

## Lista de Exercícios 1 - Soluções Parte 1/2 (exercícios de 1 a 7)

**Aviso:** Durante a prova 1 será permitido ao aluno a consulta a este documento e seu complemento (Parte 2/2) e consulta a suas próprias anotações (notas de aula e formulário manuscrito). Não será permitida a consulta a livros.

---

1. Uma ponte retificadora monofásica (veja fig. A1-1), com filtro capacitivo, é alimentada com tensão

$$v_e = V_p \cos \omega t \quad (\text{assuma esta forma em todos os circuitos do Anexo 1}),$$

em que  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ . Assuma que a carga possa ser modelada por um resistor com resistência  $R$ . Para este exercício e para os demais, assuma que os diodos e tiristores sejam ideais.

a) Determine o valor da capacidade  $C$ , em função da resistência de carga  $R$  e da frequência da tensão de entrada  $f$ , para que o valor pico a pico da ondulação da tensão na carga,  $\Delta v_o = v_{o\max} - v_{o\min}$ , corresponda a aproximadamente 5% da tensão  $V_p$ , utilizando a expressão aproximada

$$\frac{\Delta v_o}{V_p} \cong \frac{1}{2fRC}.$$

b) Com o capacitor determinado no item anterior, calcule o valor pico a pico da ondulação na carga, em percentagem de  $V_p$ , e o valor de pico da corrente na entrada, em termos de  $V_p$  e  $R$ . Para isso utilize as equações exatas

$$\frac{\Delta v_o}{V_p} = \delta_2 = 1 - \cos \theta_1$$

e

$$|i_e|_{\max} = \frac{V_p}{R} [\cos \theta_1 + \omega RC \sin \theta_1],$$

onde o valor de  $\theta_1$  é determinado por

$$\cos \theta_1 \exp\left(-\frac{\theta_1}{\omega RC}\right) = \cos(\theta_2) \exp\left(\frac{\theta_2}{\omega RC}\right) \exp\left(-\frac{\pi}{\omega RC}\right); \quad \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega RC}\right).$$

c) Determine a capacidade  $C$ , a ondulação  $\Delta v_o$ , e o valor de pico da corrente de entrada  $|i_e|_{\max}$  (que também é a corrente de pico através dos diodos) para  $V_p = 220\sqrt{2}$  V,  $f = 60$  Hz,

$R = 100 \Omega$ .

d) Justifique a estimativa para a ondulação utilizada em a:  $\frac{\Delta v_0}{V_p} \cong \frac{1}{2fRC}$ .

OBSERVAÇÃO: Nas notas de aula,  $\phi_1 = \theta_2$  e  $\phi_2 = \theta_1$ .

Solução:

a)

$$\delta_1 = \frac{1}{2fRC} \Rightarrow C = \frac{1}{2\delta_1 fR} = \frac{1}{2(0.05)} \frac{1}{fR}$$

ou

$$C = \frac{10}{fR}$$

b)

Temos

$$\omega RC = 2\pi(fRC) = 2\pi(10) = 20\pi;$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{20\pi}\right) \cong 0.015914 \text{ rad} \cong 0.912^\circ;$$

$$\cos\theta_2 \exp\left(-\frac{\theta_2}{\omega RC}\right) \exp\left(-\frac{\pi}{\omega RC}\right) = \cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{20\pi}\right)\right) \exp\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{1}{20\pi}\right)}{20\pi}\right) \exp\left(-\frac{\pi}{20\pi}\right) \cong 0.95135;$$

$$\begin{aligned} \cos\theta_1 \exp\left(-\frac{\theta_1}{\omega RC}\right) &= \cos\theta_2 \exp\left(\frac{\theta_2}{\omega RC}\right) \exp\left(-\frac{\pi}{\omega RC}\right) \\ \Rightarrow \cos\theta_1 \exp\left(-\frac{\theta_1}{20\pi}\right) - 0.95135 &= f(\theta_1) = 0. \end{aligned}$$

As raízes de  $f(x)$  podem ser encontradas por métodos numéricos. Um deles consiste em calcular recursivamente

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

a partir de algum valor escolhido para  $x_0$ . Explicitamente, a equação recursiva é

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{\cos x_n \exp\left(-\frac{x_n}{20\pi}\right) - 0.95135}{-\exp\left(-\frac{x_n}{20\pi}\right)\left(\sin x_n + \frac{\cos x_n}{20\pi}\right)}.$$

Como  $\theta_1$  deve estar entre 0 e  $\pi$ , podemos, por exemplo, iniciar com  $x_0 = 1$ , para obter,

$$\{x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; \dots\} = \{0.4985; 0.33465; 0.29999; 0.29818; 0.29817; 0.29817; \dots\},$$

e concluir que

$$\theta_1 \cong 0.29817 \text{ rad} \cong 17.084^\circ.$$

Portanto,

$$\delta_2 = 1 - \cos \theta_1 \cong 1 - \cos(0.29817) = 4.4124 \times 10^{-2},$$

ou

$$\frac{\Delta v_0}{V_p} \times 100 \cong 4.41\%.$$

O valor de pico de corrente na entrada será

$$|i_e|_{\max} = \frac{V_p}{R} (\cos \theta_1 + \omega R C \sin \theta_1) = \frac{V_p}{R} (\cos(0.29817) + 20\pi \sin(0.29817)) \cong 19.414 \frac{V_p}{R},$$

ou

$$|i_e|_{\max} \cong 19.4 \frac{V_p}{R}.$$

c)

$$C = \frac{10}{fR} = \frac{10}{(60)(100)} \text{ F},$$

ou

$$C \cong 1.67 \text{ mF}.$$

$$\Delta v_0 = \delta_2 V_p = (4.4124 \times 10^{-2}) (220\sqrt{2}) \text{ V},$$

ou

$$\Delta v_0 \cong 13.7 \text{ V}$$

$$|i_e|_{\max} \cong 19.414 \frac{V_p}{R} = 19.414 \frac{220\sqrt{2}}{100} \text{ A},$$

ou

$$|i_e|_{\max} \cong 60.4 \text{ A.}$$

d)

$$\cos \theta_1 \exp\left(-\frac{\theta_1}{\omega RC}\right) = \cos(\theta_2) \exp\left(\frac{\theta_2}{\omega RC}\right) \exp\left(-\frac{\pi}{\omega RC}\right); \quad \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega RC}\right).$$

ou

$$\cos \theta_1 = \cos \theta_2 \exp\left(\frac{\theta_2}{\omega RC}\right) \exp\left(-\frac{\pi - \theta_1}{\omega RC}\right).$$

Para

$$\omega RC \gg 1$$

temos

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega RC}\right) \cong \frac{1}{\omega RC} \ll 1$$

e

$$\cos(\theta_2) \exp\left(\frac{\theta_2}{\omega RC}\right) = \left(1 - \frac{\theta_2^2}{2} + \dots\right) \left(1 + \frac{\theta_2}{\omega RC} + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_2}{\omega RC}\right)^2 + \dots\right)$$

$$\cong 1 + \frac{\theta_2}{\omega RC} \cong 1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2 \cong 1$$

ou

$$\cos \theta_1 \cong \exp\left(-\frac{\pi - \theta_1}{\omega RC}\right) \cong 1 - \frac{\pi - \theta_1}{\omega RC}$$

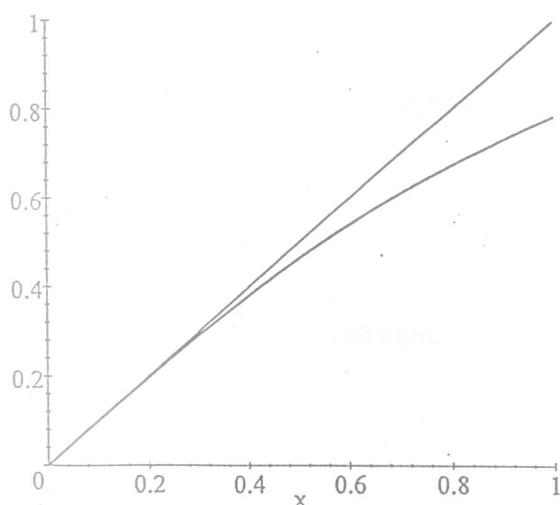
Portanto,

$$\delta_2 = 1 - \cos \theta_1 \cong \frac{\pi - \theta_1}{\omega RC} > \frac{\pi}{\omega RC}$$

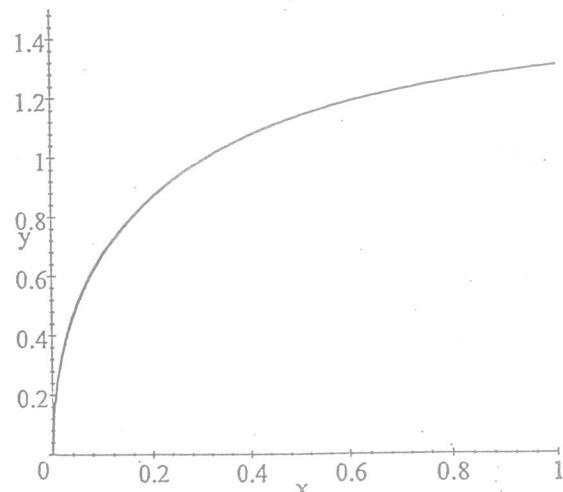
Se  $\omega RC$  fica suficientemente grande ( $1/\omega RC$  suficientemente pequeno),  $\theta_1$  fica substancialmente menor que  $\pi$  e podemos fazer a aproximação,

$$\delta_2 = 1 - \cos \theta_1 \cong \frac{\pi}{\omega RC} = \frac{\pi}{2\pi f RC} = \frac{1}{2fRC}$$

Os gráficos a seguir ilustram as considerações acima. No da esquerda (Fig 1-1) temos em traço forte o ângulo  $\theta_2$  em função do parâmetro  $(\omega RC)^{-1}$  e, em traço mais fraco, a aproximação linear  $\theta_2 = (\omega RC)^{-1}$  rad. No da direita aparece o ângulo  $\theta_1$ , também em função de  $(\omega RC)^{-1}$



$(\theta_2/\text{rad})$  em função de  $x = 1/(\omega RC)$



$(\theta_1/\text{rad})$  em função de  $x = 1/(\omega RC)$

2. Considere o circuito da fig. A1-2, que é o circuito da fig. A1-1 modificado pela inserção do indutor  $L$ . Assuma por simplicidade que a ondulação da tensão na saída possa ser desprezada (o que em princípio pode ser conseguido fazendo a capacidade  $C$  suficientemente alta). Assuma os dados do item c do exercício 1, a menos que haja especificações em contrário.

