Sei $q(x) = (x-\mu_1)\dots(x-\mu_n)$

$\Rightarrow q(A) = (A-\mu_1 I)\dots(A-\mu$ ist nicht regulär

d. h. $x \in \ker q(A)$

$\Rightarrow \exists i : A - \mu_i I$ nicht regulär

$\Rightarrow \exists i : \mu_i \in \mathrm{spec}(A)$

$q(\mu_i) = 0 \Rightarrow p(\mu_i) - \mu = 0 \Rightarrow p(\mu_i) = \mu$ $\square$

11.35 BEMERKUNG

Gilt nicht für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Bsp: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$

$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(A^2) = \{-1\}$

XII NORMALE MATRIZEN

12.1 WIEDERHOLUNG

In diesem Kapitel VR mit Skalarprodukt

$f: V \to W$ linear

$\Rightarrow$ eindeutige Abbildung $f^*: W \to V$

s.d. $\forall x \in V, \forall y \in W: \langle f(x), y \rangle_W = \langle x, f^*(y) \rangle_V$

Sei $\mathcal{B} := (b_1 \dots b_n) \subseteq V$ ONB

$C := (c_1 \dots c_n) \subseteq W$ ONB

$\Phi_C^B(f)_{ij} \qquad \langle f(b_j), c_i \rangle_W$

$\langle \alpha_i c_i, c_k \rangle = \alpha_k$

$\Phi_B^C(f^*)_{ij} = \langle f^*(c_j), b_i \rangle = \overline{\langle b_i, f^*(c_j) \rangle}$

$= \overline{\langle f(b_i), c_j \rangle} = \Phi_C^B(f)_{ji}$

$\Rightarrow \Phi_C^B(f)^* = \Phi_B^C(f^*)$

12.2 DEFINITION

Eine lineare Abbildung $f: V \to V$ bzw Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt normal wenn

$$f^* \circ f = f \circ f^* \quad \text{bzw.} \quad A^* A = A A^*$$

z.B.
- $A = A^*$ selbstadjungiert
- $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch
- $U^* = U^{-1}$ unitäre und orthogonale Matrizen

12.3 BEMERKUNG

i) Ü $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ wenn A regulär

$\lambda \in \operatorname{spec} A \iff \bar{\lambda} \in \operatorname{spec}(A^*)$

ii) A, B normal $\Rightarrow$ $A + B$, $A \cdot B$ normal wenn $AB = BA$

$(A+B)^*(A+B) = A^*A + B^*B + A^*B + B^*A$

12.4 LEMMA

Sei: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ normal

i) $\ker A = \ker A^*$

ii) $\ker A = \ker A^2$

$\Rightarrow$ HR sind ER

BEWEIS

i)

$$\begin{array}{ccc} x \in \ker A & & x \in \ker A^* \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ Ax = 0 & & A^*x = 0 \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \|Ax\|^2 = 0 & & \|A^*x\|^2 = 0 \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \langle Ax, Ax \rangle = 0 & & \langle A^*x, A^*x \rangle = 0 \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \langle A^*Ax, x \rangle = 0 & \iff & \langle AA^*x, x \rangle = 0 \end{array}$$

ii) $\ker A \subseteq \ker A^2$ trivial

„$\supseteq$": Sei $x \in \ker A^2 \Leftrightarrow A^2x = 0$

$\Leftrightarrow A \cdot Ax = 0$

$\Leftrightarrow Ax \in \ker A = \ker A^*$

$\Leftrightarrow A^*Ax = 0$

$\Rightarrow \langle A^*Ax, x\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle Ax, Ax\rangle = 0$

$\Rightarrow \|Ax\|^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0$

12.5 KOROLLAR

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal

i) $\ker(\lambda - A) = \ker(\bar{\lambda} - A)$

ii) Die Haupträume sind genau die Eigenräume daher ist A diagonalisierbar

BEWEIS

A normal $\Rightarrow \lambda I - A$ normal weil $IA = AI$

$(\lambda I - A)^* = \bar{\lambda} I - A^*$

$\ker(\lambda I - A)^k = \ker(\lambda I - A)$

$\mathbb{C}$ ist alg abg

$\rightarrow$ Daraus folgt alles

12.6 LEMMA

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal

$\lambda \neq \mu \in \operatorname{spec} A$

$\Rightarrow \ker(\lambda - A) \perp \ker(\mu - A)$

BEWEIS

Sei $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y \Rightarrow y \in \ker(\mu I - A) = \ker(\mu I - A)^*$
$= \ker(\bar{\mu} I - A^*)$

