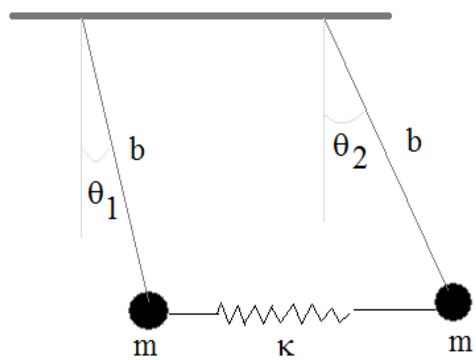
F 415 - Mecânica Geral II - Prof. Eduardo Granado
Prova III - 22/10/2012

1) Considere um cone homogêneo de massa *M* com algura *h* e cuja base tem raio *R*.

(a) Calcule o tensor de inércia *{J}* para um sistema de eixos com a origem na ponta do cone, e eixo x_3 paralelo ao seu eixo de simetria. (2.0)

(b) Calcule o tensor de inércia *{I}* para um sistema de eixos paralelo ao do ítem (a), com a origem no centro de massa. (1.5)

2) Considere o problema de dois pêndulos de massas *m* e comprimento *b* acoplados entre si por uma mola de constante κ. Assuma pequenas oscilações.



(a) Encontre as energias cinéticas e potencial do sistema em função das coordenadas angulares θ_1 e θ_2 e suas velocidades. (1.0)
(b) Encontre as autofrequências de vibração. (1.0)
(c) Descreva as coordenadas normais do sistema em função de θ_1 e θ_2. Desenhe os modos normais de vibração do sistema, justificando detalhadamente. (1.0)

3) Uma massa M se move horizontalmente ao longo de um trilho sem atrito. Um pêndulo de massa *m* é pendurado na massa M.

(a) Defina coordenadas relevantes para o problema, e encontre a energia cinética e potencial. Faça as aproximações apropriadas para um potencial harmônico. (1.0)

(b) Encontre as autofrequências do sistema. (1.5)

(c) Encontre os modos normais de vibração em função das coordenadas generalizadas escolhidas em (a). Desenhe os modos normais, justificando detalhadamente. (1.0)

FORMULÁRIO

$$I_{ij}=\sum_{\alpha} m_{\alpha}(\delta_{ij}\sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i}x_{\alpha,j}) \quad , \quad J_{ij}=\sum_{\alpha} m_{\alpha}(\delta_{ij}\sum_k X_{\alpha,k}^2 - X_{\alpha,i}X_{\alpha,j}) \quad ,$$

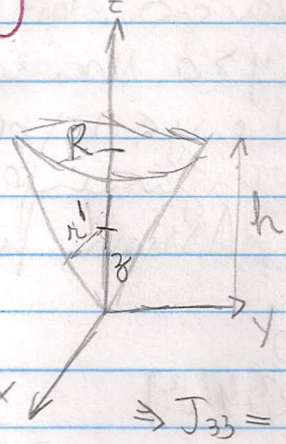
$$I_{ij}=J_{ij}-M\,(a^2\delta_{ij}-a_i a_j)$$

$$T\equiv\frac{1}{2}\sum_{i,j} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \quad , \quad U\equiv\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}q_i q_j \quad , \quad m_{ij}\equiv\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad , \quad A_{ij}\equiv\frac{\partial^2 T}{\partial q_i \partial q_j}$$

$$\sum_j (A_{jk}-\omega^2 m_{jk})a_j=0$$

F-415 - PROVA III - GABARITO

1



(a) $J_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i}\, x_{\alpha,j}\right)$

Para sistemas contínuos $\sum_\alpha m_\alpha \to \iiint_V \rho\, dV$

Portanto, temos:

$$J_{33} = \iiint_V \rho\,(x^2+y^2)\,dV$$

$$\Rightarrow J_{33} = \int_0^h \int_0^{r'} \int_0^{2\pi} \rho\, r^2 \cdot (r\, d\alpha)\, dr\, dz$$

$$\Rightarrow J_{33} = 2\pi\rho \int_0^h \int_0^{r'} r^3\, dr\, dz$$

Mas $\frac{R}{r'} = \frac{h}{z} \Rightarrow r' = \frac{R}{h} z$

$$\Rightarrow J_{33} = 2\pi\rho \int_0^h \frac{r^4}{4}\Big|_0^{\frac{R}{h}z} dz = \frac{\pi\rho}{2}\frac{R^4}{h^4}\int_0^h z^4\, dz = \frac{\pi\rho R^4 h}{10}$$

