Integrali generalizzati

Finora, abbiamo studiato gli integrali indefiniti e senza troppe pretese di formalismo li avevamo introdotti semplicemente come operazione inversa rispetto alla derivazione, nel senso che la scrittura:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) \tag{1}$$

significa essere riusciti a determina una funzione $F(x)$ tale che la sua derivata sia la funzione integranda $f(x)$ stessa:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x) \tag{2}$$

Successivamente abbiamo introdotto il concetto di integrale definito. In particolare, abbiamo introdotto il concetto di integrale definito secondo Riemann come limite delle somme di Riemann, a seguito di una determinata partizione dell'intervallo di integrazione $[a, b]$. Abbiamo quindi analizzato le sue proprietà ed enunciato alcuni teoremi molto importanti, come il teorema fondamentale del calcolo integrale e il suo corollario. Pertanto, per determinare il valore di un integrale definito, ne ricaviamo prima la primitiva, poi ne calcoliamo il valore nei due estremi di integrazione ed infine ne facciamo la differenza:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{3}$$

Dal punto di vista geometrico, questa operazione rappresenta l'area della porzione di piano compresa fra la curva $f(x)$ e l'asse x, con segno (la funzione contribuisce positivamente all'integrale nelle regioni in cui essa è positiva, e viceversa).

A parte la difficoltà nel ricavare la primitiva di una funzione, l'applicazione dell'equazione (3) sembra abbastanza tranquilla. Però, ricordiamoci che tutta la teoria che abbiamo visto basa la sua formulazione su *due ipotesi fondamentali*:

1. che l'intervallo di integrazione $[a, b]$ sia chiuso e limitato;

2. che la funzione $f(x)$ che vogliamo integrare sia continua e limitata nel medesimo intervallo.

Quando una o entrambe queste ipotesi non sono soddisfatte, la formula precedente smette di valere. In questo caso non si parla più di semplice integrale definito, bensì di **integrale improprio** o **generalizzato**. Nello specifico, quando ad essere negata è la condizione 1, si parla di integrale improprio di **prima specie** (o tipo A), mentre se ad essere negata è la condizione 2, si parla di integrale improprio di **seconda specie** (o tipo B).

Prima specie

Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua integrabile secondo Riemann, quindi continua e limitata, su un qualunque intervallo del tipo $[a, M]$ con M finito e maggiore di a. Definiamo integrale improprio di prima specie della funzione $f : [a, +\infty)$ il limite:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to+\infty} \int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

Analogamente, se prendiamo la semiretta di sinistra $(-\infty, b]$ e sotto le stesse ipotesi, vale la seguente:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to-\infty} \int_{M}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

Per completezza, abbiamo riscritto la definizione anche per x negative, ma negli esempi ed esercizi che faremo, considereremo solo la semiretta positiva, per semplicità. In ogni caso, si osservi dalle definizioni che il problema iniziale è stato spezzate in due parti: prima determiniamo il valore di un integrale definito su un intervallo chiuso generico (e sappiamo farlo perché questo non è altro che un semplice integrale secondo Riemann, per ipotesi), e poi ne calcoliamo il limite.

Il punto focale della questione è che in linea di principio nessuno ci assicura che il limite a secondo membro esista o sia finito.

- Se il limite esiste ed è *finito*, allora diremo che l'integrale improprio *converge* al valore del limite.
- Se il limite esiste ma è *infinito*, allora diremo che l'integrale improprio *diverge* al corrispondente infinito.
- Se il limite *non esiste*, allora diremo che l'integrale improprio non esiste o che è *indeterminato*.

Naturalmente, un integrale improprio di prima specie può presente un infinito su entrambi gli estremi di integrazione. Come comportarsi in questo caso? Nessun problema; tutto ciò che è sufficiente fare è ricordare la proprietà di linearità degli integrali, e quindi spezzare l'integrale su tutta la retta reale come due integrali impropri di prima specie su due semirette disgiunte $(-\infty, c]$ e $[c, +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{m\to-\infty} \int_{m}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{M\to+\infty} \int_{c}^{M} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

Chiaramente, l'integrale a sinistra converge se e solo se *entrambi* gli integrali convergono[1].

