7.8 DEFINITION

Eine Permutation der Ordnung n ist eine bijektive Abbildung $\pi: \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$

$\mathfrak{S}_n$ =: Menge aller Permutationen

Schreibweise: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$

7.9 SATZ

$\mathfrak{S}_n$ bildet bezüglich Hintereinanderausführung eine Gruppe mit neutralem Element id, die sogenannte symmetrische Gruppe

Schon gezeigt (1.40): Hintereinanderausführung bijektiver Abbildungen ist bijektiv

Bemerkung:

Für $n \geq 3$ ist $\mathfrak{S}_n$ nichtkommutativ

7.10 SATZ

$|\mathfrak{S}_n| = n!$ Bemerkung: Das sind sehr viele

7.11 BEISPIEL

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

7.12 DEFINITION

Eine Transposition oder Vertauschung ist eine Permutation der Form

$$\tau = \tau_{ij} : \begin{array}{l} i \mapsto j \\ j \mapsto i \\ k \mapsto k \quad \text{wenn } k \notin \{i, j\} \end{array}$$

Bemerkung: $\tau_{ij}^{-1} = \tau_{ij}$

d.h. $\tau_{ij}^{2} = id$

7.13 SATZ

$\mathfrak{S}_n$ wird von den Transpositionen erzeugt, M.a.W. jede Permutation π lässt sich als Hintereinanderausführung $\pi = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_n$ von Transpositionen schreiben

BEWEIS

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & & \pi(n) \end{pmatrix}$$

- $\pi = id \Rightarrow \pi = \pi \, , \tau = id$
- $\pi \neq id$

1) $k_1 = \min\{k \mid k \neq \pi(k)\}$

$\tau_1 = \tau_{k_1, \pi(k_1)}$

$\pi_1 = \tau_1 \circ \pi$

$= \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k_1 - 1 & k_1 & \ldots \\ 1 & & k_1 - 1 & k_1 & \ldots \end{pmatrix}$

2) $k_2 = \min\{k \mid k \neq \pi(k)\} > k_1$

$\tau_2 = \tau_{k_2 \, \pi(k_2)}$

$\vdots$

$k_j > k_{j-1}$

$\vdots$

endet nach $\leq n$ Schritten

$\vdots$

usw

$\rightarrow \tau_k \circ \tau_{k-1} \circ \ldots \circ \tau_1 \circ \pi = id$

$\Rightarrow \pi = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$

BEISPIEL

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$k_1 = 2$

$\pi(k_1) = 3 \qquad \tau_1 = \tau_{23}$

$\pi_1 = \tau_1 \circ \pi$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

$k_2 = 3$

$\tau_2 = \tau_{3,5}$

$\pi_2 = \tau_2 \circ \pi_1 = \tau_2 \circ \tau_1 \circ \pi$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

$k_3 = 5$

$\tau_3 = \tau_{5,7}$

$\pi_3 = \tau_3 \circ \pi_2 = id$

$\Rightarrow \pi = \tau_{2,3} \circ \tau_{35} \circ \tau_{57}$

7.14 DEFINITION

Ein Fehlstand von π ist ein Paar (i,j) sodass

- $i < j$
- $\pi(i) > \pi(j)$

F_π =: Menge der Fehlstände von π

$f_\pi := |F_\pi|$

$\operatorname{sign} \pi := (-1)^{f_\pi} =: (-1)^\pi$ Signatur von π (Vorzeichen)

7.15 BEISPIEL

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_\pi = \{(2,7),(3,4),(3,7),(4,7),(5,6),(5,7),(6,7)\}$$

$$f_\pi = 7 \qquad \operatorname{sign} \pi = -1$$

7.16 SATZ

i) $\forall \pi \in \mathfrak{S}_n : \quad \operatorname{sign} \pi = \prod\limits_{1 \le i < j \le n} \dfrac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i}$

ii) Für Transpositionen τ gilt: $\operatorname{sign} \tau = -1$

BEWEIS

i) $$\frac{\prod\limits_{i<j} \pi(j) - \pi(i)}{\prod\limits_{i<j} j - i} = (-1)^{f_\pi} = \operatorname{sign} \pi$$

