Symbole

$=\!\mid\!\models$	Äquivalenz zwischen Formeln (haben der gleiche Model)
$\Leftrightarrow$	Äquivalente meta-sprachlichen Aussagen die wahr oder falsch sind
$\vdash$	$M \vdash A$, A is aus M herleitbar
$=$	Gleichstellung zweier Prädikate/Werte
$\neg$	Negation eines Prädikates
$\wedge$	Logische Und-Operator
$\vee$	Logische Oder-Operator
$\rightarrow$	Implikation
$\leftrightarrow$	Äquivalenz innerhalb von Formeln
$\forall, \exists$	Quantoren (Der Bindungsbereich endet so spät wie möglich)

1 Prädikatenlogik 1. Stufe

1.1 Syntax

Signatur $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

$\mathcal{X} := \{x_0, x_1, \ldots\}$	Variablen
$\mathcal{F} := \mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2 \cup \ldots$	Menge der Funktionen
$c \in \mathcal{F}^0$	Konstante
$f, g, h \in \mathcal{F}^n$	n-stellige Funktionssymbole
$\mathcal{P} := \mathcal{P}^0 \cup \mathcal{P}^1 \cup \mathcal{P}^2 \cup \ldots$	Menge der Prädikate
$p, q, r \in \mathcal{P}^0$	Konstanten
$P, Q, R \in \mathcal{P}^n$	n-stellige Prädikatensymbole

(T1) $x_0, x_1, \ldots \in Term$

(T2) $f \in \mathcal{F}^n, t_1, \ldots, t_n \in Term \Rightarrow f(t_1, \ldots, t_n) \in Term$

Speziell $c \in Term$

(T1') $\frac{}{x} x \in \mathcal{X}$

(T2') $\frac{t_1, \ldots, t_n}{f(t_1, \ldots, t_n)} f \in \mathcal{F}^n$

Speziell $\frac{}{c} c \in \mathcal{F}^0$

1.2 Syntax der Formeln

(A0) $At \subseteq For$

(A1) $t_1, t_2 \in Term \Rightarrow t_1 = t_2 \in At \qquad (\frac{}{t_1 = t_2} \quad t_1, t_2 \in Term)$

(A2) $P \in \mathcal{P}^n, t_1, \ldots, t_n \in Term \Rightarrow P(t_1, \ldots, t_n) \in At$

$p \in At$ speziell

(A3) $A \in For \Rightarrow (\neg A) \in For$

(A4) $A, B \in For \Rightarrow (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B) \in For$

(A5) $A \in For \Rightarrow (\forall x A), (\exists x A) \in For$

	Universelle Formeln		*Existentielle Formeln*
(i)	$\dfrac{}{A}\,A$ Quantorenfrei	**(i)**	$\dfrac{}{A}\,A$ Quantorenfrei
(ii)	$\dfrac{A, B}{A \wedge B}$	**(ii)**	$\dfrac{A, B}{A \wedge B}$
(iii)	$\dfrac{A, B}{A \vee B}$	**(iii)**	$\dfrac{A, B}{A \vee B}$
(iv)	$\dfrac{A}{\forall x A}$	**(iv)**	$\dfrac{A}{\exists x A}$

1.3 Semantik

Belegung	β	
Interpretation	I	
Teilinterpretation	J	$I \subseteq J$
	$I \subseteq J$ dann gilt $J, \beta \models A \Rightarrow I, \beta \models A$	
Grundbereich (Domain)	$D(D_I)$	
	$d \in D_I, \beta_x^d = \begin{cases} d & \text{für} \quad x = y \\ \beta(y) & \text{für} \quad y \neq x \end{cases}$	
Erfüllbarkeit	$\exists I, \beta \models A$	
Unerfüllbar	$\neg \exists I, \beta \models A$	
Gültigkeit	$\forall I, \beta \models A \quad (\emptyset \models A)$	
Auswertung	$d_{I,\beta}$	
β	$\{x_0, x_1, \ldots\} \rightarrow D_I$	Funktion
Zeichen	f, P, p	
Funktionen/Prädikate	f^I, P^I, p^I	
1-stellige Prädikate	$P^I : D \rightarrow \{T, F\}$	

(T1) $x_{I,\beta}$:⇔ $\beta(x)$

(T2) $f(t_1, \ldots, t_n)_{I,\beta}$:⇔ $f^I((t_1)_{I,\beta}, \ldots, (t_n)_{I,\beta})$