Esempio.

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{+\infty} e^{-x} \sin x\,\mathrm{d}x &= \lim_{M\to+\infty} \int_{0}^{M} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{M\to+\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x}(\sin x + \cos x)\Big|_{0}^{M} \right] \\
&= \lim_{M\to+\infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-M}(\sin M + \cos M) \right] \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{8}$$

[1] Si presti particolare attenzione: i due limiti devono essere entrambi finiti affinché l'integrale in senso improprio converga. Per esempio, l'integrale improprio di x su tutto $\mathbb{R}$ è divergente poiché entrambi i limiti di $x^2/2$ (la sua primitiva) divergono all'infinito. Detto ciò, si tenga presente che la scrittura (6) *non* è equivalente al limite per $R \to +\infty$ dell'integrale definito sulla regione simmetrica $[-R, R]$:

$$\mathscr{P}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

Infatti, provando ad applicarla al caso precedente si ottiene esattamente 0, quindi convergente. La (7) viene solitamente chiamata valore principale di Cauchy (spesso indicato con $\mathscr{P}$ o p.v. per distinguerlo dall'integrale classico) e costituisce un metodo *alternativo* per assegnare un valore a certi integrali impropri che altrimenti risulterebbero indefiniti. Se l'integrale improprio converge, allora pure il suo valore principale di Cauchy è finito e assume lo stesso valore. Tuttavia, non vale il contrario (come abbiamo potuto constatare).

essendo un integrale ciclico risolvibile per parti.

Esempio.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{M\to+\infty}\int_0^M \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{M\to+\infty}\Big[x-\ln|1+x|\Big]_0^M \\ &= \lim_{M\to+\infty}\Big[M-\ln|1+M|\Big] \\ &= +\infty\end{aligned} \tag{9}$$

poiché all'infinito le potenze dominano sempre sul logaritmo. Si osservi che in questo caso, la funzione non è definita in $x=-1$; tuttavia, tale punto è escluso dal dominio di integrazione, e quindi non ci interessa. L'integrale rimane effettivamente un integrale improprio di prima specie.

Esempio. Più in generale, sia

$$\int_p^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \tag{10}$$

con $p>0$ e finito, e α incognito. Utilizzando la definizione, calcoliamone prima la primitiva:

$$\int \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases}\dfrac{1}{(1-\alpha)}x^{1-\alpha}\,, & \text{se } \alpha\neq 1\\ \ln x\,, & \text{se } \alpha=1\end{cases} \tag{11}$$

(a meno di una costante, come al solito). Mettendo il risultato al limite, è chiaro che l'integrale improprio converge solamente nel caso in cui $1-\alpha<0$, caso in cui la potenza al numeratore è negativa; il caso $\alpha=1$ ne è escluso poiché il logaritmo non converge all'infinito. Pertanto:

$$\boxed{\int_p^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \quad \begin{cases}\text{converge se } \alpha>1\\ \text{diverge se } \alpha\leq 1\end{cases}} \tag{12}$$

Questo tipo di integrale notevole è anche detto **integrale test** perché, come vedremo nel seguito, tutte le volte che riusciamo a ricondurci ad una forma simile, possiamo già trarre conclusioni circa sua natura.

Seconda specie

Sia $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua integrabile secondo Riemann, quindi continua e limitata, su un qualunque intervallo del tipo $[m,b]$ con m finito e minore di b. Definiamo integrale improprio di seconda specie della funzione $f:(a,b]$ il limite:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{m\to a^+}\int_m^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{13}$$

Analogamente, se l'insieme è aperto a destra vale:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{m\to b^-}\int_a^m f(x)\,\mathrm{d}x \tag{14}$$

Come prima, l'integrale improprio converge se il limite esiste ed è finito e diverge se il limite esiste ma è infinito, mentre è indeterminato se il limite stesso non esiste o è indeterminato.

