## 5.2. Fungsi Transenden

### 5.2.1. Fungsi Logaritma dan Eksponen

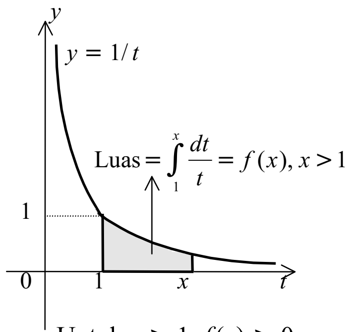
Kita ingat kembali bahwa fungsi transenden adalah fungsi yang tidak dapat dinyatakan sebagai sejumlah berhingga operasi aljabar atas fungsi konstan $y = k$ dan fungsi kesatuan $y = x$. Sampai saat ini fungsi transenden yang telah kita kenal adalah fungsi trigonometri, yang terdiri dari fungsi sinus, kosinus, tangen, kotangen, secan, dan kosekan. Sekarang kita akan mempelajari fungsi transenden lainnya, yaitu fungsi logaritma dan eksponen (inversnya), invers fungsi trigonometri, fungsi hiperbolik, dan invers fungsi hi-perbolik. Fungsi yang pertama kali diperkenalkan adalah logaritma natural, yang dinyata-kan sebagai bentuk integral. Dengan cara pendekatan seperti ini, sifat keterdiferensialan-nya dapat dibuktikan secara langsung berdasarkan Teorema Dasar Kalkulus.

**Fungsi Logaritma Natural** Perhatikan fungsi integral tentu dengan limit atas

$$f(x) = \int_1^x t^n\,dt = \left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)_1^x = \frac{x^{n+1}-1}{n+1},\ n \text{ bilangan rasional, } n \neq 1.$$

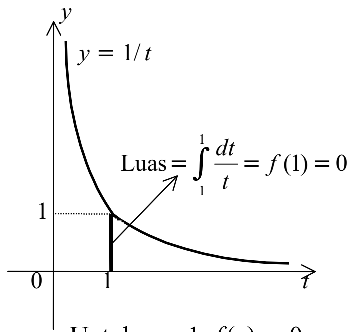
Jika $n > 0$, maka $x$ dapat diganti bilangan real sebarang, sedangkan untuk $n < 0$, $n \neq -1$, agar integralnya mempunyai arti, maka $x$ hanya dapat diganti bilangan real positif, $x > 0$. Sekarang kita perhatikan fungsi tersebut untuk $n = -1$ , yaitu

$$f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t},\ x > 0.$$



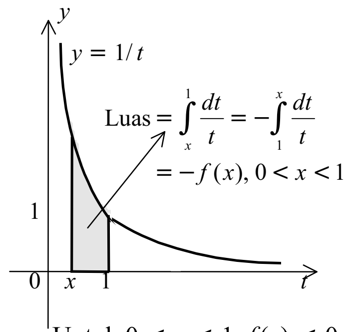
Untuk $x > 1, f(x) > 0$

**Gb.7**



Untuk $x = 1, f(x) = 0$

**Gb.8**



Untuk $0 < x < 1, f(x) < 0$

**Gb.9**

Kita akan memberi nama fungsi $f$ yang merupakan suatu primitif dari fungsi $y = 1/t, t > 0$. Pada Gb.7, Gb.8, dan Gb.9 diperlihatkan nilai $f(x)$ untuk $x > 1$, $x = 1$ dan $0 < x < 1$. Bandingkan nilai fungsi ini dengan nilai logaritma biasa di SMU, hasilnya sebagai berikut.

| Fungsi $f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}, x > 0$ | Fungsi Logaritma di SMU |
|---|---|
| $f(x) < 0$ untuk $0 < x < 1$<br>$f(x) = 0$ untuk $x = 1$<br>$f(x) > 0$ untuk $x > 1$ | $\log x < 0$ untuk $0 < x < 1$<br>$\log x = 0$ untuk $x = 1$<br>$\log x > 0$ untuk $x > 1$ |

Fenomena ini memperlihatkan bahwa fungsi $f$ mempunyai sifat logaritma. Kita akan memberi nama fungsi $f$ dengan *logaritma natural*. Bila dinamakan demikian, maka semua sifat logaritma yang telah dipelajari di SMU harus dapat dibuktikan berlaku pada fungsi ini. Sekarang kita mulai dengan definisi berikut.

**Definisi 5.10.** Fungsi *logaritma natural*, disingkat ln, ditulis $f(x) = \ln x$, didefinisikan sebagai

$$f(x) = \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}, x > 0$$

Daerah asal fungsi ini adalah $D_f = (0,\infty)$ dan daerah nilainya adalah $R_f = \boldsymbol{R}$.

Turunan fungsi logaritma natural secara langsung diperoleh berdasarkan Teorema 5.9, hasilnya sebagai berikut.

**Teorema 5.11** Jika $f(x) = \ln x$, maka $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Ditulis dengan cara lain, teorema ini menyatakan

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}, x > 0.$$

Sekarang kita akan melihat bahwa sifat logaritma biasa juga dipenuhi oleh logaritma natural, pembuktiannya dikerjakan dengan menggunakan Teorema 5.11.

**Teorema 5.12** **(a)** $\ln ab = \ln a + \ln b$, $a > 0$ dan $b > 0$,

**(b)** $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$, $a > 0$ dan $b > 0$,

**(c)** $\ln a^r = r \ln a$, $a > 0$ dan $r$ bilangan rasional.

**Bukti** **(a)** Berdasarkan Teorema 5.11 dan aturan rantai diperoleh

$$\frac{d}{dx}(\ln ax) = \frac{1}{ax}.a = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}(\ln x).$$

Akibatnya, terdapat konstanta $c$ sehingga $\ln ax = \ln x + c$. Untuk menentukan $c$, ambillah $x = 1$, diperoleh $\ln a = \ln 1 + c$. Karena $\ln 1 = 0$, maka $c = \ln a$. Jadi $\ln ax = \ln x + \ln a$, sehingga untuk $x = b$ diperoleh $\ln ab = \ln a + \ln b$. ■

**(b)** Dari $\frac{a}{b}.b = a$ diperoleh $\ln \frac{a}{b}.b = \ln a$. Berdasarkan Teorema 5.12 (a) diperoleh $\ln \frac{a}{b} + \ln b = \ln a$. Jadi terbuktilah $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$. ■

**(c)** Berdasarkan Teorema 5.11 dan aturan rantai diperoleh

$$\frac{d}{dx}\left(\ln x^r\right)=\frac{1}{x^r}.rx^{r-1}=\frac{r}{x}=r.\frac{1}{x}=r\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{d}{dx}(r\ln x).$$

Akibatnya, terdapat konstanta $c$ sehingga $\ln x^r = r \ln x + c$. Untuk menentukan $c$, ambillah $x = 1$, diperoleh $\ln 1 = \ln 1 + c$, sehingga $c = 0$. Jadi $\ln x^r = r \ln x$, sehingga untuk $x = a$ diperoleh $\ln a^r = r \ln a$. ■

**Contoh 5.24** Tentukan turunan fungsi $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

**Jawab**

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{(1+x)(-1)-(1-x)\,.1}{(1+x)^2}$$

$$=\frac{-2}{(1-x)(1+x)}=\frac{2}{x^2-1}.$$

***Cara lain***

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{d}{dx}(\ln(1-x)-\ln(1+x))=\frac{d}{dx}(\ln(1-x))-\frac{d}{dx}(\ln(1+x))$$

$$=\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{1+x}=\frac{-1-x-1+x}{(1-x)(1+x)}=\frac{-2}{1-x^2}=\frac{2}{x^2-1}.$$

**Contoh 5.25** Jika $y$ adalah fungsi dari $x$ sehingga $y^2 \ln x + y - 2xy^2 = 5x$, tentukan $y'$.

**Jawab**

$$\frac{d}{dx}\left(y^2\ln x+y-2xy^2\right)=\frac{d}{dx}(5x)$$

$$y^2.\frac{d}{dx}(\ln x)+(\ln x).\frac{d}{dx}\left(y^2\right)+y'-\left(2x.2yy'+2y^2\right)=5$$

$$y^2.\frac{1}{x}+2yy'\ln x+y'-4xyy'-2y^2=5$$

$$y'\left(2y\ln x-4xy+1\right)=5+2y^2-\frac{y^2}{x}$$

$$y'=\frac{5x+2xy^2-y^2}{x\left(2y\ln x-4xy+1\right)}$$

**Teorema 5.13** $\frac{d}{dx}\left(\ln|x|\right)=\frac{1}{x},\ x\neq 0$ dan $\frac{d}{dx}\left(\ln|u|\right)=\frac{u'}{u},\ u=u(x)\neq 0,\ u'$ ada.

**Bukti**

$$\frac{d}{dx}\left(\ln|x|\right)=\frac{1}{|x|}.\frac{d}{dx}\left(|x|\right)=\frac{1}{|x|}.\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2}\right)=\frac{1}{|x|}.\frac{1}{2\sqrt{x^2}}.2x=\frac{x}{|x|.|x|}=\frac{x}{|x|^2}=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}.$$

Berdasarkan hasil ini dan aturan rantai diperoleh $\frac{d}{dx}\left(\ln|u|\right)=\frac{1}{u}.\frac{du}{dx}=\frac{u'}{u}$. ■

Teorema 5.12 dapat mengubah perkalian/pembagian ke bentuk penjumlahan/pengurangan, sehingga bersama dengan Teorema 5.13 dapat menyederhanakan proses menentukan turunan fungsi. Cara dan prosesnya diperlihatkan dalam contoh berikut.

