

Открытая конференция ИСП РАН им. В. П. Иванникова
ISPRAS OPEN 2020

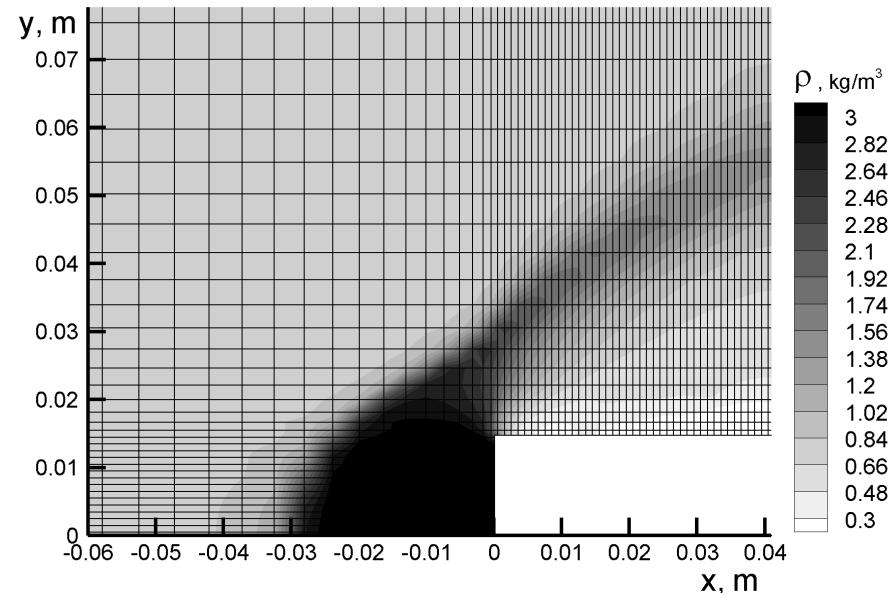
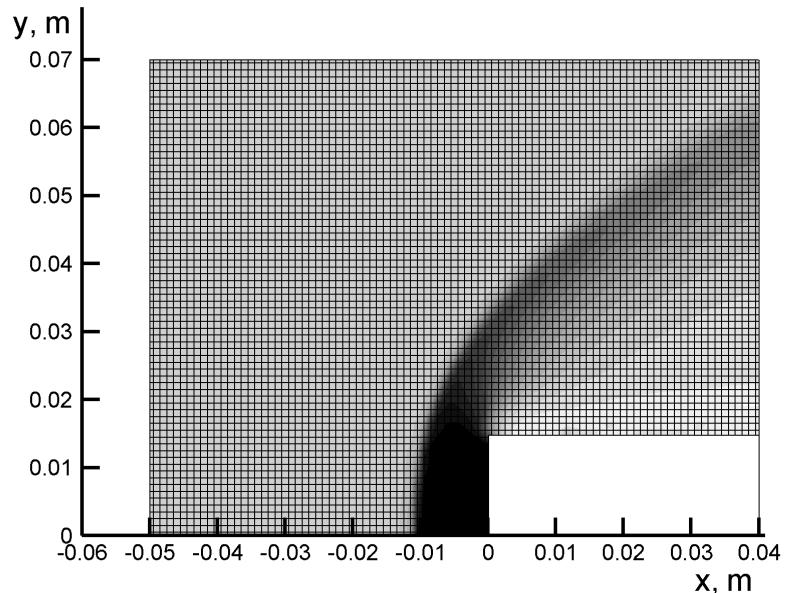
Москва. 10-11 декабря 2020 г.

**Метод построения аккуратной
пространственной сетки для
моделирования внешнего обтекания**

И. А. Широков
МГУ им. М.В. Ломоносова, ф-т ВМК
ИПМ РАН

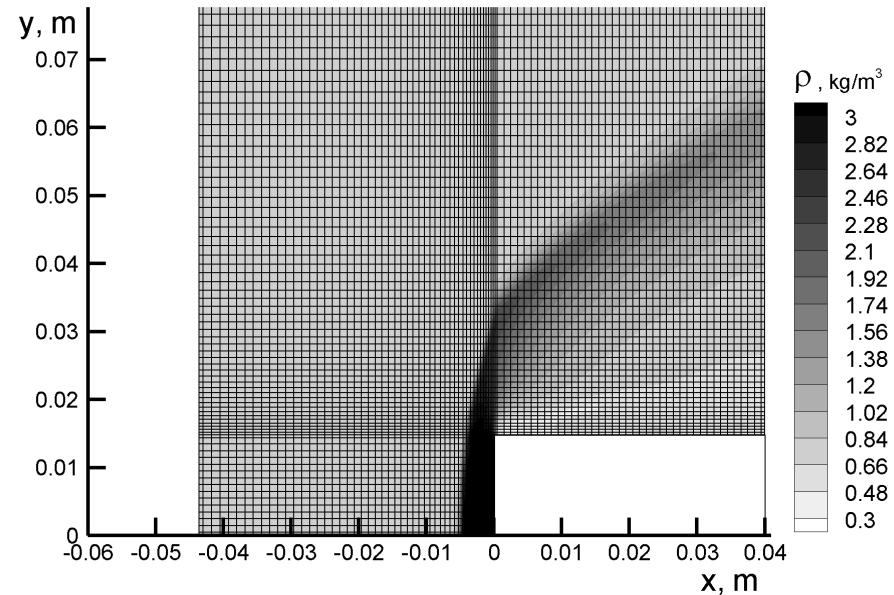
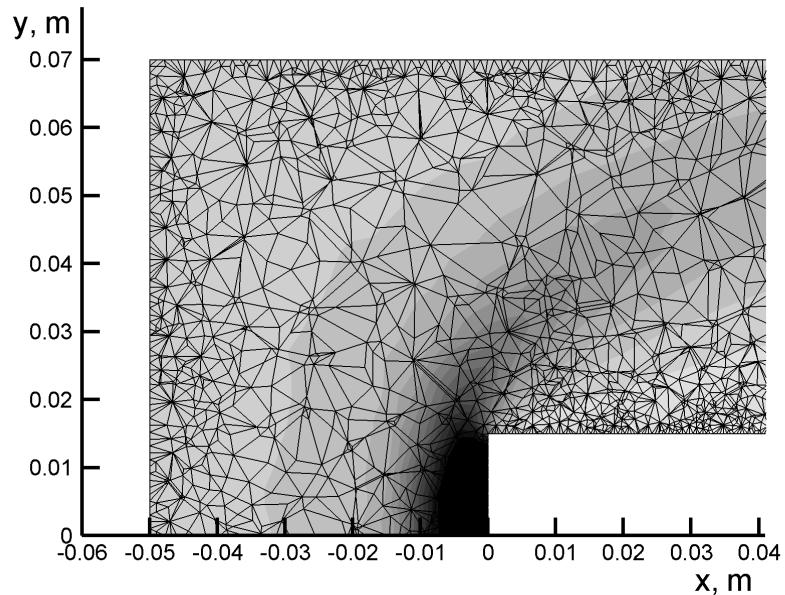
Влияние структуры сетки на качество моделирования

3D-моделирование на основе квазигазодинамических (КГД) уравнений сверхзвукового газодинамического обтекания торцевой части параллелепипеда при $Ma=3$, $Re=47000000$ на равномерной сетке (слева), и на неравномерной сетке (справа). Апроксимационная формула Лунева для расстояния между ударной волной и торцом обтекаемого цилиндра дает около 0.01 м, что соответствует результату, полученному на равномерной сетке.



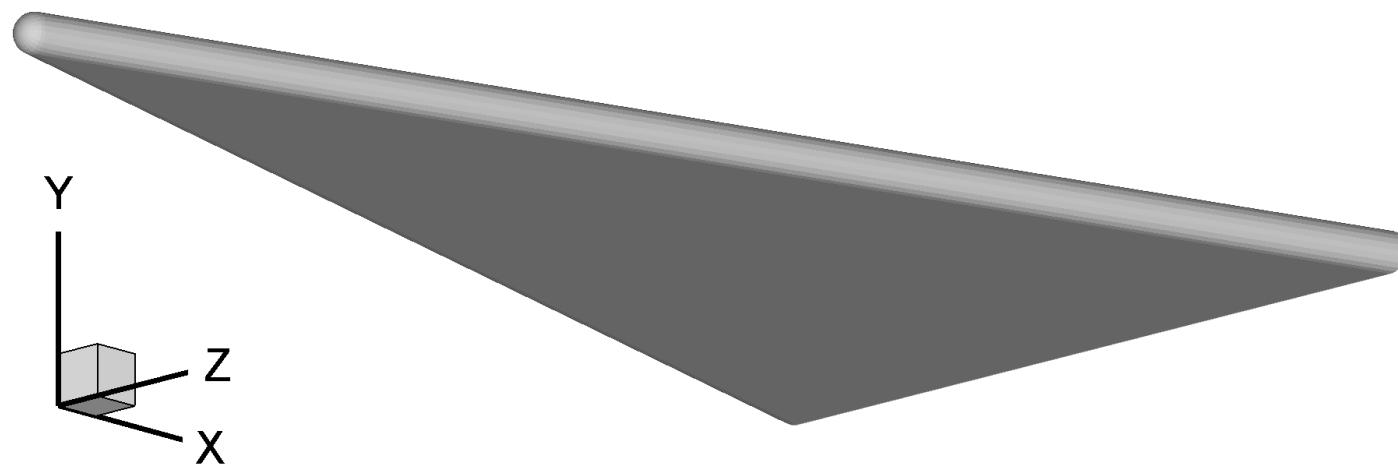
Влияние структуры сетки на качество моделирования

3D-моделирование на основе квазигазодинамических (КГД) уравнений сверхзвукового газодинамического обтекания торцевой части параллелепипеда при $Ma=3$, $Re=47000000$ на нерегулярной тетраэдральной регулярной (слева), и на регулярной неравномерной сетке со сгущением (справа).



Построение расчетной сетки вокруг треугольного крыла

Модель треугольного крыла имеет форму пластины в форме равнобедренного треугольника с углом между боковыми сторонами $2\gamma=30^0$, (угол стреловидности передней кромки $90^0 - \gamma=75^0$). Толщина модели $2R=16$ мм, радиус закругления передних кромок и носка $R=8$ мм. Длина модели $L=0.57$ м



