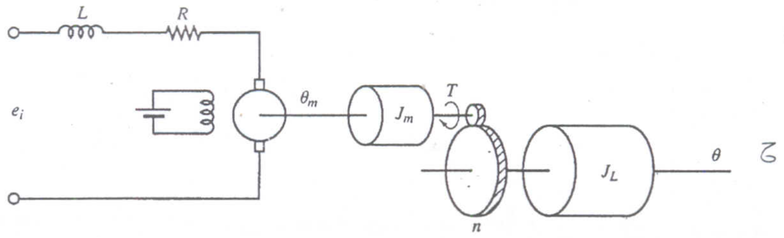
Lista de Exercícios Nº 10

Entregar em: 16/04/2007.

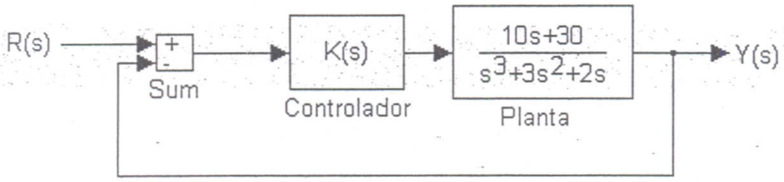
?

1) Determine a função de transferência $\theta(s)/E_i(s)$ do servo-motor de corrente continua controlada por armadura que aciona uma carga de inércia J_L. O torque desenvolvido pelo motor é T. Os deslocamentos angulares do rotor do motor e do elemento de carga são, respectivamente, θ_m e θ. A relação de engrenagem é $n = \theta/\theta_m$. $n = \frac{T}{\tau}$

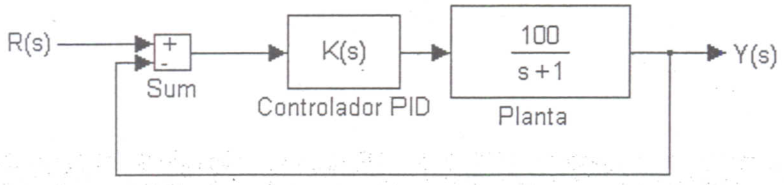
$\Theta = J_L \ddot{\theta} + c\dot{\theta}$



2) Determine o erro estacionário ao degrau unitário para o sistema da figura abaixo quando o controlador for:
   a) apenas proporcional;
   b) proporcional e integral;
   c) proporcional e derivativo;
   d) proporcional, integral e derivativo.



3) Determine a função de transferência de malha fechada para a planta abaixo. Mostre que o aumento do coeficiente derivativo do controlador PID diminui o fator de amortecimento efetivo.



4) Para as plantas abaixo, determine o tipo de sistema e as constantes de erro de posição, velocidade e aceleração. A seguir, determine o tipo de controlador (P, PD, PI ou PID) e suas constantes que resolvem à condição de cada caso.

   a) $P(s) = \dfrac{100}{s(s+10)(s+100)}$, para que o erro da resposta à rampa unitária seja de 0,5.

b) $P(s)=\dfrac{(1+2s)(1+4s)}{s^2(s^2+s+1)}$, para que o erro da resposta à parábola unitária seja nulo.

c) $P(s)=\dfrac{(1+2s)(1+4s)}{s^2(s^2+s+1)}$, para que o erro da resposta à parábola unitária seja 0,01.

Respostas:

1) $$\frac{\theta(s)}{E_i(s)}=\frac{k_T}{\left(\dfrac{J_m s^2}{n}+J_L n s^2\right)(Ls+R)+\dfrac{k_b k_T s}{n}}$$

2) a) $e_{est}=0$; b) $e_{est}=0$; c) $e_{est}=0$; d) $e_{est}=0$

3) $$T(s)=\frac{100(k_d s^2+k_p s+k_i)/(100k_d+1)}{s^2+s\left(\dfrac{100k_p+1}{100k_d+1}\right)+\left(\dfrac{100k_i}{100k_d+1}\right)}$$

4) a₁) Tipo 1; $k_{vel}=0{,}1$; b₁) Tipo 2; $k_{ace}=1$; c₁) Tipo 2; $k_{ace}=1$

a₂) Controlador Proporcional, $k_p=20$; b₂) Controlador ????,

c₂) Controlador Proporcional, $k_p=100$.

Bruno Raizer Ra: 031424

EM707 - Lista 10 1s2007

1- $E - V_{cem} = R \cdot i + L \frac{di}{dt}$ $V_{cem} = K_t \cdot \dot{\theta}_m$

$T = K_t \cdot i$

$\underbrace{\tau_m}$ $n = \frac{\theta}{\theta_m} \rightarrow n = \frac{\tau_m}{\tau}$

$\tau = J_L \cdot \ddot{\theta} + C_L \cdot \dot{\theta}$ $J_m \cdot \ddot{\theta}_m + C_m \cdot \dot{\theta}_m = T - \tau \cdot n$

Δ inércia da carga Δ inércia da transmissão

$T = (J_m + n^2 J_L) \ddot{\theta}_m + (C_m + n^2 C_L) \dot{\theta}_m$

$E = (R + L \cdot s) i + K_t s \cdot \theta_m = \frac{(R + L \cdot s)}{K_t} \cdot T + K_t \cdot s \cdot \theta_m$ $T = \left[(J_m + n^2 J_L) s^2 + (C_m + n^2 C_L) s \right] \theta_m$

$$E \cdot K_t = \left[(R + L \cdot s) \cdot \left[\underbrace{(J_m + n^2 J_L)}_{J'} s^2 + \underbrace{(C_m + n^2 C_L)}_{C'} s \right] + K_t^2 \cdot s \right] \theta_m$$

$$E \cdot K_t = \left(R \cdot J' s^2 + R \cdot C' s + L J' s^3 + L C' s^2 + K_t^2 s \right) \frac{\theta}{n}$$

$$E \cdot n \cdot K_t = \left[L \cdot J' \cdot s^3 + (R \cdot J' + L \cdot C') s^2 + (K_t^2 + R C') \cdot s \right] \cdot \theta$$

$$\frac{\theta_{(s)}}{E_{(s)}} = \frac{n \cdot K_t}{L \cdot (J_m + n^2 J_L) s^3 + R \cdot (J_m + n \cdot J_L) s^2 + L \cdot (C_m + n^2 C_L) s^2 + R (C_m + n^2 C_L) s + K_t^2 \cdot s}$$

2- genericamente $\Rightarrow K = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$ $G = K \cdot P$

$P = \frac{10 \cdot (s+3)}{s \cdot (s^2 + 3s + 2)}$ e $H = 1$

$1 - \frac{G}{G+1}$

$\frac{G+1-G}{G+1} = \frac{1}{G+1}$

$$T = \frac{G}{1 + H \cdot G} = \frac{(K_d s^2 + K_p s + K_i) \cdot (10 s + 30)}{s^2 (s^2 + 3s + 2) + (K_d s^2 + K_p s + K_i) \cdot (10 s + 30)}$$

$$T = \frac{10 K_d s^3 + (30 K_d + 10 K_p) s^2 + (30 K_p + 10 K_i) s + 30 \cdot K_i}{s^4 + (3 + 10 K_d) s^3 + (30 K_d + 10 K_p + 2) s^2 + (30 K_p + 10 K_i) s + 30 \cdot K_i} = T_{(s)}$$

$$e_{est} = \lim_{s \to 0} \left[s \cdot R_{(s)} \cdot (1 - T_{(s)}) \right]$$

$$e_{est} = \lim_{s \to 0} \left[s \cdot R_{(s)} \cdot \frac{s^4 + 3 s^3 + 2 s^2}{s^4 + (3 + 10 K_d) s^3 + (2 + 30 K_d + 10 K_p) s^2 + (30 K_p + 10 K_i) s + 30 K_i} \right]$$

Listo 10)

Exercicio 1)

$$V_a - V_{cm} = V_r + V_L$$

$$\tau = J\ddot{\theta} + C\dot{\theta}$$

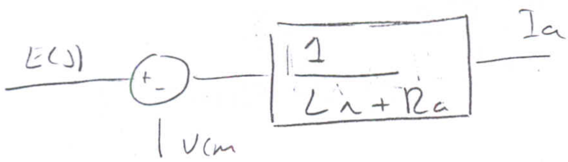
$$\tau = k_T \cdot I_A$$

$$V_{cm} = k_r \dot{\theta}$$

$$V_r = R_a I_A$$

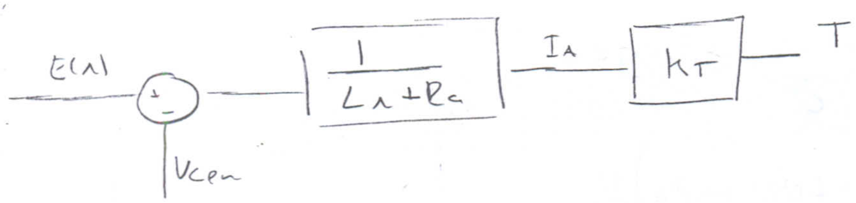
$$V_L = L_a \frac{dI_a}{dt}$$

Achar $FTO = \frac{\theta(s)}{E(s)}$ $E(s)$ tensão $= V_a$

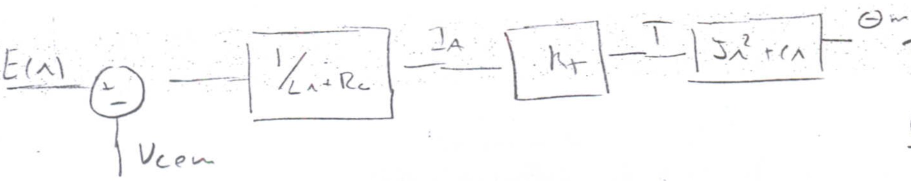


$$V_a - V_{cen} = R_a I_a + L\dot{I}_a$$

$$V_a - V_{cen} = (Ls + R_a) I_a$$



$$T = k_T \cdot I_A$$



$$T = (Js^2 + Cs)\Theta_m$$

$$\frac{\Theta_m}{T} = (Js^2 + Cs)^{-1}$$

Duvidas perguntar a alguem

$$e_{est} = \left[\lim_{s \to 0} \frac{s^4 + 3s^3 + 2s^2}{s^4 + (3 + 10 \cdot K_d)s^3 + (2 + 30 K_d + 10 K_p)s^2 + (30 K_p + 10 K_i)s + 30 K_i} \cdot s \cdot R(s) \right]$$

como $R(s) = 1/s$ entrada degrau

Em todos os ítens do exercício a entrada é o degrau unitário.

O que muda de um item para outro é o valor das constantes K_p, K_i e K_d

Mas sendo a entrada um degrau, este limite não depende das constantes acima.

a. $K_d = K_i = 0$; $K_p = K_p$; $e_{est} = 0$

b. $K_d = 0$; $K_p = K_p$; $K_i = K_i$; $e_{est} = 0$

c. $K_i = 0$; $K_p = K_p$; $K_d = K_d$; $e_{est} = 0$

d. $K_i = K_i$; $K_p = K_p$; $K_d = K_d$; $e_{est} = 0$

3- $P = 100/(s+1)$ $\quad H = 1$ $\quad K(s) = \dfrac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$ $\quad G = \dfrac{100(K_d s^2 + K_p s + K_i)}{s^2 + s}$

$K(s) \to$ controlador PID

$$T = \frac{G}{1 + HG} = \frac{100 K_d s^2 + 100 K_p s + 100 K_i}{(100 K_d + 1)s^2 + (100 K_p + 1)s + K_i} = \frac{\frac{100(K_d s^2 + K_p s + K_i)}{100 K_d + 1}}{s^2 + \frac{100 K_p + 1}{100 K_d + 1} s + \frac{K_i}{100 K_d + 1}}$$

$$\frac{100 K_p + 1}{100 K_d + 1} = 2\zeta\omega_n \qquad \frac{K_i}{100 K_d + 1} = \omega_n^2 \quad \to \zeta = \frac{(100 K_d + 1)^{1/2}}{(100 K_d + 1)} \cdot \frac{100 K_p + 1}{2 K_i^{1/2}}$$

$$\zeta = \frac{100 K_p + 1}{2\sqrt{K_i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{100 K_d + 1}}$$ se aumentar K_d, diminui ζ

4- 1ª parte: definir o tipo e as constantes de erro de posição, velocidade e aceleração para as plantas

	a	b	c
$P(s)$	$\dfrac{100}{s(s+10)(s+100)}$	$\dfrac{(1+2s)(1+4s)}{s^2(s^2+s+1)}$	$\dfrac{(1+2s)(1+4s)}{s^2(s^2+s+1)}$
Tipo	1	2	2
$K_{ep} = \lim_{s \to 0} P(s)$	∞	∞	∞
$K_{ev} = \lim_{s \to 0} s P(s)$	0,1	∞	∞
$K_{ea} = \lim_{s \to 0} s^2 P(s)$	0	1	1

Breno Raizer Ra: 031424

EM707 - Lista 10

1s2007

4- 2ª Parte, cálculo do Controlador para satisfazer as restrições de erro

a) $e_{st} = 0,5 = \lim_{s \to 0} s \cdot R(s) \cdot \frac{1}{1+G} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \frac{D}{N+D} = 0,5$

$R(s) = \frac{1}{s^2}$; $H=1$; $G = N/D$

para isto ocorrer, G(s) tem que ser uma função do tipo 1

Como $G = K(s) \cdot P(s) = \frac{K(s) \cdot 100}{s(s+10)(s+100)}$, K(s) tem de ser do tipo 0 → $K_i = 0$

$K(s) = K_d s + K_p$, mas K_d não interfere no erro estacionário, e como só temos restrição de erro, K_d pode assumir qualquer valor finito.

$G = \frac{(K_d s + K_p) 100}{s(s+10)(s+100)} = \frac{N}{D}$

$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \frac{s(s+10)(s+100)}{(K_d s + K_p)100 + s(s+10)(s+100)} = \frac{1000}{100 \cdot K_p} = 0,5$

$\Rightarrow K_p = 20$

b) $e_{st} = 0 = \lim_{s \to 0} s R(s) \cdot \frac{1}{1+G} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2} \cdot \frac{D}{N+D} = 0$ → para tal, G(s) tem de ser do tipo 3

$R(s) = \frac{1}{s^3}$; $H=1$

e sendo assim $K_i \neq 0$

$K(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$; $P = \frac{(1+2s)(1+4s)}{s^2(s^2+s+1)}$

→ não haverá restrições para os valores de K_p e K_d (desde que sejam finitos)

$\frac{1}{G+1} = \frac{s^3(s^2+s+1)}{(1+2s)(1+4s)(K_d s^2 + K_p s + K_i) + s^3(s^2+s+1)}$

$\Rightarrow \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{G+1} = 0$; $\forall K_i, K_d, K_p$

c) $e_{st} = 0,01 = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2} \frac{D}{N+D}$ → para tal, G(s) tem de ser do tipo 2, e sendo assim

$R(s) = \frac{1}{s^3}$; $H=1$

$K_i = 0$, e K_d pode adotar qualquer valor finito...

$G = P(s)K(s) = \frac{(K_d \cdot s + K_p)(1+2s)(1+4s)}{s^2(s^2+s+1)}$

$\lim_{s \to 0} \frac{1}{\cancel{s^2}} \cdot \frac{\cancel{s^2}(s^2+s+1)}{s^2(s^2+s+1) + (K_d s + K_p)(1+2s)(1+4s)} = \frac{1}{K_p} = 0,01$

$K_p = 100$

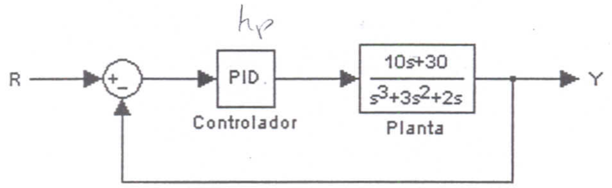
Lista de Exercícios Nº 11

Projeto de controladores PID

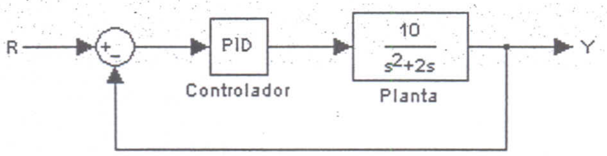
Entregar em: 18/04/2007.

1) Considerando que o erro estacionário à rampa seja no máximo 0,05, determine um controlador proporcional que satisfaça essa especificação, Obtenha no MatLab a resposta ao degrau e a resposta em freqüência.

L?



