Fungsi Transenden

Fungsi Transenden

- Invers suatu fungsi dan turunannya
- Fungsi logaritma asli
- Fungsi eksponen asli
- Fungsi eksponen dan logaritma umum
- Pertumbuhan dan peluruhan eksponen

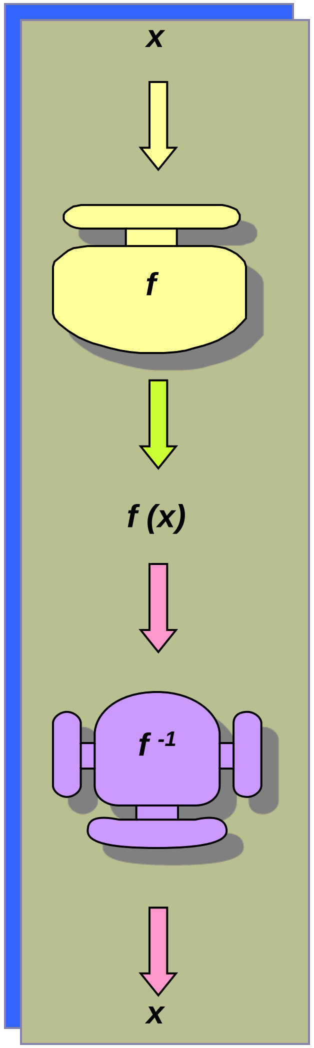
Fungsi satu-ke-satu

Fungsi $f : D_f \rightarrow R_f$ dikatakan *satu-ke-satu* jika untuk setiap *u*, *v* Є *Df* berlaku *u* ≠ *v*, *f* (*u*) ≠ *f* (*v*). (atau *f* (*u*) = *f* (*v*) maka⓿ ✂*u = v, untuk setiap u,v* ЄD_f)

Contoh:

- Fungsi *f*: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, *f* (*x*) = x^3 satu-ke-satu karena $f(u) = f(v)$ maka $u^3 = v^3$ dengan demikian $u^3 - v^3 = 0$ atau $(u-v)(u^2+uv+v^3)=0,$ maka $u = v$
- Fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow [0,\infty),\ f(x) = x^2$ bukan satu-ke-satu karena -2, 2 $\in D_f$ dengan 2 ≠ 2 tetapi *f* (-2) = *f* (2) = 4.

Invers Fungsi & Turunannya



Misalkan x berada pada suatu daerah asal dan *f* fungsi satu-satu;

Kemudian x kita kenakan pada *f*, akan menghasilkan *f(x)* pada daerah hasil;

Selanjutnya kita kenakan *f(x)* pada fungsi invers atau balikannya; yang hasilnya adalah x itu sendiri.

Atau dengan kata lain dapat dinotasikan dengan

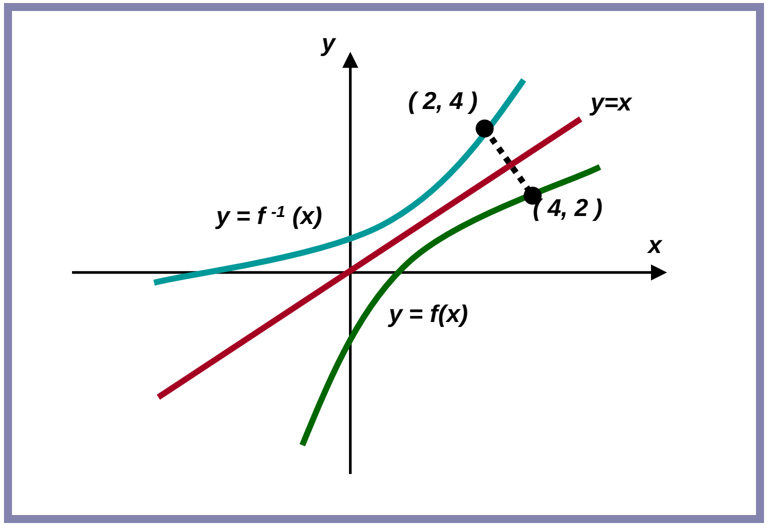
$$f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)=x \quad \textbf{dan} \quad f^{-1}\left(f\left(y\right)\right)=y$$

Notasi Fungsi Invers

Andaikan f memiliki balikan atau invers, maka

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$

Akibatnya y=f(x) dan f invers y menentukan pasangan bilangan (x,y) yang sama, sehingga memiliki grafik-grafik yang identik.