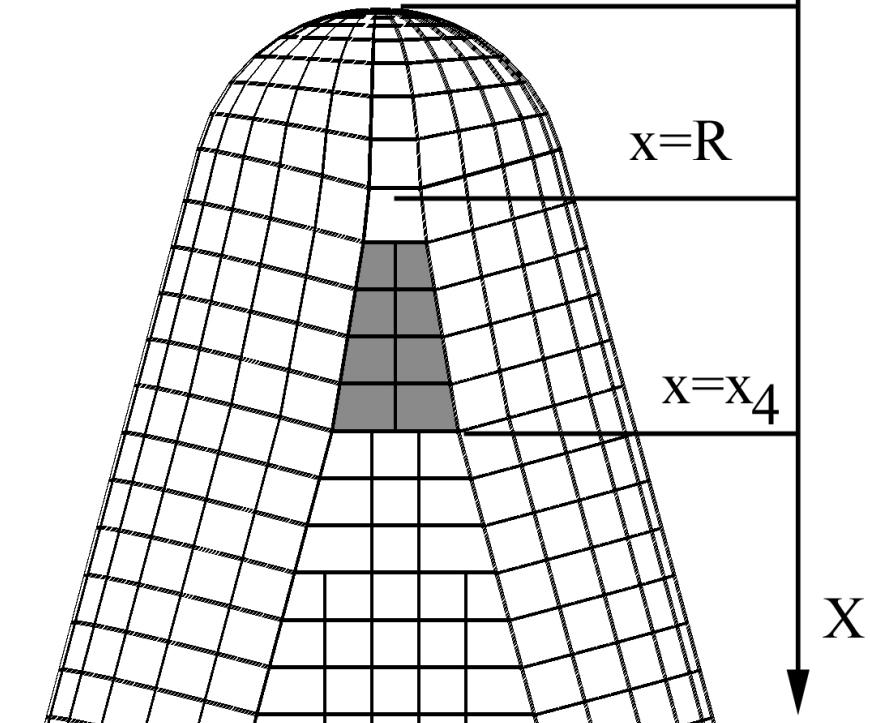
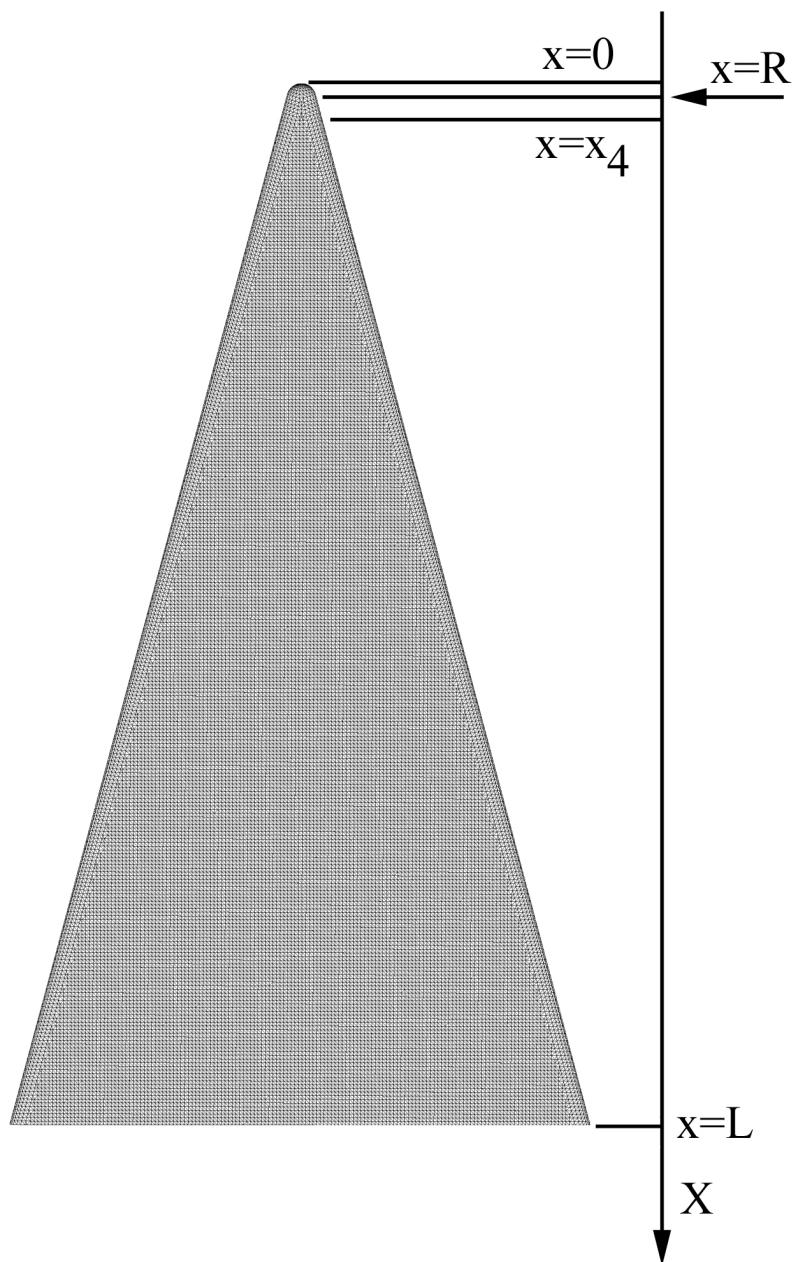
Геометрия модели описана в следующих работах:

[1] С. В. Александров, А. В. Ваганов, В. И. Шалаев. Физические механизмы образования продольных вихрей, появления зон высоких тепловых потоков и раннего перехода в гиперзвуковом течении около треугольного крыла с затупленными передними кромками // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. 2016. № 45. С. 9–31.

[2] П. В. Сильвестров, И. А. Крюков, Б. В. Обносов. Численное моделирование гиперзвукового обтекания треугольного крыла // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2018. Т. 19 (1). <http://chemphys.edu.ru/issues/2018-19-1/articles/733/>

Модель треугольного крыла такой же формы, но немного другими размерами экспериментально исследована в ЦАГИ, результаты описаны в работе

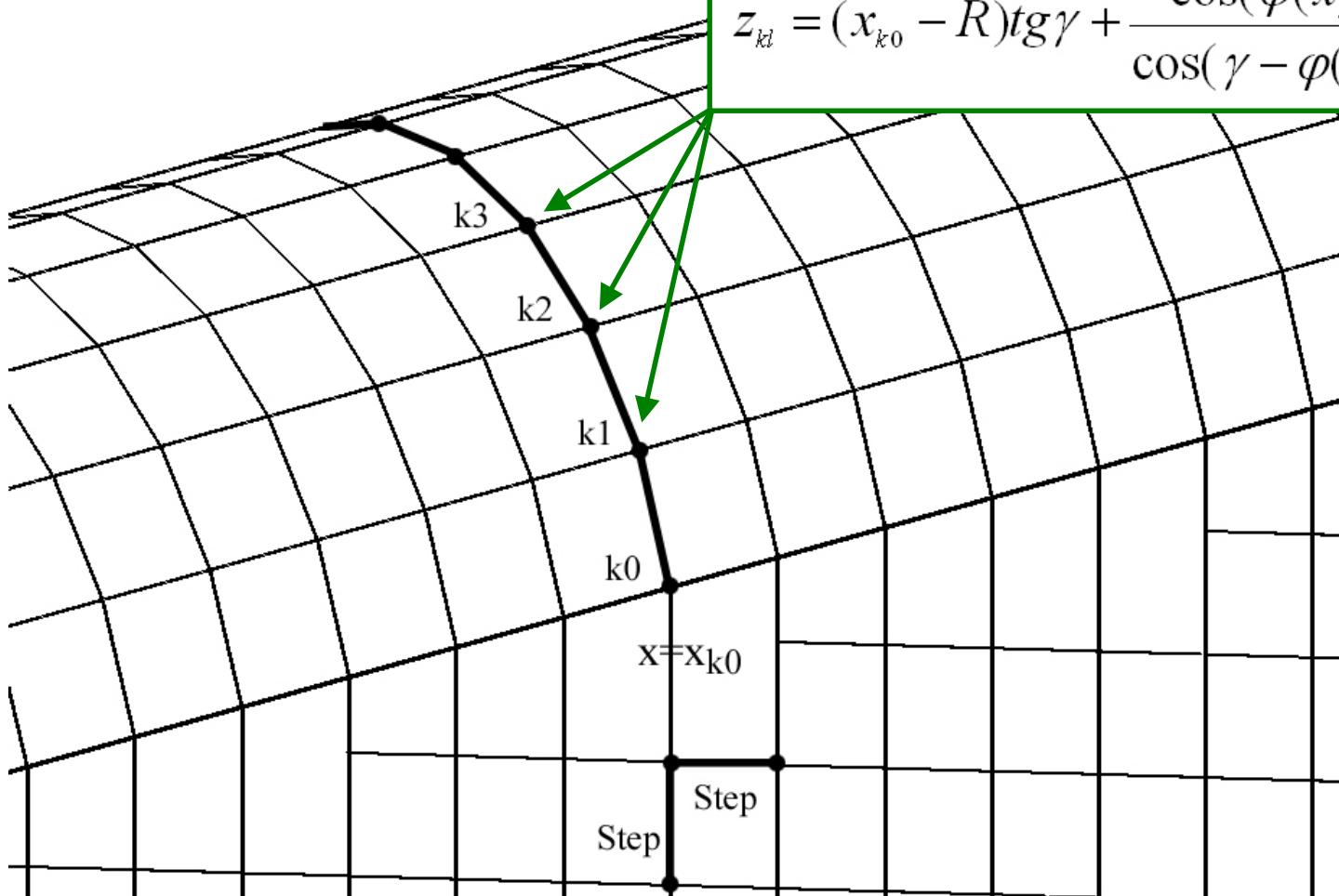
[3] П. И. Горенбух. Аэродинамическое качество плоского треугольного крыла с затупленными кромками при больших сверхзвуковых скоростях обтекания // Ученые записки ЦАГИ. 1989 Т. 20. № 1. С. 108–112.

