8.21 SATZ

Sei V Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit innerem Produkt $\langle .,. \rangle$

$B = \{b_1 \dots b_n\}$ Basis von V

Dann existiert eine hermitesche Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

sodass $\langle x, y \rangle = \Phi_B(x)^t \; A \; \overline{\Phi_B(y)}$

Wenn $\langle .,. \rangle$ positiv definit, dann ist A regulär

Sei $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i b_i \qquad y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i b_i$

$$\Phi_B(x) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \qquad \Phi_B(y) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \xi_i b_i , \sum_{j=1}^{n} \xi_j b_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_j} \underbrace{\langle b_i, b_j \rangle}_{=: a_{ij}}$$

$$= \sum_{ij} \xi_i \; a_{ij} \; \overline{\eta_j} = \xi^t A \overline{\eta}$$

$$a_{ji} = \langle b_j, b_i \rangle = \overline{\langle b_i, b_j \rangle} = a_{ij}$$

Zusatz: $\langle .,. \rangle$ pos. def. $\Rightarrow A$ regulär

Es genügt z.z. $\ker A = \{0\}$

Sei $A \xi = \underset{\text{Vektor}}{0} \Rightarrow \xi^t A \xi = \underset{\text{Zahl}}{0} \Rightarrow \sum \xi_i b_i = 0$

$$\overset{\parallel}{\langle \sum \xi_i b_i , \sum \xi_i b_i \rangle}$$

$\overset{\text{Basis}}{\Rightarrow}$ alle $\xi_i = 0$

Wie erkennt man pos. def Skalarprodukte?

8.22 DEFINITION

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

Dann heißt die Matrix $A^* := \overline{A^t}$, $(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$

die zu A adjungierte Matrix

A heißt selbstadjungiert wenn $A = A^*$

... symmetrisch wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

hermitesch wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

A heißt $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix}\text{definit}\\\text{semidefinit}\end{Bmatrix}$ wenn das innere Produkt $\langle \xi, \eta \rangle_A = \xi^t A \overline{\eta}$ die entsprechende Eigenschaft hat

z. B. A positiv definit wenn $\xi^t A \overline{\xi} > 0 \quad \forall \xi \neq 0$

Wir wollen nun feststellen wie "positiv" eine gegebene Matrix ist - analog zum Rang:

Jede Matrix ist äquivalent zu einer Matrix der Form $\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$ d.h. $(\exists P, Q \in GL(n, \mathbb{K}))\ P \cdot A \cdot Q = I^{(n)}$

rk(A)... Anzahl der Einser

8.23 DEFINITION

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißen kongruent, wenn

$(\exists C \in GL(n, \mathbb{C})):\ C^* A C = B$ $\qquad A \mathrel{\widehat{=}} B$

strengere Bedingung als Äquivalenz

8.24 SATZ

Jede hermitesche Matrix ist kongruent zu einer Diagonalmatrix

$D = \operatorname{diag}(+1 \ldots +1, -1 \ldots -1, 0 \ldots 0)$

BEWEIS

$n = 1:\quad A = [a_{11}]$

Gesucht: c_{11} sodass $\overline{c_{11}} \cdot a_{11} \cdot c_{11} = +1, -1, 0$

$|c_{11}|^2 \cdot a_{11} = \pm 1$

$\rightarrow \quad c_{11} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|a_{11}|}} & \text{wenn } a_{11} \neq 0 \\ 1 & \text{wenn } a_{11} = 0 \end{cases}$

$c_{11} \cdot a_{11} \cdot \overline{c_{11}} = \operatorname{sign} a_{11}$

$n-1 \rightarrow n$ $\qquad$ Idee: $\begin{pmatrix} * & 0 & \rightarrow \\ 0 & & \\ \downarrow & & \end{pmatrix}$ erzeuge 0 in 1. Spalte und 1 Zeile

