

1 Grundlegende Mathematik

1.1 Komplexe Zahlen

Sei $z \in \mathbb{Z}$

Karth. Darstellung $z = x + yi \quad x, y \in \mathbb{R}$

Polardarstellung $z = r [\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i] = r \cdot e^{i\varphi}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), z \neq 0$$

Komplex konjugiert $\bar{z} = z^* = x - yi$

Betrag $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $|z| = r$

Karth. \leftrightarrow Polar $x = r \cos(\varphi), y = r \sin(\varphi)$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

Rotationsmatrix $\begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix}$

1.2 Ableitungen

$$\text{Konstante} \quad \frac{\partial}{\partial t}[C \cdot f(t)] = C \cdot \frac{\partial f(t)}{\partial t} = C \cdot \frac{\partial}{\partial t} f(t)$$

$$\text{Faktorregel} \quad \frac{\partial}{\partial t}[C \cdot f(t)] = C \cdot \frac{\partial f(t)}{\partial t} = C \cdot \frac{\partial}{\partial t} f(t)$$

$$\text{Summenregel} \quad \frac{\partial}{\partial t}[f(t) + g(t)] = \frac{\partial f(t)}{\partial t} + \frac{\partial g(t)}{\partial t}$$

$$\text{Kettenregel} \quad \frac{\partial}{\partial t} f(x(t)) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t}$$

2 Signalverarbeitung

2.1 Digitale Signale

Ein Signal kann als eine Funktion definiert werden, die in irgendeiner Weise Information über den Zustand oder das Verhalten eines physikalischen Systems enthält.

AC Signal: $x(t) \quad t \in \mathbb{R}$

DC Signal: $x[n] = x(nT)$

$t = n \cdot T \quad n \in \mathbb{Z}$

Abtastperiode $T :=$ Zeit zwischen Abtastungen dauert T Zeit

Abtastfrequenz $f_s = \frac{1}{T}$ Anzahl der Abtastwerte pro Zeit

Frequenz f Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit

Normalisierte Frequenz $f_{norm} = \frac{f}{f_s}$

Normalisierte Darstellung $x[n] : n$ ist einheitenloser Index

T [in Sekunden] $\rightarrow 1$ [einheitenlos]

Bandbreite $f_B = f_{\max} - f_{\min}$ Breite des Signals (ohne Wiederholung)

Abtasttheorem $f_s > 2 \cdot f_B \Leftrightarrow f_B < \frac{f_s}{2}$. Gilt $f_B \geq \frac{f_s}{2}$ so kommt es zu Aliasing

Periodische Folge $x[n] = x[n + N], N \in \mathbb{Z}$

Quantisierte Signale $\hat{x}[n]$ Kodierung eines Signals nach Bits

$$\Delta = \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B} = 2^{-B} X_m, X_m := \max(x[n]),$$

B Bits in Kodierung

Quantisierungsfehler $e[n] = \hat{x}[n] - x[n]$

2.2 LTI Systeme

Ein LTI System ist mathematisch als ein Operator $T(\{\bullet\})$ definiert die bzw. der eine Eingangsfolge mit den Werten $x[n]$ in eine Ausgangsfolge $y[n]$ abbildet

LTI-System $y[n] = T(\{x[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}, n) \forall n \in \mathbb{Z}$

Verkürzte Notation $y[n] = T\{x[n]\}$

Eigenschaften LTI-Systeme

- **Gedächtnislos** $y[n] = T(x[n]) \forall n \in \mathbb{Z}$
- **Linear** $y_1[n], y_2[n]$ Systemantworten zu $x_1[n], x_2[n]$ dann ist $T(\{\bullet\})$ linear wenn gilt:
 - $T(\{x_1[m] + x_2[m]\}, n) = T(\{x_1[m]\}, n) + T(\{x_2[m]\}, n) = y_1[n] + y_2[n]$ (Addition)
 - $T(\{ax[m]\}, n) = aT(\{x[m]\}, n) = ay[n]$ (Skalierung)
 - $T(\{ax_1[m] + bx_2[m]\}, n) = aT(\{x_1[m]\}, n) + bT(\{x_2[m]\}, n) = ay_1[n] + by_2[n]$ (Addition + Skalierung)
- **Zeitinvariant** $x_1[n] = x[n - n_0], T(\{x_1[m]\}, n) = y_1[n] = y[n - n_0]$
- **Kausal** $y[n]$ darf nur von Werte im Indexbereich $\leq n$ abhängen
- **Stabil** Ein/Ausgangswerte sind beschränkt. tldr; Es gibt kein ∞ Zeichen.

Einheitsimpuls	$\delta[n]$	$= \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$
Impulsantwort	$h[n]$	$= T(\{\delta[m]\}, n)$
	$y[n]$	$= T(\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[m-k]\}_{m \in \mathbb{Z}}, n)$
Es gilt	$h[n-k]$	$= T(\{\delta[m-k]\}_{m \in \mathbb{Z}}, n)$
Überlagerung	$y[n]$	$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T(\{\delta[m-k]\}, n)$
		$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$
Faltungssumme	$y[n]$	$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$
	$y[n]$	$= x[n] * h[n]$

2.3 Frequenzantwort von LTI-Systemen

Eingangsfolge $x[n] = e^{j\omega n} \quad \forall n$

Ausgangsfolge
$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega(n-k)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega n} e^{-j\omega k} \\ &= e^{j\omega n} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) \\ &= H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \\ (\text{Frequenzantwort}) \quad &= H(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

2.4 Fourier Transformation

	Folge $x[n]$	Fourier Transformation $X(e^{j\omega})$
1.	$\delta[n]$	1
2.	$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3.	1 $(-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
4.	$a^n[n] \quad (a < 1)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
6.	$(n+1)a^n u[n] \quad (a < 1)$	$\frac{1}{(1 - ae^{j\omega})^2}$
5.	$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
7.	$\frac{r^n \sin \omega_p(n+1)}{\sin \omega_p} u[n] \quad (r < 1)$	$\frac{1}{1 - 2r \cos \omega_p e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
8.	$\frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \omega < \omega_c \\ 0 & \omega_c \leq \omega \leq \pi \end{cases}$
9.	$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{\sin [\omega(M+1)/2]}{\sin (\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10.	$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
11.	$\cos (\omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$

3 Bildverarbeitung

3.1 Projektion

f := berechnet der Brennweite

Zentralprojektion $\begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Parallelprojektion $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$(x, y, z)^T \rightarrow (f \frac{x}{z}, f \frac{y}{z})^T$$

$$(x, y, z)^T \rightarrow (x, y)^T$$

Abbildungen von 3D auf 2D

3D-Punkt $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ in homogenen Koordinaten $\mathbf{x} = [xw, yw, zw, w]^T$

inhomogene/Euklidische Koordinaten $\mathbf{x} = [\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}]$

2D-Punkt $\mathbf{x} = [x, y]^T$ in homogenen Koordinaten $\mathbf{x} = [xw, yw, w]^T$

inhomogene/Euklidische Koordinaten $\mathbf{x} = [\frac{x}{w}, \frac{y}{w}]$

3.2 Distanzmaße

Euklidische Distanz	$L_2(x, y)$	$= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$
Blockdistanz	$L_1(x, y)$	$= \sum_{i=1}^n x_i - y_i $
Schachbrettdistanz	$L_\infty(x, y)$	$= \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i)$