Jedes Paar $\{i,j\}$ kommt oben und unten genau einmal vor; unten $j-i$, daher positiv
oben positiv wenn $\pi(j) > \pi(i)$
und negativ wenn $\pi(j) < \pi(i)$

ii) $$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & \dots & l & \dots & n \\ 1 & \dots & l & \dots & k & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$F_\tau = \{\underbrace{(k,k+1),(k,k+2),\dots(k,l-1)(k,l)}_{l-k \text{ Stück}},\underbrace{(k+1,l),(k+2,l),\dots(l-1,l)}_{l-k-1 \text{ Stück}}\}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 9 & 10 \end{matrix}$$

$$f_\tau = 2(l-k)-1$$

$$(-1)^{f_\tau} = -1$$

$$\operatorname{sign} \pi = \prod_{i<j} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i} \qquad \binom{n}{2} \text{ Faktoren}$$

$$\operatorname{sign} \tau = -1$$

7.17 SATZ

i) $\operatorname{sign} \mathrm{id} = 1$

ii) $\operatorname{sign} \pi \circ \sigma = \operatorname{sign} \pi \cdot \operatorname{sign} \sigma$

d.h. $\operatorname{sign}: \mathfrak{S}_n \to \{+1, -1\}$ ist Gruppenhomomorphismus

(Allgemein: Ein Gruppenhomomorphismus h: Gruppe $\to (\mathbb{T}, \circ)$ heißt Charakter. $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$) Torus mit Multiplikation ist Gruppe. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2| = 1$

iii) $\operatorname{sign} \pi^{-1} = \operatorname{sign} \pi$

BEWEIS

i) trivial

ii) $$\operatorname{sign}(\pi \circ \sigma) = \prod_{i<j} \frac{(\pi \circ \sigma)(j) - (\pi \circ \sigma)(i)}{j - i}$$

$$= \prod_{i<j} \frac{\pi(\sigma(j)) - \pi(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \cdot \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

$$= \operatorname{sign} \pi \cdot \operatorname{sign} \sigma \qquad \square$$

iii) Gruppenhomomorphismus

7.20 SATZ + DEFINITION

Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ Basis von V

$a_1, \dots, a_n \in V$ mit Koordinaten $\Phi_B(a_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

$A = [a_{ij}] = [\Phi_B(a_1), \dots \Phi_B(a_n)]$

Dann gilt für jede Determinantenform $\Delta: V^n \to K$

$$\Delta(a_1, \dots, a_n) = \det A \cdot \Delta(b_1, \dots, b_n)$$

wobei $\det A := \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \pi \cdot a_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n}$

die Determinante von A ist

BEISPIEL

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

(Formel von Leibniz)

BEWEIS

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i$$

$$\Delta(a_1 \dots a_n) = \Delta\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i_1} b_i \;\dots\; \sum_{i=1}^{n} a_{i_n} b_i\right) = \sum_{i=1} a_{i_1} b_i \dots \sum_{i=1} a_{i_n} b_i \underbrace{\Delta(b_{i_1} \dots b_{i_n})}_{=0 \text{ wenn } i_k = i_l,\ k \neq l}$$

Summanden mit gleichen Indizes verschwinden, es bleibt $\sum_{i_1 \dots i_n}$ sodass alle $i_1 \dots i_n$ verschieden sind d.h. jeder Wert aus $\{1, \dots, n\}$ kommt genau einmal vor

... Menge aller Permutationen $\pi(ij = \pi(j))$

$$= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(n),n} \, b_{\pi(1)} \dots b_{\pi(n)}$$

$$= \operatorname{sign} \pi \cdot \Delta(b_1 \dots b_n)$$

7.21 FOLGERUNG

$$\Delta(a_1 \dots a_n) = \det A \cdot \Delta(b_1 \dots b_n)$$

Eine Determinantenform wird durch den Wert $\Delta(b_1 \dots b_n)$ auf einer Basis eindeutig festgelegt

insbes. ist Δ nichttrivial

$\iff \Delta(b_1 \dots b_n) \neq 0$ auf einer Basis

$\iff \Delta(b_1 \dots b_n) \neq 0$ auf jeder Basis $(b_1 \dots b_n)$

Ist $\Delta(b_1' \dots b_n') = 0$ für andere Basis,

$\to$ drücke $(b_1 \dots b_n)$ in der Basis $(b_1' \dots b_n')$ aus

$b_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i \implies \Delta(b_1 \dots b_n) = \det A \cdot \Delta(b_1' \dots b_n') = 0$