2) Determine um controlador PID para o sistema abaixo, tal que o sistema de malha fechada apresente um erro estacionário à parábola de 0,1 e um par de pólos complexo com freqüência natural de 1 rad/s e fator de amortecimento de 0,707.

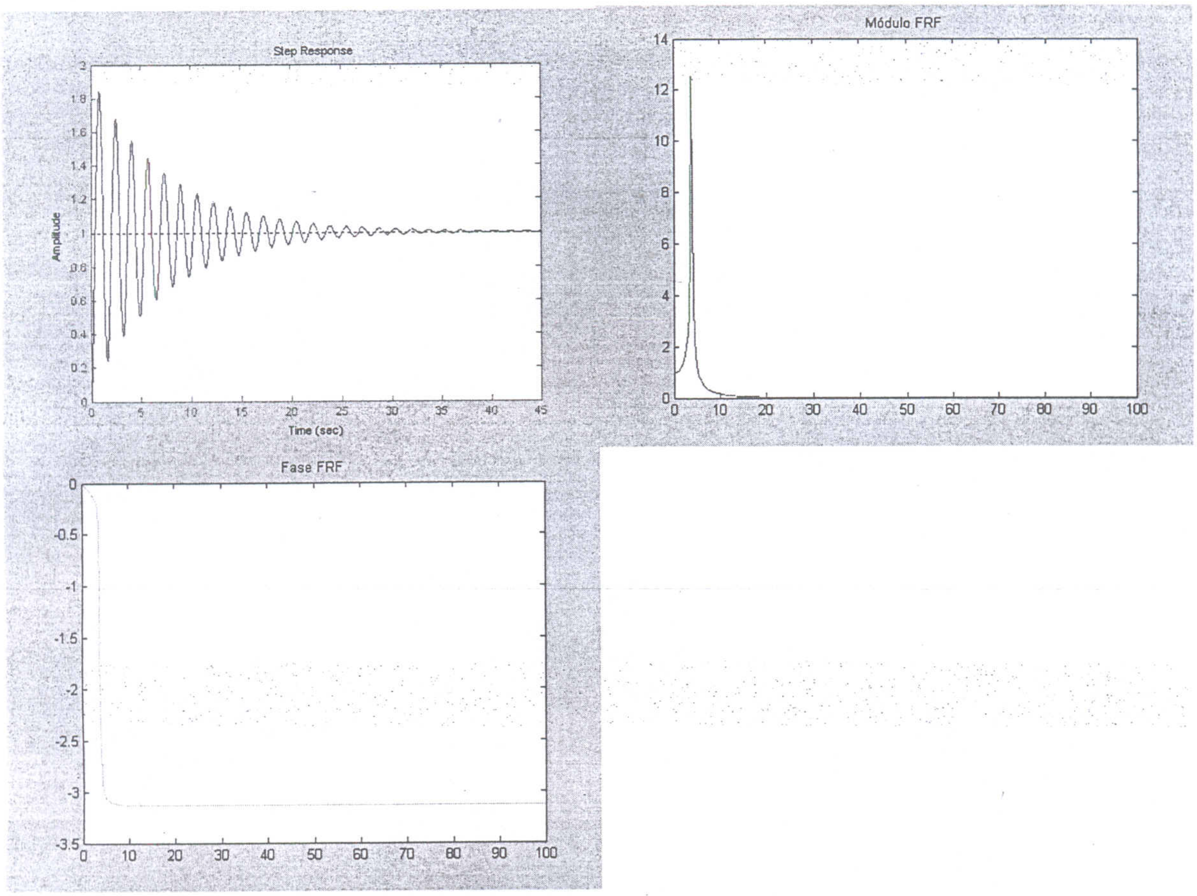


3) Para a planta abaixo, determine um controlador PD tal que a freqüência natural duplique de valor, considerando uma realimentação negativa unitária, e o fator de amortecimento seja de 0,6. Encontre no MatLab a resposta ao degrau e a resposta em freqüência. Substitua a ação derivativa do controlador por um ganho tacométrico na planta abaixo (uma realimentação de velocidade de K_d), introduza um controlador proporcional neste sistema e determine o seu valor para encontrar o mesmo par de pólos do caso PD. Encontre a nova resposta ao degrau e resposta em freqüência, e compare os seus parâmetros com a resposta anterior. Explique as diferenças encontradas.

$$P(s) = \frac{100}{s(s+5)}$$

Respostas:

1) $K_p \geq \dfrac{4}{3}$;



2) ????

3) $K(s) = 4 + 0{,}19s$; $K_T = 19$

Bruno Raizer Ra: 031424

EA707 - Lista 11 1s2007

1- $P(s) = \dfrac{10s+30}{s^3+3s^2+2s}$ $e_{st} \leq 0{,}05$ para $R(s) = \frac{1}{s^2}$ → rampa unitária, para um erro finito não-nulo com $R(s) = 1/s^2$ temos que ter um $G(s)$ do tipo 1

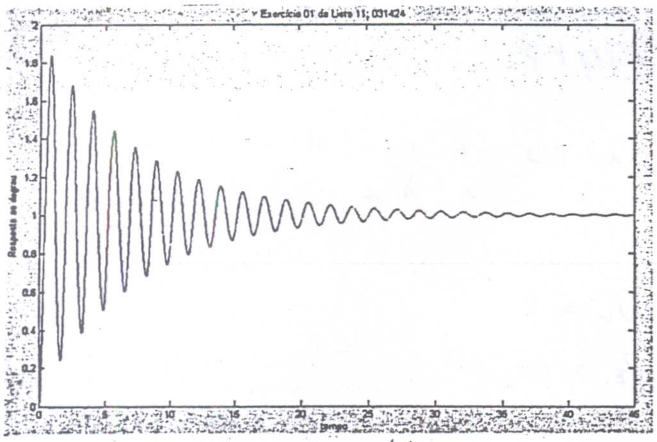
$H=1$

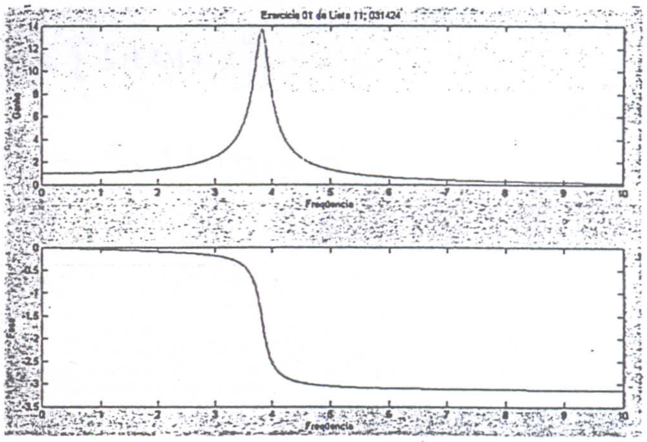
Como $P(s)$ é do tipo 1, $K(s)$ tem de ser do tipo 0 → $k_i = 0$, como não há nenhuma outra restrição, adoto $K_d = 0$. $\therefore K(s) = K_p$ → $G = \dfrac{10k_p s + 30k_p}{s^3+3s^2+2s}$ $\dfrac{10k_p + 30k_p}{s^3+3s^2+2s+10k_p s+30k_p}$

no limite do requerido, $e_{st} = 0{,}05 = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \cdot \dfrac{s(s^2+3s+2)}{s^3+3s^2+(2+10k_p)s+30k_p} = \dfrac{1}{15 \cdot k_p}$

$K_p = 1/0{,}05 \cdot 15 = 100/75 = 4/3 \cong 1{,}333.$

$\therefore K(s) = 4/3$ $T = \dfrac{40/3 \cdot s + 40}{s^3+3s^2+\frac{46}{3} \cdot s + 40}$





2- $P = \dfrac{10}{s^2+2s}$ $\omega_n = 1\,rad/s$, $\xi = 0{,}707$, para $R(s) = 1/s^3$, $e_{st} = 0{,}1$

$H=1$

formato das soluções: $\left\{ \begin{array}{l} D = s^2 \cdot f(s) \\ N+D = (s^2+2\xi\omega_n \cdot s+\omega_n^2) \cdot (s+\lambda_1) \ldots \end{array} \right.$ onde $\lambda_n \neq 0$ $\left\{ \begin{array}{l} G = N/D \\ T = \frac{N}{N+D} \end{array} \right.$

$G = K(s) \cdot P(s) \xrightarrow[\text{genericamente}]{} G = \dfrac{10\,(k_d s^2 + k_p s + k_i)}{s^2 \cdot (s+2)} = \dfrac{N}{D}$ → $K_i \neq 0$ → $f(s) = (s+2)$

$N+D = s^3 + (10k_d + 2)s^2 + 10k_p s + 10k_i = (s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2) \cdot (s+\lambda)$

→ 3° grau, $\therefore n=1$

2)

$$P(s) = \frac{10}{s^2+2s} \qquad PID = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_I}{s}$$

$$G = k(s)\,P(s) = \frac{10\,[k_d s^2 + k_p s + k_I]}{s^3 + 2s^2} = \frac{N}{D}$$

$T = \frac{N}{D+NH}$ p/ $H=1$ temos que $T = \frac{10\,[k_d s^2 + k_p s + k_I]}{s^3+2s^2+10\,[k_d s^2 + k_p s + k_I]}$

$$\underset{\lim s\to 0}{e_{est}} = s\,(1-T)\,R(s) = s\,(1-T)\,\frac{1}{s^3} = (1-T)\,\frac{1}{s^2} =$$

$$\underset{\lim s\to 0}{e_{est}} = \frac{1}{s^2}\,\frac{D}{D+NH} = \frac{s^2(s+2)}{s^3+[2+10k_d]s^2+10k_p s+10k_i}\,\frac{1}{\cancel{s^2}} \qquad \frac{2}{10k_I} = 0,1$$

$\boxed{k_I = 2}$ //

$T = \frac{N}{D+NH}$ $\qquad s^3+[2+10k_d]s^2+10k_p s+20 = [s^2+2\xi W_n s+W_n^2](s+\lambda)$

$$s^3+[2+10k_d]s^2+10k_p s+20 = s^3+2\xi W_n s^2+W_n^2 s + s^2\lambda + 2\xi W_n \lambda s + W_n^2\lambda$$

$s^3 = s^3$ $\qquad W_n = 1$

$\xi = 0,707$

$2+10k_d = 2\xi W_n + \lambda$

$10 k_p s = W_n^2 + 2\xi W_n \lambda$

$20 = W_n \lambda$

$\boxed{\lambda = 20}$

$\boxed{k_p = 2,928}$

$10k_p = 1 + 2\xi\cdot 20$

$10k_p = 1 + 40\xi$

$k_p = \frac{1}{10} + 4\xi$

$10k_d = 2\xi + 20 - 2$

$10k_d = 19,41$

$k_d = 1,941$

$$N+D = s^3+(10\cdot K_d+2)s^2+10\cdot K_p s+K_i = (s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)(s+\lambda)$$

$$s^3+(10K_d+2)s^2+10K_p s+10K_i = s^3+(2\zeta\omega_n+\lambda)s^2+(2\zeta\omega_n\lambda+\omega_n^2)s+\lambda\omega_n^2$$

$$10K_d+2 = 2\zeta\omega_n+\lambda \;;\quad 2\zeta\omega_n\lambda+\omega_n^2 = 10K_p \;;\quad 10K_i = \lambda\omega_n^2 \qquad \omega_n=1,\ \zeta=0{,}707$$

$$10K_d-\lambda = -0{,}586 \;;\quad -10K_p+1{,}414\lambda = -1 \;;\quad K_i = \lambda/10$$

$$T = \frac{10(K_d s^2+K_p s+K_i)}{s^3+(10K_d+2)s^2+10K_p s+10K_i} \qquad \lim_{s\to 0} \cancel{s}\cdot\frac{1}{\cancel{s^2}}\cdot\frac{\cancel{s}(s+2)}{s^3+(10K_d+2)s^2+10K_p s+10K_i} = \frac{1}{5K_i} = 0{,}1$$

$K_i=2 \quad \lambda=20 \quad K_d=1{,}9414 \quad K_p=2{,}828+0{,}1=2{,}928$

Controlador $K(s) = \dfrac{1{,}9414\cdot s^2+2{,}928s+2}{s}$

$$T = \frac{19{,}414\cdot s^2+29{,}28s+20}{s^3+21{,}414s^2+29{,}28s+20}$$

3- $P = \dfrac{100}{s(s+5)}$ $\begin{cases}\to \omega_{n1}=10\\ \to \zeta_1 = \dfrac{5}{2\cdot 10} = 0{,}25\end{cases}$ $\to K(s) = K_d s+K_p \qquad G = \dfrac{100K_p+100K_d s}{s(s+5)}$

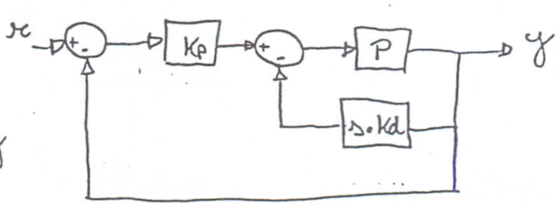
$H=1$

Com $H=1$ $\quad T = \dfrac{100\cdot(K_d s+K_p)}{s^2+(100K_d+5)s+100\cdot K_p}$

K_p e K_d tais que $\zeta_2=0{,}6$, $\omega_{n2}=2\cdot\omega_{n1}=20$

$\omega_{n2}^2 = 100K_p = 20^2 = 400$; $K_p=4 \qquad \zeta_2 = \dfrac{100\cdot K_d+5}{2\cdot 20} = 0{,}6 \qquad K_d = \dfrac{24-5}{100} = 0{,}19$

Ganho tacométrico

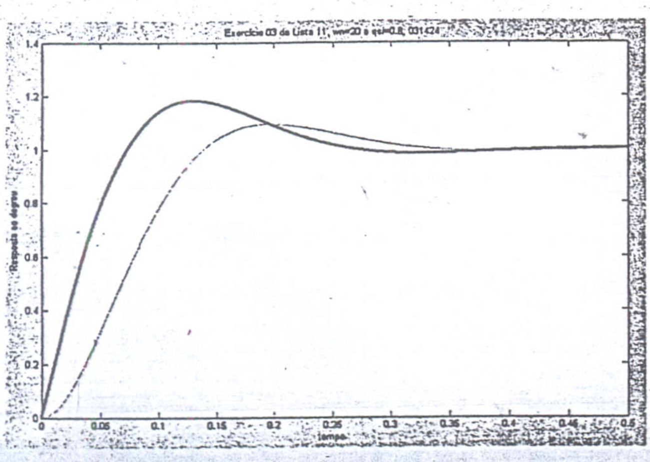


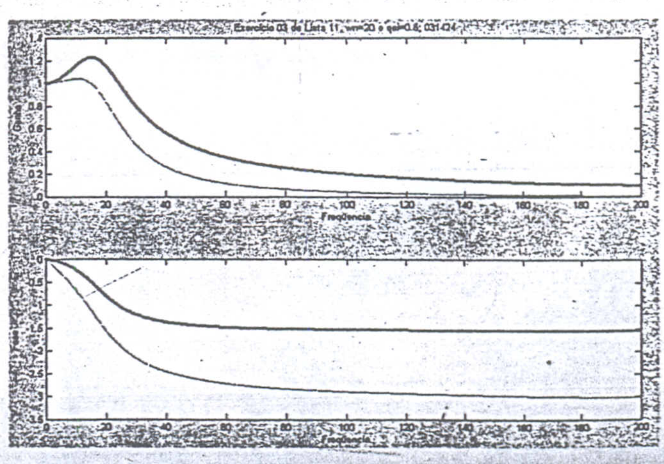
$$\left[(r-y)\cdot K_p - K_d\cdot s\cdot y\right]\frac{100}{s(s+5)} = y$$

$$K_p\cdot r - K_p y - K_d\dot{y} = \frac{\ddot{y}+5\dot{y}}{100}$$

$$r = \frac{\ddot{y}+(5+100K_d)\dot{y}+100K_p}{100K_p} \qquad T = \frac{100K_p}{s^2+(5+100K_d)s+100K_p} \to$$

para $\omega_n=20$, $\zeta=0{,}6$: $K_d=0{,}19$, $K_p=4$





3) $P(s) = \frac{100}{s(s+5)}$

$G = \frac{100\,k(s)}{s^2+5s}$ $\quad T = \frac{100\,k(s)}{s^2+5s+100\,k(s)}$; $\frac{k_0 w_n^2}{s^2+2\zeta w_n s+w_n^2}$

