$\ker(A-I) = \mathcal{L}(e_1, e_3)$
$\operatorname{im}(A-I) = \mathcal{L}(e_1, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8)$

$$(A-I)^2 = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & & & \\ & 0 & & \\ & & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}^2 & \\ & & & \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^2 \end{bmatrix}$$

$\ker(A-I)^2 = (e_1, e_2, e_3)$
$\operatorname{im}(A-I)^2 = (e_5, e_6, e_7, e_8)$ $\rightarrow$ stabil

$\lambda = 2$:

$$(A-2I) = \begin{bmatrix} \begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix} & & & \\ & -1 & & \\ & & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix} & \\ & & & \begin{matrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$\cancel{\ker(A-2I) = \mathcal{L}(e_4)}$
$\operatorname{im} \cancel{(A-2I) = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_7, e_8})$

$\ker(A-2I) = \mathcal{L}(e_4)$
$\operatorname{im}(A-2I) = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_7, e_8)$

$$(A-2I)^2 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 & & & \\ & 1 & & \\ & & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \\ & & & \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^2 \end{bmatrix}$$

$\ker(A-2I)^2 = \mathcal{L}(e_4, e_5)$
$\operatorname{im}(A-2I)^2 = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_7, e_8)$

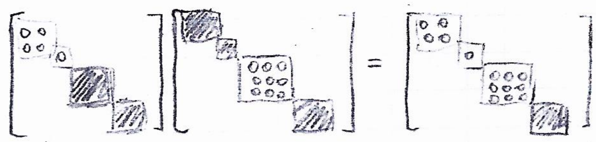
$$(A-2I)^3 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix}-1 & 1\\ & -1\end{bmatrix}^3 & & & \\ & \begin{bmatrix}-1\end{bmatrix} & & \\ & & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \\ & & & \begin{bmatrix}-2 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}^3 \end{bmatrix}$$

$\ker\,(A-2I)^3 = \mathcal{L}(e_4, e_5, e_6)$

$\operatorname{im}\,(A-2I)^3 = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_7, e_8)$

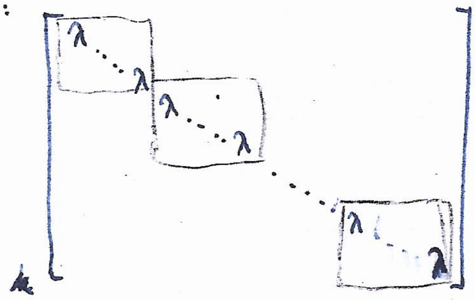
$\bigcap_{i=1}^{2} \operatorname{im}(\lambda_i - A)^{r_i} = \operatorname{im}(I-A)^2 \cap \operatorname{im}(I-A)^3 = \mathcal{L}(e_7, e_8)$

$\prod_{i=1}^{2} (\lambda_i I - A)^{r_i} = (I-A)^2\,(2I-A)^3$



$\ker = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$

Wh:



Zu jedem λ ein Block

$\to$ Hauptraum

setze Basen der Haupträume zu Basis von $\mathbb{K}$ zusammen

$\bigcap_{i=1}^{k} = \operatorname{im}(\lambda_i I - A)^{r_i} \cap \ker(\lambda_1 - A)^{r_1} \ldots (\lambda_k - A)^{r_k} = \{0\}$

11.13 LEMMA

i) $\ker(\lambda I - A)^k \cap \ker(\mu I - A)^l = \{0\}$

ii) Die Summe $(\lambda_1 I - A)^{r_1} + \ldots + (\lambda_k I - A)^{r_k}$ ist direkt

BEWEISBEMERKUNG

$\ker\,(\lambda_i - A)^{r_i} \subseteq \ker\,(\lambda_1 - A)^{r_1} \ldots (\lambda_k - A)^{r_k}$

denn $(\lambda_i - A)^{r_i} = 0$

$\Rightarrow (\lambda_i - A)^{r_i} \ldots (\lambda_k - A)^{r_k} x = (\lambda_1 - A)^{r_1} \ldots \widehat{(\lambda_i - A)^{r_i}} \ldots (\lambda_k - A)^{r_k} \underbrace{(\lambda_i - A)^{r_i}}_{=0}$

