Questão 1 (3.0pts)

Uma partícula sai do repouso e desce sem atrito por um tobogã em foma espiral sob ação da gravidade g, conforme ilustrado na figura ao lado. A espiral tem altura h, raio R, e dá N voltas até atingir o chão. A equação da espiral é portanto $z = h\left(1 - \frac{\phi}{2\pi N}\right)$ (ops, falei demais).

(a) Determine quantas coordenadas independentes são necessárias para descrever a posição da partícula. Escreva o Lagrangeano em função desta(s) coordenada(s) que você escolheu e sua(s) derivada(s) temporal(is). (1.0)
(b) Encontre e resolva a(s) equação(ões) de movimento. (1.5)
(c) Encontre o tempo necessário para a partícula atingir o chão, em função de h, R, N, e g. (0.5)

Questão 2 (2.0pts)

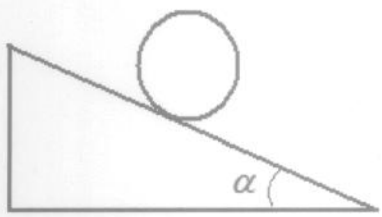
Para o mesmo problema da Questão 1
(a) Encontre o Hamiltoniano $H[q_j, p_j]$ (1.0)
(b) Escreva as equações de Hamilton e mostre que o movimento é consistente com o encontrado acima na questão 1. (1.0)

Questão 3 (2.5 pts)

Seja uma função $f[y_1(x), y_1'(x), y_2(x), y_2'(x); x]$, onde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são funções de x independentes entre si a serem determinadas e $y_1'(x)$ e $y_2'(x)$ são suas derivadas com respeito a x. Encontre as equações diferenciais que permitem determinar $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sob a condição que a integral $J = \int_{x1}^{x2} f[y_1(x), y_1'(x), y_2(x), y_2'(x); x]dx$ atinja um valor extremo (máximo ou mínimo). Em outras palavras, demonstre as equações de Euler. (2.5)

Questão 4 (2.5 pts)

Considere um disco de raio R e massa M rolando sem deslizar por um plano inclinado fixo. Utilizando o método Lagrangeano com multiplicadores de Lagrange, determine:
(a) As acelerações linear e angular do disco. (1.0)
(b) A força e torque de atrito, que evitam o deslizamento do disco sobre o plano. (1.5)



FORMULÁRIO:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_r \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial q_j} = 0$$

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ ;\ H \equiv \sum_j \dot{q}_j p_j - L\ ;$$

F-315 D - PROVA 3 - GABARITO

QUESTÃO 1:

(a) $z = h(1 - \phi/2\pi N)$.

Para se descrever a posição da partícula, basta 1 coordenada (z ou ϕ) independente.

Temos que:

$T = \frac{1}{2} m v^2$, onde a velocidade tem uma componente vertical ($v_z = \dot{z}$) e uma componente tangencial ($v_\phi = R\dot{\phi}$).

Assim:

$$T = \frac{1}{2} m (v_z^2 + v_\phi^2) = \frac{1}{2} m \left(\dot{z}^2 + R^2 \dot{\phi}^2 \right)$$

Mas $\dot{z} = -\frac{h}{2\pi N} \dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = -\frac{2\pi N}{h} \dot{z}$. Portanto

$$L_{(z,\dot{z})} = T - U = \frac{1}{2} m \left[\dot{z}^2 + R^2 \cdot \frac{4\pi^2 N^2}{h^2} \dot{z}^2 \right] - mgz$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} m \left[1 + 4\pi^2 N^2 \frac{R^2}{h^2} \right] \dot{z}^2 - mgz$$

Alternativamente, poderíamos escrever o Lagrangeano em função de ϕ e $\dot{\phi}$:

$$L = \frac{1}{2} m \left[1 + \frac{4\pi^2 N^2 R^2}{h^2} \right] \cdot \left(\frac{-h\dot{\phi}}{2\pi N} \right)^2 - mgh(1 - \phi/2\pi N)$$

$$\Rightarrow L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} m \left[\frac{h^2}{4\pi^2 N^2} + R^2 \right] \dot{\phi}^2 - mgh\left(1 - \frac{\phi}{2\pi N}\right)$$

(b) Usando z, como coordenada independente:

$$\frac{\partial L}{\partial z}(z,\dot z) = -mg$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot z}(z,\dot z) = m\left[1+4\pi^2N^2\frac{R^2}{h^2}\right]\dot z$$

Eq. Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot z} = 0 \Rightarrow -mg - m\left[1+4\pi^2N^2\frac{R^2}{h^2}\right]\ddot z = 0$$

$$\Rightarrow \ddot z = -g\Big/\left[1+4\pi^2N^2R^2/h^2\right] = c^{te}$$

$$\Rightarrow \dot z = \int \ddot z\, dt + c = -\frac{g\,t}{\left[1+4\pi^2N^2R^2/h^2\right]} + \dot z_0$$

$$z(t) = \int \dot z\, dt + c' = -\frac{g\,t^2}{2\left[1+4\pi^2N^2R^2/h^2\right]} + \dot z_0 t + z_0$$

