Resolución de Ejercicios: Primer Parcial de Cálculo (GII)

Curso 2024/2025

Enunciados

1. **Cálculo de Límite**

   Calcula de forma justificada el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(1) + \cos(2) + \cdots + \cos(n)}{\log(n!)}$$

2. **Convergencia de Series**

   Estudia la convergencia de las siguientes series:

   a)

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(n+1)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}$$

   b) Estudia la convergencia de la siguiente serie y, si es posible, calcula su suma:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{3^n - 2^{n+1}}{2^{n+1}}$$

3. **Estudio de una Sucesión**

   Dada la sucesión de término general: $x_n = \arctan(n-1), \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Estudia su monotonía y acotación. ¿Es convergente? En caso afirmativo, calcula su límite.

Soluciones

1.

Solución Detallada. Tenemos el límite de un cociente de sucesiones, $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, donde:

- $a_n = \cos(1) + \cos(2) + \cdots + \cos(n) = \sum_{k=1}^{n} \cos(k)$
- $b_n = \log(n!)$

Analizamos el numerador y el denominador:

- **Numerador (a_n)**: La sucesión $\{\cos(k)\}_{k\geq 1}$ es una sucesión acotada, ya que $-1 \leq \cos(k) \leq 1$ para todo k. La suma de un número finito de términos de una sucesión acotada es finita. Aunque no se proporciona una fórmula para la suma, es un resultado conocido que la sucesión de sumas parciales $a_n = \sum_{k=1}^{n} \cos(k)$ es una **sucesión acotada**.
- **Denominador (b_n)**: Como $n! \to \infty$ cuando $n \to \infty$, y la función logaritmo es creciente, tenemos que $\lim_{n\to\infty} \log(n!) = +\infty$.

El límite es de la forma $\frac{\text{acotado}}{\infty}$. Podemos reescribirlo como el producto de dos sucesiones:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \cos(k) \right) \cdot \left(\frac{1}{\log(n!)} \right)$$

Tenemos el producto de una sucesión acotada (a_n) por una sucesión que converge a cero ($\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n!)} = 0$). Según una de las propiedades del límite de sucesiones, el límite de este producto es 0.

Por lo tanto, $\boldsymbol{L = 0}$.

2. *a)*

Solución Detallada. El término general $a_n = \frac{(n+1)^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}$ contiene factoriales y potencias, lo que sugiere el uso del **Criterio del Cociente (o de D'Alembert)**. Calculamos el límite $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$a_{n+1} = \frac{(n+2)^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)\cdot (2(n+1)-1)} = \frac{(n+2)^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)\cdot (2n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{1\cdot \cdots \cdot (2n+1)} \cdot \frac{1\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(n+1)^n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n \cdot (2n+1)}$$

Reorganizamos los términos para facilitar el cálculo del límite:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{2n+1} \cdot \frac{(n+2)^n}{(n+1)^n} = \frac{n+2}{2n+1} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^n = \frac{n+2}{2n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^n$$

Calculamos el límite de cada factor:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1-1} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right] =$$

Por tanto, el límite del cociente es $L = \frac{1}{2} \cdot e = \frac{e}{2}$. Como $e \approx 2{,}718$, tenemos que $L \approx 1{,}359 > 1$. Según el Criterio del Cociente, como $L > 1$, la serie **es divergente**.

b)

Solución Detallada. Primero, simplificamos el término general a_n:

$$a_n = \frac{3^n - 2^{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{3^n}{2^{n+1}} - \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{3^n}{2 \cdot 2^n} - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1$$

Ahora estudiamos la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$. Aplicamos la **condición necesaria para la convergencia**, que establece que si una serie converge, el límite de su término general debe ser cero.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right)$$

Como la base $3/2 > 1$, $\lim_{n\to\infty}(3/2)^n = +\infty$. Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty - 1 = +\infty$$

Dado que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, no se cumple la condición necesaria. Concluimos que la serie **es divergente** y, por tanto, no se puede calcular su suma.

3.

Solución Detallada. La sucesión es $x_n = \arctan(n-1)$.

- **Monotonía**: Para estudiar la monotonía, comparamos x_n y x_{n+1}. La función $f(x) = \arctan(x)$ es estrictamente creciente. Como $n < n+1$, se cumple que $n-1 < n$. Aplicando la función arcotangente (que es creciente) a ambos lados de la desigualdad, obtenemos:

  $$\arctan(n-1) < \arctan(n) = \arctan((n+1)-1)$$

  Es decir, $x_n < x_{n+1}$. Por lo tanto, la sucesión es **estrictamente creciente**.

- **Acotación**: La función arcotangente tiene como imagen el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Por lo tanto, para cualquier valor de su argumento, el resultado estará en ese intervalo.

  $$-\frac{\pi}{2} < x_n = \arctan(n-1) < \frac{\pi}{2}$$

  Esto demuestra que la sucesión está **acotada** (superior e inferiormente). De hecho, como $n \geq 1$, el argumento $n-1 \geq 0$, por lo que $x_n = \arctan(n-1) \geq \arctan(0) = 0$. La sucesión está acotada entre 0 y $\pi/2$.

- **Convergencia y Límite**: Hemos demostrado que la sucesión es monótona (creciente) y acotada. Según el **Teorema de convergencia monótona**, toda sucesión monótona y acotada es convergente. Por tanto, **la sucesión es convergente**.

  Para calcular su límite, hacemos $n \to \infty$:

  $$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \arctan(n-1)$$

  Cuando $n \to \infty$, el argumento $n-1 \to \infty$. El límite de la función arcotangente en el infinito es:

  $$L = \lim_{u\to\infty} \arctan(u) = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$