

Doc. #2 - Lista de Exercícios 1 - Soluções

1. Ponte retificadora monofásica com carga resistiva e filtro capacitivo (veja circuito na figura A1-1 do anexo 1. Neste circuito, como nos demais cinco, a tensão indicada por v_0 corresponde à tensão que temos representado por v_d). A tensão de alimentação é senoidal com frequência igual a 60 Hz e com 220 V de tensão eficaz (rms). A medida da resistência equivalente da carga fornece 278 ohms.

a) Estime o valor da capacidade, C , que garante uma ondulação na tensão de saída inferior a 5% do seu valor máximo. Use a aproximação $\omega RC \gg 1$

$$\frac{v_{d\max} - v_{d\min}}{v_{d\max}} \approx \frac{1}{2fRC}, \quad v_{d\max} = V_p$$

b) Assumindo (neste e em todos os outros itens a seguir) que o valor de C é o calculado em (a), calcule a ondulação na tensão de saída, em percentagem e em valor absoluto. Use as expressões deduzidas em aula:

$$\frac{v_{d\max} - v_{d\min}}{v_{d\max}} = \frac{V_p - v_{d\min}}{V_p} = \frac{\Delta v}{V_p} = 1 - \cos \phi_2$$

em que ϕ_2 satisfaz

$$\phi_2 = F(\phi_2), \quad F(\phi_2) = \cos^{-1} \left[\cos \phi_1 \exp \left(\frac{\phi_1 - \pi}{\omega RC} \right) \exp(\phi_2/\omega RC) \right]$$

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\omega RC} \right)$$

$j\phi_2 \geq j\phi_1$

c) Calcule a corrente de entrada máxima (em módulo, que coincide com a corrente máxima através de cada diodo, e do máximo de i_d). Use a expressão, deduzida em aula,

$$i_e = i_d = \underbrace{\frac{V_p}{R} (\omega RC \cos \theta + \sin \theta)}_{\text{válida para o intervalo do primeiro semiciclo em que } i_d > 0}, \quad \theta = \omega t$$

válida para o intervalo do primeiro semiciclo em que $i_d > 0$, ou seja, o intervalo definido por

$$\theta_1 = \pi/2 - \phi_2 < \theta < \pi/2 + \phi_1 = \theta_2$$

d) Calcule o valor eficaz (ou rms) da corrente de entrada, i_e (que coincide com o valor eficaz de i_d).

e) Calcule o valor médio da corrente i_d .

f) Estime, aproximadamente, a média da corrente i_d , assumindo que os pulsos de corrente tenham forma triangular.

g) Calcule a potência média na entrada (que coincide com a da carga)

h) Determine o fator de potência na entrada.

Solução

a)

Dos dados do problema,

$$v_e = V_p \sin \omega t, \quad \omega = 2\pi(60) \text{ rad/s}, \quad V_p = 220\sqrt{2}, \quad R = 278 \Omega \quad (1)$$

e com $\Delta v = v_{d\max} - v_{d\min}$

$$\frac{\Delta v}{V_p} = \frac{1}{2fRC} \Rightarrow C = \frac{1}{2fR} \frac{V_p}{\Delta v_d} = \frac{1}{2(60)(278)} \frac{1}{0.05} \text{ F} \cong 600 \mu\text{F}$$

ou, com boa aproximação,

$$C = 600 \mu\text{F} \quad (2)$$

b)

Usando as expressões dadas, com os valores em (1) e (2), obtemos

$$\phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega RC}\right) = 1.5901 \times 10^{-2}$$

$$F(\phi_2) = \cos^{-1}\left(\cos \phi_1 \exp\left(\frac{\phi_1 - \pi}{\omega RC}\right) \exp(\phi_2/\omega RC)\right)$$

$$F(x) = \cos^{-1}(0.95139 \exp(1.5903 \times 10^{-2}x))$$

Para resolver a equação acima podemos fazer, por exemplo,

$$x_0 = 1, \quad x_{k+1} = F(x_k)$$

obtendo a sequência (aproximada para 5 dígitos)

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots) \\ = (1, 0.25902, 0.30007, 0.29795, 0.29806, 0.29805, 0.29805, \dots)$$

e, portanto, a solução (aproximada)

$$\phi_2 = 0.29805 \text{ (rad)} \quad (3)$$

Usando (1), (2) e (3) a resposta é dada por,

$$\frac{\Delta v}{V_p} \times 100\% = (1 - \cos \phi_2) 100\%$$

ou, aproximadamente,

$$\frac{\Delta v}{V_p} \times 100\% = 4.41\% \quad (4)$$

e

$$\Delta v = V_p(1 - \cos \phi_2) = 220\sqrt{2}(1 - \cos \phi_2) \cong 13.7 \text{ V}$$

*Lo ruivo
modulação*

ou, aproximadamente,

$$\Delta v = 13.7 \text{ V} \quad (5)$$

ou, mais precisamente, 13.717 V.

c)

Temos, aproximadamente,

$$\theta_1 = \pi/2 - 0.29805 = 1.2727 \text{ (rad)} \quad (6)$$

$$\theta_2 = \pi/2 + \phi_1 = 1.5867 \text{ (rad)} \quad (7)$$

e definimos por conveniência a constante.

$$k = \omega RC \quad (8)$$

cujo valor aproximado é 62.9.

A figura abaixo ilustra a forma do pulso de corrente

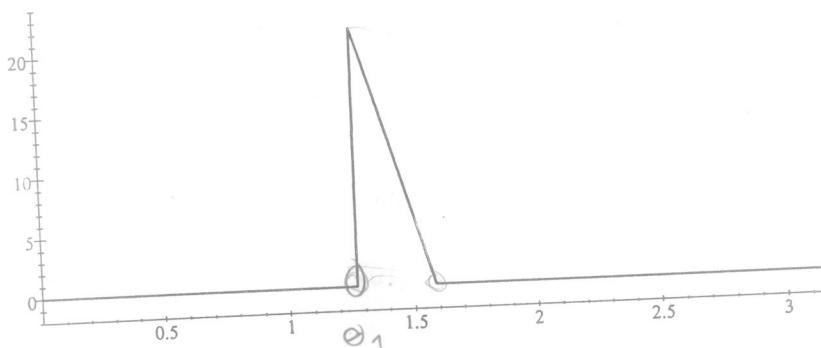


figura 1. Corrente (ampères) em função de θ

Fica claro que

$$i_{d\max} = \frac{V_p}{R} (k \cos \theta_1 + \sin \theta_1)$$

o véio a corrente é máx
então usa θ_1

ou usando (8), (1), (2) e (6) temos, aproximadamente,

$$|i_e|_{\max} = i_{d\max} = 21.7 \text{ A} \quad (9)$$

d)

Queremos encontrar

$$\sqrt{\langle i_e^2 \rangle} = \sqrt{\langle i_d^2 \rangle}$$

$$\begin{aligned}\langle i_d^2 \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (i_d)^2 d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\frac{V_p}{R} (k \cos \theta + \sin \theta) \right]^2 d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{V_p}{R} \right)^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} (k \cos \theta + \sin \theta)^2 d\theta\end{aligned}$$

$$\int (k \cos \theta + \sin \theta)^2 d\theta = \int (k^2 \cos^2 \theta + 2k \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta) d\theta$$

e de

$$\int k^2 \cos^2 \theta d\theta = k^2 \frac{2\theta + \sin 2\theta}{4}$$

$$\int 2k \sin \theta \cos \theta d\theta = -k \cos^2 \theta$$

$$\int \sin^2 \theta d\theta = \frac{2\theta - \sin 2\theta}{4}$$

obtemos

$$\int (k \cos \theta + \sin \theta)^2 d\theta = f(\theta) = k^2 \frac{2\theta + \sin 2\theta}{4} - k \cos^2 \theta + \frac{2\theta - \sin 2\theta}{4}$$

e

$$\langle i_d^2 \rangle = \frac{1}{\pi} \left(\frac{V_p}{R} \right)^2 [f(\theta_2) - f(\theta_1)]$$

ou, usando (8), (1), (2), (6) e (7), obtemos, aproximadamente

$$\boxed{\sqrt{\langle i_d^2 \rangle} = 3.99 \text{ A}} \quad (10)$$

e)

$$\langle i_d \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{V_p}{R} (k \cos \theta + \sin \theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \frac{V_p}{R} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (k \cos \theta + \sin \theta) d\theta$$

e de

$$\int (k \cos \theta + \sin \theta) d\theta = g(\theta) = k \sin \theta - \cos \theta$$

temos

$$\langle i_d \rangle = \frac{1}{\pi} \frac{V_p}{R} (g(\theta_2) - g(\theta_1))$$

e, usando (8), (1), (2), (6) e (7), obtemos, aproximadamente,

$$\boxed{\langle i_d \rangle = 1.10 \text{ A}} \quad (10)$$

ou mais precisamente, $\langle i_d \rangle = 1.0954$ A.