Inoltre, se la singolarità dell'integrando si trova all'interno dell'intervallo e non sul bordo ($c \in (a, b)$), vale in modo analogo la seguente:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{m \to c^-} \int_a^m f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{M \to c^+} \int_M^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{15}$$

Ovvero, possiamo dividere l'integrale in due integrali di seconda specie ed analizzarli separatamente. L'integrale iniziale converge se e solo se convergono entrambi i pezzi.

Esempio.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right) \mathrm{d}x &= \lim_{m \to 0^+} \int_m^1 \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right) \mathrm{d}x \\ &= \lim_{m \to 0^+} \left[-\frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right)\right]_m^1 \\ &= \lim_{m \to 0^+} \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2m}\right) \\ &= \nexists\end{aligned} \tag{16}$$

In questo caso l'integrale è indeterminato perché il seno non è ha un andamento ben definito all'infinito.

Esempio.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{m \to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_m^1 \\ &= \lim_{m \to 0^+} \left[2 - 2\sqrt{m}\right] \\ &= 2\end{aligned} \tag{17}$$

Esempio. Più in generale, sia

$$\int_0^p \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \tag{18}$$

con p finito e α incognito. Come prima, la primitiva è:

$$\int \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-\alpha)} x^{1-\alpha}, & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \ln x, & \text{se } \alpha = 1 \end{cases} \tag{19}$$

Quindi il precedente integrale improprio di seconda specie converge solamente nel caso in cui $1 - \alpha > 0$, caso in cui la potenza al numeratore è positiva (il logaritmo non converge per in un intorno di 0). Perciò:

$$\boxed{\int_0^p \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \quad \begin{cases} \text{converge se } \alpha < 1 \\ \text{diverge se } \alpha \geq 1 \end{cases}} \tag{20}$$

Questo è un altro esempio di integrale test che dobbiamo ricordare a memoria.

Naturalmente, nulla vieta che un integrale improprio sia di entrambi i tipi: tutto cioè che bisogna fare è spezzare l'integrale in due parti opportune, in modo da isolare e studiare le due casistiche singolarmente.

Criteri di convergenza

Come abbiamo visto nei precedenti esempi, la tecnica per la risoluzione degli integrali impropri si basa direttamente sulla definizione, ma non è la più pratica poiché prevede il calcolo diretto della primitiva. Tale calcolo potrebbe non essere agevole oppure essere addirittura impossibile, perché potrebbe non esistere una primitiva scrivibile solamente in termini di funzioni elementari. Ciò avviene per la maggior parte delle funzioni, a dire il vero. In questi casi, più che il valore dell'integrale improprio stesso, si chiede solamente di determinare *se esso converge o meno*, anche per evitare di perdere tempo nel ricavare una possibile primitiva. Per questo motivo, sono stati messi a punto dei criteri che permettono di capire a priori il loro carattere.

Limite dell'integrando

Condizione necessaria, ma non sufficiente, che l'integrale improprio di prima specie

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to+\infty} \int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x \tag{21}$$

converga è che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \tag{22}$$

Si tenga presente che questa condizione è *necessaria, ma non sufficiente*, ovvero "integrale convergente" implica "limite nullo" ($\int f(x)\,\mathrm{d}x$ converge $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$). Quindi, se la relazione (22) sussiste, allora l'integrale improprio potrebbe convergere, mentre se essa non sussiste, sicuramente l'integrale improprio non converge. Di fatto, esso risulta più utile per testare la non convergenza di un integrale. Ad ogni modo, negli esercizi che vedremo, questa condizione sarà praticamente sempre soddisfatta.

