Nachtrag zu Kapitel V

Hom (V, W) im Spezialfall $W = \mathbb{K}$

5.24 DEFINITION

$$V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$$

heißt Dualraum des Vektorraums V

Die Elemente $v^* \in V^*$ heißen Linearformen oder lineare Funktionale.

SCHREIBWEISE

$$v^*(v) =: \langle v^*, v \rangle$$

5.25 BEISPIEL

$V = \mathbb{K}^n$

$v^* : V \to \mathbb{K}$ ist eindeutig festgelegt durch Werte $v^*(e_i) =: a_i$

$$\langle v^*, v \rangle = \langle v^*, \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i \langle v^*, e_i \rangle$$

$$v^*\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i v^*(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

5.26 SATZ

V Vektorraum über $\mathbb{K}$

i) $\dim V =: n < \infty$

$\Rightarrow \dim V^* = n$

Genauer: $(b_1 \dots b_n)$ Basis von V

Dann ist $b_k^* : b_i \mapsto \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Basis von V^* und heißt duale Basis

ii) für $v^* \in V^*$ ist $v^* = \sum_{k=1}^{n} \langle v^*, b_k \rangle b_k^*$

iii) Wenn $\dim V = \infty$ $(b_i)_{i \in I}$ Basis, dann ist

$(b_k^*)_{k \in I}$ $\langle b_k^*, b_i \rangle = \delta_{ik}$

keine Basis von V^*

BEW. Spezialfall von 5.18

i) zz: (b_k^*) linear unabhängig. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i^* = 0 \overset{!}{\Rightarrow}$ alle $\lambda_i = 0$

$$0 = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i^*, b_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{\langle b_i^*, b_k \rangle}_{= \delta_{ik}} = \lambda_k \quad \forall k$$

ii) Sei $v \in V$. zz: $\langle v^*, v \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \langle v^*, b_k \rangle b_k^*, v \rangle$

$$\langle \sum_{k=1}^{n} \langle v_k^*, b_k \rangle b_k^*, v \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle v^*, b_k \rangle \langle b_k^*, v \rangle$$

Sei $v = \sum_{i=1}^{n} v_i b_i$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle v^*, b_k \rangle \langle b_k^*, \sum_{i=1}^{n} v_i b_i \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \langle v^*, b_k \rangle \underbrace{\langle b_k^*, b_i \rangle}_{= \delta_{ki}} v_i$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle v^*, b_k \rangle v_k = \langle v^*, \sum_{k=1}^{n} v_k b_k \rangle = \langle v^*, v \rangle$$

iii) Übung: Betrachte das Funktional

$\langle v^*, b_i \rangle = 1 \Rightarrow v^* \notin \mathcal{L}((b_i)_{i \in I})$

5.27 BEMERKUNG UND DEFINITION

Die Abbildung
$$V^* \times V \to \mathbb{K}$$
$$(v^*, v) \mapsto \langle v^*, v \rangle$$

.. ist linear in v bei fixem v^*

... ist linear in v^* bei fixem v

Solche Abbildungen nennt man **bilinear**

Eine Abbildung $F: V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ heißt **multilinear** (n-linear) wenn sie linear in jeder Komponente ist, d. h.:

$$F(v_1 \ldots v_{k-1}, \lambda v_k' + \mu v_k'', v_{k+1} \ldots v_n)$$
$$= \lambda \cdot F(v_1 \ldots v_{k-1}, v_k', v_{k+1} \ldots v_n) + \mu F(v_1, \ldots v_{k-1}, v_k'', v_{k+1} \ldots v_n)$$

5.28 BEISPIEL

$V = \mathbb{K}[x]$

Basis : $\{ x^k \mid k \in \mathbb{N}_0 \}$, $\dim V = \aleph_0$

ist eindeutig festgelegt durch $a_k := \langle v^*, x^k \rangle$

$(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$

$V^* \cong \mathbb{K}[[t]]$ formale Potenzreihen

$\left(f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right)$

$= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \mid a_k \in \mathbb{K} \right\}$

$\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k + \mu \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) t^k$

$\langle \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ ist wohldefiniert

$\longrightarrow \mathbb{K}[x]^* \cong \mathbb{K}[[t]]$

Übung: $\dim V^* \geq |\mathbb{R}| > \dim V$ wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

5.29 BEISPIEL

$C[0,1]$ stetige Funktionen

$$\begin{aligned} \delta_x : C[0,1] &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned} \qquad x \in [0,1]$$

$(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$

$\langle \delta_x, f \rangle = f(x)$

$I(f) = \int_0^1 f(x)\, dx$ ist linear

$\langle I_g, f \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx \qquad g \in C[0,1]$ fix

$\Rightarrow I_g \in C[0,1]^*$

$\langle I_g, \lambda f_1 + \mu f_2 \rangle = \int_0^1 (\lambda f_1(x) + \mu f_2(x))$

$= \lambda \int_0^1 f(x) g(x)\, dx + \mu \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$

$\rightarrow$ geht auch für nicht stetiges g (genügt integrierbar)

Riesz (Maßtheorie), $C[0,1]$ Raum d. Maße

$\hookrightarrow$ Dirac δ-Funktion, Schwartz/S.

$V^{**} := (V^*)^* \cong V$

5.30 LEMMA (unter Vorauss. $\dim V < \infty$, (AC))

V Vektorraum

i) $v \in V \setminus \{0\} \Leftrightarrow \exists v^* \in V^* \quad \langle v^*, v \rangle \neq 0$

ii) $\forall v \in V: \quad v = 0 \Leftrightarrow \forall v^* \in V^*: \langle v^*, v \rangle = 0$

BEWEIS

Ergänzen zu einer Basis von V

Definiere $v^* \in V^*$ durch

$$\langle v^*, b \rangle = \begin{cases} 1 & b = v \\ 0 & b \neq v \end{cases} \quad \text{für } b \in B$$

5.31 SATZ

V Vektorraum

i) die Abbildung $\iota: V \to V^{**}$ =: Bidualraum

$\langle \iota(v), v^* \rangle := \langle v^*, v \rangle$

ist linear und injektiv

ii) wenn $\dim V < \infty$, dann Isomorphismus

BEWEIS

i) <u>Linearität</u>

$\iota(\lambda v + \mu w) \overset{!}{=} \lambda \iota(v) + \mu \iota(w)$

muss in jedem Punkt $v^* \in V^*$ gelten

$$\langle \iota(\lambda v + \mu w), v^* \rangle = \langle v^*, \lambda v + \mu w \rangle$$

$$= \lambda \langle v^*, v \rangle + \mu \langle v^*, w \rangle = \lambda \langle \iota(v), v^* \rangle + \mu \langle \iota(w), v^* \rangle$$

$$= \langle \lambda \iota(v) + \mu \iota(w), v^* \rangle$$

<u>injektiv</u> Sei $v \in \ker \iota$

$\langle \iota(v), v^* \rangle = 0 \quad \forall v^* \in V^*$

$\Rightarrow \langle v^*, v \rangle = 0 \quad \forall v^* \in V^*$

$\Rightarrow v = 0$

ii) klar weil Dimensionen gleich

5.32 DEFINITION

V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$

$$f \in \operatorname{Hom}(V, W)$$

wir definieren $f^T \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$

durch $f^T(w^*) \in V^*$

$$\langle f^T(w^*), v \rangle = \langle w^*, f(v) \rangle = w^*(f(v))$$

$$= w^* \circ f(v)$$

$$f^T(w^*) = w^* \circ f^T \implies f^T(w^*) \in V^*$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ & & \downarrow w^* \\ & & \mathbb{K} \end{array}$$

f^T heißt die transponierte Abbildung

5.33

$\dim V = n$, $\dim W = m$

$B \subseteq V$, $C \subseteq W$ Basen

$B^* \subseteq V^*$, $C^* \subseteq W^*$ duale Basen

$$\Phi_{B^*}^{C^*}(f^T) = \Phi_C^B(f)^T$$

(Transposition von Matrizen)

VII DETERMINANTEN

Leibniz 1693

関孝和 Seki Takakazu 1655

Name "Determinante" Gauß 1801

Matrizen: Cayley 1845

$n = 2$:
$$ax + by = e$$
$$cx + dy = f$$

eindeutige Lösung

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array}\right)$$

Fall 1: $a \neq 0$

$$\begin{matrix} & a & b \\ -\frac{c}{a} & c & d \\ \hline & a & b \\ & 0 & d - \frac{bc}{a} \end{matrix}$$

eindeutige Lösung $d - \frac{bc}{a} \neq 0$

Fall 2: $c \neq 0$

$$\begin{matrix} & a & b \\ -\frac{a}{c} & c & d \\ \hline & 0 & b - \frac{ad}{c} \\ & c & d \end{matrix}$$

eindeutige Lösung $b - \frac{ad}{c} \neq 0$

$ad - bc \neq 0$

7.1 DEFINITION

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc =: \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

heißt Determinante von $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

7.2 EIGENSCHAFTEN

i) Die Determinante ist bilinear in den Spalten und Zeilen

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = (v, w)$$

Spaltenvektoren

$$\det(\lambda v_1 + \mu v_2, w) = \lambda \cdot \det(v_1, w) + \mu \cdot \det(v_2, w)$$

$$\det(v, \lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda \cdot \det(v, w_1) + \mu \cdot \det(v, w_2)$$

$$\det(\lambda v_1 + \mu v_2, w) = \begin{vmatrix} \lambda a_1 + \mu a_1 & b \\ \lambda c_1 + \mu c_1 & d \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda a_1 + \mu a_2) d - (\lambda c_1 + \mu c_2) b$$

$$= \lambda (a_1 d - c_1 b) + \mu (a_2 d - c_2 b)$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_2 & b \\ c_2 & d \end{vmatrix}$$

ii) $\det(v, v) = 0$

$$\begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix} = ac - ac = 0$$

iii) $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$

7.3 SATZ

Die Eigenschaften i - iii charakterisieren die Determinante.

Sei: $\varphi : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ mit

i) bilinear

ii) $\forall v \in \mathbb{K}^2 : \varphi(v, v) = 0$

iii) $\varphi(e_1, e_2) = 1$

Dann ist $\varphi = \det$

BEWEIS

z.z.: $\varphi(v, w) = \det(v, w)$

$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} v = a e_1 + c \cdot e_2 \qquad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} w = b e_1 + d \cdot e_2$

$\varphi(v, w) = \varphi(a e_1 + c e_2, b \cdot e_1 + d \cdot e_2)$

$\overset{i)}{=} a \cdot \varphi(e_1, b e_1 + d e_2) + c \cdot \varphi(e_2, b e_1 + d e_2)$

$\overset{ii)}{=} ad \cdot \varphi(e_1, e_2) + ab(e_1, e_1) + cb \cdot \varphi(e_2, e_1) + cd \varphi(e_2, e_2)$

$= ad - bc = \det(v, w)$

7.4 LEMMA

aus i und ii folgt:

$\forall v, w \in \mathbb{K}^n : \varphi(v, w) = -\varphi(w, v)$

$0 = (v + w, v + w) \overset{i}{=} \varphi(v, v) + \varphi(v, w) + \varphi(w, v) + \varphi(w, w)$

$\overset{ii)}{=} \varphi(v, w) + \varphi(w, v)$

7.5 Geometrische Deutung

$\det(v, w)$ = Fläche des aufgespannten Parallelogramms

$\det(e_1, e_2) = 1$, $\det(e_2, e_1) = -1$

Vorzeichen: Orientierung des Paars (v, w)

[illegible] , Kleinste Fläche (Felix Klein)

$A = |v| \cdot h$

h ... Länge der Projektion von w auf $v^\perp$

$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow n = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

$\left\langle \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\rangle = ad - bc$

Alternativbeweis zu 7.3

iv) $A(v, w)$ erfüllt i) - iii)

iii) klar $A(e_1, e_2) = 1$

ii) klar $A(\underset{v=w}{\rightarrow}) = 0$

i) Linearität in v

1) wenn v, w l.a. dann ist $A(v, w) = 0$

2) $n \in \mathbb{N}$, $A(n \cdot v, w) = n \cdot A(v, w)$

3) $\tilde{v} = n \cdot v$: $A(\tilde{v}, w) = n \cdot A\left(\frac{\tilde{v}}{n}, w\right)$

$A\left(\frac{\tilde{v}}{n}, w\right) = \frac{1}{n} A(\tilde{v}, w)$

$A(n \cdot v, w) = n \cdot A(v, w)$

$A\left(\frac{m}{n} \cdot v, w\right) = \frac{m}{n} \cdot A(v, w)$

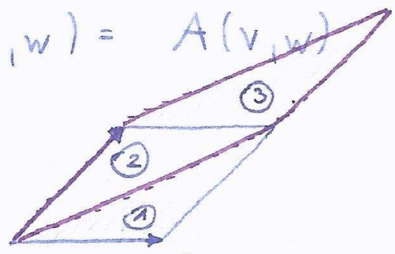
$A(-v, w) = -A(v, w)$

Stetigkeit $\Rightarrow A(\lambda v, w) = \lambda A(v, w)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$

Analog: $A(v, \lambda w) = \lambda A(v, w)$

4) Summe

$A(v+w, w) = A(v, w)$



$A($  $)$ $=$ $A($ 

$A(②) + A③ = A(②) + A(①)$

③ = Translation von ①

$A(\lambda v + \mu w, w) = A(\lambda v + \mu w, \frac{1}{\mu}\mu w)$

$= \frac{1}{\mu} A(\lambda v + \mu w, \mu w) = \frac{1}{\mu} A(\lambda v, \mu w)$

$= A(\lambda v, \mu w)$

allgemeiner Fall

v, w linear unabhängig $\rightarrow$ Basis von $\mathbb{R}^2$

$v_1 = \lambda_1 v + \mu_1 w$

$v_2 = \lambda_2 v + \mu_2 w$

$A((\lambda_1 + \lambda_2)v + (\mu_1, \mu_2)w, w) = A((\lambda_1 + \lambda_2)v, w)$

$= (\lambda_1 + \lambda_2) A(v, w) = A(\lambda_1 v, w) + A(\lambda_2 v, w)$

$A(\lambda_1 v + \mu_1 w, w) + A(\lambda_2 v + \mu_2 w, w)$

$= A(v_1, w) + A(v_2, w)$ $\Rightarrow$ additiv

7.6 DEFINITION

Sei $\dim V = n$

Eine Determinantenform ist eine Abb. $\Delta : V^n \rightarrow \mathbb{K}$

1) $\Delta(a_1, \ldots a_{k-1}, \lambda a_k, a_{k+1}, \ldots a_n)$

$= \lambda \cdot \Delta(a_1, \ldots a_k \ldots a_n)$ $\forall k \; \forall a_1 \ldots a_n \in V$

2) $\Delta(a_1, \ldots a_{k-1}, a_k' + a_k'', a_{k+1} \ldots a_n)$

$= \Delta(a_1, \ldots a_{k-1}, a_k', a_{k+1}, \ldots a_n) + \Delta(a_1, \ldots a_{k-1}, a_k'', a_{k+1}, \ldots a_n)$

$\forall k \; \forall a_1 \ldots a_n \in V$

1)+ 2) $\rightarrow$ multilinear, d.h. linear in a_k, wenn
$a_1, \dots a_{k-1}, a_{k+1}, \dots a_n$ fixiert werden

3) $\Delta(a_1, \dots a_n) = 0$ wenn $\exists k \neq l : a_k = a_l$
Wenn $\Delta \not\equiv 0$, dann heißt Δ nichttrivial

7.7 SATZ

dim $V = n$, $\Delta : V^n \rightarrow \mathbb{K}$ Determinantenform

$\Rightarrow$ 4) $\Delta(a_1, \dots a_{j-1}, a_i + \lambda a_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$
$= \Delta(a_1, \dots a_j \dots a_n)$ $(\forall \lambda \in \mathbb{K}) \forall i \neq j$

↳ Addition von λa_j zu a_i ändert Δ nicht

5) $\Delta(a_1, \dots a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \dots a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots a_n)$
$= -\Delta(a_1, \dots a_j \dots a_i \dots a_n)$

↳ Vertauschen von a_i mit a_j dreht Vorzeichen um

BEWEIS

4) $\Delta(a_1, \dots a_i + \lambda a_j, \dots a_n)$
$= \Delta(a_1, \dots a_i \dots a_j \dots a_n) + \lambda \cdot \Delta(a_1, \dots a_j \dots a_j \dots a_n)$
↳ a_j kommt 2 mal vor, einmal an i-ter einmal an j-ter Stelle $\Rightarrow = 0$
$= \Delta(a_1, \dots a_i \dots a_j \dots a_n)$

5) $0 = \Delta(a_1 \dots a_{i-1}, a_i + a_j, a_{i+1} \dots a_{j-1}, a_i + a_j \dots a_n)$
$= \Delta(a_1 \dots a_{i-1}, a_i, \dots a_{j-1}, a_i, \dots a_n)$
$+ \Delta(a_1 \dots a_{i-1}\ a_i \dots a_{j-1}, a_j \dots a_n)$
$+ \Delta(a_1 \dots a_{i-1}\ a_j \dots a_{j-1}, a_i \dots a_n)$
$+ \Delta(a_1 \dots a_{i-1}, a_j \dots a_{j-1}, a_j \dots a_n$

$= \Delta(a_1 \dots a_i \dots a_j \dots a_n) + \Delta(a_1 \dots a_j \dots a_i \dots a_n)$ $\square$

7.8 DEFINITION

Eine Permutation der Ordnung n ist eine bijektive Abbildung $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$

$\mathfrak{S}_n :=$ Menge aller Permutationen

Schreibweise: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$

7.9 SATZ

$\mathfrak{S}_n$ bildet bezüglich Hintereinanderausführung eine Gruppe mit neutralem Element id, die sogenannte symmetrische Gruppe

Schon gezeigt (1.40): Hintereinanderausführung bijektiver Abbildungen ist bijektiv

Bemerkung:

Für $n \geq 3$ ist $\mathfrak{S}_n$ nichtkommutativ

7.10 SATZ

$|\mathfrak{S}_n| = n!$ Bemerkung: Das sind sehr viele

7.11 BEISPIEL

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

7.12 DEFINITION

Eine Transposition oder Vertauschung ist eine Permutation der Form

$$\tau = \tau_{ij} : \begin{array}{l} i \mapsto j \\ j \mapsto i \\ k \mapsto k \quad \text{wenn } k \notin \{i, j\} \end{array}$$

Bemerkung: $\tau_{ij}^{-1} = \tau_{ij}$

d.h. $\tau_{ij}^{2} = id$

7.13 SATZ

$\mathfrak{S}_n$ wird von den Transpositionen erzeugt, M.a.W. jede Permutation π lässt sich als Hintereinanderausführung $\pi = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_n$ von Transpositionen schreiben

BEWEIS

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & & \pi(n) \end{pmatrix}$$

- $\pi = id \Rightarrow \pi = \pi,\ \tau = id$
- $\pi \neq id$

1) $k_1 = \min\{k \mid k \neq \pi(k)\}$

$\tau_1 = \tau_{k_1, \pi(k_1)}$

$\pi_1 = \tau_1 \circ \pi$

$= \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k_1 - 1 & k_1 & \ldots \\ 1 & \ldots & k_1 - 1 & k_1 & \ldots \end{pmatrix}$

2) $k_2 = \min\{k \mid k \neq \pi(k)\} > k_1$

$\tau_2 = \tau_{k_2\, \pi_2(k_2)}$

$\vdots$

$k_j > k_{j-1}$

$\vdots$

endet nach $\leq n$ Schritten

$\vdots$

usw

$\rightarrow \tau_k \circ \tau_{k-1} \circ \ldots \circ \tau_1 \circ \pi = id$

$\Rightarrow \pi = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$

BEISPIEL

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$k_1 = 2$

$\pi(k_1) = 3 \qquad \tau_1 = \tau_{23}$

$\pi_1 = \tau_1 \circ \pi$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

$k_2 = 3$

$\tau_2 = \tau_{3,5}$

$\pi_2 = \tau_2 \circ \pi_1 = \tau_2 \circ \tau_1 \circ \pi$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

$k_3 = 5$

$\tau_3 = \tau_{5,7}$

$\pi_3 = \tau_3 \circ \pi_2 = id$

$\Rightarrow \pi = \tau_{2,3} \circ \tau_{35} \circ \tau_{57}$

7.14 DEFINITION

Ein Fehlstand von π ist ein Paar (i,j) sodass

- $i < j$
- $\pi(i) > \pi(j)$

F_π =: Menge der Fehlstände von π

$f_\pi := |F_\pi|$

$\text{sign}\, \pi := (-1)^{f_\pi} =: (-1)^\pi$ Signatur von π (Vorzeichen)

7.15 BEISPIEL

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_\pi = \{(2,7),(3,4),(3,7),(4,7),(5,6),(5,7),(6,7)\}$$

$$f_\pi = 7 \qquad \operatorname{sign} \pi = -1$$

7.16 SATZ

i) $\forall \pi \in \mathfrak{S}_n: \quad \operatorname{sign} \pi = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i}$

ii) Für Transpositionen τ gilt: $\operatorname{sign} \tau = -1$

BEWEIS

i) $$\frac{\prod_{i<j} \pi(j) - \pi(i)}{\prod_{i<j} j - i} = (-1)^{f_\pi} = \operatorname{sign} \pi$$

Jedes Paar $\{i,j\}$ kommt oben und unten genau einmal vor; unten $j-i$, daher positiv
oben positiv wenn $\pi(j) > \pi(i)$
und negativ wenn $\pi(j) < \pi(i)$

ii) $$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & \dots & l & \dots & n \\ 1 & \dots & l & \dots & k & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$F_\tau = \{\underbrace{(k,k+1),(k,k+2),\dots(k,l-1)(k,l)}_{l-k \text{ Stück}},\underbrace{(k+1,l),(k+2,l),\dots(l-1,l)}_{l-k-1 \text{ Stück}}\}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 9 & 10 \end{matrix}$$

$$f_\tau = 2(l-k)-1$$

$$(-1)^{f_\tau} = -1$$

$$\operatorname{sign} \pi = \prod_{i<j} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i} \qquad \binom{n}{2} \text{ Faktoren}$$

$$\operatorname{sign} \tau = -1$$

7.17 SATZ

i) $\operatorname{sign} \mathrm{id} = 1$

ii) $\operatorname{sign} \pi \circ \sigma = \operatorname{sign} \pi \cdot \operatorname{sign} \sigma$

d.h. $\operatorname{sign}: \mathfrak{S}_n \to \{+1, -1\}$ ist Gruppenhomomorphismus

(Allgemein: Ein Gruppenhomomorphismus h: Gruppe $\to (\mathbb{T}, \cdot)$ heißt Charakter. $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$) Torus mit Multiplikation ist Gruppe: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2| = 1$

iii) $\operatorname{sign} \pi^{-1} = \operatorname{sign} \pi$

BEWEIS

i) trivial

ii) $$\operatorname{sign}(\pi \circ \sigma) = \prod_{i<j} \frac{(\pi\circ\sigma)(j) - (\pi \circ \sigma)(i)}{j-i}$$

$$= \prod_{i<j} \frac{\pi(\sigma(j)) - \pi(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \cdot \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j-i}$$

$$= \operatorname{sign} \pi \cdot \operatorname{sign} \sigma \qquad \square$$

iii) Gruppenhomomorphismus

7.20 SATZ + DEFINITION

Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ Basis von V

$a_1, \dots, a_n \in V$ mit Koordinaten $\Phi_B(a_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

$A = [a_{ij}] = [\Phi_B(a_1), \dots \Phi_B(a_n)]$

Dann gilt für jede Determinantenform $\Delta: V^n \to K$

$$\Delta(a_1, \dots, a_n) = \det A \cdot \Delta(b_1, \dots, b_n)$$

wobei $\det A := \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \pi \cdot a_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n}$

die Determinante von A ist

BEISPIEL

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

(Formel von Leibniz)

BEWEIS

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i$$

$$\Delta(a_1 \dots a_n) = \Delta\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i_1} b_i \; \dots \; \sum_{i=1}^{n} a_{i_n} b_i\right) = \sum_{i=1} a_{i_1} b_i \dots \sum_{i=1} a_{i_n} b_i \underbrace{\Delta(b_{i_1} \dots b_{i_n})}_{=0 \text{ wenn } i_k = i_l,\ k \neq l}$$

Summanden mit gleichen Indizes verschwinden,

es bleibt $\sum_{i_1 \dots i_n}$ sodass alle $i_1 \dots i_n$ verschieden sind

d.h. jeder Wert aus $\{1, \dots, n\}$ kommt genau einmal vor

... Menge aller Permutationen $\pi(i_j = \pi(j))$

$$= \sum_{\pi \in S_n} a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(n),n} \, b_{\pi(1)} \dots b_{\pi(n)}$$

$$= \operatorname{sign} \pi \cdot \Delta(b_1 \dots b_n)$$

7.21 FOLGERUNG

$$\Delta(a_1 \dots a_n) = \det A \cdot \Delta(b_1 \dots b_n)$$

Eine Determinantenform wird durch den Wert $\Delta(b_1 \dots b_n)$ auf einer Basis eindeutig festgelegt

insbes. ist Δ nichttrivial

$\iff \Delta(b_1 \dots b_n) \neq 0$ auf einer Basis

$\iff \Delta(b_1 \dots b_n) \neq 0$ auf jeder Basis $(b_1 \dots b_n)$

Ist $\Delta(b_1' \dots b_n') = 0$ für andere Basis,

$\to$ drücke $(b_1 \dots b_n)$ in der Basis $(b_1' \dots b_n')$ aus

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i' \implies \Delta(b_1 \dots b_n) = \det A \cdot \Delta(b_1' \dots b_n') = 0$$

7.22 SATZ

Sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots b_n)$ Basis von V, $c \in \mathbb{K}$. Für $a_1 \dots a_n \in V$ sei $A = [\Phi_{\mathcal{B}}(a_1) \dots \Phi_{\mathcal{B}}(a_n)]$. Dann wird durch $\Delta(a_1 \dots a_n) = c \cdot \det A$ die eindeutige Determinantenform mit dem Wert $\Delta(b_1 \dots b_n) = c$ definiert

BEWEIS

1) $\Delta(a_1 \dots \lambda a_k \dots a_n) = c \cdot \det\left(\Phi_B(a_1) \dots \lambda\Phi_B(a_k) \dots \Phi_B(a_n)\right)$

$= c \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}\pi \cdot a_{\pi(1),1} \dots \lambda a_{\pi(k),k} \dots a_{\pi(n),n}$

$= \lambda \cdot c \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}\pi \cdot a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(k),k} \dots a_{\pi(n),n}$

$= \lambda \cdot \Delta(a_1 \dots a_n)$

2) $\Delta(a_1, \dots a_k' + a_k'' \dots a_n) = c \cdot \det\left(\Phi_B(a_1) \dots \Phi_B(a_k') + \Phi_B(a_k'') \dots \Phi_B(a_n)\right)$

$= c \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}\pi \; a_{\pi(1),1} \dots a'_{\pi(k),k} + a''_{\pi(k),k}, \dots a_{\pi(n),n}$

$= c \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}\pi \; a_{\pi(1),1} \dots a'_{\pi(k),k} \dots a_{\pi(n),n}$

$+ c \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}\pi \; a_{\pi(1),1} \dots a''_{\pi(k),k} \dots a_{\pi(n),n}$

$= \Delta(a_1 \dots a_k' \dots a_n) + \Delta(a_1 \dots a_k'' \dots a_n)$

3) Sei $a_k = a_l$ für $k < l$ z.z.: $\Delta(a_1 .. a_k .. a_l .. a_n) = 0$

τ_{kl} ... Transposition, die k mit l vertauscht

$\mathfrak{S}_n = \mathfrak{A}_n \,\dot\cup\, \mathfrak{A}_n \cdot \tau_{kl}$ $\quad [\mathfrak{S}_n : \mathfrak{A}_n] = 2$ .. ($\mathfrak{A}_n$ ist Untergruppe mit Index 2)

Behauptung: $\{\pi \mid \operatorname{sign}\pi = -1\} = \{\pi \circ \tau_{kl} \mid \operatorname{sign}\pi = +1\}$

$\supseteq$: wenn $\operatorname{sign}\pi = +1 \Rightarrow \operatorname{sign}(\pi \circ \tau_{kl})$

$= \operatorname{sign}\pi \cdot \operatorname{sign}\tau_{kl} = +1 \cdot (-1) = -1$

$\subseteq$: wenn $\operatorname{sign}\pi = -1$

$\Rightarrow \operatorname{sign}\pi \circ \tau_{kl} = +1$

$\Rightarrow \pi = \underbrace{(\pi \circ \tau_{kl})}_{\in \mathfrak{A}_n} \circ \tau_{kl} = \mathfrak{A}_n \cdot \tau_{kl}$

$\Delta(a_1 \dots a_n) = c \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n = \mathfrak{A}_n \dot\cup \mathfrak{A}_n \cdot \tau_{kl}} \operatorname{sign}\pi \; a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(n),n}$

$= c \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{A}_n} \operatorname{sign}\pi \; a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(n),n}$

$- c \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{A}_n} a_{\pi\circ\tau_{kl}(1),1} \dots a_{\pi\circ\tau_{kl}(k),k} \dots a_{\pi\circ\tau_{kl}(l),l} \dots a_{\pi\circ\tau_{kl}(n),n}$

$$= c \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} a_{\pi(1),1}, \dots a_{\pi(n),n}$$

$$- c \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} a_{\pi(1),1} \cdots \underset{\overset{\shortparallel}{a_{\pi(k),k}}}{a_{\pi(l),k}} \cdots \underset{\overset{\shortparallel}{a_{\pi(l),l}}}{a_{\pi(k),l}} \cdots a_{\pi(n),n} \quad \text{weil } a_k = a_l$$

① $\left.\begin{aligned} a_{\pi(l),k} &= a_{\pi(l),l} \\ a_{\pi(k),l} &= a_{\pi(k),k} \end{aligned}\right\}$ weil $a_k = a_l$

② Vertausche im Produkt die beiden Faktoren

$$\dots = c \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n} - \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n} = 0$$

Wert bei $(b_1 \dots b_n)$

$a_{ij} = \delta_{ij} \Rightarrow A = I$

$$\det I = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \pi \; \delta_{\pi(1),1} \cdots \delta_{\pi(n),n} = +1$$

alle $\pi(j) = j$, sonst 0

$\Rightarrow$ id einziger Summand

$\Rightarrow \Delta(b_1 \dots b_n) = \det I \cdot c = c$

7.24 Zusammenfassung

- Die Menge der Determinantenformen $\Delta: V^n \to \mathbb{K}$ bildet einen eindimensionalen Vektorraum $\Lambda^n V$
- Es existiert eine multilineare Determinantenform mit $\Delta(b_1 \dots b_n) = 1$

Wh: $\Delta: V^n \to \mathbb{K}$

$$\Delta(a_1 \dots a_n) = \det A \cdot \Delta(b_1 \dots b_n)$$

$$\Phi_B(a_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \pi \; a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n}$$

$\Delta(v_1 \dots v_n) \neq 0 \Leftrightarrow v_1 \dots v_n$ linear unabhängig $(\Leftrightarrow$ Basis$)$

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

7.25 LEMMA

V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$, $\dim V = \dim W = n$

$\Delta : W^n \to \mathbb{K}$ $\qquad f: V \to W$

$f_n : V^n \to W^n \xrightarrow{\Delta} \mathbb{K}$

$(v_1 \dots v_n) \longmapsto (f(v_1) \dots f(v_n))$

Dann ist $\Delta^f : V^n \to \mathbb{K}$

$\Delta^f(v_1 \dots v_n) = \Delta(f(v_1) \dots f(v_n))$

eine Determinantenform auf V

BEWEIS

1) $\Delta^f(v_1 \dots \lambda v_k \dots v_n) = \Delta(f(v_1) \dots f(\lambda v_k) \dots f(v_n))$

$= \lambda \Delta(f(v_1) \dots f(v_n)) = \lambda \Delta^f(v_1 \dots v_n)$

2) $\Delta^f(v_1 \dots v_k' + v_k'' \dots v_n) = \Delta(f(v_1) \dots f(v_k' + v_k'') \dots f(v_n))$

$= \Delta(f(v_1) \dots f(v_k') \dots f(v_n)) + \Delta(f(v_1) \dots f(v_k'') \dots f(v_n))$

$= \Delta^f(v_1 \dots v_k' \dots v_n) + \Delta^f(v_1 \dots v_k'' \dots v_n)$

3) $v_k = v_l \quad k \neq l \quad \Rightarrow f(v_k) = f(v_l)$

$\Delta^f(v_1 \dots v_k \dots v_l \dots v_n) = \Delta(f(v_1) \dots f(v_k) \dots f(v_l) \dots f(v_n)) = 0$

7.26 FOLGERUNG für $V = W$

$\Delta : V^n \to \mathbb{K}$ nichttriviale Determinantenform

$f: V \to V$

$\Rightarrow \Delta^f$ ist Determinantenform

$\dim \Lambda^n V = 1 \Rightarrow \exists c_f \in \mathbb{K} : \Delta^f = c_f \cdot \Delta$

$c_f :=$ det f heißt Determinante von f

7.27 FOLGERUNG

i) Für jede Basis $B = (b_1 \dots b_n)$ gilt

$\Delta^f(b_1 \dots b_n) = \Delta(f(b_1) \dots f(b_n)) = \det f \cdot \Delta(b_1 \dots b_n)$

$\Rightarrow \det f = \dfrac{\Delta(f(b_1) \dots f(b_n))}{\Delta(b_1 \dots b_n)}$

$A = \Phi_B^B(f) \quad a_{ij} \dots i$-te Koordinate von $f(b_j)$

$s_j(A) = \Phi_B(f(b_j))$

ii) mit $a_j = f(b_j)$ gilt

$\det \Phi_B^B(f) = \det f$

7.28 SATZ

$f: V \to V$ ist Isomorphismus $\Leftrightarrow$ $\det f \neq 0$

BEWEIS

f Isomorphismus $\Leftrightarrow (f(b_1) \dots f(b_n))$ Basis

$\Leftrightarrow \Delta(f(b_1) \dots f(b_n)) \neq 0$

$\Leftrightarrow \det f \cdot \Delta(b_1 \dots b_n) \neq 0 \Leftrightarrow \det f \neq 0$

7.29 SATZ

$f, g: V \to V$ linear

$\Rightarrow \det f \circ g = \det f \cdot \det g$

BEWEIS

$f \circ g$ Isomorphismus $\Leftrightarrow$ f, g Isomorphismen

f, g invertierbar $\Rightarrow$ $f \circ g$ invertierbar

mit $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

VORSICHT! $\to$ Falsch wenn $\dim = \infty$

Bsp $S_R: (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2 \dots)$ ist injektiv, nicht surjektiv

$S_L: (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$ ist surjektiv, nicht injektiv

$S_L \circ S_R = I$ aber $S_R \circ S_L = I - P_1$

$f \circ g$ bijektiv $\Rightarrow$ g injektiv, f surjektiv $\overset{\text{wenn } \dim < \infty}{\Rightarrow}$ g, f bijektiv

Fall ①: $\det f \circ g = 0 \overset{7.28}{\Leftrightarrow} f \circ g$ nicht bijektiv

$\Leftrightarrow$ f nicht bijektiv, oder g nicht bijektiv

$\Leftrightarrow \det f = 0 \vee \det g = 0 \Leftrightarrow \det f \cdot \det g = 0$

Fall ②: $\det f \circ g \neq 0 \Leftrightarrow f \circ g$ bijektiv $\Rightarrow g$ bijektiv

$\Rightarrow \Delta^g$ nichttrivial

Sei: $(b_1 \dots b_n)$ Basis von V, Δ nichttriviale Determinantenform

$$\det f \circ g = \frac{\Delta(f \circ g(b_1) \dots f \circ g(b_n))}{\Delta(b_1 \dots b_n)} = \frac{\Delta(f(g(b_1)), \dots f(g(b_n)))}{\Delta(g(b_1), \dots g(b_n))} \cdot \frac{\Delta(g(b_1) \dots g(b_n))}{\Delta(b_1 \dots b_n)}$$

$$= \frac{\Delta(f(b_1') \dots f(b_n'))}{\Delta(b_1', \dots, b_n')} \cdot \frac{\Delta(g(b_1), \dots g(b_n))}{\Delta(b_1, \dots b_n)} = \det f \cdot \det g$$

$b_i' = g(b_i)$ bilden ebenfalls Basis

7.30 KOROLLAR

$A, B \in K^{n \times n}$

i) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

ii) $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

iii) $\det A = 0 \iff \operatorname{rk} A < n$

iv) $\det A^t = \det A$

BEWEIS

i) Folgt aus 7.29

Alternativ: $A = [s_1 \dots s_n]$ $\quad s_i$ ... Spaltenvektoren

$$A \cdot B = \left[\sum_{i_1=1}^{n} s_{i_1} b_{i_1 1}, \quad \dots \quad \sum_{i_n=1}^{n} s_{i_n} b_{i_n n}\right]$$

Wähle Determinantenform so, dass $\Delta(e_1 \dots e_n) = 1$

$$\det A \cdot B = \Delta\left(\sum_{i_1=1}^{n} s_{i_1} b_{i_1 1} \quad \dots \quad \sum_{i_n=1}^{n} s_{i_n} b_{i_n n}\right)$$

multilinear $\Rightarrow$ $= \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1}^{n} b_{i_1 1}, \dots b_{i_n n} \; \Delta(s_{i_1} \dots s_{i_n})$

Wenn $i_k = i_l$ für $k \neq l \Rightarrow \Delta = 0$

$\Rightarrow \sum\limits_{\text{versch. Indizes}} = \sum\limits_{\text{Permutation}}$

$$= \underbrace{\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} b_{\pi(1),1}, \dots b_{\pi(n),n} \; \underbrace{\Delta(s_{\pi(1)}, \dots s_{\pi(n)})}_{= \operatorname{sign} \pi}}_{= \det B} \cdot \underbrace{\Delta(s_1 \dots s_n)}_{= \det A} = \det A \cdot \det B$$

ii) $A \cdot A^{-1} = I$

$\Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$

$\overset{i)}{=}$ $\det A \cdot \det A^{-1}$

iii) $\det A = 0 \Rightarrow f_A$ nicht bijektiv $\Rightarrow \operatorname{rk} A < n$

