XIII EIGENWERTABSCHÄTZUNGEN

13.1 DEFINITION

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

Dann heißt $\{\underset{x^*Ax}{\langle Ax, x\rangle} \mid \underset{\|x\|=1}{x \in \mathbb{C}^n} \} = W(A)$

numerischer Wertebereich von A

$w(A) = \sup\{|z| \mid z \in W(A)\} = \sup\limits_{\|x\|=1} (\langle Ax, x\rangle)$

heißt numerischer Radius von A

13.2 LEMMA

$\operatorname{spec}(A) \subseteq W(A)$

BEWEIS

Sei $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$ mit EV x, $\|x\|=1$

$\Rightarrow \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2 = \lambda \in W(A)$

13.3 SATZ VON TOEPLITZ – HAUSDORFF

$W(A)$ ist konvex

Ü $\rightarrow$ A normal $\Rightarrow W(A) = \operatorname{co}(\operatorname{spec}(A))$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \,\middle|\, 0 \le \alpha_i \le 1, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

13.4 SATZ (Rayleigh - Ritz)

J. W. Strutt 3. Baron von Rayleigh 1842 - 1919

Walter Ritz 1878 - 1909

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ selbstadjungiert mit EW $\lambda_1 \le \lambda_2 \ldots \le \lambda_n$

Dann ist $\lambda_1 = \min\{\langle Ax, x\rangle \mid \|x\|=1\}$

$= \min W(A) = \min \left\{ \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} \,\middle|\, x \neq 0 \right\}$

$\lambda_n = \max\{\langle Ax, x\rangle \mid \|x\|=1\} = \max W(A)$

$= \max \left\{ \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} \,\middle|\, x \neq 0 \right\}$

$\frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$ heißt Rayleigh - Quotient

BEWEIS

$$\frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} = \left\langle A\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle$$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle = \sup_{x\neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2}$$

$$\overset{13.2}{\Longrightarrow} \lambda_n \in W(A) \Rightarrow \lambda_n \leq \sup W(A)$$

$$\lambda_1 \in W(A) \Rightarrow \inf W(A) \leq \lambda_1$$

Sei $u_1 \dots u_n$ ONB aus Eigenvektoren

Sei $x \in \mathbb{C}^n$ mit $\|x\| = 1$

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 1$$

$$\langle Ax, x\rangle = \left\langle A \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i u_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \lambda_i \overline{\alpha_j} \underbrace{\langle u_i, u_j\rangle}_{=\delta_{ij}}$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i|^2 \geq \lambda_1 \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = \lambda_1$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i|^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = \lambda_n$$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle \leq \lambda_n$$

$$\inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle \geq \lambda_1$$

Wh: $\lambda_1 = \min_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \min_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$

$\lambda_n = \max_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \max_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$

BEWEIS

Gesucht: $\max \{x^t Ax \mid x^t x = 1\}$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\quad S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ ist kompakt

$f(x_0) = \max_{\|x\|=1} f(x) \iff f(x(t))$ wird maximal bei $t=0$

für alle Kurven $x(t)$ mit $x(t) = 0 \quad \subseteq S^{n-1}$

$\frac{d}{dt} f(x(t))\Big|_{t=0}$ wenn $x(0) = x_0$, $x(t)^t x(t) = 1$

$\frac{d}{dt} f(x(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t)) \cdot \dot{x}(t)$

$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ $\qquad \nabla f(x(t))^t \dot{x}(t) \overset{!}{=} 0$

und $\frac{d}{dt} x(t)^t x(t) = 0$

$\nabla f(x)_k = \frac{\partial}{\partial x_k} x^t A x$

$= \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i,j} x_i a_{ij} x_j = \sum_j a_{kj} x_j + \sum_i x_i a_{ik}$

$= 2 \sum_j a_{kj} x_j \quad \Rightarrow \nabla f(x) = 2Ax$

$\frac{d}{dt} x(t)^t x(t) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n x_i(t)^2 = 2 \sum_{i=1}^n x_i(t) \dot{x}_i(t)$