$w_n = 10$ // e $\zeta = 0{,}25$ para $k(s) = 1$

para que $w_n = 20$ temos que $k = k_p + k_d s$ $\quad w_n^2 = 400$

$T = \frac{100\,(k_d s + k_p)}{s^2 + (5 + k_d \underset{100}{\times})s + 100 k_p}$

$100 k_p = 400$

$k_p = 4$

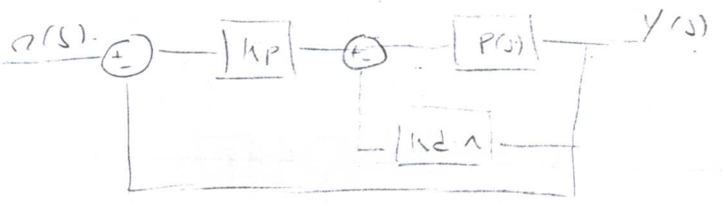
$k_d = 0{,}19$ //

$2\zeta w_n = 5 + k_d \cdot 100$

$2 \cdot 0{,}6 \cdot 20 = 5 + k_d \cdot 100$

//

ganho tacometrico ó uma realimentação negativa antes da planta, velocidade de k_d => $k_d \cdot s$



$[k_p(r(s) - y(s)) - y(s)\,k_d s] \cdot \frac{100}{s^2+5s} = y$

$[k_p r - k_p y - \dot y k_d] = \frac{\ddot y + 5\dot y}{100}$

$100 k_p r = \ddot y + 5\dot y + 100 k_d \dot y + 100 k_p$

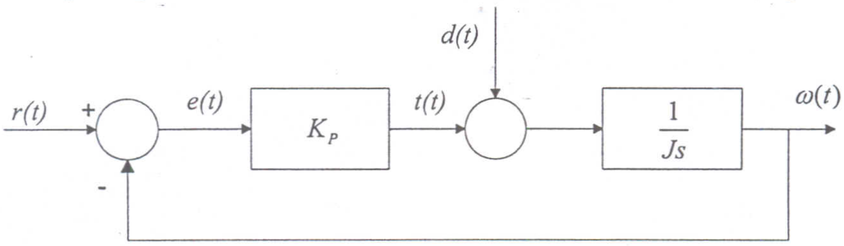
$\frac{r}{y} = \frac{s^2 + [5 + 100 k_d]s + 100 k_p}{100 k_p}$ $\qquad \frac{y}{r} = \frac{100 k_p}{s^2 + (100 k_d + 5)s + 100 k_p}$

Lista de Exercícios Nº 12

Modelagem de Distúrbio

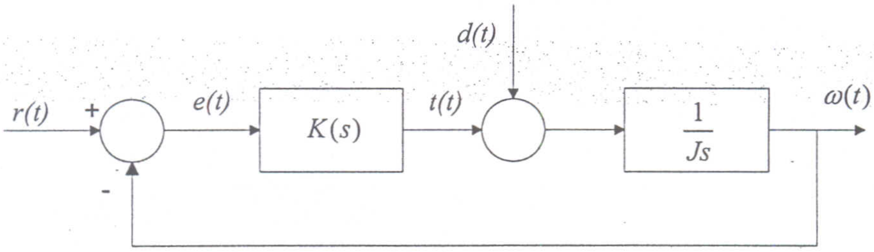
Entregar em: 25/04/2007.

1) O diagrama abaixo mostra um sistema de controle de velocidade no qual a rotação de saída é afetada por um distúrbio de torque *d(t)*. Obter a expressão da velocidade $\omega(t)$ em regime permanente em função das entradas através do teorema do valor final. Obter a resposta $\omega(t)$ para um distúrbio do tipo degrau unitário e entrada nula no sinal de referência (regulador).



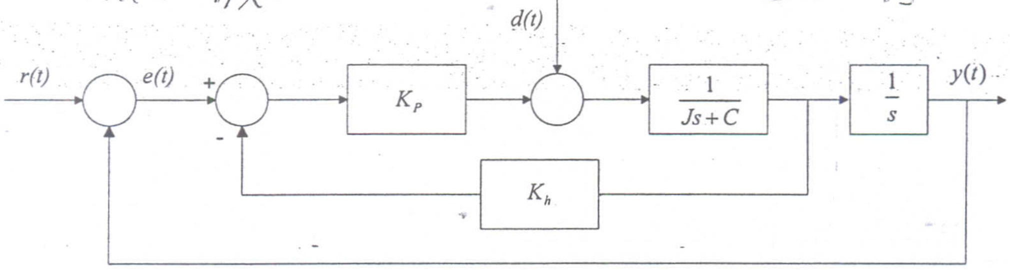
2) Determine o controlador *K(s)* (P, PI ou PD) para o sistema abaixo, tal que o sistema de malha fechada em regime permanente apresente uma rejeição total a um distúrbio na forma de degrau unitário e na ausência de um sinal de referência.

↳ $w(t)$ fazendo $t \to \infty = 0$



3) O diagrama abaixo mostra um servossistema (controle de posição) com realimentação tacométrica. Determine o sinal de erro *E(s)* quando a entrada de referência *R(s)* e o sinal de distúrbio *D(s)* estão presentes. Obtenha o erro estacionário quando o sistema for submetido a uma entrada de referência em rampa unitária e um distúrbio na forma de degrau d_0.

$r(s) = 1/s^2$ $d(s) = 1/s$

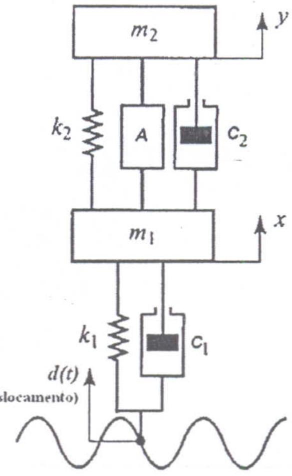


7 4) O diagrama abaixo mostra uma suspensão veicular. Deseja-se que o deslocamento da massa 2 seja zero para qualquer distúrbio *d(t)* da pista.

a) Determine o diagrama de blocos do sistema em malha fechada.

b) Determine a resposta em regime da massa 2 a uma pista do tipo senoidal sem o sistema atuador "A".

c) Considerando que o atuador A tem sua força *u(t)* determinada por um controlador proporcional de ganho $K_p = 5$, determine a resposta de regime da massa 2.



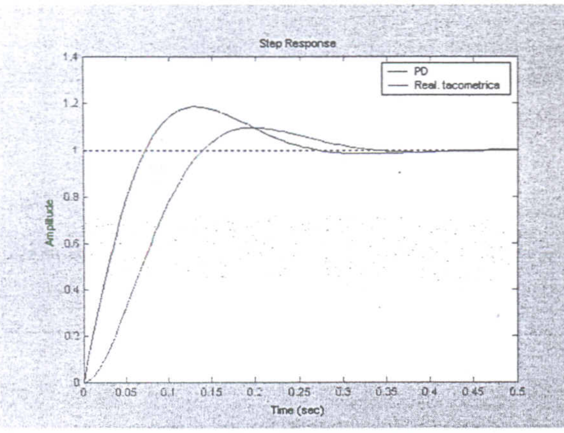
Respostas:

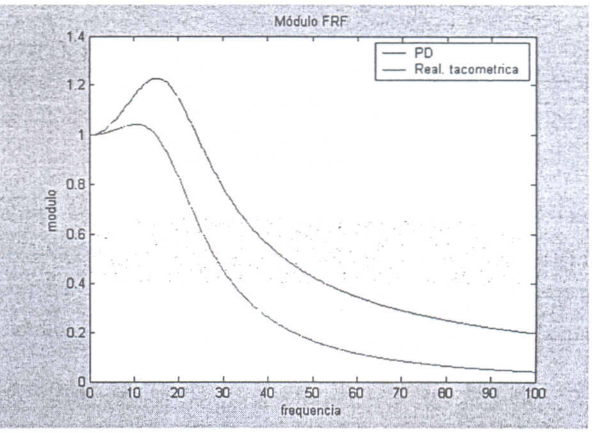
1) $\Omega_{regime}(s) = \lim_{s\to 0} s\left(\dfrac{D(s)+K_pR(s)}{Js+K_p}\right)$; $\omega(t) = \dfrac{1}{K_p}\left(1-e^{-\frac{K_p}{J}t}\right)$

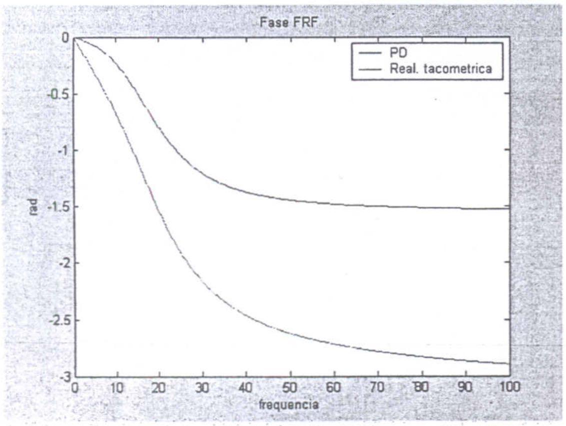
2) $K(s) = K_p + \dfrac{K_i}{s}$

3) $E(s) = \dfrac{R(s)(Js+C+K_pK_h)-D(s)}{K_p+s(Js+C+K_pK_h)}$; $e_{est} = \dfrac{C+K_pK_h-d_0}{K_p}$

4) ????


Step Response
PD
Real. tacometrica
Amplitude
Time (sec)

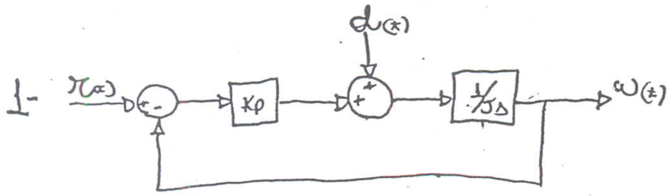

Módulo FRF
PD
Real. tacometrica
modulo
frequencia


Fase FRF
PD
Real. tacometrica
rad
frequencia

Bruno Raizer Ra 031424

EM707 - Lista 12 1s2007

1-



para distúrbio achar a ft seguindo o modelo, para se obter a resposta em regime fazer noído com $t \to \infty$ ou usar TVF e fazer $\lim_{s \to 0} s\, W(s)$

$$\left((r-\omega)\cdot k_p + d\right)\frac{1}{Js} = \omega \qquad r\cdot k_p - \omega\cdot k_p + d = J_s\cdot\omega$$

$$r\cdot k_p + d = \omega\cdot(J\cdot s + k_p)$$

$$\omega_{(s)} = \frac{r\cdot k_p + d}{Js + k_p}$$

teorema do valor final

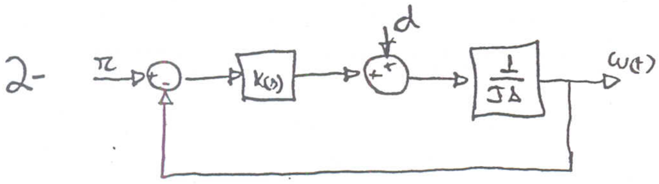
$$W_{(s)} = \frac{R_{(s)}\cdot k_p + D_{(s)}}{Js + k_p} \qquad \lim_{t\to\infty} \omega(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot W_{(s)} = \lim_{s\to 0}\left(\frac{r\cdot k_p + d}{J + k_p/s}\right)$$

$\omega(t)$? para $D = 1/s$ e $R = 0$

$$W_{(s)} = \frac{1}{Js^2 + k_p s} = \frac{1}{s\cdot(Js + k_p)} = \frac{1/k_p}{s} - \frac{J/k_p}{Js + k_p} = \frac{1/k_p}{s} - \frac{1/k_p}{s + k_p/J}$$

$$\omega(t) = \frac{1}{k_p}\cdot\left(1 - e^{-\frac{k_p}{J}\cdot t}\right) \leftarrow (\mathcal{L})^{-1}$$

2-



modelo idêntico ao número 1

$$\boxed{W_{(s)} = \frac{R_{(s)}\cdot K_{(s)} + D_{(s)}}{Js + K_{(s)}}}$$

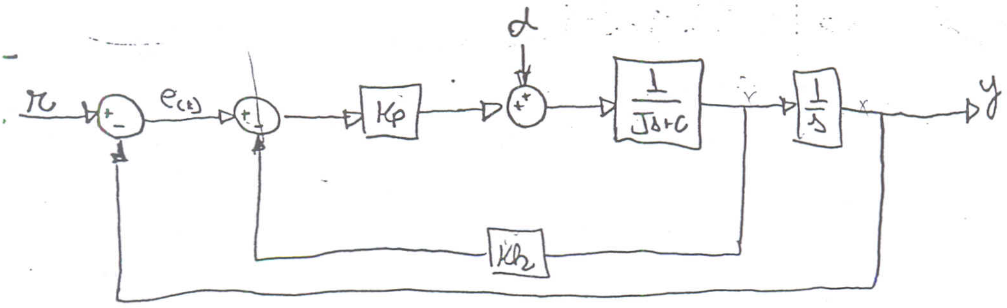
e $\lim_{t\to\infty} \omega(t) = 0$ para $\begin{cases} d = \text{degrau} \\ r = 0 \end{cases}$ $D = 1/s$, $R = 0$

$$0 = \lim_{s\to 0} sW_{(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{Js + K_{(s)}} = \frac{1}{\underbrace{\lim_{s\to 0} K_{(s)}}_{=\infty}} = 0 \quad \therefore \lim_{s\to 0} K_{(s)} = \infty \to K_i \neq 0$$

$\therefore \lim_{s\to 0} K_{(s)} = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s}$, $\forall k_i \neq 0$ ∴ mas como só pode ser P, PI, ou PD

$$K_{(s)} = k_p + \frac{k_i}{s}$$

3-



$$\left[\left(E_{(s)} - K_h Y_{(s)}\cdot s\right)\cdot K_p + D_{(s)}\right]\cdot \frac{1}{s(Js+c)} = Y_{(s)}$$

$E = R - Y$

$$R_{(s)}K_p - K_p(K_h s+1)Y_{(s)} + D_{(s)} = Y_{(s)}\cdot s(Js+c)$$

$$R = \frac{1}{s^2} \qquad D = \frac{d_0}{s}$$

$$R_{(s)}\cdot K_p + D = Y_{(s)}\cdot\left(Js^2 + cs + K_h K_p s + K_p\right)$$

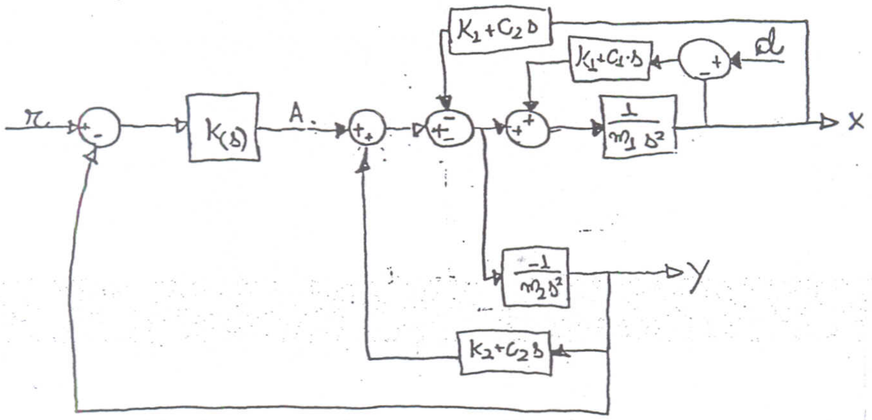
$$\therefore\ E = R\cdot\left(1 - \frac{K_p + D/R}{Js^2 + (c+K_h K_p)s + K_p}\right) = R\left(\frac{Js^2 + (c+K_h\cdot K_p)s - D/R}{Js^2 + (c+K_h\cdot K_p)s + K_p}\right)$$

$$e_{est} = \lim_{s\to 0} s\cdot E = \lim_{s\to 0}\frac{s}{s^2}\cdot\left(1 - \frac{K_p + s\cdot d_0}{Js^2 + (c+K_p K_h)s + K_p}\right) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\cdot\frac{Js^2 + (c+K_p K_h)s - s d_0}{Js^2 + (c+K_p K_h)s + K_p}$$

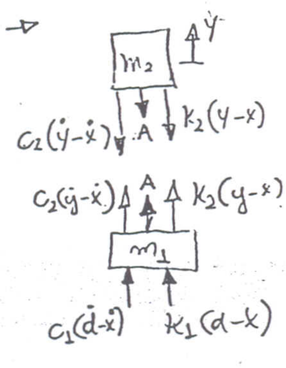
$$e_{est} = \lim_{s\to 0}\frac{Js + (c + K_p K_h - d_0)}{Js^2 + (c+K_p)s + K_p} = \frac{c + K_p K_h - d_0}{K_p}$$

