10.11 BSP

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{spec} A = ?$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & -2 \\ 1 & \lambda+5 & -2 \\ -2 & 2 & \lambda+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -2 \\ \lambda+6 & \lambda+5 & -2 \\ 0 & 2 & \lambda+4 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda+5 & -2 \\ 2 & \lambda+4 \end{vmatrix} - (\lambda+6) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & \lambda+4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 + 10\lambda + 30)$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 120}}{2} = -5 \pm i\sqrt{5}$$

$$\operatorname{spec}_{\mathbb{R}}(A) = 0 \quad , \quad \operatorname{spec}_{\mathbb{C}}(A) = \{0, -5 \pm i\sqrt{5}\}$$

10.12 SATZ

$$\chi_A(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} c_k(A) x^k \qquad [n] := i = \{1, \dots, n\}$$

Summe aller symmetr. Minoren von A

$$c_k(A) = \sum_{\substack{J \subseteq [n] \\ |J| = |n-k|}} [A]_{JJ} \qquad J = \{j_1 < j_2 < \dots < j_{n-k}\}$$

$$\begin{pmatrix} a_{j_1 j_1} & a_{j_1 j_2} & \cdots & a_{j_1 j_{n-k}} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{j_{n-k} j_1} & a_{j_{n-k} j_2} & \cdots & a_{j_{n-k} j_{n-k}} \end{pmatrix} \text{ Minoren}$$

insbes $c_0 = \det A$

$$c_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \operatorname{Tr}(A)$$

$$c_n(A) = 1$$

BEW

$$\det(\lambda I - A) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\pi} \prod_{i=1}^{n} (xI - A)_{\pi(i), i}$$

Determinanten sind für beliebige kommutative Ringe R definiert

↳ "nichtkommutative Determinanten"

$$= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\pi} \prod_{i=1}^{n} x\,\delta_{\pi(i),i} - a_{\pi(i),i}$$

$\deg \prod_{i=1}^{n} x\delta_{\pi(i),i} - a_{\pi(i),i}$

... Anzahl $\{i \mid \pi(i) = i\}$ = # Fixpunkte von π = $\begin{cases} n & \pi = id \\ \leq n-2 & \pi \neq id \end{cases}$

$\Rightarrow \deg \chi_A(x) = n$

$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ a_i ... i-te Spalte von A

$I = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

$\chi_A(x) = \Delta(xe_1 - a_1, xe_2 - a_2, \dots, xe_n - a_n)$

$= \sum_{I \subseteq [n]} \Delta(y_1, \dots, y_n)$ wobei $y_i = \begin{cases} xe_i & i \in I \\ -a_i & i \notin I \end{cases}$

$(a+b)^n = \sum_{I \subseteq [n]} a^{|I|} b^{|I|}$

$\Delta(y_1, \dots, y_{k-1}, xe_k, y_{k+1}, \dots, y_n)$

$$= \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & & k\downarrow & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ k \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} & \begin{vmatrix} | & & | & 0 & | & \cdots & | \\ | & & | & \vdots & | & & | \\ y_1 & & y_{k-1} & x & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ | & & | & 0 & | & & | \\ | & & | & \vdots & | & & | \\ & & & 0 & & & \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\rightarrow (-1)^{k-1}(-1)^{k-1} \begin{vmatrix} x & * & \cdots & & & * \\ 0 & \tilde{y}_1 & \cdots \tilde{y}_{k-1} & \tilde{y}_{k+1} & \cdots & y_n \\ \vdots & | & | & | & & | \\ \vdots & | & | & | & & | \\ 0 & & & & & \end{vmatrix}$$

wobei $\hat{y}_i = y_i$ mit gestrichener k-ten Zeile

$$\rightarrow x \begin{vmatrix} \tilde{y}_1 & \cdots & \tilde{y}_{k-1} & \tilde{y}_{k+1} & \cdots & \tilde{y}_n \\ | & & | & | & & | \end{vmatrix} \quad \text{usw}$$

$$= x^{|I|} \underbrace{\Delta(a_{j_1}, \dots, a_{j_{n-|I|}})}_{[A]_{I^c, I^c} \cdot (-1)^{I^c}}$$