- Determine o valor de  $L$  necessário para estabilizar a tensão de saída em 230 V.
- Determine o valor de pico,  $|i_e|_{\max}$  da corrente de entrada (quando em regime permanente).
- Encontre os novos valores de  $V_0$  e  $|i_e|_{\max}$ , quando se altera o valor de  $R$  para 1 kΩ.
- Com  $R = 1$  kΩ, determine o valor de  $L$  tal que  $V_0 = 0.75V_0$  (resolvido em aula).
- Com relação ao item d, determinar o novo valor de  $V_0$  quando o indutor é substituído por outro com 1/3 da indutância ali calculada (resolvido em aula).
- Determine o fator de potência, para os casos tratados em d e e.

Dica: assumindo corrente descontínua no indutor, com  $\alpha$  e  $\beta$  representando os extremos do intervalo de condução ( $0 < \alpha < \pi/2 < \beta < \pi$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  contados a partir do cruzamento da tensão por zero em cada semicírculo), valem as relações:

$$\begin{aligned}\alpha &= \sin^{-1} k, \\ \sqrt{1 - k^2} - \cos \beta + k(\sin^{-1} k - \beta) &= 0, \\ (k - \sin \beta)^2 &= 2\pi\eta k,\end{aligned}$$

onde, por definição,

$$k = \frac{V_0}{V_p} \quad \eta = \frac{I_0}{\left(\frac{V_p}{\omega L}\right)}$$

sendo  $V_0$  e  $I_0$  a tensão e corrente, assumidas constantes, na carga, respectivamente.

Solução:

a)

Atenção! Neste problema estamos escolhendo a origem do tempo de modo que

$$v_e = V_p \sin \omega t.$$

Temos

$$V_p = 220\sqrt{2} \text{ V} \cong 311.13 \text{ V}; \quad V_0 = 230 \text{ V}; \quad k = \frac{V_0}{V_p} = \frac{230}{220\sqrt{2}} \cong 0.73925,$$

e

$$\sqrt{1-k^2} - \cos \beta + k(\sin^{-1} k - \beta) = 0$$

equivale (aproximadamente) a

$$1.2885 - 1.0 \cos \beta - 0.73925\beta = 0.$$

Resolvendo numericamente,

$$\beta \cong 3.0941 \text{ rad} \Rightarrow 180^\circ - \beta \cong 2.72^\circ.$$

$$\eta = \frac{k^2 - 2k \sin \beta + \sin^2 \beta}{2\pi k} \cong 0.10303,$$

implicando,

$$L = \frac{\eta R V_p}{\omega V_0} \cong \frac{(0.10303)(100)(220\sqrt{2})}{(2\pi \times 60)(230)} \text{ H},$$

ou

$$L \cong 3.6969 \times 10^{-2} \text{ H} \cong 37.0 \text{ mH}$$

b)

Temos

$$|i_e|_{\max} = i_{L\max}.$$

No intervalo de condução do indutor,  $\alpha \leq \omega t \leq \beta$

$$L \frac{di_L}{dt} = v_L \Rightarrow i_L = \frac{1}{L} \int_{\alpha/\omega}^t v_L dt = \frac{1}{L} \int_{\alpha/\omega}^t (V_p \sin \omega t - V_0) dt$$

ou

$$i_L = \frac{V_p}{\omega L} (\cos \alpha - \cos \omega t) + \frac{V_0}{\omega L} (\alpha - \omega t)$$

Na última integral, o integrando é positivo para o intervalo

$$\alpha = \sin^{-1} \left( \frac{V_0}{V_p} \right) < \omega t < \gamma = \pi - \alpha$$

Portanto, a corrente no indutor cresce continuamente no intervalo  $\alpha < \omega t < \gamma$ , e começa a decrescer a partir de  $\omega t = \gamma$ , anulando-se em  $\omega t = \beta$ . Ou seja, o máximo de  $i_L$  ocorre em  $\omega t = \gamma = \pi - \alpha$ :

$$i_{L \max} = \frac{V_p}{\omega L} (\cos \alpha - \cos \omega t) + \frac{V_0}{\omega L} (\alpha - \omega t) \Big|_{\omega t = \pi - \alpha}$$

$$i_{L \max} = \frac{V_p}{\omega L} (\cos \alpha - \cos(\pi - \alpha)) + \frac{V_0}{\omega L} (\alpha - (\pi - \alpha))$$

$$i_{L \max} = \frac{2V_p \cos \alpha + V_0 (2\alpha - \pi)}{\omega L}$$

Com

$$\alpha = \sin^{-1} k = \sin^{-1} \left( \frac{230}{220\sqrt{2}} \right) \cong 0.831953 \text{ rad}$$

obtemos

$$i_{L \max} = \frac{2(220\sqrt{2}) \cos \left( \sin^{-1} \left( \frac{230}{220\sqrt{2}} \right) \right) + 230 \left( 2 \sin^{-1} \left( \frac{230}{220\sqrt{2}} \right) - \pi \right)}{2\pi(60)(3.6969 \times 10^{-2})} \text{ A}$$

$$i_{L\max} \cong 5.6812 \text{ A} \cong 5.68 \text{ A}$$

c)

Com

$$\eta = \frac{I_0}{\left( \frac{V_p}{\omega L} \right)} = \frac{\omega L}{V_p} I_0 = \frac{\omega L}{V_p} \left( \frac{V_0}{R} \right) = \frac{\omega L}{R} k,$$

obtemos

$$(k - \sin \beta)^2 = 2\pi \eta k = 2\pi \frac{\omega L}{R} k^2 \Rightarrow k - \sin \beta = k \sqrt{\frac{2\pi \omega L}{R}},$$

ou

$$\sin \beta = bk; \quad b = 1 - \sqrt{\frac{2\pi \omega L}{R}} = 1 - \sqrt{\frac{2\pi (2\pi \times 60)(3.6969 \times 10^{-2})}{10^3}} \cong 0.70408$$

$$\sin \beta = bk \Rightarrow \beta = \pi - \sin^{-1}(bk); \quad \cos \beta = -\sqrt{1 - b^2 k^2}.$$

$$\sqrt{1 - k^2} - \cos \beta + k(\sin^{-1} k - \beta) = 0 \Rightarrow k = \frac{\cos \beta - \sqrt{1 - k^2}}{\sin^{-1} k - \beta}$$

ou, pelas equações imediatamente anteriores,

$$k = \frac{\sqrt{1 - b^2 k^2} + \sqrt{1 - k^2}}{\pi - \sin^{-1} k - \sin^{-1}(bk)},$$

que, substituindo o valor de  $b$  como determinado acima, é (aproximadamente) equivalente a

$$k = \frac{\sqrt{1 - 0.49573 k^2} + \sqrt{1 - k^2}}{\pi - \sin^{-1} k - \sin^{-1}(0.70408 k)},$$

e cuja solução numérica nos dá

$$k \cong 0.90695.$$

Portanto, o novo valor de  $V_0$  é

$$V_0 = kV_p \cong 0.90695(220\sqrt{2})$$

ou

$$V_0 \cong 282 \text{ V}$$

Como no item anterior,

$$\begin{aligned}|i_e|_{\max} &= i_{L\max} = \frac{2V_p \cos \alpha + V_0(2\alpha - \pi)}{\omega L} = \frac{2V_p \cos \alpha + kV_p(2\alpha - \pi)}{\omega L} \\&= \frac{V_p}{\omega L}(2 \cos \alpha + k(2\alpha - \pi)).\end{aligned}$$

Explicitamente,

$$|i_e|_{\max} \cong \frac{220\sqrt{2}}{(2\pi \times 60)(3.6969 \times 10^{-2})} (2 \cos(\sin^{-1} 0.90695) + 0.90695(2 \sin^{-1} 0.90695 - \pi)),$$

ou

$$|i_e|_{\max} \cong 1.20 \text{ A}$$

d)

Com

$$k = \frac{V_0}{V_p} = 0.75$$

a equação

$$\sqrt{1-k^2} - \cos \beta + k(\sin^{-1} k - \beta) = 0$$

tem como solução,

$$\beta \cong 3.0587 \text{ rad} \cong 175.25^\circ$$

e

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{(k - \sin \beta)^2}{2\pi k} \cong 0.094466 \\ \Rightarrow L &= \frac{\eta RV_p}{\omega V_0} = \frac{\eta R}{\omega k} \cong \frac{(0.094466)(1000)}{(2\pi \times 60)(0.75)} \text{ H} \cong 0.33411 \text{ H}\end{aligned}$$

ou

$$L \cong 334 \text{ mH}$$

e)

$$\eta = \frac{k\omega L}{R}$$

Usando  $L'$  e  $\eta'$  e  $k'$  para representar os novos valores de  $L$  e  $\eta$  e  $k$ , respectivamente, temos

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{k'L'}{kL} = \frac{k'}{0.75} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9} k'$$

$$\eta' = \frac{4}{9} \eta k' \cong \frac{4}{9} (0.094466) k' \cong 0.041985 k'$$

