1. (*2.0 pontos*)

   (a) (0.8) Encontre o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,3^n}(x+2)^n$. Não esqueça de testar os extremos do intervalo, se for o caso.

   (b) (0.5) Encontre a série de Taylor em torno de $x=0$ da função e^x.

   (c) (0.7) Encontre uma representação em série de potências em torno de $x=0$ da função $f(x) = \int_0^x \frac{e^t-1}{t}\,dt$.

2. (*2.0 pontos*) Resolva a equação diferencial

$$(3-x^2)y'' - 3xy' - y = 0$$

   através de uma série de potências em torno do ponto $x=0$. Encontre a relação de recorrência e as duas soluções linearmente independentes indicando o termo geral de cada solução.

3. (*2.0 pontos*) Dada a equação diferencial $2xy'' + y' + xy = 0$

   (a) (0.3) Mostre que a equação tem um ponto singular regular em $x_0 = 0$.

   (b) (0.5) Determine a equação indicial e suas raízes.

   (c) (0.8) Encontre a relação de recorrência.

   (d) (0.4) Encontre os três primeiros termos não nulos da solução correspondente à maior raiz e dê a forma da solução correspondente à menor raiz .

4. (*2.0 pontos*)

   (a) (0.5) Determine a extensão ímpar da função $f(x) = 25$ para $0 < x < 5$.

   (b) (1.5) Encontre a série de Fourier de senos da extensão ímpar da função $f(x) = 25$ para $0 < x < 5$.

5. (*2.0 pontos*) Resolva o seguinte problema de valor de contorno usando o método de separação de variáveis justificando cada passo detalhadamente:

$$\begin{cases} 10u_t = u_{xx} & 0 \le x \le 5, \quad t > 0; \\ u(0,t) = u(5,t) = 0; & \\ u(x,0) = 25. & \end{cases}$$

$\boxed{1. (a)}$ Seja $a_n = \frac{(-1)^n}{n\,3^n}(x+2)^n$.

0,1 $$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x+2|^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}} \cdot \frac{n\,3^n}{|x+2|^n}$$

0,1 $$= \frac{n}{3(n+1)}\,|x+2|$$

0,1 $$\therefore \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{n}{3(n+1)}|x+2| = \left(\lim \frac{n}{3(n+1)}\right)\cdot|x+2|$$
$$= \frac{1}{3}\left(\lim \frac{n}{n+1}\right)\cdot|x+2|$$
$$= \frac{1}{3}|x+2|$$

0,1 Daí, pelo Teste da Razão, a série dada converge (absolutamente) se $\frac{1}{3}|x+2| < 1$ e diverge se $\frac{1}{3}|x+2| > 1$

0,1 $$\frac{1}{3}|x+2| < 1 \iff |x+2| < 3$$
$$\iff -3 < x+2 < 3$$
$$-5 < x < 1$$

0,1 Análise da convergência para $x = -5$:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,3^n}(-5+2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,3^n}(-3)^n = \underbrace{\sum \frac{1}{n}}_{\text{série harmônica; divergente.}}$$

0,1 Análise da convergência para $x = 1$:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,3^n}(1+2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,3^n}3^n = \sum \frac{(-1)^n}{n}$$
série alternada convergente

0,1 Conclusão: o intervalo de convergência é o intervalo $(-5, 1]$.

$\boxed{1. (b)}$ Seja $f(x) = e^x$.

0,1 [Série de Taylor em torno de $x=0$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

0,2 [
$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad \forall\, n \in \{0,1,2,\dots\}$$
$$\therefore\ f^{(n)}(0) = e^0 = 1, \quad \forall\, n \in \{0,1,2,\dots\}$$

0,2 [
$$\therefore \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$\boxed{1. (c)}$

0,1 [
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

0,3 [
$$\frac{e^t - 1}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!}, \qquad \underline{\forall\, t \in \mathbb{R}}.$$

0,3 [Daí, pelo teorema sobre integração de série de potências, temos que
$$f(x) = \int_0^x \frac{e^t - 1}{t}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{n!}\, dt$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n \cdot n!} \Big|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!}$$