(A1) $I, \beta \models t_1 = t_2$:⇔ $(t_1)_{I,\beta} = (t_2)_{I,\beta}$

(A2) $I, \beta \models P(t_1, \ldots, t_n)$:⇔ $(t_1)_{I,\beta} = (t_2)_{I,\beta}$

(A3) $I, \beta \models \neg A$:⇔ nicht $I, \beta \models A$

:⇔ $I, \beta \not\models A$

(A4) $I, \beta \models A \wedge B$:⇔ $I, \beta \models A$ und $I, \beta \models B$

$I, \beta \models A \vee B$:⇔ $I, \beta \models A$ oder $I, \beta \models B$

$I, \beta \models A \rightarrow B$:⇔ $I, \beta \not\models A$ oder $I, \beta \models B$

$I, \beta \models A \leftrightarrow B$:⇔ $(I, \beta \not\models A$ und $I, \beta \not\models B)$ oder $(I, \beta \models A$ und $I, \beta \models B)$

(A5) $I, \beta \models \forall x A$:⇔ für alle d ∈ D gilt I, $\beta_x^d \models A$

$I, \beta \models \exists x A$:⇔ es gibt ein d ∈ D für die gilt I, $\beta_x^d \models A$

2 Aussagenlogik

2.1 Prädikatenlogische Formeln

Kommutativität	$A \vee B \dashv\models B \vee A$	und $A \wedge B \dashv\models B \wedge A$
Assoziativität	$A \vee (B \vee C) \dashv\models (A \vee B) \vee C$	und $A \wedge (B \wedge C) \dashv\models (A \wedge B) \wedge C$
Idempotenz	$A \vee A \dashv\models A$	und $A \wedge A \dashv\models A$
Distributivität	$A \vee (B \wedge C) \dashv\models (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	und $A \wedge (B \vee C) \dashv\models (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
de Morgan	$\neg(A \vee B) \dashv\models \neg A \wedge \neg B$	und $\neg(A \wedge B) \dashv\models \neg A \vee \neg B$
Doppelte Negation	$\neg\neg A \dashv\models A$	
Absorption	$A \vee (A \wedge B) \dashv\models A$	und $A \wedge (A \vee B) \dashv\models A$
Neutrales Elemente	$A \vee false \dashv\models A$	und $A \wedge true \dashv\models A$
Inverse Elemente	$A \vee \neg A \dashv\models true$	und $A \wedge \neg A \dashv\models false$
Null Elemente	$A \vee true \dashv\models true$	und $A \wedge false \dashv\models false$

3 Hilbert Kalkül

(Trivial)		$A \rightarrow A$	$A \in For$
(Ax1)		$A \rightarrow (B \rightarrow A)$	$A, B \in For$
(Ax2)		$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow \Big((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\Big)$	$A, B, C \in For$
(Ax3)		$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$	$A, B \in For$
(Ax4)		$(\forall x A) \rightarrow (A[{}^{t}/_{x}])$	SP (Spezialisierung)
(Ax5)		$A \rightarrow \forall x A,$ falls $x \notin FV(A)$	GE (Generalisierung)
(Ax6)		$(\forall x A \rightarrow B) \rightarrow \Big((\forall x A) \rightarrow (\forall x B)\Big)$	DA (Distributivität)
(Ax7)		$x = x$	RE (Reflexivität)
(Ax8)		$x = y \rightarrow (A \rightarrow A'),$ wobei A quantorenfrei ist und A' aus A entsteht, indem einige (oder kein) x durch y ersetzt werden	GL (Gleichheit)
(MP)		$\dfrac{A, A \rightarrow B}{B}$	$A, B \in For$
(2.7)	*i*	$M \vdash A \wedge M \vdash A \rightarrow B,$ dann $M \vdash B$	
	ii	$M \vdash \neg A \rightarrow \neg B,$ dann $M \vdash \{A\} \rightarrow B$	
(2.8)		$M \vdash A \rightarrow B \Leftrightarrow M \cup \{A\} \vdash B$	*Deduktion*
(2.9)	*i*	$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \Big((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)\Big)$	*transitivität von* $\rightarrow$
	ii	$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$	$(\neg A \wedge A \rightarrow B)$(*ex falso quod libet*)
	iii	$\vdash \neg\neg A \rightarrow A$	
	iv	$\vdash A \rightarrow \neg\neg A$	
	v	$\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	*ein Widerspruchsbeweis*

