8.36 DEFINITION

Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt

Eine Familie $(v_i)_{i \in I} \subseteq V$ heißt

i) orthogonal wenn $\forall i \neq j : \langle v_i, v_j \rangle = 0$

ii) orthonormal wenn $\forall ij : \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

iii) Orthonormalbasis wenn orthonormal und Basis

8.37 BEISPIELE

$(e_1, \dots, e_n)$ in $\mathbb{K}^n$ ist ONB bzgl. Standardskalarprodukt

i) $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

ii) $\int_0^1 \sin 2\pi m x \quad \sin 2\pi n x \; dx = \delta_{mn} \cdot 2$

$\int \sin 2\pi n x \quad \cos 2\pi n x = 0$

$\int_0^1 \cos 2\pi m x \quad \cos 2\pi n x \; dx = \delta_{mn} \, 2$

ist ONB bzgl Standardskalarprodukt

$\{1\} \cup \left\{ \frac{\sin 2\pi n x}{\sqrt{2}} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{\cos 2\pi n x}{\sqrt{2}} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

ist orthogonal in $C[0,1]$

$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \, g(x) \, dx$

Aufgespannter Unterraum, trigonometrische Polynome

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \cos 2\pi \; nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \sin 2\pi n \, x$

8.38 SATZ

$(v_i)_{i \in I} \subseteq V \qquad v_i \neq 0$

i) $(v_i)_{i \in I}$ ist orthogonal $\Leftrightarrow \left(\frac{v_i}{\|v_i\|} \right)_{i \in I}$ ist orthonormal

ii) $(v_i)_{i \in I}$ Orthonormal $\Rightarrow (v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig

BEWEIS

i) trivial

ii) Seien $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 v_{i_1} + \dots + \lambda_k v_{i_k} = 0$; zz: $\forall \lambda_j = 0$

$0 = \langle 0, v_{i_j} \rangle = \langle \lambda_1 v_{i_1} + \dots + \lambda_k v_{i_k}, v_{i_j} \rangle$

$= \lambda_1 \langle v_{i_1}, v_{i_j} \rangle + \dots + \lambda_k \langle v_{i_k}, v_{i_j} \rangle$

$= \lambda_j \|v_{i_j}\|^2 \Rightarrow \lambda_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$

8.39 SATZ

Sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots b_n)$ eine ONB eines endlichdimensionalen Vektorraums V über $\mathbb{K}$

Seien $v, w \in V$ mit

$$\Phi_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \Phi_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

Dann gilt i) $\forall i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i = \langle v, b_i \rangle$

ii) $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_i}$

BEWEIS

i) $\langle v, w \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j, b_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{\langle b_j, b_i \rangle}_{\delta_{ji}} = \lambda_i$

ii) $\langle v, w \rangle = \Phi_{\mathcal{B}}(v)^t \underset{a_{ij} = \langle b_i, b_j \rangle}{A} \overline{\Phi_{\mathcal{B}}(w)}$

$= \Phi_{\mathcal{B}}(v)^t \overline{\Phi_{\mathcal{B}}(w)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_i}$

8.40 DEFINITION

$(V, \langle .,. \rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt, $M \subseteq V$

Dann heißt $M^{\perp} = \{ v \in V \mid \forall u \in M : \langle v, u \rangle = 0 \}$ das orthogonale Komplement von M

Für $v \in V$ sei $\overline{v} = \{v\}^{\perp}$

8.41 SATZ

$(V, \langle .,. \rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt; $M, N \subseteq V$ Unterräume

i) $M^{\perp}$ ist ein Unterraum

ii) $M \subseteq N \Rightarrow N^{\perp} \subseteq M^{\perp}$

$(M_1 \cup M_2)^{\perp} = M_1^{\perp} \cap M_2^{\perp}$

iii) $\{0\}^{\perp} = V$

iv) $V^{\perp} = \{0\}$

v) $M \cap M^{\perp} \subseteq \{0\}$

vi) $M^{\perp} = \mathcal{L}(M)^{\perp}$

vii) $M \subseteq (M^{\perp})^{\perp} = M^{\perp\perp}$

Beweis

i) $u^\perp = \{v\in V \mid \langle v,u\rangle = 0\} = \{v \mid T_u(v) = 0\} = \ker T_u$ Unterraum