**Contoh 5.26** Tentukan turunan fungsi $y=\frac{\sqrt[3]{(2x+1)^5}}{(x^2-1)^4}$.

**Jawab**

$$|y|=\frac{|2x+1|^{5/3}}{(x^2-1)^4},|y|>0$$

$$\ln|y|=\ln\frac{|2x+1|^{5/3}}{(x^2-1)^4}=\frac{5}{3}\ln|2x+1|-4\ln\left|x^2-1\right|$$

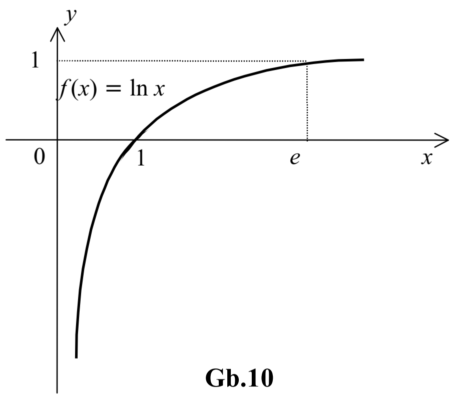
$$\frac{y'}{y}=\frac{5}{3}.\frac{2}{2x+1}-4.\frac{1}{x^2-1}.2x$$

$$y'=\frac{\sqrt[3]{(2x+1)^5}}{(x^2-1)^4}\left(\frac{10}{3(2x+1)}-\frac{8x}{x^2-1}\right).$$

**Grafik Fungsi Logaritma Natural** Fungsi $f(x)=\ln x=\int_1^x\frac{dt}{t}$, $x>0$ terdiferensialkan pada selang $(0,\infty)$ dengan $f'(x)=\frac{1}{x}$ dan $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$, $x>0$. Sifat-sifat fungsi logaritma natural yang berkaitan dengan grafik fungsinya adalah sebagai berikut.

- kontinu pada selang $(0,\infty)$,
- monoton naik pada selang $(0,\infty)$,
- cekung ke bawah pada selang $(0,\infty)$,
- $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ dan $\lim_{x\to\infty}\ln x=\infty$,
- $\ln 2\approx 0{,}6931$, $\ln 4=1{,}3862$,
  $\ln \frac{1}{2}\approx -0{,}6931$, $\ln \frac{1}{4}\approx -1{,}3862$,
  (sifat logaritma natural dan kalkulator).

Berdasarkan ini, diperoleh grafik fungsi logaritma natural pada Gb.10.



**Gb.10**

**Fungsi Eksponen Natural** Invers dari fungsi logaritma natural dinamakan *fungsi eksponen natural*, dan dinyatakan dengan eksp. Berdasarkan sifat fungsi invers, kita mempunyai relasi

$$x=\text{eksp}\,y \Leftrightarrow y=\ln x,\ x>0 \text{ dan } y\in\boldsymbol{R}$$

Dari sini diperoleh

$$\text{eksp}\,(\ln x)=x,\ x>0 \quad\text{dan}\quad \ln(\text{eksp}\,y)=y,\ y\in\boldsymbol{R}$$

Karena fungsi logaritma natural monoton naik, maka fungsi ini satu-kesatu. Akibatnya, persamaan $\ln x = 1$ *mempunyai jawab tunggal*, sebutlah jawabnya bilangan $e$. Di sini kita mendefinisikan bilangan $e$ adalah bilangan real yang memenuhi $\ln e = 1$. Perhatikan bah-wa untuk $x = e$ ini,

$$\text{eksp}\,(\ln e) = \text{eksp}\,1 = e.$$

Nilai hampiran untuk bilangan irasional $e$ adalah 2,71828…

Pada relasi fungsi invers di atas, gantikan $x = e^r$, $r$ bilangan rasional kemudian guna-kan sifat $\ln e = 1$ dan Teorema 5.12 (c), maka kita mempunyai

$$e^r = \text{eksp}\,(\ln e^r) = \text{eksp}\,(r \ln e) = \text{eksp}\,(r.1) = \text{eksp}\,r.$$

Hasil yang berlaku untuk bilangan rasional $r$ ini kita perluas untuk bilangan real. Karena setiap bilangan rasional adalah bilangan real ($\boldsymbol{R}$ memuat $\boldsymbol{Q}$), maka konstruksi $e^x$ harus da-pat memuat hasil ini. Jadi kita harus mendefinisikan

$$e^x = \text{eksp}\,x,\ x \in \boldsymbol{R}.$$

Akibatnya, relasi yang mengkaitkan fungsi logaritma dan eksponen natural menjadi

$$x = e^y \Leftrightarrow y = \ln x,\ x > 0 \text{ dan } y \in \boldsymbol{R}.$$

yang menghasilkan relasi

$$e^{\ln x} = x,\ x > 0 \quad \text{dan} \quad \ln(e^y) = y,\ y \in \boldsymbol{R}.$$

**Turunan dan Grafik Fungsi Eksponen Natural** Turunan fungsi $y = e^x$ langsung di-peroleh dari sifat inversnya. Berdasarkan rumus turunan fungsi invers, dari relasi

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y,\ y > 0 \text{ dan } x \in \boldsymbol{R},$$

dengan $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y}$ diperoleh

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x.$$

Jadi turunan fungsi eksponen natural adalah fungsinya sendiri. Bentuk umum dari fungsi yang bersifat demikian adalah $y = ce^x$, $c$ konstanta sebarang, termasuk $c = 0$.

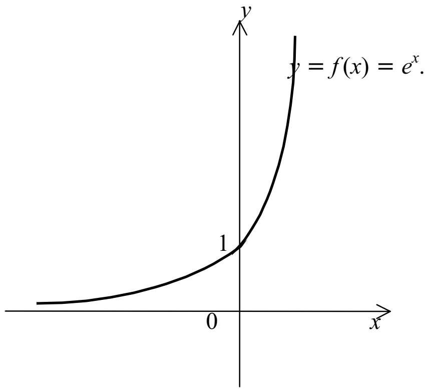
**Contoh 5.27** Tentukan turunan fungsi $y = e^{x^2 \ln x}$.

**Jawab**
$$y' = \frac{d}{dx}\left(e^{x^2 \ln x}\right) = e^{x^2 \ln x}.\frac{d}{dx}\left(x^2 \ln x\right) = e^{x^2 \ln x}\left(x^2.\frac{1}{x} + 2x \ln x\right)$$
$$= xe^{x^2 \ln x}(1 + 2\ln x).$$

Sifat dan grafik fungsi eksponen natural $f(x) = e^x$ secara langsung diperoleh dari in-versnya, hasilnya sebagai berikut.

- kontinu pada $\boldsymbol{R}$,
- monoton naik pada $\boldsymbol{R}$,
- cekung ke atas pada $\boldsymbol{R}$,
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ dan $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$.

Berdasarkan ini, diperoleh grafik fungsi eksponen natural pada Gb.11.




**Gb.11**

Sifat fungsi eksponen natural berikut ini sejalan dengan sifat fungsi logaritma natural yang berikaitan.

**Teorema 5.14** **(a)** $e^0 = 1$, **(c)** $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$; $a,b \in \boldsymbol{R}$,

**(b)** $e^a.e^b = e^{a+b}$; $a,b \in \boldsymbol{R}$, **(d)** $(e^a)^b = e^{ab}$; $a,b \in \boldsymbol{R}$.

**Bukti** **(a)** Karena $\ln 1 = 0$, maka $e^0 = 1$. ■

**(b)** Misalkan $s = e^a$ dan $t = e^b$, maka $\ln s = a$ dan $\ln t = b$, sehingga $\ln s + \ln t =$ $a + b$. Akibatnya, $\ln st = a + b$, karena itu $e^{a+b} = st = e^a.e^b$. ■

**(c)** Dari pemisalan (b), $\ln s - \ln t = \ln \dfrac{s}{t} = a - b$, jadi $e^{a-b} = \dfrac{s}{t} = \dfrac{e^a}{e^b}$. ■

**(d)** Misalkan $x = e^a$ dan $y = e^{ab}$, maka $\ln x = a$ dan $\ln y = ab = b \ln x = \ln x^b$. Karena fungsi logaritma natural satu-satu, maka $y = x^b$, jadi $e^{ab} = (e^a)^b$. ■

**Fungsi Eksponen dengan Bilangan Dasar $a > 0$** Kita akan memberi arti pada besaran $a^x$ untuk $a > 0$ dan $x \in \boldsymbol{R}$. Ingatlah kembali relasi $a = e^b \Leftrightarrow b = \ln a$, yang menghasilkan

$$a = e^{\ln a}, a > 0.$$

Berdasarkan Teorema 5.14 (d) kita mempunyai

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}, a > 0,$$

sehingga definisi untuk fungsi $f(x) = a^x$ adalah sebagai berikut.

**Definisi 5.15**

- Untuk $a > 0$, kita definisikan $a^x = e^{x \ln a}$.
- Fungsi $f(x) = a^x$, $a > 0$ dan $a \neq 1$ dinamakan *fungsi eksponen dengan bilangan dasar a*.

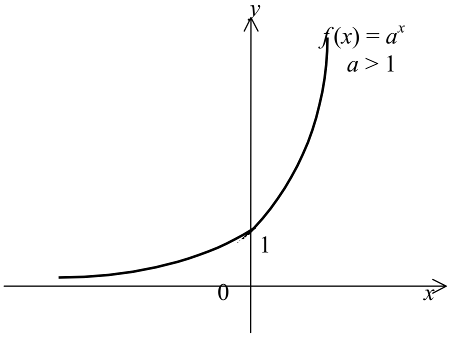
**Catatan** Dari definisi $a^x = e^{x \ln a}$, $a > 0$ diperoleh $\ln a^x = \ln e^{x \ln a} = x \ln a$, sehingga Teorema 5.12 (c) sekarang berlaku untuk eksponen bilangan real.

