Matematica

Alessandro Ausili Popa

15 Giugno 2023

Contents

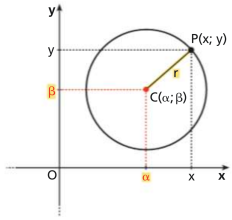
1 Circonferenza

1.1 Circonferenza e sua equazione

1.1.1 Equazione della circonferenza

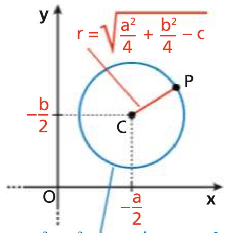
L'equazione della circonferenza è $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^{=}r^2$.
Se poniamo $a = -2\alpha$, $b = -2\beta$, $c = \alpha^2+\beta^2-r^2$, l'equazione diventa:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

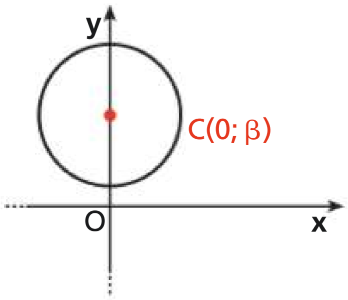


1.1.2 Dall'equazione al grafico

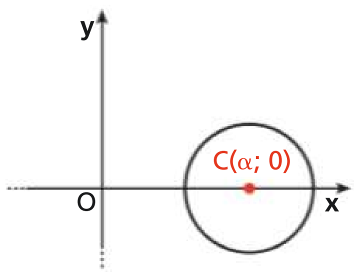
Coordinate del centro e misura del raggio: Il centro C ha coordinate $-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}$. Il raggio è dato dall'equazione $r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$ e ciò vale solo se la condizione di realtà è $c\geq 0$



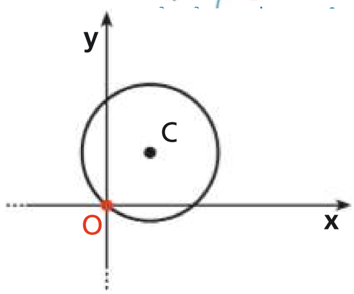
Casi particolari



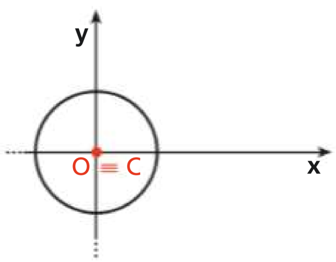
Se $a=0$, allora $\alpha=0$, quindi $C(0;\beta)$: **il centro appartiene all'asse y**



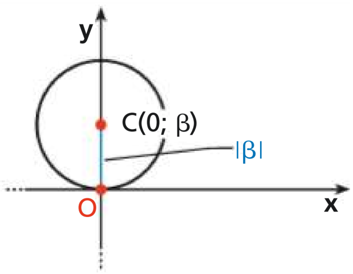
Se $b=0$, allora $\beta=0$, quindi $C(\alpha;0)$: **il centro appartiene all'asse x**



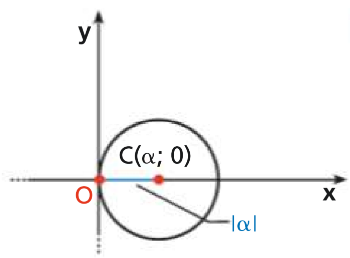
Se $c=0$, le coordinate di $O(0;0)$ verificano l'equazione quindi: **la circonferenza passa per l'origine**



Se $a=b=0$, allora $\alpha=\beta=0$, quindi $C(0;0)$. **La circonferenza ha il centro nell'origine**



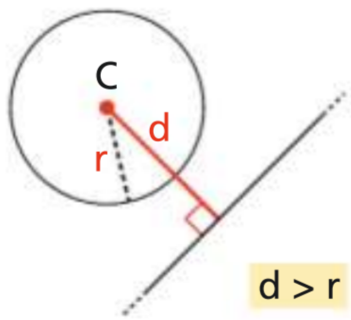
La circonferenza ha centro sull'asse y e passa per l'origine. Il raggio misura $r=\sqrt{\beta^2}=|\beta|$



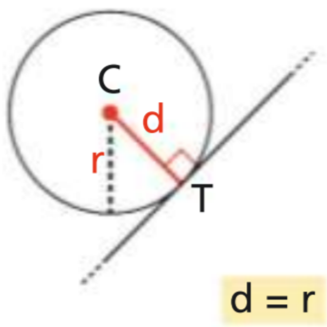
La circonferenza ha centro sull'asse x e passa per l'origine. Il raggio misura $r=\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$

1.2 Rette e Circonferenze

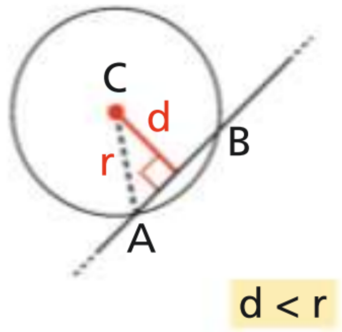
1.2.1 La posizione di una retta rispetto a una circonferenza



Se $d > 0$, la retta è esterna alla circonferenza: retta e circonferenza non hanno punti in comune.



Se $d = 0$, la retta è tangente alla circonferenza: retta e circonferenza hanno un punto in comune.



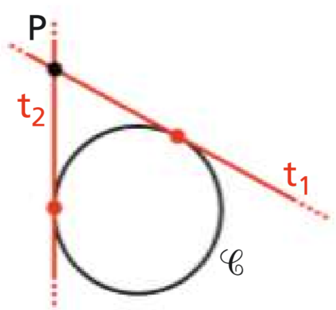
Se $d < 0$, la retta è secante alla circonferenza: retta e circonferenza hanno 2 punti in comune.

Se studiamo la posizione dell'equazione di una circonferenza e quella di una retta otteniamo un'equazione di secondo grado detta **equazione risolvente**.
Studiamo il segno del discriminante Δ dell'equazione risolvente e otteniamo 3 casi:

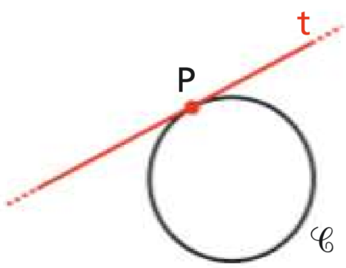
- $\Delta < 0$, il sistema non ha soluzioni reali: **la retta è secante**.
- $\Delta = 0$, il sistema ha una soluzione: **la retta è tangente**.
- $\Delta > 0$, il sistema ha due soluzioni: **la retta è tangente**.

