אלגברה לינארית 2 תשפ״ה – תרגיל 6

שאלה 1

חשבו את הפולינום המינימלי של

1. $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}\in M_3\left(\mathbb{R}\right)$.
2. $T:\mathbb{R}\left[x\right]_{\leq 2}\to\mathbb{R}\left[x\right]_{\leq 2}$ האופרטור ששולח את הפולינום $P\left(x\right)$ לפולינום $P\left(3x\right)$.

שאלה 2

תהי $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה אלכסונית.

1. יהי $P\in\mathbb{F}\left[x\right]$. הראו שגם $P\left(A\right)$ מטריצה אלכסונית.
2. יהיו $\lambda_1,...,\lambda_k\in\mathbb{F}$ סקלארים שונים זה מזה. נניח שעל האלכסון λ_1 מופיע n_1 פעמים, λ_2 מופיע n_2 פעמים,..., λ_k מופיע n_k פעמים. חשבו את הפולינום האופייני ואת הפולינום המינימלי.

שאלה 3

יהי Vמ״ו נ״ס מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $T\in\text{End}\left(V\right)$.

1. יהי $U\subseteq V$ תמ״ו T-אינווריאנטי. הוכיחו כי $m_{T|_U}\mid m_T$.
2. יהי $P\in\mathbb{F}\left[x\right]$. הוכיחו שאם $m_{T,v}|P$ לכל $v\in V$, אזי $m_T|P$.

שאלה 4

תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$. הוכיחו או הפריכו :

1. אם A' דומה ל-A, אזי $m_A=m_{A'}$.
2. $m_A=m_{A^T}$.

שאלה 5

תהיינה $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ שתי מטריצות. קבעו האם המטריצות דומות.

שאלה 6

תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה שכל ערכיה ממשיים.

1. הוכיחו כי הפולינום המינימלי מעל $\mathbb{C}$ זהה לפולינום המינימלי מעל $\mathbb{R}$.
2. הסיקו שאם $P_A = \prod_{i=1}^{k} Q_i^{r_i}$ כאשר הפולינומים Q_i אי פריקים מעל $\mathbb{R}$, אזי $m_T = \prod_{i=1}^{k} Q_i^{s_i}$ כאשר $1 \le s_i \le r_i$.
3. (רשות) הדגימו את נכונות שני הסעיפים הקודמים עבור $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
כלומר, חשבו את הפולינום המינימלי מעל $\mathbb{C}$ ומעל $\mathbb{R}$ מבלי להשתמש בסעיפים הקודמים, ואז הראו ששני הסעיפים הקודמים אכן נכונים עבור הפולינום המינימליים שמצאתם.

שאלה 7

1. האם כל פולינום מתוקן הוא פולינום אופייני של איזושהי מטריצה?
2. האם כל פולינום מתוקן הוא פולינום מינימלי של איזושהי מטריצה?

שאלה 8

יהיו $U_1, \ldots, U_k$ תתי מרחבים של מ"ו V.

1. הוכיחו ש-$U_1, ..., U_k$ נמצאים בסכום ישר אס"ם הפתרון היחיד לשיוויון $\sum_{i=1}^{k} u_i = 0$ כאשר $u_i \in U_i$, הוא $u_i = 0$ לכל i.
2. הניחו כי $\dim(U_i) = d_i$ לכל $1 \le i \le k$, וסמנו $s_i = d_1 + ... + d_i$ לכל $1 \le i \le k$, $s_0 = 0$.
הוכיחו כי $U_1, ..., U_k$ נמצאים בסכום ישר אס"ם קיימת ה"ל חח"ע ועל $T : \mathbb{F}^{s_k} \to V$ כך ש- $U_i = T\left(\text{Span}\left(e_{s_{i-1}+1}, ..., e_{s_i}\right)\right)$ לכל $1 \le i \le k$.