

Учебное издание

*ДРАБОВИЧ Константин Николаевич  
МАКАРОВ Владимир Анатольевич  
ЧЕСНОКОВ Сергей Сергеевич*

**ФИЗИКА. ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В  
УНИВЕРСИТЕТЫ**

Редактор *Л.П. Геворкян*

Оригинал-макет: *И.В. Шутов*

Оформление переплета: *А.Ю. Алехина*

Подписано в печать 05.12.05. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 34. Уч.-изд. л. 37,4. Тираж 2500 экз.  
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерperiодика»  
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90  
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;  
<http://www.fml.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ»  
140010, г. Люберцы, Московская обл., Октябрьский пр-т, 403

ISBN 978-5-9221-0652-8



УДК 53(075.3)

ББК 22.3

Д 72

Драбович К.Н., Макаров В.А., Чесноков С.С. **Физика. Практический курс для поступающих в университеты.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 544 с. — ISBN 978-5-9221-0652-8.

Пособие предназначено для учащихся выпускных классов средних школ с углубленным изучением физики и математики. Его основу составляют задачи по физике, предлагавшиеся в течение последних 20 лет абитуриентам факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова. Материал разбит по темам в соответствии с программой вступительных испытаний по физике для поступающих в МГУ. Каждая тема предваряется краткой сводкой базовых теоретических сведений, которые необходимы для решения задач и окажутся полезными при подготовке к вступительным экзаменам. Всего в сборник включено около 600 задач, свыше половины из них снабжены подробными решениями и методическими указаниями.

Для школьников, готовящихся к поступлению на физико-математические факультеты университетов. Рецензенты: Кафедра физики Специализированного учебно-научного центра МГУ (зав. кафедрой профессор В. И. Лобышев), профессор физического факультета МГУ П. Н. Николаев

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
Г л а в а 1. <b>Механика</b> . . . . .	
1.1. Кинематика . . . . .	9
1.2. Динамика . . . . .	35
1.3. Законы сохранения в механике . . . . .	64
1.4. Статика твердого тела . . . . .	90
1.5. Механика жидкостей и газов. . . . .	103
1.6. Механические колебания и волны. Звук . . . . .	126
Г л а в а 2. <b>Молекулярная физика и термодинамика</b> . . . . .	
2.1. Основы молекулярно-кинетической теории . . . . .	141
2.2. Элементы термодинамики . . . . .	160
2.3. Изменение агрегатного состояния вещества . . . . .	181
2.4. Поверхностное натяжение в жидкостях . . . . .	197
2.5. Тепловое расширение твердых тел и жидкостей . . . . .	207
Г л а в а 3. <b>Электродинамика</b> . . . . .	
3.1. Электростатика . . . . .	214
3.2. Постоянный ток . . . . .	246
3.3. Магнетизм . . . . .	290
3.4. Электромагнитная индукция . . . . .	303
3.5. Электромагнитные колебания и волны . . . . .	314
Г л а в а 4. <b>Оптика</b> . . . . .	
4.1. Геометрическая оптика . . . . .	334
4.2. Элементы физической оптики . . . . .	386

Г л а в а 5. А т о м и а т о м н о е я д р о . . . . .	401
Г л а в а 6. К о м б и н и р о в а н н ы е з а д а ч ы . . . . .	409
Г л а в а 7. З а д а ч ы 2 0 0 3 г о д а . . . . .	423
7.1. М е х а н и к а . . . . .	423
7.2. М о л е к у л я р н а я ф и з и к а и т е р м о д и н а м и к а . . . . .	430
7.3. Э л е к т р о д и н а м и к а . . . . .	432
7.4. О п т и к а . . . . .	435
Г л а в а 8. З а д а ч ы 2 0 0 4 г о д а . . . . .	437
8.1. М е х а н и к а . . . . .	437
8.2. М о л е к у л я р н а я ф и з и к а и т е р м о д и н а м и к а . . . . .	440
8.3. Э л е к т р о д и н а м и к а . . . . .	441
8.4. О п т и к а . . . . .	443
Г л а в а 9. З а д а ч ы 2 0 0 5 г о д а . . . . .	445
9.1. М е х а н и к а . . . . .	445
9.2. М о л е к у л я р н а я ф и з и к а и т е р м о д и н а м и к а . . . . .	447
9.3. Э л е к т р о д и н а м и к а . . . . .	449
9.4. О п т и к а . . . . .	452
О т в е т ы . . . . .	454
Г л а в а 10. Р е ш е н и я з а д а ч 2 0 0 3 — 2 0 0 5 г о д о в . . . . .	467
Л и т е р а т у р а . . . . .	538

## **Предисловие**

Настоящее пособие предназначено для учащихся выпускных классов средних школ с углубленным изучением физики и математики. Оно имеет целью помочь будущим абитуриентам самостоятельно подготовиться к вступительным экзаменам на естественнонаучные факультеты классических университетов, в первую очередь МГУ им. М. В. Ломоносова.

Целенаправленная подготовка к поступлению в университет должна органично сочетать как изучение теории, так и решение задач. Исходя из этого, мы сочли целесообразным дать в начале каждого раздела краткое изложение базовых теоретических сведений, представляющее собой по существу конспекты ответов на вопросы программы по физике для поступающих в МГУ. Надеемся, что предлагаемые нами конспекты помогут абитуриентам разумно структурировать изучаемый материал, подскажут, как построить план обсуждения теории по темам, предлагаемым в экзаменационных заданиях. Вместе с тем, необходимо иметь в виду, что основная цель устного вступительного экзамена состоит в выявлении глубины понимания абитуриентом сущности физических явлений и законов, умения истолковывать физический смысл величин и понятий. Поэтому приводимое здесь краткое изложение теории ни в коей мере не может заменить стабильные учебные пособия, рекомендованные в программе для поступающих в МГУ. Список этих пособий помещен в конце книги.

Необходимым условием успешной сдачи вступительного экзамена является также умение решать задачи по всем разделам программы. В связи с этим в книгу включены выбранные задачи по физике из числа предлагавшихся абитуриентам факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ им. М.В. Ломоносова на протяжении последних 20 лет. Всего в сборник включено около 600 задач различной сложности, которые сгруппированы по темам в полном соответствии с программой по физике для поступающих в МГУ. Задачи, предлагавшиеся в 2003 – 2005 годах, помещены в отдельные разделы в конце книги. На примере этих задач читатель сможет составить представление о возросшем в последние годы уровне требований к поступающим в МГУ. Для облегчения самостоятельной работы по подготовке к вступительным экзаменам свыше половины задач из этого сборника снабжены подробными решениями.

Кафедру, которой поручено готовить экзаменационные билеты по физике для поступающих на ВМК МГУ, на протяжении многих лет возглавлял профессор С. П. Стрелков. По инициативе С. П. Стрел-

кова на кафедре был создан коллектив педагогов, ведущих занятия по физике для студентов мехмата и ВМК. Заложенный в те годы под руководством С. П. Стрелкова стиль преподавания физики студентам-математикам сыграл определяющую роль в формировании уровня требований по физике к поступающим на математические факультеты МГУ. В комиссии по составлению экзаменационных заданий для абитуриентов ВМК долгие годы работали Б. Б. Буховцев, Л. Н. Капцов, В. Л. Кузнецов, Г. Я. Мякишев, С. Ю. Никитин, И. П. Николаев, Н. Б. Подымова, М. С. Полякова, С. В. Попов, А. В. Приезжев, С. С. Чесноков, Л. А. Шенявский, В. И. Шмальгаузен. Большое влияние на работу этого коллектива в последующем оказали заведующие кафедрой профессор С. А. Ахманов и профессор В. А. Макаров, профессора кафедры В. П. Кандидов, А. В. Андреев, А. А. Карабутов, доценты А. И. Гомонова, Ю. В. Пономарев, К. Н. Драбович, а также ряд других преподавателей, читающих лекции и ведущих семинарские занятия по физике на математических факультетах МГУ.

Со дня основания ВМК МГУ руководство факультета постоянно уделяло и уделяет большое внимание преподаванию физики. Усилиями деканов факультета академика А. Н. Тихонова, член-корреспондента РАН Д. П. Костомарова, академика Е. И. Моисеева, а также профессоров М. М. Хапаева, Е. В. Шикина, доцентов В. Г. Сушко и Б. И. Березина, занимавших в разные годы должности заместителей декана по учебной работе, сформировался весьма высокий уровень требований к обучению физике студентов ВМК.

Появление на свет этой книги во многом обязано подготовительным курсам факультета ВМК, на которых авторы читают лекции и проводят семинарские занятия по физике в течение ряда лет. Книга по существу явилась обобщением ряда учебных пособий, разработанных для слушателей курсов. Активную поддержку в подготовке и издании пособий по физике постоянно оказывал руководитель курсов доцент ВМК М. В. Федотов. Большинство задач, включенных в книгу, использовалось в качестве основного учебного материала на курсах, где прошло солидную апробацию. Немало способствовали улучшению книги ценные критические замечания, которые высказывали преподаватели подготовительных курсов Н. Н. Брандт, Н. В. Нетребко, А. Н. Оленин, Л. И. Пентегова, В. М. Петникова, Е. Б. Черепецкая, С. А. Шленов.

Подбор задач, включенных в книгу, по нашему мнению окажется наиболее полезным для абитуриентов, готовящихся к поступлению на математические факультеты классических университетов. С одной стороны, это связано с тем, что редактируя формулировки условий, мы добивались исчерпывающей ясности в постановке задач, не допускающей произвольного толкования и позволяющей построить однозначную математическую модель явления. С другой стороны, работу над предлагаемыми здесь задачами следует рассматривать как «нулевой уровень» обучения физике в системе физического образования, сложившейся к настоящему времени на ВМК МГУ. Абитуриенты, освоившие этот

нулевой уровень, будут в последующем иметь все шансы стать отлично успевающими студентами.

В заключение отметим, что наличие в книге различных по трудности задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах прошлых лет, делает, по нашему мнению, настоящее издание полезным не только поступающим в классические университеты, но и более широкому кругу учащихся.

*K. H. Драбович, B. A. Макаров, C. C. Чесноков*

# Глава 1

## МЕХАНИКА

### 1.1. Кинематика

#### Вопросы программы

1. Механическое движение. Относительность механического движения. Материальная точка. Система отсчета. Траектория. Вектор перемещения и его проекции. Путь. Скорость, сложение скоростей. Ускорение. Сложение ускорений.
2. Прямолинейное равномерное и равнопеременное движения. Зависимости скорости, координат и пути от времени.
3. Криволинейное движение. Равномерное движение по окружности. Угловая скорость. Период и частота обращения. Ускорение тела при движении по окружности. Тангенциальное и нормальное ускорения.
4. Свободное падение тел. Ускорение свободно падающего тела. Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Дальность и высота полета.
5. Поступательное и вращательное движение твердого тела.

#### Определения, понятия и законы

**Механическое движение. Относительность механического движения.** В механике изучается наиболее простая форма движения — механическое движение. Механическим движением называется изменение положения данного тела (или его частей) относительно других тел, происходящее с течением времени. Любое механическое движение является *относительным*. В природе не существует абсолютного движения или абсолютного покоя. Поэтому для описания механического движения необходимо указать конкретное тело, относительно которого наблюдается движение других тел. Это тело называют *телом отсчета*. Таким образом, механическое движение — это изменение положения тел относительно выбранного тела отсчета.

**Материальная точка** Для математического описания движения в кинематике используются различные модели физических тел. *Материальная точка* — простейшая модель тела, используемая для описания движения в тех случаях, когда размерами и формой тела можно пренебречь. Эта модель применима, когда 1) размеры тела малы по сравнению с характерными размерами области движения тела, или когда 2) твердое тело совершает поступательное движение (см. ниже). Положение *материальной* точки в пространстве определяется положением изображающей ее *геометрической* точки.

**Системой отсчета** называют тело отсчета, связанную с ним систему координат и прибор для измерения времени (часы). Положение материальной точки в пространстве определяется *тремя координатами*  $x, y, z$  (рис. 1.1.1).

Оно может быть задано также *радиус-вектором*  $\vec{r}$ , соединяющим начало координат с материальной точкой, причем

$$\vec{r} = \{x, y, z\}. \quad (1.1.1)$$

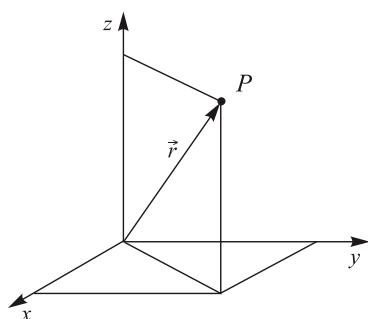


Рис. 1.1.1. Положение материальной точки  $P$  в пространстве

Единица для измерения длины, установленная в Международной системе единиц (СИ), называется *метром*. Приближенно он равен  $1/40\ 000\ 000$  части земного меридиана. По современному определению один метр — это расстояние, которое свет проходит в вакууме за  $1/299\ 792\ 458$

долю секунды. Таким образом, определение единицы расстояния связано с определением единицы измерения времени — *секундой*. Одна секунда приближенно равна  $1/86\ 400$  доле земных суток. Для точных измерений времени используются атомные часы. Определенная в СИ секунда равна  $9\ 192\ 631\ 770$  периодам излучения атома цезия при переходе между двумя уровнями сверхтонкой структуры основного состояния.

**Траектория.** При движении материальной точки конец радиус-вектора описывает в пространстве некоторую непрерывную линию, называемую *траекторией* точки. Уравнение, описывающее зависимость радиус-вектора движущейся точки от времени

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (1.1.2)$$

называется векторным кинематическим *уравнением движения точки*. Оно эквивалентно трем скалярным уравнениям движения:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (1.1.3)$$

Траектории одной и той же точки в разных системах отсчета имеют, вообще говоря, различную форму. Кинематические уравнения движения точки в разных системах отсчета также различны.

**Перемещение** материальной точки из положения 1 в положение 2 — это вектор

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad (1.1.4)$$

проведенный из начального положения точки в конечное (рис. 1.1.2). Проекции вектора перемещения на координатные оси могут быть выражены через разности координат его конца и начала:

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta y = y_2 - y_1, \quad \Delta z = z_2 - z_1. \quad (1.1.5)$$

Эти величины часто называют *перемещениями* точки вдоль соответствующих координатных осей.

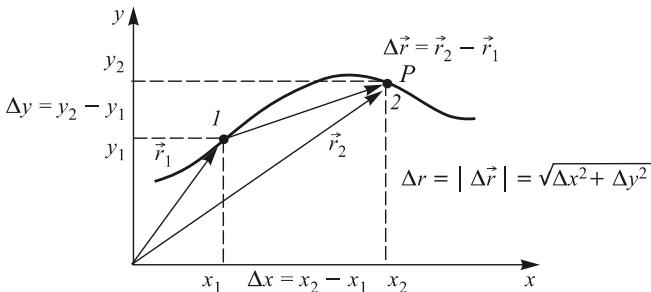


Рис. 1.1.2. Перемещение материальной точки  $P$  в пространстве

**Путь** точки равен сумме расстояний, пройденных ею вдоль траектории, и всегда является неотрицательной величиной. Пути, пройденные точкой за последовательные промежутки времени, складываются арифметически. Модуль  $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$  перемещения точки в общем случае не равен пути, пройденному точкой за данный промежуток времени. Эти величины совпадают только при движении точки по прямой в одном направлении.

**Скорость.** Средняя скорость точки в данной системе отсчета на интервале времени  $(t, t + \Delta t)$  есть вектор  $\vec{V}_{\text{ср}}$ , равный отношению вектора

перемещения  $\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$  к величине интервала времени  $\Delta t$  (рис. 1.1.3):

$$\vec{V}_{\text{cp}} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad (1.1.6)$$

Направление средней скорости совпадает с направлением вектора перемещения  $\Delta \vec{r}$ . Средняя скорость характеризует движение точки в течение всего промежутка времени  $\Delta t$ , для которого она определена.

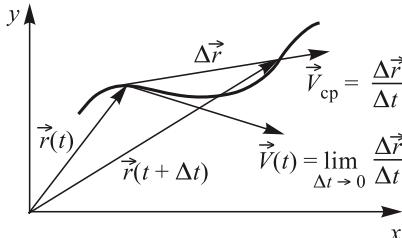


Рис. 1.1.3. Средняя и мгновенная скорость точки

На практике часто используют понятие средней путевой скорости, которое определяют как отношение пути, пройденного точкой, ко времени его прохождения. Важно иметь в виду, что величина (модуль) средней скорости в общем случае не совпадает со средней путевой скоростью. Они различны, например, при возвратно-поступательном движении по прямой, при криволинейном движении и т.п.

*Мгновенной скоростью* (или просто *скоростью*)  $\vec{V}(t)$  точки в данной системе отсчета в момент времени  $t$  называется предел средней скорости при неограниченном уменьшении интервала времени  $\Delta t$ :

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d \vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (1.1.7)$$

Компонентами вектора скорости являются производные по времени от компонент радиус-вектора точки:

$$\vec{V}(t) = \{\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\}. \quad (1.1.8)$$

Вектор скорости направлен *по касательной* к траектории точки.

**Сложение скоростей.** Важной задачей кинематики является установление связи между характеристиками движения точки *относительно разных систем отсчета*. Пусть одна система отсчета, которую мы будем называть подвижной, движется поступательно со скоростью  $\vec{V}_0$  относительно другой системы, которую будем называть неподвижной. Пусть скорость точки относительно подвижной системы отсчета равна  $\vec{V}'$ . Тогда скорость  $\vec{V}$  этой же точки относительно неподвижной системы находится из соотношения, называемого законом *сложения скоростей*:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_0 \quad (1.1.9)$$

**Ускорение.** Среднее ускорение точки в данной системе отсчета на интервале времени  $(t, t + \Delta t)$  есть вектор  $\vec{a}_{\text{ср}}$ , равный отношению вектора приращения скорости  $\Delta \vec{V} = \vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)$  на этом интервале к величине интервала времени  $\Delta t$  (рис. 1.1.4):

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}. \quad (1.1.10)$$

Мгновенным ускорением (или просто ускорением) точки  $\vec{a}(t)$  в момент времени  $t$  в данной системе отсчета называется предел среднего ускорения при стремлении интервала времени  $\Delta t$  к нулю:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}. \quad (1.1.11)$$

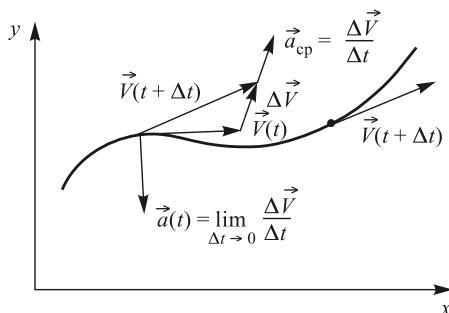


Рис. 1.1.4. Среднее и мгновенное ускорение материальной точки

**Сложение ускорений.** Рассмотрим две системы отсчета: неподвижную систему и систему, движущуюся поступательно относительно неподвижной с ускорением  $\vec{a}_0$ . Если ускорение точки относительно подвижной системы отсчета равно  $\vec{a}'$ , то ускорение  $\vec{a}$  этой же точки относительно неподвижной системы находится из соотношения, называемого законом *сложения ускорений*:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 \quad (1.1.12)$$

**Прямолинейное равномерное и равнопеременное движения.** По форме траектории движения делятся на прямолинейные и криволинейные. В первом случае траекторией движения точки в данной системе отсчета является прямая линия, во втором — некоторая кривая. Для описания *прямолинейного* движения удобно совместить координатную ось (например, ось  $OX$ ) с направлением, вдоль которого происходит движение.

*Равномерным* называется движение с постоянной по модулю скоростью. При *равномерном прямолинейном движении* точки мгновенная

скорость не зависит от времени и в каждой точке траектории направлена вдоль траектории. Средняя скорость за любой промежуток времени равна мгновенной скорости. Кинематическое уравнение движения принимает вид:

$$x(t) = x_0 + V_{x_0} t, \quad (1.1.13)$$

где  $x_0$  — начальная координата точки,  $V_{x_0}$  — проекция скорости точки на координатную ось  $OX$ .

*Равнопеременное прямолинейное движение* — это движение точки по прямой с постоянным по величине и по направлению ускорением. При этом среднее ускорение равно мгновенному ускорению. Если направление ускорения  $\vec{a}$  совпадает с направлением скорости точки, то движение называется *равноускоренным*, в противоположном случае — *равнозамедленным*.

При равнопеременном прямолинейном движении зависимость скорости и координат точки от времени выражается следующими кинематическими уравнениями:

$$V_x(t) = V_{x_0} + a_x t, \quad x(t) = x_0 + V_{x_0} t + \frac{a_x t^2}{2}. \quad (1.1.14)$$

Важно помнить, что величины, входящие в уравнения (1.1.13), (1.1.14), являются *алгебраическими*, т.е. могут иметь разные знаки в зависимости от того, сонаправлен или противонаправлен соответствующий вектор выбранному направлению координатной оси.

**Зависимости скорости, координат и пути от времени.** При решении задач и анализе результатов удобно представлять зависимости координаты и скорости тела от времени графически. Примеры таких представлений для прямолинейного равномерного и равнопеременного движений приведены на рис. 1.1.5 и 1.1.6 соответственно.

При построении графиков необходимо учитывать, что тангенс угла наклона касательной к кривой  $x = x(t)$  в какой-либо момент времени пропорционален скорости точки в этот момент времени, а тангенс угла наклона касательной к кривой  $V = V(t)$  пропорционален ускорению точки в данный момент. По графику зависимости  $a = a(t)$  можно найти изменение скорости за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ : оно равно площади под кривой  $a = a(t)$  в пределах от  $t_1$  до  $t_2$ . Аналогично, по графику зависимости  $V = V(t)$  можно найти изменение координаты точки за время  $(t_2 - t_1)$ .

**Криволинейное движение. Равномерное движение по окружности.** Простейшей моделью криволинейного движения является *равномерное движение по окружности*. В этом случае точка движется по окружности с постоянной по величине скоростью  $V$ . Положение точки удобно описывать углом  $\varphi$ , который составляет радиус-вектор точки с некоторой осью, например с осью  $OX$  (см. рис. 1.1.7).

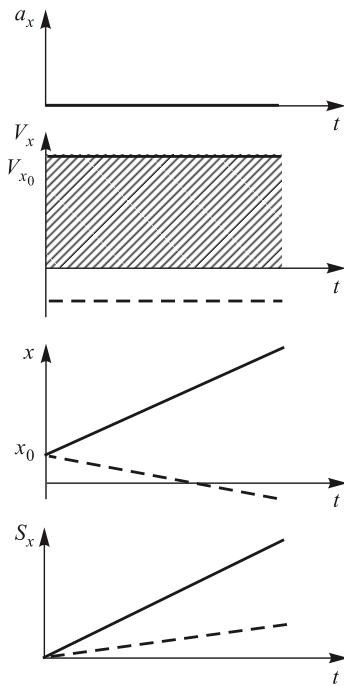


Рис. 1.1.5. Равномерное движение

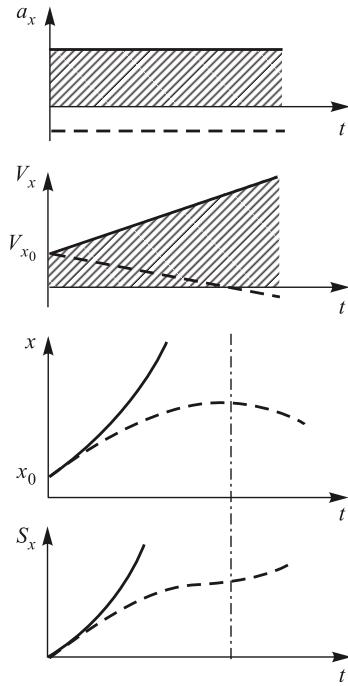


Рис. 1.1.6. Равнопеременное движение

**Угловая скорость. Период и частота обращения.** Величиной угловой скорости точки  $\omega$  при движении по окружности называют отношение приращения угла поворота  $\Delta\varphi$  ее радиуса-вектора ко времени  $\Delta t$ , за которое этот поворот произошел. *Периодом*  $T$  движения точки по окружности называют время, за которое точка совершает полный оборот. *Частота обращения*  $\nu$  — это величина, обратная периоду. Угловая скорость, частота и период обращения при равномерном движении по окружности связаны между собой соотношениями:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.1.15)$$

Линейная скорость  $V$  движения по окружности выражается через угловую скорость  $\omega$  и радиус окружности  $R$  по формуле

$$V = \omega R. \quad (1.1.16)$$

**Ускорение тела при движении по окружности.** При движении тела по окружности вектор скорости изменяется, поэтому у тела существует центростремительное ускорение, направленное по радиусу окружности к ее центру и по модулю равное

$$a = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R. \quad (1.1.17)$$

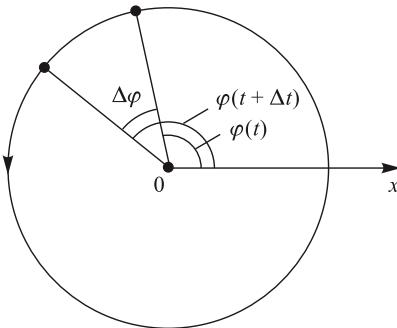


Рис. 1.1.7. Движение материальной точки по окружности

**Тангенциальное и нормальное ускорения.** При криволинейном движении точки часто бывает удобно разложить ее ускорение на две составляющие (рис. 1.1.8):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \vec{\tau} a_\tau + \vec{n} a_n, \quad (1.1.18)$$

где  $\vec{\tau}$  — единичный вектор, направленный по касательной к траектории в данной точке,  $\vec{n}$  — единичный вектор по нормали к траектории, направленный к центру кривизны. Составляющая  $\vec{a}_\tau$  вектора

ускорения, направленная по касательной к траектории, называется *тангенциальным* (касательным) ускорением. Тангенциальное ускорение характеризует изменение вектора скорости по модулю. Вектор  $\vec{a}_\tau$  направлен в сторону движения точки при возрастании ее скорости и в противоположную сторону — при убывании скорости. Составляющая  $\vec{a}_n$  вектора ускорения, направленная по нормали к траектории в данной точке, называется *нормальным* ускорением. Нормальное уско-

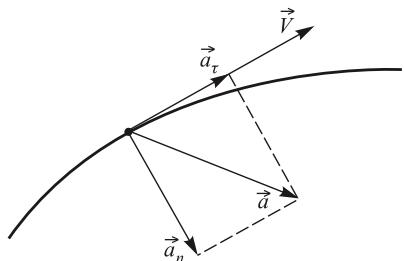


Рис. 1.1.8. Тангенциальная и нормальная составляющие вектора ускорения

рение характеризует изменение вектора скорости по направлению при криволинейном движении. Величины тангенциального и нормального ускорения вычисляются по формулам:

$$a_\tau = \dot{V} = \frac{d|\vec{V}|}{dt}, \quad a_n = \frac{V^2}{R}, \quad (1.1.19)$$

где  $R$  — радиус кривизны траектории в данной точке. При движении точки по окружности нормальное ускорение совпадает с центростремительным ускорением.

**Свободное падение тел. Ускорение свободно падающего тела.** Свободным падением называется движение, которое совершает тело только под действием притяжения Земли, без учета сопротивления воздуха. Ускорение  $\vec{g}$ , с которым движется вблизи поверхности Земли материальная точка, на которую действует только сила тяжести, называется *ускорением свободного падения*. Ускорение свободного падения не зависит от массы тела.

**Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Дальность и высота полета.** При описании движения тела у поверхности Земли удобно выбрать систему координат так, чтобы одна из координатных осей (обычно ось  $OX$ ) была направлена горизонтально, а другая (обычно  $OY$ ) — вертикально (рис. 1.1.9). Тогда движение по оси  $OX$  будет равномерным, а по оси  $OY$  — равнопеременным. В большинстве задач начало координат удобно совместить с точкой, откуда тело начинает движение.

Для тела, брошенного от поверхности Земли со скоростью  $V_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту, в системе координат, изображенной на рис. 1.1.9,

$$x(t) = V_0 t \cos \alpha, \quad y(t) = V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \quad (1.1.20)$$

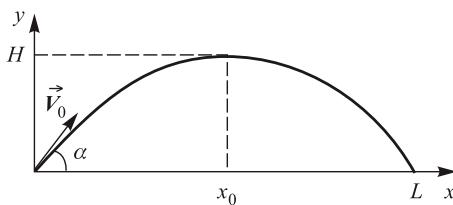


Рис. 1.1.9. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Исключая из этих соотношений время  $t$ , получаем *уравнение траектории тела*

$$y(x) = \tan \alpha \cdot x - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2, \quad (1.1.21)$$

которое является уравнением параболы. В точке с координатой

$$x_0 = \frac{V_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha \quad (1.1.22)$$

тело достигает наибольшей высоты

$$y(x_0) \equiv H = \frac{V_0^2}{2g} \sin^2 \alpha \quad (1.1.23)$$

Величины  $L = 2x_0 = \frac{2V_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha$  и  $H = \frac{V_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$  называются, соответственно, *дальностью* и *высотой полета*.

**Поступательное и вращательное движения твердого тела.** *Твердое тело* — это модель, применяемая в случаях, когда изменением формы и размеров тела при его движении можно пренебречь. Модель рассматривается как система материальных точек, расстояния между которыми остаются неизменными.

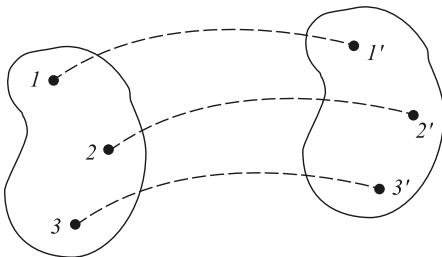


Рис. 1.1.10. Поступательное движение твердого тела

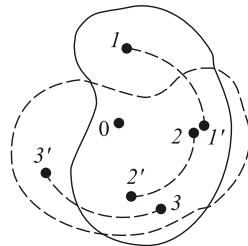


Рис. 1.1.11. Вращательное движение твердого тела

Простейшие модели движения твердого тела — это поступательное и вращательное движения. *Поступательным движением* твердого тела (рис. 1.1.10) называют такое движение, при котором траектории всех точек тела одинаковы.

При этом тело не поворачивается и каждая линия, соединяющая любые две точки тела, переносится параллельно самой себе. При поступательном движении все точки тела в данный момент времени имеют одинаковые скорости и ускорения. Поэтому, зная движение какой-то одной точки тела, мы можем однозначно определить движение всех его остальных точек.

*Вращательным движением* называется такое движение твердого тела, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой — оси вращения (рис. 1.1.11). Траектории всех точек лежат в плоскостях, параллельных друг другу и перпендикулярных оси вращения.

При таком движении различные точки тела за один и тот же промежуток времени проходят разные по длине пути. Линейная скорость  $v$  характеризует движение какой-либо одной точки тела, а не движение тела в целом. Поэтому для описания вращения тела используются такие величины, которые характеризуют движение всего тела, а не отдельных его точек. К этим величинам относятся: угол поворота  $\varphi$ , период вращения  $T$ , частота вращения  $n = 1/T$ , угловая скорость  $\omega = 2\pi/T$ .

## Указания по решению задач

При решении задач кинематики нужно в первую очередь выбрать систему координат, задать ее начало и положительные направления координатных осей, а также выбрать начало отсчета времени.

В случае прямолинейного движения следует пользоваться системой координат, состоящей из одной координатной оси  $OX$ , вдоль которой происходит движение. В более сложных случаях нужно применять декартову прямоугольную систему координат с взаимно перпендикулярными осями  $OX$  и  $OY$ , пересекающимися в точке  $O$ , являющейся началом отсчета.

Описания движения в различных системах координат эквивалентны между собой, поскольку при известном расположении двух систем координат относительно друг друга по величинам, найденным в одной системе, можно определить соответствующие величины в другой. При решении задач следует выбирать такую систему координат, в которой уравнения, описывающие движение, являются наиболее простыми.

При составлении кинематических уравнений очень важен вопрос о знаках перед модулями проекций  $\vec{r}$ ,  $\vec{V}$  и  $\vec{a}$ . Если координата отсчитывается в положительную сторону от начала  $O$ , то ей приписывается знак плюс. Проекции скоростей и ускорений считаются положительными, если направление соответствующей составляющей совпадает с положительным направлением оси, в противном случае они пишутся со знаком минус.

При исследовании движения нескольких тел рекомендуется пользоваться одной системой координат. В некоторых случаях бывает удобно связать систему координат с одним из движущихся тел и рассматривать движение остальных тел относительно избранного.

## Примеры решения задач

**1.1.1.** Пассажир метрополитена наблюдает отправление поезда. Находясь на платформе у головы поезда (у первого вагона), он замечает, что с момента отправления поезда этот вагон прошел мимо него за время  $\tau_1 = 5$  с. Считая движение поезда равноускоренным, найти, за какое время  $\tau_2$  мимо пассажира пройдет второй вагон.

**Решение:** Поместим начало координат в ту точку платформы, в которой находится наблюдатель, координатную ось  $OX$  направим в сторону движения поезда, отсчет времени будем вести с момента отправления поезда. Тогда координата головы поезда будет описываться следующим кинематическим уравнением:

$$x = \frac{at^2}{2},$$

где  $a$  — ускорение поезда. Обозначив через  $l$  длину одного вагона, можно записать:

$$l = \frac{a\tau_1^2}{2}, \quad 2l = \frac{a(\tau_1 + \tau_2)^2}{2}.$$

Исключая из этих соотношений ускорение поезда, получаем квадратное уравнение относительно  $\tau_2$ :  $\tau_2^2 + 2\tau_1\tau_2 - \tau_1^2 = 0$ , откуда  $\tau_2 = \tau_1(-1 \pm \sqrt{2})$ . Отбрасывая не имеющий физического смысла отрицательный корень, получаем ответ:

$$\tau_2 = \tau_1(\sqrt{2} - 1) \cong 2,1 \text{ с.}$$

Проведенное решение иллюстрируется графиком зависимости координаты начала первого вагона от времени, изображенным на рисунке. Построение подобных графиков при решении задач, посвященных кинематике прямолинейного движения, существенно облегчает их понимание.

**1.1.2.** В момент, когда опоздавший пассажир вышел на перрон вокзала, с ним поравнялось начало предпоследнего вагона уходящего поезда. Желая определить, на сколько он опоздал, пассажир измерил время  $t_1$ , за которое мимо него прошел предпоследний вагон, и время  $t_2$ , за которое мимо него прошел последний вагон. Оказалось, что  $t_1 = 9$  с, а  $t_2 = 8$  с. Считая, что поезд двигался равноускоренно и длина вагонов одинакова, найти, на какое время  $\tau$  пассажир опоздал к отходу поезда.

**Решение:** Обозначим через  $l$  длину вагона, а через  $a$  — ускорение поезда. В момент, когда пассажир вышел на перрон, поезд уже двигался равноускоренно в течение времени  $\tau$  и его перемещение составило величину  $x_1 = a\tau^2/2$ . За время  $\tau + t_1$  поезд переместился на расстояние  $x_2 = a(\tau + t_1)^2/2$ . Поскольку перемещение поезда за время  $t_1$  равно длине вагона, для предпоследнего вагона можно записать:

$$l = x_2 - x_1 = \frac{a(\tau + t_1)^2}{2} - \frac{a\tau^2}{2}.$$

Аналогично, для последнего вагона:

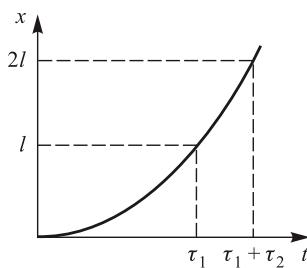
$$l = \frac{a(\tau + t_1 + t_2)^2}{2} - \frac{a(\tau + t_1)^2}{2} = \frac{at_2}{2}(2\tau + 2t_1 + t_2).$$

Из этих соотношений вытекает равенство:

$$(\tau + t_1)^2 - \tau^2 = t_2(2\tau + 2t_1 + t_2).$$

Выражая отсюда  $\tau$ , получаем ответ:

$$\tau = \frac{t_2^2 + 2t_1t_2 - t_1^2}{2(t_1 - t_2)} = 63,5 \text{ с.}$$



**1.1.3.** В кабине лифта высотой  $H = 2,5$  м, движущейся с ускорением  $a = 0,8 \text{ м/с}^2$ , направленным вниз, с высоты  $h = 0,5$  м от пола вертикально вверх бросают маленький шарик. С какой начальной скоростью  $V_0$  относительно лифта брошен шарик, если после броска он поднялся точно до потолка кабины?

**Решение:** При решении задачи будем использовать неподвижную систему координат, начало которой совместим с полом кабины лифта в момент броска шарика, а ось  $OY$  направим вертикально вверх. Обозначим через  $y_{\text{ш}}$  и  $V$  координату шарика и его скорость, через  $y_{\text{к}}$  и  $U$  координату потолка кабины и ее скорость. Пусть скорость кабины в момент броска равна  $U_0$  и направлена вверх (ниже мы убедимся в том, что ни от величины, ни от направления скорости кабины в момент броска ответ не зависит, но для ясности рассуждений введем на данном этапе решения эту скорость). Для координат и скоростей шарика и потолка кабины справедливы кинематические уравнения:

$$y_{\text{ш}}(t) = h + (V_0 + U_0)t - \frac{gt^2}{2}, \quad V(t) = V_0 + U_0 - gt,$$

$$y_{\text{к}}(t) = H + U_0 t - \frac{at^2}{2}, \quad U(t) = U_0 - at,$$

первые два из которых записаны при стандартном предположении о том, что сопротивлению воздуха при движении шарика можно пренебречь. Начало отсчета времени совпадает с моментом броска шарика.

Согласно условию задачи, шарик после броска поднимается точно до потолка кабины. Обозначив этот момент времени через  $t_0$ , можно записать следующие соотношения:

$$y_{\text{ш}}(t_0) = y_{\text{к}}(t_0), \quad V(t_0) = U(t_0).$$

Второе соотношение дает  $t_0 = V_0/(g - a)$ . Подставляя найденное  $t_0$  в первое соотношение, после несложных преобразований находим ответ:

$$V_0 = \sqrt{2(H - h)(g - a)} = 6 \text{ м/с.}$$

**1.1.4.** Жонглер бросает вертикально вверх шарики с одинаковой скоростью через равные промежутки времени. При этом пятый шарик жонглер бросает в тот момент, когда первый шарик возвращается в точку бросания. Найти максимальное расстояние  $S_{\max}$  между первым и вторым шариками, если начальная скорость шариков  $V_0 = 5 \text{ м/с}$ . Ускорение свободного падения принять равным  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Сопротивлением воздуха пренебречь.

**Решение:** Для описания движения шариков выберем координатную систему с началом в точке бросания, направив ось  $OY$  вертикально вверх. Время будем отсчитывать с момента бросания первого шарика.

Тогда координаты первого и второго шариков будут описываться следующими кинематическими уравнениями:

$$y_1 = V_0 t - \frac{gt^2}{2}, \quad y_2 = V_0(t - T) - \frac{g(t - T)^2}{2},$$

где  $T$  — промежуток времени между бросаниями шариков. Поскольку полное время полета каждого из шариков  $t_0 = \frac{2V_0}{g}$ , а по условию задачи жонглер бросает пятый шарик в момент, когда первый шарик возвращается в исходную точку,  $T = \frac{t_0}{4} = \frac{V_0}{2g}$ , причем первый и второй шарик находятся в полете одновременно при  $T \leq t \leq 4T$  (см. рисунок, на котором сплошными линиями изображены зависимости координат шариков от времени). Расстояние между первым и вторым шариками

$$S = |y_1 - y_2| = |V_0 T + \frac{gT^2}{2} - gTt| \quad \text{при } T \leq t \leq 4T$$

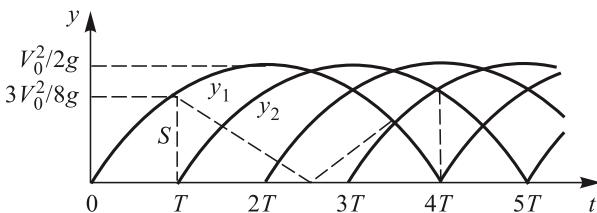
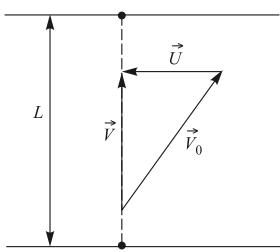


График зависимости этой величины от времени изображен на рисунке штриховой линией. Анализ последнего выражения показывает, что оно достигает максимума при  $t = T$  и при  $t = 4T$ , т.е. в момент бросания второго шарика и в момент возвращения первого шарика в исходную точку. Подставляя в выражение для расстояния между шариками любое из этих значений времени, получаем ответ:  $S_{\max} = \frac{3V_0^2}{8g} = 0,9375$  м.

**1.1.5.** Пловец переплывает реку шириной  $L$  по прямой, перпендикулярной берегу, и возвращается обратно, затратив на весь путь время

$t_1 = 4$  мин. Проплывая такое же расстояние  $L$  вдоль берега реки и возвращаясь обратно, пловец затрачивает время  $t_2 = 5$  мин. Во сколько раз  $\alpha$  скорость пловца относительно воды превышает скорость течения реки?

**Решение:** Согласно закону сложения скоростей скорость пловца относительно неподвижной системы отсчета  $\vec{V}$  равна векторной сумме его скорости относительно воды  $\vec{V}_0$  и скорости течения  $\vec{U}$ :  $\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{U}$ . В первом



случае, когда пловец пересекает реку по прямой, перпендикулярной берегу,  $\vec{V} \perp \vec{U}$  и векторы  $\vec{V}$ ,  $\vec{V}_0$  и  $\vec{U}$  образуют прямоугольный треугольник (см. рисунок). Следовательно, в этом случае  $V = \sqrt{V_0^2 - U^2}$  и время, за которое пловец переплыает реку туда и обратно,

$$t_1 = \frac{2L}{\sqrt{V_0^2 - U^2}}.$$

Во втором случае, когда пловец плывет вдоль берега, его скорость в неподвижной системе отсчета равна  $V_1 = V_0 + U$  при движении по течению и  $V_2 = V_0 - U$  при движении против течения. Следовательно, время, которое пловец затрачивает для того, чтобы проплыть вдоль берега расстояние  $L$  и вернуться обратно,

$$t_2 = \frac{L}{V_0 + U} + \frac{L}{V_0 - U} = \frac{2LV_0}{V_0^2 - U^2}.$$

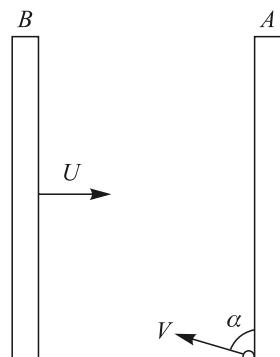
Разрешая полученную систему уравнений относительно  $V_0$  и  $U$ , находим:

$$V_0 = \frac{2Lt_2}{t_1^2}, \quad U = \frac{2L}{t_1^2} \sqrt{t_2^2 - t_1^2}.$$

Ответ:  $\alpha = \frac{V_0}{U} = \frac{t_2}{\sqrt{t_2^2 - t_1^2}} = \frac{5}{3}$ .

**1.1.6.** Шарик пренебрежимо малой массы начинает скольжение в горизонтальной плоскости от неподвижной доски  $A$  со скоростью  $V = 2$  м/с под углом  $\alpha = 30^\circ$  к ней. Доска  $B$ , параллельная доске  $A$ , движется перпендикулярно плоскости доски с некоторой скоростью  $U$ . Найти  $U$ , если время движения шарика от доски  $A$  до встречи с доской  $B$  в  $k = 2$  раза превышает время его движения обратно. Удар шарика о доску  $B$  считать упругим. Трением пренебречь.

**Решение:** Пусть расстояние между досками в начальный момент равно  $L$ . По закону сложения скоростей величина нормальной к доске  $B$  составляющая относительной скорости шарика до удара равна  $V_{\perp \text{отн}} = V \sin \alpha + U$ . Следовательно, время движения шарика до удара о доску  $B$   $t_1 = \frac{L}{V \sin \alpha + U}$ . В системе отсчета, связанной с доской  $B$ , скорость шарика после упругого удара остается той же самой по величине, а нормальная к доске составляющая скорости меняет направление на противоположное:  $V'_{\perp \text{отн}} = -V \sin \alpha - U$ . Переходя в неподвижную систему отсчета по формуле  $V'_\perp = V'_{\perp \text{отн}} - U$ , находим, что после удара величина со-

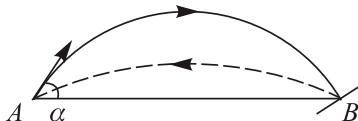


ставляющей скорости шарика, нормальной к доске  $B$ , станет равной  $V \sin \alpha + 2U$ . Поэтому время обратного движения шарика до доски  $A$  составит

$$t_2 = \frac{L - Ut_1}{V \sin \alpha + 2U}.$$

Учитывая, что  $L - Ut_1 = Vt_1 \sin \alpha$  и используя условие  $t_1 = kt_2$ , получаем ответ:  $U = \frac{(k-1)V \sin \alpha}{2} = 0,5 \text{ м/с}$ .

**1.1.7.** Шарик, брошенный из точки  $A$  под углом  $\alpha$  к горизонту, в точке  $B$ , лежащей на одной горизонтали с точкой  $A$ , ударяется огладкую площадку, наклоненную к горизонту. После упругого удара



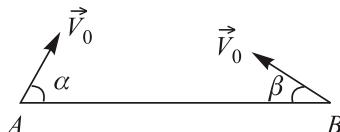
шарик возвращается в исходную точку  $A$ , затратив на полет в  $k = \sqrt{3}$  раз меньшее время. Найти угол  $\alpha$ , под которым тело было брошено из точки  $A$ .

**Решение:** Дальность полета тела, брошенного под углом  $\alpha$  к горизонту со скоростью  $V_0$ , равна  $L = V_0^2 \sin 2\alpha / g$ , а время полета  $t_{AB} = 2V_0 \sin \alpha / g$ . Поскольку модуль скорости шарика при упругом ударе не изменяется, а дальность полета шарика в обе стороны одинакова, справедливо равенство:

$$\frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\beta}{g},$$

где  $\beta$  — угол, под которым направлена скорость шарика после удара. Отсюда следует, что

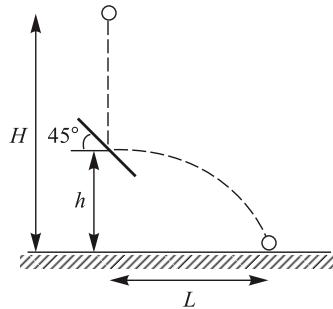
$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta \quad \text{при} \quad \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \beta < \frac{\pi}{2}$$



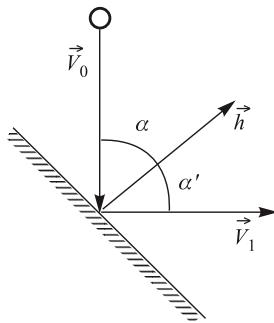
Этому уравнению удовлетворяют два корня:  $\beta = \alpha$  и  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ , причем условию задачи соответствует второй корень. Следовательно,  $\sin \beta = \cos \alpha$ . Поскольку отношение времен полета  $k = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ , ответ имеет вид:

$$\alpha = \operatorname{arctg} k = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = 60^\circ.$$

**1.1.8.** Маленький шарик падает с высоты  $H = 2$  м без начальной скорости. На высоте  $h = 0,5$  м над землей шарик испытывает абсолютно упругий удар о гладкую закрепленную площадку, наклоненную под углом  $45^\circ$  к горизонту. Найти дальность полета шарика  $L$ .



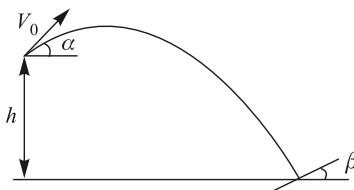
**Решение:** Рассмотрим соударение шарика с закрепленной подставкой. При абсолютно упругом ударе кинетическая энергия шарика сохраняется, откуда следует, что модуль скорости шарика после удара  $\vec{V}_1$  равен модулю его скорости перед ударом  $\vec{V}_0$ . При этом нормальная площадке составляющая скорости шарика после удара меняет направление на противоположное, а касательная площадке составляющая скорости остается неизменной. Следовательно, при упругом соударении с неподвижной площадкой угол  $\alpha'$  между нормалью к площадке  $\vec{n}$  и скоростью после удара  $\vec{V}_1$  равен углу  $\alpha$  между нормалью и скоростью перед ударом  $\vec{V}_0$ . По условию задачи  $\alpha = 45^\circ$ , поэтому  $\vec{V}_1 \perp \vec{V}_0$  и скорость шарика непосредственно после удара направлена горизонтально.



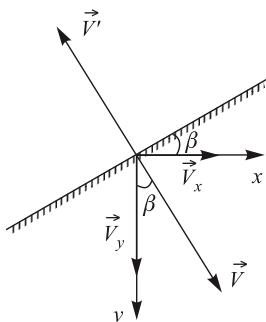
По закону сохранения энергии, при падении шарика с высоты  $H - h$  величина его скорости  $V_0 = \sqrt{2g(H - h)}$ . Падение шарика после соударения с площадкой происходит с начальной горизонтальной скоростью  $V_1 = V_0$ . Дальность полета шарика равна  $L = V_1 \tau$ , где  $\tau = \sqrt{2h/g}$  – время падения с высоты  $h$ . Окончательно,  $L = 2\sqrt{h(H - h)} \cong 1,7$  м.

**1.1.9.** Шарик бросают с башни высотой  $h = 4,9$  м под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту со скоростью  $V_0 = 7$  м/с. При падении на землю

шарик упруго ударяется о наклонную плоскость и возвращается в точку бросания по той же траектории. Какой угол  $\beta$  составляет наклонная плоскость с горизонтом? Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .



**Решение:** Для того, чтобы после упругого удара о наклонную плоскость шарик вернулся в точку бросания по той же траектории, что и при падении, нужно, чтобы плоскость была расположена перпендикулярно его скорости  $\vec{V}$  непосредственно перед ударом. Поэтому угол  $\beta$  между наклонной плоскостью и горизонтом равен углу между скоростью шарика в момент падения  $\vec{V}$  и вертикалью (см. рисунок). Обозначив через  $V_x$  величину горизонтальной составляющей скорости

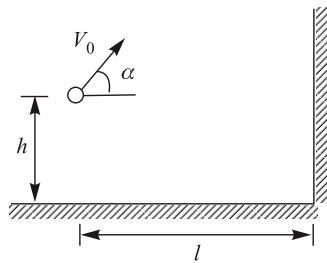


шарика, имеем:  $\sin \beta = V_x / V$ , причем  $V_x = V_0 \cos \alpha$ . Для определения величины скорости тела при падении на наклонную плоскость воспользуемся законом сохранения энергии, согласно которому

$$\frac{mV^2}{2} = mgh + \frac{mV_0^2}{2}.$$

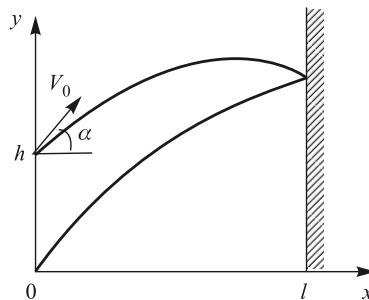
Отсюда  $V = \sqrt{V_0^2 + 2gh}$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:  $\beta = \arcsin \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 + 2gh/V_0}} = \arcsin 0,5 = 30^\circ$ .

**1.1.10.** Мальчик бросает мяч в направлении вертикальной стены так, чтобы мяч, отскочив от стены, упал точно к его ногам. Каков должна быть начальная скорость мяча  $V_0$ , если бросок производится с высоты  $h = 1,5 \text{ м}$  под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту? Расстояние от



мальчика до стены  $l = 6$  м. Удар мяча о стену считать абсолютно упругим, ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**Решение:** При решении задачи используем стандартное предположение о том, что сопротивление воздуха при движении мяча можно не учитывать. Для того, чтобы мяч, отскочив от стены, упал точно к ногам мальчика, траектория мяча должна иметь вид, изображенный на рисунке. При упругом ударе о неподвижную стенку нормальная к стенке составляющая скорости мяча меняет направление на противоположное, оставаясь такой же по величине; касательная к стенке составляющая скорости мяча не меняется. В результате угол между нормалью к стенке и скоростью мяча перед ударом оказывается равным по величине углу между нормалью к стенке и скоростью мяча после удара.



Обозначим через  $t_0$  время полета мяча. За это время он проходит по горизонтали путь  $2l$ . Учитывая, что горизонтальная составляющая скорости мяча равна  $V_0 \cos \alpha$  и при полете не меняется по величине, можно записать равенство

$$2l = V_0 \cos \alpha \cdot t_0,$$

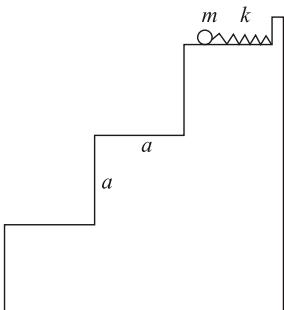
откуда время полета мяча  $t_0 = 2l / (V_0 \cos \alpha)$ . С другой стороны, по условию задачи в момент времени  $t_0$  вертикальная координата мяча должна обратиться в нуль, т.е.

$$y(t_0) = h + V_0 \sin \alpha \cdot t_0 - \frac{gt_0^2}{2} = 0.$$

Подставляя сюда найденное  $t_0$ , после несложных преобразований находим ответ:

$$V_0 = \frac{l}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{2g}{h + 2l \tan \alpha}} \approx 10 \text{ м/с.}$$

**1.1.11.** Лестница состоит из трех одинаковых гладких ступенек ширины  $a = 30 \text{ см}$  и такой же высоты. На верхней ступеньке расположена в плоскости рисунка невесомая пружина жесткостью  $k = 30 \text{ Н/м}$ , правым концом прикрепленная к неподвижной стенке, а левым — упирающаяся в лежащий на ступеньке маленький шарик массой  $m = 100 \text{ г}$ .

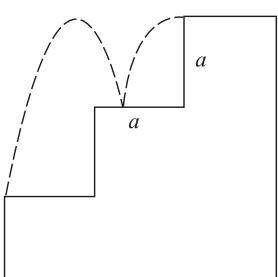


Шарик сдвигают вправо, сжимая пружину, после чего отпускают без начальной скорости. До какой максимальной величины  $\Delta l_{\max}$  можно сжать пружину, чтобы выпущенный шарик по одному разу коснулся средней и нижней ступенек? Удар шарика о ступеньку считать абсолютно упругим, трение и сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**Решение:** Сжатая пружина сообщает шарику начальную скорость  $V_0$ , величина которой может быть найдена из закона сохранения энергии:

$$\frac{k(\Delta l)^2}{2} = \frac{mV_0^2}{2}.$$

Отсюда  $V_0 = \Delta l \sqrt{k/m}$ , т.е. начальная скорость шарика пропорциональна сжатию пружины. Покинув с такой скоростью верхнюю ступеньку,



шарик летит по параболической траектории до соударения с другими ступеньками. При упругом ударе о каждую из них горизонтальная составляющая скорости шарика не изменяется, а вертикальная составляющая скорости шарика меняет направление на противоположное, сохраняя свою величину. В результате угол между нормалью к ступеньке и скоростью шарика перед соударением оказывается равным по величине углу между нормалью к ступеньке и скоростью шарика после соударения; модуль скорости шарика после соударений не изменяется. По условию задачи максимальная начальная скорость шарика отвечает случаю, когда шарик отскакивает от средней ступеньки и попадает на самый край нижней ступеньки. Соответствующая траектория шарика изображена на рисунке штриховой линией.

Заметим, что если

начальная скорость шарика превысит данное значение, он пролетит над нижней ступенькой, не коснувшись ее. Дальнейшее увеличение начальной скорости шарика может привести к тому, что он не попадет и на среднюю ступеньку.

Время падения шарика, не имеющего вертикальной скорости, с высоты  $a$  равно  $t_1 = \sqrt{2a/g}$ . Такое же время шарик будет подниматься до уровня верхней ступеньки после соударения со средней ступенькой. Наконец, падать с высоты верхней ступеньки до удара о нижнюю ступеньку шарик будет в течение времени  $t_2 = \sqrt{4a/g}$ . Таким образом, полное время движения шарика с момента, когда он покидает верхнюю ступеньку, до соударения с нижней ступенькой равно:

$$t_0 = 2t_1 + t_2 = 2\sqrt{\frac{a}{g}} (\sqrt{2} + 1).$$

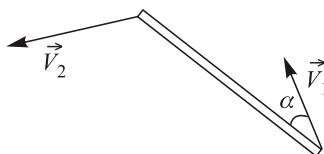
За это время шарик смешается по горизонтали на расстояние  $2a$ . Следовательно,

$$2a = 2V_0 \sqrt{\frac{a}{g}} (\sqrt{2} + 1).$$

Объединяя последнее равенство с выписанным соотношением между начальной скоростью шарика и сжатием пружины, получаем ответ:

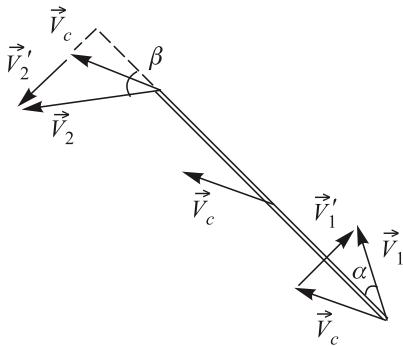
$$\Delta l_{\max} = \sqrt{\frac{mg a}{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \cong 4,14 \text{ см.}$$

**1.1.12.** Стержень длиной  $l = 0,85$  м движется в горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени скорости концов стержня равны  $V_1 = 1$  м/с и  $V_2 = 1,5$  м/с, причем скорость первого из них направлена под углом  $\alpha = 30^\circ$  к стержню. Какова угловая скорость  $\omega$  вращения стержня вокруг его центра?



**Решение:** Поскольку скорости концов стержня в неподвижной системе отсчета различны, он совершает относительно этой системы сложное движение, представляющее собой сумму поступательного и вращательного движений. При этом скорости разных точек стержня различны. Для определения угловой скорости вращения стержня удобно перейти в систему отсчета, поступательно движущуюся вместе с его центром. С этой целью нужно вначале определить скорость центра стержня относительно неподвижной системы отсчета.

Из геометрических соображений ясно, что в данной системе радиус-вектор центра стержня равен полусумме радиус-векторов его



концов:  $\vec{r}_c = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$ . Дифференцирование этого равенства по времени дает нам аналогичное соотношение для скорости центра стержня:  $\vec{V}_c = \frac{1}{2}(\vec{V}_1 + \vec{V}_2)$ . Согласно закону сложения скоростей скорости концов стержня в системе отсчета, связанной с его центром, выражаются следующим образом (см. рисунок):

$$\vec{V}'_1 = \vec{V}_1 - \vec{V}_c = \frac{1}{2}(\vec{V}_1 - \vec{V}_2), \quad \vec{V}'_2 = \vec{V}_2 - \vec{V}_c = \frac{1}{2}(\vec{V}_2 - \vec{V}_1).$$

Из постоянства длины стержня вытекает, что проекции скоростей его концов на направление стержня в каждый момент времени совпадают:

$$V_1 \cos \alpha = V_2 \cos \beta$$

Поэтому  $\vec{V}'_1$  и  $\vec{V}'_2$  перпендикулярны стержню, причем  $V'_1 = V'_2 = \omega \cdot \frac{l}{2}$ .

Следовательно,

$$\omega = \frac{|\vec{V}_2 - \vec{V}_1|}{l} = \frac{V_1 \sin \alpha + V_2 \sin \beta}{l}$$

Учитывая, что  $\cos \beta = \frac{V_1}{V_2} \cos \alpha$ , получаем ответ:

$$\omega = \frac{1}{l} \left( V_1 \sin \alpha + \sqrt{V_2^2 - V_1^2 \cos^2 \alpha} \right) \cong 2 \text{ рад/с.}$$

## Задание для самостоятельной работы

**1.1.13.** Пуля, летящая со скоростью  $V = 400$  м/с, попадает в земляной вал и проникает в него на расстояние  $l = 20$  см. Какова скорость  $V_1$  пули на расстоянии от поверхности земли, равном  $l_1 = 10$  см? Силу сопротивления, действующую на пулю в земле, считать постоянной.

**1.1.14.** Пассажир, стоящий на перроне, заметил, что первый вагон электропоезда, приближающегося к станции, прошел мимо него в течение  $t_1 = 4$  с, а второй — в течение  $t_2 = 5$  с. Определить ускорение поезда  $a$ , если передний конец поезда остановился на расстоянии  $L = 75$  м от пассажира. Движение поезда считать равнозамедленным.

**1.1.15.** Нарушитель правил дорожного движения промчался на автомобиле мимо поста ГАИ со скоростью  $V_1 = 108$  км/час. Спустя  $t_1 = 20$  с вслед за нарушителем отправился на мотоцикле инспектор ГАИ и, разгоняясь равнousкоренно в течение  $t_2 = 40$  с, набрал скорость  $V_2 = 144$  км/час. На каком расстоянии  $S$  от поста ГАИ инспектор догонит нарушителя, двигаясь после разгона со скоростью  $V_2$ ?

**1.1.16.** Ракета запущена вертикально вверх с поверхности Земли и на участке разгона имела постоянное ускорение  $a = 19,6$  м/с<sup>2</sup>. Какое время  $t_0$  падала ракета с ускорением  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup> после достижения наибольшей в полете высоты, если на участке разгона движение продолжалось в течение времени  $\tau = 1$  мин?

**1.1.17.** Подъемный кран опускает бетонную плиту с постоянной скоростью  $V = 1$  м/с. Когда плита находилась на расстоянии  $h = 4$  м от поверхности земли, с нее упал небольшой камень. Каков промежуток времени  $\tau$  между моментами, в которые камень и плита достигли земли? Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, толщиной плиты по сравнению с  $h$  пренебречь.

**1.1.18.** Ракета запущена вертикально вверх и во время работы двигателя имела постоянное ускорение  $a = 5g$ . Спустя  $t_0 = 1$  мин после старта двигатель ракеты отключился. Через какое время  $\tau$  после отключения двигателя ракета упала на землю? Сопротивление воздуха не учитывать.

**1.1.19.** Шарик бросают вертикально вверх со скоростью  $V_0 = 5$  м/с. Пролетев расстояние  $h = 1,05$  м, он упруго ударяется о потолок и падает вниз. Через какое время  $\tau$  после начала движения шарик упадет на пол, если расстояние от пола до потолка  $H = 2,25$  м? Ускорение свободного падения принять равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**1.1.20.** Два тела начали падать с одной и той же высоты с интервалом  $t_0 = 5$  с. Через какое время  $\tau$  после начала падения второго тела расстояние между телами будет  $d = 200$  м? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, сопротивление воздуха не учитывать.

**1.1.21.** Два тела скользят навстречу друг другу по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол  $\alpha = 2 \cdot 10^{-4}$  рад. В момент, когда расстояние между ними  $S = 130$  см, скорость тела, движущегося вверх, составляет  $V_1 = 5$  см/с, а скорость тела, движущегося вниз —  $V_2 = 1,5$  см/с. Какие пути  $S_1$  и  $S_2$  пройдут тела до места встречи? Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, трением тел о плоскость пренебречь.

**1.1.22.** Мяч брошен с поверхности земли под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту с начальной скоростью  $V = 10$  м/с в направлении вертикальной стенки, расстояние до которой  $l = 7$  м. На какой высоте  $h$  мяч ударится о стенку? Сопротивлением воздуха пренебречь.

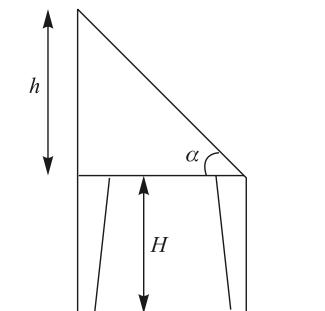
**1.1.23.** Человек бросает камень через забор высотой  $H = 2,5$  м. На какое максимальное расстояние  $S$  он может отойти от забора, если бросок производится с высоты  $h = 2$  м от поверхности земли со скоростью  $V_0 = 5$  м/с под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту? Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**1.1.24.** Под каким углом  $\alpha$  к горизонту нужно бросить камень, чтобы отношение максимальной высоты подъема камня к дальности его полета составило  $n = \sqrt{3}/4$ ?

**1.1.25.** Снаряд, вылетевший из пушки под углом  $\alpha_1 = 15^\circ$  к горизонту, падает на расстоянии  $L_1 = 5$  км. Какой будет дальность полета снаряда  $L_2$  при угле вылета  $\alpha_2 = 45^\circ$ ? Сопротивлением воздуха пренебречь.

**1.1.26.** Пушка делает два выстрела с интервалом  $\tau = 10$  с. Каким будет расстояние  $l$  между снарядами спустя время  $t = \tau$  после второго выстрела? Скорость снаряда при выстреле  $V_0 = 300$  м/с, ствол пушки направлен под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту. Ускорение свободного падения принять  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>, силу сопротивления воздуха при движении снарядов не учитывать.

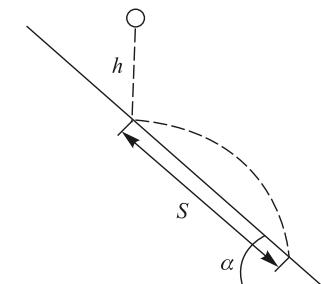
**1.1.27.** Брускок соскальзывает без трения с наклонной плоскости высотой  $h = 1$  м и с углом при основании  $\alpha = 45^\circ$ , а затем свободно



падает на пол с высоты  $H = 1$  м. Найти угол  $\beta$  между направлением скорости и вертикалью в момент удара бруска о пол. Сопротивлением воздуха пренебречь.

**1.1.28.** С вершины холма бросили камень под углом к горизонту со скоростью  $V_0 = 10$  м/с. В момент падения камня на склон холма величина угла между направлением скорости камня и горизонтом составила  $\beta = 60^\circ$ , а разность высот точек бросания и падения  $\Delta h = 5$  м. Найти угол  $\alpha$  между направлением начальной скорости камня  $V_0$  и горизонтом. Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

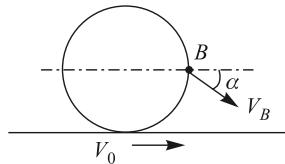
**1.1.29.** Маленький шарик падает с высоты  $h = 50$  см на наклонную плоскость, составляющую угол  $\alpha = 45^\circ$  с горизонтом. Найти расстояние



$S$  между точками первого и второго соударений шарика с наклонной плоскостью. Соударения считать абсолютно упругими, сопротивлением воздуха пренебречь.

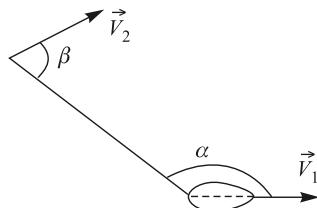
**1.1.30.** Самолет летит по дуге окружности радиуса  $R = 1$  км, сохранив одну и ту же высоту  $h = l,5$  км. С интервалом времени  $\tau = 10,5$  с ( $\cong 10\pi/3$  с) с него сбрасывают два мешка. На каком расстоянии  $S$  друг от друга упадут на землю эти мешки, если скорость самолета  $V = 100$  м/с? Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, сопротивлением воздуха пренебречь.

**1.1.31.** Колесо катится без проскальзывания по ленте транспортера, движущейся горизонтально со скоростью  $V_0 = 1$  м/с, в направлении



движения ленты. Известно, что относительно неподвижного наблюдателя скорость  $\vec{V}_B$  точки В, находящейся на ободе колеса на его горизонтальном диаметре, составляет с горизонтом угол  $\alpha = 30^\circ$ . Найти скорость  $V$  центра колеса относительно неподвижного наблюдателя.

**1.1.32.** Катер, движущийся со скоростью  $V_1 = 30$  км/час, буксирует спортсмена на водных лыжах. Трос, за который держится спортсмен,



составляет с направлением движения катера угол  $\alpha = 150^\circ$ . Направление движения спортсмена образует с тросом угол  $\beta = 60^\circ$ . Чему равна величина скорости спортсмена  $\vec{V}_2$  в этот момент времени?

## **1.2. Динамика**

### **Вопросы программы**

1. Взаимодействие тел. Первый закон Ньютона. Понятие об инерциальных и неинерциальных системах отсчета. Принцип относительности Галилея.
2. Сила. Силы в механике. Сложение сил, действующих на материальную точку.
3. Инертность тел. Масса. Плотность.
4. Второй закон Ньютона. Единицы измерения силы и массы.
5. Третий закон Ньютона.
6. Закон всемирного тяготения. Гравитационная постоянная. Сила тяжести. Зависимость силы тяжести от высоты.
7. Силы упругости. Понятие о деформациях. Закон Гука. Модуль Юнга.
8. Силы трения. Сухое трение: трение покоя и трение скольжения. Коэффициент трения. Вязкое трение.
9. Применение законов Ньютона к поступательному движению тел. Вес тела. Невесомость. Перегрузки.
10. Применение законов Ньютона к движению материальной точки по окружности. Движение искусственных спутников. Первая космическая скорость.

### **Определения, понятия и законы**

*В динамике* изучается влияние взаимодействия между телами на их механическое движение. Основная задача динамики состоит в определении положения тел и их скоростей в произвольный момент времени по известным начальным положениям тел, их начальным скоростям и силам, действующим на тела.

**Взаимодействие тел.** Механическое действие одного тела на другое возможно как при непосредственном соприкосновении тел, так и на расстоянии. Действие одного тела на другое в механике проявляется в деформации взаимодействующих тел и в возникновении у тел ускорений.

Свободным (изолированным) телом называется тело, на которое не действуют какие-либо другие тела или поля, или тело, внешние воздействия на которое уравновешены (скомпенсированы).

**Первый закон Ньютона. Понятие об инерциальных и неинерциальных системах отсчета.** Первый закон Ньютона постулирует существование особого класса систем отсчета. В этих системах отсчета свободное тело сохраняет состояние покоя или прямолинейного равномерного движения. Системы отсчета, в которых выполняется первый закон Ньютона, называются *инерциальными*. Особое значение инерциальных систем отсчета состоит в том, что в этих системах механические явления описываются наиболее просто.

Если существует хотя бы одна инерциальная система отсчета, то существует и бесконечное множество таких систем. Действительно, если в одной системе свободное тело движется с постоянной скоростью, то в любой другой системе отсчета, движущейся относительно первой с постоянной скоростью, это тело также будет иметь постоянную скорость.

Свободным можно считать тело, достаточно удаленное от других тел. Для того, чтобы выяснить, в какой степени данную систему можно считать инерциальной, нужно из этой системы наблюдать за свободным телом (например, за уединенной звездой). Чем ближе к нулю ускорение этого тела, тем больше оснований считать данную систему отсчета инерциальной.

Из известных в настоящее время систем отсчета наиболее близка к инерциальной гелиоцентрическая система, связанная с центром Солнца. Для описания многих механических движений в земных условиях инерциальной можно считать систему отсчета, связанную либо с поверхностью Земли, либо с ее центром (геоцентрическая система отсчета). При этом пренебрегают ускорением этой системы, связанным с вращательным движением Земли вокруг собственной оси и вокруг Солнца.

Системы отсчета, в которых свободное тело не сохраняет скорость движения постоянной, называются *неинерциальными*. Неинерциальной является любая система отсчета, движущаяся с ускорением относительно инерциальной.

**Принцип относительности Галилея** гласит: любое механическое явление во всех инерциальных системах отсчета протекает одинаково при одинаковых начальных условиях.

Следует подчеркнуть, что выполнение принципа относительности не означает полной тождественности движения одного и того же тела относительно разных инерциальных систем отсчета. Однаковы лишь законы движения. Характер же движения тела определяется не только законами движения, но и начальными скоростями и начальными координатами.

**Сила.** В инерциальных системах отсчета ускорение тела, а также его деформация, могут быть вызваны только его взаимодействием с другими телами. Характеристикой действия одного тела на другое является сила. Силой называется векторная физическая величина, являющаяся мерой механического воздействия на материальную точку или тело со стороны других тел или полей. Сила полностью определена, если заданы ее модуль, направление и точка приложения.

**Силы в механике.** Различные взаимодействия, известные в современной физике, сводятся к четырем типам: гравитационные, электромагнитные, сильные и слабые взаимодействия. Сила как количественная характеристика позволяет оценивать лишь гравитационные и электромагнитные взаимодействия. В тех чрезвычайно малых областях пространства и в тех процессах, в которых проявляются сильные и слабые взаимодействия, такие понятия, как точка приложения, линия действия, а вместе с ними и само понятие силы теряют смысл.

Таким образом, в задачах механики основную роль играют *гравитационные силы (силы тяготения)*, *электромагнитные силы*, действующие на заряженное тело, а также три их разновидности: *силы упругости*, *силы трения* и *мускульные силы* человека и животных. В механике важно знать, при каких условиях возникают силы, каковы их модули и направления, т.е. знать, как силы зависят от расстояний между телами и от скоростей их движения. В свою очередь, узнать значения сил, определить, как и когда они действуют, можно, располагая лишь способами их измерения.

Сравнение сил производится на основании следующего утверждения, являющегося определением равенства сил в механике: Две силы, независимо от их природы, считаются равными по модулю и противоположно направленными, если их одновременное действие на тело не меняет его состояния покоя или равномерного прямолинейного движения. Величина силы может быть измерена по степени деформации специального пробного тела — *динамометра*. Моделью динамометра обычно служит пружина.

**Сложение сил, действующих на материальную точку.** Если на материальную точку действует несколько сил в разных направлениях, то их действие можно заменить действием одной силы, называемой

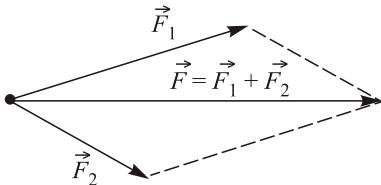


Рис. 1.2.1. Сложение сил, действующих на материальную точку

равнодействующей, величина и направление которой определяется по правилу сложения векторов (рис. 1.2.1).

**Инертность тел.** Свойство свободного тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется *инертностью*.

**Масса.** Скалярная физическая величина, являющаяся мерой инертности тела, называется массой тела. Она служит количественной характеристикой отклика тела на воздействие на него других тел. Чем больше масса тела, тем меньшее ускорение приобретает это тело под действием одной и той же силы.

Измерение массы тела, т.е. сравнение его массы с эталоном массы основывается на следующем утверждении, являющемся обобщением многочисленных опытных данных: в инерциальной системе отсчета отношение масс взаимодействующих тел равно обратному отношению модулей их ускорений.

В механике Ньютона постулируется, что

1. масса тела не зависит от скорости его движения;
2. масса тела равна сумме масс всех частиц (или материальных точек), из которых оно состоит;
3. при любых процессах, происходящих в замкнутой системе тел, ее полная масса остается неизменной.

Эти постулаты справедливы для макроскопических тел в случае, когда скорости их движения намного меньше, чем скорость света.

**Плотность.** Средней плотностью тела  $\rho_{\text{ср}}$  называется величина, равная отношению массы тела  $m$  к его объему  $V$ :

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{m}{V}. \quad (1.2.1)$$

Плотность тела в точке равна пределу отношения массы  $\Delta m$  элемента тела, выбранного в окрестности этой точки, к его объему  $\Delta V$  при неограниченном уменьшении  $\Delta V$ :

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (1.2.2)$$

**Второй закон Ньютона.** Основой динамики является *второй закон Ньютона*, согласно которому в инерциальной системе отсчета произведение массы тела на его ускорение равно сумме действующих на тело сил:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (1.2.3)$$

**Единицы измерения силы и массы.** За единицу массы в системе СИ принят *килограмм* — 1 кг. Килограмм — это масса эталона, изготовленного из сплава платины и иридия. Международный эталон килограмма хранится в г. Севре во Франции. С достаточной для практики точностью можно считать, что массой 1 кг обладает 1 л химически чистой воды при температуре 15 °C.

За единицу силы в системе СИ принимается сила, которая телу массой 1 кг сообщает ускорение 1 м/с<sup>2</sup>. Эта единица называется *ньютон* (Н). Приближенно 1 Н равен силе, с которой притягивается к Земле тело массой 0,102 кг.

**Третий закон Ньютона:** При любом взаимодействии двух тел сила, действующая со стороны одного тела на другое, равна по величине и противоположна по направлению силе, действующей со стороны второго тела на первое. Эти силы направлены вдоль прямой, соединяющей точки их приложения, и всегда имеют одну и ту же физическую природу.

Этот закон утверждает, что силы взаимодействия всегда появляются попарно. Если в инерциальной системе отсчета на какое-то тело действует сила, то обязательно есть какое-то другое тело, на которое первое действует с такой же по модулю силой, но направленной в противоположную сторону. Всегда следует помнить, что силы, появляющиеся при взаимодействии тел, приложены к разным телам и поэтому не могут уравновешивать друг друга. Уравновешиваться могут только силы, приложенные к одному телу.

**Закон всемирного тяготения. Гравитационная постоянная.** Две материальные точки массами  $m_1$  и  $m_2$  притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния  $r$  между ними:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1.2.4)$$

где  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Н·м<sup>2</sup>/кг<sup>2</sup> — *гравитационная постоянная*. Гравитационная постоянная относится к числу фундаментальных констант природы. Ее численное значение может быть определено только опытным путем.

Для протяженных тел произвольной формы задача нахождения силы тяготения является весьма сложной. Она имеет простое решение,

описываемое формулой (1.2.4), в следующих случаях: 1) если оба тела являются однородными шарами, тогда  $m_1$  и  $m_2$  — их массы,  $r$  — расстояние между центрами шаров; 2) одно из тел является однородным шаром, второе — материальной точкой; тогда  $m_1$  и  $m_2$  — их массы,  $r$  — расстояние от материальной точки до центра шара

**Сила тяжести,** действующая на тело со стороны Земли, равна произведению массы тела  $m$  на ускорение свободного падения  $g$ . Вблизи поверхности Земли

$$mg_0 = G \frac{mM}{R^2}, \quad (1.2.5)$$

где  $M$  — масса Земли,  $R$  — ее радиус. Отсюда ускорение свободного падения у поверхности Земли

$$g_0 = G \frac{M}{R^2}. \quad (1.2.6)$$

**Зависимость силы тяжести от высоты.** Для тела, находящегося на высоте  $h$  над поверхностью Земли,

$$mg(h) = G \frac{mM}{(R+h)^2} = mG \frac{M}{R^2(1+h/R)^2} = m \frac{g_0}{(1+h/R)^2}. \quad (1.2.7)$$

Формула (1.2.7) выражает зависимость силы тяжести от высоты. Из (1.2.7) видно, что ускорение свободного падения на высоте  $h$  связано с ускорением свободного падения у поверхности Земли соотношением

$$g(h) = \frac{g_0}{(1+h/R)^2}. \quad (1.2.8)$$

**Силы упругости. Понятие о деформациях.** Под деформацией твердого тела понимают изменение его размеров и формы. К деформациям относятся растяжение, сжатие, сдвиг, изгиб и кручение. Поскольку твердые тела сохраняют свой объем и форму, при любой попытке их деформировать в телах возникают силы, препятствующие этому.

Тела, которые полностью восстанавливают свои форму и объем после прекращения действия внешних сил, вызывающих деформации, называются упругими. Соответственно, упругими называются любые деформации упругого тела, а силы, возникающие в теле из-за упругих деформаций, носят название *сил упругости*. Наряду с упругими телами имеются пластичные тела, которые после прекращения действия внешних сил, вызвавших деформацию, не восстанавливают свою форму. Хотя при деформациях пластичных тел тоже возникают силы, они не являются силами упругости, поскольку их значение зависит не от деформации, а от других факторов. Пластичные деформации в элементарных курсах физики не рассматриваются.

Силы упругости действуют между соприкасающимися слоями деформируемого упругого тела, а также в месте контакта деформируемого тела с телом, вызывающим деформацию. В элементарной физике рассматриваются одномерные (линейные) деформации растяжения или сжатия. В этих случаях силы упругости направлены вдоль линии действия внешней (деформирующей) силы, т.е. вдоль осей продольно деформируемых нитей, витых пружин, стержней и т.п., или перпендикулярно поверхности соприкасающихся тел.

**Закон Гука. Модуль Юнга.** Закон Гука устанавливает прямую пропорциональную зависимость величины силы упругости, возникающей при деформации тела, от величины деформации. Для пружины он имеет вид

$$F = k|l - l_0|, \quad (1.2.9)$$

где  $l$  — длина деформированной пружины,  $l_0$  — длина свободной пружины,  $k$  — коэффициент жесткости пружины. Жесткость пружины зависит как от формы пружины, так и от упругих свойств материала, из которого она изготовлена.

Аналогичные закономерности наблюдаются при растяжении и сжатии стержней из упругих материалов. Величина коэффициента жесткости для стержня зависит не только от материала стержня, но и от его первоначальной длины  $l_0$  и площади поперечного сечения  $S$ . Эта зависимость выражается формулой

$$k = \frac{S}{l_0} E, \quad (1.2.10)$$

где  $E$  — модуль упругости материала, или *модуль Юнга*.

**Силы трения** возникают при соприкосновении твердых тел, а также при движении тел в вязкой среде (жидкости или газе). Главная особенность сил трения, отличающая их от гравитационных сил и сил упругости, состоит в том, что они зависят не от координат тел, а от скорости движения тел относительно друг друга, или от относительной скорости тела и вязкой среды.

**Сухое трение: трение покоя и трение скольжения. Коэффициент трения.** Трение между поверхностями соприкасающихся твердых тел при отсутствии между ними жидкой или газообразной прослойки называется *сухим трением*. Сухое трение подразделяется на трение покоя и трение скольжения. Силы трения, возникающие между поверхностями твердых тел, неподвижных относительно друг друга, называются силами *трения покоя*. Величина силы трения покоя изменяется от нуля до некоторого максимального значения. Силы *трения скольжения* возникают при движении одного твердого тела по поверхности другого.

Сила трения скольжения направлена против скорости относительного движения трущихся поверхностей.

Законы сухого трения имеют следующий вид:

1. Величина силы трения скольжения пропорциональна величине нормальной составляющей силы реакции:

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \quad (1.2.11)$$

2. Коэффициент трения  $\mu$  не зависит от площади соприкасающихся поверхностей и от скорости их относительного движения.
3. Максимальная величина силы трения покоя равна величине силы трения скольжения.

График зависимости проекции силы трения на ось, параллельную трущимся поверхностям, от скорости их относительного движения для простейшей модели сухого трения изображен на рис. 1.2.2.

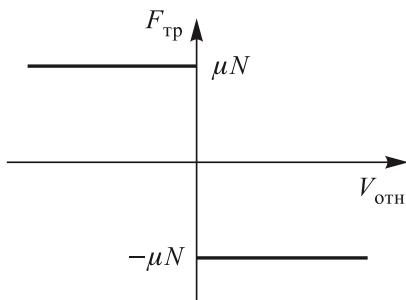


Рис. 1.2.2. Сухое трение

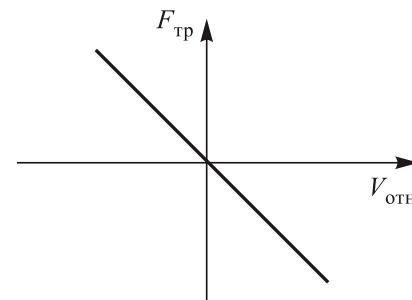


Рис. 1.2.3. Вязкое трение

**Вязкое трение.** При движении тел в жидкости или газе возникают силы вязкого трения. Они зависят от размеров и формы тела, свойств среды и от скорости относительного движения. В простейшей модели вязкого трения, применимой при малых скоростях движения,

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\beta \vec{V}, \quad (1.2.12)$$

где  $\beta$  — коэффициент вязкого трения (величина, практически не поддающаяся расчету и определяемая экспериментально). Сила вязкого трения всегда направлена против относительной скорости тела и среды (рис. 1.2.3). В отличие от трения между сухими поверхностями, при движении тел в вязкой среде трение покоя отсутствует.

### Применение законов Ньютона к поступательному движению тел.

Под действием произвольно приложенной силы твердое тело совершает в общем случае сложное движение, при котором различные его точки движутся с разными ускорениями. Поступательное движение твердого тела возможно только в том случае, когда линия действия силы,

приложенной к телу, проходит через некоторую, вполне определенную точку, связанную с телом. Эта точка получила название центра масс. Положение центра масс зависит от того, как масса тела распределена по его объему. Для однородных тел простой формы центр масс совпадает с центром симметрии. В частности, центр масс тела в форме параллелепипеда лежит в точке пересечения его диагоналей. Центр масс может оказаться и в точке, в которой нет вещества, образующего тело (например, в случае однородного обруча).

Особая роль центра масс в механике заключается в том, что эта точка движется так, как будто в ней сосредоточена вся масса тела и к ней приложены все силы, действующие на тело. Если тело движется поступательно, то это означает, что равнодействующая всех сил, приложенных к телу, проходит через его центр масс.

Частным случаем поступательного движения является свободное падение тела, не приведенного предварительно во вращение, в однородном поле тяготения. Под действием элементарных сил тяжести, действующих на все точки тела параллельно, оно движется поступательно. Следовательно, равнодействующая всех сил тяжести при любом положении тела проходит через его центр масс.

**Вес тела. Невесомость. Перегрузки.** Тело, находящееся в поле сил тяготения, может быть неподвижным (или двигаться равномерно и прямолинейно), только если на него действуют другие тела, например, опора или подвес, которые уравновешивают силу тяжести. Сила, с которой тело в однородном поле тяготения действует на опору или подвес, удерживающие его от свободного падения, называется *весом тела*  $\vec{P}$ .

Вес неподвижного тела равен по величине и направлению силе тяжести:  $\vec{P} = m\vec{g}$ . В результате совместного действия силы тяжести и реакции подвеса (или опоры) тело, находящееся вблизи поверхности Земли, деформируется.

Если опора (подвес) движется с ускорением, направленным вверх или вниз, вес тела отличается от силы тяжести. В частности, при движении опоры (подвеса) с ускорением  $\vec{a}$ , направленным вниз, вес тела меньше силы тяжести:  $\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a})$ . Если  $\vec{a} = \vec{g}$ , вес тела равен нулю: опора (подвес) на него не действует. В этом случае говорят, что тело находится в состоянии *невесомости*. При движении тела только под действием силы тяготения деформации тела отсутствуют.

При движении опоры (подвеса) с ускорением  $\vec{a}$ , направленным вверх, вес тела больше силы тяжести:  $\vec{P} = m(\vec{g} + \vec{a})$ . Такое состояние тела называется *перегрузкой*. При перегрузках деформации тела больше, чем в случае, когда тело покоятся.

**Применение законов Ньютона к движению материальной точки по окружности.** Равномерное движение материальной точки по

окружности происходит под действием одной или нескольких сил, векторная сумма (равнодействующая) которых  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$  в каждый момент времени перпендикулярна скорости точки и направлена к центру окружности. Эта равнодействующая сообщает точке центростремительное ускорение  $\vec{a}_n$ . Согласно второму закону Ньютона, для равномерного движения точки массой  $m$  по окружности справедливо уравнение

$$m\vec{a}_n = \vec{F}. \quad (1.2.13)$$

Чтобы перейти к скалярному уравнению, нужно спроектировать все векторы на неподвижную ось  $OX$ , проходящую через материальную точку и направленную по радиусу к центру окружности (т.е. по направлению ускорения  $\vec{a}_n$ ). При указанном выборе оси  $OX$   $a_{nx} = a_n = \frac{V^2}{R}$ , где  $V$  — скорость точки,  $R$  — радиус окружности. В итоге получаем уравнение

$$m \frac{V^2}{R} = F. \quad (1.2.14)$$

Если точка движется неравномерно, то ее скорость изменяется не только по направлению, но и по модулю. В этом случае центростремительное ускорение  $\vec{a}_n$  сообщают составляющие приложенных к точке сил, действующие вдоль радиуса, а составляющие, действующие вдоль касательной, сообщают точке касательное (тангенциальное) ускорение. Полное ускорение точки равно векторной сумме центростремительного и тангенциального ускорений.

**Движение искусственных спутников. Первая космическая скорость.** Чтобы тело стало искусственным спутником Земли, движущимся на расстоянии  $h$  от ее поверхности, нужно поднять это тело на высоту  $h$  и сообщить ему в направлении, перпендикулярном вертикали, такую скорость  $V$ , чтобы, согласно второму закону Ньютона и закону всемирного тяготения, выполнялось условие:

$$m \frac{V^2}{R_3 + h} = G \frac{mM}{(R_3 + h)^2}. \quad (1.2.15)$$

Здесь  $m$  — масса спутника,  $M$  — масса Земли,  $R_3$  — ее радиус. Отсюда

$$V = \sqrt{\frac{GM}{R_3 + h}}. \quad (1.2.16)$$

Если спутник запускается вблизи поверхности Земли ( $h = 0$ ), ему необходимо сообщить скорость

$$V_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_3}} = \sqrt{g_0 R_3}, \quad (1.2.17)$$

где  $g_0$  — ускорение свободного падения у поверхности Земли. Скорость такого движения называют *первой космической скоростью*.

При движении по орбите вокруг планеты тело находится в состоянии невесомости.

## Указания по решению задач

При решении задач по динамике нужно прежде всего выяснить, какие силы действуют на тело, движением которого мы интересуемся. Необходимо изобразить эти силы на чертеже. При этом нужно ясно представлять, со стороны каких именно тел действуют рассматриваемые силы. Следует помнить, что силы «действия» и «противодействия», фигурирующие в третьем законе Ньютона, приложены к разным телам. Потому на данное тело может действовать только одна из этих сил, а не обе сразу.

Иногда возникают затруднения при определении направления силы трения покоя, особенно в сложных системах, состоящих из нескольких тел. В этом случае помогает следующий прием: нужно предположить, что трение исчезло, и найти направления относительных скоростей соприкасающихся тел. Направления сил трения будут противоположны направлениям относительных скоростей.

После того, как определены действующие на тело силы, следует записать уравнение движения (второй закон Ньютона). При движении по прямой  $ma = F_1 + F_2 + \dots + F_n$ , где  $a$  — проекция ускорения,  $F_1, F_2, \dots, F_n$  — проекции сил на прямую, вдоль которой происходит движение. Положительное направление отсчета удобно выбирать совпадающим с направлением ускорения тела. До того, как задача решена, определить направление ускорения не всегда удается. В этом случае оно может быть выбрано произвольно. Если полученное в ответе ускорение положительно, то его направление выбрано правильно, если отрицательно — то неправильно и его нужно заменить на противоположное.

В направлении, перпендикулярном к направлению прямолинейного движения, сумма проекций сил равна нулю. Соответствующими равенствами можно пользоваться например для того, чтобы найти силу реакции опоры, определяющую силу трения.

Если рассматривается движение системы тел, то уравнения движения нужно записать для каждого тела системы. Задача может быть решена лишь тогда, когда число независимых уравнений равно числу неизвестных. В число неизвестных, кроме величин, которые требуется найти по условию задачи, часто входят еще силы реакции опоры, натяжения подвеса и другие силы, возникающие при взаимодействии тел системы. Рассматривая уравнения движения совместно с кинематическими соотношениями, вытекающими из связей, накладываемых на перемещения тел, мы получаем систему уравнений, число которых совпадает с числом неизвестных.

## Примеры решения задач

**1.2.1.** Воздушный шар опускается с ускорением  $a$ , направленным вниз. Какой массы  $m_1$  балласт надо сбросить, чтобы шар начал двигаться с тем же по модулю ускорением, направленным вверх? Начальная масса шара с балластом равна  $m$ . Сопротивлением воздуха движению шара пренебречь.

**Решение:** Воздушный шар движется под действием двух сил: силы тяжести, направленной вниз, и архимедовой силы, направленной вверх. Естественно предположить, что архимедова сила практически не изменяется после выбрасывания балласта, поскольку объем балласта наверняка намного меньше, чем объем шара и оставшегося груза. Записывая уравнения движения шара в проекции на направление его ускорения, для указанных в условии случаев имеем:

$$ma = mg - F_A, \quad (m - m_1)g = F_A - (m - m_1).$$

Исключая отсюда архимедову силу, получаем ответ:

$$m_1 = \frac{2ma}{g + a}.$$

**1.2.2.** Автомобиль трогается с места с ускорением  $a_1 = 2 \text{ м/с}^2$ . При скорости  $V = 50 \text{ км/ч}$  ускорение автомобиля стало равным  $a_2 = 1 \text{ м/с}^2$ . С какой установившейся скоростью  $V_0$  будет двигаться автомобиль, если сила сопротивления пропорциональна скорости? Силу тяги двигателя при движении автомобиля считать постоянной.

**Решение:** Поскольку при движении автомобиля по горизонтальной дороге приложенные к нему вертикальные силы уравновешены, исключим эти силы из рассмотрения. В горизонтальном направлении на автомобиль действуют две силы: сила трения покоя, приложенная к его ведущим колесам со стороны дорожного покрытия, и сила сопротивления воздуха. Первая из этих сил возникает при передаче крутящего момента от двигателя к ведущим колесам и обычно называется силой тяги двигателя. По условию задачи при движении автомобиля она постоянна. Вторая из перечисленных сил представляет собой силу вязкого трения, которая в рамках принятой модели пропорциональна скорости автомобиля.

Обозначим через  $F$  силу тяги двигателя автомобиля, через  $m$  — его массу, а через  $k$  — коэффициент вязкого трения. Когда автомобиль трогается с места, его скорость равна нулю и в этот момент уравнение движения автомобиля записывается как

$$ma_1 = F.$$

При скорости автомобиля  $V$  уравнение движения принимает вид

$$ma_2 = F - kV,$$

а при установившейся скорости  $V_0$ , когда ускорение автомобиля обращается в нуль,

$$0 = F - kV_0.$$

Исключая из этих уравнений  $F$ ,  $m$  и  $k$ , находим ответ:

$$V_0 = \frac{Va_1}{a_1 - a_2} = 100 \text{ км/ч.}$$

**1.2.3.** Начальный участок трассы скоростного спуска, расположенный вниз по склону горы с углом наклона  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту, горнолыжник прошел, не отталкиваясь палками. Какую максимальную скорость  $V_{max}$  мог развить спортсмен на этом участке, если его масса  $m = 70$  кг? Коэффициент трения лыж о снег  $\mu = 0,1$ , сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости:  $F = \beta V^2$ , где постоянный коэффициент  $\beta = 0,9$  кг/м. Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**Решение:** Горнолыжник, движущийся по наклонному участку трассы, находится под действием сил, изображенных на рисунке, где  $mg$  — сила тяжести,  $\vec{N}$  — нормальная составляющая силы реакции склона,  $\vec{F}_{tp}$  — сила трения лыж о снег,  $\vec{F}_{copp}$  — сила сопротивления воздуха. Поскольку по условию задачи лыжник движется поступательно, его можно принять за материальную точку и считать, что точки приложения всех перечисленных сил совпадают.

В проекции на координатную ось, направленную вниз по склону, уравнение движения лыжника имеет вид:

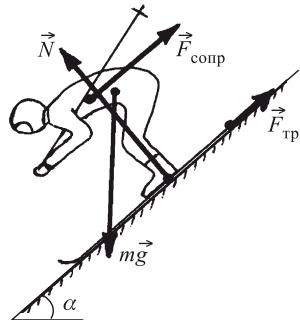
$$ma = mg \sin \alpha - F_{tp} - F_{copp},$$

где  $a$  — ускорение лыжника,  $F_{tp} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$ ,  $F_{copp} = \beta V^2$ . Ясно, что при движении под действием двух постоянных сил (проекции силы тяжести и силы сухого трения) и зависящей от скорости силы сопротивления воздуха, ускорение лыжника по мере разгона уменьшается и при некоторой скорости обращается в нуль. Это и есть максимальная скорость лыжника на данном отрезке трассы, поскольку его дальнейшее движение будет равномерным. Таким образом, при установившемся движении лыжника

$$mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - \beta V_{max}^2 = 0.$$

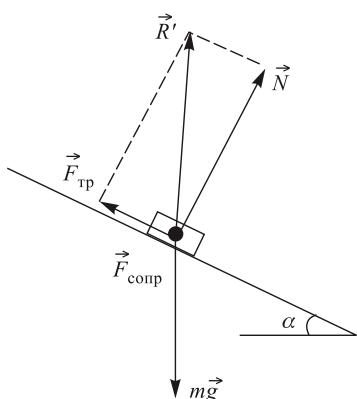
Отсюда после элементарных преобразований получаем ответ:

$$V_{max} = \sqrt{\frac{mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\beta}} \cong 22,3 \text{ м/с.}$$



**1.2.4.** Бруск массой  $m$  находится на наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол  $\alpha$ . Определить величину силы  $R$ , с которой бруск действует на плоскость, если коэффициент трения между ними  $\mu$ , а ускорение свободного падения  $g$ .

**Решение:** По третьему закону Ньютона искомая сила равна по величине и противоположна по направлению силе  $\vec{R}'$ , с которой плоскость действует на бруск. В свою очередь, силу  $\vec{R}'$  удобно представить в виде векторной суммы двух составляющих: перпендикулярной наклонной плоскости силы  $\vec{N}$  и параллельной наклонной плоскости силы трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  (см. рисунок).



В проекции на нормаль к наклонной плоскости сумма сил, действующих на бруск, равна нулю. Отсюда следует, что  $N = mg \cos \alpha$ . Величина второй составляющей силы  $\vec{R}'$  зависит от коэффициента трения между бруском и плоскостью. Поскольку в условии задачи не сказано,

коится ли бруск на наклонной плоскости или скользит по ней, необходимо рассмотреть оба эти случая по отдельности.

Как известно, предоставленное самому себе тело покоятся на наклонной плоскости, если коэффициент трения удовлетворяет неравенству:

$$\mu \geq \operatorname{tg} \alpha.$$

В этом случае сила трения покоя определяется из условия равновесия тела:

$$F_{\text{тр}} = mg \sin \alpha.$$

Если же  $\mu < \operatorname{tg} \alpha$ , то между бруском и плоскостью действует сила трения скольжения:

$$F_{\text{тр}} = \mu mg \cos \alpha.$$

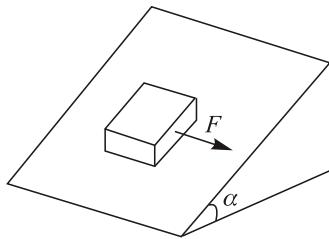
Учитывая, что  $R = R' = \sqrt{N^2 + F_{\text{тр}}^2}$ , после несложных преобразований приходим к ответу:

$$R = mg \sqrt{1 + \mu^2} \cos \alpha \quad \text{при } \mu < \operatorname{tg} \alpha,$$

$$R = mg \quad \text{при } \mu \geq \operatorname{tg} \alpha.$$

**1.2.5.** Тело массой  $m = 1$  кг покоятся на шероховатой поверхности, составляющей с горизонтальной плоскостью угол  $\alpha = 30^\circ$ . С какой минимальной силой  $F$ , направленной горизонтально вдоль линии пересечения плоскостей, нужно подействовать на тело, чтобы стронуть

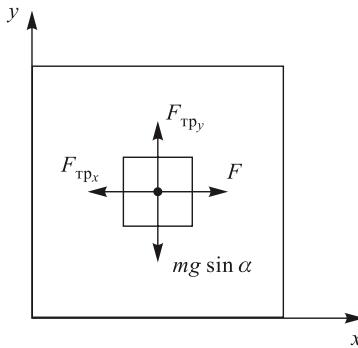
его с места? Коэффициент трения тела о плоскость  $\mu = 0,7$ . Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .



**Решение:** Рассмотрим вначале случай, когда сила  $F$ , приложенная к телу, недостаточна, чтобы сдвинуть его с места. В плоскости, на которой покоятся тело, на него действуют силы, изображенные на рисунке, где через  $F_{\text{тр}x}$  и  $F_{\text{тр}y}$  обозначены проекции силы трения покоя на оси  $OX$  и  $OY$ , соответственно. Из условий равновесия тела находим, что

$$F_{\text{тр}x} = F, \quad F_{\text{тр}y} = mg \sin \alpha,$$

где  $m$  — масса тела. Согласно закону сухого трения, величина силы трения покоя  $F_{\text{тр}} = \sqrt{F_{\text{тр}x}^2 + F_{\text{тр}y}^2}$  не может превышать значения  $\mu N = \mu mg \cos \alpha$ . Пусть значение силы  $F$  таково, что скольжение еще не



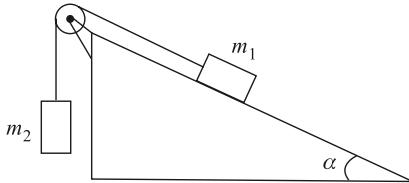
началось, но сила трения покоя уже достигла своего максимального значения. Тогда

$$F^2 + m^2 g^2 \sin^2 \alpha = \mu^2 m^2 g^2 \cos^2 \alpha.$$

Отсюда  $F = mg \sqrt{\mu^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ . Очевидно, что это и есть ответ, поскольку при любом, сколь угодно малом превышении величины силы  $F$  над найденным здесь значением тело придет в движение.

**1.2.6.** Два тела массами  $m_1 = 0,4 \text{ кг}$  и  $m_2 = 0,1 \text{ кг}$  соединены невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый блок. Ось блока укреплена на неподвижной наклонной плоскости, составля-

ющей с горизонтом угол  $\alpha = 30^\circ$ . При каком минимальном значении коэффициента трения  $\mu$  тела  $m_1$  и  $m_2$  будут находиться в покое? Трением в оси блока пренебречь.

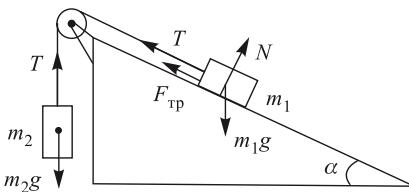


**Решение:** Тела будут находиться в покое, если суммы сил, действующих на каждое из них (см. рисунок), будут равны нулю. В частности, для тела массой  $m_2$  имеем

$$m_2g - T = 0,$$

откуда  $T = m_2g$ . Условие равновесия тела массой  $m_1$  зависит от направления силы трения покоя  $F_{\text{тр}}$ . Для того, чтобы найти его, применим следующий стандартный прием. Предположим, что трение в системе отсутствует. Тогда равновесие системы будет иметь место при условии

$$m_1g \sin \alpha - T = 0, \quad \text{или} \quad m_1 \sin \alpha = m_2.$$



При  $m_1 \sin \alpha > m_2$  тело  $m_1$  будет двигаться вдоль наклонной плоскости вниз, а при  $m_1 \sin \alpha < m_2$  — вверх. Поскольку сила трения покоя всегда направлена против перемещения тела, возникающего в отсутствие трения, уравнения равновесия системы можно записать в виде:

$$m_1g \sin \alpha - F_{\text{тр}} - T = 0 \quad \text{при} \quad m_1g \sin \alpha > m_2,$$

$$m_1g \sin \alpha + F_{\text{тр}} - T = 0 \quad \text{при} \quad m_1g \sin \alpha < m_2.$$

Подставляя сюда вместо  $F_{\text{тр}}$  максимальное значение силы трения покоя  $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$ , после несложных преобразований найдем

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha - \frac{m_2}{m_1 \cos \alpha}, \quad \text{при} \quad m_1 \sin \alpha > m_2,$$

$$\mu = 0, \quad \text{при} \quad m_1 \sin \alpha = m_2,$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 \cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{при} \quad m_1 \sin \alpha < m_2.$$

В общем виде ответ может быть записан следующим образом:

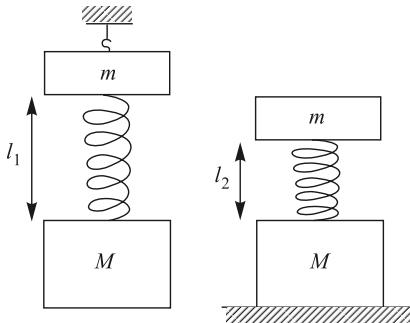
$$\mu = \left| \operatorname{tg} \alpha - \frac{m_2}{m_1 \cos \alpha} \right|.$$

При конкретных данных задачи  $\mu = \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0.29$ .

**1.2.7.** Невесомая пружина скрепляет два груза с массами  $m = 1$  кг и  $M = 3$  кг. Когда эта система подвешена за верхний груз, длина пружины равна  $l_1 = 20$  см. Если систему поставить на подставку, длина пружины будет равна  $l_2 = 10$  см. Определить длину  $l_0$  ненапряженной пружины.

**Решение:** Условия равновесия грузов в первом случае (когда пружина растянута) и втором случае (когда пружина сжата) имеют вид, соответственно:

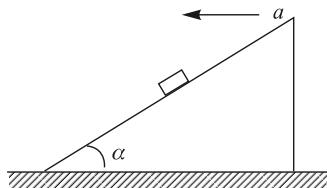
$$Mg = k(l_1 - l_0), \quad mg = k(l_0 - l_2).$$



Выражая из этих соотношений  $l_0$ , получаем ответ:

$$l_0 = \frac{ml_1 + Ml_2}{m + M} = 12,5 \text{ см.}$$

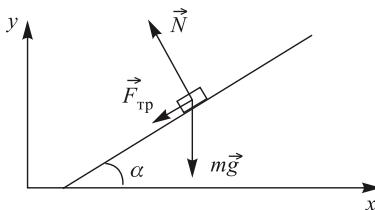
**1.2.8.** Наклонная плоскость, образующая с горизонтом угол  $\alpha = 30^\circ$ , движется с ускорением  $a$ , направленным влево, как показано



на рисунке. При каких значениях  $a$  тело, находящееся на наклонной плоскости, будет скользить вверх вдоль нее? Коэффициент трения

между телом и плоскостью  $\mu = 0,3$ . Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**Решение:** Рассмотрим случай, когда ускорение наклонной плоскости таково, что тело не скользит по ней. Тогда неподвижной системе



отсчета сумма сил, действующих на тело (см. рисунок), сообщает ему ускорение  $\vec{a}$ , направленное горизонтально. Если при этом сила трения покоя достигла своего максимального значения  $\mu N$ , то в проекциях на оси  $OX$  и  $OY$  неподвижной системы уравнение движения тела имеет вид:

$$-ma = -N \sin \alpha - \mu N \cos \alpha, \quad 0 = N \cos \alpha - mg - \mu N \sin \alpha$$

Из второго уравнения находим величину нормальной составляющей силы реакции наклонной плоскости:

$$N = \frac{mg}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$$

После подстановки этого выражения в первое уравнение, после несложных преобразований определяем значение ускорения, при котором выполняются перечисленные выше предположения:

$$a = \frac{\mu + \tan \alpha}{1 - \mu \tan \alpha} g = 10,6 \text{ м/с}^2.$$

Если ускорение наклонной плоскости превышает найденное значение на любую сколь угодно малую величину, тело начнет скользить вверх, поскольку сила трения уже не сможет его удерживать. Если же коэффициент трения таков, что  $\mu \tan \alpha \geq 1$ , тело не будет скользить вверх при любых ускорениях.

**1.2.9.** Клин массой  $M$  с углом  $\alpha$  при вершине может двигаться поступательно по вертикальным направляющим (см. рисунок). Боковой стороной он касается кубика массой  $m$ , лежащего на горизонтальной поверхности. Найти ускорение  $a$ , с которым будет двигаться клин, если его отпустить. Трением между всеми поверхностями пренебречь. Ускорение свободного падения  $g$ .

**Решение:** Силы, действующие на клин и кубик, изображены на рис. А, где приняты следующие обозначения:  $M\vec{g}$  и  $m\vec{g}$  — силы тяжести,  $\vec{N}$  и  $\vec{N}'$  — силы взаимодействия клина и кубика,  $\vec{N}_1$  — сила реакции стола,  $\vec{R}$  — сила реакции вертикальных направляющих. Силы

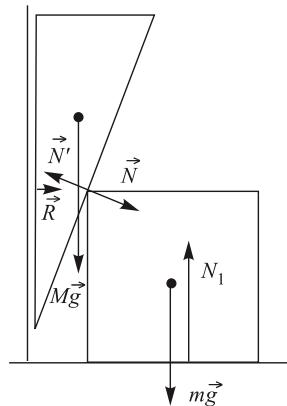
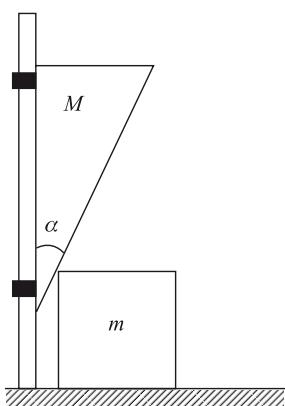


Рис. А

$\vec{N}$  и  $\vec{N}'$  направлены перпендикулярно поверхности клина, т.к. трение отсутствует. По третьему закону Ньютона  $N' = N$ . Обозначив через  $a$  и  $a_1$  ускорения клина и кубика, запишем уравнения движения этих тел:

$$Ma = Mg - N \sin \alpha, \quad ma_1 = N \cos \alpha.$$

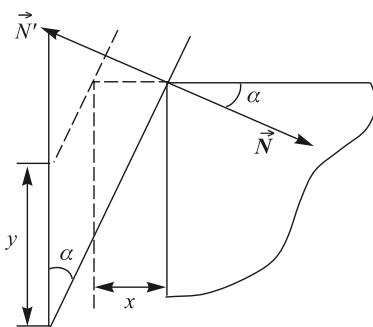


Рис. Б

Из рис. Б видно, что перемещения кубика и клина за любой промежуток времени связаны соотношением  $x = y \operatorname{tg} \alpha$ . Дважды дифференцируя это соотношение по времени, находим, что,

$$a_1 = a \operatorname{tg} \alpha.$$

Исключая из уравнений движения  $N$  и используя соотношение между величинами ускорений клина и кубика, получаем ответ:

$$a = \frac{Mg}{M + m \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

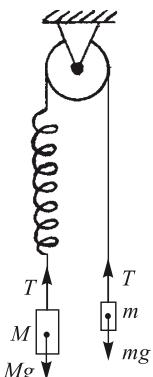
**1.2.10.** К грузику массой  $M = 300$  г прикреплена пружина, другой конец которой привязан к нити, перекинутой через блок. На втором

конце нити подвешен грузик массой  $m = 200$  г. Когда блок заторможен, длина пружины  $l = 15$  см. Какую длину  $l_1$  будет иметь пружина, если блок освободить? Считать, что колебания в системе не возникнут, т.е. грузики будут двигаться с постоянным ускорением. Длина недеформированной пружины  $l_0 = 10$  см. Массой пружины, нити и блока, а также трением в блоке пренебречь.

**Решение:** Когда блок заторможен, сила, с которой растянута пружина, равна весу подвешенного к ней грузика. Из закона Гука следует,

что

$$k(l - l_0) = Mg,$$



откуда  $k = Mg/(l - l_0)$ . Если блок освободить, то грузики придут в движение, причем в общем случае оно будет представлять собой суперпозицию равноускоренного и колебательного движений. В то же время, задав в системе определенные начальные условия, можно добиться того, чтобы колебания в системе не возникли и движение грузиков происходило с постоянным ускорением. В этом случае сила, с которой растянута пружина, будет постоянной. Поскольку эта сила равна силе натяжения нити  $T$ , одинаковой во всех точках, для ее нахождения воспользуемся законами динамики. Уравнения движения грузиков имеют вид:

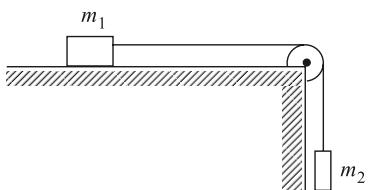
$$Ma = Mg - T, \quad ma = T - mg,$$

где  $a$  — ускорение в системе. Отсюда  $T = \frac{2mM}{m+M} = g$ . Учитывая, что  $T = k(l_1 - l_0)$ , после несложных преобразований получаем ответ:

$$l_1 = \frac{(M-m)l_0 + 2ml}{M+m} = 14 \text{ см.}$$

**1.2.11.** На горизонтальном столе находится брускок массы  $m_1 = 0,1$  кг, к которому привязана нерастяжимая нить. Второй конец

нити перекинут через блок и прикреплен к грузу массы  $m_2 = 0,2$  кг. Коэффициент трения между бруском и столом  $\mu = 0,5$ . Пренебрегая массой блока, определить силу  $F$ , с которой нить действует на блок.



**Решение:** Натянутая нить взаимодействует с блоком во всех точках их соприкосновения. При этом полная сила  $\vec{F}$ , с которой нить действует на блок, равна векторной сумме сил натяжения  $\vec{T}'$  и  $\vec{T}''$ , приложенных в точках схода нити с блока (см. рисунок).

Из невесомости нити и блока следует, что натяжение нити во всех точках одинаково:  $T' = T'' = T$ . Следовательно, величина силы, с которой нить действует на блок, определится из равенства:

$$F = \sqrt{2} \cdot T.$$

Для того, чтобы найти натяжение нити, воспользуемся законами Ньютона. Решая задачу в общем виде, необходимо иметь в виду, что предоставленная самой себе система придет в движение только в том случае, если коэффициент трения между грузом  $m_1$  и столом достаточно мал. Предположив это, запишем уравнения движения грузов под действием приложенных к ним сил:

$$m_1 a = T - m_1 \mu g, \quad m_2 a = m_2 g - T.$$

Здесь  $a$  — величина ускорения в системе, одинаковая для обоих грузов в силу нерастяжимости нити. Найденное из этой системы натяжение нити равно:

$$T = \frac{m_1 m_2 (1 + \mu) g}{m_1 + m_2}.$$

Если трение между грузом  $m_1$  и столом велико, система будет находиться в покое. В этом случае

$$T = m_2 g.$$

Значение коэффициента трения, при котором предоставленные самим себе грузы будут покоиться, определяется из условия:

$$m_1 \mu g \geq m_2 g.$$

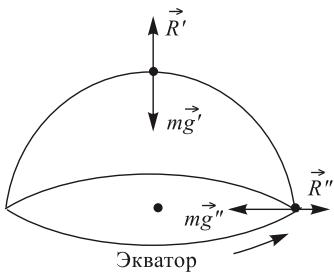
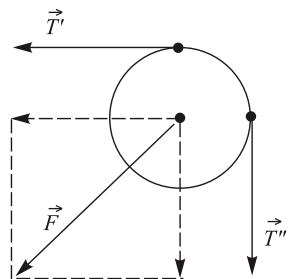
Таким образом, ответ к задаче должен быть сформулирован в следующем виде:

$$F = \begin{cases} \sqrt{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 + \mu) g & \text{при } \mu < \frac{m_2}{m_1}, \\ \sqrt{2} m_2 g & \text{при } \mu \geq \frac{m_2}{m_1}. \end{cases}$$

При конкретных данных задачи  $F \cong 1,39$  Н.

**1.2.12.** Вес тела на экваторе составляет  $\eta = 97\%$  от веса этого же тела на полюсе. Найти период вращения планеты вокруг своей оси  $T$ , если плотность вещества планеты  $\rho = 2,5 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, гравитационная постоянная  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  м<sup>3</sup>кг<sup>-1</sup>с<sup>-2</sup>. Планету считать однородным шаром.

**Решение:** Силы, действующие на тело на полюсе и на экваторе, изображены на рисунке, где использованы следующие



обозначения:  $\vec{g}'$  и  $\vec{g}''$  — ускорения, вызываемые силой тяжести,  $\vec{R}'$  и  $\vec{R}''$  — силы реакции опор, на которых покоится тело на полюсе и на экваторе. Для планеты в виде однородного шара ускорения  $\vec{g}'$  и  $\vec{g}''$  различаются только направлением, а величины их совпадают:  $g' = g'' = g$ .

Для тела, покоящегося на полюсе, сила тяжести и сила реакции опоры уравновешены и его вес по величине равен  $P' = R' = mg$ . Тело, находящееся на экваторе, движется по окружности, радиус которой равен радиусу планеты  $r$ . Следовательно, сила тяжести и сила реакции опоры не уравновешены и по второму закону Ньютона  $m\omega^2 r = mg - R''$ , где  $\omega$  — угловая скорость вращения планеты. Поэтому вес тела на экваторе по величине равен  $P'' = R'' = mg - m\omega^2 r$ . По условию  $mg - m\omega^2 r = \frac{\eta}{100\%} mg$ , откуда  $\omega^2 = \frac{g}{r} \left(1 - \frac{\eta}{100\%}\right)$ .

Отношение  $g/r$  может быть легко выражено через данные задачи. В самом деле,  $g = \frac{GM}{r^2}$ , где  $M = \frac{4}{3}\pi r^3$  — масса планеты. Из этих соотношений следует, что

$$\frac{g}{r} = \frac{4}{3}\pi G\rho.$$

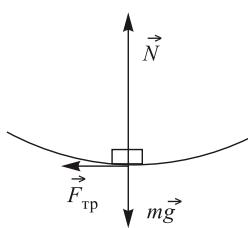
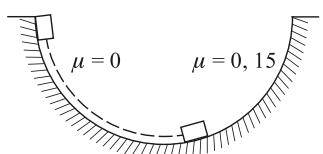
Подставляя это отношение в выражение для  $\omega^2$  и учитывая, что период вращения планеты  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , после простых преобразований получаем ответ:  $T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho(1 - \eta/100\%)}} \cong 4,34 \cdot 10^4 \text{ с} \cong 12 \text{ час.}$

**1.2.13.** Маленькое тело соскальзывает без начальной скорости по внутренней поверхности полусферы с высоты, равной ее радиусу. Одна половина полусферы абсолютно гладкая, а другая — шероховатая, причем на этой половине коэффициент трения между телом и поверхностью  $\mu = 0,15$ . Определить ускорение  $a$  тела в тот момент, как только оно перейдет на шероховатую поверхность.

Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**Решение:** Силы, действующие на тело в момент, когда оно оказывается на шероховатой поверхности, изображены на рисунке, где введены

следующие обозначения:  $\vec{F}_{\text{тр}}$  — сила трения,  $\vec{N}$  — нормальная к поверхности полусферы сила реакции,  $mg$  — сила тяжести. В соответствии с этим, полное ускорение тела  $\vec{a}$  удобно разложить на две составляющие: касательную к поверхности  $\vec{a}_t$  и нормальную к поверхности  $\vec{a}_n$ . Тогда величина ускорения тела выразится как  $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ . Записывая уравнения движения тела в проекциях на касательное и нормальное



к поверхности полусферы направления, имеем в рассматриваемый момент времени:

$$ma_\tau = F_{\text{тр}} = \mu N, \quad ma_n = N - mg.$$

Учитывая, что  $a_n = V^2/R$ , где  $V$  — скорость тела, из последнего уравнения находим:  $N = \frac{mV^2}{R} + mg$ . Для определения скорости тела в нижней точке полусферы воспользуемся законом сохранения энергии

$$\frac{mV^2}{2} = mgR,$$

который справедлив при движении тела по гладкой поверхности. Объединяя записанные соотношения, находим:

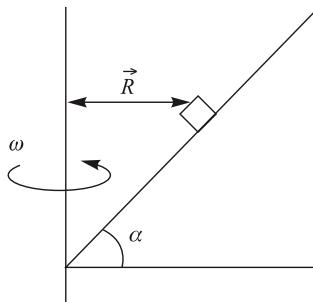
$$a_n = 2g, \quad a_\tau = 3\mu g,$$

откуда следует ответ:  $a = g\sqrt{9\mu^2 + 4} = 20,5 \text{ м/с}^2$ .

Заметим, что полученный результат позволяет также легко найти угол  $\alpha$ , который образует ускорение тела с вертикалью в рассматриваемый момент времени. В самом деле,

$$\alpha = \arctg \frac{a_\tau}{a_n} = \arctg \frac{3\mu}{2} = \arctg 0,225 \approx 12^\circ 40'.$$

**1.2.14.** Деревянная призма, одна из граней которой образует с горизонталью угол  $\alpha = 45^\circ$ , вращается вокруг вертикальной оси с угловой



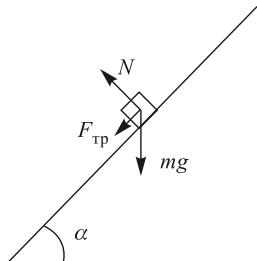
скоростью  $\omega = 10 \text{ рад/с}$ . На наклонной грани призмы расположен маленький брускок. Найти максимальное расстояние  $R_{\max}$  от бруска до оси вращения, при котором брускок не будет скользить по призме. Коэффициент трения между бруском и призмой  $\mu = 0,5$  ( $\mu < \operatorname{ctg} \alpha$ ). Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**Решение:** В неподвижной системе отсчета брускок движется под действием сил, изображенных на рисунке, где приняты следующие обозначения:  $mg$  — величина силы тяжести,  $N$  — величина нормальной составляющей силы реакции призмы,  $F_{\text{тр}}$  — величина силы трения. При отсутствии скольжения движение бруска происходит по окруж-

ности в горизонтальной плоскости. В проекциях на горизонтальное и вертикальное направления уравнения движения бруска имеют вид:

$$m\omega^2 R = N \sin \alpha + F_{\text{тр}} \cos \alpha, \quad N \cos \alpha = mg + F_{\text{тр}} \sin \alpha.$$

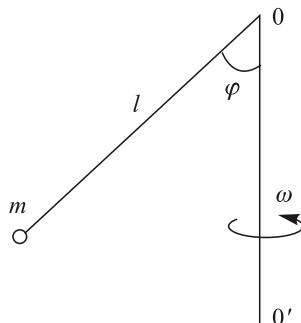
Подставляя в эти уравнения максимальное значение силы трения покоя



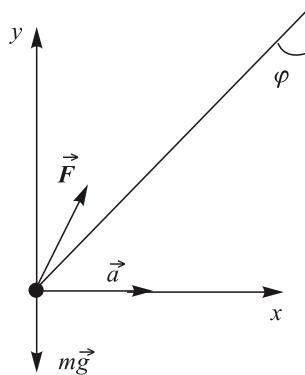
$F_{\text{тр}} = \mu N$  и исключая  $N$ , получаем ответ:

$$R_{\max} = \frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} = 0,3 \text{ м.}$$

**1.2.15.** Металлический стержень, изогнутый под углом  $\varphi = 45^\circ$ , как показано на рисунке, вращается с угловой скоростью  $\omega = 6$  рад/с вокруг вертикальной оси  $O O'$ . К концу стержня прикреплен груз массой  $m = 0,1$  кг на расстоянии  $l = 0,1$  м от точки  $O$ . Определить модуль  $F$  силы, с которой стержень действует на груз. Ускорение свободного падения принять  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.



**Решение:** Для решения задачи будем использовать неподвижную систему координат, плоскость  $XOY$  которой в некоторый момент времени совпадает с плоскостью, проходящей через ось вращения системы и стержень с грузом (см. рисунок). Равномерное движение груза по окружности радиуса  $R = l \sin \alpha$  с угловой скоростью  $\omega$  происходит под действием сил, изображенных на рисунке, причем сила  $\vec{F}$ , действующая на груз со стороны стержня, в общем случае направлена по



отношению к нему под некоторым углом. В проекциях на выбранные координатные оси уравнение движения грузика имеет вид:

$$m\omega^2 l \sin \alpha = F_x, \quad 0 = F_y - mg.$$

Учитывая, что  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ , получаем ответ:

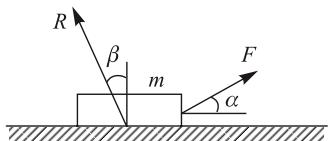
$$F = m\sqrt{g^2 + \omega^4 l^2 \sin^2 \alpha} \approx 1,01 \text{ Н.}$$

## Задание для самостоятельной работы

**1.2.16.** Бруск массой  $m = 0,51$  кг, лежащий на горизонтальной плоскости, совершает прямолинейное равноускоренное движение под действием горизонтально направленной силы  $F = 5$  Н. Если увеличить массу бруска в  $\alpha = 2$  раза, то его ускорение под действием той же силы уменьшится в  $\beta = 3$  раза. Пользуясь этими данными, вычислить коэффициент трения  $\mu$  бруска о плоскость. Считать, что сила трения скольжения не зависит от скорости. Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**1.2.17.** К телу массы  $m$  приложена сила  $F$ , под действием которой тело движется по горизонтальной поверхности равномерно. Определите

угол  $\beta$ , который составляет с вертикалью равнодействующая  $R$  сил, действующих на тело со стороны поверхности, если сила  $F$  составляет с горизонтом углом  $\alpha$ . Ускорение свободного падения  $g$ .

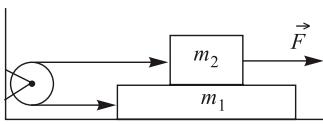


**1.2.18.** По наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha = 15^\circ$  тело движется вниз равномерно. С каким ускорением  $a$  будет двигаться это тело, если угол наклона плоскости увеличить до величины  $\beta = 30^\circ$ ? Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**1.2.19.** Санки можно удержать на горке с углом наклона  $\alpha = 30^\circ$  минимальной силой  $F = 60$  Н, направленной вдоль горки. Представляемые самим себе они скатываются с ускорением  $a = 3,9 \text{ м/с}^2$ . Какую минимальную силу  $F_1$ , направленную вдоль горки, нужно приложить к санкам, чтобы тянуть их в горку с постоянной скоростью? Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**1.2.20.** На материальную точку с массой  $m = 1$  кг, которая первоначально покоялась, в момент времени  $t = 0$  начинает действовать постоянная по величине сила  $F = 1$  Н. До момента времени  $t_1 = 5$  с сила сохраняет постоянное направление, а в момент  $t_1$  происходит поворот вектора силы на  $90^\circ$ , после чего направление силы не меняется. На какое расстояние  $S$  удалится материальная точка от своего начального положения к моменту времени  $t_2 = 2t_1$ , если на нее не действуют никакие другие силы?

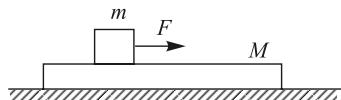
**1.2.21.** На горизонтальном столе лежит бруск массой  $m_1 = 2$  кг, на котором помещен второй бруск массой  $m_2 = 1$  кг. Оба бруска соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок, ось которого неподвижна. Какую силу  $F$  надо приложить к верхнему бруску в горизонтальном направлении, чтобы он начал двигаться с ускорением  $a = 4,9 \text{ м/с}^2$ . Коэффициент



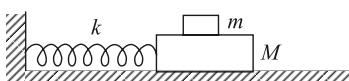
трения скольжения между брусками  $\mu = 0,2$ ?

трения между брусками  $\mu = 0,5$ . Трением нижнего бруска о стол, трением в блоке и его массой пренебречь.

**1.2.22.** Бруск массой  $M = 4$  кг находится на гладкой горизонтальной поверхности, по которой он может двигаться без трения. На бруске лежит кубик массой  $m = 1$  кг, к которому приложена горизонтальная сила  $F$ . При каком минимальном значении  $F_{\min}$  этой силы кубик начнет скользить по бруски? Коэффициент трения между кубиком и бруском  $\mu = 0,5$ . Ускорение свободного падения принять  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .

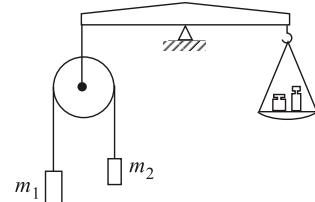


**1.2.23.** На гладком столе помещен бруск массой  $M = 1$  кг, на котором лежит коробок массой  $m = 50$  г. Бруск прикреплен к одному из концов невесомой пружины, другой конец которой заделан в неподвижную стенку. Бруск отводят от положения равновесия перпендикулярно стенке на расстояние  $\Delta l$  и отпускают без начальной скорости. При каком значении  $\Delta l$  коробок начнет скользить по бруски? Коэффициент трения коробка о бруск  $\mu = 0,2$ , жесткость пружины  $k = 500 \text{ Н/м}$ . Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Трением бруска о стол пренебречь.

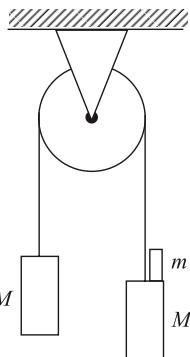


**1.2.24.** Два шарика с массами  $m_1 = 600$  г и  $m_2 = 400$  г подвешены на легкой нерастяжимой нити, перекинутой через блок. В начальный момент времени блок заторможен, а расстояние между шариками по вертикали  $l = 49$  см, причем более тяжелый шарик расположен выше. Через какое время  $\tau$  шарики окажутся на одной горизонтали, если системе позволить двигаться? Блок невесом. Трением пренебречь.

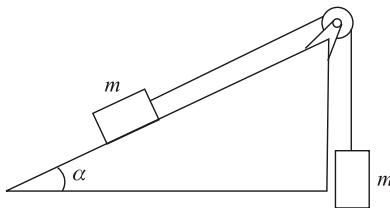
**1.2.25.** На нити, перекинутой через невесомый блок, подвешены два груза массами  $m_1 = 100$  г и  $m_2 = 50$  г. В заторможенном состоянии (когда грузы неподвижны) блок уравновешен на рычажных весах. На какую величину  $\Delta m$  нужно изменить массу гирь на правой чашке, чтобы при освобождении блока (когда грузы придут в движение) сохранить равновесие весов?



**1.2.26.** Два одинаковых груза массой  $M = 1$  кг связаны между собой нитью, перекинутой через блок с неподвижной осью. На один из грузов кладут перегрузок массой  $m = 0,1$  кг. С какой силой  $F$  будет давить перегрузок на груз  $M$ ? Массой блока и нити, а также трением в оси блока пренебречь, нить считать нерастяжимой, ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .



**1.2.27.** Два одинаковых бруска массой  $T = 0,1$  кг каждый, соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок, установленный на наклонной плоскости. Плоскость образует с горизонтом угол  $\alpha = 30^\circ$ . Пренебрегая трением в системе, найти силу  $F$ , которая действует со стороны нити на блок. Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Массой блока пренебречь.



**1.2.28.** Маленький шарик массы  $m = 100$  г подвешен на длинной нити к потолку вагона, который равномерно движется по криволинейному участку пути со скоростью  $V = 72$  км/час. С какой силой  $T$  натянута нить, если радиус закругления участка пути  $R = 200$  м?

**1.2.29.** Две звезды одинаковой массой  $M$  движутся по окружности радиусом  $R$ , располагаясь на противоположных концах диаметра окружности. Пренебрегая влиянием других небесных тел, определить период  $T$  обращения звезд. Гравитационная постоянная  $G$ .

**1.2.30.** Вокруг планеты, имеющей форму шара радиуса  $r$ , по круговой орбите движется спутник. Определить радиус орбиты спутника  $R$ , считая известными ускорение свободного падения у поверхности планеты  $g$  и период обращения спутника  $T$ .

**1.2.31.** Известно, что сила тяжести, действующая на тело на высоте  $h$  над поверхностью планеты на полюсе, равна весу этого же тела наповерхности планеты на экваторе. Найти период  $T$  вращения

планеты вокруг оси, если радиус планеты  $R$ , а ускорение свободного падения у поверхности на полюсе  $g$ . Планету считать однородным шаром.

**1.2.32.** Шарику, подвешенному на нити, сообщили некоторую начальную скорость, после чего он начал вращаться по окружности в вертикальной плоскости. Определить массу шарика  $m$ , если известно, что сила натяжения нити в верхней точке траектории составляет  $T_1 = 1$  Н, а в нижней точке траектории  $T_2 = 2$  Н. Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

## 1.3. Законы сохранения в механике

### Вопросы программы

1. Импульс (количество движения) материальной точки. Импульс силы. Связь между приращением импульса материальной точки и импульсом силы. Импульс системы материальных точек. Центр масс системы материальных точек. Закон сохранения импульса. Реактивное движение.
2. Механическая работа. Мощность. Энергия. Единицы измерения работы и мощности.
3. Кинетическая энергия материальной точки и системы материальных точек. Связь между приращением кинетической энергии тела и работой приложенных к телу сил.
4. Потенциальная энергия. Потенциальная энергия тел вблизи поверхности Земли. Потенциальная энергия упругого деформированного тела.
5. Закон сохранения механической энергии.

### Определения, понятия и законы

**Импульс материальной точки.** Импульсом материальной точки называют векторную величину, равную произведению массы точки на ее скорость

$$\vec{p} = m\vec{V}. \quad (1.3.1)$$

**Импульс силы.** Импульсом постоянной силы  $\vec{F}$  за время  $\Delta t$  называют векторную величину  $\vec{F}\Delta t$ .

**Связь между приращением импульса материальной точки и импульсом силы.** Второй закон Ньютона точки может быть сформули-

рован в виде теоремы об изменении импульса материальной точки: в инерциальной системе отсчета изменение импульса точки за некоторое время  $\Delta t$  равно импульсу действующей на нее силы за это же время

$$\Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t. \quad (1.3.2)$$

**Импульс системы материальных точек.** **Центр масс системы материальных точек.** Импульсом системы материальных точек называют векторную сумму импульсов всех  $N$  точек, входящих в систему, то есть

$$\vec{P} = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 + \cdots + m_N \vec{V}_N = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N. \quad (1.3.3)$$

Важные закономерности движения системы материальных точек можно установить, используя понятие *центра масс системы*. Центром масс системы материальных точек называется воображаемая точка, положение которой в заданной системе отсчета определяется радиус-вектором  $\vec{r}_{\text{цм}}$ , вычисляемым по формуле

$$\vec{r}_{\text{цм}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, \quad (1.3.4)$$

где  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  — масса системы,  $m_i$  — масса  $i$ -й точки,  $\vec{r}_i$  — ее радиус-вектор. Скорость центра масс находится из выражения

$$\vec{V}_{\text{цм}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}_i, \quad (1.3.5)$$

где  $\vec{V}_i$  — скорость  $i$ -й точки. Сравнение формул (1.3.3) и (1.3.5) показывает, что

$$\vec{P} = M \vec{V}_{\text{цм}}. \quad (1.3.6)$$

Следовательно, импульс системы материальных точек равен произведению суммарной массы системы на скорость ее центра масс.

**Закон сохранения импульса.** Закон изменения импульса может быть обобщен на систему материальных точек. Для этого необходимо ввести понятие о внутренних и внешних силах. Внутренними силами называются силы взаимодействия между точками, входящими в систему. Внешними силами называются силы взаимодействия точек системы с телами, не входящими в систему (рис. 1.3.1).

Записывая для каждой точки системы закон изменения импульса под действием внутренних и внешних сил, получим:

Складывая уравнения системы (1.3.7) почленно и учитывая, что согласно третьему закону Ньютона  $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$ , получаем закон изменения импульса системы точек:

$$\Delta \vec{P} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N) \cdot \Delta t = \vec{F}_{\text{внеш}} \cdot \Delta t, \quad (1.3.8)$$

где  $\vec{F}_{\text{внеш}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$  — сумма внешних сил.

Границы системы условно обозначены штриховой линией.  $\vec{F}_i$  — внешние силы,  $\vec{f}_{ii}$  — внутренние силы

В инерциальной системе отсчета изменение импульса системы материальных точек равно импульсу внешних сил, приложенных к системе. Внутренние силы не изменяют импульс системы.

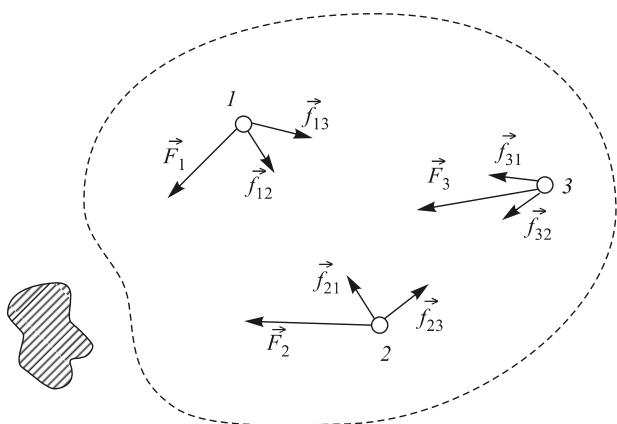


Рис. 1.3.1. Границы системы условно обозначены штриховой линией.  
 $\vec{F}_i$  — внешние силы,  $\vec{f}_{ij}$  — внутренние силы

*Закон сохранения импульса* системы является следствием сформулированного выше закона изменения импульса и гласит: если импульс внешних сил, приложенных к системе материальных точек, равен нулю, то импульс системы сохраняется.

Важным частным случаем является равенство нулю суммы внешних сил, действующих на систему (такие системы называются замкнутыми): *импульс замкнутой системы сохраняется*. Скорость центра масс замкнутой системы постоянна.

Если внешние силы не равны нулю, но существует такое неизменное направление в пространстве, что проекция суммы внешних сил на это направление обращается в нуль, то проекция импульса системы на это направление сохраняется.

**Реактивное движение.** Большое значение имеет закон сохранения импульса для исследования *реактивного движения*. Под реактивным движением понимают движение тела, возникающее при отделении некоторой его части с определенной скоростью относительно тела, например при истечении продуктов сгорания из сопла реактивного летательного аппарата. При этом появляется так называемая *реактивная сила*, сообщающая телу ускорение. Главная особенность реактивной силы состоит в том, что она возникает без какого-либо взаимодействия с внешними телами. Происходит лишь взаимодействие между ракетой и вытекающей из нее струей вещества. Принцип реактивного движения основан на том, что истекающие из реактивного двигателя газы получают импульс. Такой же по модулю импульс приобретает ракета. Масса ракеты со временем убывает; ракета является телом переменной массы.

Из закона сохранения импульса для замкнутой системы «ракета+газ» можно получить уравнение Мещерского

$$M\vec{a} = -\mu\vec{U}, \quad (1.3.9)$$

где  $M = M(t)$  — масса ракеты в момент времени  $t$ ,  $\vec{a}$  — ее ускорение,  $\mu$  — расход топлива (масса сгоревшего топлива в единицу времени),  $\vec{U}$  — скорость истечения газов относительно ракеты. Векторная величина на  $\vec{F}_p = -\mu\vec{U}$  носит название *реактивной силы*. Она появляется вследствие истечения газов из ракеты, приложена к ракете и направлена противоположно скорости газов относительно ракеты. Если на ракету действуют внешние силы, то ее движение определяется *реактивной силой*  $\vec{F}_p$  и суммой внешних сил  $\vec{F}$ :

$$M\vec{a} = \vec{F}_p + \vec{F}. \quad (1.3.10)$$

**Механическая работа. Мощность.** Работой силы  $\vec{F}$  на перемещении  $\Delta\vec{r}$  материальной точки называется скалярная величина

$$A = F\Delta r \cos \alpha, \quad (1.3.11)$$

где  $\alpha$  — угол между направлениями силы и перемещения (рис. 1.3.2). В зависимости от взаимной ориентации векторов  $\vec{F}$  и  $\Delta\vec{r}$  работа может быть величиной положительной, отрицательной или равной нулю. Если

на материальную точку действует система сил, то работа всех этих сил на перемещении точки  $\vec{\Delta r}$  равна

$$A = \sum_{i=1}^N F_i \Delta r \cos \alpha_i = F_\Sigma \Delta r \cos \alpha, \quad (1.3.12)$$

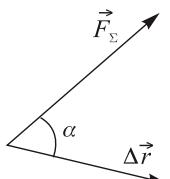
где  $\alpha_i$  — угол между силой  $\vec{F}_i$  и перемещением  $\vec{\Delta r}$  точки,  $F_\Sigma$  — модуль равнодействующей всех сил, действующих на материальную точку,

$\alpha$  — угол между векторами  $\vec{F}_\Sigma$  и  $\vec{\Delta r}$ . При поступательном движении твердого тела работа силы (или равнодействующей нескольких сил) вычисляется по формуле (1.3.11), где под  $\vec{\Delta r}$  понимается перемещение любой точки тела, например, центра масс.

*Мощностью* называется отношение работы  $A$  к величине интервала времени  $\Delta t$ , за который эта работа совершена:

$$N = \frac{A}{\Delta t}. \quad (1.3.13)$$

Рис. 1.3.2.  
К вычислению  
работы силы



Если сила  $\vec{F}$  действует на точку, движущуюся со скоростью  $\vec{V}$ , то мощность этой силы равна

$$N = FV \cos \alpha, \quad (1.3.14)$$

где  $\alpha$  — угол между направлениями силы и скорости.

**Единицы измерения работы и мощности.** Единица работы в СИ называется джоулем (Дж). Джоуль равен работе, совершаемой силой 1 Н при перемещении точки ее приложения на 1 м в направлении действия силы: 1 Дж = 1 Н·м. Единица мощности в СИ называется ваттом (Вт). Ватт равен мощности, при которой за время 1 с совершается работа 1 Дж: 1 Вт = 1 Дж/с.

**Энергия.** Энергией называется скалярная физическая величина, являющаяся общей количественной мерой движения и взаимодействия всех видов материи. Энергия не возникает из ничего и не исчезает, она может только переходить из одной формы в другую. Понятие энергии связывает воедино все явления природы.

Для характеристики различных форм движения материи вводятся соответствующие виды энергии, например, механическая энергия, внутренняя энергия, энергия электромагнитных взаимодействий и др.

Механическая энергия  $E$  характеризует движение и взаимодействие тел и является функцией их скоростей и взаимного расположения. Она равна сумме кинетической и потенциальной энергий.

**Кинетическая энергия** материальной точки является мерой ее механического движения, зависящей от скорости ее движения в данной инерциальной системе отсчета. *Кинетической энергией* материальной точки называется скалярная величина

$$E_K = \frac{mV^2}{2}. \quad (1.3.15)$$

При *поступательном* движении твердого тела его кинетическая энергия также определяется по формуле (1.3.15), где под  $m$  понимается масса тела, а под  $V$  — скорость любой из его точек (например, центра масс).

Для *системы материальных точек*

$$E_K = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} + \dots + \frac{m_N V_N^2}{2}. \quad (1.3.16)$$

**Связь между приращением кинетической энергии тела и работой приложенных к телу сил.** Из второго закона Ньютона следует закон изменения кинетической энергии материальной точки

$$\Delta E_K = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = A_{12}, \quad (1.3.17)$$

согласно которому изменение кинетической энергии точки на каком-либо отрезке траектории равно работе приложенных к точке сил на этом же отрезке. Это утверждение справедливо также для твердого тела, совершающего поступательное движение. Движущееся тело обладает кинетической энергией, которая равна работе, которую нужно совершить, чтобы увеличить скорость тела от нуля до текущего значения.

Кинетическая энергия тела увеличивается, если работа приложенных к нему сил положительна, и уменьшается, если эта работа отрицательна.

**Потенциальная энергия** — это энергия взаимодействия тел, определяемая их взаимным расположением. Потенциальная энергия может быть введена для таких сил взаимодействия, которые зависят только от расстояний между телами системы (но не от их скоростей). Эти силы в механике выделяют в особый класс и называют *потенциальными* или *консервативными*. Потенциальными являются силы тяготения, силы упругости, кулоновские и архимедовы силы. Работа потенциальной силы не зависит от формы траектории тела и определяется только его начальным и конечным положением. Это эквивалентно утверждению, что работа потенциальной силы по любому замкнутому пути равна нулю.

Хотя потенциальная энергия — это энергия взаимодействия по крайней мере двух тел, часто бывает удобно при ее вычислении принять одно из взаимодействующих тел за неподвижное. В этом случае можно говорить о потенциальной энергии второго тела, находящегося

под действием силы со стороны первого, и рассматривать эту силу как внешнюю. Так поступают, например, определяя потенциальную энергию тела в поле притяжения Земли (см. ниже).

Таким образом, *потенциальной энергией*  $E_{\Pi}$  тела в некоторой точке  $M$  называют работу, которую нужно совершить против потенциальной силы, чтобы переместить тело из точки, где потенциальная энергия равна нулю, в точку  $M$ .

Значение потенциальной энергии тела зависит от выбора точки отсчета потенциальной энергии, в которой ее полагают равной нулю.

Зная потенциальную энергию, можно найти работу силы по перемещению тела из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = -\Delta E_{\Pi} = E_{\Pi 1} - E_{\Pi 2}. \quad (1.3.18)$$

Поскольку работа определяется лишь изменением потенциальной энергии, выбор нулевого уровня потенциальной энергии не играет никакой особой роли и диктуется исключительно соображениями удобства при решении конкретной задачи. Ни одно явление природы не зависит от самой потенциальной энергии. Важна лишь разность значений потенциальной энергии в конечном и начальном состояниях системы.

**Потенциальная энергия тела вблизи поверхности Земли** вычисляется по формуле:

$$E_{\Pi} = mg y, \quad (1.3.19)$$

где  $y$  — высота центра тяжести тела над поверхностью Земли.

**Потенциальная энергия упругого деформированного тела.** Простейшей моделью упругих деформаций является растяжение или сжатие пружины. Потенциальная энергия тел, взаимодействующих посредством пружины, равна

$$E_{\Pi} = \frac{kx^2}{2}, \quad (1.3.20)$$

где  $k$  — жесткость пружины,  $x$  — удлинение пружины, т.е. разность ее длин в деформированном и недеформированном состояниях. Потенциальная энергия, определяемая выражением (1.3.20), не зависит от свойств тел, которые связывает пружина. Эта энергия сконцентрирована в пружине.

**Закон сохранения механической энергии.** Полной механической энергией  $E$  материальной точки называется сумма ее кинетической и потенциальной энергий:

$$E = E_K + E_{\Pi}. \quad (1.3.21)$$

Аналогично вводится полная механическая энергия системы точек, причем полная кинетическая энергия рассчитывается по форму-

ле (1.3.16), а полная потенциальная энергия системы равна сумме потенциальных энергий всех пар взаимодействующих точек, а также потенциальных энергий этих точек в поле внешних сил.

Кроме потенциальных сил, в системе и на систему могут действовать также непотенциальные силы, которые зависят от скоростей тел. Работа непотенциальной силы при перемещении точки или тела по замкнутой траектории отлична от нуля. Непотенциальными являются силы трения скольжения и силы вязкого трения.

Изменение полной механической энергии подчиняется следующему закону: в инерциальной системе отсчета изменение полной механической энергии материальной точки, или системы точек равно работе непотенциальных сил (как внешних, так и внутренних).

Следствием этого закона является *закон сохранения полной механической энергии*: если непотенциальные силы, действующие в системе и на систему, не совершают работу, полная механическая энергия системы сохраняется.

### Указания по решению задач

Большое число задач из данного раздела связано с соударениями тел или разделением тела на составные части (столкновение шариков, выстрел из пушки, разрыв гранаты и т.п.). При решении задач такого типа нужно иметь в виду, что если конечное состояние системы отделено от начального малым интервалом времени  $\Delta t$  (время соударения или время выстрела), то импульсом  $F\Delta t$  таких внешних сил, как тяготение или трение, можно пренебречь и рассматривать систему как замкнутую. Однако, импульсом сильно меняющейся за время соударения внешней силы в общем случае пренебречь нельзя, так как произведение малого  $\Delta t$  на большую  $F$  может оказаться конечной величиной. Например, при столкновении шарика с неподвижной стенкой конечное изменение его импульса за очень короткое время соударения обусловлено импульсом весьма большой силы упругости, возникающей при деформациях шарика и стенки.

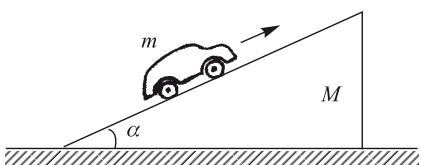
При записи закона сохранения импульса нужно следить за правильностью расстановки знаков. Некоторое направление выбирается за положительное. Проекция импульса тела записывается со знаком плюс, если направление составляющей совпадает с избранным направлением, и со знаком минус — в противоположном случае. Для тел, направления движения которых не заданы в условии задачи, знаки могут быть расставлены произвольно. Если в результате решения окажется, что проекция импульса положительна, то направление движения выбрано правильно, если отрицательна, то — неправильно.

Столкновения тел обычно описываются одной из двух простейших моделей: (абсолютно) упругое и (абсолютно) неупругое соударения. В первом случае при соударении сохраняется как импульс, так и суммарная кинетическая энергия взаимодействующих тел, во втором —

тела после взаимодействия движутся с одной и той же скоростью, их импульс сохраняется, но суммарная кинетическая энергия уменьшается, т.к. часть ее переходит во внутреннюю энергию. Если соударение центральное, то и в том, и в другом случаях задача полностью описана математически и имеет решение. Теория нецентрального удара выходит за рамки простейших моделей, поэтому в условиях задач на эту тему обязательно должны содержаться некоторые дополнительные данные, позволяющие получить единственное решение.