Revertendo à notação usual, devemos resolver

$$(*) \quad \eta = 0.041985 k$$

$$(**) \quad \eta = \frac{(k - \sin \beta)^2}{2\pi k}$$

$$(***) \quad 0 = \sqrt{1-k^2} - \cos \beta + k(\sin^{-1} k - \beta)$$

Com

$$x = \sin \beta,$$

as eqs. (\*) e (\*\*) nos dão as soluções aproximadas

$$x = 0.48639k \quad \text{ou} \quad x = 1.5136k.$$

Para a primeira alternativa,

$$\beta = \pi - \sin^{-1} x \Rightarrow \beta = \pi - \sin^{-1}(0.48639k)$$

a eq. (\*\*\*) tem como solução aproximada

$$\pi - \sin^{-1}(0.48639(0.84514))$$

$$k = 0.84514 \Rightarrow \beta = 2.7180 \text{ rad} = (155.73^\circ)$$

enquanto para a segunda alternativa obteríamos

$$\sin \beta = 1.5136k = 1.5136 \sin \alpha > \sin \alpha$$

Portanto a solução procurada é

$$V_0 = 0.84514 V_p = 0.84514(220\sqrt{2}) \cong 262.9 \text{ V}$$

f)

$$FP = \frac{\langle v_e i_e \rangle}{V_e I_e}$$

$$V_e = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} I_e^2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (i_e)^2 d\theta = \frac{1}{\pi} \int_\alpha^\beta (i_L)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_\alpha^\beta \left( \frac{V_p}{\omega L} (\cos \alpha - \cos \theta + k(\alpha - \theta)) \right)^2 d\theta = \left( \frac{V_p}{\omega L} \right)^2 I(\alpha, \beta, k) \end{aligned}$$

$$I(\alpha, \beta, k) = \frac{1}{\pi} \int_\alpha^\beta (\cos \alpha - \cos \theta + k(\alpha - \theta))^2 d\theta$$

$$\begin{aligned} < v_c i_c > &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi v_c i_c d\theta = \frac{1}{\pi} \int_\alpha^\beta v_c i_L d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_\alpha^\beta V_p \sin \theta \left( \frac{V_p}{\omega L} (\cos \alpha - \cos \theta + k(\alpha - \theta)) \right) d\theta = \frac{V_p^2}{\omega L} J(\alpha, \beta, k) \\ J(\alpha, \beta, k) &= \frac{1}{\pi} \int_\alpha^\beta (\sin \theta)(\cos \alpha - \cos \theta + k(\alpha - \theta)) d\theta \end{aligned}$$

$$FP = \frac{\frac{V_p^2}{\omega L} J(\alpha, \beta, k)}{\frac{V_p}{\sqrt{2}} \left( \frac{V_p}{\omega L} \right) \sqrt{I(\alpha, \beta, k)}} = \sqrt{2} \frac{J(\alpha, \beta, k)}{\sqrt{I(\alpha, \beta, k)}}$$

No caso do item d,

$$\begin{aligned} k &= 0.75; \\ \alpha &= \sin^{-1}(k) = \sin^{-1}(0.75) = \alpha = 0.848\ 06 \text{ rad } (48.590^\circ); \\ \beta &= 3.058\ 7 \text{ rad } (175.25^\circ). \end{aligned}$$

avaliando numéricamente as integrais

$$FP = \frac{\sqrt{2} J(0.848\ 06, 3.058\ 7, 0.75)}{\sqrt{I(0.848\ 06, 3.058\ 7, 0.75)}} \cong 0.759\ 7$$

No caso do item e,

$$\begin{aligned} k &= 0.845\ 14; \\ \alpha &= \sin^{-1}(k) = \sin^{-1}(0.845\ 14) = 1.006\ 8 \text{ rad } (57.687^\circ); \\ \beta &= 2.718\ 0 \text{ rad } (155.73^\circ). \end{aligned}$$

e

---


$$FP = \frac{\sqrt{2} J(1.006\ 8, 2.718\ 0, 0.845\ 14)}{\sqrt{I(1.006\ 8, 2.718\ 0, 0.845\ 14)}} \cong 0.753\ 2$$

3. Este exercício se refere à ponte retificadora trifásica mostrada na fig. A1-3. As tensões de fase são dadas por

$$v_a = V_p \cos(\omega t) \quad v_b = V_p \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad v_c = V_p \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Supondo que a carga possa ser modelada por uma fonte de corrente constante,  $I_0$ , como indica o diagrama,

- a) esboce os gráficos das correntes  $i_a$ ,  $i_b$  e  $i_c$  de cada fase em função do tempo, indicando os diodos que conduzem em cada intervalo.
- b) determine,  $FP$ ,  $FD$ ,  $FF_i$  e  $DHT$  (ver anexo 2), como vistos dos terminais da fonte  $v_a$ .

Solução

a)

O gráficos a seguir representam as tensões  $v_a$  (traço grosso),  $v_b$  (traço médio),  $v_c$  (traço fino), normalizadas com relação a  $V$ , e as correntes  $i_a$ ,  $i_b$  e  $i_c$ , normalizadas com relação a  $I_0$ .

A corrente de entrada sai do terminal positivo da fase com tensão mais elevada e entra pelo terminal negativo da fase com tensão mais baixa, e tem o valor constante  $I_0$ . A fase com valor intermediário não conduz. Conduz sempre o diodo da parte superior ligado a fase mais positiva e o diodo da parte inferior ligado à fase mais negativa. Os outros quatro diodos ficam reversamente polarizados e, portanto, não conduzem (em se tratando de diodos ideais). Os gráficos abaixo representam respectivamente  $i_a$ ,  $i_b$  e  $i_c$ , normalizadas em relação a  $I_0$  e em função de  $\frac{180}{\pi} \times \omega t$

A sequência indicando os diodos que conduzem, em cada intervalo de  $60^\circ$ , a partir de  $-120^\circ$ , é : D3 e D5; D1 e D5; D1 e D6; D2 e D6; D2 e D4; D3 e D4; D3 e D5; D1 e D5.

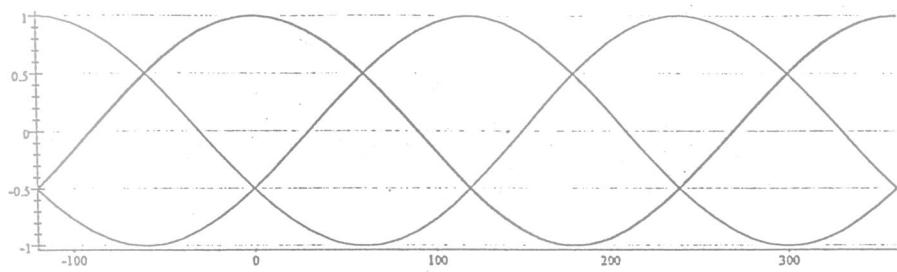
b)

No período

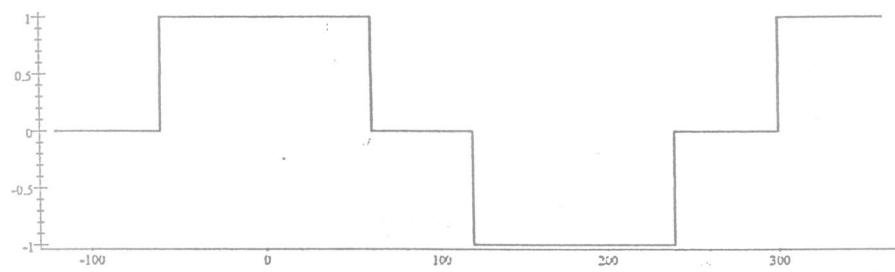
$$-\frac{\pi}{3} < \omega t < 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

a corrente  $i_a$  é descrita por

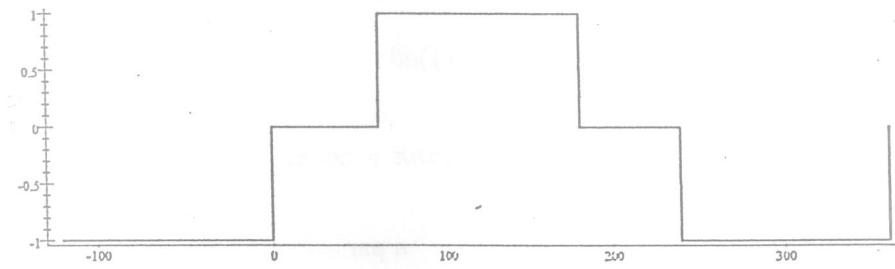
$$i_a(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{3} < \omega t < \frac{\pi}{3} \\ -1 & \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} < \omega t < \frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3} \\ 0 & \omega t \text{ não pertencente aos intervalos acima} \end{cases}$$



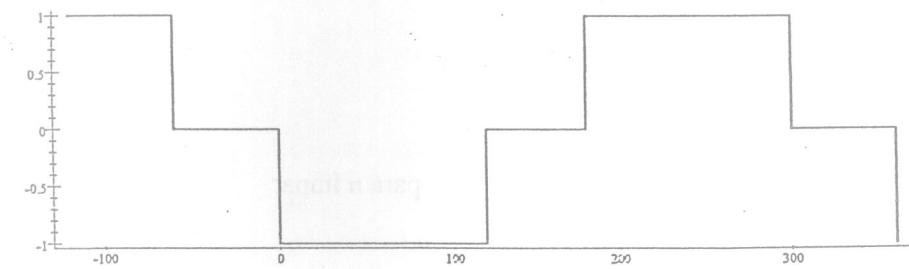
tensões  $v_a$  (grosso),  $v_b$  (médio),  $v_c$  (fino).



corrente  $i_a$



corrente  $i_b$



corrente  $i_c$

$$i_a(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

com

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-t_0}^{T-t_0} i_a \cos n\omega t dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-t_0}^{T-t_0} i_a \sin n\omega t dt$$

onde

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad t_0 = \frac{\pi/3}{\omega}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_{-t_0}^{T-t_0} i_a(\omega t) (\cos n\omega t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\omega t_0}^{\omega(T-t_0)} i_a(\theta) \cos n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/3}^{2\pi-\pi/3} i_a(\theta) \cos n\theta d\theta \\ a_n &= \frac{I_0}{\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos n\theta d\theta - \frac{I_0}{\pi} \int_{\pi-\pi/3}^{\pi+\pi/3} \cos n\theta d\theta \end{aligned}$$

Como

$$\int_{\pi-\pi/3}^{\pi+\pi/3} \cos n\theta d\theta = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos n(\theta + \pi) d\theta$$

$$a_n = \frac{I_0}{\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (\cos n\theta - \cos n(\theta + \pi)) d\theta$$

$$\cos n\theta - \cos n(\theta + \pi) = \cos n\theta - \cos n\theta \cos n\pi + \sin n\theta \sin n\pi = \cos n\theta(1 - \cos n\pi)$$

$$\cos n\theta - \cos n(\theta + \pi) = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ 2 \cos n\theta & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Portanto

$$a_n = 0 \quad \text{para } n \text{ par}$$

e

$$a_n = \frac{2I_0}{\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos n\theta d\theta = \frac{4I_0}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} \quad \text{para } n \text{ ímpar}$$

$$b_n = \frac{I_0}{\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sin n\theta d\theta - \frac{I_0}{\pi} \int_{\pi-\pi/3}^{\pi+\pi/3} \sin n\theta d\theta$$

$$\int_{\pi-\pi/3}^{\pi+\pi/3} \sin n\theta d\theta = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sin n(\theta + \pi) d\theta$$

$$b_n = \frac{I_0}{\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (\sin n\theta - \sin n(\theta + \pi)) d\theta$$

$$\sin n\theta - \sin n(\theta + \pi) = (\sin n\theta)(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ 2 \sin n\theta & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Para  $n$  par  $b_n = 0$  (porque o integrando é identicamente nulo). Para  $n$  ímpar

$$b_n = \frac{2I_0}{\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sin n\theta d\theta = 0$$

porque o integrando é uma função ímpar. Resumindo

$$i_a(t) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_0 \cos \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4I_0}{(2k+1)\pi} \sin \frac{(2k+1)\pi}{3} \cos((2k+1)\omega t)$$