$$T_u : V \to \mathbb{K},\quad v \mapsto \langle v,u\rangle \quad \text{ist linear}$$

$$M^\perp = \bigcap_{u\in M} u^\perp \Rightarrow M^\perp \text{ ist Unterraum}$$

↳ Unterräume

ii) $N^\perp = \bigcap_{n\in N} u^\perp \subseteq \bigcap_{u\in M} u^\perp = M^\perp$

$$(M_1\cup M_2)^\perp = \bigcap_{u\in M_1\cup M_2} u^\perp = \bigcap_{u\in M_1} u^\perp \cap \bigcap_{v\in M_2} u^\perp = M_1^\perp \cap M_2^\perp$$

iii) trivial

iv) $V^\perp = V\cap V^\perp = \{0\}$

v) $v \in M\cap M^\perp \Rightarrow \langle v,v\rangle = 0 \Rightarrow v = 0$

vi) $\mathcal{L}(M)^\perp \subseteq M^\perp$ wegen ii)

noch zz: $M^\perp \subseteq \mathcal{L}(M)^\perp$

Sei $v\in M^\perp$, $u \in \mathcal{L}(M)$

$\Rightarrow (\exists u_1\dots u_n \in M)(\exists \lambda_1\dots\lambda_n \in \mathbb{K}): u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$

$$\langle v,v\rangle = \langle v, \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i\rangle = \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i \underbrace{\langle v,u_i\rangle}_{=0} = 0$$

vii) Sei $u\in M$. Dann muss gelten

$$\forall u \in M^\perp: \langle v,u\rangle = 0$$
$$\shortparallel$$
$$\langle u,v\rangle = 0$$

8.42 Folgerung

Wenn $U \subseteq V$ Unterraum dann ist die Summe $U + U^\perp$ direkt

$$(U+U^\perp) \overset{vi}{=} (U\cup U^\perp)^\perp = U^\perp \cap (U^\perp)^\perp \underset{v)}{=} \{0\}$$

Beispiel

$V = \ell^2 = \{(\xi_n)_n \mid \sum_{i=1}^\infty |\xi_n|^2 < \infty\}$

$U = \mathcal{L}((e_i)_{i\in\mathbb{N}}) \neq V = \{(\xi_n)_n \mid \xi_n = 0$ für fast alle n's$\}$

$U^\perp = \{x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \underset{\xi_i}{\langle x, e_i\rangle} = 0 \ \forall i\}$

$U = U + U^\perp \neq V$ $\quad U^\perp = \{0\}$ $\quad V = (U^\perp)^\perp \neq U$

Ü $\quad U + U^\perp = V \iff U = U^{\perp\perp}$

Ab jetzt Annahme

$V = U \dot{+} U^{\perp}$ → Projektion

jeder Vektor x hat eindeutige Zerlegung

$x = u + v$ wobei $u \in U, v \in U^{\perp}$

sodass $u \perp v$

8.44 DEFINITION

V Vektorraum

Eine Teilmenge $K \subseteq V$ heißt **konvex** wenn

$(\forall x, y \in K)(\forall \lambda \in [0,1]) : (1 - \lambda x) + \lambda y \in K$ "Konvexkombination"

8.45 BEISPIELE

i) $(V, \|\cdot\|)$ normierter Raum

Dann ist $B(0,1) = \{x \mid \|x\| < 1\}$ konvex

$x, y \in B(0,1) \quad \lambda \in [0,1]$

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| \leq (1-\lambda)\|x\| + \lambda\|y\| < (1-\lambda) + \lambda = 1$$

ii) Unterräume sind konvex

iii) Translationen und skalare Vielfache konvexer Mengen sind konvex

z.B. - Lineare Mannigfaltigkeiten

- $B(x,r)$ ist konvex

iv) $K \subseteq V$ konvex, $f : V \to W$ linear $\Rightarrow f(K)$ konvex

8.46 SATZ

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt

$K \subseteq V$ konvex $\quad x \in V, y_0 \in K$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent

i) $\forall y \in K : \|x - y_0\| \leq \|x - y\|$

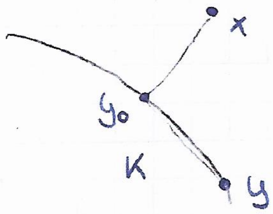
ii) $\forall y \in K : \operatorname{Re}\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0$

iii) $\forall y \in K \setminus \{y_0\} : \|x - y_0\| < \|x - y\|$

Wenn K eine lineare Mannigfaltigkeit ist, dann ist ii) äquivalent zu ii') $\forall y \in K: \langle x-y_0, y-y_0 \rangle = 0$

