INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN – UNICAMP
Prova 2 - F 315 B 26/10/2010

RA:_______ Nome: GABARITO

1) _____
2) _____
3) _____
4) _____
Nota:______

Questão 1 (2.5 pts)

Considere um oscilador harmônico não amortecido de massa *m* com frequência angular natural ω_0, inicialmente em repouso na posição de equilíbrio.

(a) Considere que sobre o sistema atua uma força externa constante para t > 0, i.e., $F(t)/m = \begin{matrix} 0 (t<0) \\ a(t>0) \end{matrix}$, onde *a* é uma constante positiva. Encontre *x(t)*. (1.0)

(b) Considere agora que sobre o sistema atua uma força externa dada por $F(t)/m = \begin{matrix} 0 \ (t<0) \\ -a \ (0<t<\tau) \\ +a \ (t>\tau) \end{matrix}$. Encontre *x(t)* para $0 < t < \tau$ e para $t > \tau$. Dica: use o resultado de (a) e o princípio da superposição (1.5).

(a) p/ $t < 0 \Rightarrow x(t) = 0$

p/ $t > 0$, $\ddot{x} + \omega_0^2 x = a$

Sol. Geral Homogênea: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow x = A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t$

Sol. Particular n-homogênea: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = a \Rightarrow x = a/\omega_0^2 = cte$

Sol. geral: $x(t) = A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t + a/\omega_0^2$

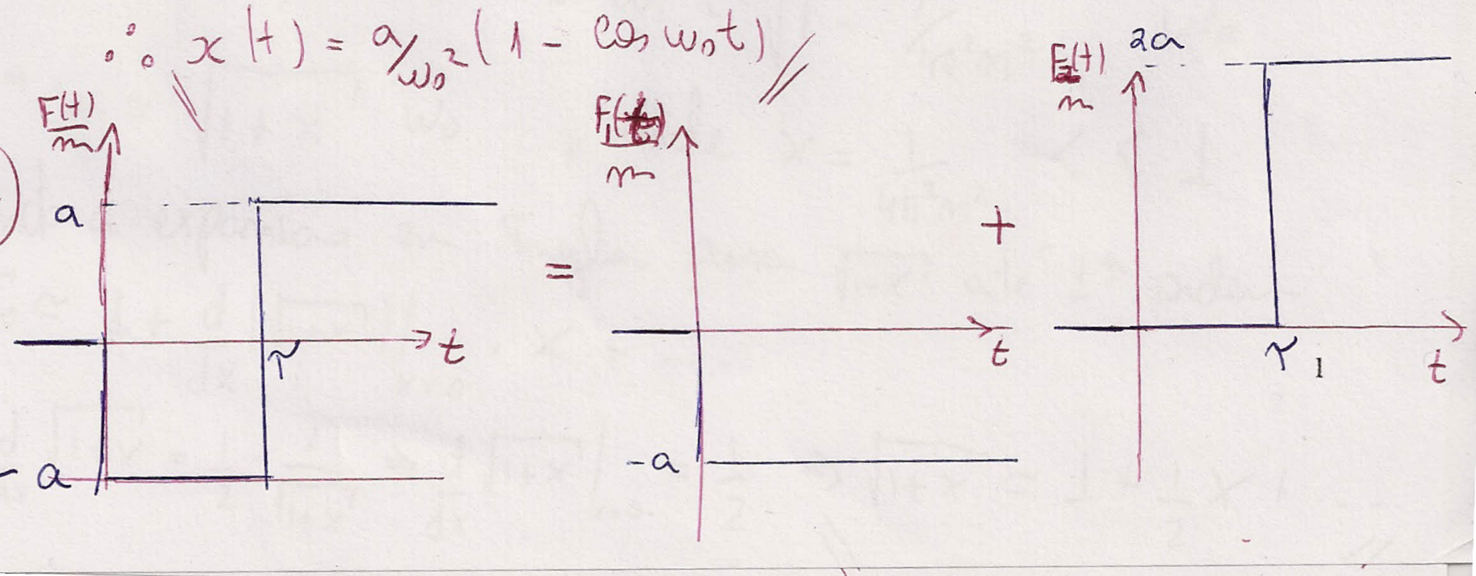
Cond. Contorno:

(i) $x(t=0) = 0 \Rightarrow B + a/\omega_0^2 = 0 \Rightarrow B = -a/\omega_0^2$

(ii) $\dot{x}(t=0) = 0 \Rightarrow \omega_0 A = 0 \Rightarrow A = 0$

$\therefore x(t) = a/\omega_0^2 (1 - \cos\omega_0 t)$ //

(b)



Usando a figura esboçada na pag. anterior:

