Cálculo 3.

* Equações Diferenciais Ordinárias * 1ª PARTE

Seja $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ uma função contínua de $n+1$ variáveis reais. A equação $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ é uma EDO de ordem n.

Sejam $x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. Dizemos que:

$$\left.\begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{array}\right\} \text{são condições iniciais para a equação } y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

EDO de 1ª Ordem

- equações lineares: sejam $p(x)$ e $g(x)$ duas funções contínuas em um intervalo (α, β). A equação: (1) $y' + p(x)y = g(x)$ é chamada de equação diferencial linear de 1ª ordem.

- TEOREMA: as soluções da equação (1) são as funções

$$y(x) = \mu(x) \cdot \left[\int \frac{g(x)}{\mu(x)} + c \right], \quad x \in (\alpha, \beta), \quad \mu(x) = \exp\left(-\int p(x)\,dx\right)$$

$\mu(x)$ é uma solução da equação homogênea $\mu' + p(x)\mu = 0$

- DEMONSTRAÇÃO: vamos procurar as soluções de (2)

$$\mu' + p(x) \cdot \mu = 0 \quad (2)$$

$$\mu' = -\mu \cdot p(x)$$

$$\mu'/\mu = -p(x)$$

$$(\ln(\mu))' = -p(x)$$

$$\ln(\mu) = -\int p(x)\,dx \rightsquigarrow \mu(x) = \exp\left(-\int p(x)\,dx\right)$$

vamos procurar solução de (1) do tipo $y(x) = u(x).v(x)$ onde $u(x)$ é solução de (2).

$$g(x) = y' + y.p(x) = (u.v)' + (uv)\,p(x)$$
$$= u'v + v'u + uv\,p(x)$$
$$= -p(x)\,uv + uv' + uv\,p(x) = uv'$$

$$g(x) = uv' \rightsquigarrow v' = \frac{g(x)}{u(x)} \longrightarrow v = \int \frac{g(x)}{u(x)}\,dx + c$$

$$y(x) = u(x).\left[\int \frac{g(x)}{u(x)}\,dx + c\right]$$

EXEMPLO: Determine a solução geral da equação diferencial $y' - 2y = t^2 e^{2t}$

$p(t) = -2$ $\qquad u(t) = \exp(-\int -2dx) = \exp(2x)$

$g(t) = t^2 e^{2t}$ $\qquad y(t) = u(t).\left[\int \frac{g(t)}{u(t)}\,dt + c\right]$

$$y(t) = \exp(2t)\left[\int \frac{t^2\exp(2t)}{\exp(2t)}\,dt + c\right]$$

$$y(t) = \exp(2t)\left[\frac{t^3}{3} + c\right]$$

consideremos a condição inicial $y(0) = -1$

$y(0) = 1.(0+c) = -1 \rightsquigarrow c = -1$

$y(t) = \exp(2t).\left[\frac{t^3}{3} - 1\right]$

EXEMPLO: Encontre a solução do problema de valor inicial $ty' + 2y = \operatorname{sen} t$, $y(\pi/2) = 1$

$y' + (2/t)y = \operatorname{sen} t/t$

$p(t) = 2/t$ $\qquad \rightsquigarrow u(t) = \exp(-2\ln t) = t^{-2}$

$g(t) = \operatorname{sen} t/t$ $\qquad y(t) = t^{-2}.\left[\int t.\operatorname{sen} t\,dt + c\right]$

$$y(t) = \frac{1}{t^2}\left[\operatorname{sen} t - t.\cos t + c\right] \rightsquigarrow \text{SOLUÇÃO GERAL}$$

$$y(t) = t^{-2}\left(\operatorname{sen} t - t\cos t + (\pi^2 - 4)/4\right)$$

- **equação separável**: a equação diferencial $y' = f(x,y)$ pode ser escrita na forma $M(x,y) + N(x,y).\frac{dy}{dx} = 0$ ou na forma de diferencial $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$.

- TEOREMA: sejam $H_1(x)$ e $H_2(y)$ duas funções satisfazendo

$$\left.\begin{array}{l} H_1'(x) = M(x) \\ H_2'(y) = N(y) \end{array}\right\} \; H_1(x) + H_2(y) = c \rightarrow \text{SOLUÇÃO GERAL}$$

-- DEMONSTRAÇÃO: $H_1(x) = \int M_1(x)\,dx$ e $H_2(y) = \int N_1(y)\,dy$. Suponhamos que $y = \phi(x)$ seja uma solução de (1)

$$0 = M(x) + N(\phi(x))\,\phi'(x)$$
$$= H_1'(x) + H_2'(\phi(x))\,\phi'(x)$$
$$= \frac{d}{dx}\left[H_1(x) + H_2(\phi(x))\right]$$, para $\forall x$, é constante

Então, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $H_1(x) + H_2(y) = c$, para $(\forall x)$, isto é, $y = \phi(x)$ é definido implicitamente pela equação $H_1(x) + H_2(y) = c$

EXEMPLO: Resolva o problema de valor inicial $y' = \frac{3x^2-1}{3+2y}$, $y(0) = 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-1}{3+2y} \rightsquigarrow 1-3x^2 + (3+2y)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} H_1'(x) = 1-3x^2 \rightsquigarrow H_1(x) = x - x^3 \\ H_2'(y) = 3+2y \rightsquigarrow H_2(y) = 3y + y^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} H_1(x) + H_2(y) = c \\ x - x^3 + 3y + y^2 = c \sim \text{SOLUÇÃO GERAL} \end{array}$$

$y(0) = 1 \rightsquigarrow 0 - 0 + 3.1 + 1 = c \rightsquigarrow c = 4$

$$y^2 + 3y + (x - x^3 - 4) = 0$$

$$y = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - x + x^2}$$

EXEMPLO: Seja $f(x,y)$ contínua e com derivada f_y contínua em $\mathbb{R}^2$. Se $g(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} f(t, x^3)\,dt$, calcule $g'(x)$.

$$\Psi(u,v) = \int_0^u f(t,v)\,dt$$

$$g(x) = \Psi(\operatorname{sen} x, x^3)$$

$\frac{\partial \Psi}{\partial u} \xrightarrow{\text{TFC}} f(u,v)$

$\frac{\partial \Psi}{\partial v} \xrightarrow{\text{LEIBNIZ}} \int_0^u \frac{\partial f}{\partial v}(t,v)\, dt$

$$g'(x) \longrightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial u}(\underbrace{\operatorname{sen} x}_{u}, \underbrace{x^3}_{v}) \frac{du}{dx} + \frac{\partial \Psi}{\partial v}(\operatorname{sen} x, x^3) \frac{dv}{dx}$$

$$= f(\operatorname{sen} x, x^3) \cos x + 3x^2 \cdot \int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{\partial f}{\partial v}(t, x^3)\, dt$$

· TEOREMA: seja $f(x,y)$ uma função com derivadas parciais contínuas até a segunda ordem. Então, $f_{xy} = f_{yx}$ * TEOREMA DE SCHWARZ

· equação exata: consideremos uma equação diferencial (1) $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$. Suponhamos que existe uma função $\Psi(x,y)$ tal que $\Psi_x = M$ e $\Psi_y = N$ (2). Dizemos então que (1) é uma equação exata

· TEOREMA: suponhamos que (1) seja uma função exata e que $\Psi(x,y)$ seja uma função satisfazendo as condições (2). Então, as soluções de (1) são definidas implicitamente pelas equações $\Psi(x,y) = C$

· DEMONSTRAÇÃO: suponhamos que $y = \phi(x)$ seja uma solução de (1)

(1) $M(x, \phi(y)) + N(x, \phi(y))\, dy/dx = 0$

$M(x, \phi(y)) + N(x, \phi(y))\, \phi'(x) = 0 \quad , \forall x$

$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, \phi y) + \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, \phi y) \cdot \phi'(x) = 0 \quad , \forall x$

$$\frac{d}{dx}(\Psi(x, \phi(x))) = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \cancelto{1}{\frac{dx}{dx}} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \nearrow \phi(x)$$

$$= \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \phi'(x) = 0 \quad , \forall x$$

$$\Psi(x, \phi(x)) = C, \quad \forall x$$

· TEOREMA: sejam $M(x,y)$ e $N(x,y)$ funções contínuas em um retângulo $R = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ de $\mathbb{R}^2$ e, tal que, M_y e N_x também são contínuas em $\mathbb{R}$. Então:

- se (1) é exata, então, $M_y = N_x$
- se $M_y = N_x$, então, (1) é exata, e se $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$,

$$\psi(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)\,dt + \int_{y_0}^{y} N(t,x)\,dt$$ é uma função potencial para (1)

· DEMONSTRAÇÃO:

- seja $\psi(x,y)$ tal que $\psi_x = M$ e $\psi_y = N$

$$\left.\begin{aligned} \psi_{xy} &= (\psi_x)_y = M_y \\ \psi_{yx} &= (\psi_y)_x = N_x \end{aligned}\right\} \text{ contínuas}$$

Pelo teorema de Schwarz $\rightsquigarrow \psi_{xy} = \psi_{yx} \rightsquigarrow M_y = N_x$

- suponhamos que $M_y = N_x$, queremos encontrar $\psi(x,y)$ tal que $\psi_x = M$ e $\psi_y = N$

$$\psi_x(x,y) = M(x,y),\ \forall (x,y)$$

$$\int_{x_0}^{x} \psi_t(t,y)\,dt = \psi(x,y) - \psi(x_0,y) \rightsquigarrow \psi(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)\,dt + \psi(x_0,y)$$

$$\psi_y = \int_{x_0}^{x} M_y(t,y)\,dt + h'(y)$$

$$= \int_{x_0}^{x} N_x(t,x)\,dt + h'(y) = N(x,y) - N(x_0,y) + h'(y) = N(x,y)$$

$$h(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)\,dt + c$$

EXEMPLO: Encontre a solução geral da equação $(2x/y^3)\,dx + (y^2 - 3x^2)/y^4\,dy = 0$

$$\left.\begin{aligned} M &= 2xy^{-3} \rightsquigarrow M_y = -6xy^{-4} \\ N &= (y^2 - 3x^2)\,y^{-4} \rightsquigarrow N_x = -6xy^{-4} \end{aligned}\right\} M_y = N_x \rightarrow \text{EQUAÇÃO EXATA}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi_x = M &\Rightarrow \psi(x,y) = \int 2xy^{-3}\,dx = x^2y^{-3} + h(y) \\ \psi_y = N &\Rightarrow \psi(x,y) = \int (y^2 - 3x^2)\,y^{-4}\,dy = x^2y^{-3} - y^{-1} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\psi(x,y) = c \\ &x^2y^{-3} - y^{-1} = c \end{aligned}$$

• FATOR integrante: a função $\mu(x,y)$ é chamada um fator integrante para a equação (1) $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ se a equação: (2) $\mu(x,y)\,.\,M(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,N(x,y) = 0$ é exata.

$\mu\,.\,M\,dx + \mu\,.\,N\,.\,dy = 0 \Rightarrow (\mu M)_y = (\mu N)_x$

$\mu_y M + \mu\,.\,M_y = \mu_x N + \mu N_x$

$\mu_y M - \mu_x N = \mu(N_x - M_y)$

1º caso:

$\mu = \mu(x) \leadsto \mu_y = 0 \leadsto \mu_x = \mu'$

$-\mu' N = \mu\,.\,(N_x - M_y)$

$(\ln \mu)' = (M_y - N_x)/N$

$\ln \mu = \int \frac{M_y - N_x}{N}\,dx \Rightarrow \mu(x) = \exp\left(\int P(x)\,dx\right)$

$P(x)$

2º caso:

$\mu = \mu(y) \leadsto \mu_x = 0 \leadsto \mu_y = \mu'$

$\mu' = \mu(N_x - M_y)/M$

$(\ln \mu)' = (N_x - M_y)/M$

$\ln \mu = \int \frac{N_x - M_y}{M}\,dy \Rightarrow \mu(y) = \exp\left(\int Q(y)\,dy\right)$

$Q(y)$

EXEMPLO: Achar um fator integrante e resolver a equação $y' = e^{2x} + y - 1$

$\frac{dy}{dx} = e^{2x} + y - 1 \leadsto dx(e^{2x} + y - 1) - dy = 0$

$M = e^{2x} + y - 1 \leadsto M_y = 1 \Rightarrow M_y \neq N_x$

$N = -1 \leadsto N_x = 0$

$P(x) = \frac{M_y - N_x}{N} = -1 \leadsto \mu(x) = \exp\left(\int -1\,dx\right) \to \mu(x) = \exp(-x)$ fator integrante

$e^{-x}(e^{2x} + y - 1)\,dx - e^{x}\,dy = 0$

$\left.\begin{array}{l} M_1 = e^{x} + e^{-x}y - e^{-x} \leadsto M_{1y} = e^{-x} \\ N_1 = -e^{-x} \to N_{1x} = e^{-x} \end{array}\right\}$ equação exata

$M_1 = \psi_x$

$N_1 = \psi_y \rightsquigarrow \psi(x,y) = \int -e^{-x}\,dy + h(x)$

$\psi(x,y) = -e^{-x}y + h(x)$

$\psi_x' = e^{-x}y + h'(x) = e^{x} - e^{-x} + e^{-x}y$

$h'(x) = e^{x} - e^{-x}$

$h(x) = e^{x} + e^{-x}$

$\psi(x,y) = C$

$e^{x} + e^{-x} + e^{-x}y = C$

EXEMPLO: $(y + xy^2)\,dx - x\,dy = 0$

$M = y + xy^2 \rightsquigarrow M_y = 1 + 2xy$

$N = -x \rightsquigarrow N_x = -1$

$P(x) = \dfrac{M_y - N_x}{N} = \dfrac{2+2xy}{-x}$

$Q(y) = \dfrac{N_x - M_y}{M} = -\dfrac{2}{y} \rightsquigarrow \mu(y) = \exp\left(-2\int 1/y\,dy\right) = y^{-2}$ (fator integrante)

$(y+xy^2)\,y^{-2}\,dx - x\,y^{-2}\,dy = 0$

$\left.\begin{array}{l} M_1 = y^{-1} + x \rightsquigarrow M_{1y} = -y^{-2} \\ N_1 = -xy^{-2} \rightsquigarrow N_{1x} = -y^{-2} \end{array}\right\}$ equação exata

$M_1 = \psi_x \rightsquigarrow \psi(x,y) = xy^{-1} + x^2/2 + h(y)$

$N_1 = \psi_y \quad \psi_y = -xy^{-2} + h'(y) = -xy^{-2} \rightsquigarrow h'(y) = 0$

$\psi(x,y) = C \rightsquigarrow xy^{-1} + x^2/2 = C$

EXEMPLO: $(y^2 + xy)\,dx - x^2\,dy = 0$

$\left.\begin{array}{l} M = y^2 + xy \rightsquigarrow M_y = 2y + x \\ N = -x^2 \rightsquigarrow N_x = -2x \end{array}\right\} M_y \neq N_x$

$P(x) = (-2y - 3x)/x^2$

$Q(y) = (-3x - 2y)/(y^2 + xy)$

vamos procurar um fator integrante do tipo $\mu(x,y) = x^{n} y^{m}$, $n, m \in \mathbb{Z}$

$M_1 = (y^2+xy)\,x^n y^m \rightarrow M_{1y} = (2+m)\,x^n y^{1+m} + (1+m)\,x^{(1+n)}\cdot y^m$

$N_1 = -x^2 x^n y^m \rightsquigarrow N_{1x} = -(2+n)\,x^{1+n}\,y^m$

$$\begin{cases} 2+m=0 & \rightarrow m=-2 \quad \rightarrow \mu(x,y) = x^{-1}y^{-2} \\ 3+m+n=0 & n=-1 \end{cases}$$

$M_1 = x^{-1}+y^{-1} \rightsquigarrow \Psi_x \rightarrow \Psi(x,y) = \ln|x| + xy^{-1} + h(y)$

$N_1 = -xy^{-2} \qquad \Psi_y = -xy^{-2} + h'(y) = -xy^{-2} \rightarrow h'(y) = 0$

$$\Psi(x,y) = c \longrightarrow \ln|x| + xy^{-1} = c$$

- equação homogênea: seja $f(x,y)$ uma função homogênea. A equação $dy/dx = f(x,y)$ é chamada uma equação homogênea. Dizemos que a função $f(x,y)$ é homogênea se $f(ax,ay) = f(x,y)$ para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ para os quais $f(x,y)$ e $f(ax,ay)$ estiverem definidas.

EXEMPLO: $f(x,y) = \dfrac{xy - x^2+2y^2}{x^2+y^2-3xy} \rightarrow f(ax,ay) = \dfrac{a^2(xy-x^2+2y^2)}{a^2(x^2+y^2-3xy)} = f(x,y). \rightarrow$ homogênea

- TEOREMA: toda equação homogênea pode ser reduzida à uma equação com variáveis separáveis através da mudança de variáveis $v = y/x$

- DEMONSTRAÇÃO: sejam $a = x^{-1}$, $v = yx^{-1}$. Então, $f(x,y) = f(ax,ay) = f(1,v)$

$v = yx^{-1} \rightsquigarrow y = v\cdot x$

$\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx} \rightsquigarrow v + x\dfrac{dv}{dx} = f(1,v)$

$$x\,dv = [f(1,v) - v]\,dx$$

$$\underbrace{\frac{dv}{f(1,v)-v}}_{N(v)} = \underbrace{\frac{dx}{x}}_{M(x)}$$

EXEMPLO: Encontre a solução geral da equação (1) $(x^2+4y^2)dx + 3xy\,dy = 0$

$(x^2+4y^2)dx = -3xy\,dy$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+4y^2}{-3xy} \rightarrow f(x,y) = \frac{x^2+4y^2}{-3xy} = f(ax,ay) \rightarrow$ HOMOGÊNEA

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} = f(1,v) = \frac{1+v^2}{-3v} \rightsquigarrow \frac{-3v}{1+4v^2}\,dv = \frac{1}{x}\,dx$

$\underbrace{x^{-1}}_{M}\,dx + \underbrace{3v\,.\,(1+4v^2)^{-1}}_{N}\,dv = 0$

$H_1(x) = \int M\,dx$
$H_2(v) = \int N\,dv$

$H_1(x) + H_2(v) = C$

$\ln(x) + \frac{3}{8}\,.\,\ln\left(1+\frac{4y^2}{x^2}\right) = C$

$\ln\left[x\,.\left(\frac{x^2+4y^2}{x^2}\right)^{3/8}\right] = C \rightsquigarrow x\,.\left(\frac{x^2+4y^2}{x^2}\right)^{3/8} = C$

• equação de Bernoulli: uma equação de Bernoulli é uma equação da forma (1) $dy/dx + p(x)y = q(x)y^n$

- TEOREMA: a equação (1) se reduz a uma equação linear da mudança de variável $v = y^{1-n}$

- DEMONSTRAÇÃO: $\frac{dv}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\,.\,y^n\frac{dv}{dx}$

$\frac{1}{1-n}\,y^n\,.\,\frac{dv}{dx} + p(x)\,v\,y^n = q(x)\,y^n \rightsquigarrow \frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + p(x)\,.\,v = q(x)$

$\frac{dv}{dx} + (1-n)\,p(x)\,.\,v = (1-n)\,q(x)$

$p_1(x) = (1-n)\,p(x)$

$q_1(x) = (1-n)\,.\,q(x)$

EXEMPLO: Resolver a equação de Bernoulli $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}\cdot y = \frac{1}{x^2}y^3 \quad \rightsquigarrow n=3 \quad \rightsquigarrow v = y^{-2}$$

$$\frac{dv}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx} \quad \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}y^3\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{-y^3}{2}\frac{dv}{dx} + \frac{2vy}{x\cdot v} = \frac{y^3}{x^2} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{-y^3}{2}\frac{dv}{dx} + \frac{2vy^3}{x} = \frac{y^3}{x^2}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} + \frac{2}{x}v = \frac{1}{x^2} \quad \rightsquigarrow \frac{dv}{dx} - \frac{4}{x}v = -\frac{2}{x^2}$$

$$p(x) = -4/x \quad \rightsquigarrow \quad \mu(x) = \exp\left(-\int -4/x\, dx\right) = x^4$$

$$g(x) = -2/x^2$$

$$v(x) = x^4\left[\int \frac{-2/x^2}{x^4} + c\right]$$

$$v(x) = x^4\left(\frac{2}{5}x^{-5} + c\right) \quad \rightsquigarrow y^{-2} = x^4\left(\frac{2}{5}x^{-5} + c\right)$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{5}{2x^{-1} + 5cx^4}}$$

- equação de Ricati: A equação $dy/dx = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2$, onde $q_1(x)$, $q_2(x)$ e $q_3(x)$ são funções contínuas, em um intervalo $I = (\alpha, \beta)$ é chamada equação de Ricati.
  - TEOREMA: suponhamos que $y_1(x)$ seja uma solução particular da equação de Ricati. A solução geral da equação é do tipo $y(x) = y_1(x) + v(x)^{-1}$, onde $v(x)$ é a solução geral da equação linear

$$\frac{dv}{dx} = -(q_2(x) + 2q_3(x)\cdot y_1(x))\,v - q_3(x)$$

- DEMONSTRAÇÃO:

$$y_1' = q_1 + q_2y_1 + q_3y_1^2$$

$$y = y_1 + v^{-1}$$

$$y' = y_1' - 1\,v^{-2}\,v' \quad \rightsquigarrow \quad y' = y_1' - \frac{v'}{v^2}$$

$$y_1' + \frac{v'}{v^2} = q_1 + q_2\left(y_1 + \frac{1}{v}\right) + q_3\left(y_1^2 + \frac{2y_1}{v} + \frac{1}{v^2}\right)$$

$$-\frac{v'}{v^2} = \frac{q_2}{v} + q_3\left(\frac{2y_1}{v} + \frac{1}{v^2}\right)$$

$$v' = -v q_2 - q_3 (2y_1 v + 1)$$

$$v' + (q_2 + 2y_1 q_3) v = -q_3$$

Equações de 2ª ordem redutíveis à equação de 1ª ordem

1º CASO: a variável y não aparece na equação

$y'' = f(x, y')$, $v = y' = dy/dx$

$v' = f(x, v)$

EXEMPLO Resolver a equação $y'' - x^{-1} \cdot y' = 0$

$v' - x^{-1} v = 0 \rightarrow \mu(x) = \exp\left(-\int -x^{-1} dx\right) = x$

$v(x) = x \cdot \left[\int \frac{0}{x} + c\right] = x \cdot c \rightarrow y' = xc$

$y = \int xc \, dx$

$y = c_1 x^2/2 + c_2$

2º CASO: a variável x não aparece na equação

$y'' = f(y, y')$, $v = y' = dy/dx$ considerar que y é uma variável independente

$y'' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{dv}{dy} = f(y, v)$

EXEMPLO: Resolver a equação $y'' + y = 0$

$v \, dv/dy + y = 0$

$H_1'(y) = y \rightsquigarrow H_1(y) = y^2/2$

$H_2'(v) = v \rightarrow H_2(v) = v^2/2$

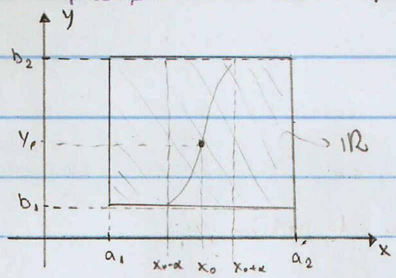
$\frac{1}{2}(y^2 + v^2) = c$

$v = \pm\sqrt{c^2 - y^2} \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1^2 - y^2}$

$\frac{dy}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} = dx$

$\rightsquigarrow y = \operatorname{sen}(\pm x + C_2) \cdot C_1$

TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE: seja $f(x,y)$ uma função contínua no retângulo $R = (a_1, a_2) \times (b_1, b_2)$ e tal que $\partial f/\partial y$ existe e é contínua em R. Seja $(x_0, y_0) \in R$. Então, existe uma solução da equação (1) $y' = f(x,y)$ satisfazendo a condição inicial



O teorema de existência e unicidade diz que existe uma solução única $y = \phi(x)$ da equação (1) definida em um intervalo $I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$

$$\phi(x_0) = y_0$$

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x))$$

EXEMPLO: $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$, $y_1(x) = x^3$, $y_2(x) = 0$, $\forall x$

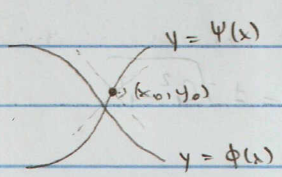
$f(x,y) = 3y^{2/3}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{y}}$, $y \neq 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \rightarrow$ NÃO EXISTE

• **Trajetórias ortogonais**: consideremos uma família de curvas no plano x,y determinada por uma equação (1) $F(x,y,c) = 0$, onde c é um parâmetro. A família de trajetórias ortogonais da família (1) em um ângulo de 90°.

