

## Doc. #6 - Soluções da Lista de Exercícios 2

1. Para cada um dos conversores nas figuras 1 a 3 (as figuras com os circuitos estão reunidas ao final do documento) assuma a fonte DC, as chaves S, os diodos, os capacitores e os indutores ideais. São dados a tensão  $V_d = E$ , suposta constante no tempo (DC), o período de chaveamento  $T = \frac{1}{f_c}$ , e o valor da indutância  $L$ . Assuma baixa ondulação na tensão de saída, assumindo, por simplicidade, que  $v_0 = V_0$  é constante no tempo (DC). Determine, para cada um dos três conversores, a tensão de saída em função da corrente de saída média,  $I_0$ , e de  $\delta = \frac{\tau}{T}$ , sendo  $\tau$  o intervalo de tempo em que a chave permanece fechada em cada ciclo. Por brevidade, analise apenas o caso de corrente contínua através do indutor (ou seja, a corrente  $i_L$  jamais se anula), mas especifique o valor da corrente de saída crítica,  $I_{0C}$ , abaixo do qual a corrente no indutor se tornaria descontínua.

## Solução

Obs: Onde se fala, no enunciado, em continuidade na corrente no indutor, o que de fato se quer dizer é que essa corrente nunca se anula (não há interrupção na corrente). A rigor, a corrente no indutor é sempre contínua, quanto à função do tempo que a representa.

## a) Conversor redutor (Fig. 1)

Com S fechada o diodo está reversamente polarizado, tensão reversa igual a  $E$ , e a corrente no indutor circula através da chave e da fonte DC. A tensão sobre o indutor é igual a  $E - V_0$ , constante. Como a tensão  $V_0$  é menor que  $E$ , como se confirmará adiante, a corrente no indutor cresce, linearmente, durante este período, o que significa que a fonte DC transfere energia para o indutor (mais propriamente, para o campo magnético associado ao indutor), e para o conjunto capacitor-carga. Adotando a origem do tempo coincidente com o instante de fechamento de S:

$$v_L = E - V_0 = L \frac{di_L}{dt} \Rightarrow i_L = i_L(0) + \frac{E - V_0}{L} t \quad 0 \leq t \leq \tau \quad (1a-1).$$

Com S aberta, a corrente do indutor circula através do diodo e a tensão sobre o indutor é  $-V_0$ , o que faz a corrente através dele decrescer, linearmente. Nesse intervalo a energia ganha pelo indutor no intervalo anterior (S fechada) é transferida ao conjunto carga-capacitor.

$$-V_0 = L \frac{di_L}{dt} \Rightarrow i_L = i_L(\tau) - \frac{V_0}{L} (t - \tau) \quad \tau \leq t \leq T \quad (1a-2).$$

Como estamos considerando a situação de regime permanente,  $i_L$  é periódica com período  $T$ , e, claramente em  $t = 0$  a corrente no indutor atinge seu mínimo,

$$I_m = i_L(0) \quad (1a-3),$$

e em  $t = \tau$ , atinge seu máximo,

$$I_M = i_L(\tau) \quad (1a-4).$$

De 1a-1

$$i_L(\tau) = I_M = I_m + \frac{E - V_0}{L} \tau \Rightarrow I_M - I_m = \frac{E - V_0}{L} \tau \quad (1a-5).$$

De 1a-2

$$i_L(T) = i_L(0) = I_m = I_M - \frac{V_0}{L}(T - \tau) \Rightarrow I_M - I_m = \frac{V_0}{L}(T - \tau) \quad (1a-6).$$

Combinando as eq. 1a-5 e 1a-6,

$$(E - V_0)\tau = V_0(T - \tau) \Rightarrow E\tau = V_0T \Rightarrow V_0 = \frac{\tau}{T}E$$

ou

$$V_0 = \delta E \quad (1a-7).$$

Notar que, para condução contínua, a tensão na saída é independente da corrente, e é uma função linear de  $\delta$ . Como  $\delta$  não excede 1 e normalmente é inferior a 1, confirmamos que  $V_0$  é normalmente menor que  $E$ , o que justifica o *redutor* no nome desse tipo de conversor.

A corrente média no indutor é, usando, 1a-1 a 1a-4,

$$(i_L)_{média} = \frac{1}{T} \left( \int_0^\tau \left( I_m + \frac{E - V_0}{L} t \right) dt + \int_\tau^T \left( I_M - \frac{V_0}{L}(t - \tau) \right) dt \right).$$

Usando 1a-5 e 1a-6,

$$I_M - I_m = \frac{E - V_0}{L}\tau \Rightarrow \frac{E - V_0}{L} = \frac{I_M - I_m}{\tau} \quad I_M - I_m = \frac{V_0}{L}(T - \tau) \Rightarrow \frac{V_0}{L} = \frac{I_M - I_m}{T - \tau},$$

temos

$$(i_L)_{média} = \frac{1}{T} \left( \int_0^\tau \left( I_m + \frac{I_M - I_m}{\tau} t \right) dt + \int_\tau^T \left( I_M - \frac{I_M - I_m}{T - \tau}(t - \tau) \right) dt \right) = \frac{I_m + I_M}{2},$$

o que nos dá

$$(i_L)_{média} = \frac{I_m + I_M}{2} \quad (1a-8)$$



o que também pode, muito mais facilmente, ser deduzido do formato dente de serra da corrente.

Temos

$$i_L = i_C + i_0 \Rightarrow (i_L)_{média} = (i_C)_{média} + (i_0)_{média}$$

e como, em regime permanente, ~~depois de vários ciclos~~

$$(i_C)_{média} = 0$$

temos

$$(i_0)_{média} = I_0 = \frac{I_m + I_M}{2} \Rightarrow I_m + I_M = 2I_0 \quad (1a-9)$$

Usando 1a-5, 1a-7 e a definição  $\delta = \tau/T$

$$I_m + \left( I_m + \frac{E - V_0}{L}\tau \right) = I_m + \left( I_m + \frac{E - \delta E}{L}\delta T \right) = 2I_0$$

obtemos

$$I_m = I_0 - \frac{ET}{2L} \delta(1 - \delta)$$

A condição para condução contínua é

$$I_m > 0 \Rightarrow I_0 > \frac{ET}{2L} \delta(1 - \delta)$$

Portanto, a corrente crítica é

$$I_{0C} = \frac{ET}{2L} \delta(1 - \delta)$$

Note que essa corrente é não negativa, uma vez que  $\delta(1 - \delta)$  é positivo em  $0 < \delta < 1$ , e zero nos extremos desse intervalo.

### b) Conversor elevador (Fig. 2)

Com S fechada o diodo fica reversamente polarizado, com tensão reversa  $V_0$ , e a tensão no indutor é  $v_L = E$ . Portanto a corrente  $i_L$  cresce, linearmente, durante esta parte do ciclo. A fonte DC transfere energia para o indutor.

Com a origem do tempo coincidente com o instante em que S é fechada,

$$v_L = E = L \frac{di}{dt} \Rightarrow i_L = i_L(0) + \frac{E}{L} t \quad 0 \leq t \leq \tau \quad (1b-1)$$

Após S ser aberta, a corrente no indutor passa pelo diodo e se divide entre o capacitor e a carga. Nesta fase a tensão no indutor é  $v_L = E - V_0$ , negativa, pois como se confirmará a seguir,  $V_0 > E$  (a não ser no caso extremo em que  $V_0 = E$ ). Nesta fase a corrente no indutor decresce, linearmente. O indutor transfere a energia recebida da fonte na fase anterior para o conjunto capacitor carga. Note que durante esta fase a fonte DC também libera energia para o circuito de saída.

Temos

$$v_L = E - V_0 = L \frac{di}{dt} \Rightarrow i_L = i_L(\tau) + \frac{E - V_0}{L} (t - \tau) \quad \tau \leq t \leq T \quad (1b-2)$$

De 1b-1,

$$i_L(\tau) = I_M = I_m + \frac{E}{L} \tau \Rightarrow I_M - I_m = \frac{E}{L} \tau \quad (1b-3),$$

e de 1b-2

$$i_L(T) = i_L(0) = I_m = I_M + \frac{E - V_0}{L} (T - \tau) \Rightarrow I_M - I_m = \frac{V_0 - E}{L} (T - \tau) \quad (1b-4).$$

Combinando estas últimas eqs.,

$$E\tau = (V_0 - E)(T - \tau) \Rightarrow V_0 = E + \frac{E\tau}{T - \tau}$$

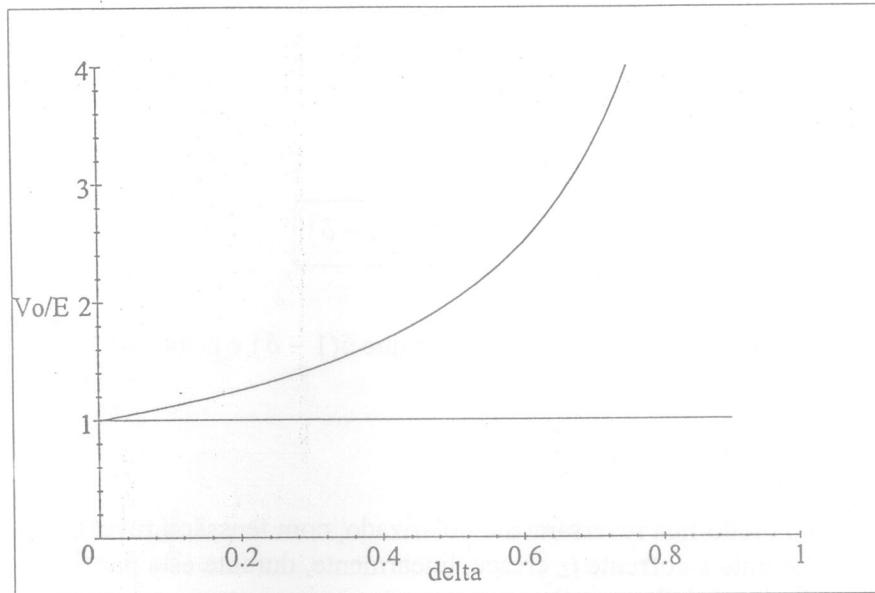
$$V_0 = \frac{1}{1 - \delta} E$$

$$\frac{V_0}{E} = \frac{1}{1 - \delta}$$

$$1 - \delta = \frac{E}{V_0}$$

$$\delta = -\frac{E}{V_0} + 1$$

Abaixo, o gráfico de  $V_0/E$  em função de  $\delta$  (delta), que mostra claramente que  $V_0 > E$  (a não ser para  $\delta = 0$ , ou seja, chave permanentemente aberta), justificando a palavra elevador no nome.