wobei I^c nicht gestrichene Zeilen und Spalten

$(n - |I|) \times (n - |I|)$ det $J = I^c$

10.13 LEMMA

$\chi_{T^{-1}AT}(x) = \chi_A(x)$

ähnliche Matrizen haben gleiches charakteristisches Polynom

BEW

$\det(\lambda I - T^{-1}AT) = \det(\lambda T^{-1}T - T^{-1}AT)$

$= \det(T^{-1}(\lambda I - A)T)$

$= \det T^{-1} \cdot \det(\lambda I - A) \cdot \det T = \det(\lambda I - A)$

10.14 DEFINITION

Sei: $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

A heißt diagonalisierbar

wenn $\exists T \in GL(n,\mathbb{K}): T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$10.13 \Rightarrow \chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x-\lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$$

10.15 LEMMA

A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ $\exists$ Basis aus Eigenvektoren

BEW $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow AB = B\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_n \\ | & & | \end{pmatrix} \Rightarrow A\begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_n \\ | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 b_1 & \lambda_2 b_2 & \cdots & \lambda_n b_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow A \cdot b_i = \lambda_i b_i \quad \forall i$

10.16 BSP

Schritt $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & -8 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ diagonalisieren

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -4 \\ -4 & \lambda+3 & 8 \\ 2 & -2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -4 \\ \lambda-1 & \lambda+3 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 1 & \lambda+3 & 8 \\ 0 & -2 & \lambda+5 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & \lambda+5 & 12 \\ 0 & -2 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\left((\lambda+5)(\lambda-5)+24\right) = (\lambda-1)(\lambda^2-1) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$\operatorname{spec} A = \{\pm 1\}$

Schritt $\quad$ Eigenvektoren bestimmen

" $\ker(\lambda I - A)$

$\lambda = +1$: $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -4 & 4 & 8 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_1 = x_2 + 2x_3$

$$\eta_{+1} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$\lambda = -1$:

$$\begin{array}{ccc} 0 & -2 & -4 \\ -4 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & -6 \\ \hline 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \end{array}$$

$x_2 = -2x_3$

$x_1 = x_2 + 3x_3 = x_3$

$$\eta_{-1} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} A B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

10.17 ANW.

$$A = B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} B$$

$$A^2 = \left(B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} B\right)\left(B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} B\right) = B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2\end{pmatrix} B$$

$$A^k = B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k\end{pmatrix} B$$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k\end{pmatrix} B = B^{-1}\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix} B$$

$$\rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = A \cdot x \Rightarrow x = e^{At} \cdot x_0$$

Bsp:

Leonardo von Pisa 1170 - 1250 (Fibonacci)

1202 Liber Abaci

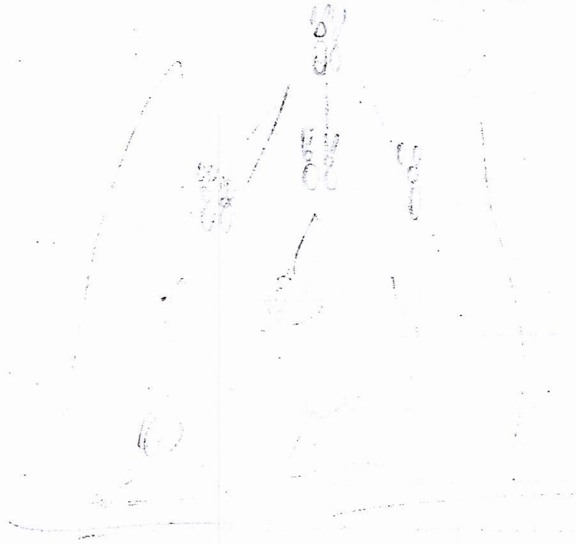
" Virahanka 7. Jh.

