Université Côte d'Azur *L1 Sciences*

TD Calculus II — Année Universitaire 2024/25

Equations différentielles : énoncés

Version du 16 janvier 2025

Exercice 1 :

Résoudre les équations différentielles :
a) $xy' + \log x = 0$
b) $(2x+1)y' + x^2 + x - 2 = 0$
c) $y' - e^x\sqrt{y} = 0$

Exercice 2 :

Résoudre les équations différentielles :
a) $2y' - y = 2$ b) $y' - 2y + 1 = 0$
c) $y' + 2y = 2x$ d) $2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$

Exercice 3 :

Résoudre les équations différentielles :
a) $y'' + 9y = 0$ b) $y'' - 4y = 0$
c) $y'' + y = 4$ d) $y'' - y = \mathrm{e}^{2x}$

Exercice 4 :
On considère l'équation différentielle $(E4)$

$$y'' + y = 2\cos x \qquad (E4)$$

a) Trouver une solution particulière de $(E4)$ sous la forme $y_0 = \lambda x \sin \alpha x$, avec λ et α deux contantes à déterminer.
b) On pose maintenant $y = u + y_0$. Trouver l'équation $(F4)$ vérifiée par u ; la résoudre. En déduire la solution générale de $(E4)$.
c) Déterminer la solution y du problème aux CI suivant :

y vérifie $(E4)$; y et y' s'annulent en $x = \pi/2$.

On précisera l'intervalle de définition de la solution.

Exercice 5 :
On considère l'équation différentielle $(E5)$

$$y'' + y'^2 = 1 \qquad (E5)$$

a) On pose $z = \exp y$. Ecrire l'EDO $(F5)$ vérifiée par z.
b) Résoudre $(F5)$ et en déduire la solution de $(E5)$ telle que $y(x=0) = 0$ et $y'(x=0) = 0$.

Exercice 6 :
Résoudre l'équation différentielle

$$y' = y\tan(x) + x$$

par la méthode de variation de la constante. On précisera l'intervalle de définition de la solution.

Exercice 7 :
On se propose d'intégrer sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans $]0,\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1. Déterminer $a \in]0,\infty[$ tel que $y(x) = ax$ soit une solution particulière y_0 de (E).

2. Montrer que le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle
$$(E1) \qquad z'(x) + (6x + \frac{1}{x})z(x) = 1.$$
3. Intégrer $(E1)$ sur $]0, \infty[$.
4. Donner les solutions de (E) définies sur $]0, \infty[$ entier.

Exercice 8 :
Résoudre l'équation suivante :
$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

Exercice 9 :
Résoudre l'équation suivante :
$$y'' - y = -6\cos x + 2x \sin x.$$

Exercice 10 : Résoudre l'équation suivante :
$$4y'' + 4y' + 5y = \sin x e^{-x/2}.$$

Exercice 11 :
On considère l'équation différentielle suivante :
$$(ED) \qquad y'' - 4y' + 4y = d(x),$$
où d est une fonction qui sera précisée plus loin.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (i.e. sans le second membre $d(x)$) associée à (ED).
2. Trouver une solution particulière de (ED) lorsque $d(x) = e^{-2x}$ et lorsque $d(x) = e^{2x}$ respectivement.
3. Donner la forme générale des solutions de (ED) lorsque $d(x) = \dfrac{e^{-2x} + e^{2x}}{4}$.

Exercice 12 : Résoudre l'équation suivante, sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$:
$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

Exercice 13 : Déterminer les $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x \cos x.$$
Indications : On pourra décomposer f en partie paire $p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et partie impaire $q(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.
On donne en outre :
$$\int x\cos(x)\exp(x)dx = \frac{1}{2}\exp(x)[(x-1)\sin(x) + x\cos(x)]$$
et (en posant $x = -u$ dans l'expression précédente)
$$\int x\cos(x)\exp(-x)dx = \frac{1}{2}\exp(-x)[(1+x)\sin(x) - x\cos(x)]$$