1.2.2 Rette tangenti ad una circonferenza

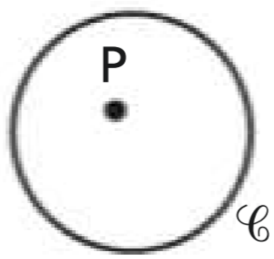
Dati un punto P e una circonferenza ξ, si possono presentare 3 casi:



P è esterno a ξ



$P \in \xi$



P interno a ξ

Nel secondo e nel terzo caso per determinare l'equazione delle rette tangenti, è possibile seguire due metodi:

- **Primo metodo:** $\Delta = 0$
  - Scriviamo un sistema con l'equazione del fascio di rette passanti per $P(x_0; y_0)$, e l'equazione della circonferenza.

$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{cases} \tag{1}$$

  - Ricaviamo y nella prima equazione e sostituiamo nella seconda, ottenendo un'equazione di secondo grado nella variabile x i cui coefficienti sono funzioni del parametro m.

- Poniamo la condizione di tangenza $\Delta = 0$, perchè, se la retta per P è tangente alla circonferenza, è necessario che l'equazione risolvente il sistema abbia due soluzioni coincidenti.
- Risolviamo l'equazione nell'incognita m, che può essere di primo o di secondo grado.
  * Se P è esterno alla c irconferenza, le rette tangenti sono due, quindi dovremmo ottenere due soluzioni $m_1 \neq m_2$. Se otteniamo un solo valore m, la seconda retta tangente è parallela all'asse y e ha equazione $x = x_0$.
  * Se P appartiene alla circonferenza, la retta tangente è una sola e si ha $m_1 = m_2$.

- **Secondo metodo:distanza retta-centro uguale al raggio**
  - Determiniamo le coordinate del centro C e il raggio r della circonferenza.
  - Scriviamo l'equazione del fascio proprio di rette passanti per il punto $P(x_0 : y_0), y - y_0 = m(x - x_0)$, in forma implicita: $mx - y + y_0 - mx_0 = 0$.
  - Applichiamo la formula della distanza di un punto da una retta per esprimere la distanza dal centro C da una generica retta del fascio.
  - Poniamo tale distanza uguale al raggio e risolviamo l'equazione in m
  - Sostituiamo il valore o i valori di m trovati nell'equazione del fascio di rette.

- **Terzo metodo: retta tangente in P come perpendicolare al raccio PC**
  - Determiniamo le coordinate del centro C della circonferenza
  - Troviamo il coefficiente angolare m della retta passante per $P(x_0; y_0$ e per C.
  - Calcoliamo il coefficiente angolare $m' = -\frac{1}{m}$ della retta perpendicolare a r.
  - La retta è perpendicolare al diametro passante per P, quindi ha equazione $y - y_0 = m'(x - x_0)$.

- **Quarto metodo: formule di sdoppiamento**
  - Scriviamo l'equazione della circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.
  - Se P ha coordinate $(x_0; y_0)$, eseguiamo le sostituzioni

$$x^2 \to xx_0, y^2 \to yy_0, x \to \frac{x + x_0}{2}, y \to \frac{y + y_0}{2}.$$

  - Si può dimostrare che l'equazione della retta tangente in P è:

$$xx_0 + yy_0 + a\frac{x + x_0}{2} + b\frac{y + y_0}{2} + c = 0.$$

1.3 Determinare l'equazione di una circonferenza

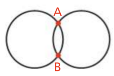
Si ha come centro C(4;3) e P(1;2). Ora mettiamo le coordinate nell'equazione della circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} = 4 & \text{ascissa di C} \\ -\frac{b}{2} = 3 & \text{ordinata di C} \\ 1^2 + 2^2 + a \cdot + b \cdot + c = -5 & \text{passaggio per P(1;2)} \end{cases} \tag{2}$$

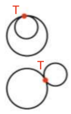
$$\begin{cases} a = -8 \\ b = -6 \\ a + 2b + c = -5 \end{cases} \to \begin{cases} a = -8 \\ b = -6 \\ -8 - 12 + c = -5 \end{cases} \to \begin{cases} a = -8 \\ b = -6 \\ c = 15 \end{cases} \tag{3}$$

1.4 Posizione di due circonferenze

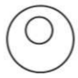
Due circonferenze possono avere le seguenti posizioni reciproche.



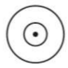
Circonferenze secanti



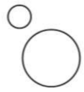
Circonferenze tangenti



Circonferenze una interna all'altra



Circonferenze concentriche



Circonferenze esterne

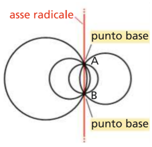
1.5 Fasci di circonferenze

1.5.1 Come generare un fascio di circonferenze

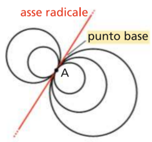
Definizione: Date due circonferenze ξ e ξ', rispettivamente di equazioni
$x^2 + y^2 + ax + by + c =$ e $x^2 + y^2 + a'x + b'x + c'0$,
si chiama **fascio di circonferenze** definito da ξ e ξ' l'insieme costituito dalla ciconferenza ξ' e da tutte le circonferenze rappresentate dall'equazione:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c + k(x^2 + y^2 + a'x + b'x + c') = 0$$

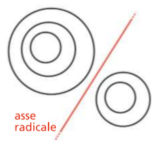
con $k \in \mathbb{R}$
ξ e ξ' si dicono **generatrici del fascio**.



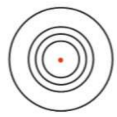
Fascio di circonferenze per due punti



Fascio di circonferenze per un punto



Fascio di circonferenze senza punti comuni



Fascio di circonferenze concentriche

1.5.2 Studio di un fascio di circonferenze

Per **studiare un fascio di circonferenze** occorre trovare:

a. centro e raggio in funzione di k;

b. le due generatrici;

c. gli eventuali punti base;

d. l'asse radicale e l'asse centrale;

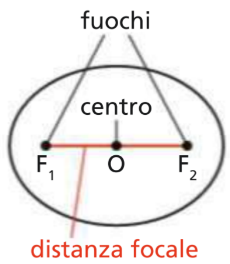
e. eventuali circonferenze degeneri.

Una **circonferenza degenere** può essere una (una circonferenza di raggio infinitamente grande) oppure un punto (circonferenza di raggio nullo).

2 Ellisse

2.1 Ellisse come luogo geometrico

F_1 e F_2 sono i fuochi.
Il punto medio del segmento F_1F_2 è il **centro** dell'ellisse.
Indichiamo con:



- $2c$ la distanza tra F_1 e F_2, detta **distanza focale**.
- $2a$ la somma costante delle distanze dei punti dell'ellisse dai fuochi.

2.2 Equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse x e sull'asse y

L'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse x e sull'asse y è:

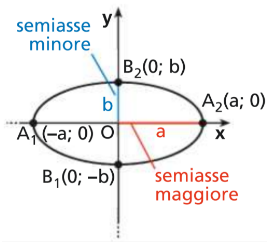
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Per capire se i fuochi sono sull'asse x o sull'asse y, basta guardare a e b.