O valor eficaz da componente fundamental da corrente é dada por

$$I_{i1} = \left( \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_0 \right) / \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi\sqrt{2}} I_0$$

O valor quadrático médio de  $i_a = i_i$  é

$$I_i^2 = \frac{1}{T} \int i_a dt = \frac{1}{T} \left( I_{i1}^2 \times \frac{4}{6} T + 0 \times \frac{2}{6} T \right) = \frac{2}{3} I_{i1}^2$$

e, portanto,

$$I_i = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} I_{i1}.$$

Temos

$$FF_i = \frac{I_{i1}}{I_i} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{\pi\sqrt{2}} I_0}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} I_{i1}} = \frac{\frac{3}{\pi}}{\sqrt{3}} = 0.95493,$$

e

$$FD = 1,$$

porque não há defasagem entre  $i_{a1} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_0 \cos \omega t$  e a tensão  $v_a = V_m \cos \omega t$ . Portanto,

$$FP = (FF_i)(FD) = FF_i = \frac{3}{\pi} = 0.95493$$

e

$$DHT = \sqrt{\left(\frac{1}{FF_i}\right)^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - 1} = 0.310842$$

**Solução mais simples:** esta solução não envolve a determinação explícita da série de Fourier da corrente, e por isso é mais rápida.

A potência ativa, ou média, liberada pelos terminais da fase  $a$ , é

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_{-t_0}^{T-t_0} i_a v_a dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/3}^{2\pi-\pi/3} i_a v_a d\theta \\ &= 2 \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} I_0 V_m \cos \theta d\theta \right) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} I_0 V_m \end{aligned}$$

Usando a definição,

$$FP = \frac{P}{I_i V_i} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\pi} I_0 V_m}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} I_0\right) \left(\frac{V_m}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{3}{\pi}$$

Da forma da corrente fica claro que a componente fundamental de  $i_a$  está em fase com a tensão  $v_a$  de modo que

$$\phi_1 = 0 \Rightarrow FD = \cos \phi_1 = 1$$

Da relação  $FP = (FF_i)(FD)$ ,

$$FF_i = \frac{FP}{FD} = FP = \frac{3}{\pi}$$

e  $DHT$  é determinada de  $FF_i$  como acima.

4. Para o retificador controlado simétrico da fig. A1-4, assumindo corrente constante na carga,

- a) esboce as formas de onda da tensão de saída e corrente de entrada (use um ângulo de disparo,  $\alpha$ , contado a partir do início do semi-ciclo, de  $60^\circ$ );
- b) determine o valor eficaz da corrente de entrada,  $FP$  e  $DHT$  em função do ângulo de disparo  $\alpha$ ;
- c) repita o item a trocando a fonte de corrente na saída por um resistor de resistência  $R$ .

Solução:

a)

O gráficos a seguir mostram a tensão de entrada (a origem do tempo foi escolhida de modo que  $v_e = V_m \sin \omega t$ ), a tensão na carga, e a corrente de entrada. As tensões foram normalizadas em relação a  $V_m$  e a corrente de entrada foi normalizada com relação a  $I_0$ . As linhas horizontais nos gráficos das tensões correspondem às tensões  $\pm \sin(60^\circ) V_m = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} V_m$ .

b)

$$I_i^2 = \frac{1}{T} \int i_e^2 dt = \frac{1}{T} \left( I_0^2 \times \left( \frac{2\pi - 2\alpha}{2\pi} \right) T \right) = \left( 1 - \frac{\alpha}{\pi} \right) I_0^2$$

ou

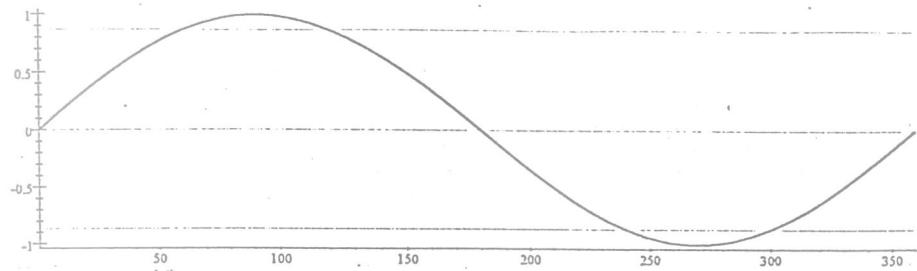
$$\text{corrente eficaz na entrada : } I_i = I_0 \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi}}$$

A potência média na entrada é

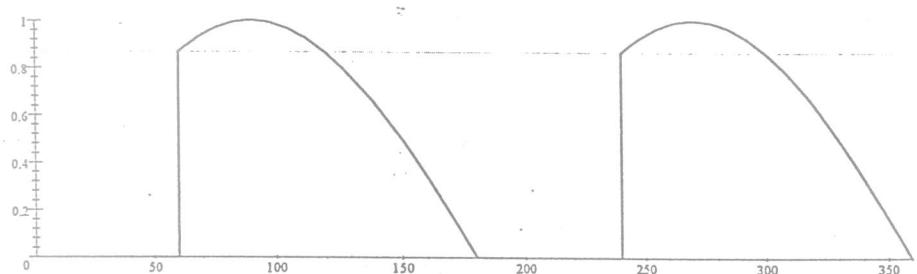
$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T v_e i_e dt = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} v_e i_e dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} (V_m \sin \theta) I_0 d\theta = \frac{V_m I_0}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} (\sin \theta) d\theta = \frac{1 + \cos \alpha}{\pi} V_m I_0 \end{aligned}$$

A tensão eficaz na entrada é  $V_i = V_m / \sqrt{2}$ . Portanto, usando a definição,

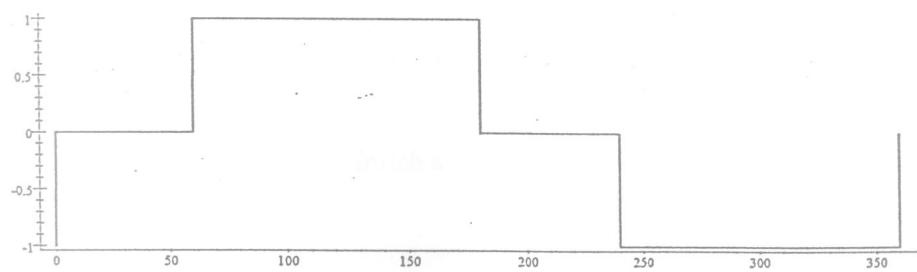
$$\begin{aligned} \text{fator de potência : } FP &= \frac{P}{S} = \frac{P}{V_i I_i} \\ &= \frac{\frac{1 + \cos \alpha}{\pi} V_m I_0}{\left( \frac{V_m}{\sqrt{2}} \right) \left( I_0 \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi}} \right)} = \frac{\sqrt{2} (1 + \cos \alpha)}{\sqrt{\pi(\pi - \alpha)}} \end{aligned}$$



tensão de entrada normalizada

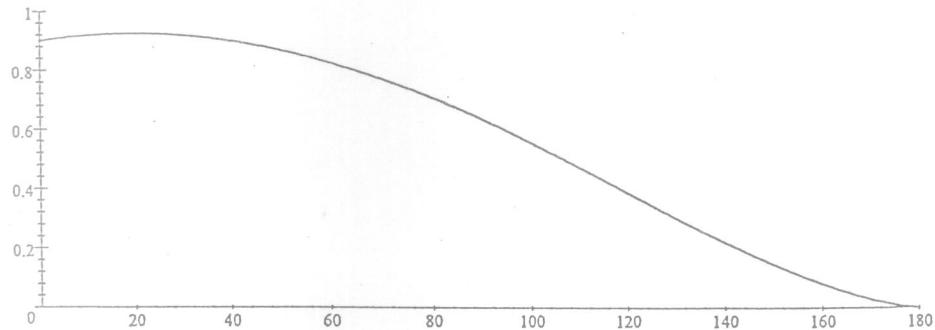


tensão na carga



corrente de entrada

O gráfico a seguir mostra o comportamento de  $FP$  com  $\alpha$ .



fator de potência em função do ângulo de disparo (graus)

Podemos determinar a distorção harmônica total,  $DTH$ , pela expressão

$$DTH = \sqrt{\left(\frac{1}{FF_i}\right)^2 - 1}$$

uma vez determinado

$$FF_i = \frac{FP}{FD}$$

o qual depende, por sua vez, do fator de deslocamento,  $FD$ . Da observação do gráfico da corrente de entrada, percebe-se que os centros dos pulsos de corrente se encontram deslocados em relação aos picos de tensão de entrada por um ângulo igual a  $\alpha/2$ , o que permite inferir que

