

# Symbole

$\models$	Äquivalenz zwischen Formeln (haben der gleiche Model)
$\Leftrightarrow$	Äquivalente meta-sprachlichen Aussagen die wahr oder falsch sind
$\vdash$	$M \vdash A$ , A is aus M herleitbar
$=$	Gleichstellung zweier Prädikate/Werte
$\neg$	Negation eines Prädikates
$\wedge$	Logische Und-Operator
$\vee$	Logische Oder-Operator
$\rightarrow$	Implikation
$\leftrightarrow$	Äquivalenz innerhalb von Formeln
$\forall, \exists$	Quantoren (Der Bindungsbereich endet so spät wie möglich)

## 1 Prädikatenlogik 1. Stufe

### 1.1 Syntax

Signatur $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$	
$\mathcal{X} := \{x_0, x_1, \dots\}$	Variablen
$\mathcal{F} := \mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2 \cup \dots$	Menge der Funktionen
$c \in \mathcal{F}^0$	Konstante
$f, g, h \in \mathcal{F}^n$	n-stellige Funktionssymbole
$\mathcal{P} := \mathcal{P}^0 \cup \mathcal{P}^1 \cup \mathcal{P}^2 \cup \dots$	Menge der Prädikate
$p, q, r \in \mathcal{P}^0$	Konstanten
$P, Q, R \in \mathcal{P}^n$	n-stellige Prädikatensymbole
<hr/>	
(T1) $x_0, x_1, \dots \in Term$	
(T2) $f \in \mathcal{F}^n, t_1, \dots, t_n \in Term \Rightarrow f(t_1, \dots, t_n) \in Term$	
<u>Speziell</u> $c \in Term$	
(T1') $\frac{}{x} x \in \mathcal{X}$	
(T2') $\frac{t_1, \dots, t_n}{f(t_1, \dots, t_n)} f \in \mathcal{F}^n$	
<u>Speziell</u> $\frac{}{c} c \in \mathcal{F}^0$	

### 1.2 Syntax der Formeln

(A0) $At \subseteq For$	
(A1) $t_1, t_2 \in Term \Rightarrow t_1 = t_2 \in At$	$(\frac{}{t_1 = t_2} t_1, t_2 \in Term)$
(A2) $P \in \mathcal{P}^n, t_1, \dots, t_n \in Term \Rightarrow P(t_1, \dots, t_n) \in At$	
$p \in At$	<u>speziell</u>
(A3) $A \in For \Rightarrow (\neg A) \in For$	
(A4) $A, B \in For \Rightarrow (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B) \in For$	
(A5) $A \in For \Rightarrow (\forall x A), (\exists x A) \in For$	

<i>Universelle Formeln</i>	<i>Existentielle Formeln</i>
(i) $\frac{}{A}$ Quantorenfrei	(i) $\frac{}{A}$ Quantorenfrei
(ii) $\frac{A, B}{A \wedge B}$	(ii) $\frac{A, B}{A \wedge B}$
(iii) $\frac{A, B}{A \vee B}$	(iii) $\frac{A, B}{A \vee B}$
(iv) $\frac{A}{\forall x A}$	(iv) $\frac{A}{\exists x A}$

