Questão 1 (valor: 2,0 pontos)

Dado o sistema

$$\begin{aligned} 1x + 2y + 0z &= 2 \\ 1x + 0y + 2z &= 2 \\ 3x + 4y + 2z &= 6 \end{aligned}$$

a. Encontre, por inspeção, uma solução tal que as variáveis valem 0 ou 1.

b. Encontre a solução geral do sistema.

c. Encontre a solução geral do sistema homogêneo associado a ele.

d. Mostre que a solução geral obtida no item (b) é a soma da solução particular obtida em (a) com a solução geral do sistema homogêneo obtido em (c).

a) Podemos observar que $x=0, y=1, z=1$ é solução

b) Vamos escalonar o sistema

$$\begin{cases} 1x + 2y = 2 \\ 1x + 2z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = 6 \end{cases} \sim \begin{cases} 1x + 2y = 2 \\ -2y + 2z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} 1x + 2y = 2 \\ -2y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Logo, o sistema tem solução na forma

$2y = 2z \Leftrightarrow y = z$, com z sendo a
$x + 2z = 2 \Leftrightarrow x = 2 - 2z$, variável livre.

Podemos também escrever a sol. na forma $(x, y, z) = (2-2z, z, z)$, $\forall z \in \mathbb{R}$

c) Podemos aproveitar a matriz escalonada já que o lado direito do sistema homogêneo é composto somente de zeros e não mudaria durante o escalonamento. Temos então o sistema final

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} y = z \\ x = -2z \end{matrix}, \quad z \text{ variável livre.}$$

Podemos também escrever a solução na forma $(-2z, z, z)$, $\forall z \in \mathbb{R}$.

(c) A sol de (b) tem a forma $(2-2z, z, z) =$

$(2,0,0) + z(-2,1,1) = (0,1,1) + (2,-1,-1) + z(-2,1,1) =$

$= (0,1,1) + (z-1)(-2,1,1)$, onde z pode ser qualquer real. Chamando

$(z-1)$ de α, isso pode ser escrito na forma

$$(0,1,1) + \alpha(-2,1,1), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

que é exatamente a soma da sol. de (a) com a de (c).

Questão 2 (valor: 3,0 pontos)

Considere $B = \{(a+b, 0, 2), (c(a+b), 2a, 2c), (a+b, 2a,2+c)\} \subset \mathbb{R}^3$, em que a, b e c são números reais.

a. (1,0 ponto) Mostre que o espaço gerado por B tem dimensão pelo menos 1.

b. (2,0 pontos) Diga para quais valores de a, b e c o espaço gerado por B tem dimensão 1, para quais valores ele tem dimensão 2 e para quais valores tem dimensão 3.

(A) O primeiro vetor de B é sempre não nulo, independente de a ou b, logo o espaço gerado por B tem dimensão pelo menos 1

(b) Vamos calcular uma base do espaço gerado por B

$$\begin{bmatrix} a+b & 0 & 2 \\ c(a+b) & 2a & 2c \\ a+b & 2a & 2+c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a+b & 0 & 2 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 2a & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a+b & 0 & 2 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Sabemos que a dim [B] é o número de linhas não nulas na matriz escalonada. Logo há três casos.

1) $a = c = 0$. Nesse caso a dim. é 1

2) Somente um de a ou c é 0. Nesse caso a dim é 2.

3) $a \neq 0$ e $c \neq 0$. Nesse caso a dim é 3.

Questão 3 (valor: 2,0 pontos)

Definimos a função $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $p(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

a. (1,0 ponto) Mostre que se $x, y \in \mathbb{R}^n$ são vetores não nulos tais que $p(x, y) = 0$ então $\{x, y\}$ é L.I.

b. (1,0 ponto) Generalize para o caso de m vetores. Isto é, dados $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}\}$ vetores não nulos tais que $p(x^{(i)}, x^{(j)}) = 0$ sempre que $i \neq j, i = 1, \ldots, m, j = 1 \ldots, m$, então esse conjunto de vetores é L.I.