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{F_1(t)}{m} + \frac{F_2(t)}{m}$$

Usando o resultado de (a):

$$x_1(t) = -\frac{a}{w_0^2}(1 - \cos w_0 t) \qquad (t > 0)$$

$$x_2(t) = \frac{2a}{w_0^2}[1 - \cos w_0(t-\tau)] \qquad (t > \tau)$$

Para $\boxed{0 < t < \tau}$; $x = x_1(t) = -\frac{a}{w_0^2}(1 - \cos w_0 t)$ //

Para $\boxed{t > \tau}$: $x = x_1 + x_2 = -\frac{a}{w_0^2}(1 - \cos w_0 t) + \frac{2a}{w_0^2}[1 - \cos w_0(t-\tau)]$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{a}{w_0^2}[1 + \cos w_0 t - 2\cos w_0(t-\tau)]$$ //

Questão 2 (2.5 pts)

A amplitude de um oscilador sub-amortecido decresce a *1/e* de seu valor inicial após *n* períodos.

(a) Encontre a relação entre a frequência do oscilador amortecido e a frequência do oscilador não amortecido correspondente, <u>sem realizar nenhuma aproximação</u>. (1.5)

(b) Considere *n* >> 1, e mostre que, aproximadamente, $\omega_1 \approx [1-(8\pi^2 n^2)^{-1}]\omega_0$. (1.0)

PS: $x(t)=Ae^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t)$

(a) $x(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t) \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$

Amplitude $= Ae^{-\beta t}$

Do enunciado: $e^{-\beta(n\tau)} = e^{-1}$

$\Rightarrow \tau = 1/n\beta$

Mas: $\tau = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \dfrac{1}{n\beta} \Rightarrow 4\pi^2 n^2 \beta^2 = \omega_0^2 + \beta^2 \Rightarrow \beta^2(4\pi^2 n^2 + 1) = \omega_0^2$

$\Rightarrow \beta^2 = (4\pi^2 n^2 + 1)^{-1}\omega_0^2$

Portanto: $\omega_1 = \sqrt{1 - \dfrac{1}{(4\pi^2 n^2 + 1)}}\;\omega_0$ //

(b) Se $n >> 1$, então $\omega_1 \simeq \sqrt{1 - \dfrac{1}{4\pi^2 n^2}}\;\omega_0$

$\Rightarrow \omega_1 \simeq \sqrt{1+x}\;\omega_0$, onde $x = \dfrac{1}{4\pi^2 n^2} << 1$

Fazendo a expansão em Taylor para $\sqrt{1+x}$ até 1ª ordem

$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \dfrac{d}{dx}(\sqrt{1+x})\Big|_{x=0} \cdot x + \ldots$

2

Mas $\dfrac{d}{dx}\sqrt{1+x} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \Rightarrow \dfrac{d}{dx}\sqrt{1+x}\Big|_{x=0} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{1+x} \simeq 1 + \dfrac{1}{2}x + \ldots$ //

Portanto

$$w_1 \simeq \left(1 - \frac{x}{2}\right) w_0 = \left(1 - \frac{1}{8\pi^2 m^2}\right) w_0 \quad // \qquad \text{cqd}$$

Questão 3 (2.5 pts)

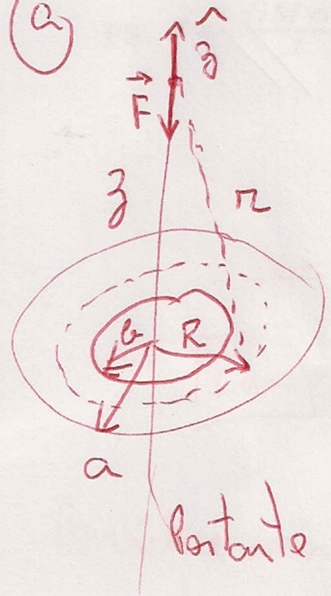
Considere um disco furado de massa *M*, com raio interno *b* e raio externo *a*.

(a) Calcule a força exercida pelo disco em uma massa *m* localizada no eixo do disco a uma altura *z*, em função somente das quantidades acima mencionadas e de constantes universais. Use o método que preferir, ou usando o potencial gravitacional ou calculando diretamente a força. (1.5)

(b) Mostre que, se $z << b$, o movimento da massa *m* será harmônico. Calcule o período do movimento. (1.0)

PS: $\Phi=-G\int_A \frac{\rho(r')}{r}da'$; $\nabla^2\Phi=4\pi G\rho$; $F=-m\nabla\Phi=-Gm\int_A \frac{\rho(r')}{r^2}\hat{e}_r da'$

(a)