Wh.: $U_1+\dots+U_k$ direkt $\iff \forall i: U_i \cap (U_1+\dots+\hat{U_i}+\dots+U_k) = \{0\}$

$\iff$ wenn $u_1+\dots+u_k=0$ mit $u_i \in U_i \Rightarrow$ alle $u_i = 0$

ii) induktion

$k=1$: trivial

$k \to k+1$:

Sei $v_i \in \ker(\lambda_i I - A)^{r_i}$ $\quad 1 \le i \le k+1$

Annahme: $v_1+v_2+\dots+v_{k+1}=0$ $\quad$ zz: alle $v_i = 0$

Sei $w_i = (\lambda_{k+1} - A)^{r_{k+1}} v_i = 0$

$\Rightarrow$ (1) $w_{k+1} = 0$

(2) $\sum_{i=1}^{k} w_i = (\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}} \sum_{i=1}^{k+1} v_i = 0$

(3) $w_i \in \ker(\lambda_i I - A)^{r_i}$

$(\lambda_i I - A)^{r_i} w_i = (\lambda_i I - A)^{r_i} \underset{=0}{(\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}}} v_i$

$= (\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}} \underbrace{(\lambda_i I - A)^{r_i} v_i}_{=0}$

$\Rightarrow w_i \in \ker(\lambda_i I - A)^{r_i} \quad \forall i$

und $w_1 + \dots + w_k = 0$

IV $\Rightarrow$ alle $w_i = 0$

$\Rightarrow v_i \in \ker(\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}} \cap \ker(\lambda_i I - A)^{r_i}$

i) $\Rightarrow v_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$

$\Rightarrow v_{k+1} = 0$

11.14 SATZ

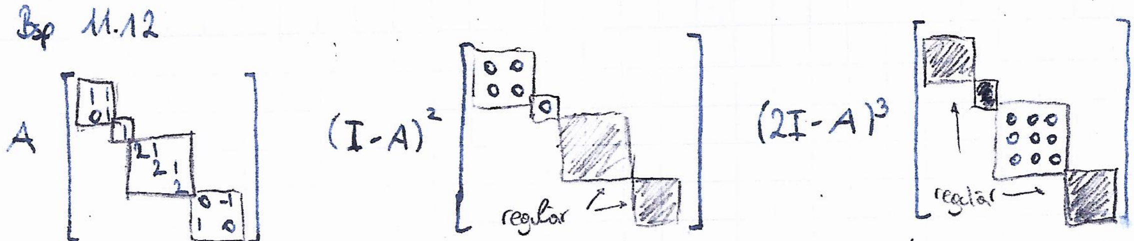
$A \in K^{n \times n}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paarweise verschiedene (nicht notwendigerweise alle) Eigenwerte

i) $V = \ker(\lambda_1 - A)^n \oplus \dots \oplus \ker(\lambda_k - A)^n \oplus \underbrace{\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{im}(\lambda_i - A)^n}_{W:=}$

ii) W ist invariant unter A

und $\lambda_i \notin \operatorname{spec}(f_A|_W)$

Vgl. Bsp 11.12



$\text{im} = \mathcal{L}(e_4, e_5, e_6, e_7, e_8)$

$\text{im} = (e_1, e_2, e_3, e_7, e_8)$

$\ker = (e_4, e_5, e_6)$

$W = \mathcal{L}(e_7, e_8)$

BEWEIS

i) Induktion

$k=1$:

Fitting $\Rightarrow \ker(\lambda_i - A)^n \oplus \text{im}(\lambda_i - A)^n = V$

$k \to k+1$:

Wir nehmen an

$$V = \ker(\lambda_1 - A)^n \oplus \dots \oplus \ker(\lambda_k - A)^n \oplus \underbrace{\bigcap_{i=1}^{k} \text{im}(\lambda_i - A)^n}_{W_k}$$

Schritt 1:

W_k ist invariant, Sei $y \in W_k$

$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, k\}: \exists x_i \in V: y = (\lambda_i I - A)^n x_i$

ZZ: $\underline{\forall y \in W_k}$: $Ay = A(\lambda_i I - A)^n x_i$

$= (\lambda_i I - A)^n (A x_i) \in \text{im}(\lambda_i I - A)^n \quad \forall i$

$\Rightarrow Ay \in \bigcap_{i=1} \text{im}(\lambda_i I - A)^n = W_k$

Wende Fitting an:

$f_A|_{W_k}$

$W_k = \ker(\lambda_{k+1} - f_A|_{W_k})^n \oplus \text{im}(\lambda_{k+1} - f_A|_{W_k})^n$

$\subseteq \ker(\lambda_{k+1} - A)^n + \oplus \dots W_k \cap \text{im}(\lambda_{k+1} - A)^n$

$= \ker(\lambda_{k+1} - A)^n + W_{k+1}$

$\Rightarrow V = \ker(\lambda_1 - A)^n + \dots + \ker(\lambda_{k+1} - A)^n + W_{k+1}$

Die Summe ist direkt

Seien $x_i \in \ker(\lambda_i I - A)^n$ $\quad 1 \le i \le k+1$, $y \in W_{k+1}$

zz: wenn $x_1 + \dots + x_{k+1} + y = 0$ dann $x_1 = \dots = x_{k+1} = y = 0$

$$0 = \prod_{i=1}^{k+1} (\lambda_i - A)^n \left(\sum_{j=1}^{k+1} x_j + y \right) = \prod_{i=1}^{k+1} (\lambda_i - A)^n y$$

$$= \ker(\lambda_j - A)^n \subseteq \ker \prod_{i=1}^{k+1} (\lambda_i - A)^n$$

$$\Rightarrow y \in \ker \prod_{i=1}^{k+1} (\lambda_i - A)^n \cap \mathrm{im} \bigcap_{i=1}^{k+1} \mathrm{im}(\lambda_i I - A)^n \overset{11.11}{=} \{0\}$$

$$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k+1} x_i = 0 \overset{11.13\,ii}{\Longrightarrow} \text{alle } x_i = 0$$

ii) $\ker(\lambda_i - A) \cap W_k \subseteq \ker(\lambda_i I - A)^n \cap W^k$

$\subseteq \ker(\lambda_i I - A)^n \cap \mathrm{im}(\lambda_i - A)^n = \{0\}$ wegen Fitting

$\Rightarrow$ keine Vektoren zum Eigenwert λ sind in W_k

$\Rightarrow \lambda_i \notin \mathrm{spec}\, f_A|_{W_k}$ für $1 \le i \le k$

11.15 KOROLLAR

$\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\lambda_1 \dots \lambda_k$ alle Eigenwerte von A

$\Rightarrow \mathbb{K}^n = \ker(\lambda_1 - A)^n \oplus \dots \oplus \ker(\lambda_k - A)^n$

BEWEIS

$f_A|_{\bigcap_{i=1}^{k} (\mathrm{im}(\lambda_i - A)^n}$ hat keine Eigenwerte $\Rightarrow W_k = \{0\}$

11.16 DEFINITION

Eine lineare Abbildung/Matrix heißt nilpotent wenn

$\exists k \in \mathbb{N}: f^k = 0$

Das kleinste solche k heißt Index der Nilpotenz

$(\lambda_i - f)|_{\ker(\lambda_i - f)}$ ist nilpotent

$\forall x \in \ker(\lambda_i - f)^n : (\lambda_i - f)^n x = 0$

Wir haben $\mathbb{K}^m$ zerlegt in invariante UR $\ker(\lambda_i I - A)^n$

$(A - \lambda_i)\Big|_{\ker(\lambda_i - A)^n}$ ist nilpotent.

