

24/06/2013

- 1) _____
 2) _____
 3) _____
 4) _____

Nota: _____

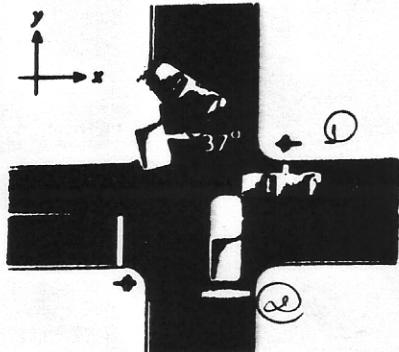
Nome: GABARITO RA: _____ Turma: _____

Esta prova contém 4 questões e 5 folhas.
 Caso seja necessário, utilize $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Questão 01

Um carro de 1000 kg viajando para oeste colide numa interseção com uma caminhonete de 2000 kg viajando para norte com módulo de velocidade 6 m/s conforme mostra a figura. Após a colisão, os dois veículos vão juntos para o canteiro da pista, saindo com um ângulo de 37° à esquerda da caminhonete.

Dados: $\sin(37^\circ) = 0,6$ e $\cos(37^\circ) = 0,8$.



- a) (1,0 ponto) Calcule o módulo da velocidade do carro antes da colisão.
- b) (0,5 ponto) Qual é a velocidade (em termos dos vetores unitários \hat{i} e \hat{j}) do centro de massa do sistema imediatamente antes da colisão?
- c) (1,0 ponto) Calcule a razão entre as energias cinéticas do sistema antes e após a colisão. A colisão é elástica?

$$a) \vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow \begin{cases} -m_1 v_{1,a} = -(m_1 + m_2) v \cdot \sin 37^\circ \\ m_2 v_{2,a} = (m_1 + m_2) v \cos 37^\circ \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{\tan 37^\circ}{\frac{m_1}{m_2} \frac{v_{1,a}}{v_{2,a}}} \Rightarrow v_{1,a} = \frac{m_2}{m_1} v_{2,a} \tan 37^\circ = \frac{2000}{1000} \cdot 6 \cdot \frac{3}{4} \text{ m/s}$$

$$v_{1,a} = 9 \text{ m/s}$$

$$b) \vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \begin{cases} v_{cm,x} = -\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = -\frac{1}{3} \cdot 9 = -3 \text{ m/s} \\ v_{cm,y} = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{cm} = (-3 \text{ m/s}) \hat{i} + (4 \text{ m/s}) \hat{j}$$

$$c) \frac{k_a}{k_d} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2}{\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2} = \frac{1000 \cdot 9^2 + 8000 \cdot 6^2}{3000 \cdot (3^2 + 4^2)}$$

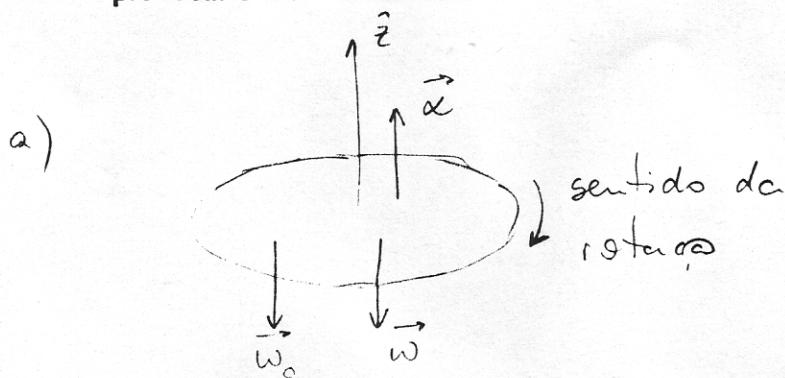
$$\frac{k_a}{k_d} = \frac{81000 + 72000}{75000} = \frac{153}{75} = 2,04$$

$k_a \neq k_d \Rightarrow$ colisão não é elástica.

