Nom : **Prénom :** **No. étudiant :**

Exam CC no. 1 – Calculus II

Nota bene. Plusieurs réponses correctes sont possibles.
Chaque réponse correcte apporte des points. Les mauvaises réponses sont pénalisées.

1. Calculer $(1+i)(2-3i)(1-i)^{-1}$.

   ☒ $3+2i$ ☐ $3-2i$ ☐ $2+3i$ ☐ $\frac{5}{2}+2i$ ☐ $3+i$

   $$(1+i)(2-3i)(1-i)^{-1} = \frac{(2-3i)(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{(2-3i)(2i)}{2} = (2-3i)i = 3+2i$$

2. Lesquelles des fonctions suivantes satisfont l'équation $y' + 2y = e^x$, $x \in \mathbb{R}$?

   ☐ $y(x) = \frac{1}{3}e^{2x}$
   ☐ $y(x) = \frac{1}{3}e^{-2x} + e^x$
   ☒ $y(x) = e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$
   ☒ $y(x) = \frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$
   ☒ $y(x) = \frac{1}{3}e^{-2x}(3 + e^{3x})$

   Se vérifie par le calcul direct de $y' + 2y$ pour chaque fonction.

3. Lesquelles des fonctions suivantes satisfont l'équation $y' = 2x$, $x \in \mathbb{R}$?

   ☒ $y = x^2 + 23$
   ☐ $y = 2x$
   ☒ $y = x^2$
   ☐ $y = e^{2x}$
   ☐ $y = 2x + c$, où c est une constante.

   La solution générale est $y = x^2 + c$, fonctions $y = x^2 + 23$, $y = x^2$ étant des cas particuliers.

4. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont solutions de l'équation $y' - y = e^x$?

   ☒ $y = xe^x$ ☒ $y = xe^x + 5e^x$ ☐ $y = e^x$ ☐ $y = 2xe^x$

   Vérifié par calcul direct de $y' - y$ pour chaque fonction.

5. Calculer z^4 pour le nombre complexe $z = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

   ☒ $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ☐ -1 ☐ i ☐ $-i$ ☐ $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

   $$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right)^4 = \left(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\,i\right)^4 = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4 = e^{i\frac{4\pi}{6}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}i = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

6. Les nombres complexes z et w sont donnés en coordonnées cartésiennes ($z = x+iy$, $w = u+iv$) ou en coordonnées polaires ($z = re^{i\phi}$, $w = \rho e^{i\theta}$). Quelles expressions donnent izw ?

   ☐ $i(xu - yv) + (xv + yu)$
   ☒ $-(xv + yu) + i(xu - yv)$
   ☐ $r\rho\, e^{i(\phi+\theta)}$
   ☒ $r\rho\, e^{i(\phi+\theta+\pi/2)}$

$$izw = i(x+iy)(u+iv) = i((xy-yv)+i(xv+yu)) = -(xv+yu)+i(xy-yv),$$
$$izw = e^{i\frac{\pi}{2}} r e^{i\phi} \rho e^{i\theta} = r\rho e^{i(\phi+\theta+\frac{\pi}{2})}$$

7. Choisissez toutes les expressions égales à $\cos(4x)$, $x \in \mathbb{R}$.

   ☒ $2\cos^2(2x) - 1$ ☒ $8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$ ☒ $\cos^2(2x) - \sin^2(2x)$ ☐ $4\cos^2 x - 3$

   $\cos(4x) = \cos^2(2x) - \sin^2(2x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

8. Identifier toutes les paires $(z, \bar{z})$, où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z.

   ☐ $(2+9i, -2-9i)$

   $$\overline{2+9i} = 2-9i$$

   ☒ $(12e^{i\frac{3\pi}{4}}, 12e^{i\frac{5\pi}{4}})$

   $$\overline{12e^{i\frac{3\pi}{4}}} = 12e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 12e^{-i\frac{3\pi}{4}+2\pi i} = 12e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

   ☒ $(x-5i, x+5i)$, où x est un nombre réel.

   $$\overline{x-5i} = x+5i$$

   ☒ $\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right), \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{5}}\right)$

   $$\overline{\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)} = \left(\sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{5}}$$

   ☒ $((1+i)^2, -2i)$

   $$\overline{(1+i)^2} = \overline{2i} = -2i$$

9. Quelles affirmations sont vraies ?

   ☐ La solution générale de $y'/y = a(x)$ est donnée via $y(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)dt\right)$, où x_0 et y_0 sont des constantes réelles.