Université Côte d'Azur *L1 Sciences*

TD Calculus II — Année Universitaire 2024/25

Equations différentielles : solutions

Version du 16 janvier 2025

Solution 1 :
Ce sont des équations à variables séparables.
a) $y = \frac{1}{2}[\log(x)]^2 + \text{Cte}$;
b) Supposons $x \neq -\frac{1}{2}$. Alors $y' = -\frac{x^2+x-2}{2x+1}$ et donc $y' = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{9}{4(2x+1)}$, ce qui donne $y = -\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} + \frac{9}{8}\log|2x+1| + C$. Attention, la constante C dépend de l'intervalle : $C = C_1$ sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$ et $C = C_2$ sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$.
c) $y = \frac{1}{4}(e^x + C)^2$ sur $\mathbb{R}$.

Solution 2 :
a) La solution générale de l'équation homogène (SGEH) est $y = Ce^{\frac{x}{2}}$. Or $y_0 = -2$ est une solution particulière de l'équation non homogène (SPENH). D'où la solution générale de l'équation non homogène (SGENH) $y = -2 + Ce^{\frac{x}{2}}$.
b) Idem. On trouve $y = Ce^{2x} + \frac{1}{2}$.
c) La SGEH est $y = Ce^{-2x}$. On cherche une SPENH sous la forme $y_0 = ax+b$. On trouve par identification $a = 1$ et $b = -\frac{1}{2}$. La SGENH est donc $y = Ce^{-2x} + x - \frac{1}{2}$.
d) La SGEH est $y = Ce^{-\frac{x}{2}}$. On cherche une SPENH sous la forme $y_0 = ke^{-x}$ et on trouve $k = -1$. D'où $y_{\text{SGENH}} = Ce^{-\frac{x}{2}} - e^{-x}$.

Solution 3 :
a) $y = A\cos 3x + B\sin 3x$, sur $\mathbb{R}$; b) $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$, sur $\mathbb{R}$; c) $y = A\cos x + B\sin x + 4$, sur $\mathbb{R}$; d) $y = Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$, sur $\mathbb{R}$.

Solution 4 :
a) La forme $y_0 = \lambda x \sin\alpha x$ est SPENH si l'on a $y_0'' + y_0 = 2\cos x$, ce qui donne

$$2\lambda\alpha\cos\alpha x + \lambda(1-\alpha^2)\sin\alpha x = 2\cos x$$

En identifiant (puisque sin et cos sont linéairement indépendants), on peut choisir $\lambda = \alpha = 1$ et on vérifie que $y_0 = x\sin x$ est bien solution de $(E4)$.
b) En posant $y = u + x\sin x$, on trouve pour $(F4)$ l'équation $u'' + u = 0$, équation homogène dont la solution générale est $u = A\cos x + B\sin x$ avec A et B deux constantes réelles.
La solution générale de $(E4)$ est donc $y = A\cos x + B\sin x + x\sin x$.
On remarque que $y' = (1-A)\sin x + (B+x)\cos x$.
c) Avec les conditions imposées, on cherche A et B telles que $A\cos\frac{\pi}{2} + B\sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = 0$ et $(1-A)\sin\frac{\pi}{2} + (B+x)\cos\frac{\pi}{2} = 0$. On trouve $A = 1$ et $B = -\frac{\pi}{2}$.
La solution est donc $\cos x - \frac{\pi}{2}\sin x + x\sin x$, définie sur $\mathbb{R}$ entier.

Solution 5 :
On trouve

$$z'' = z \qquad (F5)$$

et $z = Ae^x + Be^{-x}$. D'où y de la forme $y = \log|Ae^x + Be^{-x}|$.
On remarque que $y' = \dfrac{Ae^x - Be^{-x}}{Ae^x + Be^{-x}}$.
On cherche A et B telles que $y(0) = \log|A+B| = 0$ et $y'(0) = \frac{A-B}{A+B} = 0$, soit $A = B$ et $|2A| = 1$. Ce qui

