

## מתמטיקה דיסקרטית תשפ"ה - תרגיל בית 7

1. מצאו את מספר הסדרות  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}$  אשר מקיימות את התנאים הבאים:

(א)  $\sum_{i=1}^k a_i \geq k/2$ ,  $\sum_{i=1}^{12} a_i = 7$ ,  $a_k^2 = a_k$  לכל  $1 \leq k \leq 12$ .

(ב)  $\sum_{i=1}^k a_i \geq -1$ ,  $\sum_{i=1}^{12} a_i = 2$ ,  $a_k^2 = 1$  לכל  $1 \leq k \leq 12$ .

(ג)  $\sum_{i=1}^k a_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^{12} a_i = 0$ ,  $\sum_{i=1}^m a_i = 0$  לכל  $1 \leq m \leq 11$  ובנוסף קיים  $1 \leq m \leq 11$  כך ש- $\sum_{i=1}^m a_i = 0$ .

2. מהו מספר המסלולים באורך 16 מהנקודה  $(0, 0)$  לנקודה  $(8, 8)$  אשר

(א) עוברים דרך הנקודה  $(3, 6)$  ואינם עולים מעל הישר  $y = x + 3$ ?

(ב) עוברים דרך הנקודה  $(4, 4)$ , אינם עוברים דרך אף אחת מהנקודות  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(3, 3)$ , וגם אינם עולים מעל הישר  $y = x$ ?

כל צעד במסלול הוא ימינה, כלומר מ- $(a, b)$  ל- $(a + 1, b)$ , או כלפי מעלה, כלומר מ- $(a, b)$  ל- $(a, b + 1)$ .

3. בקבוצה בת 28 תלמידים כל תלמיד לומד לפחות אחת משלוש השפות הזרות: אנגלית, צרפתית, ספרדית. ידוע כי מספר לומדי אנגלית - 15, מספר לומדי צרפתית - 14, ומספר לומדי ספרדית - 11. בנוסף ידוע כי בדיוק 6 תלמידים לומדים גם אנגלית וגם צרפתית, בדיוק 5 תלמידים לומדים גם אנגלית וגם ספרדית, ובדיוק 4 תלמידים לומדים גם צרפתית וגם ספרדית. כמה תלמידים לומדים את שלוש השפות?

4. נתונות קבוצות  $B, A$  כך ש- $|A| = 6$ ,  $|B| = 4$ , ואיברים  $a \in A$ ,  $b \in B$ . מצאו את מספר הפונקציות  $f: A \rightarrow B$  כך שמתקיים  $f(a) = b$ .

5. נתונה קבוצה  $A$  כך ש- $|A| = 5$  וקבוצה  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ . מצאו את מספר הפונקציות  $f: A \rightarrow B$  כך שלכל  $1 \leq i \leq 3$  קיים  $a \in A$  אשר מקיים  $i \leq f(a) \leq i + 1$ .

6. נתונה קבוצה  $A$  כך ש- $|A| = 3$  וקבוצה  $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . מצאו את מספר הפונקציות  $f$  מ- $A$  ל- $B$  אשר מקיימות את התנאים הבאים: קיים  $k \in A$  כך ש- $f(k)$  מתחלק ב-2, קיים  $l \in A$  כך ש- $f(l)$  מתחלק ב-3, וגם קיים  $m \in A$  כך ש- $f(m)$  מתחלק ב-5.

7. בכמה אופנים ניתן לסדר בשורה 2 כדורים אדומים, 2 כדורים כחולים, 2 כדורים צהובים, כדור אחד שחור וכדור אחד לבן כך שלא יהיו שני כדורים סמוכים באותו צבע? כדורים באותו צבע נחשבים זהים.

8. באוניברסיטה מתקיימים 6 קורסים במתמטיקה, 6 קורסים במדעי המחשב ו-3 קורסים בפיזיקה (כל הקורסים שונים זה מזה). בכמה דרכים ניתן לבחור 6 קורסים מבין המקצועות השונים, כך שנבחר לפחות קורס אחד מכל מקצוע?

9. בכמה אופנים ניתן להכניס 8 כדורים זהים ל-5 מגרות מסודרות זו מעל זו כך שבמגרה העליונה יהיו לכל היותר 4 כדורים ובכל מגרה אחרת יהיו לכל היותר 3 כדורים?

10. מהו מספר הפתרונות השלמים האי-שליליים של המשוואה

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15 \text{ בתנאי ש- } x_i \leq 5 \text{ לכל } 1 \leq i \leq 6?$$