— 0

ME 210 - PROBABILIDADE I
PROF. ÉLCIO LEBENSZTAYN

SEGUNDA PROVA - 21/06/2012

Nome completo: ______________________________ **RA:** ____________

Instruções:

1. Preencha o seu nome completo e RA em todas as folhas da prova.
2. Desligue ou desative os seus equipamentos eletrônicos.
3. A prova é individual, sem consulta, com duração de 2 horas.
4. A prova pode ser feita a lápis, e é permitido o uso de calculadora.
5. Justifique adequadamente as questões, deixando claras as respostas.
6. Todas as questões têm o mesmo valor.

Distribuição de X	$p_X(x)$ ou $f_X(x)$	$E(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
Binomial(n, p)	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, \ldots, n$	np	$np(1-p)$
Poisson(λ)	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, \ldots$	λ	λ
Geométrica(p)	$p(1-p)^{x-1}$, $x = 1, 2, \ldots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
Bin. Negativa(r, p)	$\binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$, $x = r, r+1, \ldots$	r/p	$r(1-p)/p^2$
Hipergeom.(n, R, N), $p = R/N$	$\binom{R}{x}\binom{N-R}{n-x}\binom{N}{n}^{-1}$	np	$\left(\frac{N-n}{N-1}\right) np(1-p)$
Uniforme(a, b)	$(b-a)^{-1}$, $a < x < b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
Normal(μ, σ^2)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$, $x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2
Exponencial(λ)	$\lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$

z	0,00	0,05	0,11	0,16	0,22	0,27	0,33	0,38
$\Phi(z)$	0,5	0,5199	0,5438	0,5636	0,5871	0,6064	0,6293	0,648
z	0,44	0,50	0,56	0,63	0,69	0,76	0,84	0,91
$\Phi(z)$	0,67	0,6915	0,7123	0,7357	0,7549	0,7764	0,7995	0,8186
z	1,00	1,09	1,19	1,31	1,42	1,62	1,86	2,33
$\Phi(z)$	0,8413	0,8621	0,883	0,9049	0,9222	0,9474	0,9686	0,9901

Valores de $\Phi(z) = P(Z \leq z)$, onde $Z \sim N(0, 1)$.

Nome completo: ______________________________ **RA:** ______________

1. A proporção de ferro puro em amostras de hematita extraídas de uma região é uma variável aleatória V com densidade dada por

$$f(v) = \begin{cases} 2v & \text{se } 0 < v < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

(a) Obtenha a probabilidade de que uma amostra contenha mais de 60% de ferro puro. $0{,}64$

(b) Coletam-se 144 amostras, de forma independente. Estime a probabilidade de que o número de amostras em que a proporção de ferro puro excede 60% seja no máximo 84. $0{,}0778$

a) $P(X > 0{,}6) = P(X -$

$$\int_{-\infty}^{0{,}6} f(x)\,dx = \int_0^{0{,}6} 2v\,dv$$

$$\frac{2v^2}{2}$$

v^2

$\Phi(z) + \Phi(-z) = 1$

$P(Z < z) + P(Z < -z) = 1$

$n = 144 \quad p =$

$(0{,}6)^2$

$P(\quad X > 0{,}6$

$1 - P(X \leq 0{,}6)$

$1 - (0{,}6)^2$

$\mu = np$

$\sigma^2 = Var(X)$

$P(84 \leq X \cancel{\leq 4})$ $\quad p = 0{,}64$, $n = 144$

$P(X \leq 84) = P(X - \quad <$

$P(Z < -0)$

Nome completo: ______________________________ **RA:** ____________

2. Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas cuja função de probabilidade conjunta é dada pela seguinte tabela:

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0,05	0	0,15
0	0	0,2	0
1	0,15	0	0,45

$P_x(x)$

$P_y(y)$

(a) Determine as funções de probabilidade marginais de X e Y. São X e Y independentes?