f)

$$\langle i_d \rangle \cong \frac{\text{Area}}{\pi} = \frac{\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)i_{d\max}}{\pi} \text{ A}$$

e usando (6), (7) e $i_{d\max} = 21.739$,

$$\boxed{\langle i_d \rangle = 1.0864 \text{ A}} \quad (11)$$

Note que

$$\left| \frac{(1.0864) - (1.0954)}{(1.0954)} \right| \times 100\% \cong 0.82\%$$

g)

$$\langle v_e i_e \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (V_p \sin \theta) \left(\frac{V_p}{R} (k \cos \theta + \sin \theta) \right) d\theta = 333.46$$

$$\langle v_e i_e \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (V_p \sin \theta) \left(\frac{V_p}{R} (k \cos \theta + \sin \theta) \right) d\theta = \frac{1}{\pi} \frac{(V_p)^2}{R} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (k \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta) d\theta$$

As integrais que aparecem aqui podem ser vistas no item (d) e

$$\int (k \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta) d\theta = h(\theta) = -\frac{k}{2} \cos^2 \theta + \frac{2\theta - \sin 2\theta}{4}$$

Portanto

$$\langle v_e i_e \rangle = \frac{1}{\pi} \frac{(V_p)^2}{R} (h(\theta_2) - h(\theta_1))$$

e, usando (8), (1), (2), (6) e (7), obtemos aproximadamente,

$$\boxed{\langle v_e i_e \rangle = 334 \text{ W}} \quad (12)$$

ou mais precisamente, 333.56 W.

Comentário. Temos

$$\langle v_e i_e \rangle = \langle v_R i_R \rangle = \langle v_d \frac{v_d}{R} \rangle = \frac{1}{R} \langle v_d^2 \rangle$$

Com as definições

$$V_d = \langle v_d \rangle, \quad v_{ac} = v_d - V_d$$

podemos escrever

$$v_d = V_d + v_{ac}$$

Repare que se K é uma constante (no sentido de ser invariante no tempo),

$$\langle K \rangle = \frac{1}{T} \int_T K dt = K \frac{1}{T} \int_T dt = K \frac{1}{T} T = K$$

e

$$\langle v_{ac} \rangle = \langle v_d - V_d \rangle = \langle v_d \rangle - \langle V_d \rangle = V_d - V_d = 0$$

porque $V_d = \langle v_d \rangle$ não varia com o tempo. Temos, portanto,

$$\begin{aligned} \langle v_e i_e \rangle &= \frac{1}{R} \langle (V_d + v_{ac})^2 \rangle = \frac{1}{R} \langle V_d^2 + 2V_d v_{ac} + v_{ac}^2 \rangle \\ &= \frac{1}{R} \langle V_d^2 + 2V_d v_{ac} + v_{ac}^2 \rangle = \frac{1}{R} (\langle V_d^2 \rangle + \langle 2V_d v_{ac} \rangle + \langle v_{ac}^2 \rangle) \\ &= \frac{1}{R} (V_d^2 + 2V_d \langle v_{ac} \rangle + \langle v_{ac}^2 \rangle) = \frac{1}{R} (V_d^2 + \langle v_{ac}^2 \rangle) = \frac{V_d^2}{R} \left(1 + \frac{1}{V_d^2} \langle v_{ac}^2 \rangle \right) \\ &= \frac{V_d^2}{R} \left(1 + \langle \left(\frac{v_{ac}}{V_d} \right)^2 \rangle \right) \end{aligned}$$

Se $\left(\frac{v_{ac}}{V_d} \right)^2 \ll 1$ em todo o período, como é o caso, obtemos a aproximação

$$\langle v_e i_e \rangle \cong \frac{V_d^2}{R} = \frac{(\langle v_d \rangle)^2}{R}$$

Podemos ainda aproximar

$$\langle v_d \rangle \cong \frac{v_{d\max} + v_{\min}}{2} = \frac{v_{d\max} + v_{\max} - \Delta v}{2} = v_{d\max} - \frac{\Delta v}{2} = V_p - \frac{\Delta v}{2}$$

e, usando o valor $\Delta v = 13.717$ V, calculado no item (b)

$$\langle v_e i_e \rangle \cong \frac{\left(V_p - \frac{\Delta v}{2} \right)^2}{R} = \frac{\left(220\sqrt{2} - \frac{13.717}{2} \right)^2}{278} = 333.02$$

Note que

$$\left| \frac{(333.02) - (333.56)}{(333.56)} \right| \times 100\% \cong 0.162\%$$

h)

$$FP = \frac{\langle v_e i_e \rangle}{V_e I_e} = \frac{333.56}{(220)(3.9945)}$$

ou, aproximadamente,

$$FP = 0.380$$

2. Considere o circuito da fig. A1-2, que é o circuito da fig. A1-1 modificado pela inserção do indutor L . Considere a fonte de tensão e a carga resistiva idênticas às do exercício 1. Assuma que indutância L seja suficientemente alta para que, no regime, a corrente nunca se interrompa, ou seja, $i_d > 0$ todo o tempo (esta condição é chamada de modo de condução contínua).

- Determine a tensão e corrente médias na carga.
- Assumindo por simplicidade que a ondulação da tensão na saída possa ser desprezada (o que em princípio pode ser conseguido fazendo a capacidade C suficientemente alta) determine a expressão da corrente i_d .
- Com as mesmas restrições assumidas em (b), determine o menor valor de L que assegura modo de condução contínua, ou seja, $i_d > 0$ todo tempo.
- Determine o fator de potência no limite $L \rightarrow \infty$ (na prática, fazer a indutância suficientemente alta, de modo a poder desprezar a ondulação na corrente i_d)

Solução

a)

Com $i_d > 0$ todo tempo,

e

$$\langle v_d \rangle = \langle |v_e| \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V_p \sin \theta d\theta = \frac{V_p}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{2V_p}{\pi}$$

Temos

$$\langle v_d \rangle = \langle v_L + v_R \rangle = \langle v_L \rangle + \langle v_R \rangle = \langle v_R \rangle = \langle R i_R \rangle = R \langle i_R \rangle$$

Portanto

$$\langle v_R \rangle = \frac{2V_p}{\pi}, \quad \langle i_R \rangle = \frac{\langle v_R \rangle}{R} = \frac{2V_p}{\pi R}$$

No caso específico

$$\langle v_R \rangle = \frac{2(220\sqrt{2})}{\pi} \approx 198 \text{ V}, \quad \langle i_R \rangle = \frac{2(220\sqrt{2})}{\pi(178)} \approx 1.11 \text{ A}$$

b)

$$\frac{di_d}{d\theta} = \frac{V_p}{\omega L} \left(\sin \theta - \frac{2}{\pi} \right)$$

$$L \frac{di_d}{dt} = L \frac{di_d}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega L \frac{di_d}{d\theta} = v_d - \langle v_d \rangle = V_p |\sin \theta| - \frac{2V_p}{\pi}$$

$$\frac{di_d}{d\theta} = \frac{V_p}{\omega L} \left(|\sin \theta| - \frac{2}{\pi} \right)$$

Para $0 \leq \theta \leq \pi$

$$i_d = i_d(0) + \frac{V_p}{\omega L} \int_0^\theta \left(\sin \alpha - \frac{2}{\pi} \right) d\alpha$$

$$i_d = i_d(0) + \frac{V_p}{\omega L} \left(1 - \cos \theta - \frac{2\theta}{\pi} \right) \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Observação: note que

$$i_d(\pi) = i_d(0)$$

uma vez que

$$1 - \cos \theta - \frac{2\theta}{\pi} = 1 - (-1) - \frac{2\pi}{\pi} = 0 \quad \text{para } \theta = \pi$$

Isto é uma consequência de se ter usado $\langle v_L \rangle = 0$ nas equações acima (veja comentário ao final desta solução). Continuando, para determinar $i_d(0)$ podemos impor

$$\langle i_d \rangle = \langle i_C + i_R \rangle = \langle i_C \rangle + \langle i_R \rangle = \langle i_R \rangle = \frac{2V_p}{\pi R}$$

onde se usou o fato $\langle i_C \rangle = 0$, no regime (veja comentário já referido acima). Além disso,

$$\langle i_d \rangle = i_d(0) + \frac{V_p}{\omega L} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(1 - \cos \theta - \frac{2\theta}{\pi} \right) d\theta = i_d(0)$$

uma vez que a integral

$$\int_0^\pi \left(1 - \cos \theta - \frac{2\theta}{\pi} \right) d\theta = \left(\theta - \sin \theta - \frac{\theta^2}{\pi} \right) \Big|_0^\pi = 0$$