Lembrando que $M = \iiint_M \rho\, dV = \int_0^h \int_0^{\frac{R}{h}z} \int_0^{2\pi} \rho\,(r\, d\alpha)\, dr\, dz$

$$\Rightarrow M = 2\pi\rho\frac{R^2}{h^2}\int_0^h \frac{z^2}{2}\, dz = \frac{\pi\rho R^2 h}{3}$$

Portanto $\boxed{J_{33} = \frac{3}{10} M R^2}$

Por simetria, temos que $J_{11} = J_{22} = \frac{J_{11} + J_{22}}{2}$

$$\Rightarrow J_{11} = \frac{1}{2}\iiint_V \rho\left[(y^2+z^2) + (x^2+z^2)\right] dV = \frac{1}{2}\iiint_V \rho\left[x^2+y^2\right] dV + \iiint \rho z^2\, dV$$

$$= \frac{1}{2} J_{33} + \int_0^h \int_0^{\frac{R}{h}z} \int_0^{2\pi} \rho\, z^2\, (r\, d\alpha)\, dr\, dz = \frac{1}{2} J_{33} + 2\pi\rho \int_0^h z^2 \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\frac{R}{h}z} dz$$

$$= \frac{J_{33}}{2} + \pi\rho\frac{R^2}{h^2}\int_0^h z^4\, dz = \frac{J_{33}}{2} + \frac{\pi\rho R^2 h^3}{5} = \frac{3}{20} M R^2 + \frac{3}{5} M h^2$$

$$\Rightarrow J_{11} = J_{22} = \frac{3M}{20}\left(R^2 + 4h^2\right)$$

Além disso: $J_{12} = -\iiint_V \rho x y \, dV = 0$, pois podemos separar o plano xy em quadrantes cujas contribuições, às integrais se cancelarão. Por exemplo, a contribuição com $x>0$ e $y>0$ será cancelada pela contribuição com $x>0$ e $y<0$, pois o produto $x.y$ troca de sinal. O mesmo argumento vale para os demais termos cruzados. Assim, ficamos com

$$\{J\} = \begin{Bmatrix} \frac{3M}{20}(R^2+4h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3M}{20}(R^2+4h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}MR^2 \end{Bmatrix}$$

(e) Primeiramente, temos que encontrar a posição do centro de massa. Por simetria, temos que $X_{cm} = Y_{cm} = 0$. A altura do c.m. é dada por:

$$Z = \frac{1}{M}\iiint_V \rho z \, dV = \frac{\rho}{M}\int_0^h \int_0^{\frac{R}{h}z} \int_0^{2\pi} z (r \, d\alpha) dr \, dz$$

$$= \frac{2\pi\rho}{M}\int_0^h z \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\frac{R}{h}z} dz = \frac{\pi\rho}{M}\frac{R^2}{h^2}\int_0^h z^3 dz = \frac{\pi\rho}{4M}R^2 h^2$$

$$Z = \frac{3}{4}\frac{M}{M}h = \frac{3h}{4} \;//$$

Para encontrarmos $\{I\}$, utilizamos o teorema dos eixos paralelos, onde $\vec{a} = (0, 0, 3h/4)$.

$$I_{ij} = J_{ij} - M(a^2\delta_{ij} - a_i a_j)$$

$$I_{11} = J_{11} - M(a_2^2 + a_3^2) = \frac{3M}{20}(R^2+4h^2) - M\frac{9h^2}{16}$$

