11.20 DEFINITION

Eine Matrix der Form $J = J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{k \times k}$

heißt Jordanblock der Länge k zum Eigenwert λ

11.21 BEMERKUNG

$$\chi_{J_k(\lambda)}(x) = (x-\lambda)^k$$

$\dim \eta_\lambda = 1$

$J_k(\lambda) - \lambda I$ ist nilpotent vom Index k ↯

11.22 SATZ (Jordansche Normalform im allg. Fall)

Sei k alg. abg (z.B. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Dann ist jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform

d.h. $\exists B \in GL$ so dass

$$B^{-1} A B = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_q \end{bmatrix}$$ wobei J_i Jordanblöcke zu EW von.

BEWEIS

Seien $\lambda_1 \dots \lambda_m$ alle versch. EW von A

$W_i = \ker(\lambda_i I - A)^n$ die entsprechenden Haupträume

11.15 $\Rightarrow \mathbb{K}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_m$

W_i sind invariant und $(f_A - \lambda_i)|_{W_i}$ ist nilpotent

11.18 $\Rightarrow \exists$ Basis B_i von W_i so, dass

$$\Phi^{B_i}_{B_i}((f_A - \lambda_i)|_{W_i}) = \begin{bmatrix} N_{n_{i1}} & & \\ & \ddots & \\ & & N_{n_{id_i}} \end{bmatrix}$$

wobei $N_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} = J_k(0)$

$d_i = \dim \ker(\lambda_i I - A)$ = geometr. Vielfachheit von λ_i

$$\Rightarrow \Phi^{B_i}_{B_i}(f_A|_{W_i}) = \begin{bmatrix} J_{n_{i1}}(\lambda_i) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_{id_i}}(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_m$

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{bmatrix} J_{n_{11}}(\lambda_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J_{n_1 d_1}(\lambda_1) & & & \\ & & & J_{n_{21}}(\lambda_2) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_{n_2 d_2}(\lambda_2) \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & J_{n_q d_q}(\lambda_q) \end{bmatrix}$$

11.23 KOROLLAR

Sei $T^{-1} A T = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_q \end{bmatrix}$

eine Jordansche Normalform für A

$J_i = J_{k_i}(\lambda_i)$

(müssen nicht verschieden sein, jedes λ_i kommt so oft vor wie der geometr. VF entspricht)

1) $\sum_{i=1}^{q} k_i = n$

2) Für $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$ gilt

$d(\lambda) = \# \{ i \mid \lambda = \lambda_i \}$

$k(\lambda) = \sum \{ k_i \mid \lambda = \lambda_i \}$

3) $\min \{ r \mid \ker(\lambda - A)^r = \ker(\lambda - A)^t \} = \max \{ k_i \mid \lambda = \lambda_i \}$

4) $\# \{ i \mid \lambda_i = \lambda \wedge k_i \geq k+1 \} = rk((\lambda - A)^k) - rk((\lambda - A)^{k+1})$

5) Die Jordanblöcke sind (bis auf Reihenfolge) eindeutig bestimmt

BEWEIS

1) klar

2) Zu jedem Eigenvektor gibt es einen Jordanblock (siehe Algorithmus)

$v_k \cdot (J_k(\lambda) - \lambda I) = k-1$

$\chi_A(x) = \chi_{T^{-1}AT}(x) = \prod_{i=1}^{q} \chi_{J_i}(x) = \prod_{i=1}^{q} (x - \lambda_i)^{k_i}$

3) Sei $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_q \end{bmatrix}$

$$(\lambda - T^{-1}AT)^k = \begin{bmatrix} (\lambda - J_1)^k & & \\ & \ddots & \\ & & (\lambda - J_q)^k \end{bmatrix}$$

$\lambda \neq \lambda_i \Rightarrow (\lambda - J_i)$ regulär

$\Rightarrow (\lambda - J_i)^k$ regulär

$$\lambda = \lambda_i \Rightarrow rk((\underbrace{\lambda - J_i}_{k_i \times k_i})^k) = \begin{cases} k_i - k & k \le k_i \\ 0 & k \geq k_i \end{cases}$$

$$rk((\lambda_i - J_i)^k) - rk((\lambda_i - J_i)^{k+1}) = \begin{cases} 1 & k \le k_i - 1 \\ 0 & k \geq k_i \end{cases}$$