$= \det f_A$

iv) $\det A^T = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \pi \; a^T_{\pi(1),1} \cdots a^T_{\pi(n),n}$

$$= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \pi \; a_{1,\pi(1)}, \ldots a_{n,\pi(n)}$$

für fixes π: $\prod_{j=1}^{n} a_{j,\pi(j)} = \prod_{k=1}^{n} a_{\pi^{-1}(k),k}$

$\pi(j) = 1 \iff j = \pi^{-1}(1)$

$\pi(j) = k \iff j = \pi^{-1}(k)$

$$= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \pi \; a_{\pi^{-1}(1),1} \cdots a_{\pi^{-1}(n),n}$$

$$= \sum_{\substack{\rho \in \mathfrak{S}_n \\ \rho = \pi^{-1}}} \operatorname{sign} \rho^{-1} \; a_{\rho(1),1} \cdots a_{\rho(n),n}$$

" $(-1)^k$ wobei $\rho = \tau_1 \ldots \tau_k$

$\Rightarrow \rho^{-1} = \tau_k \ldots \tau_1 \Rightarrow \operatorname{sign} \rho = (-1)^k$

$$= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \rho \; a_{\rho(1),1} \cdots a_{\rho(n),n} = \det A$$

7.31 BERECHNUNG VON DETERMINANTEN

7.31 $\dim \leq 3$

$\underline{n=2}$: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$ ... Gruppe der invertierbaren Matrizen, general linear group

$SL(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \det A = 1\}$ ... special linear group

$n = 3$: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_3} \operatorname{sign} \pi \; a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot a_{\pi(3),3}$

$\mathfrak{S}_3$ ist eine Coxetergruppe

$\mathfrak{S}_3 = \langle \underline{\tau_{12}}, \underline{\underline{\tau_{23}}} \rangle$ wird von zwei Transpositionen erzeugt

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $+1$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 1$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - 1$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + 1$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 1$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ -1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

Regel von SARRUS

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} & a_{31} & a_{23} \end{array}$$

$6.^-$ $5.^-$ $4.^-$ $1.^+$ $2.^+$ $3.^+$

BEISPIEL

Catalan-Matrix

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \\ 5 & 14 & 42 \end{pmatrix} = 1\cdot 5\cdot 42 + 2\cdot 14\cdot 5 + 5\cdot 2\cdot 14 - 5\cdot 5\cdot 5 - 14\cdot 14\cdot 1 - 42\cdot 2\cdot 2$$

$$= 14(1\cdot 5\cdot 3 + 2\cdot 5 + 5\cdot 2 - 14 - 2\cdot 2\cdot 3) - 125$$

$$= 14(15 + 10 + 10 - 14 - 12) - 125$$

$$= 14\cdot 9 - 125 = 126 - 125 = 1$$

7.32 LEMMA

Sei $A = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$ obere Dreiecksmatrix, d.h. $a_{ij} = 0$ für $i > j$

Dann ist $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots a_{nn}$

$$\det A = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \pi \quad a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n}$$

es muss gelten $\pi(j) \leq j$ für alle j

$\Rightarrow \pi(1) = 1,\ \pi(2) = 2 \ \ldots \ \pi(n) = n$

$= 1 \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

7.33 LEMMA

$A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n \times n}$

i) $s_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$ Spalten von A

$\Rightarrow \det [s_1 \ldots s_i + \lambda s_j \ldots s_n] = \det A$

ii) $z_i = [a_{i1} \ldots a_{in}]$ Zeilen von A

$\det \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i + \lambda z_j \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \det A$ für $i \neq j$

BEWEIS

i) Siehe Determinantenformen

ii) $\det A = \det A^T$

7.34 BEISPIEL

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \\ 5 & 14 & 42 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1^* & 2 & 5 \\ 0 & 1^* & 4 \\ 0 & 4 & 17 \end{vmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Wh: $\det A = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{\pi} \, a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n}$

Lemma: $\begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

$\Delta(s_1 \ldots s_i + \lambda s_j \ldots s_n) = \Delta(s_1 \ldots s_n)$ wenn $i \neq j$

→ Addition vom Vielfachen einer Zeile/Spalte zu einer anderen ändert nichts

$\det A = \det A^T$

BERECHNEN DER DETERMINANTE

Methode 1 → Gauß-Jordan

BEISPIEL

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -10 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1^* & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & 5 \\ 0 & 6 & -20 & 10 \\ 0 & 6 & 21 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -18 & 5 \\ 0 & 0 & 23 & -8 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -18 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 + 5 \cdot \frac{23}{8} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 6 (-18) \left(-8 + \frac{5 \cdot 23}{18}\right) = (-18) \cdot 8 + 5 \cdot 23$$

$$= -144 + 115 = 29$$

7.35 LEMMA

i) $\begin{vmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \det B = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & B & \\ * & & & \end{vmatrix}$

ii) $\begin{vmatrix} & & & 0 \\ & B & & \vdots \\ & & & 0 \\ * & \cdots & * & a_{nn} \end{vmatrix} = \det B \cdot a_{nn}$

BEWEIS

$$\det A = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\pi}\, a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(n),n}$$

$a_{\pi(n),n} = 0$ außer wenn $\pi(n) = n$

$$\dots = \sum_{\substack{\pi \in \mathfrak{S}_n \\ \pi(n)=n}} (-1)^{\pi}\, a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(n),n}$$

$$= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\rho}\, a_{\rho(1),1} \dots a_{\rho(n-1),n-1}\, a_{nn}$$

$$= \det B \cdot a_{nn}$$

7.36 DEFINITION

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $1 \leq k, l \leq n$

$A_{k,l} :=$ $(n-1) \times (n-1)$ Matrix, die aus A entsteht, wenn man k-te Zeile und l-te Spalte streicht

$$\begin{array}{cc}
k & \begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2,l-1} & a_{2,l+1} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,l-1} & a_{k-1,l+1} & \cdots & a_{k-1,n} \\
a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,l-1} & a_{k+1,l+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,l-1} & a_{n,l+1} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix} \\
 & l
\end{array}$$

Methode 2

7.37 ENTWICKLUNGSSATZ VON LAPLACE

$A \in \mathbb{K}^{n \times n} \Rightarrow \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kl} (-1)^{k+l} \det A_{k,l}$

... Entwicklung nach der l-ten Spalte

$\det A = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} (-1)^{k+l} \det A_{kl}$

... Entwicklung nach der k-ten Zeile

BEWEIS

$$a_l = \sum_{k=1}^{n} a_{kl}\, e_k \quad \dots \text{ } l\text{-te Spalte}$$

$$\det A = \Delta(a_1 \dots a_n) = \Delta\Big(a_1 \dots a_{l-1}\ \sum_{k=1}^{n} a_{kl}\, e_k\ a_{l+1} \dots a_n\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{kl} \cdot \Delta(a_1 \dots a_{l-1}, \underset{l\text{-te Spalte}}{e_k}, a_{l+1} \dots a_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{kl} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,l-1} & 0 & a_{1,l+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,l-1} & \underset{e_k}{0} & a_{n,l+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \rightarrow k\text{-te Zeile}$$

Vertausche l-te Spalte mit $l-1$-ter Spalte, diese dann mit $l-2$-ter etc. $\rightarrow$ $l-1$ Vertauschungen

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{kl} (-1)^{l-1} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & \dots & a_{1\,l-1} & a_{1\,l+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & & & & \\ 1 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{n\,l-1} & a_{n\,l+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

k-te Zeile

… tausche k-te Zeile mit $k-1$-ter, diese mit $k-2$-ter etc

$\rightarrow$ $k-1$ Vertauschungen

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{kl} (-1)^{k-1+l-1} \begin{vmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{kl} & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{kl} (-1)^{k+l} \det A_{kl}$$

7.38 BEISPIEL

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & \boxed{5} & \boxed{14} \\ 5 & \boxed{14} & \boxed{42} \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 14 \\ 14 & 42 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 5 & 42 \end{vmatrix} + \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 14 \end{vmatrix}$$

$$= (\overset{5\cdot 3\cdot 14}{5 \cdot 24} - 14 \cdot 14) - 2(\overset{2\cdot 3\cdot 14}{2 \cdot 42} - 5 \cdot 14) + 5(2 \cdot 14 - 5 \cdot 5)$$

$$= 14 - 2 \cdot 14 + 5 \cdot 3 = 1$$

7.39 SATZ

A invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$$\hat{A} := [\hat{a}_{k\ell}]_{k,\ell = 1,\dots,n}$$

heißt Komplementärmatrix oder adjunkte Matrix

$$\hat{a}_{k\ell} = (-1)^{k+\ell} \det A_{\ell k}$$

Dann ist $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \hat{A}$

BEWEIS

zz: $B := \hat{A} \cdot A = \det A \cdot I$

$$b_{k\ell} = \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{kj} \cdot a_{j\ell} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \det A_{jk} \, a_{j\ell}$$

Falls $k = \ell$: $b_{kk} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{jk} \det A_{jk}$

(Laplace-Entwicklung nach k-ter Spalte

Falls $k \neq \ell$, oBdA $k < \ell$

$$0 = \det \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & k & & \ell & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\ell} & \dots & a_{1\ell} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\ell} & \dots & a_{n\ell} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Ersetze k-te Spalte von A, durch ℓ-te Spalte von A

Laplace Entwicklung nach k-ter Spalte:

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{j\ell} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 & a_{1\ell} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & a_{n\ell} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

wie bei Laplace

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j\ell} (-1)^{j+k} \det A_{jk}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{j\ell} \, \hat{a}_{kj} = b_{k\ell} = 0$$

7.40 BEISPIEL

$n=2$: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ cayley 1855

$$\frac{1}{\nabla} \begin{vmatrix} \partial a \nabla & \partial b \nabla \\ \partial c \nabla & \partial d \nabla \end{vmatrix}$$

LAPLACE. $\sum_{l=1}^{n} a_{kl} (-1)^{k+l} \det A_{kl} = \sum_{k=1}^{n} a_{kl} \partial a_{kl} \det A$

$n=3$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \\ 5 & 14 & 42 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 14 \\ 14 & 42 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 14 & 42 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 14 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 5 & 42 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 42 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 14 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 14 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & -14 & 3 \\ -14 & 17 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 14 \\ 14 & 42 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot 14 - 14 \cdot 14 = 14$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 14 & 42 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 14 - 5 \cdot 14 = 14$$

7.41 SATZ (Cramer'sche Regel)

G. Cramer 1750
McLaurin 1748
Leibniz 1678

Satz von Arnold:

Kein Satz in der Mathematik ist nach seinem ersten Entdecker benannt.

A reguläre $n \times n$ Matrix mit Spaltenvektoren $a_1 \dots a_n \in \mathbb{K}^n$

Dann ist die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ gegeben durch

$$x_i = \frac{\Delta(a_1 \dots a_{i-1}\ b\ a_{i+1} \dots a_n)}{\Delta(a_1 \dots a_n)}$$

$$= \frac{\det(a_1 \dots b \dots a_n)}{\det A}$$

Aufwand: $n+1$ Determinanten berechnen

BEWEIS

$$b = \sum_{j=1}^{n} b_j e_j \quad , \quad x = A^{-1} b = \frac{1}{\det A} \cdot \hat{A} \cdot b$$

$$x_i = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} b_j = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{ji})\, b_j$$

$$= \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} \Delta(a_1 \dots a_{i-1}\ e_j\ a_{i+1} \dots a_n) \cdot b_j$$

$$= \frac{1}{\det A} \Delta(a_1 \dots a_{i-1} \sum_{j=1}^{n} b_j e_j\ a_{i+1} \dots a_n)$$

$$= \frac{1}{\det A} \Delta(a_1 \dots a_{i-1}\ b\ a_{i+1} \dots a_n)$$

7.42 BEISPIEL

$$2x_1 + 2x_2 = 7 \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 - 3x_2 = 0 \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{21}{8} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{7}{8}$$

$$x = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \end{pmatrix}$$

7.43 BEMERKUNG

In höheren Dimensionen $(n \geq 4)$ ist die Cramer'sche Regel

① zu aufwändig

② numerisch instabil

→ trotzdem nützlich für theoretische Überlegungen

1) die Abbildung $A \mapsto \det A$ ist $\in C^\infty$ (Polynom)

2) Die Menge der invertierbaren Matrizen in $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist offen, denn wenn $\det A \neq 0$, dann ist auch $\det \hat{A} \neq 0$ solange $|a_{ij} - \hat{a}_{ij}| < \delta$

3) Die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ für A invertierbar hängt stetig und differenzierbar von A und b ab

$$x_i = \underbrace{\frac{1}{\det A}}_{\text{stetig solange} \neq 0} \cdot \underbrace{\hat{A} \cdot b}_{\text{Polynom}}$$

4) Die Abbildung

$$GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$$
$$A \mapsto A^{-1} = \frac{1}{\det A} \hat{A}$$

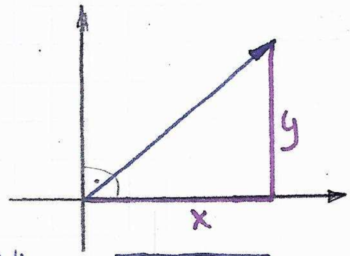
ist stetig

$\Rightarrow$ $GL(n, \mathbb{R})$ ist eine Lie-Gruppe

VIII INNERE PRODUKTE

1637 Descartes "La Geométrie"

x, y $\qquad$ a, b, c



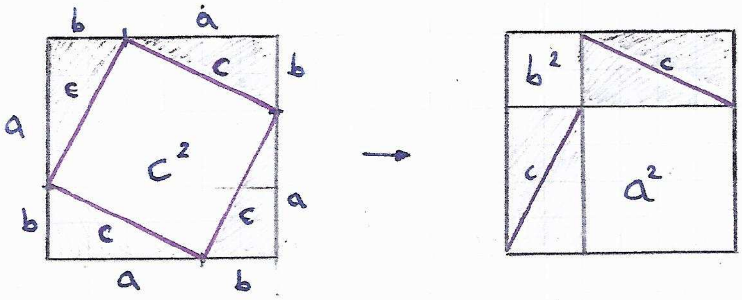
$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

8.1 DEFINITION

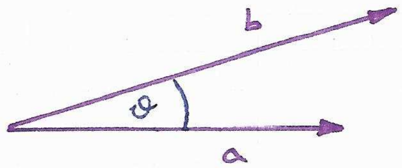
$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

... Länge eines Vektors im $\mathbb{R}^3 / \mathbb{R}^2$

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$



$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$$



Skalarprodukt $\langle a, b \rangle = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos \vartheta$

$$\cos \vartheta = \cos(2\pi - \vartheta)$$

8.2 PROPOSITION

i) $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$

ii) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ → Dreiecksungleichung

iii) $\langle a, a \rangle = \|a\|^2 \geq 0$

iv) $\langle a, a \rangle = 0 \iff a = 0$

v) $\langle a, b \rangle = 0 \iff a = 0 \vee b = 0 \vee a \perp b$

$\langle a, b \rangle > 0 \iff$ spitzer Winkel

$\langle a, b \rangle < 0 \iff$ stumpfer Winkel

8.3 SATZ

i) $\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle$

ii) $\langle \lambda a,b\rangle = \lambda \langle a,b\rangle$

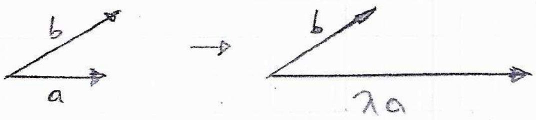
iii) $\langle a+b,c\rangle = \langle a,b\rangle + \langle b,c\rangle$

$\Big\}$ bilinear

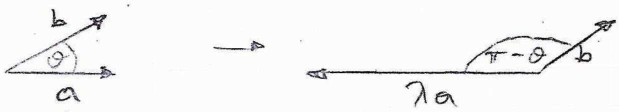
BEWEIS

i) klar

ii) $\lambda > 0 \Rightarrow$ klar



$\lambda < 0$



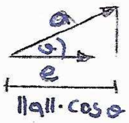
$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$\langle \lambda a, b\rangle = |\lambda| \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos(\pi-\theta)$

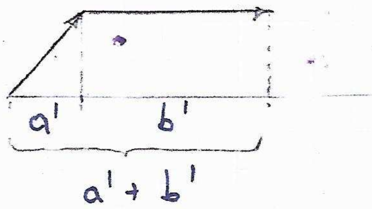
$= -|\lambda| \cdot \|a\| \|b\| \cos\theta = \lambda \langle a,b\rangle$

iii) Sei $b = e$ $\quad \|e\| = 1$

$\langle a, e\rangle = \|a\| \cdot \cos\theta$



... Länge der Projektion auf die Gerade mit Richtung e



$\langle a+b, c\rangle = \|c\| \left\langle a+b, \frac{c}{\|c\|}\right\rangle = \|c\| \left(\left\langle a, \frac{c}{\|c\|}\right\rangle + \left\langle b, \frac{c}{\|c\|}\right\rangle\right)$

$= \langle a,c\rangle + \langle b,c\rangle$

8.4 SATZ

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$\langle a,b\rangle = \langle a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, b\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

linear in a

$= a_1 \langle e_1, b\rangle + a_2 \langle e_2, b\rangle + a_3 \langle e_3, b\rangle$

$\langle e_i, b\rangle = \langle e_i, b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3\rangle$

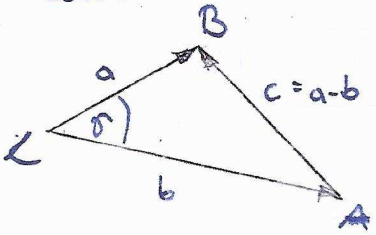
linear in b

$= b_1 \langle e_i, e_1 \rangle + b_2 \langle e_i, e_2 \rangle + b_3 \langle e_i, e_3 \rangle$

$= b_1 \delta_{i1} + b_2 \delta_{i2} + b_3 \delta_{i3} = b_i$ denn $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

8.5 BEISPIEL

Kosinussatz



$a^2 + b^2 = c^2 + 2ab \cdot \cos\gamma$

$\|c\|^2 = \langle a-b, a-b \rangle = \langle a, a \rangle - \langle a, b \rangle - \langle b, a \rangle + \langle b, b \rangle$

$= \|a\|^2 - 2\|a\|\|b\| \cos\gamma + \|b\|^2$

Satz von THALES

$\|a-b\| \|a+b\| \cdot \cos\vartheta = \langle a-b, -a-b \rangle$

$= - \langle a - b, a+b \rangle = - \langle a, a \rangle - \langle b, a \rangle + \langle a, b \rangle - \langle b, b \rangle$

$= -(\|a^2\| - \|b\|^2) = 0 \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{2}$

8.6 WIE FINDET MAN EINEN NORMALVEKTOR

$\vec{n} = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$

$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1 a_2 - a_1 a_2 = 0$

8.7 DEFINITION

Äußeres Produkt / Kreuzprodukt / Vektorprodukt

nur im $\mathbb{R}^3$

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann sei $a \times b$ der Vektor mit den Eigenschaften

1) $\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin\vartheta$ ... Fläche des Parallelogramms

$\|b\| \cdot \sin\vartheta$ ... Höhe des Parallelogramms

2) $a \times b \perp a, b$

d.h. $\langle a \times b, a \rangle = 0$ und $\langle a \times b, b \rangle = 0$

i) $a, b, a \times b$ sind rechtsdrehend

$a \times b = 0 \iff a = 0 \lor b = 0 \lor a, b$ linear abhängig

8.8 SATZ

i) $b \times a = -a \times b$
(Schraube geht in andere Richtung

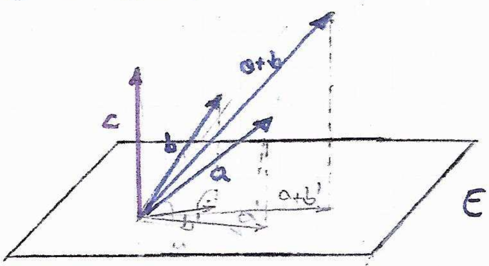
ii) $(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b) = a \times (\lambda b)$

iii) $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$

$\left.\begin{matrix} \text{i)} \\ \text{ii)} \\ \text{iii)} \end{matrix}\right\}$ bilinear von $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

BEWEIS

iii

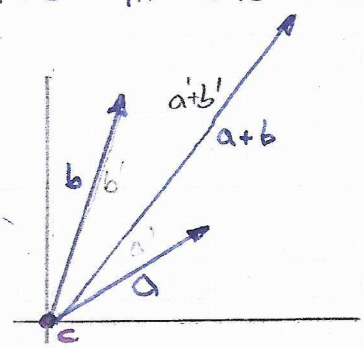


$E = c^\perp$ ... Ebene senkrecht auf c

$a \times c,\ b \times c,\ (a+b) \times c \in E$

Seien $a', b', (a'+b')$ die Projektionen von $a, b, a+b$ in die Ebene

von oben gesehen



1) $(a+b)' = a' + b'$

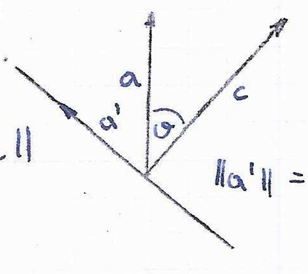
Projektion der Summe = Summe der Projektionen

2) $a \times c = a' \times c$

$\|a' \times c\| = \|a'\| \cdot \|c\|$

$\|a \times c\| + \|a\|\|c\| \sin\theta = \|a'\|\|c\|$

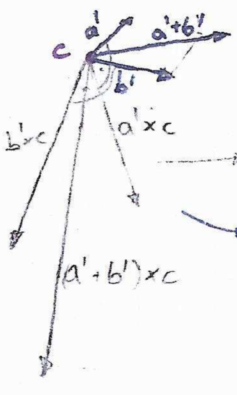
... haben die gleiche Richtung



$\|a'\| = \|a\| \cdot \sin\theta$

3) $(a'+b') \times c \overset{\text{linear}}{=} a' \times c + b' \times c$

von oben:



$\|a' \times c\| = \|a'\|\|c\|$

um $\frac{\pi}{2}$ gedreht, mit Faktor $\|c\|$ skaliert

$$(a+b)\times c \overset{2)}{=} (a+b)'\times c \overset{1)}{=} (a'+b')\times c$$
$$\overset{3)}{=} a'\times c + b'\times c \overset{2)}{=} a\times c + b\times c$$

8.9 FOLGERUNG

Das Kreuzprodukt ist eine Abbildung $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit den Eigenschaften

1. bilinear
2. antisymmetrisch
3. rechtsdrehend ("chiral")

   $e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2$

8.10 KOROLLAR

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

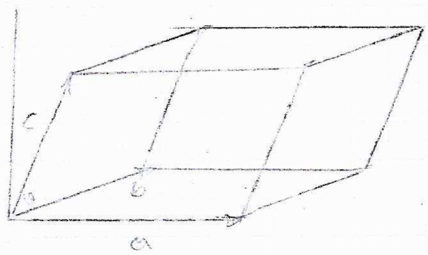
$$\overset{\text{Laplace}}{"="} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & e_3 \end{vmatrix}$$

BEWEIS

$$(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) \times (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3)$$
$$= \cancel{a_1 b_1 e_1 \times e_1} + a_1 b_2 e_1 \times e_2 + a_1 b_3 e_1 \times e_3$$
$$+ a_2 b_1 e_2 \times e_1 + \cancel{a_2 b_2 e_2 \times e_2} + a_2 b_3 e_2 \times e_3$$
$$+ a_3 b_1 e_3 \times e_1 + a_3 b_2 e_3 \times e_2 + \cancel{a_3 b_3 e_3 \times e_3}$$
$$= a_1 b_2 e_3 + a_1 b_3 (-e_2) + a_2 b_1 (-e_3) + a_2 b_3 e_1$$
$$+ a_3 b_1 e_2 + a_3 b_2 (-e_1)$$
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3$$

8.11 SATZ

Das Spatprodukt



$$\langle a \times b, c \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ ... Volumen des aufgespannten Spats}$$

$\|a \times b\|$ ... Fläche des Parallelogramms

$$\langle a \times b, c \rangle = \|a \times b\| \underbrace{\|c\| \cos\theta}_{\text{Höhe des Spats}}$$

$$\langle a \times b, c \rangle = \left\langle \begin{matrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{matrix}, \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} \right\rangle = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_3$$

Laplace nach 3. Spalte

$$= \langle c \times a, b \rangle = \langle b \times c, a \rangle$$

8.12 ANWENDUNG

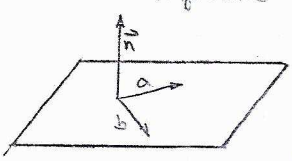
Gegeben: Ebene in Parameterdarstellung:

$$E = \{ v_0 + \lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

Gesucht: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ sodass

$$E = \{ x \mid \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \beta \}$$

implizite Darstellung



$$\langle v_0 + \lambda a + \mu b, \vec{n} \rangle \overset{!}{=} \langle v_0, \vec{n} \rangle$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = a \cdot b \qquad \beta = \langle v_0, a \times b \rangle$$

$$\Rightarrow E = \{ x \mid \langle a \times b, x \rangle = \beta \}$$

Wh. $\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$\rightsquigarrow$ im $\mathbb{R}^n$: $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

8.13 DEFINITION (Von nun an $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

Ein inneres Produkt auf einem Vektorraum V über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist eine Abbildung $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ mit den Eigenschaften:

i) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \forall x,y,z \in V$

ii) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \forall x,y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ sesquilinear

iii) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle} \quad \forall x,y \in V$ hermitesch

insbes $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in V$

Ein inneres Produkt heißt

positiv semidefinit wenn $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x$

positiv definit wenn $\langle x, x \rangle > 0 \quad \forall x \neq 0$

negativ semidefinit wenn $\langle x, x \rangle \leq 0 \quad \forall x$

negativ definit wenn $\langle x, x \rangle < 0 \quad \forall x \neq 0$

indefinit wenn $\exists x : \langle x, x \rangle > 0 \wedge \exists y : \langle y, y \rangle < 0$

Weitere Namen:

Skalarprodukt wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Hermitesches Produkt wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Unitäres Produkt wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Quadratische Form wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Hermitesche Form wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

8.14 LEMMA

i) $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

ii) $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$ antilinear in y, linear in x (in e)

iii) $\langle x, 0 \rangle = 0$

8.15 BEISPIELE

a) $\mathbb{R}^n$: $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

b) $\mathbb{C}^n$: $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = x \cdot \overline{y}$

c) $A = [a_{ij}]_{i=1 \dots n}$

reell: $\langle x, y \rangle_A : x^t A y$

ist symmetrisch $\Leftrightarrow A = A^t$, d.h. $a_{ij} = a_{ji}$

im Komplexen: ... ist hermitesch $\Leftrightarrow a_{ij} = \overline{a_{ji}}$

dim ∞:

$\mathbb{R}^\infty \ \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$

$\rightarrow$ damit die Reihe konvergiert Einschränkung auf

$\ell^2 = \{(x_i) \mid \sum x_i^2 < \infty\}$ .. Hilbertraum

ℓ Lebesque

d) $\mathbb{C}^\infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$

e) $V = C([a,b], \mathbb{C})$

$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx$

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

8.16 DEFINITION

Eine Norm auf einen Vektorraum V über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$

N1) $\|x\| \geq 0 \ \forall x \ \wedge \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ... Homogenität

N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ Dreiecksungleichung

8.17 BEMERKUNG

Eine Norm induziert eine Metrik

$d(x, y) = \|x - y\|$

translationsinvariant

$d(x + z, y + z) = d(x, y)$

8.18 BEISPIEL

a) $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$ $\quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ ... L^1 - Norm.

$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ ... euklidische Norm

$\|x\|_\infty = \max(|x_1| \dots |x_n|)$

b) analog für $V = C[a,b]$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

8.19 SATZ

Sei $\langle .,. \rangle$ ein positiv definites Skalarprodukt

Dann definiert $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$ eine Norm auf V

BEWEIS

N1) $\langle x,x \rangle \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\ }$ ist wohldefiniert in $\mathbb{R}_0^+$

$\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x,x \rangle = 0 \overset{\text{pos def}}{\Rightarrow} x = 0$

N2) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x,x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x,x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|$

8.20 LEMMA (Cauchy - Bunjakowski - Schwartz - Ungleichung)
1789-1857 1804 - 1889 1843 - 1921

für ein positiv definites Skalarprodukt gilt die Ungleichung $|\langle x,y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Gleichheit $\Leftrightarrow$ x, y linear abhängig

$$\left[\begin{array}{l} \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x,y \rangle \\ \langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle} \\ \langle x, \lambda y \rangle = \overline{\langle \lambda y, x \rangle} = \overline{\lambda \langle y,x \rangle} = \bar{\lambda}\, \overline{\langle y,x \rangle} = \bar{\lambda} \langle x,y \rangle \end{array}\right]$$

Cauchy: $\left|\sum_{i=1}^n x_i \bar{y_i}\right| \leq \left(\sum |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Cours d'Analyse 1815

Bunjakowski 1859:

$$\left|\int_a^b f(x)\, \overline{g(x)}\, dx\right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Schwarz 1882 abstrakt

BEWEIS: Lagrange 17?? Fall $\mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i y_j - x_j y_i)^2 = \sum_{ij} x_i^2 y_j^2 - 2\sum_{ij} x_i y_i x_j y_j + \sum_{ij} x_j^2 y_i^2$$

$$= 2\Big(\sum_i x_i^2\Big)\Big(\sum_j y_j^2\Big) - 2\Big(\sum_i x_i y_i\Big)^2$$

$$\Rightarrow \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\Big) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 + \frac{1}{2}\sum_{ij}(x_i y_j - x_j y_i)^2 \geq \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 \ ?$$

$n = 3$: $\|x\|^2 \|y\|^2 = |\langle x, y\rangle|^2 + |x \times y|^2$

ALLGEMEINER BEWEIS

Fall 1: $y = 0 \rightarrow$ trivial $\langle x, y\rangle = 0$

Fall 2: $y \neq 0$. Sei λ beliebig

$$0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, \lambda y\rangle - \langle \lambda y, x\rangle + \langle \lambda y, \lambda y\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle - \bar{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda \underbrace{\langle y, x\rangle}_{= \lambda\overline{\langle x, y\rangle}} + |\lambda|^2 \langle y, y\rangle$$

gilt für alle λ, insbesondere für $\lambda = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$

$$0 \leq \langle x, x\rangle - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\overline{\langle x, y\rangle} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle^2}\langle y, y\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle}$$

$$\Rightarrow \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \geq |\langle x, y\rangle|^2$$

Gleichheit $\Rightarrow x - \lambda y = 0 \Rightarrow x = \lambda y \Rightarrow$ linear abhängig

Umgekehrt wenn $x = \lambda y$

$$|\langle x, y\rangle| = |\langle \lambda y, y\rangle| = |\lambda|\, \|y\|^2 = \|x\| \cdot \|y\| = \|\lambda y\| \cdot \|y\| \ \square$$

ad 8.19

N3) $$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \underbrace{\langle y, x\rangle}_{= \overline{\langle x, y\rangle}} + \langle y, y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

BEMERKUNG

$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$ wobei $1 < p \leq \infty$, $\|\cdot\|_p$ ... L^p-Norm

Höldersche Ungleichung

$\left|\sum x_i y_i\right| \leq \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

8.21 SATZ

Sei V Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit inneren Produkt $\langle .,. \rangle$

$B = \{b_1 \dots b_n\}$ Basis von V

Dann existiert eine hermitesche Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

sodass $\langle x,y \rangle = \Phi_B(x)^t \, A \, \overline{\Phi_B(y)}$

Wenn $\langle .,. \rangle$ positiv definit, dann ist A regulär

Sei $x = \sum_{i=1}^n \xi_i b_i \qquad y = \sum_{i=1}^n \eta_i b_i$

$$\Phi_B(x) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \qquad \Phi_B(y) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

$$\langle x,y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \xi_i b_i , \sum_{j=1}^n \xi_j b_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \overline{\eta_j} \underbrace{\langle b_i , b_j \rangle}_{=: a_{ij}}$$

$$= \sum_{ij} \xi_i \, a_{ij} \, \overline{\eta_j} = \xi^t A \overline{\eta}$$

$$a_{ji} = \langle b_j , b_i \rangle = \overline{\langle b_i , b_j \rangle} = a_{ij}$$

Zusatz: $\langle .,. \rangle$ pos. def. $\Rightarrow$ A regulär

Es genügt z.z. $\ker A = \{0\}$

Sei $A \xi = \underset{\text{Vektor}}{0} \Rightarrow \xi^t A \xi = \underset{\text{Zahl}}{0} \Rightarrow \sum \xi_i b_i = 0$

$$\langle \sum \xi_i b_i , \sum \xi_i b_i \rangle$$

$\overset{\text{Basis}}{\Rightarrow}$ alle $\xi_i = 0$

Wie erkennt man pos. def Skalarprodukte?

8.22 DEFINITION

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

Dann heißt die Matrix $A^* := \overline{A}^t$, $(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$

die zu A adjungierte Matrix

A heißt selbstadjungiert wenn $A = A^*$

... symmetrisch wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

hermitesch wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

A heißt $\begin{Bmatrix}\text{positiv} \\ \text{negativ}\end{Bmatrix} \begin{Bmatrix}\text{definit} \\ \text{semidefinit}\end{Bmatrix}$ wenn das innere Produkt $\langle \xi, \eta \rangle_A = \xi^t A \overline{\eta}$ die entsprechende Eigenschaft hat

z.B. A positiv definit wenn $\xi^t A \overline{\xi} > 0 \quad \forall \xi \neq 0$

Wir wollen nun feststellen wie "positiv" eine gegebene Matrix ist – analog zum Rang:

Jede Matrix ist äquivalent zu einer Matrix der Form $\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots 1 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & \ddots 0 \end{bmatrix}$ d.h. $(\exists P, Q \in GL(n, \mathbb{K}))\ P \cdot A \cdot Q = I^{(n)}$

rk(A)... Anzahl der Einser

8.23 DEFINITION

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißen **kongruent**, wenn

$(\exists C \in GL(n, \mathbb{C})): C^* A C = B$ $\quad A \widehat{=} B$

strengere Bedingung als Äquivalenz

8.24 SATZ

Jede hermitesche Matrix ist kongruent zu einer Diagonalmatrix

$D = \operatorname{diag}(+1 \dots +1, -1 \dots -1, 0 \dots 0)$

BEWEIS

$n = 1: \quad A = [a_{11}]$

Gesucht: c_{11} sodass $\overline{c_{11}} \cdot a_{11} \cdot c_{11} = +1, -1, 0$

$|c_{11}|^2 \cdot a_{11} = \pm 1$

$\rightarrow \quad c_{11} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|a_{11}|}} & \text{wenn } a_{11} \neq 0 \\ 1 & \text{wenn } a_{11} = 0 \end{cases}$

$c_{11} \cdot a_{11} \cdot \overline{c_{11}} = \operatorname{sign} a_{11}$

$n-1 \rightarrow n$ $\qquad$ Idee: $\begin{pmatrix} * & 0 & \rightarrow \\ 0 & & \\ \downarrow & & \end{pmatrix}$ erzeuge 0 in 1. Spalte und 1 Zeile

Fall 1: $A = 0 \quad \Rightarrow \quad C = I$

Fall 2: $A \neq 0, \quad a_{11} = 0$

Fall 2a: $\exists j: a_{jj} \neq 0$

$C = T_{1j} = C^*$

$\Rightarrow (C^* A C)_{11} = a_{jj} \neq 0 \quad \rightarrow$ Fall 3

Fall 2 b: $\forall a_{jj} = 0$ $\quad \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

$$C = I + E_{ij} \cdot e^{i\theta} \qquad \text{sodass } e^{-i\theta} a_{ij} = a_{ij}$$

$$A' = (C^* A C)_{jj} = \left[(I + E_{ji} e^{-i\theta}) A (I + E_{ij} e^{i\theta}) \right]_{ij}$$

$$= A + E_{ji} e^{-i\theta} A + A E_{ij} e^{i\theta} + E_{ji} A E_{ij}$$

$$= \underbrace{a_{jj}}_{=0} + e^{-i\theta} a_{ij} + \underbrace{a_{ji} e^{i\theta}}_{\overline{a_{ij} e^{-i\theta}}} + \underbrace{a_{ii}}_{=0} = |a_{ij}| \quad \text{Wahl von } \theta$$

$$\Rightarrow A'_{jj} \neq 0 \longrightarrow \text{Fall 2a}$$

Fall 3: $a_{11} \neq 0$

Nullen erzeugen:

$$\begin{tikzcd}
 & A \overset{?}{=} 0 \arrow[rr, "\text{nein}"] \arrow[dl, "\text{ja}"'] & & a_{11} \overset{?}{=} 0 \arrow[dl, "a_{11}=0"'] \arrow[dr, "a_{11}\neq 0"] & \\
\text{Fall 1:} \arrow[d] & & \text{Fall 2} \arrow[d, "\exists j: a_{jj} \neq 0"'] \arrow[drr, "\forall a_{jj} \neq 0,\ \exists a_{ij} = 0"] & & \text{Fall 3} \\
C = I & & \text{Fall 2a} \arrow[d] & & \text{Fall 2b} \arrow[d] \\
 & & C = T_{1j} \arrow[uurr] & & C = I + E_{ij} e^{i\theta} \arrow[ull]
\end{tikzcd}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C^* \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$C' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|a_{11}|}} & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (C')^* C^* A C \cdot C' = \begin{pmatrix} \operatorname{sign} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

IV: $\Rightarrow$ es gibt $\tilde{C} \in GL(n-1, \mathbb{C})$: $\tilde{C}^* \tilde{A} \tilde{C} = \tilde{D}$

$$C'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{C} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \Rightarrow (C'')^*(C')^* C^* A\, C\, C'\, C''$$

$$= \operatorname{sign} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{D} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

8.25 BEISPIEL

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \text{Fall } 2b,\ a_{ii} \neq 0 \quad \forall i \in \{1,2,3\},\ a_{12} \neq 0$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A' := C^* \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 1 & 1+i \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 2 & 1+i \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\to$ Fall $2a$, $a'_{22} \neq 0$

$$\Rightarrow C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A'' = C_2^* \, A' \, C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1+i \\ 1 & 0 & i \\ 1-i & -i & 0 \end{pmatrix} \to \text{Fall } 3$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1+i}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A''' = C_3^* A'' C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1-i}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1+i \\ 1 & 0 & i \\ 1-i & -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1+i \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ 0 & \frac{-1-i}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ 0 & \frac{-1-i}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_4^* \cdot A''' \, C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ 0 & \frac{-1-i}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{-1-i}{2} & -1 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\frac{1+i}{2}}{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{C}^*_1 \widetilde{A}\, \widetilde{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1-i & 1 \end{pmatrix} \widetilde{A} \begin{pmatrix} 1 & -1+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{C}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\widetilde{C}_1} \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1+i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\widetilde{C}_2} \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot C_6$$

$$\Rightarrow C^* \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8.26 ÜBUNG

i) Wenn $A \geq 0$, C beliebig
A positiv semidefinit

$$\Rightarrow C^* \cdot A \cdot C \geq 0$$

ii) $A > 0$, $C \in GL(n, K)$

$$\Rightarrow C^* A \cdot C > 0$$

8.27 TRÄGHEITSSATZ VON SYLVESTER

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesche Matrix und $C \in GL(n, \mathbb{C})$
Dann ist die Anzahl der $+1, -1, 0$
eindeutig festgelegt.

