8.55 BEISPIEL

Bestimme das Polynom vom Grad ≤ 2 für das

$$\int_0^1 |t^3 - p(t)|^2 \, dt = \min$$

$V = \mathbb{R}[X]$, $\mathbb{K} = U = \mathbb{R}_2[x] = \mathcal{L}(1, x, x^2)$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) \, dt$$

Gesucht: Orthogonalprodukt von x^3 auf $\mathcal{L}(1, x, x^2)$

Schritt 1: Gram-Matrix G

$$G_{ij} = \int_0^1 t^{i-1} t^{j-1} \, dt = \int_0^1 t^{i+j-2} \, dt = \frac{1}{i+j+1}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Hankelmatrix

Hilbertmatrix

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_2 & h_3 & h_4 \\ h_3 & h_4 & h_5 \end{bmatrix}$$

Momentproblem

$$\int_0^1 p(t)^2 \, dt = \min$$

unsere Lösung:

$$p(t) = \sum_{i=1}^{3} \eta_i t^{i-1} \qquad \eta = G^{-1} \xi \qquad \xi_i = \langle x^3, u_i \rangle = \int_0^1 t^3 t^{i-1} \, dt = \frac{1}{3+i}$$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -34 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} \\ -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$p(x) = \frac{1}{20} - \frac{3}{5} x + \frac{3}{2} x^2$$

$n \times n$ Hilbertmatrix:

$$\det H_n = \frac{c_n^4}{c_{2n}} \sim \frac{(2\pi)^n}{4^{n^2}\sqrt[4]{n}}$$ Stirling

$$c_n = \prod_{i=1}^{n-1} i!$$

... gute Testmatrix für numerische Algorithmen

8.56 KOROLLAR

Sei $U \subseteq V$ Unterraum, $(u_1, \dots u_m)$ eine ONB

Dann gilt:

i) $\forall v \in V: \pi_U(v) = \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i \rangle u_i$

ii) $\forall v \in V: \sum_{i=1}^{m} |\langle v, u_i \rangle|^2 \leq \|v\|^2$ Besselsche Ungleichung

wenn $\sum_{i=1}^{m} |\langle v, u_i \rangle|^2 = \|v\|^2 \iff v \in U$ Parsevalsche Identität

BEWEIS

klar: $G = I$ daher $\eta_i = \xi_i$. d.h. wenn $u_1 \dots u_m$ eine ONB von U ist, dann können wir $\pi_U(v)$ sofort hinschreiben

Wie finde ich eine Orthonormalbasis?

8.57 SATZ (Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren)

Gegeben: $v_1 \dots v_m$ linear unabhängig

konstruiere $u_1 \dots u_m$ ONS, sodass

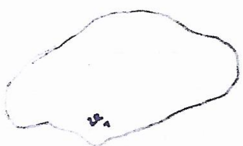
$$\mathcal{L}(u_1 \dots u_m) = \mathcal{L}(v_1 \dots v_m)$$

Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt

$(v_1 \dots v_m)$ linear unabhängig.

Dann existiert ein ONS $(u_1 \dots u_m) \subseteq V$

sodass $\mathcal{L}(u_1 \dots u_m) = \mathcal{L}(v_1 \dots v_m)$



gesucht $u \in U_k$

$$U_k = \mathcal{L}(v_1 \dots v_k) = \mathcal{L}(u_1 \dots u_k)$$

sodass $v_{k+1} - u \in U_k^{\perp}$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \quad \text{und für } k = 2, \dots, m$$

$$\text{sei } \tilde{u}_k = v_k - \underbrace{\sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k, u_j \rangle u_j}_{\pi_{U_{k-1}}(v_k)}$$

$$u_k = \frac{\tilde{u}_k}{\|\tilde{u}_k\|}$$

BEWEIS

$k=1$: $\|v_1\| \neq 0$ weil linear unabhängig

$$\to u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$k-1 \to k$:

Ang $u_1 \dots u_{k-1}$ ist ONB mit $\mathcal{L}(u_1 \dots u_{k-1}) = \mathcal{L}(v_1 \dots v_{k-1})$

$v_k \notin \mathcal{L}(u_1, \dots u_{k-1}) =: U_{k-1}$

$$U_{k-1}^{\perp} = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k, u_j \rangle u_j \overset{8.56}{=} v_k - \pi_{U_{k-1}}(v_k) \in U_{k-1}^{\perp}$$

