INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN – UNICAMP
Prova 3 - F 315 A 09/12/2010

IFGW

1) _____
RA:_______ Nome:_______________________________ 2) _____
Assinatura:_______________________________ 3) _____
4) _____
Nota:______

Questão 1:

O princípio de Hamilton estabelece que:

"De todos os possíveis caminhos pelos quais um sistema dinâmico pode se mover de um ponto a outro dentro de um intervalo de tempo especificado (consistentes com quaisquer vínculos), o caminho que será seguido é aquele que minimiza a integral temporal do Lagrangeano, definido como a diferença entre as energias cinética e potencial do sistema."

A partir do Princípio de Hamilton, demonstre as equações de Lagrange. (2.5)

PS: Não assuma a equação de Euler como válida para chegar na Eq. de Lagrange, pois isso seria completamente trivial. Faça a demonstração completa. Explique as passagens não-triviais.

Temos que $\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t)\, dt = 0$

Consideramos $q_j(t,\alpha) = q_j(t) + \alpha \eta_j(t)$

Portanto $J(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j(\alpha,t), \dot{q}_j(\alpha,t), t)\, dt$

A condição de que, para $\alpha = 0$, J é mínimo, pode ser escrita como:

$\left.\frac{dJ}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$. Mas:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q_j(t,\alpha), \dot{q}_j(t,\alpha), t)\, dt = 0$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \alpha} \right] dt \, . \quad \text{Mas: } \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} = \eta_j$$

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \alpha} = \dot{\eta}_j$$

Portanto:

$$\sum_j \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \eta_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{\eta}_j \right] dt = 0$$

Mas: $$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{\eta}_j \, dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \eta_j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) \eta_j \, dt$$

Como $\eta_j(t_2) = \eta_j(t_1) = 0$ (condições de contorno conhecidas), temos:

$$\sum_j \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] \eta_j \, dt = 0$$

Como η_j são funções arbitrárias, temos que:

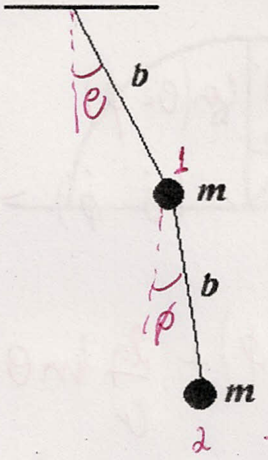
$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0}$$

Eq. Lagrange.

Questão 2 (2.5 pts)

Encontre as equações de movimento para o sistema de dois pêndulos simples, sendo que a base do segundo pêndulo está fixa à massa do primeiro (Figura). (2.5).

PS: Note que as duas massas (m) e comprimentos das cordas (b) são idênticos, e o movimento está confinado ao plano da figura. Não assuma pequenas oscilações. As equações do movimento poderão estar acopladas.



$$x_1 = b\sin\theta \qquad x_2 = b(\sin\theta + \sin\phi)$$

$$y_1 = -b\cos\theta \qquad y_2 = -b(\cos\theta + \cos\phi)$$

$$\dot{x}_1 = b\dot{\theta}\cos\theta \qquad \dot{x}_2 = b(\dot{\theta}\,\cancel{\cos}\cos\theta + \dot{\phi}\cos\phi)$$

$$\dot{y}_1 = b\dot{\theta}\sin\theta \qquad \dot{y}_2 = b(\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\phi}\sin\phi)$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mb^2\left[(\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\phi}\cos\phi)^2 + (\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\phi}\sin\phi)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mb^2\left[\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi)\right]$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}mb^2\left[2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi)\right]$$

$$V = mgy_1 + mgy_2 = -mg\left[b\cos\theta + b(\cos\theta + \cos\phi)\right] = -mgb\left[2\cos\theta + \cos\phi\right]$$

Portanto

$$L = T - V = \frac{1}{2}mb^2\left(2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi)\right) + mgb\left(2\cos\theta + \cos\phi\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = -mb^2\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\theta - \phi) - 2mgb\sin\theta \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2mb^2\dot{\theta} + mb^2\dot{\phi}\cos(\theta - \phi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \phi} = mb^2\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\theta - \phi) - mgb\sin\phi \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mb^2\dot{\phi} + mb^2\dot{\theta}\cos(\theta - \phi) \end{cases}$$

