80131-1 - אינפי 1 סמסטר ב' תשפ"ה 2024-2025 - תרגיל 3

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף שם (פרטי ומשפחה), מספר ת.ז וכותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל. סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל-22/04/2025 בשעה 22:00.

1. יהיו $0 < a \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$ ו- $q \in \mathbb{N}$.
הוכיחו תוך הסתמכות על ההגדרה של המושג "שורש מסדר n " בלבד ש- $\left(\sqrt[q]{a}\right)^p = \sqrt[q]{a^p}$.

2. ניזכר בטענות שכינינו "חוקי חזקות":
$(i)\ \ x^n \cdot x^m = x^{m+n}$ $\quad (ii)\ \ (xy)^n = x^n y^n$ $\quad (iii)\ \ (x^m)^n = x^{mn}$ $\quad (iv)\ \ \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ $(y \neq 0)$.

(א) הוכיחו את טענות (i) ו-(iii) עבור חזקות עם מעריך שלם. (מותר להשתמש בחוקי חזקות עבור חזקות עם מעריך טבעי).

(ב) הוכיחו את טענות (iii) ו-(iv) עבור חזקות עם מעריך רציונלי. (מותר להשתמש בחוקי חזקות עבור חזקות עם מעריך שלם).

3. מצאו את הקבוצה של כל המספרים הממשיים x המקיימים $|x-3| = |x-2| + 2\sqrt{x-1}$.
(מומלץ למי שלא יודע איך לגשת לשאלה הזו לקרוא את הדף האחרון בסיכום תרגול 3)

4. יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש-$a < b$.

(א) אלו מספרים $x \in \mathbb{R}$ מקיימים $d(a,x) + d(b,x) = d(a,b)$? (d הוא המרחק שהוגדר בתרגול 3).

(ב) הראו שלכל $0 < t < 1$, יש $x \in \mathbb{R}$ יחיד שמקיים $a < x < b$ וגם $\frac{d(a,x)}{d(b,x)} = t$.

5. (א) יהיו $0 < y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. הוכיחו : $\sqrt[n]{y_1 \cdot \ldots \cdot y_n} \leqslant \dfrac{y_1 + \ldots + y_n}{n}$. (רמז: הגדירו $G = \sqrt[n]{y_1 \cdot \ldots \cdot y_n}$ ו- $x_j = \dfrac{y_j}{G}$ לכל $1 \leqslant j \leqslant n$, והעזרו בשאלה 6 של תרגיל 2).

(ב) יהיו $0 < z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}$. הסיקו מסעיף א' ש- $\dfrac{n}{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n}} \leqslant \sqrt[n]{z_1 \cdot \ldots \cdot z_n}$.

הערה : השרשרת $\dfrac{n}{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n}} \leqslant \sqrt[n]{z_1 \cdot \ldots \cdot z_n} \leqslant \dfrac{z_1 + \ldots + z_n}{n}$ נקראת **"אי-שוויון הממוצעים"**.

$\dfrac{z_1 + \ldots + z_n}{n}$ נקרא **ממוצע חשבוני** (או **אריתמטי**) של $z_1, \ldots, z_n$.

$\sqrt[n]{z_1 \cdot \ldots \cdot z_n}$ נקרא **ממוצע הנדסי** (או **גיאומטרי**) של $z_1, \ldots, z_n$.

$\dfrac{n}{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n}}$ נקרא **ממוצע הרמוני** של $z_1, \ldots, z_n$.