é nula. Portanto

$$i_d(0) = \frac{2V_p}{\pi R}$$

e, portanto a corrente i_d , periódica em θ com período π , é dada por

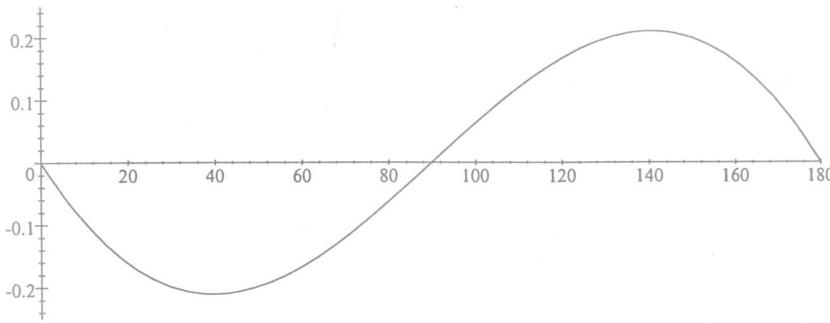
$$i_d = \frac{2V_p}{\pi R} + \frac{V_p}{\omega L} \left(1 - \cos \theta - \frac{2\theta}{\pi} \right) \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

com o termo AC, $\frac{V_p}{\omega L} \left(1 - \cos \theta - \frac{2\theta}{\pi} \right)$, dependente de L (pode em princípio ser feito muito pequeno, escolhendo L suficientemente grande) e a parte DC, $\frac{2V_p}{\pi R}$ independente de L .

c)

Da forma da função $1 - \cos \theta - \frac{2\theta}{\pi}$ vista no gráfico abaixo (com o ângulo θ descrito em graus, para maior clareza), vemos que o mínimo da corrente ocorre no primeiro quadrante, e $\theta = \theta_0$ onde esse mínimo ocorre pode ser precisamente determinado por

$$\frac{d}{d\theta} \left(1 - \cos \theta - \frac{2\theta}{\pi} \right) = \sin \theta - \frac{2}{\pi} = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0 = \sin^{-1}(2/\pi) \cong 0.690 \text{ rad} \cong 39.5^\circ$$



$$V_p \left(\frac{d}{\pi R} - \frac{N}{\omega L} \right) = 0$$

Para que $i_d > 0$ todo o tempo, basta impor

$$i_{d\min} = \frac{2V_p}{\pi R} + \frac{V_p}{\omega L} \left(1 - \cos \theta_0 - \frac{2\theta_0}{\pi} \right) = \frac{2V_p}{\pi R} - \frac{V_p}{\omega L} N > 0$$

ou

$$L > \frac{\pi NR}{2\omega}$$

onde a constante numérica N é definida por

$$N = - \left(1 - \cos(\sin^{-1}(2/\pi)) - \frac{2}{\pi} \sin^{-1}(2/\pi) \right) \cong 0.211$$

No caso específico

$$L > L_{\min} = \frac{\pi N(278)}{2(120\pi)} \cong 244 \text{ mH}$$

d)

Da expressão da corrente $i_d = \frac{2V_p}{\pi R} + \frac{V_p}{\omega L} \left(1 - \cos \theta - \frac{2\theta}{\pi} \right)$ vemos que se $L \rightarrow \infty$, obteríamos

$$i_d = \frac{2V_p}{\pi R}$$

e a corrente i_e assume a forma de uma onda quadrada de amplitude $\frac{2V_p}{\pi R}$ com valor eficaz

$$I_e = \sqrt{\langle i_e^2 \rangle} = \frac{2V_p}{\pi R}$$

A potência média na entrada pode se calculada por

$$\langle v_e i_e \rangle = \langle v_R i_R \rangle = \frac{1}{R} \langle v_R^2 \rangle = \frac{1}{R} \left(\frac{2V_p}{\pi} \right)^2$$

sendo a ultima igualdade justificada porque a ondulação em $v_R = v_C$ é assumida muito pequena diante de sua média média, e que diminui à medida que L se torna muito grande. Portanto, quando L se torna muito grande,

$$FP \rightarrow \frac{\frac{1}{R} \left(\frac{2V_p}{\pi} \right)^2}{\left(V_p / \sqrt{2} \right) \left(\frac{2V_p}{\pi R} \right)} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cong 0.900$$

Comentário

Observando que $i_d = i_L$ temos

$$i_d(\theta_0 + \pi) = i_d(\theta_0) + \frac{1}{\omega L} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \pi} v_L(\theta) d\theta = i_d(\theta_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t_0 + T/2} v_L(\omega t) dt; \quad \theta = \omega t, \theta_0 = \omega t_0$$

onde, como de costume, $\omega = 2\pi/T$. Portanto

$$i_d(\theta_0 + \pi) = i_d(\theta_0) + \frac{\pi}{\omega L} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \pi} v_L(\theta) d\theta \right) = i_d(\theta_0) + \frac{\pi}{\omega L} \langle v_L \rangle$$

Esta última equação mostra que se i_d é periódica de período π (situação que se obtém no regime permanente) teremos necessariamente $\langle v_L \rangle = 0$. Reciprocamente, se $\langle v_L \rangle = 0$ (que foi o que se usou acima) teremos necessariamente i_d periódica de período π .

Com relação ao fato de $\langle i_C \rangle = 0$, em regime permanente, observe que

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} = \omega C \frac{dv_C}{d\theta}$$

e

$$\langle i_C \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \pi} i_C d\theta = \omega C \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \pi} \frac{dv_C}{d\theta} d\theta = \frac{\omega C}{\pi} [v_C(\theta_0 + \pi) - v_C(\theta_0)]$$

Mas em regime, quando a excitação é periódica de período π na variável $\theta = \omega t$, temos $v_C(\theta_0 + \pi) = v_C(\theta_0)$.

3. Este exercício se refere à ponte retificadora trifásica mostrada na fig. A1-3. As tensões de fase são dadas por

$$v_a = V_p \cos(\omega t) \quad v_b = V_p \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad v_c = V_p \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Supondo que a carga possa ser modelada por uma fonte de corrente constante, I_0 , como indica o diagrama,

- a) esboce os gráficos das correntes i_a , i_b e i_c de cada fase em função do tempo, indicando os diodos que conduzem em cada intervalo.
- b) determine, FP , FD , FF_i e DHT (ver anexo 2), como vistos dos terminais da fonte v_a .

Solução

a)

O gráficos a seguir representam as tensões v_a (traço grosso), v_b (traço médio), v_c (traço fino), normalizadas com relação a V , e as correntes i_a , i_b e i_c , normalizadas com relação a I_0 .

A corrente de entrada sai do terminal positivo da fase com tensão mais elevada e entra pelo terminal negativo da fase com tensão mais baixa, e tem o valor constante I_0 . A fase com valor intermediário não conduz.. Conduz sempre o diodo da parte superior ligado a fase mais positiva e o diodo da parte inferior ligado à fase mais negativa. Os outros quatro diodos ficam reversamente polarizados e, portanto, não conduzem (em se tratando de diodos ideais). Os gráficos abaixo representam respectivamente i_a , i_b e i_c , normalizadas em relação a I_0 e em função de $\frac{180}{\pi} \times \omega t$

A sequência indicando os diodos que conduzem, em cada intervalo de 60° , a partir de -120° , é : D3 e D5; D1 e D5; D1 e D6; D2 e D6; D2 e D4; D3 e D4; D3 e D5; D1 e D5.

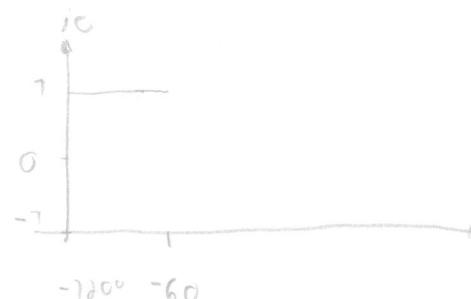
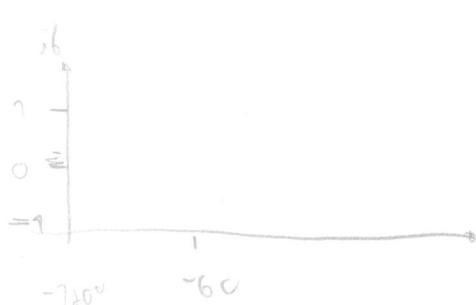
b)

No período

$$-\frac{\pi}{3} < \omega t < 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

a corrente i_a é descrita por

$$i_a(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{3} < \omega t < \frac{\pi}{3} \\ -1 & \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} < \omega t < \frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3} \\ 0 & \omega t \text{ não pertencente aos intervalos acima} \end{cases}$$

