**Cálculo (GII y GIIADE)**

Convocatoria Ordinaria (Teoría)

Curso 2024/2025

# Enunciado del Examen

1. *a*) Estudia de forma justificada la convergencia de la serie (1 pto.)

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n^3-2n^2+\cos(n)+3}{n^3+7}\right)^{n^2}$$

   *b*) Estudia de forma justificada la convergencia y calcula la suma, si es posible, de la serie (1 pto.)

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{2^{n+1}-(-3)^{n+2}}{4^n}\right)$$

2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como $f(x)=2x\arctan(x)-\log(1+x^2)$.

   *a*) Estudia de forma justificada la monotonía, existencia de extremos relativos y absolutos de $f$. (1.25 ptos.)

   *b*) Demuestra que $2x\arctan(x)\geq\log(1+x^2)$ para todo $x\in\mathbb{R}$. (0.75 ptos.)

3. Calcula de forma justificada los siguientes límites:

   *a*) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\cos(x)-1}e^{-t^2}dt}{x^2\arctan(x+1)}$ (1 pto.)

   *b*) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$ (1 pto.)

4. Determina de forma justificada el número de soluciones de la ecuación $3x^4-8x^3=24$. (2 ptos.)

5. Calcula de forma justificada $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^2e^xdx$. (2 ptos.)

## Soluciones Detalladas

1. *a*)

   **Solución Detallada.** El término general $a_n$ es una potencia n-ésima, lo que sugiere el uso del **Criterio de la Raíz**.

   $$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3 - 2n^2 + \cos(n) + 3}{n^3 + 7}\right)^n$$

   La base tiende a 1, ya que $\cos(n)$ está acotado y los términos dominantes son $n^3$. El exponente tiende a $\infty$, por lo que tenemos una indeterminación $1^\infty$. La resolvemos con la **Regla del número e**. El límite será $e^K$, donde:

   $$K = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n^3 - 2n^2 + \cos(n) + 3}{n^3 + 7} - 1\right)$$

   Operamos dentro del paréntesis:

   $$K = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n^3 - 2n^2 + \cos(n) + 3 - (n^3 + 7)}{n^3 + 7}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{-2n^2 + \cos(n) - 4}{n^3 + 7}\right)$$

   $$K = \lim_{n\to\infty} \frac{-2n^3 + n\cos(n) - 4n}{n^3 + 7}$$

   Dividimos por la máxima potencia, $n^3$:

   $$K = \lim_{n\to\infty} \frac{-2 + \frac{\cos(n)}{n^2} - \frac{4}{n^2}}{1 + \frac{7}{n^3}} = \frac{-2 + 0 - 0}{1 + 0} = -2$$

   El límite del criterio es $L = e^{-2}$. Como $L = \frac{1}{e^2} < 1$, por el Criterio de la Raíz, la serie **es convergente**.

   *b*)

   **Solución Detallada.** Usamos la propiedad de linealidad de las series para descomponerla:

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{4^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+2}}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 2^n}{4^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^2 \cdot (-3)^n}{4^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{4}\right)^n - 9\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-3}{4}\right)^n$$

   Ambas son **series geométricas**. La primera tiene razón $r_1 = 1/2$ y la segunda $r_2 = -3/4$. Como $|r_1| < 1$ y $|r_2| < 1$, ambas convergen. La suma de una serie geométrica que empieza en $n = 1$ es $S = \frac{r}{1-r}$.

   - Suma de la primera serie: $S_1 = 2 \cdot \frac{1/2}{1-1/2} = 2 \cdot \frac{1/2}{1/2} = 2 \cdot 1 = 2$.
   - Suma de la segunda serie: $S_2 = -9 \cdot \frac{-3/4}{1-(-3/4)} = -9 \cdot \frac{-3/4}{7/4} = -9 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{27}{7}$.

   La suma total es $S_1 + S_2 = 2 + \frac{27}{7} = \frac{14}{7} + \frac{27}{7} = \boldsymbol{\frac{41}{7}}$.

2. *a*)

**Solución Detallada.** Calculamos la primera derivada para estudiar la monotonía.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(2x\arctan(x) - \log(1+x^2)\right) = \left(2\arctan(x) + \frac{2x}{1+x^2}\right) - \frac{2x}{1+x^2} = 2\arctan(x)$$

El único punto crítico ($f'(x) = 0$) es $x = 0$. Estudiamos el signo de $f'(x)$:

- Si $x \in (-\infty, 0)$, $\arctan(x) < 0 \implies f'(x) < 0 \implies f$ es **estrictamente decreciente**.
- Si $x \in (0, \infty)$, $\arctan(x) > 0 \implies f'(x) > 0 \implies f$ es **estrictamente creciente**.