(b) Qual a probabilidade condicional de que a variável X seja positiva, dado que o produto XY é positivo? 0,9

(c) Calcule a covariância entre X e Y.

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y) = 0{,}04$$

$$P(X).P(Y) \stackrel{?}{=} P(X,Y)$$

0,01

$0{,}2 . 0{,}05 + 0{,}6 . 0{,}45$

$$b)\ P(X \mid XY>0) = \frac{P(X, XY>0)}{P(XY>0)} = \frac{P(X=-1, XY>0)}{0{,}5}$$

$=$

$P(X=1, Y=0)$

$$P(XY>0) = P(X=-1, Y=-1) + P(\cancel{X=0, Y=0}) + P(X=1, Y=1)$$

$-1 . -1$

XY

$$= 0{,}05 + 0{,}45 = 0{,}5$$

$P(X=1, 1.1>0) =$

$P(X=0$

$P(X=1, 1.1$

$$\frac{0{,}45}{0{,}5} = 0{,}9$$

Nome completo: ______________________________ **RA:** ____________

3. Um vaso contém 20 cartões distintos, dois deles marcados 1, dois marcados 2, . . . , dois marcados 10. Cinco cartões são retirados ao acaso do vaso. Qual é o número esperado de pares que permanecem ainda no vaso?

(Este problema foi formulado e resolvido no século XVIII por Daniel Bernoulli, como um modelo probabilístico para determinar o número de casamentos que permanecem intactos quando ocorre um total de m mortes entre N casais; em nosso caso, $m = 5$ e $N = 10$).

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se o } i\text{-ésimo par fica no vaso} \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

$$X = X_1 + \dots + X_{10}$$

$$E(X_i) = P(X_i = 1) = \frac{\binom{18}{5}}{\binom{20}{5}} = \frac{21}{38}$$

$$\therefore \; E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_{10}) = \frac{105}{19} \approx 5{,}53$$

Nome completo: ____________________ **RA:** __________

4. O número Y de erros que uma digitadora comete por página é uma variável aleatória com distribuição de Poisson com parâmetro 2. Se uma página tem y erros, o número X de minutos necessários para revisar e corrigir a página é uma variável aleatória com distribuição condicional

$$P(X = x \,|\, Y = y) = \begin{cases} 1/5 & \text{se } x = y + 1, \\ 3/5 & \text{se } x = y + 2, \\ 1/5 & \text{se } x = y + 3. \end{cases}$$

(a) Dado que foram usados 3 minutos na revisão e correção de uma página, qual a probabilidade condicional de que seja uma página sem erros?

(b) Determine a esperança condicional de X dado que $Y = y$.

(c) Calcule o número esperado de minutos gastos na revisão e correção de uma página.

a) $P(X=3) = \sum_y P(X=3 \,|\, Y=y) \cdot P(Y=y) \qquad y=0,1,2$

$= \frac{1}{5} \cdot e^{-2} + \frac{3}{5} \cdot 2e^{-2} + \frac{1}{5} 2e^{-2} = \frac{9}{5} e^{-2}$

$\therefore P(Y=0 \,|\, X=3) = \dfrac{1/5 \cdot e^{-2}}{9/5 \cdot e^{-2}} = \dfrac{1}{9}$

b) $E(X \,|\, Y=y) = \sum_x x \, P(X=x \,|\, Y=y)$

$= \frac{1}{5}(y+1) + \frac{3}{5}(y+2) + \frac{1}{5}(y+3) = y+2$

c) $E(X) = E[E(X|Y)] = E(Y+2) = E(Y)+2 = 4$

Nome completo: ____________________ **RA:** __________

5. Seja X uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda = 4$, ou seja, X tem densidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 4\,e^{-4x} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