Derivamos a equação (1) implicitamente em relação a x e eliminamos o parâmetro c usando (1), se necessário. Obtemos, então, uma equação diferencial (2) $dy/dx = f(x,y)$

Seja $y = \phi(x)$ uma trajetória ortogonal da família (1), seja $y = \psi(x)$ uma curva da família (1)



$\phi(x_0) = \psi(x_0)$

$\psi'(x_0) = f(x_0, \psi(x_0)) = m$ (inclinação da reta)

$\phi(x_0) = -m^{-1} = -(\psi'(x_0))^{-1} = -(f(x_0, \psi(x_0))^{-1}$

Assim $\phi'(x) = -(f(x, \phi(x)))^{-1} \rightsquigarrow y = \phi(x)$ é solução de $y' = -(f(x,y))^{-1}$

EXEMPLO: Determinar a família de curvas ortogonais da família de hipérbole $x \cdot y = c$

$y + x\, dy/dx = 0 \Rightarrow dy/dx = -y/x$

$dy/dx = x/y$ (SOLUÇÃO)

$y\,dy = x\,dx \rightsquigarrow y^2/2 = x^2/2 + c \rightsquigarrow y^2 - x^2 = c$

EXEMPLO: Determinar a família de trajetórias ortogonais da família de circunferências (1) $(x-c)^2 + y^2 = c^2$

$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = c^2$

$c = \dfrac{x^2+y^2}{2x}$

$2(x-c) + 2y \cdot dy/dx = 0$

$2.(x - (x^2+y^2)/2x) + 2y\, dy/dx = 0$

$\cancel{2}\, \dfrac{x^2-y^2}{\cancel{2}x} + 2y \dfrac{dy}{dx} = 0 \rightsquigarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2-x^2}{2yx} \rightsquigarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ (SOLUÇÃO)

Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Ordem Superior

Consideremos a EDO linear de ordem n ($n \in \mathbb{N}$) (1) $y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x).y + P_n(x) = g(x)$ onde $P_1(x), \dots, P_n(x), g(x)$ são funções contínuas no intervalo $I = (a, B)$. A equação homogênea associada à equação (1) é a equação (2) $y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x) y' + P_n(x).y = 0$

• TEOREMA: sejam $y_1(x), \dots, y_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, soluções da equação homogênea (2). $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ são constantes reais, então $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$ também é a solução de (2)

· DEMONSTRAÇÃO: $n = 2$

(2) $y'' + p_1(x) \cdot y' + p(x)\, y = 0$

HIPÓTESE

$$\begin{cases} y_1'' + p_1(x)\, y_1' + p_2(x)\, y_1 = 0 \\ y_2'' + p_1(x)\, y_2' + p_2(x)\, y_2 = 0 \\ \vdots \\ y_m'' + p_1(x)\, y_m' + p_2(x)\, y_m = 0 \end{cases}$$

Então:

$y'' + p_1(x) y' + p_2(x)\, y = (C_1 y_1 + \dots + C_n y_n)'' + P_1(x) \cdot (C_1 y_1 + \dots + C_n y_n)' + p_2(x) . (C_1 y_1 + \dots + C_n y_n)$

$= 0 + \dots + 0 = 0$

DEFINIÇÃO: sejam $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, n soluções da equação (2). Dizemos que estas soluções de (2) formam um sistema fundamental de soluções de (2) se toda solução de (2) for uma combinação linear destas funções, isto é, toda solução de (2) é do tipo $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$.

DEFINIÇÃO: sejam $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, $x \in I = (\alpha, \beta)$ deriváveis até a ordem $n-1$. O WRONSKIANO de $f_1, \ldots, f_n$ é definido como sendo o determinante

$$W(f_1, \ldots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & & f_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n)}(x) & \cdots & f_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

EXEMPLO: $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \operatorname{sen} x$

$$W(x^2, \operatorname{sen} x) = \begin{vmatrix} x^2 & \operatorname{sen} x \\ 2x & \cos x \end{vmatrix} = x^2 \cos x - 2x \operatorname{sen} x$$

DEFINIÇÃO: sejam $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, $x \in I = (\alpha, \beta)$, n funções. Dizemos que estas funções são linearmente independentes se $C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_n f_n(x) = 0$

$C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$

EXEMPLO: $u = \alpha + i\beta$, $i^2 = -1$

$$e^u = e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha} \cdot e^{i\beta}$$

$$= e^{\alpha}(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta) \rightsquigarrow f(x) = e^{(\alpha + i\beta) \cdot x}$$

$$= e^{\alpha x} \cdot e^{x i \beta}$$

$$= e^{\alpha x}(\cos x\beta + i \operatorname{sen} x\beta)$$

$$f'(x) = (\alpha + i\beta)x \cdot e^{(\alpha + i\beta)x}$$

EXEMPLO: Sejam r_1, r_2 e $r_3 \in \mathbb{C}$, $r_1 \neq r_2$, $r_1 \neq r_3$, $r_2 \neq r_3$. Então, as funções $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, e^{r_3 x}$ = linearmente independente

$$c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + c_3 e^{r_3 x} = 0$$

$$c_1 + c_2 e^{x(r_2 - r_1)} + c_3 e^{x(r_3 - r_1)} = 0 \quad \text{Derivando}$$

$$(r_2 - r_1) c_2 e^{x(r_2 - r_1)} + (r_3 - r_1) c_3 e^{x(r_3 - r_1)} = 0$$

$$(r_2 - r_1) c_2 + (r_3 - r_1) c_3 \cdot e^{x(r_3 - r_2)} = 0 \quad \text{Derivando}$$

$$(r_3 - r_1)(r_3 - r_2) c_3 e^{x(r_3 - r_2)} = 0$$

$$(r_2 - r_1) c_2 = 0 \rightarrow c_2 = 0 \qquad c_3 = 0$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

- TEOREMA: Sejam $y_1(x), \dots, y_n(x)$, $x \in I = (\alpha, \beta)$, n soluções da equação homogênea (2) $y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) \cdot y = 0$. São equivalentes:
  a) As funções $y_1(x), \dots, y_n(x)$ formam um sistema fundamental de soluções de (2)
  b) $y_1(x), \dots, y_n(x)$ SÃO LINEARMENTE INDEPENDENTES
  c) $W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0$, $\forall x \in (\alpha, \beta)$
  d) $W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0$, $\forall x \in (\alpha, \beta)$

EXEMPLO: Consideremos a equação diferencial linear homogênea de 2ª ordem

(*) $y'' + x^{-1} y' - x^{-2} y = 0$ e sejam $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^{-1}$

a) Mostre que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções de (*)

$$y_1 = x, \quad y_1' = 1, \quad y_1'' = 0$$

$$0 + x^{-1} \cdot 1 - x^{-2} \cdot x = 0 \rightarrow y_2 = x^{-1}, \quad y_2' = -x^{-2}, \quad y_2'' = 2x^{-3}$$

$$\frac{2}{x^3} + \left(-\frac{1}{x^3}\right) - \frac{1}{x^3} = 0$$

b) Encontre a solução geral

$$W(x, 1/x) = \begin{vmatrix} x & 1/x \\ 1 & -1/x^2 \end{vmatrix} = -\frac{2}{x} \neq 0 \Rightarrow x \text{ e } \frac{1}{x} \text{ são LI, formam um conjunto fundamental de soluções de (*)}$$

$$I = (\alpha, \beta) = (-\infty, 0) \text{ ou } (0, +\infty)$$

$$y = x c_1 + \frac{1}{x} c_2 \rightarrow \text{SOLUÇÃO GERAL DE (*)}$$

• TEOREMA de existência e unicidade: sejam $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x), g(x)$ funções contínuas no intervalo $I = (\alpha, \beta)$ e sejam $x_0 \in I$, $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. Então, existe uma única solução $y = y(x)$ da equação (1) $y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = g(x)$ satisfazendo as condições iniciais $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ e tal que $y = y(x)$ está definida em todo intervalo I.

EXEMPLO:

$n=1$ $\quad y' + p_1(x) \cdot y = g(x)$

$y(x_0) = y_0$ condição inicial

$n=2$ $\quad y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = g(x)$

$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ condições iniciais

Equações Homogêneas com coeficientes constantes

Consideremos a equação diferencial linear homogênea de ordem N dada por (3) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$, onde $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ são constantes reais. Obs: seja $y = e^{rx}$, onde $r \in \mathbb{R}$ (ou $r \in \mathbb{C}$) e tomemos $Q(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$. Temos que:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = r^n e^{rx} + a_1 r^{n-1} e^{rx} + \dots + a_n e^{rx}$$

$$= e^{rx} (r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n)$$

$$= e^{rx} \cdot Q(x) = 0 \rightarrow r \text{ é raiz de } Q(x)$$

DEFINIÇÃO: o polinômio $Q(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ é chamado de polinômio característico da equação (3)

TEOREMA: suponhamos que o polinômio característico $Q(x)$ da equação (3) tenha n raízes distintas $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{C}$. Então, a solução geral de (3) é dada por $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$

EXEMPLO: Encontre a solução geral da equação $y'' + y' - 2y = 0$

$$Q(x) = x^2 + x - 2 = 0 \rightsquigarrow x = 1 \text{ ou } x = -2$$

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$$

Obs: suponhamos que $r = \alpha + \beta i$ $(\beta \neq 0)$ seja uma raiz de $Q(x)$. Então $\bar{r} = \alpha - \beta i$ também é raiz de $Q(x)$. Assim, $y_1(x) = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x)$

$$y_2(x) = e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \operatorname{sen} \beta x)$$

↳ são duas soluções de (3).

EXEMPLO: Encontre a solução geral da equação diferencial $y^{(4)} - y = 0$

$$Q(x) = x^4 - 1 = 0 \rightarrow (x^2+1)(x+1)(x-1) = 0 \rightarrow x = i, -i, 1 \text{ ou } -1$$

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x$$

Obs: consideremos um número complexo z e um número real n. Queremos encontrar as raízes n-ésimas de z. Primeiramente, escrevemos o número z na forma exponencial $z = e^{\alpha + i\beta}$. Queremos encontrar x tal que: $x^n = z = e^{\alpha + i\beta}$

$$x = e^{a+ib} \rightarrow x^n = z \rightarrow (e^{a+ib})^n = e^{\alpha + i\beta}$$

$$e^{na + nib} = e^{\alpha + i\beta} \rightsquigarrow na = \alpha$$

$$nb = \beta + 2k\pi$$

$$\therefore x = e^{\alpha/n}\left[\cos\left(\frac{\beta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

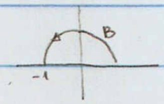
EXEMPLO: Encontre a solução geral de $y^{(4)} + y = 0$

$Q(x) = x^4 + 1$ (polinômio característico)

$$x^4 + 1 = 0 \rightsquigarrow x^4 = -1 \rightarrow z = -1 \rightarrow |z| = 1 = e^{\alpha},\ \alpha = 0$$

$$\beta = \pi \rightsquigarrow z = e^{\beta i} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi$$

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3$$



$$x_1 = \cos \pi/4 + i \operatorname{sen} \pi/4 = \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2\, i = \bar{x}_1$$

$$x_2 = \cos 3\pi/4 + i \operatorname{sen} 3\pi/4 = -\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2\, i = \bar{x}_2$$

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos\frac{\sqrt{2}}{2} + c_2 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2} + c_3 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos\frac{\sqrt{2}}{2} + c_4 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Obs: suponhamos que o polinômio característico $Q(x)$ da equação (3) tenha uma raiz r com multiplicidade s $(s \geq 2)$

$$Q(x) = (x-r)^s P(x) \rightsquigarrow Q'(x) = s(x-r)^{s-1} P(x) + (x-r)^s P'(x)$$

$$Q(r) = Q'(r) = 0$$

$$y = xe^{rx} \rightarrow y' = e^{rx} + rxe^{rx} \rightsquigarrow y'' = 2re^{rx} + r^2xe^{rx}$$

$$y''' = 3r^2e^{rx} + r^3xe^{rx}$$

$$y^{(n)} = e^{rx}(nr^{n-1} + a_1(n-1)r^{n-2} + \dots + a_{n-1}) + xe^{rx}(r^n + a_1r^{n-1} + \dots + a_n)$$

$$= e^{rx} Q'(x) + xe^{rx} Q(x), \text{ para } \forall x \in \mathbb{R}$$

TEOREMA: suponhamos que $r \in \mathbb{C}$, seja uma raiz de multiplicidade s $(s \geq 2)$ do polinômio característico da equação (3). Então, as funções e^{rx}, xe^{rx}, $x^2e^{rx}, \dots, x^{s-1}e^{rx}$ são soluções linearmente independentes da equação (3).

EXEMPLO: Encontre a solução geral da equação $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$

$$Q(x) = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2 \rightsquigarrow x = \pm i$$

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \operatorname{sen} x + C_4 x \operatorname{sen} x$$

$$= \cos x (C_1 + C_2 x) + \operatorname{sen} x (C_3 + C_4 x)$$

EXEMPLO: Determine a solução geral da equação diferencial $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y' - y = 0$

$$Q(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$$

$$(x^2+1)(x^2-1) - 2x(x^2-1) = (x^2-1)(x-1)^2 = (x+1)(x-1)^3 = 0 \rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = -1 \rightsquigarrow \text{multiplicidade } 1 \\ r_2 = 1 \rightsquigarrow \text{multiplicidade } 3 \end{array}\right\} y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 x e^x + c_4 x^2 e^x$$

Sejam $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ e $g(x)$ funções contínuas em um intervalo $I = (\alpha, \beta)$. Sejam:

(1) $y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = g(x)$

(2) $y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = 0$

TEOREMA: suponhamos que $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ formem um sistema fundamental de soluções de (2) e que $y_p(x)$ seja uma solução particular da equação (1). Então, a solução geral de (1) é dada por $y = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x) + y_p(x)$

DEMONSTRAÇÃO: suponhamos que $y(x)$ seja uma solução de (1) $y(x) = (y(x) - y_p(x)) - y_p(x)$

Vamos mostrar que $y(x) - y_p(x)$ é solução de (2)

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = g(x) \\ y_p^{(n)} + a_1 y_p^{(n-1)} + \dots + a_n y_p = g(x) \end{cases}$$

$$(y^{(n)} - y_p^{(n)}) + a_1 (y^{(n-1)} - y_p^{(n-1)}) + \dots + a_n (y - y_p) = 0$$

$$(y - y_p)^{(n)} + a_1 (y - y_p)^{(n-1)} + \dots + a_n (y - y_p) = 0$$

Como y_p é solução de (2), então:

$$y - y_p = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x) \rightarrow y(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x) + y_p(x)$$

Sejam $p_1(x), \dots, p_n(x)$ funções contínuas em um intervalo $I = (\alpha, \beta)$ e

(1) $y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = g(x)$

(2) $y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = 0$

Se $y_1(x), \dots, y_n(x)$ são soluções de (2)

$$W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

TEOREMA: sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções LI da equação (2) $y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0$

Então, uma solução particular $y_p(x)$ da equação (1) $y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = g(x)$ é dada por:

DEMONSTRAÇÃO: vamos procurar uma solução particular $y_p(x)$ de (1) do tipo

$y_p(x) = U_1(x) y_1(x) + U_2(x) y_2(x) \rightarrow y_p' = U_1'(x) y_1(x) + U_1(x) y_1'(x) + U_2'(x) y_2(x) + U_2 y_2'(x)$

Suponhamos que:

(3) $U_1' y_1 + U_2' y_2 = 0 \rightarrow y_p' = U_1 y_1' + U_2 y_2'$

$$y_p'' = U_1' y_1' + U_1 y_1'' + U_2' y_2' + U_2 y_2''$$

Como y_p é a solução de (1) e y_1 e y_2 são soluções, temos que:

$g(x) = y_p'' + p_1 y_p' + p_2 y_p = U_1' y_1' + U_1 y_1'' + U_2' y_2' + U_2 y_2'' + p_1 (U_1 y_1' + U_2 y_2') + p_2 (U_1 y_1 + U_2 y_2)$

$g(x) = U_1 \underbrace{(y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1)}_{=0} + U_2 \underbrace{(y_2'' + p_1 y_2' + p_2 y_2)}_{=0} + U_1' y_1' + U_2' y_2'$

(4) $U_1' y_1' + U_2' y_2' = g(x)$

$\begin{cases} U_1' y_1 + U_2' y_2 = 0 \\ U_1' y_1' + U_2' y_2' = g(x) \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ aplicando Cramer

$$U_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-y_2\, g(x)}{W(y_1,y_2)(x)} = -\int \frac{y_2(x) g(x)}{W(y_1,y_2)(x)}\, dx$$

$$U_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1\, g(x)}{W(y_1,y_2)(x)} = \int \frac{y_1(x)\, g(x)}{W(y_1,y_2)(x)}\, dx$$

$y_p(x) = U_1(x)\, y_1(x) + U_2(x)\, y_2(x)$

$$y_p(x) = -y_1(x) \cdot \int \frac{y_2(x) g(x)}{W(y_1,y_2)(x)}\, dx + y_2(x) \cdot \int \frac{y_1(x) \cdot g(x)}{W(y_1,y_2)(x)}$$

EXEMPLO: Determine a solução geral da equação diferencial (*) $y''' + y' = \sec t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$

$y''' + y' = 0 \rightsquigarrow Q(x) = x^3 + x = x(x^2+1) = 0 \longrightarrow x = \pm i$ ou $x = 0$

$y_1(x) = 1$, $y_2(x) = \cos x$, $y_3(x) = \operatorname{sen} x$

$y_H = C_1 + C_2 \cdot \cos x + C_3 \cdot \operatorname{sen} x$

$y_p(x) = U_1 y_1 + U_2 y_2 + U_3 y_3$

$y_p(x) = U_1 + U_2 \cos x + U_3 \operatorname{sen} x$ $\rightsquigarrow$ $U_1' + U_2'(-\operatorname{sen} x) + U_3'(\cos x) = 0$

$U_2'(-\cos x) + U_3'(-\operatorname{sen} x) = g(x) = \sec x$

$$W(1, \cos x, \operatorname{sen} x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$U_1' = \cos^2 x \sec x + \operatorname{sen}^2 x \sec x = 1/\cos x = \sec x \rightsquigarrow U_1 = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$

$U_2' = -1 \rightsquigarrow U_2 = -x$

$U_3' = -\operatorname{tg} x \rightsquigarrow U_3 = \ln|\cos x|$

$y_p(x) = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| - x\cos x + \ln|\cos x| \cdot \operatorname{sen} x$

$y(x) = y_p(x) + y_H(x)$

O método dos coeficientes indeterminados

Consideremos a equação (1) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = g(x)$, onde $g(x)$ é do tipo $g(x) = e^{\alpha x}(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m) \cdot (c_1 \operatorname{sen} \beta x + c_2 \cos \beta x)$, $a_1, \dots, a_n$, α, β, c_1, c_2, $b_0, \dots, b_m$ são constantes reais. Seja (2) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$ a equação homogênea associada a equação (1).

TEOREMA: sejam $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ um conjunto fundamental de soluções da equação (2). Vamos procurar uma solução particular $y_p(x)$ da equação (1) do seguinte tipo:

a) Se $g(x) = P_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$, onde $b_0 \neq 0$, então

$y_p(x) = x^s (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m)$

b) Se $g(x) = e^{\alpha x} P_m(x) = e^{\alpha x}(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m)$, então

$y_p(x) = x^s e^{\alpha x}(A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m)$

c) Se $g(x) = e^{\alpha x} P_m(x) \operatorname{sen} \beta x$ ou $g(x) = e^{\alpha x} P_m(x) \cos \beta x$, então

$y_p(x) = x^s e^{\alpha x} \left[(A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m) \operatorname{sen} \beta x + (B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots + B_m) \cos \beta x \right]$

Onde s é o menor inteiro não-negativo para o qual o termo não seja solução da equação homogênea.