Fall 1: $A = 0 \Rightarrow C = I$

Fall 2: $A \neq 0,\ a_{11} = 0$

Fall 2a: $\exists j: a_{jj} \neq 0$

$C = T_{1j} = C^*$

$\Rightarrow (C^* A C)_{11} = a_{jj} \neq 0 \quad \rightarrow$ Fall 3

Fall 2 b: $\forall a_{jj} = 0$ $\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & j \end{matrix} \\ i & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

$$C = I + E_{ij} \cdot e^{i\vartheta} \qquad \text{sodass } e^{-i\vartheta} a_{ij} = a_{ij}$$

$$A' = (C^* A\ C)_{jj} = [(I + E_{ji}\, e^{-i\vartheta})\, A\, (I + E_{ij}\, e^{i\vartheta})]_{ij}$$

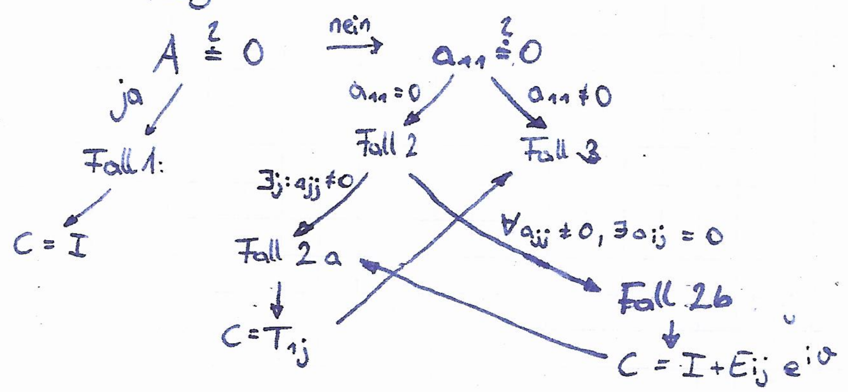
$$= A + E_{ji} e^{-i\vartheta} A + A E_{ij} e^{i\vartheta} + E_{ji}\ A E_{ij}$$

$$= \underbrace{a_{jj}}_{=0} + e^{-i\vartheta} \cdot a_{ij} + \underbrace{a_{ji}\, e^{i\vartheta}}_{\overline{a_{ij}\, e^{-i\vartheta}}} + \underbrace{a_{ii}}_{=0} = |a_{ij}| \quad \text{Wahl von } \vartheta$$

$$\Rightarrow A'_{jj} \neq 0 \longrightarrow \text{Fall 2a}$$

Fall 3: $a_{11} \neq 0$

Nullen erzeugen:



$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ & \ddots & & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad C^* \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$C' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|a_{11}|}} & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (C')^* C^* A\, C \cdot C' = \begin{pmatrix} \operatorname{sign} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

IV: $\Rightarrow$ es gibt $\hat{C} \in GL(n-1, \mathbb{C})$: $\hat{C}^* \tilde{A}\, \hat{C} = \tilde{D}$

$$C'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{C} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \Rightarrow (C'')^* (C')^* C^* A \, C \, C' \, C''$$

$$= \operatorname{sign} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{D} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

8.25 BEISPIEL

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Fall } 2b, \; a_{ii} \neq 0 \quad \forall i \in \{1,2,3\}, \; a_{12} \neq 0$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A' := C^* \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 1 & 1+i \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 2 & 1+i \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Fall $2a$, $\quad a'_{22} \neq 0$

$$\Rightarrow C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A'' = C_2^* \, A' \, C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1+i \\ 1 & 0 & i \\ 1-i & -i & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Fall } 3$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1+i}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A''' = C_3^* A'' C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1-i}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1+i \\ 1 & 0 & i \\ 1-i & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1+i \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ 0 & \frac{-1-i}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ 0 & \frac{-1-i}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_4^* \cdot A''' \, C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ 0 & \frac{-1-i}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{-1-i}{2} & -1 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\frac{-1+i}{2}}{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{C}^* \cdot \widehat{A}\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1-i & 1 \end{pmatrix} \widetilde{A} \begin{pmatrix} 1 & -1+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{C}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\widetilde{C}_1} \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1+i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\widetilde{C}_2} \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot C_6$$

$$\Rightarrow C^* \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8.26 ÜBUNG

i) Wenn $A \geq 0$, C beliebig

A positiv semidefinit

$$\Rightarrow C^* \cdot A \cdot C \geq 0$$

ii) $A > 0$, $C \in GL(n, K)$

$$\Rightarrow C^* A \cdot C > 0$$

8.27 TRÄGHEITSSATZ VON SYLVESTER

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesche Matrix und $C \in GL(n, \mathbb{C})$