4a- $m_2\ddot{y} = -A - (y-x)\cdot K_2 - (\dot{y}-\dot{x})c_2 = -A - (y-x)(K_2 + s\cdot c_2) = y\cdot(m_2 s^2)$

$m_1\ddot{x} = +A + (y-x)(K_2+sC_2) + (d-x)K_1 + (\dot{d}-\dot{x})C_1 = +A + (y-x)(K_2+sC_2) + (d-x)(K_1+sC_1) = x\cdot(m_1 s^2$



A > 0 →



4b- sendo $A = 0$ $\quad x = y\dfrac{(m_2 s^2 + c_2 s + K_2)}{c_2 s + K_2} \quad \& \to \quad y\cdot(K_2 + C_2 s) + d\cdot(K_1 + C_1 s) = x\cdot\left(m_1 s^2 + (c_1+c_2)s + K_1 + K_2\right)$

$$d(K_1 + C_1 s) = y\cdot\left[\frac{(m_1 s^2 + (c_1+c_2)s + K_1 + K_2)(m_2 s^2 + c_2 s + K_2) - (c_2 s + K_2)^2}{(c_2 s + K_2)}\right]$$

$$U_{(s)} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\frac{y}{d} = \frac{(c_2 s + K_2)(c_1 s + K_1)}{(m_1 s^2 + (c_1+c_2)s + K_1 + K_2)(m_2 s^2 + c_2 s + K_2) - (c_2 s + K_2)^2}$$

Breno Raizer Ra: 031424

EM707 - Lista 12 1s 2007

4b - continuação

$$A_{(t)} = \emptyset \; \& \; \frac{y}{d} = \frac{(c_2 s + k_2)(c_1 s + k_1)}{(m_1 s^2 + (c_1+c_2)s + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + c_2 s + k_2) - (c_2 s + k_2)^2} = P_{d(s)}$$

se $d = \operatorname{sen} \omega t$ $\quad y = |P_u(j\omega)| \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \angle P_u(j\omega))$

4c -

$$\text{se } u_{(t)} = 0 \quad \begin{cases} y(m_2 s^2) = -A - (y-x)(k_2 + s c_2) & (1) \\ x(m_1 s^2) = +A + (y-x)(k_2 + s c_2) - x(k_1 + s c_1) & (2) \end{cases}$$

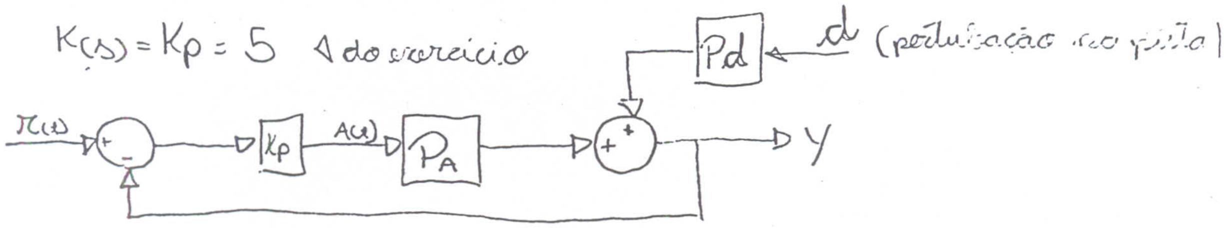
$$(1)+(2) \Rightarrow y(m_2 s^2) + x(m_1 s^2) = -x(k_1 + s c_1) \Rightarrow x = -y \cdot \frac{m_2 s^2}{(m_1 s^2 + c_1 s + k_1)}$$

$$(1) \Rightarrow y \cdot (m_2 s^2 + c_2 s + k_2) - x(k_2 + c_2 s) = -A$$

$$(1)+(2) \text{ em } (1) \Rightarrow y \cdot \left[\frac{(m_2 s^2 + c_2 s + k_2)(m_1 s^2 + c_1 s + k_1) + m_2 \cdot s^2 \cdot (k_2 + c_2 s)}{m_1 s^2 + c_1 s + k_1} \right] = -A$$

$$\frac{y}{A} = \frac{-(m_1 s^2 + c_1 s + k_1)}{(m_2 s^2 + c_2 s + k_2)(m_1 s^2 + c_1 s + k_1) + m_2 \cdot (k_2 + c_2 s) s^2} = P_{A(s)}$$

$K(s) = K_p = 5$ do exercício



$$Y = \frac{K_p \cdot P_A}{1 + K_p \cdot P_A} \cdot R_{(s)} + \frac{P_d}{1 + K_p \cdot P_A} \cdot D_{(s)}$$

2- $R_2 q_e = (A^2 R_1 R_2 s^2 + (2AR_2 + AR_1)s + 1) \cdot y_2$

$R_2 \cdot y_1 = (AR_2 R_1 s + R_2 + R_1) y_2$

$$T = \frac{y_1}{q_e} = \frac{AR_2R_1 s + R_2 + R_1}{(A^2R_1R_2 s^2 + (2AR_2 + AR_1)s + 1)} \qquad T' = \frac{y_1/R_1}{q_e} = \frac{AR_2 s + 1 + R_2/R_1}{(A^2R_1R_2 s^2 + (2AR_2 + AR_1)s + 1)}$$

$$T' = \frac{400\pi s + 3/2}{(320000\pi^2 s^2 + 1600\pi s + 1)}$$

$R_{(s)} = 1/s$

$$e_{est} = \lim_{s \to 0} s \cdot R \cdot (1 - T') = 1 - 1 - \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_2}{R_1} = -0{,}5$$

$\zeta = \sqrt{2}$

$e_{est} = -0{,}5$

$\omega_n = 1/200\pi\sqrt{2}$

$$R \cdot T' = \frac{1{,}5}{s} - \frac{0{,}0429}{(s + 13{,}85 \cdot 10^{-4})} - \frac{1{,}4571}{(s + 2{,}33 \cdot 10^{-4})} = \frac{Y_1}{R_1}$$

$$x_1 = y_1/R_1 = 1{,}5 - 0{,}0429 \cdot e^{\frac{-13{,}85 \cdot t}{10^4}} - 1{,}4571 \cdot e^{\frac{-2{,}33 \cdot t}{10^4}}$$

para $x_1 = 1{,}5 \cdot 0{,}95 \to t = 12730s \Rightarrow$ tempo de estabilização em 5% $t_{est5\%} = 12730s$

para $\begin{cases} x_1 = 1{,}5 \cdot 0{,}9 \to t = 9755s \\ x_1 = 1{,}5 \cdot 0{,}1 \to t = 406{,}6s \end{cases}$ $\Rightarrow$ tempo de subida $TS = 9755s - 406{,}6s = 9348{,}4s = TS$

para $x_1 = 1{,}5 \cdot 0{,}5 \to t = 2854{,}5s \Rightarrow$ tempo de atraso $TA = 2854{,}5s$

Como $\zeta > 1 \to$ sistema super amortecido, não há sobresinal $PSS = 0\%$

para $x_1 = 1{,}5 \cdot 0{,}98 \to t = 16650s = t_{est2\%}$

3- $G = \dfrac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$ $\quad \zeta = 0{,}6 \quad \omega_n = 5\,rad/s$

com realimentação unitária negativa

$$T = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

① $e_{est} = \lim_{s \to 0} s \cdot R \cdot (1 - G)$ para $R = 1/s$ $\qquad e_{est} = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s}(1 - G) = 1 - \lim_{s \to 0} G = -\infty$

② $e_{est} = \lim_{s \to 0} s \cdot R \cdot (1 - T)$ para $R = 1/s$ $\qquad e_{est} = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \cdot (1 - G) = 1 - \lim_{s \to 0} G = 0$

③ $Y = T \cdot R$, $R = 1/s$ $\qquad T = \dfrac{25}{s^2 + 6s + 25}$ $\qquad T \cdot R = \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{25}{(s+3)^2 + 16}$

$$T \cdot R = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2 \cdot 4}{(s+3)^2 + 16} + \frac{C_3 \cdot (s+3)}{(s+3)^2 + 16} = \frac{1}{s} - \left(\frac{0{,}75 \cdot 4 + (s+3)}{(s+3)^2 + 16}\right) = 1 - e^{-3t} \cdot (\cos(4t) + 0{,}75\,\mathrm{sen}(4t)) = y(t)$$

Lista de Exercícios Nº 13

Desempenho no domínio do tempo

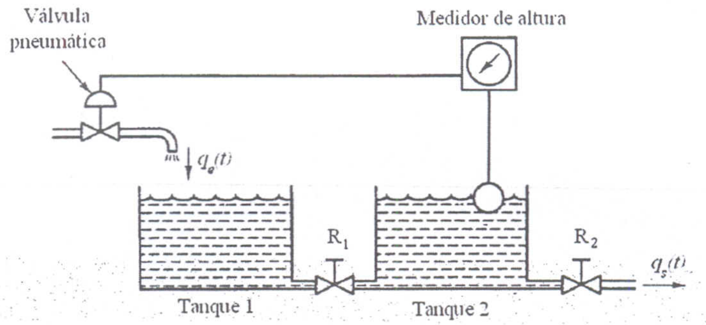
Entregar em: 02/05/2007.

Utilizar o MATLAB para a resolução dos exercícios abaixo.

1) Considere dois tanques interligados, nos quais a entrada é a vazão de entrada no primeiro tanque e a saída o nível d´agua do segundo. Um medidor de altura atua na válvula pneumática de controle. Determine todos os parâmetros para resposta ao degrau unitário. Considere os tanques cilíndricos com raio de 2 m, um coeficiente de restrição de 200 s/m^2 para o primeiro tanque e de 100 s/m^2 para o segundo e uma válvula pneumática de controle com constante igual a 0,05 m^2/s.

t_{subida}?

$t_{estabilização}$?



2) Repita a questão 1 considerando a saída como a altura da coluna d'água do primeiro tanque.

3) Considere um sistema com $\zeta = 0,6$ e $\omega_n = 5$ rad/s e determine:

a) o erro estacionário da malha aberta para uma entrada degrau unitário;

b) o erro estacionário da malha fechada para uma entrada degrau unitário;

c) a resposta de malha fechada ao impulso;

d) a resposta de malha fechada à entrada $r(t) = 3\cos(5t)$;

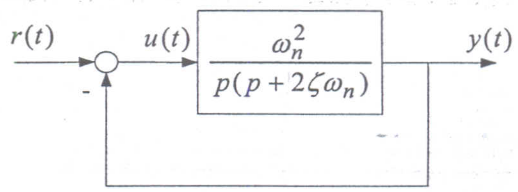
e) a resposta ao degrau unitário da malha fechada;

Com base no item e), determine:

f) o tempo de subida;

g) o instante de pico máximo;

h) o valor do pico máximo;



i) o tempo de estabilização a 2%;

j) o percentual de sobresinal;

k) a constante de tempo;

l) o ganho estático;

m) o fator de amortecimento;

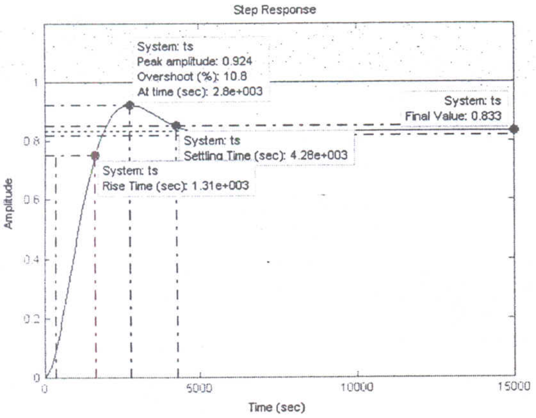
n) a freqüência natural;

o) a equação diferencial da malha fechada

Respostas:

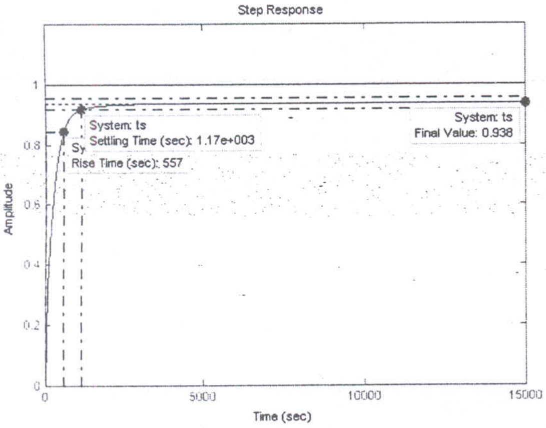
1) $pss = 10{,}8\%$; $t_s = 1310\,\mathrm{s}$; $T_{e,2\%} = 4280\,\mathrm{s}$;

$e_{est} = 0{,}167\,\mathrm{m}$;



2) $pss = 0\%$; $t_s = 557\,\mathrm{s}$; $T_{e,2\%} = 1170\,\mathrm{s}$;

$e_{est} = 0{,}062\,\mathrm{m}$;

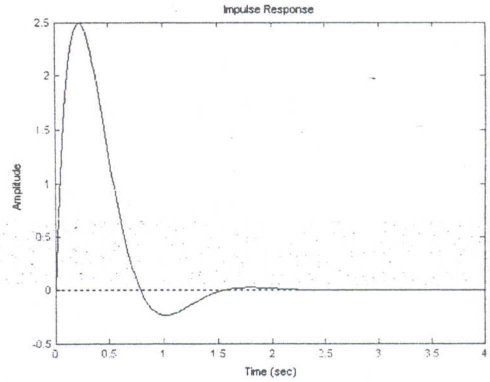


3)

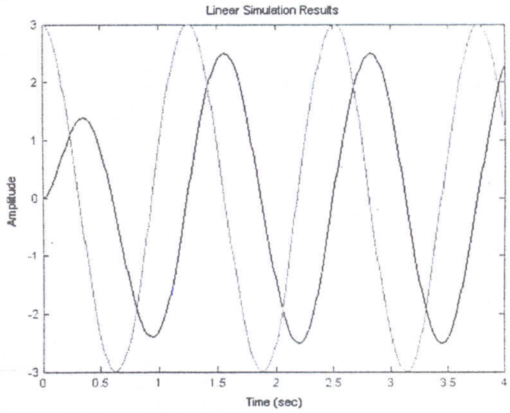
a) $e_{est} = \infty$;

b) $e_{est} = 0$;

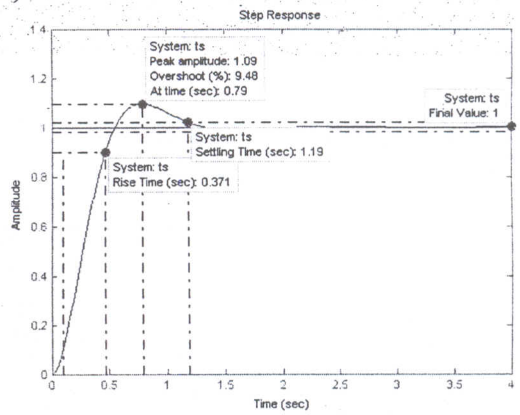
c)



d)



e)



f) $t_s = 0{,}371\,\mathrm{s}$;

g) $t_p = 0{,}79\,\mathrm{s}$;

h) $y_p = 1{,}09$;

i) $T_{e,2\%} = 1{,}19\,\mathrm{s}$;

j) $pss = 9{,}48\,\%$;

k) $\tau \cong 0{,}3333\,\mathrm{s/rad}$;

l) $K_0 = 1$;

m) $\zeta \cong 0{,}59$;

n) $\omega_n \cong 4{,}96$ rad/s;

o) $\ddot{y} + 6\dot{y} + 25y = 25r(t)$;

Lista 13

1) $\frac{dV_1}{dt} = q_e - q$; $\frac{dV_2}{dt} = q - q_s$

$q = \frac{1}{R_1}(h_1 - h_2)$; $q_s = \frac{h_2}{R_2}$

$\frac{dV}{dt} = A\frac{dh}{dt} = A \cdot hs$; $A = 4\pi$ $\quad R_2 = 100$

$R_1 = 200 \quad R = K = 0{,}05$

$G(s) = P(s).K(s)$; $H(s) = 1$

$G(s) = \frac{N}{D}$; $T(s) = \frac{N}{D+NH}$ (malha fechada)

$4\pi p h_1 = q_e - \frac{h_1}{200} + \frac{h_2}{200} \rightarrow 2514 p h_1 + h_1 = 200 q_e + h_2$