donne par exemple $A = B = \frac{1}{2}$ et $y = \log\cosh x$, $x \in \mathbb{R}$.
On peut vérifier que $y' = \text{th}(x)$; $y'' = 1 - \text{th}^2(x)$ et $y'' + y'^2 = 1$, avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Solution 6 :
L'équation $y' = \tan(x)y + x$ est une EDO linéaire non homogène (ENH) du premier ordre. On résout d'abord l'équation homogène (EH) associée $y' = \tan(x)y$. On va ensuite traiter le cas non homogène par la méthode de variation de la constante. La fonction tan est définie sur $\mathbb{R}\backslash(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$. Fixons un entier $k \in \mathbb{Z}$ et l'on travaille sur l'intervalle ouvert $I_k =]\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$. On peut vérifier aisément que la fonction $x \mapsto -\log|\cos(x)|$ est une primitive de la fonction tan sur I_k. La solution générale de l'EH est alors $y_{\text{SGEH}} = \dfrac{C}{\cos(x)}$ avec C une constante réelle (qui dépend de I_k, donc de k.)
On cherche ensuite **une** solution particulière de l'ENH sous la forme $y_{\text{SPENH}} = \dfrac{C(x)}{\cos(x)}$. L'équation NH devient alors

$$\frac{C'(x)}{\cos(x)} + C(x)\frac{\sin(x)}{[\cos(x)]^2} = \tan(x)\frac{C(x)}{\cos(x)} + x$$

Les termes en $C(x)$ s'éliminent (on a tout fait pour !) et l'équation ci–dessus se réduit à une quadrature

$$\frac{C'(x)}{\cos(x)} = x$$

Une intégration par parties de $C'(x) = x\cos(x)$ conduit à $C(x) = x\sin(x) + \cos(x)$ et une solution particulière de l'ENH $y_{\text{SPENH}} = \dfrac{C(x)}{\cos(x)}$ s'écrit :

$$y_{\text{SPENH}} = x\tan(x) + 1$$

On peut revenir à la solution générale de l'ENH en ajoutant la solution générale de l'équation homogène (avec la constante !) à cette solution particulière :

$$y_{\text{SGENH}} = y_{\text{SPENH}} + y_{\text{SGEH}} = x\tan(x) + 1 + \frac{C}{\cos(x)}$$

avec C dans $\mathbb{R}$, $x \in I_k$. Il convient de noter que la constante C peut être différente d'un I_k sur l'autre.
Nota : on retrouve bien la structure en droite affine de la solution générale de l'ENH. On ajoute à un "point" $y_{\text{SPENH}} = x\tan(x) + 1$ un "vecteur" quelconque colinéaire à $\dfrac{1}{\cos(x)}$.

Solution 7 :

1. On cherche une solution particulière de (E), de la forme $y(x) = ax$ pour $x \in]0, \infty[$. En injectant $y(x) = ax$ dans (E), il vient
$$a - \frac{ax}{x} - a^2x^2 = -9x^2$$
donc $a^2 = 9$. On peut prendre $y_0(x) = 3x$ comme solution particulière de (E) définie sur $]0, \infty[$.
2. Effectuons le changement de fonction inconnue suivant : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ où z est une fonction définie sur $]0, \infty[$ à trouver. Ici $y_0(x) = 3x$ donc $y(x) = 3x - \frac{1}{z(x)}$. On calcule la dérivée et le carré de $y(x)$ pour l'injecter dans (E) :
$$y'(x) = 3 + \frac{z'(x)}{z^2(x)} \text{ et } y^2(x) = 9x^2 - \frac{6x}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)}.$$
En injectant dans (E) il vient
$$3 + \frac{z'(x)}{z^2(x)} - 3 + \frac{1}{xz(x)} - 9x^2 + \frac{6x}{z(x)} - \frac{1}{z^2(x)} = 9x^2,$$
d'où en simplifiant et arrangeant, il vient :
$$(E1) \qquad z'(x) + \big(6x + \frac{1}{x}\big)z(x) = 1.$$