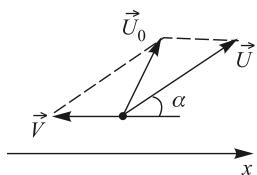
### Примеры решения задач

**1.3.1.** Клин массой  $M = 0,5$  кг с углом при основании  $\alpha = 30^\circ$  покоится на гладкой горизонтальной плоскости.



на наклонную поверхность клина ставят заводной автомобиль массой  $m = 0,1$  кг и отпускают без начальной скорости, после чего автомобиль начинает движение вверх по клину в плоскости рисунка. Найти скорость  $U$  автомобиля относительно клина в момент, когда клин приобретает относительно плоскости скорость  $V = 2$  см/с.

**Решение:** Поскольку трение между клином и горизонтальной плоскостью пренебрежимо мало, в системе двух тел "автомобиль + клин" сохраняется горизонтальная проекция суммарного импульса. Следовательно, в неподвижной системе отсчета в каждый момент времени выполняется следующее соотношение:



$$MV - mU_{0x} = 0,$$

где  $V$  — модуль скорости клина,  $U_{0x}$  — горизонтальная проекция скорости автомобиля. По закону сложения скоростей (см. рисунок)

$$\vec{U}_0 = \vec{V} + \vec{U},$$

где  $\vec{U}$  — скорость автомобиля относительно клина. В проекции на горизонтальную ось это равенство имеет вид:

$$U_{0x} = U_x - V = U \cos \alpha - V$$

Объединяя последнее соотношение с первым, получаем ответ:

$$U = \frac{M+m}{m \cos \alpha} V \cong 14 \text{ см/с.}$$

**1.3.2.** На прямолинейном горизонтальном участке пути стоят  $N = 5$  одинаковых вагонов. Промежутки между соседними вагонами оди-

наковы и равны  $L = 30$  м. К крайнему вагону подкатывается еще один такой же вагон, имеющий скорость  $V_0 = 2$  м/с. В результате  $N$  последовательных столкновений, в каждом из которых сталкивающиеся вагоны сцепляются вместе, все  $N + 1$  вагонов соединяются в один состав. Найти время  $\tau$  между первым и последним столкновениями. Силами сопротивления движению вагонов пренебречь.

**Решение:** Поскольку силы сопротивления пренебрежимо малы, движущийся и покоящиеся вагоны представляют собой замкнутую механическую систему. Обозначив через  $m$  массу отдельного вагона, рассмотрим ряд их последовательных столкновений, в каждом из которых выполняется закон сохранения импульса:

$$mV_0 = 2mV_1, \quad 2mV_1 = 3mV_2, \quad 3mV_2 = 4mV_3, \quad \dots$$

где  $V_n$  — скорость состава после  $n$ -го столкновения. Из этих соотношений следует, что  $V_n = V_0/(n+1)$ . Поэтому время между  $n$ -м и  $(n+1)$ -м столкновениями равно:

$$t_n = \frac{L}{V_n} = \frac{L(n+1)}{V_0}.$$

Искомое время между первым и последним (т.е.  $(N-1)$ -м) столкновениями:

$$\tau = t_1 + t_2 + \dots + t_{N-1} = \frac{L}{V_0}(2 + 3 + \dots + N).$$

Применяя формулу для суммы арифметической прогрессии, находим ответ:  $\tau = \frac{L(N^2 + N - 2)}{2V_0} = 210$  с.

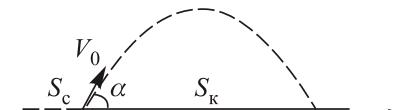
**1.3.3.** Кузнецик сидит на одном из концов соломинки длины  $l = 50$  см, покоящейся на гладком полу. С какой минимальной относительно пола скоростью  $V_0$  он должен прыгнуть, чтобы при приземлении попасть точно на второй конец соломинки? Масса кузнецика в  $\beta = 3$  раза больше массы соломинки. Размерами кузнецика и трением между полом и соломинкой пренебречь.

**Решение:** В системе двух тел «кузнецик + соломинка» сохраняется горизонтальная проекция суммарного импульса, откуда следует, что в неподвижной системе отсчета справедливо равенство:

$$mV_0 \cos \alpha = MU,$$

где  $m$  и  $M$  — массы кузнецика и соломинки,  $U$  — скорость соломинки. Отсюда  $U = mV_0 \cos \alpha / M$ . Время  $t_0$ , которое кузнецик проводит в полете, легко найти из уравнений кинематики как для тела, подброшенного вверх со скоростью  $V_0 \sin \alpha$ . Элементарный расчет дает, что

$$t_0 = \frac{2V_0 \sin \alpha}{g}.$$



За это время перемещение соломинки влево и горизонтальное перемещение кузнечика вправо примут следующие значения (см. рисунок):

$$S_c = Ut_0 = \frac{2V_0^2}{g} \cdot \frac{m}{M} \sin \alpha \cos \alpha, \quad S_k = V_0 t_0 \cos \alpha = \frac{2V_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Для того, чтобы кузнечик при приземлении попал точно на правый конец соломинки, эти величины должны быть связаны соотношением:

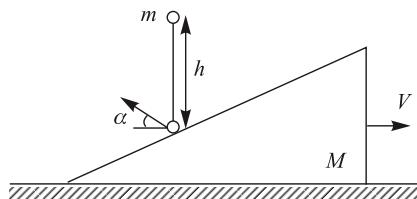
$$S_c + S_k = l.$$

Объединяя записанные равенства и учитывая, что  $m/M = \beta$ , находим величину начальной скорости кузнечика:

$$V_0 = \sqrt{\frac{gl}{\sin 2\alpha \cdot (1 + \beta)}}.$$

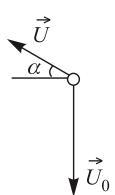
Эта величина минимальна при  $\sin 2\alpha = 1$ , т.е. при  $\alpha = 45^\circ$ . Таким образом, ответ имеет вид:  $V_0 = \sqrt{\frac{gl}{1 + \beta}} \cong 1,1 \text{ м/с.}$

**1.3.4.** На покоящийся на гладком горизонтальном столе клин массой  $M = 1 \text{ кг}$  с высоты  $h = 50 \text{ см}$  падает шарик массой  $m = 10 \text{ г}$  и отскакивает под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту. Найти скорость клина  $V$  после удара. Соударение между шариком и клином считать абсолютно упругим, трение между клином и столом не учитывать. Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .



**Решение:** Обозначим через  $U_0$  и  $U$  величины скоростей шарика, соответственно, до и после соударения с клином. Для тела, падающего без начальной скорости с высоты  $h$ , имеем:  $U_0 = \sqrt{2gh}$ . Из закона сохранения проекции импульса системы «шарик + клин» на горизонтальную ось, следует, что  $U \cos \alpha = MV$ , откуда  $U = \frac{M}{m \cos \alpha} V$ .

При упругом соударении шарика и клина суммарная кинетическая энергия этих тел сохраняется:



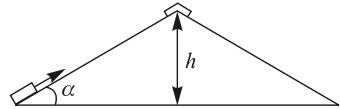
$$\frac{mU_0^2}{2} = \frac{mU^2}{2} + \frac{MV^2}{2}.$$

Объединяя записанные выражения, после несложных преобразований получаем ответ:

$$V = m \cos \alpha \sqrt{\frac{2gh}{M(M + m \cos^2 \alpha)}} \cong 2,7 \text{ см/с.}$$

**1.3.5.** Кирпич, лежащий на краю крыши дома, толкнули вверх вдоль ската со скоростью  $V = 10$  м/с.

После упругого удара о конек кирпич соскользнул обратно и остановился на краю крыши. Найти коэффициент трения  $\mu$  между кирпичом и поверхностью крыши, если конек находится на высоте  $h = 2,5$  м от края крыши, а угол наклона крыши к горизонту  $\alpha = 30^\circ$ . Ускорение свободного падения принять  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .



**Решение:** Поскольку удар кирпича о конек крыши является упругим, изменение полной механической энергии кирпича в процессе его движения по крыше связано лишь с работой силы трения. Величина этой работы равна:

$$A = F_{\text{тр}} S = \mu mg \cos \alpha \cdot 2 \frac{h}{\sin \alpha} = 2\mu mg \operatorname{ctg} \alpha.$$

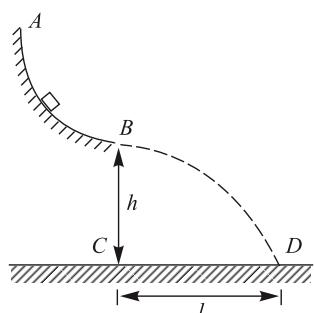
Учитывая, что значения потенциальной энергии кирпича в начальном и конечном состояниях совпадают и кирпич останавливается точно на краю крыши, закон изменения полной механической энергии кирпича можно записать в виде:

$$\frac{mV^2}{2} = 2\mu mg \operatorname{ctg} \alpha.$$

Выражая отсюда коэффициент трения, получаем ответ:

$$\mu = \frac{V^2}{4gh} \operatorname{tg} \alpha \cong 0,59.$$

**1.3.6.** Маленький брускок массой  $m = 100$  г соскальзывает по шероховатому желобу АВ, составляющему четверть окружности радиусом  $R = 1$  м, и падает на горизонтальную поверхность в точку D. Точка B желоба находится на высоте  $h = 2$  м от горизонтальной поверхности. Расстояние между точками C и D  $l = 2$  м. Найти величину A работы силы трения бруска о желоб. Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .



**Решение:** Непосредственный расчет работы силы трения требует привлечения высшей математики, т.к. сила трения при движении бруска все время меняется по

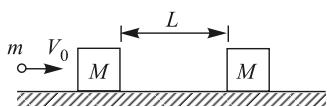
величине и направлению. Но использование закона изменения механической энергии позволяет легко решить задачу. Согласно этому закону величина работы силы трения при движении бруска по желобу равна

$$A = E_{\text{h}} - E_{\text{k}},$$

где  $E_{\text{h}} = mgR$  — энергия бруска в начале движения по желобу,  $E_{\text{k}} = \frac{mV^2}{2}$  — энергия бруска в конце движения по желобу,  $V$  — скорость бруска в точке  $B$  (за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии принят нижний край желоба). Скорость  $V$  можно найти из кинематических уравнений, описывающих свободное падение бруска в течение времени  $\tau$ :  $l = V\tau$ ,  $h = \frac{g\tau^2}{2}$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$A = mg \left( R - \frac{l^2}{4h} \right) = 0,5 \text{ Дж.}$$

**1.3.7.** На гладком горизонтальном столе покоятся два одинаковых кубика массой  $M$  каждый. В центр левого кубика попадает пуля



массой  $m$ , летящая горизонтально со скоростью  $V_0$ , направленной вдоль линии, соединяющей центры кубиков. Пробив насквозь левый кубик, пуля летит дальше со скоростью  $V_0/2$ , попадает в правый кубик

и застревает в нем. Через какое время  $\tau$  после попадания пули в левый кубик кубики столкнутся, если начальное расстояние между ними равно  $L$ ? Размерами кубиков пренебречь.

**Решение:** Поскольку трение отсутствует, в системе «пуля + кубики» сохраняется импульс. Согласно общепринятой модели удара кубики за очень короткое время взаимодействия с пулей не смещаются, но приобретают скорости, которые обозначим через  $U_1$  и  $U_2$ . Из закона сохранения импульса при взаимодействии пули с кубиками следуют равенства:

$$mV_0 = MU_1 + \frac{mV_0}{2}, \quad \frac{mV_0}{2} = (m+M)U_2,$$

Отсюда

$$U_1 = \frac{m}{M} \frac{V_0}{2}, \quad U_2 = \frac{m}{m+M} \frac{V_0}{2}.$$

Время полета пули с момента столкновения с левым кубиком до момента столкновения с правым кубиком равно

$$t_1 = \frac{2L}{V_0}.$$

За это время левый кубик сместился на расстояние  $x_1 = U_1 t_1 = \frac{m}{M} L$ . Относительная скорость кубиков

$$U_{\text{отн}} = U_1 - U_2 = \frac{m^2 V_0}{2M(m+M)}.$$

Время, которое прошло с момента, когда пуля попала в правый кубик, до столкновения кубиков,

$$t_2 = \frac{L - x_1}{U_{\text{отн}}} = \frac{2L(M^2 - m^2)}{m^2 V_0}.$$

Искомое время равно сумме этих времен:  $\tau = t_1 + t_2$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:  $\tau = \frac{2L}{V_0} \cdot \frac{M^2}{m^2}$ .

**1.3.8.** Два шарика массами  $m_1$  и  $m_2$ , покоящиеся на гладкой горизонтальной плоскости, связаны пружиной длиной  $l$  и жесткостью  $k$ . Шарику массой  $m_1$  сообщили скорость  $V_0$  в направлении от шарика массой  $m_2$  вдоль линии, соединяющей их центры. На какое максимальное расстояние  $L$  удалятся шарики друг от друга?

**Решение:** Шарики, связанные пружиной, представляют собой замкнутую механическую систему, в которой действует потенциальная внутренняя сила — сила упругости. Из законов сохранения импульса и энергии, записанных в неподвижной системе отсчета, следует, что

$$m_1 V_0 = m_1 V_1 + m_2 V_2, \quad \frac{m_1 V_0^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_1 V_2^2}{2} + \frac{kx^2}{2},$$

где  $x$  — абсолютное удлинение пружины,  $V_1$  и  $V_2$  — скорости шариков в произвольный момент времени. В момент, когда шарики удаляются друг от друга на максимальное расстояние, их относительная скорость обратится в нуль, т.е.  $V_1 = V_2 = V$ . Обозначив через  $x_0$  максимальное удлинение пружины, получаем, что в этот момент справедливы равенства:

$$m_1 V_0 = (m_1 + m_2)V, \quad m_1 V_0^2 = (m_1 + m_2)V^2 + kx_0^2.$$

Отсюда  $x_0 = V_0 \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$ . Учитывая, что максимальное расстояние, на которое удаляются друг от друга шарики, равно  $L = l + x_0$ , получаем ответ:  $L = l + V_0 \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$ .

**1.3.9.** Граната брошена от поверхности земли под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту с начальной скоростью  $V_0 = 10$  м/с. В верхней точке траектории граната разрывается на два одинаковых осколка, скорости которых сразу после взрыва направлены горизонтально. На каком расстоянии  $l$  друг от друга упадут осколки, если кинетическая энергия, сообщенная им при взрыве,  $E = 18$  Дж, а масса гранаты  $m = 1$  кг?

Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**Решение:** Наиболее просто найти решение задачи, перейдя в систему отсчета, равномерно движущуюся со скоростью, которую имела граната непосредственно перед разрывом. В этой системе суммарный импульс осколков равен нулю, поэтому их скорости после разрыва противоположны по направлению и, в силу равенства их масс, равны по величине. В результате взрыва осколки приобретают кинетическую энергию  $E$ , которая поровну делится между ними. Обозначая через  $V$  величину скорости каждого из осколков, имеем:

$$E = \frac{m}{2} \cdot \frac{V^2}{2} + \frac{m}{2} \cdot \frac{V^2}{2} = \frac{mV^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad V = \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Приобретя такие скорости, направленные горизонтально, осколки падают на землю, причем время их падения, определяемое из кинематических соотношений, равно:

$$t_0 = \frac{V_0 \sin \alpha}{g}.$$

За это время каждый из осколков смещается по горизонтали на расстояние  $Vt_0$ . В выбранной системе отсчета их перемещения направлены противоположно, поэтому расстояние между точками падения равно  $l = 2Vt_0$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$l = 2 \frac{V_0 \sin \alpha}{g} \sqrt{\frac{2E}{m}} = 6 \text{ м.}$$

Ясно, что ответ не зависит от выбора системы отсчета, поскольку расстояние между двумя точками во всех системах отсчета одинаково.

**1.3.10.** Опираясь о барьер катка, мальчик бросил камень горизонтально со скоростью  $V_1 = 5 \text{ м/с}$ . Какова будет скорость  $V_2$  камня относительно мальчика, если он бросит камень горизонтально, совершив при броске прежнюю работу, но стоя на гладком льду? Масса камня  $m = 1 \text{ кг}$ , масса мальчика  $M = 50 \text{ кг}$ . Трением о лед пренебречь.

**Решение:** При первом броске мальчик совершил работу  $A = \frac{mV_1^2}{2}$ . Такая же работа по условию задачи была совершена им и при втором броске, причем в этом случае в результате броска кинетическую энергию приобрел не только камень, но и мальчик. Пусть в неподвижной системе отсчета скорости камня и мальчика после броска равны, соответственно,  $V'_2$  и  $U$ . Из закона сохранения импульса в системе «камень + мальчик» вытекает равенство

$$mV'_2 - MU = 0.$$

Закон изменения кинетической энергии в этой системе приводит к соотношению

$$A = \frac{mV_1^2}{2} = \frac{mV_2'^2}{2} + \frac{MU^2}{2}.$$

Из последних двух равенств находим

$$V_2' = V_1 \sqrt{\frac{M}{m+M}}, \quad U = \frac{m}{M} V_1 \sqrt{\frac{M}{m+M}}.$$

Из закона сложения скоростей следует, что скорость камня относительно мальчика  $V_2 = V_2' + U$ . Отсюда получаем ответ:

$$V_2 = V_1 \sqrt{1 + \frac{m}{M}} \approx 5,05 \text{ м/с.}$$

**1.3.11.** Спутник запущен на круговую орбиту, проходящую на высоте  $h = 350$  км над поверхностью Земли. Через некоторое время спутник перевели на другую круговую орбиту, радиус которой меньше на  $\Delta h = 25$  км. На какую величину  $\eta$  изменилась при этом кинетическая энергия спутника по отношению к ее первоначальному значению? Радиус Земли  $R = 6400$  км.

**Решение:** Записывая уравнение движения спутника по круговой орбите под действием силы притяжения Земли, имеем:

$$\frac{mV_1^2}{R+h} = G \frac{mM}{(R+h)^2},$$

где  $m$  — масса спутника,  $V_1$  — его скорость на первоначальной орбите,  $M$  — масса Земли,  $R$  — ее радиус,  $G$  — гравитационная постоянная. Отсюда

$$V_1^2 = \frac{GM}{R+h}.$$

Аналогично,

$$V_2^2 = \frac{GM}{R+h-\Delta h},$$

где  $V_2$  — скорость спутника на новой орбите. Учитывая, что искомая величина

$$\eta = \frac{E_2 - E_1}{E_1} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{V_1^2},$$

после несложных преобразований получаем ответ:

$$\eta = \frac{\Delta h}{R+h-\Delta h} = 3,7 \cdot 10^{-3}.$$

В результате такого маневра кинетическая энергия спутника увеличилась.

**1.3.12.** На невесомой нити, перекинутой через неподвижный цилиндр, подвешены два груза с массами  $m_1 = 10$  кг и  $m_2 = 1$  кг. Первоначально грузы удерживают на одной высоте. При освобождении

грузов без начальной скорости первый из них опускается на высоту  $h = 2$  м за время  $\tau = 1$  с, двигаясь равноускоренно. Какое количество тепла  $Q$  выделяется из-за трения нити о поверхность цилиндра за это время? Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**Решение:** Используя кинематические соотношения, найдем ускорение грузов  $a = 2h/\tau^2$  и скорость, которую они приобретают за время движения  $V = at = 2h/\tau$ . Выбрав за нулевой уровень потенциальной энергии положение первого груза в конце движения, запишем закон изменения полной механической энергии:

$$(m_1 + m_2)gh = \frac{(m_1 + m_2)V^2}{2} + 2m_2gh + Q.$$

Подставляя сюда найденное значение скорости грузов, получаем ответ:

$$Q = (m_1 - m_2)gh - \frac{2(m_1 + m_2)h^2}{\tau^2} = 92 \text{ Дж.}$$

**1.3.13.** Шарик 1 массой  $m = 200$  г движется равномерно со скоростью  $V_1 = 10$  м/с. Навстречу ему движется шарик 2 такой же массы со скоростью  $V_2 = 8$  м/с. После соударения шарик 1 стал двигаться перпендикулярно направлению его движения до соударения со скоростью  $U_1 = 5$  м/с. Какое количество теплоты  $Q$  выделилось при соударении шариков?

**Решение:** Из условия задачи ясно, что шарики испытывают нецентральное соударение, поскольку после удара они разлетаются под разными углами по отношению к линии, вдоль которой они двигались до удара (см. рисунок). Введем координатную систему, ось  $OX$  которой направим вдоль линии первоначального движения шариков, а ось  $OY$  — перпендикулярно этой линии, и запишем закон сохранения импульса в проекции на эти оси:

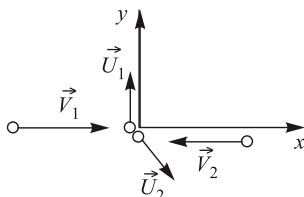
$$mV_1 - mV_2 = mU_{2x}, \quad mU_1 - mU_{2y} = 0.$$

Выражая отсюда компоненты скорости второго шарика после удара  $\vec{U}_2$ , находим квадрат ее модуля:

$$U_2^2 = (V_1 - V_2)^2 + U_1^2.$$

Выделившееся при ударе количество теплоты равно убыли кинетической энергии шариков:

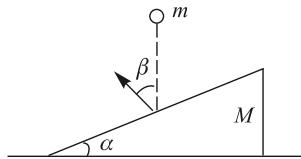
$$Q = \frac{mV_1^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2} - \left( \frac{mU_1^2}{2} + \frac{mU_2^2}{2} \right).$$



Подставляя сюда найденное выше выражение для  $U_2^2$ , после несложных преобразований получаем ответ:

$$Q = m(V_1 V_2 - U_1^2) = 11 \text{ Дж.}$$

**1.3.14.** На горизонтальном столе покоится клин массой  $M = 4$  кг. Сверху на клин падает шарик массой  $m = 1$  кг. Определить угол при основании клина  $\alpha$ , если известно, что после упругого удара о клин



шарик отскочил под углом  $\beta = 45^\circ$  к вертикали. Трением пренебречь.

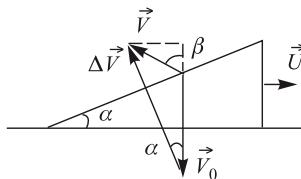
**Решение:** Поскольку смещения шарика и клина за время соударения пренебрежимо малы (удар, как обычно, считается мгновенным), а также из-за отсутствия трения, силы взаимодействия шарика и клина направлены по нормали к наклонной плоскости. Следовательно, изменение импульса шарика

$$\Delta \vec{p} = m \Delta \vec{V}$$

при ударе также будет направлено по нормали к наклонной плоскости клина (см. рисунок, где через  $\vec{V}_0$  и  $\vec{V}$  обозначены скорости шарика до и после удара соответственно,  $\vec{U}$  — скорость клина после удара). Из рисунка видно, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V \sin \beta}{V_0 + V \cos \beta}.$$

Используя закон сохранения импульса в проекции на горизонтальное



направление и закон сохранения кинетической энергии при упругом ударе, получаем следующие равенства:

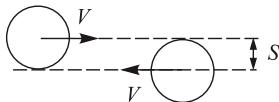
$$mV \sin \beta = MU, \quad \frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + \frac{MU^2}{2}.$$

Отсюда  $U = V \frac{m}{M} \sin \beta$ ,  $V_0 = V \sqrt{1 + \frac{m}{M} \sin^2 \beta}$ .

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \beta}{\cos \beta + \sqrt{1 + \frac{m}{M} \sin^2 \beta}} = 0,4, \quad \alpha = \operatorname{arctg} 0,4 \approx 22^\circ.$$

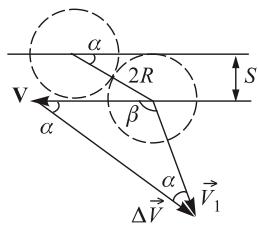
**1.3.15.** Два одинаковых шара радиусами  $R$  летят навстречу друг другу с одинаковыми скоростями как показано на рисунке. Расстоянием между линиями движения центров шаров  $S = R$ . На какой угол



$\beta$  повернется вектор скорости каждого из шаров после удара? Удар считать упругим, шары — идеально гладкими.

**Решение:** Обозначим через  $\vec{V}_1$  и  $\vec{V}_2$  скорости шаров после удара.

Используя законы сохранения импульса и энергии



$$m\vec{V}_1 + m\vec{V}_2 = 0, \quad \frac{mV_1^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2} = mV^2,$$

находим, что  $V_1 = V_2 = V$ , т.е. модули скоростей шаров после удара останутся прежними. Из предположения о кратковременности удара вытекает, что приращение импульса каждого из

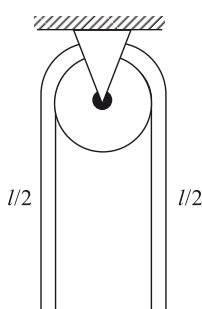
шаров направлено параллельно линии, соединяющей центры шаров в момент удара (см. решение предыдущей задачи). Из рисунка видно, что

$$\beta + 2\alpha = \pi, \quad \sin \alpha = \frac{S}{2R}.$$

Отсюда получаем ответ:  $\beta = \pi - 2 \arcsin \frac{S}{2R} = \frac{2\pi}{3}$ .

**1.3.16.** Канат длиной  $l = 2$  м переброшен через блок. В начальный момент канат покоится и по обе стороны блока свешиваются равные

его отрезки. Затем, в результате незначительного толчка равновесие каната нарушается и он приходит в движение. Какова будет скорость каната  $V$  в тот момент, когда с одной стороны блока будет свешиваться отрезок каната длиной  $l_1 = 1,5$  м? Массой блока и его размерами пренебречь, энергию толчка и трение в блоке не учитывать, ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



**Решение:** Когда один из концов каната начнет перевешивать другой, канат придет в движение, причем его ускорение будет все время увеличиваться. В самом деле, поскольку по мере движения бу-

дет возрастать масса одной из свешивающихся частей каната и уменьшаться масса другой, будет соответственно увеличиваться сила, сообщающая канату ускорение. Поэтому попытка применить для решения задачи законы динамики обречена на неудачу, так как без привлечения высшей математики мы не сможем по переменному ускорению найти скорость тела. Но использование закона сохранения механической энергии позволит легко получить ответ.

Примем за уровень отсчета потенциальной энергии каната центр блока, обозначим через  $m$  массу каната. В начальном состоянии каната, изображенном на рисунке штриховой линией, по обе стороны от блока свешиваются одинаковые части каната длиной  $l/2$  каждая (по условию задачи длиной отрезка каната, лежащего на блоке, можно пренебречь). Центры тяжести каждой из половин каната (обозначены на рисунке жирными точками) находятся на расстоянии  $l/4$  от уровня отсчета потенциальной энергии, масса каждой из половин равна  $m/2$ . Следовательно, начальная потенциальная энергия каната равна:

$$E_{\Pi 1} = -\frac{mg l}{4}.$$

В конечном состоянии каната, изображенном на рисунке сплошными линиями, слева от блока свешивается отрезок каната длиной  $l_1$  и массой  $m_1 = ml_1/l$ , центр тяжести которого находится на расстоянии  $l_1/2$  от уровня отсчета потенциальной энергии, справа от блока свешивается отрезок каната длиной  $(l - l_1)$  и массой  $m_2 = m(l - l_1)/l$ , центр тяжести которого находится на расстоянии  $(l - l_1)/2$  от уровня отсчета потенциальной энергии. В соответствии с этим, конечная потенциальная энергия каната равна:

$$E_{\Pi 2} = -mg \frac{l_1^2}{2l} - mg \frac{(l - l_1)^2}{2l}.$$

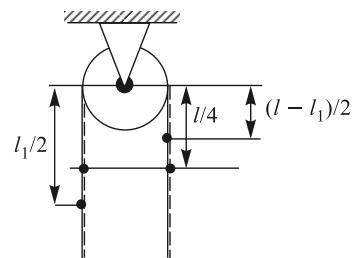
По закону сохранения механической энергии:

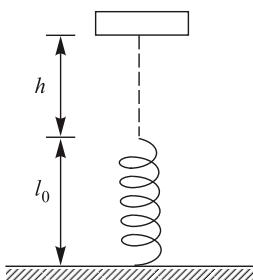
$$E_{\Pi 1} = \frac{mV^2}{2} + E_{\Pi 2}.$$

Объединяя записанные выражения, после несложных преобразований получаем ответ:

$$V = \sqrt{2g l} \left( \frac{l_1}{l} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{10}}{2} \cong 1,58 \text{ м/с.}$$

**1.3.17.** На горизонтальном столе установлена пружина длиной  $l_0 = 20$  см так, что ось пружины расположена вертикально. Когда сверху





на пружину кладут бруск, длина пружины становится равной  $l_1 = 18$  см. Какой минимальной величины  $l$  достигнет длина пружины, если тот же самый бруск упадет на нее сверху с высоты  $h = 8$  см?

**Решение:** Условие равновесия бруска, неподвижно лежащего на пружине, имеет вид:

$$mg = k(l_0 - l_1),$$

где  $m$  — масса бруска,  $k$  — жесткость пружины. Отсюда  $k = \frac{mg}{l_0 - l_1}$ . Предполагая, что пружина при падении бруска сжимается не полностью, запишем закон сохранения энергии:

$$mg(h + l_0) = mg l + \frac{k}{2}(l_0 - l)^2.$$

Подставляя сюда  $k$ , приведем это соотношение к виду:

$$(l_0 - l)^2 - 2(l_0 - l_1)(l_0 - l) - 2h(l_0 - l_1) = 0,$$

откуда  $l = l_1 \pm \sqrt{(l_0 - l_1)(l_0 - l_1 + 2h)}$ .

Отбрасывая корень со знаком «+», соответствующий максимальной высоте подъема бруска в процессе колебаний, получаем, что

$$l = l_1 - \sqrt{(l_0 - l_1)(l_0 - l_1 + 2h)}.$$

Если пружина при падении бруска сжимается полностью, то из закона сохранения энергии следует:

$$mg(h + l_0) = \frac{kl_0^2}{2}.$$

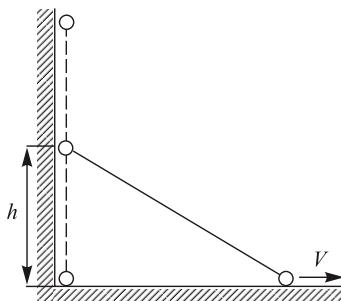
Значение высоты  $h_0$ , удовлетворяющее этому условию, равно  $h_0 = l_0 \left( \frac{l_0}{2(l_0 - l_1)} - 1 \right)$ . Таким образом, ответ имеет вид:

$$l = l_1 - \sqrt{(l_0 - l_1)(l_0 - l_1 + 2h)} \quad \text{при} \quad h \leq l_0 \left( \frac{l_0}{2(l_0 - l_1)} - 1 \right),$$

$$l = 0 \quad \text{при} \quad h > l_0 \left( \frac{l_0}{2(l_0 - l_1)} - 1 \right).$$

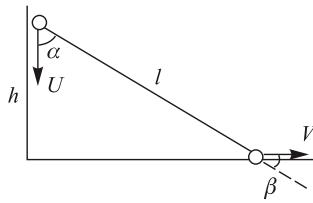
Подставляя данные из условия задачи, находим, что  $l = 12$  см.

**1.3.18.** Два одинаковых маленьких шарика соединены невесомым жестким стержнем длиной  $l = 60$  см. Стержень стоит вертикально плотную к вертикальной плоскости. При смещении нижнего шарика вправо на малое расстояние система из шариков приходит в движение в плоскости рисунка. Найти скорость нижнего шарика  $V_b$  в момент времени, когда верхний шарик находится на высоте  $h = 40$  см над горизонтальной плоскостью. Считать, что при движении шарики не



отрываются от плоскостей, трением пренебречь. Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**Решение:** Из постоянства длины стержня вытекает, что проекции скоростей шариков на направление стержня в каждый момент времени совпадают. Обозначив через  $U$  скорость верхнего шарика и вводя



углы  $\alpha$  и  $\beta$ , указанные на рисунке, имеем:

$$U \cos \alpha = V \cos \beta = V \sin \alpha,$$

откуда  $U = V \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{h}$ .

Из закона сохранения полной механической энергии шариков следует:

$$mg l = mgh + \frac{m(U^2 + V^2)}{2} = mgh + \frac{mV^2}{2}(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

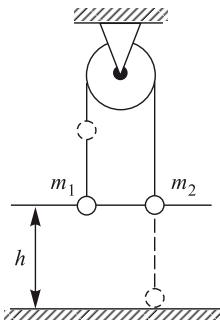
$$V = \frac{h}{l} \sqrt{2g(l-h)} \cong 1,33 \text{ м/с.}$$

## Задание для самостоятельной работы

**1.3.19.** Граната массой  $m = 1$  кг разорвалась на высоте  $h = 6$  м над землей на два осколка. Непосредственно перед разрывом скорость гранаты была направлена горизонтально и по модулю равна  $V = 10$  м/с. Один из осколков массой  $m_1 = 0,4$  кг полетел вертикально вниз и упал на землю под местом разрыва со скоростью  $V_1 = 40$  м/с. Чему равен модуль скорости  $V_2$  второго осколка сразу после разрыва?

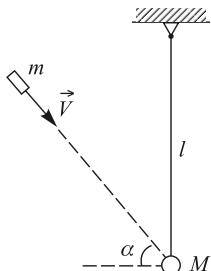
**1.3.20.** Из пушки производится выстрел таким образом, что дальность полета снаряда в  $\alpha = 2$  раза превышает максимальную высоту траектории. Считая известной величину начального импульса снаряда  $p_0 = 1000$  кгм/с, определить величину его импульса  $p$  в верхней точке траектории. Сопротивлением воздуха пренебречь.

**1.3.21.** Два груза массами  $m_1$  и  $m_2$  подвешены на концах нити, перекинутой через блок. Оба груза вначале неподвижны и находятся на одной высоте  $h$  над горизонтальной подставкой. Найти величину



изменения импульса системы грузов  $\Delta p$  за время, прошедшее от начала их движения до момента, когда один из грузов коснется подставки. Нить невесома и нерастяжима, блок невесом.

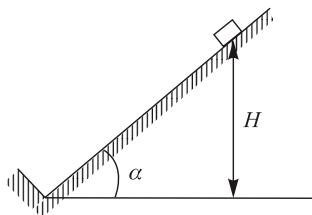
**1.3.22.** Шар массой  $M = 1$  кг подведен на невесомом жестком стержне длиной  $l = 1,25$  м, шарнирно закрепленном за верхний конец. В шар попадает пуля массой  $m = 10$  г, летящая со скоростью  $V =$



$= 500$  м/с под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту, и застревает в нем. Определить максимальный угол  $\beta$  отклонения стержня от вертикали. Ускорение свободного падения  $g = 9,8$  м/ $c^2$ .

**1.3.23.** С горки высоты  $h = 2$  м с углом наклона  $\alpha = 45^\circ$  начинают скатываться санки с нулевой начальной скоростью. Найти скорость  $V$  санок у основания горки, если на верхней половине горки коэффициент трения пренебрежимо мал, а на нижней половине коэффициент трения  $\mu = 0,1$ .

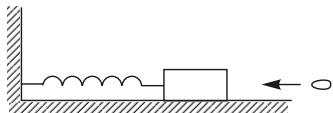
**1.3.24.** С наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha = 45^\circ$  с горизонталью, соскальзывает без начальной скорости небольшое тело и ударяется о выступ, перпендикулярный наклонной плоскости. Считая



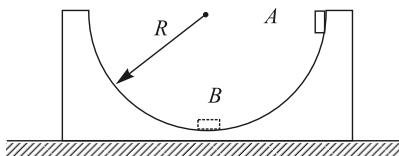
удар о выступ абсолютно упругим, найти, на какую высоту  $h$  поднимется тело после удара. Начальная высота тела  $H = 1$  м, коэффициент трения  $\mu = 0,5$ .

**1.3.25.** На горизонтальной плоскости лежит деревянный бруск массой  $M = 100$  г. В бруск попадает пуля массой  $m = 10$  г, летящая горизонтально со скоростью  $V_1 = 800$  м/с, и пробивает его насеквоздь. Скорость пули после вылета из бруска  $V_2 = 200$  м/с. Какое количество энергии  $Q$  перешло в тепло в процессе удара? Трением бруска о плоскость пренебречь.

**1.3.26.** На горизонтальной плоскости лежит деревянный бруск массой  $M = 4$  кг, прикрепленный к вертикальной стенке пружиной с коэффициентом упругости  $k = 100$  Н/м. В центр бруска попадает пуля массой  $m = 10$  г, летящая горизонтально и параллельно пружине, и застревает в нем. Определить скорость пули, если максимальное сжатие пружины после удара составило  $\Delta l = 30$  см. Трением бруска о плоскость пренебречь.



**1.3.27.** Сферическая чашка массой  $M = 200$  г покоятся на гладкой горизонтальной поверхности. По внутренней поверхности чашки из положения А начинает скользить без начальной скорости маленькоетело массой  $m = 20$  г. Какую скорость  $V$  будет иметь чашка в тот момент, когда тело достигнет наименшей точки (положение  $B$ ), если радиус чашки  $R = 8$  см. Трением между всеми поверхностями пренебречь.



**1.3.28.** Человек массой  $M = 70$  кг, неподвижно стоявший на коньках, бросил вперед в горизонтальном направлении снежный ком массой  $m = 3,5$  кг. Какую работу  $A$  совершил человек при броске, если после броска он откатился назад на расстояние  $S = 0,2$  м? Коэффициент трения коньков о лед  $\mu = 0,01$ . Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**1.3.29.** При броске тела от поверхности Земли под некоторым углом к горизонту была совершена работа  $A = 58,8$  Дж. На каком расстоянии  $S$  от места бросания тело упало на Землю, если его масса  $m = 1$  кг, а максимальная высота подъема в полете  $H = 3$  м?

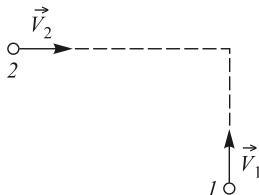
**1.3.30.** Между двумя кубиками с массами  $m$  и  $M$  находится сжатая пружина. Если кубик с массой  $M$  держать на месте, а другой освободить, то он отлетает со скоростью  $V$ . С какой скоростью  $V_1$  будет двигаться кубик массы  $m$ , если оба кубика освободить одновременно? Деформация пружины одинакова в обоих случаях. Трением и массой пружины пренебречь.



Междудвумя кубиками с массами  $m$  и  $M$  находится сжатая пружина. Если кубик с массой  $M$  держать на месте, а другой освободить, то он отлетает со скоростью  $V$ . С какой скоростью  $V_1$  будет двигаться кубик массы  $m$ , если оба кубика освободить одновременно? Деформация пружины одинакова в обоих случаях. Трением и массой пружины пренебречь.

**1.3.31.** Шарик массой  $m = 100$  г подвешен на нити длиной  $l = 1$  м. Его приводят в движение так, что он обращается по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости, которая находится на расстоянии  $l/2$  от точки подвеса. Какую работу  $A$  нужно совершить для сообщения шарику такого движения?

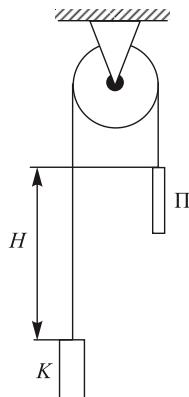
**1.3.32.** Пластилиновые шарики имеют одинаковую массу  $m$  и взаимно перпендикулярные скорости  $\vec{V}_1$  и  $\vec{V}_2$ , лежащие в одной плос-



кости. В результате столкновения шарики слипаются и движутся как одно целое. Какое количество тепла  $Q$  выделилось при столкновении, если  $m = 1$  г,  $V_1 = 2$  м/с,  $V_2 = 4$  м/с.

**1.3.33.** Начальное положение кабины лифта К и противовеса П изображено на рисунке. На какую величину  $\Delta U$  изменится потенци-

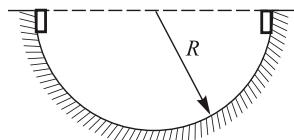
альная энергия системы при перемещении кабины вверх на расстояние  $h = 10$  м, если начальная разность уровней противовеса и кабины



$H = 15$  м, масса кабины  $M = 1$  т, масса противовеса  $m = 0,5$  т, а масса единицы длины троса, соединяющего кабину с противовесом,  $\mu = 10$  кг/м? Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**1.3.34.** На гладком столе покоится брускок массой  $M = 20$  г, прикрепленный пружиной жесткости  $k = 50$  Н/м к стене. В брускок ударяется шарик массой  $m = 10$  г, движущийся по столу со скоростью  $V_0 = 30$  м/с, направленной вдоль пружины. Считая соударение шарика и бруска упругим, найти амплитуду  $A$  колебаний бруска после удара.

**1.3.35.** Два небольших тела, находящиеся на концах горизонтального диаметра гладкой полусфера радиуса  $R = 20$  см, соскальзывают без начальных скоростей навстречу друг другу. При столкновении тела «слипаются» и далее движутся как одно целое. Найти отношение  $\alpha$  масс тел, если максимальная высота над нижней точкой полусферы, на которую поднимаются слизшиеся тела после столкновения,  $h = 5$  см. Трение не учитывать.



## **1.4. Статика твердого тела**

### **Вопросы программы**

- Сложение сил, приложенных к твердому телу. Момент силы относительно оси вращения. Правило моментов.*
- Условия равновесия тела. Центр тяжести тела. Устойчивое, неустойчивое и безразличное равновесие тел.*

### **Определения, понятия и законы**

Статикой называется раздел механики, в котором изучаются условия равновесия твердых тел под действием приложенных к ним сил.

**Сложение сил.** Сила, действующая на твердое тело, характеризуется точкой приложения, и линией действия. В задачах статики выделяют два типа сил:

- Контактные силы, возникающие при соприкосновении тел. К ним относятся силы упругости, силы трения и силы давления жидкости или газа.
- Дальнодействующие силы, действующие на расстоянии между телами. К ним относятся гравитационные и электромагнитные силы.

Силы упругости и трения приложены к телу в точке или в плоскости соприкосновения с другим твердым телом. Силы давления жидкости (газа) приложены ко всем точкам поверхности тела, окруженной жидкостью (газом). Гравитационные силы действуют на каждую точку внутри тела. Их равнодействующая приложена к некоторой точке пространства, связанной с телом: к его центру тяжести (см. ниже).

Вектор силы определяет линию, вдоль которой действует сила — линию действия. Две силы, действующие на твердое тело, уравновеши-

ваются тогда и только тогда, когда линии их действия лежат на одной прямой, силы равны по величине и действуют в противоположных направлениях. Перенос точки приложения силы, действующей на твердое тело, вдоль линии ее действия не влияет на изменение механического состояния тела. Таким образом, в задачах статики можно переносить точку приложения силы вдоль линии действия.

Под *сложением сил*, действующих на твердое тело, понимается нахождение их *равнодействующей*, т.е. силы, вызывающей такое же изменение механического состояния тела, как и данная система сил. В зависимости от взаимного направления сил и соотношения между их величинами используются следующие способы определения равнодействующей.

Равнодействующая двух сил, линии действия которых пересекаются, равна геометрической сумме этих сил. Линия действия равнодействующей проходит через точку пересечения линий действия складываемых сил.

Равнодействующая двух параллельных сил (рис. 1.4.1 (а)) равна их геометрической сумме, а линия ее действия делит расстояние между точками приложения этих сил в отношении, обратном отношению модулей сил:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{F_2}{F_1} \quad (1.4.1)$$

Равнодействующая двух не совпадающих по модулю антипараллельных

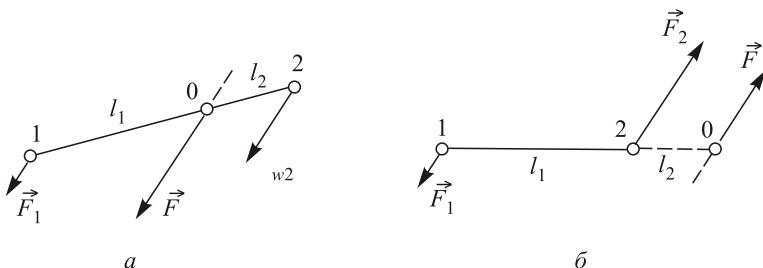


Рис. 1.4.1. Равнодействующая параллельных сил

сил (рис. 1.4.1 (б)) равна их геометрической сумме, направлена в сторону большей из них, а линия ее действия пересекает продолжение прямой, соединяющей точки приложения сил, в точке  $O$ , для которой также выполняется равенство (1.4.1).

Если на тело действуют несколько сил, то их равнодействующая находится попарным суммированием сил описанными выше способами.

Система двух равных по модулю антипараллельных сил, линии действия которых не лежат на одной прямой, называется парой сил. Пара сил сообщает телу угловое ускорение, но не вызывает ускорение его центра масс. Свести эту систему сил к одной силе, которая приво-

дила бы к такому же изменению состояния твердого тела, невозможno. Поэтому говорят, что пара сил не имеет равнодействующей.

**Момент силы относительно оси вращения.** Для того, чтобы привести твердое тело во вращение вокруг некоторой оси, к нему нужно приложить силу, имеющую отличную от нуля составляющую в плоскости, перпендикулярной к оси. При этом линия действия этой составляющей не должна проходить через ось вращения. Составляющая внешней силы, параллельная оси, не вызывает вращения тела, а приводит лишь к деформации оси. Учитывая это, под силой, действующей на твердое тело, будем понимать составляющую этой силы в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

Плечом силы называют расстояние от оси вращения (в плоскости, перпендикулярной к оси) до линии действия силы (см. рис. 1.4.2).

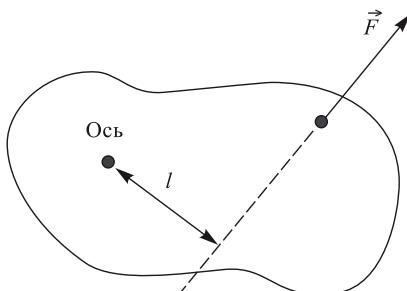


Рис. 1.4.2. Плечо силы

*Моментом силы относительно оси* называют величину, равную произведению величины силы  $F$  на плечо  $l$  и взятую со знаком «+», если сила стремится вызвать поворот тела по часовой стрелке, и со знаком «-», если против часовой стрелки:

$$M = Fl. \quad (1.4.2)$$

**Правило моментов.** Состояние твердого тела, в котором все его точки остаются сколь угодно долго неподвижными по отношению к выбранной инерциальной системе отсчета, называется *равновесием*. Условие равновесия твердого тела, имеющего ось вращения, может быть сформулировано в виде *правила моментов*: тело, имеющее неподвижную ось вращения, находится в равновесии, если алгебраическая сумма моментов всех приложенных к телу сил относительно этой оси равна нулю.

**Условия равновесия тела.** Если твердое тело может перемещаться поступательно, а также совершать вращательное движение относи-

тельно некоторой оси, равновесие тела достигается при одновременном выполнении двух условий:

1. Сумма всех сил, приложенных к телу, равна нулю.
2. Алгебраическая сумма моментов всех сил, приложенных к телу относительно оси вращения (или любой другой оси, параллельной оси вращения) равна нулю.

**Центр тяжести тела.** Всякое тело, находящееся в гравитационном поле, можно представить в виде системы частиц, на каждую из которых действует сила тяжести, пропорциональная ее массе. Полная сила тяжести, действующая на тело, является равнодействующей всех этих сил. Вблизи поверхности Земли, где гравитационное поле можно считать однородным, элементарные силы тяжести, действующие на частицы, параллельны. Точка приложения равнодействующей всех элементарных сил тяжести называется *центром тяжести* тела. В однородном гравитационном поле центр тяжести тела совпадает с центром масс тела.

Относительно оси, проходящей через центр тяжести тела, сумма моментов всех элементарных сил тяжести равна нулю.

**Устойчивое, неустойчивое и безразличное равновесие тел.** На практике большую роль играет качественная характеристика равновесия, называемая устойчивостью. В связи с этим различают три типа равновесия тел: устойчивое, неустойчивое и безразличное.

Положение равновесия системы называется *устойчивым*, если при отклонении любого тела системы от этого положения возникают силы, направленные к этому положению. Положение равновесия называется *неустойчивым*, если при отклонении любого тела системы от этого положения возникают силы, удаляющие тела системы от равновесия. Равновесие системы называется *безразличным*, если существует область отклонений от положения равновесия, в которой смещение любого тела системы не вызывает сил, изменяющих состояние системы (см. рис. 1.4.3).

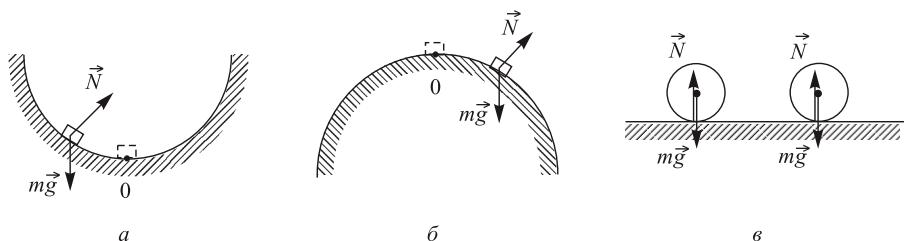


Рис. 1.4.3. Виды равновесия: (б) — устойчивое, (а) — неустойчивое, (в) — безразличное

## Указания по решению задач

При решении задач по данной теме, как и при решении динамических задач, нужно прежде всего выяснить, какие силы действуют на рассматриваемые тела. Эти силы необходимо изобразить на чертеже.

В статике используются два типа уравнений, выражающих условия равновесия тела:

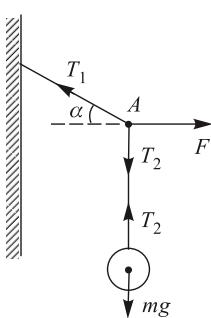
1. сумма проекций действующих на тело сил на любое направление равна нулю,
2. сумма моментов этих сил относительно любой неподвижной оси равна нулю.

При решении задач на плоскости (именно такие задачи чаще всего встречаются) для проекций сил можно записать два независимых уравнения для взаимно перпендикулярных направлений, например для горизонтального и вертикального. Целесообразно выбирать направления таким образом, чтобы проекции сил выражались наиболее просто, т.е. чтобы соответствующие косинусы углов между силами и выбранным направлением равнялись нулю или единице, или были бы заранее известны.

Если рассматриваемые в задаче силы лежат в одной плоскости, то можно записать только одно независимое уравнение для моментов сил относительно оси, перпендикулярной к этой плоскости. Решение задачи упрощается, если ось выбрать так, чтобы в уравнение моментов по возможности не входили моменты сил, знание которых не требуется по условию задачи. Для этого нужно, чтобы плечи этих сил были равны нулю.

## Примеры решения задач

**1.4.1.** Однородный шар массы  $m = 7$  кг привязан за веревку к гвоздю, вбитому в стену. Какую горизонтальную силу  $F$  нужно приложить к середине веревки, чтобы натяжения нижней и верхней ее половин относились как  $1 : 2$ , а шар не касался стенки? Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



**Решение:** Положение веревки и силы, действующие в системе, изображены на рисунке, где через  $T_1$  и  $T_2$  обозначены величины сил натяжения верхней и нижней половин веревки. Из условия равновесия шара вытекает, что  $T_2 = mg$ . Записывая условие равновесия точки  $A$  (точки приложения силы  $F$ ) в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления, имеем:

$$T_1 \cos \alpha = F, \quad T_1 \sin \alpha = T_2.$$

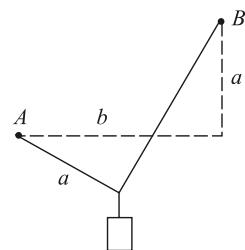
Из последнего соотношения, с учетом того, что по условию  $T_1 = 2T_2$ , находим:

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}, \quad \text{т.е.} \quad \alpha = 30^\circ.$$

Следовательно,  $F = 2mg \cos 30^\circ$ . Ответ:

$$F = mg\sqrt{3} = 118,8 \text{ Н.}$$

**1.4.2.** На двух гвоздях, вбитых в стену в точках  $A$  и  $B$  (см. рисунок), повешена веревка. Расстояние между гвоздями по горизонтали  $b = \sqrt{3}$  м  $\approx 1,73$  м, разность высот, на которых вбиты гвозди  $a = 1$  м, длина веревки равна  $a + b$ . На веревке на расстоянии  $a$  от точки  $A$  подвешивают груз, который не касается стены. Найти отношение  $\beta$  сил натяжения веревки слева и справа от груза. Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Веревку считать невесомой и нерастяжимой.

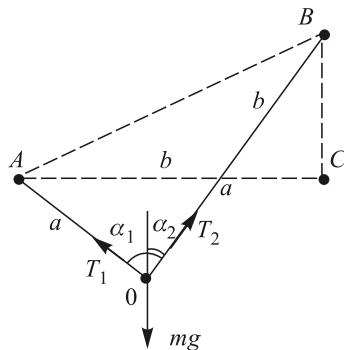


**Решение:** Груз находится в равновесии под действием трех сил: силы тяжести  $mg$  и сил натяжения левого  $T_1$  и правого  $T_2$  отрезков веревки (см. рисунок), причем векторная сумма этих сил равна нулю. Из условия равновесия груза в частности следует, что

$$T_1 \sin \alpha_1 = T_2 \sin \alpha_2,$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — углы между вертикалью и левым и правым отрезками веревки соответственно. Из равенства треугольников  $ABC$  и  $AOB$  вытекает, что  $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$ . Следовательно,

$$\beta \equiv \frac{T_1}{T_2} = \operatorname{tg} \alpha_2.$$

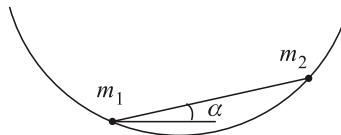


С другой стороны,  $a \sin \alpha_1 + b \sin \alpha_2 = b$ , или  $a \cos \alpha_2 + b \sin \alpha_2 = b$ . Из последнего уравнения находим

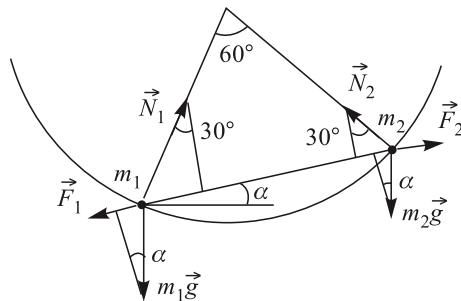
$$\cos \alpha_2 = \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Поэтому  $\alpha_2 = 30^\circ$  и  $\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0,577$ .

**1.4.3.** На внутренней поверхности гладкой сферы лежит невесомый стержень с маленькими шариками массами  $m_1$  и  $m_2$  на концах. Длина стержня равна радиусу сферы. Пренебрегая трением найти угол  $\alpha$  между стержнем и горизонталью.



**Решение:** Шарики, насаженные на стержень, находятся в равновесии под действием сил, изображенных на рисунке, где  $\vec{N}_1$ ,  $\vec{N}_2$  — силы реакции сферической поверхности,  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  — силы реакции стержня, причем  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ , т.к. стержень невесом и также находится в покое.



В проекции на направление стержня условие равновесия шариков имеет вид:

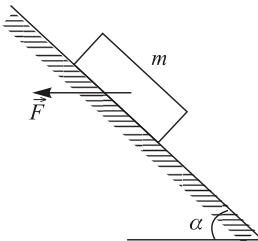
$$N_1 \sin 30^\circ - m_1 g \sin \alpha = N_2 \sin 30^\circ + m_2 g \sin \alpha.$$

Записывая правило моментов относительно осей, проходящих через точки  $m_1$  и  $m_2$ , получаем:

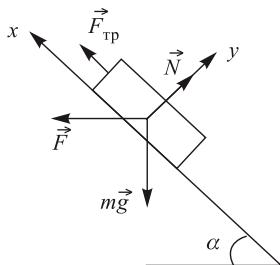
$$m_2 g \cos \alpha = N_2 \cos 30^\circ, \quad m_1 g \cos \alpha = N_1 \cos 30^\circ,$$

откуда  $N_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} m_1 g \cos \alpha$ ,  $N_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} m_2 g \cos \alpha$ . Подставляя найденные  $N_1$ ,  $N_2$  в первое соотношение, после несложных преобразований получаем ответ:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{3} (m_1 + m_2)}$ .

**1.4.4.** Бруск массой  $m = 1$  кг находится на неподвижной наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha = 45^\circ$  с горизонтом. С какой минимальной горизонтальной силой  $F$  нужно действовать на бруск, чтобы он поколся? Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость  $\mu = 0,25$ . Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .



**Решение:** Бруск находится в покое (равновесии), если векторная сумма действующих на него сил равна нулю (см. рисунок). Согласно закону сухого трения, сила трения покоя  $F_{\text{тр}}$  может принимать любые значения из диапазона  $-\mu N \leq F_{\text{тр}} \leq \mu N$ , где  $N$  — сила нормального давления бруска на



плоскость. Сила  $F$  будет минимальной, если сила трения покоя, действующая на бруск, направлена вдоль наклонной плоскости вверх и достигает максимальной величины  $F_{\text{тр}} = \mu N$ . Записывая уравнение равновесия бруска в проекциях на выбранные координатные оси (см. рисунок), получаем:

$$F_{\text{тр}} + F \cos \alpha - mg \sin \alpha = 0, \quad N - mg \cos \alpha - F \sin \alpha = 0, \quad F_{\text{тр}} = \mu N.$$

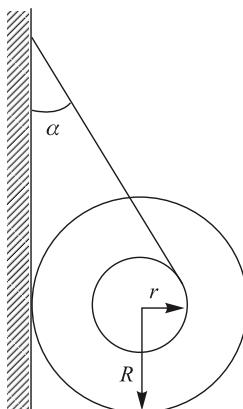
Разрешая эту систему относительно  $F$ , находим ответ:

$$F = mg \frac{\tan \alpha - \mu}{\mu \tan \alpha + 1} = 6 \text{ Н.}$$

Заметим, что при превышении силой  $F$  найденного минимального значения сила трения покоя будет уменьшаться по величине, при некотором значении силы  $F$  обратится в нуль, затем поменяет направление на противоположное. Это соответствует изменению знака  $F_{\text{тр}}$  в системе уравнений, описывающих равновесие бруска. Вплоть до достижения силой трения покоя значения  $F_{\text{тр}} = -\mu N$  бруск будет оставаться в

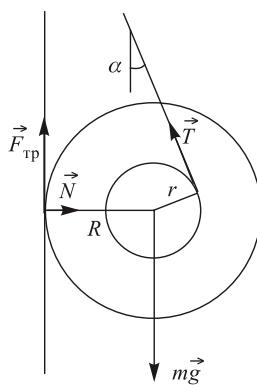
покое. Проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, легко получить максимальное значение силы  $F$ , при котором движение бруска вверх по наклонной плоскости еще не начнется. Следовательно, условия равновесия бруска выполняются для всех значений силы  $F$  из диапазона  $F_{\min} \leq F \leq F_{\max}$ .

**1.4.5.** К гвоздю, вбитому в стенку, привязана нить, намотанная на катушку. Катушка висит, опираясь о стенку. Нить составляет сostenкой угол  $\alpha = 30^\circ$ . Размеры катушки:  $r = 1$  см,  $R = 10$  см.



Найти минимальное значение коэффициента трения  $\mu$  между стенкой и катушкой, при котором катушка неподвижна.

**Решение:** Силы, действующие на катушку, изображены на рисунке, где  $T$  — величина силы натяжения нити,  $F_{\text{тр}}$  — величина силы

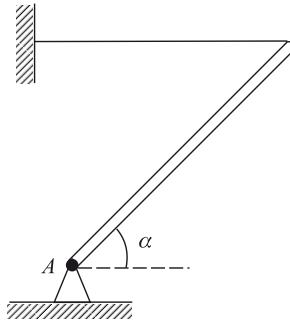


трения,  $N$  — величина нормальной к стене силы реакции. Условия равновесия катушки можно записать в виде:

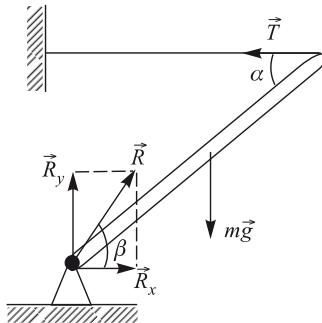
$$F_{\text{тр}} \sin \alpha = N, \quad F_{\text{тр}} R = Tr,$$

причем  $F_{\text{тр}} = \mu N$ . Выражая из этих соотношений коэффициент трения, получаем ответ:  $\mu = \frac{r}{R \sin \alpha} = 0,2$ .

**1.4.6.** Тонкий однородный стержень укреплен на шарнире в точке А и удерживается горизонтальной нитью. Масса стержня  $m = 1$  кг, угол его наклона к горизонту  $\alpha = 45^\circ$ . Найти величину силы реакции шарнира  $R$ . Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



**Решение:** Стержень находится в равновесии под действием сил, изображенных на рисунке, где  $T$  — величина силы натяжения нити,  $R_x$  и  $R_y$  — величины составляющих силы реакции шарнира вдоль гори-



зонтальной и вертикальной осей, соответственно. Условия равновесия стержня имеют вид:

$$R_x = T, \quad R_y = mg, \quad mg \frac{l}{2} \cos \alpha - Tl \sin \alpha = 0.$$

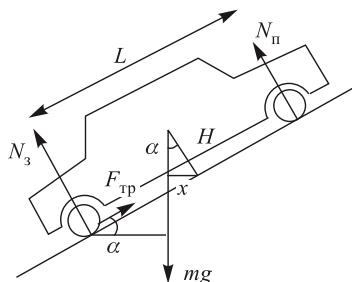
Объединяя записанные равенства и учитывая, что  $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ , получаем ответ:  $R = mg \sqrt{1 + \frac{1}{4} \operatorname{ctg}^2 \alpha} \cong 11$  Н.

**Замечание.** При решении подобных задач часто ошибочно полагают, что сила реакции обязательно направлена вдоль стержня. Эле-

ментарный анализ показывает, что угол  $\beta$ , который составляет сила реакции шарнира с горизонталью, удовлетворяет соотношению:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{R_y}{R_x} = 2 \operatorname{tg} \alpha.$$

**1.4.7.** Автомобиль массой  $M = 1000$  кг равномерно движется вверх по наклонному участку дороги, составляющему с горизонтом угол  $\alpha = 15^\circ$ . Найти силу  $N$ , с которой давят на дорогу передние колеса автомобиля, если расстояние между его осями  $L = 2$  м, центр тяжести расположен посередине между осями на расстоянии  $H = 0.5$  м от поверхности дороги, ведущие колеса — задние. Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



**Решение:** Поскольку автомобиль движется с постоянной скоростью, связанная с ним система отсчета является инерциальной и в ней справедливы все законы механики. Силы, действующие на автомобиль, изображены на рисунке, где  $F_{\text{тр}}$  — величина силы трения покоя, действующей со стороны дороги на ведущие (задние) колеса,  $N_{\text{п}}$  и  $N_3$  — величины нормальных к дороге составляющих силы реакции, действующих, соответственно, на передние и задние колеса. Записывая уравнение моментов относительно оси, проходящей через точки соприкосновения задних колес с дорогой, имеем:

$$Mg \left( \frac{L}{2} \cos \alpha - x \right) = N_{\text{п}} L, \quad \text{где } x = H \sin \alpha.$$

Отсюда находим ответ:

$$N = N_{\text{п}} = Mg \left( \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{H}{L} \sin \alpha \right) \cong 4,18 \cdot 10^3.$$

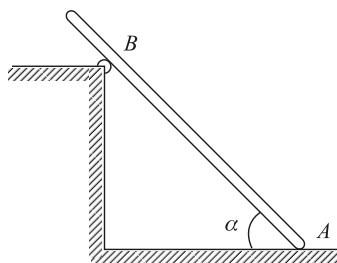
## Задание для самостоятельной работы

**1.4.8.** Груз массой  $m = 1,2$  кг подвешен к середине нити длиной  $L = 2$  м, концы которой закреплены на одном уровне. Найти максимально возможное расстояние  $x$  между точками закрепления концов нити, если она выдерживает нагрузку не более  $F = 10$  Н. Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**1.4.9.** Однородный стержень длиной  $l = 1$  м и массой  $m = 0,8$  кг несет на концах два маленьких шарика, массы которых  $m_1 = 0,2$  кг и  $m_2 = 0,25$  кг. Стержень может поворачиваться на горизонтальной оси, находящейся на расстоянии  $l_1 = 0,3$  м от шарика меньшей массы. Чтобы стержень был расположен горизонтально, под шарик большей массы подставлена опора. Найти силу  $F$ , действующую на опору. Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**1.4.10.** Однородный стержень лежит горизонтально на двух опорах. Расстояние от центра стержня до ближайшей опоры  $S = 0,3$  м. Найти расстояние между опорами  $l$ , если известно, что силы, действующие на стержень со стороны опор, отличаются друг от друга на величину, равную  $\alpha = 1/5$  веса стержня.

**1.4.11.** Лестница стоит на шероховатом полу и опирается о выступ, снабженный роликом. Расстояние АВ от нижнего конца лестницы



до выступа составляет  $3/4$  ее полной длины, угол наклона лестницы  $\alpha = 45^\circ$ . Каков должен быть коэффициент трения  $\mu$  между лестницей и полом, чтобы она находилась в равновесии? Трением в ролике пренебречь.

**1.4.12.** Деревянная линейка выдвинута за край стола на  $\alpha = 1/4$  часть своей длины. При этом она не опрокидывается, если на ее свешивающийся конец положить груз массой не более  $m_1 = 250$  г.

На какую часть длины  $\beta$  можно выдвинуть за край стола эту линейку, если на ее свешивающейся конец положен груз массой  $m_2 = 125$  г?

**1.4.13.** Автомобиль массой  $M$  поднимается с постоянной скоростью вверх по дороге, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом. Найти силу  $F$  взаимодействия ведущих (задних) колес с поверхностью дороги. Расстояние между осями автомобиля  $L$ , центр тяжести находится посередине между осями на расстоянии  $H$  от поверхности дороги. Силу трения, действующую на передние колеса, не учитывать. Ускорение свободного падения  $g$ .

## **1.5. Механика жидкостей и газов**

### **Вопросы программы**

1. *Давление. Единицы измерения давления: паскаль, мм рт.ст.*
2. *Закон Паскаля. Гидравлический пресс. Давление жидкости на дно и стенки сосуда. Сообщающиеся сосуды.*
3. *Атмосферное давление. Опыт Торричелли. Изменение атмосферного давления с высотой.*
4. *Закон Архимеда. Плавание тел.*
5. *Движение жидкостей. Уравнение Бернулли.*

### **Определения, понятия и законы**

В механике жидкостей и газов изучаются равновесие и движение жидкостей и газов, а также их взаимодействие с твердыми телами. В частности, в гидро- и аэростатике рассматриваются условия и закономерности равновесия жидкостей и газов под действием приложенных к ним сил, а также условия равновесия твердых тел, находящихся в жидкостях или газах.

**Давление.** Действие тел (твердых, жидких или газообразных) на мысленно выделенный объем жидкости (газа) можно отнести к одному из двух типов: действие на расстоянии и контактное действие.

Величина дальнодействующих сил (гравитационных и электромагнитных) пропорциональна выделенному объему жидкости (газа), поэтому эти силы называются *объемными*. Величина контактных сил пропорциональна площади выделенного участка поверхности, ограничивающей данный объем, поэтому эти силы получили название *поверхностных*.

Если любой выделенный объем жидкости или газа находится в равновесии, то поверхностные силы действуют лишь перпендикулярно элементарным поверхностям, ограничивающим этот объем. Существование

вание касательных составляющих поверхностных сил при равновесии невозможно, так как из-за текучести любая сколь угодно малая касательная сила вызывает деформацию сдвига жидкости (газа), т.е. нарушает равновесие. Поэтому при описании взаимодействия элементов жидкости (газа) между собой и с другими телами рассматривают лишь нормальные компоненты поверхностных сил.

*Давлением* называют скалярную величину, равную отношению величины  $\Delta F_n$  нормальной компоненты поверхностной силы, действующей на элементарную площадку, к площади этой площадки  $\Delta S$ :

$$p = \frac{\Delta F_n}{\Delta S}. \quad (1.5.1)$$

Если сила давления  $\vec{F}$  равномерно распределена по поверхности площадью  $S$ , то давление

$$p = \frac{F_n}{S}. \quad (1.5.2)$$

Прибор для измерения давления называется манометром.

**Единицы измерения давления: паскаль, мм. рт. ст.** Единица давления в Международной системе единиц называется *паскалем* (Па). Паскаль равен давлению, вызываемому силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1  $\text{м}^2$ : 1 Па = 1 Н/м<sup>2</sup>. На практике также широко применяется внесистемная единица давления — *миллиметр ртутного столба* (мм. рт. ст.). Это давление, оказываемое на дно сосуда столбиком ртути высотой в 1 мм: 1 мм. рт. ст. = 133 Па.

**Закон Паскаля.** Когда внешняя сила действует на твердое тело, то создаваемое ею давление передается телом в направлении действия силы. Жидкости и газы ведут себя принципиально иначе. Согласно закону Паскаля, давление, оказываемое на покоящуюся жидкость внешними силами, передается ею одинаково во всех направлениях без изменения. То же самое утверждение справедливо и для газа.

Это означает, что давление на элементарную площадку, помещенную в покоящуюся жидкость или газ, одинаково при любой ориентации площадки.

**Давление жидкости на дно и стенки сосуда.** Следствием закона Паскаля является уравнение, описывающее распределение давления внутри покоящейся несжимаемой жидкости, находящейся в поле тяготения. Записывая условия равновесия мысленно выделенного вертикального столба жидкости, можно получить для давления жидкости на глубине  $h$  следующее выражение:

$$p(h) = \rho gh, \quad (1.5.3)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости, которая вследствие ее несжимаемости одинакова на любой глубине,  $g$  — ускорение свободного падения. Давление, определяемое формулой (1.5.3), называется гидростатическим. Это давление создает жидкость, находящаяся в равновесии под действием силы тяжести.

Поскольку давление верхних слоев жидкости на нижележащие слои передается ими одинаково по всем направлениям, приложенное к поверхности жидкости внешнее давление  $p_0$  увеличивает давление в каждой точке жидкости на одну и ту же величину. В этом случае

$$p(h) = p_0 + \rho gh. \quad (1.5.4)$$

Таким образом, сила тяжести и внешнее давление на поверхности жидкости создают внутри покоящейся жидкости давление, которое, согласно закону Паскаля, передается на дно, и на стенки сосуда. По третьему закону Ньютона дно и стенки сосуда оказывают на жидкость такое же по величине давление.

Если стенки сосуда вертикальные, то силы давления стенок сосуда на жидкость направлены горизонтально и не имеют вертикальной составляющей. В этом случае сила гидростатического давления жидкости на дно сосуда равна весу жидкости в сосуде. Если стенки сосуда наклонные, то сила давления стенок на жидкость имеет вертикальную составляющую. Поэтому в расширяющемся кверху сосуде сила давления жидкости на дно равна разности веса жидкости и вертикальной составляющей силы давления стенок. В этом случае сила гидростатического давления на дно меньше веса жидкости. В сужающемся кверху сосуде, наоборот, сила давления на дно равна сумме веса жидкости и вертикальной составляющей силы давления стенок на жидкость. В этом случае сила гидростатического давления на дно больше веса жидкости.

К гидростатическому давлению добавляется давление воздуха  $p_0$ , которое он оказывает на свободную поверхность жидкости. Это не влияет на равновесие сосуда с жидкостью, поскольку такое же давление воздух оказывает на стенки и дно сосуда снаружи.

**Гидравлический пресс.** Закон Паскаля позволяет объяснить действие широко применяемого на практике устройства — *гидравлического пресса*. Гидравлический пресс состоит из двух цилиндров разного диаметра, снабженных поршнями и соединенных трубкой. Пространство под поршнями заполняется жидкостью (обычно минеральным маслом). Пусть на поршень площади  $S_1$  действует нормальная сила  $F_1$ , а на поршень площади  $S_2$  — нормальная сила  $F_2$ . Если поршни находятся на одном уровне, то согласно закону Паскаля давление под поршнями

одинаково, т.е.  $\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$ . Отсюда

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}. \quad (1.5.5)$$

Если поршни находятся на разных уровнях, то давления под ними различаются на величину  $\Delta p = \rho g \Delta h$ , где  $\rho$  — плотность жидкости, а  $\Delta h$  — разность высот поршней. В этом случае формула (1.5.5) вообще говоря неверна, однако указанной разницей давлений как правило можно пренебречь по сравнению с давлением жидкости в прессе, создаваемом поршнями.

Гидравлический пресс является механизмом, позволяющим развивать большое усилие на одном из поршней при небольшом усилии на другом. Положенный в его основу принцип используется и в других гидравлических машинах (гидравлические подъемники, гидроусилители и т.п.).

**Сообщающиеся сосуды.** Система сосудов, соединенных трубами, заполненными покоящейся жидкостью, называется *сообщающимися сосудами*. Равенство давлений жидкости на одном и том же уровне приводит к тому, что свободные поверхности однородной жидкости в сообщающихся сосудах любой формы находятся на одном уровне (если влияние сил поверхностного натяжения пренебрежимо мало). Если в сообщающихся сосудах находятся жидкости с различными плотностями, то при равенстве давлений высота столба жидкости с меньшей плотностью будет больше высоты столба жидкости с большей плотностью.

**Атмосферное давление. Опыт Торричелли.** Наша Земля окружена атмосферой — слоем воздуха, состоящего из смеси различных газов. Давление воздуха у поверхности Земли равно примерно  $p_0 = 10^5$  Па. Однако человек в повседневной жизни не замечает действия атмосферного давления, поскольку все органы внутри его тела скаты до такого же давления.

Одними из первых экспериментальных доказательств существования атмосферного давления явились опыты итальянского физика Е. Торричелли, проделанные им в 1643 — 1644 годах. Для этих опытов он использовал стеклянную трубку длиной в 1 м, запаянную с одного конца. Заполняя эту трубку ртутью и опуская ее открытым концом в чашку со ртутью, Торричелли убедился, что ртуть из трубки выливается в чашку не полностью. Каждый раз высота оставшегося столба ртути была примерно одинаковой и составляла около 760 мм.

Прибор, описанный Торричелли представляет собой *ртутный барометр*. Действие этого прибора, являющегося разновидностью сообщающихся сосудов — трубы со ртутью и атмосферы — основано на том, что давление в области над поверхностью ртути в трубке (в «тор-

ричеллевой пустоте») пренебрежимо мало. Из условий механического равновесия ртути следует связь между давлением атмосферы и высотой столба ртути  $h_{Hg}$ :

$$p_0 = \rho g h_{Hg}. \quad (1.5.6)$$

**Изменение атмосферного давления с высотой.** Давление атмосферы зависит от погодных условий и высоты места наблюдения. В обычных условиях на уровне моря высота столба ртути составляет около 760 мм и уменьшается с подъемом барометра. Однако *изменение атмосферного давления с высотой* происходит не по линейному закону, как для жидкостей, а по более сложному. Это объясняется тем, что воздух (как и любой газ) является сжимаемой средой, его плотность зависит от давления и температуры (см. раздел 6 настоящего пособия). Расчет с учетом сжимаемости воздуха показывает, что при постоянной температуре атмосферы изменение давления с высотой  $h$  описывается барометрической формулой

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right), \quad (1.5.7)$$

где  $M$  — молярная масса воздуха (29 г/моль),  $g$  — ускорение свободного падения у поверхности Земли,  $T$  — абсолютная температура,  $R$  — универсальная газовая постоянная (8,31 Дж/(моль·К)).

**Закон Архимеда.** Зависимость давления в жидкости или газе от глубины приводит к возникновению выталкивающей силы, действующей на любое тело, погруженное в жидкость или газ. Выталкивающая (архимедова) сила представляет собой результирующую элементарных сил давления, действующих на поверхность тела со стороны окружающей жидкости (газа). В соответствии с законом Архимеда, выталкивающая сила направлена вертикально вверх; ее величина равна весу жидкости (газа) в объеме погруженной части тела, а точка приложения совпадает с центром тяжести объема вытесненной телом жидкости (газа).

**Плавание тел.** Пусть тело, погруженное в жидкость, предоставлено самому себе. Если сила тяжести, действующая на это тело, равна архимедовой силе, то тело плавает внутри жидкости, т.е. находится в безразличном равновесии на любой глубине. Если сила тяжести больше архимедовой силы, то тело опускается вниз (тонет). Если сила тяжести меньше архимедовой силы, то тело поднимается вверх (всплывает на поверхность жидкости) до тех пор, пока вес жидкости, вытесненной погруженной в нее части тела, не станет равным силе тяжести, действующей на тело.

**Движение жидкостей.** В гидро- и аэродинамике изучается движение жидкостей и газов. Несмотря на то, что жидкости и газы

существенно отличаются друг от друга своей сжимаемостью, многие явления, наблюдающиеся в движущихся жидкостях и газах, аналогичны. В частности, опыты показывают, что при скоростях движения газа, много меньших, чем скорость звука, сжимаемость газа можно не учитывать. Это дает возможность применять к движущимся газам те же законы, что и к движущимся жидкостям. Поэтому в последующем будем понимать под термином «жидкость» как собственно жидкости, так и газы.

Если в какой-либо области жидкости создать избыточное давление, то ее равновесие нарушается и жидкость начинает перемещаться в область, где давление меньше. Кроме избыточного давления, вызванного внешними силами, на каждый элементарный объем жидкости действуют также силы тяжести и силы внутреннего трения (силы вязкости), возникающие при скольжении одного слоя жидкости по другому.

Скорость каждой частицы жидкости в потоке в каждый момент времени имеет определенную величину и направление. Для определения направления скоростей частиц используют линии тока, т.е. линии, касательные к которым дают направление течения в данной точке. Картина линий тока показывает не только направление скорости жидкости, но и величину скорости в разных точках пространства: там, где скорость жидкости больше, линии тока расположены гуще и, наоборот, там где скорость меньше, линии тока расположены реже (рис. 1.5.1).

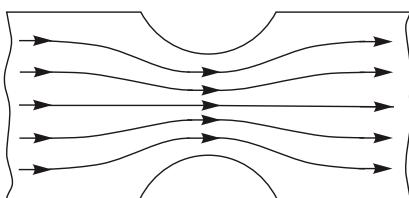


Рис. 1.5.1. Ламинарное течение жидкости

Движение жидкости, при котором отдельные ее слои скользят друг относительно друга не перемешиваясь, называется ламинарным (слоистым). Движение жидкости, сопровождающееся перемешиванием различных ее слоев с образованием вихрей, называется турбулентным. В курсе элементарной физики ограничиваются изучением ламинарного течения. При этом пренебрегают силами вязкости в жидкости. Жидкость, вязкостью и сжимаемостью которой можно пренебречь, называется *идеальной*.

Если во всех точках пространства скорости частиц жидкости не меняются со временем, то движение жидкости называется *стационарным*. Картина линий тока при стационарном течении остается неизменной. Линии тока в этом случае совпадают с траекториями частиц жидкости.

Объем жидкости, ограниченный линиями тока, называется *трубкой тока*. Поскольку скорости частиц в каждой точке поверхности трубки тока направлены по касательной к этой поверхности, частицы в своем движении не пересекают стенки трубок тока. Таким образом, при изучении стационарного движения жидкости вместо реальных труб можно рассматривать трубки тока.

Для тонкой трубки тока, в каждом сечении которой скорости частиц несжимаемой жидкости можно считать одинаковыми, справедливо соотношение

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \quad (1.5.8)$$

которое называется *уравнением неразрывности*. Здесь  $S_1$  и  $S_2$  — площади двух произвольных поперечных сечений трубы тока,  $v_1$  и  $v_2$  — скорости жидкости в этих сечениях. Согласно уравнению неразрывности скорость жидкости в узких местах трубы тока больше, чем в широких.

Если скорость течения жидкости по всему поперечному сечению трубы меняется незначительно, то уравнение (1.5.8) можно приблизенно применить и для течения всей жидкости. В этом случае под  $v_1$  и  $v_2$  нужно понимать величины средних по сечению трубы скоростей жидкости.

**Уравнение Бернулли.** Под давлением движущейся жидкости понимается давление, измеряемое манометром, движущимся вместе с жидкостью. Поэтому для измерения давления в движущейся жидкости неподвижным манометром нужно располагать его так, чтобы он по возможности не искажал течение жидкости. Опыт показывает, что при стационарном течении жидкости давление жидкости больше в тех местах, где скорость течения меньше, и, наоборот, меньше в тех местах, где скорость течения больше. Схема такого опыта изображена на рис. 1.5.2. В качестве измерителей давления там использованы

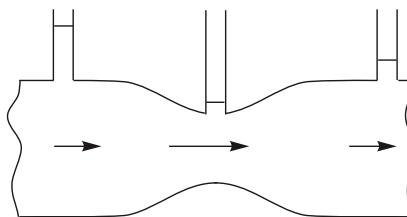


Рис. 1.5.2. Давление движущейся жидкости

открытые сверху стеклянные трубки, по высоте столба жидкости в которых можно судить о величине ее давления на стенки горизонтальной трубы.

Зависимость давления идеальной жидкости от скорости ее стационарного течения была установлена Д. Бернулли. Строгий вывод

уравнения Бернулли проводится для достаточно узкой трубки тока. Но в идеальной жидкости, для которой вязкость пренебрежимо мала, можно приближенно считать скорости всех частиц жидкости в данном сечении всего потока одинаковыми.

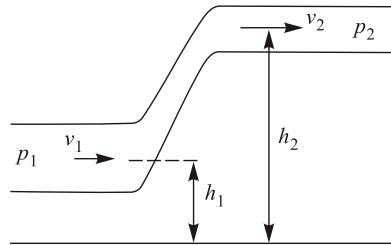


Рис. 1.5.3. К выводу уравнения Бернулли

Рассмотрим расположенную наклонно трубу переменного сечения, в которой течет стационарный поток жидкости (рис. 1.5.3). Пусть в широкой части трубы давление жидкости, величина ее скорости и высота центра поперечного сечения над некоторой горизонтальной поверхностью соответственно равны  $p_1$ ,  $v_1$ ,  $h_1$ , а в узкой части трубы —  $p_2$ ,  $v_2$ ,  $h_2$ . На основе закона сохранения механической энергии для потока идеальной жидкости можно получить соотношение

$$p_1 + \rho gh_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho gh_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}, \quad (1.5.9)$$

которое называется *уравнением Бернулли*. В этом уравнении  $\frac{\rho v^2}{2}$  имеет смысл плотности кинетической энергии жидкости (т.е. кинетической энергии единицы объема жидкости), а  $\rho gh$  — плотность потенциальной энергии. Согласно уравнению Бернулли сумма давления и плотностей кинетической и потенциальной энергий при стационарном течении идеальной жидкости постоянна для любого сечения потока.

Если труба горизонтальна ( $h_1 = h_2$ ), то уравнение Бернулли принимает вид:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}. \quad (1.5.10)$$

С помощью уравнения Бернулли нетрудно найти скорость истечения идеальной жидкости  $v$  из отверстия, расположенного на глубине  $h$  относительно свободной поверхности жидкости. Если сосуд широкий, а отверстие мало, то скорость движения жидкости в сосуде пренебрежимо мала по сравнению со скоростью ее истечения из отверстия. Применяя ко всему потоку жидкости в целом уравнение Бернулли, получаем

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p_0 = \rho gh + p_0,$$

откуда

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (1.5.11)$$

Истечение идеальной жидкости происходит с той же скоростью, какую имело бы тело при свободном падении с высоты  $h$ .

## Примеры решения задач

**1.5.1.** Браслет массы  $M = 80$  г сделан из сплава золота и серебра. Вычислить массу золота  $m$ , содержащегося в браслете, исходя из следующих данных. Плотность золота  $\rho_1 = 19,3$  г/см<sup>3</sup>, плотность серебра  $\rho_2 = 10,5$  г/см<sup>3</sup>. При погружении браслета в воду, находящуюся в сосуде с вертикальными стенками и площадью основания  $S = 25$  см<sup>2</sup>, уровень воды поднимается на  $h = 2$  мм. Объем сплава принять равным суммарному объему исходных компонент.

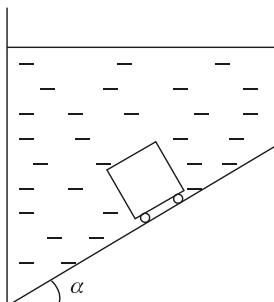
**Решение:** Объем браслета равен объему вытесненной им воды:  $V = Sh$ . Этот объем по условию задачи складывается из объема золота  $V_1$  и объема серебра  $V_2$ , причем

$$V_1 = \frac{m}{\rho_1}, \quad V_2 = \frac{M - m}{\rho_2}.$$

Следовательно,  $m \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) + \frac{M}{\rho_2} = Sh$ . Отсюда после несложных преобразований получаем ответ:

$$m = (M - Sh\rho_2) \cdot \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2} = 60,3 \text{ г.}$$

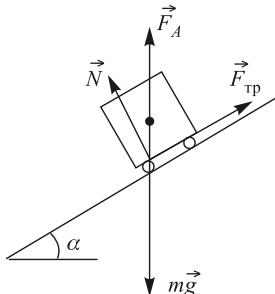
**1.5.2.** На наклонном дне сосуда, наполненного водой, покоятся на маленьких подставках алюминиевый кубик с ребром  $a = 10$  см. Определить суммарную силу трения между кубиком и подставками.



Угол наклона дна сосуда к горизонту  $\alpha = 30^\circ$ , плотности алюминия и воды, соответственно,  $\rho_a = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_b = 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**Решение:** Кубик находится в равновесии под действием трех сил: силы тяжести  $m\vec{g}$ , архимедовой силы  $\vec{F}_A$  и силы реакции со стороны подставок, которую, в свою очередь, удобно разложить на две составляющие: нормальную к наклонному дну составляющую силы реакции

$\vec{N}$  и силу трения о подставки  $\vec{F}_{\text{тр}}$  (см. рисунок). Отметим, что наличие подставок, на которых покоятся кубик, играет в задаче важную роль, т.к. именно благодаря им вода окружает кубик со всех сторон и для



определения силы, с которой вода действует на него, можно воспользоваться законом Архимеда. Если бы кубик лежал непосредственно на дне сосуда и вода под него не подтекала, то результирующая поверхностных сил давления воды на кубик не выталкивала бы его наверх, а наоборот еще сильнее прижимала ко дну.

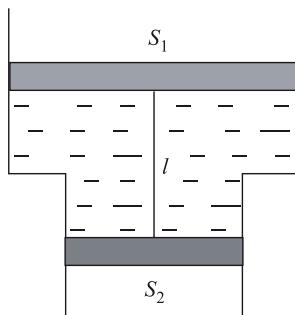
В нашем случае на кубик действует выталкивающая сила  $F_A = \rho_{\text{в}}a^3g$ , направленная вверх. Проектируя все силы на координатную ось, параллельную дну сосуда, запишем условие равновесия кубика в виде

$$F_{\text{тр}} = (mg - F_A) \sin \alpha.$$

Учитывая, что масса кубика  $m = \rho_{\text{а}}a^3$ , получаем ответ:

$$F_{\text{тр}} = (\rho_{\text{а}} - \rho_{\text{в}}) a^3 g \sin \alpha = 8,5 \text{ Н.}$$

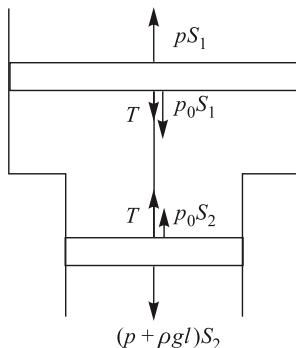
**1.5.3.** В сосуде, вертикальное сечение которого изображено на рисунке, находятся в равновесии два невесомых поршня, соединенные невесомой нерастяжимой нитью. Пространство между поршнями



заполнено жидкостью, плотность которой  $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Найти силу натяжения нити Т, если площади поршней  $S_1 = 0,1 \text{ м}^2$  и  $S_2 = 0,05 \text{ м}^2$ ,

а длина нити  $l = 0,5$  м. Трением поршней о стенки сосуда пренебречь, ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**Решение:** Поршни находятся в равновесии под действием сил, величины и направления которых указаны на рисунке. Для облегчения анализа рисунка точки приложения некоторых сил условно смешены от их истинного положения. На самом деле точки приложения всех сил расположены на оси симметрии системы.



Будем использовать следующие обозначения:  $T$  — величина силы натяжения нити, которая в силу невесомости нити одинакова во всех ее точках,  $p_0$  — атмосферное давление,  $p$  — давление жидкости на уровне верхнего поршня. Поршни находятся в равновесии при выполнении условий:

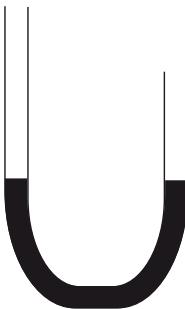
$$\begin{aligned} p_0S_1 + T &= pS_1 \quad \text{для верхнего поршня,} \\ (p + \rho g l)S_2 &= p_0S_2 + T \quad \text{для нижнего поршня.} \end{aligned}$$

Из первого уравнения получаем  $T = (p - p_0)S_1$ . Отсюда видно, что ответ зависит от разности  $p - p_0$ . Вычитание второго уравнения из первого дает:  $(p - p_0)(S_1 - S_2) = \rho g l S_2$ . Используя это выражение, находим ответ:

$$T = \frac{\rho g l S_1 S_2}{S_1 - S_2} = 500 \text{ Н.}$$

**1.5.4.** Вертикально расположенная U-образная трубка частично заполнена ртутью, причем левый конец трубки выше уровня ртути на  $h_1 = 50,2$  см, а правый — на  $h_2 = 25$  см. В оба колена трубки наливают воду так, что они оказываются полностью заполненными. На какую величину  $\Delta h$  переместится уровень ртути в левом колене трубки, если известно, что ртуть из него не вытесняется полностью? Плотность ртути  $\rho = 13,6 \text{ г/см}^3$ , плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 1 \text{ г/см}^3$ .

**Решение:** Пусть первоначальная высота столба ртути в каждом из колен трубки равна  $h_0$ . После заполнения разных по высоте колен трубки водой ртуть займет новое положение, при котором ее уровни в коленах окажутся на разной высоте. Из несжимаемости ртути и



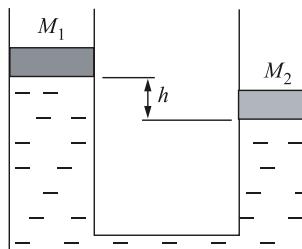
из постоянства сечения трубки следует, что ртуть опустится в левом колене на такую же величину  $\Delta h$ , на которую поднимется в правом колене. Поэтому высоты столбов воды в левом и правом коленах трубки будут равны, соответственно,  $h_1 + \Delta h$  и  $h_2 - \Delta h$ . Жидкости будут находиться в равновесии при выполнении условия равенства давлений ртути в левом и правом коленах в нижней точке трубки:

$$\rho_{\text{в}}g(h_1 + \Delta h) + \rho g(h_0 - \Delta h) = \rho_{\text{в}}g(h_2 - \Delta h) + \rho g(h_0 + \Delta h).$$

Проводя несложные преобразования, получаем ответ:

$$\Delta h = \frac{\rho_{\text{в}}(h_1 - h_2)}{2(\rho - \rho_{\text{в}})} = 1 \text{ см.}$$

**1.5.5.** Два вертикальных сообщающихся цилиндра заполнены водой и закрыты поршнями с массами  $M_1 = 1$  кг и  $M_2 = 2$  кг. В положении равновесия левый поршень расположен выше правого на величину  $h = 10$  см. Когда на левый поршень поместили гирю массой  $m = 2$  кг, поршни в положении равновесия оказались на одной высоте. Какова будет разность высот поршней  $H$  в положении равновесия, если гирю перенести на правый поршень?



**Решение:** Пусть  $S_1$  и  $S_2$  — площади поршней,  $\rho$  — плотность воды. Из условия равновесия поршней следует:

$$\frac{M_1g}{S_1} + \rho gh = \frac{M_2g}{S_2} \quad (\text{в исходном состоянии}),$$

$$\frac{(M_1 + m)g}{S_1} = \frac{M_2g}{S_2} \quad (\text{когда гиря лежит на левом поршне}),$$

$$\frac{M_1 g}{S_1} + \rho g H = \frac{(M_2 + m)g}{S_2} \quad (\text{когда гиря лежит на правом поршне}).$$

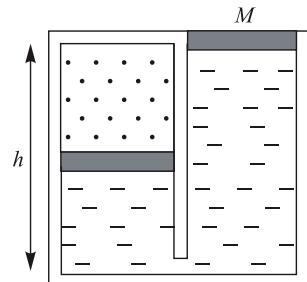
Выражая из первого и второго равенств  $S_1$  и  $S_2$ , получаем:

$$S_1 = \frac{m}{\rho h}, \quad S_2 = \frac{m}{\rho h} \cdot \frac{M_2}{M_1 + m}.$$

Подставляя найденные  $S_1$  и  $S_2$  в третье равенство, после несложных преобразований получаем ответ:

$$H = h \left( 1 + \frac{M_1 + m}{M_2} \right) = \frac{5}{2}h = 25 \text{ см.}$$

**1.5.6.** Сосуд, имеющий форму куба со стороной  $h = 1 \text{ м}$ , разделен вертикальной перегородкой на две равные части, сообщающиеся между собой у дна сосуда. Левая половина сверху запаяна, а правая открыта. В каждой половине имеется плоский невесомый поршень, а сосуд заполнен частично водой и частично газом (см. рисунок). Вначале правый поршень находится вровень с верхним краем сосуда, а левый — ровно на половине его высоты. Затем на правый поршень кладут груз массы  $M$ , в результате чего этот поршень перемещается на расстояние  $d = 25 \text{ см}$ . Определить массу груза, если плотность воды  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ , атмосферное давление  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ , а ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Температуру газа считать постоянной.



**Решение:** Рассмотрим вначале систему в исходном состоянии (без груза). Объем газа в этом случае равен

$$V = \frac{h^3}{4},$$

а давление газа в соответствии с законом Паскаля составляет величину

$$p = p_0 + \rho g \frac{h}{2}.$$

Уравнение начального состояния газа имеет вид:

$$\left( p_0 + \rho g \frac{h}{2} \right) \frac{h^3}{4} = \nu R T.$$

Когда на правый поршень кладут груз, объем и давление газа становятся равными, соответственно:

$$V' = \frac{h^2}{2} \left( \frac{h}{2} - d \right), \quad p' = p_0 + \frac{2Mg}{h^2} + \rho g \left( \frac{h}{2} - 2d \right).$$

Уравнение состояния газа в этом случае имеет вид:

$$\left[ p_0 + \frac{2Mg}{h^2} + \rho g \left( \frac{h}{2} - 2d \right) \right] \frac{h^2}{2} \left( \frac{h}{2} - d \right) = \nu RT.$$

Приравнивая левые части уравнений состояния, после несложных преобразований получаем ответ:

$$M = \frac{h^2 d}{2g} \cdot \frac{2p_0 + \rho g(3h - 4d)}{h - 2d} \approx 5,5 \text{ т.}$$

**1.5.7.** В цилиндрическом сосуде уровень воды находится на высоте  $H = 20$  см. Когда в сосуд пустили плавать пустой стеклянный стакан, уровень воды поднялся на  $\Delta h = 2$  см. На какой высоте  $H_1$  будет располагаться уровень воды в сосуде, если стакан утопить? Плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 1 \text{ г}/\text{см}^3$ , плотность стекла  $\rho_{\text{ст}} = 2,5 \text{ г}/\text{см}^3$ .

**Решение:** Обозначим через  $m$  массу стакана, а через  $S$  — площадь сечения сосуда. Поскольку плавающий стакан вытесняет объем воды, равный  $S\Delta h$ , условие его плавания имеет вид:

$$mg = \rho_{\text{в}} g S \Delta h.$$

Следовательно, объем стекла, из которого изготовлен стакан, равен

$$V = \frac{m}{\rho_{\text{ст}}} = S \Delta h \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{ст}}}.$$

Этот объем равен объему воды, вытесненному утонувшим стаканом. Таким образом, высота, на которой будет располагаться уровень воды в сосуде, когда стакан утонет, равна

$$H_1 = H + \Delta h \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{ст}}} = 20,8 \text{ см.}$$

**1.5.8.** В двух сосудах налиты одинаковые объемы различных жидкостей. Если бруск из пластмассы поместить в первый сосуд, то он плавает в нем, причем сторона бруска, имеющая длину  $a$ , перпендикулярна поверхности жидкости и высота выступающей части равна  $h_1$ . Если этот бруск поместить во второй сосуд, то высота выступающей части станет  $h_2$ . Какой будет величина выступающей части  $h$ , если жидкости слить в один сосуд? Считать, что жидкости смешиваются без изменения суммарного объема.

**Решение:** Пусть  $m$  — масса бруска,  $S$  — площадь его горизонтального сечения,  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — плотности жидкостей в первом и втором сосудах. Тогда условия плавания бруска в этих жидкостях будут иметь вид:

$$mg = (a - h_1)S\rho_1g, \quad mg = (a - h_2)S\rho_2g.$$

$$\text{Отсюда } \rho_1 = \frac{m}{S(a - h_1)}, \quad \rho_2 = \frac{m}{S(a - h_2)}.$$

При слиянии жидкостей в один сосуд объем образованной смеси по условию равен сумме объемов компонент, которые, в свою очередь, равны друг другу. Отсюда следует, что плотность смеси

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \frac{m}{2S} \left( \frac{1}{a - h_1} + \frac{1}{a - h_2} \right).$$

Условие плавания бруска в смеси имеет вид:

$$mg = (a - h)S\rho g.$$

Из последних двух соотношений после несложных преобразований получаем ответ:

$$h = \frac{a(h_1 + h_2) - 2h_1h_2}{2a - (h_1 + h_2)}.$$

**1.5.9.** В цилиндрический сосуд с водой опускают деревянный шар радиусом  $R$ , внутри которого помещен свинцовый грузик массой  $m$ . На какую высоту  $h$  поднимется при этом уровень воды в сосуде, если площадь дна  $S$ , плотность воды  $\rho_{\text{в}}$ , плотность дерева  $\rho_{\text{д}}$ , плотность свинца  $\rho_{\text{св}}$ ?

**Решение:** Вытесненный шаром объем воды зависит от того, будет ли шар плавать, или утонет. Поэтому при записи ответа в общем виде необходимо рассмотреть эти случаи отдельно.

Выразим вначале массу составного тела через массу свинцового грузика. Поскольку объем свинца равен  $V_{\text{св}} = m/\rho_{\text{св}}$ , объем, занимаемый деревом, выразится как  $V_{\text{д}} = V_0 - m/\rho_{\text{св}}$ , где  $V_0 = 4\pi R^3/3$  – объем шара. Следовательно, масса шара равна

$$M = \rho_{\text{д}}V_{\text{д}} + m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{д}} + m \left( 1 - \frac{\rho_{\text{д}}}{\rho_{\text{св}}} \right).$$

Условие того, что шар плавает полностью погруженным в воду, имеет вид:  $Mg = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{в}} g$ . Отсюда легко найти массу свинца  $m_0$ , при которой выполняется это условие:

$$m_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{д}}) \frac{\rho_{\text{св}}}{(\rho_{\text{св}} - \rho_{\text{д}})}.$$

Если фактическая масса свинцового грузика меньше этого значения, то шар плавает частично погруженным в воду, и вытесненный им объем  $V$  определяется из условия

$$\left[ \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{д}} + m \left( 1 - \frac{\rho_{\text{д}}}{\rho_{\text{св}}} \right) \right] g = V \rho_{\text{в}} g.$$

Если же масса грузика равна  $m_0$  или превышает это значение, то шар тонет, вытесняя объем  $V_0 = 4\pi R^3/3$ . В общем виде ответ следует

сформулировать следующим образом:

$$h = \frac{1}{S\rho_{\text{в}}}\left[\frac{4}{3}\pi R^3\rho_{\text{д}} + m\left(1 - \frac{\rho_{\text{д}}}{\rho_{\text{в}}}\right)\right] \quad \text{при } m \leq m_0,$$

$$h = \frac{1}{S} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{при } m \geq m_0, \quad \text{где } m_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{в}} \frac{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{д}}}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{д}}}.$$

**1.5.10.** Деревянный куб плавает на поверхности воды. Какую работу  $A$  нужно совершить, чтобы полностью погрузить куб в воду? Длина ребра куба  $a = 1$  м, плотность дерева  $\rho_{\text{д}} = 0,5$  г/см<sup>3</sup>, плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 1$  г/см<sup>3</sup>, ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Погружение куба в воду производится очень медленно.

**Решение:** Обозначим через  $x$  высоту подводной части куба в процессе погружения. Архимедова сила, действующая на куб, равна

$F_A = \rho_{\text{в}}ga^2x$ . Поскольку погружение куба происходит медленно, в каждый момент времени силы, приложенные к нему, уравновешены, т.е. выполняется равенство:  $mg + F = F_A$ , где  $m = \rho_{\text{д}}a^3$  — масса куба,  $F$  — внешняя сила, погружающая куб в воду. Из условия плавания куба

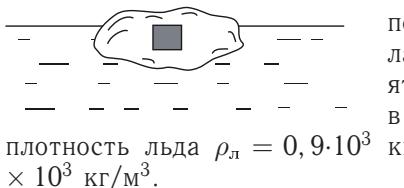
$$\rho_{\text{д}}a^3g = \rho_{\text{в}}a^2x_0g$$

находим высоту его подводной части в свободном состоянии:  $x_0 = a\rho_{\text{д}}/\rho_{\text{в}}$ . Объединяя записанные выражения, находим, что зависимость силы, погружающей куб в воду, от  $x$  имеет вид:

$$F(x) = \rho_{\text{в}}ga^2(x - x_0).$$

Работа этой силы на перемещении  $(a - x_0)$  может быть вычислена графическим способом как площадь заштрихованного треугольника (см. рисунок):  $A = \frac{1}{2}F(a)(a - x_0)$ . Подставляя найденное значение  $x_0$ , получаем ответ:  $A = \frac{1}{2}\rho_{\text{в}}a^4g\left(1 - \frac{\rho_{\text{д}}}{\rho_{\text{в}}}\right)^2 = 1,25$  кДж.

**1.5.11.** Тело, состоящее из куска льда и вмерзшего в него алюминиевого бруска, плавает в воде так, что под водой находится  $\alpha = 95\%$  объема тела. Какой процент льда  $\beta$  должен растиать, чтобы тело полностью погрузилось в воду? Плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, плотность льда  $\rho_{\text{l}} = 0,9 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, плотность алюминия  $\rho_a = 2,7 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.



**Решение:** Пусть  $V_a$  — объем алюминиевого бруска,  $V_0$  и  $V$  — начальный и конечный объемы льда. Выражая массы этих тел через их объемы и плотности, имеем:

$$m_a = \rho_a V_a, \quad m_0 = \rho_l V_0, \quad m = \rho_l V,$$

где  $m_a$  — масса алюминия,  $m_0$  и  $m$  — начальная и конечная массы льда. Условия плавания льда с вмерзшим в него бруском можно записать в виде:

$$(V_0\rho_{\text{л}} + V_a\rho_a)g = \frac{\alpha}{100\%} (V_0 + V_a)\rho_{\text{в}}g \quad (\text{при частичном погружении в воду}),$$

$$(V\rho_{\text{л}} + V_a\rho_a)g = (V + V_a)\rho_{\text{в}}g \quad (\text{при полном погружении в воду}).$$

По условию задачи искомая величина  $\beta = 100\% \cdot (V_0 - V) / V_0$ . Отсюда выразим  $V$  через  $V_0$  и  $\beta$ :  $V = V_0(1 - \beta/100\%)$ . Подставляя это соотношение в условие плавания полностью погруженного тела, получаем:

$$(V_0(1 - \beta/100\%) \rho_{\text{л}} + V_a \rho_a)g = (V_0(1 - \beta/100\%) + V_a) \rho_{\text{в}}g.$$

Для того, чтобы исключить из условий плавания неизвестные  $V_0$  и  $V_a$ , приведем эти условия к виду:

$$(\rho_{\text{л}} - \alpha\rho_{\text{в}}/100\%) V_0 = (\alpha\rho_{\text{в}}/100\% - \rho_a) V_a,$$

$$(1 - \beta/100\%) (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}) V_0 = (\rho_a - \rho_{\text{в}}) V_a.$$

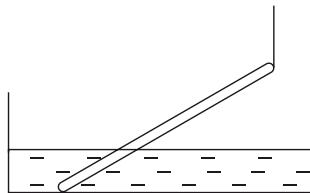
Деля почленно эти выражения одно на другое, получаем:

$$\frac{\rho_{\text{л}} - \alpha\rho_{\text{в}}/100\%}{(1 - \beta/100\%) (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})} = \frac{\alpha\rho_{\text{в}}/100\% - \rho_a}{\rho_a - \rho_{\text{в}}}.$$

Отсюда после несложных преобразований находим ответ:

$$\beta = \frac{(1 - \alpha/100\%) \rho_{\text{в}} (\rho_a - \rho_{\text{л}})}{(\rho_a - \alpha\rho_{\text{в}}/100\%) (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})} \cdot 100\% = 51\%.$$

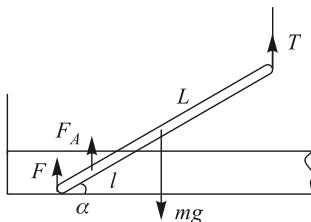
**1.5.12.** Алюминиевая спица с длиной  $L = 25$  см и площадью поперечного сечения  $S = 0,1$  см<sup>2</sup> подвешена на нити за верхний конец. Нижний конец опирается на горизонтальное дно сосуда, в который налита вода. Длина погруженной в воду части спицы  $l = 10$  см. Найти силу  $F$ , с которой спица давит на дно сосуда, если известно, что нить расположена вертикально. Плотность алюминия  $\rho_a = 2,7$  г/см<sup>3</sup>, плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 1$  г/см<sup>3</sup>. Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



**Решение:** Силы, действующие на спицу, изображены на рисунке, где приняты следующие обозначения:  $T$  — величина силы натяжения нити,  $mg$  — величина силы тяжести,  $F_A$  — величина архимедовой силы,  $F$  — величина силы реакции дна сосуда, равная величине искомой

силы, с которой спица давит на дно сосуда. Сила тяжести приложена к центру спицы, архимедова сила — к центру погруженной в воду ее части. Масса спицы  $m$  и величина архимедовой силы выражаются через данные, приведенные в условии задачи, следующим образом:

$$m = SL\rho_a, \quad F_A = Sl\rho_bg.$$



Запишем уравнение моментов относительно точки подвеса спицы:

$$FL \cos \alpha + Sl\rho_bg \left( L - \frac{l}{2} \right) \cos \alpha = SL\rho_ag \frac{L}{2} \cos \alpha.$$

Отсюда легко найти ответ:

$$F = \left[ \frac{1}{2}L\rho_a - \left( 1 - \frac{l}{2L} \right) l\rho_b \right] Sg = 0,025 \text{ Н.}$$

**1.5.13.** В водопроводной трубе образовалось отверстие сечением  $s = 4 \text{ мм}^2$ , из которого вертикально вверх бьет струя воды, поднимаясь на высоту  $h = 80 \text{ см}$ . Какой объем воды  $V$  вытекает через отверстие за время  $\tau$ , равное одним суткам? Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**Решение:** Искомый объем равен произведению объемного расхода воды  $vs$ , вытекающей из отверстия со скоростью  $v$ , на время  $\tau$ :  $V = vst$ . Чтобы определить  $v$ , воспользуемся законом сохранения механической энергии для элемента струи массой  $\Delta m$ , согласно которому  $\frac{\Delta m \cdot v^2}{2} = \Delta m \cdot gh$ . Отсюда  $v = \sqrt{2gh}$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:  $V = \sqrt{2gh} \cdot st \cong 1,37 \text{ м}^3$ .

**Замечание:** Опыт показывает, что струя жидкости, вытекающая из отверстия со скоростью  $v$  и направленная строго вертикально, не достигает высоты  $h = \frac{v^2}{2g}$ , определяемой по закону сохранения энергии. Это объясняется трением частиц жидкости, движущихся вверх, о частицы жидкости, падающие вниз. Но если направить струю под небольшим углом к вертикали, то она будет подниматься практически до высоты  $h$ .

**1.5.14.** В широкой части горизонтальной трубы вода течет со скоростью  $v_1 = 8 \text{ см/с}$  при давлении  $p_1 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$ . В узкой части трубы

давление воды равно  $p_2 = 1,4 \cdot 10^5$  Па. Какова скорость  $v_2$  течения воды в узкой части трубы? Плотность воды  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>.

**Решение:** Для жидкости, текущей по горизонтальной трубе, уравнение Бернулли имеет вид:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2.$$

Выражая из него  $v_2$ , получаем ответ:  $v_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_1 - p_2) + v_1^2} \approx 4,47$  м/с.

**1.5.15.** На поршень горизонтально расположенного шприца сечением  $S$  действует вдоль оси шприца постоянная сила  $F$ . С какой скоростью  $v$  вытекает в горизонтальном направлении струя воды из отверстия шприца площадью  $s$  ( $s \ll S$ ), если плотность воды равна  $\rho$ ? Трением пренебречь.

**Решение:** Под действием приложенной к поршню силы он перемещается с некоторой скоростью  $u$ . При этом давление воды внутри шприца равно  $p_0 + \frac{F}{S}$ , а на выходе из отверстия шприца совпадает с атмосферным давлением  $p_0$ . Следовательно, уравнение Бернулли принимает вид:

$$\frac{\rho u^2}{2} + \frac{F}{S} = \frac{\rho v^2}{2}.$$

Скорость  $u$  движения воды в шприце и скорость  $v$  ее истечения из отверстия связаны уравнением неразрывности

$$Su = sv.$$

Исключая из записанных уравнений  $u$ , получаем ответ:

$$v = \sqrt{\frac{2F}{\rho S [1 - (s/S)^2]}} \approx \sqrt{\frac{2F}{\rho S}}.$$

**1.5.16.** На гладком горизонтальном столе стоит сосуд с водой. В боковой стенке у дна сосуда проделано маленькое отверстие площадью  $s$ . Какую горизонтальную силу  $F$  нужно приложить к сосуду, чтобы удержать его в равновесии в момент, когда высота уровня воды в сосуде равна  $h$ ? Трением пренебречь. Ускорение свободного падения  $g$ . Плотность воды  $\rho$ .

**Решение:** Согласно формуле Торричелли скорость истечения воды из малого отверстия равна  $v = \sqrt{2gh}$ . За время  $\Delta t$  из сосуда вытечет вода массой  $\Delta m = \rho vs\Delta t$ , унося импульс

$$\Delta p = \Delta m \cdot v = \rho sv^2 \Delta t = 2\rho sgh \cdot \Delta t.$$

По второму закону Ньютона  $\Delta p = F \cdot \Delta t$ . Следовательно, реактивная сила, действующая на сосуд со стороны вытекающей воды, равна

$$F = 2\rho ghs.$$

Именно такую силу нужно приложить к сосуду, чтобы удерживать его на месте.

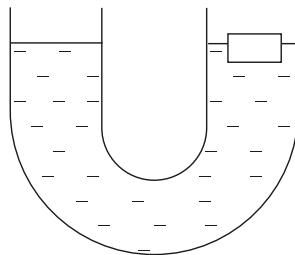
*Замечание.* Если отверстие закрыто пробкой, то горизонтальные силы давления жидкости, действующие на боковые стенки сосуда, уравновешены. Когда пробку извлекают, из соответствующей стенки удаляется участок площадью  $s$ . Если бы механическое состояние жидкости при этом не изменилось, то сила давления на эту стенку уменьшилась бы на  $\rho ghs$ . На самом деле ее уменьшение вдвое больше и составляет  $2\rho ghs$ . Это объясняется перераспределением давления, которое происходит при переходе жидкости от состояния покоя к состоянию установившегося движения. Этот переход совершается за конечное время. Как показывает опыт, сразу после удаления пробки сила давления на соответствующую стенку действительно уменьшается только на  $\rho ghs$ . Затем, в процессе установления течения жидкости сила давления быстро, но непрерывно уменьшается еще на такую же величину.

## Задание для самостоятельной работы

**1.5.17.** На поверхности воды плавает лист пенопласта, причем толщина погруженной в воду части  $h = 1$  см. Если положить на пенопласт груз массой  $M = 50$  кг, то высота выступающей над водой части пенопласта уменьшится на  $\Delta h = 5$  см. Чему равна масса  $m$  пенопласта?

**1.5.18.** Надводная часть айсберга имеет объем  $V = 1000$  м<sup>3</sup>. Найти массу айсберга  $M$ , если плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, а плотность льда  $\rho_{\text{л}} = 0,9 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

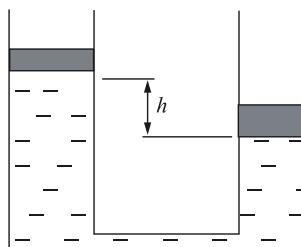
**1.5.19.** В одно из колен  $U$ -образной трубки, частично заполненной водой, опускают плавать кусочек дерева массой  $m = 10$  г. На какую высоту  $\Delta h$  поднимется уровень воды в трубке, если ее сечение  $S = 10$  см<sup>2</sup>? Плотность воды  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>.



**1.5.20.** В трех одинаковых сообщающихся сосудах находится ртуть. В левый сосуд налили слой воды высотой  $h_1 = 180$  мм, а в правый — высотой  $h_3 = 228$  мм. На какую величину  $h_2$  сместится уровень ртути в среднем сосуде, если известно, что ртуть из левого и правого сосудов не вытесняется водой полностью? Плотность ртути  $\rho = 13,6$  г/см<sup>3</sup>, плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 1$  г/см<sup>3</sup>.

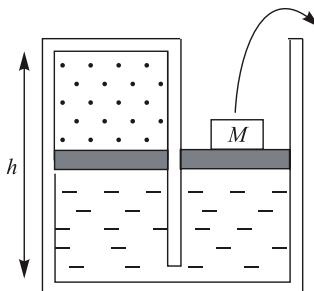


**1.5.21.** Два вертикальных сообщающихся цилиндра заполнены водой и закрыты поршнями с разными массами. В положении равновесия



левый поршень расположен выше правого на величину  $h = 10$  см. Какой массы  $m$  гирю надо поставить на левый поршень, чтобы поршни оказались на одной высоте? Площади поршней одинаковы и равны  $S = 200$  см<sup>2</sup>, плотность воды  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>.

**1.5.22.** Сосуд, имеющий форму куба со стороной  $h = 1$  м, разделен вертикальной перегородкой на две равные части, сообщающиеся между собой у дна сосуда. Левая половина сверху запаяна, а правая открыта.



В каждой половине имеется плоский невесомый поршень, а сосуд заполнен частично водой и частично газом (см. рисунок). Вначале на правом поршне лежит груз массой  $M = 100$  кг, при этом оба поршня находятся на уровне середины сосуда. Затем груз убирают, в результате чего правый поршень поднимается на расстояние  $d = 1$  см. Определить атмосферное давление, если плотность воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, а ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Температуру газа считать постоянной.

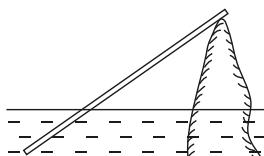
**1.5.23.** К коромыслу равноплечных весов подвешены два сплошных однородных шарика равной массы, сделанных из разных материалов. Если одновременно один из шариков поместить в жидкость с плотностью  $\rho_1 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, а другой — в жидкость с плотностью  $\rho_2 = 0,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, то равновесие сохранится. Считая, что плотности шариков больше плотностей жидкостей, найти отношение плотностей шариков  $\alpha$ .

**1.5.24.** В сосуде с жидкостью плотности  $\rho_1 = 900$  кг/м<sup>3</sup> плавает однородный кубик. Верхняя грань кубика параллельна поверхности жидкости, а высота выступающей над жидкостью части  $h_1 = 1,8$  см. Когда кубик поместили в сосуд с жидкостью плотности  $\rho_2 = 1800$  кг/м<sup>3</sup>, высота выступающей части стала  $h_2 = 2,4$  см. Найти плотность материала кубика  $\rho$ .

**1.5.25.** Цилиндрическая пробирка с грузиком, имеющая площадь поперечного сечения  $S = 1$  см<sup>2</sup>, плавает в воде вертикально, причем из воды высовывается часть пробирки высотой  $h = 5$  см. Какова минимальная плотность жидкости  $\rho$ , в которой пробирка с грузиком не

утонет, если суммарная масса пробирки и грузика  $M = 20$  г? Плотность воды  $\rho_0 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

**1.5.26.** Тонкая однородная палочка опирается одним концом о вершину острого камня, выступающего из воды. Другой конец палочки находится на плаву, причем погруженная в воду часть палочки в  $\alpha$  раз



меньше всей ее длины. Плотность воды  $\rho_0 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\alpha = 3$ . Найти плотность  $\rho$  материала, из которого сделана палочка.

**1.5.27.** В горизонтальной трубе диаметром  $d_1 = 5$  см вода течет со скоростью  $v_1 = 20$  см/с при давлении  $p_1 = 2 \cdot 10^5$  Па. Каково давление  $p_2$  в узкой части трубы диаметром  $d_2 = 2$  см? Плотность воды  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>.

**1.5.28.** Труба переменного сечения расположена горизонтально. В широкой части трубы диаметром  $D$  расположен поршень, на который действует постоянная сила  $F$ . Узкая часть трубы имеет диаметр  $d$ , и из нее вытекает струя воды. Найти скорость  $v$  перемещения поршня. Плотность воды равна  $\rho$ . Трением пренебречь.

**1.5.29.** В дне бака высотой  $H = 50$  см, полностью заполненного водой, имеется отверстие площадью  $s_1 = 1$  см<sup>2</sup>, которая значительно меньше площади сечения бака. Если открыть отверстие, то из него начинает вытекать струя воды и падать вниз. Какова площадь сечения струи  $s_2$  на высоте  $h = 20$  см ниже дна бака? Поверхностным напряжением воды пренебречь.

**1.5.30.** На горизонтальном столе стоит цилиндрический бак высотой  $H$ , полностью заполненный водой. На какой высоте  $h$  от основания бака нужно просверлить в его боковой стенке маленькое отверстие, чтобы бьющая из него струя воды падала на поверхность стола наиболее далеко от сосуда?

## **1.6. Механические колебания и волны. Звук**

### **Вопросы программы**

1. Понятие о колебательном движении. Период и частота колебаний.
2. Гармонические колебания. Смещение, амплитуда и фаза при гармонических колебаниях.
3. Свободные колебания. Колебания груза на пружине. Математический маятник. Периоды их колебаний. Превращения энергии при гармонических колебаниях. Затухающие колебания.
4. Вынужденные колебания. Резонанс.
5. Понятие о волновых процессах. Поперечные и продольные волны. Длина волн. Скорость распространения волн. Фронт волн. Уравнение бегущей волны. Стоячие волны.
6. Интерференция волн. Принцип Гюйгенса. Дифракция волн.
7. Звуковые волны. Скорость звука. Громкость и высота звука.

### **Определения, понятия и законы**

**Понятие о колебательном движении.** Колебаниями называются движения или изменения состояния системы, обладающие повторяемостью во времени. Колебания весьма разнообразны по своей природе. Модели колебательных процессов широко используются в физике, химии, биологии, науках о Земле. Колебания самой разной природы могут иметь общие количественные закономерности и описываться одинаковыми математическими методами.

Колебания механических систем представляют собой повторяющиеся движения в окрестности устойчивого положения равновесия. Примерами механических колебаний являются движения груза, подвешенного на пружине, качания маятника, колебания натянутой струны, колебания ветвей и ствола дерева на ветру и т.п.

Колебания называются *периодическими*, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени.

**Период и частота колебаний.** *Периодом* колебаний  $T$  называется наименьший промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех величин, характеризующих колебательное движение (например, смещения, скорости и ускорения колеблющейся точки). За это время совершается одно *полное колебание*. Период колебаний измеряется в секундах. Величина, обратная периоду,  $\nu = 1/T$ , называется *частотой колебаний*. Частота колебаний измеряется в герцах. Один герц — это частота колебаний, период которых равен одной секунде. Круговой или циклической частотой колебаний называют величину  $\omega = 2\pi\nu$ . Круговая частота измеряется в радианах в секунду. Она связана с периодом колебаний формулой  $\omega = 2\pi/T$ .

**Гармонические колебания. Смещение, амплитуда и фаза при гармонических колебаниях.** Частным, но весьма широко распространенным случаем периодических колебаний являются *гармонические колебания*, происходящие во времени по закону синуса или косинуса. Гармонические колебания в общем случае описываются формулой:

$$x = a \sin \omega t + b \cos \omega t, \quad (1.6.1)$$

где  $x$  — смещение колеблющегося тела относительно положения равновесия в данный момент времени  $t$ ,  $a$  и  $b$  — константы, определяемые начальным состоянием тела, т.е. его начальным смещением  $x_0$  и начальной скоростью  $V_0$ :  $a = V_0/\omega$ ,  $b = x_0$ . Во многих случаях удобно вместо (1.6.1) использовать для описания колебаний эквивалентную формулу

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1.6.2)$$

где  $A$  — максимальное смещение тела относительно положения равновесия, называемое *амплитудой* колебаний,  $\omega t + \varphi_0$  — аргумент гармонической функции, называемый *фазой* колебаний. Амплитуда и фаза колебаний однозначно определяют механическое состояние (т.е. координату и скорость) колеблющегося тела в любой момент времени. Амплитуда  $A$  и начальная фаза колебаний  $\varphi_0$  выражаются через константы  $a$  и  $b$ , следующим образом:  $A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{V_0^2/\omega^2 + x_0^2}$ ,  $\varphi_0 = \arctg(-a/b) = \arctg(-V_0/(\omega x_0))$ . График зависимости смещения колеблющегося тела от времени изображен на рис. 1.6.1.

Скорость колеблющегося тела равна производной от координаты тела по времени:

$$V = \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (1.6.3)$$

Скорость изменяется по синусоидальному закону с такой же частотой, что и смещение (рис. 1.6.2). Амплитуда скорости  $A\omega$  пропорци-

ональна циклической частоте и амплитуде смещения. Фаза скорости опережает фазу смещения на  $\pi/2$ . В частности, скорость колеблющегося тела максимальна по абсолютной величине в момент прохождения телом положения равновесия. При максимальных смещениях тела от положения равновесия его скорость равна нулю.

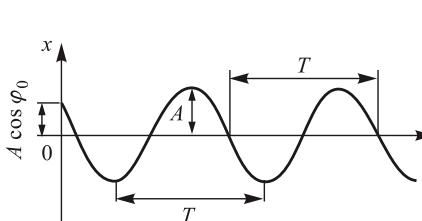


Рис. 1.6.1. Зависимость смещения от времени

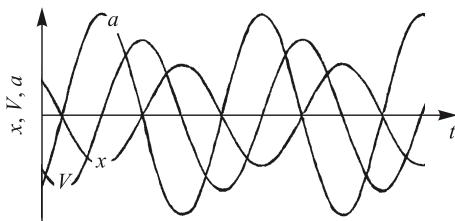


Рис. 1.6.2. Зависимость смещения, скорости и ускорения от времени

Ускорение колеблющегося тела равно второй производной смещения по времени:

$$a = \ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (1.6.4)$$

Ускорение изменяется по косинусоидальному закону с той же частотой, что и смещение (рис. 1.6.2). Амплитуда ускорения  $A\omega^2$  пропорциональна квадрату циклической частоты и амплитуде смещения. Фаза ускорения отличается от фазы смещения на  $\pi$ . Это означает, что ускорение колеблющегося тела всегда направлено к положению его равновесия. Величина ускорения максимальна при наибольших смещениях тела от положения равновесия.

**Свободные колебания. Колебания груза на пружине. Математический маятник. Периоды их колебаний.** Особое место в физике занимает определенный тип колебательных движений — *свободные колебания*. Они возможны в случае, когда в колебательной системе не действуют переменные во времени внешние силы, или когда работа переменных внешних сил равна нулю. Свободные колебания возникают в системе, предоставленной самой себе после какого-либо однократного начального воздействия на нее, приводящего к отклонению от положения равновесия. При свободных колебаниях в системе всегда действуют силы, стремящиеся вернуть ее в положение равновесия. Если внешние и внутренние силы потенциальны, то при колебаниях сохраняется механическая энергия. В этом случае свободные колебания называются *незатухающими*. Незатухающие свободные колебания в системе возможны лишь при отсутствии трения и любых других сил сопротивления. Амплитуда незатухающих колебаний постоянна (не зависит от времени).

Уравнение движения системы, совершающей свободные гармонические колебания, всегда может быть приведено к виду:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (1.6.5)$$

Множитель, стоящий перед координатой в уравнении вида (1.6.5), представляет собой квадрат циклической частоты свободных колебаний.

Важным примером колебательной системы является груз, подвешенный на пружине. Такая система способна совершать гармонические колебания, если сила упругости пружины пропорциональна величине смещения груза относительно положения равновесия, т.е. если сила упругости подчиняется закону Гука. Циклическая частота и период свободных колебаний груза, подвешенного на пружине, определяются формулами:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (1.6.6)$$

Здесь  $m$  — масса груза,  $k$  — коэффициент упругости пружины.

Математический маятник представляет собой идеализированную модель колебательной системы: материальную точку, подвешенную на невесомой нерастяжимой нити и находящуюся в поле силы тяжести. Движения маятника происходят под действием силы тяжести и силы натяжения нити. Циклическая частота и период колебаний при малых углах отклонения маятника от вертикали даются выражениями

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1.6.7)$$

где  $l$  — длина нити,  $g$  — ускорение свободного падения.

**Превращения энергии при гармонических колебаниях.** При свободных гармонических колебаниях полная механическая энергия колебательной системы остается постоянной. Однако она периодически меняет свою форму, превращаясь из кинетической энергии в потенциальную и обратно. Этот процесс повторяется дважды на каждом периоде колебания. Кинетическая энергия достигает максимума в моменты прохождения системой положения равновесия. Потенциальная энергия, напротив, максимальна в моменты наибольших отклонений колеблющегося тела от положения равновесия, т.е. в моменты времени, когда скорость движения обращается в нуль.

Полная энергия гармонических колебаний пружинного маятника пропорциональна квадрату амплитуды колебаний  $A$ :

$$E = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}. \quad (1.6.8)$$

Для математического маятника, колеблющегося с угловой амплитудой  $\alpha_0$ , полная энергия

$$E = mg l(1 - \cos \alpha_0) \cong \frac{mg l \alpha_0^2}{2} = \frac{m\omega^2 l^2 \alpha_0^2}{2}. \quad (1.6.9)$$

**Затухающие колебания.** В реальных колебательных системах свободные колебания постепенно затухают под действием сил сопротивления, например, силы трения колеблющегося тела о воздух. Зависимость координаты тела от времени при затухающих колебаниях изображена на рис. 1.6.3.

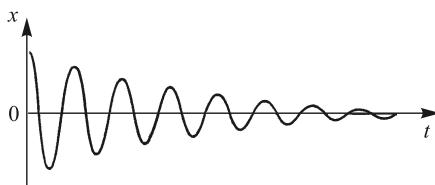


Рис. 1.6.3. Затухающие колебания

Затухающие колебания представляют собой непериодические движения. Поэтому к ним неприменимы непосредственно понятия периода и частоты, введенные для периодических колебаний. Условным периодом  $T_{\text{зат}}$  затухающих колебаний называется промежуток времени между двумя последовательными прохождениями колеблющейся системой положения равновесия при движении в одну и ту же сторону. Величина  $\omega_{\text{зат}} = 2\pi/T_{\text{зат}}$  называется циклической частотой затухающих колебаний. Она всегда меньше циклической частоты  $\omega$  незатухающих колебаний в идеализированной системе без трения. Разность между  $\omega$  и  $\omega_{\text{зат}}$  увеличивается с возрастанием коэффициента трения.

Количественной характеристикой затухания является *добротность* колебаний, определяемая как число свободных колебаний системы, которые произойдут до того, как полная механическая энергия колебательной системы уменьшится в два раза.

**Вынужденные колебания. Резонанс.** Вынужденными колебаниями называются движения системы, которые вызываются действием на нее внешних сил  $F(t)$ , периодически изменяющихся во времени. Сила  $F(t)$  называется *вынуждающей силой*.

Если вынуждающая сила  $F(t)$  изменяется по гармоническому закону

$$F(t) = F_0 \cos \gamma t, \quad (1.6.10)$$

где  $F_0$  — амплитуда вынуждающей силы, а  $\gamma$  — ее циклическая частота, то в системе устанавливаются вынужденные колебания, которые

также являются гармоническими, происходят с циклической частотой, равной частоте  $\gamma$  вынуждающей силы, и описываются уравнением

$$x = A_{\text{вын}} \cos(\gamma t + \varphi_1). \quad (1.6.11)$$

Здесь  $A_{\text{вын}}$  — амплитуда вынужденных колебаний,  $\varphi_1$  — разность фаз между смещением  $x$  и силой  $F(t)$ . В процессе установления вынужденных колебаний движения в системе носят сложный характер: происходит наложение свободных затухающих колебаний и вынужденных колебаний. После того, как свободные колебания прекратятся, в системе установятся вынужденные колебания.

Амплитуда установившихся вынужденных колебаний зависит от соотношения частот вынуждающей силы  $\gamma$  и свободных колебаний  $\omega$ , а также от трения в системе. Изменение амплитуды колебаний в зависимости от частоты вынуждающей силы при различных коэффициентах трения изображено на рис. 1.6.4. Кривой 1 соответствует минимальное трение, а кривой 3 — максимальное.

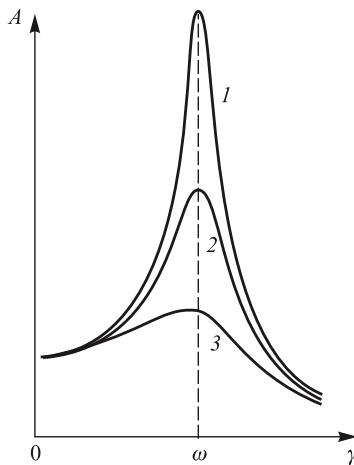


Рис. 1.6.4. Резонанс

Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте свободных колебаний системы называется *резонансом*. Расчет показывает, что при наличии трения в системе резонансная циклическая частота  $\gamma_{\text{рез}}$  несколько меньше собственной циклической частоты  $\omega_{\text{зат}}$  свободных затухающих колебаний. Возрастание амплитуды вынужденных колебаний при резонансе выражено тем отчетливее, чем меньше трение в системе.

**Понятие о волновых процессах. Поперечные и продольные волны.** Волновым процессом (волной) называется процесс распространения колебаний в пространстве. Примеры волновых процессов — волна на

поверхности воды, волна в упругой среде. Волны бывают продольные и поперечные. В продольной волне колебательное движение частиц среды происходит в направлении, параллельном направлению распространения волны. Такова, например, звуковая волна в воздухе. В поперечной волне колебательное движение частиц среды происходит в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны. Примером поперечных волн являются сдвиговые волны в упругой среде.

### **Длина волны. Скорость распространения волны. Фронт волны.**

**Уравнение бегущей волны.** При волновом движении возникает периодичность двоякого рода. *Во-первых*, отдельные частицы среды совершают колебания около своих положений равновесия с периодом  $T$ . При этом фазы колебаний частиц, расположенных в разных точках пространства, различны. *Во-вторых*, в каждый фиксированный момент времени механическое состояние среды периодически повторяется в пространстве вдоль направления распространения волны.

В качестве иллюстрации на рис. 1.6.5 изображен профиль поперечной волны в определенный момент времени (сплошная линия). Через  $s = s(x, t)$  там обозначено смещение от положения равновесия точки среды с координатой  $x$  в момент времени  $t$ . С течением времени вся картина перемещается со скоростью  $v$  слева направо. Спустя промежуток времени  $\Delta t = \Delta x/v$  волна будет иметь вид, изображенный на рис. 1.6.5 штриховой линией.

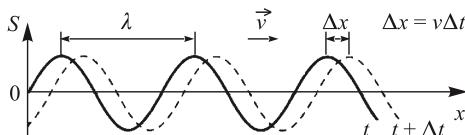


Рис. 1.6.5. Профиль поперечной волны в фиксированные моменты времени

Фаза колебаний частиц линейно связана с координатой, отсчитываемой в направлении распространения волны. Кратчайшее расстояние между двумя точками, в которых частицы среды колеблются в одной и той же фазе, называется длиной волны  $\lambda$ . Такое расстояние волна проходит за время, равное одному периоду колебаний.

Уравнение, описывающее колебательный процесс в любой точке пространства при распространении гармонической волны, называется *уравнением бегущей волны*. Для волны, бегущей вправо вдоль оси  $Ox$  оно имеет вид:

$$s = A \cos(\omega t - \varkappa x + \varphi_0). \quad (1.6.12)$$

Здесь  $A$  — амплитуда волны,  $\omega = 2\pi/T$  — круговая частота,  $\varkappa = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $\varphi_0$  — начальная фаза.

Геометрическое место точек, в которых частицы среды совершают колебания в одной и той же фазе, называется *фронтом волны* (волно-

вым фронтом). Волновой фронт может быть, в частности, плоским или сферическим. Скоростью распространения волны называется скорость движения ее волнового фронта. Она вычисляется по формуле

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu, \quad (1.6.13)$$

где  $T$  — период,  $\nu = 1/T$  — частота колебаний частиц в волне.

**Стоячие волны.** В простейшем случае стоячая волна образуется в результате наложения двух волн одинаковой частоты, распространяющихся навстречу друг другу. Например, стоячая волна возникает в натянутом резиновом шнуре, закрепленном в одном из концов, когда другому концу сообщаются в поперечном направлении гармонические колебания. Пусть волна, бегущая в направлении к закрепленному концу шнура (вправо), описывается уравнением

$$s_1 = A \cos(\omega t - \kappa x). \quad (1.6.14)$$

Поскольку смещения  $s_2$  шнура в отраженной от закрепленного конца волне имеют противоположный знак по сравнению со смещениями  $s_1$  в бегущей волне, а амплитуды бегущей и отраженной волн практически совпадают, уравнение отраженной волны имеет вид:

$$s_2 = -A \cos(\omega t + \kappa(x - 2l)), \quad (1.6.15)$$

где  $l$  — длина шнура. Результирующее смещение произвольной точки шнура с координатой  $x$  равно:

$$s = s_1 + s_2 = 2A \sin(\kappa(x - l)) \cdot \sin(\omega t - \kappa l). \quad (1.6.16)$$

Видно, что в каждая точка шнура совершает гармонические колебания на частоте  $\omega$ , причем модуль максимального смещения колеблющихся точек (амплитуда их колебаний) не зависит от времени и является периодической функцией координаты  $x$ :

$$s_0 = 2A |\sin(\kappa(x - l))|. \quad (1.6.17)$$

На рис. 1.6.6 изображен профиль стоячей волны в близкие моменты времени  $t$  и  $t + \Delta t$ . Точки, в которых амплитуда стоячей волны обращается в нуль, называются узлами стоячей волны. Точки, в которых амплитуда колебаний максимальна и равна  $2A$ , называются пучностями стоячей волны. Фаза колебаний всех точек между двумя соседними узлами в стоячей волне одинакова, но при переходе через узел фаза колебаний меняется на  $\pi$ , т.е. смещения меняют знак.

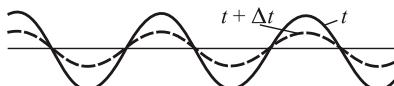


Рис. 1.6.6. Профиль стоячей волны в моменты  $t$  и  $t + \Delta t$

**Интерференция волн.** Если в среде возбуждены одновременно несколько волн, то они распространяются, не влияя одна на другую. В каждой точке среды колебания, вызванные различными волнами, складываются. Результирующее перемещение любой частицы представляет собой сумму перемещений, которые происходили бы при распространении одной из волн в отсутствие остальных. В результате такого наложения волн амплитуды колебаний частиц среды, расположенных в разных точках пространства, будут, вообще говоря, различными. В частности, в некоторых точках пространства колебания частиц могут практически отсутствовать, в то время как в других точках амплитуда колебаний может быть велика. Если при наложении волн возникает такое неоднородное распределение амплитуд колебаний в пространстве, и оно сохраняется во времени, то говорят, что имеет место *интерференция волн*. Для получения устойчивой интерференционной картины необходимо, чтобы источники волн имели одинаковую частоту и фазы их колебаний совпадали, или отличались на некоторую постоянную, не зависящую от времени величину. Источники, удовлетворяющие этим условиям, называются *когерентными*.

**Принцип Гюйгенса.** Общий принцип, описывающий распространение волн, впервые был выдвинут голландским ученым Х. Гюйгенсом. Согласно этому принципу каждая точка среды, до которой дошло волновое возмущение, становится источником элементарной вторичной волны. Положение волнового фронта распространяющейся волны в следующий момент времени определяется огибающей элементарных вторичных волн. Принцип Гюйгенса по существу определяет направление лучей, т.е. линий, перпендикулярных волновому фронту. С его помощью можно, в частности, вывести законы отражения и преломления волн на границе двух сред.

Для механических волн принцип Гюйгенса имеет наглядное истолкование. Частицы среды, до которых доходят колебания, в свою очередь, колебляясь, приводят в движение соседние частицы среды, с которыми они взаимодействуют.

**Дифракция волн.** Дифракцией называют явление огибания волной препятствия, встречающегося на ее пути. Это явление проявляется наиболее отчетливо, если размеры препятствия  $d$  имеют тот же порядок, что и длина волны  $\lambda$ . При  $d \gg \lambda$  явление дифракции обычно не играет существенной роли.

**Звуковые волны** представляют собой чередующиеся области сжатия и разрежения, распространяющиеся в упругой среде. Звуковые волны являются продольными. Они могут распространяться в воздухе, в воде, в почве, в металлах и пр. В частности, сжатия и разрежения воздуха в

звуковой волне вызывают колебания давления относительно среднего атмосферного давления. Частота слышимых человеческим ухом волн лежит в пределах *звукового диапазона*, образующего область частот колебаний от 16 Гц до 20 кГц. Звуковые волны с частотами менее 16 Гц называются *инфразвуками*, а с частотами более 20 кГц — *ультразвуками*.

Скорость звука в газе приблизительно равна средней скорости теплового движения молекул и, подобно ей, пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры. При 0 °C скорость звука в воздухе составляет 332 м/с.

Громкость звука зависит от *интенсивности* звуковой волны, т.е. от средней энергии, переносимой волной за единицу времени через единицу площади поверхности, перпендикулярной к направлению распространения волны. Интенсивность звуковой волны пропорциональна квадрату амплитуды колебаний давления воздуха и измеряется в Вт/м<sup>2</sup>. Наибольшей чувствительностью человеческое ухо обладает к звукам с частотами от 700 до 6000 Гц. В этом диапазоне ухо способно воспринимать звуки с интенсивностью около 10<sup>-12</sup> Вт/м<sup>2</sup> (порог слышимости). Наибольшая интенсивность, при которой восприятие звука не вызывает болевых ощущений, называется болевым порогом. Болевой порог зависит от частоты звуковых колебаний и при  $\nu = 1$  кГц составляет около 1 Вт/м<sup>2</sup>.

Высота звука определяется частотой колебаний. При этом низкие звуки соответствуют колебаниям воздуха на низких частотах, а высокие — колебаниям на высоких частотах.

## Указания по решению задач

Задачи данного раздела в основном делятся на две группы. В одной из них требуется определить период или частоту колебаний какой либо системы. Для этой цели следует составить уравнение движения системы вблизи положения равновесия, после чего свести его к виду (1.6.5). Тогда множитель, стоящий перед координатой, будет представлять собой квадрат частоты свободных колебаний. В некоторых случаях в уравнении колебаний возникают постоянные слагаемые (например, для груза, подвешенного на пружине и совершающего движения вдоль вертикальной прямой). Наличие таких членов в уравнении не влияет на частоту свободных колебаний.

Вторая группа задач связана с определением амплитуды колебаний. Для таких задач удобным оказывается использование закона сохранения полной механической энергии в колебательной системе. Этому закону следует придать форму, связывающую амплитудные и текущие значения смещения либо скорости колеблющегося тела.

## Примеры решения задач

**1.6.1.** Горизонтальная доска совершает гармонические колебания в горизонтальном направлении с периодом  $T = 2$  с. При какой амплитуде колебаний  $A$  лежащее на ней тело начнет скользить? Коэффициент трения  $\mu = 0,2$ , ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**Решение:** Направим ось  $OX$  горизонтально и совместим начало координат с некоторой фиксированной точкой доски в положении равновесия. Тогда зависимость координаты этой точки от времени будет иметь вид:

$$x = A \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Ускорение доски также описывается гармонической функцией времени:

$$a = \ddot{x} = - \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 A \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

где двумя точками обозначена вторая производная по времени. Амплитудное значение ускорения доски равно

$$a_0 = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 A.$$

Лежащее на доске тело приводится в движение силой трения. Поскольку максимальное значение силы трения покоя равно  $\mu mg$ , максимальное ускорение, которое она может сообщить телу,  $a_{\max} = \mu g$ . Следовательно, тело начнет скользить по доске, когда амплитудное значение ускорения доски превысит максимально возможное значение ускорения тела, т.е. при  $a_0 > a_{\max}$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:  $A > \frac{\mu g T^2}{4\pi^2}$ .

**1.6.2.** Цилиндр массой  $m$  с площадью основания  $S$  плавает в вертикальном положении в жидкости плотностью  $\rho$ . Его погрузили еще немного и отпустили. Определить период  $T$  малых вертикальных колебаний цилиндра. Сопротивлением жидкости пренебречь. Ускорение свободного падения  $g$ .

**Решение:** Пусть длина погруженной части цилиндра равна  $l$ . Тогда условие его плавания в жидкости запишется в виде:

$$mg = \rho S lg.$$

При дополнительном погружении цилиндра на глубину  $x$  архимедова сила станет равной  $\rho S(l + x)g$ . Если после погружения цилиндра его отпустить, то нескомпенсированная часть выталкивающей силы  $\rho Sxg$  сообщит ему ускорение  $a = \ddot{x}$ , направленное вверх, т.е. против перемещения цилиндра. В соответствии с этим, уравнение движения

цилиндра в вертикальном направлении будет:

$$m\ddot{x} = -\rho Sxg, \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \frac{\rho Sg}{m}x = 0.$$

Стоящий перед координатой  $x$  множитель  $\rho Sg/m$  представляет собой квадрат собственной частоты. Учитывая, что  $T = 2\pi/\omega$ , получаем ответ:  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g S}}$ .

**1.6.3.** Тело массой  $M = 10$  кг, надетое на гладкий горизонтальный стержень, связано пружиной с неподвижной стенкой. В это тело попадает и застревает в нем пуля массой  $m = 10$  г, летящая горизонтально со скоростью  $V = 500$  м/с, направленной вдоль стержня. Тело вместе с застрявшей в нем пулей начинает колебаться с амплитудой  $A = 10$  см. Найти период  $T$  колебаний тела.

**Решение:** Считая, что длительность взаимодействия пули с телом при соударении пренебрежимо мала, можно утверждать, что в момент соударения импульс системы «пуля + тело» сохраняется. Следовательно,

$$mV = (M+m)U,$$

где  $U$  — скорость тела и пули сразу после соударения. Приобретя такую скорость, тело с застрявшей в нем пулей начинает совершать гармонические колебания, причем в момент наибольшего отклонения от положения равновесия начальная кинетическая энергия системы полностью переходит в потенциальную энергию сжатой пружины:

$$\frac{(M+m)U^2}{2} = \frac{kA^2}{2}.$$

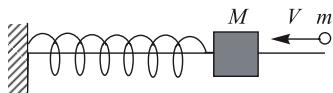
Объединяя эти соотношения, преобразуем получившееся выражение к виду:

$$\frac{M+m}{k} = \frac{(M+m)^2 A^2}{m^2 V^2}.$$

С другой стороны, нам известна формула для периода свободных колебаний тела массой  $m$  на пружине жесткостью  $k$ :  $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ . Используя эту формулу, окончательно находим

$$T = 2\pi \frac{M+m}{mV} A \cong 1,26 \text{ с.}$$

**1.6.4.** Тело массой  $m = 0,1$  кг, надетое на гладкий горизонтальный стержень, связано пружиной жесткостью  $k = 10$  Н/м с неподвижной стенкой. Тело смещают от положения равновесия на расстояние  $x_0 = 10$  см и отпускают без начальной скорости. Найти среднюю скорость тела  $V_{cp}$  за время, в течение которого оно проходит из крайнего положения путь  $x_0/2$ .



**Решение:** Выберем в качестве начала отсчета времени момент, когда тело, смещенное от положения равновесия на расстояние  $x_0$ , отпускают без начальной скорости. Тогда его координата будет меняться со временем в соответствии с выражением:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t,$$

где  $\omega$  — круговая частота колебаний, связанная с периодом колебаний  $T = 2\pi\sqrt{m/k}$  соотношением  $\omega = 2\pi/T = \sqrt{k/m}$ . Обозначив через  $t_0$  время, которое тело проходит от крайнего положения путь  $x_0/2$ , можно записать:

$$\frac{x_0}{2} = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t_0, \quad \text{откуда} \quad t_0 = \sqrt{\frac{m}{k}} \arccos \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Средняя скорость тела за время  $t_0$  определяется выражением:  $V_{\text{ср}} = \frac{x_0}{2t_0}$ . Ответ:  $V_{\text{ср}} = \frac{3x_0}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \cong 0,48 \text{ м/с.}$

**1.6.5.** Математический маятник совершает малые колебания. Известно, что через время  $\tau = 0,314$  с после прохождения маятником положения равновесия его отклонение составило некоторую величину  $\alpha_0$ , а через время  $2\tau$  — величину  $\sqrt{3}\alpha_0$ . Найти длину маятника, если  $2\tau$  меньше полупериода его колебаний. Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**Решение:** Пусть в момент прохождения маятником положения равновесия  $t = 0$ . Тогда зависимость угла отклонения маятника от времени имеет вид:

$$\alpha(t) = A \sin \omega t,$$

где  $A$  — амплитуда колебаний,  $\omega$  — угловая частота. По условию задачи

$$\alpha_0 = A \sin \omega \tau, \quad \sqrt{3}\alpha_0 = A \sin 2\omega \tau.$$

Поскольку  $\sin 2\omega \tau = 2 \sin \omega \tau \cos \omega \tau$ , из этих равенств следует, что

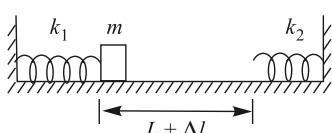
$$\cos \omega \tau = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{или} \quad \omega \tau = \frac{\pi}{6}.$$

Учитывая, что угловая частота свободных колебаний математического маятника  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , после несложных преобразований получаем ответ:

$$l = 36g \left( \frac{\tau}{\pi} \right)^2 = 3,6 \text{ м.}$$

**1.6.6.** Бруск массой  $m = 9 \text{ г}$  может совершать поступательное

движение по прямой между двумя невесомыми пружинами жесткостью  $k_1 = 0,25 \text{ Н/м}$  и  $k_2 = 0,16 \text{ Н/м}$ . В недеформированном состоянии пружин расстояние между их концами  $L = 20 \text{ см}$ . В начальный



момент времени пружина  $k_1$  сжата на величину  $\Delta l = 1$  см, а бруск отложен вплотную к ее концу. Через какое время  $\tau$  после того, как бруск отпустят, он вернется в исходное положение? Размерами бруска пренебречь.

**Решение:** Искомое время складывается из трех времен: половины периода  $T_1$  колебаний бруска на пружине  $k_1$ , времени  $2L/V$  равномерного движения бруска между пружинами и половины периода  $T_2$  колебаний бруска на пружине  $k_2$ . Для нахождения  $T_1$  и  $T_2$  воспользуемся известной формулой для периода свободных колебаний бруска массой  $m$  на пружине жесткостью  $k_i$ :

$$T_i = 2\pi\sqrt{m/k_i}, \quad i = 1, 2.$$

Скорость равномерного движения бруска можно найти из закона сохранения энергии, справедливого при свободных колебаниях:

$$\frac{k_1\Delta l^2}{2} = \frac{mV^2}{2}.$$

Отсюда  $V = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \Delta l$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:  $\tau = \pi \left( \sqrt{\frac{m}{k_1}} + \sqrt{\frac{m}{k_2}} \right) + \frac{2L}{\Delta l} \sqrt{\frac{m}{k_1}} \approx 9$  с.