$\Rightarrow \tilde{u}_k \perp u_1 \dots u_{k-1}$, $u_k \neq 0$ weil v_k linear unabhängig von $u_1 \dots u_k$

$$u_k = \frac{\tilde{u}_k}{\|\tilde{u}_k\|} \to (u_1, \dots u_k) \text{ ist ONS}$$

klar: $\tilde{u}_k \in \mathcal{L}(u_1 \dots u_{k-1}, v_k) = \mathcal{L}(v_1 \dots v_k)$

$v_k = \tilde{u}_k + \sum \lambda_j u_j \in \mathcal{L}(u_1 \dots u_{k-1}, v_k) = \mathcal{L}(v_1 \dots v_k)$ □

8.58 BEISPIEL

$V = \mathbb{R}^3$ mit innerem Produkt $\langle x, y \rangle = x^t A y$

$$\text{mit } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Gesucht: ONB

Wir orthogonalisieren die kanonische Basis e_1, e_2, e_3

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\|v_1\| = v_1^t A v_1 = 1 \quad \to u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{u}_2 = v_2 - \overbrace{\langle v_2, u_1 \rangle}^{= a_{21}} u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\langle u_1, \tilde{u}_2 \rangle = 0$

$$\|u_2\| = (1\ 1\ 0)\ A \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 1-1-1+3 = 2$$

$$\to \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_3 = v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \frac{\langle v_3, \tilde{u}_2\rangle \tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|^2} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 0\cdot\tilde{u}_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\|\tilde{u}_3\|^2 = (-1\ 0\ 1)\ A\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = 1+2-1-1 = 1$$

Lösung: $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

8.59 Alternativmethode zur Konstruktion der Orthogonalprojektion

Bestimme ONB des Unterraums $U \leq \mathbb{C}^n$

Dann ist $P = \sum_{i=1}^{m} u_i u_i^* = \sum_{i=1}^{m} u_i \overline{u}^T$

gegeben: $v \in \mathbb{C}^n$

$$P \cdot v = \sum_{i=1}^{m} u_i \underbrace{u_i^* v}_{=\langle v, u_i\rangle} = \pi_U(v)$$

8.60 BEISPIEL 8.55 noch einmal

$V = \mathbb{R}[x] \qquad U = \mathcal{L}(1, x, x^2)$

gesucht: ONB

$$\|v_1\|^2 = \int_0^1 1^2\, dt = 1 \qquad u_1 = 1$$

$$\langle x, 1\rangle = \int_0^1 t \cdot 1\, dt = \frac{1}{2}$$

$$\tilde{u}_2 = v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1 = x - \langle x, 1\rangle \cdot 1 = x - \frac{1}{2}$$

$$\|\tilde{u}_2\|^2 = \int_0^1 (t-\tfrac{1}{2})^2\, dt = \frac{(t-\frac{1}{2})^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}$$

$$u_2 = \sqrt{12}\,(x - \tfrac{1}{2})$$

$$\tilde{u}_3 = x^2 - \langle x^2, 1\rangle 1 - \langle x^2, x - \tfrac{1}{2}\rangle (x-\tfrac{1}{2})\cancel{\sqrt{12}}$$
$$= x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$\|u_3\| = \int_0^1 (t^2 - t + \tfrac{1}{6})^2\, dt = \frac{1}{180}$$

$$\pi_U(x^3) = \langle x^3, 1\rangle 1 + \langle x^3, \overset{\tilde{u}_2}{x - \tfrac{1}{2}}\rangle (x-\tfrac{1}{2})\overset{u_2}{\cancel{\sqrt{12}}}$$
$$+ \langle x^3, x^2 - x + \tfrac{1}{6}\rangle (x^2 - x + \tfrac{1}{6})\, 180$$

V Vektorraum mit Skalarprodukt, $\dim V < \infty$

- Jeder Unterraum U hat eindeutiges orthogonales Komplement sodass $V = U \oplus U^\perp$
- $\pi_U : V \to U$ Orthogonalprojektion, hat die Eigenschaft $\|\pi_U(v)\| \leq \|v\|$
- Wir können immer eine Orthonormalbasis von U bestimmen, dann ist $\pi_U(v) = \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i \rangle u_i$

RÜCKBLICK.