7.22 SATZ

Sei: $\mathcal{B} = (b_1, \dots b_n)$ Basis von V, $c \in \mathbb{K}$. Für $a_1 \dots a_n \in V$ sei: $A = [\Phi_{\mathcal{B}}(a_1) \dots \Phi_{\mathcal{B}}(a_n)]$. Dann wird durch $\Delta(a_1 \dots a_n) = c \cdot \det A$ die eindeutige Determinantenform mit dem Wert $\Delta(b_1 \dots b_n) = c$ definiert

BEWEIS

1) $\Delta(a_1 \dots \lambda a_k \dots a_n) = c \cdot \det(\Phi_B(a_1) \dots \lambda\Phi_B(a_k) \dots \Phi_B(a_n))$

$= c \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}\pi \cdot a_{\pi(1),1} \dots \lambda a_{\pi(k),k} \dots a_{\pi(n),n}$

$= \lambda \cdot c \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}\pi \cdot a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(k),k} \dots a_{\pi(n),n}$

$= \lambda \cdot \Delta(a_1 \dots a_n)$

2) $\Delta(a_1, \dots a_k' + a_k'' \dots a_n) = c \cdot \det(\Phi_B(a_1) \dots \Phi_B(a_k') + \Phi_B(a_k'') \dots \Phi_B(a_n))$

$= c \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}\pi \; a_{\pi(1),1} \dots a'_{\pi(k),k} + a''_{\pi(k),k}, \dots a_{\pi(n),n}$

$= c \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}\pi \; a_{\pi(1)1} \dots a'_{\pi(k),k} \dots a_{\pi(n),n}$

$+ c \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}\pi \; a_{\pi(1),1} \dots a''_{\pi(k),k} \dots a_{\pi(n),n}$

$= \Delta(a_1 \dots a_k' \dots a_n) + \Delta(a_1 \dots a_k'' \dots a_n)$

3) Sei $a_k = a_l$ für $k < l$ z.z.: $\Delta(a_1 .. a_k .. a_l .. a_n) = 0$

τ_{kl} ... Transposition, die k mit l vertauscht

$\mathfrak{S}_n = \mathfrak{A}_n \,\dot\cup\, \mathfrak{A}_n \cdot \tau_{kl}$ $\quad [\mathfrak{S}_n : \mathfrak{A}_n] = 2$ .. ($\mathfrak{A}_n$ ist Untergruppe mit Index 2)

Behauptung: $\{\pi \mid \operatorname{sign}\pi = -1\} = \{\pi \circ \tau_{kl} \mid \operatorname{sign}\pi = +1\}$

$\supseteq$: wenn $\operatorname{sign}\pi = +1 \Rightarrow \operatorname{sign}(\pi \circ \tau_{kl})$

$= \operatorname{sign}\pi \cdot \operatorname{sign}\tau_{kl} = +1 \cdot (-1) = -1$

$\subseteq$: wenn $\operatorname{sign}\pi = -1$

$\Rightarrow \operatorname{sign}\pi \circ \tau_{kl} = +1$

$\Rightarrow \pi = \underbrace{(\pi \circ \tau_{kl})}_{\in \mathfrak{A}_n} \circ \tau_{kl} = \mathfrak{A}_n \cdot \tau_{kl}$

$\Delta(a_1 \dots a_n) = c \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n = \mathfrak{A}_n \dot\cup \mathfrak{A}_n \cdot \tau_{kl}} \operatorname{sign}\pi \; a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(n),n}$

$= c \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{A}_n} \operatorname{sign}\pi \; a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(n),n}$

