第1课 Overview of Computer Graphics

1. **光栅化**：将三维空间的几何形体显示在屏幕上
2. **实时**：每秒钟能够生成30幅画面/30帧/30fps；否则称为离线

第2课 Review of Linear Algebra

2.1 向量点乘

2.1.1 定义

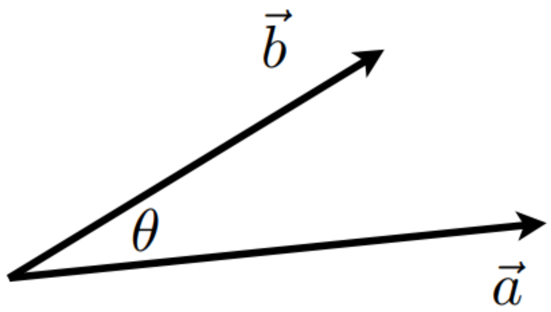
$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= ||\vec{a}|| * ||\vec{b}|| * \cos\theta \\ &= x_a * x_b + y_a * y_b + z_a * z_b\end{aligned}$$

2.1.2 性质

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
2. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$
3. $(k\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\vec{b}) = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

2.1.3 应用

1. 计算夹角：$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{a}||*||\vec{b}||}$



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\cos\theta$$

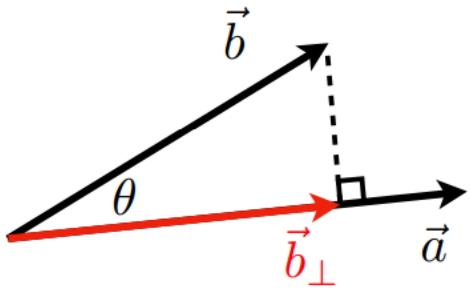
$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{a}||\,||\vec{b}||}$$

- For unit vectors

$$\cos\theta = \hat{a}\cdot\hat{b}$$

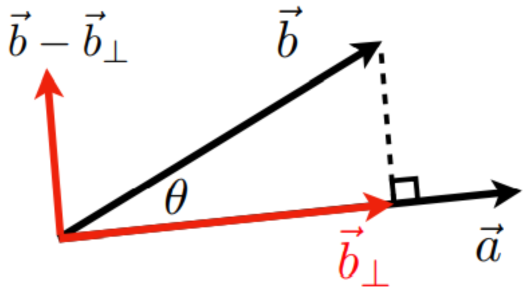
2. 计算投影：$||\vec{b}_\perp|| = ||\vec{b}||\cos\theta$，$\vec{b}_\perp = (||\vec{b}||\cos\theta)\,\hat{a}$

- $\vec{b}_\perp$: projection of $\vec{b}$ onto $\vec{a}$
  - $\vec{b}_\perp$ must be along $\vec{a}$ (or along $\hat{a}$)
    - $\vec{b}_\perp = k\hat{a}$
  - What's its magnitude k?
    - $k = \|\vec{b}_\perp\| = \|\vec{b}\| \cos\theta$



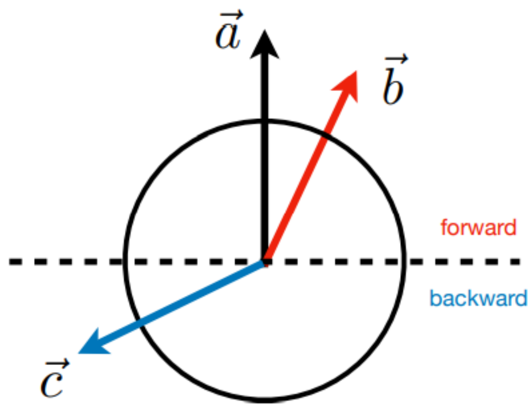
3. 将$\vec{b}$在$\vec{a}$方向分解：$\vec{b} = \vec{b}_\perp + (\vec{b} - \vec{b}_\perp)$

- Measure how close two directions are
- Decompose a vector
- Determine forward / backward



4. 向量之间的方向
   1. $\vec{a}$与$\vec{b}$方向基本一致：$\hat{a} \cdot \hat{b} > 0$，越接近1，夹角越接近0°
   2. $\vec{a}$与$\vec{b}$方向基本相反：$\hat{a} \cdot \hat{b} < 0$，越接近-1，夹角越接近180°
   3. $\vec{a}$与$\vec{b}$垂直：=$\hat{a} \cdot \hat{b}$

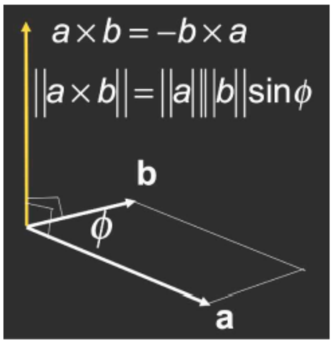
- Measure how close two directions are
- Decompose a vector
- Determine forward / backward



dot product > or < 0

2.2 向量叉乘

2.2.1 定义



- Cross product is orthogonal to two initial vectors
- Direction determined by right-hand rule
- Useful in constructing coordinate systems (later)

大小：$||\vec{a}\times\vec{b}|| = ||\vec{a}|| * ||\vec{b}|| * \sin\theta$

方向：右手螺旋定则，四指方向为$\vec{a}$旋转到$\vec{b}$，拇指方向为$\vec{a}\times\vec{b}$的方向

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} y_a z_b - y_b z_a \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$$

- Later in this lecture

$$\vec{a} \times \vec{b} = A^* b = \begin{pmatrix} 0 & -z_a & y_a \\ z_a & 0 & -x_a \\ -y_a & x_a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$$

dual matrix of vector a

2.2.2 性质

性质：$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

$$\vec{x} \times \vec{y} = +\vec{z}$$

$$\vec{y} \times \vec{x} = -\vec{z}$$

$$\vec{y} \times \vec{z} = +\vec{x}$$

$$\vec{z} \times \vec{y} = -\vec{x}$$

$$\vec{z} \times \vec{x} = +\vec{y}$$

$$\vec{x} \times \vec{z} = -\vec{y}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