4) $\# \{ i \mid \lambda_i = \lambda \wedge k_i \geq k+1 \}$

$$= rk(\lambda - A)^k - rk(\lambda - A)^{k+1}$$

$$= rk\left(\left(J_i^{k_i \times k_i} - \lambda_i I\right)^k\right) = \begin{cases} k_i - k & \text{wenn } k \leq k_i \\ 0 & k \geq k_i \end{cases}$$

$$rk(A - \lambda I)^k = \sum_{\lambda \overset{!}{=} \lambda_i} (k_i - k) + \sum_{\lambda \neq \lambda_i} k_i$$

$$\Rightarrow rk\left((A - \lambda I)^k\right) - rk\left((A - \lambda I)^{k+1}\right)$$

$$= \sum_{\lambda \overset{!}{=} \lambda_i} (k_i - k)_+ - (k_i - (k+1))_+ \qquad \text{wobei: } a_+ = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \sum_{\substack{\lambda \overset{!}{=} \lambda_i \\ k+1 \leq k_i}} 1 = \# \{ i \mid k_i \geq k+1 \}$$

11.24 LEMMA

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ $\qquad \psi_A : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}^{n \times n}$ $\qquad$ Einsetzungshomomorphism

$$p(x) \mapsto p(A)$$

$$(p+q)(A) = p(A) + q(A)$$

$$(p \cdot q)(A) = p(A) \cdot q(A)$$

i) $$p\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

ii) $$p\left(\begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_n} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} p(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(A_n) \end{bmatrix}$$

iii) Wenn $\quad A = T^{-1} B T \Rightarrow p(A) = T^{-1} p(B) T$

$$(T^{-1} A T)^k = (T^{-1} A T)(T^{-1} A T) \dots (T^{-1} A T)$$

$$= T^{-1} A^k T$$

Jede Matrix ist ähnlich zu einer Jordan'schen Normalform (= Blockdiagonalmatrix aus Jordan-Blöcken)

$\to$ es genügt p (Jordanblöcken) zu verstehen

z. B. $p\left(\begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} p(x) & p'(x) \\ 0 & p(x) \end{bmatrix}$

1.25 LEMMA

Für $J = J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda I + N$ N ... nilpotente Matrix der Form $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$

gilt $p(J)_{ij} = \begin{cases} \dfrac{p^{(j-i)}(\lambda)}{(j-i)!} & \text{wenn } j \geq i \\ 0 & \text{wenn } j < i \end{cases}$

$$p\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} p(\lambda) & p'(\lambda) & \frac{p''(\lambda)}{2} & \frac{p'''(\lambda)}{6} & \cdots \text{ usw} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{p'''(\lambda)}{6} \\ & & \ddots & \ddots & \frac{p''(\lambda)}{2} \\ & & & \ddots & p'(\lambda) \\ & & & & p(\lambda) \end{bmatrix}$$

BEWEIS

$$(\lambda I + N)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} N^i$$

$$(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i} \quad \text{wenn } AB = BA$$

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$N^i = \begin{array}{c} \to i+1 \text{ te Spalte} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ü

11.26 ANWENDUNG diskrete dynamische Systeme

RÄUBER-BEUTE MODELLE

F_n = # Füchse H_n = # Hasen

$$F_{n+1} = \underbrace{p}_{\text{Überlebensrate}} \cdot F_n + q \cdot H_n$$

$$H_{n+1} = -\underbrace{t}_{\text{Tötungsrate}} \cdot F_n + \underbrace{g}_{\text{Zuwachsrate}} \cdot H_n$$

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ H_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ -t & g \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ H_n \end{pmatrix}$$

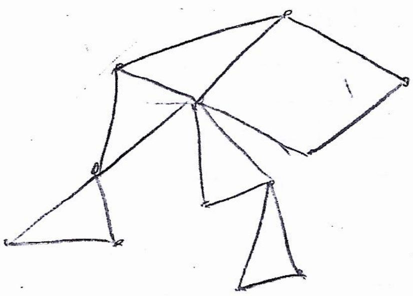
$$A = T \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T^{-1}$$