Beweis

Sei $A \hat{=} D = \mathrm{diag}(\underbrace{+1, \ldots +1}_{r}, \underbrace{-1, \ldots -1}_{s}, \underbrace{0 \ldots 0}_{n-r-s})$

d.h $C^* A\, C = \begin{pmatrix} +1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & +1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} =: D$, C regulär

d.h. $r + s = rk(A)$

Sei $\tilde{C}^* A \cdot \tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} =: \tilde{D}$

$\rightarrow \quad r + s = \tilde{r} + \tilde{s}$

zz: $r = \tilde{r}$

Es genügt zz: $r \leq \tilde{r}$ (genauso $\tilde{r} \leq r$)

$\overline{C}$ ist eine Basistransformation in eine Basis $\mathcal{B}$ sodass

$x^t A \overline{x} = \Phi_{\mathcal{B}}(x)^t \, D \cdot \overline{\Phi_{\mathcal{B}}(x)}$

ebenso ist $\tilde{C}$ eine Basistransformation in eine Basis $\tilde{\mathcal{B}}$

sodass $x^t A \overline{x} = \Phi_{\tilde{\mathcal{B}}}(x)^t \, \tilde{D} \cdot \overline{\Phi_{\tilde{\mathcal{B}}}(x)}$

Für $x \in \mathcal{L}(b_1, \dots, b_r)$ ist $x^t A x$

$$= (\xi_1 \dots \xi_r, 0 \dots 0) \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\xi_1} \\ \vdots \\ \overline{\xi_n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} (\xi_i)^2 > 0 \quad \text{wenn} \quad x \neq 0$$

Für $x \in \mathcal{L}(\tilde{b}_{\tilde{r}+1}, \tilde{b}_{\tilde{r}+2}, \dots \tilde{b}_n)$

ist $x^t A \overline{x} = \Phi_{\tilde{\mathcal{B}}}(x)^t \, \tilde{D} \, \overline{\Phi_{\mathcal{B}}(x)}$

$$= (0 \dots 0 \ \tilde{\xi}_{\tilde{r}+1}, \dots \tilde{\xi}_n) \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \overline{\tilde{\xi}_{\tilde{r}+1}} \\ \vdots \\ \overline{\tilde{\xi}_n} \end{pmatrix}$$

$$= (\tilde{\xi}_{\tilde{r}+1} \dots \tilde{\xi}_n) \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\tilde{\xi}_{\tilde{r}+1}} \\ \vdots \\ \overline{\tilde{\xi}_n} \end{pmatrix} \leq 0$$

$\Rightarrow \mathcal{L}(b_1 \dots b_r) \cap \mathcal{L}(\tilde{b}_{\tilde{r}+1} \dots \tilde{b}_n) = \{0\}$

$\Rightarrow n \geq \underbrace{\dim \mathcal{L}(b_1 \dots b_r)}_{= r} + \underbrace{\dim \mathcal{L}(\tilde{b}_{\tilde{r}+1}, \dots \tilde{b}_n)}_{= n - \tilde{r}}$

$\Rightarrow 0 \geq r - \tilde{r} \Rightarrow r \leq \tilde{r}$

8.28 DEFINITION

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch und kongruent zu $\operatorname{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{r},\underbrace{-1\dots-1}_{s},\underbrace{0\dots0}_{n-r-s})$

Dann heißt $\operatorname{ind} A = r$ der Index von A

und $\operatorname{sign} A = r-s$ die Signatur von A

$r+s = \operatorname{rk}(A)$, $\underset{A \text{ pos def}}{A > 0} \iff r = n$

$r = \operatorname{ind} A$ ... maximale Dimension eines Unterraumes auf dem die Matrix A positiv definit ist

s ... maximale Dimension eines Unterraumes, sodass A negativ definit

- $A = C^* \cdot B \cdot C \Rightarrow B = (C^*)^{-1} A \cdot C^{-1}$
- $(C^*)^{-1} = (C^{-1})^*$

8.29 FOLGERUNGEN

$$A = \begin{pmatrix} c & & & & \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

c ... 300 000 km/s

$x = (t, x_1, x_2, x_3)$

$x^t A x = ct^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0$

i) Kongruenz ist Äquivalenzrelation

ii) $A \mathrel{\hat{=}} B \iff \operatorname{ind} A = \operatorname{ind} B \wedge \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$

iii) $A > 0 \iff \operatorname{ind} A = n$

iv) $A \geq 0 \iff \operatorname{ind} A = \operatorname{sign} A$

v) $A < 0 \iff \operatorname{ind} A = 0 \wedge \operatorname{sign} A = -n$

vi) indefinit $\iff r > 0, s > 0$; $\operatorname{ind} A \neq 0 \wedge \operatorname{ind} A - \operatorname{sign} A \neq 0$
$\rightarrow \operatorname{ind} A (\operatorname{ind} A - \operatorname{sign} A) \neq 0$

8.30 LEMMA

i) $\det A^* = \det \overline{A^t} = \det \overline{A} = \overline{\det A}$

ii) wenn $A = A^* \Rightarrow \det A \in \mathbb{R}$

iii) wenn $A = A^*$, $B = B^*$ und $A \mathrel{\hat{=}} B$
dann ist $\det A$ und $\det B$ haben das gleiche Vorzeichen

iv) wenn $A > 0 \Rightarrow \det A > 0$

BEWEIS

i), ii) klar

iii) $B = C^* \cdot A \cdot C$

$\Rightarrow \det B = \det C^* \cdot \det A \cdot \det C$

$= \underbrace{|\det C|^2}_{>0} \cdot \det A$

iv) $A > 0 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} A \cong I \overset{iii)}{\Rightarrow} \det A > 0$

$\rightarrow$ betrachte $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

8.31 DEFINITION

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_r\}$, $J = \{j_1 < j_2 < \dots < j_r\} \subseteq \{1, \dots, n\}$

$$[A]_{IJ} := \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_r} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_rj_1} & a_{i_rj_2} & \dots & a_{i_rj_r} \end{vmatrix}$$ heißt Minor von A

speziell, die Determinanten

$$\det A_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

heißen Hauptminoren von A

8.32 SATZ Hauptminorenkriterium

Sei $A = A^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$

i) $A > 0 \Leftrightarrow \det A_r > 0 \quad \forall r = 1 \dots n$

ii) $A < 0 \Leftrightarrow (-1)^r \det A_r > 0 \quad \forall r = 1, \dots, n$

BEWEIS

i) $\curvearrowright$ $A > 0 \overset{8.30.iv}{\Rightarrow} A_n = A > 0 \Rightarrow \det A_n > 0$

Es genügt ~~zz~~: alle Teilmatrizen A_r, $r = 1, \dots, n$ sind positiv definit, d.h. $\xi^t A \xi := \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}^t A \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} > 0$, $\xi \in \mathbb{C}^r \setminus \{0\}$

$\overset{8.30iv}{\Rightarrow} \det A_r > 0$ $\qquad e_{ii} = e_i^t A e_i > 0$

Induktion

$r=1$: $A_1 = [a_{11}]$ ist positiv definit, denn $a_{11} = \det[a_{11}] > 0$

$r-1 \to r$:

Annahme $A_{r-1} > 0$ und $\det A_r > 0$

$\Rightarrow A_{r-1} \mathrel{\hat=} I_{r-1}$

$\Rightarrow \exists\, C_{n-1} \in GL(n-1,\mathbb{C}) : C_{r-1}^* A_{r-1} C_{r-1} = I_{r-1}$

$$A_r' = \begin{pmatrix} C_{r-1}^* & \\ & 1 \end{pmatrix} \underset{\begin{pmatrix} A_{r-1} & \vdots \\ x \cdots & x \end{pmatrix}}{\underset{\shortparallel}{A_r}} \begin{pmatrix} C_{r-1} & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r-1} & \begin{matrix} a_{1r} \\ \vdots \end{matrix} \\ \overline{a_{1r}} \cdots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & & & -a_{1r} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_{r-1,r} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^* A_r' C = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ -\overline{a_{1r}} & \cdots & -\overline{a_{r-1\,r}} & 1 \end{pmatrix} A_r' \begin{pmatrix} 1 & & & -a_{1r} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & -a_{r-1,r} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \tilde{a} \end{pmatrix}$$

$\tilde{a} \mathrel{\tilde{}} a$

$\det A_r' = \det |C_{r-1}|^2 \cdot \det A_r > 0$

$\tilde{a} = \det C' A_r' C = \det |C|^2 \det A'$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\tilde{a}}} \end{pmatrix} C^* A_r' C \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\tilde{a}}} \end{pmatrix} = I_r$$

$\Rightarrow A_r \mathrel{\hat=} I_r \iff A_r > 0$ $\square$

Von nun an: nur positiv definite innere Produkte

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \to$ Wähle Basis $(b_1, \ldots b_n)$

$A = [\langle b_i, b_j \rangle] \to A > 0$?

Schon gezeigt: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

wobei $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm ist

8.33 DEFINITION

i) Ein Vektorraum V mit positiv definiten Skalarprodukt heißt **euklidischer Raum** wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

unitärer Raum wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

(Prä-) Hilbertraum wenn $\dim = \infty$

↳ David Hilbert 1862 - 1943

1900: 23 Probleme $\begin{cases} 15 \text{ gelöst} \\ 5 \text{ ungelöst} \\ 3 \text{ unlösbar} \end{cases}$ → "Wir müssen wissen, wir werden wissen"

ii) Ein Element $v \in V$ heißt **normiert** wenn $\|v\| = 1$

$v \neq 0 \Rightarrow \frac{v}{\|v\|}$ ist normiert

iii) Seien $v, w \neq 0$ dann ist in $\mathbb{R}^3$ $\langle a, b \rangle = \|a\| \|b\|$

der Winkel $\measuredangle(v, w)$ genau $\arccos \operatorname{Re} \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$

$\arccos [-1, 1] \to [0, \pi]$

iv) zwei Vektoren v, w heißen **orthogonal**

... $v \perp w$ wenn $\langle v, w \rangle = 0$, d.h. $v = 0 \vee w = 0 \vee \varphi = \frac{\pi}{2}$

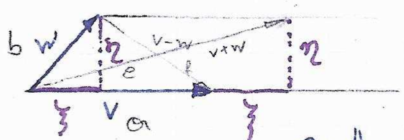
8.34 SATZ

In $(V, \langle .,. \rangle)$ gilt

i) $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\| \|w\| \cos \varphi$ Kosinussatz

ii) wenn $v \perp w$ dann $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ Pythagoras

iii) $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$ Parallelogrammgleichung



$a = \|v\|$ $\quad b = \|w\|$

$e = \|v + w\|$ $\quad f = \|v - w\|$

$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$ $\qquad \xi^2 + \eta^2 = b^2$

$(a + \xi)^2 + \eta^2 = e^2$ $\qquad (a - \xi)^2 + \eta^2 = f^2$

$(a + \xi)^2 + (a - \xi)^2 + 2\eta^2 = e^2 + f^2$

$\rightarrow 2(a^2 + \xi^2 + \eta^2) = 2(a^2 + b^2)$

8.35 BEMERKUNG

Man kann zeigen (von Neumann): wenn eine Norm die Parallelogrammgleichung erfüllt, dann kommt sie von einem Skalarprodukt. Bsp. $\|x_1\| = |x_1| + \dots + |x_n|$ erfüllt iii) nicht

8.36 DEFINITION

Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt

Eine Familie $(v_i)_{i \in I} \subseteq V$ heißt

i) orthogonal wenn $\forall i \neq j : \langle v_i, v_j \rangle = 0$

ii) orthonormal wenn $\forall i j : \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

iii) Orthonormalbasis wenn orthonormal und Basis

8.37 BEISPIELE

$(e_1, \dots, e_n)$ in $\mathbb{K}^n$ ist ONB bzgl. Standardskalarprodukt

i) $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

ii) $\int_0^1 \sin 2\pi m x \ \sin 2\pi n x \ dx = \delta_{mn} \cdot 2$

$\int \sin 2\pi n x \ \cos 2\pi n x = 0$

$\int_0^1 \cos 2\pi m x \ \cos 2\pi n x \ dx = \delta_{mn} \, 2$

ist ONB bzgl Standardskalarprodukt

$\{1\} \cup \{ \frac{\sin 2\pi n x}{\sqrt{2}} \mid n \in \mathbb{N} \} \cup \{ \frac{\cos 2\pi n x}{\sqrt{2}} \mid n \in \mathbb{N} \}$

ist orthogonal in $C[0,1]$

$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \, g(x) \, dx$

Aufgespannter Unterraum, trigonometrische Polynome

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ \cos 2\pi \ nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \sin 2\pi n \ x$

8.38 SATZ

$(v_i)_{i \in I} \subseteq V \qquad v_i \neq 0$

i) $(v_i)_{i \in I}$ ist orthogonal $\Leftrightarrow \left(\frac{v_i}{\| v_i \|} \right)_{i \in I}$ ist orthonormal

ii) $(v_i)_{i \in I}$ Orthonormal $\Rightarrow (v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig

BEWEIS

i) trivial

ii) Seien $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 v_{i_1} + \dots + \lambda_k v_{i_k} = 0$; zz: $\forall \lambda_j = 0$

$0 = \langle 0, v_{i_j} \rangle = \langle \lambda_1 v_{i_1} + \dots + \lambda_k v_{i_k}, v_{i_j} \rangle$

$= \lambda_1 \langle v_{i_1}, v_{i_j} \rangle + \dots + \lambda_k \langle v_{i_k}, v_{i_j} \rangle$

$= \lambda_j \| v_{i_j} \|^2 \Rightarrow \lambda_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$

8.39 SATZ

Sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots b_n)$ eine ONB eines endlichdimensionalen Vektorraums V über $\mathbb{K}$

Seien $v, w \in V$ mit

$$\Phi_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \Phi_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

Dann gilt i) $\forall i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i = \langle v, b_i \rangle$

ii) $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_i}$

BEWEIS

i) $\langle v, w \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j , b_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{\langle b_j , b_i \rangle}_{\delta_{ji}} = \lambda_i$

ii) $\langle v, w \rangle = \Phi_{\mathcal{B}}(v)^t \underset{a_{ij} = \langle b_i, b_j \rangle}{A} \overline{\Phi_{\mathcal{B}}(w)}$

$= \Phi_{\mathcal{B}}(v)^t \overline{\Phi_{\mathcal{B}}(w)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_i}$

8.40 DEFINITION

$(V, \langle .,. \rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt, $M \subseteq V$

Dann heißt $M^{\perp} = \{ v \in V \mid \forall u \in M : \langle v, u \rangle = 0 \}$

das orthogonale Komplement von M

Für $v \in V$ sei $\overline{v} = \{v\}^{\perp}$

8.41 SATZ

$(V, \langle .,. \rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt; $M, N \subseteq V$ Unterräume

i) $M^{\perp}$ ist ein Unterraum

ii) $M \subseteq N \Rightarrow N^{\perp} \subseteq M^{\perp}$

$(M_1 \cup M_2)^{\perp} = M_1^{\perp} \cap M_2^{\perp}$

iii) $\{0\}^{\perp} = V$

iv) $V^{\perp} = \{0\}$

v) $M \cap M^{\perp} \subseteq \{0\}$

vi) $M^{\perp} = \mathcal{L}(M)^{\perp}$

vii) $M \subseteq (M^{\perp})^{\perp} = M^{\perp\perp}$

BEWEIS

i) $u^\perp = \{v \in V \mid \langle v,u\rangle = 0\} = \{v \mid T_u(v) = 0\} = \ker T_u$ Unterraum

$$T_u : V \to \mathbb{K}, \quad v \mapsto \langle v,u\rangle \quad \text{ist linear}$$

$$M^\perp = \bigcap_{u\in M} \underbrace{u^\perp}_{\text{Unterräume}} \Rightarrow M^\perp \text{ ist Unterraum}$$

ii) $N^\perp = \bigcap_{n\in N} u^\perp \subseteq \bigcap_{u\in M} u^\perp = M^\perp$

$$(M_1 \cup M_2)^\perp = \bigcap_{u \in M_1\cup M_2} u^\perp = \bigcap_{u\in M_1} u^\perp \cap \bigcap_{v\in M_2} u^\perp = M_1^\perp \cap M_2^\perp$$

iii) trivial

iv) $V^\perp = V \cap V^\perp = \{0\}$

v) $v \in M \cap M^\perp \Rightarrow \langle v,v\rangle = 0 \Rightarrow v = 0$

vi) $\mathcal{L}(M)^\perp \subseteq M^\perp$ wegen ii)

noch zz: $M^\perp \subseteq \mathcal{L}(M)^\perp$

Sei: $v \in M^\perp$, $u \in \mathcal{L}(M)$

$\Rightarrow (\exists u_1 \dots u_n \in M)(\exists \lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{K}): u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$

$$\langle v,v\rangle = \langle v, \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{\lambda_i} \underbrace{\langle v,u_i\rangle}_{=0} = 0$$

vii) Sei: $u \in M$. Dann muss gelten

$$\forall u \in M^\perp: \langle v,u\rangle = 0$$
$$\overset{\shortparallel}{\langle u,v\rangle} = 0$$

8.42 FOLGERUNG

Wenn $U \subseteq V$ Unterraum dann ist die Summe $U + U^\perp$ direkt

$$(U+U^\perp) \overset{vi}{=} (U \cup U^\perp)^\perp = U^\perp \cap (U^\perp)^\perp \underset{v)}{=} \{0\}$$

BEISPIEL

$$V = \ell^2 = \{(\xi_n)_n \mid \sum_{i=1}^\infty |\xi_n|^2 < \infty\}$$

$U = \mathcal{L}((e_i)_{i\in\mathbb{N}}) \neq V \quad = \{(\xi_n)_n \mid \xi_n = 0$ für fast alle $n\}$

$$U^\perp = \{x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \underset{\xi_i}{\overset{\shortparallel}{\langle x, e_i\rangle}} = 0 \ \forall i\}$$

$U = U + U^\perp \neq V \qquad U^\perp = \{0\} \qquad V = (U^\perp)^\perp \neq U$

$\overset{n}{\smile} \quad U + U^\perp = V \iff U = U^{\perp\perp}$

Ab jetzt Annahme

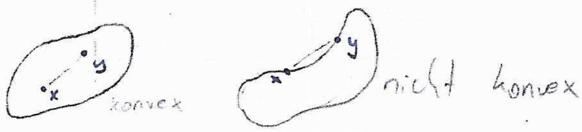
$V = U \dotplus U^\perp$ → Projektion

jeder Vektor x hat eindeutige Zerlegung

$x = u + v$ wobei $u \in U$, $v \in U^\perp$

sodass $u \perp v$

8.44 DEFINITION



V Vektorraum

Eine Teilmenge $K \subseteq V$ heißt **konvex** wenn

$(\forall x, y \in K)(\forall \lambda \in [0,1]) : (1-\lambda x) + \lambda y \in K$ "Konvexkombination"

8.45 BEISPIELE

i) $(V, \|\cdot\|)$ normierter Raum

Dann ist $B(0,1) = \{x \mid \|x\| < 1\}$ konvex

$x, y \in B(0,1)$ $\lambda \in [0,1]$

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| \leq (1-\lambda)\|x\| + \lambda\|y\| < (1-\lambda) + \lambda = 1$$

ii) Unterräume sind konvex

iii) Translationen und skalare Vielfache konvexer Mengen sind konvex

z.B. - Lineare Mannigfaltigkeiten

- $B(x, r)$ ist konvex

iv) $K \subseteq V$ konvex, $f: V \to W$ linear $\Rightarrow f(K)$ konvex

8.46 SATZ

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt

$K \subseteq V$ konvex $x \in V$, $y_0 \in K$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent

i) $\forall y \in K : \|x - y_0\| \leq \|x - y\|$

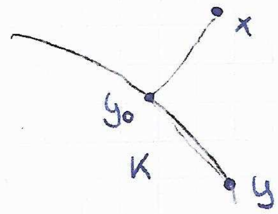
ii) $\forall y \in K : \operatorname{Re}\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0$

iii) $\forall y \in K \setminus \{y_0\} : \|x - y_0\| < \|x - y\|$

Wenn K eine lineare Mannigfaltigkeit ist, dann ist ii) äquivalent zu ii') $\forall y \in K: \langle x-y_0, y-y_0 \rangle = 0$

BEWEIS

i) $\to$ ii)



Sei: $y \in K$, $0 < \varepsilon < 1$

$\Rightarrow y^2 = (1-\varepsilon)y_0 + \varepsilon y_1 \in K$

$\Rightarrow \| x - y_0 \| \leq \| x - y_\varepsilon \|$ $\qquad y_\varepsilon = y_0 + \varepsilon(y - y_0)$

$0 \leq \| x - y_\varepsilon \|^2 - \| x - y_0 \|^2 = \| x - y_0 - \varepsilon(y-y_0) \|^2 - \| x - y_0 \|^2$

$= \| x - y_0 \|^2 + \varepsilon^2 (\| y - y_0 \|^2 - 2 \mathrm{Re} \langle x-y_0, y-y_0 \rangle \varepsilon - \| x - y_0 \|^2$

$= \varepsilon (\varepsilon \| y - y_0 \|^2 - 2 \mathrm{Re} \langle x - y_0, y - y_0 \rangle)$

$\varepsilon \to 0 \quad \Rightarrow \quad -2 \mathrm{Re} \langle x - y_0, y - y_0 \rangle \geq 0$

(Wäre $\mathrm{Re} \langle x-y_0, y-y_0 \rangle > 0 \Rightarrow y \neq y_0$

wähle $\varepsilon < \frac{2 \mathrm{Re} \langle x-y_0, y-y_0 \rangle}{\| y - y_0 \|} \Rightarrow \lightning$)

ii) $\to$ iii)

Sei: $y \in K \setminus \{y_0\}$

$\| x - y \|^2 = \| x - y_0 + (y - y_0) \|^2$

$= \| x - y_0 \|^2 + \| y_0 - y \|^2 + 2 \mathrm{Re} \langle x - y_0, y_0 - y \rangle$

$\geq \| x - y_0 \|^2 + \underbrace{\| y_0 - y \|^2}_{>0} > \| x - y_0 \|^2$

iii) $\to$ i) Übung

ii') Fall $K = U$ ist Unterraum

ii) $\forall y \in U: \mathrm{Re} \langle x - y_0, \underbrace{y - y_0}_{=: z \in U} \rangle \leq 0$

$y - y_0 \in U \Leftrightarrow y \in U$

$\Leftrightarrow \forall z \in U: \mathrm{Re} \langle x - y_0, z \rangle \leq 0$

$\Rightarrow \forall z \in U \quad \mathrm{Re} \langle x - y_0, -z \rangle \leq 0$

$\Rightarrow \mathrm{Re} \langle x - y_0, z \rangle \geq 0$

$\Rightarrow \forall z \in U: \mathrm{Re} \langle x - y_0, z \rangle = 0$

$\Rightarrow \forall z \in U: \mathrm{Re} \langle x - y_0, iz \rangle = 0 \Rightarrow \forall z \in U: \mathrm{Re} (-i \langle x - y_0, z \rangle) = 0$

$\mathrm{Re}(-i(a+ib)) = b$

$\Rightarrow \forall z \in U: \mathrm{Im}\langle x - y_0, z\rangle = 0$

$\Rightarrow \forall z \in U: \langle x - y_0, z\rangle = 0 \Rightarrow x - y_0 \in U^\perp$

8.47 FOLGERUNG

$(V, \|\cdot\|)$ Vektorraum mit Skalarprodukt

i) wenn $K \subseteq V$ konvex, dann hat das Optimierungsproblem

$$\begin{cases} \|x-y\| = \min! \\ y \in K \end{cases}$$ höchstens eine Lösung

ii) Wenn $U \subseteq V$ Unterraum dann gibt es höchstens einen Punkt $y_0 \in U$ sodass $x - y_0 \in U^\perp$

$\Rightarrow$ die Summe $U + U^\perp$ ist direkt $\Leftrightarrow U = U^{\perp\perp} \Leftarrow \dim U < \infty$

8.48 DEFINITION

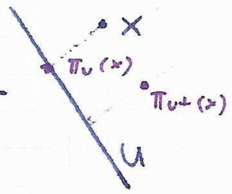
$(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt $\quad V = U \dotplus W$

$U \subseteq V$ Unterraum mit $V = U \dotplus U^\perp$. $\quad (\forall x \in V)(\exists! u \in U)(\exists! w \in W): x = u + w$

Dann heißen $\pi_U : V \to V \qquad \pi_{U^\perp} : V \to V$

sodass $\forall x \in V: \pi_U(x) \in U \wedge \pi_{U^\perp}(x) \in U^\perp$

die Orthogonalprojektionen auf U und $U^\perp$



8.49 WIEDERHOLUNG

Wir wissen aus der Theorie allgemeiner direkter Summen; $V = U \dotplus W \Leftrightarrow \forall x\ \exists!\ u \in U, w$

i) $x \in U \Leftrightarrow \pi_U(x) = x \Leftrightarrow \pi_{U^\perp}(x) = 0$

ii) $x \in U^\perp \Leftrightarrow \pi_U(x) = 0 \Leftrightarrow \pi_{U^\perp}(x) = x$

iii) $\pi_{U^\perp} = \mathrm{id} - \pi_U$

iv) $\pi_U \circ \pi_U = \pi_U$

v) π_U ist linear

8.50 SATZ

Sei: $V = U \dot{+} U^\perp$

i) $\forall x,y \in V: \langle x, \Pi_U(y)\rangle = \langle \Pi_U(x), y\rangle = \langle \Pi_U(x), \Pi_U(y)\rangle$

ii) $\forall x \in V: \|\Pi_U(x)\| \leq \|x\|$

und $\|\Pi_U(x)\| = \|x\| \iff x \in U$

BEWEIS

i) $x = \Pi_U(x) + \Pi_{U^\perp}(x)$

$y = \Pi_U(y) + \Pi_{U^\perp}(y)$

$\langle x, \Pi_U(y)\rangle = \langle \Pi_U(x) + \Pi_{U^\perp}(x), \Pi_U(y)\rangle$

$= \langle \Pi_U(x), \Pi_U(y)\rangle + \underbrace{\langle \underset{\in U^\perp}{\Pi_{U^\perp}(x)}, \underset{\in U}{\Pi_U(y)}\rangle}_{=0} = \langle \Pi_U(x), \Pi_U(y)\rangle$

genauso: $\langle \Pi_U(x), y\rangle = \langle \Pi_U(x), \Pi_U(y)\rangle$

ii) $\|x\|^2 = \|\Pi_U(x) + \Pi_{U^\perp}(x)\|^2 \overset{\text{Pythagoras}}{=} \|\Pi_U(x)\|^2 + \|\Pi_U(y)\|^2 \geq \|\Pi_U(x)\|$

Gleichheit $\iff \Pi_{U^\perp}(x) = 0 \iff x \in U$

8.51 DEFINITION

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt

$v_1, \dots v_m \in V$.

Dann heißt die Matrix

$$\mathrm{Gram}(v_1 \dots v_m) := \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \dots & \langle v_1, v_m\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \dots & \langle v_2, v_m\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle v_m, v_1\rangle & \langle v_m, v_2\rangle & \dots & \langle v_m, v_m\rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times m}$$

die **Gram'sche Matrix** des Tupels $(v_1 \dots v_m)$

Jørgen Petersen Gram 1850 – 1916 (29.4)

8.52 BEMERKUNG

Wenn $V = \mathbb{R}^n$ (bzw $\mathbb{C}^n$)

dann ist $\langle v_i, v_j \rangle = v_i^t \overline{v_j}$

$\rightarrow G = V^t \overline{V}$ wobei: $V = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

Spaltenvektoren

8.53 SATZ

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt,

$v_1 \dots v_m \in V$

i) $G = \mathrm{Gram}(v_1 \dots v_m)$ ist hermitesch und positiv semidefinit und zwar ist $\xi^t G \overline{\xi} = \| \sum_{i=1}^m \xi_i v_i \|^2$

ii) $\xi \in \ker G \iff \sum_{i=1}^m \overline{\xi}_i v_i = 0$

iii) G positiv definit $\iff G$ regulär $\iff v_1 \dots v_m$ l.u.

BEWEIS

i) $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \overline{\langle v_j, v_i \rangle} = \overline{g_{ji}} \Rightarrow G$ ist hermitesch

$$\xi^t G \overline{\xi} = \sum_{i,j=1}^m \xi_i \langle v_i, v_j \rangle \overline{\xi}_j$$

$$= \langle \sum_{i=1}^m \xi_i v_i, \sum_{i=1}^m \xi_j v_j \rangle = \| \sum_{i=1}^m \xi_i v_i \|^2$$

ii) $\curvearrowright$ Sei $\xi \in \ker G$

$$G \cdot \xi = 0 \Rightarrow \overline{\xi}^t G \xi = 0$$

$$\overline{\xi}^t G \xi = \| \sum_{i=1}^n \overline{\xi}_i v_i \|^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m \overline{\xi}_i v_i = 0$$

$\curvearrowleft$ Sei $\sum_{i=1}^m \xi_i v_i = 0$

$$(G\xi)_{ij} = \sum_{j=1}^m \langle v_i, v_j \rangle \xi_j = \langle v_i, \underbrace{\sum_{j=1}^m \xi_j v_j}_{=0} \rangle = 0$$

Gilt $\forall i = \{1, \dots, m\} \Rightarrow G \cdot \xi = 0 \Rightarrow \xi \in \ker G$

iii) $G > 0 \iff \xi^t G \xi > 0 \quad \forall \xi \neq 0$

$\iff \| \sum_{i=1}^{m} \xi_i v_i \|^2 > 0 \quad \forall \xi \neq 0$

$\iff \sum_{i=1}^{m} \xi_i v_i \neq 0 \quad \forall \xi \neq 0 \iff \ker G = \{0\} \iff G$ regulär

$\iff$ $v_1 \dots v_m$ sind linear unabhängig

8.54 SATZ

$(V, \langle .,. \rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt

$U \subseteq V$ Unterraum mit $\dim U < \infty$, und Basis $(u_1 \dots u_m)$

$G = \text{Gram}(u_1 \dots u_m)$ pos. def. und regulär

Dann ist für $x \in V$ die Orthogonalprojektion gegeben durch:

$$\pi_U(x) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j u_j \text{, wobei } \xi = \begin{pmatrix} \langle x, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, u_m \rangle \end{pmatrix} \text{ und } \bar{\eta} = G^{-1} \bar{\xi}$$

Wir tun so als ob $u_1 \dots u_m$ ONB wäre

→ Korrektur durch Gram-Matrix

BEWEIS

Sei $u = \sum_{j=1}^{m} \eta_j u_j$. Es genügt zu zeigen, dass

$$x - U \in U^\perp = \{\underbrace{u_1 \dots u_m}_{\text{Basis von } U}\}^\perp$$

weil $\forall y \in U : \langle x - y_0, y - y_0 \rangle = 0$ wobei $y_0 = \pi_U(x)$ das eindeutige Element $u \in U$ ist für das $x - u \in U^\perp$

d.h. zz: $\langle u_i, u \rangle = \langle u_i, x \rangle$ für $i = 1, \dots, m$

$\langle u_i, u \rangle = \langle u_i, \sum_{j=1}^{m} \eta_j u_j \rangle = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{= g_{ij}} \bar{\eta}$

$= \underline{(G \cdot \bar{\eta})_i} = \xi_i$ $\qquad \bar{\eta}$ löst die Gleichung $G \bar{\eta} = \xi$

$= \langle x, u_i \rangle = \langle u_i, x \rangle$

$\Rightarrow \langle x - u, u_i \rangle = 0 \quad \forall i \in \{1 \dots m\} \Rightarrow x - u \in U^\perp$

8.55 BEISPIEL

Bestimme das Polynom vom Grad ≤ 2 für das

$$\int_0^1 |t^3 - p(t)|^2 \, dt = \min$$

$$V = \mathbb{R}[x], \quad \mathbb{K} = U = \mathbb{R}_2[x] = \mathcal{L}(1, x, x^2)$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) \, dt$$

Gesucht: Orthogonalprodukt von x^3 auf $\mathcal{L}(1, x, x^2)$

Schritt 1: Gram-Matrix G

$$G_{ij} = \int_0^1 t^{i-1} t^{j-1} \, dt = \int_0^1 t^{i+j-2} \, dt = \frac{1}{i+j+1}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Hankelmatrix

Hilbertmatrix

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_2 & h_3 & h_4 \\ h_3 & h_4 & h_5 \end{bmatrix}$$

Momentproblem

$$\int_0^1 p(t)^2 \, dt = \min$$

unsere Lösung:

$$p(t) = \sum_{i=1}^{3} \eta_i t^{i-1} \qquad \eta = G^{-1} \xi \qquad \xi_i = \langle x^3, u_i \rangle = \int_0^1 t^3 t^{i-1} \, dt = \frac{1}{3+i}$$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/5 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -34 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/5 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/20 \\ -3/5 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

$$p(x) = \frac{1}{20} - \frac{3}{5} x + \frac{3}{2} x^2$$

$n \times n$ Hilbertmatrix:

Stirling

$$\det H_n = \frac{c_n^4}{c_{2n}} \sim \frac{(2\pi)^n}{4^{n^2}\sqrt[4]{n}}$$

$$c_n = \prod_{i=1}^{n-1} i!$$

... gute Testmatrix für numerische Algorithmen

8.56 KOROLLAR

Sei $U \leq V$ Unterraum, $(u_1, \dots u_m)$ eine ONB

Dann gilt:

i) $\forall v \in V: \pi_U(v) = \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i \rangle u_i$

ii) $\forall v \in V: \sum_{i=1}^{m} |\langle v, u_i \rangle|^2 \leq \|v\|^2$ Besselsche Ungleichung

wenn $\sum_{i=1}^{m} |\langle v, u_i \rangle|^2 = \|v\|^2 \Leftrightarrow v \in U$ Parsevalsche Identität

BEWEIS

klar: $G = I$ daher $\eta_i = \xi_i$. d.h. wenn $u_1 \dots u_m$ eine ONB von U ist, dann können wir $\pi_U(v)$ sofort hinschreiben

Wie finde ich eine Orthonormalbasis?

8.57 SATZ (Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren)

Gegeben: $v_1 \dots v_m$ linear unabhängig

konstruiere $u_1 \dots u_m$ ONS, sodass

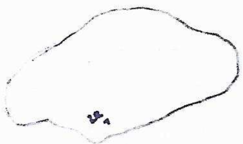
$$\mathcal{L}(u_1 \dots u_m) = \mathcal{L}(v_1 \dots v_m)$$

Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt

$(v_1 \dots v_m)$ linear unabhängig.