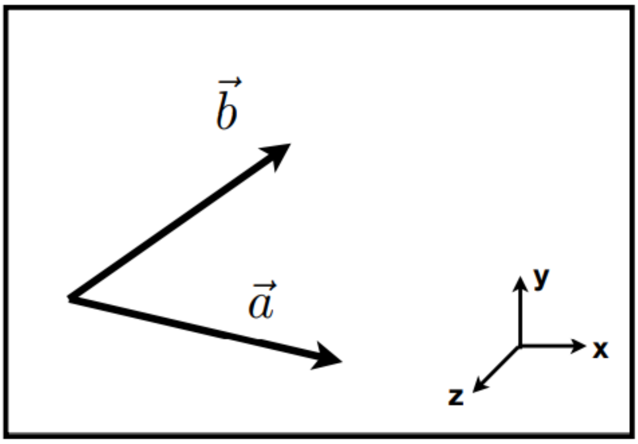
$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

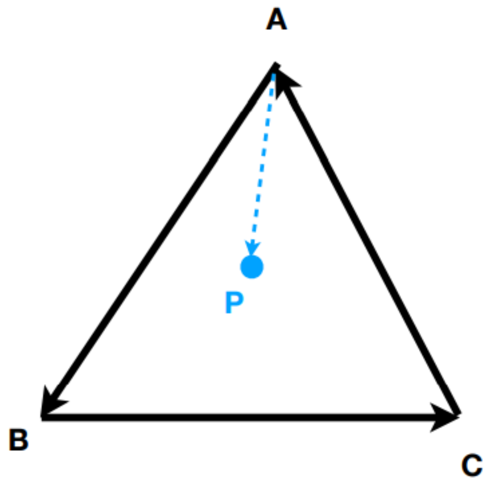
$$\vec{a} \times (k\vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b})$$

2.2.3 应用

1. 判断左右：假设$\vec{a}$、$\vec{b}$均在XY平面上
    1. $\vec{b}$在$\vec{a}$的左侧：$Z_{\vec{a}\times\vec{b}} > 0$
    2. $\vec{b}$在$\vec{a}$的右侧：$Z_{\vec{a}\times\vec{b}} < 0$



2. 判断内外：假设ABCP四点共面
    1. P在▲ABC的内部：若ABC逆时针排列，则都在左面；若ABC顺时针排列，则都在右面
        1. $\vec{AP}$在$\vec{AB}$的左面
        2. $\vec{BP}$在$\vec{BC}$的左面
        3. $\vec{CP}$在$\vec{CA}$的左面
    2. P在▲ABC的外部：上述三个条件有一个不符合



2.3 正交基/坐标系

正交基：Orthonormal Bases

坐标系：Coordinate Frames

2.3.1 定义

1. $\vec{u}$、$\vec{v}$、$\vec{w}$均为单位向量
2. $\vec{u}$、$\vec{v}$、$\vec{w}$两两垂直
3. $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$

- Any set of 3 vectors (in 3D) that

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} = 0$$

$$\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v} \qquad \text{(right-handed)}$$

$$\vec{p} = (\vec{p}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\vec{p}\cdot\vec{v})\vec{v} + (\vec{p}\cdot\vec{w})\vec{w}$$

(projection)

2.4 矩阵

2.4.1 矩阵乘法

1. 定义：设$A[m][n]*B[n][p]=C[m][p]$，则
   $C[i][j]=\sum_{k=1}^{n}A[i][k]*B[k][j]=\{A\text{的第}i\text{行}\}\cdot\{B\text{的第}j\text{列}\}$
2. 性质：
   1. 没有交换律
   2. 有结合律：$(AB)C=A(BC)$
   3. 有分配律：$A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$

2.4.2 矩阵转置

1. 定义：将行列互换

- Switch rows and columns (ij -> ji)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

2. 性质：$(AB)^T = B^T A^T$

2.4.3 单位矩阵&矩阵的逆

1. 单位矩阵：

$$I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 逆矩阵的定义：$AA^{-1} = A^{-1}A = I$
3. 逆矩阵的性质：$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2.4.4 矩阵&向量点乘/叉乘

- Dot product?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^T \vec{b}$$
$$= \begin{pmatrix} x_a & y_a & z_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b \end{pmatrix}$$

- Cross product?

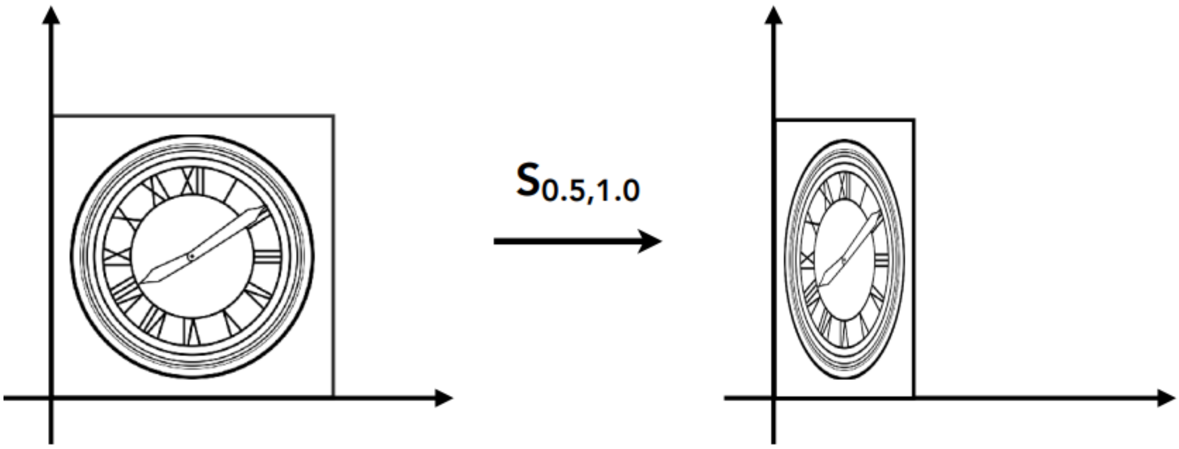
$$\vec{a} \times \vec{b} = A^* b = \begin{pmatrix} 0 & -z_a & y_a \\ z_a & 0 & -x_a \\ -y_a & x_a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$$

