



L1

---

## Calculus 2

---

2025-26

---

## TD 1 - Nombres complexes

---

### Exercice 1

Si  $(a, b) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ , prouver que  $\frac{1}{2}(a + b) \geq \sqrt{ab}$ . Quand a-t-on égalité ?

### Exercice 2

Mettre sous la forme  $a + ib$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ) les nombres :

$$\frac{3 + 6i}{3 - 4i}, \quad \left( \frac{1 + i}{2 - i} \right)^2 + \frac{3 + 6i}{3 - 4i}, \quad \frac{2 + 5i}{1 - i} + \frac{2 - 5i}{1 + i}$$

### Exercice 3

On considère  $a, b, c \in \mathbf{C}$ , tels que  $|a| = |b| = |c| = 1$ .

Montrer que  $|ab + bc + ac| = |a + b + c|$ .

### Exercice 4

Écrire sous la forme  $a + ib$  les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument  $\pi/3$ .
2. Nombre de module 3 et d'argument  $\pi/4$ .

## Exercice 5

Placer dans le plan cartésien, les points d'affixes suivants :

$$z_1 = i, \quad z_2 = 1 + i, \quad z_3 = 2 + 2i, \quad z_4 = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

## Exercice 6

1. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 3 + 3i, \quad z_2 = 1 - \sqrt{3}i, \quad z_3 = \frac{4}{3}i, \quad z_4 = -2, \quad z_5 = e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} \text{ (avec } \alpha \in [0; \pi])$$

$$2. \text{ Calculer } \left( \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right)^{2025}.$$

## Exercice 7

Si  $z = x + iy, (x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,

1. Déterminer module et argument de  $e^z$ .
2. Déterminer  $\overline{e^z}, e^{\bar{z}}, (e^z)^n$  pour  $n \in \mathbf{Z}$ .
3. L'application exponentielle

$$\exp : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}, \quad z \mapsto e^z$$

est-elle injective ? surjective ?

## Exercice 8

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels.

Mettre le nombre complexe  $z = e^{i\alpha} - e^{i\beta}$  sous la forme  $z = i\xi e^{i\mu}$  avec  $\xi$  et  $\mu$  deux réels.

**Indication :** on introduira  $e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$  et  $e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}$ .

## Exercice 9

On considère les nombres complexes  $z_1 = e^{ia}$  et  $z_2 = e^{ib}$  (avec  $a$  et  $b$  deux réels).

1. Donner la forme trigonométrique des nombres complexes  $z_1$  et  $z_2$ .
2. En utilisant les résultats de la question précédente, calculer  $z_1 z_2$ .
3. Déterminer la forme exponentielle de  $z_1 z_2$ , puis en déduire sa forme trigonométrique.
4. En utilisant les questions précédentes, retrouver les formules d'addition de cosinus et sinus (i.e.  $\cos(a + b)$  et  $\sin(a + b)$ ).

## Exercice 10

On considère ici  $a$  et  $b$  deux nombres complexes.

1. Factoriser  $e^{ia} + e^{ib}$  par  $e^{i\frac{a+b}{2}}$ . On simplifiera l'expression obtenue en utilisant les formules d'Euler.
2. En déduire que, pour tout couple  $(p, q)$  de nombres réels, on a l'identité :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \left( \frac{p+q}{2} \right) \cos \left( \frac{p-q}{2} \right)$$

**Nota bene :** on pourra retrouver (et retenir...) de façon tout à fait analogue d'autres formules de trigonométrie :

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \left( \frac{p+q}{2} \right) \cos \left( \frac{p-q}{2} \right)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \left( \frac{p+q}{2} \right) \sin \left( \frac{p-q}{2} \right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \left( \frac{p+q}{2} \right) \sin \left( \frac{p-q}{2} \right)$$

Il conviendra pour cela de factoriser  $e^{ia} - e^{ib}$  par  $e^{i\frac{a+b}{2}}$  (cf. exercice 7).

## Exercice 11

Calculer module et argument de  $(1 + i)^n$ .

## Exercice 12

Calculer les racines carrées de  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ . En déduire les valeurs de  $\cos(\pi/8)$  et  $\sin(\pi/8)$ .

### Exercice 13

Soient  $n \in \mathbf{N}$  et  $x \in \mathbf{R}$ . On suppose que  $\forall k \in \mathbf{Z}, x/2^k$  n'est pas un multiple de  $\pi$ .

