10.11 BSP

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{spec} A = ?$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & -2 \\ 1 & \lambda+5 & -2 \\ -2 & 2 & \lambda+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -2 \\ \lambda+6 & \lambda+5 & -2 \\ 0 & 2 & \lambda+4 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda+5 & -2 \\ 2 & \lambda+4 \end{vmatrix} - (\lambda+6) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & \lambda+4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 + 10\lambda + 30)$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 120}}{2} = -5 \pm i\sqrt{5}$$

$$\operatorname{spec}_{\mathbb{R}}(A) = 0 \quad , \quad \operatorname{spec}_{\mathbb{C}}(A) = \{0, -5 \pm i\sqrt{5}\}$$

10.12 SATZ

$$\chi_A(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} c_k(A) x^k \qquad [n] := i = \{1, \dots, n\}$$

Summe aller symmetr. Minoren von A

$$c_k(A) = \sum_{\substack{J \subseteq [n] \\ |J| = |n-k|}} [A]_{JJ} \qquad J = \{j_1 < j_2 < \dots < j_{n-k}\}$$

$$\begin{pmatrix} a_{j_1 j_1} & a_{j_1 j_2} & \cdots & a_{j_1 j_{n-k}} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{j_{n-k} j_1} & a_{j_{n-k} j_2} & \cdots & a_{j_{n-k} j_{n-k}} \end{pmatrix} \text{ Minoren}$$

insbes $\quad c_0 = \det A$

$$c_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \operatorname{Tr}(A)$$

$$c_n(A) = 1$$

BEW

$$\det(\lambda I - A) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\pi} \prod_{i=1}^{n} (xI - A)_{\pi(i),i}$$

Determinanten sind für beliebige kommutative Ringe R definiert

$\hookrightarrow$ "nichtkommutative Determinanten"

$$= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\pi} \prod_{i=1}^{n} x\,\delta_{\pi(i),i} - a_{\pi(i),i}$$

$$\deg \prod_{i=1}^{n} x\,\delta_{\pi(i),i} - a_{\pi(i),i}$$

... Anzahl $\{i \mid \pi(i) = i\}$ = # Fixpunkte von π = $\begin{cases} n & \pi = id \\ \leq n-2 & \pi \neq id \end{cases}$

$$\Rightarrow \deg \chi_A(x) = n$$

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

a_i ... i-te Spalte von A

$$I = (e_1 \; e_2 \; \dots \; e_n)$$

$$\chi_A(x) = \Delta(xe_1 - a_1, xe_2 - a_2, \dots, xe_n - a_n)$$

$$= \sum_{I \subseteq [n]} \Delta(y_1 \dots y_n) \quad \text{wobei} \quad y_i = \begin{cases} xe_i & i \in I \\ -a_i & i \notin I \end{cases}$$

$$(a+b)^n = \sum_{I \in [n]} a^{|I|}\, b^{|I|}$$

$$\Delta(y_1, \dots y_{k-1}, xe_k, y_{k+1}, \dots y_n)$$

$$= \begin{array}{c} \\ \\ \\ k \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} | & | & 0 & | & \dots & | \\ | & | & \vdots & | & & | \\ | & | & 0 & | & & | \\ y_1 & y_{k-1} & x & y_{k+1} & \dots & y_n \\ | & | & 0 & | & & | \\ | & | & \vdots & | & & | \\ | & | & 0 & | & & | \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow (-1)^{k-1}(-1)^{k-1} \begin{vmatrix} x & * & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & \tilde{y}_1 & \dots \tilde{y}_{k-1} & \tilde{y}_{k+1} & \dots & \tilde{y}_n \\ \vdots & | & | & | & & | \\ 0 & | & | & | & & | \end{vmatrix}$$

wobei $\tilde{y}_i = y_i$ mit gestrichener k-ten Zeile

$$\rightarrow x \begin{vmatrix} \tilde{y}_1 & \dots & \tilde{y}_{k-1} & \tilde{y}_{k+1} & \dots & \tilde{y}_n \\ | & & | & | & & | \end{vmatrix} \quad \text{usw}$$

$$= x^{|I|} \underbrace{\Delta(a_{j_1} \dots a_{j_{n-|I|}})}_{[A]_{I^c, I^c} \cdot (-1)^{I^c}}$$

wobei I^c nicht gestrichene Zeilen und Spalten

$(n - |I|) \times (n - |I|)$ det $\quad J = I^c$

10.13 LEMMA

$\chi_{T^{-1}AT}(x) = \chi_A(x)$

ähnliche Matrizen haben gleiches charakteristisches Polynom

BEW

$$\det(\lambda I - T^{-1}AT) = \det(\lambda T^{-1}T - T^{-1}AT)$$
$$= \det(T^{-1}(\lambda I - A)T)$$
$$= \det T^{-1} \cdot \det(\lambda I - A) \cdot \det T = \det(\lambda I - A)$$

10.14 DEFINITION

Sei: $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

A heißt diagonalisierbar

wenn $\exists T \in GL(n, \mathbb{K}): T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$10.13 \Rightarrow \chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x-\lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$$

10.15 LEMMA

A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ $\exists$ Basis aus Eigenvektoren

BEW $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow AB = B\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_n \\ | & & | \end{pmatrix} \Rightarrow A\begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_n \\ | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 b_1 & \lambda_2 b_2 & \cdots & \lambda_n b_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A \cdot b_i = \lambda_i b_i \quad \forall i$$

10.11. BSP

Schritt $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & -8 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ diagonalisieren

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -4 \\ -4 & \lambda+3 & 8 \\ 2 & -2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -4 \\ \lambda-1 & \lambda+3 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 1 & \lambda+3 & 8 \\ 0 & -2 & \lambda+5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & \lambda+5 & 12 \\ 0 & -2 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)((\lambda+5)(\lambda-5)+24) = (\lambda-1)(\lambda^2-1) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$\operatorname{spec} A = \{\pm 1\}$

Schritt Eigenvektoren bestimmen

$\ker(\lambda I - A)$

$\lambda = +1$: $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -4 & 4 & 8 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_1 = x_2 + 2x_3$

$$\eta_{+1} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$\lambda = -1$:

$$\begin{matrix} 0 & -2 & -4 \\ -4 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & -6 \\ \hline 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \end{matrix}$$

$x_2 = -2x_3$

$x_1 = x_2 + 3x_3 = x_3$

$$\eta_{-1} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

10.17 Anw.

$$A = B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} B$$

$$A^2 = \left(B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} B\right)\left(B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} B\right) = B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2\end{pmatrix} B$$

$$A^k = B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k\end{pmatrix} B$$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k\end{pmatrix} B = B^{-1}\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix} B$$

$$\rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = A\cdot x \Rightarrow x = e^{At}\cdot x_0$$

Bsp:

