтому если алгебраическая сумма моментов всех действующих на твёрдое тело сил относительно любой оси равна нулю, то их суммарное раскручивающее действие равно нулю. Теперь мы можем сформулировать оба *условия равновесия твёрдого тела*.

Твёрдое тело в ИСО будет оставаться в равновесии, если одновременно выполнены два условия:
1) сумма всех действующих на тело сил равна нулю;
2) алгебраическая сумма моментов всех действующих на тело сил относительно любой оси равна нулю.

При выполнении первого условия всегда можно найти ИСО, в которой центр масс твёрдого тела неподвижен. Поэтому при рассмотрении второго условия часто удобно рассматривать оси вращения, проходящие через центр масс твёрдого тела. Если твёрдое тело не закреплено на оси, то обычно именно так и поступают при решении задач статики твёрдого тела.

Пусть на изначально покоившееся в ИСО твёрдое тело начинает действовать единственная сила $\vec{F}$, линия действия которой проходит через центр масс этого тела (рис. 168). Тогда раскручивающее действие этой силы относительно любой оси, проходящей через центр масс тела, будет рав-

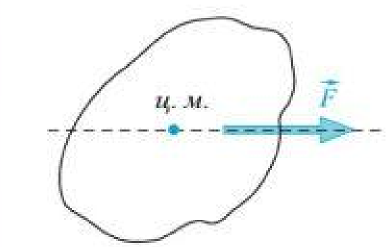


Рис. 168

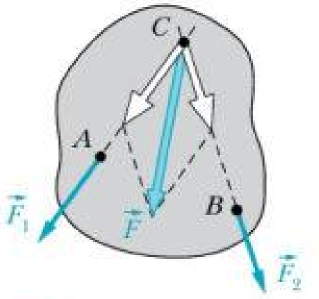


Рис. 169

но нулю. Поэтому такое тело будет двигаться в ИСО *поступательно* с ускорением.

Если же линия действия силы $\vec{F}$ не проходит через центр масс тела, то под действием этой силы тело начнёт двигаться, раскручиваясь. В этом легко убедиться, если начать тянуть, например, лежащую на столе ручку за один из её концов под углом к продольной оси ручки (чтобы линия действия силы не проходила через центр масс).

Рассмотрим твёрдое тело, на которое действуют силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, приложенные соответственно в точках A и B этого тела (рис. 169). Перемещение точки приложения силы вдоль линии её действия не изменяет плеча этой силы относительно любой выбранной оси. При этом не изменяется и момент этой силы относительно этой оси. Поэтому при перемещении точек приложения сил вдоль линий их действия не изменяется и суммарный момент этих сил относительно выбранной оси. Кроме того, при этом остаётся неизменной сумма этих сил. Следовательно, по теореме о движении центра масс не изменяется ускорение центра масс этого тела.

Таким образом, перемещение точек приложения действующих на твёрдое тело сил вдоль линий их действия не изменяет суммарного действия этих сил на это тело.

Пусть силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ действуют на твёрдое тело так, как показано на рис. 169, а линии их действия пересекаются в точке C. Перенесём точки приложения сил вдоль линий их действия в точку C. В результате согласно сказанному выше суммарное действие этих сил на рассматриваемое тело не изменится. Следовательно, сумма $\vec{F}$ этих сил, приложенная в точке C тела, оказывает на это тело такое же механическое действие, как и силы $\vec{F}_1$

и $\vec{F}_2$, приложенные соответственно в точках A и B этого тела. Поэтому полученную таким образом силу $\vec{F}$ называют *равнодействующей.*

Силу, действующую на твёрдое тело, называют равнодействующей всех действующих на это тело сил в случае, если она оказывает на это тело такое же механическое действие, как и все эти силы, действующие одновременно.

Понятно, что точку приложения равнодействующей силы можно перемещать вдоль линии её действия.

Пусть в *однородном* поле тяжести (где ускорение свободного падения $\vec{g}$ одинаково во всех точках пространства) удерживают неподвижно твёрдое тело, например однородный стержень массой m (рис. 170). На все части такого стержня действуют силы тяжести. Отпустим этот стержень. Эксперимент показывает, что под действием сил тяжести он начнёт падать поступательно. Следовательно, *в однородном поле тяжести действие сил тяжести на все части твёрдого тела можно заменить равнодействующей — одной силой тяжести, приложенной к его центру масс и равной сумме всех этих сил — произведению массы тела на ускорение свободного падения:* $m \cdot \vec{g}$. Это утверждение можно доказать, используя определение центра масс и рассмотрев моменты сил тяжести, действующих на все части твёрдого тела, относительно любой оси, проходящей через центр масс тела.

! В однородном поле тяжести центр масс тела совпадает с точкой приложения равнодействующей сил тяжести, действующих на все части тела, — его центром тяжести.

Особо отметим, что в некоторых случаях равнодействующей может и не быть. Пример такого случая показан на рис. 171. Действие на твёрдое тело двух равных по модулю противоположно направленных сил нельзя за-

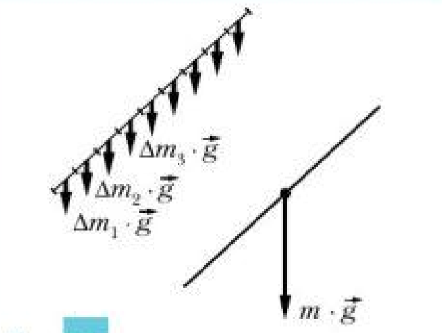


Рис. 170

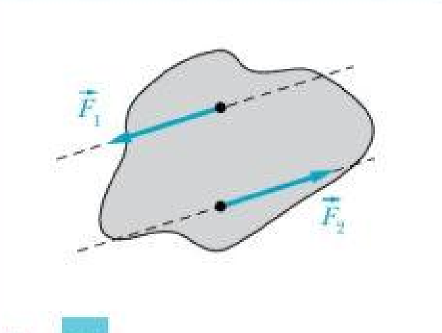


Рис. 171

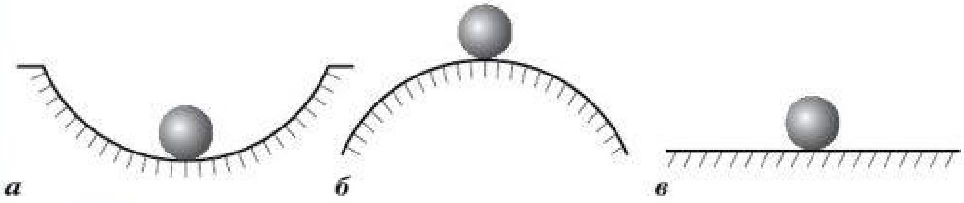


Рис. 172 Три вида равновесия твёрдых тел:
а – устойчивое; *б* – неустойчивое; *в* – безразличное

менить действием одной силы, если линии действия этих сил не совпадают. Такую систему двух сил называют *парой сил*.

Не существует равнодействующей и для сил, приложенных к разным точкам деформируемого тела.

В заключение напомним, что различают три вида равновесия твёрдых тел: *устойчивое*, *неустойчивое* и *безразличное*. Примеры этих видов равновесия показаны на рис. 172.

Равновесие твёрдого тела называют *устойчивым*, если при малом отклонении этого тела от положения равновесия сумма действующих на него сил (или моментов сил) стремится вернуть его в это положение.

Равновесие твёрдого тела называют *неустойчивым*, если при малом отклонении этого тела от положения равновесия сумма действующих на него сил (или моментов сил) стремится удалить его от положения равновесия.

Равновесие твёрдого тела называют *безразличным*, если отклонение тела от положения равновесия не приводит к появлению каких-либо сил, стремящихся вернуть тело в начальное положение или удалить от него.

Вопросы

1. Что называют центром масс тела?
2. При каких условиях центр масс твёрдого тела будет оставаться неподвижным в ИСО?
3. Что называют: а) линией действия силы; б) плечом силы; в) моментом силы?
4. Сформулируйте условия равновесия твёрдого тела.
5. В каком случае твёрдое тело будет двигаться поступательно при действии на него единственной силы?

6 Какую силу называют равнодействующей? Всегда ли существует равнодействующая? Приведите примеры.

7 Какую систему сил называют парой сил?

8 Какие три вида равновесия вам известны? Приведите примеры.

Упражнения

1 Докажите, что момент пары сил относительно любой оси, которая перпендикулярна плоскости, содержащей линии действия сил пары, имеет одно и то же значение.

*2 Докажите, используя определение центра масс и момента силы, что равнодействующая сил тяжести, действующих на все части твёрдого тела, находящегося в однородном поле тяжести, проходит через центр масс этого тела.

Для углублённого уровня

§ 37 Применение условий равновесия при решении задач статики

При решении многих задач о равновесии твёрдого тела требуется определить положение центра масс этого тела. Поэтому вначале рассмотрим пример решения задачи на определение положения центра масс твёрдого тела.

Задача 1

Пусть из тонкого однородного медного листа вырезан равносторонний треугольник ABC (рис. 173). Определите положение центра масс этого треугольника.

Будем рассматривать треугольник как систему материальных точек. Поместим начало отсчёта в центр O треугольника. Ось X проведём параллельно стороне AC, а ось Y — перпендикулярно ей через вершину B. Поскольку треугольник равносторонний, то ось Y является его осью симметрии. Поэтому для любой материальной точки *1* треугольника найдётся материальная точка *2* этого же треугольника,

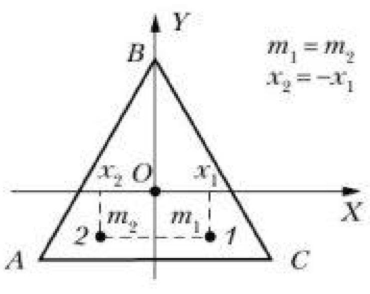


Рис. 173

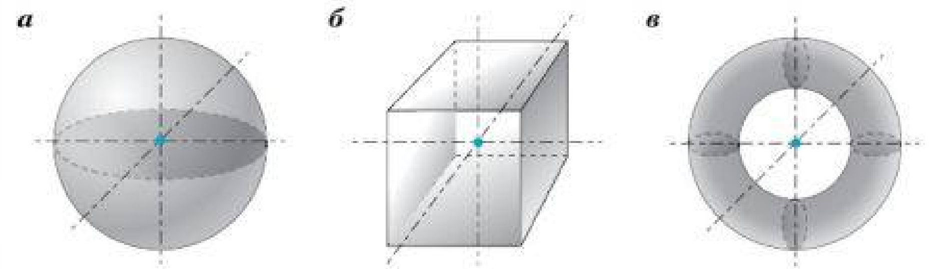


Рис. 174

симметричная *1* относительно оси *Y*. Треугольник вырезан из однородного листа. Поэтому массы точек *1* и *2* равны, а их координаты по оси *X* равны по модулю, но противоположны по знаку. Следовательно, числитель дроби в формуле для расчёта координаты x центра масс треугольника (*см.* уравнение (2) в § 30) будет равен нулю, а значит, $x_{цм} = 0$. Таким образом, центр масс треугольника лежит на оси *Y*, т. е. на его оси симметрии. Полученный результат означает, что *у любого однородного тела симметричной формы центр масс всегда находится на оси симметрии.*

Равносторонний треугольник *ABC* имеет три оси симметрии, пересекающиеся в его геометрическом центре *O*. Центр масс этого треугольника лежит на каждой из этих осей. Следовательно, центр масс рассмотренного треугольника совпадает с его геометрическим центром.

В общем случае если у однородного тела симметричной формы есть несколько осей симметрии, то его центр масс находится в точке пересечения этих осей (рис. 174, *а*, *б*). Отметим, что центр масс может находиться и вне тела (рис. 174, *в*).

Задача 2

Прямоугольная картина массой m висит на стене так, как показано на рис. 175, *а*. Прикреплённая к картине верёвка расположена в одной вертикальной плоскости с центром масс картины и образует с горизонтом угол β. Картина образует с вертикалью угол α. Высота картины равна H. Определите минимальное значение коэффициента трения между стеной и картиной.

Решение.

Шаг 0. Будем считать картину твёрдым симметричным по двум осям телом, центр масс которого находится в его середине (на равном удалении от сторон).

Шаг 1. Выберем инерциальную систему отсчёта так, как показано на рис. 175, *б*.

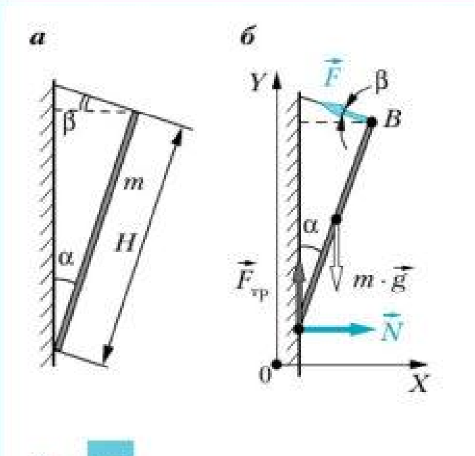


Рис. 175

Шаг 2. Изобразим действующие на картину силы: силу тяжести $m \cdot \vec{g}$, приложенную к её центру масс (центру тяжести), силу $\vec{N}$ нормальной реакции стены, силу $\vec{F}_{тр}$ трения картины о стену и силу $\vec{F}$, действующую на картину со стороны верёвки.

Шаг 3. Определим проекции сил на координатные оси. Проекции силы тяжести $m \cdot \vec{g}$ и силы $\vec{F}_{тр}$ на ось X равны нулю. Проекция силы $\vec{N}$ на эту ось положительна и равна её модулю: $N_x = N$. Проекция силы $\vec{F}$ на ось X отрицательна и равна $F_x = -F \cdot \cos\beta$. Поэтому сумма проекций всех сил на ось X равна: $N - F \cdot \cos\beta$.

Проекция силы тяжести на ось Y отрицательна и равна её модулю со знаком «минус»: $m \cdot g_y = -m \cdot g$. Проекция силы $\vec{F}$ на ось Y положительна и равна: $F_y = F \cdot \sin\beta$. Проекция силы трения на эту ось положительна и равна её модулю: $F_{тр\,y} = F_{тр}$. Проекция силы $\vec{N}$ на ось Y равна нулю. Поэтому сумма проекций всех сил на ось Y равна: $F \cdot \sin\beta + F_{тр} - m \cdot g$.

Шаг 4. Из первого условия равновесия в проекциях на координатные оси следует, что:

$$N - F \cdot \cos\beta = 0; \qquad (1)$$

$$F \cdot \sin\beta + F_{тр} - m \cdot g = 0. \qquad (2)$$

Шаг 4*. Запишем второе условие равновесия картины — равенство нулю суммы моментов действующих на неё сил относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости рисунка. Ось проведём через точку B картины. Такой выбор оси обусловлен следующими соображениями. Во-первых, под действием изображённых на рисунке сил картина может начать вращаться только вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка. Во-вторых, при таком выборе оси линия действия силы натяжения верёвки проходит через ось. Поэтому момент этой силы будет равен нулю. Кроме того, плечи сил нормальной реакции стены и трения легко выражаются через заданные в условии задачи параметры и соответственно равны: $H \cdot \cos\alpha$ и $H \cdot \sin\alpha$. Плечо силы тяжести равно $0{,}5H \cdot \sin\alpha$. Силы $\vec{N}$ и $m \cdot \vec{g}$ стремятся раскручивать картину против часовой стрелки, а сила тревия $\vec{F}_{тр}$ — в противоположном направлении. С учётом знаков второе условие равновесия картины относительно выбранной оси имеет вид:

$$N \cdot H \cdot \cos\alpha + m \cdot g \cdot 0{,}5H \cdot \sin\alpha - F_{тр} \cdot H \cdot \sin\alpha = 0. \qquad (3)$$

Шаг 5. По условию задачи картина не должна скользить. Следовательно, $\vec{F}_{тр}$ является силой трения покоя. Поэтому

$$F_{тр} \leqslant \mu \cdot N. \qquad (4)$$

При минимальном коэффициенте трения неравенство (4) превращается в равенство.

Шаг 6. В статике не используется, так как ускорения всех точек тела равны нулю по условию.

Шаг 7. Объединим полученные уравнения в систему:

$N - F \cdot \cos\beta = 0;$ (1) (*первое условие равновесия по оси X*)

$F \cdot \sin\beta + F_{тр} - m \cdot g = 0;$ (2) (*первое условие равновесия по оси Y*)

$N \cdot H \cdot \cos\alpha + m \cdot g \cdot 0{,}5H \cdot \sin\alpha - F_{тр} \cdot H \cdot \sin\alpha = 0;$
(3) (*второе условие равновесия*)

$F_{тр} = \mu \cdot N.$ (4) (*условие минимальности коэффициента трения*)

Шаг 8. Выражая F из уравнения (1) и подставляя его в уравнение (2), с учётом условия (4) получаем:

$$N \cdot (\mu + \operatorname{tg}\beta) = m \cdot g.$$

Выражая отсюда N и подставляя его в уравнение (3), с учётом условия (4) после приведения подобных членов имеем: $\mu = 2\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$.

Ответ: минимальный коэффициент трения $\mu = 2\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$.

Упражнения

1 Два человека держат однородное бревно цилиндрической формы горизонтально. Один человек держит бревно на расстоянии $l = 2$ м от его конца, а другой человек — за противоположный конец. Определите силы, с которыми бревно действует на каждого из людей, если масса бревна $M = 80$ кг, а его длина $L = 10$ м.

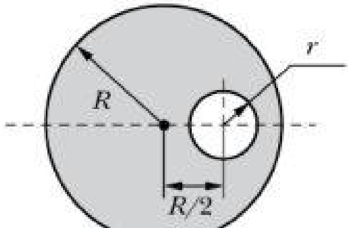


Рис. 176

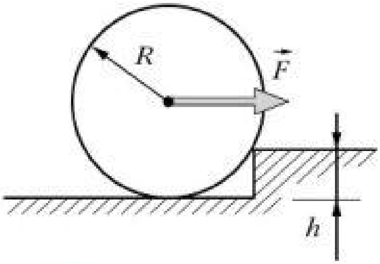


Рис. 177

2 Однородный цилиндр поставили на наклонную плоскость. Высота цилиндра равна H, а его радиус — R. Определите максимальный угол наклона плоскости к горизонту, при котором цилиндр ещё не будет опрокидываться.

3 Определите положение центра масс тонкого однородного диска с вырезом (рис. 176).

4 Тяжёлый однородный цилиндр массой M поднимают на ступеньку высотой h, прикладывая к его центру масс горизонтально направленную силу $\vec{F}$ (рис. 177). Определите минимальное значение этой силы, если радиус цилиндра равен R.

5 К гладкой вертикальной стене на нити длиной L подвешен шарик массой M. Радиус шарика равен R. Определите силу, с которой шарик давит на стену.

§ 38 Простые механизмы. Коэффициент полезного действия

В 7–9 классах вы уже изучали простые механизмы. *Механические устройства, с помощью которых можно изменять направление и модуль силы, называют простыми механизмами.* К простым механизмам относят рычаги, подвижные и неподвижные блоки, полиспасты, вороты, лебёдки, наклонные плоскости, винтовые домкраты, гидравлические прессы и др.

Рассмотрим основные физические принципы работы простых механизмов на примере рычага.

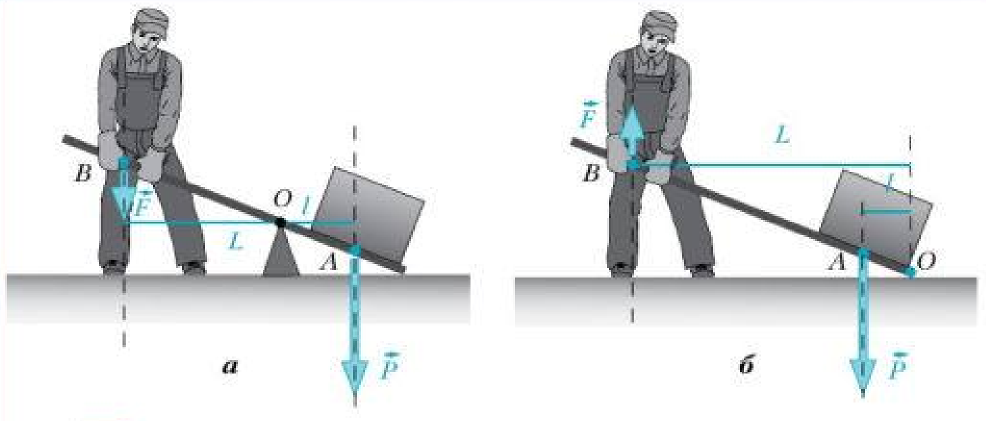


Рис. 178

Рычагом называют твёрдый стержень, который можно поворачивать вокруг оси, перпендикулярной стержню.

Если ось вращения рычага находится между точками приложения сил (рис. 178, *а*), то такой рычаг называют рычагом *первого* рода. Если же точки приложения сил находятся по одну сторону от оси вращения рычага (рис. 178, *б*), то такой рычаг называют рычагом *второго* рода.

Будем считать массу рычага первого рода и трение в оси вращения O (*см.* рис. 178, *а*) пренебрежимо малыми. При выполнении этих условий рычаг называют идеальным. При равномерном повороте идеального рычага согласно второму условию равновесия твёрдого тела должно выполняться соотношение:

$$F \cdot L - P \cdot l = 0. \qquad (1)$$

Пусть плечо L силы $\vec{F}$ в n раз больше плеча l силы $\vec{P}$. Тогда из уравнения (1) следует, что для равномерного подъёма камня человек должен приложить к рычагу силу $\vec{F}$, модуль которой в n раз меньше модуля веса $\vec{P}$ камня. Таким образом, *увеличивая плечо прикладываемой к рычагу силы, можно получить заранее заданный выигрыш в силе*.

Однако при использовании любого идеального рычага, *выигрывая в силе, во столько же раз проигрывают в перемещении*. Действительно, для подъёма камня на заданную высоту необходимо повернуть рычаг на определённый угол. Из рис. 178, *а* видно, что при повороте рычага точка B приложения силы $\vec{F}$ совершает перемещение, пропорциональное длине отрезка OB, в свою очередь пропорциональной L. Поэтому при увеличении плеча L в некоторое число раз модуль перемещения точки приложения силы $\vec{F}$ увеличивается в такое же число раз.

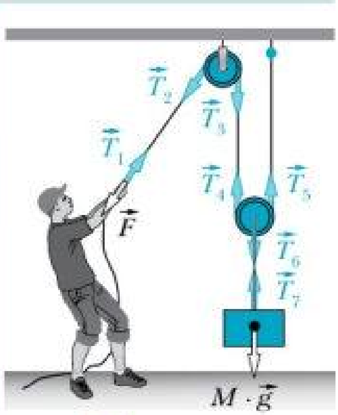


Рис. 179

Рассмотрим это свойство простых механизмов более подробно на примере комбинации подвижного и неподвижного блоков (рис. 179). Такую комбинацию считают идеальным простым механизмом, если можно пренебречь массами верёвок и блоков, а также силами трения. В этом случае модули сил натяжения верёвки в разных её сечениях равны между собой и равны модулю силы $\vec{F}$, с которой рабочий тянет верёвку. При этом $T_6 = T_7 = 2F$. Если груз поднимают равномерно, то сумма действующих на него сил равна нулю. Поэтому $T_7 = M \cdot g$. Следовательно, модуль силы $\vec{F}$ в 2 раза меньше модуля силы тяжести $M \cdot \vec{g}$ поднимаемого груза: $F = 0{,}5M \cdot g$. Таким образом, выигрыш в силе $n = 2$.

Пусть рабочий, вытягивая верёвку на длину l, равномерно поднимает груз на высоту h. Из рисунка видно (*см.* задачу 3 из § 22), что $l = 2h$. Совершённая рабочим работа (затраченная работа $A_з$) равна $A_з = F \cdot l$. Минимальная работа (полезная работа $A_п$), необходимая для подъёма груза, равна $A_п = M \cdot g \cdot h$. Поэтому в рассматриваемом случае $A_з = F \cdot l = 0{,}5M \cdot g \cdot 2h = A_п$.

! Соотношение $A_з = A_п$ справедливо для любого идеального простого механизма. Это соотношение называют *«золотым правилом» механики*.

В реальности (при учёте сил трения, а также масс рычагов, блоков, верёвок и т. п.) затраченная работа всегда больше полезной: $A_з > A_п$.

Отношение полезной работы к затраченной работе называют коэффициентом полезного действия (КПД) механизма:

$$\textbf{КПД} = \frac{A_п}{A_з}.$$

Коэффициент полезного действия часто выражают в процентах и обозначают греческой буквой η.

$$\eta = \frac{A_п}{A_з} \cdot 100\,\%.$$

Из сказанного следует, что КПД идеального простого механизма равен единице, а КПД реального механизма всегда меньше единицы.

Вопросы

1. Приведите примеры идеальных простых механизмов.
2. Сформулируйте «золотое правило» механики. При каких условиях справедливо это правило?
3. Что называют КПД? При каких условиях КПД реального ворота будет близок к единице?

Упражнения

1. Рассмотрите простые механизмы, используемые в велосипеде (руль, педаль, цепная передача). В каких из них добиваются выигрыша в силе, а в каких — выигрыша в скорости?
2. По наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α, рабочий поднял на высоту h груз массой M. Коэффициент трения груза о плоскость равен μ. Определите, во сколько раз совершённая при этом работа отличается от величины $M \cdot g \cdot h$.
3. На рис. 180 показана комбинация одного неподвижного и двух подвижных блоков. Пренебрегая массами верёвок и блоков, а также силами трения, определите выигрыш в силе при равномерном подъёме груза.

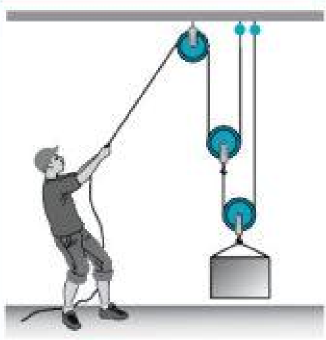


Рис. 180

§ 39 Законы гидро– и аэростатики

Вы знаете, что покоящиеся жидкости и газы действуют не только на стенки сосудов, в которых они находятся, но и на тела, помещённые в эти жидкости или газы. Если тело неподвижно относительно окружающей его среды, то сила, действующая на поверхность тела со стороны среды, всегда направлена перпендикулярно этой поверхности.

Силу, действующую перпендикулярно поверхности, называют силой давления.

Для описания результата действия силы давления используют величину, называемую *давлением*.

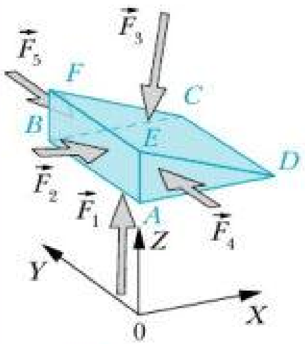


Рис. 182

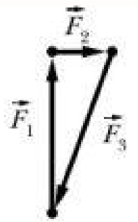


Рис. 183

вое условие равновесия выделенного объёма может быть записано в виде:

$$\vec{F}_4 + \vec{F}_5 = 0; \qquad (1)$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (1) означает, что центр масс призмы не имеет ускорения вдоль оси Y, уравнение (2) — что отсутствуют ускорения в плоскости XZ.

Из уравнения (2) следует, что силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ образуют треугольник (рис. 183), подобный основанию AED призмы:

$$\frac{F_1}{AD} = \frac{F_2}{AE} = \frac{F_3}{DE}. \qquad (3)$$

Умножая знаменатель каждой дроби на длину ребра AB, получаем, что отношение модуля силы давления, действующей на грань, к площади этой грани для всех граней одинаково:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} = \frac{F_3}{S_3}. \qquad (4)$$

Таким образом, давление жидкости на каждую из граней одинаково:

$$p_1 = p_2 = p_3. \qquad (5)$$

Поскольку выделенный объём может быть ориентирован произвольным образом, то полученное соотношение означает, что *давление на достаточно маленькую площадку, покоящуюся относительно жидкости в данной точке, не зависит от ориентации этой площадки.*

Гидростатическое давление. Атмосферное давление

Жидкости, так же как и газы, создают давление в результате действия на них сил тяжести. Например, каждый из вас знает, что человек, нырнувший в озеро, испытывает действие давления со стороны окружающей его воды. Причём чем глубже опускается ныряльщик, тем большее давление он испытывает.

Давление жидкости на покоящееся в ней тело называют гидростатическим давлением.

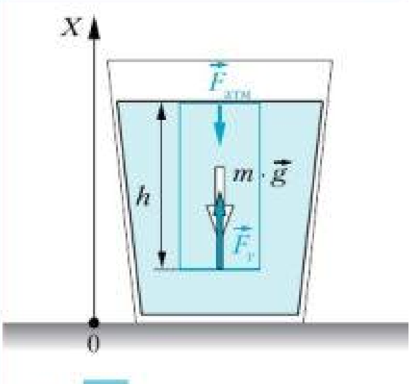


Рис. 184

Выведем формулу для расчёта гидростатического давления на глубине h. Будем считать жидкость несжимаемой. Тогда плотность ρ жидкости постоянна и не зависит от глубины. Рассмотрим вертикальный столб жидкости высотой h с площадью поперечного сечения S, находящийся над интересующей нас точкой. Выберем систему отсчёта, связанную с Землёй, как показано на рис. 184. Вдоль оси X на столб действуют сила тяжести $m \cdot \vec{g}$, сила атмосферного давления $\vec{F}_{атм}$ и сила $\vec{F}_г$ искомого гидростатического давления на глубине h. Запишем первое условие равновесия для рассматриваемого столба жидкости:

$$F_г - F_{атм} - m \cdot g = 0. \qquad (6)$$

Воспользуемся тем, что: 1) $F_г = p \cdot S$, где p — искомое давление на глубине h; 2) $F_{атм} = p_{атм} \cdot S$; 3) $m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g = \rho \cdot h \cdot S \cdot g$, где $V = h \cdot S$ — объём рассматриваемого столба жидкости. Подставив эти выражения в условие (6) и сократив получившееся уравнение на S, получим формулу для расчёта гидростатического давления:

$$p = p_{атм} + \rho \cdot g \cdot h. \qquad (7)$$

Из формулы (7) следует, что по мере подъёма тела с глубины действующее на него давление воды уменьшается до атмосферного.

Атмосферное давление также уменьшается по мере подъёма тела над поверхностью Земли. Однако закон этого уменьшения имеет более сложный вид. Это связано с тем, что, в отличие от жидкости, плотность воздуха с увеличением высоты подъёма нельзя считать постоянной. Она уменьшается по достаточно сложному закону, с которым вы познакомитесь позднее. Однако при небольшом подъёме от поверхности Земли приблизительно можно считать, что атмосферное давление уменьшается примерно на 10 Па на каждый метр подъёма. Если измерить, насколько упало давление в процессе подъёма, можно оценить высоту.

Впервые атмосферное давление в 1643 г. измерил итальянский учёный Эванджелиста Торричелли (1608–1647). Заполнив ртутью запаянную с одно-

На этом принципе основано действие *высотомера* — прибора, измеряющего высоту полёта летательного аппарата. На современных самолётах для измерения высоты полёта используют радиолокаторы.

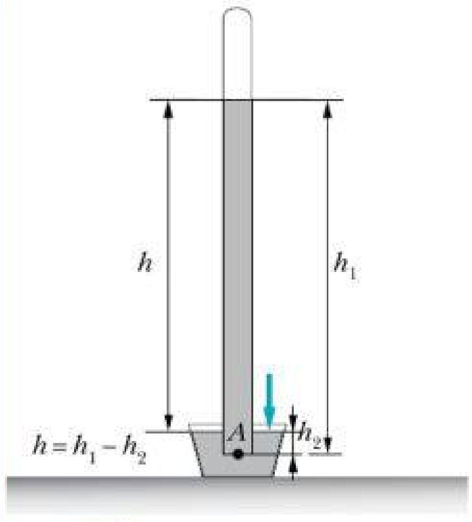


Рис. 185

го конца стеклянную трубку длиной 1 м и заткнув пальцем открытый конец, он перевернул трубку и опустил закрытое отверстие в чашку с ртутью. После этого он убрал палец и обнаружил, что из трубки вылилась только часть ртути (рис. 185). Над поверхностью ртути в трубке образовалось ничем не заполненное пространство — «торричеллиева пустота». Высота h столба оставшейся в трубке ртути оказалась примерно равной 760 мм. Эта высота h равна разности высот уровней ртути в трубке (h_1) и чашке (h_2). Разность давлений, создаваемая ртутью в трубке и чашке, уравновешивается давлением атмосферы на открытую поверхность ртути в чашке:

$$p_{\text{атм}} = \rho \cdot g \cdot (h_1 - h_2) = \rho \cdot g \cdot h.$$

Из этого соотношения легко понять физический смысл широко используемой внесистемной единицы измерения давления — *миллиметр ртутного столба* (мм рт. ст.). Нормальное атмосферное давление соответствует давлению 760 мм рт. ст.

Закон Архимеда

Поместим тело в жидкость, которая находится в сосуде. Тогда на любую точку поверхности этого тела будут действовать силы гидростатического давления (рис. 186, *а*). Определим сумму этих сил.

Для этого рассмотрим второй такой же сосуд, заполненный такой же жидкостью до уровня жидкости в первом сосуде (рис. 186, *б*). Выделим мысленно во втором сосуде объём жидкости, границы которого совпадают с границами тела в первом сосуде. Этот объём жидкости покоится относительно Земли, поэтому сумма всех действующих на него сил равна нулю. Следовательно, сумма сил гидростатического давления, действующих на выделенный объём жидкости, уравновешивает действующую на него силу тяжести. Таким образом, искомая сумма сил гидростатического давления равна по модулю силе тяжести выделенного объёма жидкости и направлена вертикально вверх (рис. 186, *в*). Эту сумму гидростатических сил называют *выталкивающей силой*.

На тело, находящееся в жидкости в первом сосуде, со стороны окружающей жидкости действует такая же выталкивающая сила. Впервые на существование этой силы указал древнегреческий учёный Архимед. Поэтому выталкивающую силу обычно называют *силой Архимеда*.

Сумму сил гидростатического давления, действующих на тело, покоящееся внутри жидкости, называют силой Архимеда.

Поскольку масса m выделенного объёма жидкости равна произведению её плотности $\rho_ж$ и объёма V, модуль силы Архимеда равен:

$$F_A = \rho_ж \cdot g \cdot V.$$

Сила Архимеда по модулю равна весу вытесненной телом жидкости.

Если тело поместить в газ, то на это тело будут действовать силы давления со стороны окружающего газа. Поэтому на такое тело также будет действовать выталкивающая сила, равная по модулю $F_A = \rho_г \cdot g \cdot V$, где $\rho_г$ – средняя плотность окружающего тело газа, а V – объём этого тела.

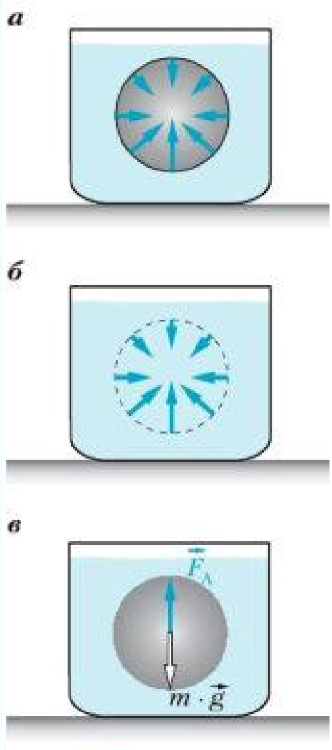


Рис. 186

На погружённое в жидкость (или газ) тело действует выталкивающая направленная вертикально вверх сила, равная по модулю весу вытесненной этим телом жидкости (или газа).

Это утверждение называют **законом Архимеда**.

Погрузим тело массой M в покоящуюся относительно Земли жидкость. Если действующая на тело сила тяжести по модулю превышает действующую на него силу Архимеда, то тело будет погружаться, т. е. тонуть. Если же модули этих сил равны, то центр масс тела будет оставаться в покое (первое условие равновесия). Наконец, если сила тяжести по модулю меньше силы Архимеда, то тело будет всплывать до тех пор, пока сила Архимеда (выталкивающая си-

Сказанное верно, если сосуд с жидкостью и находящимся в ней телом покоятся относительно некоторой ИСО. В иных случаях направление и модуль силы Архимеда могут быть определены с помощью второго закона Ньютона.

ла) не станет равной по модулю силе тяжести тела: $F_в = M \cdot g$. Это соотношение называют *условием плавания тела на поверхности жидкости*.

Для плавания тела на поверхности жидкости необходимо, чтобы сила тяжести, действующая на тело, уравновешивалась выталкивающей силой.

Вопросы

1. Что называют силой давления? Куда она направлена?
2. Что называют давлением?
3. Сформулируйте закон Паскаля.
4. Какие законы используют при выводе формулы для расчёта гидростатического давления?
5. Сформулируйте закон Архимеда.

*6. К какой точке погружённого в жидкость тела приложена сила Архимеда?

Упражнения

1. Оцените силы нормального атмосферного давления, действующие: а) на верхнюю; б) на боковую грань куба с длиной ребра $c = 1$ м, если куб лежит на поверхности Земли.
2. По радио сообщили, что атмосферное давление равно 730 мм рт. ст. Выразите это давление в паскалях и атмосферах.
3. На рис. 187 изображено несколько сосудов, соединённых между собой горизонтальной трубкой. Такие сосуды называют *сообщающимися*. Если в эти сосуды налить однородную жидкость, то поверхности жидкости во всех сосудах установятся на одной высоте h. Докажите это, используя формулу для расчёта гидростатического давления.
4. В правое колено U-образной трубки налили жидкость плотностью ρ_1, а в левое колено — жидкость плотностью ρ_2. Жидкости, не смешиваясь, установились так, как показано на рис. 188. Докажите, что $\rho_2 \cdot h_2 = \rho_1 \cdot h_1$.
5. Два однородных тела из одного и того же материала, подвешенные к концам разноплечих весов, уравновешивают друг друга в вакууме. Сохранится ли равновесие в воздухе? Изменится ли ответ, если эти тела изготовлены из материалов с разной плотностью?

*6. В ведре, наполненном до половины водой, плавает кусок льда. Как изменится уровень воды в ведре после того, как лёд растает? Как изменится при этом давление на дно ведра?

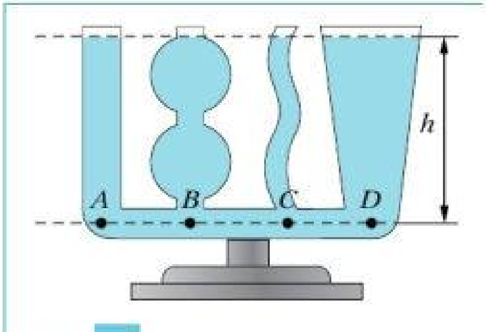


Рис. 187

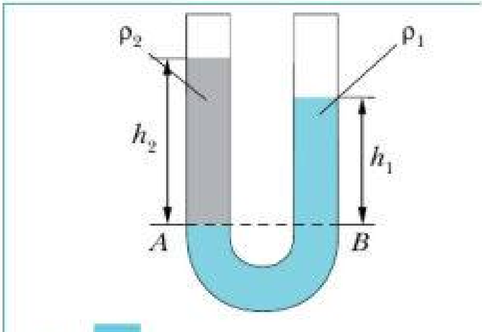


Рис. 188

Для углублённого уровня

7 В ведре, частично наполненном водой, плавает брусок, имеющий форму куба. Ведро стоит на полу покоящегося лифта. Верхняя грань бруска выступает над водой на высоту h_1. Лифт начинает подниматься с постоянным ускорением, модуль которого равен a. В результате верхняя грань бруска стала выступать над водой на высоту h_2. Сравните h_1 и h_2. (*Подсказка*: выведите формулу для расчёта модуля выталкивающей силы в движущемся с ускорением лифте.)

Для углублённого уровня

§ 40 Распределение давления в движущейся жидкости. Уравнение Бернулли.

В предыдущем параграфе вы изучили, как распределяется давление в неподвижной жидкости. Теперь исследуем распределение давления в жидкости, которая движется. При изучении движения реальной жидкости необходимо учитывать силы внутреннего сопротивления (вязкость), обусловленные движением слоёв жидкости относительно друг друга. Описание движения такой жидкости является сложной задачей, поэтому в физике используют её упрощённую модель. При этом пренебрегают такими свойствами реальной жидкости, как вязкость и сжимаемость.

Рассмотрим *ламинарное стационарное движение несжимаемой жидкости*, *пренебрегая силами вязкого трения*.

Движение жидкости называют ламинарным (слоистым), если её отдельные слои скользят друг относительно друга, не перемешиваясь.

Противоположным ламинарному движению жидкости является *турбулентное* (*вихревое*) движение, т. е. движение, при котором различные слои жидкости перемешиваются, образуя завихрения. Примерами такого движения являются завихрения воды за кормой быстро плывущего корабля, течение жидкости в турбине, образование ураганов и смерчей и др. Теоретическое описание турбулентного движения жидкости представляет собой очень сложную задачу, которая не решена полностью до настоящего времени.

Стационарным (*установившимся*) называют движение жидкости, при котором во всех точках пространства скорости элементов жидкости не изменяются с течением времени. Из этого определения следует, что если при стационарном движении в некоторый момент времени в данной точке пространства элемент жидкости имеет некоторую скорость, то в любой последующий (или предшествующий) момент времени другой элемент жидкости в этой же точке будет иметь (или имел) точно такую же скорость.

Примером близкого к ламинарному стационарному движению жидкости является спокойное течение воды в равнинных реках. Эксперименты показывают, что при увеличении скорости движения жидкости ламинарное течение переходит в турбулентное.

Пусть жидкость движется внутри гладкой трубы переменного сечения (рис. 189). Будем считать эту жидкость и её движение удовлетворяющими выбранной модели.

Рассмотрим объём жидкости $ABCD$, заключённый между верхним (на высоте h_1 над некоторым нулевым уровнем) узким (с площадью S_1) сечени-

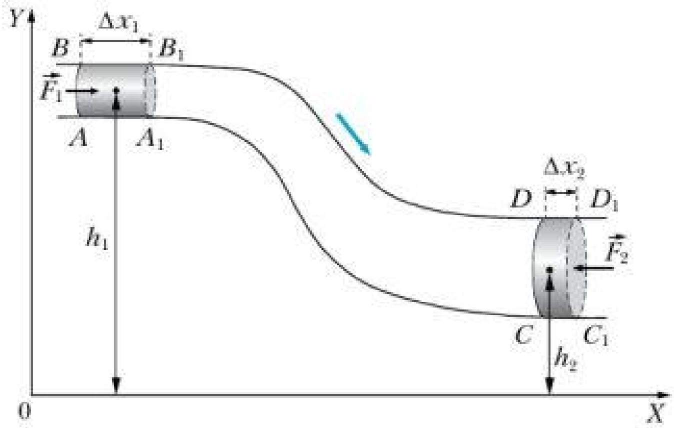


Рис. 189

ем AB и нижним (на высоте h_2) широким (с площадью S_2) сечением CD. Обозначим давление и модуль скорости потока в верхнем узком сечении через p_1 и v_1, а в нижнем — p_2 и v_2 соответственно. За достаточно малый промежуток времени Δt рассматриваемый объём жидкости под действием сил тяжести и сил F_1 и F_2 внешнего давления сместится и займёт объём $A_1B_1C_1D_1$. Согласно выбранной модели работа сил трения равна нулю. Поэтому изменение механической энергии рассматриваемого объёма жидкости за время Δt будет равно суммарной работе A_{ex} внешних сил давления F_1 и F_2:

$$(\Pi_к + K_к) - (\Pi_0 + K_0) = A_{ex}. \tag{1}$$

При этом работа внешних сил давления равна сумме положительной работы силы F_1 и отрицательной работы силы F_2:

$$A_{ex} = F_1 \cdot \Delta x_1 - F_2 \cdot \Delta x_2 = F_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t - F_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t =$$
$$= p_1 \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t - p_2 \cdot S_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t. \tag{2}$$

Движение жидкости стационарно. Поэтому механические энергии объёмов жидкости, заключённых между сечениями A_1B_1 и CD, в начальный и конечный моменты рассматриваемого промежутка времени Δt равны. Следовательно, левая часть уравнения (1) равна разности механических энергий жидкости в объёме CDC_1D_1 (между сечениями CD и C_1D_1) и жидкости в объёме ABA_1B_1 (между сечениями AB и A_1B_1). Поскольку жидкость несжимаема, эти объёмы равны. Обозначим их через ΔV. Понятно, что

$$\Delta V = S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t = S_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t. \tag{3}$$

Из сказанного, считая, что плотность жидкости равна ρ, получаем:

$$\left(\Pi_к + K_к\right) - \left(\Pi_0 + K_0\right) = \frac{1}{2}\rho \cdot \Delta V \cdot v_2^2 + \rho \cdot \Delta V \cdot g \cdot h_2 -$$
$$-\frac{1}{2}\rho \cdot \Delta V \cdot v_1^2 - \rho \cdot \Delta V \cdot g \cdot h_1. \tag{4}$$

Подставляя выражения (2) и (4) в формулу (1) и учитывая выражение (3), получаем:

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1.$$

Полученное соотношение называют *уравнением Бернулли* для ламинарного стационарного течения несжимаемой невязкой жидкости.

Даниил Бернулли (1700–1782) — швейцарский физик, академик Петербургской академии наук с 1725 по 1733 г., а позднее — её иностранный почётный член. В работе «Гидродинамика» (1738) он вывел уравнение ламинарного стационарного течения несжимаемой невязкой жидкости, лежащее в основе динамики жидкостей и газов.

В уравнении Бернулли слагаемые $\frac{1}{2}\rho \cdot v^2$ и $\rho \cdot g \cdot h$ представляют собой плотности кинетической и потенциальной энергий, т. е. отношение соответствующей энергии рассматриваемого элемента жидкости к его объёму.

Уравнение Бернулли лежит в основе действия различных технических устройств, например приборов для измерения скорости потока жидкости, водо- и пароструйных насосов.

В заключение отметим, что уравнение Бернулли применимо и к движению газов, если можно пренебречь их сжимаемостью.

Вопросы

1. Какое движение жидкости называют: а) ламинарным; б) турбулентным; в) стационарным?
2. Приведите примеры ламинарного и турбулентного движений жидкости.
3. Какую физическую модель используют при выводе уравнения Бернулли?
4. Какой фундаментальный закон был использован при выводе уравнения Бернулли?
5. Что называют плотностью потенциальной и кинетической энергий?

Упражнение

Проведите анализ уравнения Бернулли. Рассмотрите следующие случаи: а) скорость движения жидкости равна нулю (сравните полученный результат с формулой для расчёта гидростатического давления); б) труба располагается горизонтально.

СТАТИКА

Твёрдое тело в ИСО будет оставаться в равновесии, если одновременно выполнены два условия:

1) сумма всех действующих на тело сил равна нулю;

2) алгебраическая сумма моментов всех действующих на тело сил равна нулю относительно любой оси.

Линию, вдоль которой действует сила, называют линией действия этой силы.

Кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы называют плечом этой силы относительно данной оси.

Моментом M силы $\vec{F}$ относительно данной оси называют физическую величину, равную произведению модуля силы на её плечо:

$$M = F \cdot l.$$

Если сила стремится раскручивать тело против часовой стрелки, то её момент считают положительным ($M > 0$). Если же сила стремится раскручивать тело по часовой стрелке, то её момент считают отрицательным ($M < 0$).

Силу, действующую на твёрдое тело, называют равнодействующей всех действующих на это тело сил в случае, если она оказывает на это тело такое же механическое действие, как и все эти силы.

Перемещение точек приложения действующих на твёрдое тело сил вдоль линий их действия не изменяет суммарного действия этих сил на это тело.

Давлением называют отношение модуля F силы давления, действующей на опору, к площади S поверхности этой опоры:

$$p = \frac{F}{S}.$$

Закон Паскаля

Силы давления в данной точке покоящейся жидкости (или газа) действуют во всех направлениях одинаково.

Сумму сил гидростатического давления, действующих на тело, покоящееся внутри жидкости, называют силой Архимеда.

Закон Архимеда

На погружённое в жидкость (или газ) тело действует выталкивающая направленная вертикально вверх сила, равная по модулю весу вытесненной этим телом жидкости (или газа).

Для углублённого уровня

Глава 6

Динамика вращательного движения

В предыдущей главе были рассмотрены условия, при которых твёрдое тело остаётся в равновесии, т. е. такое тело относительно ИСО либо покоится, либо движется так, что его движение представляет собой суперпозицию равномерного поступательного движения и равномерного вращения.

Очень важным является вопрос: можно ли определить, как будет изменяться характер движения твёрдого тела, если эти условия не выполняются?

Оказывается, можно! Для этого необходимо прежде всего выяснить, какие силы действуют на тело. Затем, используя теорему о движении центра масс (*см.* § 30), следует определить ускорение $\vec{a}_{\text{цм}}$ центра масс этого тела. После того как будет известно ускорение $\vec{a}_{\text{цм}}$, удобно рассматривать движение тела как суперпозицию: 1) поступательного движения, при котором все точки тела движутся так же, как его центр масс; 2) вращения вокруг оси, проходящей через этот центр масс. Наконец, для полного описания интересующего нас изменения характера движения остаётся выяснить, *как изменяется угловая скорость вращения твёрдого тела вокруг оси, проходящей через его центр масс, в результате действия на тело заданных сил*. Рассмотрению последнего вопроса и посвящена данная глава.

§ 41 Динамика вращательного движения. Момент инерции

Пусть в точке O горизонтальной плоскости шарнирно закреплён конец лёгкой спицы длиной r (рис. 190). К другому концу этой спицы прикреплён маленький шарик массой m. Будем считать шарик материальной точкой, а спицу невесомой и нерастяжимой. Кроме того, будем прене-

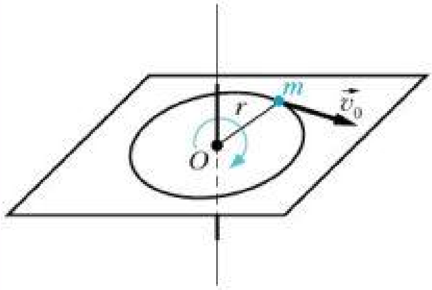


Рис. 190

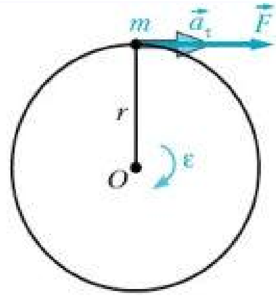


Рис. 191

брегать всеми силами трения. Тогда, если шарику сообщить в горизонтальном направлении начальную скорость $\vec{v}_0$, он будет равномерно двигаться по окружности радиусом r.

Представим себе, что в некоторый момент времени на шарик начинает действовать сила $\vec{F}$, направленная по касательной к траектории шарика, как показано на рис. 191. Под действием этой силы, согласно второму закону Ньютона, шарик приобретает тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ (*см.* § 10), направление которого совпадает с направлением силы $\vec{F}$. При этом:

$$F = m \cdot a_\tau. \qquad (1)$$

Умножим обе части уравнения (1) на r. С учётом того, что $a_\tau = r \cdot \varepsilon$, где ε — угловое ускорение шарика, получаем:

$$r \cdot F = m \cdot r^2 \cdot \varepsilon. \qquad (2)$$

Произведение в левой части уравнения (2) равно моменту M силы $\vec{F}$ относительно вертикальной оси, т. е. равно величине, количественно характеризующей раскручивающее действие этой силы. Из формулы (2) следует, что угловое ускорение, приобретаемое материальной точкой под действием момента силы, пропорционально этому моменту с коэффициентом $m \cdot r^2$.

Физическую величину, равную произведению массы m материальной точки на квадрат расстояния r от оси вращения до этой точки, называют моментом инерции I этой точки относительно данной оси:

$$\boldsymbol{I = m \cdot r^2}. \qquad (3)$$

С учётом формулы (3) уравнение (2) можно записать в виде:

$$M = I \cdot \varepsilon. \qquad (4)$$

Это соотношение называют *уравнением вращательного движения материальной точки.*

Любое тело можно представить как совокупность материальных точек.

Моментом инерции I твёрдого тела относительно данной оси называют физическую величину, равную сумме моментов инерции I_i всех материальных точек этого тела относительно этой оси:

$$I = \sum I_i = \sum m_i \cdot r_i^2, \qquad (5)$$

где m_i — масса i-й материальной точки, r_i — расстояние от данной оси до i-й точки.