$| \underset{2}{-} \underset{1}{:} \underset{2}{-} \underset{2}{-} \underset{1}{:} \underset{1}{:} \underset{2}{-} |$ n

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

— — — · $n-1$

— — — — $n-2$



Formel für F_n?

$$F_0 = F_1 = 1$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

$$F_n = F_n$$

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} \overset{A:=}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x(x-1) - 1 = x^2 - x - 1$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ goldener Schnitt}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

10.18 SATZ

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig

BEW

Seien $\lambda_1 \dots \lambda_r$ verschiedene Eigenwerte
$v_1 \dots v_r$ zugehörige Eigenvektoren

Sei $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$

Induktion:

$r = 1$. richtig weil $v_1 \neq 0$

$r-1 \to r$: (I) $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0 \Rightarrow f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r) = 0$

$(\cdot(-\lambda)_r$ (II) $\alpha \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_r \lambda_r v_r = 0$

$$\text{II} - \lambda \text{I} = \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_r) v_1 + \dots + \alpha_{r-1} (\lambda_{r-1} - \lambda_r) v_{r-1} + 0 v_r = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 (\lambda_i - \lambda_r) = 0 \quad \forall_{1 \leq i \leq r-1}$$

$$\lambda_i \neq r \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall_{1 \leq i \leq r-1}$$

$$\Rightarrow \alpha_r v_r = 0 \Rightarrow \alpha_r = 0$$

10.19 FOLGERUNG

Eine $n \times n$ Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten ist diagonalisierbar.

Zu jedem Eigenwert gibt es mindestens einen Eigenvektor

$\Rightarrow$ n linear unabhängige Eigenvektoren $\Rightarrow$ bilden Basis

10.20 BSP

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ist nicht diagonalisierbar

$\underset{\det(xI-A)}{\chi_A(x)} = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x^2 \rightsquigarrow \operatorname{spec} A = \{0\}$

Eigenraum: $\ker A$

$\dim \ker A = 1 = 2 - \operatorname{rk} A$

wäre $A = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} B^{-1} = B \begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\dim \eta_0 = 1 < \dim V$

$\operatorname{span} \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$

$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A^2 = 0 \rightarrow$ nilpotent

10.21 DEF

Sei λ Eigenwert der Matrix A

$k(\lambda) :=$ Vielfachheit von λ als Nullstelle von $\chi_A(x)$ heißt,

und $d(\lambda) := \dim \eta_\lambda$ heißt geometrische des Eigenwerts λ

- im Beispiel 10.20 : $k(0) = 2 \qquad d(0) = 1$

10.22 LEMMA

Eine Matrix A ist diagonalisierbar genau dann wenn für die verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ gilt

$d(\lambda_1) + \ldots + d(\lambda_r) = \dim V.$

Beweis

$\Rightarrow$ Sei B Basis aus Eigenvektoren (10.15)

$\Rightarrow V = \eta_{\lambda_1} + \ldots + \eta_{\lambda_r}$ ist direkte Summe (10.18)

$\Rightarrow \dim V = \dim \eta_{\lambda_1} + \ldots + \dim \eta_{\lambda_r}$

$\Leftarrow$ Sei $B_k = \{ x_k^{(j)} \mid 1 \leq j \leq d(\lambda_k) \}$ Basis d. k-ten Eigenraums

$\Rightarrow \dot{\bigcup\limits_{k=1}} B_k$ linear unabhängig und $|\dot{\bigcup\limits_{k=1}} B_k| = \dim V$

daher eine Basis

Sei: $\sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{d(\lambda_k)} \alpha_k^{(j)} x_k^{(j)} = 0$

$$\overset{!}{=} \sum_{k=1}^{r} y_k \quad \text{wobei: } y_k = \sum_{j=1}^{d(\lambda_k)} \alpha_k^{(j)} x_k^{(j)} \in \eta_{\lambda_k}$$

?

$\Rightarrow \quad A y_k = \lambda_k \cdot y_k$

10.18 $\Rightarrow$ y_k sind linear unabhängig

$$\sum y_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{alle } y_k = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{d(\lambda_k)} \alpha_k^{(j)} x_k^{(j)} = 0 \quad \overset{\text{Basis}}{\Rightarrow} \quad \text{alle } \alpha_k^{(j)} = 0$$

10.23 [illegible]

Für alle Eigenwerte einer Matrix gilt

$$d(\lambda) \leq k(\lambda)$$

geometrische V. $\leq$ algebraische V.