Dann existiert ein ONS $(u_1 \dots u_m) \subseteq V$

sodass $\mathcal{L}(u_1 \dots u_m) = \mathcal{L}(v_1 \dots v_m)$



gesucht $u \in U_k$

$U_k = \mathcal{L}(v_1 \dots v_k) = \mathcal{L}(u_1 \dots u_k)$

sodass $v_{k+1} - u \in U_k^\perp$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \quad \text{und für } k = 2, \dots, m$$

$$\text{sei } \tilde{u}_k = v_k - \underbrace{\sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k, u_j \rangle u_j}_{\pi_{U_{k-1}}(v_k)}$$

$$u_k = \frac{\tilde{u}_k}{\|\tilde{u}_k\|}$$

BEWEIS

$k=1$: $\|v_1\| = 0$ weil linear unabhängig

$$\to u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$k-1 \to k$:

Ang $u_1 \dots u_{k-1}$ ist ONB mit $\mathcal{L}(u_1 \dots u_{k-1}) = \mathcal{L}(v_1 \dots v_{k-1})$

$v_k \notin \mathcal{L}(u_1, \dots u_{k-1}) =: U_{k-1}$

$$U_{k-1}^{\perp} = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k, u_j \rangle u_j \overset{8.56}{=} v_k - \pi_{U_{k-1}}(v_k) \in U_{k-1}^{\perp}$$

$\Rightarrow$ $\tilde{u}_k \perp u_1 \dots u_{k-1}$, $u_k \neq 0$ weil v_k linear unabhängig von $u_1 \dots u_n$

$$u_k = \frac{\tilde{u}_k}{\|\tilde{u}_k\|} \to (u_1, \dots u_k) \text{ ist ONS}$$

klar: $\tilde{u}_k \in \mathcal{L}(u_1 \dots u_{k-1}, v_k) = \mathcal{L}(v_1 \dots v_k)$

$v_k = \tilde{u}_k + \sum \lambda_j u_j \in \mathcal{L}(u_1 \dots u_{k-1}, v_k) = \mathcal{L}(v_1 \dots v_k)$ □

8.58 BEISPIEL

$V = \mathbb{R}^3$ mit innerem Produkt $\langle x, y \rangle = x^t A y$

$$\text{mit } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Gesucht: ONB

Wir orthogonalisieren die kanonische Basis e_1, e_2, e_3

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\|v_1\| = v_1^t A v_1 = 1 \quad \to u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{u}_2 = v_2 - \overbrace{\langle v_2, u_1 \rangle}^{= a_{21}} u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\langle u_1, \tilde{u}_2 \rangle = 0$

$$\|u_2\| = (1\ 1\ 0)\ A \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 1-1-1+3 = 2$$

$$\rightarrow \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_3 = v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \frac{\langle v_3, \tilde{u}_2\rangle \tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|^2} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 0\cdot\tilde{u}_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\|\tilde{u}_3\|^2 = (-1\ 0\ 1)\ A \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = 1+2-1-1 = 1$$

Lösung: $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

8.59 Alternativmethode zur Konstruktion der Orthogonalprojektion

Bestimme ONB des Unterraums $U \leq \mathbb{C}^n$

Dann ist $P = \sum_{i=1}^{m} u_i u_i^* = \sum_{i=1}^{m} u_i \overline{u}^T$

gegeben: $v \in \mathbb{C}^n$

$$P \cdot v = \sum_{i=1}^{m} u_i \underbrace{u_i^* v}_{=\langle v, u_i\rangle} = \pi_U(v)$$

8.60 BEISPIEL 8.55 noch einmal

$V = \mathbb{R}[x] \qquad U = \mathcal{L}(1, x, x^2)$

gesucht: ONB

$$\|v_1\|^2 = \int_0^1 1^2\, dt = 1 \qquad u_1 = 1$$

$$\langle x, 1\rangle = \int_0^1 t\cdot 1\, dt = \frac{1}{2}$$

$$\tilde{u}_2 = v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1 = x - \langle x, 1\rangle\cdot 1 = x - \frac{1}{2}$$

$$\|\tilde{u}_2\|^2 = \int_0^1 (t-\tfrac{1}{2})^2\, dt = \frac{(t-\frac{1}{2})^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}$$

$$u_2 = \sqrt{12}\,(x - \tfrac{1}{2})$$

$$\tilde{u}_3 = x^2 - \langle x^2, 1\rangle 1 - \langle x^2, x-\tfrac{1}{2}\rangle (x-\tfrac{1}{2})\cancel{\sqrt{12}}$$

$$= x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$\|u_3\| = \int_0^1 (t^2 - t + \tfrac{1}{6})^2\, dt = \frac{1}{180}$$

$$\pi_U(x^3) = \langle x^3, 1\rangle 1 + \langle x^3, \overset{\tilde{u}_2}{x-\tfrac{1}{2}}\rangle \overset{u_2}{(x-\tfrac{1}{2})}\cancel{\sqrt{12}}$$

$$+ \langle x^3, x^2 - x + \tfrac{1}{6}\rangle (x^2 - x + \tfrac{1}{6})\, 180$$

V Vektorraum mit Skalarprodukt, $\dim V < \infty$

- Jeder Unterraum U hat eindeutiges orthogonales Komplement sodass $V = U \oplus U^\perp$
- $\pi_U : V \to U$ Orthogonalprojektion, hat die Eigenschaft $\| \pi_U(v) \| \leq \| v \|$
- Wir können immer eine Orthonormalbasis von U bestimmen, dann ist $\pi_U(v) = \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i \rangle u_i$

RÜCKBLICK.

$\mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}) =: V^*$ Dualraum

Die Abbildung
$$V \times V \to \mathbb{K}$$
$$(x, f) \mapsto \langle x, f \rangle = f(x)$$
ist bilinear

Das Skalarprodukt
$$V \times V \to \mathbb{K}$$
$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$
ist sesquilinear

Jedes $y \in V$ induziert $f_y \in V^*$, $f_y(x) = \langle x, y \rangle$
$$V \to V^*$$
$$y \mapsto f_y$$
ist eine antilineare Einbettung

injektiv:

Ang $f_y = 0 \Rightarrow f_y(x) = 0 \ \forall x$

insbes $\underbrace{f_y(y)}_{\langle y, y \rangle = \|y\|^2} = 0 \Rightarrow y = 0$

8.61 DARSTELLUNGSSATZ VON RIESZ   FRIGGES

$(V, \langle .,. \rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt, $\dim V < \infty$

Dann ist die Abb: $V \to V^*$

$$y \mapsto f_y : V \to \mathbb{K}$$
$$x \mapsto \langle x, y \rangle$$

ein antilinearer Isomorphismus

BEWEIS   antilinear: $f_{\lambda y + \mu z} = \bar{\lambda} f_y + \bar{\mu} f_z$

- injektiv → schon gezeigt
- surjektiv:

  gegeben: $f \in V^*$

  gesucht: $y \in V$ sodass $f = f_y$

  Sei $(u_1 \dots u_n)$ ONB von V

  Setze $y = \sum_{i=1}^{n} \overline{f(u_i)}\, u_i$

$$f_y(x) = \langle x, y \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^{n} \overline{f(u_i)}\, u_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} f(u_i) \langle x, u_i \rangle$$
$$= f\left(\sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i\right) = f(x) \Rightarrow f_y = f \quad \square$$

Der andere Darstellungssatz von Riesz sagt
$C[0,1]^* =$ Raum der Maße auf $[0,1]$

8.62 ÜBUNG

i) $v = 0 \Leftrightarrow \forall w \in V : \langle v, w \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall f \in V^* : f(v) = 0$

ii) $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sup \{ |\langle v, w \rangle| \mid \|w\| \le 1 \}$
$= \sup \{ |f(v)| \mid f \in V^*, \|f\| \le 1 \}$

ERINNERUNG

$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{w^*} \mathbb{K}$

$f^T : W^* \to V^*$ $W^* \to V^*$

$f^T(w^*) = w^* \circ f \in V^*$ $\downarrow$

$\mathbb{K}$

d.h. $V^* \simeq V$

8.63 SATZ & DEFINITION

$(V, \langle .,. \rangle_v), (W, \langle .,. \rangle_w)$ Vektorräume mit Skalarprodukt

$\dim V, \dim W < \infty \qquad g \in \mathrm{Hom}(V, W)$

i) Für jedes $w \in W$ ist die Abbildung

$$v \mapsto \langle g(v), w \rangle = f_w \circ g(v)$$

ii) $\forall w \in W : \exists!\, u \in V : \forall v \in V : \langle g(v), w \rangle = \langle v, u \rangle$

wir bezeichnen $g^*(w) := u$

iii) Die Abbildung $g^* : W \to V$ ist linear und heißt adjungierte Abbildung

iv) Die Abbildung : $\cancel{H}om(V, W) \to \mathrm{Hom}(V, W)$

$$g \mapsto g^*$$

ist eine Antilineare Involution (d.h. $g^{**} = g$)

BEWEIS

i) $\langle g_i(v), w \rangle = f_w \; g(v)$

ist linear $\to f_w \circ g \in V^*$

ii) Riesz $\Rightarrow \exists!\, u \in V : f_w \circ g = f_u$

$\forall v \in V \; \langle g(v), w \rangle = \langle \quad , u \rangle = \langle v, g^*(w) \rangle$

wenn $\forall v \in V : \langle v, u_1 \rangle = \langle v, u_2 \rangle \overset{8.62}{\Rightarrow} u_1 = u_2$

iii) zz: g^* ist linear

$\forall v \in V : \langle v, g^*(\lambda w_1 + \mu w_2) \rangle \overset{!}{=} \langle v, \lambda g^*(w_1) + \mu g^*(w_2) \rangle$

$\langle v, g^*(\lambda w_1 + \mu w_2) \rangle = \langle g(v), \lambda w_1 + \mu w_2 \rangle$

$= \bar{\lambda} \langle g(v), w_1 \rangle + \bar{\mu} \langle g(v), w_2 \rangle = \bar{\lambda} \langle v, g^*(w_1) \rangle + \bar{\mu} \langle v, g^*(w_2) \rangle$

$= \langle v, \lambda g^*(w_1) \rangle + \langle v, \mu g^*(w_2) \rangle$

$= \langle v, \lambda g^*(w_1) + \mu g^*(w_2) \rangle$

$\mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(W, V)$

iv) zz: $g \mapsto g^*$ ist antilinear

d.h. zz. $(\lambda g + \mu h)^* = \bar\lambda g^* + \bar\mu h^*$

also $\forall v \in V: \forall w \in W: \langle v, (\lambda g + \mu h)^*(w)\rangle = \langle v, (\bar\lambda g^* + \bar\mu h^*)(w)\rangle$

$\langle v, (\lambda g + \mu h)^*(w)\rangle = \langle (\lambda g + \mu h)(v), w\rangle$

$= \lambda \langle g(v), w\rangle + \mu \langle h(v), w\rangle = \lambda \langle v, g^*(w)\rangle + \mu \langle v, h^*(w)\rangle$

$= \langle v, \bar\lambda g^*(w) + \bar\mu h^*(w)\rangle = \langle v (\bar\lambda g^* + \bar\mu h^*)(w)\rangle$ □

$\forall v \in V: \forall w \in W: \langle g^{**}(v), w\rangle = \overline{\langle w, g^{**}(v)\rangle}$

$= \overline{\langle g^*(w), v\rangle} = \langle v, g^*(w)\rangle = \langle g(v), w\rangle$

$\overset{8.62}{\Longrightarrow} \forall v \in V: g^{**}(v) = g(v) \implies g^{**} = g$ □

8.64 BEMERKUNG

Wenn $\dim V = \infty$ dann muss eine adjungierte Abbildung nicht existieren

Beispiel: $V = \mathbb{R}[x]$ $\quad \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$

$D: V \to V$

$p(x) \mapsto p'(x)$

$D^*(x)$ existiert nicht!

$\langle x^n, \underbrace{D^*(x_1)}_{= g(x)}\rangle = \langle D x^n, x\rangle = \int_0^1 n\, t^{n-1}\, dt = \frac{n}{n+1}$

$\sup_{t \in [0,1]} |q(t)| < M$

$\ldots = \int_0^1 t^n\, q(x)\, dt \implies |\langle x^n, Dx^*\rangle| \le \int_0^1 t^n\, |q(t) \cdot o(t)|\, dt \le \frac{M}{n-1}$ ↯

8.65 SATZ

Seien $B \subseteq V$, $C \subseteq W$ ONB

$B = (b_1 \ldots b_m)$ $\quad C = (c_1 \ldots c_n)$

$f \in \mathrm{Hom}(V, W) \to f^* \in \mathrm{Hom}(W, V)$

$\Phi_B^C(f^*) = \Phi_C^B(f)^* = \overline{\Phi_C^B(f)}^T$

BEWEIS

$$A = \Phi_C^B(f)$$

$$a_{ij} = \Phi_C(f(b_j)) = \langle f(b_j), c_i \rangle$$

$$\tilde{A} = \Phi_B^C(f^*)$$

$$\tilde{a}_{ij} = \underline{\Phi_B(f^*(c_j))} = \langle f^*(c_j), b_i \rangle = \overline{\langle b_i, f^*(c_j) \rangle}$$
$$= \overline{\langle f(b_i), c_j \rangle} = \overline{a_{ji}} \Rightarrow \tilde{A} = \overline{A}^{+}$$

8.66 SATZ

Eigenschaften der adjungierten Abbildung

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \qquad W \xrightarrow{g^*} V \xrightarrow{f^*} U$$

i) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

ii) $f^{**} = f$

iii) $\ker f^* = \operatorname{im}(f^*)^{\perp}$

iv) $\operatorname{im} f^* = \ker(f^*)^{\perp}$

v) f injektiv $\Leftrightarrow$ f^* surjektiv

vi) f surjektiv $\Leftrightarrow$ f^* injektiv

BEWEIS

i) $\forall u \in U: \forall w \in W: \langle u, (g \circ f)^*(w) \rangle_u = \langle g(f(u)), w \rangle_w$

$= \langle f(u), g^*(w) \rangle_v = \langle u, f^*(g^*(w)) \rangle_u$

$\overset{8.62}{\Rightarrow} (g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

ii) bereits gezeigt

iii) "$\subseteq$" Sei $u \in \ker f$

zz: $\forall v \in V: u \perp f^*(v)$

$\langle u, f^*(v) \rangle = \langle \underbrace{f(u)}_{=0}, v \rangle = 0$

"$\supseteq$" Sei $u \in \operatorname{im}(f^*)^{\perp}$ zz: $f(u) = 0$

8.62 $\Rightarrow$ genügt zz. $\langle f(u), v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$

$\langle f(u), v \rangle - \langle u, f^*(v) \rangle = 0$ weil $u \perp \operatorname{im}(f^*)$

$\square$

iv) wende iii) auf f^* an:

$$\ker(f^*) = \mathrm{im}(f^{**})^\perp = \mathrm{im}(f)^\perp$$

$$\Rightarrow \ker(f^*)^\perp = \mathrm{im}(f)^{\perp\perp} = \mathrm{im}\, f$$

v) f injektiv $\Leftrightarrow \ker f = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{im}\, f^* = U$

vi) wie v) angewandt auf f^*

8.67 DEFINITION

i) Eine lineare Abbildung $f: V \to V$ heißt **selbstadjungiert** wenn $f^* = f$

(Für Matrizen $A = A^*$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A = A^*$ symmetrisch)

ii) $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ heißt **unitär** (**lineare Isometrie**) wenn $\forall x, y \in V: \langle f(x), f(y) \rangle_W = \langle x, y \rangle_V$

8.68 BEMERKUNG

i) unitäre Abbildungen sind symmetrisch, daher injektiv

$$f(x) = 0 \Rightarrow \| f(x) \|^2 = 0$$

$$\langle f(x), f(x) \rangle = \langle x, x \rangle = \| x \|^2$$

ii) $\dim V < \infty$

$f: V \to V$ unitär $\Rightarrow f$ invertierbar

und $f^{-1} = f^*$ (1)

meist werden unitäre Operatoren durch die Beziehung (1) definiert

iii) $\dim V = \infty$, dann sind lineare Isometrien nicht automatisch invertierbar

BEWEIS

ii) f injektiv $\Rightarrow$ bijektiv (weil Dimension gleich)

$$\forall x, y \in V: \langle x, y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle = \langle f^*(f(x)), y \rangle$$

$$8.62 \Rightarrow \quad \forall x: \quad x = f^*(f(x))$$

$$\Rightarrow f^* \circ f = \mathrm{id} \Rightarrow f^* = f^{-1}$$

iii) Bsp: $V = \ell^2 = c_{00}$ (Raum der endlichen Folgen)

$= \{(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n, 0 \dots 0) \mid n \in \mathbb{N}, \xi_i \in \mathbb{R}\}$

$S : V \to V$

$(\xi_1, \xi_2 \dots) \mapsto (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$

ist lineare Isometrie

$\langle S(x), y \rangle = \langle (0, \xi_1, \xi_2, \dots), (\eta_1 \dots \eta_n \dots) \rangle$

$= \sum_{i=2}^{\infty} \xi_{i-1} \overline{\eta_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\eta_{i+1}}$

$= \langle (\xi_1, \xi_2, \dots), (\eta_2, \eta_3 \dots) \rangle = \langle x, S^*(y) \rangle$

$\Rightarrow S^* : V \to V$

$(\eta_1, \eta_2, \dots) \mapsto (\eta_2, \eta_3, \dots)$

$S^* \circ S = id$

aber $S \circ S^* = id - P_1 \neq id$

wobei $P_1 : V \to V$

$(\xi_1, \xi_2 \dots) \mapsto (\xi_1, 0, \dots)$

$\Rightarrow S$ ist lineare Isometrie, aber nicht invertierbar

8.69 DEFINITION

- Eine Matrix $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt **unitär** wenn $U^* U = I$ $\Leftrightarrow U^* = U^{-1}$
- Eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **orthogonal** wenn $U^T U = I$ $\Leftrightarrow U^T = U^{-1}$

8.70 SATZ

Sei $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent

i) T ist unitär

ii) $\forall x \in \mathbb{C}^n : \|Tx\| = \|x\|$

iii) $\forall x, y \in \mathbb{C}^n : Re\langle Tx, Ty \rangle = Re\langle x, y \rangle$

iv) $\forall x, y \in \mathbb{C}^n : \langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$

v) Die Spalten von T bilden eine ONB

BEWEIS

$i \Rightarrow ii$) Sei $T^* = T^{-1}$

$\Rightarrow \|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^* T x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$

ii → iii) polarisation

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 =$$
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle - (\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle)$$
$$= 4\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle$$

$$\|T(x+y)\|^2 - \|T(x-y)\|^2 = \|Tx+Ty\|^2 - \|Tx-Ty\|^2 = \dots = 4\mathrm{Re}\langle Tx,Ty\rangle$$

iii → iv) $\mathrm{Re}\langle Tx,Ty\rangle = \mathrm{Re}\langle x,y\rangle$ gilt $\forall x,y$

=> es gilt für alle x, iy : $\mathrm{Re}\langle Tx, T(iy)\rangle = \mathrm{Re}(-i\langle Tx,Ty\rangle)$

$= \mathrm{Im}\langle Tx,Ty\rangle$ $\qquad \mathrm{Re}\langle x,iy\rangle = \mathrm{im}\langle x,y\rangle$

iv → v) Die Spalten von T sind

$u_i = T\cdot e_i$ n- Stück

→ es genügt zz: u_i sind ONS

$$\langle u_i,u_j\rangle = \langle Te_i,Te_j\rangle = \langle e_i,e_j\rangle = \delta_{ij}$$

v → i) $(T^*T)_{ij} = u_i^* \cdot u_j = \langle u_j,u_i\rangle = \delta_{ij}$

$\Rightarrow T^*T = I$

8.71 DEFINITION

$(X,d), (X',d')$ metrische Räume

$f: X \to X'$ heißt **Isometrie** wenn

$d'(f(x),f(y)) = d(x,y)$ normierte Räume, sind

metrische Räume $d(x-y) = \|x-y\|$

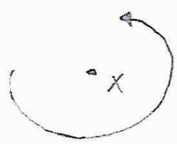
Isometrie zwischen metrischen Räumen:

$$\forall x,y \in V: \|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$$

8.72 BEISPIELE

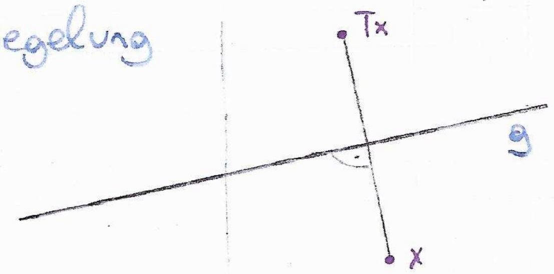
- Translation (nichtlinear)

- Rotation um x



linear <=> $x = 0$

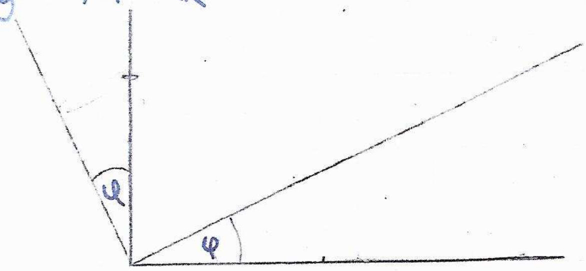
• Spiegelung



unitäre Abbildung

linear $\Leftrightarrow$ $0 \in g$

• Drehung im $\mathbb{R}^2$



$$U = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} t} \cdot x(0)$$

$$\dot{x} = \alpha \cancel{x} \qquad \frac{dx}{dt} = \alpha x$$

$$\frac{dx}{x} = \alpha \, dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \alpha \, dt$$

$$\log x = \alpha t \Rightarrow x = e^{\alpha t} \cdot e^{c} \qquad x_0 = e^c$$

$$x(t) = e^{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} t} x(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}{n!} t^n$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

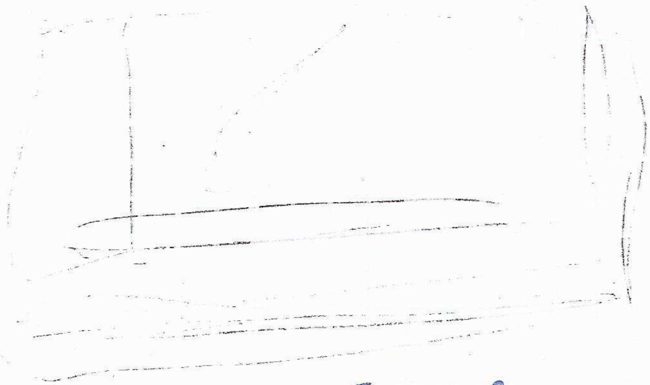
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^4 = I$$

$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\varphi}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{2n}}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n i \frac{\varphi^{2n+1}}{2n+1!}$$

$$= \cos\varphi + i \sin\varphi$$

$$e^{\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\varphi} = I\cdot\cos\varphi + \begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\sin\varphi$$
$$= \begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Lie Gruppen



$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 2\varphi - \frac{\pi}{2}$$

$$U = \begin{bmatrix}\cos 2\varphi & \cos(2\varphi - \frac{\pi}{2})\\ \sin 2\varphi & \sin(2\varphi - \frac{\pi}{2})\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}\cos 2\varphi & \sin 2\varphi\\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi\end{bmatrix}$$

8.73 SATZ

Die folgenden Mengen sind Gruppen

$O(n) = \{U \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid U^*U = I\}$ orthogonale Gruppe

$U(n) = \{U \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid U^*U = I\}$ unitäre Gruppe

$SO(n) = \{U \in O(n) \mid \det U = 1\}$ spezielle orthogonale Gruppe

$SU(n) = \{U \in U(n) \mid \det U = +1\}$ spezielle unitäre Gruppe

8.74 BEMERKUNG

Für $U \in U(n)$ gilt $|\det U| = 1$

$U^* = U^{-1}$

$\det U^* = \det \overline{U}^T = \overline{\det U^T} = \det U \cdot \det U^{-1} = \frac{1}{\det U}$

$\Rightarrow \overline{\det U} \cdot \det U = 1$

$O(n) \quad \{\det U = 1\} \cup \{\det U = -1\}$

8.75 BEISPIEL

$O(2)$: $\rightarrow$ Rotation: $\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$ $\det = 1$

$\rightarrow$ Spiegelung: $\begin{bmatrix}\cos 2\varphi & \sin 2\varphi\\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi\end{bmatrix}$ $\det = -1$

allgemein:

$$u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\psi \\ \sin\varphi & \cos\psi \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \text{ orthogonal}$$

$$\cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi = 0 = \cos(\psi - \varphi)$$

$$\psi = \varphi + (k + \tfrac{1}{2})\pi$$

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$$

$$\cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$+ i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

$$\cos\psi = \cos(\varphi + (k+\tfrac{1}{2})\pi)$$

$$= \cos\varphi \underbrace{\cos(k+\tfrac{1}{2})\pi}_{0} - \underbrace{\sin(k+\tfrac{1}{2})\pi}_{\varepsilon = \pm 1} \sin\varphi$$

$$= -\varepsilon \sin\varphi$$

$$\sin\psi = \sin(\varphi + (k+\tfrac{1}{2})\pi)$$

$$= \sin\varphi \underbrace{\cos(k+\tfrac{1}{2})\pi}_{0} + \cos\varphi \sin(k+\tfrac{1}{2})\pi = \varepsilon \cdot \cos\varphi$$

$$U = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \cdot \varepsilon \\ \sin\varphi & \cos\varphi \cdot \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$\det U = \varepsilon$

U = Rotation $\Leftrightarrow$ $\det U = 1$

oder

U = Rotation + Spiegelung $\Rightarrow$ $\det U = -1$

$$SO(2) = \text{Rotationen} \cong \mathbb{T} = \{ e^{i\varphi} \mid \varphi \in [0, 2\pi) \}$$

$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$$

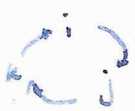
$$SU(2) \cong \{ q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1 \}$$

$\mathbb{H}$ … William R. Hamilton (1805 – 1865)

$$\int L(x, \dot{x}, t)\, dt = \min !$$

$$\mathbb{H} = \{ a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \}$$

$i^2 = j^2 = k^2 = 1$ **Quarternionen** Schiefkörper



$ij = k$	$ji = -k$
$jk = i$	$kj = -i$
$ki = j$	$ik = -j$

$e_1 \times e_2 = e_3$

$e_2 \times e_1 = -e_3$

$\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

Quarternionen-Gruppe

IX Polynome und Algebren

9.1 Definition

$\mathbb{K}$ Körper. Eine $\mathbb{K}$-Algebra ist ein Vektorraum A über $\mathbb{K}$ mit Multiplikation $*: A \times A \to A$, so dass

i) $a*(b+c) = a*b + a*c$ Distributivität

ii) $(a+b)*c = a*c + b*c$

iii) $\lambda(a*b) = (\lambda a)*b = a*(\lambda b)$ Assoziativität

9.2 Bemerkung

- Wenn zusätlich gilt $(a*(b*c) = (a*b)*c$ dann heißt A assoziativ
- Wenn zusätzlich gilt $a*b = b*a$, dann heißt A **kommutativ**

9.3 Beispiel

a) $(\mathbb{K}, +, *\cdot)$ assoziativ, kommutativ

b) $\mathrm{Hom}(V, V) = \mathrm{End}(V)$

$f*g := f \circ g$ nichtkommutative, assoziative, Algebra

$(\mathbb{K}^{n\times n}, +, \cdot)$ Matrixmultiplikation

Hadamard oder Schnurprodukt $[a_{ij}][b_{ij}] = [a_{ij}\, b_{ij}]$

c) $C[0,1]$ kommutativ, assoziativ

$(f*g)(t) = f(t)\, g(t)$

$(f*g)(t) = \int f(t-s)\, g(s)\, ds$ Faltung

d) $(\mathbb{R}^3, +, \times)$ Kreuzprodukt $a \times b = -b \times a$

$(a\times b)\times c \neq a \times (b \times c)$

$\rightarrow$ nicht assoziativ, nichtkommutativ – Quarternion

e) $(\mathbb{K}^{n\times n}, +, [\,])$

$$[A,B] = A\cdot B - B\cdot A$$

Lie - Produkt

Kommutatorprodukt

nichtkommutativ, nicht assoziativ

$\hookrightarrow$ Jacobi - Identität

f) $A = \mathbb{K}^{n\times n}_{\text{symm.}} = \{A \mid A = A^T\}$

$$A * B = \frac{AB + BA}{2}$$ Jordan - Produkt

assoziativ, kommutativ

9.4 DEFINITION

$\mathbb{K}^{\infty} = \{(a_0, a_1, a_2, \dots\dots) \mid a_i \in \mathbb{K}\}$ Vektoren aller Folgen

$P_{\mathbb{K}} = \{(a_0, a_1, \dots a_n, 0, 0, \dots) \mid a_i \in \mathbb{K}\}$

Unterraum der endlichen Folgen

Basis von $P_{\mathbb{K}}$: $(e_i)_{i\geq 0}$

$(a_n) * (b_n) = (c_n)$

$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ Cauchy - Produkt

$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-k} b_k$

9.5 SATZ

i) $(P_{\mathbb{K}}, *)$ ist eine assoziative, kommutative

$\mathbb{K}[x]$ $\mathbb{K}$- Algebra

mit Einselement $(1, 0, 0, \dots) = e_0$

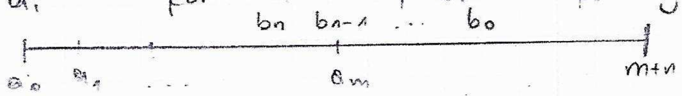
$x^k := e_k \qquad e_i * e_j = e_{i+j}$

ii) $\mathbb{K}[[x]] = \{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \mid a_k \in \mathbb{K}\}$ formale Potenzreihen

$\mathbb{K}[x]$ $\mathbin{/\!/}$

bilden kommutative, assoziative Algebra

ad $P_{\mathbb{K}}$) Sei $a_i = 0$ für $i > m$, $b_j = 0$ für $j > n$



$c_k = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{k-1} = \sum_{i=0}^{m} a_i b_{k-i} = 0 \qquad k > m+n$

$i < m \qquad k - i > m + n - i > n$

Wh.: $\int \frac{1}{x} = \log|x|$

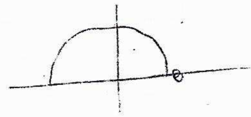
$$\log(-1) = e^{\log(-1)} = -1$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$1 + e^{i\pi} = 0$$

$$\log(-1) = i\pi$$



$$\sqrt{-1} = \pm i$$

$$\sqrt[3]{1} = 1,\ e^{\frac{2\pi i}{3}},\ e^{-\frac{2\pi i}{3}} \qquad \sqrt{e^{ix}} = e^{\frac{ix}{2}}$$

$(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}, *)$ $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} = \{(a_0, a_1, \dots a_n, 0, \dots) \mid a_k \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}_0\}$

mit $(a_i) * (b_j) = c_k$

ist eine assoziative, kommutative $\mathbb{K}$-Algebra

$$c_k = \sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j} = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j$$

$$e_i * e_j = e_{i+j} \qquad x^i := e_i$$

Sei $a_i = 0$ für $i > m$, $b_j = 0$ für $j > n$

$$\begin{array}{ccccc} & b_n & b_{n-1} \dots b_0 & & \\ a_0 & a_1 \dots & a_m & & m+n \end{array}$$

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-1} = \sum_{i=0}^{m} a_i \underbrace{b_{k-i}}_{=0} = 0$$

$k > m+n$

$i \leq m$

$k - i > m + n - i \geq n$

$$\deg(p(x) q(x)) \leq \deg p(x) + \deg q(x)$$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$$

$$\deg p(x) = \max\{i \mid a_i \neq 0\}$$

Distributivgesetze $(a * (b + c))_k = \sum_{i=0}^{k} a_i (b_{k-1} + c_{k-i})$

$$= \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} + \sum_{i=0}^{k} a_i c_{k-1} = (a*b)_k + (a*c)_k$$

→ funktioniert auch für beliebige Folgen:

$(a*b)_k = \sum^{k} a_i b_{k-i}$ ist endl für alle k

9.6 DEFINITION

$x^0 := (1, 0, \dots, 0) =: 1$

$x^k := (0, \dots 0, 1, 0, \dots 0)$

$x^k \cdot x^l = x^{k+l}$

Wir schreiben $\mathbb{K}[x]$ anstelle von $P_{\mathbb{K}}$

$p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$

$\partial p(x) = \deg p(x) = \max \{ i \mid a_i \neq 0 \}$

$\deg 0 := -\infty$

9.7 LEMMA

i) $\deg (p(x) \cdot q(x)) = \deg p(x) + \deg q(x)$

ii) $\mathbb{K}[x]$ ist nullteilerfrei

$p(x) \cdot q(x) = 0 \Rightarrow p(x) = 0 \vee q(x) = 0$

$\mathbb{Z}_n$ $n \notin P$ $n = p \cdot q$ $\Rightarrow p \neq 0 \mod n$ $q \neq 0 \mod n$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

9.8 DEFINITION

Jedes Polynom $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ induziert eine Funktion

$p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$

$\alpha \mapsto p(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$

$(\lambda p + \mu q)(\alpha) = \lambda p(\alpha) + \mu q(\alpha)$

$(pq)(\alpha) = p(\alpha) \cdot q(\alpha)$

$\mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ ist ein Algebra-Homomorphismus

- injektiv?

Wenn $|\mathbb{K}| < \infty$

surjektiv? → ü

$\dim \mathbb{K}[x] = \infty$

$\dim \mathbb{K}^{\mathbb{K}} = |\mathbb{K}|$

$p(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_n)$ hat Grad n

$\mathbb{K} = \{ \xi_1, \dots \xi_n \}$ $f \to = \sum_{\xi \in \mathbb{K}} f(\xi) \delta_\xi$

wobei $\delta_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \neq \xi \\ 1 & x = \xi \end{cases}$

9.9

Jede Funktion $f: \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ist Polynomfunktion, d.h.
$\exists$ Polynom $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ sodass $p(\xi) = f(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{K}$

9.10 DEFINITION

Eine Abbildung $\psi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen zwei $\mathbb{K}$-Algebren heißt Algebrahomomorphismus, wenn ψ linear und multiplikativ ist:

$(\forall a,b \in \mathcal{A}): \psi(a *_A b) = \psi(a) *_B \psi(b)$

9.11 BEISPIEL

a) $\mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$

$p(x) \mapsto$ Polynomfunktion

b) Für $\alpha \in \mathbb{K}$

$\psi_\alpha: \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}$, $p(x) \mapsto p(\alpha)$ ist Algebrahomomorphismus

c) $\mathbb{K} \to \mathbb{K}[x]$, $\alpha \mapsto \alpha \cdot 1$ Einbettung, Algebrahomomorphismus

9.12 Einsetzungssatz

Sei $\mathcal{A}$ assoziative Algebra über $\mathbb{K}$ mit Einselement 1_A

i) $\iota: \mathbb{K} \to \mathcal{A}$, $\alpha \mapsto \alpha \cdot 1_A$ ist Algebrahomomorphismus

ii) Für jedes $a \in \mathcal{A}$ ist die Abbildung

$$\psi_a: \mathbb{K}[x] \to \mathcal{A}$$
$$\sum_{k=0}^{n} c_k x^k \mapsto \sum_{k=0}^{n} c_k a^k$$

wobei $a^0 := 1$ und $a^{k+1} = a * a^k$

der eindeutige Algebrahomomorphismus

$\psi: \mathbb{K}[x] \to \mathcal{A}$ mit der Eigenschaft $\psi(x) = a$

iii) Jeder Algebrahomomorphismus $\psi : \mathbb{K}[x] \to \mathcal{A}$ hat diese Form

BEWEIS

Wenn $a = \psi(x) \Rightarrow a^k = \psi(x)^k = \psi(x^k)$

Wenn $\psi(x)$ bekannt ist, dann ist $\psi(x^k)$ festgelegt für alle $k \Rightarrow \psi(p(x))$ ist festgelegt für alle $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ (Fortsetzungssatz)

- Linearität von ψ_a: Ü

- Multiplikativität

$$\psi_a(p(x)\,q(x)) \overset{!}{=} \psi_a(p(x)) * \psi_a(q(x))$$

Sei $p(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i \quad q(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j x^j$

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \gamma_k x^k \quad \text{wobei } \gamma_k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \beta_{k-i}$$

$$\psi_a(p(x)\,q(x)) = \sum_{k=0}^{m+n} \gamma_k a^k$$

$$\psi_a(p(x)) * \psi_a(q(x)) = \left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i a^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \beta_j a^j\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \alpha_i \beta_j a^{i+j}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+n} \underbrace{\sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j=k}} \alpha_i \beta_j}_{= \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \beta_{k-i} = \gamma_k} a^k = \sum_{k=0}^{m+n} \gamma_k a^k.$$

Schreibweise: $\psi_a(p(x)) =: p(a)$

9.13 BEISPIEL

a) $\mathcal{A} = \mathbb{K}$

$$\psi_\alpha(p(x)) = p(\alpha)$$

b) $\mathcal{A} = \mathrm{Hom}(V,V)$ $\qquad \iota : \mathbb{K} \to \mathrm{Hom}(V,V)$

$f^0 = \mathrm{id},\ f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k\ \text{mal}}$ $\qquad \lambda \mapsto \lambda \cdot \mathrm{id}$

$$\Rightarrow \psi_f\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f^k.$$

c) $\mathcal{A} = \mathbb{K}^{n \times n}$

$$\psi_A(p(x)) = p(A) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k$$

9.14 BEMERKUNG

$\mathbb{K}[x]$ ist die "freie assoziative Algebra mit einem Erzeuger" über $\mathcal{A}$

Jede Abbildung $f: \{x\} \to \mathcal{A}$ hat eine eindeutige Fortsetzung, zu einem Algebrahomomorphismus

$\psi: \mathbb{K}[x] \to \mathcal{A}$

$\mathbb{K}[x]$ ... kleinste Algebra über $\mathbb{K}$, die x enthält

für zwei Erzeuger?