- se $a > b$ allora i fuochi sono sull'asse x
- se $a < b$ allora i fuochi sono sull'asse y

2.2.1 Vertici e Assi

I punti A_1, A_2, B_1, B_2 sono i **vertici** dell'ellisse. I segmenti A_1, A_2 e B_1, B_2 sono gli **assi** dell'ellisse.
La distanza $\overline{A_1A_2}$ vale 2a.
La distanza $\overline{B_1B_2}$ vale 2b.
Il segmento A_1A_2 è detto **asse maggiore**, quello B_1, B_2 è detto **asse minore**.



2.2.2 Coordinate dei fuochi

L'ellisse ha i fuochi sull'asse x allora vale l'uguaglianza $c^2 = a^2 - b^2$ e di conseguenza si ottiene:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

quindi

$$F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}; 0), F_2(\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$$

Se invece l'ellisse ha i fuochi sull'asse x allora vale l'uguaglianza $c^2 = b^2 - a^2$ e di conseguenza si ottiene:

$$c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

quindi

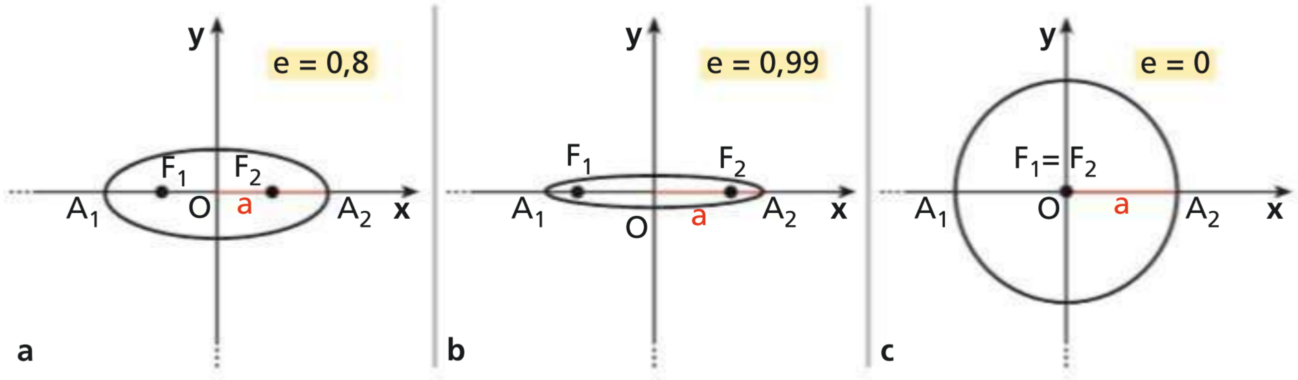
$$F_1(0; -\sqrt{b^2 - a^2}), F_2(0; \sqrt{b^2 - a^2})$$

2.2.3 Eccentricità

L'eccentricità viene indicato con la lettera e e sta ad indicare: $e = \frac{distanza\ \ focale}{lunghezza\ \ dell'asse\ \ maggiore}$

- Se i fuochi sono sull'asse x: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$
- Se i fuochi sono sull'asse y: $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$

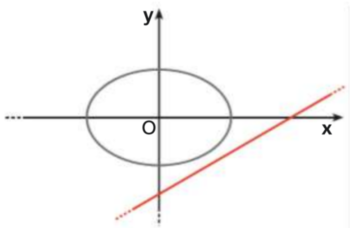
Poiché la distanza focale è minore dell'asse maggiore $0 \leq e < 1$.



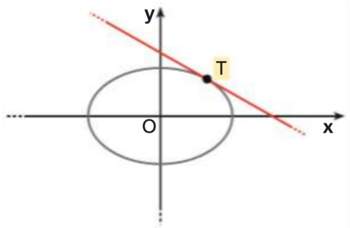
2.3 Ellissi e rette

2.3.1 Posizione di una retta rispetto ad un ellisse

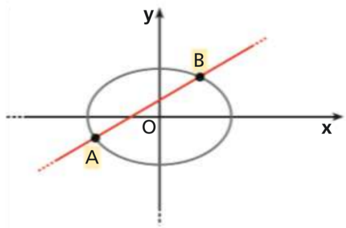
Si comincia studiando il segno del discriminante Δ e otteniamo 3 casi:



$\Delta < 0$ La retta è **esterna** all'ellisse. Non ci sono intersezioni.



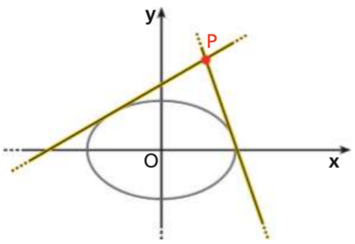
$\Delta = 0$ La retta è **tangente** all'ellisse. C'è un'intersezione = punto di tangenza.



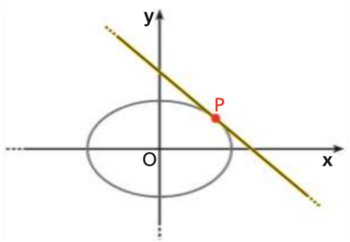
$\Delta > 0$ La retta è **secante** all'ellisse. Ci sono due intersezioni.

2.3.2 Tangenti a un ellisse

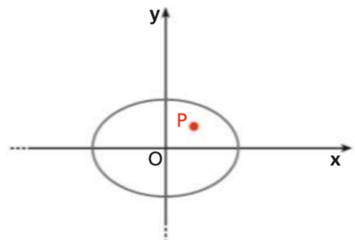
Le rette tangenti per un punto P rispetto all'ellisse possono essere 2, 1 o nessuna:



P è esterno all'ellisse: esistono due rette tangenti per P.



P appartiene all'ellisse: esiste una retta tangente per P.



P è interno all'ellisse: non esistono rette tangenti per P.

Per determinare le equazioni delle eventuali rette tangenti all'ellisse dobbiamo porre $\Delta = 0$.