Leonardo von Pisa 1170 - 1250 (Fibonacci)

1202 Liber Abaci

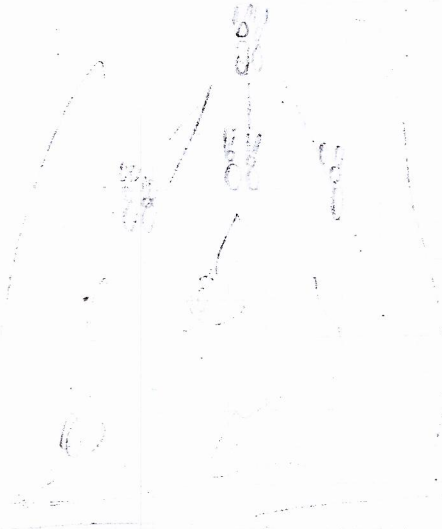
" Virahanka 7. Jh.

| $\underset{2}{-}$ $\underset{1}{\cdot}$ $\underset{2}{-}$ $\underset{2}{-}$ $\underset{1}{\cdot}$ $\underset{1}{\cdot}$ $\underset{2}{-}$ | n

— — — · $n-1$

— — — — $n-2$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$



Formel für F_n?

$$F_0 = F_1 = 1$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

$$F_n = F_n$$

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} \overset{A:=}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -\cancel{x} & x \end{vmatrix} = x(x-1) - 1 = x^2 - x - 1$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ goldener Schnitt}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

10.18 SATZ

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig

BEW

Seien $\lambda_1 \dots \lambda_r$ verschiedene Eigenwerte

$v_1 \dots v_r$ zugehörige Eigenvektoren

Sei $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$

Induktion:

$r = 1$. richtig weil $v_1 \neq 0$

$r-1 \to r$: (I) $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0 \Rightarrow f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r) = 0$

$(\cdot(-\lambda_r))$ (II) $\alpha \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_r \lambda_r v_r = 0$

$II - \lambda I = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_r)v_1 + \dots + \alpha_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r)v_{r-1} + 0 v_r = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 (\lambda_i - \lambda_r) = 0 \quad \forall_{1 \le i \le r-1}$

$\lambda_i \neq r \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall_{1 \le i \le r-1}$

$\Rightarrow \alpha_r v_r = 0 \rightarrow \alpha_r = 0$

10.19 FOLGERUNG

Eine $n \times n$ Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten ist diagonalisierbar.

Zu jedem Eigenwert gibt es mindestens einen Eigenvektor

$\Rightarrow$ n linear unabhängige Eigenvektoren $\Rightarrow$ bilden Basis

10.20 BSP

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ist nicht diagonalisierbar

$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x^2 \rightsquigarrow \operatorname{spec} A = \{0\}$

$\det(xI - A)$

Eigenraum: $\ker A$

$\dim \ker A = 1 = 2 - \operatorname{rk} A$

wäre $A = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} B^{-1} = B \begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\dim \eta_0 = 1 < \dim V$

span" $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = 0 \rightarrow$ nilpotent

10.21 DEF

Sei λ Eigenwert der Matrix A

$k(\lambda) :=$ Vielfachheit von λ als Nullstelle von $\chi_A(x)$ heißt algebraische [illegible],

und $d(\lambda) := \dim \eta_\lambda$ heißt geometrische

des Eigenwertes λ

- im Beispiel 10.20 : $k(0) = 2 \quad d(0) = 1$

10.22 LEMMA

Eine Matrix A ist diagonalisierbar genau dann wenn für die verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 \dots \lambda_r$ gilt

$d(\lambda_1) + \dots + d(\lambda_r) = \dim V$.

Beweis

$\Rightarrow$ Sei B Basis aus Eigenvektoren (10.15)

$\Rightarrow V = \eta_{\lambda_1} + \dots + \eta_{\lambda_r}$ ist direkte Summe (10.18)

$\Rightarrow \dim V = \dim \eta_{\lambda_1} + \dots + \dim \eta_{\lambda_r}$

$\Leftarrow$ Sei: $B_k = \{ x_k^{(j)} \mid 1 \le j \le d(\lambda_k) \}$ Basis d. k-ten Eigenraums

$\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{r} B_k$ linear unabhängig und $\left| \bigcup_{k=1}^{r} B_k \right| = \dim V$

daher eine Basis

Sei: $\sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{d(\lambda_k)} \alpha_k^{(j)} x_k^{(j)} = 0$

$$\overset{!}{=} \sum_{k=1} y_k \quad \text{wobei: } y_k = \sum_{j=1}^{d(\lambda_k)} \alpha_k^{(j)} x_k^{(j)} \in \eta_{\lambda_k}$$

?

$$\Rightarrow \quad Ay_k = \lambda_k \cdot y_k$$

10.18 $\Rightarrow$ y_k sind linear unabhängig

$$\sum y_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{alle } y_k = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{d(\lambda_k)} \alpha_k^{(j)} x_k^{(j)} = 0 \quad \overset{\text{Basis}}{\Longrightarrow} \quad \text{alle } \alpha_k^{(j)} = 0$$

10.2?

Für alle Eigenwerte einer Matrix gilt

$$d(\lambda) \leq k(\lambda)$$

geometrische V. $\leq$ algebraische V.

über $\mathbb{C}$: $\sum k(\lambda) = \dim V$

Sei: $d = d(\lambda)$ und $b_1 \dots b_d$ Basis von η_λ

$\rightarrow$ Teildiagonalisierung

- Ergänze zu Basis von V $\quad (b_1 \dots b_d \underbrace{b_{d+1} \dots b_n}_{\text{beliebig, so dass Basis von } V \text{ entsteht}})$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_d & b_{d+1} & \dots & b_n \\ | & & | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = A \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \dots & Ab_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda b_1 & \dots & \lambda b_d & Ab_{d+1} & \dots & Ab_n \\ | & & | & | & & | \end{bmatrix} \overset{!}{=} B \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & & & Ab_{d+1} & \dots & Ab_n \\ & \ddots & & | & & | \\ & & \lambda & & & \\ & 0 & & | & & | \end{array}\right]$$

$$B^{-1} A B = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & & & * \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ \hline & 0 & & \tilde{A} \end{array}\right]$$

$$\chi_A(x) = \chi_{B^{-1}AB}(x) = \det \left[\begin{array}{ccc|c} x-\lambda & & & -* \\ & \ddots & & \\ & & x-\lambda & \\ \hline & 0 & & xI-\tilde{A} \end{array}\right]$$

$$= (x-\lambda)^d \chi_{\tilde{A}}(x)$$

$$\Rightarrow (x-\lambda)^d \text{ teilt } \chi_A(x) \Rightarrow k(\lambda) \geq d(\lambda)$$

Matrix A diagonalisierbar

$\Leftrightarrow$ i) $\chi_A(x)$ zerfällt in Linearfaktoren

$= \prod (x - \lambda_i)$ wobei $\lambda_i \in \mathbb{K}$

ii) $d(\lambda_i) = k(\lambda_i)$ $\forall_i$

Was kann man im allgemeinen Fall tun?