Teorema Eksistensi Fungsi Invers

Jika f monoton murni pada daerah asalnya, maka f memiliki fungsi invers

Contoh Soal

$$f(x) = x^5 + 2x + 1$$

$$f'(x) = 5x^4 + 2 > 0$$

f memiliki invers pada daerah asalnya, yaitu bilangan real.

Prosedur Menentukan Bentuk Invers Fungsi

Langkah 1 : Selesaikan persamaan y = f(x) untuk x dalam bentuk y. Misalkan:

$$y = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow (1-x)y = x$$
$$\Leftrightarrow y - xy = x \Leftrightarrow x + xy = y$$
$$\Leftrightarrow x(1+y) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}$$

Langkah 2 : Gunakan f-1 (y) untuk untuk menamai ungkapan yang dihasilkan dalam y.

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1+y}$$

Langkah 3 : Gantilah y dengan x untuk mendapatkan rumus untuk f-1(x).

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1+x}$$

Teorema Turunan Fungsi Invers

Jika f adalah suatu fungsi yang memiliki invers, dengan $g = f - 1$ dan $f'(g(a)) \neq 0$, maka g dapat diturunkan di a dan $g'(a)=1/f'(g(a))$.

Contoh

$f(x)=2x+\cos x$, tentukan $(f^{-1})'(1)$.

Perhatikan bahwa $f'(x) = 2 - \sin x > 0$,
akan dicari $f^{-1}(1)$;

$f(0)=1$ akibatnya $f^{-1}(f(0)) = 0 = f^{-1}(1)$
Jadi $(f^{-1})'(1) = 1/(f'(f^{-1}(1))) = 1/(f'(0)) = ½$

Fungsi Logaritma Asli

Perhatikan turunan2 fungsi berikut ini.

$$D_x\left(\frac{x^2}{2}\right) = x$$

$$D_x\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$$

$$D_x\left(x^{-2}\right) = -2x^{-1}$$

Kemudian adakah fungsi yang turunannya adalah 1/x?

$$D_x(????) = \frac{1}{x}$$

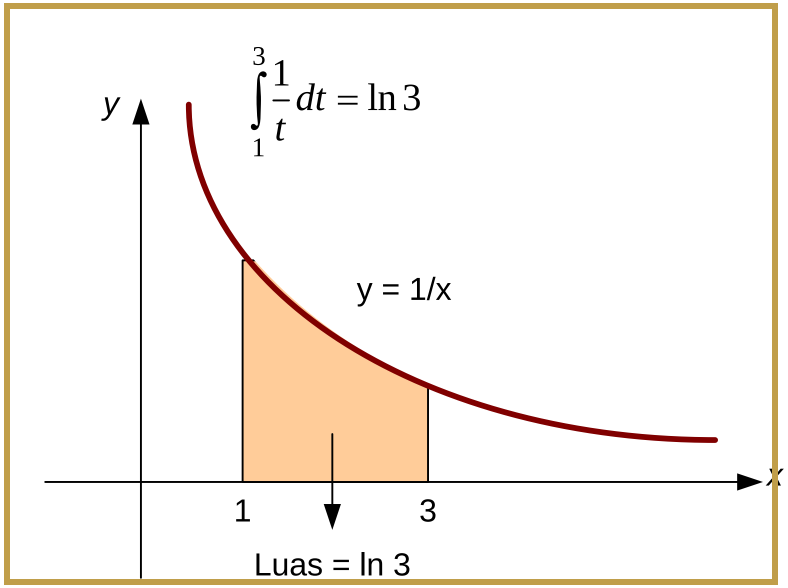
Definisi Logaritma

Fungsi logaritma asli dinyatakan dalam ln, didefinisikan sebagai

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, x > 0$$

Daerah asalnya adalah himpunan real positip.