Eq. Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = 0$$

$$\Rightarrow -ml^2\dot\theta\dot\phi\sin(\theta-\phi) - 2mgl\sin\theta - 2ml^2\ddot\theta - ml^2\ddot\phi\cos(\theta-\phi) + ml^2\dot\phi(\dot\theta-\dot\phi)\sin(\theta-\phi) = 0$$

$$\Rightarrow 2\ddot\theta + \ddot\phi\cos(\theta-\phi) + \dot\phi^2\sin(\theta-\phi) + 2\frac{g}{l}\sin\theta = 0$$ //

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = 0$$

$$ml^2\dot\theta\dot\phi\sin(\theta-\phi) - mgl\sin\phi - ml^2\ddot\phi - ml^2\ddot\theta\cos(\theta-\phi) + ml^2\dot\theta(\dot\theta-\dot\phi)\sin(\theta-\phi) = 0$$

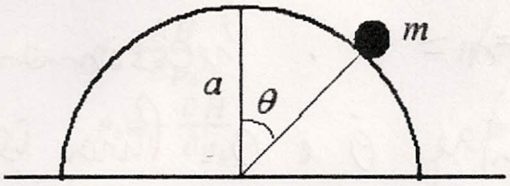
$$\ddot\phi + \ddot\theta\cos(\theta-\phi) - \dot\theta^2\sin(\theta-\phi) + \frac{g}{l}\sin\phi = 0$$ //

Questão 3 (2.5 pts)

Uma partícula de massa m parte do repouso do topo de um hemisfério fixo de raio a.

(a) Encontre as equações de movimento da partícula. 1,0

(b) Encontre a força de vínculo e determine o ângulo θ_c em que a partícula deixa o hemisfério. 1,5



$\underbrace{r - a}_{f} = 0$ (Eq. Vínculo)

(a) e (b) $T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$; $V = + mgr \cos\theta$

$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - mgr \cos\theta$

$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta$; $\frac{\partial L}{\partial \theta} = mgr \sin\theta$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$; $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$

$\frac{\partial f}{\partial r} = 1$; $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$

Eq. Lagrange com multiplicadores:

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \Rightarrow \left\{ mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta - m\ddot{r} + \lambda = 0 \quad (I) \right.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow mgr\sin\theta - \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \quad (II)$$

$$r - a = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \ddot{r} = 0 \end{cases} \quad (III)$$

Aplicando a condição de vínculo (III) em (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} ma\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + \lambda = 0 \\ mga\sin\theta - ma^2\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

Eq. de movimento: $\boxed{\ddot{\theta} - \frac{g}{a}\sin\theta = 0}$

A força normal (força de Vínculo) é dada por:

$N = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda = mg\cos\theta - ma\dot{\theta}^2$

A partícula se desprende qdo $N = \lambda = 0$. Precisamos então encontrar a relação entre $\dot{\theta}$ e θ. Para isso, usamos a equação de movimento:

$\ddot{\theta} = \frac{g}{a}\sin\theta$

Mas $\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}(\dot{\theta}) = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$. Portanto

$\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{g}{a}\sin\theta \Rightarrow \dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \frac{g}{a}\sin\theta\,d\theta \Rightarrow \int\dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \frac{g}{a}\int\sin\theta\,d\theta + C$

$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{g}{a}\cos\theta + C$.

Condições iniciais: $\dot{\theta}(\theta = 0) = 0$. Portanto $C = g/a$.

Assim: $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}(1-\cos\theta)$. Portanto

$\lambda = mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) = -mg(2 - 3\cos\theta)$

A condição $\lambda = 0$ é atingida no ângulo crítico:

$2 - 3\cos\theta_c = 0 \Rightarrow \cos\theta_c = 2/3$

$$\boxed{\theta_c = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)}$$

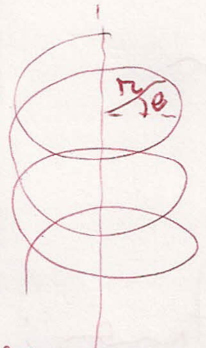
Questão 4 (2.5 pts)

Um aluno de F-315 de massa *m*, para comemorar sua aprovação no curso, vai a um parque aquático e percebe que um dos tobogãs pode ser descrito pela equação de uma hélice, i.e., $z=k\theta$ e r = constante, onde k é uma constante, e z é a vertical. Encontre as equações de <u>Hamilton</u> para descrever o movimento do aluno no tobogã, desprezando atrito. (2.5)

PS: Para soluções (corretas) usando as equações de Lagrange ao invés das de Hamilton, será considerado apenas 1 ponto.

$$q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \qquad H \equiv \sum_j p_j \dot{q}_j - L$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$



Temos que $v^2 = (\dot{z}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$ $(r = cte)$

Mas temos que considerar que há uma relação entre z e θ, portanto apenas 1 coordenada é de fato independente.