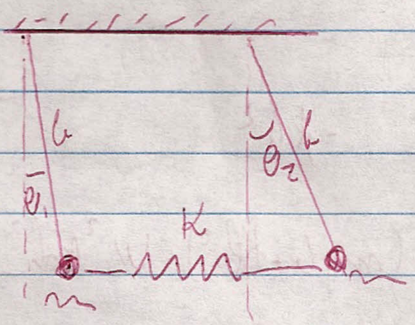
$$= \frac{3MR^2}{20} + \frac{3Mh^2}{5} - \frac{9Mh^2}{16} = \frac{3MR^2}{20} + \frac{(48-45)}{80}Mh^2 = \frac{3MR^2}{20} + \frac{3Mh^2}{80}$$

$$\Rightarrow I_{11} = I_{22} = \frac{3M}{80}(4R^2 + h^2) \; ; \; I_{33} = J_{33} \; ; \; I_{ij} = J_{ij} = 0 \text{ p/ } i \neq j.$$

Assim, ficamos com:

$$\{I\} = \begin{Bmatrix} \frac{3M}{80}(4R^2+h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3M}{80}(4R^2+h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}MR^2 \end{Bmatrix}$$

(2)



a) $T = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m(l\dot{\theta}_2)^2 = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$ //

$V = -mgl(\cos\theta_1 - 1) - mgl(\cos\theta_2 - 1) + \frac{1}{2}k(l\sin\theta_2 - l\sin\theta_1)^2$

$\simeq mgl\frac{\theta_1^2}{2} + mgl\frac{\theta_2^2}{2} + \frac{1}{2}kl^2(\theta_2 - \theta_1)^2$

$= \frac{1}{2}(mgl + kl^2)\theta_1^2 + \frac{1}{2}(mgl + kl^2)\theta_2^2 - kl^2\theta_1\theta_2$

b) $m_{11} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}_1^2} = ml^2 = m_{22}$; $m_{12} = m_{21} = 0$

$A_{11} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} = mgl + kl^2 = A_{22}$; $A_{12} = -kl^2$

Para encontrar as autofrequências, temos

$|A_{jk} - \omega^2 m_{jk}| = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} (mgl + kl^2) - \omega^2 ml^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & (mgl + kl^2) - \omega^2 ml^2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow [(mgl + kl^2) - \omega^2 ml^2]^2 = (kl^2)^2$

$\Rightarrow mgl + kl^2 - \omega^2 ml^2 = \pm kl^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{ml^2}[mgl + kl^2 \pm kl^2]$

$\omega_1^2 = g/l$ // ; $\omega_2^2 = \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}$ //

(c) I) $w_1^2 = g/l$

Assim $\begin{bmatrix} (mgl + Kl^2) - w_1^2 ml^2 & -Kl^2 \\ -Kl^2 & (mgl + Kl^2) - w_1^2 ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} Kl^2 & -Kl^2 \\ -Kl^2 & Kl^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \Rightarrow a_{11} = a_{21}$

II) $W_2^2 = g/l + 2K/m$

$\begin{bmatrix} -Kl^2 & -Kl^2 \\ -Kl^2 & -Kl^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow a_{12} = -a_{22}$

$\theta_1 = a_{11} e^{iw_1 t} + a_{12} e^{iw_2 t} = a_{11}\eta_1 - a_{22}\eta_2$

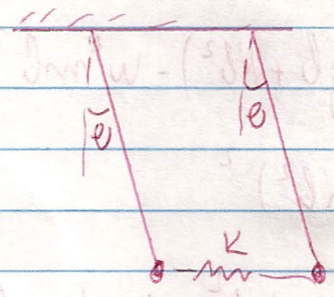
$\theta_2 = a_{21} e^{iw_1 t} + a_{22} e^{iw_2 t} \quad a_{11}\eta_1 + a_{22}\eta_2$

$\Rightarrow \eta_1 = \frac{1}{2a_{11}}(\theta_1 + \theta_2)$ e $\eta_2 = \frac{1}{2a_{22}}(\theta_2 - \theta_1)$

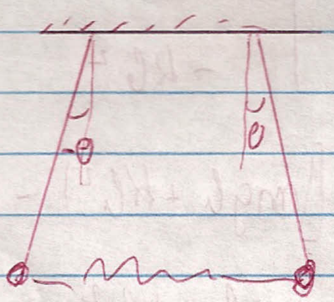
O modo η_1 estará ativo quando $\eta_2 = 0 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$