$f: \{x, y\} \to \mathcal{A}$

$\downarrow$

$\psi: \mathbb{K}\langle x, y\rangle \to \mathcal{A}$

nichtkommutative Polynome in x, y

analog: freie Gruppe, freies Monoid

Jeder Vektorraum ist frei über seiner Basis

9.15 Def

Sei $p(x) \in \mathbb{K}[x]$

Eine Nullstelle von $p(x)$ ist ein $\xi \in \mathbb{K}$

sodass $p(\xi) = 0$ $\quad (\Leftrightarrow p(x) \in \ker \psi_\xi)$

Beispiele $\cdot\; p(x) = a_0$ ... keine nichttriviale Nullstelle

- $p(x) = a_0 + a_1 x \to \xi = \frac{a_0}{a_1}$
- $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \to$ Formel 2000 v. Chr
- $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \to$ Formel von Cardano

Gerolamo Cardano 1501 - 1576

$\to$ Ars Magna 1545

Nicolo Tartaglia 1499 - 1557, Scipione dal Ferro 1465 - 1526

$\to$ Antonio Fiore

$\deg p(x) = 4 \to$ L. Ferrari

$\deg p(x) \geq 5 \to$ 1826 Abel $\to$ keine allg. Formel

9.16 BEM

Die Methode von Cardano und Tartaglia

cub p: 6 reb equalis 20

$$x^3 + 6x = 20$$

- Ansatz: $x = u + v$

$$(u+v)^3 + 6(u+v) = 20$$

$$u^3 + 3u^2 v + 3uv^2 + v^3 + 6(u+v) = 20$$

$$u^3 + v^3 + (3uv + 6)(u+v) = 20$$

- Wähle v so, dass $3uv + 6 = 0$

$\Rightarrow uv = -2 \quad \Rightarrow u^3 v^3 = -8$

$$u^3 + v^3 = 20$$

$$a = u^3, \quad b = v^3$$

$$\left.\begin{array}{l} ab = -8 \\ a+b = 20 \end{array}\right\} \rightarrow a(20-a) = -8$$

$$a^2 - 20a - 8 = 0$$

$$a = \frac{20 \pm \sqrt{400+32}}{2} = 10 \pm \sqrt{108}$$

$$\rightarrow u^3 = 10 + \sqrt{108}, \quad v^3 = 10 - \sqrt{108}$$

$$x = u + v = \sqrt[3]{10+\sqrt{108}} + \sqrt[3]{10-\sqrt{108}}$$

9.17 SATZ Div. mit Rest

Seien $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$, $q(x) \neq 0$

Dann $\exists!\, s(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$

sodass $\deg r(x) < \deg q(x)$

und $p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x)$

vgl $\mathbb{N}$: $m, n \neq 0$

$m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists!\, a, b : m = an + b$

wobei $0 \leq b < n$

BEWEIS

Induktion nach $\deg p(x)$

Fall 1: $\deg p(x) < \deg q(x)$

$\rightarrow \quad p(x) = 0 \cdot q(x) + p(x) \quad \rightarrow$ endeutig

Fall 2: $\deg p(x) \geq \deg q(x)$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \qquad q(x) = \sum_{l=0}^{n} b_l x^l \qquad m \geq n$$

Sei $p_1(x) = p(x) - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} q(x)$

$$= \sum_{k=0}^{m} a_k x^k - \sum_{l=0}^{n} \frac{a_m}{b_n} b_l x^{m-n+l}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k - \sum_{l=0}^{n-1} \frac{a_m}{b_n} x^{m-n+l}$$

$$\deg p_1(x) < \deg p(x)$$

$A \Rightarrow p_1(x) = s_1(x) \cdot q(x) + r_1(x)$

$\Rightarrow p(x) = \left(\frac{a_m}{b_n} x^{m-n} + s_1(x)\right) q(x) + r_1(x)$

$\quad \| $

$p_1(x) + \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} q(x)$

9.18 BSP

$$3x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 + 1 : x^2 - 3x + 1 = \underbrace{3x^3 + 8x^2 + 23x + 62}_{s(x)}$$

$$-(3x^5 - 9x^4 + 3x^3)$$

$$0 \quad 8x^4 - x^3 + x^2 + 1$$

$$-(8x^4 - 24x^3 + 8x^2)$$

$$0 \quad 23x^3 - 7x^2 + 1$$

$$-(23x^3 - 69x^2 + 23x)$$

$$0 \quad 62x^2 - 23x + 1$$

$$-(62x^2 - 186x + 62)$$

$$0 \quad \underbrace{163x - 61}_{r(x)}$$

9.19 DEF

$q(x)$ teilt $p(x)$ ... $q(x) \mid p(x)$ wenn

$\exists\, s(x): p(x) = s(x)\, q(x)$

(d.h. Division geht ohne Rest auf)

9.20

$q(x) = x - \xi$

$\rightarrow p(x) = s(x)(x-\xi) + r$

$\Rightarrow p(\xi) = r$

9.21 FOLGERUNG

ξ ist Nullstelle von $p(x) \Leftrightarrow (x-\xi) \mid p(x)$

9.22 HORNER-SCHEMA

$p(x) \in \mathbb{K}[x],\ \lambda \in \mathbb{K},\ p(\lambda) = ?$

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_1 x + a_0$

$p(\lambda) = \underset{n}{a_n \lambda^n} + \underset{n-1}{a_{n-1} \lambda^{n-1}} + \dots + \underset{1}{a_1 \lambda} + a_0 \quad = \frac{n(n+1)}{2} \approx n^2$

Man braucht $\approx n^2$ Multiplikationen,

Besser $\rightarrow$ n Multiplikationen:

$p(\lambda) = (a_n \lambda^{n-1} + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1)\lambda + a_0$

$= ((a_n \lambda^{n-2} + a_{n-1} \lambda^{n-3} + \dots + a_2)\lambda + a_1)\lambda + a_0$

... usw.

BEISPIEL

$p(x) = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$

$= (a_3 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_1)\lambda + a_0$

$= ((a_3 \lambda + a_2)\lambda + a_1)\lambda + a_0$

a_3

$a_3\lambda + a_2$

$(a_3\lambda + a_2)\lambda + a_1$

$((a_3\lambda + a_2)\lambda + a_1) + a_0$

ALGORITHMUS:

$\xi_n = a_n$ ~~für k~~

für $k = n-1, \dots, 0$ $\quad \xi_k = \lambda \xi_{k+1} + a_k$

$\Rightarrow p(\lambda) = \xi_0$

$p(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 + 1 \qquad \lambda = 5$

$\xi_5 = 3$

$\xi_4 = 5 \cdot 3 + (-1) = 14$

$\xi_3 = 5 \cdot 14 + 2 = 72$

$\xi_2 = 5 \cdot 72 + 1 = 361$

$\xi_1 = 5 \cdot 361 = 1805$

$\xi_0 = 5 \cdot 1805 + 1 =$

vgl Division

$3x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 + 1 : x - 5 = 3x^4 + 14x^3 + 72x^2 + 361x + 1805$

$-(3x^5 - 15x^4)$

$14x^4 + 2x^3 + x^2 + 1$

$-(14x^4 - 70x^3)$

$72x^3 + x^2 + 1$

$-(72x^3 - 360x^2)$

$361x^2 + 1$

$-(361x^2 - 1805x)$

$1805x + 1$

$-(1805x - 9025)$

9026

9.23 Def

Ein Polynom $p(x)$ heißt . wenn

$\exists p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{K}[x] : \deg p_1(x), \deg p_2(x) < \deg p(x) \wedge p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x)$

d.h. es gibt echte Teiler

Sonst heißt $p(x)$ irreduzibel

9.24 Bem

i) konstante und lineare Polynome sind irreduzibel

ii) irreduzible Polynome vom Grad ≥ 2 haben keine Nullstellen (sonst ist $x - \xi$ Teiler)

9.25 Bsp

- $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ... irreduzibel, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ... reduzibel

- $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$

  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, irreduzibel, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ reduzibel

- $x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ ist irreduzibel

  $x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ ist irreduzibel

  $x^5 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1) \to$ reduzibel

$\sqrt{-1}$: $(\sqrt{-1})^2 = 1$ $(\sqrt{-1})^2 + 1 = 0$

Körper in dem $x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ eine Nullstelle hat?

Sei α eine "Zahl" sodass $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

$\Rightarrow \alpha^2 = \alpha + 1$

$\alpha^3 = \alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha = \alpha + 1 + \alpha = 1$

$(a\alpha + b)(c\alpha + d) = ac \cdot \alpha^2 + (bc + ad)\alpha + bd$

$= (ac + bc + ad)\alpha + (ac + bd)$

$\to \{a\alpha + b \mid a, b \in \mathbb{Z}_2\}$ ist Ring und sogar Körper

$\overset{!}{=} GF(2^2) = GF(4)$ ... galois field

für alle $p \in \mathbb{P}, k \in \mathbb{N} \rightsquigarrow GF(p^k)$ Körper der Ordnung p^k

9.26 Hauptsatz der Algebra

$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen

d.h. jedes Polynom $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ hat Nullstelle $\xi \in \mathbb{C}$

FOLGERUNG

1) $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ $\deg p(x) \leq 1$

2) jedes $p(x)$ hat eine Faktorisierung

$p(x) = (x-\xi_1)(x-\xi_2) \dots (x-\xi_n)$

wobei $\xi_i \in \mathbb{C}$, $n = \deg p(x)$

BEWEIS

Satz von Liouville $\rightarrow$ jede komplexe, differenzierbare Funktion ist unbeschränkt

$\rightsquigarrow$ Theorie der komplexen Funktionen

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$\frac{1}{p(z)}$ beschränkt $\Rightarrow$ $p(z)$ konstanter Wert

9.27 SATZ

In beliebigen Körpern gilt: jedes Polynom hat eine (bis auf die Reihenfolge) eindeutige Faktorisierung

$p(x) = p_1(x) \dots p_k(x)$ in irreduzible Faktoren

9.28 SATZ & DEF

$p(x) = (x-\xi_1) \dots (x-\xi_n)$

$q(x) = (x-\eta_1) \dots (x-\eta_m)$ $\quad p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x] \setminus \{0\}$

"monic" $\rightarrow$ führender Koefficient ist 1

Dann gibt es ein eindeutiges, normiertes Polynom von maximalem Grad $(p(x), q(x))$

sodass $ggT(p(x), q(x)) \mid p(x) \wedge ggT(p(x), q(x)) \mid q(x)$

Dann gilt: alle gemeinsamen Teiler von $p(x)$ und $q(x)$ teilen $ggT(p(x), q(x))$

Bew

- Eindeutigkeit

Sei $g(x)$ Polynom von maximalem Grad, ~~sodass~~ $p(x)$ und $q(x)$ teilt

$\Rightarrow p(x) = f(x)\cdot g(x)$ und $q(x) = h(x)\cdot g(x)$

Sei $d(x)$ gemeinsamer Teiler $\Rightarrow \deg d(x) \leq \deg g(x)$

Dividieren $\Rightarrow g(x) = s(x)\cdot d(x) + r(x)$, $\deg r(x) < \deg d(x)$

$p(x) = \tilde{f}(x)\, d(x) \qquad q(x) = \tilde{h}(x) d(x)$

$$f(x) g(x) = \tilde{f}(x)\, d(x)$$

$$\overset{\shortparallel}{f(x)(s(x)\, d(x) + r(x))}$$

$$(\tilde{f}(x) - f(x)s(x))\, d(x) = r(x)$$

$$\deg[\text{links}] \overset{?}{=} \deg[\text{rechts}]$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(x) - f(x)s(x) = 0 \quad \Rightarrow r(x) = 0$$

$$\Rightarrow d(x) \mid g(x)$$

Ü $\rightarrow$ Es kann nur einen [ggT] geben

9.29 Eukl Alg.

Wenn $p(x) = s(x)\cdot q(x) + r(x)$

$\Rightarrow ggT(p(x), q(x)) = ggT(q(x), r(x))$

$\rightarrow$ wie für ganze Zahlen

9.30 DEF

Eine Nullstelle ξ eines Polynoms hat Vielfachheit m wenn $(x-\xi)^m \mid p(x)$ aber $(x-\xi)^{m+1} \nmid p(x)$

☺ Nullstellen mit Vielfachheit ≥ 2 sind die Nullstellen dess $ggT(p(x), p'(x))$

$(x^n)' = n\, x^{n-1}$

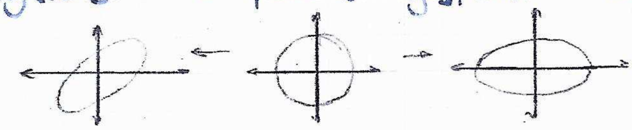
X Eigenwerte & EV

Ziel: finde zu $f \in \mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V,V)$ eine Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass $\Phi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ möglichst einfache Gestalt hat

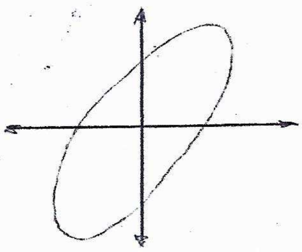
vgl: $\Phi_{C}^{B}(f) \overset{\text{Äquivalenztransformation}}{=} \begin{bmatrix} \underbrace{1 \cdots 1}_{\mathrm{rk}\, f} & \\ & 0 \cdots 0 \end{bmatrix}$

bzw zu einer gegebenen Matrix A finde Matrix T sodass TAT^{-1} möglichst einfache Gestalt hat

- "Einfache" Matrizen:



- $A = I$
- $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ $\quad Ae_1 = \lambda_1 e_1$, $\quad Ae_2 = \lambda_2 e_2$



$$a_0 + \sum a_{ij} x^i y^j + bx + cy = 0$$

$$\sum ax^2 + by^2 + c = 0$$

$$Ax = \lambda x$$

10.1 DEF

V Vektorraum über $\mathbb{K}$, $f \in \mathrm{End}(V)$

- $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert von f wenn $\exists v \in V \setminus \{0\}$ sodass $f(v) = \lambda \cdot v$
- v heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ
- engl: eigenvalue, eigenvector
- $f := \{\lambda \mid \lambda$ Eigenwert von $f\}$ heiß von f

10.2 LEMMA

$\eta_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} = \ker(\lambda \mathrm{id} - f)$ ist ein Unterraum und heißt Eigenraum von f zum Eigenwert λ

$v \in \eta_\lambda \Leftrightarrow f(v) = \lambda v \Leftrightarrow \lambda v - f(v) = 0 \Leftrightarrow (\lambda \mathrm{id} - f)(v) = 0$

$\Rightarrow v \in \ker(\lambda \mathrm{id} - f)$

10.3 BSP

a) $f = c \cdot \mathrm{id}$

$\Rightarrow f(v) = c \cdot v \quad \forall v \in V$

$\Rightarrow \operatorname{spec} f = \{c\}$

$\lambda = c, \quad \eta_\lambda = V$

b) Sei $\mathcal{B}$ Basis, $f: V \to V$

$b_i \mapsto \lambda_i b_i$

Fortsetzungssatz $\Rightarrow f \sum \alpha_i b_i = f(\sum \alpha_i b_i) = \sum \alpha_i \lambda_i b_i$

$\Rightarrow \operatorname{spec} f = \{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$

$\eta = \mathcal{L}(b_1), \quad \lambda_i = \lambda$

Sei λ Eigenwert

$(\exists v = \sum \alpha_i b_i): f(\sum \alpha_i b_i) = \lambda \cdot \sum \alpha_i b_i$

$\sum \alpha_i \lambda_i b_i = \sum (\lambda - \lambda_i) \alpha_i b_i = 0$

b_i l.u. $\Rightarrow (\lambda - \lambda_i) \alpha_i = 0 \quad \forall i$

$\Rightarrow \lambda = \lambda_i \quad \vee \quad \alpha_i = 0$

$\Phi_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

c) $V = C^\infty(\mathbb{R})$

$\frac{d}{dx}: C^\infty \to C^\infty$

$f \mapsto f' = \frac{df}{dx}$

Eigenvektoren?

$y' = \lambda y$

$\frac{dy}{dx} = \lambda y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \lambda\, dx$

$\int \frac{dy}{y} = \lambda \int dx = \log y = \lambda x + c$

$\Rightarrow y = c_i\, e^{\lambda x}$

$\Rightarrow \operatorname{spec}\left(\frac{d}{dx}\right) = \mathbb{R}, \quad \eta_\lambda = \mathcal{L}(e^{\lambda x})$

$V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \qquad e^{i\omega x} \rightsquigarrow$ Fouriertransformation

d) $C^\infty[0,L]$

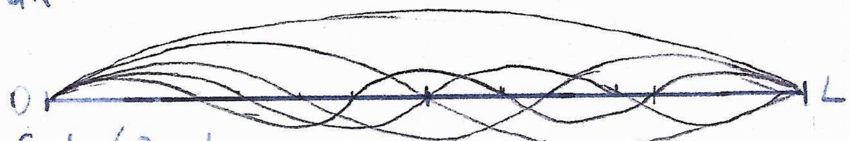
$\frac{d^2}{dx} : C^\infty[0,L] \circlearrowleft$

$\frac{d^2}{dx^2} e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$\frac{d^2}{dx^2} e^{i\omega x} = -\omega^2 e^{i\omega x}$

Re $\frac{d^2}{dx^2} \cos(\omega x) = -\omega^2 \cos \omega x$

$\frac{d^2}{dx^2} \sin(\omega x) = -\omega^2 \sin \omega x$



Saite / Brücke

$C_0^\infty[0,L] = \{ f \in C^\infty[0,L] \mid f(0) = f(L) = 0 \}$

$\frac{d^2}{dx^2} : C_0^\infty[0,L] \circlearrowleft$

$\sin \omega x \qquad \omega L = \pi \cdot k$

$\sin \frac{\pi}{L} kx \qquad \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{L} \cdot k$

... H - Atom

10.4 DEF

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

- $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt REW

  wenn $\exists v \in \mathbb{K}^{n} \setminus \{0\} : A \cdot v = \lambda \cdot v$

- $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt LEW

  wenn $\exists v \in \mathbb{K}^n : v^t A = \lambda v^t \Leftrightarrow A^t v = \lambda v \Leftrightarrow \lambda$ REW von A^t

10.5 LEMMA

Linkseigenwerte sind automatisch Rechtseigenwerte

BEWEIS

Sei λ Rechtseigenwert

$\Rightarrow \exists v: Av - \lambda v = 0$

$\ker(\lambda I - A) \neq \{0\}$

$\Leftrightarrow \operatorname{rank}(\lambda I - A) < n$

$\Leftrightarrow \operatorname{rank}(\lambda I - A^t) < n \Leftrightarrow \lambda$ Linkseigenwert von A

10.6 BEM

1) Eigenvektoren müssen nicht die gleichen sein

2) In dim $= \infty$ stimmt das nicht:

$S: (\xi_1, \xi_2, \dots) \mapsto (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$

injektiv $\Rightarrow 0$ ist kein Rechtseigenwert

$S^t: (\xi_1, \xi_2, \dots) \mapsto (\xi_2, \xi_3, \dots)$

hat Eigenwert 0: $S^t(1, 0, 0, \dots) = (0, 0, \dots)$

Daher allgemeine Definition des Spektrums:

$\operatorname{spec}(S) = \{\lambda \mid \lambda I + S \text{ nicht invertierbar}\}$

10.7 . DEF

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$\operatorname{spec}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \text{ REW von } A\} = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \text{ LEW von } A\}$

10.8 Lemma

dim $V = n$, $f \in \text{End } V$, $\mathcal{B}$ Basis von V

Dann ist spec f = spec $(\Phi^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f))$

$f(v) = \lambda v \Leftrightarrow \Phi^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\, \Phi_{\mathcal{B}}(v) = \lambda\, \Phi_{\mathcal{B}}(v)$

10.9 Folgerung

1) Das Spektrum hängt nicht von der Wahl der Basis ab

2) T regulär $\Rightarrow$ spec TAT^{-1} = spec A

Eigenvektor von $T^{-1}AT$?

$Ax = \lambda x \Leftrightarrow ATT^{-1} = \lambda x$

$\Leftrightarrow T^{-1}ATT^{-1}x = \lambda T^{-1}x$

x Eigenvektor von $A \Leftrightarrow T^{-1}x$ Eigenvektor von $T^{-1}AT$

$\lambda I - A$ nicht injektiv?

10.10 Satz + Def

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

i) $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ ist ein Polynom vom Grad n

$\chi_A(x)$ und heißt charakteristisches Polynom von A

ii) λ Eigenwert von $A \Leftrightarrow \lambda$ Nullstelle von $\chi_A(x)$

Bew

i) $$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & & & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \cdots = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn})$ + Polynom vom Grad $\leq n-2$

Polynom in $\lambda = \lambda^n$ + Polynom vom Grad $\leq n-1$

ii) $\lambda I - A$ nicht injektiv $\Leftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0$

10.11 BSP

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{spec} A = ?$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & -2 \\ 1 & \lambda+5 & -2 \\ -2 & 2 & \lambda+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -2 \\ \lambda+6 & \lambda+5 & -2 \\ 0 & 2 & 2+4 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda+5 & -2 \\ 2 & \lambda+4 \end{vmatrix} - (\lambda+6) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & \lambda+4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 + 10\lambda + 30)$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 120}}{2} = -5 \pm i\sqrt{5}$$

$$\operatorname{spec}_{\mathbb{R}}(A) = 0 \quad , \quad \operatorname{spec}_{\mathbb{C}}(A) = \{0, -5 \pm i\sqrt{5}\}$$

10.12 SATZ

$$\chi_A(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} c_k(A)\, x^k \qquad [n] := i = \{1, \dots, n\}$$

Summe aller symmetr. Minoren von A

$$c_k(A) = \sum_{\substack{J \subseteq [n] \\ |J| = |n-k|}} [A]_{JJ} \qquad J = \{j_1 < j_2 < \dots < j_{n-k}\}$$

$$\begin{pmatrix} a_{j_1 j_1} & a_{j_1 j_2} & \cdots & a_{j_1 j_{n-k}} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{j_{n-k} j_1} & a_{j_{n-k} j_2} & \cdots & a_{j_{n-k} j_{n-k}} \end{pmatrix} \text{ Minoren}$$

insbes $\quad c_0 = \det A$

$$c_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \operatorname{Tr}(A)$$

$$c_n(A) = 1$$

BEW

$$\det(\lambda I - A) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\pi} \prod_{i=1}^{n} (xI - A)_{\pi(i), i}$$

Determinanten sind für beliebige kommutative Ringe R definiert

↳ "nichtkommutative Determinanten"

$$= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\pi} \prod_{i=1}^{n} x\, \delta_{\pi(i), i} - a_{\pi(i), i}$$

$$\deg \prod_{i=1}^{n} x\,\delta_{\pi(i),i} - a_{\pi(i),i}$$

... Anzahl $\{i \mid \pi(i) = i\}$ = # Fixpunkte von π = $\begin{cases} n & \pi = id \\ \leq n-2 & \pi \neq id \end{cases}$

$$\Rightarrow \deg \chi_A(x) = n$$

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

a_i ... i-te Spalte von A

$$I = (e_1\ e_2\ \dots\ e_n)$$

$$\chi_A(x) = \Delta(x e_1 - a_1, x e_2 - a_2, \dots, x e_n - a_n)$$

$$= \sum_{I \subseteq [n]} \Delta(y_1 \dots y_n) \quad \text{wobei} \quad y_i = \begin{cases} x e_i & i \in I \\ -a_i & i \notin I \end{cases}$$

$$(a+b)^n = \sum_{I \in [n]} a^{|I|}\, b^{|I|}$$

$$\Delta(y_1, \dots y_{k-1}, x e_k, y_{k+1}, \dots y_n)$$

$$= \begin{array}{c} \\ \\ k \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} | & & | & 0 & | & \dots & | \\ | & & | & \vdots & | & & | \\ | & & | & 0 & | & & | \\ y_1 & & y_{k-1} & x & y_{k+1} & \dots & y_n \\ | & & | & 0 & | & & | \\ | & & | & \vdots & | & & | \\ | & & | & 0 & | & & | \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow (-1)^{k-1}(-1)^{k-1} \begin{vmatrix} x & * & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & \tilde{y}_1 & \dots \tilde{y}_{k-1} & \tilde{y}_{k+1} & \dots & y_n \\ \vdots & | & | & | & & | \\ 0 & | & | & | & & | \end{vmatrix}$$

wobei $\hat{y}_i = y_i$ mit gestrichener k-ten Zeile

$$\rightarrow x \begin{vmatrix} \tilde{y}_1 & \dots & \tilde{y}_{k-1} & \tilde{y}_{k+1} & \dots & \tilde{y}_n \\ | & & | & | & & | \end{vmatrix} \quad \text{usw}$$

$$= x^{|I|} \underbrace{\Delta(a_{j_1} \dots a_{j_{n-|I|}})}_{[A]_{I^c, I^c} \cdot (-1)^{I^c}}$$

wobei I^c nicht gestrichene Zeilen und Spalten

$(n - |I|) \times (n - |I|)$ det $\quad J = I^c$

10.13 LEMMA

$\chi_{T^{-1}AT}(x) = \chi_A(x)$

ähnliche Matrizen haben gleiches charakteristisches Polynom

BEW

$$\det(\lambda I - T^{-1}AT) = \det(\lambda T^{-1}T - T^{-1}AT)$$
$$= \det(T^{-1}(\lambda I - A)T)$$
$$= \det T^{-1} \cdot \det(\lambda I - A) \cdot \det T = \det(\lambda I - A)$$

10.14 DEFINITION

Sei: $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

A heißt diagonalisierbar

wenn $\exists T \in GL(n, \mathbb{K}): T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$10.13 \Rightarrow \chi_A(x) = \begin{vmatrix} x - \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x - \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i)$$

10.15 LEMMA

A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ $\exists$ Basis aus Eigenvektoren

BEW $B^{-1} A B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow AB = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_n \\ | & & | \end{pmatrix} \Rightarrow A \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 b_1 & \lambda_2 b_2 & \cdots & \lambda_n b_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A \cdot b_i = \lambda_i b_i \quad \forall i$$

10.16 BSP

Schritt $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & -8 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ diagonalisieren

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -4 \\ -4 & \lambda+3 & 8 \\ 2 & -2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -4 \\ \lambda-1 & \lambda+3 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 1 & \lambda+3 & 8 \\ 0 & -2 & \lambda+5 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & \lambda+5 & 12 \\ 0 & -2 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\left((\lambda+5)(\lambda-5)+24\right) = (\lambda-1)(\lambda^2-1) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$\operatorname{spec} A = \{\pm 1\}$

Schritt Eigenvektoren bestimmen

" $\ker(\lambda I - A)$

$\lambda = +1$: $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -4 & 4 & 8 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_1 = x_2 + 2x_3$

$$\eta_{+1} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$\lambda = -1$:

$$\begin{array}{ccc} 0 & -2 & -4 \\ -4 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & -6 \\ \hline 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \end{array}$$

$x_2 = -2x_3$

$x_1 = x_2 + 3x_3 = x_3$

$$\eta_{-1} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} A B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

10.17 ANW.

$$A = B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} B$$

$$A^2 = \left(B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} B\right)\left(B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} B\right) = B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2\end{pmatrix} B$$

$$A^k = B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k\end{pmatrix} B$$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k\end{pmatrix} B = B^{-1}\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix} B$$

$$\rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = A \cdot x \Rightarrow x = e^{At} \cdot x_0$$

Bsp:

Leonardo von Pisa 1170 - 1250 (Fibonacci)

1202 Liber Abaci

" Virahanka 7. Jh.

$| \; 2 \; 1 \; 2 \; 2 \; \ldots \; 1 \; 2 \; | \quad n$

$n-1$

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $\qquad n-2$

Formel für F_n?

$F_0 = F_1 = 1$

$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

$F_n = F_n$

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A:=} \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x(x-1) - 1 = x^2 - x - 1$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ goldener Schnitt}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

10.18 SATZ

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig

BEW

Seien $\lambda_1 \dots \lambda_r$ verschiedene Eigenwerte

$v_1 \dots v_r$ zugehörige Eigenvektoren

Sei $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$

Induktion:

$r = 1$. richtig weil $v_1 \neq 0$

$r-1 \to r$: (I) $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0 \Rightarrow f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r) = 0$

$(\cdot(-\lambda_r)$ (II) $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_r \lambda_r v_r = 0$

$II - \lambda I = \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_r) v_1 + \dots + \alpha_{r-1} (\lambda_{r-1} - \lambda_r) v_{r-1} + 0 v_r = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 (\lambda_i - \lambda_r) = 0 \quad \forall_{1 \leq i \leq r-1}$

$\lambda_i \neq r \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall_{1 \leq i \leq r-1}$

$\Rightarrow \alpha_r v_r = 0 \Rightarrow \alpha_r = 0$

10.19 FOLGERUNG

Eine $n \times n$ Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten ist diagonalisierbar.

Zu jedem Eigenwert gibt es mindestens einen Eigenvektor

$\Rightarrow n$ linear unabhängige Eigenvektoren $\Rightarrow$ bilden Basis

10.20 Bsp.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ist nicht diagonalisierbar

$\underset{\det(xI-A)}{\chi_A(x)} = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x^2 \rightsquigarrow \operatorname{spec} A = \{0\}$

Eigenraum: $\ker A$

$\dim \ker A = 1 = 2 - \operatorname{rk} A$

wäre $A = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} B^{-1} = B \begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\dim \eta_0 = 1 < \dim V$

$\text{span} \overset{"}{} \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = 0 \to$ nilpotent

10.21 DEF

Sei λ Eigenwert der Matrix A

$k(\lambda) :=$ Vielfachheit von λ als Nullstelle von $\chi_A(x)$ heißt algebraische Vielfachheit,

und $d(\lambda) := \dim \eta_\lambda$ heißt geometrische

des Eigenwerts λ

- im Beispiel 10.20 : $k(0) = 2 \quad d(0) = 1$

10.22 LEMMA

Eine Matrix A ist diagonalisierbar genau dann wenn für die verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 \dots \lambda_r$ gilt

$d(\lambda_1) + \dots + d(\lambda_r) = \dim V$.

Beweis

$\Rightarrow$ Sei B Basis aus Eigenvektoren (10.15)

$\Rightarrow V = \eta_{\lambda_1} + \dots + \eta_{\lambda_r}$ ist direkte Summe (10.18)

$\Rightarrow \dim V = \dim \eta_{\lambda_1} + \dots + \dim \eta_{\lambda_r}$

$\Leftarrow$ Sei: $B_k = \{ x_k^{(j)} \mid 1 \le j \le d(\lambda_k)\}$ Basis d. k-ten Eigenraums

$\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{r} B_k$ linear unabhängig und $|\bigcup_{k=1}^{r} B_k| = \dim V$

daher eine Basis

Sei: $\sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{d(\lambda_k)} \alpha_k^{(j)} x_k^{(j)} = 0$

$$\overset{\shortparallel}{\sum_{k=1}^{}} y_k \quad \text{wobei: } y_k = \sum_{j=1}^{d(\lambda_k)} \alpha_k^{(j)} x_k^{(j)} \in \eta_{\lambda_k}$$

?

$$\Rightarrow \quad A y_k = \lambda_k \cdot y_k$$

10.18 $\Rightarrow$ y_k sind linear unabhängig

$$\sum y_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{alle } y_k = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{d(\lambda_k)} \alpha_k^{(j)} x_k^{(j)} = 0 \quad \overset{\text{Basis}}{\Rightarrow} \quad \text{alle } \alpha_k^{(j)} = 0$$

Für alle Eigenwerte einer Matrix gilt

$$d(\lambda) \leq k(\lambda)$$

geometrische V. $\leq$ algebraische V.

über $\mathbb{C}$: $\sum k(\lambda) = \dim V$

Sei: $d = d(\lambda)$ und $b_1 \dots b_d$ Basis von η_λ

$\rightarrow$ Teildiagonalisierung

- Ergänze zu Basis von V $\quad (b_1 \dots b_d \underbrace{b_{d+1} \dots b_n}_{\text{beliebig, so dass Basis von V entsteht}})$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_d & b_{d+1} & \dots & b_n \\ | & & | & | & & | \\ | & & | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = A \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \dots & Ab_n \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda b_1 & \dots & \lambda b_d & Ab_{d+1} & \dots & Ab_n \\ | & & | & | & & | \\ | & & | & | & & | \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} B \cdot \begin{bmatrix} \lambda & & & Ab_{d+1} & \dots & Ab_n \\ & \ddots & & | & & | \\ & & \lambda & | & & | \\ & 0 & & | & & | \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} A B = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\end{matrix} & * \\ \hline 0 & \tilde{A} \end{array}\right]$$

$$\chi_A(x) = \chi_{B^{-1}AB}(x) = \det \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}x-\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & x-\lambda\end{matrix} & -* \\ \hline 0 & xI - \tilde{A} \end{array}\right]$$

$$= (x-\lambda)^d \, \chi_{\tilde{A}}(x)$$

$$\Rightarrow (x-\lambda)^d \text{ teilt } \chi_A(x) \Rightarrow k(\lambda) \geq d(\lambda)$$

Matrix A diagonalisierbar

$\Leftrightarrow$ i) $\chi_A(x)$ zerfällt in Linearfaktoren

$= \prod (x - \lambda_i)$ wobei $\lambda_i \in \mathbb{K}$

ii) $d(\lambda_i) = k(\lambda_i) \quad \forall_i$

Was kann man im allgemeinen Fall tun?

Camille Jordan (1838 - 1922)
Jordan'sche Kurven
1. Buch über Gruppentheorie

Gauß-Jordan
→ Wilhelm Jordan (1842 - 1899)
"Handbuch der Vermessungskunde"

Ziel: Zerlege Matrix A in einfache Teile

- einfachste Lösung: $A x_i = \lambda_i x_i$
  - → geht nicht immer
  - → "vergrößere" die Eigenräume

11.1 Def

Sei $f \in End(V)$

Ein Unterraum $U \leq V$ heißt invariant unter f (bzw f-invariant) wenn $f(U) \subseteq U$

Analog für Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$:

$U \leq \mathbb{K}^n$ invariant unter A wenn

$\forall u \in U: \; Au \in U$

11.2 Bsp

i) $V, \{0\}$ sind invariant

ii) $\ker f$, $\operatorname{im} f$ sind invariant

iii) Eigenräume sind invariant

$x \in E_\lambda \Rightarrow Ax = \lambda x \in E_\lambda$

iv) wenn $U \leq V$ invariant und $\dim U = 1$

$\Rightarrow U = \operatorname{span}\{x\}$ wobei x Eigenvektor

Sei $x \in U, x \neq 0 \Rightarrow Ax \in U \Rightarrow A$ ist Vielfaches von x

$\Rightarrow Ax = \lambda x$

v) Wenn $A = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$

$Ae_1 = a_{11} e_1 \Rightarrow \mathcal{L}(e_1)$ ist invariant

$Ae_2 = a_{12} e_1 + a_{22} e_2 \in \mathcal{L}(e_1, e_2) \rightarrow$ invariant

$U_k = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_k)$ ist invariant für jedes k

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

MS SATZ

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

i) $U \subseteq V$ invariant unter A

$p(x) \in \mathbb{K}[x] \Rightarrow U$ invariant unter $p(A)$

ii) Seien $U_1 \dots U_m$ invariant

$\Rightarrow U_1 + \dots + U_m$ sowie $U_1 \cap \dots \cap U_m$ sind invariant

BEW

i) U invariant unter $A^k \quad \forall k \geq 0$

$k = 0$: trivial $\rightarrow A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$k \rightarrow k+1$. Sei $u \in U$

$A^{k+1} u = A \cdot (\underbrace{A^k \cdot u}_{\text{IV} \Rightarrow \in U})$

$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$

$p(A) = \sum_{k=0}^{m} c_k A^k$

$u \in U \Rightarrow p(A)u = c_0 \cdot u + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} c_k A^k \cdot u}_{\in U} \in U$ Linearkombination liegt wieder in UR

A regulär $\Rightarrow A^{-1}(u) \subseteq U \Rightarrow A^{-1} = p(A)$

ii) Sei $v \in U_1 + \dots + U_m \Rightarrow v = u_1 + \dots + u_m \quad u_i \in U_i$

$Av = \underbrace{Au_1}_{\in U_1} + \dots + \underbrace{Au_m}_{\in U_m} \in U_1 + \dots + U_m$

Sei $u \in \bigcap_{i=1}^{m} U_i \Rightarrow u \in U_i \quad \forall i$

$\Rightarrow Au_i \in U_i \ \forall i$

$\Rightarrow Au \in \bigcap_{i=1}^{m} U_i$

11.4 LEMMA

$f(U) \subseteq V$

Sei $f \in End(V)$ $U \subseteq V$ invariant

Dann ist $f|_U : U \to U \in End(U)$

11.5 SATZ

Sei $f \in End\ V$, $U \subseteq V$ invariant sodass $V = U \dotplus W$

Sei $B := (b_1 \dots b_m)$ Basis von U

$C := (c_1 \dots c_n)$ Basis von W dim $V = m+n$

~~Dann ist~~ $B \cup C$ ist Basis von V

Dann ist $\Phi^{B \cup C}_{B \cup C}(f) = \begin{bmatrix} \Phi^B_B(f|_U) & 0 \\ 0 & \Phi^C_C(f|_W) \end{bmatrix}$

BEW

i-te Spalte von $\Phi^{B \cup C}_{B \cup C}(f)$ besteht aus den Koordinaten von Ab_i U

=> alle Koordinaten von $m+1$ bis $m+n$ sind 0

$U_1 \dots U_m \subseteq V$ invariant

so dass $V = U_1 \dotplus U_2 \dotplus \dots \dotplus U_m$

B_i Basis von U_i $\forall i$

$B = B_1 \cup \dots \cup B_m$ Basis von V

$$\Phi^B_B(f) = \begin{bmatrix} \Phi^{B_1}_{B_1}(f|_{U_1}) & & \\ & \ddots & \\ & & \Phi^{B_m}_{B_m}(f|_{U_m}) \end{bmatrix}$$

Specialfall:

$U_i = span(v_i)$ => $v_1 \dots v_m$ Basis aus Eigenvektoren

11.7 Korollar

$f(U_i)$ wie in 11.6

$\chi_f(x) = \prod_{i=1}^{n} \chi_{f|_{U_i}}(x)$

- Wie finden wir invariante Unterräume?
  - $\ker f$, $\operatorname{im} f$
  - $\ker(\lambda I - f)$
  - $\ker \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ $\qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

11.8 Lemma von Fitting

Sei $\dim V = n$

$f \in \operatorname{End}(V)$

a) $\{0\} \subseteq \ker(f) \subseteq \ker(f^2) \subseteq \ker(f^3) \subseteq \dots$

$\operatorname{im}(f) \supseteq \operatorname{im}(f^2) \supseteq \operatorname{im}(f^3) \supseteq \dots$

b) $\exists m \leq n : \ker f^m = \ker f^{m+1}$

$\exists m' \leq n : \operatorname{im} f^m = \operatorname{im} f^{m+1}$

c) Die folgenden Aussagen sind äquivalent

i) $\ker f^m = \ker f^{m+1}$

ii) $\operatorname{im} f^m = \operatorname{im} f^{m+1}$

iii) $\ker f^m = \ker f^{m+k} \quad \forall k \geq 0$

iv) $\operatorname{im} f^m = \operatorname{im} f^{m+k} \quad \forall k \geq 0$

v) $\ker f^m \cap \operatorname{im} f^m = \{0\}$

vi) $\ker f^m \oplus \operatorname{im} f^m = V$

Beweis

a) $x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f(f(x)) = 0$

$\Rightarrow x \in \ker f^2$

$x \in \ker f^k \Rightarrow f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$

$\Rightarrow x \in \ker f^{k+1}$

$y \in$

$y \in \operatorname{im} f^k \Rightarrow \exists x : y = f^k(x) = f^{k-1}(f(x)) \in \operatorname{im} f^{k-1}$

b) klar: $\dim \ker f \leq \dim \ker f^2 \leq \dots$

$\Rightarrow$ irgendwann ist $\dim \ker f^m = \dim \ker f^{m+1}$

und weil $\ker f^m \subseteq \ker f^{m+1}$ muss

$\ker f^m = \ker f^{m+1}$ sein

c) Plan.