über $\mathbb{C}$: $\sum k(\lambda) = \dim V$

[illegible]

Sei: $d = d(\lambda)$ und $b_1 \dots b_d$ Basis von η_λ

$\rightarrow$ Teildiagonalisierung

- Ergänze zu Basis von V $\quad (b_1 \dots b_d \underbrace{b_{d+1} \dots b_n}_{\text{beliebig, so dass Basis von } V \text{ entsteht}})$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_d & b_{d+1} & \dots & b_n \\ | & & | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = A \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \dots & Ab_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda b_1 & \dots & \lambda b_d & Ab_{d+1} & \dots & Ab_n \\ | & & | & | & & | \end{bmatrix} \overset{!}{=} B \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & & & Ab_{d+1} & \dots & Ab_n \\ & \ddots & & | & & | \\ & & \lambda & | & & | \\ & 0 & & | & & | \end{array}\right]$$

$$B^{-1} A B = \left[\begin{array}{c|c} \lambda \quad \cdots \quad \lambda & * \\ \hline 0 & \tilde{A} \end{array}\right]$$

$$\chi_A(x) = \chi_{B^{-1}AB}(x) = \det \left[\begin{array}{c|c} x-\lambda \quad \cdots \quad x-\lambda & -* \\ \hline 0 & xI - \tilde{A} \end{array}\right]$$

$$= (x-\lambda)^d \, \chi_{\tilde{A}}(x)$$

$\Rightarrow (x-\lambda)^d$ teilt $\chi_A(x) \Rightarrow k(\lambda) \geq d(\lambda)$

Matrix A diagonalisierbar

$\Leftrightarrow$ i) $\chi_A(x)$ zerfällt in Linearfaktoren

$= \prod (x - \lambda_i)$ wobei $\lambda_i \in \mathbb{K}$

ii) $d(\lambda_i) = k(\lambda_i) \ \forall i$

Was kann man im allgemeinen Fall tun?

Camille Jordan (1838 - 1922)
Jordan'sche Kurven
1. Buch über Gruppentheorie

Gauß-Jordan
→ Wilhelm Jordan (1842 - 1899)
"Handbuch der Vermessungskunde"

Ziel: Zerlege Matrix A in einfache Teile

- einfachste Lösung: $A x_i = \lambda_i x_i$

→ geht nicht immer

→ "vergröbere" die Eigenräume

11.1 Def

Sei $f \in End(V)$

Ein Unterraum $U \subseteq V$ heißt invariant unter f

(bzw f-invariant) wenn $f(U) \subseteq U$

Analog für Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$:

$U \subseteq \mathbb{K}^n$ invariant unter A wenn

$\forall u \in U: \; Au \in U$

11.2 Bsp

i) $V, \{0\}$ sind invariant

ii) $\ker f$, $\operatorname{im} f$ sind invariant

iii) Eigenräume sind invariant

$x \in \eta_\lambda \Rightarrow Ax = \lambda x \in \eta_\lambda$

iv) wenn $U \subseteq V$ invariant und $\dim U = 1$

$\Rightarrow U = \operatorname{span}\{x\}$ wobei x Eigenvektor

Sei $x \in U, x \neq 0 \Rightarrow Ax \in U \Rightarrow A$ ist Vielfaches von x

$\Rightarrow Ax = \lambda x$

v) Wenn $A = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$

$Ae_1 = a_{11} e_1 \Rightarrow \mathcal{L}(e_1)$ ist invariant

$Ae_2 = a_{12} e_1 + a_{22} e_2 \in \mathcal{L}(e_1, e_2) \rightarrow$ invariant

$U_k = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_k)$ ist invariant für jedes k

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

MS GAT

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

i) $U \subseteq V$ invariant unter A

$p(x) \in \mathbb{K}[x] \Rightarrow U$ invariant unter $p(A)$

ii) Seien $U_1 \dots U_m$ invariant

$\Rightarrow U_1 + \dots + U_m$ sowie $U_1 \cap \dots \cap U_m$ sind invariant

i) U invariant unter $A^k \quad \forall k \geq 0$

$k = 0$: trivial $\rightarrow A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$k \rightarrow k+1$: Sei $u \in U$

$A^{k+1} u = A \cdot (\underbrace{A^k \cdot u}_{IV \Rightarrow \in U})$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

$$p(A) = \sum_{k=0}^{m} c_k A^k$$

$$u \in U \Rightarrow p(A)u = c_0 \cdot u + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} c_k A^k \cdot u}_{\in U} \in U$$