$\Rightarrow A^* y = \mu y$

$\lambda\langle x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$
$= \langle x, \bar{\mu} y\rangle = \mu\langle x, y\rangle$

$\Rightarrow (\lambda - \mu)\langle x - y\rangle = 0$ und $\lambda \neq \mu \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$

12.7 SATZ

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

Folgende Aussagen sind äquivalent

i) A ist normal

ii) es gibt ONB aus Eigenvektoren

iii) A ist unitär orthogonalisierbar

d.h. $\exists\, U \in \mathcal{U}(n) : U^* A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

BEWEIS

i) → ii)

A normal $\Rightarrow$ Haupträume sind Eigenräume

Eigenräume stehen orthogonal aufeinander

$\mathbb{C}^n = \mathcal{H}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{\lambda_k}$ orthogonale Summe

bilde ONB: B_i in $\mathcal{H}_{\lambda_i}$

$\Rightarrow B_1 \cup \dots \cup B_k$ ist ONB aus Eigenvektoren von $\mathbb{C}^n$

ii) → iii)

Sei $u_1 \dots u_n$ ONB aus EV

$U := [u_1 \; \dots \; u_n]$

$AU = U \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{U^*}_{=U^{-1}} A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

iii) → i)

$A = U^* \Lambda U \Rightarrow A^* = U^* \Lambda^* U = U^* \bar{\Lambda} U$

$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ $\qquad (AB)^* = B^* A^*$

$AA^* = U^* \Lambda U U^* \bar{\Lambda} U = U^* \Lambda \bar{\Lambda} U$

$\Lambda \bar{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\lambda}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\bar{\lambda}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\bar{\lambda}_n \end{bmatrix} = \bar{\Lambda}\Lambda$

$\Rightarrow AA^* = U \bar{\Lambda} \Lambda U = U^* \bar{\Lambda} U U^* \Lambda U = A^* A$

$\Rightarrow A$ normal

12.8 SCHURSCHE NORMALFORM

Issai Schur 1875 - 1941

Sei: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

i) $\exists U \in \mathcal{U}(n): U^* A U = R = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots \\ 0 & \ddots\ \lambda_n \end{bmatrix}$ obere Dreiecksmatrix

mit den Eigenwerten auf der Diagonalen

ii) Wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit nur reellen EW dann kann

$U \in \mathcal{O}(n)$ gewählt werden

BEWEIS

Induktion:

Sei: λ EW, u EV mit $Au = \lambda u$, $\|u\| = 1$

$\rightarrow$ ergänze zu Orthonormalbasis

$u_1\, w_1 \ldots w_n$

$U_1 = \left[\begin{array}{c|c} u_1 & W \end{array}\right]$ $\quad W = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n-1}$

$AU_1 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \\ 0 & A \cdot W \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right]$ $\quad U_1^* A U = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & u^* AW \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{W^* A W} \\ 0 & \end{array}\right]$

wende das Ganze noch einmal an auf $W^* A W \in \mathbb{C}^{n-1 \times n-1}$

$\Rightarrow \exists U_2 \in \mathcal{U}(n-1): U_2^* W^* A W U_2 = R_2$

$U = U_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & U_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \overset{Ü}{\Rightarrow} U^* A U = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & & \\ \vdots & & R_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$