**1.6.7.** Маленький шарик, подвешенный на нити, отклоняют от положения равновесия и отпускают без начальной скорости. Определить, с каким ускорением  $a_1$  начнет двигаться шарик, если известно, что в момент прохождения шариком нижней точки траектории его ускорение равно  $a_2 = 15$  м/с<sup>2</sup>. Нить считать невесомой и нерастяжимой, сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

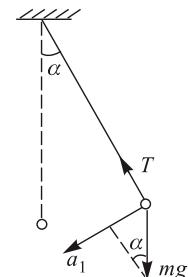
**Решение:** Пусть  $m$  — масса шарика,  $l$  — длина нити,  $\alpha$  — начальный угол отклонения маятника. Поскольку ускорение шарика в начальный момент времени направлено по касательной к траектории, величина ускорения  $a_1$  определяется проекцией силы тяжести  $mg$  на это направление, т.е.

$$a_1 = g \sin \alpha.$$

По закону сохранения энергии

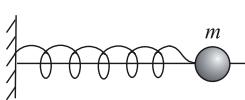
$$\frac{mV^2}{2} = mg l(1 - \cos \alpha),$$

где  $V$  — скорость шарика в нижней точке. Ускорение шарика в этой точке равно  $a_2 = \frac{V^2}{l}$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:  $a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{a_2(4g - a_2)} \approx 9,7$  м/с<sup>2</sup>.



## Задание для самостоятельной работы

**1.6.8.** Тело массой  $m = 1$  кг, надетое на гладкий горизонтальный стержень, совершает свободные гармонические колебания под действием пружины. Какова полная механическая энергия колебаний  $E$ , если амплитуда колебаний  $A = 0,2$  м, а максимальное ускорение тела в процессе колебаний  $a_{\max} = 3 \text{ м/с}^2$ ?



**1.6.9.** Гиря массой  $m = 1$  кг, подвешенная на пружине, совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой  $A = 0,2$  м и периодом  $T = 2$  с. Определить силу натяжения пружины  $F$  в момент, когда гиря достигает нижней точки. Ускорение свободного падения  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .

**1.6.10.** Определить период  $T$  вертикальных колебаний груза массой  $m$ , подвешенного к двум последовательно соединенным пружинам жесткостями  $k_1$  и  $k_2$ .

**1.6.11.** Зная период колебаний маятника на уровне моря  $T_0 = 1$  с, найти период колебаний этого маятника  $T_1$  на высоте  $h = 6,4$  км над уровнем моря. Радиус Земли  $R = 6400$  км.

**1.6.12.** Математический маятник, представляющий собой шарик массой  $m$ , подвешенный на нити длиной  $l$ , помещен в электрическое поле плоского конденсатора, заряженного до напряжения  $U$ . Расстояние между обкладками конденсатора  $d$ . Определить период  $T$  колебаний маятника, если пластины конденсатора расположены горизонтально. Заряд шарика положителен и равен  $q$ . Ускорение свободного падения  $g$ .

**1.6.13.** Грузик, надетый на гладкую горизонтальную спицу, прикреплен к концам двух невесомых пружин. Вторые концы пружин заделаны в неподвижные стенки так, что в положении равновесия грузика пружины не деформированы. Каков период  $T$  колебаний грузика, если известно, что при поочередном подвешивании грузика к каждой из пружин по отдельности их удлинения составили  $h_1 = 4$  см и  $h_2 = 6$  см? Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

## Глава 2

# МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

### 2.1. Основы молекулярно-кинетической теории

#### Вопросы программы

1. Основные положения молекулярно-кинетической теории и их опытное обоснование. Броуновское движение. Масса и размер молекул. Моль вещества. Постоянная Авогадро. Характер движения молекул в газах, жидкостях и твердых телах.
2. Тепловое равновесие. Температура и ее физический смысл. Шкала температур Цельсия.
3. Идеальный газ. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа. Средняя кинетическая энергия молекул и температура. Постоянная Больцмана. Абсолютная температурная шкала.
4. Уравнение Клапейрона–Менделеева (уравнение состояния идеального газа). Универсальная газовая постоянная. Изотермический, изобарный и изохорный процессы.

#### Определения, понятия и законы

Молекулярная физика — это раздел физики, изучающий строение и свойства вещества в различных агрегатных состояниях, исходя из молекулярно-кинетических представлений.

**Основные положения молекулярно-кинетической теории и их опытное обоснование.** Основные положения молекулярно-кинетической теории состоят в следующем:

1. любое вещество состоит из молекул — наименьших устойчивых частиц данного вещества, обладающих всеми его химическими свойствами;
2. все молекулы находятся в состоянии непрерывного хаотического движения, характер которого зависит от агрегатного состояния вещества;
3. между молекулами действуют силы притяжения и отталкивания.

Множество прямых и косвенных доказательств реальности молекул позволяют считать молекулярно-кинетические представления о строении вещества абсолютно достоверными. Основные положения молекулярно-кинетической теории подтверждаются многочисленными опытами с использованием достижений современной экспериментальной техники. С помощью ионного проектора получают изображения кристаллов, по которым можно представить их строение. Электронные микроскопы позволили получить изображения кристаллов, по которым оказалось возможным определение расстояний между отдельными атомами и молекулами. Одним из важнейших прямых доказательств справедливости молекулярно-кинетической теории газов являются измерения значений скоростей молекул газов и сравнение этих результатов со значениями, полученными на основании теории.

**Броуновское движение.** Большое значение в обосновании молекулярно-кинетической теории имело в свое время открытие английского ботаника Р. Броуна. В 1827 году он обнаружил беспорядочное движение видимых в микроскоп частиц цветочной пыльцы, взвешенных в воде (названное впоследствии *броуновским движением*). Наблюдаемые частицы размером примерно в 1 мкм совершали неупорядоченные движения, описывая сложные зигзагообразные траектории. Многочисленные эксперименты, проведенные французским ученым Ж. Перреном, позволили установить основные закономерности броуновского движения: его интенсивность не зависит от времени, но возрастает с ростом температуры среды, уменьшением ее вязкости и размеров частиц.

Объяснить броуновское движение и его закономерности смогла лишь молекулярно-кинетическая теория. Причиной броуновского движения является тепловое движение молекул среды и отсутствие точной компенсации ударов, испытываемых частицей со стороны окружающих ее молекул. Импульс одной молекулы слишком мал, чтобы результат ее столкновения с броуновской частицей можно было увидеть под микроскопом. Но если с частицей сталкивается сразу большое число молекул, случайно движущихся в одном направлении, то они могут вызвать ее заметное смещение. Чем меньше размеры и масса частицы, тем более заметными становятся изменения ее импульса во времени.

Количественная теория броуновского движения была разработана А. Эйнштейном и М. Смолуховским в 1906 году. Она полностью объяснила все закономерности этого явления.

**Масса и размер молекул.** Современные приборы позволяют рассматривать отдельные атомы на поверхностях тел и измерять их размеры. Так, например, диаметр атома углерода, измеренный с помощью туннельного микроскопа, оказался равным  $1,4 \cdot 10^{-8}$  см. Такой же порядок

имеют размеры других атомов и большинства молекул. В частности, размер молекулы водорода составляет  $2,3 \cdot 10^{-8}$  см.

Зная размер молекулы какого-либо вещества, можно оценить ее массу. Например, диаметр молекулы воды примерно равен  $3 \cdot 10^{-8}$  см. Считая, что молекулы в воде упакованы плотно, т.е. пренебрегая межмолекулярными промежутками, легко получить для массы одной молекулы  $H_2O$  следующую оценку:  $m_{H_2O} \approx 2,7 \cdot 10^{-23}$  г. Массы такого же порядка имеют молекулы других веществ (за исключением огромных молекул сложных органических соединений, содержащих тысячи атомов). Наиболее точно массы атомов и молекул измеряются с помощью современных масс-спектрометров.

Так как массы молекул очень малы, удобно использовать на практике не абсолютные значения масс, а относительные. Относительной молекулярной (или атомной) массой вещества называют отношение массы молекулы (или атома) данного вещества к  $1/12$  массы атома углерода  $^{12}C$ .

**Моль вещества. Постоянная Авогадро.** Количество вещества  $\nu$  пропорционально числу структурных единиц (атомов или молекул), из которых оно состоит. Поскольку число таких единиц в макроскопических телах огромно, принято использовать в расчетах не абсолютное их число, а относительное. В системе СИ количество вещества выражают в молях.

Один моль — это количество вещества, в котором содержится столько же структурных единиц (молекул или атомов), сколько атомов содержится в углероде  $^{12}C$  массой 12 г.

В одном моле любого вещества содержится одно и то же число структурных единиц, из которых оно состоит. Это число называют *постоянной Авогадро*  $N_A$ . Постоянная Авогадро равна  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$  моль $^{-1}$ .

Молярной массой  $M$  называется величина, равная отношению массы вещества  $m$  к количеству вещества  $\nu$ :

$$M = \frac{m}{\nu}. \quad (2.1.1)$$

Иными словами, молярная масса — это масса вещества, взятого в количестве одного моля. Она измеряется в граммах на моль и численно равна относительной молекулярной (или атомной) массе вещества.

**Характер теплового движения молекул в газах, жидкостях и твердых телах.** Характер теплового движения в веществе зависит от его агрегатного состояния. Молекулы (атомы) в твердом теле совершают беспорядочные колебания относительно положений, в которых силы притяжения и отталкивания со стороны соседних молекул (атомов) уравновешены. В жидкости молекулы не только колеблются около положения равновесия, но и совершают перескоки из одного

положения равновесия в соседнее. Эти перескоки являются причиной текучести жидкости, ее способности принимать форму сосуда. В газах расстояния между молекулами в среднем значительно больше размеров молекул. Силы отталкивания на больших расстояниях малы, поэтому газы легко сжимаются. Практически отсутствуют между молекулами газа и силы притяжения, поэтому газы обладают свойством неограниченно расширяться.

**Тепловое равновесие.** На основании многочисленных экспериментов установлено очень важное свойство тепловых явлений: тело или система тел при неизменных внешних условиях самопроизвольно переходит в состояние теплового равновесия. *Тепловым, или термодинамическим равновесием* называют такое состояние, при котором все макроскопические параметры системы сколь угодно долго остаются постоянными. Это означает, что не меняются объем и давление, не происходит теплообмен (передача энергии) между частями системы, отсутствуют взаимные превращения газов, жидкостей, твердых тел и т.д. Но микроскопические процессы (движение молекул, их столкновения, обмен скоростями) в системе не прекращаются и при тепловом равновесии

**Температура и ее физический смысл.** Физический параметр, одинаковый во всех частях системы тел, находящихся в состоянии теплового равновесия, называется *температурой*. Если при контакте двух тел никакие их физические параметры не изменяются, то между телами нет теплообмена и температура тел одинакова.

Способы измерения температуры основываются на следующем утверждении, которое является обобщением многочисленных экспериментальных данных: Если тело *A* находится в тепловом равновесии с телом *C*, а тело *B* тоже находится в тепловом равновесии с телом *C*, то тела *A* и *B* также находятся в состоянии теплового равновесия. Это дает возможность сравнивать состояния теплового равновесия тел, не приводя их в непосредственный контакт.

**Шкала температур Цельсия.** Для измерения температуры можно воспользоваться зависимостями любой макроскопической величины от температуры, а именно, объема, давления, электрического сопротивления и т.д. На практике чаще всего используют зависимость объема жидкости (ртути или спирта) от температуры. По *шкале Цельсия* за начало отсчета (0) принимают температуру тающего льда; второй постоянной точкой (100) считают температуру кипения воды при нормальном атмосферном давлении. Шкалу между точками 0 и 100 делят на 100 равных частей, называемых градусами ( $1^{\circ}\text{C}$ ). Перемещение столбика жидкости на одно деление соответствует изменению температуры на  $1^{\circ}\text{C}$ .

**Идеальный газ.** Для объяснения свойств вещества в газообразном состоянии используется модель *идеального газа*. В этой модели предполагается, что молекулы обладают пренебрежимо малым объемом по сравнению с объемом сосуда, между молекулами не действуют силы притяжения, при соударениях молекул друг с другом и со стенками сосуда действуют силы упругого отталкивания.

**Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа.** Одним из самых важных успехов молекулярно-кинетической теории явилось количественное объяснение давления газа на стенки сосуда. *Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа* было выведено в предположении, что молекулы газа при столкновениях со стенками сосуда взаимодействуют с ними по законам механики как упругие тела. Согласно этому уравнению,

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \overline{v^2}, \quad (2.1.2)$$

где  $p$  — давление газа,  $n$  — концентрация молекул (число молекул в единице объема),  $m_0$  — масса молекулы,  $\overline{v^2}$  — среднее значение квадрата скорости молекул. Обозначив через  $\overline{E}$  среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул газа

$$\overline{E} = \frac{m_0 \overline{v^2}}{2}, \quad (2.1.3)$$

уравнение (2.1.2) можно записать в эквивалентной форме

$$p = \frac{2}{3} n \overline{E}. \quad (2.1.4)$$

**Средняя кинетическая энергия молекул и температура.** Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа устанавливает связь макроскопического параметра — давления — с микроскопическими параметрами газа — средней кинетической энергией и концентрацией молекул. Но, измерив только давление газа, мы не можем в отдельности узнать ни среднее значение кинетической энергии молекул, ни их концентрацию. Для нахождения микроскопических параметров газа нужны измерения еще одной физической величины, как-то связанной со средней кинетической энергией молекул. Такой величиной является температура.

Для установления этой связи используется известный из экспериментов факт, что для большинства разреженных газов, находящихся в состоянии теплового равновесия, отношение произведения давления газа на его объем к числу молекул является одинаковым:

$$\frac{p_1 V_1}{N_1} = \frac{p_2 V_2}{N_2} = \frac{p_3 V_3}{N_3} = \vartheta. \quad (2.1.5)$$

Этот опытный факт позволяет принять величину  $\vartheta$  в качестве естественной меры температуры. Так как  $n = \frac{N}{V}$ , то с учетом (2.1.4) получим

$$\frac{pV}{N} = \frac{2}{3}\bar{E} = \vartheta. \quad (2.1.6)$$

Следовательно, средняя кинетическая энергия молекул любых газов, находящихся в тепловом равновесии, одинакова. Величина  $\vartheta$  равна двум третям средней кинетической энергии теплового движения молекул газа и выражается в джоулях. В физике температуру выражают в градусах, принимая, что температура  $T$  и величина  $\vartheta$  связаны уравнением

$$\vartheta = kT, \quad (2.1.7)$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единицы температуры. Окончательно получаем

$$\frac{pV}{N} = kT. \quad (2.1.8)$$

**Абсолютная температурная шкала. Постоянная Больцмана.** Последнее уравнение показывает, что имеется возможность выбрать температурную шкалу, не зависящую от природы газа, используемого в качестве рабочего тела. Такая шкала называется *абсолютной температурной шкалой*, или шкалой Кельвина. Единица температуры по абсолютной шкале, называемая *кельвином* (К), выбрана равной одному градусу по шкале Цельсия:  $1\text{ K} = 1^\circ\text{C}$ .

При таком выборе единицы температуры коэффициент  $k$  в уравнении (2.1.8) принимает значение  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К. Он называется *постоянной Больцмана*. Постоянную Больцмана можно рассматривать как величину, связывающую температуру, выражаемую в энергетических единицах, с температурой, выраженной в градусах.

Абсолютная температура  $T$  связана с температурой  $t$  по шкале Цельсия соотношением

$$T = t + 273^\circ\text{C}. \quad (2.1.9)$$

Из уравнений (2.1.6) и (2.1.8) следует, что

$$\bar{E} = \frac{3}{2}kT. \quad (2.1.10)$$

Средняя кинетическая энергия хаотического движения молекул газа пропорциональна абсолютной температуре. Из уравнений (2.1.4) и (2.1.10) можно получить, что

$$p = nkT. \quad (2.1.11)$$

При одинаковых значениях температуры и концентрации молекул давление любых газов одинаково. Отсюда следует закон *Авогадро*: в равных объемах газов при одинаковых температурах и давлениях содержится одинаковое число молекул.

Используя уравнения (2.1.3) и (2.1.10), найдем средний квадрат скорости поступательного движения молекул:

$$\overline{v^2} = \frac{3kT}{m_0}. \quad (2.1.12)$$

Квадратный корень из этой величины называется *средней квадратичной скоростью*:

$$v_0 = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}. \quad (2.1.13)$$

**Уравнение Клапейрона–Менделеева (уравнение состояния идеального газа). Универсальная газовая постоянная.** Каждая физическая однородная система, состоящая из большого числа частиц (газ, жидкость или твердое тело) и находящаяся в состоянии теплового равновесия, характеризуется своим *уравнением состояния*, т.е. уравнением, связывающим давление, объем и абсолютную температуру:  $f(p, V, T) = 0$ . Наиболее просто выглядит уравнение состояния идеального газа, хорошо известны различные приближенные уравнения, описывающие состояние реальных газов. В то же время, для жидкостей из-за их сложного строения до сих пор не удалось получить общего уравнения состояния. Нет универсального уравнения состояния и для твердых тел.

Уравнение, устанавливающее связь между давлением, объемом и температурой газов, было получено французским физиком Б. Клапейроном путем обобщения многочисленных экспериментальных данных. В наиболее удобной форме, используемой вплоть до настоящего времени, его впервые применил Д.И. Менделеев. Поэтому *уравнение состояния идеального газа* называется также *уравнением Клапейрона–Менделеева*. Оно имеет вид

$$pV = \frac{m}{M}RT, \quad (2.1.14)$$

где  $m$  — масса газа,  $R$  — *универсальная газовая постоянная*, равная произведению постоянной Авогадро  $N_A$  на постоянную Больцмана  $k$ :  $R = N_A k = 8,31 \text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}$ . Используя выражение для плотности газа  $\rho = \frac{m}{V}$ , уравнение Клапейрона–Менделеева можно записать эквивалентной форме, более удобной в некоторых случаях:

$$\rho = \frac{pM}{RT}. \quad (2.1.15)$$

**Изотермический, изохорный и изобарный процессы.** С помощью уравнения состояния идеального газа можно исследовать процессы, в которых масса газа и один из трех параметров — давление, объем или температура — остаются неизменными. Особую роль в физике и технике играют три процесса — изотермический, изохорный и изобарный.

*Изотермическим процессом* называется процесс, протекающий при постоянной температуре  $T$ . Из уравнения состояния идеального газа следует, что в таком процессе произведение давления газа на его объем должно оставаться постоянным:

$$pV = \text{const.} \quad (2.1.16)$$

График изотермического процесса называется *изотермой*. На плоскости переменных объем — давление он представляет собой гиперболу.

Уравнение (2.1.16) было получено экспериментально английским физиком Р. Бойлем и французским физиком Э. Мариоттом задолго до создания молекулярно-кинетической теории. Это уравнение называют *законом Бойля–Мариотта*.

Процесс, протекающий при постоянном объеме, называется *изохорным*. Из уравнения (2.1.14) вытекает, что при  $V = \text{const}$

$$\frac{p}{T} = \text{const.} \quad (2.1.17)$$

График изохорного процесса называется *изохорой*. На плоскости переменных температура — давление он представляет собой отрезок прямой, продолжение которого проходит через начало координат. Экспериментальным путем зависимость давления газа от температуры исследовал французский физик Ж. Шарль. Поэтому уравнение (2.1.17) называется *законом Шарля*.

Процесс изменения состояния газа при постоянном давлении называется *изобарным*. Его уравнение имеет вид

$$\frac{V}{T} = \text{const.} \quad (2.1.18)$$

Этот закон был установлен экспериментально французским ученым Ж. Гей-Люссаком и носит название *закона Гей-Люссака*. График изобарного процесса называется *изобарой*. На плоскости переменных температура — объем он представляет собой отрезок прямой, продолжение которого проходит через начало координат.

## Указания по решению задач

Решение задач по этой теме следует начинать с анализа тех состояний теплового равновесия, в которых по условию находится газ. Для каждого из таких состояний нужно записать все параметры газа: давление, объем, температуру и его массу, а также установить связь между ними.

Часто в задачах оказывается полезным использование закона *парциальных давлений* (закона Дальтона). Напомним, что парциальным называется давление, которое оказывал бы газ, входящий в состав газовой смеси, если бы он один занимал весь объем. Согласно закону Дальтона, давление смеси химически не взаимодействующих газов равно сумме их парциальных давлений. С точки зрения

молекулярно-кинетической теории закон Дальтона означает, что действия на стенки сосуда молекул каждого из газов складываются. В частности, закон Дальтона применим и при добавлении в сосуд, в котором уже находится газ под давлением  $p$ , некоторого количества этого же газа. В этом случае парциальное давление добавленного газа можно рассчитывать так, как если бы сосуд был пустой. Результирующее давление складывается из этого парциального давления и давления  $p$ , которое было в сосуде первоначально.

Часто в задачах отдельные порции газа изолируются друг от друга подвижными поршнями. В этом случае давления газа по разные стороны поршня не независимы, а связаны между собой условием механического равновесия поршня. В частности, если неподвижный сосуд располагается вертикально, разность сил давления газа снизу и сверху от поршня равна его весу.

### Примеры решения задач

**2.1.1.** Атмосферное давление на пике Ленина (высота 7134 м)  $p_1 = 3,8 \cdot 10^4$  Па. Определить плотность воздуха  $\rho_1$  на вершине при температуре  $t_1 = -10^\circ\text{C}$ , если при нормальных условиях ( $t_0 = 0^\circ\text{C}$ ,  $p_0 = 10^5$  Па), плотность воздуха  $\rho_0 = 1,29 \text{ кг}/\text{м}^3$ .

**Решение:** Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона–Менделеева) можно записать в следующей форме:

$$\rho = \frac{pM}{RT},$$

где  $\rho = m/V$  — плотность газа,  $p$  — давление,  $M$  — молярная масса,  $T$  — абсолютная температура газа. Учитывая, что

$$\rho_0 = \frac{p_0 M}{R T_0}, \quad \rho_1 = \frac{p_1 M}{R T_1},$$

где  $T_0 = t_0 + 273^\circ\text{C}$ ,  $T_1 = t_1 + 273^\circ\text{C}$ , получаем ответ:

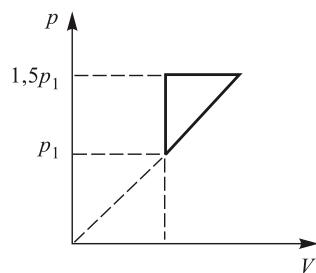
$$\rho_1 = \rho_0 \frac{p_1 T_0}{p_0 T_1} = 0,51 \text{ кг}/\text{м}^3.$$

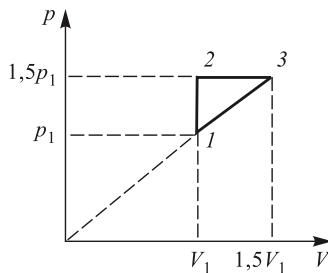
**2.1.2.** Найти отношение  $k$  максимальной плотности идеального газа к его минимальной плотности, которые достигаются при циклическом процессе, показанном на рисунке.

**Решение:** Значения плотности газа в точках 1, 2 и 3 (см. рисунок) равны:

$$\rho_1 = \frac{p_1 M}{R T_1}, \quad \rho_2 = \frac{p_2 M}{R T_2}, \quad \rho_3 = \frac{p_2 M}{R T_3},$$

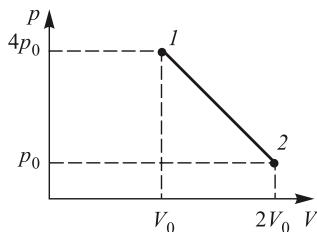
где  $M$  — молярная масса газа,  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  — температуры газа в этих точках. По-





скольку объем газа в точках 1 и 2 один и тот же,  $p_1/T_1 = p_2/T_2$ . Следовательно,  $\rho_2 = \rho_1$ , т. е. на участке 1 — 2 плотность газа не меняется. На участке 2 — 3, проходящем при постоянном давлении,  $V_1/T_2 = V_3/T_3$ , откуда следует, что  $T_3 = 1,5T_2$ . Поэтому  $\rho_3 = \frac{1}{1,5}\rho_1$ . Таким образом, максимальная плотность газа достигается в точках 1 и 2, а минимальная — в точке 3. Ответ:  $k = \frac{\rho_1}{\rho_3} = 1,5$ .

**2.1.3.** С идеальным одноатомным газом проводят процесс 1 — 2, показанный на рисунке. Во сколько раз  $\alpha$  при этом изменится средняя кинетическая энергия молекулы газа?



**Решение:** Поскольку средняя кинетическая энергия молекулы одноатомного газа

$$\overline{E}_k = \frac{3}{2}kT,$$

искомое отношение энергий равно отношению абсолютных температур газа в состояниях 2 и 1, т.е.  $\alpha = T_2/T_1$ . Записывая уравнение Клапейрона–Менделеева для этих состояний, имеем:

$$V_0 \cdot 4p_0 = \nu RT_1, \quad 2V_0 \cdot p_0 = \nu RT_2,$$

где  $\nu$  — количество молей газа,  $R$  — универсальная газовая постоянная. Отсюда видно, что  $T_2/T_1 = 1/2$ . Следовательно,  $\alpha = \frac{1}{2}$ , т.е. средняя кинетическая энергия молекулы газа в процессе 1 — 2 уменьшится в 2 раза.

**2.1.4.** Горизонтальный цилиндр с газом разделен на три камеры двумя неподвижными поршнями. Температура газа во всех камерах одинакова и равна  $T_1$ . Давление газа в первой камере  $p_1$ , объем

второй  $p_2, V_2$ , в третьей соответственно  $p_3, V_3$ . Каково будет давление  $p$  в камерах после того как, освободив поршни, дать им возможность свободно двигаться, а температуру газа сделать равной  $T_2$ ?

**Решение:** Запишем уравнения состояния для порций газа в камерах:

$$p_1 V_1 = \nu_1 R T_1, \quad p_2 V_2 = \nu_2 R T_1, \quad p_3 V_3 = \nu_3 R T_1.$$

Отсюда найдем количества газа в каждой камере:

$$\nu_1 = \frac{p_1 V_1}{R T_1}, \quad \nu_2 = \frac{p_2 V_2}{R T_1}, \quad \nu_3 = \frac{p_3 V_3}{R T_1}.$$

Когда поршни освободят, давление во всех камерах станет одинаковым и уравнение состояния газа примет вид:

$$p(V_1 + V_2 + V_3) = (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) R T_2.$$

Подставляя сюда выше найденные количества газа, получаем ответ:

$$p = \frac{(p_1 V_1 + p_2 V_2 + p_3 V_3) T_2}{(V_1 + V_2 + V_3) T_1}.$$

**2.1.5.** Баллон, содержащий  $m_1 = 1$  кг азота, при испытании на прочность взорвался при температуре  $t_1 = 327^\circ\text{C}$ . Какую массу водорода  $m_2$  можно было бы хранить в таком баллоне при температуре  $t_2 = 27^\circ\text{C}$ , имея пятикратный запас прочности? Молярная масса азота  $M_1 = 28$  г/моль, водорода  $M_2 = 2$  г/моль.

**Решение:** Из уравнения состояния азота следует, что давление, при котором взорвался баллон,  $p_1 = \frac{m_1 R T_1}{M_1 V}$ , где  $V$  — объем баллона. По условию водород можно хранить при давлении  $p_2 = p_1/5$ . Учитывая, что  $p_2 = \frac{m_2 R T_2}{M_2 V}$ , получаем ответ:  $m_2 = \frac{m_1}{5} \frac{M_2 t_1 + 273^\circ\text{C}}{M_1 t_2 + 273^\circ\text{C}} \approx 28$  г.

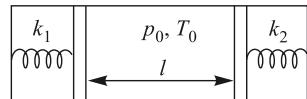
**2.1.6.** В цилиндре с площадью основания  $S = 10 \text{ см}^2$  могут без трения скользить два поршня. Между поршнями находится идеальный газ, а справа и слева от них — вакуум. Поршни соединены со стенками сосуда пружинами жесткости  $k_1 = 100 \text{ Н/м}$  и  $k_2 = 50 \text{ Н/м}$ , как показано на рисунке. При температуре  $T_0 = 300 \text{ К}$  давление газа  $p_0 = 0,5 \cdot 10^4 \text{ Па}$  и расстояние между поршнями  $l = 10 \text{ см}$ . Найти температуру газа  $T$ , при которой расстояние между поршнями увеличится до  $L = 12 \text{ см}$ .

**Решение:** Уравнения начального и конечного состояния газа имеют вид:

$$p_0 l S = \nu R T_0, \quad p L S = \nu R T,$$

откуда  $T = T_0 \frac{p L}{p_0 l}$ . Из условия равновесия поршней имеем:

$$(p - p_0) S = k_1 \Delta l_1 = k_2 \Delta l_2,$$



где  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  — смещения левого и правого поршней соответственно, причем  $\Delta l_1 + \Delta l_2 = L - l$ . Отсюда  $\Delta l_1 = \frac{(L-l)k_2}{k_1+k_2}$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$T = T_0 \frac{L}{l} \left[ 1 + \frac{(L-l)k_1 k_2}{S p_0 (k_1 + k_2)} \right] = 417,6 \text{ К.}$$

**2.1.7.** Закрытый с обоих концов горизонтальный цилиндр заполнен идеальным газом при температуре  $t = 27^\circ\text{C}$  и разделен подвижным теплонепроницаемым поршнем на две равные части длиной  $L = 50$  см каждая. На какую величину  $\Delta t$  нужно повысить температуру газа в одной половине цилиндра, чтобы поршень сместился на расстояние  $l = 20$  см при неизменной температуре газа во второй половине цилиндра?

**Решение:** Для части газа, имеющей постоянную температуру, справедлив закон Бойля-Мариотта, согласно которому

$$pLS = p_1(L-l)S,$$

где  $p$  — первоначальное давление газа в цилиндре,  $p_1$  — давление в цилиндре после нагревания половины газа,  $S$  — площадь поршня. Уравнение состояния, записанное для газа в другой части цилиндра, дает нам соотношение

$$\frac{pLS}{T} = \frac{p_1(L+l)S}{T + \Delta T}.$$

Исключая из этих равенств  $p$  и  $p_1$ , получаем ответ:  $\Delta T = \frac{2lT}{L-l} = 400\text{K}$ .

**2.1.8.** Сосуд, содержащий идеальный газ при температуре  $t = 27^\circ\text{C}$ , снабжен клапаном, открывающимся при перепаде давлений  $p_{\text{k}} = 400$  кПа. Газ нагревают до температуры  $t_1 = 127^\circ\text{C}$ , при этом часть газа выходит из сосуда через клапан. Найти давление  $p$ , которое установится в сосуде после охлаждения газа до начальной температуры  $t$ . Атмосферное давление  $p_0 = 100$  кПа.

**Решение:** При нагревании газа в сосуде его давление будет повышаться до величины  $p' = p_0 + p_{\text{k}}$ , после чего давление будет оставаться постоянным и равным  $p'$ , а излишек газа будет выходить наружу. Из уравнения состояния газа в конце нагрева

$$(p_0 + p_{\text{k}})V = \nu RT_1$$

можно найти количество газа, оставшегося в сосуде:

$$\nu = \frac{(p_0 + p_{\text{k}})V}{RT_1},$$

где  $T_1 = t_1 + 273$  °C. Записывая уравнение состояния этого количества газа при температуре  $T = t + 273$  °C:

$$pV = \nu RT = \frac{(p_0 + p_{\text{ж}})V}{T_1} \cdot T,$$

получаем ответ:  $p = (p_{\text{ж}} + p_0) \frac{(t + 273^{\circ}\text{C})}{(t_1 + 273^{\circ}\text{C})} = 375$  кПа.

**2.1.9.** Вертикально расположенный цилиндрический сосуд, закрытый подвижным поршнем массой  $M = 2$  кг, содержит идеальный газ при температуре  $T_1 = 300$  К. На поршень помещают тело массой  $m = 100$  г и нагревают газ так, чтобы поршень занял первоначальное положение. Найти температуру  $T_2$  нагретого газа. Атмосферное давление не учитывать.

**Решение:** Обозначив через  $p_1$  и  $p_2$  давления газа в начальном и конечном состояниях, имеем:

$$p_1V = \nu RT_1, \quad p_2V = \nu RT_2$$

где  $\nu$  — количество газа,  $V$  — его объем. Отсюда  $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$ . Учитывая, что

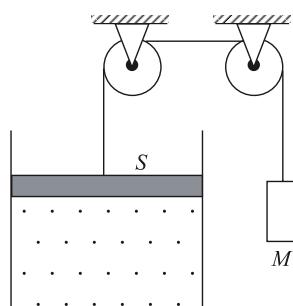
$$p_1 = \frac{Mg}{S}, \quad p_2 = \frac{(M+m)g}{S},$$

после несложных преобразований получаем ответ:

$$T_2 = T_1 \left(1 + \frac{m}{M}\right) = 315 \text{ К.}$$

**2.1.10.** В цилиндре под невесомым поршнем площадью  $S = 100$  см<sup>2</sup> находится 1 моль идеального газа при температуре  $t_1 = 100^{\circ}\text{C}$ . К поршню через два блока на невесомой нерастяжимой нити подвешен груз массой  $M = 17$  кг. На какую высоту  $\Delta h$  поднимется груз, если медленно охладить газ до температуры  $t_2 = 0^{\circ}\text{C}$ ? Атмосферное давление  $p_0 = 10^5$  Па. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,3$  Дж/(моль·К), ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Трением пренебречь.

**Решение:** Поршень находится под действием трех сил: силы натяжения нити  $T$  и силы давления газа в сосуде  $pS$ , направленных вверх, а также силы атмосферного давления  $p_0S$ , направленной вниз. Поскольку процесс охлаждения газа является медленным, можно считать, что ускорение системы равно нулю и сила натяжения нити в каждый момент времени равна весу неподвижного груза, т.е.  $T = Mg$ .



Следовательно, поршень находится в равновесии при выполнении условия:

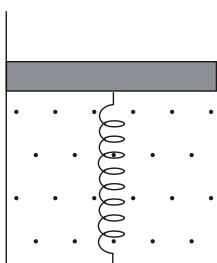
$$p = p_0 - \frac{Mg}{S}.$$

Как видно из этой формулы, давление газа  $p$  при изменении его объема постоянно. Записывая уравнение Клапейрона–Менделеева для начального и конечного состояний газа, получаем:

$$pV_1 = RT_1, \quad pV_2 = RT_2,$$

где  $T_1 = t_1 + 273^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = t_2 + 273^\circ\text{C}$ ,  $V_1$  и  $V_2$  — начальный и конечный объемы газа, причем  $V_1 - V_2 = \Delta h \cdot S$ . Объединяя записанные соотношения, получаем ответ:  $\Delta h = \frac{R(t_1 - t_2)}{p_0 S - Mg} \cong 1\text{ м}$ .

**2.1.11.** В вертикально расположенному цилиндре находится кислород массой  $m = 64\text{ г}$ , отделенный от атмосферы поршнем, который



соединен с дном цилиндра пружиной жесткостью  $k = 8,3 \cdot 10^2 \text{ Н/м}$ . При температуре  $T_1 = 300\text{ K}$  поршень располагается на расстоянии  $h = 1\text{ м}$  от дна цилиндра. До какой температуры  $T_2$  надо нагреть кислород, чтобы поршень расположился на высоте  $H = 1,5\text{ м}$  от дна цилиндра? Универсальная газовая постоянная  $R = 8,3 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$ , молярная масса кислорода  $M = 32 \text{ г/моль}$ .

**Решение:** Поскольку в условии задачи не сказано, что поршень невесом, будем полагать, что он обладает некоторой неизвестной массой, которую обозначим через  $M_0$ . Ничего не говорится также про атмосферное давление, поэтому будем считать, что оно действует и обозначим его через  $p_0$ . Таким образом, на поршень действуют в общем случае четыре силы: сила тяжести  $M_0g$ , сила упругости пружины  $kx$  ( $x$  — удлинение пружины) и сила атмосферного давления  $p_0S$ , направленные вниз, и сила давления газа в цилиндре  $pS$ , направленная вверх. Условия равновесия поршня в начальном и конечном состояниях имеют вид:

$$M_0g + p_0S + kx_1 = p_1S, \quad M_0g + p_0S + kx_2 = p_2S.$$

Здесь  $p_1$  и  $p_2$  — давления газа в начальном и конечном состояниях. Вычитая из второго уравнения первое, получаем:

$$p_2 - p_1 = \frac{k}{S}(x_2 - x_1) = \frac{k}{S}(H - h).$$

С другой стороны, из уравнения Клапейрона–Менделеева, записанного для начального и конечного состояний газа:

$$p_1hS = \frac{m}{M}RT_1, \quad p_2HS = \frac{m}{M}RT_2,$$

вытекает, что

$$p_2 - p_1 = \frac{mR}{MS} \left( \frac{T_2}{H} - \frac{T_1}{h} \right).$$

Приравнивая разности давлений газа, найденные этими двумя способами, после несложных преобразований получаем ответ:

$$T_2 = T_1 \frac{H}{h} + \frac{MkH(H-h)}{mR} = 487,5 \text{ К.}$$

Видно, что наличие атмосферного давления и конечная масса поршня не влияют на ответ.

**2.1.12.** Вертикальная цилиндрическая трубка с запаянными концами разделена на две части тонким горизонтальным поршнем, способным перемещаться вдоль нее без трения. Верхняя часть трубы заполнена неоном, а нижняя — гелием, причем массы газов одинаковы. При некоторой температуре поршень находится точно посередине трубки. После того, как трубку нагрели, поршень переместился вверх и стал делить объем трубы в отношении 1 : 3. Определить, во сколько раз  $\alpha$  возросла абсолютная температура газов. Молярная масса неона  $M_{Ne} = 20 \text{ г/моль}$ , молярная масса гелия  $M_{He} = 4 \text{ г/моль}$ .

**Решение:** Обозначим через  $p_1$  и  $p_2$  давления газов, находящихся в верхней и нижней частях трубы, соответственно. Поскольку количества газов в верхней и нижней частях трубы по условию задачи различны, а при одной и той же начальной температуре  $T'$  объемы этих частей одинаковы, равновесие поршня возможно только при условии, что он имеет некоторую конечную массу. Обозначив массу поршня через  $M_0$ , а его площадь через  $S$ , запишем условие равновесия поршня в виде:

$$p_2 - p_1 = \frac{M_0 g}{S}.$$

Используя уравнение Клапейрона–Менделеева для описания состояния гелия и неона при произвольной температуре  $T$ , получаем для разности их давлений следующее выражение:

$$p_2 - p_1 = mRT \left( \frac{1}{M_{He}V_{He}} - \frac{1}{M_{Ne}V_{Ne}} \right),$$

где  $m$  — масса каждого из газов,  $R$  — универсальная газовая постоянная. Обозначим через  $V$  объем всей трубы. Тогда начальные объемы газов (при температуре  $T'$ ):  $V'_{He} = V'_{Ne} = V/2$ , а их конечные объемы (при температуре  $T''$ ):  $V''_{He} = 3V/4$ ,  $V''_{Ne} = V/4$ . Объединяя записанные равенства, приходим к соотношению:

$$T' \left( \frac{1}{M_{He}(V/2)} - \frac{1}{M_{Ne}(V/2)} \right) = T'' \left( \frac{1}{M_{He}(3V/4)} - \frac{1}{M_{Ne}(V/4)} \right),$$

из которого после несложных преобразований получаем ответ:

$$\alpha = \frac{T''}{T'} = \frac{3}{2} \cdot \frac{M_{Ne} - M_{He}}{M_{Ne} - 3M_{He}} = 3.$$

**2.1.13.** Идеальный газ переводится из состояния  $p_1 = 200 \text{ кПа}$ ,  $T_1 = 500 \text{ К}$  в состояние  $p_2 = 138 \text{ кПа}$ ,  $T_2 = 300 \text{ К}$  так, что объем газа

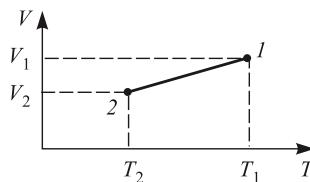
меняется по закону  $V = a + bT$ , где  $a$  и  $b$  — постоянные,  $T_1 > T > T_2$ . Определить максимальную концентрацию  $n_0$  молекул газа в этом процессе. Постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К.

**Решение:** Из уравнений начального и конечного состояний газа

$$p_1 V_1 = \nu R T_1, \quad p_2 V_2 = \nu R T_2$$

следует, что  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2}$ .

Подстановка численных значений дает:  $V_1/V_2 = 1,15$ . Следовательно, зависимость  $V$  от  $T$  имеет вид, изображенный на рисунке, иминимальный объем в этом процессе, равный  $V_2$ , достигается в со-

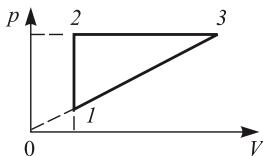


стоянии 2. Записывая уравнение этого состояния в форме  $p_2 = n_0 k T_2$ , получаем ответ:

$$n_0 = \frac{p_2}{k T_2} = 3,333 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}.$$

## Задание для самостоятельной работы

**2.1.14.** На рисунке показан цикл, совершающий над идеальным газом, причем 1 – 2 – изохорный, 2 – 3 – изобарный процессы. Температуры газа в точках 1 и 3 равны соответственно  $T_1 = 300$  К и  $T_3 = 400$  К. Найти температуру  $T_2$  газа в точке 2. Масса газа постоянна.



**2.1.15.** В закрытом сосуде объемом  $V = 2$  м<sup>3</sup> содержится  $m_1 = 3,2$  кг кислорода, к которому добавлено  $\nu_2 = 150$  моль азота. Каково будет давление  $p$  в сосуде при температуре  $t = 527^\circ C$ ? Молярная масса кислорода  $M = 0,032$  кг/моль. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,3$  Дж/(моль·К).

**2.1.16.** Два одинаковых сосуда, соединенные трубкой, содержат идеальный газ общей массой  $m = 6,6$  г. Первоначально температура газа в обоих сосудах одинакова. Затем газ в первом сосуде нагревают и поддерживают при температуре  $t_1 = 27^\circ C$ , а газ во втором сосуде нагревают и поддерживают при температуре  $t_2 = 87^\circ C$ . На какую величину  $\Delta m$  изменится масса газа в первом сосуде? Объем трубы не учитывать.

**2.1.17.** В комнате объемом  $V = 60$  м<sup>3</sup> температура с  $t_1 = 17^\circ C$  поднялась до  $t_2 = 27^\circ C$ . На какую величину  $\Delta m$  изменилась масса воздуха в комнате, если атмосферное давление  $p_0 = 10^5$  Па? Молярная масса воздуха  $M = 29$  г/моль, универсальная газовая постоянная  $R = 8,3$  Дж/(моль·К).

**2.1.18.** Накачивая футбольный мяч, который первоначально был пустым, мальчик сделал  $n = 50$  качаний насосом. Какое давление  $p$  установилось в мяче после того, как температура воздуха в нем сравнялась с температурой окружающей среды? Объем мяча  $V = 4$  л, объем воздухозаборной камеры насоса  $v = 200$  см<sup>3</sup>, а атмосферное давление  $p_0 = 0,1$  МПа.

**2.1.19.** Закрытый сосуд заполнен газом при температуре  $T_0 = 300$  К и давлении  $p_0 = 150$  кПа. Сосуд снабжен предохранительным клапаном, открывающимся при давлении, превышающем  $p_m = 200$  кПа. Сосуд нагрели до температуры  $T_1 = 600$  К. При этом из него вышло  $m = 10$  г газа. Определить массу  $m_0$  газа в сосуде до его нагрева.

**2.1.20.** В баллоне, снабженном предохранительным клапаном, находится идеальный газ под давлением  $p = 0,5 \cdot 10^6$  Па при температуре  $t = 27^\circ C$ . Клапан открывается, если давление в баллоне превышает  $p_1 = 0,6 \cdot 10^6$  Па. До какой температуры  $t_1$  нужно нагреть баллон, чтобы из него вытекла часть газа, масса которой составляет  $\beta = 0,01$  первоначальной массы?

**2.1.21.** Закрытый цилиндрический сосуд объемом  $V = 6,6$  л разделен на две части невесомым поршнем, скользящим без трения. Одна часть содержит идеальный газ массой  $m_1 = 6,6$  г, вторая часть — такой же газ массой  $m_2 = 13,2$  г. Температура газов одинакова и равна температуре окружающей среды. Из второй части сосуда выпускают массу газа  $\Delta m_2 = 1,65$  г. На какую величину  $\Delta V$  изменится объем части сосуда, содержащей газ массой  $m_1$ , когда температура газов станет равной первоначальной?

**2.1.22.** В вертикально расположенным цилиндре постоянного сечения под невесомым подвижным поршнем находится воздух. На поршень помещают гирю массой  $m = 10$  кг. На какую величину  $\Delta h$  переместится поршень, если температура воздуха в цилиндре поддерживается постоянной? Атмосферное давление  $p_0 = 10^5$  Па, сечение поршня  $S = 100$  см<sup>2</sup>, расстояние от ненагруженного поршня до дна цилиндра  $h_0 = 100$  см. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**2.1.23.** Вертикально расположенный замкнутый цилиндрический сосуд высотой  $H = 50$  см разделен подвижным поршнем весом  $P = 110$  Н на две части, в каждой из которых содержится по  $\nu = 0,0255$  моль идеального газа. При какой температуре  $T$  расстояние между поршнем и дном сосуда будет равно  $h = 20$  см? При расчетах толщиной поршня пренебречь. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,3$  Дж/(моль·К).

**2.1.24.** Вертикально расположенный замкнутый цилиндрический сосуд разделен на две части подвижным поршнем. В обеих частях сосуда содержится один и тот же идеальный газ. Расстояние между поршнем и дном сосуда  $H_1 = 30$  см. Сосуд переворачивают так, что дном становится его верхняя плоскость. В новом положении расстояние между дном сосуда и поршнем составляет  $H_2 = 20$  см. Найти отношение  $\alpha$  массы газа, содержавшегося в той части сосуда, которая первоначально находилась вверху, к массе газа, содержавшегося в другой части сосуда. Высота сосуда  $L = 60$  см. Температуру считать постоянной, толщиной поршня пренебречь.

**2.1.25.** В вертикальном цилиндре под поршнем массой  $M_0 = 100$  кг и площадью  $S = 100$  см<sup>2</sup> находится  $m = 28$  г азота при температуре  $T_1 = 273$  К. Газ в цилиндре нагревают до температуры  $T_2 = 373$  К. На какую высоту  $h$  поднимется поршень? Атмосферное давление  $p_0 = 0,1$  МПа, молярная масса азота  $M = 28$  г/моль, универсальная

газовая постоянная  $R = 8,3$  Дж/(моль·К), ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**2.1.26.** В вертикальном закрытом цилиндре находится идеальный газ, разделенный на две части тяжелым поршнем, который может перемещаться без трения. В нижней части цилиндра масса газа вдвое больше, чем в верхней. При температуре  $T$ , одинаковой во всем цилиндре, объем  $V_1$  нижней части цилиндра равен объему  $V_2$  верхней части. Каким будет отношение объемов  $\alpha = V_1/V_2$ , если температуру газа увеличить в  $n = 2$  раз?

**2.1.27.** В баллоне объемом  $V = 10$  л содержится водород при температуре  $t = 20$  °C под давлением  $p = 10^7$  Па. Какая масса  $\Delta m$  водорода была выпущена из баллона, если при полном сгорании оставшегося газа образовалось  $m = 50$  г воды? Универсальная газовая постоянная  $R = 8,3$  Дж/(моль·К); молярные массы: водорода  $M_{\text{H}_2} = 2$  г/моль, воды  $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18$  г/моль.

## **2.2. Элементы термодинамики**

### **Вопросы программы**

1. *Термодинамическая система. Внутренняя энергия системы. Количество теплоты и работа как меры изменения внутренней энергии. Теплоемкость тела. Понятие об адиабатическом процессе. Первый закон термодинамики. Применение первого закона термодинамики к изотермическому, изохорному и изобарному процессам. Расчет работы газа с помощью  $pV$  — диаграмм. Теплоемкость одноатомного идеального газа при изохорном и изобарном процессах.*
2. *Необратимость процессов в природе. Второй закон термодинамики. Физические основы работы тепловых двигателей. КПД теплового двигателя и его максимальное значение.*

### **Определения, понятия и законы**

Термодинамика — это наука о наиболее общих тепловых свойствах макроскопических тел. Термодинамический подход не требует каких-либо конкретных предположений о строении вещества, поэтому выводы термодинамики имеют универсальный характер. Законы термодинамики справедливы для всех тел независимо от их внутреннего строения.

**Термодинамическая система** — это совокупность макроскопических тел, которые могут взаимодействовать между собой и другими телами (внешней средой). Термодинамическая система состоит из настолько большого числа структурных частиц (атомов и молекул), чтобы ее состояние можно было характеризовать макроскопическими параметрами: плотностью, давлением, концентрацией веществ, образующих систему, и т.д.

Термодинамическая система находится в равновесии, если ее параметры не меняются во времени и в системе нет потоков энергии и вещества. Для равновесных термодинамических систем вводится понятие температуры как параметра состояния, имеющего одинаковое значение для всех макроскопических частей системы.

Термодинамические системы, не обменивающиеся с другими системами ни энергией, ни веществом, называются изолированными. Если система не изолирована, то ее состояние может меняться; изменение состояния системы называется термодинамическим процессом.

**Внутренняя энергия системы.** Все макроскопические тела наряду с механической энергией обладают также энергией, зависящей от внутреннего состояния тел. Эту энергию называют внутренней. С точки зрения молекулярно-кинетической теории *внутренняя энергия* макроскопического тела равна сумме кинетических энергий *хаотического* движения всех молекул (или атомов) и потенциальных энергий взаимодействия молекул друг с другом (но не с молекулами других тел).

Внутренняя энергия идеального газа равна *кинетической* энергии хаотического движения молекул, поскольку потенциальная энергия взаимодействия молекул равна нулю. Наиболее просто рассчитывается внутренняя энергия *одноатомных газов*, состоящих из отдельных атомов, а не молекул. Одноатомными являются инертные газы: гелий, неон, аргон и др. С точки зрения механики одноатомный газ представляет собой систему частиц, которые совершают только поступательное движение. Молекулы двух- (и более) атомных газов могут совершать и другие виды движения — вращательное и колебательное, с которыми тоже связана определенная энергия.

Поскольку средняя кинетическая энергия молекулы одноатомного газа равна  $\bar{E} = \frac{3}{2}kT$ , внутренняя энергия одного моля такого газа

$$U = \frac{3}{2}N_A kT = \frac{3}{2}RT. \quad (2.2.1)$$

Для  $\nu = \frac{m}{M}$  молей одноатомного идеального газа внутренняя энергия

$$U = \frac{3}{2}\nu RT. \quad (2.2.2)$$

Внутренняя энергия данной массы идеального газа зависит только от температуры и не зависит ни от давления, ни от объема газа. (для неидеальных газов, а также других веществ, это, вообще говоря, неверно).

**Количество теплоты и работа как меры изменения внутренней энергии. Расчет работы газа с помощью  $pV$ -диаграмм.** Понятия об энергии и мере ее изменения — работе, введенные в механике, получают в термодинамике дальнейшее развитие.

Необходимым условием совершения телом (или системой тел) работы является перемещение тела под действием сил. О работе можно говорить только тогда, когда происходит изменение механического состояния тела (или системы), причем речь идет о перемещении макроскопических частей системы друг относительно друга.

Различаются работа  $A$ , которая совершается системой над внешними телами, и работа  $A'$ , которая совершается внешними телами над системой. Работа  $A$  принимается положительной, работа  $A'$  — отрицательной, причем  $A = -A'$ .

Рассмотрим работу расширения газа, т.е. работу, которую газ совершает против внешнего давления, создаваемого поршнем. Элементарная работа  $\Delta A$  определяется формулой

$$\Delta A = p \cdot \Delta V, \quad (2.2.3)$$

где  $p$  — внешнее давление,  $\Delta V$  — приращение объема газа. Такой же формулой выражается элементарная работа, совершаемая не только газом, но и любым телом против внешнего давления.

При расширении газ совершает положительную работу против внешних сил ( $\Delta V > 0$ ). При сжатии газа совершается отрицательная работа ( $\Delta V < 0$ ). Она совершается теми внешними телами, которые создали внешнее давление.

Работа расширения при изменении объема газа от  $V_1$  до  $V_2$  равна сумме элементарных работ. Например, в случае изобарного процесса, при котором  $p = \text{const}$ , работа расширения

$$A = p \cdot (V_2 - V_1), \quad (2.2.4)$$

где  $V_1$  и  $V_2$  — начальный и конечный объемы газа. При изобарном расширении работа изображается на  $pV$ -диаграмме площадью прямоугольника (рис. 2.2.1).

Работа расширения при любом процессе измеряется площадью на  $pV$ -диаграмме, ограниченной кривой процесса, осью абсцисс и вертикальными прямыми  $V = V_1$  и  $V = V_2$  (рис. 2.2.2.).

*Работа*, совершенная системой в том или ином процессе, является мерой изменения ее энергии в этом процессе. Если над телом совершается работа, то это может привести к увеличению любого вида энергии данного тела, как внутренней, так и энергии упорядоченного (поступательного) движения.

Существует также другая форма передачи энергии, при которой осуществляется непосредственный обмен энергией между хаотически движущимися частицами взаимодействующих тел. Процесс передачи энергии без совершения работы называется теплообменом. *Мерой энергии*, переданной в форме теплоты в процессе теплообмена, служит величина, называемая количеством теплоты.

Теплота, как и работа, является не видом энергии, а формой ее передачи. Теплота и работа обладают тем общим свойством, что они

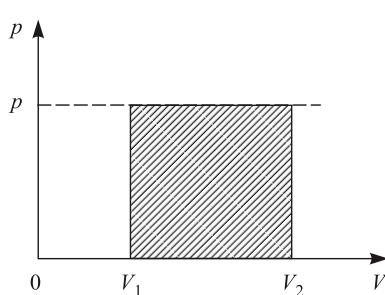


Рис. 2.2.1. Работа при изобарном процессе

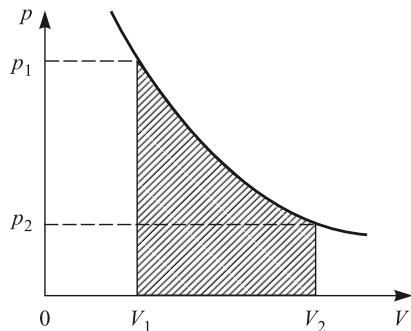


Рис. 2.2.2. Работа при произвольном процессе

определенны лишь в процессе передачи, и их численные значения зависят от вида этого процесса.

**Теплоемкостью тела** называется физическая величина, равная количеству теплоты  $\Delta Q$ , которое необходимо сообщить телу для нагревания его на один градус:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}. \quad (2.2.5)$$

Теплоемкость тела зависит от его массы, химического состава, термодинамического состояния и вида того процесса, в котором телу передается энергия в форме теплоты.

*Удельной теплоемкостью* с называется теплоемкость единицы массы однородного вещества:

$$c = \frac{C}{m}, \quad (2.2.6)$$

где  $m$  — масса вещества. *Молярной теплоемкостью*  $C_M$  называется теплоемкость одного моля вещества:

$$C_M = cM, \quad (2.2.7)$$

где  $M$  — молярная масса вещества. Удельная и молярная теплоемкости не являются постоянными величинами и в таблицах теплоемкостей указываются условия, при которых данные таблиц спроведливы.

**Понятие об адиабатическом процессе.** Адиабатическим процессом называется термодинамический процесс, который осуществляется в системе без теплообмена ее с внешними телами. При адиабатическом процессе  $\Delta Q = 0$ ; теплоемкость вещества в таком процессе равна нулю.

**Первый закон термодинамики** — это закон сохранения энергии, обобщенный на тепловые явления. Согласно этому закону, количество

теплоты, полученное системой, расходуется на изменение ее внутренней энергии и на совершение системой работы против внешних сил:

$$\Delta Q = \Delta U + A. \quad (2.2.8)$$

**Применение первого закона термодинамики к изотермическому, изохорному и изобарному процессам. Теплоемкость одноатомного идеального газа при изохорном и изобарном процессах.** Первый закон термодинамики применительно к изотермическому процессу в идеальном газе имеет вид  $\Delta Q = A$ . Внутренняя энергия идеального газа при этом не меняется, поскольку  $\Delta T = T_2 - T_1 = 0$  и  $\Delta U = 0$ . Вся подведенная теплота расходуется на работу газа против внешнего давления.

При изохорном процессе количество теплоты  $\Delta Q$  идет только на увеличение внутренней энергии газа:  $\Delta Q = \Delta U$ , поскольку работу газ не совершает. Теплоемкость газа в таком процессе называется *теплоемкостью при постоянном объеме* и обозначается  $C_V$ . Для одноатомного идеального газа

$$C_V = \frac{3}{2}\nu R. \quad (2.2.9)$$

При изобарном процессе количество теплоты, подводимое к газу, расходуется и на увеличение внутренней энергии, и на работу расширения, которую совершает газ против внешнего давления. Поскольку  $A = p \cdot (V_2 - V_1) = \nu RT_2 - \nu RT_1 = \nu R\Delta T$ , теплоемкость идеального газа в таком процессе, называемая *теплоемкостью при постоянном давлении*  $C_p$ , равна:

$$C_p = \frac{3}{2}\nu R + \nu R = \frac{5}{2}\nu R. \quad (2.2.10)$$

Теплоемкость газа в изобарном процессе превышает его теплоемкость в изохорном процессе на величину работы расширения. Для одного моля идеального газа разность этих теплоемкостей равна универсальной газовой постоянной  $R$ .

При адиабатическом процессе первый закон термодинамики принимает вид:  $A = -\Delta U$ . В отсутствие теплообмена с внешней средой работа, которую совершает газ против внешнего давления, происходит за счет убыли его внутренней энергии. Адиабатически расширяющийся идеальный газ охлаждается.

**Необратимость процессов в природе.** В термодинамике большую роль играет понятие обратимого процесса. Обратимым процессом называется такое изменение состояния термодинамической системы, которое, будучи проведено в обратном направлении, возвращает ее в исходное состояние так, чтобы система прошла через те же промежуточные состояния, что и в прямом процессе, но обратной последовательности,

а состояние всех тел вне системы, с которыми она взаимодействовала, осталось в итоге неизменным. Важно, что при совершении обратимого процесса сначала в прямом, а затем в обратном направлении в исходное состояние возвращается не только система, но все внешние тела, взаимодействовавшие с системой. Необходимым и достаточным условием обратимости термодинамического процесса является его равновесность.

Равновесный процесс — это идеализированный процесс, при проведении которого в каждый момент не нарушается равновесие термодинамической системы. Он может быть представлен как непрерывная последовательность равновесных состояний. Это означает, что процесс должен быть медленным по сравнению с процессами установления термодинамического равновесия в системе. Строго говоря, только бесконечно медленные процессы являются равновесными.

Все реальные термодинамические процессы протекают с конечной скоростью и поэтому являются неравновесными. Они сопровождаются трением, диффузией и теплообменом с внешней средой при конечной разности температур системы и внешней среды. Следовательно, *все реальные процессы необратимы*.

**Второй закон термодинамики.** Многочисленные наблюдения позволили установить, что тепловым процессам присуща определенная направленность, которая не вытекает из первого закона термодинамики. Например, в результате теплообмена между по-разному нагретыми телами всегда происходит выравнивание их температур, хотя с точки зрения первого закона термодинамики одинаково возможен как переход теплоты от более нагревенного тела к менее нагревенному, так и обратный переход. Первый закон термодинамики формально допускает создание вечного двигателя второго рода. Так называется двигатель, в котором рабочее тело, совершая круговой процесс, получает энергию в форме теплоты от одного внешнего тела и целиком передает ее в форме работы другому внешнему телу.

Невозможность создания вечного двигателя второго рода является утверждением, вытекающим из обобщения многочисленных опытов. Оно называется *вторым законом термодинамики* и имеет несколько эквивалентных формулировок. Приведем одну из них:

Невозможен периодический процесс, *единственным результатом* которого является превращение всей теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную ей работу.

Второй закон термодинамики указывает на необратимость процесса превращения работы в теплоту. В формулировке этого закона особое значение имеют слова «единственным результатом». Запреты, которые накладываются вторым законом термодинамики, снимаются, если процессы, о которых идет речь, не являются единственными. Например, передача тепла от менее нагревенного тела более нагревенному возможна,

если при этом происходит как минимум еще один процесс (в холодильной установке).

**Физические основы работы тепловых двигателей. КПД теплового двигателя и его максимальное значение.** Тепловым двигателем называется устройство, которое превращает внутреннюю энергию топлива в механическую энергию. Энергия, которая выделяется при сгорании топлива, передается путем теплообмена рабочему телу (обычно газу). При расширении рабочего тела совершается работа против внешних сил и приводится в движение соответствующий механизм.

Основой тепловых двигателей являются круговые процессы. Круговым процессом, или циклом называется термодинамический процесс, в результате которого рабочее тело (возвращается в исходное состояние. На диаграммах состояния  $pV$ ,  $pT$ ,  $VT$ -диagramмах) циклические процессы изображаются в виде замкнутых кривых.

Работа против внешнего давления, которую совершает рабочее тело в произвольном круговом процессе, измеряется площадью, ограниченной кривой этого процесса на  $pV$ -диаграмме. Прямым циклом называется круговой процесс, в котором рабочее тело совершает положительную работу за счет сообщенной ему теплоты. На  $pV$ -диаграмме прямой цикл изображается замкнутой кривой, которая обходится по часовой стрелке. Обратным циклом называется круговой процесс, в котором над рабочим телом совершается работа и от него отводится эквивалентное количество теплоты. На  $pV$ -диаграмме обратный цикл изображается замкнутой кривой, которая обходится против часовой стрелки.

В тепловом двигателе рабочее тело совершает прямой цикл, а в холодильной установке — обратный.

Циклом Карно называется прямой обратимый круговой процесс (рис. 2.2.3), состоящий из двух изотерм  $1 - 2$  и  $3 - 4$  и двух адиабат

$2 - 3$  и  $4 - 1$ . При изотермическом расширении  $1 - 2$  рабочее тело получает от нагревателя — источника энергии с постоянной температурой  $T_1$  — количество теплоты  $Q_1$ . При изотермическом сжатии  $3 - 4$  рабочее тело отдает холодильнику, имеющему постоянную температуру  $T_2$  ( $T_2 < T_1$ ), количество теплоты  $Q_2$ . При адиабатических расширении и сжатии энергия к рабочему телу извне не поступает и эти процессы происходят за счет изменения его внутренней энергии.

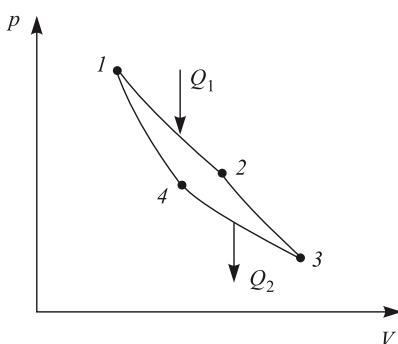


Рис. 2.2.3. Цикл Карно

Коэффициентом полезного действия (КПД) произвольного цикла называется отношение работы  $A$ , совершенной рабочим телом в прямом цикле, к количеству теплоты  $Q_1$ , сообщенному рабочему телу нагревателем:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1}. \quad (2.2.11)$$

КПД обратимого цикла Карно не зависит от природы рабочего тела и определяется только температурами нагревателя  $T_1$  и холодильника  $T_2$ :

$$\eta_K = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (2.2.12)$$

Согласно теореме Карно, КПД произвольного обратимого цикла не может превышать КПД обратимого цикла Карно, осуществленного с теми же температурами  $T_1$  и  $T_2$  нагревателя и холодильника. КПД произвольного необратимого цикла всегда меньше КПД обратимого цикла Карно, проведенного между температурами  $T_1$  и  $T_2$ .

Любой тепловой двигатель, независимо от его конструктивных особенностей, состоит из трех основных частей: рабочего тела, нагревателя и холодильника (рис. 2.2.4). Рабочее тело — газ или пар — при расширении совершает работу, получая от нагревателя некоторое количество теплоты  $Q_1$ . Температура  $T_1$  нагревателя остается при

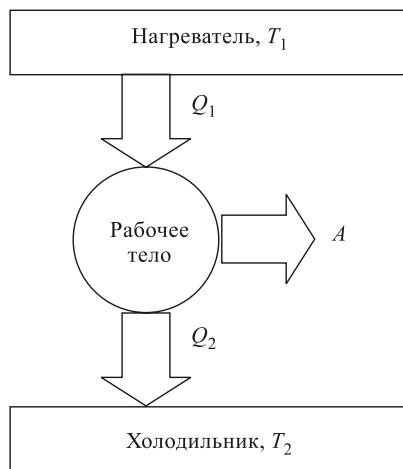


Рис. 2.2.4. Блок-схема теплового двигателя

этом постоянной за счет сгорания топлива. При сжатии рабочее тело передает некоторое количество теплоты  $Q_2$  холодильнику — телу постоянной температуры  $T_2$ , меньшей, чем  $T_1$ .

Давление газа при сжатии ниже, чем при расширении, что обеспечивает полезную работу двигателя.

Реальные тепловые двигатели работают по разомкнутому циклу: после расширения газ выбрасывается, и сжимается новая порция. Од-

нако, тепловые процессы в рассмотренном выше замкнутом цикле, когда сжимается и расширяется одна и та же порция газа, являются хорошей аппроксимацией для процессов в реальном двигателе, и могут быть использованы для расчета его КПД.

## Указания по решению задач

При решении задач важно иметь в виду, что количество теплоты, полученное или отданное газом в некотором процессе, зависит не только от начального и конечного состояний газа, но и от вида самого процесса, поскольку вид процесса определяет работу, совершенную газом. Поэтому часто говорят, что количество теплоты — это не функция состояния, а функция процесса. В то же время, внутренняя энергия однозначно определяется состоянием газа, поэтому ее изменение не зависит от вида процесса. В частности, в циклическом процессе полное изменение внутренней энергии равно нулю и работа, совершенная газом за цикл, равна алгебраической сумме всех количеств теплоты, полученных и отдаанных газом в этом процессе.

## Примеры решения задач

**2.2.1.** В сосуде емкостью  $V = 5$  л находится гелий под давлением  $p = 0,3$  МПа. Какова внутренняя энергия  $U$  газа в сосуде?

**Решение:** Из уравнения состояния газа  $pV = \nu RT$  находим его температуру:  $T = \frac{pV}{\nu R}$ . Поскольку гелий — одноатомный газ, его внутренняя энергия  $U = \frac{3}{2}\nu RT$ . Ответ:  $U = \frac{3}{2}pV = 2,25$  кДж.

**2.2.2.** Газ, взятый в количестве  $\nu = 5$  моль, сначала нагревают при постоянном объеме так, что абсолютная температура газа возрастает в  $n = 3$  раза, а затем сжимают при постоянном давлении, доводя температуру до первоначальной  $T = 100$  К. Какая работа  $A$  совершена при сжатии? Универсальная газовая постоянная  $R = 8,3$  Дж/(моль·К).

**Решение:** График процесса изображен на рисунке. Поскольку величина работы, совершенной над газом, численно равна площади подкривой зависимости давления от объема, в нашем случае имеем:

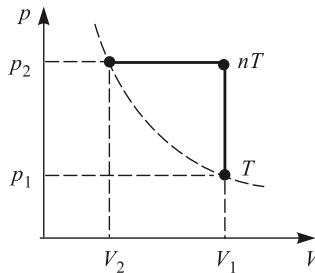
$$A = p_2(V_1 - V_2) = p_2V_1 - p_2V_2.$$

Из уравнения состояния газа следует, что

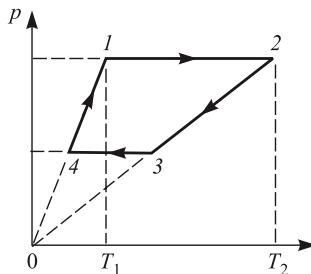
$$p_1V_1 = \nu RT, \quad p_2V_1 = n\nu RT, \quad p_2V_2 = \nu RT.$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$A = (n - 1)\nu RT = 8310 \text{ Дж.}$$

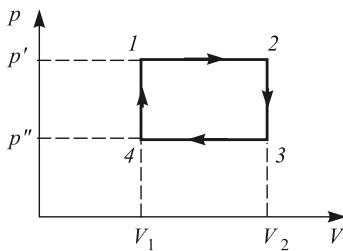


**2.2.3.** С массой  $m = 80$  г идеального газа, молярная масса которого  $M = 28$  г/моль, совершается циклический процесс, изображенный на рисунке. Какую работу А совершают такой двигатель за один цикл? Универсальную газовую постоянную принять  $R = 8,3$  Дж/(моль·К),  $T_1 = 300$  К,  $T_2 = 1000$  К. При нагревании на участке 4 – 1 давление газа увеличивается в 2 раза.



**Решение:** Для вычисления работы газа удобно перерисовать график процесса в виде  $pV$ -диаграммы (см. рисунок), откуда видно, что

$$A = (p' - p'')(V_2 - V_1).$$



Используя уравнение состояния газа, запишем последнее равенство в виде:

$$A = \frac{m}{M} R (T_2 - T_3 - T_1 + T_4).$$

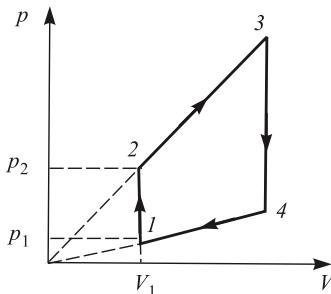
Поскольку объемы газа на участках 2 – 3 и 4 – 1 постоянны, имеем:

$$\frac{T_1}{T_4} = \frac{T_3}{T_3} = \frac{p'}{p''} = 2.$$

Отсюда  $T_4 = T_1/2$ ,  $T_3 = T_2/2$ . Подставляя найденные значения температуры в выражение для работы, получаем ответ:

$$A = \frac{m}{2M} R (T_2 - T_1) \approx 8,3 \text{ кДж.}$$

**2.2.4.** Найти работу, совершенную идеальным газом за цикл (см. рисунок). Объем  $V_1 = 10 \text{ л}$ , давление  $p_1 = 10^4 \text{ Па}$ . Давление  $p_2$  в  $k = 4$  раза превышает  $p_1$ . Температура в точках 2 и 4 одинакова.



**Решение:** Работа газа за цикл равна площади трапеции:

$$A = \frac{(p_2 - p_1 + p_3 - p_4)}{2} (V_4 - V_1).$$

Из подобия треугольников следует, что

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{V_4}{V_1}, \quad \frac{p_3}{p_2} = \frac{V_4}{V_1}.$$

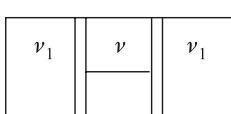
Поскольку точки 2 и 4 находятся на одной изотерме,  $p_2 V_1 = p_4 V_4$ . Кроме того, по условию  $p_2 = kp_1$ . Объединяя эти соотношения, получаем:

$$p_3 = k\sqrt{k} p_1, \quad p_4 = \sqrt{k} p_1, \quad V_4 = \sqrt{k} V_1.$$

Подставляя эти выражения в формулу для работы, находим ответ:

$$A = p_1 V_1 \frac{(k - 1)^2}{2} = 450 \text{ Дж.}$$

**2.2.5.** Горизонтально расположенный цилиндр разделен двумя подвижными поршнями, связанными нитью, на три равные части объемом  $V = 8,3 \text{ л}$  каждая. В центральной части находится  $\nu = 0,533$  моля гелия, а в левой и правой частях — по  $\nu_1 = 0,5$  молей азота ( $\nu_1 < \nu$ ). Температура всех газов равна  $T_0 = 300 \text{ К}$ . Когда гелию сообщили количество теплоты



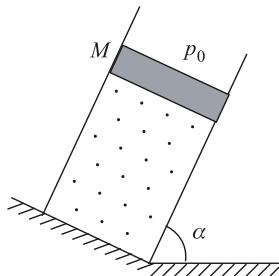
$Q = 100$  Дж, поддерживая температуру азота постоянной, нить обрвалась. Найти максимальное натяжение  $F_{\max}$ , которое выдерживает нить. Площади поршней  $S = 50 \text{ см}^2$ , универсальная газовая постоянная  $R = 8,3 \text{ Дж/(К}\cdot\text{моль)}$ . Трение между поршнями и цилиндром пренебрежимо мало.

**Решение:** Поскольку нагрев гелия происходит при постоянном объеме, сообщенное ему количество тепла идет на увеличение его внутренней энергии:  $Q = \frac{3}{2}\nu R \Delta T$ . Следовательно, изменение его температуры

$$\Delta T = \frac{2Q}{3\nu R}.$$

Давление азота  $p_1 = \frac{\nu_1 R}{V} T_0$ , давление гелия после нагревания  $p = \frac{\nu R}{V} (T_0 + \Delta T)$ . Из условия равновесия поршней следует, что сила натяжения нити  $F = S(p - p_1)$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:  $F_{\max} = \frac{SR}{V} \left[ (\nu - \nu_1) T_0 + \frac{2Q}{3R} \right] = 90 \text{ Н}$ .

**2.2.6.** В закрепленном под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту цилиндре может без трения двигаться поршень массой  $M = 10 \text{ кг}$  и площадью  $S = 50 \text{ см}^2$ . Под поршнем находится одноатомный идеальный газ. Газ



нагревают так, что поршень перемещается на расстояние  $l = 5 \text{ см}$ . Какое количество теплоты  $Q$  было сообщено газу? Атмосферное давление  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ , ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

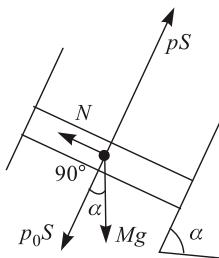
**Решение:** При нагревании газ перемещает поршень, совершая изобарное расширение. Используя для молярной теплоемкости одноатомного идеального газа при постоянном давлении известное выражение:

$$C_p = \frac{5}{2}R,$$

находим, что количество теплоты, сообщенное газу, равно

$$Q = \frac{5}{2}\nu R \Delta T,$$

где  $\nu$  — число молей газа,  $\Delta T$  — изменение его температуры в рас-



сматриваемом процессе. Записывая уравнения начального и конечного состояний газа, имеем

$$pV = \nu RT, \quad p(V + lS) = \nu R(T + \Delta T),$$

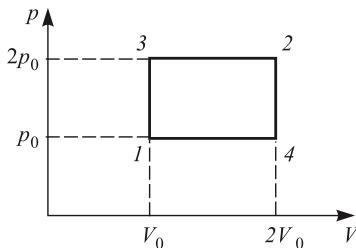
где  $p$  — давление газа,  $V$  — начальный объем газа,  $T$  — его начальная температура. Отсюда  $\nu R \Delta T = plS$ . Для определения давления газа воспользуемся условием механического равновесия поршня под действием сил, изображенных на рисунке:

$$pS = p_0S + Mg \sin \alpha.$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$Q = \frac{5}{2}l(p_0S + Mg \sin \alpha) \cong 73,38 \text{ Дж.}$$

**2.2.7.** Некоторое количество одноатомного идеального газа нужно перевести из состояния 1 в состояние 2, используя изохорный и изобарный процессы (см. рисунок). Во сколько раз  $\beta$  отличаются количества теплоты, которые требуются для перехода из исходного в конечное состояние по путям 1–3–2 и 1–4–2 соответственно?



**Решение:** Проведем расчет количеств теплоты на отдельных участках. С учетом уравнения состояния газа имеем:

$$Q_{13} = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{M} R (T_3 - T_1) = \frac{3}{2} \cdot 2p_0 V_0 - \frac{3}{2} \cdot p_0 V_0 = \frac{3}{2} p_0 V_0,$$

$$Q_{32} = \frac{5}{2} \cdot \frac{m}{M} R (T_2 - T_3) = \frac{5}{2} \cdot 4p_0 V_0 - \frac{5}{2} \cdot 2p_0 V_0 = 5p_0 V_0,$$

$$Q_{14} = \frac{5}{2} \cdot \frac{m}{M} R (T_4 - T_1) = \frac{5}{2} \cdot p_0 2V_0 - \frac{5}{2} \cdot p_0 V_0 = \frac{5}{2} p_0 V_0,$$

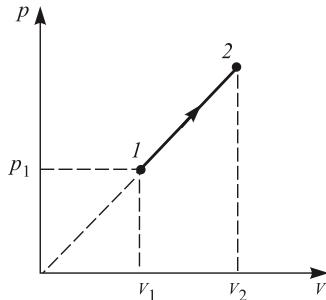
$$Q_{42} = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{M} R (T_2 - T_4) = \frac{3}{2} \cdot 4p_0 V_0 - \frac{3}{2} \cdot 2p_0 V_0 = 3p_0 V_0.$$

Отсюда

$$Q_{132} = Q_{13} + Q_{32} = \frac{13}{2} p_0 V_0, \quad Q_{142} = Q_{14} + Q_{42} = \frac{11}{2} p_0 V_0$$

Ответ:  $\beta = \frac{13}{11} = 1,1818\dots$

**2.2.8.** Найти количество тепла  $\Delta Q$ , переданное одноатомному газу при переводе его из состояния 1 в состояние 2 как показано на рисунке. При расчете принять  $p_1 = 500$  кПа,  $V_1 = 2$  л,  $V_2 = 4$  л.



**Решение:** Изменение внутренней энергии в рассматриваемом процессе

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_1) = \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1).$$

Учитывая, что продолжение прямой, изображающей график процесса, проходит через начало координат (давление в этом процессе пропорционально объему), имеем:  $p_2 = p_1 V_2 / V_1$ . Следовательно,

$$\Delta U = \frac{3}{2} p_1 V_1 \left( \frac{V_2^2}{V_1^2} - 1 \right).$$

Работа газа в этом процессе численно равна площади трапеции:

$$A = \frac{1}{2} (p_2 + p_1) (V_2 - V_1) = \frac{1}{2} p_1 V_1 \left( \frac{V_2^2}{V_1^2} - 1 \right).$$

Количество тепла, полученное газом,

$$\Delta Q = \Delta U + A = 2 p_1 V_1 \left( \frac{V_2^2}{V_1^2} - 1 \right) = \frac{2 p_1}{V_1} (V_2^2 - V_1^2) = 6 \text{ кДж.}$$

**2.2.9.** Два сосуда содержат одноатомный идеальный газ. Масса газа в первом сосуде  $m_1 = 20$  г, его температура  $T_1 = 300$  К. Второй сосуд содержит такой же газ массой  $m_2 = 30$  г при температуре  $T_2 = 400$  К. Сосуды соединяют трубкой. Пренебрегая объемом трубы и теплообменом с окружающей средой, найти температуру газа  $T$ , установившуюся в сосудах.

**Решение:** Поскольку сосуды теплоизолированы и газ не совершает работу, внутренняя энергия газа в этом процессе остается постоянной. Следовательно,

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{m_1}{M} RT_1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{m_2}{M} RT_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{M} RT,$$

где  $M$  — молярная масса газа. Отсюда  $T = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} = 360\text{K}$ .

**2.2.10.** В вертикально расположенному цилиндрическому сосуде, площадь сечения которого  $S = 23 \text{ см}^2$ , под поршнем весом  $P = 10 \text{ Н}$  находится одноатомный газ. Расстояние между дном сосуда и поршнем  $h = 30 \text{ см}$ . На внутренней стенке сосуда имеется стопорное кольцо, не позволяющее расстоянию между дном сосуда и поршнем превысить величину  $H = 50 \text{ см}$ . Какое количество тепла  $Q$  нужно сообщить газу, чтобы его давление увеличилось в  $\alpha = 1,5$  раза? Атмосферное давление  $p_0 = 100 \text{ кПа}$ .

**Решение:** До тех пор, пока поршень не достигнет стопорного кольца, расширение газа при нагревании будет происходить при постоянном давлении  $p_1 = p_0 + P/S$ . Записывая уравнения состояния газа в начальный момент и в момент, когда поршень достигает стопорного кольца, имеем:  $p_1 h S = \nu R T_1$ ,  $p_2 H S = \nu R T_2$ .

Отсюда, изменение температуры в этом процессе:

$$\Delta T_{12} = \frac{1}{\nu R} (T_2 - T_1) = \frac{1}{\nu R} \left( p_0 + \frac{P}{S} \right) (H - h) S.$$

Соответственно, полученное в этом процессе газом тепло:

$$\Delta Q_{12} = \frac{5}{2} \nu R (T_2 - T_1) = \frac{5}{2} \left( p_0 + \frac{P}{S} \right) (H - h) S.$$

При дальнейшем нагревании объем газа не меняется, т.к. стопорное кольцо препятствует перемещению поршня. В конечном состоянии газа его давление  $p_3 = \alpha p_1$ . Из уравнения этого состояния  $p_3 H S = \nu R T_3$  находим температуру

$$T_3 = \frac{\alpha}{\nu R} \left( p_0 + \frac{P}{S} \right) H S.$$

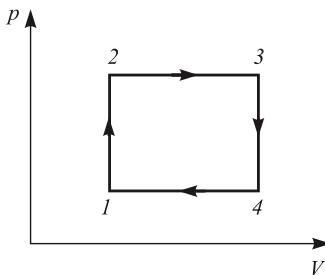
Количество тепла, полученное газом в этом процессе:

$$\Delta Q_{23} = \frac{3}{2} \nu R (T_3 - T_2) = \frac{3}{2} \left( p_0 + \frac{P}{S} \right) (\alpha - 1) H S.$$

Учитывая, что  $Q = \Delta Q_{12} + \Delta Q_{23}$ , получаем ответ:

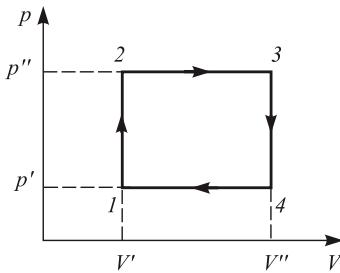
$$Q = \frac{(p_0 S + P)}{2} \cdot [(3\alpha + 2) H - 5h] = 210 \text{ Дж.}$$

**2.2.11.** С одним молем идеального газа проводят циклический процесс, состоящий из двух изохор и двух изобар. Найти работу  $A$ , совершающую газом за цикл, если известно, что температура в состоянии 1



$T_1 = 300$  К, а в состояниях 2 и 4 температура одинакова и равна  $T = 320$  К. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,3$  Дж/(моль·К).

**Решение:** Работа газа в циклическом процессе численно равна площади, ограниченной графиком процесса на  $pV$ -диаграмме. Вводя для



давлений и объемов газа в характерных точках цикла обозначения, приведенные на рисунке, имеем

$$A = (p'' - p') \cdot (V'' - V') = p''V'' - p'V'' - p''V' + p'V'$$

Используя для газа в состояниях 1, 2, 3, 4 уравнение Клапейрона-Менделеева и учитывая, что количество газа  $\nu = 1$  моль, можно переписать выражение для работы газа в виде

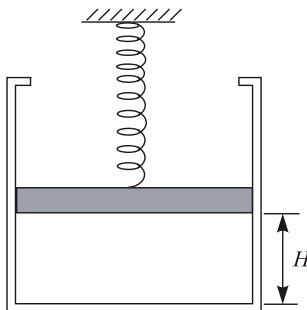
$$A = R(T_3 - T_4 - T_2 + T_1) = R(T_3 - 2T + T_1),$$

где  $T_i$  — температура газа в состоянии  $i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ), причем по условию  $T_2 = T_4 = T$ . Поскольку процессы 1 — 2 и 3 — 4 проводятся при постоянных объемах,

$$\frac{p'}{T_1} = \frac{p''}{T_2}, \quad \frac{p'}{T_4} = \frac{p''}{T_3},$$

откуда следует, что  $T_3 = T^2/T_1$ . Используя последнее выражение, получаем ответ:  $A = \frac{R}{T_1}(T - T_1)^2 \approx 11.07$  Дж.

**2.2.12.** В вертикально расположенным цилиндрическом сосуде под поршнем весом  $P = 20$  Н содержится идеальный одноатомный газ. Между поршнем и неподвижной опорой располагается пружина, жесткость которой  $k = 200$  Н/м. Расстояние между поршнем и



дном сосуда  $H = 30$  см, при этом пружина не деформирована. Какое количество тепла  $Q$  нужно сообщить газу, чтобы поршень переместился на расстояние  $\Delta h = 10$  см? Атмосферное давление не учитывать.

**Решение:** При нагревании газ будет расширяться, совершая работу по подъему поршня и сжатию пружины:

$$A = P\Delta h + \frac{k\Delta h^2}{2}.$$

Одновременно будет повышаться температура газа, изменение которой в этом процессе легко найти из уравнений начального и конечного состояний газа. Учитывая, что давления газа в этих состояниях равны, соответственно  $p_1 = \frac{P}{S}$  и  $p_2 = \frac{P}{S} + \frac{k\Delta h}{S}$ , имеем:

$$\frac{P}{S}HS = \nu RT_1, \quad \left(\frac{P}{S} + \frac{k\Delta h}{S}\right)(H + \Delta h)S = \nu RT_2,$$

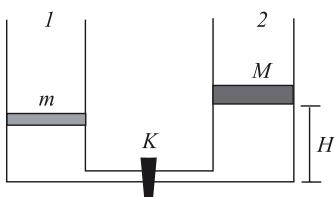
откуда

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{\nu R} [(P + k\Delta h)(H + \Delta h) - PH].$$

Поскольку  $Q = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) + A$ , после несложных преобразований получаем ответ  $Q = \frac{1}{2}(5P + 3kH + 4k\Delta h)\Delta h = 18$  Дж.

**2.2.13.** В цилиндрическом сосуде 1 под поршнем массой  $m = 5$  кг находится одноатомный идеальный газ. Сосуд 1 соединен трубкой, снабженной краном, с таким же сосудом 2, в котором под поршнем массой  $M = 10$  кг находится такой же газ. Сосуды и трубка теплоизолированы. В начальном состоянии кран  $K$  закрыт, температура газа в обоих сосудах одинакова, поршень в сосуде 2 расположен на высоте  $H = 10$  см от дна. На какое расстояние

$\Delta h$  передвинется поршень в сосуде 1 после открытия крана? Объемом трубки с краном пренебречь, атмосферное давление не учитывать.



составлено из двух одинаковых сосудов, соединенных между собой трубкой с краном  $K$ . В первом сосуде под поршнем массой  $m = 5$  кг находится одноатомный идеальный газ. Во втором сосуде под поршнем массой  $M = 10$  кг находится такой же газ. Сосуды и трубка теплоизолированы. В начальном состоянии кран  $K$  закрыт, температура газа в обоих сосудах одинакова, поршень в сосуде 2 расположен на высоте  $H = 10$  см от дна. На какое расстояние

**Решение:** При закрытом кране внутренние энергии газов в сосудах 1 и 2 равны, соответственно:

$$U_1 = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}pV = \frac{3}{2} \cdot \frac{mg}{S}hS = \frac{3}{2}mgh, \quad U_2 = \frac{3}{2}MgH,$$

где  $h$  — первоначальная высота поршня в сосуде 1. После открывания крана более тяжелый поршень, находящийся в сосуде 2, опустится на дно, полностью вытеснив газ в сосуд 1. В результате этого поршень в сосуде 1 поднимется на высоту  $\Delta h$  и внутренняя энергия газа в этом сосуде станет равной  $U = \frac{3}{2}mg(h + \Delta h)$ . Таким образом, изменение внутренней энергии в системе

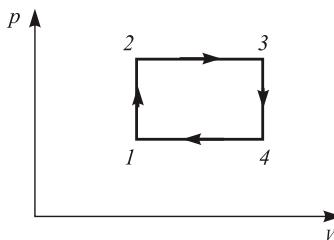
$$\Delta U = U - (U_1 + U_2) = \frac{3}{2}(mg\Delta h - MgH).$$

Работа, совершенная системой и над системой в сумме равна:

$$A = mg\Delta h - MgH.$$

Поскольку система теплоизолирована,  $\Delta U + A = 0$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:  $\Delta h = \frac{M}{m}H = 20$  см.

**2.2.14.** С одним молем идеального газа проводят циклический процесс, состоящий из двух изохор и двух изобар. Найти коэффициент полезного действия цикла  $\eta$ , если известно, что температура в состоянии 1  $T_1 = 256$  К, в состоянии 3  $T_3 = 625$  К, а в состояниях 2 и 4 температура одинакова. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,3$  Дж/(моль·К).



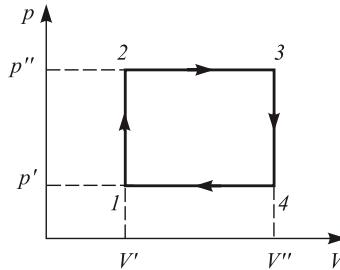
**Решение:** Работа газа в циклическом процессе равна (см. обозначения, приведенные на рисунке):

$$A = (p_2 - p_1)(V'' - V').$$

Обозначив через  $T$  температуру газа в точках 2 и 4 и используя уравнение Клапейрона–Менделеева, преобразуем это выражение к виду:

$$A = R(T_3 - 2T + T_1).$$

Поскольку отношения давлений в точках 1, 2 и 3, 4 одинаковы и процессы 1 – 2 и 3 – 4 проводятся при постоянных объемах, для



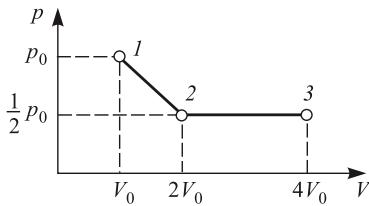
температур в этих точках справедливо равенство:  $T_3/T = T/T_4$ . Отсюда  $T = \sqrt{T_1 T_3}$ . Простой анализ показывает, что приращения тепла в данном циклическом процессе положительны на участках 1 – 2 и 2 – 3. Поэтому количество тепла, полученное газом в цикле, равно

$$Q_{\text{пол}} = Q_{12} + Q_{23} = \frac{3}{2}R(T - T_1) + \frac{5}{2}R(T_3 - T).$$

Учитывая, что КПД цикла  $\eta = A/Q_{\text{пол}}$ , после несложных преобразований получаем ответ:  $\eta = \frac{2(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2}{5T_3 - 3T_1 - 2\sqrt{T_1 T_3}} \cong 10,4\%$ .

### Задание для самостоятельной работы

**2.2.15.** Найти работу А, совершенную идеальным газом в ходе процесса 1 – 2 – 3. В состоянии 1 давление газа равно  $p_0 = 10^5$  Па, а объем  $V_0 = 1$  л. В состоянии 2 давление газа вдвое меньше, а объем вдвое больше. Процесс 2 – 3 представляет собой изобарное расширение до объема  $4V_0$ .



**2.2.16.** В вертикально расположенному цилиндрическом сосуде, закрытом подвижным поршнем массой  $m = 4$  кг, содержится один моль одноатомного газа. На какую величину  $\Delta h$  передвинется поршень, если газу сообщить количество тепла  $Q = 9,8$  Дж? Массой газа по сравнению с массой поршня пренебречь, атмосферное давление не учитывать. Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**2.2.17.** Идеальный газ переводят из состояния  $p_1, V_1$  в состояние  $p_2, V_2$  двумя разными способами. В первый раз переход совершается сначала по изобаре, а затем по изохоре, а во второй — сначала по изохоре, а затем по изобаре. Найти разность количеств теплоты  $\Delta Q$ , выделившихся при этих переходах. При расчетах положить  $p_1 = 8 \cdot 10^5$  Па,  $V_1 = 4$  м<sup>3</sup>,  $p_2 = 4 \cdot 10^5$  Па,  $V_2 = 2$  м<sup>3</sup>.

**2.2.18.** Одноатомный идеальный газ переводится из состояния  $p_1 = 130$  кПа,  $V_1 = 1$  л в состояние  $p_2 = 10$  кПа,  $V_2 = 2$  л по прямой, соединяющей точки  $(p_1, V_1)$  и  $(p_2, V_2)$  на  $pV$ -диаграмме. Затем газ переводится в состояние  $p_3 = 20$  кПа,  $V_3 = 3$  л по прямой, соединяющей точки  $(p_2, V_2)$  и  $(p_3, V_3)$ . Какое количество тепла  $\Delta Q$  сообщено газу?

**2.2.19.** С идеальным одноатомным газом совершается циклический процесс. Масса газа  $m = 60$  г, его молярная масса  $M = 20$  г/моль. Из начального состояния газ адиабатически расширяется, причем его температура изменяется от  $T_1 = 400$  К до  $T_2 = 64$  К. Затем газ изобарически сжимают при давлении  $p_0 = 200$  кПа до первоначального объема  $V_0 = 500$  см<sup>3</sup>. Цикл замыкается изохорой  $V = V_0$ . Каково суммарное количество теплоты  $Q$ , которое газ получил и отдал за цикл?

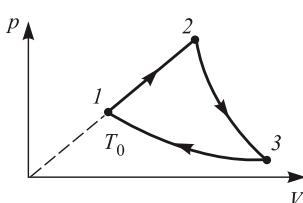
**2.2.20.** Два сосуда, объемы которых  $V_1$  и  $V_2$ , содержали одинаковый одноатомный газ молярной массы  $M$ . В сосуде объемом  $V_1$  масса газа равнялась  $m_1$  при температуре  $T_1$ , а в сосуде с объемом  $V_2$  —

соответственно  $m_2$  при температуре  $T_2$ . Сосуды соединяются трубкой. Пренебрегая объемом трубки и теплообменом с окружающей средой, найти давление  $p$ , установившееся в сосудах.

**2.2.21.** Теплоизолированный сосуд объемом  $V = 500 \text{ см}^3$  содержит одноатомный газ, молярная масса которого  $M = 4 \text{ г/моль}$ . В сосуд вводится дополнительно  $m = 1 \text{ г}$  такого же газа при температуре  $T = 400 \text{ К}$ . На какую величину  $\Delta p$  изменится давление? Универсальную газовую постоянную принять  $R = 8,3 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$ .

**2.2.22.** С одноатомным идеальным газом совершаются циклический процесс. Из начального состояния  $p_2 = 1,6 \text{ МПа}$  и  $V_1 = 2 \text{ л}$  газ расширяется при постоянном давлении до объема  $V_2 = 16 \text{ л}$ . Затем при постоянном объеме  $V_2$  давление газа уменьшается до такой величины  $p_1 = 50 \text{ кПа}$ , что из состояния  $p_1, V_2$  газ приводится в начальное состояние адиабатическим сжатием. Найти работу  $A$ , совершенную газом за цикл.

**2.2.23.** С одним молем идеального одноатомного газа проводят цикл, показанный на рисунке. На участке 1 – 2 объем газа



увеличивается в  $m = 2$  раза. Процесс 2 – 3 – адиабатическое расширение, процесс 3 – 1 – изотермическое сжатие при температуре  $T_0 = 300 \text{ К}$ . Найти работу  $A$ , совершаемую газом на участке 2 – 3. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,3 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$ .

**2.2.24.** Сосуд содержит  $m = 1,28 \text{ г}$  гелия при температуре  $t = 27^\circ\text{C}$ . Во сколько раз  $\beta$  изменится среднеквадратичная скорость молекул гелия, если при его адиабатическом сжатии совершить работу  $A = 252 \text{ Дж}$ ? Молярная масса гелия  $M = 4 \text{ г/моль}$ . Универсальная газовая постоянная  $R = 8,3 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$ .

**2.2.25.** В вертикально расположенным цилиндрическом сосуде с площадью сечения  $S = 20 \text{ см}^2$  под поршнем массой  $M = 4 \text{ кг}$  содержится идеальный одноатомный газ. Расстояние между поршнем и дном сосуда  $h = 1 \text{ м}$ . Газу сообщили количество тепла  $\Delta Q = 126 \text{ Дж}$ . Во сколько раз  $\alpha$  изменится среднеквадратичная скорость молекул газа? Атмосферное давление  $p_0 = 100 \text{ кПа}$ , ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**2.2.26.** Идеальная тепловая машина имеет температуру нагревателя  $T_1 = 400 \text{ К}$ , а температуру холодильника  $T_2 = 300 \text{ К}$ . Какую мощность  $N$  развивает эта машина, если расход топлива составляет  $\mu = 10^{-3} \text{ кг/с}$ , а его удельная теплота сгорания  $q = 4 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}$ ?

## **2.3. Изменение агрегатного состояния вещества**

### **Вопросы программы**

1. *Парообразование. Испарение, кипение. Удельная теплота парообразования. Насыщенный пар. Зависимость давления и плотности насыщенного пара от температуры. Зависимость температуры кипения от давления. Критическая температура.*
2. *Влажность. Относительная влажность.*
3. *Кристаллическое и аморфное состояния вещества. Удельная теплота плавления.*
4. *Уравнение теплового баланса.*

### **Определения, понятия и законы**

В различных интервалах температур и давлений большинство веществ может находиться в разных состояниях — *газообразном, жидком и твердом*. Эти состояния вещества называются агрегатными. Молекулярно-кинетическая теория позволяет объяснить процесс перехода вещества из одного агрегатного состояния в другое.

**Парообразование. Испарение. Насыщенный пар. Зависимость плотности и давления насыщенного пара от температуры.** Взаимные превращения жидкостей и газов описываются процессами парообразования и конденсации. *Парообразованием* называется процесс перехода вещества из жидкого состояния в газообразное. Парообразование, происходящее при любой температуре со свободной поверхности жидкости, называется *испарением*. Совокупность молекул, вылетевших из жидкости при парообразовании, называется паром данной жидкости. Образование пара происходит не только у жидкостей, но и у твердых тел.

Из поверхностного слоя жидкости вылетают молекулы, которые обладают наибольшей скоростью и, следовательно, кинетической энергией теплового движения, поэтому в результате испарения жидкость охлаждается.

Если процесс парообразования происходит в закрытом сосуде, то по истечении некоторого времени количество жидкости перестает убывать, хотя молекулы жидкости, способные покинуть ее поверхность, продолжают переходить в пар. В этом случае, наряду с процессом парообразования, определяющую роль начинает играть компенсирующий его обратный процесс — конденсация, т.е. превращение пара в жидкость. Концентрация вещества в газообразном состоянии достигает такого значения, при котором число молекул, возвращающихся в жидкость, становится равным числу молекул, покидающих поверхность жидкости за то же время, иными словами, становятся равными скорости парообразования и конденсации. Устанавливается динамическое равновесие между процессами испарения и конденсации. Пар, находящийся в состоянии динамического равновесия со своей жидкостью, называется *насыщенным паром*. Пар, находящийся при давлении ниже давления насыщенного пара, является *ненасыщенным*.

Давление насыщенного пара  $p_n$  зависит только от его химического состава и температуры и не зависит от величины свободного от жидкости объема сосуда, в котором находится пар. Это объясняется тем, что при сжатии насыщенного пара концентрация молекул пара увеличивается, равновесие между процессами испарения и конденсации нарушается и часть пара превращается в жидкость. При расширении насыщенного пара наоборот часть жидкости превращается в пар.

Интенсивность процесса испарения увеличивается с возрастанием температуры жидкости. Поэтому динамическое равновесие между

испарением и конденсацией при повышении температуры устанавливается при больших концентрациях молекул пара, т.е. при больших его давлениях.

Давление идеального газа при постоянной концентрации молекул возрастает прямо пропорционально абсолютной температуре. Так как в насыщенном паре при возрастании температуры концентрация молекул увеличивается, давление насыщенного пара с повышением температуры возрастает быстрее, чем давление идеального газа с постоянной концентрацией молекул (рис. 2.3.1).

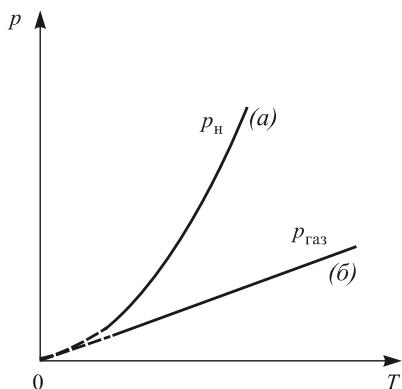


Рис. 2.3.1. Зависимость давления от температуры: (a) насыщенный пар; (б) идеальный газ

**Кипение.** Процесс парообразования может происходить не только с поверхности жидкости, но и внутри жидкости. Если давление насыщенного пара равно давлению в жидкости или превышает его, пузырьки пара внутри жидкости расширяются и всплывают на поверхность. Процесс интенсивного парообразования не только со свободной поверхности жидкости, но и по всему ее объему внутрь образующихся при этом пузырьков пара, называется кипением.

**Зависимость температуры кипения от давления.** Температурой (точкой) кипения называется температура жидкости, при которой давление ее насыщенного пара равно внешнему давлению. При понижении внешнего давления температура кипения жидкости понижается, при повышении давления — повышается. В частности, при температуре 100 °С давление насыщенного водяного пара равно нормальному атмосферному давлению и кипение воды происходит при 100 °С. Если давление над водой уменьшить до половины нормального атмосферного давления, вода закипит при 80 °С. При давлении, в 2 раза превышающем нормальное атмосферное давление, температура кипения воды равна 120 °С.

**Удельная теплота парообразования.** Если внешнее давление не изменяется, в процессе кипения температура жидкости остается постоянной. Теплота, которая извне подводится к жидкости, расходуется на парообразование. Количество теплоты  $r$ , необходимое для превращения в пар единицы массы жидкости, нагретой до температуры кипения, называется *удельной теплотой парообразования*. Из закона сохранения энергии следует, что при обратном процессе — конденсации пара в жидкость — выделяется то же количество теплоты.

**Критическая температура.** При увеличении температуры жидкости увеличивается давление насыщенного пара и одновременно растет его плотность. Плотность жидкости, находящейся в равновесии со своим паром, уменьшается вследствие теплового расширения. Графики зависимости от температуры плотностей насыщенного пара и жидкости пересекаются в некоторой точке, называемой критической (рис. 2.3.2). В критической точке плотность жидкости равна плотности насыщенного пара, находящегося в равновесии с жидкостью. При *критической температуре* плотность и давление на-

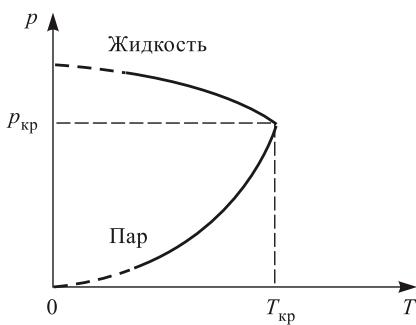


Рис. 2.3.2. Зависимость плотностей насыщенного пара и жидкости от температуры

сыщенного пара становятся максимальными, а плотность жидкости, находящейся в равновесии с паром, минимальной. Критическая температура для воды  $t_{\text{к}} = 374^{\circ}\text{C}$ .

Особое значение критической температуры состоит в том, что при температуре выше критической газ нельзя превратить в жидкость ни при каких давлениях.

**Влажность. Относительная влажность.** Содержание водяного пара в воздухе можно характеризовать несколькими величинами. *Абсолютной влажностью воздуха* (или просто влажностью воздуха)  $\rho$  называют плотность водяных паров, содержащихся в воздухе при данных условиях. Обычно влажность выражают в  $\text{г}/\text{м}^3$ . Поскольку в атмосферном воздухе интенсивность испарения воды зависит от того, насколько близко давление паров воды к давлению насыщенных паров при данной температуре, важно также знать относительную влажность. *Относительной влажностью воздуха*  $f$  называется отношение парциального давления водяного пара  $p$ , содержащегося в воздухе при данной температуре, к давлению  $p_{\text{n}}$  насыщенного водяного пара при той же температуре, выраженное в процентах:

$$f = \frac{p}{p_i} \cdot 100 \%. \quad (2.3.1)$$

Так как давление насыщенного пара тем меньше, чем ниже температура, то при охлаждении воздуха находящийся в нем водяной пар при некоторой температуре становится насыщенным. Температура  $t_p$ , при которой находящийся в воздухе водяной пар становится насыщенным, называется *точкой росы*. При температуре воздуха, равной, или более низкой, чем точка росы, испарение воды прекращается.

**Кристаллическое и аморфное состояния вещества.** Твердые тела по своим свойствам и внутреннему строению делятся на *кристаллические* и *аморфные*.

*Кристаллы* — это твердые тела, атомы или молекулы которых занимают определенные, упорядоченные положения в пространстве. Кристаллические твердые тела обладают анизотропией — зависимостью физических свойств от направления внутри кристалла. К числу таких свойств относятся механическая прочность, коэффициент теплового расширения, электро- и теплопроводность, показатель преломления света и пр.

Различаются следующие четыре типа твердых кристаллов:

1. *Ионные кристаллы* — большинство неорганических соединений, например соли ( $\text{NaCl}$  и др.), окиси металлов и т.д. В узлах кристаллических решеток ионных кристаллов размещаются правильно чередующиеся положительные и отрицательные ионы, между которыми действуют главным образом силы электростатического

го взаимодействия, осуществляющие ионную связь. В процессе кристаллизации одни атомы (например, Na) теряют электроны, которые присоединяются к другим атомам (например, Cl), и возникают два противоположно заряженных иона.

2. *Атомные (валентные) кристаллы* — кристаллические решетки полупроводников (Te, Ge и др.), многие органические твердые тела. Типичными примерами таких кристаллов являются разновидности углерода — алмаз и графит. В узлах кристаллических решеток атомных кристаллов находятся электрически нейтральные атомы, чаще всего одинаковые, между которыми осуществляется особая ковалентная связь, имеющая квантовомеханическое происхождение.
3. *Молекулярные кристаллы* — Br<sub>2</sub>, I<sub>2</sub>, CH<sub>4</sub>, нафталин, парафин, многие твердые органические соединения. В узлах кристаллических решеток таких кристаллов находятся молекулы, сохраняющие свою «индивидуальность». Между этими молекулами действуют силы притяжения, характерные для взаимодействия молекул. Относительно малая устойчивость молекулярных кристаллов, их низкие температуры плавления объясняются тем, что силы притяжения между их молекулами меньше, чем у кристаллов других типов.
4. *Металлические кристаллы (металлы)*. При кристаллизации металлов происходит отщепление от атомов внешних (валентных) электронов и образуются положительные ионы, которые располагаются в узлах кристаллической решетки. Валентные электроны становятся «коллективизированными» — они принадлежат всему кристаллу в целом, образуя электронный газ. Металлическая связь в кристаллической решетке металлов обеспечивается притяжением между положительно заряженными ионами, находящимися в узлах кристаллической решетки, и отрицательно заряженным электронным газом. Коллективизированные электроны металлов как бы «стягивают» положительные ионы, уравновешивая отталкивание между ними. При расстояниях между ионами, равных периоду кристаллической решетки, возникает устойчивая конфигурация ионов. Наличием электронного газа объясняется хорошая электропроводность металлов.

Кристаллические тела делятся на *монокристаллы* и *поликристаллы*. Монокристаллы часто обладают геометрически правильной внешней формой, но главный признак монокристалла — периодически повторяющаяся внутренняя структура во всем объеме. Поликристаллическое тело представляет собой совокупность сросшихся друг с другом хаотически ориентированных маленьких кристаллов. Каждый маленький монокристалл анизотропен, но поликристаллическое тело как правило изотропно.

Наряду с кристаллическими, в природе существуют также *аморфные тела*. У аморфных тел нет строгого порядка в расположении

атомов. Все аморфные тела изотропны, т.е. их физические свойства одинаковы по всем направлениям. К аморфным телам относятся стекло, смола, канифоль, плавленый сахар и др. При внешних воздействиях аморфные тела обнаруживают одновременно упругие свойства, подобно кристаллам, и текучесть, подобно жидкости. Упругие свойства аморфных тел проявляются при низких температурах. При повышении температуры они постепенно размягчаются и по свойствам все более приближаются к жидкостям. Определенной температуры плавления у аморфных тел, в отличие от кристаллических, нет.

**Удельная теплота плавления.** Взаимные превращения кристаллических твердых тел и жидкостей описываются процессами плавления и кристаллизации (отвердевания). *Плавлением твердых тел* называется их переход из твердого состояния в жидкое. В результате плавления происходит разрушение кристаллической решетки твердого тела. Плавление происходит при определенной температуре, называемой *температурой (точкой) плавления*  $T_{\text{пл}}$ . Как правило, плавление твердых тел сопровождается уменьшением плотности. Исключение составляют лед и висмут, у которых плавление сопровождается увеличением плотности.

В процессе плавления твердого тела оно существует одновременно и в твердом, и в жидком состояниях. Температура тела не изменяется при плавлении и остается все время равной  $T_{\text{пл}}$ . Все количество теплоты, которое подводится к твердому телу, расходуется на разрушение кристаллической решетки. Количество теплоты, необходимое для перевода единицы массы твердого тела, находящегося при температуре плавления, в жидкое состояние называется *удельной теплотой плавления*  $\lambda$ .

Переход вещества из жидкого в твердое кристаллическое состояние называется *кристаллизацией* (затвердеванием). Для любой химически чистой жидкости этот процесс идет при постоянной температуре кристаллизации, которая совпадает с температурой плавления  $T_{\text{пл}}$ . Кристаллизация единицы массы жидкости сопровождается выделением некоторого количества теплоты — *удельной теплоты кристаллизации*, — равной *удельной теплоте плавления*.

**Уравнение теплового баланса.** Если внутри теплоизолированной системы не совершается механической работы, то для нее справедливо *уравнение теплового баланса*:

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \dots + \Delta Q_n = 0, \quad (2.3.2)$$

где  $\Delta Q_1, \Delta Q_2, \dots, \Delta Q_n$  — количества теплоты, полученные (положительные) или отданые (отрицательные) телами системы. Эти количества теплоты рассчитываются по следующим формулам.

При изменении температуры тела массы  $m$  количество переданной ему теплоты

$$\Delta Q = cm(t_2 - t_1), \quad (2.3.3)$$

где  $c$  — удельная теплоемкость вещества,  $t_1$  и  $t_2$  — начальная и конечная температуры.

При превращении жидкости, находящейся при температуре кипения, в пар количество теплоты, переданной жидкости,

$$\Delta Q = rm, \quad (2.3.4)$$

где  $r$  — удельная теплота парообразования. При конденсации пара выделяется такое же количество теплоты.

Плавление кристаллического тела, нагретого до температуры плавления, требует передачи ему количества теплоты

$$\Delta Q = \lambda m, \quad (2.3.5)$$

где  $\lambda$  — удельная теплота плавления. При кристаллизации выделяется то же количество теплоты.

## Указания по решению задач

При решении задач, в которых рассматривается влажность воздуха, следует иметь в виду, что ненасыщенный пар по своей природе ничем не отличается от обычного газа, поэтому для описания его состояния справедливо уравнение Клапейрона–Менделеева. Однако, в состояниях, близких к насыщению, это уравнение в обычной форме становится неприменимым. При рассмотрении процессов, происходящих с насыщенным паром, надо учитывать, что при изменении температуры, давления или объема изменяется также и масса пара. В частности, при изотермическом сжатии масса пара изменяется пропорционально его объему. Следовательно, плотность пара  $\rho$  и его давление  $p$  постоянны. Поэтому связь между плотностью и давлением, вытекающая из уравнения  $\rho = pM/(RT)$ , справедлива и для насыщенного пара.

В задачах, связанных с изменением агрегатного состояния тел, находящихся в тепловом контакте, для правильной записи уравнения теплового баланса важно детально проследить, через какие промежуточные состояния проходят исходные вещества, прежде чем достигнут конечного состояния термодинамического равновесия. В связи с этим рекомендуется сначала численно оценить количества теплоты, которые могут выделяться ли поглотиться при всех возможных в данной задаче переходах из одного агрегатного состояния в другое, и определить на основании этого, в каких агрегатных состояниях будут находиться все вещества в конечном состоянии. Только после этого имеет смысл записывать уравнение теплового баланса.

## Примеры решения задач

**2.3.1.** Относительная влажность воздуха в комнате объемом  $V = 40 \text{ м}^3$  равна  $f = 70\%$ . Найти массу т водяных паров в комнате, если температура воздуха  $t = 20^\circ\text{C}$ , а давление насыщенного пара при этой температуре  $p_{\text{н}} = 2330 \text{ Па}$ . Универсальная газовая постоянная  $R = 8,3 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$ , молярная масса воды  $M = 0,018 \text{ кг/моль}$ .

**Решение:** Парциальное давление водяного пара  $p = f p_{\text{н}} / 100\%$ . Записывая для водяного пара уравнение Клапейрона–Менделева

$$pV = \frac{m}{M} R(t + 273^\circ\text{C}),$$

получаем ответ:  $m = \frac{f M p_{\text{н}} V}{100\% \cdot R(t + 273^\circ\text{C})} = 0,48 \text{ кг.}$

**2.3.2.** В комнате при температуре  $t = 20^\circ\text{C}$  относительная влажность воздуха  $f_1 = 20\%$ . Какую массу  $\Delta m$  воды нужно испарить для увеличения влажности до величины  $f_2 = 60\%$  при той же температуре? Объем комнаты  $V = 50 \text{ м}^3$ , плотность насыщенных паров воды при температуре  $t = 20^\circ\text{C}$  равна  $\rho_{\text{н}} = 1,73 \cdot 10^{-2} \text{ кг/м}^3$ .

**Решение:** Исходная масса водяных паров в комнате  $m = f_1 \rho_{\text{н}} \frac{V}{100\%}$ , конечная масса  $m + \Delta m = f_2 \rho_{\text{н}} V / 100\%$ . Отсюда

$$\Delta m = \frac{(f_2 - f_1)}{100\%} \rho_{\text{н}} V = 346 \text{ г.}$$

**2.3.3.** Горизонтально расположенный цилиндр разделен подвижным поршнем массы  $m = 5 \text{ кг}$  на две равные части объемом  $V = 1 \text{ л}$  каждая. С одной стороны от поршня находится насыщенный водяной пар при температуре  $t = 100^\circ\text{C}$ , с другой — воздух при той же температуре. Цилиндр поставили вертикально так, что снизу оказался пар. На какое расстояние  $x$  опустится поршень, если температуру в обеих частях цилиндра поддерживать неизменной? Площадь основания цилиндра  $S = 0,01 \text{ м}^2$ , давление насыщенного пара при температуре  $t = 100^\circ\text{C}$  равно  $p_{\text{н}} = 10^5 \text{ Па}$ . Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**Решение:** Когда цилиндр расположен горизонтально, давление воздуха равно давлению насыщенного водяного пара  $p_{\text{н}}$ . Записывая уравнение состояния воздуха, имеем

$$p_{\text{н}} V = \nu_{\text{в}} R T,$$

откуда количество молей воздуха  $\nu_{\text{в}} = \frac{p_{\text{н}} V}{R T}$ . Когда цилиндр поставили вертикально, давление водяного пара осталось прежним, а давление воздуха, как это следует из уравнения равновесия поршня, стало

равным  $p_n - mg/S$ . При перемещении поршня на расстояние  $x$  объем воздуха увеличился на  $xS$  и уравнение состояния воздуха приняло вид:

$$\left(p' - \frac{mg}{S}\right)(V + xS) = \nu_b RT = p_n V.$$

Из последнего соотношения легко найти величину  $x$ :

$$x = \frac{MgV}{S(p_n S - Mg)}.$$

Анализ этого выражения показывает, что оно теряет смысл при  $Mg \geq p_n S/2$ . Действительно, максимально возможное перемещение поршня (когда он опустится до дна сосуда и весь пар сконденсируется) составляет  $V/S$ . При этом мы пренебрегаем объемом образовавшейся из пара воды, который, как показывает расчет, оказывается очень малым. В самом деле, подставляя в уравнение начального состояния пара числовые данные из условия, находим, что масса пара равна примерно 0,6 г. Следовательно, объем воды, образовавшейся при конденсации всего пара, составит около 0,06 % от объема сосуда. Ответ к задаче следует сформулировать следующим образом:

$$x = \begin{cases} \frac{V}{S} \cdot \frac{mg}{p' S - mg} & \text{при } m < \frac{p' S}{2g}, \\ \frac{V}{S} & \text{при } m \geq \frac{p' S}{2g}. \end{cases}$$

При данных из условия задачи  $x = 5,3$  мм.

**2.3.4.** Определить массу воды  $m$ , которую теряет человек за  $\tau = 1$  час в процессе дыхания, исходя из следующих данных. Относительная влажность вдыхаемого воздуха  $f_1 = 60\%$ , относительная влажность выдыхаемого воздуха  $f_2 = 100\%$ . Человек делает в среднем  $n = 15$  вдохов в минуту, вдыхая каждый раз  $V = 2,5$  л воздуха. Температуру вдыхаемого и выдыхаемого воздуха принять  $t = 36^\circ\text{C}$ ; давление насыщенного водяного пара при этой температуре  $p_n = 5,9$  кПа. Молярная масса воды  $M = 18$  г/моль, универсальная газовая постоянная  $R = 8,3$  Дж/(моль·К).

**Решение:** Пусть  $p_1$  и  $p_2$  — парциальные давления водяного пара во вдыхаемом и выдыхаемом воздухе, соответственно. Для них справедливы выражения:

$$p_1 = \frac{f_1 p_n}{100\%}, \quad p_2 = \frac{f_2 p_n}{100\%}.$$

Обозначим через  $V_0 = n\tau V$  полный объем воздуха, вдыхаемого или выдыхаемого за время  $\tau$ . Из уравнения Клапейрона–Менделеева, записанного для водяного пара, следует, что массы пара, содержащегося во всем объеме воздуха, который человек вдыхает и выдыхает за время  $\tau$ , соответственно равны:

$$m_1 = \frac{p_1 V_0 M}{RT}, \quad m_2 = \frac{p_2 V_0 M}{RT}.$$

Масса теряемой человеком воды  $m = m_2 - m_1$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:  $m = \frac{p_{\text{n}} n V \tau M (f_2 - f_1)}{RT \cdot 100 \%} \cong 37$ , 3г.

**2.3.5.** В цилиндрическом сосуде под поршнем при температуре  $T = 373$  К находится насыщенный водяной пар. При изотермическом сжатии пара выделилось количество тепла  $Q = 4540$  Дж. Найти совершенную при сжатии работу  $A$ . Молярная масса воды  $M = 18$  г/моль, удельная теплота парообразования воды  $r = 2270$  Дж/г, универсальная газовая постоянная  $R = 8,3$  Дж/(моль·К).

**Решение:** При изотермическом сжатии пара часть его массой  $\Delta m$  превращается в воду, за счет чего выделяется количество тепла  $Q = r\Delta m$ . Работа изобарного сжатия  $A = p\Delta V$ . Из уравнения состояния пара имеем:

$$pV_0 = \frac{m_0}{M} RT, \quad p(V_0 - \Delta V) = \frac{m_0 - \Delta m}{M} RT,$$

где  $V_0$  — начальный объем,  $m_0$  — начальная масса пара. Отсюда

$$p\Delta V = \frac{\Delta m}{M} RT.$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:  $A = \frac{Q}{rM} RT \approx 344$  Дж.

**2.3.6.** В цилиндрическом сосуде под поршнем находится  $\nu = 1$  моль водяного пара при давлении  $p$ . Давление насыщенного водяного пара при этой температуре равно  $2p$ . Поршень вдвигают в цилиндр так, что объем под поршнем уменьшается в 4 раза при неизменной температуре. Найти массу  $m$  образовавшейся при этом воды. Молярная масса воды  $M = 18$  г/моль.

**Решение:** При уменьшении объема пара в 2 раза его давление увеличивается от  $p$  до  $2p$  и пар становится насыщенным. Дальнейшее уменьшение объема происходит при постоянном давлении  $2p$  и часть пара конденсируется. Поскольку в процессе конденсации объем уменьшается в 2 раза, масса образовавшейся воды равна половине начальной массы пара. Ответ:  $m = 0,5M\nu = 9$  г.

**2.3.7.** Стакан объемом  $V_0 = 290$  см<sup>3</sup> перевернули вверх дном и медленно погрузили в воду на глубину  $h = 5$  м. При этом объем воздуха в стакане оказался равным  $V_1 = 194$  см<sup>3</sup>. Найти парциальное давление водяного пара, находящегося в стакане, считая его насыщенным. Относительная влажность атмосферного воздуха  $f = 60\%$ , атмосферное давление  $p_0 = 10^5$  Па, плотность воды  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>, ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Температуру воздуха в стакане считать постоянной. Размером стакана по сравнению с глубиной его погружения пренебречь.

**Решение:** До погружения в воду в стакане находилась смесь воздуха и водяного пара, причем давление этой смеси  $p_0 = p_{\text{в}} + p_{\text{n}}$ , где

$p_{\text{в}}$  — парциальное давление воздуха,  $p_{\text{n}} = fp_{\text{н}}/100\%$  — парциальное давление пара. Отсюда

$$p_{\text{в}} = p_0 - \frac{f}{100\%} p_{\text{н}}.$$

После медленного погружения стакана в воду пар в стакане достиг насыщения и давление газовой смеси в стакане стало равным  $p_1 = p_{\text{в}}' + p_{\text{н}}$ , где  $p_{\text{в}}'$  — парциальное давление воздуха,  $p_1 = \rho gh + p_0$  — давление воды на глубине  $h$ . Для парциального давления воздуха справедливо уравнение

$$p_{\text{в}}' V_1 = p_{\text{в}} V_0.$$

Объединяя записанные выражения, находим давление насыщенного водяного пара. Ответ:

$$p = p_{\text{н}} = \frac{\rho gh V_1 - p_0(V_0 - V_1)}{V_1 - V_0 f/100\%} = 5 \text{ кПа.}$$

**2.3.8.** В стеклянную банку объемом 1 л налили 0,5 л воды при температуре  $t_1 = 20^{\circ}\text{C}$  и герметично закрыли завинчивающейся крышкой. Затем банку нагрели до температуры  $t_2 = 100^{\circ}\text{C}$ . Найти силу взаимодействия  $F$  между банкой и крышкой при достижении этой температуры. Площадь крышки  $S = 50 \text{ см}^2$ , атмосферное давление  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ . Влажностью атмосферного воздуха, а также массой крышки пренебречь.

**Решение:** В банке под крышкой находится воздух и насыщенный водяной пар. При температуре  $t_2 = 100^{\circ}\text{C}$  давление насыщенного пара равно атмосферному давлению:  $p_{\text{н}} = p_0$ . Таким образом, парциальное давление водяного пара компенсирует атмосферное давление. Следовательно, сила, которая действует на крышку со стороны банки, равна по величине  $F = Sp_{\text{н}}$ , где  $p_{\text{в}}$  — парциальное давление воздуха в банке. Пренебрегая изменением объема воздуха, связанным с частичным испарением воды и ее тепловым расширением, для определения давления воздуха можно использовать закон Шарля, согласно которому

$$p_{\text{в}} = p_0 \frac{T_2}{T_1}.$$

Ответ:  $F = Sp_0 \frac{t_2 + 273^{\circ}\text{C}}{t_1 + 273^{\circ}\text{C}} \approx 640 \text{ Н.}$

**2.3.9.** В стеклянной банке объемом 1 л, закрытой завинчивающейся крышкой, находятся при температуре  $100^{\circ}\text{C}$  0,5 л воды и насыщенный водяной пар. Какой момент силы  $M$  нужно приложить к крышке, чтобы отвернуть ее после того, как банка остынет до температуры  $20^{\circ}\text{C}$ ? Давление насыщенного водяного пара при температуре  $20^{\circ}\text{C}$  составляет  $p_{\text{н}} = 2,3 \text{ кПа}$ . Атмосферное давление  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ . Радиус крышки  $R = 4 \text{ см}$ , коэффициент трения между плоскостью крышки и

верхней частью банки  $\mu = 0,2$ . Массой крышки и трением в резьбовом соединении крышки с банкой пренебречь.

**Решение:** После остывания банки в ней будет находиться вода и насыщенный пар при давлении  $p_{\text{H}}$ . Следовательно, сила, с которой крышка будет давить на банку,  $N = S(p_0 - p_{\text{H}})$ , где  $S = \pi R^2$  — площадь крышки. Сила трения между крышкой и банкой  $F_{\text{тр}} = \mu N$ , момент этой силы  $M = F_{\text{тр}}R$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$M = \pi R^3 \mu (p_0 - p_{\text{H}}) \approx 3,8 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

**2.3.10.** В калориметре находилось  $m_1 = 400$  г воды при температуре  $t_1 = 5^\circ\text{C}$ . К ней долили еще  $m_2 = 200$  г воды при температуре  $t_2 = 10^\circ\text{C}$  и положили  $m_3 = 400$  г льда при температуре  $t_3 = -60^\circ\text{C}$ . Какая масса  $m$  льда оказалась в калориметре после установления теплового равновесия? Удельные теплоемкости воды и льда, соответственно,  $c_{\text{в}} = 4,2 \text{ Дж}/(\text{г}\cdot\text{К})$ ,  $c_{\text{л}} = 2,1 \text{ Дж}/(\text{г}\cdot\text{К})$ , удельная теплота плавления льда  $\lambda = 330 \text{ Дж}/\text{г}$ . Теплоемкостью калориметра пренебречь.

**Решение:** Решение задач такого типа необходимо начинать с числовых оценок количеств тепла, которыми обмениваются различные компоненты системы при установлении теплового равновесия. Определим вначале количество тепла, которое может отдать вода при остывании до температуры плавления льда ( $0^\circ\text{C}$ ):

$$Q_1 = m_1 c_{\text{в}} t_1 + m_2 c_{\text{в}} t_2 = 16,8 \text{ кДж}.$$

Количество тепла, требующееся для нагревания льда до температуры плавления, равно

$$Q_2 = m_3 c_{\text{л}} |t_3| = 50,4 \text{ кДж}.$$

Сравнивая эти величины, видим, что тепла, отдаваемого водой при остывании, недостаточно для нагревания льда до  $0^\circ\text{C}$ . В то же время, количество тепла, которое может отдать вся вода при замерзании,

$$Q_3 = (m_1 + m_2)\lambda = 198 \text{ кДж},$$

явно превышает количество тепла, требующееся для нагревания льда до температуры плавления. Следовательно, при установлении теплового равновесия в калориметре вода остынет до  $0^\circ\text{C}$ , часть ее замерзнет и весь лед будет иметь температуру плавления. Обозначив через  $m_x$  массу замерзшей воды, запишем уравнение теплового баланса:

$$m_x \lambda = Q_2 - Q_1, \quad \text{откуда} \quad m_x = \frac{Q_2 - Q_1}{\lambda} \cong 102 \text{ г}.$$

Таким образом, после установления теплового равновесия в калориметре образуется смесь воды и льда при нулевой температуре, причем масса льда  $m \cong 502$  г.

**2.3.11.** В цилиндрическом сосуде с площадью основания  $S = 11 \text{ см}^2$  находится кубик льда массой  $m = 11$  г при температуре

$t = -10^\circ\text{C}$ . Какое минимальное количество теплоты  $Q$  нужно сообщить льду для того, чтобы при дальнейшем нагревании уровень воды в сосуде не изменялся? Удельная теплоемкость льда  $c = 2,1 \text{ Дж}/(\text{г}\cdot\text{К})$ , удельная теплопроводность льда  $\lambda = 330 \text{ Дж}/\text{г}$ , плотность льда  $\rho_{\text{л}} = 0,9 \text{ г}/\text{см}^3$ . При расчете принять, что при плавлении кусок льда сохраняет форму куба.

**Решение:** Уровень воды в сосуде будет подниматься до момента всплытия льда. После этого, пока весь лед не растает, уровень воды будет находиться на одной и той же высоте  $h$ , которая определяется объемом воды, образовавшейся из всего растаявшего льда:

$$h = \frac{m}{S\rho_{\text{в}}}$$

Здесь  $\rho_{\text{в}}$  — плотность воды. С другой стороны, лед всплынет, когда глубина подводной части кубика станет равной  $h$ . Из условия плавания частично растаявшего кубика

$$\rho_{\text{л}}a^3g = \rho_{\text{в}}a^2hg$$

находим длину его ребра:  $a = \frac{h\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{л}}} = \frac{m}{S\rho_{\text{o}}}$ . Отсюда масса начавшего плавать кубика

$$m' = \rho_{\text{л}}a^3 = \frac{m^3}{\rho_{\text{л}}^2 S^3}.$$

Таким образом, для того, чтобы кубик всплыл, нужно, чтобы растаяла масса льда

$$m_x = m - m' = m - \frac{m^3}{\rho_{\text{л}}^2 S^3}.$$

Для этого требуется количество тепла

$$Q = mc|t| + \lambda m_x.$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$Q = mc|t| + \lambda m \left(1 - \frac{m^2}{\rho_{\text{л}}^2 S^3}\right) \approx 3,5 \text{ кДж}.$$

**2.3.12.** В чайник налили воды при температуре  $t = 10^\circ\text{C}$  и поставили на электроплитку. Через время  $\tau_1 = 10 \text{ мин}$  вода закипела. Через какое время  $\tau_2$  вода полностью выкипит? Удельная теплоемкость воды  $c = 4,2 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ , удельная теплопроводность парообразования  $r = 2,3 \text{ МДж}/\text{кг}$ . Температура кипения воды  $t_{\text{k}} = 100^\circ\text{C}$ . Теплоемкостью чайника пренебречь.

**Решение:** Обозначив через  $m$  начальную массу воды в чайнике, найдем количества тепла  $Q_1$  и  $Q_2$ , требующиеся, соответственно, для нагревания воды до температуры кипения и для превращения ее в пар:

$$Q_1 = cm(t_{\text{k}} - t), \quad Q_2 = mr.$$

Пусть  $q$  — мощность плитки; тогда

$$Q_1 = q\tau_1, \quad Q_2 = q\tau_2.$$

Объединяя эти выражения, получаем ответ:

$$\tau_2 = \tau_1 \frac{r}{c(t_{\kappa} - t)} = 60,8 \text{ мин.}$$

**2.3.13.** В теплоизолированном сосуде в начальный момент находится одноатомный газ при температуре  $T_0 = 300$  К и кусочек железа массы  $m = 0,2$  кг, нагретый до температуры  $T_1 = 500$  К. Начальное давление газа  $p_0 = 10^5$  Па, его объем  $V_0 = 1000$  см<sup>3</sup>, удельная теплоемкость железа  $c = 0,45$  кДж/(кг·К). Найти давление газа в равновесном состоянии, считая объем газа неизменным.

**Решение:** Из уравнения теплового баланса имеем:

$$\frac{3}{2}\nu RT_0 + mcT_1 = \left(\frac{3}{2}\nu R + mc\right)T,$$

где  $\nu$  — число молей газа,  $T$  — установившаяся (равновесная) температура в сосуде. Число молей газа может быть легко найдено из уравнения его начального состояния:  $\nu = p_0V_0/(RT_0)$ . Подставляя  $\nu$  в первое соотношение, находим установившуюся температуру:

$$T = \frac{(3p_0V_0 + 2mcT_1)T_0}{3p_0V_0 + 2mcT_0}.$$

Поскольку объем газа постоянен, его давление в конечном состоянии  $p = p_0T/T_0$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$p = p_0 \frac{2mcT_1 + 3p_0V_0}{2mcT_0 + 3p_0V_0} \cong 1,67 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

## Задание для самостоятельной работы

**2.3.14.** В комнате при температуре  $t = 20^\circ\text{C}$  относительная влажность  $f_1 = 20\%$ . Найти относительную влажность  $f_2$  после испарения в комнате  $m = 0,2$  кг воды. Объем комнаты  $V = 50 \text{ м}^3$ , плотность насыщенных паров при температуре  $t = 20^\circ\text{C}$  равна  $\rho_{\text{н}} = 1,73 \cdot 10^{-2} \text{ кг}/\text{м}^3$ .

**2.3.15.** Воздух в комнате объемом  $V = 50 \text{ м}^3$  имеет температуру  $t = 27^\circ\text{C}$  и относительную влажность  $f_1 = 30\%$ . Сколько времени  $\tau$  должен работать увлажнитель воздуха, распыляющий воду с производительностью  $\alpha = 2 \text{ кг}/\text{час}$ , чтобы относительная влажность в комнате повысилась до  $f_2 = 70\%$ ? Давление насыщенных паров воды при  $t = 27^\circ\text{C}$  равно  $p_{\text{н}} = 3565 \text{ Па}$ , универсальная газовая постоянная  $R = 8,3 \text{ Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})$ , молярная масса воды  $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \text{ г}/\text{моль}$ .

**2.3.16.** Относительная влажность при температуре  $t_1 = 27^\circ\text{C}$  равна  $f_1 = 75\%$ . Во сколько раз  $n$  изменится относительная влажность, если температура упадет до  $t_2 = 10^\circ\text{C}$ ? Давление насыщенного пара при  $t_1 = 27^\circ\text{C}$  равно  $p_1 = 27 \text{ мм рт. ст.}$ , при  $t_2 = 10^\circ\text{C}$  равно  $p_2 = 9,2 \text{ мм рт. ст.}$

**2.3.17.** На примус поставили открытую кастрюлю с водой при температуре  $t = 20^\circ\text{C}$  и сняли ее через  $\tau = 40 \text{ мин}$ . Найти объем  $V_1$  оставшейся в кастрюле воды, если начальный объем воды составлял  $V = 3 \text{ л}$ . В примусе каждую минуту сгорает  $m = 3 \text{ г}$  керосина, удельная теплота сгорания которого  $h = 40 \text{ кДж}/\text{г}$ , КПД примуса (относительная доля выделившегося тепла, идущая на нагревание воды)  $\eta = 42\%$ , теплоемкость и удельная теплота парообразования воды соответственно  $c = 4,2 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ ,  $r = 2,1 \text{ МДж}/\text{кг}$ , плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ , температура кипения воды  $t_{\text{к}} = 100^\circ\text{C}$ . Теплоемкостью кастрюли пренебречь.

**2.3.18.** Нагретый металлический порошок высыпают в жидкость массой  $m$ , находящуюся при температуре  $T_1$ . Масса порошка равна  $M$ , его удельная теплоемкость  $c$ . Когда установилось тепловое равновесие, оказалось что температура системы равна  $T_2$  и масса жидкости уменьшилась на  $\Delta m$ . Удельная теплоемкость жидкости равна  $c_1$ , ее удельная теплота парообразования  $r$ , температура кипения  $T_{\text{к}}$ . Найти температуру  $T_3$ , которую имел нагретый порошок.

**2.3.19.** Тигель, содержащий некоторое количество олова, нагревают на плитке, выделяющей в единицу времени постоянное количество тепла. За время  $\tau_0 = 20 \text{ мин}$  температура олова повысилась от  $t_1 = 20^\circ\text{C}$  до  $t_2 = 70^\circ\text{C}$ , а еще через  $\tau = 166 \text{ мин}$  олово полностью расплавилось. Найти удельную теплоемкость олова  $c$ , если его температура плавления  $t_{\text{пл}} = 232^\circ\text{C}$ , а удельная теплота плавления  $\lambda = 58,5 \text{ Дж}/\text{кг}$ . Теплоемкостью тигеля и потерями тепла пренебречь.

**2.3.20.** Железнодорожный вагон массой  $M_1 = 60$  т, движущийся со скоростью  $v_0 = 7,2$  км/ч, сталкивается с неподвижно стоящим вагоном массой  $M_2 = 40$  т. После столкновения вагоны приобретают одну и ту же скорость и движутся как единый состав. Какой объем воды  $V$  можно было бы довести до кипения, если всю энергию, выделившуюся при столкновении вагонов, удалось бы обратить в нагрев воды? Начальная температура воды  $t_0 = 20$  °C, температура кипения воды  $t_{\text{к}} = 100$  °C, удельная теплоемкость воды  $c = 4,2 \cdot 10^3$  Дж/(кг·К).

**2.3.21.** Толстостенный сосуд массой  $m = 1$  кг изготовлен из материала, удельная теплоемкость которого  $c = 100$  Дж/(кг·К). Сосуд содержит  $\nu = 2$  моля одноатомного газа, объем которого  $V = 500$  см<sup>3</sup> остается неизменным. Системе сообщают количество тепла  $Q = 300$  Дж. Найти изменение давления газа  $\Delta p$ . Универсальную газовую постоянную принять  $R = 8,3$  Дж/(моль·К).

**2.3.22.** Некоторое количество воды нагревается электронагревателем мощностью  $W = 500$  Вт. При включении нагревателя на время  $t_1 = 2$  мин температура воды повысилась на  $\Delta T = 1$  К, а при его отключении — понизилась за время  $t_2 = 1$  мин на ту же величину  $\Delta T$ . Какова масса  $t$  нагреваемой воды, если потери тепла за счет рассеяния в окружающую среду пропорциональны времени? Удельная теплоемкость воды  $c = 4,19 \cdot 10^3$  Дж/(кг·К).

## 2.4. Поверхностное натяжение в жидкостях

### Вопросы программы

1. Сила поверхностного натяжения. Явления смачивания и несмачивания. Давление под искривленной поверхностью жидкости. Капиллярные явления.

### Определения, понятия и законы

**Сила поверхностного натяжения.** Многочисленные наблюдения и опыты показывают, что любая жидкость стремится принять такую форму, при которой ее свободная поверхность имеет наименьшую площадь. С точки зрения молекулярно-кинетической теории причина этого явления заключается в наличии сил притяжения между молекулами жидкости, а также подвижностью молекул, т.е. возможностью свободного перемещения молекул жидкости друг относительно друга.

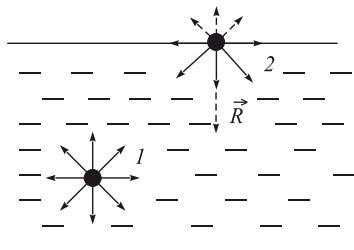


Рис. 2.4.1. Равнодействующая  $\vec{R}$  сил, действующая на молекулу в поверхностном слое

Внутри жидкости силы притяжения, действующие на отдельную молекулу 1 со стороны соседних с ней молекул, взаимно компен-

сируются (рис. 2.4.1). Любая молекула 2, находящаяся у свободной поверхности жидкости, испытывает меньшее притяжение вверх со стороны молекул пара и большее притяжение вниз со стороны молекул жидкости. В результате равнодействующая  $\vec{R}$  сил, действующих на любую молекулу, расположенную в поверхностном слое, направлена вниз. Под действием этих сил молекулы стремятся переместиться с поверхности вглубь жидкости. Число молекул, находящихся на поверхности, уменьшается до тех пор, пока площадь свободной поверхности жидкости не достигнет минимально возможного в данных условиях значения.

Молекулы поверхностного слоя находятся в среднем на больших расстояниях друг от друга, чем молекулы внутри жидкости. Жидкость в поверхностном слое находится в растянутом состоянии. Свойство сокращения свободной поверхности жидкости во многих явлениях выглядит таким образом, как будто жидкость покрыта растянутой эластичной пленкой, стремящейся к сокращению. Однако происхождение поверхностных сил иное, чем упругих сил растянутой эластичной пленки. При сокращении поверхности эластичной пленки силы упругости ослабевают, т. к. среднее расстояние между молекулами уменьшается. Напротив, силы поверхностного натяжения при сокращении свободной поверхности жидкости не изменяются, т. к. плотность жидкости, а следовательно, и среднее расстояние между молекулами на поверхности остаются постоянными.

Для перенесения молекулы из глубины объема жидкости в ее поверхностный слой необходимо совершить работу по преодолению силы  $\vec{R}$ , показанной на рис. 2.4.1. Эта работа идет на увеличение поверхностной энергии, т. е. избыточной потенциальной энергии, которой обладают молекулы в поверхностном слое по сравнению с их потенциальной энергией внутри объема жидкости.

Поверхностная энергия прямо пропорциональна площади поверхности жидкости. Поэтому отношение поверхностной энергии  $U_{\text{п}}$  участка поверхности жидкости к площади  $S$  этого участка есть величина постоянная, не зависящая от площади  $S$ . Этую величину называют коэффициентом поверхностного натяжения или просто поверхностным натяжением  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{U_{\text{п}}}{S}. \quad (2.4.1)$$

Поверхностное натяжение представляет собой удельную поверхностную энергию, т. е. энергию, приходящуюся на поверхность единичной площади. С термодинамической точки зрения поверхностная энергия — это один из видов внутренней энергии.

В СИ поверхностное натяжение измеряется в джоулях на квадратный метр ( $\text{Дж}/\text{м}^2$ ). Так как  $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н}\cdot\text{м}$ , то поверхностное натяжение можно также выражать в ньютонах на метр ( $\text{Н}/\text{м}$ ).

*Силой поверхности натяжения* называют силу, которая действует вдоль поверхности жидкости перпендикулярно к линии, ограничивающей эту поверхность, и стремится сократить ее до минимума.

Для того, чтобы лучше понять, как проявляет себя сила поверхности натяжения, рассмотрим следующий опыт (рис. 2.4.2). Возьмем прямоугольную проволочную рамку, одна из сторон которой ( $AB$ ) длиной  $l$  может без трения перемещаться в вертикальной плоскости. Погрузив рамку в мыльный раствор, получим на ней мыльную пленку. Как только мы вытащим рамку из мыльного раствора, проволока  $AB$  придет в движение и мыльная пленка будет сокращать свою поверхность. Следовательно, на проволоку  $AB$  действует сила поверхности натяжения, направленная перпендикулярно проволоке в сторону мыльной пленки.

Чтобы измерить силу поверхности натяжения, прикрепим к проволоке  $AB$  мягкую пружину, закрепленную на основании штатива (рис. 2.4.2). Сила упругости пружины вместе с силой тяжести, действующей на проволоку  $AB$ , в сумме составляют результирующую силу  $\vec{F}_1$ . Проволока будет находиться в равновесии, если  $\vec{F}_1 = -2\vec{F}$ , где  $\vec{F}$  — сила поверхности натяжения, действующая на подвижную проволоку со стороны одной из поверхностей пленки. Отсюда  $F = F_1/2$ .

Приравнивая работу силы  $F_1$  изменению поверхностной энергии пленки, нетрудно получить следующее выражение для силы поверхности натяжения:

$$F = \sigma l, \quad (2.4.2)$$

где  $l$  — длина границы поверхностного слоя.

**Явления смачивания и несмачивания**. На границе жидкость — твердое тело необходимо учитывать силы притяжения между молекулами жидкости и молекулами твердого тела. Если силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела больше, чем силы притяжения между молекулами самой жидкости, то говорят, что жидкость *смачивает* твердое тело. Если силы притяжения между молекулами жидкости больше сил притяжения молекул твердого тела и молекул жидкости, то жидкость *не смачивает* твердое тело.

Характеристикой поведения жидкости на поверхности твердого тела служит краевой угол т.е. угол  $\vartheta$ , образованный касательной к поверхности жидкости и поверхностью твердого тела, отсчитываемый внутрь жидкости. Если жидкость смачивает твердое тело, то она растекается

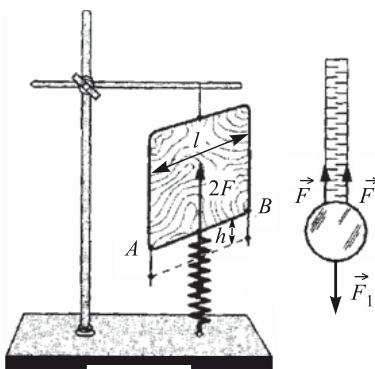


Рис. 2.4.2. Опыт для наблюдения действия силы поверхности натяжения

по его поверхности и краевой угол  $\vartheta$  является острым (рис. 2.4.3, а). Несмачивающая жидкость на поверхности твердого тела стягивается в каплю и краевой угол  $\vartheta$  тупой (рис. 2.4.3, б). В случае полного смачивания  $\vartheta = 0^\circ$ , а в случае полного несмачивания  $\vartheta = 180^\circ$ .

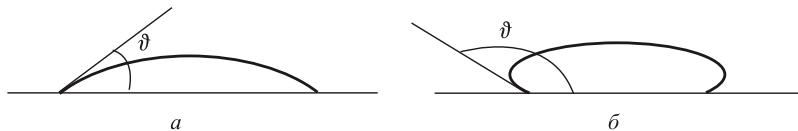


Рис. 2.4.3. Жидкость смачивает поверхность твердого тела (а) и не смачивает его (б)

Взаимодействие молекул жидкости с молекулами твердого тела влияет и на форму поверхности жидкости, налитой в сосуд. Если большое количество жидкости налито в широкий сосуд, то форма ее поверхности определяется силой тяжести, которая обеспечивает плоскую и горизонтальную поверхность. Однако у самых стенок сосуда поверхность жидкости искривлена, т. е. образуется *мениск*, вогнутый у смачивающих жидкостей (рис. 2.4.4, а) и выпуклый у несмачивающих (рис. 2.4.4, б). Если сближать противоположные стенки (брать более узкий сосуд), то горизонтальная часть свободной поверхности жидкости

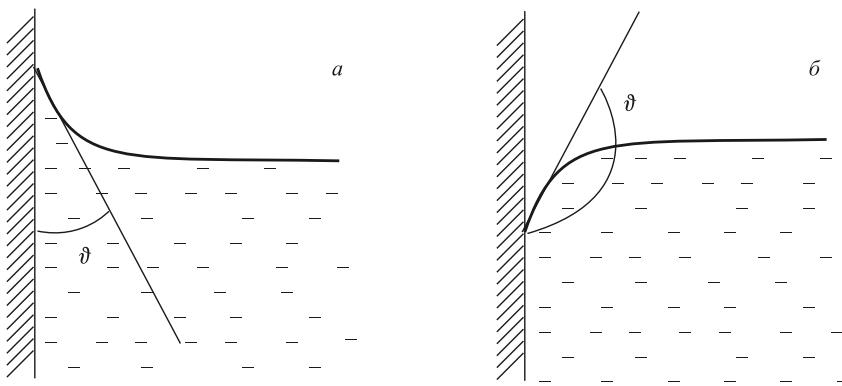


Рис. 2.4.4. У смачивающих жидкостей мениск вогнутый (а), а у несмачивающих — выпуклый (б)

стит будет сокращаться, пока не исчезнет совсем. В узких трубках при полном смачивании (или несмачивании) мениск представляет собой полусферу, радиус которой равен радиусу канала трубы.

**Давление под искривленной поверхностью жидкости.** Если поверхность жидкости искривлена, то в зависимости от знака кривизны поверхности давление внутри жидкости может быть как больше, так и меньше внешнего давления.

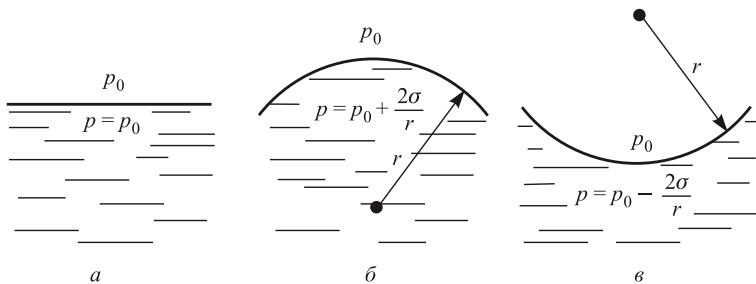


Рис. 2.4.5. Давление под поверхностью жидкости

Пусть  $p_0$  — внешнее давление над поверхностью жидкости (например, атмосферное давление). Если поверхность жидкости плоская (рис. 2.4.5, *a*), то непосредственно под ней давление в жидкости равно внешнему:

$$p = p_0. \quad (2.4.3)$$

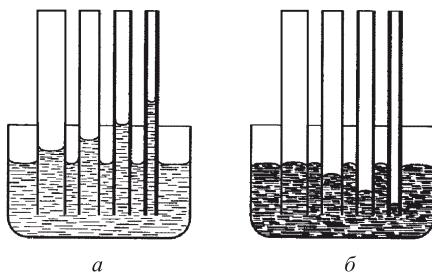
Будем считать, что искривленная поверхность жидкости имеет форму части сферы радиусом  $r$ . Давление под выпуклой поверхностью (рис. 2.4.5, *б*) больше внешнего и равно

$$p = p_0 + \frac{2\sigma}{r}. \quad (2.4.4)$$

Давление под вогнутой поверхностью (рис. 2.4.6, *в*) меньше внешнего и равно

$$p = p_0 - \frac{2\sigma}{r}. \quad (2.4.5)$$

**Капиллярные явления.** Особенности взаимодействия жидкостей со смачиваемыми и несмачиваемыми поверхностями твердых тел являются причиной *капиллярных явлений*. Под капиллярными явлениями понимают подъем или опускание жидкости в тонких трубках — капиллярах — по сравнению с уровнем жидкости в широких сосудах.

