80131 – אינפי 1 – סמסטר ב' תשפ"ה – 2024-2025 – תרגיל 6

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף שם (פרטי ומשפחה), מספר ת.ז וכותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל. סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל-13/05/2025 בשעה 22:00.

1. נתון $-2 \leqslant t \in \mathbb{R}$. נתבונן בסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על ידי $a_1 = t$ ו- $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
(**שימו לב :** בתרגול טיפלנו בסדרה רקורסיבית עם אותו כלל נסיגה.)
(א) הוכיחו שאם $-2 \leqslant t \leqslant 2$ אז a_n מוגדר לכל n טבעי ו- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ הינה סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל.
(ב) הוכיחו שאם $2 < t$ אז a_n מוגדר לכל n טבעי ו- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ הינה סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע.
(ג) הסיקו שהסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת והראו ש- $\lim_{n\to\infty} a_n$ איננו תלוי ב- $-2 \leqslant t \in \mathbb{R}$.

2. נתונים מספרים ממשיים <u>חיוביים</u> x ו- a_1 . תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ הסדרה המוגדרת על ידי $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
(א) הוכיחו כי הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מוגדרת היטב וחיובית.
(ב) תחת ההנחה שהסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, מצאו את כל הערכים האפשריים של $\lim_{n\to\infty} a_n$.
(ג) הוכיחו בעזרת אי-שוויון הממוצעים שהזנב $(a_2 , \ldots , a_{n+1} , \ldots)$ חסום מלרע על ידי מספר ממשי <u>חיובי</u>.
(ד) הוכיחו שהסדרה $(a_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית.
(ה) הסיקו כי הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת. מהו $\lim_{n\to\infty} a_n$?

3. בכל סעיף נתונה סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. בדקו האם היא מתכנסת. אם כן, חשבו את גבולה.
(א) $a_n = \left(\frac{9\,n+10}{9\,n+1}\right)^{3n+10}$ (רמז: $10 = 1 + 9 = 3 + 7$).
(ב) $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{(-1)^n n}$

4. מצאו את קבוצת **כל** הגבולות החלקיים של הסדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ הבאות. זכרו לנמק גם מדוע אין גבולות חלקיים נוספים.
(א) הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על ידי $a_n = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ זוגי} \\ 0 & n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$.
(ב) הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על ידי $a_n = \frac{(-1)^n \cdot n^2 + 7n - 8}{3n^2 + 2n - 5}$.
(ג) הסדרה $\left(\frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \quad \frac{-4}{2}, \frac{-3}{2}, \ldots, \frac{4}{2}, \quad \frac{-9}{3}, \frac{-8}{3}, \ldots, \frac{9}{3}, \quad \ldots\right)$ (כלומר, הסדרה היא שרשור של אינסוף חלקים, כאשר בחלק ה-k מופיעים $2k^2+1$ המספרים $\frac{-k^2}{k}, \frac{-k^2+1}{k}, \ldots, \frac{k^2-1}{k}, \frac{k^2}{k}$).

5. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה, ויהי $L \in \mathbb{R}$ כך שלכל תת-סדרה של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ יש תת-סדרה השואפת ל-L. הראו ש-$\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

6. (א) מצאו דוגמה לסדרה <u>מתבדרת ל-∞</u> $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad N < n \;\Rightarrow\; |\, a_{n+1} - a_n \,| < \varepsilon$.
(ב) מצאו דוגמה לסדרה <u>מתבדרת ל-∞</u> $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $|\, a_{n+1} - a_n \,| < |\, a_n - a_{n-1} \,|$ עבור כל $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$.
(ג) יהי $0 < q < 1$ קבוע נתון ותהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $|\, a_{n+1} - a_n \,| \leqslant q \; |\, a_n - a_{n-1} \,|$ עבור כל $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$.
(i) הוכיחו כי $|\, a_{n+1} - a_n \,| \leqslant q^{n-1} \, |a_2 - a_1| \quad \forall n \in \mathbb{N}$. (ii) הוכיחו כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ועל כן מתכנסת.

7. הוכיחו **לפי ההגדרה** כי $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 5n + 1}{-3n + 4} = -\infty$.