Ziel: Jede nilpotente Matrix, kann auf die Form

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \cong \lambda_i I + \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A \cong \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} e_i = e_{i-1} \text{ oder } 0$$

11.17 LEMMA

$\ker f^k \subseteq \ker f^{k+1} \subseteq \ker f^{k+2} \ldots$

Seien $u_1 \ldots u_p$ Basis von $\ker f^k$

$u_1 \ldots u_p\, v_1 \ldots v_q$ Basis von $\ker f^{k+1}$

$u_1 \ldots u_p\, v_1 \ldots v_q\, w_1 \ldots w_r$ Basis von $\ker f^{k+2}$

Dann ist $(u_1 \ldots u_p, f(w_1) \ldots f(w_r))$ l.u.

BEWEIS

klar $f(\ker f^{k+2}) \subseteq \ker f^{k+1}$

Sei $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j f(w_j) = 0$

z.z. alle λ_i, alle $\mu_j = 0$

$$0 = f^k\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j f(w_j)\right)$$

$$= 0 + f^k\left(\sum_{j=1}^{r} \mu_i f(w_j)\right) = f^{m+1}\left(\sum_{j=1}^{r} \mu_j w_j\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{r} \mu_j w_j \in \ker f^{k+1} = \mathcal{L}(u_1 \ldots u_p, v_1 \ldots v_q)$$

andererseits sind $w_i \in \ker f^{k+2} \ominus \ker f^{k+1}$

$\notin \mathcal{L}(u_1 \ldots u_p, v_1 \ldots v_q)$

$\rightarrow$ alle $\mu_j = 0$

$\ominus$: gemeint ist $\ker f^{k+2} = f \cdot f^{k+1} \oplus \mathcal{L}(w_1 \dots w_r)$

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_j w_j \in \ker f^{k+1} \cap \mathcal{L}(w_1 \dots w_r) = \{0\}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{r} \mu_j w_j = 0 \Rightarrow \text{alle } \mu_j = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \text{alle } \lambda_i = 0$$

11.18 SATZ JORDANSCHE NORMALFORM

Sei $\dim V = n$, $f \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent vom Index p, $d = \dim \ker f$

Dann $\exists$ Basis $\mathcal{B}$ von V sodass

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_q \end{bmatrix} \qquad N_i = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}}_{n_i \times n_i}$$

mit $p = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_d \geq 1$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_d = n$$

BEWEIS

$U_k = \ker f^k$, $m_k = \dim U_k$

$\Rightarrow U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \dots \subsetneq U_p = V$

$d = m_1 < m_2 < \dots < m_p = n$

$f(U_k) \subseteq U_{k-1}$

$u_1 \dots u_{m_1},\ u_{m_1+1} \dots u_{m_2},\ u_{m_2+1} \dots u_{m_3} \dots\dots\ u_{m_p}$

U_1

U_2

U_3

$U_p = V$

$u_1 \dots u_{m_k}$ ist Basis von U_k

- Beginne von hinten

$u_{p,1}$ | $u_{m_{p-1}+1}$ $u_{m_{p-1}+2}$ $\dots$ u_{m_p}

$\phantom{u_{p,1}}$ $\ $ Basis von $U_p \ominus U_{p-1}$

$\ \ \ \ \ \ \ \ \ \parallel \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \parallel \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \parallel$

$v_1^{(p)} \quad v_2^{(p)} \quad \dots \quad v_{m_p-1}^{(p)}$

$\downarrow$

$$v_1^{(p-1)} = f(v_1^{(p)}),\ v_2^{(p-1)} := f(v_2^{(p)}) \dots v_{m_p-m_{p-1}}^{(p)} := f(v_{m_p-m_{p-1}}^{(p)})$$

$v_1 \dots v_{m_p-m_{p-1}} \in U_{p-1} \ominus U_{p-2}$ wegen 11.17

11.17 $\to$ $v_1^{(p-1)} \dots v_{m_p-m_{p-1}}^{(p-1)}$ sind l.u.