Wh: normale Matrizen

$$AA^* = A^*A \quad , \quad \ker A = \ker A^* = \ker A^2$$

$$U^*AU = \Lambda$$

Schursche Normalform

$$UA^*U = [\,\overline{\nwarrow}\,]$$

$$Au = \lambda u \qquad \|u\| = 1$$

$$\Rightarrow U_1 = [u, W] \quad \text{unitär}$$

$$AU_1 = U_1 \begin{bmatrix} \lambda & \\ 0 & AW \\ \vdots & \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$U_1^* A U_1 = \begin{bmatrix} \lambda & u^*AW \\ 0 & \\ \vdots & W^*AW \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$\xrightarrow{\text{rekursiv}}$ $U_2^* W^* A W U_2 = R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & U_2^* \end{bmatrix} U_1^* A U_1 \begin{bmatrix} 1 & \\ & U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & R_2 \\ 0 & \end{bmatrix}$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wenn $\chi_A(x)$ über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren zerfällt, dann kann $\mathcal{U} \in \mathcal{O}(n)$ gewählt werden

Denn die Eigenwerte von W^*AW sind auch reell

$$\chi_A(x) = \chi_{U^*AU}(x) = (x-\lambda)\,\chi_{W^*AW}(x)$$

$\Rightarrow$ wenn $\chi_A(x)$ über $\mathbb{R}$ zerfällt dann auch χ_{W^*AW} $\rightarrow$ Rekursion ist anwendbar

Normale Matrizen sind diagonalisierbar:

Schur $\Rightarrow$ $A = URU^*$ $\Rightarrow$ $A^* = UR^*U^*$

$$A^*A = AA^* \Rightarrow UR^*U^*URU^* = URU^*UR^*U^*$$

$$\Rightarrow R^*R = RR^*$$

$$\Rightarrow R \text{ ist Diagonalmatrix}$$

12.9 KOROLLAR

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ selbstadj $\Rightarrow$ spec $A \in \mathbb{R}$

BEWEIS

$A^* = A \Rightarrow A$ ist normal

$\rightarrow A$ diagonalisierbar

Sei: $Ax = \lambda x$

$\Rightarrow x \in \ker(\lambda I - A) = \ker(\lambda I - A)^*$

$= \ker(\bar{\lambda} I - A) \Rightarrow A = \bar{\lambda} x$

EV zu versch EW sind orthogonal

$\Rightarrow \|x\|^2 = 0$ oder $\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow A = U[\lambda_1 \dots \lambda_n] U^*$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$

12.10 KOROLLAR

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch

$\Rightarrow A = Q \Lambda Q^t$ mit $Q \in O(n)$

BEWEIS

$\chi_A(x)$ zerfällt über $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ alle Nullstellen sind reell

$\Rightarrow \chi_A(x)$ zerfällt über $\mathbb{R} \Rightarrow$ reeller Schur anwendbar

12.11 SATZ

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ selbstadjungiert

i) $A > 0 \Leftrightarrow$ spec $A \subseteq]0, \infty[$

$A > 0 \Rightarrow \langle Ax, x \rangle > 0 \quad \forall x \neq 0$

$x^* A x > 0 \quad \forall x \neq 0$

$\rightarrow$ Sei $Ax = \lambda x$

$x^* A x = x^* \lambda x = \lambda \|x\|^2 = \lambda > 0$

$\leftarrow$ Sei A so dass alle EW > 0

A diagonalisierbar

$\Rightarrow \exists$ ONB aus EV

ii) $A \geq 0 \iff \operatorname{spec} A \subseteq [0, \infty[$

iii) analog negativ semidefinit

iv) A indefinit $\iff \operatorname{spec} A \cap]-\infty, 0[\neq \emptyset$ und $A \cap]0, \infty[\neq \emptyset$

Beweis zerlege x bzgl ONB

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

$$\langle Ax, x \rangle = \langle A \sum_{j=1}^{n} \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{n} a_j u_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle \alpha_i \lambda_i u_i, \alpha_j u_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \alpha_j \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{= \delta_{ij}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |a_i|^2 \begin{cases} > 0 & \text{wenn } x \neq 0 \\ \geq 0 & \text{wenn alle } \lambda_i \geq 0 \Rightarrow \end{cases} \quad ?$$

