MA327 Turmas C,D,E - 2S 2011 - Prova 2

Nome: GABARITO RA: ________ 13/10/2011

Respostas sem justificativas serão desconsideradas. Bom trabalho!

1. (a) (05pts) Escreva a definição de complemento ortogonal de um subconjunto de um espaço vetorial com produto interno.

   (b) (05pts) Enuncie o teorema do núcleo e da imagem.

2. Considere o espaço vetorial $V = P_3(\mathbb{R})$ e o subespaço W gerado por $\{1, t, t^2\}$.

   (a) (10pts) Verifique que $\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$ define um produto interno em V. (Pode assumir o seguinte fato: existe um único polinômio $p(t) \in P_3(\mathbb{R})$ satisfazendo $p(-1) = p(0) = p(1) = p(2) = 0$.)

   Nos ítens que seguem, o produto interno considerado em V é o definido no ítem (a).

   (b) (10pts) Encontre $W^{\perp}$.

   (c) (10pts) Dado $p(t) = a+bt+ct^2+dt^3$, calcule $P_W(p)$ e $P_{W^\perp}(p)$ (P_W é a projeção ortogonal no subespaço U).

   (d) (05pts) Calcule o ângulo entre os vetores 1 e $t - t^2$.

   (e) (10pts) Obtenha uma base ortogonal para W.

3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $T(x, y, z) = (x - z, x - y, y - z, 2x - y - z)$.

   (a) (05pts) Verifique que T é linear.

   (b) (10pts) Encontre bases para o núcleo e para a imagem de T.

   (c) (10pts) Seja $\alpha = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$. Encontre uma base β do $\mathbb{R}^4$ tal que a matriz de T com relação às bases α e β seja

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, W um espaço vetorial e $T : V \to W$ uma transformação linear. Determine se as seguinte afirmações são verdadeiras ou falsas

   (a) (10pts) Para todo subconjunto $S \subseteq V$, tem-se $(S^{\perp})^{\perp} = S$.

   (b) (10pts) T é injetiva se e somente se $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(V)$.

Questão 1

(a) Sejam $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço vetorial com produto interno e $S \subset E$ um subconjunto; o complemento ortogonal de S em E é o conjunto (subespaço):

$$S^{\perp} = \{ v \in E \mid \langle u, v \rangle = 0, \ \forall u \in S \}.$$

(b) Sejam V, W espaços vetoriais com $\dim V < +\infty$; para qualquer transformação linear $T: V \to W$ tem-se:

$$\boxed{\dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T) = \dim V}$$

onde $\mathcal{N}(T)$ é o núcleo de T e $\mathcal{I}(T)$ é a imagem.

———— " ————

Questão 2

(a) • SIMETRIA: Como V é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, o produto interno deve ser simétrico; usando a comutatividade em $\mathbb{R}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \langle q, p \rangle &= q(-1)p(-1) + \dots + q(2)p(2) \\ &= p(-1)q(-1) + \dots + p(2)q(2) \\ &= \langle p, q \rangle \end{aligned} \qquad \square$$

• LINEARIDADE: Basta verificar a primeira entrada:

$$\begin{aligned} \langle \alpha p + \beta q, r \rangle &= (\alpha p + \beta q)(-1)\, r(-1) + \dots + (\alpha p + \beta q)(2)\, r(2) \\ &= \big(\alpha p(-1) + \beta q(-1)\big) r(-1) + \dots + \big(\alpha p(2) + \beta q(2)\big) r(2) \end{aligned}$$

$$= \alpha p(-1)r(-1) + \dots + \alpha p(2)r(2)$$
$$+ \beta q(-1)r(-1) + \dots + \beta q(2)r(2)$$
$$= \alpha\langle p,r\rangle + \beta\langle q,r\rangle \qquad \square$$

• POSITIVIDADE: Usando a dica do enunciado tem-se:

$$\langle p,p\rangle = p(-1)^2 + \dots + p(2)^2 \geq 0$$

e $\langle p,p\rangle = 0 \iff p(-1) = \dots = p(2) = 0 \iff p \equiv 0$.