$u_1 \dots u_{m_{p-2}}$

Wir können $u_1 \dots u_{m_{p-2}}$ $v_1^{(p-1)} \dots v_{m_p-m_{p-1}}^{(p-1)}$ zu einer Basis von U_{p-1} ergänzen

Basisauswahlsatz $\to$ wir können Ergänzungsvektoren aus $(u_{m_{p-2}+1} \dots u_{m_{p-1}})$ wählen

$u_1 \dots u_{m_{p-2}} \mid u_{m_{p-2}+1} \dots u_{m_{p-1}} \mid u_{m_{p-1}+1} \dots u_{m_p}$

$u_1 \dots u_{m_{p-2}} \mid f(u_{m_{p-1}+1}) \dots f(u_{m_p})$ ist linear unabh. lt. 11.17

$\to$ ergänze zu Basis von U_{p-1}:

$u_1 \dots u_{m_{p-2}} v_1^{(p-1)} \dots v_{m_p-m_{p-1}}^{(p-1)} \mid \underbrace{v_{m_p-m_{p-1}+1} \dots v_{m_p-m_{p-2}}^{(p-1)}}_{\subseteq \{u_{m_{p-2}+1}, \dots u_{m_{p-1}}\}}$

$v_1^{(p-2)} := f(v_1^{(p-1)}),\ v_2^{(p-2)} := f(v_2^{(p-1)}) \dots v_{m_p-m_{p-2}}^{(p-2)} := f(v_{m_p-m_{p-2}}^{(p-1)})$

$\in U_{p-2} \ominus U_{p-3}$

ergänze $u_1 \dots u_{m_{p-3}}$ $v_1^{(p-2)} \dots v_{m_{p-1}-m_{p-2}}^{(p-2)}$ zu Basis von U_{p-2}

.... usw

$v_1^{(p)} \dots\dots v_{m_p-m_{p-1}}$ | $U_p = V$

$u_{m_{p-1}+1} \dots u_{m_p}$

$\xrightarrow{f}$ $v_1^{(p-1)}\ v_2^{(p-1)} \dots v_{m_p-m_{p-1}}^{(p-1)} \mid \dots\dots v_{m_{p-1}+m_{p-2}}^{(p-1)}$ | U_{p-1}

$\xrightarrow{f}$ $v_1^{(p-2)}\ v_2^{(p-2)} \dots v_{m_p-m_{p-1}}^{(p-2)}\ v \dots v_{m_{p-1}-m_{p-2}}^{(p-2)} \mid v_{m_{p-1}-m_{p-2}+1}^{(p-2)} \dots v_{m_{p-2}-m_{p-3}}^{(p-2)}$ | U_{p-2}

$\vdots$ | U_2

$v_1^{(1)}\ v_2^{(1)} \dots\dots v_m^{(1)}$ | U_1

$v_i^{(p-1)} := f(v_i^{(p)}) \in U_{p-1}$ sind linear unabhängig von $u_1 \dots u_{m_{p-1}}$

1) Die Elemente der letzten k Zeilen bilden eine Basis von U_k

2) f bildet k-te Zeile (von unten) auf die (k-1)-te Zeile ab

$f(U_k) \subseteq U_{k-1} \setminus U_{k-2}$

$$\mathcal{B} = v_1^{(1)}\, v_1^{(2)} \dots v_1^{(n_1)}\, v_2^{(1)} \dots v_2^{(n_2)} \dots v_d^{(1)}\, v_d^{(2)} \dots v_d^{(n_d)}$$

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \overset{n_1}{\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{matrix}}}{\scriptstyle n_1} & & & \\ & \overset{n_2}{\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & 0 \end{matrix}}}{\scriptstyle n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overset{n_d}{\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & 0 \end{matrix}}}{\scriptstyle n_d} \end{bmatrix}$$

da $f(v_i^{(1)}) = 0$ $\quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad f(v_i^{(k)}) = v_i^{(k-1)}$ für $k \geq 2$

11.19 BEISPIEL

$$A := \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{matrix}$$

ist nilpotent

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{matrix}$$

-3

+4

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{matrix}$$

+2

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

+1

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$x_2 = -x_6$ $\quad x_7 = 2x_3 = 0$

$x_5 = 0$ $\quad x_3 = 0$ $\quad x_1, x_4, x_8$ frei

Basis von $\ker A$

$u_1 = e_1$, $u_2 = e_4$, $u_3 = -e_2 + e_6$ $u_4 = e_8$

$\ker A = \ker N_1$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Pivotzeilen