Questão 2:

0,1 Suponha $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Ao substituir na

0,2 equação dada, encontramos

$$(3 - x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 3x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

0,1 ou melhor,

$$3 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1) + 3n + 1] a_n x^n = 0,$$

0,1 ou ainda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} [3(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1)^2 a_n] x^n = 0.$$

0,2 Estabelecemos então a fórmula de recorrência

$$3(n+2) a_{n+2} + (n+1) a_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

0,3 donde $\quad a_{n+2} = -\dfrac{(n+1)}{3(n+2)} a_n.$

Para determinar uma primeira solução particular, escolhemos $a_0=1$ e $a_1=0$. Logo, $a_{2k+1}=0$ e para a_{2k} temos

0,1

$n=0$: $\quad a_2 = -\dfrac{1}{3\cdot 2}$,

$n=2$: $\quad a_4 = -\dfrac{3}{3\cdot 4}\, a_2 = \dfrac{1\cdot 3}{3^2\cdot 2\cdot 4}$,

$n=4$: $\quad a_6 = -\dfrac{5}{3\cdot 6}\, a_4 = -\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{3^3\cdot 2\cdot 4\cdot 6}$,

$\vdots$

e em geral

0,2 $$a_{2k} = (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{3^k\cdot 2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2k)} = (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{3^k\cdot 2^k\cdot k!}.$$

Portanto,

0,2 $$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{6^k\cdot k!} x^{2k}$$

é uma solução particular da equação dada.

Para encontrar uma segunda solução linearmente independente, fazemos $a_0=0$ e $a_1=1$.

Resulta $a_{2k}=0$ e para a_{2k+1} observamos que

0,1 $n=1$: $a_3 = -\dfrac{2}{3\cdot 3}$,

$n=3$: $a_5 = -\dfrac{4}{3\cdot 5}\, a_3 = \dfrac{2\cdot 4}{3^2\cdot 3\cdot 5}$,

$n=5$: $a_7 = -\dfrac{6}{3\cdot 7}\, a_5 = -\dfrac{2\cdot 4\cdot 6}{3^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$,

$\vdots$

e em geral

0,2 $$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2k)}{3^k\cdot 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k+1)} = (-1)^k \frac{2^k\cdot k!}{3^k\cdot 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k+1)}.$$

Portanto,

0,2 $$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k\cdot k!}{3^k\cdot 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k+1)}\, x^{2k+1}$$

é outra solução particular da equação dada.

3.(a) A equação dada é da forma

$$P y'' + Q y' + R y = 0,$$

com $P = 2x$, $Q = 1$ e $R = x$. Então

$$p := \frac{Q}{P} = \frac{1}{2x} \quad e \quad q := \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

A função p não pode ser analítica em $x_0 = 0$, pois não existe o limite $\lim_{x\to 0} p = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2x}$ $(= \pm\infty; \notin \mathbb{R})$

Logo $x_0 = 0$ é um ponto singular.

0,1 até aqui

0,2 Mas as funções

$$(x - x_0) p = x p = \frac{1}{2} \quad e \quad (x-x_0)^2 q = x^2 q = \frac{1}{2} x^2$$

são analíticas em $x_0 = 0$, pois são polinômios. Então $x_0 = 0$ é um ponto singular regular.

3.(b) A equação indicial é dada por $F(r) = 0$, sendo $F(r)$ o polinômio $F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0$, onde

$$p_0 = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) p \quad e \quad q_0 = \lim_{x \to x_0} (x-x_0)^2 q.$$

0,1 até aqui

0,1 $p_0 = \lim_{x \to 0} x p = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $q_0 = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} x^2 = 0$

0,2 Logo, a equação indicial é

$$r(r-1) + \frac{1}{2} r = 0$$

$$r^2 - \frac{1}{2} r = 0$$

$$\boxed{r\left(r - \frac{1}{2}\right) = 0}$$

Daí, as raízes são

0,1 $$r_1 = \frac{1}{2} \quad e \quad r_2 = 0.$$

$\boxed{3. (c)}$ A equação dada se escreve como

$$L[y] \equiv x^2 y'' + \frac{1}{2} x y' + \frac{1}{2} x^2 y = 0.$$

Substituindo $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ (série de Frobenius; tomemos aqui $x>0$),

temos:

0,1

$$L[y] = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} + \frac{1}{2} x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} + \frac{1}{2} x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

0,1

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(n+r) a_n x^{n+r} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} a_n x^{n+r+2}}_{=}$$

0,1

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} a_{n-2} x^{n+r}$$

0,2

$$= [\underbrace{r(r-1) + \tfrac{1}{2} r}_{F(r)}] a_0 x^r + [\underbrace{(1+r)(1+r-1) + \tfrac{1}{2}(1+r)}_{F(1+r)}] a_1 x^{1+r}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ [\underbrace{(n+r)(n+r-1) + \tfrac{1}{2}(n+r)}_{F(n+r)}] a_n + \frac{1}{2} a_{n-2} \right\} x^{n+r}$$

Daí obtemos a relação de recorrência

0,2

$$F(1+r)\, a_1 = 0$$

$$F(n+r)\, a_n = -\frac{1}{2} a_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

$\boxed{\text{Cont. } 3.(c)}$

Como $F(r) = r(r-\frac{1}{2})$ (item (b)), temos

$$F(1+r) = (1+r)(r+\tfrac{1}{2})$$
$$F(n+r) = (n+r)(n+r-\tfrac{1}{2}),$$

logo, ficamos com

0,1

$$(1+r)(r+\tfrac{1}{2})a_1 = 0, \quad \boxed{a_1 = 0} \quad (\text{para todo } r \neq -1, -\tfrac{1}{2})$$

$$(n+r)(n+r-\tfrac{1}{2})a_n = -\tfrac{1}{2}a_{n-2}$$

$$\boxed{a_n = \frac{-a_{n-2}}{2(n+r)(n+r-\frac{1}{2})}}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

$\boxed{3.(d)}$ Para $r = 1/2$ (a maior raiz), pelo item (c), temos:

0,2

$$a_1 = 0$$

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{2(n+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2})} = \frac{-a_{n-2}}{n\cdot(2n+1)}.$$

$$(a_n = 0, \ \forall n \text{ ímpar}).$$

$$a_2 = \frac{-a_0}{2\cdot 5} = -\frac{1}{2\cdot 5}, \quad \text{tomando } \underline{a_0 = 1}.$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4.9} = \frac{1}{(2\cdot 4)(5\cdot 9)}$$

Logo a solução correspondente à maior raiz é

$$y_1 = 1 - \frac{1}{2\cdot 5}x^2 + \frac{1}{(2\cdot 4)(5\cdot 9)}x^4 + \cdots$$

0,2

Como as raízes r_1, r_2 são reais, $r_1 \neq r_2$ e $r_1 \neq r_2 + N$, $\forall N \in \mathbb{N}$, temos que a solução correspondente à menor raiz é da forma

$$y_2 = |x|^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (r_2 = 0).$$

$\boxed{4. (a)}$ Extensão ímpar para $0<x<5$:

0,5

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & 0<x<5 \\ -f(-x), & -5<x<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 25, & 0<x<5 \\ -25, & -5<x<0. \end{cases}$$

Questão 4b:

0,2 A extensão ímpar da função dada terá representação em série de Fourier da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{5} x,$$

0,3 com $$b_n = \frac{2}{5} \int_0^5 25 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{5} x \, dx$$

$$= 10 \left[-\frac{5}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{5} x \right]_0^5$$

0,5 $$= -\frac{50}{n\pi} \left[(-1)^n - 1 \right]$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ -100/n\pi, & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

0,5 Logo, a série de Fourier solicitada é

$$-\frac{100}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi}{5} x.$$

Questão 5 :

0,1 Procuramos u da forma

$$u(x,t) = \varphi(x)\,\psi(t)$$

satisfazendo a equação diferencial e os condições de contorno.