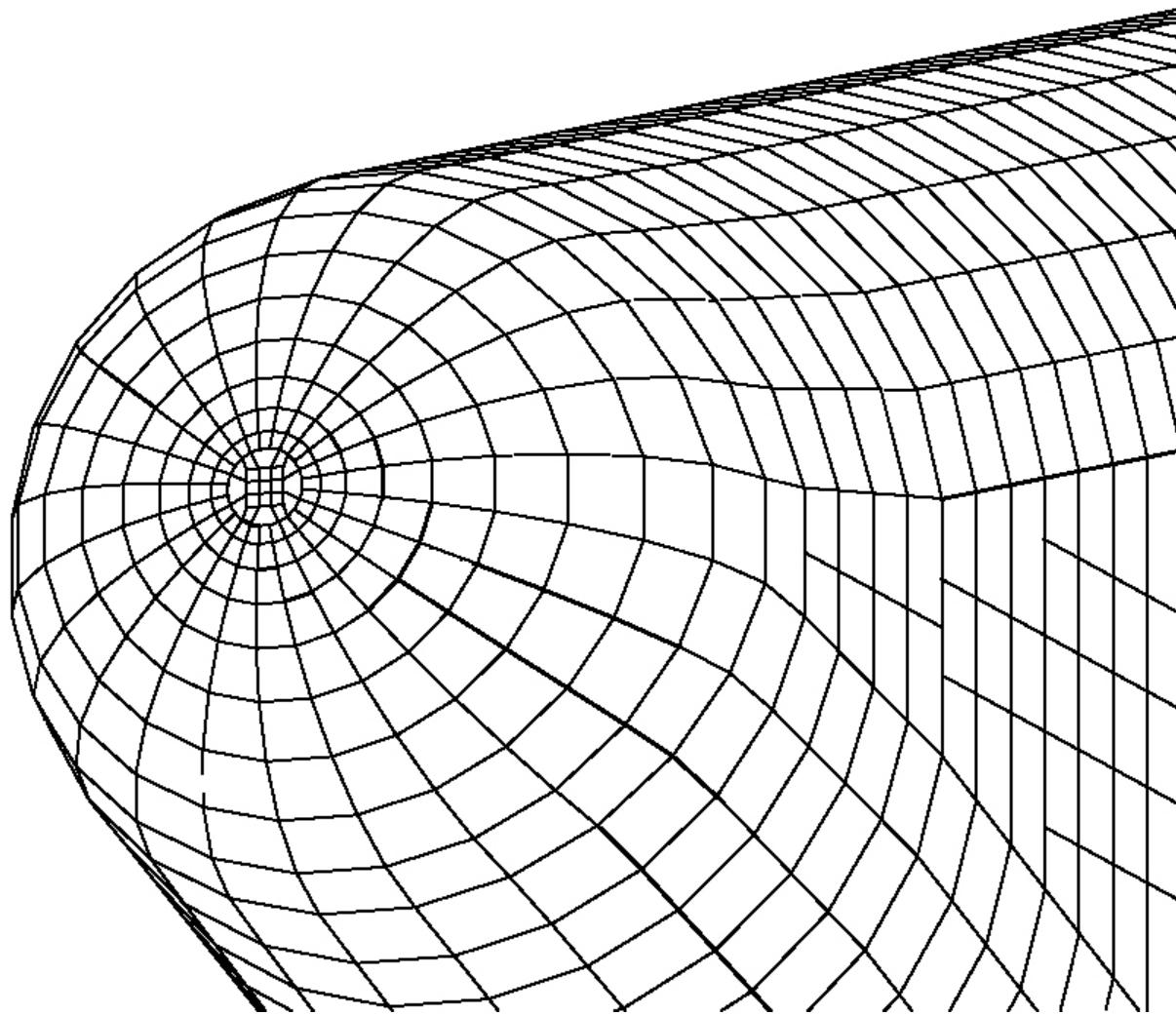


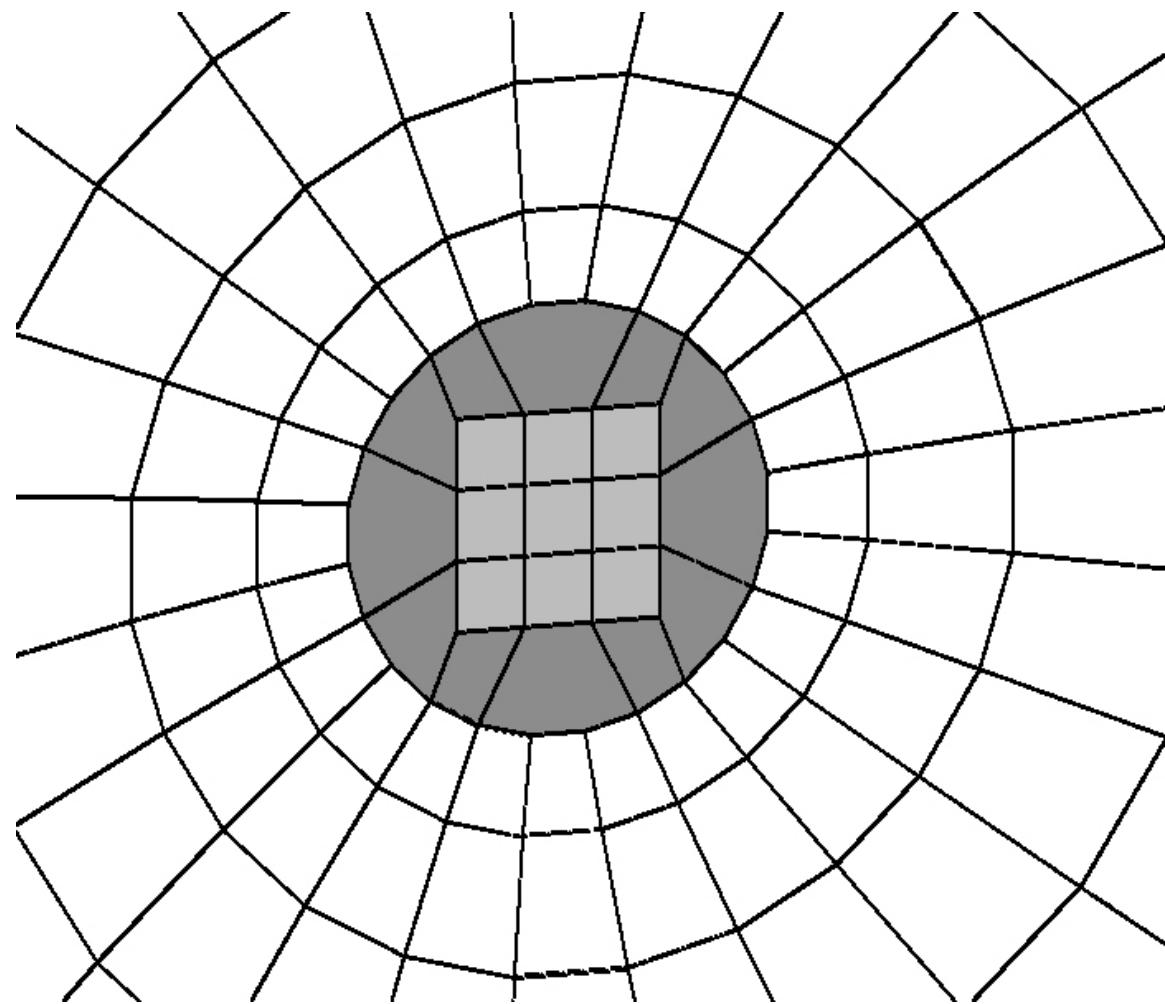
$$x_{kl} = x_{k_0} - \frac{\sin(\varphi(x_{k_0}))}{\cos(\gamma - \varphi(x_{k_0}))} R \sin\left(\frac{\pi l}{N_R - 1}\right),$$

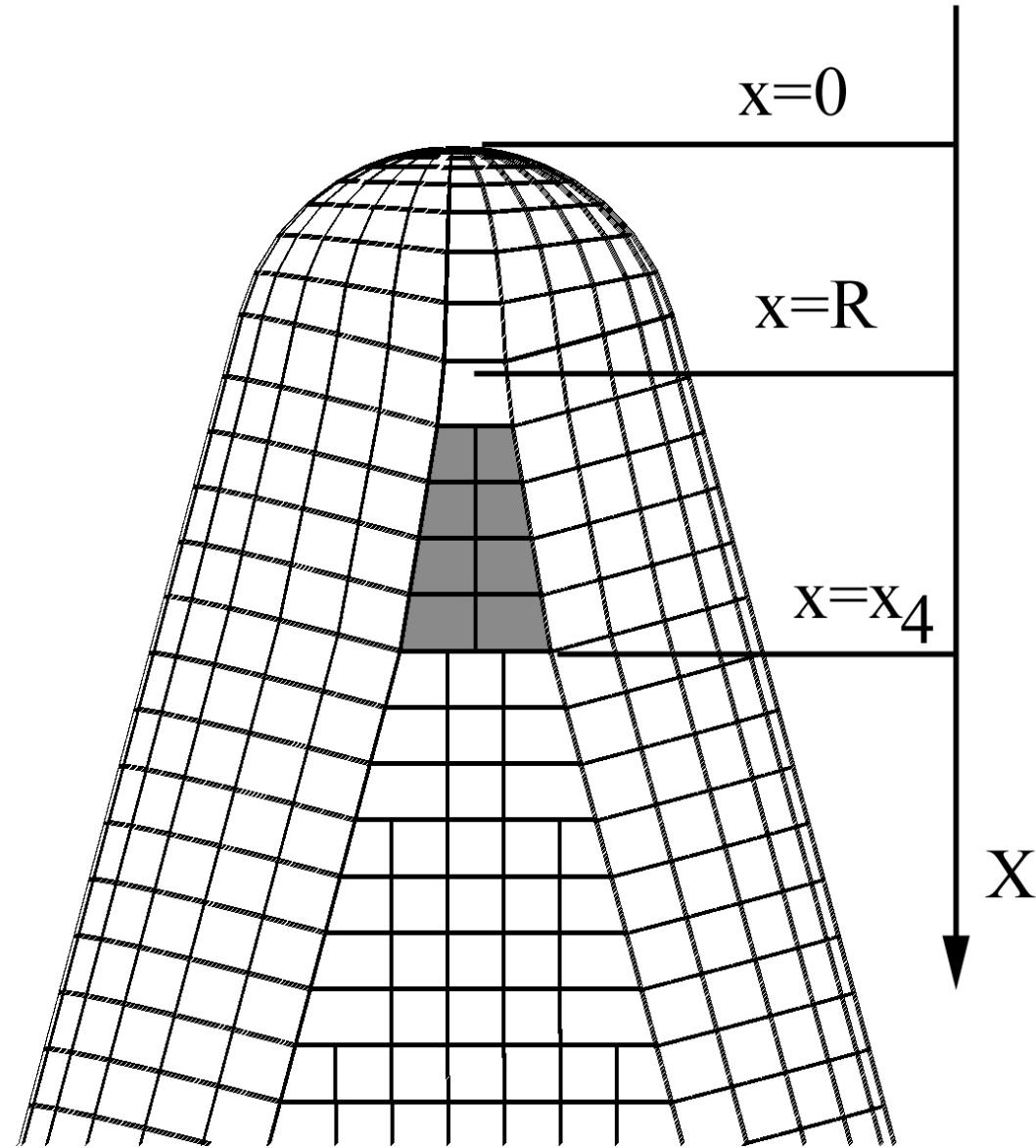
$$y_{kl} = -R \cos\left(\frac{\pi l}{N_R - 1}\right),$$

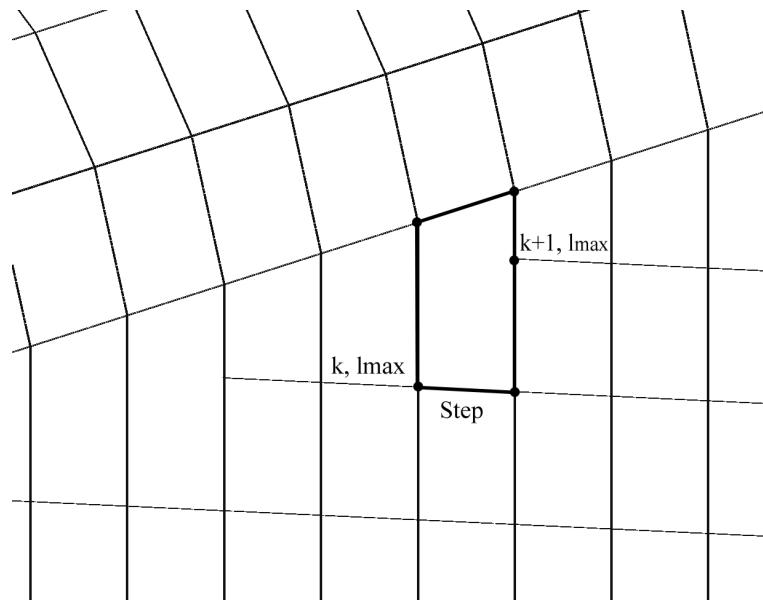
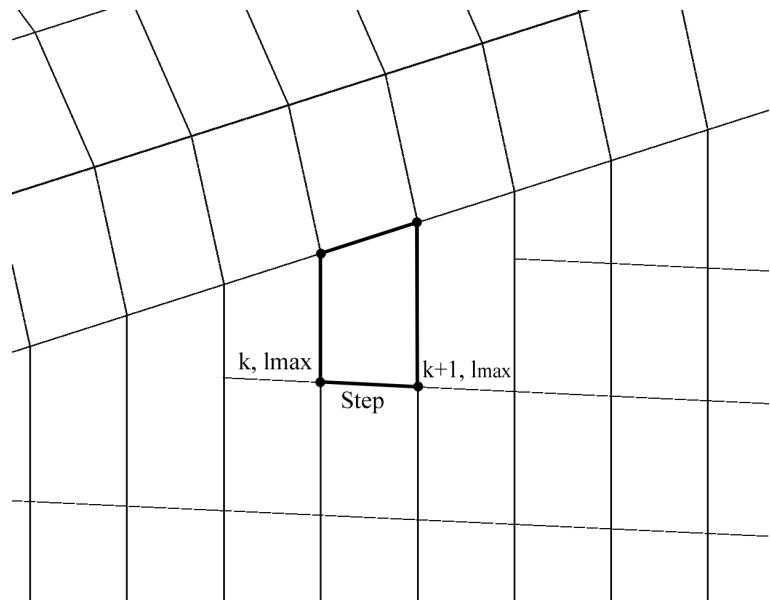
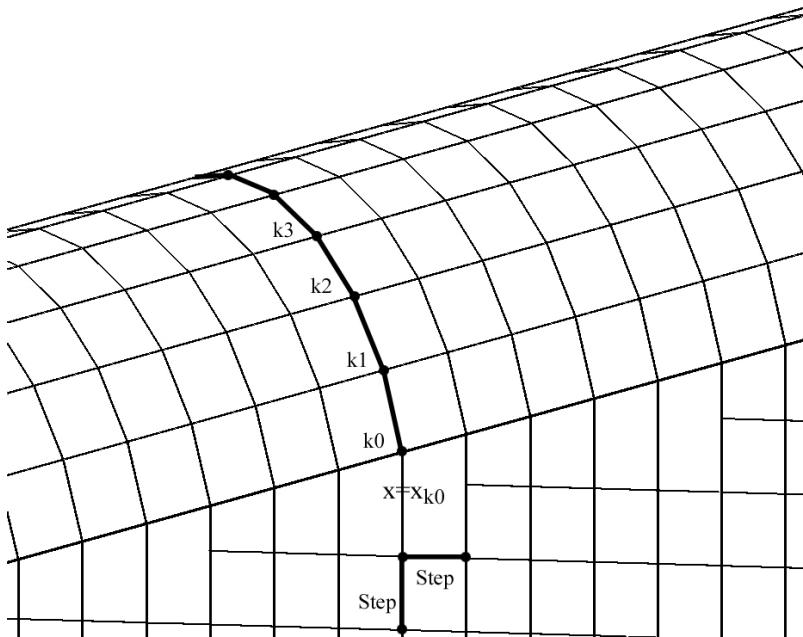
$$z_{kl} = (x_{k_0} - R) \tan \gamma + \frac{\cos(\varphi(x_{k_0}))}{\cos(\gamma - \varphi(x_{k_0}))} R \sin\left(\frac{\pi l}{N_R - 1}\right).$$

