

## מתמטיקה דיסקרטית תשפ"ה - תרגיל בית 3

1. תהי  $f: A \rightarrow B$  פונקציה,  $D_1, D_2$  תת-קבוצות של  $B$  כך ש-  $f^{-1}(D_1) \subseteq f^{-1}(D_2)$ . אלו מהטענות הבאות נכונות?  
 אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמא נגדית.  
 (א) אם  $f$  חד-חד-ערכית, אז  $D_1 \subseteq D_2$   
 (ב) אם  $f$  על, אז  $D_1 \subseteq D_2$
  
2. תהיינה  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$  פונקציות. אלו מהטענות הבאות נכונות?  
 אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמא נגדית.  
 (א) אם  $g \circ f$  על, אז  $g$  על  
 (ב) אם  $f$  חד-חד-ערכית וגם  $g \circ f$  על, אז  $f$  על  
 (ג) אם  $g$  חד-חד-ערכית וגם  $g \circ f$  על, אז  $f$  על
  
3. תהיינה  $A, B, C$  קבוצות ותהיינה  $f: A \rightarrow B, g: A \rightarrow B, h: B \rightarrow C, i: B \rightarrow C$  פונקציות. אלו מהטענות הבאות נכונות?  
 אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמא נגדית.  
 (א) אם  $h$  על ומתקיים  $h \circ f = h \circ g$  אז  $f = g$   
 (ב) אם  $h$  חד-חד-ערכית ומתקיים  $h \circ f = h \circ g$  אז  $f = g$   
 (ג) אם  $f$  על ומתקיים  $h \circ f = i \circ f$  אז  $h = i$
  
4. תהא  $f: A \rightarrow B$  פונקציה,  $D$  תת קבוצה של  $B$ .  
 (א) הוכיחו או הפריכו בעזרת דוגמה נגדית: מתקיים  $f(f^{-1}(D)) \subseteq D$   
 (ב) הוכיחו או הפריכו בעזרת דוגמה נגדית: מתקיים  $f(f^{-1}(D)) \supseteq D$   
 (ג) השלימו את המשפט כך שיהיה נכון: "אם  $f$  היא \_\_\_\_\_, אזי  $f(f^{-1}(D)) = D$ ". ההשלמה צריכה להיות אחת מהאפשרויות חד-חד-ערכית / על. הוכיחו את תשובתכם.
  
5. עבור היחסים הבאים על  $\mathbb{N}$ , קבעו האם הם רפלקסיביים, סימטריים, אנטי-סימטריים, טרנזיטיביים.  
 (א)  $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 0 \leq x - y \leq 1\}$   
 (ב)  $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y \leq 2x \leq 4y\}$   
 (ג)  $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x^2 = y\}$   
 (ד)  $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x - y \text{ לא מתחלק ב-} 3\}$   
 (ה)  $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2x \text{ מתחלק ב-} y^2\}$   
 רשמו את התשובות כולל בטבלה  $5 \times 4$  וכתבו את ההסברים בנפרד.
  
6. עבור היחסים הבאים על  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  קבעו האם הם רפלקסיביים, סימטריים, אנטי-סימטריים, טרנזיטיביים.  
 (א)  $R = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \mid x_1 = y_1 \text{ או } x_2 < y_2\}$   
 (ב)  $R = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \mid x_1 = y_1 \text{ וגם } x_2 < y_2\}$   
 (ג)  $R = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \mid x_1 < y_1 \text{ או } x_2 < y_2\}$

