F 415 - Mecânica Geral II - Prof. Eduardo Granado
Prova IV – 21/11/2012

1) Uma corda sem nenhum deslocamento inicial é colocada em movimento através de um impulso sobre um comprimento *2s* em torno de seu centro. A esta seção central é dada uma velocidade inicial v_0. Descreva o movimento subsequente da corda, i.e., determine $q(x, t)$. (2.5)

2) Considere uma corda consistindo de duas densidades, ρ_1 na região 1 onde $x < 0$ e ρ_2 na região 2 onde $x > 0$. Um trem de onda contínuo incide da esquerda para a direita (ou seja, vindo de x<0).
(a) Encontre a razão entre a amplitudes da onda refletida e a da onda incidente. Encontre a razão entre a amplitudes da onda transmitida e a da onda incidente. (2.0)
(b) Encontre o coeficiente de reflexão e o coeficiente de transmissão. (0.5)

3) Mostre que $(\Delta s)^2 \equiv \sum_{j=1}^{3} x_j^2 - c^2 t^2$ é invariante para todos os sistemas inerciais se movendo em velocidades relativas um em relação ao outro. (2.5)

4) Considere o quadrivetor $\hat{X} \equiv (\vec{x}, ict)$.
(a) A partir das transformações de Lorentz, encontre a matriz 4x4 de transformação $\tilde{\lambda}$ tal que $\hat{X}' = \tilde{\lambda} \hat{X}$. (1.0)
(b) Suponha que existam tres sistemas de referência inerciais, *K*, *K′* e *K″*, que estão em movimento colinear ao longo de seus respectivos eixos x_1 . A velocidade de *K′* com relação a *K* é v_1, e a velocidade de *K″* com relação a *K′* é v_2. Encontre a velocidade de *K″* em relação a *K*, no limite relativístico.
(1.5)

FORMULÁRIO

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0$$

$$q(x,t) = \sum_r [\mu_r \cos(\omega_r t) - \nu_r \sin(\omega_r t)] \sin(r\pi x/L) \; ; \; \omega_r = (r\pi/L)\sqrt{\tau/\rho}$$

$$\mu_r = (2/L)\int_0^L q(x,0) \sin(r\pi x/L)\, dx \; ; \; \nu_r = -(2/\omega_r L)\int_0^L \dot{q}(x,0) \sin(r\pi x/L)\, dx$$

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad ; \quad x_2' = x_2 \quad ; \quad x_3' = x_3 \quad ; \quad t' = \frac{t - v x_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

F-415 - PROVA IV

- GABARITO -

(1) Condições iniciais: $q(x,0) = 0$

$$\dot{q}(x,0) = \begin{cases} v_0 & p/ \ \frac{L}{2} - s < x < \frac{L}{2} + s \\ 0 & \text{de outra forma} \end{cases}$$

Portanto "$\mu_r = 0$"

$$\nu_r = -\frac{2}{\omega_r L} \int_{L/2 - s}^{L/2 + s} v_0 \sin \frac{r\pi x}{L} \, dx$$

$$= \frac{-2v_0}{\omega_r L} \left(-\frac{L}{r\pi}\right) \cos \frac{r\pi x}{L} \Big|_{L/2 - s}^{L/2 + s}$$

$$= \frac{2v_0}{\pi r \omega_r} \left[\cos \frac{r\pi}{L}\left(\frac{L}{2} + s\right) - \cos \frac{r\pi}{L}\left(\frac{L}{2} - s\right)\right]$$

$$= \frac{2v_0}{\pi r \omega_r} \left[\cos\left(\frac{r\pi}{2} + \pi r \frac{s}{L}\right) - \cos\left(\frac{r\pi}{2} - \pi r \frac{s}{L}\right)\right]$$

$$= \frac{2v_0}{\pi r \omega_r} \left[\cancel{\cos \frac{r\pi}{2} \cos \frac{r\pi s}{L}} - \sin \frac{r\pi}{2} \sin \frac{\pi r s}{L} - \cancel{\cos \frac{r\pi}{2} \cos \frac{r\pi s}{L}} - \sin \frac{r\pi}{2} \sin \frac{r\pi s}{L}\right]$$

$$= \frac{-4v_0}{\pi r \omega_r} \sin \frac{r\pi}{2} \sin \frac{r\pi s}{L}$$

Temos que $\sin \frac{r\pi}{2} = \begin{cases} 0 & p/ \ r \text{ par} \\ (-1)^{\frac{r-1}{2}} & p/ \ r \text{ ímpar} \end{cases}$

Portanto

$$\nu_r = \begin{cases} 0 & p/ \ r \text{ par} \\ -\frac{4v_0}{\pi r \omega_r} (-1)^{\frac{r-1}{2}} \sin \frac{r\pi s}{L} & p/ \ r \text{ ímpar} \end{cases}$$

portanto:

$$q(x,t) = \frac{4 v_0}{\pi} \sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n \omega_n} \sin \omega_n t \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi s}{L}$$

onde $\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{T/\rho}$

substituindo, temos

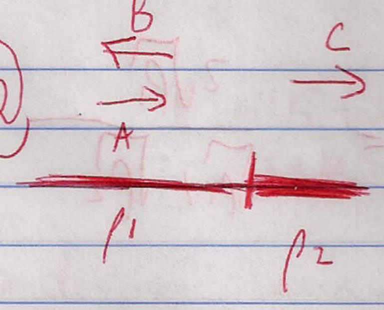
$$q(x,t) = \frac{4 v_0 L}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho}{T}} \sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}\, t\right) \sin \frac{n\pi x}{L} \cdot \sin n\pi s / L$$