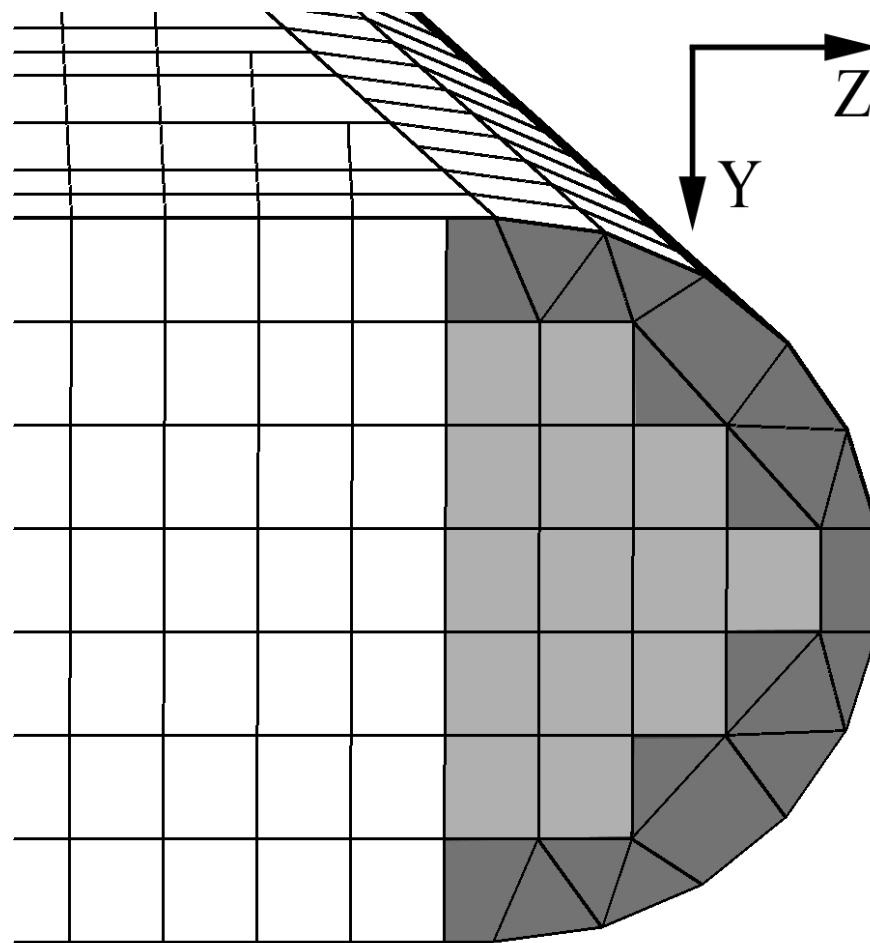


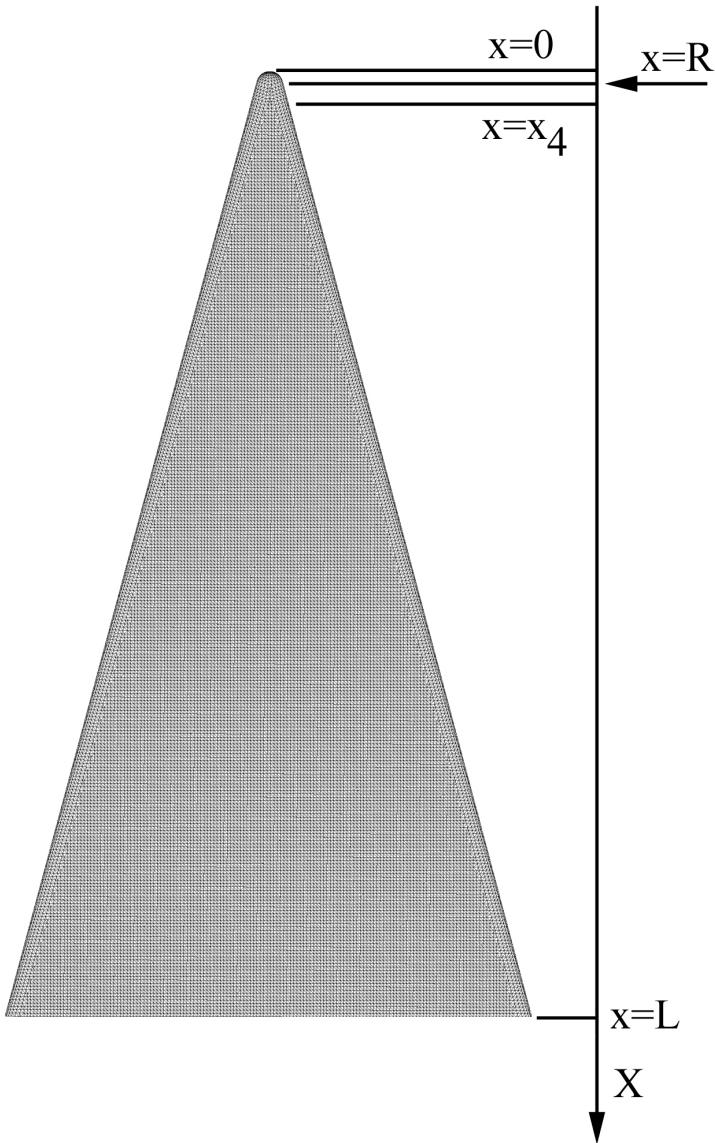








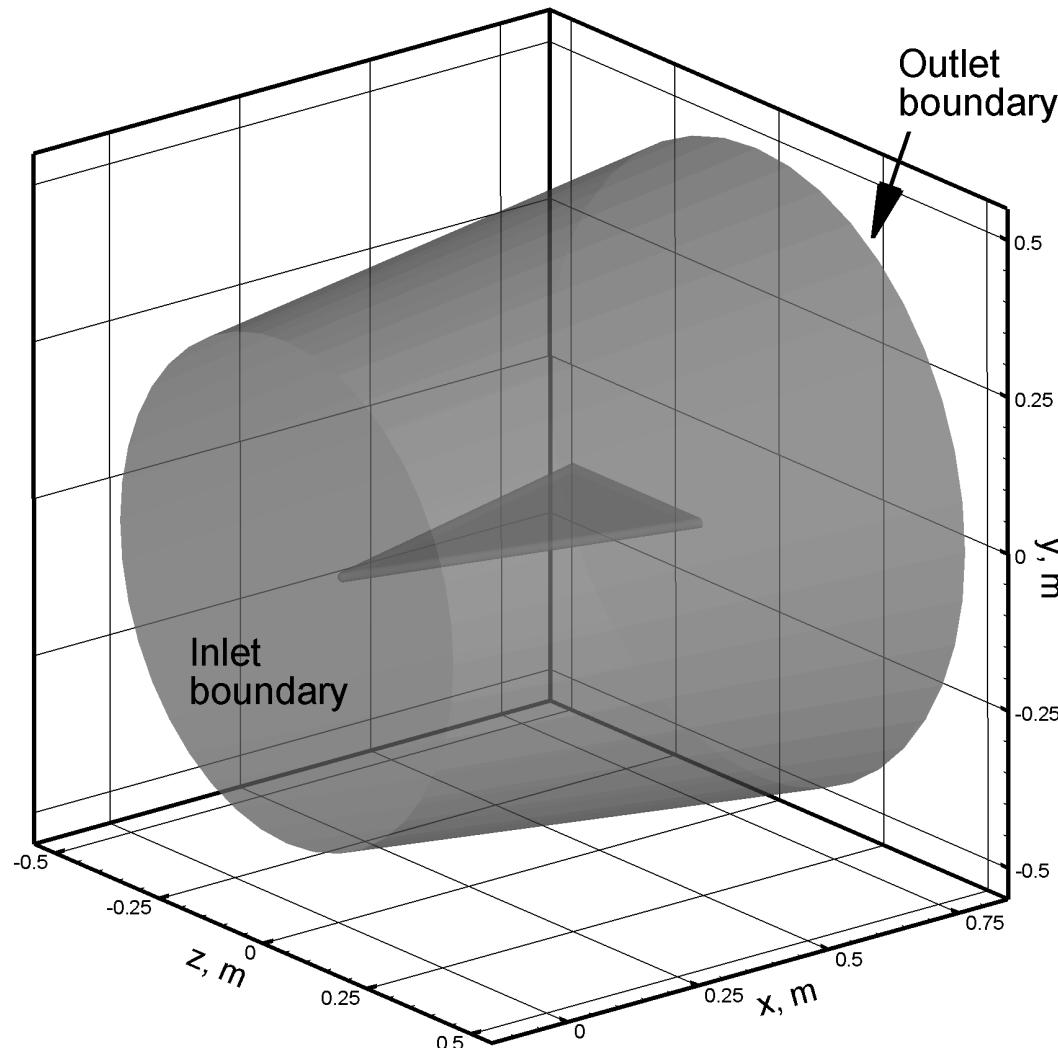




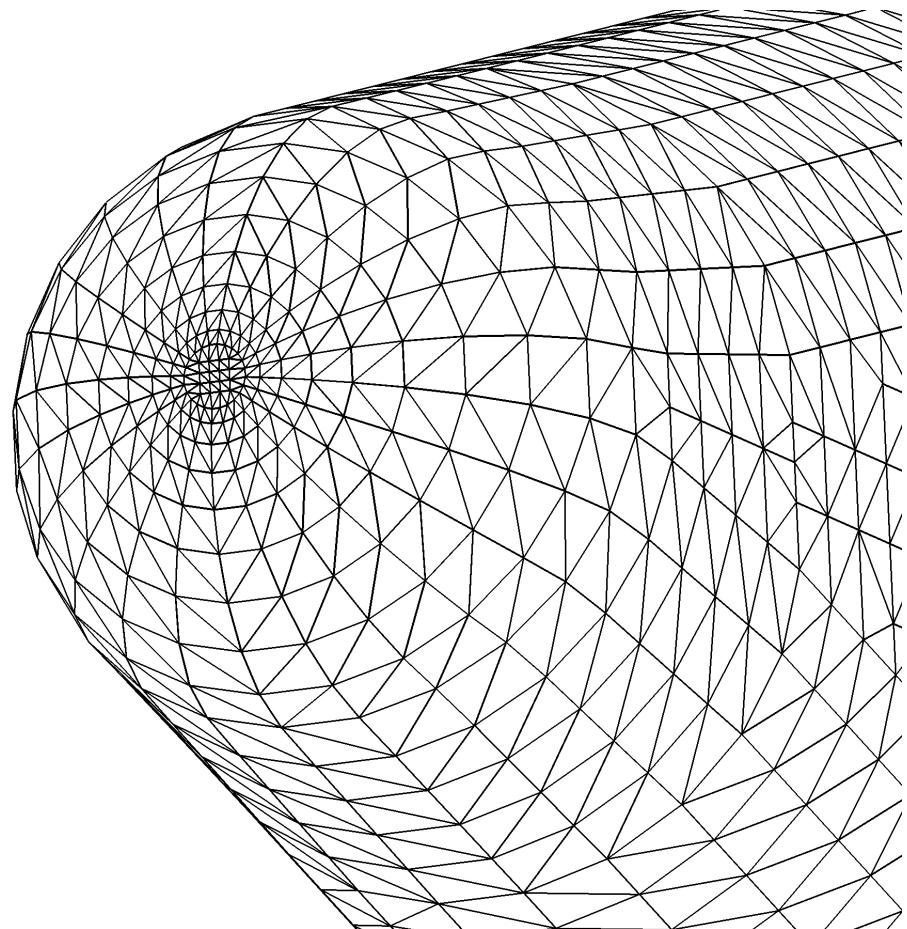
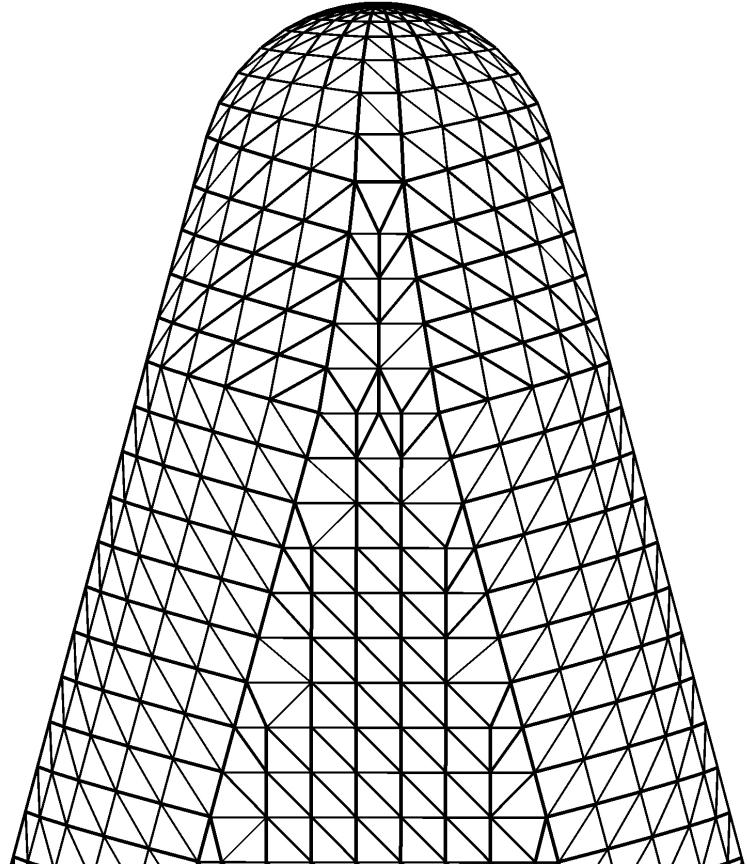
Поверхностная сетка реализуется в виде файла .poly для генератора пространственной сетки TetGen. Файл содержит две части: в первой перечислены точки (points) и указанием их номера и декартовых координат, во второй части указаны плоские ячейки (facets), то есть для каждой ячейки перечислены номера точек, ее составляющих.

Для сетки, построенной в качестве примера, значение параметра шага Step=2мм. При этом на поверхности модели располагаются 49526 точек.

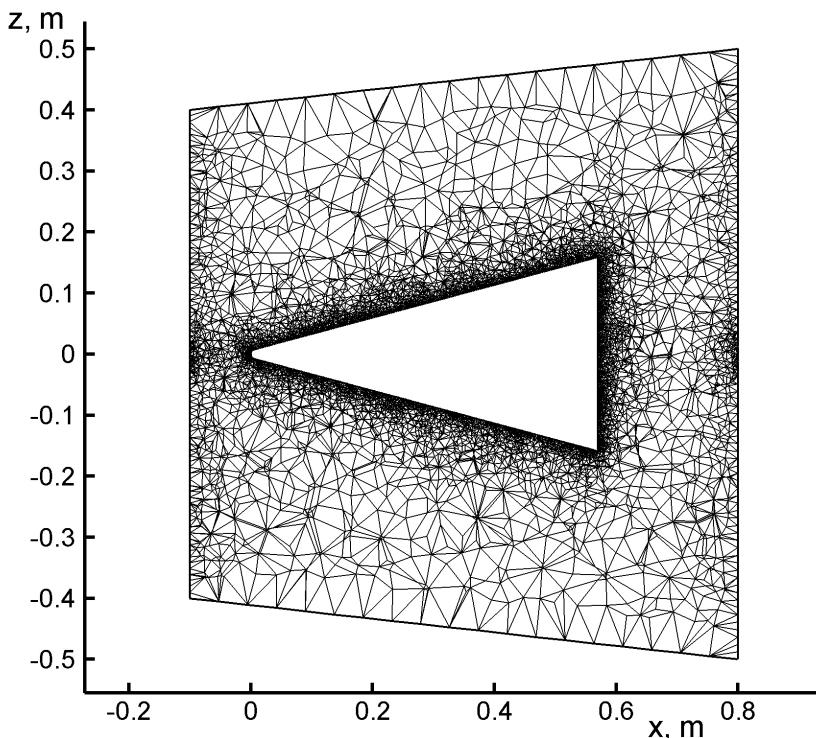
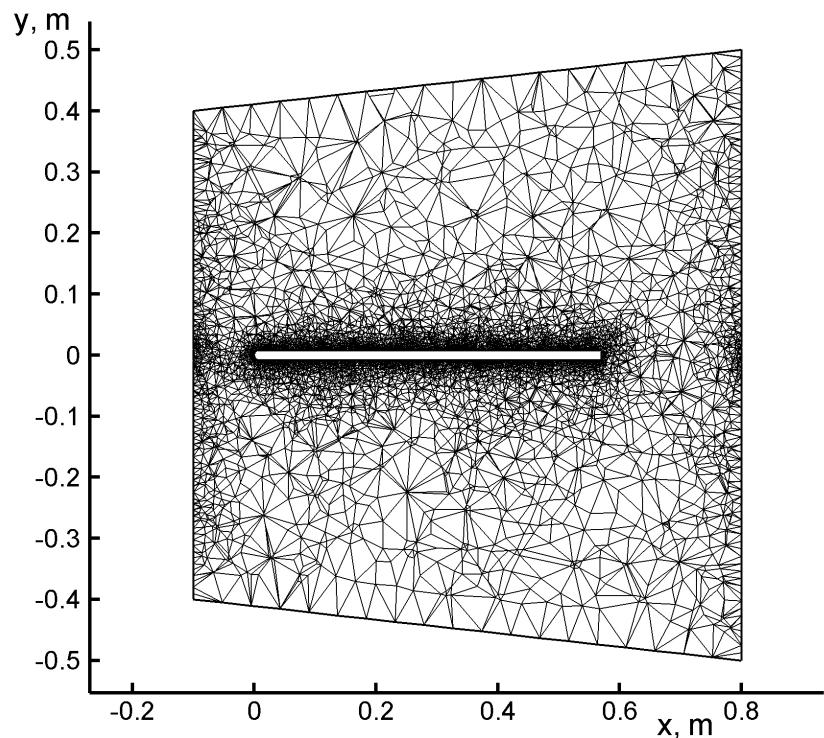
На основе построенной сетки на поверхности модели в формате файла .poly программа TetGen строит вокруг модели тетраэдральную пространственную сетку. Команда построения пространственной сетки **tetgen.exe -pq1.4/17a0.00007Y model5_1.poly**



Спецификация Y указывает на сохранение поверхностной сетки, указанной в файле .poly



Параметры пространственной сетки : общее число точек 166729, число тетраэдральных ячеек 865756, число точек на поверхности модели 49526, число треугольных ячеек на поверхности модели 99048. Сетка позволяет провести численное моделирование обтекания модели при достаточно реалистичных значениях чисел Маха и Рейнольдса.



Постановка задачи моделирования сверхзвукового обтекания треугольного крыла

Число Маха $Ma = 6$

Число Рейнольдса (отнесенное к 1 м) $Re = 10^6$

Угол атаки $AoA = 10^0$

газовая постоянная $R = 287$ Дж/(кг·К),

показатель адиабаты $\gamma = 7/5$

число Прандтля $Pr = 14/19 \approx 0.737$

Расчет сверхзвукового обтекания производится на основе квазигазодинамических (КГД) уравнений для вязкого сжимаемого политропного газа.

КГД система уравнений отличается от системы уравнений НС наличием дополнительных КГД слагаемых, пропорциональных малому параметру размерности времени. КГД слагаемые обеспечивают дополнительную диссипацию, присущую этой системе по сравнению с системой уравнений НС. Указанные слагаемые имеют вид вторых пространственных производных от параметров течения: скорости, плотности и давления.