Podemos dividir o disco em finos anéis de raio R $(b<R<a)$ e espessura dR. Cada anel contribuirá ao potencial com uma quantidade

$$d\Phi = -\frac{G\,dm'}{r} = -\frac{G\sigma(2\pi R\,dR)}{\sqrt{z^2+R^2}} = -2\pi G\left(\frac{M}{\pi(a^2-b^2)}\right)\frac{R\,dR}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

Portanto $\Phi = -\frac{2GM}{a^2-b^2}\int_b^a \frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}dR$; substituindo $u = z^2+R^2$, $du = 2R\,dR$

$$\Rightarrow \Phi = -\frac{GM}{a^2-b^2}\int_{z^2+b^2}^{z^2+a^2} u^{-1/2}du = -\frac{GM}{a^2-b^2}\cdot 2\left[\sqrt{z^2+a^2}-\sqrt{z^2+b^2}\right]$$

Pela simetria do problema, a força aponta na vertical, portanto:

$$F_z = -m\frac{d\Phi}{dz} = \frac{2GMm}{a^2-b^2}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}-\frac{z}{\sqrt{z^2-b^2}}\right] = -\frac{2GMm}{a^2-b^2}z\left[\frac{1}{\sqrt{z^2+b^2}}-\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\right]$$

$F_x = F_y = 0$

(b) Se $z << b$ e portanto $z << a$, então $\frac{1}{\sqrt{z^2+b^2}} \simeq \frac{1}{b}$, $\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}} \simeq \frac{1}{a}$

$$F_z \simeq -\frac{2GMm}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)z = -\frac{2GMm}{a^2-b^2}\cdot\frac{(a-b)}{ab}z = -\frac{2GMm\,z}{ab(a+b)}$$

Portanto:

$$F_z = m\ddot{z} = -\frac{2GMm}{ab(a+b)} z \Rightarrow \ddot{z} + \frac{2GM}{ab(a+b)} z = 0$$

Assim, o movimento será harmônico, com

$$\omega_0^2 = \frac{2GM}{ab(a+b)} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{ab(a+b)}{2GM}}$$

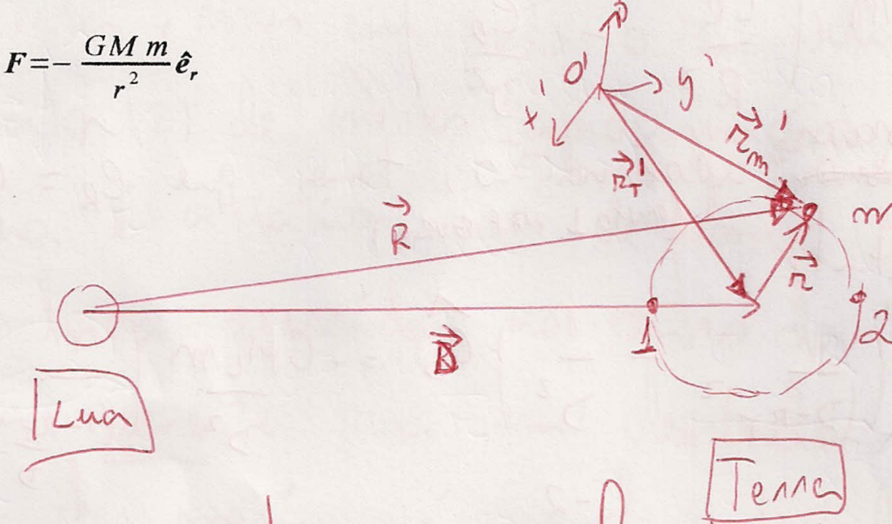
//

Questão 4 (2.5 pts)

Considere o problema das marés, onde:
M_T: massa da Terra
M_L: massa da lua
D: distância entre os centros da Terra e da Lua
r_T: raio da Terra
G: constante universal da gravitação

Encontre a força das marés no ponto da superfície da Terra de maior aproximação à Lua, e no ponto de menor aproximação, em função das constantes acima. Mostre que a força das marés em ambos os pontos está apontando para fora da superfície terrestre. Este resultado é razoável ? Interprete qualitativamente a razão de haver aproximadamente duas marés altas por dia, e não apenas uma.

PS: $F = -\frac{GMm}{r^2}\hat{e}_r$



Considere um sistema inercial O' (figura). Sobre a massa m, atuam as forças gravitacionais terrestre, e da Lua. Assim, pela 2ª Lei de Newton, e lei universal da gravitação:

$$m\ddot{\vec{r}}'_m = -\frac{G m M_T}{r^2}\hat{e}_r - \frac{G m M_L}{R^2}\hat{e}_R$$

Onde $\hat{e}_r$ e $\hat{e}_R$ são versores apontando na direção de $\vec{r}$ e $\vec{R}$, respectivamente.

