

FUNGSI TRANSENDEN

- 7.1 Fungsi Logaritma Asli
- 7.2 Fungsi-fungsi Balikan dan Turunannya
- 7.3 Fungsi-fungsi Eksponen Asli
- 7.4 Fungsi Eksponen dan Logaritma Umum
- 7.5 Pertumbuhan dan Peluruhan Eksponen
- 7.6 Persamaan Differensial Linear Orde Satu
- 7.7 Fungsi-fungsi balikan Trigonometri dan Turunannya
- 7.8 Fungsi-fungsi hiperbola dan Turunannya

7.1 Fungsi Logaritma Asli

Turunan dan integral sudah dipelajari pada bab-bab sebelumnya. Tentu kita sudah cukup menguasai tentang dua hal tersebut. Dari kedua hal tersebut, jika kita kaitkan dengan cara mengurutkannya sesuai besarnya pangkat maka diperoleh suatu keanehan yang belum kita temui pada bab-bab yang telah kita pelajari. Perhatikan hal berikut

$$D_x \left(\frac{x^3}{3} \right) = x^2$$

$$D_x \left(\frac{x^2}{2} \right) = x^1$$

$$D_x(x) = x^0 = 1$$

$$D_x(\dots) = x^{-1}$$

$$D_x \left(\frac{-1}{x} \right) = x^{-2}$$

$$D_x \left(\frac{-1}{2x^2} \right) = x^{-3}$$

Dengan adanya kesenjangan tersebut, maka didefinisikan suatu fungsi logaritma asli. Untuk memenuhi tempat kosong yang ada di atas.

Definisi Fungsi Logaritma Asli

Fungsi Logaritma Asli, dinyatakan oleh \ln , didefinisikan sebagai

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$$

Daerah asalnya adalah himpunan bilangan real positif.

Dengan demikian kita sudah mempunyai suatu fungsi yang turunannya adalah $\frac{1}{x}$, yaitu turunan suatu fungsi logaritma asli

$$D_x \int_1^x \frac{1}{t} dt = D_x(\ln x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

Kita kombinasikan dengan aturan rantai. Jika $u = f(x) > 0$ dan jika f terdiferensialkan, maka

$$D_x \ln u = \frac{1}{u} D_x u$$

Contoh : Tentukan $D_x \ln \sqrt{x}$.

Penyelesaian : Andaikan $u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$D_x \ln \sqrt{x} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} D_x \left(x^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2} \left(x^{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2x}$$

Karena $(\ln x) = \frac{1}{x}$ maka $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$, $x \neq 0$

Sehingga didapatkan suatu yang selama ini menjadi permasalahan juga. Dalam aturan pangkat :

$\int u^r du = \frac{u^{r+1}}{r+1}$, dengan $r \neq -1$. sekarang, untuk $r = -1$ kita sudah punya solusinya, yaitu

$$\int u^{-1} du = \ln|u| + C$$

Contoh : Tentukan $\int \frac{5}{x} dx$

Penyelesaian : $\int \frac{5}{x} dx = 5 \int \frac{1}{x} dx = 5 \ln|x| + C$

Sifat-sifat Logaritma Asli

Teorema Logaritma Asli

Jika a dan b bilangan-bilangan positif dan r sebarang bilangan rasional, maka

- i. $\ln 1 = 0$
- ii. $\ln ab = \ln a + \ln b$
- iii. $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- iv. $\ln a^r = r \ln a$

Grafik Logaritma Asli

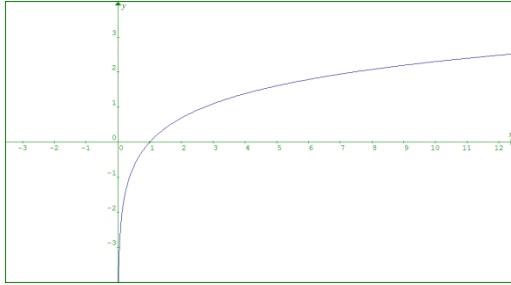
Daerah asal $\ln x$ adalah himpunan bilangan real positif, sehingga grafik $y = \ln x$ terletak di setengah bidang kanan.

$$y = \ln x$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y'' = -\frac{1}{x^2}$$

Karena $x > 0$, maka $y' > 0$. Ini menunjukkan bahwa fungsi $\ln x$ selalu naik. Dan untuk $y'' < 0$ ini menunjukkan bahwa fungsi tersebut cekung ke bawah dimana-mana. Gambarnya seperti berikut.