$\mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}) =: V^*$ Dualraum

Die Abbildung $V \times V \to \mathbb{K}$

$(x, f) \mapsto \langle x, f \rangle = f(x)$

ist bilinear

Das Skalarprodukt $V \times V \to \mathbb{K}$

$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$

ist sesquilinear

Jedes $y \in V$ induziert $f_y \in V^*$, $f_y(x) = \langle x, y \rangle$

$V \to V^*$

$y \mapsto f_y$

ist eine antilineare Einbettung

injektiv:

Ang $f_y = 0 \Rightarrow f_y(x) = 0 \ \forall x$

insbes $\underset{\langle y, y \rangle = \|y\|^2}{\underset{\shortparallel}{f_y(y)}} = 0 \quad \Rightarrow y = 0$

8.61 DARSTELLUNGSSATZ VON RIESZ   FRIGGES

$(V, \langle .,. \rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt, $\dim V < \infty$

Dann ist die Abb.: $V \to V^*$

$$y \mapsto f_y : V \to \mathbb{K}$$
$$x \mapsto \langle x, y \rangle$$

ein antilinearer Isomorphismus

BEWEIS   antilinear: $f_{\lambda y + \mu z} = \bar{\lambda} f_y + \bar{\mu} f_z$

- injektiv → schon gezeigt
- surjektiv:

  gegeben: $f \in V^*$

  gesucht: $y \in V$ sodass $f = f_y$

  Sei $(u_1 \dots u_n)$ ONB von V

  Setze $y = \sum_{i=1}^{n} \overline{f(u_i)}\, u_i$

$$f_y(x) = \langle x, y \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^{n} \overline{f(u_i)}\, u_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} f(u_i) \langle x, u_i \rangle$$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i\right) = f(x) \Rightarrow f_y = f \quad \square$$

Der andere Darstellungssatz von Riesz sagt

$C[0,1]^* =$ Raum der Maße auf $[0,1]$

8.62 ÜBUNG

i) $v = 0 \iff \forall w \in V : \langle v, w \rangle = 0 \iff \forall f \in V^* : f(v) = 0$

ii) $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sup \{ |\langle v, w \rangle| \mid \|w\| < 1 \}$

$= \sup \{ |f(v)| \mid f \in V^*, \|f\| < 1 \}$

ERINNERUNG

$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{w^*} \mathbb{K}$

$f^T : W^* \to V^*$ $W^* \to V^*$

$f^T(w^*) = w^* \circ f \in V^*$ $\downarrow$

$\mathbb{K}$

d.h. $V^* \simeq V$

8.63 SATZ & DEFINITION

$(V, \langle .,. \rangle), (W, \langle .,. \rangle_W)$ Vektorräume mit Skalarprodukt

$\dim V, \dim W < \infty \qquad g \in \mathrm{Hom}(V,W)$

i) Für jedes $w \in W$ ist die Abbildung

$$v \mapsto \langle g(v), w \rangle = f_w \circ g(v)$$

ii) $\forall w \in W: \exists!\, u \in V: \forall v \in V: \langle g(v), w \rangle = \langle v, u \rangle$

wir bezeichnen $g^*(w) := u$

iii) Die Abbildung $g^*: W \to V$ ist linear und heißt adjungierte Abbildung

iv) Die Abbildung: $\cancel{H}\mathrm{om}(V,W) \to \mathrm{Hom}(V,W)$

$$g \mapsto g^*$$

ist eine Antilineare Involution (d.h. $g^{**} = g$)

BEWEIS

i) $\langle g_i(v), w \rangle = f_w \; g(v)$

ist linear $\to f_w \circ g \in V^*$

ii) Riesz $\Rightarrow \exists!\, u \in V: f_w \circ g = f_u$

$\forall v \in V \; \langle g(v), w \rangle = \langle \quad , u \rangle = \langle v, g^*(w) \rangle$

wenn $\forall v \in V: \langle v, u_1 \rangle = \langle v, u_2 \rangle \Rightarrow u_1 \overset{8.62}{=} u_2$

iii) zz: g^* ist linear

$\forall v \in V: \langle v, g^*(\lambda w_1 + \mu w_2) \rangle \overset{!}{=} \langle v, \lambda g^*(w_1) + \mu g^*(w_2) \rangle$

$\langle v, g^*(\lambda w_1 + \mu w_2) \rangle = \langle g(v), \lambda w_1 + \mu w_2 \rangle$