dual matrix of vector a

第3课 Transform

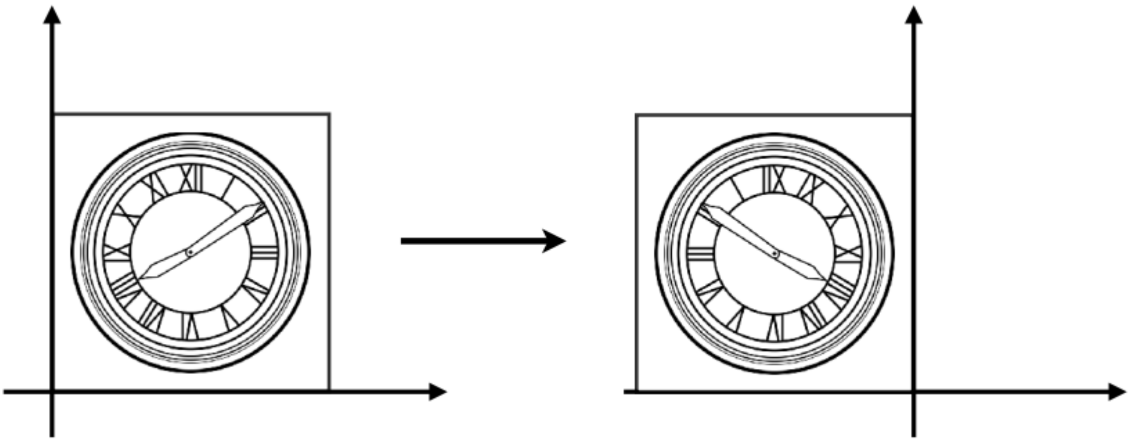
3.1 2D Transform

3.1.1 Scale缩放变换



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

3.1.2 Reflectin翻转

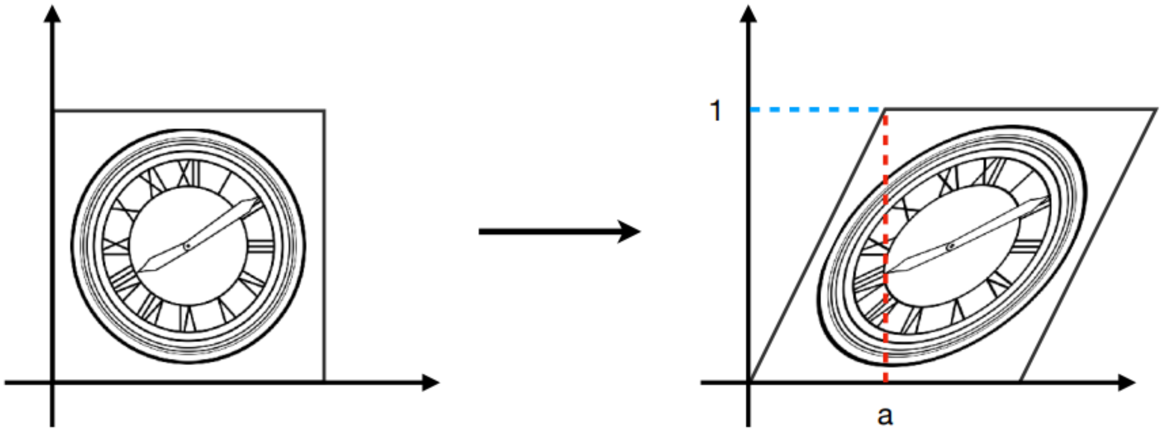


Horizontal reflection:

$$x' = -x$$
$$y' = y$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

3.1.3 Shear切变



Hints:

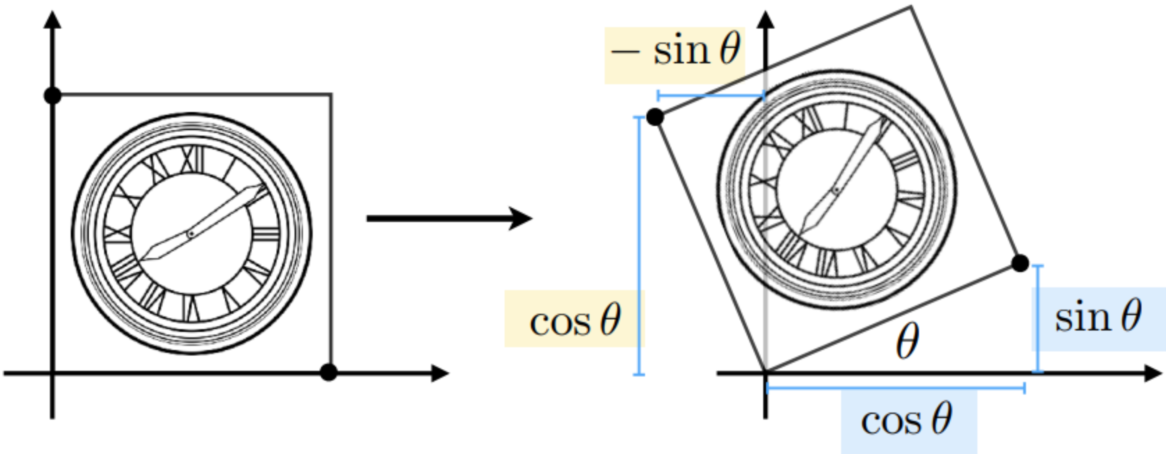
Horizontal shift is 0 at y=0

Horizontal shift is a at y=1

Vertical shift is always 0

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

3.1.4 Rotate旋转(默认 绕原点 逆时针 旋转)



$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

3.1.5 Linear Transform线性变换=矩阵

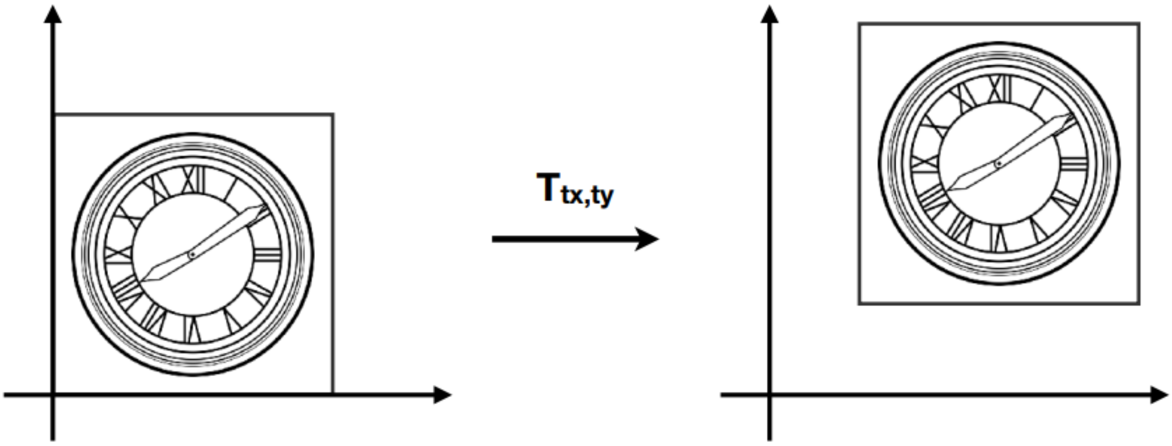
$$x' = a\,x + b\,y$$
$$y' = c\,x + d\,y$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{M}\,\mathbf{x}$$

3.2 Homogeneous coordinates齐次坐标

3.2.1 Translation平移变换$\notin$线性变换



$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$

矩阵表示：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

(So, translation is NOT linear transform!)

3.2.2 齐次坐标

添加一个维度

1. 2维点：$(x, y, 1)^T$
2. 2维点的补充形式：$(x, y, w)^T$与$(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, 1)^T$等价
3. 2维向量：$(x, y, 0)^T$

对于两者第3个坐标的解释：

1. 点的第三维为0，向量的第三维为1，可以满足向量的平移不变性
2. 且可以满足以下性质
   1. vector + vector = vector
   2. point - point = vector
   3. point + vector = point
   4. point + point = 两个point的中点

3.2.3 Affine Transformation仿射变换

Affine map = linear map + translation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

Using homogenous coordinates:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.2.4 2D Transformation

Scale

$$\mathbf{S}(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Translation

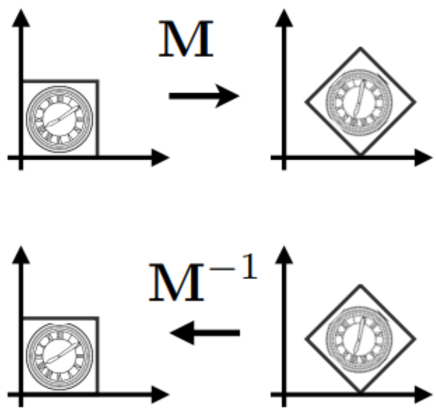
$$\mathbf{T}(t_x, t_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2.5 Inverse Transform逆变换

逆变换 <==> 乘变换矩阵的逆矩阵

$$\mathbf{M}^{-1}$$

$\mathbf{M}^{-1}$ is the inverse of transform $\mathbf{M}$ in both a matrix and geometric sense