7.2 Fungsi-fungsi Balikan dan Turunannya

Teorema

Jika f monoton murni pada daerah asalnya, maka f memiliki balikan.

Fungsi monoton

Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada suatu himpunan R . Untuk semua $x_1, x_2 \in R$, fungsi $f(x)$ dikatakan:

- monoton naik, jika $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$
- monoton turun, jika untuk $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$
- monoton tak naik, jika untuk $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) \geq f(x_2)$
- monoton tak turun, jika untuk $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) \leq f(x_2)$
- monoton datar, jika untuk $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) = f(x_2)$

Beberapa sumber mengatakan monoton naik yang dimaksud di atas adalah monoton naik sejati, dan mengatakan monoton tak turun yang dimaksud diatas dengan istilah monoton naik.

Yang dimaksud monoton murni atau monoton tegas adalah fungsi monoton naik atau fungsi monoton turun. Monoton naik jika $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$. Monoton turun jika $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$. Kita ambil fungsi monoton naik untuk menunjukkan bahwa fungsi monoton murni memiliki invers. Perhatikan pengertian fungsi naik. untuk $x_1 < x_2$ maka berlaku $f(x_1) < f(x_2)$ untuk setiap x_1, x_2 pada daerah asalnya. Pernyataan tersebut ekuivalen dengan pernyataan jika $x_1 \neq x_2$ maka berlaku $f(x_1) \neq f(x_2)$ untuk setiap x_1, x_2 pada daerah asalnya. Dengan kata lain pernyataan tersebut adalah pengertian dari fungsi satu-satu.

Bukti teorema

Kita ambil $f: A \rightarrow B$

Jika f monoton murni maka f satu-satu dan onto

Kita akan membuktikan salah satu dari fungsi monoton murni yaitu fungsi monoton naik.

Bukti untuk f satu-satu.

Diketahui f monoton naik $\leftrightarrow x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Dengan kata lain : $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Terbukti f satu-satu.

Bukti untuk onto

Bukti ini merupakan bukti yang rumit. Mungkin karena hal ini sehingga di buku kalkulus tidak dituliskan. Kami mencoba untuk membuktikannya.

Onto artinya $f(A) = B$, yang ekuivalen dengan $f(A) \subseteq B$ dan $B \subseteq f(A)$

Untuk $f(A) \subseteq B$ sudah sangat jelas.

Sekarang akan dibuktikan untuk $B \subseteq f(A)$

Andaikan

$\exists b \in B$ dan $b \notin f(A)$

Maka $\exists x_1, x_2 \in A, \exists f(x_1) < b < f(x_2)$

Untuk $\lim_{x \rightarrow x_1} x = c = \lim_{x \rightarrow x_2} x, \quad x_1 \neq c \neq x_2$

Maka $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_2} f(x) = f(c)$

Menurut teorema apit $f(c) < b < f(c)$ maka haruslah $f(c) = b$

$\therefore \exists c \in A \exists f(c) = b$

$\therefore b \in f(A)$

Kontradiksi bahwa $b \notin f(A)$

Jadi, f adalah Onto.

Contoh : Perhatikan bahwa f memiliki balikan. Untuk $f(x) = 2x^7 - x^5 + 12x$.