3. L'équation $(E1)$ est une EDO linéaire non homogène. On cherche d'abord la solution générale de l'équation homogène :

$$(EH) \qquad z'(x) + \big(6x + \frac{1}{x}\big)z(x) = 0.$$

c'est-à-dire $-z'/z = 6x + 1/x$ ce qui s'intègre en $-\log|z| = 6x^2/2 + \log x + K$, avec K constante. Il vient in fine que la solution générale de l'équation homogène est

$$z(x) = \frac{Ke^{-3x^2}}{x}.$$

Il reste à trouver **une** solution particulière de l'équation non homogène $(E1)$, z_{SPENH}. On applique la méthode de variation de la constante et on cherche z_{SPENH} sous la forme $z_{\text{SPENH}} = \frac{C(x)e^{-3x^2}}{x}$. Sa dérivée vaut

$$z'_{\text{SPENH}}(x) = \frac{C'(x)e^{-3x^2}}{x} - 6C(x)\,e^{-3x^2} - \frac{C(x)\,e^{-3x^2}}{x^2}$$

et le second terme vaut

$$\big(6x + \frac{1}{x}\big)z_{\text{SPENH}}(x) = \frac{\big(6x + \frac{1}{x}\big)\,C(x)\,e^{-3x^2}}{x}$$

En additionnant ces deux expressions, les termes en $C(x)$ disparaissent et on obtient

$$\frac{C'(x)e^{-3x^2}}{x} = 1 \text{ ou encore } C'(x) = xe^{3x^2} = \frac{1}{6}\left(6xe^{3x^2}\right)$$

Ce qui donne $C(x) = \frac{1}{6}e^{3x^2}$ (on peut prendre la constante d'intégration à 0, puisque l'on cherche UNE solution particulière). Il vient enfin en remplaçant $C(x)$:

$$z_{\text{SPENH}} = \frac{\frac{1}{6}e^{3x^2}e^{-3x^2}}{x} = \frac{1}{6x}.$$

On vérifie que la fonction $z_{\text{SPENH}} = \frac{1}{6x}$ est bien solution particulière de $(E1)$. La solution générale de $(E1)$ est donc la somme de $\frac{1}{6x}$ et de $\frac{Ke^{-3x^2}}{x}$:

$$z_{\text{SGENH}} = \frac{1}{6x} + \frac{Ke^{-3x^2}}{x}.$$

Les solutions de (E) sont ainsi de la forme

$$y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)} = 3x - \frac{1}{\frac{1}{6x} + \frac{Ke^{-3x^2}}{x}} = 3x - \frac{6x}{1 + Ae^{-3x^2}}$$

avec A une constante réelle. Si $A > -1$, le dénominateur reste > 0 pour tout $x > 0$ et la solution est définie pour tout $x > 0$. Si $A < -1$, $\log(-A) > 0$ et le dénominateur peut s'annuler en $x_A = \sqrt{\log(-A)/3} > 0$: d'après l'énoncé, on écarte ces dernières solutions.

Solution 8 :

On considère l'équation $y'' - 3y' + 2y = e^x$. D'après le cours (section 3.2), le polynôme caractéristique est $f(r) = r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$ et les solutions de l'équation homogène sont toutes les fonctions de la forme :

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Toujours d'après le cours (section 3.4), on est dans le cas où le second membre e^x est de la forme $e^{\alpha x}P(x)$, avec α (ici $= 1$) racine simple de l'équation caractéristique, et $P(x) = 1$, polynôme de degré 0. On cherche une solution de la forme $y_p(x) = xQ(x)e^x$ avec $Q(x) = K$ constante (polynôme de même degré 0 que $P(x)$).

Il vient $y_p(x) = Kx\exp(x)$, $y_p'(x) = K\exp(x) + Kx\exp(x)$, $y_p''(x) = 2K\exp(x) + Kx\exp(x)$.

Soit

$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = 2K\exp(x) + Kx\exp(x) - 3K\exp(x) - 3Kx\exp(x) + 2Kx\exp(x) = -K\exp(x)$

et on trouve $K = -1$.

Une solution particulière de l'ENH est donc $y_p(x) = -x\exp(x)$ (comme on peut le vérifier). Les solutions générales de l'équation non homogène sont les fonctions :

$$y(x) = (c_1 - x)e^x + c_2e^{2x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Solution 9 :
On cherche les solutions de $y'' - y = -6\cos x + 2x\sin x$.