Camille Jordan (1838 - 1922)
Jordansche Kurven
1. Buch über Gruppentheorie

Gauß-Jordan
→ Wilhelm Jordan (1842 - 1899)
"Handbuch der Vermessungskunde"

Ziel: Zerlege Matrix A in einfache Teile

- einfachste Lösung: $A x_i = \lambda_i x_i$
  → geht nicht immer
  → "vergrößere" die Eigenräume

11.1 Def

Sei $f \in End(V)$

Ein Unterraum $U \leq V$ heißt invariant unter f

(bzw f-invariant) wenn $f(U) \subseteq U$

Analog für Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$:

$U \leq \mathbb{K}^n$ invariant unter A wenn

$\forall u \in U: \ Au \in U$

11.2 Bsp

i) $V, \{0\}$ sind invariant

ii) $\ker f$, $\operatorname{im} f$ sind invariant

iii) Eigenräume sind invariant

$x \in \eta_\lambda \Rightarrow Ax = \lambda x \in \eta_\lambda$

iv) wenn $U \leq V$ invariant und $\dim U = 1$

$\Rightarrow U = \operatorname{span}\{x\}$ wobei x Eigenvektor

Sei $x \in U, x \neq 0 \Rightarrow Ax \in U \Rightarrow A$ ist Vielfaches von x

$\Rightarrow Ax = \lambda x$

v) Wenn $A = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$

$Ae_1 = a_{11} e_1 \Rightarrow \mathcal{L}(e_1)$ ist invariant

$Ae_2 = a_{12} e_1 + a_{22} e_2 \in \mathcal{L}(e_1, e_2) \rightarrow$ invariant

$U_k = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_k)$ ist invariant für jedes k

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

i) $U \subseteq V$ invariant unter A

$p(x) \in \mathbb{K}[x] \Rightarrow U$ invariant unter $p(A)$

ii) Seien $U_1 \dots U_m$ invariant

$\Rightarrow U_1 + \dots + U_m$ sowie $U_1 \cap \dots \cap U_m$ sind invariant

i) U invariant unter A^k $\forall k \geq 0$

$k=0$: trivial $\to A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$k \to k+1$. Sei $\underset{\in}{u \in U}$

$$A^{k+1} u = A \cdot (\underbrace{A^k \cdot u}_{\in U})$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

$$p(A) = \sum_{k=0}^{m} c_k A^k$$

$$u \in U \Rightarrow p(A)u = c_0 \cdot u + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} c_k A^k \cdot u}_{\in U} \in U$$

Linearkombination liegt wieder in UR

$$A \text{ regulär} \Rightarrow A^{-1}(u) \subseteq U \Rightarrow A^{-1} = p(A)$$

ii) Sei $v \in U_1 + \dots + U_m \Rightarrow v = u_1 + \dots + u_m$ $u_i \in U_i$

$$Av = \underbrace{Au_1}_{\in U_1} + \dots + \underbrace{Au_m}_{\in U_m} \in U_1 + \dots + U_m$$

Sei $u \in \bigcap_{i=1}^{m} U_i \Rightarrow u \in U_i \;\forall i$

$\Rightarrow Au_i \in U_i \;\forall i$

$$\Rightarrow Au \in \bigcap_{i=1}^{m} U_i$$

11.4 LEMMA

$f(U) \subseteq V$

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ $U \subseteq V$ invariant

Dann ist $f|_U : U \to U \in \mathrm{End}(U)$

11.5 SATZ

Sei $f \in \mathrm{End}\, V$, $U \subseteq V$ invariant sodass $V = U \dot{+} W$

Sei $B := (b_1 \dots b_m)$ Basis von U dim $V = m+n$

$C := (c_1 \dots c_n)$ Basis von W

~~Dann ist~~ $B \cup C$ ist Basis von V

Dann ist $\Phi^{B \cup C}_{B \cup C}(f) = \begin{bmatrix} \Phi^B_B(f|_U) & 0 \\ 0 & \Phi^C_C(f|_W) \end{bmatrix}$

BEW

i-te Spalte von $\Phi^{B \cup C}_{B \cup C}(f)$ besteht aus den Koordinaten von Ab_i U

$\Rightarrow$ alle Koordinaten von $m+1$ bis $m+n$ sind 0

$U_1 \dots U_m \subseteq V$ invariant

so dass $V = U_1 \dot{+} U_2 \dot{+} \dots \dot{+} U_m$

B_i Basis von U_i $\forall i$

$B = B_1 \cup \dots \cup B_m$ Basis von V

$$\Phi^B_B(f) = \begin{bmatrix} \Phi^{B_1}_{B_1}(f|_{U_1}) & & \\ & \ddots & \\ & & \Phi^{B_m}_{B_m}(f|_{U_m}) \end{bmatrix}$$

Spezialfall:

$U_i = \mathrm{span}(v_i)$ $\Rightarrow$ $v_1 \dots v_m$ Basis aus Eigenvektoren

11.7 Korollar

$f(U_i)$ wie in 11.6

$$\chi_f(x) = \prod_{i=1}^{n} \chi_{f|_{U_i}}(x)$$

- Wie finden wir invariante Unterräume?
  - $\ker f$, $\operatorname{im} f$
  - $\ker(\lambda I - f)$
  - $\ker \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ $\qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

11.8 Lemma von Fitting

Sei $\dim V = n$

$f \in \operatorname{End}(V)$

a) $\{0\} \subseteq \ker(f) \subseteq \ker(f^2) \subseteq \ker(f^3) \subseteq \dots$

$\operatorname{im}(f) \supseteq \operatorname{im}(f^2) \supseteq \operatorname{im}(f^3) \supseteq \dots$

b) $\exists m \leq n : \ker f^m = \ker f^{m+1}$

$\exists m' \leq n : \operatorname{im} f^m = \operatorname{im} f^{m+1}$

c) Die folgenden Aussagen sind äquivalent

i) $\ker f^m = \ker f^{m+1}$

ii) $\operatorname{im} f^m = \operatorname{im} f^{m+1}$

iii) $\ker f^m = \ker f^{m+k} \quad \forall k \geq 0$

iv) $\operatorname{im} f^m = \operatorname{im} f^{m+k} \quad \forall k \geq 0$

v) $\ker f^m \cap \operatorname{im} f^m = \{0\}$

vi) $\ker f^m \oplus \operatorname{im} f^m = V$

Beweis

a) $x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f(f(x)) = 0$

$\Rightarrow x \in \ker f^2$.