A seguir, a determinação de  $I_{0C}$ .

$$i_0 = i_D - i_C \Rightarrow (i_0)_{média} = I_0 = (i_D)_{média} \quad ((i_C)_{média} = 0),$$

$$i_D(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq \tau \\ i_L(t) & \tau \leq t \leq T \end{cases},$$

e

$$I_0 = (i_D)_{média} = \frac{1}{T} \int_{\tau}^T i_L dt.$$

Usando 1b-2 e 1b-4

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_{\tau}^T \left( I_M - \frac{V_0 - E}{L}(t - \tau) \right) dt = \frac{1}{T} \int_{\tau}^T \left( I_M - \frac{I_M - I_m}{T - \tau}(t - \tau) \right) dt$$

ou

$$\boxed{I_0 = \frac{(I_M + I_m)(T - \tau)}{2T}}$$

que também pode se visto por inspeção da forma de onda de  $i_L$ .

Da eq. acima, usando 1b-3,

$$I_0 = \frac{\left( I_m + \frac{E}{L}\tau + I_m \right)(T - \tau)}{2T} \Rightarrow I_m = \frac{T I_0}{T - \tau} - \frac{E\tau}{2L},$$

De onde se conclui que a condição para corrente contínua é

$$I_m = \frac{TI_0}{T-\tau} - \frac{E\tau}{2L} > 0 \Rightarrow I_0 > \frac{E\tau}{2L} \frac{T-\tau}{T} = \frac{ET}{2L} \frac{\tau}{T} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) = \frac{ET}{2L} \delta(1-\delta),$$

ou seja, a corrente crítica é

$I_{0C} = \frac{ET}{2L} \delta(1-\delta)$

*abre o modo de modo de condução*

### c) Conversor elevador/redutor (Fig. 3)

Quando S está fechada o diodo está reversamente polarizado, com tensão reversa  $E + V_0$ , e a corrente no indutor está aumentando linearmente. Durante este período a fonte DC transfere energia ao indutor. Estabelecendo a origem do tempo coincidente com o momento em que S é fechada, a corrente no indutor nesse intervalo é dada por

$$v_L = E = L \frac{di_L}{dt} \Rightarrow i_L = i_L(0) + \frac{E}{L} t \quad 0 \leq t \leq \tau \quad (1c-1)$$

onde  $i_L(0)$  representa a corrente no indutor no instante em que S é fechada.

Quando S é aberta em  $t = \tau$  a corrente no indutor circula através do diodo e se divide entre o capacitor e a carga. Durante esta parte do ciclo, a energia ganha pelo indutor durante a parte em que S permaneceu fechada é transferida à combinação capacitor-carga. O indutor fica submetido a uma tensão negativa e sua corrente decresce segundo

$$v_L = -V_0 = L \frac{di_L}{dt} \Rightarrow i_L = i_L(\tau) - \frac{V_0}{L}(t-\tau) \quad \tau \leq t \leq T \quad (1c-2)$$

De 1c-1,

$$i_L(\tau) = I_M = I_m + \frac{E}{L}\tau \Rightarrow I_M - I_m = \frac{E}{L}\tau \quad (1c-3),$$

e de 1c-2,

$$i_L(T) = i(0) = I_m = I_M - \frac{V_0}{L}(T-\tau) \Rightarrow I_M - I_m = \frac{V_0}{L}(T-\tau) \quad (1c-4)$$

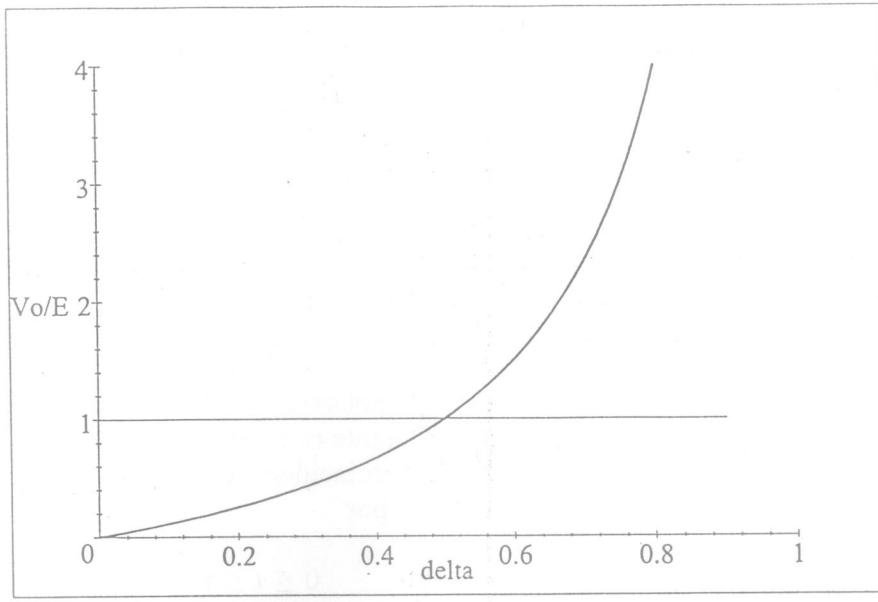
Estas últimas equações mostram que

$$E\tau = V_0(T-\tau) \Leftrightarrow E \frac{\tau}{T} = V_0 \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)$$

ou

$V_0 = \frac{\delta}{1-\delta} E$

Também neste caso, a tensão de saída é independente da corrente de saída no caso de condução contínua. Abaixo o gráfico que (em teoria) representa  $V_0/E$  em função de  $\delta$  (delta).



Portanto, a tensão de saída é menor que  $E$  para  $\delta < 0.5$  (redutor), e maior que  $E$  para  $\delta > 0.5$  (elevador).

Determinação de  $I_{0C}$ :

$$i_0 = i_D - i_C \Rightarrow (i_0)_{média} = I_0 = (i_D)_{média} \quad ((i_C)_{média} = 0),$$

$$i_D(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq \tau \\ i_L(t) & \tau \leq t \leq T \end{cases},$$

e

$$I_0 = (i_D)_{média} = \frac{1}{T} \int_{\tau}^T i_L dt.$$

De 12-c e de 1c-4

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_{\tau}^T \left( I_M - \frac{V_0}{L}(t - \tau) \right) dt = \frac{1}{T} \int_{\tau}^T \left( I_M - \frac{I_M - I_m}{T - \tau}(t - \tau) \right) dt = \frac{(T - \tau)(I_M + I_m)}{2T}$$

ou

$$I_0 = \frac{(T - \tau)(I_M + I_m)}{2T}$$

Com 1c-3,

$$I_0 = \frac{(T - \tau)(I_m + \frac{E}{L}\tau + I_m)}{2T}$$

$$I_m = \frac{T I_0}{T - \tau} - \frac{E \tau}{2L}$$

e a condição para condução contínua é

$$I_m > 0 \Rightarrow I_0 > \frac{ET}{2L} \left( \frac{T-\tau}{T} \right) = \frac{ET}{2L} \frac{\tau}{T} \left( 1 - \frac{\tau}{T} \right) = \frac{ET}{2L} \delta (1 - \delta)$$

Portanto

$$I_{0C} = \frac{ET}{2L} \delta (1 - \delta)$$

Note que a corrente crítica, representando o limiar entre os modos de condução contínua e descontínua, é dada pela mesma expressão para os três conversores. Mais genericamente, a condição para condução contínua se escreve da mesma maneira nos três casos:

$$I_0 > \frac{ET}{2L} \delta (1 - \delta) \quad \text{MCC}$$

2. Considere um conversor DC-DC abaixador. A tensão de saída,  $v_0$ , deve ser mantida estável em 48 V (DC), ou seja,  $\langle v_0 \rangle = 48$  V. O valor nominal da tensão DC de entrada é  $\langle v_d \rangle = V_d = E = 192$  V, a freqüência de chaveamento é  $f_c = 20$  kHz e a indutância é  $L = 100 \mu\text{H}$ . Assuma que a carga possa ser modelada por um resistor de resistência  $R$ , e que, para efeitos desta análise, se possa desconsiderar a ondulação nas tensões de entrada e saída.

Para  $R = 1 \ (\Omega)$ , determine:

- a) os valores de  $\delta$  e  $\tau = \delta T = \delta/f_c$  (necessários para manter  $v_0$  no nível especificado);
- b) as correntes média e eficaz, na chave S, no diodo e no indutor;
- c) a tensão máxima (em valor absoluto) através da chave e a tensão reversa máxima através do diodo.
- d) Determine o valor da resistência crítica,  $R_C$ , acima do qual a corrente se torna descontínua.
- e) Determine  $\delta$  e  $\tau$ , para  $R = 3R_C$ .
- f) Com  $R = 3R_C$ , determine  $\delta$  e  $\tau$ , quando  $E$  aumenta 20% em relação a seu valor nominal. Repita para um decréscimo de 20%.

### Solução

Preliminar: de nossa análise prévia deste tipo de conversor, obtivemos

$$\frac{V_0}{E} = \begin{cases} \delta & I_0 \geq I_{0C} = \frac{\delta(1-\delta)}{2} \frac{ET}{L} \quad (\text{MCC}) \\ \frac{\delta^2}{\delta^2 + \frac{2I_0L}{ET}} & I_0 \leq I_{0C} \quad (\text{MCD}) \end{cases}$$

em que  $T = 1/f_c$ .

O modo de condução contínua (MCC), em que  $\delta = V_0/E$ , ocorre se

$$I_0 = \frac{V_0}{R} \geq \frac{\frac{V_0}{E} \left(1 - \frac{V_0}{E}\right)}{2} \frac{E}{f_c L} = \frac{V_0}{2f_c L} \left(1 - \frac{V_0}{E}\right)$$

ou

$$\frac{2f_c L}{R} \geq 1 - \frac{V_0}{E}$$

$$\delta = \frac{V_0}{E} \quad (\text{MCC})$$

Caso contrário (ou seja, quando a desigualdade acima não se verifica), temos modo de condução descontínua e

$$\frac{V_0}{E} = \frac{\delta^2}{\delta^2 + \frac{2I_0 L}{E T}} = \frac{\delta^2}{\delta^2 + \frac{2f_c L}{R} \frac{V_0}{E}}$$

Resolvendo a equação acima para  $\delta^2$  obtemos  $\delta^2 = [(V_0/E)^2 (2f_c L/R)]/[1 - V_0/E]$ . E como  $\delta$  é positivo,

$$\delta = \frac{V_0}{E} \sqrt{\frac{\frac{2f_c L}{R}}{1 - \frac{V_0}{E}}} \quad (\text{MCD})$$

a)

Teste:

$$\frac{2f_c L}{R} = \frac{2(20 \times 10^3)(100 \times 10^{-6})}{1} = 4$$

$$1 - \frac{V_0}{E} = 1 - \frac{48}{192} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \text{MCC}$$

Portanto

$$\delta = \frac{V_0}{E} = \frac{48}{192} = 0.25 \Rightarrow \tau = \delta/f_c = (0.25)/(20 \times 10^3 \text{ Hz}) = \underline{12.5 \mu\text{s}}$$

b)