Из уравнения (5) следует, что для расчёта момента инерции твёрдого тела в общем случае необходимо выполнить достаточно сложные математические операции. Однако в некоторых случаях это можно сделать сравнительно просто. Например, можно показать, что момент инерции однородного тонкостенного обруча массой M и радиусом R относительно его оси симметрии, перпендикулярной плоскости обруча, равен:

$$I = M \cdot R^2. \qquad (6)$$

Момент инерции однородного диска массой M и радиусом R относительно его оси симметрии, перпендикулярной плоскости диска, равен:

$$I = \frac{1}{2} M \cdot R^2. \qquad (7)$$

Можно также показать, что для любого твёрдого тела выполняется соотношение, аналогичное (4):

$$M = I \cdot \varepsilon, \qquad (8)$$

где M — алгебраическая сумма моментов всех действующих на твёрдое тело сил относительно данной оси, I — момент инерции этого тела относительно той же оси, ε — угловое ускорение его вращательного движения вокруг этой оси.

Соотношение (8) называют *уравнением вращательного движения твёрдого тела.*

В заключение отметим, что, зная момент инерции I твёрдого тела и угловую скорость ω его вращения относительно неподвижной в ИСО оси, можно достаточно просто вычислить кинетическую энергию тела.

Действительно, кинетическая энергия i-й точки массой m_i, движущейся со скоростью, модуль которой равен v_i, равна: $K_i = \frac{m_i \cdot v_i^2}{2}$. Если эта точка находится от оси вращения на расстоянии r_i и тело вращается вокруг этой оси с угловой скоростью ω, то $v_i = \omega \cdot r_i$ и $K_i = \frac{m_i \cdot \omega^2 \cdot r_i^2}{2}$. Поскольку кинетическая энергия K тела равна сумме кинетических энергий всех его материальных точек, имеем:

$$K = \sum K_i = \sum \frac{m_i \cdot \omega^2 \cdot r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \cdot \sum m_i \cdot r_i^2 = \frac{I \cdot \omega^2}{2}. \qquad (9)$$

Вопросы

1. Что называют моментом инерции материальной точки относительно данной оси?
2. Какое уравнение называют уравнением вращательного движения материальной точки?
3. Что называют моментом инерции твёрдого тела относительно данной оси?
4. Можно ли определить угловое ускорение твёрдого тела относительно данной оси, если известны действующие на него силы, точки приложения этих сил и момент инерции тела относительно этой оси? Как это сделать?

Упражнения

1. Определите размерность момента инерции тела в СИ.
2. Докажите справедливость формулы (6).
3. Сравнив формулы (6) и (7), объясните, почему момент инерции однородного диска меньше момента инерции однородного тонкостенного обруча такой же массы и радиуса.
4. Докажите, что момент инерции однородной тонкостенной трубы массой M и радиусом R относительно её оси симметрии, перпендикулярной плоскости её поперечного сечения, может быть рассчитан по формуле (6) и не зависит от длины трубы.
5. Велосипедное колесо массой $M = 2$ кг может свободно вращаться вокруг своей удерживаемой неподвижно оси. На обод колеса в некоторый момент времени начинает действовать сила $\vec{F}$, направленная так, как показано на рис. 166, *а* из § 36. Модуль этой силы равен 100 Н. Определите угловое ускорение колеса. Считайте, что вся масса колеса равна массе его тонкостенного обода. Радиус обода $R = 0{,}5$ м.

6 Определите модуль и направление силы, с которой велосипедное колесо из упражнения 5 действует на ось O.

*7 Однородный цилиндр массой M и радиусом R может свободно вращаться вокруг своей закреплённой оси OO_1. На цилиндр намотана лёгкая нерастяжимая верёвка, конец которой в некоторый момент времени начинают тянуть с постоянной силой $\vec{F}$ так, как показано на рис. 192. Зная, что верёвка не скользит по цилиндру, определите кинетическую энергию цилиндра через время t после начала действия силы.

*8 Тонкий обруч радиусом R скатывается без скольжения с горки высотой H. Определите скорость центра обруча в конце горки.

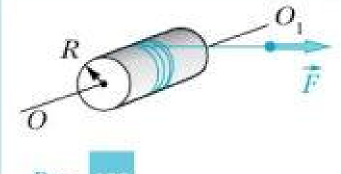


Рис. 192

§ 42 Момент импульса. Закон сохранения момента импульса

Рассмотрим твёрдое тело, которое вращается с угловой скоростью $\omega_н$ вокруг неподвижной относительно инерциальной системы отсчёта оси. Пусть в некоторый момент времени на тело начинают действовать силы, суммарный момент которых относительно оси вращения равен M. Тогда, согласно уравнению вращательного движения, угловое ускорение ε тела будет равно:

$$\varepsilon = \frac{M}{I}, \qquad (1)$$

где I — момент инерции тела относительно данной оси.

Рассмотрим достаточно малый промежуток времени Δt, в течение которого суммарный момент сил, действующих на рассматриваемое тело, можно считать постоянным. Тогда угловое ускорение тела будет постоянным и, согласно определению равным:

$$\varepsilon = \frac{\omega_к - \omega_н}{\Delta t}, \qquad (2)$$

где $\omega_к$ — угловая скорость тела в момент окончания промежутка времени Δt.

Из уравнений (1) и (2) получаем:

$$M \cdot \Delta t = I \cdot (\omega_к - \omega_н) = I \cdot \omega_к - I \cdot \omega_н. \qquad (3)$$

Силы взаимодействия тел *1* и *2* по третьему закону Ньютона равны по модулю, направлены в противоположные стороны и лежат на одной прямой. Поэтому сумма их моментов равна нулю. Из этого следует, что внутренние силы не могут изменить момент импульса системы. В результате уравнение (8) принимает вид:

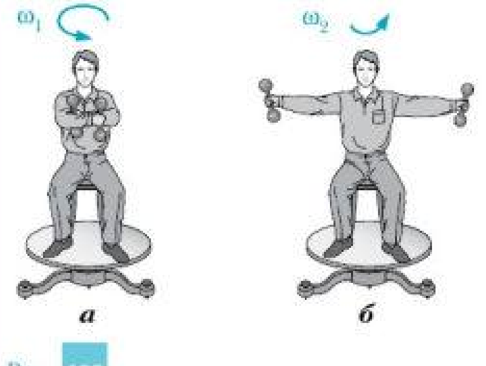
$$\Delta L = (M_{1\,ex} + M_{2\,ex}) \cdot \Delta t. \qquad (9)$$

Следовательно, *изменение момента импульса системы тел относительно неподвижной в инерциальной системе отсчёта оси равно произведению постоянной суммы моментов всех внешних сил относительно этой оси на время действия сил.*

Из уравнения (9) следует, что если $M_{1\,ex} + M_{2\,ex} = 0$, то $\Delta L = 0$. В результате получаем **закон сохранения момента импульса**.

Если сумма моментов всех внешних сил, действующих на тела системы, относительно неподвижной в ИСО оси вращения равна нулю, то момент импульса системы тел относительно этой оси не изменяется с течением времени (сохраняется).

Справедливость закона сохранения момента импульса легко продемонстрировать с помощью так называемой скамьи Жуковского (рис. 193). Скамья Жуковского представляет собой стул, сиденье которого может практически свободно вращаться вокруг вертикальной оси. Сидящий на скамье человек, оттолкнувшись от пола ногой, начинает вращаться. Опыт показывает, что если силы трения достаточно малы, то угловая скорость вращения системы остаётся неизменной до тех пор, пока не изменится суммарный момент инерции этой системы. Если же суммарный момент инерции системы изменяется (например, человек сводит или разводит руки с гантелями), то изменяется и угловая скорость вращения системы.



а *б*

Рис. 193

Воспользуемся законом сохранения момента импульса системы для объяснения наблюдаемых явлений. Пусть сразу после отталкивания от пола руки человека с гантелями были прижаты к груди (*см.* рис. 193, *а*). При этом момент инерции системы был равен I_1, а угловая скорость вращения — ω_1. Следовательно, момент импульса системы был равен: $L_1 = I_1 \cdot \omega_1$. После разведения человеком рук с гантелями в стороны (*см.* рис. 193, *б*) момент инерции системы увеличивается и становится равным I_2. Обозначим новую угловую скорость ω_2. Тогда новый момент импульса системы будет равен: $L_2 = I_2 \cdot \omega_2$. В рассматриваемом эксперименте сумму моментов всех внешних сил можно считать равной нулю. Поэтому, согласно закону сохранения момента импульса, начальный момент импульса системы должен быть равен её конечному моменту импульса:

$$L_1 = L_2, \text{ или } I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2. \qquad (10)$$

Из равенства (10) следует, что при увеличении момента инерции угловая скорость должна уменьшаться. Напротив, при возвращении рук с гантелями в исходное положение, когда момент инерции системы уменьшается, угловая скорость должна возрастать практически до прежней величины. Именно это и наблюдается в эксперименте.

Вопросы

1. Что называют моментом импульса твёрдого тела?
2. Как изменяется с течением времени момент импульса твёрдого тела относительно неподвижной в ИСО оси вращения при действии на него постоянного суммарного момента внешних сил?
3. Могут ли внутренние силы изменить момент импульса системы тел?
4. Сформулируйте закон сохранения момента импульса.

Упражнения

1. Фигурист, вращаясь на носке конька, для замедления своего вращения разводит руки в стороны. При этом момент инерции фигуриста относительно оси вращения изменяется в n раз. Зная, что действующие на фигуриста силы трения достаточно малы, оцените, как изменяется угловая скорость вращения фигуриста.
2. На краю неподвижной горизонтальной круглой платформы радиусом $r = 10$ м и массой $M = 100$ кг стоит ученик массой $m = 50$ кг. Платформа может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через её центр. Ученик начинает идти вдоль края платформы. Оцените угловую скорость платформы в тот момент, когда модуль скорости ученика относительно платформы станет равным $v = 2$ м/с. Платформу считайте однородным диском.

Молекулярная физика и термодинамика

Мы переходим к изучению свойств вещества и различных тепловых явлений, таких, как нагревание и охлаждение вещества, его переходы из одного агрегатного состояния в другое и т. п. Применение законов классической механики Ньютона не позволяет ни описать, ни объяснить некоторые из этих явлений. Это обусловлено тем, что объекты изучения состоят из огромного числа движущихся и взаимодействующих между собой частиц вещества — молекул (атомов).

Изучению тепловых явлений посвящены два раздела физики — *молекулярно-кинетическая теория* (*МКТ*) и *термодинамика*. Принципиальное различие между ними заключается в методах исследования. Молекулярно-кинетическая теория исходит из представлений о молекулярном строении вещества, об особенностях его внутренней структуры и о беспорядочном движении его частиц. В этом разделе физики при получении основных выводов используют методы теории вероятностей — методы статистики. Поэтому этот раздел часто называют статистической физикой.

Термодинамика же исходит из законов, сформулированных на основе обобщения огромного экспериментального материала, и не использует какие-либо модели строения вещества. Поэтому термодинамика не вскрывает природу изучаемых явлений. Однако она даёт возможность получить ряд весьма важных общих результатов о свойствах и поведении физических объектов. Результаты исследований термодинамики широко применяют при решении многих практических задач.

В курсе физики сознательно не проводят резкой границы между МКТ и термодинамикой, так как полученные ими результаты взаимно дополняют друг друга.

Глава 7 Основы молекулярно-кинетической теории и термодинамики

§ 43 Основные положения молекулярно-кинетической теории. Характер движения и взаимодействия молекул в газах, жидкостях и твёрдых телах

В основе молекулярно-кинетической теории лежат *три основных положения*.

! Все вещества состоят из частиц.
Эти частицы находятся в непрерывном хаотическом движении.
Частицы взаимодействуют друг с другом.

Предположения о том, что вещества, из которых состоят окружающие тела, представляют собой совокупность мельчайших частиц, высказывали ещё философы античного мира (Демокрит, Эпикур, Лукреций и др.). Однако их суждения опирались только на умозрительные заключения. В настоящее время получены экспериментальные факты, однозначно доказывающие, что вещество состоит из молекул, а молекулы, в свою очередь, состоят из ещё более мелких частиц — атомов. Напомним, что *молекулы — мельчайшие частицы вещества, имеющие все химические признаки этого вещества*.

Современные методы исследования позволяют увидеть отдельные молекулы и атомы и оценить их размеры. Согласно этим исследованиям размер атома $\sim 10^{-10}$ м. Размеры большинства молекул, состоящих из нескольких атомов, имеют тот же порядок. Размеры же «гигантских» молекул (полимеров, белков и т. п.) могут достигать долей микрометра (10^{-6} м).

Молекулы, из которых состоит то или иное вещество, хаотически движутся друг относительно друга. Это доказывает, например, беспорядочное движение малых частиц (размером около 10^{-6} м), взвешенных в жидкости или газе. Впервые это движение описал английский ботаник Роберт Броун (1773–1858) в 1827 г. Он наблюдал в микроскоп беспорядочное движение спор плауна в капельке воды. С тех пор подобное движение стали называть *броуновским движением*, а совершающие такое движение частицы – *броуновскими частицами*.

Броуновское движение представляет собой хаотическое движение мелких частиц в жидкости или в газе.

Броуновская частица по своим размерам в миллионы раз больше (и тяжелее) окружающих её молекул среды. Поэтому с точки зрения механики объяснить такое её движение невозможно. Действительно, со стороны жидкости на движущуюся в ней частицу должны действовать силы сопротивления, препятствующие её движению. Поэтому движение частиц в жидкости должно было бы замедляться с течением времени. Однако *темп движения броуновских частиц не изменяется, если температура среды остаётся постоянной*.

Движение броуновских частиц объясняется тем, что молекулы окружающей среды непрерывно хаотически движутся. В результате частицы непрерывно испытывают множество ударов молекул с разных сторон. Число и сила ударов имеют *случайный* характер. Из-за этого то и дело случайным образом изменяются модуль и направление скорости движения броуновской частицы. Пример траекторий броуновских частиц показан на рис. 194. Теория броуновского движения была разработана только в начале XX в. польским учёным Марианом Смолуховским (1872–1917) и физиком-теоретиком Альбертом Эйнштейном (1879–1955).

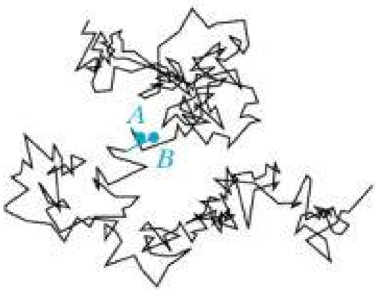


Рис. 194

Эксперименты и теория показывают, что при нагревании темп броуновского движения увеличивается. Это доказывает, что при нагревании увеличивается и темп хаотического движения молекул. По этой причине хаотическое движение молекул часто называют *тепловым движением*.

О том, что молекулы неподвижного в целом вещества совершают хаотическое движение друг относительно друга, свидетельствует и явление *диффузии*.

Диффузией называют взаимное проникновение соприкасающихся веществ друг в друга вследствие теплового движения частиц этих веществ.

Диффузией объясняется, в частности, распространение запахов. Так, во время отсутствия в комнате потоков воздуха запах, например духов, от одной стены комнаты до противоположной распространяется за несколько минут. При этом скорости молекул в воздухе при комнатной температуре превышают сотни метров в секунду. Почему же скорость распространения запаха — скорость диффузии — столь мала?

Движущаяся частица пахучего вещества на своём пути встречает хаотически движущиеся молекулы воздуха. Испытывая удары множества молекул, она случайным образом меняет направление своего движения. В среднем за одну секунду частица испытывает несколько миллиардов соударений с разных сторон. Поэтому траектория движения частицы вещества напоминает траекторию движения броуновской частицы. Из-за этого модуль скорости продвижения частицы (скорость диффузии) в одном направлении (к противоположной стене) во много раз меньше модуля её скорости, с которой она движется между двумя последовательными соударениями.

Диффузия наблюдается не только в газах, но и в жидкостях и в твёрдых телах. Для примера на рис. 195 показано, как в результате диффузии с течением времени выравнивается концентрация раствора медного купороса в воде. Диффузией в твёрдых телах объясняется тот факт, что если сжать свинцовую и золотую пластинки, то по прошествии нескольких лет в сжатом состоянии свинец и золото проникнут друг в друга.

Эксперименты показывают, что в жидкостях диффузия происходит медленнее, чем в газах, но быстрее, чем в твёрдых телах.

! Во всех агрегатных состояниях скорость диффузии увеличивается при нагревании.

Это объясняется тем, что *при нагревании вещества увеличивается темп хаотического (теплового) движения молекул и атомов.*

Явление диффузии играет важную роль в природе. Именно благодаря диффузии поддерживается однородный состав атмосферного воздуха вблизи поверхности Земли. Диффузия растворов разных

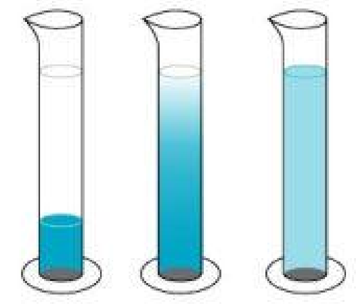


Рис. 195

веществ способствует питанию растений. В последние десятилетия диффузия широко применяется в технике, особенно при изготовлении полупроводниковых элементов, используемых в современных устройствах (компьютерах, мобильных телефонах, телевизорах, лазерах и т. п.).

Изменение направления движения молекул при их соударениях указывает на то, что между молекулами существуют силы отталкивания. Существование же вещества в жидком и твёрдом агрегатных состояниях доказывает, что между молекулами имеются и силы взаимного притяжения. Попробуйте, например, разорвать толстую нитку или растянуть металлический стержень. Вы почувствуете, что для этого требуется приложить значительные усилия. Следовательно, между частицами, составляющими нить или стержень, возникают силы притяжения, которые препятствуют попыткам увеличить расстояние между ними. Из-за действия этих сил окружающие нас тела не распадаются на отдельные молекулы и атомы.

Изучим взаимодействие между молекулами вещества подробнее. Любое твёрдое тело, если к нему не прикладывать сил, не деформируется. Следовательно, не изменяются и средние расстояния между молекулами в веществе. Это объясняется тем, что при некотором расстоянии r_0 между центрами двух молекул вещества силы притяжения и отталкивания скомпенсированы (рис. 196). Из рисунка видно, что значение суммы F сил отталкивания и притяжения обращается в нуль, когда r равно r_0. Если же расстояние r по каким-либо причинам становится меньше r_0 (тело сжимают), то силы взаимного отталкивания $F_о$ по модулю превышают силы притяжения $F_п$. В результате молекулы отталкиваются друг от друга. Напротив, если расстояние r становится больше r_0 (тело растягивают), то силы взаимного притяжения по модулю превышают силы отталкивания, и молекулы притягиваются друг к другу. Поэтому при попытках деформировать тело оно сопротивляется внешнему воздействию. В разных веществах силы взаимного притяжения и отталкива-

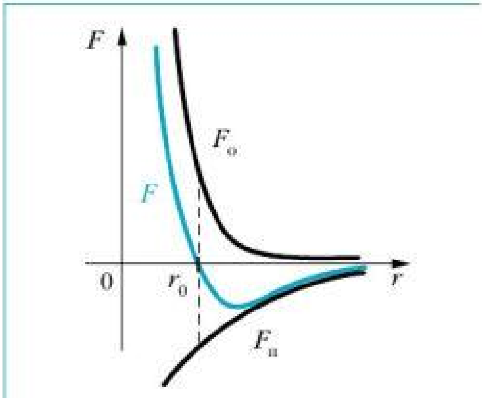


Рис. 196 Пример зависимости значений силы отталкивания $F_о$ и силы притяжения $F_п$ от расстояния между центрами двух молекул. Сила взаимодействия F между двумя молекулами – результат сложения этих сил

ния между молекулами различны. Поэтому разные вещества имеют разные упругость и прочность. Для атомов различных веществ расстояние r_0 различно и меняется в пределах от 0,074 нм (для двух атомов водорода) до 0,39 нм (для двух атомов калия).

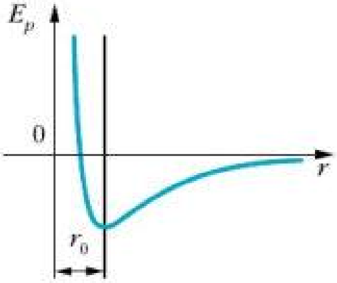


Рис. 197

Взаимодействие между двумя молекулами вещества можно описать и зависимостью потенциальной энергии их взаимодействия от расстояния между ними (рис. 197). Из рисунка видно, что минимум потенциальной энергии соответствует расстоянию r_0.

Одно и то же вещество в зависимости от внешних условий может находиться в разных *агрегатных состояниях*: газообразном, жидком или твёрдом.

> **!** Существование разных агрегатных состояний объясняется различием в характере взаимодействия и движения молекул в веществе.

В газах среднее расстояние между молекулами значительно больше размеров молекул. Из-за этого силы взаимного притяжения между ними малы. Поэтому каждая молекула в газе движется практически прямолинейно, пока не столкнётся с другой молекулой или стенкой сосуда, в котором находится газ. При этих столкновениях проявляются силы взаимного отталкивания. *Молекулы газа движутся хаотически и заполняют весь предоставленный им объём.*

В твёрдых телах молекулы вещества находятся друг от друга в среднем на расстояниях r_0, близких к размерам самих молекул. Силы взаимного притяжения и отталкивания между молекулами скомпенсированы. При небольшом изменении этого расстояния проявляются значительные силы взаимного притяжения или отталкивания. Поэтому твёрдые тела сохраняют свою форму и размеры до тех пор, пока к ним не прикладывают значительные внешние усилия.

Как и в газах, молекулы в твёрдом веществе также движутся. Однако силы взаимодействия с «соседями» не позволяют молекуле (атому) в твёрдом веществе существенно удалиться от своего равновесного положения. Поэтому *молекулы в твёрдом теле совершают лишь хаотические колебания вблизи своих равновесных положений.*

Силы взаимодействия между молекулами в жидкости меньше, чем в твёрдых телах. Напротив, интенсивность колебаний молекул в жидкости больше, чем молекул в твёрдом теле из того же вещества. Вследствие этого обычно среднее расстояние между молекулами в жидкости несколько больше, чем в твёрдом теле. *Молекулы в жидкости не имеют конкретного места и могут часто менять своих «соседей»*. Этим объясняется текучесть жидкости — она легко меняет свою форму.

В то же время из-за малых расстояний между молекулами в жидкости силы их взаимного притяжения достаточны для того, чтобы не позволить молекулам в жидкости «разбежаться» на большие расстояния, как это происходит в газах. При попытке же уменьшить объём жидкости между молекулами проявляются очень большие силы взаимного отталкивания. Так, при увеличении внешнего давления на жидкость до сотен атмосфер её объём изменяется на очень малую величину — десятые, а иногда и тысячные доли процента. Например, если 1 л воды подвергнуть давлению, в 100 раз большему нормального атмосферного давления, то её объём уменьшится всего лишь на 5 см^3, т. е. на 0,5 % начального объёма. Поэтому, *как и твёрдые тела, жидкости имеют определённый объём.*

Вопросы

1. Сформулируйте основные положения молекулярно-кинетической теории.
2. Какие эксперименты подтверждают гипотезу о непрерывном хаотическом движении молекул?
3. Что называют диффузией?
4. Как изменяется темп хаотического движения молекул при нагревании (охлаждении) среды? Какие эксперименты подтверждают это?
5. Почему хаотическое движение молекул часто называют тепловым движением?
6. Как различаются скорости диффузии в газах, жидкостях и твёрдых телах?
7. Какие эксперименты доказывают, что между молекулами существуют силы взаимного притяжения и отталкивания?
8. Почему при отсутствии заметных внешних усилий размеры и форма окружающих нас твёрдых тел не изменяются?
9. При каком расстоянии между двумя молекулами потенциальная энергия их взаимодействия минимальна? Как соотносятся при этом силы притяжения и отталкивания?

10 Какие агрегатные состояния вещества вы знаете?

11 Как движутся молекулы (атомы) в газах, жидкостях и твёрдых телах?

12 Опишите взаимодействие молекул (атомов) в газах, жидкостях и твёрдых телах.

§ 44 Масса молекул. Количество вещества

Молекулы состоят из атомов. Атомы, в свою очередь, состоят из одинаковых частиц: протонов, нейтронов и электронов. Поэтому *массы отдельных молекул всех веществ приблизительно кратны друг другу.*

Напомним состав некоторых атомов. Простейший атом водорода $^{1}_{1}H$ состоит из одного протона и одного электрона (рис. 198). Атом гелия $^{4}_{2}He$ состоит из двух протонов, двух нейтронов и двух электронов.

Рис. 198

Атом углерода $^{12}_{6}C$ состоит из 12 нуклонов (6 протонов и 6 нейтронов) и 6 электронов. Атом азота $^{14}_{7}N$ состоит из 14 нуклонов (7 протонов и 7 нейтронов) и 7 электронов. Атом кислорода $^{16}_{8}O$ состоит из 16 нуклонов (8 протонов и 8 нейтронов) и 8 электронов.

По международному соглашению, принятому в 1961 г., массы всех молекул и атомов сравнивают с одной двенадцатой массы изотопа углерода $^{12}_{6}C$. Эта единица массы получила специальное название: *атомная единица массы* (1 а. е. м.).

! Согласно современным данным, приблизительно можно считать, что 1 а. е. м. = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг.

Обратим внимание на два важных для понимания момента. Во-первых, масса протона ($m_p = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ кг) практически равна массе нейтрона ($m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг) и примерно в 2000 раз превышает массу электрона ($m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг). Поэтому при расчёте массы молекулы массами электронов пренебрегают. Во-вторых, из-за дефекта массы, обусловленного взаимо-

Напомним, что в символе элемента верхний индекс (массовое число) равен числу нуклонов (сумме числа протонов и нейтронов) в ядре атома. Нижний индекс (зарядовое число) равен числу протонов в ядре атома.

действием нуклонов в ядре, масса одного протона больше одной атомной единицы массы. Однако это различие незначительно. Масса молекулы равна сумме масс входящих в неё атомов. Поэтому *массу молекулы, выраженную в атомных единицах массы, принимают численно равной числу нуклонов в этой молекуле.*

Например, молекула N_2 азота, состоящая из двух атомов азота ${}^{14}_{7}N$, содержит 28 нуклонов. Поэтому её масса равна 28 а. е. м. Значения масс молекул из изотопов некоторых веществ приведены во втором столбце таблицы 3.

Определим, используя данные этого столбца, что больше: число молекул в 28 г азота или число молекул в 2 г водорода. Из второго столбца таблицы видно, что массы молекул азота и водорода относятся как 28 к 2. Следовательно, если взять одинаковое число молекул азота и водорода, то масса взятого азота будет относиться к массе взятого водорода, как 28 к 2. Поэтому в 28 г азота и в 2 г водорода будет равное число молекул. Очевидно, что такое же число атомов углерода будет содержаться в 12 г углерода ${}^{12}_{6}C$.

Таблица 3

Вещество	Масса молекулы m_0, а. е. м.	Масса одного моля вещества M, г	Вещество	Масса молекулы m_0, а. е. м.	Масса одного моля вещества M, г
H_2	2	2	Na	23	23
O_2	32	32	Al	27	27
N_2	28	28	Ag	108	108
H_2O	18	18	Au	197	197
C	12	12	Pb	207	207
CO_2	44	44	U	238	238
Cl_2	70	70	S	32	32

Отдельно отметим, что в природе существуют *изотопы* — атомы одного химического элемента, ядра которых содержат одинаковое число протонов, но разное число нейтронов. По этой причине приведённые в Периодической системе химических элементов Д. И. Менделеева относительные атомные массы химических элементов представляют собой среднее арифметическое масс их изотопов и являются дробными числами.

Рассчитаем число атомов углерода, содержащихся в куске углерода массой $m = 12$ г. Для этого выразим массу m_0 одного атома углерода в граммах:

$$m_0 = 12 \text{ а. е. м.} \approx 12 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-24} \text{ г} \approx 20 \cdot 10^{-24} \text{ г}.$$

Разделим массу m куска углерода, равную 12 г углерода, на m_0. Получим $N_A = m/m_0 \approx 6{,}02 \cdot 10^{23}$ атомов. Понятно, что такое же число N_A молекул водорода будет содержаться в 2 г водорода. Из таблицы 3 видно, что для получения такого же числа N_A молекул азота потребуется 28 г азота, а для получения N_A молекул кислорода потребуется 32 г кислорода.

Число молекул (атомов) вещества, масса которого в граммах численно равна массе молекулы (атома) этого же вещества в атомных единицах массы, *одинаково для всех веществ*. Это число N_A называют в честь итальянского учёного Амедео Авогадро (1776–1856) *постоянной Авогадро*.

$$N_A \approx 6{,}02 \cdot 10^{23}.$$

Таким образом, в 12 г изотопа углерода $^{12}_{6}C$ содержится $N_A \approx 6{,}02 \cdot 10^{23}$ атомов углерода.

Число молекул любого вещества, отнесённое к числу молекул в 12 г изотопа углерода $^{12}_{6}C$, т. е. относительное число молекул, называют *количеством вещества*. Количество вещества обозначают греческой буквой ν и измеряют в молях.

Один моль — количество вещества, в котором содержится столько же молекул, сколько атомов углерода содержится в 12 г изотопа углерода $^{12}_{6}C$.

Из определения следует, что *один моль любого вещества содержит одинаковое число N_A молекул*. Если имеется N молекул вещества, то число молей этого вещества (количество вещества) может быть рассчитано по формуле:

$$\nu = \frac{N}{N_A}.$$

Поэтому постоянной Авогадро приписывают размерность: единица, делённая на моль $\left(\frac{1}{\text{моль}} = \text{моль}^{-1}\right)$. Полученную величину называют *числом Авогадро*: $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Число молекул в любом макроскопическом теле огромно. Поэтому понятием *количество вещества* часто пользуются в физике, химии и биологии.

Массу вещества, взятого в количестве 1 моль, называют молярной массой этого вещества.

Молярную массу обозначают заглавной буквой M и измеряют в граммах на моль (г/моль) или килограммах на киломоль (кг/кмоль). Понятно, что молярная масса вещества равна произведению массы одной молекулы на число Авогадро:

$$M = m_0 \cdot N_A.$$

Молярные массы некоторых веществ приведены в таблице 3.

Масса m вещества в однородном теле равна произведению массы молекулы этого вещества на число молекул в этом теле: $m = m_0 \cdot N$. С учётом введённых обозначений получаем, что если имеется тело массой m, молярная масса вещества которого равна M, то число молей в этом теле:

$$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{N \cdot m_0}{N_A \cdot m_0} = \frac{m}{M},$$

где m_0 — масса одной молекулы вещества.

Воспользуемся приобретёнными знаниями для решения задачи.

Задача

Сравните число молекул воды в банке объёмом 3 л с числом молекул воздуха в классе объёмом $V = 50$ м^3. Считайте, что плотность воздуха в классе $\rho_в = 1,2$ кг/м^3.

Решение.

Плотность воды при комнатных условиях примерно равна: $\rho_{воды} = 1,0$ г/см^3. Поэтому масса воды в банке равна: $m_{воды} = \rho_{воды} \cdot V_{воды}$.

Масса одного моля воды равна 18 г. Число молей воды равно:

$$\nu_{воды} = \frac{m_{воды}}{M_{воды}}.$$

В каждом моле воды содержится N_A молекул. Следовательно, число молекул воды в банке:

$$N_{воды} = \nu_{воды} \cdot N_A = \frac{m_{воды}}{M_{воды}} \cdot N_A = \frac{\rho_{воды} \cdot V_{воды}}{M_{воды}} \cdot N_A \approx 10^{26}.$$

Окружающий нас воздух состоит на 78 % из молекул азота (масса молекулы равна 28 а. е. м.) и на 21 % из молекул кислорода (масса молекулы равна 32 а. е. м.). Поэтому среднюю массу одного моля воздуха принимают приблизительно равной $M_в = 29$ г. Рассуждая аналогично, получаем, что число молекул воздуха в классе равно:

$$N_в = \nu_в \cdot N_A = \frac{m_в}{M_в} \cdot N_A = \frac{\rho_в \cdot V}{M_в} \cdot N_A \approx 1,25 \cdot 10^{27}.$$

Таким образом, число молекул воздуха в классе примерно в 12,5 раза больше числа молекул воды в банке.

Отметим, что объём класса примерно в 17 000 раз больше объёма банки. Следовательно, средний объём, приходящийся на одну молекулу воды, во много раз меньше, чем объём, приходящийся на одну молекулу воздуха. Оценим эти объёмы. Для воды этот объём равен: $v_{воды} = \frac{V_{воды}}{N_{воды}} \approx 3 \cdot 10^{-23}$ см^3, а для воздуха — $v_в = \frac{V_в}{N_в} \approx 4 \cdot 10^{-20}$ см^3.

Таким образом, мы убедились в том, что среднее расстояние между молекулами воздуха существенно превышает среднее расстояние между молекулами воды.

Ответ: число молекул воздуха в классе примерно в 12,5 раза больше числа молекул воды в банке.

Вопросы

1. Из каких частиц состоит атом?
2. Почему массы молекул разных веществ кратны друг другу?
3. Что называют атомной единицей массы? Чему она равна?
4. Чему принимают равной массу молекулы, выраженную в атомных единицах массы?
5. Где больше молекул: в 10 г водорода или в 56 г азота?
6. Что называют молем вещества?
7. В каких единицах измеряют количество вещества?
8. Сколько молекул содержит 1 моль: водорода; озона; гелия?
9. Что такое число Авогадро? Чему оно равно?
10. Что называют молярной массой? Как, зная молярную массу, рассчитать массу одной молекулы?
11. Как, зная массу тела и молярную массу вещества, из которого изготовлено это тело, рассчитать число молекул в этом теле?
12. Какие формулы для расчёта количества вещества вы знаете?

Упражнения

1. Определите молярные массы молекул: а) метана CH_4; б) сероводорода H_2S; в) соляной кислоты HCl.
2. Определите массы молекул: а) аммиака NH_3; б) серной кислоты H_2SO_4; в) поваренной соли $NaCl$.

3 Определите, сколько молей содержит: а) 46 г водорода; б) 8 г кислорода; в) 36 г воды.

4 Определите массу: а) 1 моля молекулярного водорода; б) 3 молей воды; в) 4 молей поваренной соли; г) 5 молей соляной кислоты.

5 Плотность алюминия $\rho = 2{,}7$ г/см^3. Определите число атомов в кубике алюминия объёмом $V = 1$ см^3. Оцените средний объём, приходящийся на один атом.

6 Плотность льда $\rho = 0{,}9$ г/см^3. Определите число молекул воды в куске льда объёмом $V = 1$ м^3. Оцените средний объём, приходящийся на одну молекулу воды, и среднее расстояние между молекулами.

***7** В природе встречаются два стабильных изотопа хлора с массами 35 а. е. м. и 37 а. е. м. Определите изотопный состав хлора (в процентах), если относительная атомная масса природного хлора равна $35{,}45$ а. е. м.

§ 45 Термодинамическая система. Внутренняя энергия и способы её изменения

В термодинамике при изучении таких процессов, как нагревание, охлаждение макроскопических тел, переход вещества из одного агрегатного состояния в другое и т. п., макроскопическое тело рассматривают как единую систему.

Совокупность очень большого числа частиц называют термодинамической системой.

Под словами «очень большое число» подразумевают числа ~10^{23} и более. Поэтому термодинамической системой можно считать любое из окружающих нас макроскопических тел или несколько таких тел. Термодинамической системой будет, например, металлический шарик, газ в закрытом сосуде, вода в чашке и т. п. Для описания свойств таких систем используют разные физические величины: давление, объём, температуру и др. Эти величины называют *термодинамическими параметрами*. Значения этих параметров можно экспериментально определить, используя различные приборы: манометры, мерные мензурки, линейки, термометры и др.

2. Во внутреннюю энергию термодинамической системы входит потенциальная энергия взаимодействия молекул этой системы *только друг с другом*. Потенциальная энергия взаимодействия молекул этой системы с другими внешними телами не входит во внутреннюю энергию рассматриваемой термодинамической системы.

Например, поднимая и опуская тетрадь, мы изменяем потенциальную энергию взаимодействия каждой её молекулы с Землёй. Однако потенциальная энергия взаимодействия молекул тетради *друг с другом* остаётся при этом неизменной (если тетрадь не деформируется). Таким образом, остаётся неизменной и внутренняя энергия этой тетради.

Внутреннюю энергию термодинамической системы можно изменить, совершив над ней механическую работу. Например, при забивании гвоздя в доску после нескольких ударов молотком гвоздь нагревается. Следовательно, произведённая работа приводит к изменению темпа хаотического (теплового) движения молекул системы. Это значит, что значение кинетической энергии K в выражении (1) увеличивается. Увеличивается и потенциальная энергия взаимодействия Π молекул системы, так как в результате ударов гвоздь деформируется.

Таким образом, для того чтобы вычислить конечную внутреннюю энергию $U_к$ термодинамической системы, надо к её начальной внутренней энергии U_0 прибавить совершённую над системой работу A:

$$U_0 + A = U_к. \qquad (2)$$

Отметим, что работу рассчитывают в ИСО, в которой центр масс термодинамической системы покоится. Из формулы (2) следует, что если над системой совершают положительную работу, то её внутренняя энергия увеличивается. Если же над системой совершают отрицательную работу (иначе говоря, сама система совершает положительную работу), то её внутренняя энергия уменьшается.

Внутренняя энергия термодинамической системы может быть изменена и без совершения над системой работы. Например, если привести термодинамическую систему (чайник с холодной водой) в контакт с более нагретым телом (плитой), то её внутренняя энергия увеличится (чайник с водой нагреется). Такой способ передачи энергии от одного тела к другому называют *теплообменом*.

Теплообменом называют процесс, при котором одна термодинамическая система передаёт энергию другой без совершения работы.

Напомним, что различают три вида теплообмена: *теплопроводность*, *конвекцию* и *излучение*.

Количество энергии, переданной от одной термодинамической системы к другой в процессе теплообмена, называют количеством теплоты.

Для того чтобы вычислить конечную внутреннюю энергию $U_к$ термодинамической системы при теплообмене, надо к её начальной внутренней энергии U_0 прибавить переданное ей количество теплоты Q:

$$U_0 + Q = U_к. \quad (3)$$

Из формулы (3) следует, что если системе передают положительное количество теплоты, то её внутренняя энергия увеличивается. Если же система отдаёт количество теплоты, то её внутренняя энергия уменьшается. В этом случае величина Q в формуле (3) имеет отрицательное значение (говорят: «система получает отрицательное количество теплоты»).

Процессы совершения работы и теплообмен могут происходить одновременно. Например, рассмотрим термодинамическую систему – стоящий перед вами стол. Положим на стол руку и начнём с силой водить ею по поверхности стола. Внутренняя энергия стола будет увеличиваться в результате двух процессов. Во-первых, стол будет получать в результате теплообмена некоторое количество теплоты от более горячей руки. Во-вторых, внутренняя энергия стола будет увеличиваться за счёт работы силы трения скольжения руки о стол.

В таких случаях, чтобы вычислить конечную внутреннюю энергию $U_к$ термодинамической системы, надо к её начальной внутренней энергии U_0 прибавить работу A, совершённую над системой, и полученное количество теплоты Q:

$$U_0 + A + Q = U_к. \quad (4)$$

Теплопроводностью называют вид теплообмена, который осуществляется между частями термодинамической системы при их непосредственном контакте. При теплопроводности не происходит переноса вещества.

Конвекцией называют процесс, при котором теплообмен осуществляется за счёт перемещения нагретых и холодных частей вещества. При конвекции происходит перенос вещества, в результате чего и осуществляется теплообмен.

Излучением называют процесс теплообмена, осуществляемый электромагнитными волнами. Для передачи энергии излучением от одного тела к другому наличие какого-либо вещества между ними не обязательно.

1

2

Это уравнение часто называют **первым законом (началом) термодинамики**.

При его применении необходимо помнить о *правиле знаков*. Если работа совершается над термодинамической системой, то работа A в уравнении (4) будет иметь положительное значение; если же работу совершает сама система, то работа A будет иметь отрицательное значение. Если система получает количество теплоты Q, то в уравнении (4) $Q > 0$; если система сама отдаёт количество теплоты Q, то в этом случае $Q < 0$.

Из первого закона термодинамики следует, что изменение внутренней энергии любой термодинамической системы возможно только в результате двух процессов: совершения работы и теплообмена.

Первый закон термодинамики является частным случаем главного закона природы — **закона сохранения энергии**.

Энергия не может появиться из ничего или исчезнуть бесследно. Возможен лишь её переход от одного тела к другому или из одного вида в другой.

Таким образом, можно сказать, что уравнение $U_0 + A + Q = U_к$ является математической формой записи закона сохранения энергии при тепловых процессах.

Вопросы

1. Что называют термодинамической системой?
2. Что называют внутренней энергией термодинамической системы?
3. В какой системе отсчёта определяют внутреннюю энергию термодинамической системы? Почему?
4. Зависит ли внутренняя энергия термодинамической системы от взаимодействия частиц системы с другими телами? Ответ поясните примерами.
5. Перечислите известные вам способы изменения внутренней энергии.
6. Что называют теплообменом?
7. Что называют количеством теплоты?
8. Какие виды теплообмена вам известны?
9. Сформулируйте: а) первый закон термодинамики; б) правило знаков; в) закон сохранения энергии.

Упражнения

1. Газ, расширяясь, совершил работу 500 Дж. За время совершения газом работы теплообмен не осуществлялся. Определите изменение внутренней энергии газа.
2. Деревянному кубику сообщили количество теплоты, равное 300 Дж. Одновременно над ним совершили работу 400 Дж. Определите изменение внутренней энергии кубика.
3. При протекании электрического тока по спирали лампы электрические силы совершили работу 100 Дж. При этом за счёт теплопроводности в окружающую среду было передано 80 Дж. Определите энергию, выделившуюся в виде электромагнитного излучения, считая внутреннюю энергию лампы неизменной.

§ 46 Температура и тепловое равновесие

Эксперименты показывают, что при теплообмене теплота всегда переходит от более нагретых тел к менее нагретым (рис. 199). Это позволяет ввести физическую величину, характеризующую степень нагретости тела, — *температуру*.

Пусть тело *1* в процессе теплообмена передаёт теплоту телу *2* (*см.* рис. 199, *а*). Тогда говорят, что тело *1* нагрето больше, чем тело *2*, а температура t_1 тела *1* выше, чем температура t_2 тела *2*. Если же приведённые в тепловой контакт тела *1* и *2* не обмениваются теплотой (*см.* рис. 199, *в*), то говорят, что эти тела одинаково нагреты, а их температуры считают равными: $t_1 = t_2$.

Вспомните, как вы измеряете температуру своего тела на приёме у врача. Вы приводите термометр в тепловой контакт со своим телом и затем ожидаете некоторое время.

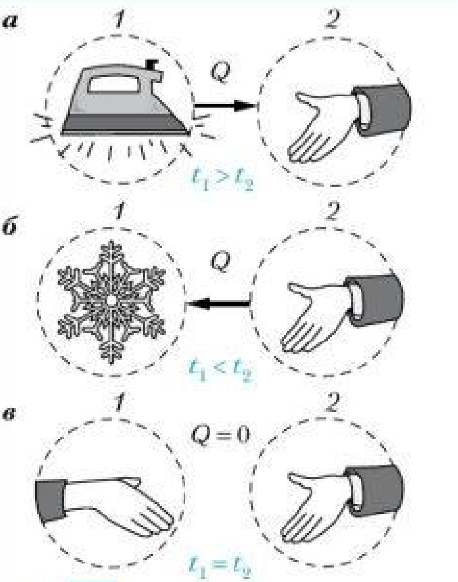


Рис. 199

Почему? Что происходит в течение этого времени? Вы ждёте окончания процесса теплообмена вашего «горячего» тела и «холодного» термометра. Иначе говоря, вы ждёте, *когда температуры тел, находящихся в тепловом контакте, станут равными*.

А всегда ли процесс передачи теплоты (энергии) от более нагретого тела к менее нагретому заканчивается выравниванием их температур? Чтобы ответить на этот вопрос, будем рассматривать эти два тела как единую термодинамическую систему.

Вы уже знаете, что энергия термодинамической системы может быть изменена только двумя способами: за счёт совершения работы и за счёт теплообмена. Если ни над одним из тел рассматриваемой системы не совершают работу внешние силы, то такую систему называют *механически изолированной*. Если же тела системы не обмениваются теплом с окружающей средой, то её называют *теплоизолированной*.

Термодинамическую систему, тела которой могут обмениваться теплотой только между собой, но не обмениваются теплотой с внешней средой, называют теплоизолированной.

Если термодинамическая система является одновременно и механически изолированной, и теплоизолированной, то её называют *полностью изолированной*.

Эксперименты показывают, что если термодинамическая система является полностью изолированной, то со временем в этой системе передача теплоты от одних тел к другим прекратится. Следовательно, температуры всех тел такой системы станут равными. В этом случае говорят, что система пришла в *состояние теплового равновесия*.

Температура — физическая величина, характеризующая степень нагретости тел, находящихся в состоянии теплового равновесия.

Таким образом, все тела системы, находящиеся в тепловом равновесии, *имеют одну и ту же температуру*.

Отметим, что с течением времени в полностью изолированной термодинамической системе не только выравниваются температуры всех тел, но и прекращаются изменение всех термодинамических параметров, течение химических реакций, взаимные превращения газов, жидкостей и твёрдых тел и другие макроскопические процессы. О такой системе говорят, что она пришла в *состояние термодинамического равновесия*. Этот экспериментальный факт позволяет сформулировать один из фундаментальных законов природы, который называют **нулевым законом термодинамики**.

Если термодинамическая система является полностью изолированной, то она с течением времени самопроизвольно переходит в состояние термодинамического равновесия.

Из сказанного выше следует, что процесс измерения температуры состоит в установлении теплового равновесия между телом, температура которого измеряется, и прибором, предназначенным для измерения температуры, — термометром.

А что такое термометр? Каким требованиям он должен удовлетворять?

Этот прибор должен содержать рабочее вещество, параметры которого *однозначно изменяются при изменении температуры*. Такое вещество часто называют термометрическим телом. Чаще всего используют явление теплового расширения рабочего вещества при его нагревании.

Например, в ртутном (или спиртовом) термометре в качестве рабочего вещества используют ртуть (или спирт), объём которой увеличивается при нагревании и соответственно уменьшается при охлаждении. Приходя в тепловое равновесие с телом, температура которого измеряется, жидкость в термометре расширяется (или сжимается) до определённого объёма. Однако изменения объёма рабочего вещества очень малы. Поэтому к резервуару с жидкостью припаивают тонкую длинную запаянную с другого конца трубочку (рис. 200). Вдоль этой трубочки помещают шкалу. В результате нагревания или охлаждения верхняя граница рабочей жидкости остановится напротив отметки шкалы, которая соответствует измеряемой температуре. Таким образом, *шкала термометра должна быть оцифрована в единицах температуры*.

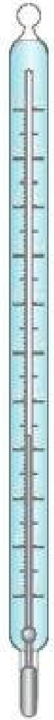


Рис. 200

Существуют различные температурные шкалы. В быту чаще всего используют знакомую вам *шкалу Цельсия*, названную в честь её создателя — шведского физика Андерса Цельсия (1701–1744). Она основана на двух фиксированных значениях температуры. Первое значение — температура таяния чистого льда при нормальном атмосферном давлении. Значение этой температуры принимается за 0 °С. Второе значение — температура кипения чистой воды также при нормальном атмосферном давлении. Она принимается равной 100 °С. Расстояние между этими точками на шкале термометра делят на сто равных частей.

	Шкала Кельвина	Шкала Цельсия	Шкала Фаренгейта
Кипение воды	373 K	100 °C	212 °F
Температура тела человека	310 K	37 °C	99 °F
Плавление льда	273 K	0 °C	32 °F
Абсолютный нуль	0 K	–273 °C	–459 °F

Рис. 201

В научных исследованиях используют *абсолютную (термодинамическую) шкалу температур Кельвина*, названную в честь английского физика Уильяма Томсона (лорда Кельвина) (1824–1907). Предложенная им шкала построена на основе законов термодинамики. За нуль (абсолютный нуль) Кельвином была принята такая температура, при которой тело *не может* передать тепло никакому другому телу, так как другого менее нагретого тела не существует в природе. С точки зрения молекулярно-кинетической теории нулевая температура тела по шкале Кельвина означает, что кинетическая энергия хаотического движения молекул этого тела равна нулю. Иначе говоря, молекулы этого тела покоятся друг относительно друга.

За единицу абсолютной температуры принят 1 К (*кельвин*), который равен одному градусу шкалы Цельсия. По шкале Цельсия абсолютному нулю соответствует температура –273,15 °С (при расчётах эту температуру приближённо считают равной –273 °С). В отличие от температур по шкале Цельсия, абсолютную температуру принято обозначать буквой T. Из сказанного следует, что $T = t + 273$, где t — температура по шкале Цельсия.

Соотношение значений температур по различным шкалам представлено на рис. 201.

В некоторых странах пользуются *шкалой температур Фаренгейта*. По этой шкале за 0 °F принята температура, зафиксированная в самую холодную зиму в Голландии (1709 г.). Вторая точка шкалы — это температура смеси воды со льдом при нормальном атмосферном давлении, равная 32 °F.

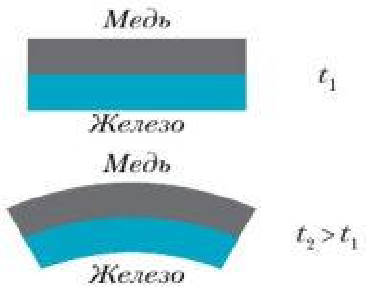


Рис. 202

Рассмотрим ещё одно требование, предъявляемое к термометру при конкретном измерении. Мы уже отмечали, что процесс измерения температуры состоит в установлении теплового равновесия между термометром и телом, температуру которого измеряют. При этом термометр получает от этого тела (или отдаёт ему) определённое количество теплоты, т. е. *изменяет его температуру*. Понятно, что если мы будем измерять температуру, например, воды в большом бассейне с помощью обычного ртутного термометра, то этой погрешностью измерения можно пренебречь. Но если мы тем же термометром захотим измерить температуру капельки воды, то при передаче некоторого количества теплоты от этой капельки к термометру её температура изменится существенно. Погрешность измерения температуры в этом случае будет значительной, и результаты измерения окажутся неудовлетворительными. Таким образом, используемый в эксперименте термометр должен быть таким, чтобы изменение температуры тела в процессе измерения было незначительным.

В современных термометрах используются различные явления, обусловленные изменением температуры рабочего тела термометра. Так, в настоящее время наибольшее распространение получили термометры, основанные на изменении электрических характеристик различных веществ в зависимости от температуры, – *электронные термометры*. Для измерения температур в тысячи градусов применяют *оптические пирометры*, принцип действия которых основан на законах теплового излучения.

В технике для регулирования температуры широко используют так называемые *биметаллические пластинки*, склёпанные из металлов, по-разному изменяющих свою длину при нагревании (рис. 202). При изменении температуры эти пластинки изгибаются и замыкают или размыкают контакты, через которые нагревательный элемент, например утюга или электрического чайника, подсоединяется к электрической сети.

Вопросы

1. В каком случае говорят, что степени нагретости двух тел одинаковы? Как в этом случае соотносятся температуры тел?

2. Почему лежащая на столе в комнате металлическая линейка на ощупь кажется холоднее, чем лежащая рядом с ней деревянная линейка?
3. Какое состояние термодинамической системы называют состоянием теплового равновесия?
4. Какую систему тел называют теплоизолированной, механически изолированной, полностью изолированной?
5. Сформулируйте нулевое начало термодинамики.
6. Что называют термометрическим телом?
7. Как построены шкалы Цельсия и Кельвина?
*8. В чём смысл абсолютного нуля температур с точки зрения молекулярно-кинетической теории?
*9. Какими свойствами должен обладать термометр?

Упражнения

1. Снимите показания с комнатного термометра и наружного (за окном). Вычислите полученные значения температур воздуха по абсолютной (термодинамической) шкале.
2. Измерьте температуру собственного тела медицинским термометром, снимая показания через 1, 3, 5, 10 мин после начала измерения. Сравните полученные значения и объясните результаты измерений. Оцените погрешности проведённых измерений.
*3. Как вы думаете, можно ли измерить температуру, соответствующую 0 К? Объясните свой ответ.

§ 47 Теплоёмкость тела. Удельная и молярная теплоёмкости вещества

Многочисленные эксперименты показывают, что *при неизменных внешних условиях* количество теплоты, переданное телу (если при этом не изменяется агрегатное состояние вещества тела), пропорционально изменению его температуры. Следовательно, при указанных условиях количество теплоты Q, полученное телом, и разность его конечной и начальной температур $\Delta t = t_к - t_н$ связаны соотношением:

$$Q = C \cdot (t_к - t_н) = C \cdot \Delta t,$$

где C — коэффициент пропорциональности.

Коэффициент C, равный отношению количества теплоты, полученного телом, к соответствующему изменению его температуры, называют теплоёмкостью тела при заданных условиях:

$$C = \frac{Q}{\Delta t}.$$

Отметим, что *при изменении внешних условий теплоёмкость тела может измениться*. Пока же мы будем рассматривать процессы нагревания и охлаждения, происходящие без изменения агрегатного состояния при неизменных внешних условиях.