$x \in \ker f^k \Rightarrow f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$

$\Rightarrow x \in \ker f^{k+1}$

$g \in$

$y \in \operatorname{im} f^k \Rightarrow \exists x : y = f^k(x) = f^{k-1}(f(x)) \in \operatorname{im} f^{k-1}$

b) klar: $\dim \ker f \leq \dim \ker f^2 \leq \dots$

$\Rightarrow$ irgendwann ist $\dim \ker f^m = \dim \ker f^{m+1}$
und weil $\ker f^m \subseteq \ker f^{m+1}$ muss
$\ker f^m = \ker f^{m+1}$ sein

c) Plan:

$$\left.\begin{tikzcd} iii \arrow[r, shift left, "\text{trivial}"] \arrow[d, shift left] & i \arrow[l, shift left] \arrow[d, shift left] \\ iv \arrow[u, shift left] \arrow[r, shift left] & ii \arrow[l, shift left, "\text{trivial}"] \arrow[u, shift left] \end{tikzcd}\right\} \rightleftarrows V \underset{\text{trivial}}{\rightleftarrows} Vi$$

Wh: Dimensionssatz

$g: V \to W$, $\dim \operatorname{im} g + \dim \ker g = \dim V$

i $\Leftrightarrow$ ii) Wir wissen $\ker f^m = \ker f^{m+1}$

$\Leftrightarrow \dim \ker f^m = \dim \ker f^{m+1}$ (weil $\ker f^m \subseteq \ker f^{m+1}$)

$\Leftrightarrow n - \dim \operatorname{im} f^m = n - \dim \operatorname{im} f^{m+1}$

$\Leftrightarrow \dim \operatorname{im} f^m = \dim \operatorname{im} f^{m+1}$ weil $\operatorname{im} f^{m+1} \subseteq \operatorname{im} f^m$

$\Leftrightarrow \operatorname{im} f^m = \operatorname{im} f^{m+1}$

iii $\Leftrightarrow$ iv) analog

i $\to$ iii) $\ker f \subseteq \ker f^2 \subseteq \ker f^3 \subseteq \dots$ bricht ab

Sei $m_0 = \min\{m \mid \ker f^m = \ker f^{m+1}\}$

Beh: $\ker f^{m_0+k} = \ker f^{m_0+k+1} \quad \forall k \geq 0$

$\ker f \subseteq \ker f^2 \subseteq \dots \subseteq \ker f^{m_0} = \ker f^{m_0+1} = \ker f^{m_0+2} = \dots$

"$\subseteq$" schon gezeigt

"$\supseteq$" Sei $x \in \ker f^{m_0+k+1} \Leftrightarrow f^{m_0+k+1}(x) = 0$

$\Rightarrow f^{m_0+1}(f^k(x)) = 0$

$\Rightarrow f^k(x) \in \ker f^{m_0+1} = \ker f^{m_0}$

$\Rightarrow f^{m_0+k} = f^{m_0}(f^k(x)) = 0$

$\Rightarrow x \in \ker f^{m_0+k}$

ii → iv) Sei $m_0 = \min\{m \mid \operatorname{im} f^m = \operatorname{im} f^{m+1}\}$

Beh: $\operatorname{im} f^{m_0+k} = \operatorname{im} f^{m_0+k+1} \quad \forall k \geq 0$

"$\supseteq$" schon gezeigt

"$\subseteq$": Sei $y \in \operatorname{im} f^{m_0+k}$

$$\Rightarrow \exists x: y = f^{m_0+k}(x) = f^k(\underbrace{f^{m_0}(x)}_{\in \operatorname{im} f^{m_0} = \operatorname{im} f^{m_0+1}})$$

$$\Rightarrow \exists z: f^{m_0}(x) = f^{m_0+1}(z)$$

$$\Rightarrow y = f^k(f^{m_0+1}(z)) = f^{m_0+k+1}(z)$$

$$\Rightarrow y \in \operatorname{im} f^{m_0+k+1}$$

(i ↔ iv) ↔ v

Sei $W = \operatorname{im} f^m$ invariant unter f

$g := f^m|_W$

$\ker g = \ker f^m \cap W = \ker f^m \cap \operatorname{im} f^m$

$\ker f^m \cap \operatorname{im} f^m = \{0\} \Leftrightarrow g$ injektiv

$\Leftrightarrow g$ surjektiv $\Leftrightarrow \operatorname{im} g = W$

$\Leftrightarrow g(W) = W \Leftrightarrow f^m(f^m(V)) = f^m(V)$

$\Leftrightarrow \operatorname{im} f^{2m} = \operatorname{im} f^m \overset{i \leftrightarrow iv}{\Longleftrightarrow} \operatorname{im} f^{m-1} = \operatorname{im} f^m$

v → vi) $\ker f^m \cap \operatorname{im} f^m = \{0\}$

Dimensionssatz: $\dim \ker f^m + \dim \operatorname{im} f^m = \dim V$

und $\ker f^m + \operatorname{im} f^m$ ist direkt

$\Rightarrow \ker f^m \oplus \operatorname{im} f^m = V$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \ker A = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \quad \operatorname{im} A = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \ker A^2 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \quad \operatorname{im} A^2 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \ker A^3 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}, \quad \operatorname{im} A^3 = \{0\}$$

$x \in \ker A^k \Rightarrow Ax \in \ker A^{k-1}$

z. B. $e_1, e_2 \in \ker A^2$

$A e_2 = e_1 \in \ker A$

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow B - \lambda I = A$$

$\chi_B(x) = (x-\lambda)^3$

$\ker(B - \lambda I) = \ker A = L\{e_1\}$

$\ker(B - \lambda I)^2 = \ker L\{e_1, e_2\}$

$\ker(B - \lambda I)^3 = L\{e_1, e_2, e_3\}$

$x \in \ker((B - \lambda I)^2) \Rightarrow (B - \lambda I)x \in \ker(B - \lambda I)$

$\Rightarrow Bx = \lambda x + y \qquad y \in \ker \underset{\text{Eigenvektor}}{(B - \lambda I)}$

Das wird der allgemeine Fall sein

Finde Basis $b_1 \dots b_n$ sodass $f(b_i) = \lambda b_i$

oder $f(b_i) = \lambda b_i + b_{i-1}$

10.46 DEF

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\lambda \in \operatorname{spec} A$

Dann heißt $\ker(\lambda I - A)^n$ der verallgemeinerte Eigenraum

oder Hauptraum zum Eigenwert λ

(Bemerkung: wir können auch $(\lambda I - A)^{m_0}$ schreiben)

10.47 Lemma

Seien $\lambda_1 \dots \lambda_k$ verschiedene Eigenwerte von A und

$\ker(\lambda_i - A)^{r_i}$ die zugehörigen Haupträume

Dann ist $\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{im}(\lambda_i - A)^{r_i} \cap \ker[(\prod_{i=1}^{k}(\lambda_i - A)^{r_i} = \{0\}$