O modo η_2 ocorre qdo $\eta_1 = 0 \Rightarrow \theta_2 = -\theta_1$

Ou seja:

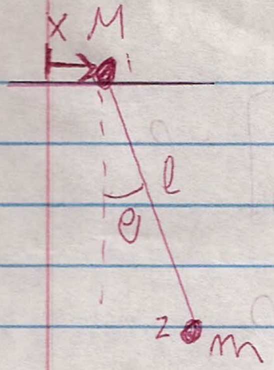


Modo I: $w_1^2 = g/l$



Modo II: $w_2^2 = g/l + 2K/m$

(3)



(a) $v_{1x} = \dot{x}$; $v_{1y} = 0$

$$v_{2x} = \dot{x} + \frac{d}{dt}(l\sin\theta) \simeq \dot{x} + l\dot{\theta}$$

$$v_{2y} = \frac{d}{dt}(-l\cos\theta) = -l\sin\theta\,\dot{\theta} \simeq -l\theta\dot{\theta} \simeq 0$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{x} + l\dot{\theta}\right]^2 = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}$$

$$V = mgl(1-\cos\theta) \simeq \frac{1}{2}mgl\theta^2$$

(b) $$\{A\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mgl \end{Bmatrix}$$

$$\{m\} = \begin{Bmatrix} M+m & ml \\ ml & ml^2 \end{Bmatrix}$$

$$|A_{jk} - w^2 m_{jk}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -(M+m)w^2 & -mlw^2 \\ -mlw^2 & mgl - ml^2w^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -(M+m)w^2\left[mgl - ml^2w^2\right] - (mlw^2)^2 = 0$$

$$w^2\left[mgl - ml^2w^2 + \frac{m^2}{M+m}l^2w^2\right] = 0$$

$\boxed{w_1 = 0}$; $mgl - ml^2w_2^2 + \frac{m^2l^2w_2^2}{M+m} = 0$

$$\Rightarrow mgl - ml^2w_2^2\left[1 - \frac{m}{M+m}\right] = 0 \Rightarrow mgl - \frac{Mml^2w_2^2}{M+m} = 0$$

$$\Rightarrow w_2^2 = \frac{g}{l}\left(\frac{M+m}{M}\right)$$

c) $w_I = 0$: $\begin{bmatrix} -(M+m)\cdot 0 & -ml\cdot 0 \\ -ml\cdot 0 & mgl - ml^2\cdot 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow a_{21} = 0$

$W_{II}^2 = \frac{M+m}{M}\frac{g}{l}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{(M+m)^2}{M}\frac{g}{l} & -ml\frac{(M+m)}{M} g/l \\ -mg\frac{(M+m)}{M}\frac{g}{l} & mgl - ml^2\frac{(M+m)}{M}\frac{g}{l} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow -\frac{(M+m)^{\cancel{2}}}{\cancel{M}}\frac{\cancel{g}}{\cancel{l}} a_{12} = ml\frac{\cancel{(M+m)}}{\cancel{M}}\frac{\cancel{g}}{\cancel{l}} a_{22} \Rightarrow a_{12} = -\frac{ml}{M+m} a_{22}$

$\Rightarrow x = a_{11} e^{iw_1 t} + a_{12} e^{iw_2 t} \quad \Rightarrow x = a_{11}\eta_1 - \frac{ml}{M+m} a_{22}\eta_2$

$\theta = a_{21} e^{iw_1 t} + a_{22} e^{iw_2 t} \quad \theta = a_{22}\eta_2$

$\Rightarrow \boxed{\eta_2 = \theta(t)/a_{22}}$

$\cancel{\eta_1 = x + \frac{M+m}{ml}\theta} = x + \frac{ml}{M+m}\theta = a_{11}\eta_1$

$\Rightarrow \boxed{\eta_1 = \frac{1}{a_{11}}\left[x + \frac{ml}{M+m}\theta\right]}$

O modo I ($w_I = 0$) é ativado quando $\eta_2 = 0 \Rightarrow \theta(t) = 0$

O modo II ocorre quando $\eta_1(t) = 0 \Rightarrow x(t) = -\frac{ml}{M+m}\theta(t)$

(Modo I)

(Modo II)