Linearkombination liegt wieder in UR

A regulär $\Rightarrow A^{-1}(u) \subseteq U \Rightarrow A^{-1} = p(A)$

ii) Sei $v \in U_1 + \dots + U_m \Rightarrow v = u_1 + \dots + u_m \quad u_i \in U_i$

$Av = \underbrace{Au_1}_{\in U_1} + \dots + \underbrace{Au_m}_{\in U_m} \in U_1 + \dots + U_m$

Sei $u \in \bigcap_{i=1}^{m} U_i \Rightarrow u \in U_i \quad \forall i$

$\Rightarrow Au_i \in U_i \quad \forall i$

$\Rightarrow Au \in \bigcap_{i=1}^{m} U_i$

11.4 LEMMA

$f(U) \subseteq V$

Sei $f \in End(V)$ $U \subseteq V$ invariant

Dann ist $f|_U : U \to U \in End(U)$

11.5 SATZ

Sei $f \in End\ V$, $U \subseteq V$ invariant sodass $V = U \dotplus W$

Sei $B := (b_1 \dots b_m)$ Basis von U dim $V = m+n$

$C := (c_1 \dots c_n)$ Basis von W

~~Dann ist~~ $B \cup C$ ist Basis von V

Dann ist $\Phi^{B \cup C}_{B \cup C}(f) = \begin{bmatrix} \Phi^B_B(f|_U) & 0 \\ 0 & \Phi^C_C(f|_W) \end{bmatrix}$

BEW

i-te Spalte von $\Phi^{B \cup C}_{B \cup C}(f)$ besteht aus den Koordinaten von Ab_i U

$\Rightarrow$ alle Koordinaten von $m+1$ bis $m+n$ sind 0

$U_1 \dots U_m \subseteq V$ invariant

so dass $V = U_1 \dotplus U_2 \dotplus \dots \dotplus U_m$

B_i Basis von U_i $\forall i$

$B = B_1 \cup \dots \cup B_m$ Basis von V

$\Phi^B_B(f) = \begin{bmatrix} \Phi^{B_1}_{B_1}(f|_{U_1}) & & \\ & \ddots & \\ & & \Phi^{B_m}_{B_m}(f|_{U_m}) \end{bmatrix}$

Spezialfall:

$U_i = span(v_i)$ $\Rightarrow$ $v_1 \dots v_m$ Basis aus Eigenvektoren

11.7 Korollar

$f(U_i)$ wie in 11.6

$$\chi_f(x) = \prod_{i=1}^{n} \chi_{f|_{U_i}}(x)$$

- Wie finden wir invariante Unterräume?
  - $\ker f$, $\operatorname{im} f$
  - $\ker(\lambda I - f)$
  - $\ker \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ $\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

11.8 Lemma von Fitting

Sei $\dim V = n$

$f \in \operatorname{End}(V)$

a) $\{0\} \subseteq \ker(f) \subseteq \ker(f^2) \subseteq \ker(f^3) \subseteq \dots$

$\operatorname{im}(f) \supseteq \operatorname{im}(f^2) \supseteq \operatorname{im}(f^3) \supseteq \dots$

b) $\exists m \leq n : \ker f^m = \ker f^{m+1}$

$\exists m' \leq n : \operatorname{im} f^m = \operatorname{im} f^{m+1}$

c) Die folgenden Aussagen sind äquivalent

i) $\ker f^m = \ker f^{m+1}$

ii) $\operatorname{im} f^m = \operatorname{im} f^{m+1}$

iii) $\ker f^m = \ker f^{m+k} \quad \forall k \geq 0$

iv) $\operatorname{im} f^m = \operatorname{im} f^{m+k} \quad \forall k \geq 0$

v) $\ker f^m \cap \operatorname{im} f^m = \{0\}$

vi) $\ker f^m \oplus \operatorname{im} f^m = V$

Beweis

a) $x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f(f(x)) = 0$

$\Rightarrow x \in \ker f^2$.

$x \in \ker f^k \Rightarrow f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$

$\Rightarrow x \in \ker f^{k+1}$

q.e.

