

## Exam CC no. 1 – Calculus II

**Nota bene.** Plusieurs réponses correctes sont possibles.

Chaque réponse correcte apporte des points. Les mauvaises réponses sont pénalisées.

1. Calculer  $(1+i)(2-3i)(1-i)^{-1}$ .

☐  $3+2i$       ☐  $3-2i$       ☐  $2+3i$       ☐  $\frac{5}{2}+2i$       ☐  $3+i$

2. Lesquelles des fonctions suivantes satisfont l'équation  $y' + 2y = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  ?

☐  $y(x) = \frac{1}{3}e^{2x}$   
☐  $y(x) = \frac{1}{3}e^{-2x} + e^x$   
☒  $y(x) = e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$   
☒  $y(x) = \frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$   
☒  $y(x) = \frac{1}{3}e^{-2x}(3 + e^{3x})$

3. Lesquelles des fonctions suivantes satisfont l'équation  $y' = 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  ?

☒  $y(x) = x^2 + 23$   
☐  $y(x) = 2x$   
☒  $y(x) = x^2$   
☐  $y(x) = e^{2x}$   
☐  $y(x) = 2x + c$ , où  $c$  est une constante.

4. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont solutions de l'équation  $y' - y = e^x$  ?

☒  $y = xe^x$       ☒  $y = xe^x + 5e^x$       ☐  $y = e^x$       ☐  $y = 2xe^x$

5. Calculer  $z^4$  pour le nombre complexe  $z = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ .

☒  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$       ☐  $-1$       ☐  $i$       ☐  $-i$       ☐  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

6. Les nombres complexes  $z$  et  $w$  sont donnés en coordonnées cartésiennes ( $z = x+iy$ ,  $w = u+iv$ ) ou en coordonnées polaires ( $z = re^{i\phi}$ ,  $w = \rho e^{i\theta}$ ). Quelles expressions donnent  $izw$  ?

☐  $i(xu - yv) + (xv + yu)$   
☒  $-(xv + yu) + i(xu - yv)$   
☐  $r\rho e^{i(\phi+\theta)}$   
☒  $r\rho e^{i(\phi+\theta+\pi/2)}$

7. Choisissez toutes les expressions égales à  $\cos(4x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

☒  $2\cos^2(2x) - 1$       ☒  $8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$       ☒  $\cos^2(2x) - \sin^2(2x)$       ☐  $4\cos^2 x - 3$

8. Identifier toutes les paires  $(z, \bar{z})$ , où  $\bar{z}$  désigne le conjugué de  $z$ .

☐  $(2+9i, -2-9i)$   
☒  $(12e^{i\frac{3\pi}{4}}, 12e^{i\frac{5\pi}{4}})$

- ☒  $(x - 5i, x + 5i)$ , où  $x$  est un nombre réel.  
☒  $(\sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{5}) + i\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{5}), \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{5}})$   
☒  $((1 + i)^2, -2i)$

9. Quelles affirmations sont vraies ?

- ☒ La solution générale de  $y' = a(x)y$  est donnée via  $y(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^x a(t)dt\right)$ ,  $x_0$  et  $y_0$  sont des constantes réelles.  
☐ La somme de deux solutions d'une équa. diff. linéaire du 1er ordre est également une solution.  
☐ Si  $y$  est une solution d'une équa. diff. du premier ordre, alors  $-y$  est aussi une solution.  
☒ Le principe de superposition permet de réduire une équa. diff. linéaire avec un second membre à une équa. diff. sans second membre.  
☒ La méthode de variation de la constante est utilisée pour résoudre des équa. diff. linéaires du 1er ordre.

10. Décrivez l'ensemble des nombres complexes qui, dans le plan complexe, correspondent aux points du cercle de rayon 1 et de centre 3.

- ☐  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$   
☒  $\{z \in \mathbb{C} : |z - 3| = 1\}$   
☐  $\{z \in \mathbb{C} : |z + 3| = 1\}$   
☐  $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 3\}$   
☒  $\{x + iy \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{R}, (x - 3)^2 + y^2 = 1\}$

11. Une équa. diff. linéaire du premier ordre peut se présenter sous la forme :

- ☒  $y' + a(x)y = b(x)$   
☐  $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$   
☐  $(y')^2 + a(x)y = b(x)$   
☒  $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

12. Pour l'équation  $y' + y = 5$ , une solution particulière est :

- ☒  $y = 5$       ☐  $y = e^{-x}$       ☐  $y = 5x$       ☐  $y = 0$

13. Pour résoudre  $y' + p(x)y = q(x)$  par méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de la forme :

- ☒  $y = c(x)y_h$  où  $y_h$  est une solution de l'équation homogène  
☐  $y = c$  où  $c$  est une constante  
☒  $y = c(x)e^{-\int p(x)dx}$   
☐  $y = \frac{q(x)}{p(x)}$

14. Parmi les nombres complexes suivants, lesquels sont solutions de l'équation

$$z^3 - (2 + 3i)z^2 + (-1 + 5i)z + (2 - 2i) = 0 ?$$

Nom :