Secara Geometri



Turunan Fungsi Logaritma

$$D_x(\ln x) = D_x\left(\int_1^x \frac{1}{t}\,dt\right) = \frac{1}{x}, x > 0.$$

Dengan demikian bila kita akan mencari anti turunan dari fungsi 1/x kita dapatkan

$$D_x(\ln x) = D_x\left(\int_1^x \frac{1}{t}\,dt\right) = \frac{1}{x}, x > 0.$$

Penyelesaian Soal

$$D_x\left(????\right) = \frac{1}{x},$$

$$D_x\left(\ln x\right) = \frac{1}{x}, x \neq 0$$

Dari rumusan ini kita dapat menjawab pertanyaan yang muncul pada awal sub bab ini yakni ln(x)

Teorema A

Sifat-sifat yang dimiliki oleh fungsi logaritma asli adalah;

Jika a dab b bilangan-bilangan positif dan r sebarang bilangan rasional, maka

$$(i).\ln 1 = 0$$

$$(ii)\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$(iii)\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$(iv)\ln a^r = r\ln a$$

Contoh Soal

Tentukan turunan dari $\ln \sqrt[3]{x}$

Jawabannya :

$$D_x\left(\ln \sqrt[3]{x}\right) = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}.D_x\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}.\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x}.$$

Fungsi Eksponen Asli

Invers dari fungsi logaritma asli disebut fungsi eksponen asli dan dinyatakan oleh lambang *e* atau exp; yakni

$$x = \exp y \Leftrightarrow y = \ln x$$

kata exp dikenal dengan lambang e, yg menyatakan bilangan real positip sedemikian rupa sehingga ln e = 1.

Sifat Fungsi Eksponensial

Andaikan a dan b adalah sebarang bilangan real, maka

$$(i).\, e^{a} e^{b} = e^{a+b}$$

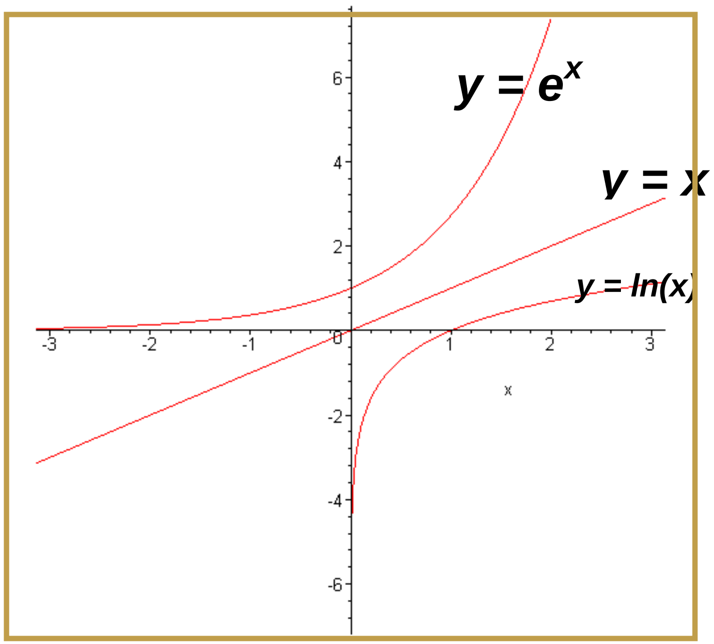
$$(ii)\, \frac{e^{a}}{e^{b}} = e^{a-b}$$