(a) S.P.C. que $\{x, y\}$ são L.D, então tem que um desses vetores é múltiplo do outro. Sem perda de generalidade vamos considerar que y é multiplo de x, isto é $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq. $y = \alpha x$. Nesse caso, temos

$$0 = p(x,y) = p(x, \alpha x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i^2 = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Rightarrow$$

(i) $\alpha = 0 \Rightarrow y = 0$, contrariando o fato que y é não nulo.

ou

(ii) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Rightarrow x_i^2 = 0, \; i = 1, \ldots, n$ (já que uma soma de não negativos só dá 0 se todos forem 0) $\Rightarrow x = 0$ contrariando o fato de x ser não nulo.

(b) S.P.C que os vetores são L.D. Então um dos vetores é combinação linear dos outros, isto é $\exists k \in \{1, \ldots, m\}$ e $\alpha_j, j = 1, \ldots, m, j \neq k$ tq.

$$x^{(k)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \alpha_j x^{(j)} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k)})^2 = p(x^{(k)}, x^{(k)}) = p\Big(x^{(k)}, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \alpha_j x^{(j)}\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)} \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \alpha_j x_i^{(j)}\Big)$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_j x_i^{(k)} x_i^{(j)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)} x_i^{(j)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \alpha_j \, p(x^{(k)}, x^{(j)}) = 0.$$

Logo, assim como no caso (ii) do item (a) concluímos que $x^{(k)} = 0$, contrariando o fato de ele ser não nulo.

Questão 3 (valor: 2,0 pontos)

Dada $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0,0) = (2,3)$, $T(1,1,0) = (3,1)$ e $T(1,1,1) = (2,5)$.

a. (0,5 ponto) Calcule $T(0,1,0)$.

b. (1,0 ponto) Calcule a fórmula geral de $T(x,y,z)$.

c. (0,5 ponto) A $Im(T) = \mathbb{R}^2$, por quê?

(A) Como $(0,1,0) = -1.(1,0,0) + 1(1,1,0)$, temos

$T(0,1,0) = -1.T(1,0,0) + 1.T(1,1,0) = -(2,3) + (3,1) = (1,-2)$

(b) De um modo geral precisamos descobrir a, b, c tq.

$(x,y,z) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1)$

Escrevendo isso na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Que já está escalonado e obtemos a solução

$c = z$

$b + z = y \Leftrightarrow b = y - z$

$a + (y-z) + z = x \Leftrightarrow a = x - \cancel{z} - y + \cancel{z} = x - y.$

Temos $(x,y,z) = (x-y)(1,0,0) + (y-z)(1,1,0) + z(1,1,1)$,

e então

$T(x,y,z) = (x-y)T(1,0,0) + (y-z)(1,1,0) + z(1,1,1)$

$= (x-y)(2,3) + (y-z)(3,1) + z(2,5)$

$= (2x - 2y + 3y - 3z + 2z,\ 3x - 3y + y - z + 5z)$

$= (2x + y - z,\ 3x - 2y + 4z)$

$= x(2,3) + y(1,-2) + z(-1,4).$

(c) Sabemos que $\mathbb{R}^2 \supset \mathrm{Im}\, T \supset [(2,3),(3,1)]$, mas $\{(2,3),(3,1)\}$ já que um vetor não é múltiplo do outro. Assim o espaço vetorial à direita tem dimensão 2, como ele está contido no $\mathbb{R}^2$ que também tem dimensão 2 cocluimos que

$$\mathbb{R}^2 \supset \mathrm{Im}\, T \supset [(2,3),(3,1)] = \mathbb{R}^2,$$

o que também implica que $\mathrm{Im}\, T = \mathbb{R}^2$

Questão 4 (valor: 2,0 pontos)

Diga se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Em caso de verdadeira, justifique. Caso falsa, apresente um contra-exemplo.

a. (0,5 ponto) Se $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ então $A + A^t$ é simétrica.

b. (0,5 ponto) Dado um inteiro $n \geq 2$, a dimensão do espaço vetorial das matrizes simétricas de ordem n é $\frac{n(n-1)}{2}$.

c. (0,5 ponto) A transformação que leva um polinômio (sobre $\mathbb{R}$) $p(t)$ em $q(t) = \int_{x=0}^{t} p(\cancel{t})d\cancel{t}$ é um operador linear no espaço dos polinômios (sobre $\mathbb{R}$).

d. (0,5 pontos) Duas matrizes $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ comutam sempre que existirem uma matriz inversível M e matrizes diagonais D_A e D_B tais que $A = MD_AM^{-1}$ e $B = MD_BM^{-1}$.