(Bemerkung: für $k=1$: $\operatorname{im}(\lambda_1 - A)^{r_1} \cap \ker(\lambda_1 - A)^{r_1} = \{0\}$

Bew

zz: wenn $x \in \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{im}(\lambda_i - A)^{r_i} \cap \ker \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - A)^{r_i} \Rightarrow x = 0$

Induktion

$k = 1$: Fitting

~~Sch~~ $k \to k+1$

Sei $x \in \bigcap_{i=1}^{k+1} \operatorname{im}(\lambda_i I - A)^{r_i}$ $\quad \underbrace{(\lambda_1 I - A)^{r_1} \dots (\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}}}_{y} = 0$

$y := (\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}} x \in \ker \prod_{i=1}^{k+1} (\lambda_i I - A)^{r_i}$

Beh: $y \in \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{im}(\lambda_i I - A)^{r_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$

$x \in \operatorname{im}(\lambda_i I - A)^{r_i} \Rightarrow \forall i : \exists u_i : x = (\lambda_i I - A)^{u_i}$

$y = (\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}} x = (\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}} (\lambda_{u_i} I - A)^{r_{u_i}}$

$= (\lambda_i I - A)^{r_i} (\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}} u_i \in \operatorname{im}(\lambda_i I - A)^{r_i}$

$\Rightarrow y \in \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{im}(\lambda_i I - A)$

y erfüllt die Induktionsvoraussetzung zum Index k

$\Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow x \in \ker (\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}}$ $\quad \Big\}$ ~~Fitting $\Rightarrow x = 0$~~

und $y \in \operatorname{im}(\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}}$ lt. Voraussetzung

$\xRightarrow{\text{Fitting}} x = 0$

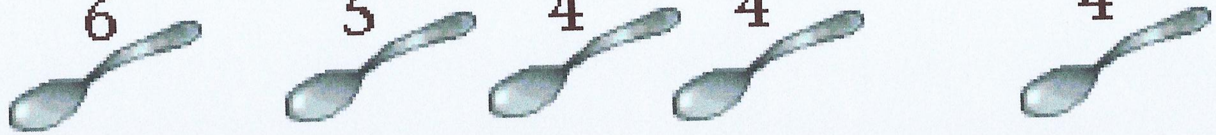
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 2 & 1 & 0 & & \\ & & & & 2 & 1 & & \\ & & & & & 2 & & \\ & & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{über } \mathbb{R}$$

spec. A: $\lambda_1 = 1$

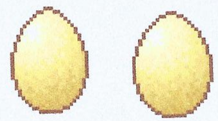
$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 1 & 1 & 0 & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & -1 & -1 \\ & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

APFELTORTE

Äpfel	Mehl	Zucker	Öl	Milch	Saft einer Zitrone
4	6	5	4	4	4



1 - Gib das Mehl in eine Schüssel.

2- Gib den Zucker  und die 2 Eier hinzu 

und mische alles gut durch.

$\ker(A-I) = \mathcal{L}(e_1, e_3)$

$\operatorname{im}(A-I) = \mathcal{L}(e_1, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8)$

$$(A-I)^2 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & & & \\ & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & & \\ & & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}^2 & \\ & & & \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^2 \end{bmatrix}$$

regulär

$\ker(A-I)^2 = (e_1, e_2, e_3)$

$\operatorname{im}(A-I)^2 = (e_5, e_6, e_7, e_8)$ $\rightarrow$ stabil

$\lambda = 2$:

$$(A-2I) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & & & \\ & \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} & & \\ & & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} & \\ & & & \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$\cancel{\ker(A-2I) = \mathcal{L}(e_4)}$

$\operatorname{im} \cancel{(A-2I) = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_7, e_8)}$

$\ker(A-2I) = \mathcal{L}(e_4)$

$\operatorname{im}(A-2I) = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_7, e_8)$

$$(A-2I)^2 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 & & & \\ & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} & & \\ & & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \\ & & & \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^2 \end{bmatrix}$$

regulär

$\ker(A-2I)^2 = \mathcal{L}(e_4, e_5)$

$\operatorname{im}(A-2I)^2 = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_7, e_8)$

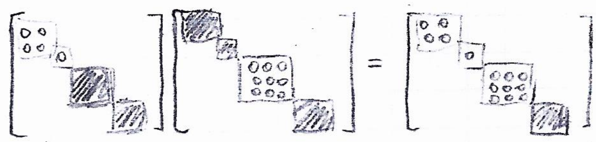
$$(A-2I)^3 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix}-1&1\\ &-1\end{bmatrix}^3 &&& \\ & -1 && \\ && \begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix} & \\ &&& \begin{bmatrix}-2&-1\\0&-2\end{bmatrix}^3 \end{bmatrix}$$

$\ker (A-2I)^3 = \mathcal{L}(e_4, e_5, e_6)$

$\operatorname{im} (A-2I)^3 = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_7, e_8)$

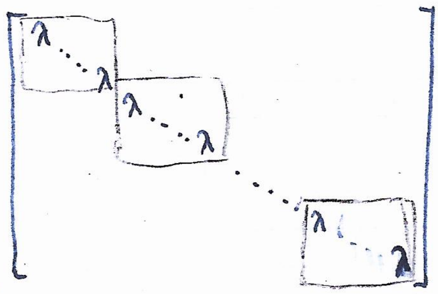
$$\bigcap_{i=1}^{1} \operatorname{im}(\lambda_i - A)^{r_i} = \operatorname{im}(I-A)^2 \cap \operatorname{im}(I-A)^3 = \mathcal{L}(e_7, e_8)$$

$$\prod_{i=1}^{2} (\lambda_i I - A)^{r_i} = (I-A)^2 (2I-A)^3$$



$\ker = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$

Wh:



Zu jedem λ ein Block

$\to$ Hauptraum

setze Basen der Haupträume, zu Basis von $\mathbb{K}$ zusammen

$$\bigcap_{i=1}^{k} = \operatorname{im}(\lambda_i I - A)^{r_i} \cap \ker(\lambda_i - A)^{r_i} \dots \ker(\lambda_k - A)^{r_k} = \{0\}$$

11.13 LEMMA

i) $\ker(\lambda I - A)^k \cap \ker(\mu I - A)^e = \{0\}$

ii) Die Summe $(\lambda_1 I - A)^{r_1} + \dots + (\lambda_k I - A)^{r_k}$ ist direkt