$= \bar{\lambda} \langle g(v), w_1 \rangle + \bar{\mu} \langle g(v), w_2 \rangle = \bar{\lambda} \langle v, g^*(w_1) \rangle + \bar{\mu} \langle v, g^*(w_2) \rangle$

$= \langle v, \lambda g^*(w_1) \rangle + \langle v, \mu g^*(w_2) \rangle$

$= \langle v, \lambda g^*(w_1) + \mu g^*(w_2) \rangle$

$\mathrm{Hom}(V,W) \to \mathrm{Hom}(W,V)$

iv) zz: $g \mapsto g^*$ ist antilinear

d.h. zz. $(\lambda g + \mu h)^* = \bar{\lambda} g^* + \bar{\mu} h^*$

also $\forall v \in V : \forall w \in W : \langle v, (\lambda g + \mu h)^*(w) \rangle = \langle v, (\bar{\lambda} g^* + \bar{\mu} h^*)(w) \rangle$

$\langle v, (\lambda g + \mu h)^*(w) \rangle = \langle (\lambda g + \mu h)(v), w \rangle$

$= \lambda \langle g(v), w \rangle + \mu \langle h(v), w \rangle = \lambda \langle v, g^*(w) \rangle + \mu \langle v, h^*(w) \rangle$

$= \langle v, \bar{\lambda} g^*(w) + \bar{\mu} h^*(w) \rangle = \langle v (\bar{\lambda} g^* + \bar{\mu} h^*)(w) \rangle$ $\square$

$\forall v \in V : \forall w \in W : \langle g^{**}(v), w \rangle = \overline{\langle w, g^{**}(v) \rangle}$

$= \overline{\langle g^*(w), v \rangle} = \langle v, g^*(w) \rangle = \langle g(v), w \rangle$

$\overset{8.62}{\Longrightarrow} \forall v \in V : g^{**}(v) = g(v) \Rightarrow g^{**} = g$ $\square$

8.64 BEMERKUNG

Wenn $\dim V = \infty$ dann muss eine adjungierte Abbildung nicht existieren

Beispiel: $V = \mathbb{R}[x]$ $\qquad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$

$D : V \to V$
$p(x) \mapsto p'(x)$

$D^*(x)$ existiert nicht!

$\langle x^n, \underbrace{D^*(x_1)}_{= g(x)} \rangle = \langle D x^n, x \rangle = \int_0^1 n t^{n-1}\, dt = \frac{n}{n+1}$

$\sup_{t \in [0,1]} |q(t)| < M$

$.. = \int_0^1 t^n \varphi(x)\, dt \Rightarrow | \langle x^n, Dx^* \rangle | \leq \int_0^1 t^n |q(t) \cdot o(t)|\, dt \leq \frac{M}{n-1}$ ↯

8.65 SATZ

Seien $B \subseteq V$, $C \subseteq W$ ONB

$B = (b_1 \ldots b_m)$ $\qquad C = (c_1 \ldots c_n)$

$f \in \mathrm{Hom}(V, W) \to f^* \in \mathrm{Hom}(W, V)$

$\Phi_B^C(f^*) = \Phi_C^B(f)^* = \overline{\Phi_C^B(f)}^T$

BEWEIS

$A = \Phi^B_C(f)$

$a_{ij} = \Phi_C(f(b_j)) = \langle f(b_j), c_i \rangle$

$\tilde{A} = \Phi^C_B(f^*)$

$\tilde{a}_{ij} = \Phi_B(f^*(c_j)) = \langle f^*(c_j), b_i \rangle = \overline{\langle b_i, f^*(c_j) \rangle}$

$= \overline{\langle f(b_i), c_j \rangle} = \overline{a_{ji}} \Rightarrow \hat{A} = \overline{A}^{+}$

8.66 SATZ

Eigenschaften der adjungierten Abbildung.