Assumindo que a chave se fecha exatamente em  $t = 0$ , temos para a corrente no indutor (MCC):

$$i_L = I_m + \frac{I_M - I_m}{\tau} t \quad 0 \leq t \leq \tau = \delta T$$

$$i_L = I_M - \frac{I_M - I_m}{T - \tau}(t - \tau) \quad \tau \leq t \leq T$$

onde  $I_m$  e  $I_M$  representam as correntes mínima e máxima no indutor, respectivamente: no

intervalo entre 0 e  $\tau$  a corrente  $i_L$  cresce linearmente de  $I_m$  até  $I_M$ , e decresce linearmente de  $I_M$  até  $I_m \geq 0$  no intervalo entre  $\tau$  e  $T$ . Estas correntes máxima e mínima podem ser obtidas da seguinte maneira:

$$\langle i_L \rangle = \langle i_C + i_0 \rangle = \langle i_C \rangle + \langle i_0 \rangle = \langle i_0 \rangle = I_0 = V_0/R$$

$$\langle i_L \rangle = \frac{1}{T} \left( T I_m + \frac{1}{2} T (I_M - I_m) \right) = \boxed{\frac{I_M + I_m}{2}}$$

$$\boxed{L \frac{I_M - I_m}{\tau}} = \boxed{E - V_0}$$

L di/dt

Portanto, das três eqs. acima, obtemos as eqs.

$$I_M + I_m = 2I_0$$

$$I_M - I_m = \frac{\tau(E - V_0)}{L}$$

que determinam

$$I_M = I_0 + \frac{\tau(E - V_0)}{2L} = I_0 + \frac{E\tau(1 - \delta)}{2L} = I_0 + \frac{E\delta(1 - \delta)}{2f_c L}$$

e

$$I_m = I_0 - \frac{E\delta(1 - \delta)}{2f_c L}$$

No caso específico

$$\frac{E\delta(1 - \delta)}{2f_c L} = \frac{192(1/4)(1 - 1/4)}{2(20 \times 10^3)(100 \times 10^{-6})} \text{ A} = 9 \text{ A}$$

$$I_M = 48 + 9 = 57 \text{ A}$$

$$I_m = 48 - 9 = 39 \text{ A}$$

Quanto à corrente média no indutor, ela já foi obtida

$$\langle i_L \rangle = I_0 = 48 \text{ A}$$

Para a chave,

$$\begin{aligned} \langle i_S \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^\tau i_L dt = \frac{1}{T} \left( \tau I_m + \frac{1}{2} \tau (I_M - I_m) \right) \\ &= \frac{\tau}{T} \frac{I_m + I_M}{2} = \delta \frac{I_m + I_M}{2} = \boxed{\delta I_0} \end{aligned}$$

Portanto

$$\langle i_S \rangle = (1/4)(48 \text{ A}) = 12 \text{ A}$$

Para o diodo, podemos usar,

$$\boxed{\langle i_L \rangle = \langle i_S + i_D \rangle} = \langle i_S \rangle - \langle i_D \rangle \Rightarrow \langle i_D \rangle = \langle i_L \rangle - \langle i_S \rangle$$

Portanto

$$\langle i_D \rangle = (1 - \delta) I_0$$

e no caso específico

$$\langle i_D \rangle = (1 - 1/4)(48 \text{ A}) = 36 \text{ A}$$

Para obter os valores eficazes das correntes podemos usar

$$\begin{aligned} \langle i_S^2 \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^\tau i_L^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^\tau \left( I_m + \frac{I_M - I_m}{\tau} t \right)^2 dt \\ &= \underbrace{\frac{\tau}{3T} (I_M^2 + I_m I_M + I_m^2)}_{\text{ou}} = \underbrace{\frac{\delta}{3} (I_M^2 + I_m I_M + I_m^2)}_{\text{ou}} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \langle i_S^2 \rangle &= \frac{1/4}{3} (57^2 + 39 \times 57 + 39^2) \text{ A}^2 = \frac{1}{12} (6993) \text{ A}^2 \\ \sqrt{\langle i_S^2 \rangle} &= \sqrt{\frac{1}{12} (6993)} \text{ A} \cong 24.1 \text{ A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle i_D^2 \rangle &= \frac{1}{T} \int_\tau^T i_L^2 dt = \frac{1}{T} \int_\tau^T \left( I_M - \frac{I_M - I_m}{T - \tau} (t - \tau) \right)^2 dt \\ &= \underbrace{\frac{T - \tau}{3T} (I_M^2 + I_m I_M + I_m^2)}_{\text{ou}} = \underbrace{\frac{1 - \delta}{3} (I_M^2 + I_m I_M + I_m^2)}_{\text{ou}} \\ \langle i_D^2 \rangle &= \frac{1 - 1/4}{3} (6993) \text{ A}^2 = \frac{6993}{4} \text{ A}^2 \\ \sqrt{\langle i_D^2 \rangle} &= \sqrt{\frac{6993}{4}} \text{ A} \cong 41.8 \text{ A} \end{aligned}$$

Finalmente, observando que,

$$\begin{aligned} \langle i_L^2 \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^\tau i_L^2 dt + \frac{1}{T} \int_\tau^T i_L^2 dt = \langle i_S^2 \rangle + \langle i_D^2 \rangle \\ &= \left( \frac{\delta}{3} + \frac{1 - \delta}{3} \right) (I_M^2 + I_m I_M + I_m^2) = \underbrace{\frac{1}{3} (I_M^2 + I_m I_M + I_m^2)}_{\text{ou}} \\ \langle i_L^2 \rangle &= \frac{1}{3} (6993) \text{ A}^2 \\ \sqrt{\langle i_L^2 \rangle} &= \sqrt{\frac{6993}{3}} \text{ A} \cong 48.3 \text{ A} \end{aligned}$$

c)

A máxima tensão a que a chave fica submetida ocorre quando a chave se abre. A tensão é igual a  $E = 192 \text{ V}$

A máxima tensão reversa no diodo ocorre com a chave fechada e é igual a  $E = 192 \text{ V}$

d)

$$\frac{2f_c L}{R_C} = 1 - \frac{V_0}{E} \Rightarrow R_C = \frac{2f_c L}{1 - \frac{V_0}{E}}$$

$$R_C = \frac{2(20 \times 10^3)(100 \times 10^{-6})}{1 - \frac{48}{192}} \Omega = \frac{16}{3} \Omega \cong 5.33 \Omega$$

e)

Para  $R = 3R_C = 16 \Omega$ , o conversor deverá operar no modo descontínuo, se se deseja manter  $v_0 = 48 \text{ V}$ .

$$\delta = \frac{V_0}{E} \sqrt{\frac{\frac{2f_c L}{3R_C}}{1 - \frac{V_0}{E}}} = \frac{48}{192} \sqrt{\frac{\frac{2(20 \times 10^3)(100 \times 10^{-6})}{16}}{1 - \frac{48}{192}}} = \frac{\sqrt{3}}{12} \cong 0.144$$

$$\tau = \frac{\delta}{f_c} = \frac{\sqrt{3}/12}{20 \times 10^3} \text{ s} \cong 7.22 \mu\text{s}$$

f)

Para

$$E = E_1 = 192 \left( 1 + \frac{20}{100} \right) \text{ V} = 230.4 \text{ V}$$

temos o teste

$$\begin{aligned} \frac{2f_c L}{3R_C} &= \frac{2(20 \times 10^3)(100 \times 10^{-6})}{16} = 0.25 \\ 1 - \frac{V_0}{E_1} &= 1 - \frac{48}{230.4} \cong 0.792 \\ \Rightarrow &\text{ MCD} \end{aligned}$$

e

$$\delta = \delta_1 = \frac{V_0}{E_1} \sqrt{\frac{\frac{2f_c L}{3R_C}}{1 - \frac{V_0}{E_1}}} = \frac{48}{230.4} \sqrt{\frac{\frac{2(20 \times 10^3)(100 \times 10^{-6})}{16}}{1 - \frac{48}{230.4}}} \cong 0.117$$

$$\tau = \tau_1 = \frac{\delta_1}{f_c} \cong \frac{0.1171}{20 \times 10^3} \text{ s} \cong 5.86 \mu\text{s}$$

Para

$$E = E_2 = 192 \left( 1 - \frac{20}{100} \right) \text{ V} = 153.6 \text{ V}$$

repetimos o teste

$$\frac{2f_c L}{3R_C} = \frac{2(20 \times 10^3)(100 \times 10^{-6})}{16} = 0.25$$

$$1 - \frac{V_0}{E_2} = 1 - \frac{48}{153.6} \cong 0.688$$

⇒ MCD

e

$$\delta = \delta_2 = \frac{V_0}{E_2} \sqrt{\frac{\frac{2f_c L}{3R_C}}{1 - \frac{V_0}{E_2}}} = \frac{48}{153.6} \sqrt{\frac{\frac{2(20 \times 10^3)(100 \times 10^{-6})}{16}}{1 - \frac{48}{153.6}}} \cong 0.188$$

$$\tau = \frac{\delta_2}{f_c} \cong \frac{0.1884}{20 \times 10^3} \text{ s} \cong 9.42 \mu\text{s}$$

3. Em um conversor DC-DC redutor, a tensão de saída deve ser mantida aproximadamente constante:  $v_0 \cong V_0 = 5 \text{ V}$ . Calcule o valor mínimo da indutância  $L$  que mantém o *Modo de Condução Contínua* nas condições:  $f_c = 50 \text{ kHz}$ ;  $v_d \cong E$  com  $10 \text{ V} \leq E \leq 40 \text{ V}$ ;  $P_0 = \langle i_0 v_0 \rangle \cong I_0 V_0 \geq 5 \text{ W}$ .

### Solução

Temos modo de condução contínua para

$$I_0 \geq \frac{\delta(1-\delta)}{2} \frac{ET}{L} = \frac{\delta(1-\delta)}{2} \frac{E}{f_c L},$$

e nessas condições

$$\delta = \frac{V_0}{E}.$$

Portanto,

$$L \geq \frac{V_0(1-V_0/E)}{2f_c I_0} = \frac{V_0^2(1-V_0/E)}{2f_c I_0 V_0} = \frac{V_0^2}{2f_c} \frac{(1-V_0/E)}{P_0}$$

O valor máximo de

$$\frac{(1-V_0/E)}{P_0}$$

ocorre para  $E$  máximo e  $P_0$  mínimo:

$$\max\left(\frac{1-V_0/E}{P_0}\right) = \frac{1-V_0/E_{\max}}{P_{0\min}}$$

e

$$L_{\min} = \frac{V_0^2}{2f_c} \frac{1 - V_0/E_{\max}}{P_{0\min}} = \frac{5^2}{2(50 \times 10^3)} \frac{1 - 5/40}{5} \text{ H} \cong 43.8 \mu\text{H}$$

- 4.** Num conversor DC-DC redutor, assuma  $V_0 = 5 \text{ V}$ ,  $f_c = 20 \text{ kHz}$ ,  $L = 1 \text{ mH}$ , e  $C = 470 \mu\text{F}$ . Para uma tensão de entrada  $E = 12.6 \text{ V}$  e  $I_0 = 200 \text{ mA}$ , estime
- a ondulação na corrente do indutor  $\Delta i_L = (i_{L\max} - i_{L\min})/2$ ;
  - o valor eficaz (rms) da ondulação na corrente no indutor (que é aproximadamente a corrente eficaz no capacitor);
  - a ondulação na tensão de saída  $\Delta v_0 = (v_{0\max} - v_{0\min})/2$ .