Пусть два тела разной массы изготовлены из одного и того же вещества. Для изменения на заданную величину Δt температуры тела, имеющего бóльшую массу, потребуется большее количество теплоты. Это обусловлено тем, что тело большей массы содержит большее количество вещества, т. е. большее количество молекул. Поэтому с точки зрения молекулярно-кинетической теории для увеличения его внутренней энергии потребуется большее количество теплоты. Эксперименты показывают, что теплоёмкость C тела, изготовленного из одного вещества, прямо пропорциональна его массе m (количеству содержащегося в нём вещества). Этот факт позволяет ввести понятия удельной теплоёмкости и молярной теплоёмкости.

Количество теплоты, необходимое для нагревания на один градус данного вещества массой 1 кг, называют удельной теплоёмкостью этого вещества при заданных условиях.

Удельную теплоёмкость обозначают буквой c. Единица удельной теплоёмкости в СИ — *джоуль на килограмм-кельвин*: Дж/(кг · К).

Следовательно, теплоёмкость тела массой m, изготовленного из вещества с удельной теплоёмкостью c, равна:

$$C = m \cdot c.$$

Количество теплоты, необходимое для нагревания на один градус одного моля данного вещества, называют молярной теплоёмкостью этого вещества при заданных условиях.

Молярную теплоёмкость обозначают буквой c_M. Единица молярной теплоёмкости в СИ — *джоуль на моль-кельвин*: Дж/(моль · К).

Следовательно, теплоёмкость тела, содержащего ν моль вещества с молярной теплоёмкостью c_M, равна:

$$C = \nu \cdot c_M.$$

Поэтому если тело в заданном процессе получает количество теплоты Q, то изменение его температуры с учётом введённых обозначений:

$$\Delta t = t_к - t_н = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{m \cdot c} = \frac{Q}{\nu \cdot c_M}.$$

В процессе передачи количества теплоты от одного тела теплоизолированной системы к другому их температуры изменяются до тех пор, пока не наступит тепловое равновесие. На этом утверждении основано решение задач о теплообмене. Все они решаются по одинаковой схеме.

Задача 1

В стеклянный стакан массой $M = 200$ г, начальная температура которого $t_1 = 20$ °С, налили горячую воду массой $m = 100$ г. Пренебрегая теплообменом с окружающей средой, определите температуру системы тел «стакан — вода» после установления теплового равновесия, если начальная температура воды $t_2 = 80$ °С. Удельную теплоёмкость воды считайте равной $c_в = 4{,}2$ Дж/(г · К), а стекла — $c_с = 0{,}84$ Дж/(г · К).

Решение.

Шаг 1. Определение тел, участвующих в теплообмене. По условию задачи следует пренебречь теплообменом с окружающей средой. Поэтому в процессе теплообмена участвуют только стакан и находящаяся в нём вода.

Шаг 2. Запись выражений для теплоёмкостей тел, участвующих в процессе теплообмена.

Теплоёмкость стакана $C_с = M \cdot c_с$, а теплоёмкость воды $C_в = m \cdot c_в$.

Шаг 3. Запись выражений для изменений температур (разности между конечной и начальной температурами) участвующих в теплообмене тел.

В конечном состоянии температуры обоих тел станут одинаковыми. Пусть они равны t. Тогда изменение температуры стакана будет равно $t - t_1$, а воды соответственно равно $t - t_2$.

В рассматриваемом случае $t_2 > t_1$, поэтому установившаяся температура t будет удовлетворять условию $t_2 > t > t_1$. Другими словами, температура воды уменьшится, а температура стакана увеличится.

Шаг 4. Запись выражений для расчёта количеств теплоты, полученных телами при теплообмене.

Количество теплоты, полученное стаканом, положительно и равно:

$$Q_1 = C_с \cdot (t - t_1) = c_с \cdot M \cdot (t - t_1) > 0, \text{ так как } t - t_1 > 0.$$

Количество теплоты, полученное водой, отрицательно и равно:

$$Q_2 = C_в \cdot (t - t_2) = c_в \cdot m \cdot (t - t_2) < 0, \text{ так как } t - t_2 < 0.$$

Отрицательное значение количества теплоты Q_2 указывает на то, что в процессе теплообмена более нагретая вода не получала, а отдавала количество теплоты.

Шаг 5. Составление уравнения теплового баланса.

Количество теплоты, полученное стаканом, по модулю равно количеству теплоты, отданному водой: $|Q_1| = |Q_2|$; $Q_1 > 0$, а $Q_2 < 0$. Поэтому сумма полученных телами количеств теплоты равна нулю. Запишем это в виде уравнения, которое называют *уравнением теплового баланса*:

$$Q_1 + Q_2 = 0.$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$Q_1 = c_с \cdot M \cdot (t - t_1)$; (1) (*количество теплоты, полученное стаканом*)

$Q_2 = c_в \cdot m \cdot (t - t_2)$; (2) (*количество теплоты, полученное водой*)

$Q_1 + Q_2 = 0.$ (3) (*уравнение теплового баланса*)

Шаг 6. Решение системы уравнений.

Подставляя уравнения (1) и (2) в уравнение (3), получаем:

$$c_в \cdot m \cdot (t - t_2) + c_с \cdot M \cdot (t - t_1) = 0. \quad (4)$$

Откуда находим: $t = \dfrac{c_в \cdot m \cdot t_2 + c_с \cdot M \cdot t_1}{c_в \cdot m + c_с \cdot M}$.

Подставляя численные значения, получаем:

$$t = \frac{4{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 80 + 0{,}84 \cdot 0{,}2 \cdot 20}{4{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}84 \cdot 0{,}2} \approx 63\ (°C).$$

Ответ: температура тел при тепловом равновесии $t \approx 63$ °C.

Задача 2

В теплоизолированном сосуде находилось $\nu_1 = 10$ моль гелия с температурой $t_1 = 20$ °C. Какое количество ν_2 азота с температурой $t_2 = 80$ °C надо добавить в сосуд, чтобы температура смеси после установления теплового равновесия стала равной $t = 40$ °C? Теплоёмкость сосуда считайте равной нулю. Молярная теплоёмкость гелия $c_{M\,г} = 12{,}5$ Дж/(моль · К), а молярная теплоёмкость азота $c_{M\,а} = 21$ Дж/(моль · К).

Решение.

Шаг 1. Определение тел, участвующих в теплообмене. По условию задачи в процессе теплообмена участвуют только гелий и азот.

Шаг 2. Запись выражений для теплоёмкостей тел, участвующих в процессе теплообмена.

Теплоёмкость гелия $C_г = \nu_1 \cdot c_{M\,г}$, а теплоёмкость азота $C_а = \nu_2 \cdot c_{M\,а}$.

Шаг 3. Запись выражения для изменения температур.

В конечном состоянии температуры гелия и азота станут равными t. Изменение температуры гелия будет равно $t - t_1$, а изменение температуры азота соответственно $t - t_2$. При этом $t - t_1 > 0$, $t - t_2 < 0$.

Шаг 4. Запись выражений для расчёта количеств теплоты, полученных газами при теплообмене.

$$Q_1 = c_{M\,г} \cdot \nu_1 \cdot (t - t_1) > 0, \text{ так как } t - t_1 > 0.$$

$$Q_2 = c_{M\,а} \cdot \nu_2 \cdot (t - t_2) < 0, \text{ так как } t - t_2 < 0.$$

Шаг 5. Составление уравнения теплового баланса.

$$Q_1 + Q_2 = 0.$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$Q_1 = c_{M\,г} \cdot \nu_1 \cdot (t - t_1); \quad (1)$$

$$Q_2 = c_{M\,а} \cdot \nu_2 \cdot (t - t_2); \quad (2)$$

$$Q_1 + Q_2 = 0. \quad (3)$$

Шаг 6. Решение системы уравнений.

Подставляя уравнения (1) и (2) в уравнение (3), получаем:

$$c_{M\,г} \cdot \nu_1 \cdot (t - t_1) + c_{M\,а} \cdot \nu_2 \cdot (t - t_2) = 0.$$

Откуда находим $\nu_2 = \dfrac{c_{M\,г} \cdot \nu_1 \cdot (t - t_1)}{c_{M\,а} \cdot (t_2 - t)} \approx 3$ (моль).

Ответ: надо добавить 3 моля азота.

Вопросы

1. Что называют теплоёмкостью тела? В каких единицах в СИ она измеряется?
2. Что называют: а) удельной теплоёмкостью; б) молярной теплоёмкостью вещества?
3. Сформулируйте названия шагов, используемых при решении задач на установление теплового равновесия.

Упражнения

1 Термос ёмкостью $V = 3$ л заполнили кипящей водой и закрыли. Через двое суток температура воды стала равной: $t_к = 70$ °C. Какое количество теплоты отдала вода за это время?

2 Удельная теплоёмкость воды $c_в = 4{,}2$ Дж/(г · К), алюминия — $c_{ал} = 0{,}9$ Дж/(г · К), золота — $c_з = 0{,}13$ Дж/(г · К). Определите, используя таблицу 3 молярных масс (*см.* § 44), молярные теплоёмкости этих веществ.

3 На сколько градусов нагреется кусок золота массой $m = 1$ кг, если ему сообщить такое же количество теплоты, какое необходимо для повышения температуры воды массой $M = 80$ г на $\Delta T = 8$ К?

4 В теплоизолированном сосуде находилось $\nu_1 = 5$ моль неона температурой $t_1 = 0$ °C. К нему добавили $\nu_2 = 2$ моль кислорода температурой $t_2 = 20$ °C. Определите температуру смеси после установления теплового равновесия. Теплоёмкость сосуда считайте равной нулю. Молярную теплоёмкость неона считайте равной $c_{M\,н} = 12{,}5$ Дж/(моль · К), а молярную теплоёмкость кислорода — $c_{M\,к} = 21$ Дж/(моль · К).

§ 48 Законы идеального газа

В соответствии с нулевым началом термодинамики любая полностью изолированная термодинамическая система с течением времени приходит в состояние термодинамического равновесия. Такое состояние термодинамической системы можно охарактеризовать набором термодинамических параметров: температурой, давлением, объёмом, массой или количеством вещества. Эти параметры называют *макропараметрами*. В отличие от микропараметров (например, скорости хаотического движения молекул, числа молекул в единице объёма и т. п.), значения макропараметров можно измерить с помощью физических приборов: термометра, манометра и т. п.

! Макропараметры термодинамической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, не могут принимать произвольные значения. Они связаны между собой определённым соотношением. Это соотношение называют *уравнением состояния вещества*.

Впервые уравнение состояния было получено в результате обобщения данных ряда экспериментов для простейших термодинамических систем — газов, находящихся в условиях, близких к нормальным ($p_0 \sim 10^5$ Па, $t \sim 0$ °С). В этих экспериментах исследовались переходы газов из одного состояния в другое.

Переход термодинамической системы из одного состояния в другое называют процессом.

Ограничимся изучением только таких процессов, в которых *состояние термодинамической системы изменяется настолько медленно, что в любой момент времени систему можно считать находящейся в состоянии термодинамического равновесия*. Такие процессы называют *равновесными*. Часто эти процессы называют также квазиравновесными (т. е. почти равновесными).

Газ при условиях, близких к нормальным, является *простейшей* термодинамической системой. Это обусловлено тем, что его молекулы, во-первых, практически не взаимодействуют на расстоянии; во-вторых, среднее расстояние между молекулами много больше размеров самих молекул; в-третьих, соударения молекул не приводят к изменению их суммарной кинетической энергии хаотического движения, т. е. соударения молекул можно считать абсолютно упругими. Это позволяет при объяснении свойств таких газов *вместо реального газа рассматривать его упрощённую модель — идеальный газ*.

Идеальный газ — это газ, молекулы которого, во-первых, не взаимодействуют на расстоянии; во-вторых, имеют достаточно малые размеры по сравнению со средним расстоянием между ними (суммарный объём всех молекул много меньше объёма, занимаемого газом); в-третьих, соударяются абсолютно упруго.

Рассмотрим известные из истории физики эксперименты, позволившие определить, как связаны между собой макропараметры (давление, объём и температура) простейшей термодинамической системы, которую можно считать идеальным газом. Параллельно будем обсуждать результаты этих экспериментов с точки зрения молекулярно-кинетической теории.

В настоящее время эти эксперименты вы можете провести в школьной лаборатории на установке, показанной на рис. 203. Наполненный газом герметический гофрированный сосуд *1* соединён с манометром *2*, которым измеряют давление газа внутри сосуда. Объём исследуемого газа можно изменять с помощью винта *3*. Весь сосуд с газом помещён в ванну с водой *4*, температуру которой контролируют термометром. При проведении экспериментов *все макроскопические термодинамические параметры изменяют столь медленно, чтобы в каждый момент времени состояние газа можно было считать равновесным*. Другими словами, эксперименты проводят так, чтобы изучаемые процессы можно было считать равновесными.

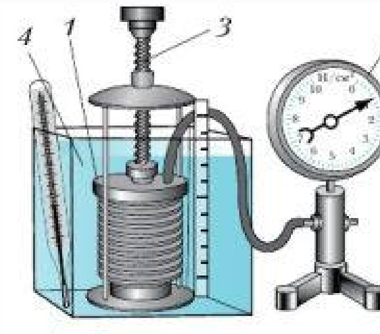


Рис. 203

Закон Бойля — Мариотта

В XVII в. английский физик Роберт Бойль (1627–1691) со своим помощником Р. Гуком, а позднее и французский физик Эдм Мариотт (1620–1684) экспериментально исследовали свойства неизменного количества газа в закрытом сосуде при условиях, близких к нормальным. Им удалось установить зависимость давления p газа от его объёма V при постоянной температуре T. Обобщение полученных ими результатов в настоящее время называют **законом Бойля — Мариотта**.

Для данного количества идеального газа произведение давления газа на его объём постоянно, если температура газа не меняется:
$$p \cdot V = \text{const при } T = \text{const}.$$

! Закон Бойля — Мариотта для данного количества идеального газа при решении задач часто записывают в виде: $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$, где p_1 и V_1 — давление и объём газа в состоянии 1, а p_2 и V_2 — давление и объём газа в состоянии 2 при условии, что температуры газа в состояниях 1 и 2 равны ($T_1 = T_2$).

Процесс изменения состояния термодинамической системы при неизменной температуре называют изотермическим (от *греч.* ἴσος — «равный» и θέρμη — «тепло»).

На рис. 204 приведён график зависимости давления постоянного количества идеального газа от его объёма при изотермическом процессе. Эту кривую называют *изотермой*. Она соответствует обратно пропорциональной зависимости между давлением газа и его объёмом.

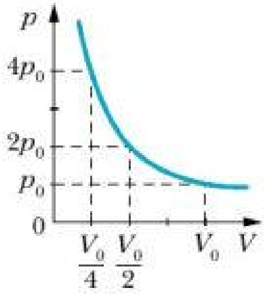


Рис. 204

Закон Бойля — Мариотта можно объяснить с точки зрения молекулярно-кинетической теории, используя модель идеального газа. Давление газа на стенки сосуда есть результат огромного числа ударов хаотически движущихся молекул газа об эти стенки. Понятно, что чем с большей скоростью молекулы налетают на стенки и чем больше число ударов за единицу времени, тем большее давление оказывает газ на стенки сосуда. При изотермическом процессе температура газа не изменяется. Поэтому средняя скорость, с которой молекулы налетают на стенки, остаётся неизменной. При уменьшении объёма газа в некоторое число раз число молекул, приходящееся на единицу объёма газа, увеличивается во столько же раз (так как общее число молекул неизменно). Поэтому на ту же стенку за то же время будет налетать во столько же раз большее число молекул. Следовательно, во столько же раз увеличится и давление газа.

Дальнейшие исследования показали, что при сильном сжатии газа и при температурах, существенно отличающихся от нормальной (меньше ~100 К и больше ~1000 К), т. е. при условиях, когда реальный газ нельзя считать идеальным, закон Бойля — Мариотта нарушается.

Закон Шарля

Зависимость давления неизменного количества газа от его температуры при постоянном объёме экспериментально установил в 1787 г. французский физик Жак Шарль (1746–1823). Результаты эксперимента Шарля можно представить в виде графической зависимости давления газа от его *абсолютной* температуры при постоянном объёме (рис. 205).

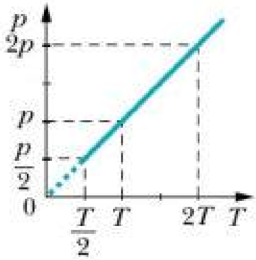


Рис. 205

Видно, что график полученной зависимости — это прямая линия, продолжение которой проходит через начало координат. Эту прямую называют *изохорой* (от *греч.* χώρα — «занимаемое место»).

Процесс изменения состояния термодинамической системы при постоянном объёме называют изохорическим (изохорным).

Из приведённой зависимости следует, во-первых, что при стремлении абсолютной температуры идеального газа к нулевому значению его давление при постоянном объёме также стремится к нулю; во-вторых, изменение абсолютной температуры исследуемого газа в некоторое число раз приводит при постоянном объёме к пропорциональному изменению давления этого газа в такое же число раз.

Обобщение этих результатов в настоящее время называют **законом Шарля**.

Для данного количества идеального газа отношение давления газа к его абсолютной температуре постоянно, если объём газа не меняется:

$$\frac{p}{T} = \text{const} \text{ при } V = \text{const}.$$

! Закон Шарля может быть записан в виде $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$, где p_1 и T_1 — давление и температура газа в состоянии 1, а p_2 и T_2 — давление и температура газа в состоянии 2 при условии, что объёмы газа в состояниях 1 и 2 равны ($V_1 = V_2$).

Закон Шарля можно объяснить с точки зрения молекулярно-кинетической теории. С уменьшением абсолютной температуры термодинамической системы уменьшается темп движения её молекул (*см.* § 43). Чем медленее движутся молекулы, тем меньшее действие они оказывают на стенку сосуда при ударах о неё. Следовательно, чем ниже температура газа, тем меньше его давление. Поэтому при стремлении абсолютной температуры идеального газа к нулю его давление также будет стремиться к нулю.

На самом деле охладить реальный газ до температур, близких к абсолютному нулю, очень сложно. Кроме того, при столь низких температурах реальные газы конденсируются (сжижаются), и закон Шарля для них не выполняется. Поэтому часть изохоры, близкую к абсолютному нулю, изображают пунктирной линией (*см.* рис. 205). Этим подчёркивают, что закон Шарля в области очень низких температур не выполняется.

Закон Гей-Люссака

В начале XIX в. французский физик Жозеф Луи Гей-Люссак (1778–1850) экспериментально установил зависимость объёма неизменного количества газа от его температуры при постоянном давлении. Результаты эксперимента Гей-Люссака можно представить в виде графической зави-

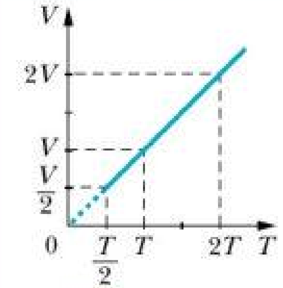


Рис. 206

симости объёма газа от его абсолютной температуры при постоянном давлении газа (рис. 206).

Видно, что график полученной зависимости — это прямая линия, продолжение которой проходит через начало координат. Эту прямую называют *изобарой* (от *греч.* βάρος — «тяжесть», «вес»).

Процесс изменения состояния термодинамической системы при постоянном давлении называют изобарическим (изобарным).

Из приведённой зависимости следует, во-первых, что при стремлении абсолютной температуры идеального газа к нулевому значению — при постоянном давлении — объём газа также стремится к нулю; во-вторых, изменение абсолютной температуры исследуемого газа в некоторое число раз — при постоянном давлении — приводит к пропорциональному изменению объёма этого газа в такое же число раз.

Обобщение этих результатов в настоящее время называют **законом Гей-Люссака**.

Для данного количества идеального газа отношение объёма газа к его абсолютной температуре постоянно, если давление газа не меняется:

$$\frac{V}{T} = \text{const} \quad \text{при } p = \text{const}.$$

! Закон Гей-Люссака может быть записан в виде $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$, где V_1 и T_1 — объём и температура газа в состоянии 1, а V_2 и T_2 — объём и температура газа в состоянии 2 при условии, что давления газа в состояниях 1 и 2 равны ($p_1 = p_2$).

Как и другие газовые законы, закон Гей-Люссака можно объяснить с точки зрения молекулярно-кинетической теории. При уменьшении абсолютной температуры газа хаотическое движение его молекул замедляется. Это приводит к уменьшению действия, которое оказывает на стенку каждая ударяющаяся о неё молекула. Чтобы давление газа оставалось неизменным, необходимо, чтобы оставалось неизменным общее действие всех молекул на стенку. Это возможно, только если одновременно с замедлением хаотического движения увеличивать число ударяющихся о стенку молекул.

Это достигается за счёт уменьшения объёма сосуда, так как при этом число молекул в единице объёма возрастает.

В реальном эксперименте сжать газ до нулевого объёма невозможно. Это связано, в частности, с тем, что сами молекулы газа имеют объём. Кроме того, при сближении молекул на малые расстояния между ними проявляются силы взаимного отталкивания. Поэтому, так же как и изохору, изобару в области низких температур изображают пунктирной линией. Этим подчёркивают, что закон Гей-Люссака в этой области не выполняется.

В заключение отметим, что *любой равновесный процесс, при котором один из макроскопических параметров остаётся постоянным, называют изопроцессом.*

Вопросы

1. Что называют процессом в термодинамике?
2. Какой процесс называют равновесным?
3. Приведите пример простейшей термодинамической системы.
4. Какой газ называют идеальным?
5. Какой процесс называют изотермическим?
6. Сформулируйте закон Бойля — Мариотта. Объясните его с точки зрения молекулярно-кинетической теории.
7. Какой процесс называют изохорическим?
8. Сформулируйте закон Шарля. Объясните его с точки зрения молекулярно-кинетической теории.
9. Какой процесс называют изобарическим?
10. Сформулируйте закон Гей-Люссака. Объясните его с точки зрения молекулярно-кинетической теории.
11. Что называют изопроцессом? Приведите примеры изопроцессов.

Упражнения

1. Как изменится давление идеального газа, если объём сосуда, в котором он находится, изотермически увеличить в 4 раза?
2. Идеальный газ сжимают изотермически от объёма 10 л до объёма 5 л. Давление газа при этом возрастает на $\Delta p = 2$ кПа. Определите первоначальное давление p_1.
3. При нормальных условиях идеальный газ занимает объём $V_1 = 0{,}1$ м^3. Какой объём будет занимать этот газ при изотермическом сжатии до давления $p_2 = 2$ МПа?

4. Как изменится давление идеального газа в закрытом сосуде, если его температуру уменьшить в 1,5 раза?
5. При какой температуре находился идеальный газ в закрытом сосуде, если при нагревании на 200 К его давление возросло в 2 раза?
6. В закрытом сосуде при температуре 27 °С давление идеального газа было 200 кПа. Каким будет давление этого газа при температуре –23 °С?
7. Как изменится температура идеального газа, если его объём изобарически увеличить в 2 раза?

§ 49 Объединённый газовый закон. Уравнение состояния идеального газа

Газовые законы позволяют вывести уравнение состояния идеального газа. Пусть идеальный газ в сосуде объёмом V_1 находится в состоянии термодинамического равновесия и имеет давление p_1 и абсолютную температуру T_1. Переведём этот газ в другое равновесное состояние, при котором его давление станет равным p_2, а объём — V_2.

Для этого изохорически (при $V_1 = \text{const}$) изменим температуру газа от температуры T_1 до такой температуры T, при которой его давление станет равным p_2. В соответствии с законом Шарля (так как $V_1 = \text{const}$) отношение давления газа к его температуре не изменится:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T}. \qquad (1)$$

Теперь изобарически (при $p_2 = \text{const}$) изменим объём газа от V_1 до V_2. При этом температура газа изменится от T до T_2. По закону Гей-Люссака отношение объёма газа к его температуре при таком процессе остаётся неизменным:

$$\frac{V_1}{T} = \frac{V_2}{T_2}. \qquad (2)$$

Выразив значение промежуточной температуры T из уравнения (2) и подставив его в уравнение (1), получим:

$$T = \frac{V_1}{V_2} \cdot T_2; \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{V_1 \cdot T_2}.$$

Умножив обе части полученного выражения на V_1, получим:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}.$$

При переходе данного количества идеального газа из одного состояния термодинамического равновесия в другое произведение его давления на объём, поделённое на абсолютную температуру газа, остаётся постоянной величиной:

$$\frac{p \cdot V}{T} = \text{const.} \qquad (3)$$

Полученное соотношение называют **объединённым газовым законом для идеального газа** или *уравнением Клапейрона*. С

В 1874 г. великий русский учёный Дмитрий Иванович Менделеев (1834–1907) показал, что постоянная величина в правой части уравнения Клапейрона прямо пропорциональна количеству ν идеального газа. Коэффициент пропорциональности одинаков для всех газов, которые можно считать идеальными. Поэтому его называют *универсальной газовой постоянной*. Эту постоянную обозначают буквой R. При решении задач в СИ её принимают равной $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

Количество ν газа равно отношению его массы m к его молярной массе M. Поэтому уравнение (3) для этого газа можно записать в виде:

$$p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T, \text{ или } p \cdot V = \nu \cdot R \cdot T. \qquad (4)$$

Полученное соотношение называют *уравнением Менделеева – Клапейрона* или *уравнением состояния идеального газа*. К

С Бенуа Клапейрон (1799–1864) — французский физик, автор работ по термодинамике.

К Уравнение (4) для одного моля газа имеет вид $p \cdot V = R \cdot T$. Подставляя в него объём одного моля идеального газа $V_0 = 22{,}414$ л при нормальных условиях ($T_0 = 273{,}15$ К (0 °С) и нормальном атмосферном давлении $p_0 = 101\,325$ Па), можно вычислить значение универсальной газовой постоянной: $R = 8{,}3145$ Дж/(моль · К).

Пусть исследуемый газ, занимающий объём V и имеющий температуру T, представляет собой смесь разных газов, например азота и кислорода. Обозначим массы и молярные массы этих газов соответственно $m_а$, $M_а$, $m_к$ и $M_к$. Тогда для азота и кислорода уравнения состояния имеют вид:

$$p_а \cdot V = \frac{m_а}{M_а} \cdot R \cdot T \text{ и } p_к \cdot V = \frac{m_к}{M_к} \cdot R \cdot T, \tag{5}$$

где $p_а$ и $p_к$ – давления, которые создавал бы каждый из газов (соответственно азот и кислород) при отсутствии другого. Эти давления называют *парциальными давлениями*.

Общее количество газа равно сумме количеств азота и кислорода:

$$\nu = \nu_а + \nu_к = \frac{m_а}{M_а} + \frac{m_к}{M_к}. \tag{6}$$

Поэтому при сложении уравнений (5), учитывая (6), получаем:

$$(p_а + p_к) \cdot V = \nu \cdot R \cdot T. \tag{7}$$

Эксперименты показывают, что *сумма парциальных давлений идеальных газов, составляющих смесь, равна давлению этой смеси*. Это утверждение называют **законом Дальтона**.

С учётом закона Дальтона уравнение (7) принимает вид:

$$p \cdot V = \nu \cdot R \cdot T, \tag{8}$$

где p – общее давление смеси. Полученное соотношение можно использовать для смеси любых газов, если её можно считать идеальным газом.

В заключение рассмотрим пример решения задачи с использованием уравнения Менделеева – Клапейрона.

Задача

Два сосуда с воздухом под давлениями p_1 и p_2 имеют объёмы V_1 и V_2 соответственно. Температура воздуха в первом сосуде равна T_1, а во втором сосуде – T_2. Сосуды соединены трубкой с закрытым краном. Объём трубки пренебрежимо мал по сравнению с объёмами сосудов. После открывания крана и установления термодинамического равновесия за счёт теплообмена с окружающей средой в сосудах установилась температура T. Определите установившееся давление p в сосудах.

Решение.

При решении подобных задач необходимо записать уравнения Менделеева – Клапейрона для каждого состояния термодинамического равновесия каждой термодинамической системы газа из условия задачи. В рассматриваемом случае таких состояний будет три: два начальных состояния (в первом и во втором сосудах) и одно конечное состояние в обоих сосудах, установившееся после открывания крана.

Джон Дальтон (1766–1844) – английский учёный, автор работ по молекулярной физике.

Для начального состояния воздуха в первом сосуде имеем:

$$p_1 \cdot V_1 = \nu_1 \cdot R \cdot T_1;$$

для начального состояния во втором сосуде имеем:

$$p_2 \cdot V_2 = \nu_2 \cdot R \cdot T_2;$$

и для конечного состояния в обоих сосудах имеем:

$$p \cdot (V_1 + V_2) = (\nu_1 + \nu_2) \cdot R \cdot T,$$

где $(V_1 + V_2)$ — объём воздуха, $(\nu_1 + \nu_2)$ — количество воздуха в сосудах.

Выражая ν_1 и ν_2 из первых двух уравнений и подставляя эти значения в третье уравнение, получаем ответ.

Ответ: $p = \dfrac{(p_1 \cdot V_1 \cdot T_2 + p_2 \cdot V_2 \cdot T_1) \cdot T}{(V_1 + V_2) \cdot T_1 \cdot T_2}$.

Вопросы

1. Можно ли перевести идеальный газ, находящийся в состоянии теплового равновесия при давлении p_1 и температуре T_1, в равновесное состояние, при котором его давление будет равно p_2, а объём равен V_2? Как это сделать? Можете ли вы предложить разные способы перевода этого газа из начального состояния в конечное?
2. Какие законы используют при выводе уравнения состояния идеального газа?
3. Какие макроскопические параметры идеального газа связывает между собой уравнение Менделеева — Клапейрона?

Упражнения

1. Определите массу и количество молей водорода, находящегося в баллоне ёмкостью $V = 20$ л под давлением $p = 830$ кПа при температуре $t = 27$ °C.
2. Газ массой $m = 16$ г при давлении $p = 1$ МПа и температуре $t = 112$ °C занимает объём $V = 1{,}6$ дм³. Определите, какой это газ.
3. Определите плотность азота при температуре $t = 27$ °C и давлении $p = 0{,}1$ МПа.

4 В баллоне под давлением $p = 150$ кПа при температуре $t = 127$ °C находится гелий. Определите концентрацию n_0 атомов гелия в баллоне.

5 Постройте графики изотермического, изохорического и изобарического процессов в координатах p, V; p, T; V, T для $\nu_1 = 1$ моль и $\nu_2 = 3$ моль идеального газа.

Для углублённого уровня

6 В жёстком баллоне первоначально находился озон (O_3). По прошествии некоторого времени весь озон превратился в кислород (O_2). Во сколько раз изменилось давление в баллоне, если температуры газа в начальном и конечном состояниях оказались равными?

*7 В цилиндре под поршнем находится идеальный газ. На рис. 207 показан график зависимости давления p газа от его абсолютной температуры T. В каком состоянии газ занимает наибольший, а в каком — наименьший объём?

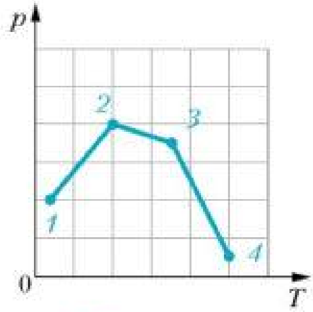


Рис. 207

§ 50 Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

Мы уже отмечали, что давление газа на стенку сосуда обусловлено тем, что при ударе о стенку молекулы газа действуют на неё с некоторой силой. Понятно, что давление газа зависит от числа ударов за единицу времени, массы молекул и их скоростей. Определим вид этой зависимости.

Пусть в жёстком сосуде, имеющем форму прямоугольного параллелепипеда объёмом V, находится N молекул идеального газа. Рассмотрим молекулу газа массой m_0, которая движется со скоростью $\vec{v}$ перпендикулярно одной из стенок сосуда (в положительном направлении оси X, связанной с сосудом ИСО). Будем считать, что газ и сосуд находятся в состоянии термодинамического равновесия. В этом случае кинетическая энергия молекулы в результате удара о стенку не изменяется. Другими словами, удар молекулы о стенку является упругим (абсолютно упругим). В результате такого удара модуль скорости движения молекулы остаётся постоянным, а направление скорости изменяется на противоположное. Поэтому изменение проекции импульса молекулы Δp_x в результате её соударения со стенкой равно:

$$\Delta p_x = -m_0 \cdot v_x - m_0 \cdot v_x = -2 \cdot m_0 \cdot v_x, \qquad (1)$$

где v_x — проекция начальной скорости $\vec{v}$ молекулы на ось X.

В сосуде все молекулы движутся хаотически, т. е. во всех возможных направлениях. При этом модули скоростей всех молекул различны (*см.* § 52). Эти два обстоятельства приводят к тому, что строгий вывод искомой зависимости является достаточно сложным и объёмным. С целью упрощения вывода искомой зависимости рассмотрим вместо реальной ситуации модельную. В рамках рассматриваемой модели примем, во-первых, что модули скоростей всех молекул равны v. Во-вторых, будем считать, что каждая из молекул может двигаться только вдоль одной из трёх координатных осей. Тогда, поскольку в реальной ситуации все направления скоростей молекул равновероятны, то будем считать, что вдоль каждой из трёх взаимно перпендикулярных осей ИСО движется одинаковое количество молекул, т. е. одна треть всех молекул. Следовательно, в сторону рассматриваемой стенки (в положительном направлении оси X) движется *одна шестая* часть всех молекул. За время τ до стенки площадью S долетят лишь те молекулы, которые в начальный момент рассматриваемого промежутка времени находились от стенки на расстоянии, не превышающем $v \cdot \tau$. Таким образом, за рассматриваемый промежуток времени до стенки долетит одна шестая часть молекул, находящихся в объёме $v \cdot \tau \cdot S$.

В единице объёма сосуда находится $n = N/V$ молекул. Число n называют *средней концентрацией молекул*. В результате получаем, что за время τ о стенку ударится $\frac{1}{6} n \cdot v \cdot \tau \cdot S$ молекул.

С учётом формулы (1) за промежуток времени τ изменение Δp_x проекции *суммарного импульса молекул*, ударившихся о стенку, равно:

$$\Delta p_x = -\frac{1}{6} n \cdot v \cdot \tau \cdot S \cdot 2m_0 \cdot v = -\frac{1}{3} n \cdot m_0 \cdot v^2 \cdot \tau \cdot S. \qquad (2)$$

Это изменение импульса вызвано действием стенки на налетающие на неё молекулы. Поэтому среднее значение проекции силы, действовавшей на молекулы со стороны стенки в течение времени τ, равно:

$$F_x = \frac{\Delta p_x}{\tau} = -\frac{1}{3} n \cdot m_0 \cdot v^2 \cdot S. \qquad (3)$$

По третьему закону Ньютона среднее значение модуля силы F_r, с которой молекулы действовали на стенку, равно модулю F_x. Поэтому давление, оказываемое молекулами газа на стенку, в соответствии с определением давления равно:

$$p = \frac{F_с}{S} = \frac{1}{3} n \cdot m_0 \cdot v^2. \qquad (4)$$

Обратите внимание: соотношение (4) получено в предположении, что модули скоростей всех молекул равны v и они движутся только вдоль координатных осей. На самом деле *модули скоростей всех молекул различны* и они могут двигаться во всех возможных направлениях. Тем не менее можно показать, что соотношение (4) верно для любого идеального газа, если стоящая в правой части физическая величина v^2 является квадратом *среднеквадратичной скорости* хаотического движения молекул.

Среднеквадратичной скоростью называют физическую величину, равную:

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{v}_1^2 + \boldsymbol{v}_2^2 + ... + \boldsymbol{v}_N^2}{\boldsymbol{N}}}, \qquad (5)$$

где v_1, v_2, ..., v_N — модули скоростей всех молекул, а N — их число.

Соотношение (4), в котором v – среднеквадратичная скорость хаотического движения молекул, называют *основным уравнением молекулярно-кинетической теории*.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории:

$$p = \frac{1}{3} n \cdot m_0 \cdot v^2,$$

где p — давление идеального газа, m_0 — масса молекулы, n — средняя концентрация молекул в сосуде, v — среднеквадратичная скорость хаотического (теплового) движения молекул.

Введение понятия среднеквадратичной скорости позволяет записать выражение для *средней кинетической энергии хаотического поступательного движения*, приходящейся на одну молекулу идеального газа:

$$K = \frac{m_0 \cdot v^2}{2}.$$

Поэтому основное уравнение молекулярно-кинетической теории можно записать в виде:

$$p = \frac{2}{3} n \cdot K.$$

Давление идеального газа прямо пропорционально произведению концентрации его молекул и средней кинетической энергии их хаотического движения, приходящейся на одну молекулу.

В заключение отметим, что с помощью основного уравнения молекулярно-кинетической теории можно оценить среднеквадратичную скорость хаотического движения молекул идеального газа, если известны его давление и плотность. Действительно, поскольку плотность газа $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_0 \cdot N}{V} = m_0 \cdot n$, то из уравнения (4) получаем: $v = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}$.

Вопросы

1. Что называют среднеквадратичной скоростью движения молекул?
2. Почему в основном уравнении молекулярно-кинетической теории стоит множитель $\frac{1}{3}$?
3. Как давление идеального газа зависит от концентрации и массы его молекул?
4. Как давление идеального газа связано со средней кинетической энергией хаотического поступательного движения, приходящейся на одну молекулу?
5. Какие величины в основном уравнении молекулярно-кинетической теории являются макроскопическими параметрами термодинамической системы, а какие — микроскопическими параметрами?

Упражнения

1. В баллоне ёмкостью $V = 20$ л под давлением $p = 100$ кПа находится один моль кислорода. Определите среднеквадратичную скорость хаотического движения молекул кислорода, считая его идеальным газом.
2. Определите плотность азота при нормальных условиях.
3. Определите среднеквадратичную скорость хаотического движения молекул азота при нормальных условиях.

*4. Кислород массой $m = 16$ г при температуре $t = 112$ °C занимает объём $V = 1{,}6$ дм^3. Определите среднюю кинетическую энергию хаотического движения, приходящуюся на одну молекулу кислорода.

§ 51 Температура — мера средней кинетической энергии хаотического движения молекул

Пусть в сосуде объёмом V находится N молекул идеального газа при абсолютной температуре T и давлении p. Если масса каждой молекулы равна m_0, то основное уравнение молекулярно-кинетической теории для этого газа будет иметь вид:

$$p = \frac{1}{3} n \cdot m_0 \cdot v^2 = \frac{1}{3}\frac{N}{V} \cdot m_0 \cdot v^2. \qquad (1)$$

Умножив левую и правую части уравнения (1) на объём V, занимаемый газом, получим:

$$p \cdot V = \frac{1}{3} N \cdot m_0 \cdot v^2. \qquad (2)$$

Количество газа можно представить в виде $\nu = N/N_A$. Поэтому запишем левую часть уравнения (2) с учётом уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$p \cdot V = \frac{N}{N_A} \cdot R \cdot T. \qquad (3)$$

Приравнивая правые части уравнений (2) и (3) и умножая их на $\frac{3}{2}$, после сокращения на N получаем:

$$\frac{m_0 \cdot v^2}{2} = \frac{3}{2}\frac{R}{N_A} \cdot T. \qquad (4)$$

! Коэффициент, равный отношению универсальной газовой постоянной к числу Авогадро, обозначают k и называют *постоянной Больцмана*:

$$k = \frac{R}{N_A} \approx 1{,}38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К.}$$

Таким образом, средняя кинетическая энергия хаотического движения, приходящаяся на одну молекулу идеального газа, прямо пропорциональна абсолютной температуре газа:

$$K_0 = \frac{m_0 \cdot v^2}{2} = \frac{3}{2}\frac{R}{N_A} \cdot T = \frac{3}{2} k \cdot T. \qquad (5)$$

Постоянная Больцмана названа в честь австрийского физика Людвига Больцмана (1844–1906), одного из основоположников молекулярно-кинетической теории.

Из этого следует, что введённая в термодинамике *абсолютная температура является физической величиной, характеризующей среднюю кинетическую энергию хаотического движения молекул*. В этом и состоит физический смысл температуры с точки зрения молекулярно-кинетической теории.

Из уравнения (5) следует, что при $T = 0$ среднеквадратичная скорость хаотического движения молекул идеального газа должна стать равной нулю, т. е. при нулевой абсолютной температуре молекулы идеального газа должны были бы покоиться. Поэтому построенную Кельвином шкалу абсолютных температур часто называют *идеальной газовой абсолютной шкалой температур*.

Отметим, что, используя постоянную Больцмана, основное уравнение молекулярно-кинетической теории можно записать более кратко:

$$p = n \cdot k \cdot T. \qquad (6)$$

Соотношение (4) позволяет рассчитывать среднеквадратичную скорость хаотического движения молекул идеального газа, если известны его температура и молярная масса. Действительно, из уравнения (4) следует, что:

$$v = \sqrt{\frac{3R \cdot T}{N_A \cdot m_0}} = \sqrt{\frac{3R \cdot T}{M}}. \qquad (7)$$

Получим теперь формулу для расчёта внутренней энергии идеального газа. Для этого напомним, что в модели идеального газа молекулы не взаимодействуют на расстоянии. Поэтому потенциальную энергию их взаимодействия друг с другом следует считать равной нулю: $П = 0$. Кроме того, считают, что кинетическая энергия их хаотического движения представляет собой сумму кинетических энергий *только* поступательного хаотического движения молекул. Другими словами, энергию, связанную с вращением молекул и колебаниями атомов в молекулах, считают пренебрежимо малой и полагают равной нулю. Это предположение при условиях, близких к нормальным, допустимо только для одноатомных газов (инертных газов и паров металлов). Для этих газов в соответствии с уравнением (5) и определением внутренней энергии получаем формулу для расчёта внутренней энергии одноатомного идеального газа:

$$U = K + П = N \cdot K_п + 0 = N \cdot \frac{m_0 \cdot v^2}{2} = \frac{3}{2}\frac{N \cdot R}{N_A} \cdot T = \frac{3}{2}\nu \cdot R \cdot T. \qquad (8)$$

Отметим, что сложные (многоатомные) молекулы часто нельзя считать маленькими шариками и пренебрегать кинетической энергией, обусловленной вращением молекул. В этих случаях в формуле для расчёта внутренней энергии газа будут стоять другие числовые коэффициенты. Например, для большинства газов, молекулы которых состоят из двух атомов, при условиях, близких к нормальным, формула (8) имеет вид:

$$U = \frac{5}{2}\nu \cdot R \cdot T. \qquad (9)$$

Если же температура двухатомного газа становится достаточно большой (сравнимой с 2000 К и более), то необходимо учитывать энергию, обусловленную колебаниями атомов в двухатомной молекуле. В этом случае формула (9) принимает вид:

$$U = \frac{7}{2}\nu \cdot R \cdot T.$$

Вопросы

1. Чему равна постоянная Больцмана?
2. Как связаны среднеквадратичная скорость хаотического движения молекул идеального газа и его температура?
3. В чём состоит физический смысл температуры с точки зрения молекулярно-кинетической теории?
4. По каким формулам можно вычислить среднеквадратичную скорость хаотического движения молекул идеального газа?

Упражнения

1. Определите среднеквадратичную скорость хаотического движения молекул азота, кислорода, водорода, углекислого газа и паров воды при температуре окружающего воздуха $t = 27\ ^\circ\mathrm{C}$.
2. Определите среднеквадратичную скорость хаотического движения молекул азота, кислорода, водорода, углекислого газа и паров воды при температуре $t = 127\ ^\circ\mathrm{C}$.
3. Давление кислорода при температуре $t = 100\ ^\circ\mathrm{C}$ равно $p = 100$ кПа. Определите концентрацию молекул кислорода.
4. Определите внутреннюю энергию одного моля гелия при нормальных условиях.

§ 52 Распределение молекул газа по скоростям

Полученные из теоретических расчётов значения скоростей хаотического движения молекул газа удивили учёных. Действительно, трудно себе представить, что молекулы окружающего нас воздуха движутся со скоростями, модули которых достигают сотен метров в секунду. Поэтому встал вопрос об измерении скоростей движения молекул экспериментально.

Первый метод измерения скоростей движения молекул был предложен в 1920 г. немецким физиком Отто Штерном (1888–1969). Схема опыта Штерна показана на рис. 208. Внутри двух соосных цилиндров радиусами r и R на их оси расположена тонкая платиновая проволока *1*, покрытая слоем серебра. По проволоке пропускают электрический ток. В результате она разогревается и с её поверхности испаряются одноатомные молекулы серебра. Чтобы не мешать движению испарившихся молекул, воздух из пространства внутри цилиндров откачивают.

Во внутреннем цилиндре *2* делают тонкую параллельную оси цилиндра прорезь. При неподвижных цилиндрах выделенный прорезью тонкий пучок молекул серебра оседает на внутренней поверхности большого цилиндра *3*. В результате на ней точно напротив прорези образуется узкая серебряная полоска A с достаточно резкими краями.

Затем оба цилиндра приводят во вращение с угловой скоростью ω. В результате за время t пролёта молекулы серебра от прорези внутреннего цилиндра до поверхности внешнего цилиндра оба цилиндра повернутся на угол $\alpha = \omega \cdot t$. При этом молекула попадёт не в то место, куда она попала бы в случае, когда цилиндры неподвижны. Время t пролёта молекулы равно отношению расстояния $(R - r)$ между прорезью и поверхностью внешнего цилиндра к модулю v скорости молекулы: $t = (R - r)/v$. Поэтому угол смещения равен:

$$\alpha = \frac{\omega \cdot (R - r)}{v}. \qquad (1)$$

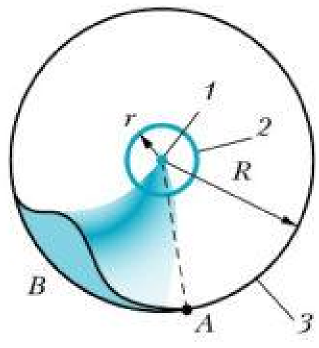


Рис. 208

Таким образом, измерение угла смещения полоски позволяет рассчитать скорость движения молекул серебра.

Если бы скорости всех молекул серебра были одинаковыми и рав-

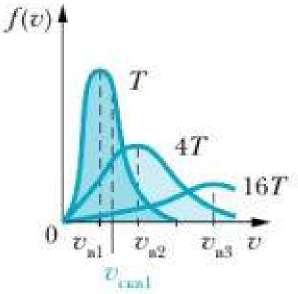


Рис. 209

ными v, то на внутренней поверхности цилиндра вновь образовалась бы серебряная полоска с достаточно резкими краями, но только смещённая на угол α относительно первой полоски. Однако эксперимент показал, что при вращении цилиндров молекулы серебра оседают на внутренней поверхности большого цилиндра неравномерно – в области B (*см.* рис. 208). Это означает, что молекулы серебра вылетают из прорези с разными скоростями. Измерение толщины образовавшихся в разных местах слоёв серебра позволило определить число молекул, попавших в то или иное место области B. В свою очередь, знание зависимости угла смещения от модуля скорости молекул позволило рассчитать распределение молекул по скоростям, т. е. определить, какая часть молекул от их общего числа имеет ту или иную скорость. Вид этого распределения $f(v)$, полученный при различных температурах T проволоки, показан на рис. 209. Видно, что построенная кривая имеет максимум. Модуль скорости, соответствующей этому максимуму, называют наивероятнейшей скоростью $v_в$. Видно также, что модули скоростей большей части молекул близки к наивероятнейшей. Число же молекул, модули скоростей которых либо очень велики, либо очень малы, весьма незначительно. Отметим, что среднеквадратичная скорость $v_{скв}$, определение которой было дано в § 50, примерно в 1,22 раза больше наивероятнейшей. Обращает на себя внимание и то, что при увеличении температуры проволоки среднеквадратичная и наивероятнейшая скорости молекул серебра увеличиваются, весь график смещается в область более высоких скоростей, а максимум кривой уменьшается.

Распределение, полученное экспериментально Штерном, было теоретически рассчитано британским физиком Джеймсом Максвеллом (1831–1879) в 1860 г., т. е. задолго до проведения эксперимента. Поэтому это распределение называют *распределением Максвелла*.

Отметим, что функцию, значение которой отложено по вертикальной оси на рис. 209, называют плотностью распределения. Её физический смысл легко понять из того, как это распределение было получено в опыте Штерна. Произведение значения $f(v)$ этой функции при заданной скорости v на малый интервал скоростей Δv показывает, какая часть от общего числа молекул обладает скоростями, модули которых лежат в интервале от v до $v + \Delta v$.

Другими словами, если общее число молекул равно N, то число молекул, модули скоростей которых лежат в интервале от v до $v + \Delta v$, равно: $\Delta N = f(v) \cdot \Delta v \cdot N$. Выражение для плотности распределения, полученное Максвеллом теоретически, имеет вид:

$$f(v) = 4\pi \cdot v^2 \cdot \left(\frac{m_0}{2\pi \cdot k \cdot T}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot v^2}{2k \cdot T}},$$

где m_0 — масса молекулы, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, $e \approx 2{,}71828$.

Вопросы

1. Опишите опыт Штерна.
2. Почему угол смещения молекул при вращении цилиндров в опыте Штерна зависит от модуля скорости вылета молекулы серебра из прорези?
3. Почему при вращении цилиндров в опыте Штерна внутренняя поверхность большого цилиндра покрывается серебром неравномерно?
4. Как изменяется вид кривой распределения Максвелла при изменении температуры газа?
5. По часовой стрелке или против часовой стрелки вращались цилиндры, изображённые на рис. 208?

*6. Какую скорость называют наивероятнейшей? Как она связана со среднеквадратичной скоростью хаотического движения молекул газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия?

§ 53 Применение первого закона термодинамики к изобарическому процессу

Теперь, когда вы знаете формулу для расчёта внутренней энергии идеального газа и первый закон термодинамики, изучим преобразования энергии, происходящие в термодинамических процессах.

При изучении каждого процесса необходимо, во-первых, представлять, как можно его реализовать. Во-вторых, научиться отвечать на четыре вопроса о том, как ведёт себя система в термодинамическом процессе:

1. Как изменяется внутренняя энергия системы?
2. Какую работу она совершает?
3. Получает или отдаёт система теплоту?
4. Чему равно количество полученной (отданной) теплоты?

Рис. 210

Рассмотрим изобарический процесс и покажем, как отвечать на эти вопросы.

Начнём с *изобарического расширения*.

Пусть идеальный газ находится в сосуде под поршнем массой M и площадью S (рис. 210). Поршень может двигаться в цилиндре без трения. Внешнее давление не изменяется и равно p_0. Газ находится в состоянии термодинамического равновесия с окружающей средой.

В вертикальном направлении на поршень действуют направленные вниз сила тяжести $M \cdot \vec{g}$, сила $\vec{F}_0$ внешнего давления и направленная вертикально вверх сила $\vec{F}$ давления газа, находящегося под поршнем. В состоянии равновесия по второму закону Ньютона сумма этих сил равна нулю.

Следовательно, $p = p_0 + \dfrac{M \cdot g}{S}$.

Будем медленно нагревать газ в цилиндре. Если происходящий с газом процесс считать равновесным, то в каждый момент времени газ будет находиться в состоянии термодинамического равновесия. В этом случае сумма всех действующих на поршень сил в любой момент времени будет оставаться постоянной и равной нулю. Следовательно, давление газа на протяжении всего такого процесса будет постоянным.

Нагревание газа при постоянном давлении p приведёт к увеличению его температуры. В соответствии с уравнением Менделеева – Клапейрона при этом увеличится и объём газа.

График процесса изобарического расширения приведён на рис. 211. Будем считать, что нам известны давление, а также начальные и конечные объёмы и температуры газа. Ответим последовательно на поставленные вопросы.

1. Начнём с вопроса о внутренней энергии. Поскольку температура газа увеличивается, то увеличивается и его внутренняя энергия: $\Delta U = U_2 - U_1 > 0$. Если рассматриваемый газ является одноатомным идеальным, то изменение его внутренней энергии может быть рассчитано по формуле:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{3}{2}\nu \cdot R \cdot T_2 - \frac{3}{2}\nu \cdot R \cdot T_1 = \frac{3}{2}\nu \cdot R \cdot \Delta T, \qquad (1)$$

где $\Delta T = T_2 - T_1 > 0$.