Turunan & Integral Fungsi Eksponen

$$D_x e^x = e^x$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Karena fungsi logaritma natural dan eksponensial asli adalah fungsi yang saling invers, maka grafik dari kedua fungsi tersebut adalah sebagai berikut



$$y = e^x \Leftrightarrow$$

$$\ln y = \ln e^x \Leftrightarrow$$

$$\ln y = x \ln e \Leftrightarrow$$

$$\ln y = x$$

Fungsi Eksponen & Logaritma Umum

Definisi

Fungsi eksponensial berbasis a didefinisikan sebagai berikut

Untuk a > 0 dan sebarang bilangan real x.

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Sifat Fungsi Eksponen & Logaritma Umum

Jika a > 0, b > 0, dan x,y adalah bilangan-bilangan real, maka

$$(i)\, a^x a^y = a^{x+y}$$

$$(ii)\, \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(iii)\, \left(a^x\right)^y = a^{xy}$$

$$(iv)\, (ab)^x = a^x b^x$$

$$(v)\, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

dengan bentuk turunan dan integralnya adalah sebagai berikut;

$$D_x\left(a^x\right) = a^x \ln a$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a \neq 1$$

Pertumbuhan dan Peluruhan Eksponen

1. Pertumbuhan Populasi dan Peluruhan Radioactive

populasi bakteri E. coli

Model Peluruhan & Pertumbuhan Eksponensial

Pertumbuhan suatu populasi dapat dinyatakan sebagai:

laju perubahan populasi relative terhadap populasi awalnya;

misalnya laju pertumbuhan tersebut konstan sebesar k;
maka dapat dinyatakan dalam formula berikut;

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Solusi

$$\frac{1}{y}\,dy = k\ dt$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\ dt$$

$$\ln|y| = kt + C$$

$$e^{\ln|y|} = e^{kt+C}$$

$$|y| = e^{C} \cdot e^{kt}$$

$$|y| = e^{C} \cdot e^{kt}$$

$$y = Ae^{kt}$$

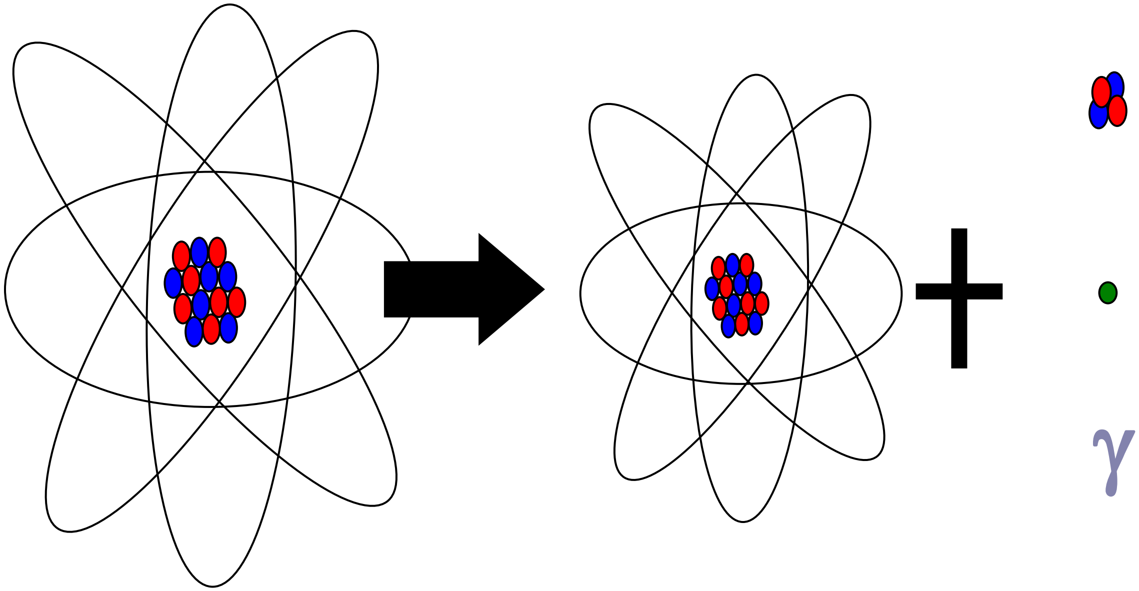
$$y_0 = Ae^{k\cdot 0}$$

Diperoleh:

$$y = y_0 e^{kt}$$

Bila k bernilai positif maka disebut sebagai pertumbuhan eksponensial; dan bila k bernilai negatif disebut sebagai peluruhan eksponensial; yang contohnya ada dalam peluruhan radioaktif.

Peluruhan radioaktif dapat digambarkan dalam proses berikut :

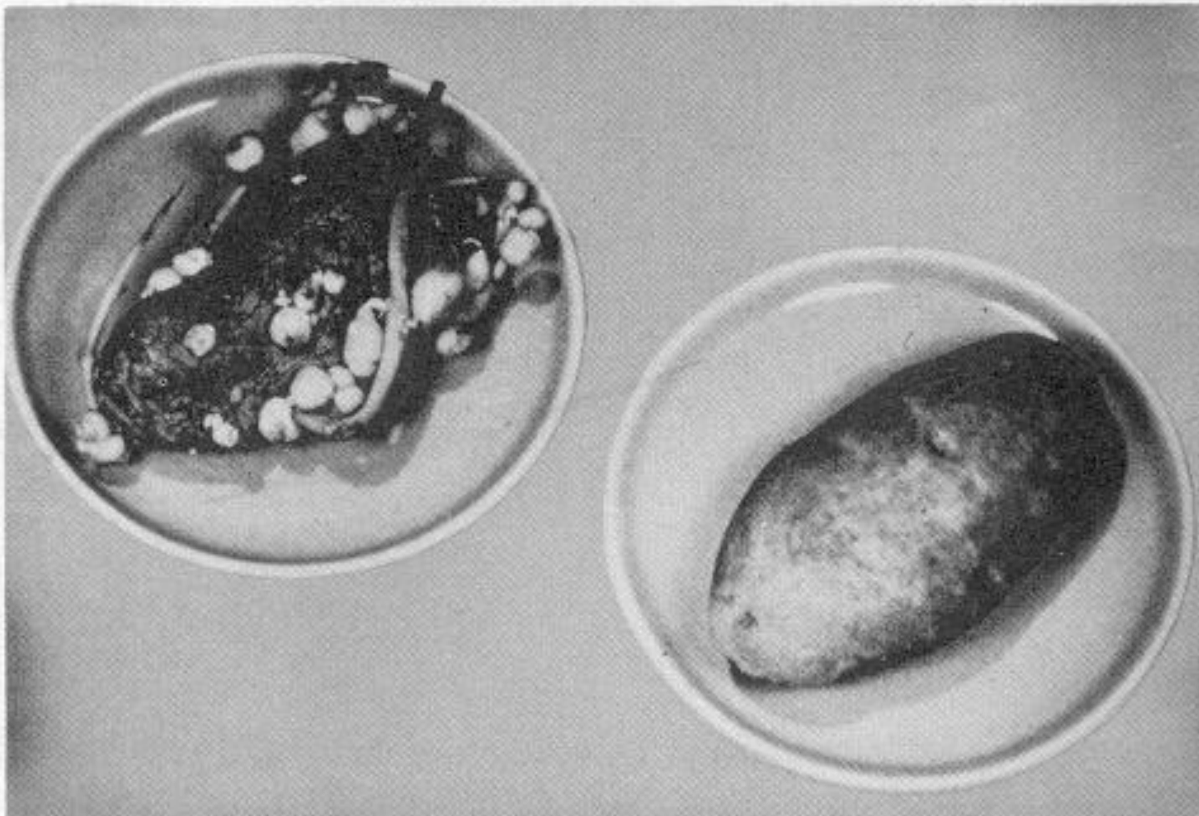


Alpha
α

Beta β^-
β^+

Gamma
γ

2. Kegunaan pada bahan makanan adalah untuk pengawetan



IN FOOD PRESERVATION: *Potatoes stored for 18 months at 47°F. Potato at right had been irradiated, that on left had not.*