Esempio. Tipico controesempio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \tag{23}$$

Chiaramente:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{24}$$

ma utilizzando la definizione è facile verificare che l'integrale non converge comunque:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to+\infty} \Big[\ln|x|\Big]_1^M = \lim_{M\to+\infty} \ln|M| = +\infty \tag{25}$$

Criterio del confronto

Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni localmente integrabili e tali che

$$0 \le f(x) \le g(x) \tag{26}$$

per ogni $x \in [a, +\infty)$. Allora si può dimostrare che vale la seguente relazione:

$$0 \le \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \tag{27}$$

Da essa, discende che se l'integrale improprio di $g(x)$ converge, allora pure l'integrale improprio di $f(x)$ converge. Viceversa, se l'integrale di $f(x)$ diverge, allora pure quello di $g(x)$ diverge. Lo stesso enunciato vale anche nel caso di integrali impropri di seconda specie, a ridosso delle singolarità.

Questo criterio ci dice sostanzialmente che, data una funzione $f(x)$ della quale vogliamo calcolarne l'integrale improprio, se riusciamo a determinarne un *controllo* per valori di x corrispondenti alla regione incriminata tale per cui il corrispondente integrale sia più gestibile, allora posso trarre conclusioni sulla natura dell'integrale iniziale. La difficoltà sta quindi nel trovare una buona maggiorazione per la funzione $f(x)$.

Esempio. Si consideri il famoso integrale della gaussiana:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \tag{28}$$

Questo integrale è noto essere convergente, ma la sua primitiva non è esprimibile in termini di funzioni elementari. Il valore a cui converge è dimostrabile molto facilmente usando le coordinate polari, ma lo vedrete con calma l'anno prossimo. Al momento, ci prefiggiamo di dimostrare che esso converge. Innanzitutto, l'integrale è improprio su entrambi i lati, ma poiché la funzione integranda è pari, esso equivale a[2]

$$2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \tag{29}$$

Ora, l'esponenziale in base e è sicuramente positivo e crescente per valori crescenti del proprio argomento, quindi ammette un controllo del tipo:

$$x^2 \geq x \qquad \Longleftrightarrow \qquad -x^2 \leq -x \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{-x^2} \leq e^{-x} \tag{30}$$

per $x \geq 1$. Pertanto possiamo spezzare la (29) in due parti:

$$2\left(\int_{0}^{1} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right) \tag{31}$$

Il primo integrale è sicuramente convergente perché è un semplice integrale di Riemann, che risponde ai criteri di Riemann. Per quanto riguarda il secondo, sfruttiamo il criterio del confronto grazie al controllo appena trovato. Poiché:

$$0 \leq \int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_{1}^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x \tag{32}$$

e siccome il secondo integrale converge:

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to+\infty}\int_{1}^{M} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to+\infty}\left(\frac{1}{e} - e^{-M}\right) = \frac{1}{e} \tag{33}$$

allora pure quello centrale nella (32) converge. In conclusione, l'intero integrale di partenza converge.

Esempio. Si consideri:

$$\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \tag{34}$$

[2]Se la funzione integranda è simmetrica rispetto ad un asse verticale passante per x_0 e l'intervallo di integrazione è esattamente bisecato dal punto x_0 stesso (cioè se la funzione è pari rispetto ad x_0), allora l'integrale iniziale è sempre uguale al doppio dell'integrale valutato su metà intervallo. Ciò è naturalmente vero per integrali che rispondono alle condizioni di Riemann, ma vale anche per integrali impropri; infatti, la parità della funzione fa sì che il comportamento di un limite sia identico a quello dell'altro limite, se pensiamo alle definizioni (6, 15). Invece, per funzioni antisimmetriche (dispari) si può affermare che i contributi a sinistra e a destra di x_0 si eliminano a vicenda solamente per integrali classici, ma non per integrali impropri. Ciò lo si vede chiaramente per la funzione $f(x) = x$, il cui integrale improprio su tutto $\mathbb{R}$ non fa 0; anzi, diverge.