$h_1(2514p+1) = 200 q_e + h_2$

$4\pi p h_2 = \frac{h_1}{200} - \frac{h_2}{200} - \frac{h_2}{100}$

$2514 p h_2 = h_1 - h_2 - 2h_2 \rightarrow h_2(2514p+3) = h_1$

$(2514p+3)h_2 = \frac{200q_e + h_2}{(2514p+1)}$

$h_2(6320196p^2 + 10056p + 2) = 200 q_e$

$\frac{h_2}{q_e} = \frac{200}{6320196p^2 + 10056p + 2} = FT = P(s)$

$$G(s) = \frac{N}{D} = \frac{200 \times 0{,}05}{6320196p^2 + 10056p + 2} = P(s) \cdot K(s)$$

$$T(s) = \frac{10}{D+HN} = \frac{10}{6320196p^2 + 10056p + 2 + 10}$$

$$T(s) = \frac{1{,}582 \times 10^{-6}}{p^2 + 1{,}6 \times 10^{-3} p + 1{,}898 \times 10^{-6}}$$

$$\omega n^2 = 1{,}898 \times 10^{-6} \Rightarrow \omega n = 1{,}378 \times 10^{-3}\ rd/s$$

$$2\xi\omega n = 1{,}6 \times 10^{-3}$$
$$\xi = 0{,}58$$

$$PSS = 100 \cdot e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = \frac{-1{,}822}{0{,}8146} = -2{,}2367$$

$PSS = 10{,}68\%$ // $\to$ p/ $\xi = 0{,}5773 \to PSS = 10{,}8\%$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s(1-T)R(s) = \lim_{s \to 0} (-T) + 1$$

$$e_{ssT} = -\frac{1{,}582 \times 10^{-6}}{1{,}898 \times 10^{-6}} + 1 = 0{,}167\ m$$ //

tempo de subida : T_s =
tempo de estabilização : $T_{2\%}$ =

2) $FT = \frac{h_1}{q_e}$

$4\pi p h_1 = q_e - \frac{h_1}{200} + \frac{h_2}{200} \Rightarrow h_1(2514p+1) = 200q_e + h_2$

$4\pi p h_2 = \frac{h_1}{200} - \frac{h_2}{200} - \frac{h_2}{100}$

$h_2(2514p+3) = h_1$

$h_1(2514p+1) = 200q_e + \frac{h_1}{(2514p+3)}$

$h_1\left(2514p+1 - \frac{1}{(2514p+3)}\right) = 200q_e$

$h_1\left(\frac{(2514p+1)(2514p-3)-1}{(2514p+3)}\right) = 200q_e = 0{,}05 \cdot 200q_e$

$\frac{h_1}{q_e} = \frac{10(2514p+3)}{6320196p^2 + 2514p \cdot 3 + 2514p + 3 - 1}$

$\frac{h_1}{q_e} = \frac{25140p+30}{6320196p^2 + 10056p + 2} = P(s) = \frac{N}{D}$

$T(s) = \frac{N}{D+HN} = \frac{25140p+30}{6320196p^2 + 35196p + 32}$ (1)

(1) $\Rightarrow$ $\frac{p^2 + 5{,}5688 \times 10^{-3}p + 5{,}0631 \times 10^{-6}}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$

$w_n = 2{,}25 \times 10^{-3} \Rightarrow 2\xi w_n = 5{,}568 \, 10^{-3} \Rightarrow \xi = 1{,}237$

$PSS = 0$

$e_{est} = \lim_{s \to 0} s(1-T)R(s) = 1 - \lim_{s \to 0}(T)$

$e_{est} = 1 - \frac{30}{32} = 0{,}0625$

Tempo de subida: $T_s =$
tempo de estabilização: $T_{2\%} =$

3) $\xi = 0{,}6$; $\omega_n = 5$ rad/s ; $P(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s} = \frac{N}{D}$

$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{N}{D + HN}$; $H(s) = 1$

$T(s) = \frac{25}{s^2 + 6s + 25}$

a) $U(s) = \frac{1}{s}$ ⇒ erro estacionário de malha aberta:
$G(s) \Rightarrow e_{est} = \lim_{t \to \infty}(u(t) - y(t))$

$\frac{Y(s)}{U(s)} = P(s)$ ⇒ $e_{est} = \lim_{s \to 0} s\,(U(s) - P(s)U(s))$

$e_{est} = \lim_{s \to 0}(1 - P(s)) = 1 - \infty = \infty$

b) $e_{est} = \lim_{s \to 0} s(1-T)R(s) = 1 - 1 = 0$

3) cont.

c) $R(s) = 1$; $r(t) = \delta(t)$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{25}{s^2 + 6s + 25} \Rightarrow T(p) = \frac{25}{p^2 + 6 \cdot p + 25}$$

p/ C.I nulas

$$\frac{y(t)}{r(t)} = \frac{25}{p^2 + 6 \cdot p + 25} \Rightarrow \ddot{y} + 6\dot{y} + 25y = 25 r(t)$$

MATLAB :

```
clear all;
close all;
clc;
N = 25;
D = [1 6 25];
T=tf(T)
impulse (T)
```

d) $r(t) = 3\cos(5t) = 3\sin(5t + \pi/2)$

$y(t) = |T(j\omega)| \cdot 3 \cdot \sin(\omega t + \pi/2 + \angle P(j\omega))$

$$T(j\omega) = \frac{25}{-\omega^2 + 6j\omega + 25} \Rightarrow \text{p/ } \omega = 5 \text{ rad/s}$$

$$T(j\omega) = \frac{25}{30j} \Rightarrow |T(j\omega)| = \frac{25}{\sqrt{30^2}} = 0,833$$

$$\angle T(j\omega) = -\text{arctg}\left(\frac{30}{25-\omega^2}\right) = \infty \Rightarrow \angle T(j\omega) = -90 - \frac{\pi}{2}$$

$y(t) = 2,5 \sin(5t)$

```
clc;
```

e)

```
clear all;
close all;
N = 25;
D = [1 6 25];
T = tf[N, D]
step (T)
```

f) tempo de subida:

g) instante do pico máximo:

h) valor do pico máximo:

i) tempo de estabilização a 2% =

j) percentual de sobresinal (overshoot):

$$PSS = 100 \exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) = 9{,}48\%$$

k) constante de tempo: $\tau = \frac{1}{\xi\omega_n} = 0{,}33$

l) ganho estático: $T(s=0) = 1 \Rightarrow K_0 = 1$

m) $\xi = 0{,}6$

n) $\omega_n = 5$ rad/s

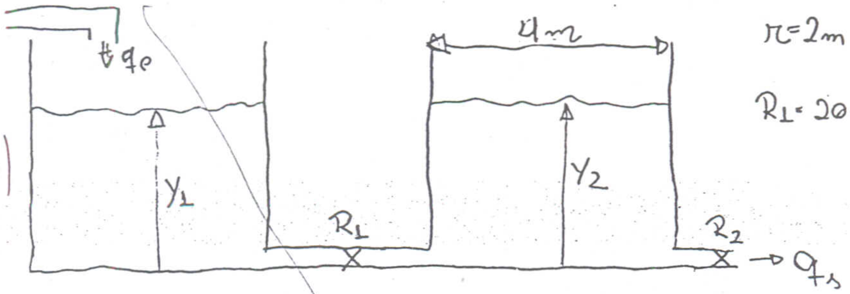
o) $\ddot{y} + 6\dot{y} + 25y = 25\,u(t)$; $y = y(t)$

Bruno Raizer Ra: 031424

EM707 - Lista 13 1s2007

$4.8 = 4^2.$

1- (errado)



$r = 2m$

$R_1 = 200 \ \frac{s}{m^2}$ $R_2 = 100 \ s/m^2$

$A = \pi r^2 = 4\pi$

$R_1 \cdot R_2 = 2 \cdot 10^4$

$A \cdot \dot{y}_1 = q_e - (y_1 - y_2) \cdot \frac{1}{R_1}$ $A \cdot \dot{y}_2 = (y_1 - y_2)\frac{1}{R_1} - y_2 \cdot \frac{1}{R_2}$

$AR_1 \cdot \dot{y}_1 + y_1 - y_2 = q_e \cdot R_1$ $AR_2 R_1 \dot{y}_2 + (R_2 + R_1) y_2 = y_1 \cdot R_2$

$y_1 (AR_1 s + 1) = y_2 + q_e \cdot R_1$ $(AR_2 R_1 \cdot s + R_2 + R_1) y_2 = R_2 y_1$

$(A^2 R_1^2 R_2 s^2 + A \cdot (R_1 R_2 + R_1^2) s + AR_2 R_1 s + R_2 + R_1) y_2 = R_2 y_2 + R_2 R_1 q_e$

$(A^2 R_1 R_2 s^2 + (2AR_2 + AR_1) s + 1) y_2 = R_2 q_e$

$\frac{y_2}{q_e} = \frac{100}{32 \cdot 10^4 \pi^2 s^2 + 16\pi \cdot 10^2 s + 1} = T$

sinal padrão $R = \frac{1}{s}$

$e_{est} = \lim_{s \to 0} s.(R - T') = \lim_{s \to 0} sR.(1 - T') = 1 - \lim_{s \to 0} T' = \emptyset$

R e T tem de ter a mesmas unidades ∴ assume $T' = \frac{T}{R_2} = \frac{y_2/R_2}{q_e} = \frac{1}{320000\pi^2 s^2 + 1600\pi \cdot s + 1}$

$e_{est} = \emptyset$ (não existe vazamento no tanque)

$2\xi\omega_n = \frac{1}{200\pi}$ e $\omega_n^2 = \frac{1}{32 \cdot 10^4 \pi^2} \rightarrow \omega_n = \frac{1}{400\pi \cdot \sqrt{2}}$ $\omega_n \cdot 2 = \frac{1}{200\pi\sqrt{2}} \Rightarrow \xi = \sqrt{2}$ sobreamortecido

∴ Não há sobre sinal → PSS = ∅%

$T = \frac{1}{32 \cdot 10^4 \pi^2 s^2 + 1600\pi s + 1} = \frac{1}{(s + 13{,}58 \cdot 10^{-4})(s + 2{,}33 \cdot 10^{-4})}$ $Y_{(s)} = T_{(s)} \cdot R_{(s)} = \frac{1}{s(s + 13{,}58 \cdot 10^{-4})(s + 2{,}33 \ldots}$

$\frac{y_2}{R_2}(t) = 1 + 0{,}2701 \cdot e^{-\frac{13{,}58 \cdot t}{10^4}} - 1{,}2701 \cdot e^{-\frac{2{,}33 \cdot t}{10^4}}$

para $\frac{y_2}{R_2}(t) = 0{,}95 \rightarrow t = 13660s \Rightarrow t_{est\,5\%} = 13660s$ (tempo de estabilização a 5%)

para $\frac{y_2}{R_2}(t) = 0{,}9 \rightarrow t = 10685s$

para $\frac{y_2}{R_2}(t) = 0{,}1 \rightarrow t = 1019s$

$t(\frac{y}{R_2} = 0{,}9) - t(\frac{y}{R_2} = 0{,}1) = 9666s$

tempo de subida TS = 9666s

para $\frac{y_2}{R_2}(t) = 0{,}5 \rightarrow t = 3771s \Rightarrow$ tempo de atraso = 3771s

para $\frac{y_2}{R_2}(t) = 0{,}98 \rightarrow t = 17600s = T_{est\,2\%}$

Breno Raizer Ra: 031424
EM707 - Lista 13   1s 2007

3 - Continuação

item (4) $T = \dfrac{25}{(s+3)^2+16}$ $R = 1$ (impulso) $Y = R.T = \dfrac{25}{4} \cdot \dfrac{4}{(s+3)^2+16} \Rightarrow y(t) = h(t) = \dfrac{25}{4}.e^{-3t}$ ...

resposta ao impulso $h(t) = \dfrac{25}{4}.e^{-3t} \cdot sen(4t)$

(5) $u(t) = 3\cos 5t$ $T = \dfrac{25}{s^2+6s+25}$ $T(j\omega) = \dfrac{25}{\cancel{-25}+30j+\cancel{25}}$ $\omega=5$

$|T(5j)| = \dfrac{25}{30} = \dfrac{5}{6}$ $\angle T(5j) = 0 - 90° = -90° = -\pi/2$

$y = 3.\dfrac{5}{6} \cdot \cos(5t - \pi/2) = 2{,}5 \cdot \cos(5.t - \pi/2)$ → resposta permanente

$y(t) = \dfrac{25}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{5} sen\, 5.t - \dfrac{1}{4} . e^{-3t} \cdot sen 4t\right)$ → resposta completa (transiente + permanente)

(6) TS = ?   resposta ao degrau $y(t) = 1 - e^{-3t}(\cos(4t) + 0{,}75\, sen(4t))$

para $y = \begin{cases} 0{,}9 \Rightarrow t = 0{,}4701\, s \\ 0{,}1 \Rightarrow t = 0{,}0993\, s \end{cases}$ $TS = 0{,}4701 - 0{,}0993 = 0{,}3708\, s$ (tempo de subida)

$\sqrt{1^2 + 0{,}75^2}$

(7) instante do pico máximo → $\dfrac{\pi}{\omega_d} = \dfrac{\pi}{4} = 0{,}7854\, s$

(13) $\zeta = 0{,}6$

(8) substituindo, $y(0{,}7854\, s) = 1{,}0948$

(14) $\omega_n = \sqrt{25} = 5\, rad/s$

(15) $\ddot{y} + 6\dot{y} + 25y = 25.r(t)$

(9) $y(t) = 1 - 1{,}25\, e^{-3t} \cdot sen(4t + 53{,}13°)$

$1 - 1{,}25 . e^{-3t} = 0{,}98$ $-1{,}25\, e^{-3t} = -0{,}02$

$1 + 1{,}25\, e^{-3t} = 1{,}02$ $1{,}25\, e^{-3t} = 0{,}02$

$t = -\dfrac{1}{3} \ln \dfrac{0{,}02}{1{,}25}$

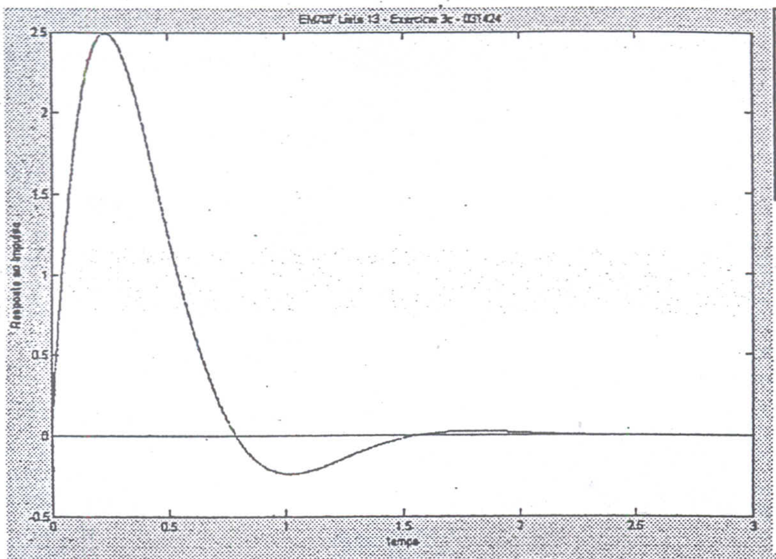
$t = 1{,}3784\, s = t_{est}\, 2\%$

(10) $PSS = 100\% \dfrac{y_{max} - y_r}{y_r} = 100\% \cdot \dfrac{1{,}0948 - 1}{1} = 9{,}48\%$ de sobresinal