Рис. 2.4.6. Жидкость смачивает (*а*) и не смачивает (*б*) стенки капилляра

Смачивающая жидкость (например, вода в стеклянной трубке) поднимается по капилляру. При этом, чем меньше радиус трубки, тем на

большую высоту поднимается в ней жидкость (рис. 2.4.6, а). Жидкость, не смачивающая стенки капилляра (например, ртуть в стеклянной трубке), опускается ниже уровня жидкости в широком сосуде (рис. 2.4.6, б.)

При полном смачивании жидкостью внутренней поверхности трубы сила поверхностного натяжения направлена вдоль поверхности трубы и перпендикулярно границе соприкосновения жидкости со стенкой трубы. Подъем жидкости вдоль смачиваемой поверхности продолжается до тех пор, пока сила тяжести, действующая на столб жидкости в капилляре, не станет равной по величине силе поверхностного натяжения. Из условия равновесия столбика жидкости легко найти, что высота подъема жидкости в капилляре равна

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}, \quad (2.4.6)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $r$  — внутренний радиус капилляра,  $g$  — ускорение свободного падения.

Глубина  $h$ , на которую опускается в капилляре несмачивающая жидкость, также вычисляется по формуле (2.4.6).

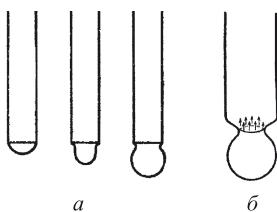
### Примеры решения задач

**2.4.1.** Какова масса  $m$  капли воды, вытекающей из стеклянной трубы диаметром  $d = 1$  мм, если считать, что диаметр шейки капли в момент отрыва равен внутреннему диаметру трубы (см. рисунок)? Поверхностное натяжение воды  $\sigma = 73$  мН/м. Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



**Решение:** Процесс образования капли, вытекающей из трубы, схематично изображен на рисунке а. Перед отрывом капли образуется шейка, диаметр которой, вообще говоря, несколько меньше внутреннего диаметра трубы. Сила поверхности натяжения воды, действующая перпендикулярно окружности этой шейки (рисунок б, удерживает каплю от падения. Отрыв капли происходит при выполнении условия

$$\pi d_{ш} \sigma = mg,$$



где  $d_{ш}$  — диаметр шейки. Полагая приближенно, что диаметр шейки равен внутреннему диаметру трубы, получаем ответ:

$$m = \frac{\pi d\sigma}{g} = 0,023 \text{ г.}$$

**2.4.2.** Для изготовления ртутного барометра взяли стеклянную трубку диаметром  $d = 3$  мм. Какую поправку  $\Delta h$  нужно вносить в показания барометра, если учесть поверхностное натяжение ртути? Ртуть не смачивает стекло. Поверхностное натяжение ртути  $\sigma = 510$  мН/м, плотность ртути  $\rho = 13,6$  г/см<sup>3</sup>. Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**Решение:** В отсутствие капиллярных эффектов равновесие ртути в трубке достигается при выполнении равенства

$$\rho gh_0 = p_0,$$

где  $h_0$  — высота столба ртути,  $p_0$  — атмосферное давление. Поскольку ртуть не смачивает стекло, поверхность ртути в трубке образует выпуклый мениск. Полагая, что радиус мениска  $r$  совпадает с радиусом трубы, находим, что давление ртути в трубке непосредственно под искривленной поверхностью равно  $2\sigma/r$ . Следовательно, с учетом капиллярных явлений условие равновесия ртути принимает вид:

$$\rho gh_1 + \frac{2\sigma}{r} = p_0.$$

Влияние поверхностного натяжения ртути сводится к тому, что высота столба ртути в трубке при неизменном атмосферном давлении уменьшается на величину  $\Delta h = h_0 - h_1 = \frac{2\sigma}{\rho gr} = \frac{4\sigma}{\rho gd}$ . Поэтому для правильного измерения атмосферного давления нужно прибавлять к показаниям барометра  $\Delta h = \frac{4\sigma}{\rho gd} \approx 5$  мм.

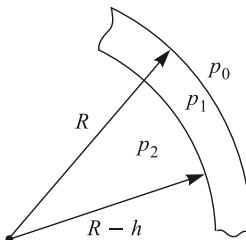
**2.4.3.** В дне чайника имеется круглое отверстие диаметром  $d = 1$  мм. До какой высоты  $h$  можно налить воду в чайник, чтобы она не выливалась через отверстие? Поверхностное натяжение воды  $\sigma = 73$  мН/м, плотность воды  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>. Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**Решение:** Выделим мысленно вертикальный столбик воды сечением  $\pi d^2/4$ , расположенный над отверстием. Этот столбик ограничен снизу сферической поверхностью воды, образующей мениск радиусом  $d/2$ . Избыточное давление, создаваемое искривленной поверхностью воды в нижней точке рассматриваемого столбика, равно  $4\sigma/d$ . Столбик находится в равновесии, если выполнено условие

$$\rho gh = \frac{4\sigma}{d}.$$

Отсюда легко найти ответ:  $h = \frac{4\sigma}{\rho gd} \approx 2,9$  см.

**2.4.4.** На какую величину  $\Delta p$  давление воздуха внутри мыльного пузыря больше атмосферного давления, если диаметр пузыря  $D = 10$  см? Какую работу  $A$  нужно совершить, чтобы выдуть такой пузырь? Поверхностное натяжение мыльного раствора  $\sigma = 40$  мН/м. Толщину мыльной пленки, образующей пузырь, считать пренебрежимо малой.



**Решение:** Мыльная пленка образует две поверхности: внешнюю и внутреннюю. Сечение пленки изображено на рисунке, где через  $h$  обозначена ее толщина. Давления в толще пленки и внутри пузыря определяются формулами:

$$p_1 = p_0 + \frac{2\sigma}{R}, \quad p_2 = p_1 + \frac{2\sigma}{R - h}.$$

Пренебрегая толщиной пленки, получаем для разности давлений внутри и снаружи пузыря следующее выражение:

$$\Delta p = p_2 - p_0 = \frac{4\sigma}{R} = \frac{8\sigma}{D}.$$

Таким образом, избыточное давление внутри пузыря создается двумя поверхностями мыльной пленки. Работа по выдуванию пузыря равна изменению поверхностной энергии пленки  $\Delta U$ . Считая, что площадь сечения трубки, из которой выдувают пузырь, мала, находим:

$$\Delta U = 2\sigma \cdot \Delta S = 2\sigma \cdot \pi D^2.$$

Ответ:  $\Delta p = \frac{8\sigma}{D} \approx 3,2$  Па;  $A = 2\pi\sigma D^2 \approx 2,5 \cdot 10^{-3}$  Дж.

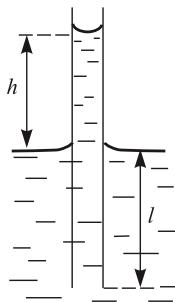
## Задание для самостоятельной работы

**2.4.5.** Горизонтально расположенное проволочное кольцо массой  $m$  и радиусом  $R$  касается поверхности воды. Какую вертикальную силу  $F$  необходимо приложить, чтобы оторвать кольцо от поверхности воды? Проволока смачивается водой. Диаметр проволоки считать пренебрежимо малым. Поверхностное натяжение воды  $\sigma$ . Ускорение свободного падения  $g$ .

**2.4.6.** Длинную стеклянную трубку диаметром  $d = 1,6$  мм заполнили водой и перевели в вертикальной положение. Найдите массу воды  $m$ , оставшейся в трубке после того, как часть воды вылилась. Поверхностное натяжение воды  $\sigma = 73$  мН/м. Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**2.4.7.** Высота подъема воды в капиллярной трубке, помещенной вертикально в сосуд с водой у подножия горы, составляет  $h$ . На какую величину  $\Delta h$  изменится высота поднятия воды в этой трубке, если перенести ее вместе с сосудом на вершину горы? Разность уровней между вершиной и подножием горы равна  $H$ , радиус Земли  $R$ .

**2.4.8.** В капиллярной трубке, опущенной вертикально в воду на глубину  $l$ , вода поднялась на высоту  $h$ . Нижний конец трубки закрыли, вынули ее из воды и снова открыли, сохранив вертикальное положение трубки. Определите высоту  $h_1$  столбика воды, оставшейся в трубке.



**2.4.9.** Конец стеклянной капиллярной трубки радиусом  $r = 0,5$  мм опущен в воду на глубину  $h = 2$  см. Какое избыточное давление  $p$  необходимо создать в трубке, чтобы выдуть пузырек воздуха через ее нижний конец? Поверхностное натяжение воды  $\sigma = 73$  мН/м, плотность воды  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>. Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**2.4.10.** Смачиваемый водой кубик массой  $m = 4$  г плавает на поверхности воды так, что его верхняя грань горизонтальна. Длина ребра кубика  $a = 3$  см. На каком расстоянии  $x$  от поверхности воды находится нижняя грань кубика? На какую величину  $\Delta x$  изменится глубина погружения кубика, если покрыть его тонким слоем парафина, который не смачивается водой? Поверхностное натяжение воды  $\sigma = 73$  мН/м, плотность воды  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>. Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

## 2.5. Тепловое расширение твердых тел и жидкостей

### Вопросы программы

1. *Тепловое линейное расширение. Тепловое объемное расширение. Тепловое расширение жидкостей. Особенности теплового расширения воды.*

### Определения, понятия и законы

*Тепловым расширением* называется увеличение линейных размеров и объемов тел, происходящее при повышении их температуры. Причину этого явления можно объяснить, анализируя зависимость потенциальной энергии взаимодействия молекул  $E_p$  от расстояния  $r$  между ними (рис. 2.5.1). Как видно из рисунка, кривая потенциальной энергии несимметрична относительно точки  $r_0$ , в которой потенциальная энергия минимальна. В точке  $r_0$  силы взаимодействия между

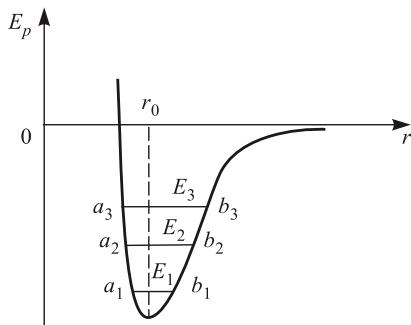


Рис. 2.5.1. Зависимость потенциальной энергии взаимодействия молекул от расстояния между ними

молекулами обращаются в нуль. При  $r < r_0$  между молекулами возникают силы отталкивания, и потенциальная энергия очень быстро нарастает с уменьшением  $r$ . При  $r > r_0$  между молекулами действуют силы притяжения, и потенциальная энергия сравнительно медленно растет с увеличением  $r$ .

Рассмотрим движение какой-либо молекулы в силовом поле другой молекулы, которую примем за неподвижную. В зависимости от величины полной энергии движущейся молекулы  $E$  она совершает колебания с различной амплитудой. Так, при энергии  $E_1$  молекула колеблется между точками  $a_1$  и  $b_1$ , при энергии  $E_2 > E_1$  — между точками  $a_2$  и  $b_2$ , при энергии  $E_3 > E_2$  — между точками  $a_3$  и  $b_3$  и т. д. (см. рис. 2.5.1), причем положение равновесия при каждом значении энергии  $E_i$  находится примерно посередине между соответствующими точками  $a_i$  и  $b_i$ . Из рисунка видно, что с ростом энергии молекулы положение равновесия смещается в сторону больших значений  $r$ . Поскольку энергия теплового движения пропорциональна температуре, отсюда следует, что при нагревании тела средние расстояния между молекулами возрастают и размеры тела увеличиваются. Важно отметить, что если бы кривая потенциальной энергии была симметричной, то среднее положение молекулы при любой энергии соответствовало бы расстоянию  $r_0$ . В этом случае не менялись бы средние расстояния между молекулами при нагревании, т. е. не наблюдалось бы тепловое расширение.

**Тепловое линейное расширение**. Опыт показывает, что в некотором температурном диапазоне изменение линейных размеров твердых тел прямо пропорционально изменению температуры. Для количественного описания теплового линейного расширения удобно использовать относительное удлинение тела, т. е. отношение абсолютного удлинения  $\Delta l = l - l_0$  к первоначальной длине  $l_0$ . В соответствии с законом *теплового линейного расширения* относительное удлинение тела  $\Delta l/l_0$  пропорционально изменению температуры  $\Delta t = t - t_0$ :

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha_1 \Delta t. \quad (2.5.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $\alpha_1$  называют температурным коэффициентом линейного расширения. Этот коэффициент показывает, на какую долю своего первоначального значения изменяются линейные размеры тела при его нагревании на 1 К. Коэффициент линейного расширения зависит от вещества, из которого состоит тело, а также от температуры. Если температура меняется в небольших пределах, зависимостью  $\alpha_1$  от температуры можно пренебречь и считать температурный коэффициент линейного расширения величиной постоянной для данного вещества.

Линейные размеры тела, как вытекает из формул (2.5.1), зависят от изменения температуры следующим образом:

$$l = l_0(1 + \alpha_1 \Delta t). \quad (2.5.2)$$

Поскольку при равномерном нагревании (или охлаждении) твердого тела все его линейные размеры меняются по одному и тому же закону, форма твердого тела с изменением температуры не меняется. Так, у круглого стержня при нагревании увеличивается диаметр, притом во столько же раз, во сколько увеличивается длина стержня. У пластинки в одно и то же число раз увеличиваются длина, ширина и толщина. Если начертить на пластинке какую-либо линию, то длина этой линии при нагревании увеличится в такое же число раз. При нагревании пластинки, имеющей, например, круглое отверстие, диаметр отверстия также увеличится, причем в такое же число раз, что и размеры пластиинки. Расширение пластиинки с отверстием происходит так же, как если бы она была сплошной.

**Тепловое объемное расширение.** Увеличение линейных размеров твердого тела при нагревании приводит к увеличению его объема. При изучении *теплового объемного расширения*, как и в случае линейного расширения, удобно рассматривать относительное изменение объема  $\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0}$ . Измерения показывают, что в пределах не очень большого интервала температур относительное изменение объема пропорционально изменению температуры  $\Delta t = t - t_0$ :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \alpha \Delta t. \quad (2.5.3)$$

Коэффициент пропорциональности  $\alpha$  называют температурным коэффициентом объемного расширения. Этот коэффициент показывает, на какую долю своего первоначального значения изменяется объем тела при изменении температуры на 1 К. Коэффициент объемного расширения, как и коэффициент линейного расширения, зависит от вещества, из которого состоит тело, и от температуры. Зависимость  $\alpha$  от температуры незначительно и ею можно пренебречь, если интервал изменения температуры невелик.

Из формулы (2.5.3) можно найти выражение для объема тела при любой температуре:

$$V = V_0(1 + \alpha \Delta t). \quad (2.5.4)$$

Объем полого твердого тела (сосуда) при равномерном нагревании увеличивается так, как если бы это тело было сплошным. Объем полости в сосуде при его нагревании увеличивается так, как увеличился бы объем тела, изготовленного из того же вещества, что и сосуд, и имеющего форму и размер полости.

Коэффициент линейного расширения  $\alpha_1$  и коэффициент объемного расширения  $\alpha$  связаны между собой. Эта связь наиболее проста, если изменения температуры малы:

$$\alpha = 3\alpha_1. \quad (2.5.5)$$

Температурный коэффициент объемного расширения равен утроенному температурному коэффициенту линейного расширения. По этой причине в справочной литературе для твердых тел приводятся только температурные коэффициенты линейного расширения.

С изменением температуры тел изменяется их плотность. Если при температуре  $t_0$  плотность тела равна  $\rho_0$ , то при температуре  $t$  плотность тела равна

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \alpha\Delta t}, \quad (2.5.6)$$

где  $\Delta t = t - t_0$ . Для приближенных расчетов в небольших температурных интервалах можно использовать для плотности также формулу

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha\Delta t). \quad (2.5.7)$$

**Тепловое расширение жидкостей.** Поскольку жидкости всегда принимают форму сосуда, в котором они находятся, для них имеет смысл только коэффициент объемного расширения. Из-за того, что связи между молекулами в жидкостях слабее, чем связи между молекулами в твердых телах, при одинаковом нагревании жидкости расширяются в большей степени, чем твердые тела. Температурный коэффициент объемного расширения большинства жидкостей на один — два порядка превышает коэффициент объемного расширения большинства твердых тел.

Изменение объема жидкости при нагревании подчиняется формулам (2.5.3), (2.5.4), для вычисления плотности жидкости при заданной температуре справедливы формулы (2.5.6), (2.5.7).

**Особенности теплового расширения воды.** Вода обладает особыми свойствами, отличающими ее от других жидкостей. При нагревании от 0 до 4 °C объем воды не увеличивается, а уменьшается. Лишь начиная с 4 °C объем воды при нагревании начинает возрастать. Таким образом, при 4 °C объем воды минимален, а плотность максимальна.

Это свойство воды оказывает большое влияние на характер теплообмена в водоемах. При понижении температуры воздуха верхние слои воды охлаждаются, их плотность понижается и они опускаются вниз. В результате такого перемешивания вода охлаждается по всей глубине водоема. Но после достижения температуры воздуха 4 °C дальнейшее охлаждение воды уже уменьшает ее плотность, и холодные слои воды остаются на поверхности. Перемешивание воды прекращается. Когда температура воздуха становится отрицательной, на поверхности воды образуется лед, который обладает весьма малой теплопроводностью.

Поэтому достаточно глубокие водоемы не промерзают до дна. Даже при сильных морозах вода вблизи дна имеет температуру около 4 °C.

## Примеры решения задач

**2.5.1.** Диаметр стеклянной пробки, застрявшей в горлышке флакона,  $d_0 = 2,5$  см. Чтобы вынуть пробку, горлышко нагрели до температуры  $t_1 = 150$  °C. Сама пробка успела при этом нагреться до температуры  $t_2 = 50$  °C. Какой зазор  $l$  между горлышком и пробкой образовался при этом? Температурный коэффициент линейного расширения стекла  $\alpha_1 = 8 \cdot 10^{-6}$  K<sup>-1</sup>.

**Решение:** Пусть  $t_0$  — начальная температура флакона и пробки. В соответствии с законом теплового линейного расширения диаметры горлышка флакона  $d_1$  и пробки  $d_2$  при нагревании станут равными:

$$d_1 = d_0 [1 + \alpha_1(t_1 - t_0)], \quad d_2 = d_0 [1 + \alpha_1(t_2 - t_0)].$$

Зазор между горлышком и пробкой определяется как  $l = (d_1 - d_2)/2$ . Ответ:

$$l = \frac{d_0\alpha_1(t_1 - t_2)}{2} = 0,01 \text{ мм.}$$

**2.5.2.** Сообщающиеся сосуды заполнены жидкостью, имеющей температуру  $t_1$ . При нагревании жидкости в одном из сосудов до температуры  $t_2$  уровень жидкости в этом сосуде установился на высоте  $h_2$ , а в другом сосуде — на высоте  $h_1$ . Найти температурный коэффициент объемного расширения жидкости  $\alpha$ . Терловым расширением сосудов пренебречь.

**Решение:** Равновесие жидкости достигается при равенстве гидростатических давлений у дна сосудов, т.е. при выполнении условия:

$$\rho_1gh_1 = \rho_2gh_2,$$

где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — плотности жидкости при температурах  $t_1$  и  $t_2$  соответственно. В соответствии с законом теплового объемного расширения

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{1 + \alpha(t_2 - t_1)}.$$

Объединяя записанные соотношения, получаем ответ:  $\alpha = \frac{h_2 - h_1}{h_1(t_2 - t_1)}$ .

**2.5.3.** Определите объем  $V_0$  шарика ртутного термометра, если известно, что при температуре  $t_0 = 0$  °C ртуть заполняет только шарик, а объем трубки термометра между делениями, соответствующими температурам  $t_0 = 0$  °C и  $t_1 = 100$  °C, равен  $V = 3$  мм<sup>3</sup>. Температурный коэффициент объемного расширения ртути  $\alpha = 1,8 \cdot 10^{-4}$  K<sup>-1</sup>, температурный коэффициент линейного расширения стекла  $\alpha_1 = 8 \cdot 10^{-6}$  K<sup>-1</sup>.

**Решение:** По условию  $V_0$  — объем шарика термометра при температуре  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ . При температуре  $t_1 = 100^\circ\text{C}$  объем шарика и трубы составляет величину

$$(V_0 + V)(1 + 3\alpha_1(t_1 - t_0)).$$

Этот объем равен объему ртути

$$V_0(1 + \alpha(t_1 - t_0))$$

при той же температуре. Из равенства

$$(V_0 + V)(1 + 3\alpha_1(t_1 - t_0)) = V_0(1 + \alpha(t_1 - t_0))$$

получаем ответ:  $V_0 = V \frac{1 + 3\alpha_1(t_1 - t_0)}{(\alpha - 3\alpha_1)(t_1 - t_0)} \approx 192 \text{ mm}^3$ .

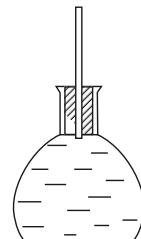
## Задание для самостоятельной работы

**2.5.4.** Как должны относиться длины  $l_1$  и  $l_2$  двух стержней, изготовленных из разных материалов с температурными коэффициентами линейного расширения  $\alpha'_1$  и  $\alpha''_1$ , чтобы при любой температуре из заданного интервала разность длин стержней оставалась постоянной? Считать, что  $\alpha'_1$  и  $\alpha''_1$  в этом интервале температур постоянны.

**2.5.5.** Какое количество теплоты  $Q$  нужно сообщить стальному рельсу площадью сечения  $S = 20 \text{ см}^2$ , чтобы он удлинился на  $\Delta l = 6 \text{ мм}$ ? Плотность стали  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ , удельная теплоемкость  $c = 460 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ , температурный коэффициент линейного расширения  $\alpha_1 = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$ .

**2.5.6.** Латунный сосуд при нагревании увеличился в объеме на  $\eta = 0,6 \%$ . Найти увеличение  $\Delta t$  температуры сосуда, если температурный коэффициент линейного расширения латуни  $\alpha_1 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$ .

**2.5.7.** В колбу, плотно закрытую пробкой со вставленной в нее трубкой, до самой пробки налит спирт. На какую величину  $\Delta p$  изменится давление на дно колбы при нагревании спирта на  $\Delta t = 30^\circ\text{C}$ , если объем колбы  $V_0 = 2 \text{ л}$ , высота ее  $h = 20 \text{ см}$ , сечение трубы  $S = 2 \text{ см}^2$ ? Температурный коэффициент объемного расширения спирта  $\alpha = 1,1 \times 10^{-3} \text{ К}^{-1}$ , его плотность при начальной температуре  $\rho_0 = 0,8 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ . Тепловым расширением колбы и трубы пренебречь. Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м}/\text{с}^2$ .



**2.5.8.** В кварцевый сосуд объемом  $V_0 = 2,5 \text{ л}$  помещен латунный цилиндр массой  $m = 8,5 \text{ кг}$ . Остальная часть сосуда доверху заполнена водой. При нагревании сосуда вместе с содержимым на  $\Delta t = 3^\circ\text{C}$  уровень воды по отношению к верхнему краю сосуда не изменился. Найдите температурный коэффициент объемного расширения воды  $\alpha$  в этом температурном интервале. Температурный коэффициент линейного расширения кварца  $\alpha_{1\text{кв}} = 4,2 \cdot 10^{-7} \text{ К}^{-1}$ , латуни  $\alpha_{1\text{л}} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$ . Плотность латуни при начальной температуре  $\rho_{\text{л}} = 8,5 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ .

# Глава 3

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

### 3.1. Электростатика

#### Вопросы программы

1. Электрические заряды. Элементарный электрический заряд. Проводники и диэлектрики. Закон сохранения электрического заряда. Взаимодействие электрически заряженных тел. Электроскоп. Точечный заряд. Закон Кулона.
2. Электрическое поле. Напряженность электрического поля. Линии напряженности электрического поля (силовые линии). Однородное электрическое поле. Напряженность электростатического поля точечного заряда. Принцип суперпозиции полей. Теорема Гаусса. Электростатическое поле равномерно заряженных плоскости, сферы, шара.
3. Работа сил электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов. Связь разности потенциалов с напряженностью электростатического поля. Потенциал поля точечного заряда. Эквипотенциальные поверхности.
4. Проводники и диэлектрики в электростатическом поле. Диэлектрическая проницаемость вещества. Электроемкость. Конденсаторы. Поле плоского конденсатора. Электроемкость плоского конденсатора. Последовательное и параллельное соединение конденсаторов. Энергия электрического поля заряженного конденсатора.

#### Определения, понятия и законы

Электростатикой называется раздел электродинамики, в котором рассматриваются взаимодействия неподвижных в инерциальной системе отсчета электрически заряженных тел или частиц.

**Электрические заряды. Элементарный электрический заряд.** Физическая величина, характеризующая свойство тел или частиц вступать в электромагнитные взаимодействия и определяющая значения сил, возникающих при таких взаимодействиях, называется электри-

ческим зарядом. Электрические заряды делятся на *положительные* и *отрицательные*. Положительный заряд возникает, например, на стекле, натертом кожей, отрицательный — на янтаре, натертом шерстью.

Носителями электрических зарядов являются элементарные частицы и их античастицы. Стабильными носителями положительного заряда являются протон и позитрон, отрицательного — электрон и антипротон. Другие элементарные частицы, имеющие электрические заряды, являются нестабильными, их время «жизни» чрезвычайно мало.

В Международной системе за единицу заряда принят *кулон* (Кл). Кулон — это заряд, проходящий за 1 с через поперечное сечение проводника при силе тока 1 ампер (А). Определение единицы силы тока 1 А будет дано в разделе 3.2.

Электрический заряд протона и электрона по абсолютному значению равен  $1,602 \cdot 10^{-19}$  Кл. Массы протона и электрона равны, соответственно,  $1,67 \cdot 10^{-27}$  кг и  $9,1 \cdot 10^{-31}$  кг. Электрический заряд протона и электрона называется *элементарным зарядом*.

Электрический заряд любого заряженного тела равен целому числу элементарных зарядов. В электрически нейтральном (незаряженном) теле содержится равное число элементарных зарядов противоположно го знака. Электрически нейтральными являются неионизованные атомы и молекулы.

Если электрическая нейтральность тела нарушена, то оно называется *наэлектризованным*, или заряженным. Для электризации тела необходимо, чтобы на нем был создан избыток (недостаток) элементарных зарядов того или другого знака. Электризация тел осуществляется различными способами, простейшим из которых является электризация соприкосновением. Этот способ основан на том, что при соприкосновении некоторых тел, когда происходит контакт между разнородными веществами, валентные электроны могут переходить из одного вещества в другое.

**Закон сохранения электрического заряда.** При всех явлениях, связанных с перераспределением электрических зарядов в изолированной системе взаимодействующих тел, алгебраическая сумма электрических зарядов остается постоянной. Этот закон, носящий название *закона сохранения электрического заряда*, является таким же фундаментальным законом физики, как и другие законы сохранения: энергии, импульса и др.

**Проводники и диэлектрики.** Проводниками называются вещества, в которых может происходить упорядоченное перемещение электрических зарядов (электрический ток). Проводниками являются металлы, водные растворы солей, кислот и др., ионизованные газы. В частности, в металлах валентные электроны взаимодействующих друг с другом атомов отщепляются и становятся *свободными*, т.е. способными

свободно перемещаться в объеме металла. Эти электроны, называемые также электронами проводимости, и обеспечивают электропроводность металлов. Механизмы электропроводности других проводящих веществ будут подробно рассмотрены в разделе 3.2.

**Диэлектриками** называются вещества, которые не проводят электрический ток. В диэлектриках практически отсутствуют свободные электроны, и упорядоченное движение электрических зарядов в обычных условиях невозможно. К диэлектрикам относятся некоторые твердые вещества (стекло, фарфор, ряд кристаллов и др.), жидкости (химически чистая вода, керосин, минеральное масло и др.) и большинство газов. Валентные электроны в атомах диэлектриков прочно связаны со своими ядрами и в обычных условиях не могут отщепляться от них.

**Электрометр и электроскоп.** Для обнаружения зарядов и измерения их величины служат электрометры и электроскопы. Простейший

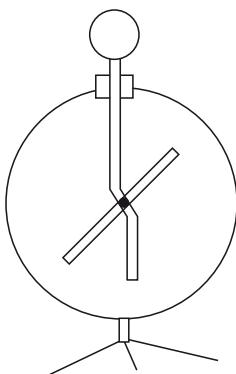
*электрометр* (рис. 3.1.1) содержит легкую алюминиевую стрелку, укрепленную на металлическом стержне с помощью горизонтальной оси. Центр тяжести стрелки находится ниже оси, поэтому у незаряженного электрометра стрелка располагается вертикально. Стержень со стрелкой помещен в металлический корпус, изолированный от стержня. Это делается для того, чтобы внешнее электрическое поле не влияло на показания прибора. Наблюдения за стрелкой проводятся через смотровое окно. Если прикоснуться к шарику электрометра заряженным телом, то на стержне и стрелке возникнут одноименные заряды, которые отталкиваются друг от друга, и подвижная стрелка отклонится. Электрометры обычно градуируют, что позволяет достаточно просто и точно проводить измерения зарядов и

Рис. 3.1.1. Простейший электрометр

разности потенциалов между проводниками. *Электроскоп* отличается от электрометра тем, что не имеет металлического корпуса, а вместо подвижной стрелки используются две полоски тонкой фольги, подвешенные к нижнему концу стержня. Электроскоп обычно применяют как демонстрационный прибор для обнаружения электрического заряда. При сообщении стержню электроскопа заряда полоски расходятся в разные стороны; по углу между ними можно также грубо оценивать величину заряда.

### **Взаимодействие электрически заряженных тел. Точечный заряд.**

**Закон Кулона.** Силы электростатического взаимодействия зависят от формы и размеров наэлектризованных тел, а также от распределения зарядов на этих телах. Электрические заряды называются *точечны-*



ми, если они располагаются на телах, размеры которых значительно меньше, чем расстояние между ними. В этом случае ни форма, ни размеры заряженных тел существенно не влияют на взаимодействие между ними.

Количественные характеристики взаимодействия точечных зарядов устанавливает закон Кулона: величина силы электрического взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$  в вакууме пропорциональна произведению величин этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r$  между ними:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (3.1.1)$$

где  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \Phi/\text{м}$  — электрическая постоянная.

Силы, действующие между точечными зарядами, направлены вдоль прямой, соединяющей эти заряды. Эти силы называются *кулоновскими*. Заряды одного знака отталкиваются, а заряды разных знаков притягиваются.

Сила взаимодействия зарядов в диэлектрике по сравнению с их взаимодействием в вакууме уменьшается. Это уменьшение характеризуется диэлектрической проницаемостью вещества  $\epsilon$ . Закон Кулона для зарядов, находящихся в диэлектрике, имеет вид:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (3.1.2)$$

**Электрическое поле. Напряженность электрического поля.** Любой неподвижный электрический заряд создает вокруг себя электростатическое поле, которое в каждой точке пространства характеризуется векторной физической величиной — *напряженностью*  $\vec{E}(\vec{r})$ . Напряженность электрического поля определяется как сила, действующая в данной точке пространства на единичный положительный точечный заряд. В Международной системе единиц напряженности электрического поля является *вольт на метр* (В/м). Определение единицы напряжения (разности потенциалов) 1 В будет дано ниже.

**Линии напряженности электрического поля (силовые линии).** Электрическое поле изображают с помощью линий напряженности (силовых линий). Касательные к этим линиям указывают направление силы, действующей на положительный заряд в каждой точке поля. Силовые линии электростатического поля не замкнуты, они начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных. Силовые линии непрерывны и не пересекаются. Они всегда перпендикулярны поверхности проводника. Распределение силовых линий в пространстве отображает величину поля: их густота в окрестности какой-либо точки пропорциональна величине напряженности поля в этой точке.

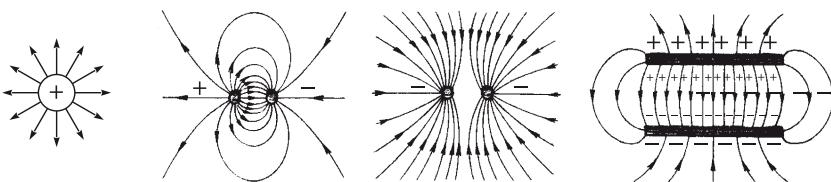


Рис. 3.1.2. Примеры силовых линий электростатических полей

Примеры силовых линий полей, создаваемых некоторыми простейшими системами электрических зарядов, представлены на рис. 3.1.2. Там изображены силовые линии следующих полей: положительно заряженного шарика (рис. 3.1.2, а); двух разноименно заряженных шариков (рис. 3.1.2, б); двух одноименно заряженных шариков (рис. 3.1.2, в); двух пластин, заряды которых равны по модулю и противоположны по знаку (рис. 3.1.2, г).

**Однородное электрическое поле.** Из рис. 3.1.2, г видно, что в пространстве между пластинами вдали от краев пластин силовые линии практически параллельны: электрическое поле здесь одинаково во всех точках.

Электрическое поле, напряженность которого одинакова во всех точках пространства, называется *однородным*. Силовые линии однородного поля параллельны и располагаются на равных расстояниях друг от друга. В ограниченной области пространства электрическое поле можно считать приблизительно однородным, если напряженность поля внутри этой области меняется незначительно.

**Напряженность электростатического поля точечного заряда.** В соответствии с законом Кулона (3.1.1) вектор напряженности поля точечного заряда  $q$  направлен по прямой, соединяющей точку нахождения заряда и точку наблюдения. Величина напряженности этого поля в вакууме

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (3.1.3)$$

**Принцип суперпозиции полей.** Опыт показывает, что если на электрический заряд  $q$  действуют одновременно электрические поля нескольких зарядов, то результирующая сила оказывается равной геометрической сумме сил, действующих со стороны каждого поля в отдельности. Это свойство электрических полей означает, что они подчиняются *принципу суперпозиции*: если в данной точке пространства различные заряды создают электрические поля с напряженностями  $\vec{E}_1$ ,

$\vec{E}_2$  и т. д., то вектор напряженности результирующего электрического поля равен сумме векторов напряженностей всех электрических полей:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i, \quad (3.1.4)$$

где  $N$  — число зарядов в системе.

**Теорема Гаусса.** Основная теорема электростатики — теорема Гаусса — базируется на физической величине, называемой потоком напряженности электрического поля.

Выделим в электрическом поле элемент воображаемой поверхности площадью  $\Delta S$ . Этот элемент должен быть настолько малым, чтобы напряженность электрического поля во всех его точках можно было считать одинаковой. Проведем нормаль  $\vec{n}$  к элементу и обозначим угол между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{n}$  через  $\alpha$  (рис. 3.1.3). Тогда по определению

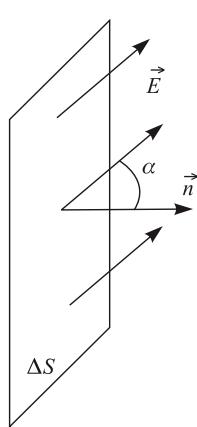


Рис. 3.1.3. Малый элемент поверхности  $\Delta S$

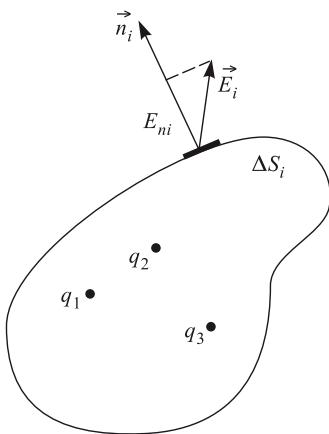


Рис. 3.1.4. Произвольная поверхность

потоком  $\Delta N$  напряженности электрического поля  $\vec{E}$  через элемент поверхности  $\Delta S$  называется произведение площади  $\Delta S$  на проекцию напряженности электрического поля  $E_n$  на нормаль к элементу:

$$\Delta N = E_n \Delta S = E \cdot \Delta S \cos \alpha. \quad (3.1.5)$$

Для вычисления потока через произвольную поверхность нужно разбить всю поверхность на малые элементы площадью  $\Delta S_i$

(рис. 3.1.4), вычислить потоки напряженности через каждый из элементов, а затем просуммировать потоки через все элементы:

$$N = \sum_i E_{ni} \Delta S_i. \quad (3.1.6)$$

Так же определяется поток через замкнутую поверхность, причем за положительную нормаль к любому элементу в этом случае выбирается внешняя нормаль, т. е. нормаль, направленная наружу.

Согласно *теореме Гаусса*, поток напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, расположенных внутри этой поверхности, деленной на электрическую постоянную:

$$N = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_j q_j. \quad (3.1.7)$$

Если замкнутая поверхность не содержит внутри себя электрических зарядов, то поток напряженности электрического поля через нее равен нулю.

Используя теорему Гаусса, можно легко вычислить напряженность электрического поля вокруг заряженного тела, если имеется какая-либо симметрия поля, например симметрия относительно плоскости или центра.

**Электростатическое поле равномерно заряженных плоскости, сферы и шара.** Напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью, равна

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (3.1.8)$$

где  $\sigma$  — заряд единицы поверхности (поверхностная плотность зарядов). Линии напряженности перпендикулярны плоскости и направлены от нее в разные стороны (рис. 3.1.5). Две равномерно (с одинаковой плотностью  $\sigma$ ) и разноименно заряженные бесконечные плоскости

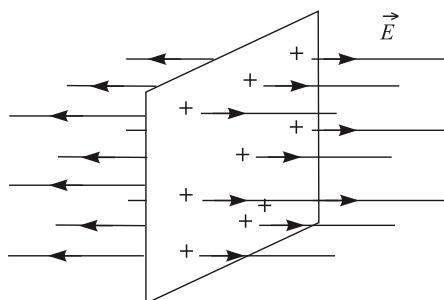


Рис. 3.1.5. Поле бесконечной заряженной плоскости

создают однородное электростатическое поле, напряженность которого в пространстве между плоскостями

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (3.1.9)$$

В остальном пространстве электрическое поле рассматриваемой системы равно нулю.

Напряженность поля *равномерно заряженной проводящей сферы* радиусом  $R$ , несущей на поверхности заряд  $q$ :

$$\begin{cases} 0 & \text{при } r < R, \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (3.1.10)$$

График зависимости  $E(r)$  для заряженной проводящей сферы изображен на рис. 3.1.6, а.

Напряженность поля, создаваемого *шаром, равномерно заряженным по объему*, равна

$$\begin{cases} \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} & \text{при } r < R, \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (3.1.11)$$

Здесь  $q$  — полный заряд шара,  $R$  — его радиус. График зависимости  $E(r)$  для равномерно заряженного шара изображен на рис. 3.1.6, б.

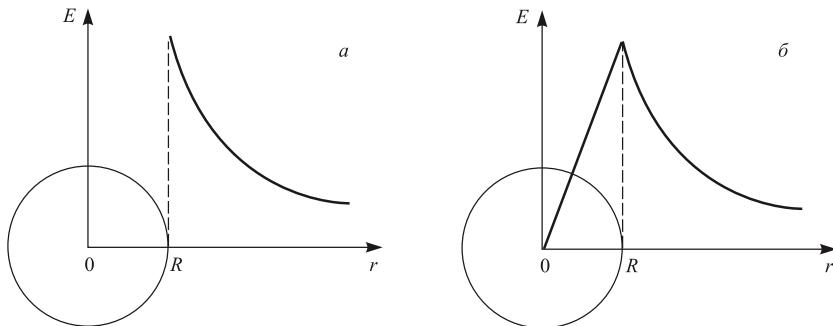


Рис. 3.1.6. Поле равномерно заряженной проводящей сферы (а) и поле равномерно заряженного по объему шара (б)

Совокупность двух равных по величине и противоположных по знаку точечных зарядов  $+q$  и  $-q$ , расположенных на расстоянии  $l$  друг от друга, называется электрическим диполем. Диполь характеризуется *электрическим моментом*  $\vec{p}_e = ql\vec{l}$ , где вектор  $\vec{l}$  направлен по оси диполя от отрицательного заряда к положительному. Помещенный в *неоднородное* внешнее поле, диполь втягивается в область более сильного поля. В *однородном* внешнем поле на диполь действует момент

сил, пытающийся развернуть диполь так, чтобы его дипольный момент был направлен вдоль силовых линий.

**Работа сил электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов.** Работа электростатических сил по перемещению зарядов не зависит от формы траектории и определяется только величиной заряда и положением начальной и конечной точек траектории. Следовательно, электростатические силы потенциальны. Это дает возможность ввести энергетическую характеристику электростатического поля — *потенциал*  $\varphi(\vec{r})$ .

Потенциал — это работа, которую совершают силы электростатического поля по перемещению единичного положительного заряда из данной точки пространства в точку, потенциал которой принят за нуль. Очевидно, что потенциал также равен работе, которую нужно совершить против электростатических сил, чтобы перенести единичный положительный заряд из точки, в которой потенциал принят за нуль, в данную точку пространства.

Физический смысл имеет *разность потенциалов* между двумя точками, а не значения потенциалов в этих точках. Поэтому выбор точки с нулевым потенциалом определяется соображениями простоты и удобства решения задач. Чаще всего выбирают равным нулю потенциал либо бесконечно удаленной точки, либо потенциал Земли.

Работа поля по перемещению заряда из одной точки пространства в другую

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU, \quad (3.1.12)$$

где  $U = (\varphi_1 - \varphi_2)$  — *напряжение* (разность потенциалов) между точками 1 и 2.

Единица напряжения и разности потенциалов в СИ называется *вольтом* (В). 1 В = 1 Дж/1 Кл.

**Связь разности потенциалов с напряженностью электростатического поля.** Разность потенциалов (напряжение)  $U$  между двумя точками в однородном электрическом поле, расположенными на одной линии напряженности на расстоянии  $d$  друг от друга, определяется формулой

$$U = Ed, \quad (3.1.13)$$

где  $E$  — напряженность поля.

В однородном диэлектрике разность потенциалов (как и напряженность электростатического поля) уменьшается в  $\epsilon$  раз по сравнению с этими величинами в вакууме.

**Потенциал поля точечного заряда.** Потенциал поля точечного заряда  $q_0$  в вакууме

$$\varphi = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (3.1.14)$$

Потенциал положительного заряда положителен и убывает с расстоянием от заряда, а потенциал отрицательного заряда отрицателен и увеличивается при удалении от заряда.

При наличии нескольких точечных зарядов общий потенциал в некоторой точке поля равен алгебраической сумме потенциалов, созданных отдельными зарядами.

Потенциал проводящей заряженной сферы радиусом  $R$ , несущей на поверхности заряд  $q$ , равен

$$\begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} & \text{при } r < R, \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (3.1.15)$$

**Эквипотенциальные поверхности.** Геометрическое место точек электростатического поля с одинаковыми потенциалами называется *эквипотенциальной поверхностью*. Эквипотенциальные поверхности имеют следующие свойства:

1. в каждой точке эквипотенциальной поверхности вектор напряженности поля перпендикулярен к ней и направлен в сторону убывания потенциала;
2. работа по перемещению заряда по одной и той же эквипотенциальной поверхности равна нулю.

Одной из эквипотенциальных поверхностей является поверхность заряженного проводника.

Наряду с силовыми линиями, эквипотенциальные поверхности являются удобным средством для графического изображения электростатического поля. Обычно их проводят так, чтобы разности потенциалов между двумя соседними поверхностями были одинаковы. В качестве примера на рис. 3.1.7 изображены эквипотенциальные поверхности полей, создаваемых простейшими электрическими системами: положительно заряженным шариком (а); двумя разноименно заряженными шариками (б), двумя одноименно заряженными шариками (в).

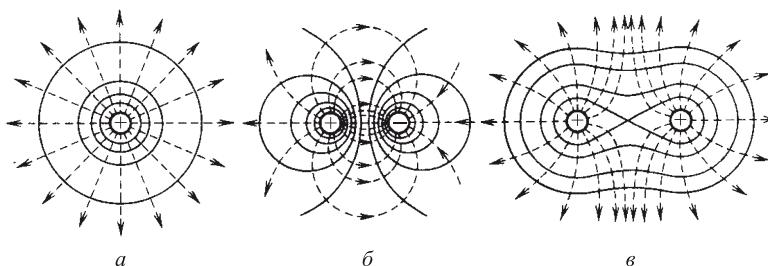


Рис. 3.1.7. Эквипотенциальные поверхности

**Проводники и диэлектрики в электростатическом поле. Диэлектрическая проницаемость вещества.** Если металлический проводник поместить во внешнее электрическое поле, то под действием этого поля помимо теплового, хаотического движения свободных электронов возникнет их упорядоченное движение, в результате которого они будут перемещаться в направлении, противоположном напряженности поля. На поверхности проводника, обращенной навстречу силовым линиям поля, появится избыточный отрицательный заряд, на противоположной поверхности — избыточный положительный. Заряды, появляющиеся на поверхностях проводника, создают внутри него электрическое поле, вектор напряженности которого противоположен вектору напряженности внешнего поля. Упорядоченное движение электронов в проводнике прекратится, когда внутреннее поле станет равным по величине внешнему полю. Под действием внешнего электростатического поля электроны проводимости в проводнике перераспределяются так, что напряженность результирующего поля в любой точке внутри проводника становится равной нулю; некомпенсированные заряды располагаются неподвижно только на поверхности проводника. Явление перераспределения зарядов в проводнике во внешнем электростатическом поле называется *электростатической индукцией*.

При помещении в электростатическое поле диэлектрика в нем происходят несколько иные процессы. Молекулы диэлектрика электрически нейтральны — суммарные положительные заряды их ядер и отрицательные заряды всех электронов равны друг другу. В зависимости от строения молекул различаются *полярные* и *неполярные диэлектрики*.

Если в отсутствие внешнего электрического поля центры положительных и отрицательных зарядов в молекуле диэлектрика совпадают, то он называется *неполярным*. В отсутствии внешнего поля дипольный момент молекулы неполярного диэлектрика равен нулю. Если молекулу неполярного диэлектрика поместить во внешнее электрическое поле, то произойдет ее деформация и возникнет *индуцированный* дипольный момент.

В молекулах *полярных* диэлектриков ядра и электроны расположены таким образом, что центры положительных и отрицательных зарядов не совпадают. Такие молекулы, независимо от внешних электрических полей, ведут себя как *жесткие диполи*, обладающие электрическим моментом, модуль которого постоянен. Если внешнее электрическое поле не приложено, то из-за теплового хаотического движения молекул в расположении жестких диполей отсутствует упорядоченность. Поэтому, хотя каждый диполь создает свое электрическое поле, суммарная напряженность поля всех хаотически движущихся диполей диэлектрика равна нулю.

При внесении диэлектрика *во внешнее поле* происходит его *поляризация*. Поляризацией диэлектрика называется переход его в такое состояние, когда внутри его объема геометрическая сумма векторов дипольных моментов молекул становится отличной от нуля. Механизм

явления поляризации для полярных и неполярных диэлектриков различен, но приводит к сходным макроскопическим эффектам.

Если однородный *неполярный* диэлектрик внесен во внешнее электрическое поле, то в его молекулах происходит смещение положительных и отрицательных зарядов. На поверхностях, ограничивающих диэлектрик, появляются *поверхностные связанные заряды*. Связанные заряды не проявляют себя внутри любого объема диэлектрика: суммарный электрический заряд молекул в любом объеме равен нулю. Но на поверхностях диэлектрика связанные заряды нескомпенсированы и создают собственное электрическое поле диэлектрика. Вектор напряженности этого поля противоположен напряженности внешнего поля, вызвавшего поляризацию. Поэтому результирующее электрическое поле в однородном изотропном диэлектрике имеет напряженность, в  $\epsilon$  раз меньшую, чем в вакууме. Поляризация диэлектрика с неполярными молекулами, состоящая в возникновении у молекул индуцированного электрического момента, называется *электронной* или *деформационной поляризацией*. Поляризация этого типа не зависит от температуры диэлектрика.

При внесении однородного *полярного* диэлектрика во внешнее электрическое поле каждая молекула — жесткий диполь — будет испытывать ориентирующее влияние поля и будет стремиться развернуться так, чтобы вектор ее дипольного момента был направлен параллельно внешнему полю. Тепловое движение молекул разрушает упорядоченную ориентацию молекул, вследствие чего суммарный дипольный момент молекул диэлектрика в некотором диапазоне изменения внешнего поля оказывается пропорциональным напряженности внешнего поля. На граничных поверхностях поляризованного диэлектрика возникают нескомпенсированные связанные заряды. Как и случае неполярного диэлектрика, эти заряды создают собственное электрическое поле, ослабляющее внешнее поле в  $\epsilon$  раз. Поляризацию описанного типа называется *ориентационной поляризацией*. Ориентационная поляризация уменьшается с повышением температуры.

**Электроемкость.** Когда на проводнике увеличивается заряд  $q$ , то прямо пропорционально заряду возрастает потенциал проводника  $\varphi$ . Это справедливо для проводников любой геометрической формы. Отношение заряда проводника к его потенциальному не зависит от величины заряда, находящегося на проводнике, и определяется свойствами самого проводника, а также среды, в которой он находится. Характеристикой электрических свойств проводника, определяющей возможность накопления зарядов на нем, является *электроемкость* (или просто емкость).

Емкостью уединенного проводника называется коэффициент пропорциональности между зарядом, находящимся на этом проводнике, и его потенциалом

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (3.1.16)$$

Емкость уединенного шара радиуса  $R$  равна

$$C = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (3.1.17)$$

**Конденсаторы.** Два изолированных друг от друга проводника, заряженных равными по величине и противоположными по знаку зарядами, образуют **конденсатор**. Проводники конденсатора называются обкладками.

**Поле плоского конденсатора. Электроемкость плоского конденсатора.** Плоский конденсатор представляет собой две параллельные металлические пластины, разделенные слоем диэлектрика. Если расстояние между пластинами мало по сравнению с их поперечным размером, то практически все электрическое поле сосредоточено внутри конденсатора и является однородным за исключением небольших областей вблизи краев пластин (рис. 3.1.2, г). Это поле равно сумме полей, создаваемых положительно и отрицательно заряженными обкладками (см. формулу (3.1.9)). Емкость плоского конденсатора, площадь каждой из пластин которого  $S$ , а расстояние между пластинами  $d$ , равна

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}. \quad (3.1.18)$$

Емкость конденсатора с диэлектриком, заполняющим пространство между обкладками, в  $\epsilon$  раз больше емкости пустого (незаполненного) конденсатора.

Единица электроемкости в Международной системе — *фарад* ( $\Phi$ ). Электроемкостью 1  $\Phi$  обладает такой конденсатор, напряжение между обкладками которого равно 1 В при сообщении обкладкам разноименных зарядов по 1 Кл:  $1 \Phi = 1 \text{ Кл}/1 \text{ В}$ .

**Последовательное и параллельное соединение конденсаторов.** При последовательном соединении нескольких конденсаторов общая емкость определяется формулой

$$\frac{1}{\tilde{N}} = \frac{1}{\tilde{N}_1} + \frac{1}{\tilde{N}_2} + \dots + \frac{1}{C_N}. \quad (3.1.19)$$

При параллельном соединении конденсаторов общая емкость равна

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_N. \quad (3.1.20)$$

**Энергия электрического поля заряженного конденсатора.** Согласно современной теории энергия любых заряженных тел сосредоточена в электрическом поле, создаваемом этими телами. Поэтому говорят об **энергии электрического поля**, причем считается, что энергия источников поля — заряженных тел — распределена по всему пространству, где имеется электрическое поле. Например, в плоском конденсаторе

энергия сосредоточена в пространстве между его обкладками. Эта энергия равна

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}. \quad (3.1.21)$$

Энергия однородного электрического поля, сосредоточенного в некотором объеме однородной среды, пропорциональна этому объему. Это дает возможность ввести понятие *плотности энергии* электрического поля, т.е. энергии, сосредоточенной в единице объема. Плотность энергии электрического поля вычисляется по формуле

$$w_e = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2}. \quad (3.1.22)$$

Это выражение справедливо не только для однородного поля, но и для произвольных, в том числе и изменяющихся во времени электрических полей в однородном изотропном диэлектрике.

## Указания по решению задач

При расчете разности потенциалов между какими-либо точками часто бывает полезно принять потенциал в одной из точек за нуль и последовательно рассмотреть работы по перемещению единичного положительного заряда из этой точки во все остальные интересующие нас точки. Это касается как определения потенциалов, созданных системой зарядов, так и расчета напряжений в цепях, содержащих конденсаторы.

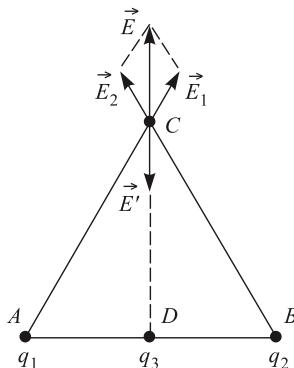
В задачах, в которых рассматриваются различные типы соединения конденсаторов, следует всегда иметь в виду те соотношения, которые используются при выводе формул (3.1.19) и (3.1.20). В частности, на последовательно соединенных конденсаторах одинаков заряд, а на параллельно соединенных конденсаторах одинаково напряжение.

## Примеры решения задач

**3.1.1.** В двух вершинах равностороннего треугольника помещены одинаковые заряды  $q_1 = q_2 = q = 4\text{мКл}$ . Какой точечный заряд  $q_3$  необходимо поместить в середину стороны, соединяющей заряды  $q_1$  и  $q_2$ , чтобы напряженность электрического поля в третьей вершине треугольника оказалась равной нулю?

**Решение:** Заряды  $q_1$  и  $q_2$  создают в вершине С электрические поля  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$ , направленные вдоль сторон  $AC$  и  $BC$  соответственно (см. рисунок), причем

$$E_1 = E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2},$$



где  $a$  — сторона треугольника. Векторная сумма этих полей  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  направлена вдоль высоты треугольника  $CD$  и по величине равна

$$E = 2E_1 \cos 30^\circ = \sqrt{3} E_1 = \frac{\sqrt{3} q}{4\pi\epsilon_0 a^2}.$$

Суммарное поле в точке  $C$  будет равно нулю, если в точку  $D$  поместить отрицательный заряд  $q_3$ , создающий в точке  $C$  поле  $\vec{E}' = -\vec{E}$ . Учитывая, что расстояние между точками  $C$  и  $D$  равно

$$x = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

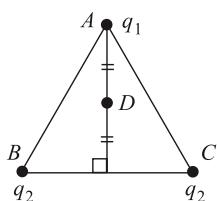
$$\text{имеем: } \frac{|q_3|}{3\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{\sqrt{3} q}{4\pi\epsilon_0 a^2}.$$

Отсюда легко найти ответ:  $q_3 = -\frac{3\sqrt{3}}{4}q = -5,2 \text{ мККл.}$

**3.1.2.** Три положительных заряда расположены в вершинах равностороннего треугольника  $ABC$ . Величина заряда, находящегося в точке  $A$ , равна  $q_1$ ; величины зарядов в точках  $B$  и  $C$  равны  $q_2$ . Найти отношение  $\alpha = q_2/q_1$ , если напряженность электрического поля, создаваемого этими тремя зарядами в точке  $D$ , лежащей на середине высоты, опущенной из вершины  $A$  на сторону  $BC$ , равна нулю.

**Решение:** Обозначим через  $a$  сторону треугольника. Тогда расстояния между точкой  $D$  и вершинами треугольника (см. рисунок) выражаются следующим образом:

$$AD = r_1 = a \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad BD = CD = r_2 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = a \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

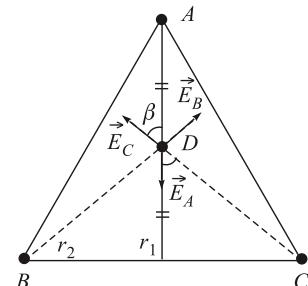


Величины напряженностей полей, создаваемых в точке  $D$  зарядами, расположенными в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ , равны:

$$E_A = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}, \quad E_B = E_C = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}.$$

Суммарное поле в точке  $D$  будет равно нулю при выполнении условия:

$$E_A = 2E_B \cos \beta = 2E_B \frac{r_1}{r_2}.$$



Комбинация записанных выражений дает ответ:  $\alpha = \frac{q_2}{q_1} = \frac{7}{6} \sqrt{\frac{7}{3}} \cong 1,8$ .

**3.1.3.** Два точечных заряда  $+q$  и  $+2q$ , расположенные, соответственно, в вершинах  $A$  и  $B$  квадрата  $ABCD$  со стороной  $a = 1$  м, создают в вершине  $D$  электрическое поле напряженностью  $\vec{E}$ . В какую точку нужно поместить третий точечный заряд  $-q$ , чтобы напряженность суммарного электрического поля в вершине  $D$  стала равна  $-\vec{E}$ ?

**Решение:** Заряды, расположенные в точках  $A$  и  $B$ , создают в точке  $D$  электрические поля, величины которых равны:  $E_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$ ,  $E_B = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 (a\sqrt{2})^2} =$

$$= E_A.$$

Сумма этих полей направлена вдоль биссектрисы  $\angle ADB$  (см. рисунок) и по величине равна:

$$E = 2E_A \cos \frac{\pi}{8}.$$

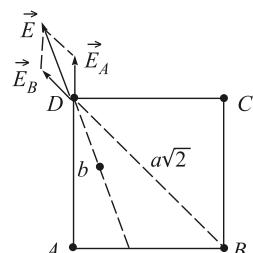
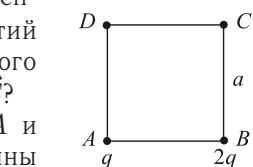
Для того, чтобы поле в точке  $D$ , оставаясь тем же самым по величине, переменило знак на противоположный, заряд  $-q$  должен создать в этой точке поле  $-2\vec{E}$ , направленное против поля  $\vec{E}$ . Следовательно, этот заряд нужно поместить внутри квадрата на биссектрисе  $\angle ADB$  на таком расстоянии  $b$  от точки  $D$ , чтобы выполнялось равенство:

$$2 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \cdot 2 \cos \frac{\pi}{8} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b^2}.$$

Отсюда находим искомое расстояние:  $b = \frac{a}{2\sqrt{\cos \pi/8}}$ . В итоге приходим к ответу, ко-

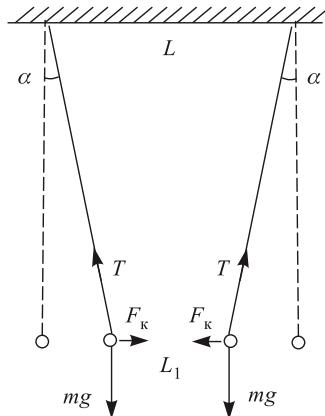
торый формулируется следующим образом: заряд  $-q$  нужно поместить внутри квадрата на биссектрисе  $\angle ADB$  на расстоянии

$$b = \frac{a}{2\sqrt{\cos \pi/8}} = \frac{a}{\sqrt[4]{8+4\sqrt{2}}} \cong 0,5 \text{ м от точки } D.$$



**3.1.4.** К нитям длиной  $l$ , точки подвеса которых находятся на одном уровне на расстоянии  $L$  друг от друга, подвешены два одинаковых маленьких шарика массами  $m$  каждый. При сообщении им одинаковых по величине разноименных зарядов шарики сблизились до расстояния  $L_1$ . Определить величину соударившихся шариками зарядов  $q$ . Ускорение свободного падения  $g$ .

**Решение:** Шарики находятся в равновесии под действием сил, изображенных на рисунке, где через  $T$  обозначена величина силы натяжения нитей, а через  $F_k$  — величина кулоновской силы, действующей на каждый из шариков, равная



Вводя угол  $\alpha$  между нитью вертикалью, запишем условия равновесия шариков в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$F_k = T \sin \alpha, \quad mg = T \cos \alpha.$$

Исключая отсюда  $T$ , получаем:

$$F_k = mg \operatorname{tg} \alpha = mg \frac{L - L_1}{\sqrt{4l^2 - (L - L_1)^2}}.$$

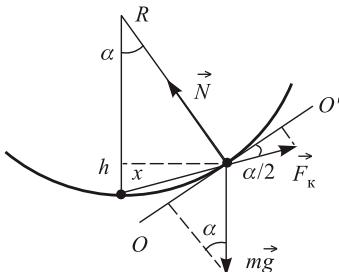
Используя для кулоновской силы записанное выше выражение, после несложных преобразований получаем ответ:

$$q = 2L_1 \sqrt{\pi \varepsilon_0 \frac{mg(L - L_1)}{\sqrt{4l^2 - (L - L_1)^2}}}.$$

**3.1.5.** Два маленьких тела с равными зарядами  $q$  расположены на внутренней поверхности гладкой непроводящей сферы радиусом  $R$ . Первое тело закреплено в нижней точке сферы, а второе может сво-

бодно скользить по ее поверхности. Найти массу второго тела, если известно, что в состоянии равновесия оно находится на высоте  $h$  от нижней точки сферы.

**Решение:** Заряженное тело, способное свободно скользить по гладкой сферической поверхности, займет положение равновесия, когда сумма действующих на него сил окажется равной нулю. Эти силы



показаны на рисунке, где  $mg$  — сила тяжести,  $\vec{N}$  — сила реакции поверхности, а  $\vec{F}_k$  — сила кулоновского отталкивания зарядов.

Условие равновесия заряженного тела удобнее всего записать в проекциях на касательную к сфере, проведенную в плоскости рисунка (линию  $OO'$ ). С учетом известной из геометрии теоремы об угле, образованном касательной и хордой, имеем:

$$mg \sin \alpha = F_k \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \text{или} \quad 2mg \sin \frac{\alpha}{2} = F_k.$$

В соответствии с законом Кулона

$$F_k = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2},$$

причем расстояние между заряженными телами  $x$ , как видно из рисунка, равно:  $x = 2R \sin(\alpha/2)$ . Из рисунка также видно, что высота  $h$ , на которую поднимается заряженное тело, выражается как

$$h = R(1 - \cos \alpha) = 2R \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда  $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{h}{2R}}$ . Объединяя записанные выражения, после несложных преобразований получаем ответ:  $m = \frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 R^2} \left(\frac{2R}{h}\right)^{3/2}$ .

**3.1.6.** Два удаленных друг от друга на большое расстояние металлических шара радиусами  $r_1 = 5$  см и  $r_2 = 10$  см, несущие заряды  $q_1 = 2 \cdot 10^{-9}$  Кл и  $q_2 = -10^{-9}$  Кл соответственно, соединяют тонким проводом. Какой заряд  $q$  протечет при этом по проводу?

**Решение:** Поскольку по условию задачи шары достаточно удалены друг от друга, их потенциалы до соединения проводом можно опре-

делить по формуле для потенциала уединенной заряженной сферы. Имеем:

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1}, \quad \varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2}.$$

После соединения шаров проводом заряды на них перераспределяются так, что потенциалы шаров станут равными друг другу, т.е.

$$\varphi'_1 = \frac{q'_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \varphi'_2 = \frac{q'_2}{4\pi\epsilon_0 r_2}.$$

Следовательно,  $\frac{q'_1}{r_1} = \frac{q'_2}{r_2}$ . Пренебрегая емкостью провода, запишем закон сохранения заряда в системе:  $q'_1 + q'_2 = q_1 + q_2$ . Из последних двух уравнений находим заряды на шарах после их соединения:

$$q'_1 = \frac{q_1 + q_2}{r_1 + r_2} r_1, \quad q'_2 = \frac{q_1 + q_2}{r_1 + r_2} r_2.$$

По проводу протечет заряд  $q = q_1 - q'_1 = q'_2 - q_2$ . Ответ:

$$q = \frac{q_1 r_2 - q_2 r_1}{r_1 + r_2} \cong 1,67 \cdot 10^{-9} \text{ Кл.}$$

**3.1.7.** Два удаленных друг от друга на большое расстояние металлических шара радиусами  $r_1 = 1$  см и  $r_2 = 2$  см, несущие одинаковые заряды, взаимодействуют с силой  $F = 10^{-4}$  Н. Какова будет сила взаимодействия этих шаров  $F'$ , если их соединить друг с другом тонким проводом?

**Решение:** Повторяя рассуждения, приведенные в задаче 3.1.6, находим заряды на шарах после соединения их проводом:

$$q'_1 = \frac{2qr_1}{r_1 + r_2}, \quad q'_2 = \frac{2qr_2}{r_1 + r_2},$$

где  $q$  — заряд на каждом из шаров до их соединения. Сила взаимодействия шаров определяется по закону Кулона:  $F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}$  до соединения,  $F' = \frac{q'_1 q'_2}{4\pi\epsilon_0 R^2}$  после соединения, где  $R$  — расстояние между шарами. Объединяя полученные выражения, находим ответ:  $F' = F \times \frac{4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{8}{9} \cdot 10^{-4}$  Н.

**3.1.8.** Расстояние между двумя одинаковыми металлическими шариками  $l$  намного больше их радиусов. Когда на шарики поместили некоторые заряды, сила отталкивания между ними оказалась равной  $F_1$ . После того, как шарики соединили тонкой проволокой, а затем убрали ее, шарики стали отталкиваться с силой  $F_2$ . Определить первоначальные заряды шариков  $q_1$  и  $q_2$ . Электрическая постоянная  $\epsilon_0$ .

**Решение:** Поскольку по условию задачи шарики достаточно удалены друг от друга, для силы взаимодействия между ними справедлив закон Кулона:

$$F_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 l^2}.$$

Потенциалы шариков до соединения их проволокой можно определить по формуле для потенциала уединенной заряженной сферы:

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где  $r$  — радиус каждого из шариков. После соединения шариков проволокой заряды на них перераспределяются так, что потенциалы шариков станут одинаковыми:

$$\varphi'_1 = \frac{q'_1}{4\pi\epsilon_0 r} = \varphi'_2 = \frac{q'_2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Пренебрегая емкостью проволоки, запишем закон сохранения заряда в системе:

$$q'_1 + q'_2 = q_1 + q_2.$$

Поскольку радиусы шариков равны, из равенства их потенциалов после соединения проволокой следует, что на каждом из шариков будет находиться один и тот же заряд:

$$q'_1 = q'_2 = \frac{(q_1 + q_2)}{2}.$$

В результате этого величина силы взаимодействия примет значение:

$$F_2 = \frac{(q_1 + q_2)^2}{16\pi\epsilon_0 l^2}.$$

Имеем систему уравнений:

$$q_1 q_2 = 4\pi\epsilon_0 l^2 F_1, \quad q_1 + q_2 = 4l\sqrt{\pi\epsilon_0 F_2}.$$

Находя из нее  $q_1$  и  $q_2$ , получаем ответ:

$$q_1 = 2l\sqrt{\pi\epsilon_0} \left( \sqrt{F_2} \pm \sqrt{F_2 - F_1} \right), \quad q_2 = 2l\sqrt{\pi\epsilon_0} \left( \sqrt{F_2} \mp \sqrt{F_2 - F_1} \right).$$

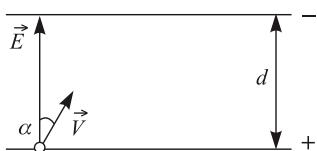
**3.1.9.** Внутри плоского незаряженного конденсатора, пластины которого расположены горизонтально на расстоянии  $l = 2$  см друг от друга, падает положительно заряженная пылинка. Вследствие сопротивления воздуха пылинка движется равномерно, проходя некоторый путь за время  $t_0 = 10$  с. Когда на конденсатор подали напряжение  $U = 980$  В, пылинка начала двигаться равномерно вверх, пройдя тот же путь за время  $t_1 = 5$  с. Определить отношение  $\gamma$  заряда пылинки к ее массе. Силу сопротивления воздуха считать пропорциональной скорости пылинки, ускорение свободного падения принять  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

**Решение:** Пусть  $\beta$  — коэффициент сопротивления воздуха,  $m$  — масса пылинки,  $d$  — пройденный пылинкой путь. Тогда при движении

пылинки вниз с постоянной скоростью  $V_0$  справедливо уравнение  $mg - \beta V_0 = 0$ , или  $mg = \beta \frac{d}{t_0}$ .

Движение пылинки вверх с постоянной скоростью  $V_1$  описывается уравнением  $mg + \beta V_1 - qE = 0$ , или  $mg + \beta \frac{d}{t_1} = q \frac{U}{l}$ , где  $q$  — заряд пылинки. Выражая из первого уравнения  $\beta$  и подставляя во второе, после несложных преобразований получаем ответ:  $\gamma = \frac{q}{m} = \frac{g(1+t_0/t_1)l}{U} = 6 \cdot 10^{-4}$  Кл/кг.

**3.1.10.** Электрон влетает со скоростью  $V = 10^7$  м/с в отверстие в нижней пластине плоского конденсатора. Между пластинами поддерживается разность потенциалов  $U = 425$  В. Определить максимальное



удаление  $h$  электрона от нижней пластины конденсатора, если угол, который составляет вектор начальной скорости электрона с вектором напряженности электрического поля конденсатора,  $\alpha = 30^\circ$ , расстояние между пластинами конденсатора  $d = 1$  см, отношение заряда электрона к его массе  $\gamma = 1,76 \cdot 10^{11}$  Кл/кг. Считать электрическое поле внутри конденсатора однородным, силу тяжести не учитывать.

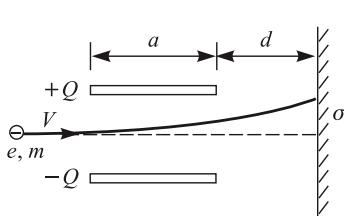
**Решение:** Составляющая скорости электрона  $V_{||} = V \sin \alpha$ , параллельная пластинам, будет оставаться постоянной. Составляющая скорости, перпендикулярная пластинам, при максимальном удалении  $h$  электрона от нижней пластины обратится в нуль. Поскольку электростатические силы потенциальны, полная механическая энергия электрона при движении внутри конденсатора сохраняется. Обозначив через  $m$  массу электрона, а через  $|e|$  — величину его заряда, имеем:

$$\frac{mV^2}{2} = |e| \frac{U}{d} h + \frac{mV^2 \sin^2 \alpha}{2}$$

Отсюда после несложных преобразований получаем ответ:

$$h = d \frac{V^2 \cos^2 \alpha}{2\gamma U} \approx 5 \text{ мм.}$$

**3.1.11.** Электронный пучок проходит между горизонтально расположенным пластинами плоского конденсатора и попадает на экран.



Начальная скорость электронов направлена горизонтально и равна  $V = 10^7$  м/с. Пластины конденсатора представляют собой квадраты со стороной  $a = 10$  см, а величина заряда на каждой из них составляет  $Q = 10^{-10}$  Кл. Расстояние от правого края конденсатора до экрана равно  $d = 5$  см. Определить поперечное

смещение  $\delta$  электронов в плоскости экрана, связанное с действием конденсатора. Электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ , отношение величины заряда электрона к его массе  $\gamma = 1,78 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$ . Расстояние между пластинами конденсатора намного меньше их размера. Силу тяжести не учитывать.

**Решение:** Поскольку в задаче требуется найти смещение электронов, вызванное действием конденсатора, электрическим взаимодействием между электронами можно пренебречь и считать, что на каждый электрон, находящийся внутри конденсатора, действует сила  $F = |e|E$ , направленная вертикально вверх (здесь  $e$  — заряд электрона,  $E = \frac{Q}{a^2 \epsilon_0}$  — напряженность поля внутри конденсатора). Вертикальное смещение электрона при движении внутри конденсатора в течение времени  $t_1 = \frac{a}{V}$  равно

$$\delta_1 = \frac{F}{m} \cdot \frac{t_1^2}{2} = \gamma \frac{Q}{2\epsilon_0 V^2}.$$

При вылете из конденсатора электрон имеет вертикальную скорость  $V_1 = \frac{F}{m} \cdot t_1$ . Пролетая вне конденсатора расстояние  $d$  в течение времени  $t_2 = \frac{d}{V}$ , он приобретает смещение

$$\delta_2 = V_1 t_2 = \gamma \frac{Q}{a\epsilon_0} \frac{d}{V^2}.$$

Поскольку полное смещение электрона равно  $\delta = \delta_1 + \delta_2$ , ответ имеет вид:  $\delta = \gamma \frac{Q}{V^2 \epsilon_0} \left( \frac{1}{2} + \frac{d}{a} \right) = 2 \text{ см.}$

**3.1.12.** Две частицы с одинаковыми массами, заряженные равными по величине разноименными зарядами, движутся по окружности вокруг неподвижного центра масс. Пренебрегая гравитационным взаимодействием между частицами, найти отношение  $\alpha$  величин потенциальной и кинетической энергий частиц. Принять, что энергия взаимодействия частиц при их удалении на бесконечно большое расстояние равна нулю.

**Решение:** Уравнение движения каждой из частиц под действием сил кулоновского притяжения имеет вид:

$$\frac{mV^2}{r} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2r)^2},$$

где  $V$  — скорость каждой из частиц,  $r$  — радиус их орбит,  $q$  — величина их зарядов. Кинетическая энергия частиц

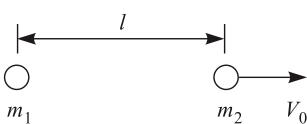
$$E_K = 2 \frac{mV^2}{2} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 r},$$

величина потенциальной энергии их притяжения

$$|E_{\Pi}| = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2r)}.$$

Находя отношение между этими величинами, получаем ответ:  $\alpha = \frac{|E_{\Pi}|}{E_K} = 2$ .

**3.1.13.** Два маленьких шарика массами  $m_1 = 6$  г и  $m_2 = 4$  г, несущие заряды  $q_1 = 10^{-6}$  Кл и  $q_2 = -5 \cdot 10^{-6}$  Кл соответственно,



удерживаются на расстоянии  $l = 2$  м друг от друга. В некоторый момент оба шарика отпускают, сообщив одновременно второму из них скорость  $V_0 = 3$  м/с, направленную от первого шарика вдоль линии, соединяющей их центры. На какое максимальное расстояние  $L$  разойдутся шарики друг от друга? Силу тяжести не учитывать. Электрическую постоянную принять  $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$  Ф/м.

**Решение:** Движение шариков происходит под действием силы электростатического притяжения, которая является внутренней силой для рассматриваемой системы. Следовательно, суммарный импульс шариков остается постоянным. Запишем закон сохранения импульса в проекции на координатную ось, положительное направление которой совпадает с направлением начальной скорости второго шарика:

$$m_2 V_0 = m_1 V_1 + m_2 V_2.$$

Здесь  $V_1$  и  $V_2$  — проекции скоростей шариков на эту же ось в произвольный момент времени.

Кулоновские силы относятся к классу потенциальных сил, поэтому в системе сохраняется также полная механическая энергия. Потенциальная энергия электростатического взаимодействия двух зарядов определяется равенством  $E_{\Pi} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ , где  $r$  — расстояние между зарядами. Заметим, что для разноименных зарядов потенциальная энергия отрицательна и возрастает при удалении зарядов друг от друга. В соответствии с этим кинетическая энергия шариков будет убывать по мере увеличения расстояния между ними и закон сохранения энергии запишется в виде:

$$\frac{m_2 V_0^2}{2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 l} = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 L}.$$

При удалении шариков на максимальное расстояние их относительная скорость  $V_{\text{отн}} = V_1 - V_2$  обратится в нуль. Это утверждение становится очевидным, если перейти в систему отсчета, связанную с одним из шариков. В этой системе движение второго шарика подобно движению камня, брошенного вертикально вверх от поверхности Земли. Ясно, что момент остановки второго шарика относительно первого (т.е. об-

рашения в нуль относительной скорости) действительно соответствует максимальному удалению шариков друг от друга. Таким образом, когда расстояние между шариками максимально,  $V_1 = V_2 \equiv V$ . Используя это равенство, преобразуем исходную систему уравнений к виду:

$$m_2 V_0 = (m_1 + m_2)V, \quad \frac{m_2 V_0^2}{2} - \frac{q_1 |q_2|}{4\pi\epsilon_0 l} = \frac{(m_1 + m_2)V^2}{2} - \frac{q_1 |q_2|}{4\pi\epsilon_0 L}.$$

Исключая из этой системы  $V$ , находим ответ:

$$L = \frac{l}{1 - \frac{2\pi\epsilon_0 l m_1 m_2 V_0^2}{(m_1 + m_2) q_1 |q_2|}} \cong 3,85 \text{ м.}$$

Элементарный анализ показывает, что ответ теряет смысл при

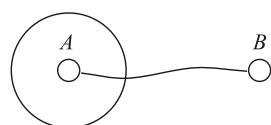
$$\frac{2\pi\epsilon_0 l m_1 m_2 V_0^2}{(m_1 + m_2) q_1 |q_2|} \geq 1.$$

Последнему неравенству можно придать более наглядную форму:

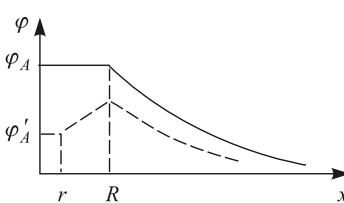
$$E_{0K} \geq \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \cdot |E_{0P}|,$$

где  $E_{0K} = \frac{m_2 V_0^2}{2}$  — начальная кинетическая энергия,  $E_{0P} = -\frac{q_1 |q_2|}{4\pi\epsilon_0 l}$  — начальная потенциальная энергия системы. Физический смысл этого результата таков: если начальная кинетическая энергия системы равна или превышает взятую с некоторым коэффициентом величину начальной потенциальной энергии притяжения зарядов, то шарики удаляются на бесконечно большое расстояние и никогда не сблизятся. Когда массы шариков соизмеримы, коэффициент  $\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)$  отличен от единицы. Это отражает тот факт, что начальная кинетическая энергия системы в процессе взаимодействия шариков перераспределяется между ними. Если неограниченно увеличивать массу  $m_1$  первоначально неподвижного шарика, то множитель  $\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)$  устремится к единице. Бесконечно тяжелый шарик будет оставаться неподвижным, и мы приходим к случаю движения тела около *неподвижного* силового центра. Напомним, что условие того, что тело, притягивающееся к неподвижному силовому центру, не удалится от него на бесконечность, имеет хорошо известный вид:  $E_{0K} < |E_{0P}|$ .

**3.1.14.** Металлическая сфера, имеющая небольшое отверстие, заряжена положительным зарядом  $Q$ . Первоначально незаряженные металлические шарики  $A$  и  $B$  расположены, как показано на рисунке. Радиус сферы равен  $R$ , радиусы каждого шарика  $r$ , расстояние  $AB \gg R$ . Определить заряды  $q_A$  и  $q_B$ , которые индуцируются на шариках, когда их соединяют проволокой, не касаясь сферы.



**Решение:** Рассмотрим вначале случай, когда шарики не соединены. При этом потенциал шарика  $B$  равен нулю:  $\varphi_B = 0$ , а потенциал шарика  $B$  равен потенциалу поверхности заряженной сферы:



$$\varphi_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Распределение потенциала внутри и вне сферы для этого случая изображено на рисунке сплошной линией (через  $x$  обозначено расстояние от центра сферы до точки наблюдения).

После соединения шариков проволокой их потенциалы выровняются:  $\varphi'_A = \varphi'_B$ , причем потенциал шарика  $A$  понизится, а потенциал шарика  $B$  повысится. Это произойдет за счет перетекания по проволоке некоторого заряда  $q$ . В результате на шарике  $A$  образуется заряд  $q_A$ , а на шарике  $B$  — заряд  $q_B$ , причем  $q_A = -q_B = -q$ . Имеем:

$$\varphi'_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{R} - \frac{q}{r} \right) = \varphi'_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Отсюда  $q = \frac{Qr}{2R}$ . Распределение потенциала внутри и вне сферы после соединения шариков проволокой изображено на рисунке штриховой линией. Ответ:  $q_A = -q_B = -\frac{Qr}{2R}$ .

**3.1.15.** Металлическим пластинам 1 и 2 сообщили положительные заряды  $Q_1 = 2 \cdot 10^{-6}$  Кл и  $Q_2 = 4 \cdot 10^{-6}$  Кл соответственно. Какие заряды  $Q'_1, Q''_1, Q'_2, Q''_2$  расположатся на боковых сторонах пластин?

**Решение:** Пренебрегая краевыми эффектами, будем считать, что заряды распределяются на боковых поверхностях пластин равномерно. Вводя для поверхностных плотностей зарядов обозначения, смысл которых ясен из рисунка, имеем:



$$\sigma'_1 = \frac{Q'_1}{S}, \quad \sigma''_1 = \frac{Q''_1}{S}, \quad \sigma'_2 = \frac{Q'_2}{S}, \quad \sigma''_2 = \frac{Q''_2}{S},$$

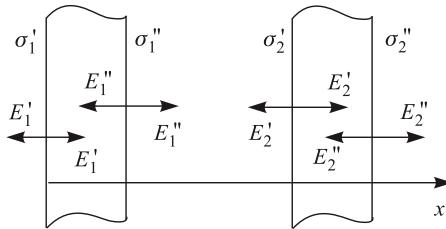
где  $S$  — площадь боковой поверхности каждой из пластин. Заряды с такими плотностями создают однородные электрические поля, перпендикулярные поверхностям пластин (см. рисунок). Величины напряженностей этих полей равны, соответственно,

$$E'_1 = \frac{\sigma'_1}{2\epsilon_0} = \frac{Q'_1}{2\epsilon_0 S}, \quad E''_1 = \frac{Q''_1}{2\epsilon_0 S}, \quad E'_2 = \frac{Q'_2}{2\epsilon_0 S}, \quad E''_2 = \frac{Q''_2}{2\epsilon_0 S}.$$

Распределение зарядов по боковым поверхностям пластин таково, что суммарные электрические поля в толще пластин обращаются в нуль. Записывая эти условия, имеем:

$$E'_1 - E''_1 - E'_2 - E''_2 = 0 \quad (\text{для пластины 1})$$

$$E'_1 + E''_1 + E'_2 - E''_2 = 0 \quad (\text{для пластины 2})$$



В результате получаем уравнения для зарядов:

$$\begin{aligned} Q'_1 - Q''_1 - Q'_2 - Q''_2 &= 0, \quad Q'_1 + Q''_1 + Q'_2 - Q''_2 = 0, \\ Q'_1 + Q''_1 &= Q_1, \quad Q'_2 + Q''_2 = Q_2 \end{aligned}$$

Разрешая эту систему из четырех уравнений относительно четырех неизвестных, находим:

$$Q'_1 = Q''_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{2}, \quad Q''_1 = -Q'_2 = \frac{Q_1 - Q_2}{2}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} Q''_1 = -Q'_2 &= \frac{Q_1 - Q_2}{2} = -10^{-6} \text{ Кл}, \\ Q'_1 = Q''_2 &= \frac{Q_1 + Q_2}{2} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}. \end{aligned}$$

**3.1.16.** Обкладки плоского воздушного конденсатора, подключенного к источнику постоянного напряжения, притягиваются с силой  $F_0$ . Какая сила  $F$  будет действовать на обкладки, если в зазор параллельно им вставить металлическую пластинку, толщина которой в  $n = 2$  раза меньше величины зазора, а остальные размеры совпадают с размерами обкладок?

**Решение:** Найдем вначале силу, с которой притягиваются друг к другу обкладки пустого конденсатора. При этом учтем, что каждая обкладка находится в однородном поле  $E'$ , создаваемом другой обкладкой и равном по величине половине поля  $E$  внутри конденсатора. Следовательно, искомая сила равна

$$F_0 = qE' = q\frac{E}{2} = q\frac{U}{2d} = \frac{CU^2}{2d}.$$

Здесь  $q = CU$  — величина заряда на обкладках пустого конденсатора,  $U$  — напряжение на конденсаторе, равное напряжению на зажимах источника,  $C = \epsilon_0 S/d$  — емкость пустого конденсатора,  $d$  — расстояние между обкладками,  $S$  — площадь одной из них. При внесении металлической пластины в пространство между обкладками напряжение на конденсаторе не изменится, а напряженность поля возрастет, т.к. источник доставит на обкладки дополнительные заряды. Поскольку

внутри пластины поле всегда равно нулю, внесение ее внутрь конденсатора эквивалентно уменьшению расстояния между обкладками  $d$  на величину  $d/n$ . В результате емкость конденсатора после внесения пластины станет равной

$$C' = \frac{\varepsilon_0 S}{d - \frac{d}{n}} = \frac{\varepsilon_0 S n}{d(n-1)} = C \cdot \frac{n}{n-1}.$$

Вследствие этого сила притяжения между обкладками также изменится:

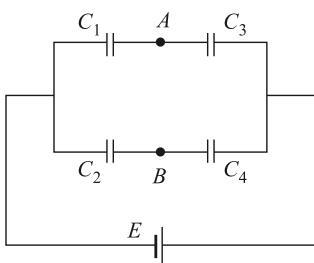
$$F = \frac{C' U^2}{2 \left( d - \frac{d}{n} \right)} = \frac{C U^2}{2d} \cdot \frac{n^2}{(n-1)^2}.$$

Сравнивая последнее выражение с выражением для  $F_0$ , получаем ответ:

$$F = F_0 \frac{n^2}{(n-1)^2} = 4F_0.$$

**3.1.17.** На рисунке изображена батарея конденсаторов, подключенная к гальваническому элементу с ЭДС  $E$ . Емкости конденсаторов

равны:  $C_1 = C$ ,  $C_2 = 2C$ ,  $C_3 = 3C$ ,  $C_4 = 6C$ . Чему равна разность потенциалов  $U$  между точками  $A$  и  $B$ ? Считать, что до подключения к источнику все конденсаторы были незаряжены.



**Решение:** Обозначим через  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$ ,  $U_4$  напряжения на конденсаторах  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  соответственно. Тогда величина искомой разности потенциалов выразится как  $U = |U_1 - U_2| = |U_3 - U_4|$ . Исходя из этого,

найдем напряжения на конденсаторах, зная их емкости и ЭДС источника. Имеем следующую систему уравнений:

$$U_1 + U_3 = E, \quad C_1 U_1 = C_3 U_3,$$

$$U_2 + U_4 = E, \quad C_2 U_2 = C_4 U_4.$$

Разрешая ее, получаем:

$$U_1 = \frac{EC_3}{C_1 + C_3}, \quad U_2 = \frac{EC_4}{C_2 + C_4}, \quad U_3 = \frac{EC_1}{C_1 + C_3}, \quad U_4 = \frac{EC_2}{C_2 + C_4}.$$

Ответ:  $U = E \frac{|C_2 C_3 - C_1 C_4|}{(C_1 + C_3)(C_2 + C_4)} = 0$ .

**3.1.18.** Два плоских конденсатора заряжены: первый до разности потенциалов  $U_1$ , второй — до разности потенциалов  $U_2$ . Площади пластин конденсаторов соответственно:  $S_1$  у первого и  $S_2$  у второго, расстояние между пластинами у обоих конденсаторов одинаково. Чему

будет равно напряжение на конденсаторах  $U$ , если соединить их одновременно заряженные обкладки?

**Решение:** Обозначим через  $C_1$  и  $C_2$  емкости конденсаторов. Если  $d$  — расстояние между их обкладками, то

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 S_1}{d}, \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 S_2}{d}.$$

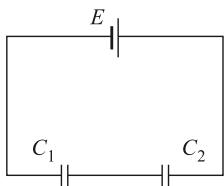
Заряды на конденсаторах до соединения равны, соответственно:  $q_1 = C_1 U_1$ ,  $q_2 = C_2 U_2$ . В силу закона сохранения заряда, при соединении обкладок алгебраическая сумма зарядов на каждой паре останется без изменения. Поскольку после соединения обкладок напряжения на конденсаторах станут одинаковыми, их можно рассматривать как два параллельно соединенных конденсатора с общей емкостью  $C = C_1 + C_2$ . Общий заряд на этих конденсаторах  $q = q_1 + q_2$ , а напряжение  $U = q/C$ . Объединяя записанные соотношения, получаем:

$$U = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2}.$$

Учитывая выражения для емкостей конденсаторов, находим ответ:

$$U = \frac{U_1 S_1 + U_2 S_2}{S_1 + S_2}.$$

**3.1.19.** К источнику с ЭДС  $E$  последовательно подключены два конденсатора с емкостью  $C_1$  и  $C_2$ . После зарядки конденсаторов источник отключают, а параллельно конденсатору  $C_1$  подключают через резистор незаряженный конденсатор емкостью  $C_3$ . Какое количество теплоты  $Q$  выделится на резисторе в процессе зарядки конденсатора  $C_3$ ?

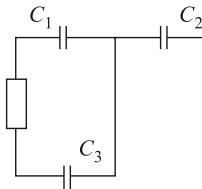


**Решение:** При подключении к источнику двух последовательно соединенных конденсаторов (см. рисунок а)), они заряжаются до напряжений  $U_1$  и  $U_2$ , для которых справедлива система уравнений:

$$U_1 + U_2 = E, \quad C_1 U_1 = C_2 U_2.$$

$$\text{Отсюда } U_1 = \frac{EC_2}{C_1 + C_2}, \quad U_2 = \frac{EC_1}{C_1 + C_2}.$$

После отключения источника напряжение и заряд на конденсаторе  $C_2$  меняться не будут. Не изменится также запасенная в нем энергия. В то же время, при подключении к заряженному до напряжения  $U_1$  конденсатору  $C_1$  незаряженного конденсатора  $C_3$  в образовавшейся цепи



(см. рисунок б)) произойдет перераспределение зарядов, в результате чего на резисторе выделится некоторая энергия. Используя решение задачи 3.1.18, находим напряжение  $U$  на этих конденсаторах после перезарядки:

$$U = \frac{C_1 U_1}{C_1 + C_3} = \frac{C_1 C_2 E}{(C_1 + C_2)(C_1 + C_3)}.$$

Начальная энергия конденсатора  $C_1$  и конечная энергия системы из двух конденсаторов  $C_1$  и  $C_3$ , соответственно равны:

$$W_1 = \frac{C_1 U_1^2}{2} = \frac{C_1 C_2^2 E^2}{2(C_1 + C_2)^2}, \quad W = \frac{(C_1 + C_3) U^2}{2} = \frac{C_1^2 C_2^2 E^2}{2(C_1 + C_2)^2 (C_1 + C_3)}.$$

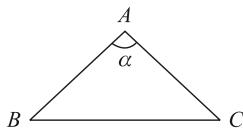
Разность между этими значениями равна количеству выделившейся на резисторе теплоты:  $Q = W_1 - W$ . Отсюда после несложных преобразований получаем ответ:  $Q = \frac{C_1 C_2^2 C_3 E^2}{2(C_1 + C_2)^2 (C_1 + C_3)}$ .

## Задание для самостоятельной работы

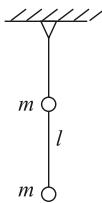
**3.1.20.** В окружность радиуса  $R = 3$  см с центром в точке  $O$  вписан правильный восьмиугольник  $ABCDEFGH$ . В шести вершинах восьмиугольника помещены одинаковые положительные заряды так, что вектор  $\vec{E}_0$  напряженности в точке  $O$  направлен по отрезку  $OH$ . Чему равна величина поля  $E_0$ , если величина каждого из зарядов  $q = 10^{-9}$  Кл? Электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \Phi/\text{м}$ .

**3.1.21.** Три положительных точечных электрических заряда находятся в вакууме и расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной  $a = 1$  м. Силы отталкивания зарядов равны: первого и второго:  $F_{12} = 1$  Н, первого и третьего:  $F_{13} = 2$  Н, второго и третьего:  $F_{23} = 3$  Н. Вычислить величину заряда  $q_3$ . Электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \Phi/\text{м}$ .

**3.1.22.** Три одинаковых заряда расположены в вершинах равнобедренного треугольника с углом  $\alpha = 90^\circ$  при вершине  $A$ . Во сколько раз  $k$  изменится величина силы, действующей на заряд в точке  $A$ , если знак заряда в точке  $C$  изменить на противоположный?



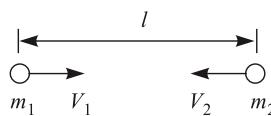
**3.1.23.** Два одинаковых маленьких шарика массами  $m = 10$  г, заряженные одинаковыми зарядами  $q = 2 \cdot 10^{-6}$  Кл, закреплены на непроводящей нити, подвешенной на штативе. При какой длине  $l$  отрезка нити между шариками оба отрезка нити (верхний и нижний) будут испытывать одинаковое натяжение? Электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \Phi/\text{м}$ , ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .



**3.1.24.** По наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом, соскальзывает с высоты  $h$  небольшое тело, заряженное отрицательным зарядом  $-q$ . В точке пересечения вертикали, проведенной через начальное положение тела, с основанием наклонной плоскости находится заряд  $+q$ . Определить скорость, с которой тело достигнет

основания наклонной плоскости. Масса тела  $M$ , ускорение свободного падения  $g$ . Трением пренебречь.

**3.1.25.** Два маленьких шарика массами  $m_1 = 6$  г и  $m_2 = 4$  г несут заряды  $q_1 = 10^{-6}$  Кл и  $q_2 = 5 \cdot 10^{-6}$  Кл соответственно. В начальный момент они движутся навстречу друг другу по прямой, соединяющей их центры. При этом расстояние между шариками составляет  $l = 2$  м и их скорости равны  $V_1 = 1$  м/с и  $V_2 = 2$  м/с соответственно. На какое минимальное расстояние  $L$  приблизятся шарики друг к другу? Силу тяжести не учитывать. Электрическую постоянную принять  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \Phi/\text{м}$ .



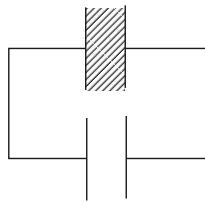
**3.1.26.** В двух одинаковых плоских конденсаторах пространство между обкладками заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 3$ , в одном наполовину, в другом полностью. Найти отношение емкостей  $\alpha$  конденсаторов.

**3.1.27.** Первоначально незаряженные конденсаторы  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  соединили по схеме, изображенной на рисунке. Затем конденсаторы зарядили так, что на клеммах схемы образовались потенциалы  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ . Определить потенциал  $\varphi_0$  точки О.

**3.1.28.** В схеме, показанной на рисунке, емкости конденсаторов равны:  $C_1 = 1$  мкФ,  $C_2 = 2$  мкФ,  $C_3 = 3$  мкФ,  $C_4 = 4$  мкФ. Напряжение между точками  $A$  и  $B$  равно  $U = 100$  В. Найти напряжение  $U_4$  на конденсаторе  $C_4$ . Первоначально конденсаторы были не заряжены.

**3.1.29.** Два плоских конденсатора имеют одинаковую емкость. В один из них вставили пластинку с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 6$ , заполняющую весь объем между обкладками, и зарядили этот конденсатор так, что запасенная в нем энергия составила  $W_0 = 2 \times 10^{-6}$  Дж. Отсоединив источник, пластинку удалили и к заряженному конденсатору подсоединили второй, незаряженный конденсатор. Найти энергию  $W$ , которая будет запасена в конденсаторах после их перезарядки.

**3.1.30.** Два одинаковых плоских конденсатора, один из которых заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , соединены как показано на рисунке и заряжены до напряжения  $U_0$ . Какую



работу  $A$  нужно совершить, чтобы вытащить диэлектрическую пластиночку из конденсатора? Емкость пустого конденсатора равна  $C$ .

**3.1.31.** Конденсатор емкостью  $C = 15 \text{ пФ}$  зарядили до разности потенциалов  $U = 100 \text{ В}$  и отключили от источника. Затем пространство между обкладками заполнили диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 1,5$ . Определить, на какую величину  $\Delta W$  изменится энергия конденсатора.

## **3.2. Постоянный ток**

### **Вопросы программы**

1. Электрический ток. Сила тока. Условия существования постоянного тока в цепи. Электродвижущая сила (ЭДС). Напряжение. Измерение силы тока и напряжения.
2. Закон Ома для участка цепи. Омическое сопротивление проводника. Удельное сопротивление. Зависимость удельного сопротивления от температуры. Сверхпроводимость. Последовательное и параллельное соединение проводников. Измерение сопротивления.
3. Закон Ома для полной цепи. Источники тока, их соединение. Правила Кирхгофа.
4. Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца.
5. Электрический ток в металлах.
6. Электрический ток в электролитах. Законы электролиза.
7. Электрический ток в вакууме. Термоэлектронная эмиссия.
8. Электронная лампа — диод. Электронно-лучевая трубка.
9. Полупроводники. Собственная и примесная проводимость полупроводников. Зависимость проводимости полупроводников от температуры. Р-п переход и его свойства. Полупроводниковый диод. Транзистор. Термистор и фоторезистор.
10. Электрический ток в газах. Самостоятельный и несамостоятельный разряды. Понятие о плазме.

### **Определения, понятия и законы**

**Электрический ток** — это упорядоченное движение электрических зарядов. Направлением электрического тока принято считать направление упорядоченного движения положительных зарядов. В металлах

свободные заряды (электроны) отрицательны и направление их движения противоположно условно принятому за положительное. В теории электрических цепей это не играет роли, поскольку все законы для квазистационарных токов имеют одну и ту же форму независимо от реального направления движения зарядов.

**Силой тока** называется скалярная величина  $I$ , равная отношению величины заряда  $\Delta q$ , переносимого через поперечное сечение проводника за промежуток времени  $\Delta t$ , к этому промежутку:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = en\bar{v}S, \quad (3.2.1)$$

где  $e$  — величина заряда одной частицы,  $n$  — концентрации частиц,  $\bar{v}$  — средняя скорость упорядоченного движения частиц,  $S$  — площадь поперечного сечения проводника.

Сила тока представляет собой одну из основных величин Международной системы единиц; она измеряется в амперах(А). 1 А — это сила такого тока, который, проходя по двум прямолинейным параллельным бесконечным проводникам, расположенным на расстоянии 1 м друг от друга, вызывает на каждом участке длиной 1 м силу взаимодействия  $2 \cdot 10^{-7}$  Н.

**Условия существования постоянного тока в цепи.** Ток, сила и направление которого сохраняются с течением времени неизменными, называется постоянным. Для того, чтобы в проводнике мог существовать постоянный ток, необходимо выполнение следующих условий:

1. напряженность электрического поля в проводнике должна быть отлична от нуля и не должна изменяться с течением времени;
2. цепь постоянного тока должна быть замкнутой;
3. на свободные электрические заряды, помимо кулоновских сил, должны действовать неэлектростатические силы, называемые *сторонними силами*.

Сторонние силы создаются источниками тока (гальваническими элементами, аккумуляторами, индукционными генераторами и др.). Под действием сторонних сил электрические заряды движутся внутри источника тока в направлении, противоположном действию сил электростатического поля. Благодаря этому на концах внешней цепи поддерживается постоянная разность потенциалов и в цепи идет постоянный ток. Работа, которая нужна для обеспечения постоянного электрического тока в цепи, совершается источником.

**Электродвижущей силой** (ЭДС)  $\mathcal{E}$ , действующей на участке цепи, называется физическая величина, численно равная работе, которую со-

вершают сторонние силы по перемещению единичного положительного заряда на этом участке:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{ст}}}{q}. \quad (3.2.2)$$

ЭДС источника равна разности потенциалов на его клеммах при разомкнутой внешней цепи.

**Напряжение.** Участок электрической цепи, на котором электрический ток создается только электростатическим (кулоновским) полем, называется однородным. *Напряжение на однородном участке* цепи равно разности потенциалов его концов:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (3.2.3)$$

Если на участке цепи кроме кулоновских сил на заряды действуют сторонние силы, то он называется неоднородным. *Напряжение на неоднородном участке* цепи равно алгебраической сумме разности потенциалов и ЭДС на этом участке и вычисляется по формуле:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}. \quad (3.2.4)$$

*Измерения тока и напряжения в цепи* проводятся при помощи специальных приборов: *амперметра* и *вольтметра*. Их работа основывается на магнитном действии тока (см. раздел 3.3).

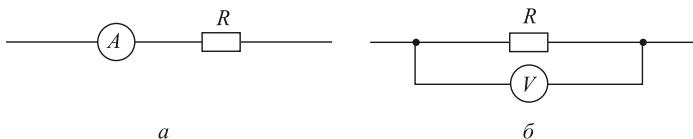


Рис. 3.2.1. Схема измерения силы тока в цепи (а) и схема измерения напряжения на участке цепи (б)

Для измерения силы тока в цепи амперметр включают в эту цепь *последовательно* (рис. 3.2.1, а). Поскольку любой амперметр обладает некоторым сопротивлением, его включение меняет сопротивление цепи и ток в ней. Чтобы амперметр оказывал как можно меньшее влияние на силу тока, измеряемую им, его сопротивление делают очень малым. Для увеличения диапазона измеряемых токов (уменьшения чувствительности амперметра) в  $m$  раз параллельно амперметру нужно подключить шунтирующее сопротивление  $R_{\text{ш}}$ :

$$R_{\text{ш}} = \frac{R_A}{m-1}, \quad (3.2.5)$$

где  $R_A$  — сопротивление амперметра.

Для того, чтобы измерить напряжение на участке цепи, к нему *параллельно* подключают вольтметр (рис. 3.2.1, б). Напряжение на

вольтметре совпадает с напряжением на участке цепи. Однако, поскольку сопротивление любого вольтметра конечно, его включение в цепь меняет сопротивление самого участка цепи. Из-за этого измеряемое напряжение на участке цепи уменьшится. Для того, чтобы вольтметр не вносил заметных искажений в измеряемое напряжение, его сопротивление должно быть как можно больше. Для увеличения диапазона измеряемых напряжений (уменьшения чувствительности вольтметра) в  $m$  раз последовательно к вольтметру необходимо подключить дополнительное сопротивление  $R_d$ :

$$R_d = R_B(m - 1), \quad (3.2.6)$$

где  $R_B$  — сопротивление вольтметра.

**Закон Ома для участка цепи** устанавливает зависимость между напряжением  $U$ , током на этом участке  $I$  и его сопротивлением  $R$ . Для участка цепи, не содержащего ЭДС (однородного участка цепи), этот закон имеет вид

$$I = \frac{U}{R}. \quad (3.2.7)$$

В этом случае напряжение  $U$  совпадает с разностью потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ , поддерживаемой на концах участка, поэтому закон Ома можно записать также в виде:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}. \quad (3.2.8)$$

Величину  $IR$ , равную произведению тока на сопротивление однородного участка цепи, называют падением напряжения на этом участке.

Для участка цепи, содержащего ЭДС (неоднородного участка цепи), закон Ома выражается формулой

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}}{R}. \quad (3.2.9)$$

Здесь  $\mathcal{E}$  — ЭДС, действующая на участке цепи,  $R$  — полное сопротивление участка с учетом внутреннего сопротивления источника. Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС, часто записывают также в виде:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR - \mathcal{E}. \quad (3.2.10)$$

Для того чтобы применять формулы (3.2.9), (3.2.10) на практике, нужно придерживаться следующих правил знаков. ЭДС считается положительной, если заряд внутри источника перемещается от отрицательного полюса к положительному. Знак разности потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  определяется тем, что больше,  $\varphi_1$  или  $\varphi_2$ .

Для участка цепи, изображенного на рис. 3.2.2, *a*, ЭДС источника и падение напряжения  $Ir$  на внутреннем сопротивлении источника  $r$  положительны. При этом потенциал точки 1 (начала участка) ниже

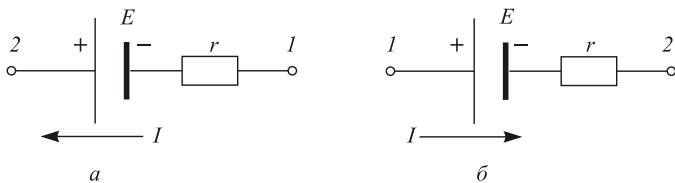


Рис. 3.2.2. Закон Ома для неоднородного участка цепи

потенциала точки 2 (конца участка), поэтому закон Ома для этого участка имеет вид:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \mathcal{E} - Ir. \quad (3.2.11)$$

Если другие участки цепи также содержат источники тока, то на рассматриваемом участке возможно противоположное направление тока внутри источника (рис. 3.2.2, б). Для этого участка ЭДС отрицательна, падение напряжения на внутреннем сопротивлении источника положительно, и потенциал точки 1 выше потенциала точки 2. Закон Ома для такого участка имеет вид:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \mathcal{E} + Ir. \quad (3.2.12)$$

**Омическое сопротивление проводников. Удельное сопротивление. Зависимость удельного сопротивления от температуры.** Сопротивление является основной электрической характеристикой проводника. Сопротивление металлического проводника на участке неразветвленной цепи зависит от материала проводника, его геометрической формы и размеров, а также от температуры. Для однородного проводника длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $S$  сопротивление  $R$  равно

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (3.2.13)$$

где  $\rho$  — *удельное сопротивление* материала, из которого изготовлен проводник. Удельное сопротивление проводников зависит от температуры:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad (3.2.14)$$

где  $\rho_0$  — удельное сопротивление при  $0^\circ\text{C}$ ,  $t$  — температура по шкале Цельсия,  $\alpha$  — температурный коэффициент сопротивления.

Для всех металлов  $\alpha > 0$ , а для электролитов  $\alpha < 0$ , т. е. с возрастанием температуры сопротивление металлов возрастает, а электролитов — падает.

Единица электрического сопротивления в СИ — *ом* (Ом). Электрическим сопротивлением 1 Ом обладает такой участок цепи, на котором при силе тока 1 А напряжение равно 1 В:  $1 \text{ Ом} = 1 \text{ В}/1 \text{ А}$ .

**Сверхпроводимость.** Явление *сверхпроводимости*, которое обнаруживается у некоторых металлов и сплавов, заключается в том, что

ниже некоторой температуры (температуры  $T_{\text{кр}}$  перехода в сверхпроводящее состояние) удельное сопротивление этих веществ становится исчезающе малым. Температуры  $T_{\text{кр}}$  для чистых металлов составляют порядка нескольких градусов по шкале Кельвина. Следует подчеркнуть, что переход в сверхпроводящее состояние происходит не плавно с уменьшением температуры проводника, а скачком при достижении проводником температуры  $T_{\text{кр}}$ .

В настоящее время явление сверхпроводимости используется для получения сверхсильных магнитных полей. На явлении сверхпроводимости основан принцип действия элементов памяти современных суперкомпьютеров. Разрабатываются проекты и других практических применений этого явления.

**Последовательное и параллельное соединение проводников.** При составлении электрической цепи проводники могут соединяться последовательно и параллельно.

При *последовательном* соединении проводников сила тока во всех частях цепи одинакова, напряжение на концах цепи равно сумме напряжений на отдельных участках, напряжения на отдельных проводниках прямо пропорциональны их сопротивлениям. *Общее сопротивление*  $R_0$  цепи, состоящей из  $n$  последовательно соединенных проводников, равно *сумме сопротивлений отдельных проводников*:

$$R_0 = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i, \quad (3.2.15)$$

При *параллельном* соединении проводников сила тока в неразветвленной части цепи равна сумме токов, текущих в разветвлениях, напряжения на параллельно соединенных участках одинаковы, токи в участках разветвленной цепи обратно пропорциональны их сопротивлениям. *Проводимость* (величина, обратная сопротивлению) цепи, состоящей из  $n$  параллельно соединенных проводников, равна *сумме проводимостей всех проводников*:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (3.2.16)$$

**Измерение сопротивления** какого-либо проводника может быть проведено с помощью источника тока, амперметра и вольтметра. Включив в цепь постоянного тока приборы, соединенные по схеме, изображенной на рис. 3.2.3, *a*, можно по формуле

$$R'_x = \frac{U}{I} \quad (3.2.17)$$

определить значение сопротивления участка цепи между точками *B* и *C*. Однако  $R'_x$  больше искомого сопротивления  $R_x$  на величину

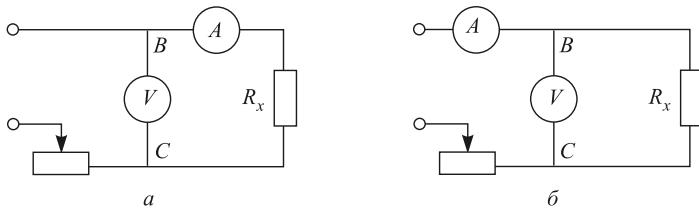


Рис. 3.2.3. Схема измерения сопротивления участка цепи

сопротивления амперметра, так как вольтметр измеряет сумму напряжений на резисторе и амперметре. Этую схему следует применять при измерении сопротивлений, значительно превышающих сопротивление амперметра.

Соединив приборы по схеме, изображенной на рис. 3.2.3, б, можно по формуле, аналогичной (3.2.17), определить значение сопротивления  $R''_x$  участка цепи  $BC$ . Однако  $R''_x$  теперь меньше искомого сопротивления  $R_x$ , так как сила тока, измеряемая амперметром, равна сумме сил токов в резисторе и вольтметре. Этой схемой следует пользоваться при измерении сопротивлений, значительно меньших сопротивления вольтметра.

**Закон Ома для полной** цепи (рис. 3.2.4), состоящей из источника тока с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$  и внешнего сопротивле-

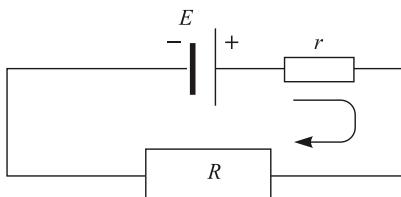


Рис. 3.2.4. Закон Ома для полной цепи

ния  $R$ , гласит: сила тока в замкнутой цепи равна отношению ЭДС в цепи к полному сопротивлению цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}, \quad (3.2.18)$$

**Источники тока, их соединение.** Источники тока в электрических цепях могут быть соединены по разному. Наиболее употребительны на практике два способа соединения источников в батарею: последовательное и параллельное соединения.

При *последовательном* соединении источников ЭДС образовавшейся батареи равна алгебраической сумме ЭДС источников, а ее внутреннее сопротивление — сумме внутренних сопротивлений источников. Для определения знака какой-либо ЭДС нужно рассмотреть направле-

ние тока, текущего через соответствующий источник. Если ток течет внутри источника от отрицательного полюса к положительному, то ЭДС берется со знаком «+», если наоборот, то со знаком «-».

При *параллельном* соединении обычно используют одинаковые источники, включая их в батарею с одной и той же полярностью. В этом случае ЭДС батареи равна ЭДС одного источника, а внутреннее сопротивление батареи в  $n$  раз меньше внутреннего сопротивления источника (здесь  $n$  — число источников). Параллельные соединения *разных* источников как правило *не используются*.

**Правила Кирхгофа.** При расчете электрических цепей, содержащих разветвления с включенными в них источниками тока, удобно пользоваться *правилами Кирхгофа*:

- 1) В каждом узле цепи сумма втекающих токов равна сумме вытекающих токов, иными словами, алгебраическая сумма всех токов в каждом узле равна нулю.
- 2) В любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной цепи, алгебраическая сумма ЭДС источников равна сумме всех падений напряжения, включая падения напряжения внутри источников.

При использовании правил Кирхгофа, для каждого контура цепи выбирают произвольное направление обхода. При этом ЭДС источника считается положительной, если обход данного источника производится в направлении от отрицательного полюса к положительному. Ток считается положительным, если он совпадает с направлением обхода контура. Если какой либо элемент цепи является общим для нескольких контуров, то падение напряжения на этом элементе определяется алгебраической суммой всех токов, протекающих через него.

Произвольные замкнутые контуры выделяются так, чтобы каждый новый контур содержал по крайней мере один участок цепи, не входящий в ранее рассмотренные контуры. При этом число независимых уравнений относительно токов в цепи должно совпасть с числом неизвестных.

**Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца.** При перемещении зарядов вдоль электрической цепи кулоновские и сторонние силы совершают работу, которую принято называть работой тока. Энергия  $W$ , которая выделяется в неподвижном проводнике за время  $t$ , равна совершенной током работе  $A$ :

$$W = A = qU = IUt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t, \quad (3.2.19)$$

где  $q$  — заряд, перенесенный по проводнику за время  $t$ ,  $I$  — ток в проводнике,  $R$  — сопротивление проводника,  $U$  — напряжение между его концами. Если на данном участке цепи не совершается механическая

работа и ток не производит химического действия, происходит только нагрев проводника. Выделенная энергия необратимо преобразуется в тепло. Закон, определяющий количество теплоты, которое выделяет проводник с током в окружающую среду, был впервые установлен экспериментально английским ученым Д. Джоулем и русским ученым Э.Х. Ленцем. *Закон Джоуля-Ленца* был сформулирован следующим образом: количество теплоты, выделяемой током, протекающим на некотором участке цепи, равно произведению квадрата силы тока, сопротивления этого участка и времени прохождения тока:

$$Q = I^2 R t. \quad (3.2.20)$$

*Мощность тока*, выделяемая на участке цепи,

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (3.2.21)$$

Мощность, развиваемая источником с ЭДС  $\mathcal{E}$ , равна

$$P = \mathcal{E} I \quad (3.2.22)$$

Коэффициент полезного действия электрической цепи определяется как отношение полезной мощности, выделяемой в нагрузке, к полной мощности, развиваемой источником в цепи.

**Электрический ток в металлах.** Все металлы в твердом и жидким состоянии являются проводниками электрического тока. Экспериментально установлено, что носителями свободных зарядов в металлах являются свободные электроны. Соответствующие опыты были выполнены в 1913 — 1916 годах русскими физиками Л.И. Мандельштамом и Н.Д. Папалекси, а также американскими физиками Б. Стюартом и Р. Толменом. В этих опытах было обнаружено, что при резкой остановке быстро вращающейся катушки с проводом в ней возникает кратковременный электрический ток. Направление тока говорит о том, что он создается движением отрицательно заряженных частиц. Измерение заряда, протекшего в цепи катушки при торможении, дало возможность определить отношение заряда этих частиц к их массе, которое совпало с соответствующим отношением для электрона, измеренным ранее другим способом.

Концентрация свободных электронов в металлах весьма велика — порядка  $10^{22}$  см<sup>-3</sup>. В отсутствие внешнего электрического поля эти электроны движутся в металле хаотически. Под действием электрического поля они, кроме хаотического движения, приобретают упорядоченное движение в определенном направлении. Средняя скорость упорядоченного движения электронов составляет доли сантиметров в секунду. Свободные электроны сталкиваются с ионами кристаллической решетки, отдавая им при каждом столкновении часть кинетической энергии, приобретенной при свободном пробеге под действием

электрического поля. В результате упорядоченное движение электронов в металле можно рассматривать как равномерное движение с некоторой постоянной скоростью, пропорциональной напряженности внешнего электрического поля и, следовательно, разности потенциалов на концах проводника. В этом состоит качественное объяснение закона Ома на основе электронной теории проводимости металлов. Построить количественную теорию движения электронов в металле на основе законов классической механики невозможно.

Так как часть кинетической энергии электронов, приобретаемой ими под действием электрического поля, передается при столкновениях ионам кристаллической решетки, то при прохождении электрического тока проводник нагревается.

Малые значения скорости упорядоченного движения свободных электронов в проводниках не приводят к запаздыванию возникновения тока в цепи. При замыкании цепи вдоль проводов со скоростью света распространяется электромагнитное поле, которое приводит в движение свободные электроны практически одновременно во всех точках цепи.

**Электрический ток в электролитах.** Электролитами называются вещества, в которых электрический ток осуществляется посредством ионной проводимости, т.е. упорядоченного движения ионов под действием внешнего электрического поля. Электролитами являются растворы кислот, щелочей и солей, а также расплавленные соли. Электрическое поле, вызывающее упорядоченное движение ионов, создается в жидкости электродами — проводниками, соединенными с источником тока. Положительно заряженный электрод называется анодом, отрицательно заряженный — катодом. Положительные ионы (катионы) — ионы металлов и водородные ионы — движутся к катоду, отрицательные ионы (анионы) — кислотные остатки и гидроксильные группы OH — движутся к аноду.

Прохождение электрического тока через электролиты сопровождается электролизом — выделением на электродах веществ, входящих в состав электролита. Электролиты иначе называются проводниками II рода. В них ток связан с переносом вещества, в отличие от проводников I рода — металлов, в которых носителями тока являются свободные электроны.

Возникновение ионов в электролитах объясняется явлением электролитической диссоциации — распадом молекул растворенного вещества на положительные и отрицательные ионы в результате взаимодействия с растворителем. Молекулы растворяемых веществ состоят из взаимосвязанных ионов противоположного знака (например,  $\text{Na}^+\text{Cl}^-$ ,  $\text{H}^+\text{Cl}^-$ ,  $\text{K}^+\text{I}^-$ ,  $\text{Cu}^{++}\text{SO}_4^-$  и т.д.). Взаимодействие этих молекул с молекулами растворителя (например, воды) приводит к ослаблению взаимного притяжения противоположно заряженных ионов. При тепловом

движении молекул растворенных веществ и растворителей происходят их столкновения, которые приводят к распаду молекул на ионы. Одновременно происходит процесс воссоединения (рекомбинации) ионов противоположных знаков в нейтральные молекулы. Между процессами диссоциации и рекомбинации ионов при неизменных внешних условиях устанавливается динамическое равновесие.

Ионы в электролитах движутся хаотически до тех пор, пока к электродам не прикладывается напряжение. Тогда на хаотическое движение ионов накладывается их упорядоченное движение к соответствующим электродам и в жидкости возникает электрический ток. Плотность электрического тока в электролитах подчиняется закону Ома. Однако выражение для удельной электропроводности электролитов имеет более сложный вид, чем для металлов.

**Законы электролиза.** Первый закон электролиза (первый закон Фарадея) гласит: масса вещества, выделившегося на электроде, прямо пропорциональна электрическому заряду  $q$ , прошедшему через электролит:

$$m = kq = kIt, \quad (3.2.23)$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности, называемый электрохимическим эквивалентом вещества.

Согласно второму закону электролиза (второму закону Фарадея), электрохимические эквиваленты веществ прямо пропорциональны отношению их атомных (молярных) масс  $A$  к валентности  $n$ :

$$k = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n}. \quad (3.2.24)$$

Величина  $F = 9,648 \cdot 10^4$  Кл/моль называется постоянной Фарадея. Часто эти два закона формулируют в виде *объединенного закона электролиза (закона Фарадея)*:

$$m = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n} \cdot It. \quad (3.2.25)$$

**Электрический ток в вакууме.** Вакуумом называется такое разреженное состояние газа, при котором средняя длина свободного пробега молекул превышает размеры сосуда, в котором находится газ. Процессы ионизации молекул газа в состоянии вакуума не могут обеспечить такого числа электронов и положительных ионов, которое необходимо для электропроводности межэлектродного промежутка. Поэтому электрический ток в вакууме возможен лишь при наличии заряженных частиц, возникших в результате их эмиссии с электродов.

**Термоэлектронная эмиссия.** Термоэлектронной эмиссией называется испускание электронов с поверхности тел, нагретых до высокой температуры. У многих твердых тел термоэлектронная эмиссия на-

чинается при температурах, при которых испарение самого вещества еще не происходит. Такие вещества и используют для изготовления нагреваемых электродов. Вокруг нагретого электрода, помещенного в вакуум, образуется электронное «облако». Электрод при этом заряжается положительно, и под действием возникающего электрического поля электроны из облака частично возвращаются на электрод. В равновесном состоянии число электронов, покинувших электрод в единицу времени, в среднем равно числу электронов, возвратившихся на электрод за это же время. Чем выше температура электрода, тем выше плотность электронного облака. Для получения достаточно интенсивной эмиссии электроды нагревают до температуры, соответствующей видимому свечению раскаленного металла.

**Электронная лампа — диод.** Термоэлектронная эмиссия используется в различных электронных приборах. Простейший из них — *вакуумный диод*. Этот прибор состоит из стеклянного или керамического баллона, в который вмонтированы два электрода: катод и анод (рис. 3.2.5). Воздух внутри баллона обычно откачивается до давления  $10^{-6} - 10^{-7}$  мм рт. ст. Анод представляет собой металлическую пластину, внутри катода помещена изолированная от него тонкая металлическая проволока, свернутая в спираль (нить накала). Концы спирали имеют выводы для подключения в электрическую цепь. Ток в цепи накала вызывает нагрев катода до достаточно высокой температуры.

Катод обычно покрывают слоем оксидов щелочноземельных металлов (бария, стронция, кальция). Это связано с тем, что при нагревании поверхность оксидного катода выделяет гораздо больше электронов, чем поверхность чистого металла.

Основное свойство вакуумного диода — это односторонняя проводимость. При подключении источника тока положительным полюсом к аноду и отрицательным полюсом к катоду электроны, испускаемые нагретым катодом, движутся под действием электрического поля к аноду — в цепи течет электрический ток. При подключении к диоду источника с обратной полярностью электрическое поле препятствует движению электронов от катода к аноду и ток в цепи не течет. Свойство односторонней проводимости диода используется для преобразования переменного тока в постоянный (выпрямления переменного тока), а также для других целей.

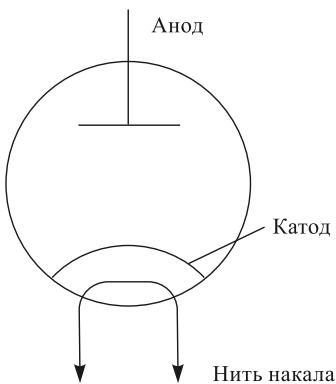


Рис. 3.2.5. Вакуумный диод

**Электронно-лучевая трубка.** Основным элементом телевизора, дисплея и осциллографа является электронно-лучевая трубка. Устройство электронно-лучевой трубы показано на рис. 3.2.6. В аноде 2 сделано отверстие, через которое часть электронов, испущенных подогревным катодом 1, пролетает в пространство за анодом и образует электронный пучок 5. Форма, расположение и потенциал анода выбира-

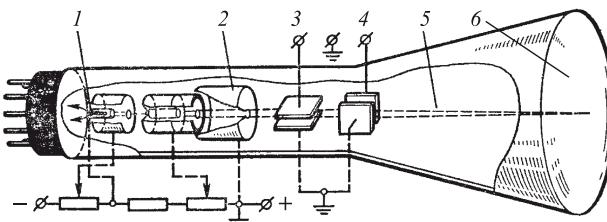


Рис. 3.2.6. Электронно-лучевая трубка

ются так, чтобы наряду с ускорением электронов осуществлялась также фокусировка пучка. Внутренняя поверхность стеклянного баллона электронно-лучевой трубы напротив анода покрыта люминофором — веществом, способным светиться при бомбардировке электронами. Эту часть трубы называют экраном (6). На пути к экрану пучок последовательно проходит между двумя парами управляющих пластин 4, 5. Если электрического поля между пластинами нет, то пучок не отклоняется и светящаяся точка располагается в центре экрана. При подаче на управляющие пластины разности потенциалов пучок отклоняется, и светящаяся точка на экране смещается в требуемом направлении. Так как масса электронов очень мала, у электронного пучка практически отсутствует инерция и он почти мгновенно реагирует на изменение управляющих разностей потенциалов. Изменение яркости свечения пятна достигается путем управления интенсивностью электронного пучка с помощью специального электрода, расположенного между катодом и анодом. Подобное устройство электронно-лучевой трубы открывает возможности использования ее для получения на экране быстро сменяющихся изображений.

**Полупроводники.** Полупроводниками называются вещества, удельное электрическое сопротивление которых может изменяться в широких пределах и быстро убывает с повышением температуры. Типичными, широко применяемыми полупроводниками являются германий Ge, кремний Si, теллур Te. Эти химические элементы принадлежат к IV и VI группам периодической системы элементов Менделеева. Кристаллы полупроводников имеют атомную кристаллическую решетку. Валентные электроны каждого атома связаны с валентными электронами соседних атомов химическими парноэлектронными связями. Такие связи называются *ковалентными*; для высвобождения электрона из кова-

лентной связи требуется сравнительно небольшая энергия (не более 1,5 — 2 электрон-вольт). При комнатной температуре средняя энергия теплового движения атомов в полупроводниковом кристалле составляет около 0,04 электрон-вольт, что значительно меньше энергии, необходимой для отрыва валентного электрона. Однако, вследствие флуктуаций энергии теплового движения некоторые атомы полупроводника ионизуются.

Освободившиеся электроны не могут быть захвачены соседними атомами, так как все их валентные связи насыщены. Свободные электроны под действием внешнего электрического поля перемещаются в кристалле, создавая *электронный ток проводимости* (проводимости *n*-типа). Удаление электрона с внешней оболочки одного из атомов кристаллической решетки приводит к превращению этого атома в положительный ион. Этот ион может нейтрализоваться, захватив электрон у одного из соседних атомов. Далее, в результате переходов от атомов к положительным ионам происходит процесс хаотического перемещения в кристалле места с недостающим электроном (*дырки*). При приложении внешнего электрического поля в кристалле возникает упорядоченное движение дырок — *дырочный ток проводимости* (проводимости *p*-типа).

**Собственная и примесная проводимость полупроводников. Зависимость проводимости полупроводников от температуры.** В идеальном полупроводниковом кристалле электрический ток создается встречным движением равного количества отрицательно заряженных электронов и положительно заряженных дырок. Такой тип проводимости называется *собственной проводимостью* полупроводников.

Концентрация носителей заряда в полупроводниках при комнатных температурах значительно меньше, чем в металлах. Поэтому удельное сопротивление полупроводников обычно больше, чем металлов. При понижении температуры удельное сопротивление полупроводника увеличивается, он все больше становится похожим на диэлектрик.

**Примесной проводимостью** полупроводников называется их проводимость, обусловленная внесением в их кристаллические решетки примесей (примесных центров). Примеси бывают двух видов — донорные и акцепторные.

Если, например, в кристалле кремния Si имеется примесь атомов мышьяка As, то эти атомы замещают в узлах кристаллической решетки атомы кремния. Пятивалентный атом мышьяка вступает в ковалентные связи с четырьмя атомами кремния, а его пятый электрон оказывается незанятым в связях. Энергия, необходимая для разрыва связи пятого валентного электрона с атомом мышьяка в кристалле кремния, мала. Поэтому почти все атомы мышьяка лишаются одного из своих электронов и становятся положительными ионами. Так как энергия связи электронов с атомами кремния значительно превышает энергию

связи пятого валентного электрона с атомом мышьяка, перемещения электронной вакансии (дырки) не происходит. Примеси, поставляющие электроны проводимости без образования такого же числа дырок, называются *донарными*. В полупроводниковом кристалле, содержащем донорные примеси, электроны являются основными, но не единственными носителями тока, так как небольшая часть собственных атомов кристалла ионизована и часть тока переносится дырками. Полупроводниковые материалы, в которых электроны служат основными носителями тока, а дырки — неосновными, называются *электронными* полупроводниками (полупроводниками *n*-типа).

Если в кристалле кремния часть атомов замещена атомами трехвалентного элемента, например, индия In, то атом этого элемента может быть связан только с тремя соседними атомами, а связь с четвертым атомом осуществляется одним электроном. При этих условиях атом индия захватывает электрон у одного из соседних атомов кремния и становится отрицательным ионом. Захват электрона у одного из атомов кремния приводит к возникновению дырки. Примеси, захватывающие электроны и создающие тем самым подвижные дырки, не увеличивая при этом число электронов проводимости, называются *акцепторными*. При комнатных температурах основными носителями тока в полупроводниковом кристалле с акцепторной примесью являются дырки, а неосновными носителями — электроны. Полупроводники, в которых концентрация дырок превышает концентрацию электронов проводимости, называются *дырочными* полупроводниками (полупроводниками *p*-типа).

**P-n переход и его свойства.** Полупроводниковые приборы являются основой современной электронной техники. Принцип действия большинства этих приборов базируется на использовании свойств *p-n* перехода. *P-n* переходом называется область монокристаллического полупроводника, в которой происходит смена типа проводимости. Такая область создается введением примесей в процессе выращивания кристалла или введением атомов примесей в готовый кристалл.

Через границу, разделяющую области кристалла с разными типами проводимости, происходит диффузия электронов и дырок. Диффузия электронов из *n*-полупроводника в *p*-полупроводник приводит к появлению в электронном полупроводнике нескомпенсированных положительных ионов донорной примеси; в дырочном полупроводнике рекомбинация электронов с дырками приводит к появлению нескомпенсированных зарядов отрицательных ионов акцепторной примеси. Между двумя слоями объемного заряда возникает электрическое поле, напряженность которого возрастает по мере накопления объемного заряда. Это поле начинает препятствовать дальнейшей диффузии электронов и дырок. В результате пограничная область раздела полупроводников различных типов превращается в запирающий слой, который имеет

повышенное сопротивление по сравнению с остальными объемами полупроводников.

Внешнее электрическое поле влияет на сопротивление запирающего слоя. Если  $n$ -полупроводник подключен к отрицательному полюсу источника тока, а  $p$ -полупроводник соединен с положительным полюсом, то под действием электрического поля электроны в  $n$ -полупроводнике и дырки в  $p$ -полупроводнике будут двигаться навстречу друг другу к границе раздела полупроводников, уменьшая его электрическое сопротивление. При таком прямом (пропускном) направлении внешнего поля электрический ток проходит через границу полупроводников. При подключении источника с обратной полярностью электроны в  $n$ -полупроводнике и дырки в  $p$ -полупроводнике под действием электрического поля будут перемещаться от границы раздела в противоположные стороны. Это приведет к утолщению запирающего слоя и увеличению его сопротивления. Направление внешнего поля, расширяющее запирающий слой, называется обратным (запирающим). При таком направлении внешнего поля электрический ток через контакт  $n$ - и  $p$ -полупроводников практически не проходит.

**Полупроводниковый диод.** Электронно-дырочный переход обладает односторонней проводимостью, аналогично проводимости вакуумного диода. Это свойство  $p-n$  перехода используется в *полупроводниковых диодах*, предназначенных для выпрямления переменного тока. Схематическое изображение диода приведено на рис. 3.2.7, где пропускное направление указано стрелкой. Полупроводниковые диоды обладают рядом преимуществ по сравнению с вакуумными: экономичность, миниатюрность, высокая надежность и большой срок службы. Недостатком полупроводниковых диодов является зависимость их параметров от температуры, а также ограниченность температурного диапазона (от  $-70$  до  $120^{\circ}\text{C}$ ), в котором они могут работать.

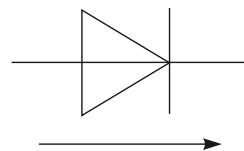


Рис. 3.2.7. Полупроводниковый диод

**Транзистор.** Чрезвычайно широкое распространение в настоящее время получили также полупроводниковые триоды, или *транзисторы*. По способу изготовления транзисторы мало отличаются от полупроводниковых диодов. Разница заключается в ином распределении примесей в кристалле полупроводника. Это распределение в транзисторе таково, что между областями полупроводника одного типа создается очень тонкая (порядка нескольких микрон) прослойка полупроводника другого типа. В результате в кристалле транзистора образуются два  $p-n$  перехода, прямые направления которых противоположны. Тонкую прослойку, находящуюся в середине кристалла, называют базой, а две крайние области кристалла — эмиттером и коллектором.

Транзисторы, в которых эмиттер и коллектор обладают дырочной проводимостью, а база — электронной, называются транзисторами  $p-n-p$  типа. Транзисторы  $n-p-n$  типа имеют аналогичное устройство, только материал базы в них обладает дырочной проводимостью, а коллектор и эмиттер — электронной. Условные обозначения транзисторов в схемах приведены на рис. 3.2.8.

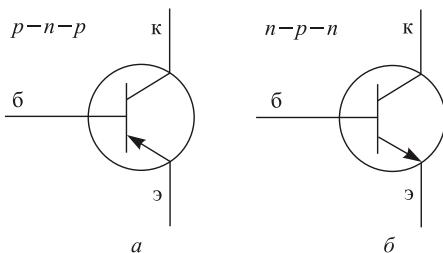


Рис. 3.2.8. Условные обозначения транзисторов в схемах: « $\circlearrowleft$ » — эмиттер, « $\circlearrowright$ » — база, « $\circlearrowuparrow$ » — коллектор

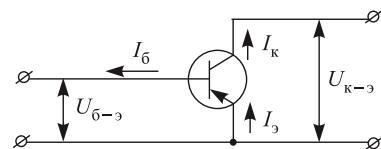


Рис. 3.2.9. Транзистор  $p-n-p$  типа, включенный в цепь

В качестве примера рассмотрим включение в цепь транзистора  $p-n-p$  типа (рис. 3.2.9). Для приведения в действие такого транзистора на коллектор подают напряжение отрицательной полярности относительно эмиттера. Напряжение на базе по отношению к эмиттеру может быть как положительным, так и отрицательным. Основным рабочим состоянием транзистора является т.н. активное состояние, при котором к эмиттерному  $p-n$  переходу приложено напряжение в пропускном направлении, а к коллекторному — в запирающем. При этом эмиттерный  $p-n$  переход открывается и из эмиттера в базу переходят дырки.

Путем диффузии дырки распространяются из области с высокой концентрацией вблизи эмиттера в область с низкой концентрацией к коллектору. Дырки, достигающие коллекторного  $p-n$  перехода, втягиваются его полем и переходят в коллектор. Небольшая доля дырок (1–5 %), движущихся от эмиттера к коллектору, встречает на своем пути через базу электроны и рекомбинирует с ними. Убыль электронов в базе за счет рекомбинации восполняется приходом электронов через базовый вывод. Таким образом, ток, протекающий через эмиттерный вывод транзистора  $I_e$  в активном состоянии, оказывается равным сумме токов через его коллекторный  $I_k$  и базовый  $I_b$  выводы.

Соотношение между токами коллектора и базы определяется условиями диффузии и рекомбинации дырок в базе. Эти условия сильно зависят от используемых материалов и конструкции электродов транзистора, но очень слабо зависят от коллекторного и базового напряжений. Поэтому транзистор является прибором, который распределяет ток, протекающий через один из его электродов — эмиттер, в заданном соотношении между двумя другими электродами — базой и коллектором. Эта способность транзистора используется для

усиления электрических сигналов. Отношение изменения силы тока в цепи коллектора к изменению тока в цепи базы при постоянном напряжении на коллекторе есть величина, для каждого транзистора постоянная и называемая коэффициентом передачи базового тока. Для транзисторов различных типов значение этого коэффициента лежит в пределах от 20 до 500. Следовательно, вызывая каким-либо способом изменение тока в цепи базы транзистора, можно получить в десятки и сотни раз большие изменения тока в цепи коллектора. В качестве усилительных элементов транзисторы широко используются в научной, промышленной и бытовой аппаратуре.

Изменением знака напряжения, подаваемого между базой и эмиттером, можно включать и выключать ток, протекающий через коллекторный вывод транзистора. В качестве бесконтактных переключательных элементов транзисторы используются в различных устройствах автоматического управления.

**Термистор и фоторезистор.** Сильная зависимость электрического сопротивления полупроводников температуры используется в приборах, получивших название *термисторов* или терморезисторов. Эти приборы служат для измерения температуры по силе тока в цепи полупроводника. Диапазон измеряемых температур для большинства термисторов лежит в интервале от 170 до 570 К. Существуют также термисторы для измерения очень высоких (порядка 1300 К) и очень низких (порядка 4 – 80 К) температур.

Электрическая проводимость полупроводников повышается не только при нагревании, но и при освещении. Этот эффект связан с тем, что разрыв ковалентных связей и образование свободных электронов и дырок может происходить за счет энергии квантов света, падающего на полупроводник. Приборы, в которых используется фотоэффект в полупроводниках, называются *фоторезисторами*. Миниатюрность и высокая чувствительность фоторезисторов позволяют использовать их в самых различных областях науки и техники для регистрации и измерения слабых световых потоков.

**Электрический ток в газах.** Газы состоят из электрически нейтральных атомов и молекул и в нормальных условиях не содержат свободных носителей тока (электронов и ионов), т.е. представляют собой диэлектрики. Носители электрического тока в газах могут возникнуть только при ионизации газов — отрыве электронов от атомов или молекул. При этом атомы (молекулы) газов превращаются в положительные ионы. Отрицательные ионы в газах могут возникнуть, если атомы (молекулы) присоединяют к себе электроны. Ионизация газов может происходить под влиянием различных воздействий: сильного нагревания, облучения электромагнитными и радиоактивными излучениями, бомбардировки атомов (молекул) газов быстрыми электронами и ионами.

**Самостоятельный и несамостоятельный разряды.** Явление прохождения электрического тока через газ, наблюдаемое только при условии какого-либо внешнего воздействия, называется *несамостоятельным газовым разрядом*. Простейший способ вызвать несамостоятельный разряд состоит в нагреве газа. Процесс возникновения свободных электронов и положительных ионов в результате столкновений атомов или молекул газа при высокой температуре называется термической ионизацией. Энергия, необходимая для отрыва электрона от атома или молекулы, может быть также передана фотонами. Ионизация атомов или молекул газа, вызванная поглощением световых квантов, называется *фотоионизацией*.

Наряду с процессом ионизации в газе всегда происходит противоположный ему процесс рекомбинации, т.е. соединения положительных ионов и электронов в нейтральные атомы (молекулы). При неизменном во времени действии внешнего ионизатора между процессами ионизации и рекомбинации устанавливается динамическое равновесие. Если внешний ионизатор перестает действовать, вследствие рекомбинации заряженные частицы исчезают и несамостоятельный разряд прекращается.

При увеличении напряженности электрического поля между электродами до некоторого определенного значения, зависящего от состава газа и его давления, в газе возникает электрический ток и без воздействия внешних ионизаторов. Такой ток называется *самостоятельным газовым разрядом*. В частности, в воздухе при атмосферном давлении самостоятельный разряд возникает при напряженности поля, примерно равной  $3 \cdot 10^4$  В/см.

Основной механизм ионизации газа при самостоятельном разряде — это ионизация атомов и молекул вследствие ударов свободных электронов. Этот эффект, называемый ударной ионизацией, состоит в отрыве от атома (молекулы) газа одного или нескольких электронов, вызванном соударением с атомами (или молекулами) газа свободных электронов или ионов, разогнанных электрическим полем в разряде. Он становится возможным, когда свободные электроны или ионы при пробеге во внешнем электрическом поле приобретают кинетическую энергию, превышающую энергию связи электронов с атомом или молекулой.

Развитие самостоятельного разряда происходит лавинообразно, поскольку освобожденные в результате ионизации электроны и образовавшиеся при этом ионы также приобретают ускорение и участвуют в последующих соударениях. Одновременно, при ударах положительных ионов о катод, а также под действием света, излучаемого при разряде, с катода могут освобождаться новые электроны. Эти электроны в свою очередь разгоняются электрическим полем разряда и создают новые электронно-ионные лавины. Концентрация электронов и ионов в газе по мере развития самостоятельного разряда увеличивается, а электрическое сопротивление разрядного промежутка уменьшается.

Сила тока в цепи самостоятельного разряда обычно определяется лишь внутренним сопротивлением источника тока и сопротивлением других элементов цепи.

В зависимости от давления газа и приложенного к электродам напряжения различаются несколько типов самостоятельного разряда в газах. При низких давлениях (обычно от сотых долей до нескольких мм рт. ст.) наблюдается *тлеющий разряд*. Для возбуждения тлеющего разряда достаточно напряжения в несколько десятков или сотен вольт. При тлеющем разряде почти вся трубка, за исключением небольшого участка возле катода, заполнена однородным свечением, называемым положительным столбом. Тлеющий разряд используют в газосветных трубках, лампах дневного света, газовых лазерах.

При нормальном давлении в газе, находящемся в сильно неоднородном электрическом поле (около остиев, проводов линий электропередачи высокого напряжения) наблюдается *коронный разряд*. Ударная ионизация газа и его свечение, напоминающее корону, происходят только в небольшой области, прилегающей к коронирующему электроду.

*Искровой разряд*, происходящий при нормальном давлении и большой напряженности поля между электродами, имеет вид прерывистых ярких зигзагообразных нитей — каналов ионизованного газа. При этом наблюдается интенсивное свечение газа и выделяется большое количество теплоты. Примером искрового разряда является молния. Главный канал молнии имеет диаметр от 10 до 25 см. Молнии достигают в длину до нескольких километров, в них развивается ток в импульсе до сотен тысяч ампер.

*Дуговой разряд* происходит при большой плотности тока и сравнительно небольшом напряжении между электродами (порядка нескольких десятков вольт). Основной причиной дугового разряда является интенсивная фотоэлектронная эмиссия раскаленного катода и последующая ударная ионизация. Между электродами возникает столб ярко светящегося газа (электрическая дуга). При атмосферном давлении температура газа в канале дуги достигает 5000 °C. Дуговой разряд используется для сварки и резки металлов, а также как мощный источник света в осветительных приборах.

**Понятие о плазме.** Плазмой называется особое состояние вещества, характеризующееся высокой степенью ионизации его частиц. Степень ионизации плазмы а представляет собой отношение концентрации заряженных частиц к общей концентрации частиц. В зависимости от а плазма подразделяется на слабо ионизованную (а составляет доли процента), частично ионизованную (а составляет несколько процентов) и полностью ионизованную (а близка к 100 %). Слабо ионизованной плазмой в природных условиях являются верхние слои атмосферы Земли. Солнце и другие звезды представляют собой космические тела,

состоящие из полностью ионизованной плазмы, которая образуется при очень высокой температуре (свыше 20000 К), так называемой высокотемпературной плазмы. Под воздействием различных излучений или бомбардировки атомов газа быстрыми заряженными частицами образуется низкотемпературная плазма.

Плазма обладает рядом специфических свойств, позволяющих рассматривать ее как четвертое агрегатное состояние вещества. Заряженные частицы плазмы весьма подвижны и поэтому легко перемещаются под действием электрических и магнитных полей. Любое нарушение электрической нейтральности отдельных областей плазмы быстро компенсируется перемещением заряженных частиц под действием возникающего при этом электрического поля. В отличие от неионизованного газа, между молекулами которого существуют короткодействующие силы, между заряженными частицами плазмы действуют кулоновские силы, сравнительно медленно убывающие с расстоянием. Поэтому каждая заряженная частица в плазме взаимодействует сразу с большим количеством частиц, благодаря чему наряду с хаотическим тепловым движением частицы плазмы могут участвовать в разнообразных упорядоченных (коллективных) движениях. В плазме легко возбуждаются различные типы колебаний и волн. Проводимость плазмы увеличивается по мере роста температуры. Полностью ионизованная плазма по своей проводимости приближается к сверхпроводникам.

## Примеры решения задач

**3.2.1.** Источник с ЭДС  $\mathcal{E} = 50$  В и с внутренним сопротивлением  $r = 1,2$  Ом должен питать дуговую лампу с сопротивлением  $R = 6$  Ом, требующую для нормального горения напряжения  $U = 30$  В. Определить сопротивление  $R_1$  резистора, введенного последовательно в цепь лампы для ее нормального горения.

**Решение:** Согласно закону Ома для полной цепи, ток во всех элементах последовательной цепи равен

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_1 + r}.$$

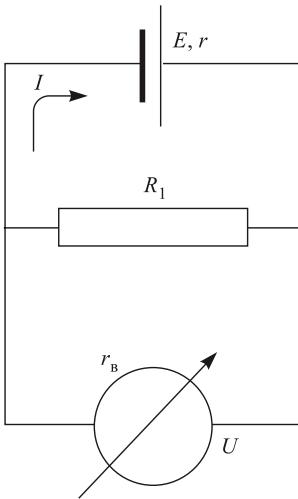
Напряжение на лампе определяется как

$$U = IR = \frac{\mathcal{E}R}{R + R_1 + r}.$$

Выражая отсюда  $R_1$ , получаем ответ:  $R_1 = \frac{\mathcal{E} - U}{U}R - r = 2,8$  Ом.

**3.2.2.** Электрическая цепь состоит из резистора с сопротивлением  $R_1 = 10$  Ом и источника с внутренним сопротивлением  $r = 2$  Ом. Напряжение на резисторе измеряют вольтметром, внутреннее сопротивление которого  $r_V = 20$  Ом. Определить показание  $U$  вольтметра, если ЭДС источника  $\mathcal{E} = 26$  В.

**Решение:** Сопротивление участка цепи, содержащего резистор  $R_1$  и параллельно подключенный к нему вольтметр, равно



$$R_x = \frac{R_1 r_B}{R_1 + r_B}.$$

Полный ток в цепи рассчитывается по формуле

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_x + r}.$$

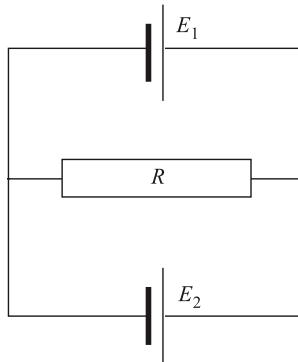
Напряжения на вольтметре и на резисторе  $R_1$  равны друг другу и определяются произведением полного тока на сопротивление этого типа участка цепи:  $U = IR_x$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$U = \frac{\mathcal{E}}{\frac{r}{r_e} + \frac{r}{R_1} + 1} = 20 \text{ В.}$$

**3.2.3.** Два гальванических элемента, электродвижущие силы которых  $\mathcal{E}_1 = 2 \text{ В}$  и  $\mathcal{E}_2 = 1 \text{ В}$ , соединены по схеме, указанной на рисунке. При каком значении сопротивления  $R$  ток через гальванический элемент с ЭДС  $\mathcal{E}_2$  не пойдет? Внутреннее сопротивление элемента с ЭДС  $\mathcal{E}_1$  равно  $r_1 = 1 \text{ Ом}$ .

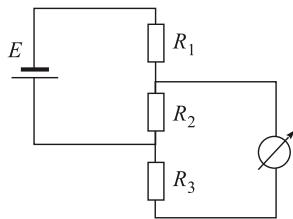
**Решение:** По условию ток  $I$  течет лишь в контуре, содержащем элемент с ЭДС  $\mathcal{E}_1$  и резистор с сопротивлением  $R$ . Выберем за положительное направление обхода в этом контуре направление против часовой стрелки и обозначим через  $U$  падение напряжения на резисторе  $R$ . Тогда

$$I = \frac{\mathcal{E}_1}{R + r_1}, \quad U = \frac{\mathcal{E}_1 R}{R + r_1}.$$



Отсутствие тока в нижней ветви цепи означает, что электрические заряды здесь находятся в равновесии. Следовательно, внутри элемента  $\mathcal{E}_2$  кулоновская сила равна по модулю и противоположна по направлению сторонней силе. Поэтому  $|U| = |\mathcal{E}_2|$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:  $R = \frac{\mathcal{E}_2 r_1}{E_1 - E_2} = 1\Omega$ .

**3.2.4.** Какой ток  $I_1$  покажет амперметр в схеме, показанной на рисунке? Какой ток  $I_2$  покажет амперметр, если источник тока и амперметр поменять местами?  $R_1 = 20\Omega$ ,  $R_2 = 40\Omega$ ,  $R_3 = 60\Omega$ ,  $E = 10\text{ В}$ . Внутренними сопротивлениями источника тока и амперметра пренебречь.



**Решение:** Поскольку сопротивление амперметра равно нулю, напряжения на резисторах  $R_2$  и  $R_3$  совпадают друг с другом и равны произведению общего тока  $I$ , текущего в цепи, на сопротивление данного участка:

$$U = I \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

Общий ток  $I$  найдем, используя закон Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{E(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

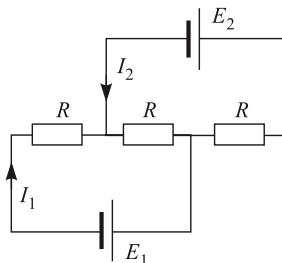
Через амперметр и через резистор  $R_3$  течет один и тот же ток  $I_1 = U/R_3$ . Объединяя записанные выражения, находим ток через ампер-

метр в первом случае:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

Анализ этого выражения показывает, что сопротивления резисторов  $R_1$  и  $R_3$  входят в него одинаково. Это означает, что если амперметр и источник поменять местами, ток через амперметр будет таким же. В этом можно убедиться, проделав расчет, аналогичный вышеизложенному. Ответ:  $I_1 = I_2 = \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = \frac{1}{11} \text{ А.}$

**3.2.5.** В цепь включены два источника с ЭДС  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  и внутренними сопротивлениями  $r_1$ ,  $r_2$  соответственно, и три одинаковые резистора сопротивлением  $R$ . При какой величине  $R$  значения токов  $I_1$  и  $I_2$  будут равны друг другу?