$= 2x(t)\dot{x}(t) = 0$

für $t=0$: $\nabla f(x(t))^t \dot{x}(t)\Big|_{t=0} = 0$

$2x_0^t A\dot{x}(0)$

$2x_0^t \dot{x}(0)$ $\qquad \Rightarrow$ Tangente $\perp$ Radius

$\Rightarrow \forall v$ mit $v \perp x_0$ gilt: $x_0^t Av = 0$

$v \in x_0^\perp \Rightarrow v \in (Ax_0)^\perp \Rightarrow \underset{\dim n-1}{x_0^\perp} \subseteq \underset{\dim n-1}{(Ax_0)^\perp} \Rightarrow x_0^\perp = (Ax_0)^\perp$

$\Rightarrow \mathcal{L}(x_0) = \mathcal{L}(Ax_0) \Rightarrow \exists \lambda_i : Av_0 = \lambda_i v_0$

Die restlichen Eigenwerte?

$$\lambda_1 = \min_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\min \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i u_i , \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \rangle}{\| \sum \alpha_i u_i \|^2}$$

$u_1 \dots u_n$ ONB aus Eigenvektoren

$$\lambda_n = \max_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\max \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i u_i , \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \rangle}{\| \sum \alpha_i u_i \|^2}$$

$$\lambda_2 = \min \frac{\langle \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \lambda_i u_i , \sum_{j=2}^{n} \alpha_j u_j \rangle}{\| \sum_{i=2}^{n} \alpha_i u_i \|^2} = \min_{x \in u_1^{\perp} \setminus \{0\}} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

$$\lambda_1 = \min \left\{ \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i x_i , \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \rangle \,\middle|\, \sum |\alpha_i|^2 = 1 \right\}$$

$$\overset{\|}{\sum_{i=1}^{n}} \lambda_i |\alpha_i|^2 \geq \lambda_1 \sum |\alpha_i|^2 = \lambda_1$$

13.5 FOLGERUNG

$$\lambda_k = \min_{\substack{x \in \{u_1 \dots u_{k-1}\}^{\perp} \\ \|x\| = 1}} \langle Ax, x\rangle = \min_{x \in \{u_1 \dots u_{k-1}\}^{\perp} \setminus \{0\}} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

bzw

$$\lambda_k = \max_{\substack{x \in \{u_{k+1} \dots u_n\} \\ \|x\| = 1}} \langle Ax, x\rangle = \max_{x \in \{u_{k+1} \dots u_n\} \setminus \{0\}} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

13.6 MIN-MAX-PRINZIP von COURANT - FISCHER - WEGEL

1888-1972 1875-1954 1885-1955

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ selbstadjungiert

$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ Eigenwerte

i) $$\lambda_k = \max_{\substack{W \subseteq V \\ \dim W = k-1}} \min_{x \in W^{\perp} \setminus \{0\}} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

ii) $$\lambda_{n+1-k} = \min_{\substack{W \subseteq V \\ \dim W = k-1}} \max_{x \in W^{\perp} \setminus \{0\}} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

BEWEIS

i) Für $W \leq V$ Unterraum

$$m_A(W) = \min \left\{ \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \,\middle|\, x \in W^\perp \setminus \{0\} \right\}$$

für $w_i \in V$ $\quad m_A(w_1 \dots w_k) = m_A(\mathcal{L}(w_1 \dots w_k))$

wenn $u_1 \dots u_n$ ONB aus EV

$$\overset{13.5}{\Longrightarrow} \lambda_k = m_A(u_1 \dots u_{k-1}) \leq \max_{\substack{W \leq V \\ \dim W = k-1}} m_A(W)$$

Es bleibt zz:

$(\forall\, W \leq V, \dim W = k-1): m_A(W) \leq \lambda_k$

Sei $W \leq V$ mit $\dim W = k-1$

$\Rightarrow \dim W^\perp = n-k+1$

$\Rightarrow W^\perp \cap \mathcal{L}(u_1 \dots u_k) \neq \{0\}$ weil $\dim W^\perp + \dim \mathcal{L}(u_1 \dots u_k) = n+1$

Sei $v \in W^\perp \cap \mathcal{L}(u_1 \dots u_k)$

$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$ mit $\|v\| = 1$, $(\sum_i |\alpha_i|^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\langle Av, v\rangle = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 \lambda_i \leq \lambda_k \sum |\alpha_i|^2 = \lambda_k$$

$$\Rightarrow m_A(W) \leq \langle Av, v\rangle = \lambda_k$$

ii) Die EW von $-A$ sind $-\lambda_n \leq -\lambda_{n-1} \leq \dots \leq -\lambda_1$

$\mu_1 = -\lambda_n, \mu_2 = -\lambda_{n-1} \dots \mu_n = -\lambda_1$

$$\mu_k = -\lambda_{n+1-k} = \max_{\dim W = k-1} m_{-A}(W)$$

$$= \max_{\dim W = k-1} \min \left\{ \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \,\middle|\, x \in W^\perp \setminus \{0\} \right\}$$

$$= \max_{\dim W = k-1} - \max \left\{ \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \,\middle|\, x \in W^\perp \setminus \{0\} \right\}$$

$$= -\min_{\dim W = k-1} \max \left\{ \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \,\middle|\, x \in W^\perp \setminus \{0\} \right\}$$

13.7 KOROLLAR (SCHACHTELUNGSSATZ VON CAUCHY)

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ selbstadjungiert

$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$

Sei $B = [a_{ij}]_{ij=1\ldots n-1}$ die obere $n-1 \times n-1$ Teilmatrix

mit EW $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_{n-1}$

Dann gilt

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \lambda_{n-1} \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n$$

Allgemein:

Sei P Orthogonalprojektion auf Unterraum der Dimension $n-1$

Dann sind die Eigenwerte der komprimierten Matrix $B = PAP$

mit den Eigenwerten von A wie oben verschachtelt

BEWEIS

Der allg. Fall folgt aus dem speziellen durch Basiswechsel

$$\text{Sei } A = \begin{bmatrix} B & b \\ b^* & \gamma \end{bmatrix}$$

Sei $w_1 \ldots w_{n-1}$ ONB aus EV von B

$B w_i = \mu_i w_i$

$u_i = \begin{pmatrix} w_i \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \quad i = 1 \ldots n-1 \qquad u_n =: \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$u_1 \ldots u_n$ ist ONB von $\mathbb{C}^n$

$W_k := \mathcal{L}(u_1 \ldots u_{k-1}, u_n) \Rightarrow \dim W_k = k$

$$\lambda_{k+1} = \max_{\dim W = k} \min_{x \in W^\perp \setminus \{0\}} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \geq \min_{x \in W_k^\perp \setminus \{0\}} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

$$x \in W_k^\perp \setminus \{0\} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \ y \in \{w_1 \ldots w_{k-1}\}^\perp$$

$$\langle Ax, x\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} B & b \\ b^* & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = (y^* \ 0) \begin{bmatrix} B & b \\ b^* & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = y^* B y$$

$$\langle x, x\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle y, y\rangle$$

$$\Rightarrow \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\langle By, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$$

$$\lambda_{k+1} \geq \min_{y \in \{w_1 \dots w_{k-1}\}^\perp \setminus \{0\}} \frac{\langle By, y\rangle}{\langle y, y\rangle} = \mu_k$$

umgekehrt sind die EW von $-A: \underbrace{-\lambda_n}_{\tilde\lambda_1} \leq \underbrace{-\lambda_{n-1}}_{\tilde\lambda_n} \leq \dots \leq \underbrace{-\lambda_1}_{\tilde\lambda_n}$