$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \qquad W \xrightarrow{g^*} V \xrightarrow{f^*} U$

i) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

ii) $f^{**} = f$

iii) $\ker f^* = \operatorname{im}(f^*)^{\perp}$

iv) $\operatorname{im} f^* = \ker(f^*)^{\perp}$

v) f injektiv $\Leftrightarrow$ f^* surjektiv

vi) f surjektiv $\Leftrightarrow$ f^* injektiv

BEWEIS

i) $\forall u \in U: \forall w \in W: \langle u, (g \circ f)^*(w) \rangle_U = \langle g(f(u)), w \rangle_W$

$= \langle f(u), g^*(w) \rangle_V = \langle u, f^*(g^*(w)) \rangle_U$

$\overset{8.62}{\Longrightarrow} (g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

ii) bereits gezeigt

iii) "$\subseteq$" Sei $u \in \ker f$

zz: $\forall v \in V: u \perp f^*(v)$

$\langle u, f^*(v) \rangle = \langle \underbrace{f(u)}_{=0}, v \rangle = 0$

"$\supseteq$" Sei $u \in \operatorname{im}(f^*)^{\perp}$ zz: $f(u) = 0$

8.62 $\Rightarrow$ genügt zz. $\langle f(u), v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$

$\langle f(u), v \rangle = \langle u, f^*(v) \rangle = 0$ weil $u \perp \operatorname{im}(f^*)$ $\square$

iv) wende iii) auf f^* an:

$$\ker(f^*) = \operatorname{im}(f^{**})^\perp = \operatorname{im}(f)^\perp$$

$$\Rightarrow \ker(f^*)^\perp = \operatorname{im}(f)^{\perp\perp} = \operatorname{im} f$$

v) f injektiv $\Leftrightarrow \ker f = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{im} f^* = U$

vi) wie v) angewandt auf f^*

8.67 DEFINITION

i) Eine lineare Abbildung $f: V \to V$ heißt **selbstadjungiert** wenn $f^* = f$

(Für Matrizen $A = A^*$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A = A^*$ symmetrisch)

ii) $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ heißt **unitär** (**lineare Isometrie**)

wenn $\forall x, y \in V: \langle f(x), f(y) \rangle_W = \langle x, y \rangle_V$

8.68 BEMERKUNG

i) **unitäre** Abbildungen sind symmetrisch, daher injektiv

$$f(x) = 0 \Rightarrow \| f(x) \|^2 = 0$$

$$\langle f(x), f(x) \rangle = \langle x, x \rangle = \| x \|^2$$

ii) $\dim V < \infty$

$f: V \to V$ unitär $\Rightarrow f$ invertierbar

und $f^{-1} = f^*$ (1)

meist werden unitäre Operatoren durch die Beziehung (1) definiert

iii) $\dim V = \infty$, dann sind lineare Isometrien nicht automatisch invertierbar

BEWEIS

ii) f injektiv $\Rightarrow$ bijektiv (weil Dimension gleich)

$$\forall x, y \in V: \langle x, y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle = \langle f^*(f(x)), y \rangle$$

$8.62 \Rightarrow \forall x: \quad x = f^*(f(x))$

$$\Rightarrow f^* \circ f = \mathrm{id} \Rightarrow f^* = f^{-1}$$

iii) Bsp: $V = \ell^2 = c_{00}$ (Raum der endlichen Folgen)

$= \{(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n, 0 \dots 0) \mid n \in \mathbb{N}, \xi_i \in \mathbb{R}\}$

$S: V \to V$

$(\xi_1, \xi_2 \dots) \mapsto (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$

ist lineare Isometrie

$\langle S(x), y \rangle = \langle (0, \xi_1, \xi_2, \dots), (\eta_1 \dots \eta_n \dots) \rangle$

$= \sum_{i=2}^{\infty} \xi_{i-1} \overline{\eta_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\eta_{i+1}}$

$= \langle (\xi_1, \xi_2, \dots), (\eta_2, \eta_3 \dots) \rangle = \langle x, S^*(y) \rangle$

$\Rightarrow S^*: V \to V$

$(\eta_1, \eta_2, \dots) \mapsto (\eta_2, \eta_3, \dots)$

$S^* \circ S = id$

aber $S \circ S^* = id - P_1 \neq id$

wobei: $P_1: V \to V$

$(\xi_1, \xi_2 \dots) \mapsto (\xi_1, 0, \dots)$

$\Rightarrow S$ ist lineare Isometrie, aber nicht invertierbar

8.69 DEFINITION

- Eine Matrix $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt unitär wenn $U^* U = I$ $\to U^* = U^{-1}$
- Eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt orthogonal wenn $U^T U = I$ $\to U^T = U^{-1}$

