

אלגברה לינארית 2 תשפ"ה – תרגיל 2

שאלה 1

תזכורת: בסמסטר קודם ראינו ש- $\mathbb{F}[x]_{\leq n} = \{P \in \mathbb{F}[x] \mid \deg P \leq n\}$ הוא מ"מ מממד $n+1$. יהיו $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{F}[x]$ פולינומים כך שלכל $0 \leq i \leq n$ מתקיים $\deg P_i = i$. הוכיחו כי $B = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ בסיס ל- $\mathbb{F}[x]_{\leq n}$.

שאלה 2

בכל סעיף נתונים פולינומים P, Q ומרחב $\mathbb{F}[x]$. חלקו את P ב- Q עם שארית, כלומר מצאו $S, R \in \mathbb{F}[x]$ המקיימים $P = Q \cdot S + R$ כך ש- $\deg R < \deg Q$.

- א. $\mathbb{Q}[x]$ במרחב $Q = x^2 + 4x + 7, P = x^3 + 3x^2 + 2$.
ב. $\mathbb{F}_3[x]$ במרחב $Q = x^2 + x + 2, P = x^3 + 2x^2 + x + 1$.

שאלה 3

בכל סעיף נתונים פולינומים P, Q ומרחב $\mathbb{F}[x]$. חשבו את $\gcd(P, Q) \in \mathbb{F}[x]$ ומצאו $A, B \in \mathbb{F}[x]$ כך שמתקיים $\gcd(P, Q) = A \cdot P + B \cdot Q$.

א. $\mathbb{R}[x]$ במרחב $Q = x^2 + x + 2, P = 6x^3 + x + 7$.
ב. $\mathbb{F}_5[x]$ במרחב $Q = x^2 + x + 3, P = x^2 + 4$.
ג. $\mathbb{F}_3[x]$ במרחב $Q = x^3 + 2, P = x^4 + 1$.

שאלה 4

יהיו \mathbb{E}, \mathbb{F} שדות המקיימים $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ (לדוגמא $\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \mathbb{E} = \mathbb{R}$), ויהיו P, Q פולינומים במרחב $\mathbb{F}[x]$. ראינו בהרצאה כי קיימים $S, R \in \mathbb{F}[x]$ המקיימים $P = Q \cdot S + R$ וכן $\deg R < \deg Q$. נבחין כי P, Q הם גם פולינומים במרחב $\mathbb{E}[x]$, ולכן קיימים גם $S', R' \in \mathbb{E}[x]$ המקיימים $P = Q \cdot S' + R'$ וכן $\deg R' < \deg Q$.

א. הוכיחו כי $R' = R$ וגם $S' = S$.
ב. הסבירו מדוע המחלק המשותף המקסימלי של P ו- Q במרחב $\mathbb{F}[x]$ הוא אותו מחלק משותף מקסימלי של P ו- Q במרחב $\mathbb{E}[x]$.

שאלה 5

פרקו את הפולינומים הבאים לגורמים אי-פריקים ב- $\mathbb{R}[x]$.

א. $x^2 - 8x + 3$.
ב. $3x^3 + 81$.
ג. $2x^3 - 3x^2 + 1$.
ד. $x^3 + x + 2$.

שאלה 6

- א. עיינו בסיכום התרגול בנוגע לפולינומים אי פריקים ממעלה 2 במרחב $\mathbb{F}_2[x]$. מצאו באופן דומה את כל הפולינומים האי פריקים ממעלה 3 במרחב $\mathbb{F}_2[x]$.
- ב. האם הפולינום $P = x^4 + x^2 + 1$ הוא פריק במרחב $\mathbb{F}_2[x]$? אם כן, מצאו $Q, R \in \mathbb{F}_2[x]$ ממעלה חיובית המקיימים $P = Q \cdot R$. (הדרכה: האם ל- P יש שורשים ב- \mathbb{F}_2 ? מה משמעות הדבר בנוגע למעלה של Q, R , במידה וקיימים?)

שאלה 7

מצאו מספרים שלמים $m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathbb{Z}$ המקיימים את השיויון הבא במרחב $\mathbb{Q}[x]$:

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = \prod_{i=1}^4 (x - m_i).$$

נמקו כיצד מצאתם אותם.

שאלה 8

- א. נתונים פולינומים P, Q כך שיש להם שורש משותף. האם P, Q יכולים להיות זרים?
- ב. נתונים פולינומים P, Q כך שאין להם שורש משותף ואף אחד מהם אינו מתחלק בשני. האם P, Q חייבים להיות זרים?
- ג. נתונים פולינומים P, Q , $\deg P = 2$, כך שאין להם שורש משותף ואף אחד מהם אינו מתחלק בשני. האם P, Q חייבים להיות זרים?

שאלה 9 (רשות)

- יהי $P \in \mathbb{R}[x]$ פולינום ממעלה אי זוגית.
- א. יהי c המקדם המוביל של P . הראו כי אם $c > 0$ אזי מתקיים $\lim_{a \rightarrow \infty} P(a) = \infty$ וכן $\lim_{a \rightarrow -\infty} P(a) = -\infty$.
- ב. הסיקו ממשפט ערך הביניים כי ל- P קיים שורש ב- \mathbb{R} .