- 2.** Num conversor DC-DC redutor, assuma  $V_0 = 5 \text{ V}$ ,  $f_c = 20 \text{ kHz}$ ,  $L = 1 \text{ mH}$ , e  $C = 470 \mu\text{F}$ . Para uma tensão de entrada  $E = 12.6 \text{ V}$  e  $I_0 = 200 \text{ mA}$ , estime
- a ondulação na corrente do indutor  $\Delta i_L = (i_{L\max} - i_{L\min})/2$ ;
  - o valor eficaz (rms) da ondulação na corrente no indutor (que é aproximadamente a corrente eficaz no capacitor);
  - a ondulação na tensão de saída  $\Delta v_0 = (v_{0\max} - v_{0\min})/2$ .

### Solução

Em primeiro lugar vamos verificar se o modo de corrente é contínuo ou descontínuo. A corrente de limiar é

$$I_l \ominus \frac{\delta(1-\delta)}{2} \frac{ET}{L} = \frac{V_0(1-V_0/E)}{2f_c L} = \frac{5(1-5/12.6)}{2(20 \times 10^3)(10^{-3})} \text{ A} \cong 75.4 \text{ mA}$$

Portanto

$$I_0 = 200 \text{ mA} > I_l$$

e o conversor opera no modo contínuo.

a)

Durante o intervalo em que a chave permanece aberta a corrente  $i_L$  sofre uma redução dada por

$$2\Delta i_L = \frac{V_0}{L}(1-\delta)T = \frac{V_0}{f_c L} \left(1 - \frac{V_0}{E}\right) = \frac{5}{(20 \times 10^3)(10^{-3})} \left(1 - \frac{5}{12.6}\right) \text{ A} \cong 150.8 \text{ mA},$$

ou seja,

$$\Delta i_L \cong 75.4 \text{ mA.}$$

b)

Fazendo

$$i_L = I + i$$

onde

$$I = \langle i_L \rangle = \frac{i_{L\max} + i_{L\min}}{2}; \quad i = i_L - I = ; \quad -\Delta i_L \leq i \leq \Delta i_L$$

temos para o valor quadrático médio da ondulação da corrente: *na saída (capacitor)*

$$\begin{aligned} \langle i^2 \rangle &= \langle (i_L - I)^2 \rangle \\ &= \frac{1}{T} \left( \int_0^{\delta T} \left( -\Delta i_L + \frac{2\Delta i_L}{\delta T} \alpha \right)^2 d\alpha + \int_0^{(1-\delta)T} \left( \Delta i_L - \frac{2\Delta i_L}{(1-\delta)T} \beta \right)^2 d\beta \right) = \frac{1}{3} (\Delta i_L)^2 \end{aligned}$$

ou

$$\sqrt{\langle i^2 \rangle} = \frac{\Delta i_L}{\sqrt{3}} \cong \frac{75.4}{\sqrt{3}} \text{ mA} \cong 43.5 \text{ mA}$$

Observação: Este resultado é aproximado, no sentido de que ele pressupõe que não há ondulação na tensão de saída. Essa aproximação se justifica se o valor relativo da ondulação na tensão de saída é suficientemente pequena. O próximo item comprova essa justificativa.

c)

Assumindo  $v_0 = V_0$ , a corrente  $i$  do item anterior é maior que zero durante metade de cada ciclo, e a carga total correspondente é dada por (área do triângulo formado pelo gráfico de  $i$ )

$$\Delta Q = \frac{1}{2} \frac{T}{2} \Delta i_L = \frac{\Delta i_L}{4f_c} \cong \frac{75.4 \times 10^{-3}}{4(20 \times 10^3)} \text{ C} \cong 942.5 \text{ nC}$$

Assumindo que a carga tem comportamento resistivo,

$$R = \frac{V_0}{I_0} = \frac{5}{0.2} \Omega = 25 \Omega,$$

$$\frac{R}{(1/n\omega C)} = n\omega RC = n(2\pi \times 20 \times 10^3)(25)(470 \times 10^{-6}) > 1476n \gg 1$$

para todo  $n$  inteiro positivo. Isso significa que a carga oferece uma impedância muito mais alta que o capacitor para todas as frequências que compõem a corrente  $i$ . Ou seja, podemos, para efeito de cálculo, assumir que toda corrente  $i$  circula pelo capacitor. O acúmulo da carga  $\Delta Q$  nas placas do capacitor ocasiona uma elevação de tensão

$$2\Delta v_0 = \frac{\Delta Q}{C} \cong \frac{942.5 \times 10^{-9}}{470 \times 10^{-6}} \text{ V} \cong 2.005 \text{ mV} \Rightarrow \Delta v_0 \cong 1.00 \text{ mV}$$

A ondulação de tensão percentual

$$\frac{\Delta v_0}{V_0} \times 100\% \cong \frac{1 \times 10^{-3}}{5} \times 100\% \cong 0.02\%$$

justifica nossas aproximações.

5. Num conversor DC-DC elevador temos  $8 \text{ V} \leq E \leq 16 \text{ V}$ ,  $f_s = 20 \text{ kHz}$ , e  $C = 470 \mu\text{F}$ . A tensão de saída deve ser mantida em  $V_0 = 24 \text{ V}$ . Calcule o valor mínimo de  $L$  que assegura Modo de Condução Contínua para  $P_0 \geq 5W$ .

### Solução

Para modo de condução contínua

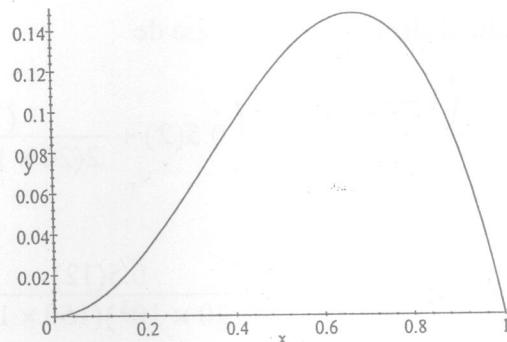
$$i_{L\min} = \langle i_L \rangle - \Delta i_L = \frac{I_0}{1-\delta} - \frac{\delta E}{2f_c L} > 0$$

onde

$$\frac{V_0}{E} = \frac{1}{1-\delta} \Leftrightarrow \delta = 1 - \frac{E}{V_0}.$$

$$\boxed{L > \frac{\delta(1-\delta)E}{2f_c I_0}} = \frac{\left(1 - \frac{E}{V_0}\right) \frac{E}{V_0} E}{2f_c I_0 \frac{V_0}{V_0}} = \frac{V_0^2}{2f_c} \frac{\left(1 - \frac{E}{V_0}\right) \left(\frac{E}{V_0}\right)^2}{P_0}$$

Com  $x = \frac{E}{V_0}$ , um gráfico da função  $\left(1 - \frac{E}{V_0}\right) \left(\frac{E}{V_0}\right)^2 = (1-x)x^2$  é mostrado abaixo no intervalo  $0 \leq \frac{E}{V_0} = x \leq 1$



$$y(x) = (1-x)x^2$$

Nesse intervalo a função é crescente desde zero até  $x > 0$  dado por

$$\frac{d}{dx}(1-x)x^2 = -3x^2 + 2x = -3x\left(x - \frac{2}{3}\right) = 0,$$

ou seja, para

$$x = \frac{E}{V_0} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow E = \frac{2}{3} 24 \text{ V} = 16 \text{ V} = E_{\max}.$$

Portanto,

$$\max \left\{ \frac{\left(1 - \frac{E}{V_0}\right) \left(\frac{E}{V_0}\right)^2}{P_0} \right\} = \frac{\left(1 - \frac{E_{\max}}{V_0}\right) \left(\frac{E_{\max}}{V_0}\right)^2}{P_{0\min}} = \frac{\left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2}{5} = \frac{4}{135}$$

e

$$L_{\min} = \frac{4}{135} \frac{V_0^2}{2f_c} = \frac{4}{135} \frac{(24)^2}{2(20 \times 10^3)} \cong 427 \mu\text{H}$$

6. Considere o conversor DC-DC elevador com  $E = 12 \text{ V}$ ;  $V_0 = 24 \text{ V}$ ;  $I_0 = 0.5 \text{ A}$ ;  $L = 150 \mu\text{H}$ ;  $C = 470 \mu\text{F}$ . Calcule o valor da ondulação na tensão de saída  $\Delta v_0 = (v_{0\max} - v_{0\min})/2$ .

### Solução

Inicialmente, verificamos o modo de condução do indutor

$$L = 150 \mu\text{H} = \frac{V_0^2}{2f_c} \frac{\left(1 - \frac{E}{V_0}\right) \left(\frac{E}{V_0}\right)^2}{P_0} = \frac{(24)^2(1 - 0.5)(0.5)^2}{2(20 \times 10^3)(0.5 \times 24)} \text{ H} = 150 \mu\text{H}$$

o que indica que o conversor opera no limiar entre condução contínua e descontínua.

Calculamos as correntes assumindo ondulação nula na tensão de saída (e também na de entrada). Essas correntes não diferem significativamente das verdadeiras se a ondulação na tensão for relativamente pequena, como se comprovará ao final.

Durante a parte do ciclo, com duração  $(1 - \delta)T = (1 - \delta)/f_c$ , em que o diodo conduz, a corrente através do capacitor é dada (assumindo corrente constante igual a  $I_0$  na carga) por

$$1 - \frac{v_0}{E} = \frac{E - v_0}{E} = \frac{I_0 E}{E - v_0} \quad i_C = i_L - I_0.$$

Nesse intervalo a corrente pelo indutor decresce linearmente de

$$i_{L\max} = \frac{I_0}{1 - \delta} + \frac{\delta E}{2f_c L} = I_0 \frac{V_0}{E} - \frac{\left(1 - \frac{E}{V_0}\right) E}{2f_c L} = \left(0.5(2) + \frac{(1 - 0.5)12}{2(20 \times 10^3)(150 \times 10^{-6})}\right) = 2 \text{ A}$$

Note que neste caso particular,

$$\langle i_L \rangle = \frac{I_0}{1 - \delta} = \frac{0.5}{0.5} \text{ A} = 1 \text{ A} = \frac{\delta E}{2f_c L} = \frac{0.5(12)}{2(20 \times 10^3)(150 \times 10^{-6})} \text{ A} = 1 \text{ A.}$$

$$i_{L\min} = 0.$$

Tomando a origem do tempo no instante em que a corrente no indutor atinge seu máximo (instante de abertura da chave) temos

$$i_L = i_{L\max} - (i_{L\max} - i_{L\min}) \frac{t}{(1 - \delta)T} = i_{L\max} \left(1 - \frac{t}{(1 - \delta)T}\right)$$

o que implica

$$i_C = i_{L\max} \left(1 - \frac{t}{(1 - \delta)T}\right) - I_0$$

A corrente no capacitor, que inicia positiva, inverte no instante  $t_0$  dado por

$$i_{L\max} \left( 1 - \frac{t_0}{(1-\delta)T} \right) - I_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow t_0 = \frac{i_{L\max} - I_0}{i_{L\max}} (1-\delta)T = \frac{2-0.5}{2} (1-0.5)T = 0.375T = \frac{0.375}{f_c}$$

Durante o intervalo de duração  $0.375T$  as placas do capacitor têm um incremento de carga dado por (pela expressão da área de um triângulo):

$$\Delta Q = \frac{1}{2} \frac{0.375}{f_c} (i_{L\max} - I_0)$$

o que corresponde a um incremento na tensão

$$2\Delta v_0 = \frac{\Delta Q}{C} = \frac{1}{2} \frac{0.375}{f_c C} (i_{L\max} - I_0) = \frac{1}{2} \frac{0.375}{(20 \times 10^3)(470 \times 10^{-6})} (2-0.5) V \cong 29.92 \text{ mV}$$

ou

$$\Delta v_0 \cong 15.0 \text{ mV}$$

De fato, a ondulação de tensão percentual

$$\frac{\Delta v_0}{V_0} \times 100\% \cong 0.063\%$$

é muito pequena, justificando nossas aproximações.

