80131 – אינפי 1 – סמסטר ב' תשפ"ה – 2024-2025 – תרגיל 9

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף שם (פרטי ומשפחה), מספר ת.ז וכותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל. סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל-4/06/2025 בשעה 22:00.

1. נתון $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$.
   (א) בתרגיל 1 הוכחתם את הנוסחה לסכום סדרה הנדסית: $\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1-q^n}{1-q}$. הציבו בה $q = \frac{b}{a}$ והוכיחו כי
   $$\forall\, a,b \in \mathbb{R} \qquad a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + a^{n-3}\,b^2 + \ldots + a\,b^{n-2} + b^{n-1}\right)$$
   (ב) יהיו $0 < x_0, x \in \mathbb{R}$. היעזרו בהצבה $a = \sqrt[n]{x}$ ו- $b = \sqrt[n]{x_0}$ כדי להוכיח ש- $\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}\right| \leqslant \frac{|x - x_0|}{\left(\sqrt[n]{x_0}\right)^{n-1}}$.
   (ג) הסיקו שהפונקציה $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ המוגדרת על ידי $f(x) = \sqrt[n]{x}$ רציפה בנקודה x_0 עבור כל $0 < x_0 \in \mathbb{R}$.
   (ד) האם f רציפה מימין בנקודה 0 ?

2. תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי $f(x) = \begin{cases} -x & 0 \leqslant x \\ 1 & x < 0 \end{cases}$.
   (א) הוכיחו ש- f רציפה מימין ב- $x_0 = 0$.
   (ב) חשבו בצורה מפורשת את כלל ההתאמה של הפונקציה המורכבת $f \circ f$.
   (ג) הסיקו שאם פונקציה $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה מימין בנקודה x_0 ופונקציה $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה מימין בנקודה $g(x_0)$, אזי ההרכבה $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ לאו דווקא רציפה מימין בנקודה x_0 .

3. בכל סעיף נתונה פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. קבעו לגבי **כל** נקודה $x_0 \in \mathbb{R}$ אם f רציפה ב- x_0 .
אם לא, בדקו אם $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ו- $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ קיימים וחשבו את ערכם (הביעו באמצעות x_0 במידת הצורך).
   (א) $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & x \leqslant 0 \\ x+1 & 0 < x < 4 \\ x^2+2 & 4 \leqslant x \end{cases}$
   (ב) $f(x) = \begin{cases} \mathcal{D}(x) & x \in (0,1) \\ x^2 & x \notin (0,1) \end{cases}$ (כאשר $\mathcal{D}$ היא פונקציית דיריכלה)
   (ג) $f(x) = \begin{cases} \frac{\lfloor x^2 \rfloor}{x^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$
   (ד) $f(x) = \left(x^2 - 1\right) \cdot \mathcal{D}(x)$

4. יהיו $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ו- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שתי פונקציות רציפות בנקודה $x_0 \in \mathbb{R}$.
   (א) נתון ש- $f(q) = 0$ לכל $q \in \mathbb{Q}$. הוכיחו ש- $f(x_0) = 0$. האם המסקנה הזו תקפה בלי הנחת הרציפות של f ב- x_0 ?
   (ב) נתון שלכל $q \in \mathbb{Q}$ מתקיים $f(q) \leqslant g(q)$. הוכיחו ש- $f(x_0) \leqslant g(x_0)$.
   (ג) נתון שלכל $q \in \mathbb{Q}$ מתקיים $f(q) < g(q)$. האם נובע ש- $f(x_0) < g(x_0)$?

5. הוכיחו **ישירות מההגדרה של גבול במובן הרחב** את הגבולות הבאים:
   (א) $\lim_{x \to 1} \frac{2x^3}{(x-1)^2} = \infty$
   (ב) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{4x-10} = \frac{1}{2}$
   (ג) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3+x-1}{x^2+2x+3} = \infty$

6. תהי $f : (0,8) \to \mathbb{R}$.
   (א) הגדירו לפי קושי (כלומר $\varepsilon - \delta$) את המושג $\lim_{x \to 5^+} f(x) = -\infty$.
   (ב) הגדירו לפי היינה (כלומר באמצעות סדרות) את המושג $\lim_{x \to 5^+} f(x) = -\infty$.
   (ג) הוכיחו ששתי ההגדרות שנתתם שקולות.