$$\textbf{(2.10)}\,i\ \frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

$$ii\ \frac{\neg\neg A}{A}$$

Variablen

i) $t \in Term, FV(t) :=$ die Menge der in t auftretenden Variablen,$BV(t) = \emptyset$

ii) – $FV(t_1 = t_2) := FV(t_1) \cup FV(t_2)$

– $BV(t_1 = t_2) := \emptyset$

– $FV(P(t_1, \ldots, t_n)) := \cup_{i=1}^{n} FV(t_i)$

– $BV(\ldots) = \emptyset$

– $FV(\neg A) := FV(A)$

– $BV(\neg A) := BV(A)$

– $FV(A \to B) := FV(A) \cup FV(B)$

– $BV(A \to B) := BV(A) \cup BV(B)$

– $FV(\forall x A) := FV(A) \backslash \{x\}$

– $BV(\forall x A) := BV(A) \cup \{x\}$

Substitutionen

(T1) $x[{}^{t}/_{x}] :\equiv t$

$y[{}^{t}/_{x}] :\equiv y$

(T2) $f(t_1, \ldots, t_n)[{}^{t}/_{x}] :\equiv f(t_1[{}^{t}/_{x}], \ldots, t_n[{}^{t}/_{x}])$

speziell $c[{}^{t}/_{x}] :\equiv c \quad c \in \mathcal{F}^0$

(A1) $P(t_1, \ldots, t_n)[{}^{t}/_{x}] :\equiv P(t_1[{}^{t}/_{x}], \ldots, t_n[{}^{t}/_{x}])$

(A2)

(A3) $(\neg A)[{}^{t}/_{x}] :\equiv \neg A[{}^{t}/_{x}]$

(A4) $(A \to B)[{}^{t}/_{x}] :\equiv (A[{}^{t}/_{x}] \to B[{}^{t}/_{x}])$

(A5) $(\forall x A)[{}^{t}/_{x}] :\equiv \forall x A$

$$(\forall y A)[{}^{t}/_{x}] :\equiv \begin{cases} \forall y A & \text{für } x \notin FV(\forall y A) \\ \forall y A[{}^{t}/_{x}] & \text{sonst, und } y \notin FV(t) \\ \forall z A[{}^{z}/_{y}][{}^{t}/_{x}] & \text{sonst, } z \notin FV(t) \cup FV(A), \quad \textit{z heißt frisch} \end{cases}$$

Gentzen Kalkül

$M \subseteq For$
$M \vdash_G A :\equiv$ A ergibt sich (syntaktisch) aus M
Links bzw. rechts bedeutet dass der Operator $(\to, \neg, \vee, \wedge)$ links bzw. rechts von der $\vdash_G$ steht.

Axiom $\dfrac{}{M \cup \{A\} \vdash_G A}$

	Links	**Rechts**
Implikation	$\dfrac{M \cup \{\neg C\} \vdash_G A \quad M \cup \{B\} \vdash_G C}{M \cup \{A \to B\} \vdash_G C}$	$\dfrac{M \cup \{A\} \vdash_G B}{M \vdash_G A \to B}$
Negation	$\dfrac{M \cup \{\neg B\} \vdash_G A}{M \cup \{\neg A\} \vdash_G B}$	$\dfrac{M \cup \{A\} \vdash_G \neg B}{M \cup \{B\} \vdash_G \neg A}$
Konjunktion	$\dfrac{M \cup \{A, B\} \vdash_G C}{M \cup \{A \wedge B\} \vdash_G C}$	$\dfrac{M \vdash_G A \quad M \vdash_G B}{M \vdash_G A \wedge B}$
Disjunktion	$\dfrac{M \cup \{A\} \vdash_G C \quad M \cup \{B\} \vdash_G C}{M \cup \{A \vee B\} \vdash_G C}$	$\dfrac{M \cup \{\neg B\} \vdash_G A}{M \vdash_G A \vee B}$

Resolution

Beweis durch Resolution ist ein Verfahren um zu zeigen ob eine Formel Erfüllbar ist oder nicht.