BEWEISBEMERKUNG

$\ker(\lambda_i - A)^{r_i} \subseteq \ker(\lambda_1 - A)^{r_1} \dots (\lambda_k - A)^{r_k}$

denn $(\lambda_i - A)^{r_i} = 0$

$$\Rightarrow (\lambda_i - A)^{r_i} \dots (\lambda_k - A)^{r_k} x = (\lambda_1 - A)^{r_1} \dots \widehat{(\lambda_i - A)^{r_i}} \dots (\lambda_k - A)^{r_k} \underbrace{(\lambda_i - A)}_{=0}$$

Wh: $U_1 + \ldots + U_k$ direkt $\Leftrightarrow \forall i: U_i \cap (U_1 + \ldots + \hat{U}_i + \ldots + U_k) = \{0\}$

$\Leftrightarrow$ wenn $u_1 + \ldots + u_k = 0$ mit $u_i \in U_i \Rightarrow$ alle $u_i = 0$

ii) Induktion

$k = 1$: trivial

$k \to k+1$:

Sei $v_i \in \ker(\lambda_i I - A)^{r_i} \quad 1 \leq i \leq k+1$

Annahme: $v_1 + v_2 + \ldots + v_{k+1} = 0$ zz: alle $v_i = 0$

Sei $w_i = (\lambda_{k+1} - A)^{r_{k+1}} v_i = 0$

$\Rightarrow$ (1) $w_{k+1} = 0$

(2) $\sum_{i=1}^{k} w_i = (\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}} \sum_{i=1}^{k+1} v_i = 0$

(3) $w_i \in \ker(\lambda_i I - A)^{r_i}$

$(\lambda_i I - A)^{r_i} w_i = (\lambda_i I - A)^{r_i} \underbrace{(\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}}}_{=0} v_i$

$= (\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}} \underbrace{(\lambda_i I - A)^{r_i} v_i}_{=0}$

$\Rightarrow w_i \in \ker(\lambda_i I - A)^{r_i} \quad \forall i$

und $w_1 + \ldots + w_k = 0$

IV $\Rightarrow$ alle $w_i = 0$

$\Rightarrow v_i \in \ker(\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}} \cap \ker(\lambda_i I - A)^{r_i}$

i) $\Rightarrow v_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots k\}$

$\Rightarrow v_{k+1} = 0$

11.14 SATZ

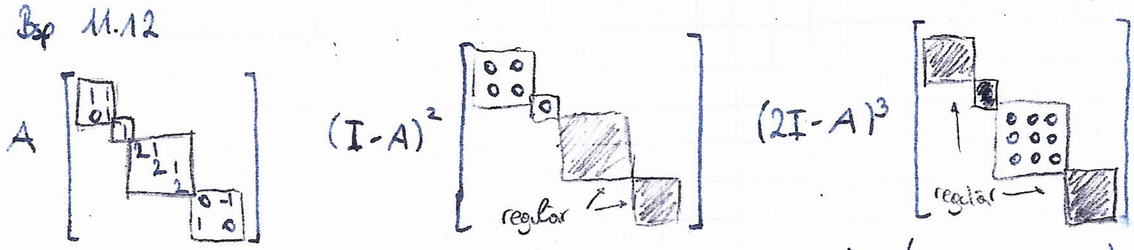
$A \in K^{n \times n}$, $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ paarweise verschiedene (nicht notwendigerweise alle) Eigenwerte

i) $V = \ker(\lambda_1 - A)^n \oplus \ldots \oplus \ker(\lambda_k - A)^n \oplus \underbrace{\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{im}(\lambda_i - A)^n}_{W :=}$

ii) W ist invariant unter A

und $\lambda_i \notin \operatorname{spec}(f_A|_W)$

Vgl. Bsp 11.12



$\text{im} = \mathcal{L}(e_4, e_5, e_6, e_7, e_8)$

$\text{im} = (e_1, e_2, e_3, e_7, e_8)$

$\ker = (e_4, e_5, e_6)$

$W = \mathcal{L}(e_7, e_8)$

BEWEIS

i) Induktion

$k = 1$:

Fitting $\Rightarrow \ker(\lambda_i - A)^n \oplus \text{im}(\lambda_i - A)^n = V$

$k \to k+1$:

Wir nehmen an

$$V = \ker(\lambda_1 - A)^n \oplus \dots \oplus \ker(\lambda_k - A)^n \oplus \underbrace{\bigcap_{i=1}^{k} \text{im}(\lambda_i - A)^n}_{W_k}$$

Schritt 1:

W_k ist invariant, Sei: $y \in W_k$

$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, k\}: \exists x_i \in V: y = (\lambda_i I - A)^n x_i$

z.z.: $\underline{\forall y \in W_k}$: $Ay = A(\lambda_i I - A)^n x_i$

$= (\lambda_i I - A)^n (A x_i) \in \text{im}(\lambda_i I - A)^n \quad \forall i$

$\Rightarrow \forall y \in \bigcap_{i=1} \text{im}(\lambda_i I - A)^n = W_k$

Wende Fitting an:

$f_A|_{W_k}$

$W_k = \ker(\lambda_{k+1} - f_A|_{W_k})^n \oplus \text{im}(\lambda_{k+1} - f_A|_{W_k})^n$

$\subseteq \ker(\lambda_{k+1} - A)^n + \oplus \dots W_k \cap \text{im}(\lambda_{k+1} - A)^n$

$= \ker(\lambda_{k+1} - A)^n + W_{k+1}$

$\Rightarrow V = \ker(\lambda_1 - A)^n + \dots + \ker(\lambda_{k+1} - A)^n + W_{k+1}$

Die Summe ist direkt

Seien $x_i \in \ker(\lambda_i I - A)^n$ $\quad 1 \le i \le k+1$, $y \in W_{k+1}$

zz: wenn $x_1 + \dots + x_{k+1} + y = 0$ dann $x_1 = \dots = x_{k+1} = y = 0$

$$0 = \prod_{i=1}^{k+1} (\lambda_i - A)^n \left(\sum_{j=1}^{k+1} x_j + y \right) = \prod_{i=1}^{k+1} (\lambda_i - A)^n y$$

$$= \ker(\lambda_j - A)^n \subseteq \ker \prod_{i=1}^{k+1} (\lambda_i - A)^n$$

$$\Rightarrow y \in \ker \prod_{i=1}^{k+1} (\lambda_i - A)^n \cap \operatorname{im} \bigcap_{i=1}^{k+1} \operatorname{im}(\lambda_i I - A)^n \overset{11.11}{=} \{0\}$$

$$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k+1} x_i = 0 \overset{11.13\ ii}{\Longrightarrow} \text{alle } x_i = 0$$

ii) $\ker(\lambda_i - A) \cap W_k \subseteq \ker(\lambda_i I - A)^n \cap W^k$

$\subseteq \ker(\lambda_i I - A)^n \cap \operatorname{im}(\lambda_i - A)^n = \{0\}$ wegen Fitting