$- c \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{A}_n} a_{\pi\circ\tau_{kl}(1),1} \dots a_{\pi\circ\tau_{kl}(k),k} \dots a_{\pi\circ\tau_{kl}(l),l} \dots a_{\pi\circ\tau_{kl}(n),n}$

$$= c \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} a_{\pi(1),1}, \dots a_{\pi(n),n}$$

$$- c \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} a_{\pi(1),1} \dots \underset{\substack{\| \\ a_{\pi(k),k}}}{a_{\pi(l),k}} \dots \underset{\substack{\| \\ a_{\pi(l),l}}}{a_{\pi(k),l}} \dots a_{\pi(n),n}$$ weil $a_k = a_l$

① $\left.\begin{array}{l} a_{\pi(l),k} = a_{\pi(l),l} \\ a_{\pi(k),l} = a_{\pi(k),k} \end{array}\right\}$ weil $a_k = a_l$

② Vertausche im Produkt die beiden Faktoren

$$\dots = c \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(n),n} - \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(n),n} = 0$$

Wert bei $(b_1 \dots b_n)$

$a_{ij} = \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad A = I$

$$\det I = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \pi \; \delta_{\pi(1),1} \dots \delta_{\pi(n),n} = +1$$

alle $\pi(j) = j$, sonst 0

$\Rightarrow$ id einziger Summand

$\Rightarrow \quad \Delta(b_1 \dots b_n) = \det I \cdot c = c$

7.24 Zusammenfassung

- Die Menge der Determinantenformen $\Delta: V^n \to \mathbb{K}$ bildet einen eindimensionalen Vektorraum $\Lambda^n V$
- Es existiert eine multilineare Determinantenform mit $\Delta(b_1 \dots b_n) = 1$

Wh: $\Delta: V^n \to \mathbb{K}$

$$\Delta(a_1 \dots a_n) = \det A \cdot \Delta(b_1 \dots b_n)$$

$$\Phi_B(a_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \pi \; a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(n),n}$$

$\Delta(v_1 \dots v_n) \neq 0 \iff v_1 \dots v_n$ linear unabhängig ($\iff$ Basis)

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

7.25 LEMMA

V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$, $\dim V = \dim W = n$

$$\Delta : W^n \to \mathbb{K} \qquad f : V \to W$$

$$f_n : V^n \to W^n \xrightarrow{\Delta} \mathbb{K}$$

$$(v_1 \dots v_n) \longmapsto (f(v_1) \dots f(v_n))$$

Dann ist $\Delta^f : V^n \to \mathbb{K}$

$$\Delta^f(v_1 \dots v_n) = \Delta(f(v_1) \dots f(v_n))$$

eine Determinantenform auf V

BEWEIS

1) $\Delta^f(v_1 \dots \lambda v_k \dots v_n) = \Delta(f(v_1) \dots f(\lambda v_k) \dots f(v_n))$

$= \lambda \Delta(f(v_1) \dots f(v_n)) = \lambda \Delta^f(v_1 \dots v_n)$

2) $\Delta^f(v_1 \dots v_k' + v_k'' \dots v_n) = \Delta(f(v_1) \dots f(v_k' + v_k'') \dots f(v_n))$

$= \Delta(f(v_1) \dots f(v_k') \dots f(v_n)) + \Delta(f(v_1) \dots f(v_k'') \dots f(v_n))$

$= \Delta^f(v_1 \dots v_k' \dots v_n) + \Delta^f(v_1 \dots v_k'' \dots v_n)$

3) $v_k = v_l \quad k \neq l \implies f(v_k) = f(v_l)$

$\Delta^f(v_1 \dots v_k \dots v_l \dots v_n) = \Delta(f(v_1) \dots f(v_k) \dots f(v_l) \dots f(v_n)) = 0$

7.26 FOLGERUNG für $V = W$

$\Delta : V^n \to \mathbb{K}$ nichttriviale Determinantenform

$f : V \to V$

$\implies \Delta^f$ ist Determinantenform

$\dim \Lambda^n V = 1 \implies \exists c_f \in \mathbb{K} : \Delta^f = c_f \cdot \Delta$