Prénom :

No. étudiant :

$$\square 3 \quad \square -1 \quad \boxtimes 2i \quad \boxtimes 1+i \quad \boxtimes 1$$

15. Quelles expressions donnent la partie imaginaire de  $(e^{i\phi})^3 - 3e^{i\phi} + 1$ ,  $\phi \in \mathbb{R}$  ?

- ☐  $-3 \cos^3 \phi$   
☐  $4 \sin^3 \phi$   
☒  $\sin(3\phi) - 3 \sin \phi$   
☐  $-3 \sin \phi$   
☐  $\cos(3\phi) - 3 \cos \phi$

16. Parmi les nombres complexes ci-dessous, lesquels sont solutions de l'équation  $2026z^{2026} - 2026 = 0$  ?

$$\boxtimes e^{i\pi} \quad \square 2026 \quad \boxtimes \cos \frac{\pi}{1013} + i \sin \frac{\pi}{1013} \quad \boxtimes e^{\frac{2\pi i}{2026}} \quad \square i$$

17. Quelles affirmations sont vraies ?

- ☐ L'équation  $z^2 + z + 1 = 0$  admet une solution dans  $\mathbb{R}$ .  
☐ Pour deux nombres complexes  $z_1 = r_1 e^{i\phi_1}$ ,  $z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$  écrits en coordonnées polaires on a :  $z_1 = z_2$  si et seulement si  $r_1 = r_2$  et  $\phi_1 = \phi_2 + 2\pi$ .  
☒ Le produit d'un nombre complexe et de son conjugué est un nombre réel.  
☒ L'inverse et le conjugué d'un nombre complexe ont le même argument (mod un multiple de  $2\pi$ ).  
☐ Le module d'un nombre complexe ne peut pas être égal à zéro.

18. Parmi les nombres complexes suivants, lesquels sont des racines 5èmes de l'unité ?

$$\boxtimes \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \quad \boxtimes e^{i\frac{16\pi}{5}} \quad \boxtimes 1 \quad \boxtimes \bar{z}, \text{ où } z = \cos \frac{4\pi}{5} - i \sin \frac{4\pi}{5} \quad \square e^{i\frac{3\pi}{5}}$$

19. Lesquelles des fonctions suivantes satisfont l'équation  $y' + \frac{1}{x}y = x^2$ ,  $x > 0$  ?

- ☐  $y(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{1}{t} dt\right)$ , où  $y_0$  et  $x_0$  sont des constantes réelles.  
☐  $y(x) = \frac{1}{x}$   
☒  $y(x) = \frac{x^3}{4}$   
☒  $y(x) = \frac{x^4+1}{4x}$   
☐  $y(x) = \frac{1}{x} + x^2$

20. Calculer le produit  $z_1 z_2$  des deux nombres complexes  $z_1 = 1 + i$  et  $z_2 = 2 - i$ .

$$\square 3 \quad \square 2 \quad \boxtimes 3+i \quad \square 1+3i \quad \square 1+i$$

21. La solution générale de  $y' - 3y = 0$  est ( $c$  désigne une constante arbitraire) :

$$\boxtimes y = ce^{3x} \quad \square y = ce^{-3x} \quad \square y = e^{3x} + c \quad \square y = e^{3x} \quad \square y = 3x + c$$

22. Choisissez toutes les formules correctes pour un nombre complexe non nul  $z \neq 0$ , représenté soit en coordonnées cartésiennes ( $z = x + iy$ ), soit en coordonnées polaires ( $z = re^{i\phi}$ ).

$$\boxtimes \bar{z}^{-1} = \frac{z}{|z|^2}$$

☒  $z^7 = r^6 e^{8i\phi} \bar{z}$

☒  $\frac{z}{|z|} = \cos \phi + i \sin \phi$

☐  $\bar{z}z = r^2 e^{2i\phi}$

☐  $iz = y + ix$

23. Sélectionnez toutes les paires

(équation différentielle linéaire du premier ordre, une solution de cette équation)

☒  $(y' + 3y = 6e^{-x}, y = 3e^{-x} + 10e^{-3x}), x \in \mathbb{R}$

☐  $(y' + \frac{2}{x}y = x^2, y = \frac{x^2}{2}), x > 0$

☒  $(y' + e^x y = e^x, y = 1 + e^{-e^x}), x \in \mathbb{R}$

☐  $(y' + (\tan x)y = \frac{1}{\cos x}, y = \cos x), 0 < x < \frac{\pi}{2}$

☒  $(y' + 2xy = 4x, y = 2), x \in \mathbb{R}$

24. Cinq nombres complexes  $z_1, \dots, z_5$  sont représentés par des points dans le plan complexe. Sélectionnez tous ceux vérifiant  $\operatorname{Re}(z) > 0$  et  $\operatorname{Im}(z) < 0$ .

☒  $z_1$

☐  $z_2$

☒  $z_3$

☐  $z_4$

☐  $z_5$

