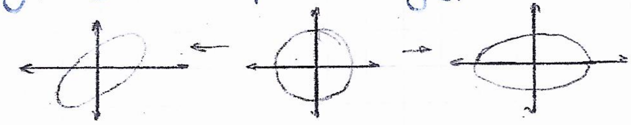
X Eigenwerte & EW

Ziel: finde zu $f \in End(V) = Hom(V,V)$ eine Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass $\Phi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ möglichst einfache Gestalt hat

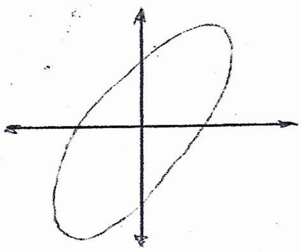
vgl: $\Phi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \overset{\text{Äquivalenztransformation}}{=} \begin{bmatrix} \underbrace{1 \cdots 1}_{rk\, f} & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \; 0 \end{bmatrix}$

bzw zu einer gegebenen Matrix A finde Matrix T sodass TAT^{-1} möglichst einfache Gestalt hat

- "Einfache" Matrizen:



- $A = I$
- $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ $\quad Ae_1 = \lambda_1 e_1$, $Ae_2 = \lambda_2 e_2$



$$a_0 + \sum a_{ij} x^i y^j + bx + cy = 0$$

$$\sum ax^2 + by^2 + c = 0$$

$$Ax = \lambda x$$

10.1 DEF

V Vektorraum über $\mathbb{K}$, $f \in End(V)$

- $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert von f wenn $\exists v \in V \setminus \{0\}$ sodass $f(v) = \lambda \cdot v$
- v heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ
- engl: eigenvalue, eigenvector
- $f := \{\lambda \mid \lambda$ Eigenwert von $f\}$ heiß von f

10.2 LEMMA

$\eta_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} = \ker(\lambda \mathrm{id} - f)$ ist ein Unterraum und heißt Eigenraum von f zum Eigenwert λ

$v \in \eta_\lambda \Leftrightarrow f(v) = \lambda v \Leftrightarrow \lambda v - f(v) = 0 \Leftrightarrow (\lambda \mathrm{id} - f)(v) = 0$

$\Rightarrow v \in \ker(\lambda \mathrm{id} - f)$

10.3 BSP

a) $f = c \cdot \mathrm{id}$

$\Rightarrow f(v) = c \cdot v \quad \forall v \in V$

$\Rightarrow \operatorname{spec} f = \{c\}$

$\lambda = c, \quad \eta_\lambda = V$

b) Sei B Basis, $f: V \to V$

$b_i \mapsto \lambda_i b_i$

Fortsetzungssatz $\Rightarrow f \sum \alpha_i b_i = f(\sum \alpha_i b_i) = \sum \alpha_i \lambda_i b_i$

$\Rightarrow \operatorname{spec} f = \{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$

$\eta = \mathcal{L}(b_1), \quad \lambda_i = \lambda$

Sei λ Eigenwert

$(\exists v = \sum \alpha_i b_i): f(\sum \alpha_i b_i) = \lambda \cdot \sum \alpha_i b_i$

$\sum \alpha_i \lambda_i b_i = \sum (\lambda - \lambda_i) \alpha_i b_i = 0$

b_i l.u. $\Rightarrow (\lambda - \lambda_i) \alpha_i = 0 \quad \forall i$

$\Rightarrow \lambda = \lambda_i \vee \alpha_i = 0$

$\Phi_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

c) $V = C^\infty(\mathbb{R})$

$\frac{d}{dx}: C^\infty \to C^\infty$

$f \mapsto f' = \frac{df}{dx}$

Eigenvektoren?

$$y' = \lambda y$$

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \lambda\, dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \lambda \int dx = \log y = \lambda x + c$$

$$\Rightarrow y = c_i\, e^{\lambda x}$$

$$\Rightarrow \operatorname{spec}\left(\frac{d}{dx}\right) = \mathbb{R}\ , \quad \eta_\lambda = \mathcal{L}(e^{\lambda x})$$