$$\begin{tikzcd} iii \arrow[r, shift left, "\text{trivial}"] \arrow[d, shift left] & i \arrow[l, shift left] \arrow[d, shift left] \\ iv \arrow[u, shift left] \arrow[r, shift left] & ii \arrow[l, shift left, "\text{trivial}"] \arrow[u, shift left] \end{tikzcd} \Bigg\} \rightleftarrows v \underset{\text{trivial}}{\rightleftarrows} vi$$

Wh: Dimensionssatz

$g: V \to W$, $\dim \operatorname{im} g + \dim \ker g = \dim V$

i $\Leftrightarrow$ ii) Wir wissen $\ker f^m = \ker f^{m+1}$

$\Leftrightarrow \dim \ker f^m = \dim \ker f^{m+1}$ (weil $\ker f^m \subseteq \ker f^{m+1}$)

$\Leftrightarrow n - \dim \operatorname{im} f^m = n - \dim \operatorname{im} f^{m+1}$

$\Leftrightarrow \dim \operatorname{im} f^m = \dim \operatorname{im} f^{m+1}$ weil $\operatorname{im} f^{m+1} \subseteq \operatorname{im} f^m$

$\Leftrightarrow \operatorname{im} f^m = \operatorname{im} f^{m+1}$

iii $\Leftrightarrow$ iv) analog

i $\to$ iii) $\ker f \subseteq \ker f^2 \subseteq \ker f^3 \subseteq \dots$ bricht ab

Sei $m_0 = \min \{ m \mid \ker f^m = \ker f^{m+1} \}$

Beh: $\ker f^{m_0+k} = \ker f^{m_0+k+1} \quad \forall k \geq 0$

$\ker f \subseteq \ker f^2 \subseteq \dots \subseteq \ker f^{m_0} = \ker f^{m_0+1} = \ker f^{m_0+2} = \dots$

"$\subseteq$" schon gezeigt

"$\supseteq$" Sei $x \in \ker f^{m_0+k+1} \Leftrightarrow f^{m_0+k+1}(x) = 0$

$\Rightarrow f^{m_0+1}(f^k(x)) = 0$

$\Rightarrow f^k(x) \in \ker f^{m_0+1} = \ker f^{m_0}$

$\Rightarrow f^{m_0+k} = f^{m_0}(f^k(x)) = 0$

$\Rightarrow x \in \ker f^{m_0+k}$

ii $\to$ iv) Sei $m_0 = \min\{m \mid \operatorname{im} f^m = \operatorname{im} f^{m+1}\}$

Beh: $\operatorname{im} f^{m_0+k} = \operatorname{im} f^{m_0+k+1} \quad \forall k \geq 0$

"$\supseteq$" schon gezeigt

"$\subseteq$": Sei $y \in \operatorname{im} f^{m_0+k}$

$\Rightarrow \exists x: y = f^{m_0+k}(x) = f^k(\underbrace{f^{m_0}(x)}_{\in \operatorname{im} f^{m_0} = \operatorname{im} f^{m_0+1}})$

$\Rightarrow \exists z: f^{m_0}(x) = f^{m_0+1}(z)$

$\Rightarrow y = f^k(f^{m_0+1}(z)) = f^{m_0+k+1}(z)$

$\Rightarrow y \in \operatorname{im} f^{m_0+k+1}$

(i $\leftrightarrow$ iv) $\leftrightarrow$ v

Sei $W = \operatorname{im} f^m$ invariant unter f

$g := f^m|_W$

$\ker g = \ker f^m \cap W = \ker f^m \cap \operatorname{im} f^m$

$\ker f^m \cap \operatorname{im} f^m = \{0\} \iff g$ injektiv

$\iff g$ surjektiv $\iff \operatorname{im} g = W$

$\iff g(W) = W \iff f^m(f^m(V)) = f^m(V)$

$\iff \operatorname{im} f^{2m} = \operatorname{im} f^m \overset{i \leftrightarrow iv}{\iff} \operatorname{im} f^{m-1} = \operatorname{im} f^m$

v $\to$ vi) $\ker f^m \cap \operatorname{im} f^m = \{0\}$

Dimensionssatz: $\dim \ker f^m + \dim \operatorname{im} f^m = \dim V$

und $\ker f^m + \operatorname{im} f^m$ ist direkt

$\Rightarrow \ker f^m \oplus \operatorname{im} f^m = V$

$M \in \mathbb{R}^{3\times3}$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\ker A = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ $\operatorname{im} A = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\ker A^2 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ $\operatorname{im} A^2 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\ker A^3 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $\operatorname{im} A^3 = \{0\}$

$x \in \ker A^k \Rightarrow Ax \in \ker A^{k-1}$

z. B. $e_1\ e_2 \in \ker A^2$

$A e_2 = e_1 \in \ker A$

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow B - \lambda I = A$$

$\chi_{B}(x) = (x-\lambda)^3$

$\ker(B - \lambda I) = \ker A = \mathcal{L}\{e_1\}$

$\ker(B - \lambda I)^2 = \ker \mathcal{L}\{e_1, e_2\}$

$\ker(B - \lambda I)^3 = \mathcal{L}\{e_1, e_2, e_3\}$

$x \in \ker((B - \lambda I)^2) \Rightarrow (B - \lambda I)x \in \ker(B - \lambda I)$

$\Rightarrow Bx = \lambda x + y \qquad y \in \ker \underset{\text{Eigenvektor}}{(B - \lambda I)}$

Das wird der allgemeine Fall sein

Finde Basis $b_1 \dots b_n$ sodass $f(b_i) = \lambda b_i$

oder $f(b_i) = \lambda b_i + b_{i-1}$

[illegible] DEF

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\lambda \in \operatorname{spec} A$

Dann heißt $\ker(\lambda I - A)^n$ der [illegible]

oder [illegible] zum Eigenwert λ

(Bemerkung: wir können auch $(\lambda I - A)^{m_0}$ schreiben)

[illegible]

Seien $\lambda_1 \dots \lambda_k$ verschiedene Eigenwerte von A und

$\ker(\lambda_i - A)^{r_i}$ die zugehörigen Haupträume

Dann ist $\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{im}(\lambda_i - A)^{r_i} \cap \ker\left[\left(\prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - A)^{r_i}\right.\right. = \{0\}$

(Bemerkung: für $k=1$: $\operatorname{im}(\lambda_1 - A)^{r_1} \cap \ker(\lambda_1 - A)^{r_1} = \{0\}$

Bew

ZZ: wenn $x \in \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{im}(\lambda_i - A)^{r_i} \cap \ker \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - A)^{r_i} \Rightarrow x = 0$

Induktion

$k = 1$: Fitting

~~Sk~~ $k+1$

Sei $x \in \bigcap_{i=1}^{k+1} \operatorname{im}(\lambda_i I - A)^{r_i}$ $\quad \underbrace{(\lambda_1 I - A)^{r_1} \dots (\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}}}_{y} = 0$

$y := (\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}} x \in \ker \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i I - A)^{r_i}$

Beh: $y \in \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{im}(\lambda_i I - A)^{r_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$

$x \in \operatorname{im}(\lambda_i I - A)^{r_i} \Rightarrow \forall i : \exists u_i : x = (\lambda_i I - A)^{u_i}$

$y = (\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}} x = (\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}} (\lambda_{u_i} I - A)^{r_{u_i}}$

$= (\lambda_i I - A)^{r_i} (\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}} u_i \in \operatorname{im}(\lambda_i I - A)^{r_i}$

$\Rightarrow y \in \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{im}(\lambda_i I - A)$

y erfüllt die Induktionsvoraussetzung zum Index k

$\Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow x \in \ker (\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}}$ $\Big\}$ ~~$\overset{\text{Fitting}}{\Longrightarrow} x = 0$~~

und $y \in \operatorname{im} (\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}}$ lt. Voraussetzung

$\overset{\text{Fitting}}{\Longrightarrow} x = 0$

11

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 2 & 1 & 0 & & \\ & & & & 2 & 1 & & \\ & & & & & 2 & & \\ & & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{über } \mathbb{R}$$

spec. A: $\lambda_1 = 1$

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 1 & 1 & 0 & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & -1 & -1 \\ & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\ker(A - I) = \mathcal{L}(e_1, e_3)$

$\operatorname{im}(A - I) = \mathcal{L}(e_1, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8)$

$$(A - I)^2 = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & & & \\ & 0 & & \\ & & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}^2 & \\ & & & \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^2 \end{bmatrix}$$

regulär

$\ker(A - I)^2 = (e_1, e_2, e_3)$

$\operatorname{im}(A - I)^2 = (e_5, e_6, e_7, e_8)$ $\rightarrow$ stabil

$\lambda = 2$:

$$(A - 2I) = \begin{bmatrix} \begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix} & & & \\ & -1 & & \\ & & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix} & \\ & & & \begin{matrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$\cancel{\ker(A - 2I) = \mathcal{L}(e_4)}$

$\operatorname{im} \cancel{(A - 2I) = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_7, e_8)}$

$\ker(A - 2I) = \mathcal{L}(e_4)$

$\operatorname{im}(A - 2I) = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_7, e_8)$

$$(A - 2I)^2 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 & & & \\ & 1 & & \\ & & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \\ & & & \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^2 \end{bmatrix}$$

regulär

$\ker(A - 2I)^2 = \mathcal{L}(e_4, e_5)$

$\operatorname{im}(A - 2I)^2 = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_7, e_8)$

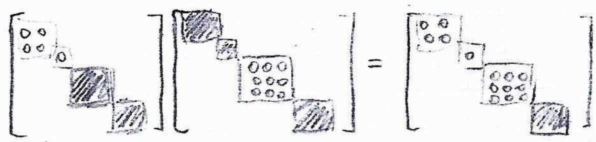
$$(A-2I)^3 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{bmatrix}^3 & & & \\ & \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} & & \\ & & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \\ & & & \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^3 \end{bmatrix}$$

$\ker (A-2I)^3 = \mathcal{L}(e_4, e_5, e_6)$

$\operatorname{im} (A-2I)^3 = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_7, e_8)$

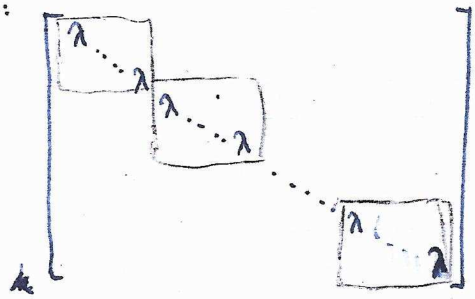
$\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{im}(\lambda_i - A)^{r_i} = \operatorname{im}(I-A)^2 \cap \operatorname{im}(I-A)^3 = \mathcal{L}(e_7, e_8)$

$\prod_{i=1}^{2} (\lambda_i I - A)^{r_i} = (I-A)^2 (2I-A)^3$



$\ker \quad = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$

Wh:



Zu jedem λ ein Block

$\to$ Hauptraum

setze Basen der Haupträume, zu Basis von $\mathbb{K}$ zusammen

$\bigcap_{i=1}^{k} = \operatorname{im}(\lambda_i I - A)^{r_i} \cap \ker(\lambda_i - A)^{r_i} \dots (\lambda_k - A)^{r_k} = \{0\}$

11.13 LEMMA

i) $\ker (\lambda I - A)^k \cap \ker (\mu I - A)^e = \{0\}$

ii) Die Summe $(\lambda_1 I - A)^{r_1} + \dots + (\lambda_k I - A)^{r_k}$ ist direkt

BEWEISBEMERKUNG

$\ker (\lambda_i - A)^{r_i} \subseteq \ker (\lambda_1 - A)^{r_1} \dots (\lambda_k - A)^{r_k}$

denn $(\lambda_i - A)^{r_i} = 0$

$\Rightarrow (\lambda_i - A)^{r_i} \dots (\lambda_k - A)^{r_k} x = (\lambda_1 - A)^{r_1} \dots \widehat{(\lambda_i - A)^{r_i}} \dots (\lambda_k - A)^{r_k} \underbrace{(\lambda_i - A)^{r_i}}_{=0}$

Wh.: $U_1 + \dots + U_k$ direkt $\Leftrightarrow \forall i: U_i \cap (U_1 + \dots + \hat{U}_i + \dots + U_k) = \{0\}$

$\Leftrightarrow$ wenn $u_1 + \dots + u_k = 0$ mit $u_i \in U_i \Rightarrow$ alle $u_i = 0$

ii) Induktion

$k = 1$: trivial

$k \to k+1$:

Sei $v_i \in \ker(\lambda_i I - A)^{r_i}$ $\quad 1 \leq i \leq k+1$

Annahme: $v_1 + v_2 + \dots + v_{k+1} = 0$ $\quad$ zz: alle $v_i = 0$

Sei $w_i = (\lambda_{k+1} - A)^{r_{k+1}} v_i = 0$

$\Rightarrow$ (1) $w_{k+1} = 0$

(2) $\sum_{i=1}^{k} w_i = (\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}} \sum_{i=1}^{k+1} v_i = 0$

(3) $w_i \in \ker(\lambda_i I - A)^{r_i}$

$(\lambda_i I - A)^{r_i} w_i = (\lambda_i I - A)^{r_i} \underbrace{(\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}} v_i}_{=0}$

$= (\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}} \underbrace{(\lambda_i I - A)^{r_i} v_i}_{=0}$

$\Rightarrow w_i \in \ker(\lambda_i I - A)^{r_i} \quad \forall i$

und $w_1 + \dots + w_k = 0$

IV $\Rightarrow$ alle $w_i = 0$

$\Rightarrow v_i \in \ker(\lambda_{k+1} I - A)^{r_{k+1}} \cap \ker(\lambda_i I - A)^{r_i}$

i) $\Rightarrow v_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots k\}$

$\Rightarrow v_{k+1} = 0$

11.14 SATZ

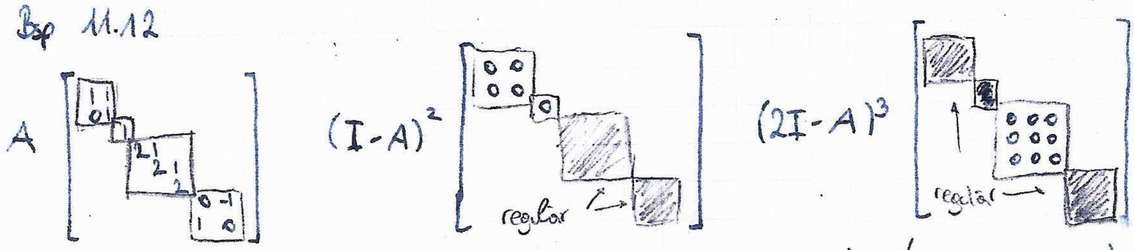
$A \in K^{n \times n}$, $\lambda_1, \dots \lambda_k$ paarweise verschiedene (nicht notwendigerweise alle) Eigenwerte

i) $V = \ker(\lambda_1 - A)^n \oplus \dots \oplus \ker(\lambda_k - A)^n \oplus \underbrace{\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{im}(\lambda_i - A)^n}_{W :=}$

ii) W ist invariant unter A

und $\lambda_i \notin \operatorname{spec}(f_A|_W)$

Vgl. Bsp 11.12



$im = \mathcal{L}(e_4, e_5, e_6, e_7, e_8)$

$im = (e_1, e_2, e_3, e_7, e_8)$

$ker = (e_4, e_5, e_6)$

$W = \mathcal{L}(e_7, e_8)$

BEWEIS

i) Induktion

$k=1$:

Fitting $\Rightarrow \ker(\lambda_i - A)^n \oplus \operatorname{im}(\lambda_i - A)^n = V$

$k \to k+1$:

Wir nehmen an

$$V = \ker(\lambda_1 - A)^n \oplus \dots \oplus \ker(\lambda_k - A)^n \oplus \underbrace{\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{im}(\lambda_i - A)^n}_{W_k}$$

Schritt 1:

W_k ist invariant, Sei $y \in W_k$

$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, k\} : \exists x_i \in V : y = (\lambda_i I - A)^n x_i$

z.z.: $\underline{\forall y \in W_k}$: $Ay = A(\lambda_i I - A)^n x_i$

$= (\lambda_i I - A)^n (A x_i) \in \operatorname{im}(\lambda_i I - A)^n \quad \forall i$

$\Rightarrow \forall y \in \bigcap_{i=1} \operatorname{im}(\lambda_i I - A)^n = W_k$

Wende Fitting an:

$f_A|_{W_k}$

$W_k = \ker(\lambda_{k+1} - f_A|_{W_k})^n \oplus \operatorname{im}(\lambda_{k+1} - f_A|_{W_k})^n$

$\subseteq \ker(\lambda_{k+1} - A)^n + \oplus \dots W_k \cap \operatorname{im}(\lambda_{k+1} - A)^n$

$= \ker(\lambda_{k+1} - A)^n + W_{k+1}$

$\Rightarrow V = \ker(\lambda_1 - A)^n + \dots + \ker(\lambda_{k+1} - A)^n + W_{k+1}$

Die Summe ist direkt

Seien $x_i \in \ker(\lambda_i I - A)^n \quad 1 \le i \le k+1 \quad , y \in W_{k+1}$

zz: wenn $x_1 + \dots + x_{k+1} + y = 0$ dann $x_1 = \dots = x_{k+1} = y = 0$

$$0 = \prod_{i=1}^{k+1} (\lambda_i - A)^n \left(\sum_{j=1}^{k+1} x_j + y \right) = \prod_{i=1}^{k+1} (\lambda_i - A)^n y$$

$$= \ker(\lambda_j - A)^n \subseteq \ker \prod_{i=1}^{k+1} (\lambda_i - A)^n$$

$$\Rightarrow y \in \ker \prod_{i=1}^{k+1} (\lambda_i - A)^n \cap \operatorname{im} \bigcap_{i=1}^{k+1} \operatorname{im} (\lambda_i I - A)^n \overset{11.11}{=} \{0\}$$

$$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k+1} x_i = 0 \overset{11.13\ ii}{\Longrightarrow} \text{alle } x_i = 0$$

ii) $\ker(\lambda_i - A) \cap W_k \subseteq \ker(\lambda_i I - A)^n \cap W^k$

$\subseteq \ker(\lambda_i I - A)^n \cap \operatorname{im}(\lambda_i - A)^n = \{0\}$ wegen Fitting

$\Rightarrow$ keine Vektoren zum Eigenwert λ sind in W_k

$\Rightarrow \lambda_i \notin \operatorname{spec} f_A|_{W_k}$ für $1 \le i \le k$

11.15 KOROLLAR

$\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\lambda_1 \dots \lambda_k$ alle Eigenwerte von A

$\Rightarrow \mathbb{K}^n = \ker(\lambda_1 - A)^n \oplus \dots \oplus \ker(\lambda_k - A)^n$

BEWEIS

$f_A \big|_{\bigcap_{i=1}^{k} (\operatorname{im}(\lambda_i - A)^n}$ hat keine Eigenwerte $\Rightarrow W_k = \{0\}$

11.16 DEFINITION

Eine lineare Abbildung/Matrix heißt nilpotent wenn

$\exists k \in \mathbb{N}: f^k = 0$

Das kleinste solche k heißt Index der Nilpotenz

$(\lambda_i - f)\big|_{\ker(\lambda_i - f)}$ ist nilpotent

$\forall x \in \ker(\lambda_i - f)^n : (\lambda_i - f)^n x = 0$

Wir haben $\mathbb{K}^m$ zerlegt in invariante UR $\ker(\lambda_i I - A)^n$

$$(A - \lambda_i)\Big|_{\ker(\lambda_i - A)^n} \text{ ist nilpotent.}$$

Ziel: Jede nilpotente Matrix, kann auf die Form

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \cong \lambda_i I + \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A \cong \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} e_i = e_{i-1} \text{ oder } 0$$

11.17 LEMMA

$\ker f^k \subseteq \ker f^{k+1} \subseteq \ker f^{k+2} \ldots$

Seien $u_1 \ldots u_p$ Basis von $\ker f^k$

$u_1 \ldots u_p\, v_1 \ldots v_q$ Basis von $\ker f^{k+1}$

$u_1 \ldots u_p\, v_1 \ldots v_q\, w_1 \ldots w_r$ Basis von $\ker f^{k+2}$

Dann ist $(u_1 \ldots u_p, f(w_1) \ldots f(w_r))$ l.u.

BEWEIS

klar $f(\ker f^{k+2}) \subseteq \ker f^{k+1}$

Sei $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j f(w_j) = 0$

z.z.: alle λ_i, alle $\mu_j = 0$

$$0 = f^k\Big(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j f(w_j)\Big)$$

$$= 0 + f^k\Big(\sum_{j=1}^{r} \mu_i f(w_j)\Big) = f^{m+1}\Big(\sum_{j=1}^{r} \mu_j w_j\Big)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{r} \mu_j w_j \in \ker f^{k+1} = \mathcal{L}(u_1 \ldots u_p, v_1 \ldots v_q)$$

andererseits sind $w_i \in \ker f^{k+2} \ominus \ker f^{k+1}$
$\notin \mathcal{L}(u_1 \ldots u_p, v_1 \ldots v_q)$

$\rightarrow$ alle $\mu_j = 0$

$\ominus$: gemeint ist $\ker f^{k+2} = f \cdot f^{k+1} \oplus \mathcal{L}(w_1 \dots w_r)$

$\sum_{j=1}^{r} \mu_j w_j \in \ker f^{k+1} \cap \mathcal{L}(w_1 \dots w_r) = \{0\}$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{r} \mu_j w_j = 0 \Rightarrow$ alle $\mu_j = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow$ alle $\lambda_i = 0$

11.18 SATZ JORDANSCHE NORMALFORM

Sei $\dim V = n$, $f \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent vom Index p, $d = \dim \ker f$

Dann $\exists$ Basis $\mathcal{B}$ von V sodass

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_q \end{bmatrix} \qquad N_i = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}}_{n_i \times n_i}$$

mit $p = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_d \geq 1$

$n_1 + n_2 + \dots + n_d = n$

BEWEIS

$U_k = \ker f^k$, $m_k = \dim U_k$

$\Rightarrow U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \dots \subsetneq U_p = V$

$d = m_1 < m_2 < \dots < m_p = n$

$f(U_k) \subseteq U_{k-1}$

$u_1 \dots u_{m_1},\ u_{m_1+1} \dots u_{m_2},\ u_{m_2+1} \dots u_{m_3} \dots \dots u_{m_p}$

U_1

U_2

U_3

$U_p = V$

$u_1 \dots u_{m_k}$ ist Basis von U_k

- Beginne von hinten

$u_{p_1} \mid u_{m_{p-1}+1} \quad u_{m_{p-1}+2} \dots u_{m_p}$ $\qquad$ Basis von $U_p \ominus U_{p-1}$

$\quad\ \ \| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \|$

$\quad v_1^{(p)} \qquad v_2^{(p)} \qquad v_{m_p - m_{p-1}}^{(p)}$

$\downarrow$

$v_1^{(p-1)} = f(v_1^{(p)}),\ v_2^{(p-1)} := f(v_2^{(p)}) \dots v_{m_p - m_{p-1}}^{(p)} := f(v_{m_p - m_{p-1}}^{(p)})$

$v_1 \dots v_{m_p - m_{p-1}} \in U_{p-1} \ominus U_{p-2}$ wegen 11.17

11.17 $\to$ $v_1^{(p-1)} \dots v_{m_p - m_{p-1}}^{(p-1)}$ sind l. u.

$u_1 \dots u_{m_{p-2}}$

Wir können $u_1 \dots u_{m_{p-2}}\ v_1^{(p-1)} \dots v_{m_p - m_{p-1}}^{(p-1)}$ zu einer Basis von U_{p-1} ergänzen

Basisauswahlsatz $\to$ wir können Ergänzungsvektoren aus $(u_{m_{p-2}+1} \dots u_{m_{p-1}})$ wählen

$u_1 \dots u_{m_{p-2}} \mid u_{m_{p-2}+1} \dots u_{m_{p-1}} \mid u_{m_{p-1}+1} \dots u_{m_p}$

$u_1 \dots u_{m_{p-2}} \mid f(u_{m_{p-1}+1}) \dots f(u_{m_p})$ ist linear unabh. lt. 11.17

$\to$ ergänze zu Basis von U_{p-1}:

$u_1 \dots u_{m_{p-2}}\ v_1^{(p-1)} \dots v_{m_p - m_{p-1}}^{(p-1)} \mid \underbrace{v_{m_p - m_{p-1}+1}^{(p-1)} \dots v_{m_p - m_{p-2}}^{(p-1)}}_{\subseteq \{u_{m_{p-2}+1}, \dots u_{m_{p-1}}\}}$

$v_1^{(p-2)} := f(v_1^{(p-1)}),\ v_2^{(p-2)} := f(v_2^{(p-1)}) \dots v_{m_p - m_{p-2}}^{(p-2)} := f(v_{m_p - m_{p-2}}^{(p-1)})$

$\in U_{p-2} \ominus U_{p-3}$

ergänze $u_1 \dots u_{m_{p-3}}\ v_1^{(p-2)} \dots v_{m_{p-1} - m_{p-2}}^{(p-2)}$ zu Basis von U_{p-2}

.... usw

$U_p = V$

$v_1^{(p)} \dots \dots v_{m_p - m_{p-1}}$

$u_{m_{p-1}+1} \quad u_{m_p}$

f

U_{p-1}

$v_1^{(p-1)}\ v_2^{(p-1)} \dots v_{m_p - m_{p-1}}^{(p-1)} \mid \dots v_{m_{p-1} + m_{p-2}}^{(p-1)}$

$\downarrow f$

U_{p-2}

f

$v_1^{(p-2)}\ v_2^{(p-2)} \dots v_{m_p - m_{p-1}}^{(p-2)}\ v \dots v_{m_{p-1} - m_{p-2}}^{(p-2)} \mid v_{m_{p-1} - m_{p-2}+1}^{(p-2)} \dots v_{m_{p-2} - m_{p-3}}^{(p-2)}$

$\vdots$

U_2

U_1

$v_1^{(1)}\ v_2^{(1)} \dots \dots v_m^{(1)}$

$v_i^{(p-1)} := f(v_i^{(p)}) \in U_{p-1}$ sind linear unabhängig von $u_1 \dots u_{m_{p-1}}$

1) Die Elemente der letzten k Zeilen bilden eine Basis von U_k

2) f bildet k-te Zeile (von unten) auf die (k-1)-te Zeile ab

$f(U_k) \subseteq U_{k-1} \setminus U_{k-2}$

$B = v_1^{(1)}\, v_1^{(2)} \dots v_1^{(n_1)}\, v_2^{(1)} \dots v_2^{(n_2)} \dots v_d^{(1)}\, v_d^{(2)} \dots v_d^{(n_d)}$

$$\Phi_B^B(f) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n_1 \times n_1} & & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n_2 \times n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n_d \times n_d} \end{bmatrix}$$

da $f(v_i^{(1)}) = 0$ $\quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ $\quad f(v_i^{(k)}) = v_i^{(k-1)}$ für $k \geq 2$

11.19 BEISPIEL

$$A := \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{matrix}$$ ist nilpotent

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \cdot(-3) \quad +4$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{matrix} \quad +2$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$x_2 = -x_6 \qquad x_7 = 2x_3 = 0$

$x_5 = 0 \qquad x_3 = 0 \qquad x_1, x_4, x_8$ frei

Basis von ker A

$u_1 = e_1$, $u_2 = e_4$, $u_3 = -e_2 + e_6$, $u_4 = e_8$

$\ker A = \ker N_1$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Pivotzeilen}$$

Beh: $\ker A^2 = \ker N_1 \cdot A$

$x \in \ker A^2 \Leftrightarrow Ax \in \ker A = \ker N_1 \Leftrightarrow N_1 \cdot Ax = 0 \Leftrightarrow x \in \ker N_1$

$$N_1 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad x_3 = 2x_5$$

Basis von $\ker A^2$: $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ frei:

$\rightarrow$ Basis von U_2: $\underset{}{\overset{u_1}{e_1}}, \overset{u_2}{e_4}, \overset{u_3}{-e_2+e_6}, \overset{u_4}{e_8} \mid \overset{u_5}{e_2}\ \ \overset{u_7}{2e_3+e_5}\ \ \overset{u_7}{e_7}$

$e_1, e_2, e_4\ \ 2e_3+e_5\ \ e_6\ \ e_7\ \ e_8$ Basis von U_2

$e_6 = (-e_2 + e_6) + e_2 = u_3 + u_5$

Wir wollen Basis von U_2 die die schon gefundene Basis von U_1 enthält

$\ker A^2 = \ker N_2$

$N_2 = [0\ 0\ 1\ 0\ -2\ 0\ 0\ 0]$

$\ker A^3 = \ker N_2 \cdot A = \ker [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$

$U_3 = \mathbb{R}^8$

$$\begin{array}{l|cccc|ccc|c} & & & & U_1 & & U_2 & & U_3 \\ \text{Basis:} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \\ & e_1 & e_4 & -e_2+e_6 & e_8 & e_2 & 2e_3+e_5 & e_7 & e_3 \end{array}$$

$\Rightarrow d = \dim \ker A = 4$

$\Rightarrow$ 4 Jordanblöcke

$p = 3 \Rightarrow$ größter Block: 3×3

$m_1 = \dim U_1 = 4$

$m_2 = \dim U_2 = 7$

$m_3 = \dim U_3 = 8$

$U_3 \ominus U_2 = \mathcal{L}(u_8)$

$$A e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 3e_2 - 2e_6$$

$v_1^{(3)} = u_8 = e_3$

$\cdot A$

$v_1^{(2)} = 3e_2 - 2e_6$ $\rightarrow$ ergänze $u_1, u_2, u_3\ u_4 \mid v_1^{(2)}$ zu einer Basis von U

$v_2^{(2)} = 2e_3 + e_5$

$v_3^{(2)} = e_7$

$\mathcal{L}(-e_2 + e_6, 3e_2 - 2e_6) = \mathcal{L}(e_2, e_6)$

$e_1, \ e_4 \quad -e_2 + e_6 \quad e_8 \mid 3e_2 - 2e_6 \quad 2e_3 + e_5 \quad e_7$ Basis von U_2

"Pool": $e_2, \ 2e_3 + e_5 \quad e_7$

$e_2 \in \mathcal{L}(u_1, \dots u_4, v_1^{(2)})$

$\cdot A$

$v_1^{(1)} = e_1 + 3e_4 - 4e_8$

$v_2^{(1)} = 4e_2 + e_4 - 4e_6 \qquad v_3^{(1)} = -e_2 + e_6$

ergänze $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_3^{(1)}$ zu einer Basis von U_1

Pool: $e_1, \ e_4, \ -e_2 + e_6 \quad e_8$

$e_1 \in \mathcal{L}(v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_3^{(1)})$

$e_4 = v_2^{(1)} - 4v_3^{(1)}$

$e_8 = v_1^{(1)} - e_1 - 3e_4$

$\mathcal{B} = v_1^{(1)}, v_1^{(2)}, v_1^{(3)}, v_2^{(1)}, v_2^{(2)}, v_3^{(1)}, v_3^{(2)}, v_4^{(1)}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}AB = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{0} \end{bmatrix}$$

Das war der Fall einer nilpotenten Matrix

Allgemeiner Fall: $V = \bigoplus$ Haupträume

und auf den Haupträumen ist $A - \lambda I$ nilpotent

$\Rightarrow A - \lambda I \cong \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$

11.20 DEFINITION

Eine Matrix der Form $J = J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{k \times k}$

heißt Jordanblock der Länge k zum Eigenwert λ

11.21 BEMERKUNG

$$\chi_{J_k(\lambda)}(x) = (x-\lambda)^k$$

$\dim \eta_\lambda = 1$

$J_k(\lambda) - \lambda I$ ist nilpotent vom Index k $\lightning$

11.22 SATZ (Jordansche Normalform im allg. Fall)

Sei k alg. abg (z.B. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Dann ist jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform

d.h. $\exists B \in GL$ so dass

$$B^{-1} A B = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_q \end{bmatrix}$$ wobei J_i Jordanblöcke zu EW von.

BEWEIS

Seien $\lambda_1 \dots \lambda_m$ alle versch. EW von A

$W_i = \ker(\lambda_i I - A)^n$ die entsprechenden Haupträume

$11.15 \Rightarrow \mathbb{K}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_m$

W_i sind invariant und $(f_A - \lambda_i)|_{W_i}$ ist nilpotent

$11.18 \Rightarrow \exists$ Basis B_i von W_i so, dass

$$\Phi^{B_i}_{B_i}((f_A - \lambda_i)|_{W_i}) = \begin{bmatrix} N_{n_{i1}} & & \\ & \ddots & \\ & & N_{n_{id_i}} \end{bmatrix}$$

wobei $N_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} = J_k(0)$

$d_i = \dim \ker(\lambda_i I - A)$ = geometr. Vielfachheit von λ_i

$$\Rightarrow \Phi^{B_i}_{B_i}(f_A|_{W_i}) = \begin{bmatrix} J_{n_{i1}}(\lambda_i) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_{id_i}}(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_m$

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{bmatrix} J_{n_{11}}(\lambda_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J_{n_1 d_1}(\lambda_1) & & & \\ & & & J_{n_{21}}(\lambda_2) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_{n_2 d_2}(\lambda_2) \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & J_{n_q d_q}(\lambda_q) \end{bmatrix}$$

11.23 KOROLLAR

Sei $T^{-1} A T = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_q \end{bmatrix}$

eine Jordansche Normalform für A

$J_i = J_{k_i}(\lambda_i)$

(müssen nicht verschieden sein, jedes λ_i kommt so oft vor wie der geometr. VF entspricht)

1) $\sum_{i=1}^{q} k_i = n$

2) Für $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$ gilt

$d(\lambda) = \# \{ i \mid \lambda = \lambda_i \}$

$k(\lambda) = \sum \{ k_i \mid \lambda = \lambda_i \}$

3) $\min \{ r \mid \ker(\lambda - A)^r = \ker(\lambda - A)^t \} = \max \{ k_i \mid \lambda = \lambda_i \}$

4) $\# \{ i \mid \lambda_i = \lambda \wedge k_i \geq k+1 \} = rk((\lambda - A)^k) - rk((\lambda - A)^{k+1})$

5) Die Jordanblöcke sind (bis auf Reihenfolge) eindeutig bestimmt

BEWEIS

1) klar

2) Zu jedem Eigenvektor gibt es einen Jordanblock (siehe Algorithmus)

$v_k \cdot (J_k(\lambda) - \lambda I) = k - 1$

$\chi_A(x) = \chi_{T^{-1}AT}(x) = \prod_{i=1}^{q} \chi_{J_i}(x) = \prod_{i=1}^{q} (x - \lambda_i)^{k_i}$

3) Sei $T^{-1} A T = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_q \end{bmatrix}$

$$(\lambda - T^{-1}AT)^k = \begin{bmatrix} (\lambda - J_1)^k & & \\ & \ddots & \\ & & (\lambda - J_q)^k \end{bmatrix}$$

$\lambda \neq \lambda_i \Rightarrow (\lambda - J_i)$ regulär

$\Rightarrow (\lambda - J_i)^k$ regulär

$\lambda = \lambda_i \Rightarrow \underset{k_i \times k_i}{rk((\lambda - J_i)^k)} = \begin{cases} k_i - k & k \leq k_i \\ 0 & k \geq k_i \end{cases}$

$rk((\lambda_i - J_i)^k) - rk((\lambda_i - J_i)^{k+1}) = \begin{cases} 1 & k \leq k_i - 1 \\ 0 & k \geq k_i \end{cases}$

4) $\# \{ i \mid \lambda_i = \lambda \wedge k_i \geq k+1 \}$

$= rk(\lambda - A)^k - rk(\lambda - A)^{k+1}$

$= rk((\underbrace{J_i}_{k_i \times k_i} - \lambda_i I)^k) = \begin{cases} k_i - k & \text{wenn } k \leq k_i \\ 0 & k \geq k_i \end{cases}$

$$rk(A - \lambda I)^k = \sum_{\lambda = \lambda_i} (k_i - k) + \sum_{\lambda \neq \lambda_i} k_i$$

$$\Rightarrow rk((A - \lambda I)^k) - rk((A - \lambda I)^{k+1})$$

$$= \sum_{\lambda = \lambda_i} (k_i - k)_+ - (k_i - (k+1))_+ \qquad \text{wobei: } a_+ = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \sum_{\substack{\lambda = \lambda_i \\ k+1 \leq k_i}} 1 = \# \{ i \mid k_i \geq k+1 \}$$

11.24 LEMMA

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ $\qquad \psi_A : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}^{n \times n}$ Einsetzungshomomorphism

$\qquad p(x) \mapsto p(A)$

$(p+q)(A) = p(A) + q(A)$

$(p \cdot q)(A) = p(A) \cdot q(A)$

i) $p\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(\lambda_n) \end{bmatrix}$

ii) $p\left(\begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_n} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} p(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(A_n) \end{bmatrix}$

iii) Wenn $A = T^{-1} B T \Rightarrow p(A) = T^{-1} p(B) T$

$(T^{-1} A T)^k = (T^{-1} A T)(T^{-1} A T) \dots (T^{-1} A T)$

$= T^{-1} A^k T$

Jede Matrix ist ähnlich zu einer Jordan'schen Normalform (=Blockdiagonalmatrix aus Jordan-Blöcken)
→ es genügt p (Jordanblöcken) zu verstehen

z. B. $p\left(\begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} p(x) & p'(x) \\ 0 & p(x) \end{bmatrix}$

125 LEMMA

Für $J = J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda I + N$ $\quad N \ldots$ nilpotente Matrix der Form $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$

gilt $p(J)_{ij} = \begin{cases} \dfrac{p^{(j-i)}(\lambda)}{(j-i)!} & \text{wenn } j \geq i \\ 0 & \text{wenn } j < i \end{cases}$

$$p\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} p(\lambda) & p'(\lambda) & \frac{p''(\lambda)}{2} & \frac{p'''(\lambda)}{6} & \cdots \text{ usw} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{p'''(\lambda)}{6} \\ & & \ddots & \ddots & \frac{p''(\lambda)}{2} \\ & & & \ddots & p'(\lambda) \\ & & & & p(\lambda) \end{bmatrix}$$