Waktu Paruh Bahan Radioaktif

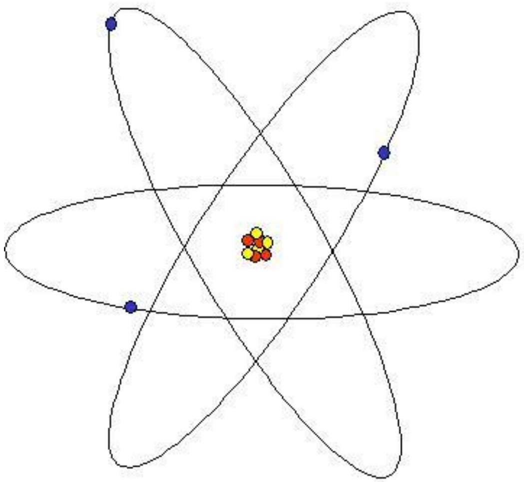
$$\frac{1}{2}\cancel{y}_0 = \cancel{y}_0 e^{-kt}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(e^{-kt}\right)$$

$$\overset{0}{\cancel{\ln 1}} - \ln 2 = -kt$$

$$\ln 2 = kt$$

$$\frac{\ln 2}{k} = t$$

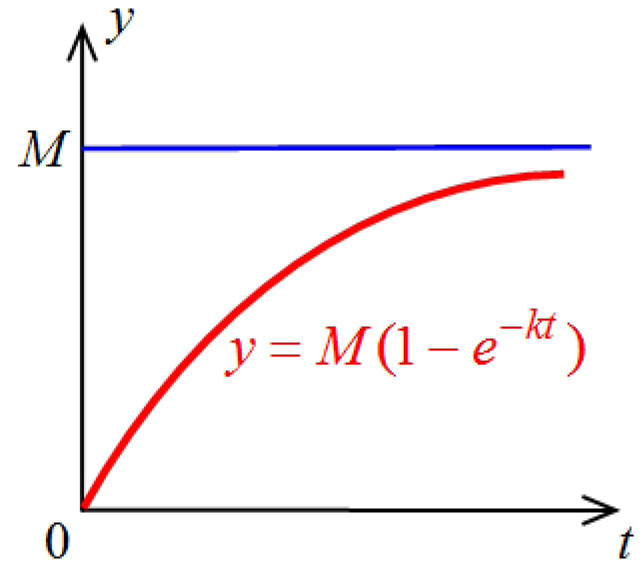


→

Pertumbuhan terbatas

Laju pertumbuhan sebanding dengan selisih antara jumlah tertentu dan populasinya.

Aplikasi: Penjualan produk terbaru, depresiasi peralatan, pertumbuhan perusahaan, proses belajar, dan sebagainya.