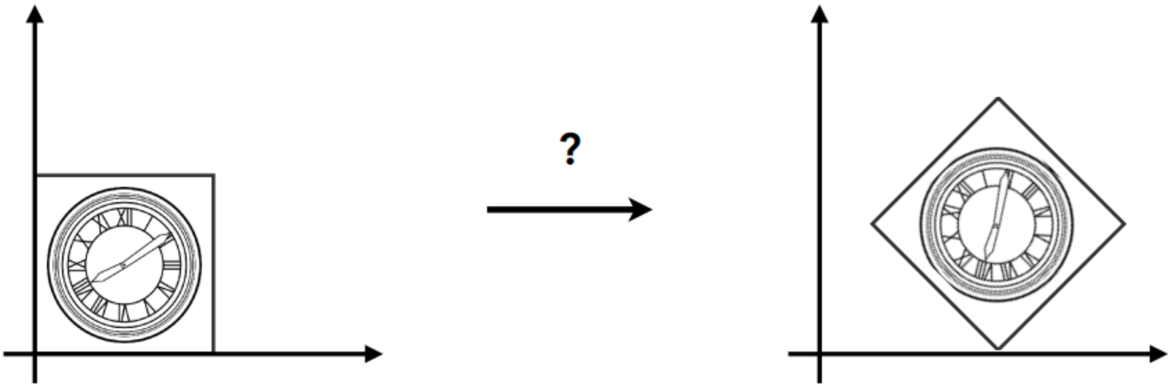


3.3 Composing Transforms变换的组合

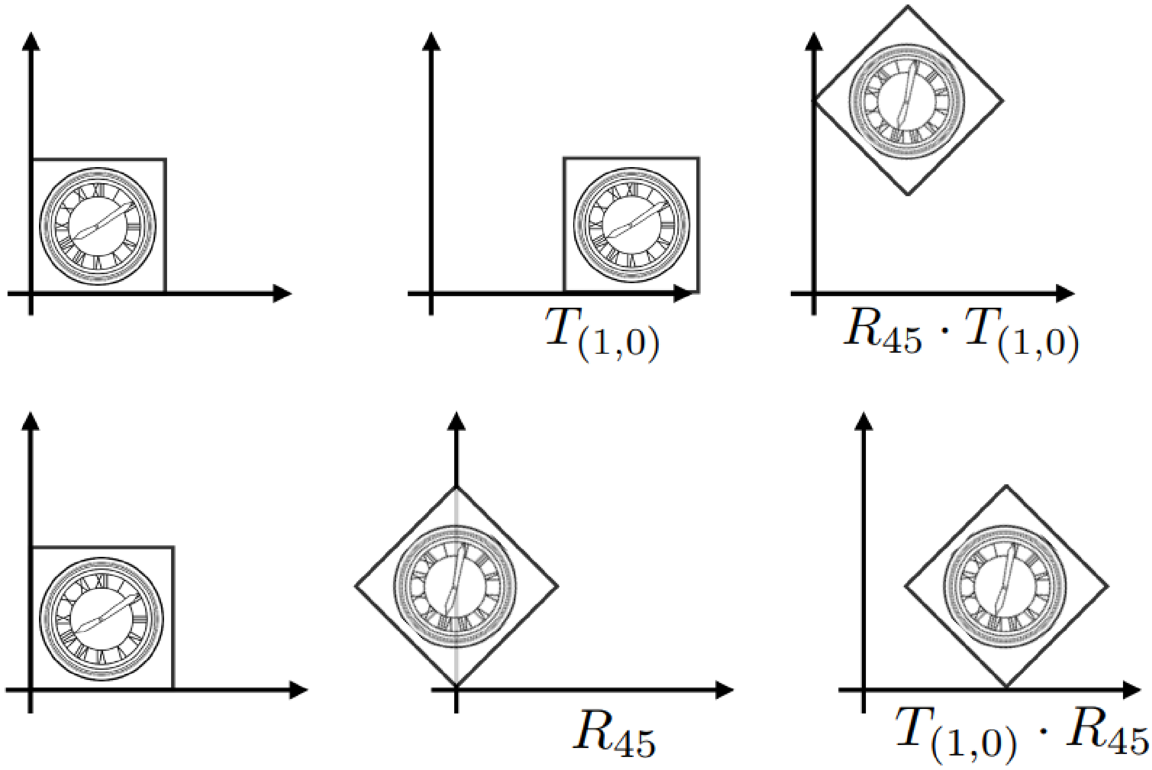
3.3.1 举例

1. 复杂变换可以有简单变换组合而成
2. 简单变换的顺序是很有必要的 <==> 矩阵乘法不满足交换律

变换的目标：



变换的方法：先平移后旋转 or 先旋转后平移



矩阵表示：**从右到左**进行矩阵乘法

Matrix multiplication is <u>not</u> commutative

$$R_{45} \cdot T_{(1,0)} \neq T_{(1,0)} \cdot R_{45}$$

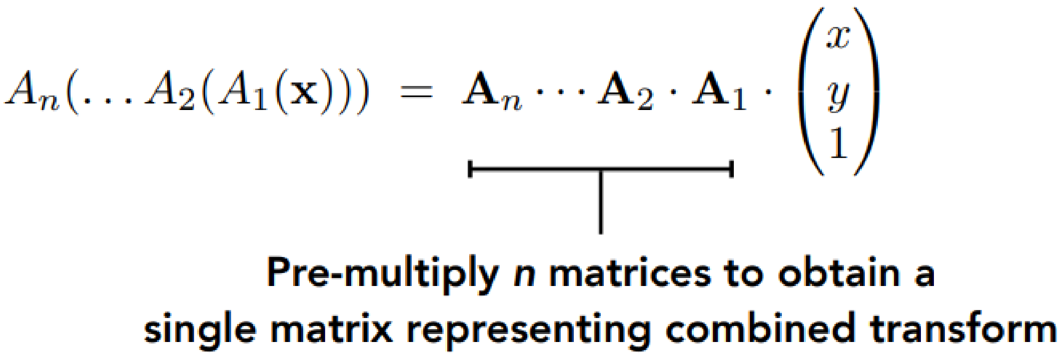
Note that matrices are applied right to left:

$$T_{(1,0)} \cdot R_{45} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ & 0 \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.3.2 多个变换

假设有一系列仿射变换$A_1, A_2, A_3 ...$

1. 可以用矩阵乘法表示：

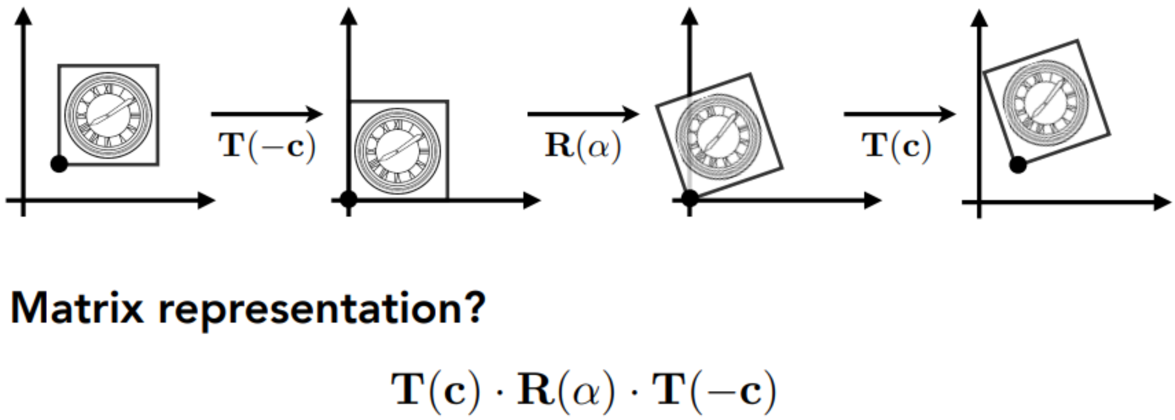


2. 可以先计算$A_n ... A_2 \cdot A_1$，再与列向量相乘
    1. 一个3*3的矩阵可以表示任意的变换

3.3.3 变换的分解

以C点为中心进行旋转α度：$T(\vec{c}) \cdot R(\alpha) \cdot T(\vec{-c})$

1. 先将图形按照$\vec{-c}$的方向进行平移：$T(\vec{-c})$
2. 然后绕原点旋转α度：$R(\alpha)$
3. 然后将图形按照$\vec{c}$的方向进行平移：$T(\vec{c})$



第4课 Transform Cont

4.0 有关旋转的补充

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
$$R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R_\theta^T$$
$$R_{-\theta} = R_\theta^{-1}$$

正交矩阵：$R^T = R^{-1}$

4.1 3D Transformations

4.4.1 齐次坐标

1. 3维点：$(x, y, z, 1)^T$
2. 3维点的补充形式：$(x, y, z, w)^T$与$(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}, 1)^T$等价
3. 3维向量：$(x, y, z, 0)^T$

4.4.2 Affine Transform

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{\boxed{\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}}}^{\text{线性变换}} & \overbrace{\boxed{\begin{matrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{matrix}}}^{\text{平移}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

变换的顺序：先**线性变换**，后加**平移量**

4.4.2.1 缩放

$$\mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.4.2.2 平移

$$\mathbf{T}(t_x, t_y, t_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.4.2.3 旋转

