**BARISAN DAN DERET**

**1.1 Barisan**

Barisan adalah himpunan besaran yang disusun dalam urutan tertentu dan masing-masing sukunnya dibentuk menurut suatu pola yang tertentu pula, yaitu .

Contoh :

1, 3, 5, 7, … adalah barisan (suku berikutnya haruslah 9)

2, 6, 18, 54,…. adalah barisan (suku berikutnya haruslah 162)

12, -22, 32, -42, …. adalah barisan (suku berikutnya haruslah 52)

Demikian juga 1, -5, 37, 6 …. adalah juga barisan, tetapi polanya tidak begitu jelas dan suku berikutnya tidak dapat kita ketahui secara langsung.

Barisan dibagi menjadi dua bagian, yaitu barisan berhingga dan barisan tak berhingga. Barisan berhingga adalah barisan yang banyak sukunya berhingga. Dan barisan tak berhingga barisan yang tidak ada akhirnya.

Trivia quiz;

Diantara barisan berikut manakah yang merupakan barisan terhingga :

Semua bilangan asli, yaitu 1, 2, 3, …..

Nomor halaman sebuah buku

Nomor telepon di dalam buku telepon

Jawab :

Jawaban yang tepat adalah; II. Nomor halaman sebuah buku dan III. Nomor telepon di dalam buku telepon. Alasannya adalah karena nomor halaman sebiah buku sudah jelas diamana akan berakhir. Nomor telepon juga merupakan barisan berhingga walaupun barisan yang dibentuk lebih rumit, dan disusun menurut abjad pelanggan. Sedangkan urutan bilangan asli merupakan barisan tak berhingga karena membentuk barisan yang tidak ada akhirnya.

Suatu barisan dapat dispesifikasikan dengan memberikan suku awal yang cukup untuk membentuk suatu pola, seperti pada contoh barisan berikut ini

dengan rumus eksplisit untuk suku ke-n adalah

atau oleh rumus rekursi

Berikut ini adalah contoh beberapa rumus eksplisit untuk beberapa barisan dan beberapa suku pertamanya.

Contoh :

Tuislah dari barisan berikut lima suku pertamanya:

Jawab:

Tetapkan rumus eksplisit untuk an untuk barisan berikut:

Jawab:

**1.2 Deret**

Zeno dari Elea mengatakan dalam suatu paradox yang terkenal kira-kira 2400 tahun yang lalu bahwa seorang pelari tidak mungkin dapat mengakhiri suatu pertandingan sebab ia harus berlari setengah jarak, kemudian setengah sisa jarak, kemudian setengah jarak yang masih tersisa lagi, dan seterusnya, untuk selamanya oleh karena waktu yang disediakan untuk pelari tersebut terhingga, maka ia tak mungkin mencakup ruas-ruas jarak yang banyaknya tak terhingga. Walaupun dalam keadaan sebenarnya kita mengetahui setiap atlet lari dapat mengakhiri pertandingan. Ikustrasinya digambarkan sebagai berikut;

Untuk lintasan yang panjangnya 1 mil, maka ruas jarak dalam pikiran Zeno adalah



Dalam bahasa matematika, mengakhiri pertandingan berarti kita harus menghitung jarak yang jumlahnya adalah

yang tampaknya tidak mungkin. Walaupun demikian, kita harus ingat bahwa jumlah telah didefinisikan hanya untuk suku-suku yang terhingga banyaknya. “jumlah tak terhingga” sampai saat ini belum ada definisinya.

Deret dibentuk dari penjumlahan suku-suku pada barisan. Contohnya :

2, 4, 6, 8, …. adalah barisan

2 + 4 + 6 + 8 + …. adalah deret

Sama dengan barisan, , yang mewakili suku ke-n dari barisan yang diberikan, maka jumlah suku n pertama deret dilambangkan dengan . Misalkan sebagai Contoh

Disamping lambang *Sn*, untuk mendefinisikan deret juga lebih umum umum digunakan notasi huruy Yunani, yaitu (sigma). Misalnya untuk contoh deret seperti diatas, dapat kita tulis dalam bentuk

Bila deret memiliki jumlah suku yang tidak terhingga, maka biasanya dalam notasi huruf Yunani diuliskan sebgai berikut,

**1.3 Deret Aritmetika/Deret Hitung**

Pada deret aritmetika, setiap suku dapat ditulis dan mengalami proses penjumlahan atau pengurangan dengan menambahkan suatu besaran konstan yang disebut *beda*. Misalnya, pada deret 2 + 6 + 10 + 14 + ….. , suku pertamanya adalah 2, *beda*-nya adalah 4, maka suku kelimanya kita bisa tebak, yaitu u5 = 18.