2. Определим работу газа. При переходе газа из состояния *1* в состояние *2* поршень поднимается на расстояние $l = \dfrac{V_2 - V_1}{S} = \dfrac{\Delta V}{S}$. Поэтому постоянная сила F давления газа, действующая на поршень, при расширении совершает положителную работу:

$$A = F \cdot l = p \cdot S \cdot \frac{\Delta V}{S} = p \cdot \Delta V.$$

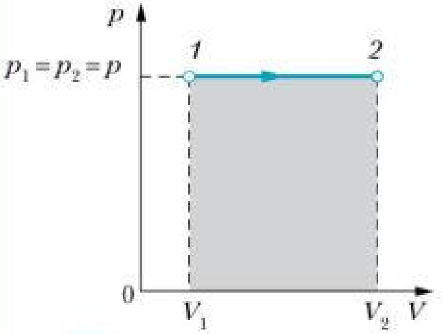


Рис. 211

Работа A совершается силой давления газа, поэтому её называют работой газа. В рассмотренном случае сила F направлена туда же, куда перемещается поршень. Именно поэтому совершаемая газом работа положительна. Таким образом, *при расширении (т. е. при увеличении объёма) газ совершает положительную работу.*

! Работа A, совершаемая газом при его расширении в изобарическом процессе, равна произведению давления p газа на изменение его объёма ΔV:

$$A = p \cdot \Delta V. \qquad (2)$$

Отметим особо, что работа газа численно равна площади закрашенного прямоугольника на рис. 211. Другими словами, *работа численно равна площади под графиком зависимости давления газа от его объёма.*

3. Определим, получает или отдаёт газ теплоту в рассматриваемом процессе. Воспользуемся первым законом термодинамики, записав его в виде:

$$Q = U_2 - U_1 + A. \qquad (3)$$

Напомним, что в законе (3) Q — количество полученной газом теплоты, A — работа, совершённая газом. В соответствии с правилом знаков если $Q > 0$, то газ получает теплоту, и наоборот, если $Q < 0$, то газ отдаёт теплоту. Соответственно если $A > 0$, то работу совершает газ, и наоборот, если $A < 0$, то работу совершают над газом. Следовательно, необходимо определить знак Q при изобарическом расширении.

Мы уже установили, что при изобарическом расширении внутренняя энергия газа увеличивается: $U_2 - U_1 > 0$. Кроме того, газ совершает положительную работу: $A > 0$. Таким образом, из закона (3) следует, что $Q > 0$, т. е. газ получает количество теплоты Q.

В результате мы приходим к выводу:

! при расширении газа в изобарическом процессе газ получает количество теплоты Q, которое равно сумме совершаемой этим газом работы и увеличения внутренней энергии газа:
$Q = A + U_2 - U_1$.

4. Рассчитаем количество теплоты, полученное газом. Подставляя уравнения (1) и (2) в уравнение (3), получаем:

$$Q = U_2 - U_1 + A = \frac{3}{2}\nu \cdot R \cdot (T_2 - T_1) + p \cdot (V_2 - V_1) = \frac{3}{2}\nu \cdot R \cdot \Delta T + p \cdot \Delta V. \qquad (4)$$

Воспользуемся уравнениями Менделеева – Клапейрона для начального и конечного состояний:

$$p_1 \cdot V_1 = \nu \cdot R \cdot T_1 \text{ и } p_2 \cdot V_2 = \nu \cdot R \cdot T_2.$$

Поскольку $p_1 = p_2 = p$, то при вычитании из уравнения (2) уравнения (1) получаем:

$$p \cdot \Delta V = \nu \cdot R \cdot \Delta T. \qquad (5)$$

С учётом уравнения (5) выражение (4) можно преобразовать к виду:

$$Q = \frac{3}{2}\nu \cdot R \cdot \Delta T + p \cdot \Delta V = \frac{3}{2}\nu \cdot R \cdot \Delta T + \nu \cdot R \cdot \Delta T = \frac{5}{2}\nu \cdot R \cdot \Delta T. \qquad (6)$$ **К**

Теперь рассмотрим *изобарическое сжатие*.

Для того чтобы газ под поршнем в системе, показанной на рис. 212, изобарически сжимался, газ надо охлаждать. Если происходящий процесс считать равновесным, то в каждый момент времени газ будет находиться в состоянии термодинамического равновесия. Охлаждение газа означает уменьшение его температуры. Давление газа постоянно. Поэтому в соответствии с уравнением Менделеева – Клапейрона его объём будет умень-

К Определим теплоёмкость газа в рассматриваемом процессе. По определению теплоёмкости из формулы (6) следует, что теплоёмкость одноатомного идеального газа при изобарическом расширении равна:

$$C_p = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{5}{2}\nu \cdot R.$$

Следовательно, *молярная теплоёмкость одноатомного идеального газа при изобарическом расширении* (p = const) равна:

$$c_{M\,p} = \frac{C_p}{\nu} = \frac{5}{2}R.$$

Рис. 212

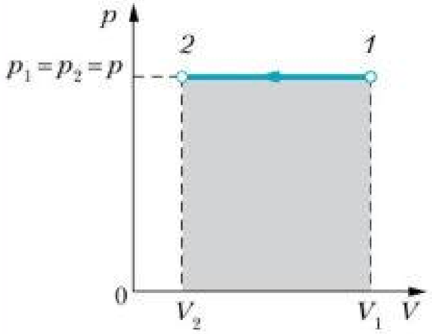


Рис. 213

шаться. Таким образом, рассматриваемый процесс будет *изобарическим сжатием*.

График процесса изобарического сжатия приведён на рис. 213. Будем считать, что нам известны давление, а также начальные и конечные объёмы и температуры газа. Ответим на поставленные вопросы.

1. Начнём с вопроса о внутренней энергии. Температура газа уменьшается. Поэтому уменьшается и его внутренняя энергия: $\Delta U = U_2 - U_1 < 0$. Если рассматриваемый газ является одноатомным идеальным, то изменение его внутренней энергии равно:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{3}{2}\nu \cdot R \cdot T_2 - \frac{3}{2}\nu \cdot R \cdot T_1 = \frac{3}{2}\nu \cdot R \cdot \Delta T, \qquad (7)$$

где $\Delta T = T_2 - T_1 < 0$.

2. Определим работу газа. При изобарическом сжатии объём газа уменьшается: $\Delta V = V_2 - V_1 < 0$. Направление силы $\vec{F}$ давления газа противоположно направлению перемещения поршня. Поэтому при изобарическом сжатии газ совершает отрицательную работу.

! При изобарическом сжатии (т. е. при уменьшении объёма) газ совершает отрицательную работу:

$$A = p \cdot \Delta V < 0. \qquad (8)$$

Отметим особо, что модуль работы газа и в этом случае численно равен площади закрашенного прямоугольника на рис. 213.

3. Определим, получает или отдаёт газ теплоту в рассматриваемом процессе. Воспользуемся первым законом термодинамики:

$$Q = U_2 - U_1 + A. \qquad (9)$$

При изобарическом сжатии $U_2 - U_1 < 0$ и $A < 0$. Следовательно, $Q < 0$, т. е. газ отдаёт теплоту.

4. Рассчитаем количество теплоты.

Подставляя уравнения (7) и (8) в (9), получаем:

$$Q = U_2 - U_1 + A = \frac{3}{2}\nu \cdot R \cdot \left(T_2 - T_1\right) + p \cdot \left(V_2 - V_1\right) = \frac{3}{2}\nu \cdot R \cdot \Delta T + p \cdot \Delta V. \qquad (10)$$

Используя уравнения Менделеева — Клапейрона для начального и конечного состояний, уравнение (10) можно преобразовать к виду:

$$Q = \frac{3}{2}\nu \cdot R \cdot \Delta T + p \cdot \Delta V = \frac{3}{2}\nu \cdot R \cdot \Delta T + \nu \cdot R \cdot \Delta T = \frac{5}{2}\nu \cdot R \cdot \Delta T. \qquad (11)$$

Обратим внимание на то, что в формулах (10) и (11) изменение объёма и изменение температуры отрицательны. Поэтому и рассчитанное по этим формулам количество теплоты Q будет отрицательным. В соответствии с правилом знаков это означает, что газ отдаёт теплоту. К

К Определим теплоёмкость газа в рассматриваемом процессе. По определению теплоёмкости из формулы (11) следует:

$$C_p = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{5}{2}\nu \cdot R.$$

Следовательно, *молярная теплоёмкость одноатомного идеального газа при изобарическом сжатии* ($p = \text{const}$) равна:

$$c_{M\,p} = \frac{C_p}{\nu} = \frac{5}{2}R.$$

Таким образом, теплоёмкость газа при изобарическом сжатии равна его теплоёмкости при изобарическом расширении.

Вопросы

1. Как можно реализовать: а) изобарическое расширение; б) изобарическое сжатие?
2. Увеличивается или уменьшается внутренняя энергия идеального газа: а) при изобарическом расширении; б) при изобарическом сжатии?
3. Положительна, отрицательна или равна нулю работа идеального газа: а) при изобарическом расширении; б) при изобарическом сжатии?

4 Отдаёт или получает теплоту идеальный газ: а) при изобарическом расширении; б) при изобарическом сжатии?

Упражнения

1 На рис. 214 показаны процессы изменения состояния одного моля идеального одноатомного газа. Ответьте на четыре вопроса из данного параграфа для каждого из этих процессов.

2 На рис. 215 показаны процессы изменения состояния трёх молей идеального одноатомного газа. Ответьте на четыре вопроса из данного параграфа для каждого из этих процессов.

*3 Определите удельную теплоёмкость гелия при изобарическом процессе.

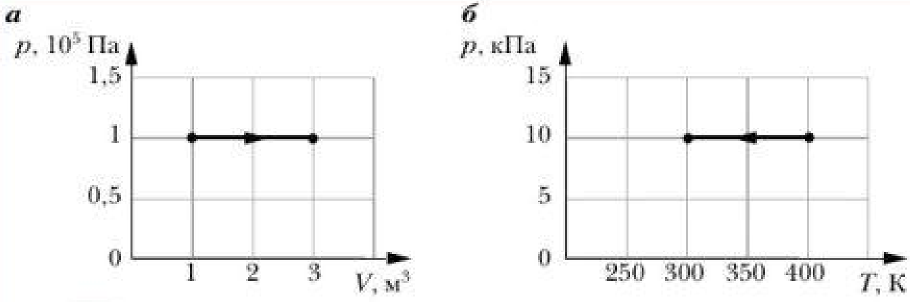


Рис. 214

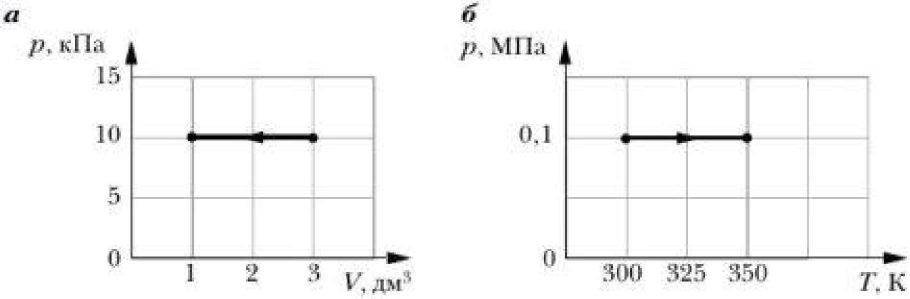


Рис. 215

§ 54 Применение первого закона термодинамики к изохорическому, изотермическому и адиабатическому процессам

Изохорический процесс

Рассмотрим газ в сосуде, объём которого не изменяется. Это может быть, например, сосуд с неподвижным (закреплённым) поршнем (рис. 216). Будем медленно нагревать этот сосуд. Тогда рассматриваемый процесс будет *изохорическим нагреванием*. Если происходящий с газом процесс считать равновесным, то в каждый момент времени газ будет находиться в состоянии термодинамического равновесия. Нагревание газа означает увеличение его температуры. Объём газа не изменяется. Поэтому в соответствии с уравнением Менделеева – Клапейрона давление газа будет увеличиваться.

График процесса изохорического нагревания приведён на рис. 217. Будем считать, что нам известны объём, а также начальные и конечные давление и температура газа. Ответим на четыре вопроса о термодинамической системе в рассматриваемом процессе.

1. Начнём с вопроса о внутренней энергии. Температура газа увеличивается. Следовательно, увеличивается и его внутренняя энергия: $\Delta U = U_2 - U_1 > 0$. Если рассматриваемый газ является одноатомным идеальным, то изменение его внутренней энергии равно:

Рис. 216

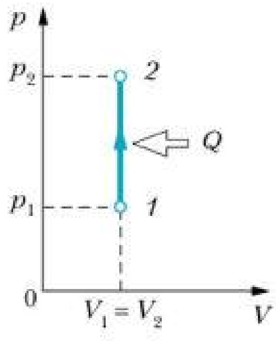


Рис. 217

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{3}{2}\nu \cdot R \cdot T_2 - \frac{3}{2}\nu \cdot R \cdot T_1 = \frac{3}{2}\nu \cdot R \cdot \Delta T, \qquad (1)$$

где $\Delta T = T_2 - T_1 > 0$.

2. Определим работу газа. В рассматриваемом процессе поршень, на который действует сила давления газа, неподвижен. Поэтому его перемещение равно нулю. Следовательно, равна нулю и работа газа: $A = F \cdot l = F \cdot 0 = 0$. Отметим, что равна нулю и площадь под графиком зависимости давления p газа от его объёма V на рис. 217.

! При изохорическом нагревании работа газа равна нулю.

3. Определим, получает или отдаёт газ теплоту при изохорическом нагревании. Воспользуемся первым законом термодинамики:

$$Q = U_2 - U_1 + A. \qquad (2)$$

Мы уже установили, что при изохорическом нагревании внутренняя энергия газа увеличивается: $U_2 - U_1 > 0$, а работа газа равна нулю. Таким образом, из уравнения (2) следует, что $Q > 0$, т. е. газ получает теплоту.

! При нагревании газа в изохорическом процессе газ получает количество теплоты, равное увеличению его внутренней энергии:

$$Q = U_2 - U_1. \qquad (3)$$

4. Рассчитаем количество теплоты, полученное газом. Подставляя уравнение (1) в (3), имеем:

$$Q = U_2 - U_1 + 0 = \frac{3}{2}\nu \cdot R \cdot \Delta T. \qquad (4)$$ **К**

Теперь рассмотрим *изохорическое охлаждение* газа в сосуде с закреплённым поршнем (рис. 218).

К Определим теплоёмкость газа в рассматриваемом процессе. По определению теплоёмкости из уравнения (4) следует, что теплоёмкость одноатомного идеального газа при изохорическом нагревании равна:

$$C_V = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{3}{2}\nu \cdot R.$$

Следовательно, *молярная теплоёмкость одноатомного идеального газа при изохорическом нагревании* равна:

$$c_{M\,V} = \frac{C_V}{\nu} = \frac{3}{2}R.$$

Рис. 218

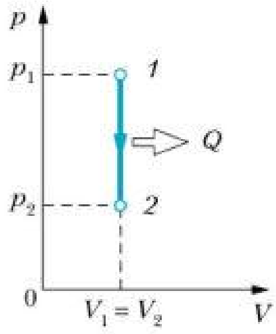


Рис. 219

Уменьшение температуры газа будет сопровождаться уменьшением давления газа. График изменения давления p при изохорическом охлаждении приведён на рис. 219. Ответим на четыре вопроса о термодинамической системе в рассматриваемом процессе.

1. Начнём с вопроса о внутренней энергии. Температура газа уменьшается, поэтому будет уменьшаться и внутренняя энергия газа. Если охлаждаемый газ является одноатомным идеальным, то изменение его внутренней энергии равно:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{3}{2}\nu \cdot R \cdot \Delta T < 0.$$

2. Определим работу газа. Поскольку поршень неподвижен, то работа A газа при изохорическом охлаждении равна нулю: $A = 0$. Равна нулю и площадь под графиком зависимости давления p газа от его объёма V на рис. 219.

3. Определим, получает или отдаёт газ теплоту при изохорическом охлаждении. Поскольку внутренняя энергия газа уменьшается, а его работа равна нулю, то, согласно первому закону термодинамики, система отдаёт некоторое количество теплоты.

4. Рассчитаем количество теплоты. Из первого закона термодинамики следует:

$$Q = U_2 - U_1 + 0 = \frac{3}{2}\nu \cdot R \cdot \Delta T.$$

Обратим внимание на то, что в данной формуле изменение температуры ΔT отрицательно. Поэтому и рассчитанное по этой формуле количество теплоты Q будет отрицательным, т. е. газ отдаёт теплоту.

При изохорическом охлаждении газ отдаёт количество теплоты, равное уменьшению его внутренней энергии:
$Q = U_2 - U_1$. K

Изотермический процесс

Рассмотрим изотермический процесс. Для его осуществления необходимо газ, находящийся в сосуде, поместить внутрь термостата – устройства, температура которого постоянна. Обычно термостат представляет собой либо тело, имеющее очень большую теплоёмкость, либо тело, содержащее устройство для поддержания постоянной температуры (например, за счёт прокачки жидкости, температура которой постоянна).

Пусть газ находится в сосуде, на поршень которого сверху насыпан песок. Поместим этот сосуд в термостат. Если сосуд с газом будет находиться в состоянии теплового равновесия с термостатом, то температура газа будет оставаться неизменной. Будем медленно уменьшать давление газа, убирая по одной песчинке с поршня. Уменьшение давления газа при постоянной температуре приведёт к увеличению его объёма. Поршень будет медленно подниматься вверх. Таким образом, рассматриваемый процесс будет *изотермическим расширением*.

График процесса изотермического расширения приведён на рис. 220. Будем считать, что нам известны температура, а также объём и давление газа в каждый момент времени. Ответим на четыре вопроса о термодинамической системе в рассматриваемом процессе.

1. Начнём с вопроса о внутренней энергии. Температура газа не изменяется. Поэтому не изменяется и его внутренняя энергия: $\Delta U = 0$.

2. Определим работу газа. При изотермическом расширении объём газа увеличивается. Направление силы $\vec{F}$ давления газа совпадает с направлением перемещения поршня. Следовательно, при изотермическом расширении газ совершает положительную работу: $A > 0$.

При изотермическом расширении газ совершает положительную работу.

Представим рассматриваемый процесс в виде очень большого числа последовательно происходящих элементарных процессов, в каждом из кото-

K Из полученного следует, что молярная теплоёмкость одноатомного идеального газа при изохорическом охлаждении равна его молярной теплоёмкости при изохорическом нагревании.

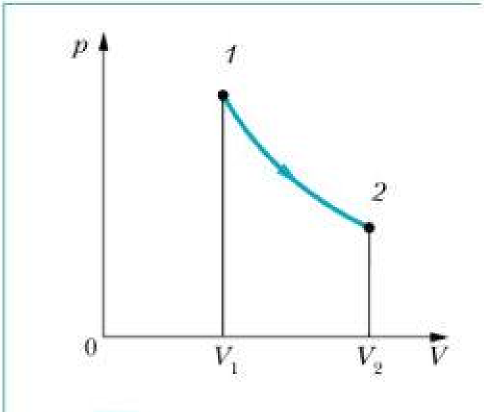


Рис. 220

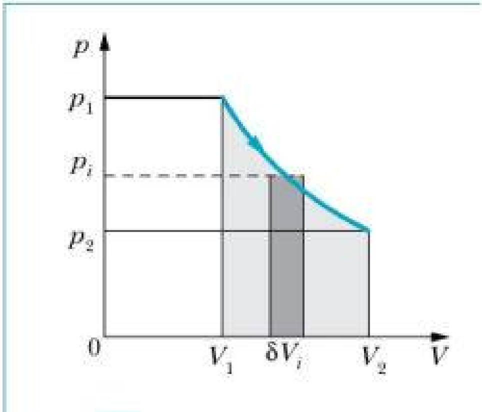


Рис. 221

рых изменение объёма δV_i газа очень мало, а давление p_i можно считать постоянным. Тогда *каждый из элементарных процессов можно считать изобарическим*. Следовательно, элементарная работа δA_i, совершённая газом в каждом элементарном процессе, численно равна площади прямоугольника со сторонами p_i и δV_i. Работа, совершённая газом в течение всего процесса, равна сумме элементарных работ, т. е. численно равна сумме площадей всех прямоугольников (рис. 221). При стремлении всех δV_i к нулю сумма площадей всех прямоугольников будет стремиться к площади под графиком $p(V)$. Понятно, что таким же образом можно рассчитать работу газа при любом равновесном процессе. В результате мы приходим к важному выводу:

! модуль работы, совершённой газом в любом равновесном термодинамическом процессе, численно равен площади под графиком зависимости давления газа от его объёма. При этом если газ расширяется, то он совершает положительную работу. Напротив, если газ сжимается, то его работа отрицательна (положительную работу совершают над газом).

3. Определим, получает или отдаёт газ теплоту в рассматриваемом процессе. Воспользуемся первым законом термодинамики, записав его в виде:

$$Q = U_2 - U_1 + A.$$

Проведённый указанным образом расчёт работы идеального газа при изотермическом изменении объёма от V_1 до V_2 приводит к результату:

$$A = \nu \cdot R \cdot T \cdot \ln\frac{V_1}{V_2}.$$

При изотермическом расширении $\Delta U = 0$, а работа положительна: $A > 0$. Следовательно, $Q > 0$, т. е. газ получает некоторое количество теплоты.

4. Рассчитаем количество теплоты. Поскольку $\Delta U = 0$, то при изотермическом расширении газ получает количество теплоты, равное совершённой им работе: $Q = A$.

! При изотермическом расширении газ получает количество теплоты, равное совершённой им работе. **К**

Адиабатический процесс

В заключение рассмотрим *адиабатический процесс*.

Процесс, при котором отсутствует теплообмен термодинамической системы с окружающими её телами, называют адиабатическим процессом.

Для осуществления такого процесса термодинамическую систему (газ) необходимо поместить в адиабатическую оболочку, т. е. в оболочку, которая препятствует теплообмену. Примером такой оболочки является знакомый вам термос. Устройство термоса позволяет практически исключить процессы теплообмена (теплопроводность, конвекцию и излучение) между внутренней частью термоса и внешней средой. Кроме того, иногда адиабатическими считают процессы, которые происходят столь быстро, что рассматриваемая система не успевает обмениваться теплотой с окружающей средой.

Пусть газ находится в сосуде, на поршень которого насыпан песок. Поместим этот сосуд в термос. Будем медленно уменьшать давление газа, убирая по одной песчинке с поршня. Уменьшение давления газа при отсутствии теплообмена приведёт к увеличению его объёма. Таким образом, рассматриваемый процесс будет *адиабатическим расширением*.

График адиабатического расширения показан на рис. 222. При увеличении объёма газа направление силы $\vec{F}$ давления газа совпадает с направ-

К По определению теплоёмкости $C = \dfrac{Q}{\Delta T}$. При изотермическом расширении газ получает некоторое количество теплоты, а изменение его температуры равно нулю. Поэтому считают, что при изотермическом расширении теплоёмкость газа бесконечно велика. Отметим, что при изотермическом сжатии работа газа будет отрицательной и он будет отдавать теплоту, не изменяя своей температуры. Поэтому его теплоёмкость в таком процессе также считают бесконечно большой.

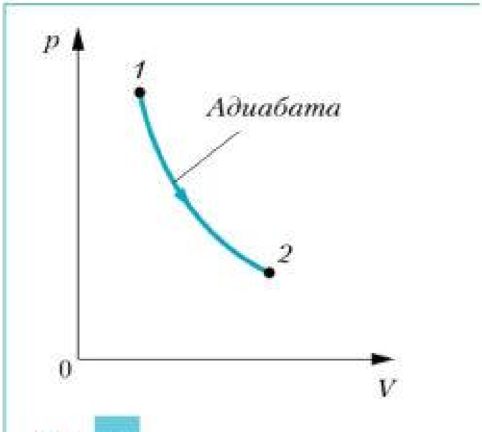


Рис. 222

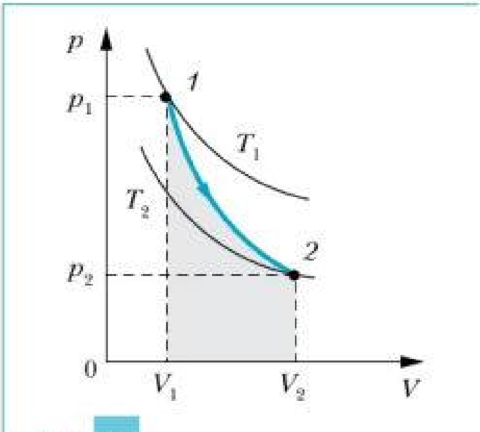


Рис. 223

лением перемещения поршня. Поэтому при адиабатическом расширении газ совершает положительную работу: $A > 0$.

В рассматриваемом процессе теплообмена нет, т. е. $Q = 0$. Следовательно, первый закон термодинамики принимает вид:

$$Q = 0 = U_2 - U_1 + A.$$

Поскольку работа газа при адиабатическом расширении положительна ($A > 0$), то $U_2 - U_1 < 0$. Следовательно, внутренняя энергия газа уменьшается. Поэтому уменьшается и его температура (рис. 223).

! Таким образом, при адиабатическом расширении температура газа уменьшается и он совершает работу за счёт уменьшения своей внутренней энергии.

Аналогичным образом можно показать, что *при адиабатическом сжатии температура газа увеличивается, при этом его внутренняя энергия увеличивается за счёт совершаемой над газом работы.* **К**

К При адиабатическом процессе $Q = 0$, а температура газа изменяется. Поэтому в соответствии с определением теплоёмкости получаем, что при адиабатическом процессе теплоёмкость газа равна нулю.

Вопросы

Ответьте на поставленные ниже вопросы для идеального газа в каждом из равновесных процессов: а) при изохорическом нагре-

вании; б) при изохорическом охлаждении; в) при изотермическом расширении; г)* при изотермическом сжатии; д) при адиабатическом расширении; е)* при адиабатическом сжатии.
1) Увеличивается или уменьшается внутренняя энергия газа?
2) Положительна, отрицательна или равна нулю работа газа?
3) Отдаёт или получает газ теплоту?

Упражнения

1 Определите изменение внутренней энергии идеального газа: а) при изохорическом нагревании, если он получил количество теплоты Q; б) при изохорическом охлаждении, если он отдал количество теплоты Q; в) при адиабатическом расширении, если он совершил работу A.

2 Определите количество теплоты, полученное идеальным газом: а) при изотермическом расширении, если он совершил работу A; б) при изотермическом сжатии, если над ним совершили работу A.

3 Идеальный одноатомный газ находится в сосуде объёмом 1 м^3. При нагревании давление газа увеличивается на 2 кПа. Определите изменение внутренней энергии газа.

4 На рис. 224 показан процесс изменения состояния одного моля идеального одноатомного газа. Ответьте на четыре вопроса для этого процесса.

5 На рис. 225 показан процесс изменения состояния трёх молей идеального одноатомного газа. Ответьте на четыре вопроса для этого процесса.

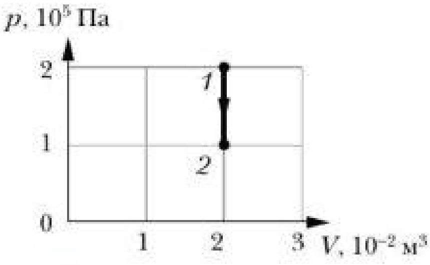


Рис. 224

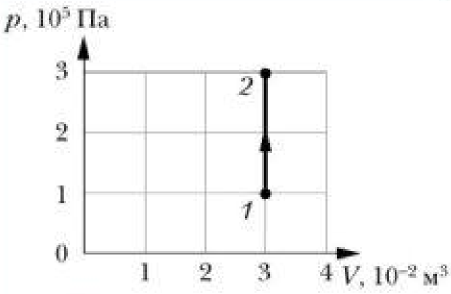


Рис. 225

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

Все процессы рассматривают в ИСО, в которой центр масс термодинамической системы покоится.

Все вещества состоят из частиц. Эти частицы находятся в непрерывном хаотическом движении.
Частицы взаимодействуют друг с другом.

Нулевой закон термодинамики

Полностью изолированная термодинамическая система самопроизвольно переходит в состояние термодинамического равновесия.

Основное уравнение МКТ:

$$p = \frac{1}{3} n \cdot m_0 \cdot v^2.$$

Уравнение состояния идеального газа — уравнение Менделеева — Клапейрона:

$$p \cdot V = \nu \cdot R \cdot T = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T.$$

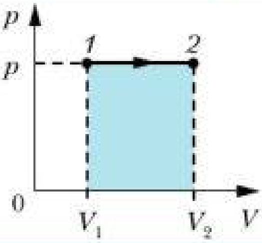
Физический смысл температуры:

$$\frac{m_0 \cdot v^2}{2} = \frac{3}{2} k \cdot T,$$

$$k = \frac{R}{N_А} \approx 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{Дж}{К}.$$

Первый закон термодинамики

$$\boldsymbol{U_0 + A + Q = U_к}$$



$$A = p \cdot \Delta V = p \cdot (V_2 - V_1).$$

Внутренняя энергия идеального одноатомного газа:

$$U = N \cdot \frac{m_0 \cdot v^2}{2} = \frac{3}{2} \nu \cdot R \cdot T.$$

Применение первого закона термодинамики к изопроцессам:

$$Q_{12} = U_2 - U_1 + A_{12}.$$

Глава 8 Тепловые машины. Второй закон термодинамики

Основной источник энергии, используемый человечеством, — внутренняя энергия топлива. Горение топлива сопровождается выделением теплоты. Преобразование теплоты в механическую энергию осуществляется с помощью специальных устройств — *тепловых двигателей*.

За счёт такого преобразования тепловые двигатели совершают механическую работу. Для этого выделяющуюся при сгорании топлива или при ядерных реакциях тепловую энергию путём теплообмена передают *рабочему веществу* двигателя. Обычно в качестве рабочего вещества используют пар или газ. Расширяясь при нагревании, рабочее вещество совершает работу против внешних сил, приводя в движение различные устройства.

Ещё один класс тепловых машин — это *холодильные машины*, которые предназначены для охлаждения (например, бытовой холодильник, кондиционер). Они также совершают работу, но уже с другой целью — для уменьшения температуры нагретых тел.

§ 55 Принцип действия тепловых машин

Изучим основные принципы работы теплового двигателя. Для этого рассмотрим пример примитивного циклического теплового двигателя.

Представим себе, что при строительстве дома требуется поднимать каменные блоки массой M на высоту h. Пусть тепловой двигатель — это сосуд высотой чуть больше h (рис. 226), в котором под очень лёгким (практически невесомым) поршнем площадью S находится идеальный газ — *рабочее вещество (тело) двигателя*.

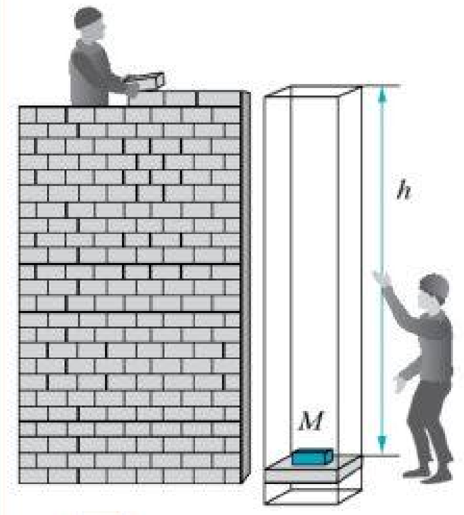


Рис. 226

Будем считать, что внешнее атмосферное давление p_0 и давление газа под поршнем в начальный момент времени равны. Тогда если положить каменный блок на поршень, то под действием веса блока, равного $M \cdot g$, поршень «просядет» вниз. Поэтому прежде всего надо увеличить давление газа под поршнем так, чтобы оно превышало внешнее давление на величину $M \cdot \frac{g}{S}$, т. е.: $p_2 = p_0 + M \cdot \frac{g}{S}$.

Для этого закрепим поршень и подогреем находящийся под ним газ, передав ему от более нагретого тела (нагревателя) необходимое количество теплоты Q_{12} (процесс *1–2* на рис. 227). Нагревание будем проводить до тех пор, пока давление газа не возрастёт до нужной нам величины p_2. График этого изохорического процесса представляет собой отрезок *1–2*, изображённый на рис. 228. Работа газа в процессе *1–2* равна нулю.

Теперь мы можем положить блок на поршень и освободить поршень от креплений (состояние *2* на рис. 227).

Для того чтобы поршень поднимал блок, вновь приведём всю систему в контакт с нагревателем. В результате газ, получая количество теплоты Q_{23}

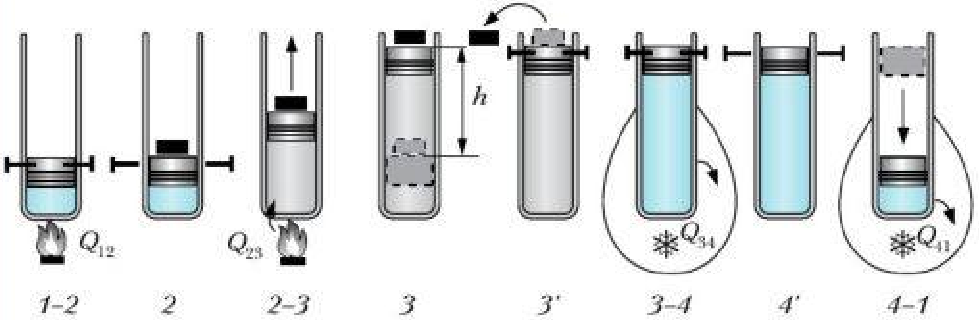


Рис. 227

при постоянном давлении p_2, будет изобарически расширяться и поднимет поршень с блоком на нужную высоту h (процесс *2–3* на рис. 227). При этом объём газа изменится от начального значения V_0 до конечного $V_0 + S \cdot h$. На рис. 228 процессу изобарического расширения соответствует отрезок *2–3*.

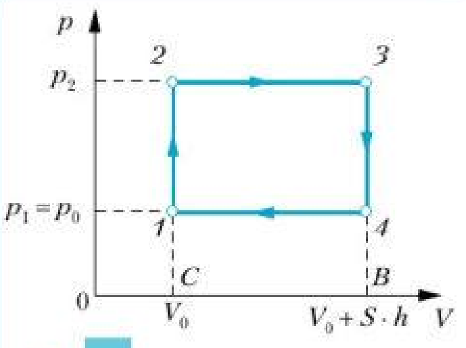


Рис. 228

В изобарическом процессе *2–3* газ совершает положительную работу A_{23}, равную произведению давления газа на изменение его объёма: $A_{23} = p_2 \cdot \Delta V$. Эта работа численно равна площади прямоугольника *C23B* на рис. 228.

После этого можно снять блок с поршня. Однако прежде необходимо закрепить поршень, чтобы сила давления газа под поршнем не вытолкнула его из цилиндра (*см.* состояние *3'* на рис. 227).

Чтобы поднять следующий блок, необходимо вернуть поршень и находящийся под ним газ (рабочее вещество) в исходное состояние. Вначале надо уравнять давления по обе стороны поршня. Для этого приведём систему в контакт с менее нагретым телом (холодильником) так, как это показано на рис. 227 (процесс *3–4*). В процессе передачи холодильнику количества теплоты Q_{34} давление газа изохорически уменьшится до значения p_0, равного внешнему давлению. На рис. 228 изохорическому остыванию соответствует отрезок *3–4* графика. Работа газа в этом процессе равна нулю.

Теперь, когда давления по обе стороны поршня сравнялись, поршень можно освободить от креплений (состояние *4'* на рис. 227). Чтобы перевести систему в исходное состояние, опять приведём цилиндр в контакт с холодильником. В результате передачи холодильнику количества теплоты Q_{41} произойдёт процесс изобарического сжатия до начального объёма V_0 (процесс *4–1* на рис. 227). На графике процессу изобарического сжатия при давлении p_0 соответствует отрезок *4–1* (*см.* рис. 228).

В процессе *4–1* объём газа уменьшается. Поэтому работа газа, равная произведению его давления p_0 на изменение объёма ΔV, отрицательна: $A_{41} = p_0 \cdot \Delta V = -p_0 \cdot h \cdot S$. Отрицательная работа газа в процессе *4–1* численно равна по модулю площади прямоугольника *C14B* на рис. 228.

На этом *цикл работы* теплового двигателя завершается. Теперь можно поднимать следующий блок.

Рассчитаем работу A, совершённую газом за весь цикл. Она равна сумме всех работ газа за все четыре такта. Поскольку $A_{12} = A_{34} = 0$, имеем:

$$A = A_{23} + A_{41} = \left(p_0 + \frac{M \cdot g}{S}\right) \cdot S \cdot h - p_0 \cdot S \cdot h = \frac{M \cdot g}{S} \cdot S \cdot h = M \cdot g \cdot h.$$

Следовательно, *полезная работа* газа (теплового двигателя) за один цикл в точности равна увеличению потенциальной энергии взаимодействия с Землёй каменного блока массой M при его подъёме на высоту h.

Из рассмотренного примера можно сделать следующие выводы.

Для работы теплового двигателя необходимо:
1) наличие рабочего вещества;
2) наличие нагревателя, передающего рабочему веществу необходимое для совершения работы количество теплоты;
3) наличие холодильника, необходимого для цикличной работы двигателя, т. е. для возвращения рабочего вещества в исходное состояние.

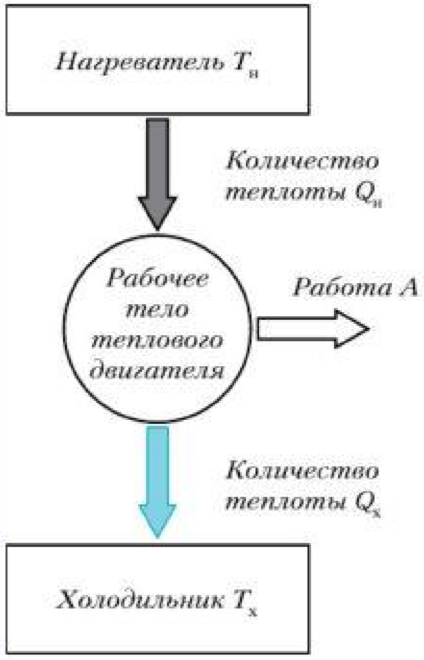


Рис. 229

Таким образом, преобразование тепловой энергии в механическую работу в циклическом тепловом двигателе в общем случае осуществляется по схеме, изображённой на рис. 229. На этой схеме $Q_н$ — количество теплоты, которое нагреватель передаёт рабочему веществу за один цикл; $Q_х$ — количество теплоты, которое за один цикл рабочее вещество отдаёт холодильнику; A — полезная работа, совершённая рабочим веществом за цикл.

Поскольку рабочее вещество за цикл возвращается в исходное состояние, то изменение его внутренней энергии при этом равно нулю: $\Delta U = 0$. Полученное рабочим веществом за цикл количество теплоты равно разности количеств теплоты, полученного от нагревателя и отданного холодильнику:

$$Q = Q_н - Q_х.$$

Полезная работа A рабочего вещества за цикл равна сумме работ, совершённых рабочим веществом на всех участках цикла. Поэтому первое начало термодинамики для рабочего вещества за один цикл принимает вид:

$$A = Q_{н} - Q_{х} < Q_{н}.$$

Таким образом, *полезная работа циклического теплового двигателя всегда меньше количества теплоты, полученного от нагревателя.* В реальном циклическом тепловом двигателе полезная работа ещё меньше. Это связано с наличием трения между деталями двигателя и рассеянием тепловой энергии в окружающую среду.

Отношение совершённой двигателем за цикл полезной работы A к полученному от нагревателя рабочим веществом за тот же цикл количеству теплоты $Q_{н}$ называют коэффициентом полезного действия (КПД) двигателя:

$$\eta = \frac{A}{Q_{н}}.$$

КПД является безразмерной величиной. Часто КПД выражают в процентах, для чего указанное отношение умножают на 100 %.

В предельном идеальном случае (когда можно пренебречь трением, потерями тепловой энергии и т. п.) КПД теплового двигателя может быть рассчитан по формуле:

$$\eta = \frac{A}{Q_{н}} = \frac{Q_{н} - Q_{х}}{Q_{н}}.$$

Циклический процесс в рассмотренном выше примитивном тепловом двигателе не позволяет получить максимально возможный КПД при использовании нагревателя и холодильника с заданными температурами.

Какой же процесс обеспечивает максимальный КПД циклического двигателя? Ответ на этот вопрос в 1824 г. дал французский учёный Николá Сади Карно (1796–1832). Он установил, что максимально возможный КПД при заданных температурах нагревателя $T_{н}$ и холодильника $T_{х}$ имеет двигатель, который работает по циклу, состоящему из двух изотерм и двух адиабат (рис. 230). Этот цикл называют теперь *циклом Карно*. КПД $\eta_{К}$ идеального теплового двигателя, работающего по циклу Карно, не зависит от используемого в этом двигателе рабочего вещества. Он всегда меньше единицы и равен:

$$\eta_{К} = \frac{T_{н} - T_{х}}{T_{н}},$$

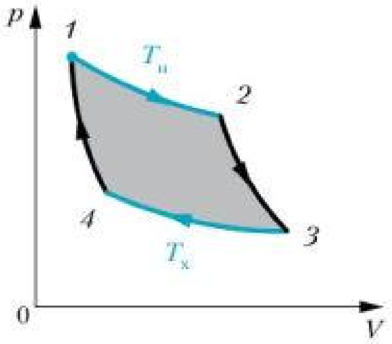


Рис. 230

где $T_н$ — температура нагревателя, $T_х$ — температура холодильника по шкале температур Кельвина.

Из этой формулы следует, что для повышения КПД теплового двигателя необходимо повышать температуру нагревателя и добиваться максимального понижения температуры холодильника. Из этой же формулы видно, что с понижением температуры нагревателя $T_н$ возможность эффективного превращения отданной им тепловой энергии в механическую уменьшается.

В заключение обсудим *экологические проблемы использования тепловых машин*. Появление тепловых машин из-за быстрого развития промышленности неблагоприятно сказалось на окружающей среде.

Во-первых, при сжигании топлива в атмосферу выбрасываются вредные для здоровья человека и природы вещества: угарный газ, различные соединения азота, хлора, серы и др. Особенно много вредных выбросов в атмосферу дают тепловые двигатели автомобилей, самолётов и ракет. Поэтому всё большее распространение на транспорте получают электродвигатели и тепловые двигатели, работающие на водороде, так как при сгорании водорода образуется водяной пар и, следовательно, отсутствуют вредные выбросы в атмосферу. Во-вторых, при сжигании топлива используется кислород из атмосферы.

В-третьих, в результате работы тепловых машин в атмосферу выделяется тепловая энергия (хотя она примерно в десять тысяч раз меньше поступающей на земную поверхность лучистой энергии от Солнца). Но даже такая «незначительная» прибавка вместе с выбросом в атмосферу углекислого газа и других веществ могут нарушить установившееся в природе равновесие и привести к изменению климата.

Минимизировать вредные воздействия на природу возможно, лишь экономно расходуя все виды энергии и используя энергосберегающие техноло-

В современных паровых турбинах начальная и конечная температуры пара (температуры нагревателя и холодильника) соответственно равны 580 °C и 100 °C. Максимально возможный КПД такой турбины составляет ≈56 %. В действительности из-за потерь он не превышает 40 %. Примерно такой же КПД имеют дизельные двигатели, а вот КПД карбюраторных двигателей внутреннего сгорания не превышает 25 %.

гии. Поэтому в настоящее время во всех странах уделяется большое внимание созданию двигателей, использующих теплоту геотермальных (горячих подземных) источников самой природы, энергию морских приливов, ветра и т. п.

Вопросы

1. Опишите схему работы теплового двигателя.
2. Почему полезная работа теплового двигателя меньше работы, совершаемой рабочим веществом при расширении?
3. Чему равна полезная работа теплового двигателя в предельном идеальном случае?
4. Что называют КПД теплового двигателя?
5. Чему равен предельно возможный КПД теплового двигателя при заданных температурах нагревателя и холодильника? Зависит ли он от рода рабочего вещества двигателя?
6. Какие вредные вещества попадают в атмосферу при сжигании топлива? Назовите другие вредные факторы работы тепловых машин.

Упражнения

1. Используя формулу Карно, определите максимально возможный КПД газовой турбины, если температура подаваемых к ней газов $t_1 = 1800\ ^\circ C$, а температура газов на выходе из турбины $t_2 = 800\ ^\circ C$.

2. Докажите, что КПД рассмотренного в параграфе примитивного теплового двигателя, поднимающего каменные блоки, меньше единицы.

*3. Запишите первый закон термодинамики для каждого из процессов, совершаемых рабочим веществом теплового двигателя из упражнения 2.
Считая, что известны p_0, V_0, S, h и M, определите:
а) количества теплоты, полученные рабочим веществом на каждом из участков: Q_{12}, Q_{23}, Q_{34}, Q_{41};
б) количества теплоты $Q_н$ и $Q_х$.
Проверьте формулу $A = Q_н - Q_х < Q_н$ и рассчитайте КПД.

*4. В результате усовершенствования теплового двигателя, имевшего коэффициент полезного действия $\eta = 0{,}3$, удалось увеличить количество теплоты, получаемое за цикл его рабочим веществом, на $k = 20\ \%$. При этом количество теплоты, отдаваемое холодильнику, не изменилось. Найдите КПД усовершенствованного двигателя.

Для углублённого уровня

§ 56 Принцип действия холодильных машин и тепловых насосов

Холодильные машины предназначены для охлаждения, т. е. уменьшения температуры более нагретых тел. Каким же образом работают наиболее распространённые компрессорные холодильные машины, к которым, в частности, относятся домашние холодильники и кондиционеры?

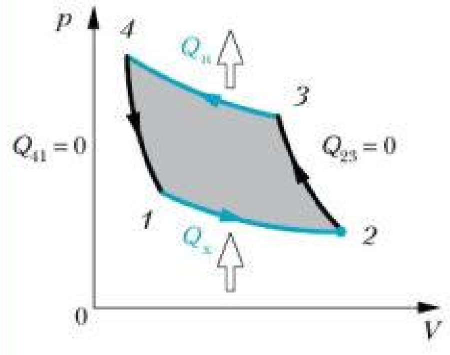


Рис. 231

Для того чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим вначале тепловой двигатель, работающий по циклу Карно. Пусть холодильником этого двигателя является морозильная камера, а нагревателем — радиатор, находящийся в тепловом контакте с окружающей атмосферой.

В цикле Карно все процессы обратимы. Поэтому можно заставить работать этот двигатель в обратном направлении. График такого процесса изображён на рис. 231. В результате обратного процесса на каждом участке цикла все величины, входящие в уравнение первого закона термодинамики, меняют свои знаки на противоположные. Другими словами, на том участке цикла, где рабочее вещество теплового двигателя получало тепло, оно будет его отдавать, и наоборот. Следовательно, теперь рабочее вещество при изотермическом расширении (процесс *1–2* на рис. 231), находясь в тепловом контакте с морозильной камерой, будет забирать от неё количество теплоты $Q_х$. При изотермическом сжатии (процесс *3–4* на рис. 231) при температуре нагревателя $T_н$ рабочее вещество будет отдавать радиатору количество теплоты $Q_н$.

! **В результате мы получаем устройство, забирающее некоторое количество теплоты от холодной морозильной камеры и отдаю-**

Обратимыми называют процессы перехода термодинамической системы из одного состояния в другое, допускающие возможность возвращения системы в первоначальное состояние через ту же последовательность промежуточных состояний, что и в прямом процессе, но в обратном порядке.

щее ещё большее количество теплоты радиатору. Такое устройство называют *холодильной машиной*.

Холодильная машина может работать и по циклам, отличным от цикла Карно. Однако, в отличие от теплового двигателя, работа, совершаемая рабочим веществом холодильной машины за цикл, отрицательна. Другими словами, в отличие от теплового двигателя, который сам совершает полезную работу, *для действия холодильной машины необходимо совершение работы внешними источниками*.

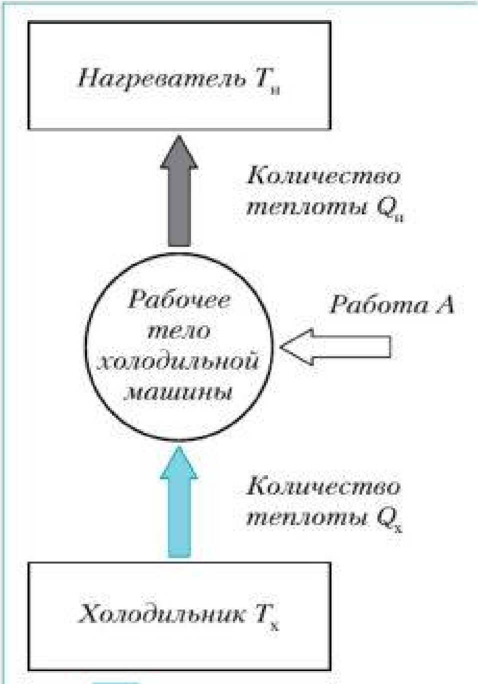


Рис. 232

Схема работы холодильной машины приведена на рис. 232. Рабочее вещество забирает от морозильной камеры количество теплоты $Q_х$ и отдаёт радиатору количество теплоты $Q_н$. При этом за цикл над рабочим веществом совершается работа A. В идеальном случае (т. е. без учёта потерь):

$$A = Q_н - Q_х. \quad (1)$$

Эффективность работы холодильной машины (холодильника) характеризуют *холодильным коэффициентом*.

Холодильным коэффициентом холодильника называют отношение количества теплоты $Q_х$, которое рабочее вещество холодильника отбирает от охлаждаемого тела за цикл, к работе A, которую совершают над этим рабочим веществом за тот же цикл:

$$k_х = \frac{Q_х}{A}.$$

Холодильный коэффициент часто измеряют в процентах. Для этого указанное отношение умножают на 100 %.

В идеальном случае холодильный коэффициент при установившемся режиме работы холодильника можно вычислить по формуле:

$$k_х = \frac{Q_х}{Q_н - Q_х}.$$

Если идеальный холодильник работает по циклу Карно, то его холодильный коэффициент можно вычислить по формуле:

$$k_х = \frac{T_х}{T_н - T_х}.$$

Оценим холодильный коэффициент домашнего холодильника. Пусть температура морозильной камеры $T_х = 250$ К (–23 °С), а температура радиатора $T_н = 320$ К (47 °С). Тогда

$$k_х = \frac{250}{320 - 250} \approx 3{,}6.$$

Полученный результат означает, что в идеальном случае на каждый джоуль энергии, потреблённой от сети холодильной машиной, работающей по циклу Карно, приходится 3,6 Дж тепла, отнятого от морозильной камеры.

По принципу холодильника работает и большинство кондиционеров. Кондиционер представляет собой холодильную машину, морозильной камерой (холодильником) которой является комната. Радиатор кондиционера вынесен на улицу.

Перепишем уравнение (1) в виде:

$$Q_н = Q_х + A. \qquad (2)$$

В соотношении (2) $Q_н$ — количество теплоты, которое холодильная машина отдаёт окружающей среде. Таким образом, холодильная машина нагревает окружающую среду, т. е. является нагревательным устройством.

! Если холодильную машину используют как нагревательное устройство, то её называют *тепловым насосом*.

Из уравнения (2) следует, что количество теплоты, переданное тепловым насосом окружающей среде, больше, чем затраченная работа A. Эффективность работы теплового насоса характеризуют *коэффициентом передачи тепла*, который иногда называют *отопительным коэффициентом*.

Коэффициентом передачи тепла теплового насоса называют отношение количества теплоты $Q_н$, которое рабочее вещество насоса передаёт за цикл нагреваемому объекту, к работе A, которую совершают над этим рабочим веществом за тот же цикл:

$$k_{пт} = \frac{Q_н}{A}.$$

В идеальном случае коэффициент передачи тепла теплового насоса можно вычислить по формуле:

$$k_{\text{пт}} = \frac{Q_{\text{н}}}{Q_{\text{н}} - Q_{\text{х}}}.$$

Если идеальный тепловой насос работает по циклу Карно, то его коэффициент передачи тепла можно вычислить по формуле:

$$k_{\text{пт}} = \frac{T_{\text{н}}}{T_{\text{н}} - T_{\text{х}}}.$$

Оценим коэффициент передачи тепла теплового насоса, обогревающего сельский дом. Пусть температура воздуха на улице $T_{\text{х}} = 270$ К (–3 °С), а температура воздуха внутри дома $T_{\text{н}} = 300$ К (27 °С). Тогда

$$k_{\text{пт}} = \frac{300}{300 - 270} = 10.$$

Таким образом, потребляя 1 Дж энергии от сети, идеальный тепловой насос, работающий по циклу Карно, отбирает от холодного воздуха на улице количество теплоты, равное 9 Дж, и передаёт количество теплоты, равное 10 Дж, воздуху в доме.

Вопросы

1. Расскажите о физических принципах работы холодильника.
2. Что называют холодильным коэффициентом?
3. В чём заключается принцип работы: а) кондиционера; б) теплового насоса?

Упражнения

1. Холодильный коэффициент холодильника $k_{\text{х}} = 2$. Оцените работу A, которую должен совершить компрессор этого холодильника, чтобы отвести из морозильной камеры количество теплоты $Q_{\text{х}} = 1$ кДж. Оцените количество теплоты, которое радиатор холодильника за это время отдаст окружающему пространству.
2. Определите количество теплоты, которое необходимо отвести из морозильной камеры, чтобы превратить в лёд с температурой 0 °С воду массой $m = 0{,}5$ кг, имевшую температуру $t_0 = 20$ °С. Оцените, какую работу при этом должен совершить компрессор

холодильника, если его холодильный коэффициент $k_х = 3$. Какое количество теплоты при этом будет отдано радиатору?