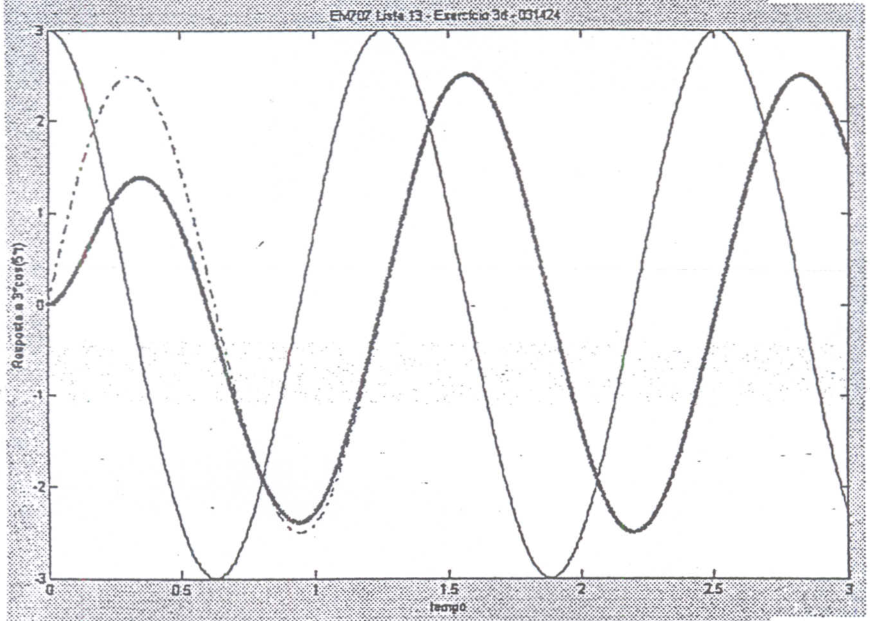
(11) $T = \dfrac{25}{s^2+6s+25}$ $\tau = \dfrac{1}{\zeta\omega_n} = \dfrac{1}{3}$; (12) $K_0 = T(s=0) = 1$

$K_0 = 1$

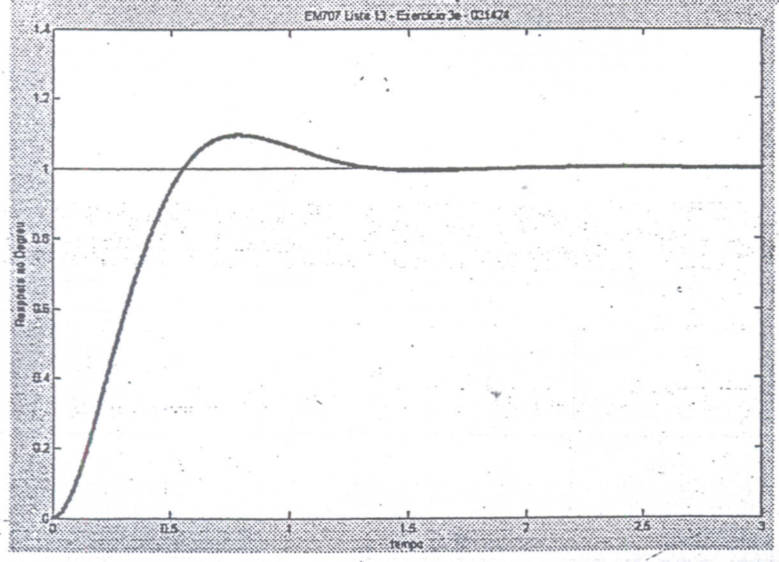
Breno Raizer
Ra: 031424
13ª Lista de EM707



Resposta ao Impulso



Resposta à uma entrada harmônica 3*cos(5*t)
(linha grossa)
(linha fina: entrada)
(linha tracejada: resposta permente)



Resposta ao Degrau

Lista de Exercícios Nº 14

Diagrama de Bode

Entregar em: 02/05/2007.

1) Para uma dada planta, foi aplicado um sinal de entrada *u(t)* e obtida uma resposta *y(t)*, conforme dado abaixo. Determine o módulo e a fase da planta para a freqüência da excitação.

$\theta + \Phi = -1,2$

$\Phi = -2,2$

$A \cdot |P(jw)| = 0,5 \quad |P(jw)| = 0,5$

A W θ

$$u(t) = \sin(2t+1)$$
$$y(t) = 0{,}5\sin(2t-1{,}2)$$

$y(t) = A\,|P(jw)|\,\text{sen}(wt+\theta \ldots$

$A = 1 \quad W = 2 \quad \theta = 1$

2) Sabendo que uma dada planta apresenta um ganho de -6 dB e uma fase de -45° na freqüência de 5 rad/s, qual é a resposta para uma excitação $u(t) = 2\cos(5t - \pi/2)$?

Φ

$|(P(jw)|| = -6db = 0,5 \quad u(t) = 2\,\text{sen}\,(5t)$

3) Determine a função de transferência do sistema cujo diagrama de Bode esta abaixo:

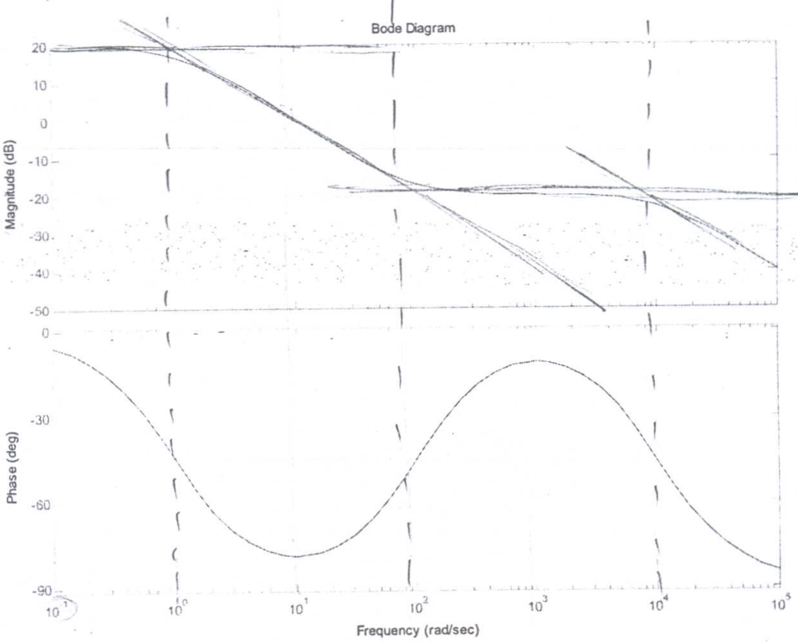
$|(P(j5)| = 0,5$

polos simples fazem os assintotas cair 20db em 1 decada

zeros sobem 20db por decada

polos = +1, +10000

zeros = +100,



$-6db = 20 \log h_o$

$h_o = 0,5$

$FT0 = \dfrac{(s \pm 100)}{(s \pm 1)(s \pm 10000)}$

$20db = 20 \log h_o$

4) Determinar através de assíntotas o diagrama de Bode do sistema abaixo.

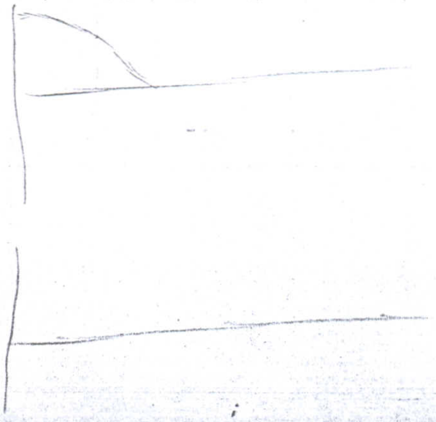
$$T(s) = \frac{s+10}{(s+1)(s+1000)}$$

(2)

zeros $-+10^1$

polos $-+10^0, +10^3$

(1) (3)



Importante, entender h_o ?

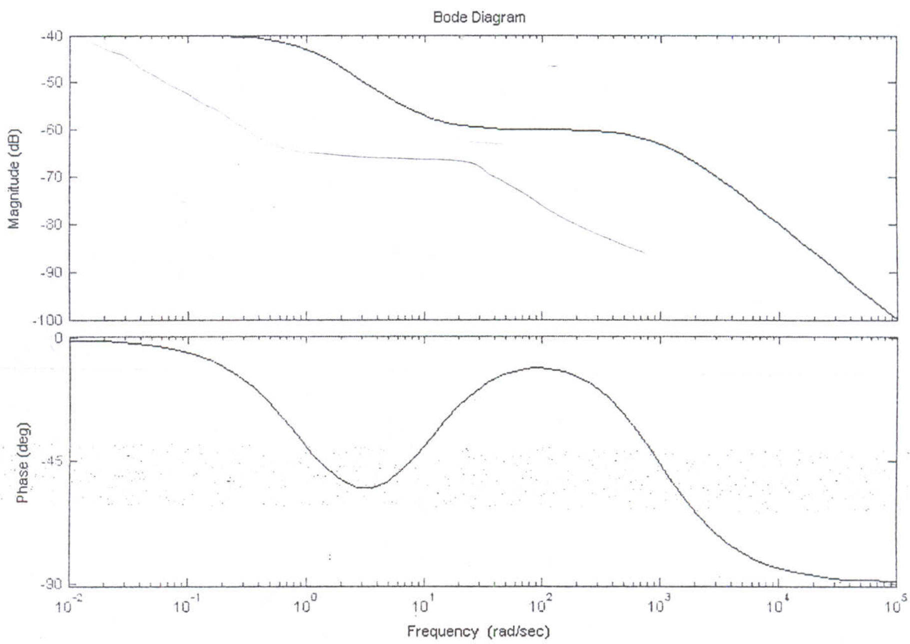
Respostas:

1) $M(\omega) = 0{,}5\,;\ \phi = -2{,}2\,\text{rad}$

2) $y(t) = \sin(5t - 45°)$

3) $FTO = \dfrac{1000(s+100)}{(s+1)(s+10000)}$

4)



Bruno Raizer burro VVV VVV Ra: 031424

EM707 - Lista 14 1s2007

1- $u(t) = \operatorname{sen}(2t + 1) \rightarrow U = 1 \angle 1$

$y(t) = 0{,}5 \operatorname{sen}(2t - 1{,}2) \quad Y = 0{,}5 \angle -1{,}2$

$\frac{Y}{U} = 0{,}5 \angle -2{,}5 \qquad |T(j2)| = 0{,}5 \qquad \angle T(2j) = -2{,}5$

2- $-6dB = 20 \cdot \log |T| \qquad |T| = 10^{-6/20} = 0{,}5012$

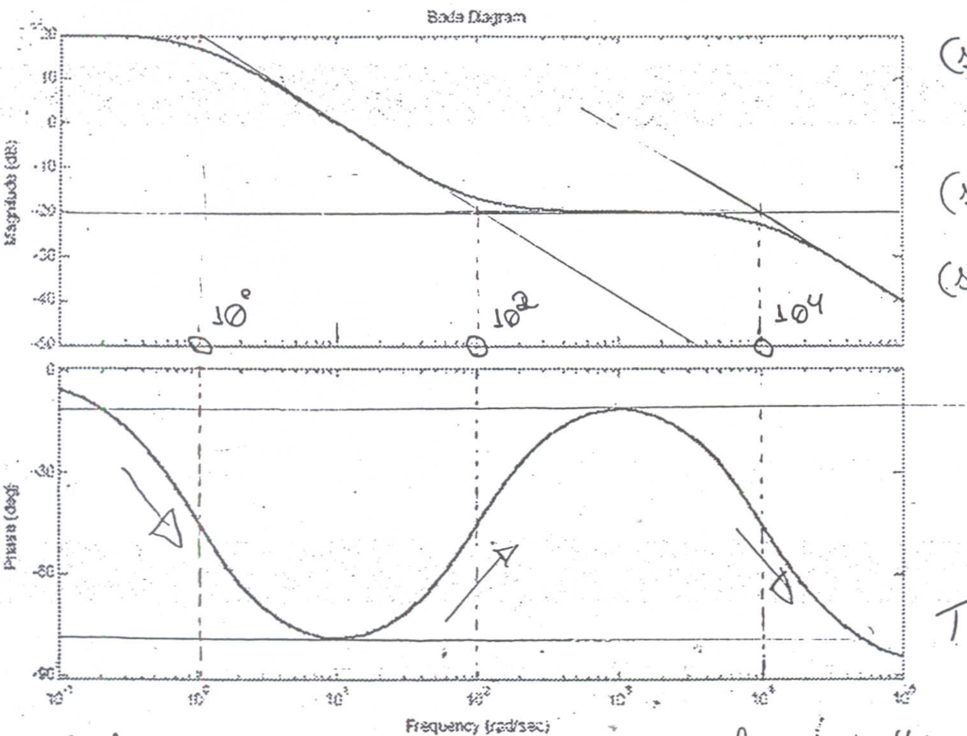
$\angle T(5j) = -45° = \pi/4$

$u(t) = 2\cos\left(5t - \pi/2\right) = 2\operatorname{sen}(5t)$

$y(t) = |T(5j)| \cdot 2\cos\left(5t - \frac{\pi}{2} + \angle T(5j)\right) = 1{,}0024 \cdot \operatorname{sen}\left(5t - \pi/4\right)$

$y(t) = 1{,}0024 \cos\left(5t - 3\pi/4\right)$

3-



$(s \pm 1) \rightarrow$ faz decair 20 db por década $\rightarrow$ polo

$(s \pm 100) \rightarrow$ faz aumentar 20db/dec $\rightarrow$ zero

$(s \pm 10^4) \rightarrow$ faz decair 20db/dec $\rightarrow$ polo

$20 db = 20 \log K_0$

$K_0 = 10$

$T = \frac{10^3 \cdot (s + 10^2)}{(s+1)(s+10^4)}$

fase: polo em $s = \pm 1$ e decai $\rightarrow s = -1$

polo em $s = \pm 10^4$ e decai $\rightarrow s = -10^4$

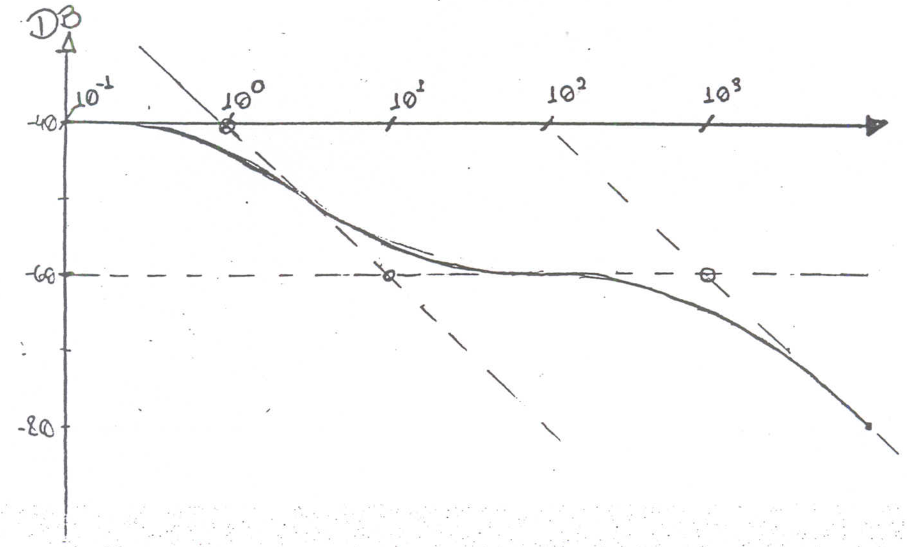
zero em $s = \pm 100$ e aumenta $\rightarrow s = -100$