$\Rightarrow$ keine Vektoren zum Eigenwert λ sind in W_k

$\Rightarrow \lambda_i \notin \operatorname{spec} f_A|_{W_k}$ für $1 \le i \le k$

11.15 KOROLLAR

$\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\lambda_1 \dots \lambda_k$ alle Eigenwerte von A

$\Rightarrow \mathbb{K}^n = \ker(\lambda_1 - A)^n \oplus \dots \oplus \ker(\lambda_k - A)^n$

BEWEIS

$f_A\Big|_{\bigcap_{i=1}^{k} (\operatorname{im}(\lambda_i - A)^n}$ hat keine Eigenwerte $\Rightarrow W_k = \{0\}$

11.16 DEFINITION

Eine lineare Abbildung/Matrix heißt nilpotent wenn

$\exists k \in \mathbb{N}: f^k = 0$

Das kleinste solche k heißt Index der Nilpotenz

$(\lambda_i - f)\Big|_{\ker(\lambda_i - f)}$ ist nilpotent

$\forall x \in \ker(\lambda_i - f)^n : (\lambda_i - f)^n x = 0$

Wir haben $\mathbb{K}^m$ zerlegt in invariante UR $\ker(\lambda_i I - A)^n$

$$(A-\lambda_i)\Big|_{\ker(\lambda_i - A)^n} \text{ ist nilpotent.}$$

Ziel: Jede nilpotente Matrix, kann auf die Form

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \cong \lambda_i I + \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A \cong \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} e_i = e_{i-1} \text{ oder } 0$$

11.17 LEMMA

$\ker f^k \subseteq \ker f^{k+1} \subseteq \ker f^{k+2} \dots$

Seien $u_1 \dots u_p$ Basis von $\ker f^k$

$u_1 \dots u_p\, v_1 \dots v_q$ Basis von $\ker f^{k+1}$

$u_1 \dots u_p\, v_1 \dots v_q\, w_1 \dots w_r$ Basis von $\ker f^{k+2}$

Dann ist $(u_1 \dots u_p, f(w_1) \dots f(w_r))$ l.u.

BEWEIS

klar $f(\ker f^{k+2}) \subseteq \ker f^{k+1}$

Sei $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j f(w_j) = 0$

z.z.: alle λ_i, alle $\mu_j = 0$

$$0 = f^k\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j f(w_j)\right)$$

$$= 0 + f^k\left(\sum_{j=1}^{r} \mu_i f(w_j)\right) = f^{m+1}\left(\sum_{j=1}^{r} \mu_j w_j\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{r} \mu_j w_j \in \ker f^{k+1} = \mathcal{L}(u_1 \dots u_p, v_1 \dots v_q)$$

andererseits sind $w_i \in \ker f^{k+2} \ominus \ker f^{k+1}$
$\notin \mathcal{L}(u_1 \dots u_p, v_1 \dots v_q)$

$\rightarrow$ alle $\mu_j = 0$

$\ominus$: gemeint ist $\ker f^{k+2} = \ker f^{k+1} \oplus \mathcal{L}(w_1 \dots w_r)$

$\sum_{j=1}^{r} \mu_j w_j \in \ker f^{k+1} \cap \mathcal{L}(w_1 \dots w_r) = \{0\}$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{r} \mu_j w_j = 0 \Rightarrow$ alle $\mu_j = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow$ alle $\lambda_i = 0$

11.18 SATZ JORDANSCHE NORMALFORM

Sei $\dim V = n$, $f \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent vom Index p, $d = \dim \ker f$

Dann $\exists$ Basis $\mathcal{B}$ von V sodass

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_q \end{bmatrix} \qquad N_i = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}}_{n_i \times n_i}$$

mit $p = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_d \geq 1$

$n_1 + n_2 + \dots + n_d = n$

BEWEIS

$U_k = \ker f^k$, $m_k = \dim U_k$

$\Rightarrow U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \dots \subsetneq U_p = V$

$d = m_1 < m_2 < \dots < m_p = n$

$f(U_k) \subseteq U_{k-1}$

$u_1 \dots u_{m_1}, u_{m_1+1} \dots u_{m_2}, u_{m_2+1} \dots u_{m_3} \dots \dots \quad u_{m_p}$

U_1

U_2

U_3

$U_p = V$

$u_1 \dots u_{m_k}$ ist Basis von U_k

- Beginne von hinten

$u_{p,1} \mid u_{m_{p-1}+1} \quad u_{m_{p-1}+2} \quad \dots \quad u_{m_p}$ Basis von $U_p \ominus U_{p-1}$

$\phantom{u_{p,1} \mid} \; \overset{\shortparallel}{v_1^{(p)}} \quad \overset{\shortparallel}{v_2^{(p)}} \quad \dots \quad \overset{\shortparallel}{v_{m_p-1}^{(p)}}$

$\downarrow$

$v_1^{(p-1)} = f(v_1^{(p)})$, $v_2^{(p-1)} := f(v_2^{(p)}) \dots v_{m_p-m_{p-1}}^{(p)} := f(v_{m_p-m_{p-1}}^{(p)})$

$v_1 \dots v_{m_p-m_{p-1}} \in U_{p-1} \ominus U_{p-2}$ wegen 11.17

11.17 $\to$ $v_1^{(p-1)} \dots v_{m_p-m_{p-1}}^{(p-1)}$ sind l. u.

$u_1 \dots u_{m_{p-2}}$

Wir können $u_1 \dots u_{m_{p-2}}\ v_1^{(p-1)} \dots v_{m_p-m_{p-1}}^{(p-1)}$ zu einer Basis von U_{p-1} ergänzen

Basisauswahlsatz $\to$ wir können Ergänzungsvektoren aus $(u_{m_{p-2}+1} \dots u_{m_{p-1}})$ wählen

$u_1 \dots u_{m_{p-2}} \mid u_{m_{p-2}+1} \dots u_{m_{p-1}} \mid u_{m_{p-1}+1} \dots u_{m_p}$

$u_1 \dots u_{m_{p-2}} \mid f(u_{m_{p-1}+1}) \dots f(u_{m_p})$ ist linear unabh. lt. 11.17

$\to$ ergänze zu Basis von U_{p-1}:

$u_1 \dots u_{m_{p-2}}\ v_1^{(p-1)} \dots v_{m_p-m_{p-1}}^{(p-1)} \mid \underbrace{v_{m_p-m_{p-1}+1}^{(p-1)} \dots v_{m_p-m_{p-2}}^{(p-1)}}_{\subseteq \{u_{m_{p-2}+1}, \dots u_{m_{p-1}}\}}$

$v_1^{(p-2)} := f(v_1^{(p-1)})$, $v_2^{(p-2)} := f(v_2^{(p-1)})$ $\dots$ $v_{m_p-m_{p-2}}^{(p-2)} := f(v_{m_p-m_{p-2}}^{(p-1)})$