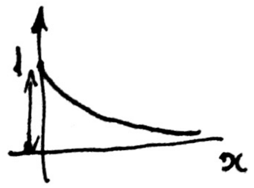
(a) Obtenha a função geradora de momentos $M_X(t) = E(e^{tX})$, explicando para que valores de t essa função é definida. $4/4-t$

(b) Usando o item (a), calcule a média de X. $1/4$

(c) Encontre a densidade da variável aleatória $Y = e^{-X}$.

c) $y = e^{-x} \iff x = -\log y$

$x > 0 \iff 0 < y < 1$



$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y}$ $\quad g(y) = f(x(y)) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|$

$\therefore g(y) = 4y^4 \cdot \frac{1}{y} = 4y^3$ para $\underline{0 < y < 1}$

$4e^{+4\log y} = 4y^4$

a) $M_x(t) = E(e^{tx})$

$E(X) = \sum_x x\, p(X = x)$ $\quad t - 4 < 0 \quad \boxed{t < 4}$

$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx$

$M(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot 4e^{-4x}\,dx = 4 \int_0^{\infty} e^{tx-4x} = \frac{4 \cdot e^{x(t-4)}}{t-4}\Big|_0^{\infty} = \frac{-4}{t-4} = \frac{4}{4-t}$

$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx$ contínua

b) $E(X) = M'(0) = 1/4$ $\quad E(X) = M'(0)$

$M(t) = \frac{4}{4-t} \to M'(t) = \frac{+4}{(4-t)^2}$

c) $Y = e^{-x}$ $\quad \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y}$ $\quad g(y) = f(x(y)) \cdot \left|\frac{dx}{dt}\right|$

$\ln y = -\ln e^{x}$

$-\ln y = x$

$f(x) = 4e^{-4x}$

$f(x(y)) = 4e^{4\ln y} = 4y^4$ $\quad g(y) = 4 \cdot y^4 \cdot \left|-\frac{1}{y}\right| = 4y^3$

Prova 2

① variável alcatória V com densidade dada por

$$f(v) = \begin{cases} 2v & \text{se } 0<v<1 \\ 0 & , cc \end{cases}$$

a) Probabilidade que contenha mais de 60% de feno.

$P(X>0,6) = 1 - P(X<0,6)$ $\qquad Z \sim N(\mu, \sigma^2)$

$P(X<0,6) = \int_0^{0,6} 2v\,dv$ $\qquad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$

$= \frac{2v^2}{2}\Big|_0^{0,6} = (0,6)^2 = 0,36$

$P(X>0,6) = 1 - 0,36 = 0,64$ ✓

b) 144 amostras, de forma independente.
no máximo 84.

$n = 144$

$p = 0,64$

$X \sim \text{Binomial}(n,p)$

$Z \sim N(0,1)$

$E(X) = np = \mu$

$Var(X) = np(1-p) = \sigma^2$

$P(X \leq 84)$

$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{84-\mu}{\sigma}\right)$

$= P\left(Z \leq \frac{84-92,16}{5,76}\right)$

$= P(Z \leq -1,42)$

$= 1 - P(Z \leq 1,42)$

$= 1 - \Phi(1,42)$

$= 1 - 0,9222$

$= 0,0778$

$\mu = 144 \cdot 0,64 = 92,16$

$\sigma^2 = 92,16(1-0,64) = 33,1776$

$\sigma = 5,76$

$P(Z \leq z) = \Phi(z)$

$\Phi(z) + \Phi(-z) = 1$

$P(Z \leq z) + P(Z \leq -z) = 1$

$P(Z \leq z) = 1 - P(Z \leq -z)$

$P(Z \leq z) = P(Z \geq -z)$

$P(Z \geq z) = P(Z \leq -z)$

②

$X \backslash Y$	-1	0	1	$P_x(x)$
-1	0,05	0	0,15	0,2
0	0	0,2	0	0,2
1	0,15	0	0,45	0,6
$P_y(Y)$	0,2	0,2	0,6	1

a) Prob. marginais, X e Y são independentes?