Dann ist die Anzahl der $+1, -1, 0$ eindeutig festgelegt.

Beweis

Sei $A \mathrel{\widehat{=}} D = \operatorname{diag}(\underbrace{+1, \dots +1}_{r}, \underbrace{-1, \dots -1}_{s}, \underbrace{0 \dots 0}_{n-r-s})$

d.h. $C^* A\ C = \begin{pmatrix} +1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & +1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} =: D$, C regulär

d.h. $r + s = rk(A)$

Sei $\tilde{C}^* A \cdot \tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} =: \tilde{D}$

$\rightarrow r + s = \tilde{r} + \tilde{s}$

zz: $r = \tilde{r}$

Es genügt zz: $r \leq \tilde{r}$ (genauso $\tilde{r} \leq r$)

$\overline{C}$ ist eine Basistransformation in eine Basis B sodass

$x^t A \overline{x} = \Phi_B(x)^t D \cdot \overline{\Phi_B(x)}$

ebenso ist $\overline{\tilde{C}}$ eine Basistransformation in eine Basis $\tilde{B}$

sodass $x^t A \overline{x} = \Phi_{\tilde{B}}(x)^t \tilde{D} \cdot \overline{\Phi_{\tilde{B}}(x)}$

Für $x \in \mathcal{L}(b_1, \dots, b_r)$ ist $x^t A x$

$$= (\xi_1 \dots \xi_r, 0 \dots 0) \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\xi_1} \\ \vdots \\ \overline{\xi_n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} (\xi_i)^2 > 0 \quad \text{wenn } x \neq 0$$

Für $x \in \mathcal{L}(\tilde{b}_{\tilde{r}+1}, \tilde{b}_{\tilde{r}+2}, \dots \tilde{b}_n)$

ist $x^t A \overline{x} = \Phi_{\tilde{B}}(x)^t \tilde{D} \, \overline{\Phi_B(x)}$

$$= (0 \dots 0 \; \tilde{\xi}_{\tilde{r}+1}, \dots \tilde{\xi}_n) \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \overline{\tilde{\xi}_{\tilde{r}+1}} \\ \vdots \\ \overline{\tilde{\xi}_n} \end{pmatrix}$$

$$= (\tilde{\xi}_{\tilde{r}+1} \dots \tilde{\xi}_n) \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\tilde{\xi}_{\tilde{r}+1}} \\ \vdots \\ \overline{\tilde{\xi}_n} \end{pmatrix} \leq 0$$

$\Rightarrow \mathcal{L}(b_1 \dots b_r) \cap \mathcal{L}(\tilde{b}_{\tilde{r}+1}, \dots \tilde{b}_n) = \{0\}$

$\Rightarrow n \geq \underbrace{\dim \mathcal{L}(b_1 \dots b_r)}_{= r} + \underbrace{\dim \mathcal{L}(\tilde{b}_{\tilde{r}+1}, \dots \tilde{b}_n)}_{= n - \tilde{r}}$

$\Rightarrow 0 \geq r - \tilde{r} \Rightarrow r \leq \tilde{r}$

8.28 DEFINITION

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch und kongruent zu

$$\operatorname{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{r},\underbrace{-1\dots-1}_{s},\underbrace{0\dots0}_{n-r-s})$$