EXEMPLO: Encontre a solução geral da equação $y'' - 3y' - 4y = 4x^2$

$g(x) = 4x^2 \rightsquigarrow y'' - 3y' - 4y = 0 \rightsquigarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \rightsquigarrow x = -1$ ou $x = 4$

$y_H(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$

$y_p(x) = x^s (A_0 x^2 + A_1 x + A_2) \rightsquigarrow s = 0 \rightsquigarrow$ ok

$$\left.\begin{array}{l} y_p(x) = A_0 x^2 + A_1 x + A_2 \\ y_p'(x) = 2A_0 x + A_1 \\ y_p''(x) = 2A_0 \end{array}\right\} \quad 4x^2 = y_p''(x) - 3y_p'(x) - 4y_p(x)$$

$A_0 = -1$, $A_1 = 3/2$, $A_2 = -13/8$

$y(x) = y_p(x) + y_H(x)$

EXEMPLO: Encontre a solução geral da equação $y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$

$g(x) = +e^{x} \rightsquigarrow y'' - 3y' - 4y = 0 \rightsquigarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \rightsquigarrow x = -1$ ou $x = 4$

$$y_H(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 e^{4x}$$

$y_p(x) = x^s \cdot Ae^{-x}$ · $s = 0 \rightsquigarrow y_p(x) = Ae^{-x}$ (já é solução)

· $s = 1 \rightsquigarrow y_p(x) = xAe^{-x}$

$y_p(x) = xAe^{-x}$

$y'_p(x) = Ae^{-x} - xAe^{-x}$

$y''_p(x) = -2Ae^{-x} + Axe^{-x}$

$e^{-x} = y''_p(x) - 3y'_p(x) - 4y_p(x)$

$A = -1/5$

$$y_p(x) = -xe^{-x}/5$$

$$y(x) = y_p(x) + y_H(x)$$

EXEMPLO: Encontre a solução geral da equação $y''' - 4y' = x + 3\cos x + e^{-2x}$ (1)

Consideremos as equações:

(I) $y''' - 4y' = x$

(II) $y''' - 4y' = 3\cos x$

(III) $y''' - 4y' = e^{-2x}$

Se $y_{p_1}(x)$ é uma solução particular de (I), $y_{p_2}(x)$ de (II) e $y_{p_3}(x)$ de (III), então $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + y_{p_3}(x)$ é uma solução particular de (1)

(2) $y''' - 4y' = 0 \rightsquigarrow x^3 - 4x = 0 \rightsquigarrow x(x+2)(x-2) = 0 \rightarrow x = 0, 2$ ou -2.

$$y_H(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$$

(I) $y_{p_1}(x) = x^s(A_0 x + A_1)$ · $s = 0 \rightsquigarrow y_{p_1}(x) = A_0 x + A_1$

· $s = 1 \rightsquigarrow y_{p_1}(x) = A_0 x^2 + A_1 x$

$y_{p_1}(x) = A_0 x^2 + A_1 x$

$y'_{p_1}(x) = 2A_0 x + A_1$

$y''_{p_1}(x) = 2A_0$

$y'''_{p_1}(x) = 0$

$x = y'''_{p_1}(x) - 4 \cdot (2A_0 x + A_1)$

$A_0 = -1/8 \quad A_1 = 0$

$$y_{p_1}(x) = -\frac{1}{8}x^2$$

(II) $y_{p_2}(x) = x^s(A\cos x + B\,\text{sen}\,x) \rightsquigarrow s=0 \rightsquigarrow y_{p_2}(x) = A\cos x + B\,\text{sen}\,x$

$$\left.\begin{aligned} y_{p_2}(x) &= A\cos x + B\,\text{sen}\,x \\ y_{p_2}'(x) &= A\,\text{sen}\,x + B\cos x \\ y_{p_2}''(x) &= -A\cos x - B\,\text{sen}\,x \\ y'''_{p_2}(x) &= A\,\text{sen}\,x - B\cos x \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 3\cos x &= y_{p_2}'''(x) - 4\,y_{p_2}'(x) \\ A = 0 \quad & \quad B = -3/5 \\ y_{p_2}(x) &= -\frac{3}{5}\,\text{sen}\,x \end{aligned}$$

(III) $y_{p_3}(x) = x^s A e^{-2x}$ $\cdot\ s=0 \rightsquigarrow y_{p_3}(x) = A e^{-2x}$

$\cdot\ s=1 \rightsquigarrow y_{p_3}(x) = x A e^{-2x}$

$$\left.\begin{aligned} y_{p_3}(x) &= x A e^{-2x} \\ y_{p_3}'(x) &= A e^{-2x} - 2x A e^{-2x} \\ y_{p_3}''(x) &= -2Ae^{-2x} - 2Ae^{-2x} + 4xAe^{-2x} = -4Ae^{-2x} + 4xAe^{-2x} \\ y'''_{p_3}(x) &= 6Ae^{-2x} - 8Axe^{-2x} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} e^{-2x} &= y'''_{p_3}(x) - 4y'_{p_3}(x) \\ A &= 1/2 \\ y_{p_3}(x) &= Ae^{-2x}/2 \end{aligned}$$

$$y(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + y_{p_3}(x) + y_H(x).$$

Equação de Euler

EXEMPLO: Uma equação da forma (1) $t^2y'' + \alpha t y' + \beta y = 0$, $t > 0$, onde α e β são constantes reais, é chamada de Euler. Mostre que a substituição $x = \ln t$ transforma uma equação de Euler em uma equação com coeficientes constantes.

$x = \ln t \rightsquigarrow t = e^x$

$y = y(t)$

$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx}$

$$y'' = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\cdot\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{t}\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{dt} \nearrow 1/t$$

$$= \frac{1}{t}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{t}\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{t}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{1}{t}\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$t = e^x \rightsquigarrow t^{-1} = e^{-x}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{d(e^{-x})}{dx} = -e^{-x} = -\frac{1}{t}$$

$$y'' = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{t}\frac{dy}{dx}\right) \rightsquigarrow t^2y'' + \alpha t y' + \beta y = 0$$

$$t^2\cdot\frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\right) + \alpha t\left(\frac{1}{t}\frac{dy}{dx}\right) + \beta y = 0$$

$$d^2y/dx^2 + (\alpha - 1)\,dy/dx + \beta y = 0$$

EXEMPLO: Resolver a equação (1) $t^2y'' + ty' + y = t^3$, $t>0$

$x = \ln t$, $t = e^x$, $\alpha = 1$, $B = 1$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{3x} \rightsquigarrow x^2+1=0 \rightsquigarrow x = \pm i$$

$$y_H = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$$

$g(x) = e^{3x}$

$y_p(x) = x^s A e^{3x} \rightsquigarrow s=0 \rightsquigarrow y_p(x) = Ae^{3x}$

$y_p'(x) = 3Ae^{3x}$

$y_p''(x) = 9Ae^{3x}$

$\left.\right\}$ $y_p''(x) + y_p(x) = e^{3x}$

$A = 10^{-1}$

$$y(x) = y_p(x) + y_H(x) = 10^{-1}e^{3x} + C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$$

EXEMPLO: Encontre uma equação diferencial que tenha $y = C_1x + C_2 \operatorname{sen} x$ como solução geral.

$y = C_1 x + C_2 \operatorname{sen} x$

$y' = C_1 + C_2 \cos x \rightarrow C_1 = y' - C_2 \cos x$

$y'' = -C_2 \operatorname{sen} x \rightarrow C_2 = y''/\operatorname{sen} x$

$\left.\right\}$ $C_1 = y' + y'' \operatorname{cotg} x$

$$y = (y' + y'' \operatorname{cotg} x)x - y''$$

$$y''(\operatorname{cotg} x \cdot x - 1) + y'x - y = 0$$

Redução de Ordem

TEOREMA: seja $y_1(x)$ uma solução particular da equação (1) $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$

Uma outra solução particular $y_2(x)$ de (1) é dado por

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{(y_1(x))^2} dx \rightarrow y_1(x) \text{ e } y_2(x) \text{ são L.I.}$$

DEMONSTRAÇÃO: vamos procurar uma solução $y = y_1(x) \cdot v(x)$

$$y' = y_1'v + v'y_1$$

$$y'' = y_1''v + v'y_1' + v''y_1 + y_1'v_1' = y_1''v + 2v_1'y_1' + v''y_1$$

$$0 = y'' + p_1y_1' + p_2y = y_1''v + 2y_1'v_1' + v''y_1 + p_1(y_1'v + v'y_1) + p_2y_1v$$

$$= v(y_1'' + p_1y_1' + p_2y_1) + (2y_1' + p_1y_1)v' + y_1v''$$

$$y_1 v'' + (2y_1' + p_1 y_1) v' = 0$$

$$v'' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p_1\right) v' = 0 \rightsquigarrow z = v'$$

$$z' + (2y_1'/y_1 + p_1) z = 0$$

$$z = \frac{\exp(-\int p_1(x)\,dx)}{y_1^2}$$

EXERCÍCIOS Encontre a solução geral da equação (1) $(1-t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0$ sabendo que $y_1(t) = t$ é uma solução particular de (1)

$$y = y_1(t) \cdot v(t) \rightsquigarrow y = t \cdot v$$

$$y' = v + tv'$$

$$y'' = v' + v' + tv'' = 2v' + tv''$$

$$0 = (1-t^2)(2v' + tv'') - 2t(v + tv') + 2(tv)$$

$$= t(1-t^2)v'' + (2-4t^2)v' = 0 \quad , \ z = v'$$

$$t(1-t^2)z' + (2-4t^2)z = 0 \quad \rightsquigarrow z' + \frac{(2-4t^2)}{1-t^2} z = 0$$

* A transformada de Laplace * 2ª PARTE

DEFINIÇÃO: seja $f(t)$ uma função definida no intervalo $[\alpha, \beta]$. Dizemos que $f(t)$ é contínua por partes no intervalo $[\alpha, \beta]$ e existem pontos $t_0 = \alpha < t_1 \ldots < t_n = \beta$, tal que:

$\alpha = t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad \cdots \quad t_{n-1} \quad t_n = \beta$

a) $f(t)$ é contínua em cada intervalo (t_{i-1}, t_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ (aberto)

b) Os limites laterais:

$$\lim_{t \to t_{i+}} f(t), \ i = 0, 1, \ldots, n-1 \quad e \quad \lim_{t \to t_{i-}} f(t), \ i = 0, 1, \ldots, n$$

EXEMPLO: $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t < 1 \\ 2+t, & 1 \leq t < 2 \\ 6-t, & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$

$\alpha = t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3 = \beta$

i) t^2 é contínua em $[0,1)$

ii) $2+t$ é contínua em $[1,2)$

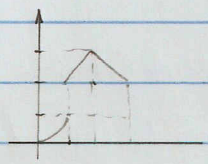
iii) $6-t$ é contínua em $[2,3]$

$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{t \to 0^+} t^2 \to 0$ $\qquad$ $\lim_{t \to 1^-} f(t) = \lim_{t \to 1^-} t^2 \to 1$

$\lim_{t \to 1^+} f(t) = \lim_{t \to 1^+} 2+t \to 3$ $\qquad$ $\lim_{t \to 2^-} f(t) = \lim_{t \to 2^-} 2+t \to 4$

$\lim_{t \to 2^+} f(t) = \lim_{t \to 2^+} 6-t \to 4$ $\qquad$ $\lim_{t \to 3^-} f(t) = \lim_{t \to 3^-} 6-t \to 3$

Podemos então concluir que $f(t)$ é contínua por partes em $[0,3]$



$$\int_0^3 f(t) = \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 2+t \, dt + \int_2^3 6-t \, dt$$

DEFINIÇÃO: se $f(t)$ for contínua por partes em cada intervalo $[a,b]$, $\forall b$, $b > a$, dizemos que $f(t)$ é contínua por partes no intervalo $[a,+\infty)$

DEFINIÇÃO: seja $f(t)$ uma função contínua por partes num intervalo $[a,+\infty)$. O limite (*) $\int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ é chamado de uma integral imprópria. Se o limite de (*) existir e for um número finito, dizemos que a integral converge-se.

EXEMPLO $f(t) = t^{-p}$, $p > 1$. Calcule $\int_1^\infty f(t)\,dt$

$$\int_1^x f(t)\,dt = \left.\frac{t^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^x \to \frac{1}{1-p}\Big(\underbrace{\frac{1}{x^{p-1}} - 1}_{\leq 0}\Big) = \frac{1}{p-1} > 0$$

DEFINIÇÃO: seja $f(t)$ uma função contínua por partes no intervalo $[0,+\infty[$. A integral imprópria $\mathcal{L}\{f(t)\}(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t)\, dt$ quando convergir será chamada de transformada de Laplace de $f(t)$ em x.

TEOREMA: seja $f(t)$ uma função contínua por partes em $[0,+\infty[$. Suponhamos que $0 \leq |f(t)| \leq Ke^{at}$, $\forall t \geq m$ $(m>0)$, onde K, a e m são constantes reais. Então, $\mathcal{L}\{f(t)\}(x)$ está definida para $\forall x > a$.

DEMONSTRAÇÃO:

$\mathcal{L}\{f(t)\}(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t)\, dt$. Seja $x > a$

$|e^{-xt} f(t)| = e^{-xt}|f(t)| \leq e^{-xt} K e^{at} = K e^{at-xt}$

$a - x < 0$

Sabemos que $\int_0^\infty K e^{(a-x)t}\, dt$ converge-se. Então, pelo teorema anterior, a integral imprópria $\int_0^\infty e^{-xt} f(t)\, dt$ converge.

EXEMPLO: Calcule $\mathcal{L}\{1\}(x)$

$\int_0^A e^{-xt} \cdot 1\, dt = -\frac{1}{x}(e^{-xA} - 1)$, para $x > 0$

$\mathcal{L}\{1\}(x) = \lim_{A\to\infty} \left(-x^{-1}(e^{-xA} - 1)\right) = x^{-1}$

EXEMPLO: Calcule $\mathcal{L}\{e^{at}\}(x)$, $x > a$

$\int_0^A e^{-xt} \cdot e^{at}\, dt = \int_0^A e^{(a-x)t}\, dt \rightsquigarrow \lim_{A\to\infty} \left.\frac{e^{(a-x)t}}{(a-x)}\right|_0^A$

$\lim_{A\to\infty} = (a-x)^{-1} \cdot (-1) = (x-a)^{-1}$

PROPRIEDADES: sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções que possuem transformadas de Laplace

- $\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\}(x) = \mathcal{L}\{f(t)\}(x) + \mathcal{L}\{g(t)\}(x)$
- $\mathcal{L}\{K f(t)\}(x) = K \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}(x)$, K = constante
- $d^m/dx^m \left(\mathcal{L}\{f(t)\}(x)\right) = (-1)^m \cdot \mathcal{L}\{t^m f(t)\}(x)$
- $\mathcal{L}\{e^{\alpha t} f(t)\}(x) = \mathcal{L}\{f(t)\}(x-\alpha)$
- $\mathcal{L}\{t^m e^{\alpha t}\}(x) = m! / (x-\alpha)^{m+1}$

EXEMPLO: $2t\,y'' + (y')^3 = 2ty'$, $t > 0$

$v = y' = dy/dt$

$2tv' + v^3 = 2tv \rightsquigarrow v' + \frac{v^3}{2t^2} = \frac{v}{t} \rightsquigarrow v' - \frac{v}{t} = -\frac{v^3}{2t^2}$

$$z(t) = \mu(t)\left[\int \frac{g(t)}{\mu(t)}\,dt + c\right] = t^{-1} + C_1 t^{-2}$$

$$v = z(t) \rightsquigarrow y' = v = \pm\left(\frac{t^2}{t+c}\right)^{1/2} = \pm\frac{t}{\sqrt{t+c_1}}$$

$$y = \pm\int \frac{t}{\sqrt{t+c_1}}\,dt \longrightarrow y = \pm\int x^{1/2}dx + c_1\int x^{-1/2}dx$$

$$= \pm\frac{x^{3/2}}{3/2} + c_1\frac{x^{1/2}}{1/2} + c_2$$

$x = t + c_1$

DEFINIÇÃO: (Produto de convolução) sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções contínuas por partes no intervalo $(0, +\infty)$. O produto de convolução $f * g(t)$, de f por g, é definido por $f*g(t) = \int_0^t f(s)\cdot g(t-s)\,ds$

PROPRIEDADES:

- $f * g(t) = g * f(t)$
- $\mathcal{L}\{f*g(t)\}(x) = \mathcal{L}\{f(t)\}(x)\cdot\mathcal{L}\{g(t)\}(x)$

TEOREMA:

1) $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(s)\,ds\right\}(x) = \mathcal{L}\{f(t)\}(x)\cdot x^{-1}$

2) $\mathcal{L}\{f'(t)\}(x) = x\cdot\mathcal{L}\{f(t)\}(x) - f(0)$

3) $\mathcal{L}\{f^{(m)}(t)\}(x) = x^m\cdot\mathcal{L}\{f(t)\}(x) \oplus x^{m-1}f(0) \oplus x^{m-2}f'(0) \oplus \ldots \oplus f^{(m-1)}(0)$

TODOS NEGATIVOS

TEOREMA:

$\mathcal{L}\{f(t)\}(x) = \mathcal{L}\{g(t)\}(x) \Leftrightarrow f(t) = g(t)$, $\forall t \geq 0$

DEFINIÇÃO: seja $F(t) = \mathcal{L}\{f(t)\}(x)$. A transformada de Laplace inversa de $F(x)$ é definida por: $\mathcal{L}^{-1}\{F(x)\}(t) = f(t)$

EXEMPLO: ~~Resol~~ Resolver o problema de valor inicial $y''-y'-2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

$Y(x) = \mathcal{L}\{y(t)\}(x)$

$$\mathcal{L}\{0\}(x) = \mathcal{L}\{y''\}(x) - \mathcal{L}\{y'\}(x) - \mathcal{L}\{2y\}(x)$$

$$0 = [x^2 . Y(x) - xy(0) - y'(0)] - [x . Y(x) - y(0)] - 2.Y(x)$$

$$0 = x^2 . Y - x - xY + 1 - 2Y$$

$$0 = Y(x^2-x-2) - x + 1 \rightsquigarrow Y = \frac{x-1}{x^2-x-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$Y = \frac{1}{3} . \mathcal{L}\{e^{+2t}\}(x) + \frac{2}{3} . \mathcal{L}\{e^{-t}\}(x)$$

$$Y = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{2t}}{3} + \frac{2e^{-t}}{3}\right\}(x) \rightarrow y(t) = \frac{e^{2t}+2e^{-t}}{3}$$

EXEMPLO: $F(x) = \frac{-2x}{x^2-2x+3} = \frac{-2x}{(x-1)^2+2} = \frac{-2(x-1)-2}{(x-1)^2+2} =$

$$= -2\frac{(x-1)}{(x-1)^2+\sqrt{2}^2} - \sqrt{2} . \frac{\sqrt{2}}{(x-1)^2+\sqrt{2}^2}$$

$$= -2\,\mathcal{L}\{\cos\sqrt{2}\,t\}(x-1) - \sqrt{2}\,\mathcal{L}\{\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t\}(x-1)$$

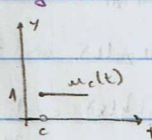
$$= -2\,\mathcal{L}\{e^{-t}\cos\sqrt{2}\,t\}(x) - \sqrt{2}\,\mathcal{L}\{e^{-t}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t\}(x)$$

$$= \mathcal{L}\{-2e^{-t}\cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}e^{t}\operatorname{sen}\sqrt{2}t\}(x) \rightsquigarrow y(t) = -2e^{-t}\cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}e^{t}\operatorname{sen}\sqrt{2}t$$

Função degrau

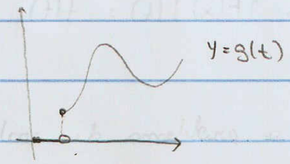
DEFINIÇÃO: seja $c \geq 0$. A função degrau unitário $u_c(t)$ é definida por

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < c \\ 1, & c \leq t \end{cases}$$



Obs: seja $c \geq 0$ uma constante real e seja $f(t)$ uma função definida para $t \geq 0$. Considere a função:

$$g(t) = \mu_c(t) \cdot f(t-c)$$
$$= \begin{cases} 0, & t < c \\ f(t-c), & c \leq t \end{cases}$$



$$g(c) = f(0) \rightarrow g(c+1) = f(1)$$

O gráfico de $g(t)$ é obtido transladando o gráfico de $f(t)$, de uma distância c, para a direita.

EXEMPLO: $c > 0$, $\mathcal{L}\{\mu_c(t)\}(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \mu_c(t)\, dt$

$$= \int_c^{\infty} e^{-xt} dt = \lim_{n\to\infty} \int_c^n e^{-xt} dt = \lim_{n\to\infty} -\frac{e^{-xt}}{x}\Big|_c^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{x}\left(e^{-xn} - e^{-xc}\right) = \frac{e^{-xc}}{x} = e^{-xc} \cdot \mathcal{L}\{1\}(x)$$

TEOREMA: seja c uma constante positiva e $f(t)$, $t \geq 0$, uma função contínua por partes tal que existe $\mathcal{L}\{f(t)\}(x)$, para $x \geq a$. Então, $\mathcal{L}\{\mu_c(t) \cdot f(t-c)\}(x) = e^{-cx} \mathcal{L}\{f(t)\}(x)$

EXEMPLO: Encontre a transformada de Laplace da função:

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \leq t < 2\pi \\ \operatorname{sen} t + \cos t, & 2\pi \leq t \end{cases}$$

$$f(t) = \operatorname{sen} t + \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2\pi \\ \cos t, & 2\pi \leq t \end{cases} \rightsquigarrow f(t) = \operatorname{sen} t + \cos t \cdot \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2\pi \\ 1, & 2\pi \leq t \end{cases}$$

$$f(t) = \operatorname{sen} t + \cos t \cdot \mu_c(t) = \operatorname{sen} t + \mu_{2\pi}(t) \cdot \cos(t - 2\pi)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(x) = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(x) + \mathcal{L}\{\mu_{2\pi}(t) \cdot \cos(t-2\pi)\}$$

$$= \frac{1}{x^2+1} + e^{-2\pi x} \mathcal{L}\{\cos t\}(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{e^{-2\pi x} \cdot x}{(x^2+1)}$$

EXEMPLO: Resolver o problema de valor inicial:

$$y'' + y = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 0, & 1 \le t < \infty \end{cases}, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$Y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{x-1}{x^2+1}\right) e^{-x}$$

$$= \mathcal{L}\{t - \operatorname{sen} t\}(x) - e^{-x}\mathcal{L}\{1 + t - \operatorname{sen} t - \cos t\}$$

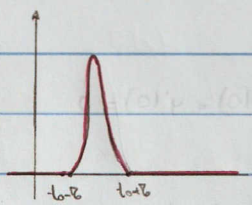
$$= \mathcal{L}\{t - \operatorname{sen} t\}(x) - \mathcal{L}\{u_1(t)[1 + (t-1) - \operatorname{sen}(t-1) - \cos(t-1)]\}(x)$$

$$= \mathcal{L}\{\underbrace{t - \operatorname{sen} t + u_1(t)[-t + \cos(t-1) + \operatorname{sen}(t-1)]}_{y(t)}\}(x)$$

$y(t) \rightsquigarrow$ SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DADA

Função de impulso

Consideremos uma equação diferencial $y'' + ay' + by = g(t)$, onde $g(t)$ é uma função que assume valores muito grandes em módulo em um intervalo $(t_0-\tau, t_0+\tau)$ e zero para t fora deste intervalo.

