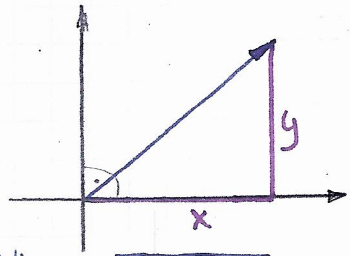
VIII INNERE PRODUKTE

1637 Descartes "La Geométrie"

x, y $\quad$ a, b, c



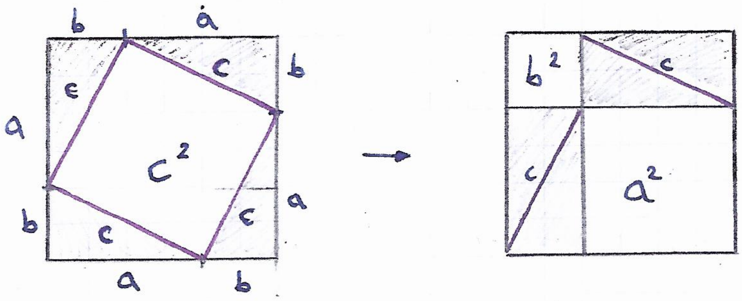
$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

8.1 DEFINITION

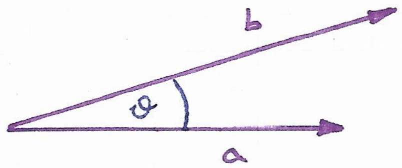
$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

... Länge eines Vektors im $\mathbb{R}^3 / \mathbb{R}^2$

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$



$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$$



Skalarprodukt $\langle a, b \rangle = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos \vartheta$

$$\cos \vartheta = \cos(2\pi - \vartheta)$$

8.2 PROPOSITION

i) $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$

ii) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ → Dreiecksungleichung

iii) $\langle a, a \rangle = \|a\|^2 \geq 0$

iv) $\langle a, a \rangle = 0 \iff a = 0$

v) $\langle a, b \rangle = 0 \iff a = 0 \lor b = 0 \lor a \perp b$

$\langle a, b \rangle > 0 \iff$ spitzer Winkel

$\langle a, b \rangle < 0 \iff$ stumpfer Winkel

8.3 SATZ

i) $\langle a,b \rangle = \langle b,a \rangle$

ii) $\langle \lambda a, b \rangle = \lambda \langle a,b \rangle$

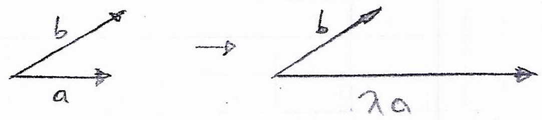
iii) $\langle a+b, c \rangle = \langle a,b \rangle + \langle b,c \rangle$

$\Big\}$ bilinear

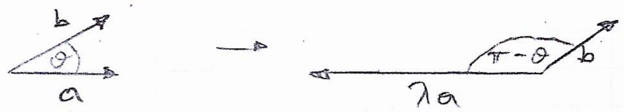
BEWEIS

i) klar

ii) $\lambda > 0 \Rightarrow$ klar



$\lambda < 0$



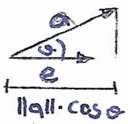
$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$\langle \lambda a, b \rangle = |\lambda| \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos(\pi - \theta)$

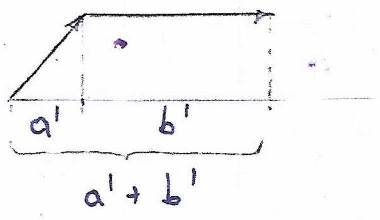
$= -|\lambda| \cdot \|a\| \, \|b\| \cos\theta = \lambda \cdot \langle a,b \rangle$

iii) Sei $b = e$ $\quad \|e\| = 1$

$\langle a, e \rangle = \|a\| \cdot \cos\theta$



... Länge der Projektion auf die Gerade mit Richtung e



$\langle a+b, c \rangle = \|c\| \left\langle a+b, \frac{c}{\|c\|} \right\rangle = \|c\| \left(\left\langle a, \frac{c}{\|c\|} \right\rangle + \left\langle b, \frac{c}{\|c\|} \right\rangle \right)$

$= \langle a,c \rangle + \langle b,c \rangle$

8.4 SATZ

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$\langle a,b \rangle = \langle a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

linear in a

$= a_1 \langle e_1, b \rangle + a_2 \langle e_2, b \rangle + a_3 \langle e_3, b \rangle$

$\langle e_i, b \rangle = \langle e_i, b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 \rangle$