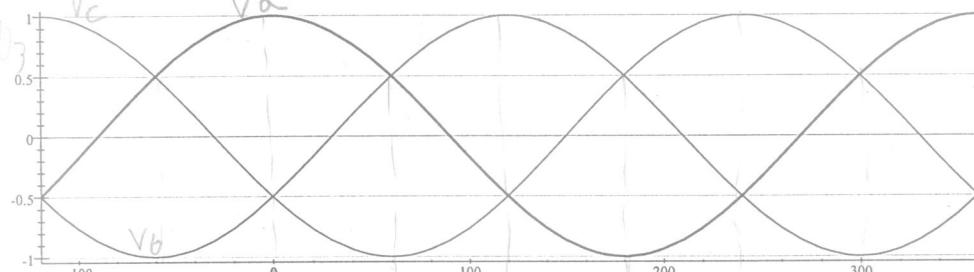


$$+ \boxed{V_a = D_1} - \boxed{V_c = D_6}$$

$$V_b = D_3$$

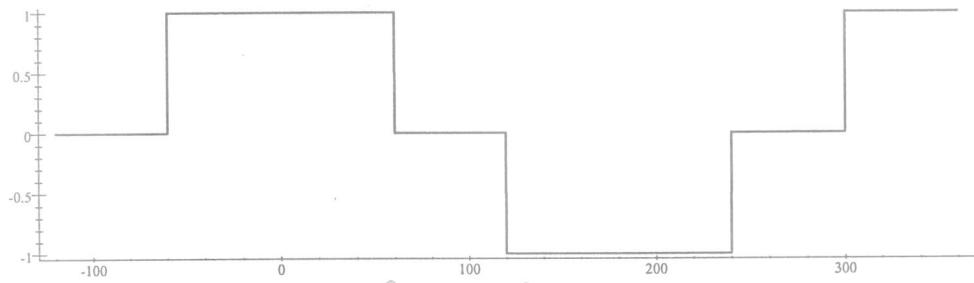
$$\boxed{V_c = D_3}$$

$$V_a = V_b$$



$D_3, D_5 \rightarrow D_3, D_5 - D_1, D_5 D_3, D_5 D_6 D_3, D_5 D_6 D_4$
tensões v_a (grosso), v_b (médio), v_c (fino).

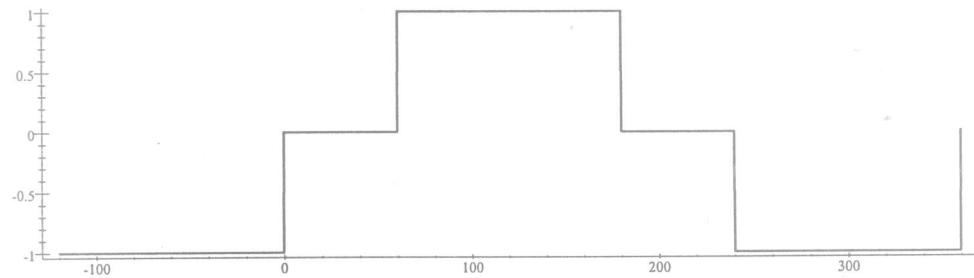
olhar
os termos



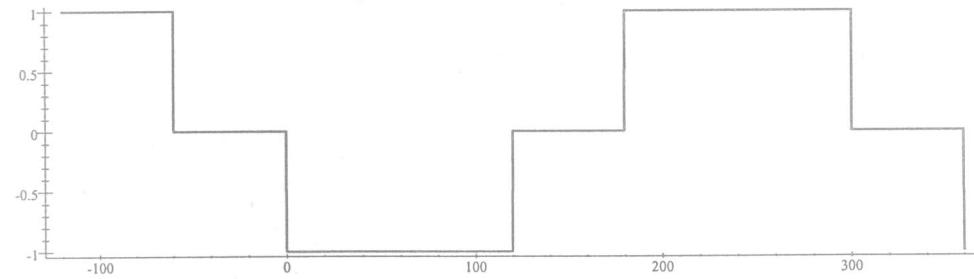
corrente i_a quando o diodo ligado condutividade cátodo Exemplo:

D_5 - ligado nô
rô de i_b

é negativo



corrente i_b



corrente i_c

$$i_a(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

com

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-t_0}^{T-t_0} i_a \cos n\omega t dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-t_0}^{T-t_0} i_a \sin n\omega t dt$$

onde

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad t_0 = \frac{\pi/3}{\omega}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_{-t_0}^{T-t_0} i_a(\omega t) (\cos n\omega t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\omega t_0}^{\omega(T-t_0)} i_a(\theta) \cos n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/3}^{2\pi-\pi/3} i_a(\theta) \cos n\theta d\theta \\ a_n &= \frac{I_0}{\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos n\theta d\theta - \frac{I_0}{\pi} \int_{\pi-\pi/3}^{\pi+\pi/3} \cos n\theta d\theta \end{aligned}$$

Como

$$\int_{\pi-\pi/3}^{\pi+\pi/3} \cos n\theta d\theta = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos n(\theta + \pi) d\theta$$

$$a_n = \frac{I_0}{\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (\cos n\theta - \cos n(\theta + \pi)) d\theta$$

$$\cos n\theta - \cos n(\theta + \pi) = \cos n\theta - \cos n\theta \cos n\pi + \sin n\theta \sin n\pi = \cos n\theta(1 - \cos n\pi)$$

$$\cos n\theta - \cos n(\theta + \pi) = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ 2 \cos n\theta & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Portanto

$$a_n = 0 \quad \text{para } n \text{ par}$$

e

$$a_n = \frac{2I_0}{\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos n\theta d\theta = \frac{4I_0}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} \quad \text{para } n \text{ ímpar}$$

$$b_n = \frac{I_0}{\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sin n\theta d\theta - \frac{I_0}{\pi} \int_{\pi-\pi/3}^{\pi+\pi/3} \sin n\theta d\theta$$

$$\int_{\pi-\pi/3}^{\pi+\pi/3} \sin n\theta d\theta = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sin n(\theta + \pi) d\theta$$

$$b_n = \frac{I_0}{\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (\sin n\theta - \sin n(\theta + \pi)) d\theta$$

$$\sin n\theta - \sin n(\theta + \pi) = (\sin n\theta)(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ 2 \sin n\theta & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Para n par $b_n = 0$ (porque o integrando é identicamente nulo). Para n ímpar

$$b_n = \frac{2I_0}{\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sin n\theta d\theta = 0$$

porque o integrando é uma função ímpar. Resumindo

$$i_a(t) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_0 \cos \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4I_0}{(2k+1)\pi} \sin \frac{(2k+1)\pi}{3} \cos((2k+1)\omega t)$$

O valor eficaz da componente fundamental da corrente é dada por

$$I_{i1} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_0 \right) / \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi\sqrt{2}} I_0$$

O valor quadrático médio de $i_a = i_i$ é

$$I_i^2 = \frac{1}{T} \int i_a dt = \frac{1}{T} \left(I_0^2 \times \frac{4}{6} T + 0 \times \frac{2}{6} T \right) = \frac{2}{3} I_0^2$$

e, portanto,

$$I_i = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} I_0.$$

Temos

$$FF_i = \frac{I_{i1}}{I_i} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_0}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} I_0} = \frac{3}{\pi} = 0.95493,$$

e

$$FD = 1,$$

porque não há defasagem entre $i_{a1} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_0 \cos \omega t$ e a tensão $v_a = V_m \cos \omega t$. Portanto,

$$FP = (FF_i)(FD) = FF_i = \frac{3}{\pi} = 0.95493$$

e

$$DHT = \sqrt{\left(\frac{1}{FF_i}\right)^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - 1} = 0.310842$$

 Solução mais simples: esta solução não envolve a determinação explícita da série de Fourier da corrente, e por isso é mais rápida.

A potência ativa, ou média, liberada pelos terminais da fase a , é

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_{-t_0}^{T-t_0} i_a v_a dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/3}^{2\pi-\pi/3} i_a v_a d\theta \\ &= 2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} I_0 V_m \cos \theta d\theta \right) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} I_0 V_m \end{aligned}$$

Usando a definição,

$$\frac{FP}{\text{eficaz}} = \frac{P}{I_i V_i} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\pi} I_0 V_m}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} I_0\right) \left(\frac{V_m}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{3}{\pi} \quad \text{Verificay}$$

Da forma da corrente fica claro que a componente fundamental de i_a está em fase com a tensão v_a de modo que

$$\phi_1 = 0 \Rightarrow \frac{FD}{\text{eficaz}} = \cos \phi_1 = 1$$

Da relação $FP = (FF_i)(FD)$,

$$\frac{FF_i}{\text{eficaz}} = \frac{FP}{FD} = FP = \frac{3}{\pi}$$

e DHT é determinada de FF_i como acima.

4. Para o retificador controlado simétrico da fig. A1-4, assumindo corrente constante na carga,

- esboce as formas de onda da tensão de saída e corrente de entrada (use um ângulo de disparo, α , contado a partir do início do semi-ciclo, de 60°);
- determine o valor eficaz da corrente de entrada, FP e DHT em função do ângulo de disparo α ;
- repita o item a trocando a fonte de corrente na saída por um resistor de resistência R .