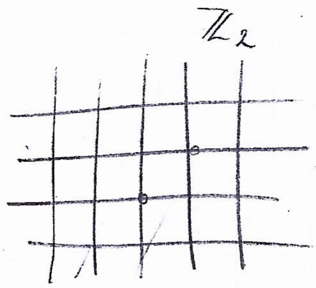
$|\lambda| > 1$ ... Explosion der Population

$|\lambda| < 1$ ... Aussterben

$|\lambda| = 1$ ... Gleichgewicht

IRRFAHRTEN





↪ stochastische Prozesse

11.27 MATRIXEXPONENTIALFUNKTION

Die Definition $f\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{bmatrix}$

lässt sich auf beliebige Funktionen erweitern

$$A = T^{-1} \underbrace{\Lambda}_{\text{diagonalisierbare Matrix}} T \Rightarrow f(A) = T^{-1} f(\Lambda) T$$

Wenn $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ analytisch auf spec A

dann ist $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$

$$A = BJB^{-1} \Rightarrow f(A) = B\, f(J)\, B^{-1}$$

BEISPIEL Exponentialfunktion

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

$$A = B \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{bmatrix} B^{-1}$$ Jordan-Normalform

$$e^A = B \cdot \begin{bmatrix} e^{J_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_k} \end{bmatrix} B^{-1}$$

$$J_i = \lambda_i I + N \qquad e^{\lambda I + N} = e^{\lambda i} + e^N$$

denn $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ wenn $AB = BA$

i. A. ist $e^X + e^Y \neq e^{X+Y}$,

aber $e^{X \cdot Y} = e^Z$

wobei: $Z = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]]$

$$[X,Y] := XY - YX$$

→ Campbell-Baker-Hausdorff-Formel

$$e^{\lambda I + N} = e^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k}{k!} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \cdots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{6} \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

11.28 ANWENDUNG: kontinuierliche dynamische Systeme

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) \qquad \frac{dx}{dt} = a \cdot x \qquad \frac{dx}{x} = a\, dt$$

$$\log x = at + c \implies x = c_1 \cdot e^{at}$$

$\Rightarrow$ Lösung: $x(t) = e^{At} \cdot x_0$

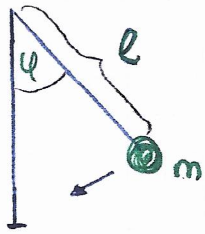
$$x(t) \xrightarrow{t \to \infty} ?$$

$$\lambda_i(e^{At}) = e^{\lambda_i t}, \quad e^{At} = e^{B \Lambda B^{-1} t} = B e^{\Lambda t} B^{-1}$$

$$\mathrm{Re}\, \lambda_i < 0 \implies e^{\lambda_i t} \to 0$$

$$\mathrm{Re}\, \lambda_i > 0 \implies e^{\lambda_i t} \to \infty$$

Beispiel Pendel



$$\cancel{m}\cdot l \cdot \ddot{\varphi} = \cancel{m} \sin\varphi\,(-a^2)$$
$$l\ddot{\varphi} = \sin\varphi\,(-a^2)$$
$$\ddot{\varphi} = \sin\varphi \left(\frac{-a^2}{l}\right)$$

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin\varphi$$
$$\ddot{\varphi} \approx -\omega^2 \varphi \quad \text{(Taylorreihe)}$$

Zusatzvariable $\psi = \frac{\dot{\varphi}}{\omega} \Rightarrow \dot{\varphi} = \omega\psi$

$$\dot{\psi} = \frac{\ddot{\varphi}}{\omega} = -\omega\varphi$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Lösung: $\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = e^{\begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} t} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix}$ $\to$ Anfangsort
$\to$ Anfangsgeschwindigkeit

$$\chi(x) = x^2 + \omega^2$$

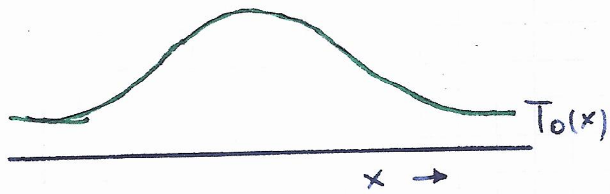
Eigenwerte $\lambda_i\ \omega$

$$\left.\begin{aligned} q(t) &= a e^{i\omega t} + b e^{-i\omega t} \\ &= a' \cos\omega t + b' \sin\omega t \end{aligned}\right\} ?$$