   Si $y \equiv 0$ $(y_0 = 0)$, l'expression y'/y n'est pas définie.

   ☐ La somme de deux solutions d'une équa. diff. linéaire du 1er ordre est également une solution.
   ☐ Si y est une solution d'une équa. diff. du premier ordre, alors $-y$ est aussi une solution.
   ☒ Le principe de superposition permet de réduire une équa. diff. linéaire avec un second membre à une équa. diff. sans second membre.
   ☒ La méthode de variation de la constante est utilisée pour résoudre des équa. diff. linéaires du 1er ordre.

10. Décrivez l'ensemble des nombres complexes qui, dans le plan complexe, correspondent aux points du cercle de rayon 1 et de centre 3.

    ☐ $\{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$
    ☒ $\{ z \in \mathbb{C} : |z-3| = 1 \}$
    ☐ $\{ z \in \mathbb{C} : |z+3| = 1 \}$
    ☐ $\{ z \in \mathbb{C} : |z-1| = 3 \}$
    ☒ $\{ x+iy \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{R},\ (x-3)^2 + y^2 = 1 \}$

11. Une équa. diff. linéaire du premier ordre peut se présenter sous la forme :

☒ $y' + a(x)y = b(x)$
☐ $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$
☐ $(y')^2 + a(x)y = b(x)$
☒ $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

12. Pour l'équation $y' + y = 5$, une solution particulière est :

☒ $y = 5$ ☐ $y = e^{-x}$ ☐ $y = 5x$ ☐ $y = 0$

Seule $y = 5$ satisfait l'EDO.

13. Pour résoudre $y' + p(x)y = q(x)$ par méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de la forme :

☒ $y = c(x)y_h$ où y_h est une solution de l'équation homogène
☐ $y = c$ où c est une constante
☒ $y = c(x)e^{-\int p(x)dx}$
☐ $y = \dfrac{q(x)}{p(x)}$

14. Parmi les nombres complexes suivants, lesquels sont solutions de l'équation

$$z^3 - (2+3i)z^2 + (-1+5i)z + (2-2i) = 0 \ ?$$

☐ 3 ☐ -1 ☒ $2i$ ☒ $1+i$ ☒ 1

Se vérifie par le calcul direct (substitution) pour chaque nombre complexe.

15. Quelles expressions donnent la partie imaginaire de $(e^{i\phi})^3 - 3e^{i\phi} + 1$, $\phi \in \mathbb{R}$?

☐ $-3\cos^3\phi$
☐ $4\sin^3\phi$
☒ $\sin(3\phi) - 3\sin\phi$
☐ $-3\sin\phi$
☐ $\cos(3\phi) - 3\cos\phi$

$\text{Im}\left(e^{3i\phi} - 3e^{i\phi} + 1\right) = \sin(3\phi) - 3\sin\phi$, grâce à la formule d'Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

16. Parmi les nombres complexes ci-dessous, lesquels sont solutions de l'équation $2026z^{2026} - 2026 = 0$?

☒ $e^{i\pi}$ ☐ 2026 ☒ $\cos\frac{\pi}{1013} + i\sin\frac{\pi}{1013}$ ☒ $e^{\frac{2\pi i}{2026}}$ ☐ i

$z^{2026} - 1 = 0$ est satisfaite que pour $e^{i\pi} = -1$ et $\cos\frac{\pi}{1013} + i\sin\frac{\pi}{1013} = e^{\frac{2\pi i}{2026}}$,
car $(-1)^{2026} = 1$ et $\left(e^{\frac{2\pi i}{2026}}\right)^{2026} = e^{2\pi i} = 1$.

17. Quelles affirmations sont vraies ?

☐ L'équation $z^2+z+1=0$ admet une solution dans $\mathbb{R}$.
☐ Pour deux nombres complexes $z_1 = r_1 e^{i\phi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$ écrits en coordonnées polaires on a: $z_1 = z_2$ si et seulement si $r_1 = r_2$ et $\phi_1 = \phi_2 + 2\pi$.
☒ Le produit d'un nombre complexe et de son conjugué est un nombre réel.
☒ L'inverse et le conjugué d'un nombre complexe ont le même argument (mod un multiple de 2π).
☐ Le module d'un nombre complexe ne peut pas être égal à zéro.