$-B: \underbrace{-\mu_{n-1}}_{\tilde\mu_1} \leq \dots \leq \underbrace{-\mu_1}_{\tilde\mu_{n-1}}$

$$\tilde\lambda_i = -\lambda_{n+1-i},$$

$$\tilde\mu_i = -\mu_{n-i}$$

Schritt 1 $\Rightarrow \tilde\lambda_{k+1} \geq \tilde\mu_k \Leftrightarrow \underbrace{-\lambda_{n+1-(k-1)}}_{-\lambda_{n-k}} \geq -\mu_{n-k}$

$\Rightarrow \lambda_{n-k} \leq \mu_{n-k} \quad \forall k$

13.8 KOROLLAR (H. WEYL)

Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ selbstadjungiert

$$\lambda_k(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_k(A+B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(B)$$

Perturbationstheorie

BEWEIS

$$\forall x \neq 0 \quad \lambda_1(B) \leq \frac{\langle Bx, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \leq \lambda_n(B)$$

$$\frac{\langle (A+B)x, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

$$\frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} + \lambda_1(B) \leq \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} + \frac{\langle Bx, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \leq \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} + \lambda_n(B)$$

$$\lambda_k(A+B) = \max_{\dim W = k-1} \min_{x \in W} \frac{\langle (A+B)x, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

$$\lambda_1(B) + \max \min \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \leq \lambda_n(B) + \max\min \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

$$\lambda_1(B) + \lambda_k(A) \leq \lambda_n(B) + \lambda_k(A)$$

13.9 FOLGERUNG

Wenn $B \geq 0 \Rightarrow \lambda_1(B) \geq 0$

$\Rightarrow \lambda_n(A) \leq \lambda_k(A+B) \quad \forall k$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ddots & \text{klein} \\ \text{klein} & \ddots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Wenn a_{ij} für $i \neq j$ klein ist, dann sind die EW ungefähr a_{ii}

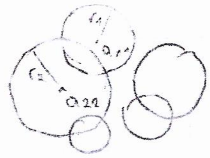
13.10 SATZ von GERŠGORIN S. A. Geršgorin 1901 - 1933

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

Sei: $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$

Dann ist $\operatorname{spec}(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq r_i\}$

Geršgorin-Kreise



BEWEIS

Sei: $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$, $x \in V$ mit $Ax = \lambda x$

wähle x so, dass $\|x\|_\infty = \max |x_i| = 1$

$\Rightarrow \forall j: |x_j| \leq 1$ und $\exists i: |x_i| = 1$

Für dieses i: $(Ax)_i = \lambda x_i$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j = (\lambda - a_{ii}) x_j$$

$$|\lambda - a_{ii}| = |\lambda - a_{ii}||x_i| = \left|\sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}} a_{ij} x_j\right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| = r_i$$

13.11 BEMERKUNG zur numerischen Bestimmung der Eigenwerte

Idee: gegeben A

Wähle x_0 mit $\|x_0\| = 1$

$$w_{k+1} = Ax_k$$

$$x_{k+1} = \frac{w_{k+1}}{\|w_{k+1}\|}$$

→ Wohin konvergiert das?

Annahme: A ist diagonalisierbar

$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$

$$x_k = \frac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|}$$

Sei: $v_1 \ldots v_n$ Eigenbasis

$x_0 = d_1 v_1 + \ldots + d_n v_n$

$$\frac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|} = \frac{\alpha_1 \lambda_1^k v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k v_n}{\|\alpha_1 \lambda_1^k v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k v_n\|}$$

$$= \frac{\alpha_1 \lambda_1^k}{|\alpha_1 \lambda_1^k|} \frac{v_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k v_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k v_n}{\|v_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k v_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k v_n\|}$$

$\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$ $\qquad \Big\downarrow k \to \infty$

$$\approx \frac{\alpha_1 \lambda_1^k}{|\alpha_1 \lambda_1^k|} \frac{v}{\|v\|} + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)$$

$$x_k^* A x_k \underset{k\to\infty}{\approx} \lambda_1$$

XIV MATRIXNORMEN

Norm: $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$

N1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$

$\|x\| = 0 \iff x = 0$

N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in V$

N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$

Beispiele:

$\|x\|_1 = \sum |x_i|$

$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

$\|x\|_\infty = \max |x_i|$

14.1 DEFINITION

$(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ normierte VR

Eine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathrm{Hom}(V,W)$ heißt **verträglich** mit $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|_W$ wenn

$\forall v \in V: \forall f \in \mathrm{Hom}(V,W): \|f(v)\|_W \leq \|f\| \cdot \|v\|_V$

14.2 BEISPIEL

Norm auf $\mathbb{C}^{m \times n}$

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Frobenius-Norm ... euklidische Norm auf $\mathbb{C}^{m \times n}$

oder $\|A\| = \sum_{i,j} |a_{ij}|$ $\rightarrow$ uninteressant

Ist $\|A\|_F$ verträglich mit $\| \|_2$ auf $\mathbb{C}^m$ und $\mathbb{C}^n$

$v \in \mathbb{C}^n$ $\quad \|Av\|_2 \overset{?}{\leq} \|A\|_F \cdot \|v\|_2$

$$\|Av\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} |(Av)_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{i=1}^{m} \underbrace{\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j\Big|^2}_{\text{für fixes } i \;\rightarrow\; \text{C.-B.-S.}}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\sum_{j=1}^{n} |v_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \sum_{j=1}^{n} |v_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} |v_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|A\|_F \cdot \|v\|_2$$

Wir suchen die "kleinste" verträgliche Norm

$\|A\|_{\tilde{F}} := 2\|A\|_F$ ist auch verträglich

14.3 LEMMA & DEFINITION

$(V, \| \|_V), (W, \|.\|_W)$ normierte Räume

$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$

Dann definiert $\|f\|_{V,W} := \inf \{c \mid \|f(v)\|_W \leq c \, \|v\|_V \; \forall v \in V\}$ eine Norm

gesucht: $c = c(f)$

sodass $\forall v \in V$: $\dfrac{\|f(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq c$

$$\Rightarrow \quad c \quad = \sup \left\{\frac{\|f(v)\|_W}{\|v\|_V} \;\middle|\; v \in V \setminus \{0\}\right\}$$

$$= \sup \{\|f(v)\|_W \mid v \in V, \|v\|_V \leq 1\}$$

$$= \sup \{\|f(v)\|_V \mid v \in V, \|v\|_V = 1\}$$

Diese Norm ist eine verträgliche Norm und heißt **induzierte Norm**

$$\sup\left\{\frac{\|f(v)\|_W}{\|v\|_V} \,\middle|\, v\in V\right\} \geq \sup\left\{\frac{\|f(v)\|_W}{\|v\|_V} \,\middle|\, \|v\|\leq 1,\ v\neq 0\right\}$$

$$\geq \sup\left\{\frac{\|f(v)\|_W}{\|v\|_V} \,\middle|\, \|v\| = 1\right\} = \sup\left\{\|f(v)\|_W \,\middle|\, \|v\|_V = 1\right\}$$

umgekehrt: $\frac{\|f(v)\|_W}{\|v\|_V} = \left\|\frac{1}{\|v\|_V} f(v)\right\|_W = \left\|f\left(\frac{v}{\|v\|_V}\right)\right\|_W \leq \sup\{\|f(v)\|_W \mid \|v\|=1\}$

N1) $\|f\|_{V,W} \geq 0$ klar

$\|f\| \neq 0 \Rightarrow \exists v: f(v)\neq 0 \Rightarrow \frac{\|f(v)\|_W}{\|v\|_V} > 0 \Rightarrow \|f\|_{V,W} > 0$

N2) $\|\lambda f\|_{V,W} = \sup\limits_{\|v\|=1} \|\lambda f(v)\|_W = |\lambda|\, \|f\|_{V,W}$