Solução:

a)

O gráficos a seguir mostram a tensão de entrada (a origem do tempo foi escolhida de modo que $v_e = V_m \sin \omega t$), a tensão na carga, e a corrente de entrada. As tensões foram normalizadas em relação a V_m e a corrente de entrada foi normalizada com relação a I_0 . As linhas horizontais nos gráficos das tensões correspondem às tensões $\pm \sin(60^\circ) V_m = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} V_m$.

b)

$$I_i^2 = \frac{1}{T} \int i_e^2 dt = \frac{1}{T} \left(I_0^2 \times \left(\frac{2\pi - 2\alpha}{2\pi} \right) T \right) = \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} \right) I_0^2$$

ou

$$\text{corrente eficaz na entrada : } I_i = I_0 \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi}}$$

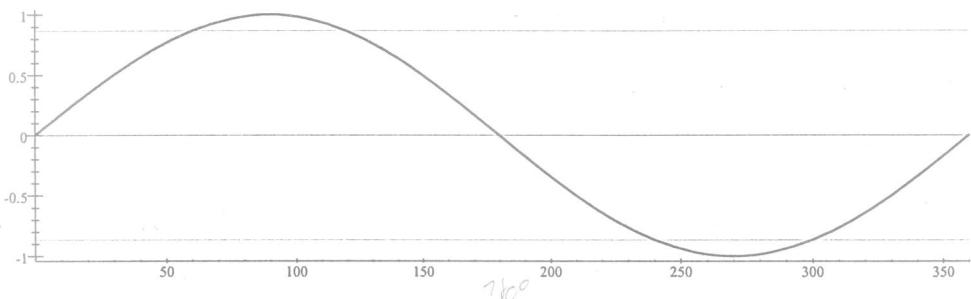
A potência média na entrada é

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T v_e i_e dt = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} v_e i_e dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} (V_m \sin \theta) I_0 d\theta = \frac{V_m I_0}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} (\sin \theta) d\theta = \frac{1 + \cos \alpha}{\pi} V_m I_0 \end{aligned}$$

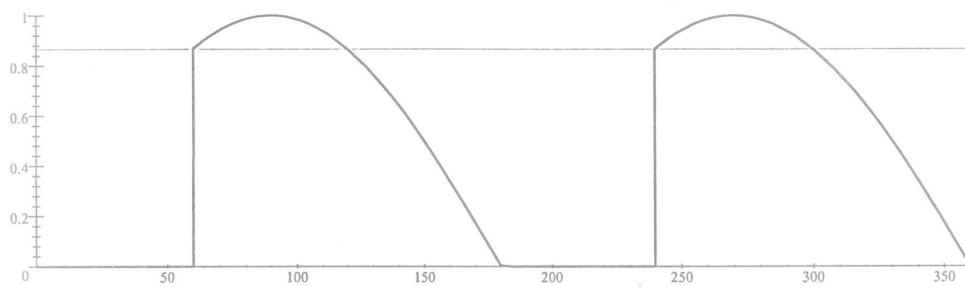
JP

A tensão eficaz na entrada é $V_i = V_m / \sqrt{2}$. Portanto, usando a definição,

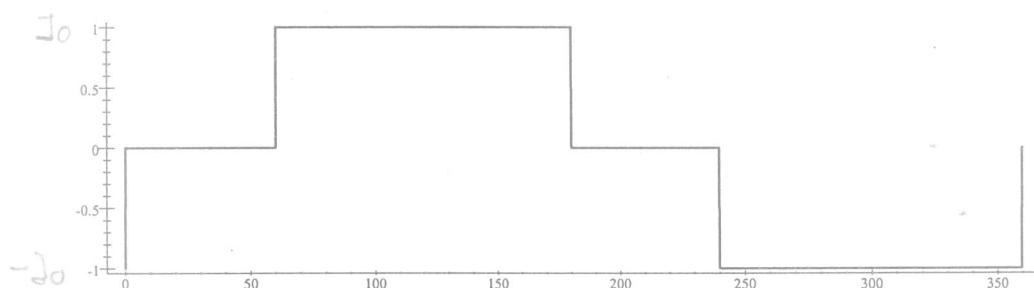
$$\begin{aligned} \text{fator de potência : } FP &= \frac{P}{S} = \frac{P}{V_i I_i} \\ &= \frac{\frac{1 + \cos \alpha}{\pi} V_m I_0}{\left(\frac{V_m}{\sqrt{2}} \right) \left(I_0 \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi}} \right)} = \frac{\sqrt{2} (1 + \cos \alpha)}{\sqrt{\pi(\pi - \alpha)}} \end{aligned}$$



tensão de entrada normalizada

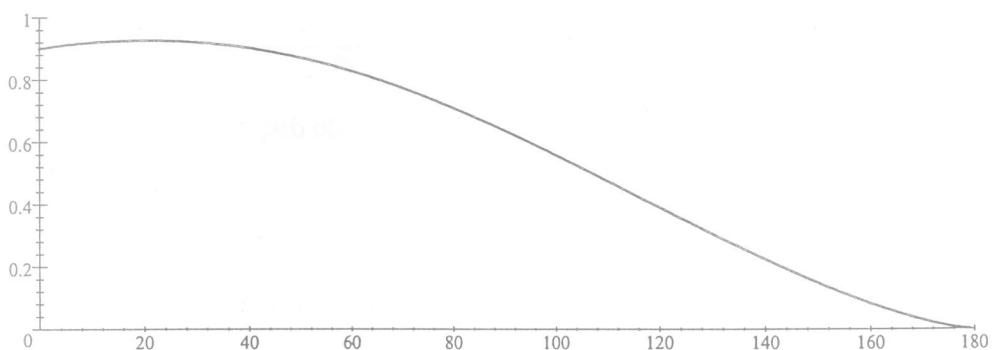


tensão na carga



corrente de entrada

O gráfico a seguir mostra o comportamento de FP com α .



fator de potência em função do ângulo de disparo (graus)

Podemos determinar a distorção harmônica total, DTH , pela expressão

$$DTH = \sqrt{\left(\frac{1}{FF_i}\right)^2 - 1}$$

uma vez determinado

$$FF_i = \frac{FP}{FD}$$

o qual depende, por sua vez, do fator de deslocamento, FD . Da observação do gráfico da corrente de entrada, percebe-se que os centros dos pulsos de corrente se encontram deslocados em relação aos picos de tensão de entrada por um ângulo igual a $\alpha/2$, o que permite inferir que

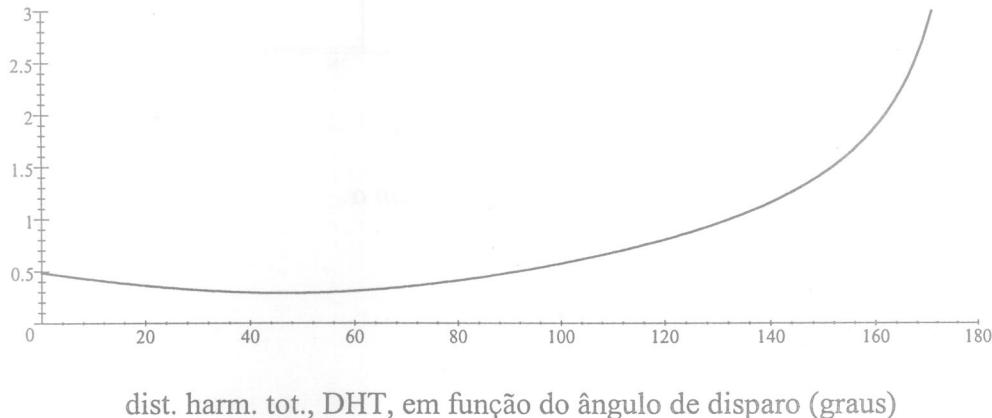
$$\phi_1 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow FD = \cos \phi_1 = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Portanto

$$DTH = \sqrt{\left(\frac{FD}{FP}\right)^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}(1+\cos\alpha)}{\sqrt{\pi(\pi-\alpha)}}}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{\pi(\pi-\alpha)\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2(1+\cos\alpha)^2} - 1}$$

$$D(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi(\pi-\alpha)\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2(1+\cos\alpha)^2} - 1}$$

No gráfico a seguir, temos o comportamento de DHT em função de α

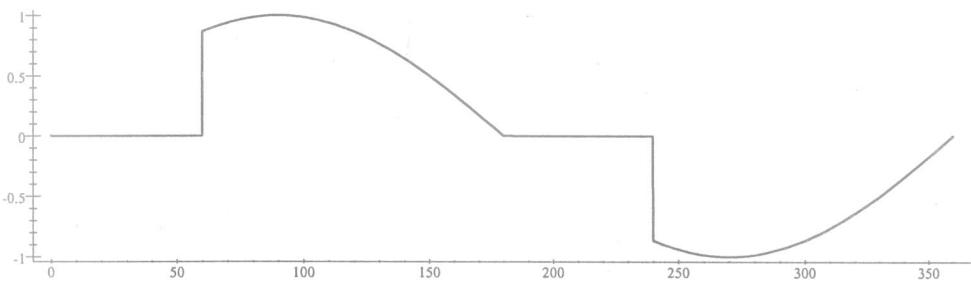


c)

Quando a carga é resistiva, a corrente de entrada se modifica. Durante os intervalos de condução, a corrente é dada por

$$i_e = \frac{v_e}{R}.$$

No gráfico a seguir temos a nova corrente de entrada normalizada em relação a V_m/R (a tensão na carga continua a mesma).



corrente de entrada (carga resistiva)

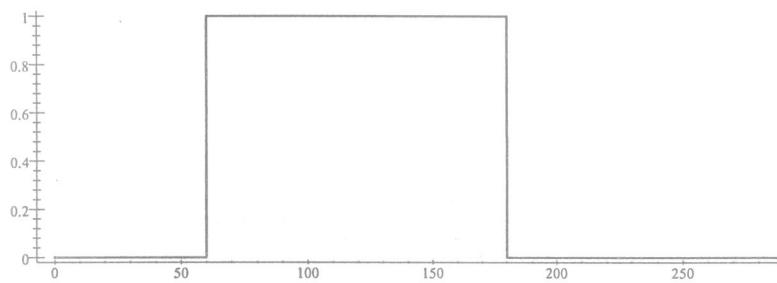
5. Para o retificador semi-controlado assimétrico da fig. A1-5, repita o que é pedido no exercício 4. Acrescente as formas de onda das correntes em T1 e D1.