4.4.2.3.1 绕坐标轴旋转

1. 绕X轴：X不变，YZ旋转

$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{matrix}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 绕Y轴：Y不变，ZX旋转

$$\mathbf{R}_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \boxed{\cos\alpha} & 0 & \boxed{\sin\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-\sin\alpha} & 0 & \boxed{\cos\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 绕Z轴：Z不变，XY旋转

$$\mathbf{R}_z(\alpha)=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{matrix}} & \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix} & \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\end{pmatrix}$$

4.4.2.3.2 绕任意过原点的轴旋转：罗德里格旋转公式

1. 绕任意轴旋转
    1. 将任意轴方向的旋转，分解为绕X、Y、Z轴的旋转：$R_{x,y,z}(\alpha,\beta,\gamma)=R_x(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$
    2. α,β,γ也被称为欧拉角
2. **Rodrigues' Rotation Formula罗德里格旋转公式**
    1. 向量**v** 绕过原点的轴**n** 旋转α角，向量**I**为向量**v**方向的单位向量

$$\mathbf{R}(\mathbf{n},\alpha)=\cos(\alpha)\,\mathbf{I}+(1-\cos(\alpha))\,\mathbf{n}\mathbf{n}^T+\sin(\alpha)\underbrace{\boxed{\begin{pmatrix}0 & -n_z & n_y\\ n_z & 0 & -n_x\\ -n_y & n_x & 0\end{pmatrix}}}_{\mathbf{N}}$$

向量n做叉乘运算时对应的对偶矩阵

3. 推导思路：
    1. **v**与**n**垂直时，$\vec{v'}=\cos\alpha*\vec{v}+\sin\alpha*(\vec{n}\times\vec{I})$
    2. **v**与**n**不垂直时，将**v**分解为 垂直于**n**的向量**v**$_\perp$ 和平行于**n**的向量**v**$_\parallel$
        1. $\vec{v'_\parallel}=\vec{v_\parallel}=|\vec{v}|*cos<\vec{v},\vec{n}>=\vec{v}\cdot\vec{n}\cdot\vec{n}$
        2. $\vec{v_\perp}=\vec{v}-\vec{v_\parallel}=\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{n}\cdot\vec{n}$
        3. $\vec{v'_\perp}=\cos\alpha*\vec{v_\perp}+\sin\alpha*(\vec{n}\times\vec{v_\perp})$
        4. 综上可得：$\vec{v'}=\vec{v'_\parallel}+\vec{v'_\perp}=\cos\alpha*\vec{v}+(1-\cos\alpha)*\vec{v}\cdot\vec{n}\cdot\vec{n}+\sin\alpha*(\vec{n}\times\vec{v})$
    3. 矩阵形式：$\vec{v'}=\cos\alpha*\vec{v}+(1-\cos\alpha)*\vec{v}\cdot\vec{n}\cdot\vec{n}+\sin\alpha*(\vec{n}\times\vec{v})$$

    $=[\cos\alpha*\vec{I}+(1-\cos\alpha)*\vec{n}\cdot\vec{n}^T+\sin\alpha*(\vec{n}\times\vec{I})]\cdot\vec{v}$
4. 绕过任意轴**n** 旋转α角
    1. 先将轴平移至过原点
    2. 然后旋转
    3. 最后平移回去

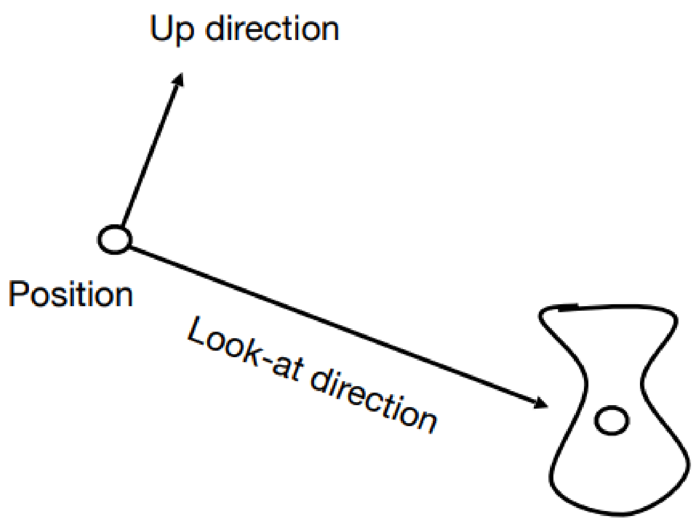
4.2 View/Camera Transformation 视图/相机变换

4.2.1 什么是视图变换

1. 与照相类比：**MVP**变换
    1. 找一个好的地方、人物排列 ==> 模型变换 **model** transformation
    2. 找一个好的角度放置摄像机 ==> 视图变换 **view** transformation
    3. 拍照 ==> 投影变换 **projection** transformation

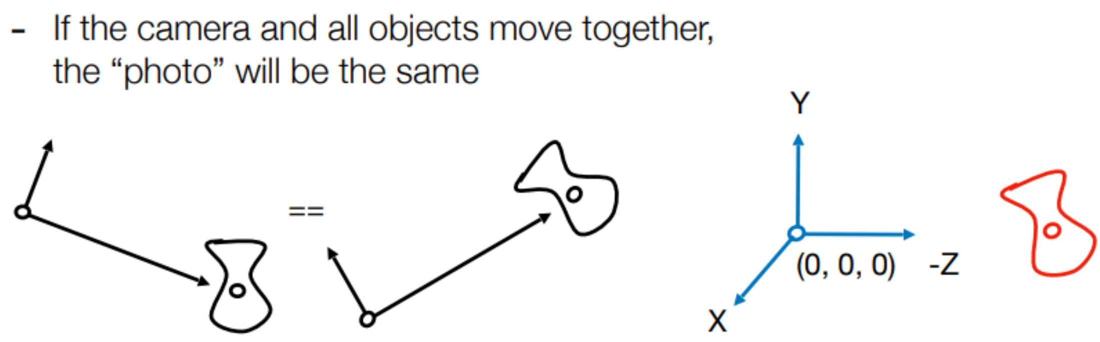
4.2.2 定义Camera

1. 位置Position：$\vec{e}$
2. 往哪看Look-at/gaze direction：$\vec{g}$
3. 向上方向Up direction：$\vec{t}$