L'équation caractéristique est $f(r) = r^2 - 1 = (r-1)(r+1)$ et l'équation homogène a pour solutions :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver une solution particulière de l'ENH, on peut ou bien utiliser la méthode de variation de la constante (telle que décrite en cours, pour les équations du second degré à coefficients constants), ou bien encore se référer au cours section 3.4, avec le second membre de la forme

$$e^{\alpha x}\big(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)\big).$$

Ici, $\alpha = 0$, $P_1(x) = -6$, $\beta = 1$, $P_2(x) = 2x$. Comme $\alpha + i\beta = i$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique, que le max des degrés des polynômes P_1 et P_2 est 1, on peut chercher une SP sous la forme $y_p(x) = (a_1 x + b_1)\cos(x) + (a_2 x + b_2)\sin(x)$. Il vient
$y_p'(x) = (a_2 x + a_1 + b_2)\cos(x) - (a_1 x - a_2 + b_1)\sin(x)$ et
$y_p''(x) = (-a_1 x + 2a_2 - b_1)\cos(x) - (a_2 x + 2a_1 + b_2)\sin(x)$.
Soit $y_p'' - y_p = (-2a_1 x + 2a_2 - 2b_1)\cos(x) - 2(a_2 x + a_1 + b_2)\sin(x)$.
On trouve $a_1 = 0$, $a_2 - b_1 = -3$, $-2a_2 = 2$, $a_1 + b_2 = 0$. Soit $a_1 = 0$, $b_2 = 0$, $a_2 = -1$ et $b_1 = 2$.
Et donc $y_p(x) = 2\cos(x) - x\sin(x)$ (et on peut vérifier que y_p convient).
Les solutions sont les fonctions :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 2\cos x - x\sin x \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Solution 10 :
On cherche les solutions de $4y'' + 4y' + 5y = \sin(x)e^{-x/2}$.

L'équation caractéristique est $f(r) = 4r^2 + 4r + 5$ a 2 racines complexes $r_1 = -1/2 + i$ et $r_2 = -1/2 - i = \overline{r_1}$.
Les solutions générales de l'équation homogène sont donc (cours, section 3.2 : $\alpha = -1/2$, $\beta = 1$) :

$$y_{\text{SGEH}} = e^{-x/2}(c_1\cos x + c_2\sin x) \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Encore une fois, le second membre est de la forme

$$e^{\alpha x}\big(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)\big).$$

avec $\alpha = -1/2$ et $\beta = 1$ (et donc ici $\alpha + i\beta$ racine de l'équation caractéristique), $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = 1$.
On cherche une SP sous la forme $y_p(x) = xe^{-x/2}\big(Q_1(x)\cos(x) + Q_2(x)\sin(x)\big)$, avec Q_1 et Q_2 deux polynômes de degré 0 donc deux constantes notées q_1 et q_2.
Il vient
$y_p'(x) = \frac{1}{2}\exp(-x/2)\big(((q_1 - 2q_2)x - 2q_1)\cos(x) + 2((q_1 + q_2/2)x - q_2)\sin(x)\big)$ et
$y_p''(x) = -3/4\exp(-x/2)(((x+4/3)q_1 + (4q_2(x-2))/3)\cos(x) - 4/3\sin(x)((x-2)q_1 + q_2(-1-3x/4)))$
et enfin

$$4y'' + 4y' + 5y = 8\exp(-x/2)(-q_1\sin(x) + q_2\cos(x)) = \sin(x)e^{-x/2}$$

On en déduit $q_1 = -1/8$ et $q_2 = 0$. On vérifie que $y_p(x) = -\frac{1}{8}x\cos(x)e^{-x/2}$ est bien SP de l'ENH.
La solution générale de l'ENH est donc $y_p(x) + y_{\text{SGEH}}$, soit

$$y_{\text{SGENH}} = -\frac{1}{8}x\cos x e^{-x/2} + e^{-x/2}(c_1\cos x + c_2\sin x)$$

Solution 11 :
On cherche d'abord les solutions de $y'' - 4y' + 4y = 0$.