Il seno e il coseno ammettono un controllo banale del tipo $\sin x \leq 1$ e la funzione integranda è positiva per $x \in [0,1]$. Quindi:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x \tag{35}$$

Osservando la (20), vediamo che l'ultimo integrale converge, per cui pure l'integrale di partenza converge.

Criterio di convergenza assoluta

Data una qualsiasi funzione $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo arbitrario anche illimitato, diciamo che tale funzione è *assolutamente integrabile* se e solo se esiste *finito* l'integrale del modulo:

$$\int_I |f(x)| \, \mathrm{d}x \tag{36}$$

Nel caso di integrali impropri, diremo che l'integrale *converge assolutamente.*

Ora, ricordando che continua a valere la proprietà del valore assoluto degli integrali:

$$\int_I f(x) \, \mathrm{d}x \leq \left| \int_I f(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_I |f(x)| \, \mathrm{d}x \tag{37}$$

(disuguaglianza triangolare), possiamo affermare che se l'integrale del modulo converge, allora converge pure il primo membro della catena di disuguaglianze. Detto altrimenti, questo criterio ci dice che la convergenza assoluta (membro di destra) implica la convergenza semplice in senso improprio (membro di sinistra), ma non il viceversa.

Esempio. Si consideri:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} \, \mathrm{d}x \tag{38}$$

La funzione non ammette primitiva in termini di funzioni elementari. In questo caso non possiamo applicare il criterio del confronto perché non si sa che segno abbia il coseno all'infinito (è indefinito). Tuttavia, il criterio di convergenza assoluta ci assicura che esso converge. Infatti, poiché $|\cos x| \leq 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} \, \mathrm{d}x \leq \int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2} \, \mathrm{d}x \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = 1 \tag{39}$$

utilizzando il criterio del confronto solamente nel penultimo step.

Esempio. Si consideri:

$$\int_p^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x \tag{40}$$

con $p > 0$, per semplicità. La funzione non ammette primitiva in termini di funzioni elementari. Come prima, potremmo provare ad utilizzare il criterio di convergenza assoluta unito a quello del confronto ponendo $|\sin x| \leq 1$. Tuttavia, così facendo ci impantaneremmo e non riusciremmo a concludere nulla perché l'integrale del modulo diverge:

$$\int_p^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x \leq \int_p^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \mathrm{d}x \leq \int_p^{+\infty} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \lim_{M \to +\infty} (\ln x)_p^M = +\infty \tag{41}$$

Come fare allora? In questo caso è sufficiente un passaggio preliminare, ovvero partiamo integrando per parti, trattando il seno come un differenziale $\mathrm{d}v$ e $1/x$ come u:

$$\int_p^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = - \frac{\cos x}{x} \bigg|_p^{+\infty} - \int_p^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} \, \mathrm{d}x = \cos(p) - \int_p^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} \, \mathrm{d}x \tag{42}$$

Il primo termine non disturba la convergenza, mentre il secondo converge perché lo abbiamo dimostrato nell'esempio precedente sfruttando il criterio del confronto e della convergenza assoluta. In conclusione, l'integrale iniziale converge.

Più in generale, valgono i seguenti integrali test:

$$\int_p^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \quad \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 0 \\ \text{non converge se } \alpha \leq 0 \end{cases} \tag{43}$$

$$\int_p^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \quad \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 0 \\ \text{non converge se } \alpha \leq 0 \end{cases} \tag{44}$$

Per dimostrarli è sufficiente procedere per parti come fatto in precedenza.