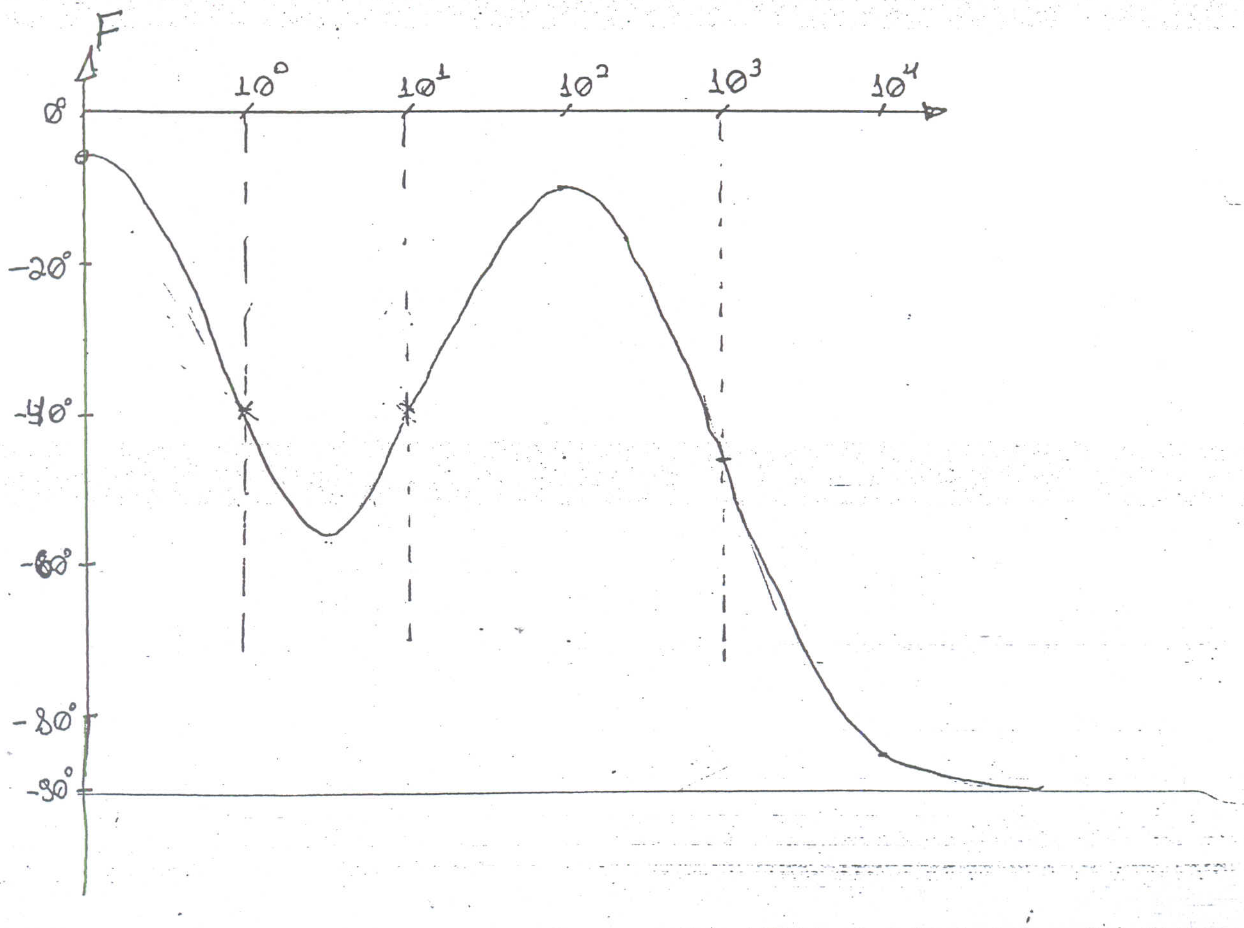
4- $T(s) = \dfrac{s+10}{(s+1)(s+10^3)}$ $\qquad T(j\omega) = \dfrac{j\omega+10}{(j\omega+1)(j\omega+10^3)} = \dfrac{10+j\omega}{1001\omega j+10^3-\omega}$

$|T(j\omega)| = \dfrac{\sqrt{10^2+\omega^2}}{\sqrt{(10^3-\omega)^2+(1001\omega)^2}}$ $\qquad \angle T(j\omega) = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\omega}{10}\right) - \mathrm{arctg}\left(\dfrac{1001\,\omega}{10^3-\omega}\right) = F$

$DB = 20.\log|T(j\omega)| = 10\log(10^2+\omega^2) - 10\log\left[(10^3-\omega)^2+(1001.\omega)^2\right]$

$T(0) = 10^{-2} \rightarrow DB = -40$





Lista de Exercícios Nº 15

Análise de desempenho na freqüência

Entregar em: 09/05/2007.
Utilizar o MATLAB para a auxiliar a resolução dos exercícios abaixo.

1) Dado o diagrama de Bode abaixo, representando um sistema de segunda ordem, estime a sua função de transferência.

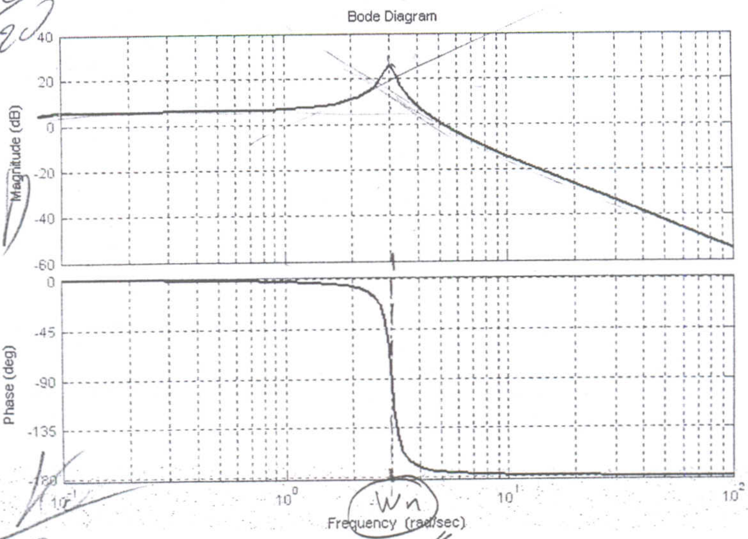
$\log K_o = \frac{6}{20}$

$10^{0.3} = 2$

W_n

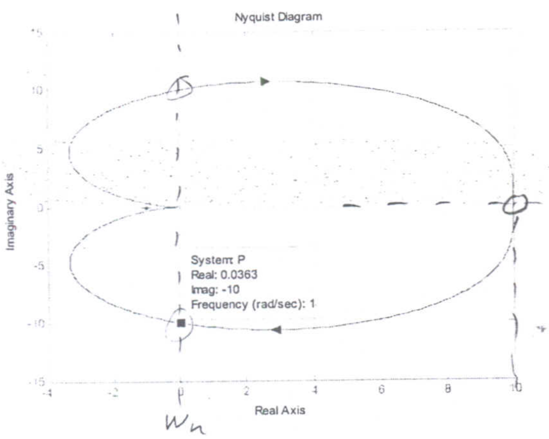
$|P(jw_n)| = 26\ dB$

$|P(jw_n)| = \frac{K_o}{2\zeta}$

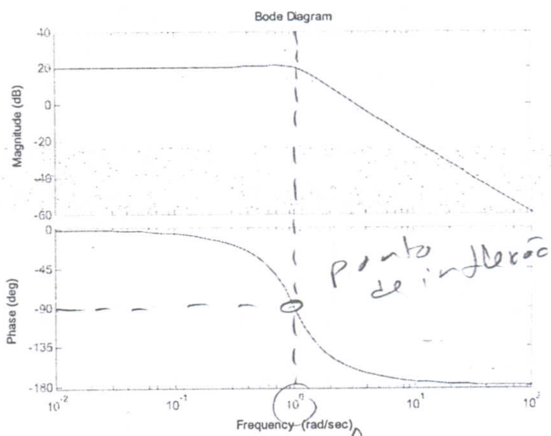


$$\frac{K_o W_n^2}{s^2 + 2\zeta W_n s + W_n^2}$$

2) Foram obtidos experimentalmente de um sistema os diagramas e a tabela abaixo. Determinar o fator de amortecimento, a freqüência natural, a banda de passagem, a freqüência de ressonância e a função de transferência deste sistema.



W_n

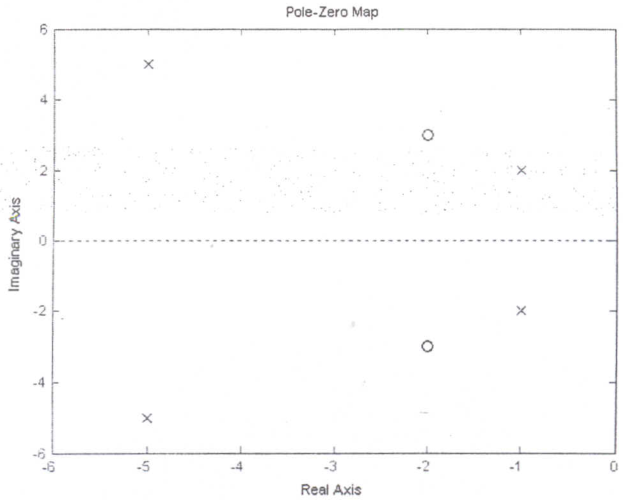


ponto de inflexão

frequência natural

onde cruza o eixo horizontal no
onde cruza o eixo vertical é o wn

3) Para o sistema cujo diagrama de pólos e zeros está abaixo, determine o diagrama de bode correspondente.

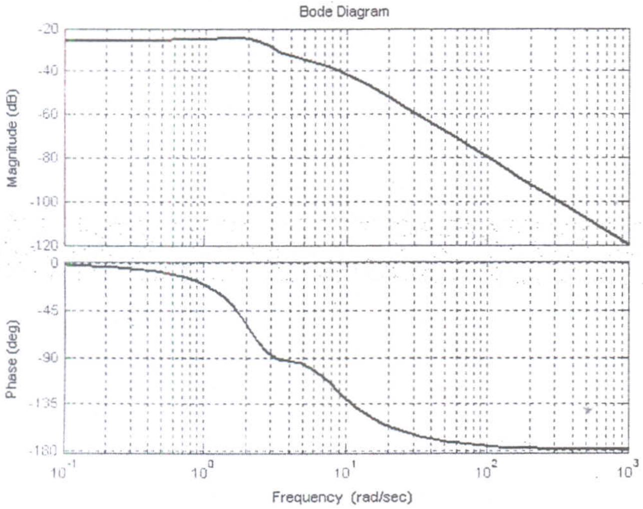


Respostas:

1) $FTO = \dfrac{18}{s^2 + 0{,}3s + 9}$

2) $\zeta = 0{,}5$; $\omega_n = 1$ rad/s; $\omega_b = 1{,}2720$ rad/s; $\omega_r = 0{,}7071$ rad/s; $FTO = \dfrac{10}{s^2 + s + 1}$

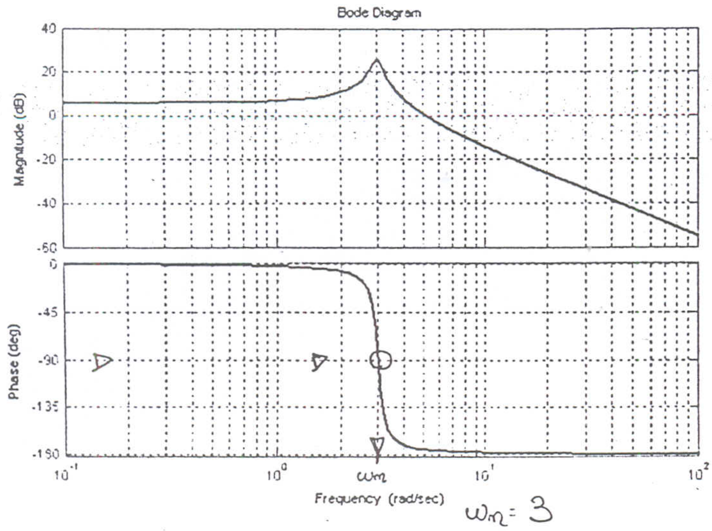
3)

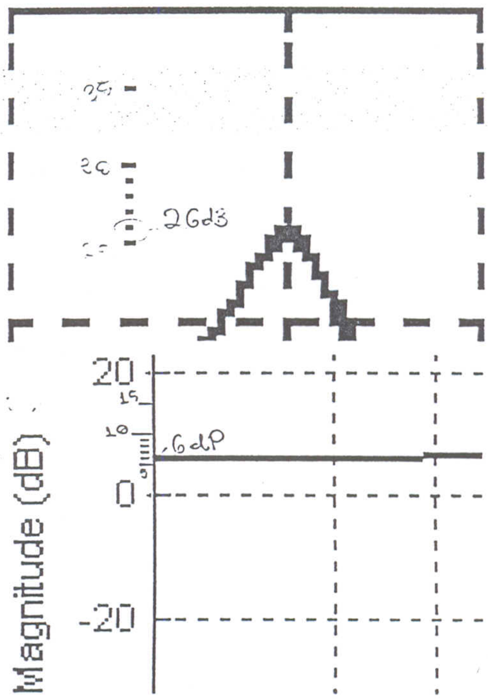


Breno Raizer Ra:031424

EM707 - Lista 15 1s2007

1-





$\omega_n = 3$

solução é da forma $\dfrac{K_0\,\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} = T$

$6dB = 20\cdot\log K_0 \rightarrow K_0 = 10^{6/20} \cong 1{,}995 \cong 2$

$26dB = 20\cdot\log M_p \rightarrow M_p = 10^{26/20} \cong 20$

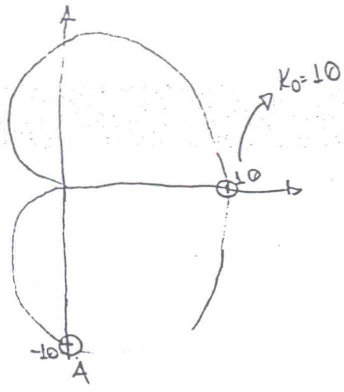
$\zeta = 0{,}5\cdot\sqrt{\dfrac{\frac{M_p}{K_0}+1}{M_p/K_0}} - 0{,}5\cdot\sqrt{\dfrac{\frac{M_p}{K_0}-1}{\frac{M_p}{K_0}}}$

$\rightarrow \zeta = 0{,}05006 \cong 0{,}05$

$$\therefore\ T = \frac{2\cdot 3^2}{s^2+2\cdot 0{,}05\cdot 3\cdot s+3^2} = \frac{18}{s^2+0{,}3s+9}$$

$$T = \frac{18}{s^2+0{,}3s+9}$$

2.- o exercício dá o diagrama de Nyquis e nele os dados de um único ponto



$$A: \begin{cases} 0{,}0363 - 10{,}0j \cong -10j \\ \omega_A = 1\,rad/s \end{cases}$$ - $\operatorname{artg} \frac{real}{imag}$

se $A = (0; -10)$ $\quad |A| = 10 \quad \angle A = -90°$

se $\angle A = -90°$, $\omega_A = \omega_n = 1\,rad/s$

$$|A| = \frac{K_0}{2\zeta} \Rightarrow 2\zeta = 1 \quad \zeta = 0{,}5$$

$$\omega_b = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}} = 1{,}2720\ rad/s$$

T é da forma $T = \dfrac{k_0 \cdot \omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \dfrac{10 \cdot 1}{s^2 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 1 \cdot s + 1^2}$

$$T = \frac{10}{s^2 + s + 1}$$

Breno Raizer Ra:031424

EM707 - Lista 15 1s2007

3-

```
close all
z1=-2+i*3;z2=-2-i*3;
p1=-5+i*5;p2=-5-i*5;
p3=-1+i*2;p4=-1-i*2;
n=10000;
w=zeros(n,1);dB=w;F=w;
for j=1:n
  w(j)=10^(-1+4*(j-1)/(n-1));
  s=i*w(j);
  T=(s-z1)*(s-z2)/((s-p1)*(s-p2)*(s-p3)*(s-p4));
  dB(j)=20*log10(abs(T));
  F(j)=180*angle(T)/pi;
end
subplot(211)
semilogx(w,dB,'b')
axis([0.1 1000 -120 -20])
title('Lista 15 - Exercício 3 - 031424')
ylabel('Módulo [dB]')
subplot(212)
semilogx(w,-180,'-.k');hold on
semilogx(w,F,'b')
axis([0.1 1000 -200 0])
ylabel('Fase [graus]')
xlabel('Frequencia')
```

dados os zeros z_i (complexos) e os polos p_j (complexos)

$$T \propto \frac{\prod_i^m (s-z_i)}{\prod_j^m (s-p_j)}$$

→ construindo desta forma $K_0 \neq 1$

$$K_0 = T_{(s)}\Big|_{s=0}$$

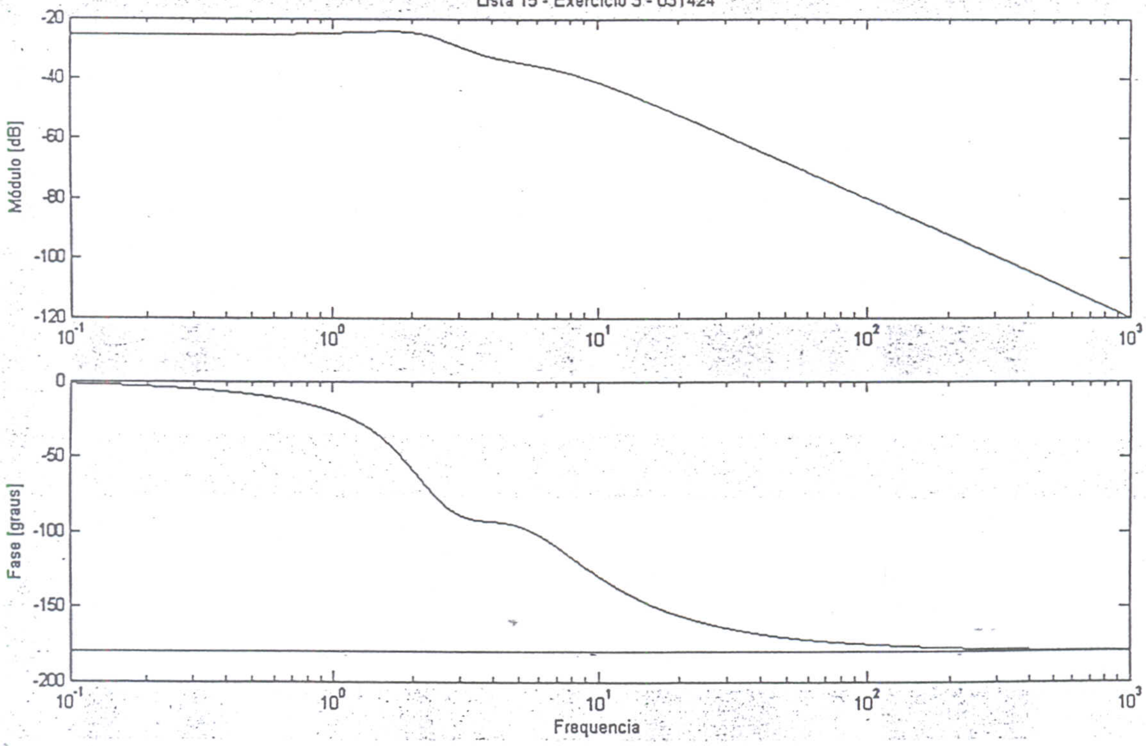
para construir com $K_0=1$ eu poderia:

T0 = z1·z2/(p1·p2·p3·p4);

C=1/abs(T0)

T= C·(s-z1)(s-z2)/((s-p1)(s-p2)(s-p3)(s-p4))

Lista 15 - Exercício 3 - 031424

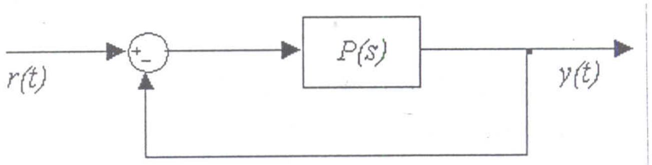


Lista de Exercícios Nº 16

Estabilidade e Lugar das Raízes

Entregar em: 14/05/2007.
Utilizar o MATLAB para auxiliar a resolução dos exercícios abaixo.