$y \in \operatorname{im} f^k \Rightarrow \exists x : y = f^k(x) = f^{k-1}(f(x)) \in \operatorname{im} f^{k-1}$

b) klar: $\dim \ker f \leq \dim \ker f^2 \leq \dots$

$\Rightarrow$ irgendwann ist $\dim \ker f^m = \dim \ker f^{m+1}$

und weil $\ker f^m \subseteq \ker f^{m+1}$ muss

$\ker f^m = \ker f^{m+1}$ sein

c) Plan.

$$\left.\begin{tikzcd} iii \arrow[r, shift left, "\text{trivial}"] \arrow[d, shift left] & i \arrow[l, shift left] \arrow[d, shift left] \\ iv \arrow[u, shift left] \arrow[r, shift left] & ii \arrow[l, shift left, "\text{trivial}"'] \arrow[u, shift left] \end{tikzcd}\right\} \rightleftarrows V \underset{\text{trivial}}{\rightleftarrows} Vi$$

Wh: Dimensionssatz

$g: V \to W$, $\dim \operatorname{im} g + \dim \ker g = \dim V$

i $\Leftrightarrow$ ii) Wir wissen $\ker f^m = \ker f^{m+1}$

$\Leftrightarrow \dim \ker f^m = \dim \ker f^{m+1}$ (weil $\ker f^m \subseteq \ker f^{m+1}$)

$\Leftrightarrow n - \dim \operatorname{im} f^m = n - \dim \operatorname{im} f^{m+1}$

$\Leftrightarrow \dim \operatorname{im} f^m = \dim \operatorname{im} f^{m+1}$ weil $\operatorname{im} f^{m+1} \subseteq \operatorname{im} f^m$

$\Leftrightarrow \operatorname{im} f^m = \operatorname{im} f^{m+1}$

iii $\leftrightarrow$ iv) analog

i $\to$ iii) $\ker f \subseteq \ker f^2 \subseteq \ker f^3 \subseteq \dots$ bricht ab

Sei $m_0 = \min \{ m \mid \ker f^m = \ker f^{m+1} \}$

Beh: $\ker f^{m_0+k} = \ker f^{m_0+k+1} \quad \forall k \geq 0$

$\ker f \subseteq \ker f^2 \subseteq \dots \subseteq \ker f^{m_0} = \ker f^{m_0+1} = \ker f^{m_0+2} = \dots$

"$\subseteq$" schon gezeigt

"$\supseteq$" Sei $x \in \ker f^{m_0+k+1} \Leftrightarrow f^{m_0+k+1}(x) = 0$

$\Rightarrow f^{m_0+1}(f^k(x)) = 0$

$\Rightarrow f^k(x) \in \ker f^{m_0+1} = \ker f^{m_0}$

$\Rightarrow f^{m_0+k} = f^{m_0}(f^k(x)) = 0$

$\Rightarrow x \in \ker f^{m_0+k}$

ii → iv) Sei $m_0 = \min\{m \mid \operatorname{im} f^m = \operatorname{im} f^{m+1}\}$

Beh: $\operatorname{im} f^{m_0+k} = \operatorname{im} f^{m_0+k+1} \quad \forall k \geq 0$

"$\supseteq$" schon gezeigt

"$\subseteq$": Sei $y \in \operatorname{im} f^{m_0+k}$

$\Rightarrow \exists x: y = f^{m_0+k}(x) = f^k(\underbrace{f^{m_0}(x)}_{\in \operatorname{im} f^{m_0} = \operatorname{im} f^{m_0+1}})$

$\Rightarrow \exists z: f^{m_0}(x) = f^{m_0+1}(z)$

$\Rightarrow y = f^k(f^{m_0+1}(z)) = f^{m_0+k+1}(z)$

$\Rightarrow y \in \operatorname{im} f^{m_0+k+1}$

(i ↔ iv) ↔ v

Sei $W = \operatorname{im} f^m$ invariant unter f

$g := f^m|_W$

$\ker g = \ker f^m \cap W = \ker f^m \cap \operatorname{im} f^m$

$\ker f^m \cap \operatorname{im} f^m = \{0\} \Leftrightarrow g$ injektiv

$\Leftrightarrow g$ surjektiv $\Leftrightarrow \operatorname{im} g = W$

$\Leftrightarrow g(W) = W \Leftrightarrow f^m(f^m(V)) = f^m(V)$

$\Leftrightarrow \operatorname{im} f^{2m} = \operatorname{im} f^m \overset{i \Leftrightarrow iv}{\Longleftrightarrow} \operatorname{im} f^{m-1} = \operatorname{im} f^m$

v → vi) $\ker f^m \cap \operatorname{im} f^m = \{0\}$

Dimensionssatz: $\dim \ker f^m + \dim \operatorname{im} f^m = \dim V$

und $\ker f^m + \operatorname{im} f^m$ ist direkt

$\Rightarrow \ker f^m \oplus \operatorname{im} f^m = V$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\ker A = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ $\operatorname{im} A = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\ker A^2 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ $\operatorname{im} A^2 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\ker A^3 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $\operatorname{im} A^3 = \{0\}$