Esempio. Si considerino i seguenti integrali di Fresnel:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{45}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{46}$$

Anche in questo caso gli integrandi non ammettono una primitiva elementare. Tuttavia, è facile dimostrare che essi sono convergenti. Innanzitutto, sfruttiamo la parità della funzione per restringere l'intervallo di integrazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x = 2\left[\int_0^1 \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x\right] \tag{47}$$

Il primo integrale[3] non disturba; per quanto riguarda il secondo, cambiamo variabile come $x^2 = t$ $(\mathrm{d}x = 1/(2\sqrt{t})\,\mathrm{d}t)$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \tag{48}$$

Ma per quanto visto prima, l'esponente del denominatore è $1/2$ ed è maggiore di 0. Quindi l'integrale di partenza converge. Quando farete analisi complessa, in metodi matematici al terzo anno, dimostrerete anche il valore a cui converge. Esso è molto usato nello studio dei fenomeni ottici.

Criterio del confronto asintotico

Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni localmente integrabili tali che $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ per ogni $x \in [a, +\infty)$. Supponiamo inoltre che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \tag{49}$$

Allora valgono le seguenti affermazioni:

- Se $l \in [0, +\infty)$ e l'integrale improprio di $g(x)$ su $[a, +\infty)$ è convergente, allora l'integrale su $f(x)$ converge.
- Se $l \in (0, +\infty)$, allora l'integrale improprio di $f(x)$ su $[a, +\infty)$ è convergente se e solo se l'integrale improprio di $g(x)$ sul medesimo intervallo converge.
- Se $l \in (0, +\infty]$ e l'integrale improprio di $g(x)$ su $[a, +\infty)$ diverge, allora l'integrale su $f(x)$ diverge.

[3] L'aver separato l'integrale in due parti può sembrare inutile, ma così facendo evitiamo che col successivo cambio di variabile il punto $t = 0$ diventi anch'esso critico per il secondo integrale. In ogni caso, separare l'integrale adesso o dopo non cambia il risultato dell'integrale.

Un discorso completamente analogo vale per integrali di seconda specie, nel qual caso il limite è valutato nei punti di singolarità.

Nonostante l'enunciato sembri tanto complicato, molto spesso è questo il criterio decisivo per stabilire la natura di un integrale improprio. Infatti, nei primi due casi, esso ci dice che possiamo trovare una funzione $g(x)$ che sia asintoticamente equivalente alla $f(x)$ e studiare la sua convergenza invece di quella della $f(x)$. Ovviamente, si spera di trovare una funzione asintoticamente equivalente che sia facile da manipolare, e per questo motivo risultano fondamentali gli sviluppi di Taylor che abbiamo studiato finora.

Esempio. Si consideri:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^3+1}} \sin x \, \mathrm{d}x \tag{50}$$

Il punto problematico è chiaramente l'infinito positivo; gli altri sarebbero l'infinito negativo e $x = -1$, ma tali punti non sono compresi nel dominio di integrazione. Pertanto, abbiamo un integrale di prima specie. Ora, per il criterio del confronto asintotico, vediamo che:

$$f(x) \sim g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \tag{51}$$

Dalla tabella degli integrali test (43), notiamo che l'integrale di (51) converge perché la potenza del denominatore è maggiore di 0. Pertanto, pure l'integrale iniziale converge.

Esempio. Dimostrare la convergenza del seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\left(x^2\right)}{\sqrt{|x|}} \, \mathrm{d}x \tag{52}$$

Andiamo a studiare i punti problematici, che sono $x = 0$ e l'infinito (la funzione è pari, quindi risultati analoghi valgono per valori negativi). In $x = 0$, studiare la convergenza dell'integrale è equivalente a studiare la convergenza di

$$\int_0^p \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x \tag{53}$$

con $p > 0$. Infatti, $\cos\left(x^2\right) \sim 1$ al primo ordine. Poiché l'esponente del denominatore è $1/2$ ed è minore di 1, allora l'integrale con estremo di integrazione in 0 converge.

All'infinito, invece, risulta più conveniente cambiare variabile come $x^2 = t$ ($\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/(2\sqrt{t})$). Così facendo, è sufficiente studiare la convergenza di

$$\int_p^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{4}}} \, \mathrm{d}t \tag{54}$$

Come nell'esercizio precedente, siccome $3/4 > 0$, allora l'integrale converge.