3 Тепловой насос, работающий по циклу Карно, обогревает дом, поддерживая температуру воздуха в нём равной 23 °C. Температура воздуха на улице равна –33 °C. Определите мощность, потребляемую компрессором теплового насоса от сети, если за один час он передаёт воздуху в доме количество теплоты, равное 60 МДж.

Для углублённого уровня

§ 57 Решение задач о тепловых машинах

Задача 1

На p—V-диаграмме, изображённой на рис. 233, показано изменение состояния одного моля идеального одноатомного газа, используемого в качестве рабочего вещества теплового двигателя. Отношение максимальной абсолютной температуры газа к его минимальной температуре в данном цикле $n = 4$. Определите максимально возможный КПД теплового двигателя, который работает по этому циклу.

Решение.

Максимально возможный КПД теплового двигателя равен отношению работы A, совершённой газом за цикл, к количеству теплоты $Q_н$, полученному газом от нагревателя за тот же цикл:

$$\eta = \frac{A}{Q_н}. \quad (1)$$

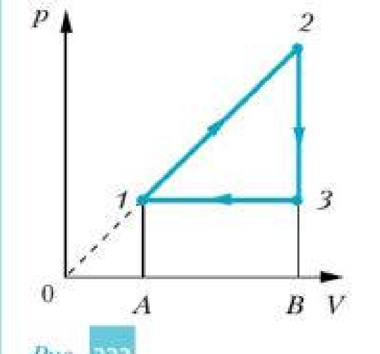


Рис. 233

Определим работу газа за цикл. Она равна сумме работ газа на всех участках цикла. На участке *1–2* работа газа положительна и численно равна площади трапеции *A12B*. При изохорическом охлаждении *2–3* работа равна нулю. При изобарическом сжатии *3–1* работа газа отрицательна, а её модуль численно равен площади прямоугольника *A13B*. Таким образом, работа газа за цикл положительна и численно равна площади треугольника *123*.

Будем обозначать давление газа — p, его объём — V и его абсолютную температуру – T в разных состояниях (*1*, *2* и *3*) соответствующими индексами. Тогда с учётом введённых обозначений работа газа за цикл равна:

$$A = (p_2 - p_1) \cdot (V_2 - V_1)/2. \qquad (2)$$

Теперь определим количество теплоты, полученное газом за цикл от нагревателя. На участке *1–2* газ совершает положительную работу

$$A_{12} = (p_1 + p_2) \cdot (V_2 - V_1)/2. \qquad (3)$$

При этом давление и объём газа увеличиваются. Поэтому температура и внутренняя энергия газа возрастают. Следовательно, на этом участке газ получает некоторое количество теплоты. Поскольку внутренняя энергия одного моля идеального одноатомного газа равна $\frac{3}{2}R \cdot T$, то на основании первого закона термодинамики количество теплоты, полученное газом на этом участке, равно:

$$Q_{12} = A_{12} + \frac{3}{2}R \cdot (T_2 - T_1). \qquad (4)$$

На участке *2–3* температура газа уменьшается, а его работа равна нулю. Следовательно, на этом участке газ отдаёт некоторое количество теплоты. На участке *3–1* температура газа уменьшается, а его работа отрицательна. Следовательно, и на этом участке газ отдаёт некоторое количество теплоты. Таким образом, за цикл газ получает от нагревателя теплоту только на участке *1–2*. Поэтому

$$Q_н = Q_{12} = A_{12} + \frac{3}{2}R \cdot (T_2 - T_1). \qquad (5)$$

Температура газа максимальна в состоянии *2* и минимальна в состоянии *1*. Поэтому из условия задачи следует, что $T_2 = n \cdot T_1 = 4T_1$. Следовательно, используя уравнение Менделеева – Клапейрона для состояний *1* и *2*, получаем: $p_2 \cdot V_2 = 4p_1 \cdot V_1 = 4R \cdot T_1$.

В процессе *1–2* давление возрастает прямо пропорционально увеличению объёма. Следовательно, $p_2 = 2p_1$, а $V_2 = 2V_1$. С учётом полученных результатов уравнения (2) и (5) принимают вид:

$$A = \frac{p_1 \cdot V_1}{2} = \frac{R \cdot T_1}{2} \text{ и } Q_н = \frac{3p_1 \cdot V_1}{2} + \frac{9R \cdot T_1}{2} = 6R \cdot T_1.$$

Подставляя эти значения в уравнение (1), получаем $\eta = \frac{1}{12}$.

Ответ: максимально возможный КПД равен $\frac{1}{12}$.

Задача 2

Какую минимальную мощность должен потреблять мотор холодильника, работающего по циклу Карно, если в морозильной камере поддерживается температура $t_1 = -23$ °С, а через стенки в неё поступает количество теплоты $q = 0{,}1$ МДж за время $\tau = 1$ ч? Температура радиатора холодильника равна $t_2 = 57$ °С, а КПД мотора $\eta_м = 0{,}8$.

Решение.

По условию задачи холодильник работает по циклу Карно. Поэтому количества теплоты $Q_н$ и $Q_х$, а также абсолютные температуры радиатора $T_н$ и морозильной камеры $T_х$ связаны (*см.* § 55) соотношением:

$$\frac{Q_н - Q_х}{Q_н} = \frac{T_н - T_х}{T_н}.$$

Следовательно,

$$\frac{Q_х}{Q_н} = \frac{T_х}{T_н}. \qquad (6)$$

Поскольку длительность цикла холодильных машин существенно меньше одного часа, то можно считать, что за заданное время τ рабочее вещество совершает целое количество n циклов. Тогда

$$q = n \cdot Q_х. \qquad (7)$$

Рабочее вещество совершает за цикл работу $A = Q_н - Q_х$. Следовательно, с учётом уравнений (6) и (7) за n циклов рабочее вещество совершит работу:

$$A \cdot n = (Q_н - Q_х) \cdot n = \left(\frac{T_н}{T_х} - 1\right) \cdot Q_х \cdot n = \left(\frac{T_н}{T_х} - 1\right) \cdot q. \qquad (8)$$

Мотор холодильника с учётом его КПД за время τ должен потребить энергию $W = \dfrac{A \cdot n}{\eta_м}$. Отсюда с учётом формулы (8) получаем формулу для расчёта минимальной мощности:

$$N = \frac{W}{\tau} = \left(\frac{T_н}{T_х} - 1\right) \cdot \frac{q}{\eta_м \cdot \tau} \approx 11\ (\text{Вт}).$$

Ответ: минимальная мощность примерно равна 11 Вт.

Упражнения

1 КПД теплового двигателя, цикл которого состоит из изотермы *1–2*, изохоры *2–3* и адиабаты *3–1*, равен η (рис. 234). Рабочее

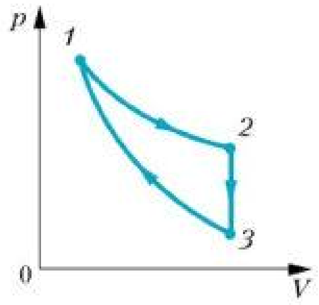


Рис. 234

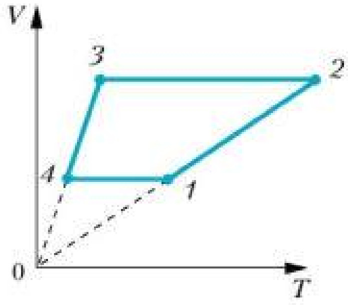


Рис. 235

вещество машины — ν молей идеального одноатомного газа. КПД другого двигателя, работающего по циклу Карно, с температурами нагревателя и холодильника, равными соответственно максимальной и минимальной температурам рабочего вещества первого двигателя, равен $\eta_К$. Определите работу газа за цикл в первом двигателе, если в состоянии *1* внутренняя энергия газа равна U_1.

2 Моль гелия совершает циклический процесс, состоящий из четырёх участков. На первом и втором участках газ охлаждают так, что его плотность на первом участке остаётся неизменной, а на втором участке увеличивается обратно пропорционально абсолютной температуре. Затем газ возвращают в исходное состояние, нагревая его сначала при неизменной плотности, а затем так, что его плотность изменяется обратно пропорционально температуре. Определите количество теплоты, полученное газом на последнем участке, если на втором участке его температура уменьшилась в k раз, а в исходном состоянии температура была равна T_1.

3 Объём V и абсолютную температуру T некоторого количества идеального одноатомного газа изменяют циклически в соответствии с V—T-диаграммой, показанной на рис. 235. Определите КПД этого цикла, если отношение тангенсов углов наклона прямых *3–4* и *1–2* к оси температур равно n, а отношение температур газа в состояниях *2* и *4* равно $3n$.

§ 58 Второй закон термодинамики. Необратимость процессов в природе

Мы установили, что после совершения полезной работы для возврата циклического теплового двигателя в исходное состояние его рабочее вещество необходимо привести в тепловой контакт с холодильником. При этом в результате теплообмена часть энергии, полученной от нагревателя, передаётся холодильнику, т. е. теряется безвозвратно. Таким образом, КПД даже идеального *циклического* теплового двигателя вне зависимости от рода используемого рабочего вещества при заданных температурах нагревателя $T_{н}$ и холодильника $T_{х}$ принципиально меньше единицы:

$$\eta_{К} = \frac{T_{н} - T_{х}}{T_{н}} = 1 - \frac{T_{х}}{T_{н}} < 1.$$

Изучение возможностей получения максимального КПД тепловых машин привело к открытию одного из фундаментальных законов природы. Этот закон называют **вторым законом термодинамики**.

Нельзя создать циклический тепловой двигатель, который превращает в полезную работу всю полученную от нагревателя теплоту.

В этой формулировке второй закон термодинамики накладывает ограничения на превращение внутренней энергии в механическую энергию.

Как вы знаете, первый закон термодинамики постулирует сохранение энергии (невозможность её появления из ничего или бесследного исчезновения) при её переходе от одного тела к другому или из одного вида в другой. В соответствии с этим законом невозможно создать такой двигатель (его называют *вечным двигателем первого рода*), который бы совершал работу без затрат энергии, как если бы неиссякаемый источник энергии находился у него внутри. Существование подобного двигателя прямо противоречит закону сохранения энергии. Однако другой гипотетический двигатель — *вечный двигатель второго рода*, который мог бы преобразовывать тепловую энергию хаотического движения в механическую, не противоречит этому закону, так как закон сохранения энергии не накладывает ограничений на направления переходов энергии. Поэтому такой двигатель мог бы, например, забирать тепло от Мирового океана и целиком превращать его в полезную работу.

Второй закон термодинамики запрещает прямое преобразование хаотического (теплового) движения молекул вещества в упорядоченное движение деталей машины или генератора энергии. В связи с этим **второй закон термодинамики** можно сформулировать в следующем виде:

невозможно создать вечный двигатель второго рода.

Существуют и другие формулировки второго закона термодинамики. Например:

нельзя передать теплоту от менее нагретого тела более нагретому без изменений в других телах.

Другими словами, *теплота не может* ***самопроизвольно*** *переходить от менее нагретого тела к более нагретому.*

Отметим, что в принципе теплоту можно передать от менее нагретого тела более нагретому (например, от морозильной камеры холодильной машины её радиатору), но для этого необходимо совершение работы, т. е. передача теплоты в таких процессах не является *самопроизвольной*.

Эквивалентность формулировок второго закона термодинамики можно доказать. Покажем, для примера, что при нарушении условия, данного в третьей формулировке, не выполняется и первая. Рассмотрим идеальный циклический тепловой двигатель. Допустим, что можно передать количество теплоты от менее нагретого тела более нагретому без изменений в других телах. Тогда можно было бы в конце каждого цикла работы теплового двигателя передавать количество теплоты $Q_х$ от его холодильника его нагревателю без изменений в других телах. Результатом работы такого двигателя за один цикл было бы, во-первых, совершение рабочим веществом полезной работы $A = Q_н - Q_х$, во-вторых, поскольку нагреватель за цикл отдавал бы рабочему веществу количество теплоты $Q_н$, а после цикла получал бы от холодильника количество теплоты $Q_х$, общая потеря теплоты нагревателем в точности была бы равна полезной работе рабочего вещества. Таким образом, мы приходим к нарушению первой формулировки второго закона термодинамики. Точно так же можно показать, что при нарушении первой формулировки нарушается и третья.

Из третьей формулировки закона следует, что он указывает направление возможных энергетических превращений в термодинамических системах и тем самым выражает *необратимость процессов в природе*. Примерами таких необратимых процессов являются переход теплоты от горячего тела к холодному, переход механической энергии соударяющихся тел в их внутреннюю энергию при неупругом ударе и т. п.

Процессы, связанные с теплообменом между макроскопическими телами, являются необратимыми.

Однако второй закон термодинамики не даёт объяснения необратимости макроскопических процессов в природе. Это объяснение может быть дано на основе молекулярно-кинетической теории. Для этого научимся различать макроскопическое и микроскопическое состояния системы.

Макроскопическое состояние термодинамической системы характеризуют набором макроскопических термодинамических параметров: температурой, давлением, объёмом и др. Эти величины могут быть непосредственно измерены и описывают состояние системы в целом.

Микроскопическое состояние в общем случае характеризуют, задавая координаты и скорости всех составляющих термодинамическую систему частиц. Отметим, что число этих частиц огромно. Поэтому описание реального микросостояния термодинамической системы практически невыполнимо.

Заданное макросостояние термодинамической системы может быть реализовано огромным числом различных микросостояний. Поясним сказанное на примитивном примере. Пусть в сосуде находятся три одинаковые частицы: A, B и C. Мысленно разделим сосуд на две равные части. Будем считать заданным макросостоянием такое состояние, при котором две частицы находятся в левой части сосуда, а одна – в правой. С точки зрения микросостояний заданное макросостояние может быть реализовано тремя способами: 1) слева – частицы A и B, справа – частица C; 2) слева – A и C, справа – B; 3) слева – C и B, справа – A. Понятно, что при увеличении числа частиц число микросостояний, которым реализуется заданное макросостояние, резко возрастает.

Каждое макросостояние, как следует из примера, может быть реализовано с некоторой вероятностью. Пусть, например, в сосуде находится одна частица. Мысленно разделим сосуд на две равные части. Тогда вероятность P того, что частица окажется в левой части сосуда, равна $\frac{1}{2}$. Если в сосуде находятся две частицы, то вероятность того, что обе частицы окажутся в левой части сосуда, будет уже равна $P = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Таким образом, с увеличением числа частиц вероятность того, что все они окажутся в левой части сосуда, уменьшается. Понятно, что если число частиц в сосуде станет сравнимо с числом частиц термодинамической системы, например $N \sim 10^{23}$, то вероятность того, что все частицы окажутся в левой части сосуда, будет ничтожно мала:

$P = \left(\frac{1}{2}\right)^N \approx 5{,}8 \cdot 10^{-70}$. Таким образом, вероятность макросостояния, при котором все частицы находятся в одной половине сосуда, практически равна нулю. *Наиболее вероятными* для такой системы будут состояния, при которых частицы распределятся приблизительно поровну между левой и правой частями сосуда.

Понятно, что любая система при неизменных внешних условиях будет переходить от маловероятных макросостояний к наиболее вероятным. Например, если считать, что любая молекула воздуха комнаты равновероятно может находиться в любой её точке, то молекулы воздуха будут стремиться распределиться по объёму комнаты практически равномерно. Конечно, вероятность того, что все молекулы воздуха комнаты соберутся, например, в одном её углу, отлична от нуля. Однако эта вероятность ничтожно мала. Именно по этой причине, если соединить два сосуда, в одном из которых находится воздух, а в другом — вакуум, то воздух очень быстро распределится равномерно по всему предоставленному объёму. Вероятность обратного процесса хотя и не равна нулю, но ничтожно мала. Этот пример объясняет, почему процессы в природе самопроизвольно (при отсутствии внешних действий) протекают в одну сторону, т. е. являются необратимыми.

Любому упорядоченному распределению вещества в пространстве и его упорядоченному движению соответствует меньшее число микросостояний в сравнении с беспорядочным распределением вещества и хаотическим движением. Поэтому чем большему беспорядку в системе соответствует данное макросостояние, тем больше вероятность того, что система будет находиться в этом состоянии. По этой причине любая предоставленная самой себе термодинамическая система с течением времени будет приходить в равновесное состояние, характеризуемое беспорядочным распределением вещества в пространстве и хаотическим (тепловым) движением его частиц. Другими словами, при отсутствии внешних воздействий в любой системе «порядок» всегда переходит в «хаос».

Физическую величину, характеризующую неупорядоченность термодинамической системы, называют *энтропией*. С учётом введения этой величины можно дать ещё одну формулировку второго закона термодинамики: ***при отсутствии внешних воздействий энтропия термодинамической системы не может убывать.***

Вопросы

1. Сформулируйте второй закон термодинамики.
2. Приведите примеры необратимых процессов.
3. Можно ли передать некоторое количество теплоты от менее нагретого тела более нагретому без изменений в других телах?
4. Какие устройства называют вечными двигателями первого и второго рода?
5. Почему весь воздух в классе не собирается в одном углу?
6. Приведите пример перехода системы от «порядка» к «хаосу».
7. Что характеризует энтропия?

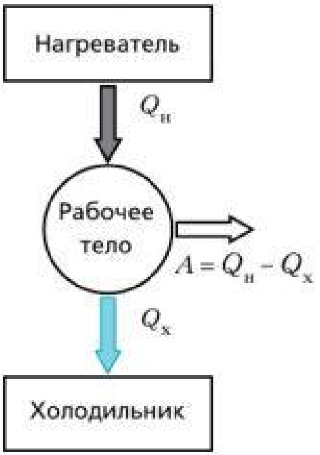
Упражнения

1. В сосуде находятся четыре частицы. Сосуд мысленно разделён на две равные части. Определите число микросостояний, которыми реализуется следующее макросостояние: а) все частицы находятся в левой части сосуда; б) в левой части сосуда находятся три частицы; в) в левой части сосуда находятся две частицы.
2. Определите вероятность каждого из макросостояний (*а*–*в*) из задачи 1.

*3. Определите вероятность того, что все четыре частицы в сосуде (см. задачу 1) соберутся в одной четвёртой левой части сосуда.

ТЕПЛОВЫЕ МАШИНЫ. ВТОРОЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ

Циклический тепловой двигатель



Для работы циклического теплового двигателя необходимо:

1) наличие рабочего вещества;
2) наличие нагревателя, передающего рабочему веществу необходимое для совершения работы количество теплоты;
3) наличие холодильника, для того чтобы возвращать рабочее вещество в исходное состояние.

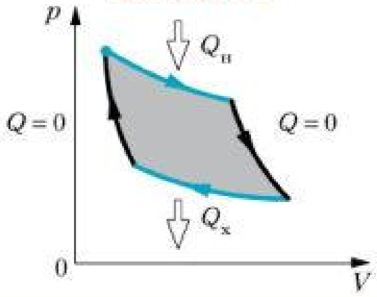
КПД двигателя: $\eta = \dfrac{A}{Q_н} = \dfrac{Q_н - Q_х}{Q_н} < 1.$

Максимально возможный КПД

$$\eta_К = \frac{T_н - T_х}{T_н} = 1 - \frac{T_х}{T_н} < 1$$

при заданных температурах нагревателя $T_н$ и холодильника $T_х$ имеет двигатель, который работает по циклу, состоящему из двух изотерм и двух адиабат, — циклу Карно.

Цикл Карно



Второй закон термодинамики (три эквивалентные формулировки)

Нельзя создать циклический тепловой двигатель, который превращает в полезную работу всю полученную от нагревателя теплоту.

Невозможно создать вечный двигатель второго рода.

Нельзя передать теплоту от менее нагретого тела более нагретому без изменений в других телах.

Глава 9

Агрегатные состояния вещества. Фазовые переходы

В зависимости от условий одно и то же вещество может находиться в различных агрегатных состояниях: твёрдом, жидком или газообразном.

Строение молекулы вещества не зависит от того, в каком агрегатном состоянии оно находится. Однако *в разных агрегатных состояниях молекулы вещества движутся и взаимодействуют между собой по-разному*. В газах молекулы непрерывно изменяют своё положение в пространстве, движутся хаотично и заполняют весь предоставленный газу объём.

В жидкостях происходят хаотические колебания молекул около положений равновесия. Однако довольно часто молекулы скачкообразно меняются со своими «соседями» положением. Поэтому жидкости, сохраняя свой объём, обладают текучестью. Таким образом, жидкости принимают форму сосуда, частично заполняя его. В расположении молекул жидкости соблюдается некоторый порядок на расстояниях в несколько средних расстояний между соседними молекулами. Поэтому говорят, что в жидкостях в расположении молекул имеется *ближний порядок*.

В кристаллах частицы вещества в основном лишь совершают хаотические колебания вблизи положений равновесия в узлах кристаллической решётки. Это означает, что в кристаллах порядок в расположении молекул (атомов) соблюдается на расстояниях, в тысячи и более раз превышающих среднее расстояние между «соседями». Другими словами, в кристаллах наблюдается *дальний порядок* в расположении молекул. C

C В некоторых жидкостях в расположении молекул, как и в твёрдых кристаллах, наблюдается определённый порядок. Такие жидкости называют *жидкими кристаллами*. Они широко применяются в современных оптико-электронных приборах, буквенно-цифровых индикаторах и т. п.

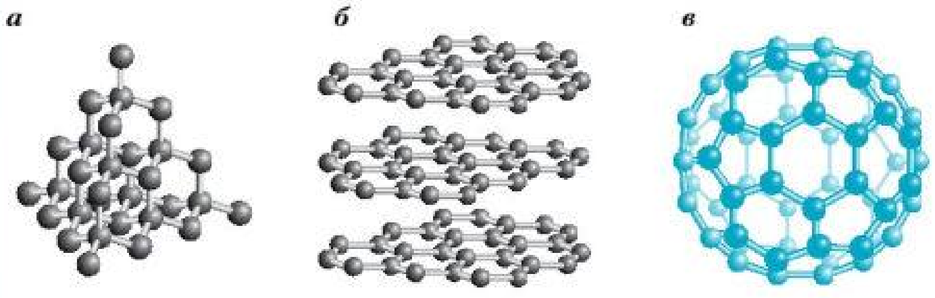


Рис. 236 Кристаллические решётки:
а – алмаза; *б* – графита; *в* – фуллерена

Отметим, что одно и то же вещество в твёрдом состоянии может иметь несколько разных кристаллических решёток. Например, углерод образует ряд кристаллических модификаций. Три такие модификации показаны на рис. 236.

По этой причине, кроме понятия агрегатного состояния, вводится более широкое понятие *фазы*.

Фазой называют равновесное состояние вещества, отличающееся по своим физическим свойствам от других состояний того же вещества.

! У одного и того же вещества возможны одна газообразная, несколько жидких и несколько твёрдых фаз. Переход вещества из одной фазы в другую называют *фазовым переходом*.

В разных агрегатных состояниях (и фазах) взаимодействия молекул вещества друг с другом различны. Поэтому та часть внутренней энергии, которая представляет собой потенциальную энергию взаимодействия молекул вещества друг с другом, также будет различной. Следовательно, внутренняя энергия термодинамической системы, содержащей одно и то же количество молекул какого-либо вещества, зависит не только от температуры, но и от того, в каком агрегатном состоянии (или в какой фазе) находится это вещество. Переход термодинамической системы из одного агрегатного состояния в другое (или из одной фазы в другую) сопровождается изменением её внутренней энергии, даже если температура вещества остаётся постоянной.

Рассмотрим свойства веществ в разных фазах и фазовые переходы с точки зрения молекулярно-кинетической теории и термодинамики.

§ 59 Испарение и конденсация

Эксперименты показывают, что все жидкости и твёрдые тела испаряются.

Испарением называют переход вещества из жидкого или твёрдого состояния в газообразное с открытой поверхности жидкости или твёрдого тела.

Рассмотрим с точки зрения молекулярно-кинетической теории механизм испарения жидкости. Отметим, что испарение частиц вещества с открытой поверхности твёрдого тела происходит аналогичным образом.

Молекулы вещества в жидком состоянии непрерывно хаотически движутся. Тем не менее силы взаимного притяжения не позволяют всем молекулам жидкости разлететься в разные стороны, как это происходит в газах. Однако скорости хаотического движения всех молекул различны. Поэтому в жидкости при любой температуре всегда имеется некоторое количество молекул, кинетическая энергия которых превышает потенциальную энергию их связи с остальными частицами. Именно эти молекулы в результате хаотичности движения и вылетают со свободной поверхности жидкости. Таким образом, из жидкости вылетают наиболее быстрые молекулы. В результате этого происходит уменьшение средней кинетической энергии хаотического движения оставшихся молекул вещества. Поэтому *если отсутствует теплообмен жидкости с окружающей средой, то процесс её испарения сопровождается её охлаждением*.

Оставшиеся в жидкости молекулы непрерывно соударяются друг с другом. В результате этих соударений их скорости непрерывно и хаотически изменяются. Поэтому среди молекул вновь появляются «достаточно быстрые», которые, оказавшись у поверхности, могут также покинуть жидкость. По этой причине *процесс испарения любой жидкости происходит постоянно при любой температуре*.

Потенциальная энергия взаимодействия между молекулами в разных жидкостях различна. Это объясняет, почему одни жидкости, например эфир или бензин, испаряются быстрее, а другие, например ртуть, медленнее. Также становится понятно, почему нагретые жидкости (в которых средняя кинетическая энергия хаотического движения молекул больше) испаряются быстрее.

Вылетевшая с поверхности жидкости молекула, удаляясь, испытывает притяжение со стороны оставшихся «у неё за спиной» молекул поверхности жидкости. Поэтому средняя кинетическая энергия молекул, вылетевших из жидкости, по мере их удаления от поверхности уменьшается. Она переходит в потенциальную энергию взаимодействия этих молекул с молекулами, оставшимися в жидкости. (Точно так же при подъёме брошенного вверх с поверхности Земли камня его кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию системы «камень — Земля».)

Таким образом, при испарении та часть внутренней энергии системы «жидкость — пар», которая обусловлена потенциальной энергией взаимодействия молекул системы друг с другом, увеличивается. Напротив, та часть внутренней энергии этой системы, которая обусловлена кинетической энергией хаотического движения молекул, уменьшается. В результате если при испарении отсутствуют внешние воздействия (в том числе теплообмен), то температура всей термодинамической системы, состоящей из жидкости и образующегося над ней пара, уменьшается.

! **При испарении жидкости температура всей термодинамической системы, состоящей из жидкости и образующегося над ней пара, уменьшается.**

Чтобы охлаждение системы «жидкость — пар» при испарении жидкости не происходило, необходимо подводить к ней энергию извне. Например, можно передавать ей необходимое количество теплоты.

Вылетевшие с поверхности жидкости молекулы движутся хаотично. Сталкиваясь с молекулами воздуха и между собой, они изменяют направление своего движения. Поэтому эти молекулы могут вновь вернуться в жидкость. Кроме того, в воздухе всегда есть молекулы паров жидкости, которые также могут влететь в жидкость. Следовательно, *одновременно с испарением всегда происходит и обратный процесс — конденсация*.

Конденсацией называют переход вещества из газообразного состояния в жидкое или твёрдое.

Испарение и конденсация постоянно «конкурируют» между собой.

Потенциальная энергия взаимодействия возвращающихся в жидкость молекул паров жидкости и молекул самой жидкости уменьшается. При этом одновременно в результате действия сил взаимного притяжения со стороны жидкости кинетическая энергия молекул увеличивается. В результате увеличивается и средняя кинетическая энергия хаотического движения молекул всей системы. Следовательно, если при конденсации отсутствуют внешние воздействия (в том числе теплообмен), то температура всей термодинамической системы «жидкость — пар» будет увеличиваться.

! **При конденсации температура всей термодинамической системы, состоящей из жидкости и пара, увеличивается.**

Для поддержания при конденсации постоянной температуры необходимо от системы «жидкость — пар» отводить энергию. Например, можно забирать у неё необходимое количество теплоты.

Вопросы

1. Что называют испарением?
2. В чём состоит механизм испарения с точки зрения молекулярно-кинетической теории?
3. Почему одни жидкости испаряются быстрее, а другие медленнее?
4. Как изменяются составляющие части внутренней энергии системы «жидкость — пар» при испарении?
5. Почему при испарении происходит охлаждение?
6. Что называют конденсацией?
7. Как изменяются составляющие части внутренней энергии системы «жидкость — пар» при конденсации?
8. Почему конденсация сопровождается нагреванием?
9. Каким образом можно поддерживать постоянную температуру системы «жидкость — пар»: а) при испарении; б) при конденсации?
10. Объясните, почему температура воды в открытом стакане всегда немного ниже температуры окружающей среды.
11. Как ускорить процесс испарения жидкости?

§ 60 Насыщенный пар. Влажность

Пусть плотность пара над поверхностью жидкости мала. Тогда число молекул, вылетающих из жидкости, будет превышать число молекул, возвращающихся в неё за тот же промежуток времени. Испарение будет преобладать над конденсацией. В этом случае пар, находящийся над поверхностью жидкости, называют *ненасыщенным*.

Напротив, если плотность пара очень велика, то число возвращающихся в жидкость молекул будет превышать число молекул, покидающих её за то же время. Конденсация будет преобладать над испарением. В этом случае пар называют *перенасыщенным*.

Насыщенный пар

Нальём жидкость в сосуд и закроем его. Будем поддерживать температуру сосуда с жидкостью постоянной. Вначале испарение будет преобладать над конденсацией. Масса жидкости будет уменьшаться, а масса пара над ней увеличиваться. С течением времени этот процесс будет происходить всё медленнее и медленнее. Это объясняется тем, что при увеличении плотности пара над поверхностью жидкости увеличивается и число молекул, возвращающихся в жидкость. К некоторому моменту плотность пара над поверхностью жидкости станет настолько большой, что число возвращающихся в жидкость молекул в среднем будет равно числу молекул, вылетающих из жидкости. Наступит *динамическое равновесие* между жидкостью и её паром. Масса жидкости после этого перестанет изменяться, несмотря на то, что и испарение и конденсация продолжаются. Перестанет изменяться и плотность пара над поверхностью жидкости.

Пар, находящийся в динамическом равновесии со своей жидкостью, называют насыщенным.

Равновесие между жидкостью и её насыщенным паром можно нарушить. Для этого, например, достаточно нагреть (или остудить) закрытый сосуд, т. е. изменить температуру системы.

При увеличении температуры системы число вылетающих из жидкости молекул опять станет больше, чем число возвращающихся. Поэтому плотность пара будет увеличиваться до тех пор, пока не установится новое динамическое равновесие между жидкостью и её паром. Этот пар также будет насыщенным, но при более высокой температуре. Понятно, что его плотность будет больше плотности насыщенного пара при меньшей температуре. Следовательно,

чем выше температура насыщенного пара, тем больше его плотность.

При уменьшении температуры динамическое равновесие сместится в обратную сторону: плотность насыщенного пара уменьшится. Зависимость плотности насыщенного пара от температуры имеет сложный вид. Ниже приведены значения плотности $\rho_н$ насыщенных паров воды при некоторых температурах (табл. 4).

Таблица 4

t, °C	−20	−10	0	10	20	40	60	80	100
$p_н$, кПа	0,103	0,259	0,611	1,227	2,337	7,376	19,92	47,30	101,3
$\rho_н$, г/м³	0,88	2,14	4,85	9,41	17,32	51,2	130,5	294	598

Влажность воздуха

Окружающий нас воздух всегда содержит некоторое количество водяного пара. В этом легко убедиться, если в тёплое помещение внести, например, сильно охлаждённую бутылку воды. Через некоторое время на её поверхности образуются мелкие капельки воды в виде росы. Это результат конденсации из окружающего воздуха охлаждающихся водяных паров при их контакте с холодной поверхностью бутылки.

Количество водяных паров в воздухе определяет его *влажность*. Влажность принято описывать двумя способами: с помощью абсолютной влажности и относительной влажности.

Абсолютной влажностью воздуха называют плотность водяного пара, содержащегося в этом воздухе.

Зная абсолютную влажность ρ, можно рассчитать массу m водяного пара в любом заданном объёме V воздуха: $m = \rho \cdot V$.

Давление p, которое производил бы водяной пар, если бы все остальные газы отсутствовали, называют *парциальным давлением* водяного пара. Парциальное давление водяного пара также используют в качестве меры абсолютной влажности.

Опыт показывает, что если пар не является перенасыщенным и находится в состоянии термодинамического равновесия, то его термодинамические параметры с достаточной степенью точности удовлетворяют уравнению Менделеева — Клапейрона. Согласно этому уравнению, абсолютная влажность ρ и парциальное давление p пара связаны соотношением:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M}{R \cdot T} \cdot p, \qquad (1)$$

где M — молярная масса пара, T — его абсолютная температура.

Из уравнения (1) следует, что абсолютная влажность пара при данной температуре прямо пропорциональна его парциальному давлению. Эта пропорциональность достаточно точно выполняется и для насыщенного пара. Значения давления $p_н$ насыщенного пара воды при некоторых температурах приведены в таблице 4.

Понятие относительной влажности воздуха вводят для того, чтобы оценить, насколько пар, содержащийся в воздухе, близок к насыщению.

Относительной влажностью воздуха φ называют отношение парциального давления p пара в воздухе к давлению $p_н$ насыщенного пара при той же температуре, умноженное на 100 %:

$$\varphi = \frac{p}{p_н} \cdot 100\,\%.$$

Напомним, что в соответствии с основным уравнением молекулярно-кинетической теории ($p = n \cdot k \cdot T$) давление идеального газа при постоянной концентрации прямо пропорционально абсолютной температуре. В насыщенном же паре при возрастании температуры концентрация молекул пара увеличивается, так как из жидкости (или твёрдого тела), находящейся в контакте с паром, вылетает дополнительное число молекул. Поэтому давление насыщенного пара с повышением температуры растёт быстрее, чем давление идеального газа (рис. 237).

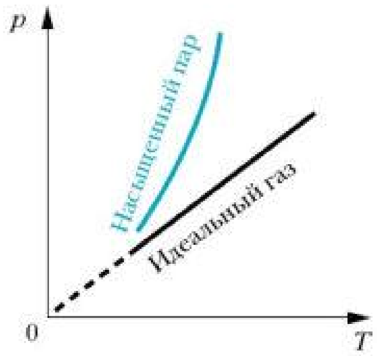


Рис. 237

Отметим, что наличие посторонних газов над испаряющейся жидкостью лишь замедляет процесс испарения, но не влияет на окончательный результат.

Парциальное давление и количество паров жидкости, насыщающих данный объём, не зависят от наличия в этом объёме каких-либо газов или паров других веществ.

Рассмотрим воздух с парами воды в замкнутом сосуде, объём которого не изменяется. Пусть абсолютная влажность ρ существенно меньше $\rho_н$. Тогда при небольшом понижении температуры плотность пара будет оставаться неизменной. Из таблицы 4 следует, что значение плотности *насыщенного* пара с уменьшением температуры будет уменьшаться. Поэтому при понижении температуры воздуха относительная влажность будет увеличиваться, пока не достигнет 100 %. С этого момента находящийся в воздухе водяной пар станет насыщенным и начнётся его конденсация. В результате образуется туман и выпадает роса.

Температуру, при которой пар, находящийся в воздухе, становится насыщенным, называют точкой росы.

Измерение влажности

Для измерения влажности воздуха наиболее часто используют психрометр, волосной и конденсационный гигрометры.

Психрометр состоит из двух термометров (рис. 238). Один термометр измеряет температуру воздуха. Колбочку другого термометра обматывают тканью, которая смачивается водой из резервуара. Поскольку вода с ткани испаряется, то второй термометр охлаждается. Скорость испарения воды зависит от влажности воздуха и его температуры. Чем больше относительная влажность, тем менее интенсивно идёт испарение и разность показаний двух термометров меньше. Поэтому, зная температуры «сухого» и «мокрого» термометров, по специальным таблицам можно определить влажность воздуха в месте нахождения психрометра.

Действие *волосного гигрометра* (рис. 239) основано на свойстве обезжиренного волоса увеличивать (уменьшать) свою длину при увеличении (уменьшении) относительной влажности.

С помощью *конденсационного гигрометра* (рис. 240) абсолютную влажность определяют, измеряя точку росы. Основным элементом этого прибора является металлическая коробка, одна из стенок которой отполирована. Внутрь наливают легко испаряющуюся жидкость (обычно эфир). При продувании через сосуд воздуха жидкость интенсивно испаряется и её температура, измеряемая при этом термометром, понижается. Воздух продувают до тех пор, пока на полированной поверхности коробки не появится роса. Абсолютную влажность определяют, используя специальную таблицу.

Влажность воздуха имеет огромное значение как для научных исследований при изучении явлений, происходящих в атмосфере, так и для бытовых целей. Наиболее благоприятной для человеческого организма является относительная влажность 50–60 %.

Отдельно отметим, что понятие влажности вводят не только для паров воды, но и для паров других веществ, например ртути.

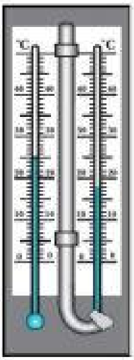


Рис. 238

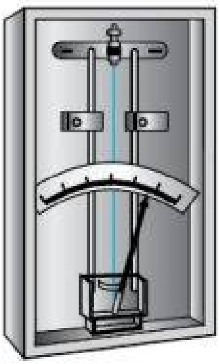


Рис. 239

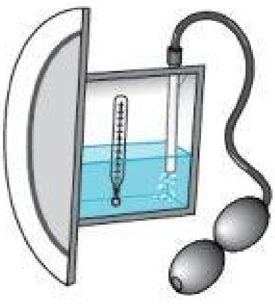


Рис. 240

Вопросы

1. Какой пар называют: а) насыщенным; б) ненасыщенным; в) перенасыщенным?
2. Как изменяются плотность насыщенного пара и его парциальное давление при увеличении температуры? Обоснуйте ответ с точки зрения молекулярно-кинетической теории.
3. Можно ли нарушить равновесие между жидкостью и её насыщенным паром? Как это сделать? Обоснуйте ответ с точки зрения молекулярно-кинетической теории.
4. Что называют: а) абсолютной влажностью воздуха; б) относительной влажностью воздуха?
5. Что такое точка росы?
6. Какие приборы используют для определения влажности воздуха? Опишите принципы их действия.
7. Зависит ли давление насыщенных паров данного вещества от наличия в занимаемом ими объёме паров других веществ или газов?

Упражнения

1. Найдите массы водяного пара в комнате, сауне и русской бане. Известно, что плотность водяного пара в комнате, сауне и парилке русской бани равна соответственно: $\rho_к = 10$ г/м^3, $\rho_с = 60$ г/м^3, $\rho_б = 200$ г/м^3. Объёмы комнаты, сауны и парилки равны соответственно: $V_к = 50$ м^3, $V_с = 20$ м^3, $V_б = 30$ м^3.
2. По радио сообщили, что температура воздуха на улице равна $t = 40$ °C, а его относительная влажность $\varphi = 60\,\%$. Определите абсолютную влажность воздуха на улице.
3. Найдите массу водяного пара в комнате объёмом $V = 60$ м^3, зная, что температура воздуха в комнате равна $t = 20$ °C, а относительная влажность $\varphi = 40\,\%$.
4. Определите относительную влажность воздуха в комнате, сауне и парилке русской бани из упражнения 1. Температура в комнате, сауне и парилке равна соответственно 20, 100 и 80 °C.

§ 61 Кипение

Силы взаимного притяжения между молекулами разных жидкостей различны. Поэтому при вылете молекул из разных жидкостей эти силы совершают разную работу. Следовательно, для превращения в пар одинаковых масс разных жидкостей требуется разная энергия, а значит, и разное количество теплоты.

Физическую величину, равную количеству теплоты, необходимому для обращения в пар 1 кг данной жидкости при неизменных температуре и давлении, называют удельной теплотой парообразования этой жидкости.

Удельную теплоту парообразования обозначают буквой r. Единица этой величины в СИ — *джоуль на килограмм* (Дж/кг).

Удельная теплота парообразования некоторых жидкостей (при температуре кипения и нормальном атмосферном давлении) дана в таблице 5.

Таблица 5

Вещество	r, МДж/кг	Вещество	r, МДж/кг
Вода	2,3	Эфир	0,4
Аммиак	1,4	Ртуть	0,3
Спирт	0,9	Жидкий воздух	0,2

! Для расчёта количества теплоты Q, необходимого для превращения в пар жидкости массой m при данных температуре и давлении, надо удельную теплоту парообразования r этой жидкости умножить на её массу m:

$$Q = r \cdot m.$$

При конденсации пара происходит обратный процесс, сопровождаемый выделением энергии. *При неизменной температуре количество теплоты Q, выделившееся при конденсации пара массой m, равно количеству теплоты, затраченному на его получение при испарении.* Поэтому его рассчитывают по той же формуле: $Q = r \cdot m$, где r — удельная теплота конденсации образующейся жидкости, равная удельной теплоте её парообразования.

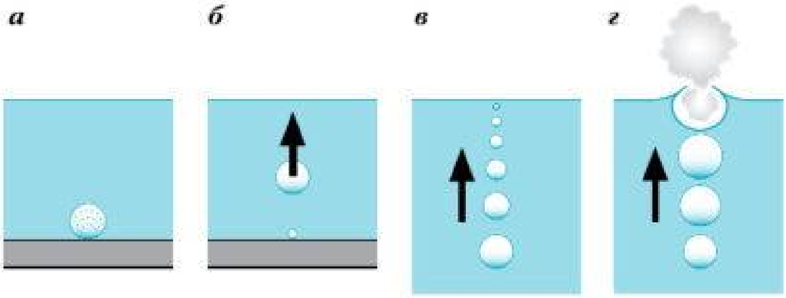


Рис. 241

Рассмотрим процесс кипения с точки зрения молекулярно-кинетической теории. При нагревании воды в сосуде (рис. 241, *а*) на его дне и стенках появляются маленькие пузырьки. Это пузырьки воздуха, находящегося в микротрещинах стенок сосуда и растворённого в воде. Кроме воздуха, в пузырьках находится насыщенный пар. По мере нагревания количество насыщенного пара внутри пузырьков увеличивается. Увеличивается и давление насыщенного пара, пузырьки растут. С увеличением объёма пузырьков увеличивается действие на них выталкивающей силы Архимеда. В некоторый момент эта сила становится настолько большой, что она отрывает пузырёк от стенки (рис. 241, *б*). При всплытии пузырёк попадает в верхние, менее нагретые слои жидкости. Содержащийся в нём насыщенный пар остывает и конденсируется. В результате пузырёк «схлопывается» (рис. 241, *в*). Мы слышим, как вода при этом шумит.

После того как весь объём воды достаточно прогреется, всплывающие пузырьки перестают «схлопываться». Напротив, их размеры по мере подъёма увеличиваются, так как испарение пара внутрь пузырьков продолжается. Достигая поверхности, они лопаются и выбрасывают пар в атмосферу (рис. 241, *г*). Вода начинает булькать — она кипит.

Кипение — интенсивный переход жидкости в пар, происходящий с образованием пузырьков по всему её объёму.

Температуру, при которой жидкость кипит, называют температурой кипения этой жидкости.

Чтобы вскипятить жидкость, надо сначала нагреть её до температуры кипения. Эксперименты показывают, что температуры кипения различных жидкостей различны. Значения температур кипения некоторых веществ при нормальном атмосферном давлении приведены в таблице 6.

Таблица 6

Вещество	t, °С	Вещество	t, °С	Вещество	t, °С
Гелий	–269	Эфир	35	Ртуть	357
Водород	–253	Спирт	78	Свинец	1740
Азот	–196	Вода	100	Медь	2540
Кислород	–183	Молоко	100	Железо	2750
Аммиак	–33	Скипидар	161	Вольфрам	5680

Для любой жидкости при неизменном внешнем давлении температура кипения остаётся постоянной от начала кипения до его конца (пока вся жидкость не испарится).

Какие условия определяют температуру кипения жидкости? Почему именно при определённой температуре начинается интенсивный рост образующихся пузырьков (ведь испарение жидкости происходит при любой температуре)?

Увеличению объёма пузырьков препятствует внешнее гидростатическое давление, которое складывается из атмосферного давления на поверхность жидкости и давления, обусловленного действием на жидкость силы тяжести. (Отметим, что если глубина сосуда мала, то гидростатическое давление практически равно атмосферному.) Поэтому *интенсивный рост пузырьков начинается только тогда, когда давление находящегося в них насыщенного пара в результате увеличения температуры сравнивается с внешним гидростатическим давлением.*

Таким образом, при уменьшении атмосферного давления кипение начнётся при более низкой температуре, а при увеличении атмосферного давления — при более высокой.

В таблице 7 приведены давление и температура кипения воды на разной высоте над уровнем моря.

Таблица 7

Высота над уровнем моря, км	Давление, атм (10^5 Па)	Температура кипения, °С
0 (уровень моря)	1	100
1	0,89	96,4
2	0,78	92,8
4	0,61	86,4
8	0,35	72,8

В заключение отметим, что давление насыщенных паров разных веществ становится равным давлению окружающей атмосферы при различных температурах. Поэтому температуры кипения разных жидкостей различны (*см.* табл. 6).

Вопросы

1. Что называют удельной теплотой парообразования?
2. Как соотносятся между собой количество теплоты, выделяющееся при конденсации 1 кг пара, и количество теплоты, затраченное на его же получение при испарении (при одинаковом внешнем давлении)? Объясните почему.
3. В чём состоит процесс кипения?
4. Что находится в пузырьках, образующихся на дне и стенках сосуда нагреваемой жидкости?
5. Что происходит с давлением насыщенного пара внутри пузырьков по мере нагревания жидкости?
6. Почему перед закипанием вода шумит?
7. Как изменяются размеры пузырьков, образующихся в нагреваемой жидкости, по мере их подъёма к поверхности? Почему?
8. Изменяется ли температура жидкости при её кипении?
9. От чего зависит температура кипения жидкости? Объясните эту зависимость.

Упражнения

1. Определите количество теплоты, необходимое для обращения в пар 0,5 кг спирта при температуре его кипения и нормальном атмосферном давлении.
2. Какое количество теплоты Q выделится при конденсации водяного пара массой $m = 1{,}5$ кг при температуре 100 °С и нормальном атмосферном давлении?
3. Какое количество теплоты потребуется для превращения в пар спирта массой $m = 10$ кг, взятого при температуре $t = 18$ °С и нормальном атмосферном давлении? Удельная теплоёмкость спирта при данных условиях равна 2,5 Дж/(г · К).
4. Какое количество теплоты необходимо затратить, чтобы 1 л воды, взятой при комнатной температуре 20 °С и нормальном атмосферном давлении, нагреть до кипения и превратить в пар?

Для углублённого уровня

§ 62 Реальные газы

Опыты показывают, что при высоких давлениях и низких температурах уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева – Клапейрона) не согласуется с экспериментальными данными. Например, при изотермическом (при комнатной температуре) увеличении давления азота от 1 до 10^3 атм произведение его давления на объём не остаётся неизменным, а возрастает примерно в два раза. Ещё более сильное отступление от предсказаний, сделанных на основании уравнения Менделеева – Клапейрона, наблюдается при изотермическом сжатии паров различных веществ.

Рассмотрим реальный эксперимент по изотермическому сжатию паров воды при температурах, близких к комнатной. На рис. 242 приведены экспериментально полученные изотермы для трёх таких температур: $T_1 < T_2 < T_3$. Из рисунка видно, что при изотермическом сжатии пара вначале его давление возрастает примерно по гиперболическому закону, как это и должно быть в соответствии с уравнением Менделеева – Клапейрона. Однако, когда объём пара достигает некоторого значения V_1, его давление перестаёт изменяться, несмотря на дальнейшее уменьшение объёма. При достижении этого значения пар становится насыщенным. Поэтому при дальнейшем уменьшении объёма начинается конденсация – появляется жидкость, которая занимает всё бо́льшую часть объёма цилиндра по мере движения поршня. Когда объём между дном цилиндра и поршнем достигает значения V_2 (*см.* рис. 242), весь пар в цилиндре превращается в жидкость. Поэтому при дальнейшем продвижении поршня давление в системе резко увеличивается.

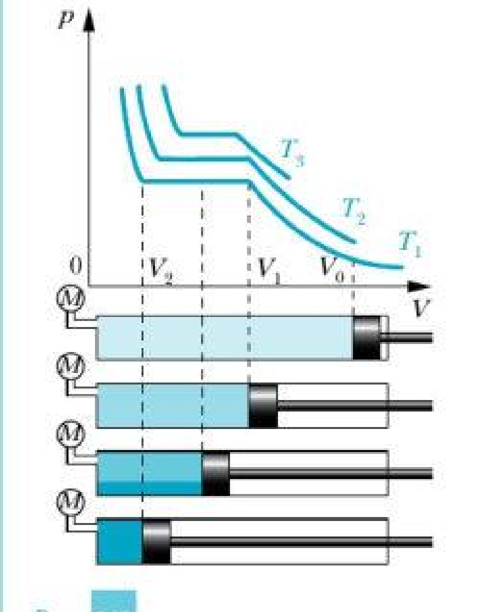


Рис. 242

При увеличении температуры ($T_1 < T_2 < T_3$) возрастает давление, при котором пар становится насыщенным: $p_н(T_1) < p_н(T_2) < p_н(T_3)$. При этом горизонтальные участки изотерм уменьшаются. При повышении температуры до критического значения ($t_{\text{кр воды}} = 374{,}15$ °C) горизонтальный участок превращается в точку (рис. 243). Эту температуру называют *критической*. При температурах выше критической сжатие пара до любых давлений не приводит к его конденсации. Таким образом, все возможные состояния на p—V-диаграмме можно разделить на три части: область, в которой вещество находится в газообразном состоянии; область, в которой вещество является жидкостью; и область, ограниченная на рисунке пунктирной линией, в этой области вещество находится одновременно в двух фазах – жидкой и газообразной.

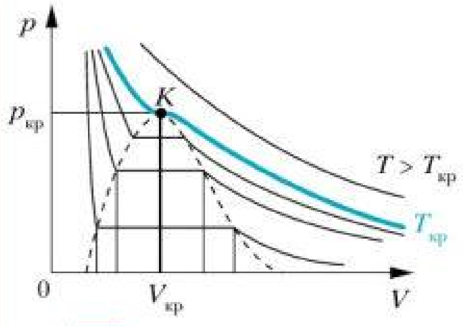


Рис. 243

Аналогично ведут себя пары других веществ. Значения критических температур $T_{\text{кр}}$ и давлений $p_{\text{кр}}$ для разных веществ приведены в таблице 8.

Таблица 8

Вещество	^3He	^4He	H_2	Ne	N_2	Ar	O_2	CO_2	Cl_2	H_2O	Hg	S
$T_{\text{кр}}$, К	4,3	5,3	33,3	44,5	126,1	150,8	154,4	304,2	417,3	647,3	1773	1313
$p_{\text{кр}}$, МПа	–	0,23	1,29	2,73	3,39	4,86	5,04	7,35	7,70	22,13	10,49	11,75

Наблюдаемые расхождения между поведением вещества в эксперименте и в теории на основании уравнения Менделеева – Клапейрона обусловлены тем, что при высоких давлениях и низких температурах уже *нельзя пренебрегать ни взаимодействием молекул, ни их размерами*.

Первую попытку учесть взаимодействие молекул и их размеры при выводе уравнения состояния предпринял в 1873 г. голландский физик Йоханнес Ван-дер-Ваальс (1837–1923). Во-первых, он предложил учесть, что молекулы не только упруго соударяются, но и притягиваются друг к другу на расстоянии. Тогда молекулы газа, летящие к мембране манометра, которым измеряют давление, испытывая притяжение со стороны оставшихся «у них за спиной» других молекул газа, тормозятся. В результате они подлетают к мембране со скоростями, модули которых в среднем меньше, чем

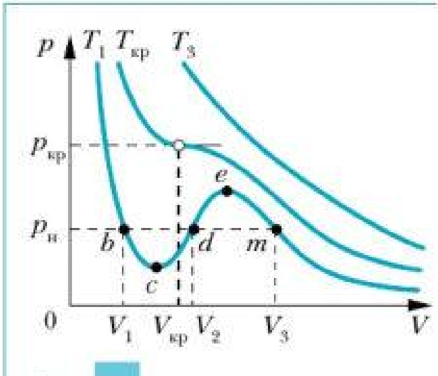


Рис. 244

модули скоростей, с которыми молекулы движутся внутри газа. Поэтому передаваемые мембране импульсы будут тем меньше, чем сильнее молекулы газа притягиваются друг к другу. Следовательно, при учёте взаимного притяжения молекул газа в уравнении его состояния должна стоять величина, превышающая измеряемое манометром давление p на некоторую величину Δp. Поскольку каждая молекула газа взаимодействует с каждой другой его молекулой, то это превышение должно быть пропорционально квадрату концентрации газа (т. е. пропорционально квадрату отношения количества газа к его объёму): $\Delta p = a \cdot \frac{\nu^2}{V^2}$, где ν – количество газа, V – объём сосуда, a – коэффициент пропорциональности.

