# 80131-1 - אינפי 1 - סמסטר ב' תשפ"ה - 2024-2025 - תרגיל 5

**הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף שם (פרטי ומשפחה), מספר ת.ז וכותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל. סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל-6/05/2025 בשעה 22:00.**

1. נתונה סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $0 \leqslant a_n$ . נתון כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- $L \in \mathbb{R}$ .
   (א) נמקו בקצרה מדוע $0 \leqslant L$ .
   (ב) הוכיחו ישירות מהגדרת הגבול כי אם $L = 0$ אז הסדרה $\left(\sqrt{a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- $0$ .
   (ג) הוכיחו ישירות מהגדרת הגבול כי אם $L > 0$ אז הסדרה $\left(\sqrt{a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- $\sqrt{L}$ .

2. חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות. מותר להשתמש באריתמטיקה של גבולות ובמשפט הסנדביץ'.
   (א) $a_n = \dfrac{3n^7 - 2n^6 + 3}{9n^7 - n^5 + 4n^2 + n}$ .
   (ב) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ (רמז: משפט הסנדוויץ).
   (ג) $a_n = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt{n}}$ .
   (ד) $a_n = \sqrt[n]{x^n + y^n}$ , כש- $x, y \in \mathbb{R}$ ו- $0 \leqslant x \leqslant y$ .
   (ה) $a_n = \left(0.99999 + \frac{1}{n}\right)^n$ (רמז: משפט הסנדוויץ).

3. (א) הוכיחו שאם קיימים $0 < \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ כך ש- $\alpha < a_n < \beta$ עבור כל $n$ טבעי , אז הסדרה $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- $1$ .
   (ב) הסיקו שאם $0 \leqslant a_n$ עבור כל $n$ טבעי ו- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- $0 < L \in \mathbb{R}$ , אזי הסדרה $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- 1.

4. תהי $A$ קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל של מספרים ממשיים.
   (א) הוכיחו שקיימת סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת את שלושת התנאים הבאים :
   $(i) \quad a_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (ii) \quad a_n \leqslant a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (iii) \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \sup(A)$ .
   (ב) האם סעיף א' נשאר תקף אם משנים בו את תנאי $(ii)$ ל- $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ?

5. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות על חיתוך של סדרת קטעים <u>פתוחים</u> עם קצוות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ :
   (א) אם $a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ , אזי קיימים $c, d \in \mathbb{R}$ כך ש- $c \leqslant d$ ו- $\bigcap_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) = [c, d]$ .
   (ב) אם $a_n < a_{n+1} \leqslant b_{n+1} < b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ , אזי קיימים $c, d \in \mathbb{R}$ כך ש- $c \leqslant d$ ו- $\bigcap_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) = [c, d]$ .

6. לכל $n \in \mathbb{N}$, נסמן $b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ , $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.
   (א) הראו שסדרת הקטעים $I_n = [a_n, b_n]$ מקיימת את תנאי הלמה של קנטור, והסיקו שהסדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות לגבול משותף.
   (ב) נסמן את הגבול המשותף ב-$E$. חשבו את $E$ בדיוק של שלוש ספרות לאחר הנקודה (כלומר מצאו מספר $d \in \mathbb{Z}$ כך ש- $\frac{d}{1000} \leq E \leq \frac{d+1}{1000}$).
   (ג) יהי $m \in \mathbb{N}$. הראו ש-$m! \cdot E \notin \mathbb{Z}$. (רמז: $a_m < E < b_m$)
   (ד) הסיקו ש-$E \notin \mathbb{Q}$.