1. B.N. Chetverushkin. Kinetic Schemes and Quasi-Gas Dynamic System of Equations. Barselona: CIMNE, 2008.
 2. T.G. Elizarova. Quasi-Gas Dynamic Equations. Dordrecht: Springer, 2009, ISBN 978-3-642-0029-5.
 3. Ю.В. Шеретов. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016, 222 с.;
Yu. V. Sheretov. Regularized Hydrodynamic Equations, Tver State University, 2016, 222 pp. elibrary.ru/item.asp?id=30097584 (in Russian).
 4. Т. Г. Елизарова, И. А. Широков. Регуляризованные уравнения и примеры их использования при моделировании газодинамических течений. М.:—МАКС Пресс, 2017, 136 с. <https://elibrary.ru/item.asp?id=29352202>
- T.G. Elizarova, I.A. Shirokov. Regularized equations and examples of their use in the modeling of gas-dynamic flows.

КГД уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_i j_m^i = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u^j + \nabla_i (j_m^i u^j) + \nabla^j p = \nabla_i \Pi^{ij}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E + \nabla_i (j_m^i H) + \nabla_i q^i = \nabla_i (\Pi^{ij} u_j)$$

$$j_m^i = \rho(u^i - w^i), \quad w^i = \frac{\tau}{\rho} (\nabla_j \rho u^i u^j + \nabla^i p) \text{ mass flux}$$

$$\begin{aligned} \Pi^{ij} &= \Pi_{NS}^{ij} + \tau u_i \rho (u_k \nabla^k u_j + (\nabla_j p) / \rho) \\ &\quad + \tau \delta^{ij} (u_k \nabla^k p + \gamma p \nabla^k u_k) \text{ shear-stress tensor} \end{aligned}$$

$$\Pi_{NS}^{ij} = \mu (\nabla^i u^j + \nabla^j u^i - (2/3) \nabla^k u_k) + \zeta \delta^{ij} \nabla^k u_k$$

$$q^i = q_{NS}^i - \tau u_i \rho (u_j \nabla^j \varepsilon + p u_j \nabla^j (1/\rho)) \text{ heat flux}, \quad q_{NS}^i = -\kappa \nabla^i T$$

Искусственная диссипация

Для моделирования течений с ударными волнами и большими числами Рейнольдса молекулярной вязкости и КГД диссипации не хватает для обеспечения монотонности схемы в окрестности резких градиентов решения (ударных волн). Для обеспечения этой монотонности удобно ввести дополнительную искусственную диссипацию.

