Exam CC no. 1 (version d'entraînement)

Nota bene. Plusieurs réponses correctes sont possibles. Les mauvaises réponses sont pénalisées. Le nombre de questions peut être augmenté en fonction de la durée de l'épreuve.

Question 1. *Calculer le quotient z_1/z_2 de deux nombres complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 2 - i$.*

☒ $\dfrac{1+3i}{5}$ ☐ $\dfrac{3+i}{5}$ ☐ $\dfrac{1-i}{3}$ ☐ $3+i$ ☐ $\dfrac{3-i}{5}$

Question 2. *Calculer z^{-3} pour le nombre complexe $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.*

☒ $-z$ ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ☐ $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ☒ $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ☒ $e^{i\frac{5\pi}{4}}$

Question 3. *Lesquelles des expressions suivantes donnent l'inverse du nombre complexe $z = 2-3i$?*

☒ $\dfrac{2+3i}{13}$ ☒ $\dfrac{-3+2i}{13i}$ ☐ $\dfrac{2-3i}{13}$ ☐ $\dfrac{2+3i}{2-3i}$ ☒ $\dfrac{2+3i}{|2-3i|^2}$

Question 4. *Identifier tous les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ telles que $|z| \leq 1$ ($|z|$ = module de z):*

☒ $\cos(2) + i\sin(2)$ ☐ z^4, *où* $z = 1.5\,e^{i\frac{\pi}{2}}$ ☒ $-i$ ☐ $\sqrt{2}$ ☐ $0.9 + 0.5i$

Question 5. *Choisissez toutes les équations qui ont (à la fois) 1 et i parmi leur solutions:*

☐ $z^3 - iz^2 - (1+i)z + i = 0$

☐ $z^5 - 2z^4 + (2+2i)z^3 - (2+2i)z^2 + (1+2i)z - 2 = 0$

☐ $z - 1 = 0$

☒ $2z^2 - (2+2i)z + 2i = 0$

☐ $z^4 - (2+i)z^3 + (1+2i)z^2 + (2-2i)z - 2i = 0$

Question 6. *Quelles affirmations concernant les nombres complexes sont vraies ?*

☒ *L'équation $z^2 - 2z + 1 = 0$ admet une solution dans $\mathbb{R}$.*

☒ *Pour deux nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ écrits en coordonnées cartésiennes on a : $z_1 = z_2$ si et seulement si $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.*

☐ *Pour un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, il existe un autre nombre complexe $w \in \mathbb{C}$ tel que $zw = 1$.*

☒ *La somme des arguments d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ et de son conjugué $\overline{z}$ est un multiple entier de 2π.*

☐ *Le module d'un nombre complexe est toujours positif.*

Question 7. *Quelles affirmations concernant les EDO du premier ordre sont vraies ?*

☒ *L'EDO* $y' = a(x)y$ *admet une infinité de solutions.*

☒ *La somme de deux solutions d'une EDO linéaire du 1er ordre sans second membre est également une solution.*

☒ *Si* y *est une solution d'une EDO linéaire du 1er ordre, alors* $2y$ *n'est pas forcement une solution.*

☐ *Le principe de superposition donne une solution sous forme fermée d'une EDO linéaire du premier ordre.*

☒ *La méthode de variation de la constante permet de trouver une solution particulière de l'équation* $y' + (\sin x)y - x = 0$.

Question 8. *Lesquelles des fonctions suivantes satisfont à l'équation* $y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = \frac{x^2}{2}e^x + 2xe^x$, $x > 0$ *?*

☐ $y(x) = \dfrac{x^2}{2}e^x + c$, *où* c *est une constante non nulle.*

☒ $y(x) = \dfrac{x^2}{2}e^x + \dfrac{c}{x^2}$, *où* c *est une constante.*

☐ $y(x) = x^2 e^x + c$, *où* c *est une constante.*

☐ $y(x) = \dfrac{x}{2}e^x + cx^{-2}$, *où* c *est une constante.*

☐ $y(x) = \dfrac{e^x}{x^2} + c$, *où* c *est une constante.*

Question 9. *Identifier les EDO linéaires:*

☒ $y' - \frac{1}{x}y = x^2$, $x > 0$

☐ $y' - 2y^2 = 0$

☒ $y' + (\sin x)^{10}y = \cos x$

☒ $y'/y = f(x)$, *où* f *est une fonction.*

☐ $y' + 2\cos y = 0$

Question 10. *Soi* $a \in \mathbb{R}$. *La solution générale de l'équation* $y' - ay = 0$, $x \in \mathbb{R}$, *est donnée par*

☐ $y(x) = c$, *où* c *est une constante*

☐ $y(x) = e^{-ax}$

☐ $y(x) = -ax + c$, *où* c *est une constante*

☐ $y(x) = c\,e^{-ax}$, *où* c *est une constante*

☒ $y(x) = c\,e^{ax}$, *où* c *est une constante*