Exam CC no. 1 (version d'entraînement)

Plusieurs réponses correctes sont possibles. Les mauvaises réponses sont pénalisées.

Question 1. *Calculer le quotient* z_1/z_2 *de deux nombres complexes* $z_1 = 1+i$ *et* $z_2 = 2-i$.

☐ $\frac{1+3i}{5}$ ☒ $\frac{3+i}{5}$ ☐ $\frac{1-i}{3}$ ☐ $3+i$ ☐ $\frac{3-i}{5}$

Question 2. *Calculer* z^{-3} *pour le nombre complexe* $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

☒ $-z$ ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ☐ $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ☒ $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ☒ $e^{i\frac{5\pi}{4}}$

Question 3. *Lesquelles des expressions suivantes donnent l'inverse du nombre complexe* $z = 2-3i$*?*

☒ $\frac{2+3i}{13}$ ☒ $\frac{-3+2i}{13i}$ ☐ $\frac{2-3i}{13}$ ☐ $\frac{2+3i}{2-3i}$ ☒ $\frac{2+3i}{|2-3i|^2}$

Question 4. *Identifier tous les nombres complexes* $z \in \mathbb{C}$ *telles que* $|z| \leq 1$ *(*$|z|$ *= module de* z*):*

☒ $\cos(2) + i\sin(2)$ ☐ z^4*, où* $z = 1.5\, e^{i\frac{\pi}{2}}$ ☒ $-i$ ☐ $\sqrt{2}$ ☐ $0.9 + 0.5i$

Question 5. *Choisissez toutes les équations qui ont (à la fois)* 1 *et* i *parmi leur solutions:*

☒ $z^3 - iz^2 - (1+i)z + i = 0$

☒ $z^5 - 2z^4 + (2+2i)z^3 - (2+2i)z^2 + (1+2i)z - 2 = 0$

☐ $z - 1 = 0$

☒ $2z^2 - (2+2i)z + 2i = 0$

☒ $z^4 - (2+i)z^3 + (1+2i)z^2 + (2-2i)z - 2i = 0$

Question 6. *Quelles affirmations concernant les nombres complexes sont vraies ?*

☒ *L'équation* $z^2 - 2z + 1 = 0$ *admet une solution dans* $\mathbb{R}$.

☒ *Pour deux nombres complexes* $z_1 = x_1 + iy_1$ *et* $z_2 = x_2 + iy_2$ *écrits en coordonnées cartésiennes on a :* $z_1 = z_2$ *si et seulement si* $x_1 = x_2$ *et* $y_1 = y_2$.

☐ *Pour un nombre complexe* $z \in \mathbb{C}$*, il existe un autre nombre complexe* $w \in \mathbb{C}$ *tel que* $zw = 1$.

☒ *La somme des arguments d'un nombre complexe* $z \in \mathbb{C}$ *et de son conjugué* $\overline{z}$ *est un multiple entier de* 2π.

☐ *Le module d'un nombre complexe est toujours strictement positif.*

Question 7. *Quelles affirmations concernant les équations différentielles linéaires du premier ordre sont vraies ?*

☐ *L'équation différentielle $y' = a(x)y$ admet une unique solution.*

☒ *La somme de deux solutions d'une équation différentielle linéaire du 1er ordre sans second membre est également une solution.*

☒ *Si y est une solution d'une équation différentielle linéaire du 1er ordre, alors $2y$ n'est pas forcement une solution.*

☒ *La méthode de variation de la constante permet de trouver une solution particulière de l'équation $y' + (\sin x)y - x = 0$.*

Question 8. *Parmi les fonctions suivantes, lesquelles satisfont à l'équation $y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = xe^x$, $x > 0$?*

☐ $y(x) = \dfrac{x^2}{2}e^x + c$, *où c est une constante.*

☒ $y(x) = \dfrac{x^2}{2}e^x + \dfrac{c}{x^2}$, *où c est une constante.*

☐ $y(x) = x^2e^x + c$, *où c est une constante.*

☐ $y(x) = \dfrac{x}{2}e^x + cx^{-2}$, *où c est une constante.*

☐ $y(x) = \dfrac{e^x}{x^2} + c$, *où c est une constante.*

Question 9. *Identifier les équations différentielles linéaires :*

☒ $y' - \frac{1}{x}y = x^2$, $x > 0$

☐ $y' - 2y^2 = 0$

☒ $y' + (\sin x)^{10}y = \cos x$

☒ $y'/y = f(x)$, *où f est une fonction.*

☐ $y' + 2\cos y = 0$

Question 10. *Soit $a \in \mathbb{R}$. La solution générale de l'équation $y' - ay = 0$, $x \in \mathbb{R}$, est donnée par*

☐ $y(x) = c$, *où c est une constante*

☐ $y(x) = e^{-ax}$

☐ $y(x) = -ax + c$, *où c est une constante*

☐ $y(x) = c\,e^{-ax}$, *où c est une constante*

☒ $y(x) = c\,e^{ax}$, *où c est une constante*