Obs: Lembre que é trivial ver que matrizes diagonais comutam.

(A) Verdadeiro pois

$$(A+A^t)^t = A^t + A = A + A^t$$

(b) Falso, pois a fórmula afirma que o espaço das matrizes simétricas de ordem 2 tem dimensão 1, mas ele contém

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que são L.I. garantindo que a dimensão é na verdade maior ou igual a 2.

(c) Verdadeiro. De fato, dados p_1, p_2 polinômios temos

$$q(p_1+p_2)(t) = \int_0^t (p_1+p_2)(x)dx = \int_0^t p_1(x) + p_2(x)\, dx = \int_0^t p_1(x)dx + \int_0^t p_2(x)dx$$

$$= q(p_1)(t) + q(p_2)(t)$$

Além disso, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, p polinômio temos

$$q(\alpha p)(t) = \int_0^t \alpha p(x)\, dx = \alpha \int_0^t p(x)dx = \alpha\, q(p)(t).$$

(d) Verdadeiro.

Temos $AB = MD_A \underbrace{M^{-1}M}_{I} D_B M^{-1}$

$= MD_AD_BM^{-1}$

$= MD_BD_AM^{-1}$ [diagonais comutam]

$= \underbrace{MD_BM^{-1}}_{B}\underbrace{MD_AM^{-1}}_{A}$

$= BA$

Questão 3 (valor: 2,0 pontos)

Definimos a função $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $p(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

a. (1,0 ponto) Mostre que se $x, y \in \mathbb{R}^n$ são vetores não nulos tais que $p(x, y) = 0$ então $\{x, y\}$ é L.I.

b. (1,0 ponto) Generalize para o caso de m vetores. Isto é, dados $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}\}$ vetores não nulos tais que $p(x^{(i)}, x^{(j)}) = 0$ sempre que $i \neq j, i = 1, \ldots, m, j = 1 \ldots, m$, então esse conjunto de vetores é L.I.

(a) S.P.C. que $\{x, y\}$ são L.D, então por que um desses vetores é múltiplo do outro. Sem perda de generalidade vamos considerar que y é multiplo de x, isto é $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq. $y = \alpha x$. Nesse caso, temos

$$0 = p(x,y) = p(x, \alpha x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i^2 = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Rightarrow$$

(i) $\alpha = 0 \Rightarrow y = 0$, contrariando o fato que y é não nulo.

ou

(ii) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Rightarrow x_i^2 = 0, \; i = 1, \ldots, n$ (já que uma soma de não negativos só dá 0 se todos forem 0) $\Rightarrow x = 0$ contrariando o fato de x ser não nulo.

(b) S.P.C que os vetores são L.D. Então um dos vetores é combinação linear dos outros, isto é $\exists k \in \{1, \ldots, m\}$ e $\alpha_j, \; j = 1, \ldots, m$, $j \neq k$ tq.

$$x^{(k)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \alpha_j x^{(j)} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k)})^2 = p(x^{(k)}, x^{(k)}) = p\Big(x^{(k)}, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \alpha_j x^{(j)}\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)} \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \alpha_j x_i^{(j)}\Big)$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_j x_i^{(k)} x_i^{(j)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)} x_i^{(j)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \alpha_j \, p(x^{(k)}, x^{(j)}) = 0.$$

Logo, assim como no caso (ii) do item (a) concluímos que $x^{(k)} = 0$, contrariando o fato de ele ser não nulo.