2.3.3 Formula di sdoppiamento

La formula di sdoppiamento per un ellisse è:

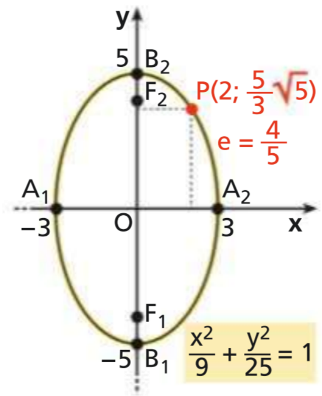
$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2 = 1}$$

2.4 Determinare l'equazione di un'ellisse

Determiniamo l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse y che passa per il punto $P(2; \frac{5}{3}\sqrt{5})$ e ha eccentricità $\frac{4}{5}$:

$$\frac{4}{a^2} + \frac{125}{9b^2} = 1 \rightarrow e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \rightarrow \begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{125}{9b^2} = 1 \\ \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b} = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{125}{9b^2} = 1 \\ \frac{b^2-a^2}{b^2} = \frac{16}{25} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{125}{9b^2} = 1 \\ a^2 = b^2 - \frac{16}{25}b^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{100}{9b^2} + \frac{125}{9b^2} = 1 \\ a^2 = \frac{9}{25}b^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9b^2 = 125 \\ a^2 = \frac{9}{25}b^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 25 \end{cases}$$

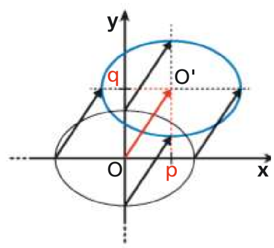


2.5 Ellisse e trasformazioni geometriche

2.5.1 Ellisse traslata

L'equazione dell'ellisse traslata è possibile scriverla così:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$



Il centro O' ha come coordinate $(p; q)$. Sostituendo si può trovare l'equazione:

$$a'x^2 + b'y^2 + c'x + d'y + e = 0$$

2.5.2 Ellisse come dilatazione della circonferenza

Consideriamo la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ e la dilatazione di equazioni:

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{x'}{a} \\ y = \frac{y'}{b} \end{cases}$$

Sostituiamo $x^2 + y^2 = 1$, eliminando gli apici:

$$(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

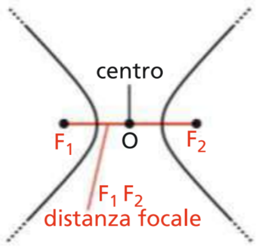
Area racchiusa da un'ellisse: la sua equazione è

$$S = \pi ab$$

3 Iperbole

3.1 Iperbole come luogo geometrico

F_1 e F_2 sono i fuochi.
Il punto medio del segmento F_1F_2 è il **centro** dell'iperbole.
Indichiamo con:



- $2c$ la distanza tra F_1 e F_2, detta **distanza focale**.
- $2a$ la somma costante delle distanze dei punti dell'ellisse dai fuochi.
- a e c sono costanti e positivi

3.2 Equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x e sull'asse y

L'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x è:

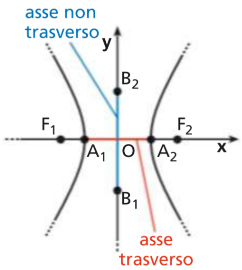
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Mentre quella sull'asse y è:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

3.2.1 Vertici e Assi

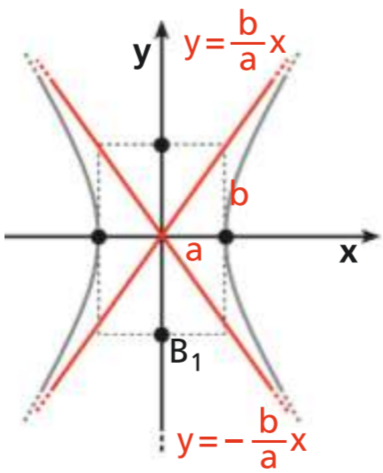
L'asse y è l'asse trasverso e i **vertici reali** sono i punti $B_1(0; -b)$ e $B_2(0; b)$ sono i **vertici** dell'iperbole.
L'asse x non è l'asse trasverso e i **vertici non reali** sono i punti $A_1(-a; 0)$ e $A_2(a; 0)$ sono i **vertici** dell'iperbole.



3.2.2 Asintoti dell'iperbole

L'equazione degli asintoti sono:

$$y = \frac{b}{a}x \bigvee y = -\frac{b}{a}x$$



3.2.3 Coordinate dei fuochi

Le coordinate dei fuochi sull'asse x dell'iperbole sono:

$$F_1(-\sqrt{a^2+b^2};0), \qquad F_1(\sqrt{a^2+b^2};0)$$

Mentre le coordinate dei fuochi sull'asse y dell'iperbole sono:

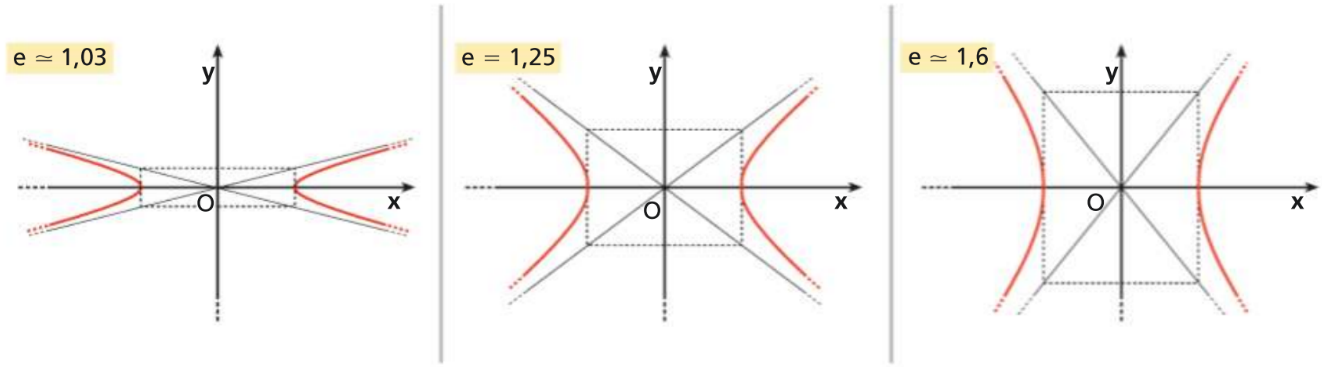
$$F_1(0;-\sqrt{a^2+b^2}), \qquad F_1(0;\sqrt{a^2+b^2})$$

3.2.4 Eccentricità

L'eccentricità viene indicato con la lettera e e sta ad indicare: $e = \frac{distanza\ \ focale}{lunghezza\ \ dell'asse\ \ trasverso}$

- Se i fuochi sono sull'asse x: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$
- Se i fuochi sono sull'asse y: $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2+a^2}}{b}$

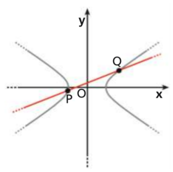
$e > 1$.



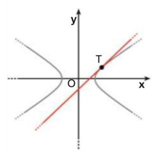
3.3 Iperboli e rette

3.3.1 Posizione di una retta rispetto ad un'iperbole

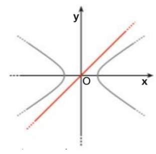
Si comincia studiando il segno del discriminante Δ e otteniamo 3 casi:



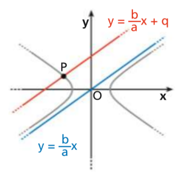
$\Delta > 0$ La retta è **secante** all'iperbole. Ci sono due intersezioni.



$\Delta = 0$ La retta non è parallela agli asintoti, è **tangente** all'iperbole. C'è un'intersezione = punto di tangenza.