4.2.3 关键点

1. 只要 摄像机 与 物体 的相对位置一样，所看到的图形就是一样的



2. 将摄像机永远放在一个标准的位置
   1. Position：原点
   2. Up direction：Y轴
   3. Look-at direction：-Z轴
3. 当相机变换时，将物体随着相机变换

4.2.4 将相机移动到标准位置

1. 方法
   1. 将$\vec{e}$平移到原点
   2. 旋转 $\vec{g}$ 到**-Z**的方向
   3. 旋转 $\vec{t}$ 到**Y**的方向
   4. 旋转 $\vec{g}\times\vec{t}$ 到**X**方向
2. 矩阵表示：设$M_{view} = R_{view}T_{view}$
   1. 将$\vec{e}$平移到原点

$$T_{view} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_e \\ 0 & 1 & 0 & -y_e \\ 0 & 0 & 1 & -z_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 旋转 $\vec{g}$ 到**-Z**、 $\vec{t}$ 到**Y**、$\vec{g}\times\vec{t}$ 到**X**：考虑逆矩阵

$$R_{view}^{-1} = \begin{bmatrix} x_{\hat{g}\times\hat{t}} & x_t & x_{-g} & 0 \\ y_{\hat{g}\times\hat{t}} & y_t & y_{-g} & 0 \\ z_{\hat{g}\times\hat{t}} & z_t & z_{-g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{WHY?}} R_{view} = \begin{bmatrix} x_{\hat{g}\times\hat{t}} & y_{\hat{g}\times\hat{t}} & z_{\hat{g}\times\hat{t}} & 0 \\ x_t & y_t & z_t & 0 \\ x_{-g} & y_{-g} & z_{-g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

旋转矩阵 是 正交矩阵
其 逆矩阵 就是 转置矩阵

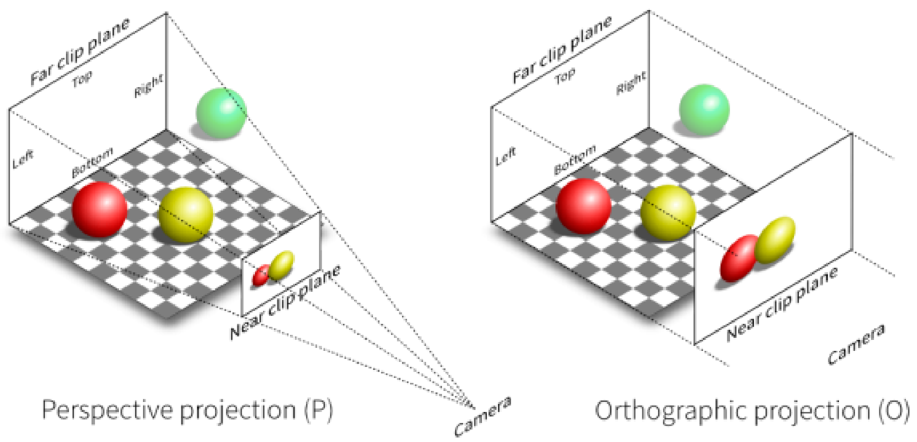
4.2.5 总结

1. 将物体与相机一起旋转
2. 将相机变换到标准位置：
   1. Position：原点
   2. Up direction：Y轴
   3. Look-at direction：-Z轴
3. 这一步也被称为**ModelView Transformation**

4.3 Projection Transformation

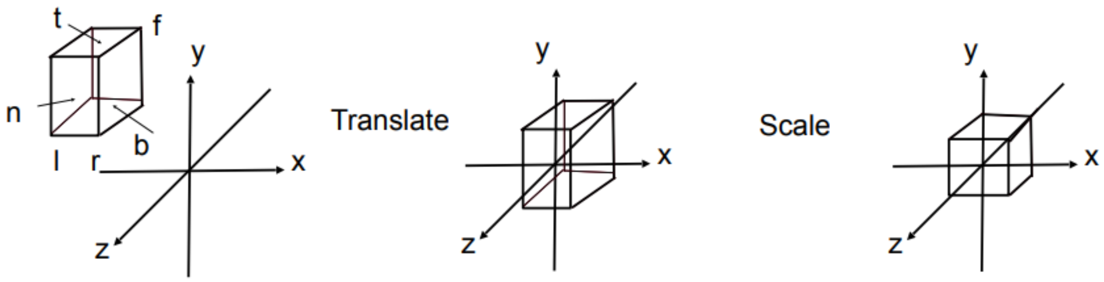
1. Orthographic Projection 正交投影：不存在近大远小
2. Perspective Projection 透视投影：存在近大远小，平行线不再平行

- Perspective projection vs. orthographic projection



4.3.1 Orthographic Projection 正交投影

1. 方法：将一个立方体$[l,r]\times[b,t]\times[f,n]$映射到标准立方体$[-1,1]^3$上
   1. 首先，通过**平移**操作，将立方体的中心移到原点
   2. 然后，通过**缩放**操作，将立方体缩放为标准立方体
   3. 立方体的定义：X轴$[l,r]$；Y轴$[b,t]$；Z轴$[f,n]$
   4. 变换之后，物体一定会有拉伸



2. 变换矩阵
    1. 先平移到原点，再缩放到2

$$M_{ortho}=\begin{pmatrix}\frac{2}{r-l}&0&0&0\\0&\frac{2}{t-b}&0&0\\0&0&\frac{2}{n-f}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{r+l}{2}\\0&1&0&-\frac{t+b}{2}\\0&0&1&-\frac{n+f}{2}\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{r-l}&0&0&-\frac{r+l}{r-l}\\0&\frac{2}{t-b}&0&-\frac{t+b}{t-b}\\0&0&\frac{2}{n-f}&-\frac{n+f}{n-f}\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