Bentuk umum dari deret aritmetika adalah

…… (2)

dengan a= suku pertama dan d = *beda*.

Dan suku ke-n dari deret aritmetika adalah

. …. (3)

Sedangkan jumlah suku ke-n dari deret aritmetika ini adalah

….. (4)

Sekarang kita gunakan definisi dari pers. (1) dan pers. (3). Dari pers. (1) dan pers. (4) kita peroleh

atau

Contoh 1:

Carilah jumlah 20 suku pertama dari deret berikut ini:

1 + 4 + 7 + 10 + …………..

Jawab :

Diketahui dari deret tersebut bahwa a = 1, d = 3, dan n = 20. Maka,

Contoh 2:

Carilah 10 suku pertama dari deret berikut ini:

10 + 6 + 2 – 2 – 6 - …..

Jawab:

Dari deret tersebut diatas kita ketahui bahwa, a = 1=, dan d = -4, maka kita gunakan pers. (5), dengan n = 10

Contoh 3:

Pada suatu deret aritmetika diketahui suku ke-4 adalah 22 dan suku ke-7 adalah 40. Tentukanlah suku pertama, beda, dan jumlah 12 suku pertama.

Jawab:

Kita gunakan pers. (2)

Dimana dari pers. (2) tersebut kita ketahui suku ke 4 adalah dan suku ke-7 nya adalah , kemudian lakukan operasi pengurangan dari suku ke-4 dan suku ke-7 tersebut

Maka dengan mudah kita dapatkan nilai a, yaitu dengan memasukkan nilai d ke salah satu suku. Kita peroleh

Sekarang kita coba melalui suku ke-7

Jadi nilai a = 4 dan d = 6.

Jumlah 12 suku pertamanya adalah;

**1.4 Deret Geometri / Deret Ukur**

Pada deret geometri atau deret ukur, suku dapat ditentukan dari proses perkalian atau pembagian denga factor konstan yang disebut *rasio* dilambangkan dengan huruf *r*. *Rasio* diperoleh dari proses pembagian suku dengan suku sebelumnya. MIsalnya,

1 + 2 + 4 + 8 + 16 + …….. adalah sebuah deret geometri dengan suku awalnya, a = 1 dan rasionya, r = 2.

Bentuk umum dari deret geometri adalah

Dengan a = suku awal, r = rasio, Sn adalah jumlah n suku pertama, dan suku ke-n dari deret geometri adalah .

Contoh 4:

Carilah 5 suku pertama dari deret geometri bila suku awalnya a = 4 dan rasioanya, r = 3.

Jawab:

Sekarang perhatikan pers (7),

Kalikan semua ruas dengan r,

Kurangkan pers. (8) dengan pers. (9), diperoleh

Maka,

atau

**1.5 Deret tak berhingga**

Pengertian yang pasti dam umum mengenai deret tak hingga diberikan oleh definisi berikut ; deret tak hingga adalah pernyataan penjumlahan bilangan yang tak hingga banyaknya dan berbentuk:

Dengan suku ke-n adalah sebuah fungsi dari bilangan bulat b:

(13)

Sebuah deret tak hingga seringkali dituliskan secara eksplisit hingga suku ke n saja yang darinya diharapkan bentuk umum *an* menjadi jelas untuk diumgkapkan fungsi -nya.

Contoh 5:

Tijuau deret tak berhingga berikut:

Deret diatas kita kenal sebagai deret geometri/deret ukur dengan suku awal, a=1, dan rasionya, r=1/2. Jumlah n suku pertamanya diberikan oleh:

Jika n sangat besar, maka akan sangat besar nilainya, sehingga nilai akan menjadi sangat kecil. Artinya, bila , maka . Jumlah semua suku dalam deret tak hingga ini diberikan oleh

Hal ini mengatakan bahwa kita dapat membuat sejumlah deret ini sedekat mungkin dengan nilai 2 dengan mengambil jumlah suku sebanyak mungkin.