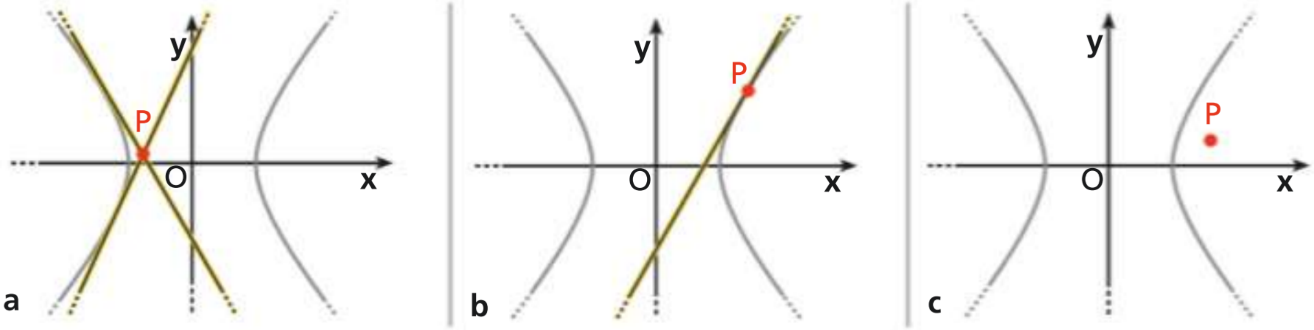
$\Delta < 0$ La retta è **esterna** all'iperbole. Non ci sono intersezioni.



La retta è **parallela all'asintoto** dell'iperbole. La retta è **secante** anche se il punto di intersezione è unico.

3.3.2 Tangenti a un iperbole

Per trovare eventuali equazioni della tangente rispetto ad un punto $P(x_0; y_0)$ all'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dobbiamo porre $\Delta = 0$ e a seconda della posizione di P otteniamo:



3.3.3 Formula di sdoppiamento

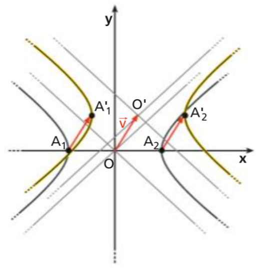
La formula di sdoppiamento di un'iperbole è:

$$\frac{x^2 x_0}{a^2} - \frac{y^2 y_0}{b^2} = 1 \qquad se \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2 x_0}{a^2} - \frac{y^2 y_0}{b^2} = -1 \qquad se \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

3.4 Iperbole traslata

L'equazione dell'ellisse traslata è possibile scriverla così:



$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \quad Fuochi \quad sull'asse \quad x$$

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = -1 \quad Fuochi \quad sull'asse \quad y$$

Sostituendo si può trovare l'equazione:

$$a'x^2 + b'y^2 + c'x + d'y + e = 0$$

3.5 Iperbole equilatera

3.5.1 Riferita agli assi di simmetria

Se i fuochi sono sull'asse x l'equazione diventa:

$$x^2 - y^2 = a^2$$

Se i fuochi sono sull'asse y l'equazione diventa:

$$x^2 - y^2 = -a^2$$

Mentre le equazioni degli asintoti diventano

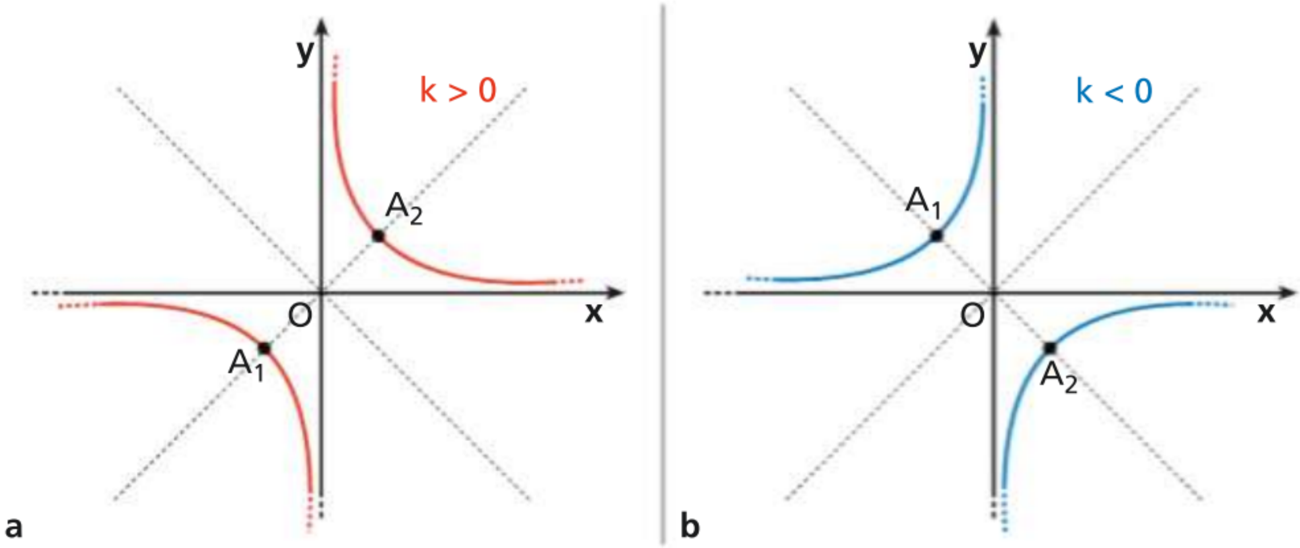
$$y = x \quad e \quad y = -x$$

E l'eccentricità diventa:

$$e = \sqrt{2}$$

3.5.2 Riferita agli asintoti

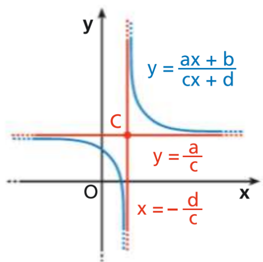
La sua equazione è: $xy = k$



3.5.3 Funzione omografica

La curva ha equazione:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$



Le equazioni degli **asintoti** sono:

$$x = -\frac{d}{c} \quad e \quad y = \frac{a}{c}$$

Mentre le coordinate del centro di simmetria sono:

$$C\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$$

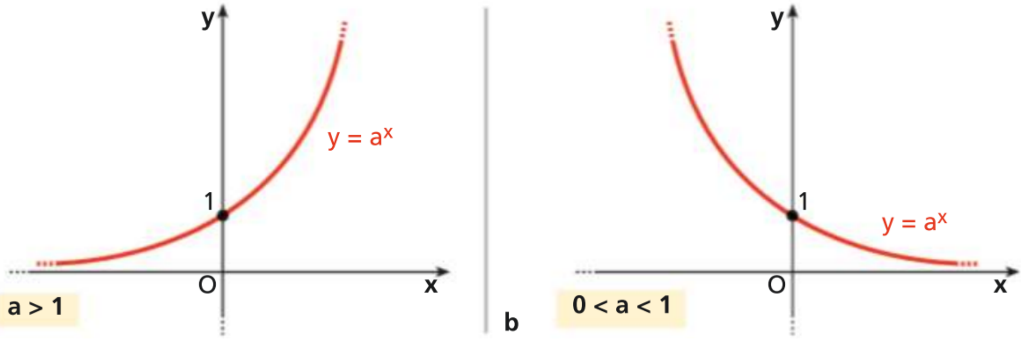
4 Esponenziali

Le regole degli esponenti valgono per qualsiasi esponenziale

4.1 Funzione esponenziale

Si chiama funzione esponenziale ogni funzione del tipo:

$$y = a^x, \quad con \quad a \in \mathbb{R}$$



4.1.1 Funzioni del tipo $y = [f(x)]^{g(x)}$

Ci possono essere 3 casi:

- $y = a^{f(x)}$: esiste in tutto il dominio $f(x)$, se e solo se $a > 0$.
- $y = [f(x)]^a$: esiste per $f(x) \geq 0$ se $a \in \mathbb{R}^+$, per $f(x) > 0$, se $a \in \mathbb{R}^-$.
- $y = [f(x)]^{g(x)}$: esiste nel dominio di g(x) se e solo se $f(x) > 0$.

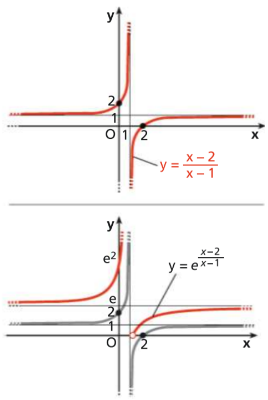
4.1.2 Funzioni con base e

Nelle funzioni $y = e^{f(x)}$ partiamo dalla funzione $y = f(x)$. Teniamo conto anche di 3 casi:

- se l'esponente $x \to -\infty$ $\qquad e^x \to 0$;
- se l'esponente $x \to +\infty$ $\qquad e^x \to +\infty$;
- se l'esponente $x = 0$ $\qquad e^x \to 1$;

Prendiamo in considerazione $y = \frac{x-2}{x-1}$.

Per disegnare il grafico $y = e^{\frac{x-2}{x-1}}$ osserviamo che:



- l'esponente $\frac{x-2}{x-1} \to -\infty$ per $x \to 1^+$ e quindi $e^{\frac{x-2}{x-1}} \to 0$.
- l'esponente $\frac{x-2}{x-1} \to +\infty$ per $x \to 1^-$ e quindi $e^{\frac{x-2}{x-1}} \to +\infty$.
- l'esponente $\frac{x-2}{x-1} = 0$ per $x = 2$ e quindi $e^{\frac{x-2}{x-1}} = 1$.

Notiamo come sempre $e^x > x$ si ha anche $y = e^{f(x)} > y = f(x)$.

4.2 Equazioni esponenziali

Consideriamo l'equazione esponenziale:

$$a^x = b, \quad con \quad a > 0$$

Per risolvere $a^x = b$ distinguiamo due casi:

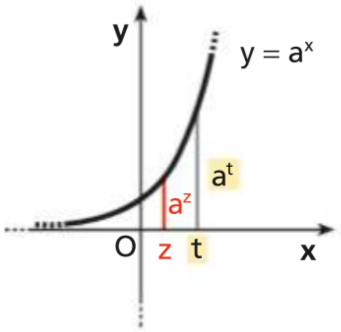
- Se $b \leq 0$ l'equazione $a^x = b$ è *impossibile*, perché a^x non è mai negativo o nullo.
- Se $b > 0$ l'equazione $a^x = b$ ha sempre una e una sola soluzione.

Esempio: $25^x = 125 \to (5^2)^x = 5^3 \to 5^{2x} = 5^3 \to 2x = 3 \to x = \frac{3}{2}$

4.3 Disequazioni esponenziali

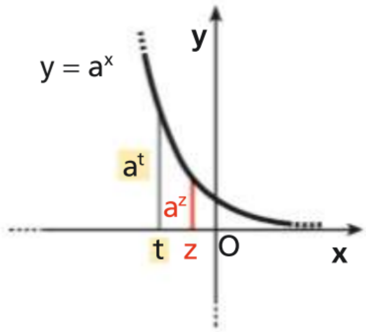
se $a > 1$:

$\boxed{a^t > a^z \quad \leftrightarrow \quad t > z;}$



se $0 < a < 1$:

$\boxed{a^t > a^z \quad \leftrightarrow \quad t < z.}$



Esempio: $32^x > 128 \rightarrow (2^5)^x > 2^7 \rightarrow 2^{5x} = 2^7 \rightarrow 5x > 7 \rightarrow x > \frac{7}{5}$

5 Logaritmi

Il significato di un logaritmo tipo $\log_a 1 = 0$ è perché $a^0 = 1$, di conseguenza:

$$\log_a b = c \longleftrightarrow a^c = b$$

Infine otteniamo queste 3 regole dei logaritmi:

$$\log_a a = 1 \longleftrightarrow a^1 = a$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$x = y \longleftrightarrow \log_a x = \log_a y$$

5.1 Proprietà dei logaritmi

Logaritmo di un prodotto: $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ con $b > 0, c > 0$

Logaritmo di un quoziente: $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ con $b > 0, c > 0$

Logaritmo di una potenza: $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$ con $b > 0, n \in \mathbb{R}$

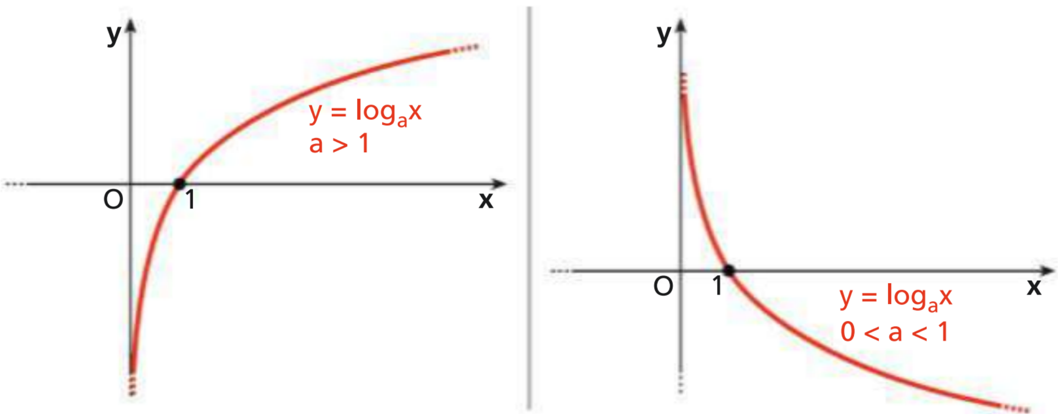
Logaritmo di una radice: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$ con $b > 0$