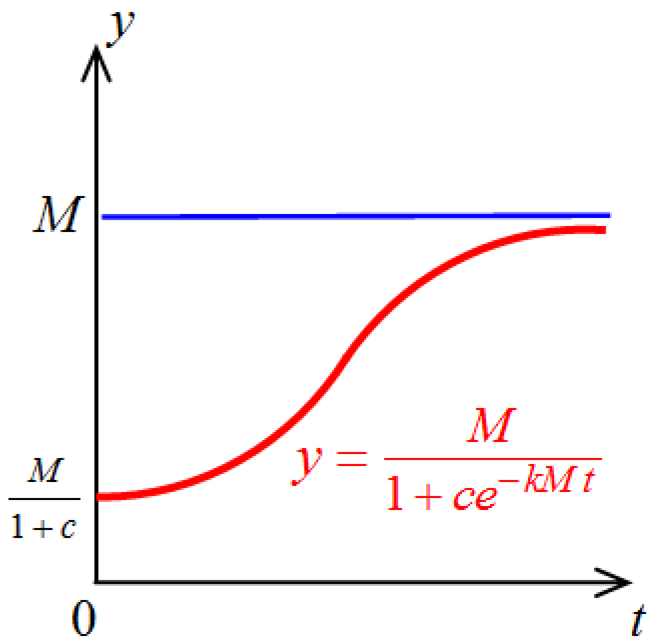
$$\frac{dy}{dt} = k(M - y)$$

$$k, t > 0,\ y(0) = 0$$

Solusi: $y = M(1 - e^{-kt})$

Pertumbuhan logistik

Laju pertumbuhan sebanding dengan perkalian populasinya dengan selisih antara jumlah tertentu dan populasinya.



Aplikasi: Pertumbuhan populasi jangka panjang, epidemi, penjualan produk baru, penyebaran rumor (gosip), pertumbuhan perusahaan, dan sebagainya

$$\frac{dy}{dt} = ky(M - y), k, t > 0, y(0) = \frac{M}{1+c}.$$

Solusi: $y = \frac{M}{1+ce^{-kMt}}$

• **Bukti:** $\frac{dy}{dt} = ky(M - y)$ ubah menjadi $\frac{M\,dy}{y(M - y)} = kM\,dt$

Membuat rasional sederhana: $\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{M-y}\right)dy = kM\,dt$

$$\int\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{M-y}\right)dy = \int kM\,dt$$

$\ln\frac{y}{M - y} = kMt + c_1$ atau $\frac{y}{M - y} = e^{kMt + c_1} = c_2 e^{kMt}$

$\frac{M - y}{y} = \frac{1}{c_2 e^{kMt}} = c_3 e^{-kMt}$ atau $M - y = yc_3 e^{-kMt}$

$y(1 + c_3 e^{-kMt}) = M$ atau $y = \frac{M}{1 + c_3 e^{-kMt}}$

Karena $y(0) = \frac{M}{1+c}$ maka $\frac{M}{1 + c_3} = \frac{M}{1+c}$

sehingga $c_3 = c$. Jadi solusinya adalah $y = \frac{M}{1 + ce^{-kMt}}$

Exercise (1)

Carbon 14, an isotope of carbon is radioactive and decays at a rate proportional to the amount present. Its half-life is 5730 years; that is, it takes 5730 years for a given amount of carbon 14 to decay to one-half its original size. If 10 grams was present originally, how much will be left after 2000 years?

Answer

The half-life of 5730 allows us to determine k, since it implies that

$$\frac{1}{2} = 1e^{k(5730)}$$

Or, after taking logarithms,

$$-\ln 2 = 570k$$

$$k = \frac{-\ln 2}{5730} \approx -0.000121$$

Thus,

$$y=10e^{-0.000121t}$$

At $t = 2000$, that gives

$$y = 10e^{-0.000121(2000)} \approx 7.85\text{grams}$$

Exercise (2)

The number of bacteria in a rapidly growing culture was estimated to be 10,000 at noon and 40,000 after 2 hours. Predict how many bacteria there will be at 5 P.M.

Answer

We assume that the differential equation *dy/dt = ky* is applicable, so $y = y_0 e^{kt}$

Now we have two conditions (y_0=10,000 and y=40,000 at t=2), from which we conclude that

$$40,000 = 10,000e^{k(2)}$$

$$4 = e^{2k}$$

Taking logarithms yields

$$\ln 4 = 2k$$

or

$$k = \frac{1}{2}\ln 4 = \ln\sqrt{4} = \ln 2$$

Thus,

$$y = 10,000e^{(\ln 2)t}$$

and at t=5, this gives

$$y = 10,000e^{0.693(5)} \approx 320,000$$

Terima kasih....