Das condições iniciais, temos $\dot z_0 = 0$; $z_0 = h$

Portanto:

$$z(t) = h - \frac{gt^2}{2}\cdot\frac{1}{\left[1+4\pi^2N^2R^2/h^2\right]}$$ //

ALTERNATIVAMENTE:

Usando ϕ como coordenada independente:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{mgh}{2\pi N}\ ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = m\left[\frac{h^2}{4\pi^2N^2} + R^2\right]\dot\phi$$

3

Eq. Lagrange: ~~[illegible]~~:

$$\Rightarrow \frac{mgh}{2\pi N} - m\left[\frac{h^2}{4\pi^2 N^2} + R^2\right]\ddot{\phi} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} = \frac{gh}{2\pi N} \cdot \frac{1}{\left[\frac{h^2}{4\pi^2 N^2} + R^2\right]}$$

Integrando duas vezes: $\left(\begin{array}{l}\phi(0) = 0\\ \dot{\phi}(0) = 0\end{array}\right)$

$$\Rightarrow \phi = \frac{gh}{4\pi N} \frac{t^2}{\left[\frac{h^2}{4\pi^2 N^2} + R^2\right]}$$

Inserindo este resultado na relação $z = h(1 - \phi/2\pi N)$, temos

$$z(t) = h\left[1 - \frac{g h t^2}{8\pi^2 N^2} \cdot \frac{1}{\left[h^2/4\pi^2 N^2 + R^2\right]}\right]$$

$$\Rightarrow z = h - \frac{g t^2}{2} \cdot \frac{h^2}{4\pi^2 N^2} \cdot \frac{1}{\left[h^2/4\pi^2 N^2 + R^2\right]}$$

$$\Rightarrow z(t) = h - \frac{g t^2}{2} \cdot \frac{1}{\left[1 + 4\pi^2 N^2 R^2/h^2\right]}$$

Consistente com o resultado anterior.

(c) A partícula atinge o chão quando $z(\Delta t) = 0$. Portanto

$$0 = h - \frac{g(\Delta t)^2}{2} \cdot \frac{1}{\left[1 + 4\pi^2 N^2 R^2/h^2\right]}$$

$$\Rightarrow (\Delta t)^2 = \frac{2h}{g}\left[1 + 4\pi^2 N^2 R^2/h^2\right]$$

$$\Rightarrow \Delta t = \left[\frac{2h}{g}\left(1 + 4\pi^2 N^2 R^2/h^2\right)\right]^{1/2}$$

QUESTÃO 2:

a) Se escolhermos z como coordenada independente:

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot z} = m\left[1 + 4\pi^2 N^2 \frac{R^2}{h^2}\right]\dot z$$

Como as transformações entre coordenadas cartesianas e cilíndricas não depende do tempo (transformação escleronômica), vale que $H = E = T + V$

$$H(z, p_z) = T + V = \frac{1}{2} m\left[1 + 4\pi^2 N^2 \frac{R^2}{h^2}\right]\dot z^2 + mgz$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{p_z^2}{m\left[1 + 4\pi^2 N^2 R^2/h^2\right]} + mgz$$

b) $\dot z = \dfrac{\partial H}{\partial p_z} = \dfrac{p_z}{m\left[1 + 4\pi^2 N^2 R^2/h^2\right]} \Rightarrow p_z = m\left[1 + 4\pi^2 N^2 \dfrac{R^2}{h^2}\right]\dot z$

$$\dot p_z = -\frac{\partial H}{\partial z} \Rightarrow \boxed{\dot p_z = -mg}$$

Portanto:

$$\cancel{m}\left[1 + 4\pi^2 N^2 \frac{R^2}{h^2}\right]\ddot z = -\cancel{m}g \Rightarrow \ddot z = -\frac{g}{\left[1 + 4\pi^2 N^2 R^2/z^2\right]}$$

Consistente com a questão 1

Se escolhermos ϕ como coordenada independente:

a) $$p_\phi \equiv \frac{\partial L(\phi,\dot{\phi})}{\partial \dot{\phi}} = m\left[\frac{h^2}{4\pi^2 N^2} + R^2\right]\dot{\phi}$$

$$H = T + V = \frac{p_\phi^2}{2m\left[\frac{h^2}{4\pi N^2} + R^2\right]} + mgh\left(1 - \phi/_{2\pi N}\right)$$

b) $$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{m\left[\frac{h^2}{4\pi N^2} + R^2\right]} \Rightarrow p_\phi = m\left[\frac{h^2}{4\pi N^2} + R^2\right]\dot{\phi}$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = +\frac{mgh}{2\pi N} \Rightarrow m\left[\frac{h^2}{4\pi N^2} + R^2\right]\ddot{\phi} = \frac{mgh}{2\pi N}$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} = \frac{gh}{2\pi N} \cdot \frac{1}{\left[\frac{h^2}{4\pi^2 N^2} + R^2\right]}$$

Consistente com o obtido na questão 1.