Beh: $\ker A^2 = \ker N_1 \cdot A$

$x \in \ker A^2 \Longleftrightarrow Ax \in \ker A = \ker N_1 \Longleftrightarrow N_1 \cdot Ax = 0 \Longleftrightarrow x \in \ker N_1$

$$N_1 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad x_3 = 2x_5$$

Basis von $\ker A^2$: $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ frei:

$\rightarrow$ Basis von U_2: $\overset{u_1}{e_1}, \overset{u_2}{e_4}, \overset{u_3}{-e_2 + e_6}, \overset{u_4}{e_8} \mid \overset{u_5}{e_2} \quad \overset{u_7}{2e_3 + e_5} \quad \overset{u_7}{e_7}$

$e_1, e_2, e_4 \quad 2e_3 + e_5 \quad e_6 \quad e_7 \quad e_8$ Basis von U_2

$e_6 = (-e_2 + e_6) + e_2 = u_3 + u_5$

Wir wollen Basis von U_2 die die schon gefundene Basis von U_1 enthält

$\ker A^2 = \ker N_2$

$$N_2 = [0 \; 0 \; 1 \; 0 \; -2 \; 0 \; 0 \; 0]$$

$\ker A^3 = \ker N_2 \cdot A = \ker [0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0]$

$U_3 = \mathbb{R}^8$

	U_1				U_2			U_3
Basis:	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
	e_1	e_4	$-e_2+e_6$	e_8	e_2	$2e_3+e_5$	e_7	e_3

$\Rightarrow d = \dim \ker A = 4$

$\rightarrow$ 4 Jordanblöcke

$p = 3 \Rightarrow$ größter Block: 3×3

$m_1 = \dim U_1 = 4$

$m_2 = \dim U_2 = 7$

$m_3 = \dim U_3 = 8$

$U_3 \ominus U_2 = \mathcal{L}(u_8)$

$v_1^{(3)} = u_8 = e_3$ $\qquad\qquad A e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 3e_2 - 2e_6$

$\cdot A$

$v_1^{(2)} = 3e_2 - 2e_6$ $\longrightarrow$ ergänze $u_1, u_2, u_3\ u_4 \,/\, v_1^{(2)}$ zu einer Basis von U

$v_2^{(2)} = 2e_3 + e_5$

$v_3^{(2)} = e_7$

$\mathcal{L}(-e_2 + e_6, 3e_2 - 2e_6) = \mathcal{L}(e_2, e_6)$

$e_1, e_4 \quad -e_2 + e_6 \quad e_8 \,|\, 3e_2 - 2e_6 \quad 2e_3 + e_5 \quad e_7$ Basis von U_2

"Pool": $e_2, \ 2e_3 + e_5 \quad e_7$

$e_2 \in \mathcal{L}(u_1, \dots u_4, v_1^{(2)})$

$\cdot A$

$v_1^{(1)} = e_1 + 3e_4 - 4e_8$

$v_2^{(1)} = 4e_2 + e_4 - 4e_6 \qquad v_3^{(1)} = -e_2 + e_6$

ergänze $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_3^{(1)}$ zu einer Basis von U_1

Pool: $e_1, e_4, -e_2 + e_6 \quad e_8$

$e_1 \in \mathcal{L}(v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_3^{(1)})$

$e_4 = v_2^{(1)} - 4 v_3^{(1)}$

$e_8 = v_1^{(1)} - e_1 - 3e_4$

$\mathcal{B} = v_1^{(1)}, v_1^{(2)}, v_1^{(3)}, v_2^{(1)}, v_2^{(2)}, v_3^{(1)}, v_3^{(2)}, v_4^{(1)}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{B}^{-1} A \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{0} \end{bmatrix}$$

Das war der Fall einer nilpotenten Matrix

Allgemeiner Fall: $V = \bigoplus$ Haupträume

und auf den Haupträumen ist $A - \lambda I$ nilpotent

$\Rightarrow A - \lambda I \cong \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$