$c_f := \det f$ heißt Determinante von f

7.27 FOLGERUNG

i) Für jede Basis $\mathcal{B} = (b_1 \dots b_n)$ gilt

$$\Delta^f(b_1 \dots b_n) = \Delta(f(b_1) \dots f(b_n)) = \det f \cdot \Delta(b_1 \dots b_n)$$

$$\implies \det f = \frac{\Delta(f(b_1) \dots f(b_n))}{\Delta(b_1 \dots b_n)}$$

$A = \Phi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \quad a_{ij} \dots i\text{-te Koordinate von } f(b_j)$

$s_j(A) = \Phi_{\mathcal{B}}(f(b_j))$

ii) mit $a_j = f(b_j)$ gilt

$$\det \Phi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \det f$$

7.28 SATZ

$f: V \to V$ ist Isomorphismus $\iff \det f \neq 0$

BEWEIS

f Isomorphismus $\iff (f(b_1) \dots f(b_n))$ Basis

$\iff \Delta(f(b_1) \dots f(b_n)) \neq 0$

$\iff \det f \cdot \Delta(b_1 \dots b_n) \neq 0 \iff \det f \neq 0$

7.29 SATZ

$f, g: V \to V$ linear

$\Rightarrow \det f \circ g = \det f \cdot \det g$

BEWEIS

$f \circ g$ Isomorphismus $\iff f, g$ Isomorphismen

f, g invertierbar $\Rightarrow f \circ g$ invertierbar

mit $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

VORSICHT! $\to$ Falsch wenn $\dim = \infty$

Bsp $S_R: (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2 \dots)$ ist injektiv, nicht surjektiv

$S_L: (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$ ist surjektiv, nicht injektiv

$S_L \circ S_R = I$ aber $S_R \circ S_L = I - P_1$

$f \circ g$ bijektiv $\Rightarrow g$ injektiv, f surjektiv $\overset{\text{wenn } \dim < \infty}{\Longrightarrow} g, f$ bijektiv

Fall ①: $\det f \circ g = 0 \overset{7.28}{\iff} f \circ g$ nicht bijektiv

$\iff f$ nicht bijektiv, oder g nicht bijektiv

$\iff \det f = 0 \lor \det g = 0 \iff \det f \cdot \det g = 0$

Fall ②: $\det f \circ g \neq 0 \iff f \circ g$ bijektiv $\Rightarrow g$ bijektiv

$\Rightarrow \Delta^g$ nichttrivial

Sei $(b_1 \dots b_n)$ Basis von V, Δ nichttriviale Determinantenform

$$\det f \circ g = \frac{\Delta(f \circ g(b_1) \dots f \circ g(b_n))}{\Delta(b_1 \dots b_n)} = \frac{\Delta(f(g(b_1)), \dots f(g(b_n)))}{\Delta(g(b_1), \dots g(b_n))} \cdot \frac{\Delta(g(b_1) \dots g(b_n))}{\Delta(b_1 \dots b_n)}$$

$$= \frac{\Delta(f(b_1') \dots f(b_n'))}{\Delta(b_1', \dots, b_n')} \cdot \frac{\Delta(g(b_1), \dots g(b_n))}{\Delta(b_1, \dots b_n)} = \det f \cdot \det g$$

$b_i' = g(b_i)$ bilden ebenfalls Basis

7.30 KOROLLAR

$A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$

i) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

ii) $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

iii) $\det A = 0 \iff \operatorname{rk} A < n$

iv) $\det A^t = \det A$

BEWEIS

i) Folgt aus 7.29

Alternativ: $A = [s_1 \dots s_n]$ s_i ... Spaltenvektoren

$$A \cdot B = \left[\sum_{i_1=1}^{n} s_{i_1} b_{i_1 1}, \;\dots\; \sum_{i_n=1}^{n} s_{i_n} b_{i_n n}\right]$$