Учёт размеров молекул с точки зрения Ван-дер-Ваальса означает, во-первых, что объём газа не может стать меньше некоторой пропорциональной количеству газа величины $\nu \cdot b$, где b – коэффициент пропорциональности. Во-вторых, это означает, что каждая молекула газа может свободно перемещаться не во всём объёме V сосуда, а только в объёме, свободном от остальных молекул: $V - \nu \cdot b$.

С учётом этих поправок уравнение Менделеева – Клапейрона превращается в уравнение, которое называют *уравнением Ван-дер-Ваальса*:

$$\left(p + \frac{a \cdot \nu^2}{V^2}\right) \cdot (V - \nu \cdot b) = \nu \cdot R \cdot T. \qquad (1)$$

Согласно Ван-дер-Ваальсу коэффициенты a и b следует считать постоянными. Их часто называют *постоянными Ван-дер-Ваальса*.

Таким образом, в модели Ван-дер-Ваальса молекулы газа представляют собой твёрдые шарики, которые притягиваются друг к другу на расстоянии и соударяются упруго. Из этого следует, что потенциальная энергия взаимодействия молекул газа Ван-дер-Ваальса друг с другом, в отличие от потенциальной энергии взаимодействия молекул идеального газа, не равна нулю. Поэтому при расчёте внутренней энергии газа Ван-дер-Ваальса необходимо учитывать её потенциальную составляющую.

Сравним экспериментально полученные изотермы паров воды (*см.* рис. 242) с приведёнными на рис. 244 изотермами для трёх температур, которые построены в соответствии с уравнением Ван-дер-Ваальса. Видно, что при $T_1 < T_{кр}$ одному и тому же давлению $p_н$ соответствуют три разных объёма: V_1, V_2 и V_3. Таким образом, изотермы Ван-дер-Ваальса сходны с полученными экспериментально. Различие состоит в том, что на изотерме Ван-дер-Ваальса вместо прямолинейного отрезка *bdm* имеется волнообразный участок *bcdem*. Опыт показывает, что участки *bc* и *em* при *особых* условиях проведения эксперимента могут быть реализованы. Состояния вещества на этих участках не являются устойчивыми. Такие состояния называют *метастабильными*. Участок *bc* изображает состояния так называемой перегретой жидкости, а участок *em* – состояния перенасыщенного пара. Каждая из таких фаз может существовать только до тех пор, пока она не вступит в контакт с другой, более устойчивой фазой. Например, перенасыщенный пар переходит в насыщенный, если в него ввести каплю жидкости или если в него влетит заряженная частица. В свою очередь, перегретая жидкость взрывообразно закипает, если в неё попадает, например, заряженная частица или пузырёк воздуха. Отметим особо, что участку *cde* изотермы Ван-дер-Ваальса соответствуют абсолютно неустойчивые состояния вещества. Действительно, на этом участке уменьшение объёма должно сопровождаться уменьшением давления. Поэтому процессы, соответствующие этому участку, не могут быть реализованы.

По мере увеличения температуры длина отрезка *bdm*, как и на изотермах реального газа (*см.* рис. 242), постепенно сокращается. Температура, при которой точки *b*, *c*, *d*, *e* и *m* совмещаются в одну точку, соответствует критической температуре $T_{кр}$. При температурах же выше критической (и в то же время меньших температур ионизации молекул газа при их соударениях) изотермы Ван-дер-Ваальса практически совпадают с экспериментально полученными изотермами газа.

В заключение отметим, что для согласования изотерм Ван-дер-Ваальса с изотермами реального вещества входящие в уравнение (1) величины *a* и *b* приходится подбирать для каждой температуры, т. е. эти величины нельзя считать постоянными. Следует также отметить, что в настоящее время известно очень большое количество других уравнений состояния, позволяющих описывать поведение реального вещества в широком диапазоне температур в разных агрегатных состояниях. Однако вывод этих уравнений не имеет такой простой интерпретации, как вывод уравнения Ван-дер-Ваальса.

Вопросы

1. **Опишите, как выглядят изотермы водяного пара при температуре, близкой к комнатной.**

2 Почему уравнение Менделеева — Клапейрона неприменимо при высоких давлениях и низких температурах?
3 Чем модель газа Ван-дер-Ваальса отличается от модели идеального газа?
4 Опишите, как выглядят изотермы Ван-дер-Ваальса.
5 Какую температуру называют критической?
6 Опишите, на какие три области можно разделить все возможные состояния вещества на $p—V$-диаграмме, приведённой на рис. 243.
7 Можно ли за счёт сжатия сконденсировать вещество, температура которого выше критической?

Для углублённого уровня

§ 63 Решение задач о парах

При решении задач о парах, в отличие от большинства задач из других разделов физики, как правило, требуется проведение численных расчётов непосредственно в процессе решения. Чтобы лучше понять причину этого, рассмотрим пример подобной задачи.

Задача 1

В сосуде под поршнем находятся насыщенный пар и вода. Начальный объём всей системы $V_0 = 1$ м^3. Плотность насыщенного пара $\rho_п = 30$ г/м^3. Масса воды $m_в = 75$ г. Поршень медленно поднимают, изотермически увеличивая объём системы «пар — жидкость» в k раз. Определите конечную плотность пара.

Решение.

Сразу отметим, что в большинстве задач объём, занимаемый водой, которая образовалась в результате конденсации пара, считают пренебрежимо малым по сравнению с объёмом пара, так как даже при 100 °C плотность насыщенного пара примерно в 2000 раз меньше плотности воды.

Исследуем, что будет происходить с рассматриваемой системой при увеличении её объёма, например, в $k = 2$ раза. В этом случае увеличение объёма на $\Delta V = 1$ м^3 приведёт к испарению части воды и увеличению количества пара на $\Delta m_в = \rho_п \cdot \Delta V = 30$ г. При этом пар останется насыщенным, поскольку часть воды, масса которой будет равна $m_в - \Delta m_в = 75 - 30 = 45$ (г), останется в жидком состоянии.

Понятно, что при любом значении k, пока будет оставаться хоть малая часть воды в жидком состоянии и масса пара не станет равной сумме начальных масс жидкости и её пара $(m_в + \rho_п \cdot V_0)$, пар по-прежнему будет оставаться насыщенным. Поэтому и плотность, и давление пара будут оставаться неизменными, пока объём системы будет меньше $V_{кр} = k_{кр} \cdot V_0 = \frac{m_в + \rho_н \cdot V_0}{\rho_н \cdot V_0} \cdot V_0 = 3{,}5$ (м^3).

Ситуация изменится, когда объём системы увеличится в $k_{кр} = 3{,}5$ раза. К этому моменту вся вода испарится. Если объём продолжать увеличивать, то пар перестанет быть насыщенным. В результате его плотность и давление начнут уменьшаться практически обратно пропорционально увеличению объёма. Например, если объём пара увеличить до значения $2V_{кр} = 7$ м^3, то можно считать, что плотность пара станет в два раза меньше плотности насыщенного пара: $\rho_п = \frac{\rho_н}{2} = 15$ г/м^3.

Таким образом, при $k \leqslant 3{,}5$ пар будет оставаться насыщенным и его плотность будет равна плотности насыщенного пара $\rho_{кр} = \rho_н = 30$ г/м^3. Напротив, при $k > 3{,}5$ пар будет ненасыщенным, а его плотность будет во столько раз меньше плотности насыщенного пара, во сколько раз его конечный объём $V_к$ будет больше критического объёма $V_{кр}$: $\rho = \rho_н \cdot \frac{V_{кр}}{V_к}$.

В результате мы приходим к выводу, что ответ принципиально зависит от числового значения коэффициента k увеличения объёма.

Другими словами, решение задач о парах требует расчёта числовых значений плотности (или давления) пара, чтобы, сравнивая эти значения с табличными (*см.* табл. 4), контролировать процесс перехода насыщенного пара в ненасыщенный или обратно.

Задача 2

В утренние часы над лугом образовался туман и выпала роса при температуре воздуха $t_1 = 10$ °C, а днём в безветренную погоду воздух прогрелся до температуры $t_2 = 25$ °C, при этом его абсолютная влажность увеличилась за счёт испарения воды с луга на $\Delta\rho = 5$ г/м^3. Определите относительную влажность воздуха днём. Давление насыщенных паров воды при утренней и дневной температурах равно соответственно $p_{н1} = 9$ мм рт. ст. и $p_{н2} = 24$ мм рт. ст.

Решение.

Роса наблюдается тогда, когда пары являются насыщенными. Следовательно, давление паров воды в утренние часы было равно $p_{н1}$. Считая, что к парам воды вплоть до точки насыщения применимо уравнение Менделеева — Клапейрона, определим плотность насыщенных паров воды в утренние часы:

$$\rho_1 = \frac{m}{V} = \frac{p_{н1} \cdot M}{R \cdot T_1},$$

где: m — масса паров воды, содержавшихся в объёме воздуха V при абсолютной температуре $T_1 = t_1 + 273$, $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная, $M = 18$ г/моль — молярная масса воды.

При дневной температуре $T_2 = t_2 + 273$ абсолютная влажность по условию задачи равна: $\rho_2 = \rho_1 + \Delta\rho$. Давление насыщенных паров при дневной температуре равно $p_{н2}$. Поэтому с учётом того что 1 мм рт. ст. ≈ 133 Па, находим искомую относительную влажность:

$$\varphi_2 = \frac{\rho_1 + \Delta\rho}{M \cdot p_{н2}} \cdot R \cdot T_2 = \left(\frac{p_{н1}}{p_{н2} \cdot T_1} + \frac{\Delta\rho \cdot R}{M \cdot p_{н2}}\right) \cdot T_2 \approx 0{,}61.$$

Ответ: искомая относительная влажность равна примерно 61 %.

В особый класс необходимо выделить задачи о процессах в термодинамической системе, которая представляет собой смесь паров (например, паров воды) и газов (например, воздуха). Особенность такой системы состоит в том, что при её охлаждении или сжатии уравнение Менделеева — Клапейрона применимо только до тех пор, пока у паров не начнут проявляться свойства реального газа. Другими словами, при увеличении парциального давления p (или плотности ρ) пара до значения давления $p_н$ (или плотности $\rho_н$) насыщенного пара необходимо учитывать начинающуюся конденсацию пара. При этом для имеющихся в смеси газов уравнение Менделеева — Клапейрона по-прежнему применимо. По этой причине при решении задач о процессах в смеси паров и газов необходимо рассматривать пар и газы раздельно, оперируя понятиями парциальных давлений и плотностей пара и газов. Рассмотрим пример решения такой задачи.

Задача 3

В вертикальном цилиндре под гладким невесомым поршнем находится влажный воздух, относительная влажность которого $\varphi = 0{,}8$. В результате медленного увеличения внешнего давления поршень опускается и объём влажного воздуха под поршнем уменьшается в $n = 2$ раза. Определите конечное внешнее давление, если вначале оно было равно нормальному атмосферному, а температура на протяжении всего эксперимента была постоянна и равна $t = 100$ °С.

Решение.

Влажный воздух состоит из воздуха и пара. Будем рассматривать воздух и пар по отдельности.

При температуре $t = 100$ °С давление $p_н$ насыщенного пара равно нормальному атмосферному, т. е. $p_н = p_0 = 10^5$ Па (*см.* табл. 4). Следовательно, перед началом сжатия парциальное давление водяных паров по условию задачи равно:

$$p_{п} = \varphi \cdot p_{н} = \varphi \cdot p_{0}. \qquad (1)$$

Поршень гладкий и невесомый. Поэтому давление влажного воздуха на протяжении всего эксперимента равно внешнему давлению. Перед началом сжатия оно равно p_0. Следовательно, до сжатия парциальное давление сухого воздуха, равное разности давлений влажного воздуха и парциального давления пара, может быть выражено в виде:

$$p_{в} = p_{0} - p_{п} = p_{0} \cdot (1 - \varphi). \qquad (2)$$

По условию задачи объём влажного воздуха уменьшается в $n = 2$ раза. Следовательно, в соответствии с законом Бойля — Мариотта парциальное давление сухого воздуха при этом увеличивается в $n = 2$ раза. Поэтому с учётом уравнения (2) получаем:

$$p_{вк} = n \cdot p_{в} = n \cdot p_{0} \cdot (1 - \varphi). \qquad (3)$$

Если бы конденсации пара в результате его сжатия не было, то парциальное давление пара также увеличилось бы в $n = 2$ раза. В этом случае с учётом уравнения (1) оно стало бы равно:

$$p_{пк} = n \cdot p_{п} = n \cdot \varphi \cdot p_{0}. \qquad (4)$$

Однако, подставляя в уравнение (4) численные значения n и φ, получаем, что рассчитанное парциальное давление пара будет больше давления насыщенного пара:

$$p_{пк} = 2 \cdot 0{,}8p_{0} = 1{,}6p_{0};\ p_{пк} > p_{н}.$$

Установившееся давление пара не может быть больше давления насыщенного пара при той же температуре. Поэтому полученный результат означает, что при изотермическом сжатии пара в $n = 2$ раза произойдёт его насыщение и частичная конденсация.

Следовательно, конечное значение парциального давления пара нельзя рассчитывать по формуле (4), и оно будет равно давлению насыщенного пара:

$$p_{пк} = p_{н} = p_{0}. \qquad (5)$$

Складывая парциальные давления сухого воздуха и пара в конечном состоянии, получаем:

$$p = p_{вк} + p_{пк} = 1{,}4p_{0} = 1{,}4 \cdot 10^{5}\ \text{Па}.$$

Ответ: конечное внешнее давление равно 1,4 атм.

Упражнения

1 Для получения воды в пустыне предложен следующий способ: днём воздухом заполняют некоторый сосуд, а ночью содержимое сосуда изохорически охлаждают. При этом часть водяных паров конденсируется. Какой объём V воздуха следует охладить, чтобы получить $v = 2$ л воды, если днём температура воздуха $t_1 = 50$ °C и влажность воздуха $\varphi = 30$ %, а ночью воздух охлаждается до температуры $t_2 = 0$ °C? Давление насыщенных паров воды днём $p_{н1} = 12{,}3$ кПа, а ночью — $p_{н2} = 4{,}6$ мм рт. ст.

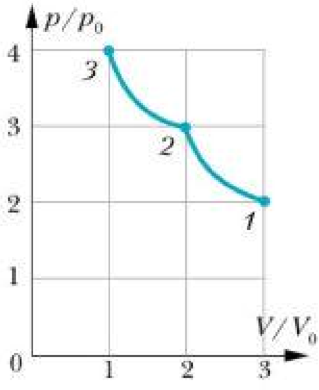


Рис. 245

2 На p—V-диаграмме (рис. 245) показана экспериментально полученная изотерма влажного воздуха. Определите отношение массы сухого воздуха к массе паров воды в точке *1*. Постоянные величины V_0 и p_0 известны. Молярную массу воздуха считайте равной $M = 29$ г/моль.

3 В цилиндре под поршнем находятся воздух, водяные пары и вода. Число молей воздуха в $n = 3$ раза превышает число молей водяного пара, а масса воды равна массе водяных паров. Объём смеси изотермически увеличивают, пока вся вода не испарится. Определите отношение давлений в цилиндре в конечном и начальном состояниях.

§ 64 Структура твёрдых тел

В отличие от жидкостей, твёрдые тела сохраняют не только свой объём, но и форму (если они не подвергаются значительным внешним воздействиям). Это обусловлено существенно более сильным, чем в жидкостях, межмолекулярным взаимодействием частиц — молекул и атомов, образующих твёрдое тело.

По характеру относительного расположения частиц все твёрдые тела разделяют на *кристаллические* и *аморфные*. В свою очередь, кристаллические тела разделяют на *монокристаллические* и *поликри-*

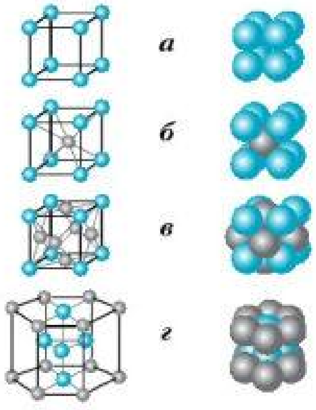


Рис. 246 Типы кристаллических решёток: *а* — кубическая; *б* — кубическая центрированная; *в* — гранецентрированная; *г* — гексагональная

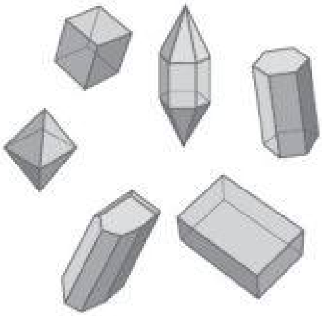


Рис. 247

сталлические. Принадлежность твёрдого тела к одному из указанных классов определяется как его химическим составом, так и способом его получения.

В кристаллических телах атомы (молекулы) расположены в строгом периодическом порядке, образуя *кристаллическую решётку*.

Кристаллическая решётка — пространственная структура с регулярным, периодически повторяющимся расположением атомов.

Типы некоторых кристаллических решёток показаны на рис. 246.

! Положения равновесия, относительно которых атомы совершают хаотические (тепловые) колебания, называют *узлами кристаллической решётки*.

Монокристаллы имеют единую кристаллическую решётку и соответственно форму многогранников (рис. 247). Примерами монокристаллов являются природные кристаллы алмаза, кварца, турмалина, а также крупинки поваренной соли и сахара.

Многие свойства монокристалла определяются строением его кристаллической решётки. Например, в алмазе (*см.* рис. 236, *а*) каждый атом углерода находится в центре группы из четырёх других атомов углерода, которые располагаются в вершинах тетраэдра. Тетраэдр — жёсткая фигура, поскольку его конфигурацию невозможно изменить, не деформируя его рёбра. Поэтому алмаз является самым твёрдым из природных веществ.

Различием в расположении атомов по разным направлениям в кристаллической решётке обусловлена зависимость физических свойств монокристаллов от направления. Эту зависимость называют *анизотропией*.

Анизотропия — зависимость физических свойств вещества от направления.

Например, в монокристалле графита (*см.* рис. 236, *б*) атомы углерода располагаются в параллельных друг другу плоскостях. При этом средние расстояния между атомами в плоскости примерно в 2,5 раза меньше, чем расстояния между плоскостями. Таким образом, атомы разных плоскостей связаны друг с другом слабее, чем атомы в одной плоскости. По этой причине кристаллы графита легко расслаиваются вдоль этих плоскостей. Именно такое расслоение происходит, когда мы пишем карандашом с графитовым стержнем. Напротив, в направлениях, перпендикулярных этим плоскостям, для разрушения монокристалла графита необходимы значительные усилия.

Отметим, что одни и те же химические элементы, например углерод, могут образовывать различные кристаллические решётки. При этом получаются кристаллы с разными свойствами. Это явление называют *полиморфизмом*.

Полиморфизм — существование различных кристаллических структур у одного и того же вещества.

Так, из углерода могут быть образованы три вида кристаллических решёток (*см.* рис. 236). Соответственно, алмаз, графит и фуллерен имеют разные свойства. При изменении внешних условий кристаллическая решётка вещества может изменяться. Например, при нагревании в вакууме при температурах около 150 °C алмаз превращается в графит. Напротив, при давлении 10 ГПа и температуре 2000 °C графит превращается в алмаз. Каждая модификация вещества устойчива в определённом интервале давлений и температур. Например, из девяти известных кристаллических фаз воды только одна устойчива при атмосферном давлении, а остальные могут существовать только при высоких давлениях. Одна из них при давлении 2 ГПа имеет температуру плавления 80 °C.

! Поликристаллические тела представляют собой твёрдые тела, состоящие из сросшихся беспорядочно ориентированных мелких монокристаллов.

Поэтому физические свойства поликристаллов не зависят от направления. Все поликристаллические тела *изотропны*.

Изотропия — независимость физических свойств вещества от направления.

Примерами поликристаллов являются практически все металлы и их сплавы. Наличие кристаллов в металлах можно обнаружить, например, если рассматривать через лупу или микроскоп излом металлического предмета.

Ещё одним видом твёрдых веществ являются *аморфные тела*.

Аморфными называют твёрдые тела, у которых отсутствует кристаллическая структура.

К аморфным телам относятся различные стёкла, янтарь, битум, каучук, пластмассы и т. п. Отметим, что при очень быстром охлаждении паров некоторых металлов можно получить твёрдые металлы в аморфном состоянии.

Беспорядок в расположении атомов в аморфных телах объясняет, почему они *изотропны*. Аморфные тела сходны с жидкостями тем, что их атомы (молекулы) имеют определённое конечное время «оседлой жизни» — колебаний около положений равновесия. Однако, в отличие от жидкостей, это время велико и может превышать десятки лет. С ростом температуры «перескоки» атомов в аморфных телах из одного положения в другое учащаются. В результате *аморфные тела при нагревании размягчаются и постепенно переходят в жидкое состояние*. Таким образом, аморфные тела можно рассматривать как переохлаждённые жидкости с очень большой вязкостью.

Вопросы

1. На какие три вида разделяют твёрдые тела?
2. Какие тела называют: а) монокристаллами; б) поликристаллами? Чем они различаются?
3. Что называют кристаллической решёткой? Какие точки называют её узлами?
4. Что такое полиморфизм?

Отметим, что металлы могут существовать и в виде монокристаллов.

5 Чем аморфные тела отличаются от кристаллических тел и жидкостей?

6 Что такое анизотропия? Какие твёрдые тела анизотропны, а какие — изотропны?

§ 65 Плавление и кристаллизация. Удельная теплота плавления

Каждый из вас многократно наблюдал процесс *плавления*. Наверняка все вы видели, как тают куски льда, попавшие в тёплое помещение. Повседневный опыт показывает, что при передаче твёрдому телу достаточного количества теплоты оно в конце концов переходит в жидкое состояние.

Переход вещества из твёрдого состояния в жидкое называют плавлением.

Не менее часто встречается и обратный процесс — *кристаллизация*. Так, если жидкость (воду) достаточно сильно охладить, отняв определённое количество теплоты, она в конце концов превратится в твёрдое тело (лёд).

Переход вещества из жидкого состояния в твёрдое называют кристаллизацией (отвердеванием).

При плавлении и кристаллизации вещества (образовании монокристаллических и поликристаллических тел) при неизменном внешнем давлении его *температура остаётся неизменной*. На рис. 248 показана зависимость температуры t куска олова от времени τ. При проведении этого эксперимента количество теплоты, переданное олову вплоть до момента времени τ_D, увеличивалось пропорционально времени, а после этого момента тепло отводилось от олова с прежней скоростью.

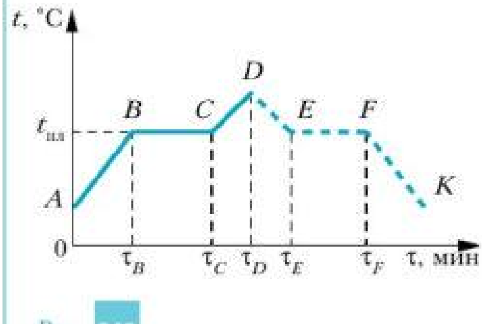


Рис. 248

Участок AB соответствует промежутку времени от 0 до τ_B, в течение которого кусок олова оставался твёрдым, но его температура увеличивалась со временем по линейному закону:

$$\Delta t = \frac{N \cdot \tau}{c_т \cdot m},$$

где N – количество теплоты, получаемое оловом за единицу времени, – *тепловая мощность*, $c_т$ – удельная теплоёмкость твёрдого олова, m – его масса.

Полученное твёрдым веществом при нагревании количество теплоты (участок AB) идёт в основном на увеличение кинетической энергии хаотического колебательного движения атомов. Оставшаяся часть расходуется на увеличение внутренней потенциальной энергии и совершение работы против сил внешнего давления, так как при нагревании размеры тел изменяются.

Начиная с момента τ_B, когда температура олова стала равной $t_{пл}$, *рост температуры олова прекращается, хотя оно по-прежнему продолжает постоянно получать тепло*. При этом мы наблюдаем, что олово начинает плавиться.

Температуру, при которой вещество плавится, называют температурой плавления вещества. K

Температура олова остаётся постоянной на всём участке BC до тех пор, пока всё олово не станет жидким. Постоянство температуры означает, что кинетическая энергия хаотического движения молекул не изменяется. Полученное оловом в это время количество теплоты расходуется в основном на разрушение связей между молекулами. Следовательно, в результате плавления увеличивается потенциальная энергия взаимодействия молекул вещества друг с другом.

Поэтому *внутренняя энергия вещества в жидком состоянии больше внутренней энергии этого вещества при той же температуре в твёрдом состоянии*.

! В процессе плавления температура вещества остаётся неизменной, а его внутренняя энергия увеличивается.

С точки зрения молекулярно-кинетической теории следует ожидать, что количество теплоты, необходимое для перевода данной массы вещества, нагретого до температуры плавления, из твёрдого состояния в жидкое, должно быть прямо пропорционально массе этого вещества. Эксперимент полностью подтверждает это предположение.

Количество теплоты, которое необходимо сообщить однородному кристаллическому телу массой 1 кг, чтобы при температуре плавления полностью перевести его в жидкое состояние, называют удельной теплотой плавления вещества этого тела.

K Отметим, что аморфные твёрдые вещества по мере их нагревания переходят в жидкое состояние, размягчаясь постепенно. Поэтому *у аморфных веществ нет определённой температуры плавления*.

Удельную теплоту плавления обозначают греческой буквой λ. Единица удельной теплоты плавления в СИ – джоуль на килограмм (Дж/кг).

Из сказанного следует, что количество теплоты Q, необходимое для плавления однородного кристаллического тела массой m при его температуре плавления, равно произведению его удельной теплоты плавления λ на его массу m:

$$Q = \lambda \cdot m.$$

Энергии связей между молекулами в кристаллических решётках разных веществ различны. Поэтому удельная теплота плавления разных веществ различна. **К**

Температура плавления и удельная теплота плавления некоторых веществ при нормальном атмосферном давлении приведены в таблице 9.

Таблица 9

Вещество	$T_{пл}$, К	λ, 10^5 Дж/кг	Вещество	$T_{пл}$, К	λ, 10^5 Дж/кг
Водород	13,96	0,586	Золото	1337,6	0,67
Кислород	54,3	0,138	Медь	1358,0	2,1
Азот	63,2	0,259	Чугун	1500	0,96
Ртуть	234,3	0,117	Сталь	1700	0,84
Лёд	273,16	3,324	Железо	1812	2,70
Олово	505,1	0,582	Платина	2042	1,13
Свинец	600,6	0,243	Вольфрам	3694	1,85

К Отметим, что удельная теплота плавления любого вещества зависит от внешнего давления, что, в частности, объясняется затратами энергии на совершение работы против сил внешнего давления. Эта зависимость зачастую имеет весьма сложный характер, обусловленный преобразованиями кристаллической решётки вещества при изменении внешних условий.

Отметим также, что плотность большинства веществ при плавлении уменьшается. Другими словами, их удельный объём (объём единицы массы) увеличивается. Такие вещества называют *нормальными*. Однако существуют и *аномальные* вещества. К ним относятся, например, вода и чугун. Плотность аномальных веществ при плавлении увеличивается, а удельный объём соответственно уменьшается. Именно по этой причине лёд плавает на поверхности воды.

Вернёмся к зависимости, приведённой на рис. 248. После того как всё олово перешло в жидкое состояние, его температура вновь начинает расти (участок CD). Скорость $\Delta t/\Delta\tau$ этого роста, как вы уже знаете, определяется получаемым за единицу времени количеством теплоты N, удельной теплоёмкостью $c_ж$ жидкого олова и его массой m:

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{N}{c_ж \cdot m}.$$

В момент времени, соответствующий точке D, прекращается процесс передачи тепла олову и начинается процесс его отвода. В результате вначале наблюдается уменьшение температуры жидкого олова (участок DE) до температуры кристаллизации. Эксперименты показывают, что *при неизменном внешнем давлении температура кристаллизации равна температуре плавления*. В момент τ_E начинается процесс кристаллизации (участок EF).

! В процессе кристаллизации температура вещества остаётся неизменной, а его внутренняя энергия уменьшается.

При кристаллизации вещества выделяется точно такое же количество теплоты, какое поглощается при его плавлении. Это легко понять, если вспомнить, что при кристаллизации образуется такое же кристаллическое вещество, которое было до плавления. Поэтому его внутренняя энергия будет такой же, какой была до плавления.

! Изменения внутренней энергии вещества при плавлении и кристаллизации равны по модулю.

Поэтому удельная теплота плавления данного вещества при заданных условиях равна удельной теплоте его кристаллизации при тех же условиях.

Участок FK графика соответствует остыванию твёрдого куска олова.

Вопросы

1. Что называют: а) плавлением; б) кристаллизацией?
2. Какую температуру называют температурой плавления?
3. Существует ли температура плавления для аморфных веществ?
4. На что с точки зрения молекулярно-кинетической теории расходуется полученное веществом в процессе плавления количество теплоты? Почему количество теплоты, необходимое для расплавления кристаллического тела при температуре плавления, пропорционально его массе?

5 Что называют удельной теплотой плавления?

6 Как изменяется кинетическая энергия хаотического движения молекул в процессе плавления? Изменяется ли при этом потенциальная энергия их взаимодействия друг с другом?

7 Как соотносятся температура кристаллизации и температура плавления? Как соотносятся количество теплоты, выделяющееся при кристаллизации вещества, и количество теплоты, поглощаемое при его плавлении? Объясните почему.

Упражнения

На рис. 249 приведён график зависимости температуры тела массой 2 кг от времени. Используя этот график и соответствующие таблицы из учебника, выполните следующие задания и ответьте на вопросы.

1) Определите, какое это вещество.

2) Каким процессам соответствуют участки AB, BC, CD, DE, EF?

3) Как изменялась кинетическая энергия хаотического движения молекул этого вещества на участках AB, BC, CD, DE, EF?

4) В какой точке (L или N) молекулы данного вещества обладали большей кинетической энергией хаотического движения?

5) В какой из точек (D или E) молекулы данного вещества обладали большей потенциальной энергией взаимодействия друг с другом?

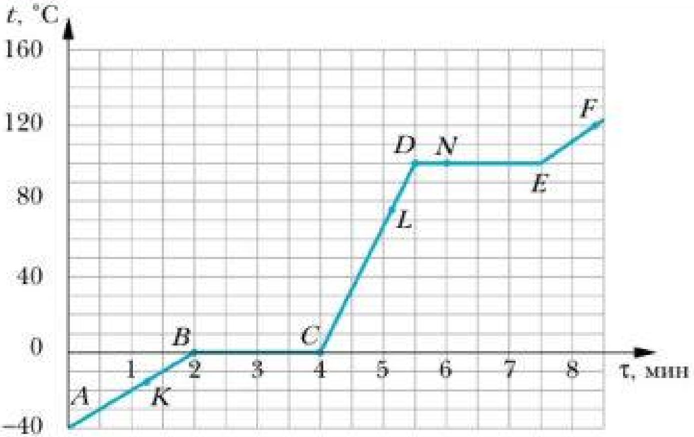


Рис. 249

6) Какое количество теплоты было передано веществу на участках AB, BC, CD, DE?
*7) Какое количество теплоты получает вещество на участке BE?
*8) Оцените мощность нагревателя, используемого на разных этапах представленного процесса.

Для углублённого уровня

§ 66 Поверхностное натяжение

На молекулу жидкости, находящуюся внутри её объёма, действуют силы притяжения со стороны других окружающих её молекул. Сумма этих сил в среднем равна нулю. Иначе «чувствует себя» молекула, находящаяся у поверхности жидкости (рис. 250). На неё действуют силы со стороны молекул среды над этой поверхностью и силы со стороны молекул самой жидкости. Если такая молекула находится на границе раздела «жидкость – воздух», то сумма сил притяжения, действующих на неё со стороны молекул жидкости, превышает по модулю сумму сил притяжения, действующих со стороны молекул воздуха. Поэтому *сумма всех этих сил направлена внутрь жидкости*. В результате такая жидкость стремится уменьшить площадь своей свободной поверхности. Именно по этой причине в состоянии невесомости жидкость, которую выплеснули из сосуда, принимает форму шара – фигуры, имеющей минимальную площадь поверхности для данного объёма. Это явление вы наверняка неоднократно наблюдали при телетрансляциях с борта космической станции.

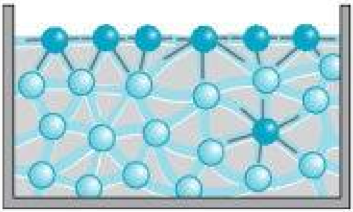


Рис. 250

Отношение работы A внешних сил, которая необходима для изотермического (при постоянной температуре) увеличения площади свободной поверхности жидкости, к увеличению ΔS площади этой поверхности называют коэффициентом поверхностного натяжения σ данной жидкости:

$$\sigma = \frac{A}{\Delta S}. \qquad (1)$$

Пусть жидкость представляет собой мыльную плёнку, образованную на прямоугольной рамке с подвижной перемычкой длиной l (рис. 251, a). Эта

Рис. 251

плёнка, стремясь уменьшить площадь своей свободной поверхности, действует на перемычку с силами, которые показаны на рисунке чёрными стрелками. Чтобы перемычка не двигалась, эти силы необходимо уравновешивать внешней силой $\vec{F}_0$.

Пусть в результате действия силы $\vec{F}_0$ перемычка медленно равномерно перемещается на Δx. Тогда работа этой силы будет равна:

$$A = F_0 \cdot \Delta x. \qquad (2)$$

Поскольку у мыльной плёнки две стороны, то в результате перемещения перемычки на Δx увеличение площади ΔS её свободной поверхности равно:

$$\Delta S = 2l \cdot \Delta x. \qquad (3)$$

Подставляя уравнения (3) и (2) в (1), получаем:

$$F_0 = 2\sigma \cdot l. \qquad (4)$$

Действие силы $\vec{F}_0$ уравновешивается действием сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ со стороны двух поверхностей мыльной плёнки (рис. 251, *б*). Считая, что поверхности мыльной плёнки одинаковые и действуют на перемычку с одинаковыми силами, из уравнения (4) получаем:

$$F_1 = F_2 = \sigma \cdot l. \qquad (5)$$

Таким образом, действие поверхности жидкости на граничащее с ней твёрдое тело прямо пропорционально длине границы. Понятно, что поверхность жидкости действует не только на граничащие с ней твёрдые тела, но и на другие граничащие с ней участки её поверхности.

Силой поверхностного натяжения называют силу, действующую со стороны поверхности жидкости на граничащие с ней объекты. Эта сила направлена по касательной к поверхности жидкости, перпендикулярно участку контура, ограничивающему поверхность жидкости, в сторону сокращения площади этой поверхности.

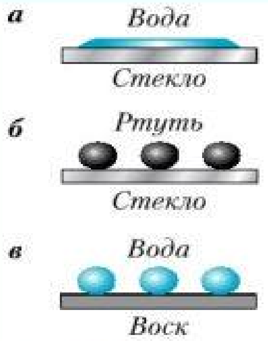


Рис. 252

Теперь рассмотрим молекулу жидкости, которая находится на её поверхности у границы раздела «жидкость – твёрдое тело». Пусть силы притяжения, действующие на эту молекулу со стороны молекул твёрдого тела, больше сил притяжения со стороны молекул самой жидкости. Тогда жидкость будет стремиться увеличить площадь поверхности соприкосновения с телом. В результате она будет растекаться по поверхности тела, как, например, капля воды на чистом стекле (рис. 252, *а*). В этих случаях говорят, что *жидкость смачивает твёрдое тело*.

Если же действующие на молекулу жидкости силы притяжения со стороны молекул твёрдого тела окажутся меньше сил притяжения со стороны молекул жидкости, то капля такой жидкости не будет растекаться по поверхности данного тела, как, например, капля ртути на чистом стекле (рис. 252, *б*) или капля воды на восковой поверхности (рис. 252, *в*). В этих случаях говорят, что *жидкость не смачивает твёрдое тело*.

Степень смачивания характеризует величина ϑ, которую называют *краевой угол*. Это угол между поверхностью твёрдого тела и плоскостью касательной к поверхности жидкости в области пересечения поверхностей (рис. 253). Если жидкость смачивает твёрдое тело, то поверхность жидкости, граничащая с воздухом, является вогнутой и краевой угол $\vartheta < \pi/2$ (*см.* рис. 253, *а*), если жидкость не смачивает твёрдое тело, то поверхность жидкости является выпуклой и $\vartheta > \pi/2$ (*см.* рис. 253, *б*).

При идеальном смачивании (например, керосин на поверхности стекла в воздухе) краевой угол стремится к нулю. При отсутствии *смачивания и несмачивания* краевой угол стремится к $\pi/2$, и свободная поверхность жидкости является плоской. Наконец, при полном несмачивании (например, ртуть на поверхности стекла) ϑ стремится к π.

С явлением смачивания (несмачивания) связаны капиллярные явления, которые можно наблюдать в узких трубках. Такие трубки называют *капил-*

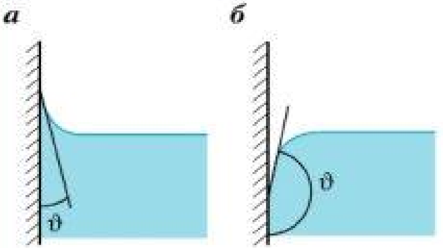


Рис. 253

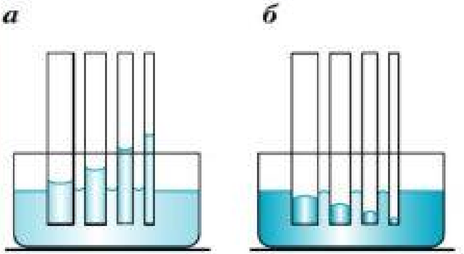


Рис. 254

лярами. Подъём, например, воды в стеклянных капиллярах (рис. 254, *а*) объясняется тем, что вода смачивает стекло. В этом случае поверхность воды в капилляре становится вогнутой. Если же жидкость не смачивает внутреннюю поверхность капилляра, то наблюдается опускание жидкости в капилляре (рис. 254, *б*) и её поверхность в капилляре становится выпуклой. Чтобы лучше понять физику капиллярных явлений, рассмотрим примеры решения задач о капиллярных явлениях.

Задача 1

Открытый тонкий капилляр вертикально опускают в чашку с идеально смачивающей его жидкостью. Плотность жидкости равна ρ. Внутренний радиус капилляра равен r. Жидкость поднимается в капилляре на высоту h (рис. 255). Определите коэффициент σ поверхностного натяжения жидкости.

Решение.

Сила тяжести, действующая в капилляре на столб жидкости, который расположен выше уровня жидкости в сосуде (уровень BC), направлена вниз и равна $m \cdot \vec{g}$. Масса жидкости в этом столбе равна произведению плотности жидкости на её объём: $m = \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$.

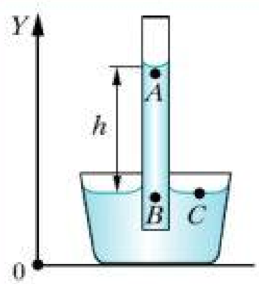


Рис. 255

По условию задачи жидкость идеально смачивает внутреннюю поверхность капилляра. Поэтому краевой угол равен нулю. Следовательно, действующая на жидкость сила $\vec{F}$ поверхностного натяжения направлена по касательной к свободной поверхности жидкости, т. е. вертикально вверх. Модуль F этой силы равен произведению коэффициента σ поверхностного натяжения жидкости на длину границы контакта поверхности жидкости с внутренней поверхностью капилляра. Поскольку граница контакта представляет собой окружность радиусом r, то

$$F = 2\pi \cdot r \cdot \sigma.$$

Жидкость в капилляре покоится относительно ИСО. Поэтому сумма всех действующих на неё сил должна быть равна нулю:

$$F - m \cdot g = 0.$$

Подставляя в полученное уравнение выражения для модулей сил, после элементарных преобразований получаем:

$$\sigma = \frac{\rho \cdot g \cdot h \cdot r}{2}.$$

Из полученной формулы следует, что высота подъёма жидкости в идеально смачиваемом капилляре прямо пропорциональна коэффициенту поверхностного натяжения и обратно пропорциональна плотности жидкости, модулю ускорения свободного падения и внутреннему радиусу капилляра.

Ответ: $\sigma = \frac{\rho \cdot g \cdot h \cdot r}{2}$.

Теперь рассмотрим ещё одну интересную с практической точки зрения задачу. Когда совершают бесполезную работу, то говорят, что «носят воду в решете». При каких условиях воду всё-таки можно носить в решете?

Задача 2

Отверстия в решете имеют радиус $r = 0{,}5$ мм, коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 0{,}07$ Н/м, а её плотность $\rho = 1$ г/см^3. Определите максимально допустимую высоту h уровня, до которого можно налить воду в такое решето, чтобы она не выливалась сквозь его отверстия.

Решение.

Для того чтобы вода не выливалась, силы поверхностного натяжения должны уравновешивать силы гидростатического давления, обусловленные действием на воду в решете силы тяжести. Для этого дно в решете должно быть изготовлено из материала, не смачиваемого водой. Будем считать, что этот материал полностью не смачивается водой и поверхность выступающей из ячейки (отверстия) капли воды имеет вид полусферы радиусом r. Поскольку атмосферное давление, действующее на воду в решете и сверху и снизу, одинаково, то учитывать его не будем.

Рассмотрим сечение одного из отверстий в решете. Гидростатическое давление, обусловленное действием силы тяжести на воду, в рассматриваемом сечении равно $p = \rho \cdot g \cdot h$. Поскольку форма отверстия — круг радиусом r, то модуль силы гидростатического давления $F_г = p \cdot \pi \cdot r^2$.

Модуль F направленной вертикально вверх силы поверхностного натяжения, действующей со стороны краёв одного отверстия, равен произведению коэффициента σ поверхностного натяжения жидкости на длину окружности радиусом r. Поэтому $F = 2\pi \cdot r \cdot \sigma$.

Если пренебречь силой тяжести, действующей на часть воды, которая выступает из отверстия в решете, то условие равновесия можно записать в виде:

$$F - F_г = 0.$$

Подставляя в данное уравнение выражения для модулей сил, после несложных преобразований получаем:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho \cdot g \cdot h} = 3 \text{ (см)}.$$

Ответ: максимально допустимый уровень воды в решете равен 3 см.

Таким образом, если высота слоя воды в данном решете меньше h, то вода не будет выливаться сквозь отверстия, т. е. воду можно носить в решете!

Вопросы

1. Почему жидкость стремится уменьшить площадь своей свободной поверхности?
2. Что называют: а) силой поверхностного натяжения; б) коэффициентом поверхностного натяжения жидкости?
3. Какое явление называют: а) смачиванием; б) несмачиванием? Объясните эти явления с точки зрения взаимодействия молекул.
4. Как высота подъёма жидкости в капилляре зависит от его внутреннего диаметра?
5. Отличается ли давление воздуха внутри мыльного пузыря от давления снаружи?

Упражнения

1. Прямоугольная проволочная рамка разделена на две части закреплённой перегородкой длиной L. Эти части рамки затянуты плёнками жидкостей с коэффициентами поверхностного натяжения σ_1

и σ_2. Определите величину силы, действующей на перегородку со стороны жидкостей.

2 После освобождения перегородки, рассмотренной в предыдущем упражнении, она переместилась поступательно на расстояние Δx. Вычислите работу, совершённую силами поверхностного натяжения.

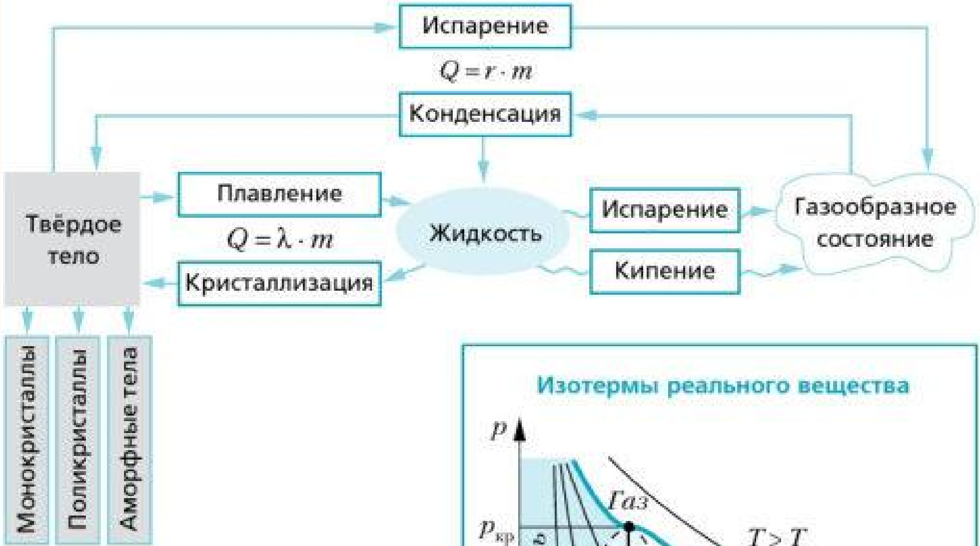
3 Оцените изменение энергии оболочки мыльного пузыря при изотермическом увеличении его диаметра от $d_1 = 2$ мм до $d_2 = 3$ мм. Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора $\sigma_м = 0{,}04$ Н/м.

4 Какую работу против сил поверхностного натяжения нужно совершить, чтобы разделить на два равных шарика ртутный шарик радиусом $r = 3$ мм? Коэффициент поверхностного натяжения ртути $\sigma_р = 0{,}465$ Н/м.

5 Радиус канала стеклянной трубки ртутного барометра Торричелли $r = 1$ мм. Какую поправку (в миллиметрах ртутного столба) нужно вводить, чтобы получить верное значение атмосферного давления, измеряя высоту уровня ртути в трубке по верхнему краю выпуклой поверхности ртути (мениска) относительно её уровня в широкой чашке барометра? Коэффициент поверхностного натяжения ртути равен $\sigma_р = 0{,}465$ Н/м. Считайте, что мениск имеет форму полусферы.

6 Длинную тонкостенную горизонтально расположенную трубку с внутренним диаметром $d = 1$ мм полностью заполнили водой, а затем медленно повернули так, что её ось стала вертикальной. Вода полностью смачивает материал трубки. Определите максимально возможную длину оставшегося в трубке столбика воды.

АГРЕГАТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ



Пар, находящийся в динамическом равновесии со своей жидкостью, называют насыщенным.

Абсолютной влажностью воздуха называют плотность водяного пара, содержащегося в этом воздухе.

Относительной влажностью воздуха φ называют отношение парциального давления p пара в воздухе к давлению $p_н$ насыщенного пара при той же температуре, умноженное на 100 %:

$$\varphi = \frac{p}{p_н} \cdot 100\,\%.$$

Изотермы реального вещества

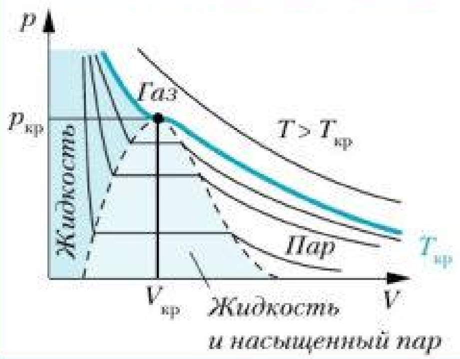
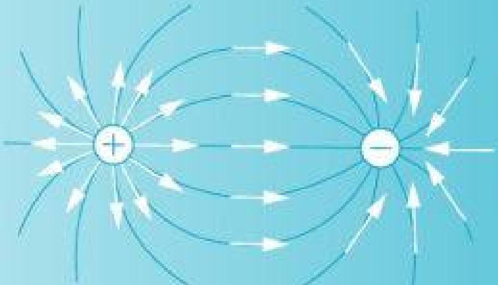
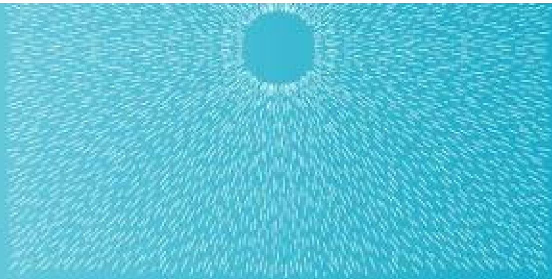
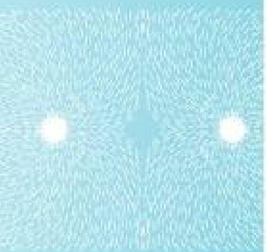


График зависимости температуры кристаллического тела от времени при постоянной тепловой мощности, подводимой к нему —
и отводимой от него —





Электродинамика



Из известных в настоящее время четырёх видов фундаментальных взаимодействий — гравитационного, электромагнитного, сильного (или ядерного) и слабого — электромагнитное взаимодействие по широте и разнообразию проявлений занимает особое место. Это связано с тем, что атомы состоят из заряженных частиц. Благодаря именно электромагнитным силам атомы объединяются в молекулы. Эти же силы определяют и характер взаимодействия молекул. По этой причине действием электромагнитных сил объясняются такие явления, как возникновение упругих сил, переходы вещества из одного агрегатного состояния в другое, возникновение сил сухого трения и многие другие явления.

Раздел физики, в котором изучают взаимодействие заряженных тел, называют электродинамикой.

Изучение электродинамики начинают с *электростатики* — раздела физики, в котором рассматривают *взаимодействие заряженных тел, покоящихся в выбранной инерциальной системе отсчёта.*

Глава 10 Электростатика

§ 67 Электрический заряд. Закон сохранения электрического заряда

Электризация тел. Два вида заряда

Ещё древние греки знали, что в процессе натирания янтаря — солнечного камня (или, как они его называли, электрона) — он приобретает способность притягивать к себе лёгкие предметы. Спустя более 2000 лет, в 1600 г., английский врач Уильям Гильберт (1544–1603) установил, что подобным свойством обладают ещё примерно тридцать веществ. Их стали называть электрическими, а состояние этих веществ после их натирания стали называть наэлектризованным.

Сейчас о наэлектризованных телах принято говорить как о телах, имеющих электрический заряд.

! Силы, которые обусловлены наличием у тел электрического заряда, называют электромагнитными силами.
Таким образом, электрический заряд — характеристика тела, определяющая интенсивность электромагнитного взаимодействия этого тела с другими телами.

Установлено, что при электризации трением электрический заряд приобретают оба соприкасающихся тела. Однако их электризация качественно различна.

Так, две стеклянные палочки после натирания о шёлк отталкиваются друг от друга. Отталкиваться друг от друга будут и куски шёлка после натирания ими стеклянной палочки. Напротив, стеклянная палочка и кусок шёлка после взаимного натирания притягиваются друг к другу.

На основании подобных опытов французский физик Шарль Дюфе (1698–1739) пришёл к выводам, которые, пользуясь современной терминологией, можно сформулировать следующим образом:

1) существует два вида электрических зарядов;
2) между двумя покоящимися относительно данной ИСО телами, имеющими заряды одного и того же вида, действуют электростатические силы отталкивания, а между телами, имеющими заряды разных видов, — электростатические силы притяжения.

По предложению американского учёного Бенджамина Франклина (1706–1790) *заряды, возникающие на стеклянной палочке после её натирания шёлком, стали называть положительными, а заряды, появляющиеся при этом на шёлке, — отрицательными.*

Выводы, сделанные Ш. Дюфе, позволяют экспериментально определять знак заряда любого наэлектризованного тела. Например, если это тело отталкивается от положительно заряженной стеклянной палочки, то оно имеет положительный заряд. Напротив, если наэлектризованное тело отталкивается от отрицательно заряженного куска шёлка, то оно имеет отрицательный заряд. K

Строение атома. Проводники и диэлектрики

Почему же тела электризуются? В чём физическая природа этого явления? Вы знаете, что все вещества состоят из атомов. В свою очередь, атомы состоят из электронов, протонов и нейтронов. Первые две частицы (электрон и протон) имеют равные по модулю, но противоположные по знаку заряды: *электрон имеет отрицательный заряд, а протон — положительный. Нейтроны заряда не имеют.* Число электронов в атоме равно числу протонов в его ядре. Поэтому полный заряд атома равен нулю. Следовательно, вещество в обычном состоянии не имеет избыточного заряда.

Энергия связи электронов с ядрами атомов разных веществ различна. Поэтому при соприкосновении двух тел, изготовленных из разных веществ, одно из них (стеклянная палочка при трении о шёлк) может отдавать, а другое (шёлк при трении о стеклянную палочку), наоборот, принимать некоторое количество электронов. Таким образом, при соприкосновении двух тел может происходить перераспределение электронов между этими телами. В результате тело, получившее дополнительные электроны, приобретает отрицательный заряд, а потерявшее их — приобретает поло-

K Отметим, что если наэлектризованное тело *притягивается* к наэлектризованному телу с известным зарядом, то однозначно судить о знаке неизвестного заряда нельзя. Причину этой неоднозначности мы обсудим после рассмотрения закона Кулона.

