1 Grundlegende Mathematik

1.1 Komplexe Zahlen

$$\begin{aligned}
&\text{Sei } z \in \mathbb{Z}\\
\textbf{Karth. Darstellung}\ & z = x + yi \quad x, y \in \mathbb{R}\\
\textbf{Polardarstellung}\ & z = r[\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i] = r \cdot e^{i\varphi}\\
& \varphi = arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right), z \neq 0\\
\textbf{Komplex konjugiert}\ & \overline{z} = z^* = x - yi\\
\textbf{Betrag}\ & |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ und } |z| = r\\
\textbf{Karth.} \leftrightarrow \textbf{Polar}\ & x = r\cos(\varphi), y = r\sin(\varphi)\\
\textbf{cos}(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\\
\textbf{sin}(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\\
e^{ix} &= \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\\
\textbf{Rotationsmatrix}\ & \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

1.2 Ableitungen

$$\begin{aligned}
\textbf{Konstante}\ & \frac{\partial}{\partial t}[C \cdot f(t)] && = C \cdot \frac{\partial f(t)}{\partial t} = C \cdot \frac{\partial}{\partial t} f(t)\\
\textbf{Faktorregel}\ & \frac{\partial}{\partial t}[C \cdot f(t)] && = C \cdot \frac{\partial f(t)}{\partial t} = C \cdot \frac{\partial}{\partial t} f(t)\\
\textbf{Summenregel}\ & \frac{\partial}{\partial t}[f(t) + g(t)] && = \frac{\partial f(t)}{\partial t} + \frac{\partial g(t)}{\partial t}\\
\textbf{Kettenregel}\ & \frac{\partial}{\partial t} f(x(t)) && = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t}
\end{aligned}$$

2 Signalverarbeitung

2.1 Digitale Signale

Ein Signal kann als eine Funktion definiert werden, die in irgendeiner Weise Information über den Zustand oder das Verhalten eines physikalischen Systems enthält.

AC Signal: $x(t) \qquad t \in \mathbb{R}$
DC Signal: $x[n] = x(nT)$
$t = n \cdot T \qquad n \in \mathbb{Z}$

Abtastperiode $T :=$ Zeit zwischen Abtastungen dauert T Zeit

Abtastfrequenz $f_s = \frac{1}{T}$ Anzahl der Abtastwerte pro Zeit

Frequenz f Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit

Normalisierte Frequenz $f_{norm} = \frac{f}{f_s}$

Normalisierte Darstellung $x[n] : n$ ist einheitenloser Index
T[in Sekunden] $\rightarrow$ 1[einheitenlos]

Bandbreite $f_B = f_{\max} - f_{\min}$ Breite des Signals (ohne Wiederholung)

Abtasttheorem $f_s > 2 \cdot f_B \Leftrightarrow f_B < \frac{f_s}{2}$.Gilt $f_B \geq \frac{f_s}{2}$ so kommt es zu Aliasing

Periodische Folge $x[n] = x[n+N], N \in \mathbb{Z}$

Quantisierte Signale $\hat{x}[n]$ Kodierung eines Signals nach Bits
$\Delta = \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B} = 2^{-B}X_m, X_m := max(x[n]),$
B Bits in Kodierung

Quantisierungsfehler $e[n] = \hat{x}[n] - x[n]$

2.2 LTI Systeme

Ein LTI System ist mathematisch als ein Operator $T(\{\bullet\})$ definiert die bzw. der eine Eingangsfolge mit den Werten $x[n]$ in eine Ausfangsfolge $y[n]$ abbildet

LTI-System $y[n] = T(\{x[m]\}m \in \mathbb{Z}, n)\forall n \in \mathbb{Z}$
Verkürzte Notation $y[n] = T\{x[n]\}$
Eigenschaften LTI-Systeme