O centro de massa da Terra também se move em relação ao sistema inercial, devido à força da Lua. Assim:

$$M_T\ddot{\vec{r}}'_T = -\frac{G M_L M_T}{D^2}\hat{e}_D$$

Pela figura, vemos que $\boxed{\vec{r} = \vec{r}'_m - \vec{r}'_T}$. Portanto:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_m' - \ddot{\vec{r}}_T' = -\frac{GM_T}{r^2}\hat{e}_r - \frac{GM_L}{R^2}\hat{e}_R + \frac{GM_L}{D^2}\hat{e}_D$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_T}{r^2}\hat{e}_r - GM_L\left(\frac{\hat{e}_R}{R^2} - \frac{\hat{e}_D}{D^2}\right)$$

O segundo termo está associado à força das marés

$$\vec{F}_{MARÉS} = -GM_L m\left(\frac{\hat{e}_R}{R^2} - \frac{\hat{e}_D}{D^2}\right)$$

Para o ponto de ~~menor~~ maior aproximação (PONTO 1 NA FIGURA), temos que $\hat{e}_R = \hat{e}_D$, e $R = D - r_T$. Portanto

$$\vec{F}^{(1)}_{MARÉ} = -GM_L m\left(\frac{1}{(D-r_T)^2} - \frac{1}{D^2}\right)\hat{e}_D = -\frac{GM_L m}{D^2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{r_T}{D}\right)^2} - 1\right)\hat{e}_D$$

Expansão em Taylor para $(1-x)^{-2}$:

$$\frac{d}{dx}(1-x)^{-2} = -2(1-x)^{-3} \Rightarrow \left.\frac{d}{dx}(1-x)^{-2}\right|_{x=0} = -2$$

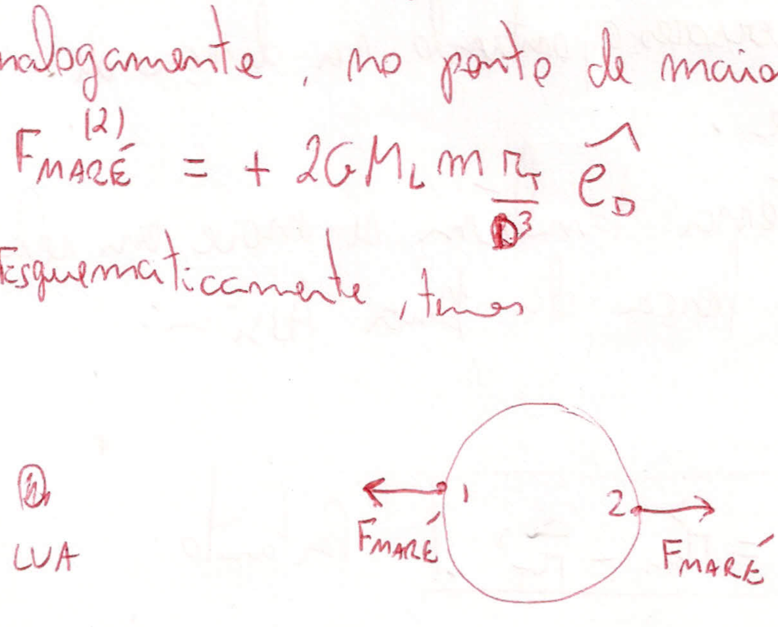
Portanto: $(1-x)^{-2} \simeq 1 - 2x \quad (x \ll 1)$

Portanto $F^{(1)}_{MARÉ} \simeq -\frac{GM_L m}{D^2}\left[1 + \frac{2r_T}{D} - 1\right]\hat{e}_D = -2GM_L m\frac{r_T}{D^3}\hat{e}_D$

Analogamente, no ponto de maior aproximação (ponto 2)

$$F^{(2)}_{MARÉ} = +2GM_L m\frac{r_T}{D^3}\hat{e}_D$$

Esquematicamente, temos



FOLHA EXTRA – usar como rascunho ou para finalizar algum problema.

Portanto, temos 2 marés altas ao dia, aproximadamente.

Podemos entender este resultado lembrando que a Lua exerce uma força não só na superfície da Terra, mas em todo o seu volume. Assim, no ponto (2) de menor aproximação, a força gravitacional da Lua é atrativa, mas de uma magnitude menor que a força exercida no centro da Terra. Portanto, a força aparente para um observador na Terra (ou seja, a força das marés, é para fora (repulsiva). Daí a explicação de haver maré alta não só no ponto de maior aproximação da Lua, mas também no de menor aproximação, levando assim a â 2 marés altas por dia.