Eine Formel A in KNF wenn $A = \overbrace{(k_1 \vee k_2 \vee \ldots \vee k_n)}^{\text{Klausel}} \wedge \ldots \wedge (k_1 \vee \ldots \vee k_n)$

Eine Klausel einer Formel $K_i := \{\overbrace{k_1, \ldots, k_n}^{\text{Literale}}\}$
Eine negiertes Literal $l \in K_i :\equiv \bar{l}$ und $\bar{\bar{l}} :\equiv l$
Eine Resolvente $R := (\ K_i \backslash \{l\}\ ) \cup (\ K_j \backslash \{\bar{l}\}\ )$
Ein Resolutionsschritt fügt A eine Resolvente zweier Klauseln hinzu. Das Ergebnis ist $Res*(A)$
K ist unerfüllbar wenn $\emptyset \in Res*(A)$

Hoare Kalkül

t Totale Korrektheit
p Partielle Korrektheit

Zuweisungsaxiom $$\frac{}{\{B[^E/_x]\} \quad x = E; \{B\}} \qquad (=p)$$

$$\frac{}{\{D_E \wedge B[^E/_x]\} \quad x = E; \{B\}} \qquad (=t)$$

Konsequensregel $$\frac{A \Rightarrow B, \quad \{B\}\ S\ \{C\}, \quad C \Rightarrow D}{\{A\}\ S\ \{D\}} \qquad (K)$$

Sequentielle Komposition $$\frac{\{A\}\ S\ \{B\}, \quad \{B\}\ T\ \{C\}}{\{A\}\ S;T\ \{C\}} \qquad (sK)$$

Bedingte Anweisung $$\frac{\{A \wedge B\}\ S\ \{C\}, \quad \{A \wedge \neg B\} T \{C\}}{\{A\}\ \texttt{if}\ (B)\ S\ \texttt{else}\ T\{C\}} \qquad (if)$$

Schleifeninvariante $$\frac{\{A \wedge B\}\ S\ \{A\}}{\{A\}\ \texttt{while}\ (B)\ S\ \{A \wedge \neg B\}} \qquad (Wp)$$

Terminierungsgröße $$\frac{\begin{array}{l}(1)\ \forall z \in Z : \{A \wedge B \wedge t = z\} S \{A \wedge t < z\} \\ (2)\ A \wedge B \Rightarrow t \geq 0\end{array}}{\texttt{while}\ (B)\ S\ (A \wedge \neg B)} \qquad (Wt)$$

Abgeleitete Schlussregeln $$\frac{\begin{array}{l}(1)\ \{C\}\ init\ \{A\} \\ (2)\ \{A \wedge B\}\ S\ \{A\} \\ (3)\ A \wedge \neg B \Rightarrow D\end{array}}{\{C\}\ init\ \texttt{while}\ (B)\ S\ \{D\}} \qquad (Sp)$$

$$\frac{\begin{array}{l}(1)\ \{C\}\ init\ \{A\} \\ (2)\ \forall z \in \mathbb{Z} : \{A \wedge B \wedge t = z\}\ S \{A \wedge B < z\} \\ (3)\ A \wedge B \Rightarrow t \geq 0 \\ (4)\ A \wedge \neg B \Rightarrow D\end{array}}{\{C\}\ init\ \texttt{while}\ (B)\ S\ \{D\}} \qquad (St)$$

Temporale Logik (LTL)

Ein Ablauf $\pi = s_0, s_1, \ldots$ ist eine unendliche Folge von Zuständen $s_i \in S$
Eine Bewertung $L : S \rightarrow \mathfrak{P}(\mathcal{P})$

G $\Box$ Globally, von jetzt an immer
F $\Diamond$ Finally, irgendwann (ab jetzt)
X $\circ$ neXt, im nächsten Zustand

U Until

Syntax

(T1) $p \in \mathcal{P} \Rightarrow p \in TFor$

(T2) $A, B \in TFor \Rightarrow \neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B \in TFor$

(T3) $A \in TFor \Rightarrow \mathbf{G}A, \mathbf{F}A, \mathbf{X}A \in TFor$

(T4) $A, B \in TFor, A\ \mathbf{U}\ B \in TFor$ (until)

Semantik

(T1) $\pi \models p$ wenn $p \in L(s_0)$

(T2) $\pi \models \neg A,$ wenn nicht $\pi \models A$

$\pi \models A \vee B,$ wenn $\pi \models A$ oder $\pi \models B$

$\pi \models A \wedge B,$ wenn $\pi \models A$ und $\pi \models B$

usw

(T3) $\pi \models \mathbf{X}A,$ wenn $\pi^1 \models A$

$\pi \models \mathbf{G}A,$ wenn $\ldots$

$\pi \models \mathbf{F}A,$ wenn $\ldots$

(T4) $\pi \models A\ \mathbf{U}\ B,$ wenn es ein j ≥ 0 gibt mit $\pi^j \models B$ und für alle 0 $\leq i < j : \pi^i \models A$