Questão 02

Um anel de raio $R = 1\text{ m}$ tem massa $M = 10\text{ kg}$ distribuída uniformemente. Ele é posicionado no plano horizontal, de modo que o eixo z seja vertical e apontando para cima, e atravesse o seu centro de massa. O anel gira com aceleração angular constante $\ddot{\alpha} = (5\pi/4)\text{ rad/s}^2 \hat{z}$. No instante $t = 0$, ele apresenta velocidade angular $\vec{\omega}_0 = -2\pi \text{ rad/s } \hat{z}$.

- (0.5 ponto) Faça um desenho mostrando os vetores velocidade angular no instante $t = 0$ e a aceleração angular do anel. Visto de cima, em $t = 0$, indique se o disco gira no sentido horário ou anti-horário.
- (0.5 ponto) Em que instante o anel terá girado 1 revolução completa?
- (0.5 ponto) Em que instante o anel para momentaneamente?
- (0.5 ponto) Calcule o momento de inércia do anel em relação ao eixo z .
- (0.5 ponto) Qual deve ser o torque (módulo, direção e sentido) aplicado ao anel necessário para provocar o movimento descrito?



b) $\dot{\theta} = \text{cte} ; \theta = 2R \Rightarrow \Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

$$\theta = -2\pi t + \frac{1}{2} \frac{5\pi}{4} t^2 \Rightarrow \frac{5}{8} t^2 - 2t - 2 = 0$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot \frac{5}{8} \cdot 2}}{\frac{5}{4}} = \frac{-2 \pm 3}{\frac{5}{4}} = 4\text{ s}$$

c) $\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 \Rightarrow t = -\frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{2\pi}{\frac{5\pi}{4}} = \frac{8}{5}\text{ s}$

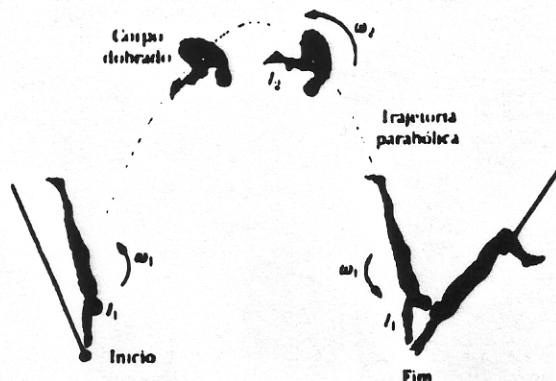
d) $I = \int r^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$

e) $\vec{\tau} = I \vec{\alpha} = 10 \cdot 1^2 \cdot \frac{5\pi}{4} \hat{z} = \frac{50\pi}{4} N \cdot m^2 \hat{z} = (12,5\pi) \text{ N} \cdot m^2 \hat{z}$

Questão 03

Durante um salto até seu companheiro de número, um trapezista pretende fazer quatro cambalhotas (quatro voltas) em um intervalo de tempo $\Delta t = 2$ s. Durante o primeiro quarto da primeira cambalhota e durante o último quarto da última cambalhota ele mantém o corpo esticado como na figura, com um momento de inércia $I_1 = 20 \text{ kg.m}^2$ em relação ao centro de massa. Durante o resto do percurso ele mantém o corpo dobrado, com um momento de inércia $I_2 = 4 \text{ kg.m}^2$.

- (1,0 ponto) Qual deve ser a velocidade angular ω_1 do trapezista em torno do eixo que passa pelo centro de massa quando ele está com o corpo dobrado?
- (1,0 ponto) Qual deve ser o momento angular do trapezista em relação ao centro de massa durante o salto?
- (0,5 ponto) Qual é a razão entre as energias cinéticas de rotação, K_2/K_1 ?



