7.32 LEMMA

Sei $A = \begin{bmatrix} a_{11} & & \text{—} \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$ obere Dreiecksmatrix, d.h. $a_{ij} = 0$ für $i > j$

Dann ist $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots a_{nn}$

$\det A = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \pi \quad a_{\pi(1),1} \ldots a_{\pi(n),n}$

es muss gelten $\pi(j) \leq j$ für alle j

$\Rightarrow \pi(1) = 1, \pi(2) = 2 \ldots \pi(n) = n$

$= 1 \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

7.33 LEMMA

$A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n \times n}$

i) $s_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$ Spalten von A

$\Rightarrow \det [s_1 \ldots s_i + \lambda s_j \ldots s_n] = \det A$

ii) $z_i = [a_{i1} \ldots a_{in}]$ Zeilen von A

$\det \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i + \lambda z_j \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \det A \quad$ für $i \neq j$

BEWEIS

i) Siehe Determinantenformen

ii) $\det A = \det A^T$

7.34 BEISPIEL

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \\ 5 & 14 & 42 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1^* & 2 & 5 \\ 0 & 1^* & 4 \\ 0 & 4 & 17 \end{vmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Wh.: $\det A = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{\pi} \, a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n}$

Lemma: $\begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

$\Delta(s_1 \ldots s_i + \lambda s_j \ldots s_n) = \Delta(s_1 \ldots s_n)$ wenn $i \neq j$

→ Addition vom Vielfachen einer Zeile/Spalte zu einer anderen ändert nichts

$\det A = \det A^T$

BERECHNEN DER DETERMINANTE

Methode 1 → Gauß-Jordan

BEISPIEL

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -10 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1^* & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & 5 \\ 0 & 6 & -20 & 10 \\ 0 & 6 & 21 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -18 & 5 \\ 0 & 0 & 23 & -8 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -18 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 + 5 \cdot \frac{23}{8} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 6 \, (-18) \left(-8 + \frac{5 \cdot 23}{18}\right) = (-18) \cdot 8 + 5 \cdot 23$$

$$= -144 + 115 = 29$$

7.35 LEMMA

i) $\begin{vmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \det B = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & B & \\ * & & & \end{vmatrix}$

ii) $\begin{vmatrix} & & & 0 \\ & B & & \vdots \\ & & & 0 \\ * & \cdots & * & a_{nn} \end{vmatrix} = \det B \cdot a_{nn}$

BEWEIS

$$\det A = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (-1)^\pi a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(n),n}$$

$a_{\pi(n),n} = 0$ außer wenn $\pi(n) = n$

$$\dots = \sum_{\substack{\pi \in \mathfrak{S}_n \\ \pi(n)=n}} (-1)^\pi a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(n),n}$$

$$= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_n} (-1)^\rho a_{\rho(1),1} \dots a_{\rho(n-1),n-1} \, a_{nn}$$

$$= \det B \cdot a_{nn}$$

7.36 DEFINITION

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $1 \le k, l \le n$

$A_{k,l} :=$ $(n-1) \times (n-1)$ Matrix, die aus A entsteht, wenn man k-te Zeile und l-te Spalte streicht

$$\begin{array}{cc}
 & \left(\begin{array}{cccc:cccc}
a_{11} & \dots & a_{1,l-1} & & a_{1,l+1} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & \dots & a_{2,l-1} & & a_{2,l+1} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,l-1} & & a_{k-1,l+1} & \dots & a_{k-1,n} \\
\hdashline
a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,l-1} & & a_{k+1,l+1} & \dots & a_{k+1,n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \dots & a_{n,l-1} & & a_{n,l+1} & \dots & a_{nn}
\end{array}\right) \\
k & \\
 & l
\end{array}$$

Methode 2

7.37 ENTWICKLUNGSSATZ VON LAPLACE

$A \in \mathbb{K}^{n \times n} \Rightarrow \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kl} (-1)^{k+l} \det A_{k,l}$

... Entwicklung nach der l-ten Spalte

$$\det A = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} (-1)^{k+l} \det A_{kl}$$

... Entwicklung nach der k-ten Zeile

BEWEIS

$$a_\ell = \sum_{k=1}^{n} a_{k\ell}\, e_k \quad \dots \ \ell\text{-te Spalte}$$

$$\det A = \Delta(a_1 \dots a_n) = \Delta(a_1 \dots a_{\ell-1} \sum_{k=1}^{n} a_{k\ell} e_k\, a_{\ell+1} \dots a_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{k\ell} \cdot \Delta(a_1 \dots a_{\ell-1}, \underset{\ell\text{-te Spalte}}{e_k}, a_{\ell+1} \dots a_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{k\ell} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,\ell-1} & 0 & a_{1,\ell+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,\ell-1} & 0 & a_{n,\ell+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \to k\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

e_k

Vertausche ℓ-te Spalte mit $\ell-1$-ter Spalte, diese dann mit $\ell-2$-ter etc. $\to$ $\ell-1$ Vertauschungen

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{k\ell} (-1)^{\ell-1} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & \dots & a_{1\,\ell-1} & a_{1\,\ell+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & & & & \\ 1 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{n\,\ell-1} & a_{n\,\ell+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

k-te Zeile

... tausche k-te Zeile mit $k-1$-ter, diese mit $k-2$-ter etc

$\to$ $k-1$ Vertauschungen

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{k\ell} (-1)^{k-1+\ell-1} \begin{vmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{k\ell} & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{k\ell} (-1)^{k+\ell} \det A_{k\ell}$$