N3) $\|f+g\|_{V,W} = \sup\limits_{\|v\|=1} \|(f+g)(v)\|_W \overset{\text{Δ-Ungl. in } W}{\leq} \sup\left(\|f(v)\|_W + \|g(v)\|_W\right)$

$\leq \sup\limits_{\|v\|=1} \|f(v)\|_W + \sup\limits_{\|v\|=1} \|g(v)\|_W = \|f\|_{V,W} + \|g\|_{V,W}$

und per Def: $\|f(v)\|_W \leq \|f\|_{V,W}\cdot\|v\|_V$

$\|f(v)\|_W = \left\|f\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\right\|\cdot\|v\|_V \leq \|f\|_{V,W}\,\|v\|_V$

Ü $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$: $\|g\circ f\|_{U,W} \leq \|g\|_{V,W}\cdot\|f\|_{U,V}$

14.4 BEISPIELE

1. Die Frobeniusnorm ist nicht die induzierte Norm auf $(\mathbb{C}^n, \|\ \|_2)$

$\|id: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n\| = \sup\{\|v\|_2 \mid \|v\|_2 = 1\}$ $\quad \|id\|_F = \sqrt{n}$

2. Spektralnorm $\to$ induzierte Norm auf $\mathbb{C}^{m\times n}$

$$\|A\|_{2,2}^2 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \sup_{x\neq 0}\frac{\langle Ax, Ax\rangle}{\langle x,x\rangle}$$

$$= \sup_{x\neq 0} \underbrace{\frac{\langle A^*Ax, x\rangle}{\langle x,x\rangle}}_{\text{Rayleigh-Quotient}} = \lambda_{max}(A^*A)$$

$$\Rightarrow \|A\|_{2,2} = \sqrt{\lambda_{max}(A^*A)} = \lambda_{max}\left((A^*A)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Die Eigenwerte λ_i von A^*A heißen Singulärwerte von A

3. $\|A\|_{\infty,\infty} \quad A\in\mathbb{C}^{n\times n}$

$\|A\|_{\infty,\infty} = \sup\{\|Ax\|_\infty \mid \|x\|_\infty = 1\} = \inf\{c \mid \|Ax\|_\infty \leq c\|x\|_\infty\ \forall x\}$

$= \inf\{c \mid \max |x_i| \}$

Für $x \in \mathbb{C}^n$

$$\max_i |(Ax)_i| = \max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j|$$

$$\leq \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Beh: "="; finde x sodass $\|Ax\|_\infty = \max \sum_{j=1} |a_{ij}|$

- Wähle i_0 so, dass $\max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}|$
- Setze $\tilde{x}_j = \begin{cases} \frac{|a_{i_0 j}|}{a_{i_0 j}} & \text{wenn } a_{i_0 j} \neq 0 \\ 0 & a_{i_0 j} = 0 \end{cases}$ (es gibt immer ein j mit $a_{i_0 j} \neq 0$, Außer wenn $A = 0$

$\Rightarrow \|\tilde{x}\|_\infty = 1$

$$(A\tilde{x})_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} \frac{|a_{i_0 j}|}{a_{i_0 j}} = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}|$$

(4) Ü → $\|A\|_{1,1} = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

Wie hängt Matrixnorm mit den Spalten zusammen

$Ax = \lambda x$

$\|Ax\| = |\lambda| \|x\|$ $\Rightarrow \|A\| \geq |\lambda|$

$\wedge|$

$\|A\| \|x\|$

14.5 DEFINITION

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$\rho(A) = \max \{ |\lambda| \mid \lambda \in \operatorname{spec}(A) \}$

heißt Spektralradius von A

14.6 LEMMA

i) Für verträgliche Matrixnormen gilt $\|A\| \geq \rho(A)$

ii) ρ ist keine Matrixnorm

Bsp: $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A}$, $\to \rho(A) = 0$

iii) $\forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $\forall \varepsilon > 0$: $\exists$ Norm auf $\mathbb{C}^n$: $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$
für die induzierte Norm