Weitere Beispiele

Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T(t,x)}{\partial t} = \Delta T(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(t,x)$$



$$T(t,x) = e^{t\Delta}\, T_0(x)$$

SCHRÖDINGER - GLEICHUNG

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = H \psi(t,x)$$

Hamilton Operator

$$\psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}t} H \psi_0 \quad -\Delta + V(x)$$

11.29 SATZ + DEFINITION

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

a) $\exists\, p(x) \in \mathbb{K}[x] : p(A) = 0$

$(I, A, A^2, \dots A^{n^2})$ sind l.a.

b) $\exists$ eindeutiges normiertes Polynom $m_A(x)$ mit minimalem Grad sodass $m_A(A) = 0$

$m_A(x)$ heißt Minimalpolynom von A

c) $\mathrm{Ann}(A) = \{p(x) \mid p(A) = 0\}$

heißt Annihilator von A und es gilt:

$p(x) \in \mathrm{Ann}(A) \Leftrightarrow m_A(x) \mid p(x)$

d) Jeder Eigenwert von A ist Nullstelle von $m_A(x)$ ☺

BEWEIS

c) Sei $p(x) \in \mathrm{Ann}(A)$

$\Rightarrow \deg p(x) \geq \deg m_A(x)$

$\Rightarrow p(x) = q(x)\, m_A(x) + r(x)$

wobei $\deg r(x) < m_A(x)$

$r(A) = p(A) - q(A) m_A(x) = 0$

$\Rightarrow r(x) \equiv 0$

$\Rightarrow m_A(x) \mid p(x)$

11.30 SATZ VON CAYLEY-HAMILTON

$$\chi_A(A) = 0$$

11.31 KOROLLAR

$$m_A(x) \mid \chi_A(x)$$

Die Nullstellen von $m_A(x)$ und $\chi_A(x)$ sind gleich, haben aber möglicherweise verschiedene Vielfachheiten

zu 11.30 "BEWEIS" 1

$$\chi_A(x) = \det(Ix - A)$$

$$\chi_A(A) = \det(IA - A) = 0$$

BEWEIS 2

$\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen

$$A = B \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_q \end{bmatrix} B^{-1}$$

$$\chi_A(A) = B \begin{bmatrix} \chi_A(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \chi_A(J_n) \end{bmatrix} B^{-1}$$

$J_k = \lambda_{i_k} I + N$, Länge des Blocks $\leq k(\lambda_{i_k})$

$$\Rightarrow \chi_A(x) = \prod (\lambda - \lambda_i)^{k(\lambda_i)}$$

$$\chi_A(J_k) = \prod_{\lambda_i \neq \lambda_{i_k}} (J_k - \lambda_i I)^{k(\lambda_i)} \underbrace{(J_k - \lambda_{i_k} I)^{k(\lambda_{i_k})}}_{= N^{k(\lambda_{i_k})}} = 0$$

11.32 KOROLLAR ZU BEWEIS 2

i) $m_A(x) = \prod_i (x - \lambda_i)^{m_i}$

wobei m_i = kleinste Potenz, sodass

$\ker(\lambda_i I - A)^{m_i} = \ker(\lambda_i - A)^{m_i + 1}$

= max. Länge eines zu λ_i gehörenden Jordanblocks

ii) A ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow m_A(x)$ hat nur einfache Nullstellen

d.h. $m_A(x) = \prod_{\text{versch EW}} (x - \lambda_i)$

11.33 ANWENDUNG AUF DIE EXPONENTIALFUNKTION

Wenn $p(A) = 0 \Rightarrow A^k = a_0 I + a_1 A + \dots + A^{k-1} a_{k-1}$

$\Rightarrow A^{k+1} = b_0 I + b_1 A_1 + \dots + b_{k-1} A^{k-1}$

$\Rightarrow e^A = c_0 I + c_1 A + \dots + c_{k-1} A^{k-1}$

Bsp. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$e^A = e^{\alpha I + A} = e^{\alpha} \cdot e^A$

o.B.d.A. $Tr(A) = 0$

sonst $\mathring{A} = A - \frac{1}{2} Tr(A) \cdot I$

$Tr(\mathring{A}) = 0$

$e^A = e^{\frac{1}{2} Tr(A)} \cdot e^{\mathring{A}}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \chi_A(x) = x^2 - a^2 - bc = x - \delta, \quad \delta := a^2 - bc$