Complessivamente, l'intero integrale converge.

Esempio. Si consideri:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2 + x} \, \mathrm{d}x \tag{55}$$

I problemi sono in 0 e all'infinito. Dividiamo quindi l'integrale in due parti:

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^2 + x} \, \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2 + x} \, \mathrm{d}x \tag{56}$$

Per quanto riguarda il primo, abbiamo che

$$f(x) \sim g(x) = 1 \tag{57}$$

e il corrispondente integrale fra 0 e 1 converge sicuramente. Per quanto riguarda il secondo, invece, abbiamo che all'infinito:

$$f(x) \sim g(x) = \frac{\pi}{2x^2} \tag{58}$$

Anche in questo caso l'integrale converge. Quindi converge tutto l'integrale di partenza.

Esempio. Si consideri:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 + x^2 - 2}} \, \mathrm{d}x \tag{59}$$

I punti problematici sono $x = 1$, zero del denominatore (visibile con Ruffini; gli altri due sono complessi) e l'infinito. Quindi separiamo:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^3 + x^2 - 2}} \, \mathrm{d}x + \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 + x^2 - 2}} \, \mathrm{d}x \tag{60}$$

Nell'intorno di 1, conviene cambiare variabile come $x - 1 = t$:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3 + 4t^2 + 5t}} \, \mathrm{d}t \tag{61}$$

cosicché il punto critico diventa $t = 0$. Ora, in 0 la funzione integranda si comporta come:

$$f(t) \sim g(t) = \frac{1}{\sqrt{5t}} \tag{62}$$

Il suo integrale è del tipo $1/\sqrt{t}$, pertanto esso converge. Per quanto riguarda il secondo, all'infinito domina la potenza maggiore e quindi:

$$f(x) \sim g(x) = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \tag{63}$$

Anche in questo caso converge, e dunque converge tutto l'integrale iniziale.

Esempio. Si consideri l'integrale:

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln x} \sqrt{\frac{x}{x-2}} \, \mathrm{d}x \tag{64}$$

Osservando l'integrando, vediamo che i punti critici per l'integrabilità secondo Riemann sono $x = 2$, dove la funzione diverge, e l'infinito positivo (gli altri punti critici sono esterni al dominio di integrazione e quindi non ci interessano). Dunque, innanzitutto, spezziamo l'integrale in due parti:

$$\int_2^3 \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln x} \sqrt{\frac{x}{x-2}} \, \mathrm{d}x + \int_3^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln x} \sqrt{\frac{x}{x-2}} \, \mathrm{d}x \tag{65}$$

dove il primo è un integrale di seconda specie e il secondo è un integrale di prima specie. Studiamo il primo. Il punto problematico è ovviamente $x = 2$; in un suo intorno le funzioni sono tutte positive e in particolare l'integrando ammette il seguente sviluppo asintotico:

$$f(x) \sim g(x) = \frac{\sin(0.5)}{\ln 2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}} \tag{66}$$

Al di là del fattore moltiplicativo, è chiaro che l'integrale di $g(x)$ è del tipo:

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t \tag{67}$$

e poiché l'esponente del denominatore è < 1, allora il primo integrale nella (65) converge. Per quanto riguarda il secondo integrale, invece, notiamo che all'infinito la funzione si comporta come:

$$f(x) \sim g(x) = \frac{1}{x \ln x} \tag{68}$$

Ma l'integrale di questa $g(x)$ non è convergente:

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} \, \mathrm{d}x = \lim_{M \to +\infty} \Big[\ln |\ln x| \Big]_3^M = +\infty \tag{69}$$

Di conseguenza, l'integrale improprio di prima specie (il secondo integrale) diverge. In conclusione, l'intero integrale di partenza diverge.