Dann heißt $\operatorname{ind} A = r$ der Index von A

und $\operatorname{sign} A = r-s$ die Signatur von A

$r+s = \operatorname{rk}(A)$, $\underset{A \text{ pos def}}{A > 0} \iff r = n$

$r = \operatorname{ind} A$ ... maximale Dimension eines Unterraumes auf dem die Matrix A positiv definit ist

s ... maximale Dimension eines Unterraumes, sodass A negativ definit

- $A = C^* \cdot B \cdot C \Rightarrow B = (C^*)^{-1} A \cdot C^{-1}$
- $(C^*)^{-1} = (C^{-1})^*$

8.29 FOLGERUNGEN

$$A = \begin{pmatrix} c & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

c ... 300 000 km/s

$x = (t, x_1, x_2, x_3)$

$x^t A x = c t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0$

i) Kongruenz ist Äquivalenzrelation

ii) $A \hat{=} B \iff \operatorname{ind} A = \operatorname{ind} B \wedge \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$

iii) $A > 0 \iff \operatorname{ind} A = n$

iv) $A \geq 0 \iff \operatorname{ind} A = \operatorname{sign} A$

v) $A < 0 \iff \operatorname{ind} A = 0 \wedge \operatorname{sign} A = -n$

vi) indefinit $\iff r > 0, s > 0$; $\operatorname{ind} A \neq 0 \wedge \operatorname{ind} A - \operatorname{sign} A \neq 0$
$\rightarrow \operatorname{ind} A (\operatorname{ind} A - \operatorname{sign} A) \neq 0$

8.30 LEMMA

i) $\det A^* = \det \bar{A}^t = \det \bar{A} = \overline{\det A}$

ii) wenn $A = A^* \Rightarrow \det A \in \mathbb{R}$

iii) wenn $A = A^*$, $B = B^*$ und $A \hat{=} B$
dann ist $\det A$ und $\det B$ haben das gleiche Vorzeichen

iv) wenn $A > 0 \Rightarrow \det A > 0$

BEWEIS

i), ii) klar

iii) $B = C^* \cdot A \cdot C$

$\Rightarrow \det B = \det C^* \cdot \det A \cdot \det C$

$= \underbrace{|\det C|^2}_{>0} \cdot \det A$

iv) $A > 0 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} A \hat{=} I \overset{iii)}{\Rightarrow} \det A > 0$

$\rightsquigarrow$ betrachte $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

8.31 DEFINITION

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_r\}$ $\subseteq \{1, \dots, n\}$
$J = \{j_1 < j_2 < \dots < j_r\}$

$$[A]_{IJ} := \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_r} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \dots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix}$$ heißt Minor von A

speziell, die Determinanten

$$\det A_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

heißen Hauptminoren von A

8.32 SATZ Hauptminorenkriterium

Sei $A = A^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$

i) $A > 0 \iff \det A_r > 0 \quad \forall r = 1 \dots n$

ii) $A < 0 \iff (-1)^r \det A_r > 0 \quad \forall r = 1, \dots, n$

BEWEIS

i) $\curvearrowright$ $A > 0 \overset{8.30.iv}{\Rightarrow} A_n = A > 0 \Rightarrow \det A_n > 0$

Es genügt zz: alle Teilmatrizen $A_r, r = 1, \dots, n$ sind positiv definit, d.h. $\xi^t A \xi = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}^t A \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} > 0$, $\xi \in \mathbb{C}^r \setminus \{0\}$

$\overset{8.30iv}{\Rightarrow} \det A_r > 0$ $\quad e_{ii} = e_i^t A e_i > 0$

Induktion

$r=1$: $A_1 = [a_{11}]$ ist positiv definit, denn $a_{11} = \det[a_{11}] > 0$

$r-1 \to r$:

Annahme $A_{r-1} > 0$ und $\det A_r > 0$

$\Rightarrow A_{r-1} \mathrel{\hat{=}} I_{r-1}$

$\Rightarrow \exists\, C_{n-1} \in GL(n-1, \mathbb{C}) : C_{r-1}^* A_{r-1} C_{r-1} = I_{r-1}$

$$A_r' = \begin{pmatrix} C_{r-1}^* & \\ & 1 \end{pmatrix} \underset{\begin{pmatrix} A_{r-1} & \vdots \\ x \dots x & \end{pmatrix}}{A_r} \begin{pmatrix} C_{r-1} & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r-1} & a_{1r} \\ & \vdots \\ \overline{a_{1r}} \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & & -a_{1r} \\ & \ddots & \vdots \\ & 1 & -a_{r-1,r} \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^* A_r' C = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ -\overline{a_{1r}} & \dots & -\overline{a_{r-1\,r}} & 1 \end{pmatrix} A_r' \begin{pmatrix} 1 & & -a_{1r} \\ & \ddots & \vdots \\ & & -a_{r-1,r} \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & 1 & \tilde{\alpha} \end{pmatrix}$$

$\det A_r' = \det |C_{r-1}|^2 \cdot \det A_r > 0$

$\tilde{\alpha} = \det C' A_r' C = \det |C|^2 \det A'$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\tilde\alpha}} \end{pmatrix} C^* A_r' C \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\tilde\alpha}} \end{pmatrix} = I_r$$

$\Rightarrow A_r \mathrel{\hat{=}} I_r \Leftrightarrow A_r > 0$ $\square$

Von nun an: nur positiv definite innere Produkte

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \to$ Wähle Basis $(b_1, \dots b_n)$

$A = [\langle b_i, b_j \rangle] \to A > 0$?

Schon gezeigt: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

wobei $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm ist

8.33 DEFINITION

i) Ein Vektorraum V mit positiv definiten Skalarprodukt heißt euklidischer Raum wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

unitärer Raum wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

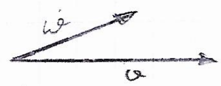
(Prä-) Hilbertraum wenn $\dim = \infty$

↳ David Hilbert 1862 - 1943

1900: 23 Probleme $\begin{cases} 15 \text{ gelöst} \\ 5 \text{ ungelöst} \\ 3 \text{ unlösbar} \end{cases}$ → "Wir müssen wissen, wir werden wissen"

ii) Ein Element $v \in V$ heißt normiert wenn $\|v\| = 1$

$v \neq 0 \Rightarrow \frac{v}{\|v\|}$ ist normiert



iii) Seien $v, w = 0$ dann ist in $\mathbb{R}^3$ $\langle a, b \rangle = \|a\| \|b\|$

der Winkel $\sphericalangle(v, w)$ genau $\arccos \operatorname{Re} \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$

$\arccos [-1, 1] \to [0, \pi]$

iv) zwei Vektoren v, w heißen orthogonal

... $v \perp w$ wenn $\langle v, w \rangle = 0$, d.h. $v = 0 \vee w = 0 \vee \varphi = \frac{\pi}{2}$

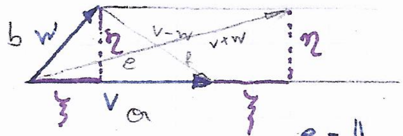
8.34 SATZ

In $(V, \langle .,. \rangle)$ gilt

i) $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\| \|w\| \cos \varphi$ Kosinussatz

ii) wenn $v \perp w$ dann $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ Pythagoras

iii) $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$ Parallelogrammgleichung



$a = \|v\|$ $b = \|w\|$

$e = \|v + w\|$ $f = \|v - w\|$

$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$ $\xi^2 + \eta^2 = b^2$

$(a + \xi)^2 + \eta^2 = e^2$ $(a - \xi)^2 + \eta^2 = f^2$

$(a + \xi)^2 + (a - \xi)^2 + 2\eta^2 = e^2 + f^2$

$\to 2(a^2 + \xi^2 + \eta^2) = 2(a^2 + b^2)$

8.35 BEMERKUNG

Man kann zeigen (von Neumann): wenn eine Norm die Parallelogrammgleichung erfüllt, dann kommt sie von einem Skalarprodukt. Bsp. $\|x_1\| = |x_1| + \dots + |x_n|$ erfüllt iii) nicht