Penyelesaian : Dengan menggunakan teorema turunan pertama untuk kemonotonan fungsi. Kita dapatkan turunan pertamanya yaitu

$$f'(x) = 14x^6 - 5x^4 + 12$$

Dimana nilai $f'(x)$ selalu lebih besar nol untuk setiap x .

$$f'(x) = 14x^6 - 5x^4 + 12 > 0 \text{ untuk semua } x$$

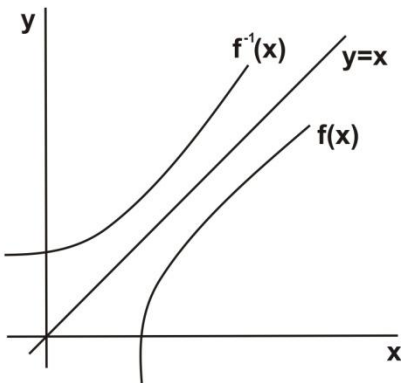
Jadi f naik pada seluruh garis real. Sehingga f memiliki balikan di sana.

Cara Menentukan Fungsi Balikan

Hal yang berkaitan adalah pencarian rumus untuk $f^{-1}(x)$ untuk melakukan itu, kita tentukan terlebih dahulu $f^{-1}(y)$, kemudian kita menukarkan x dan y dalam rumus yang dihasilkan. Jadi diusulkan untuk melakukan tiga langkah berikut untuk pencarian $f^{-1}(x)$

1. Langkah 1 : Selesaikan persamaan $y = f(x)$ untuk x dalam bentuk y .
2. Langkah 2 : Gunakan $f^{-1}(y)$ untuk menamai ungkapan yang dihasilkan dalam y .
3. Langkah 3 : Gantilah y dengan x .

Perhatikan bahwa kita telah menukar peranan x dan y . Sedikit pemikiran meyakinkan kita bahwa menukar peranan x dan y pada grafik adalah mencerminkan grafik terhadap garis $y = x$. Jadi, grafik $y = f^{-1}(x)$ adalah gambar cermin grafik $y = f(x)$ terhadap garis $y = x$.



Contoh : Carilah invers dari $y = -\frac{1}{x-3}$

Penyelesaian : Langkah 1 : menyelesaikan persamaan $y = f(x)$ untuk x dalam bentuk y .

$$y = -\frac{1}{x-3}$$

$$x - 3 = -\frac{1}{y}$$

$$x = -\frac{1}{y} + 3$$

Langkah 2 : menggunakan $f^{-1}(y)$ untuk menamai ungkapan yang dihasilkan dalam y

$$f^{-1}(y) = -\frac{1}{y} + 3$$

Langkah 3 : mengganti y dengan x .

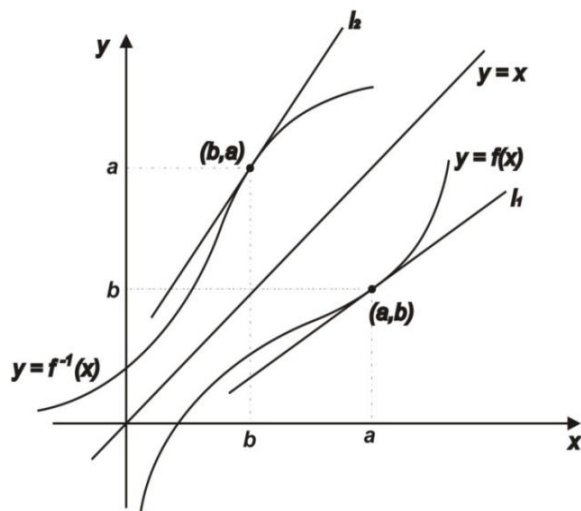
$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{x} + 3$$

Turunan Fungsi Balikan

Pada bagian ini kita akan mencoba membahas lebih dalam tentang hubungan turunan suatu fungsi dengan turunan inversnya, jika fungsi yang bersangkutan mempunyai invers. Pada bagian ini pembahasan hanya dibatasi pada fungsi kontinu yang monoton murni.

Teorema

Andaikan f terdiferensiasikan dan monoton murni (monoton tegas) pada selang I . Jika $f'(x) \neq 0$ di suatu x tertentu dalam I . Maka f^{-1} terdiferensiasikan di titik yang berpadanan $y = f(x)$ dalam daerah hasil f dan $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$



Menurut definisi invers. Yaitu, jika $f(x) = y$, maka $f^{-1}(y) = x$. Dengan melakukan substitusi kita dapatkan $f^{-1}(f(x)) = x$.