12.12 ANWENDUNG

Taylorformel im $\mathbb{R}^n$

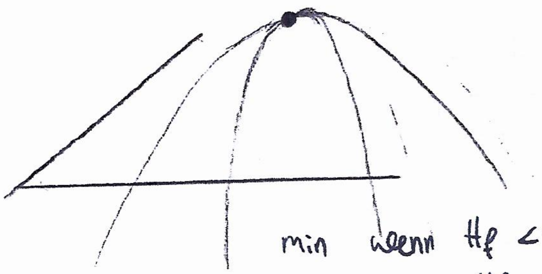
$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3)$$

im $\mathbb{R}^2$

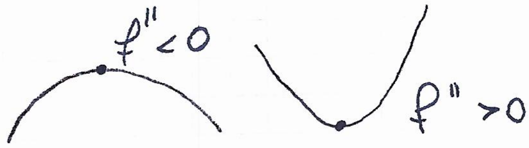
$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) (x - x_0) + (x - x_0)^t \frac{H_f}{2} (x - x_0)$$

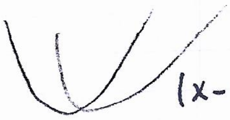
wobei $H_f = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j = 1 \ldots n}$ Hesse Matrix



min wenn $H_f < 0$

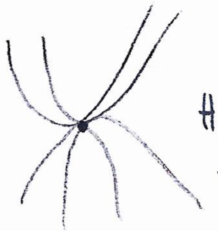
max wenn $H_f > 0$



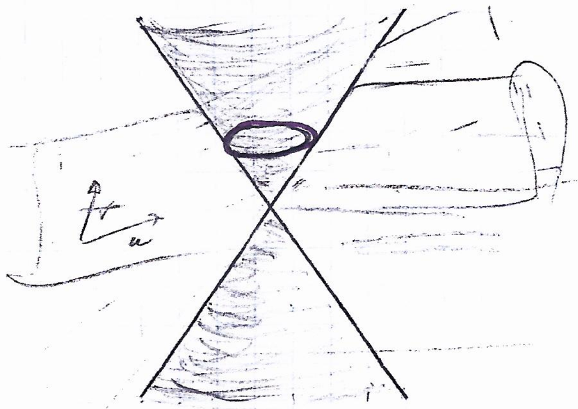


$(x - x_0)^t \frac{H_f}{2} (x - x_0)$

wenn $H_f > 0$



H_f indefinit
$\to$ Sattelpunkt



$x^2 + y^2 = z^2$ Doppelkegel

$E = \{ u + \xi v + \eta w \mid \xi, \eta \in \mathbb{R} \}$

o.B.d.A. $\|v\| = \|w\| = 1$, $v \perp w$ ONS

Gleichung für den Schnitt:

$(u_1 + \xi v_1 + \eta w_1)^2 + (u_2 + \xi v_2 + \eta w_2)^2 = (u_3 + \xi u_3 + \eta w_2)^2$

$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 + d\xi + e\eta = f$

$(\xi \ \eta) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + (d \ e) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

$\to$ Was ist das?

Fall 0: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Gerade

Schritt 1

Translation, die den linken Term verschwinden lässt (d.h. verschiebt Mittelpunkt nach 0)

Sei $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ der Mittelpunkt

$\to$ neue Koordinaten: $\xi = x_0 + x$, $\eta = y_0 + y$

$\to a(x + x_0)^2 + 2b(x + x_0)(y + y_0) + c(y + y_0)^2$

$+ d(x + x_0) + e(y + y_0) = f$

d.h. $ax^2 + 2bxy + cy^2 + (2ax_0 + 2by_0 + d)x$

$+ (2bx_0 + 2cy_0 + e)y + ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2 + dx_0 + ey_0 = f$

Wähle x_0, y_0 so dass

$2ax_0 + 2by_0 + d = 0$, $2bx_0 + 2cy_0 + e = 0$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

Fall 1: $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ Eigenwert 0 und weiterer Eigenwert λ

$\Rightarrow$ diagonalisierbar mit $Q \in O(2)$
(Drehung oder Spiegelung)

$$Q^t A Q = \begin{bmatrix} \lambda & \\ & 0 \end{bmatrix}$$

oBdA $\det Q > 0$ sonst $\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$

neue Koordinaten $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q^t \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$(x\ y)\, Q^t A Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (d\ \ e)\, Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f$$