$$P(X=x, Y=y) \overset{?}{=} P(X) \cdot P(Y)$$

$$P(X=0, Y=0) \overset{?}{=} P(X=0) \cdot P(Y=0)$$

$$0{,}2 \overset{?}{=} 0{,}2 \cdot 0{,}2$$

não são independentes

b) $$P(X>0 \mid XY>0) = \frac{P(X>0, XY>0)}{P(XY>0)} = \frac{0{,}45}{0{,}5} = 0{,}9$$

$$P(XY>0) = P(X=-1, Y=-1) + P(X=1, Y=1)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

$$= 0{,}05 + 0{,}45 = 0{,}5$$

c) Covariância

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$Cov(X,Y) = E(X,Y) - E(X)E(Y)$$
$$= 0{,}2 - 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}04$$

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xy\, P(X=x, Y=y) = 1 \cdot 0{,}05 - 0{,}15 - 0{,}15 + 1 \cdot 0{,}45$$
$$= 0{,}2$$

$$E(X) = \sum_x x\, P(X) = -1 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}6 = 0{,}4$$

$$E(Y) = \sum_y y P(Y) = -1 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}6 = 0{,}4$$

---

③ 20 cartões distintos, 2 deles 1, 2 deles 2, . 2 deles 10

1 1 2 2 3 3 . 10 10 = 20

5 cartões são retirados ao acaso.

E(de pares no vaso)

$$E(X_i) = P(X_i = 1) = P(\text{i-ésimo par que retorna})$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_r = p \qquad \binom{r+p-1}{r-1}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{10} = \frac{\binom{18}{8}}{\binom{20}{5}} = P(X_i = 1) = \frac{21}{38}$$

1 par retornou

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{10}) = 10 \cdot \frac{21}{38} \cong 5{,}53$$

4) Y nº de erros   Poisson $\lambda = 2$ $\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

y erros, X minutos $\frac{e^{-2} \cdot (2)^x}{x!}$

$$P(X = x \mid Y = y) = \begin{cases} 1/5 & \text{se } x = y+1 \\ 3/5 & \text{se } x = y+2 \\ 1/5 & \text{se } x = y+3 \end{cases}$$

a) Dado 3 minutos, $y = 0$

$$P(y=0 \mid X=3) = \frac{P(y=0, x=3)}{P(X=3)} = \frac{\frac{1}{5}e^{-2}}{\frac{9}{5}e^{-2}} = \frac{1}{9}$$

$$P(X=3) = P(X=3 \mid Y=2).P(Y=2) + P(X=3 \mid Y=1).P(Y=1) + P(X=3 \mid Y=0).P(Y=0)$$

$$= \frac{1}{5}e^{-2}\frac{2^2}{2!} + \frac{3}{5}e^{-2}.2 + \frac{1}{5}e^{-2} = e^{-2}\left(\frac{2}{5} + \frac{6}{5} + \frac{1}{5}\right) = e^{-2}\frac{9}{5}$$

$$P(Y=0, X=3) = P(X=3 \mid Y=0).P(Y=0) = \frac{1}{5} \cdot e^{-2}$$

b) Esperança condicional

$$E(X \mid Y=y) = \sum_x x \, P[X = x \mid Y = y]$$

$$E[E(X \mid Y)] = E(X)$$

$$E(X \mid Y=y) = \sum_x x \, P[X = x \mid Y = y]$$

$$E(X \mid Y=y) = (y+1).\frac{1}{5} + \frac{3}{5}(y+2) + \frac{1}{5}(y+3) = y+2$$

c) $E(X)$

$$E(X) = E[E(X \mid Y)] = E[y+2] = E(y) + 2 = 4$$

$$E(Y) = (\text{Poisson}) = \lambda = 2$$

$$E(X \mid Y) = \sum_x x \, P[X = x \mid Y = y]$$

$$E[E(X \mid Y)] = E(X)$$