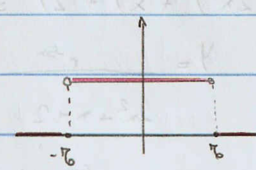


se $g(t)$ for uma força, dizemos que

$$I(\tau) = \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt$$ é o impulso total da força $g(t)$

EXEMPLO: Seja $\tau > 0$

$$d_\tau(t) = \begin{cases} 1/2\tau, & \text{se } t \in (-\tau, \tau) \\ 0, & \text{se } t \notin (-\tau, \tau) \end{cases}$$



$$I(\tau) = \int_{-\tau}^{\tau} d_\tau(t)\,dt = \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} dt = \frac{2\tau}{2\tau} = 1$$

DEFINIÇÃO: A "função δ de Dirac" ou "função impulso unitário" é definida como sendo a função que verifica as seguintes condições:

(I) $\delta(t) = 0, \quad \forall t \neq 0$

(II) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$

$\delta : P(\mathbb{R}) \to [0, +\infty) \qquad \delta_A = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \notin A \\ 1, & \text{se } 0 \in A \end{cases}$

DEFINIÇÃO: $\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}(x) = \lim_{\tau \to 0} \mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\}(x)$

TEOREMA: $\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}(x) = e^{-t_0 x}$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\}(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\, d_\tau(t-t_0)\, dt = (2\tau)^{-1} \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} e^{-xt}\, dt =$$

$$= -(2\tau)^{-1} \left. \frac{e^{-xt}}{x} \right|_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} = -(2\tau x)^{-1} e^{-xt_0} \left(e^{-x\tau} - e^{x\tau}\right)$$

$$= \frac{1}{\tau x} e^{-xt_0} \frac{e^{x\tau} - e^{-x\tau}}{2} = e^{-xt_0} \frac{\operatorname{senh}(x\tau)}{x\tau}$$

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\operatorname{senh}(x\tau)}{x\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\cosh(x\tau)x}{x} = 1$$

$$\therefore \mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}(x) = \lim_{\tau \to 0} \mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\}(x) = e^{-xt_0}$$

EXEMPLO: Encontre a solução do PVI $2y'' + y' + 2y = \delta(t-5)$, $y(0) = y'(0) = 0$

$\mathcal{L}\{\delta(t-5)\}(x) = e^{-5x}$, $Y = \mathcal{L}\{y\}(x)$

$$\mathcal{L}\{2y'' + y' + 2y\}(x) = 2\left(x^2 \mathcal{L}\{y\} - x\, y(0) - y'(0)\right) + \left(x\mathcal{L}\{y\} - y(0)\right) + 2\mathcal{L}\{y\}$$

$$= 2x^2 Y + xY + 2Y = e^{-5x}$$

$$Y = \frac{e^{-5x}}{2x^2 + x + 2} = \frac{e^{-5x}}{2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}} = \frac{e^{-5x}}{2} \cdot \frac{1}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \sqrt{\frac{15}{16}}^{\,2}}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-5x} \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{15}} \cdot e^{-5x} \cdot \mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} \frac{\sqrt{15}}{4} t\right\}\left(x+\tfrac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{15}} \cdot e^{-5x} \cdot \mathcal{L}\left\{e^{-t/4} \cdot \operatorname{sen} \frac{\sqrt{15}}{4} t\right\} \cdot (x)$$

$$= \mathcal{L}\Big\{ \underbrace{\frac{2}{\sqrt{15}} u_5(t) \left[e^{-(t-5)/4} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{15}}{4}(t-5) \right]}_{y(t)} \Big\}$$

TEOREMA: Seja $f(t)$ contínua próximo de t_0. Então, $\int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t-t_0)\, f(t)\, dt = f(t_0)$

DEMONSTRAÇÃO

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t-t_0)\, f(t)\, dt = \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} 1/2\tau\, f(t)\, dt = (2\tau)^{-1} \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} f(t)\, dt$$

$$= f(t_\tau^*), \text{ onde } t_\tau^* \in (t_0-\tau, t_0+\tau)$$

$$\tau \to 0 \Rightarrow t_\tau^* \to t_0$$

$$f(t_\tau^*) \to f(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\, f(t)\, dt = \lim_{\tau\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} d_\tau(t-t_0)\, f(t)\, dt = \lim_{\tau \to 0} f(t_\tau^*) = f(t_0)$$

COROLÁRIO: Seja $f(t)$ contínua próxima de t_0. Então, $\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\, f(t)\}(x) = e^{-t_0 x} f(t_0)$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\, f(t)\}(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt}\, \delta(t-t_0)\, f(t)\, dt = \int_0^{\infty} \delta(t-t_0)\, \underbrace{e^{-xt} f(t)}_{g(t)}\, dt$$

TEOREMA: $g(t_0) = e^{-x t_0} f(t_0)$

EXEMPLO: Resolver o problema de valor inicial $y'' + y = \delta(t-2\pi)\cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-2\pi)\cos t\} = e^{-2\pi x} \cos 2\pi = e^{-2\pi x}$$

$$\mathcal{L}\{y''+y\}(x) = \mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\}, \quad Y = \mathcal{L}\{y\}$$

$$= (x^2 Y - x\, y(0) - y'(0)) + Y = x^2 Y + Y - 1$$

$$x^2 Y + Y - 1 = e^{-2\pi x}$$

$$Y = \frac{1}{x^2+1} + \frac{e^{-2\pi x}}{x^2+1} = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(x) + e^{-2\pi x}\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(x)$$

$$= \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(x) + \mathcal{L}\{u_{2\pi}(t) \cdot \operatorname{sen}(t-2\pi)\}(x)$$

$$= \mathcal{L}\{\underbrace{\operatorname{sen} t + u_{2\pi}(t) \cdot \operatorname{sen}(t-2\pi)}_{y(t)}\}(x)$$

Obs: Quando começa com δ a resposta sempre será com função degrau.

EXEMPLO: Determine a transformada inversa de Laplace da função

$$F(x) = \frac{1}{(x+1)^2(x^2+4)} = \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \frac{1}{x^2+4} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{x^2+2^2} = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{te^{-t}\}(x) \cdot \mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\}(x)$$

$$= \mathcal{L}\Big\{ \underbrace{\frac{1}{2}(te^{-t}) * (\operatorname{sen} 2t)}_{f(t)} \Big\}(x)$$

$$F(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \frac{1}{x^2+4} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$= A\,\mathcal{L}\{te^{-t}\}(x) + B\,\mathcal{L}\{e^{-t}\}(x) + C\,\mathcal{L}\{\cos 2t\}(x) + \frac{D}{2}\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\}(x)$$

Sistemas de EDO lineares de 1ª ordem

* MÉTODO DE ELIMINAÇÃO

EXEMPLO: Resolver o sistema abaixo:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = 4y_1 + y_2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{l} y_2 = y_1' - y_1 \\ y_2' = y_1'' - y_1' \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{l} y_1'' - y_1' = 4y_1 + y_1' - y_1 \\ y_1'' - 2y_1' - 3y_1 = 0 \end{array}$$

$$Q(x) = x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 3$$

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-x}$$

$$y_1(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

$$y_2(x) = 2C_1 e^{3x} - 2C_2 e^{-x}$$

EXEMPLO: Resolver o sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = 4y_1 + y_2 \end{cases}$$ com condições iniciais $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$, usando transformada de Laplace

$Y_1 = \mathcal{L}\{y_1(t)\}(x)$ / $Y_2 = \mathcal{L}\{y_2(t)\}(x)$

$\mathcal{L}\{y_1'\}(x) = xY_1 - y_1(0) = xY_1$

$\mathcal{L}\{y_2'\}(x) = xY_2 - y_2(0) = xY_2 - 1$

$$\begin{cases} xY_1 = Y_1 + Y_2 \\ xY_2 - 1 = 4Y_1 + Y_2 \end{cases} \rightarrow (x^2 - 2x - 3) \cdot Y_1 = 1$$

$$Y_1 = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} \rightsquigarrow Y_1 = \frac{1/4}{x-3} + \frac{-1/4}{x+1} = \mathcal{L}\Big\{\underbrace{e^{3t}/4 - e^{-t}/4}_{y_1(t)}\Big\}(x)$$

$y_2(t) = y_1'(t) - y_1(t)$

$y_2(t) = \dfrac{e^{3t} + e^{-t}}{2}$

Teoria Básica dos sistemas de EDO de 1ª ordem

Consideremos o sistema de n EDO's lineares de 1ª ordem

$$(1)\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1n}(x) + b_1(x) \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + \dots + a_{nn}(x) + b_n(x) \end{cases}$$

onde $a_{ij}(x)$, $b_j(x)$, $1 \leq i, j \leq n$ são contínuas em um ~~um~~ intervalo $I = (\alpha, \beta)$.

Sejam

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}_{n \times n} \qquad b(x) = \begin{bmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \qquad \frac{dy}{dx} = \begin{bmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Temos que o sistema (1) é equivalente à equação diferencial matricial

(2) $dy/dx = A(x)y + b(x)$. A equação matricial homogênea associada à equação (2) é dada por (3) $dy/dx = A(x)\,y$

TEOREMA: sejam $y_1(x) = \begin{bmatrix} y_{11}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{bmatrix}_{n \times 1}, \dots, y_m(x) = \begin{bmatrix} y_{1m}(x) \\ \vdots \\ y_{nm}(x) \end{bmatrix}$

m soluções da equação (3) e sejam $c_1, \dots, c_m$ m constantes reais. Então $y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_m y_m(x)$ também é uma solução de (3).

DEMONSTRAÇÃO:

$$dy/dx = \frac{d}{dx}\left(c_1 y_1(x) + \dots + c_m y_m(x)\right) = c_1 \frac{dy_1}{dx} + \dots + c_m \frac{dy_m}{dx} = c_1 A(x) y_1 + \dots + c_m A(x) y_m$$

$$= A(x)\left(c_1 y_1(x) + \dots + c_m y_m(x)\right) = A(x) y(x)$$

DEFINIÇÕES: Sejam

$u_1(x) = \begin{bmatrix} u_{11}(x) \\ \vdots \\ u_{n1}(x) \end{bmatrix}, \ldots, u_n(x) = \begin{bmatrix} u_{1n}(x) \\ \vdots \\ u_{nn}(x) \end{bmatrix}$, "n" soluções da equação (3)

a) Se toda solução de (3) for uma combinação linear de $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ dizemos que $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ formam um sistema fundamental de soluções de (3)

b) Se $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ formarem um sistema fundamental de soluções de (3), a matriz $U(x) = \begin{bmatrix} u_{11}(x) & \cdots & u_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1}(x) & \cdots & u_{nn}(x) \end{bmatrix}$ é chamada uma matriz fundamental de (3)

EXEMPLO: Considere o sistema

(1) $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = 4y_1 + y_2 \end{cases}$ Sabemos que $y_1(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$ e $y_2(x) = 2C_1 e^{3x} - 2C_2 e^{-x}$ são as soluções de (1)

$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3x} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-x} = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x)$ (2)

Temos que

$u_1(x) = \begin{bmatrix} e^{3x} \\ 2e^{3x} \end{bmatrix}$ e $u_2(x) = \begin{bmatrix} e^{-x} \\ -2e^{-x} \end{bmatrix}$ formam um sistema fundamental de soluções (2)

$U(x) = \begin{bmatrix} e^{3x} & e^{-x} \\ 2e^{3x} & -2e^{-x} \end{bmatrix}$ é uma matriz fundamental de (2)

A equação matricial homogênea associada à equação (2) é dada por

(3) $dy/dx = A(x) \cdot y$

DEFINIÇÃO: Sejam

$u_1(x) = \begin{bmatrix} u_{11}(x) \\ \vdots \\ u_{n1}(x) \end{bmatrix}_{n\times 1}, \ldots, u_n(x) = \begin{bmatrix} u_{1n}(x) \\ \vdots \\ u_{nn}(x) \end{bmatrix}_{n\times 1}$ n soluções da equação (3). O Wronskiano de $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ é definido como sendo o determinante

$$W(u_1(x), \ldots, u_n(x)) = \begin{vmatrix} u_{11}(x) & \cdots & u_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1}(x) & \cdots & u_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

EXEMPLO:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (2) \rightarrow u_1(x) = \begin{bmatrix} e^{3x} \\ 2e^{3x} \end{bmatrix}, \quad u_2(x) = \begin{bmatrix} e^{-x} \\ -2e^{-x} \end{bmatrix}$$

$$W(u_1(x), u_2(x)) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-x} \\ 2e^{3x} & -2e^{-x} \end{vmatrix} = -4e^{2x} \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

TEOREMA: Sejam $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ n soluções da equação (3). São equivalentes:

1) $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ formam um sistema fundamental (3)

2) $W(u_1(x), \ldots, u_n(x)) \neq 0$, $\forall x \in I = (\alpha, \beta)$

3) $W(u_1(x_0), \ldots, u_n(x_0)) \neq 0$, para algum $x_0 \in I = (\alpha, \beta)$

DEFINIÇÃO: Seja A uma matriz $n \times n$. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) e $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \neq 0$ e $Av = \lambda v$, dizemos que λ é um autovalor de A e que v é um autovetor de A associado à λ.

DEFINIÇÃO: Seja A uma matriz $n \times n$. O polinômio característico de A é definido por $p_A(x) = \det(A - xI)$

↳ grau n ↳ matriz identidade

TEOREMA: Seja A uma matriz $n \times n$. Então $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) é um autovalor de A se e somente se for uma raiz do polinômio característico $p_A(x)$ de A.

DEFINIÇÃO: A raiz quadrada $A(n \times n)$ é chamada diagonalizável se existe uma base $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formada somente por autovetores de A

DEFINIÇÃO: A matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} = (a_{ij})_{n \times n}$$

é chamada simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$

TEOREMA: toda matriz simétrica é diagonalizável

EXEMPLO: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$

$\lambda = 3$ ou $\lambda = -1$

$\lambda = 3$: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x+y = 3x \\ 4x+y = 3y \end{cases} \rightsquigarrow y = 2x$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_1}$ autovetores de A associados $\lambda = 3 (x \neq 0)$

$\lambda = -1$ $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 4x+2y=0 \end{cases} \rightsquigarrow y = -2x$

$y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3x} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-x}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{v_2}$

$\alpha = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ formada somente por autovetores de A. Portanto, A é diagonalizável.

TEOREMA Seja A uma matriz de ordem $n \times n$ diagonalizável. Seja $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ formada somente por autovetores de A e para cada $1 \leq i \leq n$, seja $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tal que v_i é autovetor de A associado a λ_i. Então, a solução geral da equação matricial $dy/dx = Ay$ é dada por $y(x) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n v_n e^{\lambda_n x}$

DEMONSTRAÇÃO Para cada $1 \leq i \leq n$ seja $u_i(x) = v_i e^{\lambda_i x}$, v_i é autovetor de A associado a $\lambda_i \Leftrightarrow A v_i = \lambda_i v_i$

$$\frac{du_i}{dx} = \frac{d(v_i e^{\lambda_i x})}{dx} = \lambda_i v_i e^{\lambda_i x}$$

$$= (A v_i) e^{\lambda_i x} = A u_i(x) \rightsquigarrow u_i(x) \text{ é solução de } (3)$$

$$W(u_1, \dots, u_n)(0) = W(u_1(0), \dots, u_n(0)) = \det(v_1 \dots v_n) = \begin{vmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

pois $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ é base de $\mathbb{R}^n$

EXEMPLO: Resolver o sistema

$$\frac{dy}{dx} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} y \quad \rightsquigarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1 = 3 \text{ e } \lambda_2 = -1 \quad \text{(autovalores)}$$

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é autovetor de A associado a $\lambda_1 = 3$

$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ é autovetor de A associado a $\lambda_2 = -1$

$$y(x) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3x} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-x}$$

EXEMPLO: Encontre a solução geral do sistema

$$y' = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} y \quad \rightsquigarrow p(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 2 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 2 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x).(x^2-3x-4)$$

$$\left.\begin{matrix} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 4 \end{matrix}\right\} \text{autovalores de } A$$

$x = 1 \rightsquigarrow A.v = v \quad , \quad v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1. \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightsquigarrow v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \frac{y}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_1}$$

$x = 4 \rightsquigarrow A.v = 4.v$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 4. \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightsquigarrow v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2}$$

$x = -1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightsquigarrow v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \text{ para } y = 0 \rightsquigarrow v = x \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_3}$$

$$y(x) = c_1 . \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{x} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4x} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-x}$$

Obs: suponhamos que $\lambda = \alpha + \beta i$, $\beta \neq 0$, seja um autovalor complexo de A e que $v = v_1 + i v_2$ seja um autovetor de A associado a λ

$\overline{A v} = \overline{\lambda v}$

$\bar{A}\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v} \sim A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v} \rightarrow \bar{\lambda}$ é um autovalor de A e $\bar{v}$ é o autovetor de A associado a $\bar{\lambda}$

Então:

$$\left.\begin{array}{l} u_1(x) = v e^{\lambda x} \\ u_2(x) = \bar{v} e^{\bar{\lambda} x} \end{array}\right\} \text{soluções de } \frac{dy}{dx} = Ay$$

$$u_1(x) = (v_1 + i v_2) e^{(\alpha + i\beta)x} = (v_1 + i v_2).(\cos\beta x + i \,\mathrm{sen}\,\beta x) e^{\alpha x}$$

$$= (v_1 \cos\beta x - v_2 \,\mathrm{sen}\,\beta x) e^{\alpha x} + i (v_1 \,\mathrm{sen}\,\beta x + v_2 \cos\beta x) e^{\alpha x}$$

$$y_1(x) = [u_1(x) + u_2(x)]/2 = (v_1 \cos\beta x - v_2 \,\mathrm{sen}\,\beta x) e^{\alpha x}$$

$$y_2(x) = [u_1(x) - u_2(x)]/2i = (v_1 \,\mathrm{sen}\,\beta x + v_2 \cos\beta x) e^{\alpha x}$$

EXEMPLO: Encontre a solução geral do sistema

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} y \quad \sim p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda).(\lambda^2 - 2\lambda + 5)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = 1+2i \\ \lambda = 1-2i \end{array}\right\} \text{autovalores}$$

$\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1. \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \sim v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{x}{2} . \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_1}$$

$\lambda = 1 + 2i$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (1+2i) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \sim v_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}}_{v_2}$$

$$v_2 . e^{\lambda x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{(1+2i)x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{bmatrix} (\mathrm{cis}\, 2x) . e^x = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos 2x \\ \mathrm{sen}\, 2x \end{bmatrix} e^x + i \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{sen}\, 2x \\ -\cos 2x \end{bmatrix} e^x$$

$$y(x) = c_1 . \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} e^x + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \cos 2x \\ \mathrm{sen}\, 2x \end{bmatrix} e^x + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{sen}\, 2x \\ -\cos 2x \end{bmatrix} e^x$$

Autovalores Repetidos

NOTAÇÃO: Seja A uma matriz $n \times n$ e seja λ um autovalor de A. Denotaremos por V_λ o conjunto (subespaço vetorial) formado por todos os autovetores de A associados à λ mais o vetor nulo de $\mathbb{R}^n$, isto é, $V_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda v\}$

$Av = \lambda v = \lambda I v$ → matriz identidade $n \times n$

$0 = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v$.

$V_\lambda = \{ v \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I)v = 0 \}$

1º CASO: seja A uma matriz 2×2 com um único autovalor real λ e tal que $\dim V_\lambda = 1$

TEOREMA 1: existe uma base $\alpha = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que

$(A - \lambda I) v_1 = 0$ (v_1 é autovetor de A)

$(A - \lambda I) v_2 = v_1$

TEOREMA 2: sejam A, λ, v_1 e v_2 como no teorema anterior e sejam $u_1(x) = v_1 e^{\lambda x}$ e $u_2(x) = v_2 e^{\lambda x} + x v_1 e^{\lambda x}$. Então, $u_1(x)$ e $u_2(x)$ formam um sistema fundamental de solução de $dy/dx = Ay$

DEMONSTRAÇÃO: $\begin{cases} Av_1 = \lambda v_1 \\ Av_2 = v_1 + \lambda v_2 \end{cases}$

$$\frac{du_2(x)}{dx} = v_1 e^{\lambda x} + (x v_1 + v_2)\lambda e^{\lambda x} = e^{\lambda x}\left[x\lambda v_1 + (v_1 + \lambda v_2)\right] = e^{\lambda x}\left[xA v_1 + A v_2\right]$$
$$= A(x v_1 + v_2)e^{\lambda x} = A u_2(x) \cdot e^{\lambda x}$$

$$W(u_1, u_2)(0) = |u_1(0) \quad u_2(0)|$$
$$= |v_1 \quad v_2| \neq 0 \text{, pois } v_1 \text{ e } v_2 \text{ são LI}$$

$u_1(x)$ e $u_2(x)$ formam um sistema fundamental de soluções de $\frac{dy}{dx} = Ay$

autovalores autovet

$[A-\lambda I]v_1 = 0$

$[A-\lambda I]v_2 = v_1$

EXEMPLO: Determine a solução geral do sistema $\frac{dy}{dx} = \begin{bmatrix} 3 & 5/2 \\ -5/2 & 2 \end{bmatrix} y$

$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-x & 5/2 \\ -5/2 & 2-x \end{vmatrix} = (x+1/2)^2 \rightsquigarrow x = -1/2$

$\begin{bmatrix} 3 & 5/2 \\ -5/2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} +1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightsquigarrow y = x \rightsquigarrow v_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = xy\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1}$

$V_{-\frac{1}{2}} = \{x(1,1) : x \in \mathbb{R}\}$ $\dim V_{\frac{1}{2}} = 1$

$v_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $(A + 1/2\, I)\, v_2 = v_1$

$\begin{bmatrix} -5/2 & 5/2 \\ -5/2 & 5/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$ para $x = 0 \rightarrow y = 2/5$

$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/5 \end{bmatrix}$

$y(x) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-x/2} + c_2\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2/5 \end{bmatrix}\right)e^{-x/2}$

MATRIZ: $\begin{bmatrix} e^{-x/2} & xe^{-x/2} \\ e^{-x/2} & (x+2/5)e^{-x/2} \end{bmatrix}$

2º caso: seja A uma matriz 3x3 com um único autovalor real λ e tal que $\dim V_\lambda = 1$ (A não é diagonalizável)

TEOREMA 3: existe uma base $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que:

$(A - \lambda I)\, v_1 = 0$

$(A - \lambda I)\, v_2 = v_1$

$(A - \lambda I)\, v_3 = v_2$

TEOREMA 4: sejam A, λ, v_1, v_2 e v_3 como no teorema anterior e sejam $u_1(x) = v_1 e^{\lambda x}$, $u_2(x) = (xv_1 + v_2)e^{\lambda x}$, $u_3(x) = (x^2 v_1/2 + xv_2 + v_3)e^{\lambda x}$. Então, $u_1(x)$, $u_2(x)$ e $u_3(x)$ formam um sistema fundamental de soluções de $dy/dx = Ay$

DEMONSTRAÇÃO: $Av_1 = \lambda v_1$

$Av_2 = v_1 + \lambda v_2$

$Av_3 = v_2 + \lambda v_3$

$\frac{du_3(x)}{dx} = (xv_1 + v_2)e^{\lambda x} + \lambda(x^2 v_1/2 + xv_2 + v_3)e^{\lambda x}$

$= \frac{x^2 \lambda v_1 e^{\lambda x}}{2} + x(v_1 + \lambda v_2)e^{\lambda x} + (v_2 + \lambda v_3)e^{\lambda x}$

$= \frac{x^2}{2} Av_1 e^{\lambda x} + x Av_2 e^{\lambda x} + Av_3 e^{\lambda x} = A\left(\frac{x^2 v_1}{2} + xv_2 + v_3\right)e^{\lambda x} = Au_3(x)$

$$W(u_1,u_2,u_3)(0) = |u_1(0) \quad u_2(0) \quad u_3(0)|$$
$$= |v_1 \quad v_2 \quad v_3| \neq 0 \text{ , pois } \alpha = \{v_1, v_2, v_3\} \text{ é base de } \mathbb{R}^3$$

EXEMPLO: Encontre a solução geral do sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = y_1 + y_2 \\ y_3' = y_1 + y_2 + y_3 \end{cases} \rightsquigarrow y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} y \rightsquigarrow p_A(x) = (1-x)^3 \longrightarrow \lambda = 1 \text{ único AUTOVALOR DE } A$$

$Av_1 = v_1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = z \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\to v_1}$$

$Av_2 = v_1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\to v_2}$$

$Av_3 = v_2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ z = 0$$

$$y(x) = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda x} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{\lambda x} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{\lambda x}$$

Variação de parâmetros

$$(1)\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + \dots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{cases}$$

(2) $y' = A(x)\,y + b(x)$

$A(x) = (a_{ij}(x))$, $1 \le i, j \le n$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{n\times1} \qquad y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix}_{n\times1}$$

Sejam $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$ soluções de (3) que formam um sistema fundamental de soluções de (3).

$\Phi(x) = [\phi_1(x) \dots \phi_n(x)]_{n\times n}$ matriz fundamental de (3).