жительный заряд. Отметим, что *общее количество как электронов, так и протонов у соприкасавшихся тел остаётся неизменным*.

Обратим внимание на то, что одно и то же тело при соприкосновении с телами, изготовленными из разных веществ, может в одних случаях отдавать, а в других случаях принимать электроны. Так, например, стеклянная палочка при трении о шёлк отдаёт электроны, а при трении об асбест принимает их.

Существуют вещества, атомы которых имеют удалённые и слабоудерживаемые ядрами электроны. Эти электроны, подобно молекулам в газе, могут свободно двигаться по всему объёму тела. Поэтому такие электроны называют *свободными*.

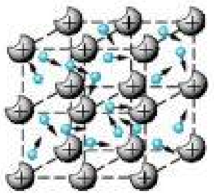


Рис. 256

Большое количество свободных электронов имеется в металлах (около 10^{23} в 1 см^3 металла). Атомы, потерявшие электроны, называют *положительными ионами*. Положительные ионы не перемещаются внутри металла, а располагаются в среднем в местах, называемых узлами кристаллической решётки (рис. 256). Иная картина наблюдается в *электролитах* – расплавах и растворах некоторых солей, щелочей и кислот. В этих веществах в результате распада молекул образуются положительные (потерявшие электроны) и отрицательные (приобретшие избыточные электроны) ионы. В отличие от металлов, в электролитах ионы свободно перемещаются по всему их объёму. Заряженные частицы, которые могут свободно перемещаться по всему объёму вещества, называют *свободными носителями заряда*. Таким образом, в металлах и электролитах имеются свободные носители заряда.

Вещества, в которых имеются свободные носители заряда, называют проводниками.

Отметим, что проводниками часто называют и тела, изготовленные из этих веществ.

Вещество, в котором нет свободных носителей заряда, называют диэлектриком.

Тела, изготовленные из диэлектриков, обычно называют изоляторами.

Диэлектриками являются все газы, резина, многие смолы (в том числе янтарь), большинство пластмасс, керамика и стекло. Сразу же отметим, что при определённых условиях диэлектрик может стать проводником.

Существуют вещества, занимающие промежуточное положение между проводниками и диэлектриками. Такие вещества называют *полупроводниками*. О них мы поговорим позже.

Отметим, что отсутствие свободных носителей заряда в диэлектриках приводит к тому, что избыточный заряд в таких телах не может перемещаться. Это объясняет, почему тело, изготовленное из диэлектрика, притягивает к себе лёгкие частицы только в том месте, в котором оно наэлектризовано.

Напротив, в проводнике избыточный заряд может перемещаться по всему его объёму. Поэтому проводник передаёт наэлектризованное состояние не только во все свои точки, но и другим проводникам, которые касаются его. Именно этим объясняется то, что электризацию проводников при их соприкосновении с другими телами долгое время не удавалось обнаружить, пока экспериментаторы не догадались изолировать проводники, чтобы возникающие на проводнике заряды не уходили с него на Землю.

Электроскоп. Электрометр

Свойство проводников передавать наэлектризованное состояние в любую свою точку позволило русскому учёному Георгу Вильгельму Рихману (1711–1753) создать в 1745 г. первый электроизмерительный прибор — *электроскоп* (рис. 257).

Электроскоп состоит из металлического стержня *1*, к нижнему концу которого на оси подвешены два лёгких металлических лепестка *2*. Часть стержня с лепестками находится в стеклянном сосуде *3*, защищающем лепестки от колебаний воздуха. Если электроскоп не заряжен, то лепестки располагаются вертикально (пунктирные линии на рис. 257). При касании верхней части стержня наэлектризованным телом часть зарядов с тела переходит на стержень. В результате зарядившиеся лепестки, отталкиваясь друг от друга, отклоняются от вертикали. По углу расхождения лепестков можно судить о заряде, переданном электроскопу.

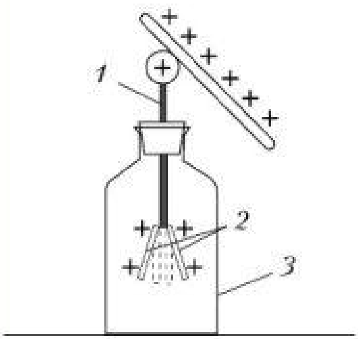


Рис. 257

В настоящее время для обнаружения зарядов обычно используют *электрометры* (рис. 258). В отличие от электроскопа, электрометр имеет заземляемый

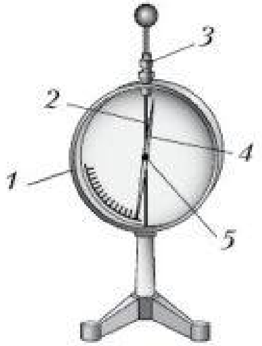


Рис. 258

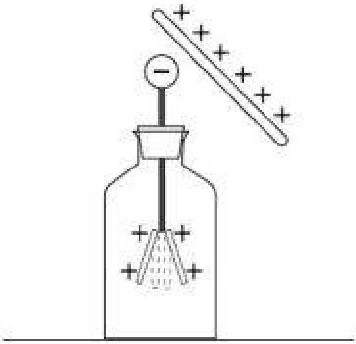


Рис. 259

металлический корпус *1*, благодаря чему его показания существенно меньше, чем у электроскопа, зависят от влияния окружающих тел. В электрометре на металлическом стержне *2*, изолированном от корпуса диэлектрической втулкой *3*, находится металлическая стрелка *4*. Она может свободно поворачиваться вокруг горизонтальной оси *5*. Ось вращения стрелки располагается немного выше её центра тяжести, поэтому стрелка незаряженного электрометра располагается вертикально. При сообщении стержню (а следовательно, и стрелке) заряда стрелка отклоняется от вертикали. Чем больше полученный электрометром заряд, тем сильнее отклоняется его стрелка.

В 1759 г. академик Петербургской академии наук Франц Эпинус (1724–1802) обнаружил, что лепестки незаряженного электроскопа отклоняются от вертикали не только при касании стержня заряженным телом, но и при приближении к стержню заряженного тела (рис. 259). Это объясняется тем, что, когда заряженное тело расположено достаточно близко к шару электроскопа, в электроскопе происходит перераспределение зарядов: к верхнему концу стержня притягивается избыток зарядов, противоположных по знаку заряду подносимого тела, а на лепестках собираются заряды, одноимённые заряду тела. Явление перераспределения зарядов на теле, вызванное поднесением к нему другого заряженного тела, называют *электростатической индукцией*, а возникающие при этом в разных частях тела заряды называют *поляризационными* или *индуцированными (наведёнными)*. При этом говорят, что произошла *поляризация тела*. После удаления заряженного тела от электроскопа его лепестки возвращаются в исходное вертикальное положение. Это доказывает, что общий заряд стержня и лепестков при поднесении и удалении заряженного тела не изменяется, оставаясь равным нулю.

Используя явление электростатической индукции, можно вызвать *электризацию проводников* – получить заряженные проводники.

Возьмём два металлических шарика *1* и *2*, закреплённых на изолирующих подставках. Поставим их так, чтобы они касались друг друга. Поднесём со стороны правого шарика положительно заряженную палочку *3* (рис. 260). В результате притяжения к этой палочке часть свободных электронов сдвинется к ближней для палочки стороне шарика *2*. Следовательно, на этом шарике образуется избыточный отрицательный заряд. Общий заряд шариков остаётся неизменным. Поэтому шарик *1* окажется заряженным положительно. Раздвинув шарики, мы получим два разноимённо заряженных тела.

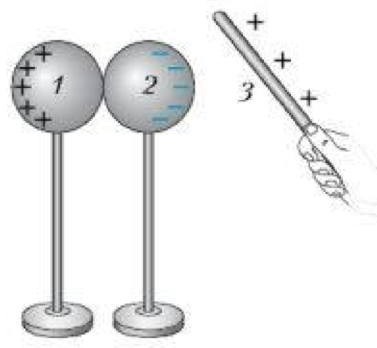


Рис. 260

Закон сохранения заряда

Проведём эксперимент. Соединим проводником заряженный электрометр с точно таким же, но незаряженным прибором (рис. 261). После этого стрелки обоих электрометров установятся одинаково. Это означает, что первоначальный заряд разделился поровну между двумя одинаковыми приборами.

А как разделятся заряды при соединении двух различных проводников? Опыт показывает, что чем больше один из проводников, тем больший заряд оказывается на нём. На этом свойстве проводников основано *заземление* – разряжение проводника при его соединении с Землёй (очень большим проводником). Заземление используют для снятия с различных устройств и тел нежелательных зарядов, которые могут не только вызывать нарушение нормальной работы этих устройств, но и приводить к серьёзным авариям.

К настоящему времени установлено, что *заряд любого носителя заряда не зависит от скорости его движения относительно любой системы отсчёта*. Кроме того, известно, что возможны процессы, при которых элементарные носители заряда при взаимодействии могут исчезать (аннигилировать), а могут появляться (рождаться).

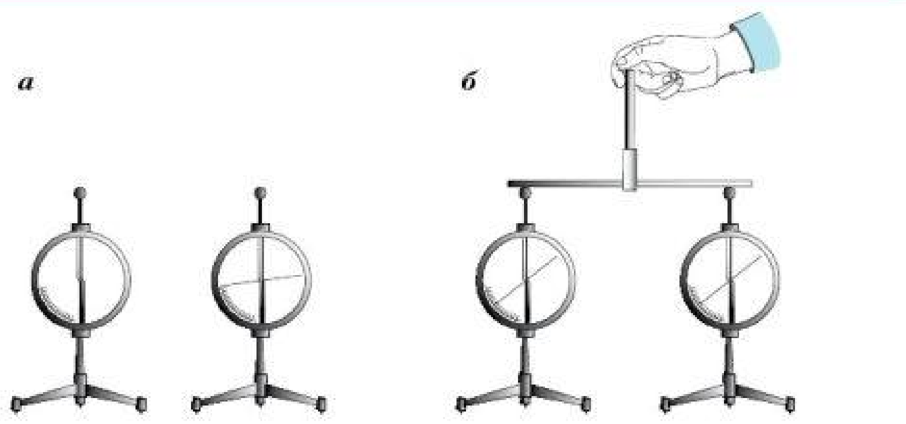


Рис. 261

! Во всех подобных процессах при исчезновении (рождении) частицы с положительным зарядом всегда одновременно исчезает (рождается) частица, имеющая равный по модулю отрицательный заряд.

Например, электрон (e^-) и его античастица – позитрон (e^+) в результате взаимодействия аннигилируют, превращаясь в фотоны – элементарные частицы, не имеющие электрического заряда. Возможны и обратные процессы. Например, при определённых условиях фотоны могут порождать пары электрон – позитрон. Другой пример: нейтрон (n) может самопроизвольно превращаться в протон (p^+), электрон (e^-) и электронное антинейтрино ($\bar{\nu}$), не имеющее электрического заряда.

Отметим особо, что *заряд частицы является одной из её характеристик, подобных массе, и поэтому неотделим от самой частицы*.

Таким образом, все известные эксперименты показывают, что в электрически изолированной системе тел, т. е. в системе тел, которая не обменивается с другими телами электрическими зарядами, суммарный электрический заряд остаётся неизменным.

Всё сказанное позволяет сформулировать один из фундаментальных законов природы – **закон сохранения электрического заряда**.

Алгебраическая сумма электрических зарядов системы тел остаётся неизменной, если в неё не поступают заряды извне и из неё не уходят заряды:

$$q_1 + q_2 + q_3 + ... + q_n = \text{const},$$

где $q_1, q_2, q_3, ..., q_n$ — электрические заряды всех тел системы.

В заключение отметим, что электризация тел может возникать при их дроблении, нагревании, облучении светом, деформациях, приведении в контакт с другим наэлектризованным телом. Возникает электризация также при альфа- и бета-радиоактивных распадах.

Вопросы

1. Какие тела называют наэлектризованными? Какие способы электризации вы знаете?
2. Можно ли при электризации трением зарядить только одно из соприкасающихся тел?
3. Какие силы называют: а) электромагнитными; б) электростатическими?
4. Сколько существует видов электрических зарядов?
5. Какие частицы, входящие в состав атомов, имеют положительный электрический заряд, а какие — отрицательный?
6. Приведите примеры тел, после соприкосновения с которыми стеклянная палочка приобретает: а) положительный заряд; б) отрицательный заряд.
7. Объясните принцип действия электроскопа и электрометра.
8. Какие способы определения знака заряда наэлектризованного тела вы знаете?
9. Какие тела называют: а) проводниками; б) изоляторами?
10. Какое явление называют электростатической индукцией?
11. Что такое поляризация тел? При каких условиях она возможна?
12. Какие заряды называют поляризационными или индуцированными (наведёнными)?
13. Сформулируйте закон сохранения электрического заряда.
14. Что называют заземлением? Для чего его используют?

Упражнения

1. Капля воды, имевшая заряд $q = -3$ мкКл, соединилась с каплей, имевшей заряд $Q = 5$ мкКл. Определите заряд образовавшейся капли.

*2. Оцените общий заряд куска натрия массой $M = 1$ кг, от каждого атома которого отняли по $n = 1$ электрону. Считайте массу атома натрия равной $m_0 = 23$ а. е. м., а заряд электрона равным $-1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

§ 68 Закон Кулона

Чтобы отличить электромагнитное взаимодействие от других видов взаимодействия, необходимо знать законы, которым оно подчиняется. В наиболее простой форме законы электромагнитного взаимодействия могут быть записаны для *точечных зарядов*, покоящихся относительно данной ИСО.

Закон взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов, по-видимому, первым установил в 1772 г. Г. Кавендиш. Однако результаты его опытов были опубликованы почти через 100 лет, после того как этот закон — *основной закон электростатики* — стал известен в 1785 г. из публикации французского физика Шарля Кулона (1736–1806).

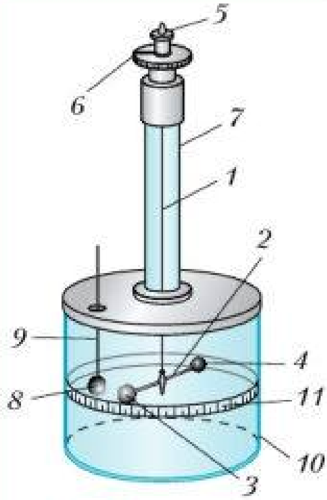


Рис. 262

В своих опытах Кулон использовал созданные им крутильные весы (рис. 262). Весы состоят из тонкой упругой нити *1*, к нижнему концу которой прикреплён лёгкий стеклянный стержень *2*. На концах этого стержня закреплены маленький проводящий шарик *3* и уравновешивающий его противовес *4*. Верхний конец нити прикреплён к ручке *5* со стрелкой *6*, опирающейся на стеклянный цилиндр *7*. Через отверстие в крышке весов внутрь помещают маленький металлический шарик *8*, прикреплённый к тонкому диэлектрическому стержню *9*. Этот шарик устанавливают на одном горизонтальном уровне с шариком *3*. На боковой стенке стеклянного цилиндра *10*, защищающего подвижные части весов от колебаний воздуха, находится шкала *11*, позволяющая определять положение шарика *3* относительно шарика *8*.

Если шарикам *3* и *8* сообщить одноимённые заряды, то они будут отталкиваться. В результате стержень *2* будет поворачиваться, закручивая нить *1*. Поворачивая ручку *5*, можно изменять расстояние между шариками и по углу закручивания нити определять зависимость модуля силы отталкивания от расстояния между шариками (точечными зарядами).

Заряженные тела называют *точечными зарядами* в том случае, когда размеры тел значительно меньше расстояния между ними.

В результате опытов Кулон пришёл к выводу, что действующая на заряженный шарик *3* со стороны заряженного шарика *8* электрическая сила $\vec{F}$ направлена по прямой, соединяющей эти шарики, а её модуль F обратно пропорционален квадрату расстояния r между шариками: $F \sim \frac{1}{r^2}$. **К**

Кулон из соображений симметрии предположил, что при соприкосновении двух идентичных проводящих шариков их суммарный заряд распределяется между шариками поровну. Следовательно, если коснуться незаряженным металлическим шариком идентичного ему заряженного шарика, модуль заряда заряженного шарика уменьшится вдвое. Уменьшение поочерёдно зарядов шариков в два, четыре, восемь и т. д. раз позволило Кулону изучить взаимодействие шариков с разными зарядами. Эксперименты показали, что модуль F электрической силы взаимодействия двух точечных заряженных тел прямо пропорционален произведению модулей $|q_1|$ и $|q_2|$ их зарядов: $F \sim |q_1| \cdot |q_2|$.

Обобщая полученные результаты, Кулон сформулировал **основной закон электростатики**, получивший его имя. Кулон проводил свои опыты, не удаляя воздух из крутильных весов. Последующие исследования показали, что наличие диэлектрической среды в общем случае может сильно изменять электростатическую силу, действующую на точечный заряд при наличии в этой среде другого заряда. В то же время было установлено, что в пределах точности опытов Кулона влиянием воздуха можно пренебречь. Поэтому установленный Кулоном закон в настоящее время обычно формулируют следующим образом.

Два точечных неподвижных заряда, находящихся в вакууме, взаимодействуют между собой с силой, модуль которой прямо пропорционален произведению модулей этих зарядов и обратно пропорционален квадрату расстояния между ними:

$$|\vec{F}| = k \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}, \qquad (1)$$

К Точность определения зависимости модуля силы $\vec{F}$, которая могла быть достигнута в опытах Кулона, сравнительно мала. Сильно ограничен и диапазон возможных расстояний r между шариками в подобных опытах. В настоящее время с помощью опытов со спутниками Земли справедливость полученной зависимости подтверждена для больших расстояний вплоть до 10^7 м. Опыты же по рассеянию электронов позволили проверить справедливость этой зависимости для малых расстояний вплоть до 10^{-17} м. Отметим, что на сегодняшний день нет никаких данных, которые бы указывали на ограничение диапазона расстояний r для установленной Кулоном зависимости.

где $|\vec{F}|$ — модуль силы взаимодействия точечных зарядов, k — коэффициент пропорциональности, $|q_1|$ и $|q_2|$ — модули зарядов, r — расстояние между ними.
Силы взаимодействия двух точечных зарядов направлены вдоль прямой, соединяющей эти заряды, и являются силами притяжения, если заряды имеют разные знаки, и силами отталкивания, если их знаки одинаковы.

В СИ единица заряда носит название *кулон* (Кл). Эта единица является производной: один кулон по определению равен заряду, протёкшему при неизменной силе тока один ампер через поперечное сечение проводника за одну секунду: 1 Кл = 1 А · с.

Если в законе (1) заряды, расстояния между ними и модуль силы измерять в СИ, то с высокой степенью точности можно считать, что $k = 9 \cdot 10^9$ Н · м^2/Кл^2.

Поскольку в СИ единица заряда установлена независимо от закона Кулона, коэффициент k в формуле (1) отличен от единицы и имеет размерность 1 кг · м^3/(А^2 · с^4). В настоящее время этот коэффициент принято записывать в виде: $k = 1/(4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0)$.

$$\varepsilon_0 \approx 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^3} \text{ — электрическая постоянная.} \quad (2)$$

Вы знаете, что носителями заряда в атоме являются электроны и протоны. К настоящему времени установлено, что модули зарядов всех других обнаруженных экспериментально элементарных частиц либо равны заряду протона, либо в целое число раз превышают его. По этой причине заряд протона (как и модуль заряда электрона) принято называть *элементарным электрическим зарядом*. Его модуль равен $1{,}60219 \cdot 10^{-19}$ Кл. Из сказанного следует, что, согласно современным представлениям, изменение электрического заряда тела при любых процессах должно быть кратно модулю элементарного заряда.

Отметим отдельно, что электростатическую силу, действующую на заряженное тело, часто называют *кулоновской силой* или *силой Кулона*.

Чтобы формула (1) закона Кулона позволяла определять не только значение модуля силы Кулона, но и её направление, её записывают в следующем виде:

$$\vec{F}_{12} = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^3} \cdot \vec{r}_{12},$$

где $\vec{F}_{12}$ — сила, действующая на заряд q_1 в вакууме со стороны заряда q_2, $\vec{r}_{12}$ — вектор, определяющий положение заряда q_1 относительно заряда q_2.

Из рис. 263 ясно, что при изменении порядка нумерации зарядов вектор $\vec{r}_{12}$ изменит своё направление на противоположное. Поскольку при этом направление силы также изменится на противоположное (при неизменном её модуле), то, согласно закону Кулона, сила $\vec{F}_{12}$, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2, и сила $\vec{F}_{21}$, действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_1, подчиняются третьему закону Ньютона: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

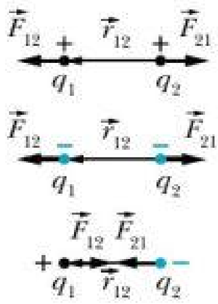


Рис. 263

В заключение отметим два важных момента. Во-первых, в классической электродинамике факт отсутствия объектов с зарядом, модуль которого меньше элементарного, не учитывается, поскольку обычно речь идёт о переносе зарядов, во много раз превышающих элементарный заряд. Поэтому в классической электродинамике, например при решении задач, можно говорить о переносе сколь угодно малого электрического заряда. Во-вторых, поскольку электризация макроскопических тел, как правило, связана с переносом электронов, изменением массы тела даже при значительной величине перенесённого заряда практически всегда можно пренебречь, так как масса электрона очень мала: $m_e \approx 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг.

Вопросы

1. Что называют точечным зарядом?
2. Чему равен элементарный заряд?
3. Сформулируйте закон Кулона. Какую силу называют кулоновской?
4. Каким образом Кулону, не имевшему способа измерения зарядов, удалось установить зависимость модуля силы электростатического взаимодействия тел от их зарядов?

Для углублённого уровня

5. Почему при решении задач о взаимодействии точечных зарядов можно не учитывать силу их гравитационного взаимодействия? (*Подсказка:* для ответа на вопрос вычислите, во сколько раз модуль электростатической силы взаимодействия двух электронов (а), двух протонов (б) превышает модуль силы их гравитаци-

онного взаимодействия. При расчётах электрон и протон считайте точечными телами, массу электрона считайте равной $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг, а массу протона $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.)

6. Почему изменением массы тел при их электризации обычно пренебрегают?

Упражнения

1. Вычислите модуль силы кулоновского взаимодействия двух маленьких шариков, находящихся на расстоянии $r = 1$ м друг от друга, если модули их зарядов равны 1 Кл.
2. Оцените расстояние между шариками в эксперименте Кулона, если модуль кулоновской силы их взаимодействия равен $F = 2$ Н, а заряд каждого шарика равен $q = 2$ мкКл.
3. Постройте график зависимости модуля кулоновской силы взаимодействия двух точечных зарядов $q_1 = 3$ мкКл и $q_2 = 6$ мкКл от расстояния между ними, если это расстояние изменяется от 1 см до 20 см.
4. Два одинаковых маленьких металлических шарика, находящихся в воздухе, привели в соприкосновение, а затем разнесли на расстояние $r = 1$ м. До соприкосновения заряд первого шарика был равен $q_1 = -5$ мкКл, а второго — $q_2 = 25$ мкКл. Определите модуль силы кулоновского взаимодействия шариков после их удаления друг от друга, если они всё время оставались электрически изолированными от остальных тел.

Для углублённого уровня

5. Оцените модуль силы кулоновского взаимодействия двух медных шариков массой $M = 1$ г каждый, находящихся на расстоянии $r = 1$ м друг от друга в воздухе. Считайте, что от каждого тысячного атома первого шарика отняли по одному электрону и передали их второму шарику. Атомную массу меди считайте равной $m_0 = 63$ а. е. м.

§ 69 Сложение электрических сил

Основной закон электростатики позволяет вычислить кулоновскую силу $\vec{F}_1$, действующую на точечный заряд q со стороны точечного заряда q_1, если отсутствуют другие заряды. Можно вычислить кулоновскую силу $\vec{F}_2$, действующую на точечный заряд q со стороны точечного заряда q_2, если опять же нет других зарядов. Таким образом, закон Кулона позволяет найти электростатическую силу действия одного заряда на другой *только при отсутствии других зарядов*.

А какой будет электрическая сила, действующая на заряд q, *при одновременном действии* на него двух или большего числа точечных зарядов?

Многочисленные опыты показывают, что сила Кулона, действующая на *точечный* заряд q со стороны *точечного* заряда q_1, не зависит от того, есть ли вблизи заряда q другие заряды. Иначе говоря, точечные заряды «не мешают» друг другу действовать на заряд q. В результате мы приходим к правилу нахождения суммарной электрической силы, действующей на точечный заряд, которое называют *принципом суперпозиции*.

Если на точечный заряд одновременно действуют несколько зарядов, то суммарная сила $\vec{F}$ их действия равна сумме сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$, с которыми каждый из зарядов действовал бы на этот точечный заряд при отсутствии остальных зарядов:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n . \qquad (1)$$

! Для определения силы, действующей на точечный заряд q со стороны других точечных зарядов, надо:

1) найти модули сил, действующих на заряд q со стороны каждого из остальных зарядов, используя закон Кулона;

2) определить направление каждой из указанных сил;

3) найти векторную сумму всех этих сил.

Рассмотрим, как используют принцип суперпозиции при решении задач.

Задача 1

В вершинах правильного треугольника с длиной стороны $a = 10$ см расположены одинаковые точечные заряды $q = 0{,}4$ мкКл. Определите электростатическую силу, действующую на заряд *1* со стороны двух других зарядов.

Решение.

Шаг 1. На рис. 264 показаны силы, действующие на заряд *1* со стороны зарядов *2* и *3*. По закону Кулона модули этих сил $F_{12} = F_{13} = k \cdot \dfrac{q^2}{a^2}$.

Шаг 2. Все заряды одноимённые. Поэтому рассматриваемые силы являются силами отталкивания. Линия действия силы $\vec{F}_{12}$ совпадает с прямой, проходящей через вершины треугольника *1* и *2*, а линия действия силы $\vec{F}_{13}$ – с прямой, проходящей через вершины треугольника *1* и *3*.

Шаг 3. Силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{13}$ не лежат на одной прямой. Для построения суммы таких сил используют правило сложения векторов (например, правило

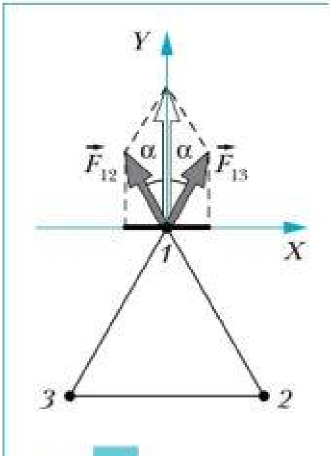


Рис. 264

параллелограмма). Для определения же модуля искомой суммы, как правило, используют то, что сумма проекций сил на координатную ось равна проекции суммы этих сил на ту же ось.

Выберем ИСО так, как показано на рис. 264. Тогда силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{13}$ образуют с осью Y углы $\alpha = 30°$. Поэтому проекции силы $\vec{F}_{12}$ на оси X и Y равны: $F_{12\,x} = -F_{12} \cdot \sin\alpha$, $F_{12\,y} = F_{12} \cdot \cos\alpha$. Проекции силы $\vec{F}_{13}$ на координатные оси равны: $F_{13\,x} = F_{13} \cdot \sin\alpha$, $F_{13\,y} = F_{13} \cdot \cos\alpha$. Из этого следует, что сумма проекций сил на ось X равна нулю. Поэтому действующая на заряд *1* со стороны зарядов *2* и *3* сила $\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$ направлена вдоль оси Y. Модуль этой силы с учётом шага *1* равен:

$$F_1 = F_{12\,y} + F_{13\,y} = 2F_{12} \cdot \cos\alpha = \frac{2k \cdot q^2 \cdot \cos\alpha}{a^2}.$$

Поскольку $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, получаем: $F_1 = \frac{\sqrt{3}k \cdot q^2}{a^2} \approx 0{,}25\,(\text{Н})$.

Ответ: искомая сумма сил направлена перпендикулярно стороне *23* треугольника, а её модуль $F_1 = 0{,}25$ Н.

Задача 2

В ИСО три точечных заряда $q_1 = 4$ мкКл, $q_2 = -6$ мкКл и $q_3 = 9$ мкКл лежат на одной прямой. Заряд q_2 расположен между зарядами q_1 и q_3. Заряды q_1 и q_3 удерживают так, что расстояние между ними $r_{31} = 10$ см. Определите расстояние x от заряда q_1 до заряда q_2, если заряд q_2 находится в равновесии. Является ли это равновесие устойчивым?

Решение.

Шаг 1. По закону Кулона модули сил, действующих на заряд q_2 со стороны двух других зарядов:

$$F_{21} = k \cdot \frac{|q_2| \cdot |q_1|}{x^2}, \quad F_{23} = k \cdot \frac{|q_2| \cdot |q_3|}{(r_{31} - x)^2}.$$

Шаг 2. По условию задачи заряды q_1 и q_3 положительные, а заряд q_2 отрицательный. Следовательно, силы $\vec{F}_{21}$ и $\vec{F}_{23}$ направлены противоположно.

Шаг 3. При равновесии сумма действующих на заряд q_2 сил должна быть равна нулю. Поэтому модули этих сил равны: $F_{21} = F_{23}$. Следовательно, $q_1/x^2 = q_3/(r_{31} - x)^2$. Поскольку по условию задачи $0 < x < r_{31}$, а заряды q_1 и q_3 положительные, то из этого соотношения получаем уравнение:

$$\left[(r_{31}-x)\cdot\sqrt{q_1}-x\cdot\sqrt{q_3}\right]\cdot\left[(r_{31}-x)\cdot\sqrt{q_1}+x\cdot\sqrt{q_3}\right]=0.$$

Шаг 4. Это уравнение имеет два корня: $x_1=\dfrac{r_{31}\cdot\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_3}}=4$ (см) и $x_2=\dfrac{r_{31}\cdot\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}-\sqrt{q_3}}=-20$ (см).

Очевидно, что условию задачи удовлетворяет лишь один из них.

Ответ: искомое расстояние $x = 4$ см.

Исследуем, является ли найденное положение заряда q_2 положением *устойчивого* равновесия. Сместим заряд q_2 от равновесного положения в направлении одного из зарядов, например в сторону заряда q_1. Тогда модуль силы, действующей на него со стороны заряда q_1, увеличится, а модуль силы, действующей со стороны заряда q_3, напротив, уменьшится. В результате равновесие нарушится, и если мы перестанем удерживать этот заряд, то он начнёт ускоренно двигаться к заряду q_1. Таким образом, найденное положение равновесия заряда q_2 не является устойчивым. Этот пример иллюстрирует общую закономерность:

! **система неподвижных относительно ИСО зарядов не может находиться в состоянии устойчивого равновесия, если в ней действуют только электростатические силы.**

Из этого следует, что *стабильное вещество может состоять лишь из движущихся зарядов.*

Закон Кулона и принцип суперпозиции позволяют решать задачи о нахождении сил электростатического взаимодействия двух протяжённых заряженных тел в случае, если известно распределение зарядов в каждом из этих тел. Проблема состоит в том, что определить это распределение зачастую весьма сложно. Например, в силу явления электростатической индукции распределение зарядов в протяжённом теле существенным образом зависит не только от геометрии самого тела, но и от наличия вблизи него других тел, даже если они не имеют избыточного заряда. Поясним сказанное, рассмотрев следующую задачу.

Задача 3

Точечный заряд q и диэлектрический шарик радиусом r находятся в вакууме на большом удалении от всех других тел. Расстояние от центра шарика, имеющего заряд Q, до заряда q равно R. При $R \gg r$ заряд Q приблизительно можно считать распределённым равномерно по объёму шарика. Рассмотрите качественно, как будет изменяться сила Кулона, действующая на заряд q, по мере уменьшения расстояния R, если заряды q и Q: а) разноимённые; б) одноимённые, причём $|q| \ll |Q|$; в) одноимённые, причём $|q| \gg |Q|$.

Решение.

Если $R \gg r$, то шарик можно считать точечным телом. Поэтому электростатическая сила, действующая на заряд q, согласно закону Кулона, равна:

$$\vec{F} = k \cdot \frac{q \cdot Q}{R^3} \cdot \vec{R}, \qquad (1)$$

где $\vec{R}$ – вектор, определяющий положение заряда q относительно центра шарика.

По мере уменьшения расстояния R на шарике в силу явления электростатической индукции будет происходить перераспределение зарядов.

В случае (а) «центр тяжести» зарядов шарика, противоположных по знаку заряду q, будет приближаться к заряду q быстрее, чем центр шарика. Поэтому модуль силы притяжения заряда q к шарику будет тем больше модуля силы, рассчитанной по формуле (1), чем меньше расстояние R.

В случае (б) при $|q| \ll |Q|$ малый по модулю заряд q не может вызвать существенное перераспределение зарядов по шарику по мере их сближения даже при расстояниях R, близких к r. Поэтому модуль силы отталкивания заряда q от шарика будет лишь немного меньше модуля силы, рассчитанной по формуле (1).

В случае (в), когда $|q| \gg |Q|$, модуль силы отталкивания заряда q от шарика будет убывать по мере их сближения. Это связано с тем, что в силу явления электростатической индукции по мере уменьшения R в ближайших к заряду q частях шарика будут появляться всё бóльшие по модулю притягивающиеся к нему индуцированные заряды противоположного знака (рис. 265). Напротив, одноимённые с q индуцированные заряды, отталкиваясь от него, будут концентрироваться в наиболее удалённых частях шарика. Таким образом, электростатические силы, действующие на заряд q со стороны зарядов шарика, можно ус-

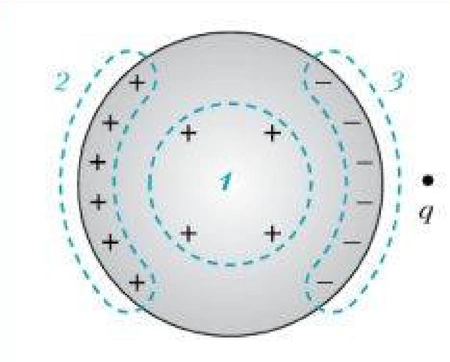


Рис. 265

ловно разделить на три группы. Первая группа обусловлена наличием у шарика избыточного заряда. Вторая группа обусловлена действием индуцированных зарядов, знак которых совпадает со знаком заряда q. Наконец, третья группа обусловлена действием индуцированных зарядов, знак которых противоположен знаку заряда q. Заряды, обусловливающие действие сил этих групп, схематично показаны на рис. 265. Обратим внимание, что силы первой и второй групп являются силами отталкивания, а силы третьей — силами притяжения. При этом расстояния от заряда q до зарядов, обусловливающих действие сил третьей группы, в среднем меньше, чем до зарядов, обусловливающих действие сил первой и второй групп. Это различие в расстояниях будет увеличиваться по мере приближения заряда q к шарику. Сила Кулона обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами. Поэтому при некотором критическом расстоянии $R_{кр}$, зависящем от отношения q/Q, радиуса и материала шарика, сумма сил всех трёх групп, действующих на заряд q, обратится в нуль, а *при дальнейшем сближении заряд q начнёт притягиваться к одноимённо заряженному шарику*. Таким образом, мы приходим к выводу: одноимённо заряженные *протяжённые* тела, в отличие от точечных зарядов, могут притягиваться друг к другу силами электростатического взаимодействия.

Вопросы

1. Какова последовательность шагов при решении задачи о нахождении электростатической силы, действующей на точечный заряд со стороны других точечных заряженных тел?
2. Объясните, почему к наэлектризованному телу притягивается незаряженный кусочек бумаги.

Упражнения

1. Определите, какой точечный заряд Q нужно поместить в центре треугольника (точку O) из задачи 1 этого параграфа, чтобы сумма сил, действующих на каждый из зарядов q, была равна нулю. Будет ли это равновесие устойчивым?
2. Определите электростатическую силу, которая действует на точечный заряд q_1 со стороны зарядов q_2 и q_3, рассмотренных в условии задачи 2 в параграфе.
3. Определите модуль и направление силы $\vec{F}_3$, действующей на точечный заряд $q_3 = 25$ мкКл со стороны зарядов $q_1 = -10$ мкКл

и $q_2 = 9$ мкКл, расположенных в вершинах прямоугольного треугольника так, как показано на рис. 266. Длина стороны a равна 3 см, а длина стороны b — 4 см.

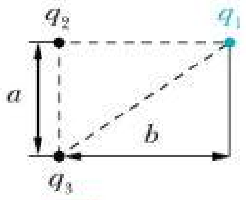


Рис. 266

Для углублённого уровня

4 Тонкое кольцо радиусом $R = 10$ см равномерно заряжено. Заряд кольца $Q = 6$ мкКл. На оси кольца на расстоянии $h = 10$ см от его центра расположен точечный заряд $q = 5$ мкКл. Определите модуль и направление электростатической силы, действующей на этот заряд со стороны кольца.

§ 70 Электрическое поле. Напряжённость электрического поля

Теории близкодействия и дальнодействия. Силовые поля

Используя закон Кулона и принцип суперпозиции, можно вычислить электростатические силы взаимодействия между заряженными телами. Однако, как и закон всемирного тяготения Ньютона, закон Кулона не объясняет, каким образом передаётся действие одного заряженного тела на другое при отсутствии непосредственного контакта между ними.

Следует сказать, что до открытия закона всемирного тяготения многие учёные придерживались мнения, что действие одного тела на другое при отсутствии непосредственного контакта между ними осуществляется с помощью каких-то невидимых промежуточных звеньев (или агентов), которые передают это действие последовательно от одной точки пространства к другой. Такое представление о механизме передачи силового действия получило название *теория близкодействия*.

Принципиальным в теории близкодействия является то, что для передачи силового действия одного тела на другое, если эти тела не имеют непосредственного контакта, необходимо определённое время.

После открытия закона всемирного тяготения и закона Кулона многие крупные физики (например, Кулон, Ампер и др.) стали считать, что при отсутствии непосредственного контакта тел их взаимодействие осуществляется без участия каких-либо посредников, так как в эти законы время явно не входит. Такое представление о передаче силового действия получило название *теория дальнодействия*, т. е. действия на расстоянии (издалека).

Согласно теории дальнодействия, изменение положения любого из тел или определяющих взаимодействие этих тел характеристик ***мгновенно*** *приводит к изменению сил взаимодействия тел, так как для передачи действия от одного тела к другому никаких посредников не требуется.*

Сторонники теории близкодействия для объяснения происхождения гравитационных и электромагнитных сил вынуждены были придумывать невидимые флюиды, окружающие планеты, магниты и наэлектризованные тела. Однако прямого экспериментального подтверждения рассуждений в пользу теории близкодействия они привести не могли. Такие доказательства принципиально и невозможно получить, исследуя взаимодействие лишь *неподвижных тел*. Доказательство справедливости теории близкодействия было получено лишь при исследовании электромагнитных взаимодействий *движущихся* заряженных частиц. Огромная заслуга в возрождении теории близкодействия принадлежит английскому учёному Майклу Фарадею (1791–1867). Окончательно теория близкодействия победила благодаря работам Дж. Максвелла.

Согласно Фарадею, электрические заряды не действуют друг на друга непосредственно. Каждый из зарядов создаёт в окружающем пространстве *электромагнитное поле*. Поле, порождённое одним зарядом, оказывает силовое действие на другой заряд. По мере удаления от данного заряда создаваемое им поле ослабевает. Это и приводит к уменьшению силы, действующей на другой заряд. Максвелл теоретически доказал, что электромагнитное поле, порождаемое зарядом, распространяется в пространстве с конечной скоростью. В вакууме модуль этой скорости равен модулю скорости света: $c = 3 \cdot 10^8$ км/с. Более того, было доказано, что силовые поля могут существовать независимо от создавших их частиц.

Как элементарные частицы, так и силовые поля, согласно современным представлениям, являются наипростейшими образованиями (т. е. они не могут быть сведены к чему-то более простому).

! О силовых полях можно сказать:
1) эти поля представляют собой особый вид материи;
2) каждое силовое поле обладает определёнными свойствами, которые позволяют отличать эти поля друг от друга.

Силовые поля называют по виду того типа взаимодействия, которое они передают. Поэтому в настоящее время принято говорить о гравитационных, электромагнитных полях, полях ядерного и слабого взаимодействий.

В настоящее время электромагнитное поле принято разделять на *электрическое и магнитное поля*.

Электрическое поле — это особая форма материи, которая обнаруживается по силовому действию на электрически заряженное тело. Это действие зависит от заряда тела, но не зависит от скорости его движения. К

В свою очередь, электрические поля принято делить на *электростатические* (иначе, кулоновские) и *сторонние* (иначе, не электростатические, или не кулоновские).

Электростатическим (кулоновским) полем называют электрическое поле, порождаемое неподвижными относительно выбранной ИСО зарядами.

Электростатические поля существуют в пространстве вокруг порождающих эти поля зарядов и неразрывно связаны с ними. Электростатические поля не изменяются с течением времени. В некоторых задачах мы будем рассматривать изменяющееся во времени электростатическое поле, однако будем считать, что это изменение происходит очень медленно.

Сторонними электрическими полями называют электрические поля, порождаемые чем угодно, кроме зарядов, покоящихся относительно выбранной инерциальной системы отсчёта. Сторонние электрические поля могут изменяться с течением времени, а могут оставаться и постоянными во времени.

Ясно, что некоторые свойства электростатических и сторонних электрических полей совпадают, а другие различаются. В дальнейшем, говоря о свойствах поля, мы будем называть это поле электрическим, если данное свойство присуще как электростатическим, так и сторонним электрическим полям. В остальных случаях мы будем оговаривать, о каких именно электрических полях идёт речь.

Напряжённость электрического поля и графическое изображение поля

Для экспериментального изучения силового действия электрического поля в данной точке в эту точку помещают *пробный заряд* — заряженное тело, удовлетворяющее следующим требованиям.

К Определение магнитного поля будет рассмотрено в учебнике «Физика. 11 класс».

Во-первых, это тело должно иметь достаточно малые размеры, чтобы можно было судить о поле в данной точке пространства.

Во-вторых, заряд этого тела $q_{пр}$ должен быть достаточно малым, чтобы можно было пренебречь перераспределением зарядов на окружающих телах, после того как заряд $q_{пр}$ поместили в данную точку.

Если заряд достаточно мал, то при уменьшении его модуля в несколько раз действующая на него электрическая сила $\vec{F}$ по модулю уменьшается во столько же раз. Поэтому отношение силы $\vec{F}$ к заряду $q_{пр}$ может служить *силовой характеристикой* электрического поля в этой точке. Эту характеристику называют *напряжённостью*.

Напряжённостью $\vec{E}$ электрического поля в данной точке называют физическую величину, равную отношению силы $\vec{F}$ электрического поля, действующей на помещённый в данную точку пробный заряд $q_{пр}$, к этому заряду:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}}. \qquad (1)$$

Из данного определения следует, что напряжённость (силовая характеристика) $\vec{E}$ электрического поля является вектором. Направление этого вектора совпадает с направлением силы $\vec{F}_{q_{пр} > 0}$, действующей на положительный ($q_{пр} > 0$) пробный заряд (рис. 267, *а*). Если же знак пробного заряда отрицательный ($q_{пр} < 0$), то направление электрической силы $\vec{F}_{q_{пр} < 0}$, действующей на него, будет противоположно направлению напряжённости $\vec{E}$ поля в данной точке (рис. 267, *б*).

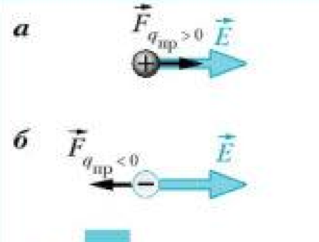


Рис. 267

Из формулы (1) следует, что в СИ единица напряжённости электрического поля является производной. Так как в СИ единица силы — ньютон, а единица заряда — кулон, то иногда напряжённость электрического поля измеряют в *ньютонах на кулон* (Н/Кл).

В общем случае напряжённость поля может изменяться как по направлению, так и по модулю. Поле, напряжённость которого во всех точках одинакова как по модулю, так и по направлению, называют *однородным*.

! Зная напряжённость $\vec{E}$ электрического поля в данной точке, можно найти силу, действующую на любой точечный заряд q, помещённый в эту точку, если известно, что под действием этого заряда не происходит перераспределения зарядов на других телах:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}. \qquad (2)$$

Наглядное представление о силовом поле можно получить, если в разных точках этого поля изобразить векторы его напряжённости. Картина получится более наглядной, если рисовать линии, для которых в каждой их точке касательные к ним будут параллельны векторам напряжённости в этих точках. Построенные таким образом линии называют силовыми линиями поля. Для электрических полей эти линии называют *линиями напряжённости электрического поля.*

Линия напряжённости электрического поля — линия, касательная к которой в каждой её точке параллельна вектору напряжённости поля в этой точке.

Каковы же свойства силовых линий электрического поля?

! Поскольку в каждой точке поле имеет вполне определённую напряжённость, то через каждую точку поля можно провести только одну силовую линию. Следовательно, силовые линии не могут пересекаться и прерываться в точках, где нет источников поля.

Если проводить силовые линии через каждую точку поля, то всё пространство будет ими заполнено. Поэтому условились проводить их так, чтобы число силовых линий, проходящих через перпендикулярную к ним небольшую площадку, было пропорционально модулю напряжённости поля на

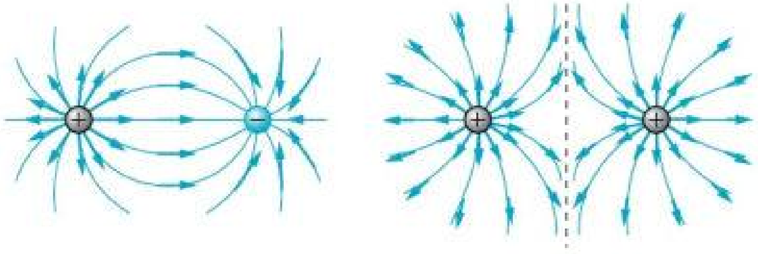
Таким образом, формула (2) для произвольного точечного заряда q будет справедливой, если находящиеся в электрическом поле другие тела можно считать точечными изолированными друг от друга или эти тела находятся на столь большом удалении от заряда q, что перераспределением зарядов на них, вызванным зарядом q, можно пренебречь.

Из принципа суперпозиции электрических сил и определения напряжённости электрического поля следует *принцип суперпозиции электрических полей.*

Напряжённость $\vec{E}$ электрического поля, созданного в данной точке пространства системой из N источников, равна сумме напряжённостей $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, ..., $\vec{E}_N$, которые создаёт в этой точке каждый из источников при отсутствии остальных:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_N.$$

Обратим внимание на то, что для расчёта напряжённости электростатического поля необходимо суммировать напряжённости полей, созданных не только избыточными зарядами, но и индуцированными зарядами, образовавшимися на протяжённых телах.



а *б*

Рис. 268

этой площадке. (На плоских рисунках это правило не соблюдают и изображают только линии, лежащие в плоскости чертежа.) При этом на линиях напряжённости стрелкой указывают направление силы, действующей на **положительный** пробный заряд, помещённый в данную точку (рис. 268).

По определению *электростатические поля* создаются покоящимися относительно выбранной ИСО зарядами. Поэтому эти поля *стационарны*, т. е. они не изменяются с течением времени. Следовательно, картина линий напряжённости электростатического поля не изменяется с течением времени. *Линии напряжённости электростатического поля начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах, либо уходят от уединённых положительных зарядов в бесконечность, либо приходят к уединённым отрицательным зарядам из бесконечности.*

Следует подчеркнуть, что линии напряжённости помогают наглядно представить распределение поля в пространстве, но они не более реальны, чем меридианы и параллели на поверхности Земли. К

К В отличие от силовых линий электростатических полей, *силовые линии стороннего электрического поля могут быть замкнутыми.* Например, согласно Максвеллу изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле — стороннее электрическое поле, силовые линии которого замкнуты.

Фарадей считал, что под действием электрических зарядов возникают особые напряжения и давления, аналогичные механическим напряжениям. Напряжениями вдоль линий напряжённости и давлениями, отодвигающими линии напряжённости друг от друга, Фарадей смог формально описать многие электрические явления. По его мнению, силовые линии представляют собой нечто подобное резиновым жгутам, стягивающим разноимённые заряды и отталкивающим одноимённые заряды. Поэтому, зная картину силовых линий, можно представить себе механические напряжения в телах, которые находятся в электрических полях.

Определим напряжённость поля, создаваемого точечным зарядом Q. Для этого поместим положительный точечный заряд q на расстоянии r от заряда Q. Согласно закону Кулона со стороны заряда Q на заряд q действует сила, модуль которой $\left|\vec{F}\right| = k \cdot \frac{|Q| \cdot q}{r^2}$. Следовательно, модуль искомой напряжённости в соответствии с определением равен:

$$\left|\vec{E}(r)\right| = \frac{\left|\vec{F}\right|}{q} = k \cdot \frac{|Q|}{r^2}. \qquad (3)$$

Действующая на заряд q электрическая сила направлена вдоль прямой, соединяющей заряды Q и q. Поэтому силовые линии поля, создаваемого точечным зарядом Q, представляют собой лучи, исходящие из точки, в которой расположен этот заряд. Эти лучи распределены с одинаковой густотой по всем направлениям (рис. 269). В соответствии с договорённостью на этих прямых проставлены стрелки, показывающие, что силовые линии уходят от положительного заряда или приходят к отрицательному заряду.

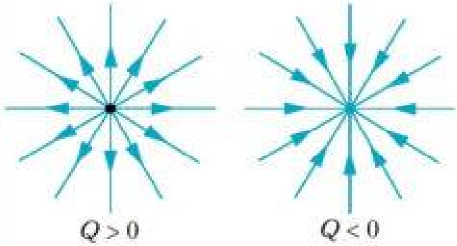


Рис. 269

Представление о линиях напряжённости можно получить, наблюдая расположение продолговатых твёрдых частиц диэлектрика, взвешенных в вязкой жидкости (например, крупинок манки или хинина в касторовом масле) вблизи находящихся в жидкости заряженных тел. Электрически нейтральные в целом продолговатые крупинки под действием вращающих моментов сил изучаемого электрического поля разворачиваются и ориентируются вдоль поля. Образованные этими крупинками цепочки представляют собой картину, близкую к картине силовых линий электрического поля.

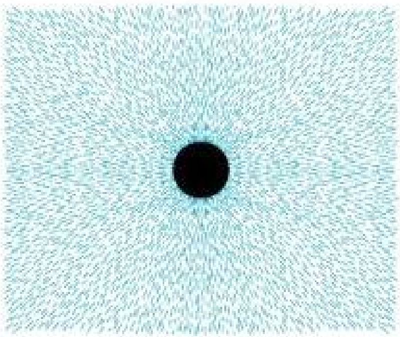


Рис. 270

Обратим внимание на то, что точечный заряд – это модель. В реальности точечных зарядов не су-

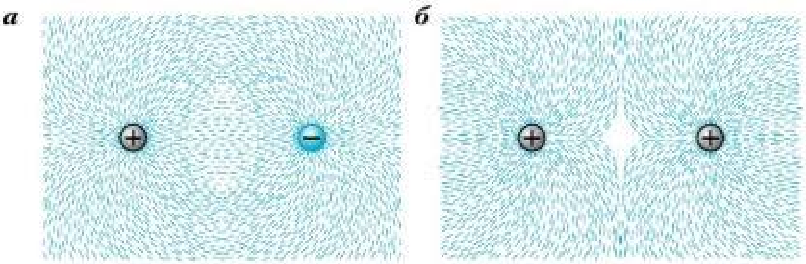


Рис. 271 Расположение кристаллов хинина в электростатических полях двух металлических шариков, заряженных одинаковыми по модулю разноимёнными (*а*) и одноимёнными (*б*) зарядами

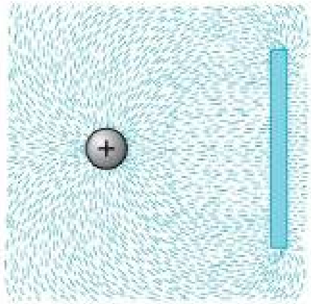


Рис. 272

ществует. Однако из соображений симметрии следует, что картина линий напряжённости электростатического поля, порождаемого равномерно заряженным маленьким шариком, *вне шарика* должна иметь вид, подобный картине линий напряжённости поля точечного заряда, помещённого в центр этого шарика. На рис. 270 изображён заряженный металлический шарик, погружённый в касторовое масло с кристаллами хинина. Видно, что цепочки кристаллов хинина действительно располагаются практически вдоль радиальных лучей заряженного шарика.

На рис. 271 показано расположение кристаллов хинина, помещённых в касторовое масло, в электростатических полях двух металлических шариков, заряженных равными по модулю зарядами. Рассматриваемые поля обладают осевой симметрией: вся картина остаётся неизменной при повороте на любой угол вокруг оси, проходящей через заряды.