4.3.2 Perspective Projection 透视投影

4.3.2.1 如何进行透视投影

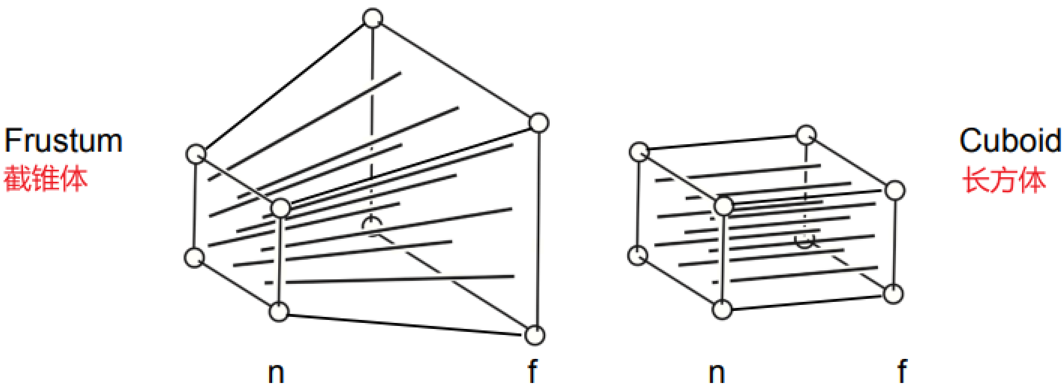
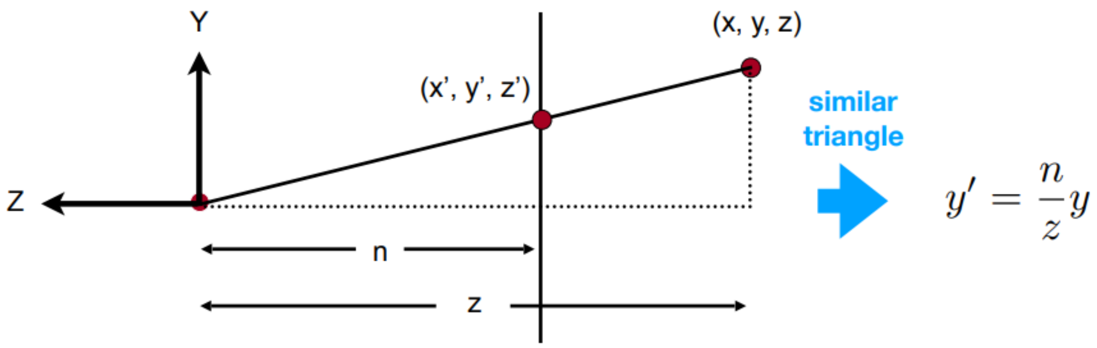


Fig. 7.13 from *Fundamentals of Computer Graphics, 4th Edition*

1. 首先，定义从相机点向外的两个平面**n**、**f**，**f**平面要比**n**平面大
2. 此时就相当于**f**平面上的点全部投影到**n**平面上
3. 投影方法
    1. 先将**Frustum**挤成**Cuboid**(n->n，f->f)：$M_{persp->ortho}$
        1. 近平面永远不变
        2. 远平面的Z值永远不变
        3. 远平面的中心点永远不变
    2. 再进行一次正交投影：M_{ortho}

4.3.2.2 计算矩阵$M_{persp->ortho}$

1. 思路：找到变换后的点(x',y',z')与原来的点(x,y,z)的对应关系
2. 从YZ平面上看，$y'=\frac{n}{z}*y$
    1. 同理，$x'=\frac{n}{z}*x$



3. 齐次坐标表示

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}nx/z\\ny/z\\\text{unknown}\\1\end{pmatrix} \overset{\text{mult. by z}}{==} \begin{pmatrix}nx\\ny\\\text{still unknown}\\z\end{pmatrix}$$

4. 矩阵表示

1. $$M_{persp\to ortho}^{(4\times 4)}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}nx\\ny\\\text{unknown}\\z\end{pmatrix}$$

2. $$M_{persp\to ortho} = \begin{pmatrix}n & 0 & 0 & 0\\0 & n & 0 & 0\\? & ? & ? & ?\\0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

5. 对于矩阵的第三行(对于Z值)，有以下性质

   1. 在近平面上的点，Z值不变

      1. $$M_{persp\to ortho}^{(4\times 4)}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}nx\\ny\\\text{unknown}\\z\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{replace z with n}} \begin{pmatrix}x\\y\\n\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\n\\1\end{pmatrix} == \begin{pmatrix}nx\\ny\\n^2\\n\end{pmatrix}$$

      2. $$\begin{pmatrix}0 & 0 & A & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\n\\1\end{pmatrix} = n^2$$ n^2 has nothing to do with x and y

3. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ n \\ 1 \end{pmatrix} = n^2 \quad \Rightarrow \quad An + B = n^2$$

2. 在远平面上的点，Z值不变
    1. 这里取中心点$(0, 0, f)$
    2. $$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ 1 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f^2 \\ f \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Af + B = f^2$$
3. 根据两个等式，可以解出A, B

$$\begin{aligned} An + B &= n^2 \\ Af + B &= f^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= n + f \\ B &= -nf \end{aligned}$$

6. 综上

$$M_{persp \to ortho} = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -nf \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. 最后，再进行正交投影：$M_{persp} = M_{ortho} M_{persp->ortho}$

$$M_{persp} = \begin{pmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{2}{n-f} & -\frac{n+f}{n-f} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -nf \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & -\frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n+f}{n-f} & -\frac{2nf}{n-f} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3.3.3 对于不在近/远平面上的点

$$\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -nf \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nx \\ ny \\ (n+f)z - nf \\ z \end{pmatrix} ==> \begin{pmatrix} \frac{n}{z}x \\ \frac{n}{z}y \\ (n+f) - \frac{nf}{z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. 近平面上的点$(z = n)$
    1. $z' = (n+f) - \frac{nf}{n} = n$
    2. $z' = z$
2. 远平面上的点$(z = f)$
    1. $z' = (n+f) - \frac{nf}{f} = f$
    2. $z' = z$
3. 不在近/远平面上的点$(f < z < n)$
    1. $z' = (n+f) - \frac{nf}{z}$
        1. 设$n = 1, f = -1, z = 0.5$，则$z' = 2$

2. 设$n = 1, f = -1, z = -0.5$，则$z' = -2$

2. 可得：若$z < 0$，则z'更靠近**远平面**f；若$z > 0$，则z'更靠近**近平面**n