Kita perhatikan untuk $f^{-1}(f(x)) = x$. Kita lakukan diferensiasi. Diperoleh :

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(f(x)) = \frac{d}{dx} x$$

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot (f'(x)) = 1$$

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Yang ekuivalen dengan $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

Bukti teorema

Interval $[p, q] \subseteq R$, dan $f: [p, q] \rightarrow R$, fungsi monoton murni dan kontinu pada $[p, q]$.

$[r, s] = f([p, q])$ dan $g: [r, s] \rightarrow R$ invers fungsi f yang monoton murni dan kontinu.

Fungsi f terdiferensial di titik $a \in [p, q]$ dan $f'(a) \neq 0$. Fungsi g terdiferensial di titik $b = f(a)$ lebih lanjut,

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}$$

Ambil sembarang $y \in [r, s]$ dengan $y \neq b$, selanjutnya didefinisikan fungsi $H : [r, s] \rightarrow R$ dengan

$$H(y) = \frac{f(g(y)) - f(g(b))}{g(y) - g(b)}$$

Diketahui g monoton murni, selanjutnya mudah dimengerti bahwa untuk setiap $y \in [r, s]$ dengan $y \neq b$, maka $g(y) \neq g(b)$. dengan kata lain $H : [r, s] \rightarrow R$, well define. Demikian halnya jika $y = f(g(y))$ dan $b = f(g(b))$ maka berdasarkan definisi fungsi H diperoleh

$$H(y) = \frac{y - b}{g(y) - g(b)}$$

Mudah dipahami bahwa untuk setiap $y \in [r, s]$ dengan $y \neq b$, maka $H(y) \neq 0$. Selanjutnya dibuktikan bahwa

$$\lim_{y \rightarrow b} H(y) = f'(a)$$

Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ dan jika f terdiferensial di $a = g(b)$, maka terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in [a, b]$ dengan sifat $0 < |x - a| < \delta$ berlaku

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < \varepsilon$$

Diketahui g kontinu di titik $b = f'(a)$, artinya untuk setiap bilangan $\delta > 0$ terdapat bilangan $\eta > 0$ sehingga untuk setiap $y \in [r, s]$ dengan $0 < |y - b| < \eta$, maka berlaku

$$|g(y) - g(b)| < \delta$$

Karena g fungsi invers dari f , maka g bijektif, dengan kata lain g injektif dan surjektif. g injektif dan $a = g(b)$, maka diperoleh; jika $0 < |y - b| < \eta$ maka $|g(y) - g(b)| = |g(y) - a| < \delta$ untuk setiap $y \in [r, s]$

Oleh karena itu untuk setiap $y \in [r, s]$ dengan $0 < |y - b| < \eta$ berakibat

$$|H(y) - f'(a)| = \left| \frac{f(g(y)) - f(g(b))}{g(y) - g(b)} - f'(a) \right| < \varepsilon$$

Untuk sebarang $\varepsilon > 0$. Jadi $\lim_{y \rightarrow b} H(y) = f'(a)$

Perhatikan bahwa karena $y \neq b$ maka $H(y) = \frac{y-b}{g(y)-g(b)} \neq 0$, sehingga diperoleh

$$\frac{g(y)-g(b)}{y-b} = \frac{1}{H(y)}$$

Dapat disimpulkan, untuk setiap $y \in [r, s]$ dengan $y \neq b$, berlaku

$$g'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{H(y)} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow b} H(y)} = \frac{1}{f'(a)}$$