Входящий в КГД алгоритм коэффициент «тау» связывается с шагом пространственной сетки h и в безразмерном виде вычисляется как

$$\tau = \frac{Ma}{Re} \frac{T^\omega}{pSc} + \alpha \frac{h}{c} \quad \omega = 0.74 \quad Sc = 0.799 \quad \alpha = 0.5$$

Уравнение состояния $p = \rho T / \gamma$ Скорость звука $c = \sqrt{T}$

Коэффициент сдвиговой вязкости $\mu = \frac{Ma}{Re} T^\omega$

Коэффициент объемной вязкости $\zeta = \mu \left(\frac{5}{3} - \gamma \right) + \delta \frac{h}{c} p \quad \delta = 9..12$

Коэффициент теплопроводности $\kappa = \mu / (\text{Pr}(\gamma - 1))$

Реализация КГД алгоритма

- Переход к безразмерному виду. Размерными параметрами выбраны характерная длина (1 м), плотность и скорость звука в набегающем потоке
- Конечно-разностная аппроксимация макроскопических КГД уравнений на пространственной сетке и построение явной по времени конечно-разностной схемы
- Задание начальных и граничных условий
- Применение средств распараллеливания вычислений на основе стандарта MPI с использованием библиотеки METIS
- Расчет на многопроцессорном комплексе К-100 с возможностью продолжения с контрольной точки
- Постобработка результатов вычислений

Начальные условия. На входной границе задаются параметры набегающего потока. Внутри расчетной области задаются такие же параметры, кроме скорости: газ в начальный момент неподвижен.

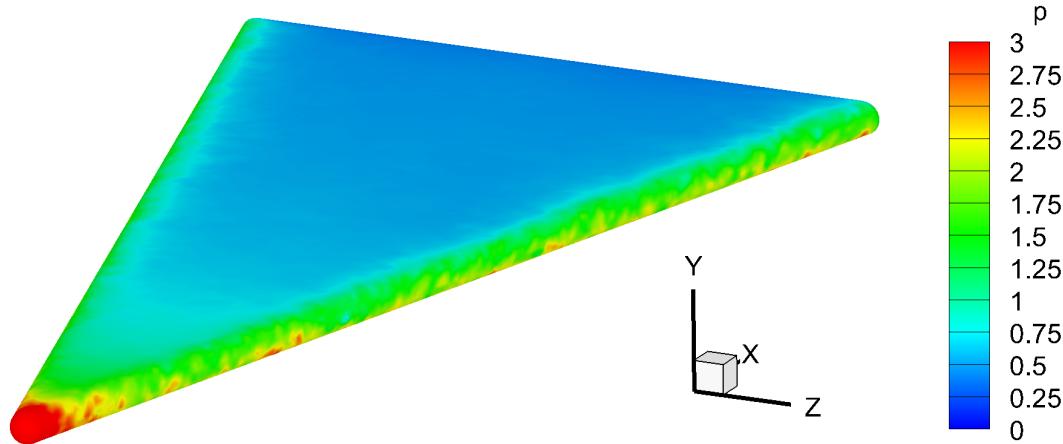
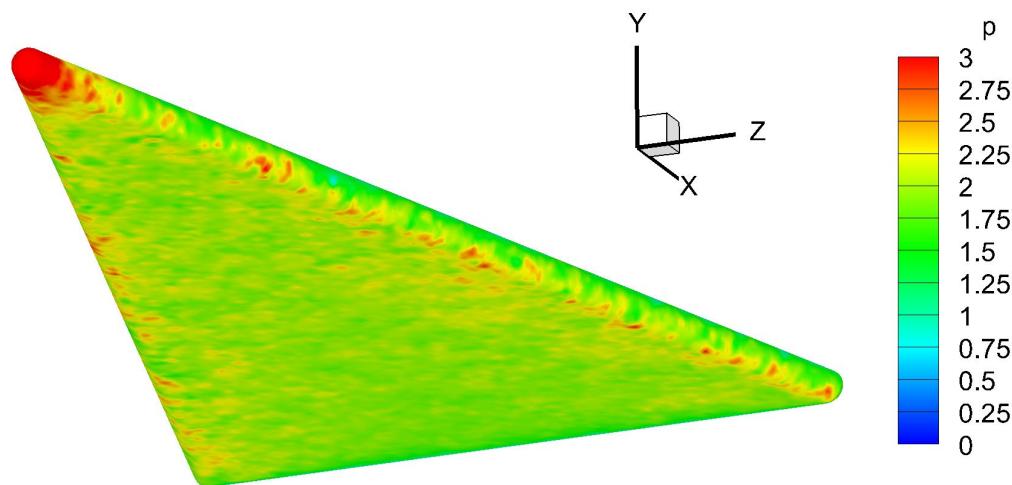
Граничные условия. На входной границе значения набегающего потока поддерживаются постоянными. На выходной границе ставятся условия сноса (равенство нулю нормальных производных), позволяющие газу свободно покидать область. На твердой границе обтекаемого тела ставятся условия непротекания (вектор скорости равен нулю). Используется дополнительное граничное условие КГД алгоритма: нормальные производные давления и плотности на твердой стенке равны нулю.

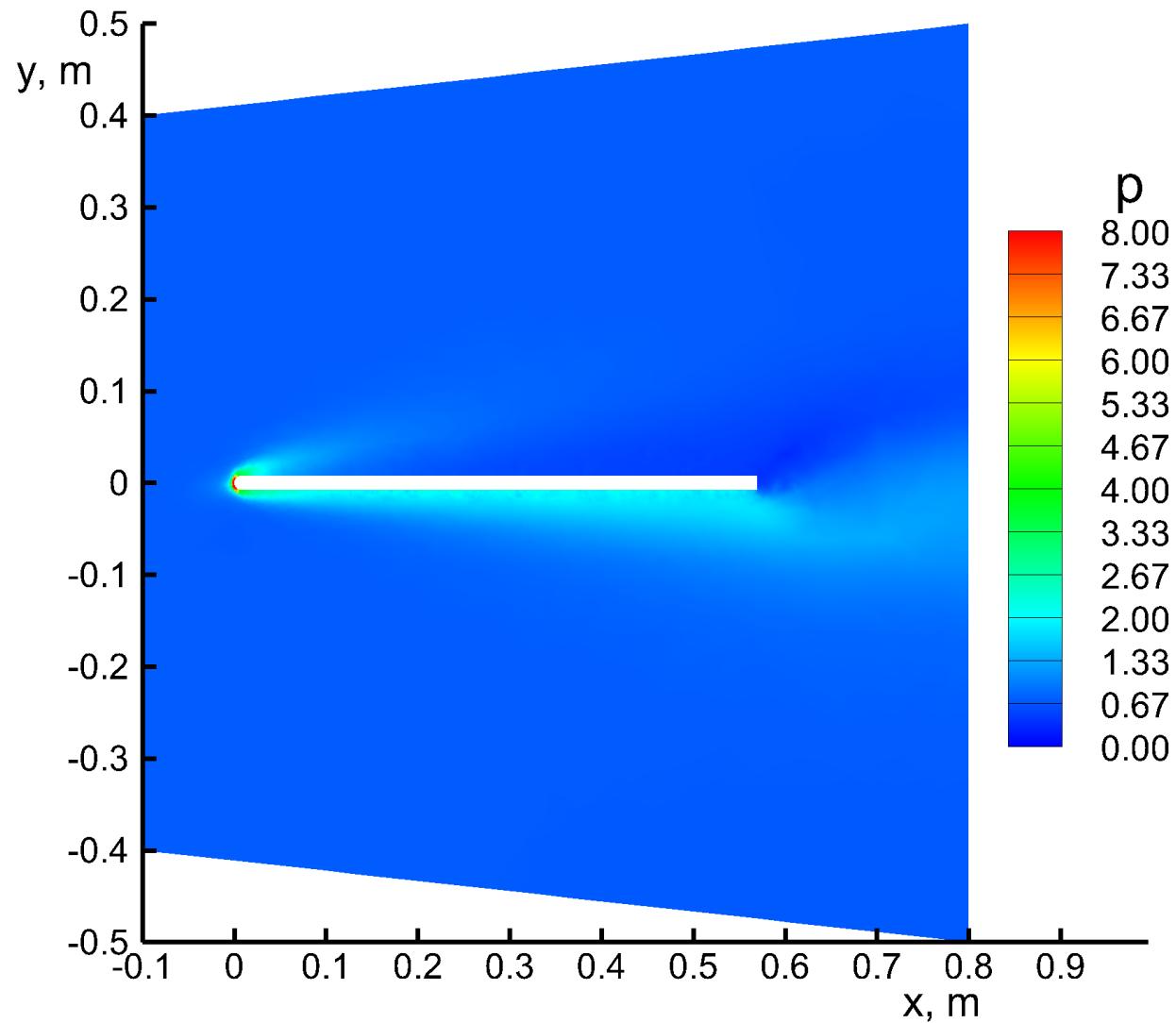
Шаг по времени вычисляется следующим образом: $\Delta_t = \beta_c \frac{h}{c}$
Скорость звука $c = \sqrt{T}$ Число Куранта $\beta_c = 0.01$

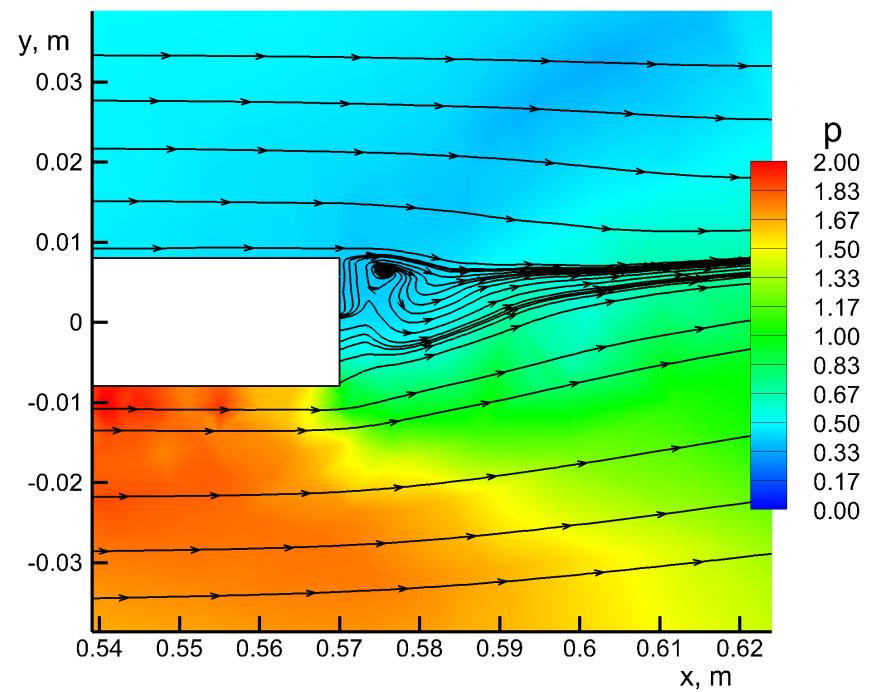
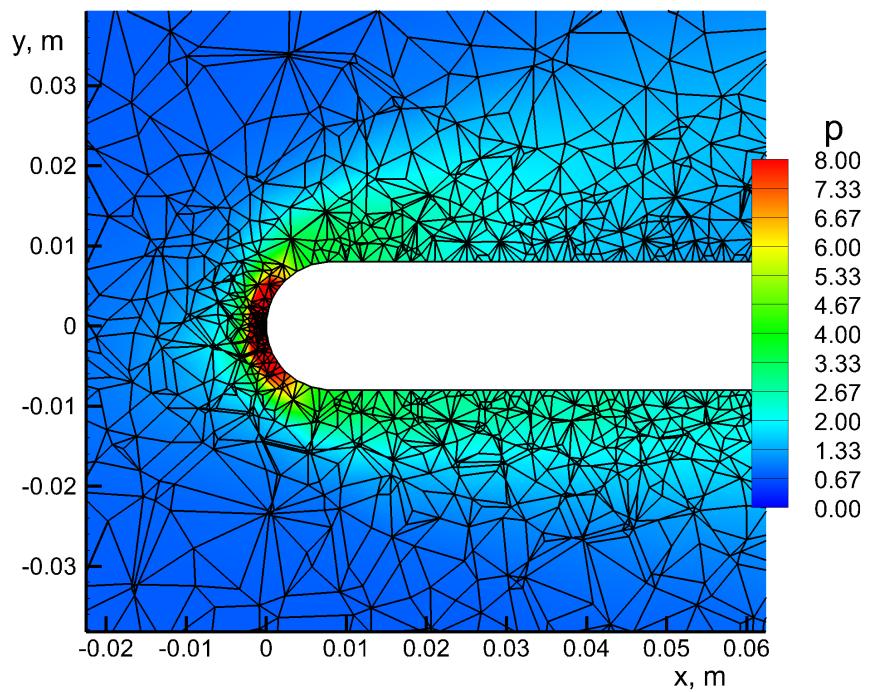
Характерный локальный размер пространственной сетки h