### 1.3 Semantik

<b>Belegung</b> $\beta$	
<b>Interpretation</b> $I$	
<b>Teilinterpretation</b> $J$	$I \subseteq J$
	$I \subseteq J$ dann gilt $J, \beta \models A \Rightarrow I, \beta \models A$
<b>Grundbereich (Domain)</b> $D(D_I)$	
	$d \in D_I, \beta_x^d = \begin{cases} d & \text{für } x = y \\ \beta(y) & \text{für } y \neq x \end{cases}$
<b>Erfüllbarkeit</b> $\exists I, \beta \models A$	
<b>Unerfüllbar</b> $\neg \exists I, \beta \models A$	
<b>Gültigkeit</b> $\forall I, \beta \models A$ ( $\emptyset \models A$ )	
<b>Auswertung</b> $d_{I, \beta}$	
	$\beta \{x_0, x_1, \dots\} \rightarrow D_I$ <span style="float: right;">Funktion</span>
<b>Zeichen</b> $f, P, p$	
<b>Funktionen/Prädikate</b> $f^I, P^I, p^I$	
<b>1-stellige Prädikate</b> $P^I : D \rightarrow \{T, F\}$	
<b>(T1)</b> $x_{I, \beta}$	$:\Leftrightarrow \beta(x)$
<b>(T2)</b> $f(t_1, \dots, t_n)_{I, \beta}$	$:\Leftrightarrow f^I((t_1)_{I, \beta}, \dots, (t_n)_{I, \beta})$
<b>(A1)</b> $I, \beta \models t_1 = t_2$	$:\Leftrightarrow (t_1)_{I, \beta} = (t_2)_{I, \beta}$
<b>(A2)</b> $I, \beta \models P(t_1, \dots, t_n)$	$:\Leftrightarrow (t_1)_{I, \beta} = (t_2)_{I, \beta}$
<b>(A3)</b> $I, \beta \models \neg A$	$:\Leftrightarrow \text{nicht } I, \beta \models A$
	$:\Leftrightarrow I, \beta \not\models A$
<b>(A4)</b> $I, \beta \models A \wedge B$	$:\Leftrightarrow I, \beta \models A \text{ und } I, \beta \models B$
$I, \beta \models A \vee B$	$:\Leftrightarrow I, \beta \models A \text{ oder } I, \beta \models B$
$I, \beta \models A \rightarrow B$	$:\Leftrightarrow I, \beta \not\models A \text{ oder } I, \beta \models B$
$I, \beta \models A \leftrightarrow B$	$:\Leftrightarrow (I, \beta \not\models A \text{ und } I, \beta \not\models B) \text{ oder } (I, \beta \models A \text{ und } I, \beta \models B)$
<b>(A5)</b> $I, \beta \models \forall x A$	$:\Leftrightarrow \text{für alle } d \in D \text{ gilt } I, \beta_x^d \models A$
$I, \beta \models \exists x A$	$:\Leftrightarrow \text{es gibt ein } d \in D \text{ für die gilt } I, \beta_x^d \models A$

## 2 Hilbert Kalkül

(Trivial)	$A \rightarrow A$	$A \in For$
(Ax1)	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$	$A, B \in For$
(Ax2)	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	$A, B, C \in For$
(Ax3)	$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$	$A, B \in For$
(Ax4)	$(\forall x A) \rightarrow (A[t/x])$	SP (Spezialisierung)
(Ax5)	$A \rightarrow \forall x A$ , falls $x \notin FV(A)$	GE (Generalisierung)
(Ax6)	$(\forall x A \rightarrow B) \rightarrow ((\forall x A) \rightarrow (\forall x B))$	DA (Distributivität)
(Ax7)	$x = x$	RE (Reflexivität)
(Ax8)	$x = y \rightarrow (A \rightarrow A')$ , wobei A quantorenfrei ist und A' aus A entsteht, indem einige (oder kein) x durch y ersetzt werden	GL (Gleichheit)
(MP)	$\frac{A, A \rightarrow B}{B}$	$A, B \in For$
(2.7) i	$M \vdash A \wedge M \vdash A \rightarrow B$ , dann $M \vdash B$	
ii	$M \vdash \neg A \rightarrow \neg B$ , dann $M \vdash \{A\} \rightarrow B$	
(2.8)	$M \vdash A \rightarrow B \Leftrightarrow M \cup \{A\} \vdash B$	Deduktion
(2.9) i	$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$	transitivität von $\rightarrow$
ii	$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$	$(\neg A \wedge A \rightarrow B)(ex\ falso\ quod\ libet)$
iii	$\vdash \neg \neg A \rightarrow A$	
iv	$\vdash A \rightarrow \neg \neg A$	
v	$\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	ein Widerspruchsbeweis