Terbukti

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}$$

Contoh : Carilah $(f^{-1})'(2)$ jika diketahui $f(x) = \sqrt{x+1}$

Penyelesaian : Kita akan mencari nilai x yang berpadanan dengan $y = 2$

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

$$y = \sqrt{x+1}$$

$$2 = \sqrt{x+1}$$

$$4 = x+1$$

$$x = 3$$

Kemudian kita cari $f'(x)$

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3+1}}$$

$$f'(3) = \frac{1}{4}$$

Kita selesaikan dengan menggunakan teorema $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(3)}$$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{\frac{1}{4}}$$

$$(f^{-1})'(2) = 4$$

7.3. Fungsi Eksponen Asli

Definisi

Balikan \ln disebut **fungsi eksponen asli** dan dinyatakan oleh \exp . Jadi

$$x = \exp y \leftrightarrow y = \ln x$$

Dari definisi dapat diambil bahwa

- i. $\exp(\ln x) = x, \quad x > 0$
- ii. $\ln(\exp y) = y, \quad \text{untuk semua } y$

Sifat-sifat Fungsi Eksponen

Definisi

Huruf e menyatakan bilangan real positif unik sedemikian rupa sehingga $\ln e = 1$.

Bilangan e sama halnya seperti bilangan π yaitu sama-sama bilangan yang tak rasional. Ekspansi desimalnya diketahui sampai beribu-ribu angka di belakang koma. $e \approx 2,718281828459045$.

Teorema

Andaikan a dan b sebarang bilangan real, maka $e^a e^b = e^{a+b}$ dan $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.

Turunan e^x

Andaikan $y = e^x$, maka dapat dituliskan $x = \ln y$. Perhatikan untuk

$$x = \ln y$$

Kedua ruas diturunkan terhadap x . Dengan menggunakan aturan rantai diperoleh

$$1 = \frac{1}{y} D_x y$$

$$y = D_x y$$

Karena $y = e^x$, maka

$$D_x e^x = e^x$$

Apabila $u = f(x)$. Dan u terdiferensiasi, maka menurut aturan rantai

$$D_x e^u = e^u D_x u$$

Contoh : Tentukan $D_x e^{\sqrt{x}}$

Penyelesaian : $D_x e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}} D_x \sqrt{x} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

Integral e^x

Rumus turunan $D_x e^x = e^x$ secara otomatis akan menghasilkan integral

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Contoh : Tentukan $\int e^{2x} dx$

Penyelesaian : $\int e^{2x} \frac{d2x}{2} = \frac{1}{2} \int e^{2x} d2x = \frac{1}{2} e^{2x} + C$

7.4. Fungsi-fungsi Eksponen dan logaritma Umum

Definisi

Untuk $a > 0$ dan sebarang bilangan real x , maka berlaku $a^x = e^{x \ln a}$.

Coba hitung 3^2 dengan menggunakan $e^{2 \ln 3}$. Hasilnya pasti sama yaitu 9. Kalkulator mungkin akan menghasilkan yang berbeda. Misalnya 8,999999999. Karena kalkulator menggunakan nilai e hanya 8 digit atau beberapa digit di tempat desimal.

Sifat-sifat a^x

Teorema

Jika $a > 0$, $b > 0$, dan x dan y adalah bilangan-bilangan real, maka

- i. $a^x a^y = a^{x+y}$
- ii. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- iii. $(a^x)^y = a^{xy}$
- iv. $(ab^x) = a^x b^x$
- v. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Aturan-aturan Fungsi Eksponensial

Teorema

$$D_x a^x = a^x \ln a$$

$$\int a^x dx = \left(\frac{1}{\ln a} \right) a^x + C, \quad a \neq 1$$

$$D_x a^u = a^u \ln a D_x u$$

Contoh : tentukan $D_x 5^{2x}$

Penyelesaian : dengan menggunakan aturan rantai diperoleh

$$D_x 5^{2x} = 5^{2x} \ln 5 D_x 2x = (5^{2x} \ln 5) 2$$

Fungsi \log_a

Definisi

Andaikan a adalah bilangan positif bukan 1. Maka

$$y = \log_a x \leftrightarrow x = a^y.$$

Basis yang paling umum digunakan adalah basis 10. Logaritma yang dihasilkan dinamakan logaritma biasa. Di dalam kalkulus dan dalam semua matematika lanjut, basis yang berarti adalah e .