$\lambda x^2 + \tilde{d}x + \tilde{e}y = f$ wobei $\begin{pmatrix} \tilde{d} \\ \tilde{e} \end{pmatrix} = Q^t \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$

wenn $\tilde{e} \neq 0 \Rightarrow y = \frac{-\lambda x^2}{e} - \frac{\tilde{d}x}{\tilde{e}} + \frac{f}{\tilde{e}} \to$ Parabel

$\tilde{e} = 0$, y beliebig

$$x = -\frac{\tilde{d} \pm \sqrt{\tilde{d}^2 + 4\lambda f}}{2\lambda}$$

$\emptyset$, 1 oder 2 Geraden parallel zur x-Achse

Fall 2: $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \neq 0$ $\to$ Löse nach x_0, y_0

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = g$$
$(:= f - ax_0^2 - 2bx_0y_0 - cy_0^2 - dx_0 - ey_0)$

$$(x\ \ y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g$$

diagonalisierbar mit $Q \in O(2)$ Drehung

$Q^t A Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix}$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$

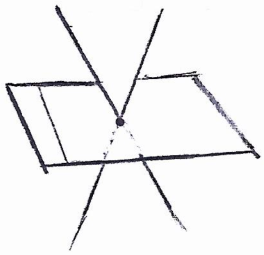
$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = Q^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow (\tilde{x}\ \tilde{y})\, Q^t A Q \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = g$$

$$\lambda_1 \tilde{x} + \lambda_2 \tilde{y} = g$$

Fall 2a : $g = 0$

$$\tilde{y}^2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\tilde{x}^2$$

wenn $\operatorname{sign}\lambda_1 = \operatorname{sign}\lambda_2 \Rightarrow (0,0)$



Punkt

$\operatorname{sign}\lambda_1 \neq \operatorname{sign}\lambda_2 \Rightarrow \tilde{y} = \pm\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\tilde{x}^2}$

$\rightarrow$ 2 Geraden

Fall 2b : $g \neq 0$

$$\frac{\tilde{x}^2}{\frac{g}{\lambda_1}} + \frac{\tilde{y}^2}{\frac{g}{\lambda_2}} = 1$$

Fall 2b1

$\alpha^2 := \frac{g}{\lambda_1} > 0 \qquad \beta^2 := \frac{g}{\lambda_2} > 0$

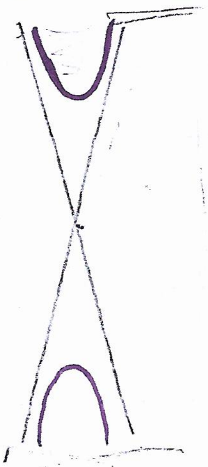
$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \rightarrow$ Ellipse

Fall 2b2

$\frac{g}{\lambda_1} < 0 \wedge \frac{g}{\lambda_2} < 0 \rightarrow \emptyset$

$\rightarrow$ tritt nicht auf!

Fall 3 : $\alpha^2 > 0, \ \beta^2 - \frac{g}{\lambda_2} > 0$



$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} \rightarrow$ Hyperbel

Klassifikation

- $\frac{1}{g} A > 0$ Ellipse
- $g < 0$ $\emptyset$
- A singulär Parabel oder Gerade(n)
- A indefinit Hyperbel

12.14 ANWENDUNG

Quadriken in $\mathbb{R}^3$
quadrat. Gleichungen

BEISPIEL: $-4\xi_1^2 - 7\xi_2^2 + 2\xi_3^2 - 20\xi_1\xi_2 + 16\xi_1\xi_3$
$+ 4\xi_2\xi_3 + 5\xi_1 + 26\xi_2 - 10\xi_3 + 90 = 0$

$$\xi^t \begin{bmatrix} -4 & -10 & 8 \\ -10 & -7 & 2 \\ 8 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xi \; (50, 26\; -10) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} + 90 = 0$$

Schritt 1. Rotation

spec $A = (0, 9, \underset{?}{-18})$

$Q = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ diagonalisiert A, $\det Q = 1$