**Sifat Fungsi $f(x) = a^x$, $a > 0$ dan $a \neq 1$**

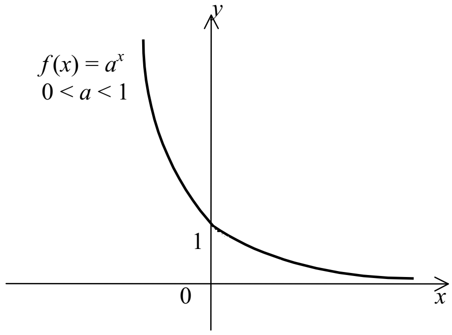
- Daerah asal dan daerah hasil fungsi $f$ adalah $D_f = \boldsymbol{R}$ dan $R_f = (0,\infty)$.

- Fungsi $f$ kontinu pada $\boldsymbol{R}$.
- Fungsi $f$ monoton naik untuk $a > 1$ dan monoton turun untuk $0 < a < 1$.
- Fungsi $f$ selalu cekung ke atas pada daerah asalnya

Grafik fungsi $f$ untuk $a > 1$ diperlihatkan pada Gb.12 dan untuk $0 < a < 1$ pada Gb.13.




**Gb. 12 Grafik Fungsi $f(x) = a^x$, $a > 1$**




**Gb. 13 Grafik Fungsi $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$**

**Bentuk Limit dari $e$** Fungsi $f(x) = \ln x$ terdiferensialkan untuk $x > 0$ dengan $f'(x) = 1/x$, sehingga untuk $x = 1, f'(1) = 1 = \ln e$. Kita mempunyai

$$\ln e = f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\ (1+h)}{h} = \lim_{h \to 0} \ln\ (1+h)^{1/h} = \ln \lim_{h \to 0} (1+h)^{1/h}$$

berdasarkan definisi turunan fungsi $f$ di 1, sifat $x \ln a = \ln a^x$, dan kekontinuan fungsi $f$. Karena fungsi logaritma natural $f$ satu-satu, maka diperoleh bentuk limit dari $e$, yaitu

$$e = \lim_{h \to 0} (1+h)^{1/h}.$$

Dengan penggantian $n = 1/h$, maka kita mempunyai bentuk limit lainnya dari $e$, yaitu

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n, \quad \text{atau} \quad e = \lim_{n \to -\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n.$$

**Turunan $y = x^r$, $r \in \boldsymbol{R}$ dan $x > 0$** Sebelum fungsi logaritma natural dan eksponen dipelajari, turunan fungsi $y = x^r$ dirancang hanya untuk $r$ bilangan rasional. Rumus turunannya adalah $y' = rx^{r-1}$. Dengan sifat-sifat logaritma dan eksponen, ternyata untuk $x > 0$ rumus turunan ini dapat diperluas untuk bilangan real $r$. Untuk ini, tulislah

$$y = x^r = e^{\ln x^r} = e^{r \ln x}, r \in \boldsymbol{R} \text{ dan } x > 0.$$

Rumus turunan fungsi eksponen memberikan

$$y' = e^{r \ln x} . \frac{r}{x} = x^r . \frac{r}{x} = r x^{r-1}.$$

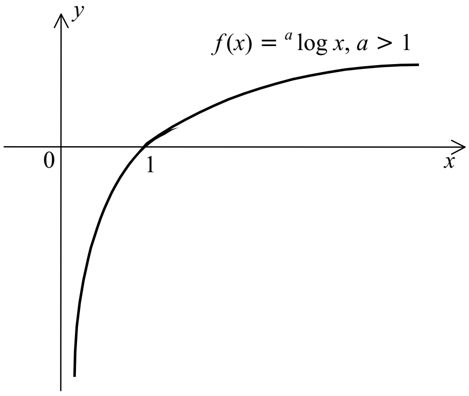
**Fungsi Logaritma dengan Bilangan Dasar $a > 0$, $a \neq 1$** Fungsi ini aturannya adalah $f(x) = {}^a\log x$, $a > 0$ dan $a \neq 1$, yang diperkenalkan sebagai invers dari fungsi eksponen $y = a^x$, $a > 0$ dan $a \neq 1$. Berdasarkan konsep fungsi invers, kita mempunyai relasi

$$y = {}^a\log x \Leftrightarrow x = a^y, a > 0 \text{ dan } a \neq 1.$$

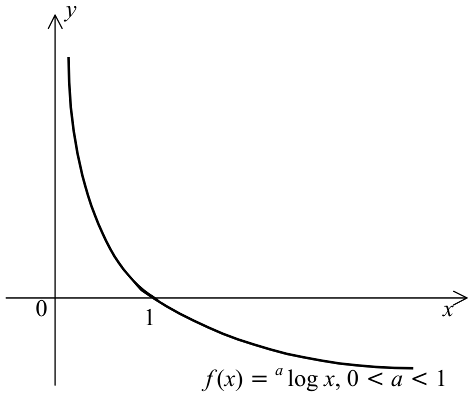
**Sifat Fungsi $f(x) = {}^a\log x$, $a > 0$ dan $a \neq 1$**

- Daerah asal dan daerah hasil fungsi $f$ adalah $D_f = (0,\infty)$ dan $R_f = \boldsymbol{R}$.
- Fungsi $f$ kontinu pada $(0,\infty)$.
- Fungsi $f$ monoton naik untuk $a > 1$ dan monoton turun untuk $0 < a < 1$.
- Fungsi $f$ selalu cekung ke bawah pada daerah asalnya

Grafiknya diperoleh dengan cara mencerminkan grafik fungsi $y = a^x$ terhadap garis $y = x$, untuk $a > 1$ diperlihatkan pada Gb.14 dan untuk $0 < a < 1$ pada Gb.15.




**Gb.14 Grafik Fungsi $f(x) = {}^a\log x$, $a > 1$**




**Gb.15 Grafik Fungsi $f(x) = {}^a\log x$, $0 < a < 1$**

**Kaitan antara log dan ln** Dari $x = a^y$, $a > 0$, $a \neq 1$ diperoleh $\ln x = \ln a^y = y \ln a$, sehingga $y = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. Karena $x = a^y$ juga menghasilkan $y = {}^a\log x$, maka diperoleh kaitan antara log dan ln, yaitu

$$ {}^a\log x = \frac{\ln x}{\ln a},\ a > 0 \text{ dan } a \neq 1. $$

### 5.2.2. Penggunaan Fungsi Logaritma Natural

**Penggunaan Logaritma Natural untuk Menghitung Turunan Fungsi $y = (f(x))^{g(x)}$**

Kita mempunyai fungsi $y = (f(x))^{g(x)}$ yang terdefinisi pada $\{x \in \boldsymbol{R} : f(x) > 0\}$, yang terdiferensialkan pada daerah asalnya jika fungsi $f$ dan $g$ terdiferensialkan. Karena $y > 0$ pada daerah asal fungsinya, maka untuk menentukan turunan fungsi ini, tulislah

$$ \ln y = \ln (f(x))^{g(x)} = g(x) \ln f(x). $$

Dari sini diperoleh

$$ \frac{y'}{y} = g(x) . \frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x) \ln f(x) . $$

sehingga $y'$ dapat ditentukan.

**Contoh 5.28** Tentukan turunan fungsi $y = x^{\sin x}$.

**Jawab** Fungsi ini terdefinisi untuk $x > 0$, yang menghasilkan $y > 0$. Dengan proses seperti di atas,

$$ \ln y = \ln x^{\sin x} = (\sin x) \ln x $$

$$\frac{y'}{y} = (\sin x).\frac{1}{x} + (\cos x)\,\ln x$$

$$y' = \left((\sin x).\frac{1}{x} + (\cos x)\,\ln x\right) x^{\sin x}$$

**Penggunaan Logaritma Natural untuk Menghitung Limit Fungsi $0^0$, $\infty^0$, dan $1^\infty$**

Kita telah mempelajari berbagai teknik penyelesaian masalah limit fungsi berbentuk $0/0$, $\infty/\infty$, $0.\infty$, dan $\infty - \infty$. Selain keempat bentuk tak tentu tersebut, masih terdapat tiga bentuk tak tentu lainnya yang berkaitan dengan limit fungsi berpangkat fungsi, yaitu $0^0$, $\infty^0$, dan $1^\infty$. Penyelesaian bentuk tak tentu ini tentu saja dengan memanfaatkan fungsi logaritma natural dan teorema L′Hospital.

**Bentuk tak Tentu $0^0$** Akan dihitung $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x)\right)^{g(x)}$, di mana $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

($x \to a$ dapat diganti oleh $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, atau $x \to -\infty$).

**Contoh 5.29** Hitunglah $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$.

**Jawab** Misalkan $y = x^x$, kita akan menghitung $\lim\limits_{x \to 0^+} y$. Dari $y = x^x$ diperoleh $\ln y = x \ln$ sehingga $x$,

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0.$$

Karena fungsi logaritma natural kontinu pada $(0,\infty)$, maka $\ln\left(\lim\limits_{x \to 0^+} y\right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln y = 0$, sehingga $\lim\limits_{x \to 0^+} y = e^0 = 1$.

**Contoh 5.30** Hitunglah $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{3}{4+2\ln x}}$.

**Jawab**

$$y = x^{\frac{3}{4+2\ln x}}$$

$$\ln y = \frac{3}{4+2\ln x}.\ln x = \frac{3\ln x}{4+2\ln x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{3\ln x}{4+2\ln x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{3/x}{2/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\ln\left(\lim_{x \to 0^+} y\right) = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} x^{\frac{3}{4+2\ln x}} = e^{3/2} = e\sqrt{e}.$$

**Bentuk tak Tentu $\infty^0$** Akan dihitung

$\lim_{x \to a} (f(x))^{g(x)}$, di mana $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = 0$.