$$\log_e x = \ln x$$

Jika $y = \log_a x$ sehingga $x = a^y$, maka

$$\ln x = y \ln a$$

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Dengan menggunakan sifat sebelumnya diperoleh turunannya, yaitu

$$D_x \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

7.5 Pertumbuhan dan Peluruhan Eksponen

Pertambahan populasi Δy yaitu kelahiran dikurangi kematian dalam jangka waktu yang pendek Δt sebanding dengan banyaknya penduduk pada awal jangka waktu itu dan sebanding dengan panjangnya jangka waktu itu sendiri. Jadi $\Delta y = ky \Delta t$ atau

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky$$

Dalam bentuk limit, ini memberikan persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

$k > 0$ populasi bertambah. $k < 0$ populasi berkurang. Untuk populasi dunia, sejarah menunjukkan bahwa k sekitar 0,0132.

Menyelesaikan Persamaan Differensial

$\frac{dy}{dt} = ky$ dengan syarat awal $y = y_0$ apabila $t = 0$. Dengan memisahkan peubah dan mengintegrasikan, kita peroleh

$$\begin{aligned}\frac{dy}{y} &= k dt \\ \int \frac{dy}{y} &= \int k dt \\ \ln y &= kt + C\end{aligned}$$

Syarat $y = y_0$ pada saat $t = 0$ akan menghasilkan $C = \ln y_0$. Sehingga,

$$\begin{aligned}\ln y - \ln y_0 &= kt \\ \ln \frac{y}{y_0} &= kt \\ \frac{y}{y_0} &= e^{kt} \\ y &= y_0 e^{kt}\end{aligned}$$

Ketika $k > 0$, jenis pertumbuhannya disebut **pertumbuhan eksponensial**, dan ketika $k < 0$, disebut **peluruhan eksponensial**.

Peluruhan Radioaktif

Tentunya tidak semuanya tumbuh. Beberapa ada yang mengalami penurunan. Khususnya, zat-zat radioaktif mengalami peluruhan. Persamaan diferensialnya tetap. Hanya saja sekarang untuk $k < 0$.

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Teorema

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e$$

Bukti

Pertama ingat kembali bahwa jika $f(x) = \ln x$ maka $f'(x) = \frac{1}{x}$ dan khususnya, $f'(1) = 1$.

Kemudian, dari definisi turunan dan sifat-sifat \ln , kita peroleh

$$\begin{aligned} 1 = f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln(1+h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln(1+h)^{\frac{1}{h}} \end{aligned}$$

Jadi $\lim_{h \rightarrow 0} \ln(1+h)^{\frac{1}{h}} = 1$. Karena $g(x) = e^x = \exp x$ adalah fungsi yang kontinu, ini berarti kita dapat melewatkan limit ke dalam eksponen argumentasi berikut

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \ln(1+h)^{\frac{1}{h}} &= \lim_{h \rightarrow 0} \exp \left[\ln(1+h)^{\frac{1}{h}} \right] \\ &= \exp \left[\lim_{h \rightarrow 0} \ln(1+h)^{\frac{1}{h}} \right] \\ &= \exp 1 = e \end{aligned}$$

Contoh : Rudi menyimpan 500 di bank dengan bunga harian majemuk sebesar 4%. Andaikan bunga majemuknya kontinu, berapakah uang Dono pada akhir tahun ketiga?

Penyelesaian :

$$A(t) = A_0 e^{rt} = 500 e^{(0,04)3} = 563,75$$

Perhatikan bahwa walaupun beberapa bank mencoba mendapatkan promosi iklan dengan menawarkan bunga majemuk kontinu, beda hasil antara bunga majemuk secara kontinu dan yang secara harian (yang ditawarkan banyak bank) ternyata sangat kecil.

Berikut pendekatan lain terhadap masalah pemajemukan bunga secara kontinu. Andaikan A adalah nilai pada saat t uang sebesar A_0 rupiah yang diinvestasikan dengan suku bunga r . mengatakan bahwa bunga majemuk secara kontinu berarti bahwa laju perubahan sesaat dari A terhadap waktu adalah rA , yakni

$$\frac{dA}{dt} = rA$$

Persamaan diferensial ini adalah $A = A_0 e^{rt}$

7.6. Persamaan Differensial Linear Orde-Satu

Tidak semua persamaan linear dapat dipisahkan. Contohnya dalam persamaan differensial

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 3y$$

Tidak ada cara untuk memisahkan peubah sedemikian rupa sehingga memiliki dy dan seluruh ungkapan yang melibatkan y pada satu sisi dan dx beserta seluruh ungkapan yang melibatkan x pada sisi lainnya.