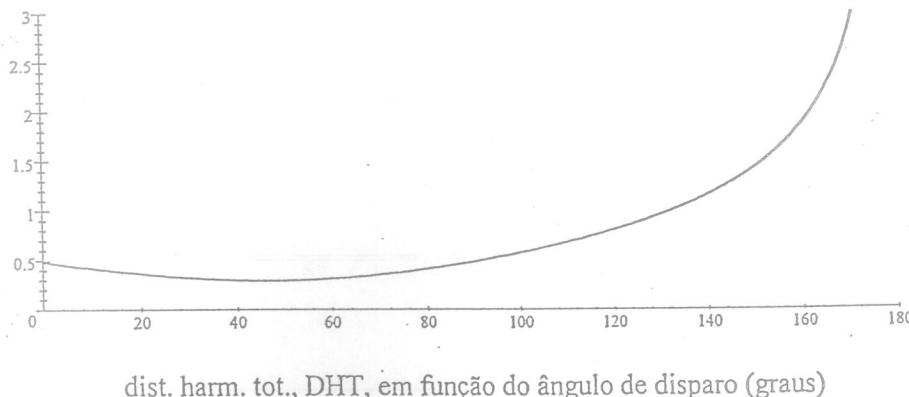
$$\phi_1 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow FD = \cos \phi_1 = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Portanto

$$DTH = \sqrt{\left(\frac{FD}{FP}\right)^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}(1+\cos\alpha)}{\sqrt{\pi(\pi-\alpha)}}}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{\pi(\pi-\alpha)\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2(1+\cos\alpha)^2} - 1}$$

$$D(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi(\pi-\alpha)\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2(1+\cos\alpha)^2} - 1}$$

No gráfico a seguir, temos o comportamento de  $DHT$  em função de  $\alpha$

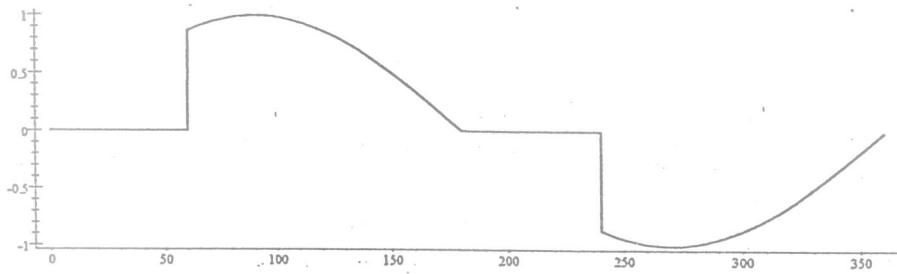


c)

Quando a carga é resistiva, a corrente de entrada se modifica. Durante os intervalos de condução, a corrente é dada por

$$i_e = \frac{v_e}{R}.$$

No gráfico a seguir temos a nova corrente de entrada normalizada em relação a  $V_m/R$  (a tensão na carga continua a mesma).



corrente de entrada (carga resistiva)

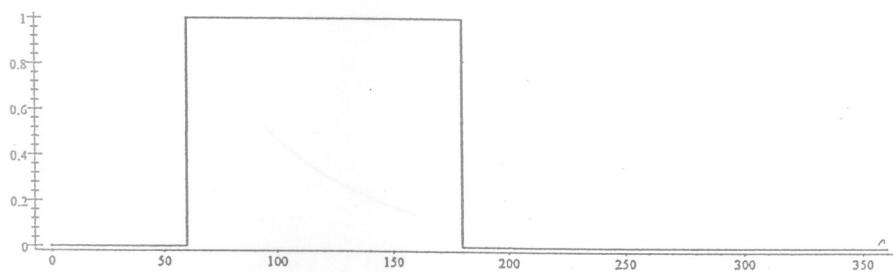
5. Para o retificador semi-controlado assimétrico da fig. A1-5, repita o que é pedido no exercício 4. Acrecente as formas de onda das correntes em T1 e D1.

Solução:

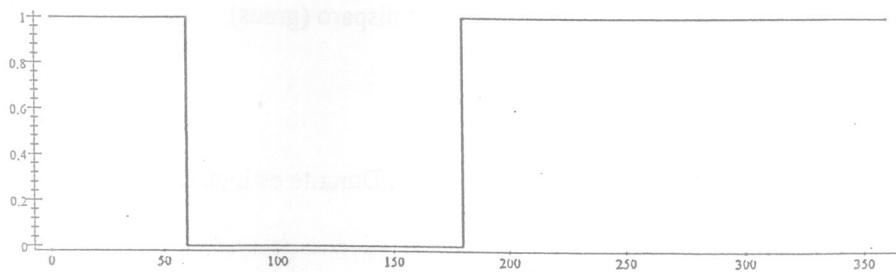
a)

Pode-se perceber que a corrente de entrada e a tensão na carga são as mesmas que aquelas da ponte simétrica. A diferença é que quando ambos os tiristores estão bloqueados a corrente na carga circula por D1 e D2 e não há necessidade do díodo D0.

Nos gráficos a seguir, as correntes em T1 e em D1, normalizadas com relação a  $I_0$ .



corrente em T1



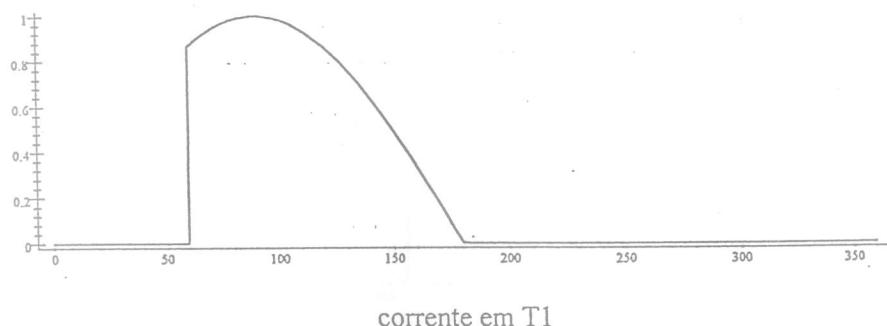
corrente em D1

b)

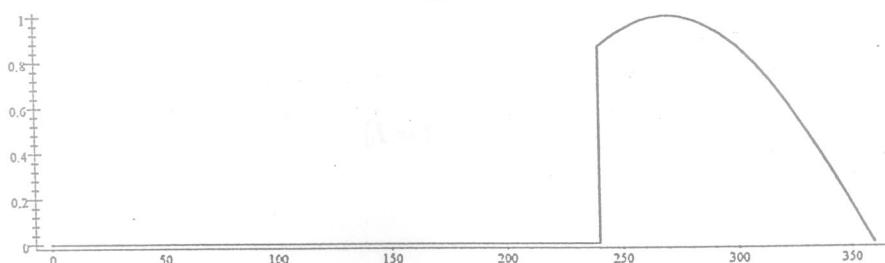
Como a corrente de entrada neste caso é idêntica à do exercício 4, todos os parâmetros ali determinados se aplicam neste caso.

c)

A corrente na entrada e tensão na carga são as já determinadas no exercício 4. As correntes em T1 e D1, normalizadas com relação a  $V_m/R$ , são mostradas nos gráficos a seguir.



corrente em T1



corrente em D1

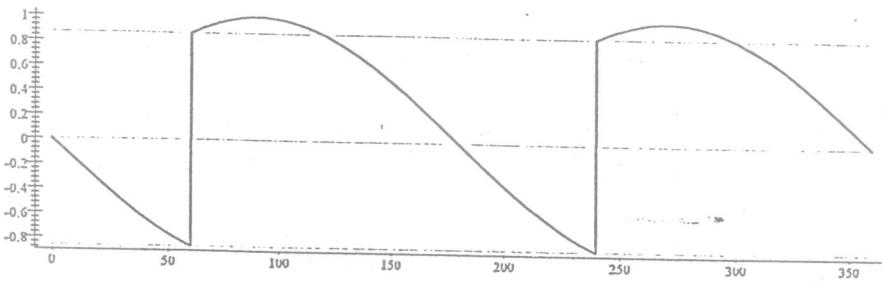
---

6. Para o retificador totalmente controlado da figura A1-6, repita o que é pedido no exercício 4.

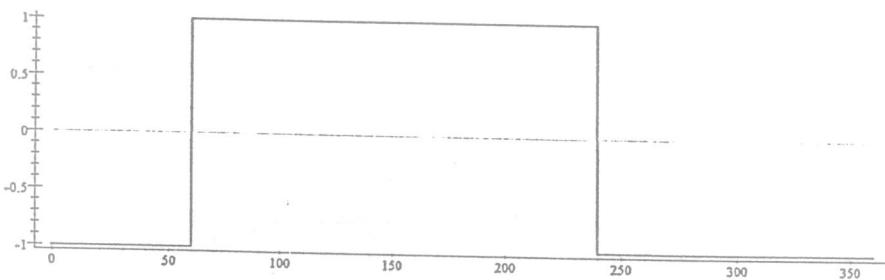
Solução:

a)

Nos gráficos a seguir, a tensão na carga (normalizada com relação a  $V_m$ ) e a corrente na entrada (normalizada com relação a  $I_0$ )..



tensão na carga



corrente na entrada

b)

$$I_i^2 = \frac{1}{T} \int i_e^2 dt = \frac{1}{T} \int I_0^2 dt = I_0^2$$

ou

corrente eficaz na entrada :  $I_i = I_0$

A potência média na entrada é

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} v_e i_e dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} v_e(\theta) i_e(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} I_0 V_m \sin \theta d\theta + \int_{\pi+\alpha}^{2\pi+\alpha} (-I_0) V_m \sin \theta d\theta \right) \\ &= \frac{I_0 V_m}{2\pi} \left( \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \sin \theta d\theta - \int_{\pi+\alpha}^{2\pi+\alpha} \sin \theta d\theta \right) = \frac{I_0 V_m}{2\pi} \left( 2 \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \sin \theta d\theta \right) = \frac{I_0 V_m}{2\pi} (4 \cos \alpha) \end{aligned}$$

ou

$$P = \frac{2I_0 V_m}{\pi} \cos \alpha$$

A tensão eficaz na entrada é  $V_i = V_m/\sqrt{2}$ . Portanto, usando a definição,

$$\begin{aligned} \text{fator de potência} : FP &= \frac{P}{S} = \frac{P}{V_i I_i} \\ &= \frac{\frac{2I_0 V_m}{\pi} \cos \alpha}{\left( \frac{V_m}{\sqrt{2}} \right) (I_0)} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \alpha \end{aligned}$$

O fator de deslocamento pode ser visto por inspeção do gráfico da corrente

$$\phi_1 = \alpha \Rightarrow FD = \cos \phi_1 = \cos \alpha.$$

Portanto

$$DTH = \sqrt{\left(\frac{FD}{FP}\right)^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{\cos \alpha}{\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \alpha}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{\pi^2}{8} - 1} \cong 0.483$$

c)

Com, carga resistiva, a tensão na carga e a corrente de entrada são como as do item c do exercício 4.