(3) $y' = A(x)\,y$

$$\Phi'(x) = [\phi_1'(x) \dots \phi_n'(x)]_{n\times n} = A(x)\,[\phi_1(x) \dots \phi_n(x)]_{n\times n}$$

$$= A(x)\,\Phi(x)$$

(4) $\Phi'(x) = A(x).\,\Phi(x)$

Vamos procurar uma solução particular de (2) da forma

$$y_p(x) = \Phi(x).\,\mu(x) \quad \text{onde} \quad \mu(x) = \begin{bmatrix} \mu_1(x) \\ \vdots \\ \mu_n(x) \end{bmatrix}_{n\times1}$$

Então:

$$A(x)\,y_p + b(x) = y_p'(x) = [\Phi(x).\,\mu(x)]'$$

$$= \Phi'(x)\,\mu(x) + \Phi(x)\,\mu'(x)$$

$$= A(x)\underbrace{\Phi(x)\,\mu(x)}_{y_p} + \Phi(x)\,\mu'(x) = A(x).\,y_p + \Phi(x)\,\mu'(x)$$

(5) $\Phi(x).\,\mu'(x) = b(x)$

$$\mu'(x) = b(x).\,\Phi(x)^{-1}$$

$$\mu(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\,b(x)\,dx$$

(6) $y_p(x) = \Phi(x)\displaystyle\int \Phi(x)^{-1}\,b(x)\,dx$

EXEMPLO: Encontre a solução geral do sistema

$$(1)\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + t \\ y_2' = y_1 + 3y_2 - e^{2t} \end{cases} \rightsquigarrow y' = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} t \\ -e^{2t} \end{vmatrix}$$

$$y' = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} y \rightsquigarrow p(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = 0$$

$\lambda = 2$ único autovalor de A

$(A-\lambda I)v = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow v = x\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_1}$$

$$y_H(t) = \underbrace{c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{2t}}_{\phi_1(t)} + \underbrace{c_2\left(t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right)e^{2t}}_{\phi_2(t)}$$

$(A-\lambda I).v = v_1$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow v = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_2} + x\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(x) = \begin{vmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} & -(t+1)e^{2t} \end{vmatrix} \quad \text{matriz fundamental}$$

$$\begin{cases} y_p(t) = \Phi(t)\,u(t) \\ \Phi(t)\,u'(t) = b(t) \end{cases}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$e^{2t}u_1' + te^{2t}u_2' = t$$

$$-e^{2t}u_1' - (t+1)e^{2t}u_2' = -e^{2t}$$

$$u_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} t & te^{2t} \\ -e^{2t} & -(t+1)e^{2t} \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} & -(t+1)e^{2t} \end{vmatrix}}_{W(\phi_1(t),\,\phi_2(t))}} = (t^2+t)e^{-2t} - t \qquad u_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^{2t} & t \\ -e^{2t} & -e^{2t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} & -(t+1)e^{2t} \end{vmatrix}} = 1 - te^{-2t}$$

$$u_2 = \int 1 - te^{-2t}\,dt \qquad z = t \quad dz = dt$$

$$= t - \int te^{-2t}\,dt \qquad dv = e^{-2t}dt \rightsquigarrow v = -e^{-2t}/2$$

$$= t - \left[zv - \int v\,dz\right]$$

$$= t + te^{-2t}/2 + e^{-2t}/4$$

$$u_1 = \int (t^2+t)e^{-2t}\,dt \qquad z = t^2+t \quad dz = (2t+1)dt$$

$$= zv - \int v\,dz \qquad dv = e^{-2t} \quad v = -e^{2t}/2$$

$$= -\frac{1}{2}(t^2+t)e^{-2t} + \frac{1}{2}\int \underbrace{(2t+1)}_{w}\underbrace{e^{-2t}dt}_{dv} \qquad w = 2t+1 \rightsquigarrow dw = 2$$

$$= -\frac{1}{2}(t^2+t)e^{-2t} + \left(-\frac{1}{4}(2t+1)e^{-2t} + \frac{1}{2}\int e^{-2t}\,dt\right)$$

$$= -\frac{1}{2}(t^2+t)e^{-2t} - \frac{1}{4}(2t+1)e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{t^2}{2}$$

$$y_p(t) = W(\phi_1(t), \phi_2(t)) \,.\, u(t) \qquad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = y_H(t) + y_p(t)$$

EXEMPLO: Resolver o sistema

(1) $t\,y' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} -2t \\ t^4 - 1 \end{bmatrix}$ $\qquad x = \ln t$

$t = e^x$

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}\frac{dy}{dx}$$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} -2e^x \\ e^{4x} - 1 \end{bmatrix}$

Sequência numérica

DEFINIÇÃO: uma sequência numérica é uma função $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que tem os naturais $\mathbb{N}$ como domínio e os reais $\mathbb{R}$ como contra-domínio.

NOTAÇÃO $\quad a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$\qquad n \to a_n$

$a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$a = (a_1, a_2, \ldots)$

EXEMPLO:

1) $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$a = (1, 1, \ldots, 1)$

2) $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n = 1/n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

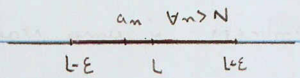
$a = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots)$

3) $a = (2^{-n} + 1)$, $n \in \mathbb{N}$

DEFINIÇÃO: seja $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência numérica e seja $L \in \mathbb{R}$. Se para qualquer $\forall \varepsilon > 0$ dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$ dizemos que L é o limite da sequência $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Escrevemos

$$L = \lim_{n \to \infty} a_n$$

$|a_n - L| < \varepsilon \iff a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$



EXEMPLO: Mostre que a seqüência $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = n^{-2}+1$, $n \in \mathbb{N}$, converge para $L=1$.

Seja $\varepsilon > 0$ dado:

$|a_n - L| < \varepsilon \rightsquigarrow \left| n^{-2}+1-1 \right| < \varepsilon \rightsquigarrow n^{-2} < \varepsilon \rightsquigarrow n^2 > \varepsilon^{-1}$

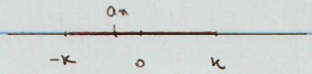
$n > 1/\sqrt{\varepsilon}$

Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > 1/\sqrt{\varepsilon}$. Então, $n \in \mathbb{N}$, $n > N$

$|a_n - L| < \varepsilon$

DEFINIÇÃO: Dizemos que a seqüência $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada se existir uma constante $K > 0$ tal que:

$|a_n| < K$, para $\forall n \in \mathbb{N}$



TEOREMA: Toda a seqüência convergente é limitada

DEMONSTRAÇÃO: Seja $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência convergente tal que

$L = \lim_{n\to\infty} a_n$

Seja $\varepsilon = 1$. Então, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$n \in \mathbb{N}, n > N \rightarrow |a_n - L| < 1$

$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L|$

$\leq 1 + |L|$

$K = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, 1+|L|\}$

Temos então que

$|a_n| \leq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$

DEFINIÇÃO: seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência numérica

1) se $a_n \leq a_{n+1}$ para $\forall n \in \mathbb{N}$, dizemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona crescente.

2) se $a_n \geq a_{n+1}$ para $\forall n \in \mathbb{N}$, dizemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona decrescente.

EXEMPLO:

1) $a_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\rightsquigarrow$ MONÓTONA CRESCENTE E DECRESCENTE

2) $a_n = 2^{-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\rightsquigarrow$ MONÓTONA DECRESCENTE

3) $a_n = \sqrt{n^2+3}$ $\rightsquigarrow$ MONÓTONA CRESCENTE

TEOREMA: Toda sequência monótona e limitada é convergente

EXEMPLO: Mostre que a ~~função~~ sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = n!/n^n$ é convergente

$$a_{n+1} = \frac{(n+1).n!}{(n+1).(n+1)^n} = \frac{n!}{(n+1)^n} < a_n \rightsquigarrow \text{MONÓTONA DECRESCENTE}$$

$$0 \leq a_n \leq a_1 = 1 \Rightarrow a_n \in [0,1]$$

$$|a_n| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{sequência limitada}$$

Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona decrescente e limitada segue pelo Teorema anterior que ela é convergente.

PROPRIEDADES: sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências convergentes e seja $K \in \mathbb{R}$ uma constante. Então:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} K\, a_n = K . \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n . b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n . \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

4) $\lim_{n\to\infty} a_n / b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \,/\, \lim_{n\to\infty} b_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$

5) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\lim_{n\to\infty} a_n|$

6) se $a_n \leq c_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$

então , $\lim_{n\to\infty} c_n = L$ (TEOREMA DO CONFRONTO)

7) se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada então

$$\lim_{n\to\infty} a_n . c_n = 0$$

EXEMPLO: Calcule o limite da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} . \cos \frac{\pi}{4} n$

$a_n = b_n . c_n$

$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$|c_n| \leq 1$ (limitado)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

EXEMPLO: Calcule o limite $a_n = \sqrt{\frac{2n+3}{n^2+1}}$

$\frac{2n+3}{n^2+1} \leq \frac{2n+n}{n^2+1} = \frac{3n}{n^2+1} \leq \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n}$

$\frac{2n+3}{n^2+1} \geq \frac{2n}{n^2+n^2} = \frac{2n}{2n^2} = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

EXEMPLO: Seja $a > 0$. Mostre que $\lim_{n\to\infty} a^{-n} = 0$

Seja $\varepsilon > 0$ dado

$|a^{-n} - 0| < \varepsilon \iff a^{-n} < \varepsilon \rightarrow a^n > \varepsilon^{-1}$

$n > \varepsilon^{-1/n}$

Seja $N \in \mathbb{N}$, $N > \varepsilon^{-1/\varepsilon}$. Então,

$n > N \iff n > \varepsilon^{-1/n} \iff |a^{-n} - 0| < \varepsilon$ e assim:

$$\lim_{n\to\infty} a^{-n} = 0$$

EXEMPLO: Calcule o limite da sequência $a_n = \frac{1+2n+n^2}{n\sqrt{n}+3n^2}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^2 + 2/n + 1}{1/\sqrt{n} + 3} = \frac{1}{3}$

PROPRIEDADES:

1) Seja $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$L = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Então, $L = \lim_{n\to+\infty} f(n)$

2) Seja $f: (a-\delta, a+\delta) \to \mathbb{R}$ tal que $L = \lim_{x\to a} f(x)$.

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, então $L = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$

3) Se $f(x)$ é contínua em a e $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

então $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$

EXEMPLO: Calcular $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(1+n^{-2})$

$a_n = 1+n^{-2}$

$\lim_{n\to\infty} (1+n^{-2}) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} n^{-2} = 1$

$f(x) = \operatorname{sen} x$ é contínua em $a=1$ e portanto

$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(1+n^{-2}) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a) = \operatorname{sen} 1$

* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$

EXEMPLO: Calcule $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen} \pi/n$, $y = \pi/x$

$\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen} \pi/x = \lim_{y\to 0} \frac{\pi}{y} \operatorname{sen} y = \pi \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y}$ (usando Hopital)

$= \pi \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\cos y}{1} = \pi$ e assim

$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} = \pi$

EXEMPLO: Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n+1} \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n}{2n+1}}_{a_n} \cdot \underbrace{n \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}_{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2} \cdot \pi = \frac{\pi}{2}$$

EXEMPLO: Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$f(x) = (1+x^{-1})^x$

$\ln f(x) = x \ln(1+x^{-1}) \rightsquigarrow \lim\limits_{x\to\infty} \ln f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x^{-1})}{1/x}$

$$\rightsquigarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1/x^2}{1+1/x}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+1/x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \ln f(x)} = e^1 = e$$

EXEMPLO: Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \cos(n^3+n^2-3n+2)$

$|b_n| = |\cos(n^3+n^2-3n+2)| \leq 1 \rightsquigarrow b_n$ é limitada

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$

Por propriedade do limite, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \cos(n^3+n^2-3n+2) = 0$

DEFINIÇÃO: Se para $\forall K>0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \in \mathbb{N}$, $n>N \Rightarrow a_n > K$ dizemos que a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende para $+\infty$ e escrevemos

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

PROPRIEDADES

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} 1/a_n = 0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n > 0$ $\forall n$, então $\lim\limits_{n\to\infty} 1/a_n = +\infty$

3) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = +\infty$

4) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$

EXEMPLO: Mostre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = n^3+1$, tende para $+\infty$

Seja $k>0$, $a_n \geq k$

$n^3+1 \geq k \rightsquigarrow n \geq \sqrt[3]{k-1}$

Seja $N \in \mathbb{N}$, $N > \sqrt[3]{k-1}$. Então $n \in \mathbb{N}$, $n > N$

$n > \sqrt[3]{k-1} \rightsquigarrow a_n = n^3+1 > k$

DEFINIÇÃO: Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais e seja $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots\}$ um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$

A sequência $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$, onde $b_j = a_{n_j}$, é chamada uma subsequência da sequência (a_n) $a = (a_1, a_2, \dots)$

$b = (b_1, b_2, \dots)$, $b_1 = a_{n_1}$, $b_2 = a_{n_2}$

EXEMPLO: $c = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$n_j = 2j \rightsquigarrow n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = 6 \dots$

$(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $b_j = a_{n_j} = a_{2j} \rightsquigarrow a = (a_1, a_2, a_3, \dots)$

$b = (a_2, a_4, a_6, \dots)$

TEOREMA: Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência e $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma ~~seq~~ subsequência de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L \Rightarrow \lim_{j\to\infty} b_j = L$

COROLÁRIO: Sejam $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ duas subsequências de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Se $\lim_{j\to\infty} b_j = L_1 \neq L_2 = \lim_{j\to\infty} c_j$, então $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é divergente

EXEMPLO: Mostre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = (-1)^n$ diverge

$b_j = a_{2j} = (-1)^{2j} = 1 \rightsquigarrow \lim_{j\to\infty} b_j = 1$

$c_j = a_{2j+1} = (-1)^{2j+1} = -1 \rightsquigarrow \lim_{j\to\infty} c_j = -1$

$\lim_{j\to\infty} b_j \neq \lim_{j\to\infty} c_j \Rightarrow$ diverge

EXEMPLO: Estude a convergência da sequência $a_n = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} n$

$b_j = a_{8j} = \operatorname{sen} \frac{\pi 8j}{4} = \operatorname{sen}(2\pi j) = 0$

$c_j = a_{8j+2} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}(8j+2) = \operatorname{sen}\left(2\pi j + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\lim_{j\to\infty} b_j \neq \lim_{j\to\infty} c_j \Rightarrow$ DIVERGE

Séries Numéricas

DEFINIÇÃO: seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência numérica. A soma infinita

$* \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$ é chamada de série numérica. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma finita $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + \dots + a_n$ é chamada uma soma parcial da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

A sequência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é chamada de sequência das somas parciais da série *

DEFINIÇÃO: se a sequência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge para um número real S, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty}$ converge (tem soma S). Se $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

EXEMPLO: ① $a_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 + \dots + 1 = n$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty \Rightarrow (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

② $a_n = 1/n$, $n = 1, 2, 3, \dots$

$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ é chamada série "harmônica" e diverge

③ $a_n = n!/n^2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 2/3$, $a_4 = 3/2$

$$a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow \frac{(n+1)!}{(n+1)^2} \geq \frac{n!}{n^2} \sim \frac{(n+1)!}{n!} \geq \frac{(n+1)^2}{n^2}$$

$$(n+1) \geq \frac{(n+1)^2}{n^2} \sim 1 \geq \frac{(n+1)}{n^2}$$

$$\Delta = 5 \sim n = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad n^2 - n - 1 \geq 0$$

$$2 < \sqrt{5} < 3 \sim \lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Assim: $n \geq 2 \rightarrow n^2 - n - 1 \geq 0 \Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n$

e portanto $a_n \geq 1$ se $n \geq 4$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + n - 3$$

$$\geq n - 1$$

$$S_n \geq n - 1$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n \geq \lim_{n\to\infty} (n-1) = +\infty$$

Assim $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

EXEMPLO: Seja $a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$. Mostre que $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$

Seja $\varepsilon > 0$ Temos que (*) $|a^n - 0| < \varepsilon \rightarrow n \ln|a| < \ln \varepsilon$

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln|a|}$$

Seja $N \in \mathbb{N}$, $N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln|a|}$, então: $\left.\begin{matrix} n > N \\ n \in \mathbb{N} \end{matrix}\right\} \Rightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln|a|} \overset{(*)}{\Rightarrow} |a^n - 0| < \varepsilon$

DEFINIÇÃO: sejam $a, r \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $r \neq 0$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$ é chamada uma série geométrica com razão r. $\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a r^n$

TEOREMA: sejam $a, r \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $r \neq 0$. Então a série geométrica converge se $|r| < 1$ e tem soma $a/(1-r)$, e divergente se $|r| \geq 1$

DEMONSTRAÇÃO: se $r \neq 1$, temos $S_n = \sum_{j=1}^{n} a r^{j} = \dfrac{a(1-r^j)}{1-r}$

$|r| < 1$: $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(1 - \lim\limits_{n \to \infty} r^n)}{1-r} = \dfrac{a}{1-r}$

$r = 1$: $S_n = a + a + \dots + a = n \cdot a$

$a > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} an = +\infty$

$a < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} an = -\infty$

série divergente

$r = -1$: $S_n = \sum_{j=1}^{\infty} a r^j = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$

$S_{2n} = a - a + a - a + \dots = 0$

$S_{2n-1} = a \neq 0$

$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{n \to \infty} S_{2n} = 0 \\ \lim\limits_{n \to \infty} S_{2n+1} = a \neq 0 \end{array} \right. \rightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge

$|r| > 1$: $\lim\limits_{n \to \infty} r^{2n} = \lim\limits_{n \to \infty} (r^2)^n = +\infty$

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a(1-r^{2n})}{1-r} \overset{a>0}{\underset{r<1}{=}} \dfrac{a(1-\infty)}{1-r} = -\infty \rightarrow$ diverge

PROPRIEDADES: sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries convergentes, com somas S_1 e S_2 respectivamente e seja $k \in \mathbb{R}$

- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ converge e tem soma $S_1 \pm S_2$

- $\sum_{n=1}^{\infty} k a_n$ converge e tem soma $k S_1$

- se $n_0 \in \mathbb{N}$, então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ também converge

EXEMPLO: Calcule a soma da série $\sum_{n=3}^{\infty} 1/2^n$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{1}{2^3}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8}\frac{1}{2^n}, \quad r = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1/8}{1 - 1/2} = \frac{1}{4}$$

EXEMPLO: Calcule a soma da série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1} + 3^{n-1}}{6^n}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\frac{2^{n-1}}{6^n}\right) + \left(\frac{3^{n-1}}{6^n}\right)\right] = \sum_{n=2}^{\infty} \left[2\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2.(1/3)^n = 2.(1/3)^2 + 2.(1/3)^3 + \dots + = 2/9 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots = \frac{1}{6}$$

EXEMPLO: seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência numérica, tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Seja $b_n = a_n - a_{n+1}$. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge e tem soma a_1

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n+1})$$

$$S_n = a_1 - a_{n+1}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a_1$$

$$\boxed{S = a_1}$$

EXEMPLO: calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n.(n+1)$

$$b_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$a_n = 1/n$$

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1$$

$$\boxed{S = 1}$$

TEOREMA: seja somatório $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente. Então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

DEMONSTRAÇÃO: $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$$

$\exists s \in \mathbb{R}$ tal que $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = S - S = 0$$

COROLÁRIO: (critério do termo geral)

se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ou $\lim_{n\to\infty} a_n = \nexists$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

EXEMPLO: estude a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{-n^2+3n+2}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-1}{-n^2+3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n-1/n^2}{-1+3/n+2/n^2} = -1$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = -1 \rightsquigarrow$ e portanto a série converge pelo critério do termo geral.

TEOREMA:

a) se $a_n = b_n$, $\forall n \geq n_0$, então ambas as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergem ou ambas convergem

b) se $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty} k a_n$ também diverge

c) se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ diverge

DEFINIÇÃO: se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é absolutamente convergente.

TEOREMA toda série absolutamente convergente é convergente

DEFINIÇÃO: se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é condicionalmente convergente.

EXEMPLO:

1) $a_n = 3/2^n$ $\sum_{n=1}^{\infty} 3/2^n$ é uma série geométrica com razão $r = 1/2$ e, portanto, é convergente.

Assim, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, 3/2^n$ é absolutamente convergente

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$ converge (série alternada)

$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n/n| = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge (série harmônica)

Então $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$ é condicionalmente convergente.

TEOREMA: (critério de comparação)

a) seja $|a_n| \leq b_n$, $\forall n \geq 1$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente

b) se $a_n \geq b_n \geq 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será divergente

DEMONSTRAÇÃO

a) $S_n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$

$K_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\rightarrow \lim_{n\to\infty} K_n = K$

$K_{n+1} = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \underbrace{b_{n+1}}_{\geq 0} \rightsquigarrow K_{n+1} \geq K_n$

K_n é crescente $\quad S_n$ é crescente e

$K \geq S_n \geq 0$, $\forall n$ (S_n) é crescente

$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente

b) $S_n = a_1 + \dots + a_n$

$\quad\; \vee| \quad \vee| \quad \vee|$

$K_n = b_1 + \dots + b_n$

$$\begin{cases} S_n \geq K_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ K_n \text{ crescente / divergente} \rightarrow \lim_{n\to\infty} K_n = \pm\infty \end{cases}$$

EXEMPLO: estude a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} 3/n2^n$

$b_n = 3/2^n \quad |a_n| = 3/n.2^n \leq 3/2^n = b_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} 3/2^n$ é geométrica com razão $1/2$ $\rightarrow$ converge

Então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} 3/n2^n$ converge pelo critério de comparação

EXEMPLO: estude a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+2}{n^3-n^2+n-1}$

$$a_n = \frac{n^2+3n+2}{n^3-n^2+n+(-1)} \geq \frac{n^2+2}{n^3+(-n^2)+n-1} \geq \frac{n^2+(-n^2/2)}{n^3-n^2+n-1} \geq \frac{n^2/2}{n^3-n^2+n-1}$$

$$n^3-n^2+n-1 \leq n^3+n \leq n^3+n^2 = 2n^3$$

$$a_n \geq \frac{n^2/2}{n^3-n^2+n-1} \geq \frac{n^2/2}{2n^3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n} = b_n$$

Critério de comparação por limite

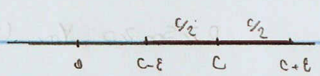
Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries de termos positivos ($a_n>0$, $b_n>0$ $\forall n \in \mathbb{N}$)

1) Se $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = c > 0$, então as duas séries convergem ou ambas divergem

2) Se $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também é convergente

DEMONSTRAÇÃO:

① $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = c > 0$



seja $\varepsilon = c/2$, então existe $N \in \mathbb{N}$

se $n > N \Rightarrow a_n/b_n \in (c/2, 3c/2)$

$$\frac{c}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3c}{2} \rightarrow \frac{b_n c}{2} \leq a_n \leq \frac{3b_n c}{2}$$

EXEMPLO: estude a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-3n+2}{n^3-n^2+n-1}$

$b_n = 1/n$, $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \lim \frac{n^3-3n^2+2n}{n^3-n^2+n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1$

Como b_n diverge, então a_n diverge, pois $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$

Critério da Razão

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série numérica, tal que, $a_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Seja
$L = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n|$

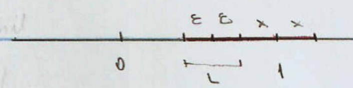
a) Se $L < 1$, a série ~~diverge~~ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente

b) Se $L > 1$, a série diverge

c) Se $L = 1$, não pode-se concluir nada

DEMONSTRAÇÃO:

$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$



Seja $\varepsilon = 1/2 + (-L)/2 = [1+(-L)]/2$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$, então
$|a_{n+1}|/|a_n| \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq L+\varepsilon = r \rightarrow |a_{n+1}| \leq r|a_n|$, $0 < r < 1$

$n = N \rightarrow |a_{N+1}| \leq r|a_N|$

$n = N+1 \rightarrow |a_{N+2}| \leq r|a_{N+1}| \leq r^2|a_N|$

$n = N+2 \rightarrow |a_{N+3}| \leq r^3|a_N|$

$n = N+p \rightarrow |a_{N+p+1}| \leq r^{p+1}|a_N|$

$m = N+p+1 \rightsquigarrow |a_m| \leq \underbrace{r^m |a_N| r^{-N}}_{b}$

$m > N \longrightarrow |a_m| \leq b r^m$

EXEMPLO: estude a convergência da série

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n/3^n$ $\quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \frac{1}{3}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{3}(1+1/n)$

$L = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}(1+1/n) = 1/3 \rightarrow$ série converge

então $n/3^n$ é absolutamente convergente

b) $a_n = 1/n^2$ $\quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot n^2 = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^2$

$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^2 = 1 \rightsquigarrow$ nada se conclui pelo critério da razão.