Wähle Determinantenform so, dass $\Delta(e_1 \dots e_n) = 1$

$$\det A \cdot B = \Delta\left(\sum_{i_1=1}^{n} s_{i_1} b_{i_1 1} \;\dots\; \sum_{i_n=1}^{n} s_{i_n} b_{i_n n}\right)$$

multilinear $\Rightarrow$ $= \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1}^{n} b_{i_1 1}, \dots b_{i_n n} \; \Delta(s_{i_1} \dots s_{i_n})$

Wenn $i_k = i_l$ für $k \neq l$ $\Rightarrow$ $\Delta = 0$

$\Rightarrow \sum_{\text{versch. Indizes}} = \sum_{\text{Permutation}}$

$$= \underbrace{\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} b_{\pi(1),1}, \dots b_{\pi(n),n} \; \underbrace{\Delta(s_{\pi(1)}, \dots s_{\pi(n)})}_{= \operatorname{sign} \pi}}_{= \det B} \cdot \underbrace{\Delta(s_1 \dots s_n)}_{= \det A} = \det A \cdot \det B$$

ii) $A \cdot A^{-1} = I$

$\Rightarrow$ $\det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$

$\overset{i)}{=}$ $\det A \cdot \det A^{-1}$

iii) $\underset{\det f_A}{\det A} = 0 \Rightarrow f_A$ nicht bijektiv $\Rightarrow \operatorname{rk} A < n$

iv) $\det A^T = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \pi \; a^T_{\pi(1),1} \cdots a^T_{\pi(n),n}$

$= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \pi \; a_{1,\pi(1)}, \ldots a_{n,\pi(n)}$

für fixes π: $\prod_{j=1}^{n} a_{j,\pi(j)} = \prod_{k=1}^{n} a_{\pi^{-1}(k),k}$

$\pi(j) = 1 \Leftrightarrow j = \pi^{-1}(1)$

$\pi(j) = k \Leftrightarrow j = \pi^{-1}(k)$

$= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \pi \; a_{\pi^{-1}(1),1} \cdots a_{\pi^{-1}(n),n}$

$= \sum_{\substack{\rho \in \mathfrak{S}_n \\ \rho = \pi^{-1}}} \operatorname{sign} \rho^{-1} \; a_{\rho(1),1} \cdots a_{\rho(n),n}$

"$(-1)^k$ wobei $\rho = \tau_1 \ldots \tau_k$

$\Rightarrow \rho^{-1} = \tau_k \ldots \tau_1 \Rightarrow \operatorname{sign} \rho = (-1)^k$

$= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \rho \; a_{\rho(1),1} \cdots a_{\rho(n),n} = \det A$

7.31 BERECHNUNG VON DETERMINANTEN

7.31 $\dim \leq 3$

$n = 2$: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid \det A \neq 0\}$ ... Gruppe der invertierbaren Matrizen, general linear group

$SL(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid \det A = 1\}$ ... special linear Group

$n = 3$: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_3} \operatorname{sign} \pi \; a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot a_{\pi(3),3}$

$\mathfrak{S}_3$ ist eine Coxetergruppe

$\mathfrak{S}_3 = \langle \tau_{12}, \tau_{23} \rangle$ wird von zwei Transpositionen erzeugt

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $+1$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} -1$ 5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} -1$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} +1$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} +1$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} -1$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

Regel von SARRUS

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} & a_{31} & a_{23} \end{array}$$

6.⁻ 5.⁻ 4.⁻ 1.⁺ 2.⁺ 3.⁺

Beispiel

Catalan-Matrix

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \\ 5 & 14 & 42 \end{pmatrix} = 1\cdot 5\cdot 42 + 2\cdot 14\cdot 5 + 5\cdot 2\cdot 14 - 5\cdot 5\cdot 5 - 14\cdot 14\cdot 1 - 42\cdot 2\cdot 2$$

$$= 14(1\cdot 5\cdot 3 + 2\cdot 5 + 5\cdot 2 - 14 - 2\cdot 2\cdot 3) - 125$$

$$= 14(15 + 10 + 10 - 14 - 12) - 125$$

$$= 14\cdot 9 - 125 = 126 - 125 = 1$$