($x \to a$ dapat diganti oleh $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, atau $x \to -\infty$).

**Contoh 5.31** Hitunglah $\lim_{x \to \infty} (1+x)^{1/\ln x}$.

**Jawab**

$$y = (1+x)^{1/\ln x}$$

$$\ln y = \ln (1+x)^{1/\ln x} = \frac{\ln(1+x)}{\ln x}$$

$$\lim_{x \to \infty} \ln y = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/(1+x)}{1/x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{1+x} = 1$$

$$\ln\left(\lim_{x \to \infty} y\right) = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} y = \lim_{x \to \infty} (1+x)^{1/\ln x} = e^1 = e.$$

**Contoh 5.32** Hitunglah $\lim_{x \to 0^+} (\cot x)^{1/\ln x}$.

**Jawab**

$$y = (\cot x)^{1/\ln x}$$

$$\ln y = \ln (\cot x)^{1/\ln x} = \frac{\ln \cot x}{\ln x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \cot x}{\ln x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\cot x}.(-\csc^2 x)}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{-1}{\sin^2 x}}{1/x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x}{\sin x}.\frac{-1}{\cos x}\right) = 1.(-1) = -1.$$

Karena $\ln\left(\lim_{x \to 0^+} y\right) = -1$, maka

$$\lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} (\cot x)^{1/\ln x} = e^{-1} = 1/e.$$

**Bentuk tak Tentu $1^\infty$** Akan dihitung

$\lim_{x \to a} (f(x))^{g(x)}$, di mana $\lim_{x \to a} f(x) = 1$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.

($x \to a$ dapat diganti oleh $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, atau $x \to -\infty$).

**Contoh 5.33** Hitunglah $\lim_{x \to 0} (\cos 2x)^{1/x^2}$.

**Jawab**

$$y = (\cos 2x)^{1/x^2}$$

$$\ln y = \ln (\cos 2x)^{1/x^2} = \frac{1}{x^2} \ln \cos 2x = \frac{\ln \cos 2x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}.(-2\sin 2x)}{2x} = \frac{1}{1}.(-2) = -2$$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0} y\right) = -2$$

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2} = e^{-2} = 1/e^2 .$$

**Contoh 5.34** Hitunglah $\lim_{x\to 0}(1-x)^{1/\sin x}$.

**Jawab**

$$y = (1-x)^{1/\sin x}$$

$$\ln y = \ln(1-x)^{1/\sin x} = \frac{1}{\sin x}\ln(1-x) = \frac{\ln(1-x)}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{1-x}}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{1} = -1$$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0} y\right) = -1$$

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0}(1-x)^{1/\sin x} = e^{-1} = 1/e .$$

Untuk Contoh 5.30 sampai dengan 5.34, berilah argumentasi dari setiap langkah yang digunakan dalam proses penyelesaiannya.

### 5.2.3. Soal Latihan

Untuk soal 1 sampai dengan 8, tentukan turunan pertama dari setiap fungsi yang diberi-kan.

**1.** $f(x) = \sin(\ln 2x)$.

**2.** $f(x) = \ln(\sin 2x)$.

**3.** $f(x) = \ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

**4.** $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

**5.** $f(x) = e^{\sin x}$.

**6.** $f(x) = e^{x+\ln x}$.

**7.** $f(x) = \ln\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.

**8.** $f(x) = \cos(x + e^x)$.

Untuk soal 9 dan 10, tentukan turunan pertama $y'$ dari setiap bentuk implisit yang diberi-kan.

**9.** $\ln xy = y e^x + 3xy^2$.

**10.** $e^{xy} = \ln(1 + x^2 y) + \cos y$.

Untuk soal 11 sampai dengan 16,

Untuk soal 17 sampai dengan 20, tentukan turunan pertama dari setiap fungsi yang diberi-kan.

**17.** $f(x) = (\sin x)^x$.

**18.** $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$.

**19.** $f(x) = x^{\ln x}$.

**20.** $f(x) = (\ln x)^{\cos x}$.

Untuk soal 21 sampai dengan 34, hitunglah limit dari setiap bentuk tak tentu yang diberi-kan.

**21.** $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+x)}{x^2}$.

**22.** $\lim_{x\to 0^+} x^2\ln^3 x$.

**23.** $\lim_{x\to 0^+} x^{2/\ln x}$.

**24.** $\lim_{x\to 0}(x^2)^{\ln x}$.

**28.** $\lim_{x\to\infty}(e^x + x)^{2/x}$.

**29.** $\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{1/\ln x}$.

**30.** $\lim_{x\to\infty}(x^3 + 1)^{1/\ln x}$.

**31.** $\lim_{x\to 0}(\sec x)^{3/x}$.

gambar-kan grafik setiap fungsi yang diberikan setelah menentukan selang kemonotonan, titik ekstrim, selang kecekungan, titik belok, dan asimtotnya.

**11.** $f(x) = x - \ln x$.

**12.** $f(x) = x\,e^x$.

**13.** $f(x) = (\ln x)^2$.

**14.** $f(x) = \ln(1 - x^2)$.

**15.** $f(x) = e^{-x^2}$.

**16.** $f(x) = x \ln |x|$.

**25.** $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} (\tan x)^{\cos x}$.

**26.** $\lim\limits_{x \to 0} (\sin^2 x)^{\tan x}$.

**27.** $\lim\limits_{x \to \infty} x^{3/(4 + 2\ln x)}$.

**32.** $\lim\limits_{x \to 0} (x + e^{x/2})^{2/x}$.

**33.** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2x}$.

**34.** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\ln x}$.

### 5.2.4. Invers Fungsi Trigonometri

Kita ingat kembali bahwa syarat agar fungsi $f$ mempunyai invers adalah satu-satu, yaitu memenuhi syarat $f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$ untuk setiap $u, v \in D_f$. Invers dari fungsi $f: D_f \to R_f$ adalah fungsi $f^{-1}: R_f \to D_f$ yang memenuhi relasi $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, dengan $x \in D_f$ dan $y \in R_f$. Fungsi trigonometri semuanya periodik, sehingga tidak satu-satu. Tetapi, daerah asal fungsinya dapat dibatasi pada selang tertentu agar mempunyai invers. Pemilihan selang daerah asal fungsinya dibuat agar antara invers trigonometri da-pat dikaitkan dan rumus kalkulus diferensialnya dapat dikonstruksi.

**Invers Fungsi Sinus dan Fungsi Kosinus** Invers fungsi sinus, ditulis $y = \sin^{-1} x$, atau $y = \text{arc} \sin x$, adalah fungsi yang memenuhi

$$y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y,\ |x| \leq 1 \text{ dan } |y| \leq \tfrac{1}{2}\pi .$$

Invers fungsi kosinus, ditulis $y = \cos^{-1} x = \text{arc} \cos x$, adalah fungsi yang memenuhi

$$y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y,\ |x| \leq 1 \text{ dan } 0 \leq y \leq \pi.$$

Kaitan antara invers fungsi sinus dan fungsi kosinus diberikan dalam teorema berikut.

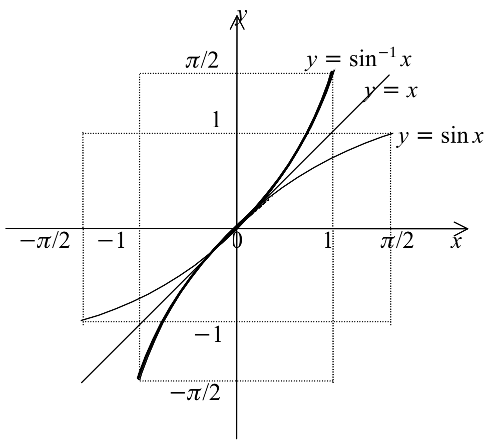
**Teorema 5.16** $\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi,\ |x| \leq 1$.

**Bukti** $y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y = \sin(\tfrac{1}{2}\pi - y) \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\pi - y = \sin^{-1} x$

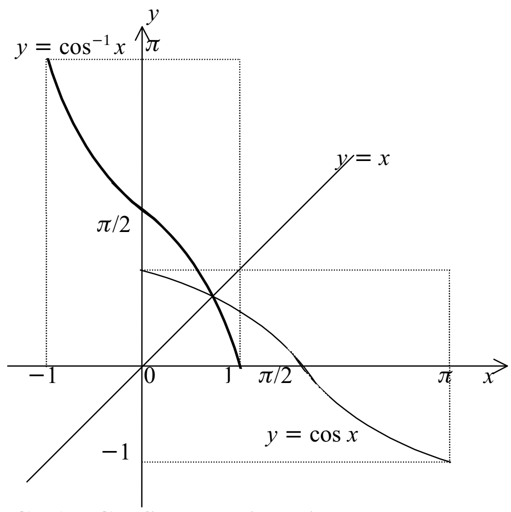
$$\Leftrightarrow y + \sin^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi \Leftrightarrow \cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi$$

karena $0 \leq y \leq \pi \Leftrightarrow -\tfrac{1}{2}\pi \leq \tfrac{1}{2}\pi - y \leq \tfrac{1}{2}\pi \Leftrightarrow |\tfrac{1}{2}\pi - y| \leq \tfrac{1}{2}\pi$. ■

Berdasarkan sifat fungsi invers, grafik $y = \sin^{-1} x$ diperoleh dengan mencerminkan grafik $y = \sin x$, $x \in [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi]$ terhadap garis $y = x$. Demikian juga grafik $y = \cos^{-1} x$, yang diperoleh dengan mencerminkan grafik $y = \cos x$, $x \in [0,\pi]$ terhadap garis $y = x$. Grafik invers fungsi sinus dan kosinus diperlihatkan pada Gb. 16 dan Gb.17.