EXEMPLO: Estude a convergência das séries

a) $\sum^{\infty} (n/2n+1)^n$

$a_n = \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n \longrightarrow |a_n| = a_n$

$\sqrt[n]{|a_n|} = n/(2n+1)$

$L = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2+1/n} = \dfrac{1}{2} < 1 \rightarrow$ pelo critério da raiz, a série converge

b) $a_n = 1/n$

$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = \lim_{n\to\infty} 1/n^{1/n}$

$= 1/\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \rightsquigarrow$ nada se pode concluir pelo método da raiz

$\lim \sqrt[x]{x} = \lim x^{1/x} = \lim f(x)$

$\ln f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

$\lim \ln f(x) = \lim \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

$\lim f(x) = e^{\lim \ln f(x)} = e^0 = 1$

Critério da raiz

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série numérica e seja $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$

a) se $L > 1$, a série diverge

b) se $L < 1$, a série converge absolutamente

c) se $L = 1$, nada se pode dizer.

TEOREMA (CRITÉRIO DA INTEGRAL)

Seja $\sum_{n=r}^{\infty} a_n$ uma série numérica e seja $y = f(x)$ uma função definida para $x \in [r, +\infty)$, tal que:

a) $a_n = f(n)$, $\forall n \geq r$

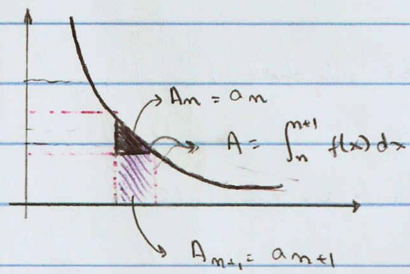
b) $f(x)$ é contínua em $[r, +\infty)$

c) $f(x)$ é decrescente e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, a integral imprópria converge

$$\int_r^{\infty} f(x)\, dx$$

DEMONSTRAÇÃO:



$A_{n+1} \leq A \leq A_n$

$a_{n+1} < \int_n^{n+1} f(x)\,dx < a_n$

$S = a_n + a_{n+1} + \dots + a_m$ } crescentes

$R_m = \int_n^m f(x)\,dx$

$S_m \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx + \dots + \int_m^{m+1} f(x)\,dx = \int_n^{m+1} f(x)\,dx$

$S_m \geq R_{m+1}$

$R_m = \int_n^m f(x)\,dx = \int_n^{n+1} f(x)\,dx + \dots + \int_{m-1}^{m} f(x)\,dx \geq a_{n+1} + \dots + a_m = S_m - a_n$

$R_m \geq S_m - a_n$

Suponhamos que $\int_n^\infty f(x)\,dx$ seja convergente:

$R = \int_n^\infty f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} R_m \in \mathbb{R}$

$R_m + a_n \geq S_m \geq R_{m+1} \longrightarrow S_m \leq R + a_n, \forall m$

S_m é crescente e limitada, então S_m converge

EXEMPLO: Estude a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ * usando critério da integral *

a) $a_n = 1/n$

b) $f(x) = 1/x$, $x \geq 1$ → é uma função racional e portanto contínua

c) $f(x) = 1/x \to f'(x) = -1/x^2 < 0 \longrightarrow f(x)$ é decrescente

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 1/x = 0$

$\int f(x)\,dx = \ln(x)$

$\int_1^n f(x)\,dx = \ln(x)\Big|_1^n = \ln n$

$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \ln n \longrightarrow +\infty$ → divergente pelo critério da integral

EXEMPLO: Estude a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$, $0 < p < \infty$, $p \neq 1$

a) $a_n = 1/n^p$

b) $f(x) = 1/x^p$ é contínua pois é uma função racional

c) $f(x) = \frac{1}{x^p} \to f'(x) = -p \cdot x^{-p-1} = -\frac{p}{x^{p+1}} < 0$

$f(x)$ é decrescente

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0$$

$$\int f(x)\,dx = \int x^{-p}\,dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}$$

$$\int_1^n f(x)\,dx = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^n \rightsquigarrow \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{n^{p-1}} - 1\right)$$

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx = \to \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{n^{p-1}} - 1\right) = +\infty \quad , \quad 0 < p < 1 \text{ (diverge)}$$

$$\to \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{n^{p-1}} - 1\right) = \frac{1}{p-1} \quad , \quad p > 1 \text{ (converge)}$$

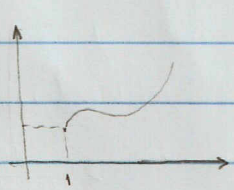
$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ converge se $p > 1$ e diverge se $0 < p < 1$

Obs: $\ln n \leq \sqrt{n}$ $\qquad \sqrt{n} - \ln n \geq 0$

$f(x) = \sqrt{x} - \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^{1/2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \geq 0 \iff x \geq 4$

$f(x)$ é crescente!



$f(1) = 1 - 0 = 1$

$f(x) \geq 0 \quad \forall x$

TEOREMA (critério para séries alternadas)

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + \dots$ onde $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$

a) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sequência decrescente e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, então a série (*) converge

b) Suponhamos que (*) seja convergente e seja S a soma da série (*). O erro cometido quando calculamos a soma somente até o N-ésimo termo da série é menor ou igual a a_{N+1}, isto é, $E = |S - S_N| \leq a_{N+1}$

DEMONSTRAÇÃO:

a) $S_n = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} a_j = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n+1} a_n$

$R_1 = S_1 = a_1$

$R_n = S_{2n-1}$ $\qquad R_2 = S_3 = a_1 - a_2 + a_3 \leq a_1 = R_1$

$T_n = S_{2n}$

$R_{n+1} = S_{2n+1} = R_n - a_{2n} + a_{2n+1}$

$= R_n - (a_{2n} - a_{2n+1}) \leq R_n$ (sequência decrescente)

$T_{n+1} = S_{2(n+1)} = S_{2n+2}$

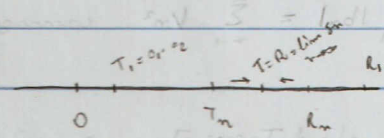
$= a_1 - a_2 + \dots - a_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2}$

$= T_n + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \geq T_n$

$T_{n+1} \geq T_n$ (sequência crescente)

$T_n = S_{2n} = S_{2n-1} - a_{2n}$

$= R_n - a_{2n} \leq R_n$



$T_n \leq R_n$

$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequência monótonas e limitadas e, portanto, são convergentes

Assim

$R = \lim_{n\to\infty} R_n$, $\quad T = \lim_{n\to\infty} T_n$ $\qquad T = R = \lim_{n\to\infty} S_n$

$T_n = R_n - a_{2n}$ $\qquad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ converge.

$T = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} (R_n - a_{2n}) = R$.

b) $E = |S - S_n|$

$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ $\qquad a_1 - a_2 \leq T_n \leq S \leq R_n \leq a_1$

$S_N = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+1} a_j$ $\qquad$ * Seja N par : $N = 2n$

$S_N = S_{2n} = T_n$

$E = |S - S_n| = |S - T_n| = a_{N+1} - a_{N+2} + a_{N+3} - \dots$

$= a_{N+1} - (a_{N+2} - a_{N+3}) - \dots$

$\leq a_{N+1}$

* Seja N ímpar:

$E = |S - S_N|$

EXEMPLO: Estude a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

$a_n = 1/n$

a) $a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n \leq n+1 \Leftrightarrow 0 \leq 1$ (VERDADE) $\rightarrow$ decrescente

b) $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} 1/n = 0$

A série dada converge pelo critério das séries ordenadas

EXEMPLO: Estude a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

$|b_n| = \frac{1}{n^2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge pelo método da integral

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolutamente, ou seja, a série converge.

EXEMPLO: Determine o menor $N \in \mathbb{N}$ tal que o erro $E = |S - S_N| < 10^{-4}$ para série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$

$E \leq a_{N+1} < 10^{-4}$

$\frac{1}{(N+1)^2} < 10^{-4} \rightarrow (N+1)^2 > 10^4$

$N + 1 > 10^2$

$N > 99 \rightsquigarrow \boxed{N = 100}$

1) Resolver a equação $t y'' + (t-2) y' + y = 0$, $y(0) = 0$

$\mathcal{L}\{t y''\}(x) = -\frac{d}{dx} \mathcal{L}\{y''\}(x) = -\frac{d}{dx} (x^2 Y - x\, y(0) - y'(0)) = -(2x Y + x^2 Y')$

$\mathcal{L}\{t y'\}(x) = -\frac{d}{dx} \mathcal{L}\{y'\}(x) = -\frac{d}{dx} (xY - y(0)) = -(Y + xY')$

$\mathcal{L}\{y'\}(x) = xY - y(0) = xY$

$0 = \mathcal{L}\{ t y'' + (t-2) y' + y \}$

$0 = -(2xY + x^2 Y') - (Y + xY') - 2 \cdot xY + Y = 0$

$0 = -4xY + Y'(-x^2 - x)$

$Y'(x^2 + x) = -4xY$

$\frac{Y'}{Y} = \frac{-4}{x+1} \rightsquigarrow (\ln Y)' = \frac{-4}{x+1} \to \ln Y = -4 \int \frac{dx}{x+1} + C = -4 \ln|x+1| + C$

$Y = C'(x+1)^{-4} = \frac{C'}{(x+1)^{3+1}} \cdot \frac{3!}{3!}$

$Y = \underbrace{\frac{C'}{6}}_{C''} \mathcal{L}\{ t^3 e^{-t} \}(x) \longrightarrow y(t) = \underline{C'' t^3 e^{-t}}$

2) Seja $f(t) = \begin{cases} t^2 - 2t + 1 , & 0 \le t < 1 \\ 2t - 3 & t \geq 1 \end{cases}$

$f(t) = t^2 - 2t + 1 + \begin{cases} 0 & 0 \le t < 1 \\ 2t - 3 - (t^2 - 2t + 1) & t \geq 1 \end{cases} \to f(t) = (t-1)^2 + \begin{cases} 0 & 0 \le t < 1 \\ -t^2 + 4t - 4 & t \geq 1 \end{cases}$

$f(t) = (t-1)^2 - (t-2)^2 \begin{cases} 0 & , 0 \le t < 1 \\ 1 & , t \geq 1 \end{cases} \to f(t) = (t-1)^2 - (t-2)^2 \mu_1(t)$

$\mathcal{L}\{t^2 - 2t + 1\}(x) = \mathcal{L}\{t^2\} - 2\mathcal{L}\{t\} + \mathcal{L}\{1\} = \frac{2!}{x^{2+1}} - 2 \cdot \frac{1!}{x^{1+1}} + \frac{0!}{x^{0+1}} = \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}$

$g(t-1) = -t^2 + 4t - 4$ $\qquad \mathcal{L}\{(-t^2 + 4t - 4) \cdot \mu_1(t)\}(x) = \mathcal{L}\{ g(t-1)\, \mu_1(t)\}(x)$

$g(u) = -(u+1)^2 + 4(u+1) - 4$ $\qquad = e^{-x} \mathcal{L}\{g(t)\}(x) = e^{-x} \mathcal{L}\{-t^2 + 2t - 1\}(x)$

$= -u^2 + 2u - 1$

4) $\mathcal{L}^{-1}\{\ln(x^2+4)\}(t) = f(t)$

$$\ln(x^2+4) = \mathcal{L}\{f(t)\}(x)$$

$$\frac{d\ln(x^2+4)}{dx} = \frac{d}{dx}\mathcal{L}\{f(t)\}(x) \rightsquigarrow \frac{2x}{x^2+4} = -\mathcal{L}\{t f(t)\}(x)$$

$$\mathcal{L}\{t f(t)\}(x) = -2\frac{x}{x^2+2^2} = -2\mathcal{L}\{\cos 2t\}(x)$$

$$= \mathcal{L}\{-2\cos 2t\}(x) \rightsquigarrow t f(t) = -2\cos 2t$$

$$f(t) = \frac{-2\cos 2t}{t}$$

5) $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 2\pi \\ t-2\pi & 2\pi \leq t < 4\pi \\ 0 & t \geq 4\pi \end{cases}$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < \pi \\ t-\pi & t \geq \pi \end{cases} + \begin{cases} 0, & t < 2\pi \\ -(t-\pi), & t \geq 2\pi \end{cases}$$

$$= (t-\pi)\,u_\pi(t) - (t-\pi)\,u_{2\pi}(t)$$

$$\mathcal{L}\{(t-\pi)u_\pi(t)\} = e^{-\pi t}\mathcal{L}\{t\}(x)$$

$$\mathcal{L}\{(t-\pi)u_{2\pi}(t)\} = \mathcal{L}\{(t-2\pi)u_{2\pi}(t)\} + \pi\mathcal{L}\{u_{2\pi}(t)\} = e^{-2\pi x}.\mathcal{L}\{t\}(x) + \pi e^{-2\pi x}\mathcal{L}\{1\}(x)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-\pi x}\frac{1}{x^2} - e^{-2\pi x}\frac{1}{x^2} - \pi e^{-2\pi x}.\frac{1}{x}$$

6) $y''+2y'+2y = \int_0^t \underbrace{(t-\tau)^2}_{g(t-\tau)}\underbrace{\operatorname{sen}\tau}_{h(\tau)}\,d\tau$, $y(0) = y'(0) = 0$

$h(t) = \operatorname{sen} t$ $\qquad y''+2y'+2y = g * h(t)$

$g(t) = t^2$ $\qquad \mathcal{L}\{g*h(t)\}(x) = \mathcal{L}\{g(t)\}(x)\cdot\mathcal{L}\{h(t)\}(x)$

$$= \frac{2!}{x^{2+1}}\cdot\frac{1}{x^2+1}$$

$$x^2Y + 2xY + 2Y = \frac{2}{x^3.(x^2+1)}$$

$$Y = \frac{2}{x^3(x^2+1)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+6}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{x^2+2x+2}$$

* Séries de Potências * - 3ª PARTE

DEFINIÇÃO: uma série de potências é uma série da forma:

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + \dots$ onde $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência numérica, $a \in \mathbb{R}$ é uma constante e x é uma variável real.

EXEMPLOS:

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$

TEOREMA: consideremos uma série de potências $\circledast \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$. Suponhamos que a série $\circledast$ seja convergente para $x = d$, $d \neq a$. Então a série $\circledast$ converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| < u$, $u = |d-a|$

DEMONSTRAÇÃO:

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ converge

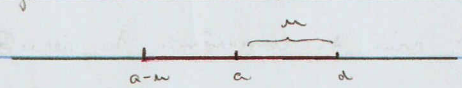
$\Downarrow$ Critério do Termo Geral

$\lim_{n\to\infty} c_n (d-a)^n = 0 \implies \left(c_n (d-a)^n\right)_{n=0}^{n=\infty}$ é limitada

$\Downarrow$

$\exists M > 0$ tal que $(**)$ $|c_n (d-a)^n| \leq M$, $\forall n = 0, 1, 2 \dots$

Seja $x \in \mathbb{R}$, tal que $|x-a| < u$, $u = d-a$



$|x-a| < u \iff x \in (a-u, a+u)$

$$|c_n (x-a)^n| = |c_n| \cdot |x-a|^n \frac{|d-a|^n}{|d-a|^n} = \underbrace{|c_n| \cdot |d-a|^n}_{(**)} \cdot \underbrace{\left(\frac{|x-a|}{|d-a|}\right)^n}_{0 \leq r < 1}$$

$|c_n (x-a)^n| \leq M r^n$

Assim $|c_n (x-a)^n| \leq M r^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} M r^n$ = série geométrica com razão $0 \leq r < 1$

Segue pelo critério de comparação que a série
$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n (x-a)^n|$ converge

COROLÁRIO: se a série ⊛ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (d-a)^n$ diverge para $x = d$, então ela vai divergir para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-a| > u$, $u = |d-a|$

TEOREMA: consideremos uma série de potências ⊛ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$. Então, uma e somente uma das seguintes afirmações é verdadeira:

i) A série converge somente para $x = a$

ii) A série converge para $\forall x \in \mathbb{R}$

iii) Existe um número $r > 0$ tal que a série converge absolutamente para $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x-a| < r$, e diverge para $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x-a| > r$.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que (i) e (ii) não sejam satisfeitas. Pelo teorema anterior e seu corolário, existe

$r =$ máximo dos $u > 0$, tal que * converge para $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x-a| < u$

Assim, $|c_n (x-a)|^n \leq M r^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} M r^n =$ série geométrica com razão $0 \leq r < 1$ $\longrightarrow$ converge

DEFINIÇÃO:

i) Se vale (i) do teorema anterior, dizemos que zero é o raio de convergência da série ⊛

ii) Se vale (ii) do teorema anterior, dizemos que o raio da convergência da série ⊛ é ∞

iii) Se vale (iii), dizemos que o raio da convergência é r

EXEMPLO: Determine o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$

$a_n = x^n/n$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x| \cancel{|x|^n}}{(n+1)} \cdot \frac{n}{\cancel{x^n}} = |x| \cdot \frac{n}{n+1} \rightsquigarrow L = \lim_{n\to\infty} |x| \cdot \frac{n}{n+1} = |x|$$

Pelo Critério da Razão:

i) A série converge absolutamente para $L = |x| < 1$

ii) A série diverge se $L = |x| > 1$.

Segue pela definição de raio de convergência que $r = 1$ é o raio de convergência da série dada.

DEFINIÇÃO: A região de convergência da série ⊛ é o conjunto formado por todos os pontos para os quais a série converge

r = raio de convergência R = região de convergência

$R = (a-r, a+r)$ ou $R = (a-r, a+r]$ ou $R = [a-r, a+r)$ ou $R = [a-r, a+r]$

EXEMPLO: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $a = 0$, $r = 1$

• $x = a - r = -1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$: (converge pelo critério para séries alternadas)

• $x = a + r = 1$ $R = [-1, 1)$ região de convergência.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n}$ (série harmônica, diverge)

EXEMPLO: Determine a região de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} (x-1)^n$

$a_n = \frac{2^n}{n!} (x-1)^n$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)\cancel{n!}} (x-1)\cancel{(x-1)^n} \cdot \frac{\cancel{n!}}{2^n \cancel{(x-1)^n}} = \frac{2 \cdot (x-1)}{n+1}$$

$\lim_{n \to \infty} \frac{2|x-1|}{n+1} = 0$, pelo critério da Razão temos que $L = 0 < 1$, então converge absolutamente para qualquer x, possuindo $r = \infty$, $R = (-\infty, +\infty)$

EXEMPLO: Encontre o intervalo de convergência das seguintes séries de potências

1) $\sum_{0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{2n}$ 2) $\sum_{0}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$ (EXERCÍCIOS)

1) $a_n = \frac{n!}{n^n} \cdot x^{2n} \rightsquigarrow \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x|^2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x|^2 \cdot \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{|x|^2}{e}$

Pelo critério da Razão:

i) $L = \frac{|x|^2}{e} < 1$, a série converge absolutamente

$\hookrightarrow |x|^2 < e$

ii) $L = \frac{|x|^2}{e} > 1$, a série diverge $\quad |x| < \sqrt{e}$

$\hookrightarrow$ raio de convergência

$r = \sqrt{e}$, $a = 0 \rightsquigarrow x = a + r = \sqrt{e}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \cdot e^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n! \left(\frac{e}{n}\right)^n}_{b_n} \qquad \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = e \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

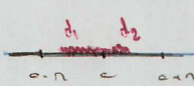
$\lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = 1 \rightsquigarrow$ nada se pode dizer

TEOREMA: (derivação e integração de séries de potências)

Seja $* \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ uma série de potências com ~~raio~~ raio de convergência $r > 0$, e seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n)(x-a)^n$, $x \in (a-r, a+r)$ a soma da série $*$

i) A série das derivadas: $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$ tem raio r e $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n (x-a)^{n-1}$, $x \in (a-r, a+r)$

ii) A série das integrais: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$ tem também raio de convergência igual a r e $\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$, para $x \in (a-r, a+r)$



Se $d_1 < d_2$, $d_1, d_2 \in (a-r, a+r)$ então

$$\int_{d_1}^{d_2} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} \left[(d_2-a)^{n+1} - (d_1-a)^{n+1}\right]$$

Observação: o teorema da série geométrica diz que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x|<1$

EXEMPLO: Encontre uma representação por séries de potências para a função $\frac{1}{(1-x)^2}$

$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \rightsquigarrow f'(x) = (-1).(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x|<1$, $\longrightarrow$ derivando e aplicando o teorema $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n.x^{n-1}$, $|x|<1$

$= 1+2x+3x^2+\dots$

EXEMPLO: Encontre uma representação por séries de potências para a função $\operatorname{arctg} x$

$f(x) = \operatorname{arctg}(x) \rightsquigarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $u=-x^2$

$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.(x^2)^n$

$|u|<1 \rightsquigarrow u=-x^2 \longrightarrow |x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x|<1$

Assim:

$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . x^{2n}$, $|x|<1 \rightsquigarrow \operatorname{arctg} t = \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^t x^{2n}\, dx$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left. \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right|_0^t$

$\operatorname{arctg} t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1}$, $|t|<1$

EXEMPLO: Calcular $\int_0^{1/2} \operatorname{arctg} x^2\, dx$ com erro inferior a 10^{-5}.

