L1

Calculus 2

2025-26

TD 1 - Nombres complexes

Exercice 1

Si $(a,b) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, prouver que $\frac{1}{2}(a+b) \geq \sqrt{ab}$. Quand a-t-on égalité ?

Exercice 2

Mettre sous la forme $a+ib$ $(a,b \in \mathbf{R})$ les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$$

Exercice 3

On considère $a,b,c \in \mathbf{C}$, tels que $|a| = |b| = |c| = 1$.

Montrer que $|ab+bc+ac| = |a+b+c|$.

Exercice 4

Écrire sous la forme $a+ib$ les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $\pi/4$.

Exercice 5

Placer dans le plan cartésien, les points d'affixes suivants :

$$z_1 = i, \quad z_2 = 1+i, \quad z_3 = 2+2i, \quad z_4 = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Exercice 6

1. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 3+3i, \quad z_2 = 1-\sqrt{3}i, \quad z_3 = \frac{4}{3}i, \quad z_4 = -2, \quad z_5 = e^{i\alpha} + e^{2i\alpha}\ (\text{avec } \alpha \in [0;\pi])$$

2. Calculer $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2025}$.

Exercice 7

Si $z = x+iy$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,

1. Déterminer module et argument de e^z.
2. Déterminer $\overline{e^z}$, $e^{\bar{z}}$, $(e^z)^n$ pour $n \in \mathbf{Z}$.
3. L'application exponentielle

$$\exp : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, \quad z \mapsto e^z$$

   est-elle injective ? surjective ?

Exercice 8

Soient α et β deux nombres réels.

Mettre le nombre complexe $z = e^{i\alpha} - e^{i\beta}$ sous la forme $z = i\xi e^{i\mu}$ avec ξ et μ deux réels.

Indication : on introduira $e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ et $e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

Exercice 9

On considère les nombres complexes $z_1 = e^{ia}$ et $z_2 = e^{ib}$ (avec a et b deux réels).

1. Donner la forme trigonométrique des nombres complexes z_1 et z_2.
2. En utilisant les résultats de la question précédente, calculer $z_1 z_2$.
3. Déterminer la forme exponentielle de $z_1 z_2$, puis en déduire sa forme trigonométrique.

4. En utilisant les questions précédentes, retrouver les formules d'addition de cosinus et sinus (i.e. $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$).

Exercice 10

On considère ici a et b deux nombres complexes.

1. Factoriser $e^{ia}+e^{ib}$ par $e^{i\frac{a+b}{2}}$. On simplifiera l'expression obtenue en utilisant les formules d'Euler.

2. En déduire que, pour tout couple (p,q) de nombres réels, on a l'identité :

$$\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Nota bene : on pourra retrouver (et retenir...) de façon tout à fait analogue d'autres formules de trigonométrie :

$$\sin p+\sin q=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p-\sin q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p-\cos q=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Il conviendra pour cela de factoriser $e^{ia}-e^{ib}$ par $e^{i\frac{a+b}{2}}$ (cf. exercice 7).

Exercice 11

Calculer module et argument de $(1+i)^n$.

Exercice 12

Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

Exercice 13

Soient $n\in\mathbf{N}$ et $x\in\mathbf{R}$. On suppose que $\forall k\in\mathbf{Z}$, $x/2^k$ n'est pas un multiple de π.

Calculer $P_n=\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

Exercice 14

Montrer que les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b, c réels, sont réelles ou conjuguées.

Exercice 15

Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.

Exercice 16

On considère la fonction polynomiale en z

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$$

1. Si α désigne un nombre complexe quelconque, démontrer que $P(\alpha) = \overline{P(\overline{\alpha})}$. En déduire que si $P(\alpha) = 0$, alors $P(\overline{\alpha}) = 0$.

2. Calculer $P(1+i)$ puis indiquer deux solutions complexes de l'équation $P(z) = 0$.

3. On pose $Q(z) = [z - (1+i)][z - (1-i)]$.
   Vérifier que P est le produit du polynôme Q et d'un polynôme R du second degré que l'on déterminera.
   Résoudre enfin dans $\mathbf{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 17

1. Calculer $\frac{(1+i\sqrt{3})/2}{\sqrt{2}(1+i)/2}$ algébriquement, puis trigonométriquement. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{\pi}{12}$.

2. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^{24} = 1$.

Exercice 18

Soit $t \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbf{N}^*$. On définit S_n telle que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$$

1. Déterminer S_n.
2. Montrer que $|S_n|$ est bornée indépendamment de n.

Exercice 19

1. Développer $\cos(5\theta)$ et $\sin(5\theta)$.
2. Linéariser $\cos^5\theta$ et $\sin^5\theta$.

Exercice 20 : Équation complexe d'une droite affine

On considère l'équation réelle d'une droite affine D dans le plan (affine) :

$$ax + by = c$$

avec a, b, c des nombres réels (a et b n'étant pas tous les deux nuls) et $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Déterminer l'équation complexe d'une droite affine à partir de a, b, c et des affixes $z = x + iy$ et $\overline{z} = x - iy$.

Exercice 21

Trouver l'équation complexe du cercle de centre Ω et de rayon $r > 0$.

Exercice 22

Considérons A, B deux points du plan et $k > 0$ donné.

Montrer que l'ensemble des points M tel que $\frac{MA}{MB} = k$ est

- une droite qui est la médiatrice de $[AB]$, si $k = 1$,
- un cercle, sinon.

Exercice 23

1. Soient A_1 et A_2 deux points du plan Oxy d'affixes respectifs z_1 et z_2. Montrer qu'un argument de $\frac{z_2}{z_1}$ est une mesure de l'angle orienté formé par les vecteurs $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2})$. (Faire un dessin).

2. Soit Ω un point du plan Oxy d'affixe ω. Montrer qu'un argument de $\frac{z_2-\omega}{z_1-\omega}$ est une mesure de l'angle orienté formé par les vecteurs $(\overrightarrow{\Omega A_1}, \overrightarrow{\Omega A_2})$. (Faire un dessin, bis).

   Indication : on notera (cf. cours) que l'affixe de $\overrightarrow{\Omega A_1}$ (un vecteur) est $z_1 - \omega$.

Exercice 24

Soient a, b et c trois nombres complexes de module 1 et d'arguments respectifs α, β, γ.
Les points A, B, C d'affixes respectifs a, b, c sont supposés distincts.

1. Établir la relation $\left(\frac{a-c}{b-c}\right)^2 = \lambda \frac{a}{b}$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$ que l'on déterminera en fonction de α, β et γ.

2. Interprétation géométrique ? (Faire un dessin, bis).