5.1.1 Cambiamento della base

La formula del cambiamento di base è:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c b}$$

5.2 Funzione logaritmica



5.3 Equazioni logaritmiche

Un'**equazione logaritmica** ha l'incognita che compare nell'argomento di almeno un logaritmo

$$\log_a A(x) = \log_a B(x)$$

Esempio:
$\log x + \log(x+3) = \log 2 + \log(2x+3)$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + 3 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -3 \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow x > 0 \quad cioè \quad C.E.: x > 0$$

$\log[x(x+3)] = \log[2(2x+3)]$
$x(x+3) = 2(2x+3) \rightarrow x^2 + 3x = 4x + 6^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x_1 = -2, x_2 = 3$

Esempio:

$(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x - 3 = 0 \rightarrow$ Poniamo $\log_3 x = t$ e sostituiamo:
$t^2 - 2t - 3 = 0 \rightarrow t = 1 \pm \sqrt{1+3} \rightarrow t_1 = 3, t_2 = -1$
$\log_3 x = -1 \rightarrow x_1 = \frac{1}{3}, \log_3 x = 3 \rightarrow x_2 = 27$

5.4 Disequazioni logaritmiche

$$\log_a A(x) < \log_a B(x)$$

Esempio:$\log_5 x - 1 < 2$. Può essere riscritto
$\log_5 x - 1 < \log_5 25$

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-1<25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<26 \end{cases}$$

Le soluzioni sono $1 < x < 26$

Esempio: $\log_{\frac{1}{3}} x - 4 > \log_{\frac{1}{3}} 5x$

$$\begin{cases} x-4>0 \\ 5x>0 \\ x-4<5x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>4 \\ x>0 \\ -4x<4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>4 \\ x>0 \\ x>-1 \end{cases} \rightarrow x>4$$

5.5 Logaritmi ed equazioni e disequazioni esponenziali

5.5.1 Equazioni esponenziali risolubili con i logaritmi

Esempio: $7 \cdot 5^{2x} = 3^{x+1}$

$\log(7 \cdot 5^{2x}) = \log 3^{x+1} \rightarrow \log 7 + 2x \log 5 = (x+1)\log 3$

$2x \log 5 - x \log 3 = \log 3 - \log 7 \rightarrow x(2\log 5 - \log 3) = \log 3 - \log 7 \rightarrow x = \frac{\log 3 - \log 7}{2\log 5 - \log 3}$

5.5.2 Disequazioni esponenziali risolubili con i logaritmi

Esempio: $3 \cdot 2^x > 4 \cdot 3^{(x+1)}$

$3 \cdot 2^x > 4 \cdot 3^x \cdot 3 \rightarrow 2^x > 4 \cdot 3^x \rightarrow \log 2^x > \log(4 \cdot 3^x)$

$x \log 2 > \log 4 + x \log 3 \rightarrow x(\log 2 - \log 3) > \log 4 \rightarrow x < \frac{\log 4}{\log 2 - \log 3}$

6 Funzioni goniometriche

6.1 Misura degli angoli in gradi e radianti

I **gradi** vanno da 0° fino a 360°
I **radianti** vanno da 0 fino a $2\pi(360)$
Si può passare dai gradi ai radianti con una semplice proporzione:

- α_{gradi} = radianti $\cdot \frac{180}{\pi}$ =gradi
- $\alpha_{radianti}$ = gradi $\cdot \frac{\pi}{180}$ =radianti

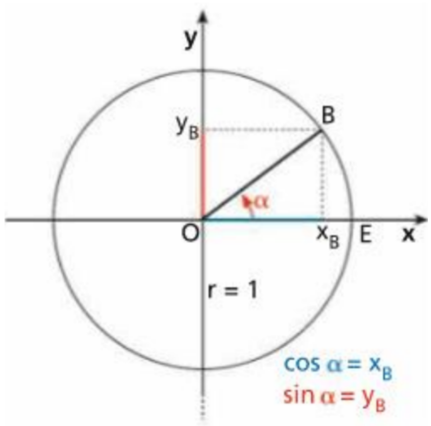
Lunghezza di un arco di circonferenza: $l = \alpha r$

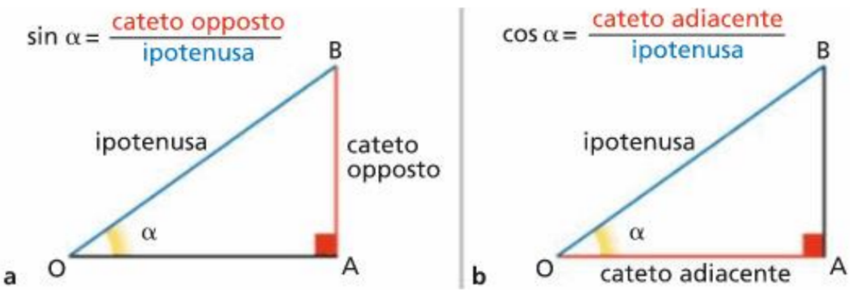
Area del settore circolare: $\frac{1}{2} l r$

6.1.1 Angoli orientati

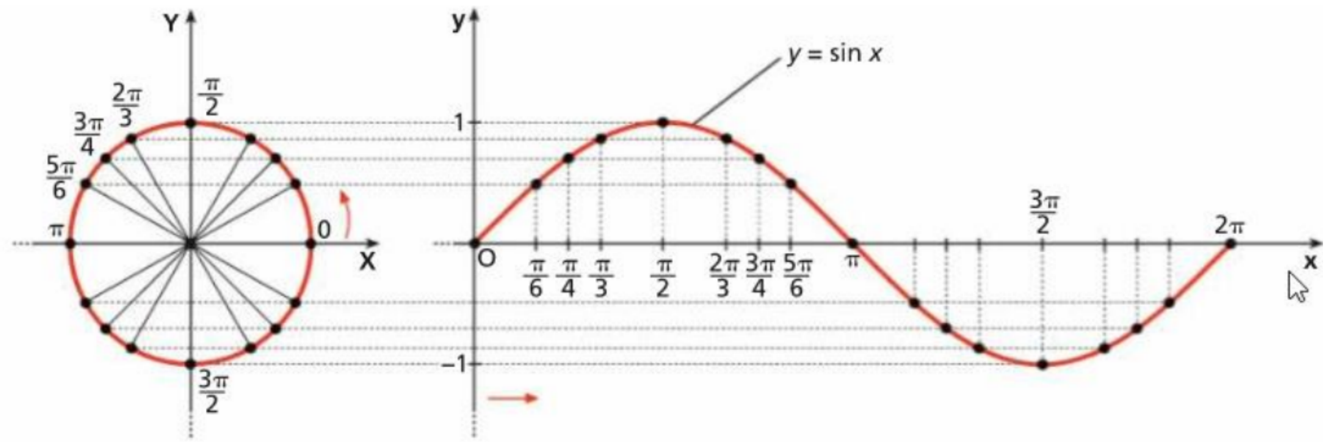
Si può indicare una circonferenza in un piano cartesiano con origine in O. Un angolo è positivo se parte dal primo quadrante e fa giri in senso antiorario. In senso orario se è un angolo negativo.