---

7. Para o retificador totalmente controlado da figura A1-6, considere a situação (mais realista) em que a fonte de tensão de entrada é modelada como uma fonte de tensão ideal em série com um indutor de indutância  $L_e$  (relativamente pequena).

a) Obtenha a expressão do valor médio da tensão de saída  $\langle v_0 \rangle$ , em termos dos parâmetros pertinentes e do ângulo de disparo  $\alpha$ .

b) Com  $V_p = 220 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} V \cong 180 V$ ,  $f = \frac{\omega}{2\pi} = 60 \text{ Hz}$ ,  $L_e = 10 \text{ mH}$ , determine a corrente  $I_0$  em função de  $\alpha$ , para que a tensão média na saída se mantenha fixa em  $\langle v_0 \rangle = 72 \text{ V}$ .

Solução

a)

Sejam  $i_1, i_2, i_3$  e  $i_4$  as correntes pelos tiristores T1, T2, T3 e T4, respectivamente, enquanto  $i = i_e = i_{L_e}$  representa a corrente saindo do terminal positivo de  $v_e$  (suposto conectado a T1 e T3, através da indutância  $L_e$ ).

Temos pela lei das correntes

$$(i) \quad i_1 + i_2 = I_0$$

$$(ii) \quad i_3 + i_4 = I_0$$

$$(iii) \quad i_3 + i = i_1$$

$$(i) \quad i_1 + i_2 = I_0$$

$$(iii) \quad -i_1 + i_3 = -i$$

$$\Rightarrow (iv) \quad i_2 + i_3 = I_0 - i$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad i_3 + i_4 &= I_0 \\
 \text{(iii)} \quad -i_3 + i_1 &= i \\
 \Rightarrow \text{(v)} \quad i_1 + i_4 &= I_0 + i
 \end{aligned}$$

Assumindo que em  $\omega t = \alpha$  T1 e T4 estejam bloqueados, temos, nesse instante,

$$i_1 = i_4 = 0; \quad i_2 = i_3 = -i = I_0$$

Com corrente pelo *gate* e tensão positiva aplicada a seus terminais, os tiristores T1 e T4 iniciam a condução e a tensão em seus terminais cai a zero (no nosso modelo com tiristores ideais). Mas a presença do indutor não permite uma reversão rápida do sentido da corrente  $i$  e durante um intervalo

$$\alpha < \omega t < \gamma$$

os quatro tiristores estão em condução, ocasionando uma tensão  $v_0 = 0$  nos terminais da carga, e estabelecendo um curto circuito na fonte de entrada (fonte de tensão em série com a indutância). Nesse intervalo a corrente no indutor  $i$  é determinada por

$$(*) \quad L_e \frac{di}{dt} = V_p \sin \omega t = v_e,$$

cuja solução geral é

$$i = C_1 - \frac{V_p}{\omega L_e} \cos \omega t,$$

e pela condição inicial

$$i(t = \frac{\alpha}{\omega}) = -I_0 = C_1 - \frac{V_p}{\omega L_e} \cos \alpha,$$

ou seja,

$$(**) \quad i = -I_0 + \frac{V_p}{\omega L_e} (\cos \alpha - \cos \omega t).$$

Note que, por (\*),

$$\frac{di}{dt} = \frac{V_p}{L_e} \sin \omega t > 0 \quad \text{para } 0 < \omega t < \pi$$

o que significa que a corrente  $i$ , inicialmente negativa, cresce continuamente a partir de  $\omega t = \alpha$ . Quando  $i$  atinge o valor  $I_0 > 0$ , temos que

$$\text{(iv)} \quad i_2 + i_3 = I_0 - i = 0 \Rightarrow i_3 = i_2 = 0$$

onde se usou o fato de que

$$i_3 \geq 0 \quad \text{e} \quad i_2 \geq 0.$$

Temos ainda, que nesse instante (veja (i) e (ii)),

$$i_1 = i_4 = I_0$$

o que confirma (v). Isso significa que quando a corrente no indutor, descrita na equação (\*\*), atinge o valor  $I_0$  a comutação da corrente se completou. A partir daí T2 e T3 estão em bloqueio e

T1 e T4 em plena condução. O período de comutação termina em  $\omega t = \gamma$ , com

$$I_0 = -I_0 + \frac{V_p}{\omega L_e} (\cos \alpha - \cos \gamma) \Rightarrow \cos \gamma = \cos \alpha - \frac{2I_0 \omega L_e}{V_p}$$

A tensão na carga é periódica com período  $T/2 = \pi/\omega$  e

$$v_0 = \begin{cases} 0 & \text{para } \alpha \leq \omega t \leq \gamma \\ V_p \sin \omega t & \text{para } \gamma \leq \omega t \leq \pi + \alpha \end{cases}$$

de onde se obtém

$$\begin{aligned} \langle v_0 \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{\gamma}^{\pi+\alpha} V_p \sin \theta d\theta = \frac{V_p}{\pi} (\cos \alpha + \cos \gamma) \\ &= \frac{V_p}{\pi} \left( \cos \alpha + \cos \alpha - \frac{2I_0 \omega L_e}{V_p} \right) = \frac{2V_p}{\pi} \left( \cos \alpha - \frac{I_0 \omega L_e}{V_p} \right) \end{aligned}$$

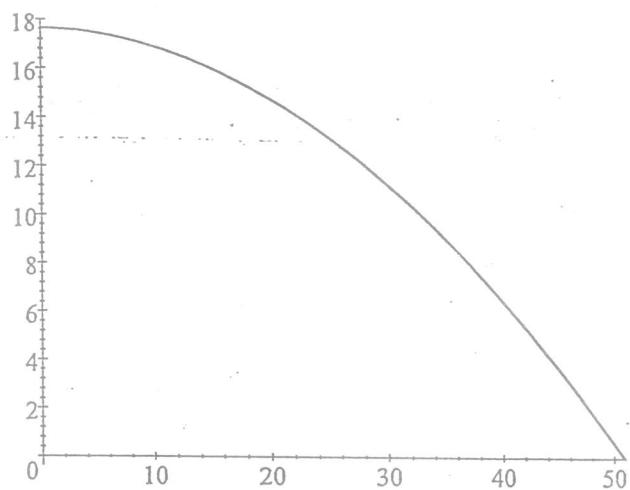
b)

$$\begin{aligned} \frac{2V_p}{\pi} \left( \cos \alpha - \frac{I_0 \omega L_e}{V_p} \right) &= \langle v_0 \rangle \\ &\Rightarrow \cos \alpha - \frac{I_0 \omega L_e}{V_p} = \frac{\pi \langle v_0 \rangle}{2V_p} \\ &\Rightarrow \frac{I_0 \omega L_e}{V_p} = \cos \alpha - \frac{\pi \langle v_0 \rangle}{2V_p} \\ &\Rightarrow I_0 = \frac{V_p}{\omega L_e} \left( \cos \alpha - \frac{\pi \langle v_0 \rangle}{2V_p} \right) \end{aligned}$$

ou

$$I_0 = \frac{220\sqrt{2}/\sqrt{3}}{120\pi(10^{-2})} \left( \cos \alpha - \frac{\pi(72)}{2(220\sqrt{2}/\sqrt{3})} \right) \text{ A} = (47.648 \cos \alpha - 30) \text{ A}$$

O gráfico a seguir ilustra essa relação. Temos  $(I_0)_{\max} \cong 17.65 \text{ A}$ , para  $\alpha = 0$ , e  $I_0 = 0$  para  $\alpha \cong 50.98^\circ$ .



$(J_0/A)$  em função de ( $\alpha/\text{grau}$ )

---

8. Os exercícios da lista do professor Antenor (segundo semestre de 2008), anexa.

As minhas soluções para esses exercícios encontam-se na parte 2.

---

# EE833 - Turmas B e U - 2009/II

## Lista de Exercícios 1 - Soluções Parte 2/2 (exercício 8)

8. Os exercícios da lista do professor Antenor (segundo semestre de 2008), anexa.

---

8-1.

Solução:

Este arranjo, 2 SCR's, em antiparalelo, e em série com um indutor, chamado Reator Controlado a Tiristor (RCT), simula um indutor com indutância efetiva controlada pelo ângulo de disparo. É normalmente associado em paralelo com um capacitor de capacidade fixa, o conjunto situado entre duas das linhas de um sistema trifásico (o sistema utilizando, portanto, 3 conjuntos) e sua função é controlar a potência reativa. Pode ser usado para equilibrar, e controlar o fator de potência de uma determinada carga, alimentada por um sistema de distribuição trifásico, ou seja, como compensador de carga. Em outra aplicação importante, pode ser utilizado para auxiliar a manter a amplitude da tensão em um determinado ponto da rede de distribuição de energia dentro de limites especificados, ou seja, atua como regulador de tensão.

a)

Obs: A corrente no indutor será considerada positiva quando, no diagrama, fluir da esquerda para a direita.

O SCR T1 é ativado nos instantes  $\omega t = 2n\pi + \alpha$  e o SCR T2 nos instantes  $\omega t = (2n+1)\pi + \alpha$ , com  $n$  inteiro. Obtém-se controle com

$$\pi/2 \leq \alpha \leq \pi.$$

Assuma que no instante  $\omega t = -\pi + \alpha$ , em que o SCR T2 é ativado, a corrente no indutor seja nula. Com T2 em condução a tensão no indutor será

$$v_L = V_{ip} \sin \omega t$$

e a corrente no indutor, durante um certo intervalo,  $-\pi/2 \leq -\pi + \alpha \leq \omega t \leq \beta$ , será dada por

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{(-\pi+\alpha)\omega}^t V_{ip} \sin(\omega u) du = \frac{V_{ip}}{\omega L} (-\cos \omega t + \cos(-\pi + \alpha)) \quad (*)$$

Note que a expressão acima têm a mesma forma de onda que a de  $-\cos \omega t$  deslocada para cima pela constante  $\cos(-\pi + \alpha) \geq 0$ , e, portanto, se anula nos pontos  $\omega t = -\pi + \alpha \geq -\pi/2$  e  $\omega t = \pi - \alpha \leq \pi/2$ , permanecendo negativa no interior do intervalo entre esses dois instantes, o que permite identificar  $\beta$  como  $\beta = \pi - \alpha$ .

Quando a corrente no indutor se anula em  $\omega t = \pi - \alpha$ , T2 passa ao estado de bloqueio, o que faz a tensão e corrente no indutor nulas durante o intervalo  $\pi/2 \leq \pi - \alpha < \omega t < \alpha$ .

