Nachtrag zu Kapitel IV

$\mathrm{Hom}(V, W)$ im Spezialfall $W = \mathbb{K}$

5.24 DEFINITION

$$V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$$

heißt Dualraum des Vektorraums V

Die Elemente $v^* \in V^*$ heißen Linearformen oder lineare Funktionale.

SCHREIBWEISE

$$v^*(v) =: \langle v^*, v \rangle$$

5.25 BEISPIEL

$V = \mathbb{K}^n$

$v^* : V \to \mathbb{K}$ ist eindeutig festgelegt durch Werte $v^*(e_i) =: a_i$

$$\langle v^*, v \rangle = \langle v^*, \sum_{i=1}^n v_i e_i \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n v_i \langle v^*, e_i \rangle$$

$$v^*\left(\sum_{i=1}^n v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n v_i v^*(e_i) = \sum_{i=1}^n a_i v_i$$

5.26 SATZ

V Vektorraum über $\mathbb{K}$

i) $\dim V =: n < \infty$

$\Rightarrow \dim V^* = n$

Genauer: $(b_1 \dots b_n)$ Basis von V

Dann ist $b_k^* : b_i \mapsto \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Basis von V^* und heißt duale Basis

ii) für $v^* \in V^*$ ist $v^* = \sum_{k=1}^n \langle v^*, b_k \rangle b_k^*$

iii) Wenn $\dim V = \infty$ $(b_i)_{i \in I}$ Basis, dann ist

$(b_k^*)_{k \in I}$ $\langle b_k^*, b_i \rangle = \delta_{ik}$

keine Basis von V^*

BEWE[illegible]

Spezialfall von 5.18

i) zz: (b_k^*) linear unabhängig. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i^* = 0 \overset{!}{\Rightarrow}$ alle $\lambda_i = 0$

$$0 = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i^*, b_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{\langle b_i^*, b_k \rangle}_{= \delta_{ik}} = \lambda_k \quad \forall k$$

ii) Sei $v \in V$. zz: $\langle v^*, v \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \langle v^*, b_k \rangle b_k^*, v \rangle$

$$\langle \sum_{k=1}^{n} \langle v_k^*, b_k \rangle b_k^*, v \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle v^*, b_k \rangle \langle b_k^*, v \rangle$$

Sei $v = \sum_{i=1}^{n} v_i b_i$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle v^*, b_k \rangle \langle b_k^*, \sum_{i=1}^{n} v_i b_i \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \langle v^*, b_k \rangle \underbrace{\langle b_k^*, b_i \rangle}_{= \delta_{ki}} v_i$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle v^*, b_k \rangle v_k = \langle v^*, \sum_{k=1}^{n} v_k b_k \rangle = \langle v^*, v \rangle$$

iii) Übung: Betrachte das Funktional

$\langle v^*, b_i \rangle = 1 \Rightarrow v^* \notin \mathcal{L}((b_i)_{i \in I})$

5.27 BEMERKUNG UND DEFINITION

Die Abbildung $V^* \times V \to K$

$(v^*, v) \mapsto \langle v^*, v \rangle$

.. ist linear in v bei fixem v^*

... ist linear in v^* bei fixem v

Solche Abbildungen nennt man **bilinear**

Eine Abbildung $F: V_1 \times \ldots \times V_n \to W$

heißt **multilinear** (n-linear) wenn sie linear in jeder Komponente ist, d. h.:

$$F(v_1 \ldots v_{k-1}, \lambda v_k' + \mu v_k'', v_{k+1} \ldots v_n)$$

$$= \lambda \cdot F(v_1 \ldots v_{k-1}, v_k', v_{k+1} \ldots v_n) + \mu F(v_1 \ldots v_{k-1}, v_k'', v_{k+1} \ldots v_n)$$

5.28 Beispiel

$V = \mathbb{K}[x]$

Basis : $\{ x^k \mid k \in \mathbb{N}_0 \}$, $\dim V = \aleph_0$

ist eindeutig festgelegt durch $a_k := \langle v^*, x^k \rangle$

$(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$

$V^* \cong \mathbb{K}[[t]]$ formale Potenzreihen

$$\left(f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right)$$

$$= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \mid a_k \in \mathbb{K} \right\}$$

$$\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k + \mu \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) t^k$$

$$\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k , \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k \quad \text{ist wohldefiniert}$$

$$\longrightarrow \mathbb{K}[x]^* \cong \mathbb{K}[[t]]$$

Übung: $\dim V^* \geq |\mathbb{R}| > \dim V$ wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