BEWEIS

i) $\to$ ii)



Sei: $y \in K$, $0 < \varepsilon < 1$

$\Rightarrow y^2 = (1-\varepsilon) y_0 + \varepsilon y_1 \in K$

$\Rightarrow \| x - y_0 \| \leq \| x - y_\varepsilon \|$ $\qquad y_\varepsilon = y_0 + \varepsilon (y - y_0)$

$0 \leq \| x - y_\varepsilon \|^2 - \| x - y_0 \|^2 = \| x - y_0 - \varepsilon (y - y_0) \|^2 - \| x - y_0 \|^2$

$= \| x - y_0 \|^2 + \varepsilon^2 (\| y - y_0 \|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x - y_0, y - y_0 \rangle \varepsilon - \| x - y_0 \|^2$

$= \varepsilon (\varepsilon \| y - y_0 \|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x - y_0, y - y_0 \rangle))$

$\varepsilon \to 0 \quad \Rightarrow \quad -2 \operatorname{Re} \langle x - y_0, y - y_0 \rangle \geq 0$

(Wäre $\operatorname{Re} \langle x - y_0, y - y_0 \rangle > 0 \Rightarrow y \neq y_0$

wähle $\varepsilon < \dfrac{2 \operatorname{Re} \langle x - y_0, y - y_0 \rangle}{\| y - y_0 \|} \Rightarrow \lightning$)

ii) $\to$ iii)

Sei: $y \in K \setminus \{y_0\}$

$\| x - y \|^2 = \| x - y_0 + (y - y_0) \|^2$

$= \| x - y_0 \|^2 + \| y_0 - y \|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x - y_0, y_0 - y \rangle$

$\geq \| x - y_0 \|^2 + \underbrace{\| y_0 - y \|^2}_{>0} > \| x - y_0 \|^2$

iii) $\to$ i) Übung

ii') Fall $K = U$ ist Unterraum

ii) $\forall y \in U: \operatorname{Re} \langle x - y_0, \underbrace{y - y_0}_{=: z \in U} \rangle \leq 0$

$y - y_0 \in U \Leftrightarrow y \in U$

$\Leftrightarrow \forall z \in U: \operatorname{Re} \langle x - y_0, z \rangle \leq 0$

$\Rightarrow \forall z \in U \quad \operatorname{Re} \langle x - y_0, -z \rangle \leq 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re} \langle x - y_0, z \rangle \geq 0$

$\Rightarrow \forall z \in U: \operatorname{Re} \langle x - y_0, z \rangle = 0$

$\Rightarrow \forall z \in U: \operatorname{Re} \langle x - y_0, iz \rangle = 0 \Rightarrow \forall z \in U: \operatorname{Re} (-i \langle x - y_0, z \rangle) = 0$

$\mathrm{Re}(-i(a+ib)) = b$

$\Rightarrow \forall z \in U: \mathrm{Im}\langle x - y_0, z\rangle = 0$

$\Rightarrow \forall z \in U: \langle x - y_0, z \rangle = 0 \quad \Rightarrow x - y_0 \in U^\perp$

8.47 FOLGERUNG

$(V, \|\cdot\|)$ Vektorraum mit Skalarprodukt

i) wenn $K \subseteq V$ konvex, dann hat das Optimierungsproblem

$$\begin{cases} \|x-y\| = \min! \\ y \in K \end{cases}$$ höchstens eine Lösung

ii) Wenn $U \leq V$ Unterraum dann gibt es höchstens einen Punkt $y_0 \in U$ sodass $x - y_0 \in U^\perp$