BEWEIS

$$(\lambda I + N)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} N^i$$

$$(A + B)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i} \quad \text{wenn } AB = BA$$

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

$i+1$ te Spalte

$$N^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Ü

11.26 ANWENDUNG diskrete dynamische Systeme

RÄUBER-BEUTE MODELLE

F_n = # Füchse $\qquad H_n$ = # Hasen

Überlebensrate

$$F_{n+1} = p \cdot F_n + q \cdot H_n$$

Zuwachsrate

$$H_{n+1} = -t \cdot F_n + g \cdot H_n$$

Tötungsrate

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ H_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ -t & g \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ H_n \end{pmatrix}$$

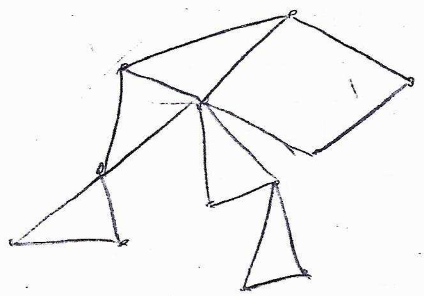
$$A = T \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T^{-1}$$

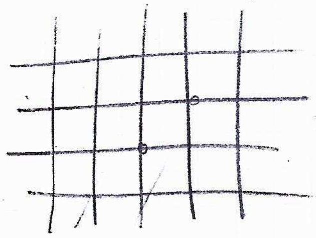
$|\lambda| > 1$ ... Explosion der Population

$|\lambda| < 1$ ... Aussterben

$|\lambda| = 1$ ... Gleichgewicht

IRRFAHRTEN





↪ stochastische Prozesse

11.27 MATRIXEXPONENTIALFUNKTION

Die Definition $f\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{bmatrix}$

lässt sich auf beliebige Funktionen erweitern

$$A = T^{-1} \Lambda T \Rightarrow f(A) = T^{-1} f(\Lambda) T$$

diagonalisierbare Matrix

Wenn $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ analytisch auf spec A

dann ist $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$

$$A = B J B^{-1} \Rightarrow f(A) = B\, f(J)\, B^{-1}$$

BEISPIEL Exponentialfunktion

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

$$A = B \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{bmatrix} B^{-1}$$ Jordan-Normalform

$$e^A = B \cdot \begin{bmatrix} e^{J_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_k} \end{bmatrix} B^{-1}$$

$J_i = \lambda_i I + N \qquad e^{\lambda I + N} = e^{\lambda_i} + e^N$

denn $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ wenn $AB = BA$

i. A. ist $e^X + e^Y \neq e^{X+Y}$,

aber $e^{X \cdot Y} = e^Z$

wobei: $Z = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]]$

$[X,Y] := XY - YX$

$\rightarrow$ Campbell-Baker-Hausdorff-Formel

$$e^{\lambda I + N} = e^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k}{k!} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{6} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

11.28 ANWENDUNG: kontinuierliche dynamische Systeme

$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) \qquad \frac{dx}{dt} = a \cdot x \qquad \frac{dx}{x} = a \cdot dt$

$\log x = at + c \quad \Rightarrow x = c_1 \cdot e^{at}$

$\Rightarrow$ Lösung: $x(t) = e^{At} \cdot x_0$

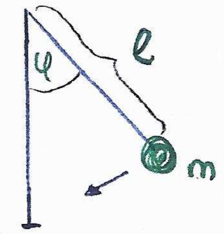
$x(t) \xrightarrow{t \to \infty} ?$

$\lambda_i(e^{At}) = e^{\lambda_i t}, \quad e^{At} = e^{B \Lambda B^{-1} t} = B e^{\Lambda t} B^{-1}$

$\mathrm{Re}\, \lambda_i < 0 \Rightarrow e^{\lambda_i t} \to 0$

$\mathrm{Re}\, \lambda_i > 0 \Rightarrow e^{\lambda_i t} \to \infty$

Beispiel Pendel



$$\cancel{m}\cdot l \cdot \ddot{\varphi} = \cancel{m} \sin\varphi \,(-a^2)$$

$$l\ddot{\varphi} = \sin\varphi\,(-a^2)$$

$$\ddot{\varphi} = \sin\varphi\left(\frac{-a^2}{l}\right)$$

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} \approx -\omega^2 \varphi \quad \text{(Taylorreihe)}$$

Zusatzvariable $\psi = \frac{\dot{\varphi}}{\omega} \Rightarrow \dot{\varphi} = \omega\psi$

$$\dot{\psi} = \frac{\ddot{\varphi}}{\omega} = -\omega\varphi$$

$$\begin{pmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\psi}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Lösung: $\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = e^{\begin{bmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{bmatrix}t}\begin{pmatrix}\varphi_0\\ \psi_0\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}\to \text{Anfangsort}\\ \to \text{Anfangsgeschwindigkeit}\end{matrix}$

$$\chi(x) = x^2 + \omega^2$$

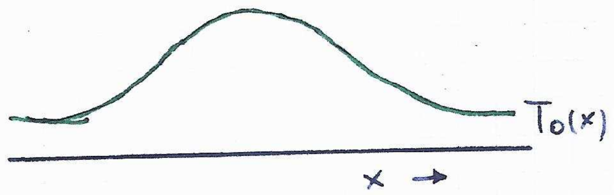
Eigenwerte $\lambda : \omega$

$$\left.\begin{aligned} q(t) &= a e^{i\omega t} + b e^{-i\omega t}\\ &= a' \cos \omega t + b' \sin \omega t \end{aligned}\right\} ?$$

Weitere Beispiele

Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T(t,x)}{\partial t} = \Delta T(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(t,x)$$



$$T(t,x) = e^{t\Delta}\, T_0(x)$$

SCHRÖDINGER - GLEICHUNG

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi(t,x)}{\partial t} = H \psi(t,x)$$

Hamilton Operator

$$\psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} t} H \psi_0 \quad -\Delta + V(x)$$

11.29 SATZ + DEFINITION

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

a) $\exists\, p(x) \in \mathbb{K}[x] : p(A) = 0$

$(I, A, A^2, \ldots A^{n^2})$ sind l.a.

b) $\exists$ eindeutiges normiertes Polynom $m_A(x)$ mit minimalem Grad sodass $m_A(A) = 0$

$m_A(x)$ heißt Minimalpolynom von A

c) $\text{Ann}(A) = \{p(x) \mid p(A) = 0\}$

heißt Annihilator von A und es gilt:

$p(x) \in \text{Ann}(A) \Leftrightarrow m_A(x) \mid p(x)$

d) Jeder Eigenwert von A ist Nullstelle von $m_A(x)$ ☺

BEWEIS

c) Sei $p(x) \in \text{Ann}(A)$

$\Rightarrow \deg p(x) \geq \deg m_A(x)$

$\Rightarrow p(x) = q(x)\, m_A(x) + r(x)$

wobei $\deg r(x) < m_A(x)$

$r(A) = p(A) - q(A) m_A(x) = 0$

$\Rightarrow r(x) \equiv 0$

$\Rightarrow m_A(x) \mid p(x)$

11.30 SATZ VON CAYLEY-HAMILTON

$$\chi_A(A) = 0$$

11.31 KOROLLAR

$$m_A(x) \mid \chi_A(x)$$

Die Nullstellen von $m_A(x)$ und $\chi_A(x)$ sind gleich, haben aber möglicherweise verschiedene Vielfachheiten

zu 11.30 "BEWEIS" 1

$$\chi_A(x) = \det(Ix - A)$$
$$\chi_A(A) = \det(IA - A) = 0$$

BEWEIS 2

$\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen

$$A = B \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_q \end{bmatrix} B^{-1}$$

$$\chi_A(A) = B \begin{bmatrix} \chi_A(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \chi_A(J_n) \end{bmatrix} B^{-1}$$

$J_k = \lambda_{i_k} I + N$, Länge des Blocks $\leq k(\lambda_{i_k})$

$$\Rightarrow \chi_A(x) = \prod (\lambda - \lambda_i)^{k(\lambda_i)}$$

$$\chi_A(J_k) = \prod_{\lambda_i \neq \lambda_{i_k}} (J_k - \lambda_i I)^{k(\lambda_i)} \underbrace{(J_k - \lambda_{i_k} I)^{k(\lambda_{i_k})}}_{= N^{k(\lambda_{i_k})} = 0}$$

11.32 KOROLLAR ZU BEWEIS 2

i) $m_A(x) = \prod_i (x - \lambda_i)^{m_i}$

wobei: m_i = kleinste Potenz, sodass

$\ker(\lambda_i I - A)^{m_i} = \ker(\lambda_i - A)^{m_i + 1}$

= max. Länge eines zu λ_i gehörenden Jordanblocks

ii) A ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow m_A(x)$ hat nur einfache Nullstellen

d.h. $m_A(x) = \prod_{\text{versch EW}} (x - \lambda_i)$

11.33 ANWENDUNG AUF DIE EXPONENTIALFUNKTION

Wenn $p(A) = 0 \Rightarrow A^k = a_0 I + a_1 A + \dots + A^{k-1} a_{k-1}$

$\Rightarrow A^{k+1} = b_0 I + b_1 A_1 + \dots + b_{k-1} A^{k-1}$

$\Rightarrow e^A = c_0 I + c_1 A + \dots + c_{k-1} A^{k-1}$

Bsp. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$e^A = e^{\alpha I + A} = e^\alpha \cdot e^A$

oBdA $Tr(A) = 0$

sonst $\mathring{A} = A - \frac{1}{2} Tr(A) \cdot I$

$Tr(\mathring{A}) = 0$

$e^A = e^{\frac{1}{2} Tr(A)} \cdot e^{\mathring{A}}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \chi_A(x) = x^2 - a^2 - bc = x - \delta, \quad \delta := a^2 - bc$

Cayley-Hamilton $\Rightarrow A^2 = \delta I$

$\Rightarrow A^{2n} = \delta^n I$

$A^{2n+1} = \delta^n A$

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n}}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^n}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^n A}{(2n+1)!}$$

$$= \cosh(\sqrt{\delta})\, I + \frac{\sinh(\sqrt{\delta})}{\sqrt{\delta}} A$$

3. BEWEIS

Komplementärmatrix

$$A \cdot \hat{A} = \det A \cdot I$$

$$\hat{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{j,i}$$

$$\widehat{xI - A} \in \mathbb{K}_{[x]}^{n \times n} = \mathbb{K}^{n \times n}[x]$$

$$= [b_{ij}(x)]_{i,j=1\ldots n} \qquad b_{ij}(x) \in \mathbb{K}[x]$$

$$\deg b_{ij}(x) \leq n-1$$

$$\left(\widehat{xI - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}\right) = \widehat{\begin{bmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} x-d & b \\ c & x-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} x$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} B_k x^k$$ "Polynom mit Matrizen als Koeffizienten

Wenn $b_{ij}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_{ij\,k}\, x^k$

dann $B_k = [b_{ij\,k}]_{i,j=1\ldots n}$

Wissen: $(xI - A)(\widehat{xI - A}) = \chi_A(x) \cdot I$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k + x^n\right) \cdot I = c_0 I + c_1 x I + \ldots + c_{n-1} x^{n-1} I + x_n I$$

$$= (xI - A)\left(\sum_{k=0}^{n-1} B_k x^k\right) = (xI - A)(B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_{n-1} x^{n-1})$$

$$= -AB_0 + (B_0 - AB_1)x + (B_1 - AB_2)x^2 + \ldots + (B_{n-2} - AB_{n-1})x^{n-1} + B_n x^n$$

Koeffizientenvergleich

$$-AB_0 = c_0 I$$

$$B_0 - AB_1 = c_1 I \qquad | \cdot A$$

$$B_1 - AB_2 = c_2 I \qquad | \cdot A^2$$

$$\vdots$$

$$B_{n-2} - AB_{n-1} = c_{n-1} I \qquad | \cdot A^{n-1}$$

$$B_{n-1} = I \qquad | \cdot A^n$$

$\Rightarrow \quad -AB_0 = c_0 I$

$$AB_0 - A^2 B_1 = c_1 A$$
$$A^2 B_1 - A^3 B_2 = c_2 A^2$$
$$\vdots$$
$$A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1} = c_{n-1} A^{n-1}$$
$$A^n B_{n-1} = A^n$$

aufaddieren: $\qquad B_{-1} := 0$

$$A^k B_{k-1} - A^{k+1} B_k = c_k A^k$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (A^k B_{k-1} - A^{k+1} B_k) + A^n B_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k A^k + A^n$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} c_k A^k + A^n = \chi_A(A)$$

Ü 46 $\quad \lambda$ Eigenwert von A, $\quad Ax = \lambda x$

$p(A) \qquad A^k x = \lambda^k x$

$\Rightarrow p(A)x = p(\lambda)x$

$p(x) \in \mathbb{K}[x] \quad \Rightarrow p(\lambda) \in \operatorname{spec}(p(A))$

11.84 SPEKTRALABBILDUNGSSATZ

$\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen

Sei: $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ $\quad p(x) \in \mathbb{K}[x]$

$\Rightarrow \operatorname{spec} p(A) = \{ p(\lambda) \mid \lambda \in \operatorname{spec}(A) \}$

BEWEIS

„$\supseteq$" s. Ü 46

„$\subseteq$" Sei $\mu \in \operatorname{spec} p(A)$

gesucht $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$ sodass $p(\lambda) = \mu$

Sei: x Eigenvektor mit $p(A)x = \mu x$

Sei: $q(x) = p(x) - \mu \quad \Rightarrow \quad q(A) = p(A) - \mu I$

$$q(A)x = 0$$

Sei $q(x) = (x-\mu_1)\dots(x-\mu_n)$

$\Rightarrow q(A) = (A-\mu_1 I)\dots(A-\mu$ ist nicht regulär

d. h. $x \in \ker q(A)$

$\Rightarrow \exists i: A-\mu_i I$ nicht regulär

$\Rightarrow \exists i: \mu_i \in \operatorname{spec}(A)$

$q(\mu_i) = 0 \Rightarrow p(\mu_i) - \mu = 0 \Rightarrow p(\mu_i) = \mu$ $\square$

11.35 BEMERKUNG

Gilt nicht für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Bsp: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\operatorname{spec}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$

$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ $\operatorname{spec}_{\mathbb{R}}(A^2) = \{-1\}$

XII NORMALE MATRIZEN

12.1 WIEDERHOLUNG

In diesen Kapitel VR mit Skalarprodukt

$f: V \to W$ linear

$\Rightarrow$ eindeutige Abbildung $f^*: W \to V$

s.d. $\forall x \in V, \forall y \in W: \langle f(x), y \rangle_W = \langle x, f^*(y) \rangle_V$

Sei $\mathcal{B} := (b_1 \dots b_n) \subseteq V$ ONB

$C := (c_1 \dots c_n) \subseteq W$ ONB

$\Phi^B_C(f)_{ij}$ $\langle f(b_j), c_i \rangle_W$

$\langle \alpha_i c_i, c_k \rangle = \alpha_k$

$\Phi^C_B(f^*)_{ij} = \langle f^*(c_j), b_i \rangle = \overline{\langle b_i, f^*(c_j) \rangle}$

$= \overline{\langle f(b_i), c_j \rangle} = \overline{\Phi^B_C(f)_{ji}}$

$\Rightarrow \Phi^B_C(f)^* = \Phi^C_B(f^*)$

12.2 DEFINITION

Eine lineare Abbildung $f: V \to V$ bzw Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt normal wenn

$$f^* \circ f = f \circ f^* \quad \text{bzw.} \quad A^* A = A A^*$$

z.B. • $A = A^*$ selbstadjungiert

• $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch

• $U^* = U^{-1}$ unitäre und orthogonale Matrizen

12.3 BEMERKUNG

i) Ü $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ wenn A regulär

$\lambda \in \operatorname{spec} A \iff \bar{\lambda} \in \operatorname{spec}(A^*)$

ii) A, B normal $\Rightarrow A+B,\ A\cdot B$ normal wenn $AB = BA$

$(A+B)^*(A+B) = A^*A + B^*B + A^*B + B^*A$

12.4 LEMMA

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal

i) $\ker A = \ker A^*$

ii) $\ker A = \ker A^2$

$\Rightarrow$ HR sind ER

BEWEIS

i)
$$x \in \ker A \iff Ax = 0 \iff \|Ax\|^2 = 0 \iff \langle Ax, Ax\rangle = 0 \iff \langle A^*Ax, x\rangle = 0$$

$$x \in \ker A^* \iff A^*x = 0 \iff \|A^*x\|^2 = 0 \iff \langle A^*x, A^*x\rangle = 0 \iff \langle AA^*x, x\rangle = 0$$

$$\langle A^*Ax, x\rangle = 0 \iff \langle AA^*x, x\rangle = 0$$

ii) $\ker A \subseteq \ker A^2$ trivial

„$\supseteq$": Sei $x \in \ker A^2 \Leftrightarrow A^2x = 0$

$\Leftrightarrow A \cdot Ax = 0$

$\Leftrightarrow Ax \in \ker A = \ker A^*$

$\Leftrightarrow A^*Ax = 0$

$\Rightarrow \langle A^*Ax, x\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle Ax, Ax\rangle = 0$

$\Rightarrow \|Ax\|^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0$

12.5 KOROLLAR

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal

i) $\ker(\lambda - A) = \ker(\bar{\lambda} - A)$

ii) Die Haupträume sind genau die Eigenräume daher ist A diagonalisierbar

BEWEIS

A normal $\Rightarrow \lambda I - A$ normal weil $IA = AI$

$(\lambda I - A)^* = \bar{\lambda} I - A^*$

$\ker(\lambda I - A)^k = \ker(\lambda I - A)$

$\mathbb{C}$ ist alg abg

$\rightarrow$ Daraus folgt alles

12.6 LEMMA

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal

$\lambda \neq \mu \in \operatorname{spec} A$

$\Rightarrow \ker(\lambda - A) \perp \ker(\mu - A)$

BEWEIS

Sei $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y \Rightarrow y \in \ker(\mu I - A) = \ker(\mu I - A)^*$
$= \ker(\bar{\mu} I - A^*)$

$\Rightarrow A^*y = \bar{\mu} y$

$\lambda\langle x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$
$= \langle x, \bar{\mu}y\rangle = \mu\langle x, y\rangle$

$\Rightarrow (\lambda - \mu)\langle x - y\rangle = 0$ und $\lambda \neq \mu \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$

12.7 SATZ

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

Folgende Aussagen sind äquivalent

i) A ist normal

ii) es gibt ONB aus Eigenvektoren

iii) A ist unitär orthogonalisierbar

d.h. $\exists\, U \in \mathcal{U}(n): U^* A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

BEWEIS

i) → ii)

A normal $\Rightarrow$ Haupträume sind Eigenräume

Eigenräume stehen orthogonal aufeinander

$\mathbb{C}^n = \mathcal{H}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{\lambda_k}$ orthogonale Summe

bilde ONB: B_i in $\mathcal{H}_{\lambda_i}$

$\Rightarrow B_1 \cup \dots \cup B_k$ ist ONB aus Eigenvektoren von $\mathbb{C}^n$

ii) → iii)

Sei $u_1 \dots u_n$ ONB aus EV

$U := [u_1 \dots u_n]$

$AU = U \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{U^*}_{=U^{-1}} A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

iii) → i)

$A = U^* \Lambda U \Rightarrow A^* = U^* \Lambda^* U = U^* \bar{\Lambda} U$

$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ $\quad (AB)^* = B^* A^*$

$AA^* = U^* \Lambda U U^* \bar{\Lambda} U = U^* \Lambda \bar{\Lambda} U$

$\Lambda \bar{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\lambda}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \bar{\lambda}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \bar{\lambda}_n \end{bmatrix} = \bar{\Lambda} \Lambda$

$\Rightarrow AA^* = U \bar{\Lambda} \Lambda U = U^* \bar{\Lambda} U U^* \Lambda U = A^* A$

$\Rightarrow A$ normal

12.8 SCHURSCHE NORMALFORM

Issai Schur 1875 - 1941

Sei: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

i) $\exists U \in \mathcal{U}(n): U^* A U = R = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ obere Dreiecksmatrix

mit den Eigenwerten auf der Diagonalen

ii) Wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit nur reellen EW dann kann $U \in \mathcal{O}(n)$ gewählt werden

BEWEIS

Induktion:

Sei: λ EW, u EV mit $Au = \lambda u$, $\|u\| = 1$

→ ergänze zu Orthonormalbasis

$u_1 w_1 \dots w_n$

$$U_1 = \left[\begin{array}{c|c} u_1 & W \end{array}\right] \qquad W = \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n-1}$$

$$AU_1 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \\ 0 & A\cdot W \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right] \qquad U_1^* A U = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & u^* AW \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{W^*AW} \\ 0 & \end{array}\right]$$

wende das Ganze noch einmal an auf $W^* A W \in \mathbb{C}^{n-1 \times n-1}$

$\Rightarrow \exists U_2 \in \mathcal{U}(n-1): U_2^* W^* A W U_2 = R_2$

$$U = U_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & U_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \overset{Ü}{\Rightarrow} U^* A U = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & & \\ \vdots & & R_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Wh: normale Matrizen

$$AA^* = A^*A \quad , \quad \ker A = \ker A^* = \ker A^2$$

$$U^*AU = \Lambda$$

Schursche Normalform

$$UA^*U = [\,\overline{\nabla}\,]$$

$$Au = \lambda u \qquad \|u\| = 1$$

$$\Rightarrow U_1 = [u, W] \text{ unitär}$$

$$AU_1 = U_1 \begin{bmatrix} \lambda & \\ 0 & AW \\ \vdots & \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$U_1^* A U_1 = \begin{bmatrix} \lambda & u^*AW \\ 0 & \\ \vdots & W^*AW \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{rekursiv}} \quad U_2^* W^* A W U_2 = R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & U_2^* \end{bmatrix} U_1^* A U_1 \begin{bmatrix} 1 & \\ & U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & R_2 \\ 0 & \end{bmatrix}$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wenn $\chi_A(x)$ über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren zerfällt, dann kann $\mathcal{U} \in \mathcal{O}(n)$ gewählt werden

Denn die Eigenwerte von W^*AW sind auch reell

$$\chi_A(x) = \chi_{U^*AU}(x) = (x - \lambda)\, \chi_{W^*AW}(x)$$

$\Rightarrow$ wenn $\chi_A(x)$ über $\mathbb{R}$ zerfällt dann auch χ_{W^*AW} $\rightarrow$ Rekursion ist anwendbar

Normale Matrizen sind diagonalisierbar:

$$\text{Schur} \Rightarrow A = URU^* \Rightarrow A^* = UR^*U^*$$

$$A^*A = AA^* \Rightarrow UR^*U^*URU^* = URU^*UR^*U^*$$

$$\Rightarrow R^*R = RR^*$$

$$\Rightarrow R \text{ ist Diagonalmatrix}$$

12.9 KOROLLAR

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ selbstadj $\Rightarrow$ spec $A \in \mathbb{R}$

BEWEIS

$A^* = A \Rightarrow A$ ist normal

$\rightarrow A$ diagonalisierbar

Sei $Ax = \lambda x$

$\Rightarrow x \in \ker(\lambda I - A) = \ker(\lambda I - A)^*$

$= \ker(\bar{\lambda} I - A) \Rightarrow A = \bar{\lambda} x$

EV zu versch EW sind orthogonal

$\Rightarrow \|x\|^2 = 0$ oder $\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow A = U[\lambda_1 \dots \lambda_n] U^*$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$

12.10 KOROLLAR

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch

$\Rightarrow A = Q \Lambda Q^t$ mit $Q \in O(n)$

BEWEIS

$\chi_A(x)$ zerfällt über $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ alle Nullstellen sind reell

$\Rightarrow \chi_A(x)$ zerfällt über $\mathbb{R} \Rightarrow$ reeller Schur anwendbar

12.11 SATZ

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ selbstadjungiert

i) $A > 0 \Leftrightarrow$ spec $A \subseteq]0, \infty[$

$A > 0 \Rightarrow \langle Ax, x \rangle > 0 \quad \forall x \neq 0$

$x^* A x > 0 \quad \forall x \neq 0$

$\Rightarrow$ Sei $Ax = \lambda x$

$x^* A x = x^* \lambda x = \lambda \|x\|^2 = \lambda > 0$

$\Leftarrow$ Sei A so dass alle EW > 0

$\hookrightarrow$ diagonalisierbar

$\Rightarrow \exists$ ONB aus EV

ii) $A \geq 0 \iff \operatorname{spec} A \subseteq [0, \infty[$

iii) analog negativ semidefinit

iv) A indefinit $\iff \operatorname{spec} A \cap]-\infty, 0[\neq \emptyset$ und $A \cap]0, \infty[\neq \emptyset$

Beweis: zerlege x bzgl ONB

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

$$\langle Ax, x \rangle = \langle A \sum_{j=1}^{n} \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle \alpha_i \lambda_i u_i, \alpha_j u_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \alpha_j \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{=\delta_{ij}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\alpha_i|^2 \begin{cases} > 0 & \text{wenn } x \neq 0 \\ \geq 0 & \text{wenn alle } \lambda_i \geq 0 \implies \end{cases} \quad ?$$

12.12 ANWENDUNG

Taylorformel im $\mathbb{R}^n$

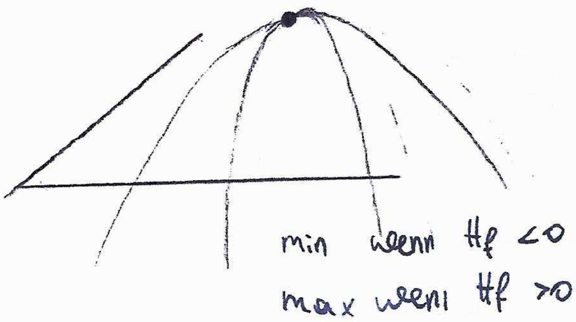
$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

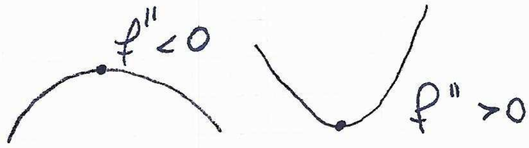
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3)$$

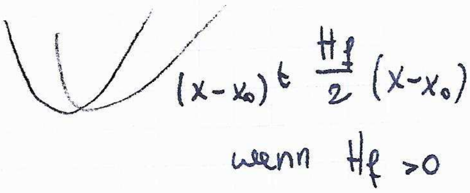
im $\mathbb{R}^2$

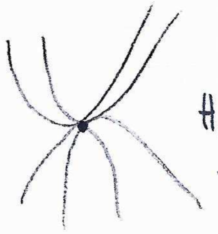
$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)^t \frac{H_f}{2} (x - x_0)$$

wobei $H_f = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j = 1 \dots n}$ Hesse Matrix



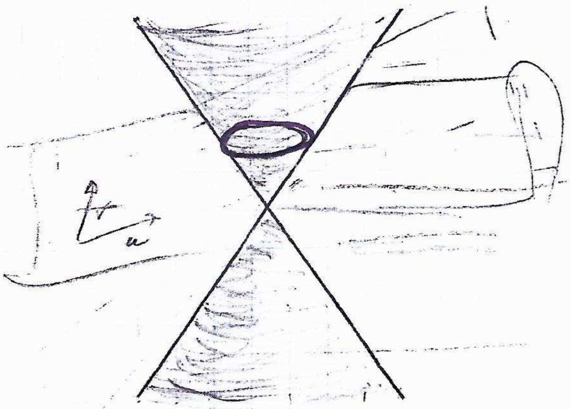






H_f indefinit

$\rightarrow$ Sattelpunkt



$x^2 + y^2 = z^2$ Doppelkegel

$E = \{ u + \xi v + \eta w \mid \xi, \eta \in \mathbb{R} \}$

oBdA $\|v\| = \|w\| = 1$, $v \perp w$ ONS

Gleichung für den Schnitt:

$$(u_1 + \xi v_1 + \eta w_1)^2 + (u_2 + \xi v_2 + \eta w_2)^2 = (u_3 + \xi u_3 + \eta w_2)^2$$

$$a \xi^2 + 2b \xi \eta + c \eta^2 + d \xi + e \eta = f$$

$$(\xi \ \eta) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + (d \ e) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Was ist das?

Fall 0: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Gerade

Schritt 1

Translation, die den linken Term verschwinden lässt (d.h. verschiebt Mittelpunkt nach 0)

Sei $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ der Mittelpunkt

$\rightarrow$ neue Koordinaten: $\xi = x_0 + x$, $\eta = y_0 + y$

$$\rightarrow a(x + x_0)^2 + 2b(x + x_0)(y + y_0) + c(y + y_0)^2 + d(x + x_0) + e(y + y_0) = f$$

d.h. $ax^2 + 2bxy + cy^2 + (2ax_0 + 2by_0 + d)x$

$+ (2bx_0 + 2cy_0 + e)y + ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2 + dx_0 + ey_0 = f$

Wähle x_0, y_0 so dass

$$2ax_0 + 2by_0 + d = 0, \quad 2bx_0 + 2cy_0 + e = 0$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

Fall 1: $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ Eigenwert 0 und weiterer Eigenwert λ

$\Rightarrow$ diagonalisierbar mit $Q \in \mathcal{O}(2)$
(Drehung oder Spiegelung)

$$Q^t A Q = \begin{bmatrix} \lambda & \\ & 0 \end{bmatrix}$$

oBdA $\det Q > 0$ sonst $\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$

neue Koordinaten $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q^t \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$(x\ y)\, Q^t A Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (d\ \ e)\, Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f$$

$\lambda x^2 + \tilde{d}x + \tilde{e}y = f$ wobei $\begin{pmatrix} \tilde{d} \\ \tilde{e} \end{pmatrix} = Q^t \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$

wenn $\tilde{e} \neq 0 \Rightarrow y = \dfrac{-\lambda x^2}{\tilde{e}} - \dfrac{\tilde{d}x}{\tilde{e}} + \dfrac{f}{\tilde{e}}$ $\rightarrow$ Parabel

$\tilde{e} = 0$, y beliebig

$$x = -\frac{\tilde{d} \pm \sqrt{\tilde{d}^2 + 4\lambda f}}{2\lambda}$$

$\emptyset$, 1 oder 2 Geraden parallel zur x-Achse

Fall 2: $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \neq 0$ $\rightarrow$ Löse nach x_0, y_0

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = g$$

$(:= f - ax_0^2 - 2bx_0y_0 - cy_0^2 - dx_0 - ey_0)$

$$(x\ \ y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g$$

diagonalisierbar mit $Q \in \mathcal{O}(2)$ Drehung

$Q^t A Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix}$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$

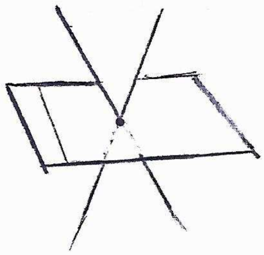
$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = Q^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow (\tilde{x}\ \tilde{y})\, Q^t A Q \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = g$$

$$\lambda_1 \tilde{x} + \lambda_2 \tilde{y} = g$$

Fall 2a: $g = 0$

$$\tilde{y}^2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\tilde{x}^2$$

wenn $\operatorname{sign}\lambda_1 = \operatorname{sign}\lambda_2 \Rightarrow (0,0)$



Punkt

$\operatorname{sign}\lambda_1 \neq \operatorname{sign}\lambda_2 \Rightarrow \tilde{y} = \pm\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\tilde{x}^2}$

$\rightarrow$ 2 Geraden

Fall 2b: $g \neq 0$

$$\frac{\tilde{x}^2}{\frac{g}{\lambda_1}} + \frac{\tilde{y}^2}{\frac{g}{\lambda_2}} = 1$$

Fall 2b1

$\alpha^2 := \frac{g}{\lambda_1} > 0 \quad \beta^2 := \frac{g}{\lambda_2} > 0$

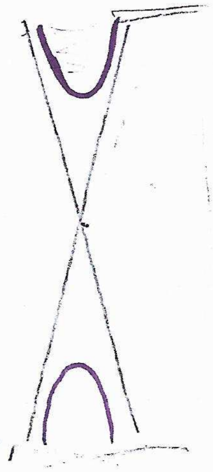
$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \rightarrow$ Ellipse

Fall 2b2

$\frac{g}{\lambda_1} < 0 \wedge \frac{g}{\lambda_2} < 0 \rightarrow \emptyset$

$\rightarrow$ tritt nicht auf!

Fall 3: $\alpha^2 > 0,\ \beta^2 - \frac{g}{\lambda_2} > 0$



$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} \rightarrow$ Hyperbel

Klassifikation

- $\frac{1}{g} A > 0$ Ellipse
- $g < 0$ $\emptyset$
- A singulär Parabel oder Gerade(n)
- A indefinit Hyperbel

12.14 ANWENDUNG

Quadriken in $\mathbb{R}^3$
quadrat. Gleichungen

BEISPIEL: $-4 \xi_1^2 - 7\xi_2^2 + 2\xi_3^2 - 20\xi_1\xi_2 + 16\xi_1\xi_3$
$+ 4\xi_2\xi_3 + 5\xi_1 + 26\xi_2 - 10\xi_3 + 90 = 0$

$$\xi^t \begin{bmatrix} -4 & -10 & 8 \\ -10 & -7 & 2 \\ 8 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xi \; (50, 26\; -10) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} + 90 = 0$$

Schritt 1. Rotation

spec $A = (0, 9, -18)$?

$Q = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ diagonalisiert A, $\det Q = 1$

$Q^t A Q = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 9 & \\ & & -18 \end{bmatrix}$

neue Koordinaten $\xi = Q^t$

In den neuen Koordinaten

$9x_2^2 - 18x_3^2 - 6x_1 - 18x_2 + 54x_3 + 90 = 0$ $| : 3$

$\Leftrightarrow 3x_2^2 - 6x_3^2 + 2x_1 - 6x_2 + 18x_3 + 30 = 0$

Translation $\to$ $2x_1$ kann nicht eliminiert werden

$x = u + y$

$3(y_2 + u_2)^2 - 6(y_3 + u_3)^2 + 2(y_1 + u_1)$
$-6(y_2 + u_2) + 18(y_3 + u_3) + 30 = 0$
$3(y_2^2 + 2u_2y_2 + u_2^2) + 6(y_3^2 + 2y_3u_3 + u_3^2) + \dots$

wollen $6u_2 - 6 = 0 \Rightarrow u_2 = \frac{3}{2}$
$-12u_3 + 18 = 0 \Rightarrow u_3 = \frac{3}{2}$

... $\rightsquigarrow 3y_2^2 - 6y_3^2 + 2y_1 + 2u_1 + \frac{81}{2} = 0$

wähle u_1 so dass Konstante $-2u_1 = 0$

$\to u_1 := -\frac{81}{4}$

$3y_2^2 - 6y_3^2 + 2y_1 = 0$

→ Fläche im $\mathbb{R}^3$

Schnitt mit yz-Ebene

$y_1 = 0: \; 3y_2^2 - 6y_3^2 = 0$

$y_3 \quad \pm\sqrt{\frac{1}{2}y_2}$

$y_1 = \alpha^2 > 0$

$3y_2^2 - 6y_3^2 = -2\alpha^2$ Hyperbel

$$-\frac{y_2^2}{\frac{2}{3}\alpha^2} + \frac{y_3^2}{\frac{1}{3\alpha^2}} = 1$$

$y_1 = -\alpha_1^2 < 0$

Mittelpunkt der ursprünglichen Quadrix

$y = x + p = Q^t \tilde{y} + p \Rightarrow \tilde{y} = Q(y - p)$

Wh: $f(A) = V \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{bmatrix} V^{-1}$

wenn $A = V \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} V^{-1}$

sonst: Taylorreihe, wenn

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert für $x < 1$

$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$ konvergiert f. $x < 1$

12.15 SATZ

Sei A positiv semidefinit $(A \geq 0)$, $A = A^*$

$\langle Ax, x \rangle \geq 0 \;\; \forall x \iff$ alle $\lambda_i \geq 0$

Dann $\exists!\, B \geq 0 : \; B^2 = A$

BEWEIS

$A = U \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} U^*$ weil selbstadj. daher normal, alle $\lambda_i \geq 0$

$\Rightarrow B = U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^*$ erfüllt $B \geq 0 \wedge B^2 = A$

Eindeutigkeit:

Sei $\tilde{B} \geq 0$, $\tilde{B}^2 = A$

$\Rightarrow \tilde{B} = V \begin{bmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{bmatrix} V^*$, B diagonalisierbar

$\Rightarrow A = \tilde{B}^2 = V \begin{bmatrix} \mu_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n^2 \end{bmatrix} V^*$

$\Rightarrow \mu_1^2$ sind Eigenwerte von A

$\Rightarrow \forall i \, \exists \lambda_j : \mu_i^2 = \lambda_j$

$\Rightarrow \tilde{B} = B$ (bis auf Permutationen)

12.16 BEMERKUNG

Die s.a. Lösungen der Gleichung $B^2 = A$

sind $U \begin{bmatrix} \pm\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \pm\sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^*$

"komplexe" Wurzeln?