Escolhendo a variável θ, temos:

$z = k\theta \Rightarrow \dot{z} = k\dot{\theta}$. Portanto:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (k^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{1}{2} m (k^2 + r^2)\dot{\theta}^2$$

$$V = mgz = mgk\theta$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (k^2 + r^2)\dot{\theta}^2 - mgk\theta$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(k^2 + r^2)\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m(k^2 + r^2)}$$

$$H = p_\theta\dot{\theta} - L = p_\theta\dot{\theta} - \frac{1}{2} m (k^2 + r^2)\dot{\theta}^2 + mgk\theta$$

$$H(\theta, p_\theta) = p_\theta \cdot \frac{p_\theta}{m(k^2 + r^2)} - \frac{1}{2} m (k^2 + r^2) \frac{p_\theta^2}{m^2(k^2 + r^2)^2} + mgk\theta$$

$$\Rightarrow H(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2m(k^2 + r^2)} + mgk\theta \quad //$$

As equações de Hamilton são:

$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}$; $\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta}$

$\therefore \begin{cases} \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m(k^2+r^2)} \\ \dot{p}_\theta = -mgk \end{cases}$ Eq. Hamilton

Combinando as duas equações, temos:

$m(k^2+r^2)\ddot{\theta} = -mgk \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{gk}{(k^2+r^2)} = cte$

$\ddot{z} = k\ddot{\theta} = -g\frac{k^2}{(k^2+r^2)}$ //

Questão 4 (2.5 pts)

Um aluno de F-315 de massa m, para comemorar sua aprovação no curso, vai a um parque aquático e percebe que um dos tobogãs pode ser descrito pela equação de uma hélice, i.e., $z=k\theta$ e r = constante, onde k é uma constante, e z é a vertical. Encontre as equações de Hamilton para descrever o movimento do aluno no tobogã, desprezando atrito. (2.5)

PS: Para soluções (corretas) usando as equações de Lagrange ao invés das de Hamilton, será considerado apenas 1 ponto.

$$\dot{q}_k=\frac{\partial H}{\partial p_k} \qquad H\equiv\sum_j p_j\dot{q}_j-L$$

$$\dot{p}_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad p_j\equiv\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

Solução Alternativa: Variável independente z

$\theta = z/k$; $\dot{\theta} = \dot{z}/k$

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2+r^2\frac{\dot{z}^2}{k^2}\right)$$

$$U=mgz$$

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2+\frac{r^2}{k^2}\dot{z}^2\right)-mgz=\frac{1}{2}m\left(1+\frac{r^2}{k^2}\right)\dot{z}^2-mgz$$

$$p_z=\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}=m\left(1+\frac{r^2}{k^2}\right)\dot{z}=m\left(\frac{k^2+r^2}{k^2}\right)\dot{z}$$

$$\Rightarrow \dot{z}=\frac{k^2p_z}{m(k^2+r^2)}$$

$$H=p_z\dot{z}-L=p_z\dot{z}-\frac{1}{2}m\left(\frac{k^2+r^2}{k^2}\right)\dot{z}^2+mgz$$

$$H(z,p_z)=\frac{k^2}{m(k^2+r^2)}p_z^2-\frac{1}{2}m\left(\frac{k^2+r^2}{k^2}\right)\cdot\frac{k^4p_z^2}{m^2(k^2+r^2)}+mgz$$

$$\Rightarrow H(z,p_z)=\frac{1}{2}\frac{k^2}{m(k^2+r^2)}p_z^2+mgz$$

Eq. Hamilton:

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} \quad ; \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = \dfrac{k^2}{m(k^2+r^2)}\, p_z \\ \dot{p}_z = -mg \end{cases}$$

Eq. Hamilton

Combinando as duas equações:

$$\frac{m(k^2+r^2)}{k^2}\, \ddot{z} = -mg \Rightarrow \ddot{z} = -\frac{g k^2}{(k^2+r^2)} = c^{te}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{z}}{k} = -\frac{g k}{(k^2+r^2)}$$