$$(2.10) i \frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

$$ii \frac{\neg \neg A}{A}$$

## Variablen

- i)  $t \in Term, FV(t) :=$  die Menge der in  $t$  auftretenden Variablen,  $BV(t) = \emptyset$
- ii)  $- FV(t_1 = t_2) := FV(t_1) \cup FV(t_2)$
- $- BV(t_1 = t_2) := \emptyset$
- $- FV(P(t_1, \dots, t_n)) := \cup_{i=1}^n FV(t_i)$
- $- BV(\dots) = \emptyset$
- $- FV(\neg A) := FV(A)$
- $- BV(\neg A) := BV(A)$
- $- FV(A \rightarrow B) := FV(A) \cup FV(B)$
- $- BV(A \rightarrow B) := BV(A) \cup BV(B)$
- $- FV(\forall x A) := FV(A) \setminus \{x\}$
- $- BV(\forall x A) := BV(A) \cup \{x\}$

## Substitutionen

$$(T1) \quad x[t/x] \equiv x$$

$$y[t/x] \equiv y$$

$$(T2) \quad f(t_1, \dots, t_n)[t/x] \equiv f(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x])$$

$$\text{speziell } c[t/x] \equiv c \quad c \in \mathcal{F}^0$$

$$(A1) \quad P(t_1, \dots, t_n)[t/x] \equiv P(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x])$$

$$(A2)$$

$$(A3) \quad (\neg A)[t/x] \equiv \neg A[t/x]$$

$$(A4) \quad (A \rightarrow B)[t/x] \equiv (A[t/x] \rightarrow B[t/x])$$

$$(A5) \quad (\forall x A)[t/x] \equiv \forall x A$$

$$(\forall y A)[t/x] \equiv \begin{cases} \forall y A & \text{für } x \notin FV(\forall y A) \\ \forall y A[t/x] & \text{sonst, und } y \notin FV(t) \\ \forall z A[z/y][t/x] & \text{sonst, } z \notin FV(t) \cup FV(A), \text{ } z \text{ heißt frisch} \end{cases}$$

## Gentzen Kalkül

$$M \subseteq For$$

$$M \vdash_G A \equiv A \text{ ergibt sich (syntaktisch) aus } M$$

Links bzw. rechts bedeutet dass der Operator ( $\rightarrow, \neg, \vee, \wedge$ ) links bzw. rechts von der  $\vdash_G$  steht.

$$\text{Axiom} \quad \frac{}{M \cup \{A\} \vdash_G A}$$

	Links	Rechts
Implikation	$\frac{M \cup \{\neg C\} \vdash_G A \quad M \cup \{B\} \vdash_G C}{M \cup \{A \rightarrow B\} \vdash_G C}$	$\frac{M \cup \{A\} \vdash_G B}{M \vdash_G A \rightarrow B}$
Negation	$\frac{M \cup \{\neg B\} \vdash_G A}{M \cup \{\neg A\} \vdash_G B}$	$\frac{M \cup \{A\} \vdash_G \neg B}{M \cup \{B\} \vdash_G \neg A}$
Konjunktion	$\frac{M \cup \{A, B\} \vdash_G C}{M \cup \{A \wedge B\} \vdash_G C}$	$\frac{M \vdash_G A \quad M \vdash_G B}{M \vdash_G A \wedge B}$
Disjunktion	$\frac{M \cup \{A\} \vdash_G C \quad M \cup \{B\} \vdash_G C}{M \cup \{A \vee B\} \vdash_G C}$	$\frac{M \cup \{\neg B\} \vdash_G A}{M \vdash_G A \vee B}$

## Resolution

Beweis durch Resolution ist ein Verfahren um zu zeigen ob eine Formel Erfüllbar ist oder nicht.

Eine Formel  $A$  in KNF wenn  $A = \overbrace{(k_1 \vee k_2 \vee \dots \vee k_n)}^{\text{Klausel}} \wedge \dots \wedge \overbrace{(k_1 \vee \dots \vee k_n)}^{\text{Literale}}$

Eine Klausel einer Formel  $K_i := \{k_1, \dots, k_n\}$

Eine negiertes Literal  $l \in K_i \equiv \bar{l}$  und  $\bar{\bar{l}} \equiv l$

Eine Resolvente  $R := (K_i \setminus \{l\}) \cup (K_j \setminus \{\bar{l}\})$

Ein Resolutionsschritt fügt  $A$  eine Resolvente zweier Klauseln hinzu. Das Ergebnis ist  $Res * (A)$