$\operatorname{arctg} t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1}$, $|t|<1$, $t=x^2$

$\operatorname{arctg} x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{4n+2}$

$\int_0^{1/2} \operatorname{arctg} x^2\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^{1/2} x^{4n+2}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} . \left. \frac{x^{4n+3}}{4n+3} \right|_0^{1/2}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)(4n+3)\,2^{4n+3}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$$

$$S_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k = a_1 - a_2 + \ldots$$

$$S = \int_0^{1/2} \operatorname{arctg} x^2 \, dx \longrightarrow E = |S - S_n| \leq a_{n+1}$$

TEOREMA: (Fórmula de Taylor)

Seja $f(x)$ uma função que tem todas as derivadas até a ordem $n+1$ no intervalo $I = (a-r, a+r)$. Então, para cada $x \in I$; $x \neq a$, existe $\xi(x)$ entre a e x tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x)$$

, onde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))\,(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

TEOREMA: Seja $f(x)$ uma função que tem todas as derivadas no intervalo $I = (a-r, a+r)$. Se $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, $\forall x \in I$. Então:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi(x)) \cdot (x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Série de Taylor de $f(x)$

EXEMPLO: $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = 0$

A série de Taylor de sen x é $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

$$|f^{(n+1)}(\xi(x))| = \begin{cases} |\operatorname{sen} \xi(x)|, & n \text{ é ímpar} \\ |\cos \xi(x)|, & n \text{ é par} \end{cases}$$

≤ 1

$$0 \leq |R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi(x))|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = a_{n+1}$$

$$a_n = \frac{|x|^n}{n!}$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente (CRITÉRIO DA RAZÃO)

$\Downarrow$ critério do termo geral

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\Downarrow$

$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \longrightarrow \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \ \forall x \in \mathbb{R}$

EXEMPLO: $f(x) = e^x$, $a = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = e^x \\ f'(x) = e^x \\ \vdots \\ f^{(n)}(x) = e^x \end{array}\right\} f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

A série de Taylor de e^x é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$0 \leq |R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi(x))|}{(n+1)!} |x|^{n+1} = e^{(\xi(x))} \cdot \underbrace{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}_{a_{n+1}}$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Solução de uma EDO linear de 2ª ordem usando séries de potência próximas a um ponto ordinário

DEFINIÇÃO: sejam $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ três polinômios e considere a equação:

(1) $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$

a) se $P(x_0) \neq 0$ dizemos que x_0 é um ponto ordinário de (1)

b) se $P(x_0) = 0$ dizemos que x_0 é um ponto singular de (1)

Suponhamos que x_0 seja um ponto ordinário da equação (1) e queremos encontrar a solução de (1) satisfazendo condições iniciais $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

Vamos procurar soluções de (1) do tipo

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n = c_0 + c_1 \cdot (x-x_0) + \ldots$$

$$y(x_0) = c_0 = y_0$$

$$y' = c_1 + 2c_2(x_0 - x_1) + 3c_3(x-x_1)^2 + \ldots$$

$$y'(x_0) = c_1 = y_1$$

EXEMPLO: Encontre a solução da equação diferencial (1) $y'' + xy' + y = 0$ usando série de potências em torno de $x_0 = 0$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \cdot n \cdot c_n \cdot x^{(n-2)} \rightsquigarrow p = n-2 \rightsquigarrow y'' = \sum_{p=0}^{\infty} (p+1)(p+2)\, c_{p+2}\, x^p$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\, c_{n+2}\, x^n$$

$y'' + xy' + y = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\, c_{n+2}\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)\, c_{n+2} + n \cdot c_n + c_n\right] \cdot x^n = 0$$

FÓRMULA DE RECORRÊNCIA

$$(n+1)(n+2)\, c_{n+2} + c_n(n+1) = 0 \sim c_{n+2} = \frac{-c_n}{n+2}, \quad n \geq 0$$

$n=0 \rightarrow c_2 = -\frac{c_0}{2}$

$n=1 \rightarrow c_3 = -\frac{c_1}{3}$

$n=2 \rightarrow c_4 = -\frac{c_2}{4} = \frac{c_0}{2.4}$

$n=3 \rightarrow c_5 = -\frac{c_3}{5} = \frac{c_1}{3.5}$

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n . c_0}{2.4 \dots (2n)} = \frac{(-1)^n c_0}{n! \, 2^n}$$

$$c_{2n+1} = \frac{(-1)^n . c_1}{1.3.5.7 \dots (2n+1)}$$

$$y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n . n!} x^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1.3.5 \dots (2n+1)} x^{2n+1}$$

EXEMPLO: Encontre a solução geral da equação diferencial (1) $(1-x)y'' + y = 0$ usando séries de potência em torno de $x_0 = 0$.

$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n . x^n$

$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n . c_n \, x^{n-1}$

$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) . n . c_n . x^{n-2}$

$y'' - xy'' + y = 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) . n . c_n \, x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) . n . c_n . x^{n-1} + \sum_{n=0} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} . x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) . n \, c_{n+1} x^n + \sum c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) c_{n+2} - (n+1) n . c_{n+1} + c_n \right] x^n = 0$$

$$c_{n+2} = \frac{(n+1) . n . c_{n+1} - c_n}{(n+2)(n+1)}$$

$n=0 \rightarrow c_2 = \frac{-c_0}{1.2}$

$n=1 \rightarrow c_3 = \frac{2.1 . c_2 - c_1}{3.2} = \frac{-c_0 - c_1}{3.2}$

$n=2 \rightarrow c_4 = \frac{3.2 . c_3 - c_2}{4.3} = \frac{-c_0 - c_1 - c_2}{4.3}$

$$c_{2n} = \frac{\sum_{n=0}^{2n-2} - c_n}{2n . (2n-1)}$$

$$c_{2n+1} = \frac{\sum_{n=0}^{2n-1} - c_n}{(2n+1) 2n}$$

NÃO É TERMO GERAL

$$y = c_0\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2.3}x^3 + \left(-\frac{1}{2^2.3} + \frac{1}{2.3.4}\right)x^4 + \dots\right) +$$

$$c_1\left(x - \frac{1}{2.3}x^3 - \frac{1}{2^2.3}x^4 + \dots\right)$$

EXEMPLO: $xy'' + y' + xy = 0$, $x_0 = 1$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n$$

$$[(x-1)+1]\,y'' + y' + [(x-1)+1]\,y = 0$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n (x-1)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)c_n.(x-1)^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-1)^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n.c_n(x-1)^{n-1}$$

RESOLVER!!!

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,c_n (x-1)^{n-2}$$

EXEMPLO: $(x^3 + 3x^2 - 2x + 1)y'' + (2x^2 - 1)y' + xy = 0$, $x_0 = 1$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n$$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 2$

$f''(x) = 6x + 6$

$f'''(x) = 6 \sim f^{(4)}(x) = 0$

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}.(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$f(x) = 3 + 7(x-1) + 6(x-1)^2 + (x-1)^3$$

$g(x) = 2x^2 - 1$

$g'(x) = 4x$

$g''(x) = 4$

$$g(x) = 1 + 4(x-1) + 2(x-1)^2$$

RESOLVER!!!

Solução de uma EDO linear de 2ª ordem usando série de Taylor próximo a um ponto ordinário

DEFINIÇÃO: A função $y = f(x)$ é chamada analítica em $x_0 \in \mathbb{R}$ se a série de Taylor de $f(x)$ em x_0 converge para todo x em um intervalo centrado em x_0, isto é, existe $r > 0$ tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n, \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \Leftrightarrow |x - x_0| < r$$

TEOREMA: Sejam $p(x)$ e $q(x)$ duas funções analíticas em $x_0 \in \mathbb{R}$, considere a equação (1) $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

a) Então a solução geral de (1) pode ser escrita na forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$ onde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções L.i. de (1) analíticas em x_0.

b) Sejam:
- r_1 = raio de convergência da série de $p(x)$
- r_2 = raio de convergência da série de $q(x)$
- s_1 = raio de convergência da série de $y_1(x)$
- s_2 = raio de convergência da série de $y_2(x)$

$r = \min(r_1, r_2) \Downarrow s_1 \geq r$ e $s_2 \geq r$

DEFINIÇÃO: Seja (1) $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ e sejam $p(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ e $q(x) = \dfrac{R(x)}{P(x)}$ se $p(x)$ e $q(x)$ forem analíticas em x_0, dizemos que x_0 é um ponto ordinário de (1).

EXEMPLO: Consideremos a ~~série~~ equação (1) $y'' + \operatorname{sen} x \, y' + (1 + x^2) y = 0$

a) Encontre os três primeiros termos da série de potências das duas soluções linearmente independentes $y_1(x)$ e $y_2(x)$ de (1) em torno de $x_0 = 0$.

b) Determine o maior intervalo onde podemos garantir que as séries das soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ convergem.

a) $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)\, x^n}{n!} = y(0) + \frac{y'(0).x}{1!} + \frac{y''(0)\, x^2}{2!} + \ldots$

$y'' + (\text{sen}\, x)\, y' + (1+x^2)\, y = 0 \quad , \quad y(0) = C_0 \quad , \quad y'(0) = C_1$

(1) $y''(0) + (\text{sen}\, 0)\, y'(0) + (1+0^2)\, y(0) = 0$

$y''(0) = -y(0) = -C_0$

(2) $0 = y''' + (\cos x)\, y' + \text{sen}\, x\, y'' + 2xy + (1+x^2)\, y'$

$0 = y''' + (\text{sen}\, x)\, y'' + (\cos x + 1 + x^2)\, y' + 2xy$

$0 = y'''(0) + (\text{sen}\, 0)\, y''(0) + (\cos 0 + 1 + 0)\, y'(0) + 2.0.\, y(0)$

$y'''(0) = -2C_1$

(3) $y^{(4)} = -y'' - 2y'' + 2y(0)$

$y^{(4)}(0) = 3C_0 - 2C_0 = C_0$

$y = y_0 + \frac{y'(0)}{1!}.x + \frac{y''(0)}{2!}.x^2 + \ldots$

$y = C_0 \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \ldots\right)}_{y_1(x)} + C_1 \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3} + \ldots\right)}_{y_2(x)}$

b) r_1 = raio da série de sen x $= +\infty$

r_2 = raio da série de $x^2+1 = +\infty$

$r = \min(r_1, r_2) = +\infty$

$\Downarrow$

$r_1 \geq r = \infty \longrightarrow r_1 = +\infty$

$r_2 \geq r = \infty \longrightarrow r_2 = +\infty$

EXEMPLO: Resolva a equação (1) $(1-x^2)\, y'' + xy' + \alpha^2 y = 0$ usando séries de Taylor em torno de $x_0 = 0$

$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!}.x^n \rightsquigarrow y(0) = C_0 \quad , \quad y'(0) = C_1$

(1) $y''(0) + \alpha^2.\, y(0) = 0$

$y''(0) = -\alpha^2.C_0$

(2) $0 = -2xy'' + (1-x^2)y''' - y' - xy'' + \alpha^2 y'$

$(1-x^2)y''' - 3xy'' + (\alpha^2-1)y' = 0$

$1\cdot y'''(0) - 3\cdot 0\cdot y''(0) + (\alpha^2-1)\cdot y'(0) = 0$

$y'''(0) = (1-\alpha^2)\cdot C_1$

(3) $0 = -2xy''' + (1-x^2)y^{(4)} - 3y'' - 3xy''' + (\alpha^2-1)\cdot y''$

$(1-x^2)y^{(4)} - 5xy''' + (\alpha^2-4)y'' = 0$

$1y^{(4)}(0) + (\alpha^2-4)\,y''(0) = 0$

$y^{(4)}(0) = -\alpha^2(4-\alpha^2)\,C_0$

(4) $(1-x^2)\,y^{(5)} - 7x\,y^{(4)} + (\alpha^2-9)\,y^{(3)} = 0$

$y^{(5)}(0) = (9-\alpha^2)(1-\alpha^2)\,C_1$

$$y = C_0 + C_1 x - \frac{\alpha^2 C_0}{2!}x^2 + \frac{(1-\alpha^2)\,C_1 x^3}{3!} - \frac{\alpha^2(4-\alpha^2)\,C_0 x^4}{4!} + \frac{(1-\alpha^2)(9-\alpha^2)\,C_1 x^5}{5!} + \dots$$

$$y = C_0\left[1 - \frac{\alpha^2}{2!}x^2 + \frac{\alpha^2(4-\alpha^2)\,x^4}{4!} - \frac{\alpha^2(4-\alpha^2)(16-\alpha^2)}{6!}x^6 \dots - \frac{\alpha^2(4-\alpha^2)(16-\alpha^2)\dots(2^{2n-2}-\alpha^2)\,x^{2n}}{2n!}\right]$$

$$+ C_1\left[x + \frac{1-\alpha^2}{3!}x^3 + \frac{(1-\alpha^2)(9-\alpha^2)}{5!}x^5 + \frac{(1-\alpha^2)(9-\alpha^2)(25-\alpha^2)}{7!}x^7 + \dots + \frac{(1-\alpha^2)\dots\left[(2n+1)^2-\alpha^2\right]}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right]$$

Solução de uma EDO linear de 2 ordem usando séries de potências próximo a um ponto singular

(MÉTODO DE FROBENIUS)

DEFINIÇÃO: sejam $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ três polinômios e considere a equação

(1) $P(x)\,y'' + Q(x)\,y' + R(x)\,y = 0$

a) Se $P(x_0) = 0$, dizemos que x_0 é um ponto singular de (1)

b) Se x_0 é um ponto singular de (1) e os limites

$$\lim_{x\to x_0} \frac{Q(x)}{P(x)}\cdot(x-x_0) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{P(x)}\cdot(x-x_0)^2$$

existem e são finitos, dizemos que x_0 é um ponto singular regular de (1)

EXEMPLOS: $(x-1)\,y'' + x^2 y' - y = 0$

$P(x) = x-1$ $\quad \rightarrow x_0 = 0 \rightarrow P(x_0) = P(0) = -1 \neq 0 \longrightarrow x_0 = 0$ é ponto ordinário

$Q(x) = x^2$ $\quad x_0 = 1 \rightarrow P(x_0) = P(1) = 0 \rightsquigarrow x_0 = 1$ é ponto singular.

$R(x) = -1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{Q(x)}{P(x)}(x-1) = \lim_{x\to 1} x^2 = 1$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{R(x)}{P(x)}\cdot (x-1)^2 = 0$$

$x_0 = 1$ é ponto singular regular!

Se $x_0 = 0$ for um ponto singular regular de (1). Vamos procurar soluções de (1) do tipo $y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$, $a_0 \neq 0$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

EXEMPLO: Resolver a equação diferencial (1) $2x^2 y'' - xy' + (1+x)y = 0$ próximo ao ponto $x_0 = 0$

$P(x) = 2x^2$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{Q(x)}{P(x)}\cdot(x-0) = \lim_{x\to 0} -\frac{x}{2x^2}\cdot x = -\frac{1}{2} \rightsquigarrow p_0$

$Q(x) = -x$ $\quad r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$

$R(x) = 1+x$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{P(x)}\cdot(x-0)^2 = \lim_{x\to 0} \frac{1+x}{2x^2}\cdot x^2 = \frac{1}{2} = q_0$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \qquad a_0 \neq 0$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\cdot a_n\cdot x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, a_n\cdot x^{n+r-2}$$

$2x^2\, y'' - x\cdot y' + (1+x)\, y = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)\, a_n\, x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n\cdot x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(1) + \sum_{n=0}^{\infty}(2) + \sum_{n=0}^{\infty}(3) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\, x^{n+r}$$

$$= a_0\left[2r(r-1) - r + 1\right]x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left[2(n+r)(n+r-1)\,a_n - (n+r)\,a_n + a_n + a_{n-1}\right]x^{n+r}$$

tilibra

$*\quad 2r\cdot(r-1)-r+1=0$ EQUAÇÃO INDICIAL

$2r^2-3r+1=0 \rightarrow r_1=1 \quad e \quad r_2=1/2$

$*\quad [2(n+r)(n+r-1)-(n+r)+1]\,a_n+a_{n-1}=0$

$$a_n=\frac{-a_{n-1}}{2(n+r)(n+r-1)-(n+r)+1}\;,\quad n\geq 1$$

$\boxed{r_1=1}\quad a_n=\dfrac{-a_{n-1}}{2(n+1)n-n}=\dfrac{-a_{n-1}}{2n^2+n}=\dfrac{-a_{n-1}}{n(2n+1)}$

$n=1 \quad a_1=\dfrac{-a_0}{1.3}$

$n=2 \quad a_2=\dfrac{-a_1}{2.5}=\dfrac{a_0}{(1.3)(2.5)}$ $\qquad a_n=\dfrac{(-1)^n\cdot a_0}{n!\;1.3\ldots(2n+1)}$

$n=3 \quad a_3=\dfrac{-a_2}{3.7}=\dfrac{a_0}{(1.3)(2.5)(3.7)}$

Para $a_0=1 \rightsquigarrow y_1(x)=\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot x^n}{n!\,(3.5\ldots 2n-1)}\right]x^1$

$r_2=1/2 \qquad a_n=\dfrac{-a_{n-1}}{2(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})-(n+\frac{1}{2})+1}=\dfrac{-a_{n-1}}{2n^2-n}$

$n=1\rightarrow \quad a_1=\dfrac{-a_0}{1.1}$

$n=2\rightarrow \quad a_2=\dfrac{-a_1}{2.3}=+\dfrac{a_0}{(1.2)(1.3)}$ $\qquad a_n=\dfrac{(-1)^n\cdot a_0}{n!\,(1.3.5\ldots(2n-1))}$

$n=3\rightarrow \quad a_3=\dfrac{-a_2}{3.5}=-\dfrac{a_0}{1.2.3.\;1.3.5}$

$$y_2(x)=\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^n}{n!\,(1.3.5\ldots(2n-1))}\right]x^{1/2}$$

RESPOSTA $\longrightarrow y=C_1\cdot y_1(x)+C_2\,y_2(x)$

OBSERVAÇÃO: Seja $x_0 = 0$ um ponto singular regular da equação

(1) $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x) = 0$ e sejam

$p_0 = \lim_{x \to 0} \frac{Q(x)}{P(x)} \cdot x$ Então: $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$ EQUAÇÃO INDICIAL

$r_1 \geq r_2$

$q_0 = \lim_{x \to 0} \frac{R(x)}{P(x)} \cdot x^2$

TEOREMA Seja $x_0 = 0$ um ponto singular regular da equação (1) $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x) = 0$ e sejam r_1 e r_2 as duas raízes da equação indicial de (1). Suponhamos que $r_1 \geq r_2$

a) Então existe uma solução de (1) do tipo $y_1(x) = |x|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

b) Se $r_1 \neq r_2$ e $r_1 - r_2 \notin \mathbb{N}$, então existe uma outra solução

$y_2(x) = |x|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ e $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são L.I

c) Se $r_1 = r_2$ existe uma outra solução de (1) do tipo

$y_2(x) = y_1(x) \ln x + |x|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

EXEMPLO: Determine a solução geral da equação (1) $xy'' + y' - y = 0$ em torno de $x_0 = 0$, usando série de potência

$P(x) = x$, $Q(x) = 1$, $R(x) = -1$

$p_0 = \lim_{x \to 0} \frac{Q(x)}{P(x)} (x - x_0) = 1$

(2) $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$

$q_0 = \lim_{x \to 0} \frac{R(x)}{P(x)} (x - x_0)^2 = 0$

$r^2 - r + r = 0$

$r = 0$

$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_0 \neq 0$

$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} \cdot x^n$

$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2} \Rightarrow xy'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) n \cdot a_{n+1} x^n$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)n \cdot a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)n \cdot a_{n+1} + (n+1) a_{n+1} - a_n \right] x^n$$

$$(n+1).n.a_{n+1} + (n+1) a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 \cdot (a_{n+1}) - a_n = 0$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)^2}, \quad n \geq 0$$

$n=0 \rightarrow a_1 = a_0$

$n=1 \rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2.2} = \frac{a_0}{2.2}$

$n=2 \rightarrow a_3 = \frac{a_2}{3^2} = \frac{a_0}{2^2.3^2} = \frac{a_0}{(3!)^2} \rightsquigarrow a_n = \frac{a_0}{[n!]^2}$

Séries de Fourier

DEFINIÇÃO: sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$. Se $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ dizemos que $f(x)$ é periódica de período T

EXEMPLOS: (1) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $T = 2\pi$

$f(x+2\pi) = \operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x = f(x)$

(2) $f(x) = \cos x$, $T = 2\pi$

$f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) = \cos(x) = f(x)$

OBSERVAÇÃO: se $f(x)$ for periódica de período $T > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, então $f(x)$ também será periódica de período kT. De fato

$f(x+kT) = f(x+(k-1)T+T) \Rightarrow f(x+(k-1)T) = f(x+(k-2)T+T) = \ldots = f(x)$

EXEMPLO: Seja $L>0$. Então as funções $f(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$ e $g(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}$ são periódicas de período $T = 2L/n$. De fato,

$$f(x + 2L/n) = \operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{L}\left(x + \frac{2L}{n}\right)\right] = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L} + 2\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)$$

TEOREMA: Seja $T>0$

a) Se $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ são periódicas de período T então

* $g(x) = f_1 + f_2 + \dots + f_n$
* $h(x) = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$

} são periódicas de período de T

b) Se $f_n(x)$ for periódica de período T para $\forall n \in \mathbb{N}$ e

* $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

então $f(x)$ será periódica de período T

TEOREMA: Seja $L>0$. Então

a) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx = \int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx = 0$, $\forall n \geq 0$

b) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$

c) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$

d) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$

DEFINIÇÃO: Seja $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, uma função periódica de período $2L$, onde $L>0$. Suponhamos que $f(x)$ seja contínua por partes no intervalo $[-L, L]$. A série de Fourier de $f(x)$ é a série

* $$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

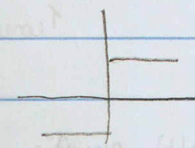
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 0 \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1$$

Se $f(t)$ é periódica de período 2π, então:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nt$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\,dt$$

EXEMPLO: $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \pi \\ -1, & -\pi \le t \le 0 \end{cases}$ é periódica de período π



FUNÇÃO ÍMPAR $\Downarrow$ $\boxed{b_n}$, $a_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -1\,dt + \int_0^{\pi} 1\,dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(-t\Big|_{-\pi}^{0} + t\Big|_0^{\pi}\right) = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\cos nt\,dt + \int_0^{\pi}\cos nt\,dt\right] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\operatorname{sen} nt\,dt + \int_0^{\pi}\operatorname{sen} nt\,dt\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nt}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{\cos nt}{n}\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right]$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{nt}\left[1-(-1)^n\right]\operatorname{sen} nt = \frac{4}{\pi}\operatorname{sen} t + \frac{4}{3\pi}\operatorname{sen} 3t + \frac{4}{5\pi}\operatorname{sen} 5t$$

Generalização de séries de Fourier para o período 2L

Seja $f(t+2L) = f(t)$

DEFINA: $g(v) = f\left(\frac{Lv}{\pi}\right)$ Assim, $g(v+2\pi) = f\left(\frac{L(v+2\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{Lv}{\pi} + 2L\right)$

$$g(v+2\pi) = f(Lv/\pi) = g(v)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(v)\,dv = \frac{1}{\pi}\int_{v=-\pi}^{v=\pi} f\left(\frac{Lv}{\pi}\right)dv$$

Seja $t = \frac{Lv}{\pi}$, $dt = \frac{L}{\pi}$, $v = \pi \Rightarrow t = L$, $v = -\pi \rightarrow t = -L$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(t)\,\frac{\pi}{L}\,dt = \frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L} f(t)\,dt$$

Então:

* $a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt \rightsquigarrow a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cdot\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt$, $b_n = \frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L} f(t)\,\text{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt$

Teorema de Convergência de Fourier

Seja $f(t)$ periódica $p = 2L$, $f(t)$ contínua por partes, então a sua série de Fourier $\frac{a_0}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\text{sen}\,\frac{n\pi t}{L}$, onde a_0, a_n, b_n são

* converge para $f(t)$ a menos dos pontos de descontinuidade. Nos pontos de descontinuidade t a série de Fourier converge para $\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$

Funções Pares e Ímpares

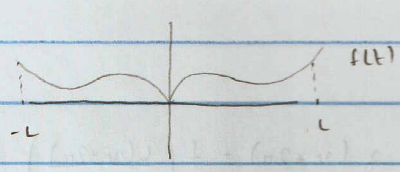
f é par $f(t) = f(-t)$ | f, g pares $\Rightarrow f \cdot g(t)$ par

f é ímpar $f(t) = -f(-t)$ | f, g ímpares $\Rightarrow f \cdot g(t)$ ~~ímpar~~ par

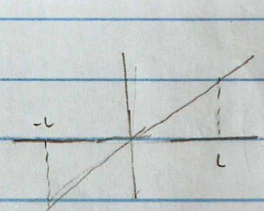
Obs: se $f(t)$ é par $\Rightarrow$ a função pode ser expressa apenas como série ~~de~~ de cossenos

se $f(t)$ é ímpar $\rightarrow$ série de senos $(a_0 = 0)$

Extensão Par

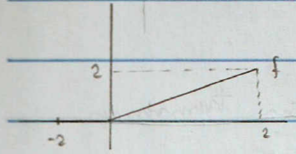


Extensão Ímpar



tilibra

EXEMPLO: Calcula a série de Fourier



$p = 4 \Leftrightarrow L = 2$

$$a_0 = \frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^{2} f(t)\,dt = \frac{1}{2} \int_{0}^{2} t\,dt = 1$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^{2} f(t) \cos \frac{n\pi t}{2}\,dt = \frac{1}{2} \int_{0}^{2} t \cos \frac{n\pi t}{2}\,dt$$

$u = t \qquad dv = \cos \frac{n\pi t}{2}\,dt$

$du = dt \qquad v = \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2}$

$$a_n = \frac{1}{2}\left[\frac{2t}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2}\Big|_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{2}\,dt\right] = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n\pi}\right)^2 \cos\frac{n\pi t}{2}\Big|_0^2$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 t \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[t\,\frac{(-2)}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{2}\Big|_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \cos\frac{n\pi t}{2}\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n\pi)^2}\left[(-1)^n - 1\right]\cos\frac{n\pi t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{2}$$

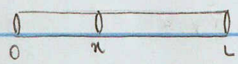
* SE NÃO FOR DITO QUE TIPO DE FUNÇÃO É, E NEM ATRAVÉS DO DESENHO. DEVE-SE FAZER A SÉRIE DE FOURIER PARA a_n E b_n.

