# 80131-1 - אינפי 1 סמסטר ב' תשפ"ה 2024-2025 - תרגיל 4

**הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף שם (פרטי ומשפחה), מספר ת.ז וכותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל. סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל-29/04/2025 בשעה 23:00.**

1. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה סדרה מתכנסת $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ . נחשו את גבול הסדרה (אין צורך להוכיח).
עבור כל אחד מערכי $\varepsilon$ הנתונים, מצאו $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ המרחק של $a_n$ מהגבול שניחשתם קטן מ-$\varepsilon$ .

(א) $a_n=\begin{cases} n^2 & n=1,2,...,100 \\ -n & 100<n\leqslant 2021 \\ 1 & n>2021 \end{cases}$ , $\varepsilon=0.1$ , $\varepsilon=0.001$ .

(ב) $a_n=\dfrac{5n^2+n}{6n^2-2}$ , $\varepsilon=0.001$ .

2. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה נתונה ויהי $m\in\mathbb{N}$ מספר טבעי נתון.
נגדיר סדרה חדשה $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ , הנקראת **$m$- זנב** של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ , על ידי $b_k=a_{k+m}$ לכל $k$ טבעי.
כלומר זוהי הסדרה $(b_k)_{k=1}^{\infty}=(a_{m+1}\,,\,a_{m+2}\,,\,\ldots\,,\,a_{m+k}\,,\,\ldots)$

(א) נתון כי הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת. הוכיחו כי $m$-הזנב שלה מתכנסת גם היא ולאותו הגבול.

(ב) נתון כי $m$-הזנב של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת. הוכיחו כי הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת גם היא ולאותו הגבול.

3. קבעו עבור כל אחת מהסדרות הבאות אם היא מתכנסת או מתבדרת. אם היא מתבדרת, הוכיחו זאת. אם היא מתכנסת, נחשו את גבולה, והוכיחו את הניחוש שלכם לפי הגדרת הגבול בלבד.

(א) $a_n=\dfrac{3\,n^5+1}{4\,n^6+n}$ (ב) $b_n=\dfrac{5+(-1)^n\,n}{4\,n^2+1}$ (ג) $c_n=\dfrac{\sqrt{16\,n^2+3}}{n}$

(ד) $d_n=\sqrt{n^2+1}-n$ (ה) $e_n=\dfrac{n^2+2}{10\,n+7}$ (ו) $f_n=\dfrac{5}{n^2}+(-1)^n$

4. הוכיחו או הפריכו באמצעות דוגמה נגדית את הטענות הבאות אודות סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $L\in\mathbb{R}$ .

(א) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$ אם ורק אם הסדרה $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על ידי $b_n=|a_n-L|$ מתכנסת ל- $0$ .

(ב) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$ אם ורק אם $\lim\limits_{n\to\infty}|\,a_n|\,=\,|L|$ .

(ג) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ אם ורק אם $\lim\limits_{n\to\infty}|\,a_n|=0$ .

5. (א) בסעיפים הבאים מופיעות טענות שונות לגבי סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ומספר $L\in\mathbb{R}$ .
חלקן שקולות לטענה $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$ (כלומר, להגדרת הגבול שראיתם בהרצאה), וחלקן לא.
זהו אלו מהן שקולות להגדרת הגבול. עבור הטענות שאינן שקולות, תנו דוגמה לסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ולמספר $L$ כך שהגדרת הגבול מתקיימת והטענה שבסעיף לא, או להיפך. אין צורך להוכיח.

i. לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ שעבורו $n>N$ מתקיים $|\,a_n-L\,|<\frac{\varepsilon}{100}$.

ii. לכל $0<\varepsilon<1$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ שעבורו $n>N$ מתקיים $|\,a_n-L\,|<\varepsilon$ .

iii. לכל $\varepsilon>1$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ שעבורו $n>N$ מתקיים $|a_n-L|<\varepsilon$

iv. לכל $k\in\mathbb{N}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ שעבורו $n>N$ מתקיים $|\,a_n-L\,|<\frac{1}{k}$.

v. קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $\varepsilon>0$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ שעבורו $n>N$ מתקיים $|\,a_n-L\,|<\varepsilon$ .

vi. לכל $\varepsilon>0$ קיים $S\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$, אם $n$ זוגי ומתקיים $n>S$ אז $|a_n-L|<\varepsilon$

vii. לכל $\varepsilon>0$ קיימים $S,T\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$, אם $n$ זוגי ו-$n>S$, או ש-$n$ אי-זוגי ו-$n>T$, אז $|a_n-L|<\varepsilon$

(ב) **(רשות)** עבור כל טענה ששקולה להגדרת הגבול, נמקו בקצרה את שני הכיוונים הלוגיים.