$\Rightarrow$ die Summe $U + U^\perp$ ist direkt $\Leftrightarrow U = U^{\perp\perp} \Leftarrow \dim U < \infty$

8.48 DEFINITION

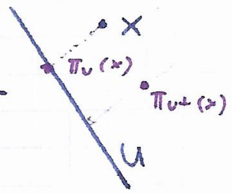
$(V, \langle .,. \rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt $\quad V = U \dotplus W$

$U \leq V$ Unterraum mit $V = U \dotplus U^\perp$. $\quad (\forall x \in V)(\exists! u \in U)(\exists! w \in W): x = u + w$

Dann heißen $\pi_U: V \to V \qquad \pi_{U^\perp}: V \to V$

sodass $\forall x \in V: \pi_U(x) \in U \wedge \pi_{U^\perp}(x) \in U^\perp$

die Orthogonalprojektionen auf U und $U^\perp$



8.49 WIEDERHOLUNG

Wir wissen aus der Theorie allgemeiner direkter Summen; $V = U \dotplus W \Leftrightarrow \forall x \; \exists!_{u \in U, w}$

i) $x \in U \Leftrightarrow \pi_U(x) = x \Leftrightarrow \pi_{U^\perp}(x) = 0$

ii) $x \in U^\perp \Leftrightarrow \pi_U(x) = 0 \Leftrightarrow \pi_{U^\perp}(x) = x$

iii) $\pi_{U^\perp} = \mathrm{id} - \pi_U$

iv) $\pi_U \circ \pi_U = \pi_U$

v) π_U ist linear

8.50 SATZ

Sei: $V = U \dot{+} U^\perp$

i) $\forall x,y \in V: \quad \langle x, \pi_U(y) \rangle = \langle \pi_U(x), y \rangle = \langle \pi_U(x), \pi_U(y) \rangle$

ii) $\forall x \in V: \quad \|\pi_U(x)\| \leq \|x\|$

und $\|\pi_U(x)\| = \|x\| \iff x \in U$

BEWEIS

i) $x = \pi_U(x) + \pi_{U^\perp}(x)$

$y = \pi_U(y) + \pi_{U^\perp}(y)$

$$\langle x, \pi_U(y) \rangle = \langle \pi_U(x) + \pi_{U^\perp}(x), \pi_U(y) \rangle$$

$$= \langle \pi_U(x), \pi_U(y) \rangle + \underbrace{\langle \underset{\in U^\perp}{\pi_{U^\perp}(x)}, \underset{\in U}{\pi_U(y)} \rangle}_{=0} = \langle \pi_U(x), \pi_U(y) \rangle$$

genauso: $\langle \pi_U(x), y \rangle = \langle \pi_U(x), \pi_U(y) \rangle$

ii) $\|x\|^2 = \|\pi_U(x) + \pi_{U^\perp}(x)\|^2 \triangleq$

$$\overset{\text{Pythagoras}}{=} \|\pi_U(x)\|^2 + \|\pi_U(y)\|^2 \geq \|\pi_U(x)\|$$

Gleichheit $\iff \pi_{U^\perp}(x) = 0 \iff x \in U$

8.51 DEFINITION

$(V, \langle.,.\rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt

$v_1, \dots v_m \in V$.

Dann heißt die Matrix

$$\mathrm{Gram}(v_1 \dots v_m) := \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \dots & \langle v_1, v_m \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \dots & \langle v_2, v_m \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle v_m, v_1 \rangle & \langle v_m, v_2 \rangle & \dots & \langle v_m, v_m \rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times m}$$

die **Gram'sche Matrix** des Tupels $(v_1 \dots v_m)$

Jørgen Petersen Gram 1850 – 1916 (19.4.)

8.52 BEMERKUNG

Wenn $V = \mathbb{R}^n$ (bzw $\mathbb{C}^n$)

dann ist $\langle v_i, v_j \rangle = v_i^t \overline{v_j}$

$\rightarrow G = V^t \overline{V}$ wobei: $V = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

Spaltenvektoren

8.53 SATZ

Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt, $v_1 \dots v_m \in V$

i) $G = \mathrm{Gram}(v_1 \dots v_m)$ ist hermitesch und positiv semidefinit und zwar ist $\xi^t G \overline{\xi} = \| \sum_{i=1}^m \xi_i v_i \|^2$

ii) $\xi \in \ker G \iff \sum_{i=1}^m \overline{\xi}_i v_i = 0$

iii) G positiv definit $\iff G$ regulär $\iff v_1 \dots v_m$ l.u.