BEWEIS

iii) Jordansche Normalform

$\exists T$ sodass $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \eta_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \eta_n \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ $\quad \eta_i \in \{0,1\}$

$$D_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \varepsilon & & & \\ & & \varepsilon^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \varepsilon^{n-1} \end{bmatrix}$$ ist invertierbar für $\varepsilon > 0$

$$D_\varepsilon^{-1} T^{-1} A T D_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{\varepsilon} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \eta_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \eta_n \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \varepsilon & & & \\ & & \varepsilon^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \varepsilon^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \eta_1 & & & \\ & \frac{\lambda_2}{\varepsilon} & \eta_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \eta_{n-1} \\ & & & & \frac{\lambda_n}{\varepsilon^{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \varepsilon & & & \\ & & \varepsilon^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \varepsilon^{n-1} \end{bmatrix}$$

jede Zeile mal ε^{i-1}

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \eta_1\varepsilon & & & \\ & \lambda_2 & \eta_2\varepsilon & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \eta_{n-1}\varepsilon \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Vektorraum: $\|x\|_\varepsilon = \|D_\varepsilon^{-1} T^{-1} x\|_\infty$ ist eine Norm auf $\mathbb{C}^n$

$\|A\|_\varepsilon = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\varepsilon}{\|x\|_\varepsilon}$ ist verträgliche Matrixnorm

$$\|A\|_\varepsilon = \sup_{x \neq 0} \frac{\|D_\varepsilon^{-1} T^{-1} A x\|_\infty}{\|D_\varepsilon^{-1} T^{-1} x\|_\infty} = \sup_{y \neq 0} \frac{\|D_\varepsilon^{-1} T^{-1} A T D_\varepsilon y\|_\infty}{\|y\|_\infty}$$

Sei $x = TD_\varepsilon y$

$$= \|D_\varepsilon^{-1} T^{-1} A T D_\varepsilon\|_{\infty,\infty}$$

$$= \max_i \sum_j |(D_\varepsilon^{-1} T^{-1} A T D_\varepsilon)_{ij}|$$

$$= \max_i |\lambda_i| + \varepsilon|\eta_i| \leq \rho(A) + \varepsilon$$

$$\rho(A) = \inf_{S \text{ regulär}} \|S^{-1} A S\|_{\infty,\infty}$$

14.7 BEMERKUNG

$\rho(A^k) = \rho(A)^k$

$\Rightarrow \rho(A) = \rho(A^k)^{\frac{1}{k}} \leq \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$ für jede Matrixnorm

Satz von Gelfand:

$$\rho(A) = \inf_k \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$$

14.8 LEMMA

i) $\|A\|_{2,2} = \rho(A^*A)^{\frac{1}{2}}$

ii) Wenn A normal ist dann ist $\|A\|_{2,2} = \rho(A)$

ACHTUNG: $\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B)$ ist <u>NICHT</u> erfüllt

BEWEIS

ii) Beh. für normale Matrizen

$\operatorname{spec} A^*A = \{|\lambda|^2 \mid \lambda \in \operatorname{spec}(A)\}$ $\qquad$ $\operatorname{spec} p(A) = p(\operatorname{spec}(A))$

$\ker(\lambda - A) = \ker(\bar{\lambda} - A^*)$

Sei $x \in V$ zu λ

$Ax = \lambda x \Rightarrow A^*x = \bar{\lambda}x$

$\Rightarrow A^*Ax = A^*\lambda x = \lambda\bar{\lambda}x = |\lambda|^2 x$

$\Rightarrow |\lambda|^2 \in \operatorname{spec}(A^*A)$

Das liefert n Eigenwerte und n Eigenvektoren für A^*A

$\rightarrow$ das sind alle

$$\|A\|_{2,2} = (\max_i \lambda_i(A^*A))^{\frac{1}{2}} = (\max_i |\lambda_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \max_i |\lambda_i| = \rho(A)$$