1. L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ a une racine (double) $r = 2$ donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{2x} \text{ où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Pour $d(x) = e^{-2x}$, le second membre est de la forme $P(x)\exp(\alpha x)$ avec $\alpha = -2$ qui n'est pas racine de l'équation caractéristique. Le polynôme $P(x)$ est réduit à une constante. D'après le cours, on peut chercher une solution particulière de la forme : $y_p(x) = Ke^{-2x}$. Il vient $y_p'(x) = -2Ke^{-2x}$ et $y_p''(x) = 4Ke^{-2x}$. On substitue dans (ED) (avec second membre) pour trouver
$$y_p''(x) - 4y_p'(x) + 4y_p(x) = 4Ke^{-2x} - 4 \times (-2Ke^{-2x}) + 4 \times Ke^{-2x} = e^{-2x}$$
Soit $4K + 8K + 4K = 1$ et $K = \frac{1}{16}$ (et on vérifie bien que $y_p(x) = \frac{e^{-2x}}{16}$ est solution de (ED)).

   Pour $d(x) = e^{2x}$, on cherche une solution de la forme $y_q(x) = ax^2e^{2x}$ ($a \in \mathbb{R}$) car 2 est racine double de l'équation caractéristique. On a $y_q'(x) = (2ax+2ax^2)e^{2x}$ et $y_q''(x) = (2a+4ax+4ax+4ax^2)e^{2x} = (4ax^2 + 8ax + 2a)e^{2x}$. On trouve
$$(4ax^2 + 8ax + 2a - 4(2ax + 2ax^2) + 4ax^2)e^{2x} = e^{2x}$$
et donc $a = \frac{1}{2}$.
3. On déduit du principe de superposition (du fait de la linéarité) que la fonction
$$y_0(x) = \frac{1}{4}(y_p(x) + y_q(x)) = \frac{1}{64}e^{-2x} + \frac{1}{8}x^2e^{2x}$$
est solution de l'équation pour le second membre donné dans cette question (on peut le vérifier directement). La forme générale des solutions est alors :
$$y_{\text{SGENH}}(x) = (c_1x + c_2)e^{2x} + \frac{1}{64}e^{-2x} + \frac{1}{8}x^2e^{2x} \text{ où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Solution 12 :
Les solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$ sont $\lambda\cos x + \mu\sin x$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme
$$y_0(x) = \lambda(x)\cos x + \mu(x)\sin x$$
où cette fois $\lambda(x), \mu(x)$ sont des fonctions à trouver et qui vérifient (S) :
$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 &= 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' &= \frac{g(x)}{a} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \lambda'\cos x + \mu'\sin x &= 0 \\ -\lambda'\sin x + \mu'\cos x &= \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$
En multipliant la première ligne par $\sin x$ et la seconde par $\cos x$, on obtient
$$\begin{cases} \lambda'\cos x\sin x + \mu'(\sin x)^2 &= 0 \\ -\lambda'\cos x\sin x + \mu'(\cos x)^2 &= 1 \end{cases} \quad \text{donc par somme} \quad \mu' = 1.$$
Ainsi $\mu(x) = x$ et la première ligne des équations devient $\lambda' = -\frac{\sin x}{\cos x}$ donc $\lambda(x) = \ln(\cos x)$.
On vérifie pour se rassurer que $y_0(x) = \ln(\cos x)\cos x + x\sin x$ est une solution de l'équation. Ainsi les fonctions solutions sont de la forme :
$$\lambda\cos x + \mu\sin x + \ln(\cos x)\cos x + x\sin x$$
quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Solution 13 :
On a que $f(x) = p(x) + q(x)$, avec $p(-x) = p(x)$ et $q(-x) = -q(x)$.
En dérivant p et q, $\frac{dp}{dx} = \frac{1}{2}(f'(x) - f'(-x))$ et $\frac{dq}{dx} = \frac{1}{2}(f'(x) + f'(-x))$.
Si on dérive encore une fois, il vient $\frac{d^2p}{dx^2} = \frac{1}{2}(f''(x) + f''(-x))$ et $\frac{d^2q}{dx^2} = \frac{1}{2}(f''(x) - f''(-x))$.
On remarque que $\frac{d^2p}{dx^2}$ est paire et $\frac{d^2q}{dx^2}$ est impaire et que $f''(x) = \frac{d^2p}{dx^2} + \frac{d^2q}{dx^2}$.
En ré-injectant dans l'équation, il vient, puisque $f(-x) = p(x) - q(x)$, que
$$\frac{d^2p}{dx^2}(x) + \frac{d^2q}{dx^2}(x) + p(x) - q(x) = x\cos(x)$$
Evaluons cette équation en $(-x)$, il vient (en tenant compte des parités)
$$\frac{d^2p}{dx^2}(x) - \frac{d^2q}{dx^2}(x) + p(x) + q(x) = -x\cos(x)$$