**Gb.16. Grafik Fungsi Sinus dan Inversnya**




**Gb.17. Grafik Fungsi Kosinus dan Inversnya**

**Invers Fungsi Tangen dan Fungsi Kotangen** Invers fungsi tangen, ditulis $y = \tan^{-1} x$, atau $y = \text{arc}\tan x$, adalah fungsi yang memenuhi

$$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y,\ x \in \boldsymbol{R} \text{ dan } |y| < \tfrac{1}{2}\pi .$$

Invers fungsi kotangen, ditulis $y = \cot^{-1} x = \text{arc}\cot x$, adalah fungsi yang memenuhi

$$y = \cot^{-1} x \Leftrightarrow x = \cot y,\ x \in \boldsymbol{R} \text{ dan } 0 < y < \pi.$$

Kaitan antara invers fungsi tangen dan fungsi kotangen diberikan dalam teorema berikut.

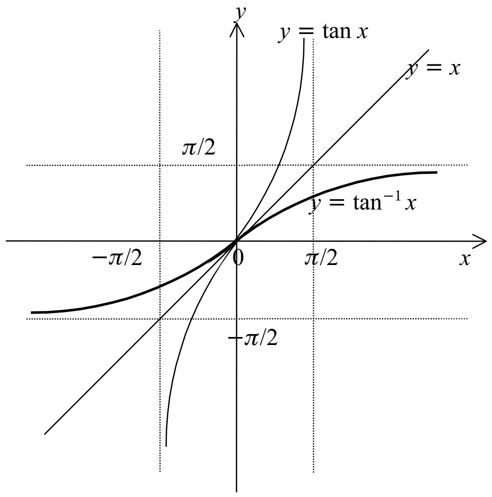
**Teorema 5.17** $\cot^{-1} x + \tan^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi ,\ x \in \boldsymbol{R}$.

**Bukti** $y = \cot^{-1} x \Leftrightarrow x = \cot y = \tan(\tfrac{1}{2}\pi - y) \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\pi - y = \tan^{-1} x$

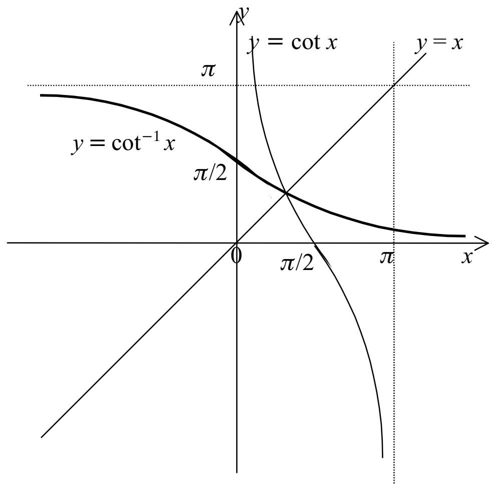
$$\Leftrightarrow y + \tan^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi \Leftrightarrow \cot^{-1} x + \tan^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi$$

karena $0 < y < \pi \Leftrightarrow -\tfrac{1}{2}\pi < \tfrac{1}{2}\pi - y < \tfrac{1}{2}\pi \Leftrightarrow |\tfrac{1}{2}\pi - y| < \tfrac{1}{2}\pi$. ■

Berdasarkan sifat fungsi invers, grafik $y = \tan^{-1} x$ diperoleh dengan mencerminkan grafik $y = \tan x,\ x \in \left(-\tfrac{1}{2}\pi , \tfrac{1}{2}\pi\right)$ terhadap garis $y = x$. Demikian juga grafik $y = \cot^{-1} x$, yang diperoleh dengan mencerminkan grafik $y = \cot x,\ x \in (0,\pi)$ terhadap garis $y = x$. Grafik invers fungsi tangen dan kotangen diperlihatkan pada Gb. 18 dan Gb.19.




Gb.18. Grafik Fungsi Tangen dan Inversnya




Gb.19. Grafik Fungsi Kotangen dan Inversnya

**Invers Fungsi Sekan dan Fungsi Kosekan** Invers fungsi sekan, ditulis $y = \sec^{-1} x$, atau $y = \text{arc sec } x$, adalah fungsi yang memenuhi

$$y = \sec^{-1} x \Leftrightarrow x = \sec y,\ |x| \geq 1 \text{ dan } 0 \leq y \leq \pi, y \neq \tfrac{1}{2}\pi .$$

Dari $x = \sec y = \dfrac{1}{\cos y}$ diperoleh $\cos y = \dfrac{1}{x}, 0 \leq y \leq \pi, y \neq \tfrac{1}{2}\pi$ , sehingga $y = \cos^{-1}\dfrac{1}{x}$.
Ini mengakibatkan

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}\frac{1}{x}, |x| \geq 1.$$

Invers fungsi kosekan, ditulis $y = \csc^{-1} x = \text{arc csc } x$, adalah fungsi yang memenuhi

$$y = \csc^{-1} x \Leftrightarrow x = \csc y,\ |x| \geq 1 \text{ dan } |y| \leq \tfrac{1}{2}\pi , y \neq 0$$

Dari $x = \csc y = \dfrac{1}{\sin y}$ diperoleh $\sin y = \dfrac{1}{x}$, $|y| \leq \tfrac{1}{2}\pi$ , $y \neq 0$, sehingga $y = \sin^{-1}\dfrac{1}{x}$.
Ini mengakibatkan

$$\csc^{-1} x = \sin^{-1}\frac{1}{x}, |x| \geq 1.$$

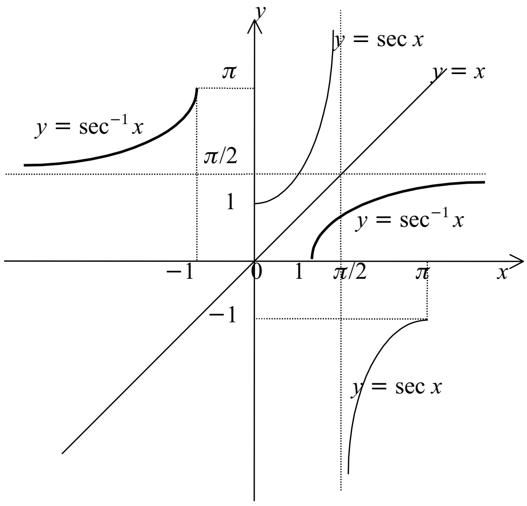
Kaitan antara invers fungsi sekan dan fungsi kosekan diberikan dalam teorema berikut.

**Teorema 5.18** $\sec^{-1} x + \csc^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi$ , $|x| \geq 1$.

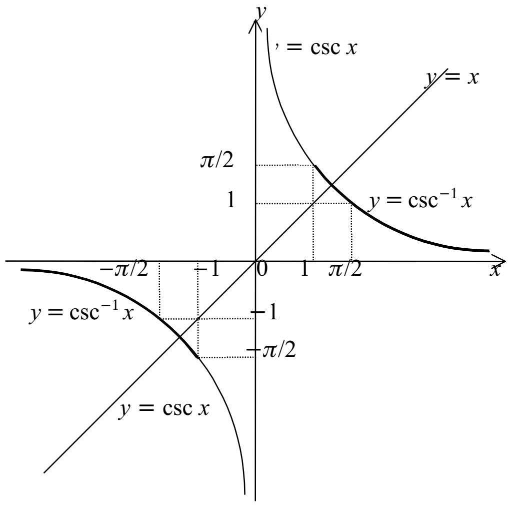
**Bukti** Dengan menggunakan Teorema 5.16 langsung diperoleh

$$\sec^{-1} x + \csc^{-1} x = \cos^{-1}\frac{1}{x} + \sin^{-1}\frac{1}{x} = \tfrac{1}{2}\pi , |x| \geq 1. \blacksquare$$

Berdasarkan sifat fungsi invers, grafik $y = \sec^{-1} x$ diperoleh dengan mencerminkan grafik $y = \sec x$, $x \in [0,\pi]$, $x \neq \frac{1}{2}\pi$ terhadap garis $y = x$. Demikian juga grafik $y = \csc^{-1} x$, yang diperoleh dengan mencerminkan grafik $y = \csc x$, $x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, $y \neq 0$ terhadap garis $y = x$. Grafik invers fungsi sekan dan kosekan diperlihatkan pada Gb. 20 dan Gb.21.




**Gb.20. Grafik Fungsi Sekan dan Inversnya**




**Gb.21. Grafik Fungsi Kosekan dan Inversnya**

**Contoh 5.35** Tunjukkan bahwa $2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \frac{1}{4}\pi$ .

**Jawab** Misalkan $x = 2\tan^{-1}\frac{1}{3}$ dan $y = \tan^{-1}\frac{1}{7}$, akan dibuktikan $x + y = \frac{1}{4}\pi$ .