Persamaan di atas dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Dimana $P(x)$ dan $Q(x)$ hanyalah fungsi-fungsi x saja. Persamaan differensial dalam bentuk ini dinamakan sebagai persamaan differensial orde-satu.

Menyelesaikan Persamaan Linear Orde-Satu

Untuk menyelesaikan persamaan linear orde-satu, pertama kita mengalikan kedua sisi dengan factor integrasi

$$e^{\int P(x) dx}$$

Didapatkan

$$e^{\int P(x) dx} \frac{dy}{dx} + e^{\int P(x) dx} P(x)y = e^{\int P(x) dx} Q(x)$$

Sisi kiri adalah turunan hasil kali $y \cdot e^{\int P(x) dx}$, maka persamaannya mengambil bentuk

$$\frac{d}{dx}(y \cdot e^{\int P(x) dx}) = e^{\int P(x) dx} Q(x)$$

Integrasi kedua sisi menghasilkan

$$y \cdot e^{\int P(x) dx} = \int (Q(x) e^{\int P(x) dx}) dx$$

$$y = e^{-\int P(x) dx} \int (Q(x) e^{\int P(x) dx}) dx$$

Contoh : Carilah penyelesaian umum dari $\frac{dy}{dx} - 3y = xe^{3x}$

Penyelesaian : Faktor integrasi yang tepat adalah $e^{\int (-3) dx} = e^{-3x}$

Di bawah perkalian dengan factor ini, persamaannya akan berbentuk

$$\frac{d}{dx}(e^{-3x}y) = x$$

atau

$$(e^{-3x}y) = \int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Jadi penyelesaian umumnya adalah

$$y = \frac{1}{2}x^2 e^{3x} + C e^{3x}$$

7.7. Fungsi-fungsi balikan Trigonometri

Balikan sinus dan Kosinus

Definisi

Untuk memperoleh balikan dari sinus dan kosinus, kita membatasi daerah asal mereka masing-masing pada selang $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dan $[0, \pi]$. Sehingga,

$$x = \sin^{-1} y \leftrightarrow y = \sin x \quad \text{dan} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x = \cos^{-1} y \leftrightarrow y = \cos x \quad \text{dan} \quad 0 \leq x \leq \pi$$

Balikan Tangen dan Balikan Sekan

Definisi

Untuk memperoleh balikan dari sinus dan kosinus, kita membatasi daerah asal mereka masing-masing pada selang $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dan $[-0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$. Sehingga,

$$x = \tan^{-1} y \leftrightarrow y = \tan x \quad \text{dan} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$x = \sec^{-1} y \leftrightarrow y = \sec x \quad \text{dan} \quad 0 \leq x \leq \pi \quad x \neq \frac{\pi}{2}$$

Teorema

- i. $\sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$
- ii. $\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$
- iii. $\sec(\tan^{-1} x) = \sqrt{1 + x^2}$
- iv. $\tan(\sec^{-1} x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} & \text{jika } x \geq 1 \\ -\sqrt{x^2 - 1} & \text{jika } x \leq -1 \end{cases}$

Turunan Fungsi Trigonometri

$$Dx \sin x = \cos x$$

$$Dx \cos x = -\sin x$$

$$Dx \tan x = \sec^2 x$$

$$Dx \cot x = -\csc^2 x$$

$$Dx \sec x = \sec x \tan x$$

$$Dx \csc x = -\csc x \cot x$$

Turunan Fungsi Balikan Trigonometri

Teorema

- i. $Dx \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1 < x < 1$
- ii. $Dx \cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1 < x < 1$
- iii. $Dx \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$
- iv. $Dx \sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad |x| > 1$