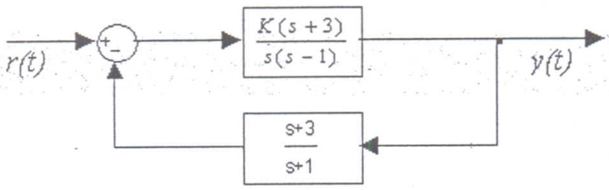
1) Considere o sistema abaixo no qual a planta é dada por $P(s) = \dfrac{s+2}{s+1}$.



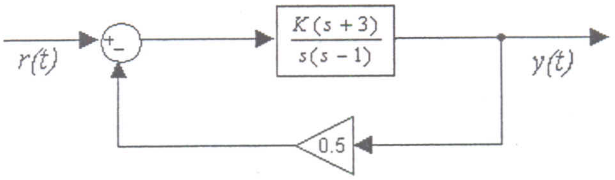
a) Esboce manualmente o gráfico do lugar das raízes.
b) Verifique os resultados do item a) com o MATLAB usando o comando `rlocus`.

2) Determine através do gráfico do lugar das raízes o menor valor de K que ainda mantenha o sistema abaixo estável.

Análise do sistema com malha aberta. $L = P \cdot H$



3) Considere o sistema abaixo:



a) Esboce manualmente o gráfico do lugar das raízes.
b) Determine a faixa de valores do ganho K para que o sistema seja estável.
c) Determine a faixa de valores $K > 0$ para que o sistema seja estável e os pólos da função de transferência de malha fechada sejam reais.
d) Determine todos os valores do ganho K para os quais o sistema é criticamente amortecido.

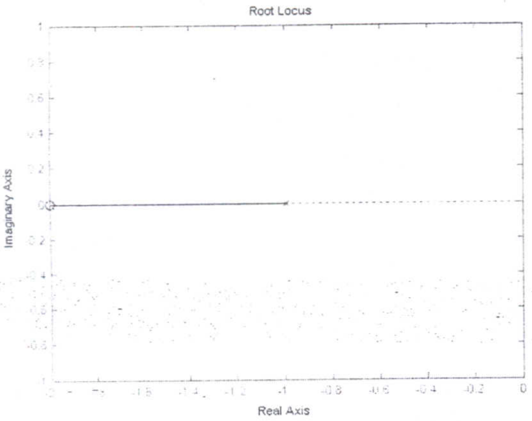
4) Para o sistema $\ddot{y} + \dot{y} + y = u(t)$ determine a resposta ao impulso pelo MATLAB, usando os

comando `impulse`. Determine o tipo de estabilidade através do posicionamento dos pólos, usando o comando `pzmap`. Montar o diagrama de blocos no Simulink e determinar novamente a resposta ao impulso, usando o bloco derivativo e a fonte de sinal do degrau (step).

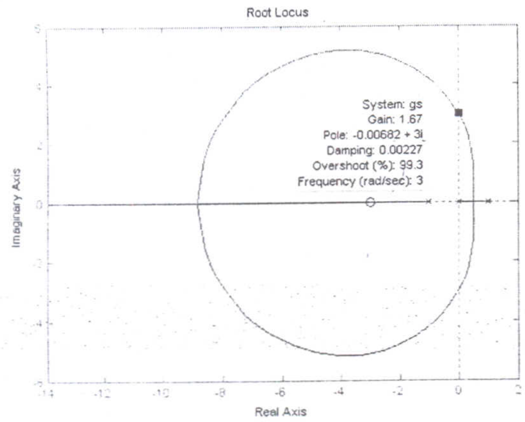
5) Seja o processo descrito por $P(s)=\dfrac{1}{s^2+5s+6}$. Considerando uma realimentação unitária negativa para o sistema de malha fechada, determine o valor da constante K do controlador $\dfrac{K}{s}$ usando o método do lugar das raízes para que o tempo de estabilização a 2% seja inferior a 10 s e o sobressinal inferior a 10%.

Respostas:

1)

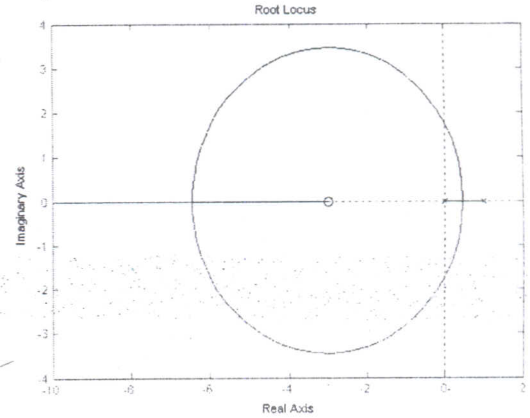


2) $K \geq 1{,}67$



3)

a)

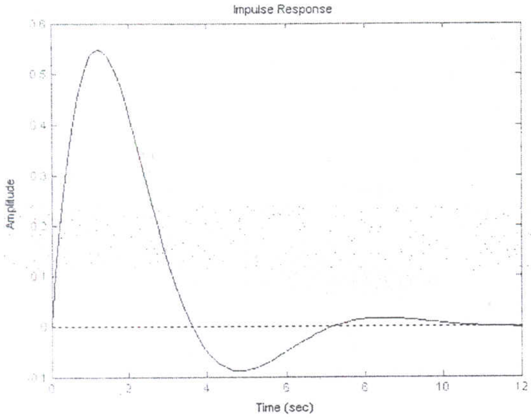


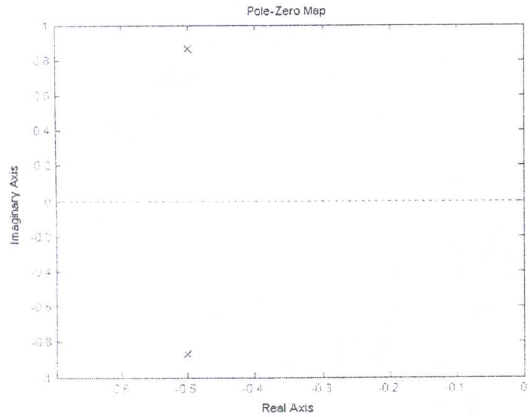
b) $K \geq 2$;

c) $K \geq 28$;

d) $K \geq 28$;

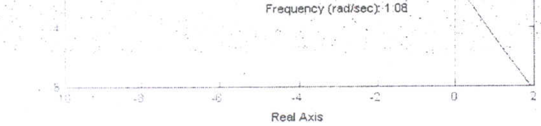
4)





O sistema de malha fechada é assintoticamente estável pois os pólos estão no semiplano esquerdo.

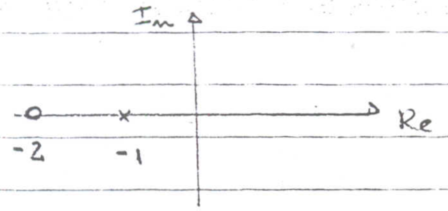
5) $K \cong 4{,}37$



Lista 16

1) $P(s) = \dfrac{s+2}{s+1}$; ZEROS: $z_1 = -2$

Polos: $p_1 = -1 \Rightarrow s+1 = 0 \Rightarrow s = -1$



2) $G(s) = \dfrac{K(s+3)}{s^2 - s}$; $H(s) = \dfrac{s+3}{s+1}$

$L(s) = G(s) = \dfrac{K(s+3)}{s^2 - s}$

```
clear all
close all
clc
s = tf('s');
g = (s+3)/(s(s-1));
h = (s+3)/(s+1);
L = g*h;
rlocus(L)
```

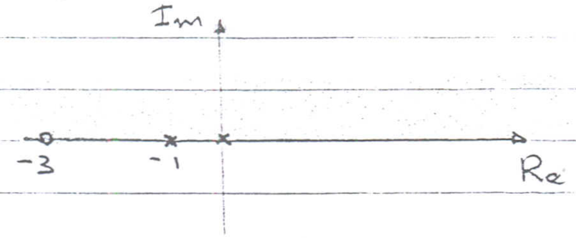
$K \geq 1{,}67$

3) $G(s) = \dfrac{K(s+3)}{s(s-1)}$; $L(s) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{K(s+3)}{s(s-1)}$

3) Polos: $s(s-1) = 0$ Zeros: $(s+3) = 0$

$s_1 = 0$ $s = -3$

a) $s_2 = 1$



b) $K \geq 2$

c) $K \geq 27,9 \sim 28$

d) $K \geq 27,9$

4) $\ddot{y} + \dot{y} + y = u(t)$

MATLAB

```
s = tf('s');
T = 1/(s^2 + s + 1)
impulse (T)
pzmap (T)
```

O sistema de malha fechada é assintoticamente estável pois os polos estão no SPE.

5) $P(s) = \dfrac{1}{s^2+5s+6}$; $H(s) = 1$; $K(s) = \dfrac{K}{s}$

$t_{e_{2\%}} \Rightarrow \tau = \dfrac{1}{\xi \omega_n} \Rightarrow t_{e_{2\%}} < \tau \left[\ln \left(0,02 \sqrt{1-\xi^2} \right) \right]$

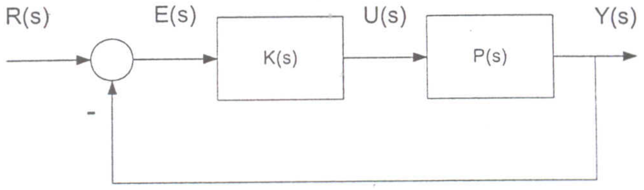
$P_{SS} \rightarrow \xi \uparrow$

Lista de Exercícios Nº 17

Critério de Estabilidade de Nyquist

Entregar em: 16/05/2007.
Utilizar o MATLAB para auxiliar a resolução dos exercícios abaixo.

1) Analisar a estabilidade dos sistemas abaixo de acordo com o critério de Nyquist.



a) $K(s) = 0,8$

$$P(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)(s-0,5)}$$

usar nyquist L(s)

b) $K(s) = 20$

$$P(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

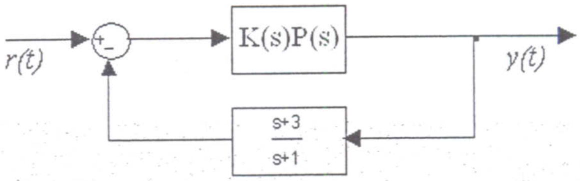
c) $K(s) = 20$

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s-0,5)}$$

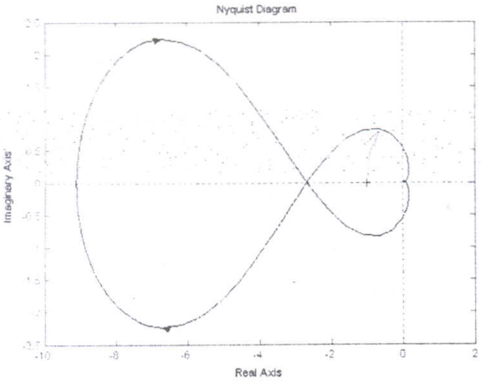
2) Analisar a estabilidade do sistema abaixo de acordo com o critério de Nyquist.

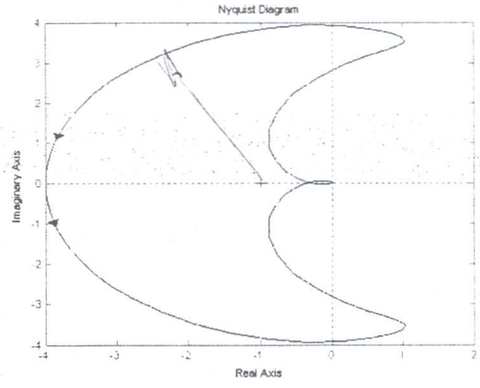
$K(s) = 20$

$$P(s) = \frac{(s+3)}{(s-3)(s+4)}$$



3) Determinar estabilidade do sistema de malha fechada a partir da sua função de transferência de malha aberta $G(s)$.





a) $G(s) = \dfrac{(s+1)}{(s-1)(s-1)(s-1)(s+0{,}11)}$

polos 1 1 1 -0,11
zero -1 P = 3 instavel
n = 1

b) $G(s) = \dfrac{20s+2}{(s+1)(s+1)(s+5)(s-0{,}1)}$

polos -1 -1 -5 0,1
zeros -2 P = 1
n = 1

(b)
Z = -1 + 1
Z = 0 (estavel)

Respostas:

1) a) Sistema estável; b) Sistema instável; c) Sistema instável

2) Sistema estável

3) a) Sistema instável; b) Sistema estável

Nyquist. Z = n + P

n° de envolvimentos em torno (-1)

se n > 0 sentido horario
n < 0 → sentido anti-horario

número de polos no SMD

(3) Z = (-1) + (3)
sentido anti-horario
(a)

Z = estavel
Z ≠ instavel

Lista 17

1) a) $K(s) = 0{,}8$

$P(s) = 2 / (s+1)(s+2)(s-0{,}5)$

p = polos instáveis de $L(s)$ = 0

n = nº de envolvimentos de $L(s)$ em torno de -1 = 0

$Z = n + p = 0$

↻ → $n > 0$

$Z = 0$ → estável

b) ↻ → $n > 0$ → $n = 1$

$Np = 0$ → pólos instáveis ($p < 0$) SPD

↳ -2, -1 e -5

$Z = 1 + 0 = 1$ → sistema instável

c) ↻ $n > 0$ → $n = 1$

$Np = 1$ → pólo instável ($p < 0$) ⇒ $p = 0{,}5$

$Z = 1 + 1 = 2$ → instável

2) $K = 20$; $P(s) = \dfrac{(s+3)}{(s-3)(s+4)}$; $H(s) = \dfrac{s+3}{s+1}$

$L(s) = K(s) \cdot P(s) \cdot H(s)$

↺ → $n < 0$ → $n = -1$

$Np = 1$ → $p = 3$

$Z = -1 + 1 = 0$ → sistema estável

3) a) $G(s) = \dfrac{(s+1)}{(s-1)(s-1)(s-1)(s+0{,}11)}$

$np = 3 \rightarrow$ nº de pólos de $L(s)$ no SPD

$n = -1 \Rightarrow$ ↺ $n < 0$

$Z = 3 - 1 = 2 \rightarrow$ INSTÁVEL

b) $G(s) = \dfrac{20s + 2}{(s+1)(s+1)(s+5)(s-0{,}1)}$

$np = 1 \rightarrow$ pólos no SPD

$n = -1 \rightarrow$ ↺ $n < 0$

$Z = 1 - 1 = 0 \rightarrow$ ESTÁVEL