**Решение:** Рассматриваемая цепь состоит из двух контуров, содержащих источники и имеющих общий элемент — резистор  $R$ . Запишем для этих контуров второе правило Кирхгофа, учитывая, что ток, текущий через общий резистор, равен сумме токов  $I_1$  и  $I_2$ :

$$I_1 r_1 + I_1 R + (I_1 + I_2)R = \mathcal{E}_1, \quad I_2 r_2 + I_2 R + (I_1 + I_2)R = \mathcal{E}_2.$$

По условию задачи  $I_1 = I_2 = I$ . Следовательно, эти уравнения принимают вид:

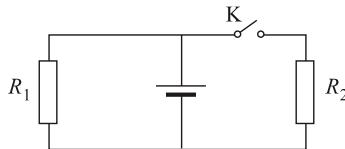
$$I r_1 + 3IR = \mathcal{E}_1, \quad I r_2 + 3IR = \mathcal{E}_2.$$

Отсюда

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{r_1 - r_2}, \quad R = \frac{\mathcal{E}_1}{3I} - \frac{r_1}{3}.$$

Из последних двух соотношений получаем ответ:  $R = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 - \mathcal{E}_2 r_1}{3(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)}$ .

**3.2.6.** В схеме, показанной на рисунке, резисторы имеют сопротивления  $R_1 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 2 \text{ Ом}$ . Определить внутреннее сопротивление батареи  $r$ , если известно, что при разомкнутом ключе К через резистор  $R_1$  протекает ток  $I_1 = 2,8 \text{ А}$ , а при замкнутом ключе К через резистор  $R_2$  протекает ток  $I_2 = 1 \text{ А}$ .



**Решение:** При разомкнутом ключе ток течет только в левом контуре цепи, для которого справедливо уравнение:

$$\mathcal{E} = I_1 R_1 + I_1 r.$$

При замкнутом ключе ток течет в обоих контурах, которые представляют собой два параллельно соединенных резистора. Обозначив через  $I$  полный ток через источник, имеем:

$$\mathcal{E} = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + Ir.$$

Ток  $I$  разветвляется на два тока:  $I = I'_1 + I_2$ , причем  $I'_1 R_1 = I_2 R_2$ . Выразим из этой системы ток  $I$  через  $I_2$ :

$$I = I_2 \frac{R_1 + R_2}{R_1}.$$

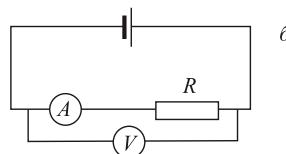
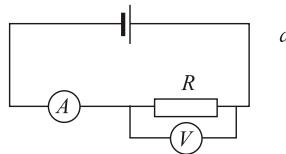
Объединяя записанные выражения, имеем:

$$I_1 R_1 + I_1 r = I_2 R_2 + I_2 \frac{R_1 + R_2}{R_1} r.$$

Из последнего равенства легко получить ответ:

$$r = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2(1 + R_2/R_1) - I_1} = 4 \text{ Ом.}$$

**3.2.7.** При включении приборов по схеме, изображенной на рис. *a*, амперметр показывает ток  $I_1 = 1,06 \text{ А}$ , а вольтметр — напряжение



$V_1 = 59,6 \text{ В}$ . При включении тех же приборов по схеме на рис. *б* амперметр показывает ток  $I_2 = 0,94 \text{ А}$ , а вольтметр — напряжение

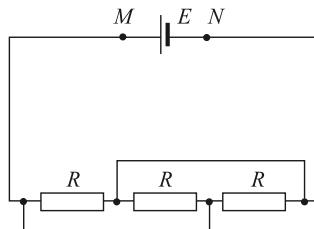
$V_2 = 60$  В. Определить сопротивление резистора  $R$ , считая напряжение на зажимах батареи неизменным.

**Решение:** Обозначим через  $R_A$  сопротивление амперметра, а через  $\mathcal{E}$  – ЭДС батареи. Тогда для цепей, изображенных на рисунках, справедливы следующие уравнения:

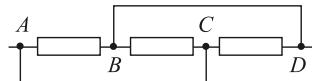
$$\begin{aligned} I_1 R_A + V_1 &= \mathcal{E} \quad (\text{для цепи на рис. 1}), \\ I_2 (R_A + R) &= V_2 \quad (\text{для цепи на рис. 2}). \end{aligned}$$

Кроме того, по условию задачи  $V_2 = \mathcal{E}$ . Из этой системы легко найти ответ:  $R = \frac{V_2}{I_2} - \frac{V_2 - V_1}{I_1} \simeq 63,4$  Ом.

**3.2.8.** Батарея с ЭДС  $\mathcal{E} = 2$  В и внутренним сопротивлением  $r = 0,1$  Ом присоединена к цепи, изображенной на рисунке. Сопротивление каждого из резисторов  $R = 1$  Ом. Найти напряжение  $U_{MN}$  на клеммах батареи. Сопротивлением всех соединительных проводов пренебречь.



**Решение:** Для того, чтобы определить напряжение на клеммах батареи, необходимо вычислить сопротивление нагрузки. Рассматривая схемуподключения резисторов нагрузки (см. рисунок), нетрудно заме-

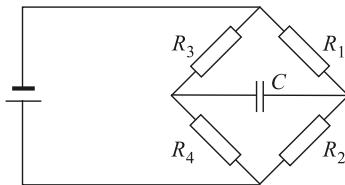


тить, что потенциалы точек  $A$  и  $C$ , а также точек  $B$  и  $D$  попарно равны. Следовательно, все три резистора нагрузки фактически соединены параллельно. Поэтому сопротивление внешней цепи  $R_{\text{внеш}} = R/3$ ; сила тока в цепи

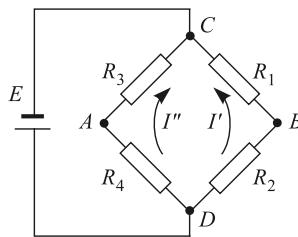
$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R/3}.$$

Отсюда получаем ответ:  $U_{MN} = IR_{\text{внеш}} = \frac{\mathcal{E}R}{3r + R} \approx 1,54$  В.

**3.2.9.** В схеме, показанной на рисунке, где  $R_1 = 60$  Ом,  $R_2 = 20$  Ом,  $R_3 = 40$  Ом,  $R_4 = 20$  Ом, батарею и конденсатор поменяли местами. Во сколько раз  $\alpha$  изменится при этом заряд конденсатора? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



**Решение:** После зарядки конденсатора ток через него прекратится и, начиная с этого момента конденсатор будет представлять собой разрыв цепи. Поскольку заряд конденсатора  $q$  связан с напряжением на нем  $U$  соотношением  $q = CU$ , для решения задачи достаточно найти отношение напряжений между соответствующими точками цепи в отсутствие конденсатора.



Найдем вначале напряжение между точками  $A$  и  $B$  при подключении источника с ЭДС  $E$  к точкам  $C$  и  $D$  (см. рисунок). Для токов  $I'$  и  $I''$  справедливы выражения:

$$I' = \frac{E}{R_1 + R_2}, \quad I'' = \frac{E}{R_3 + R_4}.$$

В соответствии с этим, падения напряжения на резисторах будут:

$$U_1 = I'R_1, \quad U_2 = I'R_2, \quad U_3 = I''R_3, \quad U_4 = I''R_4.$$

Величина искомого напряжения

$$|U_{AB}| = |U_2 - U_4| = |U_1 - U_3| = E \frac{|R_1R_4 - R_2R_3|}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}.$$

Аналогично можно найти величину напряжения между точками  $C$  и  $D$  при подключении источника к точкам  $A$  и  $B$ :

$$|U_{CD}| = E \frac{|R_1R_4 - R_2R_3|}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}.$$

Из последних двух выражений получаем ответ

$$\alpha = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)} = 1, 2.$$

**3.2.10.** Если вольтметр, имеющий конечное сопротивление, подключен параллельно резистору  $R_1$ , то он показывает напряжение

$U_1 = 6$  В, если параллельно резистору  $R_2$ , то — напряжение  $U_2 = 4$  В. Каковы будут напряжения  $V_1$  и  $V_2$  на резисторах, если вольтметр не подключать? ЭДС батареи  $\mathcal{E} = 12$  В, ее внутреннее сопротивление пренебрежимо мало.

**Решение:** Обозначим через  $R_x$  сопротивление вольтметра. Если подключить вольтметр к резистору  $R_1$ , сопротивление всей цепи будет равно

$$R' = \frac{R_x R_1}{R_x + R_1} + R_1 = \frac{R_x R_1 + R_x R_2 + R_1 R_2}{R_x + R_1}.$$

В цепи будет течь ток  $I' = E/R'$  и напряжение на вольтметре, равное напряжению на резисторе  $R_1$ , определится как

$$U_1 = I' \frac{R_x R_1}{R_x + R_1} = \frac{E R_x R_1}{R_x R_1 + R_x R_2 + R_1 R_2}.$$

Рассуждая аналогично, можно найти, что при подключении вольтметра к резистору  $R_2$  напряжение на нем будет

$$U_2 = \frac{E R_x R_2}{R_x R_1 + R_x R_2 + R_1 R_2}.$$

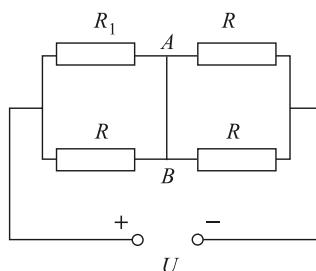
Из этих выражений находим, что  $U_1/U_2 = R_1/R_2$ . С другой стороны, если вольтметр не подключен, то напряжения на резисторах равны:

$$V_1 = IR_1, \quad V_2 = IR_2,$$

где  $I$  — ток в цепи из двух последовательно соединенных резисторов. Отсюда следует, что  $V_1/V_2 = R_1/R_2$ . Сравнивая это отношение с найденным выше отношением напряжений на резисторах при подключенным вольтметре, находим, что  $V_1/V_2 = U_1/U_2$ . Кроме того, справедливо равенство  $V_1 + V_2 = E$ . Выражая отсюда  $V_1$  и  $V_2$ , получаем ответ:

$$V_1 = \frac{E}{1 + U_2/U_1} = 7,2 \text{ В}, \quad V_2 = E - V_1 = 4,8 \text{ В}.$$

**3.2.11.** В схеме, показанной на рисунке, напряжение на клеммах источника  $U = 100$  В, сопротивления в цепи  $R_1 = 101$  Ом,  $R = 100$  Ом. Определить величину тока  $I$ , протекающего по проводнику  $AB$ . Сопротивлением подводящих проводов, проводника  $AB$  и внутренним сопротивлением источника пренебречь.



**Решение:** Полное сопротивление цепи  $R_0$  можно легко найти, применив формулы для сопротивлений последовательно и параллельно соединенных резисторов:

$$R_0 = \frac{R_1 R}{R_1 + R} + \frac{R}{2} = R \cdot \frac{3R_1 + R}{2(R_1 + R)}.$$

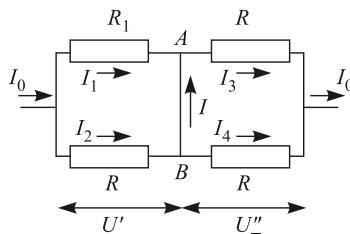
В соответствии с этим полный ток в цепи  $I_0$  равен

$$I_0 = \frac{U}{R_0} = \frac{U}{R} \cdot \frac{2(R_1 + R)}{3R_1 + R}.$$

Этот ток разветвляется на токи, показанные на рисунке, причем

$$I_1 + I = I_3, \quad I_2 = I + I_4.$$

Учтем далее, что  $I_3 R = I_4 R = U''$ . Следовательно,  $I_3 = I_4$ . Исключая



эти токи из полученной системы уравнений, выразим  $I$  через  $I_1$  и  $I_2$ :

$$I = \frac{I_2 - I_1}{2}.$$

С другой стороны,  $I_1 + I_2 = I_0$ ,  $I_1 R_1 = I_2 R = U'$ . Отсюда

$$I_1 = I_0 \frac{R}{R_1 + R}, \quad I_2 = I_0 \frac{R_1}{R_1 + R}.$$

Следовательно,  $I = \frac{I_0}{2} \cdot \frac{R_1 - R}{R_1 + R}$ . Подставляя сюда найденный ранее ток  $I_0$ , получаем ответ:  $I = \frac{(R_1 - R)}{(R + 3R_1)} \cdot \frac{U}{R} = 2,5 \text{ мА}$ .

**3.2.12.** Электрическая лампа с вольфрамовой нитью рассчитана на напряжение  $U = 220$  В и потребляет в рабочем режиме мощность  $W = 100$  Вт. Сопротивление отключенной от сети лампы при температуре  $0^\circ\text{C}$  равно  $R_0 = 40$  Ом. Найти температуру  $t$  нити лампы в рабочем режиме, если температурный коэффициент сопротивления вольфрама  $\alpha = 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$ . Изменением длины нити при нагреве пренебречь.

**Решение:** Сопротивление лампы в рабочем режиме  $R$  связано с сопротивлением холодной лампы  $R_0$  соотношением  $R = R_0(1 + \alpha t)$ . Отсюда

$$t = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{R}{R_0} - 1 \right).$$

Учитывая, что  $R = \frac{U^2}{W}$ , получаем ответ:  $t = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{U^2}{WR_0} - 1 \right) \approx 2707^\circ\text{C}$ .

**3.2.13.** Спираль, свернутая из стальной проволоки, подключена к источнику постоянной ЭДС с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. Во сколько раз  $\alpha$  изменится время нагрева определенного количества воды от комнатной температуры до температуры кипения, если заменить эту спираль на стальную спираль той же массы, свернутую из проволоки, имеющей в  $\beta = 2$  раза меньшую длину? Потерями тепла пренебречь.

**Решение:** Время нагрева воды  $t$  обратно пропорционально мощности, выделяющейся в спирали. Мощность, в свою очередь, обратно пропорциональна сопротивлению спирали  $R$ . Следовательно,

$$\alpha = \frac{t_2}{t_1} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Сопротивление спирали равно  $R = \frac{\rho l}{S} = \frac{\rho l^2}{V}$ , где  $\rho$  — удельное сопротивление стали,  $l$  — длина проволоки,  $V$  — объем проволоки. Следовательно,  $\frac{R_2}{R_1} = \frac{l_2^2}{l_1^2} = \frac{1}{\beta^2}$ . Ответ:  $\alpha = \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{4}$ .

**3.2.14.** При подключении к батарее поочередно двух сопротивлений нагрузки  $R_1 = 4$  Ом и  $R_2 = 1$  Ом выделяемая в них мощность оказалась одинаковой и равной  $W = 9$  Вт. Чему равна ЭДС  $\mathcal{E}$  батареи?

**Решение:** Обозначив через  $r$  внутреннее сопротивление батареи, запишем токи в цепи и мощности, выделяющиеся в резисторах в первом и во втором случаях:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r}, & W_1 &= \frac{\mathcal{E}^2}{(R_1 + r)^2} R_1, \\ I_2 &= \frac{\mathcal{E}}{R_2 + r}, & W_2 &= \frac{\mathcal{E}^2}{(R_2 + r)^2} R_2. \end{aligned}$$

По условию  $W_1 = W_2$ , откуда следует, что

$$R_1(R_2 + r)^2 = R_2(R_1 + r)^2, \text{ или } \sqrt{R_1}(R_2 + r) = \sqrt{R_2}(R_1 + r).$$

Из последнего уравнения легко найти внутреннее сопротивление батареи:  $r = \sqrt{R_1 R_2}$ . Следовательно,

$$W = \frac{\mathcal{E}^2 R_1}{(R_1 + \sqrt{R_1 R_2})^2} = \frac{\mathcal{E}^2 R_2}{(R_2 + \sqrt{R_1 R_2})^2}.$$

Выражая из одного из этих равенств ЭДС батареи  $\mathcal{E}$ , получаем ответ:

$$\mathcal{E} = \sqrt{W} \left( \sqrt{R_1} + \sqrt{R_2} \right) = 9 \text{ В.}$$

**3.2.15.** К батарее подключены параллельно две одинаковые лампочки. Когда одна из лампочек перегорает, мощность, выделяемая во

внешней цепи, остается неизменной. Во сколько раз  $k$  ток, текущий через батарею после перегорания лампочки, будет отличаться от первоначального?

**Решение:** Мощности, выделяющиеся во внешней цепи, когда горят две и одна лампочки, соответственно равны:

$$P_2 = \frac{\mathcal{E}^2 R}{2(r + R/2)^2}, \quad P_1 = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(r + R)^2}.$$

Здесь  $\mathcal{E}$  — ЭДС батареи,  $r$  — ее внутреннее сопротивление,  $R$  — сопротивление лампочки. По закону Ома для полной цепи токи через батарею в этих двух случаях равны:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r + R/2}, \quad I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r + R}.$$

Искомое отношение токов

$$k = \frac{I_1}{I_2} = \frac{r + R/2}{r + R}.$$

Из равенства мощностей, выделяющихся во внешней цепи, следует, что  $\frac{r + R/2}{r + R} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Ответ:  $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**3.2.16.** Елочная гирлянда, состоящая из  $N = 20$  последовательно соединенных одинаковых лампочек типа  $A$ , подключена к сети. Во сколько раз  $k$  изменится мощность, потребляемая гирляндой, если  $M = 5$  лампочек из нее заменить на лампочки типа  $B$ ? Известно, что при подключении к батарейке одной лампочки типа  $B$  потребляется в  $\alpha = 3$  раза большая мощность, чем при подключении к той же батарейке одной лампочки типа  $A$ . Напряжение на зажимах сети считать неизменным, внутренним сопротивлением батарейки пренебречь.

**Решение:** Пусть  $R_A$  и  $R_B$  — сопротивления лампочек типа  $A$  и типа  $B$  соответственно. По условию  $R_B = R_A/\alpha$ . Мощность, потребляемая гирляндой в первом случае,

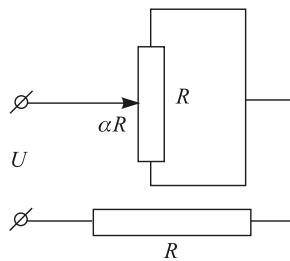
$$P_1 = \frac{U^2}{NR_A},$$

где  $U$  — напряжение сети. После замены  $M$  лампочек мощность, потребляемая гирляндой, станет

$$P_2 = \frac{U^2}{(N - M)R_A + MR_A/\alpha}.$$

Находя отношение  $k = \frac{P_2}{P_1}$ , получаем ответ:  $k = \frac{\alpha N}{\alpha(N - M) + M} = 1, 2$ .

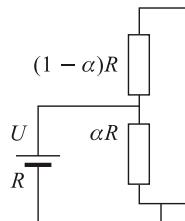
**3.2.17.** Реостат включен в цепь как показано на рисунке. Положение его движка характеризуется коэффициентом  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ). При каком  $\alpha$  в реостате будет выделяться максимальная мощность? Напряжение на клеммах цепи постоянно.



**Решение:** Участок цепи, содержащий реостат, представляет собой два параллельно соединенных резистора с сопротивлениями  $\alpha R$  и  $(1 - \alpha)R$ . Сопротивление этого участка равно

$$R_I = R\alpha(1 - \alpha).$$

Всю электрическую цепь можно рассматривать как нагрузку с сопротивлением  $R_H$ , подключенную к источнику с ЭДС  $U$  и внутренним



сопротивлением  $R$  (эквивалентная схема представлена на рисунке). Мощность, выделяющаяся в нагрузке

$$W = I^2 R_H = \frac{U^2 R_H}{(R + R_H)^2}.$$

Анализ этого выражения как функции от  $R_H$  при фиксированном  $R$  показывает, что максимальная мощность в нагрузке выделяется в том случае, когда  $R_H = R$ , причем в диапазоне  $0 \leq R_H \leq R$  мощность в нагрузке монотонно растет с увеличением  $R_H$ . В рассматриваемой схеме  $R_H \leq R/4$ , поэтому максимальная мощность в реостате будет выделяться при максимальном значении сопротивления этого участка, т.е. при  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

**3.2.18.** При параллельном подключении двух одинаковых нагревателей к источнику с внутренним сопротивлением  $r$  они развивают ту же мощность, что и при последовательном подключении. Чему равно сопротивление нагревателя  $R$ ?

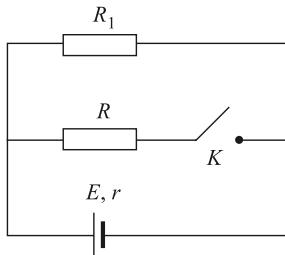
**Решение:** Мощности, выделяющиеся в нагревателях при параллельном и последовательном подключении к источнику с ЭДС  $\mathcal{E}$ ,

равны, соответственно:

$$W_1 = \frac{R\mathcal{E}^2}{2(r+R/2)^2}, \quad W_2 = \frac{2R\mathcal{E}^2}{(r+2R)^2}.$$

Из равенства  $W_1 = W_2$  следует, что  $(r+2R) = 2\left(r+\frac{R}{2}\right)$ . Выражая отсюда  $R$ , получаем ответ:  $R = r$ .

**3.2.19.** В схеме, показанной на рисунке, сопротивление  $R_1 = 1$  Ом. Определить внутреннее сопротивление источника тока  $r$ , если известно, что при замыкании ключа К сила тока через источник возрастает в  $n = 3$  раза, а мощность, выделяющаяся во внешней цепи, увеличивается в  $m = 2$  раза.



**Решение:** При разомкнутом ключе ток в цепи и мощность, выделяющаяся в резисторе  $R_1$ , равны, соответственно,

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r}, \quad W_1 = \frac{\mathcal{E}^2 R_1}{(R_1 + r)^2},$$

где  $\mathcal{E}$  — ЭДС источника. При замыкании ключа полный ток в цепи будет

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{\frac{R_1 R}{R_1 + R} + r} = \frac{\mathcal{E}(R_1 + R)}{R_1 R + R_1 r + R r}.$$

Поскольку  $I_2 = nI_1$ , справедливо равенство

$$\frac{R_1 + R}{R_1 R + R_1 r + R r} = \frac{n}{R_1 + r}. \quad (3.2.26)$$

Используя это равенство, выражение для мощности, выделяющейся во внешней цепи при разомкнутом ключе, можно преобразовать к виду:

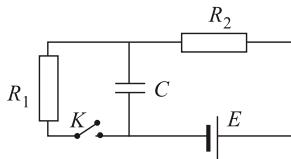
$$W_2 = \frac{\mathcal{E}^2(R_1 + R)^2}{(R_1 R + R_1 r + R r)^2} \cdot \frac{R_1 R}{R_1 + R} = \frac{\mathcal{E}^2 n^2}{(R_1 + r)^2} \cdot \frac{R_1 R}{R_1 + R}.$$

Из условия  $W_2 = mW_1$  следует, что:

$$\frac{R_1 R}{R_1 + R} \cdot \frac{\mathcal{E}^2 n^2}{(R_1 + r)^2} = m \frac{\mathcal{E}^2 R_1}{(R_1 + r)^2}, \quad \text{или} \quad \frac{R n^2}{R_1 + R} = m.$$

Отсюда  $R = \frac{m}{n^2 - m} R_1$ . Подставляя найденное  $R$  в равенство (3.2.26), после несложных преобразований получаем ответ:  $r = \frac{n-m}{n(n-1)} R_1 = \frac{1}{6} \Omega$ .

**3.2.20.** Цепь, показанная на рисунке, находилась достаточно долго в состоянии с замкнутым ключом  $K$ . В некоторый момент времени ключ разомкнули. Какое количество теплоты  $Q$  выделится на резисторе  $R_2$  после размыкания ключа? При расчетах положить:  $\mathcal{E} = 300$  В,  $R_1 = 100$  Ом,  $R_2 = 200$  Ом,  $C = 10$  мкФ. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.



**Решение:** При замкнутом ключе напряжение на конденсаторе совпадает с напряжением на резисторе  $R_1$ , которое, в свою очередь, равно

$$U = \frac{\mathcal{E}R_1}{R_1 + R_2}.$$

Следовательно, в начальном состоянии заряд конденсатора и запасенная в нем энергия равны, соответственно,

$$q_1 = CU = C\mathcal{E} \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad W_1 = \frac{CU^2}{2} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} \cdot \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

После размыкания ключа произойдет перезарядка конденсатора, в результате которой напряжение на конденсаторе станет равным ЭДС батареи. Следовательно, в конечном состоянии заряд конденсатора и запасенная в нем энергия будут:

$$q_2 = C\mathcal{E}, \quad W_2 = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}.$$

При перезарядке конденсатора источник перенесет по цепи заряд

$$\Delta q = q_2 - q_1 = C\mathcal{E} \frac{R_1}{R_1 + R_2},$$

совершив при этом работу  $A = \Delta q \cdot \mathcal{E}$ . По закону сохранения энергии

$$W_1 + A = W_2 + Q$$

Объединяя записанные равенства, после несложных преобразований получаем ответ:  $Q = \frac{C\mathcal{E}^2 R_2^2}{2(R_1 + R_2)^2} = 0,2$  Дж.

**3.2.21.** Напряжение на зажимах генератора постоянного тока  $U_0 = 220$  В, а на зажимах нагрузки  $U_1 = 210$  В. Определить мощность

$P_{\text{н}}$ , выделяющуюся в линии между генератором и потребителем, если номинальная мощность нагрузки при напряжении на ней, равном  $U_0$ , составляет  $P = 10 \text{ кВт}$ .

**Решение:** Обозначим через  $R$  сопротивление нагрузки. Поскольку номинальная мощность нагрузки  $P$  при напряжении на ней  $U_0$  равна  $P = U_0^2/R$ ,

$$R = \frac{U_0^2}{P}.$$

При напряжении  $U_1$  мощность, выделяющаяся в нагрузке,

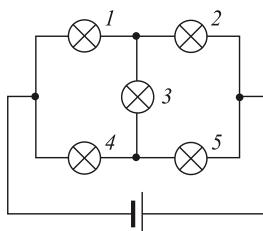
$$P_1 = \frac{U_1^2}{R} = \frac{U_1^2}{U_0^2} P.$$

С другой стороны, эту мощность можно выразить через ток  $I$  через нагрузку:  $P_1 = U_1 I$ . Отсюда:

$$I = \frac{P_1}{U_1} = \frac{U_1}{U_0^2} P.$$

Такой же ток течет и в линии между генератором и нагрузкой. Поскольку падение напряжения в линии равно  $\Delta U = U_0 - U_1$ , мощность, выделяющаяся в ней, есть  $P_{\text{н}} = (U_0 - U_1)I$ . Подставляя сюда найденное значение тока, получаем ответ:  $P_{\text{н}} = \frac{(U_0 - U_1)U_1}{U_0^2} P \cong 434 \text{ Вт}$ .

**3.2.22.** Пять одинаковых лампочек соединены в цепь как показано на рисунке и подключены к батарее. Во сколько раз  $\alpha$  изменится мощность, выделяющаяся в этой цепи, если лампочка номер 1 перегорит? Внутреннее сопротивление батареи пренебрежимо мало.



**Решение:** Из соображений симметрии ясно, что до перегорания лампочки 1 по верхнему и нижнему участкам цепи текут одинаковые токи. Следовательно, напряжение на лампочке 3 равно нулю и ток через нее не течет. Применяя правила для расчета сопротивления последовательно и параллельно соединенных резисторов, находим общее сопротивление цепи в этом случае:  $R_1 = R$ , где  $R$  — сопротивление одной лампочки. Поскольку внутреннее сопротивление батареи пренебрежимо мало, выделяющаяся в цепи мощность равна:

$$P_1 = \frac{\mathcal{E}^2}{R_1} = \frac{\mathcal{E}^2}{R},$$

где  $\mathcal{E}$  — ЭДС батареи. После перегорания лампочки 1 на ее месте образуется разрыв цепи. Сопротивление цепи в этом случае оказывается равным  $R_2 = R + R'$ , где  $R'$  — сопротивление участка цепи, состоящего из лампочек 3, 2, 5:

$$R' = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} = \frac{2}{3}R.$$

Следовательно,  $R_2 = \frac{5}{3}R$  и выделяющаяся в цепи мощность в этом случае равна:

$$P_2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R_2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{\mathcal{E}^2}{R}.$$

Ответ:  $\alpha = \frac{P_2}{P_1} = 0,6$ .

**3.2.23.** Два нагревателя при параллельном подключении к сети развивают суммарную мощность  $W_1$ , а при последовательном —  $W_2$ . Каковы мощности  $W_{01}$  и  $W_{02}$  нагревателей по отдельности?

**Решение:** Пусть  $U$  — напряжение сети. Тогда

$$W_{01} = \frac{U^2}{R_1}, \quad W_{02} = \frac{U^2}{R_2},$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — сопротивления нагревателей. Отсюда

$$R_1 = \frac{U^2}{W_{01}}, \quad R_2 = \frac{U^2}{W_{02}}.$$

При параллельном соединении нагревателей полная мощность равна

$$W_1 = W_{01} + W_{02}.$$

При их последовательном соединении полная мощность

$$W_2 = \frac{U^2}{R_1 + R_2} = \frac{W_{01}W_{02}}{W_{01} + W_{02}}.$$

Таким образом, справедлива следующая система уравнений:

$$W_{01} + W_{02} = W_1, \quad W_{01}W_{02} = W_1W_2.$$

Разрешая ее относительно  $W_{01}$ ,  $W_{02}$ , получаем ответ:

$$W_{01} = \frac{W_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{W_1^2 - 4W_1W_2}, \quad W_{02} = \frac{W_1}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{W_1^2 - 4W_1W_2}.$$

**3.2.24.** При подключении к аккумулятору с внутренним сопротивлением  $r = 0,16$  Ом нагревательный элемент развивает мощность  $W_1 = 200$  Вт. При подключении нагревательного элемента к двум таким аккумуляторам, соединенным последовательно, выделяемая в нагревателе мощность составила  $W_2 = 288$  Вт. Найти ЭДС  $\mathcal{E}$  аккумулятора.

**Решение:** Мощность, выделяемая в нагревательном элементе при подключении его к одному аккумулятору, равна

$$W_1 = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(r + R)^2},$$

где  $R$  — сопротивление нагревателя,  $\mathcal{E}$  — ЭДС аккумулятора,  $r$  — его внутреннее сопротивление. При подключении нагревателя к двум одинаковым аккумуляторам, соединенным последовательно, ЭДС и внутреннее сопротивление в цепи удваиваются, в результате чего мощность, выделяющаяся в нагревателе, будет

$$W_2 = \frac{4\mathcal{E}^2 R}{(2r + R)^2}.$$

Вводя величину  $k = \sqrt{W_2/W_1}$ , имеем

$$k = 2 \frac{r + R}{2r + R}.$$

Отсюда  $R = \frac{2k(k-1)}{2-k}$ . Учитывая, что  $\mathcal{E}^2 = \frac{(r+R)^2}{R} W_1$ , после несложных преобразований получаем ответ

$$\mathcal{E} = \sqrt{\frac{rW_2}{2 \left(2 - \sqrt{W_2/W_1}\right) \left(\sqrt{W_2/W_1} - 1\right)}} = 12 \text{ В.}$$

**3.2.25.** При подключении к аккумулятору с внутренним сопротивлением  $r = 2$  Ом нагревательный элемент развивает мощность  $W_1 = 50$  Вт. При подключении нагревательного элемента к двум таким аккумуляторам, соединенным последовательно, выделяемая в нагревателе мощность составила  $W_2 = 72$  Вт. Найти сопротивление  $R$  нагревателя.

**Решение:** Мощность, развиваемая нагревательным элементом сопротивлением  $R$ , подключенным к аккумулятору с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$ , равна

$$W_1 = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(r + R)^2}.$$

При подключении этого же элемента к двум одинаковым аккумуляторам, соединенным последовательно, значения ЭДС и внутреннего сопротивления удваиваются и нагреватель развивает мощность

$$W_2 = \frac{4\mathcal{E}^2 R}{(2r + R)^2}.$$

Составим отношение

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{4(r+R)^2}{(2r+R)^2}, \quad \text{или} \quad \sqrt{\frac{W_2}{W_1}} = \frac{2(r+R)}{(2r+R)}.$$

Выражая из последнего соотношения  $R$ , получаем ответ:

$$R = 2r \frac{\sqrt{W_2/W_1} - 1}{2 - \sqrt{W_2/W_1}} = 1 \text{ Ом.}$$

**3.2.26.** Во внешней нагрузке, подключенной к батарее, выделяется мощность  $W_1 = 1$  Вт. Чему равен коэффициент полезного действия  $\eta$  этой цепи (т.е. отношение мощности, выделяющейся в нагрузке, к полной мощности, развиваемой батареей), если при подключении той же нагрузки к двум таким батареям, соединенным последовательно, мощность в нагрузке стала равной  $W_2 = 1,44$  Вт?

**Решение:** В цепи, состоящей из батареи и внешней нагрузки сопротивлением  $R$ , мощность, выделяющаяся в нагрузке, равна

$$W_1 = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(r + R)^2},$$

где  $I$  — ток в цепи,  $\mathcal{E}$  — ЭДС батареи,  $r$  — ее внутреннее сопротивление. При этом полная мощность, развиваемая батареей,

$$W_{\text{п}} = I\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}^2}{(r + R)}.$$

Отсюда следует, что коэффициент полезного действия цепи

$$\eta = \frac{W_1}{W_{\text{п}}} = \frac{R}{r + R}.$$

Если подключить эту же нагрузку к двум одинаковым батареям, соединенным последовательно, ЭДС и внутреннее сопротивление в цепи станут равными, соответственно,  $2\mathcal{E}$  и  $2r$ . Следовательно, мощность, выделяющаяся в нагрузке в этом случае, будет

$$W_2 = \frac{4\mathcal{E}^2 R}{(2r + R)^2}.$$

Составим отношение

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{(2r + R)^2}{4(r + R)^2}, \quad \text{или} \quad \sqrt{\frac{W_1}{W_2}} = \frac{2r + R}{2(r + R)}.$$

Последнее соотношение можно преобразовать к виду

$$\sqrt{\frac{W_1}{W_2}} = 1 - \frac{R}{2(r + R)} = 1 - \frac{\eta}{2}.$$

Отсюда получаем ответ:  $\eta = 2 \left(1 - \sqrt{\frac{W_1}{W_2}}\right) \approx 33\%$ .

**3.2.27.** При подключении нагрузки к батарее с внутренним сопротивлением  $r_1 = 0,1$  Ом во внешней цепи выделяется мощность  $W_1 = 1$  Вт. В той же нагрузке, питаемой от батареи с внутренним

сопротивлением  $r_2 = 0,2$  Ом и прежней ЭДС, выделяется мощность  $W_2 = 0,64$  Вт. Чему равно сопротивление нагрузки  $R$ ?

**Решение:** Мощность, выделяющаяся в нагрузке, подключенной к батарее с ЭДС  $E$  и внутренним сопротивлением  $r_1$ , равна

$$W_1 = \frac{E^2 R}{(r_1 + R)^2},$$

где  $R$  — сопротивление нагрузки. При подключении этой нагрузки к батарее с той же ЭДС, но с внутренним сопротивлением  $r_2$ , мощность, выделяющаяся в нагрузке, будет

$$W_2 = \frac{E^2 R}{(r_2 + R)^2}.$$

Составим отношение

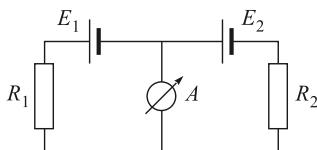
$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{(r_1 + R)^2}{(r_2 + R)^2}, \quad \text{или} \quad \sqrt{\frac{W_2}{W_1}} = \frac{r_1 + R}{r_2 + R}.$$

Выражая из последнего соотношения  $R$ , получаем ответ:

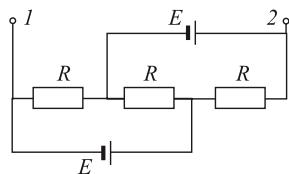
$$R = \frac{r_2 \sqrt{W_2} - r_1 \sqrt{W_1}}{\sqrt{W_1} - \sqrt{W_2}} = 0,3 \text{ Ом.}$$

### Задание для самостоятельной работы

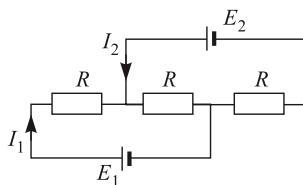
**3.2.28.** В схеме, показанной на рисунке,  $\mathcal{E}_1 = 10$  В,  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 40$  Ом. Чему равна ЭДС второго источника  $\mathcal{E}_2$ , если ток через амперметр не течет? Внутренними сопротивлениями источников пренебречь.



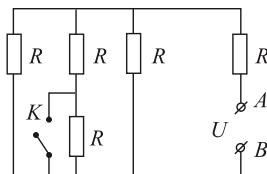
**3.2.29.** Цепь образована двумя одинаковыми батареями  $\mathcal{E}$  и тремя равными сопротивлениями  $R = 0,5$  Ом. При каком значении  $r$  внутреннего сопротивления каждой из батарей напряжение между точками 1 и 2 будет равно ЭДС батарей?



**3.2.30.** В схеме, показанной на рисунке, подбором величины сопротивления  $R_1$  добились того, что ток  $I_2$  стал равен нулю. Чему равно внутреннее сопротивление  $r_1$  первой батареи, если  $\mathcal{E}_1 = 2$  В,  $\mathcal{E}_2 = 1,5$  В,  $R = 2,5$  Ом,  $R_1 = 9$  Ом?



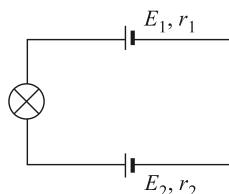
**3.2.31.** Цепь, изображенная на рисунке, составлена из 4 одинаковых резисторов сопротивлением  $R = 7,5$  Ом и резистора  $R_1 = 1$  Ом. На клеммах  $AB$  поддерживается постоянное напряжение  $U = 14$  В.



Насколько изменится сила тока, текущего через резистор  $R_1$ , после замыкания ключа  $K$ ? Сопротивлением проводов и ключа пренебречь.

**3.2.32.** Электрическая схема состоит из последовательно соединенных резистора с сопротивлением  $R = 10$  Ом, конденсатора и батареи с внутренним сопротивлением  $r = 5$  Ом. Параллельно конденсатору подключили резистор с сопротивлением  $R_1 = 5$  Ом. Во сколько раз  $t$  изменится энергия конденсатора после того, как напряжение на нем станет постоянным?

**3.2.33.** Батарея из двух одинаковых гальванических элементов, соединенных последовательно, нагружена на внешний резистор  $R = 2$  Ом, через который за некоторое время протекает заряд  $Q_1 = 20$  Кл. Какой величины заряд  $Q_2$  протечет за то же время через каждый элемент, если их соединить параллельно и нагрузить на тот же резистор? Внутреннее сопротивление каждого элемента  $r = 0.1$  Ом.



**3.2.34.** Из куска однородной проволоки изготовлен замкнутый контур, имеющий форму квадрата  $ABCD$ . Батарею подключают сначала к вершинам квадрата  $A$  и  $B$ , а затем к вершинам  $A$  и  $C$ . В первом случае сила тока, протекающего через батарею, оказывается в  $t = 1,2$  раза больше, чем во втором. Определить внутреннее сопротивление батареи  $r$ , если известно, что сопротивление проволоки, из которой изготовлен квадрат, равно  $R = 4$  Ом.

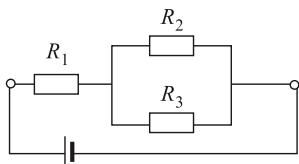
**3.2.35.** Лампочка накаливания включена в цепь, показанную на рисунке. ЭДС источников в схеме равны  $\mathcal{E}_1 = 3$  В и  $\mathcal{E}_2 = 4$  В. Их внутренние сопротивления соответственно  $r_1 = 2$  Ом и  $r_2 = 1$  Ом. Найти мощность  $W_L$ , выделяющуюся в лампочке, если известно, что при напряжении на лампочке  $U = 6$  В в ней выделяется мощность  $W = 9$  Вт. Изменением сопротивления нити лампочки в зависимости от температуры пренебречь.

**3.2.36.** Две лампы имеют мощности  $W_1 = 20$  Вт и  $W_2 = 40$  Вт при стандартном напряжении сети. При их последовательном включении в сеть с другим напряжением оказалось, что в двадцативаттной лампе выделяется та же мощность, что и при стандартном напряжении. Какая мощность  $W'_2$  выделяется при этом в другой лампе? Изменением сопротивления нитей ламп с температурой пренебречь.

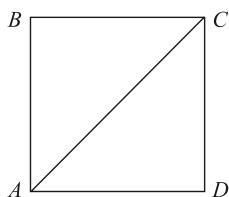
**3.2.37.** Электрическая лампочка подключена к источнику тока через сопротивление, подсоединенное последовательно. Известно, что при ЭДС источника  $\mathcal{E}_1 = 20$  В и подсоединенном сопротивлении  $r_1 = 4$  Ом через лампочку течет такой же ток, что и при ЭДС  $\mathcal{E}_2 = 14$  В и сопротивлении  $r_2 = 1$  Ом. Найти мощность  $W$ , выделяющуюся в лампочке. Внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.

**3.2.38.** Чему равно внутреннее сопротивление аккумуляторной батареи, если при ее разряде через внешнюю цепь с сопротивлением  $R = 3$  Ом во внешней цепи выделяется  $\eta = 90\%$  запасенной энергии?

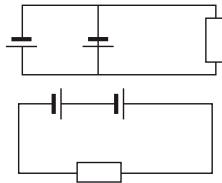
**3.2.39.** В схеме, показанной на рисунке,  $R_1 = 1$  Ом,  $R_2 = 2$  Ом,  $R_3 = 3$  Ом. Известно, что на сопротивлении  $R_1$  выделяется мощность  $P_1 = 25$  Вт. Какая мощность  $P_2$  выделяется на сопротивлении  $R_2$ ?



**3.2.40.** Из однородной проволоки спаян квадрат  $ABCD$  с диагональю  $AC$  (см. рисунок). Источник напряжения (внутренним сопротивлением которого можно пренебречь) подсоединяют к точкам  $AC$  схемы (случай 1), а затем к точкам  $BD$  (случай 2). Во сколько раз различаются мощности  $W_1$  и  $W_2$ , выделяемые в цепи в этих случаях?



**3.2.41.** Батарея из двух одинаковых параллельно соединенных элементов с внутренним сопротивлением  $r = 1$  Ом нагружена на внешнее сопротивление  $R = 1$  Ом. Во сколько раз  $\beta$  изменится отношение

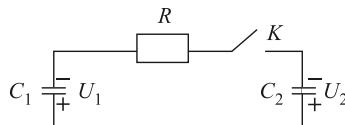


мощности, выделяемой во внешнем сопротивлении, к полной мощности, если элементы соединить последовательно?

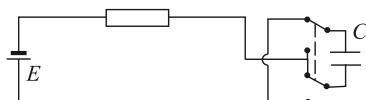
**3.2.42.** Батарея из двух одинаковых параллельно соединенных элементов нагружена на внешнее сопротивление  $R = 1$  Ом. После того, как элементы соединили последовательно, мощность, выделяемая во внешнем сопротивлении, увеличилась в  $n = 2$  раза. Чему равно внутреннее сопротивление  $r$  каждого из элементов?

**3.2.43.** Конденсатор емкостью  $C = 10$  мкФ разряжается через цепь из двух параллельно включенных сопротивлений  $R_1 = 10$  Ом и  $R_2 = 40$  Ом. Какое количество теплоты  $Q_1$  выделится на меньшем из сопротивлений, если конденсатор был заряжен до напряжения  $U = 100$  В?

**3.2.44.** До замыкания ключа К конденсаторы  $C_1 = 1$  мкФ и  $C_2 = 2$  мкФ были заряжены до напряжений  $U_1 = 400$  В и  $U_2 = 100$  В, как показано на рисунке. Какая энергия выделится на сопротивлении  $R$  после замыкания ключа?

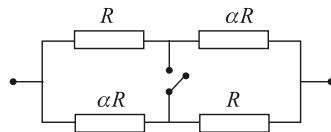


**3.2.45.** Конденсатор емкостью  $C = 20$  мкФ включен в цепь через коммутатор, так что его выводы можно менять местами, одновременно перебрасывая оба ключа. После того, как напряжение на конденсаторе установилось, коммутатор переключили. Какая энергия выделится при этом на резисторе? При расчетах принять  $\mathcal{E} = 300$  В.



**3.2.46.** Нагревательные элементы, сопротивления которых отличаются в  $\alpha$  раз, соединены как показано на рисунке и подключены к источнику тока с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. Найти  $\alpha$ , если известно, что при замыкании ключа общая мощность,

выделяющаяся в цепи, увеличивается в  $k = 2$  раза. Изменением сопротивлений элементов при нагревании пренебречь.



**3.2.47.** При подключении к аккумулятору с внутренним сопротивлением  $r = 0,2$  Ом нагревательный элемент развивает мощность  $W_1 = 10$  Вт. При подключении нагревательного элемента к двум таким аккумуляторам, соединенным параллельно, выделяемая в нагревателе мощность составила  $W_2 = 14,4$  Вт. Найти ЭДС  $\mathcal{E}$  аккумулятора.

### **3.3. Магнетизм**

#### **Вопросы программы**

1. *Магнитное поле. Действие магнитного поля на рамку с током. Индукция магнитного поля (магнитная индукция). Линии магнитной индукции. Картинны линий индукции магнитного поля прямого тока и соленоида. Понятие о магнитном поле Земли.*
2. *Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Закон Ампера.*
3. *Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца.*
4. *Магнитные свойства вещества. Гипотеза Ампера. Ферромагнетики.*

#### **Определения, понятия и законы**

**Магнитное поле. Индукция магнитного поля (магнитная индукция).** Силовое поле, действующее на движущиеся электрические заряды, электрические токи и намагниченные тела (магниты), называется магнитным полем. В свою очередь, магнитное поле создается движущимися зарядами, токами и магнитами. Силовой характеристикой магнитного поля является вектор магнитной индукции  $\vec{B}$ . Понятие о векторе магнитной индукции вводится на основании следующих опытных фактов: а) ориентирующее действие магнитного поля на замкнутый плоский контур (рамку) с током, б) существование силы, действующей на проводник с током в магнитном поле, в) отклонение пучка заряженных частиц в магнитном поле.

**Действие магнитного поля на рамку с током.** На плоскую рамку с током, подвешенную на нити в однородном магнитном поле, действует момент сил, который стремится развернуть ее определенным образом.

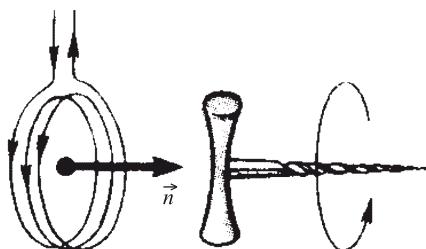


Рис. 3.3.1. Выбор направления вектора магнитной индукции

Ориентирующее действие поля на рамку используется для выбора направления вектора магнитной индукции. С этой целью вводят понятие *положительной нормали* к рамке, которая определяется как единичный вектор, перпендикулярный плоскости рамки и направленный в сторону перемещения буравчика (винта), если вращать его по направлению тока в рамке (рис. 3.3.1). За направление вектора магнитной индукции в данной точке пространства принимается направление положительной нормали к рамке, свободно устанавливающейся в магнитном поле в окрестности данной точки. Это направление совпадает с направлением от южного полюса *S* к северному полюсу *N* свободно вращающейся магнитной стрелки.

Замкнутый контур площадью  $S$  с током  $I$  создает магнитный момент

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}. \quad (3.3.1)$$

Направление магнитного момента рамки с током, свободно устанавливающейся в магнитном поле, совпадает с направлением вектора магнитной индукции.

**Линии магнитной индукции.** Графически магнитное поле изображают с помощью линий магнитной индукции, которые представляют собой линии, касательные к которым направлены так же, как вектор  $\vec{B}$  в данной точке, а густота которых пропорциональна величине поля в данной точке. В качестве примера на рис. 3.3.2 изображены линии магнитной индукции, создаваемой постоянным магнитом. Линии магнитной индукции всегда замкнуты. Представленные на рис. 3.3.2 линии замыкаются внутри магнита.

Для вычисления магнитного поля электрического тока используют формулу Био-Савара-Лапласа. Согласно этой формуле, магнитная

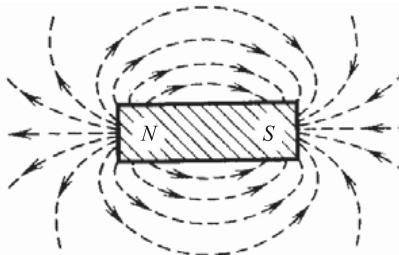


Рис. 3.3.2. Линии магнитной индукции, создаваемой постоянным магнитом

индукция, созданная отрезком проводника длиной  $\Delta l$ , по которому течет ток  $I$ , равна:

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I [\Delta \vec{l}, \vec{r}]}{4\pi r^3}, \quad \text{или} \quad B = \frac{\mu\mu_0 I \Delta l \sin \alpha}{4\pi r^2}, \quad (3.3.2)$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор, проведенный от элемента  $\Delta l$  в точку наблюдения,  $\alpha$  — угол между векторами  $\Delta \vec{l}$  и  $\vec{r}$ ,  $\mu$  — магнитная проницаемость среды,  $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6}$  В·с/(А·м) — магнитная постоянная.

**Картину линий индукции магнитного поля прямого тока и соленоида.** Формула (3.3.2) позволяет рассчитать магнитную индукцию  $\vec{B}$ , созданную проводником с током любой формы. Так, величина магнитной индукции бесконечно длинного проводника с током  $I$  на расстоянии  $x$  от него равна

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi x}. \quad (3.3.3)$$

Линии магнитной индукции представляют собой концентрические окружности в плоскостях, перпендикулярных проводнику (рис. 3.3.3). Направление магнитной индукции тока определяется правилом буравчика: если поступательное движение буравчика совпадает с направлением тока, то вращение рукоятки буравчика указывает направление магнитного поля.

Магнитное поле внутри длинного соленоида (катушки с током) вдали от его концов является однородным (рис. 3.3.4). Магнитная индукция внутри соленоида в точках, удаленных от его концов, равна

$$B = \mu\mu_0 I \frac{N}{L}, \quad (3.3.4)$$

где  $I$  — ток, протекающий по виткам,  $N$  — число витков,  $L$  — длина соленоида. Магнитное поле вне соленоида подобно магнитному полю полосового постоянного магнита (ср. с рис. 3.3.2). Конец катушки, из которого выходят линии индукции, аналогичен северному полюсу магнита; другой конец аналогичен южному магнитному полюсу. Расположение полюсов катушки и направление магнитного поля

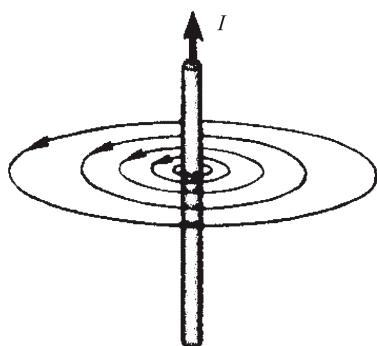


Рис. 3.3.3. Линии магнитной индукции бесконечно длинного прямого проводника с током

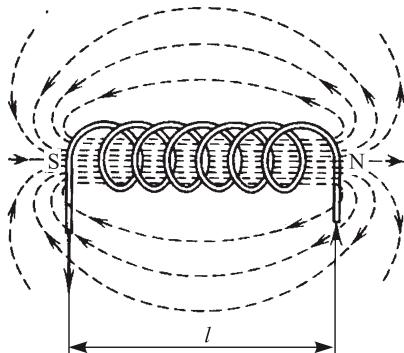


Рис. 3.3.4. Линии магнитной индукции соленоида

определяется по правилу буравчика: если вращать рукоятку буравчика по току, то перемещение буравчика укажет направление линий магнитной индукции.

**Понятие о магнитном поле Земли.** Земной шар является естественным постоянным магнитом, вокруг которого существует магнитное поле. Средняя величина магнитной индукции вблизи земной поверхности равна  $\sim 5 \cdot 10^{-5}$  Тл.

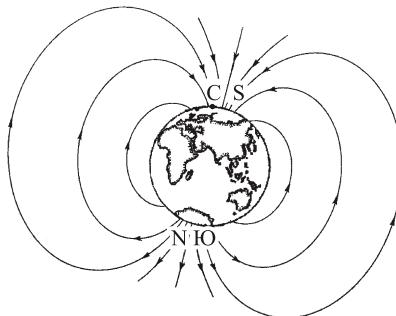


Рис. 3.3.5. Геомагнитное поле Земли

Согласно современным представлениям, основная часть магнитного поля Земли (геомагнитного поля) имеет внутриземное происхождение. Это поле создается электрическими токами, протекающими в жидком металлическом ядре планеты. На расстояниях, не превышающих  $3R_{\oplus}$  ( $R_{\oplus}$  — радиус Земли), геомагнитное поле имеет структуру, изображенную на рис. 3.3.5. Она близка к структуре магнитного поля намагниченного шара (магнитного диполя). Радиус диполя порядка  $0,25R_{\oplus}$ , его центр отстоит от центра Земли в сторону Тихого океана примерно

на 450 км, ось диполя наклонена к оси вращения Земли на угол, равный  $11,5^\circ$ .

Магнитные полюса Земли смещены относительно географических, причем в северном полушарии находится южный магнитный полюс  $S$  с координатами  $75^\circ 53'$  северной широты,  $100^\circ 23'$  западной долготы, а в южном полушарии — северный магнитный полюс  $N$  с координатами  $66^\circ 06'$  южной широты,  $139^\circ 36'$  восточной долготы.

Незначительная часть (около 1 %) магнитного поля, окружающего Землю, создается электрическими токами, текущими в ионосфере — ионизованной части верхней атмосферы Земли.

На расстояниях, превышающих  $3R_\oplus$ , структура магнитного поля Земли усложняется. Совместно с солнечным ветром (потоком заряженных частиц, испускаемым Солнцем), магнитное поле Земли формирует магнитосферу — многосвязную систему электрических и магнитных полей и потоков заряженных частиц. Магнитосфера несимметрична относительно дневной и ночной стороны Земли. С дневной стороны магнитосфера сжата солнечным ветром до расстояния  $\sim 10R_\oplus$ , с ночной стороны она образует вытянутый «хвост», простирающийся на многие миллионы километров.

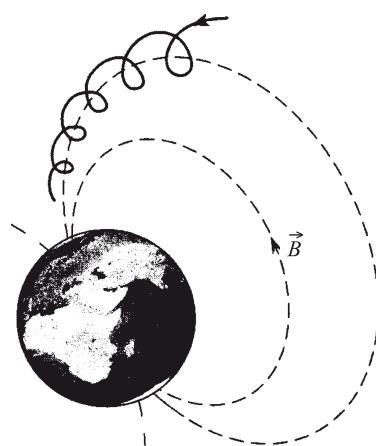


Рис. 3.3.6. Движение заряженных частиц в магнитном поле Земли

Магнитное поле Земли играет роль своеобразного «щита», защищающего все живое от потоков заряженных космических частиц (космических лучей). На больших расстояниях от Земли магнитное поле невелико, но захватывает громадные области пространства. Действуя на заряженные частицы длительное время, оно существенно изменяет их траектории, отклоняя потоки частиц от Земли. На расстояниях примерно от 500 до 60 000 км заряженные частицы движутся, навиваясь на линии индукции магнитного поля Земли (рис. 3.3.6). Они совершают колебания от одного магнитного полюса к другому сperi-

одом от 0,1 до 1 с. Эта область космического пространства называется радиационным поясом Земли.

Лишь в полярных областях небольшая часть таких частиц вторгается в верхние слои атмосферы из радиационного пояса Земли и вызывает полярные сияния.

### **Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле.**

**Закон Ампера.** На проводник с током, находящийся в магнитное поле, действует *сила Ампера*:

$$\vec{F} = I [\Delta \vec{l}, \vec{B}], \quad \text{или} \quad F = I \Delta l B \sin \alpha = I \Delta l B_{\perp}, \quad (3.3.5)$$

где  $\Delta l$  — длина отрезка проводника с током  $I$ ,  $\alpha$  — угол между направлениями отрезка проводника и вектора магнитной индукции,  $B_{\perp}$  — проекция вектора магнитной индукции на нормаль к проводнику. Направление силы Ампера определяется правилом буравчика: рукоятку буравчика врашают от вектора  $\Delta \vec{l}$  к вектору  $\vec{B}$ , тогда направление его поступательного движения определяет направление силы  $\vec{F}$ , или правилом левой руки: если левую руку расположить так, чтобы перпендикулярная к проводнику составляющая вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  входила в ладонь, а четыре вытянутых пальца были направлены по току, то отогнутый на  $90^{\circ}$  большой палец покажет направление действующей на участок проводника силы.

Между двумя параллельно расположенными бесконечно длинными проводниками, по которым протекают постоянные токи (рис. 3.3.7), возникает сила взаимодействия, направление и величина которой могут быть найдены из закона Ампера. Поскольку проводник с током  $I_2$  находится в поле с индукцией  $\vec{B}_1$ , созданным проводником с током  $I_1$ , сила Ампера  $\vec{F}$  направлена, как показано на рисунке. Проводники с одинаково направленными токами притягиваются, с противоположно направленными — отталкиваются. Модуль силы взаимодействия между участками единичной длины двух бесконечных параллельных проводников, расположенных на расстоянии  $R$  друг от друга, равен

$$F = \mu \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi R}. \quad (3.3.6)$$

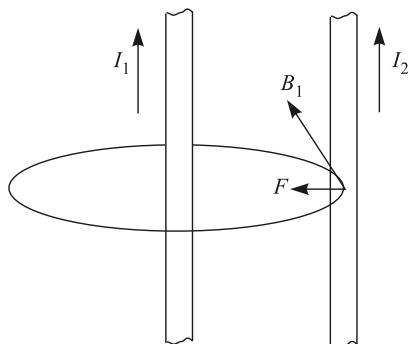


Рис. 3.3.7. Взаимодействие двух параллельных проводников с током

**Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца.** На заряд  $q$ , движущийся в магнитном поле со скоростью  $\vec{V}$ , действует сила Лоренца:

$$\vec{F} = q \left[ \vec{V}, \vec{B} \right], \quad \text{или} \quad F = qVB_{\perp}. \quad (3.3.7)$$

где  $B_{\perp}$  — проекция вектора магнитной индукции на нормаль к скорости частицы. Направление силы Лоренца также определяется правилом левой руки или правилом буравчика.

В однородном магнитном поле, вектор индукции которого перпендикулярен скорости заряженной частицы, она движется по окружности постоянного радиуса  $R$

$$R = \frac{m}{q} \cdot \frac{V}{B}, \quad (3.3.8)$$

где  $m$  — масса частицы,  $q$  — абсолютное значение ее заряда,  $V$  — скорость частицы,  $B$  — индукция магнитного поля. Движение частицы происходит в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{B}$ . Сила Лоренца в этом случае играет роль центростремительной силы. Ее работа всегда равна нулю, поскольку сила Лоренца в каждый момент времени перпендикулярна вектору мгновенной скорости частицы.

**Магнитные свойства вещества. Гипотеза Ампера.** Магнитные взаимодействия зависят от свойств среды, в которой они происходят. Физическая величина, показывающая, во сколько раз индукция магнитного поля  $B$  в однородном веществе отличается от индукции  $B_0$  магнитного поля в вакууме, называется *магнитной проницаемостью вещества*:

$$\mu = \frac{B}{B_0}. \quad (3.3.9)$$

Согласно гипотезе Ампера магнитные свойства вещества определяются замкнутыми электрическими токами внутри него. В соответствии с современными представлениями, эти токи связаны с движением электронов в атомах вещества. Каждый электрон, движущийся в атоме вокруг ядра по замкнутой орбите, представляет собой элементарный электронный ток, магнитный момент которого, называемый орбитальным магнитным моментом, перпендикулярен плоскости орбиты.

Орбитальный магнитный момент атома равен векторной сумме орбитальных магнитных моментов его электронов. Если вещество состоит из молекул, то магнитный момент молекулы является векторной суммой орбитальных магнитных моментов ее атомов. Таким образом, атомы и молекулы в общем случае имеют магнитные моменты и могут создавать магнитное поле.

*Магнетиками* называются вещества, способные намагничиваться во внешнем магнитном поле, т.е. создавать собственное (внутреннее) магнитное поле самого вещества. По своим свойствам магнетики подразделяются на слабомагнитные и сильномагнитные вещества. К

слабомагнитным веществам относятся диамагнетики и парамагнетики. Основную группу сильномагнитных веществ составляют ферромагнетики.

Диамагнетиками называются вещества, у которых атомы или молекулы в отсутствие внешнего магнитного поля не имеют магнитных моментов. Диамагнетиками являются инертные газы, ряд металлов (золото, серебро, ртуть, цинк, медь), вода, стекло, многие органические соединения. При внесении диамагнитного вещества в магнитное поле в каждом его атоме (или молекуле) индуцируется дополнительный атомный (или молекулярный) ток с некоторым магнитным моментом. Этот ток имеет такое направление, что создаваемое им магнитное поле противоположно внешнему полю. Вектор магнитной индукции внутреннего поля направлен против внешнего поля и ослабляет его. В этом и состоит намагничивание диамагнетиков, для которых  $\mu < 1$ . Диамагнетизм является очень слабым эффектом. Магнитная проницаемость даже самых сильных диамагнетиков отличается от единицы не более, чем десятитысячные доли.

Атомы (или молекулы), обладающие в отсутствие внешнего поля небольшим магнитным моментом, называются парамагнитными, а состоящие из них вещества — *парамагнетиками*. К парамагнетикам относятся кислород, окись азота, алюминий, платина, щелочные и щелочноземельные металлы и др. В отсутствие внешнего магнитного поля тепловое движение атомов (молекул) парамагнетика препятствует возникновению упорядоченного расположения магнитных моментов отдельных атомов (молекул), и собственного магнитного поля в веществе не возникает. При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле атомные (молекулярные) токи стремятся расположиться так, чтобы их магнитные моменты были параллельны вектору индукции внешнего поля. Совместное действие магнитного поля и теплового движения приводит к тому, что возникает преимущественная ориентация магнитных моментов атомов (молекул) по направлению внешнего поля. В парамагнитном веществе создается собственное (внутреннее) магнитное поле, вектор индукции которого направлен одинаково с вектором индукции внешнего поля. Для парамагнетиков  $\mu > 1$ , но эффект парамагнетизма очень слаб; магнитная проницаемость даже для наиболее сильных парамагнетиков отличается от единицы не более, чем на тысячные доли.

**Ферромагнетики.** Ферромагнетиками называется группа веществ в твердом кристаллическом состоянии, обладающих магнитными свойствами, обусловленными особым взаимодействием атомных носителей магнетизма. К ферромагнетикам относятся железо, никель, кобальт, а также ряд сплавов. Ферромагнетизм объясняется квантовыми магнитными свойствами электронов. Дело в том, что электрон, независимо от его пребывания в какой либо системе частиц (атом, молекула,

кристалл), обладает собственным моментом импульса (спином) и связанным с ним собственным (спиновым) магнитным моментом. Важная особенность спина электрона состоит в том, что в магнитном поле (как внешнем, так и созданном атомными и молекулярными токами) спин может быть ориентирован так, чтобы его проекция на направление вектора магнитной индукции принимала только два значения, равные по модулю и противоположные по знаку. В результате этого, в некоторых кристаллах, например в кристаллах железа, возникают условия для параллельной ориентации собственных магнитных моментов электронов группы атомов.

Внутри кристалла ферромагнетика образуются намагниченные области размером порядка  $10^{-4} - 10^{-2}$  см, в которых спины электронов параллельны. Эти самопроизвольно намагниченные области называются доменами. В отдельных доменах магнитные поля имеют различные направления и в большом кристалле взаимно компенсируют друг друга. При внесении ферромагнитного образца во внешнее магнитное поле происходит частичное упорядочение ориентации магнитных моментов отдельных доменов и результирующая магнитная индукция в веществе растет. С увеличением магнитной индукции внешнего поля степень упорядоченности доменов повышается. При некотором значении индукции внешнего поля наступает полное упорядочение ориентации доменов и возрастание магнитной индукции в веществе прекращается. Это явление называется магнитным насыщением. В состоянии насыщения магнитная проницаемость ферромагнетиков имеет очень большие значения; например, для железа  $\mu_{\max} \approx 5000$ , для пермаллоя (сплав никеля с железом)  $\mu_{\max} \approx 100000$ . При отключении внешнего магнитного поля значительная часть доменов в ферромагнитном образце сохраняет упорядоченную ориентацию — образец становится постоянным магнитом.

Упорядоченность ориентации доменов в ферромагнетике нарушается тепловыми колебаниями атомов в кристалле. Чем выше температура, тем интенсивнее разрушается порядок в ориентации доменов, в результате чего образец размагничивается. Температура, выше которой вещество теряет свойства ферромагнетика, называется температурой Кюри. Температура Кюри у железа  $770^{\circ}\text{C}$ , у никеля  $356^{\circ}\text{C}$ , у кобальта  $1130^{\circ}\text{C}$ .

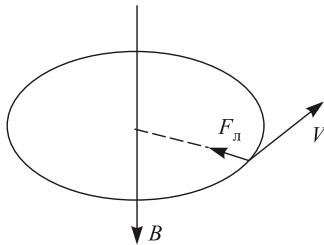
### Указания по решению задач

Большинство задач данного раздела связано либо с равновесием, либо с движением тел под действием различных сил, включая силу Ампера и силу Лоренца. Поэтому, наряду с законами магнетизма и электромагнитной индукции, при решении задач необходимо использовать законы механики.

## Примеры решения задач

**3.3.1.** Частица массой  $m = 10^{-4}$  г, несущая заряд  $q = 10^{-7}$  Кл, движется в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю с индукцией  $B = 1$  Тл. Найти период обращения частицы  $T$ . Силу тяжести не учитывать.

**Решение:** Со стороны магнитного поля на частицу действует сила Лоренца, перпендикулярная скорости частицы  $V$  и индукции  $B$ . Под



действием этой силы частица совершает движение по окружности радиусом  $R$ , описываемое уравнением

$$m \frac{V^2}{R} = qVB,$$

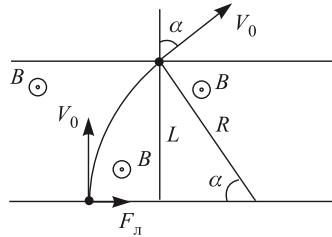
где  $m$  — масса частицы. Учитывая, что период обращения частицы связан с ее скоростью и радиусом окружности соотношением

$$T = \frac{2\pi R}{V},$$

получаем ответ:  $T = \frac{2\pi m}{qB} \cong 6,28$  с.

**3.3.2.** Заряженная частица массой  $m = 6,4 \cdot 10^{-27}$  кг влетает со скоростью  $V_0 = 100$  км/с в область с постоянным и однородным магнитным полем, вектор индукции которого  $\vec{B}$  перпендикулярен  $\vec{V}_0$ . На какой угол  $\alpha$  отклонится частица, если область, занимаемая магнитным полем, в котором движется частица, ограничена плоскостями, перпендикулярными  $\vec{V}_0$ , расстояние между которыми  $L = 10$  см? Заряд частицы  $q = 3,2 \cdot 10^{-19}$  Кл, индукция магнитного поля  $B = 0,01$  Тл. Силу тяжести не учитывать.

**Решение:** Как только частица окажется в области, занимаемой магнитным полем, на нее начнет действовать сила Лоренца, направленная перпендикулярно скорости частицы. Под действием этой силы частица будет двигаться по дуге окружности радиусом  $R$ , который легко найти из уравнения движения (см. решение задачи 3.3.1):  $R = \frac{mV_0}{qB}$ . Из рисунка видно, что угол  $\alpha$ , на который отклонится частица, определяется



соотношением между радиусом дуги  $R$  и длиной  $L$  области, занимаемой магнитным полем. В частности, при  $R > L$

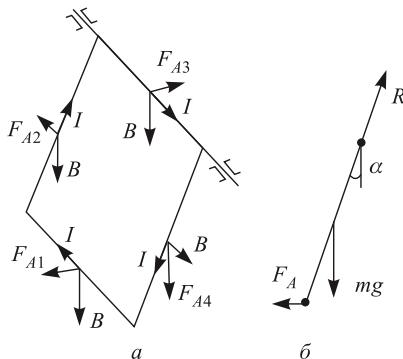
$$\sin \alpha = \frac{L}{R} = \frac{LqB}{mV_0}.$$

Если  $R \leq L$ , то частица описывает в области, занимаемой полем, полуокружность, и  $\alpha = 180^\circ$ . Таким образом, ответ к задаче может быть сформулирован следующим образом:

$$\alpha = \begin{cases} 180^\circ & \text{при } V_0 \leq \frac{q}{m}BL, \\ \arcsin\left(\frac{q}{m} \cdot \frac{BL}{V_0}\right) & \text{при } V_0 > \frac{q}{m}BL. \end{cases}$$

При числовых данных из условия задачи  $\alpha = 30^\circ$ .

**3.3.3.** Квадратная проволочная рамка может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, совпадающей с одной из ее сторон. Рамка помещена в однородное магнитное поле с индукцией  $B$ , направленной вертикально. Когда по рамке течет ток  $I = 5 \text{ А}$ , она отклоняется от вертикальной плоскости на угол  $\alpha = 30^\circ$ . Определить индукцию магнитного поля  $B$ , если площадь сечения проволоки, из которой изготовлена рамка,  $S = 4 \text{ мм}^2$ , а плотность материала проволоки  $\rho = 8,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .



**Решение:** Силы, действующие на отдельные отрезки рамки со стороны магнитного поля (силы Ампера  $F_{A1}, F_{A2}, F_{A3}, F_{A4}$ ), изображены на рисунке а. Видно, что отклонение рамки от вертикали вызывает

сила  $F_{A1}$ , приложенная к нижнему горизонтальному отрезку. Сила  $F_{A3}$  приложена к оси, на которой вращается рамка, а силы  $F_{A2}$  и  $F_{A4}$  действуют в плоскости рамки и могут вызвать только ее деформацию.

Таким образом, рамка находится в равновесии под действием сил, изображенных на рисунке 6, где  $F_A = IBl$  — сила Ампера,  $m = 4lS\rho$  — масса рамки,  $l$  — длина одной из ее сторон,  $R$  — сила реакции оси. Уравнение моментов относительно оси вращения рамки имеет вид:

$$F_A l \cos \alpha = mg \frac{l}{2} \sin \alpha.$$

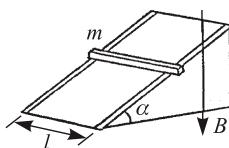
Объединяя записанные выражения, после несложных преобразований получаем ответ:  $B = \frac{2\rho S g}{I} \operatorname{tg} \alpha \cong 0,078$  Тл.

### Задание для самостоятельной работы

**3.3.4.** Горизонтальные рельсы, находящиеся в вертикальном магнитном поле с индукцией  $B = 0,1$  Тл, расположены на расстоянии  $l = 0,5$  м друг от друга. На них лежит металлический стержень массой  $m = 0,5$  кг, перпендикулярный рельсам. Какой величины  $I$  ток нужно пропустить по стержню, чтобы он начал двигаться? Коэффициент трения стержня о рельсы  $\mu = 0,2$ .

**3.3.5.** Подвешенный горизонтально на двух невесомых нитях прямолинейный проводник находится в однородном магнитном поле, вектор индукции которого направлен вертикально. Если по проводнику течет ток  $I_1 = 1$  А, то нити отклоняются от вертикали на угол  $\alpha_1 = 30^\circ$ . При какой силе тока  $I_2$  в проводнике нити отклоняются на угол  $\alpha_2 = 60^\circ$ ?

**3.3.6.** Вдоль наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол  $\alpha = 30^\circ$ , проложены рельсы, по которым может скользить проводящий стержень массой  $m = 1$  кг. Какой минимальной величины ток  $I$  нужно пропустить по стержню, чтобы он оставался в покое, если вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,2$  Тл, направленной вертикально? Коэффициент трения стержня о рельсы  $\mu = 0,2$ , расстояние между ними  $l = 0,5$  м. Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



## **3.4. Электромагнитная индукция**

### **Вопросы программы**

1. *Магнитный поток. Опыты Фарадея. Явление электромагнитной индукции. Вихревое электрическое поле. Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца.*
2. *Самоиндукция. Индуктивность. ЭДС самоиндукции.*
3. *Энергия магнитного поля.*

### **Определения, понятия и законы**

**Опыты Фарадея. Явление электромагнитной индукции.** Английский физик М. Фарадей в 1831 г. обнаружил, что при изменении магнитного поля, пронизывающего замкнутый проводящий контур, в нем возникает электрический ток. Этот ток был назван индукционным током. В своих опытах Фарадей наблюдал возникновение индукционного тока в катушке из металлической проволоки при вдвигании в нее и выдвигании из нее постоянного магнита, а также при изменении силы тока во второй катушке, магнитное поле которой пронизывает первую катушку.

Явление возникновения электрического тока в замкнутом проводящем контуре при изменениях магнитного поля, пронизывающего контур, называется *электромагнитной индукцией*.

**Магнитный поток.** Для количественного описания этого явления вводится понятие *магнитного потока*. Потоком магнитной индукции (магнитным потоком) через некоторую поверхность площадью  $S$  называется величина

$$\Phi = BS \cos \alpha = B_{\perp} S, \quad (3.4.1)$$

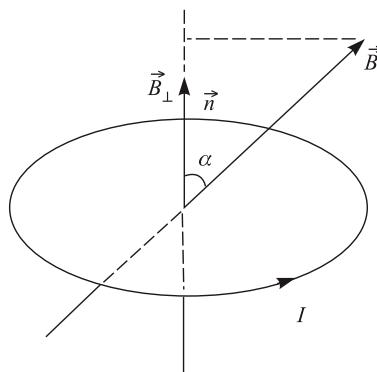


Рис. 3.4.1. К вычислению потока магнитной индукции

где  $\alpha$  — угол между вектором  $\vec{B}$  и нормалью к поверхности  $S$  (рис. 3.4.1).

Поток магнитной индукции через контур с током будет положительным, если составляющая  $\vec{B}_\perp$  вектора  $\vec{B}$  вдоль нормали к контуру совпадает с положительным направлением нормали, и отрицательным, если составляющая  $\vec{B}_\perp$  противоположна положительному направлению нормали.

Для любого контура положительное направление нормали связано с положительным направлением обхода контура правилом буравчика: если рукоятку буравчика вращать по направлению обхода, то перемещение буравчика укажет положительное направление нормали.

**Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца.** Появление электрического тока в замкнутом контуре при изменениях магнитного поля, пронизывающего контур, свидетельствует о действии в контуре сторонних сил неэлектрической природы, или о возникновении ЭДС индукции. Опыты показывают, что направление ЭДС индукции (и, следовательно, индукционного тока) зависит от того, возрастает или убывает магнитный поток через контур, а также от знака магнитного потока. Общее правило, позволяющее определить направление индукционного тока в контуре, было установлено в 1833 г. русским физиком Э.Х. Ленцем. Согласно *правилу Ленца*, возникающий в замкнутом контуре индукционный ток имеет такое направление, что созданный им магнитный поток через площадь, ограниченную контуром, стремится компенсировать то изменение магнитного потока, которым вызван данный ток.

Экспериментальные исследования зависимости ЭДС индукции от характера изменения магнитного потока привели к установлению **закона электромагнитной индукции**: При изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную замкнутым контуром, в нем возни-

кает ЭДС индукции  $\mathcal{E}$ , которая численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока:

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \quad (3.4.2)$$

где  $\Delta\Phi$  — изменение магнитного потока за время  $\Delta t$ . Знак « $-$ » отражает правило Ленца: если  $\Delta\Phi > 0$ , то ЭДС индукции в контуре направлена против положительного направления обхода контура, если  $\Delta\Phi < 0$ , то направление ЭДС индукции совпадает с положительным направлением обхода контура.

В Международной системе единиц закон электромагнитной индукции используют для установления единицы магнитного потока. Эту единицу называют *вебером* (Вб) и определяют следующим образом: магнитный поток через площадь, ограниченную замкнутым контуром, равен 1 Вб, если при равномерном убывании этого потока до нуля за 1 с в контуре возникает ЭДС индукции 1В:  $1 \text{ Вб} = 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ с}$ .

Единицу магнитной индукции устанавливают на основе соотношения (3.4.1). Если вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен поверхности  $S$ , то  $\Phi = BS$ . Отсюда магнитная индукция равна единице, если она создает через площадь  $1 \text{ м}^2$  магнитный поток 1 Вб. Эту единицу магнитной индукции называют *тесла* (Тл):  $1 \text{ Тл} = 1 \text{ Вб}/1 \text{ м}^2 = 1 \text{ Н}/(1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м})$ .

ЭДС индукции возникает как в неподвижном контуре, помещенном в изменяющееся магнитное поле, так и в проводнике, движущемся в магнитном поле, которое может не меняться со временем. Значение ЭДС индукции в обоих случаях определяется законом (3.4.2), но происхождение ЭДС различно.

Если магнитное поле постоянно во времени, но магнитный поток через контур изменяется из-за движения отдельных проводников, образующих контур, то причиной возникновения ЭДС индукции является сила Лоренца, действующая на свободные заряды в движущемся проводнике. При использовании закона электромагнитной индукции в форме (3.4.2) нужно иметь в виду, что изменение магнитного потока связано с изменением площади контура. При движении незамкнутого проводника в магнитном поле, на концах проводника также возникает ЭДС индукции, величина которой определяется магнитным потоком через площадь, «заметаемую» проводником в единицу времени. В частности, при движении в магнитном поле прямолинейного проводника длиной  $l$  со скоростью  $\vec{v}$ , перпендикулярной проводнику, ЭДС индукции на концах проводника равна

$$\mathcal{E} = B_{\perp}lv \quad (3.4.3)$$

где  $B_{\perp}$  — проекция вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  на направление, перпендикулярное скорости движения проводника.

**Вихревое электрическое поле.** Физической причиной возникновения ЭДС индукции в неподвижном контуре является действие *вихревого*

**электрического поля**, всегда возникающего в пространстве при изменении магнитного поля. Работа вихревого электрического поля по перемещению единичного заряда в проводнике и представляет собой ЭДС индукции.

Вихревое электрическое поле отличается от электростатического (кулоновского) поля тем, что оно создается не электрическими зарядами, а переменным магнитным полем, причем его силовые линии замкнуты сами на себя, а не начинаются и заканчиваются на зарядах, как в случае кулоновского поля. Работа вихревого электрического поля при перемещении заряда по замкнутой траектории отлична от нуля.

**Самоиндукция. Индуктивность. ЭДС самоиндукции.** Если магнитное поле вызвано током  $I$ , протекающим по какому-либо контуру, то магнитный поток через поверхность, ограниченную этим контуром, пропорционален току, т. е.  $\Phi = LI$ , где  $L$  — *индуктивность* контура, которая зависит от его формы и размеров и от магнитных свойств окружающей среды. При изменении магнитного потока через контур вследствие изменения тока, протекающего по этому контуру, в нем возникает ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}. \quad (3.4.4)$$

Единица индуктивности в СИ называется *генри* (Гн). Индуктивность контура равна 1 Гн, если в нем при изменении силы тока на 1 А за 1 с возникает ЭДС самоиндукции 1 В:  $1 \text{ Гн} = 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ с}/1 \text{ А}$ .

**Энергия магнитного поля.** Для создания тока  $I$  в контуре с индуктивностью  $L$  необходимо совершить работу по преодолению ЭДС самоиндукции. Собственной энергией тока  $W_m$  называется величина, равная этой работе. Если среда, в которой находится контур, не ферромагнитна, то

$$W_m = \frac{LI^2}{2}. \quad (3.4.5)$$

Собственная энергия тока сосредоточена в магнитном поле, созданном проводником с током, причем эта энергия распределена по всему пространству, где имеется магнитное поле. Энергия однородного магнитного поля, сосредоточенного в объеме  $V$  изотропной и неферромагнитной среды,

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu\mu_0} V. \quad (3.4.6)$$

Объемной плотностью энергии магнитного поля называется энергия, заключенная в единице объема поля:

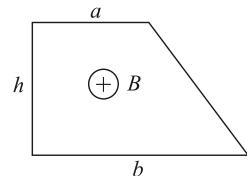
$$w_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu\mu_0}. \quad (3.4.7)$$

Это выражение справедливо не только для однородного поля, но и для произвольных, в том числе неоднородных в пространстве и переменных во времени магнитных полей.

## Примеры решения задач

**3.4.1.** Замкнутый проводник в виде прямоугольной трапеции находится в магнитном поле с индукцией  $B = 6 \cdot 10^{-2}$  Тл, направленной перпендикулярно плоскости трапеции от нас.

Сопротивление единицы длины проводника  $\rho = 0,023$  Ом/м. Найти величину и направление тока  $I$ , текущего в проводнике при равномерном уменьшении поля до нуля в течение  $t = 3$  с. Размеры отрезков проводника  $a = 0,2$  м,  $b = 0,5$  м,  $h = 0,4$  м.



**Решение:** Для определения направления ЭДС индукции выберем нормаль к плоскости контура, совпадающую по направлению с магнитным полем (от нас). Тогда магнитный поток через контур будет положительным. Выбранной нормали соответствует направление обхода контура по часовой стрелке. Поскольку поле убывает со временем, изменение магнитного потока отрицательно:  $\Delta\Phi < 0$ . Из закона электромагнитной индукции

$$E = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

вытекает, что ЭДС индукции положительна, т.е. направлена по часовой стрелке. Туда же будет направлен и индукционный ток. Величина тока определяется отношением ЭДС индукции  $\mathcal{E} = BS/t$  и сопротивления проводника  $R = \rho P$ . Здесь  $S = (a+b)h/2$  — площадь трапеции, а  $P = a + b + h + \sqrt{h^2 + (b-a)^2}$  — ее периметр. Окончательно получаем:

$$I = \frac{B(a+b)h}{2\rho t(a+b+h+\sqrt{h^2+(b-a)^2})} = 76 \text{ mA.}$$

Ток течет по часовой стрелке.

**3.4.2.** Катушка из  $n$  одинаковых витков с площадью  $S$  присоединена к баллистическому гальванометру. Вначале катушка находилась между полюсами магнита в однородном магнитном поле с индукцией  $B$ , параллельной оси катушки. Затем катушку переместили в пространство, где магнитное поле отсутствует. Какое количество электричества  $Q$  протекло через гальванометр? Сопротивление всей цепи  $R$ .

**Решение:** Магнитный поток, пронизывающий катушку в начальный момент, равен  $\Phi = nSB$ . Пусть катушка удаляется из магнитного поля за время  $\Delta t$ . Поскольку изменение магнитного потока за это время  $\Delta\Phi = \Phi$ , величина ЭДС индукции  $E = \Delta\Phi/\Delta t = nSB/\Delta t$ . Ток

в цепи  $I = E/R$ , протекший за время  $\Delta t$  заряд  $Q = I\Delta t = \frac{BSn}{R}$ . Это количество электричества и будет зарегистрировано баллистическим гальванометром, который измеряет прошедший через него заряд.

**3.4.3.** При равномерном изменении силы тока через проволочную катушку в ней возникает ЭДС самоиндукции  $E = 10$  В. Катушка содержит  $N = 1000$  витков. Какой заряд  $q$  протечет за время  $\Delta t = 0,05$  с через замкнутый проволочный виток, надетый на катушку так, что его плоскость перпендикулярна оси катушки? Сопротивление витка  $R = 0,2$  Ом.

**Решение:** Величина ЭДС самоиндукции равна  $E = L \frac{\Delta I}{\Delta t}$ , где  $L$  — индуктивность катушки. Поскольку  $L$  пропорционально числу витков катушки, индуктивность одного витка  $L_1 = L / N$ . Поэтому индукционный ток в витке  $I_1 = \mathcal{E}/(NR)$ . Заряд, протекший через виток за время  $\Delta t$

$$q = I_1 \Delta t = \frac{\mathcal{E} \Delta t}{NR} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ Кл.}$$

**3.4.4.** По двум вертикальным проводящим рейкам  $AB$  и  $CD$  (см. рисунок), находящимся на расстоянии  $l$  и соединенным сопротивлением  $R$ , под действием силы тяжести начинает скользить проводник,

длина которого  $l$  и масса  $m$ . Система находится в однородном магнитном поле, индукция которого  $B$  перпендикулярна плоскости рисунка. Какова установившаяся скорость  $v$  движения проводника, если сопротивлением самого проводника и реек, а также трением можно пренебречь? Ускорение свободного падения  $g$ .

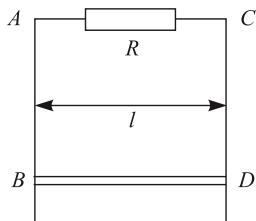
**Решение:** Предоставленный самому себе проводник начнет под действием силы тяжести двигаться вниз. В результате этого возникнет изменение магнитного потока через контур, образованный рееками, резистором и проводником, и, как следствие, ЭДС индукции и индукционный  $I$  ток в контуре. Этот ток, протекая по подвижному проводнику, приведет к появлению силы Ампера  $F_A$ , которая, как нетрудно убедиться, будет направлена против скорости проводника. Таким образом, уравнение движения проводника запишется следующим образом:

$$ma = mg - F_A.$$

Учитывая, что  $F_A = IBl$ , а  $I = \mathcal{E}/R$ , где  $\mathcal{E} = Bvl$  — ЭДС индукции, находим, что величина силы Ампера пропорциональна скорости проводника  $v$ :

$$F_A = \frac{B^2 l^2}{R} v.$$

Движение проводника установится, т.е. ускорение проводника  $a$  обратится в ноль, когда сила Ампера сравняется по величине с силой



тяжести. Объединяя записанные выражения, находим, что скорость установившегося движения  $v = \frac{mgR}{B^2 l^2}$ .

**3.4.5.** В магнитном поле с индукцией  $B = 1$  Тл, направленной вертикально вниз, по горизонтальным рельсам равномерно движется проводящий стержень длины  $L = 0,4$  м со скоростью  $v = 5$  м/с. Концы рельсов присоединены к батарее с ЭДС  $\mathcal{E} = 10,1$  В и внутренним сопротивлением  $r = 0,1$  Ом. Какое количество теплоты  $Q$  выделится в стержне за время  $t = 10$  с, если его сопротивление  $R = 10$  Ом? Сопротивлением рельсов и соединительных проводов пренебречь.

**Решение:** При движении стержня возникает ЭДС индукции  $E_{\text{инд}} = Bvl$ , направление которой, как нетрудно убедиться, при конкретных условиях задачи противоположно направлению ЭДС источника. По закону Ома для полной цепи индукционный ток

$$I = \frac{E - Bvl}{R + r}.$$

Количество теплоты, выделяющееся в стержне за время  $t$ ,  $Q = I^2 Rt$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

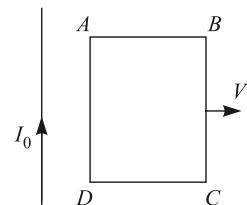
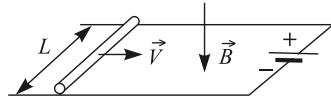
$$Q = \left( \frac{E - Bvl}{R + r} \right)^2 Rt \cong 64 \text{ Дж.}$$

**3.4.6.** Прямоугольный контур  $ABCD$  перемещается поступательно с постоянной скоростью  $v$  в магнитном поле тока  $I_0$ , текущего по длинному прямому проводу  $OO'$ . Стороны  $AD$  и  $BC$  параллельны проводу. Определить величину и направление тока, индуцированного в контуре в тот момент, когда сторона  $AD$  находится на расстоянии  $x_0$  от провода.  $AD = BC = a$ ,  $AB = DC = b$ . Сопротивление контура  $R$ .

**Решение:** Линии магнитной индукции, создаваемой током  $I_0$ , текущим в проводе  $OO'$ , представляют собой концентрические окружности, охватывающие этот провод. Следовательно, магнитная индукция перпендикулярна плоскости контура и в занимаемой им области направлена от нас. Величина магнитной индукции в окрестности отрезков контура  $AD$  и  $BC$  равна, соответственно:

$$B_{AD} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi x_0}, \quad B_{BC} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi(x_0 + b)}.$$

При движении контура со скоростью  $v$  на концах отрезков  $AD$  и  $BC$  возникает ЭДС индукции, обусловленная действием силы Лоренца на свободные заряды в движущихся проводниках. Направления сил



Лоренца в обоих отрезках одинаковы: от  $D$  к  $A$  и от  $C$  к  $B$ , а величины создаваемых ими ЭДС индукции различны:

$$E_{AD} = B_{AD}vl = \frac{\mu_0 I_0 v l}{2\pi x_0}, \quad E_{BC} = B_{BC}vl = \frac{\mu_0 I_0 v l}{2\pi(x_0 + b)}.$$

Очевидно, что  $E_{AD} > E_{BC}$ , поэтому суммарная работа сил Лоренца положительна при обходе контура по часовой стрелке. В этом же направлении будет течь индукционный ток, величина которого

$$I = \frac{E_{AD} - E_{BC}}{R}.$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:  $I = \frac{\mu_0 ab I_0 v}{2\pi x_0 (x_0 + b) R}$ .

**3.4.7.** По двум металлическим параллельным рейкам, расположенным в горизонтальной плоскости к замкнутым на конденсатор  $C$ ,

может без трения двигаться проводник массой  $m$  и длиной  $l$ . Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией  $B$ , направленной вверх. К середине проводника перпендикулярно ему и параллельно рейкам приложена сила  $F$ . Определить ускорение подвижного проводника.

Сопротивлением реек и подводящих проводов пренебречь. В начальный момент скорость проводника равна нулю.

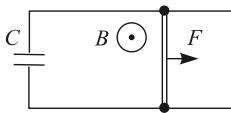
**Решение:** При движении проводника в контуре возникает ЭДС индукции  $E$ , которая в каждый момент времени равна напряжению на конденсаторе  $q/C$ , где  $q$  — заряд конденсатора. Индукционный ток  $I$  в контуре с одной стороны заряжает конденсатор, с другой — приводит к появлению силы Ампера, действующей на проводник в направлении, противоположном силе  $F$ . Следовательно, уравнение движения проводника (второй закон Ньютона) имеет вид:

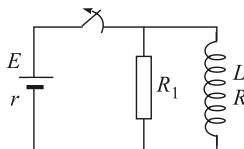
$$ma = F - F_A = F - IBl.$$

Поскольку  $E = Bvl = q/C$ , ток в контуре  $I = \dot{q} = BvlC = BalC$ . Здесь точкой обозначена производная по времени и учтено, что ускорение проводника  $a = \dot{v}$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$a = \frac{F}{m + B^2 l^2 C}.$$

**3.4.8.** Катушка индуктивностью  $L = 0,4$  Гн с сопротивлением обмотки  $R = 2$  Ом подключена параллельно с резистором сопротивлением  $R_1 = 8$  Ом к источнику с ЭДС  $\mathcal{E} = 6$  В и внутренним сопротивлением  $r = 0,2$  Ом. Какое количество тепла  $Q$  выделится в сопротивлении  $R_1$  после отключения источника?





**Решение:** При замкнутом ключе через источник течет ток

$$I = \frac{E}{r + \frac{RR_1}{R + R_1}} = \frac{E(R + R_1)}{rR + rR_1 + RR_1}.$$

Этот ток разветвляется на два тока  $I_L$  и  $I_R$ , протекающих, соответственно, через катушку и резистор  $R_1$  и удовлетворяющих системе уравнений:

$$I_L + I_R = I, \quad I_L R = I_R R_1.$$

Отсюда

$$I_L = I \frac{R_1}{R + R_1} = \frac{ER_1}{rR + rR_1 + RR_1}.$$

После отключения источника (размыкания ключа) возникающая в катушке ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$  будет какое-то время поддерживать в цепи, образованной катушкой и резистором  $R_1$ , ток

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R + R_1}.$$

При этом полная мощность  $P = I_1^2(R + R_1)$ , выделяющаяся в этой цепи, распределится между катушкой и резистором пропорционально их сопротивлениям:

$$P_L = I_1^2 R, \quad P_R = I_1^2 R_1.$$

Следовательно, мощность, выделяющаяся на резисторе, составляет от полной мощности, выделяющейся в этой цепи, следующую долю:

$$P_R = P \frac{R_1}{R + R_1}.$$

Поскольку данное отношение мощностей не зависит от времени, очевидно, что такую же долю составит и энергия, выделившаяся на резисторе за время существования ЭДС самоиндукции, от полной энергии, выделившейся в цепи. В свою очередь, полная выделившаяся энергия равна энергии  $LI_L^2/2$  магнитного поля в катушке в момент отключения источника. Таким образом, количество тепла, выделившегося на резисторе  $R_1$  после отключения источника, равно:

$$Q = \frac{LI_L^2}{2} \cdot \frac{R_1}{R + R_1}.$$

Подставляя в это равенство найденный ранее ток через катушку, получаем ответ:

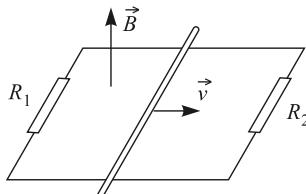
$$Q = \frac{L\mathcal{E}^2 R_1^3}{2(R + R_1)(rR + rR_1 + RR_1)^2} = 1,14 \text{ Дж.}$$

### Задание для самостоятельной работы

**3.4.9.** Кольцо радиуса  $r = 1$  м, сделанное из тонкой проволоки, находится в однородном магнитном поле, индукция которого увеличивается пропорционально времени  $t$  по закону  $D = kt$ . Определить мощность  $P$ , выделяющуюся в кольце, если известно, что сопротивление кольца равно  $R = 1$  Ом, вектор индукции  $\mathbf{B}$  составляет угол  $\alpha = 60^\circ$  с нормалью к плоскости кольца,  $k = 1$  Тл/с.

**3.4.10.** Катушку с индуктивностью  $L = 0,3$  Гн подключают к источнику с ЭДС  $\mathcal{E} = 1,5$  В. Через какой промежуток времени  $\Delta t$  сила тока в цепи будет равна  $I = 5$  А? Омическим сопротивлением катушки и внутренним сопротивлением источника пренебречь.

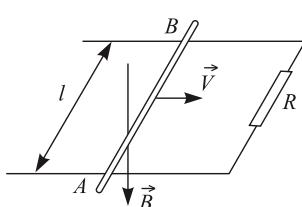
**3.4.11.** По двум параллельным проводам со скоростью  $v = 20$  см/с, направленной вдоль проводов, движется проводящий стержень. Междунонцами проводов включены резисторы  $R_1 = 2$  Ом и  $R_2 = 4$  Ом.



Расстояние между проводами  $d = 10$  см. Провода помещены в однородное магнитное поле, индукция которого  $B = 10$  Тл перпендикулярна плоскости, проходящей через провода. Найти силу тока  $I$ , текущего по стержню. Сопротивлением проводов, стержня и контактов между ними пренебречь.

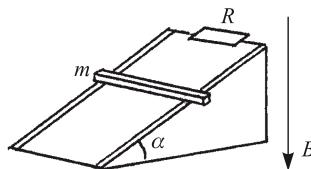
**3.4.12.** Параллельные проводящие шины, расположенные в горизонтальной плоскости, замкнуты на резистор сопротивлением  $R$  и

помещены в постоянное однородное магнитное поле, вектор индукции которого направлен по вертикали вниз. По шинам без трения может перемещаться проводник АВ, сохраняя постоянно контакт с шинами. Найти величину и направление силы  $\vec{F}$ , которую нужно приложить к проводнику, чтобы он

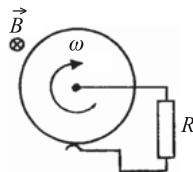


двигался вдоль шин поступательно с постоянной скоростью  $\vec{v}$ . Сопротивлением шин и проводника пренебречь. При расчетах положить:  $R = 100 \text{ Ом}$ ,  $B = 2 \text{ Тл}$ ,  $v = 0,1 \text{ м/с}$ ,  $l = 20 \text{ см}$ .

**3.4.13.** По параллельным рельсам, наклоненным под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту, соскальзывает без трения проводящий брускок массой  $m = 100 \text{ г}$ . В верхней части рельсы замкнуты резистором с сопротивлением  $R = 20 \text{ Ом}$ . Вся система находится в однородном магнитном поле, направленном вертикально. Чему равна сила тока  $I$ , текущего по брускоку, если известно, что он движется с постоянной скоростью  $v = 1 \text{ м/с}$ ? Сопротивлением бруска и рельсов пренебречь, ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .



**3.4.14.** Металлический диск радиусом  $r = 10 \text{ см}$ , расположенный перпендикулярно силовым линиям однородного магнитного поля с индукцией  $B = 1 \text{ Тл}$ , вращается вокруг оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью  $\omega = 628 \text{ рад/с}$ . Два скользящих контакта, один на оси диска, другой — на краю, соединяют диск с резистором сопротивлением  $R = 5 \text{ Ом}$ . Какая мощность  $W$  выделяется на резисторе? Сопротивлением диска и соединительных проводов пренебречь.



## **3.5. Электромагнитные колебания и волны**

### **Вопросы программы**

1. *Переменный электрический ток. Амплитудное и действующее (эффективное) значение периодически изменяющегося напряжения и тока.*
2. *Получение переменного тока с помощью индукционных генераторов. Трансформатор. Передача электрической энергии.*
3. *Колебательный контур. Свободные электромагнитные колебания в контуре. Превращение энергии в колебательном контуре. Уравнение, описывающее процессы в колебательном контуре, и его решение. Формула Томсона для периода колебаний. Затухающие электромагнитные колебания.*
4. *Вынужденные колебания в электрических цепях. Активное, емкостное и индуктивное сопротивления в цепи гармонического тока. Резонанс в электрических цепях.*
5. *Открытый колебательный контур. Опыты Герца. Электромагнитные волны. Их свойства. Шкала электромагнитных волн. Излучение и прием электромагнитных волн. Принципы радиосвязи.*

### **Определения, понятия и законы**

**Переменный электрический ток.** Переменным называется ток, величина и направление которого периодически меняются во времени. Наибольшее практическое значение имеет переменный ток, изменяющийся по гармоническому закону (т.е. по закону синуса или косинуса). Как и любое гармоническое колебание, такой ток может быть описан формулой

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (3.5.1)$$

где  $I$  — значение силы тока в данный момент времени  $t$ ,  $I_0$  — амплитуда тока,  $\omega$  — круговая частота,  $\varphi_0$  — начальная фаза. Круговая частота  $\omega$  связана с частотой  $\nu$  и периодом  $T$  формулами  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $\omega = 2\pi/T$ .

**Амплитудное и действующее (эффективное) значение периодически изменяющегося напряжения и тока.** Если переменный гармонический ток проходит через резистор, то напряжение на нем также меняется по гармоническому закону, причем в той же фазе, что и ток:

$$U = U_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (3.5.2)$$

где  $U_0$  — амплитуда напряжения. Мгновенная мощность переменного тока в резисторе определяется выражением

$$P = IU = I_0 U_0 \cos^2(\omega t + \varphi_0). \quad (3.5.3)$$

Средняя за период мощность равна

$$\bar{P} = \frac{I_0 U_0}{2}. \quad (3.5.4)$$

Формула (3.5.4) дает возможность сравнивать переменный и постоянный токи по их тепловому действию. Эффективным (действующим) значением переменного тока называется сила постоянного тока, выделяющего в проводнике такое же количество теплоты, что и данный переменный ток за то же время. В соответствии с этим, действующее значение силы тока равно  $I_d = I_0/\sqrt{2}$ . Аналогично, действующее значение переменного напряжения определяется как  $U_d = U_0/\sqrt{2}$ .

**Получение переменного тока с помощью индукционных генераторов.** Переменный ток находит широкое применение на практике благодаря простым и экономичным способам его получения (с помощью индукционных генераторов) и преобразования переменного напряжения (с помощью трансформаторов). Принцип действия генератора переменного тока основан на явлении электромагнитной индукции, приводящем к возникновению переменной ЭДС при вращении проволочного витка в магнитном поле.

Магнитный поток однородного поля через плоский виток равен произведению площади контура  $S$  на индукцию магнитного поля  $B$ , пронизывающего контур, и на косинус угла  $\varphi$  между направлением индукции и нормалью к площадке, ограниченной контуром (рис. 3.5.1):

$$\Phi = BS \cos \varphi. \quad (3.5.5)$$

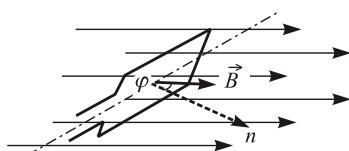


Рис. 3.5.1. Принцип действия генератора переменного тока

Если виток из проволоки равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  в магнитном поле, то угол  $\varphi$  между направлением магнитной индукции и нормалью к плоскости рамки будет меняться по закону  $\varphi = \omega t$ , что вызовет появление переменного магнитного потока  $\Phi = BS \cos \omega t$  через площадку, ограниченную контуром. В результате в контуре возникнет переменная ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = -\dot{\Phi} = BS\omega \sin \omega t = E_0 \sin \omega t, \quad (3.5.6)$$

где  $\dot{\Phi}$  — производная магнитного потока по времени,  $E_0 = BS\omega$  — амплитудное значение ЭДС индукции. Если в магнитном поле вращается контур, состоящий из  $N$  последовательных витков, намотанных на сердечник с магнитной проницаемостью  $\mu$ , то амплитуда ЭДС индукции  $\mu N E_0$ .

Для подключения витка к внешней цепи используются скользящие контакты, состоящие из контактных колец, подсоединенных к выводам витка, и неподвижных пластин (щеток), прижатых к кольцам. На практике вместо одного витка используется целая система обмоток, размещенных в пазах железного сердечника. В мощных генераторах обмотки обычно неподвижны, а вращается источник магнитного поля. Это позволяет существенно упростить проблему отвода тока, вырабатываемого генератором, к потребителю.

**Трансформатор.** Трансформатор представляет собой устройство для преобразования переменного напряжения. Он состоит из замкнутого железного сердечника, на который намотаны две обмотки: первичная

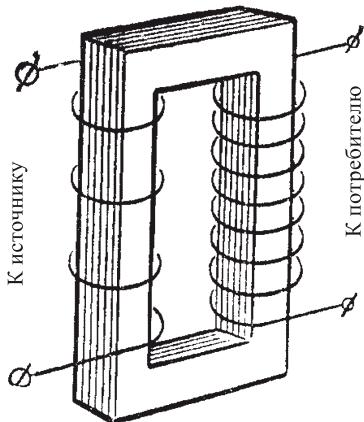


Рис. 3.5.2. Первичная и вторичная обмотки трансформатора

и вторичная (рис. 3.5.2). К первичной обмотке прикладывается переменное напряжение. Оно вызывает в обмотке переменный ток, который, в свою очередь, порождает переменный магнитный поток в сер-

дечнике трансформатора. Переменный магнитный поток пронизывает витки вторичной обмотки трансформатора и, в соответствии с законом электромагнитной индукции, порождает во вторичной обмотке ЭДС индукции. Для ненагруженного трансформатора отношение напряжения на вторичной обмотке (выходного напряжения  $U_2$ ) к напряжению на первичной обмотке (входному напряжению  $U_1$ ) равно отношению числа витков во вторичной обмотке к числу витков в первичной обмотке:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (3.5.7)$$

Если число витков вторичной обмотки больше числа витков первичной обмотки трансформатора, то выходное напряжение больше входного и трансформатор называется повышающим. В противном случае трансформатор называется понижающим. Так как при преобразовании переменного тока трансформатором потери очень малы, произведение силы тока на напряжение одинаково для обеих обмоток:  $I_1 U_1 = I_2 U_2$ . Отсюда следует, что  $I_1/I_2 = U_2/U_1$ .

**Передача электрической энергии.** Передача электрической энергии на расстояние сопряжена с потерей энергии в проводах, по которым течет ток. Мощность потерь есть  $I^2 R$ , где —  $I$  сила тока,  $R$  — сопротивление провода. Для уменьшения мощности потерь необходимо уменьшать величину силы тока в проводе  $I$  (так как возможности уменьшения сопротивления проводов  $R$  пока ограничены). При этом для сохранения величины полезной мощности передаваемого тока, равной произведению тока на напряжение  $IU$ , необходимо повышать напряжение  $U$ . Поэтому на практике при необходимости передать электроэнергию на большое расстояние поступают следующим образом. Сначала повышают напряжение переменного тока с помощью повышающего трансформатора (до напряжений в десятки — сотни киловольт), затем передают ток по линии электропередачи, а затем понижают напряжение с помощью понижающего трансформатора.

**Колебательный контур. Свободные электромагнитные колебания в контуре.** Колебательный контур представляет собой электрическую цепь, состоящую из конденсатора и катушки индуктивности, соединенных между собой (рис. 3.5.3). Если зарядить конденсатор, а затем замкнуть его на катушку индуктивности, то через нее потечет ток. Ток в катушке вызовет появление магнитного поля и магнитного потока через витки катушки. В момент, когда конденсатор полностью разрядится и напряжение

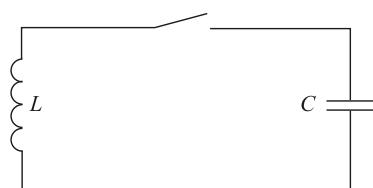


Рис. 3.5.3. Колебательный контур

на нем станет равным нулю, ток в катушке достигнет максимума. Затем сила тока начнет уменьшаться. Это вызовет изменение магнитного потока через витки катушки и, как следствие, электродвижущую силу в контуре, которая будет стремиться поддержать убывающий ток. В итоге ток будет еще некоторое время течь в прежнем направлении, что приведет к зарядке конденсатора. В момент прекращения тока конденсатор снова окажется заряженным (с полярностью, обратной по отношению к первоначальной). После этого ток потечет в противоположном направлении, и весь процесс повторится снова.

**Превращение энергии в колебательном контуре.** Энергия в контуре периодически меняет свою форму, превращаясь из энергии заряженного конденсатора (энергия электрического поля) в энергию катушки с током (энергия магнитного поля) и наоборот. Превращение энергии в контуре аналогично превращению энергии при колебаниях маятника, когда энергия периодически превращается из потенциальной в кинетическую и обратно.

**Уравнение, описывающее процессы в колебательном контуре, и его решение. Формула Томсона для периода колебаний.** Свободные колебания в контуре описываются уравнением

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0, \quad (3.5.8)$$

где  $q$  — заряд конденсатора,  $C$  — емкость конденсатора,  $L$  — индуктивность катушки,  $\ddot{q}$  — вторая производная заряда конденсатора по времени. Решение этого уравнения имеет вид:

$$q(t) = Q \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (3.5.9)$$

Здесь  $Q$  — амплитудное значение заряда (т.е. максимальная величина заряда на конденсаторе),  $\varphi_0$  — начальная фаза колебаний,  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  — круговая частота. Период свободных колебаний в контуре выражается формулой Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC}, \quad (3.5.10)$$

Значения  $Q$  и  $\varphi_0$  определяются начальными условиями. В частности, при отсутствии тока в катушке в момент подключения к ней заряженного конденсатора  $\varphi_0 = 0$ , а  $Q$  равно начальному заряду конденсатора.

Ток в контуре равен производной заряда по времени:

$$I = \dot{q} = -Q\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -I_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (3.5.11)$$

где  $I_0 = \sqrt{\frac{C}{L}} U_0$  — амплитуда тока,  $U_0 = \frac{Q}{C}$  — амплитуда напряжения.

**Затухающие электромагнитные колебания.** Наличие сопротивления соединительных проводов и катушки в реальном контуре приводит к тому, что свободные электромагнитные колебания постепенно затухают. При этом энергия колебаний переходит в тепловую энергию, вызывая нагрев проводов и катушки.

**Вынужденные колебания в электрических цепях.** Переменный электрический ток в промышленных и бытовых электрических цепях является результатом возбуждения в них вынужденных электромагнитных колебаний под действием периодически изменяющейся ЭДС. В общем случае цепь переменного тока можно рассматривать как колебательный контур, к которому приложена внешняя синусоидальная ЭДС. Колебания тока и напряжения в такой цепи происходят на частоте внешней ЭДС.

**Активное, емкостное и индуктивное сопротивления в цепи гармонического тока.** Пусть замкнутая электрическая цепь (рис. 3.5.4) содержит резистор, конденсатор, катушку индуктивности и источник

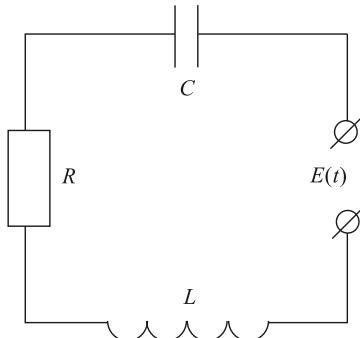


Рис. 3.5.4. Замкнутая цепь переменного тока

переменной ЭДС

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin \omega t. \quad (3.5.12)$$

Эта ЭДС вызывает в цепи переменный ток

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad (3.5.13)$$

где  $I_0$  — амплитуда переменного тока, а  $\varphi$  — сдвиг по фазе между колебаниями тока в цепи и ЭДС.

Напряжения на отдельных элементах цепи и токи, протекающие в них, колеблются с одинаковой частотой, хотя могут быть сдвинуты по фазе (рис. 3.5.5).

Отношение амплитуды колебаний напряжения к амплитуде колебаний тока на данном элементе цепи называется сопротивлением данного

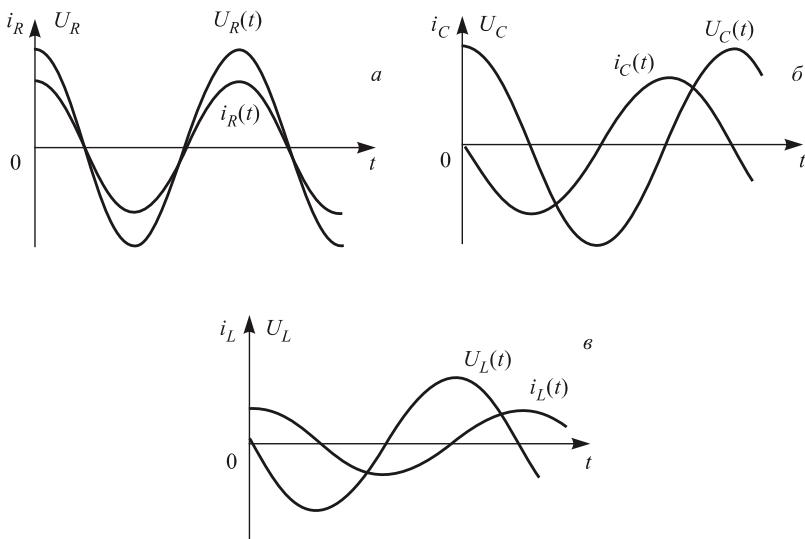


Рис. 3.5.5. Напряжение и ток на резисторе (*a*), конденсаторе (*б*), катушке (*в*)

элемента переменному току. Для резистора это сопротивление равно обычному омическому сопротивлению  $R$  (такому же, как и для постоянного тока). Это сопротивление связано с нагреванием резистора током, т.е. с переходом энергии тока в тепловую энергию, и называется активным. Для конденсатора сопротивление равно  $X_C = 1/(\omega C)$  и называется емкостным. Для катушки индуктивности сопротивление равно  $X_L = \omega L$  и называется индуктивным.

На омическом (активном) сопротивлении  $R$  ток и напряжение колеблются в одинаковой фазе ( $\varphi = 0$ ). На конденсаторе С ток опережает напряжение на  $90^\circ$  ( $\varphi = \pi/2$ ). На катушке индуктивности  $L$  колебания тока отстают от колебаний напряжения на  $90^\circ$  ( $\varphi = -\pi/2$ ).

В цепи переменного тока напряжения на отдельных последовательно включенных элементах могут быть сдвинуты по фазе относительно друг друга. Амплитуду и фазу результирующего колебания напряжения можно легко определить, пользуясь методом векторных диаграмм. Данный метод основан на том, что любое гармоническое колебание наглядно представимо в виде проекции на некоторое направление вектора, врачающегося с заданной угловой частотой  $\omega$ , длина которого равна амплитуде колебаний. При этом сложение колебаний сводится к на-

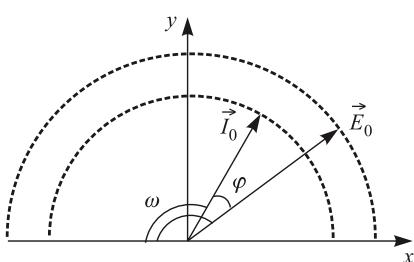


Рис. 3.5.6. Колебания переменного тока и напряжения

относительной движущей силой  $F_0$ .

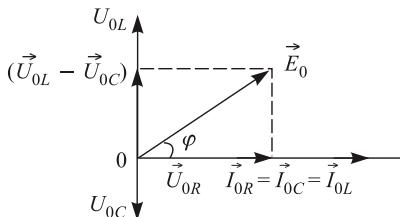


Рис. 3.5.7. Векторная диаграмма для схемы, изображенной на рис. 3.5.4

хождению суммы соответствующих векторов. Колебания переменного тока и напряжения изображают в виде векторов  $\vec{I}_0$  и  $\vec{E}_0$ , вращающихся с одинаковой частотой  $\omega$  против часовой стрелки и отличающихся амплитудой и сдвигом фаз (рис. 3.5.6). Таким образом, векторы тока и напряжения при вращении не меняют своего взаимного расположения, т. е. сохраняют постоянную разность фаз. Для схемы, состоящей из последовательно включенных элементов  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , векторная диаграмма изображена на рис. 3.5.7. Сдвиг фаз для этой схемы определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}, \quad (3.5.14)$$

а полное сопротивление цепи равно

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}. \quad (3.5.15)$$

Закон Ома для цепи переменного тока имеет вид:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}. \quad (3.5.16)$$

Средняя мощность, выделяемая источником в цепи переменного тока

$$\overline{P} = \frac{I_0 \mathcal{E}_0}{2} \cos \varphi = I_d \mathcal{E}_d \cos \varphi, \quad (3.5.17)$$

где  $I_d$ ,  $\mathcal{E}_d$  — действующие значения тока и ЭДС. Множитель  $\cos \varphi$  называется коэффициентом мощности.

**Резонанс в электрических цепях.** Резонанс в электрической цепи наступает при приближении частоты вынужденных колебаний  $\omega$  к частоте собственных колебаний контура  $\omega_0$ . При резонансе резко возрастают амплитуды колебаний токов и напряжений на элементах схемы. Так, для контура, изображенного на рис. 3.5.4, резонансная амплитуда тока равна  $I_0 = \mathcal{E}_0/R$  и при малом сопротивлении  $R$  может достигать весьма больших величин даже при небольших значениях ЭДС. Зависимость амплитуды силы тока от частоты при различных сопротивлениях показана на рис. 3.5.8 ( $R_1 < R_2 < R_3$ ). Одновременно с ростом силы тока при резонансе резко возрастают напряжения на

конденсаторе и катушке индуктивности. Эти напряжения становятся одинаковыми по величине:

$$U_{0C} = U_{0L} = I_0 \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (3.5.18)$$

и могут во много раз превосходить ЭДС.

Явление резонанса широко используется в радиотехнике. Так, настройкой частоты колебательного контура радиоприемника на частоту передающей радиостанции можно добиться значительного увеличения амплитуды электромагнитных колебаний в контуре.

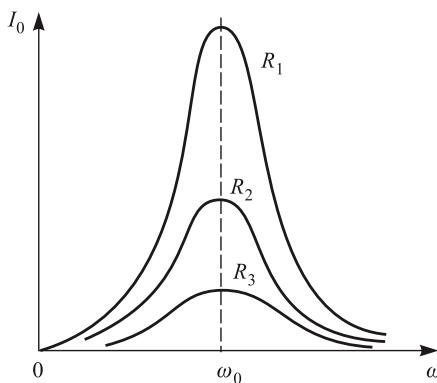


Рис. 3.5.8. Резонансные кривые при различных значениях активного сопротивления

**Открытый колебательный контур.** Обычный (его можно назвать закрытым) колебательный контур практически не излучает электромагнитные волны, поскольку энергия электромагнитных колебаний сосредоточена в очень малой области пространства. Так, энергия электрического поля заключена внутри конденсатора, а энергия магнитного поля — внутри катушки индуктивности. Чтобы излучение электромагнитных волн стало достаточно интенсивным, нужно обеспечить существование переменного электрического поля в большой области пространства, не экранированной металлическими пластинаами. Этого можно добиться, раздвигая пластины конденсатора и уменьшая их размеры. Заменив одновременно катушку индуктивности прямым проводником, мы получим так называемый открытый колебательный контур. В простейшем случае открытый контур представляет собой стержень с шариками на концах, разделенный посередине небольшим разрядным промежутком. Если зарядить шарики достаточно большими зарядами противоположного знака, то в разрядном промежутке произойдет пробой воздуха, и в контуре возникнут электромагнитные колебания высокой частоты. Механизм возникновения колебаний такой же, как

и в закрытом контуре, однако емкость теперь определяется емкостью шариков, а индуктивность — индуктивностью стержня.

**Опыты Герца.** В 1881 – 1888 годах немецкий физик Генрих Герц проводил опыты с разрядом, создаваемым мощной индукционной катушкой в искровом промежутке открытого колебательного контура. Ему удалось получить сверхбыстрые колебания электрического тока в прямолинейном отрезке проводника с периодом колебаний тока около  $10^{-8}$  секунды. Продолжая опыты Герц установил, что быстрые колебания тока в одном проводнике способны вызвать колебания тока в другом проводнике, удаленном от первого на некоторое расстояние. Так были открыты электромагнитные волны. Используя зеркала из цинковой жести, Герц сумел продемонстрировать отражение и фокусировку электромагнитных волн. С помощью призмы, изготовленной из смолы, он наблюдал преломление электромагнитных волн, подобное преломлению светового луча в стеклянной призме. Наконец, с помощью проволочной сетки он убедился в поляризации электромагнитных волн. Подводя итог своим исследованиям, он написал, “...описанные опыты доказывают идентичность света, тепловых лучей и электродинамического волнового движения”.

**Электромагнитные волны. Их свойства.** Согласно современным представлениям электромагнитная волна представляет собой колебания электрического и магнитного полей, распространяющиеся в пространстве со скоростью света ( $c \cong 3 \cdot 10^8$  метров в секунду). Источниками электромагнитных волн являются изменяющиеся во времени электрические токи, а также отдельные ускоренно движущиеся заряженные частицы. Электромагнитная волна характеризуется векторами напряженности  $\vec{E}$  электрического и индукции  $\vec{B}$  магнитного полей, составляющих единое электромагнитное поле. Возможность существования электромагнитных волн обусловлена тем, что имеется связь между меняющимися во времени электрическим и магнитным полями. Переменное магнитное поле создает в пространстве вихревое электрическое поле, а переменное во времени электрическое поле порождает вихревое магнитное поле. Однажды начавшийся процесс взаимного порождения магнитного и электрического полей далее продолжается и захватывает новые области в окружающем пространстве.

Свойства электромагнитных волн во многом сходны со свойствами механических волн. На границе раздела двух сред электромагнитные волны частично отражаются, частично проходят во вторую среду. При этом угол отражения равен углу падения; падающий, отраженный и преломленный лучи и нормаль к поверхности раздела сред лежат в одной плоскости; отношение синуса угла падения к синусу угла преломления является величиной, постоянной для двух данных сред и равной отношению скоростей распространения волн в первой и второй

средах. У края препятствия или при прохождении электромагнитных волн через отверстие наблюдается явление дифракции волн, т.е. отклонение направления их распространения от прямолинейного. Для

волн, излучаемых когерентными источниками, наблюдается явление интерференции.

Электромагнитные волны являются поперечными. Векторы напряженности  $\vec{E}$  электрического и индукции  $\vec{B}$  магнитного полей перпендикулярны направлению распространения волны и взаимно перпендикулярны между собой (рис. 3.5.9).

Излученные электромагнитные

волны несут с собой энергию. Одной из главных энергетических характеристик излучения является плотность потока излучения  $I$ . Так называется электромагнитная энергия, проходящая за единицу времени через площадку единичной площади, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны. Плотность потока излучения в СИ измеряется в ваттах на квадратный метр ( $\text{Вт}/\text{м}^2$ ). Этую величину часто называют также интенсивностью волны.

Для плотности потока излучения (интенсивности) электромагнитной волны справедливо выражение

$$I = wc, \quad (3.5.19)$$

где

$$w = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu\mu_0} \quad (3.5.20)$$

— плотность электромагнитной энергии,  $c$  — скорость света.

При излучении гармонической электромагнитной волны напряженность электрического поля и магнитная индукция в волне пропорциональны квадрату частоты колебаний зарядов в открытом колебательном контуре. Поэтому интенсивность гармонической волны пропорциональна четвертой степени частоты волны.

**Шкала электромагнитных волн.** Классификацию электромагнитных волн обычно проводят исходя либо из длины волны  $\lambda$ , либо из частоты  $\nu$ , связанных между собой соотношением  $\lambda = c/\nu$ . Длинноволновые электромагнитные излучения ( $\lambda = 5 \cdot 10^5 \dots 3 \cdot 10^{-3}$  м) относят к диапазону радиоволн, которые возбуждаются переменными токами и электронными потоками. Инфракрасные волны ( $\lambda = 3 \cdot 10^{-3} \dots 8 \cdot 10^{-7}$  м) излучают молекулы и атомы при тепловых и электрических воздействиях. Видимый свет занимает диапазон  $\lambda = 8 \cdot 10^{-7} \dots 4 \cdot 10^{-7}$  м и излучается при переходах внешних электронов атомов с одного энер-

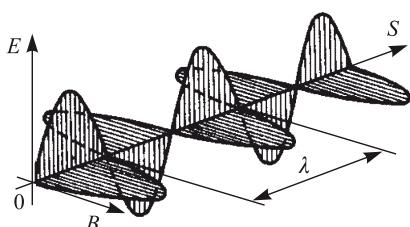


Рис. 3.5.9. Распространение электромагнитной волны

гетического уровня на другой. Ультрафиолетовое излучение ( $\lambda = 4 \times 10^{-7} \dots 10^{-9}$  м) возникает при воздействиях на атомы ускоренных электронов. Рентгеновские лучи ( $\lambda = 10^{-9} \dots 10^{-12}$  м) порождаются атомными процессами при воздействии ускоренных заряженных частиц. Наконец, гамма-излучение ( $\lambda = 10^{-12} \dots 10^{-15}$  м) возникает при ядерных процессах, в том числе при радиоактивном распаде.

**Излучение и прием электромагнитных волн.** Как показали опыты Герца, металлический стержень, в котором возбуждены высокочастотные колебания электрического тока, является источником электромагнитной волны. Если на своем пути электромагнитная волна встречает другой металлический стержень, то в нем возбуждаются вынужденные электромагнитные колебания, которые можно зарегистрировать. На практике излучение и прием электромагнитных волн осуществляются с помощью передающих и приемных антенн.

**Принципы радиосвязи.** Радиосвязью называется передача информации с помощью электромагнитных волн, частоты которых охватывают диапазон от  $3 \cdot 10^4$  до  $3 \cdot 10^{11}$  Гц. Важную роль в современной жизни играет так называемая радиотелефонная связь, с помощью которой передаются речь, музыка и другие звуковые сигналы.

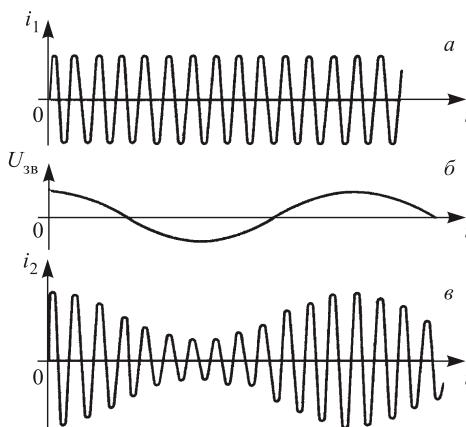


Рис. 3.5.10. Амплитудная модуляция высокочастотных колебаний

Поскольку, плотность потока излучения электромагнитных волн пропорциональна четвертой степени частоты колебаний тока в антенне, возбудить достаточно интенсивные для радиосвязи электромагнитные волны на звуковых частотах практически невозможно. Поэтому, для осуществления радиотелефонной связи обычно используются электромагнитные волны с частотами от сотен килогерц до сотен мегагерц. Для того, чтобы с помощью высокочастотных электромагнитных волн

можно было передать низкочастотные звуковые сигналы, гармонические колебания высокой частоты в радиопередатчике подвергают изменению во времени (модуляции). В результате при радиопередаче антenna излучает модулированную высокочастотную электромагнитную волну.

Простейший способ модуляции состоит в изменении амплитуды высокочастотных колебаний в соответствии с низкочастотным сигналом, полученным с помощью микрофона. Такой способ, называемый амплитудной модуляцией, проиллюстрирован на рис. 3.5.10, где изображены три графика: а) график колебаний высокой частоты, которую называют несущей частотой; б) график колебаний звуковой частоты, т.е. модулирующих колебаний; в) график модулированных по амплитуде высокочастотных колебаний.

В современном радиовещании используются также другие виды модуляции. Процесс плавного изменения несущей частоты в соответствии с управляющим сигналом называется частотной модуляцией, а изменения фазы высокочастотных колебаний — фазовой модуляцией. Это более сложные способы модуляции. Их преимуществом является большая устойчивость к помехам.

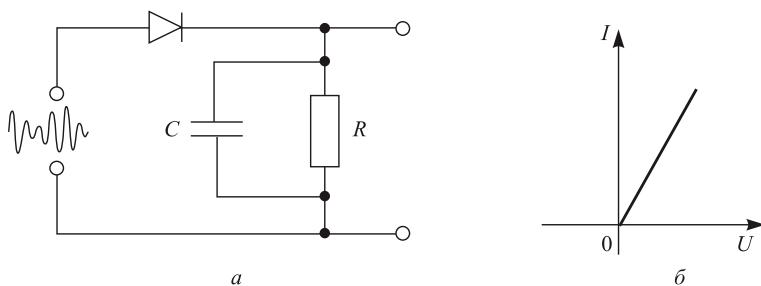


Рис. 3.5.11. Схема детектирующей цепи (а). Вольт-амперная характеристика цепи диод-резистор (б)

Электромагнитные волны, излученные одновременно разными радиостанциями, возбуждают в антенне радиоприемника вынужденные колебания тока на разных несущих частотах. Для того, выделить сигнал от требуемой радиостанции, электрические колебания с антенны подают на колебательный контур с изменяющейся собственной частотой. Изменение собственной частоты колебаний в контуре приемника обычно производится путем изменения емкости переменного конденсатора. При совпадении частоты вынужденных колебаний в антенне с собственной частотой контура наступает резонанс, при котором амплитуда вынужденных колебаний напряжения на обкладках конденсатора достигает максимального значения. Таким образом из большого числа электромагнитных колебаний, возбуждаемых в антенне, выделяются колебания нужной частоты.

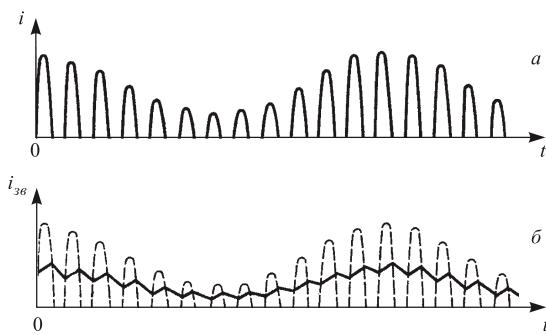


Рис. 3.5.12. Ток в цепи детектора (а). Ток через резистор (б)

С колебательного контура приемника модулированные колебания высокой частоты поступают на элемент с односторонней проводимостью — детектор. Детектором может служить полупроводниковый или вакуумный диод.

На рис. 3.5.11, *а* изображена схема детектирующей цепи, на вход которой поданы высокочастотные модулированные колебания. В цепь последовательно включены детектор (диод) и резистор (нагрузка). Резистор  $R$  шунтирован конденсатором  $C$ , играющим роль сглаживающего фильтра. Пренебрегая обратным током через диод, вольт-амперную характеристику цепи диод — резистор можно приближенно представить в виде, изображенном на рис. 3.5.11, *б*.

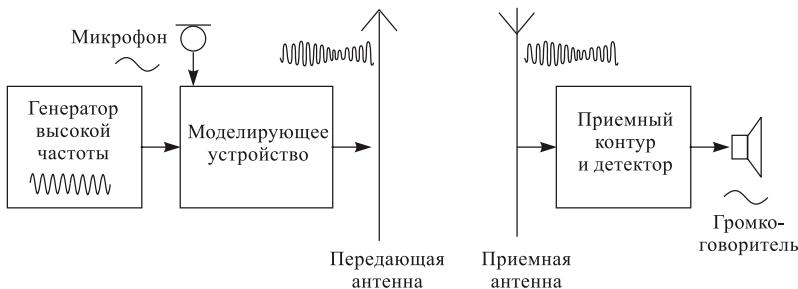


Рис. 3.5.13. Принцип радиотелефонной связи

В отсутствие конденсатора ток цепи детектора изменяется во времени по закону, представленному на рис. 3.5.12, *а*. Конденсатор сглаживает пульсации тока, заряжаясь в те моменты времени, когда диод пропускает ток, и частично разряжаясь через нагрузку, когда диод заперт. Если значения емкости конденсатора и сопротивления резистора подобраны надлежащим образом, то через резистор будет протекать ток, изменяющийся во времени со звуковой частотой, использованной при модуляции высокочастотных колебаний в радиопередатчике (рис. 3.5.12, *б*). Для преобразования электрических колебаний в зву-

ковые переменное напряжение звуковой частоты подается на телефон или громкоговоритель.

Основные принципы радиотелефонной связи иллюстрирует схема, изображенная на рис. 3.5.13.

## Указания по решению задач

Во многих задачах данного раздела удобно использовать закон сохранения энергии. Этому закону следует придать форму, связывающую амплитудные и текущие значения напряжения, заряда или тока в отдельных элементах схемы.

## Примеры решения задач

**3.5.1.** В колебательном контуре с индуктивностью  $L$  и емкостью  $C$  конденсатор заряжен до максимального напряжения  $U_M$ . Каким будет ток  $I$  в контуре в тот момент, когда напряжение на конденсаторе уменьшится в два раза? Колебания считать незатухающими.

**Решение:** В отсутствии затухания суммарная энергия электрического и магнитного полей в контуре сохраняется. Следовательно, в каждый момент времени справедливо равенство:

$$\frac{LI^2}{2} + \frac{CU^2}{2} = \frac{CU_M^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad I = \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \sqrt{U_M^2 - U^2}.$$

По условию задачи  $U = U_M/2$ . Ток в контуре в этот момент времени равен:  $I = U_M \sqrt{\frac{3C}{4L}}$ .

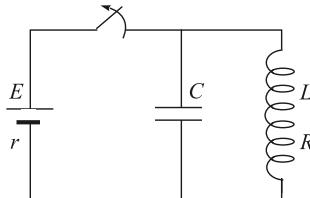
**3.5.2.** В колебательном контуре конденсатору с емкостью  $C = 10 \text{ мкФ}$  сообщили заряд  $q = 1 \text{ мКл}$ , после чего возникли затухающие электромагнитные колебания. Сколько тепла  $Q$  выделится к моменту, когда максимальное напряжение на конденсаторе станет меньше начального максимального напряжения в  $n = 4$  раз?

**Решение:** Количество выделившегося тепла равно разности между начальным и конечным значениями энергии в контуре. В моменты, когда напряжение на конденсаторе максимально, ток через катушку равен нулю. Следовательно, энергия в эти моменты сосредоточена в конденсаторе. Имеем:

$$Q = W_0 - W_1 = \frac{q^2}{2C} - \frac{q_1^2}{2C} = \frac{q^2}{2C} \left(1 - \frac{q_1^2}{q^2}\right).$$

Учитывая, что  $U = q/C$  и в интересующий нас момент времени  $q_1 = q/n$ , получаем ответ:  $Q = \frac{q^2}{2C} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \approx 0,047 \text{ Дж}$ .

**3.5.3.** Катушка индуктивностью  $L = 2 \text{ мГн}$  с сопротивлением обмотки  $R = 10 \text{ Ом}$  и конденсатор емкостью  $C = 10^{-5} \text{ Ф}$  подключены параллельно к источнику с ЭДС  $\mathcal{E} = 100 \text{ В}$  и внутренним сопротивлением  $r = 10 \text{ Ом}$ . Какое количество тепла  $Q$  выделится в контуре после отключения источника?



**Решение:** При замкнутом достаточно долгое время ключе в цепи устанавливается ток через источник и катушку, величина которого равна:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

Напряжение на конденсаторе, равное напряжению на катушке, будет:

$$U = \frac{\mathcal{E}R}{R + r}.$$

Суммарная энергия заряженного конденсатора и катушки с током:

$$W = \frac{LI^2}{2} + \frac{CU^2}{2}.$$

После отключения источника в контуре, состоящем из катушки и конденсатора, возникнут затухающие электромагнитные колебания, в результате которых вся начальная энергия перейдет в тепло. Ответ:

$$Q = W = \frac{\mathcal{E}^2}{2(r + R)^2} (L + CR^2) = 37,5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

**3.5.4.** Конденсатор емкостью  $C = 0,1 \text{ мкФ}$ , заряженный до напряжения  $U = 100 \text{ В}$ , подсоединяют к катушке индуктивностью  $L = 1 \text{ мГн}$ . Чему равна величина тока  $I$  через катушку спустя время  $t_0 = 0,785 \cdot 10^{-5} \text{ с}$  после подключения конденсатора? Сопротивлением катушки и соединительных проводов пренебречь.

**Решение:** При подключении заряженного конденсатора к катушке в образовавшемся контуре возникают электрические колебания с частотой  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . При этом заряд на конденсаторе меняется во времени по закону

$$q = q_0 \cos \frac{t}{\sqrt{LC}},$$

где  $q_0 = CU$  — начальный заряд на конденсаторе. Поскольку сопротивление катушки и соединительных проводов пренебрежимо мало,

суммарная энергия электрического и магнитного поля в контуре сохраняется. Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{q_0^2}{2C} = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}.$$

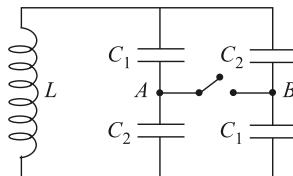
Выражая отсюда ток через катушку, имеем

$$I(t) = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{q_0^2 - q^2} = \sqrt{\frac{C}{L}} U \sqrt{1 - \cos^2 \frac{t}{\sqrt{LC}}}.$$

Величина тока в момент времени  $t_0$  равна

$$I = \sqrt{\frac{C}{L}} U \sin \frac{t_0}{\sqrt{LC}} \cong 0,71 \text{ А.}$$

**3.5.5.** Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и четырех конденсаторов, соединенных как показано на рисунке. Во сколько раз  $\alpha$  изменится период собственных колебаний в контуре, если замкнуть ключ, соединяющий точки  $A$  и  $B$ ?  $C_1 = 10^{-8} \Phi$ ,  $C_2 = 4 \cdot 10^{-8} \Phi$ .



**Решение:** Поскольку период электромагнитных колебаний в контуре определяется формулой Томсона  $T = 2\pi\sqrt{LC}$ , отношение периода  $T''$  колебаний после замыкания ключа к периоду  $T'$  колебаний до замыкания ключа выразится как

$$\alpha = \frac{T''}{T'} = \sqrt{\frac{C''}{C'}} ,$$

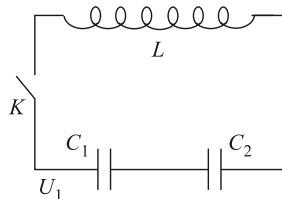
где  $C''$  и  $C'$  — емкости батареи конденсаторов в этих двух случаях соответственно. Расчет по стандартным формулам дает:

$$C' = 2 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad \text{при разомкнутом ключе,}$$

$$C'' = \frac{C_1 + C_2}{2} \quad \text{при замкнутом ключе.}$$

Отсюда получаем ответ:  $\alpha = \frac{C_1 + C_2}{2\sqrt{C_1 C_2}} = 1,25$ .

**3.5.6.** В цепи, показанной на рисунке, конденсатор емкостью  $C_1 = 10^{-5} \Phi$  вначале заряжен до напряжения  $U_1 = 200$  В, а конденсатор емкостью  $C_2 = 10^{-6} \Phi$  разряжен. До какого максимального напряжения  $U_{2max}$  может зарядиться конденсатор  $C_2$  в процессе ко-



лебаний, возникающих в цепи после замыкания ключа? Потерями в соединительных проводах и в катушке индуктивности пренебречь.

**Решение:** После замыкания ключа в цепи возникают гармонические колебания, в процессе которых происходит периодическая перезадержка конденсаторов. В каждый момент времени суммарное напряжение на конденсаторах равно напряжению на катушке, которое, в свою очередь, опережает по фазе ток в цепи на  $\pi/2$ . В момент достижения максимального напряжения на конденсаторах ток в цепи обратится в нуль, следовательно, вся энергия будет сосредоточена в конденсаторах. При этом на конденсатор  $C_2$  перетечет из конденсатора  $C_1$  некоторый заряд  $q$ , а на конденсаторе  $C_1$  останется заряд  $C_1 U_1 - q$ . Величину заряда  $q$  на конденсаторе  $C_2$  можно найти из закона сохранения энергии в контуре. В силу того, что в рассматриваемый момент времени магнитная энергия обращается в нуль,

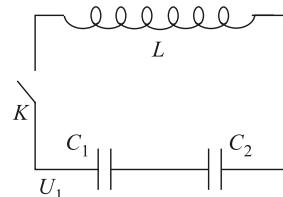
$$\frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \frac{(C_1 U_1 - q)^2}{2 C_1} + \frac{q^2}{2 C_2}.$$

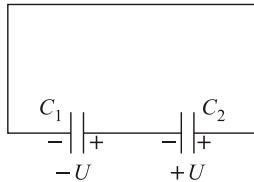
Отсюда  $q = 2U_1 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ . Учитывая, что  $U_2 = \frac{q}{C_2}$ , получаем ответ:

$$U_{2\max} = \frac{2U_1 C_1}{C_1 + C_2} \cong 364 \text{ В.}$$

**3.5.7.** Катушка индуктивностью  $L = 3$  мГн подключена к двум последовательно соединенным конденсаторам (см. рисунок), один из которых, емкостью  $C_1 = 10^{-7}$  Ф, заряжен вначале до напряжения  $U_1 = 150$  В, а второй, емкостью  $C_2 = 3 \cdot 10^{-7}$  Ф, разряжен. Чему будет равна максимальная сила тока  $I_{\max}$  в этой цепи после замыкания ключа?

**Решение:** После замыкания ключа в цепи возникают гармонические колебания. При этом ток в цепи и напряжение на катушке сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ . Следовательно, когда в цепи достигается максимальный ток, напряжение на катушке обращается в нуль, и в этот момент напряжения на конденсаторах становятся равными по величине и противоположными по знаку (эквивалентная цепь изображена на рисунке). Обозначим через  $U$  величину напряжения на каждом из конденсаторов. Из закона сохранения заряда следует, что





суммарный заряд на конденсаторах в рассматриваемый момент времени равен начальному заряду на конденсаторе \$C\_1\$, т.е.

$$(C_1 + C_2)U = C_1 U_1, \quad \text{откуда} \quad U = U_1 \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

Согласно закону сохранения энергии в контуре

$$\frac{C_1 U_1^2}{2} = \frac{(C_1 + C_2)U^2}{2} + \frac{LI_{\max}^2}{2}.$$

Объединяя полученные выражения, находим ответ:

$$I_{\max} = U_1 \sqrt{\frac{C_1 C_2}{L(C_1 + C_2)}} = 0,75 \text{ A.}$$

## Задание для самостоятельной работы

**3.5.8.** На какую длину  $\lambda$  волны настроен колебательный контур с индуктивностью  $L$ , если максимальный ток в контуре  $I_M$ , а максимальное напряжение на конденсаторе  $U_M$ ? Скорость распространения электромагнитных волн  $c$ .

**3.5.9.** В колебательном контуре конденсатор емкостью  $C$  заряжен до максимального напряжения  $U_M$ . Определить резонансную частоту  $\nu_0$  колебаний в контуре, если максимальный ток в нем  $I_M$ . Активным сопротивлением в контуре пренебречь.

**3.5.10.** Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и двух одинаковых конденсаторов, включенных параллельно. Период собственных колебаний контура  $T_1$ . Каков будет период  $T_2$  колебаний в контуре, если конденсаторы включить последовательно?

**3.5.11.** При включении катушки в сеть переменного тока с действующим напряжением  $U_1 = 120$  В и частотой  $f = 50$  Гц действующее значение силы тока в ней равно  $I_1 = 4$  А. При включении той же катушки в сеть постоянного тока с напряжением  $U_2 = 50$  В сила тока в катушке оказывается равной  $I_2 = 5$  А. Определить индуктивность катушки  $L$ .

## Глава 4

# ОПТИКА

### 4.1. Геометрическая оптика

#### Вопросы программы

1. Развитие взглядов на природу света. Закон прямолинейного распространения света. Понятие луча.
2. Интенсивность (плотность потока) излучения. Световой поток. Освещенность.
3. Законы отражения света. Плоское зеркало. Сферическое зеркало. Построение изображений в плоском и сферическом зеркалах.
4. Законы преломления света. Абсолютный и относительный показатели преломления. Ход лучей в призме. Явление полного (внутреннего) отражения.
5. Тонкие линзы. Фокусное расстояние и оптическая сила линзы.
6. Построение изображения в собирающих и рассеивающих линзах. Формула линзы. Увеличение, даваемое линзами.
7. Оптические приборы: лупа, фотоаппарат, проекционный аппарат, микроскоп. Ход лучей в этих приборах. Глаз.

#### Определения, понятия и законы

**Развитие взглядов на природу света.** Первые попытки понимания природы света на основе опытных данных относятся к XVII веку (Ньютона, Гюйгенса). Великий английский физик Исаак Ньютон полагал, что свет представляет собой поток частиц («корпускул» — отсюда термины «корпускулярная модель света», «корпускулярная теория света»). Приблизительно в это же время голландский ученый Христиан Гюйгенс высказал идею о том, что свет имеет волновую природу.

В 1801 году английский оптик Томас Юнг впервые наблюдал явление интерференции света, т.е. явление образования картины темных и светлых линий при наложении двух световых пучков. Это явление можно объяснить только на основе представления о свете как о волне. Так была доказана волновая природа света.

В 1861 году английский физик Джеймс Клерк Максвелл вывел систему уравнений для электрического и магнитного полей, из которой следовала возможность существования электромагнитной волны. Максвелл вычислил скорость распространения электромагнитной волны и получил величину, близкую к скорости света (около 300 тыс. км/с). Это позволило Максвеллу сделать вывод о том, что свет представляет собой электромагнитную волну.

В 1888 году немецкий физик Генрих Герц экспериментально обнаружил предсказанные Максвеллом электромагнитные волны и исследовал их свойства. Герц установил, что электромагнитные волны способны испытывать отражение и преломление, т.е. обладают такими же свойствами, как и свет. Этот факт послужил доказательством электромагнитной природы света.

Наконец, в 1900 году немецкий физик Макс Планк пришел к выводу о существовании элементарных неделимых порций света («световые кванты» или «фотоны»).

В настоящее время считается, что свет имеет двоякую природу: в одних явлениях он проявляется себя как волна (интерференция, дифракция света), а в других явлениях — как поток частиц (фотоэффект).

**Закон прямолинейного распространения света. Понятие луча.** В геометрической оптике рассматриваются законы распространения света в прозрачных средах на основе представления о свете как о совокупности *световых лучей* — линий, вдоль которых распространяется энергия световых волн. Представление о световом луче можно получить, например, если пропустить солнечный свет через небольшое отверстие в ставне и наблюдать его распространение в темной комнате. Уменьшая диаметр отверстия, можно до определенного предела уточнять направление распространения света. Однако получить сколь угодно тонкий пучок света невозможно, т.к. когда диаметр отверстия окажется сравнимым с длиной волны, пучок начнет сильно расширяться за счет дифракции. Световой луч — это геометрическое понятие, вводимое для того, чтобы приблизенно описать распространение света в пространстве, пользуясь законами геометрической оптики. Эти законы были установлены экспериментально задолго до выяснения природы света. В то же время, они вытекают из волновой теории света как приближение, справедливое, если длина волны света исчезающе мала по сравнению с размерами препятствий на пути света.

Наблюдения показывают, что в оптически однородной среде т.е. в среде, в которой показатель преломления везде одинаков, свет распространяется прямолинейно. В однородной среде световые лучи представляют собой прямые линии.

**Интенсивность (плотность потока) излучения.** Воздействие света на глаз или какой-либо регистрирующий прибор состоит прежде

всего в передаче этому прибору энергии, переносимой световой волной. Важной энергетической характеристикой световой волны является введенная ранее для электромагнитных волн *плотность потока излучения* (см. раздел 3.5). Так называется электромагнитная энергия, проходящая за единицу времени через площадку единичной площади, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны. Эту величину часто называют также *интенсивностью* волны. Плотность потока излучения в СИ измеряется в ваттах на квадратный метр ( $\text{Вт}/\text{м}^2$ ).

Плотность потока (интенсивность) излучения пропорциональна квадрату напряженности электрического поля в волне и четвертой степени ее частоты (см. раздел 3.5).

Поток излучения через какую-либо поверхность определяется как энергия, переносимая электромагнитной волной через эту поверхность в единицу времени. Эта величина измеряется в ваттах (Вт).

**Световой поток.** Для восприятия световой энергии человеком особое значение имеет не полная энергия, переносимая электромагнитными волнами, а лишь та ее часть, которая непосредственно воздействует на глаз.

Глаз человека воспринимает электромагнитное излучение в сравнительно небольшом интервале длин волн: примерно от  $4 \cdot 10^{-7}$  до  $8 \cdot 10^{-7}$  м. Наиболее чувствителен глаз к желто-зеленым лучам с длиной волны  $\lambda_c \approx 5 \cdot 10^{-7}$  м. У разных людей чувствительность глаза к излучениям различных длин волн различна. Но в среднем различия оказываются небольшими, и можно говорить о вполне определенной (усредненной) спектральной чувствительности здорового глаза.

Для оценки световой энергии введена особая физическая величина — световой поток. *Световым потоком*  $\Phi$  через некоторую поверхность называется световая энергия, протекающая через эту поверхность в единицу времени и оцениваемая непосредственно человеческим глазом. Для оценки этой величины выбирают эталонный источник света. Световой поток от этого источника с помощью глаза сравнивают со световыми потоками от других источников.

За единицу светового потока в СИ принимается *люмен* (лм). Световой поток в 1 лм соответствует потоку энергии электромагнитного излучения в  $1/683$  Вт при частоте  $5,4 \cdot 10^{14}$  Гц ( $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-7}$  м).

**Освещенность.** Световой поток создается источником света и действует на окружающие источники тела. Для характеристики источника вводят специальную величину — силу света, а для характеристики действия света на поверхность тел — освещенность.

*Сила света* источника определяется как световой поток, созданный им в единичном телесном угле. Если источник создает в телесном

угле  $\Delta\Omega$  световой поток  $\Delta\Phi$ , то сила света источника  $I$  по определению равна:

$$I = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega}. \quad (4.1.1)$$

Сила света точечного источника, создающего равномерный по всем направлениям световой поток, одинакова по всем направлениям и равна

$$I = \frac{\Phi}{4\pi}. \quad (4.1.2)$$

Единицей силы света в СИ является *кандела* (кд). Кандела равен силе света в заданном направлении от источника, испускающего монохроматическое излучение частотой  $5,4 \cdot 10^{14}$  Гц, сила излучения которого в этом направлении составляет  $1/683$  Вт/ср.

*Освещенностью*  $E$  называется отношение светового потока  $\Delta\Phi$ , падающего на некоторый участок поверхности, к площади  $\Delta S$  этого участка:

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S}. \quad (4.1.3)$$

Единица освещенности в СИ называется *люксом* (лк). Люкс равен освещенности поверхности площадью  $1 \text{ м}^2$  при световом потоке падающего на него излучения, равном 1 лм.

Для фотометрических расчетов важно знать, как зависит освещенность  $E$  какой-либо поверхности от ее расположения по отношению к падающим лучам, от расстояния  $R$  до источника света и от силы света  $I$  источника. При этом направление падающих на поверхность лучей принято характеризовать углом падения, т.е. углом между лучом и перпендикуляром, восстановленным к поверхности в точке падения луча.