Esempio. Studiamo il carattere del seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|^\alpha}{\sqrt{1+x^2}} \cos\left(\frac{x}{x+1}\right) \mathrm{d}x \tag{70}$$

al varie del parametro reale α. I punti problematici che potrebbero comprometterne la convergenza sono $x = 0$, $x = -1$ e $x = \pm\infty$. Pertanto, dobbiamo separare l'integrale in più parti avendo cura di isolare tali punti in ciascun pezzo, ovvero:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \underbrace{\int_{-\infty}^{-2}}_{1} + \underbrace{\int_{-2}^{-1}}_{2} + \underbrace{\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}}_{3} + \underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{0}}_{4} + \underbrace{\int_{0}^{1}}_{5} + \underbrace{\int_{1}^{+\infty}}_{6} \tag{71}$$

Ora, soffermiamoci sui numeri 3, 5 e 6, rispettivamente.

- In un intorno destro di $x = -1$, la prima frazione che compone l'integrando si comporta al prim'ordine come una costante, $1/\sqrt{2}$. Invece, il coseno non ammette uno sviluppo di Taylor perché il suo argomento tenderebbe a $-\infty$ per $x \to -1^+$; perciò siamo costretti a lasciarlo così com'è. Dunque, per studiare la convergenza dell'integrale 3 è equivalente studiare:

  $$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{x}{x+1}\right) \mathrm{d}x \tag{72}$$

  Tuttavia, il coseno è superiormente limitato da 1, quindi:

  $$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{x}{x+1}\right) \mathrm{d}x \leq \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \tag{73}$$

  Siccome il secondo integrale converge, per il criterio del confronto anche il primo converge, e di conseguenza pure il 3, per qualsiasi valore di α.

- In un intorno destro di $x = 0$, sia la radice che il coseno si comportano come 1 (costante), pertanto a ridosso di tale punto è equivalente studiare il comportamento di

  $$\int_0^1 |x|^\alpha \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{|x|^{-\alpha}} \, \mathrm{d}x \tag{74}$$

  Inoltre, essendo nel semipiano positivo il modulo non ha alcun effetto tangibile. Dunque tale integrale, e di conseguenza il 5, converge solamente se $-\alpha < 1$, cioè $\alpha > -1$.

- All'infinito positivo la funzione integranda è asintoticamente equivalente a

$$\cos(1)\,|x|^{\alpha-1} \tag{75}$$

poiché la radice si comporta come $|x|$, mentre il coseno come $\cos(1)$. Quindi possiamo studiare in sostituzione il seguente integrale improprio:

$$\int_1^{+\infty} |x|^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x \tag{76}$$

il quale converge per $1-\alpha>1$. Pertanto, l'integrale 6 converge per $\alpha<0$.

Argomentazioni analoghe valgono per i restanti integrali 1, 2 e 4. Infatti, all'infinito negativo il comportamento dell'integrando è identico al caso $+\infty$ perché la prima parte della funzione è pari, mentre l'argomento del coseno tende comunque ad 1. Per quanto riguarda i punti $x=-1$ e $x=0$, invece, è sufficiente notare che fare il limite dell'integrando da destra o da sinistra è indifferente, poiché quello che al massimo può variare è il segno dell'argomento del coseno, che però è pari ($\cos(-t)=\cos t$).

In conclusione, affinché l'integrale di partenza converga è necessario che convergano *tutti* e sei gli integrali costituenti, cioè per $-1<\alpha<0$.

Altri esempi vari

Esempio.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-x^2+10x}\,\mathrm{d}x \tag{77}$$

(Hint: $-x^2+10x \le -\frac{x^2}{2}$, per $x\le 0$ e $x\ge 20$)

Esempio.

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x \tag{78}$$

$$J=\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x}\,\mathrm{d}x \tag{79}$$

(Hint: $I+J=+\infty$, $I-J=\text{cost.}$)

Esempio.

$$\int_0^2 \frac{1}{|x^2-1|^\alpha}\,\mathrm{d}x \tag{80}$$

Esempio.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{|x-1|}\sqrt{|x-2|}x^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}x \tag{81}$$