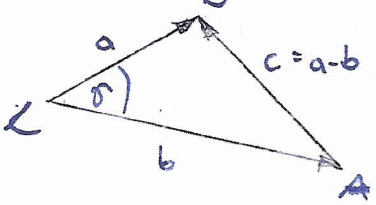
linear in b

$= b_1 \langle e_i, e_1\rangle + b_2 \langle e_i, e_2\rangle + b_3 \langle e_i, e_3\rangle$

$= b_1 \delta_{i1} + b_2 \delta_{i2} + b_3 \delta_{i3} = b_i$ denn $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$

8.5 BEISPIEL

Kosinussatz



$a^2 + b^2 = c^2 + 2ab \cdot \cos\gamma$

$\|c\|^2 = \langle a-b, a-b\rangle = \langle a,a\rangle - \langle a,b\rangle - \langle b,a\rangle + \langle b,b\rangle$

$= \|a\|^2 - 2\|a\|\|b\| \cos\gamma + \|b\|^2$

Satz von THALES

$\|a-b\| \|a+b\| \cdot \cos\vartheta = \langle a-b, -a-b\rangle$

$= -\langle a-b, a+b\rangle = -\langle a,a\rangle - \langle b,a\rangle + \langle a,b\rangle - \langle b,b\rangle$

$= -(\|a^2\| - \|b\|^2) = 0 \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{2}$

8.6 WIE FINDET MAN EINEN NORMALVEKTOR

$\vec{n} = \binom{a_2}{-a_1}$

$\left\langle \binom{a_1}{a_2}, \binom{a_2}{-a_1} \right\rangle = a_1 a_2 - a_1 a_2 = 0$

8.7 DEFINITION

Äußeres Produkt / Kreuzprodukt / Vektorprodukt

nur im $\mathbb{R}^3$

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann sei $a \times b$ der Vektor mit den Eigenschaften

1) $\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin\vartheta$ ... Fläche des Parallelogramms

$\|b\| \cdot \sin\vartheta$ ... Höhe des Parallelogramms

2) $a \times b \perp a, b$

d.h. $\langle a \times b, a\rangle = 0$ und $\langle a \times b, b\rangle = 0$

) $a, b, a \times b$ sind rechtsdrehend

$a \times b = 0 \iff a = 0 \vee b = 0 \vee a, b$ linear abhängig

8.8 SATZ

i) $b \times a = -a \times b$
(Schraube geht in andere Richtung

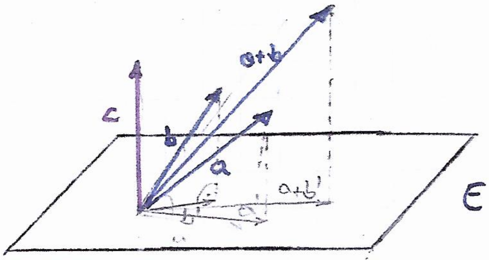
ii) $(\lambda a) \times b = \lambda (a \times b) = a \times (\lambda b)$

iii) $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$

$\Big\}$ bilinear von $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

BEWEIS

iii



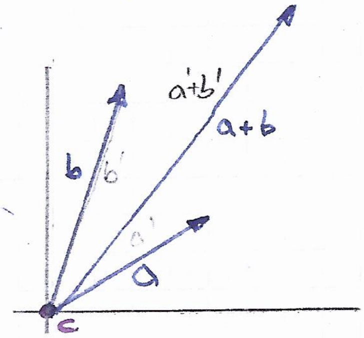
$E = c^\perp$ ... Ebene senkrecht auf c

$a \times c,\ b \times c,\ (a+b) \times c \in E$

Seien $a', b', (a'+b')$ die Projektionen von

$a, b, a+b$ in die Ebene

von oben gesehen



1) $(a+b)' = a' + b'$

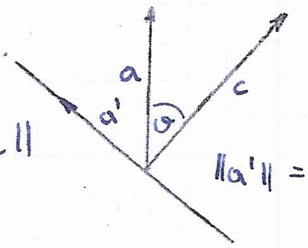
Projektion der Summe = Summe der Projektionen

2) $a \times c = a' \times c$

$\|a' \times c\| = \|a'\| \cdot \|c\|$

$\|a \times c\| + \|a\| \|c\| \sin\theta = \|a'\| \|c\|$

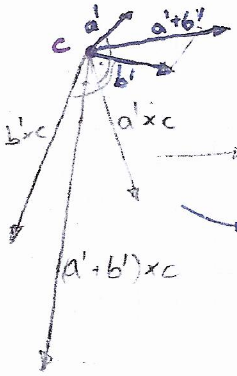
... haben die gleiche Richtung



$\|a'\| = \|a\| \cdot \sin\theta$

3) $(a'+b) \times c \overset{\text{linear}}{=} a' \times c + b' \times c$

von oben:



$\longrightarrow$ $\|a' \times c\| = \|a'\| \|c\|$

$\longrightarrow$ um $\frac{\pi}{2}$ gedreht, mit Faktor $\|c\|$ skaliert

$$(a+b)\times c \overset{2)}{=} (a+b)'\times c \overset{1)}{=} (a'+b')\times c$$
$$\overset{3)}{=} a'\times c + b'\times c \overset{2)}{=} a\times c + b\times c$$

8.9 FOLGERUNG

Das Kreuzprodukt ist eine Abbildung $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit den Eigenschaften

1. bilinear
2. antisymmetrisch
3. rechtsdrehend ("chiral")

$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2$

8.10 KOROLLAR

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

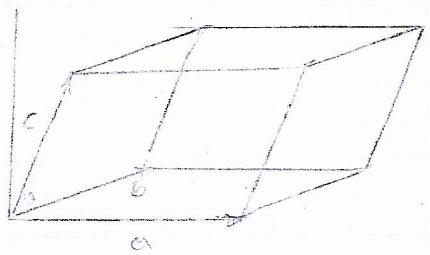
$$\overset{\text{Laplace}}{"="} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & e_3 \end{vmatrix}$$

BEWEIS

$$(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \times (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3)$$
$$= a_1 \cancel{b_1 e_1 \times e_1} + a_1 b_2 e_1 \times e_2 + a_1 b_3 e_1 \times e_3$$
$$+ a_2 b_1 e_2 \times e_1 + a_2 \cancel{b_2 e_2 \times e_2} + a_2 b_3 e_2 \times e_3$$
$$+ a_3 b_1 e_3 \times e_1 + a_3 b_2 e_3 \times e_2 + a_3 \cancel{b_3 e_3 \times e_3}$$
$$= a_1 b_2 e_3 + a_1 b_3 (-e_2) + a_2 b_1 (-e_3) + a_2 b_3 e_1$$
$$+ a_3 b_1 e_2 + a_3 b_2 (-e_1)$$
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3$$

8.11 SATZ

Das Spatprodukt



$$\langle a \times b, c\rangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \ldots \text{Volumen des aufgespannten Spats}$$

$\|a \times b\| \ldots$ Fläche des Parallelogramms

$$\langle a \times b, c\rangle = \|a \times b\| \underbrace{\|c\| \cos\theta}_{\text{Höhe des Spats}}$$

$$\langle a \times b, c\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_3$$

Laplace nach 3. Spalte

$$= \langle c \times a, b\rangle = \langle b \times c, a\rangle$$

8.12 ANWENDUNG

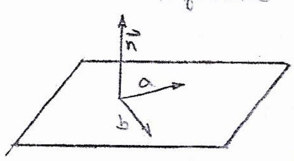
Gegeben: Ebene in Parameterdarstellung:

$$E = \{ v_0 + \lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

Gesucht: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ sodass

$$E = \{ x \mid \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \beta \}$$

implizite Darstellung



$$\langle v_0 + \lambda a + \mu b, \vec{n}\rangle \overset{!}{=} \langle v_0, \vec{n}\rangle$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = a \cdot b \qquad \beta = \langle v_0, a \times b\rangle$$

$$\Rightarrow E = \{ x \mid \langle a \times b, x\rangle = \beta \}$$

Wh. $\langle a, b\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$\rightsquigarrow$ im $\mathbb{R}^n$: $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

8.13 DEFINITION (Von nun an $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

Ein inneres Produkt auf einem Vektorraum V über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist eine Abbildung $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ mit den Eigenschaften:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{i)} & \langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle & \forall x,y,z \in V \\ \text{ii)} & \langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle & \forall x,y \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \\ \text{iii)} & \langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle} & \forall x,y \in V \end{array}\right\} \text{sesquilinear}$$

hermitesch

insbes $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$ $\forall x \in V$

Ein inneres Produkt heißt

positiv semidefinit wenn $\langle x, x\rangle \geq 0$ $\forall x$

positiv definit wenn $\langle x, x\rangle > 0$ $\forall x \neq 0$

negativ semidefinit wenn $\langle x, x\rangle \leq 0$ $\forall x$

negativ definit wenn $\langle x, x\rangle < 0$ $\forall x \neq 0$

indefinit wenn $\exists x : \langle x, x\rangle > 0 \wedge \exists y : \langle y, y\rangle < 0$

Weitere Namen:

Skalarprodukt wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Hermitesches Produkt wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Unitäres Produkt wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Quadratische Form wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Hermitesche Form wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

8.14 LEMMA

i) $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

ii) $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda} \langle x, y\rangle$ antilinear in y, linear in x line

iii) $\langle x, 0\rangle = 0$

8.15 BEISPIELE

a) $\mathbb{R}^n$: $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

b) $\mathbb{C}^n$: $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = x \cdot \overline{y}$

c) $A = [a_{ij}]_{i=1 \dots n}$

reell: $\langle x, y \rangle_A : x^t A y$

ist symmetrisch $\Leftrightarrow A = A^t$, d.h. $a_{ij} = a_{ji}$

im Komplexen: ... ist hermitesch $\Leftrightarrow a_{ij} = \overline{a_{ji}}$

dim ∞:

$\mathbb{R}^\infty \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$

$\rightarrow$ damit die Reihe konvergiert Einschränkung auf

$\ell^2 = \{(x_i) \mid \sum x_i^2 < \infty\}$ .. Hilbertraum

ℓ Lebesque

d) $\mathbb{C}^\infty : \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$

e) $V = C([a,b], \mathbb{C})$

$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx$

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

8.16 DEFINITION

Eine Norm auf einen Vektorraum V über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$

N1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \quad \wedge \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ... Homogenität

N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ Dreiecksungleichung

8.17 BEMERKUNG

Eine Norm induziert eine Metrik

$d(x, y) = \|x - y\|$

translationsinvariant

$d(x + z, y + z) = d(x, y)$

8.18 BEISPIEL

a) $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n \qquad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ ... L^1 - Norm.

$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ ... euklidische Norm

$\|x\|_\infty = \max(|x_1| \dots |x_n|)$

b) analog für $V = C[a,b]$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

8.19 SATZ

Sei $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ein positiv definites Skalarprodukt

Dann definiert $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ eine Norm auf V

BEWEIS

N1) $\langle x, x \rangle \geq 0 \Rightarrow \sqrt{}$ ist wohldefiniert in $\mathbb{R}_0^+$

$\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \overset{\text{pos def}}{\Rightarrow} x = 0$

N2) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x\rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|$

8.20 LEMMA (Cauchy - Bunjakowski - Schwartz - Ungleichung)
1789-1857 1804-1889 1843-1921

für ein positiv definites Skalarprodukt gilt die

Ungleichung $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Gleichheit $\Leftrightarrow$ x, y linear abhängig

$$\left[\begin{array}{l} \langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle \\ \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} \\ \langle x, \lambda y\rangle = \overline{\langle \lambda y, x\rangle} = \overline{\lambda \langle y, x\rangle} = \bar{\lambda}\, \overline{\langle y, x\rangle} = \bar{\lambda} \langle x, y\rangle \end{array}\right]$$

Cauchy: $\left|\sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}\right| \leq \left(\sum |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Cours d'Analyse 1815

Bunjakowski 1859:

$$\left|\int_a^b f(x)\, \overline{g(x)}\, dx\right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Schwarz 1882 abstrakt

BEWEIS: Lagrange 17?? Fall $\mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i y_j - x_j y_i)^2 = \sum_{ij} x_i^2 y_j^2 - 2\sum_{ij} x_i y_i x_j y_j + \sum_{ij} x_j^2 y_i^2$$

$$= 2\Big(\sum_i x_i^2\Big)\Big(\sum_j y_j^2\Big) - 2\Big(\sum_i x_i y_i\Big)^2$$

$$\Rightarrow \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\Big) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 + \frac{1}{2}\sum_{ij}(x_i y_j - x_j y_i)^2 \geq \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 \; ?$$

$n = 3$: $\|x\|^2 \|y\|^2 = |\langle x, y\rangle|^2 + |x \times y|^2$

ALLGEMEINER BEWEIS

Fall 1: $y = 0 \rightarrow$ trivial $\langle x, y\rangle = 0$

Fall 2: $y \neq 0$. Sei λ beliebig

$$0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, \lambda y\rangle - \langle \lambda y, x\rangle + \langle \lambda y, \lambda y\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle - \overline{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda \underbrace{\langle y, x\rangle}_{=\lambda\overline{\langle x, y\rangle}} + |\lambda|^2 \langle y, y\rangle$$

gilt für alle λ, insbesondere für $\lambda = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$

$$0 \leq \langle x, x\rangle - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\overline{\langle x, y\rangle} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle^2}\langle y, y\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle}$$

$$\Rightarrow \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle \geq |\langle x, y\rangle|^2$$

Gleichheit $\Rightarrow x - \lambda y = 0 \Rightarrow x = \lambda y \Rightarrow$ linear abhängig

Umgekehrt wenn $x = \lambda y$

$$|\langle x, y\rangle| = |\langle \lambda y, y\rangle| = |\lambda| \, \|y\|^2 = \|x\| \cdot \|y\| = \|\lambda y\| \cdot \|y\| \; \square$$

ad 8.19

N3) $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \overset{=\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, x\rangle} + \langle y, y\rangle$

$= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2$

$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$

BEMERKUNG

$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$ wobei $1 < p \leq \infty$, $\|\cdot\|_p$ ... L^p-Norm

Höldersche Ungleichung

$|\sum x_i y_i| \leq (\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}$ wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$