$\in U_{p-2} \ominus U_{p-3}$

ergänze $u_1 \dots u_{m_{p-3}}\ v_1^{(p-2)} \dots v_{m_{p-1}-m_{p-2}}^{(p-2)}$ zu Basis von U_{p-2}

.... usw

$v_1^{(p)} \dots\dots\dots v_{m_p-m_{p-1}}$ | $U_p = V$

$u_{m_{p-1}+1} \quad\quad u_{m_p}$

$\downarrow f$

$v_1^{(p-1)}\ v_2^{(p-1)} \dots v_{m_p-m_{p-1}}^{(p-1)} \mid \dots\dots v_{m_{p-1}+m_{p-2}}^{(p-1)}$ | U_{p-1}

$\downarrow f$

$v_1^{(p-2)}\ v_2^{(p-2)} \dots v_{m_p-m_{p-1}}^{(p-2)}\ v \dots\dots v_{m_{p-1}-m_{p-2}}^{(p-2)} \mid v_{m_{p-1}-m_{p-2}+1}^{(p-2)} \dots v_{m_{p-2}-m_{p-3}}^{(p-2)}$ | U_{p-2}

$\vdots$ | $\vdots$

| U_2

$v_1^{(1)}\ v_2^{(1)} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots v_m^{(1)}$ | U_1

$v_i^{(p-1)} := f(v_i^{(p)}) \in U_{p-1}$ sind linear unabhängig von $u_1 \dots u_{m_{p-1}}$

1) Die Elemente der letzten k Zeilen bilden eine Basis von U_k

2) f bildet k-te Zeile (von unten) auf die $(k-1)$-te Zeile ab

$f(U_k) \subseteq U_{k-1} \setminus U_{k-2}$

$$\mathcal{B} = v_1^{(1)}\, v_1^{(2)} \dots v_1^{(n_1)}\, v_2^{(1)} \dots v_2^{(n_2)} \dots v_d^{(1)}\, v_d^{(2)} \dots v_d^{(n_d)}$$

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{matrix}}_{n_1 \times n_1} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{matrix}}_{n_2 \times n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{matrix}}_{n_d \times n_d} \end{bmatrix}$$

da $f(v_i^{(1)}) = 0$ $\quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad f(v_i^{(k)}) = v_i^{(k-1)}$ für $k \geq 2$

11.19 BEISPIEL

$$A := \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{matrix}$$ ist nilpotent

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \cdot 3 \quad +4$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{matrix} \quad +2$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \quad 3 \cdot 1$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$x_2 = -x_6$ $\qquad x_7 = 2x_3 = 0$

$x_5 = 0$ $\qquad x_3 = 0$ $\qquad x_1, x_4, x_8$ frei

Basis von $\ker A$

$u_1 = e_1$, $u_2 = e_4$, $u_3 = -e_2 + e_6$, $u_4 = e_8$

$\ker A = \ker N_1$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Pivotzeilen}$$

Beh: $\ker A^2 = \ker N_1 \cdot A$

$x \in \ker A^2 \Leftrightarrow Ax \in \ker A = \ker N_1 \Leftrightarrow N_1 \cdot Ax = 0 \Leftrightarrow x \in \ker N_1$

$$N_1 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad x_3 = 2x_5$$

Basis von $\ker A^2$: $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ frei:

$\rightarrow$ Basis von U_2: $\underset{}{\overset{u_1}{e_1}}, \overset{u_2}{e_4}, \overset{u_3}{-e_2+e_6}, \overset{u_4}{e_8} \mid \overset{u_5}{e_2}$ $\overset{u_7}{2e_3+e_5}$ $\overset{u_7}{e_7}$

e_1, e_2, e_4 $2e_3+e_5$ e_6 e_7 e_8 Basis von U_2

$e_6 = (-e_2 + e_6) + e_2 - u_3 + u_5$

Wir wollen Basis von U_2 die die schon gefundene Basis von U_1 enthält

$\ker A^2 = \ker N_2$

$N_2 = [0\ 0\ 1\ 0\ -2\ 0\ 0\ 0]$

$\ker A^3 = \ker N_2 \cdot A = \ker [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$

$U_3 = \mathbb{R}^8$

	U_1				U_2			U_3
Basis:	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
	e_1	e_4	$-e_2+e_6$	e_8	e_2	$2e_3+e_5$	e_7	e_3

$\Rightarrow d = \dim \ker A = 4$

$\rightarrow$ 4 Jordanblöcke

$p = 3 \Rightarrow$ größter Block: 3×3

$m_1 = \dim U_1 = 4$

$m_2 = \dim U_2 = 7$

$m_3 = \dim U_3 = 8$

$U_3 \ominus U_2 = \mathcal{L}(u_8)$

$v_1^{(3)} = u_8 = e_3$ $\qquad$ $A e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 3e_2 - 2e_6$

$\cdot A$

$v_1^{(2)} = 3e_2 - 2e_6$ $\longrightarrow$ ergänze $u_1, u_2, u_3\ u_4 \,|\, v_1^{(2)}$ zu einer Basis von U

$v_2^{(2)} = 2e_3 + e_5$

$v_3^{(2)} = e_7$

$\mathcal{L}(-e_2 + e_6, 3e_2 - 2e_6) = \mathcal{L}(e_2, e_6)$

$e_1, e_4\quad -e_2 + e_6\quad e_8 \,|\, 3e_2 - 2e_6\quad 2e_3 + e_5\quad e_7$ Basis von U_2

"Pool": $e_2,\ 2e_3 + e_5\quad e_7$

$e_2 \in \mathcal{L}(u_1, \dots u_4, v_1^{(2)})$

$\cdot A$

$v_1^{(1)} = e_1 + 3e_4 - 4e_8$

$v_2^{(1)} = 4e_2 + e_4 - 4e_6 \qquad v_3^{(1)} = -e_2 + e_6$

ergänze $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_3^{(1)}$ zu einer Basis von U_1

Pool: $e_1, e_4, -e_2 + e_6\quad e_8$

$e_1 \in \mathcal{L}(v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_3^{(1)}$

$e_4 = v_2^{(1)} + 4v_3^{(1)}$

$e_8 = v_1^{(1)} - e_1 - 3e_4$

$\mathcal{B} = v_1^{(1)}, v_1^{(2)}, v_1^{(3)}, v_2^{(1)}, v_2^{(2)}, v_3^{(1)}, v_3^{(2)}, v_4^{(1)}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}AB = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{0} \end{bmatrix}$$

Das war der Fall einer nilpotenten Matrix

Allgemeiner Fall: $V = \bigoplus$ Haupträume

und auf den Haupträumen ist $A - \lambda I$ nilpotent

$\Rightarrow A - \lambda I \cong \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$