Karena $x = 2\tan^{-1}\frac{1}{3}$, maka $\tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{1}{2}x$, sehingga $\tan\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}$. Ini mengakibatkan

$$\tan x = \frac{2\tan\frac{1}{2}x}{1-\tan^2\frac{1}{2}x} = \frac{2.\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}.$$

Karena $y = \tan^{-1}\frac{1}{7}$, maka $\tan y = \frac{1}{7}$. Berdasarkan rumus tangen jumlah dua sudut,

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x \tan y} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}} = \frac{\frac{21+4}{28}}{\frac{28-3}{28}} = 1.$$

Ini mengakibatkan $x + y = \frac{1}{4}\pi$, sehingga terbuktilah $2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \frac{1}{4}\pi$ . ■

## Turunan Invers Fungsi Trigonometri

- ***Turunan fungsi $y = \sin^{-1} x$*** Dari $y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y$, $|x| \le 1$ dan $|y| \le \frac{1}{2}\pi$ dan rumus turunan fungsi invers diperoleh

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x| < 1.$$

- ***Turunan fungsi* $\boldsymbol{y = \cos^{-1} x}$** Dari $y = \cos^{-1} x = \frac{1}{2}\pi - \sin^{-1} x$, $|x| \le 1$ diperoleh

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \sin^{-1} x\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x| < 1.$$

- ***Turunan fungsi* $\boldsymbol{y = \tan^{-1} x}$** Dari $y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y$, $x \in \boldsymbol{R}$ dan $|y| < \frac{1}{2}\pi$ dan rumus turunan fungsi invers diperoleh

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2},\ x \in \boldsymbol{R}.$$

- ***Turunan fungsi* $\boldsymbol{y = \cot^{-1} x}$** Dari $y = \cot^{-1} x = \frac{1}{2}\pi - \tan^{-1} x$, $x \in \boldsymbol{R}$ diperoleh

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \tan^{-1} x\right) = \frac{-1}{1+x^2},\ x \in \boldsymbol{R}.$$

- ***Turunan fungsi* $\boldsymbol{y = \sec^{-1} x}$** Dari $y = \sec^{-1} x = \cos^{-1}\frac{1}{x}$, $|x| \ge 1$ diperoleh

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}.\frac{-1}{x^2} = \frac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}},\ |x| > 1.$$

- ***Turunan fungsi* $\boldsymbol{y = \csc^{-1} x}$** Dari $y = \csc^{-1} x = \frac{1}{2}\pi - \sec^{-1} x$, $|x| \ge 1$ diperoleh

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \sec^{-1} x\right) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}},\ |x| > 1.$$

Dengan demikian kita mempunyai teorema berikut, tentang turunan invers fungsi trigonometri

**Teorema 5.19** ***Turunan Invers Fungsi Trigonometri***

**(a)** $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

**(b)** $\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

**(c)** $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \boldsymbol{R}$.

**(d)** $\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right) = \frac{-1}{1+x^2}$, $x \in \boldsymbol{R}$.

**(e)** $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$.

**(f)** $\frac{d}{dx}\left(\csc^{-1} x\right) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$.

**Contoh 5.36** Tunjukkan bahwa $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}|x|\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$.

**Jawab** Berdasarkan Teorema 5.19 (e), aturan rantai dan turunan nilai mutlak diperoleh

$$\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}|x|\right)=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.\frac{d}{dx}\left(|x|\right)=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.\frac{x}{|x|}$$
$$=\frac{x}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},|x|>1.$$

**Contoh 5.37** Buktikan $\sin\left(\tan^{-1}x\right)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

**Jawab** Misalkan $y=\tan^{-1}x$, maka $x=\tan y=\frac{\sin y}{\cos y}$, dengan $|y|<\frac{1}{2}\pi$. Berdasarkan ini dan rumus trigonometri diperoleh

$$\sin\left(\tan^{-1}x\right)=\sin y=(\tan y)(\cos y)=\frac{\tan y}{\sec y}=\frac{\tan y}{\sqrt{\sec^2 y}}=\frac{\tan y}{\sqrt{1+\tan^2 y}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

sehingga terbuktilah yang diinginkan. ■

**Contoh 5.38** Tentukan turunan fungsi $\tan^{-1}y=\ln xy$.

**Jawab** Tentukan turunan dari kedua ruas persamaan yang diberikan dengan menganggap $y$ fungsi dari $x$ kemudian nyatakan $y'$ sebagai fungsi dari $x$ dan $y$.

$$\frac{1}{1+y^2}.y'=\frac{1}{xy}.\left(xy'+y\right)$$
$$xyy'=xy'+y+xy^2y'+y^3$$
$$y'(xy-x-xy^2)=y^3+y$$
$$y'=\frac{y\left(y^2+1\right)}{x\left(y-1-y^2\right)}.$$

**Contoh 5.39** Tentukan daerah asal, daerah nilai, dan invers fungsi $f(x)=\cos^{-1}\frac{2x-3}{5}$.

**Jawab** Agar $f(x)\in \boldsymbol{R}$, syaratnya adalah $\left|\frac{2x-3}{5}\right|\le 1$. Selesaikan pertaksamaan nilai mutlak ini, diperoleh $-5\le 2x-3\le 5$. Akibatnya $-2\le 2x\le 8$, sehingga $-1\le x\le 4$.

Jadi daerah asal fungsi $f$ adalah $D_f=[-1,4]$.

Karena untuk $-1\le x\le 4$ berlaku $\left|\frac{2x-3}{5}\right|\le 1$, maka $0\le f(x)=\cos^{-1}\frac{2x-3}{5}\le\pi$, sehingga daerah nilai fungsi $f$ adalah $R_f=[0,\pi]$.

Untuk menentukan invers fungsi $f$, tulislah $y=f(x)=\cos^{-1}\frac{2x-3}{5}$ dan nyatakan $x$ dalam $y$, diperoleh

$$\frac{2x-3}{5} = \cos y$$

$$2x - 3 = \cos y$$

$$x = 2\tfrac{1}{2}\cos y + 1\tfrac{1}{2}.$$

Jadi invers fungsi $f$ adalah $f^{-1}(x) = 2\frac{1}{2}\cos x + 1\frac{1}{2}$, $0 \le x \le \pi$.

### 5.2.5. Soal Latihan

Untuk soal 1 sampai dengan 6, tunjukkan kebenaran setiap pernyataan yang diberikan.

**1.** $\cos\left(2\sin^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{1}{9}$.

**2.** $\cos\left(\cos^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{12}{13}\right) = \frac{56}{65}$.

**3.** $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{1}{4}\pi$.

**4.** $\sin\left(\cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right) + 2\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) = -\frac{3}{5}$.

**5.** $\cos^{-1}\frac{3}{10}\sqrt{10} + \cos^{-1}\frac{2}{5}\sqrt{5} = \frac{1}{4}\pi$.

**6.** $\sin\left(2\tan^{-1}(-3)\right) = -\frac{3}{5}$.

Untuk soal 6 sampai dengan 10, buktikan setiap kesamaan yang diberikan.

**7.** $\cos\left(\tan^{-1}x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

**8.** $\cos\left(2\sin^{-1}x\right) = 1 - 2x^2$.

**9.** $\tan\left(\sin^{-1}x\right) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

**10.** $\sec\left(2\cos^{-1}x\right) = \dfrac{1}{2x^2-1}$.

Untuk soal 11 sampai dengan 16, buktikan setiap kesamaan yang diberikan.

**11.** $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$.

**12.** $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$.

**13.** $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$.

**14.** $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1}x$.

**15.** $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}x$.

**16.** $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$.

Untuk soal 17 sampai dengan 22, tentukan daerah asal, daerah nilai, invers, dan turunan dari setiap fungsi yang diberikan.

**17.** $f(x) = 2\sin^{-1}\frac{1}{2}x$.

**18.** $f(x) = 3\cos^{-1}\frac{1}{3}(2x-5)$.

**19.** $f(x) = \cos^{-1}(\ln\sqrt{x})$.

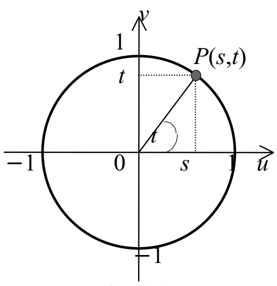
**20.** $f(x) = \tan^{-1}(1 + x^2)$.

**21.** $f(x) = 2\cot^{-1}(1 + \sqrt{x})$.

**22.** $f(x) = 4\sec^{-1}\sqrt{x}$.

### 5.2.6. Fungsi Hiperbolik dan Inversnya

Kita ingat kembali konsep fungsi trigonometri yang dikaitkan dengan lingkaran satu-an. Pada Gb.22, titik $P$ terletak pada lingkaran $u^2 + v^2 = 1$ dan $x = \angle(OP,\text{sb-}x$ positif).




**Gb.22**

Jika koordinat titik $P$ adalah $(s,t)$, fungsi sinus dan kosinus dirancang sebagai

$$\cos x = s \quad \text{dan} \quad \sin x = t.$$

Fungsi trigonometri lainnya dirancang sebagai kombinasi dari sinus dan kosinus, yaitu

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},\quad \cot t = \frac{\cos x}{\sin x},\quad \sec x = \frac{1}{\cos x},\quad \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

Karena $(s,t)$ terletak pada lingkaran, maka $s^2 + t^2 = 1$, sehingga $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Fungsi hiperbolik dikonstruksi dengan gagasan menggantikan lingkaran satuan oleh hiperbol satuan. Jika titik $P(s,t)$ terletak pada hiperbol $u^2 - v^2 = 1$, kita akan mendefinisikan $\cosh x = u$ dan $\sinh x = t$, di mana cosh dan sinh menyatakan kosinus dan sinus hiperbolik. Ternyata bahwa salah satu pilihan untuk $\cosh x$ dan $\sinh x$ adalah kombinasi dari fungsi eksponen natural, yaitu $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ dan $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

**Definisi Fungsi Hiperbolik** Fungsi hiperbolik didefinisikan sebagai berikut.

- ***Fungsi kosinus hiperbolik*** : $f(x) = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),\ x \in \boldsymbol{R}$.
- ***Fungsi sinus hiperbolik*** : $f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),\ x \in \boldsymbol{R}$.
- ***Fungsi tangen hiperbolik*** : $f(x) = \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x},\ x \in \boldsymbol{R}$.
- ***Fungsi kotangen hiperbolik*** : $f(x) = \coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x},\ x \neq 0$.
- ***Fungsi sekan hiperbolik*** : $f(x) = \operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x},\ x \in \boldsymbol{R}$.
- ***Fungsi kosekan hiperbolik*** : $f(x) = \operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x},\ x \neq 0$.