$a > 0 \Rightarrow z\bar{z} = a \quad z \in \mathbb{C}$

$\rightarrow z = \sqrt{a}\, e^{i\theta}$

für Matrizen: gesucht C s.d. $CC^* = A$

12.17 CHOLESKY ZERLEGUNG

André Louis Cholesky (Cholewski) 1875–1918

$A > 0$ dann $\exists!\, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ untere Dreiecksmatrix (c_{ij})

mit $c_{ii} > 0 \;\; \forall i$

sodass $CC^* = A$

 $= A$

12.18 LEMMA

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A > 0$, $b \in \mathbb{C}^n$, $\gamma > 0$

Dann $\begin{bmatrix} A & b \\ b^* & \gamma \end{bmatrix} > 0 \iff \gamma - b^* A^{-1} b > 0$

denn $\gamma - b^* A^{-1} b = \dfrac{\det \begin{bmatrix} A & b \\ b^* & \gamma \end{bmatrix}}{\det A}$

BEWEIS

$$\begin{vmatrix} A & b \\ b^* & \gamma \end{vmatrix} = \det \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ -b^* A^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ b^* & \gamma \end{pmatrix} \right]$$

$$= \det \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & \gamma - b^* A^{-1} b \end{bmatrix} = \det A \cdot (\gamma - b^* A^{-1} b)$$

BEWEIS von CHOLESKY (12.17)

Induktion

$n = 1$: $[a_{11}] > 0 \implies c_{11} = \sqrt{a_{11}}$

$n \to n+1$:

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} A_n & b \\ b^* & \gamma \end{bmatrix}$$

gegeben: $A_n = C_n \cdot C_n^*$ Choleskyzerlegung

$\implies C_n$ regulär

gesucht: $c \in \mathbb{C}^n$, $\alpha > 0$ so, dass

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_n & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ c^* & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_n^* & c \\ 0 \dots 0 & \alpha \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} C_n C_n^* & C_n c \\ c^* C_n & c^* c + \alpha^2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} A_n & b \\ b^* & \gamma \end{bmatrix}$$

$\implies c = C_n^{-1} b$

$\alpha = +\sqrt{\gamma - c^* c} > 0$

$$\gamma - c^* c = \gamma - (C_n^{-1} b)^* C_n^{-1} b$$

$$= \gamma - b^* (C_n^*)^{-1} C_n^{-1} b$$

$$= \gamma - b^* (C_n C_n^*)^{-1} = \gamma - b^* A_n^{-1} b = \frac{\det A_{n+1}}{\det A_n} > 0$$

$$C_{n+1} = \begin{bmatrix} C_n & \\ c^* & \alpha \end{bmatrix}$$

12.19 PRAKTISCHE DURCHFÜHRUNG

geg: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, ges: $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit

(1) $CC^* = A$

(2) $c_{ij} = 0$ wenn $i < j$

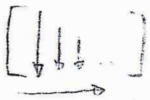
(3) $c_{ii} > 0 \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}$

$$A = CC^* = \begin{bmatrix} c_{11} & & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \\ \vdots & & \ddots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & \overline{c_{21}} & \cdots & \overline{c_{n1}} \\ & c_{22} & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \overline{c_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11}^2 & c_{11}\overline{c_2} & c_{11}\overline{c_{31}} & \cdots & c_{11}\overline{c_{nn}} \\ c_{21}c_{11} & c_{11}^2 + c_{22}^2 & c_{21}\overline{c_{31}} + c_{22}\overline{c_{32}} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} c_{ik}\overline{c_{jk}}$$

$$(C^*)_{kj} = \overline{c_{jk}}$$

ALGORITHMUS 

1. Spalte

$a_{11} = c_{11}^2 \implies c_{11} = \sqrt{a_{11}} > 0$

$a_{21} = c_{21} \cdot c_{11} \implies c_{21} = \frac{a_{21}}{c_{11}}$

$a_{31} = c_{31} \cdot c_{11} \implies c_{31} = \frac{a_{31}}{c_{11}}$

$\vdots$

$a_{n1} = c_{n1} \cdot c_{11} \implies c_{n1} = \frac{a_{n1}}{c_{11}}$

Ang Spalte $1 \dots j-1$ schon berechnet

$c_{ij} = 0$ für $i < j$, $c_{ij} = ?$ für $i \geq j$

$i = j$: $\quad a_{jj} = \sum_{k=1}^{j} c_{jk}\overline{c_{jk}} = c_{jj}^2 + \sum_{k=1}^{j-1} |c_{jk}|^2$ → schon bestimmt

$\implies c_{jj} = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} |c_{jk}|$

$$i > j: \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} c_{ik} \overline{c_{jk}} = c_{ij} c_{jj} + \underbrace{\sum_{k=1}^{j-1} c_{ik} \overline{c_{jk}}}_{\text{alle aus Spalten } 1 \ldots j-1}$$

$$\Rightarrow c_{ij} = a_{ij} - \sum_{n=1}^{j-1} c_{ik} \overline{c_{jk}}$$

12.20 BEISPIEL

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2$$

$$a_{21} = c_{21} \cdot c_{11} \qquad a_{31} = c_{31} \cdot a_{11}$$

$$12 = c_{21} \cdot 2 \qquad -16 = c_{31} \cdot 2$$

$$\Rightarrow c_{21} = 6 \qquad \Rightarrow c_{31} = -8$$

$$a_{22} = c_{21} \overline{c_{21}} + c_{22}^2 \qquad a_{32} = c_{31} \overline{c_{21}} + c_{32} \cdot c_{22}$$

$$37 = 36 + c_{22}^2 \qquad -43 = -8 \cdot 6 + c_{32} \cdot 1$$

$$\Rightarrow c_{22} = 1 \qquad \Rightarrow c_{32} = 5$$

$$a_{33} = c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2$$

$$98 = 64 + 25 + c_{33}^2$$

$$\Rightarrow 9 = c_{33}^2 \quad \Rightarrow \quad c_{23} = 3$$

12.21 BEMERKUNG

i) Wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann auch $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und weiters

ii) C ist eindeutig

iii) Cholesky Zerlegung ist zugleich eine LR-Zerlegung

12.22 SATZ

Wenn $A > 0$, dann ist $\det A \leq a_{11} \ldots a_{nn}$

BEWEIS

Sei $A = C^* C$ Cholesky-Zerlegung

$$\Rightarrow \det A = \det C \cdot \det C^* \qquad \det C^* = \overline{\det C}$$

$$= |\det C|^2 = \prod_{i=1}^{n} c_{ij}^2 \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$c_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |c_{ik}|^2 \leq a_{ii}$$

12.23 KOROLLAR

HADAMARD'SCHE GLEICHUNG (J. S. Hadamard, 1865-1963)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit Spaltenvektoren $a_1 \dots a_n$

$\Rightarrow |\det A| \leq \|a_1\| \dots \|a_n\|, \quad \|a_i\| = \sqrt{a_i^* a_i}$

BEWEIS

Fall 1: $\det A = 0 \rightarrow$ trivial

Fall 2: $\det A \neq 0 \Rightarrow A^* A > 0$

$$\underbrace{\det A^* A}_{|\det A|^2} \overset{12.22}{\Rightarrow} \leq \prod_{i=1}^{n} \underbrace{(A^*A)_{ii}}_{= a_i^* a_i} = \prod_{i=1}^{n} \|a_i\|^2$$

12.24 BEMERKUNG

$z \in \mathbb{C}, \quad z = x + iy \qquad x = Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

$z \cdot \bar{z} = a > 0 \qquad y = Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

Matrix $Z \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$Z = X + iY \qquad X, Y$ selbstadjungiert

$X = \frac{1}{2}(Z + Z^*) =: Re\, Z$

$Y = \frac{1}{2i}(Z - Z^*) =: Im\, Z$

$z = e^{i\alpha} r, \quad r = |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

$Z = U \cdot R, \quad R \geq 0, U \in \mathcal{U}(n)$ Polarzerlegung

$R = (Z^* Z)^{\frac{1}{2}} \geq 0$

Ang. Z invertierbar $\Rightarrow R > 0$

$U = Z \cdot R^{-1} = Z(Z^* Z)^{-\frac{1}{2}}$ ist unitär

$UU^* = Z(Z^* Z)^{-\frac{1}{2}} (Z(Z^* Z)^{-\frac{1}{2}})^*$

$= Z \cdot (Z^* Z)^{-\frac{1}{2}} (Z^* Z)^{-\frac{1}{2}} \cdot Z^*$

$= Z(Z^* Z)^{-1} Z^* = Z \cdot Z^{-1} (Z^*)^{-1} Z^* = I$

XIII Eigenwertabschätzungen

13.1 Definition

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

Dann heißt $\{ \underbrace{\langle Ax, x \rangle}_{x^* A x} \mid \underbrace{x \in \mathbb{C}^n,}_{\|x\| = 1} \} = W(A)$

numerischer Wertebereich von A

$W(A) = \sup \{ |z| \mid z \in W(A) \} = \sup_{\|x\|=1} (\langle Ax, x \rangle)$

heißt numerischer Radius von A

13.2 Lemma

$\operatorname{spec}(A) \subseteq W(A)$

Beweis

Sei $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$ mit EV x, $\|x\| = 1$

$\Rightarrow \langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \|x\|^2 = \lambda \in W(A)$

13.3 Satz von Toeplitz – Hausdorff

$W(A)$ ist konvex

Ü $\rightarrow$ A normal $\Rightarrow W(A) = \operatorname{co}(\operatorname{spec}(A))$

$= \{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \mid 0 \le \alpha_i \le 1, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \}$

13.4 Satz (Rayleigh - Ritz)

J. W. Strutt 3. Baron von Rayleigh 1842 - 1919

Walter Ritz 1878 - 1909

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ selbstadjungiert mit EW $\lambda_1 \le \lambda_2 \dots \le \lambda_n$

Dann ist $\lambda_1 = \min \{ \langle Ax, x \rangle \mid \|x\| = 1 \}$

$= \min W(A) = \min \{ \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2} \mid x \neq 0 \}$

$\lambda_n = \max \{ \langle Ax, x \rangle \mid \|x\| = 1 \} = \max W(A)$

$= \max \{ \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2} \mid x \neq 0 \}$

$\frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$ heißt Rayleigh - Quotient

BEWEIS

$$\frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} = \left\langle A \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle = \sup_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2}$$

$$\overset{13.2}{\Rightarrow} \lambda_n \in W(A) \Rightarrow \lambda_n \leq \sup W(A)$$

$$\lambda_1 \in W(A) \Rightarrow \inf W(A) \leq \lambda_1$$

Sei $u_1 \dots u_n$ ONB aus Eigenvektoren

Sei $x \in \mathbb{C}^n$ mit $\|x\| = 1$

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 1$$

$$\langle Ax, x\rangle = \left\langle A \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i u_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \lambda_i \overline{\alpha_j} \underbrace{\langle u_i, u_j\rangle}_{= \delta_{ij}}$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i|^2 \geq \lambda_1 \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = \lambda_1$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i|^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = \lambda_n$$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle \leq \lambda_n$$

$$\inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle \geq \lambda_1$$

Wh: $\lambda_1 = \min_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \min_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$

$\lambda_n = \max_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \max_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$

BEWEIS

Gesucht: $\max \{x^t Ax \mid x^t x = 1\}$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\quad S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ ist kompakt

$f(x_0) = \max_{\|x\|=1} f(x) \iff f(x(t))$ wird maximal bei $t=0$

für alle Kurven $x(t)$ mit $x(t) = 0 \quad \subseteq S^{n-1}$

$\frac{d}{dt} f(x(t))\Big|_{t=0}$ wenn $x(0) = x_0$, $x(t)^t x(t) = 1$

$\frac{d}{dt} f(x(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t)) \cdot \dot{x}(t)$

$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ $\qquad \nabla f(x(t))^t \dot{x}(t) \overset{!}{=} 0$

und $\frac{d}{dt} x(t)^t x(t) = 0$

$\nabla f(x)_k = \frac{\partial}{\partial x_k} x^t A x$

$= \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i,j} x_i a_{ij} x_j = \sum_j a_{kj} x_j + \sum_i x_i a_{ik}$

$= 2 \sum_j a_{kj} x_j \implies \nabla f(x) = 2Ax$

$\frac{d}{dt} x(t)^t x(t) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} x_i(t)^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \dot{x}_i(t)$

$= 2x(t)\dot{x}(t) = 0$

für $t=0$: $\nabla f(x(t))^t \dot{x}(t)\Big|_{t=0} = 0$

$2x_0^t A\dot{x}(0)$

$2x_0^t \dot{x}(0)$ $\qquad \implies$ Tangente $\perp$ Radius

$\implies \forall v$ mit $v \perp x_0$ gilt: $x_0^t Av = 0$

$v \in x_0^\perp \implies v \in (Ax_0)^\perp \implies \underset{\dim n-1}{x_0^\perp} \subseteq \underset{\dim n-1}{(Ax_0)^\perp} \implies x_0^\perp = (Ax_0)^\perp$

$\implies \mathcal{L}(x_0) = \mathcal{L}(Ax_0) \implies \exists \lambda_i : Av_0 = \lambda_i v_0$

Die restlichen Eigenwerte?

$$\lambda_1 = \min_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\min \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i u_i , \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \rangle}{\|\sum \alpha_i u_i\|^2}$$

$u_1 \dots u_n$ ONB aus Eigenvektoren

$$\lambda_n = \max_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\max \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i u_i , \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \rangle}{\|\sum \alpha_i u_i\|^2}$$

$$\lambda_2 = \min \frac{\langle \sum_{i=2}^n \alpha_i \lambda_i u_i , \sum_{j=2}^n \alpha_j u_j \rangle}{\|\sum_{i=2}^n \alpha_i u_i\|^2} = \min_{x \in u_1^\perp \setminus \{0\}} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

$$\lambda_1 = \min \left\{ \langle \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i x_i , \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \rangle \,\middle|\, \sum |\alpha_i|^2 = 1 \right\}$$

$$\overset{\|}{\sum_{i=1}^n} \lambda_i |\alpha_i|^2 \geq \lambda_1 \sum |\alpha_i|^2 = \lambda_1$$

13.5 FOLGERUNG

$$\lambda_k = \min_{\substack{x \in \{u_1 \dots u_{k-1}\}^\perp \\ \|x\| = 1}} \langle Ax, x\rangle = \min_{x \in \{u_1 \dots u_{k-1}\} \setminus \{0\}} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

bzw
$$\lambda_k = \max_{\substack{x \in \{u_{k+1} \dots u_n\} \\ \|x\| = 1}} \langle Ax, x\rangle = \max_{x \in \{u_{k+1} \dots u_n\} \setminus \{0\}} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

13.6 MIN-MAX-PRINZIP von COURANT - FISCHER - WEGEL

1888-1972 1875-1954 1881-1955

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ selbstadjungiert

$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ Eigenwerte

i) $$\lambda_k = \max_{\substack{W \subseteq V \\ \dim W = k-1}} \min_{x \in W^\perp \setminus \{0\}} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

ii) $$\lambda_{n+1-k} = \min_{\substack{W \subseteq V \\ \dim W = k-1}} \max_{x \in W^\perp \setminus \{0\}} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

BEWEIS

i) Für $W \subseteq V$ Unterraum

$$m_A(W) = \min \left\{ \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \,\middle|\, x \in W^\perp \setminus \{0\} \right\}$$

für $w_i \in V$ $\quad m_A(w_1 \dots w_k) = m_A(\mathcal{L}(w_1 \dots w_k))$

wenn $u_1 \dots u_n$ ONB aus EV

$$\overset{13.5}{\Longrightarrow} \lambda_k = m_A(u_1 \dots u_{k-1}) \leq \max_{\substack{W \subseteq V \\ \dim W = k-1}} m_A(W)$$

Es bleibt zz:

$$(\forall\, W \subseteq V,\ \dim W = k-1): m_A(W) \leq \lambda_k$$

Sei $W \subseteq V$ mit $\dim W = k-1$

$\Rightarrow \dim W^\perp = n-k+1$

$\Rightarrow W^\perp \cap \mathcal{L}(u_1 \dots u_k) \neq \{0\}$ weil $\dim W^\perp + \dim \mathcal{L}(u_1 \dots u_k) = n+1$

Sei $v \in W^\perp \cap \mathcal{L}(u_1 \dots u_k)$

$$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \quad \text{mit } \|v\| = 1,\ \left(\sum_i |\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\langle Av, v\rangle = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 \lambda_i \leq \lambda_k \sum_i |\alpha_i|^2 = \lambda_k$$

$$\Rightarrow m_A(W) \leq \langle Av, v\rangle = \lambda_k$$

ii) Die EW von $-A$ sind $-\lambda_n \leq -\lambda_{n-1} \leq \dots \leq -\lambda_1$

$\mu_1 = -\lambda_n,\ \mu_2 = -\lambda_{n-1} \ \dots\ \mu_n = -\lambda_1$

$$\mu_k = -\lambda_{n+1-k} = \max_{\dim W = k-1} m_{-A}(W)$$

$$= \max_{\dim W = k-1} \min \left\{ \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \,\middle|\, x \in W^\perp \setminus \{0\} \right\}$$

$$= \max_{\dim W = k-1} -\max \left\{ \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \,\middle|\, x \in W^\perp \setminus \{0\} \right\}$$

$$= -\min_{\dim W = k-1} \max \left\{ \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \,\middle|\, x \in W^\perp \setminus \{0\} \right\}$$

13.7 KOROLLAR (SCHACHTELUNGSSATZ VON CAUCHY)

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ selbstadjungiert

$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$

Sei $B = [a_{ij}]_{ij=1 \dots n-1}$ die obere $n-1 \times n-1$ Teilmatrix

mit EW $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{n-1}$

Dann gilt

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n$$

Allgemein:

Sei P Orthogonalprojektion auf Unterraum der Dimension $n-1$

Dann sind die Eigenwerte der komprimierten Matrix $B = PAP$

mit den Eigenwerten von A wie oben verschachtelt

BEWEIS

Der allg. Fall folgt aus dem speziellen durch Basiswechsel

$$\text{Sei } A = \begin{bmatrix} B & b \\ b^* & \gamma \end{bmatrix}$$

Sei $w_1 \dots w_{n-1}$ ONB aus EV von B

$B w_i = \mu_i w_i$

$u_i = \begin{pmatrix} w_i \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \quad i = 1 \dots n-1 \quad u_n =: \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$u_1 \dots u_n$ ist ONB von $\mathbb{C}^n$

$W_k := \mathcal{L}(u_1 \dots u_{k-1}, u_n) \Rightarrow \dim W_k = k$

$$\lambda_{k+1} = \max_{\dim W = k} \min_{x \in W^\perp \setminus \{0\}} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \geq \min_{x \in W_k^\perp \setminus \{0\}} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

$$x \in W_k^\perp \setminus \{0\} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \; y \in \{w_1 \dots w_{k-1}\}^\perp$$

$$\langle Ax, x\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} B & b \\ b^* & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = (y^* \; 0) \begin{bmatrix} B & b \\ b^* & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = y^* B y$$

$$\langle x, x\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle y, y\rangle$$

$$\Rightarrow \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\langle By, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$$

$$\lambda_{k+1} \geq \min_{y \in \{w_1 \dots w_{k-1}\}^\perp \setminus \{0\}} \frac{\langle By, y \rangle}{\langle y, y \rangle} = \mu_k$$

umgekehrt sind die EW von $-A: \underbrace{-\lambda_n}_{\tilde{\lambda}_1} \leq \underbrace{-\lambda_{n-1}}_{\tilde{\lambda}_n} \leq \dots \leq \underbrace{-\lambda_1}_{\tilde{\lambda}_n}$

$-B: \underbrace{-\mu_{n-1}}_{\tilde{\mu}_1} \leq \dots \leq \underbrace{-\mu_1}_{\tilde{\mu}_{n-1}}$

$$\tilde{\lambda}_i = -\lambda_{n+1-i},$$

$$\tilde{\mu}_i = -\mu_{n-i}$$

Schritt 1 $\Rightarrow \tilde{\lambda}_{k+1} \geq \tilde{m}_k \Leftrightarrow \underbrace{-\lambda_{n+1-(k-1)}}_{-\lambda_{n-k}} \geq -\mu_{n-k}$

$\Rightarrow \lambda_{n-k} \leq \mu_{n-k} \quad \forall k$

13.8 KOROLLAR (H. WEYL)

Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ selbstadjungiert

$$\lambda_k(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_k(A+B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_k(B)$$

Perturbationstheorie

BEWEIS

$\forall x \neq 0 \quad \lambda_1(B) \leq \frac{\langle Bx, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \leq \lambda_n(B)$

$$\frac{\langle (A+B)x, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

$$\frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} + \lambda_1(B) \leq \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} + \frac{\langle Bx, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \leq \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} + \lambda_n(B)$$

$$\lambda_k(A+B) = \max_{\dim W = k-1} \min_{x \in W} \frac{\langle (A+B)x, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

$$\lambda_1(B) + \max \min \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \leq \lambda_n(B) + \max \min \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

$$\lambda_1(B) + \lambda_k(A) \leq \lambda_n(B) + \lambda_k(A)$$

13.9 FOLGERUNG

Wenn $B \geq 0 \Rightarrow \lambda_1(B) \geq 0$

$\Rightarrow \lambda_n(A) \leq \lambda_k(A+B) \quad \forall k$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ddots & \text{klein} \\ \text{klein} & \ddots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Wenn a_{ij} für $i \neq j$ klein ist, dann sind die EW ungefähr a_{ii}

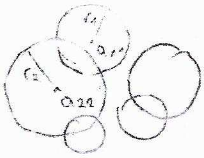
13.10 SATZ von GERŠGORIN S. A. Geršgorin 1901 - 1933

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

Sei: $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$

Dann ist $\operatorname{spec}(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq r_i \}$

Geršgorin-Kreise



BEWEIS

Sei: $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$, $x \in V$ mit $Ax = \lambda x$

wähle x so, dass $\|x\|_\infty = \max |x_i| = 1$

$\Rightarrow \forall_j : |x_j| \leq 1$ und $\exists i : |x_i| = 1$

Für dieses i: $(Ax)_i = \lambda x_i$

$$\overset{\shortparallel}{\sum_{j=1}^{n}} a_{ij} x_j$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j = (\lambda - a_{ii}) x_j$$

$$|\lambda - a_{ii}| = |\lambda - a_{ii}| |x_i| = \Big| \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} a_{ij} x_j \Big| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| = r_i$$

13.11 BEMERKUNG zur numerischen Bestimmung der Eigenwerte

Idee: gegeben A

Wähle x_0 mit $\|x_0\| = 1$

$W_{k+1} = A x_k$

$x_{k+1} = \frac{W_{k+1}}{\|W_{k+1}\|}$

$\rightarrow$ Wohin konvergiert das?

Annahme: A ist diagonalisierbar

$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$ $x_k = \frac{A^k y_0}{\|A^k y_0\|}$

Sei: $v_1 \ldots v_n$ Eigenbasis

$x_0 = d_1 v_1 + \ldots + d_n v_n$

$$\frac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|} = \frac{\alpha_1 \lambda_1^k v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k v_n}{\|\alpha_1 \lambda_1^k v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k v_n\|}$$

$$= \frac{\alpha_1 \lambda_1^k}{|\alpha_1 \lambda_1^k|} \frac{v_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k v_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k v_n}{\|v_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k v_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k v_n\|}$$

$\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$ $\qquad \Big\downarrow k \to \infty$

$$\approx \frac{\alpha_1 \lambda_1^k}{|\alpha_1 \lambda_1^k|} \frac{v}{\|v\|} + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)$$

$$x_k^* A x_k \underset{k \to \infty}{\approx} \lambda_1$$

XIV MATRIXNORMEN

Norm: $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$

N1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$

$\|x\| = 0 \iff x = 0$

N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in V$

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$

Beispiele:

$\|x\|_1 = \sum |x_i|$

$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

$\|x\|_\infty = \max |x_i|$

14.1 DEFINITION

$(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ normierte VR

Eine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathrm{Hom}(V, W)$ heißt

verträglich mit $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|_W$ wenn

$\forall v \in V : \forall f \in \mathrm{Hom}(V, W) : \|f(v)\|_W \leq \|f\| \cdot \|v\|_V$

14.2 BEISPIEL

Norm auf $\mathbb{C}^{m \times n}$

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Frobenius-Norm ... euklidische Norm auf $\mathbb{C}^{m \times n}$

oder $\|A\| = \sum_{i,j} |a_{ij}|$ $\rightarrow$ uninteressant

Ist $\|A\|_F$ verträglich mit $\|\ \|_2$ auf $\mathbb{C}^m$ und $\mathbb{C}^n$

$v \in \mathbb{C}^n$ $\quad \|Av\|_2 \overset{?}{\leq} \|A\|_F \cdot \|v\|_2$

$$\| \quad \left(\sum_{i=1}^{m} |(Av)_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{i=1}^{m} \Big|\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j}_{\text{für fixes } i \;\to\; \text{C.-B.-S.}}\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\sum_{j=1}^{n}|v_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2 \sum_{j=1}^{n}|v_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n}|v_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|A\|_F \cdot \|v\|_2$$

Wir suchen die "kleinste" verträgliche Norm

$\|A\|_{\tilde{F}} := 2\|A\|_F$ ist auch verträglich

14.3 LEMMA & DEFINITION

$(V, \|\ \|_V), (W, \|.\|_W)$ normierte Räume

$f \in \mathrm{Hom}(V,W)$

Dann definiert $\|f\|_{V,W} := \inf\{c \mid \|f(v)\|_W \leq c\,\|v\|_V \ \forall v \in V\}$ eine Norm

gesucht: $c = c(f)$

sodass $\forall v \in V$: $\dfrac{\|f(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq c$

$$\Rightarrow \quad c \quad = \sup\left\{\frac{\|f(v)\|_W}{\|v\|_V} \,\middle|\, v \in V \setminus \{0\}\right\}$$

$$= \sup\{\|f(v)\|_W \mid v \in V, \|v\|_V \leq 1\}$$

$$= \sup\{\|f(v)\|_V \mid v \in V, \|v\|_V = 1\}$$

Diese Norm ist eine verträgliche Norm und heißt

induzierte Norm

$$\sup\left\{\frac{\|f(v)\|_W}{\|v\|_V}\,\middle|\, v\in V\right\} \geq \sup\left\{\frac{\|f(v)\|_W}{\|v\|_V}\,\middle|\, \|v\|\leq 1,\ v\neq 0\right\}$$

$$\geq \sup\left\{\frac{\|f(v)\|_W}{\|v\|_V}\,\middle|\, \|v\|=1\right\} = \sup\{\|f(v)\|_W \mid \|v\|_V = 1\}$$

umgekehrt: $\frac{\|f(v)\|_W}{\|v\|_V} = \left\|\frac{1}{\|v\|_V} f(v)\right\|_W = \left\|f\left(\frac{v}{\|v\|_V}\right)\right\|_W \leq \sup\{\|f(v)\|_W \mid \|v\|=1\}$

N1) $\|f\|_{V,W} \geq 0$ klar

$\|f\| \neq 0 \Rightarrow \exists v: f(v)\neq 0 \Rightarrow \frac{\|f(v)\|_W}{\|v\|_V} > 0 \Rightarrow \|f\|_{V,W} > 0$

N2) $\|\lambda f\|_{V,W} = \sup_{\|v\|=1} \|\lambda f(v)\|_W = |\lambda|\,\|f\|_{V,W}$

N3) $\|f+g\|_{V,W} = \sup_{\|v\|=1} \|(f+g)(v)\|_W \overset{\Delta\text{-Ungl. in } W}{\leq} \sup(\|f(v)\|_W + \|g(v)\|_W)$

$\leq \sup_{\|v\|=1} \|f(v)\|_W + \sup_{\|v\|=1} \|g(v)\|_W = \|f\|_{V,W} + \|g\|_{V,W}$

und per Def: $\|f(v)\|_W \leq \|f\|_{V,W}\cdot\|v\|_V$

$\|f(v)\|_W = \left\|f\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\right\|\cdot\|v\|_V \leq \|f\|_{V,W}\,\|v\|_V$

Ü $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$: $\|g\circ f\|_{U,W} \leq \|g\|_{V,W}\cdot\|f\|_{U,V}$

14.4 BEISPIELE

1. Die Frobeniusnorm ist nicht die induzierte Norm auf $(\mathbb{C}^n, \|\ \|_2)$

$\|id: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n\| = \sup\{\|v\|_2 \mid \|v\|_2 = 1\}$ $\quad \|id\|_F = \sqrt{n}$

2. Spektralnorm $\to$ induzierte Norm auf $\mathbb{C}^{m\times n}$

$$\|A\|_{2,2}^2 = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \sup_{x\neq 0}\frac{\langle Ax, Ax\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

$$= \sup_{x\neq 0}\underbrace{\frac{\langle A^*Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}}_{\text{Rayleigh-Quotient}} = \lambda_{max}(A^*A)$$

$$\Rightarrow \|A\|_{2,2} = \sqrt{\lambda_{max}(A^*A)} = \lambda_{max}((A^*A)^{\frac{1}{2}})$$

Die Eigenwerte λ_i von A^*A heißen Singulärwerte von A

3. $\|A\|_{\infty,\infty}$ $\quad A\in\mathbb{C}^{n\times n}$

$\|A\|_{\infty,\infty} = \sup\{\|Ax\|_\infty \mid \|x\|_\infty = 1\} = \inf\{c \mid \|Ax\|_\infty \leq c\|x\|_\infty\ \forall x\}$

$= \inf\{c \mid \max|x_i|\}$

Für $x \in \mathbb{C}^n$

$$\max_i |(Ax)_i| = \max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \le \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j|$$

$$\le \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Beh: "="; finde x sodass $\|Ax\|_\infty = \max \sum_{j=1} |a_{ij}|$

- Wähle i_0 so, dass $\max_i \sum_{j=1} |a_{ij}| = \sum_{j=1} |a_{i_0 j}|$
- Setze $\tilde{x}_j = \begin{cases} \frac{|a_{i_0 j}|}{a_{i_0 j}} & \text{wenn } a_{i_0 j} \neq 0 \\ 0 & a_{i_0 j} = 0 \end{cases}$ (es gibt immer ein j mit $a_{i_0 j} \neq 0$, Außer wenn $A = 0$

$$\Rightarrow \|\tilde{x}\|_\infty = 1$$

$$(A\tilde{x})_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} \frac{|a_{i_0 j}|}{a_{i_0 j}} = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}|$$

④ Ü → $\|A\|_{1,1} = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

Wie hängt Matrixnorm mit den Spalten zusammen

$$Ax = \lambda x$$

$$\|Ax\| = |\lambda| \|x\| \qquad \Rightarrow \|A\| \geq |\lambda|$$

$$\wedge \|$$

$$\|A\| \|x\|$$

14.5 DEFINITION

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$\rho(A) = \max \{ |\lambda| \mid \lambda \in \operatorname{spec}(A) \}$

heißt Spektralradius von A

14.6 LEMMA

i) Für verträgliche Matrixnormen gilt $\|A\| \geq \rho(A)$

ii) ρ ist keine Matrixnorm

Bsp: $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \to \rho(A) = 0$

iii) $\forall A \in \mathbb{C}^{n \times n} \ \forall \varepsilon > 0 : \exists$ Norm auf $\mathbb{C}^n$: $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$
für die induzierte Norm

BEWEIS

iii) Jordansche Normalform

$\exists T$ sodass $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \eta_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \eta_n \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ $\eta_i \in \{0,1\}$

$D_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \varepsilon & & \\ & & \varepsilon^2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \varepsilon^{n-1} \end{bmatrix}$ ist invertierbar für $\varepsilon > 0$

$$D_\varepsilon^{-1} T^{-1} A T D_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{\varepsilon} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \eta_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \eta_n \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \varepsilon & & \\ & & \varepsilon^2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \varepsilon^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \eta_1 & & & \\ & \frac{\lambda_2}{\varepsilon} & \frac{\eta_2}{\varepsilon} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \eta_{n-1} \\ & & & & \frac{\lambda_n}{\varepsilon^{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \varepsilon & & \\ & & \varepsilon^2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \varepsilon^{n-1} \end{bmatrix}$$

jede Zeile mal ε^{i-1}
$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \eta_1\varepsilon & & & \\ & \lambda_2 & \eta_2\varepsilon & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \eta_{n-1}\varepsilon \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Vektorraum: $\|x\|_\varepsilon = \|D_\varepsilon^{-1} T^{-1} x\|_\infty$ ist eine Norm auf $\mathbb{C}^n$

$\|A\|_\varepsilon = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\varepsilon}{\|x\|_\varepsilon}$ ist verträgliche Matrixnorm

$$\|A\|_\varepsilon = \sup_{x \neq 0} \frac{\|D_\varepsilon^{-1} T^{-1} A x\|_\infty}{\|D_\varepsilon^{-1} T^{-1} x\|_\infty} = \sup_{y \neq 0} \frac{\|D_\varepsilon^{-1} T^{-1} A T D_\varepsilon y\|_\infty}{\|y\|_\infty}$$

Sei $x = TD_\varepsilon y$
$$= \|D_\varepsilon^{-1} T^{-1} A T D_\varepsilon\|_{\infty,\infty}$$

$$= \max_i \sum_j |(D_\varepsilon^{-1} T^{-1} A T D_\varepsilon)_{ij}|$$

$$= \max_i |\lambda_i| + \varepsilon|\eta_i| \leq \rho(A) + \varepsilon$$

$$\rho(A) = \inf_{S \text{ regulär}} \|S^{-1} A S\|_{\infty,\infty}$$

14.7 BEMERKUNG

$\rho(A^k) = \rho(A)^k$

$\Rightarrow \rho(A) = \rho(A^k)^{\frac{1}{k}} \leq \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$ für jede Matrixnorm

Satz von Gelfand:

$$\rho(A) = \inf_k \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$$

14.8 LEMMA

i) $\|A\|_{2,2} = \rho(A^* A)^{\frac{1}{2}}$

ii) Wenn A normal ist dann ist $\|A\|_{2,2} = \rho(A)$

ACHTUNG: $\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B)$ ist <u>NICHT</u> erfüllt

BEWEIS

ii) Beh. für normale Matrizen

$\operatorname{spec} A^*A = \{|\lambda|^2 \mid \lambda \in \operatorname{spec}(A)\}$ $\quad$ $\operatorname{spec} p(A) = p(\operatorname{spec}(A))$

$\ker(\lambda - A) = \ker(\overline{\lambda} - A^*)$

Sei $x \in V$ zu λ

$Ax = \lambda x \Rightarrow A^*x = \overline{\lambda} x$

$\Rightarrow A^*Ax = A^*\lambda x = \lambda\overline{\lambda} x = |\lambda|^2 x$

$\Rightarrow |\lambda|^2 \in \operatorname{spec}(A^*A)$

Das liefert n Eigenwerte und n Eigenvektoren für A^*A

$\rightarrow$ das sind alle

$$\|A\|_{2,2} = (\max_i \lambda_i(A^*A))^{\frac{1}{2}} = (\max_i |\lambda_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \max_i |\lambda_i| = \rho(A)$$

14.9 BEMERKUNG

Wenn $\dim V = \infty$ dann kann $\rho(f) = \infty$ sein

Bsp: $V = C^\infty[0,1]$

$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x} \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{d}{dx}\right) = \infty$$

14.10 KOROLLAR

Für verträgliche Normen gilt

Wenn $\|A\| < 1$ dann ist $I - A$ invertierbar

und $\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$ Carl Neumann 1832 - 1925

und $(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ $\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$

$\|A^k\| \leq \|A\|^k$

$\|(I-A)^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| = \frac{1}{1-\|A\|^k}$

Wh. zu Matrixnormen

Norm: $\|.\|: \mathrm{Hom}(V,W) \to \mathbb{R}_0^+$

verträglich mit $\|\ \|_V, \|\ \|_W$ wenn

$\|f(v)\|_W \leq \|f\| \, \|v\|_V \quad \forall v \in V$

Bsp: euklidische oder Frobeniusnorm

$\|A\|_F = \left(\sum_{ij} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{tr(A^*A)}$

Eine induzierte Norm ist verträglich, wenn

$\|f\|_{V,W} = \sup_{\substack{\|v\|=1 \\ v}} \|f(v)\|_W$.

Bsp (für induzierte Norm)

① $\|A\|_{2,2} = \max_{\|v\|_2=1} \|Av\|_2 = \max \frac{\langle A^*Av, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$ Spektralnorm

② $\|A\|_{\infty,\infty} = \max_{\|v\|_\infty=1} \|Av\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ Spaltensummennorm

③ $\|A\|_{1,1} = \max_{\|v\|_1=1} \|Av\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$ Zeilensummennorm

Induzierte Normen sind submultiplikativ

$f: V \to W \quad g: U \to V$

$\Rightarrow \|f \circ g\| \leq \|f\| \, \|g\|$

14.10: für induzierte Normen gilt $\|A\| < 1 \Rightarrow I - A$ regulär

und $\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$

$\|(I-A)^{-1}\| = \|\sum_{k=0}^{\infty} A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k \overset{\|A\|<1}{=} \frac{1}{1-\|A\|^k}$

14.11 KOROLLAR

Wenn A invertierbar ist und $\|B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ $\Leftrightarrow$ $\|B\|\|A^{-1}\| < 1$

Dann ist $A+B$ invertierbar und $\|A+B\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\|B\|}$

BEWEIS

$A+B = A(I + A^{-1}B)$ und $\|A^{-1}B\| \leq \|A^{-1}\|\|B\| < 1$

$\Rightarrow$ $A+B$ invertierbar und

$$\|(A+B)^{-1}\| = \|(I+A^{-1}B)^{-1}A^{-1}\| \leq \|(I+A^{-1}B)^{-1}\|\|A^{-1}\|$$

$$\leq \frac{1}{1-\|A^{-1}B\|}\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A^{-1}\|\|B\|}\|A\|^{-1}$$

ANWENDUNG: Sensitivität linearer Gleichungssysteme

$Ax = b$, A regulär, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$\tilde{b} = b + \Delta b$ $\quad$ Δb ... Störung der rechten Seite

$A\tilde{x} = \tilde{b}$

$\tilde{x} = x + \Delta x$ $\quad$ Δx ... Fehler im Ergebnis

BEISPIEL

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.001 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.001 \end{pmatrix}$$

$Ax = b$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.001 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0.001 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A\tilde{x} = \tilde{b}$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.001 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.001 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1.001 & 0.001 \end{array}\right) \to \tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

14.12 SATZ

Sei: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regulär, $\|\ \|$ verträgliche Norm

Sei: x die eindeutige Lösung des Systems $Ax = b$

$\tilde{x}$ die eindeutige Lösung des Systems $A\tilde{x} = \tilde{b}$

wobei: $\tilde{x} = x + \Delta x$, $\tilde{b} = b + \Delta b$. Dann gilt für den relativen Fehler

$$\boxed{\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}}$$