Questão 1. (2 pontos) O número X de acidentes de trabalho numa construção tem distribuição de Poisson com taxa λ. A porcentagem de semanas quando não acontece nenhum acidente é duas vezes maior que a porcentagem de semanas quando acontece exatamente um acidente.

(a) Ache o valor de λ e $\mathbf{P}$(numa dada semana acontecerão pelo menos 2 acidentes).

(b) Seja Y o número de semanas sem nenhum acidente decorridas até uma semana que tenha acidente. Qual é a distribuição de Y (pode-se dizer o nome ou escrever probabilidade $Y = k$ para todos k possíveis)? Calcule a probabilidade de que $Y \geq 4$.

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

(a) $\mathbb{P}(0 \text{ acidentes}) = e^{-\lambda}$

$\mathbb{P}(1 \text{ acidente}) = \lambda e^{-\lambda}$

$\cancel{e^{-\lambda}} = 2\lambda \cancel{e^{-\lambda}}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1) =$

$= 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} = 1 - (1+\lambda)e^{-\lambda} =$

$= 1 - \frac{3}{2} e^{-1/2}$

(b) "sucesso" = na semana tem pelo menos um acidente.

"fracasso" = semana sem acidentes

experimento: observar a semana, se vai ter acidente ou não.

Y = # experim. até o 1° sucesso $\sim \text{Geom}(p)$,

$p = 1 - e^{-1/2}$, $\mathbb{P}(Y=k) = (1-p)^{k-1} p$, $k = 1, 2, \ldots$

$\mathbb{P}(Y \geq 4) = \sum_{k=4}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = p \frac{(1-p)^3}{1-(1-p)} = (1-p)^3 = e^{-3/2}$

Questão 2. (2 pontos) Suponha que 8 bolas sejam colocadas em 4 caixas, com cada uma das bolas sendo independentemente colocada na caixa i com probabilidade p_i, $i = 1, 2, 3, 4$, $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$. Determine:
(a) o número esperado de urnas vazias;
(b) o número esperado de urnas com exatamante uma bola.

(a) $X_i = \begin{cases} 1, & \text{se urna } i \text{ está vazia} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

$E(\#\text{ urnas vazias}) = \sum_{i=1}^{4} EX_i = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(X_i = 1) =$

$= \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(\text{Bola } j \text{ \underline{não} vai p/ urna } i,\ j = 1, \ldots, 8) =$

$$\boxed{= \sum_{i=1}^{4} (1-p_i)^8}$$

(b) $Y_i = \begin{cases} 1, & \text{se urna } i \text{ tem exat. 1 bola} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

$\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(\text{das 8 bolas, 1 vai p/ urna } i, \text{ outras não}) = 8\, p_i\, (1-p_i)^7$ ⟵ outras 7 - não.

escolhe bola

a escolhida vai p/ urna i

$E(\#\text{ urnas com exat. 1 bola}) =$

$= \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(Y_i = 1) = \sum_{i=1}^{4} 8 p_i (1-p_i)^7$

Questão 3. (2 pontos) Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |1-x|, & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Verifique se $f(x)$ é uma função densidade. Se sim, calcule a função da distribuição acumulada correspondente.

$0 < x < 2 \Rightarrow 1 - x \in (-1, 1)$

$\Rightarrow |1-x| \in (0,1)$

$\Rightarrow 1 - |1-x| \geqslant 0$

$$\int_0^2 (1 - |1-x|)\,dx = 2 - \int_0^1 (1-x)\,dx - \int_1^2 (x-1)\,dx =$$

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x, \text{ se } 0 < x \leq 1 \\ x-1, \text{ se } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$= 2 - 1 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{(x-1)^2}{2}\Big|_1^2 =$$

$$= 2 - 1 + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} + 0 = 1.$$

$\Rightarrow f$ é uma densidade.

$$F(x) = \begin{cases} \boxed{0, \quad x < 0} \\ \int_0^x (1-(1-x))\,dx = \boxed{\frac{x^2}{2}, \quad \text{se } 0 \leq x \leq 1} \\ \int_0^1 (1-(1-x))\,dx + \int_1^x 1 - (x-1)\,dx = \frac{1}{2} + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}\Big|_1^x = \\ = \frac{1}{2} + x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} = \cancel{\frac{1}{2}} + x - 1 - \frac{x^2}{2} + x - \cancel{\frac{1}{2}} = \\ = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2) = \boxed{-\frac{x^2}{2} + 2x - 1, \quad 1 < x \leq 2} \\ \boxed{1, \quad x > 2} \end{cases}$$