Substituindo u na equação, temos

$$10\,\varphi(x)\,\psi'(t) = \varphi''(x)\,\psi(t),$$

ou seja

$$10\,\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}, \quad 0 < x < 5, \quad t > 0.$$

0,1 Ora, tal igualdade só é possível se

$$10\,\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \lambda = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} \quad \text{com } \lambda \text{ constante.}$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0 \quad \text{e} \quad \psi'(t) - \frac{\lambda}{10}\psi(t) = 0.$$

Já as condições de contorno nos fornecem

$0 = u(0,t) = \varphi(0)\psi(t) \Rightarrow \varphi(0) = 0$ ou $\psi(t) = 0,\ t > 0,$

0,1 $0 = u(5,t) = \varphi(5)\psi(t) \Rightarrow \varphi(5) = 0$ ou $\psi(t) = 0,\ t > 0.$

Como $\psi(t) = 0$ produz apenas a solução trivial $u \equiv 0$, resolvamos portanto

$$\begin{cases} \varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0, & 0 < x < 5 \\ \varphi(0) = 0 = \varphi(5) \end{cases}.$$

A equação característica é $k^2 - \lambda = 0$ com raízes k_1 e k_2. Temos assim três possibilidades a analisar.

<u>1º caso</u>: $\lambda > 0$

Se $\lambda = \mu^2$ com $\mu > 0$, obtemos raízes reais distintas $k_1 = \mu$ e $k_2 = -\mu$. Logo, $\varphi(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$, onde A e B

0,1 são constantes é a solução geral.

Temos $0 = \varphi(0) = A + B \Rightarrow B = -A$, donde $\varphi(x) = A(e^{\mu x} - e^{-\mu x})$. Ademais, vale $0 = \varphi(5) = A(e^{5\mu} - e^{-5\mu}) \Rightarrow A = 0$. Assim, $\varphi(x) = 0$, $0 < x < 5$, de modo que temos apenas a solução trivial $u \equiv 0$.

$2^{\underline{o}}$ caso: $\lambda = 0$

Segue $\varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi''(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = Ax + B$.
0,1 Como $0 = \varphi(0) = B$, temos $\varphi(x) = Ax$. Mas
$0 = \varphi(5) = 5A$ obriga $A = 0$. E nos deparamos
novamente com a solução trivial $u \equiv 0$.

$3^{\underline{o}}$ caso: $\lambda < 0$

Se $\lambda = -\mu^2$ com $\mu > 0$, obtemos raízes
complexas conjugadas $h_1 = i\mu$ e $h_2 = -i\mu$.
Portanto, $\varphi(x) = A\cos\mu x + B\,\text{sen}\,\mu x$, onde A
0,1 e B são constantes, é a solução geral.
Temos $0 = \varphi(0) = A$, donde $\varphi(x) = B\,\text{sen}\,\mu x$.
Além disso, vale $0 = \varphi(5) = B\,\text{sen}\,5\mu$, de modo
que $B = 0$ ou $\text{sen}\,5\mu = 0$. Para $B = 0$ resulta
claramente a solução trivial $u \equiv 0$. Consideremos
portanto $\text{sen}\,5\mu = 0$ com $\mu > 0$. Concluímos que
0,2 $\mu = \frac{n\pi}{5}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Obtemos então

0,2 $\varphi_n(x) = B_n\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{5}x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

0,2 Retomemos agora a equação

$$\psi'(t) - \frac{\lambda}{10}\psi(t) = 0, \quad t > 0$$

com $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{25}$. A solução geral vem a ser

$$\psi(t) = K \exp\left(-n^2\pi^2 t/250\right),$$

onde K é uma constante.

0,1 Em particular, concluímos que as funções

$$u_n(x,t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{250}t} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{5}x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

são soluções da equação $10u_t = u_{xx}$ que satisfazem as condições de contorno.

0,2 A solução geral é portanto

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x,t)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{250}t} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{5}x.$$

0,3 Resta ainda impor a condição inicial

$$25 = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{5}x, \quad 0 < x < 5.$$

Vemos então que os coeficientes b_n foram determinados na questão 4b.

0,2 Finalmente, a solução do problema proposto vem a ser

$$u(x,t) = -\frac{100}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{250} t} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi}{5} x .$$