7. Para o conversor DC-DC redutor/elevador com  $8 \text{ V} \leq E \leq 40 \text{ V}$ ,  $V_0 = 15 \text{ V}$ ,  $f_c = 20 \text{ kHz}$ , e  $C = 470 \mu\text{F}$ , calcule o valor mínimo de  $L$  que assegura modo de condução contínua para  $P_0 \geq 2 \text{ W}$ .

### Solução

Para modo de condução contínua

$$i_{L\min} = \frac{I_0}{1-\delta} - \frac{\delta E}{2f_c L} > 0 \Leftrightarrow L > \frac{\delta(1-\delta)E}{2f_c I_0}$$

onde

$$\frac{V_0}{E} = \frac{\delta}{1-\delta} \Leftrightarrow \delta = \frac{1}{1+E/V_0}$$

e

$$L > \frac{(1-\delta)(1-\delta)V_0}{2f_c I_0} = \frac{(1-\delta)^2 V_0^2}{2f_c I_0 V_0} = \frac{V_0^2}{2f_c} \frac{\left(1 - \frac{1}{1+E/V_0}\right)^2}{P_0}$$

$$\max \left\{ \frac{\left(1 - \frac{1}{1+E/V_0}\right)^2}{P_0} \right\} = \frac{\left(1 - \frac{1}{1+E_{\max}/V_0}\right)^2}{P_{0\min}}$$

e

$$L_{\min} = \frac{V_0^2}{2f_c} \frac{\left(1 - \frac{1}{1+E_{\max}/V_0}\right)^2}{P_{0\min}} = \frac{(15)^2}{2(20 \times 10^3)} \frac{\left(1 - \frac{1}{1+40/15}\right)^2}{2} \text{ H} \cong 1.49 \text{ mH}$$

8. Calcule o valor da ondulação na tensão de saída  $\Delta v_0 = (v_{0\max} - v_{0\min})/2$ , para um conversor DC-DC redutor/elevador com  $E = 12 \text{ V}$ ;  $V_0 = 15 \text{ V}$ ;  $I_0 = 250 \text{ mA}$ ;  $L = 150 \mu\text{H}$ ;  $C = 470 \mu\text{F}$ ;  $f_c = 20 \text{ kHz}$ .

### Solução

Usando o teste desenvolvido no exercício 7,

$$L > \frac{V_0^2}{2f_c} \frac{\left(1 - \frac{1}{1+E/V_0}\right)^2}{P_0} \quad \text{para MCC}$$

$$L = 150 \mu\text{H} < \frac{V_0^2}{2f_c} \frac{\left(1 - \frac{1}{1+E/V_0}\right)^2}{P_0} = \frac{(15)^2}{2(20 \times 10^3)} \frac{\left(1 - \frac{1}{1+12/15}\right)^2}{(0.25)(15)} \cong 296 \mu\text{H}$$

de modo que, neste caso, o conversor opera no modo descontínuo e temos que analisar a operação nesse modo.

Observe que a fonte de entrada só fornece energia durante a parte do ciclo em que a chave está fechada. Essa energia é acumulada no indutor cuja corrente cresce de zero até  $i_{L\max}$  que obedece a relação

$$L \frac{i_{L\max}}{\delta T} = E \Rightarrow i_{L\max} = \frac{\delta ET}{L} = \frac{\delta E}{f_c L}$$

A energia acrescentada ao campo magnético associado ao indutor, no intervalo  $(t_1, t_2)$  é dada, em termos da corrente no indutor, por

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (i_L v_L) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left( i_L L \frac{di_L}{dt} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{L}{2} \frac{d(i_L^2)}{dt} \right) dt \\ &= \frac{L}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d(i_L^2)}{dt} \right) dt = \frac{L}{2} [i_L^2(t_2) - i_L^2(t_1)] \end{aligned}$$

de modo que, em cada ciclo, a energia transferida pela fonte, durante o intervalo em que a chave está fechada, é

$$\frac{L}{2} i_{L_{\max}}^2 = \frac{L}{2} \left( \frac{\delta E T}{L} \right)^2 = \boxed{\frac{\delta^2 E^2}{2 f_c^2 L}}$$

A energia média por ciclo ou potência média na entrada é, portanto, dada por

$$P_{ent} = \frac{\delta^2 E^2}{2 f_c^2 L} f_c = \frac{\delta^2 E^2}{2 f_c L}.$$

Para um conversor sem perdas, esta potência deve igualar ade saída:

$$P_{saída} = \langle v_0 i_0 \rangle = V_0 I_0,$$

assumindo baixa ondulação na tensão de saída e com  $I_0 = \langle i_0 \rangle$ .

Portanto,

$$\frac{\delta^2 E^2}{2 f_c^2 L} = V_0 I_0 \Rightarrow \boxed{\delta = \sqrt{\frac{2 V_0 I_0 f_c L}{E^2}}}$$



A corrente pelo diodo, em cada ciclo, começa com  $i_{L_{\max}}$  e decai a zero antes do final do ciclo. Durante esse período,

$$i_L = i_D = i_C + I_0 \Rightarrow i_C = i_D - I_0 = \boxed{i_{L_{\max}} - \frac{V_0}{L} t - I_0},$$

em que a origem do tempo foi escolhida de modo a coincidir com o instante em que o capacitor inicia a recarga. A carga do capacitor aumenta durante o tempo em que  $i_C$  é positivo, ou seja até o instante  $t = t_0$  dado por

$$i_{L_{\max}} - \frac{V_0}{L} t_0 - I_0 = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{i_{L_{\max}} - I_0}{V_0/L}$$

O incremento na carga do capacitor é

$$\Delta Q = \frac{1}{2} (i_{L_{\max}} - I_0) t_0 = \frac{(i_{L_{\max}} - I_0)^2}{2 V_0 / L},$$

e o incremento na tensão é

$$2 \Delta v_0 = \frac{\Delta Q}{C} = \frac{1}{2 V_0} \frac{L}{C} (i_{L_{\max}} - I_0)^2 = \frac{1}{2 V_0} \frac{L}{C} \left( \frac{\delta E}{f_c L} - I_0 \right)^2$$

Usando

$$\delta = \sqrt{\frac{2 V_0 I_0 f_c L}{E^2}} \Rightarrow \frac{\delta E}{f_c L} = \frac{E}{f_c L} \sqrt{\frac{2 V_0 I_0 f_c L}{E^2}} = \sqrt{\frac{2 V_0 I_0}{f_c L}}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \Delta v_0 &= \frac{1}{4 V_0} \frac{L}{C} \left( \sqrt{\frac{2 V_0 I_0}{f_c L}} - I_0 \right)^2 \\ &= \frac{1}{4(15)} \frac{150 \times 10^{-6}}{470 \times 10^{-6}} \left( \sqrt{\frac{2(15)(0.25)}{(20 \times 10^3)(150 \times 10^{-6})}} - 0.25 \right)^2 \cong 9.43 \text{ mV} \end{aligned}$$

9. Este exercício refere-se a um conversor DC-DC com isolação do tipo *flyback* (figura 4). A relação de espiras no transformador é 1:1 e o conversor deve operar com completa desmagnetização do núcleo ao final de cada ciclo de chaveamento, ou seja, o conversor deve operar no *Modo de Condução Descontínua*. A tensão de saída deve ser mantida fixa em  $V_0 = 12$  V. A tensão de entrada pode variar na faixa 12 V - 24 V, a potência de saída pode variar na faixa 6 W - 60 W, e a freqüência de chaveamento é  $f_c = 200$  kHz. Calcule o valor máximo da indutância de magnetização do transformador capaz de manter o modo descontínuo de operação.

### Solução

No modo de condução descontínua, durante o intervalo em que a chave permanece fechada o indutor acumula uma energia (veja solução do exercício 6),

$$W_L = \frac{L}{2} i_{L\max}^2 = \frac{L}{2} \left( \frac{\delta ET}{L} \right)^2 = \frac{\delta^2 E^2}{2f_c^2 L}$$

*Energia*

Como nenhuma energia é fornecida pela entrada durante o restante do período, a potência média na entrada do conversor é

$$P_{ent} = \frac{W_L}{T} = f_c W_L = \frac{\delta^2 E^2}{2f_c L},$$

e, como estamos desprezando perdas, essa potência deve igualar a potência de saída,

$$(*) \quad \frac{\delta^2 E^2}{2f_c L} = P_0.$$

Para que o conversor opere no modo de condução descontínua é necessário que a corrente no indutor se anule antes do término do ciclo. Adotando a origem do tempo no instante de abertura da chave,

$$i_L = i_{L\max} + \left( \frac{di_L}{dt} \right) t = i_{L\max} + \frac{V_L}{L} t = i_{L\max} - \frac{V_0}{L} t = \frac{\delta ET}{L} - \frac{V_0}{L} t,$$

em que se usou o fato de a relação de espiras ser 1:1. A expressão acima se anula em  $t = t_0$  dado por

$$t_0 = \frac{\delta ET}{V_0},$$

e obtemos a condição para operação em modo descontínuo:

$$\begin{aligned} \frac{\delta ET}{V_0} &< (1-\delta)T \Leftrightarrow \delta E < (1-\delta)V_0 \\ \Leftrightarrow \delta(E + V_0) &< V_0 \Leftrightarrow \delta < \frac{1}{1+E/V_0} \Leftrightarrow \delta^2 < \left( \frac{1}{1+E/V_0} \right)^2 \end{aligned}$$

ou, usando a relação (\*) acima,

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \frac{2f_c L P_0}{E^2} < \left( \frac{1}{1+E/V_0} \right)^2 \\ \Leftrightarrow L &< \left( \frac{1}{1+E/V_0} \right)^2 \frac{E^2}{2f_c P_0} \end{aligned}$$

*minimizar*

A função

$$\left(\frac{1}{1+E/V_0}\right)^2 E^2 = \left(\frac{1}{1+E/12}\right)^2 E^2$$

é crescente com  $E$ , para  $E$  na faixa dada, e portanto, o lado direito da desigualdade têm um mínimo dado por

$$\left(\frac{1}{1+E_{\min}/V_0}\right)^2 \frac{E_{\min}^2}{2f_c P_{0\max}} = \left(\frac{1}{1+12/12}\right)^2 \frac{12^2}{2(200 \times 10^3)(60)} \text{ H} = 1.5 \mu\text{H},$$

e, portanto,

$$L_{\max} = 1.5 \mu\text{H}$$

**10.** A fig. 5 mostra, esquematicamente, um conversor DC-AC. As chaves (que podem ser implementadas por IGBT's, por exemplo) são controladas de acordo com as formas de onda representadas no gráfico 1: a chave SA+ está fechada (SA- aberta) quando  $s_A = 1$ , e está aberta (SA- fechada) quando  $s_A = 0$ ; a chave SB+ está fechada (SB- aberta) quando  $s_B = 1$ , e está aberta (SB- fechada) para  $s_B = 0$ . Os sinais  $s_A$  e  $s_B$  são ondas quadradas simétricas (50% do tempo em nível alto), com frequência angular  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  e defasadas:  $s_B$  tem um atraso equivalente a um ângulo  $\gamma$  em relação a  $s_A$ , sendo  $0 < \gamma \leq \pi$ . Assuma que em  $t = 0$  o sinal  $s_A$  faz a transição de subida. A tensão DC de entrada é representada por uma fonte ideal com valor  $E$ . Assuma também que as chaves e os diodos sejam ideais.



gráfico 1:  $s_A$  (acima) e  $s_B$  em função do tempo.