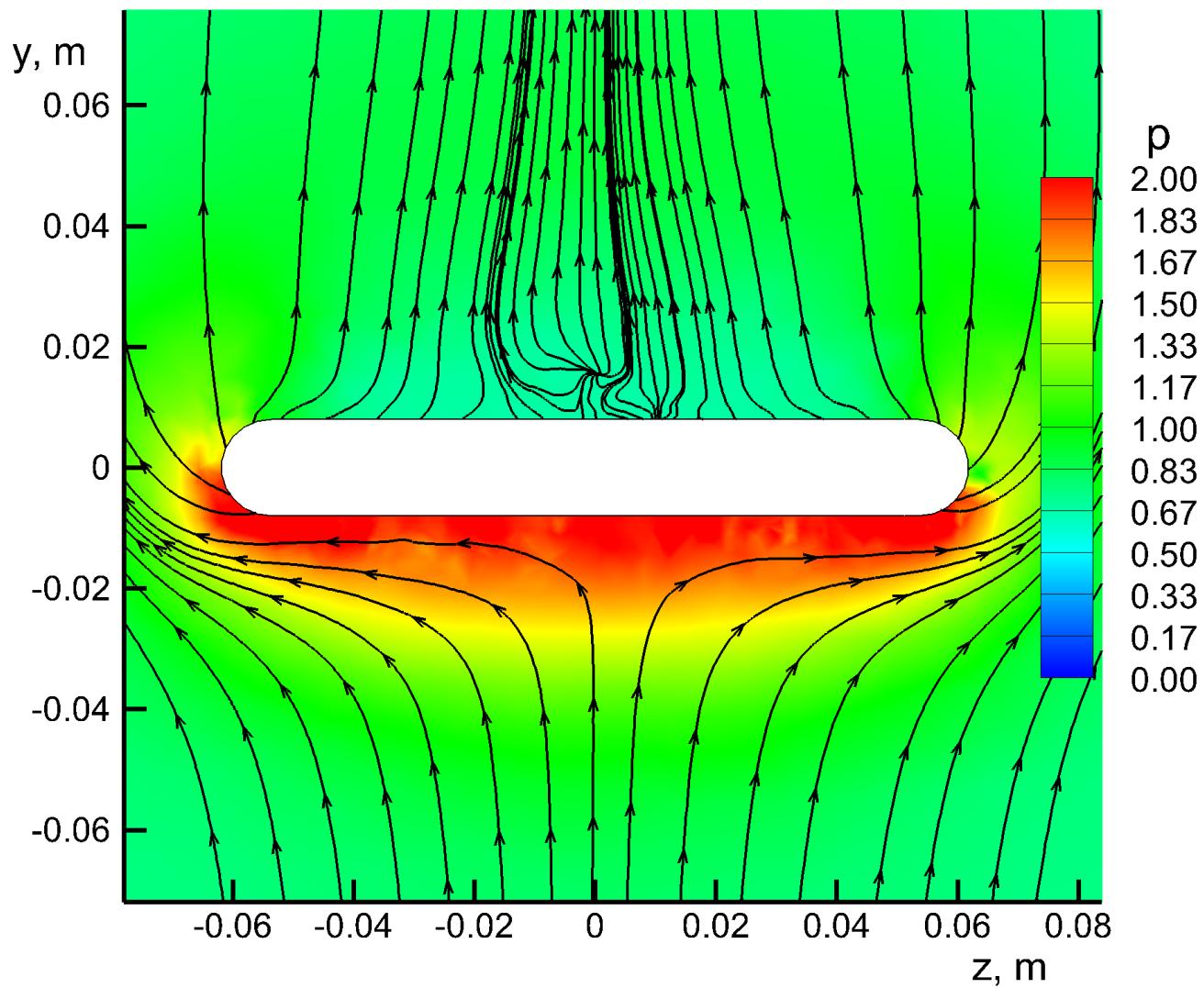
Машинное время расчета: 4.5 суток на 128 процессорных узлах комплекса К-100.
Безразмерное время расчета 49.5. Сделано 2×10^7 итераций явной схемы.

Результаты моделирования









$$x = 0.208 \text{ m}$$

Вычисление аэродинамических характеристик

Коэффициент лобового сопротивления

$$C_x = (\int (p - p_\infty) dS)_x / [S \cdot \rho_\infty U_\infty^2 / 2]$$

Коэффициент подъемной силы

$$C_y = (\int (p - p_\infty) dS)_y / [S \cdot \rho_\infty U_\infty^2 / 2]$$

Аэродинамическое качество $K = C_y / C_x$

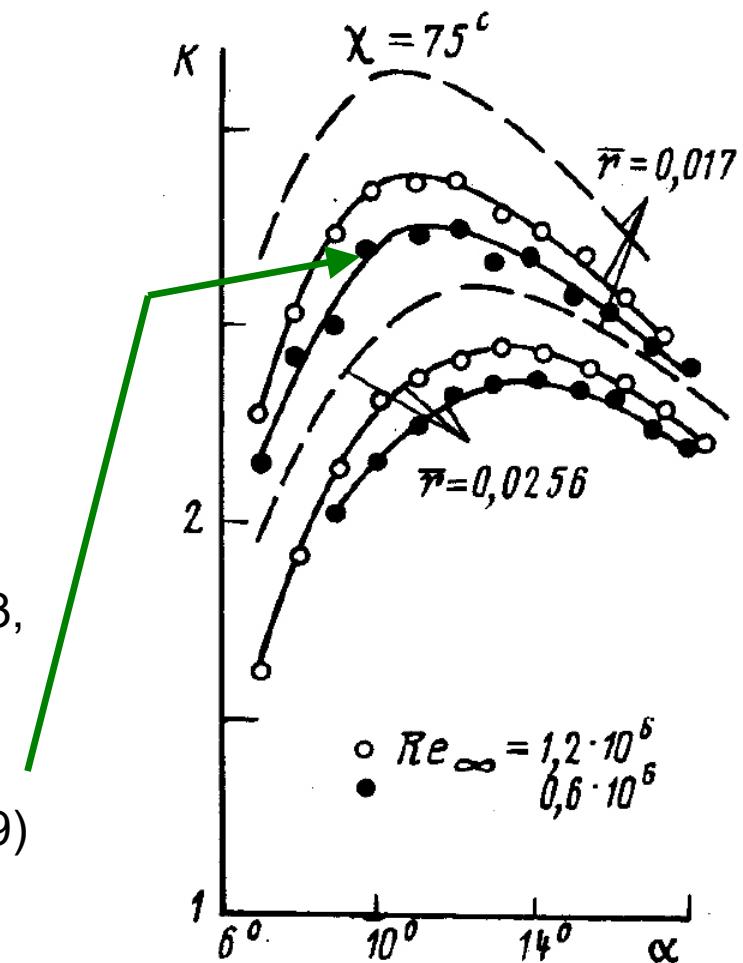
Площадь крыла в плане $S=0.09395 \text{ м}^2$

Получены значения $C_y=0.0716$, $C_x=0.0173$,

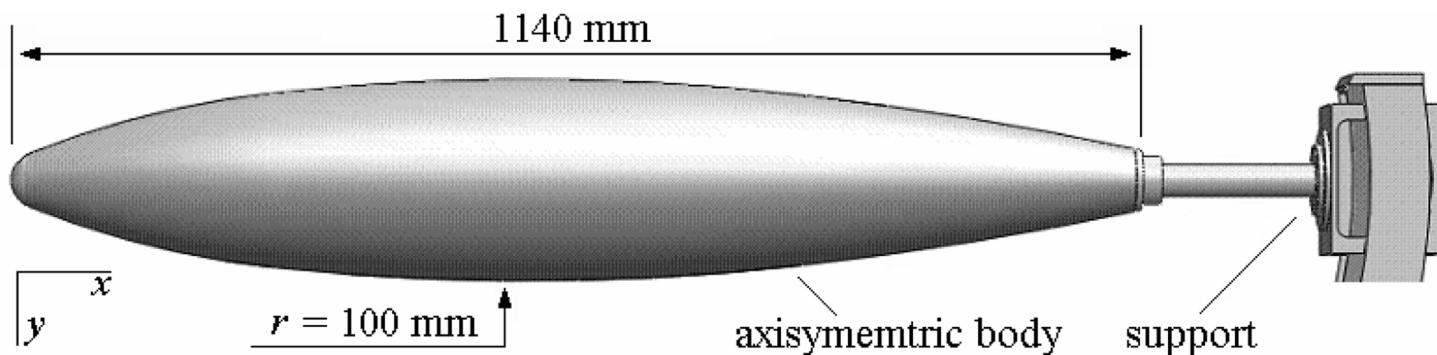
$$K=4.14$$

Экспериментальное значение (ЦАГИ, 1989)

$$K=3.4$$



Построение расчетной сетки вокруг осесимметричной модели каплевидной формы

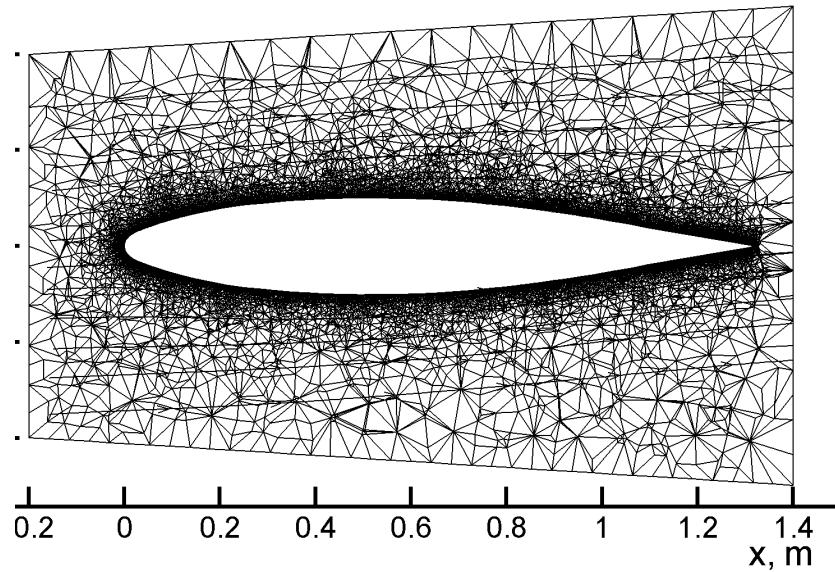
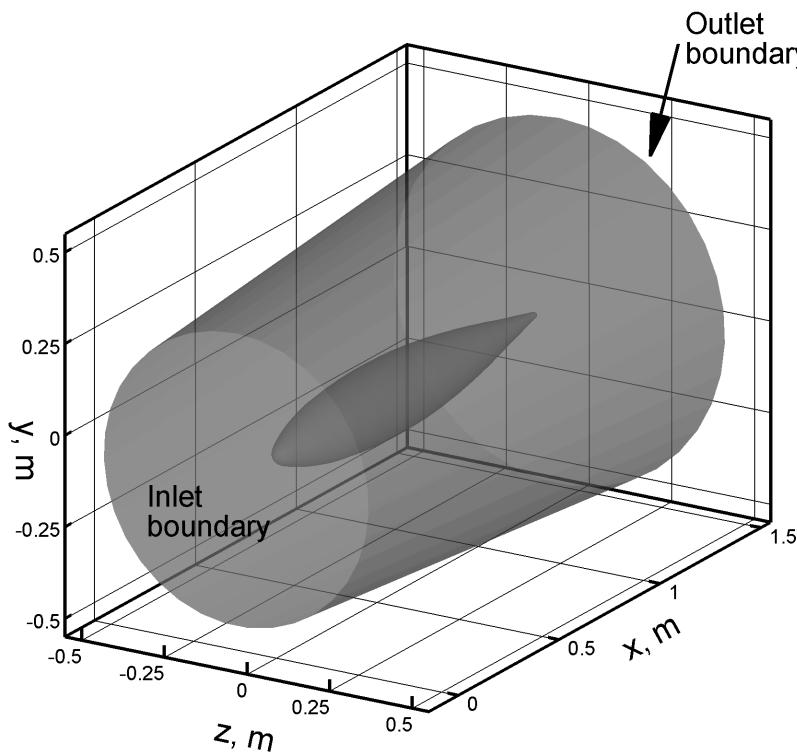


Геометрия модели и параметры газодинамического обтекания указаны в работе:

Довгаль А. В., Занин Б. Ю., Сорокин А. М. Устойчивость ламинарного течения на теле вращения, расположенном под углом к набегающему потоку. Теплофизика и аэромеханика, том. 21, № 4, 2014 г, стр. 419-434.