$V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ $\quad e^{i\omega x} \rightsquigarrow$ Fouriertransformation

d) $C^\infty[0, L]$

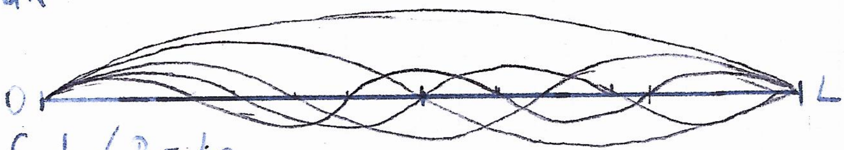
$$\frac{d^2}{dx} : C^\infty[0, L] \circlearrowleft$$

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{i\omega x} = -\omega^2 e^{i\omega x}$$

Re $\quad \displaystyle\frac{d^2}{dx^2} \cos(\omega x) = -\omega^2 \cos \omega x$

$$\frac{d^2}{dx^2} \sin(\omega x) = -\omega^2 \sin \omega x$$



Saite / Brücke

$$C_0^\infty[0, L] = \{ f \in C^\infty[0, L] \mid f(0) = f(L) = 0 \}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} : C_0^\infty[0, L] \circlearrowleft$$

$\sin \omega x$ $\qquad \omega L = \pi \cdot k$

$\sin \frac{\pi}{L} kx$ $\qquad \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{L} \cdot k$

... H - Atom

10.4 DEF

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

- $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt REW

  wenn $\exists v \in \mathbb{K}^{n} \setminus \{0\} : A \cdot v = \lambda \cdot v$

- $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt LEW

  wenn $\exists v \in \mathbb{K}^n : v^t A = \lambda v^t \iff A^t v = \lambda v \iff \lambda$ REW von A^t

10.5 LEMMA

Linkseigenwerte sind automatisch Rechtseigenwerte

BEWEIS

Sei λ Rechtseigenwert

$\Rightarrow \exists v: Av - \lambda v = 0$

$\ker(\lambda I - A) \neq \{0\}$

$\iff \operatorname{rank}(\lambda I - A) < n$

$\iff \operatorname{rank}(\lambda I - A^t) < n \iff \lambda$ Linkseigenwert von A

10.6 BEM

1) Eigenvektoren müssen nicht die gleichen sein

2) In $\dim = \infty$ stimmt das nicht:

$S: (\xi_1, \xi_2, \dots) \mapsto (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$

injektiv $\Rightarrow 0$ ist kein Rechtseigenwert

$S^t: (\xi_1, \xi_2, \dots) \mapsto (\xi_2, \xi_3, \dots)$

hat Eigenwert 0: $S^t(1, 0, 0, \dots) = (0, 0, \dots)$

Daher allgemeine Definition des Spektrums:

$\operatorname{spec}(S) = \{\lambda \mid \lambda I - S \text{ nicht invertierbar}\}$

10.7 DEF

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$\operatorname{spec}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \text{ REW von } A\} = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \text{ LEW von } A\}$

10.8 LEMMA

$\dim V = n$, $f \in \operatorname{End} V$, $\mathcal{B}$ Basis von V

Dann ist $\operatorname{spec} f = \operatorname{spec}(\Phi^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f))$

$f(v) = \lambda v \Leftrightarrow \Phi^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\,\Phi_{\mathcal{B}}(v) = \lambda\,\Phi_{\mathcal{B}}(v)$

10.9 FOLGERUNG

1) Das Spektrum hängt nicht von der Wahl der Basis ab

2) T regulär $\Rightarrow \operatorname{spec} TAT^{-1} = \operatorname{spec} A$

Eigenvektor von $T^{-1}AT$?

$Ax = \lambda x \Leftrightarrow ATT^{-1} = \lambda x$

$\Leftrightarrow T^{-1}ATT^{-1}x = \lambda T^{-1}x$

x Eigenvektor von $A \Leftrightarrow T^{-1}x$ Eigenvektor von $T^{-1}AT$

$\lambda I - A$ nicht injektiv?

10.10 SATZ + DEF

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

i) $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ ist ein Polynom vom Grad n

$\chi_A(x)$ und heißt charakteristisches Polynom von A

ii) λ Eigenwert von $A \Leftrightarrow \lambda$ Nullstelle von $\chi_A(x)$

BEW

i) $$\det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & & & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}$$

$= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \cdots = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\cdots(\lambda - a_{nn}) + \text{Polynom vom Grad} \leq n-2$

Polynom in $\lambda = \lambda^n + \text{Polynom vom Grad} \leq n-1$

ii) $\lambda I - A$ nicht injektiv $\Leftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0$