- **Gedächtnislos** $y[n] = T(x[n])\forall n \in \mathbb{Z}$
- **Linear** $y_1[n], y_2[n]$ Systemantworten zu $x_1[n], x_2[n]$ dann ist $T(\{\bullet\})$ linear wenn gilt:
  - $T(\{x_1[m] + x_2[m]\}, n)$
  $= T(\{x_1[m]\}, n) + T(\{x_2[m]\}, n) = y_1[n] + y_2[n]$ (Addition)
  - $T(\{ax[m]\}, n) = aT(\{x[m]\}, n) = ay[n]$ (Skalierung)
  - $T(\{ax_1[m] + bx_2[m]\}, n) =$
  $aT(\{x_1[m]\}, n) + bT(\{x_2[m]\}, n) = ay_1[n] + by_2[n]$
  (Addition + Skalierung)
- **Zeitinvariant** $x_1[n] = x[n - n_0], T(\{x_1[m]\}, n) = y_1[n] = y[n - n_0]$
- **Kausal** $y[n]$ darf nur von Werte im Indexbereich $\leq n$ abhängen
- **Stabil** Ein/Ausgangswerte sin d beschränkt. *tldr*; Es gibt kein ∞ Zeichen.

Einheitsimpuls	$\delta[n]$	$= \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$
Impulsantwort	$h[n]$	$= T(\{\delta[m]\}, n)$
	$y[n]$	$= T(\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[m-k]\}m \in \mathbb{Z}, n)$
Es gilt	$h[n-k]$	$= T(\{\delta[m-k]\}m \in \mathbb{Z}, n)$
Überlagerung	$y[n]$	$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T(\{\delta[m-k]\}, n)$
		$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$
Faltungssumme	$y[n]$	$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$
	$y[n]$	$= x[n] * h[n]$

2.3 Frequenzantwort von LTI-Systemen

$$
\begin{aligned}
&\textbf{Eingangsfolge} && x[n] = e^{j\omega n} \quad \forall n \\
&\textbf{Ausgangsfolge} && y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega(n-k)} \\
& && = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega n} e^{-j\omega k} \\
& && = e^{j\omega n} \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \Big) \\
& && = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \\
&\textit{(Frequenzantwort)} && = H(e^{j\omega})
\end{aligned}
$$

2.4 Fourier Transformation

	Folge $x[n]$	Fourier Transformation $X(e^{j\omega})$
1.	$\delta[n]$	1
2.	$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3.	$1 \quad (-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
4.	$a^n[n] \quad (\lvert a\rvert < 1)$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
6.	$(n+1)a^n u[n] \quad (\lvert a\rvert < 1)$	$\frac{1}{(1-ae^{j\omega})^2}$
5.	$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
7.	$\frac{r^n \ \sin\ \omega_p(n+1)}{\sin\ \omega_p} u[n] \ (\lvert r\rvert < 1)$	$\frac{1}{1-2r\ \cos\ \omega_p e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
8.	$\frac{\sin\ \omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \lvert\omega\rvert < \omega_c \\ 0 & \omega_c \text{ ¡ } \lvert\omega\rvert \le \pi \end{cases}$
9.	$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{\sin\ [\omega(M+1)/2]}{\sin\ (\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10.	$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
11.	$\cos\ (\omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi}\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi e^{-j\phi}\delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$

3 Bildverarbeitung

3.1 Projecktion

f := berechnet der Brennweite

Zentralprojektion $\begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **Parallelprojektion** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$(x,y,z)^T \to (f\frac{x}{z}, f\frac{y}{z})^T$ $(x,y,z)^T \to (x,y)^T$

Abbildungen von 3D auf 2D

$$
\begin{aligned}
\text{3D-Punkt x} = [x,y,z]^T \text{ in homogenen Koordinaten x } &= [xw, yw, zw, w]^T \\
\text{inhomogene/Euklidische Koordinaten x } &= [\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}] \\
\text{2D-Punkt x} = [x,y]^T \text{ in homogenen Koordinaten x } &= [xw, yw, w]^T \\
\text{inhomogene/Euklidische Koordinaten x } &= [\frac{x}{w}, \frac{y}{w}]
\end{aligned}
$$

3.2 Distanzmaße

Euklidische Distanz	$L_2(x,y)$	$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$
Blockdistanz	$L_1(x,y)$	$= \sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - y_i \rvert$
Schachbrettdistanz	$L_\infty(x,y)$	$= \max_{1 \leq i \leq n} \big(\lvert x_i - y_i \rvert \big)$