$Q^t A Q = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 9 & \\ & & -18 \end{bmatrix}$

neue Koordinaten $\xi = Q^t$

In den neuen Koordinaten

$9x_2^2 - 18x_3^2 - 6x_1 - 18x_2 + 54x_3 + 90 = 0$ $\quad |:3$

$\Leftrightarrow \; 3x_2^2 - 6x_3^2 + 2x_1 - 6x_2 + 18x_3 + 30 = 0$

Translation $\to$ $2x_1$ kann nicht eliminiert werden

$x = u + y$

$3(y_2 + u_2)^2 - 6(y_3 + u_3)^2 + 2(y_1 + u_1)$
$-6(y_2 + u_2) + 18(y_3 + u_3) + 30 = 0$

$3(y_2^2 + 2u_2y_2 + u_2^2) + 6(y_3^2 + 2y_3u_3 + u_3^2) + \ldots$

wollen $\quad 6u_2 - 6 = 0 \quad \Rightarrow u_2 = \frac{3}{2}$
$\quad -12u_3 + 18 = 0 \quad \Rightarrow u_3 = \frac{3}{2}$

$\ldots \rightsquigarrow 3y_2^2 - 6y_3^2 + 2y_1 + 2u_1 + \frac{81}{2} = 0$

wähle u_1 so dass Konstante $-2u_1 = 0$

$\to u_1 := -\frac{81}{4}$

$3y_2^2 - 6y_3^2 + 2y_1 = 0$

$\to$ Fläche im $\mathbb{R}^3$

Schnitt mit yz- Ebene

$y_1 = 0: \quad 3y_2^2 - 6y_3^2 = 0$

$y_3 \quad \pm\sqrt{\frac{1}{2} y_2}$

$y_1 = \alpha^2 > 0$

$3y_2^2 - 6y_3^2 = -2\alpha^2$ Hyperbel

$$-\frac{y_2^2}{\frac{2}{3}\alpha^2} + \frac{y_3^2}{\frac{1}{3}\alpha^2} = 1$$

$y_1 = -\alpha_1^2 < 0$

Mittelpunkt der ursprünglichen Quadrix

$y = x + p = Q^t \tilde{y} + p \Rightarrow \tilde{y} = Q(y - p)$

HR: $f(A) = V \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{bmatrix} V^{-1}$

wenn $A = V \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} V^{-1}$

sonst: Taylorreihe, wenn

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert für $x < 1$

$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$ konvergiert f. $x < 1$

12.15 SATZ

Sei A positiv semidefinit $(A \geq 0)$, $A = A^*$

$\langle Ax, x \rangle \geq 0 \ \forall x \iff$ alle $\lambda_i \geq 0$

Dann $\exists!\, B \geq 0 : \quad B^2 = A$

BEWEIS

$A = U \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} U^*$ weil selbstadj. daher normal, alle $\lambda_i \geq 0$

$\Rightarrow B = U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^*$ erfüllt $B \geq 0 \wedge B^2 = A$

Eindeutigkeit:

Sei $\tilde{B} \geq 0$, $\tilde{B}^2 = A$

$\Rightarrow \tilde{B} = V \begin{bmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{bmatrix} V^*$, B diagonalisierbar

$\Rightarrow A = \tilde{B}^2 = V \begin{bmatrix} \mu_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n^2 \end{bmatrix} V^*$

$\Rightarrow \mu_i^2$ sind Eigenwerte von A

$\Rightarrow \forall i \ \exists \lambda_j : \mu_i^2 = \lambda_j$

$\Rightarrow \tilde{B} = B$ (bis auf Permutationen)

12.16 BEMERKUNG

Die s.a. Lösungen der Gleichung $B^2 = A$

sind $U \begin{bmatrix} \pm\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \pm\sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^*$

"komplexe" Wurzeln ?