Освещенность поверхности, создаваемая точечным источником, подчиняется следующему простому закону. Она прямо пропорциональна силе света источника  $I$ , косинусу угла падения лучей  $\alpha$  и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $R$  от источника до поверхности:

$$E = \frac{I}{R^2} \cos \alpha. \quad (4.1.4)$$

Если источников несколько, то общая освещенность равна сумме освещенностей, создаваемых каждым источником в отдельности.

**Законы отражения света. Плоское зеркало.** Пусть световой луч падает на плоскую поверхность, зеркально отражающую свет (*плоское зеркало*). Направления падающего и отраженного от зеркала лучей характеризуются углами падения и отражения, которые образуют, соответственно, падающий и отраженный лучи и перпендикуляр к зеркалу, восстановленный в точке падения. Плоскостью падения называется плоскость, содержащая падающий луч и тот же перпендикуляр. В опытах с зеркалами и тонкими световыми пучками установлены следующие *законы отражения света*:

1. падающий луч, отраженный луч и перпендикуляр к зеркалу, восстановленный в точке падения, лежат в одной плоскости (плоскости падения);
2. угол падения равен углу отражения.

**Построение изображений в плоском зеркале.** На рис. 4.1.1 показано построение изображения светящейся точки в плоском зеркале. Это изображение является мнимым, так как оно образовано пересечением

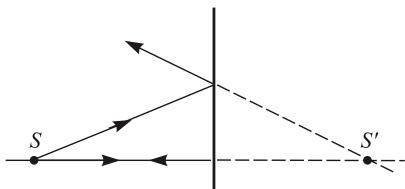


Рис. 4.1.1. Изображение светящейся точки в плоском зеркале

не самих отраженных лучей, а их продолжениями (на рисунке показаны пунктиром). Из рисунка видно, что изображение  $S'$  светящейся точки  $S$  в плоском зеркале лежит на продолжении перпендикуляра, проведенного от источника к зеркалу, а расстояние от зеркала до изображения равно расстоянию от источника до зеркала.

**Сферическое зеркало.** Сферическим зеркалом называют поверхность тела, имеющую форму сферического сегмента и зеркально отражающую свет. Если лучи отражаются от внутренней поверхности сферического сегмента, то зеркало называются *вогнутым*. В случае отражения лучей от наружной поверхности зеркало называется *выпуклым*.

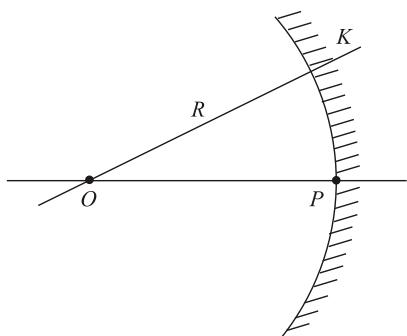


Рис. 4.1.2. Сферическое зеркало

Центр сферы, из которой вырезан сегмент, называют *оптическим центром* зеркала (точка  $O$  на рис. 4.1.2). Вершину сферического сегмента (точка  $P$ ) называют *полюсом* зеркала. Любую прямую, проходящую через оптический центр, называют *оптической осью* зеркала.

Прямую, проходящую через оптический центр и полюс зеркала (прямая  $OP$  на рис. 4.1.2), называют *главной оптической осью* зеркала. Главная оптическая ось отличается от остальных (побочных) оптических осей зеркала только своим симметричным расположением по отношению к краям зеркала.

При описании свойств сферических зеркал будем рассматривать лишь так называемые *параксиальные* (приосевые) пучки света, т.е. пучки, образованные лучами, проходящими на малом расстоянии от главной оптической оси зеркала и образующими с ней малые углы. Необходимо помнить, что все перечисленные ниже простые свойства сферических зеркал справедливы только для параксиальных пучков.

Если на вогнутое сферическое зеркало падает параллельно главной оптической оси узкий пучок параллельных лучей (рис. 4.1.3, а), то после отражения от зеркала все лучи пересекаются в одной точке  $F$ , называемой главным фокусом зеркала. Расстояние от полюса зеркала до главного фокуса называется фокусным расстоянием  $F$ . Оно равно половине радиуса кривизны зеркала  $R$ :

$$F = \frac{R}{2}. \quad (4.1.5)$$

При падении на вогнутое зеркало параллельного пучка лучей, распространяющегося параллельно какой-либо побочной оптической оси (рис. 4.1.3, б), все отраженные лучи сойдутся в точке, удаленной от зеркала на такое же расстояние, что и главный фокус. Совокупность всех подобных точек образует определенную поверхность. Рассматривая лишь малые углы между главной и побочной осями, можно приблизенно считать эту поверхность плоскостью, перпендикулярной главной оптической оси. Она называется фокальной плоскостью зеркала (штриховая линия на рис. 4.1.3, б).

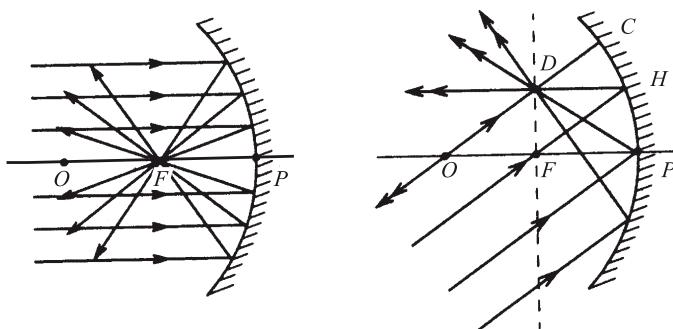


Рис. 4.1.3. Узкий пучок параллельных лучей падает на зеркало параллельно его главной оптической оси (а) и параллельно какой-либо побочной оптической оси зеркала (б)

Если направить узкий параллельный пучок лучей параллельно главной оптической оси на выпуклое зеркало, то отраженные лучи будут расходящимися (рис. 4.1.4). Их продолжения пересекаются в определенной точке, находящейся за зеркалом. Эту точку называют главным фокусом выпуклого зеркала. Поскольку в фокусе выпуклого зеркала пересекаются не сами лучи, а их продолжения, фокус в данном случае является мнимым. Фокусное расстояние выпуклого зеркала

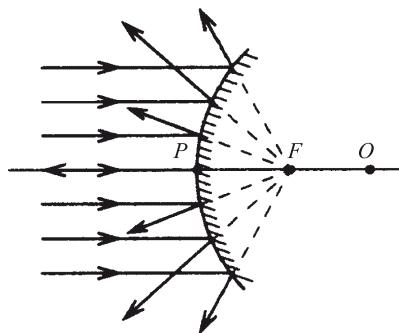
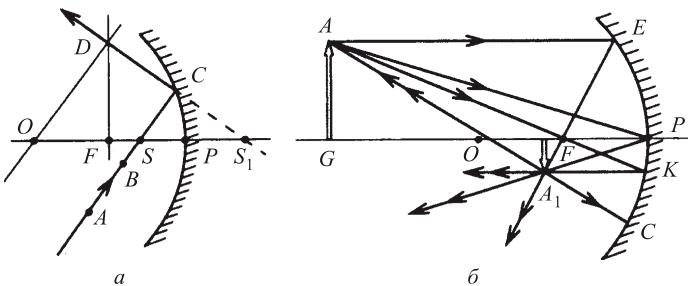


Рис. 4.1.4. Выпуклое сферическое зеркало

вычисляется по формуле (4.1.5), где под  $R$ , как и ранее, понимается радиус кривизны зеркала. Для выпуклого зеркала также используется понятие фокальной плоскости, которая в данном случае является мнимой.

**Построение изображений в сферическом зеркале.** Все лучи, исходящие из какой-либо светящейся точки и идущие под малыми углами к оптической оси зеркала, после отражения от зеркала либо пересекаются в одной точке, либо расходятся так, что в одной точке пересекаются их продолжения. Поэтому сферические зеркала обладают свойством формировать изображения светящихся предметов.

Задача построения изображения сводится к нахождению направления произвольного луча после отражения его от зеркала в некоторой точке. Простой способ такого построения показан на рис. 4.1.5, *a*, где  $AC$  — падающий луч,  $OD$  — параллельная ему побочная оптическая ось,  $FD$  — фокальная плоскость,  $CD$  — отраженный луч.

Рис. 4.1.5. Построение изображения в сферическом зеркале: *a* — светящейся точки  $S$ ; *б* — точки  $A$  предмета  $GA$ .

Для построения изображения какой-либо точки  $A$  предмета наиболее удобны следующие лучи (рис. 4.1.5, *б*):

1. луч  $AOC$ , проходящий через оптический центр зеркала; отраженный луч  $COA$  идет по той же прямой;
2. луч  $AFK$ , проходящий через фокус зеркала; отраженный луч параллелен главной оптической оси;
3. луч  $AP$ , падающий на зеркало в его полюсе; отраженный луч симметричен с падающим относительно главной оптической оси;
4. луч  $AE$ , параллельный главной оптической оси зеркала; отраженный луч  $EF$  проходит через фокус зеркала.

Все отраженные лучи проходят через точку  $A_1$ , являющуюся изображением точки  $A$ . Поэтому для построения точки  $A_1$  можно взять любые два из перечисленных лучей. Чтобы построить изображение предмета, лежащего в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси, достаточно построить изображения крайних точек этого предмета.

Таким же образом строится изображение предмета, расположенного ближе фокуса вогнутого зеркала (рис. 4.1.6), а также изображение предмета в выпуклом зеркале (рис. 4.1.7). В обоих этих случаях изображение оказывается мнимым.

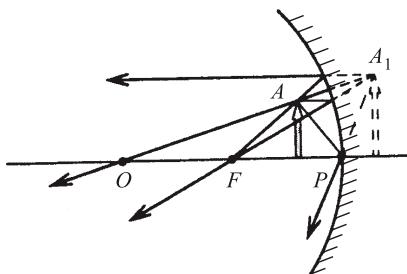


Рис. 4.1.6. Изображение предмета в вогнутом зеркале. Расстояние от предмета до зеркала меньше фокуса

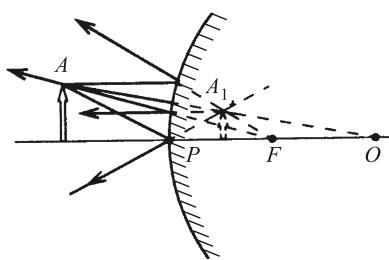


Рис. 4.1.7. Изображение предмета в выпуклом зеркале

Заметим, что выпуклое зеркало дает только мнимое уменьшенное изображение предмета, расположенное между мнимым фокусом и полюсом.

Мнимые изображения всегда являются прямыми (неперевернутыми), а действительные изображения, наоборот, всегда перевернуты по отношению к предмету.

Расстояние  $a$  от светящейся точки до зеркала, расстояние  $b$  от зеркала до изображения этой точки и фокусное расстояние зеркала  $F = R/2$  связаны между собой соотношением, которое называется формулой сферического зеркала. Эту формулу легко получить, например построив изображение  $S_1$  светящейся точки  $S$ , расположенной на главной оптической оси  $OP$  вогнутого зеркала (рис. 4.1.8). В самом деле, применяя теорему о внешнем угле треугольника для  $\Delta SBO$  и  $\Delta OBS_1$  и учитывая, что по закону отражения  $\gamma = \alpha$ , приходим к

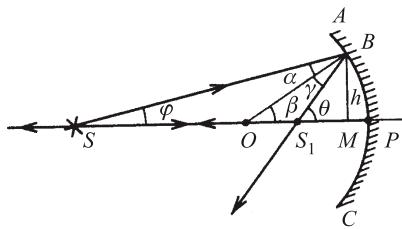


Рис. 4.1.8. Построение изображения  $S'$  светящейся точки  $S$ , расположенной на главной оптической оси вогнутого зеркала

соотношению:  $\varphi + \vartheta = 2\beta$ . Так как все рассматриваемые углы малы, справедливы приближенные равенства:

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{SM} \approx \frac{h}{a}, \quad \beta \approx \operatorname{tg} \beta = \frac{h}{OM} \approx \frac{h}{R} = \frac{h}{2F}, \quad \vartheta \approx \operatorname{tg} \vartheta = \frac{h}{S_1M} \approx \frac{h}{b}.$$

Подставляя эти значения углов в записанное выше соотношение и сокращая на  $h$ , получаем:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}. \quad (4.1.6)$$

Равенство (4.1.6) называется *формулой сферического зеркала*. В таком виде она справедлива, если изображение и фокус являются действительными. При практическом использовании этой формулы нужно соблюдать следующее правило: если изображение или фокус являются мнимыми, то перед соответствующими членами в (4.1.6) нужно ставить знак «минус».

Сказанное о знаках для  $b$  и  $F$  относится и к величине  $a$ . Мнимым источником называют точку, в которой пересекаются продолжения лучей, падающих на зеркало сходящимся пучком. Для мнимого источника  $a < 0$ .

**Законы преломления света.** Из опыта известно, что если световой луч падает на границу раздела двух сред, то он меняет направление распространения. Это явление получило название *преломления света*. Преломление света происходит на границах раздела таких сред как воздух и вода, воздух и стекло, стекло и вода и т.п. Углом падения называется угол между падающим лучом и перпендикуляром к границе раздела, восстановленным в точке падения. Углом преломления называется угол между перпендикуляром к границе раздела, восстановленным в точке падения и преломленным лучом. Плоскостью падения называется плоскость, содержащая падающий луч и перпендикуляр к границе раздела, восстановленный в точке падения. Опытным путем установлены следующие законы преломления света:

- падающий луч, преломленный луч и перпендикуляр к границе раздела, восстановленный в точке падения, лежат в одной плоскости;
- отношение синуса угла падения к синусу угла преломления не зависит от угла падения, если преломленный луч существует (закон Снеллиуса).

Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления зависит от того, какие среды образуют границу раздела и называется относительным показателем преломления второй среды (т.е. среды, в которой распространяется преломленный луч) по отношению к первой. Если луч света падает на границу среды из вакуума, то отношение синуса угла падения к синусу угла преломления называется абсолютным показателем преломления или просто показателем преломления среды. Математически закон Снеллиуса записывается следующим образом:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2. \quad (4.1.7)$$

Картина преломления светового луча на границе раздела двух сред показана на рис. 4.1.9. Здесь  $\alpha_1$  — угол падения,  $\alpha_2$  — угол преломления,  $n_1$  — абсолютный показатель преломления первой среды,  $n_2$  — абсолютный показатель преломления второй среды. Величина  $n_2/n_1$  есть относительный показатель преломления второй среды по отношению к первой. Абсолютный показатель преломления среды равен отношению скорости света в вакууме к скорости света в данной среде:

$$n = c/v. \quad (4.1.8)$$

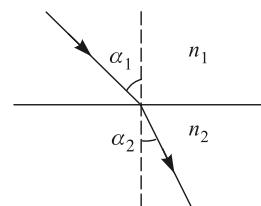


Рис. 4.1.9. Преломление светового луча на границе раздела двух сред,  $n_2 > n_1$

**Ход лучей в призме.** Преломление светового луча стеклянной призмой показано на рис 4.1.10. Изменение направления луча на границах призмы определяется на основании закона преломления света. Угол  $\vartheta$ , на который призма отклоняет световой луч зависит от преломляющего угла призмы (обозначен на рисунке буквой  $\varphi$ ), угла падения  $\alpha$  и показателя преломления стекла, из которого изготовлена призма.

Показатель преломления стекла зависит от длины волны падающего света (дисперсия света). Поэтому, если на призму падает пучок белого света, она разлагает его на цветные компоненты (разлагает в спектр). При этом коротковолненно-

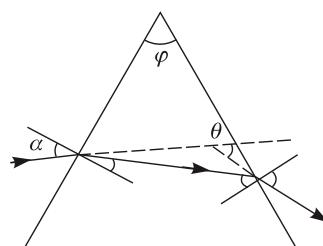


Рис. 4.1.10. Преломление светового луча в стеклянной призме

вое излучение (фиолетовый цвет) преломляется призмой сильнее, чем длинноволновое (красный цвет).

**Явление полного (внутреннего) отражения.** Рассмотрим преломление светового луча на границе раздела двух сред в условиях, когда луч переходит из среды с большим показателем преломления ( $n_1$ ) в среду с меньшим показателем преломления ( $n_2$ ), т.е. из оптически более плотной среды в менее плотную. Согласно формуле (4.1.7), в этом случае угол преломления будет больше угла падения. Угол падения, при котором угол преломления равен прямому углу, называется критическим углом падения. Критический угол падения выражается формулой

$$\alpha_{\text{кр}} = \arcsin(n_2/n_1). \quad (4.1.9)$$

Если угол падения больше критического, то преломленный луч отсутствует, и падающий луч полностью отражается от границы раздела.

**Тонкие линзы.** Линза представляет собой прозрачное тело, ограниченное двумя сферическими поверхностями. В частном случае одна из поверхностей может быть плоской. Примеры линз показаны на рис. 4.1.11. Линза, которая в середине толще, чем у краев, называется выпуклой или *собирающей* (рис. 4.1.11 *a*, *b*, *в*). Линза, которая у краев толще, чем в середине, называется вогнутой или *рассеивающей* (рис. 4.1.11 *г*, *д*, *е*).

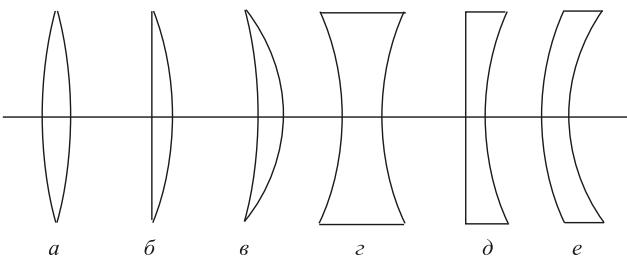


Рис. 4.1.11. Тонкие линзы

Обозначения тонких линз: (*а*) собирающая, (*б*) рассеивающая

Проходящие через линзу лучи преломляются дважды. Однако, если толщина линзы много меньше, чем радиусы кривизны ограничивающих ее поверхностей, при построении хода лучей преломление на обеих поверхностях можно приближенно заменить одним преломлением в так называемой *главной плоскости линзы*. Идеализированные линзы, удовлетворяющие такому условию, называются *тонкими линзами*. Для тонкой линзы вершины преломляющих поверхностей сливаются в одну точку, называемую *центром линзы*. Обозначения тонких линз в оптических схемах представлены на рис. 4.1.12.

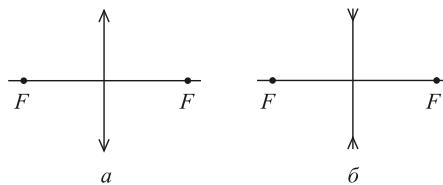


Рис. 4.1.12. Обозначения тонких линз: (а) собирающая, (б) рассеивающая

Прямая, проходящая через центр линзы, называется *оптической осью* линзы. Оптическая ось, пересекающая главную плоскость линзы по нормали к ней, называется *главной оптической осью* линзы. Остальные оси называются *побочными*.

**Фокусное расстояние и оптическая сила линзы.** Если на тонкую *собирающую* линзу направить пучок света, параллельный ее главной оптической оси, то после преломления в линзе все лучи, образующие пучок, пройдут через одну точку на главной оптической оси за линзой. Эта точка называется *главным фокусом* собирающей линзы.

Все лучи, параллельные главной оптической оси *рассеивающей* линзы, после преломления в ней отклоняются от оптической оси так, что их продолжения пересекаются в одной точке на главной оптической оси перед линзой. Эта точка называется *главным фокусом* рассеивающей линзы. Главные фокусы рассеивающей линзы мнимые, т.к. в действительности лучи света в них не собираются.

Расстояние от фокуса до центра линзы называется *фокусным расстоянием* линзы. Фокусное расстояние обозначают буквой  $f$  или  $F$  и измеряют в метрах. Величина, обратная фокусному расстоянию,  $D = 1/F$ , называется *оптической силой* линзы и измеряется в диоптриях (дптр). Одна диопtrия — это оптическая сила линзы с фокусным расстоянием в один метр. Оптическая сила собирающей линзы положительна, оптическая сила рассеивающей линзы отрицательна.

Два главных фокуса любой линзы лежат на главной оптической оси на одинаковом расстоянии от центра линзы по разные стороны от нее. Плоскости, проходящие через главные фокусы линзы перпендикулярно главной оптической оси, называются *фокальными плоскостями*. Любая линза обладает двумя фокальными плоскостями, расположенными симметрично относительно линзы по разные стороны от нее.

Световые лучи, параллельные побочной оптической оси собирающей линзы, сходятся в точке пересечения побочной оси с фокальной плоскостью. Лучи, параллельные побочной оптической оси рассеивающей линзы преломляются так, что их продолжения сходятся в точке пересечения побочной оси с фокальной плоскостью перед линзой.

**Построение изображения в собирающих и рассеивающих линзах.** Световые лучи, исходящие из какой-либо светящейся точки, линза

преломляет таким образом, что все они (или их продолжения) пересекаются в одной точке. Таким образом, линза строит изображение светящейся точки. Произвольный объект можно рассматривать как совокупность светящихся точек. Поэтому линза строит также и изображение произвольного объекта.

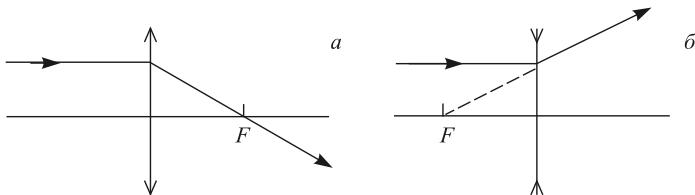


Рис. 4.1.13. Луч падает параллельно главной оптической оси линзы

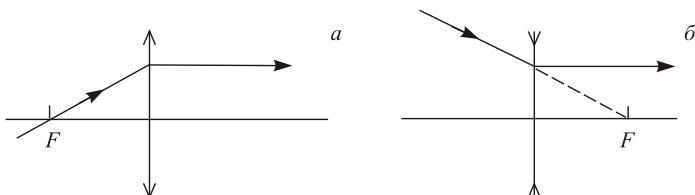


Рис. 4.1.14. Падающий луч (или его продолжение) проходит через фокус линзы

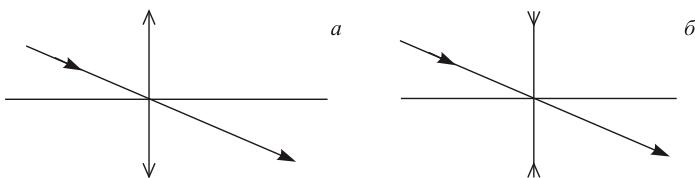


Рис. 4.1.15. Падающий луч проходит через центр линзы

Изображение, создаваемое линзой, называется *действительным*, если оно образовано пересечением световых лучей, прошедших через линзу. При этом в пространстве возникает область концентрации световой интенсивности, геометрически подобная светящемуся объекту. Ее можно наблюдать на экране, регистрировать с помощью фотоматериала и т.п. В противоположность этому изображение называется *мнимым*, если оно образовано пересечением не самих световых лучей, а их продолжений. Мнимое изображение не является областью концентрации световой интенсивности. Для его наблюдения или регистрации необходим по крайней мере один оптический прибор, например глаз человека.

Изображение может быть прямым или обратным (перевернутым), в зависимости от взаимной ориентации объекта и изображения. Для

характеристики размера изображения вводят величину *линейного увеличения*, даваемого линзой. По определению, линейное увеличение есть отношение размера изображения к размеру объекта.

При построении изображений в линзах следует руководствоваться следующими правилами:

1. световой луч, падающий на линзу параллельно ее главной оптической оси, линза преломляет таким образом, что прошедший луч (или его продолжение) пересекает главную оптическую ось линзы в фокусе (рис. 4.1.13);
2. если световой луч (или его продолжение) проходит через фокус линзы, то преломленный луч распространяется параллельно ее главной оптической оси (рис. 4.1.14);
3. луч, проходящий через центр линзы, не преломляется (рис. 4.1.15).

**Формула линзы. Увеличение, даваемое линзами.** Пример построения изображения в собирающей линзе показан на рис. 4.1.16. Линза строит действительное перевернутое увеличенное изображение объ-

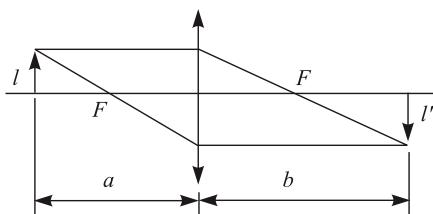


Рис. 4.1.16. Построение изображения предмета (стрелки длиной  $l$ ) в собирающей линзе

екта (стрелки). Используя рисунок, нетрудно вывести формулы для *увеличения, даваемого линзой*:

$$M = \frac{l'}{l} = \frac{F}{a - F} = \frac{b - F}{F}, \quad (4.1.10)$$

а также соотношение между фокусным расстоянием линзы  $F$ , расстоянием от объекта до линзы  $a$  и расстоянием от линзы до изображения  $b$ . Это соотношение имеет вид:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \quad (4.1.11)$$

и называется *формулой линзы*. На основе сформулированных выше правил построения изображений в линзах аналогичные формулы могут быть получены и для других случаев: рассеивающей линзы, мнимого изображения и т.п.

**Оптические приборы: лупа, фотоаппарат, проекционный аппарат, микроскоп. Ход лучей в этих приборах. Глаз.** Лупа предназначена для рассматривания мелких объектов (построения увеличенных изображений). Она представляет собой собирающую линзу, вставленную в оправу с ручкой. Ход лучей в лупе показан на рис. 4.1.17. Как видно из рисунка, лупа строит мнимое прямое увеличенное изображение объекта. Объект следует располагать между линзой и фокусом вблизи фокуса. При этом лучи, исходящие из одной точки предмета, не собираются в одну точку за линзой, а выходят из нее расходящимся пучком. Расходящийся пучок света при попадании в глаз человека воспринимается исходящим из одной точки, в которой пересекаются продолжения лучей. Эта точка является мнимым изображением соответствующей точки объекта. Увеличение, даваемое лупой,

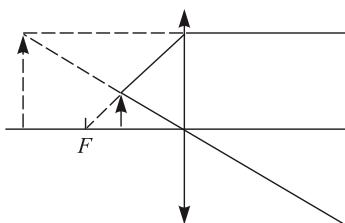


Рис. 4.1.17. Ход лучей в лупе

показано на рис. 4.1.17. Как видно из рисунка, лупа строит мнимое прямое увеличенное изображение объекта. Объект следует располагать между линзой и фокусом вблизи фокуса. При этом лучи, исходящие из одной точки предмета, не собираются в одну точку за линзой, а выходят из нее расходящимся пучком. Расходящийся пучок света при попадании в глаз человека воспринимается исходящим из одной точки, в которой пересекаются продолжения лучей. Эта точка является мнимым изображением соответствующей точки объекта. Увеличение, даваемое лупой,

$$M = \frac{l'}{l} = \frac{F}{F - a}. \quad (4.1.12)$$

Оно тем больше, чем ближе к фокусу расположен объект.

**Фотоаппарат** предназначен для фотографической регистрации изображений объектов. Он представляет собой камеру с объективом. Фотопленка располагается вблизи задней стенки камеры. Объектив строит на пленке сильно уменьшенное действительное перевернутое изображение объекта. В простейшем случае объектив представляет собой собирающую линзу, фокусное расстояние которой примерно равно расстоянию от линзы до плоскости, в которой расположена фотопленка. Ход лучей в фотоаппарате показан на рис. 4.1.18.

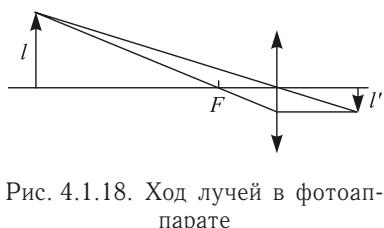


Рис. 4.1.18. Ход лучей в фотоаппарате

В простейшем случае объектив представляет собой собирающую линзу, фокусное расстояние которой примерно равно расстоянию от линзы до плоскости, в которой расположена фотопленка. Ход лучей в фотоаппарате показан на рис. 4.1.18.

**Проекционный аппарат** предназначен для формирования сильно увеличенных действительных изображений объектов (обычно снятых на пленку). Ход лучей в проекционном аппарате иллюстрирует предыдущий рисунок, только объектом теперь следует считать стрелку  $l'$ , а изображением стрелку  $l$ .

**Микроскоп** предназначен для получения сильно увеличенных мнимых изображений очень мелких объектов. В микроскопе реализуется предельное увеличение, достижимое в оптике.

Минимальный размер объекта, который можно рассмотреть в микроскоп, имеет порядок длины световой волны, т.е. около  $10^{-6}$  метра. Микроскоп состоит из объектива и окуляра. В простейшем случае и объектив и окуляр представляют собой собирающие линзы. Объектив

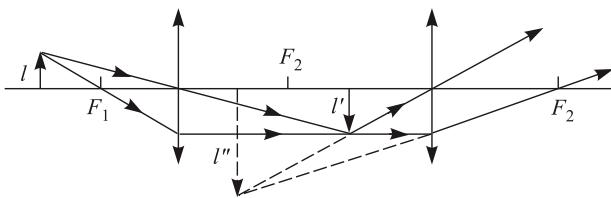


Рис. 4.1.19. Ход лучей в микроскопе

обращен к объекту, через окуляр глазом наблюдают изображение объекта. Ход лучей в микроскопе показан на рис. 4.1.19.

**Глаз.** Оптическая система глаза человека подобна оптической системе фотоаппарата. При формировании изображения предметов на сетчатке 4 глаза (рис. 4.1.20) основную роль играет преломление

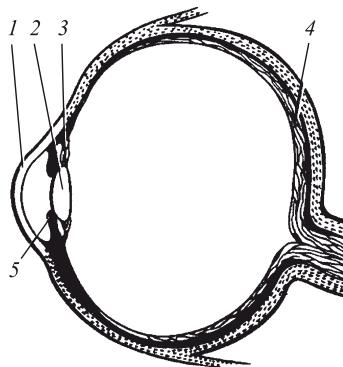


Рис. 4.1.20. Оптическая система человеческого глаза

света на сферической поверхности границы раздела «роговица–воздух» 1, дополнительное преломление осуществляется хрусталиком 2, находящимся за радужной оболочкой 5. Хрусталик имеет форму двояковыпуклой линзы. Радиус кривизны хрусталика изменяется под действием специальной мышцы 3. Этот процесс называется аккомодацией. Путем аккомодации изменяется фокусное расстояние оптической системы глаза и получается четкое изображение на сетчатке.

### Указания по решению задач

Решение задач по теме «Отражение и преломление света» существенно облегчается, если аккуратно вычертить рисунок, изображающий ход лучей в рассматриваемой системе. На рисунке должны быть соблюдены основные закономерности поведения лучей света на границе раздела сред. В частности, попадая в среду, оптически более плотную, луч отклоняется в сторону нормали к границе раздела сред.

Наоборот, переходя в оптически менее плотную среду, луч отклоняется от нормали к границе раздела.

Задачи по теме «Тонкие линзы» основываются на изложенных выше приемах построения изображений. При этом нужно иметь в виду, что изображение каждой точки предмета создается не только теми двумя или тремя лучами, которые использованы при его построении, а всем множеством лучей, испущенных точкой предмета и собравшихся в точке изображения.

Если размер предмета больше размера линзы и луч проведенный, например, через фокус, проходит мимо нее, следует мысленно продлить линзу, придав ей такие размеры, при которых построение характерных лучей можно было бы легко выполнить.

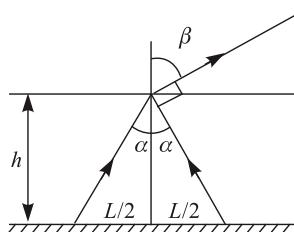
Если необходимо построить изображение, даваемое не одной линзой, а системой линз, то правила построения следует применять последовательно: считать изображение, построенное первой линзой, объектом для второй линзы и т.д.

При использовании формулы линзы нужно иметь в виду, что фокусное расстояние рассеивающей линзы, а также расстояние от линзы до мнимого изображения в формулу линзы входят со знаком "минус".

## Примеры решения задач

### Отражение и преломление света

**4.1.1.** Точечный источник света расположен на дне водоема глубиной  $h = 0,6$  м. В некоторой точке поверхности воды вышедший в воздух преломленный луч оказался перпендикулярным лучу, отраженному от поверхности воды обратно в воду. На каком расстоянии  $L$  от источника на дне водоема достигнет дна отраженный луч? Показатель преломления воды  $n = 4/3$ .

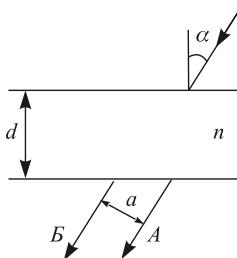


**Решение:** Ход лучей изображен на рисунке, откуда видно, что искомое расстояние  $L = 2h \operatorname{tg} \alpha$ . По закону преломления

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n}.$$

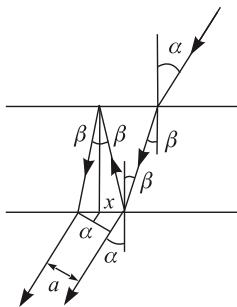
С другой стороны, по условию задачи  $\alpha + \beta = \pi/2$ . Следовательно,  $\sin \beta = \cos \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha = 1/n$ . Ответ:  $L = \frac{2h}{n} = 0,9$  м.

**4.1.2.** Луч света падает на плоскопараллельную стеклянную пластину толщины  $d = 2$  см под углом  $\alpha = 30^\circ$ . Какое расстояние  $a$  будет между лучами: прошедшим пластину без отражения (*A*) и претерпевшим двукратное отражение от ее граней (*B*)? Показатель преломления стекла  $n = 1,5$ .



**Решение:** Ход лучей изображен на рисунке. Учитывая, что  $\sin \beta = \frac{1}{n} \sin \alpha$ , длину отрезка  $x$  (см. рисунок), можно выразить следующим образом:

$$x = 2d \operatorname{tg} \beta = 2d \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = 2d \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$



Поскольку искомое расстояние  $a = x \cos \alpha$ , ответ имеет вид:

$$a = d \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \cong 1,22 \text{ см.}$$

**4.1.3.** Луч света падает нормально на переднюю грань призмы, как показано на рисунке (*a*). Преломляющий угол призмы равен  $\alpha = 30^\circ$ . Каким должен быть показатель преломления материала призмы  $n$  для того, чтобы угол отклонения луча призмой был равен  $\alpha$ ?



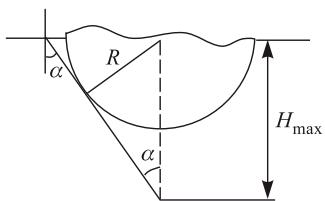
**Решение:** Как видно из рисунка (б), для того чтобы угол отклонения луча призмой был равен  $\alpha$ , угол преломления должен составлять  $\beta = 2\alpha$ . Таким образом,

$$\sin 2\alpha = n \sin \alpha.$$

Отсюда легко получить ответ:  $n = 2 \cos \alpha = \sqrt{3} \cong 1,73$ .

**4.1.4.** На поверхности воды плавает непрозрачный шар радиусом  $R = 1$  м, наполовину погруженный в воду. На какой максимальной глубине  $H_{\max}$  нужно поместить под центром шара точечный источник света, чтобы ни один световой луч не прошел в воздух? Показатель преломления воды  $n = 1,33$ .

**Решение:** Искомое положение источника изображено на рисунке. Оно определяется из условия, что касательные к шару лучи света, испущенные источником, падают на границу раздела «вода–воздух» под предельным углом полного отражения. В этом случае действительно ни один луч от источника не выйдет в воздух, т.к. часть лучей будет перекрыта шаром, а все остальные лучи заведомо испытывают полное отражение на границе раздела сред. Если же



испущенные источником, падают на границу раздела «вода–воздух» под предельным углом полного отражения. В этом случае действительно ни один луч от источника не выйдет в воздух, т.к. часть лучей будет перекрыта шаром, а все остальные лучи заведомо испытывают полное отражение на границе раздела сред. Если же

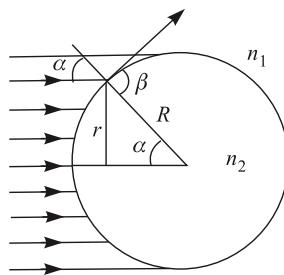
переместить источник на меньшую глубину, свет по-прежнему не выйдет из воды, если же, наоборот, погрузить источник глубже, чем  $H_{\max}$ , то найдется часть лучей, которые будут падать на границу под углами, меньшими предельного угла полного отражения, и пройдут в воздух.

Минимальный угол  $\alpha$  падения луча на границу «вода–воздух» определяется равенством

$$\sin \alpha = \frac{R}{H_{\max}}.$$

Поскольку при полном отражении  $\sin \alpha = \frac{1}{n}$ ,  $H_{\max} = Rn = 1,33$  м.

**4.1.5.** В стекле с показателем преломления  $n_1 = 1,5$  имеется сферическая полость радиуса  $R = 4,5$  см, заполненная водой. Показатель преломления воды  $n_2 = 4/3$ . На полость падает широкий пучок параллельных световых лучей. Определить радиус  $r$  пучка световых лучей, которые проникают в полость.

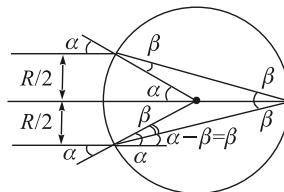
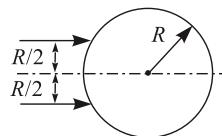


**Решение:** Поскольку свет переходит из оптически более плотной среды в оптически менее плотную ( $n_2 < n_1$ ), для части лучей на границе стекла и воды возникнет полное отражение. Те лучи, угол падения которых на границу раздела превышает критическое значение  $\alpha_{\text{кр}} = \arcsin(n_2/n_1)$ , отразятся от границы и в полость не попадут. Следовательно, радиус пучка лучей, которые проникают внутрь полости, равен  $r = R \sin \alpha_{\text{кр}}$ . Ответ:  $r = R \frac{n_2}{n_1} = 4 \text{ см}$ .

**4.1.6.** Два параллельных луча, расстояние между которыми равно радиусу  $R$  круглого прозрачного цилиндра, падают на боковую поверхность этого цилиндра. Лучи параллельны основанию цилиндра. Найти величину показателя преломления  $n$  материала цилиндра, при которой лучи пересекаются на его поверхности.

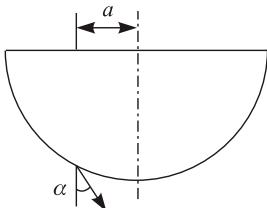
**Решение:** Ход лучей, преломленных на передней поверхности цилиндра и пересекающихся на его задней поверхности, изображен на рисунке. По условию задачи угол падения каждого из лучей на переднюю поверхность цилиндра  $\alpha = \arcsin(1/2) = 30^\circ$ . Из рисунка видно, что угол преломления этих лучей на границе воздух — стекло равен  $\beta = \alpha/2 = 15^\circ$ . Учитывая, что  $n = \sin \alpha / \sin \beta$ , получаем ответ:

$$n = \frac{1}{2 \sin 15^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} \cong 1,93.$$



**4.1.7.** Луч света падает на стеклянный полушар радиуса  $R$  на расстоянии  $a$  от его оси симметрии параллельно ей. На какой угол

$\alpha$  отклонится вышедший после преломления в полушеаре луч, если  $a = 0,5 R$ ,  $n = 1,414$ ?

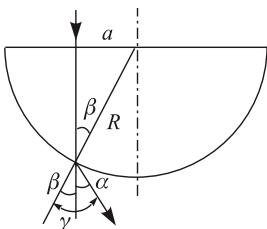


**Решение:** Ход луча изображен на рисунке. Видно, что угол преломления луча на границе «стекло–воздух» равен  $\gamma = \alpha + \beta$ , где  $\beta$  — угол падения луча на эту границу, причем  $\sin \beta = a/R$ . По закону преломления

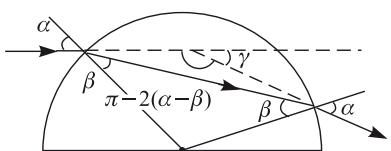
$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} = n.$$

Следовательно,  $\sin(\alpha + \beta) = na/R$ . Отсюда получаем ответ:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{na}{R}\right) - \arcsin\left(\frac{a}{R}\right) = 15^\circ.$$



**4.1.8.** Световой луч падает на поверхность стеклянного шара. Угол падения  $\alpha = 45^\circ$ , показатель преломления стекла  $n = 1,41$ . Найти угол  $\gamma$  между падающим лучом и лучом, вышедшим из шара.



ломающей поверхности в точках падения луча совпадает с радиусом шара, проведенным в эти точки. Из рисунка видно, что искомый угол

$$\gamma = 2(\alpha - \beta),$$

где  $\alpha$  — угол падения луча на поверхность шара, совпадающий с углом преломления на выходе луча из шара,  $\beta$  — угол преломления на

**Решение:** Световой луч испытывает преломление дважды: при входе в стеклянный шар и при выходе из него (см. ход лучей, изображенный на рисунке). При этом нормаль к пре-

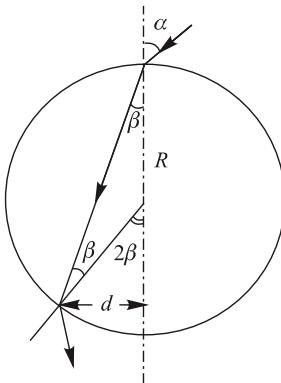
границе «воздух–стекло», совпадающий с углом падения на границу «стекло–воздух». По закону преломления

$$\sin \alpha = n \sin \beta, \quad \text{откуда} \quad \beta = \arcsin \left( \frac{1}{n} \sin \alpha \right).$$

Следовательно,  $\gamma = 2\alpha - 2 \arcsin \left( \frac{1}{n} \sin \alpha \right) = 30^\circ$ .

**4.1.9.** На стеклянный шар радиусом  $R$  с показателем преломления  $n$  падает узкий пучок света, образуя угол  $\alpha$  с осью, проведенной через точку падения и центр шара. На каком расстоянии  $d$  от этой оси пучок выйдет из шара?

**Решение:** Пучок света испытывает преломление дважды: при входе в стеклянный шар и при выходе из него. При этом нормали к прелом-



ляющей поверхности в точках падения пучка совпадают с радиусами шара, проведенными в эти точки. Из рисунка видно, что искомое расстояние

$$d = R \sin 2\beta = 2R \sin \beta \cos \beta,$$

где  $\beta$  — угол преломления. По закону преломления

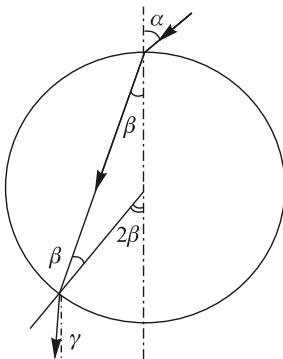
$$\sin \beta = \frac{1}{n} \sin \alpha.$$

Следовательно,  $\cos \beta = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:  $d = \frac{2R}{n^2} \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$ .

**4.1.10.** На поверхность стеклянного шара с показателем преломления  $n < 2$  падает узкий пучок света, образуя малый угол  $\alpha$  с осью шара, проведенной через точку падения и центр шара. Под каким углом  $\gamma$  к этой оси пучок выйдет из шара? При расчетах положить  $\sin \alpha \approx \alpha$ .

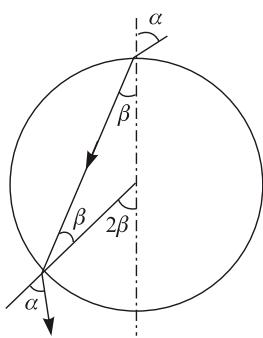
**Решение:** Ход одного из лучей, образующих пучок света, изображен на рисунке. Видно, что искомый угол

$$\gamma = 2\beta - \alpha,$$



где  $\beta$  — угол преломления. Из закона преломления при малых  $\alpha$  и  $\beta$  следует, что  $\beta \approx \frac{\alpha}{n}$ . Ответ имеет вид:  $\gamma = \alpha \frac{2-n}{n}$ .

**4.1.11.** Снаружи от прозрачного шара вплотную к его поверхности помещен точечный источник света. При каких значениях  $n$  показателя преломления материала шара все выходящие из него лучи (за исключением луча, прошедшего через центр шара) будут наклонены по направлению к оси, проведенной через источник и центр шара?



**Решение:** Точечный источник испускает лучи света во всех направлениях. Часть этих лучей попадает внутрь шара. Из рисунка видно, что условие задачи выполнено, если для луча с произвольным углом падения  $\alpha$  справедливо неравенство  $\alpha > 2\beta$ .

Учитывая, что  $\alpha \leq 90^\circ$ ,  $2\beta \leq 90^\circ$ , это неравенство можно заменить равносильным:

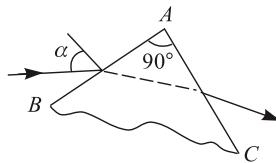
$$\sin \alpha > \sin 2\beta.$$

Используя закон преломления  $\sin \alpha = n \sin \beta$  и тригонометрическое тождество  $\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta$ , преобразуем последнее неравенство к виду:

$$\frac{2}{n^2} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} < 1 \quad (\text{для всех } \alpha).$$

Очевидно, что это неравенство должно быть выполнено прежде всего при  $\alpha \rightarrow 0$ , тогда оно будет справедливо и для всех других  $\alpha$ . Полагая  $\alpha = 0$ , получаем ответ:  $n > 2$ .

**4.1.12.** Луч света, лежащий в плоскости рисунка, падает на боковую грань  $AB$  призмы, имеющей при вершине угол  $90^\circ$ . В каких пределах лежат возможные значения угла падения  $\alpha$ , если известно,

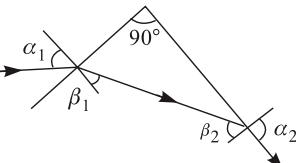


что луч выходит из боковой грани  $AC$ ? Показатель преломления призмы  $n = 1,25$ .

**Решение:** Для того чтобы луч мог выйти из задней грани призмы (грани  $AC$ ), нужно, чтобы угол его падения на эту грань  $\beta_2$  был меньше критического. Поскольку  $(\beta_1 + \beta_2) = 90^\circ$ ,  $\sin \beta_2 = \cos \beta_1$ . Если  $\beta_2$  — критический угол ( $\alpha_2 = 90^\circ$ ), то  $\cos \beta_1 = 1/n$ . Соответствующий угол падения на переднюю грань определяется

равенством:

$$\sin \alpha_1 = n \sin \beta_1 = n \sqrt{1 - \cos^2 \beta_1} = \sqrt{n^2 - 1}.$$

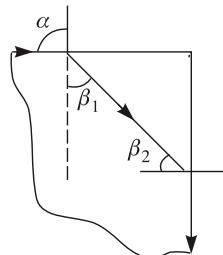


Легко видеть, что если луч падает на переднюю грань призмы под меньшим углом, то на задней грани призмы произойдет его полное отражение (угол  $\beta_1$  уменьшится, а угол  $\beta_2$  возрастет). Наоборот, если угол падения луча на переднюю грань призмы увеличить, то угол  $\beta_1$  также увеличится, а угол  $\beta_2$  уменьшится и луч выйдет из задней грани призмы. Таким образом, для того, чтобы луч вышел из задней грани, угол падения его на переднюю грань должен удовлетворять условию:

$$\sqrt{n^2 - 1} < \sin \alpha < 1, \quad 0,75 < \sin \alpha < 1, \quad 48^\circ 40' < \alpha < 90^\circ.$$

**4.1.13.** Снаружи круглого прозрачного стержня вблизи от центра его торца помещен точечный источник света. При каких значениях показателя преломления материала стержня  $n$  свет не будет выходить через его боковую поверхность?

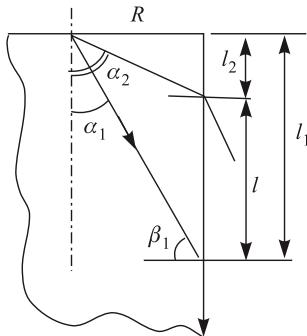
**Решение:** Рассмотрим луч, падающий на торец стержня под углом  $\alpha = 90^\circ$ . Для этого луча  $\sin \beta_1 = 1/n$ . Преломленный под таким углом луч не выйдет из боковой поверхности стержня, если  $\sin \beta_2 > 1/n$ .



Поскольку  $\sin \beta_2 = \cos \beta_1 = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1}$ , это неравенство эквивалентно следующему:  $\sqrt{n^2 - 1} > 1$ . Отсюда получаем ответ:  $n > \sqrt{2}$ .

**4.1.14.** Снаружи круглого прозрачного стержня вблизи от центра его торца помещен точечный источник света. Найти ширину  $l$  области на боковой поверхности стержня, через которую будут выходить наружу световые лучи. Радиус стержня  $R$ , показатель преломления  $n$ .

**Решение:** На рисунке изображены два луча, определяющие границы области на боковой поверхности стержня, из которой свет будет



выходить наружу. Верхняя граница образуется лучами, наиболее отклоненными от оси стержня (т.е. преломленными при касательном падении света на торец стержня). Таким образом, угол  $\alpha_2$  находится из условия

$$\sin \alpha_2 = 1/n,$$

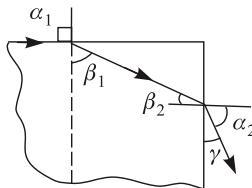
и  $l_2 = R \operatorname{ctg} \alpha_2 = R \sqrt{n^2 - 1}$ . Нижняя граница определяется условием полного отражения на боковой поверхности стержня:

$$\sin \beta_1 = 1/n.$$

Следовательно,  $l_1 = R \operatorname{tg} \beta_1 = R / \sqrt{n^2 - 1}$ . Поскольку  $l = l_1 - l_2$ , ответ имеет вид:  $l = R \left( \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} - \sqrt{n^2 - 1} \right)$ .

**4.1.15.** Торец круглого прозрачного стержня с показателем преломления  $n$  освещается рассеянным светом. Под каким максимальным углом  $\gamma$  к оси стержня будут выходить световые лучи через его боковую поверхность?

**Решение:** Максимальный угол к оси стержня составляют лучи, угол преломления  $\alpha_2$  которых на боковой поверхности стержня минимален. Это лучи, падающие на торец стержня под углом  $\alpha_1 = 90^\circ$  и преломляющиеся под углом  $\beta_1$ , удовлетворяющим условию:  $\sin \beta_1 = \frac{1}{n}$ . Угол падения этих лучей на боковую поверхность стержня  $\beta_2 = \frac{\pi}{2} - \beta_1$ ,



поэтому

$$\sin \beta_2 = \cos \beta_1 = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1}.$$

Учитывая, что  $\sin \alpha_2 = n \sin \beta_2$ , находим  $\alpha_2 = \arcsin \sqrt{n^2 - 1}$ . Ответ:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{n^2 - 1}.$$

**4.1.16.** На поверхности водоема, имеющего глубину  $H = 3,3$  м, плавает фанерный круг радиусом  $r = 3$  м. На оси круга расположен точечный источник света, высота которого над поверхностью круга может изменяться. Чему равен максимальный радиус тени круга на дне  $R$ , если показатель преломления воды  $n = 1,33$ ?

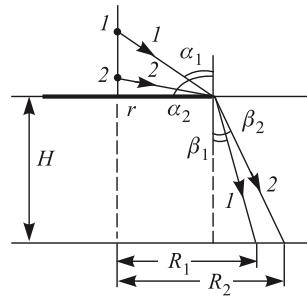
**Решение:** Ход лучей, ограничивающих тень от круга на дне водоема при двух положениях источника света изображен на рисунке. Радиус тени определяется равенством:

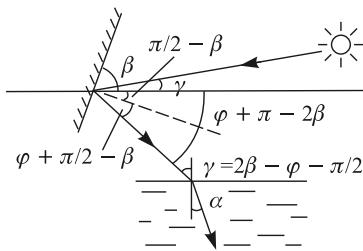
$$R_{1,2} = r + H \operatorname{tg} \beta_{1,2} = r + H \frac{\sin \beta_{1,2}}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta_{1,2}}}.$$

Из рисунка видно, что радиус тени увеличивается с уменьшением высоты источника. Поэтому радиус тени максимальен, когда источник расположен непосредственно на поверхности круга. В этом случае лучи света касательны к границе раздела воздуха и воды, т.е. угол падения  $\alpha = 90^\circ$  и  $\sin \beta = 1/n$ . Подставляя это значение в выражение для радиуса тени, получаем ответ:  $R = r + \frac{H}{\sqrt{n^2 - 1}} \approx 6,8$  м.

**4.1.17.** Высота солнца над горизонтом составляет угол  $\varphi = 10^\circ$ . Пользуясь зеркалом, пускают «зайчик» в водоем. Под каким углом  $\beta$  к горизонту нужно расположить зеркало, чтобы луч света шел в воде под углом  $\alpha = 41^\circ$  к вертикали ( $\sin \alpha \approx 0,655$ ). Показатель преломления воды  $n = 1,32$ . Нормаль к зеркалу лежит в вертикальной плоскости.

**Решение:** Ход луча и расположение зеркала представлены на рисунке, где штрихпунктирной линией изображена нормаль к поверхности зеркала. Из рисунка видно, что отраженный от зеркала луч образует с





горизонтом угол  $\varphi + \pi - 2\beta$ . Следовательно, угол падения этого луча на поверхность воды равен

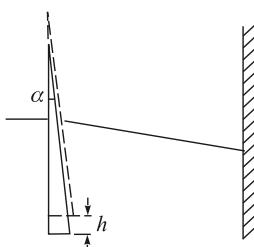
$$\gamma = \frac{\pi}{2} - (\varphi + \pi - 2\beta) = 2\beta - \varphi - \frac{\pi}{2},$$

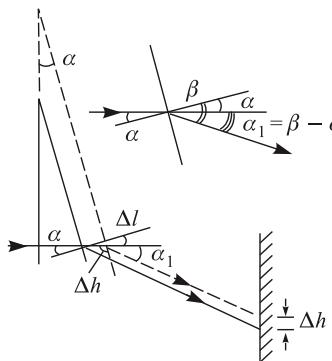
откуда  $\beta = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \varphi + \gamma \right)$ . С другой стороны, по закону преломления  $\sin \gamma = n \sin \alpha = 0,8646 \approx \sqrt{3}/2$ . Отсюда  $\gamma = \arcsin(n \sin \alpha) = 60^\circ$ . Ответ:  $\beta = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\pi}{2} + \varphi + \arcsin(n \sin \alpha) \right] \approx 80^\circ$ .

**4.1.18.** Узкий пучок световых лучей падает на стеклянный клин перпендикулярно его передней грани, расположенной вертикально.

Пройдя клин, пучок попадает на вертикальный экран. На какое расстояние  $\Delta h$  сместится световое пятно на экране, если сдвинуть клин вверх на расстояние  $h = 5$  см? Показатель преломления клина  $n = 1,5$ , угол при его вершине  $\alpha = 5,7^\circ$ . При расчетах положить  $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$ .

**Решение:** Ход луча, преломленного клином при двух его положениях изображен на рисунке сплошной и штриховой линиями. Видно, что при сдвигании клина вверх на расстояние  $h$  точка, в которой преломленный луч выходит в воздух, смещается по горизонтали вправо на расстояние  $\Delta l = h \tan \alpha \approx h\alpha$ . В результате возникает смещение луча вверх на расстояние, равное по величине катету  $\Delta h$ , лежащему против угла  $\alpha_1$  в прямоугольном треугольнике, другой катет которого  $\Delta l$  (см. рисунок). Таким образом,  $\Delta h = \Delta l \tan \alpha_1 \approx h\alpha_1$ . Для определения угла  $\alpha_1$  рассмотрим преломление луча на границе стекло — воздух, изображенное крупным планом на врезке вверху рисунка. В силу малости угла падения закон преломления можно приближенно записать в виде:  $\beta \approx n\alpha$ . Поэтому  $\alpha_1 = \beta - \alpha = (n - 1)\alpha$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:  $\Delta h \cong h\alpha^2(n - 1) \cong 2,5 \cdot 10^{-2}$  см.

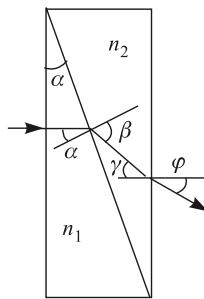
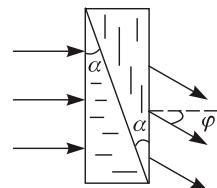




**4.1.19.** Две призмы с равными углами при вершине  $\alpha = 5^\circ$ , имеющие разные показатели преломления, плотно прижаты друг к другу и расположены, как показано на рисунке. При освещении этой системы призм параллельным пучком света, падающим нормально на переднюю грань системы, оказалось, что вышедший из нее пучок отклонился от первоначального направления на угол  $\varphi = 3^\circ$ . Найти разность  $\Delta n$  показателей преломления материалов призм. При расчетах положить  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\sin \varphi \approx \varphi$ .

**Решение:** Ход одного из лучей, преломленных призмой, изображен на рисунке, где рассмотрен случай  $n_2 < n_1$ , при котором вышедший из системы луч отклоняется вниз. По закону преломления

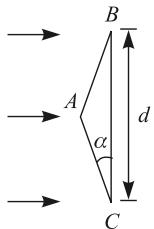
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cong \frac{\alpha}{\beta} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \text{аналогично, } \frac{\gamma}{\varphi} = \frac{1}{n_2}.$$



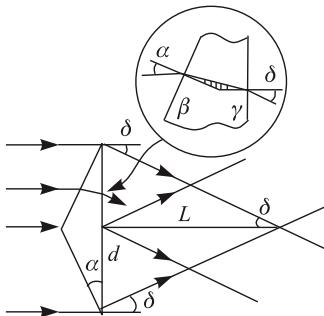
Из рисунка видно, что  $\gamma = \beta - \alpha$ . Следовательно,  $n_2 = \frac{\varphi}{\beta - \alpha}$ . Подставляя найденное  $n_2$  в первое уравнение, получаем, что  $n_1 = \frac{\beta \varphi}{\alpha(\beta - \alpha)}$ .

Таким образом,  $\Delta n = n_1 - n_2 = \frac{\varphi}{\beta - \alpha} \cdot \left( \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right)$ . После элементарных преобразований находим ответ:  $\Delta n = \frac{\varphi}{\alpha} = 0,6$ .

**4.1.20.** На равнобедренную стеклянную призму падает широкий параллельный пучок света, перпендикулярный грани  $BC$ , ширина которой  $d = 5$  см. На каком расстоянии  $L$  от грани  $BC$  преломленный призмой свет разделится на два не перекрывающихся пучка? Показатель преломления стекла  $n = 1,5$ , угол при основании призмы  $\alpha = 5,7^\circ$ . При расчетах учесть, что для малых углов  $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$ .



**Решение:** Каждый из лучей света, падающих на призму, преломляется дважды: на передней и задней ее гранях (см. рисунок). Закон преломления на этих гранях, записанный с учетом малости углов падения и преломления, дает следующие соотношения:  $\beta = \frac{\alpha}{n}$ ,  $\delta = n\gamma$ . Поскольку  $\gamma = \alpha - \beta$ , получаем для угла преломления  $\delta$  значение  $\delta = \alpha(n - 1)$ . Из рисунка видно, что пучки света, преломленные призмой, перестанут

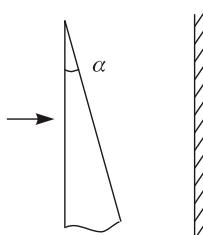


перекрываться на расстоянии  $L$ , удовлетворяющем условию:

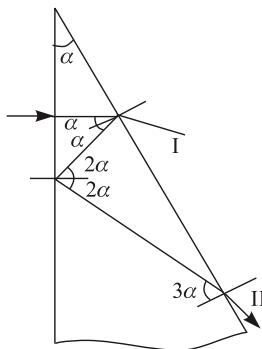
$$L = \frac{d}{2 \tan \delta} \cong \frac{d}{2\delta}.$$

Объединяя записанные выражения, находим:  $L = \frac{d}{2\alpha(n - 1)} \cong 50$  см.

**4.1.21.** На стеклянный клин перпендикулярно его передней грани падает тонкий луч света. Показатель преломления стекла  $n = 1,41$ , угол при вершине клина  $\alpha = 10^\circ$ . Построив ход преломленных и отраженных от граней клина лучей, определить, сколько светлых пятен будет видно на экране, поставленном за клином.



**Решение:** Ход лучей изображен на рисунке. Видно, что угол падения исходного луча на заднюю (наклонную) грань равен  $\alpha$ , угол падения на эту грань луча, испытавшего первое отражение от



передней грани, равен  $\alpha_1 = 3\alpha$ . Вообще, после  $m$ -го отражения от передней грани угол падения луча на заднюю грань  $\alpha_m = (2m + 1)\alpha$ .

Лучи будут выходить из задней грани при условии  $\alpha_m < \alpha_0$ , где  $\alpha_0$  — угол полного отражения, определяемый условием

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{т.е. } \alpha_0 = 45^\circ.$$

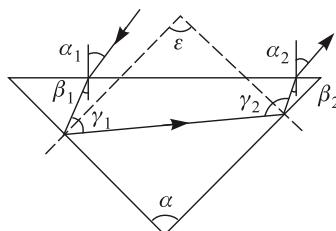
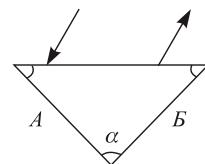
По условию  $\alpha = 10^\circ$ . Следовательно,  $\alpha_1 = 30^\circ$ ,  $\alpha_2 = 50^\circ$ , причем  $\alpha_2 > \alpha_0$ . Поэтому из задней грани клина выйдут только два луча, которые и попадут на экран.

**4.1.22.** Стеклянная призма имеет равные углы при основании. Чему равен угол  $\alpha$  при вершине призмы, если известно, что произвольный луч, падающий на ее основание в плоскости чертежа, после двукратного отражения от граней А и Б призмы выходит параллельно первоначальному направлению.

**Решение:** Ход луча изображен на рисунке. Видно, что искомый угол  $\alpha = \pi - \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — угол между нормалями к боковым граням призмы, равный

$$\varepsilon = \pi - \frac{\gamma_1}{2} - \frac{\gamma_2}{2}.$$

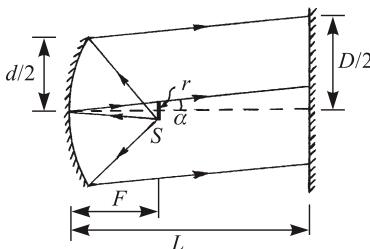
Здесь  $\gamma_1/2$  и  $\gamma_2/2$  — углы падения луча на эти грани. Поскольку падающий на основание призмы и вышедший из него лучи по условию параллельны,  $\alpha_1 = \alpha_2$  и  $\beta_1 = \beta_2$ . Следовательно, по свойству углов,



образованных параллельными прямыми и секущей,  $\gamma_1 + \gamma_2 = \pi$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:  $\alpha = 90^\circ$ .

**4.1.23.** В фокусе сферического зеркала прожектора помещен источник света в виде светящегося диска радиусом  $r = 1$  см. Найти диаметр  $D$  освещенного пятна на стене, расположенной на расстоянии  $L = 50$  м от прожектора перпендикулярно главной оптической оси, если фокусное расстояние сферического зеркала  $F = 40$  см, а диаметр зеркала  $d = 10$  см.

**Решение:** Из условия задачи следует, что все световые лучи, испущенные источником и падающие на зеркало прожектора, являются параксиальными. Следовательно, после отражения от зеркала лучи



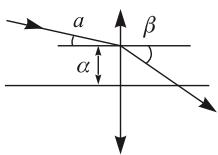
от каждой точки источника распространяются параллельным пучком, наклоненным к оптической оси зеркала. При этом наибольший наклон к оси имеют лучи, испущенные крайними точками источника. Рассмотрим одну из таких точек, например, точку  $S$ . Ход нескольких лучей, испущенных этой точкой, изображен на рисунке. Видно, что

$$\frac{D}{2} = L \operatorname{tg} \alpha + \frac{d}{2}, \quad \text{причем} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{F}.$$

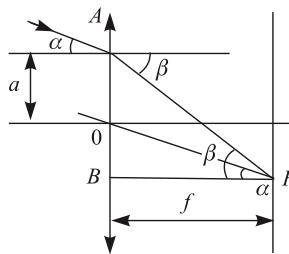
Ответ:  $D = \frac{2Lr}{F} + d = 2,6$  м.

### Тонкие линзы

**4.1.24.** На поверхность собирающей линзы с фокусным расстоянием  $f$  падает луч света на расстоянии  $a$  от центра линзы под углом  $\alpha$  к ее главной оптической оси. Под каким углом  $\beta$  к главной оптической оси выйдет луч из линзы?



**Решение:** Ход падающего и преломленного в линзе лучей изображен на рисунке. При построении преломленного луча использован вспомогательный луч  $OF$ , параллельный падающему на линзу лучу и проходящий через оптический центр линзы  $O$  без преломления. Согласно известному свойству тонкой собирающей линзы, все параллельные лучи, падающие на нее,



пересекаются в точке  $F$  фокальной плоскости. Из треугольников  $ABF$  и  $OBF$  имеем:

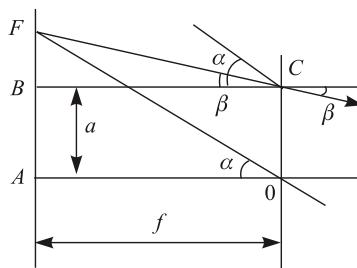
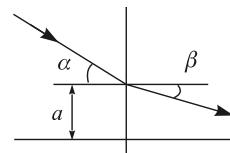
$$f \operatorname{tg} \beta = a + f \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{откуда} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{a + f \operatorname{tg} \alpha}{f}.$$

Следовательно,

$$\beta = \operatorname{arctg} \left( \frac{a}{f} + \operatorname{tg} \alpha \right).$$

**4.1.25.** На поверхность рассеивающей линзы с фокусным расстоянием  $f$  падает луч света на расстоянии  $a$  от центра линзы под углом  $\alpha$  к ее главной оптической оси. Под каким углом  $\beta$  к главной оптической оси выйдет луч из линзы?

**Решение:** Ход лучей изображен на рисунке. При построении преломленного в линзе луча использован вспомогательный луч  $FO$ , параллельный падающему и проходящий через оптический центр линзы  $O$  без преломления. Согласно известному свойству тонкой рассеивающей линзы, продолжения всех параллельных лучей, падающих на нее, пересекаются в точке  $F$  фокальной плоскости. С учетом того, что фокусное расстояние рассеивающей



линзы отрицательно, из треугольников  $AOF$  и  $BCF$  находим:

$$|f| \operatorname{tg} \alpha = a + |f| \operatorname{tg} \beta, \quad \text{откуда} \quad \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha - \frac{a}{|f|}.$$

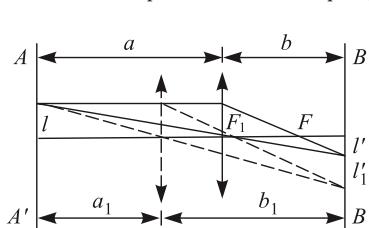
Следовательно,  $\beta = \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \alpha - \frac{a}{|f|} \right) = \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \alpha + \frac{a}{f} \right)$ .

**4.1.26.** Тонкая линза с фокусным расстоянием  $F = 0,4$  м создает на экране увеличенное изображение предмета, который помещен на расстоянии  $L = 2,5$  м от экрана. Каково расстояние  $d$  от предмета до линзы?

**Решение:** При фиксированном расстоянии между предметом и экраном, превышающем  $4F$ , существуют два положения линзы, при которых она дает на экране изображение предмета. Это следует из того, что формула тонкой линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F},$$

связывающая расстояние от предмета до линзы  $a$ , расстояние от линзы до изображения  $b$  и фокусное расстояние линзы  $F$ , симметрична



относительно  $a$  и  $b$ : при замене  $a_1 = b$ ,  $b_1 = a$  эта формула остается справедливой. Построение изображения предмета проиллюстрировано на рисунке, где упомянутые положения линзы изображены сплошной и штриховой линиями, а через  $AA'$  и  $BB'$  обозначены плоскости объекта и изображения, соответственно. Видно, что когда линза занимает ближнее к предмету положение, она дает увеличенное изображение (штриховые линии), а если дальнее, то уменьшенное изображение (сплошные линии).

По условию задачи  $a = d$ ,  $b = L - d$ . Подставляя эти значения в формулу линзы, имеем:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{L-d} = \frac{1}{F}.$$

Отсюда после несложных преобразований получаем квадратное уравнение относительно  $d$ :

$$d^2 - Ld + FL = 0.$$

Корни этого уравнения имеют вид:

$$d_{1,2} = \frac{L}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4F}{L}} \right).$$

Условию задачи удовлетворяет меньший корень, поскольку линза дает увеличенное изображение. Ответ:  $d = \frac{L}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4F}{L}} \right) = 0,5$  м.

**4.1.27.** С помощью тонкой собирающей линзы на экране, установленном перпендикулярно оптической оси, получают изображение светящегося диска. Диаметр изображения в  $n = 8$  раз меньше, чем сам диск. Когда линзу отодвинули от экрана на  $\Delta l = 28$  см, то на

экране снова получилось изображение диска. Определить фокусное расстояние  $F$  линзы.

**Решение:** Из рисунка к задаче 4.1.26 видно, что отношение размера изображения  $l'$  (или  $l'_1$ ) к размеру объекта  $l$  (увеличение  $M$ , даваемое линзой), может принимать два значения:  $M = b/a$  и  $M_1 = b_1/a_1$ . В нашем случае при первоначальном положении линзы  $M = 1/n$ , т.е.  $M < 1$  (изображение уменьшенное). При отодвигании линзы от экрана на нем формируется увеличенное изображение предмета.

По условию задачи  $a = nb$ ,  $a_1 = a - \Delta l = b$ . Отсюда

$$b = \frac{\Delta l}{n-1}, \quad a = \frac{n\Delta l}{n-1}.$$

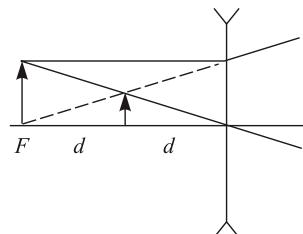
Из формулы тонкой линзы следует, что  $F = \frac{ab}{a+b}$ . Подставляя сюда найденные  $a$  и  $b$ , получаем ответ:  $F = \frac{n\Delta l}{n^2-1} = \frac{32}{9}$  см.

**4.1.28.** Мнимое изображение предмета в рассеивающей линзе находится от нее на расстоянии, в два раза меньшем, чем предмет. Найти расстояние  $d$  от линзы до изображения, если фокусное расстояние линзы  $F$  известно.

**Решение:** Построение изображения предмета представлено на рисунке. Видно, что роль расстояния  $a$  между предметом и линзой и расстояния  $b$  между линзой и изображением играют величины  $2d$  и  $d$ , соответственно. Учитывая, что формула линзы в данном случае имеет вид

$$\frac{1}{2d} - \frac{1}{d} = -\frac{1}{|F|},$$

получаем ответ:  $d = \frac{|F|}{2}$ .



**4.1.29.** С помощью линзы с фокусным расстоянием  $f = 20$  см на экране получено изображение предмета с увеличением  $m = 2$ . Чему равно расстояние  $l$  между предметом и экраном?

**Решение:** Поскольку увеличение изображения связано с расстоянием  $a$  от предмета до линзы и расстоянием  $b$  от линзы до изображения соотношением  $m = b/a$ , формулу линзы можно записать в виде:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{ma} = \frac{1}{f}.$$

Отсюда  $a = f(1 + 1/m)$ ,  $b = f(m + 1)$ . Учитывая, что искомое расстояние  $l = a + b$ , получаем ответ:  $l = f \frac{(m+1)^2}{m} = 90$  см.

**4.1.30.** Тонкая линза дает на экране изображение предмета с линейным увеличением  $m_1 = 2$ . Во сколько раз  $\alpha$  нужно изменить

расстояние между предметом и экраном, чтобы получить на экране изображение предмета с увеличением  $m_2 = 3$ ?

**Решение:** Обозначим через  $a_1$  и  $b_1$  расстояния от предмета до линзы и от линзы до изображения в первом случае, а через  $a_2$  и  $b_2$  — те же расстояния во втором случае. Увеличение, даваемое линзой в первом случае,

$$m_1 = \frac{b_1}{a_1}.$$

По формуле тонкой линзы  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f}$ . Из этих соотношений находим

$$a_1 = f \left( 1 + \frac{1}{m_1} \right), \quad b_1 = f(1 + m_1).$$

Расстояние между предметом и изображением в первом случае

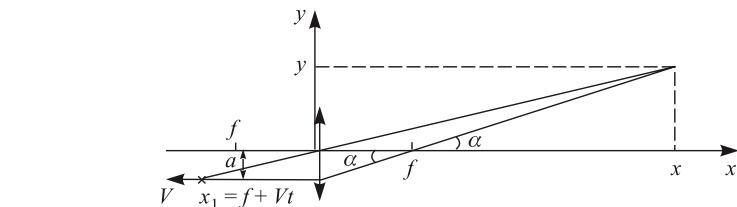
$$l_1 = a_1 + b_1 = f \frac{(m_1 + 1)^2}{m_1}.$$

Аналогично, во втором случае,  $l_2 = a_2 + b_2 = f \frac{(m_2 + 1)^2}{m_2}$ . Ответ:

$$\alpha = \frac{l_2}{l_1} = \frac{(m_2 + 1)^2 m_1}{(m_1 + 1)^2 m_2} \approx 1,19.$$

**4.1.31.** Начало системы координат помещено в центр тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием  $f$ , причем ось  $x$  совпадает с главной оптической осью линзы. Точечный источник света удаляется от линзы равномерно со скоростью  $V$  по прямой, параллельной оси  $x$  и проходящей на расстоянии  $a$  от нее. Найти координаты  $x(t)$ ,  $y(t)$  изображения источника как функции времени. При  $t = 0$  источник находился в фокальной плоскости линзы.

**Решение:** Ход лучей при построении изображения источника показан на рисунке. Видно, что изображение источника располагается на прямой, проходящей через правый фокус линзы и через точку



пересечения линии, по которой движется источник, с преломляющей плоскостью линзы. В начальный момент времени источник находится в фокальной плоскости линзы и его изображение бесконечно удалено. По

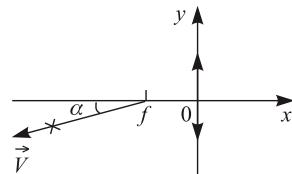
мере перемещения источника в направлении от линзы его изображение приближается к линзе.

Из подобных треугольников (см. рисунок) находим отношения:

$$\frac{x}{y} = \frac{f + Vt}{a}, \quad \frac{x - f}{y} = \frac{f}{a}.$$

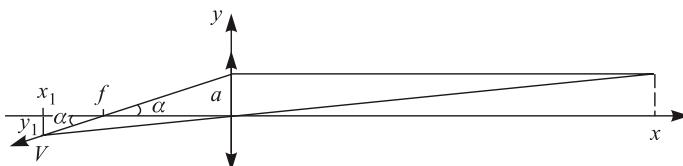
Выражая отсюда  $x$  и  $y$ , получаем ответ:  $x(t) = f + \frac{f^2}{Vt}$ ,  $y(t) = \frac{af}{Vt}$ .

**4.1.32.** Начало системы координат помещено в центр тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием  $f$ , причем ось  $x$  совпадает с главной оптической осью линзы. Точечный источник света удаляется от линзы по прямой, проходящей через фокус линзы под углом  $\alpha$ , с постоянной скоростью  $V$ . Найти координаты  $x(t)$ ,  $y(t)$  изображения источника в зависимости от времени. При  $t = 0$  источник находился в фокусе линзы.



**Решение:** Ход лучей при построении изображения источника показан на рисунке.

Видно, что изображение источника располагается на прямой, параллельной главной оптической оси линзы и проходящей через точку пересечения линий, по которой движется источник, с преломляющей



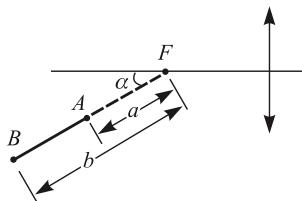
плоскостью линзы. В начальный момент времени источник находится в фокальной плоскости линзы и его изображение бесконечно удалено. По мере перемещения источника в направлении от линзы его изображение приближается к линзе. Из рисунка видно, что

$$y = f \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{x_1 + f}{y_1} = \frac{x}{f},$$

где  $x_1 = Vt \cos \alpha$ ,  $y_1 = Vt \sin \alpha$ . Выражая  $x$  из записанного выше отношения, после несложных преобразований получаем ответ:

$$x(t) = f + \frac{f^2}{Vt \cos \alpha}, \quad y(t) = f \operatorname{tg} \alpha.$$

**4.1.33.** Отрезок  $AB$  расположен вдоль прямой, проходящей через фокус собирающей линзы под углом  $\alpha = 45^\circ$  к главной оптической оси. Найти длину  $l$  изображения этого отрезка. Фокусное расстояние линзы  $F$ , а расстояния от точек  $A$  и  $B$  до фокуса равны, соответственно,  $a$  и  $b$ .



**Решение:** Изображение отрезка  $AB$  располагается на прямой, параллельной главной оптической оси линзы и проходящей через точку пересечения линии, по которой находится отрезок, с преломляющей плоскостью линзы (см. решение задачи 4.1.32). Обозначим через  $A$  и  $B$  расстояния от точек  $A$  и  $B$  до линзы, соответственно. Легко видеть, что  $A = a \cos \alpha + F$ ,  $B = b \cos \alpha + F$ . Обозначив через  $A'$  и  $B'$  расстояния от линзы до изображений точек  $A$  и  $B$ , соответственно, из формулы линзы получаем:

$$A' = \frac{AF}{A-F} = F \left( 1 + \frac{F}{a \cos \alpha} \right), \quad B' = \frac{BF}{B-F} = F \left( 1 + \frac{F}{b \cos \alpha} \right).$$

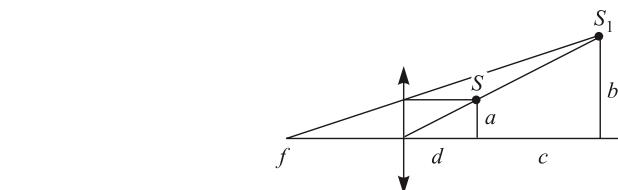
Учитывая, что  $l = A' - B'$ , находим ответ:

$$l = \frac{F^2}{\cos \alpha} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = F^2 \sqrt{2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

**4.1.34.** На рисунке представлены светящаяся точка  $S$  и ее изображение  $S_1$ , даваемое линзой, главная оптическая ось которой — прямая

$N_1N_2$ . Расстояния от точек  $S$  и  $S_1$  до оптической оси равны, соответственно,  $a = 20$  см и  $b = 30$  см, расстояние между точками  $A$  и  $B$  равно  $c = 15$  см. Найти фокусное расстояние линзы  $f$ .

**Решение:** Поскольку  $S_1$  находится по ту же сторону от главной оптической оси линзы, что и  $S$ , причем  $b > a$ , изображение объекта увеличенное и прямое. Такое изображение может дать только собирающая линза, причем



это изображение является мнимым. Соответствующий ход лучей и найденное построением положение линзы и ее фокуса показаны на рисунке. Из подобия треугольников вытекает отношение  $d/(c+d) = a/b$ . Отсюда  $d = \frac{ac}{b-a}$ ,  $c+d = \frac{bc}{b-a}$ .

С другой стороны, из формулы линзы, записанной учетом того, что изображение мнимое:

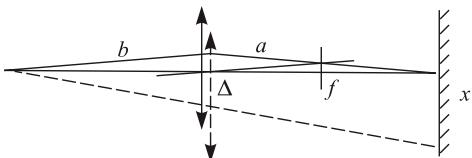
$$\frac{1}{d} - \frac{1}{c+d} = \frac{1}{f},$$

вытекает, что  $f = \frac{d(c+d)}{c}$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ  $f = \frac{abc}{(b-a)^2} = 90$  см.

**4.1.35.** Изображение предмета наблюдают на экране, расположенным на расстоянии  $a = 5$  см от тонкой линзы, фокусное расстояние которой  $f = 3,5$  см. Линзу смещают в направлении, перпендикулярном ее главной оптической оси, на расстояние  $\Delta = 7$  мм. На какое расстояние  $x$  сместится при этом изображение предмета?

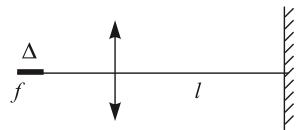
**Решение:** Ход лучей, дающих изображение точечного предмета при исходном и смещенном положении линзы изображен на рисунке сплошными и штриховыми линиями, соответственно. Из подобия треугольников (см. рисунок) следует, что

$$\frac{x}{\Delta} = \frac{a+b}{b} = 1 + \frac{a}{b}.$$



По формуле линзы  $b = af/(a-f)$ . Подставляя  $b$  в записанное выше равенство и выражая из него  $x$ , получаем ответ:  $x = \frac{a\Delta}{f} = 10$  мм.

**4.1.36.** Светящаяся нить лампы в осветителе имеет форму отрезка длины  $\Delta = 1$  см и расположена вдоль главной оптической оси линзы диаметра  $D = 5$  см с фокусным расстоянием  $f = 9$  см таким образом, что дальний от линзы конец нити находится в фокусе линзы. Построив ход лучей, определить диаметр  $d$  светового пятна на экране, расположенном на расстоянии  $l = 72$  см от линзы перпендикулярно ее главной оптической оси.

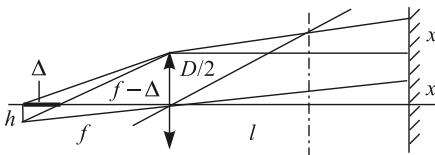


**Решение:** Ход лучей, испущенных двумя точками, находящимися на противоположных концах нити, изображен на рисунке. Видно, что диаметр светового пятна на экране определяется лучами, выходящими из ближнего к линзе конца нити и проходящими через край линзы. Из подобия треугольников (см. рисунок) имеем:

$$\frac{x}{h} = \frac{l}{f}, \quad \frac{h}{\Delta} = \frac{D/2}{f-\Delta}.$$

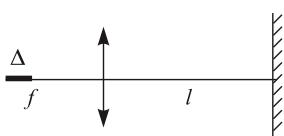
Исключая из этих отношений  $h$ , находим  $x$ :

$$x = \frac{Dl\Delta}{2f(f-\Delta)}.$$



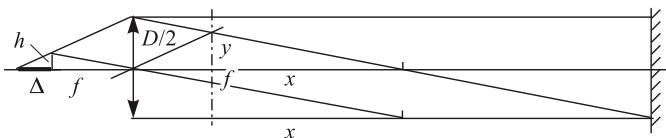
Учитывая, что  $d = D + 2x$ , получаем ответ:  $d = D \left( 1 + \frac{l\Delta}{f(f - \Delta)} \right) = 10 \text{ см.}$

**4.1.37.** Светящаяся нить лампы имеет форму отрезка длины  $\Delta = 1 \text{ см}$  и расположена вдоль главной оптической оси линзы с фокусным расстоянием  $f = 5 \text{ см}$  так, что ближний к линзе конец нити находится



в ее фокусе. На расстоянии  $l$  от линзы перпендикулярно ее главной оптической оси расположен экран. Построив ход лучей, определить, при каком значении  $l$  размер пятна на экране превысит диаметр линзы?

**Решение:** Ход лучей, испущенных двумя точками, находящимися на противоположных концах нити, изображен на рисунке. Видно, лучи, вышедшие из дальнего от линзы конца нити и преломившиеся в линзе, на некотором расстоянии  $2x$  от нее пересекут



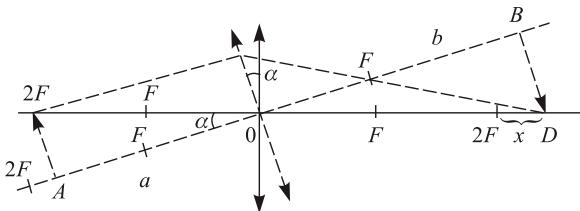
лучи, вышедшие из конца нити, расположенного в фокусе. Диаметр светового пятна на экране будет превышать диаметр линзы в том случае, когда экран расположен от линзы на расстоянии  $l > 2x$ .

Из подобия треугольников (см. рисунок) имеем:  $\frac{h}{\Delta} = \frac{D/2}{f + \Delta}$ ,  $\frac{h}{f} = \frac{D/2}{x}$ . Исключая из этих отношений  $h$ , находим  $x$ :

$$x = f \left( 1 + \frac{f}{\Delta} \right). \quad \text{Ответ: } l > 2f \left( 1 + \frac{f}{\Delta} \right) = 60 \text{ см.}$$

**4.1.38.** Точечный источник света лежит на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием  $F = 70 \text{ см}$ . Расстояние от источника до центра линзы равно  $2F$ . На какое расстояние  $x$  сместится изображение источника, если линзу повернуть так, чтобы прямая, проведенная от источника к центру линзы, составляла угол  $\alpha = 30^\circ$  с главной оптической осью линзы? Центр линзы остается неподвижным.

**Решение:** Когда линза не повернута, изображение находится от нее на расстоянии, равном  $2F$ . Ход лучей при построении изображения, даваемого повернутой линзой, приведен на рисунке



штриховыми линиями. Так как один из лучей совпадает с главной оптической осью неповернутой линзы, изображение источника при повороте линзы останется на той же прямой. Введем следующие обозначения (см. рисунок):  $OA = a$ ,  $OB = b$ ,  $OD = y$ . Тогда  $x = y - 2F$ . Из подобия треугольников имеем:  $2F/a = y/b$ , откуда  $y = 2bF/a$ , причем  $a = 2F \cos \alpha$ . Из формулы тонкой линзы следует, что  $b = aF/(a - F)$ . Объединяя записанные выражения, после несложных преобразований находим значение  $y$ :

$$y = \frac{2F}{2 \cos \alpha - 1}.$$

Ответ:  $x = \frac{4F(1 - \cos \alpha)}{2 \cos \alpha - 1} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{3} - 1} F \cong 51,3$  см.

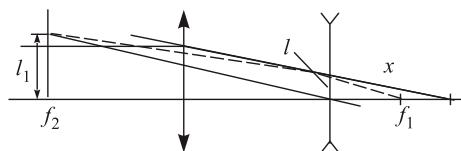
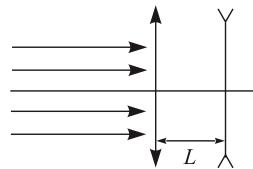
**4.1.39.** Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием  $f_1 = 0,6$  м и тонкая рассеивающая линза с фокусным расстоянием  $f_2 = -1$  м имеют общую оптическую ось и расположены на расстоянии  $L = 0,2$  м друг от друга. На собирающую линзу вдоль общей оптической оси падает пучок параллельных лучей света. На каком расстоянии  $x$  от рассеивающей линзы он будет сфокусирован?

**Решение:** Ход одного из лучей, преломляющегося в первой и второй линзах, построен на рисунке. Из подобия треугольников имеем:

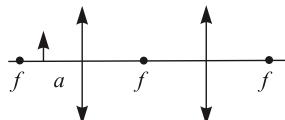
$$\frac{x}{l} = \frac{x + |f_2|}{l_1}, \quad \frac{f_1 - L}{l} = \frac{|f_2|}{l_1}.$$

Исключая из этих отношений  $l_1/l$  и выражая  $x$ , получаем ответ:

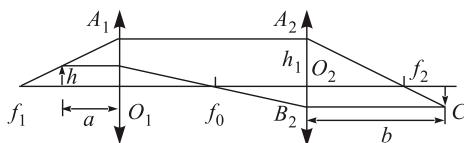
$$x = \frac{(f_1 - L)|f_2|}{|f_2| - f_1 + L} = \frac{(f_1 - L)f_2}{f_1 + f_2 - L}.$$



**4.1.40.** Оптическая система состоит из двух одинаковых собирающих линз с фокусным расстоянием  $f$ , расположенных так, что их фокусы совпадают. Предмет находится на расстоянии  $a < f$  перед первой линзой. На каком расстоянии  $b$  от второй линзы будет располагаться изображение предмета?



**Решение:** Для построения изображения предмета воспользуемся двумя лучами, ход которых изображен на рисунке. Один из этих лучей идет параллельно главной оптической оси системы и после пре-



ломления в первой линзе пересекает оптическую ось в правом фокусе этой линзы (точка  $f_0$  на рисунке). Второй луч направлен так, что его продолжение пересекает оптическую ось в левом фокусе первой линзы (точка  $f_1$  на рисунке), в результате чего после преломления в первой линзе он идет параллельно главной оптической оси. Преломляясь во второй линзе, эти лучи пересекаются в точке  $C$ . Из треугольника  $f_1A_1O_1$  находим, что  $h_1 = h \frac{f}{f - a}$ . Из подобия треугольников  $A_2B_2C$  и  $A_2O_2f_2$  следует:

$$b = f \frac{A_2B_2}{A_2O_2} = f \frac{h_1 + h}{h_1}.$$

Подставляя сюда найденное  $h_1$ , получаем ответ:  $b = 2f - a$ .

**4.1.41.** Человек, страдающий дальнозоркостью, рассматривает предмет, находящийся на расстоянии  $d = 20$  см перед его глазами. При этом изображение предмета оказывается смещенным за поверхность сетчатки глаза на расстояние  $\delta = 2,2$  мм. Определить оптическую силу  $D$  контактной линзы, устраняющей это смещение. Считать, что оптическая система глаза — это тонкая линза с фокусным расстоянием  $f = 2$  см, а контактная линза вплотную примыкает к ней.

**Решение:** Обозначим через  $b$  расстояние от хрусталика до сетчатки глаза. Учитывая, что оптическая сила системы «глаз + контактная линза» равна  $\frac{1}{f} + D$ , по формуле тонкой линзы имеем:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} + D.$$

Поскольку расстояние от хрусталика до изображения предмета в отсутствие контактной линзы равно  $b + \delta$ , формула тонкой линзы для этого случая имеет вид:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{b + \delta} = \frac{1}{f}.$$

Исключая из этих соотношений  $b$ , получаем ответ:

$$D = \frac{\delta(d - f)^2}{df(df + f\delta - d\delta)} \approx 5 \text{ дptr.}$$

**4.1.42.** Человек, страдающий близорукостью, рассматривает предмет, находящийся на расстоянии  $d = 202$  см перед его глазами с использованием контактной линзы оптической силы  $D = -5$  дptr. При этом изображение предмета оказывается точно в плоскости сетчатки глаза. Определить, на какое расстояние  $\delta$  сместится плоскость изображения, если человек снимет контактные линзы. Считать, что оптическая система глаза — это тонкая линза с фокусным расстоянием  $f = 2$  см, а контактная линза вплотную примыкает к ней.

**Решение:** Обозначим через  $b$  расстояние от хрусталика до сетчатки глаза. Учитывая, что оптическая сила системы «глаз + контактная линза» равна  $\frac{1}{f} + D = \frac{1}{f} - |D|$ , по формуле тонкой линзы имеем:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} - |D|.$$

Поскольку расстояние от хрусталика до изображения предмета в отсутствие контактной линзы равно  $b - \delta$  (у близорукого человека изображение смещено в сторону хрусталика), формула тонкой линзы для этого случая имеет вид:

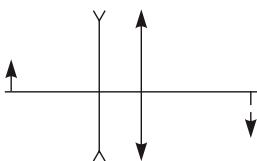
$$\frac{1}{d} + \frac{1}{b - \delta} = \frac{1}{f}.$$

Исключая из этих соотношений  $b$ , получаем ответ:

$$\delta = \frac{fd}{d - |D|fd - f} - \frac{fd}{d - f} \approx 2,2 \text{ мм.}$$

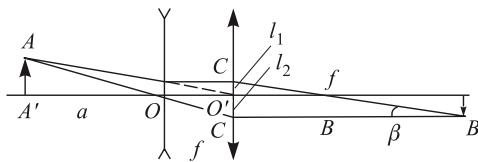
Изображение смещено в сторону хрусталика.

**4.1.43.** Рассеивающая и собирающая линзы с одинаковыми по величине фокусными расстояниями  $f = 10$  см расположены на расстоянии  $f$  друг от друга так, что их главные оптические оси совпадают. Предмет находится на расстоянии  $a = 20$  см от рассеивающей линзы. На каком расстоянии  $b$  от собирающей линзы находится изображение предмета, показанное на рисунке штриховой линией?



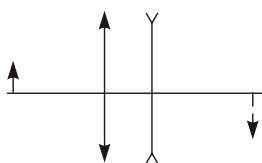
**Решение:** Ход лучей при построении изображения предмета показан на рисунке. Из подобия треугольников  $AA'O'$  и  $CO'f$  имеем:

$$\frac{l_1}{f} = \frac{l}{a+f}.$$



Из подобия треугольников  $OO'C'$  и  $AA'O$  следует:  $\frac{l_2}{f} = \frac{l}{a}$ . Отсюда  $l_1 = \frac{lf}{a+f}$ ,  $l_2 = \frac{lf}{a}$ . Искомое расстояние, как видно из рисунка, равно  $b = (l_1 + l_2) \operatorname{ctg} \beta = \frac{a+f}{l} \operatorname{ctg} \beta$ . Ответ:  $b = 2f + \frac{f^2}{a} = 25$  см.

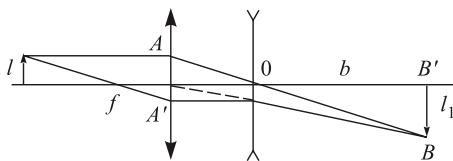
**4.1.44.** Собирающая и рассеивающая линзы с одинаковыми по величине фокусными расстояниями  $f = 20$  см расположены на расстоянии  $f$  друг от друга так, что их главные оптические оси совпадают. Предмет находится на некотором расстоянии от собирающей линзы. Чему равно увеличение системы  $M$ , т.е. отношение размера изображения к размеру предмета, если известно, что действительное изображение предмета, показанное на рисунке



штриховой линией, находится на расстоянии  $b = 30$  см от рассеивающей линзы?

**Решение:** Ход лучей при построении изображения предмета показан на рисунке. Из подобия треугольников  $AA'O$  и  $OB'B$  следует, что

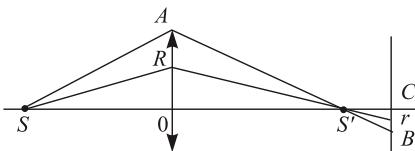
$$\frac{l_1}{b} = \frac{l}{f}.$$



С другой стороны, увеличение системы  $M = \frac{l_1}{l}$ . Объединяя эти выражения, получаем ответ:  $M = \frac{b}{f} = 1,5$ .

**4.1.45.** Точечный источник света расположен на главной оптической оси тонкой собирающей линзы. По другую сторону линзы находится экран, перпендикулярный ее главной оптической оси. Найти радиус  $r$  светового пятна на экране, если известно, что расстояние от источника до линзы  $a = 30$  см, расстояние от линзы до экрана  $b = 80$  см, фокусное расстояние линзы  $f = 20$  см, а ее радиус  $R = 3$  см.

**Решение:** Все световые лучи, испущенные источником  $S$  и попавшие в линзу, пересекаются на ее главной оптической оси в точке  $S'$ , являющейся изображением источника (см. рисунок). Пройдя далее



до экрана, они образуют на нем освещенное круглое пятно. Из подобных треугольников  $AOS'$  и  $BCS'$  имеем:

$$\frac{r}{R} = \frac{b - c}{c}.$$

С другой стороны, по формуле тонкой линзы

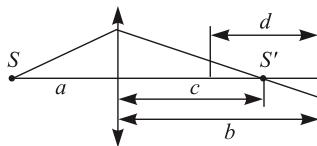
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}.$$

Используя эти соотношения, после несложных преобразований получаем ответ:  $r = R \left( \frac{b}{f} - \frac{b}{a} - 1 \right) = 1$  см.

**4.1.46.** Точечный источник света расположен на главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием  $f = 20$  см. По другую сторону линзы на расстоянии  $b = 80$  см от нее находится экран, перпендикулярный ее главной оптической оси. Известно, что если переместить экран на расстояние  $d = 40$  см в сторону линзы, то размер пятна света, создаваемого источником на экране, не изменится. Определить расстояние  $a$  от источника света до линзы.

**Решение:** Все световые лучи, испущенные источником  $S$  и попавшие в линзу, пересекаются на ее главной оптической оси в точке  $S'$ , являющейся изображением источника (см. рисунок). Пройдя далее до экрана, они образуют на нем освещенное круглое пятно. Из рисунка видно, что размер пятна не изменится, если расстояние  $d$ , на которое перемещают экран, удовлетворяет соотношению

$$b - c = \frac{d}{2}.$$



С другой стороны, по формуле тонкой линзы

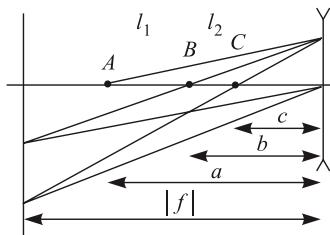
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}.$$

Используя эти соотношения, после несложных преобразований получаем ответ:  $a = \frac{(2b - d)f}{2b - d - 2f} = 30$  см.

**4.1.47.** Точечный источник света находится на главной оптической оси рассеивающей линзы. Если поместить источник в точку  $A$ , то его изображение расположится в точке  $B$ . Если поместить источник в точку  $B$ , то его изображение расположится в точке  $C$ . Зная расстояния между точками  $A$  и  $B$   $l_1 = 20$  см и между точками  $B$  и  $C$   $l_2 = 10$  см, найти фокусное расстояние линзы  $f$ .

**Решение:** Расположение линзы, ее фокальной плоскости, источника и его изображений показано на рисунке. Записывая формулу тонкой линзы с использованием для соответствующих расстояний обозначений, приведенных на рисунке, имеем:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{|f|}, \quad \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = -\frac{1}{|f|}.$$



В этих выражениях учтено, что расстояние от линзы до мнимого изображения, а также модуль фокусного расстояния рассеивающей линзы должны войти в формулу линзы со знаком "минус". Кроме того, справедливы также следующие соотношения:

$$a - b = l_1, \quad b - c = l_2, \quad a - c = l_1 + l_2.$$

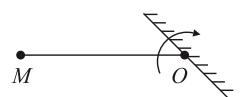
Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$|f| = \frac{2(l_1 + l_2)l_1l_2}{(l_1 - l_2)^2} = 120 \text{ см.}$$

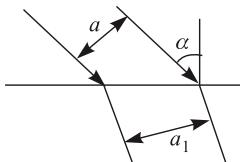
## Задание для самостоятельной работы

**4.1.48.** Луч света падает в центр верхней грани стеклянного кубика. Чему равен максимальный угол падения  $\alpha$ , при котором преломленный луч еще попадает на нижнюю грань кубика? Показатель преломления стекла  $n = 1,5$ .

**4.1.49.** Плоское зеркало вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей по поверхности зеркала. Найти траекторию изображения точки  $M$ , расположенной на расстоянии  $a$  от оси вращения.



**4.1.50.** Пучок параллельных лучей ширины  $a = 3$  см падает под углом  $\alpha = 45^\circ$  из воздуха на плоскую границу среды с показателем

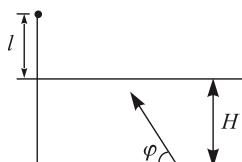


преломления  $n = 1,5$ . Какова будет ширина  $a_1$  пучка в среде?

**4.1.51.** Луч света отражается от плоского зеркала, падая на него под углом  $\alpha = 30^\circ$ . На какое расстояние  $l$  сместится отраженный от зеркала луч, если поверхность зеркала закрыть стеклом толщиной  $d = 3$  см? Показатель преломления стекла  $n = 1,5$ .

**4.1.52.** Два луча света падают из воздуха в жидкость. Углы преломления лучей равны  $\beta_1 = 30^\circ$  и  $\beta_2 = 45^\circ$ . Найти показатель преломления жидкости  $n$ , если известно, что падающие лучи перпендикулярны друг другу и лежат в одной плоскости, перпендикулярной поверхности жидкости.

**4.1.53.** Водолаз направляет из под воды луч света так, чтобы он попал на конец вертикального стержня, выступающего из воды. Определить длину  $l$  части стержня, выступающего из воды, если известно, что луч составляет с поверхностью горизонтального дна угол  $\varphi$ , а водолаз находится на глубине  $H$  и на расстоянии  $L$  от нижнего конца стержня.

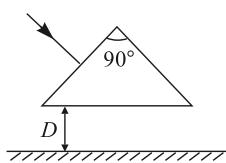


Показатель преломления воды равен  $n$ . Ростом водолаза по сравнению с глубиной  $H$  пренебречь.

**4.1.54.** Широкий световой пучок падает на основание стеклянного полушара с показателем преломления  $n = 1,41$ , перпендикулярно к плоскости основания. Каков максимальный угол  $\alpha$  отклонения прошедших через полушир пучей от их первоначального направления?

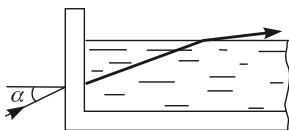
**4.1.55.** Световой луч падает на поверхность стеклянного шара под углом  $\alpha = 45^\circ$ . Найти показатель преломления стекла  $n$ , если угол между падающим лучом и лучом, вышедшим из шара,  $\gamma = 30^\circ$ .

**4.1.56.** На боковую грань равнобедренной призмы с углом при вершине  $90^\circ$  падает перпендикулярно этой грани луч света с длиной



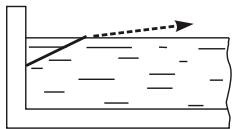
волны, для которой показатель преломления призмы  $n_1 = 1,1$ . После выхода из призмы луч падает на экран, находящийся на расстоянии  $D = 10$  см от основания призмы параллельно основанию. На какое расстояние сместится луч на экране, если он будет иметь другую длину волны, для которой показатель преломления призмы  $n_2 = 1,2$ ?

**4.1.57.** Луч света, идущий в плоскости рисунка, падает наклонно на вертикальную стенку прозрачной кюветы, заполненной жидкостью

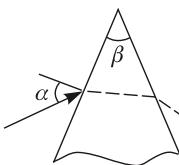


показателем преломления  $n = 1,25$ . В каких пределах должен лежать угол падения  $\alpha$ , чтобы луч мог выйти из жидкости, как показано на рисунке?

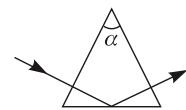
**4.1.58.** Пучок параллельных световых лучей падает наклонно на вертикальную стенку прозрачной кюветы, заполненной жидкостью с показателем преломления  $n$ . При каких значениях  $n$  пучок не выйдет через поверхность жидкости независимо от угла падения?



**4.1.59.** Луч света, идущий в плоскости чертежа, падает на переднюю грань стеклянного клина с углом  $\beta = 45^\circ$  между гранями. При каких значениях угла падения  $\alpha$  луч выйдет через вторую грань клина? Показатель преломления стекла  $n = \sqrt{2}$ .

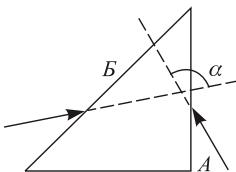


**4.1.60.** Равнобедренная призма с углом при вершине  $\alpha$  и показателем преломления  $n_1$  помещена в жидкость, показатель преломления которой  $n_2 < n_1$ . Перпендикулярно боковой грани призмы падает луч света, который, отражаясь от основания, выходит через другую боковую грань. При каких значениях угла  $\alpha$  луч будет претерпевать полное внутреннее отражение от основания призмы?



**4.1.61.** На водной поверхности бассейна глубиной  $H = 2$  м плавает круглый плот радиусом  $r = 1,5$  м. В центре плота укреплена вертикальная мачта, на вершине которой подвешен фонарь. Определить высоту мачты  $h$ , если известно, что радиус тени от плота на дне бассейна  $R = 2,1$  м. Показатель преломления воды  $n = 1,33$ . Фонарь считать точечным источником света.

**4.1.62.** На грани  $A$  и  $B$  прямоугольной равнобедренной призмы падают два луча, лежащие в одной плоскости. Луч, падающий на грань  $A$ , выходит из грани  $B$  перпендикулярно к ней. Луч, падающий

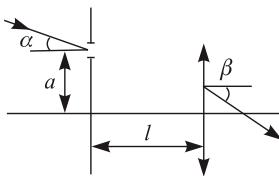


на грань  $B$ , выходит из грани  $A$  перпендикулярно к этой грани. Найти угол  $\alpha$  между входящими в призму лучами. Показатель преломления стекла равен  $n$ .

**4.1.63.** Предмет высотой  $h = 5$  см находится на расстоянии  $a = 12$  см от вогнутого зеркала с фокусным расстоянием  $F = 10$  см. На каком расстоянии  $b$  от зеркала образуется изображение? Какова его высота  $H$ ?

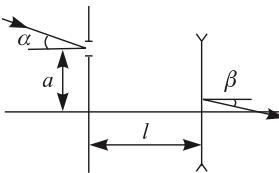
**4.1.64.** Радиус вогнутого сферического зеркала  $R = 40$  см. На главной оптической оси этого зеркала помещен точечный источник света  $S$  на расстоянии  $a = 30$  см от зеркала. На каком расстоянии  $d$  от вогнутого зеркала нужно поставить плоское зеркало, чтобы лучи, отраженные вогнутым, а затем плоским зеркалом, вернулись в точку  $S$ ?

**4.1.65.** На расстоянии  $l$  перед тонкой собирающей линзой расположен экран с маленьким отверстием, находящимся на расстоянии  $l$



главной оптической оси. На экран под углом  $\alpha$  к оси линзы падает пучок параллельных лучей света. Под каким углом  $\beta$  к главной оптической оси выйдет пучок из линзы, если ее фокусное расстояние  $f$ ?

**4.1.66.** На расстоянии  $l$  перед тонкой рассеивающей линзой расположен экран с маленьким отверстием, находящимся на расстоянии



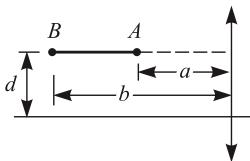
$a$  от главной оптической оси. На экран под углом  $\alpha$  к оси линзы падает пучок параллельных лучей света. Под каким углом  $\beta$  к главной оптической оси выйдет пучок из линзы, если ее фокусное расстояние  $f$ ?

**4.1.67.** Собирающая линза создает на экране изображение предмета, расположенного на расстоянии  $l_1 = 0,12$  м от переднего фокуса линзы, причем экран находится на расстоянии  $l_2 = 3$  м от заднего фокуса линзы. Определить фокусное расстояние  $F$  линзы.

**4.1.68.** С помощью линзы на экране получено изображение предмета с увеличением  $m = 3$ . Чему равно фокусное расстояние линзы  $f$ , если расстояние между экраном и предметом  $l = 80$  см?

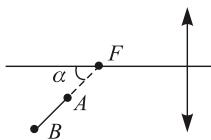
**4.1.69.** Перемещая линзу между экраном и предметом, удается получить два его четких изображения, одно размером  $l_1 = 2$  см, а другое размером  $l_2 = 8$  см. Каков размер  $l$  предмета?

**4.1.70.** Отрезок  $AB$ , параллельный главной оси собирающей линзы, расположен на расстоянии  $d$  от оси так, что его концы удалены от



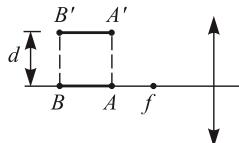
плоскости линзы на расстояния  $a$  и  $b$  соответственно. Найти длину  $l$  изображения отрезка, если фокусное расстояние линзы  $F$  и  $b > a > F$ .

**4.1.71.** Отрезок  $AB$  расположен вдоль прямой, проходящей через фокус собирающей линзы под углом  $\alpha = 60^\circ$  к ее главной оси. Расстояния от точек  $A$  и  $B$  до фокуса  $F$  равны, соответственно,  $a = 5$  см и  $b = 10$  см. Чему равно фокусное расстояние линзы  $F$ , если известно, что длина отрезка  $AB$  равна длине его изображения?



яния от точек  $A$  и  $B$  до фокуса  $F$  равны, соответственно,  $a = 5$  см и  $b = 10$  см. Чему равно фокусное расстояние линзы  $F$ , если известно, что длина отрезка  $AB$  равна длине его изображения?

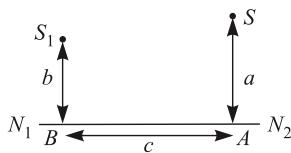
**4.1.72.** Отрезок  $AB$ , лежащий на главной оптической оси линзы за ее фокусом  $f$ , сместили параллельно самому себе и перпендикулярно оптической оси в положение  $A'B'$ , как показано на рисунке. Чему



равно смещение  $d$ , если длина изображения отрезка  $A'B'$  больше длины изображения отрезка  $AB$  в  $k = 2$  раз? Фокусное расстояние линзы  $f = 3$  см.

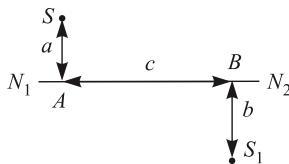
**4.1.73.** Для получения изображения точечного источника света на экране используют собирающую линзу с фокусным расстоянием  $F = 7$  см. На каком расстоянии  $b$  от экрана следует разместить линзу, чтобы в формировании изображения источника принял участие максимальный световой поток? Расстояние между источником и экраном  $L = 64$  см.

**4.1.74.** На рисунке представлены светящаяся точка  $S$  и ее изображение  $S_1$ , даваемое линзой, главная оптическая ось которой — прямая  $N_1N_2$ . Расстояния от точек  $S$  и  $S_1$  до оптической оси равны,



соответственно,  $a = 30$  см и  $b = 20$  см, расстояние между точками  $A$  и  $B$   $c = 10$  см. Найти фокусное расстояние линзы  $F$ .

**4.1.75.** На рисунке представлены светящаяся точка  $S$  и ее изображение  $S_1$ , даваемое линзой, главная оптическая ось которой — прямая  $N_1N_2$ . Расстояния от точек  $S$  и  $S_1$  до оптической оси равны, соответ-



ственno,  $a = 10$  см и  $b = 20$  см, расстояние между точками  $A$  и  $B$  равно  $c = 40$  см. Найти фокусное расстояние линзы  $F$ .

**4.1.76.** Собирающая линза дает на экране, перпендикулярном ее главной оптической оси, резкое изображение предмета с увеличением  $M = 4$ . Линзу сдвигают перпендикулярно оптической оси на расстояние  $h = 1$  мм. Какова будет величина  $H$  смещения изображения на экране?

**4.1.77.** Узкий световой пучок падает на собирающую линзу с фокусным расстоянием  $f = 20$  см параллельно ее главной оптической оси. Пройдя линзу, пучок попадает на экран, находящийся на расстоянии  $L = 50$  см от линзы и перпендикулярный ее главной оптической оси. На какое расстояние  $H$  сместится световое пятно на экране, если сдвинуть линзу перпендикулярно ее оси на расстояние  $h = 2$  мм?

**4.1.78.** Тонкая рассеивающая линза с фокусным расстоянием  $f_1 = -1$  м прижата вплотную к тонкой собирающей линзе с фокусным расстоянием  $f_2 = 0,6$  м так, что их главные оптические оси совпадают. На рассеивающую линзу вдоль общей оптической оси падает пучок параллельных лучей света. На каком расстоянии  $f$  от собирающей линзы этот пучок будет сфокусирован?

**4.1.79.** Две одинаковые собирающие линзы с фокусными расстояниями  $F$  расположены на расстоянии  $2F$  друг от друга так, что их главные оптические оси совпадают. На главной оптической оси перед первой линзой помещена некоторая точка  $A$  такая, что луч света, вышедший из нее и прошедший обе линзы, пересекает эту ось в точке  $B$ , находящейся за второй линзой. Определить расстояние между точками  $A$  и  $B$ .

**4.1.80.** Параллельный пучок световых лучей диаметром  $d = 2$  см падает на собирающую линзу с фокусным расстоянием  $F_1 = 10$  см. За этой линзой на некотором расстоянии от нее, превышающем  $F_1$ , расположена вторая собирающая линза с фокусным расстоянием  $F_2 = 15$  см, а в ее фокальной плоскости стоит экран. Найти диаметр  $D$  светового пятна на экране, если главные оптические оси линз и ось симметрии пучка совпадают, а экран перпендикулярен этим осям.

**4.1.81.** На собирающую линзу с фокусным расстоянием  $F_1 = 40$  см падает пучок параллельных лучей света радиусом  $R = 2$  см. За этой линзой расположена рассеивающая линза с фокусным расстоянием  $F_2 = -15$  см, причем главные оптические оси линз и ось симметрии

пучка совпадают. Чему равен радиус пучка  $r$ , вышедшего из второй линзы, если известно, что лучи в нем параллельны?

**4.1.82.** На собирающую линзу с фокусным расстоянием  $F$  вдоль ее главной оптической оси падает параллельный пучок света. На расстоянии  $L$  от линзы ( $F < L < 2F$ ) перпендикулярно оптической оси расположен экран. На каком расстоянии  $x$  от линзы между ней и экраном нужно поместить вторую такую же линзу, чтобы диаметр пятна на экране стал равен первоначальному диаметру падающего пучка? Найти численное значение  $x$  для  $F = 10$  см и  $L = 15$  см.

## **4.2. Элементы физической оптики**

### **Вопросы программы**

1. Волновые свойства света. Поляризация света. Электромагнитная природа света. Скорость света в однородной среде. Дисперсия света. Спектроскоп. Инфракрасное и ультрафиолетовое излучения.
2. Интерференция света. Когерентные источники. Условия образования максимумов и минимумов в интерференционной картине.
3. Дифракция света. Опыт Юнга. Принцип Гюйгенса–Френеля. Дифракционная решетка.
4. Корпускулярные свойства света. Постоянная Планка. Фотоэффект. Законы фотоэффекта. Фотон. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта.
5. Давление света. Опыты Лебедева по измерению давления света.
6. Постулаты Эйнштейна. Связь между массой и энергией.

### **Определения, понятия и законы**

**Волновые свойства света** проявляются в эффектах, присущих любому волновому движению. К таким эффектам в первую очередь относятся интерференция и дифракция света (см. ниже).

**Электромагнитная природа света.** На основе многочисленных экспериментов установлено, что свет и электромагнитные волны имеют ряд общих свойств: одинаковую скорость распространения, наличие поляризации (см. ниже), способность испытывать отражение и преломление и т.п. Это позволило сделать вывод о том, что свет имеет

**электромагнитную природу**, т.е. представляет собой электромагнитные волны определенного частотного диапазона. Длины волн видимого света в вакууме лежат в диапазоне от 0,39 микрона (фиолетовый свет) до 0,77 микрона (красный свет).

**Поляризацией света** называется физическая характеристика оптического излучения, связанная с зависимостью свойств света от направления в плоскости фронта световой волны. Поляризованными могут быть только поперечные волны. Поперечность световых волн доказана многочисленными экспериментами по распространению света в кристаллах.

Свет называется линейно-поляризованным, если в световой волне направления колебаний электрического и магнитного полей строго фиксированы и перпендикулярны направлению распространения. Естественный свет неполяризован, направления колебаний электрического и магнитного полей в нем хаотически меняются так, что все направления колебаний в плоскости, перпендикулярной лучу, равновероятны.

Существуют различные способы получения поляризованного света. Устройства (как правило, прозрачные кристаллы), с помощью которых из естественного света выделяют поляризованный свет, называются поляризаторами. Для обнаружения поляризации служат анализаторы, которые по своему принципу действия идентичны поляризаторам. Поляризатор пропускает свет только с определенным направлением колебаний электрического (и соответственно магнитного) поля. В зависимости от ориентации анализатора поляризованный свет либо проходит, либо не проходит через него. При скрещенном положении поляризатора и анализатора, когда они повернуты друг относительно друга на  $90^\circ$ , световые волны через них не проходят.

**Скорость света в однородной среде** определяется формулой

$$v = \frac{c}{n}, \quad (4.2.1)$$

где  $c$  — скорость света в вакууме ( $c \cong 3 \cdot 10^8$  м/с),  $n$  — показатель преломления среды. Длина световой волны  $\lambda$  в веществе с показателем преломления  $n$  уменьшается по сравнению с длиной волны  $\lambda_0$  в вакууме:  $\lambda = \lambda_0/n$ . На расстоянии  $d$ , которое проходит в веществе световая волна, укладывается в  $n$  раз большее число длин волн, чем в вакууме.

**Дисперсией света** называется явление зависимости показателя преломления среды от частоты (длины волны) света. Из (4.2.1) вытекает, что дисперсия света может определяться также как явление зависимости скорости распространения световой волны в веществе от ее частоты (длины волны).

**Спектроскоп** — это прибор для наблюдения спектрального состава света. Простейшим спектроскопом служит стеклянная призма, с помощью которой можно наблюдать разложение белого света в спектр, т.е. на составляющие с различными длинами волн (рис. 4.2.1).

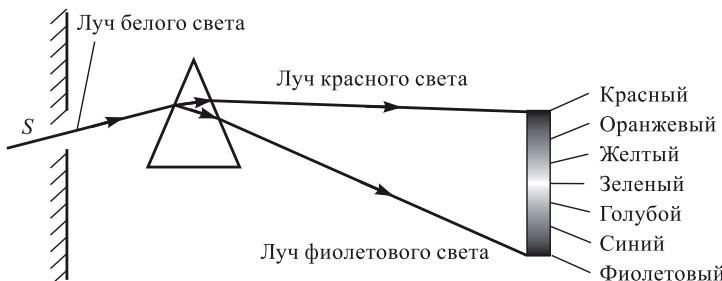


Рис. 4.2.1. Спектр белого света

**Инфракрасное излучение** — невидимое электромагнитное излучение, длина волны которого превышает длину волны красного света. Инфракрасные волны имеют длины волн в диапазоне  $3 \cdot 10^{-3} \dots 7,7 \cdot 10^{-7}$  м.

**Ультрафиолетовое излучение** — невидимое электромагнитное излучение, длина волны которого меньше длины волны фиолетового света и лежит в диапазоне  $3,9 \cdot 10^{-7} \dots 10^{-9}$  м.

**Интерференция света** — это пространственное перераспределение энергии светового излучения при наложении двух или нескольких световых волн. Правильное объяснение интерференции света как типично волнового явления было дано в начале XIX века Т. Юнгом и О. Френелем. Интерференция света характеризуется образованием стационарной (постоянной во времени) интерференционной картины — регулярного чередования в пространстве областей повышенной и пониженной интенсивности света, получающейся в результате наложения *когерентных* световых волн, т.е. волн одинаковой частоты, имеющих постоянную разность фаз. Добиться постоянной разности фаз волн от независимых источников практически невозможно. Поэтому для получения когерентных световых волн обычно используется следующий способ: свет от одного источника каким-либо образом разделяют на два или несколько пучков и, пустив их по разным путям, сводят их затем вместе.

Интерференция наблюдается также при отражении света от тонкой мыльной пленки, от нефтяных пленок на поверхности воды. Интерференционная картина при этом образуется за счет наложения световых

волн, отраженных от наружной и внутренней поверхностей пленки. Когерентность интерферирующих волн обеспечивается тем, что обе они испущены от одного источника.

Простая для наблюдения интерференционная картина возникает в тонкой прослойке воздуха между стеклянной пластикой и прижатой к ней плосковыпуклой линзой большого радиуса кривизны. Эта картина имеет вид концентрических колец, получивших название колец Ньютона.

*Максимум* в интерференционной картине наблюдается при условии, что световые волны от когерентных источников приходят в точку наблюдения в одной и той же фазе (оптическая разность хода лучей от источников до данной точки равна при этом четному числу полуволн). *Минимум* в интерференционной картине наблюдается при условии, что световые волны от когерентных источников приходят в точку наблюдения в противофазе (когда оптическая разность хода лучей равна нечетному числу полуволн).

При наблюдении интерференции в монохроматическом свете с определенной длиной волн интерференционная картина на экране представляет собой чередование светлых и темных мест. Интерференционная картина в белом свете является окрашенной, ибо каждая составляющая белого света дает усиления и ослабления света в своих местах на экране.

**Дифракция света** — это огибание лучами света границы непрозрачных тел, в том числе проникновение света в область геометрической тени. Впервые дифракцию света наблюдал Ф. Гриимальди в середине XVII века. Совместное проявление интерференции и дифракции света

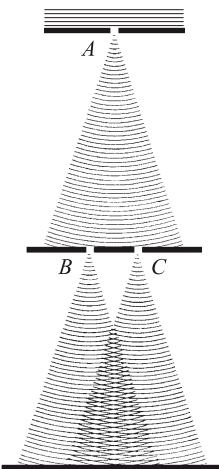


Рис. 4.2.2. Схема опыта Юнга

наблюдалось в классическом *опыте Юнга*, поставленном им в 1802 г. Схема опыта изображена на рис. 4.2.2. Свет, прошедший через маленькое отверстие *A* в непрозрачной ширме, падал на другую ширму с двумя близко расположеннымися маленькими отверстиями *B* и *C*. Сферическая волна от отверстия *A* возбуждала в отверстиях *B* и *C* когерентные световые колебания. В результате интерференции волн от отверстий *B* и *C* на экране появлялись чередующиеся темные и светлые полосы. Закрывая одно из отверстий Юнг, обнаруживал, что интерференционные полосы исчезали. С помощью этого опыта Юнгом были весьма точно измерены длины волн, соответствующие световым лучам разного цвета.

Принципиальное значение опыта Юнга состоит в том, что он дал первое неопровергнутое доказательство волновой природы света.

**Принцип Гюйгенса–Френеля** является основным принципом волновой оптики. Он используется для решения дифракционных задач — отыскания распределения интенсивности световой волны, распространяющейся в среде с препятствиями (непрозрачными телами). Согласно этому принципу каждая точка пространства, которой достигла в настоящий момент распространяющаяся волна, становится источником элементарных сферических волн. Световое поле в следующий момент времени образуется в результате интерференции элементарных волн, излучаемых точками волновой поверхности в направлении распространения волны (элементарные волны, излучаемые точками волновой поверхности в обратном направлении, во внимание не принимаются).

В отличие от принципа Гюйгенса, областью применимости которого является геометрическая оптика, дающая лишь направление распространения световых лучей, принцип Гюйгенса–Френеля позволяет найти амплитуду и фазу световой волны в любой точке пространства. С его помощью Френелю удалось объяснить дифракцию света на отверстии, на диске, на краю экрана и в других задачах.

Исследования явлений дифракции отчетливо показывают приближенный характер законов геометрической оптики. Эти законы выполняются достаточно точно лишь в том случае, когда поперечные размеры непрозрачных препятствий на пути распространения света намного больше длины световой волны.

**Дифракционная решетка** — это пространственная периодическая структура, период которой соизмерим с длиной световой волны. В простейшем случае решетка представляет собой систему щелей в непрозрачном экране (рис. 4.2.3). Если на решетку падает плоская монохроматическая волна, то дифракционная картина, полученная с помощью линзы на экране, имеет в результате интерференции света от различных щелей вид чередующихся светлых и темных полос.

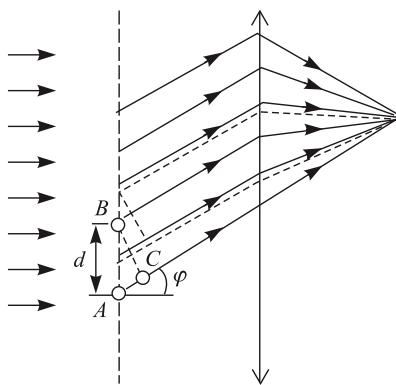


Рис. 4.2.3. Дифракция света на решетке

При этом угловые направления на максимумы дифракционной картины определяются уравнением:

$$d \sin \varphi = m\lambda. \quad (4.2.2)$$

Здесь  $d$  — период решетки (т.е. расстояние между соседними щелями),  $\varphi$  — угол между нормалью к решетке и направлением на один из максимумов дифракционной картины,  $\lambda$  — длина световой волны,  $m$  — целое число, называемое порядком дифракционного максимума. Если на решетку падает белый свет, то решетка разлагает его в спектр. При этом все максимумы, кроме центрального ( $m=0$ ), будут окрашены. Дифракционную решетку часто используют как спектральный прибор: проводят с ее помощью измерение длин световых волн и т.п.

**Корпускулярные свойства света** проявляются в явлениях взаимодействия света с веществом, в частности, при испускании и поглощении света атомами. В соответствии с законами квантовой физики атомы способны испускать и поглощать свет не в любых количествах, а лишь строго определенными порциями (квантами). Энергия кванта света определяется формулой Планка

$$E = h\nu. \quad (4.2.3)$$

Здесь  $\nu$  — частота света,  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с — постоянная Планка.

**Фотоэффект.** В развитии представлений о природе света важный шаг был сделан при изучении явления, открытого Герцем в 1887 г. и тщательно исследованного Столетовым в 1888 г. Это явление, состоящее в испускании электронов веществом под действием света, получило название фотоэффекта.

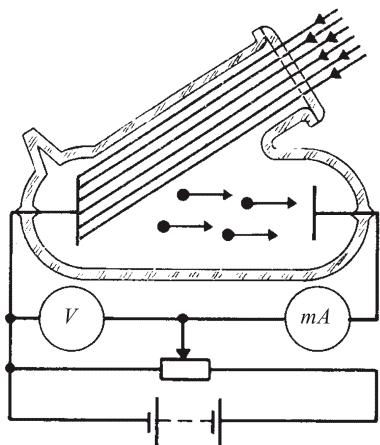


Рис. 4.2.4. Схема установки для наблюдения фотоэффекта

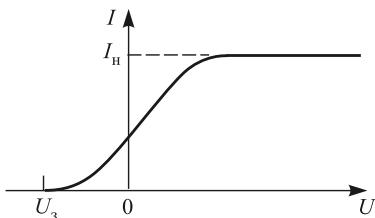


Рис. 4.2.5. Зависимость силы фототока  $I$  от напряжения  $U$

Схема установки для наблюдения фотоэффекта изображена на рис. 4.2.4. В стеклянный баллон, из которого выкачен воздух, помещены два электрода. На один из электродов свет поступает через кварцевое окно, прозрачное не только для видимого, но и для ультрафиолетового излучения. На электроды подается напряжение, которое можно менять с помощью потенциометра и измерять вольтметром. Ток в цепи измеряется миллиамперметром. Типичный график зависимости силы фототока  $I$  от напряжения между катодом и анодом  $U$  изображен на рис. 4.2.5.

Исследования, выполненные Столетовым и другими учеными в конце XIX – начале XX веков, позволили установить следующие законы фотоэффекта:

1. число электронов, испускаемых поверхностью металла, и сила фототока насыщения пропорциональны освещенности катода;
2. энергия вылетающих при фотоэффекте электронов зависит от частоты света и вещества катода, но не зависит от освещенности катода;
3. Для каждого вещества существует красная граница фотоэффекта – такая наименьшая частота (или наибольшая, «красная» длина волны) падающего света, при которой еще возможен фотоэффект.

**Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Фотон.** Объяснение законов фотоэффекта дал Эйнштейн в 1905 г. Развивая идеи Планка, он предположил, что свет существует в виде элементарных неделимых порций (фотонов) с энергией, определяемой формулой (4.2.3). Эйнштейн теоретически обосновал связь между энергией, получаемой фотоэлектроном при его освобождении светом, и частотой этого света.

Он допустил, что, вся энергия, полученная электроном, доставляется ему светом в виде определенной порции  $h\nu$  и поглощается им целиком. При этом электрон не заимствует энергию от атомов катода. Эйнштейн получил для фотоэффекта *уравнение*

$$h\nu = A + \frac{mV^2}{2}, \quad (4.2.4)$$

где  $mV^2/2$  — максимальная кинетическая энергия вылетающих электронов,  $A$  — работа выхода, т.е. энергия, необходимая для удаления электрона из металла. В 1915 году Милликен экспериментально исследовал зависимость максимальной энергии электронов, испускаемых металлом при фотоэффекте, от частоты падающего света и подтвердил уравнение Эйнштейна.

### **Давление света. Опыты Лебедева по измерению давления света.**

Важное свойство света состоит в том, что он оказывает давление на непрозрачные тела. Из электромагнитной теории Максвелла следует, что сила давления света определяется формулой

$$F = (1 + R) \cdot \frac{P}{c}, \quad (4.2.5)$$

где  $P$  — мощность света,  $c$  — скорость света,  $R$  — коэффициент отражения, т.е. отношение интенсивности отраженного света к интенсивности падающего. В квантовой оптике световое давление объясняется тем, что у каждого фотона имеется импульс  $p = h\nu/c$ , который при столкновении фотона с телом передается атомам или молекулам вещества. Численные оценки по формуле (4.2.5) показывают, что обычно сила светового давления чрезвычайно мала. Поэтому экспериментальное обнаружение сил светового давления представляет собой трудную задачу. Эту задачу решил Лебедев в 1898 году. В его опытах свет мощной дуговой лампы направлялся на легкий каркас с укрепленными на нем тонкими «крыльышками» — светлыми и темными дисками из платиновой фольги толщиной от 0,01 до 0,1 мм. Диски располагались симметрично относительно оси, вокруг которой каркас, подвешенный на тонкой стеклянной нити, мог поворачиваться. Система помещалась в сосуд, из которого был выкачен воздух. Свет, падая на светлые и затемненные диски, оказывал на них различное давление, вызывая закручивание нити. Лебедев измерял мощность падающего светового пучка и угловое отклонение каркаса. В результате опытов он установил, что

1. падающий пучок света производит давление как на поглощающие, так и на отражающие поверхности;
2. сила давления света прямо пропорциональна мощности падающего пучка;
3. наблюдаемая сила давления света количественно равна силе, определяемой формулой (4.2.5).

Таким образом, существование сил светового давления было доказано экспериментально.

**Постулаты Эйнштейна.** В начале XX века Эйнштейн сформулировал следующие два постулата, положенные им в основу теории относительности:

1. в любых инерциальных системах отсчета все физические явления при одних и тех же условиях протекают одинаково. Иными словами, никакими физическими опытами, проведенными внутри данной системы отсчета, нельзя установить находится ли данная система в состоянии покоя или равномерно прямолинейно движется (*принцип относительности*);
2. во всех инерциальных системах отсчета скорость света в вакууме одинакова и не зависит от скорости движения источника света (*принцип постоянства скорости света*).

**Связь между массой и энергией.** Одним из важнейших для ядерной физики и физики элементарных частиц следствий теории относительности является взаимосвязь массы тела (частицы) и его энергии, выражаемая формулой

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (4.2.6)$$

где  $m$  — масса тела,  $V$  — его скорость. Выражение

$$E_0 = mc^2. \quad (4.2.7)$$

представляет собой энергию покоя тела (частицы).

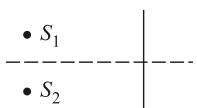
Между полной энергией  $E$ , энергией покоя  $E_0$  и импульсом  $p$  тела (частицы) существует релятивистская связь *энергии и импульса*:

$$E^2 = E_0^2 + p^2c^2. \quad (4.2.8)$$

## Примеры решения задач

**4.2.1.** Два когерентных источника  $S_1$  и  $S_2$  испускают монохроматический свет с длиной волны  $\lambda = 0,6$  мкм. Определить, на каком расстоянии  $h$  от точки, расположенной на экране на равном расстоянии от источников, будет находиться первый максимум освещенности. Экран удален от источников на расстояние  $L = 3$  м, расстояние между источниками  $l = 0,5$  мм.

**Решение:** Максимумы освещенности образуются в тех точках на экране, в которых световые волны, пришедшие от источников, оказываются в фазе. Условия максимумов интерференционной картины имеют



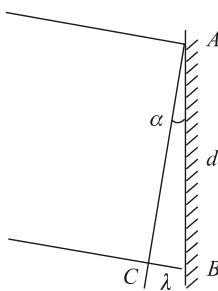
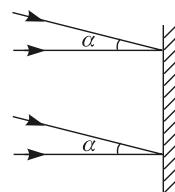
вид:  $d_2 - d_1 = m\lambda$ , где  $d_1$  и  $d_2$  — расстояния от источников до данной точки на экране (см. рисунок),  $m$  — целое число (порядок интерференционного максимума). Для волн, дающих первый максимум,  $m = 1$ . Из рисунка видно, что  $d_1^2 = L^2 + \left(h - \frac{l}{2}\right)^2$ ,  $d_2^2 = L^2 + \left(h + \frac{l}{2}\right)^2$ . Отсюда  $d_2^2 - d_1^2 = 2hl$ .

Преобразуем это равенство к виду:  $(d_2 - d_1)(d_2 + d_1) = 2hl$ . Учитывая, что  $l \ll L$ ,  $h \gg L$ , можно записать:  $d_1 + d_2 \approx 2L$ . Тогда  $d_2 - d_1 = hl/L$ . Объединяя это равенство с записанным выше условием максимума первого порядка, получаем ответ:

$$h \cong \lambda \frac{L}{l} = 3,6 \text{ мм.}$$

**4.2.2.** Два когерентных пучка света падают на экран: один по нормали, а другой — под углом  $\alpha = 0,01$  рад. Найти период  $d$  интерференционной картины, т.е. расстояние между соседними светлыми полосами на экране, если длина световой волны в обоих пучках равна  $\lambda = 0,5$  мкм.

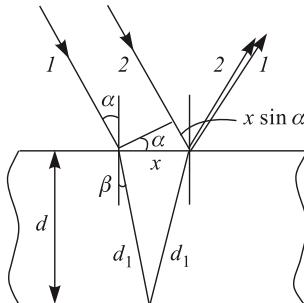
**Решение:** На рисунке изображены волновые фронты двух пучков: падающего на экран нормально ( $AB$ ) и падающего на экран наклонно ( $AC$ ). Пусть в некоторой точке  $A$  наблюдается один из максимумов интерференционной картины. Это означает, что фазы обеих световых волн в этой точке совпадают. Соседний максимум интенсивности находится в точке  $B$ , для которой также выполняется условие равенства фаз обеих волн. Это имеет место, если расстояние между точками  $B$  и  $C$  равно длине световой волны  $\lambda$ . Из треугольника  $ABC$  имеем:  $d \sin \alpha = \lambda$ . Учитывая, что  $\alpha \ll 1$ , ( $\sin \alpha \approx \alpha$ ), получаем ответ:  $d = \frac{\lambda}{\sin \alpha} \approx \frac{\lambda}{\alpha} = 50$  мкм.



**4.2.3.** На стеклянную пластинку нанесен тонкий слой прозрачного покрытия, показатель преломления которого  $n = 1,41$  меньше показателя преломления стекла. На пластинку под углом  $\alpha = 30^\circ$  падает

пучок белого света. Какова минимальная толщина покрытия  $d_{\min}$ , если в отраженном свете оно кажется зеленым? Длина волны зеленого света  $\lambda = 0,53$  мкм.

**Решение:** Ход двух интерферирующих лучей изображен на рисунке. Один из этих лучей (1) преломляется на верхней грани покрытия, отражается от его нижней грани и, преломившись второй раз на



верхней грани, выходит в воздух. Другой луч (2) падает на верхнюю грань покрытия в точке выхода первого луча и отражается от этой грани. Оптическая длина пути первого луча в диэлектрике равна

$$\delta_1 = 2d_1n = \frac{2dn}{\cos\beta} = \frac{2dn}{\sqrt{1 - \sin^2\beta}} = \frac{2dn^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}.$$

Разность хода первого и второго лучей до падения на покрытие (см. рисунок) составляет величину

$$\delta_2 = x \sin \alpha = 2dtg\beta \sin \alpha = \frac{2d \sin^2 \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

Разность хода между интерферирующими лучами равна

$$\delta = \frac{2dn^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} - \frac{2d \sin^2 \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}.$$

Амплитуды волн будут складываться, если  $\delta = \lambda$ . Отсюда получаем минимальную толщину покрытия:

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \cong 0,2 \text{ мкм.}$$

**4.2.4.** Катод фотоэлемента облучается светом с длиной волны  $\lambda = 3,5 \cdot 10^{-7}$  м. Какая энергия передана фотоэлектронам, если в цепи фотоэлемента протек заряд  $Q = 2 \cdot 10^{-12}$  Кл? Постоянная Планка  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с, величина заряда электрона  $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, скорость света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

**Решение:** Величина протекшего в цепи заряда равна  $Q = |e|N$ , где  $N$  — число фотоэлектронов. Отсюда  $N = Q/|e|$ . Энергия одного

светового кванта с длиной волны  $\lambda$  равна  $hc/\lambda$ . Следовательно, фотоэлектронам передана энергия  $Nhc/\lambda$ . Ответ:  $W = \frac{Qhc}{\lambda|e|} \cong 7 \cdot 10^{-12}$  Дж.

**4.2.5.** Какой максимальный заряд  $Q$  может быть накоплен на конденсаторе емкостью  $C_0 = 2 \cdot 10^{-11}$  Ф, одна из обкладок которого облучается светом с длиной волны  $\lambda = 5 \times 10^{-7}$  м? Работа выхода электрона составляет  $A = 3 \cdot 10^{-19}$  Дж, постоянная Планка  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с, величина заряда электрона  $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, скорость света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

**Решение:** Согласно уравнению Эйнштейна для фотоэффекта энергия светового кванта расходуется на преодоление работы выхода и на сообщение фотоэлектрону кинетической энергии:

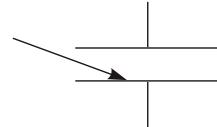
$$\frac{hc}{\lambda} = A + \frac{mV^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad \frac{mV^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - A.$$

Покидающие облучаемую обкладку конденсатора фотоэлектроны уносят отрицательный заряд, в результате чего эта обкладка заряжается положительно. Создаваемое ею электрическое поле наводит такой же по величине отрицательный заряд на другой обкладке. Между обкладками возникает разность потенциалов  $U = Q/C_0$ , где  $Q$  — величина заряда на каждой из обкладок. Электрическое поле конденсатора стремится вернуть электроны на положительно заряженную обкладку. Если потенциальная энергия электронов в окрестности отрицательно заряженной обкладки  $|e|U$  станет равной их начальной кинетической энергии, то все электроны, покидающие облучаемую обкладку, будут возвращаться на нее, и зарядка конденсатора прекратится. Таким образом, условие достижения максимального напряжения между обкладками имеет вид:

$$\frac{mV^2}{2} = |e|U, \quad \text{или} \quad \frac{hc}{\lambda} - A = |e|\frac{Q}{C_0}.$$

$$\text{Ответ: } Q = \frac{C_0}{|e|} \left( \frac{hc}{\lambda} - A \right) \cong 1,2 \cdot 10^{-11} \text{ Кл.}$$

**4.2.6.** На металлическую пластинку сквозь сетку, параллельную пластинке, падает свет с длиной волны  $\lambda = 0,4$  мкм. Фототок прекращается при задерживающей разности потенциалов между пластинкой и сеткой  $U = 0,95$  В. Определить красную границу фотоэффекта (максимальную длину волны  $\lambda_{\max}$ ). Постоянная Планка  $h = 6,62 \times 10^{-34}$  Дж·с, величина заряда электрона  $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, скорость света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.



**Решение:** Фототок прекращается, когда потенциальная энергия электронов в задерживающем поле становится равной кинетической энергии электронов, покидающих пластинку, т.е.  $|e|U = \frac{mV^2}{2}$ . Используя уравнение Эйнштейна, получаем работу выхода для материала пластиинки:

$$A = \frac{hc}{\lambda} - |e|U.$$

Длина волны  $\lambda_{\max}$ , соответствующая красной границе фотоэффекта, определяется из условия, что энергия кванта равна работе выхода:

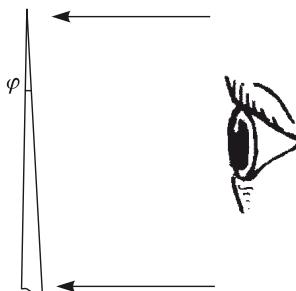
$$\frac{hc}{\lambda_{\max}} = A.$$

Объединяя записанные соотношения, получаем ответ:

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{hc/\lambda - |e|U} \cong 5,7 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

## Задание для самостоятельной работы

**4.2.7.** На тонкий стеклянный клин падает нормально широкий пучок монохроматического света с длиной волны  $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$ . При этом в отраженном от клина свете наблюдаются интерференционные полосы, расстояние между которыми  $d = 4 \text{ мм}$ . Найти угол клина  $\varphi$ , считая его малым, т.е. полагая  $\sin \varphi \cong \varphi$ ,  $\cos \varphi \cong 1$ . Показатель преломления стекла  $n = 1,5$ .



**4.2.8.** На стеклянную пластинку с показателем преломления  $n_1 = 1,5$  нанесена прозрачная пленка с показателем преломления  $n_2 = 1,4$ . На пленку нормально к ее поверхности падает монохроматический свет с длиной волны  $\lambda = 600 \text{ нм}$ . Какова минимальная толщина пленки  $d_{\min}$ , если в результате интерференции отраженные лучи максимально ослаблены?

**4.2.9.** Катод фотоэлемента облучается светом с длиной волны  $\lambda = 3,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ . Какова может быть максимальная величина тока фотоэлемента  $I$ , если поглощаемая световая мощность составляет  $P = 2 \text{ мВт}$ ? Постоянная Планка  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$ , величина заряда электрона  $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ , скорость света  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м}/\text{с}$ .

**4.2.10.** Кристалл рубина облучается вспышкой света длительностью  $\tau = 10^{-3} \text{ с}$  и мощностью  $P = 200 \text{ кВт}$ . Длина волны света  $\lambda = 0,7 \text{ мкм}$ , кристалл поглощает  $\eta = 10\%$  энергии излучения. Вычислить количество квантов света  $N$ , поглощенных кристаллом. Скорость света  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м}/\text{с}$ , постоянная Планка  $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$ .

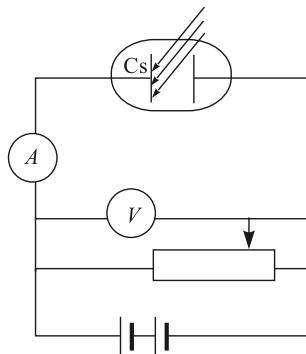
**4.2.11.** Определить длину волны фотона  $\lambda$ , импульс которого равен импульсу электрона, ускорявшегося из состояния покоя в электрическом поле между точками с разностью потенциалов  $U = 4,9 \text{ В}$ . Постоянная Планка  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$ , масса электрона  $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ кг}$ , величина его заряда  $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ .

**4.2.12.** Плоский алюминиевый электрод освещается ультрафиолетовым светом с длиной волны  $\lambda = 83 \text{ нм}$ . На какое максимальное расстояние  $l$  от поверхности электрода может удалиться фотоэлек-

трон, если вне электрода имеется задерживающее электрическое поле напряженностью  $E = 7,5 \text{ В/см}$ ? Красная граница фотоэффекта для алюминия соответствует длине волны  $\lambda_0 = 332 \text{ нм}$ . Постоянная Планка  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$ , величина заряда электрона  $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ , скорость света  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

**4.2.13.** Уединенный изолированный металлический шарик радиусом  $r = 0,5 \text{ см}$ , находящийся в вакууме, освещают ультрафиолетовым излучением с длиной волны  $\lambda_1 = 250 \text{ нм}$ , которая меньше, чем длина волны, соответствующая красной границе фотоэффекта для данного металла. Каково максимальное количество электронов  $N_{max}$ , которые могут покинуть шарик после того, как его дополнительно осветят излучением с длиной волны  $\lambda_2 = 200 \text{ нм}$ ? Постоянная Планка  $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$ , электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ , скорость света  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ , величина заряда электрона  $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ .

**4.2.14.** Измерения зависимости напряжения отсечки фототока (т.е. напряжения, при котором фототок прекращается) от длины волны света, падающего на цезиевую пластину Cs, производятся по схеме, изображенной на рисунке. При освещении светом с длиной волны  $\lambda_1 = 0,4 \text{ мкм}$  напряжение отсечки составило  $U_1 = 1,19 \text{ В}$ , при  $\lambda_2 = 0,5 \text{ мкм} - U_2 = 0,57 \text{ В}$ . Определить по результатам этого опыта длину волны  $\lambda_{max}$ , соответствующую красной границе фотоэффекта для цезия.



## Г л а в а 5

# АТОМ И АТОМНОЕ ЯДРО

### **Вопросы программы**

1. *Опыты Резерфорда по рассеянию  $\alpha$ -частиц. Планетарная модель атома. Квантовые постулаты Бора. Испускание и поглощение энергии атомом. Непрерывный и линейчатый спектры. Спектральный анализ.*
2. *Экспериментальные методы регистрации заряженных частиц: камера Вильсона, счетчик Гейгера, пузырьковая камера, фотоэмиссионный метод.*
3. *Состав ядра атома. Изотопы. Энергия связи атомных ядер. Понятие о ядерных реакциях. Радиоактивность. Виды радиоактивных излучений и их свойства. Цепные ядерные реакции. Термоядерная реакция.*
4. *Биологическое действие радиоактивных излучений. Защита от радиации.*

### **Определения, понятия и законы**

**Опыты Резерфорда по рассеянию  $\alpha$ -частиц. Планетарная модель атома.** К началу XX века было убедительно показано, что электрон является одной из составных частиц любого вещества. Из классической электромагнитной теории следовало, что размеры электрона не превышают  $10^{-15}$  м (по современным данным — не более  $10^{-22}$  м). Кинетическая теория 19-го столетия показала, что размеры атомов имеют порядок  $10^{-10} \dots 10^{-9}$  м. Учитывая это, Дж. Дж. Томсон в 1903 году предложил модель, согласно которой атом содержит электроны, которые вкраплены в положительно заряженную среду, заполняющую весь объем атома, масса которой составляет большую часть его массы, а ее заряд нейтрализует суммарный заряд электронов.

Однако уже в 1911 году Эрнест Резерфорд опытным путем доказал, что эта модель несостоятельна. Им были проведены эксперименты по рассеянию  $\alpha$ -лучей. ( $\alpha$ -лучи представляют собой поток  $\alpha$ -частиц, т.е. дважды ионизованных атомов гелия, имеющих положительный заряд, равный  $+2e$ , и возникающих в результате радиоактивного распада (см. ниже)). Э. Резерфорд с помощью свинцового коллиматора выделял узкий пучок  $\alpha$ -лучей и пропускал их через очень тонкую золотую

фольгу. Регистрировались  $\alpha$ -частицы по вспышкам света на детекторе из сернистого цинка. Было установлено, что почти все  $\alpha$ -частицы проходили сквозь фольгу, сохраняя прежнее направление движения или отклоняясь от него на очень малые углы. Однако некоторые  $\alpha$ -частицы отклонялись на углы, превышающие  $90^\circ$ , т. е. они фактически двигались в обратном направлении. Если бы была справедлива модель атома Томсона, то такие события были бы невозможны в принципе:  $\alpha$ -частицы должны были бы свободно проходить сквозь атомы золота, и только некоторые из них могли слегка отклониться в кулоновском поле электронов. Результатом опытов Резерфорда явилась *ядерная модель атома*: в центре атома находится ядро, имеющее очень малый объем, в котором сосредоточен весь положительный заряд атома; остальную часть атома занимает облако электронов. Линейные размеры ядра составляют  $\sim 10^{-14} \dots 10^{-15}$  м. Практически вся масса атома сосредоточена в ядре.

В этой модели опыты Резерфорда получили простое объяснение. Проходя сквозь электронную оболочку атома  $\alpha$ -частицы не должны испытывать заметного отклонения, поскольку масса электрона намного меньше массы  $\alpha$ -частицы, а отрицательный заряд всех электронов распределен по всему объему атома. Однако те немногочисленные частицы, которые пролетают вблизи ядра, испытывают резкие отклонения. В этих опытах была также подтверждена справедливость закона Кулона для очень малых расстояний между зарядами.

Электроны атома, чтобы не упасть на ядро под действием кулоновского притяжения, должны двигаться вокруг ядра по орбитам, подобно планетам, поскольку кулоновские и гравитационные силы одинаково зависят от расстояния. Поэтому модель атома Резерфорда называют *планетарной*. Однако вращающиеся вокруг ядра электроны, согласно классической электродинамике, должны испускать электромагнитные волны, теряя при этом свою энергию и постепенно приближаясь к ядру, т.е. атом не может быть устойчивым. Спектр излучаемых частот при этом должен быть непрерывным.