- a) Represente gráficamente as tensões  $v_{AN} = v_A - v_N$ ,  $v_{BN} = v_B - v_N$  e a tensão na carga,  $v_0 = v_{AN} - v_{BN}$ .

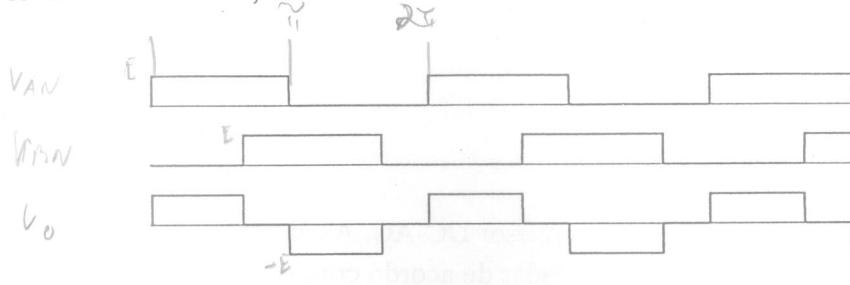
Solução:

a)

A figura abaixo mostra as formas de onda. As tensões  $v_{AN}$  e  $v_{BN}$  oscilam entre 0 e  $E$ . A tensão

$$v_0 = v_A - v_B = (v_A - v_N) - (v_B - v_N) = v_{AN} - v_{BN}$$

assume 3 valores:  $-E$ ,  $0$  e  $E$ .



De cima para baixo,  $v_{AN}$ ,  $v_{BN}$  e  $v_0$

b)

Se

$$s(t+T) = s(t)$$

temos

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t); \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

onde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \cos n\omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} z(\theta) \cos n\theta d\theta;$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \sin n\omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} z(\theta) \sin n\theta d\theta;$$

$$\omega t = \theta \quad \theta_0 = \omega t_0 \quad z(\theta) = s(\theta/\omega).$$

A função  $z(\theta)$  é periódica de período  $2\pi$ :

$$z(\theta + 2\pi) = s\left(\frac{\theta + 2\pi}{\omega}\right) = s\left(\frac{\theta}{\omega} + \frac{2\pi}{\omega}\right) = s\left(\frac{\theta}{\omega} + T\right) = s\left(\frac{\theta}{\omega}\right) = z(\theta).$$

Faça

$$z_1(\theta) = v_{AN}(\theta/\omega) \quad z_2(\theta) = v_{BN}(\theta/\omega) \Rightarrow v_0(t) = v_{AN}(t) - v_{BN}(t) = z_1(\omega t) - z_2(\omega t)$$

Seja

$$v_{AN}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \Leftrightarrow z_1(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta); \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Temos

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi E d\theta = E \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{E}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi E \cos n\theta d\theta = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi E \sin n\theta d\theta = E \frac{1 - \cos n\pi}{n\pi} = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{2E}{n\pi} & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$z_1(\theta) = \frac{E}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2E}{(2m-1)\pi} \sin((2m-1)\theta)$$

Observando que, com  $\theta = \omega t$ ,

$$z_2(\theta) = v_{BN}\left(\frac{\theta}{\omega}\right) = v_{BN}(t) = v_{AN}\left(t - \frac{\gamma}{2\pi}T\right) = v_{AN}\left(\frac{\theta - \gamma}{\omega}\right) = z_1(\theta - \gamma)$$

obtemos

$$z_2(\theta) = \frac{E}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2E}{(2m-1)\pi} \sin((2m-1)(\theta - \gamma))$$

e

$$z(\theta) = z_1(\theta) - z_2(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2E}{(2m-1)\pi} (\sin((2m-1)\theta) - \sin((2m-1)(\theta - \gamma))).$$

De

$$\sin(p+q) - \sin(p-q) = 2 \sin q \cos p,$$

fazendo,

$$\begin{aligned} p+q &= (2m-1)\theta \\ p-q &= (2m-1)(\theta - \gamma) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} p &= (2m-1)\left(\theta - \frac{\gamma}{2}\right) \\ q &= (2m-1)\frac{\gamma}{2}, \end{aligned}$$

obtemos

$$\sin((2m-1)\theta) - \sin((2m-1)(\theta - \gamma)) = 2 \sin\left(\frac{2m-1}{2}\gamma\right) \cos\left((2m-1)\left(\theta - \frac{\gamma}{2}\right)\right).$$

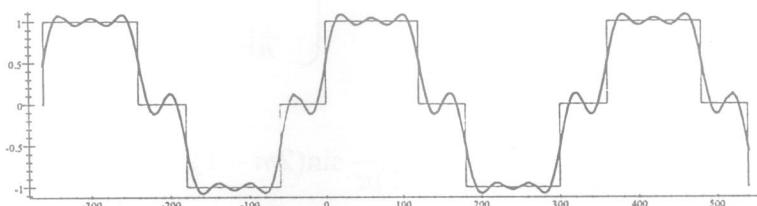
Portanto,

$$z(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4E}{(2m-1)\pi} \sin\left(\frac{2m-1}{2}\gamma\right) \cos\left((2m-1)\left(\theta - \frac{\gamma}{2}\right)\right)$$

ou

$$v_0(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4E}{(2m-1)\pi} \sin\left(\frac{2m-1}{2}\gamma\right) \cos\left((2m-1)\left(\omega t - \frac{\gamma}{2}\right)\right)$$

No gráfico abaixo, a aproximação de  $v_0$ , pelos 5 primeiros termos da série (até nona harmônica, inclusive), para o caso em que  $\gamma$  corresponde a  $120^\circ$ , superposta à onda original.



c)

$$v_0(t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m-1} \cos\left((2m-1)\omega t - (2m-1)\frac{\gamma}{2}\right),$$

onde

$$c_{2m-1} = \frac{4E}{(2m-1)\pi} \sin\left(\frac{2m-1}{2}\gamma\right)$$

Com  $m = 2$ , desejamos que

$$c_3 = \frac{4E}{3\pi} \sin\left(\frac{3}{2}\gamma\right) = 0.$$

Para o intervalo

$$0 < \gamma \leq 180,$$

o único valor de  $\gamma$  que satisfaz a relação acima é dado por

$$\frac{3}{2}\gamma = \pi$$

ou

$$\gamma = \frac{2\pi}{3}$$

que equivale a  $120^\circ$ .

Note que, com  $\gamma = 2\pi/3$ , para todo  $m$  tal que  $2m+1 = 3k$ , com  $k$  inteiro,

$$c_{3k} = \frac{4E}{3k\pi} \sin\left(\frac{3k}{2}\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4E}{3k\pi} \sin(k\pi) = 0,$$

ou seja, não há componentes de ordem múltipla de 3.

d)

$$((v_0)_{ef})^2 = V_0^2 = \frac{1}{T} \int_T v_0^2 dt = \frac{2}{T} \int_{T/2} v_0^2 dt = \frac{2}{T} \underbrace{\left[ E^2 \frac{\gamma}{2\pi} T \right]}_{= \frac{\gamma}{\pi} E^2}$$

ou

$$V_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} E$$

e)

$$v_{01} = \frac{4E}{(2m-1)\pi} \sin\left(\frac{2m-1}{2}\gamma\right) \cos\left((2m-1)\left(\omega t - \frac{\gamma}{2}\right)\right) \Big|_{m=1},$$

ou seja,

$$\underbrace{v_{01}}_{e} = \frac{4E}{\pi} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\gamma}{2}\right)$$

e

$$V_{01} = \frac{4E}{\pi\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

f)

$$DHT = \sqrt{\frac{V_0^2}{V_{01}^2} - 1} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} E\right)^2}{\left(\frac{4E}{\pi\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right)^2} - 1}$$

ou

$$DHT = \sqrt{\frac{\pi}{8} \frac{\gamma}{\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)} - 1}$$

11. Com referência à questão 10, assuma que a carga é um circuito RL série (com resistência  $R$  e indutância  $L$ ).

Com  $\gamma = 120^\circ$ , determine:

- a série de Fourier associada à corrente na carga,  $i_0$ ;
- a distorção harmônica total de  $i_0$ .
- Assumindo  $L/R$  suficientemente grande para que a corrente  $i_0$  possa ser aproximada por sua componente fundamental, obtenha a potência média, aproximada, na carga.