5.29 Beispiel

$C[0,1]$ stetige Funktionen

$$\delta_x : C[0,1] \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(x), \qquad x \in [0,1]$$

$$(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$$

$$\langle \delta_x, f \rangle = f(x)$$

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\, dx \quad \text{ist linear}$$

$$\langle I_g, f \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx \qquad g \in C[0,1] \text{ fix}$$

$$\Rightarrow I_g \in C[0,1]^*$$

$$\langle I_g, \lambda f_1 + \mu f_2 \rangle = \int_0^1 (\lambda f_1(x) + \mu f_2(x))$$

$$= \lambda \int_0^1 f(x) g(x)\, dx + \mu \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$$

→ geht auch für nicht stetiges g (genügt integrierbar)

Riesz (Maßtheorie), $C[0,1]$ Raum d. Maße

↪ Dirac δ-Funktion, Schwartz/S.

$V^{**} := (V^*)^* \cong V$

5.30 LEMMA (unter Vorauss. $\dim V < \infty$, (AC))

V Vektorraum

i) $v \in V \setminus \{0\} \Leftrightarrow \exists v^* \in V^* \quad \langle v^*, v \rangle \neq 0$

ii) $\forall v \in V: \quad v = 0 \Leftrightarrow \forall v^* \in V^*: \langle v^*, v \rangle = 0$

BEWEIS

Ergänzen zu einer Basis von V

Definiere $v^* \in V^*$ durch

$$\langle v^*, b \rangle = \begin{cases} 1 & b = v \\ 0 & b \neq v \end{cases} \quad \text{für } b \in B$$

5.31 SATZ

V Vektorraum

i) die Abbildung $\iota: V \to V^{**} =:$ Bidualraum

$\langle \iota(v), v^* \rangle := \langle v^*, v \rangle$

ist linear und injektiv

ii) wenn $\dim V < \infty$, dann Isomorphismus

BEWEIS

i) <u>Linearität</u>

$\iota(\lambda v + \mu w) \overset{!}{=} \lambda \iota(v) + \mu \iota(w)$

muss in jedem Punkt $v^* \in V^*$ gelten

$\langle \iota(\lambda v + \mu w), v^* \rangle = \langle v^*, \lambda v + \mu w \rangle$

$= \lambda \langle v^*, v \rangle + \mu \langle v^*, w \rangle = \lambda \langle \iota(v), v^* \rangle + \mu \langle \iota(w), v^* \rangle$

$= \langle \lambda \iota(v) + \mu \iota(w), v^* \rangle$

<u>injektiv</u> Sei $v \in \ker \iota$

$\langle \iota(v), v^* \rangle = 0 \quad \forall v^* \in V^*$

$\Rightarrow \langle v^*, v \rangle = 0 \quad \forall v^* \in V^*$

$\Rightarrow v = 0$

ii) klar weil Dimensionen gleich

5.32 DEFINITION

V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$

$$f \in \operatorname{Hom}(V, W)$$

wir definieren $f^T \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$

durch $f^T(w^*) \in V^*$

$$\langle f^T(w^*), v \rangle = \langle w^*, f(v) \rangle = w^*(f(v))$$

$$= w^* \circ f(v)$$

$$f^T(w^*) = w^* \circ f^T \Rightarrow f^T(w^*) \in V^*$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ & & \downarrow w^* \\ & & \mathbb{K} \end{array}$$

f^T heißt die transponierte Abbildung

5.33

$\dim V = n$, $\dim W = m$

$B \subseteq V$, $C \subseteq W$ Basen

$B^* \subseteq V^*$, $C^* \subseteq W^*$ duale Basen

$$\Phi_{B^*}^{C^*}(f^T) = \Phi_C^B(f)^T$$

(Transposition von Matrizen)

VII DETERMINANTEN

Leibniz 1693

関孝和 Seki Takakazu 1655

Name "Determinante" Gauß 1801

Matrizen: Cayley 1845

$n = 2$: $ax + by = e$

$cx + dy = f$

eindeutige Lösung

$$\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array}$$

Fall 1: $a \neq 0$

$$\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \\ \hline a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{array} \qquad -\frac{c}{a}$$

eindeutige Lösung $d - \frac{bc}{a} \neq 0$

Fall 2: $c \neq 0$

$$\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \\ \hline 0 & b - \frac{ad}{c} \\ c & d \end{array} \qquad -\frac{a}{c}$$