BEWEIS

i) $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \overline{\langle v_j, v_i \rangle} = \overline{g_{ji}} \Rightarrow G$ ist hermitesch

$$\xi^t G \overline{\xi} = \sum_{i,j=1}^m \xi_i \langle v_i, v_j \rangle \overline{\xi}_j$$
$$= \langle \sum_{i=1}^m \xi_i v_i, \sum_{j=1}^m \xi_j v_j \rangle = \| \sum_{i=1}^m \xi_i v_i \|^2$$

ii) $\curvearrowright$ Sei $\xi \in \ker G$

$$G \cdot \xi = 0 \Rightarrow \overline{\xi}^t G \xi = 0$$
$$\overline{\xi}^t G \xi = \| \sum_{i=1}^n \overline{\xi}_i v_i \|^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m \overline{\xi}_i v_i = 0$$

$\curvearrowleft$ Sei $\sum_{i=1}^m \xi_i v_i = 0$

$$(G\xi)_{ij} = \sum_{j=1}^m \langle v_i, v_j \rangle \xi_j = \langle v_i, \underbrace{\sum_{j=1}^m \xi_j v_j}_{=0} \rangle = 0$$

Gilt $\forall i = \{1, \dots, m\} \Rightarrow G \cdot \xi = 0 \Rightarrow \xi \in \ker G$

iii) $G > 0 \Leftrightarrow \xi^t G \xi > 0 \quad \forall \xi \neq 0$

$\Leftrightarrow \|\sum_{i=1}^m \xi_i v_i\|^2 > 0 \quad \forall \xi \neq 0$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^m \xi_i v_i \neq 0 \quad \forall \xi \neq 0 \Leftrightarrow \ker G = \{0\} \Leftrightarrow G$ regulär

$\Leftrightarrow$ $v_1 \dots v_m$ sind linear unabhängig

8.54 SATZ

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt

$U \leq V$ Unterraum mit $\dim U < \infty$, und Basis $(u_1 \dots u_m)$

$G = \mathrm{Gram}(u_1 \dots u_m)$ pos. def. und regulär.

Dann ist für $x \in V$ die Orthogonalprojektion gegeben durch:

$$\pi_U(x) = \sum_{j=1}^n \eta_j u_j \text{, wobei } \xi = \begin{pmatrix} \langle x, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, u_m \rangle \end{pmatrix} \text{ und } \bar{\eta} = G^{-1} \bar{\xi}$$

Wir tun so als ob $u_1 \dots u_m$ ONB wäre

→ Korrektur durch Gram-Matrix

BEWEIS

Sei $u = \sum_{j=1}^m \eta_j u_j$. Es genügt zu zeigen, dass

$$x - u \in U^\perp = \underbrace{\{u_1 \dots u_m\}}_{\text{Basis von } U}^\perp$$

weil $\forall y \in U: \langle x - y_0, y - y_0 \rangle = 0$ wobei $y_0 = \pi_U(x)$ das eindeutige Element $u \in U$ ist für das $x - u \in U^\perp$

d.h. zz: $\langle u_i, u \rangle = \langle u_i, x \rangle$ für $i = 1, \dots m$

$\langle u_i, u \rangle = \langle u_i, \sum_{j=1}^m \eta_j u_j \rangle = \sum_{j=1}^m \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{= G_{ij}} \bar{\eta}$

$= (G \cdot \bar{\eta})_i = \xi_i \qquad \bar{\eta}$ löst die Gleichung $G \cdot \bar{\eta} = \bar{\xi}$

$= \langle x, u_i \rangle = \langle u_i, x \rangle$

$\Rightarrow \langle x - u, u_i \rangle = 0 \quad \forall i \in \{1 \dots m\} \Rightarrow x - u \in U^\perp$.