**Solução:**

a)

Da questão 1,

$$v_0(t) = \sum_{m=1}^N \frac{4E}{(2m-1)\pi} \sin\left(\frac{2m-1}{2}\gamma\right) \cos\left((2m-1)(\omega t - \frac{\gamma}{2})\right)$$

$$v_0(t) = \sum_n \pm \sqrt{2} V_{0n} \cos(n\omega t - \phi_n) \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

onde  $V_{0n}$  representa o valor eficaz da harmônica de ordem  $n$ ,

$$V_{0n} = \frac{4E}{n\pi\sqrt{2}} \left| \sin\left(\frac{n}{2}\gamma\right) \right|$$

e

$$\phi_n = \frac{n\gamma}{2} \quad \pm = \begin{cases} + & \text{para } \sin\left(\frac{n}{2}\gamma\right) \geq 0 \\ - & \text{para } \sin\left(\frac{n}{2}\gamma\right) < 0 \end{cases}$$

Podemos escrever

$$\pm \sqrt{2} V_{0n} \cos(n\omega t - \phi_n) = \pm \operatorname{Re}(\sqrt{2} V_{0n} e^{-j\phi_n} e^{jn\omega t})$$

onde, o termo

$$V_{0n} e^{-j\phi_n} = \bar{V}_{0n}$$

representa o fasor, em valor eficaz, da tensão (ou o seu negativo). Se a tensão  $\sqrt{2} V_{0n} \cos(n\omega t - \phi_n)$ , isoladamente, fosse aplicada à carga, obteríamos a corrente

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\sqrt{2} \bar{V}_{0n}}{R + jn\omega L} e^{jn\omega t}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\sqrt{2} V_{0n} e^{-j\phi_n} e^{jn\omega t}}{R + jn\omega L}\right) = \operatorname{Re}(\sqrt{2} \bar{I}_{0n} e^{jn\omega t})$$

onde, o fasor (eficaz) associado a essa corrente é dado por

$$\bar{I}_{0n} = \frac{V_{0n} e^{-j\phi_n}}{R + jn\omega L}$$

Temos

$$R + jn\omega L = \sqrt{R^2 + (n\omega L)^2} e^{j\delta_n} \quad \delta_n = \tan^{-1}\left(\frac{n\omega L}{R}\right)$$

e

$$\bar{I}_{0n} = \frac{V_{0n}}{\sqrt{R^2 + (n\omega L)^2}} e^{-j(\phi_n + \delta_n)}$$

Como a carga é um circuito linear vale superposição, ou seja,

$$\begin{aligned} i_0 &= \sum_n \pm \operatorname{Re}(\sqrt{2} \bar{I}_{0n} e^{jn\omega t}) = \sum_n \pm \operatorname{Re}\left(\frac{\sqrt{2} V_{0n}}{\sqrt{R^2 + (n\omega L)^2}} e^{-j(\phi_n + \delta_n)} e^{jn\omega t}\right) \\ &= \sum_n \pm \frac{\sqrt{2} V_{0n}}{\sqrt{R^2 + (n\omega L)^2}} \cos(n\omega t - \phi_n - \delta_n) \\ i_0 &= \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{4E}{n\pi \sqrt{R^2 + (n\omega L)^2}} \sin\left(\frac{n\gamma}{2}\right) \cos\left(n\omega t - \frac{n\gamma}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{n\omega L}{R}\right)\right) \end{aligned}$$

b)

Uma forma de calcular a DHT da corrente é

$$DHT = \sqrt{\sum_{n=1, \text{ ímpar}} \left(\frac{I_{0n}}{I_{01}}\right)^2}$$

onde  $I_{0n}$  representa o valor eficaz da harmônica de ordem  $n$ .

$$\left(\frac{I_{0n}}{I_{01}}\right)^2 = \left( \frac{\frac{4E}{n\pi \sqrt{R^2 + (n\omega L)^2}} \sin\left(\frac{n\gamma}{2}\right)}{\frac{4E}{\pi \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \right)^2 = \frac{1+k^2}{\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \frac{\sin^2\left(\frac{n\gamma}{2}\right)}{n^4(1+k^2/n^2)}$$

onde

$$k = \frac{R}{\omega L}$$

$$DHT = \sqrt{\frac{1+k^2}{\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)}} \sqrt{\sum_{n=1, \text{ ímpar}} \frac{\sin^2\left(\frac{n\gamma}{2}\right)}{n^4(1+k^2/n^2)}}$$

Com valores específicos de  $\gamma$  e  $k$ , esta expressão pode ser avaliada numéricamente, usando um número limitado de termos na série.

Consideraremos a seguir apenas o caso

$$\left(\frac{k}{3}\right)^2 \ll 1 \Leftrightarrow \left(\frac{R}{3\omega L}\right)^2 \ll 1$$

em que vale aproximadamente

$$\sum_{n=1, \text{ ímpar}} \frac{\sin^2\left(\frac{n\gamma}{2}\right)}{n^4(1+k^2/n^2)} \approx \sum_{n=1, \text{ ímpar}} \frac{\sin^2\left(\frac{n\gamma}{2}\right)}{n^4}$$

sendo último termo uma função só de  $\gamma$ . A função

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{(2m+1)^4}$$

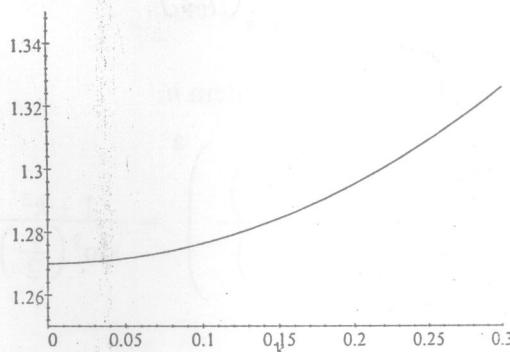
avaliada para numéricamente para  $\gamma = 120^\circ$  nos dá

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{(2m+1)^4} \approx 0.0110$$

e

$$DHT \approx 0.0110 \sqrt{\frac{1}{\sin^2(\pi/3)}} \sqrt{1+k^2} \approx (1.270 \sqrt{1+k^2}) \times 10^{-2}$$

O gráfico abaixo representa a DHT em percentagem, para valores de  $k$  razoavelmente pequenos. Note que para  $k < 0.3$  temos  $(k/3)^2 = (0.3/3)^2 = 0.01 \ll 1$  justificando a aproximação  $(k/3)^2 \ll 1$ . Note ainda que para essa faixa de valores de  $k = R/(\omega L)$  o valor da DHT não difere apreciavelmente do valor limite para  $k = 0$  (carga indutiva) aproximadamente igual a 1.27 %.



c)5

A potência média na carga pode ser avaliada por

$$P = \sum_{n \text{ ímpar}} RI_{0n}^2 = \sum_{n \text{ ímpar}} R \left( \frac{4E}{n\pi\sqrt{2} \sqrt{R^2 + (n\omega L)^2}} \sin\left(\frac{n}{2}\gamma\right) \right)^2$$

Temos

$$R \left( \frac{4E}{n\pi\sqrt{2}\sqrt{R^2 + (n\omega L)^2}} \sin\left(\frac{n}{2}\gamma\right) \right)^2 = \frac{E^2}{R} \frac{8k^2}{\pi^2} \frac{\sin^2\left(\frac{n}{2}\gamma\right)}{n^4 \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)}$$

e

$$P = \frac{E^2}{R} \frac{8k^2}{\pi^2} \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{\sin^2\left(\frac{n}{2}\gamma\right)}{n^4 \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)}$$

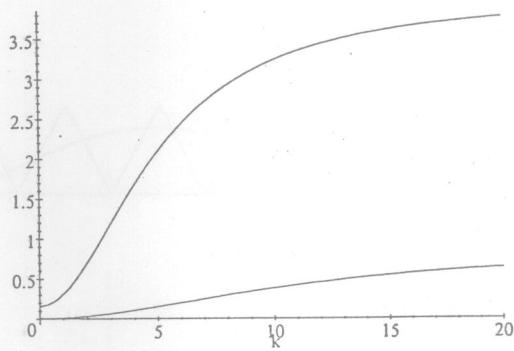
A relação entre o termo de ordem  $n$  e o termo de ordem 1 é

$$\begin{aligned} Q(n, k) &= \frac{\frac{\sin^2\left(\frac{n}{2}\gamma\right)}{n^4 \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)}}{\frac{\sin^2(\gamma/2)}{1 + k^2}} = \frac{\sin^2\left(\frac{n}{2}\gamma\right)}{\sin^2(\gamma/2)} \frac{1 + k^2}{n^4 \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)} \\ &= \frac{\sin^2(n\pi/3)}{\sin^2(\pi/3)} \frac{1 + k^2}{n^4 \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)} \leq \frac{1 + k^2}{n^4 \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)} \quad \text{para } \gamma = 120^\circ \end{aligned}$$

Porque pode ser verificado que

$$\frac{\sin^2(n\pi/3)}{\sin^2(\pi/3)} = \begin{cases} 0 & n \text{ múltiplo de 3} \\ 1 & n \text{ não múltiplo de 3} \end{cases}$$

O gráfico abaixo mostra os valores  $Q(n, k)$  multiplicados por 100, para os primeiros 2 inteiros maiores que 1, ímpares não múltiplos de 3, ou seja, 5 e 7



Isso dá uma boa idéia de que a somatória é dominada pelo primeiro termo da série, ou seja,

$$P \cong \frac{E^2}{R} \frac{8k^2}{\pi^2(1+k^2)} \sin^2(\gamma/2) = \frac{E^2}{R} \frac{8k^2}{\pi^2(1+k^2)} \sin^2(\pi/3) = \frac{6}{\pi^2} \frac{E^2 k^2}{R(1+k^2)}$$

que é a potência contida na fundamental da corrente, ou seja para o cálculo da potência, o

conteúdo harmônico da corrente na carga pode ser ignorado. O resultado acima, no entanto, vale mesmo no caso em que a corrente apresenta significativa distorção harmônica (note que nem se fez a hipótese de  $k$  ser muito pequeno).

Para o caso

$$k = \frac{R}{\omega L} \ll 1$$

$$P \approx \frac{6}{\pi^2} \frac{E^2 \left( \frac{R}{\omega L} \right)^2}{R} = \frac{6}{\pi^2} \left( \frac{R}{\omega L} \right)^2 \frac{E^2}{R} \quad \gamma = 120^\circ \text{ e } \frac{R}{\omega L} \ll 1$$

**12.** Inversor PWM de 3 níveis. Usando a mesma estrutura da fig. 5, mas empregando uma estratégia de controle das chaves diferente daquela da questão 10, é possível obter uma tensão  $v_0$ , da forma mostrada na parte inferior do gráfico 2, abaixo. O gráfico mostra também a relação entre a tensão  $v_0$  e a tensão de referência,

$$v_R(t) = A_R \sin \omega_0 t,$$

cujo módulo, comparado com a onda triangular (portadora),  $v_T(t)$ , controla a largura dos pulsos: se a frequência da onda triangular é bem maior que a da referência, a largura dos pulsos é essencialmente proporcional ao módulo de  $v_R$ , amostrado, por exemplo, nos pontos onde a onda triangular se anula. A vantagem de usar esse esquema mais complexo é que o conteúdo harmônico em  $v_0$  se concentra em torno dos múltiplos da freqüência  $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$  da portadora, simplificando sua remoção por filtragem (assumindo que  $f_p \gg f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ ). O gráfico ilustra o caso síncrono com

$$m_f = \frac{f_p}{f_0} = 2k \quad (k \text{ inteiro positivo})$$

Embora, para facilidade de visualização, a figura mostre o caso  $m_f = 8$ , consideraremos o caso  $m_f = 32$ .