7.38 BEISPIEL

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & \boxed{5} & \boxed{14} \\ 5 & \boxed{14} & \boxed{42} \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 14 \\ 14 & 42 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 5 & 42 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 14 \end{vmatrix}$$

$$= (\underset{5\cdot 3\cdot 14}{5\cdot 42} - 14\cdot 14) - 2(\underset{2\cdot 3\cdot 14}{2\cdot 42} - 5\cdot 14) + 5(2\cdot 14 - 5\cdot 5)$$

$$= 14 - 2\cdot 14 + 5\cdot 3 = 1$$

7.39 SATZ

A invertierbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$$\hat{A} := [\hat{a}_{kl}]_{k,l=1,\dots,n}$$

heißt Komplementärmatrix oder adjunkte Matrix

$$\hat{a}_{kl} = (-1)^{k+l} \det A_{lk}$$

Dann ist $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \hat{A}$

BEWEIS

zz: $B := \hat{A} \cdot A = \det A \cdot I$

$$b_{kl} = \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{kl} \cdot a_{jl} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \det A_{jk} \, a_{jl}$$

Falls $k = l$: $b_{kk} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{jk} \det A_{jk}$

(Laplace-Entwicklung nach k-ter Spalte

Falls $k \neq l$, oBdA $k < l$

$$0 = \det \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & k & & l & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nl} & \dots & a_{kl} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Ersetze k-te Spalte von A, durch l-te Spalte von A

Laplace Entwicklung nach k-ter Spalte:

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{jl} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 & a_{1l} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & 0 & a_{nl} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

wie bei Laplace

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jl} (-1)^{j+k} \det A_{jk}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{jl} \, \hat{a}_{kj} = b_{kl} = 0$$

7.40 BEISPIEL

$$n=2: \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad \text{cayley 1855}$$

$$\frac{1}{\nabla}\begin{vmatrix} \partial a \nabla & \partial b \nabla \\ \partial c \nabla & \partial d \nabla \end{vmatrix}$$

LAPLACE. $\sum_{l=1}^{n} a_{kl} (-1)^{k+l} \det A_{kl} = \sum_{k=1}^{n} a_{kl} \partial a_{kl} \det A$

$n=3$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \\ 5 & 14 & 42 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 14 \\ 14 & 42 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 14 & 42 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 14 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 5 & 42 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 42 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 14 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 14 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & -14 & 3 \\ -14 & 17 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 14 \\ 14 & 42 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot 14 - 14 \cdot 14 = 14$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 14 & 42 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 14 - 5 \cdot 14 = 14$$

7.41 SATZ (Cramer'sche Regel)

G. Cramer 1750
McLaurin 1748
Leibniz 1678

Satz von Arnold:

Kein Satz in der Mathematik ist nach seinem ersten Entdecker benannt.

A reguläre $n \times n$ Matrix mit Spaltenvektoren $a_1 \dots a_n \in \mathbb{K}^n$

Dann ist die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ gegeben durch

$$x_i = \frac{\Delta(a_1 \dots a_{i-1}\ b\ a_{i+1} \dots a_n)}{\Delta(a_1 \dots a_n)}$$

$$= \frac{\det(a_1 \dots b \dots a_n)}{\det A}$$

Aufwand: $n+1$ Determinanten berechnen

BEWEIS

$$b = \sum_{j=1}^{n} b_j e_j \quad , \quad x = A^{-1} b = \frac{1}{\det A} \cdot \hat{A} \cdot b$$

$$x_i = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} b_j = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{ji})\, b_j$$

$$= \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} \Delta(a_1 \dots a_{i-1}\ e_j\ a_{i+1} \dots a_n) \cdot b_j$$

$$= \frac{1}{\det A} \Delta(a_1 \dots a_{i-1} \sum_{j=1}^{n} b_j e_j\ a_{i+1} \dots a_n)$$

$$= \frac{1}{\det A} \Delta(a_1 \dots a_{i-1}\ b\ a_{i+1} \dots a_n)$$

7.42 BEISPIEL

$$2x_1 + 2x_2 = 7 \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 - 3x_2 = 0 \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{21}{8} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{7}{8}$$

$$x = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \end{pmatrix}$$

7.43 BEMERKUNG

In höheren Dimensionen $(n \geq 4)$ ist die Cramer'sche Regel

① zu aufwändig

② numerisch instabil

→ trotzdem nützlich für theoretische Überlegungen

1) die Abbildung $A \mapsto \det A$ ist $\in C^\infty$ (Polynom)

2) Die Menge der invertierbaren Matrizen in $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist offen, denn wenn $\det A \neq 0$, dann ist auch $\det \hat{A} \neq 0$ solange $|a_{ij} - \hat{a}_{ij}| < \delta$

3) Die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ für A invertierbar hängt stetig und differenzierbar von A und b ab

$$x_i = \underbrace{\frac{1}{\det A}}_{\text{stetig solange} \neq 0} \cdot \underbrace{\hat{A} \cdot b}_{\text{Polynom}}$$

4) Die Abbildung
$$GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$$
$$A \mapsto A^{-1} = \frac{1}{\det A} \hat{A}$$
ist stetig

$\Rightarrow$ $GL(n, \mathbb{R})$ ist eine Lie-Gruppe