$a > 0 \Rightarrow z\bar{z} = a \quad z \in \mathbb{C}$

$\rightarrow z = \sqrt{a}\, e^{i\varphi}$

für Matrizen: gesucht C s.d. $CC^* = A$

12.17 CHOLESKY ZERLEGUNG

André Louis Cholesky (Cholewski) 1875–1918

$A > 0$ dann $\exists!\, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ untere Dreiecksmatrix (c_{ij})

mit $c_{ii} > 0 \quad \forall i$

sodass $CC^* = A$

 $= A$

12.18 LEMMA

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $A > 0$, $b \in \mathbb{C}^n$, $\gamma > 0$

Dann $\begin{bmatrix} A & b \\ b^* & \gamma \end{bmatrix} > 0 \iff \gamma - b^* A^{-1} b > 0$

denn $\gamma - b^* A^{-1} b = \dfrac{\det \begin{bmatrix} A & b \\ b^* & \gamma \end{bmatrix}}{\det A}$

BEWEIS

$$\begin{vmatrix} A & b \\ b^* & \gamma \end{vmatrix} = \det \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ -b^* A^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ b^* & \gamma \end{pmatrix} \right]$$

$$= \det \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & \gamma - b^* A^{-1} b \end{bmatrix} = \det A \cdot (\gamma - b^* A^{-1} b)$$

BEWEIS von CHOLESKY (12.17)

Induktion

$n = 1$: $[a_{11}] > 0 \Rightarrow c_{11} = \sqrt{a_{11}}$

$n \to n+1$:

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} A_n & b \\ b^* & \gamma \end{bmatrix}$$

gegeben: $A_n = C_n \cdot C_n^*$ Choleskyzerlegung

$\Rightarrow C_n$ regulär

gesucht: $c \in \mathbb{C}^n$, $\alpha > 0$ so, dass

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_n & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ c^* & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_n^* & c \\ 0 \dots 0 & \alpha \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} C_n C_n^* & C_n c \\ c^* C_n & c^* c + \alpha^2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} A_n & b \\ b^* & \gamma \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow c = C_n^{-1} b$

$\alpha = +\sqrt{\gamma - c^* c} > 0$

$$\gamma - c^* c = \gamma - (C_n^{-1} b)^* C_n^{-1} b$$
$$= \gamma - b^* (C_n^*)^{-1} C_n^{-1} b$$
$$= \gamma - b^* (C_n C_n^*)^{-1} = \gamma - b^* A_n^{-1} b = \frac{\det A_{n+1}}{\det A_n} > 0$$

$$C_{n+1} = \begin{bmatrix} C_n & \\ c^* & \alpha \end{bmatrix}$$

12.19 PRAKTISCHE DURCHFÜHRUNG

geg: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, ges: $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit

① $CC^* = A$

② $c_{ij} = 0$ wenn $i < j$

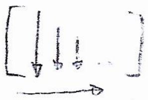
③ $c_{ii} > 0$ $\forall i \in \{1,\dots,n\}$

$$A = CC^* = \begin{bmatrix} c_{11} & & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & \overline{c_{21}} & \cdots & \overline{c_{n1}} \\ & \overline{c_{22}} & & \vdots \\ 0 & & \cdots & \overline{c_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11}^2 & c_{11}\overline{c_2} & c_{11}\overline{c_{31}} & \cdots & c_{11}\overline{c_{nn}} \\ c_{21}c_{11} & c_{11}^2 + c_{22}^2 & c_{21}\overline{c_{31}} + c_{22}\overline{c_{32}} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} c_{ik}\overline{c_{jk}}$$

$$(C^*)_{kj} = \overline{c_{jk}}$$

ALGORITHMUS 

1. Spalte

$a_{11} = c_{11}^2 \Rightarrow c_{11} = \sqrt{a_{11}} > 0$

$a_{21} = c_{21} \cdot c_{11} \Rightarrow c_{21} = \frac{a_{21}}{c_{11}}$

$a_{31} = c_{31} \cdot c_{11} \Rightarrow c_{31} = \frac{a_{31}}{c_{11}}$

$\vdots$

$a_{n1} = c_{n1} \cdot c_{11} \Rightarrow c_{n1} = \frac{a_{n1}}{c_{11}}$

Ang Spalte $1 \dots j-1$ schon berechnet

$c_{ij} = 0$ für $i < j$, $c_{ij} = ?$ für $i \geq j$

$i = j$: $a_{jj} = \sum_{k=1}^{j} c_{jk}\overline{c_{jk}} = c_{jj}^2 + \underbrace{\sum_{k=1}^{j-1} |c_{jk}|^2}_{\text{schon bestimmt}}$