Solução:

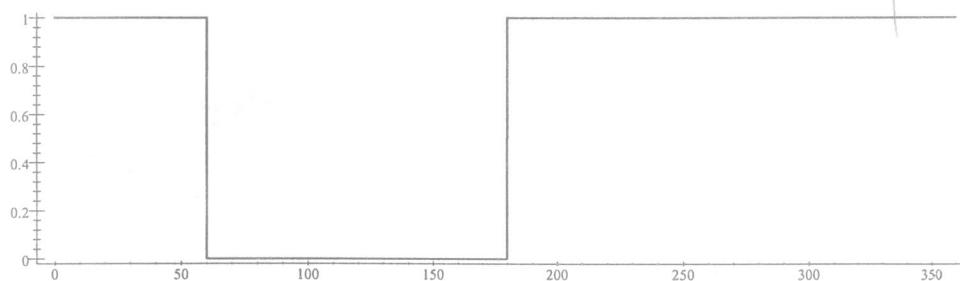
a)

Pode-se perceber que a corrente de entrada e a tensão na carga são as mesmas que aquelas da ponte simétrica. A diferença é que quando ambos os tiristores estão bloqueados a corrente na carga circula por D1 e D2 e não há necessidade do díodo D0.

Nos gráficos a seguir, as correntes em T1 e em D1, normalizadas com relação a I_0 .



corrente em T1



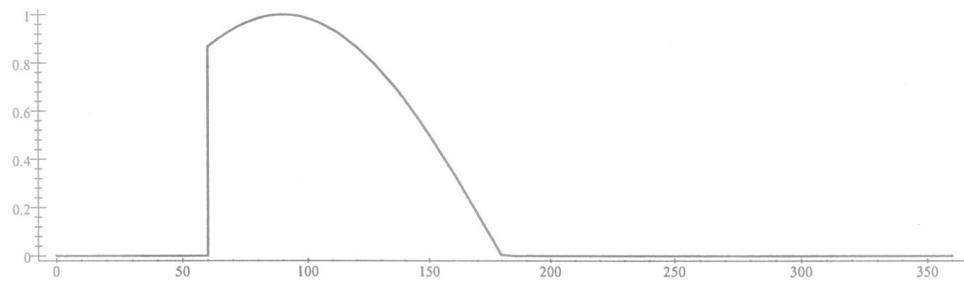
corrente em D1

b)

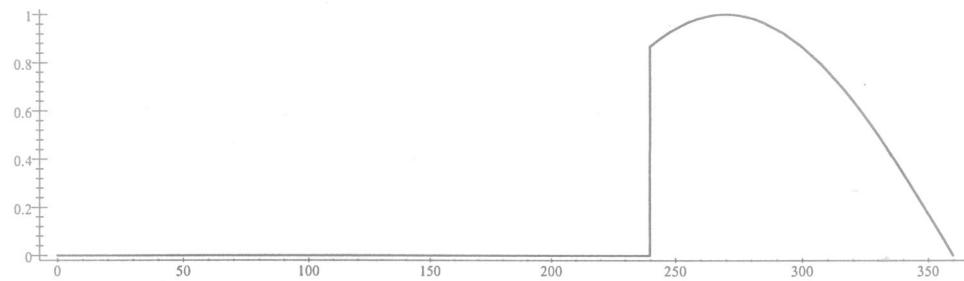
Como a corrente de entrada neste caso é idêntica à do exercício 4, todos os parâmetros ali determinados se aplicam neste caso.

c)

A corrente na entrada e tensão na carga são as já determinadas no exercício 4. As correntes em T1 e D1, normalizadas com relação a V_m/R , são mostradas nos gráficos a seguir.



corrente em T1



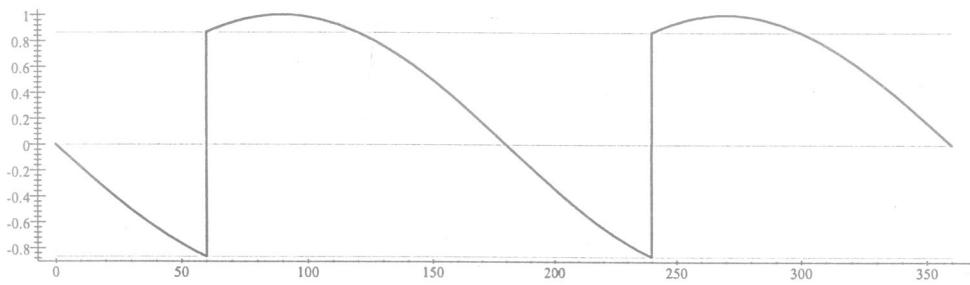
corrente em D1

6. Para o retificador totalmente controlado da figura A1-6, repita o que é pedido no exercício 4.

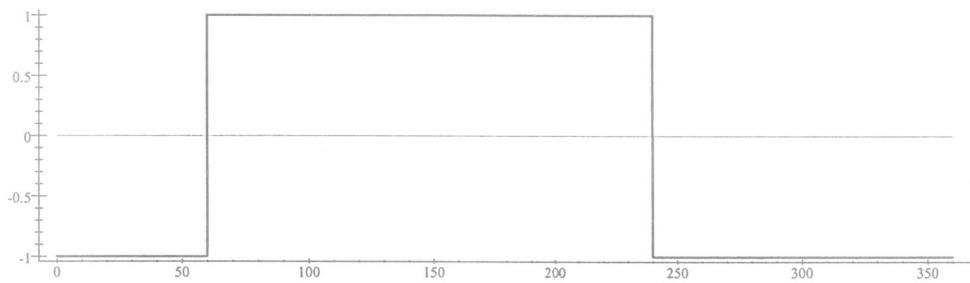
Solução:

a)

Nos gráficos a seguir, a tensão na carga (normalizada com relação a V_m) e a corrente na entrada (normalizada com relação a I_0)..

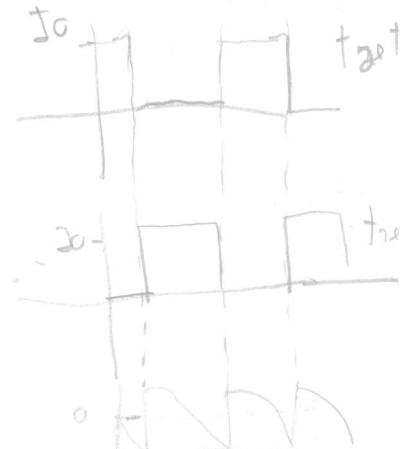


tensão na carga



corrente na entrada

b)



$$\text{corrente eficaz na entrada : } I_i = I_0$$

A potência média na entrada é

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} v_e i_e dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} v_e(\theta) i_e(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\alpha}^{\pi+\alpha} I_0 V_m \sin \theta d\theta + \int_{\pi+\alpha}^{2\pi+\alpha} (-I_0) V_m \sin \theta d\theta \right) \\ &= \frac{I_0 V_m}{2\pi} \left(\int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \sin \theta d\theta - \int_{\pi+\alpha}^{2\pi+\alpha} \sin \theta d\theta \right) = \frac{I_0 V_m}{2\pi} \left(2 \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \sin \theta d\theta \right) = \frac{I_0 V_m}{2\pi} (4 \cos \alpha) \end{aligned}$$

ou

$$P = \frac{2I_0 V_m}{\pi} \cos \alpha$$

A tensão eficaz na entrada é $V_i = V_m / \sqrt{2}$. Portanto, usando a definição,

$$\begin{aligned} \text{fator de potência : } FP &= \frac{P}{S} = \frac{P}{V_i I_i} \\ &= \frac{\frac{2I_0 V_m}{\pi} \cos \alpha}{\left(\frac{V_m}{\sqrt{2}} \right) (I_0)} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \alpha \end{aligned}$$

O fator de deslocamento pode ser visto por inspeção do gráfico da corrente

$$\phi_1 = \alpha \Rightarrow FD = \cos \phi_1 = \cos \alpha.$$

Portanto

$$DTH = \sqrt{\left(\frac{FD}{FP}\right)^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{\cos \alpha}{\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \alpha}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{\pi^2}{8} - 1} \approx 0.483$$

c)

Com, carga resistiva, a tensão na carga e a corrente de entrada são como as do item c do exercício 4.