Cayley-Hamilton $\Rightarrow A^2 = \delta I$

$\Rightarrow A^{2n} = \delta^n I$

$A^{2n+1} = \delta^n A$

$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n}}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^n}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^n A}{(2n+1)!}$

$= \cosh(\sqrt{\delta}) I + \frac{\sinh(\sqrt{\delta})}{\sqrt{\delta}} A$

3. BEWEIS

Komplementärmatrix

$$A \cdot \hat{A} = \det A \cdot I$$

$$\hat{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{j,i}$$

$$\widehat{xI - A} \in \mathbb{K}_{[x]}^{n \times n} = \mathbb{K}^{n \times n}[x]$$

$$= [b_{ij}(x)]_{i,j=1\ldots n} \qquad b_{ij}(x) \in \mathbb{K}[x]$$

$$\deg b_{ij}(x) \leq n-1$$

$$\widehat{\left(xI - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)} = \widehat{\begin{bmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} x-d & b \\ c & x-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} x$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} B_k x^k$$ "Polynom mit Matrizen als Koeffizienten

Wenn $b_{ij}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_{ij\,k} \, x^k$

dann $B_k = [b_{ij\,k}]_{i,j=1\ldots n}$

Wissen: $(xI - A)(\widehat{xI - A}) = \chi_A(x) \cdot I$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k + x^n\right) \cdot I = c_0 I + c_1 x I + \ldots + c_{n-1} x^{n-1} I + x_n I$$

$$= (xI - A)\left(\sum_{k=0}^{n-1} B_k x^k\right) = (xI - A)(B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_{n-1} x^{n-1})$$

$$= -AB_0 + (B_0 - AB_1)x + (B_1 - AB_2)x^2 + \ldots + (B_{n-2} - AB_{n-1})x^{n-1} + B_n x^n$$

Koeffizientenvergleich

$$-AB_0 = c_0 I$$

$$B_0 - AB_1 = c_1 I \qquad | \cdot A$$

$$B_1 - AB_2 = c_2 I \qquad | \cdot A^2$$

$$\vdots$$

$$B_{n-2} - AB_{n-1} = c_{n-1} I \qquad | \cdot A^{n-1}$$

$$B_{n-1} = I \qquad | \cdot A^n$$

$\Rightarrow \quad -AB_0 = c_0 I$

$AB_0 - A^2B_1 = c_1 A$

$A^2 B_1 - A^3 B_2 = c_2 A^2$

$\vdots$

$A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1} = c_{n-1} A^{n-1}$

$A^n B_{n-1} = A^n$

aufaddieren: $\qquad B_{-1} := 0$

$A^k B_{k-1} - A^{k+1} B_k = c_k A^k$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (A^k B_{k-1} - A^{k+1} B_k) + A^n B_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k A^k + A^n$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} c_k A^k + A^n = \chi_A(A)$$

Ü 46 $\quad \lambda$ Eigenwert von A, $\quad Ax = \lambda x$

$p(A) \qquad A^k x = \lambda^k x$

$\Rightarrow p(A)x = p(\lambda)x$

$p(x) \in \mathbb{K}[x] \quad \Rightarrow p(\lambda) \in \operatorname{spec}(p(A))$

11.84 SPEKTRALABBILDUNGSSATZ

$\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen

Sei: $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ $\quad p(x) \in \mathbb{K}[x]$

$\Rightarrow \operatorname{spec} p(A) = \{p(\lambda) \mid \lambda \in \operatorname{spec}(A)\}$

BEWEIS

„$\supseteq$" s. Ü 46

„$\subseteq$" Sei $\mu \in \operatorname{spec} p(A)$

gesucht $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$ sodass $p(\lambda) = \mu$

Sei: x Eigenvektor mit $p(A)x = \mu x$

Sei: $q(x) = p(x) - \mu \quad \Rightarrow q(A) = p(A) - \mu I$

$q(A)x = 0$