$$a) L_1 = L_2 \Rightarrow I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 \Rightarrow \omega_1 = \frac{I_2}{I_1} \omega_2 = \frac{4}{20} \omega_2 = \frac{1}{5} \omega_2$$

$$\Delta t = \underbrace{\left(\frac{1}{4} \text{ volta}\right) \cdot 2\pi \text{ rad/volta}}_{\omega_1} + \underbrace{\left(3,5 \text{ voltas}\right) \left(2\pi \text{ rad/volta}\right)}_{\omega_2} = 2 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{\omega_1}{\omega_1} + \frac{7\pi}{\omega_2} = \frac{5\pi}{\omega_2} + \frac{7\pi}{\omega_2} = \frac{12\pi}{\omega_2} \Rightarrow \omega_2 = 6\pi \text{ rad/s}$$

$$b) L = L_1 = L_2 = I_2 \omega_2 = 4 \text{ kg.m}^2 \cdot 6\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 24\pi \text{ Kg.m}^2/\text{s}$$

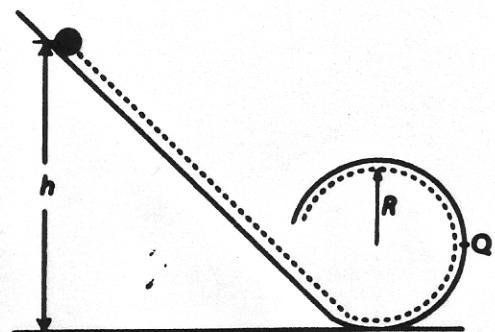
$$\text{ou } L = L_1 = I_1 \omega_1 = 20 \text{ kg.m}^2 \cdot 1,2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 24\pi \text{ Kg.m}^2/\text{s}$$

$$c) \frac{K_2}{K_1} = \frac{\frac{1}{2} I_2 \omega_2^2}{\frac{1}{2} I_1 \omega_1^2} = \frac{I_2}{I_1} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{20}{4} = 5$$

Questão 4

Uma bola de gude de massa m e raio r rola sem deslizar ao longo do trilho curvo mostrado na figura, tendo sido abandonada do repouso em algum lugar sobre a parte reta do trilho. A linha pontilhada descreve a trajetória do centro de massa da bola de gude.

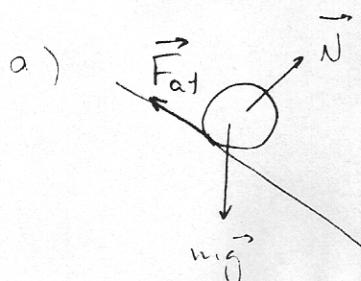
Dado: Momento de inércia de uma esfera girando ao redor do eixo que passa pelo seu centro de massa: $I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2$.



a) (0,5 ponto) Desenhe as forças que agem sobre a esfera quando ela desce a parte reta do trilho, justificando o sentido da força de atrito.

b) (1,0 ponto) De que altura mínima h acima da base do trilho se deve abandonar a bola a fim de que ela se mantenha no trilho no topo da circunferência?

c) (1,0 ponto) Se a bola é abandonada de uma altura $6R$ acima da base do trilho, qual será o módulo da componente horizontal da força atuante sobre ela no ponto Q?



F_{at} aponta na direção indicada, pois a tendência de deslizar do ponto de contato é para baixo.

b) Inimicência de cair no topo. $F_c = mg + \cancel{N} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{Rg}$

$$mgh = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{mv^2}{2} + mg(2R)$$

$$mgh = \frac{1}{2} \frac{2}{5} mr^2 \frac{v^2}{r^2} + \frac{mv^2}{2} + 2mgR = \frac{7}{10} v^2 + 2gR$$

$$L = \frac{7}{10} \frac{v^2}{g} + 2R = \frac{7}{10} \frac{Rg}{g} + 2R = 2,7R$$

c) $mg6R = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} mv^2 + mgR \Rightarrow 5mgR = \frac{7}{10} m v^2$

$$\Rightarrow 5mg = \frac{7}{10} \frac{mv^2}{R} \Rightarrow F_{CP} = F_{horiz} = \frac{50}{7} mg$$