En $x = 0$ hay un **mínimo relativo**. Para los extremos absolutos, calculamos $f(0) = 0$ y los límites en el infinito: $\lim_{x\to\pm\infty}(2x\arctan(x) - \log(1+x^2)) = \infty$. Concluimos que $f$ tiene un **mínimo absoluto en** $(0,0)$ y no tiene máximos (ni relativos ni absolutos).

*b*)

**Solución Detallada.** La desigualdad $2x\arctan(x) \geq \log(1+x^2)$ es equivalente a $f(x) \geq 0$. Del apartado anterior, hemos demostrado que el valor mínimo absoluto que alcanza la función $f(x)$ es 0 (en el punto $x = 0$). Como este es el valor más bajo posible para la función en todo su dominio, se deduce directamente que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. *a*)

**Solución Detallada.** Al sustituir $x = 0$, obtenemos la indeterminación $0/0$. Aplicamos **L'Hôpital**. Derivada del Numerador (usando TFC y Regla de la Cadena): $N'(x) = e^{-(\cos(x)-1)^2} \cdot (-\sin(x))$. Derivada del Denominador (Regla del Producto): $D'(x) = 2x\arctan(x+1) + x^2\frac{1}{1+(x+1)^2}$.

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)e^{-(\cos(x)-1)^2}}{2x\arctan(x+1) + \frac{x^2}{1+(x+1)^2}}$$

Podemos usar el infinitésimo equivalente $\sin(x) \sim x$ para $x \to 0$:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{-x \cdot e^0}{2x \cdot \arctan(1) + 0} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{2x \cdot (\pi/4)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\pi/2} = -\boldsymbol{\frac{2}{\pi}}$$

*b*)

**Solución Detallada.** Analizamos la base y el exponente por separado. Base: $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$ es una indeterminación $0/0$. Por L'Hôpital, es $\lim_{x\to 0} \frac{1/(1+x)}{1} = 1$. Exponente: $\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x}$, que tiende a $+\infty$ si $x \to 0^+$ y a $-\infty$ si $x \to 0^-$. Estamos ante una indeterminación $1^\infty$. Usamos la **Regla del número e** para funciones. Calculamos $L = \lim_{x\to 0} g(x)[f(x) - 1]$:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x}\left(\frac{\log(1+x)}{x} - 1\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)(\log(1+x) - x)}{x^2} \quad \text{(Indet. } 0/0) \end{aligned}$$

Aplicamos L'Hôpital:

$$L \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\log(1+x)-x)+(x+1)(\frac{1}{1+x}-1)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-2x}{2x} \quad \text{(Indet. 0/0)}$$

Aplicamos L'Hôpital de nuevo:

$$L \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}-2}{2} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$$

Como el límite $L=-1/2$ existe, el límite original es $\boldsymbol{e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}}$.

4.

**Solución Detallada.** Definimos $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 24$. Buscamos el número de veces que $f(x) = 0$. Estudiamos la monotonía: $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 = 12x^2(x-2)$. Los puntos críticos son $x = 0$ y $x = 2$.

- $(-\infty, 2)$: $f'(x) \leq 0 \implies f$ es decreciente.
- $(2, \infty)$: $f'(x) > 0 \implies f$ es creciente.

La función tiene un mínimo absoluto en $x = 2$, con valor $f(2) = 3(16) - 8(8) - 24 = -40$. Los límites en el infinito son $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

- En $(-\infty, 2]$, la función continua decrece desde $+\infty$ hasta $-40$. Por el **Teorema de Bolzano**, existe una única raíz en este intervalo.
- En $[2, +\infty)$, la función continua crece desde $-40$ hasta $+\infty$. Por Bolzano, existe una única raíz en este intervalo.

La ecuación tiene exactamente **dos soluciones reales**.

5.

**Solución Detallada.** Usamos **integración por partes** ($\int u\,dv = uv - \int v\,du$) dos veces. 1. Sea $u = x^2, dv = e^x dx$. Entonces $du = 2x\,dx, v = e^x$.

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx$$

2. Para la integral restante, sea $u = x, dv = e^x dx$. Entonces $du = dx, v = e^x$.

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x$$

La primitiva es $G(x) = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$. Aplicamos la **Regla de Barrow**: $\int_{-1}^{1} x^2 e^x dx = G(1) - G(-1)$.

$$G(1) = (1^2 - 2(1) + 2)e^1 = e$$

$$G(-1) = ((-1)^2 - 2(-1) + 2)e^{-1} = (1+2+2)e^{-1} = 5e^{-1}$$

El resultado es $\boldsymbol{e - \frac{5}{e}}$.