/ /

Condução do calor numa barra

Consideremos uma barra de comprimento L, com secção transversal uniforme e material homogéneo.

Suponhamos que:



a) Os lados da barra estão perfeitamente isolados

b) A temperatura em dois pontos distintos numa mesma secção transversal é igual

c) A constante de difusibilidade térmica do material da barra é a^2

Seja $u(x,t)$ a temperatura da barra nos pontos da secção transversal determinada por x e no tempo $t \geq 0$

Então a equação de condução do calor é dada por:

(1) $\alpha^2 u_{xx} = u_t$, $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$

Suponhamos que a temperatura inicial seja dada por uma função $f(x)$ (não nula), isto é,

(2) $u(x,0) = f(x)$, $0 \leq x \leq L$

e que a temperatura nos extremos da barra seja mantida igual a zero, isto é, $u(0,t) = u(L,t) = 0$, $\forall t \geq 0$

A condição (2) é chamada de condição inicial e as condições (3) de condições de contorno.

SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

Suponhamos que existam duas funções $X(x)$ e $T(t)$ tal que

(4) $u(x,t) = X(x) . T(t)$, $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} u_x = X' . T(t) \rightarrow u_{xx} = X'' \, T(t) \\ u_t = X(x) . T' \end{array}\right\} \alpha^2 . X'' . T = X . T'$$

(5) $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{\alpha^2 . T(t)} = -\sigma$, $\forall t \geq 0$, $0 \leq x \leq L$

(6) $X'' + \sigma X = 0$

(7) $T' + \alpha^2 \sigma T = 0$

(3) $\Rightarrow 0 = u(0,t) = X(0).T(t)$

↳ $X(0) = 0$, para $T(t) \neq 0$, $\forall t \geq 0 \rightarrow f(x)$ função não nula

↳ análogo para $X(L)$, $X(0) = X(L) = 0$

$\sigma = 0$

$X'' = 0 \Leftrightarrow X' = k \Leftrightarrow X(x) = k_2 + xk_1$

$\wedge$ $X(x) = 0$, $f(x) = 0 \Rightarrow u(x,t) = X(x).T(t)$

↳ função $f(x)$ = função nula

contradição

$\sigma < 0$ $\sigma = -\lambda^2$, $\lambda > 0$

$X'' - \lambda^2 X = 0 \rightarrow Q(x) = x^2 - \lambda^2 = 0 \rightarrow x = \pm\lambda$

$X(x) = k_1 e^{\lambda x} + k_2 e^{-\lambda x}$

$X(0) = 0 \rightarrow k_1 + k_2 = 0$

$X(L) = 0 \rightarrow k_1 e^{\lambda L} + k_2 e^{-\lambda L}$

$\sigma > 0$, $\sigma = \lambda^2$, $\lambda > 0$

$X'' + \lambda^2 = 0 \rightarrow Q(x) = x^2 + \lambda^2 = 0$

$x = \pm i\lambda$

$X(x) = k_1 \cos\lambda x + k_2 \sin\lambda x \longrightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L}$

$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$

$T' = -\alpha^2 \sigma T$

$\frac{T'}{T} = -\alpha^2 \sigma + C_1 \longrightarrow \sigma = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$

$\ln(T(t)) = -\alpha^2 \sigma t$

$T(t) = e^{-\alpha^2 \sigma T}$

$T(t)_n = e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2}$

Então, para cada $n \geq 1$

$$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = \exp\left(\frac{-\alpha^2 \pi^2 n^2 t}{L^2}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

é uma solução de (1) que satisfaz as condições de contorno (3)

Seja $(c_n)_{n\geq 1}$ uma sequência numérica tal que a série

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t)$ seja convergente

$(2) \Rightarrow u(x,0) = f(x)$

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Podemos estender $f(x)$ a toda reta $\mathbb{R}$ de forma a ser periódica de período $2L$ e ímpar

$-L \quad 0 \quad L$

Assim $c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$, $n \geq 1$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \text{ onde}$$

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Problema de condução de calor

Consideremos uma barra de comprimento L, com secção transversal uniforme e material homogêneo. Suponhamos que:

- os lados da barra estejam perfeitamente isolados
- a temperatura da barra é igual em todos os pontos de uma mesma secção transversal
- a constante de difusibilidade térmica do material da barra é α^2

Seja $u(x,t)$ a temperatura da barra nos pontos da secção transversal determinada por x. Então a equação de condução do calor é dada por:

(1) $\alpha^2 u_{xx} = u_t$, $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$

Suponhamos que a distribuição inicial de temperatura seja dada por uma função $f(x)$ (não nula), isto é, (2) $u(x,0) = f(x)$, $0 \leq x \leq L$ (CONDIÇÃO INICIAL)

Suponhamos que as extremidades da barra estejam perfeitamente isoladas, isto é, (3) $u_x(0,t) = 0$ e $u_x(L,t) = 0$, $\forall t \geq 0$ (CONDIÇÕES DE CONTORNO)

SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

Suponhamos que existam funções $X(x)$ e $T(t)$ tais que

(4) $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$u_{xx} = X'' \cdot T$ e $u_t = X \cdot T'$

(1) $\alpha^2 \cdot u_{xx} = u_t$

$\alpha^2 \cdot X'' \cdot T = X \cdot T'$

(5) $\dfrac{X''}{X} = \dfrac{1}{\alpha^2} \cdot \dfrac{T'}{T} \rightarrow \dfrac{X''}{X} = \dfrac{T'}{\alpha^2 T} = -\sigma$

$$\begin{cases} (6) \quad X'' + X\sigma = 0 \\ (7) \quad T' + \alpha^2 T \sigma = 0 \end{cases}$$

$u_x(0,t) = X'(0) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0$ ou $T(t) = 0$

· $T(t) = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0 = f(x)$, $\forall t \rightarrow$ não é válido pois $f(x)$ = função não-nula

· $X'(0) = 0$, analogamente $X'(L) = 0$

(8) $X'(0) = X'(L) = 0$

$\sigma = 0$: $X'' = 0 \rightarrow X' = k_1 \rightarrow X = k_1 x + k_2$

Da equação (8), tem-se que $k_1 = 0 \Rightarrow X = k_2 \rightarrow X_0(x) = 1$

$T' = 0 \rightarrow T = k_1 \rightarrow T_0(t) = 1$, $\forall t \geq 0$

$u_0(x,t) = 1 \rightarrow$ solução de (1) que verifica (3)

$\sigma < 0$ $\sigma = -\lambda^2$, $\lambda > 0$

$X'' - \lambda^2 X = 0 \rightarrow Q(r) = r^2 - \lambda^2 = 0 \rightarrow r = \pm\lambda$

$X(x) = k_1 e^{\lambda x} + k_2 e^{-\lambda x}$

$X'(x) = k_1 e^{\lambda x} - k_2 \lambda e^{-\lambda x} \rightarrow X(t) = 0$, $\forall x$

$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) = 0$

contradição.

$\sigma > 0 \quad \sigma = \lambda^2, \lambda > 0$

$X'' + \lambda^2 X = 0 \rightarrow Q(r) = r^2 + \lambda^2 = 0 \rightarrow r = \pm i\lambda$

$X(x) = k_1 \cos \lambda x + k_2 \operatorname{sen} \lambda x$

$X'(x) = -k_1 \lambda \operatorname{sen} \lambda x + k_2 \lambda \cos \lambda x$

$$\begin{cases} X'(0) = 0 \rightarrow k_2 = 0 \\ X'(L) = 0 \rightarrow -k_1 \lambda \underbrace{\operatorname{sen} \lambda L}_{=0} = 0 \Rightarrow \lambda L = n\pi, \ n \geq 1 \end{cases}$$

$\lambda = \frac{n\pi}{L}$

$X(x) = k_1 \cos \lambda x + b_1 \cos \frac{n\pi x}{L}$

$X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}$

$T' + \alpha^2 \lambda^2 T = 0 \Rightarrow \frac{T'}{T} = -\alpha^2 \lambda^2 \Rightarrow \ln T = -\alpha^2 \lambda^2 t$

$T = \exp(-\alpha^2 \lambda^2 t)$

$T_n(t) = \exp\left(\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} \cdot t\right)$

$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$

$= \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} \cdot t\right) \cdot \cos \frac{n\pi x}{L}$ é uma solução de (1) que satisfaz (3), para $\forall n \geq 1$

Seja $(c_n)_{n \geq 0}$ uma sequência numérica tal que a série $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x,t)$ seja convergente. Temos que $u(x,t)$ é uma solução de (1) que verifica (3). $f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot u_n(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{L}$

Estendemos a função $f(x)$ para a toda a reta de forma a ser periódica de período $2L$ e par. Assim:

$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \ n \geq 1 \qquad c_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \, dx$

Então:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L} \cdot t\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$c_0 = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L f(x) \, dx$$

EXEMPLO: Resolver a equação

(1) $7 u_{xx} = u_t$ sabendo que

(2) $u(x,0) = x$, $0 \le x \le 2$

(3) $u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0$, $\forall t \ge 0$

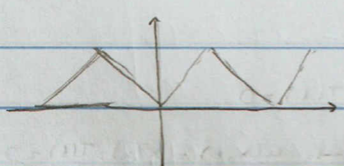
$\alpha^2 = 7$, $L = 2$, $f(x) = x$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{7\pi^2 n^2}{2^2} t\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$c_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 x\, dx$$

EXERCÍCIO: $f(x) = x$, $0 \le x \le 2$, determinar a série de Fourier de extensão par de $f(x)$



FUNÇÃO PAR

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = \int_{-1}^{1} x \cos n\pi x\, dx$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} x\, dx$$

$$a_0 = 1\int_{-1}^{1} x\, dx = \frac{x^2}{2} = 0$$

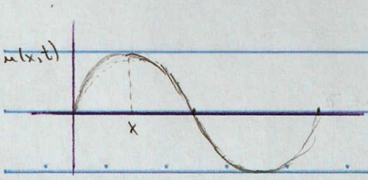
EXERCÍCIO: Resolver a equação usando o método de separação de variáveis

$x u_x = t u_y$ $\quad u(x,t) = X(x).T(t)$

$u(x,1) = -x^2 + 2x$

Vibrações de uma corda elástica (equação da onda)

Consideremos uma corda elástica de comprimento L fortemente esticada entre dois suportes. Suponhamos que a corda seja movimentada de forma que vibre em um plano vertical



Seja $u(x,t)$ o deslocamento vertical da corda no ponto x e no tempo t. A equação da onda é dada por (1) $a^2 u_{xx} = u_{tt}$

onde $a^2 = T/\rho$, T= tensão na corda e ρ = densidade linear

Suponhamos que os extremos da corda permaneçam fixos, isto é,

(2) $u(0,t) = u(L,t) = 0$ condições de contorno

Suponhamos que a posição inicial da corda seja dada pela função $f(x)$ (não nula), isto é,

(3) $u(x,0) = f(x)$, $\forall\, 0 \leq x \leq L$ e que a velocidade inicial da corda seja dada pela função $g(x)$, isto é, (4) $u_t(x,0) = g(x)$, $0 \leq x \leq L$

As equações (3) e (4) são chamadas de condições iniciais.

Queremos encontrar $u(x,t)$ satisfazendo (1), (2), (3) e (4)

SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

$u(x,t) = X(x).T(t)$ (5)

$a^2 X''T = XT''$ $\Leftarrow$ (1)

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{T''}{T} = -\sigma$$

$$\begin{cases} (6) & X'' + \sigma X = 0 \\ (7) & T'' + a^2\sigma T = 0 \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow$ $u(0,t) = X(0).T(t) = 0$

$T(t) = 0$; $\forall t \geq 0 \rightarrow u(x,t) = X(x).T(t) = 0$

$\forall x,y.$ $f(x) = u(x,0) = 0$, $\forall x \Rightarrow$ CONTRADIÇÃO!

$X(0) = 0$ analogamente $X(L) = 0$

(8) $X(0) = X(L) = 0$

$\sigma = 0$ (NÃO PODE SER)

$\sigma < 0$ (NÃO PODE SER)

$\sigma > 0$: $\sigma = \lambda^2$, $\lambda > 0$

(6) $\Rightarrow$ $X'' + \lambda^2 X = 0$

$Q(r) = r^2 + \lambda^2 = 0 \rightarrow r = \pm i\lambda$

$X(x) = k_1 \cos \lambda x + k_2 \sin \lambda x$

(8) $\Rightarrow$ $0 = X(0) = k_1$

$0 = X(L) = \underset{\neq 0}{k_2}\, \underset{= 0}{\sin \lambda L} \rightarrow \lambda L = n\pi$

$\lambda = \frac{n\pi}{L}$, $n \geq 1$ $n \in \mathbb{Z}$

$X_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$, $n \geq 1$, $k_2 = 1$

(7) $\Rightarrow T'' + \lambda^2 a^2 T = 0$

$Q(r) = r^2 + \lambda^2 a^2 = 0 \rightarrow r = \pm i\lambda a$

$T(t) = a_1 \cos \lambda a.t + b_1 \operatorname{sen} \lambda a t$

$T_n(t) = a_1 \cos \frac{n\pi a t}{L} + b_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi a t}{L}$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}$

$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$

$u_n(x,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi a t}{L}\right) - b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a t}{L}\right)\right]$, $n \geq 1$ e $n \in \mathbb{Z}$

são soluções de (1) que satisfazem (2)

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[a_n \cos \frac{a n t \pi}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{a n \pi t}{L}\right]$ seja convergente

$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[-a_n \frac{a n \pi}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{a n \pi t}{L}\right) + b_n \frac{a n \pi}{L} \cos\left(\frac{a n \pi t}{L}\right)\right]$

$f(x) = \mu(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \longrightarrow a_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

$g(x) = u_t(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \frac{a n t}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \longrightarrow b_n = \frac{2}{a n \pi} \int_0^L g(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

EXERCÍCIO Calcule a série de Fourier de $f(x) = \operatorname{sen} 2x . \cos 4x + 2\cos^2 2x$

$\operatorname{sen} 2x . \operatorname{sen} 4x = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 6x - \operatorname{sen} 2x)$

$f(x) = (1+\cos 4x) + \left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 6x\right)$

$\cos^2 2x = \frac{1}{2}.(\cos 4x + 1)$

$f(x) = \left(\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + a_4 \cos 4x + \ldots\right) +$

$a_0 = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$, $a_n = 0 \ \forall n \geq 5$

$+ (b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots + b_6 \operatorname{sen} 6x)$

$b_1 = 0 + b_2 = \frac{1}{2}, \ldots b_6 = \frac{1}{2}$, $b_n = 0 \ \forall n \geq 7$

Revisão

① Determinar a série de Taylor das seguintes funções em torno do ponto a:

- $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+2x+3}$, $a = -1$

$* \ \dfrac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n$

- $g(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$, $a = 0$

- $h(x) = \operatorname{sen} x . \cos 2x$, $a = 0$

$\rightarrow x^2+2x+3 = (x^2+2x+1)+2 = (x+1)^2+2$

$$\frac{1}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{(x+1)^2}{2}+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{(x+1)^2}{2}\right)^n$$

$\dfrac{|x+1|^2}{2} < 1$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^{2n}}{2^{n+1}}$$

$|x+1| < \sqrt{2} \rightarrow$ raio de convergência

$2x - 1 = 2(x+1) - 3$

$$f(x) = [2(x+1)-3] . \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . (x+1)^{2n}}{2^{n+1}}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . (x+1)^{2n+1}}{2^n} - 3 . \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)(x+1)^{2n}}{2^{2n+1}}$$

→ $g(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = -\frac{A}{1-x} + \frac{1}{2}B \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}$

$A = 1/3, \quad B = -1/3$

$-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(-\frac{1}{3} - \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot (x)^n$

$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = -\frac{1}{3} - \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n+1}} \Rightarrow f^{(n)}(0) = \left[-\frac{1}{3} - \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n+1}}\right] n!$

$|x| < 1$ (1ª série)
$\frac{|x|}{2} < 1$ (2ª série)
} raio de convergência = 1

→ $h(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos 2x \quad , \quad a = 0$

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$

$\frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)) = \operatorname{sen} x \cos 2x$

$\frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(-x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \left(\frac{3^{2n+1}}{2} - \frac{1}{2}\right)$

Obs: $f(x) = \frac{1}{2x+3} = \frac{1}{2(x-1)+5} \quad , \quad a = 1$

$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{5}(x-1)\right)} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n (x-1)^n}{5^n}$

$|u| < 1 \Rightarrow \frac{2}{5} \cdot |x-1| < 1 \rightarrow |x-1| < \frac{5}{2}$ → Raio de convergência

② $xy'' + 2xy' + 6e^x y = 0$

$P(x) = x, \quad Q(x) = 2x, \quad R(x) = 6e^x$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$

$p_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{Q(x)}{P(x)} \cdot x = 0$

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^{n+r}$

$q_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{P(x)} \cdot x^2 = 0$

$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) \, x^{n+r-1}$

$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 \rightarrow$ equação indicial

$r(r-1) = 0 \rightarrow r = 1$

$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (n+r)(n+r-1) \, x^{n+r-2}$

$\rightarrow r = 0$

$\boxed{r=1}$

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^{n+1}, \quad a_0 \neq 0$

$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \, a_n \, x^n$

$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$

Revisão 2

● Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ e contínua por partes no intervalo $[-L, L]$. A série de Fourier de $f(x)$ é dada por:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ (PAR), $\quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ (ÍMPAR)

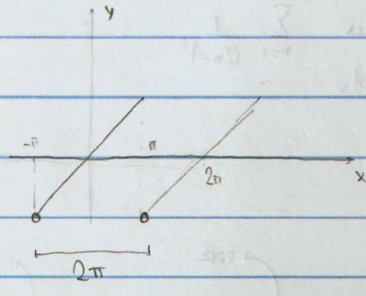
TEOREMA DE FOURIER: Se a série converge para $t = x$, então a soma da série vale $\frac{1}{2}\left[f(x+) + f(x-) \right]$

$f(x+) = \lim_{t \to x^+} f(x) \qquad f(x-) = \lim_{t \to x^-} f(x)$

① a) Encontre a série de Fourier de senos da extensão ímpar da função $f(x) = x$, $0 \leq x \leq \pi$.

b) Use a série da parte (a) para determinar a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

a)



$a_n = 0, \ \forall n \geq 0$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx$$

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\operatorname{sen} nx \, dx}_{dv} = uv - \int v \, du = -x \frac{\cos nx}{n} - \int -\frac{\cos nx}{n} dx = -x \frac{\cos nx}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$

$u = x$ $\quad dv = \operatorname{sen} nx \, dx$

$du = dx$ $\quad v = -\frac{\cos nx}{n}$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(-\pi \frac{\cos n\pi}{n}\right) = -\frac{2\cos n\pi}{n} \rightsquigarrow b_n = \frac{-2(-1)^n}{n}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n} \cos n\pi \cdot \operatorname{sen} nx = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n} (-1)^n \operatorname{sen} nx$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \operatorname{sen}(nx)$$ → SÉRIE DE FOURIER

b)

$$S(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi \\ 0, & x = \pi \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\left[f(\pi+) + f(\pi-)\right]$$

$f(\pi+) \to -\pi$ $\quad f(\pi-) \to +\pi$

para $x = \pi/2$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \pm 1 & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$S(\pi/2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{2k+1+1}}{2k+1} (-1)^k$$

$$n = 2k+1 \rightsquigarrow \operatorname{sen}\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(k\pi + \pi/2) = (-1)^k$$

$$\frac{\pi}{2} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

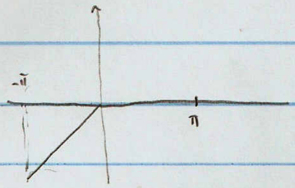
C01

① (a) Encontre a série de Fourier da função:

$$f(x) = \begin{cases} x & , -\pi \leq x < 0 \\ 0 & , 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad \text{tal que } f(x+2\pi) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

(b) Determine usando a parte (a), a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

a)



$$a_0 = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} x \, dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-\pi}^{0} = -\frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} x \cos \frac{n\pi x}{\pi} \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{\overset{\text{PAR}}{\cos n(-\pi)}}{n^2} \right) = \frac{1}{\pi n^2} (1 - \overset{(-1)^n}{\cos n\pi})$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} x \operatorname{sen} nx \, dx$$

$$\int \underset{u}{x} \underbrace{\cos nx \, dx}_{dv} = x \cdot \frac{\operatorname{sen} nx}{n} - \int \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \, dx = \frac{x \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}$$

$du = dx$

$v = \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$

$a_n = 0$, n é par

$n = 2k-1 \longrightarrow a_{2k-1} = \frac{2}{\pi (2k-1)^2}$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{-x \cos nx}{n} + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2} \right) \Bigg|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\cancel{\pi}} \left(- \left(\frac{-\cancel{(-\pi)} \cos n(-\pi)}{n} \right) \right) = - \frac{\cos n\pi}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$-\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi (2k-1)^2} \cos[(2k-1)x] + \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen} [(2k-1)x]$$

b)
$$S(x) = \begin{cases} x & , -\pi < x < 0 \\ 0 & , 0 < x < \pi \\ -\pi/2 & , x = \pi \end{cases} \quad \text{(VIDE - GRÁFICO)}$$

$x = \pi$

$$S(\pi) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{(2k-1)^2} \cos[(2k-1)\pi]$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)}{(2k-1)^2} \Rightarrow \cancel{-}\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(\cancel{-}1)}{(2k-1)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$