Еще в середине XIX века было установлено, что свечение различных газов (в пламени и в электрическом разряде) содержит участки спектра с четко выраженным дискретными линиями. Для частот  $\nu_{mn}$  линейчатого спектра водорода была получена формула Бальмера-Ридберга:

$$\nu_{mn} = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (5.1)$$

где  $R = 3,293 \cdot 10^{15}$  с<sup>-1</sup> — постоянная Ридберга,  $m$  и  $n$  — целые числа, причем  $m = n + 1, n + 2$  и т. д.

**Квантовые постулаты Бора.** Для объяснения наблюдаемых свойств атомов Нильс Бор в 1913 г. выдвинул два положения, называемые *постулатами Бора*:

- В атоме существуют дискретные стационарные состояния, каждому из которых соответствует определенная энергия  $E_n$ . При движении вокруг ядра электроны атома, находящегося в стационарном состоянии, не излучают электромагнитных волн.
- При переходе атома из одного стационарного состояния в другое испускается или поглощается один фотон. Энергия фотона равна разности энергий в двух его стационарных состояниях:  $h\nu_{mn} = E_m - E_n$ .

**Испускание и поглощение энергии атомом.** Если  $E_m > E_n$ , то происходит излучение фотона, если же  $E_m < E_n$ , то — поглощение фотона. Частота фотона  $\nu_{mn}$ , который испускается (поглощается) атомом, равна  $\nu_{mn} = (E_m - E_n)/h$ . Атом, находящийся в состоянии с наименьшей энергией, не может испустить фотон. Такое состояние атома называется основным, остальные состояния (с большей энергией) называются возбужденными.

Для определения уровней энергии атома водорода Н. Бор предложил гипотезу о том, что в планетарной модели стационарными являются лишь те состояния, при которых момент импульса электрона, движущегося по круговой орбите, принимает дискретные значения:

$$mv r = \frac{nh}{2\pi}, \quad (5.2)$$

где  $v$  — скорость электрона,  $r$  — радиус орбиты,  $n$  — натуральное число. Эта формула называется правилом квантования Бора для круговых орбит. Найденное с ее помощью выражение для частоты излучения полностью совпадает с (5.2).

Развитая впоследствии квантовая механика естественным образом объясняет постулаты Бора и полностью описывает движение микрочастиц.

**Непрерывный и линейчатый спектры. Спектральный анализ.** Спектр излучения и поглощения вещества в газообразном состоянии всегда содержит участок, состоящий из узких дискретных линий, который называется *линейчатым спектром*, и участок, где распределение частот непрерывное (*непрерывный спектр*). Линейчатый спектр у каждого химического элемента и у каждого сорта молекул индивидуален и отражает структуру уровней энергии именно данного вещества. Это обстоятельство используется для определения качественного и количественного состава вещества, т. е. для так называемого *спектрального анализа*. Для получения спектров излучения вещество возбуждают с помощью искрового, дугового или радиочастотного разряда, либо облучением светом от дополнительных источников: газоразрядных ламп, лазеров и т. д. Спектры поглощения получают, пропуская белый свет через исследуемое вещество. В этом

случае на сплошном спектре появляются темные линии, обусловленные поглощением света в данном участке спектра.

Спектральный анализ отличается быстротой получения результатов и высокой чувствительностью. Использование лазеров позволяет регистрировать даже единичные атомы или молекулы данного сорта.

**Экспериментальные методы регистрации заряженных частиц.** Для регистрации радиоактивных излучений используются приборы, основанные на ионизирующем или фотохимическом действии этих излучений.

**Камера Вильсона** — прибор для наблюдения следов (треков) заряженных частиц. Действие основано на конденсации пересыщенного пара на ионах, образующихся вдоль траектории заряженной частицы. Пересыщенный пар получается быстрым сжатием насыщенного пара воды или спирта, находящегося в стеклянном цилиндре. Частицы могут либо испускаться источником, помещенным внутри камеры, либо попадать в нее извне. Треки фотографируются несколькими фотоаппаратами для получения стереоскопического изображения. Природу и свойства частиц можно определить по длине ее пробега и импульсу, измеряемому по искривлению траекторий частиц в магнитном поле, в которое помещается камера Вильсона.

**Пузырковая камера** — прибор для регистрации следов (треков) заряженных частиц высоких энергий. Действие основано на вскипании перегретой жидкости вблизи траектории частицы. Очень чистую жидкость можно нагреть выше точки кипения, но такая жидкость нестабильна. Прохождение заряженной частицы через перегретую жидкость приводит к образованию вдоль следа частицы «зародышевых» центров кипения, которые возникают вследствие ионизации атомов или молекул, входящих в состав жидкости. За время порядка миллисекунды образующиеся пузырьки достигают размеров порядка 50 – 300 мкм и могут быть сфотографированы.

**Счетчик Гейгера** — газоразрядный прибор, срабатывающий при прохождении через его рабочий объем заряженных частиц. Счетчик состоит из стеклянной трубы, покрытой внутри металлическим слоем (катод), и тонкой металлической нити, идущей вдоль оси трубы (анод). Трубка заполняется газом, например, аргоном. К электродам прикладывается напряжение в несколько сотен вольт. Заряженная частица, пролетая через газ, вырывается из атомов электроны. Электрическое поле между анодом и катодом ускоряет свободные электроны до энергий, при которых они способны ионизировать атомы. Возникает лавина ионов и электронов, и ток между электродами возрастает, что и ре-

гистрируется электронной схемой. Величина сигнала (импульса тока) не зависит от энергии частиц, поэтому прибор работает как счетчик заряженных частиц.

**Фотоэмульсионный метод** основан на применении толстослойных фоточувствительных покрытий. Фотоэмульсия содержит большое количество микроскопических кристалликов бромида серебра. Быстрая заряженная частица, проходя через кристаллики, отрывает электроны от отдельных атомов брома. Цепочка таких кристалликов образует скрытое изображение. При проявлении восстанавливается металлическое серебро и трек частицы становится видимым. По длине и толщине трека можно оценить энергию и массу частицы.

**Состав ядра атома. Изотопы.** Ядро атома любого химического элемента состоит из  $Z$  положительно заряженных протонов и  $N$  не имеющих электрического заряда нейтронов. Заряд протона по абсолютной величине равен заряду электрона. Протон и нейtron являются двумя зарядовыми состояниями ядерной частицы, которая называется нуклоном. Количество протонов в ядре  $Z$  совпадает с атомным номером соответствующего химического элемента в периодической системе Менделеева. Заряд ядра равен  $Ze$ .

Массовым числом ядра  $A$  называется общее число нуклонов в ядре  $A = Z + N$ . Для обозначения ядра данного химического элемента  $X$  используется символ  ${}_Z^AX$ . Ядра с одним и тем же зарядом  $Ze$ , но с разными  $A$ , называются изотопами. Изотопы ядер данного химического элемента отличаются числом нейтронов  $N$ . Примеры: изотопы водорода  ${}_1^1H$ ,  ${}_1^2H$  (или  ${}_1^2D$  — дейтерий),  ${}_1^3H$  (или  ${}_1^3T$  — тритий); изотопы урана  ${}_{92}^{235}U$ ,  ${}_{92}^{238}U$ .

Масса атома практически совпадает с массой его ядра, поскольку масса электрона  $m_e$  составляет всего  $1/1836$  от массы протона  $m_p$  и  $1/1840$  от массы нейтрона  $m_n$  (нейтрон несколько тяжелее протона). В атомной и ядерной физике широко используется атомная единица массы — а. е. м., которая равна  $1/12$  массы ядра углерода  ${}_6^{12}C$ , что составляет  $1,6605655 \cdot 10^{-27}$  кг.

Нуклоны, т. е. протоны и нейтроны, в ядре связаны между собой ядерными силами, которые намного превышают силу кулоновского отталкивания между протонами (отсюда название — сильные взаимодействия). Ядерные силы действуют только на расстояниях порядка  $10^{-15}$  м.

В атомной и ядерной физике для измерения энергии широко используется внесистемная единица электрон-вольт (эВ);  $1 \text{ эВ} = 1,60201 \times 10^{-19}$  Дж. В ядерной физике энергия часто измеряется также в мегаэлектрон-вольтах (МэВ);  $1 \text{ МэВ} = 10^6 \text{ эВ}$ .

**Энергия связи атомного ядра**  $\Delta E_{\text{св}}$  по абсолютной величине равна работе, которую надо совершить для расщепления ядра на составляющие его нуклоны без сообщения им кинетической энергии. Из закона сохранения энергии следует, что при образовании ядра из свободных нуклонов должна выделяться энергия, равная  $\Delta E_{\text{св}}$ . Удельной энергией связи ядра  $\Delta \varepsilon_{\text{св}}$  называется величина  $\Delta E_{\text{св}}/A$ , равная средней энергии связи, приходящейся на один нуклон.

Мерой энергии связи атомного ядра является *дефект массы*. Дефектом массы  $\Delta m$  называется разность между суммарной массой всех нуклонов ядра в свободном состоянии и массой ядра  $M_{\text{я}}$ :

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - M_{\text{я}}. \quad (5.3)$$

Согласно теории относительности, энергия связи данного ядра и его дефект массы связаны соотношением:  $\Delta E_{\text{св}} = \Delta mc^2$ .

**Понятие о ядерных реакциях.** Ядерными реакциями называются превращения атомных ядер, вызванные их взаимодействием с различными частицами или друг с другом. В большинстве случаев в ядерных реакциях участвуют два ядра и две частицы. Символическая запись ядерной реакции:  $A + a \rightarrow B + b$ , где  $A$  и  $B$  — исходное и конечное ядра,  $a$  и  $b$  — исходная и конечная частицы в реакции. Исторически первой была наблюдена ядерная реакция превращения азота под действием  $\alpha$ -частиц в кислород:  ${}_7^{14}\text{N} + {}_2^4\text{He} \rightarrow {}_8^{17}\text{O} + {}_1^1\text{p}$ . При всех ядерных реакциях соблюдаются законы сохранения электрического заряда и числа нуклонов.

**Радиоактивность. Виды радиоактивных излучений и их свойства.** Радиоактивность — способность некоторых атомных ядер самопривольно превращаться в другие ядра с испусканием частиц. Естественная радиоактивность, как правило, наблюдается у тяжелых ядер. Радиоактивное превращение сопровождается испусканием  $\alpha$ -частиц,  $\beta$ -частиц, а также очень коротковолнового электромагнитного излучения ( $\gamma$ -излучения). Состав  $\alpha$ -,  $\beta$ - и  $\gamma$ -излучений установлен по их отклонению в магнитном поле. Известно, что  $\alpha$ -лучи представляют собой поток ядер гелия,  $\beta$ -лучи — поток быстрых электронов. Превращения атомных ядер, которые сопровождаются испусканием  $\alpha$ - и  $\beta$ -частиц, называются соответственно  $\alpha$ - и  $\beta$ -распадом.

Большинство встречающихся в природе ядер устойчиво. Однако при значениях массовых чисел вблизи  $A = 210$  ядра перестают быть устойчивыми. Это в первую очередь объясняется близкодействующим характером ядерных сил: силы ядерного притяжения действуют только между данным нуклоном и его непосредственными соседями. Вместе с тем, так как кулоновские силы дальнодействующие, между данным протоном и всеми остальными протонами в ядре действует кулоновское отталкивание. Для ядер с достаточно большими атомными номерами

кулоновское отталкивание может превысить ядерное притяжение. Действительно, не существует устойчивых ядер с  $Z > 83$ .

**Цепные ядерные реакции.** Ядра урана и ряда трансурановых элементов способны к реакциям *деления ядра*, при которых ядра, возбужденные захватом нейтрона, распадаются на две части, называемые осколками. При этом возможно высвобождение некоторого количества нейтронов. Деление тяжелого ядра сопровождается выделением огромной энергии. Например, при делении ядер, содержащихся в 1 г урана  $^{235}_{92}\text{U}$ , выделяется энергия порядка  $8 \cdot 10^{10}$  Дж. (Удельная теплота сгорания нефти, равная  $4,3 \cdot 10^7$  Дж/кг, примерно в два миллиона раз меньше!) В каждом акте деления, помимо осколков, возникают несколько  $\gamma$ -квантов и в среднем 2,5 нейтрона. Если эти нейтроны вызывают другие акты деления, то возникает процесс самоподдерживающийся процесс *цепной ядерной реакции*. Цепные ядерные реакции используются в ядерных реакторах для получения энергии, а также в ядерном оружии.

**Термоядерная реакция.** Выделение ядерной энергии возможно также в реакциях синтеза (слияния) легких ядер. Для осуществления такой реакции необходимо преодолеть кулоновские силы отталкивания между ядрами, что возможно при достаточно больших скоростях сталкивающихся частиц. Так, синтез гелия из легкого изотопа водорода происходит при температуре около  $10^8$  К, а для синтеза гелия издейтерия и трития по схеме  $^1_1\text{H} + ^3_1\text{H} \rightarrow ^4_2\text{He} + ^1_0\text{n}$  требуются температуры порядка  $5 \cdot 10^7$  К. Поэтому такие реакции называются *термоядерными*. При синтезе 1 г гелия издейтерия и трития выделяется энергия  $4,2 \times 10^{11}$  Дж. Управляемые термоядерные реакции представляют большой интерес для энергетики будущего.

**Биологическое действие радиоактивных излучений. Защита от радиации.** Излучения радиоактивных веществ оказывают сильное воздействие на все живые организмы. Даже слабые излучения способны нанести существенные повреждения живым клеткам и вызвать опасные заболевания (лучевая болезнь). Механизм поражающего действия излучений на биологические объекты заключается в основном в ионизации атомов и молекул, что приводит к изменению их химической активности. В результате облучения в тканях образуются свободные радикалы, подавляющие действие ферментов, происходит разрыв хромосом, увеличивается число мутаций. Наиболее чувствительны к излучениям ядра клеток, особенно тех, которые быстро делятся. Поэтому у человека излучения в первую очередь поражают костный мозг, из-за чего нарушается процесс образования крови.

Степень облучения связана с энергией поглощенного излучения. В СИ единицей поглощенной дозы является грэй (Гр). Доза в 1 Гр означает, что облученному веществу массой 1 кг передана энергия ионизирующего излучения 1 Дж.

*Методы защиты от облучения:* удаление от источников излучения; ограничение времени пребывания на загрязненной местности или вблизи радиоактивных источников; ограждение радиоактивных источников специальными экранами. К защитным мерам относится также дозиметрический контроль окружающей среды и продуктов питания.

## Глава 6

# КОМБИНИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ

### Примеры решения задач

**6.15.** Спираль, сопротивление которой  $r = 9$  Ом, помещена в замкнутый сосуд. Сосуд содержит идеальный одноатомный газ, который занимает объем  $V = 6$  л. В течение времени  $\tau = 1$  мин по спирали пропускали постоянный ток, после чего давление возросло на величину  $\Delta p = 6 \cdot 10^4$  Па. Найти силу тока  $I$ .

**Решение:** По закону Джоуля–Ленца количество теплоты, выделяющееся в спирали за время  $\tau$ , равно  $Q = rI^2\tau$ . Эта теплота идет на нагрев газа, происходящий при постоянном объеме:  $Q = \frac{3}{2}\nu R\Delta T$ , где  $\nu$  — количество газа,  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $\Delta T$  — изменение температуры газа. Из уравнения изохорного процесса следует, что  $\Delta p \cdot V = \nu R\Delta T$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$I = \sqrt{\frac{3V\Delta p}{2r\tau}} = 1 \text{ А.}$$

**6.16.** Лазер излучает световые импульсы с энергией  $W = 0,1$  Дж. Частота повторения импульсов  $f = 10$  Гц. Коэффициент полезного действия лазера, определяемый как отношение излучаемой энергии к потребляемой, составляет  $\eta = 0,01$ . Какой объем воды  $V$  нужно пропустить за время  $\tau = 1$  час через охлаждающую систему лазера, чтобы вода нагрелась не более, чем на  $\Delta t = 10$  °С? Удельная теплоемкость воды  $c = 4,2$  Дж/(г·К), плотность воды  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>.

**Решение:** Мощность излучения лазера равна произведению энергии одного импульса на частоту повторения:  $P_{изл} = Wf$ . Потребляемая лазером мощность по определению КПД есть  $P_{л} = \frac{P_{изл}}{\eta}$ . Следовательно, мощность, которая должна быть отведена от лазера с помощью системы охлаждения, составляет величину  $P_{охл} = P_{л} - P_{изл} = \frac{P_{изл}(1-\eta)}{\eta}$ . Количества тепла, отводимое системой охлаждения за время  $\tau$ ,  $Q_{охл} = P_{охл}\tau$ , может быть выражено с использованием уравнения теплового баланса как  $Q_{охл} = \rho V c \Delta t$ . Объединяя записанные соотношения, получаем ответ:  $V = \frac{Wf\tau}{\rho c \Delta t} \left( \frac{1-\eta}{\eta} \right) \cong 8,49 \text{ л.}$

**6.17.** Тепловая машина с максимально возможным КПД имеет в качестве нагревателя резервуар с кипящей водой при  $t_1 = 100^\circ\text{C}$ , а в качестве холодильника — сосуд со льдом при  $t_2 = 0^\circ\text{C}$ . Какая масса льда  $m$  растает при совершении машиной работы  $A = 10 \text{ Дж}$ ? Удельная теплота плавления льда  $\lambda = 334 \text{ Дж/г}$ .

**Решение:** Максимально возможный КПД достигается, если тепловая машина работает по циклу Карно. Он равен  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ , где  $T_1 = t_1 + 273^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = t_2 + 273^\circ\text{C}$  — абсолютные температуры нагревателя и холодильника. С другой стороны, по определению КПД  $\eta = \frac{A}{Q_{\text{пол}}}$ , где  $A = Q_{\text{пол}} - |Q_{\text{отд}}|$  — работа газа за цикл,  $Q_{\text{пол}}$  — количество теплоты, полученное за цикл от нагревателя,  $Q_{\text{отд}}$  — количество теплоты, отданное за цикл холодильнику. Из равенства

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{Q_{\text{пол}} - |Q_{\text{отд}}|}{Q_{\text{пол}}}$$

находим, что  $|Q_{\text{отд}}| = Q_{\text{пол}} \cdot \frac{T_2}{T_1} = \frac{A}{\eta} \cdot \frac{T_2}{T_1}$ . Отданная холодильнику теплота расходуется на таяние льда при температуре плавления. Следовательно,  $|Q_{\text{отд}}| = m\lambda$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

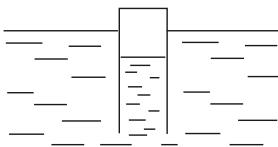
$$m = \frac{(t_2 + 273^\circ\text{C})}{\lambda(t_1 - t_2)} A \cong 0,11 \text{ г.}$$

**6.18.** Объем тонкостенного цилиндрического сосуда высотой  $H = 40 \text{ см}$  равен  $V = 400 \text{ см}^3$ , его вес  $P = 3,3 \text{ Н}$ . При температуре

$t = 47^\circ\text{C}$  и атмосферном давлении  $p_0 = 100 \text{ кПа}$  сосуд переворачивают вверх дном и погружают в жидкость плотностью  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ . При какой температуре  $t_1$  сосуд утонет? Атмосферное давление считать неизменным, ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**Решение:** При понижении температуры объем воздуха в сосуде уменьшается и он погружается в воду. Сосуд будет оставаться на плаву до тех пор, пока его дно не окажется на одном уровне с поверхностью воды. Силы, действующие на сосуд, при этом еще будут уравновешены. При дальнейшем понижении температуры равновесие сил станет невозможным, и сосуд начнет тонуть. Это произойдет из-за того, что объем воздуха в сосуде и, следовательно, архимедова сила еще больше уменьшатся, а сила, действующая вниз на дно сосуда, увеличится, поскольку к силе давления атмосферного воздуха добавится сила давления воды на дно.

Исходя из этих рассуждений, рассмотрим случай, когда сосуд еще плавает, но его дно уже находится вровень с поверхностью воды. Обозначим через  $p_x$  давление воздуха в сосуде, а через  $V_x$  — объем



воздуха. Учитывая, что площадь сечения сосуда  $S = \frac{V}{H}$ , запишем условие равновесия сосуда под действием приложенных к нему сил:

$$(p_x - p_0) \frac{V}{H} = P.$$

Из закона Архимеда следует, что

$$P = \rho V_x g.$$

Из этих равенств легко найти  $p_x$  и  $V_x$ :  $p_x = p_0 + \frac{PH}{V}$ ,  $V_x = \frac{P}{\rho g}$ . Уравнения начального и конечного состояния воздуха в сосуде имеют вид:

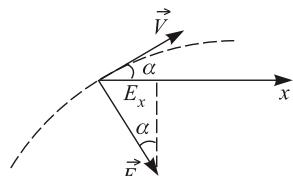
$$p_0 V = \nu R T, \quad p_x V_x = \nu R T_1.$$

Отсюда  $T_1 = \frac{p_x V_x}{p_0 V} T$ . Подставляя сюда найденные  $p_x$  и  $V_x$ , получаем ответ:  $t_1 < (t+273 \text{ } ^\circ\text{C}) \cdot \frac{P}{V \rho g} \cdot \left(1 + \frac{PH}{p_0 V}\right) - 273 \text{ } ^\circ\text{C} = 16,8 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

**6.19.** Заряженная частица движется в однородном электрическом поле напряженностью  $E = 30 \text{ В/м}$ . Известно, что в момент, когда кинетическая энергия частицы достигает минимума, ее скорость направлена под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту. Определить разность потенциалов  $U$  между точками  $A$  и  $B$  поля, лежащими на одной горизонтали на расстоянии  $l = 30 \text{ см}$  друг от друга. Действием силы тяжести пренебречь.

**Решение:** Из курса механики известно, что траектория тела, движущегося под действием постоянной по величине и по направлению силы, представляет собой в общем случае параболу. Такое движение полностью аналогично движению тела, брошенного под углом к горизонту вблизи поверхности Земли. Пользуясь этой аналогией, легко установить, что кинетическая энергия тела принимает минимальное значение в точке, в которой скорость тела перпендикулярна действующей на него силе, в нашем случае в точке, где  $\vec{V} \perp \vec{E}$  (см. рисунок). Тем самым направление напряженности электрического поля в пространстве определено. Проекция напряженности поля на горизонтальную ось  $OX$  равна  $E_x = E \sin \alpha$ . Поскольку искомая разность потенциалов определяется как  $U = E_x l$ , ответ имеет вид:

$$U = El \sin \alpha = 4,5 \text{ В.}$$



**6.20.** Автомобиль, движущийся по горизонтальной дороге, попадает в полосу дождя, капли которого падают на землю вертикально с постоянной скоростью. Известно, что при скорости автомобиля  $V_1 = 36 \text{ км/час}$  в его наклонное лобовое стекло попадает  $n_1 = 200$  дождевых капель в секунду, а при скорости  $V_2 = 72 \text{ км/час}$  это число

возрастает до  $n_2 = 300$  капель в секунду. Сколько капель  $n_0$  будет попадать в лобовое стекло за 1 секунду, если автомобиль остановится?

**Решение:** Используя рассуждения, проводимые при выводе основного уравнения молекулярно-кинетической теории идеального газа, находим, что число капель, попадающих за 1 секунду на ветровое стекло автомобиля,  $n = NSV_{\text{отн}\perp}$ , где  $N$  — число капель в единице объема,  $S$  — площадь стекла,  $V_{\text{отн}\perp}$  — проекция скорости капель относительно автомобиля на нормаль к стеклу. По закону сложения скоростей  $\vec{V}_{\text{отн}} = \vec{U} - \vec{V}$ , где  $\vec{U}$  и  $\vec{V}$  — скорости капель и автомобиля относительно земли (см. рисунок). Обозначив через  $\alpha$  угол наклона ветрового стекла и используя известное из геометрии утверждение о том, что проекция суммы векторов на какое-либо направление равна сумме проекций векторов на это направление, находим, что  $V_{\text{отн}\perp} = U \cos \alpha + V \sin \alpha$ . Следовательно, справедливы следующие равенства:

$$n_1 = NS(U \cos \alpha + V_1 \sin \alpha),$$

$$n_2 = NS(U \cos \alpha + V_2 \sin \alpha),$$

$$n_0 = NSU \cos \alpha.$$

Умножая первое соотношение на  $V_2$ , а второе на  $V_1$  и вычитая одно из другого, получаем:

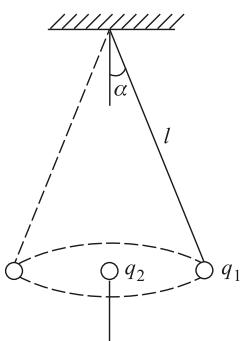
$$NSU \cos \alpha = \frac{n_1 V_2 - n_2 V_1}{V_2 - V_1}.$$

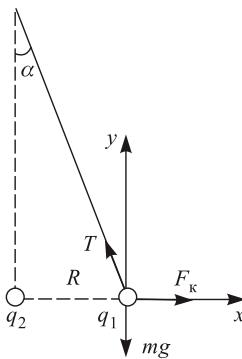
Ответ:  $n_0 = \frac{n_1 V_2 - n_2 V_1}{V_2 - V_1} = 100$  капель/с.

**6.21.** Шарик массой  $m = 7,2$  г, несущий заряд  $q_1 = 1,73 \cdot 10^{-7}$  Кл, подвешен на невесомой, нерастяжимой и непроводящей нити длиной

$l = 0,1$  м и вращается с постоянной угловой скоростью, причем угол между нитью и вертикалью  $\alpha = 60^\circ$ . В центре окружности, по которой движется шарик, расположен точечный заряд  $q_2 = 3 \cdot 10^{-7}$  Кл. Найти угловую скорость вращения шарика  $\omega$ . Электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$  Ф/м. Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, размером шарика пренебречь.

**Решение:** Для решения задачи будем использовать неподвижную систему координат, плоскость  $XOY$  которой в некоторый момент времени совпадает с плоскостью, проходящей через ось вращения системы и нить с шариком (см. рисунок). Поскольку шарик совершает равномерное движение по





окружности, его ускорение направлено к ее центру и по величине равно  $\omega^2 R = \omega^2 l \sin \alpha$ . Движение шарика происходит под действием трех сил: силы тяжести  $mg$ , силы натяжения нити  $T$  и силы электрического взаимодействия между зарядами (кулоновской силы)  $F_k$ . В проекциях на координатные оси выбранной системы имеем:

$$-m\omega^2 l \sin \alpha = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0(l \sin \alpha)^2} - T \sin \alpha, \quad 0 = T \cos \alpha - mg.$$

Исключая отсюда натяжение нити  $T$ , после несложных преобразований получаем ответ:  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 m (l \sin \alpha)^3}} \approx 10$  рад/с.

**6.22.** В лифте, движущемся с ускорением  $a = 5$  м/с<sup>2</sup>, направленным вверх, находится цилиндрический сосуд, закрытый поршнем массой  $M = 20$  кг и площадью  $S = 100$  см<sup>2</sup>. Под поршнем находится идеальный газ. Поршень расположен на расстоянии  $h = 22$  см от дна сосуда. Определить, на какую величину  $\Delta h$  переместится поршень, если лифт будет двигаться с тем же по модулю ускорением, направленным вниз. Температура газа не изменяется. Атмосферное давление  $p_0 = 10^5$  Па, ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Трением поршня о стенки сосуда пренебречь.

**Решение:** Поршень, покоящийся в движущемся лифте, имеет относительно неподвижной системы отсчета ускорение  $a$ , совпадающее с ускорением лифта. Запишем уравнения движения поршня в проекциях на направление его ускорения:

$$Ma = p_1 S - p_0 S - Mg \quad \text{при ускорении } a, \text{ направленном вверх,}$$

$$Ma = Mg + p_0 S - p_2 S \quad \text{при ускорении } a, \text{ направленном вниз.}$$

Здесь  $p_1$  и  $p_2$  — давления газа под поршнем в этих случаях. Из уравнения состояния газа под поршнем следует, что

$$p_1 h S = p_2 (h + \Delta h) S.$$

Решая эту систему уравнений, находим ответ:

$$\Delta h = \frac{2Mah}{Sp_0 + M(g - a)} = 4 \text{ см.}$$

**6.23.** Два маленьких тела начинают одновременно скользить без начальной скорости из точки  $A$ : первое по внутренней поверхности гладкой сферы до ее нижней точки  $B$ , второе по гладкой наклонной плоскости  $AB$ . Пренебрегая трением найти, во сколько раз  $\alpha$  отличаются времена движения этих тел от начальной

до конечной точек. Расстояние  $AB$  намного меньше радиуса сферы.

**Решение:** Поскольку расстояние между точками  $A$  и  $B$  намного меньше радиуса сферы, можно считать, что тело, скользящее по

гладкой сферической поверхности радиусом  $R$ , движется как математический маятник длиной  $R$ , совершающий малые колебания. Поэтому время его движения из точки  $A$  в точку  $B$  равно четверти периода  $T = 2\pi\sqrt{R/g}$  колебаний маятника, т.е.

$$t_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R}{g}}$$

Тело на гладкой наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонталью, движется с ускорением  $a = g \sin \alpha$ . Длина наклонной плоскости совпадает с расстоянием между точками  $A$  и  $B$ , которое, как видно из рисунка, равно  $l = 2R \sin \alpha$ . Следовательно, время движения этого тела из точки  $A$  в точку  $B$

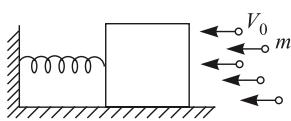
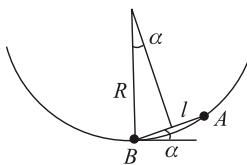
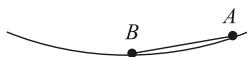
$$t_2 = \sqrt{\frac{2l}{a}} = 2\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Ответ:  $\alpha = \frac{t_1}{t_2} = \frac{\pi}{4} \cong 0,78$ .

**6.24.** Брускок расположен на гладкой горизонтальной плоскости и соединен горизонтальной пружиной жесткостью  $k = 100 \text{ Н/м}$  с

вертикальной стенкой. Перпендикулярно поверхности бруска летят капли воды массой  $m = 0,1 \text{ г}$  каждая со скоростью  $V_0 = 5 \text{ м/с}$ . Ударившись о брускок, капли, не отскакивая от него, стекают на землю. Найти, на какую величину  $\Delta l$  сжимается пружина, если известно, что брускок не совершает колебаний. Число капель в единице объема потока  $n = 2 \cdot 10^3 \text{ м}^{-3}$ . Площадь поверхности бруска, в которую ударяют капли,  $S = 100 \text{ см}^2$ .

**Решение:** Ударяющиеся о поверхность бруска капли воды оказывают на нее давление подобно тому, как оказывают давление на стенку



сосуда молекулы находящегося в нем газа. Поэтому для решения задачи можно воспользоваться приемами, применяемыми для вывода основного уравнения молекулярно-кинетической теории идеального газа, с той лишь разницей, что соударения капель с поверхностью бруска являются неупругими и все капли, в отличие от молекул газа, летят с одной и той же скоростью.

Изменение импульса одной капли при ударе о поверхность неподвижного бруска равно:

$$\Delta p_1 = mV_0.$$

За время  $\Delta t$  в бруск удается  $N = nSV_0\Delta t$  капель. Следовательно, величина импульса силы давления капель на поверхность бруска за время  $\Delta t$  равна:

$$F\Delta t = Np_1 = mnV_0^2S\Delta t,$$

а величина самой силы давления есть  $F = mnV_0^2S$ . Под действием этой силы бруск смещается на некоторое расстояние  $\Delta l$ , сжимая пружину. Возникающая в пружине сила упругости, величина которой  $F_{\text{упр}} = k\Delta l$ , уравновешивает силу давления капель:  $F = F_{\text{упр}}$ . Объединяя записанные соотношения, получаем ответ:  $\Delta l = \frac{mnV_0^2S}{k} = 0,5 \text{ мм}$ .

**6.25.** Шарик массой  $m = 0,1 \text{ г}$ , несущий отрицательный заряд  $q = -10^{-7} \text{ Кл}$ , движется по силовой линии однородного электрического поля с напряженностью  $E = 7 \cdot 10^3 \text{ В/м}$ , направленной вертикально вниз. На пути  $l = 1 \text{ м}$  величина скорости шарика изменилась в 2 раза, а направление скорости осталось неизменным. Найти величину скорости шарика  $V$  в конце этого пути. Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Сопротивлением воздуха пренебречь.

**Решение:** Шарик движется под действием двух сил: силы тяжести и кулоновской силы, причем последняя направлена против электрического поля, поскольку заряд шарика отрицательный. В проекции на вертикальную координатную ось, направленную вниз, суммарная сила, действующая на шарик, равна:

$$F = mg + qE = mg - |q|E.$$

На перемещении  $l$  эта сила совершает работу  $A = (mg - |q|E)l$ . По условию задачи шарик движется по полю, т.е. вниз, и на рассматриваемом отрезке пути его скорость не меняет своего направления. Следовательно, перемещение шарика положительно. В соответствии с законом изменения кинетической энергии тела,

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{mV_0^2}{2} + A.$$

где  $V_0$  — скорость шарика в начале рассматриваемого пути,  $V$  — его скорость в конце этого пути. Из последнего соотношения находим:

$$V^2 = V_0^2 + \frac{2A}{m}.$$

Очевидно, что ответ зависит от знака работы, который определяется знаком проекции суммарной силы, действующей на шарик, на выбранную координатную ось. Таким образом, если сила тяжести больше кулоновской силы, то  $F > 0$ ,  $A > 0$ , и скорость шарика увеличивается в два раза ( $V = 2V_0$ ), при этом равенство (25) принимает вид:

$$V^2 = \frac{1}{4}V_0^2 + \frac{2A}{m}.$$

В противном случае  $A < 0$  и скорость шарика уменьшается в два раза ( $V = V_0/2$ ); тогда (25) следует:

$$V^2 = 4V_0^2 + \frac{2A}{m}.$$

Объединяя записанные соотношения, получаем ответ:

$$V = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{2}{3}l\left(g - \frac{|q|E}{m}\right)} & \text{при } mg > |q|E, \\ \sqrt{\frac{2}{3}l\left(\frac{|q|E}{m} - g\right)} & \text{при } mg < |q|E. \end{cases}$$

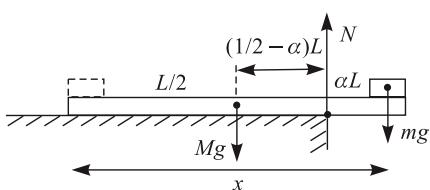
Подстановка численных данных из условия задачи дает для конечной скорости значение  $V \cong 2,83$  м/с.

**6.26.** На шероховатом столе лежит доска массой  $M = 1$  кг и длиной  $L = 0,5$  м так, что за край стола выступает ее часть длиной  $\alpha L$ ,

где  $\alpha = 1/4$ . Какую минимальную скорость  $V_0$  нужно сообщить маленькому брускому массой  $m = 1$  кг, находящемуся на левом конце доски, чтобы в результате его перемещения левый конец доски приподнялся над столом?

Коэффициент трения между бруском и доской  $\mu = 0,1$ . Доска при движении бруска не скользит по столу. Толщиной доски пренебречь, ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**Решение:** Доска, лежащая на столе, взаимодействует с ним во всех точках соприкосновения. Элементарные силы упругости, действующие



со стороны стола на каждый элемент нижней поверхности доски, имеют равнодействующую, величина которой равна суммарному весу доски и кубика, а точка приложения определяется из уравнения моментов. Эту равнодействующую часто называют силой реакции стола.

акции стола. При движении кубика по доске точка приложения силы реакции стола перемещается вправо до тех пор, пока не достигнет его края. В этот момент левый конец доски перестает давить на стол. Дальнейшее перемещение кубика приведет к тому, что доска опрокинется через край стола.

Силы, действующие на доску в момент, когда ее левый конец перестает давить на стол, изображены на рисунке. Из уравнения моментов, записанного относительно оси, проходящей по краю стола, получаем:

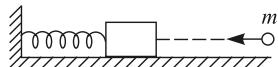
$$Mg \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) L = mg(x - L(1 - \alpha)),$$

где  $x$  — смещение кубика от начального положения. Для того, чтобы связать смещение  $x$  с начальной скоростью кубика  $V_0$ , воспользуемся законом изменения кинетической энергии тела, согласно которому

$$\frac{mV_0^2}{2} = \mu mgx.$$

Отсюда  $x = V_0^2 / (2\mu g)$ . Объединяя это выражение с первым, находим ответ:  $V_0 = \sqrt{2\mu g L \left[ \frac{M}{m} \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) + 1 - \alpha \right]} = 1$  м/с.

**6.27.** На гладком горизонтальном столе лежит деревянный брускок, прикрепленный пружиной к вертикальной стенке. В брускок попадает пуля массой  $m = 10$  г, летящая горизонтально вдоль оси пружины, и застревает в нем. Определить жесткость пружины  $k$ , если известно, что время, в течение которого сжималась пружина после попадания пули в брускок,  $T = 0,1$  с, отношение количества теплоты, выделившееся при взаимодействии пули с бруском, к начальной кинетической энергии пули  $\alpha = 0,9$ . Трением бруска о стол, а также массой пружины пренебречь.



**Решение:** Обозначим через  $M$  массу бруска. Из закона сохранения импульса и закона изменения механической энергии следуют равенства:

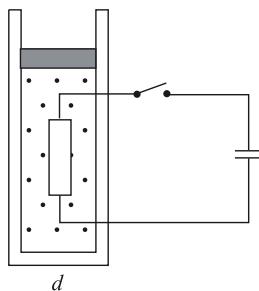
$$mV = (M+m)U, \quad \frac{mV^2}{2} = \frac{(M+m)U^2}{2} + Q,$$

где  $U$  — скорость пули и бруска после соударения,  $Q$  — количество теплоты, выделившееся при взаимодействии пули с бруском, причем по условию  $Q = \alpha \frac{mV^2}{2}$ . Время  $T$ , в течение которого сжималась пружина, равно четверти периода колебаний тела массой  $(M+m)$  на пружине жесткостью  $k$ , т.е.

$$T = \frac{2\pi}{4} \sqrt{\frac{M+m}{k}},$$

Объединяя записанные выражения, после несложных преобразований получаем ответ:  $k = \frac{\pi^2 m}{4T^2(1-\alpha)} = 25$  Н/м.

**6.28.** Вертикально расположенная цилиндрическая теплоизолированная трубка диаметром  $d = 1$  см, закрытая подвижным невесомым поршнем, содержит идеальный одноатомный газ. Внутри трубы сидится резистор с большим сопротивлением, соединенный через ключ



с конденсатором емкостью  $C = 1 \text{ мкФ}$ , заряженным до напряжения  $U = 200 \text{ В}$ . Подводящие провода имеют ничтожно малое сопротивление и не нарушают герметичность трубы. На какое расстояние  $h$  поднимется поршень после замыкания ключа и установления теплового равновесия? Атмосферное давление  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ .

**Решение:** При разрядке конденсатора в резисторе выделится количество тепла, равное первоначальной энергии конденсатора:

$$Q = \frac{CU^2}{2}.$$

Поскольку давление газа в трубке постоянно и равно  $p_0$ ,

$$Q = \frac{5}{2}\nu R\Delta T,$$

где  $\nu$  — количество газа,  $\Delta T$  — изменение его температуры. Из уравнения изобарного процесса следует, что

$$\nu R\Delta T = p_0\Delta V,$$

где  $\Delta V = h\pi d^2/4$  — изменение объема газа. Объединяя записанные выражения, получаем ответ:  $h = \frac{4CU^2}{5p_0\pi d^2} \approx 1 \text{ мм}$ .

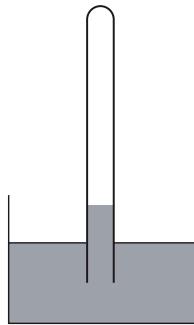
## Задание для самостоятельной работы

**6.29.** Молекулярный пучок составляют одинаковые молекулы, движущиеся с одинаковыми скоростями  $\vec{V}$  ( $V = 500$  м/с). Масса молекулы  $m = 4,8 \cdot 10^{-26}$  кг. На пути пучка установлен экран, плоскость которого перпендикулярна  $\vec{V}$ . Найти давление  $p$ , оказываемое пучком на экран. Число молекул в единице объема пучка  $n = 3 \cdot 10^{25}$  м<sup>-3</sup>. Удар молекулы об экран считать абсолютно упругим.

**6.30.** По спирали, сопротивление которой  $R = 168$  Ом, течет ток  $I = 10$  А. Спираль охлаждается потоком жидкости. Температура жидкости на входе системы охлаждения  $t_1 = 20$  °С, а на выходе  $t_2 = 60$  °С. Удельная теплоемкость жидкости  $c = 4,2$  кДж/(кг·К). Какую массу жидкости  $\mu$  нужно пропустить через систему охлаждения за секунду, чтобы температура спирали не изменялась. Считать, что все выделяющееся в спирали тепло передается жидкости.

**6.31.** Через спираль кипятильника сопротивлением  $R = 20$  Ом пропускают постоянный ток силой  $I = 5$  А. Сколько времени потребуется, чтобы нагреть кипятильником до температуры кипения  $m = 3$  кг воды? Начальная температура воды  $t_0 = 20$  °С, удельная теплоемкость воды  $c = 4,2$  кДж/(кг·К). Считать, что на нагревание воды идет 75 % выделяемого кипятильником тепла.

**6.32.** Вертикальная стеклянная трубка, верхний конец которой залит, погружена в сосуд со ртутью, причем уровень ртути в трубке на  $h = 5$  см выше уровня в сосуде. Длина части трубки, заполненной



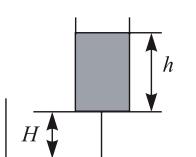
воздухом,  $l = 50$  см. На какую величину  $\Delta t$  должна подняться температура воздуха в трубке, чтобы ртуть в ней опустилась до ее уровня в сосуде? Первоначальная температура воздуха  $t = 17$  °С, атмосферное давление  $p_0 = 760$  мм рт.ст., плотность ртути  $\rho = 13,6$  г/см<sup>3</sup>.

**6.33.** При центральном соударении шарика, движущегося со скоростью  $V = 20$  м/с, с таким же неподвижным шариком последний приобретает скорость  $V/2$ . Найти изменение температуры шарика

ков  $\Delta t$ , если удельная теплоемкость вещества, из которого они состоят,  $c = 0,25 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{К)}$ . Рассеянием тепла в окружающее пространство пренебречь.

**6.34.** В замкнутом сосуде к верхней стенке подвешена на пружине жесткостью  $k = 4 \text{ Н/м}$  сфера объемом  $V = 2 \text{ л}$ . На какое расстояние  $\Delta h$  поднимется сфера, если давление воздуха в сосуде повысить при постоянной температуре  $t = 17^\circ\text{C}$  от  $p_1 = 100 \text{ кПа}$  до  $p_2 = 500 \text{ кПа}$ ? Молярная масса воздуха  $M = 29 \text{ г/моль}$ . Универсальную газовую постоянную принять  $R = 8,3 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$ , ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**6.35.** Над серединой цилиндрического сосуда с площадью сечения  $S$  на высоте  $H = 60 \text{ см}$  закреплен сосуд с площадью сечения  $0,2 S$ .



В верхнем сосуде находится ртуть, причем высота ее уровня над дном верхнего сосуда  $h = 1,5 \text{ м}$ . Через отверстие в середине дна верхнего сосуда ртуть выливается в нижний. Найти изменение температуры ртути  $\Delta t$ , если ее удельная теплоемкость  $c = 0,12 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{К)}$ . Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ , теплоемкость сосудов и рассеянием тепла в окружающее пространство пренебречь.

**6.36.** Конденсатор емкостью  $C = 10 \text{ мкФ}$ , предварительно заряженный до напряжения  $U = 100 \text{ В}$ , подключают через резистор к

батарее с ЭДС  $\mathcal{E} = 300 \text{ В}$  и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. Какое количество теплоты  $Q$  выделится в резисторе за время полной зарядки конденсатора?

**6.37.** Легкую сферу массой  $m = 80 \text{ г}$  взвешивают в воздухе. При температуре воздуха  $t = 47^\circ\text{C}$  вес сферы оказался равным  $P = 0,1 \text{ Н}$ . При какой температуре воздуха  $t_1$  сфера перестанет давить на чашку весов? Изменением объема сферы пренебречь, давление воздуха считать неизменным, ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**6.38.** Пучок молекул, движущихся в вакууме с одинаковыми скоростями, падает на пластинку-мишень перпендикулярно ее плоскости. Суммарная масса молекул, испускаемых источником в единицу времени, равна  $\mu = 0,01 \text{ г/с}$ , сила, с которой пучок действует на мишень,  $F = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$ . Считая соударение молекул с мишенью абсолютно упругим, найти скорость молекул в пучке  $V$ .

**6.39.** Температура нагревателя идеальной тепловой машины  $T_1 = 400 \text{ К}$ , температура холодильника  $T_2 = 300 \text{ К}$ , количество тепла, получаемое от нагревателя за цикл  $Q = 400 \text{ Дж}$ , число циклов в секунду  $n = 2$ . С какой скоростью будет перемещаться по горизонтальной

дороге тележка, приводимая в движение такой машиной, если сила сопротивления  $F = 100 \text{ Н}$ ? Скорость тележки считать постоянной.

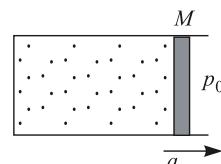
**6.40.** В вертикально расположеннем цилиндрическом сосуде под поршнем находится идеальный газ. Сосуд помещается в лифт. Когда лифт неподвижен, расстояние между поршнем и дном сосуда  $h = 12 \text{ см}$ . При движении лифта с постоянным ускорением  $\vec{a}$  расстояние между поршнем и дном цилиндра оказалось  $x = 10 \text{ см}$ . Найти ускорение лифта  $\vec{a}$ . Температуру считать постоянной, ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ , атмосферное давление не учитывать.

**6.41.** Какой массой  $M$  должно обладать сферическое тело радиуса  $r = 1 \text{ м}$ , чтобы оно могло плавать в атмосфере Венеры? Атмосфера Венеры состоит из углекислого газа  $\text{CO}_2$ , давление у поверхности  $p_0 = 9 \text{ МПа}$ , температура  $t = 527^\circ\text{C}$ . Универсальную газовую постоянную принять  $R = 8,3 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$ .

**6.42.** Надувной шарик, заполненный гелием, удерживают на нити. Найти натяжение нити, если масса оболочки шарика  $t = 2 \text{ г}$ , объем  $V = 3 \text{ л}$ , давление гелия  $p = 1,04 \cdot 10^5 \text{ Па}$ , температура  $t = 27^\circ\text{C}$ . Молярная масса гелия  $M = 4 \text{ г/моль}$ , плотность воздуха  $\rho = 1,3 \text{ кг/м}^3$ , универсальная газовая постоянная  $R = 8,3 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$ . Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**6.43.** Запаянная с одного конца трубка длиной  $L = 110 \text{ см}$  погружается в воду в вертикальном положении открытым концом вниз. Определить давление  $p$  воздуха внутри трубки, если ее верхний конец находится на уровне поверхности воды. Атмосферное давление  $p_A = 10^5 \text{ Па}$ . Температуру воздуха в трубке считать постоянной, ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Плотность воды  $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

**6.44.** В горизонтальном цилиндрическом сосуде под поршнем массой  $M = 20 \text{ кг}$  и площадью  $S = 100 \text{ см}^2$  находится идеальный газ. Расстояние от поршня до дна сосуда  $h = 55 \text{ см}$ . На какое расстояние  $\Delta h$  и в какую сторону переместится поршень, если цилиндр начать двигать с ускорением  $a = 5 \text{ м/с}^2$ , как показано на рисунке. Атмосферное давление  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ . Температура газа не изменяется. Трением поршня о стенки сосуда пренебречь. Считать, что при сообщении цилиндру ускорения колебания поршня не возникают.



**6.45.** Маленький шарик, подвешенный на нити длины  $l = 1 \text{ м}$ , отклоняют от положения равновесия так, что нить составляет с вертикалью угол  $\alpha = 60^\circ$ , и отпускают без начальной скорости. В момент, когда шарик проходит положение равновесия, нить обрывается. Найти угол  $\beta$ , который составляет с вертикалью скорость шарика в момент

падения на пол, если расстояние от точки подвеса нити до пола  $h = 2,5$  м.

**6.46.** Протон, летящий горизонтально со скоростью  $V_0 = 4,6 \times 10^4$  м/с, испытывает центральное соударение с неподвижным свободным атомом гелия. После удара протон отлетает назад со скоростью  $0,5 V_0$ , а атом гелия переходит в возбужденное состояние. Вычислить длину волны света  $\lambda$ , который излучит атом гелия, возвращаясь в основное состояние. Масса протона  $m_p = 1,6 \cdot 10^{-27}$  кг, масса атома гелия  $M_{\text{He}} = 4m_p$ , постоянная Планка  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с, скорость света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

# Г л а в а 7

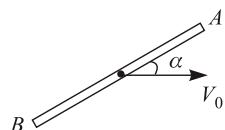
## ЗАДАЧИ 2003 ГОДА

### 7.1. Механика

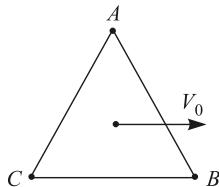
**7.1.1.** Хоккеист бросает шайбу из точки, находящейся на расстоянии  $d = 50$  м от ворот и на равных расстояниях  $L = 16$  м от бортов хоккейной площадки. Шайба начинает движение по льду со скоростью  $V_0 = 10$  м/с. С каким максимальным числом  $N_{\max}$  отражений от бортов площадки хоккеист сможет забросить шайбу в центр ворот? Коэффициент трения между шайбой и льдом  $\mu = 0,05$ , ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Считать, что удар шайбы о борта площадки является абсолютно упругим и что на всем пути шайба не отрывается от поверхности льда и не вращается. При решении задачи в общем виде принять, что  $V_0 > \sqrt{2\mu g d}$ .

**7.1.2.** Хоккеист бросает шайбу из точки, находящейся на расстоянии  $d = 35$  м от ворот и на равных расстояниях  $L = 15$  м от бортов хоккейной площадки. Какую скорость  $V_0$  хоккеист должен сообщить шайбе, чтобы она остановилась в центре линии ворот после одного отражения от борта? Считать, что при отражении от борта величина составляющей скорости, параллельной борту, не изменяется, а величина составляющей скорости, перпендикулярной борту, изменяется в  $k = 3/4$  раз. Коэффициент трения между шайбой и льдом  $\mu = 0,05$ . Считать, что на всем пути шайба не отрывается от поверхности льда. Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**7.1.3.** Стержень  $AB$  движется в горизонтальной плоскости. В некоторый момент скорость его центра составляет угол  $\alpha = 30^\circ$  с направлением стержня, величина скорости точки  $B$  равна  $V_B = 2$  м/с, а скорость точки  $A$  перпендикулярна к скорости точки  $B$ . Найдите величину скорости  $V_0$ , с которой движется центр стержня в этот момент времени.



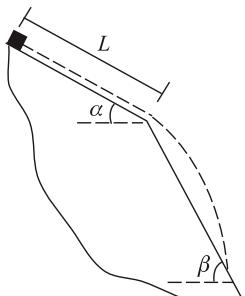
**7.1.4.** Равносторонний треугольник  $ABC$  скользит по горизонтальному столу. Известно, что в некоторый момент времени точка  $A$  имеет скорость  $V_1 = \sqrt{6}$  м/с  $\approx 2,45$  м/с, точка  $B$  имеет скорость  $V_2 = 1,5$  м/с, а скорость центра треугольника направлена параллельно



стороне  $CB$ . Какова величина скорости  $V_0$  центра треугольника в этот момент времени?

**7.1.5.** Дождевальная установка разбрызгивает воду, направляя водяные капли во все стороны с одинаковой скоростью. Какова площадь  $S$  орошаемого ею участка, если максимальная высота подъема капель  $h = 1$  м? Считать, что капли воды начинают движение непосредственно от поверхности земли. Сопротивление воздуха не учитывать.

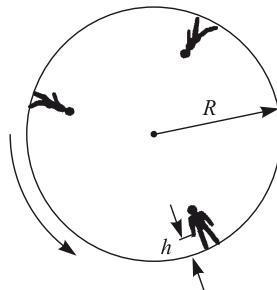
**7.1.6.** Крыша дома состоит из двух плоских частей, образующих с горизонтом углы  $\alpha = 30^\circ$  и  $\beta = 60^\circ$ . На расстоянии  $L = 80$  см от места излома крыши на ее верхнюю часть



помещают маленький кубик и отпускают без начальной скорости. Соскользнув с верхней части крыши, в месте излома кубик отрывается от нее и некоторый путь проходит в воздухе. Определить время  $\tau$ , в течение которого кубик будет находиться в полете перед тем, как коснуться нижней части крыши. Коэффициент трения между кубиком и поверхностью крыши  $\mu = \sqrt{3}/6 \approx 0,29$ . Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, сопротивление воздуха не учитывать.

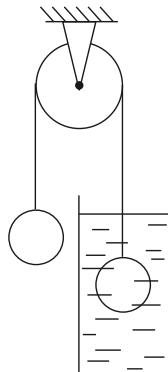
**7.1.7.** Скорость снаряда при вылете из ствола пушки равна  $V_0 = 500$  м/с. На какой максимальной высоте  $h$  снаряд может поразить цель, если расстояние от пушки до цели по горизонтали составляет  $l = 1$  км? Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Сопротивление воздуха не учитывать. При решении задачи в общем виде считать, что  $V_0 > \sqrt{gl}$ .

**7.1.8.** Космический корабль, имеющий форму кругового цилиндра, совершает межпланетный перелет с постоянной скоростью. Он приведен во вращение вокруг продольной оси для создания на борту искусственной тяжести. При этом «полом» для космонавтов является внутренняя поверхность корпуса корабля. Космонавт, стоящий на полу, выпускает из руки небольшой предмет. На каком расстоянии  $l$  от ног космонавта, измеренном вдоль пола, этот предмет упадет на пол? Радиус корпуса корабля  $R$ , высота, с которой падает предмет  $h$ . Влиянием всех небесных тел и силой притяжения предмета к кораблю пренебречь.



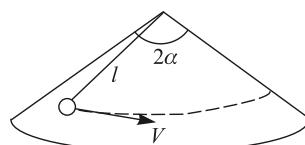
Сопротивление воздуха не учитывать. Угловая скорость вращения корабля постоянна.

**7.1.9.** Два одинаковых шарика плотностью  $\rho = 1,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  связаны невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый



блок. Один из шариков погружен в жидкость плотностью  $\rho_{\infty} = 0,8 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Сила сопротивления жидкости, действующая на шарик, пропорциональна его скорости. Найти величину  $v$  установившейся скорости движения шариков, если известно, что установившаяся скорость падения одиночного шарика в этой жидкости  $v_0 = 2 \text{ см/с}$ . Сопротивлением воздуха пренебречь.

**7.1.10.** На поверхности гладкого кругового конуса с углом  $2\alpha = 120^\circ$  при вершине покоятся шарик, прикрепленный нерастяжимой нитью длиной  $l = 20 \text{ см}$  к вершине конуса, как показано на рисунке. Во сколько раз  $n$  изменится сила натяжения нити, если шарику сообщить скорость  $V = 50 \text{ см/с}$ , направленную перпендикулярно нити вдоль боковой поверхности конуса? Считать, что при движении шарик не отрывается от поверхности конуса. Трение не учитывать.



**7.1.11.** Груз массой  $m = 100$  г подвешен на нити и совершает колебания, угловая амплитуда которых  $\alpha = 60^\circ$ . Определить натяжение нити в тот момент, когда она составляет угол  $\beta = 30^\circ$  с вертикалью. Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**7.1.12.** Математический маятник длиной  $l = 2,5$  м и массой  $m = 0,2$  кг раскачивают так, что каждый раз, когда маятник проходит положение равновесия, по нему производят короткий удар, сообщая импульс  $p = 0,02$  Н·с в направлении скорости. Какое минимальное число  $n_{min}$  ударов нужно совершить, чтобы угол отклонения маятника от положения равновесия превысил  $\alpha = 60^\circ$ ? Первоначально маятник покоялся. Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ , сопротивление воздуха не учитывать.

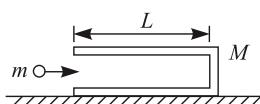
**7.1.13.** Начиная движение из состояния покоя, кабина лифта поднимается на высоту  $H = 30$  м и останавливается. Найти, какая работа  $A$  была совершена при этом двигателем лифта, если максимальная мощность, развиваемая им при подъеме, составила  $N = 2$  кВт. Полное время подъема кабины  $\tau = 8$  с, разгон и замедление кабины происходили в течение одинакового времени  $\tau_1 = 2$  с с постоянным по величине ускорением, остальное время кабина двигалась равномерно. Коэффициент полезного действия двигателя считать равным 100 %, ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**7.1.14.** Камень массой  $m = 0,1$  кг бросают горизонтально с вершины холма, склон которого составляет угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом. Определить, какая работа  $A$  была совершена при броске, если камень упал на склон на расстоянии  $L = 40$  м от вершины. Считать, что бросок выполнен непосредственно от поверхности земли. Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Сопротивлением воздуха пренебречь.

**7.1.15.** Второй космической скоростью  $V_{2\kappa}$  называется минимальная скорость, которую нужно сообщить в вертикальном направлении телу для того, чтобы оно неограниченно удалилось от поверхности планеты, причем скорость тела на бесконечно большом расстоянии от планеты принимается равной нулю. Известно, что для Земли  $V_{2\kappa} = 11,2$  км/с. Какова будет скорость  $V_\infty$  тела на бесконечно большом расстоянии от Земли, если на поверхности Земли сообщить ему вертикальную скорость  $U = 12,2$  км/с? Влиянием вращения Земли вокруг оси и притяжением других небесных тел пренебречь.

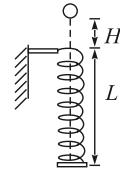
**7.1.16.** На гладком горизонтальном столе покоится трубка массой  $M$  и длиной  $L$ , закрытая с одного торца. В открытый конец трубы

влетает маленький шарик массой  $m$  со скоростью, направленной вдоль оси трубы. После упругого удара о закрытый торец трубы шарик вылетает наружу. Какой путь  $S$  относительно



стола пройдет шарик за время, которое он будет находиться внутри трубы? Размером шарика и трением между всеми поверхностями пренебречь.

**7.1.17.** Невесомая пружина жесткостью  $k = 10 \text{ Н/м}$  и длиной  $L = 7,5 \text{ см}$  подвешена на штативе за верхний конец в вертикальном положении. Нижний конец пружины перекрыт невесомой горизонтальной пластинкой, жестко прикрепленной к пружине. С высоты  $H = 2,5 \text{ см}$ , отсчитываемой от верхнего края пружины, падает без начальной скорости пластилиновый шарик массой  $m = 25 \text{ г}$ , пролетает сквозь витки пружины, ударяется о пластинку и прилипает к ней. Какую максимальную скорость  $V_{\max}$  будет иметь шарик при своем движении вниз? Сопротивление воздуха не учитывать, размером шарика пренебречь, ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

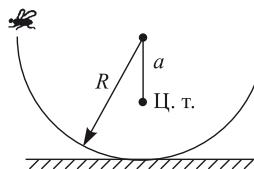


**7.1.18.** Брускок массой  $M = 100 \text{ г}$  подвешен на невесомой пружине жесткостью  $k = 1 \text{ Н/м}$ . Снизу в него попадает пластилиновый шарик массой  $m = 1 \text{ г}$ , летящий вертикально вверх со скоростью  $V_0 = 2,5 \text{ м/с}$ ,



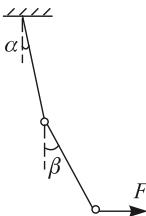
и прилипает к бруски. Найти амплитуду  $A$  возникающих при этом гармонических колебаний. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**7.1.19.** Тонкостенная полусфера массой  $M$  и радиусом  $R$  покоятся на горизонтальном столе. На какую высоту  $h$  опустится

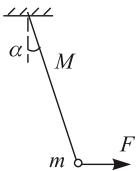


край полусферы, если на него сядет муха массой  $m$ ? Центр тяжести полусферы расположен на расстоянии  $a = R/2$  от ее центра.

**7.1.20.** Два одинаковых шарика подвешены на невесомой нерастяжимой нити как показано на рисунке. На нижний шарик действует некоторая постоянная сила, направленная горизонтально. Найти угол  $\beta$ , на который отклонился от вертикали нижний отрезок нити, если известно, что верхний отрезок нити отклонен от вертикали на угол  $\alpha$ .

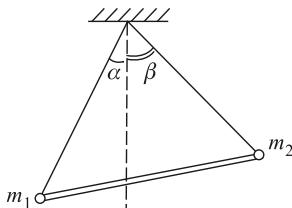


**7.1.21.** Маленький шарик массой  $m$  подвешен на однородном стержне массой  $M = 2(\sqrt{3} - 1)m \approx 1,464m$ , длина которого значительно больше радиуса шарика. Под действием горизонтальной силы, приложенной к шарику, стержень отклонился от вертикали на угол  $\alpha = 30^\circ$ . Под каким углом  $\beta$  к стержню направлена сила, действующая на шарик со стороны стержня?



силы, приложенной к шарику, стержень отклонился от вертикали на угол  $\alpha = 30^\circ$ . Под каким углом  $\beta$  к стержню направлена сила, действующая на шарик со стороны стержня?

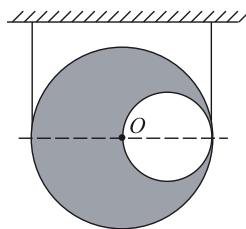
**7.1.22.** Два шарика, соединенные невесомым жестким стержнем, подвешены на невесомых нитях одинаковой длины, закрепленных в



одной и той же точке. Найти отношение масс шариков  $k = m_1/m_2$ , если известно, что нить, на которой висит первый из них, отклонена от вертикали на угол  $\alpha = 30^\circ$ , а нить, на которой висит второй, отклонена на угол  $\beta = 45^\circ$ .

**7.1.23.** Стеклянная бутылка вместимостью  $V = 0,5$  л и массой  $M = 200$  г плавает в воде. Какое количество воды  $m$  нужно налить в бутылку, чтобы она утонула? Плотность стекла  $\rho = 2,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

**7.1.24.** Шар радиусом  $a$  со сферической полостью радиусом  $a/2$ , центр которой смешен на расстояние  $a/2$  от центра шара О, подвешен на двух вертикальных нитях так, что линия, соединяющая центры шара и полости горизонтальна (см. рисунок). Во сколько раз  $n$  изменится натяжение левой нити, если шар полностью погрузить в жидкость, в



которой он не плавает? Плотность жидкости  $\rho_0 = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ , плотность материала, из которого сделан шар,  $\rho = 2 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ . Жидкость в полость не проникает.

**7.1.25.** Цилиндрическое ведро массой  $m = 1 \text{ кг}$  имеет объем  $V_0 = 10 \text{ л}$  и высоту  $H = 40 \text{ см}$ . Его погружают вверх дном в воду в вертикальном положении до тех пор, пока дно ведра не оказывается вровень с поверхностью воды. Какую силу  $F$  нужно приложить к ведру, чтобы удерживать его в этом положении? Температуру воздуха внутри ведра считать неизменной. Плотность воды  $\rho = 1 \text{ г}/\text{см}^3$ , ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м}/\text{с}^2$ , атмосферное давление  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ . Толщиной стенок ведра пренебречь.

**7.1.26.** Водолазный колокол представляет собой цилиндрическую бочку, изготовленную из стали, причем отношение внутреннего объема колокола к объему его стенок и днища составляет  $\alpha = 68$ . Колокол переворачивают вверх дном и погружают в воду, подцепив к нему дополнительный груз. На какой глубине  $d$  нужно отцепить груз, чтобы колокол после этого оказался в равновесии? Температура воздуха над поверхностью воды  $t_0 = 27^\circ\text{C}$ , температура воды  $t_1 = 7^\circ\text{C}$ , атмосферное давление  $p_A = 10^5 \text{ Па}$ , плотность стали  $\rho_c = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ , плотность воды  $\rho_w = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ , ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м}/\text{с}^2$ . Высоту колокола считать очень малой по сравнению с глубиной его погружения.

**7.1.27.** Тонкостенную цилиндрическую бочку массой  $m = 100 \text{ кг}$ , высотой  $H = 1 \text{ м}$  и площадью основания  $S = 0,5 \text{ м}^2$  переворачивают вверх дном и опускают в воду. На какой глубине  $d$  окажется нижний край бочки, когда она примет положение равновесия? Атмосферное давление  $p_a = 10^5 \text{ Па}$ , плотность воды  $\rho_w = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ , ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м}/\text{с}^2$ . Считать, что бочка все время занимает вертикальное положение. Температура воды равна температуре воздуха.

**7.1.28.** Тело массой  $m = 1 \text{ кг}$ , надетое на гладкий горизонтальный стержень, связано пружиной жесткостью  $k = 10 \text{ Н}/\text{м}$  с неподвижной стенкой. Тело сместили на некоторое расстояние от положения равновесия и отпустили без начальной скорости. Через какое минимальное время  $t_0$  после начала движения тела его кинетическая энергия будет в  $n = 3$  раза больше потенциальной энергии пружины?

## 7.2. Молекулярная физика и термодинамика

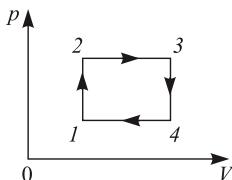
**7.2.1.** Вертикально расположенный герметичный цилиндр разделен на две части тяжелым теплонепроницаемым поршнем, способным скользить без трения. В верхней и нижней частях цилиндра находится идеальный газ. При некоторой температуре  $T$  в верхней части цилиндра и температуре  $2T$  в нижней части поршень находится посередине цилиндра и давление газа в верхней части цилиндра  $p_0 = 10^5$  Па. Цилиндр перевернули вверх дном. Для того, чтобы поршень не сместился, газ в той части, которая оказалась наверху, охладили до температуры  $T/2$ , оставив температуру  $T$  газа в другой части цилиндра без изменения. Определить давление  $p$ , которое имел газ в нижней части цилиндра в начальном состоянии.

**7.2.2.** В цилиндре под подвижным поршнем находится идеальный газ, поддерживаемый при постоянной температуре. Когда на поршень положили груз массой  $M_1$ , объем газа уменьшился в  $n$  раз. Какой массы  $M_2$  груз нужно положить на поршень дополнительно, чтобы объем газа уменьшился еще в  $k$  раз?

**7.2.3.** При повышении температуры идеального одноатомного газа на  $\Delta T_1 = 150$  К среднеквадратичная скорость его молекул возросла от  $V_1 = 400$  м/с до  $V_2 = 500$  м/с. На какую величину  $\Delta T_2$  нужно дополнительно повысить температуру этого газа, чтобы увеличить среднеквадратичную скорость его молекул от  $V_2 = 500$  м/с до  $V_3 = 600$  м/с?

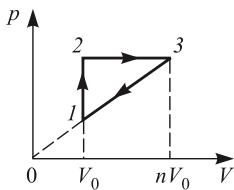
**7.2.4.** Два одинаковых сосуда, содержащие одинаковое количество атомов гелия, соединены трубкой с краном. В первом сосуде среднеквадратичная скорость атомов равна  $V_1 = 500$  м/с, во втором —  $V_2 = 1000$  м/с. Какова будет среднеквадратичная скорость  $V_3$  атомов гелия, если открыть кран и сделать сосуды сообщающимися? Сосуды и трубка теплоизолированы.

**7.2.5.** С идеальным одноатомным газом совершается циклический процесс, изображенный на рисунке. Отношение максимальной температуры газа к минимальной в этом цикле равно  $n = 4$ , температу-



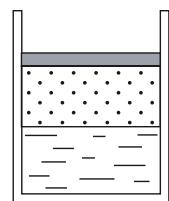
ры в точках 2 и 4 совпадают. Найти коэффициент полезного действия цикла  $\eta$ .

**7.2.6.** С идеальным одноатомным газом совершается циклический процесс, изображенный на рисунке. Отношение максимального объема газа к минимальному в этом цикле равно  $n = 3$ . Найти коэффициент полезного действия цикла  $\eta$ .



**7.2.7.** Когда легковой автомобиль едет с постоянной скоростью по горизонтальному шоссе, расход бензина составляет  $\mu_1 = 7 \text{ л}/100 \text{ км}$ . Каков будет расход бензина  $\mu_2$ , если этот автомобиль поедет с той же скоростью вверх по наклонному участку шоссе, образующему угол  $\alpha = 0,01 \text{ рад}$  с горизонтом? Качество дорожного покрытия на горизонтальном и наклонном участках шоссе одинаково. Масса автомобиля  $M = 1000 \text{ кг}$ , коэффициент полезного действия двигателя  $\eta = 30\%$ , удельная теплота сгорания бензина  $q = 42 \text{ МДж}/\text{кг}$ , плотность бензина  $\rho = 0,7 \text{ кг}/\text{л}$ . Ускорение свободного падения принять  $g = 10 \text{ м}/\text{с}^2$ . При расчетах положить  $\sin \alpha \approx \alpha$ .

**7.2.8.** В вертикальном цилиндре, наполовину заполненном водой, под подвижным поршнем заключен воздух. Поршень находится в равновесии, когда давление внутри цилиндра равно утроенному атмосферному давлению. При температуре  $t_1 = 6^\circ\text{C}$  расстояние между поршнем и поверхностью воды  $h = 10 \text{ см}$ . На каком расстоянии  $H$  от поверхности воды окажется поршень, если цилиндр нагреть до температуры  $t_2 = 100^\circ\text{C}$ ? Атмосферное давление считать нормальным. Давлением водяных паров при температуре  $t_1 = 6^\circ\text{C}$  и изменением объема воды за счет испарения пренебречь.



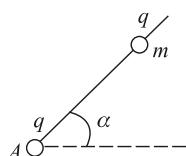
**7.2.9.** В стакане находится некоторое количество воды, нагретой до температуры  $t_1 = 80^\circ\text{C}$ . Когда в стакан кладут металлический шарик, имеющий температуру  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ , в стакане устанавливается температура  $t_2 = 60^\circ\text{C}$ . Какая температура  $t_3$  установится в стакане после того, как в него опустят еще один такой же шарик, имеющий температуру  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ ? Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

**7.2.10.** В стакане находится некоторое количество воды, нагретой до температуры  $t_1 = 60^\circ\text{C}$ . В стакан кладут металлический шарик, имеющий температуру  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ , а некоторое время спустя — еще два таких же шарика при той же температуре. В результате в стакане устанавливается температура  $t_3 = 50^\circ\text{C}$ . Какова была установившаяся

температура  $t_2$  в стакане после того, как в него был опущен первый шарик? Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

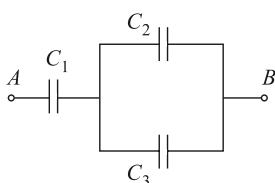
### 7.3. Электродинамика

**7.3.1.** На диэлектрическую спицу, закрепленную под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту, надета бусинка массой  $m = 14,1$  мг, несущая



положительный заряд  $q = 2 \cdot 10^{-8}$  Кл. Коэффициент трения между спицей и бусинкой  $\mu = 0,1$ . В точке А на спице находится точечный заряд  $q$ . При каких расстояниях  $x$  от точки А бусинка будет находиться в равновесии? Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$  Ф/м.

**7.3.2.** Первоначально незаряженные конденсаторы, емкости которых  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  неизвестны, соединены в цепь, как показано на рисунке. После подключения к точкам А и В источника оказалось, что заряд на конденсаторе  $C_1$  равен  $q_1 = 5 \cdot 10^{-4}$  Кл, напряжение на конденсаторе  $C_2$  равно  $U_2 = 100$  В, а энергия конденсатора  $C_3$  равна  $W_3 = 10^{-2}$  Дж. Найти емкость конденсатора  $C_2$ .



на рисунке. После подключения к точкам А и В источника оказалось, что заряд на конденсаторе  $C_1$  равен  $q_1 = 5 \cdot 10^{-4}$  Кл, напряжение на конденсаторе  $C_2$  равно  $U_2 = 100$  В, а энергия конденсатора  $C_3$  равна  $W_3 = 10^{-2}$  Дж. Найти емкость конденсатора  $C_2$ .

**7.3.3.** Первоначально незаряженные конденсаторы, емкости которых  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  неизвестны, соединены в цепь, как показано на рисунке. После подключения к точкам А и В источника оказалось, что напряжение на конденсаторе  $C_1$  равно  $U_1 = 100$  В, заряд на конденсаторе  $C_2$  равен  $q_2 = 10^{-4}$  Кл, а энергия конденсатора  $C_3$  превышает энергию конденсатора  $C_1$  в  $m = 2$  раза. Найти емкость конденсатора  $C_2$ , если известно, что она в  $n = 3$  раза меньше емкости конденсатора  $C_3$ .

**7.3.4.** Два одинаковых плоских конденсатора, соединенных параллельно, зарядили до напряжения  $U = 1000$  В и отключили от источника. Затем пластины одного из конденсаторов раздвинули так, что расстояние между ними увеличилось в  $k = 3$  раза. После этого пластины конденсатора замкнули проводником. Какая энергия  $Q$  выделилась в проводнике? Первоначальная емкость каждого конденсатора  $C = 500$  пФ.

**7.3.5.** В плоском конденсаторе находится пластина из диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon = 2,5$ , площадь которой составляет часть  $\alpha = 0,4$  от площади его обкладок. Конденсатор зарядили до напряжения  $U = 1000$  В и отключили от источника. Какую работу  $A$  необходимо совершить, чтобы вытащить пластину из конденсатора?

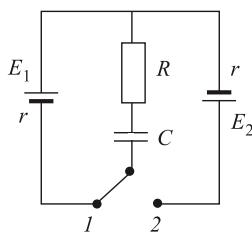
Емкость пустого конденсатора  $C = 400$  пФ, зазором между диэлектриком и обкладками пренебречь.

**7.3.6.** Два одинаковых плоских конденсатора емкостями  $C = 200$  пФ каждый соединены параллельно, заряжены до напряжения  $U = 2000$  В и отключены от источника. Какую работу  $A$  необходимо совершить, чтобы раздвинуть пластины одного из конденсаторов, увеличив зазор между ними в  $k = 2$  раза?

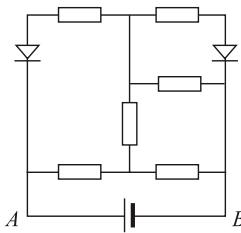
**7.3.7.** Плоский конденсатор присоединен к источнику с напряжением  $U = 2000$  В. Пластины раздвинули так, что расстояние между ними увеличилось в  $k = 3$  раза. Какая работа  $A$  была совершена при этом? Первоначальная емкость конденсатора  $C = 400$  пФ.

**7.3.8.** В плоском конденсаторе находится пластина из диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon = 2,5$ , площадь которой составляет часть  $\alpha = 0,6$  от площади его обкладок. Конденсатор постоянно подключен к источнику с напряжением  $U = 2000$  В. Какую работу  $A$  необходимо совершить, чтобы вытащить пластину из конденсатора? Емкость пустого конденсатора  $C = 200$  пФ, зазором между диэлектриком и обкладками пренебречь.

**7.3.9.** Найти количество теплоты, которое выделится на резисторе с сопротивлением  $R = 10$  Ом после переключения ключа из положения 1 в положение 2. ЭДС источников  $E_1 = 5$  В,  $E_2 = 6$  В, их внутренние сопротивления одинаковы и равны  $r = 1$  Ом. Емкость конденсатора  $C = 200$  мкФ.



**7.3.10.** Электрическая цепь, изображенная на рисунке, состоит из двух диодов, шести одинаковых резисторов и источника тока, внутренним сопротивлением которого можно пренебречь. Во сколько раз  $k$  изменится ток через источник, если подключить его к точкам  $A$  и  $B$  с другой полярностью? Диоды считать идеальными.

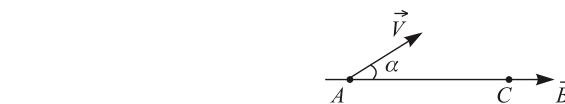


**7.3.11.** Цилиндрическую алюминиевую заготовку длиной  $l_0 = 50$  см и площадью сечения  $S_0 = 5$  см<sup>2</sup> вытягивают в проволоку круглого сечения длиной  $l_1 = 220$  м. С помощью этой проволоки подключают к сети с номинальным напряжением  $U_n = 220$  В электронагреватель номинальной мощностью  $P_n = 2$  кВт. Какова будет фактическая мощность  $P_\phi$ , развиваемая нагревателем, если удельное сопротивление алюминия  $\rho = 2,5 \cdot 10^{-8}$  Ом·м?

**7.3.12.** На рисунке изображен участок цепи постоянного тока, содержащий три резистора, сопротивления которых неизвестны. При

этом через резистор  $R_1$  протекает ток  $I_1 = 1,6$  А, а напряжение на резисторе  $R_2$  составляет  $U_2 = 2$  В. Найти величину сопротивления  $R_3$ , если известно, что она в  $n = 3$  раза превышает величину сопротивления  $R_2$ .

**7.3.13.** Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ . В точке  $A$  он имеет скорость  $\vec{V}$ , вектор которой составляет свектором магнитной индукции угол  $\alpha$ . При какой величине магнитной



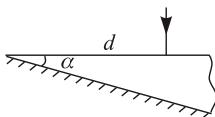
индукции  $B$  электрон попадет при своем движении в точку  $C$ , находящуюся на одной силовой линии с точкой  $A$ ? Расстояние  $AC = L$ , величина заряда электрона  $|e|$ , его масса  $m$ .

**7.3.14.** Заряженная бусинка массой  $m = 1$  г надета на гладкий горизонтальный стержень, который движется с горизонтальной скоростью  $v_c = 1$  м/с, направленной перпендикулярно стержню. Вся система находится в однородном постоянном магнитном поле, индукция которого направлена вертикально. В некоторый момент времени скорость бусинки относительно стержня составляет  $v_{oc} = 2$  м/с, а ее ускорение равно  $a = 3$  м/с<sup>2</sup>. С какой силой  $N$  действует бусинка на стержень в этот момент времени? Силу тяжести не учитывать, трением бусинки о стержень пренебречь.

**7.3.15.** Горизонтально расположенный стержень равномерно вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов, с угловой скоростью  $\omega$ . На другом конце стержня закреплен маленький шарик массой  $m$ , несущий заряд  $q$ . Вся система находится в однородном постоянном магнитном поле, индукция которого  $B$  направлена горизонтально. Найти максимальное значение  $F_{\max}$  силы  $F$ , с которой стержень действует на шарик в процессе движения, если известно, что минимальное значение силы  $F$  равно  $F_{\min}$ . Силу тяжести не учитывать, размером шарика по сравнению с длиной стержня пренебречь.

## 7.4. Оптика

**7.4.1.** На верхнюю грань стеклянного клина с углом  $\alpha = 15^\circ$  падает узкий пучок света перпендикулярно этой грани на расстоянии  $d = 2$  см от ребра клина. Нижняя грань клина посеребрена. На каком расстоянии  $d_1$  от ребра отраженный пучок выходит из клина?



**7.4.2.** На плоскую поверхность плоско-выпуклой линзы, сферическая поверхность которой имеет радиус  $R$  и посеребрена, падает узкий пучок света параллельно главной оптической оси на расстоянии  $d$  от нее. Пучок выходит из линзы после однократного отражения от ее сферической поверхности. Найти, под каким углом  $\alpha$  к оси пучок выходит из линзы. Показатель преломления стекла, из которого изготовлена линза, равен  $n$ .

**7.4.3.** На плоскую поверхность плоско-вогнутой линзы, вогнутая поверхность которой имеет радиус  $R$  и посеребрена, параллельно главной оптической оси на расстоянии  $d$  от нее падает узкий пучок света. Пучок выходит через плоскую поверхность линзы после отражения от сферической поверхности. Найти, на каком расстоянии  $d_1$  от оси выходит пучок из линзы, если толщина линзы на оси пренебрежимо мала.

**7.4.4.** Тонкая собирающая линза дает на экране изображение предмета, увеличенное в  $n = 3$  раза. Когда линзу переместили в сторону экрана на расстояние  $l = 32$  см, на экране возникло изображение предмета, уменьшенное во столько же раз. Найти фокусное расстояние линзы  $f$ .

**7.4.5.** В солнечный день собирающую линзу с фокусным расстоянием  $f = 10$  см помещают на расстоянии  $d = 9$  см от плоской деревянной доски так, что солнечный свет падает на линзу нормаль-

но и ее главная оптическая ось перпендикулярна поверхности доски. Через какое время  $\tau$  дерево загорится, если мощность солнечного излучения, проходящего через площадку единичной площади, расположенную перпендикулярно световым лучам, составляет  $I = 1 \text{ кВт}/\text{м}^2$ ? Начальная температура дерева  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ , температура воспламенения дерева  $t_1 = 270^\circ\text{C}$ , плотность дерева  $\rho = 800 \text{ кг}/\text{м}^3$ , его теплоемкость  $c = 2,5 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ . Считать, что солнечное излучение, падающее на дерево, полностью поглощается в поверхностном слое толщиной  $h = 0,1 \text{ мм}$ . Угловым размером Солнца и потерями световой энергии в линзе пренебречь.

**7.4.6.** Параллельный пучок света, падающий под углом  $\alpha_1 = 60^\circ$  на плоское зеркало, оказывает на него давление  $p_1 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Па}$ . Какое давление  $p_2$  будет оказывать на зеркало этот пучок, если угол падения пучка станет  $\alpha_2 = 45^\circ$ ?

# Глава 8

## ЗАДАЧИ 2004 ГОДА

### 8.1. Механика

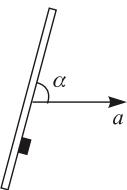
**8.1.1.** Узнав о готовящемся нападении неприятеля, решетку ворот замка начали опускать с постоянной скоростью  $u = 0,2$  м/с. Мальчик, игравший на расстоянии  $l = 20$  м от ворот, в тот же момент бросился бежать к воротам. Сначала он двигался равнотекущим, а затем, набрав максимальную скорость  $v_0 = 2,5$  м/с, равномерно. С каким минимальным ускорением  $a_{\min}$  мог разгоняться мальчик, чтобы успеть пробежать под решеткой ворот в полный рост, если в начальный момент нижний край решетки находился на расстоянии  $H = 3$  м от поверхности земли? Рост мальчика  $h = 1$  м.

**8.1.2.** Легкий маленький шарик роняют без начальной скорости. Когда шарик пролетает по вертикали расстояние  $h$ , он ударяется о тяжелую горизонтальную доску, движущуюся вертикально вверх с постоянной скоростью. После упругого удара о доску шарик подлетает вверх на высоту  $nh$  от точки соударения. С какой скоростью  $U$  двигалась доска? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения  $g$ .

**8.1.3.** Граната, брошенная под углом к горизонту, разрывается в верхней точке траектории на два одинаковых осколка. Один из осколов упал на землю через время  $t_1$  после разрыва гранаты. Через какое время  $t_2$  после разрыва окажется на земле второй осколок, упавший позднее первого, если разрыв гранаты произошел на высоте  $h$  над поверхностью земли? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения  $g$ .

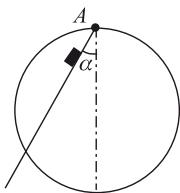
**8.1.4.** При поливе садового участка наконечник водопроводного шланга расположили на высоте  $h = 0,8$  м над поверхностью земли, направив струю воды вверх под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту. Найти массу  $m$  воды, содержащейся в отрезке струи от наконечника шланга до поверхности земли. Скорость воды, бьющей из шланга,  $v_0 = 6$  м/с, внутреннее сечение наконечника шланга  $S = 3$  см<sup>2</sup>, плотность воды  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**8.1.5.** На гладком столе лежит доска, к которой вплотную прижат бруск. Коэффициент трения между бруском и доской  $\mu = 0,1$ . Доску



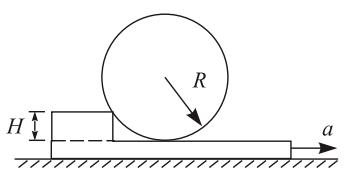
начинают поступательно перемещать по столу с некоторым постоянным ускорением. При каком минимальном значении  $\alpha_{\min}$  угла  $\alpha$  между плоскостью доски и вектором ускорения брусков не будет скользить по доске?

**8.1.6.** Обруч диаметром  $D$  располагается в вертикальной плоскости. В точке  $A$ , лежащей на верхнем конце вертикального диаметра обруча, на шарнире закреплен желоб, угол наклона которого можно менять (см. рисунок).



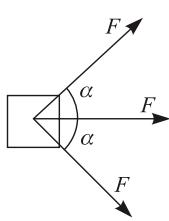
По желобу из точки  $A$  пускают скользить без начальной скорости небольшой брускок. Найти зависимость времени  $\tau$ , через которое брускок достигнет точки пересечения желоба и обруча, от угла  $\alpha$ , который желоб образует с вертикалью. Коэффициент трения бруска о желоб  $\mu$ , ускорение свободного падения  $g$ .

**8.1.7.** На горизонтальной доске, имеющей прямоугольный уступ высотой  $H = 10$  см, располагается вплотную к уступу однородный цилиндр радиусом  $R = 25$  см.



Доску начинают двигать с некоторым ускорением  $a$ , направленным вправо. Каково максимально возможное значение ускорения  $a_{\max}$ , при котором цилиндр не будет подниматься на уступ? Все поверхности гладкие. Ускорение свободного падения  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .

**8.1.8.** На горизонтальной шероховатой поверхности находится маленький брускок. Если на брускок подействовать в течение короткого



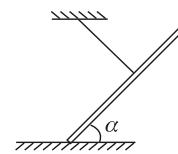
промежутка времени горизонтальной силой  $F$ , значительно превышающей силу трения скольжения, то после этого брускок пройдет до остановки путь  $S_0$ . Какой путь  $S$  пройдет до остановки этот брускок, если в течение того же промежутка времени на него одновременно подействовать тремя горизонтальными силами  $F$ , две из которых направлены под углами  $\alpha = 60^\circ$  к третьей?

**8.1.9.** Однородная тяжелая цепочка, состоящая из мелких звеньев, подвешена за концы как показано на рисунке. Точка  $C$  — самая нижняя точка цепочки. Определить массу цепочки  $m$ , если известно,

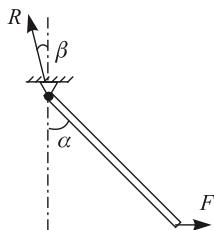


что силы натяжения цепочки в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  равны, соответственно  $T_A$ ,  $T_B$ ,  $T_C$ . Ускорение свободного падения  $g$ .

- 8.1.10.** Лестница массой  $m = 30$  кг удерживается в наклонном положении легкой нерастяжимой веревкой. Веревка привязана к лестнице в точке, отстоящей от верхнего конца лестницы на расстояние, равное  $1/3$  длины лестницы. Найти величину силы нормального давления  $N$  лестницы на пол, если лестница составляет с полом угол  $\alpha = 45^\circ$ , а веревка перпендикулярна лестнице. Центр тяжести лестницы находится посередине. Ускорение свободного падения принять равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

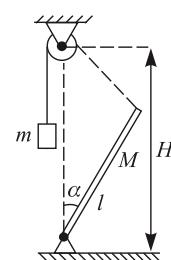


- 8.1.11.** Однородный стержень может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец. К другому концу стержня приложена сила, направленная горизонтально и перпенди-



кулярно оси вращения стержня. Под действием этой силы стержень отклонен от вертикали на угол  $\alpha = 45^\circ$ . Какой угол  $\beta$  составляет с вертикалью сила, действующая на стержень со стороны оси?

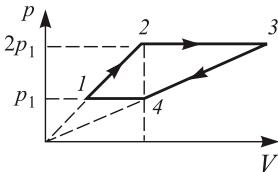
- 8.1.12.** Стержень массой  $M = 28$  кг и длиной  $l = 1,73$  м закреплен нижним концом на шарнире (см. рисунок). К верхнему концу стержня привязана легкая нерастяжимая веревка, перекинутая через блок, укрепленный на высоте  $H = 2$  м от шарнира на одной вертикали с ним. Найти массу  $m$  груза, который нужно подвесить на другом конце веревки, чтобы стержень находился в равновесии, составляя угол  $\alpha = 30^\circ$  с вертикалью. Трением в шарнире и в блоке пренебречь. Диаметр блока считать очень малым.



## 8.2. Молекулярная физика и термодинамика

**8.2.1.** Горизонтальная трубка сечением  $S$ , открытая с двух концов, закреплена неподвижно. В ней находятся два поршня, один из которых соединен пружиной жесткостью  $k$  с неподвижной стенкой. В исходном состоянии давление воздуха между поршнями равно атмосферному давлению  $p_0$ , пружина не деформирована и расстояние между поршнями равно  $l$ . Правый поршень медленно переместили вправо на расстояние  $l$ . Какое давление воздуха  $p_1$  установилось при этом между поршнями? Температуру воздуха считать постоянной, трением пренебречь.

**8.2.2.** Над идеальным одноатомным газом проводят процесс, изображенный на рисунке. Найти работу  $A$ , совершающую газом в этом



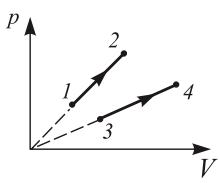
процессе, если на участке  $2 - 3$  газ получает количество теплоты  $Q_{23} = 200$  Дж. Объем газа в точках 2 и 4 один и тот же, давление газа в точке 2 в два раза больше давления газа в точке 1.

**8.2.3.** На рисунке изображены  $pV$ -диаграммы двух процессов, проводимых над одним и тем же идеальным одноатомным газом.

Масса газа, участвующего в процессе 1 – 2, в  $k = 2$  раза больше, чем масса газа, с которым проводится процесс 3 – 4. Температура в точке 1 равна температуре в точке 3, а температура в точке 2 равна температуре в точке 4. Найти отношение  $n$  количеств теплоты, получаемых газом в процессах 1 – 2 и 3 – 4.

**8.2.4.** В теплоизолированном цилиндрическом сосуде под поршнем массой  $m$  находится идеальный одноатомный газ. Расстояние между поршнем и дном сосуда равно  $x$ . На какое расстояние  $\Delta x$  опустится поршень, если сверху положить на него груз массой  $\Delta m$ ? Считать, что  $\Delta m \ll m$ , начальное и конечное положения поршня являются положениями равновесия, трение поршня о стенки сосуда пренебрежимо мало. Атмосферное давление не учитывать.

**8.2.5.** Трубка с поперечным сечением  $S$ , заполненная водяным паром под давлением  $p$ , запаяна с двух концов и расположена горизонтально. При этом находящийся в трубке поршень делит трубку

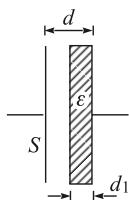


на две равных части. Трубку ставят вертикально, в результате чего поршень смещается, и объем под ним уменьшается в четыре раза. Найти массу поршня  $m$ , если давление насыщенного водяного пара равно  $2p$ . Трением и толщиной поршня пренебречь, температуру пара считать постоянной. Ускорение свободного падения  $g$ .

### 8.3. Электродинамика

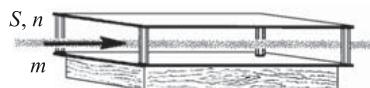
**8.3.1.** На горизонтальной непроводящей шероховатой поверхности закреплен маленький шарик, имеющий заряд  $q$ . Маленький брускок массой  $m$ , несущий такой же по знаку и величине заряд, помещают на эту поверхность на расстоянии  $l_0$  от закрепленного заряженного шарика. Какой путь  $l$  пройдет брускок до остановки, если его отпустить без начальной скорости? Коэффициент трения между бруском и поверхностью  $\mu$ . Электрическая постоянная  $\varepsilon_0$ , ускорение свободного падения  $g$ .

**8.3.2.** В плоском воздушном конденсаторе к одной из обкладок придинута вплотную пластина слюды толщиной  $d_1 = 0,3$  мм. Диэлек-



трическая проницаемость слюды  $\varepsilon = 7$ , площадь обкладок конденсатора  $S = 200 \text{ cm}^2$ , расстояние между ними  $d = 0,5$  мм. Определить емкость конденсатора. Электрическая постоянная  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \Phi/\text{м}$ . Краевыми эффектами пренебречь.

**8.3.3.** Плоский конденсатор представляет собой две параллельные металлические пластины, жестко скрепленные между собой изолирующими стержнями. Конденсатор находится в вакууме и покоятся на горизонтальной подставке. Между пластинами конденсатора распространяется пучок электронов, скорость которых  $v_0$  направлена горизонтально. На какую величину  $\Delta N$  изменится сила реакции подставки, если на конденсатор подать напряжение, при котором пучок на выходе из конденсатора отклонится от первоначального направления на угол  $\alpha$ ? Поле конденсатора считать однородным, действием силы тяжести на электроны пренебречь. Поперечное сечение пучка и концентрация электронов в пучке на выходе в конденсатор равны соответственно  $S$  и  $n$ . Масса электрона  $m$ .



**8.3.4.** Непроводящая трубка, открытая с обоих концов, расположена горизонтально. В трубке находятся два металлических поршня площадью  $S$  каждый, способные перемещаться без трения. Пространство между поршнями заполнено воздухом при атмосферном давлении, причем расстояние между поршнями мало по сравнению с их диаметром. Во сколько раз  $n$  уменьшится расстояние между поршнями, если зарядить их разноименными зарядами  $q$  и  $-q$ ? Температура воздуха постоянна. Атмосферное давление  $p_0$ . Электрическое поле между поршнями считать однородным. Электрическая постоянная  $\epsilon_0$ .

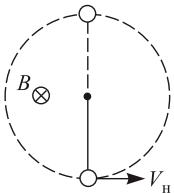
**8.3.5.** Стеклянная трубка, открытая с обеих сторон, расположена горизонтально внутри барокамеры, где давление воздуха составляет  $p_0 = 450$  Па. Внутрь трубы помещены два тонких металлических поршня, способных скользить без трения. Поршни находятся в равновесии, когда расстояние между ними  $d_0 = 2$  см. С помощью гибких проводников поршни подсоединяют к клеммам высоковольтного источника с напряжением  $U = 60$  кВ. Каково будет расстояние  $d$  между поршнями после того, как они займут новое положение равновесия? Электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12}$  Ф/м. Температура воздуха не изменяется. Электрическое поле между поршнями считать однородным.

**8.3.6.** В стеклянной трубке, запаянной с обеих сторон, находится идеальный газ под давлением  $p_0 = 500$  Па. В один из торцов трубы вмонтирован электрод, занимающий все сечение трубы  $S = 100$  см<sup>2</sup>. Внутри трубы может перемещаться без трения поршень, несущий электрический заряд  $Q_1 = 6 \cdot 10^{-7}$  Кл. Первоначально поршень делит трубку на две равные части. Какой положительный заряд  $Q_2$  нужно сообщить электроду для того, чтобы поршень стал делить трубку в отношении 3 : 1? Электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12}$  Ф/м. Температура газа не изменяется. Электрическое поле между поршнем и электродом считать однородным. Толщиной поршня пренебречь.

**8.3.7.** Аккумулятор отдает во внешнюю цепь мощность  $N_1 = 10$  Вт при токе  $I_1 = 4$  А. Какую мощность  $N_2$  отдаст аккумулятор во внешнюю цепь при токе  $I_2 = 8$  А? Внутреннее сопротивление аккумулятора  $r = 0,1$  Ом.

**8.3.8.** Генератор постоянного тока соединен с потребителем (полезной нагрузкой) линией электропередачи, имеющей сопротивление  $R = 10$  Ом. ЭДС генератора  $\mathcal{E} = 100$  В, его мощность  $N = 10$  кВт. Определить отношение  $\eta$  мощности, выделяемой в полезной нагрузке, к мощности генератора. Внутренним сопротивлением генератора пренебречь.

**8.3.9.** Маленький шарик массой  $m$ , несущий положительный заряд  $q$ , подвешен на нити длиной  $l$  и помещен в однородное магнитное поле с индукцией  $B$ , направленной горизонтально от нас. Сообщив шарику некоторую скорость, направление которой показано на рисунке,

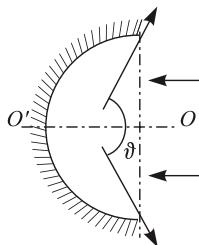


его приводят в движение по окружности в вертикальной плоскости, перпендикулярной магнитному полю и совпадающей с плоскостью рисунка. При какой минимальной скорости  $v_{\min}$  шарика в нижней точке он сможет совершить полный оборот?

## 8.4. Оптика

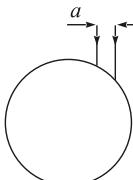
**8.4.1.** Деревянный куб с длиной ребра  $a = 10$  см закреплен так, что одна из его вершин находится на горизонтальной плоскости, а центр куба лежит на одной вертикали с этой вершиной. Сверху на куб вертикально падает широкий параллельный пучок света. Определить площадь тени  $S$ , которую куб отбрасывает на горизонтальную плоскость. Дифракцией света пренебречь.

**8.4.2.** На цилиндрическое зеркало, поперечное сечение которого представляет собой полуокружность, направили параллельно оси  $OO'$  и симметрично относительно нее параллельный пучок света,



ширина которого равна радиусу зеркала (см. рисунок). Найти наибольший угол  $\vartheta$  между лучами света, отраженного от зеркала.

**8.4.3.** На поверхность зеркального шара падают два параллельных луча света, лежащие в плоскости, проходящей через его центр.



Расстояние между лучами  $a = 1$  см. Известно, что при отражении от поверхности шара один из лучей отклоняется от первоначального направления на угол  $\alpha = 90^\circ$ , а другой — на угол  $\beta = 60^\circ$ . Найти радиус шара  $R$ .

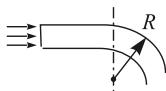
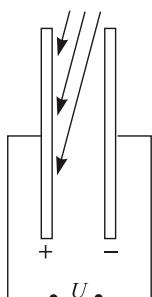
**8.4.4.** Плоскопараллельная пластинка толщиной  $d = 1$  мм изготовлена из прозрачной пластмассы с показателем преломления  $n = 1,5$ .

Изгибают пластинку, ей придают форму, изображенную на рисунке, где показано поперечное сечение пластинки. Перпендикулярно торцу пластинки на него падает в плоскости рисунка параллельный пучок света. Определить минимально допустимый радиус кривизны  $R_{\min}$  изгиба пластинки, при котором свет не будет выходить из пластинки через ее боковую поверхность. Радиус кривизны определять по внешней (по отношению к направлению изгиба) поверхности пластинки.

**8.4.5.** В толще стекла с показателем преломления  $n = 1,5$  имеется сферическая полость, заполненная воздухом. Луч света, распространяющийся в стекле, падает на полость на малом расстоянии  $a$  от оси  $OO'$ , проходящей через центр полости параллельно лучу. На каком расстоянии  $b$  от этой оси находится точка выхода луча из полости? Углы падения и преломления считать малыми.

**8.4.6.** Две параллельные друг другу металлические пластины, расстояние между которыми  $d = 1$  см много меньше их размеров,

подключены к источнику с напряжением  $U = 12,5$  В. Сначала положительно заряженную пластину облучают светом частотой  $\nu_1 = 7 \cdot 10^{14}$  Гц, а затем — светом частотой  $\nu_2 = 4 \cdot 10^{14}$  Гц. На какую величину  $\Delta l$  изменяется минимальное расстояние, на которое фотоэлектроны могут приблизиться к поверхности отрицательно заряженной пластины, при изменении частоты света  $\nu_1$  от  $\nu_2$  до  $\nu_1$ ? Частота света, соответствующая красной границе фотоэффекта, меньше  $\nu_2$ . Элементарный заряд  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  Кл, постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж·с.



# Глава 9

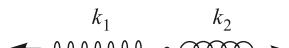
## ЗАДАЧИ 2005 ГОДА

### 9.1. Механика

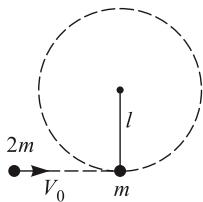
**9.1.1.** Беговые дорожки легкоатлетического стадиона состоят из двух прямолинейных участков, соединенных двумя полуокружностями. Ширина дорожки  $d = 1$  м. Линия старта проведена перпендикулярно прямолинейному участку дорожек и совпадает с линией финиша. Два бегуна, находящиеся на первой (внутренней) и второй дорожках, одновременно принимают старт и пробегают до финиша один круг. Они разгоняются равноускоренно, пока не наберут максимальную скорость  $v_0 = 8$  м/с, одинаковую для обоих бегунов, с которой и пробегают оставшуюся часть дистанции. На сколько отличаются времена разгона бегунов, если, двигаясь каждый по середине своей дорожки, они финишируют одновременно?

**9.1.2.** Беговые дорожки легкоатлетического стадиона состоят из двух прямолинейных участков, соединенных двумя полуокружностями. Ширина дорожки  $d = 1$  м. Линия старта проведена перпендикулярно прямолинейному участку дорожек и совпадает с линией финиша. Два бегуна, находящиеся на первой (внутренней) и второй дорожках, одновременно принимают старт и пробегают до финиша один круг. Они разгоняются равноускоренно, пока не наберут максимальную скорость  $v_0 = 8$  м/с, одинаковую для обоих бегунов, с которой и пробегают каждый по середине своей дорожки оставшуюся часть дистанции, финишируя одновременно. Чему равно отношение  $n$  времени разгона второго бегуна ко времени разгона первого, если полная длина первой дорожки  $S_1 = 400$  м, а время, за которое спортсмены пробегают всю дистанцию,  $\tau = 52$  с?

**9.1.3.** Две пружины, соединенные как показано на рисунке, имеют жесткости  $k_1 = 15$  Н/м и  $k_2 = 10$  Н/м. Пружины растянули за свободные концы в разные стороны, совершив работу  $A = 1$  Дж. Каковы потенциальные энергии  $E_1$  и  $E_2$  деформации каждой из пружин по отдельности?



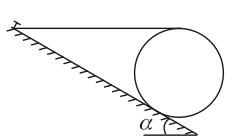
**9.1.4.** Шарик массой  $m$  подвешен на невесомой нерастяжимой нити длиной  $l = 1$  м. В него ударяется шарик массой  $2m$ , летящий в



плоскости рисунка со скоростью  $v_0$  так, что вектор скорости направлен горизонтально вдоль линии, соединяющей центры шаров. Какой должна быть скорость  $v_0$ , чтобы после удара шарик массой  $m$  совершил полный оборот по окружности в вертикальной плоскости? Удар считать абсолютно упругим, силы трения не учитывать. Ускорение свободного падения  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .

- 9.1.5.** Невесомый стержень лежит горизонтально на двух опорах  $A$  и  $B$ . В точке  $C$  к стержню приложена сила  $F$ , направленная вертикально вниз. Определить величину этой силы, если известно, что расстояние  $CB$  в  $k = 2,5$  раза превышает расстояние  $AC$ , а нагрузка на опору  $A$  превышает нагрузку на опору  $B$  на величину  $f = 30 \text{ Н}$ .

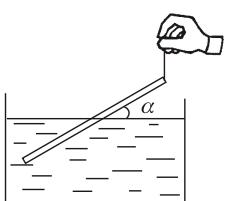
- 9.1.6.** Сплошной однородный цилиндр массой  $m$  располагается на шероховатой наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол  $\alpha$ .



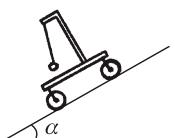
На цилиндр намотана нить, которая закреплена на наклонной плоскости так, что ее отрезок между цилиндром и точкой закрепления горизонтален. Найти силу  $F$ , с которой цилиндр действует на плоскость, если известно, что он находится в равновесии? Ускорение свободного падения  $g$ .

- 9.1.7.** Тонкую деревянную палочку подвесили за один из концов на нити, а другой конец опустили в воду. При этом палочка оказалась

наклоненной к горизонту на угол  $\alpha = 30^\circ$ , а длина ее части, погруженной в воду, составила половину длины палочки. Какую работу  $A$  нужно совершить, чтобы вытащить за нить палочку из воды? Длина палочки  $L$ , площадь сечения  $S$ , плотность воды  $\rho_w$ , ускорение свободного падения  $g$ .



- 9.1.8.** Математический маятник длиной  $l = 0,5 \text{ м}$  подведен на штативе, закрепленном на тележке, которая скатывается с наклонной плоскости. Найти период  $T$  малых колебаний маятника относительно тележки. Считать, что масса тележки значительно больше массы



маятника, а силы трения пренебрежимо малы. Ускорение свободного падения  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ . Угол наклона плоскости к горизонту  $\alpha = 30^\circ$ .

**9.1.9.** Два одинаковых шарика массой  $m$  каждый, связанные пружиной жесткостью  $k$  и длиной  $l$ , лежат неподвижно на гладком горизонтальном столе. Третий такой же шарик движется со скоростью  $v_0$  по линии, соединяющей центры шариков, связанных пружиной, и совершает упругое соударение с одним из них.



Определить максимальное и минимальное расстояния между шариками, связанными пружиной, при их дальнейшем движении. Принять, что  $v_0 < l\sqrt{2k/m}$ . Массой пружины, временем соударения и трением пренебречь.

**9.1.10.** Груз массой  $M$  подвешен на пружине. Удерживая груз в положении равновесия, на него кладут брусков массой  $m$ , а затем отпускают. С какой максимальной силой  $F_{\max}$  брусков будет действовать на груз в процессе движения? Ускорение свободного падения  $g$ . Сопротивлением воздуха пренебречь.

## 9.2. Молекулярная физика и термодинамика

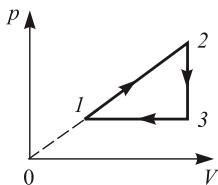
**9.2.1.** Плотность смеси азота и кислорода при температуре  $t = 17^\circ\text{C}$  и давлении  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$  равна  $\rho = 1,2 \text{ кг/м}^3$ . Найдите концентрации  $n_1$  и  $n_2$  молекул азота и кислорода в смеси. Молярная масса азота  $M_1 = 28 \text{ г/моль}$ , кислорода  $M_2 = 32 \text{ г/моль}$ . Постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ , универсальная газовая постоянная  $R = 8,31 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$ .

**9.2.2.** Тонкая сферическая оболочка воздушного шара изготовлена из однородного материала, масса единицы площади которого  $\sigma = 1 \text{ кг/м}^2$ . Шар наполнен гелием при атмосферном давлении  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ . Какой минимальный радиус  $r_{\min}$  должен иметь шар, чтобы он начал подниматься вверх? Температуры гелия и окружающего воздуха одинаковы и равны  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ . Молярные массы гелия и воздуха соответственно  $M_{\text{He}} = 4 \text{ г/моль}$  и  $M_{\text{В}} = 29 \text{ г/моль}$ . Универсальная газовая постоянная  $R = 8,31 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$ .

**9.2.3.** Внутри вертикально расположенного цилиндра, воздух из которого откачен, находится тонкий массивный поршень. Под поршень ввели смесь водорода и гелия, в результате чего поршень поднялся до середины цилиндра. Поскольку материал, из которого изготовлен поршень, оказался проницаемым для гелия, поршень начал медленно опускаться. Спустя достаточно большое время поршень занял окончательное положение равновесия на высоте, составляющей  $1/3$  высоты цилиндра. Найти отношение  $k$  масс водорода и гелия в смеси в перво-

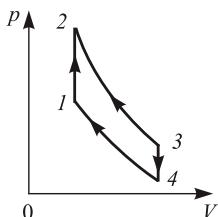
начальный момент. Молярная масса водорода  $M_1 = 2$  г/моль, молярная масса гелия  $M_2 = 4$  г/моль. Температуру считать постоянной.

**9.2.4.** В тепловом двигателе, рабочим телом которого является идеальный одноатомный газ, совершается циклический процесс, изображенный на рисунке.



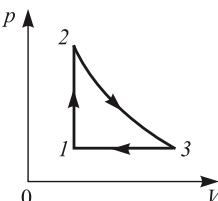
Максимальный объем газа в этом процессе в  $n = 3$  раза больше минимального объема. Найдите коэффициент полезного действия двигателя  $\eta$ .

**9.2.5.** В тепловом двигателе, рабочим телом которого является идеальный одноатомный газ, совершается циклический процесс, изображенный на рисунке, где участок 2 – 3 — адиабатическое расширение, а



участок 4 – 1 — адиабатическое сжатие. Найти коэффициент полезного действия двигателя  $\eta$ , если известно, что температура газа при адиабатическом расширении уменьшается в  $n$  раз, а при адиабатическом сжатии увеличивается в  $n$  раз, где  $n = 1,5$ .

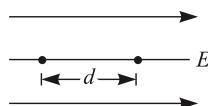
**9.2.6.** В тепловом двигателе, рабочим телом которого является один моль идеального одноатомного газа, совершается циклический



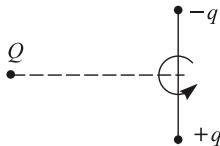
процесс, изображенный на рисунке, где участок 2 – 3 — изотермическое расширение. Найти работу газа на участке 2 – 3, если коэффициент полезного действия двигателя  $\eta = 20\%$ , а разность между максимальной и минимальной температурами газа  $\Delta T = 100$  К.

## 9.3. Электродинамика

**9.3.1.** Две заряженные частицы помещены в однородное электрическое поле напряженностью  $E$ . Частица массой  $m$  несет отрицательный заряд  $-q$ , а частица массой  $M$  — положительный заряд  $Q$ . На каком расстоянии  $d$  друг от друга нужно расположить частицы, чтобы при их движении из состояния покоя расстояние между частицами оставалось неизменным? Электрическая постоянная  $\epsilon_0$ .

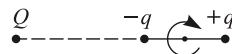


**9.3.2.** Два маленьких шарика одинаковой массой  $m$ , несущие заряды  $q$  и  $-q$ , закреплены на концах невесомого непроводящего стержня длиной  $2l$ . Система находится в электрическом поле неподвижного точечного заряда  $Q$ , удаленного от центра стержня на расстояние  $L$ .

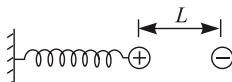


Первоначально стержень удерживают так, что он располагается перпендикулярно линии, соединяющей его центр и заряд  $Q$  (см. рисунок). Затем стержень отпускают, и он начинает вращаться без трения вокруг оси, проходящей через его центр и перпендикулярной плоскости рисунка. Определить угловую скорость вращения стержня  $\omega$  в тот момент, когда она достигнет максимального значения.

**9.3.3.** Два маленьких шарика, несущие заряды  $q$  и  $-q$ , закреплены на концах невесомого стержня длиной  $2l$ . Система находится в электрическом поле неподвижного точечного заряда  $Q$ , удаленного от центра стержня на расстояние  $L$ . Первоначальное расположение шариков показано на рисунке. Какую работу  $A$  нужно совершить, чтобы повернуть стержень на  $180^\circ$  вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр? Силу тяжести не учитывать.



**9.3.4.** Маленький шарик, несущий заряд  $q$ , закреплен на пружине жесткостью  $k$ . На расстоянии  $L$  от этого шарика удерживают другой такой же шарик с зарядом, равным  $-q$ . Какую работу  $A$  нужно совершить, чтобы, медленно отодвигая второй заряд от первого, увеличить расстояние между ними в 2 раза? Действием силы тяжести пренебречь. Электрическая постоянная  $\epsilon_0$ .



**9.3.5.** На длинной нити подвешен маленький шарик массой  $m = 10$  г, несущий заряд  $q = 10^{-7}$  Кл. В некоторый момент включают горизонтально направленное однородное электрическое поле напряженностью  $E = 5 \cdot 10^4$  В/м. На какой максимальный угол  $\alpha_{\max}$  отклонится после этого нить? Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**9.3.6.** Два одноименно заряженных металлических шарика находятся в вакууме на расстоянии, намного превышающем радиусы обоих шариков. Радиус и заряд первого шарика равны, соответственно,  $R_1 = 4$  см и  $Q_1 = 10^{-8}$  Кл. Чему равны радиус  $R_2$  и начальный заряд  $Q_2$  второго шарика, если известно, что после соединения шариков тонким проводом напряженность электрического поля вблизи поверхности первого шарика изменилась в  $k_1 = 4$  раза, а вблизи второго — в  $k_2 = 0,5$  раза.

**9.3.7.** Радиусы двух проводящих концентрических сфер отличаются в 2 раза. Внутренняя сфера заряжена отрицательным зарядом, а внешняя — положительным, причем величина заряда внешней сферы в три раза больше модуля заряда внутренней сферы. Во сколько раз изменится потенциал внутренней сферы, если эти сферы соединить проводником?

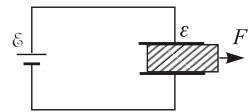
**9.3.8.** Герметично закрытый плоский конденсатор заполнен диэлектрической жидкостью, занимающей половину его объема. Диэлектрическая проницаемость жидкости  $\varepsilon$ . Вначале емкость конденсатора была измерена при вертикальном положении пластин. Затем его повернули так, что свободная поверхность жидкости стала параллельна пластинам. Чему равно отношение  $n$  емкостей конденсатора в этих двух положениях?

**9.3.9.** Плоский конденсатор заполнен веществом с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 3$  и удельным сопротивлением  $\rho = 10^8$  Ом·м. Найти сопротивление  $R$  между обкладками конденсатора, если его емкость равна  $C = 100$  пФ. Электрическая постоянная  $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$  Ф/м.

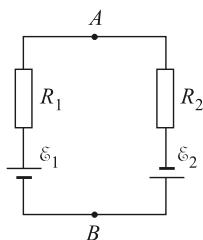
**9.3.10.** Заряженный конденсатор емкостью  $C$  замыкают на реостат, сопротивление которого плавно изменяется от  $R_0$  до нуля. По какому закону нужно менять во времени сопротивление реостата, чтобы сила тока через него оставалась постоянной вплоть до полной разрядки конденсатора? Сопротивление реостата в начале разрядки равно  $R_0$ .

**9.3.11.** Два плоских воздушных конденсатора емкостями  $C_1 = 100$  мКФ и  $C_2 = 200$  мКФ соединены последовательно и подключены к источнику с ЭДС  $\mathcal{E} = 60$  В. Какую работу совершил источник, если пространство между пластинами конденсатора  $C_1$  заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 4$ ?

**9.3.12.** Плоский воздушный конденсатор емкостью  $C_0$  с квадратными обкладками, сторона каждой из которых равна  $l$ , подключен к источнику с ЭДС  $\mathcal{E}$ . В конденсатор вставляют пластинку с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , занимающую все пространство между обкладками, а затем выдвигают ее из конденсатора на небольшое расстояние, как показано на рисунке. Какую силу  $F$  нужно приложить к пластинке, чтобы удерживать ее в таком положении?



**9.3.13.** В схеме, изображенной на рисунке, напряжение между точками  $A$  и  $B$  равно  $U$ , а сопротивления резисторов  $R_1$  и  $R_2$  неизвестны. Каким будет напряжение  $V$  между точками  $A$  и  $B$ , если поменять ме-



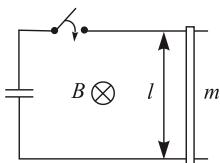
стами резисторы  $R_1$  и  $R_2$ ? ЭДС источников равны  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$ , внутренними сопротивлениями источников пренебречь.

**9.3.14.** Лампочка накаливания при подключении к источнику напряжением  $U_1 = 12$  В потребляет мощность  $W_1 = 48$  Вт и имеет температуру нити  $t_1 = 2000^\circ\text{C}$ . При снижении напряжения до величины  $U_2 = 6$  В температура нити уменьшилась до  $t_2 = 1000^\circ\text{C}$ , а потребляемая мощность стала равной  $W_2 = 22$  Вт. Определить температурный коэффициент сопротивления нити лампочки  $\alpha$ .

**9.3.15.** Генератор постоянного тока соединен с потребителем (поплавкой нагрузкой) линией электропередачи, сопротивление которой равно  $r = 1$  Ом. Какая максимальная мощность  $P_{\max}$  может быть выделена в нагрузке, если ЭДС генератора  $\mathcal{E} = 220$  В? Внутренним сопротивлением генератора пренебречь.

**9.3.16.** Самолет летит горизонтально, держа курс строго на север при сильном западном ветре, имеющем скорость  $u = 40$  м/с. Скорость самолета относительно воздуха  $v = 720$  км/ч. Чему равна разность потенциалов  $\Delta U$  между концами крыльев самолета, если размах крыльев составляет  $L = 50$  м, а вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли равна  $B = 5 \cdot 10^{-5}$  Тл? Ширина концов крыльев пренебрежимо мала.

**9.3.17.** Металлический стержень массой  $m$  лежит на двух проводящих рейках, расположенных в горизонтальной плоскости как показано



на рисунке. Рейки через ключ подсоединенны к пластинам конденсатора, а вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией  $B$ , направленной вертикально. В начальный момент заряд на конденсаторе равен  $q_0$ , ключ разомкнут, а стержень покоится. Затем ключ замыкают. Определить заряд на конденсаторе  $q$  в момент, когда скорость стержня достигнет величины  $v$ . Расстояние между рейками  $l$ . Индуктивностью цепи, а также силами трения пренебречь.

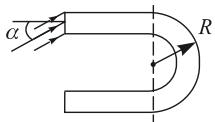
**9.3.18.** Согласно модели Дж. Дж. Томсона (1903 г.), атом водорода представляет собой положительно заряженный шар, внутри которого находится отрицательный точечный заряд — электрон, причем в невозбужденном атоме электрон покоится в центре шара. Предположим, что электрон сместили от центра шара на некоторое расстояние, не превышающее радиус шара, и предоставили самому себе. Определить период  $T$  возникших при этом свободных колебаний электрона, пренебрегая потерями на излучение. Радиус шара принять равным  $R = 3 \cdot 10^{-10}$  м, а его заряд  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл считать равномерно распределенным по объему. Масса электрона  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг, электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м.

## 9.4. Оптика

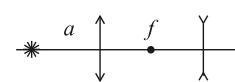
**9.4.1.** Плоскопараллельная пластинка толщиной  $d = 2$  мм изготовлена из прозрачной пластмассы с показателем преломления  $n = \sqrt{29}/4 \approx 1,35$ . Изгибают пластинку, ей придают форму, изображенную на рисунке, где показано поперечное сечение пластинки. Радиус кривизны изогнутого участка пластинки равен  $R = 1$  см. Под каким максимальным углом  $\alpha_{max}$  может падать световой пучок на торец пластинки в плоскости рисунка, чтобы свет не выходил из пластинки через ее боковую поверхность?

**9.4.2.** На некотором расстоянии от стеклянного шара находится точечный источник света, дающий узкий световой пучок, ось которого проходит через центр шара. При каких значениях показателя преломления стекла  $n$  изображение источника будет находиться вне шара независимо от расстояния, на котором находится источник?

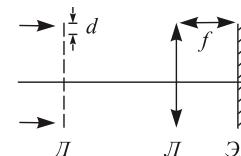
**9.4.3.** Узкий световой пучок падает на тонкую собирающую линзу параллельно ее главной оптической оси и образует светлое пятно на экране, параллельном плоскости линзы и расположенному за ней на расстоянии  $l$ . Когда линзу передвинули на расстояние  $b$  в направлении, перпендикулярном ее главной оптической оси, центр пятна сместился на величину  $\Delta$ . Найти фокусное расстояние линзы  $f$ .



**9.4.4.** Собирающая и рассеивающая линзы имеют одинаковые по величине фокусные расстояния  $f$  и расположены так, что задний фокус собирающей линзы совмещен с передним фокусом рассеивающей. На каком расстоянии  $a$  от собирающей линзы следует поместить точечный источник света, чтобы после рассеивающей линзы получить пучок параллельных лучей?



**9.4.5.** С помощью установки, схема которой показана на рисунке, наблюдают дифракцию параллельного пучка белого света на дифракционной решетке  $D$ , расположенной перпендикулярно оси пучка. При этом на экране  $\mathcal{E}$ , установленном в фокальной плоскости тонкой собирающей линзы  $L$ , видны две светлые полосы, вызванные наложением спектральных компонент с длинами волн  $\lambda_1 = 460$  нм и  $\lambda_2 = 575$  нм. Эти полосы расположены симметрично относительно главной оптической оси линзы на расстоянии  $l = 30$  см друг от друга. Найдите минимальный период решетки  $d_{\min}$ , при котором наблюдается эта картина, если фокусное расстояние линзы  $f = 20$  см.



## Ответы

### 1. Механика

#### 1.1. Кинематика

$$1.1.13. V_1 = V \sqrt{1 - \frac{l_1}{l}} = V \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 280 \text{ м/c.}$$

$$1.1.14. a = \frac{8L(t_2 - t_1)^2}{(2t_1t_2 + t_2^2 - t_1^2)^2} \cong 0,25 \text{ м/c}^2.$$

$$1.1.15. S = \frac{V_1 V_2 (2t_1 + t_2)}{2(V_2 - V_1)} = 4800 \text{ м.}$$

$$1.1.16. t_0 = \frac{\tau}{g} \sqrt{a^2 + ag} = 2,45 \text{ мин.}$$

$$1.1.17. \tau = \frac{h}{V} - \frac{V}{g} \left( \sqrt{1 + \frac{2gh}{V^2}} - 1 \right) = 3,2 \text{ с.}$$

$$1.1.18. \tau = \left( \frac{a}{g} + \sqrt{\frac{a}{g} \left( 1 + \frac{a}{g} \right)} \right) t_0 = 630 \text{ с} \cong 10,5 \text{ мин.}$$

$$1.1.19. \tau = \frac{V_0}{g} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2(H-h)g}{V_0^2}} - 2 \sqrt{1 - \frac{2gh}{V_0^2}} \right) = 0,8 \text{ с.}$$

$$1.1.20. \tau = \frac{d}{gt_0} - \frac{t_0}{2} = 1,5 \text{ с.}$$

$$1.1.21. S_1 = \frac{V_1 S}{V_1 + V_2} - \frac{g\alpha S^2}{2(V_1 + V_2)^2} = 60 \text{ см}, S_2 = 70 \text{ см.}$$

$$1.1.22. h = l \operatorname{tg} \alpha - \frac{gl^2}{2V^2 \cos^2 \alpha} \cong 2 \text{ м.}$$

$$1.1.23. S = \frac{V_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{2g(H-h)}{V_0^2 \sin^2 \alpha}} \right] \cong 1,81 \text{ м.}$$

$$1.1.24. \alpha = \operatorname{arctg}(4n) = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = 60^\circ.$$

$$1.1.25. L_2 = L_1 \frac{\sin 2\alpha_2}{\sin 2\alpha_1} = 10 \text{ км.}$$

$$1.1.26. l = V_0 \tau \sqrt{1 - \frac{3g\tau}{V_0} \sin \alpha + \left( \frac{3g\tau}{2V_0} \right)^2} \cong 1877 \text{ м.}$$

$$1.1.27. \beta = \arcsin \left( \sqrt{\frac{h}{h+H}} \cos \alpha \right) = 30^\circ.$$

$$1.1.28. \alpha = \arccos \left( \cos \beta \sqrt{1 + \frac{2g\Delta h}{V_0^2}} \right) = 45^\circ.$$

$$1.1.29. S = \frac{4h}{\cos \alpha} (\sin 2\alpha \cos 2\alpha + \tan \alpha \sin^2 2\alpha) = 8h \sin \alpha = \\ = 4h\sqrt{2} \cong 2,83 \text{ м.}$$

$$1.1.30. S = 2\sqrt{R^2 + \frac{2hV^2}{g}} \sin \left( \frac{V\tau}{2R} \right) \cong 2 \text{ км.}$$

$$1.1.31. V = \frac{V_0}{1 - \tan \alpha} = \frac{3V_0}{3 - \sqrt{3}} \cong 2,36 \text{ м/с.}$$

$$1.1.32. V_2 = V_1 \frac{\cos(180^\circ - \alpha)}{\cos \beta} = V_1 \sqrt{3} \cong 52 \text{ км/ч.}$$

## 1.2. Динамика

$$1.2.16. \mu = \frac{(\beta - \alpha)}{\alpha(\beta - 1)} \cdot \frac{F}{mg} \cong 0,25.$$

$$1.2.17. \beta = \operatorname{arctg} \left( \frac{\cos \alpha}{mg/F - \sin \alpha} \right).$$

$$1.2.18. a = g(\sin \beta - \tan \alpha \cos \beta) = g(2 - \sqrt{3}) \cong 2,63 \text{ м/с}^2.$$

$$1.2.19. F_1 = F \left( 2\frac{g}{a} \sin \alpha - 1 \right) = 90 \text{ Н.}$$

$$1.2.20. S = \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{F}{m} \cdot t_1^2 \cong 39,5 \text{ м.}$$

$$1.2.21. F = (m_1 + m_2)a + 2\mu m_2 g \cong 24,5 \text{ Н.}$$

$$1.2.22. F_{\min} = \mu mg \left( 1 + \frac{m}{M} \right) \cong 6,1 \text{ Н.}$$

$$1.2.23. \Delta l > \frac{(M+m)}{k} \cdot \mu g.$$

$$1.2.24. \tau = \sqrt{\frac{l}{g} \cdot \frac{(m_1 + m_2)}{(m_1 - m_2)}} = 0,5 \text{ с.}$$

$$1.2.25. \Delta m = \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} \cong 16,7 \text{ г.}$$

$$1.2.26. F = \frac{2Mm}{2M + m} g = 0,95 \text{ Н.}$$

$$1.2.27. F = mg(1 + \sin \alpha) \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \cong 1,3 \text{ Н.}$$

$$1.2.28. T = m \sqrt{g^2 + \left( \frac{V^2}{R} \right)^2} = 1 \text{ Н.}$$

$$1.2.29. \quad T = 4\pi R \sqrt{\frac{R}{GM}}.$$

$$1.2.30. \quad R = \sqrt[3]{\frac{gr^2T^2}{4\pi^2}}.$$

$$1.2.31. \quad T = 2\pi \left(1 + \frac{h}{R}\right) \sqrt{\frac{R}{g[(1+h/R)^2 - 1]}}.$$

$$1.2.32. \quad m = \frac{T_2 - T_1}{6g} \cong 0,017 \text{ кг.}$$

### 1.3. Законы сохранения в механике

$$1.3.19. \quad V_2 = \frac{1}{m-m_1} \sqrt{m^2V^2 + m_1^2(V_1^2 - 2gh)} \cong 30,6 \text{ м/с.}$$

$$1.3.20. \quad p = \frac{p_0}{\sqrt{1+16/\alpha^2}} = \frac{p_0}{\sqrt{5}} \cong 447 \text{ кГм/с.}$$

$$1.3.21. \quad \Delta p = |m_2 - m_1| \sqrt{\frac{2gh|m_2 - m_1|}{m_2 + m_1}}.$$

$$1.3.22. \quad \beta = \arccos \left[ 1 - \frac{m^2V^2 \cos^2 \alpha}{2(m+M)^2 gl} \right] \cong 60^\circ.$$

$$1.3.23. \quad V = \sqrt{gh(2 - \mu \operatorname{ctg} \alpha)} \cong 6,1 \text{ м/с.}$$

$$1.3.24. \quad h = H \cdot \frac{1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha} \cong 0,33 \text{ м.}$$

$$1.3.25. \quad Q = \frac{m}{2}(V_1 - V_2) \cdot \left[ V_1 + V_2 - \frac{m}{M}(V_1 - V_2) \right] = 2820 \text{ Дж.}$$

$$1.3.26. \quad V = \frac{\Delta l}{m} \sqrt{(M+m)k} = 600 \text{ м/с.}$$

$$1.3.27. \quad V = m \sqrt{\frac{2gR}{M(m+M)}} \cong 11,9 \text{ см/с.}$$

$$1.3.28. \quad A = M \left(1 + \frac{M}{m}\right) \mu g S = 29,4 \text{ Дж.}$$

$$1.3.29. \quad S = 4H \sqrt{\frac{A}{mgH} - 1} = 12 \text{ м.}$$

$$1.3.30. \quad V_1 = V \sqrt{\frac{M}{m+M}}.$$

$$1.3.31. \quad A = \frac{5}{4}mgl \cong 1,2 \text{ Дж.}$$

$$1.3.32. \quad Q = \frac{1}{4}m(V_1^2 + V_2^2) = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

$$1.3.33. \quad \Delta U = gh(M-m) + \mu gh(H-h) = 55 \text{ кДж.}$$

$$1.3.34. \quad A = \frac{2V_0}{(1+M/m)} \sqrt{\frac{M}{k}} = 0,4 \text{ м.}$$

$$1.3.35. \quad \alpha = \frac{1 + \sqrt{h/R}}{1 - \sqrt{h/R}} = 3.$$

### 1.4. Статика твердого тела

$$1.4.8. \quad x = L \sqrt{1 - \left(\frac{mg}{2F}\right)^2} = 1,6 \text{ м.}$$

$$1.4.9. \quad F = \left[ m_2 + \frac{ml/2 - (m+m_1)l_1}{l-l_1} \right] g = 3,85 \text{ Н.}$$

$$1.4.10. \quad l = \frac{2S}{1-\alpha} = 0,75 \text{ м.}$$

$$1.4.11. \quad \mu ge \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + 2 \sin^2 \alpha} = 0,5.$$

$$1.4.12. \quad \beta = \frac{m_1 \alpha}{m_2 + 2\alpha(m_1 - m_2)} = \frac{1}{3}.$$

$$1.4.13. \quad F = mg \sqrt{\sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{H}{L} \sin \alpha\right)^2}.$$

### 1.5. Механика жидкостей и газов

$$1.5.17. \quad m = M \frac{h}{\Delta h} = 10 \text{ кг.}$$

$$1.5.18. \quad M = V \frac{\rho_{\text{л}} \rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{л}} - \rho_{\text{в}}} = 9000 \text{ т.}$$

$$1.5.19. \quad \Delta h = \frac{m}{2\rho S} = 0,5 \text{ см.}$$

$$1.5.20. \quad h_2 = \frac{\rho_{\text{в}}}{3\rho} (h_1 + h_3) = 10 \text{ мм.}$$

$$1.5.21. \quad m = \rho Sh = 2 \text{ кг.}$$

$$1.5.22. \quad p_0 = \frac{Mg}{dh} - \rho g (h + 2d) \approx 0,9 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

$$1.5.23. \quad \alpha = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{5}{4}.$$

$$1.5.24. \quad \rho = \rho_1 \rho_2 \frac{h_2 - h_1}{\rho_2 h_2 - \rho_1 h_1} = 360 \text{ кг/м}^3.$$

$$1.5.25. \quad \rho = \frac{M \rho_0}{(M + \rho_0 Sh)} = 0,8 \text{ г/см}^3.$$

$$1.5.26. \quad \rho = \frac{1}{\alpha} \left(2 - \frac{1}{\alpha}\right) \rho_0 = 0,55 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

$$1.5.27. \quad p_2 = p_1 - \frac{\rho v_1^2}{2} \left( \frac{d_1^4}{d_2^4} - 1 \right) \approx 1,992 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

$$1.5.28. v = \frac{2d^2}{D} \sqrt{\frac{2F}{(D^4 - d^4) \pi \rho}}.$$

$$1.5.29. s_2 = s_1 \sqrt{\frac{H}{H+h}} \approx 0,85 \text{ см}^2.$$

$$1.5.30. h = \frac{H}{2}.$$

## 1.6. Механические колебания и волны

$$1.6.8. E = \frac{1}{2}mAa_{\max} = 0,3 \text{ Дж.}$$

$$1.6.9. F = m \left( g + \frac{4\pi^2 A}{T^2} \right) \cong 11,8 \text{ Н.}$$

$$1.6.10. T = 2\pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}.$$

$$1.6.11. T_1 = \left( 1 + \frac{h}{R} \right) T_0 = 1,001 \text{ с.}$$

1.6.12.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \pm qU/(md)}}$  (знак «+», когда нижняя обкладка заряжена отрицательно).

$$1.6.13. T = 2\pi \sqrt{\frac{h_1 h_2}{g(h_1 + h_2)}} \cong 0,31 \text{ с.}$$

## 2. Молекулярная физика и термодинамика

### 2.1. Основы молекулярно-кинетической теории

$$2.1.17. \Delta m = \frac{p_0 V M}{R} \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{T_1 T_2} = -2,4 \text{ кг.}$$

$$2.1.18. p = p_0 \frac{nv}{V} = 0,25 \text{ МПа.}$$

$$2.1.19. m_0 = \frac{mp_0 T_1}{p_0 T_1 - p_m T_0} = 30 \text{ г.}$$

$$2.1.20. t_1 = \frac{p_1(t + 273^\circ \text{C})}{p(1 - \beta)} - 273^\circ \text{C} = 90,6^\circ \text{C.}$$

$$2.1.21. \Delta V = \frac{m_1 \Delta m_2 V}{(m_1 + m_2) \cdot (m_1 + m_2 - \Delta m_2)} = 200 \text{ см}^3.$$

$$2.1.22. \Delta h = h_1 - h_0 = h_0 \left( \frac{Sp_0}{Sp_0 + mg} - 1 \right) = -8,9 \text{ см.}$$

$$2.1.23. T = \frac{Ph(H-h)}{R\nu(H-2h)} = 310,5 \text{ K} = 37,5^\circ \text{C.}$$

$$2.1.24. \alpha = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{(L - H_2 + H_1) \cdot (L - H_1)H_2}{(L - H_1 + H_2) \cdot (L - H_2)H_1} = 0,7.$$

$$2.1.25. h = \frac{m(T_2 - T_1)R}{M(Sp_0 + M_0g)} = 41,5 \text{ см.}$$

$$2.1.26. \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^2 + 2} = \sqrt{2}.$$

$$2.1.27. \Delta m = \frac{pVM_{\text{H}_2}}{R(t+273 \text{ }^{\circ}\text{C})} - m \frac{M_{\text{H}_2}}{M_{\text{H}_2\text{O}}} \cong 77 \text{ г.}$$

## 2.2. Элементы термодинамики

$$2.2.15. A = \frac{7}{4}p_0V_0 = 175 \text{ Дж.}$$

$$2.2.16. \Delta h = \frac{2Q}{5mg} = 0,1 \text{ м.}$$

$$2.2.17. \Delta Q = (p_1 - p_2)(V_1 - V_2) = 8 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

$$2.2.18. \Delta Q = \frac{1}{2}[p_1(V_2 - 4V_1) + p_2(V_3 - V_1) + p_3(4V_3 - V_2)] = -20 \text{ Дж.}$$

$$2.2.19. Q = \frac{m}{M} \cdot \frac{R}{2}(3T_1 - 5T_2) + p_0V_0 = 11,1 \text{ кДж.}$$

$$2.2.20. p = \frac{(m_1T_1 + m_2T_2)R}{(V_1 + V_2)M}.$$

$$2.2.21. \Delta p = \frac{m}{M} \cdot \frac{RT}{V} = 1,66 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

$$2.2.22. A = p_2V_2 + \frac{3}{2}p_1V_2 - \frac{5}{2}p_2V_1 = 18,8 \text{ кДж.}$$

$$2.2.23. A = \frac{3}{2}R(m^2 - 1)T_0 = 11,2 \text{ кДж.}$$

$$2.2.24. \beta = \sqrt{1 + \frac{2MA}{3mR(t+273 \text{ }^{\circ}\text{C})}} = 1,3.$$

$$2.2.25. \alpha = \sqrt{1 + \frac{2\Delta Q}{5(Mg + p_0S)h}} = 1,1.$$

$$2.2.26. N = \mu q \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 10 \text{ кВт.}$$

## 2.3. Изменение агрегатного состояния вещества

$$2.3.14. f_2 = f_1 + \frac{m}{\rho_i V} \cdot 100 \% = 43 \%.$$

$$2.3.15. \tau = \frac{p_i(f_2 - f_1)M_{\text{H}_2\text{O}}V}{100 \% \cdot \alpha R(t + 273 \text{ }^{\circ}\text{C})} = 15,5 \text{ мин.}$$

$$2.3.16. n = \frac{4}{3} \cong 1,33 \text{ раза (влажность увеличится).}$$

2.3.17.  $V_1 = V - \frac{m\tau h\eta}{\rho_{Br} \cdot 100 \%} + \frac{c}{r} \cdot (t_k - t)V = 2,52 \text{ л.}$

2.3.18.  $T_3 = T_2 + \frac{1}{Mc} [r\Delta m + c_1\Delta m \cdot (T_k - T_2) + c_1m(T_2 - T_1)].$

2.3.19.  $c = \frac{\lambda\tau_0}{\tau(t_2 - t_1) - \tau_0(t_{пл} - t_2)} \cong 0,23 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{К).}$

2.3.20.  $V = \frac{v_0^2}{2\rho c(t_e - t_0)} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cong 143 \text{ см}^3.$

2.3.21.  $\Delta p = \frac{2Q\nu R}{V(3\nu R + 2mc)} = 8 \cdot 10^4 \text{ Па.}$

2.3.22.  $m = \frac{Wt_1t_2}{c\Delta T(t_1 + t_2)} \cong 4,8 \text{ кг.}$

## 2.4. Поверхностное натяжение в жидкостях

2.4.5.  $F = mg + 4\pi R\sigma.$

2.4.6.  $m = \frac{2\pi\sigma d}{g} \approx 0,073 \text{ г.}$

2.4.7. Поднимется на высоту  $\Delta h = h \left( 2\frac{H}{R} + \frac{H^2}{R^2} \right) \approx 2h\frac{H}{R}.$

2.4.8.  $h_1 = 2h$  при  $l > h$ ;  $h_1 = h + l$  при  $l \leq h$ .

2.4.9.  $p = \rho gh + \frac{2\sigma}{r} \approx 490 \text{ Па.}$

2.4.10.  $x = \frac{mg + 4a\sigma}{a^2 \rho g} \approx 5,4 \text{ мм; уменьшится на } \Delta x = \frac{8\sigma}{a\rho g} \approx 1,9 \text{ мм.}$

## 2.5. Тепловое расширение твердых тел и жидкостей

2.5.4.  $\frac{l_1}{l_2} = \frac{\alpha_1''}{\alpha_1'}.$

2.5.5.  $Q = c\rho S \frac{\Delta l}{\alpha_1} \approx 3,6 \cdot 10^6 \text{ Дж.}$

2.5.6.  $\Delta t = \frac{\eta}{\alpha_1 \cdot 300 \%} = 100 \text{ }^{\circ}\text{C.}$

2.5.7.  $\Delta p = \frac{\rho_0 g \alpha \Delta t (V_0 - hS)}{S(1 + \alpha \Delta t)} \approx 2,5 \text{ кПа.}$

2.5.8.  $\alpha = \frac{3(V_0 \rho \alpha_{1\text{кв}} - m \alpha_{1\text{л}})}{V_0 \rho_{\text{л}} - m} \approx -3,8 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}.$  Поскольку  $\alpha < 0$ ,

нагревание происходит в интервале температур от 0 °С до 4 °С.

## 3. Электродинамика

### 3.1. Электростатика

3.1.20.  $E_0 = \frac{q\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cong 14,1 \text{ кВ.}$

3.1.21.  $q_3 = a\sqrt{4\pi\varepsilon_0 \frac{F_{13}F_{23}}{F_{12}}} \cong 2,57 \cdot 10^{-5} \text{ Кл.}$

3.1.22.  $k = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1.$

3.1.23.  $l = \frac{q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg}} \cong 0,6 \text{ м.}$

3.1.24.  $V = \sqrt{2gh - \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 Mh} (1 - \operatorname{tg} \alpha)}.$

3.1.25.  $L = \frac{l}{1 + \frac{2\pi\varepsilon_0 lm_1 m_2 (V_1 + V_2)^2}{q_1 q_2 (m_1 + m_2)}} \cong 1,32 \text{ м.}$

3.1.26.  $\alpha = \frac{1 + \varepsilon}{2\varepsilon} = \frac{2}{3}.$

3.1.27.  $\varphi_0 = \frac{C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + C_3\varphi_3}{C_1 + C_2 + C_3}.$

3.1.28.  $U_4 = \frac{C_1 C_3 U}{C_3 C_4 + (C_1 + C_2)(C_3 + C_4)} \cong 9,09 \text{ В.}$

3.1.29.  $W = \frac{\varepsilon}{2} W_0 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$

3.1.30.  $A = \frac{1}{4} C U_0^2 (\varepsilon^2 - 1).$

3.1.31.  $\Delta W = \frac{C U^2}{2} \cdot \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} = -2,5 \cdot 10^{-8} \text{ Дж. Энергия уменьшится.}$

### 3.2. Постоянный ток

3.2.28.  $E_2 = \frac{E_1 R_2}{R_1} = 20 \text{ В.}$

3.2.29.  $r = R = 0,5 \text{ Ом.}$

3.2.30.  $r_1 = \left(\frac{E_1}{E_2} - 1\right) R_1 - R = 0,5 \text{ Ом.}$

3.2.31.  $\Delta I = \frac{UR}{(3R_1 + R)(5R_1 + 2R)} = 0,5 \text{ А.}$

3.2.32.  $m = \frac{W}{W_0} = \frac{R_1^2}{(r + R + R_1)^2} = \frac{1}{16}.$

3.2.33.  $Q_2 = Q_1 \frac{r + R/2}{r + 2R} \cong 5,4 \text{ Кл.}$

3.2.34.  $r = \frac{R}{16} \cdot \frac{(4 - 3m)}{m - 1} = 0,5 \text{ Ом.}$

$$3.2.35. W_{\text{л}} = \left( \frac{E_1 + E_2}{r_1 + r_2 + U^2/W} \right)^2 \cdot \frac{U^2}{W} = 4 \text{ Вт.}$$

$$3.2.36. W'_2 = \frac{W_1^2}{W_2} = 10 \text{ Вт.}$$

$$3.2.37. W = \frac{(E_2 r_1 - E_1 r_2)(E_1 - E_2)}{(r_1 - r_2)^2} = 24 \text{ Вт.}$$

$$3.2.38. r = \left( \frac{100 \%}{\eta} - 1 \right) R = \frac{1}{3} \text{ Ом.}$$

$$3.2.39. P_2 = P_1 \frac{R_2 R_3^2}{R_1 (R_2 + R_3)^2} = 18 \text{ Вт.}$$

$$3.2.40. \frac{W_2}{W_1} = 2 - \sqrt{2} \cong 0,586.$$

$$3.2.41. \beta = \frac{R + r/2}{R + 2r} = 0,5.$$

$$3.2.42. r = R \frac{(2 - \sqrt{n})}{(2\sqrt{n} - 1)} \cong 0,316 \text{ Ом.}$$

$$3.2.43. Q_1 = \frac{C U^2}{2(1 + R_1/R_2)} \cong 4 \cdot 10^{-2} \text{ Дж.}$$

$$3.2.44. W = \frac{C_1 C_2 (U_1 - U_2)^2}{2(C_1 + C_2)} = 0,03 \text{ Дж.}$$

$$3.2.45. Q = 2CE^2 = 3,6 \text{ Дж.}$$

$$3.2.46. \alpha = 2k - 1 \pm 2\sqrt{k^2 - k} = 3 \pm 2\sqrt{2}; \quad \alpha_1 \cong 0,17, \quad \alpha_2 \cong 5,83.$$

$$3.2.47. E = \sqrt{\frac{W_2 r}{2 \left( 2 - \sqrt{W_2/W_1} \right) \left( \sqrt{W_2/W_1} - 1 \right)}} = 3 \text{ В.}$$

### 3.3. Магнетизм.

$$3.3.4. I = \frac{\mu mg}{Bl} = 20 \text{ А.}$$

$$3.3.5. I_2 = I_1 \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = 3 \text{ А.}$$

$$3.3.6. I g e \frac{mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{Bl(\mu \sin \alpha + \cos \alpha)} \cong 33,2 \text{ А.}$$

### 3.4. Электромагнитная индукция

$$3.4.9. P = \frac{\pi^2 r^4}{R} k^2 \cos^2 \alpha \cong 2,5 \text{ Вт.}$$

$$3.4.10. \Delta t = \frac{IL}{E} = 1 \text{ с.}$$

$$3.4.11. I = V B d \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0,15 \text{ А.}$$

$$3.4.12. \vec{F} = \frac{\vec{v}}{v} F, \quad F = \frac{B^2 l^2 v}{R} = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ H.}$$

$$3.4.13. I = \sqrt{\frac{mgv \sin \alpha}{R}} \cong 0,16 \text{ A.}$$

$$3.4.14. W = \frac{B^2 \omega^2 r^4}{4R} \cong 1,96 \text{ Вт.}$$

### 3.5. Электромагнитные колебания и волны

$$3.5.8. \lambda = 2\pi c \frac{LI_M}{U_M}.$$

$$3.5.9. \nu_0 = \frac{I_M}{2\pi C U_M}.$$

$$3.5.10. T_2 = \frac{T_1}{2}.$$

$$3.5.11. L = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\frac{U_1^2}{I_1^2} - \frac{U_2^2}{I_2^2}} = 0,09 \text{ Гн.}$$

## 4. Оптика

### 4.1. Геометрическая оптика

$$4.1.48. \alpha = \arcsin \left( n \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = 60^\circ.$$

4.1.49. Окружность радиусом  $a$  с центром в точке  $O$ .

$$4.1.50. a_1 = \frac{a \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n \cos \alpha} \cong 3,74 \text{ см.}$$

$$4.1.51. l = d \sin 2\alpha \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right) \cong 1,17 \text{ см.}$$

$$4.1.52. n = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \beta_1 + \sin^2 \beta_2}} \cong 1,15.$$

$$4.1.53. l = (L - H \operatorname{ctg} \varphi) \frac{\sqrt{1 - n^2 \cos^2 \varphi}}{n \cos \varphi}.$$

$$4.1.54. \alpha_{\max} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \left( \frac{1}{n} \right) = 45^\circ.$$

$$4.1.55. n = \frac{\sin \alpha}{\sin \left( \alpha - \frac{\gamma}{2} \right)} = \sqrt{2}.$$

$$4.1.56. l = D \left| \frac{\frac{n_2}{n_1}}{\sqrt{2 - n_2^2}} - \frac{\frac{n_1}{n_2}}{\sqrt{2 - n_1^2}} \right| \cong 8,67 \text{ см.}$$

4.1.57.  $\sin \alpha > \sqrt{n^2 - 1} = 0,75$ .

4.1.58.  $n > \sqrt{2}$ .

4.1.59.  $\sin \alpha > \sin \beta \sqrt{n^2 - 1} - \cos \beta$ , т.е.  $\sin \alpha > 0$ .

4.1.60.  $\alpha \leqslant 180^\circ - 2 \arcsin \left( \frac{n_2}{n_1} \right)$ .

4.1.61.  $h = \frac{r}{(R-r)n} \sqrt{H^2 - (n^2 - 1)(R-r)^2} \cong 3,63$  м.

4.1.62.  $\alpha = \frac{5}{4}\pi - 2 \arcsin \left( \frac{n}{\sqrt{2}} \right)$ .

4.1.63.  $b = \frac{aF}{a-F} = 60$  см,  $H = h \frac{F}{a-F} = 25$  см.

4.1.64.  $d = \frac{a^2}{2a-R} = 45$  см.

4.1.65.  $\beta = \operatorname{arctg} \left( \frac{a}{f} + \left( 1 - \frac{l}{f} \right) \operatorname{tg} \alpha \right)$ .

4.1.66.  $\beta = \operatorname{arctg} \left( \left( 1 + \frac{l}{|f|} \right) \operatorname{tg} \alpha - \frac{a}{|f|} \right) = \operatorname{arctg} \left( \left( 1 - \frac{l}{f} \right) \operatorname{tg} \alpha + \frac{a}{f} \right)$ .

4.1.67.  $F = \sqrt{l_1 l_2} = 0,6$  м.

4.1.68.  $f = \frac{lm}{(m+1)^2} = 15$  см.

4.1.69.  $l = \sqrt{l_1 l_2} = 4$  см.

4.1.70.  $l = F \sqrt{F^2 + d^2} \left( \frac{1}{a-F} - \frac{1}{b-F} \right)$ .

4.1.71.  $F = \sqrt{ab \cos \alpha} = 5$  см.

4.1.72.  $d = f \sqrt{k^2 - 1} = f \sqrt{3} \cong 5,2$  см.

4.1.73.  $b = \frac{L}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4F}{L}} \right) = 56$  см.

4.1.74.  $|F| = \frac{abc}{(a-b)^2} = 60$  см, линза рассеивающая.

4.1.75.  $F = \frac{abc}{(a+b)^2} \cong 8,9$  см.

4.1.76.  $H = h(M+1) = 5$  мм.