Calculer  $P_n = \prod_{k=0}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$ .

### Exercice 14

Montrer que les solutions de  $ax^2 + bx + c = 0$  avec  $a, b, c$  réels, sont réelles ou conjuguées.

### Exercice 15

Résoudre dans  $\mathbf{C}$  l'équation  $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$ .

### Exercice 16

On considère la fonction polynomiale en  $z$

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$$

1. Si  $\alpha$  désigne un nombre complexe quelconque, démontrer que  $P(\alpha) = \overline{P(\overline{\alpha})}$ . En déduire que si  $P(\alpha) = 0$ , alors  $P(\overline{\alpha}) = 0$ .
2. Calculer  $P(1+i)$  puis indiquer deux solutions complexes de l'équation  $P(z) = 0$ .
3. On pose  $Q(z) = (z - (1+i))(z - (1-i))$ . Vérifier que  $P$  est le produit du polynôme  $Q$  et d'un polynôme  $R$  du second degré que l'on déterminera. Résoudre enfin dans  $\mathbf{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ .

### Exercice 17

1. Calculer  $\frac{(1+i\sqrt{3})/2}{\sqrt{2}(1+i)/2}$  algébriquement, puis trigonométriquement. En déduire  $\cos \frac{\pi}{12}$ ,  $\sin \frac{\pi}{12}$ ,  $\tan \frac{\pi}{12}$ .
2. Résoudre dans  $\mathbf{C}$  l'équation  $z^{24} = 1$ .

### Exercice 18

Soit  $t \in ]0, \pi[$  et  $n \in \mathbf{N}^*$ . On définit  $S_n$  telle que

$$S_n = \sum_{k=0}^n \cos(kt)$$

1. Déterminer  $S_n$ .
2. Montrer que  $|S_n|$  est bornée indépendamment de  $n$ .

### Exercice 19

1. Développer  $\cos(5\theta)$  et  $\sin(5\theta)$ .
2. Linéariser  $\cos^5 \theta$  et  $\sin^5 \theta$ .

### Exercice 20 : Équation complexe d'une droite affine

On considère l'équation réelle d'une droite affine  $D$  dans le plan (affine) :

$$ax + by = c$$

avec  $a, b, c$  des nombres réels ( $a$  et  $b$  n'étant pas tous les deux nuls) et  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ .

Déterminer l'équation complexe d'une droite affine à partir de  $a, b, c$  et des affixes  $z = x + iy$  et  $\bar{z} = x - iy$ .

### Exercice 21

Trouver l'équation complexe du cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $r > 0$ .

### Exercice 22

Considérons  $A, B$  deux points du plan et  $k > 0$  donné.

Montrer que l'ensemble des points  $M$  tel que  $\frac{MA}{MB} = k$  est

- une droite qui est la médiatrice de  $[AB]$ , si  $k = 1$ ,
- un cercle, sinon.

### Exercice 23

1. Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux points du plan  $Oxy$  d'affixes respectifs  $z_1$  et  $z_2$ . Montrer qu'un argument de  $\frac{z_2}{z_1}$  est une mesure de l'angle orienté formé par les vecteurs  $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}$ . (Faire un dessin).
2. Soit  $\Omega$  un point du plan  $Oxy$  d'affixe  $\omega$ . Montrer qu'un argument de  $\frac{z_2 - \omega}{z_1 - \omega}$  est une mesure de l'angle orienté formé par les vecteurs  $\overrightarrow{\Omega A_1}, \overrightarrow{\Omega A_2}$ . (Faire un dessin, bis).

**Indication :** on notera (cf. cours) que l'affixe de  $\overrightarrow{\Omega A_1}$  (un vecteur) est  $z_1 - \omega$ .

## Exercice 24

Soient  $a, b$  et  $c$  trois nombres complexes de module 1 et d'arguments respectifs  $\alpha, \beta, \gamma$ . Les points  $A, B, C$  d'affixes respectifs  $a, b, c$  sont supposés distincts.

1. Établir la relation  $\left(\frac{a-c}{b-c}\right)^2 = \lambda \frac{a}{b}$  avec  $\lambda \in \mathbf{R}$  que l'on déterminera en fonction de  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ .
2. Interprétation géométrique ? (Faire un dessin, bis).