(b) Denotando um elemento genérico de V por $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$, vamos escrever o produto interno de forma conveniente; note que:

$$\check{p} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}}_{\vec{p}}$$

Assim $\langle p,q\rangle = \check{p}^t\check{q} = \vec{p}^t \underbrace{M^t M}_{\tilde{M}} \vec{q}$, com:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$M^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 8 & 18 \\ 6 & 8 & 18 & 32 \\ 8 & 18 & 32 & 66 \end{bmatrix} = \tilde{M}$$

Dessa forma, um elemento p de $W^{\perp}$ deve satisfazer:

$$\begin{cases} \langle 1, p \rangle = 0 \\ \langle t, p \rangle = 0 \\ \langle t^2, p \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{M} \vec{p} = 0$$

$$\iff \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 8 & 18 \\ 6 & 8 & 18 & 32 \end{bmatrix}}_{A} \vec{p} = 0$$

Escalonando A obtemos:

$$A \sim \begin{array}{r} \frac{1}{2}L_2 \\ \frac{1}{2}L_1 \\ \frac{1}{2}L_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{r} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -14 \\ 0 & -5 & -3 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{r} L_1 \\ -\frac{1}{5}L_2 \\ \frac{1}{2}(L_3 - L_2) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 14/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{r} L_1 - 4L_3 \\ L_2 - L_3 \\ L_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13/10 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -9/10 \\ 0 & 1 & 0 & 13/10 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

e portanto:

$$A\vec{p} = 0 \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \lambda' \begin{pmatrix} 9/10 \\ -13/10 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 9 \\ -13 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix}}_{\vec{p}_0}$$

$$\boxed{\therefore\ W^{\perp} = \{ \lambda \vec{p}_0 \mid \lambda \in \mathbb{R} \} = \langle p_0 \rangle}$$

(c) • Usando $\tilde{M}$ calculamos facilmente a projeção sobre $W^{\perp}$, que é a projeção sobre p_0:

$$P_{W^{\perp}}(p) = P_{\langle p_0 \rangle}(p) = \frac{\langle p, p_0 \rangle}{\|p_0\|^2} p_0 \quad , \quad \text{com:}$$

$$\langle p, p_0 \rangle = (a\ b\ c\ d)\, \tilde{M} \begin{pmatrix} 9 \\ -13 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix} = (a\ b\ c\ d) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$= 9(c + 2d)$$

e, em particular,

$$\|p_0\|^2 = \langle p_0, p_0 \rangle = 9(-15 + 20) = 45$$

$$\boxed{\therefore\ P_{W^{\perp}}(p) = \frac{c + 2d}{5} p_0}$$

• Como $V = W \oplus W^{\perp}$, tem-se imediatamente

$$P_W(p) = p - P_{W^{\perp}}(p) = p - \frac{c + 2d}{5} p_0$$

e assim:

$$\boxed{\overrightarrow{P_W(p)} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} - \frac{c+2d}{5}\begin{pmatrix} 9 \\ -13 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix}}$$

(d) Por definição, temos:

$$\cos\theta = \frac{\langle 1, t-t^2\rangle}{\|1\|\,\|t-t^2\|}, \quad \text{com:}$$

$$\|1\|^2 = (1\ 0\ 0\ 0)\tilde{M}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \Rightarrow \|1\| = 2$$

$$\|t-t^2\|^2 = (0\ 1\ -1\ 0)\tilde{M}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0\ 1\ -1\ 0)\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -10 \\ -14 \end{pmatrix}$$

$$= 8 \qquad \Rightarrow \|t-t^2\| = 2\sqrt{2}$$

e

$$\langle 1, t-t^2\rangle = (1\ 0\ 0\ 0)\tilde{M}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1\ 0\ 0\ 0)\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -10 \\ -14 \end{pmatrix}$$

$$= -4$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{-\cancel{4}}{\cancel{2}.\cancel{2}\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\therefore\ \theta = \frac{3\pi}{4}}$$

(e) Utilizando que $(v - P_v u) \perp u$, obtemos um veter ortogonal fazendo:

$$q_1 = (t-t^2) - P_1(t-t^2) = (t-t^2) - \frac{\langle 1, t-t^2 \rangle}{\|1\|^2} 1$$
$$= t - t^2 + 1$$