Em  $\omega t = \alpha$ , T1 é ativado, novamente a tensão no indutor passa a ser  $v_L = V_{ip} \sin \omega t$  e a corrente terá a forma

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{(\alpha)\omega}^t V_{ip} \sin(\omega u) du = \frac{V_{ip}}{\omega L} (-\cos \omega t + \cos \alpha).$$

Novamente, a corrente  $i_L$  tem a foma de  $-\cos \omega t$ , agora deslocada para baixo, por um valor  $\cos \alpha = -\cos(-\pi + \alpha) \leq 0$ . Pode-se verificar que essa corrente se mantém positiva no intervalo  $\pi/2 \leq \alpha < \omega t < 2\pi - \alpha \leq \pi + \pi/2$ , anulando-se em seus extremos. Portanto, T2 passa ao estado de bloqueio em  $\omega t = 2\pi - \alpha$ . Tensão e corrente no indutor permanecem nulos no intervalo  $2\pi - \alpha < \omega t < \pi + \alpha$ , e a partir daí o ciclo se repete.

Resumo: Tensão e corrente no indutor são periódicas com período  $T = 2\pi/\omega$  e podem ser descritas no intervalo (de um período)

$$0 \leq \omega t \leq 2\pi$$

por

$$v_L(t) = \begin{cases} 0 & (\pi - \alpha \leq \omega t \leq \alpha) \text{ ou } (2\pi - \alpha \leq \omega t \leq \pi + \alpha) \\ V_{ip} \sin \omega t & \text{nos demais instantes} \end{cases}$$

e

$$i_L(t) = \begin{cases} \frac{V_{ip}}{\omega L} (-\cos \omega t + \cos(-\pi + \alpha)) & 0 \leq \omega t \leq \pi - \alpha \\ \frac{V_{ip}}{\omega L} (-\cos \omega t + \cos \alpha) & \alpha \leq \omega t \leq 2\pi - \alpha \\ \frac{V_{ip}}{\omega L} (-\cos \omega t + \cos(-\pi + \alpha)) & \pi - \alpha \leq \omega t \leq 2\pi \\ 0 & \text{nos demais instantes} \end{cases}$$

No gráficos a seguir, a tensão  $v_L$ , normalizada em relação a  $V_{ip}$ , e a corrente, normalizada

em relação a  $V_{ip}/(\omega L)$ . O valor de  $\alpha$  é o pedido no exercício: equivalente a 100 graus. Como referência, aparece no gráfico da corrente, em traço mais fino, a corrente normalizada caso ela permanecesse contínua (sempre um dos tiristores em condução, correspondente a um ângulo de disparo de 90 graus). Para a tensão, os valores lidos no gráfico devem ser multiplicados por

$$V_{ip} = 10\sqrt{2} \text{ kV} \cong 14.1 \text{ kV}$$

Para a corrente, os valores lidos no gráfico devem ser multiplicados por,

$$\frac{V_{ip}}{\omega L} = \frac{10\sqrt{2} \times 10^3}{2\pi(50)(1)} \text{ A} \cong 45.0 \text{ A}$$

b)

$$i_L(t) = \begin{cases} \frac{V_{ip}}{\omega L}(-\cos \omega t + \cos(-\pi + \alpha)) & -\pi + \alpha \leq \omega t \leq \pi - \alpha \\ \frac{V_{ip}}{\omega L}(-\cos \omega t + \cos \alpha) & \alpha \leq \omega t \leq 2\pi - \alpha \\ 0 & \text{nos demais instantes} \end{cases}$$

Pelo exame da forma de onda, é possível intuir que a componente fundamental da corrente no indutor terá a forma

$$i_{L1}(t) = c_1 \cos \omega t; \quad c_1 < 0.$$

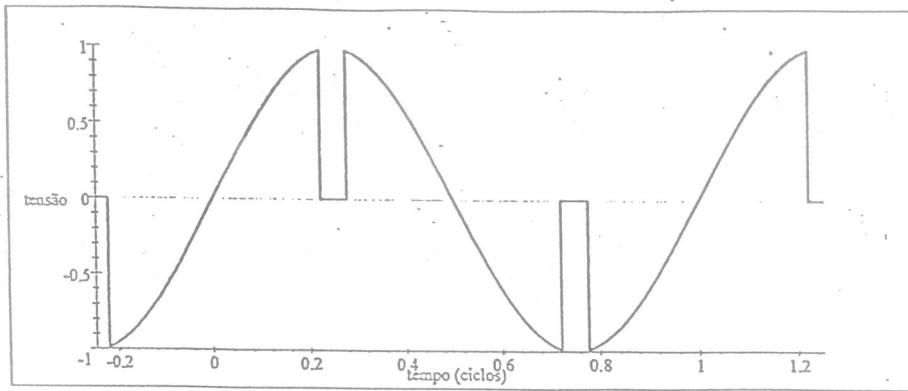
Da teoria das séries de Fourier, com  $\theta = \omega t$ ,

$$c_1 = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} i_L \cos \theta d\theta = \frac{V_{ip}}{\omega L} \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi+\alpha}^{\pi-\alpha} (-\cos \theta + \cos(-\pi + \alpha)) \cos \theta d\theta \right. \\ \left. + \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} (-\cos \theta + \cos \alpha) \cos \theta d\theta \right]$$

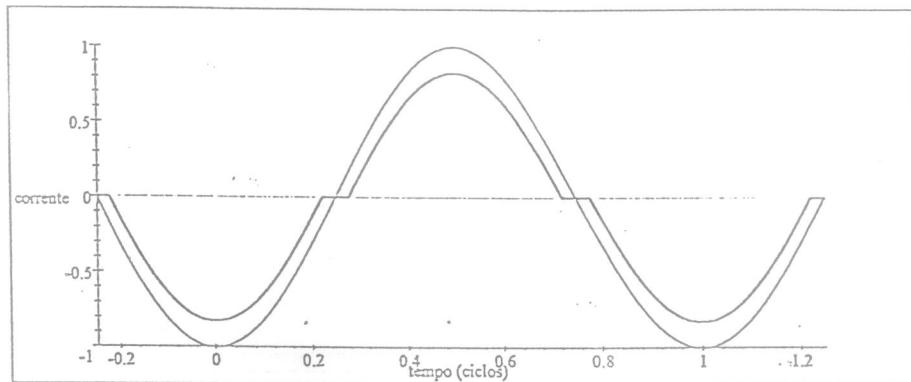
Temos

$$(-\cos \theta + \cos(-\pi + \alpha)) \cos \theta = -\cos^2 \theta - \cos \theta \cos \alpha$$

$$(-\cos \theta + \cos \alpha) \cos \theta = -\cos^2 \theta + \cos \theta \cos \alpha$$



tensão normalizada



corrente normalizada

Com

$$\int \cos \theta d\theta = \sin \theta; \quad \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{2\theta + \sin 2\theta}{4};$$

pode-se obter

$$\int_{-\pi+\alpha}^{\pi-\alpha} (-\cos \theta + \cos(-\pi + \alpha)) \cos \theta d\theta = -\frac{2(\pi - \alpha) + \sin 2\alpha}{2},$$

$$\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} (-\cos \theta + \cos \alpha) \cos \theta d\theta = -\frac{2(\pi - \alpha) + \sin 2\alpha}{2},$$

e

$$c_1 = -\frac{V_{ip}}{\omega L} \frac{2(\pi - \alpha) + \sin 2\alpha}{\pi}.$$

Portanto,

$$i_{L1} = -\frac{V_{ip}}{\omega L} \frac{2(\pi - \alpha) + \sin 2\alpha}{\pi} \cos \omega t$$

Em regime permanente,

$$i_{L1}(t) = \operatorname{Re}(\bar{Y}\bar{V}_i e^{j\omega t})$$

onde  $Y$  representa a admitância representada pela combinação tiristores-indutor, na frequência da tensão da rede, e  $\bar{V}_i$  o fasor associado à tensão de entrada:

$$\operatorname{Re}(\bar{V}_i e^{j\omega t}) = V_{ip} \sin \omega t = \operatorname{Re}(-jV_{ip} e^{j\omega t}) \Rightarrow \bar{V}_i = -jV_{ip}$$

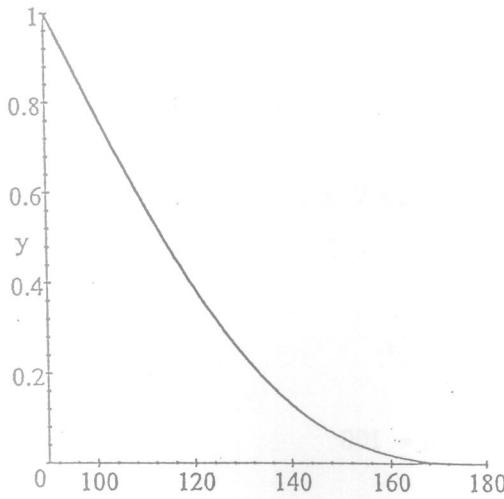
$$i_{L1}(t) = c_1 \cos \omega t = \operatorname{Re}(c_1 e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(Y(-jV_{ip}) e^{j\omega t}) \Rightarrow c_1 = -jYV_{ip}$$

$$Y = \frac{c_1}{-jV_{ip}} = \frac{1}{-jV_{ip}} \left( -\frac{V_{ip}}{\omega L} \frac{2(\pi - \alpha) + \sin 2\alpha}{\pi} \right) = Y = \frac{1}{j\omega L} \frac{2(\pi - \alpha) + \sin 2\alpha}{\pi}$$

$$Z = \frac{1}{Y} = j\omega \left( \frac{\pi}{2(\pi - \alpha) + \sin 2\alpha} L \right) = j\omega L_{eq}$$

$$L_{eq} = \frac{\pi}{2(\pi - \alpha) + \sin 2\alpha} L$$

Nos gráficos abaixo, a amplitude (pico) de  $i_{L1}(t)$ , normalizada em relação a  $V_{ip}/\omega L$  e a indutância equivalente normalizada em relação a  $L$ , em função do ângulo de disparo em graus. Para os dados do exercício,  $V_{ip}/\omega L \cong 45,016$  A e  $L = 1$  H.