Dalam bentuk eksponen, fungsi tangen, kotangen, sekan, dan kosekan dapat ditulis sebagai berikut.

- $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1},\ x \in \boldsymbol{R}$.
- $\operatorname{sech} x = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{2e^x}{e^{2x} + 1},\ x \in \boldsymbol{R}$.
- $\coth x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1},\ x \neq 0$.
- $\operatorname{csch} x = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{2e^x}{e^{2x} - 1},\ x \neq 0$.

**Turunan Fungsi Hiperbolik** Turunan fungsi kosinus dan sinus hiperbolik diperoleh dari bentuk eskponennya, sedangkan turunan hiperbolik lainnya diperoleh berdasarkan aturan menentukan turunan. Hasilnya diberikan dalam teorema berikut.

**Teorema 5.20** ***Turunan Fungsi Hiperbolik***

**(a)** $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$.

**(b)** $\dfrac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$.

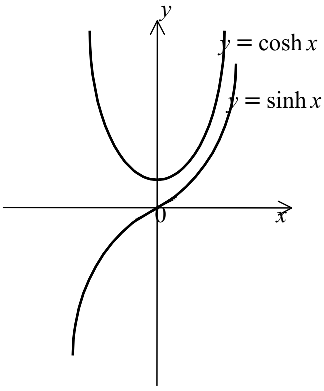
**(c)** $\dfrac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$.

**(d)** $\dfrac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$.

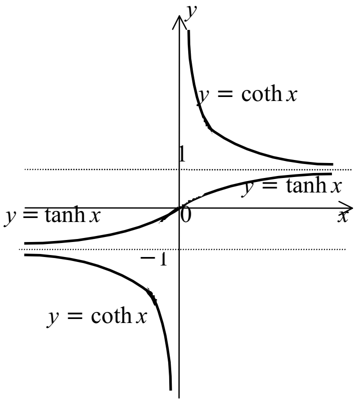
**(e)** $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$.

**(f)** $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$.

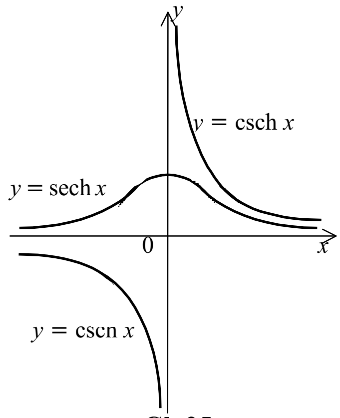
**Grafik Fungsi Hiperbolik** Pada daerah asalnya, semua fungsi hiperbolik kontinu dan terdiferensialkan. Setelah turunan pertama dan kedua dari fungsinya ditentukan, diperoleh selang kemonotonan, titik ekstrim beserta jenisnya, dan selang kecekungan beserta titik beloknya. Kemudian, tentukan limit tak hingga dan di tak hingganya untuk memperoleh asimtot fungsinya. Berdasarkan ini (kerjakan prosesnya!), diperoleh grafik fungsi hiper-bolik yang diperlihatkan pada Gb.23. Gb.24, dan Gb.25.




**Gb.23**




**Gb.24**




**Gb.25**

**Sifat Fungsi Hiperbolik** Sejalan dengan sifat fungsi trigonometri, kita mempunyai sifat yang serupa untuk fungsi hiperbolik. Semua sifat pada teorema berikut dibuktikan dengan definisi fungsi hiperbolik dan sifat fungsi eksponen, teknisnya diserahkan pada pembaca.

**Teorema 5.21 Sifat Fungsi Hiperbolik**

- $\cosh(-x) = \cosh x$.
- $\sinh(-x) = -\sinh x$.
- $\tanh(-x) = -\tanh x$.
- $\coth(-x) = -\coth x$.
- $\operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech} x$.
- $\operatorname{csch}(-x) = -\operatorname{csch} x$.
- $\tanh x = \dfrac{1}{\coth x}$.
- $\cosh x + \sinh x = e^x$.
- $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$.
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.
- $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$.
- $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$.
- $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$.
- $\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$.
- $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$.
- $\sinh(x - y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$.
- $\tanh(x + y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$.
- $\tanh(x - y) = \dfrac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}$.
- $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$.
- $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \cosh x^2 - 1$
  $= 1 + 2 \sinh^2 x$.
- $\tanh 2x = \dfrac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$.

**Contoh 5.40** Jika $\tan \phi = \sinh x$, $|\phi| < \frac{1}{2}\pi$, tunjukkan bahwa $\dfrac{d\phi}{dx} = \operatorname{sech} x$.

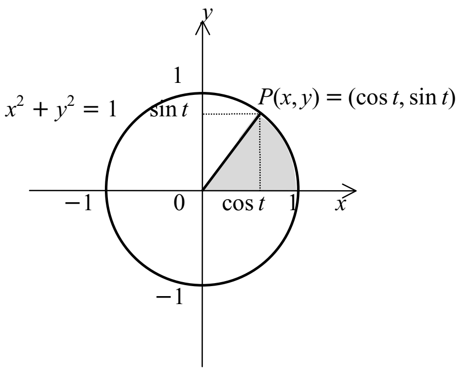
**Jawab** Turunan dari kedua ruas persamaan yang diberikan terhadap $x$ adalah

$$\left(\sec^2 \phi\right)\frac{d\phi}{dx} = \cosh x .$$

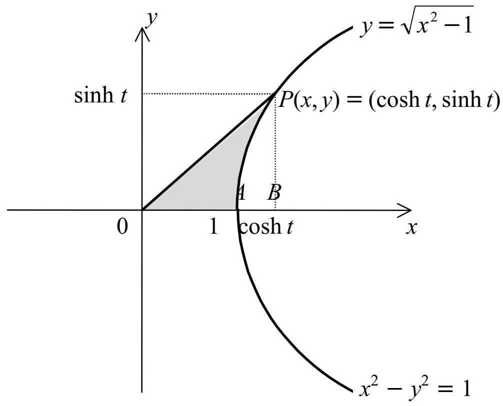
Karena $\tan\phi = \sinh x$, maka $\sec^2\phi = 1 + \tan^2\phi = 1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$. Akibatnya $\frac{d\phi}{dx} = \frac{\cosh x}{\sec^2\phi} = \frac{\cosh x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh x} = \operatorname{sech} x$, dan terbuktilah yang diinginkan. ■

**Kaitan Fungsi Hiperbolik dengan Hiperbol Satuan** Kita ingat kembali kaitan antara fungsi trigonometri dengan lingkaran satuan. Jika titik $P(x, y)$ terletak pada lingkaran satuan $x^2 + y^2 = 1$, maka $x = \cos t$ dan $y = \sin t$ memenuhi $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, dan luas sektor lingkaran yang dibangun oleh busur lingkaran dari (1,0) ke $(x, y)$ adalah $L(t) = \frac{1}{2}t$ . Pada Gb.26, luas daerah yang diarsir adalah

$$L(t) = \frac{t}{2\pi}.\text{ luas lingkaran } = \frac{t}{2\pi}.\pi = \tfrac{1}{2}t .$$




Gb.26




Gb.27

Situasi yang sama terjadi pada Gb.27. Jika titik $P(x, y)$ terletak pada hiperbol satuan $x^2 - y^2 = 1$, maka $x = \cosh t$ dan $y = \sinh t$ memenuhi $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, dan luas sektor yang dibangun oleh busur hiperbol dari (1,0) ke $(x, y)$ adalah $L(t) = \frac{1}{2}t$ . Untuk kasus $t \geq 0$, kita dapat membuktikannya dengan cara sebagai berikut.

$$\begin{aligned} L(t) &= \text{Luas segitiga } OBP - \text{luas daerah } ABP \\ &= \tfrac{1}{2}\cosh t \sinh t - \int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2 - 1}\, dx . \end{aligned}$$

Teorema dasar kalkulus memberikan

$$\begin{aligned} L'(t) &= \tfrac{1}{2}\left(\cosh^2 t + \sinh^2 t\right) - \sqrt{\cosh^2 t}.\sinh t \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\cosh^2 t + \sinh^2 t\right) - \sinh^2 t \quad (\text{karena } t > 0) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\cosh^2 t - \sinh^2 t\right) = \tfrac{1}{2}.1 = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ini mengakibatkan $L(t) = \frac{1}{2}t + c$, $c$ konstanta. Karena $L(0) = 0$, maka $c = 0$. Karena itu, $L(t) = \frac{1}{2}t$, $t \geq 0$. Untuk kasus $t < 0$, fungsinya

$$y = -\sqrt{x^2 - 1} \quad \text{dan} \quad \sqrt{\cosh^2 t - 1} = \sqrt{\sinh^2 t} = -\sinh t,$$

sehingga dengan proses di atas akan diperoleh hasil yang sama. Dengan demikian terbuk-tilah yang diinginkan. ■

**Invers Fungsi Hiperbolik** Invers fungsi hiperbolik dikonstruksi dengan cara yang sama seperti invers fungsi trigonometri.