Untuk deret aritmetika/deret hitung persoalannya akan sangat lain. Perhatikan Contoh berikut ini.

Contoh 6:

Tinjaulah deret berikut ini

Yang merupakan deret artimetika dengan suku awal, a=1 dan beda, d=2. Sehingga,

Dalam contoh deret hitung ini, kita dapat melihat bahwa bila n semakin besar, maka Sn semakin besar pula. Artinya, bila , maka . Hal ini selalu terjadi pada deret hitung, dimana bila kita mencoba mencari “jumlah tak berhingga-nya”, maka kita akan memperoleh harga atau , bergantung kepada pola deretnya.

Dari dua contoh diatas, kita dapatkan dua hal penting, yaitu:

1. Kita tidak menghitung jumlah deret tak hingga dari suatu deret aritmetika/deret hitung karena hasilnya selalu tak berhingga.
2. Adakalanya kita dapat menghitung “jumlah tak berhingga” dari suatu deret geometri/deret ukur. Untuk deret ini

dan jika , maka , dan untuk maka

**1.6 Kekonvergenan dan Kedivergenan Deret Tak Hingga**

Masalah utama yang dipelajari dalam deret tak hingga adalah menentukan apakah hasil/jumlahnya berhingga. Berapa nilai jumlahnya tidaklah kita pedulikan dahulu, kaarena pada umumnya tidak mudah untuk memperolehnya.

Misalkan kita ingin menjumlahkan suku demi suku, maka tidak peduli seberapa banyak suku yang kita jumlahkan selalu masih ada saja tak berhingga banyaknya suku yang tersisa. Oleh karena itu, kita harus mencari suatu metoda lain untuk menghitung jumlahnya. Dan yang lebih mendasar, harus kita defisisikan dahulu apa yang kita maksud dengan *jumlah deret tak hingga*.

Sekarang, kita tinjau kembali deret tak hingga dari pers. (12)

Kemudian kita tinjau berturut-turut jumlah suku-suku berhingganya sebagai berikut:

…(15)

Besaran Sndisebut jumlah per-bagian deret takhingga (pers.(12)). Himpunan takhingga Sn yang disusun dalam urutan berikut ini,

Membentuk pernyataan matematika lainnya yang disebut barisan takhingga *(infinite sequence)*, yang penulisan ringkasnya dituliskan dalam bentuk .

Definisi:

1. Jika Sn adalah jumlah perbagian deret tak hingga , maka jumlahnya didefinisikan sebagai
2. Jika berhingga dan tunggal, maka deret dikatakan ***konvergen*** dengan jumlah ***S***.
3. Jika atau berhingga tetapi tidak tunggal, maka deret dikatakan **divergen**.
4. Jika konvergen, maka disebut *“sisa”* deret setelah suku ke-n.

**Sifat konvergen dan Divergen dari Deret Geometri/Deret Ukur**

Sekarang kita perhatikan deret geometri/deret ukur sebagai contoh umtuk melihat sifat konvergen dan divergennya. Seperti telah kita ketahui, deret ukur secara umum berbentuk (pers. (7);

Dengan a adalah suku awal dan r adalah rasio (pembanding). Dengan pernyataan jumlah suku perbagiannya atau jumlah suku ke-n nya adalah (pers. (11))

Dengan mengingat bahwa

…(18)

Maka **untuk deret ukur**,

1. . Jika r < 1,

Jadi deret ukur pada pers. (7) adalah ***konvergen***.

1. Jika r > 1,

Jadi deret ukur yang bersangkutan adalah ***divergen***.

1. Jika r = 1,

Karena itu,

Jadi deret ukur yang bersangkutan pada pers. (17) adalah ***divergen***.

Contoh 7:

Hitung jumlah deret berikut ini dengan memanfaatkan sifat kekonvergenan deret ukur

Jawab:

1. Rasio dari deret adalah . Maka,
2. . Rasio dari deret tersebut adalah . Maka

Contoh 8:

Tinjau deret ukur berikut ini

Dengan suku awal a=1, dan rasio/pembanding r=1/3

Untuk deret ukur seperti diatas kita ketahui

dan untuk kita dapatkan

Jadi

Maka kita dapat simpulkan bahwa untuk deret ukur diatas adalah deret yang konvergen.