На рис. 272 показано расположение кристаллов хинина в электростатическом поле металлического шарика и металлической пластины, заряд которой равен по модулю, но противоположен по знаку заряду шарика. Обратим внимание на то, что цепочки хинина вблизи шарика и пластины перпендикулярны их поверхностям. Видно, что поле, созданное заряженным шариком и металлической пластиной, подобно половине картины, созданной двумя разноимённо заряженными шариками (*см.* рис. 271, *а*).

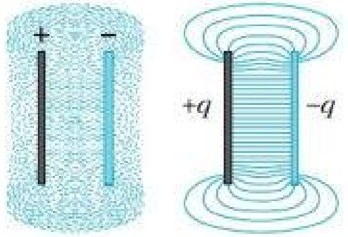


Рис. 273

В заключение рассмотрим картину поля, созданного двумя металлическими пластинами, имеющими равные по модулю, но противоположные по знаку заряды. На рис. 273 справа приведена картина силовых линий электростатического поля этих пластин. Обратим внимание на то, что между разноимённо заряженными пластинами вдали от их краёв цепочки кристаллов хинина располагаются практически вдоль прямых, перпендикулярных пластинам, а во внешней области за пластинами кристаллы разбросаны хаотически. Следовательно, между пластинами вдали от их краёв электростатическое поле можно считать однородным, а во внешней области за пластинами напряжённость поля близка к нулю.

Формула (3) и принцип суперпозиции для напряжённости электрических полей позволяют вычислить напряжённость поля в произвольной точке, если известно распределение точечных зарядов, создающих это поле.

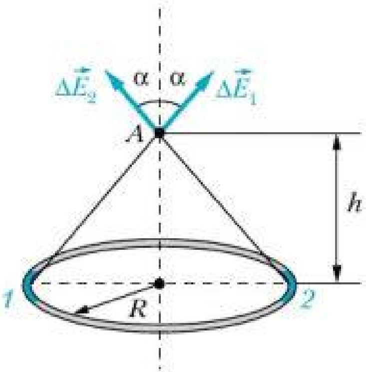


Рис. 274

В качестве примера такого расчёта определим напряжённость поля в точке A на оси равномерно заряженного тонкого кольца радиусом R на расстоянии h от его плоскости. Заряд кольца равен Q (рис. 274).

Для определённости будем считать, что $Q > 0$. Мысленно разделим кольцо на достаточно малые кусочки длиной Δl так, чтобы каждый из них можно было считать точечным зарядом. Поскольку кольцо заряжено равномерно, а длина окружности радиусом R равна $2\pi \cdot R$, заряд каждого из кусочков будет равен: $\Delta q = \dfrac{Q}{2\pi \cdot R} \cdot \Delta l$. Следовательно, модуль напряжённости поля, создаваемого каждым из таких кусочков в точке A, находящейся на расстоянии $r = \sqrt{R^2 + h^2}$, согласно формуле (3), будет равен:

$$\left|\Delta\vec{E}\right| = k \cdot \frac{\Delta q}{r^2} = \frac{k \cdot Q \cdot \Delta l}{2\pi \cdot R \cdot (R^2 + h^2)}. \qquad (4)$$

Векторы напряжённости поля, создаваемого двумя диаметрально противоположными кусочками *1* и *2*, обозначены на рис. 274 символами $\Delta\vec{E}_1$ и $\Delta\vec{E}_2$. Модули этих векторов равны. Оба вектора образуют с осью кольца одинаковые углы α. Поэтому вектор $\Delta\vec{E}_{12}$, равный их сумме, будет направлен вдоль оси кольца, а его модуль будет равен:

$$\left|\Delta\vec{E}_{12}\right| = 2 \cdot \left|\Delta\vec{E}\right| \cdot \cos\alpha = k \cdot \frac{Q \cdot h \cdot \Delta l}{\pi \cdot R \cdot \sqrt{(R^2 + h^2)^3}}, \qquad (5)$$

так как $\cos\alpha = \dfrac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}}$.

Суммируя напряжённости полей от каждой пары диаметрально противоположных кусочков кольца, получаем, что вектор напряжённости поля в точке A направлен вдоль оси кольца от его плоскости при $Q > 0$ и к его плоскости при $Q < 0$. Модуль этого вектора равен:

$$\left|\vec{E}\right| = k \cdot \frac{Q \cdot h}{\sqrt{(R^2 + h^2)^3}} = \frac{Q \cdot h}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \sqrt{(R^2 + h^2)^3}}.$$

В частности, в центре кольца модуль напряжённости поля, создаваемого этим кольцом, равен нулю.

Вопросы

1. Что такое электрическое поле? Какие электрические поля называют: а) электростатическими; б) сторонними?
2. Что такое пробный электрический заряд? Каким требованиям он должен удовлетворять и почему?
3. Какое электрическое поле называют однородным?
4. Что называют силовой линией (линией напряжённости)?
5. Перечислите свойства силовых линий электрических полей. Что означает стрелка на линиях напряжённости электрических полей?
6. Где начинаются и где заканчиваются линии напряжённости электростатического поля?
7. Чему равен модуль напряжённости поля, созданного точечным зарядом? Куда направлен вектор напряжённости этого поля?

*8 Можно ли ввести понятие напряжённости поля тяжести? Если да, то чему она равна? Можно ли в таком случае говорить, что траектории капель дождя в безветренную погоду совпадают с линиями напряжённости этого поля?

Упражнения

1 Перечертите в тетрадь изображение на рис. 273 справа. Расставьте стрелочки на силовых линиях.

2 Определите модуль напряжённости поля на расстоянии $r = 20$ см от точечного заряда $q = 0{,}2$ нКл.

3 Определите модуль напряжённости поля в середине отрезка, соединяющего два одноимённых точечных заряда. Модуль каждого заряда $q = 4$ мкКл, а расстояние между ними $r = 0{,}2$ м. Как изменится ответ, если заряды будут разноимёнными?

4 Получите выражение единицы напряжённости электрического поля через основные единицы СИ.

5 Известно, что напряжённость электрического поля Земли вблизи её поверхности направлена вертикально вниз, а её модуль $E = 130$ Н/Кл. Определите заряд Земли, считая её радиус $R = 6400$ км.

6 Капелька масла массой $m = 2$ нг висит неподвижно в однородном направленном вертикально вниз электрическом поле, модуль которого $E = 100$ Н/Кл. Оцените заряд капельки и число избыточных электронов в этой капельке.

Для углублённого уровня

§ 71 Теорема Гаусса

Полученная в предыдущем параграфе формула для расчёта напряжённости поля точечного заряда и принцип суперпозиции позволяют рассчитать напряжённость поля, созданного любой системой зарядов. Однако в большинстве случаев такой расчёт представляет собой весьма трудоёмкую математическую задачу. Расчёт может быть существенно упрощён, если заряды распределены в пространстве определённым симметричным образом, например равномерно по сферам, шарам, плоскостям или плоским слоям. В подобных случаях используют теорему Гаусса.

Чтобы сформулировать теорему Гаусса, введём два новых понятия:

1) элементарная площадка;

2) поток $\Delta\Phi$ вектора напряжённости $\vec{E}$ электрического поля через элементарную площадку.

Элементарной называют площадку столь малых размеров, что её можно считать частью плоскости, напряжённость электрического поля во всех точках которой одинакова как по модулю, так и по направлению.

Ориентацию такой площадки определяют, указывая вектор $\vec{n}$ нормали к ней. Если эта площадка является частью замкнутой поверхности, то за положительное направление нормали принимают направление перпендикуляра, идущего из области, ограниченной этой поверхностью, во внешнюю область. В этом случае нормаль называют *внешней*. Например, если рассматриваемая поверхность является сферой, то вектор $\vec{n}_i$ внешней нормали к i-му маленькому участку её поверхности, имеющему площадь ΔS_i, совпадает с направлением вектора $\vec{r}_i$, проведённого из центра O этой сферы к этому участку (рис. 275).

Потоком $\Delta\Phi$ вектора напряжённости $\vec{E}$ через элементарную площадку называют произведение модуля E вектора напряжённости электрического поля на площадь ΔS этой площадки и косинус угла α между вектором $\vec{E}$ и направлением внешней нормали $\vec{n}$ к ней (рис. 276):

$$\Delta\Phi = E \cdot \Delta S \cdot \cos\alpha.$$

Другими словами, поток $\Delta\Phi$ вектора напряжённости электрического поля через элементарную площадку равен произведению площади ΔS этой

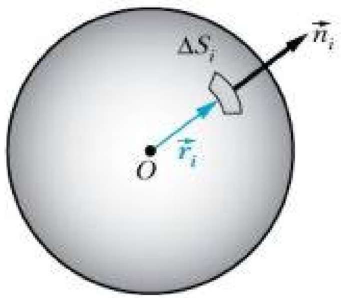


Рис. 275

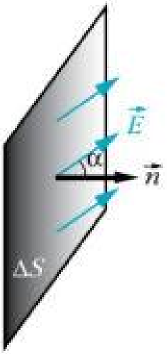


Рис. 276

площадки на проекцию $E \cdot \cos\alpha$ вектора напряжённости поля на направление внешней нормали к этой площадке.

Из определения следует, что если угол α между вектором $\vec{E}$ и направлением нормали $\vec{n}$ острый, то поток $\Delta\Phi > 0$, так как $\cos\alpha > 0$. При этом говорят, что линии напряжённости выходят через данную площадку. При $\alpha = 90^\circ$ силовые линии скользят вдоль площадки, не пересекая её. В этом случае $\Delta\Phi = 0$. Наконец, при $\alpha > 90^\circ$ силовые линии входят через данную площадку внутрь объёма, ограниченного замкнутой поверхностью, частью которой является площадка. В этом случае $\Delta\Phi < 0$, так как $\cos\alpha < 0$.

Сумму потоков $\Delta\Phi_i$ через все элементарные площадки замкнутой поверхности называют полным потоком Ф вектора напряжённости электрического поля через эту поверхность: $\Phi = \sum \Delta\Phi_i$.

Введённые понятия позволяют сформулировать *теорему Гаусса для напряжённости электрического поля*.

Поток Ф вектора напряжённости электрического поля через замкнутую поверхность равен суммарному заряду *Q*, заключённому внутри этой поверхности, делённому на электрическую постоянную ε_0:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \qquad (1)$$

Докажем эту теорему. Для этого вначале определим поток вектора напряжённости поля, порождаемого точечным зарядом q, находящимся в центре сферы радиусом r, через поверхность этой сферы. Направление внешней нормали $\vec{n}_i$ к поверхности элементарной площадки ΔS_i этой сферы совпадает с направлением вектора $\vec{r}_i$, определяющего положение этой площадки относительно центра O сферы. Поэтому проекция E_i вектора напряжённости на нормаль $\vec{n}_i$ равна: $E_i = k \cdot \frac{q}{r^2}$, а поток через эту площадку $\Delta\Phi_i = \frac{k \cdot q \cdot \Delta S_i}{r^2}$. Площадь поверхности сферы радиусом r равна: $\sum \Delta S_i = 4\pi \cdot r^2$. Поэтому поток через всю поверхность сферы равен:

$$\Phi = \sum \Delta\Phi_i = k \cdot q \cdot \frac{\sum \Delta S_i}{r^2} = 4\pi \cdot k \cdot q = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

так как в СИ $k = 1/(4\pi \cdot \varepsilon_0)$.

Линии напряжённости проводят так, что их плотность пропорциональна напряжённости поля на элементарной площадке. Поэтому *поток Ф пропорционален числу силовых линий*, выходящих из сферы при $q > 0$ (или входящих в сферу при $q < 0$). Воспользуемся этим для доказательства, что *поток вектора напряжённости поля, созданного зарядом q, через* *любую замкнутую поверхность, внутри которой он находится, равен потоку через окружающую этот заряд сферу, т. е. равен q/ε_0.*

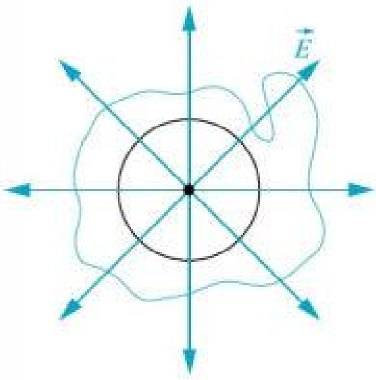


Рис. 277

Будем для определённости считать, что $q > 0$. Окружим рассмотренную сферу произвольной замкнутой поверхностью. Пусть внутри этой поверхности нет никаких зарядов, кроме заряда q, находящегося в центре сферы (рис. 277). Напомним, что линии напряжённости электрического поля начинаются на положительных, а заканчиваются на отрицательных зарядах. Следовательно, они непрерывны во всех точках, где нет электрических зарядов. Поэтому даже если какая-то линия пересекает эту поверхность несколько раз, то число пересечений будет нечётным. При этом число «выходов» линии из поверхности будет на один больше, чем число «входов». Следовательно, число «выходов» линий напряжённости из произвольной замкнутой поверхности за вычетом числа «входов» всегда будет равно числу «выходов» линий напряжённости из рассмотренной сферы. Из этого следует, что поток вектора напряжённости через выбранную поверхность равен потоку через рассмотренную сферу, т. е. равен q/ε_0.

Пусть источник электрического поля находится вне рассматриваемой замкнутой поверхности. Тогда часть силовых линий поля, порождаемого этим источником, будет пересекать эту поверхность. При этом число пересечений будет чётным, а число «входов» линий в поверхность будет равно числу «выходов». Следовательно, *через замкнутую поверхность поток вектора напряжённости электрического поля, созданного зарядом, находящимся вне этой замкнутой поверхности, будет равен нулю.*

Согласно принципу суперпозиции, напряжённость суммарного электрического поля от нескольких источников равна сумме напряжённостей от каждого из них в отдельности. Поэтому в соответствии с определением потока поток от нескольких источников будет равен сумме потоков от каждого источника в отдельности. Поток от каждого из источников, находящихся вне замкнутой поверхности, равен нулю. В результате мы приходим к выражению (1), где Q — сумма всех зарядов, находящихся внутри замкнутой поверхности.

Необходимо понимать, что теорема Гаусса и закон Кулона фактически выражают один и тот же закон природы в разных формах. Справедливость обоих законов обусловлена тем, что площадь поверхности сферы в нашем пространстве пропорциональна квадрату радиуса этой сферы.

! Поэтому и теорема Гаусса, и закон Кулона применимы к любым силовым полям, для которых справедлив принцип суперпозиции, а силы взаимодействия соответствующих точечных источников поля обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними. В частности, поскольку формулы закона всемирного тяготения $|\vec{F}| = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$ и закона Кулона $|\vec{F}| = k \cdot \frac{|Q| \cdot |q|}{r^2}$ идентичны с точностью до обозначений, то теорема Гаусса применима и для гравитационных полей. При этом о массах взаимодействующих точечных тел можно говорить как о гравитационных зарядах этих тел.

Рассмотрим применение теоремы Гаусса для расчёта напряжённости электростатического поля протяжённых заряженных объектов, картина линий напряжённости электростатического поля которых известна (либо из соображений симметрии, либо из опыта).

Расчёт напряжённости поля равномерно заряженной плоскости

Рассмотрим заряженную плоскость, часть которой показана на рис. 278. Отношение заряда Δq, распределённого по поверхности, к площади ΔS этой поверхности называют средней поверхностной плотностью заряда: $\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S}$. Если во всех частях поверхности поверхностная плотность заряда одинакова, то такую поверхность называют *равномерно заряженной*.

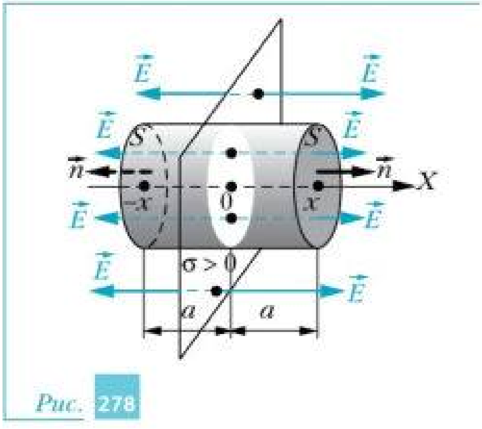


Рис. 278

Пусть рассматриваемая плоскость заряжена равномерно. Будем для определённости считать, что $\sigma > 0$. Поскольку плоскость безгранична и никакие направления в ней не выделены, то можно утверждать, что силовые линии поля, порождаемого зарядами плоскости, должны быть направлены перпендикулярно плоскости в обе стороны от неё.

Выберем замкнутую поверхность, представляющую собой цилиндр (*см.* рис. 278). Пусть ось цилиндра перпендикулярна рассматриваемой плоскости, его донышки, площадью S каждое, находятся на одинаковых расстояниях a от этой плоскости, а площадь поперечного сечения цилиндра равна S.

Поток вектора напряжённости поля через боковую поверхность цилиндра равен нулю, так как векторы напряжённости поля в любой её точке перпендикулярны нормалям к этой поверхности. Векторы внешних нормалей к донышкам цилиндра совпадают по направлению с векторами напряжённости. Поскольку донышки цилиндра равноудалены от плоскости, то проекции векторов напряжённости на внешние нормали к донышкам цилиндра одинаковы и равны E. Поэтому поток вектора напряжённости через каждое из донышек равен $E \cdot S$. Следовательно, полный поток через всю поверхность цилиндра равен: $\Phi = 2E \cdot S$.

По теореме Гаусса этот поток, умноженный на ε_0, равен заряду той части плоскости, которая лежит внутри цилиндра. Площадь этой части равна S. Следовательно, $\Phi \cdot \varepsilon_0 = \sigma \cdot S$. Таким образом, модуль напряжённости в месте нахождения донышка: $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, т. е. не зависит от удаления от плоскости. Поскольку векторы напряжённости изучаемого поля перпендикулярны рассматриваемой плоскости, то полученный результат показывает, что поле, создаваемое равномерно заряженной плоскостью, является однородным с каждой стороны от плоскости. Напряжённость этого поля равна:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \vec{n}, \qquad (2)$$

где $\vec{n}$ — вектор, модуль которого равен единице, направленный от плоскости перпендикулярно ей.

Рассмотрим *две параллельные плоскости*. Пусть обе плоскости заряжены равномерно, причём первая — с поверхностной плотностью $\sigma > 0$, а вторая — с поверхностной плотностью $-\sigma$. Воспользуемся формулой (2) и принципом суперпозиции для определения напряжённости поля, создаваемого этими плоскостями. На рис. 279 показано сечение заряженных плоскостей плоскостью рисунка. Чёрными стрелками изображены векторы напряжённости поля, создаваемого первой, положительно заряженной плоско-

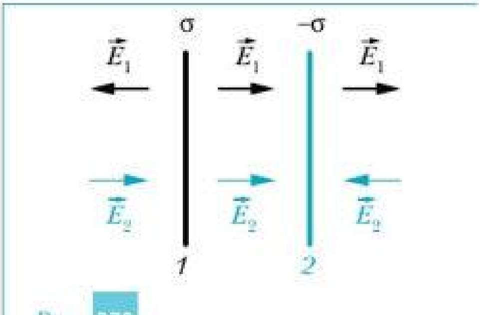


Рис. 279

стью. Синими стрелками – векторы напряжённости поля, создаваемого второй, отрицательно заряженной плоскостью. Модули напряжённостей равны: $\left|\vec{E}_1\right| = \left|\vec{E}_2\right| = \dfrac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}$. Слева от первой плоскости и справа от второй направления напряжённостей противоположны. Поэтому в этих областях пространства суммарная напряжённость поля равна нулю. Напротив, между плоскостями напряжённости от обеих плоскостей направлены одинаково. Следовательно, поле между такими плоскостями однородно, линии его напряжённости перпендикулярны плоскостям, а модуль напряжённости результирующего поля равен $\dfrac{|\sigma|}{\varepsilon_0}$.

Рассмотрим две одинаковые параллельные пластины. Если их размеры существенно больше расстояния между ними, то для точек пространства между этими пластинами их можно считать плоскостями. Тогда, если плотности поверхностных зарядов на этих пластинах равны по модулю, но противоположны по знаку, поле между пластинами можно считать практически однородным, а снаружи – равным нулю. Справедливость этого заключения подтверждает и изображение, приведённое на рис. 273.

Расчёт напряжённости поля равномерно заряженной сферы

Пусть положительный заряд Q равномерно распределён по поверхности сферы радиусом R, центр которой расположен в точке O. Определим поле, создаваемое зарядом Q.

Вначале определим напряжённость за пределами сферы. Выберем замкнутую поверхность в виде сферы с центром O и радиусом r, таким, что $r > R$. Из соображений симметрии следует, что во всех точках выбранной поверхности направление вектора напряжённости совпадает с направлением внешней нормали, а модуль напряжённости одинаков. Следовательно, по определению поток напряжённости поля через выбранную поверхность радиусом r равен произведению модуля искомой напряжённости на площадь выбранной поверхности: $\Phi = E \cdot 4\pi \cdot r^2$. Вместе с тем по теореме Гаусса этот поток $\Phi = Q/\varepsilon_0$. Сопоставление полученных результатов позволяет определить модуль искомой напряжённости:

$$E = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} = \frac{k \cdot Q}{r^2}. \qquad (3)$$

Таким образом, *поле, создаваемое равномерно заряженной сферой, вне этой сферы идентично полю точечного заряда, равного заряду сферы и находящегося в центре этой сферы.*

Теперь определим напряжённость поля внутри сферы. Выберем замкнутую поверхность в виде сферы с центром O и радиусом r, таким, что $r < R$. Из соображений симметрии следует, что во всех точках выбранной поверхности направление вектора напряжённости параллельно направлению внешней нормали, а модуль напряжённости одинаков. Поэтому по определению модуль потока напряжённости поля через выбранную поверхность равен произведению модуля искомой напряжённости на площадь выбранной поверхности: $\Phi = E \cdot 4\pi \cdot r^2$. Так как внутри выбранной поверхности нет зарядов, то по теореме Гаусса $\Phi = 0/\varepsilon_0 = 0$. Сопоставление полученных результатов позволяет сделать вывод:

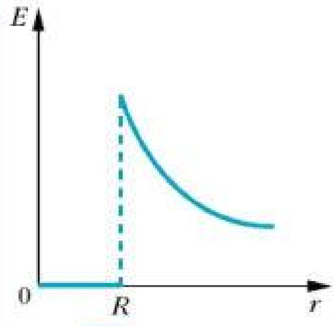


Рис. 280

! напряжённость поля, создаваемого равномерно заряженной сферой, внутри этой сферы равна нулю.

Полученные результаты можно представить в графическом виде (рис. 280).

В заключение отметим, что использование теоремы Гаусса эффективно лишь в тех случаях, когда поле обладает симметрией, позволяющей выбрать вспомогательную замкнутую поверхность, поток через которую легко вычислить.

Вопросы

1. Какую площадку называют элементарной?
2. Какое направление принимают за положительное у внешней нормали к элементарной площадке замкнутой поверхности?
3. Что называют потоком вектора напряжённости электрического поля через элементарную площадку?
4. Сформулируйте теорему Гаусса для напряжённости электрического поля.
5. Зависит ли модуль напряжённости электростатического поля, созданного равномерно заряженной плоскостью, от расстояния до неё? Как направлен вектор напряжённости этого поля?
6. Какова напряжённость поля, создаваемого равномерно заряженной сферой, внутри и вне этой сферы?

Упражнения

1 Заряды двух концентрических равномерно заряженных сфер с радиусами r_1 и r_2 ($r_2 > r_1$) равны q_1 и q_2 соответственно. Определите модуль напряжённости электростатического поля в произвольной точке на расстоянии r от центра этих сфер. Постройте график зависимости модуля напряжённости этого поля от r.

2 Шар радиусом R заряжен равномерно по объёму. Заряд шара равен Q. Определите модуль напряжённости электростатического поля в произвольной точке на расстоянии r от центра шара. Постройте график зависимости модуля напряжённости от r. (*Подсказка:* объём шара радиусом r равен $4\pi \cdot r^3/3$.)

*3 Поверхностные плотности зарядов трёх параллельных плоскостей равны соответственно $\sigma_1 = 2$ нКл/м^2, $\sigma_2 = 3$ нКл/м^2 и $\sigma_3 = -5$ нКл/м^2. Эти плоскости перпендикулярны оси X и пересекают её в точках с координатами $x_1 = 5$ см, $x_2 = 10$ см и $x_3 = 15$ см соответственно. Постройте график зависимости проекции на ось X напряжённости электростатического поля, создаваемого этими плоскостями, при изменении координаты x от 0 до 20 см.

*4 Выведите теорему Гаусса для гравитационного поля.

§ 72 Работа сил электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов

Если пробный точечный заряд $q_{\text{пр}}$ находится в однородном электрическом поле с напряжённостью $\vec{E}$, то на него действует сила $\vec{F}_э = q_{\text{пр}} \cdot \vec{E}$. Поэтому при перемещении $\Delta\vec{r}$ пробного заряда $q_{\text{пр}}$ это поле совершит над ним работу:

$$A_э = F_э \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha = q_{\text{пр}} \cdot E \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha, \qquad (1)$$

где α – угол между перемещением $\Delta\vec{r}$ и вектором напряжённости $\vec{E}$.

Работа силы тяжести в однородном поле тяжести с точностью до обозначений рассчитывается по такой же формуле (*см.* § 33):

$$A_т = F_т \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha.$$

Следовательно, выводы, полученные для однородного поля тяжести, применимы и для однородного электрического поля (рис. 281, *а* и *б*). В частности, в § 33 было доказано, что при перемещении материальной точки

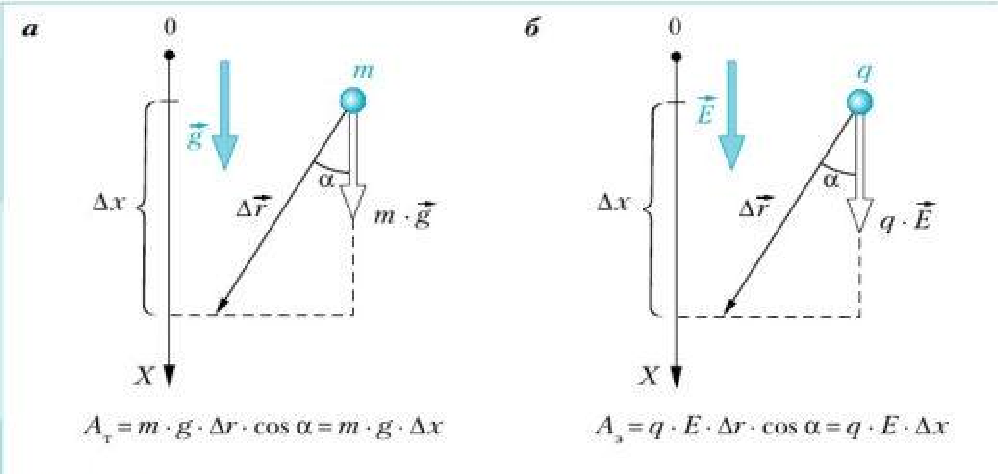


Рис. 281

массой m в однородном гравитационном поле *работа силы тяжести не зависит от вида траектории*, а определяется начальным и конечным положениями этой точки. Аналогично можно доказать, что при перемещении пробного заряда $q_{пр}$ в однородном электрическом поле *работа силы электрического поля не зависит от вида траектории*, а определяется начальным и конечным положениями этого заряда. Вы уже знаете, что силы, удовлетворяющие такому условию, называют *потенциальными* (*см.* § 33).

Следовательно, не только *однородное поле тяжести, но и однородное электрическое поле является потенциальным.* К

Напомним, что потенциальной энергией $П$ называют энергию системы тел, которая определяется взаимным расположением тел системы или их частей и потенциальными силами взаимодействия между ними.

Таким образом, любая система взаимодействующих зарядов обладает потенциальной энергией. Напомним также, что *потенциальную энергию системы тел принимают равной работе, которую совершают потенциальные силы взаимодействия её тел при переходе системы из данного состояния в состояние, потенциальная энергия которого принята за нуль.*

Действующая на пробный заряд $q_{пр}$ электрическая сила прямо пропорциональна $q_{пр}$. Поэтому при заданном перемещении пробного заряда работа электростатического поля над ним пропорциональна этому заряду.

К Можно доказать, что любые гравитационные и электростатические поля являются потенциальными.

Следовательно, отношение совершённой полем работы A над пробным зарядом $q_{пр}$ при его заданном перемещении $\Delta\vec{r}$ к этому заряду *не зависит от заряда* и может рассматриваться как энергетическая характеристика самого поля. Эту характеристику электростатического поля называют *разностью потенциалов.*

Разностью потенциалов $\Delta\varphi_{12}$ между точками *1* и *2* называют физическую величину, равную отношению работы A_{12}, которую совершают силы электростатического поля при перемещении пробного заряда $q_{пр}$ из точки *1* в точку *2*, к этому заряду:

$$\Delta\varphi_{12} = \frac{A_{12}}{q_{пр}}. \qquad (2)$$

В СИ единица разности потенциалов получила название *вольт* (В). Эта единица является производной, а её размерность, согласно определению, равна:

$$1\ \text{В} = 1\ \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}.$$

! Таким образом, работу A_{12} электростатического поля над любым точечным зарядом q при его перемещении между точками *1* и *2* с разностью потенциалов $\Delta\varphi$ можно вычислить по формуле:

$$A_{12} = q \cdot \Delta\varphi. \qquad (3)$$

Из формулы (3) следует, что при перемещении положительного заряда из точки *1* в точку *2*, разность потенциалов между которыми положительна, силы поля совершают положительную работу. Если же заряд будет отрицательным, то работа сил поля будет отрицательной.

Поскольку электростатическое поле является потенциальным, то работа такого поля над пробным зарядом при его перемещении из точки *2* в точку *1* равна взятой с обратным знаком работе поля при перемещении этого заряда из точки *1* в точку *2*. Поэтому

$$\Delta\varphi_{21} = -\Delta\varphi_{12}. \qquad (4)$$

Если разность потенциалов между начальной и конечной точками перемещения заряда отрицательна, то над отрицательным зарядом поле совершит положительную работу, а над положительным зарядом — отрицательную.

Расчёт работы сил электростатического поля позволяет определить изменение потенциальной энергии системы взаимодействующих зарядов. Например, между двумя одноимённо заряженными точечными телами действуют электрические силы взаимного отталкивания. Поэтому при их удалении друг от друга работа электрических сил будет положительной. Следовательно, потенциальная энергия такой системы будет убывать. Напротив, при сближении одноимённых точечных зарядов потенциальная энергия системы будет увеличиваться.

При решении некоторых задач интересно сравнить работы поля по переносу заряда из разных точек поля в *одну* заранее выбранную точку. В этом случае вместо разности потенциалов удобно использовать понятие *потенциал*. Для такого сравнения потенциал выбранной точки принимают равным нулю. После этого определяют потенциалы всех других точек поля.

Потенциалом φ данной точки электростатического поля называют физическую величину, равную отношению работы A сил этого поля над пробным зарядом $q_{пр}$ при его перемещении из данной точки в точку, потенциал которой принят равным нулю, к этому заряду:

$$\varphi = \frac{A}{q_{пр}}. \tag{5}$$

Обратим внимание на то, что имеет смысл говорить о потенциале точки поля только в том случае, когда указана точка, потенциал которой принят равным нулю. Изменение положения точки поля, потенциал которой принят равным нулю, приводит к изменению потенциалов всех других точек поля на одну и ту же величину. Поэтому *разность потенциалов между заданными точками 1 и 2* ($\Delta\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$) *не зависит от выбора точки, потенциал которой принимают равным нулю*.

При решении конкретной задачи точку, которой приписывают потенциал, равный нулю, выбирают исходя из удобства. Так, если электростатическое поле создано заряженными телами, расположенными в ограниченной области пространства, то потенциал, равный нулю, обычно приписывают *бесконечно удалённой от этих тел точке*. В этом случае часто говорят, что потенциал равен нулю на бесконечности. К

При графическом изображении электростатических полей наряду с линиями напряжённости используют *эквипотенциальные поверхности*.

К При решении задач, в которых создающие электростатические поля тела имеют неограниченные размеры (например, заряженные плоскости), точку, потенциал которой равен нулю, выбирают либо на самих этих телах, либо на заданном расстоянии от их поверхностей.
При проведении измерений в радиотехнике и электротехнике обычно считают, что равен нулю потенциал любой заземлённой точки.

Эквипотенциальная поверхность — поверхность, потенциал всех точек которой одинаков.

Эквипотенциальные поверхности проводят так, чтобы разность потенциалов между любыми двумя соседними поверхностями была одной и той же.

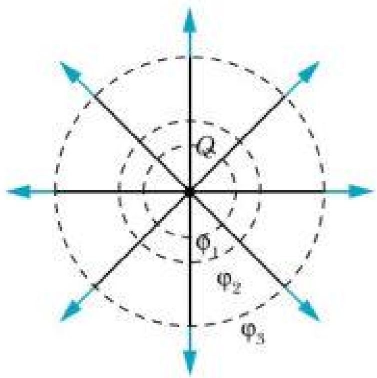


Рис. 282

Работа электростатических сил при перемещении пробного заряда по эквипотенциальной поверхности равна нулю. Поэтому любая линия напряжённости электростатического поля, пересекающая эквипотенциальную поверхность, перпендикулярна этой поверхности в точке пересечения.

Линии пересечения эквипотенциальных поверхностей плоскостью рисунка называют *эквипотенциальными линиями*.

Рассмотрим картину поля, порождаемого точечным зарядом Q (рис. 282). Силовые линии поля представляют собой радиальные лучи, исходящие из точки, в которой расположен заряд. Поэтому работа сил поля при перемещении пробного заряда по поверхности любой сферы, центр которой совпадает с зарядом Q, будет равна нулю. Следовательно, эквипотенциальные поверхности рассматриваемого поля представляют собой концентрические сферы. На рис. 282 показаны пересечения этих сфер плоскостью рисунка — эквипотенциальные линии. Они имеют вид концентрических окружностей.

Определим связь разности потенциалов с напряжённостью электростатического поля. Ограничимся случаем однородного поля.

В однородном электростатическом поле эквипотенциальные поверхности представляют собой плоскости, перпендикулярные силовым линиям. Сечение этих плоскостей плоскостью рисунка и силовые линии поля показаны на рис. 283. Переместим пробный заряд $q_{\text{пр}}$ из точки, потенциал которой равен φ_1, в направлении вектора напряжённости $\vec{E}$ на расстояние Δh (рис. 284). Поскольку угол α между перемещением $\Delta \vec{h}$ и вектором напряжённости $\vec{E}$ равен нулю, то поле совершит над зарядом работу:

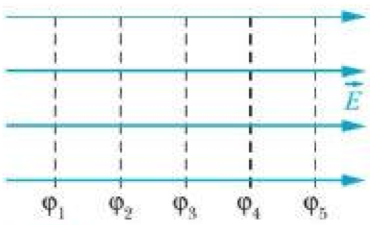


Рис. 283

Рис. 284

$$A_{12} = q_{\text{пр}} \cdot E \cdot \Delta h \cdot \cos\alpha = q_{\text{пр}} \cdot E \cdot \Delta h. \qquad (6)$$

В то же время эта работа, согласно формуле (2), равна:

$$A_{12} = q_{\text{пр}} \cdot \Delta\varphi_{12} = q_{\text{пр}} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2), \qquad (7)$$

где φ_2 – потенциал точки, в которую переместили пробный заряд. Следовательно,

$$E \cdot \Delta h = \varphi_1 - \varphi_2. \qquad (8)$$

Обратим внимание на то, что пробный заряд перемещали в направлении вектора $\vec{E}$. Поэтому левая часть соотношения (8) положительна. Следовательно, $\varphi_1 > \varphi_2$. Таким образом, вектор напряжённости $\vec{E}$ однородного электростатического поля *направлен* перпендикулярно эквипотенциальным поверхностям *в сторону убывания потенциала*.

В СИ разность потенциалов измеряют в вольтах, а расстояния в метрах. Поэтому в СИ обычно используют наименование единицы напряжённости электрического поля – *вольт на метр* (В/м).

Следует отметить, что задача измерения разности потенциалов решается значительно проще и с большей точностью, чем задача измерения напряжённости поля. Поэтому при исследовании электростатических полей обычно вначале получают картину эквипотенциальных поверхностей. Затем по ней строят картину линий напряжённости, проводя их перпендикулярно эквипотенциальным поверхностям в направлении наискорейшего убывания потенциала. Из соотношения (8) находят модуль вектора напряжённости. Это позволяет определить густоту силовых линий. На рис. 285 показан пример такого построения.

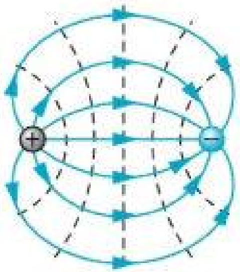


Рис. 285

Применение понятия потенциала в задачах о движении зарядов в электростатическом поле аналогично применению понятия потенциальной энергии при решении задач механики. Поясним сказанное на примере.

Задача

Пусть частица массой m, имеющая заряд $q > 0$, перемещается в электрическом поле из точки *1* в точку *2*. В точке *1* модуль скорости частицы был равен v_1. Потенциалы точек *1* и *2* равны φ_1 и φ_2 соответственно, причём $\varphi_1 > \varphi_2$. Определите модуль скорости частицы в точке *2*, считая, что на частицу действуют только силы электрического поля.

Решение.

Начальная кинетическая энергия частицы $K_1 = \frac{m \cdot v_1^2}{2}$. Обозначим модуль искомой скорости частицы v_2. Тогда конечная кинетическая энергия частицы будет равна $K_2 = \frac{m \cdot v_2^2}{2}$.

При перемещении частицы из точки *1* в точку *2* силы электрического поля совершают работу, равную произведению заряда частицы на разность потенциалов между этими точками: $A = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$.

В соответствии с законом изменения механической энергии получаем:

$$K_1 + A = K_2, \text{ или } \frac{m \cdot v_1^2}{2} + q \cdot \left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = \frac{m \cdot v_2^2}{2}. \qquad (9)$$

Из уравнения (9) находим:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2q \cdot \left(\varphi_1 - \varphi_2\right)}{m}}. \qquad (10)$$

Отметим, что соотношение (9) может быть записано в виде:

$$\frac{m \cdot v_1^2}{2} + q \cdot \varphi_1 = \frac{m \cdot v_2^2}{2} + q \cdot \varphi_2.$$

Из этого следует, что при движении частицы в электростатическом поле при отсутствии действия на неё других сил сумма кинетической энергии этой частицы и произведения её заряда на потенциал точки, в которой она находится, не изменяется с течением времени.

Из принципа суперпозиции для напряжённости электрического поля следует, что при перемещении пробного заряда в поле, созданном несколькими покоящимися в ИСО заряженными телами, работы полей суммируются. Поэтому из определения потенциала следует, что принцип суперпозиции справедлив и для потенциалов.

Потенциал электростатического поля, созданного несколькими зарядами, в данной точке равен сумме потенциалов, создаваемых в этой же точке каждым из зарядов при отсутствии остальных:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_N.$$

Принцип суперпозиции для потенциалов позволяет решать задачи о движении частицы в поле, созданном системой зарядов.

Вопросы

1. Какие поля называют потенциальными?
2. Приведите примеры известных вам потенциальных полей.
3. Что называют: а) разностью потенциалов; б) потенциалом?
4. Приведите примеры выбора точки, потенциал которой принимают равным нулю.
5. Чему равна разность потенциалов $\Delta\varphi_{12}$ между точками *1* и *2*, если потенциалы этих точек равны φ_1 и φ_2? Почему?
6. Как изменяется потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов при их удалении друг от друга?
7. Какую поверхность называют эквипотенциальной?
8. Что представляют собой эквипотенциальные поверхности однородного электростатического поля? Как по отношению к ним расположены линии напряжённости?
9. Как связаны разность потенциалов и модуль напряжённости однородного электростатического поля?

Упражнения

1. Точечный заряд $q = 2$ мкКл переместили из точки, потенциал которой $\varphi_1 = 20$ В, в точку, потенциал которой $\varphi_2 = -30$ В. Какую работу совершили при этом силы электростатического поля над этим зарядом?
2. Определите отношение разности потенциалов φ_2 и φ_3 к разности потенциалов φ_2 и φ_1 электрического поля, силовые и эквипотенциальные линии которого показаны на рис. 283. Объясните полученный результат.
3. Получите выражение единицы разности потенциалов через основные единицы СИ.

Для углублённого уровня

§ 73 Доказательство потенциальности электростатического поля. Потенциал поля точечного заряда

Определим работу поля, созданного положительным точечным зарядом Q, над точечным зарядом q при его перемещении по произвольной замкнутой траектории $abcdeka$, показанной на рис. 286.

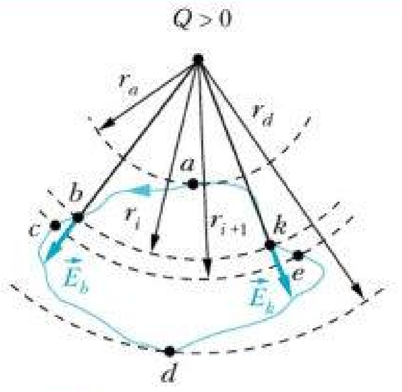


Рис. 286

Построим ряд сфер, центры которых совпадают с зарядом Q. Рассмотрим участки траектории, заключённые между сферами радиусами r_i и r_{i+1}. Пусть радиусы этих сфер различаются на достаточно малую величину Δr_i, такую, что отрезки траектории заряда q, заключённые между этими сферами, можно считать прямолинейными, а модуль напряжённости поля между ними — практически постоянным и равным E_i. Проекция перемещения заряда q из точки b в точку c на вектор напряжённости $\vec{E}_b$ поля равна Δr_i. Проекция же перемещения этого заряда из точки e в точку k на вектор напряжённости $\vec{E}_k$ равна $-\Delta r_i$. Поскольку

$$\left|\vec{E}_b\right| = \left|\vec{E}_k\right| = E_i, \qquad (1)$$

то сумма работ поля при перемещении заряда q по указанным участкам траектории тождественно равна нулю:

$$E_i \cdot q \cdot \Delta r_i - E_i \cdot q \cdot \Delta r_i = 0.$$

Повторяя приведённые рассуждения для всех пар сфер, пересекающих траекторию движения заряда q, приходим к выводу, что *работа электростатического поля точечного заряда Q над точечным зарядом q при его перемещении по произвольной замкнутой траектории равна нулю*. Следовательно, это поле является потенциальным.

Поскольку для электрических сил справедлив принцип суперпозиции,

! работа сил электростатического поля, созданного любой совокупностью заряженных тел, над пробным зарядом при его перемещении по замкнутой траектории в любом электростатическом поле равна нулю.

Следовательно, *любое электростатическое поле является потенциальным.*

Теперь получим выражение для расчёта потенциала точек поля, создаваемого точечным зарядом Q. Будем для определённости считать заряд Q положительным. Примем потенциал бесконечно удалённой от заряда Q точки равным нулю.

Электростатическое поле является потенциальным. Поэтому для расчёта потенциала интересующей нас точки можно вычислять работу поля над пробным зарядом по любой траектории, идущей из этой точки в бесконечность. Выберем траекторию, совпадающую с силовой линией.

Разобьём траекторию на достаточно малые участки. Пусть на одном из таких участков расстояние между зарядами Q и q увеличивается от r_i до r_{i+1}. Обозначим $r_{i+1} - r_i = \Delta r_i$. Действующая на заряд сила направлена вдоль траектории. Её модуль на рассматриваемом участке можно считать практически постоянным и равным:

$$F_i = \frac{q \cdot k \cdot Q}{r^2_{i\,\text{ср}}}, \qquad (2)$$

где $r_i < r_{i\,\text{ср}} < r_{i+1}$.

Поэтому над зарядом q на этом участке поле совершит работу:

$$\Delta A_i = F_i \cdot \Delta r_i = \frac{k \cdot q \cdot Q}{r^2_{i\,\text{ср}}} \cdot \Delta r_i. \qquad (3)$$

При достаточно малом Δr_i в качестве $r_{i\,\text{ср}}$ можно выбрать любое значение, удовлетворяющее неравенству $r_i < r_{i\,\text{ср}} < r_{i+1}$. Расчёты упрощаются, если выбрать $r_{i\,\text{ср}} = \sqrt{r_i \cdot r_{i+1}}$. Поскольку $\Delta r_i = r_{i+1} - r_i$, то выражение (3) принимает вид:

$$\Delta A_i = k \cdot q \cdot Q \cdot \left(\frac{r_{i+1} - r_i}{r_i \cdot r_i}\right) = k \cdot q \cdot Q \cdot \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}}\right).$$

Следовательно, при перемещении заряда q от r до бесконечности силы поля совершат над ним работу:

$$A = \sum \Delta A_i = k \cdot q \cdot Q \cdot \sum\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}}\right) =$$

$$= k \cdot q \cdot Q \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \ldots - 0\right) = \frac{k \cdot q \cdot Q}{r}.$$

Таким образом, в соответствии с определением потенциал поля точечного заряда Q в точке, находящейся на расстоянии r от него, равен:

$$\varphi(r) = \frac{A}{q} = \frac{k \cdot Q}{r} = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r}. \qquad (4)$$

Напомним, что поле, создаваемое равномерно заряженным шаром (или сферой) радиусом R, вне этого шара (т. е. на расстояниях $r > R$ от центра шара) идентично полю равного точечного заряда, помещённого в центр этого шара (сферы). Поэтому потенциалы точек поля вне заряженного шара (сферы) могут быть также рассчитаны по формуле (4).

Упражнения

1. Точечный заряд q расположен на оси тонкой равномерно заряженной палочки на расстоянии a от её ближайшего конца. Длина палочки равна l, а её заряд равен Q. Определите электростатическую силу $\vec{F}$, действующую на заряд q со стороны палочки. (*Подсказка:* разделите палочку на достаточно малые участки и воспользуйтесь приёмом, который был применён при выводе формулы для расчёта потенциала точечного заряда.)
2. Определите потенциал точки A, находящейся в середине отрезка, на концах которого закреплены точечные заряды $q_1 = 5$ мкКл и $q_2 = 15$ мкКл, если длина отрезка $L = 20$ см. Определите модуль максимальной скорости, которую сможет приобрести под действием сил отталкивания со стороны этих зарядов заряд $q_3 = 1$ мкКл, начавший движение из точки A и имеющий массу $m = 1$ г.

*3. Выведите выражение для расчёта потенциала гравитационного поля, создаваемого материальной точкой массой m. Считайте, что значение потенциала бесконечно удалённой точки равно нулю.

§ 74 Проводники в постоянном электрическом поле

Вы знаете, что проводники – это вещества, в которых имеются *свободные носители заряда*. Это означает, что заряженные частицы могут перемещаться по всему объёму проводника. Следовательно, если внутри проводника будет создано электрическое поле, то в проводнике начнётся упорядоченное движение свободных носителей заряда. Это движение будет продолжаться до тех пор, пока напряжённость электрического поля внутри проводника не станет равной нулю. Другими словами, это движение не закончится до тех пор, пока потенциалы всех точек проводника (в том числе точек его поверхности) не станут одинаковыми.

В хороших проводниках концентрация свободных носителей заряда огромна. Поэтому при внесении проводника во внешнее электрическое поле или при нанесении на него избыточного заряда выравнивание потенциалов всех точек проводника происходит очень быстро (за время, меньшее 10^{-10} с).

Напряжённость электрического поля внутри проводника, находящегося во внешнем постоянном электростатическом поле и имеющего избыточный электрический заряд, равна нулю.

Следовательно, если внутри проводника имеется полость, то напряжённость электростатического поля в ней будет также равна нулю. Это свойство проводников компенсировать внешнее электрическое поле используют для создания *электростатической защиты* объектов. Чтобы защитить эти объекты, их помещают в закрытые металлические ящики.

А как распределяются избыточные заряды внутри проводника? Для ответа на этот вопрос обратимся к эксперименту. Внесём внутрь незаряженной металлической сферы через небольшое отверстие в ней металлический положительно заряженный шарик, закреплённый на изолирующем стержне (рис. 287, *а*). После касания этим шариком внутренней поверхности сферы (рис. 287, *б*) вынем шарик из сферы, не касаясь её. Если после этого коснуться этим шариком предварительно разряженного электрометра, то его стрелка не отклонится от своего исходного положения (рис. 287, *в*). Это показывает, что *весь* избыточный заряд шарика был передан металлической сфере при её касании изнутри. Проводя подобные опыты, Г. Кавендиш установил, что *внутри проводника не могут существовать избыточные заряды — весь избыточный заряд распределяется только по внешней поверхности*.

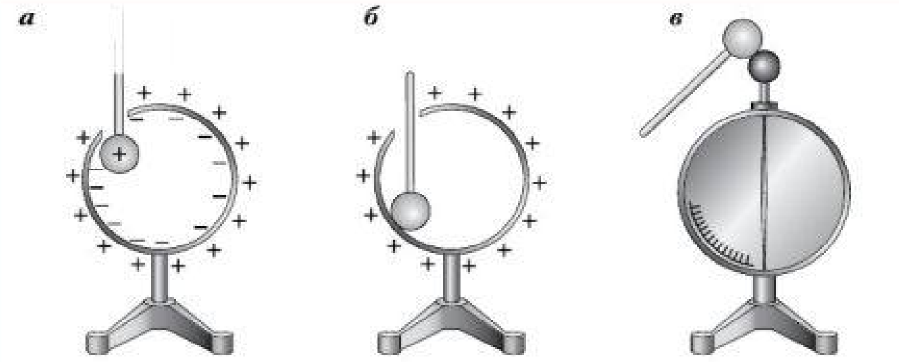


Рис. 287

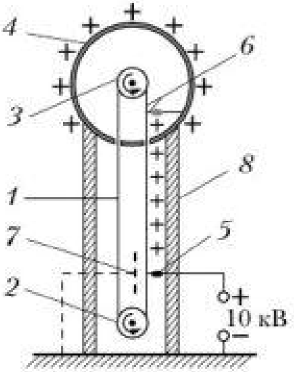


Рис. 288

Рис. 289

Основываясь на этом, американский физик Роберт Ван де Грааф (1901–1967) построил генератор для получения больших (до десятков мегавольт) разностей потенциалов от сравнительно низковольтного (~10 кВ) источника (рис. 288). Лента *1*, изготовленная из диэлектрика (например, резины или шёлка), движется за счёт вращения электромотором ролика *2*. Второй ролик *3* смонтирован внутри металлической сферы *4*, закреплённой на изоляторе *8*. Вблизи нижнего ролика на ленту наносится заряд от проводника *5*, соединённого с положительным полюсом источника напряжения 10 кВ. Второй полюс этого источника заземлён. Заземлённый электрод *7* способствует более эффективному заряжению ленты. Внутри сферы находится соединённый с ней проводник *6*, который касается ленты *1*. Заряд с ленты передаётся по этому проводнику на внутреннюю поверхность сферы, а оттуда переходит на внешнюю. В результате потенциал сферы относительно Земли непрерывно повышается. Максимальный потенциал, до кото-

Рис. 290 Набор изогнутых спиц с остриями на концах при подключении к высоковольтному источнику начинает быстро вращаться

рого может зарядиться сфера, ограничивается лишь возникновением пробоя окружающего воздуха. Пробой возникает, когда напряжённость электрического поля достигает значения ~30 кВ/см.

При заряжении проводника произвольной формы избыточные заряды из-за взаимного отталкивания стремятся расположиться на его поверхности как можно дальше друг от друга. Поэтому поверхностная плотность зарядов на выступах проводника оказывается существенно больше средней. Если у проводника есть остриё, то на конце острия плотность зарядов будет очень большой. Соответственно очень большой будет и напряжённость поля, созданного этими зарядами вблизи острия. В этой области происходит ионизация воздуха. Пусть остриё заряжено отрицательно (рис. 289). Тогда положительные ионы оседают на острие, а отрицательные, отталкиваясь от него, создают поток от острия, который называют «электрическим ветром». «Электрический ветер» может даже вызвать реактивное движение заряженного проводника (рис. 290).

В заключение рассмотрим примеры решения задач о проводниках в электростатическом поле.

Задача 1

Заряд уединённого металлического шара радиусом r равен Q. Определите потенциал этого шара, считая потенциал бесконечно удалённой от него точки равным нулю.

Решение.

Из соображений симметрии следует, что заряд по поверхности шара распределён равномерно. Поэтому поле в точках пространства вне шара, созданное его зарядом, идентично полю, которое было бы создано таким же по величине точечным зарядом, помещённым в центр этого шара. Следовательно, потенциал любой точки на поверхности шара, согласно формуле (4) из § 73, равен:

$$\varphi(r) = \frac{k \cdot Q}{r} = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r}.$$

Поскольку металл является проводником, то потенциалы всех точек шара равны.

Ответ: $\varphi_ш = \dfrac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r}.$

Задача 2

Потенциал уединённого заряженного металлического шарика радиусом r равен φ_1. Шарик окружают тонкой концентричной ему незаряженной ме-