14.9 BEMERKUNG

Wenn $\dim V = \infty$ dann kann $\rho(f) = \infty$ sein

Bsp: $V = C^\infty[0,1]$

$\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$ $\qquad$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$

$\Rightarrow \rho\left(\frac{d}{dx}\right) = \infty$

14.10 KOROLLAR

Für verträgliche Normen gilt

Wenn $\|A\| < 1$ dann ist $I - A$ invertierbar

und $\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$ Carl Neumann 1832 - 1925

und $(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ $\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$

$\|A^k\| \leq \|A\|^k$

$\|(I-A)^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| = \frac{1}{1-\|A\|^k}$

Wh. zu Matrixnormen

Norm: $\|.\|: Hom(V,W) \to \mathbb{R}_0^+$

verträglich mit $\| \|_V, \| \|_W$ wenn

$\|f(v)\|_W \leq \|f\| \|v\|_V \quad \forall v \in V$

Bsp: euklidische oder Frobeniusnorm

$\|A\|_F = \left(\sum_{ij} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{tr(A^*A)}$

Eine induzierte Norm ist verträglich, wenn

$\|f\|_{V,W} = \sup_{\|v\|_V = 1} \|f(v)\|_W$

Bsp (für induzierte Norm)

① $\|A\|_{2,2} = \max_{\|v\|_2 = 1} \|Av\|_2 = \max \frac{\langle A^*Av, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$ Spektralnorm

② $\|A\|_{\infty,\infty} = \max_{\|v\|_\infty = 1} \|Av\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ Spaltensummennorm

③ $\|A\|_{1,1} = \max_{\|v\|_1 = 1} \|Av\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$ Zeilensummennorm

Induzierte Normen sind submultiplikativ

$f: V \to W \quad g: U \to V$

$\Rightarrow \|f \circ g\| \leq \|f\| \|g\|$

14.10: für induzierte Normen gilt $\|A\| < 1 \Rightarrow I - A$ regulär

und $\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$

$\|(I-A)^{-1}\| = \|\sum_{k=0}^{\infty} A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k \overset{\|A\|<1}{=} \frac{1}{1-\|A\|^k}$

14.11 KOROLLAR

Wenn A invertierbar ist und $\|B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ $\Leftrightarrow$ $\|B\|\|A^{-1}\| < 1$

Dann ist $A+B$ invertierbar und $\|A+B\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\|B\|}$

BEWEIS

$A+B = A(I + A^{-1}B)$ und $\|A^{-1}B\| \leq \|A^{-1}\|\|B\| < 1$

$\Rightarrow$ $A+B$ invertierbar und

$$\|(A+B)^{-1}\| = \|(I+A^{-1}B)^{-1} A^{-1}\| \leq \|(I+A^{-1}B)^{-1}\|\|A^{-1}\|$$

$$\leq \frac{1}{1-\|A^{-1}B\|}\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A^{-1}\|\|B\|}\|A\|^{-1}$$

ANWENDUNG: Sensitivität linearer Gleichungssysteme

$Ax = b$, A regulär, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$\tilde{b} = b + \Delta b$ $\qquad$ Δb ... Störung der rechten Seite

$A\tilde{x} = \tilde{b}$

$\tilde{x} = x + \Delta x$ $\qquad$ Δx ... Fehler im Ergebnis

BEISPIEL

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.001 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.001 \end{pmatrix}$$

$Ax = b$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.001 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0.001 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A\tilde{x} = \tilde{b}$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.001 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.001 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1.001 & 0.001 \end{array}\right) \rightarrow \tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

14.12 SATZ

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ regulär, $\|\ \|$ verträgliche Norm

Sei x die eindeutige Lösung des Systems $Ax = b$

$\tilde{x}$ die eindeutige Lösung des Systems $A\tilde{x} = \tilde{b}$

wobei $\tilde{x} = x + \Delta x$, $\tilde{b} = b + \Delta b$. Dann gilt für den relativen Fehler

$$\boxed{\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}}$$