4.1.77.  $H = \frac{hL}{f} = 5$  мм.

4.1.78.  $f = \frac{|f_1|f_2}{|f_1| - f_2} = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} = 1,5$  м.

4.1.79.  $L = 4F$ .

4.1.80.  $D = \frac{F_2 d}{F_1} = 3$  см.

4.1.81.  $r = \frac{|F_2|R}{F_1} = 0,25$  см.

4.1.82.  $x = L - F = 5$  см.

## 4.2. Элементы физической оптики

$$4.2.7. \varphi \cong \frac{\lambda}{2dn} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ рад.}$$

$$4.2.8. d_{\min} = \frac{\lambda}{4n_2} \approx 107 \text{ нм.}$$

$$4.2.9. I = \frac{P\lambda|e|}{hc} = 0,5 \text{ мА.}$$

$$4.2.10. N = \frac{\eta}{100 \%} \cdot \frac{P\tau\lambda}{hc} \cong 7,1 \cdot 10^{19} .$$

$$4.2.11. \lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e|e|U}} \approx 0,55 \text{ нм.}$$

$$4.2.12. l = \frac{hc}{|e|E} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) \approx 1,5 \text{ мм.}$$

$$4.2.13. N_{\max} = \frac{4\pi\varepsilon_0 hrc}{e^2\lambda_1\lambda_2} (\lambda_1 - \lambda_2) \cong 4,3 \cdot 10^6 .$$

$$4.2.14. \lambda_{\max} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 U_1 - \lambda_2 U_2} (U_1 - U_2) \cong 0,65 \text{ мкм.}$$

## 6. Комбинированные задачи

$$6.15. p = 2nmV^2 = 720 \text{ кПа.}$$

$$6.16. \mu = \frac{I^2R}{c(t_2 - t_1)} = 100 \text{ г/с.}$$

$$6.17. t = \frac{mc(t_{\kappa} - t_0)}{0,75 I^2 R} \cong 45 \text{ мин.}$$

$$6.18. \Delta t = (t + 273 \text{ }^{\circ}\text{C}) \cdot \left[ \frac{p_0(l+h)}{(p_0 - \rho gh)l} - 1 \right] \cong 51,5 \text{ }^{\circ}\text{C.}$$

$$6.19. \Delta t = \frac{V^2}{8c} = 0,2 \text{ }^{\circ}\text{C.}$$

$$6.20. \Delta h = \frac{MVg}{RTk}(p_2 - p_1) = 2,4 \text{ см.}$$

$$6.21. \Delta t = \frac{g}{c}(H + 0,4h) = 0,1 \text{ }^{\circ}\text{C.}$$

$$6.22. Q = \frac{C}{2}(E - U)^2 = 0,2 \text{ Дж.}$$

$$6.23. t_1 = \left( 1 - \frac{P}{mg} \right) (t + 273 \text{ }^{\circ}\text{C}) - 273 \text{ }^{\circ}\text{C} = 7 \text{ }^{\circ}\text{C} .$$

$$6.24. V = \frac{F}{2\mu} = 200 \text{ м/с.}$$

$$6.25. V = \frac{nQ(T_1 - T_2)}{FT_1} = 2 \text{ м/с.}$$

6.26.  $\vec{a} = \vec{g} \left(1 - \frac{h}{x}\right); \quad a = 2 \text{ м/c и направлено вверх.}$

6.27.  $M \leq \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{p_0 M_{\text{CO}_2}}{RT} \cong 249 \text{ кг.}$

6.28.  $T = \rho V g - \left(m + \frac{MpV}{RT}\right) g \cong 0,014 \text{ Н.}$

6.29.  $p = p_A \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\rho g L}{p_A}}\right) = 1,1 \cdot 10^5 \text{ Па.}$

6.30.  $\Delta h = \frac{Mah}{p_0 S + Ma} = 5 \text{ см. Поршень переместится влево.}$

6.31.  $\beta = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{l(1 - \cos \alpha)}{h - l}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ.$

6.32.  $\lambda = \frac{32}{3} \cdot \frac{hc}{mV_0^2} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$

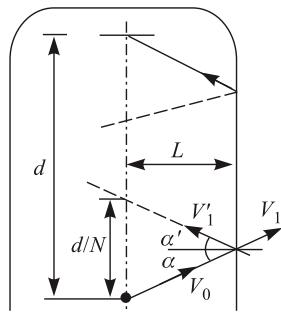
Глава 10

# РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 2003 – 2005 ГОДОВ

## 7. Задачи 2003 года

## 7.1 Механика

**7.1.1.** Рассмотрим соударение шайбы с бортом. При абсолютно упругом ударе кинетическая энергия шайбы сохраняется. Поскольку шайба после удара не приобретает вращения, ее энергия связана



только с поступательным движением. Следовательно, при каждом соударении выполняются равенства  $\alpha' = \alpha$ , Здесь  $\alpha$  и  $\alpha'$  — углы между нормалью к борту и направлениями скоростей шайбы до и после удара,  $V_n$  и  $V'_n$  — модули скоростей шайбы до и после  $n$ -ого удара,  $n = 1, 2, \dots$  (см. рисунок). Из геометрических соображений ясно, что длина траектории шайбы от места удара до линии ворот при  $N$  отражениях от бортов составляет величину:

$$S_N = 2N \sqrt{L^2 + \left(\frac{d}{2N}\right)^2} = \sqrt{(2NL)^2 + d^2}.$$

Из закона изменения механической энергии

$$\frac{mV_0^2}{2} = \mu mgS_0$$

находим, что путь, который проходит по льду шайба, имеющая начальную скорость  $V_0$ , равен

$$S_0 = \frac{V_0^2}{2\mu g}.$$

По условию задачи  $S_N \leq S_0$ . Объединяя записанные равенства, получаем, что

$$N \leq \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{V_0^4}{(2\mu g)^2} - d^2} \approx 2,71.$$

Ответ:  $N_{\max} = \left\{ \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{V_0^4}{(2\mu g)^2} - d^2} \right\} = 2$ , где символом  $\{\dots\}$  обозначена

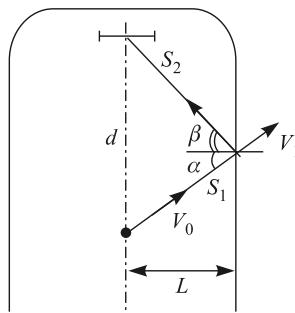
целая часть числа.

**7.1.2.** Обозначив через  $\vec{V}_1$  и  $\vec{V}_2$  скорости шайбы до и после столкновения с бортом, имеем:  $V_{2\tau} = V_{1\tau} = V_1 \sin \alpha$ ,

$$V_{2n} = kV_{1n} = kV_1 \cos \alpha,$$

где  $V_{i\tau}$  и  $V_{in}$  — проекции скорости шайбы на касательное и нормальное борту направления,  $i = 1, 2$ . Отсюда находим, что

$$V_2^2 = V_1^2 (\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha), \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \alpha.$$



Из рисунка видно, что длина  $L$  траектории шайбы удовлетворяет условию

$$L \operatorname{tg} \alpha + L \operatorname{tg} \beta = d,$$

поэтому  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{kd}{(k+1)L}$ . Из закона изменения механической энергии шайбы вытекают равенства:

$$\frac{mV_1^2}{2} = \frac{mV_0^2}{2} - \mu mgS_1, \quad \frac{mV_3^2}{2} = \frac{mV_2^2}{2} - \mu mgS_2,$$

где  $V_3$  — скорость шайбы на линии ворот,

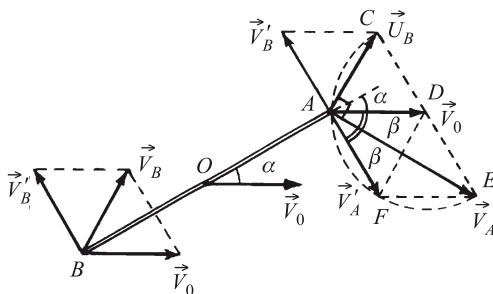
$$S_1 = \frac{L}{\cos \alpha}, \quad S_2 = \frac{L}{\cos \beta}.$$

По условию задачи  $V_3 = 0$ . Объединяя записанные равенства и учитывая, что  $\frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ , получаем ответ:

$$V_0 = \left[ 2\mu g L \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{k\sqrt{k^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \right) \right]^{1/2} \approx 7,3 \text{ м/с},$$

где  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{kd}{(k+1)L} = 1$ .

**7.1.3.** В неподвижной системе отсчета стержень совершает сложное движение, представляющее собой сумму поступательного и вращательного движений. В поступательно движущейся системе отсчета, связанной с центром стержня, он только вращается, поэтому относительные скорости его концов  $\vec{V}'_A$  и  $\vec{V}'_B$  равны друг другу по величине, про-



тивоположно направлены и перпендикулярны стержню. Предположим, что стержень вращается по часовой стрелке. Построение скоростей  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B$  концов стержня в неподвижной системе для этого случая приведено на рисунке, где через  $\vec{U}'_B$  и  $\vec{U}_B$  обозначены перенесенные в точку  $A$  векторы  $\vec{V}'_B$  и  $\vec{V}_B$ , соответственно. Проведем через точки  $C$ ,  $A$  и  $E$  окружность. Поскольку угол между векторами  $\vec{V}_A$  и  $\vec{U}_B$  по условию равен  $90^\circ$  и длины отрезков  $CD$  и  $DE$  равны друг другу,

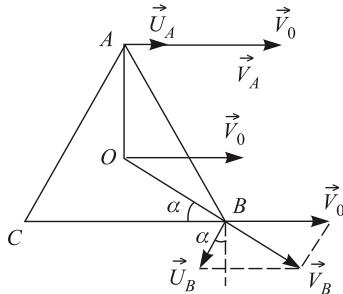
центр этой окружности лежит в точке  $D$ . Следовательно,  $V_0 = V'_A = U'_B$  и фигура  $ADEF$  представляет собой ромб. Из рисунка видно, что  $U_B = V_B = 2V_0 \sin \beta$ , где  $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ . Ответ, соответствующий вращению стержня по часовой стрелке, имеет вид:

$$V_{01} = \frac{V_B}{2 \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)} = 2 \text{ м/с.}$$

Читателю предлагается самостоятельно рассмотреть случай, когда стержень вращается против часовой стрелки, и получить второй ответ:

$$V_{02} = \frac{V_B}{2 \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)} \approx 1,15 \text{ м/с.}$$

**7.1.4.** В поступательно движущейся системе отсчета, связанной с центром треугольника, он совершает вращательное движение, причем скорости его вершин  $\vec{U}_A$ ,  $\vec{U}_B$ ,  $\vec{U}_C$  относительно центра равны друг другу



гру по величине ( $U_A = U_B = U_C \equiv U$ ) и каждая из них перпендикулярна линии, проведенной к соответствующей вершине из центра треугольника. Согласно закону сложения скоростей, скорости вершин  $A$  и  $B$  в неподвижной системе отсчета определяются векторными равенствами:

$$\vec{V}_A \equiv \vec{V}_1 = \vec{V}_0 + \vec{U}_A, \quad \vec{V}_B \equiv \vec{V}_2 = \vec{V}_0 + \vec{U}_B.$$

Величины этих скоростей, как видно из рисунка, равны

$$V_1 = V_0 + U, \quad V_2 = \sqrt{(U \cos \alpha)^2 + (V_0 - U \sin \alpha)^2},$$

где  $\alpha = 30^\circ$ . Из последнего равенства находим

$$V_2^2 = V_0^2 + U^2 - 2UV_0 \sin \alpha = V_0^2 + U^2 - UV_0.$$

Подставляя в эту формулу выражение  $U = V_1 - V_0$ , получим уравнение относительно  $V_0$ :

$$V_0^2 - V_1 V_0 + \frac{1}{3} (V_1^2 - V_2^2) = 0.$$

Корни этого уравнения

$$V_0 = \frac{V_1 \pm \sqrt{(4V_2^2 - V_1^2)/3}}{2} = \frac{\sqrt{6} \pm 1}{2} \text{ м/с}$$

дают два значения скорости центра треугольника, удовлетворяющие условию задачи:  $V_{01} \approx 1,72 \text{ м/с}$ ,  $V_{02} \approx 0,72 \text{ м/с}$ .

**7.1.5.** Для решения задачи воспользуемся известными из кинематики криволинейного движения формулами для максимальной высоты подъема и дальности полета тела, брошенного под углом  $\alpha$  к горизонту:

$$H = \frac{V_0^2}{2g} \sin^2 \alpha, \quad L = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Максимальной высоты  $h$  достигают капли, вылетевшие вертикально. Следовательно, начальная скорость капель  $V_0 = \sqrt{2gh}$ . Максимальная дальность полета капель, имеющих такую начальную скорость, достигается при  $\alpha = 45^\circ$  и составляет величину  $L = \frac{V_0^2}{g} = 2h$ . Поскольку площадь орошаемого участка равна  $S = \pi L^2$ , ответ имеет вид:  $S = 4\pi h^2 \approx 12,6 \text{ м}^2$ .

**7.1.6.** Из закона изменения механической энергии кубика при его движении по верхней части крыши:  $\frac{mV_0^2}{2} = mgL \sin \alpha - \mu mgL \cos \alpha$  найдем скорость кубика в момент отрыва в месте излома:

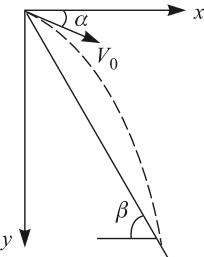
$$V_0 = \sqrt{2gL(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}.$$

Эта скорость является начальной при свободном падении кубика. В системе координат, изображенной на рисунке, кинематические уравнения движения кубика в воздухе имеют вид:

$$x(t) = V_0 t \cos \alpha, \quad y(t) = V_0 t \sin \alpha + \frac{gt^2}{2}.$$

В точке удара кубика о нижнюю часть крыши выполняется соотношение  $y(\tau) = x(\tau) \operatorname{tg} \beta$ , где  $\tau$  — время полета кубика. Отсюда

$$\tau = \frac{2V_0}{g} (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) \cos \alpha.$$



Подставляя в это соотношение найденное ранее значение  $V_0$ , получаем ответ:

$$\tau = 2(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) \cos \alpha \sqrt{\frac{2L(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{g}} = 0,4 \text{ с.}$$

**7.1.7.** В системе координат, изображенной на рисунке, движение снаряда описывается кинематическими уравнениями:

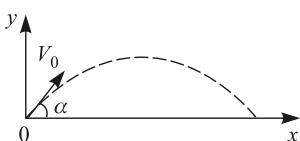
$$x = V_0 t \cos \alpha, \quad y = V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Уравнение траектории снаряда имеет вид:

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 = Zx - \frac{g}{2V_0^2} (1 + Z^2) x^2,$$

где  $Z = \operatorname{tg} \alpha$ . По условию задачи нужно найти максимальное значение

$y$  при фиксированных  $x$  и  $V_0$ . Это можно сделать, например, дифференцируя уравнение траектории по  $Z$  и приравнивая производную нулю:



$$y' = x - \frac{g}{V_0^2} x^2 Z = 0.$$

Можно также, используя тождественные преобразования, привести уравнение траектории к виду

$$y = \left( \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2V_0^2} \right) - \frac{gx^2}{2V_0^2} \left( Z - \frac{V_0^2}{gx} \right)^2.$$

Видно, что максимальное значение  $y$  достигается при  $Z = \frac{V_0^2}{gx}$  и составляет величину  $y_{\max} = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2V_0^2}$ . Полагая  $x = l$ , получаем ответ:

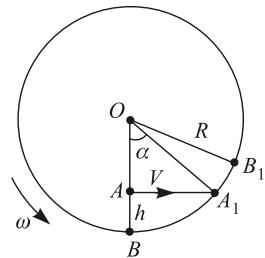
$$h = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gl^2}{2V_0^2} = 12,48 \text{ км.}$$

**7.1.8.** Рассмотрим движение предмета в не врачающейся системе отсчета, связанной с кораблем (см. рисунок). В этой системе предмет, выпущенный из руки в точке  $A$ , имеет скорость

$$V = \omega(R - h),$$

направленную перпендикулярно к  $OA$ . Поскольку сопротивление воздуха и влияние небесных тел пренебрежимо малы, предмет движется прямолинейно и равномерно и за время  $\tau = \frac{AA_1}{V}$  достигает пола в точке  $A_1$ . Точка  $B$  (подошвы ног космонавта) за это время переместится в положение  $B_1$ . Обозначив через  $\omega$  угловую скорость вращения корабля, находим, что длина дуги  $UBB_1$  равна:

$$\cup BB_1 = \omega R \tau = \omega R \frac{AA_1}{\omega(R - h)} = R \operatorname{tg} \alpha.$$



Поскольку длина дуги  $\cup BA_1 = R\alpha$ , искомое расстояние ( $\cup A_1 B_1$ ) равно:

$$\cup A_1 B_1 = \cup BB_1 - \cup BA_1 = R(\operatorname{tg} \alpha - \alpha).$$

Ответ:  $l = R(\operatorname{tg} \alpha - \alpha)$ , где  $\alpha = \arccos \frac{R - h}{R}$ .

**7.1.9.** Для одиночного шарика, падающего в жидкости с установленной скоростью  $v_0$ , имеем:

$$\rho V g - \rho_* V g - \beta v_0 = 0,$$

где  $V$  – объем шарика,  $\beta$  – коэффициент сопротивления. Отсюда

$$\beta = \frac{V g (\rho - \rho_*)}{v_0}.$$

Установившееся движение двух шариков, связанных нитью, описывается уравнениями:

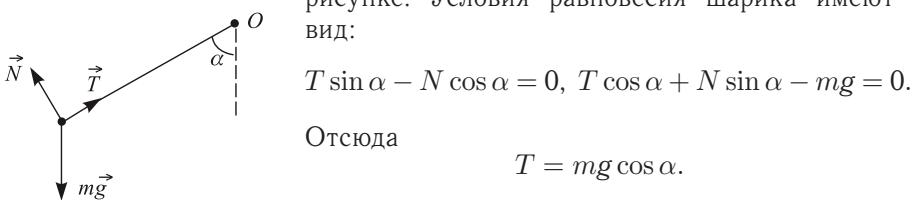
$$\rho V g - T = 0 \quad \text{для левого шарика,}$$

$$\rho V g - T - \rho_{\text{ж}} V g + \beta v = 0 \quad \text{для правого шарика,}$$

где  $T$  — натяжение нити. Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$v = \frac{\rho_{\text{ж}} v_0}{\rho - \rho_{\text{ж}}} = 4 \text{ см/с.}$$

- 7.1.10.** На покоящийся шарик действуют силы, изображенные на рисунке. Условия равновесия шарика имеют вид:



$$T \sin \alpha - N \cos \alpha = 0, \quad T \cos \alpha + N \sin \alpha - mg = 0.$$

Отсюда

$$T = mg \cos \alpha.$$

Когда шарику сообщат скорость  $V$ , он придет в движение по окружности радиусом  $R = l \sin \alpha$ . Это движение описывается уравнениями:

$$\frac{mV^2}{R} = T \sin \alpha - N \cos \alpha, \quad T \cos \alpha + N \sin \alpha - mg = 0.$$

Отсюда

$$T = m \left( g \cos \alpha + \frac{V^2}{l} \right).$$

$$\text{Ответ: } n = \frac{T}{T} = 1 + \frac{V^2}{g l \cos \alpha} = 1,25.$$

- 7.1.11.** Уравнение движения груза в проекции на неподвижную ось, совпадающую по направлению с нитью в данный момент времени, имеет вид:

$$\frac{mV^2}{l} = T - mg \cos \beta,$$

где  $T$  — натяжение нити,  $l$  — ее длина,  $V$  — скорость груза. Отсюда

$$T = \frac{mV^2}{l} + mg \cos \beta.$$

Из закона сохранения энергии следует, что

$$V^2 = 2gl(\cos \beta - \cos \alpha).$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$T = mg(3 \cos \beta - 2 \cos \alpha) = \frac{mg}{2} \left( 3\sqrt{3} - 2 \right) \approx 1,6 \text{ Н.}$$

**7.1.12.** При каждом ударе скорость маятника возрастает на величину

$$\Delta V = \frac{p}{m}.$$

Следовательно, через  $n$  ударов его скорость будет равна

$$V_n = n\Delta V = \frac{np}{m}.$$

Маятник отклонится на угол, превышающий  $\alpha$ , если выполнено условие:

$$\frac{mV_n^2}{2} > mg l(1 - \cos \alpha).$$

Объединяя записанные соотношения, находим, что

$$n > \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} \cdot \frac{m}{p}.$$

Ответ:  $n_{\min} = \left\{ \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} \cdot \frac{m}{p} \right\} + 1 = 51$ , где символом  $\{\dots\}$  обозначена целая часть числа.

**7.1.13.** Пусть  $a$  — величина ускорения кабины при разгоне и замедлении, а  $V_0$  — скорость ее равномерного движения, причем  $a\tau_1 = V_0$ . Сила натяжения троса  $T$  равна:

при разгоне кабины:  $T = T_{\max} = m(g + a)$ ,

при равномерном движении:  $T = T_0 = mg$ ,

при замедлении кабины:  $T = T_{\min} = m(g - a)$ .

Здесь  $m$  — масса кабины. Работа по подъему кабины равна  $A = mgH$ . Из условий движения кабины следует, что

$$H = \frac{a\tau_1^2}{2} + V_0(\tau - 2\tau_1) + V_0\tau_1 - \frac{a\tau_1^2}{2} = V_0(\tau - \tau_1).$$

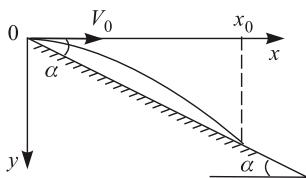
Отсюда  $V_0 = \frac{H}{(\tau - \tau_1)}$ . Максимальная мощность развивается двигателем в конце участка разгона:

$$N_{\max} = T_{\max}V_0 = m(g + a)V_0 = m \left( g + \frac{V_0}{\tau_1} \right) V_0.$$

Отсюда  $m = \frac{N_{\max}}{V_0(g + V_0/\tau_1)}$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$A = \frac{gN_{\max}\tau_1(\tau - \tau_1)^2}{g\tau_1(\tau - \tau_1) + H} = 9,6 \text{ кДж.}$$

**7.1.14.** Введем систему координат, как показано на рисунке. Обозначим через  $V_0$  начальную скорость камня. Кинематические уравнения



движения камня имеют вид:  $x = V_0 t$ ,

$y = \frac{gt^2}{2}$ , следовательно, уравнение его траектории  $y = \frac{g}{2V_0^2}x^2$ .

Уравнение наклонной плоскости, аппроксимирующей поверхность холма,

$$y_1 = x \tan \alpha.$$

В точке падения камня, имеющей координату  $x_0 = L \cos \alpha$ , выполняется равенство:  $y(x_0) = y_1(x_0)$ . Отсюда  $x_0 = \frac{2V_0^2}{g} \tan \alpha$  и, следовательно,

$V_0^2 = \frac{gL \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha}$ . Поскольку работа, совершенная при броске,  $A = \frac{mV_0^2}{2}$ , ответ имеет вид:  $A = \frac{mgL \cos^2 \alpha}{4 \sin \alpha} = 15 \text{ Дж.}$

**7.1.15.** Из определения второй космической скорости и из закона сохранения механической энергии следует, что

$$\frac{mV_{2k}^2}{2} = \Delta E_n,$$

где  $m$  — масса тела,  $\Delta E_n$  — приращение потенциальной энергии тела при перемещении его с поверхности Земли в бесконечно удаленную точку. Если начальная скорость тела равна  $U > V_{2k}$ , то

$$\frac{mU^2}{2} = \Delta E_n + \frac{mV_\infty^2}{2}.$$

Объединяя записанные равенства, получаем ответ:

$$V_\infty = \sqrt{U^2 - V_{2k}^2} \approx 4,84 \text{ км/с.}$$

**7.1.16.** Пусть начальная скорость шарика равна  $V_0$ . Из законов сохранения импульса и кинетической энергии в системе «шарик +

трубка» следует, что

$$mV_0 = MV + mv, \quad mV_0^2 = MV^2 + mv^2,$$

где  $V$  и  $v$  — скорости трубки и шарика после соударения. Из этой системы находим

$$V = \frac{2m}{M+m}V_0, \quad v = \frac{m-M}{M+m}V_0.$$

Поскольку относительная скорость этих тел после удара

$$V_{\text{отн}} = V - v = V_0,$$

время, которое шарик движется после соударения внутри трубы,  $\tau = \frac{L}{V_{\text{отн}}} = \frac{L}{V_0}$ . За это время он проходит путь

$$S' = |v|\tau = \frac{|m-M|}{M+m}L.$$

Полный путь, пройденный шариком,  $S = L + S'$ . Ответ:

$$S = L \left( 1 + \frac{|m-M|}{M+m} \right).$$

**7.1.17.** После того, как шарик коснется пластиинки, его движение будет происходить по закону гармонических колебаний. Скорость шарика будет максимальна в положении равновесия, когда сила упругости и сила тяжести, действующие на шарик, уравновешены:  $mg = k\Delta x$ . Отсюда растяжение пружины в момент достижения шариком максимальной скорости равно  $\Delta x = mg/k$ . Согласно закону сохранения механической энергии,

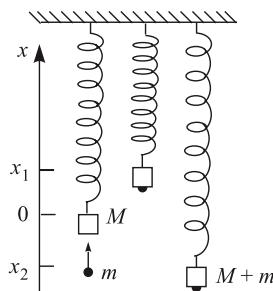
$$mg(H + L) = \frac{mV_{\max}^2}{2} + \frac{k\Delta x^2}{2} - mg\Delta x.$$

Выражая отсюда  $V_{\max}$ , получаем ответ:

$$V_{\max} = \sqrt{2g(H + L) + \frac{mg^2}{k}} = 1,5 \text{ м/с.}$$

**7.1.18.** Выберем начало отсчета в положении равновесия бруска до прилипания шарика, ось  $OX$  направим вверх. В этом состоянии пружина растянута на величину  $x_0 = Mg/k$ . По закону сохранения импульса при прилипании шарика

$$mV_0 = (M+m)U, \quad \text{откуда} \quad U = \frac{mV_0}{M+m}.$$



В точках максимального смещения от нового положения равновесия скорость бруска и шарика равна нулю. Из закона сохранения энергии следует:

$$\frac{(M+m)U^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} = (M+m)gx + \frac{k(x-x_0)^2}{2}.$$

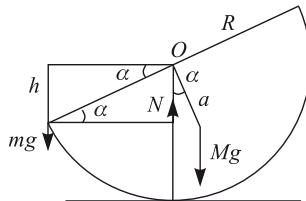
Подставляя в последнее равенство найденное ранее  $U$ , получаем квадратное уравнение относительно  $x$ . Разрешая это уравнение, получаем два корня, которые соответствуют координатам верхней и нижней точек движения бруска с шариком:

$$x_{1,2} = \frac{1}{k} \left[ kx_0 - (M+m)g \pm \sqrt{[kx_0 - (M+m)g]^2 + k(M+m)U^2} \right].$$

Поскольку амплитуда колебаний равна  $A = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$ , ответ имеет вид:

$$A = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{k}{M+m} \left( \frac{V_0}{g} \right)^2} \approx 1,3 \text{ см.}$$

**7.1.19.** Под действием веса мухи сфера займет наклонное положение, изображенное на рисунке, где через  $N$  обозначена сила реакции



стола. Уравнение моментов: записанное относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку касания полусфера и стола, имеет вид:

$$Mga \sin \alpha = mgR \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол, на который отклонится полусфера. Отсюда  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{mR}{Ma} = 2 \frac{m}{M}$ . Из рисунка видно, что искомая величина  $h = R \sin \alpha$ . Ответ:

$$h = \frac{R \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{R}{\sqrt{1 + (M/(2m))^2}}.$$

**7.1.20.** Шарики находятся в равновесии под действием сил, изображенных на рисунке, где  $F$  — сила, действующая на нижний шарик,  $T_1$  и  $T_2$  — натяжения нитей. Условия равновесия имеют вид:

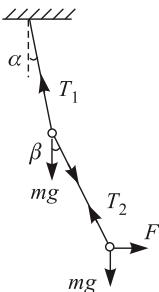
$$T_2 \sin \beta = F, \quad T_2 \cos \beta = mg \quad (\text{для нижнего шарика}),$$

$$T_1 \sin \alpha = T_2 \sin \beta, \quad T_1 \cos \alpha = mg + T_2 \cos \beta \quad (\text{для верхнего шарика}).$$

Из этих условий находим, что

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{F}{mg}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{2mg}.$$

Следовательно,  $\operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \alpha$ . Ответ:  $\beta = \operatorname{arctg}(2 \operatorname{tg} \alpha)$ .

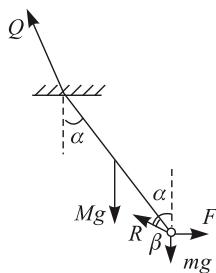


**7.1.21.** Обозначим через  $R$  величину силы, с которой стержень действует на шарик (см. рисунок). Условия равновесия шарика имеют вид:

$$F = R_x = R \sin(\alpha + \beta), \quad mg = R_y = R \cos(\alpha + \beta),$$

По третьему закону Ньютона шарик действует на стержень с силой, величина которой  $R' = R$  (чтобы не загромождать чертеж, эта сила на рисунке не изображена). Следовательно,  $R'_x = F$ ,  $R'_y = mg$ . На стержень также действуют силы тяжести  $Mg$  и реакции подвеса  $Q$ . Уравнение моментов, записанное для стержня относительно оси, проходящей через точку подвеса, имеет вид:

$$Mg \frac{l}{2} \sin \alpha + mg l \sin \alpha = Fl \cos \alpha.$$



Из записанных равенств находим:

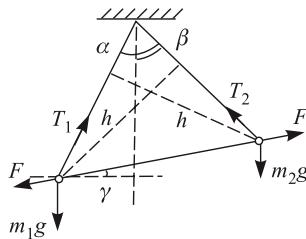
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{F}{mg}, \quad \left(1 + \frac{M}{2m}\right) \operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{mg}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \left(1 + \frac{M}{2m}\right) \operatorname{tg} \alpha.$$

Ответ:  $\beta = \operatorname{arctg} \left[ \left(1 + \frac{M}{2m}\right) \operatorname{tg} \alpha \right] - \alpha = 15^\circ$ .

**7.1.22.** Шарики находятся в равновесии под действием сил, изображенных на рисунке, где через  $F$  обозначена сила реакции стержня,



$T_1$  и  $T_2$  — натяжения нитей. Из условия равновесия шариков следует, что

$$T_1 \sin \alpha = F \cos \gamma, \quad T_2 \sin \beta = F \cos \gamma,$$

откуда

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}.$$

Записывая уравнения моментов относительно каждого из шариков, получаем:

$$m_2 g l \cos \gamma = T_2, \quad m_1 g l \cos \gamma = T_1,$$

где  $l$  — длина стержня,  $h$  — перпендикулярная боковой стороне высота равнобедренного треугольника, образованного нитями и стержнем.  
Следовательно,

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

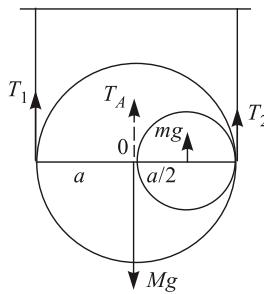
Ответ:  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \sqrt{2}$ .

**7.1.23.** Наружный объем бутылки равен  $V_0 = V + \frac{M}{\rho}$ . Условие плавания бутылки, полностью погруженной в воду, имеет вид:

$$(M + m)g = \rho_{\text{в}} V_0 g.$$

Отсюда находим, что бутылка утонет, если в нее налить воды массой  $m > \rho_{\text{в}} V - M \left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho}\right) = 0,38$  кг.

**7.1.24.** При анализе равновесия шара с полостью можно формально рассматривать его как сплошной шар массой  $M = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$ , внутрь ко-



торого помещен шар радиусом  $a/2$ , имеющий «отрицательную» массу  $(-m)$ , равную по модулю массе  $m = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^3 \rho$  вырезанной части. Условия равновесия шара имеют вид:

$$T_1 + T_2 = Mg - mg, \quad T_1 a - T_2 a - mg \frac{a}{2} = 0 \quad (\text{в воздухе}),$$

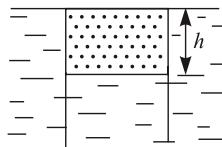
$$T'_1 + T'_2 + F_{\text{A}} = Mg - mg, \quad T'_1 a - T'_2 a - mg \frac{a}{2} = 0 \quad (\text{в жидкости}).$$

Здесь  $F_{\text{A}} = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0 g$  — архимедова сила. Из этих равенств находим:

$$T_1 = \frac{1}{2} \left(M - \frac{m}{2}\right) g, \quad T'_1 = \frac{1}{2} \left(M - \frac{m}{2}\right) g - \frac{F_{\text{A}}}{2}.$$

Ответ:  $\frac{T'_1}{T_1} = 1 - \frac{16\rho_0}{15\rho} = \frac{7}{15} \approx 0,47$ .

**7.1.25.** Давление воздуха в ведре, полностью погруженном в воду, равно  $p = p_0 + \rho g h$ , где  $h$  — высота объема, занимаемого воздухом.



Поскольку температура воздуха постоянна, для него справедлив закон Бойля–Мариотта:

$$p_0 V_0 = (p_0 + \rho g h) V_1,$$

где  $V_1 = V_0 h / H$ . Отсюда получаем уравнение для высоты  $h$ :

$$h^2 + \frac{p_0}{\rho g} h - \frac{p_0 H}{\rho g} = 0.$$

Условию задачи удовлетворяет положительный корень

$$h = \frac{p_0}{2\rho g} \cdot \left[ \sqrt{1 + \frac{4\rho g H}{p_0}} - 1 \right].$$

Условие равновесия погруженного ведра имеет вид:

$$F + mg = F_A,$$

где  $F_A = \rho g V_0 h / H$  — архимедова сила. Объединяя записанные выражения, получаем ответ:  $F = \frac{p_0 V_0}{2H} \cdot \left[ \sqrt{1 + \frac{4\rho g H}{p_0}} - 1 \right] - mg \approx 86,3$  Н.

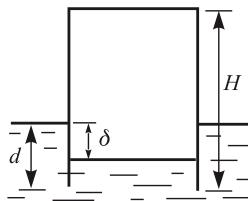
**7.1.26.** Обозначим через  $H$  и  $S$  высоту и площадь поперечного сечения внутренней полости колокола, а через  $h$  — высоту столба воздуха в колоколе, находящемся на глубине  $d$ . Поскольку давление воды на глубине  $d$  равно  $p_A + \rho_B g d$ , уравнения состояния воздуха в колоколе имеют вид:

$$p_A S H = \nu R T_0, \quad (p_A + \rho_B g d) S h = \nu R T_1.$$

Отсюда  $h = \frac{p_A H T_1}{(p_A + \rho_B g d) T_0}$ . Обозначив через  $V_0$  объем стенок и днища колокола, запишем условие равновесия колокола, погруженного в воду, пренебрегая массой воздуха в нем:  $\rho_c V_0 g = \rho_B (V_0 + Sh) g$ . Учитывая, что  $SH/V_0 = \alpha$ , после несложных преобразований получаем ответ:

$$d = \frac{p_A}{g} \left[ \frac{\alpha T_1}{(\rho_c - \rho_B) T_0} - \frac{1}{\rho_B} \right] \approx 83,3 \text{ м.}$$

**7.1.27.** Обозначим через  $\delta$  разность уровней воды снаружи и внутри



бочки. Условие равновесия бочки имеет вид:

$$mg = \rho_{\text{в}} \delta S g.$$

Отсюда  $\delta = \frac{m}{\rho_{\text{в}} S}$ . Для воздуха, заключенного в бочке, справедлив закон Бойля–Мариотта:

$$p_{\text{A}} H S = (p_{\text{A}} + \rho_{\text{в}} g \delta)(H - d + \delta) S.$$

Подставляя сюда найденное ранее  $\delta$ , после несложных преобразований получаем ответ:  $d = \frac{m}{\rho_{\text{в}} S} \left( 1 + \frac{\rho_{\text{в}} g H}{p_{\text{A}} + mg/S} \right) \approx 22$  см.

**7.1.28.** Зависимость смещения колеблющегося тела от времени имеет вид:

$$x = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t.$$

Скорость тела меняется по закону:

$$V = -x_0 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t.$$

Следовательно, зависимости кинетической энергии тела и потенциальной энергии пружины от времени таковы:

$$E_{\text{K}} = \frac{mx_0^2}{2} \cdot \frac{k}{m} \cdot \sin^2 \sqrt{\frac{k}{m}} t, \quad E_{\Pi} = \frac{kx_0^2}{2} \cdot \cos^2 \sqrt{\frac{k}{m}} t.$$

По условию задачи  $E_{\text{K}} = nE_{\Pi}$ . Отсюда  $\operatorname{tg} \sqrt{\frac{k}{m}} t_0 = \sqrt{n}$ .

Ответ:  $t_0 = \sqrt{\frac{m}{k}} \operatorname{arctg} \sqrt{n} \approx 0,1$  с.

## 7.2 Молекулярная физика и термодинамика

**7.2.1.** Пусть  $m$  — масса поршня,  $S$  — его площадь. Поскольку температура и объем газа, находящегося в той части цилиндра, которая

первоначально была наверху, не меняются, давление газа в этой части постоянно и равно  $p_0$ . Условия равновесия поршня имеют вид:

$$p = p_0 + \frac{mg}{S} \quad (\text{в начальном положении цилиндра}),$$

$$p_0 = p' + \frac{mg}{S} \quad (\text{в конечном положении цилиндра}).$$

Отсюда

$$p + p' = 2p_0.$$

Температура газа, находящегося в той части цилиндра, которая первоначально была внизу, уменьшается в 4 раза, а объем не меняется. Следовательно,

$$\frac{p}{p'} = 4.$$

Из двух последних уравнений получаем ответ:  $p = \frac{8}{5}p_0 = 1,6 \cdot 10^5$  Па.

**7.2.2.** Пусть  $m$  — масса поршня,  $S$  — его площадь,  $p_A$  — атмосферное давление. Обозначив через  $p_0$ ,  $p_1$  и  $p_2$  давления в цилиндре без груза на поршне, с грузом  $M_1$  и с грузами  $M_1$  и  $M_2$  на поршне, соответственно, запишем условия равновесия поршня в этих случаях:

$$mg + p_A S = p_0 S,$$

$$(M_1 + m)g + p_A S = p_1 S,$$

$$(M_1 + M_2 + m)g + p_A S = p_2 S.$$

Поскольку температура газа постоянна, из закона Бойля–Мариотта следует, что

$$p_1 = np_0, \quad p_2 = kp_1 = nk p_0.$$

Исключая из этих уравнений  $m$ ,  $S$ ,  $p_A$  и  $p_0$ , получаем ответ:

$$M_2 = M_1 \frac{n(k-1)}{n-1}.$$

**7.2.3.** Поскольку среднеквадратичная скорость молекул газа при тем-

пературе  $T$  равна  $V = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$ , справедливо соотношение:

$$V_2^2 - V_1^2 = \frac{3k}{m_0}(T_2 - T_1) = \frac{3k}{m_0}\Delta T_1,$$

где  $k$  — постоянная Больцмана,  $m_0$  — масса молекулы. Аналогично,

$$V_3^2 - V_2^2 = \frac{3k}{m_0}(T_3 - T_2) = \frac{3k}{m_0}\Delta T_2.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{V_3^2 - V_2^2}{V_2^2 - V_1^2}.$$

Ответ:  $\Delta T_2 = \Delta T_1 \frac{V_3^2 - V_2^2}{V_2^2 - V_1^2} \approx 183,3$  К.

**7.2.4.** Внутренняя энергия гелия, который является одноатомным газом, до открывания крана равна:

$$U_0 = N \frac{m_0 V_1^2}{2} + N \frac{m_0 V_2^2}{2},$$

где  $N$  — число атомов гелия в каждом из сосудов,  $m_0$  — масса атома гелия. После открывания крана в сосудах устанавливается тепловое равновесие, в результате чего средняя кинетическая энергия молекул становится одинаковой. Так как сосуды теплоизолированы и гелий при перемешивании не совершает работу, полная внутренняя энергия гелия не изменяется. Следовательно,

$$U_1 = 2N \frac{m_0 V_3^2}{2} = U_0.$$

Объединяя записанные равенства, получаем ответ:

$$V_3 = \sqrt{\frac{V_1^2 + V_2^2}{2}} \approx 790,6 \text{ м/с.}$$

**7.2.5.** Работа газа за цикл равна площади прямоугольника 1 – 2 – 3 – 4:

$$A = (p_2 - p_1)(V_3 - V_1) = \nu R(T_3 - 2T + T_1),$$

где  $\nu$  — число молей газа,  $T = T_2 = T_4$ . Поскольку газ получает теплоту на участках 1 – 2 и 2 – 3, полное количество теплоты, полученное газом за цикл, равно

$$Q_{\text{п}} = \frac{3}{2} \nu R(T - T_1) + \frac{5}{2} \nu R(T_3 - T).$$

Следовательно,

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{п}}} = \frac{2(T_3 - 2T + T_1)}{5T_3 - 2T - 3T_1}.$$

Из уравнений изохорных процессов 1 – 2 и 4 – 3 с учетом того, что точки 2, 3 и 1, 4 лежат на изобарах, вытекает, что  $\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4}$ . Отсюда

$T = \sqrt{T_1 T_3}$ . По условию задачи  $\frac{T_3}{T_1} = n$ . Ответ:

$$\eta = \frac{2(n - 2\sqrt{n} + 1)}{5n - 2\sqrt{n} - 3} = \frac{2}{13} \approx 15,4\%.$$

**7.2.6.** Работа газа за цикл равна

$$A = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(nV_0 - V_0) = \frac{1}{2}(n - 1)^2 p_1 V_0.$$

Газ получает теплоту на участках 1 – 2 и 2 – 3, поэтому полное количество теплоты, полученное газом за цикл, равно

$$Q_{\text{п}} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) + \frac{5}{2}\nu R(T_3 - T_2),$$

где  $\nu$  — число молей газа. Используя уравнение состояния газа, это выражение можно преобразовать к виду

$$Q_{\text{п}} = \frac{1}{2}p_1 V_0(n - 1)(3 + 5n).$$

Ответ:  $\eta = \frac{A}{Q_{\text{п}}} = \frac{n - 1}{3 + 5n} = \frac{1}{9} \approx 11,1\%$ .

**7.2.7.** Пусть  $F$  — результирующая всех сил сопротивления движению автомобиля. При перемещении автомобиля на расстояние  $l$  работа, совершенная двигателем, равна произведению количества теплоты, выделившейся при сгорании топлива, на коэффициент полезного действия двигателя:  $A = \mu l \rho q \frac{\eta}{100\%}$ . На горизонтальном участке шоссе длиной  $l$  эта работа равна по величине работе сил сопротивления  $A_{\text{с}} = Fl$ , т.е.

$$A_1 = \mu_1 \rho q \frac{\eta}{100\%} l = Fl.$$

На наклонном участке шоссе той же длиной работа двигателя равна сумме величины работы сил сопротивления  $A_{\text{с}} = Fl$  и приращения потенциальной энергии автомобиля в поле силы тяготения  $\Delta E_{\text{п}} = Mg l \sin \alpha$ . С учетом малости угла наклона шоссе к горизонту имеем:

$$A_2 = \mu_2 \rho q \frac{\eta}{100\%} l = Fl + Mg l \sin \alpha.$$

Объединяя эти равенства, находим ответ:

$$\mu_2 = \mu_1 + \frac{M g \cdot 100\%}{\rho q \eta} \approx 8,13 \text{ л/100 км.}$$

*Замечание:* При подстановке числовых данных из условия задачи получаем, что последнее слагаемое в ответе имеет размерность л/м.

Чтобы преобразовать его к требуемой размерности (л/100 км), нужно умножить его на  $10^5$ .

**7.2.8.** Давление смеси сухого воздуха и насыщенного водяного пара в цилиндре, обусловленное атмосферным давлением  $p_0$  и весом поршня, в процессе нагревания цилиндра остается постоянным и равным  $3p_0$ . При температуре  $t_1 = 6^\circ\text{C}$  давление насыщенных паров воды пренебрежимо мало, поэтому давление сухого воздуха  $p_{\text{в}1} = 3p_0$ . При температуре  $t_2 = 100^\circ\text{C}$  давление насыщенных паров становится равным атмосферному. Следовательно, давление сухого воздуха при этой температуре  $p_{\text{в}2} = 2p_0$ . Из уравнения состояния сухого воздуха следует, что

$$\frac{3p_0 h S}{T_1} = \frac{2p_0 H S}{T_2},$$

где  $S$  — площадь поршня. Ответ:  $H = \frac{3h}{2} \cdot \frac{t_2 + 273^\circ\text{C}}{t_1 + 273^\circ\text{C}} \approx 20 \text{ см.}$

**7.2.9.** Обозначим через  $C_{\text{в}}$  и  $C_{\text{ш}}$  теплоемкости стакана с водой и шарика, соответственно. Уравнения теплового баланса для двух процессов теплообмена имеют вид:

$$C_{\text{в}}(t_1 - t_2) = C_{\text{ш}}(t_2 - t_0) \quad (\text{когда положили первый шарик}),$$

$$C_{\text{в}}(t_2 - t_3) + C_{\text{ш}}(t_2 - t_3) = C_{\text{ш}}(t_3 - t_0) \quad (\text{когда положили второй шарик}).$$

Исключая из этих соотношений  $C_{\text{в}}$  и  $C_{\text{ш}}$ , получаем ответ:

$$t_3 = \frac{t_2(t_1 - t_0) + t_0(t_1 - t_2)}{2t_1 - t_2 - t_0} = 50^\circ\text{C}.$$

**7.2.10.** Пусть  $C_{\text{в}}$  и  $C_{\text{ш}}$  — теплоемкости стакана с водой и шарика, соответственно. Запишем уравнения теплового баланса для двух процессов теплообмена:

$$C_{\text{в}}(t_1 - t_2) = C_{\text{ш}}(t_2 - t_0) \quad (\text{когда положили первый шарик}),$$

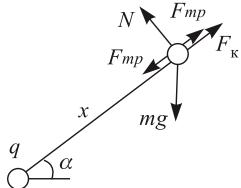
$$C_{\text{в}}(t_2 - t_3) + C_{\text{ш}}(t_2 - t_3) = 2C_{\text{ш}}(t_3 - t_0) \quad (\text{когда положили второй и третий шарики}).$$

Исключая из этих соотношений  $C_{\text{в}}$  и  $C_{\text{ш}}$ , получаем ответ:

$$t_2 = \frac{2t_1(t_3 - t_0) + t_3(t_1 - t_0)}{t_1 + 2t_3 - 3t_0} = 56^\circ\text{C}.$$

### 7.3 Электродинамика

**7.3.1.** Бусинка находится в равновесии под действием сил, изображенных на рисунке, где через  $F_K = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$  обозначена величина силы



кулоновского отталкивания зарядов,  $N$  – величина нормальной составляющей силы реакции спицы,  $F_{тр}$  – величина силы трения,  $x$  – расстояние между зарядами. При малых  $x$  кулоновская сила велика и сила трения, удерживающая бусинку от перемещения вверх, направлена вдоль по спице вниз. Наоборот, при больших  $x$ , когда кулоновская сила мала, сила трения удерживает

бусинку от сползания вниз и направлена вдоль по спице вверх. Величина силы трения покоя может принимать любые значения из интервала  $[-\mu N, \mu N]$ , поэтому равновесие бусинки достигается при всех  $x$ , удовлетворяющих неравенствам  $x_1 \leq x \leq x_2$ . В проекции на направление спицы условия равновесия бусинки в двух крайних положениях имеют вид:

$$mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x_1^2},$$

$$mg \sin \alpha = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x_2^2} + \mu mg \cos \alpha.$$

Ответ:

$$\frac{q}{2\sqrt{\pi\varepsilon_0 mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}} \leq x \leq \frac{q}{2\sqrt{\pi\varepsilon_0 mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}}.$$

Если  $\mu \geq \operatorname{tg} \alpha$ , бусинка будет находиться в равновесии при всех значениях  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $x \geq x_1$ . Числовой ответ:  $18,2 \text{ см} \leq x \leq 20 \text{ см}$ .

**7.3.2.** Поскольку все конденсаторы были первоначально незаряжены, после подключения цепи к источнику заряд на конденсаторе  $C_1$  будет равен суммарному заряду на конденсаторах  $C_2$  и  $C_3$ :  $q_1 = q_2 + q_3$ . Учитывая, что конденсаторы  $C_2$  и  $C_3$  соединены параллельно, можно записать равенство:

$$q_1 = (C_2 + C_3)U_2.$$

Энергия конденсатора  $C_3$  равна

$$W_3 = \frac{C_3 U_2^2}{2}.$$

Из этой системы уравнений находим ответ:  $C_2 = \frac{q_1 U_2 - 2W_3}{U_2^2} = 3 \times 10^{-6} \Phi$ .

**7.3.3.** Заряд  $C_1 U_1$  на конденсаторе  $C_1$  равен суммарному заряду на конденсаторах  $C_2$  и  $C_3$  (см. решение задачи 7.3.2):

$$C_1 U_1 = q_2 + q_3.$$

Поскольку  $C_3 = nC_2$  и напряжение  $U_3$  на конденсаторах  $C_2$  и  $C_3$  одинаково,  $q_3 = nq_2$ ,  $q_2 = C_2 U_3$ . Энергии конденсаторов  $C_2$  и  $C_3$  связаны соотношением

$$\frac{C_1 U_1^2}{2} = m \frac{C_3 U_3^2}{2} = mn \frac{C_2 U_3^2}{2} = mn \frac{q_2^2}{2C_2}.$$

Из системы уравнений

$$C_1 U_1 = q_2(n+1), \quad C_1 U_1^2 = mn \frac{q_2^2}{C_2}$$

получаем ответ:  $C_2 = \frac{mnq_2}{(n+1)U_1} = 1,5 \cdot 10^{-6} \Phi$ .

**7.3.4.** Соединенные параллельно конденсаторы образуют батарею емкостью  $2C$ , полный заряд на которой равен  $q = 2CU$ . Поскольку после зарядки конденсаторов батарею отключили от источника, суммарный заряд на ней остается постоянным. Учитывая, что емкость плоского конденсатора обратно пропорциональна расстоянию между пластинами, найдем емкость батареи после раздвигания пластин одного из конденсаторов:

$$C' = C \left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

За счет работы, совершенной при раздвигании пластин, энергия батареи возрастает и принимает значение

$$W = \frac{q^2}{2C'} = \frac{2kCU^2}{(k+1)}.$$

При замыкании пластин эта энергия выделится в проводнике. Ответ:

$$Q = 2CU^2 \cdot \frac{k}{k+1} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

**7.3.5.** Емкость  $C_1$  конденсатора, пространство между пластинами которого частично заполнено диэлектриком, может быть вычислена как

емкость двух параллельно соединенных конденсаторов емкостями  $(1 - \alpha)C$  и  $\alpha\varepsilon C$ :

$$C_1 = (1 - \alpha)C + \alpha\varepsilon C = (1 + \beta)C,$$

где  $\beta = \alpha(\varepsilon - 1)$ . Заряд  $q$  на этом конденсаторе и его энергия  $W_1$  в начальном состоянии равны:

$$q = C_1 U = (1 + \beta)CU, \quad W_1 = \frac{1}{2}C_1 U^2 = \frac{1}{2}(1 + \beta)CU^2.$$

При удалении диэлектрика заряд на конденсаторе не меняется, а энергия конденсатора после вытаскивания пластины возрастает и становится равной

$$W_2 = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}(1 + \beta)^2 CU^2.$$

Увеличение энергии конденсатора происходит за счет работы, совершенной при вытаскивании пластины:

$$W_2 - W_1 = A.$$

Ответ:  $A = \frac{1}{2}\alpha(\varepsilon - 1)[1 + \alpha(\varepsilon - 1)]CU^2 = 1,92 \cdot 10^{-4}$  Дж.

**7.3.6.** Начальная емкость батареи конденсаторов и ее начальная энергия равны соответственно:

$$C_1 = 2C, \quad W_1 = CU^2.$$

Поскольку при раздвигании пластин емкость конденсатора уменьшается в  $k$  раз, конечная емкость батареи

$$C_2 = C \left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Заряд на конденсаторах  $q = 2CU$  остается постоянным. Поэтому конечная энергия батареи конденсаторов равна

$$W_2 = \frac{q^2}{2C_2} = \frac{2CU^2}{1 + 1/k}.$$

Совершенная при раздвигании пластин работа  $A = W_2 - W_1$ . Ответ:

$$A = CU^2 \frac{k - 1}{k + 1} \approx 2,66 \cdot 10^{-4}$$
 Дж.

**7.3.7.** При раздвигании пластин емкость конденсатора уменьшается в  $k$  раз. Поскольку напряжение на нем постоянно (конденсатор под-

ключен к источнику), во столько же раз уменьшится заряд. Начальная и конечная энергии конденсатора равны соответственно:

$$W_1 = \frac{1}{2}CU^2, \quad W_2 = \frac{1}{2k}CU^2.$$

Изменение заряда на конденсаторе

$$\Delta q = \left( \frac{1}{k} - 1 \right) CU$$

отрицательно. Отрицательна также работа источника  $U\Delta q$ , так как заряд перемещается через источник в направлении, противоположном его ЭДС. По закону изменения энергии конденсатора

$$A + U\Delta q = W_2 - W_1.$$

Отсюда легко найти ответ:  $A = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{k} \right) CU^2 \approx 5,33 \cdot 10^{-4}$  Дж.

**7.3.8.** Емкость конденсатора с диэлектриком (см. решение задачи 7.3.5) равна:

$$C_1 = (1 - \alpha)\bar{C} + \alpha\varepsilon C = (1 + \beta)C,$$

где  $\beta = \alpha(\varepsilon - 1)$ . Начальный заряд на конденсаторе и его начальная энергия

$$q_1 = (1 + \beta)CU, \quad W_1 = \frac{1}{2}(1 + \beta)CU^2.$$

При удалении диэлектрика напряжение на конденсаторе не меняется, а заряд уменьшается на величину  $|\Delta q| = \beta CU$ . Энергия конденсатора после вытаскивания пластины

$$W_2 = \frac{1}{2}CU^2.$$

Работа источника отрицательна (см. решение задачи 7.3.7) и закон изменения энергии имеет вид:

$$A - U|\Delta q| = W_2 - W_1.$$

Ответ:  $A = \frac{1}{2}\alpha(\varepsilon - 1)CU^2 = 3,6 \cdot 10^{-4}$  Дж.

**7.3.9.** В начальном положении ключа заряд на нижней пластине конденсатора и его энергия равны соответственно:

$$q_1 = -CE_1, \quad W_1 = \frac{CE_1^2}{2}.$$

После переключения ключа заряд на этой же пластине и энергия конденсатора становятся равными

$$q_2 = +CE_2, \quad W_2 = \frac{CE_2^2}{2}.$$

При перемещении по цепи заряда  $\Delta q = q_2 - q_1$  источник  $E_2$  совершает работу  $A = E_2\Delta q$ , которая расходуется на изменение энергии конденсаторов и на выделение в цепи некоторого количества теплоты  $Q_0$ :

$$A = W_2 - W_1 + Q_0.$$

Отсюда  $Q_0 = \frac{C}{2}(E_1 + E_2)^2$ . Это количество теплоты выделяется на резисторе  $R$  и внутреннем сопротивлении  $r$  источника  $E_2$ :

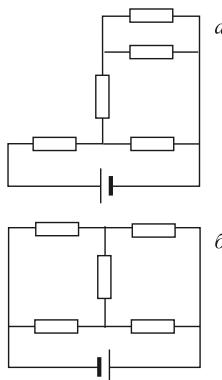
$$Q_0 = Q_R + Q_r.$$

В последовательной цепи мощности, выделяющиеся на отдельных элементах цепи, пропорциональны их сопротивлениям. Поскольку сопротивления  $R$  и  $r$  от времени не зависят, такое же соотношение справедливо и для выделяющихся на них количеств теплоты:  $Q_R/Q_r = R/r$ .

Следовательно  $Q_R = \frac{Q_0R}{R+r}$ . После несложных преобразований получаем ответ:

$$Q = Q_R = \frac{RC}{2(R+r)}(E_1 + E_2)^2 = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ Дж.}$$

**7.3.10.** При исходном подключении источника ток через левый диод не течет, и эквивалентная схема имеет вид, изображенный на рисунке (а). Сопротивление цепи в этом случае равно  $R' = \frac{8}{5}R$ , где



$R$  — сопротивление отдельного резистора. При подключении источника

с обратной полярностью ток не будет течь через правый диод и эквивалентная схема примет вид, изображенный на рисунке (б). В этом случае сопротивление цепи  $R'' = R$ , т.к. через центральный резистор ток не течет. Поскольку напряжение на клеммах источника постоянно, искомое отношение токов через источник равно  $k = \frac{I''}{I'} = \frac{R'}{R''} = 1,6$ .

**7.3.11.** Сопротивление проволоки, вытянутой из заготовки, равно

$$R = \rho \frac{l_1}{S_1},$$

где  $S_1 = \frac{l_0 S_0}{l_1}$  — площадь сечения проволоки. Сопротивление нагревателя выражается через его номинальную мощность, развиваемую им при номинальном напряжении, следующим образом:

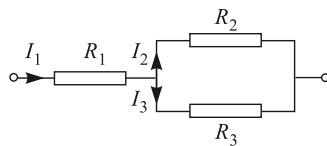
$$R_h = \frac{U_h^2}{P_h}.$$

При подключении нагревателя к сети через проволоку, вытянутую из заготовки, ток в цепи равен

$$I = \frac{U_h}{R + R_h}.$$

Поскольку фактическая мощность, развиваемая нагревателем,  $P_\phi = I^2 R_h$ , ответ имеет вид:  $P_\phi = \frac{P_h}{\left(1 + P_h \rho l_1^2 / (U_h^2 l_0 S_0)\right)^2} \approx 1,39 \text{ кВт}$ .

**7.3.12.** Обозначим токи, текущие в ветвях схемы, как показано на

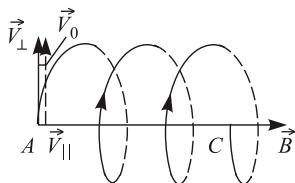


рисунке. Тогда справедлива следующая система уравнений:

$$I_1 = I_2 + I_3, \quad U_2 = I_2 R_2, \quad U_2 = I_3 R_3, \quad R_3 = n R_2.$$

Разрешая ее относительно  $R_3$ , получаем ответ:  $R_3 = (n+1) \frac{U_2}{I_1} = 5 \text{ Ом}$ .

**7.3.13.** Траектория электрона представляет собой винтовую линию (см. рисунок). Компонента скорости  $V_{||} = V_0 \cos \alpha$ , параллельная магнитному полю, постоянна. В плоскости, перпендикулярной магнит-



ному полю, электрон движется по окружности радиусом  $R$  в соответствии с уравнением

$$\frac{mV_{\perp}^2}{R} = |e|V_{\perp}B,$$

где  $V_{\perp} = V_0 \sin \alpha$  — перпендикулярная магнитному полюю составляющая скорости. Период обращения электрона

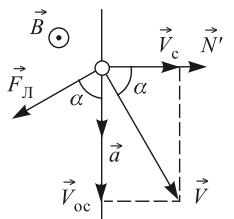
$$T = \frac{2\pi R}{V_{\perp}} = \frac{2\pi m}{|e|B}.$$

Для того чтобы электрон попал в точку  $C$ , он должен за время  $\tau = \frac{L}{V_{\parallel}}$  совершить целое число  $k$  полных оборотов, т.е.

$$\tau = kT, \quad k = 1, 2, \dots$$

Из равенства  $\frac{L}{V_0 \cos \alpha} = k \frac{2\pi m}{|e|B}$  получаем ответ:  $B = 2\pi k \frac{mV_0 \cos \alpha}{|e|L}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

**7.3.14.** Вид сверху на стержень и бусинку изображен на рисунке. Согласно закону сложения скоростей скорость бусинки  $\vec{v}$  в неподвижной системе отсчета равна



$$\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{v}_{oc}.$$

На бусинку действуют сила Лоренца  $\vec{F}_L$  и сила реакции стержня  $\vec{N}'$ . Сила Лоренца направлена горизонтально и перпендикулярно вектору  $\vec{v}$ ; величина этой силы  $F_L = qvB$ . Сила реакции перпендикулярна стержню, так как трением между бусинкой и стержнем по условию можно пренебречь. Проекции уравнения движения бусинки на касательное и нормальное стержню направления имеют вид:

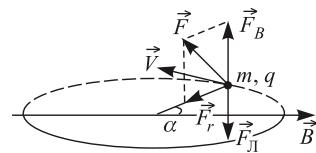
$$F_L \sin \alpha - N' = 0, \quad ma = F_L \cos \alpha.$$

Отсюда  $N' = matg\alpha$ , где  $tg\alpha = \frac{v_{oc}}{v_c}$ . По третьему закону Ньютона сила, с которой бусинка действует на стержень (на рисунке не показана),

равна по величине силе реакции стержня:  $N = N'$ . Ответ:  $N = ma \frac{v_{\text{oc}}}{v_c} = 6 \cdot 10^{-3}$  Н.

**7.3.15.** Силы, действующие на шарик в некоторой точке его траектории, изображены на рисунке. Здесь через  $\vec{F}$  обозначена сила реакции стержня, а через  $\vec{F}_{\text{Л}}$  – сила Лоренца, направленная перпендикулярно скорости стержня и вектору магнитной индукции, т.е. вертикально. Силу  $\vec{F}$  удобно разложить на горизонтальную и вертикальную составляющие:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{г}} + \vec{F}_{\text{в}}.$$



Тогда  $F = \sqrt{F_{\text{г}}^2 + F_{\text{в}}^2}$ . Проекции уравнения движения шарика на горизонтальное и вертикальное направления имеют вид:

$$m\omega^2 l = F_{\text{г}}, \quad F_{\text{в}} = F_{\text{Л}} = qVB \cos \varphi,$$

где  $V = \omega l$  – скорость шарика,  $l$  – длина стержня,  $\varphi$  – угол между стержнем и вектором  $\vec{B}$ . Отсюда

$$F = \sqrt{(m\omega^2 l)^2 + (q\omega l B \cos \varphi)^2}.$$

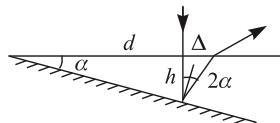
Минимальное значение этой силы достигается при  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\varphi = 270^\circ$ , максимальное – при  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = 180^\circ$ . Следовательно,

$$F_{\min} = m\omega^2 l, \quad F_{\max} = \sqrt{(m\omega^2 l)^2 + (q\omega l B)^2}.$$

Из этих равенств легко найти ответ:  $F_{\max} = F_{\min} \sqrt{1 + \left(\frac{qB}{m\omega}\right)^2}$ .

## 7.4 Оптика

**7.4.1.** Ход одного из лучей, образующих световой пучок, изображен на рисунке. Видно, что угол падения луча на посеребренную грань



клина равен  $\alpha$ , а отраженный от нее луч составляет с падающим лучом угол  $2\alpha$ . Поэтому искомое расстояние

$$d_1 = d + \Delta,$$

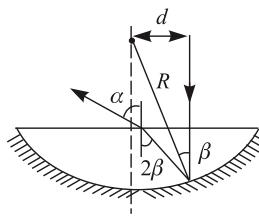
где  $\Delta = h \operatorname{tg} 2\alpha = h \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ ,  $h = d \operatorname{tg} \alpha$ .

Отсюда

$$d_1 = d \left( 1 + \frac{2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \right).$$

С использованием тригонометрических тождеств ответ легко преобразуется к виду:  $d_1 = \frac{d}{\cos 2\alpha} = \frac{2d}{\sqrt{3}} \approx 2,31$  см.

**7.4.2.** Ход одного из лучей, образующих световой пучок, изображен на рисунке, где через  $\beta$  обозначен угол падения луча на посеребренную поверхность линзы.



Видно, что

$$\sin \beta = \frac{d}{R}.$$

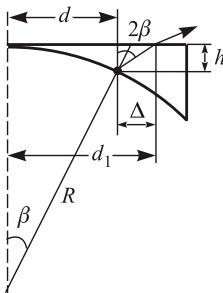
Угол падения отраженного от посеребренной поверхности луча на плоскую поверхность линзы составляет  $2\beta$ . По закону преломления

$$\sin \alpha = n \sin 2\beta.$$

Используя тождество  $\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta$ , получаем ответ:

$$\alpha = \arcsin \left[ \frac{2dn}{R} \sqrt{1 - \frac{d^2}{R^2}} \right].$$

**7.4.3.** Ход одного из лучей изображен на рисунке, из которого видно, что  $d_1 = d + \Delta$ , где  $\Delta = h \operatorname{tg} 2\beta$ ,  $h = R - \sqrt{R^2 - d^2}$ . Учитывая, что



$\sin \beta = \frac{d}{R}$ , находим  $\tan \beta = \frac{d}{\sqrt{R^2 - d^2}}$ . Используя далее тождество  $\tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta}$ , получаем ответ:  $d_1 = \frac{dR(2\sqrt{R^2 - d^2} - R)}{R^2 - 2d^2}$ .

**7.4.4.** Обозначим через  $a$ ,  $b$  и  $a'$ ,  $b'$  расстояния от предмета до линзы и от линзы до экрана в первом и во втором случаях, соответственно. По условию задачи

$$a' = a + l, \quad b' = b - l.$$

Увеличение изображения в первом случае  $n = \frac{b}{a}$ , а во втором  $\frac{1}{n} = \frac{b'}{a'}$ .

Дважды используя формулу тонкой линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{f},$$

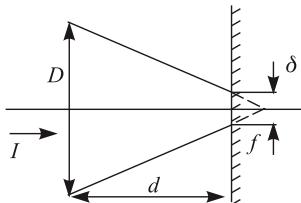
получаем ответ:  $f = \frac{ln}{n^2 - 1} = 12$  см.

**7.4.5.** Учитывая, что Солнце удалено от Земли на весьма значительное расстояние, падающие на линзу лучи света можно считать практически параллельными. После преломления линзой эти лучи пересекаются в ее фокусе. На поверхности доски, расположенной перед фокусом, лучи образуют световое пятно конечного диаметра  $\delta$  (см. рисунок). Обозначив через  $D$  диаметр линзы, из подобия треугольников находим, что

$$\frac{D}{\delta} = \frac{f}{f-d}.$$

Поскольку по условию потерями световой энергии в линзе можно пренебречь, полная световая мощность  $P = I\pi D^2/4$ , падающая

на поверхность линзы, равна световой мощности  $P_1 = I_1^2 \pi \delta^2 / 4$  в пятне.



Следовательно, мощность излучения, проходящая через единичную площадку на поверхности доски,

$$I_1 = I \left( \frac{D}{\delta} \right)^2 = I \left( \frac{f}{f-d} \right)^2.$$

За время  $\tau$  в световом пятне на поверхности доски выделится энергия

$$Q = I_1 S \tau,$$

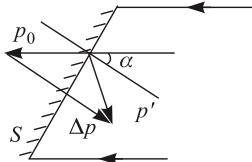
которая пойдет на нагревание дерева (здесь  $S$  — площадь пятна). Из уравнения теплового баланса следует, что

$$Q = \rho h S c (t_1 - t_0).$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$\tau = \frac{\rho h c (t_1 - t_0)}{I} \left( 1 - \frac{d}{f} \right)^2 = 0,5 \text{ с.}$$

**7.4.6.** При отражении от зеркала импульс каждого фотона меняется на величину  $\Delta p = 2p_0 \cos \alpha$ , где  $p_0$  — импульс падающего фотона,  $\alpha$  — угол падения. На зеркало площадью  $S$  за время  $\Delta t$  падает



$N = Scn\Delta t \cos \alpha$  фотонов, где  $n$  — число фотонов в единице объема,  $c$  — скорость света. Импульс силы, действующей на зеркало со стороны падающих фотонов за время  $\Delta t$ , равен  $F\Delta t = N\Delta p = 2p_0 Scn\Delta t \cos^2 \alpha$ . Следовательно, давление света, падающего на зеркало под углом  $\alpha_1$ , равно

$$p_1 = 2p_0 nc \cos^2 \alpha_1.$$

Аналогично, для света, падающего на зеркало под углом  $\alpha_2$ ,

$$p_2 = 2p_0 nc \cos^2 \alpha_2.$$

Ответ:  $p_2 = p_1 \frac{\cos^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_1} = 2p_1 = 8 \cdot 10^{-6}$  Па.

## 8. Задачи 2004 года

### 8.1 Механика

**8.1.1.** Пусть ускорение мальчика равно  $a$ . Тогда за время разгона  $t_1 = \frac{v_0}{a}$  он пробежит расстояние

$$s = \frac{at_1^2}{2} = \frac{v_0^2}{2a}.$$

Полное время движения мальчика до ворот равно

$$t_0 = t_1 + \frac{l - s}{v_0} = \frac{v_0}{2a} + \frac{l}{v_0}.$$

Из этого выражения видно, что чем меньше ускорение мальчика на участке разгона, тем больше время  $t_0$ , через которое он достигнет ворот. С другой стороны, для того чтобы мальчик успел пробежать под решеткой ворот в полный рост,  $t_0$  не должно превышать времени  $\tau$  движения решетки ворот от исходного положения до высоты, равной росту мальчика. Очевидно, что ускорение мальчика будет минимальным, если  $t_0 = \tau$ . Учитывая, что  $\tau = \frac{H - h}{u}$ , после несложных преобразований получаем ответ:

$$a_{\min} = \frac{v_0}{2 \left( \frac{H - h}{u} - \frac{l}{v_0} \right)} = 0,625 \text{ м/с}^2.$$

**8.1.2.** Скорость шарика, свободно падающего с высоты  $h$ , равна  $v = \sqrt{2gh}$ . Для того, чтобы шарик после удара о доску поднялся на высоту  $nh$ , он должен при ударе приобрести скорость

$$v' = \sqrt{2gnh} = v\sqrt{n},$$

направленную вверх. В системе отсчета, связанной с доской, скорость шарика перед ударом  $v_{\text{отн}} = v + U$ . Так как удар упругий, шарик отскочит вверх с такой же по модулю скоростью относительно доски:  $v'_{\text{отн}} = v + U$ . По закону сложения скоростей скорость шарика после удара в неподвижной системе отсчета равна:  $v' = v'_{\text{отн}} + U = v + 2U$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:  $U = \sqrt{\frac{gh}{2}} (\sqrt{n} - 1)$ .

**8.1.3.** Поскольку разрыв гранаты происходит в верхней точке траектории, непосредственно перед разрывом вертикальная составляющая импульса системы равна нулю. Считая разрыв кратковременным и пренебрегая импульсом силы тяжести за время разрыва, можно применить закон сохранения импульса. С учетом того, что массы осколков одинаковы, из этого закона следует, что вертикальные составляющие скоростей осколков сразу после разрыва гранаты равны по величине и противоположны, причем скорость первого осколка направлена вниз, а скорость второго — вверх. Выбирая начало отсчета в точке разрыва гранаты и направляя координатную ось  $OY$  вниз, имеем

$$v_{1y} = v_0, \quad v_{2y} = -v_0,$$

где  $v_0$  — модуль вертикальной скорости осколков. Кинематическое уравнение движения по вертикали, записанное для первого осколка, дает соотношение:

$$v_0 t_1 + \frac{gt_1^2}{2} = h.$$

Отсюда  $v_0 = \frac{h}{t_1} - \frac{gt_1}{2}$ . Аналогично, для второго осколка имеем:

$$-v_0 t_2 + \frac{gt_2^2}{2} = h.$$

Подставляя сюда найденное  $v_0$ , получаем уравнение

$$t_2^2 - \left( \frac{2h}{gt_1} - t_1 \right) t_2 - \frac{2h}{g} = 0.$$

Условию задачи удовлетворяет положительный корень. Ответ:  $t_2 = \frac{2h}{gt_1}$ .

**8.1.4.** Расход воды, определяемый как масса воды, вытекающей из шланга в единицу времени, равен  $\mu = \rho S v_0$ . Поэтому масса воды, находящейся в данный момент в воздухе, может быть найдена из выражения:

$$m = \mu \tau = \rho S v_0 \tau,$$

где  $\tau$  — время движения частицы воды в струе от вылета из шланга до падения на землю. Выберем начало координат на поверхности земли, ось  $OY$  направим вверх. Для движения частицы воды по вертикали имеем кинематическое уравнение:

$$y(\tau) = h + v_0 \tau \sin \alpha - \frac{g \tau^2}{2} = 0.$$

Положительный корень этого уравнения равен

$$\tau = \frac{1}{g} \left[ v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh} \right].$$

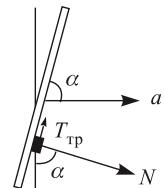
Подставляя найденное  $\tau$  в выражение для массы воды, получаем ответ:

$$m = \frac{\rho S v_0}{g} \left[ v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh} \right] \approx 1,44 \text{ кг.}$$

**8.1.5.** Силы, действующие на брускок в горизонтальной плоскости, показаны на рисунке, где через  $F_{\text{тр}}$  обозначена величина силы трения, а через  $-N$  величина нормальной составляющей силы реакции доски. Брускок не скользит по доске, если проекция суммы этих сил на направление, перпендикулярное ускорению доски, равна нулю:

$$F_{\text{тр}} \sin \alpha - N \cos \alpha = 0.$$

Минимальное значение угла  $\alpha$  достигается, когда сила трения покоя принимает максимальное значение:  $F_{\text{тр}} = \mu N$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:  $\alpha_{\min} = \arctg(1/\mu)$ .



**8.1.6.** Уравнение движения бруска по желобу, составляющему угол  $\alpha$  с вертикалью, имеет вид:

$$ma = mg \cos \alpha - \mu mg \sin \alpha,$$

откуда ускорение бруска

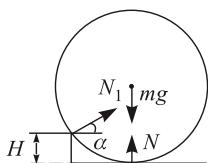
$$a = g(\cos \alpha - \mu \sin \alpha).$$

Из кинематического соотношения  $\tau = \sqrt{\frac{2L}{a}}$ , где  $L = D \cos \alpha$  – путь, пройденный бруском до точки пересечения желоба с обручем, получаем ответ:

$$\tau = \sqrt{\frac{2D}{g(1 - \mu \tan \alpha)}}.$$

В диапазоне  $0 \leq \alpha < \arctg \mu$  время движения бруска увеличивается с ростом  $\alpha$ . При  $\alpha \geq \arctg \mu$  брускок, предоставленный самому себе, двигаться не будет.

**8.1.7.** Пусть ускорение доски таково, что цилиндр не перекатывается через уступ, а движется поступательно вместе с доской. Силы,



действующие на цилиндр в этом случае, изображены на рисунке, где через  $mg$  обозначена величина силы тяжести ( $m$  — масса цилиндра), через  $N$  — величина силы реакции горизонтальной части доски, а через  $N_1$  — величина силы реакции уступа. Поскольку трение по условию задачи пренебрежимо мало, вектор силы  $\vec{N}_1$  направлен перпендикулярно касательной к поверхности цилиндра, т.е. к его оси. В проекциях на горизонтальное и вертикальное направления уравнения движения цилиндра имеют вид:

$$ma = N_1 \cos \alpha, \quad mg - N_1 \sin \alpha - N = 0.$$

Если увеличивать ускорение доски, то модуль силы  $N_1$  будет возрастать, а модуль силы  $N$  — уменьшаться. Наконец, при максимально возможном ускорении доски, при котором цилиндр еще не будет подниматься на уступ,  $N$  обратится в нуль. Из уравнений движения для этого случая находим

$$a_{\max} = g \operatorname{ctg} \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между горизонталью и вектором  $\vec{N}_1$ . Выражая  $\operatorname{ctg} \alpha$  через заданные в условии радиус цилиндра и высоту уступа, получаем ответ:

$$a_{\max} = g \frac{\sqrt{H(2R-H)}}{R-H} \approx 13,1 \text{ м/с}^2.$$

**8.1.8.** Обозначим через  $\tau$  время действия силы  $F$ . По закону изменения импульса имеем

$$F\tau = mv_0,$$

где  $m$  — масса бруска,  $v_0$  — скорость, которую он приобретает в результате действия силы  $F$  (импульсом силы трения за время  $\tau$  по условию задачи можно пренебречь). По закону изменения механической энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \mu mg S_0,$$

где  $\mu$  — коэффициент трения. Величина равнодействующей трех сил, действующих на брусок одновременно и направленных, как показано на рисунке, равна

$$F_\Sigma = F(1 + 2 \cos \alpha).$$

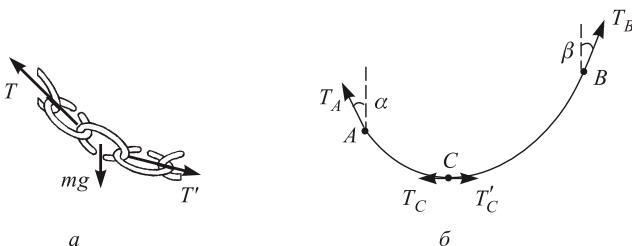
Законы изменения импульса и энергии в этом случае дают:

$$F_\Sigma \tau = mv, \quad \frac{mv^2}{2} = \mu mg S.$$

Объединяя записанные выражения, находим ответ:

$$S = (1 + 2 \cos \alpha)^2 S_0 = 4S_0.$$

**8.1.9.** На каждое звено цепочки действуют силы, изображенные на рис. а, где через  $mg$  обозначена величина силы тяжести, а через  $T$  и  $T'$  — величины сил, приложенных к этому звену со стороны



соседних звеньев. Поскольку цепочка висит неподвижно, каждое звено находится в состоянии равновесия и сумма сил, действующих на него, равна нулю. Полагая, что масса каждого звена мала, можно считать, что силы  $\vec{T}$  и  $\vec{T}'$  равны по величине и направлены в противоположные стороны по касательной к цепочке. Модуль каждой из этих сил и представляет собой натяжение цепочки в данном сечении.

На рис. б изображены силы натяжения, действующие на отрезки цепочки  $AC$  и  $CB$ . Из соображений симметрии ясно, что силы, возникающие в точке  $C$ , а именно  $\vec{T}_C$  и  $\vec{T}'_C$ , направлены горизонтально. При этом  $T'_C = T_C$ . Условия равновесия цепочки имеют вид:

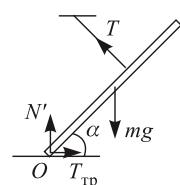
$$T_A \sin \alpha = T_C, \quad T_B \sin \beta = T_C, \quad T_A \cos \alpha + T_B \cos \beta = mg.$$

Исключая из этих равенств углы  $\alpha$  и  $\beta$ , получаем ответ:

$$m = \frac{1}{g} \left( \sqrt{T_A^2 - T_C^2} + \sqrt{T_B^2 - T_C^2} \right).$$

**8.1.10.** Лестница находится в равновесии под действием сил, указанных на рисунке, где через  $mg$  обозначена величина силы тяжести, через  $T$  — величина силы натяжения веревки, через  $F_{\text{тр}}$  — величина силы трения, а через  $N'$  — величина нормальной составляющей реакции пола. Запишем условия равновесия лестницы в виде равенства нулю

- 1) суммы сил в проекции на вертикальное направление и



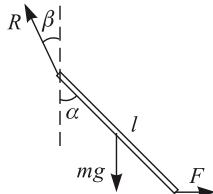
2) суммы моментов сил относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку  $O$ :

$$mg - N' - T \cos \alpha = 0, \quad mg \frac{L}{2} \cos \alpha - T \frac{2}{3} L = 0$$

Здесь  $L$  — длина лестницы. Исключая из этих уравнений  $T$ , находим  $N' = mg \left(1 - \frac{3}{4} \cos^2 \alpha\right)$ . По третьему закону Ньютона искомая величина силы нормального давления лестницы на пол  $N = N'$ . Ответ:

$$N = mg \left(1 - \frac{3}{4} \cos^2 \alpha\right) = 187,5 \text{ Н.}$$

**8.1.11.** Стержень находится в равновесии под действием сил, изображенных на рисунке, где через  $mg$  обозначена величина силы тяже-



сти ( $m$  — масса стержня), через  $F$  — величина силы, приложенной к стержню, а через  $R$  — величина силы реакции оси. Из условий равновесия вытекают следующие равенства:

$$F = R \sin \beta, \quad mg = R \cos \beta, \quad Fl \cos \alpha = mg \frac{l}{2} \sin \alpha.$$

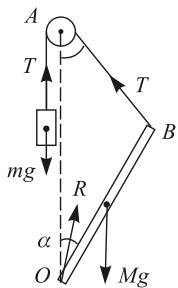
Исключая отсюда  $F$ ,  $R$  и  $mg$ , находим, что

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Ответ:  $\beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha\right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2}\right) \approx 26^\circ 34'$ .

**8.1.12.** Система находится в равновесии под действием сил, изображенных на рисунке, где через  $mg$  и  $Mg$  обозначены величины сил тяжести, через  $T$  — величина силы натяжения веревки, а через  $R$  — величина силы реакции шарнира. Из условия равновесия груза следует, что  $T = mg$ . Для описания равновесия стержня воспользуемся уравнением моментов относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку  $O$ :

$$mgH \sin \beta = Mg \frac{l}{2} \sin \alpha.$$



Отсюда

$$m = M \frac{l}{2H} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Из теоремы синусов, записанной для  $\Delta AOB$ , следует равенство

$$\frac{|AB|}{\sin \alpha} = \frac{l}{\sin \beta}.$$

По теореме косинусов для того же треугольника

$$|AB| = \sqrt{l^2 + H^2 - 2lH \cos \alpha}.$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$m = \frac{M}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{l}{H}\right)^2 - 2 \frac{l}{H} \cos \alpha} \approx 7 \text{ кг.}$$

## 8.2 Молекулярная физика и термодинамика

**8.2.1.** При перемещении правого поршня вправо на расстояние  $l$  левый поршень переместится в ту же сторону на некоторое расстояние  $x$ . Условие равновесия левого поршня имеет вид:

$$p_0 S - kx - p_1 S = 0.$$

Отсюда давление воздуха между поршнями

$$p_1 = p_0 - \frac{kx}{S}.$$

Из закона Бойля–Мариотта следует равенство

$$p_0 l = p_1 (2l - x).$$

Исключая из этих соотношений  $x$ , получаем квадратное уравнение относительно  $p_1$ :

$$p_1^2 - \left( p_0 - \frac{2kl}{S} \right) p_1 - \frac{p_0 kl}{S} = 0.$$

Выбирая положительный корень этого уравнения, получаем ответ:

$$p_1 = \frac{p_0}{2} - \frac{kl}{S} + \sqrt{\frac{p_0^2}{4} + \left( \frac{kl}{S} \right)^2}.$$

**8.2.2.** Работа газа численно равна площади фигуры, которую ограничивает график процесса на плоскости переменных  $p$  и  $V$  (в данной задаче площади трапеции):

$$A = (p_2 - p_1) \cdot \frac{V_4 - V_1 + V_3 - V_2}{2} = p_1 \frac{V_3 - V_1}{2}.$$

Полученное газом количество теплоты

$$Q_{23} = \frac{5}{2} \nu R (T_3 - T_2) = \frac{5}{2} p_2 (V_3 - V_2) = 5p_1 (V_3 - V_2).$$

Из уравнений процессов 1 – 2 и 4 – 3 следует, что

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_2}{p_1} = 2, \quad \frac{V_3}{V_4} = \frac{p_2}{p_1} = 2.$$

Отсюда  $V_2 = 2V_1$ ,  $V_3 = 4V_1$ . Используя эти соотношения, преобразуем выражения для работы газа и полученного им количества теплоты к виду:

$$A = \frac{3}{2} p_1 V_1, \quad Q_{23} = 10p_1 V_1,$$

из которого легко получить ответ:

$$A = \frac{3}{20} Q_{23} = 30 \text{ Дж.}$$

**8.2.3.** Для расчета количества теплоты, полученной газом, воспользуемся первым законом термодинамики. Рассмотрим вначале процесс 1 – 2. Изменение внутренней энергии газа и работа, совершенная газом в этом процессе, соответственно равны:

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2} \nu_1 R (T_2 - T_1), \quad A_{12} = \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1).$$

Здесь  $\nu_1$  — число молей газа, участвующего в процессе 1 – 2;  $p_i$ ,  $V_i$ ,  $T_i$  — давление, объем и температура газа в точке  $i$  ( $i = 1, 2$ ). Поскольку

точки 1 и 2 лежат на прямой, проходящей через начало координат, справедливо равенство:

$$\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2}.$$

Используя это равенство, а также уравнения состояния газа в точках 1 и 2:

$$p_1 V_1 = \nu_1 R T_1, \quad p_2 V_2 = \nu_1 R T_2,$$

выражение для работы газа легко преобразовать к виду:

$$A_{12} = \frac{1}{2} \nu_1 R (T_2 - T_1).$$

Из первого закона термодинамики следует, что количество теплоты, полученное газом в процессе 1 – 2, равно

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = 2\nu_1 R (T_2 - T_1)$$

Рассуждая аналогично, находим количество теплоты, полученное газом в процессе 3 – 4:

$$Q_{34} = 2\nu_2 R (T_4 - T_3),$$

где  $\nu_2$  количество газа, участвующего в этом процессе. Поскольку по условию задачи  $T_3 = T_1$ ,  $T_4 = T_2$ , выражение для  $Q_{34}$  преобразуется к виду:

$$Q_{34} = 2\nu_2 R (T_2 - T_1).$$

Ответ:  $n = \frac{Q_{12}}{Q_{34}} = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{m_1}{m_2} = k = 2$ .

**8.2.4.** Поскольку газ теплоизолирован, из первого закона термодинамики следует, что

$$\Delta U = \Delta A,$$

где  $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R \Delta T$  – изменение внутренней энергии газа,  $\Delta A = p \Delta V$  – работа, совершенная над газом. Для газа справедливо также уравнение состояния (уравнение Клапейрона-Менделеева):

$$pV = \nu RT.$$

Пусть  $p_0$ ,  $V_0$  и  $T_0$  – параметры начального состояния, а  $p = p_0 + \Delta p$ ,  $V = V_0 - \Delta V$  и  $T = T_0 + \Delta T$  – параметры конечного состояния газа. Так как  $\Delta m \ll m$ , изменения параметров состояния газа также малы:

$$\Delta p \ll p_0, \quad \Delta V \ll V_0, \quad \Delta T \ll T_0.$$

С точностью до малых первого порядка из уравнения Клапейрона-Менделеева получаем

$$\nu R \Delta T \approx -p_0 \Delta V + V_0 \Delta p.$$

Кроме того, с той же точностью имеем

$$p\Delta V \approx p_0\Delta V.$$

Подставляя найденные выражения в равенство  $\Delta U = \Delta A$ , получаем, что

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{3}{5} \cdot \frac{\Delta p}{p_0}.$$

Поскольку  $\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta x}{x}$  и  $\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{\Delta m}{m}$ , ответ имеет вид:  $\Delta x = \frac{3}{5}x \frac{\Delta m}{m}$ .

**8.2.5.** При перемещении поршня давление пара в нижней части трубки увеличится до величины  $2p$ , после чего будет оставаться постоянным. При этом часть пара сконденсируется. Пар над поршнем можно считать идеальным газом. Его давление согласно закону Бойля–Мариотта равно:

$$p_1 = p \frac{V}{V_1} = p \frac{V}{V + 3V/4} = \frac{4}{7}p.$$

Из условия равновесия поршня имеем

$$p_1 S + mg = 2pS.$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$m = \left(2 - \frac{4}{7}\right) \frac{pS}{g} = \frac{10}{7} \cdot \frac{pS}{g}.$$

### 8.3 Электродинамика

**8.3.1.** Поскольку сила кулоновского взаимодействия между заряженными телами является потенциальной, для решения задачи можно воспользоваться законом изменения механической энергии. По условию в начальном и конечном состояниях бруск неподвижен и его кинетическая энергия равна нулю. Следовательно, изменение потенциальной энергии взаимодействия зарядов равно работе силы трения на перемещении бруска из начального положения в конечное:

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(l_0 + l)} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0} = -\mu m g l.$$

Отсюда находим

$$l = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0 \mu m g} - l_0.$$

Необходимо иметь в виду, что этот результат справедлив не всегда. В самом деле, если в начальном положении бруска сила кулоновского отталкивания меньше максимального значения силы трения покоя, т.е.

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0^2} \leq \mu mg,$$

то брусок в движение не придет. Поэтому полная формулировка ответа такова:

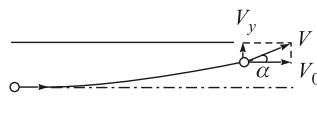
$$l = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0 \mu mg} - l_0 \text{ при } \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0^2} > \mu mg, \quad l = 0 \text{ при } \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0^2} \leq \mu mg.$$

**8.3.2.** Поверхность слюды, обращенная к левой обкладке конденсатора, является эквипотенциальной, так как напряженность электрического поля перпендикулярна к ней. Нанесем мысленно на эту поверхность тонкий проводящий слой. При этом потенциал поверхности останется тем же самым и разность потенциалов между обкладками конденсатора не изменится. Поэтому не изменится и емкость конденсатора. Следовательно, конденсатор с диэлектрической пластинкой можно рассматривать как два последовательно соединенных конденсатора емкостями

$$C_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_1} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d - d_1}.$$

$$\text{Ответ: } C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{\varepsilon d - (\varepsilon - 1)d_1} \approx 7,3 \cdot 10^{-10} \Phi.$$

**8.3.3.** Поскольку электрическое поле внутри конденсатора однородно, а вне его равно нулю, при пролете конденсатора будет изменяться только поперечная составляющая скорости электронов, причем на



выходе из конденсатора  $v_y = v_0 \operatorname{tg} \alpha$ . Следовательно, изменение импульса одного электрона за время пролета конденсатора равно

$$\Delta p_1 = mv_0 \operatorname{tg} \alpha,$$

С другой стороны, по закону изменения импульса,

$$\Delta p_1 = F_1 \Delta t$$

где  $F_1$  — сила, действующая на электрон со стороны поля конденсатора,  $\Delta t$  — время пролета конденсатора. Обозначив через  $l$  длину

пластин конденсатора, находим, что  $\Delta t = \frac{l}{v_0}$  и

$$F_1 = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \frac{mv_0^2}{l} \operatorname{tg} \alpha.$$

Одновременно в конденсаторе находятся  $n_\Sigma = nSv_0\Delta t = nSl$  электронов. Поэтому полная сила, действующая на пучок, равна

$$F = n_\Sigma F_1 = nSmv_0^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

По третьему закону Ньютона искомая величина  $\Delta N = F$ . Ответ:

$$\Delta N = nSmv_0^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

В зависимости от полярности напряжения на конденсаторе пучок будет отклоняться либо вверх ( $\alpha > 0$ ), либо вниз ( $\alpha < 0$ ). В соответствии с этим сила реакции подставки будет либо увеличиваться, либо уменьшаться на величину  $\Delta N$ .

**8.3.4.** Обозначим через  $l_0$  и  $l$  расстояния между поршнями до и после сообщения им зарядов. Напряженность поля, создаваемого одним из поршней, равна

$$E_1 = \frac{q}{2S\varepsilon_0}.$$

Поэтому сила электростатического притяжения между поршнями

$$F = qE_1 = \frac{q^2}{2S\varepsilon_0}.$$

Под действием этой силы поршни переместятся и займут новое положение равновесия. Обозначив через  $p$  давление воздуха в пространстве между поршнями после их зарядки, запишем условие равновесия каждого из поршней:

$$p_0S + \frac{q^2}{2S\varepsilon_0} = pS,$$

Поскольку температура воздуха постоянна, справедлив закон Бойля–Мариотта, согласно которому:

$$p_0Sl_0 = pSl.$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$n = \frac{l_0}{l} = 1 + q^2/(2\varepsilon_0 p_0 S^2).$$

**8.3.5.** При подключении к поршням напряжения, между ними возникает сила электростатического притяжения  $F = qE$ , где  $q$  — заряд

на одном из поршней,  $E = \frac{q}{2S\epsilon_0}$  – электрическое поле, создаваемое другим поршнем,  $S$  – площадь поршня. Поршни образуют плоский конденсатор, поэтому  $q = CU = \frac{\epsilon_0 S}{d} U$ . Отсюда

$$F = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d^2}.$$

Под действием этой силы поршни переместятся и займут новое положение равновесия, определяемое условием:

$$p_0 S + F = p_1 S,$$

где  $p_1$  – давление воздуха в объеме между поршнями. Поскольку температура воздуха постоянна,

$$p_0 d_0 S = p_1 d S.$$

Объединяя записанные выражения, получаем квадратное уравнение относительно  $d$ :

$$d^2 - d_0 d + \frac{\epsilon_0 U^2}{2p_0} = 0,$$

и находим его корни:

$$d_{1,2} = \frac{d_0}{2} \pm \sqrt{\frac{d_0^2}{4} - \frac{\epsilon_0 U^2}{2p_0}}.$$

Для того чтобы определить, какой из корней удовлетворяет условию задачи, устремим  $U \rightarrow 0$ . Видно, что при этом  $d_{1,2} \rightarrow \frac{d_0}{2} \pm \frac{d_0}{2}$ . Поскольку в отсутствие напряжения между поршнями расстояние между ними равно  $d_0$ , мы должны выбрать больший по величине корень. Ответ:

$$d = \frac{d_0}{2} + \sqrt{\frac{d_0^2}{4} - \frac{\epsilon_0 U^2}{2p_0}} = 1,8 \text{ см.}$$

**8.3.6.** При сообщении электроду заряда  $Q_2$  между ним и поршнем возникает сила электростатического отталкивания  $F = Q_2 E$ , где  $E = \frac{Q_1}{2\epsilon_0 S}$  – электрическое поле, создаваемое поршнем. Отсюда

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{2\epsilon_0 S}.$$

Переместившийся под действием этой силы поршень займет новое положение равновесия, условие которого имеет вид:

$$p_1 S = p_2 S + F.$$

Здесь  $p_1$  и  $p_2$  — давления порций газа, находящихся по разные стороны от поршня. Обозначив через  $V_0$  объем половины трубы, по закону Бойля–Мариотта, записанному для этих порций газа, имеем:

$$p_0 V_0 = p_1 \frac{V_0}{2}, \quad p_0 V_0 = p_2 \frac{3}{2} V_0,$$

$$\text{Отсюда } p_1 = 2p_0, \quad p_2 = \frac{2}{3}p_0 \text{ и } p_1 - p_2 = \frac{4}{3}p_0.$$

Следовательно,

$$F = \frac{4}{3}p_0 S.$$

Сравнивая это выражение с выражением для  $F$ , найденным выше, получаем ответ:

$$Q_2 = \frac{8\varepsilon_0 p_0 S^2}{3Q_1} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

**8.3.7.** Различие между мощностями, выделяемыми во внешней цепи в первом и во втором случаях, связано с тем, что к аккумулятору подключают нагрузки с разными сопротивлениями. Обозначив через  $\mathcal{E}$  ЭДС аккумулятора, имеем:

$$N_1 = I_1(E - I_1 r), \quad N_2 = I_2(E - I_2 r).$$

Находя из первого уравнения ЭДС аккумулятора и подставляя ее во второе уравнение, получаем ответ:

$$N_2 = \frac{I_2}{I_1} (N_1 - I_1 r(I_2 - I_1)) = 16,8 \text{ Вт.}$$

**8.3.8.** Пусть  $R_H$  — сопротивление нагрузки. Ток в цепи равен

$$I = \frac{E}{R + R_H},$$

мощность генератора выражается как

$$N = EI = \frac{E^2}{R + R_H}.$$

$$\text{Отсюда } R_H = \frac{E^2}{N} - R.$$

Мощность, выделяющаяся в нагрузке,

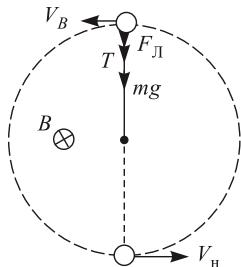
$$N_H = I^2 R_H = \frac{E^2 R_H}{(R + R_H)^2}.$$

Искомое отношение равно  $\eta = \frac{N_H}{N} = \frac{R_H}{R + R_H}$ . Подставляя найденное  $R_H$ , получаем ответ:  $\eta = 1 - \frac{NR}{E^2} = 0,6$ .

**8.3.9.** По условию задачи магнитная индукция и начальная скорость частицы направлены так, как показано на рисунке. Используя правило левой руки, легко установить, что сила Лоренца, действующая на шарик, во всех точках его траектории направлена к центру окружности. По второму закону Ньютона, записанному в верхней точке траектории шарика, имеем

$$\frac{mv_B^2}{l} = mg + T + qv_B B,$$

где  $T$  — натяжение нити,  $v_B$  — модуль скорости шарика в верхней



точке траектории. Уравнение движения шарика можно рассматривать как квадратное уравнение относительно  $v_B$ . Положительный корень этого уравнения равен:

$$v_B = \frac{qBl}{2m} + \sqrt{\left(\frac{qBl}{2m}\right)^2 + gl + \frac{Tl}{m}}.$$

(Отрицательный корень должен быть отброшен, как не имеющий физического смысла.) Отметим, что скорость шарика  $v_H$  в нижней точке траектории минимальна, если в верхней точке натяжение нити обращается в нуль.

Магнитное поле работы не совершает, так как сила Лоренца перпендикулярна скорости шарика. Работа силы натяжения нити также

равна нулю. Поэтому механическая энергия шарика сохраняется. Закон сохранения энергии дает соотношение:

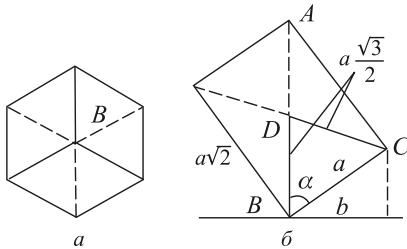
$$\frac{mv_H^2}{2} = \frac{mv_B^2}{2} + 2mg l.$$

Подставляя сюда найденное выше  $v_B$  и полагая  $T = 0$ , находим  $v_H$ . Ответ:

$$v_{\min} = \left[ 5gl + \frac{q^2 B^2 l^2}{2m^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2 g}{q^2 B^2 l}} \right) \right]^{1/2}.$$

## 8.4 Оптика

**8.4.1.** Вид на куб сверху показан на рис. а. Тень от куба представляет собой правильный шестиугольник со стороной  $b$ , равной расстоянию от боковой вершины куба до вертикали. Площадь тени равна



нию от боковой вершины куба до вертикали. Площадь тени равна

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2} b \cdot b \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2.$$

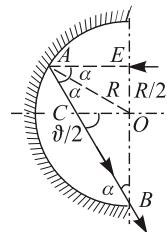
Для вычисления  $b$  рассмотрим сечение куба вертикальной плоскостью, проходящей по диагоналям двух его противоположных граней (см. рис. 2, на котором  $AB$  – вертикаль,  $BC$  – ребро куба,  $D$  – центр куба). Из рис. 2 видно, что  $b = a \sin \alpha$ . По теореме косинусов, записанной для  $\Delta BCD$ , имеем:

$$\left( \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \left( \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 + a^2 - 2a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha.$$

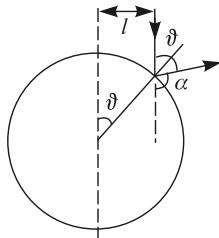
Отсюда  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Следовательно,  $\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$  и  $b = a \sqrt{\frac{2}{3}}$ . Ответ:

$$S = a^2 \sqrt{3} \approx 1,7 \text{ дм}^2.$$

**8.4.2.** Рассмотрим ход крайнего луча, образующего пучок, который изображен на рисунке. Угол падения этого луча на зеркало ( $\angle EAO$ , где  $O$  – центр зеркала,  $A$  – точка падения луча) по условию задачи равен  $\alpha = \arcsin 0,5 = 30^\circ$ . По закону отражения  $\angle OAB = \angle EAO = 30^\circ$ . Кроме того,  $\angle OBA = \angle OAB = 30^\circ$ , так как  $\Delta AOB$  равнобедренный. В итоге находим, что  $\angle BOE = 180^\circ$ , т.е. точки  $B$ ,  $O$ , и  $E$  лежат на одной прямой. Следовательно, при падении на зеркало крайних лучей из пучка отраженные лучи проходят через край зеркала. Эти лучи расходятся под наибольшим углом. Искомый угол расхождения лучей равен удвоенному углу  $OCB$ , т.е.  $\vartheta = 2(90^\circ - \alpha) = 120^\circ$ .



**8.4.3.** Ход луча, падающего на шар на некотором расстоянии  $l$  от оси, параллельной лучу и проходящей через центр шара, изображен на



рисунке, где  $\vartheta$  – угол падения,  $\alpha$  – угол отклонения луча от первоначального направления. Видно, что  $\alpha + 2\vartheta = \pi$ ,  $l = R \sin \vartheta$ . Отсюда получаем формулу, связывающую расстояние  $l$  от луча до оси и угол  $\alpha$  отклонения луча:

$$l = R \sin \frac{\pi - \alpha}{2}.$$

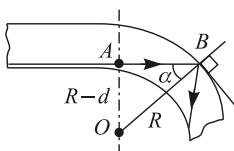
Из этой формулы следует, что заданное в условии расстояние между двумя параллельными лучами, падающими на шар, выражается как

$$a = R \left[ \sin \frac{\pi - \beta}{2} - \sin \frac{\pi - \alpha}{2} \right].$$

Отсюда получаем ответ:

$$R = \frac{a}{\sin \frac{\pi - \beta}{2} - \sin \frac{\pi - \alpha}{2}} = \frac{2a}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \approx 6,3 \text{ см.}$$

**8.4.4.** Рассмотрим ход светового луча, распространяющегося вплотную к внутренней поверхности плоской части пластинки (см. рисунок).



Легко видеть, что из всех лучей, попавших внутрь пластиинки через ее торец, этот луч имеет наименьший угол падения  $\alpha$  на искривленную поверхность пластиинки. Рассматриваемый луч не выйдет наружу, если он испытает на искривленной

поверхности полное отражение, условие которого имеет вид:

$$\sin \alpha \geqslant \frac{1}{n}.$$

Ясно, при выполнении этого условия все остальные лучи, образующие пучок, также не выйдут из пластиинки через ее искривленную поверхность. Из рисунка видно, что  $\sin \alpha = \frac{R-d}{R}$ . Объединяя записанные соотношения, получаем ответ:

$$R_{\min} = \frac{nd}{n-1} = 3 \text{ мм.}$$

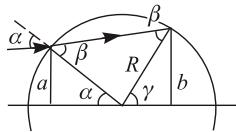
**8.4.5.** Ход луча изображен на рисунке, где через  $\alpha$  и  $\beta$  обозначены соответственно углы падения и преломления на границе стекло — воздух. По закону преломления

$$\sin \beta = n \sin \alpha.$$

Из рисунка видно, что

$$a = R \sin \alpha, \quad b = R \sin \gamma, \quad \gamma = \pi - \alpha - (\pi - 2\beta) = 2\beta - \alpha.$$

По условию задачи углы  $\alpha$  и  $\beta$  малы, следовательно, мал также и



угол  $\gamma$ . Поэтому справедливы приближенные равенства:

$$a \approx R\alpha, \quad b \approx R\gamma, \quad \beta \approx \alpha n, \quad \gamma \approx (2n-1)\alpha.$$

Отсюда  $b \approx a \frac{\gamma}{\alpha}$ . Ответ:  $b \approx a(2n-1) = 2a$ .

**8.4.6.** Максимальное расстояние  $l$ , на которое фотоэлектроны удаляются от положительно заряженной пластины, определяется из закона сохранения энергии, в соответствии с которым

$$\frac{mv^2}{2} = eEl = eU \frac{l}{d},$$

где  $E = U/d$  — напряженность электрического поля между пластины, которое можно считать однородным. Согласно уравнению Эйнштейна кинетическая энергия фотоэлектрона равна

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu - A,$$

где  $A$  — работа выхода. Объединяя записанные выражения, находим

$$l = \frac{d(h\nu - A)}{eU}.$$

Применяя эту формулу, находим  $l_1$  и  $l_2$  — максимальные расстояния, на которые удаляются фотоэлектроны от положительно заряженной пластины при облучении ее светом частотой  $\nu_1$  и  $\nu_2$  соответственно. Поскольку искомая величина равна  $\Delta l = l_1 - l_2$ , ответ имеет вид:

$$\Delta l = \frac{dh(\nu_1 - \nu_2)}{eU} \approx 1 \text{ мм.}$$

## 9. Задачи 2005 года

### 9.1 Механика

**9.1.1.** Время, за которое бегун пробегает дистанцию, равно  $\tau = t_p + t_0$ , где  $t_p = \frac{v_0}{a}$  — время разгона,  $t_0$  — время движения с постоянной скоростью. За время разгона бегун пробегает расстояние

$$S_p = \frac{at_p^2}{2} = \frac{v_0^2}{2a}.$$

Поэтому

$$t_0 = \frac{S - S_p}{v_0} = \frac{S}{v_0} - \frac{v_0}{2a},$$

где  $S$  — длина дистанции. Таким образом,

$$\tau = \frac{v_0}{2a} + \frac{S}{v_0}.$$

По условию задачи  $\tau_1 = \tau_2$ , откуда следует, что

$$\frac{v_0}{2a_1} + \frac{S_1}{v_0} = \frac{v_0}{2a_2} + \frac{S_2}{v_0}, \quad \text{или} \quad \frac{t_{p1}}{2} + \frac{S_1}{v_0} = \frac{t_{p2}}{2} + \frac{S_2}{v_0}$$

(Индексы относятся к обоим бегунам). Отсюда

$$\Delta t = t_{p1} - t_{p2} = \frac{2(S_2 - S_1)}{v_0}.$$

Разность длин дистанции  $S_2 - S_1$  равна разности длин окружностей радиусами  $R + d$  и  $R$ , т.е.  $S_2 - S_1 = 2\pi d$ . Ответ:  $\Delta t = \frac{4\pi d}{v_0} \approx 1,57$  с.

**9.1.2.** Используя решение задачи 9.1.1, находим, что время  $\tau$ , за которое бегун пробегает дистанцию длиной  $S$ , равно

$$\tau = \frac{v_0}{2a} + \frac{S}{v_0},$$

где  $a$  — ускорение бегуна. Отсюда

$$a = \frac{v_0^2}{2(v_0\tau - S)}.$$

Поскольку скорость равномерного движения обоих бегунов одинакова, времена разгона бегунов обратно пропорциональны их ускорениям. Следовательно, искомая величина  $n$  равна

$$n = \frac{a_1}{a_2}$$

(Индексы относятся к обоим бегунам). Имеем

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{v_0\tau - S_2}{v_0\tau - S_1} = 1 - \frac{S_2 - S_1}{v_0\tau - S_1}.$$

Разность длин дистанции бегунов равна  $S_2 - S_1 = 2\pi d$  (см. решение задачи 9.1.1). Ответ:  $n = 1 - \frac{2\pi d}{v_0\tau - S_1} \approx 0,61$ .

**9.1.3.** При растяжении пружин, соединенных последовательно, возникающие в них силы упругости одинаковы. Следовательно,

$$k_1\Delta l_1 = k_2\Delta l_2,$$

где  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  — абсолютные удлинения пружин. Их сумма равна общему удлинению  $\Delta l$  системы:  $\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta l$ . Отсюда

$$\Delta l_1 = \Delta l \frac{k_2}{k_1 + k_2}, \quad \Delta l_2 = \Delta l \frac{k_1}{k_1 + k_2}.$$

С другой стороны, жесткость двух пружин, соединенных последовательно,  $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ . Поэтому работа по их растяжению

$$A = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \cdot \frac{\Delta l^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad \frac{\Delta l^2}{2} = \frac{A(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}.$$

Потенциальные энергии деформации пружин

$$E_1 = \frac{k_1 \Delta l_1^2}{2}, \quad E_2 = \frac{k_2 \Delta l_2^2}{2}.$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$E_1 = A \frac{k_2}{k_1 + k_2} = 0,4 \text{ Дж}, \quad E_2 = A \frac{k_1}{k_1 + k_2} = 0,6 \text{ Дж}.$$

**9.1.4.** Из условия задачи следует, что при соударении шариков сохраняется проекция импульса на горизонтальное направление и кинетическая энергия системы. Обозначив через  $v_1$  и  $v_2$  скорости шариков  $m$  и  $2m$  после удара, имеем:

$$2mv_0 = mv_1 + 2mv_2, \quad 2m \frac{v_0^2}{2} = m \frac{v_1^2}{2} + 2m \frac{v_2^2}{2}.$$

Так как сила натяжения нити  $T$  работу не совершает, при движении шарика  $m$  после удара сохраняется его полная механическая энергия. Для нижней и верхней точек окружности, по которой движется этот шарик, получаем:

$$m \frac{v_1^2}{2} = 2mg l + m \frac{u^2}{2},$$

где  $u$  — скорость шарика в верхней точке. Уравнение движения шарика в верхней точке окружности имеет вид:

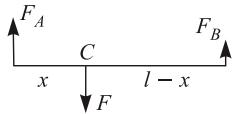
$$m \frac{u^2}{l} = mg + T.$$

Отсюда следует, что скорость  $u$  минимальна, если натяжение нити в верхней точке обращается в нуль, т.е.

$$m \frac{u_{\min}^2}{l} = mg.$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:  $v_0 = \frac{3}{4} \sqrt{5gl} = 5,25$  м/с.

**9.1.5.** Пусть  $l$  — длина стержня. Обозначим через  $x$  расстояние  $AC$ , а через  $F_A$  и  $F_B$  — силы реакции опор, действующие на стержень в



точках  $A$  и  $B$ . Условия равновесия стержня имеют вид:

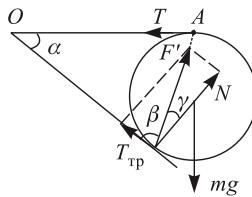
$$F_A + F_B = F, \quad F_A x = F_B (l - x).$$

Кроме того, по условию задачи,

$$F_A - F_B = f, \quad \frac{l - x}{x} = k.$$

Решая эту систему уравнений, получаем ответ:  $F = f \frac{k+1}{k-1} = 70$  Н.

**9.1.6.** Цилиндр находится в равновесии под действием сил, изображенных на рисунке, где  $mg$  — сила тяжести,  $T$  — сила натяжения нити,  $F'$  — сила реакции наклонной плоскости. Последнюю удобно разложить на две составляющие: силу нормального давления  $N$  и силу трения  $F_{\text{тр}}$ . Поскольку линии действия сил  $mg$  и  $T$  пересекаются в



точке  $A$ , линия действия силы  $F'$  при равновесии цилиндра также должна проходить через эту точку. Следовательно,

$$F' = \frac{N}{\cos \gamma}.$$

Записывая уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку  $O$ , находим, что

$$N = mg.$$

Из рисунка видно, что  $\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta$ ,  $2\beta + \alpha = \pi$ . Отсюда  $\gamma = \frac{\alpha}{2}$ . По третьему закону Ньютона величина искомой силы  $F = F'$ . Объединяя записанные равенства, находим ответ:  $F = \frac{mg}{\cos(\alpha/2)}$ .

**9.1.7.** Плавающая палочка находится в равновесии под действием сил, изображенных на рисунке, где  $mg$  — сила тяжести,  $F_A$  — архимедова сила,  $T_0$  — сила натяжения нити. Из уравнения моментов, записанного относительно оси, проходящей через точку подвеса палочки, получаем:

$$\rho S L \cdot \frac{L}{2} \cos \alpha = \rho_b S \frac{L}{2} \cdot \frac{3L}{4} \cos \alpha,$$

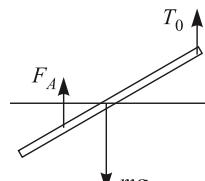
откуда плотность материала палочки  $\rho = \frac{3}{4} \rho_b$ , а ее масса  $m = \frac{3}{4} \rho_b S L$ .

Следовательно, сила натяжения нити в исходном положении палочки равна

$$T_0 = mg - F_A = \frac{1}{4} \rho_b S L g.$$

Поскольку в уравнение моментов угол наклона палочки не входит, глубина погружения палочки в воду при любом угле наклона одна и та же. Поэтому при перемещении нити вверх сила натяжения будет оставаться постоянной до тех пор, пока палочка не займет вертикальное положение, оставаясь погруженной в воду наполовину. Совершенная при этом работа

$$A_1 = T_0 \cdot \frac{L}{2} (1 - \sin \alpha) = \frac{1}{8} \rho_b S L^2 g (1 - \sin \alpha).$$



При дальнейшем подъеме нити сила натяжения будет возрастать в зависимости от перемещения по линейному закону. Обозначив через  $x$  длину выступающей из воды части палочки, имеем:

$$T(x) = \rho_{\text{в}} S g \left( x - \frac{L}{4} \right), \text{ причем } \frac{L}{2} \leq x \leq L.$$

Среднее значение этой силы при удалении палочки из воды

$$T_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \left( T \left( \frac{L}{2} \right) + T(L) \right) = \frac{1}{2} \rho_{\text{в}} S L g.$$

Совершенная при этом работа

$$A_2 = T_{\text{ср}} \cdot \frac{L}{2} = \frac{1}{4} \rho_{\text{в}} S L^2 g.$$

Полная работа  $A = A_1 + A_2$ . Ответ:  $A = \frac{1}{8} \rho_{\text{в}} S L^2 g (3 - \sin \alpha) = \frac{5}{16} \rho_{\text{в}} S L^2 g$ .

**9.1.8.** Рассмотрим колебания маятника в поступательно движущейся системе отсчета, связанной с тележкой. Обозначив через  $\vec{g}'$  величину ускорения свободного падения в этой системе, по формуле Гюйгенса находим, что период малых колебаний математического маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g'}}.$$

Согласно закону сложения ускорений, ускорение точки в неподвижной системе равно векторной сумме ускорения точки в поступательно движущейся системе и ускорения движущейся системы.

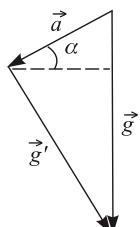
Обозначив через  $\vec{a}$  ускорение тележки, получаем:

$$\vec{g} = \vec{g}' + \vec{a}.$$

Вектор  $\vec{a}$  направлен вдоль наклонной плоскости и равен по модулю  $a = g \sin \alpha$ . Как видно из рисунка,  $g'^2 = (a \cos \alpha)^2 + (g - a \sin \alpha)^2$ . Отсюда  $g' = g \cos \alpha$ . Ответ:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}} \approx 1,5 \text{ с.}$$

**9.1.9.** Из законов сохранения импульса и энергии, записанных для упругого соударения одинаковых по массе шариков, следует, что они при ударе обмениваются скоростями. Поэтому после соударения двигавшийся шарик остановится, а покончившийся приобретет скорость  $v_0$ . При последующем движении шариков, связанных пружиной, также будут сохраняться импульс и энергия. Учитывая, что в моменты време-



ни, когда расстояния между шариками максимальны или минимальны, их относительная скорость обращается в нуль, для этих моментов времени имеем:

$$mv_0 = 2mv, \quad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{2mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2},$$

где  $v$  — скорость шариков,  $x$  — удлинение пружины. Исключая из этих соотношений  $v$ , находим

$$x = \pm v_0 \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

Ответ:  $l_{\max} = l + v_0 \sqrt{\frac{m}{2k}}$ ,  $l_{\min} = l - v_0 \sqrt{\frac{m}{2k}}$ .

**9.1.10.** Из условия равновесия неподвижно висящего груза  $kx_0 = Mg$  следует, что удлинение пружины при этом равно

$$x_0 = \frac{Mg}{k},$$

где  $k$  — жесткость пружины. Совместим начало отсчета потенциальной энергии с концом недеформированной пружины. Учитывая, что при максимальном растяжении пружины ( $x = x_{\max}$ ) скорость груза с бруском обращается в нуль, запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{kx_0^2}{2} - (M+m)gx_0 = \frac{kx_{\max}^2}{2} - (M+m)gx_{\max}.$$

Подставляя сюда  $x_0$ , находим

$$x_{\max} = \frac{(M+2m)g}{k}.$$

Запишем далее уравнения движения для груза с бруском и отдельно для бруска:

$$(M+m)a = (M+m)g - kx, \quad ma = mg - F.$$

Отсюда сила, с которой груз действует на брускок,

$$F = \frac{mkx}{M+m}.$$

Максимальное значение эта сила принимает при  $x = x_{\max}$ . Объединяя записанные выражения, получаем ответ:  $F_{\max} = mg \frac{M+2m}{M+m}$ .

## 9.2 Молекулярная физика и термодинамика

**9.2.1.** Плотность и давление идеального газа выражаются следующим образом:

$$\rho = n \frac{M}{N_A}, \quad p = nkT,$$

где  $n$  — концентрация молекул,  $M$  — молярная масса газа,  $k$  — постоянная Больцмана,  $N_A$  — число Авогадро,  $T$  — абсолютная температура. Используя эти выражения, для смеси газов получаем систему уравнений:

$$n_1 \frac{M_1}{N_A} + n_2 \frac{M_2}{N_A} = \rho, \quad n_1 kT + n_2 kT = p_0.$$

Отсюда, учитывая, что  $kN_A = R$ , получаем ответ:

$$n_1 = \frac{p_0 M_2 - \rho RT}{kT(M_2 - M_1)} \approx 1,9 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3},$$

$$n_2 = \frac{\rho RT - p_0 M_1}{kT(M_2 - M_1)} \approx 0,57 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

**9.2.2.** Шар будет подниматься вверх, если действующая на него выталкивающая сила превысит силу тяжести. По закону Архимеда выталкивающая сила равна  $m_B g$ , где  $m_B$  — масса воздуха в объеме, занимаемом шаром. Обозначив через  $m_{He}$  массу гелия, содержащегося в шаре, а через  $M$  — массу оболочки шара, запишем условие, при котором шар начнет подниматься:

$$(M + m_{He})g \leq m_B g,$$

Массы гелия и воздуха, содержащихся в объеме  $V$ , можно найти из уравнений состояния этих газов:

$$m_{He} = \frac{M_{He} p_0 V}{RT_0}, \quad m_B = \frac{M_B p_0 V}{RT_0},$$

где  $T_0 = t_0 + 273$  °C,  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ . Учитывая, что масса оболочки шара равна  $M = 4\pi r^2 \sigma$ , перепишем условие подъема шара в виде:

$$4\pi r^2 \sigma \leq \frac{4}{3}\pi r^3 p_0 \frac{M_B - M_{He}}{RT_0}.$$

При этом знак равенства достигается при минимальном радиусе шара. Ответ:

$$r_{\min} = \frac{3\sigma RT_0}{(M_B - M_{He})p_0} \approx 2,73 \text{ м.}$$

**9.2.3.** Пусть  $m_1$  и  $m_2$  — соответственно массы водорода и гелия в смеси,  $M_0$  — масса поршня,  $V$  — объем цилиндра,  $S$  — площадь сечения поршня,  $T$  — температура. Из условия равновесия поршня и уравнения начального состояния смеси следует равенство:

$$\frac{M_0g}{S} = \frac{2}{V} \left( \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) RT.$$

В конечном состоянии, когда диффузия гелия закончится, концентрация гелия в обеих частях цилиндра станет одинаковой. Следовательно, станут равными парциальные давления гелия снизу и сверху от поршня. Поэтому давление поршня будет уравновешиваться только давлением водорода:

$$\frac{M_0g}{S} = \frac{3}{V} \frac{m_1}{M_1} RT.$$

Сопоставляя записанные выражения, получаем, что  $k = \frac{m_1}{m_2} = \frac{2M_1}{M_2} = 1$ .

Массы водорода и гелия в смеси были одинаковыми.

**9.2.4.** Работа газа в циклическом процессе численно равна площади фигуры, ограниченной графиком процесса на  $pV$ -диаграмме:

$$A = \frac{1}{2}(np_1 - p_1)(nV_1 - V_1) = \frac{1}{2}(n-1)^2 p_1 V_1,$$

где  $p_1$  и  $V_1$  — давление и объем газа в точке 1. Количество теплоты, полученной газом в данном процессе,

$$Q_{1-2} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}(p_1 + np_1)(nV_1 - V_1).$$

Поскольку  $\nu RT_1 = p_1 V_1$  и  $\nu RT_2 = n^2 p_1 V_1$ , то  $Q_{1-2} = 2p_1 V_1(n^2 - 1)$ .

Коэффициент полезного действия цикла  $\eta = \frac{A}{Q_{1-2}} = \frac{n-1}{4(n+1)} = 12,5\%$ .

**9.2.5.** Работа газа за цикл равна алгебраической сумме количеств теплоты, которыми газ обменивается с окружающими телами:

$$A = Q_{1-2} + Q_{3-4} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1 + T_4 - T_3).$$

Количество теплоты, полученное газом,

$$Q_{1-2} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1).$$

Следовательно, КПД цикла  $\eta = \frac{A}{Q_{1-2}} = 1 - \frac{T_3 - T_4}{T_2 - T_1}$ . По условию задачи  $T_2 = nT_3$ ,  $T_1 = nT_4$ . Ответ:  $\eta = \frac{n-1}{n} \approx 33,3\%$ .

**9.2.6.** Работа газа за цикл равна (см. решение задачи 9.2.5):

$$A = Q_{1-2} + Q_{2-3} + Q_{3-1}.$$

Количество теплоты, полученное газом,

$$Q = Q_{1-2} + Q_{2-3}.$$

Следовательно, КПД рассматриваемого цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{Q_{1-2} + Q_{2-3} + Q_{3-1}}{Q_{1-2} + Q_{2-3}}.$$

По условию задачи  $T_2 = T_3 = T_{\max}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} Q_{1-2} &= \frac{3}{2}R(T_{\max} - T_1) = \frac{3}{2}R\Delta T, \\ Q_{1-2} + Q_{3-1} &= \frac{3}{2}R\Delta T - \frac{5}{2}R\Delta T = -R\Delta T. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\eta = \frac{Q_{2-3} - R\Delta T}{Q_{2-3} + \frac{3}{2}R\Delta T}.$$

Отсюда

$$Q_{2-3} = \frac{3\eta + 2}{2(1 - \eta)}R\Delta T.$$

В изотермическом процессе количество теплоты, полученное от термостата, равно работе газа:  $Q_{2-3} = A_{2-3}$ . Ответ:

$$A_{2-3} = \frac{3\eta/100\% + 2}{2(1 - \eta/100\%)}R\Delta T \approx 1,35 \text{ кДж.}$$

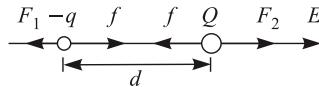
### 9.3 Электродинамика

**9.3.1.** Частицы расположены на одной силовой линии электрического поля (см. рисунок). Величины сил, действующих на частицы, равны:

$$f = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 d^2}, \quad F_1 = q\mathcal{E}, \quad F_2 = Q\mathcal{E}.$$

Полагая, что ускорения частиц равны, по второму закону Ньютона имеем:

$$ma = -q\mathcal{E} + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 d^2}, \quad Ma = Q\mathcal{E} - \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 d^2}.$$



Исключая из этих уравнений ускорение частиц  $a$ , получаем ответ:

$$d = \sqrt{\frac{qQ(m+M)}{4\pi\varepsilon_0 E(mQ+Mq)}}.$$

Поскольку начальные скорости частиц равны нулю, а их ускорения совпадают, расстояние между частицами при их движении будет оставаться постоянным.

**9.3.2.** Угловая скорость вращения стержня максимальна в тот момент, когда сила притяжения между зарядами  $Q$  и  $-q$  и сила отталкивания между зарядами  $Q$  и  $q$  не имеют составляющих, перпендикулярных стержню, т. е., когда заряды  $Q$ ,  $-q$  и  $q$  лежат на одной прямой. Поскольку кулоновские силы потенциальны, для решения задачи можно применить закон сохранения энергии, используя для энергии взаимодействия двух точечных зарядов  $Q$  и  $q$ , находящихся на расстоянии  $x$  друг от друга, формулу:

$$E_{\Pi} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 x}.$$

В начальном состоянии стержень неподвижен, а энергии взаимодействия пар зарядов  $Q$ ,  $q$  и  $Q$ ,  $-q$  равны по величине и противоположны по знаку. Поэтому начальная энергия системы равна нулю. Полагая, что в конечном состоянии заряды  $Q$ ,  $-q$  и  $q$  находятся на одной прямой, по закону сохранения энергии имеем

$$mv^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( -\frac{Qq}{L-l} + \frac{Qq}{L+l} \right) = 0,$$

где  $v = \omega l$  — линейная скорость каждого из шариков. Отсюда легко получить ответ:  $\omega = \sqrt{\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 lm(L^2 - l^2)}}$ .

**9.3.3.** Поскольку кулоновские силы потенциальны, работа  $A$  равна изменению потенциальной энергии системы:

$$A = E_{\Pi 2} - E_{\Pi 1},$$

где

$$E_{\Pi 1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( -\frac{Qq}{L-l} + \frac{Qq}{L+l} \right), \quad E_{\Pi 2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{Qq}{L-l} - \frac{Qq}{L+l} \right).$$

(См. решение задачи 9.3.2). Ответ:  $A = \frac{Qql}{\pi\varepsilon_0(L^2 - l^2)}$ .

**9.3.4.** Искомая работа равна изменению потенциальной энергии системы:

$$A = E_{\Pi 2} - E_{\Pi 1},$$

где

$$E_{\Pi 1} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{L}, \quad E_{\Pi 2} = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{2L}.$$

При этом начальное  $x_1$  и конечное  $x_2$  удлинения пружины определяются условиями равновесия заряда  $q$ :

$$kx_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{L^2}, \quad kx_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{4L^2}.$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$A = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 L} \left( 1 - \frac{15q^2}{64\pi\varepsilon_0 k L^3} \right).$$

**9.3.5.** Работа сил электростатического поля равна изменению механической энергии шарика:

$$qEl \sin \alpha = \frac{mv^2}{2} + mg l(1 - \cos \alpha),$$

где  $\alpha$  — угол отклонения нити,  $l$  — ее длина,  $v$  — скорость шарика. При максимальном отклонении нити от вертикали скорость шарика обращается в нуль, следовательно,

$$qEl \sin \alpha_{\max} = mg l(1 - \cos \alpha_{\max}).$$

Последнее выражение легко привести к виду:

$$2qEl \sin \frac{\alpha_{\max}}{2} \cos \frac{\alpha_{\max}}{2} = 2mg l \sin^2 \frac{\alpha_{\max}}{2}$$

Отсюда следует ответ:  $\alpha_{\max} = 2 \operatorname{arctg} \frac{qE}{mg} \approx 0,1 \text{ рад} \approx 5,7^\circ$ .

**9.3.6.** До соединения шариков проводом потенциалы шариков и напряженности электрического поля вблизи их поверхностей равны, соответственно:

$$\varphi_{1,2} = \frac{Q_{1,2}}{4\pi\varepsilon_0 R_{1,2}}, \quad E_{1,2} = \frac{Q_{1,2}}{4\pi\varepsilon_0 R_{1,2}^2}$$

После соединения шариков их потенциалы станут одинаковыми за счет перетекания зарядов. Обозначив заряды шариков после соединения через  $Q'_1$  и  $Q'_2$ , имеем:

$$Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2, \quad \frac{Q'_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{Q'_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

Отсюда  $Q'_1 = \frac{(Q_1 + Q_2)R_1}{R_1 + R_2}$ ,  $Q'_2 = \frac{(Q_1 + Q_2)R_2}{R_1 + R_2}$ . Следовательно, напряженности поля у поверхностей шариков станут:

$$E'_1 = \frac{(Q_1 + Q_2)}{4\pi\varepsilon_0 R_1(R_1 + R_2)}, \quad E'_2 = \frac{(Q_1 + Q_2)}{4\pi\varepsilon_0 R_2(R_1 + R_2)}.$$

В итоге получаем систему уравнений:

$$k_1 = \frac{E'_1}{E_1} = \frac{(Q_1 + Q_2)R_1}{Q_1(R_1 + R_2)}, \quad k_2 = \frac{E'_2}{E_2} = \frac{(Q_1 + Q_2)R_2}{Q_2(R_1 + R_2)}.$$

Разрешая эту систему относительно  $R_2$  и  $Q_2$ , находим ответ:

$$R_2 = R_1 \frac{k_2(k_1 - 1)}{k_1(1 - k_2)} = 3 \text{ см}, \quad Q_2 = Q_1 \frac{k_1 - 1}{1 - k_2} = 6 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}.$$

**9.3.7.** Пусть заряд на внутренней сфере равен  $-q$ . Тогда заряд на внешней сфере  $3q$ . До соединения сфер проводником потенциал внутренней сферы

$$\varphi_0 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 (2R)} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

После соединения сфер весь заряд с внутренней сферы перейдет на внешнюю сферу. Потенциал внутренней сферы станет равным потенциалу внешней:

$$\varphi = \frac{3q - q}{4\pi\varepsilon_0 (2R)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Ответ:  $n = \frac{\varphi}{\varphi_0} = 2$ . Потенциал внутренней сферы увеличится в 2 раза.

**9.3.8.** Обозначим емкость пустого конденсатора через С. Тогда при заполнении его жидкостью на половину высоты емкость составит

$$C_1 = \frac{C}{2} + \frac{\varepsilon C}{2} = \frac{C(\varepsilon + 1)}{2}.$$

При горизонтальном расположении пластин емкость будет

$$C_2 = \frac{2C \cdot 2\varepsilon C}{2C + 2\varepsilon C} = \frac{2\varepsilon C}{\varepsilon + 1}.$$

Ответ:  $n = \frac{C_2}{C_1} = \frac{4\epsilon}{(1+\epsilon)^2}$ .

**9.3.9.** Сопротивление слоя среды толщиной  $d$  и сечением  $S$  вычисляется по формуле  $R = \frac{\rho d}{S}$ . Емкость плоского конденсатора с площадью пластин  $S$  и расстоянием между ними  $d$  равна  $C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}$ . Сравнивая эти выражения, получаем ответ:  $R = \frac{\epsilon \epsilon_0 \rho}{C} = 26,6$  МОм.

**9.3.10.** По закону Ома ток через резистор равен  $I = \frac{U}{R}$ , где  $U = \frac{q_0 - It}{C}$  — напряжение на конденсаторе в момент времени  $t$ ,  $R$  — сопротивление резистора в этот же момент,  $q_0$  — начальный заряд на конденсаторе. Здесь учтено, что по условию ток через резистор постоянен. Используя для тока его значение  $I = \frac{q_0}{R_0 C}$  в начальный момент времени, приходим к равенству:

$$\frac{q_0 - It}{RC} = \frac{q_0}{R_0 C}.$$

Отсюда

$$R = R_0 \left(1 - \frac{It}{q_0}\right) = R_0 - \frac{t}{C}.$$

Ответ:  $R(t) = R_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$ , где  $\tau = R_0 C$ .

**9.3.11.** Начальный заряд на конденсаторах равен

$$q_0 = \mathcal{E} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

После внесения диэлектрика заряд на конденсаторах станет

$$q = \mathcal{E} \frac{\epsilon C_1 C_2}{\epsilon C_1 + C_2}.$$

Работа источника по переносу заряда  $\Delta q = q - q_0$  равна  $A = \mathcal{E} \cdot \Delta q$ .

Ответ:  $A = \mathcal{E}^2 \frac{C_1 C_2^2 (\epsilon - 1)}{(C_1 + C_2)(\epsilon C_1 + C_2)} = 0,24$  Дж.

**9.3.12.** Обозначим через  $x$  расстояние, на которое диэлектрическая пластина выдвинута из конденсатора. Емкость конденсатора с частично выдвинутой пластинкой равна

$$C(x) = \frac{\epsilon_0 \epsilon l(l-x)}{d} + \frac{\epsilon_0 l x}{d} = C_0 \epsilon - C_0 (\epsilon - 1) \frac{x}{l}.$$

При выдвигании пластинки заряд на конденсаторе изменится на величину:

$$\Delta q = (C(x) - C_0 \varepsilon) \mathcal{E} = -C_0(\varepsilon - 1) \frac{x}{l} \mathcal{E}.$$

Поскольку заряд на конденсаторе уменьшается, работа источника отрицательна:

$$A_{\text{ист}} = \Delta q \mathcal{E} = -C_0(\varepsilon - 1) \frac{x}{l} \mathcal{E}^2.$$

Энергия конденсатора при выдвигании пластинки также уменьшится:

$$\Delta W = \frac{(C(x) - C_0) \mathcal{E}^2}{2} = -C_0(\varepsilon - 1) \frac{x}{l} \cdot \frac{\mathcal{E}^2}{2}.$$

Изменение энергии конденсатора равно сумме работы  $A$  силы  $F$  и работы источника  $A_{\text{ист}}$ :  $\Delta W = A + A_{\text{ист}}$ , откуда

$$A = \Delta W - A_{\text{ист}} = C_0(\varepsilon - 1) \frac{x}{l} \cdot \frac{\mathcal{E}^2}{2}.$$

Поскольку  $A = Fx$ , ответ имеет вид:  $F = C_0(\varepsilon - 1) \frac{\mathcal{E}^2}{2l}$ .

**9.3.13.** Согласно закону Ома для полной цепи, ток в цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2}.$$

Применяя закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС, имеем:

$$U = \mathcal{E}_1 - IR_1 \quad (\text{при исходном подключении резисторов}),$$

$$V = \mathcal{E}_1 - IR_2 \quad (\text{когда резисторы поменяли местами}).$$

Подставив в эти равенства найденную выше силу тока, приведем их к виду:

$$U = \frac{\mathcal{E}_1 - k\mathcal{E}_2}{1+k}, \quad V = \frac{k\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{1+k}, \quad \text{где} \quad k = \frac{R_1}{R_2}.$$

Исключая отсюда  $k$ , получаем ответ:  $V = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - U$ .

**9.3.14.** Мощность, потребляемая лампочкой в первом случае,

$$W_1 = \frac{U_1^2}{R_1} = \frac{U_1^2}{R_0(1+\alpha t_1)},$$

где  $R_0$  — сопротивление лампочки при температуре  $0^\circ\text{C}$ . Аналогично, мощность, потребляемая во втором случае

$$W_2 = \frac{U_2^2}{R_2} = \frac{U_2^2}{R_0(1+\alpha t_2)}.$$

Исключая из этих соотношений неизвестную величину  $R_0$ , получаем ответ:

$$\alpha = \frac{W_2 U_1^2 - W_1 U_2^2}{W_1 U_2^2 t_1 - W_2 U_1^2 t_2} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}.$$

**9.3.15.** Мощность, развиваемая генератором, равна  $P = \mathcal{E}I$ , где  $I$  — сила тока в цепи. Мощность, выделяющаяся в линии,  $P_{\text{л}} = I^2r$ . Следовательно, мощность, выделяющаяся в нагрузке,

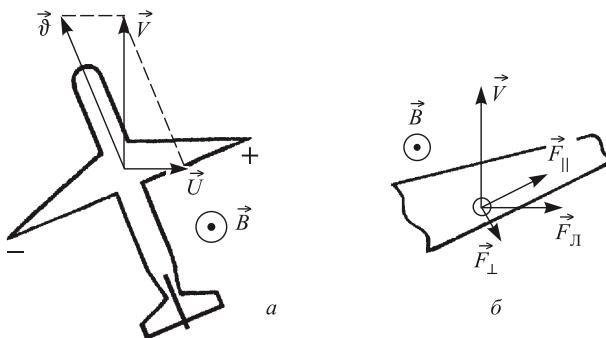
$$P_{\text{н}} = P - P_{\text{л}} = \mathcal{E}I - I^2r.$$

Поскольку  $P_{\text{н}}$  обращается в нуль при значениях силы тока  $I_1 = 0$  и  $I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r}$ , максимум квадратичной зависимости  $P_{\text{н}}(I)$  достигается при силе тока в цепи, равной

$$I_0 = \frac{I_1 + I_2}{2} = \frac{\mathcal{E}}{2r}.$$

Подставляя это значение силы тока в выражение для мощности в нагрузке, получаем ответ:  $P_{\text{max}} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = 12,1 \text{ кВт}$ .

**9.3.16.** По закону сложения скоростей скорость самолета в неподвижной системе отсчета равна  $\vec{V} = \vec{v} + \vec{u}$  (см. рис. а). Величина этой скорости  $V = \sqrt{v^2 - u^2}$ . На свободные заряды, движущиеся вместе



с самолетом со скоростью  $V$ , действует сила Лоренца, направленная перпендикулярно скорости и магнитной индукции (см. рис. б), и равная по величине  $F_{\text{л}} = qVB$ . Составляющая этой силы  $\vec{F}_{\parallel}$ , параллельная крылу, перемещает положительные заряды на один конец крыла, а отрицательные — на другой конец. Из рисунков видно, что

$$\frac{F_{\perp}}{F_{\text{л}}} = \frac{V}{v}.$$

Следовательно,

$$F_{||} = F_{\Pi} \frac{V}{v} = \frac{qV^2B}{v}.$$

Движение зарядов прекращается, когда  $F_{||}$  уравновешивается силой  $F_{\text{эл.ст.}}$ , действующей со стороны электростатического поля, возникшего в крыле:

$$qE_{\text{эл.ст.}} = \frac{qV^2B}{v}.$$

Отсюда напряженность электростатического поля внутри крыла

$$E_{\text{эл.ст.}} = \frac{V^2B}{v}.$$

Разность потенциалов между концами крыла  $\Delta U = E_{\text{эл.ст.}} L$ .

Ответ:  $\Delta U = BL \left( v - \frac{u^2}{v} \right) = 0,48 \text{ В.}$

**9.3.17.** При замыкании ключа по контуру потечет ток  $I$  и на стержень начнет действовать сила Ампера  $F_A = IBl$ , в результате чего стержень придет в движение. Поскольку

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t},$$

импульс силы Ампера за малое время  $\Delta t$  равен

$$F_A \Delta t = Bl \Delta q.$$

По второму закону Ньютона  $m \Delta v = F_A \Delta t$ . Следовательно,

$$m \Delta v = Bl \Delta q.$$

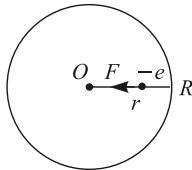
Такое же равенство справедливо и для конечных приращений скорости и заряда. Полагая  $\Delta v = v$ ,  $\Delta q = q_0 - q$ , находим, что

$$mv = Bl(q_0 - q).$$

Выражая из последнего равенства заряд  $q$ , получаем ответ:  $q = q_0 - \frac{mv}{Bl}$ .

**9.3.18.** Пусть  $r$  — расстояние от центра заряженного шара до электрона. На электрон действует сила  $F = eE$ , направленная к центру шара. Здесь  $E$  — напряженность электрического поля в точке, где расположен электрон. По теореме Гаусса

$$4\pi r^2 \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{e}{R^3} r^3,$$



откуда  $E = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r$ . Следовательно,  $F(r) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r$ . Уравнение движения электрона под действием этой силы имеет вид:

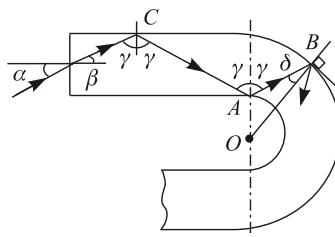
$$m\ddot{r} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r, \quad \text{или} \quad \ddot{r} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}r = 0.$$

Отсюда находим круговую частоту колебаний электрона  $\omega = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}}$ . Поскольку период колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , ответ имеет вид:

$$T = \frac{4\pi R}{e} \sqrt{\pi\varepsilon_0 m R} \approx 2 \cdot 10^{-15} \text{ с.}$$

## 9.4 Оптика

**9.4.1.** Ход луча, падающего на искривленную поверхность пластиинки под наименьшим углом  $\delta$ , изображен на рисунке. Этот луч



не выйдет наружу в точке  $B$ , если

$$\sin \delta \geqslant \frac{1}{n}.$$

Из треугольника  $AOB$  по теореме синусов имеем:

$$\frac{\sin \delta}{|AO|} = \frac{\sin(\pi - \gamma)}{|OB|}.$$

Учитывая, что  $|AO| = R - d$ ,  $|OB| = R$ , получаем, что

$$\sin \gamma = \frac{R}{R-d} \sin \delta = \frac{R}{n(R-d)}.$$

Видно, что  $\sin \gamma > \frac{1}{n}$ , поэтому в точках  $A$  и  $C$  этот луч также наружу не выйдет. Из закона преломления следует, что

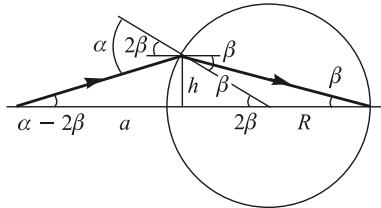
$$\sin \alpha = n \sin \beta.$$

С другой стороны,  $\sin \beta = \cos \gamma$ . Объединяя записанные равенства, получаем ответ:  $\sin \alpha_{\max} = \sqrt{n^2 - \frac{R^2}{(R-d)^2}} = 0,5$ ,  $\alpha_{\max} = 30^\circ$ .

**9.4.2.** Пусть источник находится на расстоянии  $a$  от поверхности шара. Ход одного из лучей, испущенных источником, изображен на рисунке в предположении, что этот луч пересекает заднюю часть поверхности шара на оптической оси. С учетом малости углов падения и преломления имеем:

$$\beta = \frac{1}{n}\alpha, \quad h = (\alpha - 2\beta)a, \quad h = 2\beta R,$$

где  $h$  – расстояние от точки падения луча на поверхность шара до его



оси,  $R$  – радиус шара. Объединяя эти равенства, находим показатель преломления, при котором изображение источника располагается на задней поверхности шара:

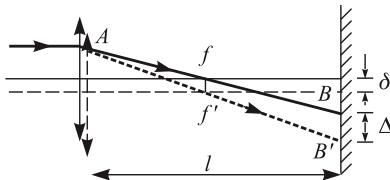
$$n_0 = 2 \left( \frac{R}{a} + 1 \right).$$

Очевидно, что при  $n < n_0$  точка пересечения преломленных шаром лучей с оптической осью (изображение источника) выйдет за пределы шара. Устремляя  $a$  к бесконечности, находим, что  $n_0 \rightarrow 2$ . Таким образом, для источника, удаленного на большое расстояние, достигается наименьшее значение показателя преломления, удовлетворяющее условию задачи. Следовательно, изображение источника всегда будет находиться вне шара при  $n < 2$ .

**9.4.3.** Ход одного из лучей, образующих пучок, изображен на рисунке для случая, когда  $l > f$ . Сплошные линии соответствуют исходному положению линзы, штриховые — смещенному. Из подобия  $\Delta A ff'$  и  $\Delta ABB'$  следует, что

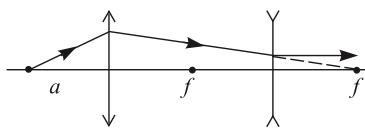
$$\frac{\delta}{f} = \frac{\Delta}{l}.$$

Отсюда  $f = \frac{l\delta}{\Delta}$ . Аналогично рассматривается случай, когда  $l < f$ . Наконец, если перемещение линзы выходит из плоскости рисунка, то лучи, преломленные линзой в исходном и смещенном ее положениях, по прежнему будут лежать в одной плоскости, в которой можно рассмотреть такие же подобные треугольники. Следовательно, связь



между смещениями линзы и светового пятна на экране во всех случаях имеет один и тот же вид. Ответ:  $f = \frac{l\delta}{\Delta}$ .

**9.4.4.** Пучок света после рассеивающей линзы будет параллельным, если продолжения падающих на нее лучей пересекаются в ее заднем фокусе (см. рисунок). Для этого изображение источника света, даваемое



собирающей линзой, должно располагаться на расстоянии  $f$  позади рассеивающей линзы, или на расстоянии  $3f$  от собирающей линзы. Расстояние  $a$ , на котором надо поместить источник света перед собирающей линзой, можно найти по формуле тонкой линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{3f} = \frac{1}{f}.$$

Ответ:  $a = \frac{3}{2}f$ .

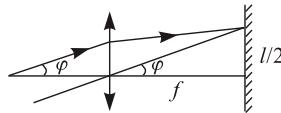
**9.4.5.** Углы, определяющие направления на дифракционные максимумы, задаются условием

$$d \sin \varphi = m\lambda,$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Наложение спектральных компонент с длинами волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  происходит, если

$$m_1\lambda_1 = m_2\lambda_2.$$

Анализ числовых данных показывает, что минимальные значения  $m_1$  и  $m_2$ , при которых выполняется это условие, равны:  $m_1 = 5$ ,  $m_2 = 4$ .



Следовательно,

$$d = \frac{m_1\lambda_1}{\sin \varphi} = \frac{m_2\lambda_2}{\sin \varphi}.$$

Из рисунка видно, что  $\frac{l}{2} = f \operatorname{tg} \varphi$ , откуда  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{l}{2f}$ .

Используя формулу

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}},$$

получаем ответ:  $d = 5\lambda_1 \sqrt{1 + \left(\frac{2f}{l}\right)^2} \approx 3,8 \text{ мкм.}$

## **Литература**

### **Основная литература, рекомендуемая в программе для поступающих в МГУ**

1. Физика: Механика. 10 кл.: Учебник для углубленного изучения физики /Под ред. Г.Я. Мякишева. – М.: Дрофа, 2001.
2. *Мякишев Г.Я., Синяков А.З.* Физика: Молекулярная физика. Термодинамика. 10 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
3. *Мякишев Г.Я., Синяков А.З., Слободсков Б.А.* Физика: Электродинамика. 10 – 11 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
4. *Мякишев Г.Я., Синяков А.З.* Физика: Колебания и волны. 11 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
5. *Мякишев Г.Я., Синяков А.З.* Физика: Оптика. Квантовая физика. 11 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
6. *Буховцев Б.Б., Кривченков В.Д., Мякишев Г.Я., Сараева И.М.* Задачи по элементарной физике. – М.: Физматлит, 2000 и предшествующие издания.
7. *Бендриков Г.А., Буховцев Б.Б., Керженцев В.Г., Мякишев Г.Я.* Физика. Для поступающих в вузы: Учебн. пособие. Для подготов. отделений вузов. – М.: Физматлит, 2000 и предшествующие издания.

### **Дополнительная литература, рекомендуемая в программе для поступающих в МГУ**

1. Элементарный учебник физики /под ред. Г.С. Ландсберга. В 3-х кн. – М.: Физматлит, 2000 и предшествующие издания.
2. *Яворский Б.М., Селезнев Ю.Д.* Физика. Справочное пособие. Для поступающих в вузы. – М.: Физматлит, 2000 и предшествующие издания.
3. Физика. Учебники для 10 и 11 классов школ и классов с углубленным изучением физики /под ред. А.А. Пинского. – М.: Прогрессивное, 2000 и предшествующие издания.

4. Бутиков Е.И., Кондратьев А.С. Физика. В 3-х кн. – М.: Физматлит, 2001.
5. Павленко Ю.Г. Физика. Полный курс для школьников и поступающих в вузы: Учебн. пособие. – М.: Большая Медведица, 2002.
6. Сборник задач по физике /под ред. С.М. Козела – М.: Просвещение, 2000 и предшествующие издания.
7. Гольдфарб Н.И. Физика. Задачник. 9 – 11 кл.: Пособие для общеобразоват. учеб. заведений. – М.: Дрофа, 2000 и предшествующие издания.
8. Задачи по физике /под ред. О.Я. Савченко – М.: Наука, 1988.
9. Задачи вступительных экзаменов и олимпиад по физике в МГУ – 1992-2003. М.: Физический факультет МГУ, 1992 и последующие издания.

#### **Дополнительная литература, рекомендуемая авторами книги**

1. Погожев В.А., Гомонова А.И. Сборник задач по физике. Механика: Пособие для учащихся 9-11 классов и абитуриентов. – М.: "Экзамен", 2003.
2. Полякова М.С., Нетребко Н.В., Чесноков С.С. Физика: Справочник для старшеклассников и поступающих в вузы. – М.: "АСТ-Пресс", 1999.
3. Елютин П.В., Чижов Г.А. Словарь-справочник по элементарной физике. Части I-III. – М.: Изд-во МГУ, 1995 – 1996.
4. Кабардин О.Ф. Физика: Справочные материалы. – М.: Просвещение, 1991 и последующие издания.