אלגברה לינארית 2 תשפ״ה – תרגיל 4

שאלה 1

יהי $2 \leq n \in \mathbb{N}$. הוכיחו כי $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega_k^{(n)} = 0$.

שאלה 2

פרקו את הפולינום $P = x^3 + i \in \mathbb{C}[x]$ לגורמים אי-פריקים.

שאלה 3

תהי $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ההי״ל המוגדרת ע״י כפל ב- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ויהי $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

א. מצאו בסיס למרחב הציקלי Z_v.

ב. מצאו את הפולינום $m_{T,v} \in \mathbb{R}[x]$.

שאלה 4

תהי $\sigma \in S_4$ התמורה $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 1$, ויהי $T \in \mathrm{End}\left(\mathbb{R}^4\right)$ האופרטור המוגדר ע״י כפל ב-P_σ.

א. עבור $v = e_1 = (1,0,0,0)^t$, חשבו את $m_{T,v}$.

ב. מצאו ווקטור $u \in Z_v$ המקיים $T(u) = u$.

שאלה 5

תהי $D : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \to \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ העתקת הנגזרת, ויהי $0 \neq P \in \mathbb{R}[x]$ פולינום כלשהו ממעלה $n \in \mathbb{N}$. חשבו את $m_{D,P}$.

שאלה 6

יהיו V מ״ו מעל $\mathbb{F}$, $T \in \mathrm{End}(V)$, $v, w \in V$, ונסמן $\dim(Z_v) = k$.

א. הוכיחו כי $\dim\left(Z_{T(v)}\right) \in \{k-1, k\}$. בנוסף, מצאו דוגמא בה מתקבל הערך k ודוגמא בה מתקבל הערך $k-1$.

ב. האם ניתן למצוא זוג דוגמאות בסעיף הקודם שבשתיהן T היא אותה ההעתקה וגם $k = \dim(V)$? הוכיחו את תשובתכם.

ג. הוכיחו או הפריכו: אם $m_{T,v}(T)(w) = 0$, אז בהכרח $w \in Z_v$.

שאלה 7

יהיו V מ״ו, $T \in \mathrm{End}(V)$. הוכיחו: אם קיים פולינום P ממעלה n כך ש- $P(T) = 0$, אזי לכל $v \in V$ מתקיים $\mathrm{dim} Z_v \leq n$.

שאלה 8

תהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ההי"ל המוגדרת ע"י כפל ב- $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. הוכיחו: לכל $v\in\mathbb{R}^3$ מתקיים $Z_v\neq\mathbb{R}^3$.

שאלה 9

יהי V מ"ו, $T\in\operatorname{End}(V)$, ויהיו U,W תתי מרחבים T-ציקליים של V.

א. הוכיחו או הפריכו: $U+W$ הוא בהכרח T-ציקלי.

ב. (רשות) נניח כי V נ"ס. הוכיחו או הפריכו: $U\cap W$ הוא בהכרח T-ציקלי. (קיימת הכללה של gcd ולמת Bezout ל-n-יה של פולינומים. אתם רשאים להיעזר בה.)

שאלה 10

יהי $V=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ מרחב הסדרות הממשיות, ויהי $T\in\operatorname{End}(V)$ אופרטור ההזזה:

$$T(a_1,a_2,a_3,...)=(a_2,a_3,a_4,...).$$

הוכיחו שלא קיים $0\neq P\in\mathbb{R}[x]$ כך ש- $P(T)=0$.

שאלה 11

לכל $L\in\mathbb{N}$, תהי $F_L\in M_{L^2}(\mathbb{C})$ המטריצה המוגדרת ע"י $(F_L)_{k,\ell}=\left(\omega_1^{(L)}\right)^{(k-1)(\ell-1)}$.

הוכיחו כי המטריצה המתקבלת מ-F_{2N} ע"י מחיקת השורות הזוגיות היא המטריצת הבלוקים $\begin{pmatrix}F_N & F_N\end{pmatrix}\in M_{N\times 2N}(\mathbb{C})$.

(הבחנה זו היא נדבך שמאפשר את קיום האלגוריתם Tansform Fourier Fast. כפי ששם האלגוריתם מרמז, קיים חישוב שנקרא התמרת פורייה, והאלגוריתם נועד להוריד את זמני הריצה שלו באופן משמעותי.)

שאלה 12

יהי V מ"ו n-מימדי ויהי $T\in\operatorname{End}(T)$. הוכיחו שקיים בסיס B כך ש-$[T]_B^B$ משולשית אס"ם יש סדרת תתי מרחבים וקטורים T-אינווריאנטים $U_0\subsetneq...\subsetneq U_n=V$.

שאלה 13

יהי $n\in\mathbb{N}$. שורש יחידה n-י ω ייקרא **פרימיטיבי** אם לכל $0<k<n$ מתקיים $\omega^k\neq 1$.

א. מצאו את כל שורשי היחידה הפרימיטיביים מסדר 6.

ב. יהי ω שורש יחידה פרימיטיבי מסדר n. הוכיחו כי כל שורש יחידה אחר מאותו הסדר מתקבל כחזקה של ω, כלומר

$$\forall u\in\mathbb{C}\left(u^n=1\ \to\ \left(\exists j\in\mathbb{N}\ \ u=\omega^j\right)\right)$$