L1

Calculus 2

2025-26

TD 2 - Équations différentielles linéaires

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles :

a) $xy' + \log x = 0$

b) $(2x+1)y' + x^2 + x - 2 = 0$

c) $y' - \exp y = 0$

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles :

a) $2y' - y = 2$

b) $y' - 2y + 1 = 0$

c) $y' + 2y = 2x$

d) $2y' + y = e^x$

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles :

a) $y'' + 9y = 0$

b) $y'' - 4y = 0$

c) $y'' + y = 4$

d) $y'' - y = e^{2x}$

Exercice 4

On considère l'équation différentielle (E_4) :

$$y'' + y = 2\cos x \quad (E_4)$$

a) Trouver une solution particulière de (E_4) sous la forme $y_0 = \beta x \sin \alpha x$, avec β et α deux constantes à déterminer.

b) On pose maintenant $y = u + y_0$. Trouver l'équation (F_4) vérifiée par u ; la résoudre. En déduire la solution générale de (E_4).

c) Déterminer la solution y du problème aux CI suivant :
y vérifie (E_4) ; y et y' s'annulent en $x = \pi/2$.
On précisera l'intervalle de définition de la solution.

Exercice 5

On considère l'équation différentielle (E_5) :

$$y'' + y'^2 = 1 \quad (E_5)$$

a) On pose $z = \exp y$. Écrire l'EDO (F_5) vérifiée par z.

b) Résoudre (F_5) et en déduire la solution de (E_5) telle que $y(x=0) = 0$ et $y'(x=0) = 0$.

Exercice 6

Résoudre l'équation différentielle

$$y' = y \tan(x) + x$$

par la méthode de variation de la constante. On précisera l'intervalle de définition de la solution.

Exercice 7

On se propose d'intégrer sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans $]0, \infty[$ l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = -9x^2$$

1. Déterminer $a \in]0, \infty[$ tel que $y(x) = ax$ soit une solution particulière y_0 de (E).

2. Montrer que le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle

$$(E_1) \quad z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z(x) = 1$$

3. Intégrer (E_1) sur $]0, \infty[$.

4. Donner les solutions de (E) définies sur $]0, \infty[$ entier.

Exercice 8

Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

Exercice 9

Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - y = 6 \cos x + 2x \sin x$$

Exercice 10

Résoudre l'équation suivante :

$$4y'' + 4y' + 5y = \sin x \, e^{x/2}$$

Exercice 11

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(ED) \quad y'' - 4y' + 4y = d(x)$$

où d est une fonction qui sera précisée plus loin.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (i.e. sans le second membre $d(x)$) associée à (ED).

2. Trouver une solution particulière de (ED) lorsque $d(x) = e^{2x}$ et lorsque $d(x) = e^{-2x}$ respectivement.

3. Donner la forme générale des solutions de (ED) lorsque $d(x) = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{4}$.

Exercice 12

Résoudre l'équation suivante, sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$:

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

Exercice 13

Déterminer les $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(x) = x \cos x$$

Indications : On pourra décomposer f en partie paire $p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et partie impaire $q(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.

On donne en outre :

$$\int x \cos(x) \exp(x)\, dx = \frac{1}{2}\exp(x)[(x-1)\sin(x) + x\cos(x)]$$

et (en posant $x = -u$ dans l'expression précédente)

$$\int x \cos(x) \exp(-x)\, dx = \frac{1}{2}\exp(-x)[(1+x)\sin(x) - x\cos(x)]$$