Questão 4. (1 ponto) Uma v.a Cauchy padrão tem função de densidade dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Mostre que $1/X$ também tem distribuição de Cauchy padrão.

$$F_{\frac{1}{X}}(y) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \leq y\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \leq y,\ X > 0\right) +$$

$$+ \mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \leq y;\ X < 0\right) =$$

se $y > 0$: $= \mathbb{P}\left(X \geq \frac{1}{y}\right) + \mathbb{P}(X < 0) = \int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx + \frac{1}{2}$;

se $y < 0$: $= 0 + \mathbb{P}\left(0 > X \geq \frac{1}{y}\right) = \int_{\frac{1}{y}}^{0} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx$.

Se $y > 0$, $f_{\frac{1}{X}}(y) = \frac{d}{dy}\left[\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)} + \frac{1}{2}\right] =$

$$= \frac{1}{\pi\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot(-1) = \frac{1}{\pi(y^2+1)}$$

Se $y < 0$, $f_{\frac{1}{X}}(y) = \frac{d}{dy}\left[\int_{\frac{1}{y}}^{0} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx\right] =$

$$= \frac{1}{\pi\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot(-1) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

$\Rightarrow f_{\frac{1}{X}}(y) = \frac{1}{\pi(y^2+1)}$, $y \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{1}{X} \sim$ Cauchy.

Questão 5. (3 pontos) Existem 2 tipos de moedas em circulação: moeda honesta e moeda viciada (com $\mathbf{P}(\text{“cara”}) = 0.6$). Suponha que você tem uma dessas moedas e quer testar se ela é honesta, adotando o seguinte critério: lança a moeda n vezes, se a proporção de “caras”for 0.55 ou mais, então a moeda é considerada viciada, caso contrário, a moeda é considerada honesta.

(a) Qual deve ser o número de lançamentos para que a probabilidade de definir a moeda viciada como honesta seja de no máximo 0.05?

(b) Calcule a probabilidade de definir a moeda honesta como viciada.

(c) Se sabemos que a proporção de moedas honestas é de 80%, qual é a probabilidade de erro nesse procedimento?

a) $\mathbb{P}(\text{definir a moeda como honesta} \mid \text{é viciada}) =$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{\#\text{ caras}}{n} < 0{,}55 \,\Big|\, \text{viciada} \right) =$$

$$= \mathbb{P}(X \geq 0{,}55n \mid \text{viciada}) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 0{,}6n}{\sqrt{n\,0{,}6 \cdot 0{,}4}} < \frac{0{,}55n - 0{,}6n}{\sqrt{n\,0{,}6 \cdot 0{,}4}} \right) \approx \Phi\left(\frac{-0{,}05n}{\sqrt{n \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} \right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{-0{,}05n}{\sqrt{n\,0{,}6 \cdot 0{,}4}} \right) = 0{,}05$$

$$\Phi\left(\frac{0{,}05\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}24}} \right) = 1 - \Phi\left(-\frac{0{,}05\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}24}} \right) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$$

$$\frac{0{,}05\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}24}} = 1{,}65$$

$$\sqrt{n} = \frac{1{,}65\sqrt{0{,}24}}{0{,}05} = 16{,}17$$

$$n = 261{,}36 \,, \quad \boxed{n = 261 \text{ ou } 262}$$

(b) $\mathbb{P}(\text{definir como viciada} \mid \text{é honesta}) =$

$$= \mathbb{P}(\#\,\text{caras} \geq 0{,}55 \cdot n \mid \text{honesta}) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{X - 0{,}5n}{\sqrt{n\, 0{,}5 \cdot 0{,}5}} \geq \frac{0{,}55n - 0{,}5n}{0{,}5\sqrt{n}} \right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{0{,}05\sqrt{n}}{0{,}5} \right) = 1 - \Phi\left(\frac{0{,}05 \cdot 16{,}17}{0{,}5} \right) =$$

$$= 1 - \Phi(1{,}62) = 1 - 0{,}9474 = \boxed{0{,}0526}$$

(c) $\mathbb{P}(\text{erro}) = \mathbb{P}(\text{def. viciada} \mid \text{honesta}) \cdot \mathbb{P}(\text{honesta}) +$

$$+ \mathbb{P}(\text{def. honesta} \mid \text{viciada}) \cdot \mathbb{P}(\text{viciada}) =$$

$$= 0{,}0526 \cdot 0{,}8 + 0{,}05 \cdot 0{,}2 = \boxed{0{,}05208}$$