eindeutige Lösung $b - \frac{ad}{c} \neq 0$

$ad - bc \neq 0$

7.1 DEFINITION

$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc =: \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

heißt Determinante von $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

7.2 EIGENSCHAFTEN

i) Die Determinante ist bilinear in den Spalten und Zeilen

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = (v, w)$$

Spaltenvektoren

$$\det(\lambda v_1 + \mu v_2, w) = \lambda \cdot \det(v_1, w) + \mu \cdot \det(v_2, w)$$

$$\det(v, \lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda \cdot \det(v, w_1) + \mu \cdot \det(v, w_2)$$

$$\det(\lambda v_1 + \mu v_2, w) = \begin{vmatrix} \lambda a_1 + \mu a_1 & b \\ \lambda c_1 + \mu c_1 & d \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda a_1 + \mu a_2) d - (\lambda c_1 + \mu c_2) b$$

$$= \lambda (a_1 d - c_1 b) + \mu (a_2 d - c_2 b)$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_2 & b \\ c_2 & d \end{vmatrix}$$

ii) $\det(v, v) = 0$

$$\begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix} = ac - ac = 0$$

iii) $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$

7.3 SATZ

Die Eigenschaften i – iii charakterisieren die Determinante.

Sei: $\varphi : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ mit

i) bilinear

ii) $\forall v \in \mathbb{K}^2 : \varphi(v, v) = 0$

iii) $\varphi(e_1, e_2) = 1$

Dann ist $\varphi = \det$

BEWEIS

z.z.: $\varphi(v, w) = \det(v, w)$

$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} v = a e_1 + c \cdot e_2 \qquad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} w = b \cdot e_1 + d \cdot e_2$

$$\varphi(v, w) = \varphi(a e_1 + c e_2, b \cdot e_1 + d \cdot e_2)$$

$$\overset{}{\underset{i)}{=}} a \cdot \varphi(e_1, b e_1 + d e_2) + c \cdot \varphi(e_2, b e_1 + d e_2)$$

$$\underset{ii)}{=} ad \cdot \varphi(e_1, e_2) + ab(e_1, e_1) + cb \cdot \varphi(e_2, e_1) + cd \varphi(e_2, e_2)$$

$$= ad - bc = \det(v, w)$$

7.4 LEMMA

aus i und ii folgt:

$\forall v, w \in \mathbb{K}^n : \varphi(v, w) = - \varphi(w, v)$

$$0 = (v + w, v + w) \underset{i}{=} \varphi(v, v) + \varphi(v, w) + \varphi(w, v) + \varphi(w, w)$$

$$\underset{ii)}{=} \varphi(v, w) + \varphi(w, v)$$

7.5 GEOMETRISCHE DEUTUNG

$\det(v,w) =$ Fläche des aufgespannten Parallelogramms

$\det(e_1,e_2) = 1 \,,\ \det(e_2,e_1) = -1$

Vorzeichen: Orientierung des Paars (v,w)

[illegible], Kleinste Fläche (Felix Klein)

$A = |v| \cdot h$

$h \ldots$ Länge der Projektion von w auf $v^\perp$

$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad n = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

$\left\langle \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\rangle = ad - bc$

ALTERNATIVBEWEIS ZU 7.3

[illegible]) $A(v,w)$ erfüllt i) - iii)

iii) klar $A(e_2, e_1) = 1$

ii) klar $A(\underset{v=w}{\longrightarrow}) = 0$

i) Linearität in v

1) wenn v,w l.a. dann ist $A(v,w) = 0$

2) $n \in \mathbb{N}$, $A(n \cdot v, w) = n \cdot A(v,w)$

3) $\tilde{v} = n \cdot v$: $A(\tilde{v}, w) = n \cdot A(\frac{\tilde{v}}{n}, w)$

$A(\frac{\tilde{v}}{n}, w) = \frac{1}{n} A(\tilde{v}, w)$

$A(n \cdot v, w) = n \cdot A(v,w)$

$A(\frac{m}{n} \cdot v, w) = \frac{m}{n} \cdot A(v,w)$

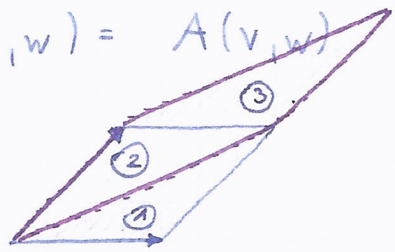
$A(-v,w) = -A(v,w)$

Stetigkeit $\Rightarrow A(\lambda v, w) = \lambda A(v,w)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$