$x \in \ker A^k \Rightarrow Ax \in \ker A^{k-1}$

z. B. $e_1\, e_2 \in \ker A^2$

$A e_2 = e_1 \in \ker A$

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow B - \lambda I = A$$

$\chi_{B}(x) = (x-\lambda)^3$

$\ker(B - \lambda I) = \ker A = L\{e_1\}$

$\ker(B - \lambda I)^2 = \ker L\{e_1, e_2\}$

$\ker(B - \lambda I)^3 = L\{e_1, e_2, e_3\}$

$x \in \ker((B - \lambda I)^2) \Rightarrow (B - \lambda I)x \in \ker(B - \lambda I)$

$\Rightarrow Bx = \lambda x + y \qquad y \in \ker \underset{\text{Eigenvektor}}{(B - \lambda I)}$

Das wird der allgemeine Fall sein

Finde Basis $b_1 \dots b_n$ sodass $f(b_i) = \lambda b_i$

oder $f(b_i) = \lambda b_i + b_{i-1}$

10.10 DEF

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\lambda \in \operatorname{spec} A$

Dann heißt $\ker(\lambda I - A)^n$ der verallgemeinerte Eigenraum

oder Hauptraum zum Eigenwert λ

(Bemerkung: wir können auch $(\lambda I - A)^{m_0}$ schreiben)

11.11 Lemma

Seien $\lambda_1 \dots \lambda_k$ verschiedene Eigenwerte von A und

$\ker(\lambda_i - A)^{r_i}$ die zugehörigen Haupträume

Dann ist $\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{im}(\lambda_i - A)^{r_i} \cap \ker\left[\left(\prod_{i=1}^{k}(\lambda_i - A)^{r_i}\right)\right] = \{0\}$

(Bemerkung: für $k=1$: $\operatorname{im}(\lambda_1 - A)^{r_1} \cap \ker(\lambda_1 - A)^{r_1} = \{0\}$

Bew

zz: wenn $x \in \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{im}(\lambda_i - A)^{r_i} \cap \ker \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - A)^{r_i} \Rightarrow x = 0$

Induktion

$k = 1$: Fitting

~~Sk~~ $k+1$

Sei $x \in \bigcap_{i=1}^{k+1} \operatorname{im}(\lambda_i I - A)^{r_i}$ $\quad (\lambda_1 I - A)^{r_1} \ldots \underbrace{(\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}}}_{y} = 0$

$y := (\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}} x \in \ker \prod_{i=1}^{k+1} (\lambda_i I - A)^{r_i}$

Beh: $y \in \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{im}(\lambda_i I - A)^{r_i} \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\}$

$x \in \operatorname{im}(\lambda_i I - A)^{r_i} \Rightarrow \forall i : \exists u_i : x = (\lambda_i I - A)^{u_i}$

$y = (\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}} x = (\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}} (\lambda_{u_i} I - A)^{r_{u_i}}$

$= (\lambda_i I - A)^{r_i} (\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}} u_i \in \operatorname{im}(\lambda_i I - A)^{r_i}$

$\Rightarrow y \in \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{im}(\lambda_i I - A)$

y erfüllt die Induktionsvoraussetzung zum Index k

$\Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow x \in \ker(\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}}$

und $y \in \operatorname{im}(\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}}$ lt. Voraussetzung

$\xRightarrow{\text{Fitting}} x = 0$

~~Fitting $\Rightarrow x = 0$~~

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 2 & 1 & 0 & & \\ & & & & 2 & 1 & & \\ & & & & & 2 & & \\ & & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{über } \mathbb{R}$$

spec. A: $\lambda_1 = 1$

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 1 & 1 & 0 & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & -1 & -1 \\ & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$$