amplitude da corrente no indutor normalizada,

indutância normalizada com relação a  $\alpha$

Para os valores considerados no exercício

$$L_{eq} = \frac{\pi}{2\left(\pi - \left(\frac{100\pi}{180}\right)\right) + \sin\left(2\frac{100\pi}{180}\right)} (1) \cong 1.28 \text{ H}$$

## 8-2.

Solução:

A tensão de saída  $v_d$  é periódica com período igual à metade do período da tensão de entrada,

$$v_i = 200\sqrt{2} \sin \omega t,$$

e no intervalo de um período,  $0 \leq \omega t \leq \pi$ , pode ser escrita como abaixo (supõe-se que a tensão de entrada seja  $v_i = V_p \sin \omega t$ )

$$v_d = \begin{cases} -V_p \sin \omega t & 0 \leq \omega t \leq \alpha \\ V_p \sin \omega t & \alpha < \omega t \leq \pi \end{cases}$$

B)

$$\langle v_d \rangle = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^\alpha (-V_p \sin \theta) d\theta + \int_\alpha^\pi V_p \sin \theta d\theta \right) = \frac{2 \cos \alpha}{\pi} V_p$$

ou

$$\langle v_d \rangle = \frac{2 \cos \alpha}{\pi} V_p = \frac{2(200\sqrt{2})}{\pi} \cos \alpha \text{ V} \cong 180.06 \cos \alpha \text{ V}$$

C)

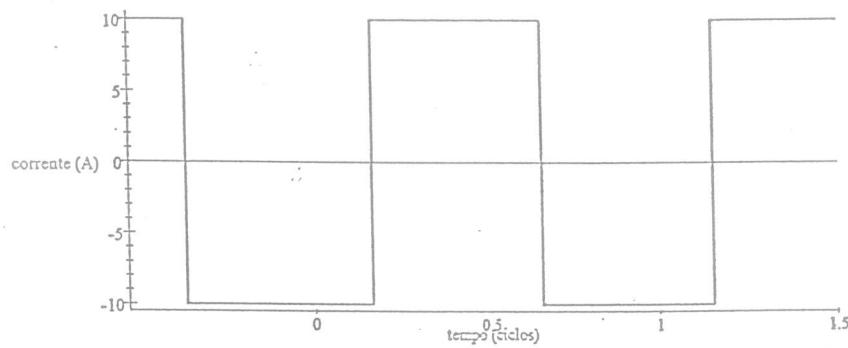
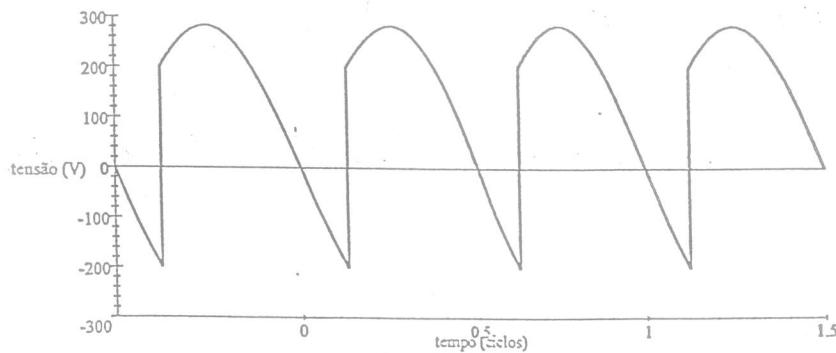
$$\frac{2(200\sqrt{2})}{\pi} \cos \alpha = 100$$

$$\cos \alpha = \frac{100\pi}{2(200\sqrt{2})} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left( \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \right) \cong 0.982 \text{ rad} \cong 56.3^\circ$$

A)

Abaixo, os gráficos com a tensão na saída e a corrente na entrada.



D)

Do exame da forma de onda da corrente, fica claro que

$$FD = \cos \phi_1 = \cos \alpha_1 \cong 0.55536.$$

$$\begin{aligned} < v_i i_i > &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi v_i i_i d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^\alpha (-I_0)(v_i) d\theta + \int_\alpha^\pi (I_0)(v_i) d\theta \right) = I_0 \left( \int_0^\alpha (-v_i) d\theta + \int_\alpha^\pi v_i d\theta \right) = I_0 < v_d > \end{aligned}$$

ou

$$< v_i i_i > = < v_d i_d > = (10)(100) \text{ W} = 1 \text{ kW}$$

$$FP = \frac{\langle v_i i_i \rangle}{V_i I_i} = \frac{1000}{(200)(10)} = 0.5.$$

8-3.

Solução:

A carga é modelada por um resistor  $R = 1 \Omega$  e uma fonte de tensão DC de valor  $V_0$  (ao final do carregamento,  $V_0 = 100$ )

$$v_e = V_p \sin \omega t$$

$$v_d = V_0 + R i_d = \begin{cases} V_0 + R \frac{|v_e| - V_0}{R} = v_e & i_d > 0 \text{ ou } |v_e| > V_0 \\ V_0 & i_d = 0 \text{ ou } |v_e| \leq V_0 \end{cases}$$

$v_d$  é periódica com período  $T/2 = \pi/\omega$ , e no primeiro semiciclo

$$|v_e| > V_0 \Leftrightarrow V_p \sin \omega t > V_0 \Leftrightarrow \sin^{-1}\left(\frac{V_0}{V_p}\right) < \omega t < \pi - \sin^{-1}\left(\frac{V_0}{V_p}\right)$$

Para os dados do problema, quando as baterias estão carregadas,

$$\alpha_1 = \sin^{-1}\left(\frac{V_0}{V_p}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{100}{100\sqrt{2}}\right) \cong 0.7854 \text{ rad} \quad (= 45^\circ)$$

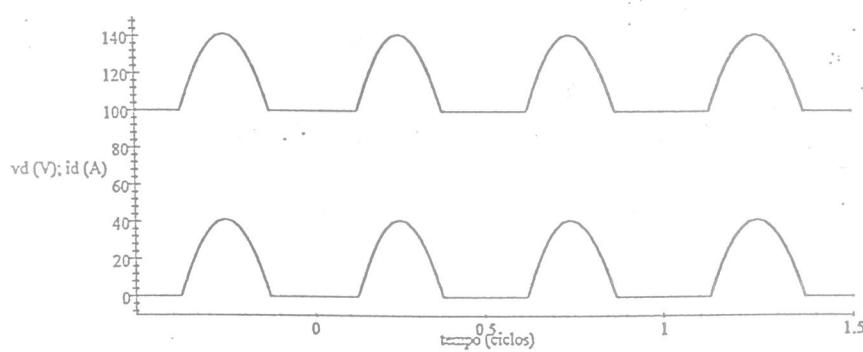
$$\alpha_2 = \pi - \sin^{-1}\left(\frac{V_0}{V_p}\right) \cong \pi - \sin^{-1}\left(\frac{100}{100\sqrt{2}}\right) \cong 2.356 \text{ rad} \quad (= 135^\circ)$$

No primeiro semiciclo,

$$v_d = \begin{cases} 100 \text{ V} & \omega t \leq \alpha_1 \\ 100\sqrt{2} \sin \omega t \text{ V} & \alpha_1 < \omega t < \alpha_2 \\ 100 \text{ V} & \alpha_2 \leq \omega t \leq \pi \end{cases}$$

$$i_d = \begin{cases} 0 & \omega t \leq \alpha_1 \\ \frac{v_d - V_0}{R} = 100\sqrt{2} \sin \omega t - 100 \text{ A} & \alpha_1 < \omega t < \alpha_2 \\ 0 & \alpha_2 \leq \omega t \leq \pi \end{cases}$$

Abaixo, a tensão de saída (cima superior) e corrente de saída.



B)

$$i_d = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} 100 (\sqrt{2} \sin \theta - 1) d\theta \cong 13.7 \text{ A}$$

8-4.

Solução:

a)

Na tabela (primeira linha e última coluna) lemos o valor de  $\phi_1$ :

$$\phi_1 \cong -12.01^0 \cong -0.20961 \text{ rad.}$$

Portanto

$$FD \cong \cos(-0.20961) \cong 0.9781.$$

$$(DHT)^2 = \left( \frac{1}{FF_i} \right)^2 - 1 \Leftrightarrow (FF_i)^2 = \frac{1}{1 + (DHT)^2}.$$

Abaixo da tabela é dado que

$$DHT \cong 0.2815.$$

e

$$FF_i \cong \sqrt{\frac{1}{1 + (0.2815)^2}} \cong 0.9626$$

$$\text{potencia aparente} = I_i V_i = \left( \frac{I_i}{I_{n1}} \right) I_{n1} V_i = (FF_i)^{-1} I_{n1} V_i$$

Da tabela (primeira linha, coluna das amplitudes)

$$I_{n1} = \frac{10.96}{\sqrt{2}},$$

e do gráfico

$$V_i = \frac{150}{\sqrt{2}}$$

e

$$\text{potencia aparente} = I_i V_i \cong \left( \sqrt{\frac{1}{1 + (0.2815)^2}} \right) \left( \frac{10.96}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{150}{\sqrt{2}} \right) \text{W} \cong 853.9 \text{ W.}$$

$$FP = \frac{FD}{\sqrt{1 + (DHT)^2}} \cong \frac{\cos(-0.20961)}{\sqrt{1 + (0.2815)^2}} \cong 0.9415$$

c)

$$FR = \frac{V_{oCA}}{V_o}$$

Da figura, a forma de onda V(L2:2), que representa a tensão sobre o resistor de saída, oscila quase que senoidalmente entre 50 V e 130 V, aproximadamente, e

$$V_o \cong \frac{130 + 50}{2} \text{ V} \cong 90 \text{ V}; \quad V_{oAC} \cong \frac{(130 - 50)/2}{\sqrt{2}} = \frac{40}{\sqrt{2}} \cong 28.3$$

$$FR \cong \frac{40/\sqrt{2}}{90} \cong 0.31$$

$$FF_0 = \frac{V_{oef}}{V_o} = \frac{\sqrt{V_o^2 + V_{oCA}^2}}{V_o} = \sqrt{1 + \left(\frac{V_{oCA}}{V_o}\right)^2} = \sqrt{1 + (FR)^2} \cong \sqrt{1 + \left(\frac{40/\sqrt{2}}{90}\right)^2}$$

$$FF_0 \cong 1.048.$$