En prenant la demi-somme et la demi-différence des deux équations ci-dessus (i.e. en distinguant partie paire et partie impaire) , il vient le système :

$$\begin{cases} p''+p &= 0 \\ q''-q &= x\cos(x) \end{cases}$$

La première équation admet comme équation caractéristique $r^2+1=0$, dont les racines sont $\pm i$. Les solutions de cette équation homogène sont donc $A\cos(x)+B\sin(x)$, avec A et $B\in\mathbb{R}$. Il convient toutefois de faire attention au fait que l'on ne cherche pour cette équation que des solutions paires ! et donc $B=0$.

La seconde équation admet comme équation caractéristique $r^2-1=0$, dont les racines sont ± 1.
Les solutions de cette équation homogène sont donc $\alpha\exp(x)+\beta\exp(-x)$, avec α et $\beta\in\mathbb{R}$. (Nota : nous imposerons l'imparité à la fin des calculs). D'après le cours (section 3.4), on cherche donc une solution particulière par la méthode de variation des constantes, sous la forme $q_{sp}=\lambda(x)\exp(x)+\mu(x)\exp(-x)$, avec λ et μ telles que (cf. cours système (S), page xxxiii)

$$\begin{cases} \lambda'\exp(x)+\mu'\exp(-x) &= 0 \\ \lambda'\exp(x)-\mu'\exp(-x) &= x\cos(x) \end{cases}$$

En prenant la demi-somme, il vient

$$\lambda'=\tfrac{1}{2}x\cos(x)\exp(-x)$$

et la demi-différence donne

$$\mu'=-\tfrac{1}{2}x\cos(x)\exp(x)$$

Les indications fournies dans l'énoncé permettent d'une part de déterminer λ et μ selon

$$\lambda=\tfrac{1}{2}\int x\cos(x)\exp(-x)dx=\frac{1}{4}\exp(-x)\left[(1+x)\sin(x)-x\cos(x)\right]$$

et

$$\mu=-\tfrac{1}{2}\int x\cos(x)\exp(x)dx=-\frac{1}{4}\exp(x)\left[(x-1)\sin(x)+x\cos(x)\right]$$

Une solution particulière pour q_{sp} est $\lambda(x)\exp(x)+\mu(x)\exp(-x)$, ce qui donne

$$q_{sp}=\frac{1}{4}\left[(1+x)\sin(x)-x\cos(x)\right]-\frac{1}{4}\left[(x-1)\sin(x)+x\cos(x)\right]=\frac{1}{2}(\sin(x)-x\cos(x))$$

On vérifie bien à posteriori que cette solution particulière proposée est bien impaire comme somme de deux fonctions impaires. La solution générale de l'équation pour la partie impaire est donc $\frac{1}{2}(\sin(x)-x\cos(x))+\alpha\exp(x)+\beta\exp(-x)$. Mais il faut imposer que cette solution soit impaire ! Ce qui est OK si $\beta=-\alpha$ et que $\alpha\exp(x)+\beta\exp(-x)$ corresponde en fait à une fonction de type $K\sinh(x)$. In fine, en regroupant termes pairs et impairs pour les solutions générales, on obtient

$$f(x)=K\sinh(x)+A\cos(x)+\frac{1}{2}(\sin(x)-x\cos(x))$$

avec K et $A\in\mathbb{R}$ et $x\in\mathbb{R}$.
On peut aisément vérifier directement que $f''(x)+f(-x)=x\cos x$.