На основе построенной сетки на поверхности модели в формате файла .poly программа TetGen строит вокруг модели тетраэдральную пространственную сетку. Команда построения пространственной сетки
tetgen.exe -pq1.4/17a0.00007Y model5_1.poly

Параметры пространственной сетки: общее число точек 1702895, число тетраэдральных ячеек 8709339. Сетка позволяет провести численное моделирование обтекания модели при экспериментальных значениях чисел



Постановка задачи моделирования дозвукового обтекания осесимметричной модели каплевидной формы

Число Маха $Ma = 0.294$

Число Рейнольдса (отнесенное к 1 м) $Re = 6.3 \cdot 10^5$

Угол атаки $AoA = 4^\circ$

газовая постоянная $R = 287$ Дж/(кг·К),

показатель адиабаты $\gamma = 7/5$

число Прандтля $Pr = 14/19 \approx 0.737$

Расчет дозвукового обтекания производится с использованием квазигазодинамических (КГД) уравнений для вязкого сжимаемого политропного газа.

КГД система уравнений отличается от системы уравнений НС наличием дополнительных КГД слагаемых, пропорциональных малому параметру размерности времени. КГД слагаемые обеспечивают дополнительную диссипацию, присущую этой системе по сравнению с системой уравнений НС. Указанные слагаемые имеют вид вторых пространственных производных от параметров течения: скорости, плотности и давления.

1. B.N. Chetverushkin. Kinetic Schemes and Quasi-Gas Dynamic System of Equations. Barselona: CIMNE, 2008.
 2. T.G. Elizarova. Quasi-Gas Dynamic Equations. Dordrecht: Springer, 2009, ISBN 978-3-642-0029-5.
 3. Ю.В. Шеретов. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016, 222 с.;
Yu. V. Sheretov. Regularized Hydrodynamic Equations, Tver State University, 2016, 222 pp. elibrary.ru/item.asp?id=30097584 (in Russian).
 4. Т. Г. Елизарова, И. А. Широков. Регуляризованные уравнения и примеры их использования при моделировании газодинамических течений. М.:—МАКС Пресс, 2017, 136 с. <https://elibrary.ru/item.asp?id=29352202>
- T.G. Elizarova, I.A. Shirokov. Regularized equations and examples of their use in the modeling of gas-dynamic flows.

Искусственная диссиpация

Входящий в КГД алгоритм коэффициент «тау» связывается с шагом пространственной сетки h и в безразмерном виде вычисляется как

$$\tau = \alpha \frac{h}{c} \quad \alpha = 0.05$$

Уравнение состояния $p = \rho T / \gamma$ Скорость звука $c = \sqrt{T}$

Коэффициент сдвиговой вязкости $\mu = \frac{Ma}{Re} T^\omega$ $\omega = 0.74$

Коэффициент объемной вязкости $\zeta = \mu \left(\frac{5}{3} - \gamma \right)$

Коэффициент теплопроводности $\kappa = \mu / (\text{Pr}(\gamma - 1))$

Реализация КГД алгоритма

- Переход к безразмерному виду. Размерными параметрами выбраны характерная длина (1 м), плотность и скорость звука в набегающем потоке
- Конечно-разностная аппроксимация макроскопических КГД уравнений на пространственной сетке и построение явной по времени конечно-разностной схемы
- Задание начальных и граничных условий
- Применение средств распараллеливания вычислений на основе стандарта MPI с использованием библиотеки METIS
- Расчет на многопроцессорном комплексе К-100 с возможностью продолжения с контрольной точки
- Постобработка результатов вычислений

Начальные условия. На входной границе задаются параметры набегающего потока. Внутри расчетной области задаются такие же параметры, кроме скорости: газ в начальный момент неподвижен.

Границные условия для дозвукового случая. На входной границе значения набегающего потока поддерживаются постоянными, за исключением давления: нормальная производная давления на входной границе равна нулю.

На выходной границе ставятся условия сноса (равенство нулю нормальных производных), за исключением давления: значение давления на выходной границе поддерживается постоянным, равным начальному.

На твердой границе обтекаемого тела ставятся условия непротекания (вектор скорости равен нулю). Используется дополнительное граничное условие КГД алгоритма: нормальные производные давления и плотности на твердой стенке равны нулю.

Шаг по времени вычисляется следующим образом:

$$\Delta_t = \beta_c \frac{h}{c}$$

Скорость звука

$$c = \sqrt{T}$$

Число Куранта

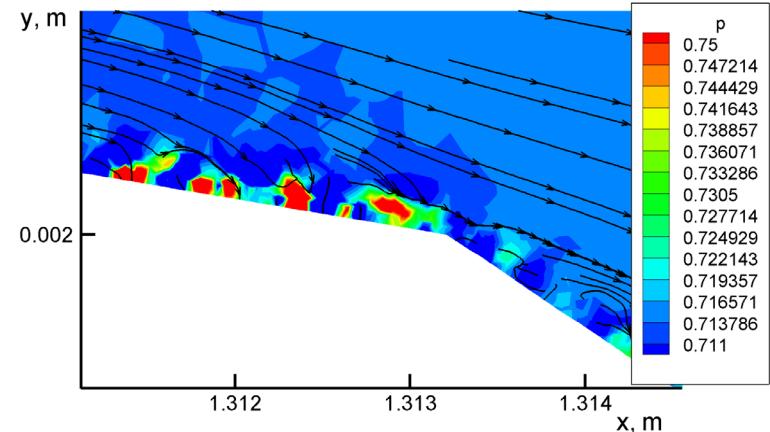
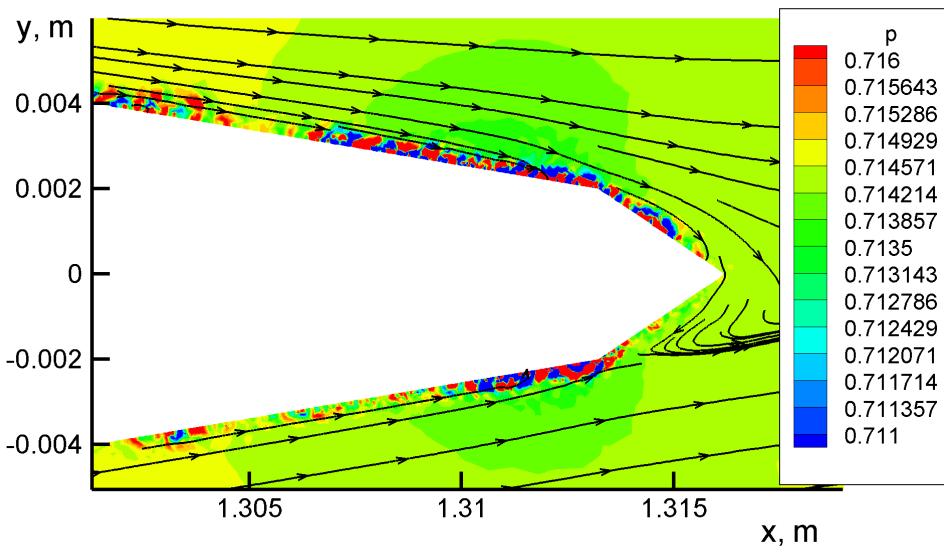
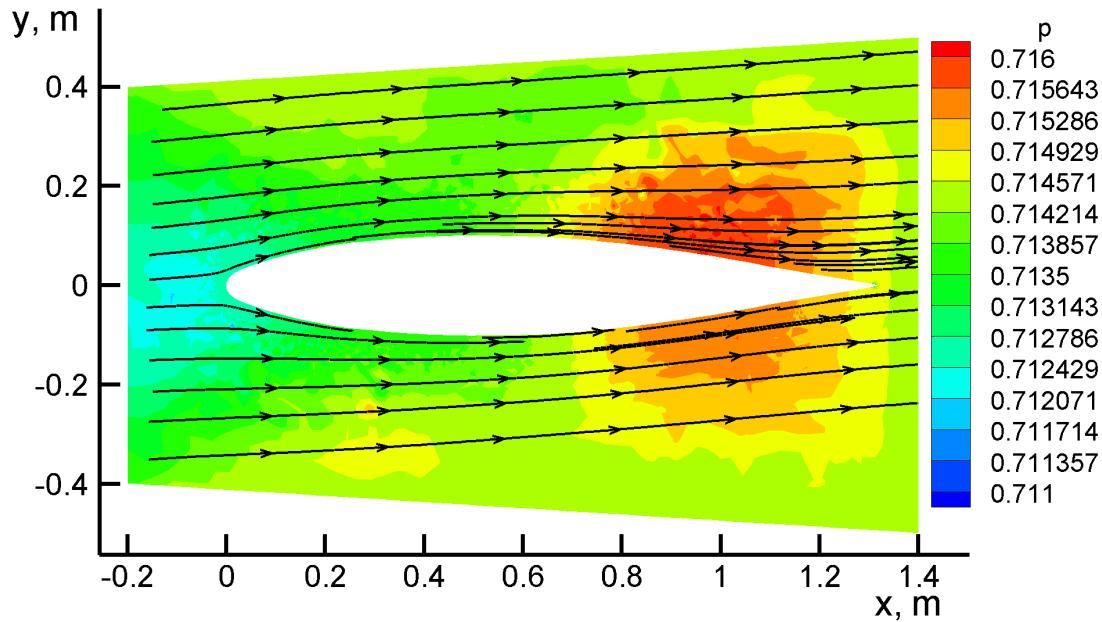
$$\beta_c = 0.01$$

Характерный локальный размер пространственной сетки

$$h$$

Машинное время расчета: примерно 3 суток на 128 процессорных узлах комплекса К-100. Безразмерное время расчета 0.8 Сделано 10^6 итераций явной схемы.

Результаты моделирования



Заключение

Показано влияние пространственной расчетной сетки на точность решения в задачах моделирования внешнего сверхзвукового обтекания.

Предложен оригинальный алгоритм построения расчетной сетки на поверхности треугольного крыла, а также осесимметричного тела. Ячейки поверхностной сетки имеют форму, близкую к правильным многоугольникам. Пространственная сетка строится с помощью генератора TetGen.

Расчет сверхзвукового обтекания треугольного крыла демонстрирует хорошее согласие полученного аэродинамического качества с экспериментальными значениями, полученными в ЦАГИ.

При моделировании обтекания осесимметричной модели наблюдается область неустойчивого течения с образованием вихреобразных структур и чередованием минимумов и максимумов давления. В этой области возможен ламинарно-турбулентный переход и возникновение нестационарного по времени течения.

Автор благодарен Т. Г. Елизаровой и А. Е. Луцкому за плодотворное обсуждение представленной тематики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 19-11-00169).

Спасибо за внимание!