Alternativamente, podemos escrever os primeiros termos da série como:

$$\cancel{q(x,t) = \frac{4 v_0 L}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho}{T}} \left[\sin\left(\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}\, t\right) \sin \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{9} \sin \left(\frac{3\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}\, t\right) \sin \frac{3\pi x}{L} + \cdots \right]}$$

$$q(x,t) = \frac{4 v_0 L}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho}{T}} \left[\sin\left(\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}\, t\right) \sin \frac{\pi s}{L} \sin \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{9} \sin\left(\frac{3\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}\, t\right) \sin \frac{3\pi s}{L} \sin \frac{3\pi x}{L} + \cdots \right]$$

2



a) p/ $x < 0$, temos $\Psi_I(x,t) = Ae^{i(wt - k_I x)} + Be^{i(wt + k_I x)}$

p/ $x \geq 0$, temos $\Psi_{II}(x,t) = Ce^{i(wt - k_{II} x)}$

Pela condição de continuidade de Ψ em $x=0$, temos:

$$\Psi_I(0,t) = \Psi_{II}(0,t) \Rightarrow A + B = C \quad (i)$$

Temos também

$$\frac{\partial \Psi_I}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial x}(0,t) \Rightarrow -ik_I A + ik_I B = -ik_{II} C$$

$$\Rightarrow C = \frac{k_I}{k_{II}}(A - B) \quad (ii)$$

Substituindo (ii) em (i), temos:

$$A + B = \frac{k_I}{k_{II}}(A - B) \Rightarrow (k_I - k_{II})A = (k_I + k_{II})B$$

$$\Rightarrow B = \frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}} A$$

Temos que $v = \sqrt{T/\rho} = \frac{w}{k} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{\rho}{T}}\, w$

$$\Rightarrow B = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} A \Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}$$

$$C = A + B = A + \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} A = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} A$$

$$\Rightarrow \frac{C}{A} = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}$$

(b) $$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left(\frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}\right)^2 = \frac{\rho_1 + \rho_2 - 2\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1 + \rho_2 + 2\sqrt{\rho_1\rho_2}}$$

$$\boxed{R = 1 - \frac{4\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1 + \rho_2 + 2\sqrt{\rho_1\rho_2}}}$$

$$\boxed{T = 1 - R = \frac{4\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1 + \rho_2 + 2\sqrt{\rho_1\rho_2}}}$$

(3) $s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2$

$$s'^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - c^2 t'^2$$

$$\Rightarrow s'^2 = \frac{(x_1 - vt)^2}{1 - v^2/c^2} + x_2^2 + x_3^2 - c^2 \frac{(t - vx_1/c^2)^2}{1 - v^2/c^2}$$

$$= \frac{x_1^2 - \cancel{2vx_1t} + v^2t^2}{1 - v^2/c^2} - c^2 \frac{(t^2 - \cancel{2vtx_1/c^2} + v^2x_1^2/c^4)}{1 - v^2/c^2} + x_2^2 + x_3^2$$

$$= \frac{x_1^2(1 - v^2/c^2) - t^2(c^2 - v^2)}{1 - v^2/c^2} + x_2^2 + x_3^2$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2$$

4 a) Seja $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ e $\beta \equiv v/c$

$$x_1' = \gamma x_1 - \gamma\beta c t = \gamma x_1 + i\beta\gamma(ict)$$
$$x_2' = x_2 = x_2$$
$$x_3' = x_3 = x_3$$
$$t' = \gamma(t - v x_1/c^2) \Rightarrow ict' = \gamma(ict) - i\gamma\beta x_1$$

Portanto:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ict \end{pmatrix}$$

b) $\mathbb{X}' = \lambda_1 \mathbb{X}$

$\mathbb{X}'' = \lambda_2 \mathbb{X}'$

$\Rightarrow \mathbb{X}' = \lambda_2 \mathbb{X}' = \lambda_2 \lambda_1 \mathbb{X}$

$$\lambda_2\lambda_1 = \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & 0 & i\beta_2\gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta_2\gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & i\beta_1\gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta_1\gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2 + \beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2 & 0 & 0 & i\beta_1\gamma_1\gamma_2 + i\beta_2\gamma_1\gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma_1\gamma_2\beta_2 - i\beta_1\gamma_1\gamma_2 & 0 & 0 & \beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_2\lambda_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2) & 0 & 0 & i\gamma_1\gamma_2(\beta_1+\beta_2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma_1\gamma_2(\beta_1+\beta_2) & 0 & 0 & \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2) \end{pmatrix}$$

Portanto:

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2)$$

$$\beta\gamma = \gamma_1\gamma_2(\beta_1+\beta_2) \Rightarrow \beta \cdot \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2) = \gamma_1\gamma_2(\beta_1+\beta_2)$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{\frac{v_1}{c}+v_2/c}{1+v_1v_2/c^2} =$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2/c^2}}$$