Seja $\tilde{q}_2 = t$; claramente $\{1, \tilde{q}_2, q_1\}$ é l.i.; logo é uma base de W. Obtemos uma base ortogonal subtraindo as componentes no plano $\{1, q_1\}$:

$$q_2 \approx \tilde{q}_2 - \frac{\langle t, 1 \rangle}{\|1\|^2} 1 - \frac{\langle t, t-t^2 \rangle}{\|t-t^2\|^2}(t-t^2), \quad \text{com:}$$

$$\langle t, 1 \rangle = (0\ 1\ 0\ 0)\tilde{M}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\langle t, t-t^2 \rangle = (0\ 1\ 0\ 0)\tilde{M}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 - 8 = -2,$$

portanto:

$$q_2 \approx t - \frac{2}{4} \cdot 1 - \frac{(-2)}{8}(t-t^2)$$
$$= t - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(t-t^2)$$
$$= +\frac{1}{4}(-t^2 + 5t - 2) = -\frac{1}{4}(t^2 - 5t + 2)$$

$\therefore$ $\{1, t, t^2 - 5t + 2\}$ é uma base ortogonal de W

Questão 3

(a) Tem-se $T(x,y,z) = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}}^{[T]} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, logo T é dada por uma matriz, e o produto de matrizes é linear.

(b) • Escalonando $[T]$ tem-se:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{r} L_1 \\ L_3 \\ L_2 - L_1 \\ L_4 - 2L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{r} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + L_2 \\ L_4 + L_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

logo $T(x,y,z) = 0 \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff x = y = z$

$$\iff (x,y,z) = \lambda(1,1,1) = \lambda v_1$$

$$\boxed{\therefore \{\underbrace{(1,1,1)}_{v_1}\} \text{ é uma base de } \mathcal{N}(T)}$$

• Claramente o completamento $\{v_1, v_2, v_3\}$ por $v_2 = e_2$ e $v_3 = e_3$ (base canônica) é l.i., logo é uma base de $\mathbb{R}^3$; ademais, sabemos que

$\{Tv_2 \text{ e } Tv_3\}$ gera $\mathcal{I}(T)$, pois $Tv_1 = 0$.

Pelo Teorema do núcleo e da imagem, $\dim \mathcal{I}(T) = 3-1=2$, logo $\{Tv_1, Tv_2\}$ é de fato uma base; note que se tratam dos dois últimos vetores-coluna de $[T]$, portanto:

$$\boxed{\therefore \{(0,-1,1,-1), (-1,0,-1,-1)\} \text{ é base de } \mathcal{I}(T)}$$

(c) Temos $\alpha = \{\underbrace{(1,1,1)}_{v_1}, \underbrace{(1,0,1)}_{\tilde{v}_2}, \underbrace{(-1,1,0)}_{\tilde{v}_3}\} \subset \mathbb{R}^3$;

seja $\beta = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, de modo que:

$$\begin{cases} T\tilde{v}_2 = w_4 \\ T\tilde{v}_3 = w_1 - w_3 \end{cases} \quad (*)$$

Como $\tilde{v}_2 = v_1 - v_2$ e $\tilde{v}_3 = -v_1 + 2v_2 + v_3$, e T é linear, $(*)$ equivale a:

$$\begin{cases} w_4 = T(v_1 - v_2) = -Tv_2 = (0,1,-1,1) \\ w_1 - w_3 = T(-v_1 + 2v_2 + v_3) = 2Tv_2 + Tv_3 = (-1,-2,1,-3) \end{cases}$$

Assim, podemos tomar, por exemplo:

$w_1 = (1,0,0,0)$

$w_2 = (0,1,0,0)$

$w_3 = w_1 - (-1,-2,1,-3) = (2,2,-1,3)$

e verificar que $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ são l.i.:

$$\det \begin{bmatrix} \leftarrow w_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow w_4 \rightarrow \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$$

$$\boxed{\therefore \quad \beta = \{(1,0,0,0), (0,1,0;0), (2,2,-1,3), (0,1,-1,1)\}}$$

Questão 4

(a) FALSO: Sabe-se que o complemento ortogonal de qualquer conjunto $S \subseteq V$ é um subespaço, logo $(S^\perp)^\perp$ é sempre um subespaço, embora S não necessariamente o seja. Assim, para qualquer S não-subespaço (exemplo $S = V \setminus \{0\}$), tem-se $(S^\perp)^\perp \neq S$. ▨

~~(b) T é inj~~

(b) VERDADEIRO: T é injetiva $\Leftrightarrow \mathcal{N}(T) = 0$

$\Leftrightarrow \dim \mathcal{N}(T) = 0$

$\Leftrightarrow \dim \mathcal{I}(T) = \dim V - 0 = \dim V$,

pelo teorema do núcleo e da imagem. ▨