$\Rightarrow c_{jj} = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} |c_{jk}|$

$$i > j: \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} c_{ik} \overline{c_{jk}} = c_{ij} c_{jj} + \underbrace{\sum_{k=1}^{j-1} c_{ik} \overline{c_{jk}}}_{\text{alle aus Spalten } 1 \dots j-1}$$

$$\Rightarrow c_{ij} = a_{ij} - \sum_{n=1}^{j-1} c_{ik} \overline{c_{jk}}$$

12.20 BEISPIEL

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2$$

$a_{21} = c_{21} \cdot c_{11}$

$12 = c_{21} \cdot 2$

$\Rightarrow c_{21} = 6$

$a_{31} = c_{31} \cdot a_{11}$

$-16 = c_{31} \cdot 2$

$\Rightarrow c_{31} = -8$

$a_{22} = c_{21} \overline{c_{21}} + c_{22}^2$

$37 = 36 + c_{22}^2$

$\Rightarrow c_{22} = 1$

$a_{32} = c_{31} \overline{c_{21}} + c_{32} \cdot c_{22}$

$-43 = -8 \cdot 6 + c_{32} \cdot 1$

$\Rightarrow c_{32} = 5$

$a_{33} = c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2$

$98 = 64 + 25 + c_{33}^2$

$\Rightarrow 9 = c_{33}^2 \Rightarrow c_{23} = 3$

12.21 BEMERKUNG

i) Wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann auch $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und weiters

ii) C ist eindeutig

iii) Cholesky Zerlegung ist zugleich eine LR-Zerlegung

12.22 SATZ

Wenn $A > 0$, dann ist $\det A \leq a_{11} \dots a_{nn}$

BEWEIS

Sei $A = C^* C$ Cholesky-Zerlegung

$$\Rightarrow \det A = \det C \cdot \det C^* \qquad \det C^* = \overline{\det C}$$

$$= |\det C|^2 = \prod_{i=1}^{n} c_{ij}^2 \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$c_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |c_{ik}|^2 \leq a_{ii}$$

12.23 KOROLLAR

HADAMARD'SCHE GLEICHUNG (J. S. Hadamard, 1865-1963)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit Spaltenvektoren $a_1 \dots a_n$

$$\Rightarrow |\det A| \leq \|a_1\| \dots \|a_n\|, \quad \|a_i\| = \sqrt{a_i^* a_i}$$

BEWEIS

Fall 1: $\det A = 0 \rightarrow$ trivial

Fall 2: $\det A \neq 0 \Rightarrow A^*A > 0$

$$\overset{12.22}{\Longrightarrow} \underbrace{\det A^*A}_{|\det A|^2} \leq \prod_{i=1}^{n} \underbrace{(A^*A)_{ii}}_{= a_i^* a_i} = \prod_{i=1}^{n} \|a_i\|^2$$

12.24 BEMERKUNG

$z \in \mathbb{C}, \; z = x + iy \qquad x = Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

$z \cdot \bar{z} = a > 0 \qquad y = Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

Matrix $Z \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$Z = X + iY \qquad X, Y$ selbstadjungiert

$X = \frac{1}{2}(Z + Z^*) =: Re\, Z$

$Y = \frac{1}{2i}(Z - Z^*) =: Im\, Z$

$z = e^{i\alpha} r, \quad r = |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

$Z = U \cdot R, \quad R \geq 0, \; U \in \mathcal{U}(n)$ Polarzerlegung

$R = (Z^* Z)^{\frac{1}{2}} \geq 0$

Ang. Z invertierbar $\Rightarrow R > 0$

$U = Z \cdot R^{-1} = Z(Z^* Z)^{-\frac{1}{2}}$ ist unitär

$UU^* = Z(Z^* Z)^{-\frac{1}{2}} (Z(Z^* Z)^{-\frac{1}{2}})^*$

$= Z \cdot (Z^* Z)^{-\frac{1}{2}} (Z^* Z)^{-\frac{1}{2}} \cdot Z^*$

$= Z(Z^* Z)^{-1} Z^* = Z \cdot Z^{-1} (Z^*)^{-1} Z^* = I$