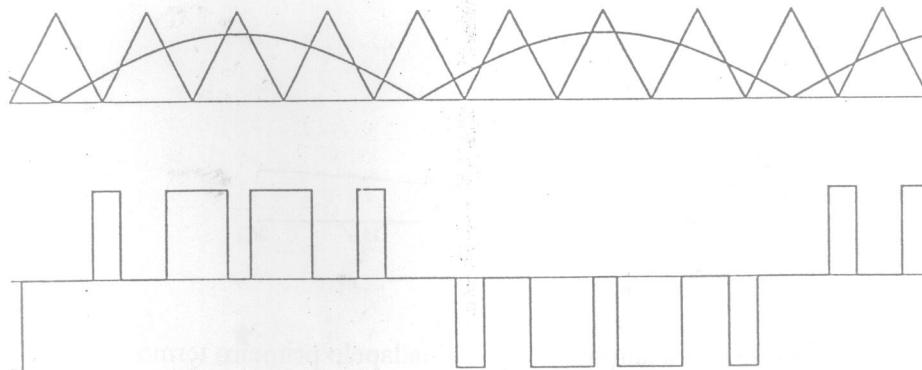


gráfico 2: formas de onda para inversor PWM senoidal, síncrono.

a) A tensão  $v_0$  é da forma

$$v_0 = \sum_{n \text{ ímpar}} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

Com  $E$  representando a tensão da fonte DC, e com o índice de modulação de amplitude

$$m_a = \frac{\text{valor de pico de } v_R}{\text{valor de pico de } v_T} = 0.8, \text{ obteve-se, em simulação, os seguintes coeficientes:}$$

$$b_1 = 0.813E \cong m_a E$$

|                   |       |       |        |        |        |        |       |        |       |       |       |
|-------------------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|-------|-------|-------|
| $n$               | 29    | 31    | 33     | 35     | 59     | 61     | 63    | 65     | 67    | 69    | 71    |
| $\frac{b_n}{b_1}$ | 0.180 | 0.390 | -0.381 | -0.185 | -0.095 | -0.137 | 0.127 | -0.139 | 0.132 | 0.109 | 0.028 |

|                   |       |       |        |       |        |       |        |        |
|-------------------|-------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|--------|
| $n$               | 89    | 91    | 93     | 95    | 97     | 99    | 101    | 103    |
| $\frac{b_n}{b_1}$ | 0.072 | 0.066 | -0.079 | 0.043 | -0.038 | 0.072 | -0.069 | -0.075 |

Os coeficientes com  $n < 103$  que não aparecem na lista apresentam amplitudes desprezíveis ( $b_n/b_1 < 0.025$ ).

Para uma carga RL com  $L = \frac{R}{5\omega_0}$  determine a distorção harmônica na corrente de carga,  $i_0$  (levando em conta apenas as componentes com os valores de  $n$  listados acima).

## Solução

A DHT da corrente  $i_0$  pode ser definida por

$$DHT = \frac{I_{0d}}{I_{01}} = \frac{\sqrt{I_0^2 - I_{01}^2}}{I_{01}} = \frac{\sqrt{\sum_{n=1} I_{0n}^2}}{I_{01}} = \sqrt{\sum_{n=1} \left(\frac{I_{0n}}{I_{01}}\right)^2}$$

onde  $I_0$  é o valor eficaz da corrente total,  $I_{0d}$  é o valor eficaz da corrente de distorção,  $i_{0d} = i_0 - i_{01}$ , onde  $i_{01}$  representa a componente fundamental e  $I_{0n}$  representa o valor eficaz da harmônica de ordem  $n$ .

Em termos de fasores a relação entre tensão e corrente para as componentes de frequência  $\omega_n = n\omega_0$  é dada por

$$\begin{aligned} \bar{V}_{0n} &= (R + j\omega_n L) \bar{I}_{0n} \\ \Rightarrow \bar{I}_{0n} &= \frac{1}{1 + \frac{j\omega_n L}{R}} \frac{\bar{V}_{0n}}{R} = \frac{1}{1 + \frac{jn\omega_0 L}{R}} \frac{\bar{V}_{0n}}{R} = \frac{1}{1 + \frac{jn}{5}} \frac{\bar{V}_{0n}}{R} \end{aligned}$$

Por convenção, a harmônica de ordem  $n$  da tensão,  $v_{0n}$ , se relaciona com o fasor  $\bar{V}_{0n} = V_{0n} \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right)$  através de

$$v_{0n} = b_n \sin \omega_n t = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\bar{V}_{0n} \exp(j\omega_n t)) \\ = \sqrt{2} \operatorname{Re}\left(V_{0n} \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right) \exp(j\omega_n t)\right) = \sqrt{2} V_{0n} \sin \omega_n t$$

onde  $V_{0n} = \frac{b_n}{\sqrt{2}}$  representa o valor eficaz da tensão na carga. Considerações semelhantes se aplicam ao fasor da harmônica de ordem da corrente,  $\bar{I}_{0n}$ . Em particular, o valor eficaz da componente de ordem  $n$  da corrente é dada por

$$I_{0n} = \left| \frac{1}{1 + \frac{jn}{5}} \frac{\bar{V}_{0n}}{R} \right| = \left| \frac{1}{1 + \frac{jn}{5}} \right| \frac{V_{0n}}{R}$$

e

$$\frac{I_{0n}}{I_{01}} = \frac{\left| \frac{1}{1 + \frac{jn}{5}} \right| \frac{b_n}{\sqrt{2}}}{\left| \frac{1}{1 + \frac{j}{5}} \right| \frac{b_1}{\sqrt{2}}} = \frac{\left| \frac{1}{1 + \frac{jn}{5}} \right|}{\left| \frac{1}{1 + \frac{j}{5}} \right|} \frac{b_n}{b_1} = \frac{\sqrt{26}}{n \sqrt{1 + \left(\frac{5}{n}\right)^2}} \frac{b_n}{b_1}$$

e

$$\frac{I_{0n}}{I_{01}} = \frac{\sqrt{26}}{n \sqrt{1 + \left(\frac{5}{n}\right)^2}} \frac{b_n}{b_1} \cong \frac{\sqrt{26}}{n} \frac{b_n}{b_1} \quad \text{para } n \geq 29$$

usando a aproximação acima

$$DHT \cong \sqrt{\sum_{\text{os } n \text{ da tabela}} \frac{26}{n^2} \left( \frac{b_n}{b_1} \right)^2} = \sqrt{26} \sqrt{\sum_{\text{os } n \text{ da tabela}} \left( \frac{b_n/b_1}{n} \right)^2}$$

Usando os valores da tabela,

$$\sum \left( \frac{b_n/b_1}{n} \right)^2 = 3.84627 \times 10^{-4}$$

e

$$THD = \sqrt{26} \sqrt{3.84627 \times 10^{-4}} \cong 0.100 \quad (\text{ou } 10\%)$$

## Diagramas dos Circuitos

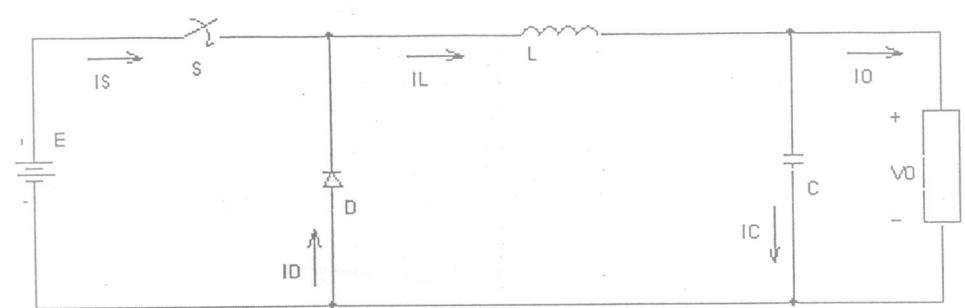


Fig. 1: conversor redutor de tensão

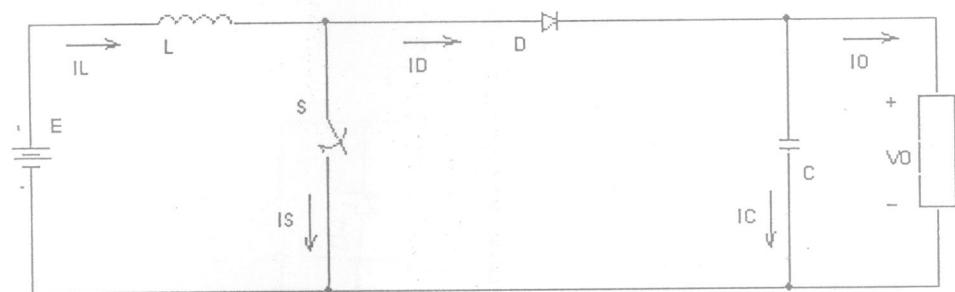


Fig. 2: conversor elevador de tensão

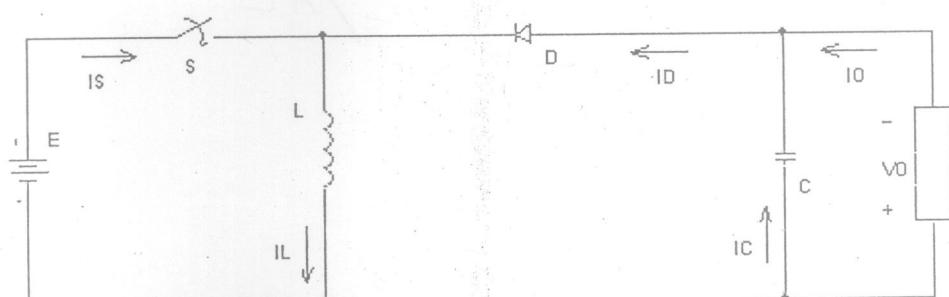


Fig. 3: conversor elevador/redutor de tensão

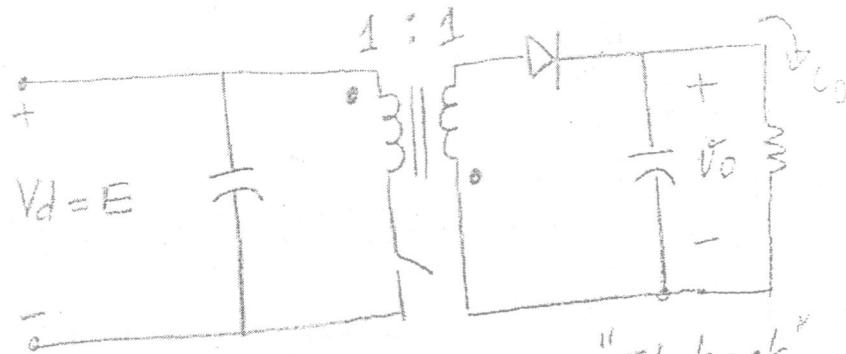


fig. 4 - Conv. DC/DC "Flyback"

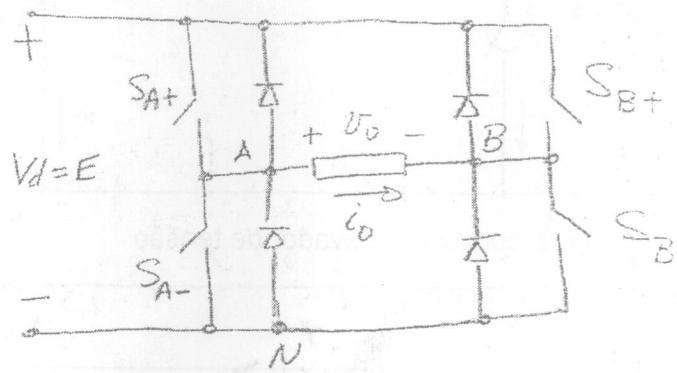


fig. 5 Conv. DC/AC