

מתמטיקה דיסקרטית תשפ"ה - תרגיל בית 8

1. נתונים ששה עשר מספרים שלמים שונים זה מזה בין 1 ל-30. הוכיחו כי ניתן לבחור שני מספרים מתוכם כך שסכומם יהיה שווה ל-31.
2. נתונים 183 מספרים שלמים שונים זה מזה בין 1 ל-1001. הוכיחו כי ניתן לבחור שלושה מספרים מביניהם x, y, z כך ש- $x < y < z$ וגם $x - z \leq 10$.
3. נתונים 7 מספרים טבעיים שונים זה מזה קטנים או שווים ל-63. הוכיחו כי ניתן לבחור מתוכם שני מספרים x, y כך שמתקיים $x < y < 2x$.
4. בשנה הבאה יתקיימו בארץ 8 כנסים במתמטיקה, וכל אחד מבין 11 הפרופסורים במכון איינשטיין במתמטיקה מתכוון להשתתף ב-3 מהם לפחות. הוכיחו כי יהיה כנס בו ישתתפו לפחות 5 פרופסורים מהמכון.
5. נתונות הקבוצות $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ ו- $B = \{1, 2, \dots, 13\}$. תהי $S \subseteq A \times B$ כך שלכל $b \in B$ מתקיים $|\{a \in A \mid (a, b) \in S\}| = 7$. הוכיחו כי קיים $a \in A$ כך ש- $|\{b \in B \mid (a, b) \in S\}| \geq 10$.
6. נתונים 30 מספרים שלמים שונים x_1, x_2, \dots, x_{30} כאשר $1 \leq x_i \leq 110$ לכל $1 \leq i \leq 30$. הוכיחו שמהמספרים הללו ניתן לבחור שלושה זוגות שונים בעלי אותו סכום.
7. נתונות הקבוצות $A = \{1, 2, \dots, 7\}$ ו- $B = \{1, 2, \dots, 8\}$. תהי $S \subseteq A \times B$ כך ש- $|S| = 29$. הוכיחו כי קיימים $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S$ כך שמתקיים $x_2 = x_1$ וגם $y_2 = y_1 + 1$.
8. נתונות הקבוצות $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ ו- $B = \{1, 2, \dots, 12\}$. תהי $S \subseteq A \times B$ כך ש- $|S| = 61$. הוכיחו כי קיימים שלושה זוגות $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in S$ בקבוצה S עבורם מתקיים $x_1 = x_2, |y_1 - y_2| = 1, |x_2 - x_3| = 1, y_2 = y_3$.
9. הוכיחו כי קיים מספר טבעי שכל ספרותיו הן 1 אשר מתחלק ב-2021.
10. נתון: $A = \{1, 3, 5, 7, \dots, 23, 25\}$ (קבוצת כל המספרים האי-זוגיים בין 1 לבין 25) ו- $S \subseteq A$ כך ש- $|S| = 7$. הוכיחו שקיימות שתי תתי-קבוצות שונות ולא ריקות $X, Y \subseteq S$ כך שכל אחת מהן בעלת מספר זוגי של איברים וסכום איברי הקבוצה X שווה לסכום איברי הקבוצה Y .
11. נתונים 82 זוגות סדורים של מספרים ממשיים $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{82}, y_{82})$ כך שלכל $1 \leq i < j \leq 82$ מתקיים $x_i \neq x_j$ וגם $y_i \neq y_j$. הוכיחו כי קיימים מספרים שלמים $1 \leq s < t < u < v \leq 82$ כך שהסדרה (x_s, x_t, x_u, x_v) מונוטונית וגם הסדרה (y_s, y_t, y_u, y_v) מונוטונית.
12. (א) המספרים השלמים מ-1 עד 34 רשומים על מעגל בסדר כלשהו. הוכיחו כי ניתן לחתוך את המעגל במקום מסוים כך שלסדרת המספרים באורך 34 שתיווצר (בכיוון השעון) תהיה תת-סדרה עולה באורך 6 או תת-סדרה יורדת באורך 10.
(ב) הוכיחו כי בסעיף (א) ניתן בנוסף לדרוש שבאחד הקצוות של תת-סדרה יהיה מספר 1.