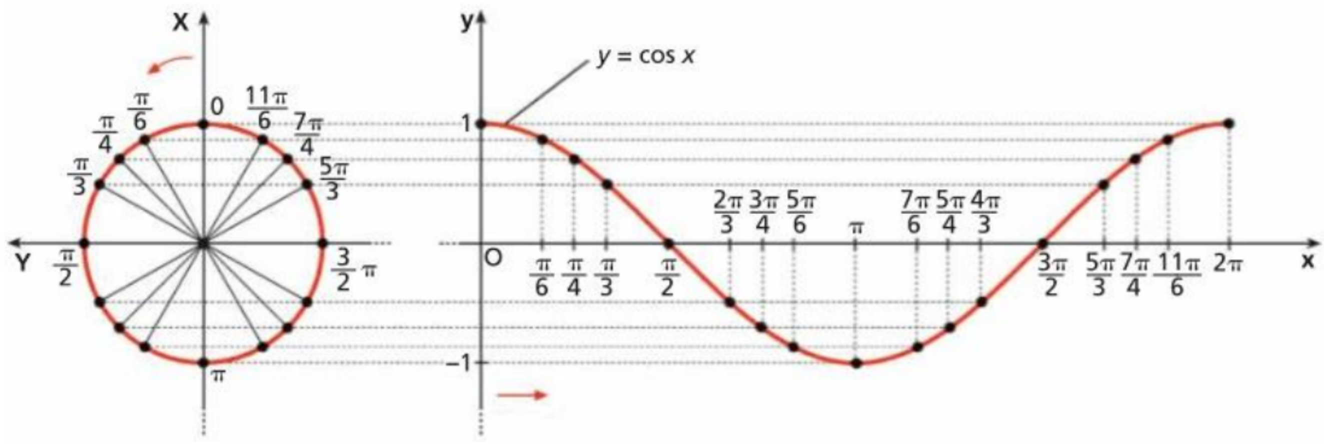
6.2 Funzioni Seno e Coseno





6.3 Grafici funzioni y=sinx, y=cosx

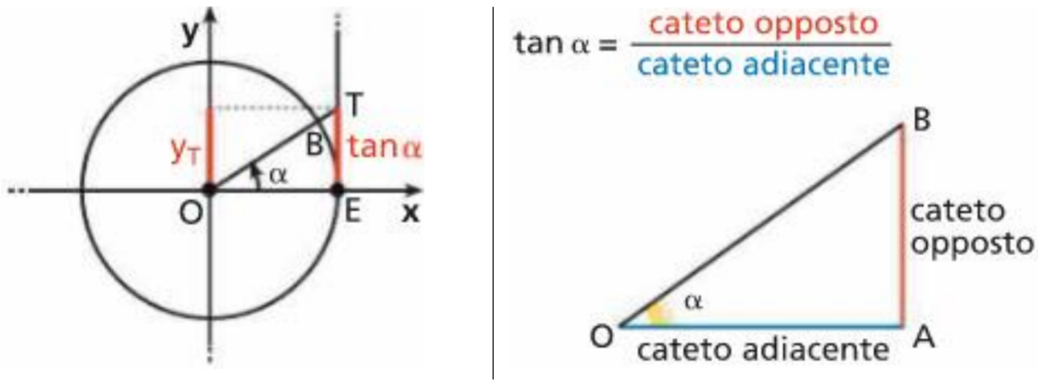




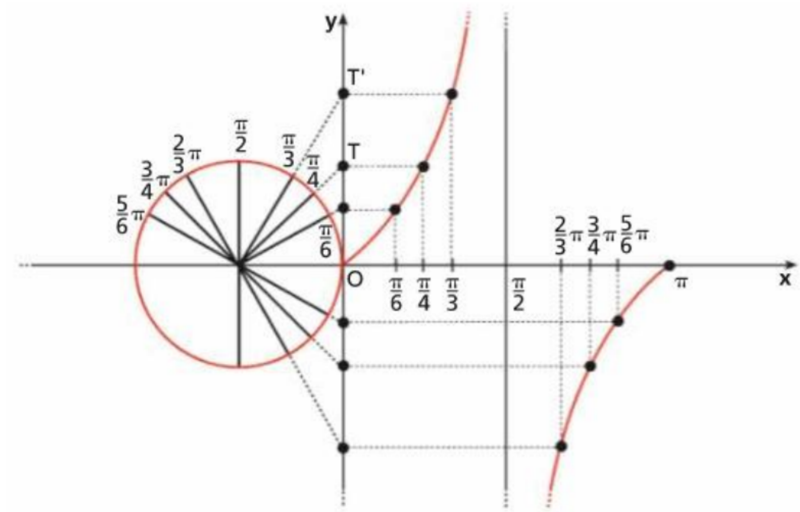
Entrambi hanno un periodo di 2π

Relazione fondamentale: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

6.4 Funzione Tangente



6.4.1 Grafico funzione y=tanx



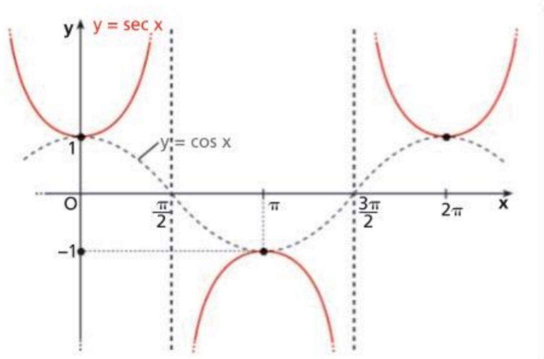
Il periodo della funzione tangente è π

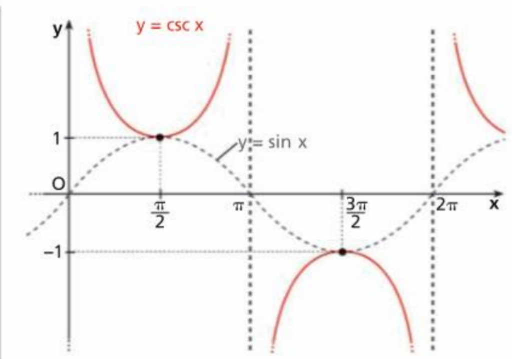
Seconda relazione fondamentale: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ con $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (perché sarebbe ∞)

6.5 Funzione Secante e Cosecante

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, con $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$
$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$, con $\alpha \neq +k\pi$

6.5.1 Grafico funzione secante e cosecante





6.6 Funzione Cotangente

$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, con $\alpha \neq k\pi \lor \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$, con $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$