7. Uma ponte retificadora totalmente controlada (como a da figura A1-6) é utilizada para carregar baterias a partir da tensão da rede (60 Hz, 127 V de tensão eficaz). Em série com a tensão de alimentação (lado AC) existe um indutor com indutância $L_e = 8 \text{ mH}$. Em série com a bateria sendo carregada, temos um indutor com indutância muito elevada, de modo a praticamente suprimir a ondulação da corrente no lado DC.

a) Assumindo que a bateria possa ser modelada por uma fonte de tensão DC ideal (com polaridade tal que, durante o processo de carga, a corrente $i_d \cong I_0 = \text{cte}$ entre pelo terminal positivo) com tensão igual a 72 V, determine a corrente $I_0 = \langle i_d \rangle \cong i_d$ em função do ângulo de disparo α .

b) O mesmo que em (a) com o modelo da bateria modificado para incluir uma resistência série de 260 mΩ.

Solução

a)

Do enunciado temos

$$v_e = \frac{220}{\sqrt{3}} \sqrt{2} \sin \theta, \quad \theta = \omega t = 120\pi t \text{ rad/s}$$

Na hipótese de não haver um indutor em série com a fonte de tensão v_e , teríamos, uma vez que $i_d > 0$ todo o tempo, que em qualquer instante *um e apenas* um par de tiristores conduzindo: ou T1 e T4 ou T2 e T3. Nessas condições a tensão v_d , no regime, seria dada por

$$v_d = \begin{cases} -v_e & 0 \leq \theta = \omega t \leq \alpha \\ v_e & \alpha < \theta \leq \pi \end{cases} \quad \text{com } L_e = 0$$

que descreveria completamente v_d , uma vez que ela é periódica com período $T/2 = \pi/\omega$, $\omega = 2\pi(60) \text{ rad/s}$. A.

O fato de que $L_e > 0$ implica que a comutação da corrente entre os pares (T1,T4) e (T2,T3)

não mais se dê instantâneamente: durante um certo intervalo $\alpha < \theta < \alpha + \phi = \alpha + \omega t_c$, todos os tiristores estarão em condução. O intervalo de tempo t_c corresponde à duração do intervalo de comutação, desde o instante de acionamento dos gates de T1 e T4 até a extinção da corrente no par T2 e T3 (estamos exemplificado para o primeiro semiciclo, nos demais a situação é inteiramente semelhante). Temos então

$$v_d = \begin{cases} -v_e & 0 \leq \theta = \omega t < \alpha \\ 0 & \alpha \leq \theta < \alpha + \phi \\ v_e & \alpha + \phi \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad \text{com } L_e > 0$$

novamente com v_d periódica, com período $T/2$.

Para completar a descrição de v_d temos que encontrar o intervalo $\phi = \omega t_c$. Para isso, observe que, durante o intervalo de comutação, a tensão sobre o indutor é a própria tensão da fonte, v_e . No início da comutação a corrente no indutor L_e (que coincide com a da fonte) é $i_e = -I_0$ (note que T2 e T3 é que estão inicialmente conduzindo), e ao seu término $i_e = I_0$ (toda corrente por T1 na parte superior e por T4 na parte inferior). Temos, portanto,

$$L_e \frac{di_e}{dt} = v_e = V_p \sin \theta$$

ou, notando que $\frac{di_e}{dt} = \frac{di_e}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{di_e}{d\theta}$,

$$\frac{di_e}{d\theta} = \frac{V_p}{\omega L_e} \sin \theta$$

ou seja,

$$i_e = \frac{d}{d\theta} \left(C - \frac{V_p}{\omega L_e} \cos \theta \right)$$

Impondo as condições

$$\begin{aligned} -I_0 &= C - \frac{V_p}{\omega L_e} \cos \alpha \\ I_0 &= C - \frac{V_p}{\omega L_e} \cos(\alpha + \phi) \end{aligned}$$

obtemos

$$C = \frac{V_p}{\omega L_e} \cos \alpha - I_0$$

e

$$I_0 = \frac{V_p}{\omega L_e} \cos \alpha - I_0 - \frac{V_p}{\omega L_e} \cos(\alpha + \phi)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\cos \alpha - \cos(\alpha + \phi) &= \frac{2\omega L_e I_0}{V_p} \\ \Rightarrow \cos(\alpha + \phi) &= \cos \alpha - \frac{2\omega L_e I_0}{V_p}\end{aligned}$$

e

$$\phi = \cos^{-1} \left(\cos \alpha - \frac{2\omega L_e I_0}{V_p} \right) - \alpha$$

Para obter a relação entre I_0 e α , observe que

$$\langle v_d \rangle = \langle v_L + V_B \rangle = \langle v_L \rangle + V_B = V_B$$

onde $V_B = 72$ V.

Portanto,

$$\langle v_d \rangle = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\alpha (-v_e) d\theta + \int_{\alpha+\phi}^\pi v_e d\theta \right] = \frac{V_p}{\pi} \left[\int_0^\alpha (-\sin \theta) d\theta + \int_{\alpha+\phi}^\pi \sin \theta d\theta \right] = V_B$$

Com

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha (-\sin \theta) d\theta + \int_{\alpha+\phi}^\pi \sin \theta d\theta &= \cos \alpha - \cos 0 + (-\cos \pi) - (-\cos(\alpha + \phi)) \\ &= \cos \alpha + \cos(\alpha + \phi)\end{aligned}$$

obtemos

$$\langle v_d \rangle = \frac{V_p}{\pi} \left(\int_0^\alpha (-\sin \theta) d\theta + \int_{\alpha+\phi}^\pi \sin \theta d\theta \right) = \frac{V_p}{\pi} (\cos \alpha + \cos(\alpha + \phi)) = V_B$$

Usando o resultado obtido acima, $\cos(\alpha + \phi) = \cos \alpha - \frac{2\omega L_e I_0}{V_p}$,

$$\begin{aligned}\langle v_d \rangle &= \frac{V_p}{\pi} \left(2 \cos \alpha - \frac{2\omega L_e I_0}{V_p} \right) = V_B \\ \Rightarrow \frac{2\omega L_e I_0}{V_p} &= 2 \cos \alpha - \frac{\pi V_B}{V_p}\end{aligned}$$

ou

$$I_0 = \frac{V_p}{2\omega L_e} \left(2 \cos \alpha - \frac{\pi V_B}{V_p} \right)$$

Com os valores dados, obtemos

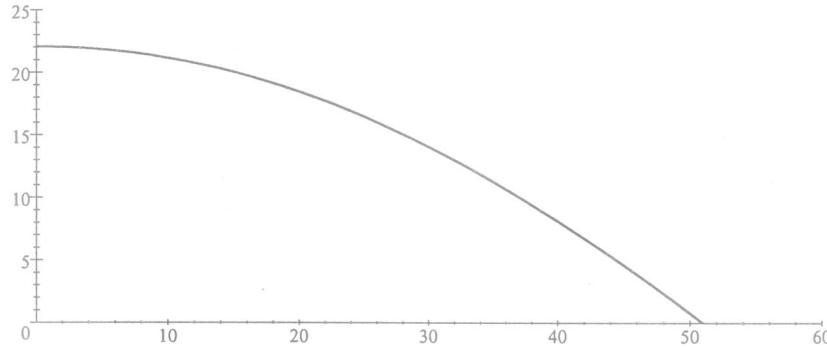
$$I_0 = \frac{220(\sqrt{2/3})}{2(120\pi)(0.008)} \left(2 \cos \alpha - \frac{72\pi}{220(\sqrt{2/3})} \right) \cong 29.8(2 \cos \alpha - 1.26)$$

A figura abaixo mostra a corrente em função do ângulo de disparo α (em graus). O ângulo para que a corrente se anule é

$$\alpha_0 = \frac{180}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \frac{72\pi}{220(\sqrt{2/3})} \right) \cong 0.890 \text{ rad} \cong 51.0^\circ$$

e a corrente máxima (para $\alpha = 0$) é

$$I_{0\max} = \frac{220(\sqrt{2/3})}{2(120\pi)(0.008)} \left(2 - \frac{72\pi}{220(\sqrt{2/3})} \right) \cong 22.1 \text{ A}$$



Note na expressão $I_0 = \frac{V_p}{2\omega L_e} \left(2 \cos \alpha - \frac{\pi V_B}{V_p} \right)$ o papel fundamental da indutância de comutação para haver possibilidade de controle da corrente. Com $L_e = 0$ teríamos que ter exatamente $2 \cos \alpha = \frac{\pi V_B}{V_p}$ para ter I_0 limitada, e assim mesmo indeterminada. A parte (b) apresenta um caso mais realista ao introduzir uma resistência finita no modelo da bateria.