- ***Invers Fungsi Sinus Hiperbolik*** Invers sinus hiperbolik, ditulis $y = \sinh^{-1} x$, atau $y = \text{arc sinh}\, x$, adalah fungsi yang memenuhi

  $$y = \sinh^{-1} x \Leftrightarrow x = \sinh y,\ x \in \boldsymbol{R} \text{ dan } y \in \boldsymbol{R}.$$

  Karena sinus hiperbolik dapat dinyatakan sebagai fungsi eksponen, maka invers fungsi sinus hiperbolik dapat dinyatakan sebagai fungsi logaritma natural, yaitu

  $$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),\ x \in \boldsymbol{R}.$$

  Dari $x = \sinh y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ diperoleh $2x = e^y - e^{-y}$, yang menghasilkan

  $$(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0.$$

  Selesaikan persamaan kuadrat dalam $e^y$ ini dengan rumus *abc*, diperoleh

  $$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

  Karena $e^y > 0$, maka $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$, sehingga $y = \sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

- ***Invers Fungsi Kosinus Hiperbolik*** Invers kosinus hiperbolik, ditulis $y = \cosh^{-1} x$, atau $y = \text{arc cosh}\, x$, adalah fungsi yang memenuhi

  $$y = \cosh^{-1} x \Leftrightarrow x = \cosh y,\ x \geq 1 \text{ dan } y \geq 0.$$

  Dalam bentuk logaritma natural, $\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$, $x \geq 1$.

- ***Invers Fungsi Tangen Hiperbolik*** Invers tangen hiperbolik, ditulis $y = \tanh^{-1} x$, atau $y = \text{arc tanh}\, x$, adalah fungsi yang memenuhi

  $$y = \tanh^{-1} x \Leftrightarrow x = \tanh y,\ |x| < 1 \text{ dan } y \in \boldsymbol{R}.$$

  Dalam bentuk logaritma natural, $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$.

- ***Invers Fungsi Kotangen Hiperbolik*** Invers kotangen hiperbolik, ditulis $y = \coth^{-1} x$, atau $y = \text{arc coth}\, x$, adalah fungsi yang memenuhi

  $$y = \coth^{-1} x \Leftrightarrow x = \coth y,\ |x| > 1 \text{ dan } y \in \boldsymbol{R} - \{0\}.$$

  Dalam bentuk logaritma natural, $\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \dfrac{x+1}{x-1}$, $|x| > 1$.

- ***Invers Fungsi Sekan Hiperbolik*** Invers sekan hiperbolik, ditulis $y = \operatorname{sech}^{-1} x$, atau $y = \operatorname{arc\,sech} x$, adalah fungsi yang memenuhi

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x \Leftrightarrow x = \operatorname{sech} y,\ 0 < x \le 1 \text{ dan } y \ge 0.$$

Dalam bentuk logaritma natural, $\operatorname{sech}^{-1} x = \ln \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$, $0 < x \le 1$.

Dari $x = \operatorname{sech} y = \dfrac{1}{\cosh y}$ diperoleh $\cosh y = \dfrac{1}{x}$, $y \ge 0$, sehingga $y = \cosh^{-1} \dfrac{1}{x}$. Ini mengakibatkan

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1} \frac{1}{x},\ x \ge 1.$$

- ***Invers Fungsi Kosekan Hiperbolik*** Invers kosekan hiperbolik, ditulis $y = \operatorname{csch}^{-1} x$, atau $y = \operatorname{arc\,csch} x$, adalah fungsi yang memenuhi

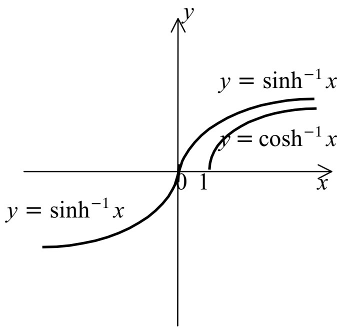
$$y = \operatorname{csch}^{-1} x \Leftrightarrow x = \operatorname{csch} y,\ x \ne 0 \text{ dan } y \ne 0.$$

Dalam bentuk logaritma natural, $\operatorname{csch}^{-1} x = \ln \dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$, $x \ne 0$.

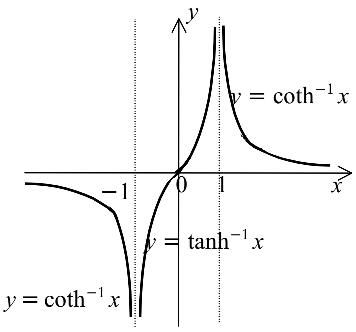
Dengan cara seperti fungsi sekan hiperbolik, diperoleh

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \sinh^{-1} \frac{1}{x},\ x \ne 0.$$

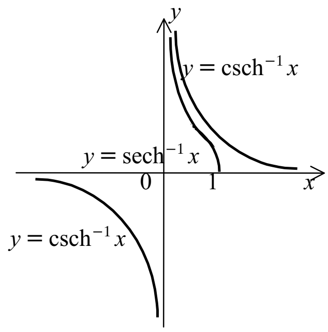
Grafik fungsi invers hiperbolik diperoleh dengan cara mencerminkan grafik fungsi hiperbolik terhadap garis $y = x$, hasilnya diperlihatkan pada Gb.28, Gb.29, dan Gb.30.




Gb.28




Gb.29




Gb.30

**Turunan Invers Fungsi Hiperbolik** Turunan invers fungsi hiperbolik dapat diperoleh dari turunan bentuk logaritma naturalnya atau dengan turunan fungsi invers, hasilnya diberikan dalam teorema berikut.

**Teorema 5.22** ***Turunan Invers Fungsi Hiperbolik***

**(a)** $\dfrac{d}{dx}\left(\cosh^{-1} x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$.

**(d)** $\dfrac{d}{dx}\left(\coth^{-1} x\right) = \dfrac{1}{1-x^2}$, $|x| > 1$.

**(b)** $\dfrac{d}{dx}\left(\sinh^{-1} x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \boldsymbol{R}$.

**(c)** $\dfrac{d}{dx}\left(\tanh^{-1} x\right) = \dfrac{1}{1-x^2}$, $|x| < 1$.

**(e)** $\dfrac{d}{dx}\left(\text{sech}^{-1} x\right) = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$, $0 < x < 1$.

**(f)** $\dfrac{d}{dx}\left(\text{csch}^{-1} x\right) = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$, $x \neq 0$.

**Bukti :** Kita buktikan bagian (a) saja, sisanya diserahkan untuk latihan pembaca.

Dari $y = \cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$, $x \geq 1$ diperoleh

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1. \blacksquare$$

***Cara lain*** Dari $y = \cosh^{-1} x \Leftrightarrow x = \cosh y$, $x \geq 1$ dan $y \geq 0$; dan $\dfrac{dx}{dy} = \sinh y$ diperoleh

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1.$$

karena $\sinh y \geq 0$ untuk $y \geq 0$. ■

Berikut ini adalah beberapa contoh yang berkaitan dengan invers hiperbolik.

**Contoh 5.41** Tentukan turunan pertama dari fungsi

**(a)** $y = \tanh^{-1}(\sin 2x)$ dan **(b)** $y = \sinh^{-1}(\ln x)$.

**Jawab** Berdasarkan Teorema 5.22 dan aturan rantai diperoleh hasil berikut.

**(a)** $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1-\sin^2 2x}.(2\cos 2x) = \dfrac{2\cos 2x}{\cos^2 2x} = \dfrac{2}{\cos 2x} = 2\sec 2x$.

**(b)** $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{\ln^2 x + 1}}.\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$.

**Contoh 5.42** Jika $\tan \phi = \sinh x$, $|\phi| < \frac{1}{2}\pi$, nyatakan $x$ dalam $\phi$ dan hitunglah $\dfrac{dx}{d\phi}$.

**Jawab** Dari $\tan \phi = \sinh x$, $|\phi| < \frac{1}{2}\pi$ diperoleh $x = \sinh^{-1}(\tan \phi)$. Berdasarkan rumus $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $x \in \boldsymbol{R}$, kita mempunyai

$$x = \sinh^{-1}(\tan\phi) = \ln\left(\tan\phi + \sqrt{\tan^2\phi + 1}\right) = \ln\left(\tan\phi + \sec\phi\right).$$

Dari sini diperoleh

$$\frac{dx}{d\phi} = \frac{\sec^2\phi + \sec\phi\tan\phi}{\tan\phi + \sec\phi} = \frac{\sec\phi\,(\sec\phi + \tan\phi)}{\sec\phi + \tan\phi} = \sec\phi\,,$$

karena $\sec\phi + \tan\phi \neq 0$ untuk $|\phi| < \frac{1}{2}\pi$ .

### 5.2.7. Soal Latihan

Untuk soal 1 sampai dengan 6, buktikan setiap kesamaan yang diberikan.

**1.** $\cosh\frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x + 1)}$ .

**2.** $\sinh\frac{1}{2}x = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x - 1)}, x > 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x - 1)}, x < 0 \end{cases}$ .

**3.** $\tanh\frac{1}{2}x = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}}, x > 0 \\ -\sqrt{\dfrac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}}, x < 0 \end{cases}$ .

**4.** $\tan\frac{1}{2}x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x + 1} = \dfrac{\cosh x - 1}{\sinh x}$ .

**5.** $\tanh(\ln x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .

**6.** $\dfrac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x} = e^{2x}$ .

Untuk soal 7 sampai dengan 11, tentukan turunan $y'$ dari setiap fungsi yang diberikan.

**7.** $y = \sinh(\sin^{-1} x)$

**8.** $y = \sinh^{-1}(\sin x)$

**9.** $y = (\sin x)^{\tanh x}$

**10.** $y = \tanh^{-1}(e^x)$

**11.** $y = \operatorname{csch}^{-1}(\tan x)$

Untuk soal 12 sampai dengan 15, tentukan turunan $y'$ dari bentuk implisit yang diberikan.

**12.** $\tanh xy = \cosh y$

**13.** $\ln(\sinh x) = \cosh xy$

**14.** $\tanh^{-1} x = \ln xy$

**15.** $\coth^{-1} xy = \tanh(x + y)$

**16.** Jika $\sec\phi = \cosh x$, $|\phi| < \frac{1}{2}\pi$ , nyatakan $x$ dalam $\phi$ dan hitunglah $\dfrac{dx}{d\phi}$ .