$K$  ist unerfüllbar wenn  $\emptyset \in Res * (A)$

## Hoare Kalkül

t Totale Korrektheit  
p Partielle Korrektheit

<b>Zuweisungsaxiom</b>	$\frac{}{\{B[E/x]\} \quad x = E; \{B\}}$	(= p)
	$\frac{}{\{D_E \wedge B[E/x]\} \quad x = E; \{B\}}$	(= t)
<b>Konsequenzregel</b>	$\frac{A \Rightarrow B, \quad \{B\} S \{C\}, \quad C \Rightarrow D}{\{A\} S \{D\}}$	(K)
<b>Sequentielle Komposition</b>	$\frac{\{A\} S \{B\}, \quad \{B\} T \{C\}}{\{A\} S; T \{C\}}$	(sK)
<b>Bedingte Anweisung</b>	$\frac{\{A \wedge B\} S \{C\}, \quad \{A \wedge \neg B\} T \{C\}}{\{A\} \text{ if } (B) S \text{ else } T \{C\}}$	(if)
<b>Schleifeninvariante</b>	$\frac{\{A \wedge B\} S \{A\}}{\{A\} \text{ while } (B) S \{A \wedge \neg B\}}$	(Wp)
<b>Terminierungsgröße</b>	(1) $\forall z \in Z : \{A \wedge B \wedge t = z\} S \{A \wedge t < z\}$ (2) $A \wedge B \Rightarrow t \geq 0$	
	$\frac{}{\text{while } (B) S (A \wedge \neg B)}$	(Wt)
<b>Abgeleitete</b>	(1) $\{C\} \text{ init } \{A\}$	
<b>Schlussregeln</b>	(2) $\{A \wedge B\} S \{A\}$ (3) $A \wedge \neg B \Rightarrow D$	
	$\frac{}{\{C\} \text{ init while } (B) S \{D\}}$	(Sp)
	(1) $\{C\} \text{ init } \{A\}$ (2) $\forall z \in \mathbb{Z} : \{A \wedge B \wedge t = z\} S \{A \wedge B < z\}$ (3) $A \wedge B \Rightarrow t \geq 0$ (4) $A \wedge \neg B \Rightarrow D$	
	$\frac{}{\{C\} \text{ init while } (B) S \{D\}}$	(St)

## Temporale Logik (LTL)

Ein Ablauf  $\pi = s_0, s_1, \dots$  ist eine unendliche Folge von Zuständen  $s_i \in S$

Eine Bewertung  $L : S \rightarrow \mathfrak{P}(\mathcal{P})$

**G**  $\square$  Globally, von jetzt an immer

**F**  $\diamond$  Finally, irgendwann (ab jetzt)

**X**  $\circ$  neXt, im nächsten Zustand

**U** Until

## Syntax

- (T1)  $p \in \mathcal{P} \Rightarrow p \in TFor$   
 (T2)  $A, B \in TFor \Rightarrow \neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B \in TFor$   
 (T3)  $A \in TFor \Rightarrow \mathbf{G}A, \mathbf{F}A, \mathbf{X}A \in TFor$   
 (T4)  $A, B \in TFor, A \mathbf{U} B \in TFor$  (until)

## Semantik

- (T1)  $\pi \models p$  wenn  $p \in L(s_0)$
- (T2)  $\pi \models \neg A$ , wenn nicht  $\pi \models A$   
 $\pi \models A \vee B$ , wenn  $\pi \models A$  oder  $\pi \models B$   
 $\pi \models A \wedge B$ , wenn  $\pi \models A$  und  $\pi \models B$   
usw
- (T3)  $\pi \models \mathbf{X}A$ , wenn  $\pi^1 \models A$   
 $\pi \models \mathbf{G}A$ , wenn ...  
 $\pi \models \mathbf{F}A$ , wenn ...
- (T4)  $\pi \models A \mathbf{U} B$ , wenn es ein  $j \geq 0$  gibt mit  $\pi^j \models B$  und für alle  $0 \leq i < j : \pi^i \models A$