8.70 SATZ

Sei $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent

i) T ist unitär

ii) $\forall x \in \mathbb{C}^n: \|Tx\| = \|x\|$

iii) $\forall x, y \in \mathbb{C}^n: \mathrm{Re}\langle Tx, Ty \rangle = \mathrm{Re}\langle x, y \rangle$

iv) $\forall x, y \in \mathbb{C}^n: \langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$

v) Die Spalten von T bilden eine ONB

BEWEIS

$i \Rightarrow ii$) Sei $T^* = T^{-1}$

$\Rightarrow \|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^* T x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$

ii → iii) polarisation

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 =$$
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle - (\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle)$$
$$= 4\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle$$

$$\|T(x+y)\|^2 - \|T(x-y)\|^2 = \|Tx+Ty\|^2 - \|Tx-Ty\|^2 = \dots = 4\mathrm{Re}\langle Tx,Ty\rangle$$

iii → iv) $\mathrm{Re}\langle Tx,Ty\rangle = \mathrm{Re}\langle x,y\rangle$ gilt $\forall x,y$

$\Rightarrow$ es gilt für alle x, iy : $\mathrm{Re}\langle Tx,T(iy)\rangle = \mathrm{Re}(-i\langle Tx,Ty\rangle)$

$= \mathrm{Im}\langle Tx,Ty\rangle$ $\quad$ $\mathrm{Re}\langle x,iy\rangle = \mathrm{Im}\langle x,y\rangle$

iv → v) Die Spalten von T sind

$u_i = T\cdot e_i$ $\quad$ n-Stück

→ es genügt z.z.: u_i sind ONS

$$\langle u_i,u_j\rangle = \langle Te_i,Te_j\rangle = \langle e_i,e_j\rangle = \delta_{ij}$$

v → i) $(T^*T)_{ij} = u_i^*\cdot u_j = \langle u_j,u_i\rangle = \delta_{ij}$

$\Rightarrow T^*T = I$

8.71 DEFINITION

$(X,d), (X',d')$ metrische Räume

$f: X \to X'$ heißt **Isometrie** wenn

$d'(f(x),f(y)) = d(x,y)$ $\quad$ normierter Räume, sind

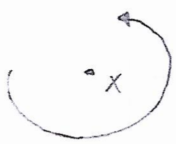
metrische Räume $\quad d(x-y) = \|x-y\|$

Isometrie zwischen metrischen Räumen:

$\forall x,y\in V: \|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$

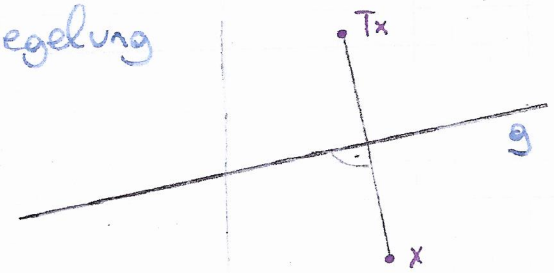
8.72 BEISPIELE

- Translation (nichtlinear)
- Rotation um x



linear $\Leftrightarrow x = 0$

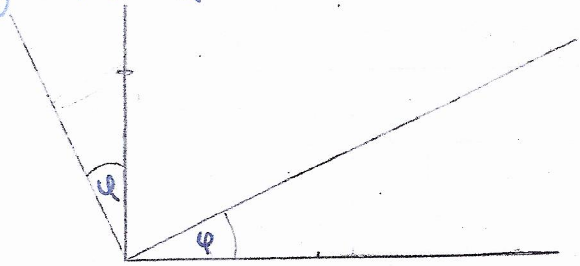
- Spiegelung



unitäre Abbildung

linear $\Leftrightarrow 0 \in g$

- Drehung im $\mathbb{R}^2$



$$U = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} t} \cdot x(0)$$

$$\dot{x} = \alpha \cancel{x} \qquad \frac{dx}{dt} = \alpha x$$

$$\frac{dx}{x} = \alpha \, dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \alpha \, dt$$

$$\log x = \alpha t \Rightarrow x = e^{\alpha t} \cdot e^{c} \qquad x_0 = e^{c}$$

$$x(t) = e^{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} t} x(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}{n!} t^n$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