b)

O que muda é que

$$\langle v_d \rangle = \langle v_L + V_B + ri_d \rangle = \langle v_L \rangle + \langle V_B \rangle + \langle ri_d \rangle = V_B + r\langle i_d \rangle = V_B + rI_0$$

ou

$$\langle v_d \rangle = \frac{V_p}{\pi} \left(2 \cos \alpha - \frac{2\omega L_e I_0}{V_p} \right) = V_B + rI_0$$

Resolvendo para I_0

$$2 \cos \alpha - \frac{2\omega L_e I_0}{V_p} = \frac{\pi V_B}{V_p} + \frac{\pi r}{V_p} I_0$$

$$I_0 \frac{1}{V_p} (\pi r + 2\omega L_e) = 2 \cos \alpha - \frac{\pi V_B}{V_p}$$

$$I_0 = \frac{V_p}{\pi r + 2\omega L_e} \left(2 \cos \alpha - \frac{\pi V_B}{V_p} \right)$$

Com os dados do problema

$$I_0 = \frac{220(\sqrt{2/3})}{\pi(0.26) + 2(120\pi)(0.008)} \left(2\cos\alpha - \frac{\pi(72)}{220(\sqrt{2/3})} \right) \cong 26.2(2\cos\alpha - 1.26)$$

Comparando com a expressão anterior $I_0 = 29.8(2\cos\alpha - 1.26)$ vemos que o efeito sobre a da resistência na corrente média é uma redução por um fator constante (independente de α) de aproximadamente $(26.2)/(29.8) \cong 0.88$. O novo valor máximo da corrente (em $\alpha = 0$) é $I_{0\max} \cong 19.4$ A.

8. Considere uma ponte monofásica totalmente controlada (como a da figura A1-6). A pônte fornece corrente aos terminais do enrolamento de um grande eletroímã, cujo circuito equivalente é uma associação L-R série, com $L = 400$ mH e $R = 3.2$ Ω. A tensão de entrada é da forma $v_e = V_p \sin \omega t$, com $V_p = 2800$ V, $\omega = 2\pi f = 2\pi(60)$ rad/s.

- a) Calcule o ângulo de atraso α que mantém uma corrente (essencialmente constante) i_d com $\langle i_d \rangle = 500$ A.
- b) Qual é a maneira mais rápida, controlando apenas a fase α , de desmagnetizar o eletroímã? Qual é o tempo mínimo de desmagnetização?

Solução

a)

Considere a situação em regime permanente e considere a origem do tempo escolhida de forma que a tensão de entrada possa ser escrita como

$$v_e = V_p \sin \omega t = V_p \sin \theta$$

No primeiro semiciclo a tensão nos terminais do eletroímã, que é periódica de período $T/2 = \pi/\omega$, é dada por

$$v_d = \begin{cases} -v_e & 0 \leq \theta \leq \alpha \\ v_e & \alpha < \theta \leq 0 \end{cases}$$

e seu valor médio é, portanto,

$$\begin{aligned} \langle v_d \rangle &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\alpha (-V_p \sin \theta) d\theta + \int_\alpha^\pi V_p \sin \theta d\theta \right) \\ &= \frac{V_p}{\pi} \left(\int_0^\alpha (-\sin \theta) d\theta + \int_\alpha^\pi \sin \theta d\theta \right) = \frac{V_p}{\pi} (\cos \theta|_0^\alpha + (-\cos \theta)|_\alpha^\pi) \end{aligned}$$

ou

$$\langle v_d \rangle = \frac{2V_p}{\pi} \cos \alpha$$

Mas

$$\langle v_d \rangle = \langle v_L + v_R \rangle = \langle v_L \rangle + \langle v_R \rangle = \langle v_R \rangle = \langle R i_d \rangle = R \langle i_d \rangle$$

uma vez que $\langle v_L \rangle = 0$ na condição de regime. Portanto,

$$\frac{2V_p}{\pi} \cos \alpha = R \langle i_d \rangle$$

e

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\pi R \langle i_d \rangle}{2V_p} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{\pi (3.2)(500)}{2(2800)} \right) \cong 0.457 \text{ rad} (\cong 26.2^\circ)$$

Que a corrente deve ser essencialmente DC pode ser visto através da comparação da constante de tempo associada ao circuito L-R, $\tau = L/R$, e o período de v_d , $T/2$:

$$\frac{L/R}{T/2} = \frac{0.4/3.2}{1/120} = \frac{125 \text{ ms}}{8.33... \text{ ms}} = 15$$

b)

É intuitivo que quanto mais negativa fizermos a média $\langle v_d \rangle$, mais rapidamente decairá a corrente i_d . A solução é então fazer α próximo de 180° , obtendo-se uma tensão média, aproximadamente igual a

$$\langle v_d \rangle = \frac{2V_p}{\pi} \cos(\pi) = -\frac{2V_p}{\pi} = -\frac{2(2800)}{\pi} \cong -1783 \text{ V}$$

Devido à relativamente alta constante de tempo L/R comparada com o período $T/2$, da tensão v_d , não se comete erro significativo no cálculo da evolução da corrente se em lugar de v_d considerarmos que a tensão $\langle v_d \rangle = -\frac{2V_p}{\pi}$ está efetivamente aplicada aos terminais da bobina durante o intervalo de desmagnetização. Com essa simplificação nosso problema se resume a resolver

$$L \frac{di_d}{dt} + Ri_d = -\frac{2V_p}{\pi}$$

com a condição inicial (escolhendo adequadamente a origem do tempo)

$$i_d = I_0 = 500 \text{ A} \quad \text{em } t = 0$$

A solução geral da homogênea

$$L \frac{di_h}{dt} + Ri_h = 0$$

é

$$i_h = C \exp(-t/(L/R))$$

e uma solução particular é

$$i_p = -\frac{2V_p}{\pi R}$$

De modo que

$$i_d = i_p + i_h = -\frac{2V_p}{\pi R} + C \exp(-t/(L/R))$$

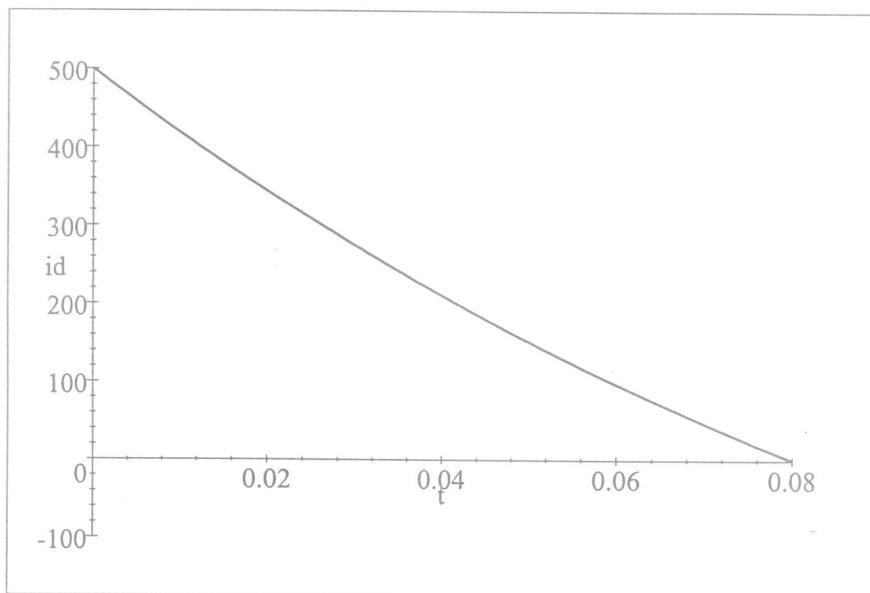
é uma solução da eq. diferencial com uma constante arbitrária C que pode ser ajustada para satisfazer a condição inicial:

$$C - \frac{2V_p}{\pi R} = I_0 \Rightarrow C = I_0 + \frac{2V_p}{\pi R}$$

Temos, portanto,

$$i_d = -\frac{2V_p}{\pi R} + \left(I_0 + \frac{2V_p}{\pi R} \right) \exp(-t/(L/R))$$

O gráfico abaixo mostra a evolução da corrente (em sua versão simplificada).



Para calcular o tempo de desmagnetização, resolvemos a equação acima para t :

$$t = -\frac{L}{R} \ln\left(\frac{i_d + (2V_p)/(\pi R)}{i_0 + (2V_p)/(\pi R)}\right)$$

e chamando de t_f o instante em que $i_d = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} t_f &= -\frac{L}{R} \ln\left(\frac{(2V_p)/(\pi R)}{i_0 + (2V_p)/(\pi R)}\right) = \frac{L}{R} \ln\left(\frac{\pi R i_0}{2V_p} + 1\right) \\ &= \frac{0.4}{3.2} \ln\left(\frac{\pi(3.2)(500)}{2(2800)} + 1\right) \cong 80.1 \text{ ms} \end{aligned}$$