QUESTÃO 3:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y_1(\alpha,x); y_1'(\alpha,x); y_2(\alpha,x); y_2'(\alpha,x); x]\, dx$$

onde $y_1(\alpha,x) = y_1(x) + \alpha\eta_1(x)$

$y_2(\alpha,x) = y_2(x) + \alpha\eta_2(x)$

e $\eta_1(x)$ e $\eta_2(x)$ são funções que satisfazem

$\eta_1(x_1) = \eta_1(x_2) = \eta_2(x_1) = \eta_2(x_2) = 0$

A condição de que J é um valor extremo pode ser escrita como ~~forma~~

$$\frac{dJ}{d\alpha}(\alpha=0) = 0$$

Mas:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\int_{x_1}^{x_2} f[y_1(\alpha,x), y_1'(\alpha,x), y_2(\alpha,x), y_2'(\alpha,x); x]\, dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial\alpha} f[y_1(\alpha,x), y_1'(\alpha,x), y_2(\alpha,x), y_2'(\alpha,x); x]\, dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y_1'}\frac{\partial y_1'}{\partial\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y_2'}\frac{\partial y_2'}{\partial\alpha}\right] dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y_1}\eta_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1'}\frac{d\eta_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\eta_2 + \frac{\partial f}{\partial y_2'}\frac{d\eta_2}{dx}\right] dx$$

Mas: $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y_1'}\frac{d\eta_1}{dx}\,dx = \cancelto{0}{\frac{\partial f}{\partial y_1'}\eta_1\Big|_{x_1}^{x_2}} - \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1'}\right)\eta_1\, dx$

Portanto

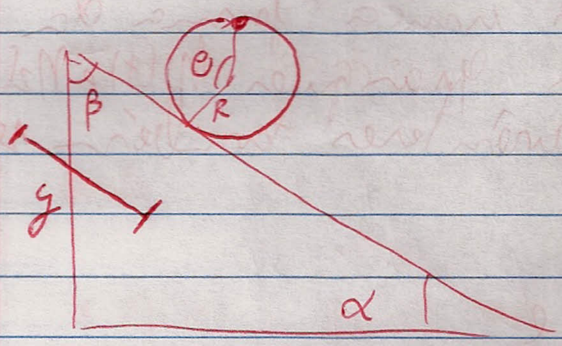
$$\left.\frac{dJ}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_1'}\right)\eta_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_2'}\right)\eta_2\right\} dx = 0$$

Como $\eta_1(x)$ e $\eta_2(x)$ são funções arbitrárias independentes entre si, a única forma da integral se anular, para quaisquer $\eta_1(x)$ e $\eta_2(x)$ é se os termos entre parênteses também se anularem, ou seja:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y_1} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial y_1'} = 0 \quad e \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_2} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial y_2'} = 0 \end{cases}$$

Essas são as equações de Euler!

QUESTÃO 4



Coordenadas dependentes entre si:

$y(t)$ e $\theta(t)$

Relação de vínculo:

$$f = y - R\theta = 0$$ //

ⓐ $T = T_{trans} + T_{rot} = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I_{disco}\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{MR^2}{4}\dot{\theta}^2$

$U = -mgy\cos\beta = -mgy\,\text{sen}\,\alpha$

$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{MR^2}{4}\dot{\theta}^2 + mgy\,\text{sen}\,\alpha$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow \begin{cases} Mg\,\text{sen}\,\alpha - M\ddot{y} + \lambda = 0 & (\text{I}) \\ -\frac{MR^2}{2}\ddot{\theta} - \lambda R = 0 & (\text{II}) \\ y - R\theta = 0 \Rightarrow \theta = y/R & (\text{III}) \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} + \lambda\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow$$

Manipulando as equações acima, temos:

$$-\frac{MR}{2}\ddot{y} - \lambda R = 0 \Rightarrow -\frac{M\ddot{y}}{2} = \lambda$$

$$mg\,\text{sen}\,\alpha - M\ddot{y} - \frac{M\ddot{y}}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}M\ddot{y} = Mg\,\text{sen}\,\alpha$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = \frac{2}{3}g\,\text{sen}\,\alpha \quad ; \quad \ddot{\theta} = \frac{2}{3R}g\,\text{sen}\,\alpha$$

ⓑ $Q_y = F_{at} = \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda = -\frac{1}{3}g\,\text{sen}\,\alpha$

$Q_\theta = \tau_{at} = \lambda\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\lambda R = \frac{1}{3}gR\,\text{sen}\,\alpha$ //