Analog: $A(v, \lambda w) = \lambda A(v,w)$

4) Summe

$$A(v+w, w) = A(v, w)$$



$A($  $) = A($  $)$

$$A(②) + A③ = A(②) + A(①)$$

③ = Translation von ①

$$A(\lambda v + \mu w, w) = A(\lambda v + \mu w, \tfrac{1}{\mu} \mu w)$$
$$= \frac{1}{\mu} A(\lambda v + \mu w, \mu w) = \frac{1}{\mu} A(\lambda v, \mu w)$$
$$= A(\lambda v, \mu w)$$

allgemeiner Fall

v, w linear unabhängig $\to$ Basis von $\mathbb{R}^2$

$$v_1 = \lambda_1 v + \mu_1 w$$
$$v_2 = \lambda_2 v + \mu_2 w$$

$$A((\lambda_1 + \lambda_2) v + (\mu_1, \mu_2) w, w) = A((\lambda_1 + \lambda_2) v, w)$$
$$= (\lambda_1 + \lambda_2) A(v, w) = A(\lambda_1 v, w) + A(\lambda_2 v, w)$$

$$A(\lambda_1 v + \mu_1 w, w) + A(\lambda_2 v + \mu_2 w, w)$$
$$= A(v_1, w) + A(v_2, w) \implies \text{additiv}$$

7.6 DEFINITION

Sei $\dim V = n$

Eine Determinantenform ist eine Abb. $\Delta : V^n \to \mathbb{K}$

1) $\Delta(a_1, \dots a_{k-1}, \lambda a_k, a_{k+1}, \dots a_n)$
$= \lambda \cdot \Delta(a_1, \dots a_k \dots a_n) \quad \forall k \; \forall a_1 \dots a_n \in V$

2) $\Delta(a_1, \dots a_{k-1}, a_k' + a_k'', a_{k+1} \dots a_n)$
$= \Delta(a_1, \dots a_{k-1}, a_k', a_{k+1}, \dots a_n) + \Delta(a_1, \dots a_{k-1}, a_k'', a_{k+1}, \dots a_n)$
$\forall k \; \forall a_1 \dots a_n \in V$

1)+ 2) → multilinear, d.h. linear in a_k, wenn $a_1, \dots a_{k-1}, a_{k+1}, \dots a_n$ fixiert werden

3) $\Delta(a_1, \dots a_n) = 0$ wenn $\exists k \neq l : a_k = a_l$

Wenn $\Delta \not\equiv 0$, dann heißt Δ nichttrivial

7.7 SATZ

$\dim V = n$, $\Delta : V^n \to \mathbb{K}$ Determinantenform

$\Rightarrow$ 4) $\Delta(a_1, \dots a_{j-1}, a_i + \lambda a_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$

$= \Delta(a_1, \dots a_j \dots a_n)$ $(\forall \lambda \in \mathbb{K}) \forall i \neq j$

↪ Addition von λa_j zu a_i ändert ~~det~~ Δ nicht

5) $\Delta(a_1, \dots a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \dots a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots a_n)$

$= -\Delta(a_1, \dots a_j \dots a_i \dots a_n)$

↪ Vertauschen von a_i mit a_j dreht Vorzeichen um

BEWEIS

4) $\Delta(a_1, \dots a_i + \lambda a_j, \dots a_n)$

$= \Delta(a_1, \dots a_i \dots a_j \dots a_n) + \lambda \cdot \Delta(a_1, \dots a_j \dots a_j \dots a_n)$

↪ a_j kommt 2 mal vor, einmal an i-ter, einmal an j-ter Stelle $\Rightarrow = 0$

$= \Delta(a_1, \dots a_i \dots a_j \dots a_n)$

5) $0 = \Delta(a_1 \dots a_{i-1}, a_i + a_j, a_{i+1} \dots a_{j-1}, a_i + a_j \dots a_n)$

$= \Delta(a_1 \dots a_{i-1}, a_i, \dots a_{j-1}, a_i, \dots a_n)$

$+ \Delta(a_1 \dots a_{i-1}\, a_i \dots a_{j-1}, a_j \dots a_n)$

$+ \Delta(a_1 \dots a_{i-1}\, a_j \dots a_{j-1}, a_i \dots a_n)$

$+ \Delta(a_1 \dots a_{i-1}, a_j \dots a_{j-1}, a_j \dots a_n$

$= \Delta(a_1 \dots a_i \dots a_j \dots a_n) + \Delta(a_1 \dots a_j \dots a_i \dots a_n)$ □