# 80131 – אינפי 1 – סמסטר ב' תשפ"ה – 2024-2025 – תרגיל 7

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף שם (פרטי ומשפחה), מספר ת.ז וכותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל. סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל-20/05/2025 בשעה 22:00.

**בשתי השאלות הבאות, נכליל את מושג החזקה שלמדנו, למעריך ממשי. בשאלה 1 נפתח טענת עזר, שתשמש אותנו כדי להגדיר את החזקה בשאלה 2.**

1. יהי $b>0$, ותהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי של מספרים רציונליים.
   (א) הראו שהסדרה $(b^{a_n})_{n=1}^{\infty}$ חסומה.
   (ב) הראו שלכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$, כך שלכל $r\in\mathbb{Q}$ שמקיים $|r|<\delta$ מתקיים $|b^r-1|<\varepsilon$. (רמז: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}=1$ )
   (ג) הראו שהסדרה $(b^{a_n})_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי.

2. יהיו $b>0$ ו-$r\in\mathbb{R}$.
   (א) **בסעיף הזה נראה שאפשר להשתמש בגבולות כדי להגדיר את $b^r$ בצורה מוגדרת היטב.**
   הראו שלכל סדרת מספרים רציונליים $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שמתכנסת ל-$r$, הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}b^{a_n}$ קיים, וכן שעבור סדרות שונות (שמתכנסות ל-$r$) מתקבל גבול זהה.
   **רמז:** אם שתי סדרות מתכנסות לאותו גבול, אז יש סדרה מתכנסת ששתיהן תתי-סדרות שלה.
   (ב) נסמן את הגבול מהסעיף הקודם ב-$b^r$.
   **בסעיף הזה נראה שהמושג שהגדרנו מתנהג כמו שהיינו מצפים שחזקה תתנהג.**
   (i) הראו שאם $r\in\mathbb{Q}$, אז הגבול הזה מתלכד עם ההגדרה הקודמת של $b^r$ (כחזקה עם מעריך רציונלי).
   (ii) הראו שלכל $r,s\in\mathbb{R}$ ו-$b>0$ מתקיים $b^{r+s}=b^r\cdot b^s$.
   (iii) הראו שלכל $r\in\mathbb{R}$ ו-$b,c>0$ מתקיים $(bc)^r=b^r\cdot c^r$.

3. הוכיחו את "כלל המכפלה" לגבולות במובן הרחב של סדרות האומר :
   אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ והסדרה $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלרע החל ממקום מסויים באמצעות חסם **חיובי** , אז $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\infty$ .

4. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות אודות סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ :
   (א) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ אם"ם $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n)=-\infty$ .
   (ב) אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת לאינסוף אז כל תת-סדרה של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת גם היא לאינסוף.
   (ג) אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ ו- $a_n\neq 0$ לכל $n\in\mathbb{N}$ , אזי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\infty$ או $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=-\infty$.

5. בכל אחד משלושת מקרי אי-הודאות "$\infty-\infty$" , "$\frac{0}{0}$" ו- "$\frac{\pm\infty}{\infty}$" , מצאו ארבע דוגמאות לזוג סדרות המראות שבמקרים אלו התוצר יכול להתכנס, או לשאוף לאינסוף, או לשאוף למינוס אינסוף, או להיות בלי גבול במובן הרחב.
   ( סך הכל דרושות 12 דוגמאות עם 2 סדרות כל אחת. קבלו השראה מהמקרה "$0\cdot\infty$" בסיכום תרגול 7 .)

6. הוכיחו כי קיימת לסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ תת סדרה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ השואפת לאינסוף **אם ורק אם** הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ <u>לא</u> חסומה מלעיל.

7. נחשו את הגבולות הבאים והוכיחו את תשובותיכם ישירות **מההגדרה** (בלשון $\varepsilon,\delta$).
   (א) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x)$
   (ב) $\lim\limits_{x\to 13}\sqrt{x+3}$
   (ג) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x+1}{2x-5}$
   (ד) $\lim\limits_{x\to -1}(\,|x+2|+|x|\,)$

(בהוכחת גבול של סדרה לפי ההגדרה השתמשתם בכל מיני טכניקות אלגבריות. הן עשויות להיות רלוונטיות גם כאן.)