

80131 - אינפי 1 - סמסטר ב' תשפ"ה - 2024-2025 - תרגיל 8

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף שם (פרטי ומשפחה), מספר תז. וכוורת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל. סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל-27/05/2025 בשעה 22:00.

1. יהיו f ו- g פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת U של הנקודה $x_0 \in \mathbb{R}$. נתון ש- f חסומה ב- U ו- $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

$$\text{הוכיחו בשתי דרכים ש-} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = 0$$

(א) ישירות מהגדרת הגבול של פונקציה בנקודה (בלשון δ - ε).

(ב) בעזרת אפיון הגבול לפי היינה.

2. יהיו f ו- g פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של הנקודה $x_0 \in \mathbb{R}$. נתון כי הגבולות $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ו- $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ קיימים.

(א) הוכיחו שקיימת סביבה מנוקבת U של x_0 כך ש- f ו- g חסומות ב- U .

(ב) הוכיחו בעזרת הגדרת הגבול בלשון δ - ε כי קיים הגבול $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$, ומתקיים השיוויון:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

(קבלו השראה מההוכחה של גבול של מכפלת סדרות מתכנסות)

3. הוכיחו או הפריכו: אם הפונקציות f ו- g מוגדרות בסביבה מנוקבת U של x_0 ו- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$, אזי:

(א) אם ל- g אין גבול ב- x_0 , אז ל- $f + g$ אין גבול ב- x_0 .

(ב) אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ ו- $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ לא קיים, אז $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$ לא קיים.

(ג) קיים $\delta > 0$ כך ש- $\lim_{x \rightarrow t} f(x)$ קיים עבור כל t ב- $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

4. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת:

$$(*) \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$$

(א) הוכיחו שקיימת סביבה מנוקבת של 2 כך שכל x בסביבה זו מקיים $f(x) = 4$.

(ב) האם קיימת פונקציה f שמקיימת את הפסוק (*), אך עבורה לא קיים הגבול $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?

(ג) תנו דוגמה לפונקציה f עבורה קיים הגבול $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, אך היא איננה מקיימת את הפסוק (*).

5. תהי $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ויהי $L \in \mathbb{R}$ כך ש- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L$.

$$\text{הוכיחו כי כלל ההתאמה} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases} \quad \text{מגדיר פונקציה} \quad \tilde{f}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{המקיימת} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \tilde{f}(x) = L$$

6. עבור כל אחד מהגבולות הבאים, קבעו האם הוא קיים. אם כן - חשבו את ערכו. מותר להשתמש באריתמטיקה של גבולות.

$$(א) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} \quad (ב) \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} \quad (ג) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad (\text{כאשר } m, n \in \mathbb{N} \text{ נתונים})$$

(רמז: שאלה 7 בתרגיל בית 1)

$$7. (א) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{איננו קיים. הוכיחו ש-} \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$$

(ב) הוכיחו או הפריכו: אם הפונקציה g מקיימת $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = L \in \mathbb{R}$, אזי $\lim_{x \rightarrow 0} g\left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = L$.