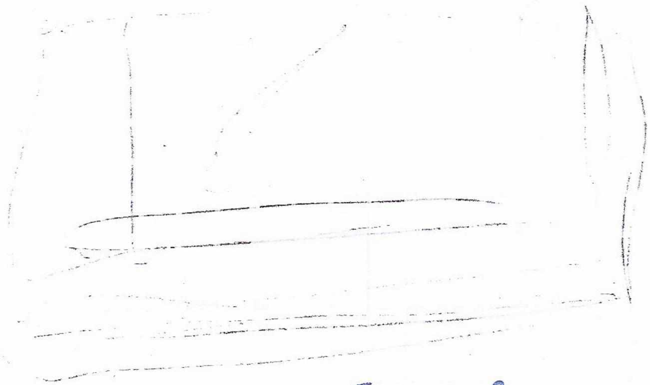
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^4 = I$$

$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\varphi}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{2n}}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n i \frac{\varphi^{2n+1}}{2n+1!}$$

$$= \cos\varphi + i \sin\varphi$$

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\varphi} = I \cdot \cos\varphi + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \sin\varphi$$
$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$\leadsto$ Lie Gruppen



$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 2\varphi - \frac{\pi}{2}$$

$$U = \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \cos(2\varphi - \frac{\pi}{2}) \\ \sin 2\varphi & \sin(2\varphi - \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{bmatrix}$$

8.73 SATZ

Die folgenden Mengen sind Gruppen

$O(n) = \{U \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid U^* U = I\}$ orthogonale Gruppe

$U(n) = \{U \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid U^* U = I\}$ unitäre Gruppe

$SO(n) = \{U \in O(n) \mid \det U = 1\}$ spezielle orthogonale Gruppe

$SU(n) = \{U \in U(n) \mid \det U = +1\}$ spezielle unitäre Gruppe

8.74 BEMERKUNG

Für $U \in U(n)$ gilt $|\det U| = 1$

$U^* = U^{-1}$

$\det U^* = \det \overline{U}^T = \overline{\det U^T} = \det U \cdot \det U^{-1} = \frac{1}{\det U}$

$\Rightarrow \overline{\det U} \cdot \det U = 1$

$O(n) \quad \{\det U = 1\} \cup \{\det U = -1\}$

8.75 BEISPIEL

$O(2)$: $\to$ Rotation: $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$ $\det = 1$

$\to$ Spiegelung: $\begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{bmatrix}$ $\det = -1$

allgemen:

$$u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\psi \\ \sin\varphi & \cos\psi \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \text{ orthogonal}$$

$$\cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi = 0 = \cos(\psi - \varphi)$$

$$\psi = \varphi + (k + \tfrac{1}{2})\pi$$

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$$

$$\cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha + i \sin\alpha)(\cos\beta + i \sin\beta)$$

$$= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$+ i(\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta)$$

$$\cos\psi = \cos(\varphi + (k + \tfrac{1}{2})\pi)$$

$$= \cos\varphi \underbrace{\cos(k + \tfrac{1}{2})\pi}_{0} - \underbrace{\sin(k + \tfrac{1}{2})\pi}_{\{\varepsilon = \pm\}} \sin\varphi$$

$$= -\varepsilon \sin\varphi$$

$$\sin\psi = \sin(\varphi + (k + \tfrac{1}{2})\pi)$$

$$= \sin\varphi \underbrace{\cos(k + \tfrac{1}{2})\pi}_{0} + \cos\varphi \sin(k + \tfrac{1}{2})\pi = \varepsilon \cdot \cos\varphi$$

$$U = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \cdot \varepsilon \\ \sin\varphi & \cos\varphi \cdot \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$\det U = \varepsilon$

$U =$ Rotation $\Leftrightarrow \det U = 1$

oder

$U =$ Rotation + Spiegelung $\Rightarrow \det U = -1$

$SO(2) =$ Rotationen $\cong \mathbb{T} = \{ e^{i\varphi} \mid \varphi \in [0, 2\pi) \}$

$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$$

$SU(2) \cong \{ q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1 \}$

$\mathbb{H}$ ... William P. Hamilton (1805 – 1865)

$\int L(x, \dot{x}, t)\, dt = \min t$

$\mathbb{H} = \{ a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \}$

$i^2 = j^2 = k^2 = 1$ **Quarternionen** Schiefkörper

$ij = k \qquad ji = -k \qquad e_1 \times e_2 = e_3$

$jk = i \qquad kj = -i \qquad e_2 \times e_1 = -e_3$

$ki = j \qquad ik = -j$

$\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ Quarternionen-Gruppe