18. Parmi les nombres complexes suivants, lesquels sont des racines 5èmes de l'unité ?

☒ $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$ ☒ $e^{i\frac{16\pi}{5}}$ ☒ 1 ☒ $\bar{z}$, où $z = \cos\frac{4\pi}{5} - i\sin\frac{4\pi}{5}$ ☐ $e^{i\frac{3\pi}{5}}$

$$\left(\cos\tfrac{2\pi}{5} + i\sin\tfrac{2\pi}{5}\right)^5 = \left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)^5 = e^{2\pi i} = 1,\ \left(e^{\frac{16\pi i}{5}}\right)^5 = e^{16\pi i} = 1,\ 1^5 = 1,$$

$$\left(\cos\tfrac{4\pi}{5} + i\sin\tfrac{4\pi}{5}\right)^5 = \left(e^{\frac{4\pi i}{5}}\right)^5 = e^{4\pi i} = 1, \text{ mais par contre } \left(e^{\frac{3\pi i}{5}}\right)^5 = e^{3\pi i} = -1.$$

19. Lesquelles des fonctions suivantes satisfont l'équation $y' + \frac{1}{x}y = x^2$, $x > 0$?

☐ $y(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{1}{t}dt\right)$, où y_0 et x_0 sont des constantes réelles.
☐ $y(x) = \frac{1}{x}$
☒ $y(x) = \frac{x^3}{4}$
☒ $y(x) = \frac{x^4+1}{4x}$
☐ $y(x) = \frac{1}{x} + x^2$

Se vérifie par le calcul direct de $y' - \frac{1}{x}y$ pour chaque fonction.

20. Calculer le produit $z_1 z_2$ des deux nombres complexes $z_1 = 1+i$ et $z_2 = 2-i$.

☐ 3 ☐ 2 ☒ $3+i$ ☐ $1+3i$ ☐ $1+i$

$$(1+i)(2-i) = 2+2i-i-i^2 = 2+2i-i+1 = 3+i$$

21. La solution générale de $y' - 3y = 0$ est (c désigne une constante arbitraire) :

☒ $y = ce^{3x}$ ☐ $y = ce^{-3x}$ ☐ $y = e^{3x} + c$ ☐ $y = e^{3x}$ ☐ $y = 3x + c$

Seules $y = ce^{3x}$ et $y = e^{3x}$ satisfont l'EDO,
mais $y = e^{3x}$ n'est qu'une solution particulière (pour $c = 1$).

22. Choisissez toutes les formules correctes pour un nombre complexe non nul $z \neq 0$, représenté soit en coordonnées cartésiennes ($z = x + iy$), soit en coordonnées polaires ($z = re^{i\phi}$).

☒ $\bar{z}^{-1} = \frac{z}{|z|^2}$
☒ $z^7 = r^6 e^{8i\phi}\bar{z}$
☒ $\frac{z}{|z|} = \cos\phi + i\sin\phi$
☐ $\bar{z}z = r^2 e^{2i\phi}$
☐ $iz = y + ix$

23. Sélectionnez toutes les paires

(équation différentielle linéaire du premier ordre, une solution de cette équation)

- ☒ $(y' + 3y = 6e^{-x},\ y = 3e^{-x} + 10e^{-3x}),\ x \in \mathbb{R}$
- ☐ $(y' + \frac{2}{x}y = x^2,\ y = \frac{2}{x^2}),\ x > 0$
- ☒ $(y' + e^x y = e^x,\ y = 1 + e^{-e^x}),\ x \in \mathbb{R}$
- ☐ $(y' + (\tan x)\, y = \frac{1}{\cos x},\ y = \cos x),\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$
- ☒ $(y' + 2xy = 4x,\ y = 2),\ x \in \mathbb{R}$

Se vérifie par le calcul direct (substitution) pour chaque paire.

24. Cinq nombres complexes $z_1, \ldots, z_5$ sont représentés par des points dans le plan complexe. Sélectionnez tous ceux vérifiant $\text{Re}(z) > 0$ et $\text{Im}(z) < 0$.

☒ z_1 ☐ z_2 ☒ z_3 ☐ z_4 ☐ z_5