MA327. ÁLGEBRA LINEAR

PRIMEIRA PROVA, 08/05/2008

Professor: Alexandre Ananin (Sasha), sala 243 IMECC

Para obter 10 pontos é suficiente resolver os primeiros quatro problemas sem erros.

1. Seja $A : U \to V$ uma aplicação linear, sejam $\alpha : a_1, a_2$ e $\alpha' : a'_1, a'_2$ bases de U tais que $a_1 = a'_1 + 2a'_2$ e $a_2 = a'_1 + 3a'_2$ e sejam $\beta : b_1, b_2, b_3, b_4$ e $\beta' : b'_1, b'_2, b'_3, b'_4$ bases de V tais que $b_1 = b'_1 + b'_2 + b'_3 + b'_4$, $b_2 = b'_2 + b'_3 + 2b'_4$, $b_3 = b'_3 + 3b'_4$ e $b_4 = 4b'_4$. Calcule $[A]_{\beta'}^{\alpha'}$ supondo que $[A]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 9 & 0 \\ 0 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$.

2. Sem procurar soluções, verifique se o sistema $AX = B$, onde $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, admite uma solução. Utilizando o processo de escalonamento, procure uma base de souluções do sistema homogênio $AX = 0$ e descreva todos as soluções do sistema $AX = B$.

3. Utilizando o processo de escalonamento, ache a inversa para $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Procure x_2 no sistema

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

utilizando a regra de Cramer.

Os problemas seguintes são para mais pontos:

5. Denotemos por V o espaço vetorial de todos os polinômios de grau $\leq n$ em uma variável x com coeficientes em $\mathbb{R}$. Para a aplicação $A : f(x) \mapsto f(2008x + 5) + f'(x)$, onde $f'(x)$ denota a derivada de $f(x)$, verifique se $A : V \to V$ é linear e calcule o posto de A.

6. Seja V um espaço vetorial e sejam $\beta : b_1, b_2, \ldots, b_n$ e $\beta' : b'_1, b'_2, \ldots, b'_n$ duas bases de V. Definindo $J(b_i) = b_i^*$ e $J'(b'_i) = b'^*_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, obtemos dois isomorfismos entre V e V^*. Será que sempre $J = J'$?

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX