

APÊNDICE A

O SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)*

1. AS UNIDADES FUNDAMENTAIS DO SI

GRANDEZA	NOME	SÍMBOLO	DEFINIÇÃO
comprimento	metro	m	“... o comprimento do percurso coberto pela luz, no vácuo, em 1/299.792.458 de um segundo.” (1983)
massa	quilograma	kg	“... este protótipo (um certo cilindro de liga de platina-irídio) será considerado daqui por diante a unidade de massa.” (1889)
tempo	segundo	s	“... a duração de 9.192.631.770 vibrações da transição entre dois níveis hiperfino do estado fundamental do átomo de césio 133.” (1967)
corrente elétrica	ampère	A	“... a corrente constante que, mantida em dois condutores retilíneos, paralelos, de comprimento infinito, de seção circular desprezível e separados pela distância de 1 metro no vácuo, provoca entre esses condutores uma força igual a 2×10^{-7} newtons por metro de comprimento.” (1946)
temperatura termodinâmica	kelvin	K	“... a fração 1/273,16 da temperatura termodinâmica do ponto triplo da água.” (1967)
quantidade de substância	mol	mol	“... a quantidade de substância de um sistema que contém tantas entidades elementares quantos são os átomos em 0,012 quilogramas de carbono 12.” (1971)
intensidade luminosa	candela	cd	“... a intensidade luminosa, na direção perpendicular, de uma superfície de 1/600.000 metros quadrados, de um corpo negro na temperatura de solidificação da platina, sob a pressão de 101,325 newtons por metro quadrado.” (1967)

*Adaptado do “The International System of Units (SI),” National Bureau of Standards Special Publication 330, edição de 1972. As definições acima foram adotadas pela Conferência Geral de Peso e Medidas, organismo internacional, nas datas mencionadas. Neste livro, não usamos a candela.

2. ALGUMAS UNIDADES DERIVADAS DO SI

GRANDEZA	NOME DA UNIDADE	SÍMBOLO
área	metro quadrado	m^2
volume	metro cúbico	m^3
frequência	hertz	Hz
massa específica (densidade)	quilograma por metro cúbico	kg/m^3
velocidade, velocidade escalar	metro por segundo	m/s
velocidade angular	radiano por segundo	rad/s
aceleração	metro por segundo por segundo	m/s^2
aceleração angular	radiano por segundo por segundo	rad/s^2
força	newton	N
pressão	pascal	Pa
trabalho, energia, quantidade de calor	joule	J
potência	watt	W
quantidade de carga elétrica	coulomb	C
diferença de potencial, força eletromotriz	volt	V
intensidade do campo elétrico	volt por metro (ou newton por coulomb)	V/m
resistência elétrica	ohm	Ω
capacitância	farad	F
fluxo magnético	weber	Wb
indutância	henry	H
densidade de fluxo magnético	tesla	T
intensidade do campo magnético	ampère por metro	A/m
entropia	joule por kelvin	J/K
calor específico	joule por quilograma kelvin	$\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$
condutividade térmica	watt por metro kelvin	$\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$
intensidade radiante	watt por esterradiano*	W/sr

3. UNIDADES SUPLEMENTARES DO SI

GRANDEZA	NOME DA UNIDADE	SÍMBOLO
ângulo plano	radiano	rad
ângulo sólido	esterradiano*	sr

*Embora o termo seja bem conhecido como *esterradiano*, inclusive assim dicionarizado, preferimos usar a grafia recomendada pela ABNT (Associação Brasileira de Normas Técnicas) e registrada nos *Cadernos IEL* (Volume 8 — Sistema Internacional de Unidades). (N. do T.)

APÊNDICE B

ALGUMAS CONSTANTES FUNDAMENTAIS DA FÍSICA*

CONSTANTE	SÍMBOLO	VALOR PARA CÁLCULO	MELHOR VALOR (1986)	
			VALOR ^a	INCERTEZA ^b
Velocidade da luz no vácuo	c	$3,00 \times 10^8$ m/s	2,99792458	exato
Carga elementar	e	$1,60 \times 10^{-19}$ C	1,60217738	0,30
Massa do elétron	m_e	$9,11 \times 10^{-31}$ kg	9,1093897	0,59
Massa do próton	m_p	$1,67 \times 10^{-27}$ kg	1,6726230	0,59
Razão entre a massa do próton e a massa do elétron	m_p/m_e	1,840	1,836,152701	0,020
Massa de nêutron	m_n	$1,68 \times 10^{-27}$ kg	1,6749286	0,59
Massa do múon	m_μ	$1,88 \times 10^{-28}$ kg	1,8835326	0,61
Massa do elétron ^c	m_e	$5,49 \times 10^{-4}$ u	5,48579902	0,023
Massa do próton ^c	m_p	1,0073 u	1,007276470	0,012
Massa do nêutron ^c	m_n	1,0087 u	1,008664704	0,014
Massa do átomo de hidrogênio ^c	m_{1_u}	1,0078 u	1,007825035	0,011
Massa do átomo de deutério ^c	m_{2_u}	2,0141 u	2,0141019	0,053
Massa do átomo de hélio ^c	$m_{4_{He}}$	4,0026 u	4,0026032	0,067
Razão entre a carga e a massa do elétron	e/m_e	$1,76 \times 10^{11}$ C/kg	1,75881961	0,30
Permissividade elétrica do vácuo	ϵ_0	$8,85 \times 10^{-12}$ F/m	8,85418781762	exato
Permeabilidade magnética do vácuo	μ_0	$1,26 \times 10^{-6}$ H/m	1,25663706143	exato
Constante de Planck	h	$6,63 \times 10^{-34}$ J·s	6,6260754	0,60
Comprimento de onda Compton do elétron	λ_C	$2,43 \times 10^{-12}$ m	2,42631058	0,089
Constante universal dos gases	R	8,31 J/mol·K	8,314510	8,4
Número de Avogadro	N_A	$6,02 \times 10^{23}$ mol ⁻¹	6,0221367	0,59
Constante de Boltzmann	k	$1,38 \times 10^{-23}$ J/K	1,380657	11
Volume molar de um gás ideal em CNTP ^d	V_m	$2,24 \times 10^{-2}$ m ³ /mol	2,241409	8,4
Constante de Faraday	F	$9,65 \times 10^4$ C/mol	9,6485309	0,30
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5,67 \times 10^{-8}$ W/m ² ·K ⁴	5,67050	34
Constante de Rydberg	R	$1,10 \times 10^7$ m ⁻¹	1,0973731534	0,0012
Constante da gravitação universal	G	$6,67 \times 10^{-11}$ m ³ /s ² ·kg	6,67260	100
Raio de Bohr	r_B	$5,29 \times 10^{-11}$ m	5,29177249	0,045
Momento magnético do elétron	μ_e	$9,28 \times 10^{-24}$ J/T	9,2847700	0,34
Momento magnético do próton	μ_p	$1,41 \times 10^{-26}$ J/T	1,41060761	0,34
Magnéton de Bohr	μ_B	$9,27 \times 10^{-24}$ J/T	9,2740154	0,34
Magnéton nuclear	μ_N	$5,05 \times 10^{-27}$ J/T	5,0507865	0,34

*Os valores nesta coluna têm as mesmas unidades e as mesmas potências de 10 que os valores para cálculo.

^aEm partes por milhão.

^bEstas massas estão em unidades de massa atómica unificada (u), com 1 u = $1,6605402 \times 10^{-27}$ kg.

^cCNTP significa condições normais de temperatura e pressão: 0°C e 1,0 atm (0,1 MPa).

*Os valores desta tabela foram escolhidos, em grande parte, de uma listagem maior em *Symbols, Units and Nomenclature in Physics* (IUPAP), preparada por E. Richard Cohen e Pierre Giacomo. 1986.

APÊNDICE C

ALGUNS DADOS ASTRONÔMICOS

ALGUMAS DISTÂNCIAS DA TERRA

Até a Lua*	$3,82 \times 10^8$ m
Até o Sol	$1,50 \times 10^{11}$ m
Até a estrela mais próxima (Proxima Centauri)	$4,04 \times 10^{16}$ m
Até o centro da nossa galáxia	$2,2 \times 10^{20}$ m
Até a galáxia de Andrômeda	$2,1 \times 10^{22}$ m
Até a fronteira do universo observável	$\sim 10^{26}$ m

*Distância média.

O SOL, A TERRA E A LUA

PROPRIEDADE	UNIDADE	SOL	TERRA	LUA
Massa	kg	$1,99 \times 10^{30}$	$5,98 \times 10^{24}$	$7,36 \times 10^{22}$
Raio médio	m	$6,96 \times 10^8$	$6,37 \times 10^6$	$1,74 \times 10^6$
Densidade média	kg/m ³	1.410	5.520	3.340
Aceleração da gravidade na superfície	m/s ²	274	9,81	1,67
Velocidade de escape	km/s	618	11,2	2,38
Período de rotação ^a	—	37 d nos pólos ^b 26 d no equador ^b	23 h 56 min	27,3 d
Potência de radiação ^c	W	$3,90 \times 10^{26}$		

^aMedido em relação às estrelas distantes.

^bO Sol, uma bola de gás, não gira como um corpo rígido.

^cA energia solar é recebida na fronteira da atmosfera, sob incidência normal, à taxa de $1,340 \text{ W/m}^2$.

ALGUMAS PROPRIEDADES DOS PLANETAS

	MERCÚRIO	VÊNUS	TERRA	MARTE	JÚPITER	SATURNO	URANO	NETUNO	PLUTÃO
Distância média ao Sol, 10^6 km	57,9	108	150	228	778	1.430	2.870	4.500	5.900
Período de revolução, anos	0,241	0,615	1,00	1,88	11,9	29,5	84,0	165	248
Período de rotação, ^a dias	58,7	-243 ^b	0,997	1,03	0,409	0,426	-0,451 ^b	0,658	6,39
Velocidade orbital, km/s	47,9	35,0	29,8	24,1	13,1	9,64	6,81	5,43	4,74
Inclinação do eixo do planeta na órbita	<28°	=3°	23,4°	25,0°	3,08°	26,7°	97,9°	29,6°	57,5°
Inclinação da órbita em relação ao plano da órbita da Terra	7,00°	3,39°		1,85°	1,30°	2,49°	0,77°	1,77°	17,2°
Excentricidade da órbita	0,206	0,0068	0,0167	0,0934	0,0485	0,0556	0,0472	0,0086	0,250
Diâmetro equatorial, km	4.880	12.100	12.800	6.790	143.000	120.000	51.800	49.500	2.300
Massa (Terra = 1)	0,0558	0,815	1,000	0,107	318	95,1	14,5	17,2	0,002
Densidade (água = 1)	5,60	5,20	5,52	3,95	1,31	0,704	1,21	1,67	2,03
Valor de g na superfície, ^c m/s ²	3,78	8,60	9,78	3,72	22,9	9,05	7,77	11,0	0,5
Velocidade de escape, ^c km/s	4,3	10,3	11,2	5,0	59,5	35,6	21,2	23,6	1,1
Satélites conhecidos	0	0	1	2	16 + anel	18 + anéis	15 + anéis	8 + anéis	1

^aMedido com relação às estrelas distantes.^bVênus e Urano giram em sentido oposto ao seu movimento orbital.^cAceleração da gravidade medida no equador do planeta.

APÊNDICE D

PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS

Todas as propriedades físicas referem-se à pressão de 1 atm, exceto quando há observação em contrário.

ELEMENTO	SÍMBOLO	NÚMERO ATÔMICO, Z	MASSA MOLAR, g/mol	MASSA ESPECÍFICA (DENSIDADE) g/cm ³ A 20°C	PONTO DE FUSÃO, °C	PONTO DE EBULIÇÃO, °C	CALOR ESPECÍFICO, J/(g·°C) A 25°C
Actínio	Ac	89	(227)	10,06	1.323	(3.473)	0,092
Alumínio	Al	13	26,9815	2,699	660	2.450	0,900
Amerício	Am	95	(243)	13,67	1.541	—	—
Antimônio	Sb	51	121,75	6,691	630,5	1.380	0,205
Argônio	Ar	18	39,948	1.6626 × 10 ⁻³	-189,4	-185,8	0,523
Arsênio	As	33	74,9216	5,78	817 (28 atm)	613	0,331
Astatinio	At	85	(210)	—	(302)	—	—
Bártio	Ba	56	137,34	3,594	729	1.640	0,205
Berílio	Be	4	9,0122	1,848	1.287	2.770	1,83
Berquelio	Bk	97	(247)	14,79	—	—	—
Bismuto	Bi	83	208,980	9,747	271,37	1.560	0,122
Boro	B	5	10,811	2,34	2.030	—	1,11
Bromo	Br	35	79,909	3,12 (líquido)	-7,2	58	0,293
Cádmio	Cd	48	112,40	8,65	321,03	765	0,226
Cálcio	Ca	20	40,08	1,55	838	1.440	0,624
Califórnia	Cf	98	(251)	—	—	—	—
Carbono	C	6	12,01115	2,26	3.727	4.830	0,691
Centésimo quarto	Unq	104	261	—	—	—	—
Centésimo quinto	Unp	105	262	—	—	—	—
Cério	Ce	58	140,12	6,768	804	3.470	0,188
Césio	Cs	55	132,905	1,873	28,40	690	0,243
Chumbo	Pb	82	207,19	11,35	327,45	1.725	0,129
Cloro	Cl	17	35,453	3,214 × 10 ⁻³ (0°C)	-101	-34,7	0,486
Cobalto	Co	27	58,9332	8,85	1.495	2.900	0,423
Cobre	Cu	29	63,54	8,96	1.083,40	2.595	0,385
Criptônio	Kr	36	83,80	3,488 × 10 ⁻³	-157,37	-152	0,247
Cromo	Cr	24	51,996	7,19	1.857	2.665	0,448
Cúrio	Cm	96	(247)	13,3	—	—	—
Disprósio	Dy	66	162,50	8,55	1.409	2.330	0,172
Einsteinio	Es	99	(254)	—	—	—	—
Enxofre	S	16	32,064	2,07	119,0	444,6	0,707
Érbio	Er	68	167,26	9,15	1.522	2.630	0,167
Escândio	Sc	21	44,956	2,99	1.539	2.730	0,569
Estanho	Sn	50	118,69	7,2984	231,868	2.270	0,226
Estrôncio	Sr	38	87,62	2,54	768	1.380	0,737
Europio	Eu	63	151,96	5,243	817	1.490	0,163
Férmito	Fm	100	(237)	—	—	—	—
Ferro	Fe	26	55,847	7,874	1.536,5	3.000	0,447
Flúor	F	9	18,9984	1,696 × 10 ⁻³ (0°C)	-219,6	-188,2	0,753
Fósforo	P	15	30,9738	1,83	44,25	280	0,741
Frâncio	Fr	87	(223)	—	(27)	—	—
Gadolíno	Gd	64	157,25	7,90	1.312	2.730	0,234
Gálio	Ga	31	69,72	5,907	29,75	2.237	0,377
Germânio	Ge	32	72,59	5,323	937,25	2.830	0,322
Háfnio	Hf	72	178,49	13,31	2.227	5.400	0,144
Hélio	He	2	4,0026	0,1664 × 10 ⁻³	-269,7	-268,9	5,23

ELEMENTO	SÍMBOLO	NÚMERO ATÔMICO, Z	MASSA MOLAR, g/mol	MASSA ESPECÍFICA (DENSIDADE) g/cm³ A 20°C	PONTO DE FUSÃO, °C	PONTO DE EBULIÇÃO, °C	CALOR ESPECÍFICO, J/(g·°C) A 25°C
Hidrogênio	H	1	1,00797	$0,08375 \times 10^{-3}$	-259,19	-252,7	14,4
Hólmio	Ho	67	164,930	8,79	1.470	2.330	0,165
Índio	In	49	114,82	7,31	156,634	2.000	0,233
Iodo	I	53	126,9044	4,93	113,7	183	0,218
Irídio	Ir	77	192,2	22,5	2.447	(5.300)	0,130
Itérbio	Yb	70	173,04	6,965	824	1.530	0,155
Ítrio	Y	39	88,905	4,469	1.526	3.030	0,297
Lantânia	La	57	138,91	6,189	920	3.470	0,195
Laurêncio	Lr	103	(257)	—	—	—	—
Lítio	Li	3	6,939	0,534	180,55	1.300	3,58
Lutécio	Lu	71	174,97	9,849	1.663	1.930	0,155
Magnésio	Mg	12	24,312	1,738	650	1.107	1,03
Manganês	Mn	25	54,9380	7,44	1.244	2.150	0,481
Mendelévio	Md	101	(256)	—	—	—	—
Mercúrio	Hg	80	200,59	13,55	-38,87	357	0,138
Molibdênio	Mo	42	95,94	10,22	2.617	5.560	0,251
Neodírmio	Nd	60	144,24	7,007	1.016	3.180	0,188
Neônio	Ne	10	20,183	$0,8387 \times 10^{-3}$	-248,597	-246,0	1,03
Netúnio	Np	93	(237)	20,25	637	—	1,26
Nióbio	Nb	41	92,906	8,57	2.468	4.927	0,264
Níquel	Ni	28	58,71	8,902	1.453	2.730	0,444
Nitrogênio	N	7	14,0067	$1,1649 \times 10^{-3}$	-210	-195,8	1,03
Nobelélio	No	102	(255)	—	—	—	—
Ósmio	Os	76	190,2	22,59	3.027	5.500	0,130
Ouro	Au	79	196,967	19,32	1.064,43	2.970	0,131
Oxigênio	O	8	15,9994	$1,3318 \times 10^{-3}$	-218,80	-183,0	0,913
Paládio	Pd	46	106,4	12,02	1.552	3.980	0,243
Platina	Pt	78	195,09	21,45	1.769	4.530	0,134
Plutônio	Pu	94	(244)	19,8	640	3.235	0,130
Polônio	Po	84	(210)	9,32	254	—	—
Potássio	K	19	39,102	0,862	63,20	760	0,758
Praseodímio	Pr	59	140,907	6,773	931	3.020	0,197
Prata	Ag	47	107,870	10,49	960,8	2.210	0,234
Promécio	Pm	61	(145)	7,22	(1.027)	—	—
Protactínio	Pa	91	(231)	15,37 (estimada)	(1.230)	—	—
Rádio	Ra	88	(226)	5,0	700	—	—
Radônio	Rn	86	(222)	$9,96 \times 10^{-3}$ (0°C)	(-71)	-61,8	0,092
Rênio	Re	75	186,2	21,02	3.180	5.900	0,134
Ródio	Rh	45	102,905	12,41	1.963	4.500	0,243
Rubídio	Rb	37	85,47	1,532	39,49	688	0,364
Ruténio	Ru	44	101,107	12,37	2.250	4.900	0,239
Samário	Sm	62	150,35	7,52	1.072	1.630	0,197
Selênio	Se	34	78,96	4,79	221	685	0,318
Silício	Si	14	28,086	2,33	1.412	2.680	0,712
Sódio	Na	11	22,9898	0,9712	97,85	892	1,23
Tálio	Tl	81	204,37	11,85	304	1.457	0,130
Tântalo	Ta	73	180,948	16,6	3.014	5.425	0,138
Tecnécio	Tc	43	(99)	11,46	2.200	—	0,209
Telúrio	Te	52	127,60	6,24	449,5	990	0,201
Térbio	Tb	65	158,924	8,229	1.357	2.530	0,180
Titânio	Ti	22	47,90	4,54	1.670	3.260	0,523
Tório	Th	90	(232)	11,72	1.755	(3.850)	0,117
Túlio	Tm	69	168,934	9,32	1.545	1.720	0,159
Tungstênio	W	74	183,85	19,3	3.380	5.930	0,134
Urânio	U	92	(238)	18,95	1.132	3.818	0,117
Vanádio	V	23	50,942	6,11	1.902	3.400	0,490
Xenônio	Xe	54	131,30	$5,495 \times 10^{-3}$	-111,79	-108	0,159
Zinco	Zn	30	65,37	7,133	419,58	906	0,389
Zircônio	Zr	40	91,22	6,506	1.852	3.580	0,276

Os valores entre parênteses, na coluna das massas molares, são os números de massa do isótopo de vida mais longa dos elementos radioativos. Os pontos de fusão e de ebulação entre parênteses são incertos.

Os dados para os gases valem somente quando cada qual está no seu estado molecular ordinário, por exemplo, H₂, He, O₂, Ne etc. Os calores específicos dos gases são os valores a pressão constante.

Fonte: Adaptado de Wehr, Richards, Adair, *Physics of the Atom*, 4.ª ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1984, e também de J. Emsley, *The Elements*, 2.ª ed., Clarendon Press, Oxford, 1991.

APÊNDICE E

TABELA PERIÓDICA DOS ELEMENTOS

OS PERÍODOS HORIZONTAIS

Metais alcalinos IA		Metais de transição														Gases nobres VIII	
1	H	IIA															He
2	Li	Be															Ne
3	Na	Mg	IIIB	IVB	V	VIIB	VIIIB	Metais de transição		IB	IIB	III	IV	V	VI	VIIA	2
4	K	Cs	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	F	He
5	Rb	Sr	T	Zr	Nb	Mn	Ta	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Se	Cl	Ar
6	M	Ba		Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Os	Hg	Tl	Pb	Bi	Te	Rn
7	Fr	Ra		Ku [‡]	Hg [†]	**	**	**	**	**	...						

Metais de transição interna

Série dos lantanídos*

La	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Série dos actinídos†

Th	Pa	U	Np	Pu	Cm	Bk	Cf	Md	No	Lu	Bu	Cm	Bu	No
----	----	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

‡O nome do elemento curchatóvio (símbolo Ku) é uma homenagem ao cientista Igor V. Kurchatov. Também se utiliza a denominação rutherfordio (símbolo Rf), em homenagem ao cientista Ernst R. Rutherford. A primazia do nome ainda está em debate. (N. do T.)

†O nome do elemento é hahnio. (N. do R.)

**Elementos ainda não denominados.

APÊNDICE F

FATORES DE CONVERSÃO

Os fatores de conversão podem ser lidos diretamente nas tabelas seguintes. Por exemplo, 1 grau = $2,778 \times 10^{-3}$ revolução, e então $16,7^\circ = 16,7 \times 2,778 \times 10^{-3}$ rev.

As unidades SI estão em maiúsculas. As tabelas foram adaptadas, em parte, de G. Shortley e D. Williams, *Elements of Physics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.

ÂNGULO PLANO

		"	RADIANO	rev
1 grau =	1	60	$1,745 \times 10^{-2}$	$2,778 \times 10^{-3}$
1 minuto =	$1,667 \times 10^{-2}$	1	$2,909 \times 10^{-4}$	$4,630 \times 10^{-5}$
1 segundo =	$2,778 \times 10^{-4}$	$1,667 \times 10^{-2}$	$4,848 \times 10^{-6}$	$7,716 \times 10^{-7}$
1 RADIANO =	57,30	3,438	$2,063 \times 10^5$	0,1592
1 revolução (volta) =	360	$2,16 \times 10^4$	$1,296 \times 10^6$	1

ÂNGULO SÓLIDO

$$1 \text{ esfera} = 4\pi \text{ esterradianos} = 12,57 \text{ esterradianos}$$

COMPRIMENTO

cm	METRO	km	in.	ft	mi
1 centímetro =	10 ⁻²	10 ⁻⁵	0,3937	$3,281 \times 10^{-2}$	$6,214 \times 10^{-6}$
1 METRO =	1	10 ⁻³	39,37	3,281	$6,214 \times 10^{-4}$
1 quilômetro =	10 ³	1,000	3,937 × 10 ⁴	3,281	0,6214
1 polegada =	2,540	$2,540 \times 10^{-2}$	1	$8,333 \times 10^{-2}$	$1,578 \times 10^{-5}$
1 pé =	30,48	$0,3048 \times 10^{-2}$	12	1	$1,894 \times 10^{-4}$
1 milha =	$1,609 \times 10^3$	1,609	$6,336 \times 10^4$	5,280	1
1 angström =	10^{-10}				
1 milha náutica =	1.852 m	1 fermi = 10^{-15} m	1 braça = 6 pés	1 vara = 16,5 pés	
= 1,151 milhas =	6.076 pés	1 ano-luz = $9,460 \times 10^{12}$ km	1 raio de Bohr = $5,292 \times 10^{-11}$ m	1 mil = 10^{-3} polegadas	
		1 parsec = $3,084 \times 10^{13}$ km	1 jarda = 3 pés	1 nm = 10^{-9} m	

ÁREA

METRO ²	cm ²	ft ²	in. ²
1 METRO QUADRADO =	1	10 ⁴	10,76
1 centímetro quadrado =	10 ⁻⁴	1	$1,076 \times 10^{-3}$
1 pé quadrado =	$9,290 \times 10^{-2}$	929,0	144
1 polegada quadrada =	$6,452 \times 10^{-4}$	6,452	$6,944 \times 10^{-3}$
1 milha quadrada =	$2,788 \times 10^7$ ft ²		
= 640 acres		1 acre = 43,560 ft ²	
1 barn = 10^{-28} m ²		1 hectare = 10^4 m ² = 2,471 acres	

VOLUME

METRO ³	cm ³	l	ft ³	in. ³
1 METRO CÚBICO =	1	1.000	35,31	$6,102 \times 10^4$
1 centímetro cúbico =	10^{-6}	1	$3,531 \times 10^{-5}$	$6,102 \times 10^{-2}$
1 litro =	$1,000 \times 10^{-3}$	1.000	$3,531 \times 10^{-2}$	61,02
1 pé cúbico =	$2,832 \times 10^{-2}$	$2,832 \times 10^4$	1	1.728
1 polegada cúbica =	$1,639 \times 10^{-5}$	16,39	$1,639 \times 10^{-2}$	$5,787 \times 10^{-4}$

1 galão americano = 4 quartos americanos = 8 pints americanos = 128 onças americanas = 231 in.³1 galão inglês = 277,4 in.³ = 1,201 galões americanos**MASSA**

As grandezas que estão na área escurecida não são unidades de massa, mas são usadas, muitas vezes, como se fossem. Quando escrevemos, por exemplo, 1 kg = 2,205 lb, isto significa que o quilograma é uma *massa* que pesa 2,205 libras num local onde g tem o valor padrão $9,80665\text{m/s}^2$.

g	QUILOGRAMA	slug	u	oz	lb	ton
1 grama =	1	$6,852 \times 10^{-5}$	$6,022 \times 10^{23}$	$3,527 \times 10^{-2}$	$2,205 \times 10^{-3}$	$1,102 \times 10^{-6}$
1 QUILOGRAMA =	1.000	1	$6,852 \times 10^{-2}$	$6,022 \times 10^{26}$	35,27	$2,205$
1 slug =	$1,459 \times 10^4$	14,59	1	$8,786 \times 10^{27}$	514,8	$32,17$
1 unidade de						
massa atômica =	$1,661 \times 10^{-24}$	$1,661 \times 10^{-27}$	$1,138 \times 10^{-28}$	1	$5,857 \times 10^{-26}$	$3,662 \times 10^{-27}$
1 onça =	28,35	$2,835 \times 10^{-2}$	$1,943 \times 10^{-3}$	$1,718 \times 10^{25}$	1	$6,250 \times 10^{-2}$
1 libra =	453,6	0,4536	$3,108 \times 10^{-2}$	$2,732 \times 10^{26}$	16	0,0005
1 ton (curta) =	$9,072 \times 10^3$	907,2	62,16	$5,463 \times 10^{28}$	$3,2 \times 10^4$	2.000

1 tonelada métrica = 1.000 kg

MASSA ESPECÍFICA (DENSIDADE)

As grandezas na área escurecida são pesos específicos e, portanto, são dimensionalmente diferentes das massas específicas (densidades de massa). Ver a nota na tabela de massa.

slug/ft ³	QUILOGRAMA/METRO ³	g/cm ³	lb/ft ³	lb/in. ³
1 slug por pé ³ =	1	515,4	0,5154	$32,17$
1 QUILOGRAMA por METRO ³ =	$1,940 \times 10^{-3}$	1	0,001	$6,243 \times 10^{-2}$
1 grama por centímetro =	1,940	1.000	1	62,43
1 libra por pé ³ =	$3,108 \times 10^{-2}$	16,02	$1,602 \times 10^{-2}$	$5,787 \times 10^{-4}$
1 libra por polegada ³ =	53,71	$2,768 \times 10^4$	27,68	1

TEMPO

a	d	h	min	SEGUNDO
1 ano =	365,25	$8,766 \times 10^3$	$5,259 \times 10^5$	$3,156 \times 10^7$
1 dia =	$2,738 \times 10^{-3}$	1	24	$8,640 \times 10^4$
1 hora =	$1,141 \times 10^{-4}$	$4,167 \times 10^{-2}$	1	60
1 minuto =	$1,901 \times 10^{-6}$	$6,944 \times 10^{-4}$	$1,667 \times 10^{-2}$	1
1 SEGUNDO =	$3,169 \times 10^{-8}$	$1,157 \times 10^{-5}$	$2,778 \times 10^{-4}$	$1,667 \times 10^{-2}$

VELOCIDADE

ft/s	km/h	METRO/SEGUNDO	mi/h	cm/s
1 pé por segundo =	1	0,3048	0,6818	30,48
1 quilômetro por hora =	0,9113	1	0,2778	0,6214
1 METRO por SEGUNDO =	3,281	3,6	1	2,237
1 milha por hora =	1,467	1,609	0,4470	44,70
1 centímetro por segundo =	$3,281 \times 10^{-2}$	$3,6 \times 10^{-2}$	0,01	$2,237 \times 10^{-2}$

1 nô = 1 milha náutica por hora = 1,688 ft/s

1 mi/min = 88,00 ft/s = 60,00 mi/h

FORÇA

As unidades na área sombreada são cada vez menos usadas. Para esclarecer: 1 grama-força (= 1 gf) é a força da gravidade que atua sobre um corpo de massa igual a 1g num local onde g tem o valor padrão $9,80665 \text{ m/s}^2$.

dina	NEWTON	lb	pdl	gf	kgf
1 dina = 1	10^{-5}	$2,248 \times 10^{-6}$	$7,233 \times 10^{-5}$	$1,020 \times 10^{-3}$	$1,020 \times 10^{-6}$
1 NEWTON = 10^5	1	0,2248	7,233	102,0	0,1020
1 libra = $4,448 \times 10^5$	4,448	1	32,17	453,6	0,4536
1 poundal (pdl) = $1,383 \times 10^4$	0,1383	$3,108 \times 10^{-2}$	1	14,10	$1,410 \times 10^{-2}$
1 grama-força = 980,7	$9,807 \times 10^{-3}$	$2,205 \times 10^{-3}$	$7,093 \times 10^{-2}$	1	0,001
1 quilograma-força = $9,807 \times 10^3$	9,807	2,205	70,93	1.000	1

PRESSÃO

atm	dina/cm ²	polegada de água	cm Hg	PASCAL	lb/in. ²	lb/ft ²
1 atmosfera = 1	$1,013 \times 10^6$	406,8	76	$1,013 \times 10^5$	14,70	2,116
1 dina por centímetro ² = $9,869 \times 10^{-7}$	1	$4,015 \times 10^{-4}$	$7,501 \times 10^{-5}$	0,1	$1,405 \times 10^{-5}$	$2,089 \times 10^{-3}$
1 polegada de água ^a a 4°C = $2,458 \times 10^{-3}$	2,491	1	0,1868	249,1	$3,613 \times 10^{-2}$	5,202
1 centímetro de mercúrio ^a a 0°C = $1,316 \times 10^{-2}$	$1,333 \times 10^4$	5,353	1	1,333	0,1934	27,85
1 PASCAL = $9,869 \times 10^{-6}$	10	$4,015 \times 10^{-3}$	$7,501 \times 10^{-4}$	1	$1,450 \times 10^{-4}$	$2,089 \times 10^{-2}$
1 libra por polegada ² = $6,805 \times 10^{-2}$	$6,895 \times 10^4$	27,68	5,171	$6,895 \times 10^3$	1	144
1 libra por pe ² = $4,725 \times 10^{-4}$	478,8	0,1922	$3,591 \times 10^{-2}$	47,88	$6,944 \times 10^{-3}$	1

^aNum local onde a gravidade g tenha o valor padrão $9,80665 \text{ m/s}^2$.

1 bar = $10^6 \text{ dina/cm}^2 = 0,1 \text{ MPa}$

1 milibar = $10^3 \text{ dina/cm}^2 = 10^2 \text{ Pa}$

1 torr = 1 mmHg

ENERGIA, TRABALHO, CALOR

As grandezas nas áreas sombreadas não são propriamente unidades de energia, mas aparecem no quadro por serem convenientes. Aparecem em virtude da fórmula relativística de equivalência entre massa e energia, $E = mc^2$, e representam a energia liberada se um quilograma de massa, ou se uma unidade unificada de massa atômica (u), for completamente transformado em energia (nas duas filas de baixo), ou a massa que seria completamente transformada em uma unidade de energia (nas duas colunas da direita).

Btu	erg	ft · lb	hp · h	JOULE	cal	kW · h	eV	MeV	kg	u
1 unidade térmica britânica (Btu) = 1	$1,055 \times 10^{10}$	777,9	$\times 10^{-4}$	1,055	252,0	$\times 10^{-4}$	$2,930 \times 10^{21}$	$6,585 \times 10^{15}$	$1,174 \times 10^{-14}$	$7,070 \times 10^{12}$
1 erg = $9,481 \times 10^{-11}$	1	$7,376 \times 10^{-8}$	$\times 10^{-14}$	10^{-7}	$2,389 \times 10^{-8}$	$2,778 \times 10^{-14}$	$6,242 \times 10^{11}$	$6,242 \times 10^5$	$1,113 \times 10^{-24}$	$670,2 \times 10^9$
1 pé-libra = $1,285 \times 10^{-3}$	$1,356 \times 10^7$	1	$\times 10^{-7}$	1,356	$0,3238 \times 10^{-7}$	3,766	$8,464 \times 10^{18}$	$8,464 \times 10^{12}$	$1,509 \times 10^{-17}$	$9,037 \times 10^9$
1 hp-hora = $2,545 \times 10^{13}$	$2,685 \times 10^6$	1,980	$\times 10^6$	2,685	$6,413 \times 10^5$	1,676	$1,676 \times 10^{25}$	$2,988 \times 10^9$	$1,799 \times 10^{-11}$	$1,799 \times 10^6$
1 JOULE = $9,481 \times 10^{-4}$	10^7	0,7376	$\times 10^{-7}$	1	$0,2389 \times 10^6$	2,778	$6,242 \times 10^{18}$	$6,242 \times 10^{12}$	$1,113 \times 10^{-17}$	$6,702 \times 10^9$
1 caloria = $3,969 \times 10^{-3}$	$4,186 \times 10^7$	3,088	$\times 10^{-6}$	4,186	1	$1,163 \times 10^{-6}$	$2,613 \times 10^{19}$	$2,613 \times 10^{13}$	$4,660 \times 10^{-17}$	$2,806 \times 10^{10}$
1 quilowatt-hora = 3,413	$3,600 \times 10^{13}$	2,655	$\times 10^6$	3,600	$8,600 \times 10^4$	2,247	$2,247 \times 10^{25}$	$4,007 \times 10^{-11}$	$2,413 \times 10^{16}$	
1 elétron-volt = $1,519 \times 10^{-22}$	$1,602 \times 10^{-12}$	1,182	$\times 10^{-19}$	1,602	$3,827 \times 10^{-20}$	4,450	1	10^{-6}	$1,783 \times 10^{-36}$	$1,074 \times 10^{-9}$
1 milhão de elétrons-volt = $1,519 \times 10^{-16}$	$1,602 \times 10^{-6}$	1,182	$\times 10^{-13}$	1,602	$3,827 \times 10^{-14}$	4,450	10^{-6}	1	$1,783 \times 10^{-30}$	$1,074 \times 10^{-3}$
1 quilograma = $8,521 \times 10^{13}$	$8,987 \times 10^{23}$	6,629	$\times 10^{16}$	3,348	$8,987 \times 10^{16}$	2,146	$2,497 \times 10^{36}$	$5,610 \times 10^{29}$	$5,610 \times 10^{29}$	$6,022 \times 10^{26}$
1 unidade unificada de massa atômica = $1,415 \times 10^{-13}$	$1,492 \times 10^{-3}$	1,101	$\times 10^{-10}$	5,559	$1,492 \times 10^{-10}$	3,564	$4,146 \times 10^{-17}$	$9,320 \times 10^8$	$1,661 \times 10^{-27}$	1

POTÊNCIA

Btu/h	ft-lb/s	hp	cal/s	kW	WATT
1 unidade térmica britânica por hora = 1	0,2161	$3,929 \times 10^{-4}$	$6,998 \times 10^{-2}$	$2,930 \times 10^{-4}$	0,2930
1 pé-libra por segundo = 4,628	1	$1,818 \times 10^{-3}$	0,3239	$1,356 \times 10^{-3}$	1,356
1 hp = 2,545	550	1	178,1	0,7457	745,7
1 caloria por segundo = 14,29	3,088	$5,615 \times 10^{-3}$	1	$4,186 \times 10^{-3}$	4,186
1 quilowatt = 3,413	737,6	1,341	238,9	1	1.000
1 WATT = 3,413	0,7376	$1,341 \times 10^{-3}$	0,2389	0,001	1

FLUXO MAGNÉTICO

maxwell	WEBER
1 maxwell = 1	10^{-8}
1 WEBER = 10^8	1

CAMPO MAGNÉTICO

gauss	TESLA	miligauss
1 gauss = 1	10^{-4}	1.000
1 TESLA = 10^4	1	10^7
1 miligauss = 0,001	10^{-7}	1

1 tesla = 1 weber/metro²

APÊNDICE G

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

GEOMETRIA

Círculo de raio r : circunferência = $2\pi r$; área = πr^2 .

Esfera de raio r : área = $4\pi r^2$; volume = $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Cilindro circular reto com raio da base r e altura h : área = $2\pi r^2 + 2\pi rh$; volume = $\pi r^2 h$

Triângulo de base a e altura h : área = $ah/2$.

EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

$$\text{Se } ax^2 + bx + c = 0, \text{ então } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

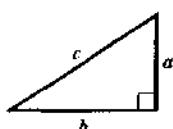
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DO ÂNGULO θ

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta &= \frac{y}{r} & \cos \theta &= \frac{x}{r} & \text{eixo } y \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} & \cot \theta &= \frac{x}{y} & \text{eixo } x \\ \sec \theta &= \frac{r}{x} & \cosec \theta &= \frac{r}{y} \end{aligned}$$

TEOREMA DE PITÁGORAS

Neste triângulo retângulo,

$$a^2 + b^2 = c^2$$



TRIÂNGULOS

Os ângulos são A, B e C

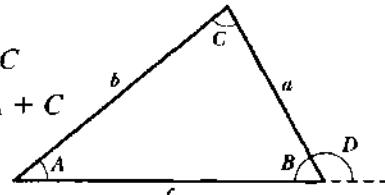
Os lados opostos são a, b e c

A soma dos ângulos $A + B + C = 180^\circ$

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

O ângulo externo $D = A + C$



SINAIS E SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

= igual a

≈ aproximadamente igual a

~ da ordem de grandeza de

≠ diferente de

≡ idêntico a, definido como

> maior que (\gg muito maior que)

< menor que (\ll muito menor que)

≥ maior que ou igual a (não menor que)

≤ menor que ou igual a (não maior que)

± mais ou menos

∝ proporcional a

Σ soma de (somatório de)

\bar{x} valor médio de x

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

$$\text{sen}(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \text{sen } \theta$$

$$\text{sen } \theta / \cos \theta = \tan \theta$$

$$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$\cosec^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

$$\text{sen } 2\theta = 2 \text{sen } \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \text{sen}^2 \theta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

BINÔMIO DE NEWTON

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots \quad (x^2 < 1)$$

$$(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp \frac{nx}{1!} + \frac{n(n+1)x^2}{2!} + \dots \quad (x^2 < 1)$$

EXPANSÃO DA EXPONENCIAL

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

EXPANSÃO DO LOGARITMO NEPERIANO

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots \quad (|x| < 1)$$

EXPANSÃO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS (θ em radianos)

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$

$$\tan \theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \dots$$

PRODUTOS DE VETORES

Sejam \mathbf{i}, \mathbf{j} e \mathbf{k} os vetores unitários nas direções x, y e z .
Então

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0,$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0,$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Qualquer vetor \mathbf{a} com as componentes a_x, a_y e a_z , sobre os eixos x, y e z , pode ser escrito como

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}.$$

Sejam \mathbf{a}, \mathbf{b} e \mathbf{c} três vetores arbitrários com os módulos a, b e c . Então

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$$

$$(sa) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (sb) = s(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (s = \text{um escalar})$$

Seja θ o menor dos dois ângulos formados por \mathbf{a} e \mathbf{b} .
Então

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cos \theta$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (a_y b_z - b_y a_z) \mathbf{i} \\ &\quad + (a_z b_x - b_z a_x) \mathbf{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \mathbf{k} \\ |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| &= ab \sin \theta \end{aligned}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

DERIVADAS E INTEGRAIS

Nas tabelas seguintes, u e v são funções quaisquer de x , e a e m são constantes. A cada integral indefinida deve ser adicionada uma constante de integração arbitrária.

1. $\frac{dx}{dx} = 1$
2. $\frac{d}{dx}(au) = a \frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$
5. $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$
6. $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
7. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
8. $\frac{d}{dx}\sen x = \cos x$
9. $\frac{d}{dx}\cos x = -\sen x$
10. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
11. $\frac{d}{dx}\cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$
12. $\frac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x$
13. $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\cot x \operatorname{cosec} x$
14. $\frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{du}{dx}$
15. $\frac{d}{dx}\sen u = \cos u \frac{du}{dx}$
16. $\frac{d}{dx}\cos u = -\sen u \frac{du}{dx}$
1. $\int dx = x$
2. $\int au \, dx = a \int u \, dx$
3. $\int(u + v) \, dx = \int u \, dx + \int v \, dx$
4. $\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$
5. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$
6. $\int u \frac{dv}{dx} \, dx = uv - \int v \frac{du}{dx} \, dx$
7. $\int e^x \, dx = e^x$
8. $\int \sen x \, dx = -\cos x$
9. $\int \cos x \, dx = \sen x$
10. $\int \tan x \, dx = \ln|\sec x|$
11. $\int \sen^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sen 2x$
12. $\int e^{-ax} \, dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$
13. $\int xe^{-ax} \, dx = -\frac{1}{a^2}(ax + 1)e^{-ax}$
14. $\int x^2 e^{-ax} \, dx = -\frac{1}{a^3}(a^2 x^2 + 2ax + 2)e^{-ax}$
15. $\int_0^\infty x^n e^{-ax} \, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$
16. $\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} \, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$

Encontram-se tabelas muito mais extensas, em especial no *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press Inc.).

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

Capítulo 1

- 3.** (a) 186 mi. (b) 3.0×10^8 mm. **5.** (a) 10^9 .
 (b) 10^{-4} . (c) 9.1×10^4 . **7.** 32,2 km. **9.** 0,020 km³.
11. (a) 250 ft². (b) 23,3 m². (c) 3.060 ft².
 (d) 86,6 m³. **13.** 8×10^2 km. **15.** (a) $11 \text{ m}^2/\text{L}$.
 (b) $1,13 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$. (c) $2,17 \times 10^{-3}$ gal/ft².
17. (a) $d_{\text{Sol}}/d_{\text{Júp}} = 400$. (b) $V_{\text{Sol}}/V_{\text{Júp}} = 6,4 \times 10^7$.
 (c) $3,5 \times 10^3$ km. **19.** (a) 31 m. (b) 21 m.
 (c) No lago Ontario. **21.** 52,6 min; 5,2%. **23.** 720 dias.
25. (a) Sim. (b) 8,6 s. **27.** 0,12 UA/min. **29.** 1,0 m.
31. 2 h. **33.** $6,0 \times 10^{36}$. **35.** $9,0 \times 10^{34}$.
37. (a) 10^3 km/m^3 . (b) 158 kg/s. **39.** 0,260 kg.

Capítulo 2

- 1.** (a) Lewis: 10,0 m/s; Rodgers: 5,41 m/s.
 (b) 1 h 10 min. **3.** 94 m. **5.** 2 cm/a.
7. $6,71 \times 10^8$ mi/h, $9,84 \times 10^8$ ft/s, 1,00 al/a.
9. (a) 1,7 m/s. (b) 2,1 m/s.
11. (a) 45 mi/h (72 km/h). (b) 69 km/h.
 (c) (71 km/h). (d) 0. **13.** (a) 28,5 cm/s.
 (b) 18,0 cm/s. (c) 40,5 cm/s. (d) 28,1 m/s.
 (e) 30,3 cm/s. **15.** (a) Matematicamente, um número infinito. (b) 60 km. **17.** (a) $4 \text{ s} > t > 2 \text{ s}$.
 (b) $3 \text{ s} > t > 0$. (c) $6 \text{ s} > t > 3 \text{ s}$. (d) $t = 3 \text{ s}$.
19. 100 m. **21.** (a) 20 m/s^2 , no sentido oposto ao da velocidade inicial. **23.** (a) Os sinais de v e a são: $OA: +, 0$; $AB: +, -$; $BC: 0, 0$; $CD: -, +$. (b) Não.
 (c) Não. **27.** (a) Não. (b) m^2/s^2 ; m/s^2 .
29. (a) $t = 1,2 \text{ s}$. (b) $t = 0$. (c) $t > 0$, $t < 0$.
31. (a) $v = 14 \text{ m/s}$, $\pi = 18 \text{ m/s}^2$.
 (b) $v(2) = 24 \text{ m/s}$, $v(1) = 6 \text{ m/s}$, $a(2) = 24 \text{ m/s}^2$, $a(1) = 12 \text{ m/s}^2$. **33.** (a) L/T^2 , m/s^2 ; L/T^3 , m/s^3 .
 (b) 2,0 s. (c) 7,2 m. (d) $-4,8 \text{ m}$.
 (e) 3,0, -9 , $-7,2 \text{ m/s}$. (f) 0, -6 , -12 , $-5,4 \text{ m/s}^2$.
35. (a) 1,6 m/s. (b) 18 m/s. **37.** (a) $3,1 \times 10^6$ s.
 (b) $4,6 \times 10^{13}$ m. **39.** (a) 0,10 m.
41. (a) $8,3 \text{ m/s}^2$; 0,85 g. (b) 3,2 s; $\approx 8T$.
43. (a) 5,00 s. (b) 61,5 m. **45.** (a) 2,6 s.
47. (a) 5,0 m/s². (b) 4,0 s. (c) 6,0 s. (d) 90 m.
49. (a) 5,00 m/s. (b) 1,67 m/s². (c) 7,50 m.
51. (a) 0,74 s. (b) 6,5 m/s². **53.** (a) 32,9 m/s.
 (b) 49,1 s. (c) 11,7 m/s. **55.** (a) 10,4 m. (b) 41,6 s.
57. Sim. **59.** (a) 29,4 m. (b) 2,45 s. **61.** 183 m/s.
63. (a) 1,54 s. (b) 27,1 m/s. **67.** (a) 3,70 m/s.
 (b) 1,74 m/s. (c) 0,154 m. **69.** 4,0 m/s.
73. (a) $v = (\nu_0^2 + 2gh)^{1/2}$, para baixo.
 (b) $t = [(\nu_0^2 + 2gh)^{1/2} - v]/g$.
 (c) mesmo; $t = [(\nu_0^2 + 2gh)^{1/2} - v]/g$, maior. **75.** Quatro vezes mais alto. **77.** 1,650 m/s², para cima. **79.** (a) 38,1 m.
 (b) 9,02 m/s. (c) 14,5 m/s, para cima. **81.** 96g. **83.** (a) 17 s.
 (b) 290 m. **85.** $\approx 0,3$ s. **87.** (a) 76 m acima do solo. (b) 4,1 s. **89.** 2,34 m.

Capítulo 3

- 1.** Os deslocamentos devem ser (a) paralelos,
 (b) antiparalelos, (c) perpendiculares.
3. (a) 370 m, 36° ao norte do leste.
 (b) Módulo do deslocamento: 370 m; distância percorrida: 425 m. **5.** 81 km, 40° ao norte do leste.
7. (a) 38 unidades, 320° . (b) 130 unidades, $1,2^\circ$.
 (c) 62 unidades, 130° . **9.** $a_x = -2,5$; $a_y = -6,9$.
11. $r = 13 \text{ m}$; $r = 7,5 \text{ m}$.
13. (a) 14 cm, a 45° à esquerda da vertical orientada para baixo.
 (b) 20 cm, para cima. (c) zero. **15.** 4,74 km.
17. 168 cm, $32,5^\circ$ acima do piso. **19.** (a) 7,1 m.
 (b) Não; sim; sim. (c) $14i + 12j + 10k$ é uma das respostas possíveis.
 (d) 8,6 m. **21.** $r_x = 12$, $r_y = -5,8$, $r_z = -2,8$.
23. (a) $8i + 2j$, $8,2$, 14° .
 (b) $2i - 6j$, $6,3$, -72° em relação a i. **25.** (a) $5,0$, -37° .
 (b) 10 , 53° . (c) 11 , 27° . (d) 11 , 80° .
27. (a) $r_x = 1,59$, $r_y = 12,1$. (b) 12,2. (c) $82,5^\circ$.
29. 1,130 m, na horizontal.
31. (a) $-2,83 \text{ m}$, $-2,83 \text{ m}$; $+5,00 \text{ m}$, 0 m ; $3,00 \text{ m}$, $5,20 \text{ m}$.
 (b) $5,17 \text{ m}$, $2,37 \text{ m}$. (c) $5,69 \text{ m}$, $24,6^\circ$ ao norte do leste.
 (d) $5,69 \text{ m}$, $24,6^\circ$ ao sul de oeste. **35.** (b) 11.200 km.
37. (a) 10 m, norte. (b) 7,5 m, sul. **39.** Não.
43. (a) 30. (b) 52. **45.** (a) 0. (b) -16 . (c) -9 .
49. (a) $11i + 5j - 7k$. (b) 120° . **51.** (a) $2k$. (b) 26.
 (c) 46. **53.** (a) 2,97. (b) $1,51i + 2,67j - 1,36k$.
 (c) 48. **55.** 70,5°. **57.** (b) $a^2b \sin \phi$.

Capítulo 4

- 1.** (a) $-(5,0 \text{ m})\mathbf{i} + (8,0 \text{ m})\mathbf{j}$. (b) 9,4 m, 122° de +x.
3. (a) $-(7,0 \text{ m})\mathbf{i} + (12 \text{ m})\mathbf{j}$. (b) plano ty.
5. (a) 1.080 km, $63,4^\circ$ sudeste. (b) 479 km/h, $63,4^\circ$ sudeste; deve ser o mesmo ângulo do item (a).
 (c) 644 km/h. **7.** (a) 6,79 km/h. (b) $6,96^\circ$.
9. (a) $(3 \text{ m/s})\mathbf{i} - (8 \text{ m/s})\mathbf{j}$. (b) $(3 \text{ m/s})\mathbf{i} - (16 \text{ m/s})\mathbf{j}$.
 (c) 16 m/s, -79° até +x. **11.** (a) $8\mathbf{j} + \mathbf{k}$. (b) $8\mathbf{j}$.
13. $-(2,10 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (2,81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j}$.
15. (a) $-(1,5 \text{ m/s})\mathbf{j}$. (b) $(4,5 \text{ m})\mathbf{i} - (2,25 \text{ m})\mathbf{j}$.
17. (a) 18 cm. (b) 1,9 m. **19.** (a) $5,4 \times 10^{-11} \text{ m}$.
 (b) Diminui. **21.** (a) 0,50 s. (b) 3 m/s.
23. (a) 0,21 s; 0,21 s. (b) 20,6 cm. (c) 61 cm.
25. (a) 16,9 m; 8,21 m. (b) 27,6 m; 7,26 m.
 (c) 40,2 m; 0. **27.** (a) 1,15 s. (b) 12,0 m.
 (c) 19,2 m/s; 4,80 m/s. (d) Não. **29.** (b) 27° .
31. (a) 194 m/s. (b) 38° . **33.** 4,8 cm.
35. Não-acidental; velocidade de lançamento horizontal é cerca de 20% da marca mundial de velocidade de arranque. **37.** (a) 11 m. (b) 23 m.
 (c) 17 m/s, 63° abaixo da horizontal. **39.** (a) 22 m. (b) $7,6^\circ$. (c) 1,0 s. **41.** 7 m/s.

- 43.** Aproximadamente 40 m.
45. 30 m acima do ponto de lançamento. **47.** O terceiro.
49. (a) 61 m/s. (b) 806 m. (c) 161 m/s; -171 m/s.
51. 78,5°. **53.** 25 m.
55. Entre os ângulos 31° e 63° acima da horizontal.
57. (a) 310 s. (b) 105 km. (c) 139 km.
59. (a) 4,0 m/s². (b) Em direção ao centro do círculo.
61. (a) 22 m. (b) 15 s. **63.** (a) $4,6 \times 10^2$ m.
(b) 2,8 d. **65.** (a) 7,3 km. (b) menor que 80 km/h.
67. (a) 19 m/s. (b) 35 rev/min. **69.** (a) 0,034 m/s².
(b) 84 min. **71.** (a) 4,2 m, 45°; 5,5 m, 68°; 6,0 m, 90°.
(c) 4,2 m, 135°. (c) 0,85 m/s, 135°.
(d) 0,94 m/s, 90°; 0,94 m/s, 180°. (c) 0,30 m/s², 180°;
0,30 m/s², 270°. Ângulos medidos a partir de +x
no sentido anti-horário. **73.** (a) 5 km/h, rio acima.
(b) 1 km/h, rio abaixo.
75. O vento sopra de leste a 85,3 km/h. **77.** 48 s.
79. (a) $(80 \text{ km/h})\hat{i} - (60 \text{ km/h})\hat{j}$.
(b) v ocorre ao longo da linha de visada.
(c) As respostas não mudam. **81.** (0,96 m/s) \hat{j} .
83. 80 m/s. **85.** 185 km/b, 22° sudeste.
87. 87° a partir da direção do movimento do carro.
89. (a) 47° nordeste. (b) 6 min 35 s. **91.** 0,83c.

Capítulo 5

- 1.** (a) $F_x = 1,88 \text{ N}$, $F_y = 0,684 \text{ N}$.
(b) $(1,88 \text{ N})\hat{i} + (0,684 \text{ N})\hat{j}$.
3. (a) $- (6,26 \text{ N})\hat{i} - (3,23 \text{ N})\hat{j}$.
(b) 7,0 N, 207° em relação a +x.
5. $(3 \text{ N})\hat{i} + (-11 \text{ N})\hat{j} + (4 \text{ N})\hat{k}$.
7. (a) $(-32 \text{ N})\hat{i} + (-21 \text{ N})\hat{j}$. (b) 38 N, 213° a partir de +x.
9. (a) $(0,86 \text{ m/s}^2)\hat{i} + (-0,16 \text{ m/s}^2)\hat{j}$.
(b) $0,88 \text{ m/s}^2$, -11° em relação a +x.
11. (a) Massa = 630 kg; peso = 636 kgf.
(b) Massa = 421 kg; peso = 4,100 N. **13.** (a) 740 N.
(b) 290 N. (c) Zero. (d) 75 kg em cada local.
15. (a) 147 N, para baixo. (b) 147 N, para cima.
(c) 147 N. **17.** (a) 54 N. (b) 152 N. **19.** $1,18 \times 10^4$ N.
21. $1,2 \times 10^6$ N. **23.** 16 N. **25.** 8,0 cm/s².
27. (a) A massa de 4 kg. (b) 6,5 m/s². (c) 13 N.
29. $1,2 \times 10^6$ N. **31.** 307 N. **33.** 1,5 mil.
35. 10 m/s². **37.** (a) 489 N, para cima. (b) 489 N, para baixo.
39. (a) 0,62 m/s². (b) 0,13 m/s². (c) 2,6 m.
41. (a) 0,74 m/s². (b) 7,3 m/s².
43. (a) $5\hat{i} + 4,3\hat{j}$, m/s. (b) $15\hat{i} + 6,4\hat{j}$, m.
45. (a) 65 N. (b) 49 N. **47.** (a) 220 kN. (b) 50 kN.
49. (a) $0,970 \text{ m/s}^2$. (b) $T_1 = 11,6 \text{ N}$, $T_2 = 34,9 \text{ N}$.
51. (a) 31,24 kN. (b) 24,3 kN. **53.** (a) 5,1 m/s.
55. (a) 3,260 N. (b) $2,7 \times 10^4$ kg. (c) $-1,2 \text{ m/s}^2$.
57. (a) 1,23; 2,46; 3,69; 4,92, N. (b) 6,15 N. (c) 0,25 N.
59. (a) Fazendo com que a aceleração de descida tenha módulo $\geq 1,3$ m/s². (b) 3,9 m/s ou mais.
61. (a) 7,3 kg. (b) 89 N. **63.** (a) 4,9 m/s².
(b) 2,0 m/s², para cima. (c) 120 N. **65.** (a) 120 m/s².
(b) 12g. (c) $1,4 \times 10^8$ N. (d) 4,2 anos.
67. (a) 2,18 m/s². (b) 116 N. (c) 21,0 m/s².
69. 4,6 m/s². (b) 2,6 m/s². **71.** (a) 9,4 km.
(b) 61 km. **73.** (a) -466 N. (b) -527 N.
(c) -931 N, -1.050 N.
(d) Nos dois primeiros casos: -931 N. Terceiro caso: -1.860 N. Quarto caso: -1.980 N.

Capítulo 6

- 1.** (a) 200 N. (b) 120 N. **3.** (a) 110 N. (b) 130 N.
(c) Não. (d) 46 N. (e) 17 N. **5.** (a) (i) 245 N, 100 N.
(ii) 195 N, 86,6 N. (iii) 158 N, 50,0 N.
(b) (i) Permanece parada. (ii) Desliza. (iii) Permanece parada. **7.** 9,3 m/s².
9. (a) 90 N. (b) 70 N. (c) 0,89 m/s². **11.** (a) Não.

- (b) $(12 \text{ N})\hat{i} + (5 \text{ N})\hat{j}$. **13.** 20°. **15.** (a) 0,13 N.
(b) 0,12. **19.** (a) 56 N. (b) 59 N. (c) 1,100 N.
21. (a) $v_0^2/(4g \operatorname{sen} \theta)$. (b) Não. **23.** 0,53.
25. (a) 11 N, em direção à direita. (b) $0,14 \text{ m/s}^2$.
27. (a) $2,0 \text{ m/s}^2$, descendo o plano. (b) 4,0 m.
(c) Fica lá. **29.** (a) 8,6 N. (b) 46 N. (c) 39 N.
31. (a) Zero. (b) $3,9 \text{ m/s}^2$ para baixo.
(c) $1,0 \text{ m/s}^2$ para baixo. **33.** (a) 13 N.
(b) $1,6 \text{ m/s}^2$. **35.** (a) 1,05 N, tensionado.
(b) $3,62 \text{ m/s}^2$ descendendo o plano.
(c) As respostas seriam as mesmas, exceto que o bastão estaria sob compressão.
37. (a) $6,1 \text{ m/s}^2$, para a direita. (b) $0,98 \text{ m/s}^2$, para a direita.
39. $g (\operatorname{sen} \theta - \sqrt{2} \mu_k \cos \theta)$. **41.** (a) 19° (b) 3,300 N.
43. 6,200 N. **45.** 2,3. **47.** 10 m/s. **49.** 20,7 m.
51. (a) 11°. (b) 0,19. **53.** (a) 0,96 m/s. (b) 0,021.
55. (a) $2,2 \times 10^6$ m/s.
(b) $9,1 \times 10^{32} \text{ m/s}^2$, apontando para o núcleo.
(c) $8,3 \times 10^{-8} \text{ N}$. **57.** 178 km/h. **59.** 0,12, 0,23.
61. 874 N. **63.** \sqrt{gR} . **65.** 1,52 km.
67. (a) $5,1 \text{ m/s}^2$, radialmente para dentro. (b) 4,8 N. (c) 10 N.
69. (a) 0,0338 N. (b) 9,77 N. **71.** (a) 5,8'. (b) Zero.
(c) Zero.

Capítulo 7

- 1.** (a) $3,7 \times 10^7$ J. (b) 200 J. **3.** (a) 314 J.
(b) -155 J. (c) Zero. (d) 158 J. **5.** (a) 230 N.
(b) -400 J. (c) 400 J. (d) Zero. (e) Zero.
7. (a) $c = 4$ m. (b) $c < 4$ m. (c) $c > 4$ m.
9. (a) 215 N. (b) 10,100 J. (c) 48 m.
(d) 10,300 J. **11.** (a) 2,200 J. (b) -1,500 J.
13. 25 J. **17.** -6 J. **19.** 1,250 J. **21.** $1,8 \times 10^{13}$ J.
23. (a) 3,610 J. (b) 1,900 J. (c) $1,1 \times 10^{10}$ J.
25. 47 keV. **27.** 7,9 J. **29.** (a) 48 km/h.
(b) $9,0 \times 10^4$ J. **31.** (a) 1×10^5 megatons de TNT.
(b) 1×10^7 bombas. **33.** 530 J. **35.** (a) $1,2 \times 10^4$ J.
(b) $-1,1 \times 10^4$ J. (c) 1,100 J. (d) 5,4 m/s.
37. (a) 797 N. (b) Zero. (c) -1,550 J. (d) Zero.
(e) 1,550 J. (f) Porque a força F não é constante.
39. 270 kW. **41.** 235 kW. **43.** 17 kW.
45. (a) $2,6 \times 10^6$ J. (b) 0,58 hp.
47. (a) 0,83; 2,5; 4,2 J. (b) 5,0 W. **49.** 90 hp.
51. (a) 79,37 keV. (b) 3,12 MeV. (c) 10,9 MeV.

Capítulo 8

- 1.** 89 N/cm . **3.** (a) 200 J. (b) 170 J. (c) 13 m/s.
5. (a) $4,0 \times 10^4$ J. (b) $4,0 \times 10^4$ J. **7.** (a) v_p .
(b) $\sqrt{v_0^2 + gh}$. (c) $\sqrt{v_0^2 + 2gh}$. (d) $(v_0^2/2g) + h$.
9. 56 m/s. **11.** (a) 7,84 N/cm. (b) 62,7 J.
(c) 80,0 cm. **13.** (a) mgL . (b) $\sqrt{2gL}$. **15.** (a) 2,8 m/s.
(b) 2,7 m/s. **17.** (a) 35 cm. (b) 1,7 m/s.
19. (a) 1,2 J. (b) 11 m/s. (c) Não. (d) Não.
21. (a) 25 kJ. (b) 7,8 kJ. (c) 160 m. **23.** (a) 4,8 m/s.
(b) 2,4 m/s. **25.** 10 cm. **27.** 1,25 cm. **29.** (a) 19 J.
(b) 6,4 m/s. (c) 11 J, 6,4 m/s.
31. Sim, mas por pouco.
33. (a) $2\sqrt{gL}$. (b) $5mg$. (c) 71° . **35.** $mgL/32$.
39. (a) $1,12(A/B)^{1/6}$. (b) Repulsiva. (c) Atrativa.
41. (a) Um ponto de inversão à esquerda e à direita.
(b) Pontos de inversão à esquerda e à direita.
(c) $-1,2 \times 10^{-19}$ J. (d) $2,2 \times 10^{-19}$ J.
(e) $\approx 1 \times 10^{-9}$ N, sobre o átomo de massa m na direção do átomo de massa M , bem como sobre o átomo de massa M , na direção do átomo de massa m .
(f) $r < 0,2 \text{ nm}$. (g) $r > 0,2 \text{ nm}$. (h) $r = 0,2 \text{ nm}$.
43. (a) $7,9 \times 10^4$ J. (b) 1,8 W. **45.** (a) 2,700 MJ.
(b) 2,700 MW. (c) 240 M\$. **47.** (a) -0,74 J.

- (b) $-0,53 \text{ J}$. **49.** (a) $1,2 \text{ km}$. (b) 75 kW . **51.** 690 W .
53. $5,5 \times 10^6 \text{ N}$. **55.** 24 W . **57.** (b) $3,4$.
59. (a) $-3,800 \text{ J}$. (b) $3,1 \times 10^4 \text{ N}$. **61.** 54% .
63. -12 J . **65.** (a) $1,5 \text{ MJ}$. (b) $0,51 \text{ MJ}$. (c) $1,0 \text{ MJ}$.
(d) 63 m/s . **67.** $0,191$. **69.** 44 m/s . (b) $0,036$.
73. (a) $0,1 \text{ m}$. (b) $2,8 \text{ m/s}$. **75.** (a) 560 J . (b) 150 J .
(c) $5,5 \text{ m/s}$. **77.** $1,2 \text{ m}$.
81. No centro da parte plana. **83.** (a) $7,3 \text{ m/s}$.
(b) $0,9 \text{ m}$. (c) $2,7 \text{ m}$. (d) $14,9 \text{ m}$. **85.** 180 W .
87. (a) $2,1 \times 10^6 \text{ kg}$. (b) $\sqrt{100 + 1,5t} \text{ m/s}$.
(c) $[(1,5 \times 10^6)/\sqrt{100 + 1,5t}] \text{ N}$. (d) $6,7 \text{ km}$.
89. (a) 110 rev/min . (b) 19 W . **91.** (a) 216 J .
(b) $1,180 \text{ N}$. (c) 432 J , o dobro da resposta do item (a).
93. (a) $1,1 \times 10^{17} \text{ J}$. (b) $1,2 \text{ kg}$. **95.** $1,10 \text{ kg}$.
97. 270 vezes a circunferência equatorial da Terra.
99. $2 \times 10^5 \text{ kg}$. **101.** (a) $2,46 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$. (b) Emitida.

Capítulo 9

- 1.** (a) $4,700 \text{ km}$. (b) $0,72 R_T$.
3. (a) $x_{cm} = 1,1 \text{ m}$; $y_{cm} = 1,3 \text{ m}$.
(b) Ele se desloca na direção da partícula de cima.
5. $x_{cm} = -0,25 \text{ m}$; $y_{cm} = 0$.
7. Dentro do ferro, na metade da altura, na metade da largura a $2,7 \text{ cm}$ da metade do comprimento.
9. $x_{cm} = y_{cm} = 20 \text{ cm}$; $z_{cm} = 16 \text{ cm}$. **11.** $36,8 \text{ m}$.
13. $6,2 \text{ m}$. **15.** (a) Para baixo; $mv/(m + M)$.
(b) O balão ficará de novo estacionário. **17.** (a) L . (b) Zero.
19. 58 kg . **21.** (a) A 25 mm de cada saco.
(b) A 26 mm do saco mais leve. (c) Para baixo. (d) $-1,6 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$.
23. $39,900 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, na direção do movimento.
25. (a) $52,0 \text{ km/h}$. (b) $28,8 \text{ km/h}$. **27.** Um próton.
29. (a) 30° . (b) $(-0,572 \text{ kg} \cdot \text{m/s})\hat{j}$. **31.** (a) $6,4 \text{ J}$.
(b) $P_i = 0,80 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, 30° acima da horizontal;
 $P_f = 0,80 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, 30° abaixo da horizontal.
33. $9,8 \times 10^{-3} \text{ ft/s}$, para trás. **35.** $4,400 \text{ km/h}$.
37. $wv_{wp}/(W + w)$.
39. 14 m/s , fazendo um ângulo de 135° com os outros fragmentos.
41. (a) $0,54 \text{ m/s}$. (b) 0 m/s . (c) $1,1 \text{ m/s}$.
43. (a) 721 m/s . (b) 937 m/s . **45.** (a) $0,200 v_{rel}$.
(b) $0,210 v_{rel}$. (c) $0,209 v_{rel}$. **47.** (a) $8,0 \times 10^4 \text{ N}$.
(b) 27 kg/s . **49.** (a) $1,57 \times 10^6 \text{ N}$. (b) $1,35 \times 10^5 \text{ kg}$.
(c) $2,08 \text{ km/s}$. **51.** $2,2 \times 10^{-3}$. **55.** $6,1 \text{ s}$.
57. (a) $2,3 \times 10^4 \text{ N}$. (b) $4,2 \times 10^4 \text{ W}$.
59. $2,7 \text{ m/s}$. **61.** (a) -500 J . (b) $1,700 \text{ N}$.

Capítulo 10

- 1.** $400 \text{ N} \cdot \text{s}$. **3.** $2,5 \text{ m/s}$. **5.** (a) $2mv/\Delta t$. (b) 570 N .
7. $6,400 \text{ lb}$ ($2,903,0 \text{ kgf}$). **9.** 67 m/s .
11. (a) $2,3 \text{ N} \cdot \text{s}$, no sentido inicial do vôo.
(b) $2,3 \text{ N} \cdot \text{s}$, no sentido oposto ao sentido inicial do vôo.
(c) $1,400 \text{ N}$, no sentido inicial do vôo. (d) 58 J .
13. 10 m/s . **15.** **216**. **17.** **29**. **19.** $2\mu v$. **21.** 990 N .
23. (a) $1,8 \text{ N} \cdot \text{s}$, para a esquerda. (b) 180 N , para a direita.
27. 8 m/s . **29.** (a) $1,9 \text{ m/s}$, para a direita. (b) Sim.
(c) Não, a energia cinética total teria aumentado.
31. $0,22\%$. **33.** (a) 99 g . (b) $1,9 \text{ m/s}$.
35. (a) $2,47 \text{ m/s}$. (b) $1,23 \text{ m/s}$. **37.** 100 g . **39.** $m/3$.
41. $= 2 \text{ mm/ano}$. **43.** $1,81 \text{ m/s}$. **45.** 310 m/s .
47. $2,7 \text{ m/s}$. (b) $1,400 \text{ m/s}$. **49.** $190 \times 10^3 \text{ kgf}$. **51.** $mv^2/6$.
53. $13 \times 10^3 \text{ kgf}$. **55.** 25 cm . **57.** (a) $62,5 \text{ km/h}$. (b) $0,75$.
59. $\sqrt{2E \frac{M+m}{mM}}$
61. (a) A 30° a partir do sentido do movimento do primeiro próton. (b)
 250 m/s e 430 m/s . **63.** (a) 41° . (b) $4,76 \text{ m/s}$.
(c) Não. **65.** $v = V/4$.
67. (a) A 117° a partir do sentido final de B . (b) Não.
69. 120° . **71.** (a) $1,9 \text{ m/s}$, a 30° com relação ao sentido inicial.
(b) Não. **73.** (a) $3,4 \text{ m/s}$, defletida de 17° para a direita.

- (b) $0,95 \text{ MJ}$. **75.** (a) 117 MeV .
(b) Momentos lineares de módulos iguais e sentidos opostos. (c) π^- .
77. (a) $4,94 \text{ MeV}$. (b) Zero. (c) $4,85 \text{ MeV}$.
(d) $0,09 \text{ MeV}$.

Capítulo 11

- 1.** (a) $1,50 \text{ rad}$. (b) $85,9^\circ$. (c) $1,49 \text{ m}$.
3. (a) $5,5 \times 10^{15} \text{ s}$. (b) 26 . **5.** (a) 2 rad . (b) 0 .
(c) 130 rad/s . (d) 32 rad/s^2 . (e) Não.
7. (a) $0,105 \text{ rad/s}$. (b) $1,75 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$.
(c) $1,45 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$. **9.** 11 rad/s . **11.** (a) 30 s .
(b) $1,800 \text{ rad}$. **13.** (a) $9,000 \text{ rev/min}^2$. (b) 420 rev .
15. (a) $-1,25 \text{ rad/s}^2$. (b) 250 rad . (c) $39,8 \text{ rev}$.
17. (a) 140 rad . (b) 14 s . **19.** $8,0 \text{ s}$. **21.** (a) 340 s .
(b) $-4,5 \times 10^{-3} \text{ rad/s}^2$. (c) 98 s . **23.** (a) $1,0 \text{ rev/s}^2$.
(b) $4,8 \text{ s}$. (c) $9,6 \text{ s}$. (d) 48 rev .
25. (b) $-2,3 \times 10^{-9} \text{ rad/s}^2$. (c) $2,600 \text{ a}$. (d) 24 ms .
27. (a) $3,5 \text{ rad/s}$. (b) $53,34 \text{ cm/s}$. (c) $25,4 \text{ cm/s}$.
29. (a) $20,9 \text{ rad/s}$. (b) $12,5 \text{ m/s}$. (c) 800 rev/min^2 .
(d) 600 rev . **31.** (a) $2,0 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$. (b) 30 km/s .
(c) $5,9 \text{ mm/s}^2$, apontando para o Sol.
33. (a) $2,50 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$. (b) $20,2 \text{ m/s}^2$. (c) 0 .
35. (a) $7,3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$. (b) 350 m/s .
(c) $7,3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$, 460 m/s . **37.** (a) $40,2 \text{ cm/s}^2$.
(b) $2,36 \times 10^3 \text{ m/s}^2$. (c) $83,2 \text{ m}$.
39. (a) $3,8 \times 10^3 \text{ rad/s}$. (b) 190 m/s . **41.** 16 s .
43. (a) 73 cm/s^2 . (b) $0,075$. (c) $0,11$. **45.** $12,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
47. Primeiro cilindro: $1,100 \text{ J}$; segundo cilindro: $9,700 \text{ J}$.
49. (a) $1,300 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$. (b) $550 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$. (c) $1,900 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$.
(d) $A + B$. **51.** (a) $5 \text{ m}^2 + 8 \text{ M}^2/3$. (b) $(5 \text{ m}^2/2 + 4 \text{ M}^2/3)/I^2\omega^2$.
53. (a) $9,71 \times 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. (b) $2,57 \times 10^{29} \text{ J}$.
(c) $1,9 \times 10^6 \text{ y}$. **57.** $1/3 M(a^2 + b^2)$. **59.** (a) 49 MJ .
(b) 100 min . **61.** $140 \text{ N} \cdot \text{m}$.
63. (a) $r_1 F_1 \text{ sen } \theta_1 - r_2 F_2 \text{ sen } \theta_2$. (b) $-3,8 \text{ N} \cdot \text{m}$.
65. $1,28 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. **67.** $9,7 \text{ rad/s}^2$, anti-horário.
69. (a) $155 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. (b) $64,4 \text{ kg}$. **71.** 130 N .
73. (a) $6,00 \text{ cm/s}^2$. (b) $4,87 \text{ N}$. (c) $4,54 \text{ N}$.
(d) $1,20 \text{ rad/s}^2$. (e) $0,0138 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. **75.** (a) $2\theta/t^2$.
(b) $2R\theta/t^2$. (c) $T_1 = M(g - 2R\theta/t^2)$.
 $T_2 = Mg - (2\theta/t^2)(MR + I/R)$.
77. (a) $3g(1 - \cos \theta)$. (b) $3(g \text{ sen } \theta)/2$. (c) $41,8^\circ$.
79. $292 \text{ ft} \cdot \text{lb}$ ($396 \text{ N} \cdot \text{m}$). **81.** (a) $ml^2\omega^2/6$.
(b) $P\omega^2/6g$. **83.** $\sqrt{g/4l}$. **85.** (a) $4,8 \times 10^5 \text{ N}$.
(b) $1,1 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}$. (c) $1,3 \times 10^6 \text{ J}$.
87. (a) $-7,66 \text{ rad/s}^2$. (b) $-11,7 \text{ N} \cdot \text{m}$.
(c) $-4,60 \times 10^4 \text{ J}$. (d) 624 rev .
(e) O trabalho realizado pelo atrito, $-4,60 \times 10^4 \text{ J}$.

Capítulo 12

- 1.** $1,00$. **3.** (a) $59,3 \text{ rad/s}$. (b) $-9,31 \text{ rad/s}^2$.
(c) $70,7 \text{ m}$. **5.** (a) 990 J . (b) $3,000 \text{ J}$. (c) $1,1 \times 10^5 \text{ J}$.
7. (a) $60,7 \text{ J}$. (b) $3,4 \text{ m}$. (c) Não.
9. (a) 0 m/s , 0 m/s^2 . (b) 22 m/s , $1,500 \text{ m/s}^2$.
(c) -22 m/s , $1,500 \text{ m/s}^2$. (d) Centro: 22 m/s , 0 m/s^2 ; topo: 44 m/s , $1,500 \text{ m/s}^2$; base: 0 m/s , $1,500 \text{ m/s}^2$.
11. 48 m . **13.** (a) $2,7R$. (b) $(50/7)mg$. **15.** (a) $1,13 \text{ s}$.
(b) $13,6 \text{ m}$. **17.** 70 r.p.s/s .
21. (a) $10 \text{ N} \cdot \text{m}$, paralelo ao plano yz , formando um ângulo de 53° com o fixo y positivo. (b) $22 \text{ N} \cdot \text{m}$, $-x$.
23. (a) $(6,0 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{i} - (3,0 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{j} - (6,0 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{k}$.
(b) $(26 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{i} + (3,0 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{j} - (18 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{k}$.
(c) $(32 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{i} - (24 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{k}$. (d) 0 .
25. (a) $(50 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{k}$. (b) 90° . **27.** $9,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.
31. $2,5 \times 10^{11} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$. **33.** mv/d , com relação a qualquer origem.
35. (a) $3,15 \times 10^{12} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$. (b) $0,616$.
37. $4,5 \text{ N} \cdot \text{m}$, paralelo ao plano xy formando um ângulo de -63° com o eixo x positivo.
39. (a) 0 . (b) 0 .

- (c) $30 t^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, $90 t^2 \text{ N} \cdot \text{m}$, ambos na direção $-z$.
 (d) $30 t^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, $90 t^2 \text{ N} \cdot \text{m}$, ambos na direção $+z$.

- 41.** (a) $(mgr^2 v_0 \cos \theta_0)/2$. (b) $mgtv_0 \cos \theta_0$.
 (c) $mgtv_0 \cos \theta_0$. **43.** (a) $-1,47 \text{ N} \cdot \text{m}$. (b) $20,4 \text{ rad}$.
 (c) $-29,9 \text{ J}$. (d) $19,9 \text{ W}$. **45.** (a) $12,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 (b) $308 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, para baixo. **49.** (a) $1,2 \text{ s}$. (b) $8,6 \text{ m}$.
 (c) $5,2 \text{ rev}$. (d) $6,1 \text{ m/s}$. (e) Não.
51. (a) $3,6 \text{ rev/s}$. (b) $3,0$.
 (c) O trabalho realizado pelo homem ao aproximar os pesos do corpo.

- 53.** (a) 267 r.p.m./min . (b) $2/3$. **55.** $3,0 \text{ min}$.

- 57.** $12,7 \text{ rad/s}$, em sentido horário, visto de cima.

- 59.** (a) $7 ML^2/12$. (b) $7 ML^2\omega_0/12$ para baixo. (c) $14 \omega_0/5$.
 (d) $21 mL^2\omega_0^2/40$. **61.** (a) $(mRv - I\omega_0)/(I + mR^2)$.

- (b) Não. Um pouco de energia será transformada em energia interna da barata.

- 63.** A duração do dia aumentaria cerca de $0,8 \text{ s}$.

- 65.** (a) $0,148 \text{ rad/s}$. (b) $0,0123$. (c) 181° .

- 67.** $0,43 \text{ r.p.m.}$

CRÉDITOS DAS FOTOS

Capítulo 1

Abertura: Martin Bond/Science Photo Library/Photo Researchers. Pág. 4: (Fig. 1-1) CNRI/Science Photo Library/Photo Researchers; (Fig. 1-2) Cortesia do National Institute of Standards and Measures. Pág. 5: Steven Pitkin. Pág. 6: Cortesia do National Institute of Standards and Measures. Pág. 7: Cortesia do Bureau International des Poids et Mesures, França.

Capítulo 2

Abertura: Kevin Levine/Allsport. Pág. 19: Cortesia de U.S. Air Force. Pág. 23: James Sugar/Black Star. Pág. 25: Cortesia dos Drs. Mike Isaacson e M. Ohtsyki, Cornell University. Pág. 33: (Fig. 2-25) Bianca Lavies; (Fig. 2-26) Paul S. Sutton/Duomo. Pág. 34: *The Boston Globe*.

LEITURA COMPLEMENTAR 1

Pág. 36: Cortesia de Jearl Walker.

Capítulo 3

Abertura: Cortesia de David des Marais, copyright © 1976 Cave Research Foundation.

Capítulo 4

Abertura: Jerry Yulsman/Image Bank. Pág. 60: C. E. Miller/Massachusetts Institute of Technology. Pág. 61: Richard Megna/Fundamental Photographs. Pág. 62: (Fig. 4-12) Jamie Budge/Gamma-Liaison; (Fig. 4-13) C. E. Miller/Massachusetts Institute of Technology. Pág. 75: Tony Duffy/Allsport. Pág. 76: Cortesia de Boeing Corporation. Pág. 78: Steve Brown/Leo de Wys.

Capítulo 5

Abertura: AP/Wide World Photos. Pág. 88: Richard Hutchings/Photo Researchers. Pág. 89: David Madison/Bruce Coleman. Pág. 99: Cortesia da NASA. Pág. 100: Cortesia do National Archive. Págs. 103 e 104: Hartwell/Sygma.

Capítulo 6

Abertura: Agence Nature/NHPA. Pág. 111: Cortesia de U.S. Steel Corporation, Technical Center, Monroeville, Pennsylvania. Pág. 115: Mark Junak/Tony Stone Worldwide. Pág. 116 e 4.^a capa do volume: F. Richard-Ardia/Agence Vandystadt/Photo Researchers. Pág. 118: Fotografia reproduzida com autorização do Ringling Brothers e Barnum & Bailey Circus, cortesia de Circus World Museum. Pág. 123: Jerry Schad/Photo Researchers. Pág. 125: Susan Copen Oken/DOT Pictures.

Capítulo 7

Abertura: Steven E. Sutton/Duomo. Pág. 132: Jack S. Grove/Profiles West. Pág. 142: Cortesia de Library of Congress. Pág. 144: Photri. Pág. 152: Foto de James Baker, cortesia de Dennis Milon.

Capítulo 8

Abertura: John Livzy/AllStock. Pág. 156: (à esquerda) copyright © Estate of Harold Edgerton, cortesia de Palm Press, Inc.; (à direita) Efrin Knight/Picture Cube. Pág. 168: (à esquerda) Helga Lade/Peter Arnold; (à direita) David Stoecklein/Stock Market. Pág. 171: Foto de Justo Alfonso, cortesia de Rocky Raisen, Shenandoah Junior High School. Pág. 180: Cortesia da NASA. Pág. 181: Cortesia de Cunard, a Trafalgar House Company. Pág. 185: Cortesia de Library of Congress.

Capítulo 9

Abertura: Lois Greenfield/Bruce Coleman. Pág. 188: Richard Megna/Fundamental Photographs. Pág. 191: Anthony Marshal/Woodfin Camp & Associates. Pág. 200: Cortesia da NASA. Pág. 207: Mauritius-W. Fisher/Photri.

Capítulo 10

Abertura: C. E. Miller, Massachusetts Institute of Technology. Pág. 214: (Fig. 10-1) Breck Kent/Earth Scenes; (Fig. 10-2a e b) Photo Researchers; (Fig. 10-2c) cortesia L. Hernquist, Princeton University. Pág. 2: (Fig. 10-4) Russ Kinne/Comstock; (Fig. 10-5) Ben Rose/Image Bank. Pág. 223: Cortesia de Mercedes-Benz of North America. Pág. 229: Craig Blouin/F/Stop Pictures. Pág. 230: Georg Lang/Sports Illustrated/copyright © Time, Inc. Pág. 231: *Superman* #48, October 1990, copyright © DC Comics, Inc. Todos os direitos reservados. Reimpressão com autorização.

Capítulo 11

Abertura: Guido Alberto Rossi/Image Bank. Pág. 240: Rick Rickman/Duomo. Pág. 245: Art Tilley/FPG International. Pág. 247: Roger Ressmeyer/Starlight. Pág. 260: Cortesia do Lick Observatory. Pág. 263: Cortesia do Lawrence Livermore Laboratory, Universidade da Califórnia.

Capítulo 12

Abertura: Cortesia de Ringling Brothers e Barnum & Bailey Circus. Pág. 268 (Fig. 12-1): Richard Megna/Fundamental Photographs; (Fig. 12-4) Cortesia de Alice Halliday. Pág. 280: Cortesia da NASA.

LEITURA COMPLEMENTAR 2

Pág. 294: (Fig. 1) Susan Cook; (à direita) cortesia de Kenneth Laws. Pág. 295 (Fig. 3): Susan Cook. Págs. 295-297 (Figs. 4, 5 e 6): Martha Swope.

ÍNDICE ALFABÉTICO

A

Aceleração, 19, 22, 57-60
angular, 241, 244
- instantânea, 242
centrípeta, 65-66, 116
- constante, 20-23
- de queda livre g, 23-25
devida à gravidade, 60, 61
média, 19, 57-60
Acre-pé, 9
Alcance, no movimento de um projétil, 60, 62
Algismos significativos, 3, 17
Alvos, 217-221
Ato-luz, 9
Antipartículas, 26
Aproximações, 145
Área de seção reta efetiva, 114
Arrasto, 164
- coeficiente de, 114
Átomos, 26
- níveis de energia, 172
Atrito, 88, 109-114
- cinético, 110, 111, 158
- como força não-conservativa, 164
- de rolamento, 269
- dissipação de energia no, 158, 167
- estático, 110, 111
- natureza atômica, 111
- trabalho da força de, 168-170
Automóveis, aceleração, 203-204

B

Balança(s), 87
- de mola, 87
Balé, mecânica do, 294-297
Bohr, Niels, 173
Bombas vulcânicas, 75
Braco da alavanca, 252
Brancazio, Peter J., 115
Bureau International de Poids e Medidas, 3, 7

C

Carbono 12, como massa padrão, 8
Carros, aceleração, 203-204
Centrifuga, aceleração numérica, 66
Centro de massa, 187, 189-192
- colisões elásticas, 219
- colisões inelásticas, 219
- de corpos rígidos, 189
- de sistema de partículas, 187-188
- em rolamento, 267
Cicloides, 268
Cinemática, 13, 71
- a baixa velocidade, 13-14, 70
Círculo fechado, 164
Cobre, 26
Coeficiente
- de atrito, 111
- de viscosidade, 114
Colisões, 213-214, 224
- elásticas, 217-221
- - alvo de grande massa, 218
- - alvo em movimento, 219-221

- - alvo estacionário, 217-218
- - massas iguais, 218
- - movimento do centro de massa, 218
- - projétil de grande massa, 218
- - em duas dimensões, 224-226
- - inelásticas, 221-224
- - série dc, 216-217
- - simples, 214-216
Componente(s)
- de vetores, 42-46
- escalares de vetores, 44
Comprimento, 3-5
Condições iniciais, 244
Configuração de referência, para energia potencial, 158
Conservação
- da energia mecânica, 156-158, 164, 167-168
- da energia total, 167, 169-170
- da massa-energia, 170
- do momento angular, 279-283
- do momento linear, 196-200, 217-219, 222, 226
Constantes(s)
- de Planck, 173, 285
- fundamentais, 301
Conversão em cadeia, 2
Cord, 9
Corpos rígidos
- centro de massa, 189
- inércia rotacional dos, 248-251
- momento angular, 277
Cripônio-86, como metro padrão, 4

D

Dança, mecânica da, 294-297
Derivadas, 14, 18, 315
Desaceleração, 19, veja também Aceleração
Deslocamento, 14, 39, 55
- angular, 241, 243
Déuterons, 172
Diagrama do corpo livre, 85
Dipolo elétrico, veja Dipolo
Dirac, P.A.M., 63
Dissipação de energia, 158, 167
Distância
- de frenagem, 32
- de reação, 32

E

Einstein, Albert, 121, 170, 196, 197, veja também Relatividade
Elementos, 26, 305-306
- tabela periódica, veja Tabela periódica
Elétrôn-volt, 133
Elétrons, 26, 285
- níveis de energia, 172
Emissão de luz, 173
Empuxo aerodinâmico, 201
Encontro com efeito estilingue, 214
Energia, 155
- cinética, 140-143, 157
- - a alta velocidade, 145
- - colisões elásticas, 217
- - colisões inelásticas, 221-224
- - de rolamento, 268
- - de rotação, 247

- - de um sistema de partículas, 202-204
- - de uma bola caindo, 157-158
- - do sistema massa-mola, 156-158
- conservação, 167-168, 169
- conversão massa-energia, 170-171
- de ligação, 172
- dissipação, 158, 167
- interna, veja energia térmica
- mecânica, 166
- - conservação, 156, 157, 158, 164, 167-168
- - de bola caindo, 157
- - dos sistemas bloco-mola, 157-159
- níveis, 172
- potencial, 165
- - curvas de, 166
- - da configuração de referência, 158
- - do sistema bloco-mola, 157
- - elástica, 155-160
- - gravitacional, 155, 160-164
- quantização, 172
- térmica, 155
- - gerada por atrito, 158, 167
Equações de movimento, 22, 23, 244
Equilíbrio
- estável, 167
- instável, 167
- neutro, 166
Escala Richter, 185
Escalares, 39
Escalas, 87
Escoamento do tráfego, 36-37
Espectrômetros, 8
- de massa, 8
Estados(s)
- excitados, 172
- fundamental, 172
- normal de uma mola, 138
- quânticos, 172
Estrela(s)
- colapso, 281
- de nêutrons, 77

F

Falhas geológicas, 51
Fatores de conversão, 2-3, 309-312
Fermi-luz, 6
Física, 25-27
- clássica, 26
- de partículas, 25-27, veja também Partículas específicas
- - antipartículas, 26
- - quântica, 26
- - versus clássica, 26
- vencedores do Prêmio Nobel, 317-321
Fissão nuclear, 172
Fluidos, 114
Foguetes, 200-202
Força(s), 81-83
- centrípeta, 116-117
- conservativa, 164-165
- de ação, 90
- de atrito, veja Atrito
- de contato, 117
- de reação, 90
- de viscosidade, 114, 164
- elásticas, 156, 164
- eletrofísica, 121

- eletromagnética, 121
 - eletromotriz, *veja* Fem
 - externa, 193
 - forte, 102, 121
 - fraca, 121
 - fundamentais da natureza, 120-121
 - gravitacional, 121, 157-158
 - como força conservativa, 164
 - interna, 193
 - normal, 88
 - não-conservativa, 164-165
 - peso como, 87-88
 - reação, 90
 - restauradora, 138
 - resultante, 84
 - volumétrica, 117
 Fórmulas matemáticas, 313-315
 Frequência, 173
 Frolich, Cliff, 287

G

g, 23-25
 Galileu, 62
 Giroscópio, 283-284
 Grandezas
 - fundamentais, 2
 - invariáveis, 146
 Gravitação e peso, 87
 Grupo local, 51

H

Hectare, 9
 Hidrogênio, 26
 Hooke, Robert, 138

I

Inte solar, 102
 Impulso, 291
 - angular, 291
 - colisões múltiplas, 216-217
 - colisões simples, 215
 Inclinação, 15
 Inércia
 - lei da, 82
 - rotacional (momento de inércia), 248
 - translacional, 248
 Instituto Nacional de Padrões e Tecnologia (NIST), 4, 5, 7
 Integrais, 140
 Iodô, 272-273
 Isótopos, 26

J

Jarda, 4
 Joule, 133
 Joule, James Prescott, 133

L

Laws, Kenneth, 194, 294
 Lei de Hooke, 138, 165
 Linha de ação, 252
 Luz, [23, *veja também* Velocidade da luz
 - emissão, 173
 - teoria ondulatória, 173

M

Massa, 7, 83-84
 - centro de, *veja* Centro de massa
 - conversão massa-energia, 170-171
 - e energia, 170
 - quantização, 172
 - relatividade e, 171
 - *versus* peso, 87
 Matéria, 25
 Mecânica clássica, *veja* Mecânica newtoniana
 Mecânica newtoniana, 81, 131
 - a alta velocidade, 145
 - falha da, para alta velocidade, 196
 - grandezas invariáveis, 146
 Medições, 1
 - Sistema Internacional (SI), 2, 299-300

Mês sideral, 10
 Metro, 4
 - padrão, 3
 Micron, 9
 Moderadores, 220
 Molas, 138-140
 - constante de, 138
 - energia potencial elástica das, 155-160
 - transferência de energia em, 155-156
 Momento
 - angular, 274-277
 - conservação do, 279-283
 - de corpos rígidos, 277-279
 - de um sistema de partículas, 277
 - e a dança, 294-297
 - quantização, 285
 - de inércia, 248-251
 - linear, 195
 - conservação do, 197
 - colisões elásticas, 217
 - colisões inelásticas, 222
 - em processos de decaimento, 226
 - de um sistema de partículas, 196
 - em colisões múltiplas, 216-217
 - em colisões simples, 214-215
 - relativístico (alta velocidade), 196
 - relativístico, 196
 Movimento, 13, veja também Aceleração; Leis de Newton; Relatividade; velocidade
 - circular uniforme, 65, 116-120, 141
 - circular, 65-67, 116-120, *veja também* Rotação
 - energia cinética do, 141
 - de projétil, 60-61
 - alcance horizontal, 62
 - alcance, 61, 62
 - movimento vertical, 62
 - resistência do ar, 63
 - trajetória, 60, 62
 - de translação, 203, 239
 - no roloamento, 267
 - resumo de relações, 255, 278
 - equações, 22, 23, 244
 - multidimensional, 55, 67
 - relativo, 67-71
 Multiplicação vetorial, 252
 - produto escalar, 47
 - produto vetorial, 48
 - vetor por escala, 47
 - vetor por vetor, 48

N

Natureza, forças fundamentais da, 120
 Nêutrons, 26
 Newton, Isaac, 81
 Newton-metro, 133
 Notação científica, 2
 Núcleo, 26
 Número
 - de massa, 4
 - quântico de spin, 285
 - quânticos, 285

O

Órbita da terra, *veja* Órbitas
 Órbitas, 117
 Origem, 14

P

Padrões, 1, 3
 - secundários, 3
 Pára-quedas, arrasto sobre, 115
 Parâmetro(s)
 - de impacto, 224
 - de velocidade, 145
 Partículas, 14
 - alfa, 226
 - elementares, *veja* Física das partículas
 Pé-libra, 133
 Pêndulo, 118, 160, 161
 - balístico, 222
 Período, 260
 Peso, 87, 120
 - aparente, 87
 - ausência de, 67

Planck, Max, 173
 Polia, 89
 - de massa desprezível, 89
 Pontos(s)
 - de equilíbrio, curvas de energia potencial, 166-167
 - de fusão, 173
 - de retorno, em curvas de energia potencial, 166
 Posição, 14
 - angular, 240-241
 - vetor, 55
 Potência, 143-145
 - instantânea, 144
 - média, 144
 - na rotação, 255
 Precessão, 283-284
 Priest, Joseph, 110
 Primeira lei de Newton, 82
 Princípio
 - da invariancia, 146
 - de Arquimedes, 303-304
 Problemas envolvendo blocos, leis de Newton para, 91-97
 Processos
 - de decaimento, 226-227
 - prende-e-desliza, 110
 Produto vetorial, 48, 49, 252
 Projéteis, 218
 Prótons, 26
 Pulsares, 260

Q

Quantização
 - da energia de massa/energia, 172
 - momento angular, 285
 Quarks, 26
 Queda livre, 141
 Quiograma, 7
 - padrão, 7
 Quillowatt-hora, 144

R

Radiano, 240
 Reações
 - endotérmicas, 227
 - exotérmicas, 227
 - nucleares, 171, 226
 - químicas, 170
 - exotérmica/endotérmica, 227
 Referenciais inerciais, 68, 82, 146
 Regra da mão direita, 48, 243
 Relatividade, 145, 196
 - teoria especial da, 70
 Relógio
 - atômico, 5
 - de quartzo, 5
 Resistência do ar, 63
 Rolamento, 267, 269-272
 - atrito durante, 269
 - como combinação de rotação/translação, 267, 270
 - como rotação pura, 268
 - energia cinética, 269
 Rodadas sem atrito, 88
 Rotacional, inércia, 248-251
 Rotação, 254, 256, 278, *veja também* Rolamento
 - aceleração angular, 241, 244
 - deslocamento angular, 241, 243
 - eixo de, 239
 - energia cinética da, 247-248
 - na dança, 294-297
 - natureza vetorial da, 242-244
 - posição angular, 240-241
 - relações entre variáveis angulares e lineares, 245-247
 - segunda lei de Newton na, 252
 - velocidade angular, 241

S

Salto de trampolim, 279
 Satélites, 90
 - e a força centrípeta, 117
 - estabilização, 280
 Segunda lei de Newton, 84-87, 91-97
 - em colisões, 214
 - formas angulares, 252-254, 276
 - para um sistema de partículas, 192-195, 202-204
 Segundo, 6

Shake, 10
Shortley, G., 309

Sistema(s)

- bloco-mola, 157, 159
- de coordenadas dextrógiro, 44
- de coordenadas, 44, 46
- de massa variável, 200-202
- de partículas
- - centro de massa, 187
- - fechado, 193
- - momento angular, 277
- - momento linear de um, 195
- - segunda lei de Newton para, 192-195, 202
- - variação da energia cinética, 202-204
- de referência, 146, *veja também Relatividade*
- em duas dimensões, 68-70
- em uma dimensão, 67-68
- - inercial, 68, 82, 146
- fechado, 193, 200

- Global de Posicionamento, 10
- Internacional de Unidades, 2-3, 299-300
- isolados, 200

- métrico, 2, 299-300
- Terra-Lua, 193

Snider, John, 110

Sódio, estado fundamental do, 172

Sol, 303

Solda a frio, 111

Soma vetorial

- leis da, 41
- método da adição das componentes, 45
- método gráfico, 40-42

Superfície

- e atrito, 110
- sem atrito, 81

Superforça, 121

T

Tabela periódica, 307
Tempo, 5-7
- universal coordenado, 5
Tensão, 88
Teorema

- binomial, 145, 314
- do impulso e momento linear, 215
- dos eixos paralelos, 250
- trabalho-energia cinética, 140, 141, 146, 255
- trabalho-energia, 158, 167, 169

Teorias

- da grande unificação, 121
- de supercordas, 121
- de supersimetria, 121

Terceira lei de Newton, 89-91, 94
Terra, 82, 303
Torque, 251-252

- de uma partícula com relação a um ponto fixo, 273-274
- interno/externo, 277
- trabalho realizado pelo, 254

Trabalho, 133, 158

- da força de atrito, 168
- de rotação, 254
- e conservação da energia, 167
- força constante, 131-137
- força variável, 137-140
- por molas, 138
- trajetória fechada, 164

Trajetória, movimento de projétil, 60, 62
Trigonometria e decomposição de vetores, 43
Turbulência, 114

U

Unidade(s), 2-3, 299-300
- astronómica, 9

- de massa atómica, 8, 171
- derivadas, 2, 300
- SI, 2, 299-300

Unificação das forças da natureza, 120-121

V

Velocidade, *veja também* Aceleração; Movimento:

- relatividade
- angular, 241
- - escalar, 241
- - instantânea, 241
- da luz, 5, 70
- escalar, 17
- - angular, 241
- instantânea, 17, 56
- limite, 114-115
- média, 14-15, 56

Vencedores do Prémio Nobel de Física, 317-321
Vetores, 14, 39, 314

- componentes, 42-46
- decomposição, 42
- e leis físicas, 46
- posição, 55
- unitários uniformes, 44

W

Walker, Jearl, 36
Watt, 2, 144
Watt, James, 144
Williams, D., 309

FUNDAMENTOS DE FÍSICA

1

MECÂNICA

4.^a EDIÇÃO

David Halliday

Universidade de Pittsburgh

Robert Resnick

Instituto Politécnico de Rensselaer

Jearl Walker

Universidade Estadual de Cleveland

Tradução

Gerson Bazo Costamilan (Apêndices A a H)

João Paulo Pinto dos Santos (Cap. 10)

Luciano Videira Monteiro (Caps. 2, 4, 5, 6 e 11)

Lucília Marques Pereira da Silva (Cap. 12)

Ronaldo Sérgio de Biasi (Caps. 1, 3, 7, 8 e 9)

Revisão Técnica

Gerson Bazo Costamilan (Caps. 1, 2, 3, 7, 8, 9, 10 e Apêndices A a H)

Professor de Física do Instituto Militar de Engenharia — IME

Mestre e Doutorando em Física pelo Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

J. A. Souza (Caps. 4, 6, 11 e 12)

Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense — UFF

Vicente Roberto Dumke (Cap. 5)

Professor Titular, Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná — UFPR

Mestre e Doutor em Física pela Universidade de São Paulo (Campus São Carlos) — USP

William Albuquerque (Cap. 2)

Professor Assistente de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro — UFRI

Mestre em Engenharia Metalúrgica pela COPPE — UFRJ

Supervisão Geral

J. A. Souza



PREFÁCIO

Nos últimos anos, muito se tem avançado na compreensão das necessidades dos estudantes de Física e no seu preparo visando à carreira nas áreas de Ciência e Engenharia. Ao preparamos esta quarta edição de *Fundamentos de Física*, deixamo-nos guiar por todas as iniciativas nesse sentido. A partir das idéias fornecidas por um novo co-autor, Jearl Walker, revimos completamente nossa abordagem e a abrangência da matéria, esperando assim que esta nova edição venha contribuir para o aprimoramento do ensino da Física.

MUDANÇAS NA QUARTA EDIÇÃO

Embora tenhamos mantido a estrutura fundamental da terceira edição, reescrevemos muitos capítulos e muitas seções de outros capítulos. Cada um foi examinado minuciosamente para garantir maior clareza e atualidade de conteúdo, de acordo com as necessidades dos estudantes de Ciência e Engenharia. Foram feitas alterações, em particular, nos textos referentes a atrito, trabalho e energia, eletrostática e ótica.

Revimos por completo os conceitos em uso e suas derivações com o objetivo de encontrar formas melhores ou mais claras de tratá-los. Também acrescentamos mais explicações ou etapas intermediárias, além de novos exemplos a cada capítulo, com o objetivo não só de oferecer-lhos em maior número aos estudantes, como também de relacioná-los mais de perto com os Exercícios e Problemas de final de capítulo.

Além disso, os Questionários, Exercícios e Problemas do final de cada capítulo foram todos revistos, de modo a proporcionar maior clareza de exposição e interesse, e muitos outros foram acrescentados. No final da maioria dos capítulos também introduzimos uma nova seção, denominada "Problemas Adicionais", que não está diretamente relacionada com as seções do capítulo.

Dedicamos especial atenção às ilustrações de tópicos da Física aplicados a problemas do mundo real. O melhor exemplo é a "pergunta difícil" que abre cada capítulo. Estes exemplos de fenômenos curiosos, muitos dos quais tão comuns, foram escolhidos de modo a despertar o interesse do estudante. As explicações das perguntas difíceis são dadas dentro dos capítulos, ou na discussão de um texto, ou num dos Exemplos. Como provavelmente os estudantes verão estes fenômenos ou outros a eles relacionados após o término do curso de Física, as perguntas difíceis proporcionam um reforço a longo prazo da Física associada.

Uma vez que os diagramas que acompanham as discussões da Física são imprescindíveis para a sua compre-

ensão, revimos todos os diagramas do livro com a finalidade de torná-los mais claros e úteis. Quase todos mudaram de alguma forma, e outros, novos, foram acrescentados.

CARACTERÍSTICAS DOS CAPÍTULOS

As características de cada capítulo foram cuidadosamente planejadas a fim de motivar os estudantes e orientar seu raciocínio.

Perguntas Difíceis

Cada capítulo começa com uma "pergunta difícil" sobre Física e que descreve um fenômeno curioso. O objetivo é estimular o estudante. Essas perguntas se relacionam aos respectivos capítulos, e as fotos a elas correspondentes foram especialmente escolhidas de modo a tornar a Física pertinente algo inesquecível para o estudante. As explicações vêm dentro do texto, no caso de explicações qualitativas, ou dentro de um Exemplo, no caso de explicações quantitativas. Quando a resposta vem dentro do Exemplo, a pergunta difícil tem o objetivo de preparar o estudante para os problemas mais desafiadores do final do capítulo.

Exemplos

Nesta edição, aumentamos o número de Exemplos, de modo a fornecer modelos de soluções de problemas para todos os aspectos de cada capítulo. Modificamos muitos Exemplos da edição anterior para relacioná-los mais estreitamente aos Exercícios e Problemas de final de capítulo. Todos os Exemplos foram cuidadosamente preparados para os estudantes obterem o máximo. Assim, mais de 50% deles podem ser considerados novos de alguma forma.

Estes Exemplos oferecem ao estudante a oportunidade de chegar, passo a passo, com a ajuda dos autores, à resposta de um problema. Assim, constituem uma ponte entre a Física do texto e os problemas de final de capítulo, e possibilitam a ordenação de conceitos, terminologia e simbolização, além de reforçar a habilidade matemática e estimular a capacidade de descobrir estratégias "diretas" de solução.

Táticas para a Resolução de Problemas

Uma característica da edição anterior foi o extremo cuidado em desenvolver no estudante a habilidade de resolver problemas, o que fizemos questão de manter na presente

edição, com seções intituladas para a Resolução de Problemas, onde, por meio de “táticas”, enfatizamos as técnicas consagradas de especialistas nos temas, revemos a lógica dos Exemplos e discutimos as más interpretações de terminologia e de conceitos da Física. Como na terceira edição, a maioria dessas orientações de aprendizagem aparece nos primeiros volumes da série, onde os estudantes precisam de mais ajuda, mas agora aparecem também nos últimos, quando surgem situações especialmente difíceis.

Questionários, Exercícios e Problemas

O conjunto de Questionários, Exercícios e Problemas do final de cada capítulo é, sem dúvida alguma, mais extenso e variado que qualquer outro encontrado em textos introdutórios de Física. Revisamos os melhores conjuntos das edições anteriores, tornando-os mais claros e interessantes, e acrescentamos um número considerável de questões, exercícios e problemas conceituais. Cuidamos para atender aos diversos níveis e à abrangência da matéria que têm caracterizado nossos textos. Ao mesmo tempo, procuramos não descartar os bons problemas que por muitos anos vêm sendo discutidos em sala de aula. Aqueles que utilizam nosso texto há muitos anos certamente encontrarão seus problemas favoritos.

Para melhor ilustrar os Questionários, Exercícios e Problemas, utilizamos um número maior de figuras e fotografias.

Questionários. Os Questionários constituem uma característica especial de nossos livros. São usados em discussões teóricas em sala de aula e no esclarecimento dos conceitos. Agora, além de em maior número, relacionam-se ainda mais com os fenômenos cotidianos, o que serve para despertar a curiosidade e o interesse do estudante, bem como enfatizar os aspectos conceituais da Física.

Exercícios e Problemas. Os Exercícios, identificados pela letra E após sua numeração, envolvem um único passo ou uma simples aplicação de fórmula. Desse modo, servem para dar confiança ao estudante na resolução dos problemas. Os Problemas são identificados pela letra P; entre eles, apresentamos um pequeno número de problemas avançados, identificados por asterisco (*).

Além disso, apresentamos os Exercícios “E” e os Problemas “P” em ordem de dificuldade e separados pelos títulos das respectivas seções. Nossa objetivo foi simplificar o processo de seleção por parte dos professores ante a grande quantidade de material agora disponível. Consequentemente, os professores podem variar a ênfase nos diversos assuntos e o nível de dificuldade de acordo com a situação, e ainda dispor de um bom número de exercícios e problemas para instruir seus alunos por muitos anos.

Problemas Adicionais. A pedido de muitos professores, acrescentamos no final da maioria dos capítulos uma nova seção, denominada “Problemas Adicionais”. Enquanto resolvem esses problemas, que são independentes das seções do capítulo, os estudantes devem identificar, por si mesmos, os princípios relevantes da Física.

Aplicações e Leituras Complementares

Para enfatizar a relevância do trabalho dos físicos e motivar ainda mais os estudantes, incluímos dentro de cada capítulo numerosas aplicações da Física na Engenharia, na Tecnologia, na Medicina e nos fenômenos da vida cotidiana.

Além disso, mantivemos as leituras complementares escritas por cientistas de renome e que tratam das aplicações da Física relacionando-a a temas de interesse dos estudantes, tais como dança, esporte, efeito estufa, laser, holografia e muitos outros. (Veja o Sumário.) Dentre as leituras complementares, algumas são novas, e as demais, trazidas da terceira edição, foram revistas e atualizadas por seus autores. A maioria das leituras complementares faz referência ao assunto do capítulo em questão e contém perguntas para estimular o raciocínio do estudante.

FÍSICA MODERNA

Como a terceira edição, esta é composta de 49 capítulos, incluindo um desenvolvimento do tema da Física quântica e suas aplicações aos átomos, sólidos, núcleos e partículas. Tais capítulos destinam-se a cursos introdutórios que tratam da Física quântica, podendo ser abordados num curso subsequente.

Nos capítulos iniciais, procuramos preparar o caminho para um estudo sistemático da Física quântica. Fizemos isso de três maneiras. (1) Chamamos a atenção, através de exemplos específicos, para o impacto das idéias quânticas sobre nosso cotidiano. (2) Demos ênfase àqueles conceitos (princípios de conservação, argumentos de simetria, sistemas de referência, papel da estética, similaridade de métodos, uso de modelos, conceitos de campo, conceito de onda, etc.) que são comuns no tratamento tanto da Física clássica como da quântica. (3) Por fim, incluímos diversas seções opcionais curtas nos últimos capítulos, onde apresentamos conceitos quânticos e relativísticos, selecionados de modo a fundamentar o tratamento detalhado e sistemático das físicas relativística, atômica, nuclear, do estado sólido e das partículas.

FLEXIBILIDADE

Além dos capítulos de Física quântica e das seções opcionais sobre tópicos quânticos, incluímos por todo o texto numerosas seções, também opcionais, de caráter diverso: avançado, histórico, geral ou especializado.

Procuramos oferecer ao professor muito mais material do que ele na verdade tem condições de abordar, pois acreditamos que, assim como um livro-texto sozinho não pode ser considerado um curso, um curso não abrange todo um livro-texto. O processo de aprendizagem da Física e sua unidade essencial podem ser revelados por uma apresentação seletiva e criteriosa de um número menor de capítulos do que os aqui apresentados, ou por uma apresentação apenas parcial de alguns capítulos. Em vez de dar numerosos

exemplos de como fazer esta seleção corretamente, aconselhamos os professores a se deixarem guiar pelos seus próprios interesses e pelas circunstâncias, e que façam um plano de aula de modo a incluir sempre tópicos de Física relativística e de Física quântica.

AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas contribuíram para a edição desta obra. J. Richard Christman (U.S. Coast Guard Academy) mais uma vez prestou grande colaboração e enriqueceu o texto com valiosas informações. James Tanner (Georgia Institute of Technology) forneceu-nos material inovador que foi de grande auxílio na elaboração dos exercícios e problemas do texto. Albert Altman (University of Lowell, Massachusetts) e Harry Dulaney (Georgia Institute of Technology) contribuíram com muitos problemas novos. Agradecemos a John Merrill (Brigham Young University) e Edward Derringh (Wentworth Institute of Technology) por suas numerosas contribuições no passado.

Os autores das Leituras Complementares ofereceram seu *know-how* em muitas áreas da Física aplicada. Agradecemos a Charles Bean (Rensselaer Polytechnic Institute), Peter Brancazio (Brooklyn College of SUNY), Patricia Cladis (AT&T Bell Laboratories), Joseph Ford (Georgia Institute of Technology), Elsa Garmire (University of Southern California), Ivar Giaever (Rensselaer Polytechnic Institute), Tung H. Jeong (Lake Forest College), Barbara Levi (*Physics Today*), Kenneth Laws (Dickinson College), Peter Lindenfeld (State University of New Jersey-Rutgers), Suzanne Nagel (AT&T Laboratories), Sally K. Ride (University of California at San Diego), John Ridgen (American Institute of Physics), Thomas D. Rossing (Northern Illinois University) e Raymond Turner (Clemson University).

Um grupo de estudantes de pós-graduação da Johns Hopkins University conferiu cada exercício e cada problema, tarefa verdadeiramente exaustiva. Agradecemos a Anton Andreev, Kevin Fournier, Jidong Jiang, John Kordomenos, Mark May, Jason McPhate, Patrick Morrissey, Mark Sincell, Olaf Vancura, John Q. Xiao e Andrew Zwicker, nosso coordenador.

Da John Wiley, contamos com a coordenação e o suporte de Cliff Mills, nosso diretor de publicações. Ele orientou nossos trabalhos e incentivou-nos durante todo o tempo. Barbara Heaney coordenou todas as atividades relativas ao processo de elaboração da nova edição. Catherine Faduska, nossa gerente de marketing, foi incansável em seu trabalho nesta edição, assim como na edição anterior. Joan Kalkut responsabilizou-se pelo material de apoio. Anne Scargill editou as Leituras Complementares. Cathy Donovan e Julia Salsbury supervisionaram a revisão e os trâmites administrativos com admirável competência.

Agradecemos a Lucille Buonocore, nossa competente gerente de produção, por orientar-nos através do complexo processo de produção. Agradecemos também a Dawn Stanley pelo seu projeto gráfico, Deborah Herbert, por supervisionar a revisão de redação, Christina Della Bartolo-

mea, pelo copidesque, Edward Starr, pela direção de arte, Lilian Brady, por sua revisão tipográfica, e a todos os outros membros da equipe de produção.

Agradecemos a Stella Kupferberg e sua equipe de pesquisadores de fotos, em particular Charles Hamilton, Hilary Newman e Pat Cadley, por suas fotos originais e interessantes, que expressam os princípios da Física com muita beleza. Somos todos gratos ainda a Edward Millman e Irene Nunes, pela excelente diagramação, em nome da qual eles examinaram cada seção e sugeriram revisões. Em relação à equipe de arte, temos a obrigação de expressar nossa dívida de gratidão com o falecido John Balbalis, cujo estilo meticoloso e compreensão da Física se fazem presentes em cada diagrama.

Finalmente, agradecemos a Edward Millman por seu trabalho com os manuscritos. Junto conosco, ele leu cada frase, fazendo perguntas sob a ótica do estudante. Muitas dessas perguntas e as alterações sugeridas contribuíram para a clareza desta edição. Irene Nunes realizou uma última e valiosa revisão nas fases finais da produção do livro.

Nossos demais colaboradores foram admiráveis e expressamos a cada um deles nossos agradecimentos:

Professor Maris A. Abolins
Michigan State University

Professora Barbara Andereck
Ohio Wesleyan University

Professor Albert Bartlett
University of Colorado

Professor Timothy J. Burns
Leeward Community College

Professor Joseph Buschi
Manhattan College

Professor Philip A. Casabella
Rensselaer Polytechnic Institute

Professor Randall Caton
Christopher Newport College

Professor Roger Clapp
University of South Florida

Professor W. R. Conkie
Queen's University

Professor Peter Crooker
University of Hawaii at Manoa

Professor William P. Crummett
Montana College of Mineral Science and Technology

Professor Robert Endorf
University of Cincinnati

Professor F. Paul Esposito
University of Cincinnati

Professor Jerry Finkelstein
San Jose State University

Professor Alexander Firestone Iowa State University	Professor Eugene Mosca United States Naval Academy
Professor Alexander Gardner Howard University	Professor Patrick Papin San Diego State University
Professor Andrew L. Gardner Brigham Young University	Professor Robert Pelcovits Brown University
Professor John Gieniec Central Missouri State University	Professor Oren P. Quist South Dakota State University
Professor John B. Gruber San Jose State University	Professor Jonathan Reichen SUNY—Buffalo
Professor Ann Hanks American River College	Professor Manuel Schwartz University of Louisville
Professor Samuel Harris Purdue University	Professor John Spangler St. Norbert College
Emily Haught Georgia Institute of Technology	Professor Ross L. Spencer Brigham Young University
Professor Laurent Hodges Iowa State University	Professor Harold Stokes Brigham Young University
Professor John Hubisz College of the Mainland	Professor David Toot Alfred University
Professor Joey Huston Michigan State University	Professor J. S. Turner University of Texas at Austin
Professor Darrell Huwe Ohio University	Professor T. S. Venkataraman Drexel University
Professor Claude Kacsor University of Maryland	Professor Gianfranco Vidali Syracuse University
Professor Leonard Kleinman University of Texas at Austin	Professor Fred Wang Prairie View A & M
Professor Arthur Z. Kovacs Rochester Institute of Technology	Professor George A. Williams University of Utah
Professor Kenneth Krane Oregon State University	Professor David Wolfe University of New Mexico
Professor Sol Krasner University of Illinois at Chicago	A origem desta nova edição remonta ao texto <i>Physics for Students of Science and Engineering</i> (John Wiley & Sons, Inc., 1960) dos mesmos autores da terceira edição. Desde aquela época, estima-se que um número superior a cinco milhões de estudantes tenha-se iniciado no aprendizado da Física com este livro e aqueles que dele se originaram, incluindo as traduções em muitas línguas. Dedicamos esta quarta edição a esses estudantes, e desejamos que ela também seja bem aceita por todos aqueles a quem se destina.
Professor Robert R. Marchini Memphis State University	
Professor David Markowitz University of Connecticut	
Professor Howard C. McAllister University of Hawaii at Manoa	
Professor W. Scott McCullough Oklahoma State University	
Professor Roy Middleton University of Pennsylvania	
Professor Irvin A. Miller Drexel University	

DAVID HALLIDAY

ROBERT RESNICK

JEARL WALKER

SUMÁRIO GERAL

Volume 1 MECÂNICA

- Capítulo 1 Medição /
Capítulo 2 Movimento Retilíneo 13
Capítulo 3 Vetores em Duas e Três Dimensões 55
Capítulo 4 Movimento em Duas e Três Dimensões 55
Capítulo 5 Força e Movimento — I 81
Capítulo 6 Força e Movimento — II 109
Capítulo 7 Trabalho e Energia Cinética 131
Capítulo 8 Conservação da Energia 155
Capítulo 9 Sistemas de Partículas 187
Capítulo 10 Colisões 213
Capítulo 11 Rotação 239
Capítulo 12 Rolamento, Torque e Momento Angular 267
Apêndices 299
Respostas dos Exercícios e Problemas 323
Créditos das Fotos 327
Índice 329

Volume 2 GRAVITAÇÃO, ONDAS E TERMODINÂMICA

- Capítulo 13 Equilíbrio e Elasticidade /
Capítulo 14 Ondulações 25
Capítulo 15 Gravitação 57
Capítulo 16 Fluidos 81
Capítulo 17 Ondas — I 111
Capítulo 18 Ondas — II 137
Capítulo 19 Temperatura 169
Capítulo 20 Calor e Primeira Lei da Termodinâmica 183
Capítulo 21 A Teoria Cinética dos Gases 207
Capítulo 22 Entropia e a Segunda Lei da Termodinâmica 237
Apêndices 263
Respostas dos Exercícios e Problemas 287
Créditos das Fotos 289
Índice 291

Volume 3 ELETROMAGNETISMO

- Capítulo 23 Carga Elétrica /
Capítulo 24 O Campo Elétrico 17
Capítulo 25 Lei de Gauss 39
Capítulo 26 Potencial Elétrico 63
Capítulo 27 Capacitância 91
Capítulo 28 Corrente e Resistência 113
Capítulo 29 Circuito 133
Capítulo 30 O Campo Magnético 157
Capítulo 31 Lei de Ampère 183
Capítulo 32 Lei da Indução de Faraday 207
Capítulo 33 Indutância 235
Capítulo 34 O Magnetismo e a Matéria 257
Capítulo 35 Ondulações Eletromagnéticas 277
Capítulo 36 Correntes Alternadas 291
Capítulo 37 As Equações de Maxwell 309
Apêndices 319
Respostas dos Exercícios e Problemas 343
Créditos das Fotos 345
Índice 349

Volume 4 ÓTICA E FÍSICA MODERNA

- Capítulo 38 Ondas Eletromagnéticas /
Capítulo 39 Ótica Geométrica 25
Capítulo 40 Interferência 61
Capítulo 41 Difração 91
Capítulo 42 Relatividade 123
Capítulo 43 Física Quântica — I 151
Capítulo 44 Física Quântica — II 173
Capítulo 45 Modelos Atômicos 199
Capítulo 46 Condução de Eletricidade nos Sólidos 227
Capítulo 47 Física Nuclear 253
Capítulo 48 Energia Nuclear 277
Capítulo 49 Quarks, Léptons e o Big-Bang 299
Apêndices 321
Respostas dos Exercícios e Problemas 345
Créditos das Fotos 347
Índice 349

SUMÁRIO DESTE VOLUME

CAPÍTULO 1

MEDIÇÃO 1

De que modo podemos usar o pôr-do-Sol para medir o raio da Terra?

- 1-1 Medindo Grandezas 1
- 1-2 O Sistema Internacional de Unidades 2
- 1-3 Mudanças de Unidades 2
- 1-4 Comprimento 3
- 1-5 Tempo 5
- 1-6 Massa 7
Resumo 8
Questionário 8
Exercícios e Problemas 9

CAPÍTULO 2

MOVIMENTO RETILÍNEO 13

Por que uma competição automobilística é tão emocionante?

- 2-1 Movimento 13
- 2-2 Posição e Deslocamento 14
- 2-3 Velocidade Média e Velocidade Escalar Média 14
- 2-4 Velocidade Instantânea e Velocidade Escalar 17
- 2-5 Aceleração 19
- 2-6 Aceleração Constante: Um Caso Especial 20
- 2-7 Aceleração Constante: Outro Aspecto 22
- 2-8 Aceleração de Queda Livre 23
- 2-9 As Partículas da Física 25
Resumo 27
Questionário 28
Exercícios e Problemas 28
Problemas Adicionais 35

LEITURA COMPLEMENTAR 1 O TRÁFEGO NA HORA DO RUSH 36
Jean Walker

CAPÍTULO 3

VETORES 39

Como podemos usar os vetores na exploração de cavernas?

- 3-1 Vetores e Escalares 39
- 3-2 Soma de Vetores: Método Gráfico 40
- 3-3 Vetores e Suas Componentes 42
- 3-4 Vetores Unitários 44

- 3-5 Somando Vetores Através das Componentes 41
- 3-6 Os Vetores e as Leis da Física 46
- 3-7 Multiplicação de Vetores 46
Resumo 49
Questionário 50
Exercícios e Problemas 50
Problemas Adicionais 54

CAPÍTULO 4

MOVIMENTO EM DUAS E TRÊS DIMENSÕES 55

Como determinar o local correto da rede para o "homem-bata" lançado do canhão?

- 4-1 Movimento em Duas ou Três Dimensões 55
- 4-2 Posição e Deslocamento 55
- 4-3 Velocidade e Velocidade Média 56
- 4-4 Aceleração e Aceleração Média 57
- 4-5 Movimento de Projéteis 60
- 4-6 Análise do Movimento de Projéteis 61
- 4-7 Movimento Circular Uniforme 65
- 4-8 Movimento Relativo em Uma Dimensão 67
- 4-9 Movimento Relativo em Duas Dimensões 68
- 4-10 Movimento Relativo para Altas Velocidades (Opcional) 70
Resumo 71
Questionário 72
Exercícios e Problemas 73
Problemas Adicionais 80

CAPÍTULO 5

FORÇA E MOVIMENTO — I 81

Um homem pode puxar dois vagões de um trem de passageiros com os dentes?

- 5-1 Por que a Velocidade de uma Partícula Varia? 81
- 5-2 Primeira Lei de Newton 82
- 5-3 Força 83
- 5-4 Massa 83
- 5-5 Segunda Lei de Newton 84
- 5-6 Algumas Forças Específicas 87
- 5-7 Terceira Lei de Newton 89
- 5-8 Aplicação das Leis de Newton 91
Resumo 97
Questionário 98
Exercícios e Problemas 100
Problemas Adicionais 106

CAPÍTULO 6**FORÇA E MOVIMENTO — II 109**

Por que os gatos sobrevivem melhor às quedas de grandes alturas do que às de pequenas alturas?

- 6-1 Atrito 109
- 6-2 Propriedades do Atrito 111
- 6-3 Força de Viscosidade e Velocidade Limite 114
- 6-4 Movimento Circular Uniforme 116
- 6-5 As Forças da Natureza 120
- Resumo 121*
- Questionário 122*
- Exercícios e Problemas 123*
- Problemas Adicionais 129*

CAPÍTULO 7**TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA 131**

Quanto trabalho é necessário no levantamento de grandes pesos?

- 7-1 Um Passeio pela Mecânica Newtoniana 131
- 7-2 Trabalho: Movimento em uma Dimensão com Força Constante 131
- 7-3 Trabalho Executado por uma Força Variável 137
- 7-4 Trabalho Realizado por uma Mola 138
- 7-5 Energia Cinética 140
- 7-6 Potência 143
- 7-7 Energia Cinética a Velocidades Elevadas (Opcional) 145
- 7-8 Sistemas de Referência 146
- Resumo 147*
- Questionário 148*
- Exercícios e Problemas 149*
- Problemas Adicionais 153*

CAPÍTULO 8**CONSERVAÇÃO DA ENERGIA 155**

Até onde cairá um saltador amarrado por uma corda elástica?

- 8-1 Trabalho e Energia Potencial 155
- 8-2 Energia Mecânica 156
- 8-3 Determinação da Energia Potencial 158
- 8-4 Forças Conservativas e Não-conservativas 164
- 8-5 Usando uma Curva de Energia Potencial 165
- 8-6 Conservação da Energia 167
- 8-7 Trabalho Executado por Forças de Atrito 168
- 8-8 Massa e Energia (Opcional) 170
- 8-9 Quantização da Energia (Opcional) 172
- Resumo 173*
- Questionário 174*
- Exercícios e Problemas 175*
- Problemas Adicionais 185*

CAPÍTULO 9**SISTEMAS DE PARTÍCULAS 187**

Como aparentemente uma bailarina “ignora” as leis de Newton?

- 9-1 Um Ponto Especial 187
- 9-2 O Centro de Massa 187
- 9-3 A Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas 192
- 9-4 Momento Linear 195
- 9-5 O Momento Linear de um Sistema de Partículas 196
- 9-6 Conservação do Momento Linear 196
- 9-7 Sistemas de Massa Variável: Um Foguete (Opcional) 200
- 9-8 Sistemas de Partículas: Variações na Energia Cinética (Opcional) 202
- Resumo 204*
- Questionário 205*
- Exercícios e Problemas 206*
- Problemas Adicionais 211*

CAPÍTULO 10**COLISÕES 213**

No karatê, é mais fácil quebrar uma tábua ou um bloco de concreto?

- 10-1 O Que É uma Colisão? 213
- 10-2 Impulso e Momento Linear 214
- 10-3 Colisões Elásticas em Uma Dimensão 217
- 10-4 Colisões Inelásticas em Uma Dimensão 221
- 10-5 Colisões em Duas Dimensões 224
- 10-6 Reações e Processos de Decaimento (Opcional) 226
- Resumo 228*
- Questionário 229*
- Exercícios e Problemas 230*
- Problemas Adicionais 236*

CAPÍTULO 11**ROTAÇÃO 239**

Que vantagens o conhecimento de física oferece nas quedas em judô?

- 11-1 O Movimento de uma Patinadora 239
- 11-2 As Variáveis da Rotação 239
- 11-3 Grandezas Angulares como Vetores: Uma Digressão 242
- 11-4 Rotação com Aceleração Angular Constante 244
- 11-5 As Variáveis Lineares e Angulares 245
- 11-6 Energia Cinética de Rotação 247
- 11-7 Cálculo do Momento de Inércia 248
- 11-8 Torque 251
- 11-9 A Segunda Lei de Newton para a Rotação 252
- 11-10 Trabalho, Potência e o Teorema do Trabalho-Energia Cinética 254
- Resumo 256*
- Questionário 258*
- Exercícios e Problemas 259*
- Problemas Adicionais 265*

CAPÍTULO 12**ROLAMENTO, TORQUE E MOMENTO
ANGULAR 267**

Por que é tão difícil realizar um salto mortal quádruplo em um número de trapézio?

- 12-1 Rolamento 267
- 12-2 O Ioiô 272
- 12-3 Torque Revisitado 273
- 12-4 Momento Angular 274
- 12-5 Segunda Lei de Newton na Forma Angular 276
- 12-6 Momento Angular de um Sistema de Partículas 277
- 12-7 Momento Angular de um Corpo Rígido que Gira em Torno de um Eixo Fixo 277
- 12-8 Conservação do Momento Angular 279
- 12-9 Conservação do Momento Angular: Alguns Exemplos 279
- 12-10 Precessão de um Giroscópio (Opcional) 283
- 12-11 Quantização do Momento Angular (Opcional) 285
- Resumo 285*
- Questionário 286*
- Exercícios e Problemas 288*
- Problemas Adicionais 293*

- LEITURA COMPLEMENTAR 2 A MECÂNICA DOS GIROS NA DANÇA 294
Kenneth Laws

APÊNDICES

- A O Sistema Internacional de Unidades (SI) 299
- B Algumas Constantes Fundamentais da Física 301
- C Alguns Dados Astronômicos 303
- D Propriedades dos Elementos 305
- E Tabela Periódica dos Elementos 307
- F Fatores de Conversão 309
- G Fórmulas Matemáticas 313
- H Laureados com o Prêmio Nobel de Física 317

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS E PROBLEMAS 323
CRÉDITOS DAS FOTOS 327

ÍNDICE 329

ALGUMAS CONSTANTES FÍSICAS*

Velocidade da luz	c	$3,00 \times 10^8$ m/s
Constante gravitacional	G	$6,67 \times 10^{-11}$ N·m ² /kg ²
Constante de Avogadro	N_A	$6,02 \times 10^{23}$ mol ⁻¹
Constante universal dos gases	R	8,31 J/mol·K
Relação massa-energia	c^2	$8,99 \times 10^{16}$ J/kg
		931,5 MeV/u
<i>Constante de permissividade do vácuo</i>	ϵ_0	$8,85 \times 10^{-12}$ F/m
Constante de permeabilidade do vácuo	μ_0	$1,26 \times 10^{-6}$ H/m
Constante de Planck	h	$6,63 \times 10^{-34}$ J·s
		$4,14 \times 10^{-15}$ eV·s
Constante de Boltzmann	k	$1,38 \times 10^{-23}$ J/K
		$8,62 \times 10^{-5}$ eV/K
Carga elementar	e	$1,60 \times 10^{-19}$ C
Massa de repouso do elétron	m_e	$9,11 \times 10^{-31}$ kg
Massa de repouso do próton	m_p	$1,67 \times 10^{-27}$ kg
Raio de Bohr	r_B	$5,29 \times 10^{-11}$ m
Magnéton de Bohr	μ_B	$9,27 \times 10^{-24}$ J/T
		$5,79 \times 10^{-5}$ eV/T

*Para uma lista mais completa, que também mostre os melhores valores experimentais, consultar o Apêndice B.

PREFIXOS SI

FATOR	PREFIXO	SÍMBOLO	FATOR	PREFIXO	SÍMBOLO
10^{24}	iota	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zeta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	milí	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	μ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^9	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^6	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^3	quilo	k	10^{-18}	ato	a
10^2	hecto	h	10^{-21}	zepto	z
10^1	deca	da	10^{-24}	octo	y

ALGUMAS PROPRIEDADES FÍSICAS

Ar (seco, a 20°C e 1 atm)

Densidade	1,21 kg/m ³
Calor molar específico a pressão constante	1.010 J/kg·K
Razão de calor molar	1,40
Velocidade do som	343 m/s
Tensão de rotura do campo elétrico	3 × 10 ⁶ V/m
Massa molar eficaz	0,0289 kg/mol

Água

Densidade	1.000 kg/m ³
Velocidade do som	1.460 m/s
Calor específico a pressão constante	4.190 J/kg·K
Ponto de fusão (0°C)	333 kJ/kg
Ponto de ebulição (100°C)	2.260 kJ/kg
Índice de refração ($\lambda = 589$ nm)	1,33
Massa molar	0,0180 kg/mol

Terra

Massa	5,98 × 10 ²⁴ kg
Raio médio	6,37 × 10 ⁶ m
Aceleração normal da gravidade	9,81 m/s ²
Atmosfera padrão	1,01 × 10 ⁵ Pa
Período do satélite a 100 km de altitude	86,3 min
Raio da órbita geossincrônica	42.200 km
Velocidade de escape	11,2 km/s
Momento de dipolo magnético	8,0 × 10 ²² A·m ²
Campo elétrico médio na superfície	150 V/m, baixa

Distância até a(o):

Lua	3,82 × 10 ⁸ m
Sol	1,50 × 10 ¹¹ m
Estrela mais próxima	4,04 × 10 ¹⁶ m
Centro da galáxia	2,2 × 10 ²⁰ m
Galáxia Andrômeda	2,1 × 10 ²² m
Limite do universo observável	~ 10 ²⁶ m

ALFABETO GREGO

Alfa	Α	α	Iota	Ι	ι	Rô	Ρ	ρ
Beta	Β	β	Kapa	Κ	κ	Sigma	Σ	σ
Gama	Γ	γ	Lâmbda	Λ	λ	Tau	Τ	τ
Delta	Δ	δ	Mi	Μ	μ	Úpsilon	Υ	ν
Épsilon	Ε	ϵ	Ni	Ν	ν	Fi	Φ	ϕ, φ
Zeta	Ζ	ζ	Xi	Ξ	ξ	Qui	Χ	χ
Eta	Η	η	Ômicron	Ο	$\ο$	Psi	Ψ	ψ
Teta	Θ	θ	Pi	Π	π	Ômega	Ω	ω

CONVENÇÕES DE ALGUNS SINAIS

DESCRÍÇÃO	CONVENÇÃO												
Efeito Doppler Seção 18-7 (Vol. 2) Seção 42-12 (Vol. 4)	Associamos o <i>aumento de freqüência</i> com o sentido <i>para a frente</i> e arbitramos um sinal para isso; consideramos o efeito de cada movimento separadamente.												
Termodinâmica Seção 20-5 (Vol. 2)	<i>Calor</i> : Positivo quando <i>transferido</i> ao sistema. <i>Trabalho</i> : Positivo quando <i>realizado</i> pelo sistema.												
Diferenças de potencial nos elementos de um circuito Seção 29-3 (Vol. 3)	<i>Resistor</i> : Positiva quando atravessado pela corrente elétrica em sentido contrário à diferença de potencial. <i>fem</i> \mathcal{E} : Positiva no sentido do pólo negativo para o positivo da fonte.												
Correntes alternadas Cap. 36 (Vol. 3)	Relações de fase entre a corrente i , <i>fem</i> \mathcal{E} , capacidade C e indutância L . \mathcal{E} gera i em circuitos indutivos; i produz \mathcal{E} em circuitos capacitivos.												
Ótica geométrica Cap. 39 (Vol. 4)	Para espelhos, superfícies únicas e lentes, convencionamos que a <i>imagem real</i> , o lado R (do inglês <i>Right</i>) e a <i>imagem direita</i> são <i>positivos</i> . Logo, são positivos: <table style="margin-left: 100px;"> <tr> <td>p</td> <td>Objeto real</td> <td>f</td> <td>Foco real (no ponto focal no lado R)</td> </tr> <tr> <td>i</td> <td>Imagen real (no lado R)</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>r</td> <td>Centro da curvatura no lado R</td> <td>m</td> <td>Amplificação lateral para uma imagem direita</td> </tr> </table>	p	Objeto real	f	Foco real (no ponto focal no lado R)	i	Imagen real (no lado R)			r	Centro da curvatura no lado R	m	Amplificação lateral para uma imagem direita
p	Objeto real	f	Foco real (no ponto focal no lado R)										
i	Imagen real (no lado R)												
r	Centro da curvatura no lado R	m	Amplificação lateral para uma imagem direita										

ALGUNS FATORES DE CONVERSÃO*

Massa e Densidade

$$\begin{aligned}1 \text{ kg} &= 1.000 \text{ g} = 6,02 \times 10^{26} \text{ u} \\1 \text{ slug} &= 14,6 \text{ kg} \\1 \text{ u} &= 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg} \\1 \text{ kg/m}^3 &= 10^{-3} \text{ g/cm}^3\end{aligned}$$

Velocidade

$$\begin{aligned}1 \text{ m/s} &= 3,28 \text{ ft/s} = 2,24 \text{ mi/h} \\1 \text{ km/h} &= 0,621 \text{ mi/h} = 0,278 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Força e Pressão

$$\begin{aligned}1 \text{ N} &= 10^5 \text{ dinas} = 0,225 \text{ lb} \\1 \text{ lb} &= 4,45 \text{ N} \\1 \text{ Pa} &= 1 \text{ N/m}^2 = 10 \text{ dinas/cm}^2 \\&= 1,45 \times 10^{-4} \text{ lb/in.}^2 \\1 \text{ atm} &= 1,01 \times 10^5 \text{ Pa} = 14,7 \text{ lb/in.}^2 \\&= 76 \text{ cm Hg}\end{aligned}$$

Trabalho e Potência

$$\begin{aligned}1 \text{ J} &= 10^7 \text{ erg} = 9,239 \text{ cal} = 0,738 \text{ ft} \cdot \text{lb} \\1 \text{ kW} \cdot \text{h} &= 3,6 \times 10^6 \text{ J} \\1 \text{ cal} &= 4,19 \text{ J} \\1 \text{ eV} &= 1,60 \times 10^{-19} \text{ J} \\1 \text{ cavalo vapor} &= 746 \text{ W} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}\end{aligned}$$

Comprimento e Volume

$$\begin{aligned}1 \text{ m} &= 100 \text{ cm} = 39,4 \text{ in.} = 3,28 \text{ ft} \\1 \text{ mi} &= 1,61 \text{ km} = 5.280 \text{ ft} \\1 \text{ in.} &\approx 2,54 \text{ cm} \\1 \text{ nm} &= 10^{-9} \text{ m} = 10 \text{ Å} \\1 \text{ ano-luz} &= 9,46 \times 10^{15} \text{ m} \\1 \text{ m}^3 &= 1.000 \text{ l} = 35,3 \text{ ft}^3 = 264 \text{ gal}\end{aligned}$$

Tempo

$$\begin{aligned}1 \text{ d} &= 86.400 \text{ s} \\1 \text{ ano} &= 365 \frac{1}{4} \text{ d} = 3,16 \times 10^7 \text{ s}\end{aligned}$$

Medida Angular

$$\begin{aligned}1 \text{ rad} &= 57,3^\circ = 0,159 \text{ rev} \\1 \pi \text{ rad} &= 180^\circ = 1/2 \text{ rev}\end{aligned}$$

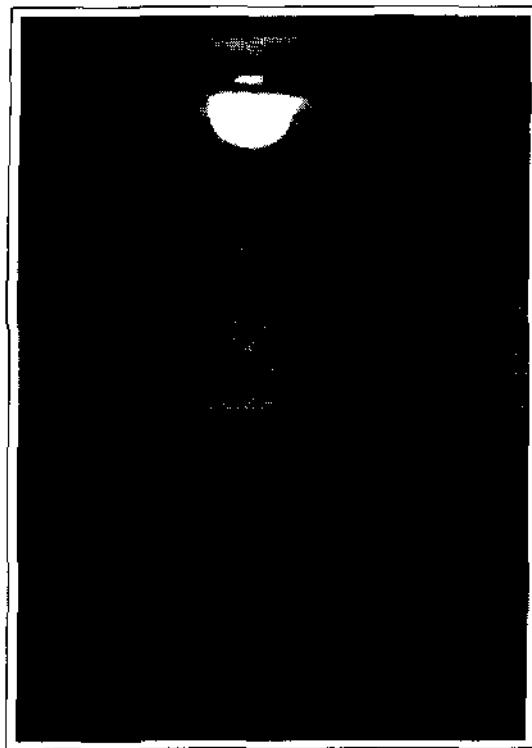
Eletricidade e Magnetismo

$$1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2 = 10^4 \text{ gauss}$$

*Ver no Apêndice F uma lista mais completa.

MEDIÇÃO

1



Você está deitado na praia e vê o sol se pôr no mar. Levantando-se, vê o sol se pôr uma segunda vez. Acredite ou não, a medição do intervalo de tempo entre os dois crepúsculos permite estimar o raio da terra. Como é possível usar uma observação tão simples para medir o tamanho da Terra?

1-1 Medindo Grandezas

A física se baseia em medições. Qual é o intervalo de tempo entre dois estalidos de um contador? Qual é a temperatura do hélio líquido em um recipiente? Qual é o comprimento de onda da luz de um determinado laser? Qual é o valor da corrente elétrica em um fio? A lista é interminável.

Começamos a aprender física aprendendo a medir as grandezas que aparecem nas leis da física. Entre essas grandezas estão o comprimento, o tempo, a massa, a temperatura, a pressão e a resistência elétrica. Usamos muitas dessas palavras na linguagem corrente. Podemos dizer, por exemplo: “Só consigo concluir um trabalho a tempo quando estou sob pressão”. Em física, palavras como trabalho e pressão têm significados precisos, que não devemos confundir com seus significados usuais. Na verdade, o significado científico de trabalho e pressão não tem nada a ver com o significado dessas palavras na frase acima. Isso pode

ser um problema. Nas palavras do físico Robert Oppenheimer, “Muitas vezes o fato de que as palavras da ciência são as mesmas da linguagem comum pode confundir e, não, esclarecer”.

Para descrever uma grandeza física, primeiro definimos uma **unidade**, isto é, uma medida da grandeza cujo valor é definido como exatamente 1,0. Em seguida, definimos um **padrão**, ou seja, uma referência com a qual devem ser comparados todos os outros exemplos da grandeza. Assim, por exemplo, a unidade de comprimento é o metro, e, como veremos, o padrão para o metro é definido como a distância percorrida pela luz no vácuo durante uma certa fração do segundo. Somos livres para definir uma unidade e seu padrão da forma que quisermos; o importante é fazê-lo de tal modo que os cientistas do mundo inteiro concordem que nossas definições são práticas e razoáveis.

Depois de escolhermos um padrão, para o comprimento, digamos, devemos desenvolver métodos pelos quais qual-

quer comprimento, seja o raio de um átomo de hidrogênio, a distância entre as rodas de um *skate* ou a distância entre duas estrelas, possa ser expresso em termos do padrão. É claro que muitas das nossas comparações terão que ser indiretas. Não é possível usar uma regra, por exemplo, nem para medir o raio de um átomo nem a distância entre duas estrelas.

Existem tantas grandezas físicas que não é fácil organizá-las. Felizmente, nem todas são independentes. A velocidade, por exemplo, é a razão entre uma distância e um tempo. Assim, o que fazemos é escolher (e para isso existem conferências internacionais) um pequeno número de grandezas físicas, como comprimento e tempo, e definir padrões apenas para essas grandezas. Em seguida, definimos todas as outras grandezas físicas em termos dessas *grandezas fundamentais* e seus padrões. A velocidade, por exemplo, é definida em termos das grandezas fundamentais comprimento e tempo e dos respectivos padrões.

As grandezas fundamentais devem ser acessíveis e invariáveis. Se definirmos o padrão de comprimento como a distância entre o nosso nariz e a ponta do dedo indicador do braço direito esticado, certamente teremos um padrão acessível, mas que, naturalmente, variará de pessoa para pessoa. A necessidade de precisão na ciência e na engenharia nos leva exatamente à direção oposta. Nós nos preocupamos em primeiro lugar com a *invariabilidade* e depois fazemos o possível para distribuir duplicatas dos padrões das grandezas fundamentais a todos que tenham necessidade deles.

1-2 O Sistema Internacional de Unidades

Em 1971, a 14^a Conferência Geral de Pesos e Medidas escolheu sete grandezas como fundamentais, formando assim a base do Sistema Internacional de Unidades, abreviado como SI e popularmente conhecido como **sistema métrico**. A Tabela 1-1 mostra as unidades das três grandezas fundamentais (comprimento, massa e tempo) que usamos nos primeiros capítulos deste livro. As unidades foram escolhidas de modo que os valores dessas grandezas numa “escala humana” não fossem excessivamente grandes ou excessivamente pequenos.

Muitas *unidades secundárias* (ou derivadas) são definidas em termos das unidades das grandezas fundamentais. Assim, por exemplo, a unidade de potência no SI, que recebeu o nome de **watt** (a abreviação é W), é definida em termos das unidades de massa, comprimento e tempo. Como vamos ver no Cap. 7,

$$1 \text{ watt} = 1 \text{ W} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3. \quad (1-1)$$

Tabela 1-1
Algumas Unidades Fundamentais do SI

Grandeza	Nome da Unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Tempo	segundo	s
Massa	quilograma	kg

Para expressar os números muito grandes e muito pequenos que freqüentemente aparecem na física, usamos a chamada notação científica, que utiliza potências de 10. Nesta notação,

$$3.560.000.000 \text{ m} = 3,56 \times 10^9 \text{ m} \quad (1-2)$$

e

$$0.000\,000\,492 \text{ s} = 4,92 \times 10^{-7} \text{ s}. \quad (1-3)$$

Desde o advento dos computadores, a notação científica, às vezes, é usada de forma simplificada, como em 3,56 E9 m e 4,92 E - 7 s, onde o E significa “expoente de dez”. A notação é ainda mais simples em algumas calculadoras, em que o E é substituído por um espaço vazio.

Para facilitar ainda mais o trabalho de quem tem que lidar com valores muitos grandes e muito pequenos, usamos os prefixos que aparecem na Tabela 1-2. Quando um prefixo é combinado com uma unidade, a unidade é multiplicada pelo fator correspondente ao prefixo. Assim, por exemplo, podemos expressar um certo valor de potência elétrica como

$$1,27 \times 10^9 \text{ watts} = 1,27 \text{ gigawatts} = 1,27 \text{ GW} \quad (1-4)$$

ou um dado intervalo de tempo como

$$2,35 \times 10^{-9} \text{ s} = 2,35 \text{ nanosegundos} = 2,35 \text{ ns}. \quad (1-5)$$

Você já deve conhecer alguns prefixos, como os usados em mililitro, centímetro e quilograma.

O Apêndice F mostra os fatores de conversão do SI para outros sistemas. Os Estados Unidos são um dos poucos países que ainda não adotaram oficialmente o Sistema Internacional de Unidades.

1-3 Mudanças de Unidades

Freqüentemente, precisamos mudar as unidades em que está expressa uma grandeza física. Para isso, usamos um método chamado de *conversão em cadeia*. Neste método, mul-

Tabela 1-2
Prefixos das Unidades do SI*

Fator	Prefixo	Símbolo	Fator	Prefixo	Símbolo
10^{24}	iocta	Y	10^{-24}	octo	y
10^{21}	zeta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{18}	exa	E	10^{-18}	ato	a
10^{15}	peta	P	10^{-15}	fento	f
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^3	quilo	k	10^{-3}	mini	m
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^1	deca	da	10^{-1}	deci	d

*Os prefixos mais comumente usados aparecem em negrito.

tipicamos a medida original por um **fator de conversão** (uma relação entre unidades que é igual a 1). Assim, por exemplo, como 1 min e 60 s correspondem ao mesmo intervalo de tempo, podemos escrever

$$\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 1.$$

Tal *não* é o mesmo que escrever $1/60 = 1$ ou $60 = 1$; o *número e sua unidade formam um todo*.

Já que a multiplicação de qualquer grandeza por 1 não muda o valor dessa grandeza, podemos introduzir esses fatores de conversão sempre que acharmos conveniente. Na conversão em cadeia, usamos os fatores de tal forma que as unidades indesejadas se cancelam. Por exemplo,

$$\begin{aligned} 2 \text{ min} &= (2 \text{ min})(1) = (2 \text{ min})\left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}\right) \\ &= 120 \text{ s.} \end{aligned} \quad (1-6)$$

Se por acaso você introduzir o fator de conversão de tal forma que as unidades *não* se cancelam, simplesmente inverta o fator e tente outra vez. Observe que as unidades obedecem às mesmas regras que os números e as variáveis algébricas.

EXEMPLO 1-1 O submarino de pesquisa ALVIN está mergulhando com uma velocidade de 36,5 braças por minuto.

a. Expressse esta velocidade em metros por segundo. Uma *braça* (fath) vale exatamente 6 pés (ft).

Solução Para calcular a velocidade em metros por segundo, escrevemos

$$\begin{aligned} 36,5 \frac{\text{fath}}{\text{min}} &= \left(36,5 \frac{\text{fath}}{\text{min}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right)\left(\frac{6 \text{ ft}}{1 \text{ fath}}\right)\left(\frac{1 \text{ m}}{3,28 \text{ ft}}\right) \\ &= 1,11 \text{ m/s.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual é a velocidade em milhas por hora?

Solução Para calcular a velocidade em milhas por hora, escrevemos:

$$\begin{aligned} 36,5 \frac{\text{fath}}{\text{min}} &= \left(36,5 \frac{\text{fath}}{\text{min}}\right)\left(\frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}}\right)\left(\frac{6 \text{ ft}}{1 \text{ fath}}\right)\left(\frac{1 \text{ mi}}{5280 \text{ ft}}\right) \\ &= 2,49 \text{ mi/h.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

c. Qual é a velocidade em anos-luz por ano?

Solução Um ano-luz (al) é a distância que a luz viaja em 1 ano, $9,46 \times 10^{12}$ km.

Partimos do resultado obtido em (a):

$$\begin{aligned} 1,11 \frac{\text{m}}{\text{s}} &= \left(1,11 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\left(\frac{1 \text{ al}}{9,46 \times 10^{12} \text{ km}}\right) \\ &\quad \times \left(\frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}}\right)\left(\frac{3,16 \times 10^7 \text{ s}}{1 \text{ a}}\right) \\ &= 3,71 \times 10^{-9} \text{ al/a.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Podemos escrever este resultado na forma ainda mais incomum de 3,71 al/a, onde "al" é a abreviação de anoano-luz.

Se você resolver o item (a) usando todos as casas decimais da sua calculadora, encontrará uma resposta como 1,112804878 m/s. A precisão sugerida pelas nove casas decimais da resposta é totalmente ilusória. Arredondamos (acertadamente) o resultado para 1,11 m/s, um número que equivale em precisão ao dado original. O valor original da velocidade, 36,5 fath/min, tem três dígitos, que são chamados de **algarismos significativos**. Qualquer quarto algarismo que possa existir à direita do 5 não é conhecido, de modo que o resultado na conversão não é confiável além de três dígitos ou três algarismos significativos. Os resultados dos cálculos devem sempre ser arredondados para expressar este limite de confiabilidade.*

EXEMPLO 1-2 Quantos centímetros quadrados tem uma área de 6,0 km²?

Solução A maneira mais simples de resolver este problema é tornar explícito o produto de km por km:

$$\begin{aligned} 6.0 \text{ km}^2 &= 6.0 \text{ (km)}(\text{km}) = 6.0 \text{ (km)}(\text{km}) \\ &\quad \times \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}\right)\left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}\right)\left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}}\right) \\ &\quad \times \left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}}\right) \\ &= 6.0 \times 10^{10} \text{ cm}^2. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

EXEMPLO 1-3 Transforme 60 milhas/hora em pés/segundo.

Solução Para resolver este problema, você pode transformar milhas em pés e horas em segundos ou consultar o Apêndice F para uma conversão mais direta:

$$\begin{aligned} 60 \text{ mi/h} &= 60 \text{ mi/h} \left(\frac{3,28 \text{ ft/s}}{2,24 \text{ mi/h}}\right) \\ &= 88 \text{ ft/s.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Observe que neste caso, como nos anteriores, o fator de conversão é equivalente a 1.

1-4 Comprimento

Em 1792, a recém-criada República de França estabeleceu um novo sistema de pesos e medidas. Como pedra fundamental desse novo sistema, o metro foi definido como um décimo-milionésimo da distância entre o Pólo Norte e o Equador. Mais tarde, por razões de ordem prática, este padrão que usava a Terra como referência foi abandonado e o metro passou a ser definido como a distância entre duas finas linhas gravadas perto das extremidades de uma barra de platina-irídio, a **barra do metro-padrão**, que era guardada no Bureau International de Pesos e Medidas, perto de Paris. Cópias fiéis da barra foram enviadas a laboratórios de padronização em todo o mundo. Esses **padrões secundários** foram usados para produzir outros padrões ainda mais acessíveis, de modo que, em última análise, todos os

*Uma discussão mais completa do uso de *algarismos significativos* aparece nas Táticas de Resolução de Problemas do Cap. 4.

Tabela 1-3
Alguns Comprimentos

Comprimento	Metro
Distância até o quasar mais afastado que se conhece (1990)	2×10^{26}
Distância até a galáxia de Andrômeda	2×10^{22}
Distância até a estrela mais próxima (Proxima Centauri)	4×10^{16}
Distância até o planeta mais afastado (Plutão)	6×10^{12}
Raio da Terra	6×10^6
Altura do Monte Everest	9×10^3
Espessura desta página	1×10^{-4}
Comprimento de onda da luz	5×10^{-7}
Comprimento de um vírus típico	1×10^{-8}
Raio do átomo de hidrogênio	5×10^{-11}
Raio de um próton	$\sim 10^{-15}$

dispositivos de medida eram derivados da barra do metro-padrão através de uma complicada série de comparações.

Em 1959, a jarda foi legalmente definida através da equação

$$1 \text{ jarda} = 0,9144 \text{ metro (exatamente)}, \quad (1-7)$$

que é equivalente a

$$1 \text{ polegada} = 2,54 \text{ centímetros (exatamente)}. \quad (1-8)$$

A Tabela 1-3 mostra alguns comprimentos interessantes. Um deles se refere a um vírus como os que aparecem na Fig. 1-1.

Com o tempo, a ciência e a tecnologia modernas sentiram necessidade de um padrão mais preciso que a distância entre duas linhas em uma barra de metal. Em 1960 foi adotado um novo padrão para o metro, dessa vez baseado no comprimento de onda da luz. O metro foi definido como 1.650.763,73 comprimentos de onda de uma certa luz vermelho-alaranjada emitida por átomos de criptônio-86 em um tubo de descarga gasosa.* Esse estranho número de

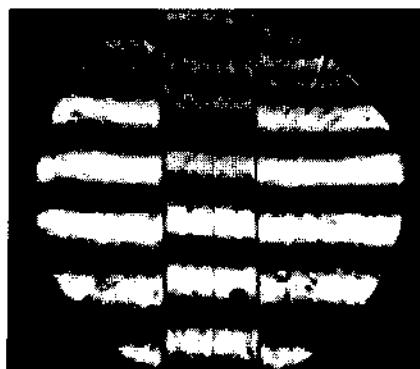


Fig. 1-2 Um calibre (esquerda) sendo comparado com um padrão de referência (direita) através de ondas luminosas. Quando as franjas claras e escuras coincidem, os blocos têm o mesmo comprimento. A diferença de comprimento entre os dois blocos acima é de aproximadamente 25 nm, aproximadamente o tamanho do vírus que aparece na Fig. 1-1.

comprimentos de onda foi escolhido de modo que o novo padrão corresponesse, tanto quanto possível, à velha barra do metro-padrão.

Os átomos de criptônio-86 em que se baseia o padrão de comprimento estão presentes em toda parte, são idênticos e emitem luz exatamente com o mesmo comprimento de onda. Como observou Philip Morrison, do MIT, todo átomo é um reservatório de padrões naturais, mais seguro que o Bureau Internacional de Pesos e Medidas.

A Fig. 1-2 mostra como o comprimento de um calibre, usado na indústria como um padrão secundário preciso, é comparado com um padrão de referência no Instituto Nacional de Padrões e Tecnologia (NIST). As franjas escuradas que atravessam a figura horizontalmente são formadas pelo cancelamento mútuo de ondas luminosas. Se as franjas dos dois blocos retangulares coincidem, é porque os calibres têm o mesmo comprimento. Se a diferença entre as franjas é de, digamos, um décimo de franja, isso significa que a diferença de comprimento entre os blocos é de um vigésimo do comprimento de onda da luz ou cerca de 30 nm.

Em 1983, a necessidade de precisão chegara a tal ponto que mesmo o padrão de criptônio-86 se tornara pouco satisfatório. Foi nesse ano que os cientistas tomaram uma decisão ousada. O metro foi redefinido como a distância percorrida pela luz num determinado intervalo de tempo. Nas palavras da 17^a Conferência Geral de Pesos e Medidas:

O metro é a distância percorrida pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de 1/299.792.458 de segundo.

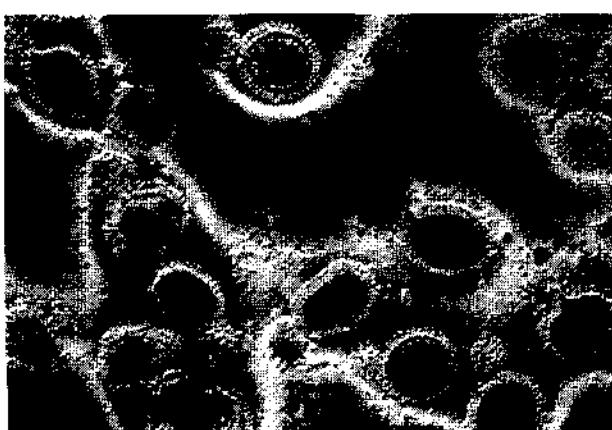


Fig. 1-1 Uma micrografia eletrônica de partículas do vírus da gripe. As lipoproteínas obtidas do hospedeiro envolvem os núcleos. Cada partícula de vírus tem menos de 50 nm de diâmetro.

*O número 86 na notação criptônio-86 identifica um dos cinco isótopos estáveis desse elemento. Uma notação equivalente seria ^{86}Kr . Este número (86) é conhecido como *número de massa* do isótopo em questão.

Tal número foi escolhido para que a velocidade da luz, c , fosse dada exatamente por

$$c = 299.792.458 \text{ m/s.}$$

Como as medidas da velocidade da luz tinham se tornado extremamente precisas, fazia sentido adotar a velocidade da luz como grandeza definida e usá-la para redefinir o metro.

EXEMPLO 1-4 Nas competições esportivas, a prova de corrida mais curta pode ser a de 100 metros (100 m) ou a de 100 jardas (100 yd).

a. Qual das duas é a mais longa?

Solução De acordo com a Eq. 1-7, 100 yd equivalem a 91,44 m, de modo que a corrida de 100 m é mais longa do que a de 100 yd.

b. Qual é a diferença entre as duas distâncias em metros?

Solução Vamos representar a diferença por ΔL , onde Δ é a letra grega delta maiúsculo. Nesse caso,

$$\begin{aligned} \Delta L &= 100 \text{ m} - 100 \text{ yd} \\ &= 100 \text{ m} - 91,44 \text{ m} = 8,56 \text{ m.} \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

c. Qual é a diferença entre as duas distâncias em pés?

Solução Podemos calcular a diferença em pés usando o mesmo método do Exemplo 1-1:

$$\Delta L = (8,56 \text{ m}) \left(\frac{3,28 \text{ ft}}{1 \text{ m}} \right) = 28,1 \text{ ft.} \quad (\text{Resposta})$$

1-5 Tempo

O tempo tem dois aspectos. Nas aplicações da vida diária e para alguns fins científicos, estamos interessados em saber a hora do dia (veja a Fig. 1-3) para podermos classificar os acontecimentos em ordem cronológica. Por outro lado, na maioria das aplicações científicas, queremos conhecer o tempo de duração de um evento. Assim qualquer padrão de tempo deve poder responder a duas perguntas: “*Quando* aconteceu” e “*Quanto tempo durou?*” A Tabela 1-4 mostra alguns intervalos de tempo.

Qualquer fenômeno periódico pode ser usado como padrão de tempo. A rotação da Terra, que determina a duração do dia, é provavelmente o mais antigo padrão de tempo da humanidade. Um relógio de quartzo, no qual um anel de quartzo vibra continuamente, pode ser calibrado em relação à rotação da Terra com o auxílio de observações astronômicas e usado para medir intervalos de tempo no laboratório. Entretanto, a calibração não pode ser executada com a exatidão exigida pela ciência e tecnologia modernas.

Para atender à necessidade de um padrão de tempo mais preciso, vários países desenvolveram os chamados relógios atômicos. A Fig. 1-4 mostra um desses relógios, baseado em uma frequência característica do isótopo césio-

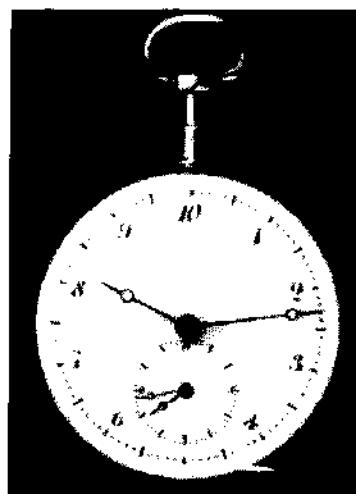


Fig. 1-3 Quando o sistema métrico foi proposto em 1792, a hora foi redefinida para que o dia tivesse 10 h. Entretanto, a ideia não pegou. O fabricante desse relógio de 10 horas achou prudente incluir um pequeno mostrador que marcassem o tempo da forma usual. Os dois mostradores estão indicando a mesma hora?

Tabela 1-4
Alguns Intervalos de Tempo

Intervalo de Tempo	Segundos
Tempo de vida do próton (prevista)	$\sim 10^{33}$
Idade do universo	5×10^{17}
Idade da pirâmide de Quéops	1×10^{11}
Expectativa de vida de um ser humano (nos Estados Unidos)	2×10^9
Duração de um dia	9×10^4
Espaço de tempo entre duas batidas do coração humano	8×10^{-1}
Tempo de vida do muôn	2×10^{-6}
Pulso de luz mais curto produzido em laboratório (1989)	6×10^{-15}
Tempo de vida da partícula mais instável	$\sim 10^{-20}$
Tempo de Planck*	$\sim 10^{-44}$

*Intervalo de tempo após o “Big Bang”, a partir do qual as leis da física, como as conhecemos, podem ser aplicadas.

133, instalado no NIST. Os Estados Unidos usam-no como base para o Tempo Universal Coordenado (UTC), que está disponível através de sinais de ondas curtas (estações WWV e WWVH) e também por telefone. (Para acertar um relógio com alta precisão, é preciso levar em conta o tempo de trânsito desses sinais desde as estações até o ponto onde se encontra o relógio a ser corrigido.)

A Fig. 1-5 mostra as variações da velocidade de rotação da Terra em um período de 4 anos, determinadas por comparação com um relógio de césio.* Por causa da variação sazonal mostrada na Fig. 1-5, suspeitamos da rotação da Terra sempre que há uma diferença entre o tempo dado

*Veja “The Earth’s Inconstant Rotation”, de John Wahr, em *Sky and Telescope*, junho de 1986. Veja também “Studying the Earth by Very-Long Baseline Interferometry”, de William E. Carter e Douglas S. Robertson, em *Scientific American*, novembro de 1986.

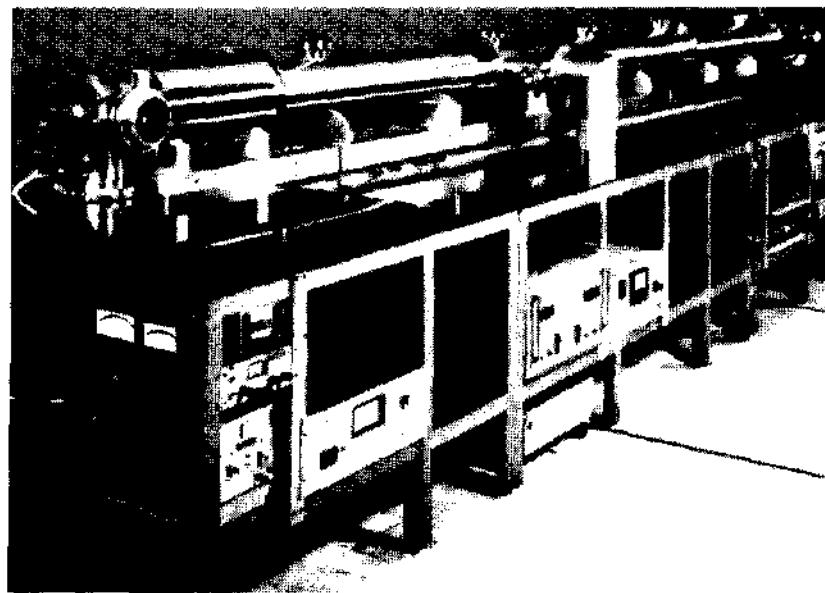


Fig. 1-4 O relógio atômico de césio do Instituto Nacional de Padrões e Tecnologia, em Boulder, Colorado, Estados Unidos. É o padrão primário para a unidade de tempo nos Estados Unidos.

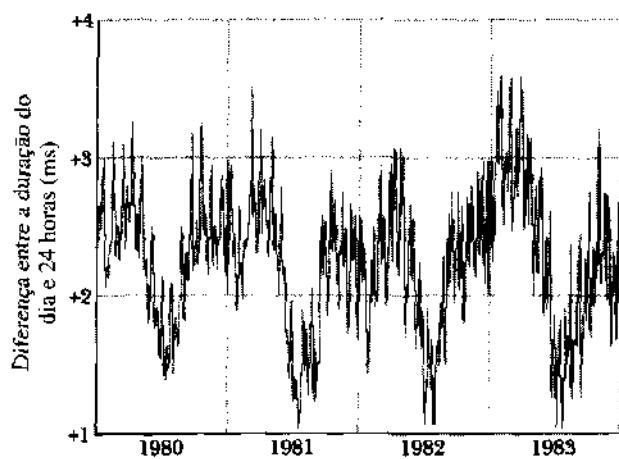


Fig. 1-5 Variação na duração do dia em um período de 4 anos. Observe que durante esse período a duração do dia não chegou a variar de 3 ms ($0,003\text{ s}$).

pela Terra e o tempo dado pelos átomos. A variação provavelmente se deve a efeitos de maré causados pela lua e também à influência dos ventos.

Em 1967, a 13ª Conferência Geral de Pesos e Medidas adotou um segundo-padrão baseado no relógio de césio:

Um segundo é o tempo necessário para que haja 9.192.631.770 oscilações da luz (de um determinado comprimento de onda) emitida por um átomo de césio-133.

Em princípio, dois relógios de césio teriam que funcionar durante 6.000 anos para que suas leituras diferissem em mais de 1 s. Mesmo essa precisão é pequena em com-

paração com a dos relógios que estão sendo desenvolvidos atualmente; a precisão desses relógios pode chegar a 1 parte em 10^{18} , isto é, 1 s em $1 \times 10^{18}\text{ s}$ (cerca de 3×10^{10} anos).

EXEMPLO 1-5 Isaac Asimov propôs uma unidade de tempo baseada na maior velocidade conhecida e na menor distância que pode ser medida. É o fermi-luz, o tempo que a luz leva para percorrer uma distância de 1 fermi (1 fermi = 1 femtômetro = 1 fm = 10^{-15} m). Quantos segundos tem um fermi-luz?

Solução Para calcular esse tempo, basta dividir a distância indicada (1 fm) por c , a velocidade da luz no vácuo ($\approx 3,00 \times 10^8\text{ m/s}$). Assim,

$$\begin{aligned} 1 \text{ fermi-luz} &= \frac{1 \text{ fm}}{\text{velocidade da luz}} = \frac{10^{-15} \text{ m}}{3,00 \times 10^8 \text{ m/s}} \\ &= 3,33 \times 10^{-24} \text{ s}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

De acordo com a Tabela 1-4, a partícula elementar mais instável que se conhece tem um tempo de vida (em média) de 10^{-23} s . Podemos dizer que o seu tempo de vida é de 3 fermis-luz.

EXEMPLO 1-6* Suponhamos que você esteja deitado em uma praia e observe o sol se pôr no oceano, ligando um cronômetro no momento em que ele desaparece. Em seguida, você se levanta, fazendo com que os seus olhos se movam para cima de uma distância $h = 1,70\text{ m}$, e pára o cronômetro no momento em que o sol torna a desaparecer. Se o intervalo de tempo medido pelo cronômetro é $t = 11,1\text{ s}$, quanto mede o raio r da Terra?

Solução Como se pode ver na Fig. 1-6, sua linha de visão até a parte superior do sol, quando ele desaparece pela primeira vez, é tangente à

*Adaptado de "Doubling Your Sunsets, or How Anyone Can Measure the Earth's Size with a Wristwatch and Meter Stick", de Dennis Rawlins, *American Journal of Physics*, fev. 1979, Vol. 47, pp. 126-128. O método funciona melhor perto do Equador.

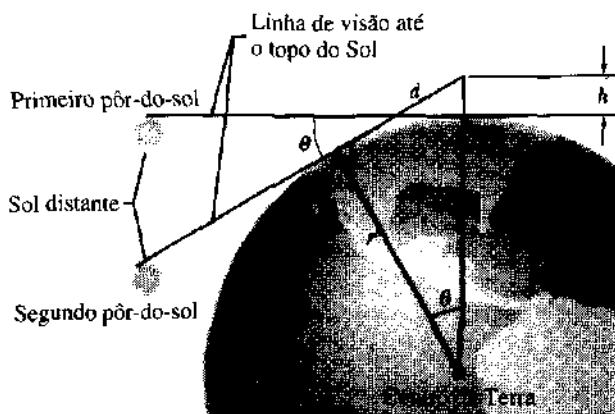


Fig. 1-6 Exemplo 1-6. Sua linha de visão até a parte superior do sol gira de um ângulo θ quando você se levanta, elevando seus olhos de uma distância h em relação ao ponto A. (O ângulo θ e a distância h foram exagerados para tornar o desenho mais claro.)

superfície da Terra no ponto em que você se encontra (ponto A). A figura mostra também que sua linha de visão até a parte superior do sol quando ele desaparece pela segunda vez é tangente à superfície da Terra no ponto B. Seja d a distância entre o ponto B e o ponto em que seus olhos se encontram quando você está de pé e seja r o raio da Terra (Fig. 1-6). De acordo com o Teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 + r^2 = (r + h)^2 = r^2 + 2rh + h^2,$$

ou

$$d^2 = 2rh + h^2. \quad (1-9)$$

Como a altura h é muito menor do que o raio da Terra r , o termo h^2 pode ser desprezado em comparação com o termo $2rh$ e podemos escrever a Eq. 1-9 na forma simplificada

$$d^2 = 2rh. \quad (1-10)$$

Na Fig. 1-6, o ângulo entre os dois pontos de tangência A e B é θ , que é também o ângulo que o sol descreve em torno da Terra durante o intervalo de tempo medido, $t = 11,1$ s. Em um dia completo, que tem aproximadamente 24 h, o sol descreve um ângulo de 360° em torno da Terra. Assim, podemos escrever

$$\frac{\theta}{360^\circ} = \frac{t}{24 \text{ h}},$$

que, com $t = 11,1$ s, nos dá

$$\theta = \frac{(360^\circ)(11,1 \text{ s})}{(24 \text{ h})(60 \text{ min/h})(60 \text{ s/min})} = 0,04625^\circ.$$

De acordo com a Fig. 1-6, $d = r \tan \theta$. Substituindo d por este valor na Eq. 1-10, temos:

$$r^2 \tan^2 \theta = 2rh$$

ou

$$r = \frac{2h}{\tan^2 \theta}.$$

Substituindo nesta equação h e θ por seus valores 1,70 m e $0,04625^\circ$, respectivamente, temos:

$$r = \frac{(2)(1,70 \text{ m})}{\tan^2 0,04625^\circ} = 5,22 \times 10^6 \text{ m}, \quad (\text{Resposta})$$

o que difere em menos de 20% do verdadeiro valor do raio (médio) da Terra, que é de $6,37 \times 10^6$ m.

1-6 Massa

O Quilograma Padrão

O padrão de massa do SI é um cilindro de platina-irídio (Fig. 1-7) conservado no Bureau International de Pesos e Medidas, nas proximidades de Paris, ao qual foi atribuída, por convenção internacional, uma massa de 1 quilograma. Cópias fiéis desse cilindro foram enviadas a laboratórios de padronização situados em outros países e as massas

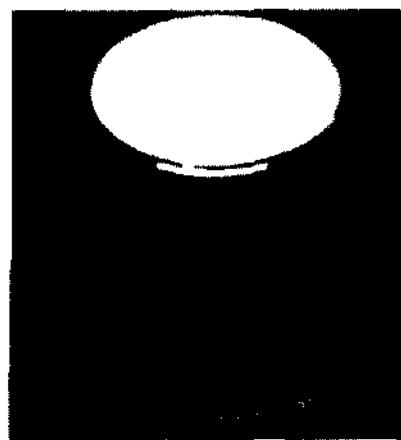


Fig. 1-7 O padrão de massa do SI.

de outros corpos podem ser medidas por comparação com essas cópias. A Tabela 1-5 mostra as massas de alguns corpos expressas em quilogramas.

A cópia norte-americana do quilograma padrão é mantida em um cofre no NIST e retirada, não mais que uma vez por ano, para aferir cópias que são usadas em outros

Tabela 1-5
Algumas Massas

Objeto	Quilogramas
Universo conhecido (1990)	$\sim 10^{51}$
Nossa galáxia	2×10^{41}
Sol	2×10^{30}
Lua	7×10^{22}
Asteróide Eros	5×10^{15}
Montanha pequena	1×10^{12}
Navio transatlântico	7×10^7
Elefante	5×10^3
Uva	3×10^{-1}
Grão de poeira	7×10^{-10}
Molécula de penicilina	5×10^{-17}
Átomo de urânio	4×10^{-25}
Próton	2×10^{-27}
Elétron	9×10^{-31}

8 MECÂNICA

laboratórios. Desde 1889, ela foi levada duas vezes à França para ser comparada com o padrão primário. Provavelmente, um dia a massa padrão passará a ser a massa de um átomo, que é um padrão mais confiável e acessível.

Um Segundo Padrão de Massa

As massas dos átomos podem ser comparadas entre si mais precisamente do que podem ser comparadas com o quilograma padrão. Por esse motivo, os cientistas adotaram um segundo padrão de massa: o átomo de carbono-12, ao qual

foi atribuída uma massa de 12 unidades de massa atômica (u). A relação entre os dois padrões é a seguinte:

$$1 u = 1,6605402 \times 10^{-27} \text{ kg}, \quad (1-1)$$

com uma incerteza de ± 10 nas duas últimas casas decimais. Com o auxílio de um espectômetro de massa, os cientistas podem determinar, com razoável precisão, as massas de outros átomos em relação à massa do carbono-12. O que nos falta no momento é um meio confiável de estender essa precisão a unidades de massas mais comuns, como um quilograma.

RESUMO

Medições na Física

A física se baseia na medição das grandezas físicas e das mudanças nessas grandezas físicas que ocorrem em nosso universo. Certas grandezas físicas, como o comprimento, o tempo e a massa, foram escolhidas como **grandezas fundamentais**, definidas em termos de um **padrão** e medidas por uma **unidade**, como o metro, o segundo e o quilograma. Outras grandezas físicas, como a velocidade, são definidas em termos das grandezas fundamentais e seus padrões.

Unidades do SI

O sistema de unidades adotado neste livro é o Sistema Internacional de Unidades (SI). As três grandezas físicas que aparecem na Tabela 1-1 são as grandezas fundamentais usadas nos primeiros capítulos deste livro. Os padrões, que devem ser ao mesmo tempo acessíveis e invariáveis, definem as unidades das grandezas fundamentais e são estabelecidos por acordos internacionais. Esses padrões servem de base para todas as medições da física, tanto das grandezas fundamentais quanto das grandezas derivadas. Em muitos casos, os prefixos que aparecem na Tabela 1-2 permitem simplificar a notação.

Conversão de Unidades

A conversão de unidades de um sistema para outro (de milhas por hora para quilômetros por segundo, por exemplo) pode ser realizada pelo

método da **conversão em cadeia**, em que as unidades são consideradas como grandezas algébricas e os dados originais são multiplicados sucessivamente por fatores de conversão equivalentes a 1, até que a grandeza seja expressa na unidade desejada. Veja os Exemplos 1-1 a 1-3.

O Metro

O metro (unidade de comprimento) foi definido inicialmente em termos da distância entre o Pólo Norte e o Equador. Hoje em dia, é definido como a distância percorrida pela luz durante um certo intervalo de tempo.

O Segundo

O segundo (unidade de tempo) foi definido inicialmente em termos da rotação da Terra. Hoje em dia, é definido em termos das vibrações da luz emitida por um átomo de césio-133.

O Quilograma

O quilograma (unidade de massa) é definido em termos de um padrão de platina-irídio mantido na França. Para medições em escala atômica, é usada em geral a unidade de massa atômica, definida em termos do átomo de carbono-12.

QUESTIONÁRIO

1. Discuta a afirmação: "Depois que um padrão é escolhido, ele se torna invariável por definição".
2. Cite uma ou mais características que você considera desejáveis em um padrão, além da facilidade de acesso e da invariabilidade.
3. Seria possível definir um sistema de unidades fundamentais como o da Tabela 1-1 em que o tempo não estivesse incluído? Explique.
4. Das três unidades fundamentais que aparecem na Tabela 1-1, apenas uma, o quilograma, tem um prefixo (veja a Tabela 1-2). Seria melhor redefinir a massa do cilindro de platina-irídio conservado no Bureau International de Pesos e Medidas como sendo 1 g em vez de 1 kg?
5. Por que não existem unidades fundamentais no SI para área e volume?
6. O metro foi inicialmente definido como um décimo-milionésimo do comprimento de um meridiano que vai do Pólo Norte ao Equador, passando por Paris. A diferença entre o metro definido desta forma e a distância entre as linhas gravadas no metro padrão é de aproximadamente 0,023%. Isto significa que o metro padrão tem uma imprecisão deste valor? Explique.
7. Ao definir a distância entre duas linhas gravadas em uma barra como o metro padrão, é preciso especificar a temperatura da barra. O comprimento pode ser considerado como uma grandeza fundamental se outra grandeza física, como a temperatura, deve ser especificada na sua definição?
8. Ao redefinirem o metro em termos da velocidade da luz, por que os participantes da Conferência Geral de Pesos e Medidas de 1983 não simplificaram as coisas definindo a velocidade da luz como sendo exatamente $3 \times 10^8 \text{ m/s}$? Na verdade, por que ela não foi definida como sendo exatamente 1 m/s? Eles podiam ter escolhido uma dessas duas possibilidades? Se a resposta for afirmativa, por que não o fizeram?
9. O que significa o prefixo "micro" na expressão "forno de microondas"? Há quem chame os alimentos irradiados com raios gama para retardar sua deterioração de "tratados com picoondas". O que significa isso?
10. Sugira uma forma de medir (a) o raio da Terra, (b) a distância entre o sol e a Terra e (c) o raio do sol.
11. Sugira uma forma de medir (a) a espessura de uma folha de papel, (b) da parede de uma bolha de sabão e (c) o diâmetro de um átomo.

- 12.** Cite alguns fenômenos naturais periódicos que poderiam ser usados como padrões de tempo.
- 13.** Seria possível definir "1 segundo" com o espaço de tempo entre duas batidas do coração do presidente da Sociedade Americana de Física. Galileu usou algumas vezes o seu próprio pulso para medir o tempo. Por que uma definição baseada em um relógio atômico é muito melhor?
- 14.** Quais são os atributos que um bom relógio deve possuir?
- 15.** Cite algumas desvantagens de se usar o período de um pêndulo como padrão de tempo.
- 16.** Em 30 de junho de 1981, o "minuto" de 10 h 59 min a 11 h 00 min foi arbitrariamente alongado para conter 61 s. O segundo a mais foi introduzido para compensar o fato de que, conforme medido pelo nosso padrão atômico de tempo, a velocidade de rotação da Terra está diminuindo lentamente. Por que foi considerado necessário reajustar nossos relógios?
- 17.** Por que é conveniente usarmos dois padrões de massa, o quilograma e o átomo de carbono-12?
- 18.** O nosso atual padrão de massa é acessível e invariável? Ele pode ser comparado com facilidade com os padrões secundários? Um padrão atômico seria melhor sob algum aspecto?
- 19.** Faça uma lista de objetos cujas massas estejam entre a de uma pequena montanha e a de um transatlântico (veja a Tabela 1-5) e estime suas massas.
- 20.** As pessoas que se opõem à adoção do sistema métrico nos Estados Unidos usam, às vezes, argumentos como: "Em vez de comprarmos uma libra de manteiga, teríamos que comprar 0,454 quilograma". Com isso, estão querendo dizer que a vida se tornaria muito mais complicada. Como você refutaria esse tipo de argumento?
- ## EXERCÍCIOS E PROBLEMAS
- Seção 1-2 O Sistema Internacional de Unidades**
- 1E.** Use os prefixos da Tabela 1-2 para expressar (a) 10^6 fones; (b) 10^{-6} fones; (c) 10^{-14} móveis; (d) 10^{-2} mentais; (e) 10^1 pitados; (f) 10^{-3} tares. Agora que pegou a idéia, invente expressões semelhantes.
- 2E.** Alguns prefixos das unidades do SI são usados na linguagem coloquial. (a) Quanto ganha por semana um funcionário cujo salário anual é KR\$ 36 (36 quilorreais)? (b) O prêmio de uma loteria é de 10 megareais, que serão pagos em parcelas mensais iguais durante vinte anos. Quantos reais o felizardo vai receber por mês?
- Seção 1-4 Comprimento**
- 3E.** Um ônibus espacial está em órbita em torno da Terra a uma altitude de 300 km. A que distância se encontra da Terra (a) em milhas e (b) em milímetros?
- 4E.** Qual é a sua altura em pés e polegadas?
- 5E.** O micrometro (10^{-6} m = 1 μm) é também chamado de *micron*. (a) Quantos microns tem 1,0 km? (b) 1,0 μm equivale a que fração de um centímetro? (c) Quantos microns tem uma jarda?
- 6E.** A Terra tem a forma aproximadamente esférica, com um raio de $6,37 \times 10^6$ m. (a) Qual é a circunferência da Terra em quilômetros? (b) Qual é a superfície da Terra em quilômetros quadrados? (c) Qual é o volume da Terra em quilômetros cúbicos?
- 7E.** Calcule quantos quilômetros têm 20,0 mi usando apenas os seguintes fatores de conversão: 1 mi = 5.280 ft, 1 ft = 12 in., 1 in. = 2,54 cm, 1 m = 100 cm e 1 km = 1.000 m.
- 8E.** Calcule a relação entre (a) uma jarda quadrada e um pé quadrado; (b) uma polegada quadrada e um centímetro quadrado; (c) uma milha quadrada e um quilômetro quadrado; (d) um metro cúbico e um centímetro cúbico.
- 9P.** Uma unidade de área usada frequentemente pelos agrimensores é o *hectare*, definido como 10^4 m². Num ano, uma certa mina de carvão a céu aberto consome 75 hectares de terra até uma profundidade de 26 m. Qual o volume de terra removido durante esse período, em quilômetros cúbicos?
- 10P.** O *cord* é um volume de madeira cortada equivalente a uma pilha de 8 ft de comprimento, 4 ft de largura e 4 ft de altura. Quantos cords tem um metro cúbico de madeira?
- 11P.** Uma sala tem 20 ft e 2 in de comprimento e 12 ft e 5 in de largura. Qual é a área do piso em (a) pés quadrados e (b) metros quadrados? Se o teto está a 12 ft e 2,5 in do chão, qual é o volume da sala em (c) pés cúbicos e (d) metros cúbicos?
- 12P.** A Antártica tem forma aproximadamente semicircular, com um raio de 2.000 km. A espessura média do gelo é 3.000 m. Qual o volume de gelo da Antártica, em centímetros cúbicos? (Ignore a curvatura da Terra.)
- 13P.** Um cubo de açúcar típico tem 1 cm de lado. Se você tivesse uma caixa cúbica com um mol de cubos de açúcar, qual seria o lado da caixa? (Um mol equivale a $6,02 \times 10^{23}$ unidades.)
- 14P.** Os engenheiros hidráulicos às vezes usam, como unidade de volume de água, o *acre-pé*, definido como o volume de água capaz de cobrir 1 acre de terra como uma camada de água com 1 pé de profundidade. Uma tempestade faz cair 2,0 in de chuva em 30 min numa cidade com 26 km² de área. Que volume de água, em acres-pé, caiu na cidade?
- 15P.** Os fabricantes de uma certa marca de tinta garantem que ela é capaz de cobrir 460 ft²/gal. (a) Expresso este número em metros quadrados por litro. (b) Expresso este número nas unidades fundamentais do SI (veja os Apêndices A e F). (c) Qual é o inverso da unidade original, e qual o seu significado físico?
- 16P.** As distâncias astronômicas são tão grandes em comparação com as terrestres que os astrônomos costumam usar unidades especiais em seus cálculos. Uma *unidade astronômica* (UA) é igual à distância média entre a Terra e o sol, cerca de $149,5 \times 10^6$ km. Um *parsec* (pc) é a distância para a qual 1 UA subtende um ângulo de exatamente 1 segundo de arco (Fig. 1-8). Um *ano-luz* (al) é a distância que a luz, viajando no vácuo com uma velocidade de 299.792 km/s, percorre em um 1,0 ano. (a) Expresso a distância entre a Terra e o Sol em parsecs e em anos-luz. (b) Expresso 1 al e 1 pc em quilômetros. Embora o "ano-luz" apareça

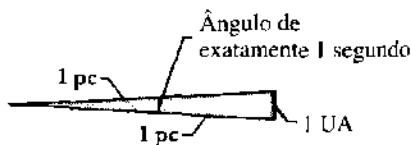


Fig. 1-8 Problema 16.

frequentemente em artigos populares, o parsec é a unidade preferida dos astrônomos.

17P. Durante um eclipse total, o disco da lua cobre quase perfeitamente o disco do sol. Supondo que o sol esteja 400 vezes mais distante do que a lua, (a) Calcule a razão entre o diâmetro do sol e o diâmetro da lua. (b) Qual é a razão entre os volumes dos dois astros? (c) Mantendo um dos olhos fechado, afaste uma moeda do rosto até ela eclipsar totalmente a lua cheia e meça o ângulo subtendido pela moeda. Usando este resultado experimental e a distância entre a Terra e a lua ($3,8 \times 10^8$ km, aproximadamente), dê uma estimativa para o diâmetro da lua.

18P*. O quilograma padrão (veja a Fig. 1-7) tem a forma de um cilindro circular, com a altura igual ao diâmetro. Mostre que, para um cilindro circular de volume fixo, esta igualdade faz com que a superfície seja a menor possível, minimizando assim os efeitos de desgaste e contaminação da superfície.

19P*. O navegador do petroleiro *Gulf Supernoxx* usa os satélites do chamado Sistema Global de Posicionamento (GPS/NAVSTAR) para determinar a latitude e longitude do navio; veja a Fig. 1-9. Se os valores são $43^\circ 36' 25.3''$ N e $77^\circ 31' 48.2''$ O com uma precisão de $\pm 0.5''$, qual é a incerteza na posição do petroleiro medida (a) ao longo de uma linha norte-sul e (b) ao longo de uma linha leste-oeste? (c) Onde se encontra o petroleiro?

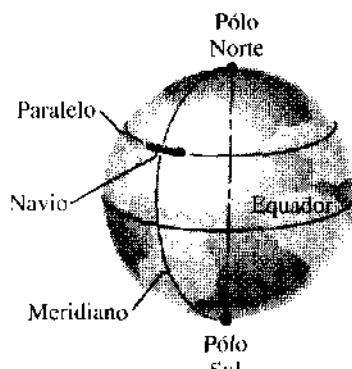


Fig. 1-9 Problema 19.

Seção 1-5 Tempo

20E. Expresse a velocidade da luz, $3,0 \times 10^8$ m/s, em (a) pés por nanosegundo e (b) milímetros por picossegundo.

21E. Enrico Fermi uma vez observou que um tempo de aula (50 min) é aproximadamente igual a 1 microsséculo. Qual é a duração de 1 microsséculo em minutos e qual o erro percentual da aproximação usada por Fermi?

22E. Um ano tem 365,25 dias. Quantos segundos tem um ano?

23E. Um certo relógio de pêndulo (com mostrador de 12 horas) adianta 1,0 min/dia. Depois de acertar o relógio, quanto tempo devemos esperar para que ele volte a marcar a hora correta?

24E. Qual é a idade do universo (veja a Tabela 1-4) em dias?

25E. (a) Uma unidade de tempo às vezes usada na física microscópica é o *shake*. Um shake é igual a 10^{-8} s. (a) Existem mais shakes em um segundo que segundos em um ano? (b) O homem existe há cerca de 10^4 anos, enquanto o universo tem cerca de 10^{10} anos de idade. Se a idade do universo é tomada como sendo 1 "dia", há quantos "segundos" o homem começou a existir?

26E. As velocidades máximas com que alguns animais conseguem correr, em milhas por hora, são aproximadamente as seguintes: (a) caracol, $3,0 \times 10^{-2}$; (b) aranha, 1,2; (c) homem, 2,3; (d) guepardo, 70. Transforme esses números em metros por segundo. (Os quatro cálculos envolvem o mesmo fator de conversão. Será mais prático calcular primeiro esse fator e guardá-lo na memória da sua calculadora.)

27P. Uma unidade astronômica (UA) é a distância média entre a Terra e o sol, aproximadamente $1,50 \times 10^8$ km. A velocidade da luz é aproximadamente $3,0 \times 10^8$ m/s. Calcule a velocidade da luz em unidades astronômicas por minuto.

28P. Até 1883, cada cidade dos Estados Unidos tinha sua hora local. Hoje em dia, os viajantes precisam acertar o relógio apenas quando a diferença acumulada chega a 1 h. Que distância, em graus de longitude, um viajante deve percorrer para que tenha, em média, necessidade de acertar o relógio? Sugestão: Uma rotação da Terra equivale a 360° e 24 h.

29P. Em duas pistas diferentes, os vencedores da prova de uma milha fizeram os tempos de 3 min 58,05 s e 3 m 58,20 s. Para concluir que o corredor que fez o melhor tempo é realmente o mais rápido, qual o maior erro, em metros, que pode ser aceito ao se medirem as pistas?

30P. Cinco relógios estão sendo testados num laboratório. Em sete dias consecutivos, exatamente ao meio-dia, de acordo com o sinal de uma estação de rádio, as horas indicadas pelos relógios são anotadas. Os resultados aparecem na tabela, a seguir. Como você classificaria os cinco relógios em ordem de qualidade? Justifique.

Relógio	Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
A	12:36:40	12:36:56	12:37:12	12:37:27	12:37:44	12:37:59	12:38:14
B	11:59:59	12:00:02	11:59:57	12:00:07	12:00:02	11:59:56	12:00:03
C	15:50:45	15:51:43	15:52:41	15:53:39	15:54:37	15:55:35	15:56:33
D	12:03:59	12:02:52	12:01:45	12:00:38	11:59:31	11:58:24	11:57:17
E	12:03:59	12:02:49	12:01:54	12:01:52	12:01:32	12:01:22	12:01:12

31P. Supondo que a duração do dia aumenta uniformemente de 0,001 s por século, calcule o efeito cumulativo desse aumento em um período de 20 séculos. O fato de que a velocidade de rotação da Terra está diminuindo é comprovado pela observação do momento de ocorrência dos eclipses solares durante este período.

32P*. O tempo necessário para que a lua volte a uma dada posição em relação às estrelas fixas é chamado de mês sideral. O intervalo de tempo entre fases idênticas da lua é chamado de mês lunar. O mês lunar dura mais tempo que o mês sideral. Por quê? De quanto tempo é a diferença?

Seção 1-6 Massa

33E. Usando os dados e os fatores de conversão que aparecem neste capítulo, determine o número de átomos de hidrogênio necessário para obter 1,0 kg de hidrogênio. Um átomo de hidrogênio tem uma massa de 1,0 u.

34E. Uma molécula de água (H_2O) contém dois átomos de hidrogênio e um átomo de oxigênio. Um átomo de hidrogênio tem uma massa de 1,0 u e um átomo de oxigênio tem uma massa de 16 u, aproximadamente. (a) Qual é a massa em quilogramas de uma molécula de água? (b) Quantas moléculas de água existem nos oceanos da Terra, que possuem uma massa total estimada de $1,4 \times 10^{21}$ kg?

35E. A Terra tem uma massa de $5,98 \times 10^{24}$ kg. A massa média dos átomos que compõem a Terra é 40 u. Quantos átomos existem na Terra?

36P. Qual a massa de água que caiu na cidade do Problema 14 durante a tempestade? Um metro cúbico de água tem uma massa de 10^3 kg.

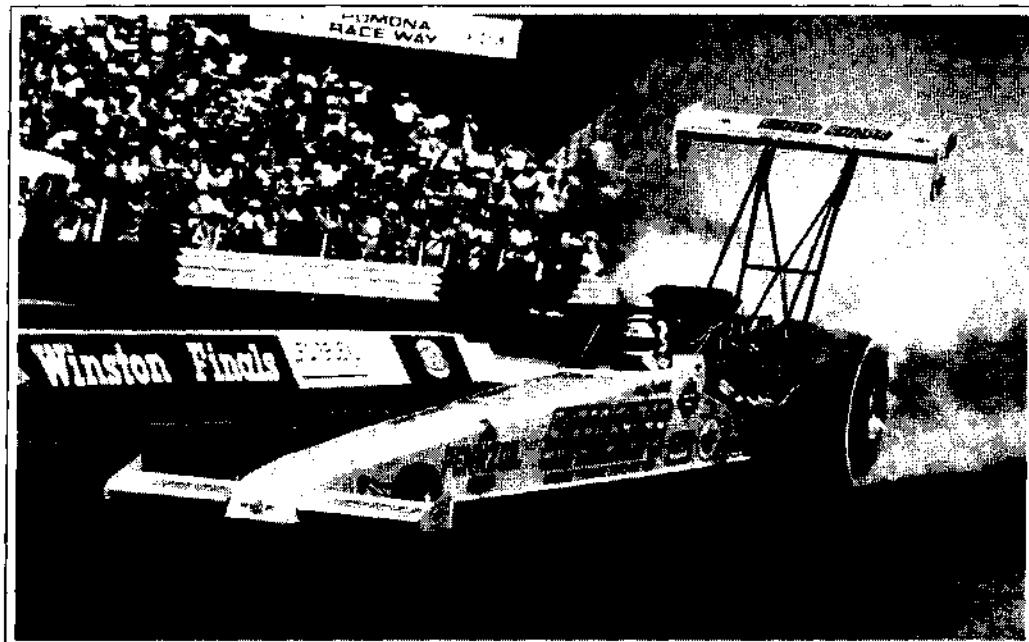
37P. (a) Supondo que a densidade (massa/volume) da água seja exatamente 1 g/cm^3 , calcule a densidade da água em quilogramas por metro cúbico (kg/m^3). (b) Suponha que são necessárias 10 h para esvaziar um recipiente com 5.700 m^3 de água. Com que rapidez a água está escorrendo, em quilogramas por segundo?

38P. Depois de começar uma dieta, uma pessoa passou a perder $2,3 \text{ kg}$ por semana. Expressse esse número em miligramas por segundo.

39P. Os grãos de areia de uma praia da Califórnia têm um raio médio de $50 \mu\text{m}$ e são feitos de dióxido de silício, 1 m^3 do qual possui massa de 2.600 kg . Que massa de grãos teria uma área superficial total igual à superfície de um cubo com 1 m de lado?

40P. A densidade do ferro é $7,87 \text{ g/cm}^3$ e a massa de um átomo de ferro é $9,27 \times 10^{-29} \text{ kg}$. Se os átomos são esféricos e estão dispostos de forma compacta, (a) qual é o volume de um átomo de ferro e (b) qual é a distância entre os centros de dois átomos adjacentes?

MOVIMENTO RETILÍNEO



*O disparo ensurdecedor de um dragster é um excelente exemplo de movimento retilíneo.
Mas, além do barulho, o que exatamente emociona o piloto?*

2-1 Movimento

O mundo, e tudo nele, está em movimento. Mesmo as coisas aparentemente imóveis, como uma rodovia, estão em movimento, devido à rotação da Terra em torno de seu eixo, ao movimento orbital da Terra em torno do Sol, ao movimento orbital do Sol em relação ao centro da Via-Láctea e ao deslocamento da galáxia em relação a outras galáxias. A classificação e a comparação dos movimentos (chamada de **cinemática**) são, com frequência, desafiadoras. O que, exatamente, medir, e como comparar?

Aqui estão dois exemplos de movimento. Kitty O'Neil, em 1977, estabeleceu um recorde para “velocidade final” e “tempo decorrido”, para um *dragster*, numa corrida de 400 m. Alcançou a velocidade de 631,7 km/h, partindo do repouso, num intervalo de tempo de 3,72 s. Eli Beeding, Jr. viajou num carro-foguete, que foi lançado numa pista, atingindo a velocidade de 117 km/h, a partir do repouso,

no incrível tempo de 0,04 s (menor do que um piscar de olhos). Como comparar os dois movimentos e saber qual é o mais sensacional (ou aterrorizante) — pela velocidade final, pelo tempo decorrido, ou por alguma outra grandeza?

Antes de tentarmos responder, examinaremos algumas propriedades gerais do movimento, que é restrito de três formas:

1. O movimento é, unicamente, retilíneo. A direção pode ser vertical (uma pedra caindo), horizontal (um carro se deslocando numa rodovia plana), ou inclinada, mas deve ser retilínea.
2. A causa do movimento só será estudada no Cap. 5. Neste capítulo, estudaremos, apenas, o movimento em si mesmo. O móvel está acelerado, desacelerado, parado, ou sua velocidade muda de sentido; e, se o movimento varia, como a variação depende do tempo?

3. O móvel, ou é uma **partícula** (um objeto puntiforme, como um elétron), ou é um corpo que se move como uma partícula (todos os pontos se deslocam na mesma direção e com a mesma velocidade). Um bloco deslizando para baixo num escorregador reto de *playground* pode ser tratado como uma partícula; entretanto, um carrossel em rotação não pode, porque pontos diferentes da sua borda movem-se em direções diferentes.

2-2 Posição e Deslocamento

Localizar um objeto significa determinar sua posição relativa a um ponto de referência, em geral, a **origem** (ou ponto zero) de um eixo, como o eixo x na Fig. 2-1. O **sentido positivo** do eixo é crescente na escala numérica, ou seja, para a direita, na figura. O **sentido negativo** é o oposto.

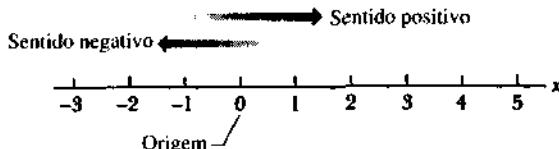


Fig. 2-1 A posição é determinada num eixo graduado em unidades de comprimento e que se prolonga indefinidamente em sentidos opostos.

Uma partícula pode, por exemplo, estar localizada em $x = 5\text{ m}$, significando que está a 5 m da origem, no sentido positivo. Se fosse em $x = -5\text{ m}$, estaria, igualmente, afastada da origem, mas no sentido oposto.

A variação de uma posição x_1 para outra posição x_2 chama-se **deslocamento** Δx , onde

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad (2-1)$$

(O símbolo Δ , que representa a variação de uma grandeza, significa que o valor inicial da grandeza deve ser subtraído do valor final.) Quando consideramos valores, um deslocamento no sentido positivo (para a direita, na Fig. 2-1) é um número positivo, e no sentido contrário (para a esquerda, na Fig. 2-1) é negativo. Por exemplo, se a partícula se move de $x_1 = 5\text{ m}$ para $x_2 = 12\text{ m}$, então $\Delta x = (12\text{ m}) - (5\text{ m}) = +7\text{ m}$. O sinal positivo (+) indica um deslocamento no sentido positivo. Se desconsiderarmos o sinal (por conseguinte, o sentido), temos o **módulo** de Δx , que é 7 m. Se a partícula agora retornar ao ponto inicial $x = 5\text{ m}$, o deslocamento total é zero. Não importa a quantidade de metros percorrida; então, o deslocamento envolve apenas a posição inicial e a final.*

O deslocamento é um exemplo de **grandeza vetorial**, porque possui módulo, direção e sentido. No Cap. 3, es-

tudaremos vetores mais detalhadamente (aliás, alguém pode já ter lido esse capítulo), mas aqui a ideia básica é que deslocamento tem duas características: (1) o módulo (por exemplo, o número de metros), que é a distância entre a posição inicial e a final, e (2) o sentido, num dado eixo, da posição inicial à final, que é representado por um sinal + ou -.

2-3 Velocidade Média e Velocidade Escalar Média†§

O posicionamento de um móvel é descrito, de forma sintetizada, por um gráfico da posição x em função do tempo t – o gráfico $x(t)$. A Fig. 2-2 mostra um exemplo simples de $x(t)$ para um coelho (que trataremos como uma partícula) em repouso no ponto $x = -2\text{ m}$.

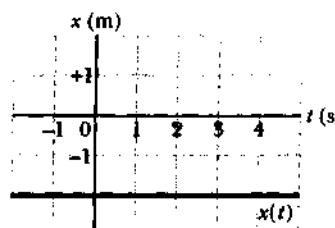


Fig. 2-2 Gráfico de $x(t)$ para um coelho, em repouso no ponto $x = -2\text{ m}$. O valor de x permanece constante em -2 m para todos os instantes t .

A Fig. 2-3a, também relativa ao coelho, é mais interessante, porque descreve um movimento. Em $t = 0$, o coelho foi observado na posição $x = -5\text{ m}$. Em seguida, se desloca para $x = 0$, passando por esse ponto no instante $t = 3\text{ s}$, e continua o movimento, no sentido positivo de x .

A Fig. 2-3b mostra esse movimento de forma semelhante a que veríamos. O gráfico é mais abstrato e menos parecido com o que veríamos, porém mais rico em informações e revela a rapidez do coelho. Várias grandezas estão associadas ao termo “rapidez”. Uma delas é a **velocidade média** \bar{v} , que é a razão do deslocamento Δx , ocorrido durante um determinado intervalo de tempo Δt , por esse intervalo de tempo:*

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (2-2)$$

* Em inglês, o vetor **velocidade** é designado pelo termo *velocity* (v), e a **velocidade escalar** por *speed* (\bar{s}), que algumas vezes é traduzida por *rapidez*. Neste livro, será usada a notação \bar{v} para designar a **velocidade média**, que é uma **grandeza vetorial**, e a notação $|v|$ (= s , no inglês) para designar a **velocidade escalar**, que é uma **grandeza escalar**. (N. do T.)

§ A definição de velocidade escalar apresentada neste livro não coincide com a que é adotada nos livros de 2.º grau normalmente utilizados no Brasil. Algumas vezes, ao longo deste livro, quando não há ambigüidade, o termo **velocidade escalar** é designado simplesmente por **velocidade**. (N. do R.)

* Neste livro, uma barra sobre um símbolo em geral, significa, o valor médio da grandeza representada pelo símbolo.

* Não confundir **deslocamento**, que é uma grandeza vetorial, e representa a diferença entre a posição inicial e a final do móvel, com **distância percorrida**, que é uma grandeza escalar, e representa o percurso total entre o início e o fim do movimento, sem levar em conta a direção, ou o sentido. (N. do T.)

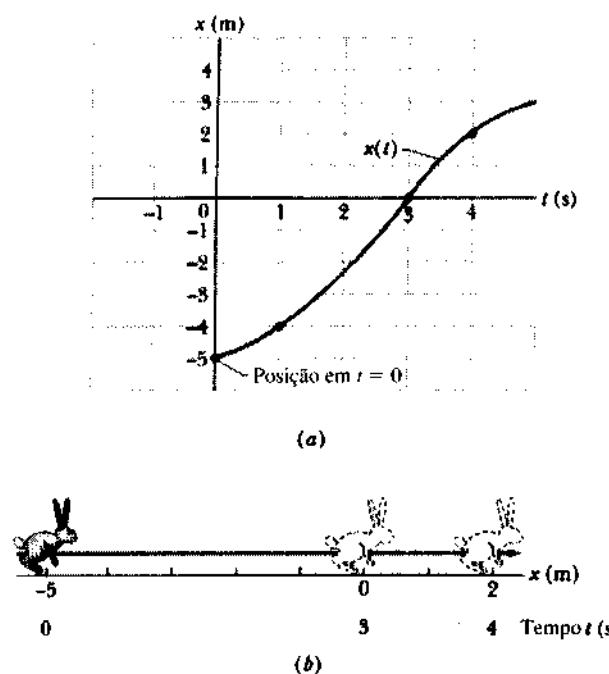
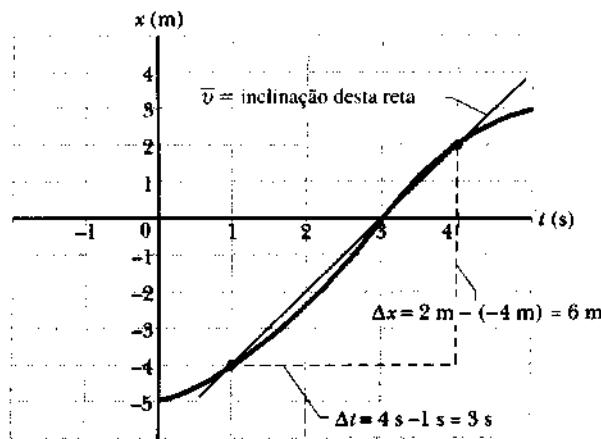


Fig. 2-3 (a) Gráfico $x(t)$ do movimento de um coelho. (b) A trajetória associada ao gráfico. A escala abaixo do eixo x mostra os instantes em que o coelho atingiu os vários valores de x .

No gráfico de x versus t , \bar{v} é a **inclinação** da reta que une dois pontos da curva $x(t)$: um ponto corresponde a x_2 e t_2 , e o outro a x_1 e t_1 . Da mesma forma que o deslocamento, \bar{v} tem módulo, direção e sentido. (Velocidade média é outro exemplo de grandeza vetorial.) Seu módulo é o da inclinação da reta. Um \bar{v} positivo (e uma inclinação positiva) significa que a reta se eleva à direita; um \bar{v} negativo (e uma inclinação negativa) significa que a reta se eleva à esquerda. A velocidade média e o deslocamento têm sempre o mesmo sinal, porque Δt é um número positivo.

A Fig. 2-4 mostra o cálculo de \bar{v} para o coelho da Fig. 2-3, no intervalo de $t = 1$ s a $t = 4$ s. A velocidade média durante esse intervalo de tempo é $\bar{v} = +6 \text{ m}/3 \text{ s} = +2 \text{ m/s}$, que é



a inclinação da reta que une os pontos da curva relativos ao início e ao fim do intervalo.

EXEMPLO 2-1 Um motorista dirige um veículo numa rodovia retilínea a 70 km/h. Após rodar 8,0 km, o veículo pára por falta de gasolina. O motorista caminha 2,0 km adiante, até o posto de abastecimento mais próximo, em 27 min (= 0,450 h). Qual a velocidade média do motorista desde o instante da partida do veículo até chegar ao posto? Obtenha a resposta numérica e graficamente.

Solução Para calcular \bar{v} , precisamos conhecer o deslocamento Δx , do início ao fim, e o tempo Δt decorrido durante o deslocamento. Para facilitar, admitamos que o ponto de partida é a origem do eixo x ($x_1 = 0$) e que o movimento é no sentido positivo. O ponto de chegada é $x_2 = 8,0 \text{ km} + 2,0 \text{ km} = +10 \text{ km}$, então, $\Delta x = x_2 - x_1 = 10 \text{ km}$. Da Eq. 2-2, podemos calcular o intervalo de tempo em que o motorista dirigiu o veículo:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\bar{v}} = \frac{8,0 \text{ km}}{70 \text{ km/h}} = 0,114 \text{ h}.$$

Então, o tempo total, da origem até o final, é

$$\Delta t = 0,114 \text{ h} + 0,450 \text{ h} = 0,564 \text{ h}.$$

Finalmente, substituindo Δx e Δt na Eq. 2-2:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10 \text{ km}}{0,564 \text{ h}} \approx +18 \text{ km/h}. \quad (\text{Resposta})$$

Para encontrarmos \bar{v} graficamente, traçamos primeiro $x(t)$, como na Fig. 2-5, onde o ponto inicial está na origem e o final, em P . A velocidade média do motorista é a inclinação da reta que une esses pontos. As linhas pontilhadas na figura mostram que a inclinação realmente é $\bar{v} = 10 \text{ km}/0,56 \text{ h} = +18 \text{ km/h}$.

EXEMPLO 2-2 Admitamos que o motorista tenha levado 35 min para carregar o combustível do posto ao carro. Qual a velocidade média do motorista, do instante em que iniciou a viagem até chegar ao carro com o combustível?

Solução Como no exemplo anterior, devemos calcular o deslocamento, do ponto de origem até o final, e depois dividi-lo pelo intervalo de tempo Δt entre os dois pontos. Entretanto, neste exemplo, o ponto final é o

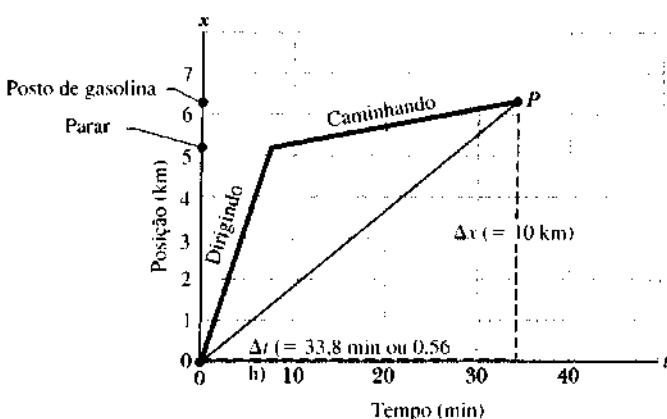


Fig. 2-5 Exemplo 2-1. As linhas assinaladas como "dirigindo" e "caminhando" são os gráficos da posição versus o tempo para o motorista do Exemplo 2-1. A inclinação da reta que une a origem ao ponto P é a velocidade média da viagem.

retorno ao veículo. A origem é o ponto $x_1 = 0$. O ponto de término (retorno ao veículo) é $x_2 = 8,0$ km. Então, $\Delta x = 8,0 - 0 = 8,0$ km. O tempo total Δt decorrido da origem até o final é

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{8,0 \text{ km}}{70 \text{ km/h}} + 27 \text{ min} + 35 \text{ min} \\ &\approx 0,114 \text{ h} + 0,450 \text{ h} + 0,583 \text{ h} = 1,15 \text{ h.}\end{aligned}$$

Logo,

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{8,0 \text{ km}}{1,15 \text{ h}} \approx +7,0 \text{ km/h.} \quad (\text{Resposta})$$

Neste caso, a velocidade média é menor do que a calculada no Exemplo 2-1, porque o deslocamento é menor e o intervalo de tempo é maior.

Velocidade escalar média \bar{v} é uma forma diferente de descrever a “rapidez” de uma partícula. Enquanto a velocidade média é função do deslocamento Δx , da partícula, a velocidade escalar média é função da distância total percorrida (por exemplo, o número de metros percorridos), independente do sentido. Isto é,

$$\bar{v} = \frac{\text{distância total percorrida}}{\Delta t} \quad (2-3)$$

A velocidade escalar média difere, também, da velocidade média porque não considera o sentido do deslocamento, e, por conseguinte, não possui sinal algébrico. Algumas vezes, $|\bar{v}|$ é igual a \bar{v} (sem levar em conta o sinal). Mas, conforme demonstrado no Exemplo 2-3, a seguir, quando um móvel retorna em sua trajetória, os resultados podem ser bem diferentes.

EXEMPLO 2-3 No Exemplo 2-2, qual é a velocidade escalar média do motorista?

Solução Do início da viagem até o retorno ao veículo com o combustível, foi percorrido um total de $8,0 \text{ km} + 2,0 \text{ km} + 2,0 \text{ km} = 12 \text{ km}$, em $1,15 \text{ h}$, então,

$$|\bar{v}| = \frac{12 \text{ km}}{1,15 \text{ h}} \approx 10 \text{ km/h.} \quad (\text{Resposta})$$

TÁTICAS PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 1: LEIA O PROBLEMA CUIDADOSAMENTE

A dificuldade mais comum para um iniciante na resolução de problemas é simplesmente não entender o problema. A melhor maneira de testar a compreensão é: Você consegue, com suas próprias palavras, explicar o problema a um amigo? Tente.

TÁTICA 2: COMPREENDA O QUE É DADO E O QUE É PEDIDO

Anote os dados do problema, com as unidades, fazendo uso da simbologia do capítulo respectivo. (Nos Exemplos 2-1 e 2-2, os dados permitem encontrar o deslocamento Δx e o intervalo de tempo correspondente Δt .) Identifique o que se quer saber e o respectivo símbolo. (Nos exemplos em questão, é a velocidade média, símbolo \bar{v} .) Faça a

correspondência entre a grandeza desconhecida e os dados do problema. (A correspondência é a Eq. 2-2, que define a velocidade média.)

TÁTICA 3: OBSERVE AS UNIDADES

Use as unidades apropriadas, quando trabalhar numericamente com as equações. Nos Exemplos 2-1 e 2-2, relacionados a um veículo, as unidades apropriadas são: quilômetros, para distâncias; horas, para intervalos de tempo; e quilômetros por hora, para velocidades. Pode ser necessário fazer conversões.

TÁTICA 4: ANALISE A RESPOSTA

Observe a sua resposta e pergunte a você mesmo se ela faz sentido. É excessivamente grande ou excessivamente pequena? O sinal está correto? As unidades são apropriadas? A resposta correta, no Exemplo 2-1, é 18 km/h. Se você encontrou 0,00018 km/h, – 18 km/h, 18 km/s ou 18.000 km/h, deve dar-se conta de que fez algo errado. O erro pode estar no método adotado, no cálculo algébrico, ou no aritmético. Verifique o problema com cuidado, tenha certeza de começar pelo início.

No Exemplo 2-1, a resposta tem que ser maior do que a velocidade do caminhar normal de uma pessoa (3-5 km/h), mas menor do que a velocidade do veículo (70 km/h). Finalmente, a resposta do Exemplo 2-2 tem que ser menor do que a do Exemplo 2-1, por duas razões: no Exemplo 2-2, o módulo do deslocamento é menor, em relação ao exemplo anterior, enquanto o tempo necessário ao deslocamento é maior.

TÁTICA 5: INTERPRETE O GRÁFICO

As Figs. 2-2, 2-3a, 2-4 e 2-5 são exemplos de gráficos que você deveria ser capaz de interpretar com facilidade. O tempo t , em cada gráfico, é a variável ao longo do eixo horizontal, e cresce para a direita. No eixo vertical, a variável é a posição x do móvel em relação à origem, e cresce para cima.

Observe sempre as unidades (segundos ou minutos; metros, quilômetros, ou milhas) em que as variáveis são expressas, e se são positivas ou negativas.

TÁTICA 6: ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS

Se tiver que dividir 137 balas entre três pessoas, não conseguirá dar a cada uma, *exatamente*, $137/3$, ou 45.666666... balas. Daria 45 balas a cada pessoa e sortearia as duas restantes. É necessário desenvolver o mesmo raciocínio ao lidar com cálculos numéricos na física.

No Exemplo 2-1, a velocidade média estimada que seria encontrada com o auxílio de uma calculadora é $\bar{v} = 17,73049645$ km/h. Esse número tem 10 algarismos significativos. Os dados originais, no problema, têm apenas dois algarismos significativos.

Em geral, nenhum resultado poderá ter mais algarismos significativos que os dados que o originaram.

Se são necessárias várias etapas de cálculos, deve-se trabalhar com mais algarismos significativos que os dados de origem contêm. Entretanto, quando se chega ao resultado final, deve-se arredondá-lo de acordo com o dado que contém o menor número de algarismos significativos. Fizemos isso no Exemplo 2-1 para obter $\bar{v} \approx 18$ km/h. (A partir de agora, a resposta de um problema pode ser apresentada com o sinal = em vez de \approx , mas o arredondamento deve ser mantido.)

É difícil evitar a sensação de que você está jogando fora dados válidos quando os arredonda dessa forma, mas, de fato, você está fazendo o contrário: está jogando fora números inúteis e enganosos. A calculadora pode ser ajustada para fazer isso. Ela continuará processando, internamente, todos os algarismos, mas só exibirá o resultado com o arredondamento que desejar.

Quando o número 3,15 ou $3,15 \times 10^3$ é fornecido num problema, os algarismos significativos não deixam dúvidas. Mas, o que dizer do número 3.000? Mostrando-se apenas um algarismo significativo (poderia ser escrito da forma 3×10^3)? Ou são mostrados quatro algarismos (poderia ser escrito como $3,000 \times 10^3$)? Neste livro, adotamos que todos os zeros, como no número 3.000, são significativos, mas o melhor é não generalizar.

TÁTICA 7: ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS E CASAS DECIMais

Não faça confusão. Considere as medidas 35,6 m; 3,56 m; 0,356 m e 0,00356 m. Todas têm três algarismos significativos, mas uma, duas, três e cinco casas decimais, respectivamente.

2-4 Velocidade Instantânea e Velocidade Escalar

Até agora, vimos duas maneiras de descrever a rapidez com que algo se move: velocidade média e velocidade escalar média, ambas medidas em relação a um intervalo de tempo Δt . Porém, o termo “rapidez”, em geral, se refere a quanto rápido uma partícula se move em um dado instante — sua **velocidade instantânea v** (ou simplesmente **velocidade**).

A velocidade, em um instante qualquer, é igual à velocidade média, quando o intervalo de tempo Δt tende a zero. À medida que Δt diminui, a velocidade média tende a um valor limite, que é a velocidade naquele instante:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (2-4)$$

Sendo a velocidade um vetor, tem uma direção e um sentido associados.

A Tabela 2-1 mostra um exemplo de processo de limite. A primeira coluna dá a posição x de uma partícula em $t = 1$ s, que é a origem do intervalo de tempo Δt . A terceira e a quarta colunas dão, respectivamente, os valores de x e t no final do intervalo Δt . A quinta e a sexta colunas fornecem, respectivamente, o deslocamento Δx e o intervalo Δt (que está diminuindo). À medida que Δt diminui, \bar{v} ($= \Delta x / \Delta t$, na última coluna) varia gradativamente até o valor limite de + 4,0 m/s. Essa é a velocidade instantânea v em $t = 1$ s.

Na linguagem do cálculo diferencial, a velocidade instantânea é a taxa de variação da posição x , da partícula, com o tempo, em um determinado instante. De acordo com a Eq. 2-4, a velocidade em um determinado instante é a inclinação da curva de posição, no ponto que representa aquele instante.

Velocidade escalar é o módulo da velocidade, isto é, velocidade escalar é a velocidade sem qualquer indicação de direção e sentido.* Uma velocidade de + 5 m/s e outra de - 5 m/s estão associadas à mesma velocidade escalar de 5 m/s. O velocímetro de um carro mede a velocidade escalar, e não a velocidade, porque ele não tem informações acerca da direção e do sentido do movimento do veículo.

EXEMPLO 2-4 A Fig. 2-6a mostra o gráfico $x(t)$ do movimento de um elevador, que, a partir do repouso, desloca-se para cima (que arbitramos ser o sentido positivo) e pára. Trace o gráfico de $v(t)$ em função do tempo.

Solução Nos pontos a e d , a inclinação, e por conseguinte a velocidade, é zero, porque o elevador está parado. No intervalo bc , o elevador se move com velocidade constante, e a inclinação de $x(t)$ é

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{24 \text{ m} - 4,0 \text{ m}}{8,0 \text{ s} - 3,0 \text{ s}} = +4,0 \text{ m/s.}$$

O sinal + indica que o deslocamento é no sentido positivo de x . Esses valores estão graficamente mostrados na Fig. 2-6b. Os intervalos de 1 s a 3 s e de 8 s a 9 s indicam respectivamente o início do movimento e depois sua redução até parar. (A Fig. 2-6c será considerada mais tarde.)

Dado um gráfico $v(t)$, como na Fig. 2-6b, podemos, “de forma inversa”, traçar o gráfico $x(t)$ correspondente (Fig. 2-6a). Entretanto, não podemos saber os valores de x a cada instante, sem termos mais informações, porque o gráfico $v(t)$ indica, apenas, variações em x . Para obtermos a variação de x em qualquer intervalo, devemos, na linguagem do cálculo diferencial, determinar a “área sob a curva”, no gráfico $v(t)$, para aquele intervalo. Por exemplo, no intervalo em que a velocidade do elevador é 4,0 m/s, a variação em x é dada pela “área” sob a curva $v(t)$:

$$\text{área} = (4,0 \text{ m/s})(8,0 \text{ s} - 3,0 \text{ s}) = +20 \text{ m.}$$

(Essa área é positiva, porque a curva $v(t)$ está acima do eixo t .) A Fig. 2-6a mostra que x , realmente, aumenta 20 m, naquele intervalo.

EXEMPLO 2-5 A posição de uma partícula que se move ao longo do eixo x é dada por

$$x = 7,8 + 9,2t - 2,1t^2. \quad (2-5)$$

Qual é a velocidade em $t = 3,5$ s? A velocidade é constante ou está continuamente variando?

* Velocidade escalar e velocidade escalar média podem ser completamente diferentes; logo, resolva com cuidado problemas que envolvam essas grandezas.

Tabela 2-1
O Processo de Limite

Posição Inicial		Posição Final		Intervalos		Velocidade
x_1 (m)	t_1 (s)	x_2 (m)	t_2 (s)	Δx (m)	Δt (s)	$\Delta x / \Delta t$ (m/s)
5,00	1,00	9,00	3,00	4,00	2,00	+2,0
5,00	1,00	8,75	2,50	3,75	1,50	+2,5
5,00	1,00	8,00	2,00	3,00	1,00	+3,0
5,00	1,00	6,75	1,50	1,75	0,50	+3,5
5,00	1,00	5,760	1,200	0,760	0,200	+3,8
5,00	1,00	5,388	1,100	0,388	0,100	+3,9
5,00	1,00	5,196	1,050	0,196	0,050	+3,9
5,00	1,00	5,158	1,040	0,158	0,040	+4,0 um valor limite
5,00	1,00	5,119	1,030	0,119	0,030	+4,0 foi alcançado

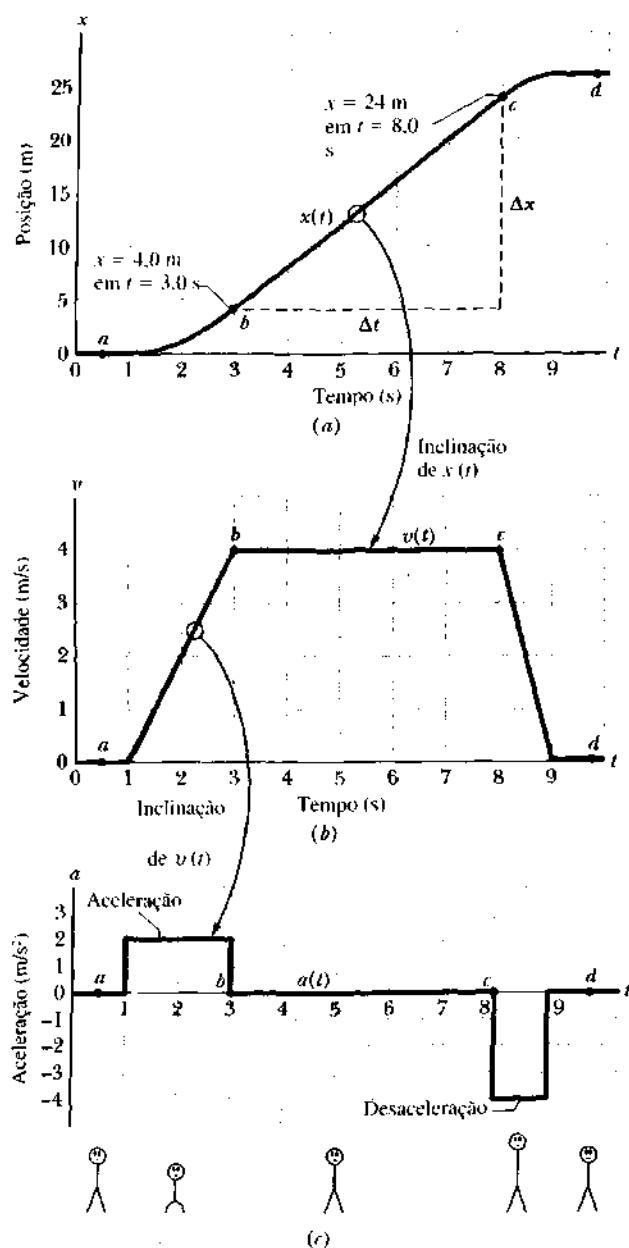


Fig. 2-6 Exemplo 2.4. (a) Curva $x(t)$ para um elevador que se movimenta para cima, no eixo x . (b) Curva $v(t)$ do elevador. Observe que ela é a derivada de $x(t)$ ($v = dx/dt$). (c) A curva $a(t)$ do elevador. Ela é a derivada de $v(t)$ ($a = dv/dt$). Os bonequinhos representam a reação do corpo de um passageiro às acelerações do elevador.

Solução Por simplificação, foram omitidas as unidades, mas você pode, se desejar, mudar os coeficientes da equação para 7.8 m; 9.2 m/s e 2.1 m/s². Para resolver o problema, usamos a Eq. 2-4, substituindo x , no termo da direita, pela Eq. 2-5:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(7.8 + 9.2t - 2.1t^2),$$

resultando,

$$v = 0 + 9.2 - (3)(2.1)t^2 = 9.2 - 6.3t^2. \quad (2-6)$$

Em $t = 3.5$ s,

$$v = 9.2 - (6.3)(3.5)^2 = -68 \text{ m/s.} \quad (\text{Resposta})$$

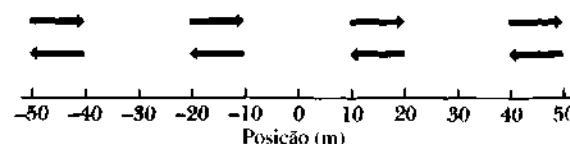
Em $t = 3.5$ s, a partícula se move no sentido decrescente de x (note o sinal $-$) com a velocidade escalar de 68 m/s. Como a velocidade v depende de t , de acordo com a Eq. 2-6, dizemos que a velocidade varia continuamente.

TÁTICAS PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 8: NÚMEROS NEGATIVOS

A linha a seguir representa o eixo x , com a origem ($x = 0$) no centro. Usando esta escala, procure compreender que -40 m é menor do que -10 m , e que ambos são menores do que 20 m . Observe também que 10 m é maior do que -30 m .

As quatro setas apontando para a direita representam aumentos em x , isto é, Δx positivos. As quatro setas apontando para a esquerda representam decréscimos em x , isto é, Δx negativos.



TÁTICA 9: INCLINAÇÕES E DERIVADAS

Toda derivada representa a inclinação de uma curva. No Exemplo 2-4, a velocidade instantânea do elevador (uma derivada, veja a Eq. 2-4) é a inclinação da curva $x(t)$, da Fig. 2-6a, naquele instante. A seguir mostramos como obter graficamente a inclinação (e, assim, a derivada).

A Fig. 2-7 mostra a curva $x(t)$ para o movimento de uma partícula. Para obter a velocidade em $t = 1$ s, marque um ponto sobre a curva, correspondente a esse instante. Trace, com cuidado, uma tangente à curva nesse ponto (*tangente* significa *que toca*; a tangente toca a curva num único ponto, o ponto assinalado). Construa o triângulo retângulo ABC. (Como a inclinação é a mesma, não importando o tamanho do triângulo, que, quanto maior for, mais precisa será a medida no gráfico.) Pelas coordenadas vertical e horizontal, obtemos, respectivamente, Δx e Δt , com módulo, sinal e unidade. Na Fig. 2-7, a inclinação (derivada) é dada pela equação:

$$\text{inclinação} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5.5 \text{ m} - 2.3 \text{ m}}{1.8 \text{ s} - 0.3 \text{ s}} = \frac{3.2 \text{ m}}{1.5 \text{ s}} = +2.1 \text{ m/s.}$$

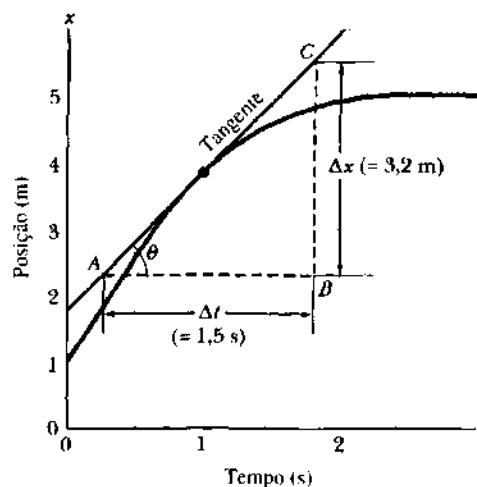


Fig. 2-7 A derivada de uma curva em qualquer ponto é a inclinação da reta tangente nesse ponto. Em $t = 1.0$ s, a inclinação da reta tangente (portanto, a velocidade instantânea dx/dt) é $\Delta x/\Delta t = +2.1$ m/s.

De acordo com a Eq. 2-4, essa inclinação é a velocidade da partícula em $t = 1$ s.

Se a escala do eixo x ou t , da Fig. 2-7, variar, o aspecto da curva e o ângulo θ mudarão, mas o valor encontrado para a velocidade, em $t = 1$ s, permanece o mesmo.

Se a função $x(t)$ for representada por uma expressão matemática, como no Exemplo 2-5, podemos calcular a derivada dx/dt pelo cálculo diferencial, dispensando o método gráfico.

2-5 Aceleração

Quando a velocidade de uma partícula varia, dizemos que ela está sob uma **aceleração** (ou está acelerada). A **aceleração média** \bar{a} em um intervalo Δt é

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (2-7)$$

A **aceleração instantânea** (ou simplesmente aceleração) é a derivada da velocidade:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (2-8)$$

Em outras palavras, a aceleração de uma partícula, em um determinado instante, é a taxa de variação da velocidade, naquele instante. Conforme a Eq. 2-8, a aceleração em qualquer ponto é a inclinação da curva $v(t)$, nesse ponto.

A unidade usual da aceleração é metro por segundo por segundo: $m/(s.s)$ ou m/s^2 . Veremos, em problemas, outras unidades, mas que sempre aparecerão na forma de distância / (tempo.tempo) ou distância/tempo². A aceleração possui módulo, direção e sentido (é uma grandeza vetorial). O sinal algébrico representa o sentido num dado eixo, da mesma forma que para o deslocamento e a velocidade.

A Fig. 2-6c representa a aceleração do elevador discutido no Exemplo 2-4. Compare com a curva $v(t)$ — cada ponto na curva $a(t)$ é a derivada (inclinação) de $v(t)$, no ponto considerado. Quando v é constante (em 0 ou 4 m/s), a derivada é zero, logo, a aceleração é nula. Quando o elevador começa a mover-se, a curva $v(t)$ tem derivada positiva (inclinação positiva), isto é, $a(t)$ é positiva. Quando o elevador diminui a velocidade, até parar, a derivada e a inclinação de $v(t)$ são negativas; isto é, $a(t)$ é negativa.

Compare, a seguir, as inclinações de $v(t)$ durante os dois períodos de aceleração. A inclinação associada ao elevador parando (comumente chamada de “desaceleração”) é mais abrupta, porque o elevador pára na metade do tempo que levou para ganhar velocidade. Essa inclinação mais acentuada, na Fig. 2-6c, mostra que a desaceleração é maior, em módulo, do que a aceleração.

As sensações que sentiríamos, no interior do elevador da Fig. 2-6, estão indicadas pelos bonequinhos na figura. Quando o elevador inicia a aceleração, nos sentimos pressionados contra o chão; depois, quando é freado, nos sentimos esticados para cima. Entre esses intervalos, não sentimos nada em especial. Nosso corpo reage às acelerações (é um acelerômetro), mas não às velocidades (não é um velocímetro). Quando estamos viajando num carro a 100



Fig. 2-8 O Coronel J. P. Stapp, fotografado num veículo propulsado no instante em que foi submetido a grande aceleração (sentido da aceleração, saindo da página) e no instante em que foi bruscamente freado (sentido da aceleração, entrando na página).

km/h, ou num avião a 1.000 km/h, não temos sensação corporal de estarmos em movimento. Mas, se o carro, ou o avião variar a velocidade bruscamente, somos capazes de sentir tal variação. Num parque de diversões, as maiores sensações são causadas pelos brinquedos que nos submetem a variações súbitas de velocidade. Um exemplo extremo está na Fig. 2-8, que mostra, numa sequência de fotografias, os efeitos de uma rápida aceleração, seguida de uma parada brusca, num veículo propulsado.

EXEMPLO 2-6 a. Quando Kitty O'Neil estabeleceu o recorde para a maior velocidade e o menor tempo decorrido para um *dragster*, ela alcançou a marca de 631,7 km/h em 3,72 s. Qual foi sua aceleração média?

Solução Da Eq. 2-7, a aceleração média de O'Neil foi

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{631,7 \text{ km/h} - 0}{3,72 \text{ s} - 0}$$

$$= +170 \frac{\text{km}}{\text{h} \cdot \text{s}}, \quad (\text{Resposta})$$

consideramos o movimento orientado positivamente no eixo *x*. Utilizando uma unidade mais convencional, sua aceleração foi de $47,1 \text{ m/s}^2$. Em geral, as grandes acelerações são expressas na unidade “*g*”, onde $1g = 9,8 \text{ m/s}^2 (= 32 \text{ ft/s}^2)$, como será explicado na Seção 2-8. A aceleração média de O'Neil foi de $4,8g$.

b. Qual foi a aceleração média de Eli Beeding Jr. quando alcançou a marca de 117 km/h, em 0,04 s, num carro-foguete?

Solução Novamente, da Eq. 2-7,

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{117 \text{ km/h} - 0}{0,04 \text{ s} - 0}$$

$$= +2,9 \times 10^3 \frac{\text{km}}{\text{h} \cdot \text{s}} \approx +800 \text{ m/s}^2, \quad (\text{Resposta})$$

ou cerca de $80g$.

Recordando a Seção 2-1, quando nos referimos aos exemplos de O'Neil e Beeding, como podemos classificar qual o feito mais fantástico — pela velocidade final, pelo tempo decorrido, ou por outro fator? Agora podemos responder. Como o corpo humano é sensível à aceleração e não à velocidade, comparando as acelerações de Beeding e O'Neil, vemos que Beeding foi o vencedor, mesmo com uma velocidade final bem menor do que a de O'Neil. A aceleração de Beeding poderia ter sido mortal se durasse muito mais tempo.

TÁTICA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 10: O SINAL DA ACELERAÇÃO

Observe, mais uma vez, o sinal para a aceleração calculada no Exemplo 2-6. Em muitos exemplos sobre aceleração, o sinal tem um significado de senso comum: aceleração positiva implica um aumento de velocidade do móvel (como um carro) e aceleração negativa implica a diminuição da velocidade (o móvel está desacelerando).

Entretanto, algumas considerações devem ser observadas na aplicação dessa regra. Por exemplo, se a velocidade inicial de um carro é $v = -27 \text{ m/s} (= -60 \text{ mi/h})$ e ele é freado até parar em 5,0 s, $\bar{a} = +5,4 \text{ m/s}^2$. Observe que a aceleração é *positiva*, mas o carro está parando. A razão está na diferença dos sinais: o sentido da aceleração é contrário ao da velocidade.

Portanto, o melhor é interpretar os sinais da seguinte maneira: se a velocidade e a aceleração têm o mesmo sinal, então o móvel está aumentando a velocidade escalar; se os sinais são diferentes, a velocidade está diminuindo. Essa interpretação será mais bem entendida adiante, quando estudarmos a natureza vetorial da velocidade e da aceleração.

EXEMPLO 2-7 A posição de uma partícula é dada por

$$x = 4 - 27t + t^3,$$

onde as unidades dos coeficientes são m, m/s e m/s³, respectivamente, e o eixo *x* está mostrado na Fig. 2-1.

a. Calcular $v(t)$ e $a(t)$.

Solução Para obter $v(t)$, vamos derivar $x(t)$ em relação a *t*:

$$v = -27 + 3t^2. \quad (\text{Resposta})$$

Para obter $a(t)$, derivamos $v(t)$ em relação a *t*:

$$a = +6t. \quad (\text{Resposta})$$

b. Em algum instante $v = 0$?

Solução Fazendo $v(t) = 0$, temos

$$0 = -27 + 3t^2,$$

cuja solução é $t = \pm 3 \text{ s}$. (Resposta)

c. Descreva o movimento da partícula para $t \geq 0$.

Solução Para responder, vamos observar as expressões de $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$.

Em $t = 0$, a partícula está em $x = +4 \text{ m}$, movendo-se para a esquerda com a velocidade de -27 m/s e com aceleração igual a zero, nesse instante.

Para $0 < t < 3 \text{ s}$, a partícula continua o movimento para a esquerda, mas a velocidade escalar diminui, porque a aceleração é para a direita. (Verifique $v(t)$ e $a(t)$ para $t = 2 \text{ s}$.) A taxa de aceleração está aumentando.

Em $t = 3 \text{ s}$, a partícula pára momentaneamente ($v = 0$) e está na posição mais afastada possível para a esquerda ($x = -50 \text{ m}$). A aceleração continua para a direita, crescendo.

Para $t > 3 \text{ s}$, a aceleração continua crescendo para a direita, e a velocidade, que agora também é para a direita, cresce rapidamente. (Observe que os sinais de v e a são os mesmos.) A partícula se move para a direita indefinidamente.

2-6 ACELERAÇÃO CONSTANTE: UM CASO ESPECIAL*

Em muitos tipos de movimento, a aceleração é constante, ou aproximadamente constante. Por exemplo, podemos acelerar um carro de forma aproximadamente constante quando um sinal de trânsito passa de vermelho para verde. (Os gráficos de posição, velocidade e aceleração seriam parecidos com os da Fig. 2-9.) Se depois tivermos que frear o carro até parar, a desaceleração, durante a freada, também pode ser considerada aproximadamente constante.

Esses casos são tão freqüentes, que um conjunto especial de equações foi definido para tratá-los. Nesta seção,

* O movimento retílineo com aceleração constante também é conhecido como movimento retílineo uniformemente variado (MRUV); a aceleração instantânea e a aceleração média são iguais ($a = \bar{a}$). (N. do T.)

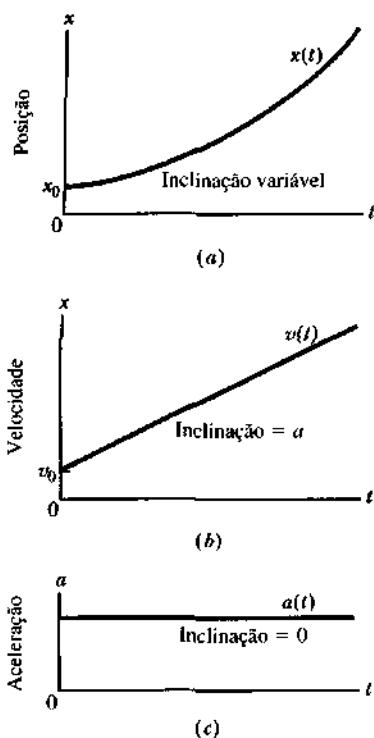


Fig. 2-9 (a) A posição $x(t)$ de uma partícula que se move com aceleração constante. (b) A velocidade $v(t)$ dada em cada ponto pela inclinação da curva em (a). (c) A aceleração (constante) é igual à inclinação (constante) de $v(t)$.

apresentaremos um método para a dedução dessas equações. Na próxima seção, apresentaremos um segundo método. Nas duas seções e mais tarde, quando for resolver problemas, tenha em mente que *essas equações são válidas apenas para aceleração constante (ou em situações nas quais podemos considerá-la aproximadamente como tal)*.

Quando a aceleração é constante, a aceleração média e a aceleração instantânea são iguais, e podemos escrever a Eq. 2-7 de uma outra forma,

$$\alpha = \frac{v - v_0}{t - 0}.$$

Nesse caso, v_0 é a velocidade em $t = 0$ e v é a velocidade num instante t posterior qualquer. Podemos reapresentar a equação como

$$v = v_0 + at. \quad (2-9)$$

Observe que essa equação se reduz a $v = v_0$ para $t = 0$, como era de se esperar. Agora, vamos derivar a Eq. 2-9. Fazendo isso, obtemos $dv/dt = a$, que é a definição de a . A Fig. 2-9b mostra a curva da Eq. 2-9, a função $v(t)$.

De maneira análoga, podemos reescrever a Eq. 2-2 (com ligeiras modificações na notação) como

$$x = x_0 + \bar{v}t, \quad (2-10)$$

onde x_0 é a posição da partícula em $t = 0$, e \bar{v} é a velocidade média entre $t = 0$ e o instante t posterior.

Se traçarmos $v \times t$ utilizando a Eq. 2-9, o resultado será uma linha reta. Em tais condições, a velocidade média em qualquer intervalo de tempo (por exemplo, $t = 0$ até t) é a média entre a velocidade no início do intervalo ($= v_0$) e a velocidade no final do intervalo ($= v$). Então, para o intervalo $t = 0$ até t , a velocidade média é

$$\bar{v} = \frac{1}{2}(v_0 + v). \quad (2-11)$$

Substituindo v da Eq. 2-9 e rearrumando, temos,

$$\bar{v} = v_0 + \frac{1}{2}at. \quad (2-12)$$

Finalmente, substituindo a Eq. 2-12 na Eq. 2-10, temos

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \quad (2-13)$$

Observe que fazendo $t = 0$ temos $x = x_0$, como esperado. Note também que, derivando a Eq. 2-13, obtemos a Eq. 2-9. A Fig. 2-9a é a representação gráfica da Eq. 2-13.

Nos problemas relacionados à aceleração constante, cinco variáveis, $x - x_0$, v , t , a e v_0 , têm grande possibilidade de estar presentes. Às vezes, uma delas *não* faz parte do problema, *nem como um dado nem como uma incógnita*. Nesse caso, então, o problema deve fornecer três delas e pedir uma quarta.

As Eqs. 2-9 e 2-13 relacionam, cada qual, quatro dessas variáveis, mas não as mesmas quatro. Na Eq. 2-9, o deslocamento $x - x_0$ está “ausente”, enquanto na Eq. 2-13 é a velocidade v que está “ausente”. Essas duas equações podem ser combinadas de três maneiras diferentes, fornecendo três outras equações, cada qual envolvendo uma variável “ausente” diferente. Assim,

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0). \quad (2-14)$$

Essa equação é útil quando t é desconhecido e não é pedido.* Por outro lado, eliminando \bar{a} nas duas equações, temos:

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t. \quad (2-15)$$

Finalmente, eliminando v_0 , temos

$$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2. \quad (2-16)$$

Observe a diferença sutil entre esta equação e a Eq. 2-13. Uma envolve a velocidade inicial v_0 ; a outra a velocidade v no instante t .

A Tabela 2-2 relaciona as Eqs. 2-9, 2-13, 2-14, 2-15 e 2-16 e mostra a variável ausente em cada uma. Na resolu-

*A Eq. 2-14 é conhecida como Equação de Torricelli. (N. do T.)

Tabela 2-2
Equações para o Movimento com Aceleração Constante*

Número da Equação	Equação	Variável Ausente
2-9	$v = v_0 + at$	$x - x_0$
2-13	$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	v
2-14	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t
2-15	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	a
2-16	$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	v_0

* Certifique-se de que a aceleração é realmente constante, antes de trabalhar com as equações desta tabela. Observe que a Eq. 2-9 é a derivada da Eq. 2-13. As outras três são obtidas por eliminação de alguma variável entre as Eqs. 2-9 e 2-13.

ção de problemas de aceleração constante, devemos verificar qual das cinco variáveis está ausente, porque não foi dada e porque não é uma incógnita a calcular. Selecionamos na Tabela 2-2 a equação conveniente, substituímos as três variáveis fornecidas e calculamos a quarta. Em vez de usarmos a tabela, também podemos resolver um sistema com as Eqs. 2-9 e 2-13, e chegar, mais facilmente, à solução do problema.

EXEMPLO 2-8 Avistando um carro da polícia, você freia seu carro, reduzindo a velocidade de 75 km/h para 45 km/h, num espaço de 88 m.

a. Qual é a aceleração, considerando-a constante?

Solução Neste exemplo, o tempo não está relacionado, não é uma variável nem conhecida nem pedida. Assim, pela Tabela 2-2, utilizamos a Eq. 2-14. Resolvendo esta equação para a , obtemos,

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)} = \frac{(45 \text{ km/h})^2 - (75 \text{ km/h})^2}{(2)(0,088 \text{ km})} = -2,05 \times 10^4 \text{ km/h}^2 \approx -1,6 \text{ m/s}^2. \quad (\text{Resposta})$$

(Ao converter horas para segundos, na última etapa, devemos fazê-lo nas *duas* vezes em que o h aparece.) Observe que as velocidades são positivas e a aceleração é negativa, porque o carro está diminuindo a velocidade escalar.

b. Qual é o intervalo de tempo?

Solução Agora, o tempo está sendo pedido, mas a aceleração não. Pela Tabela 2-2, utilizamos a Eq. 2-15. Calculando para t , temos

$$t = \frac{2(x - x_0)}{v_0 + v} = \frac{(2)(0,088 \text{ km})}{(75 + 45) \text{ km/h}} = 1,5 \times 10^{-3} \text{ h} = 5,4 \text{ s}. \quad (\text{Resposta})$$

c. Se continuar diminuindo a velocidade do carro, com a aceleração calculada em (a), em quanto tempo ele parará, a partir dos 75 km/h?

Solução A variável não-considerada, nesse caso, é o deslocamento $x - x_0$. Pela Tabela 2-2, devemos usar a Eq. 2-9. Explicitando t , temos

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - (75 \text{ km/h})}{(-2,05 \times 10^4 \text{ km/h}^2)} = 3,7 \times 10^{-3} \text{ h} = 13 \text{ s}. \quad (\text{Resposta})$$

d. Que distância seria percorrida no item (c)?

Solução Da Eq. 2-13, temos, para o deslocamento do carro

$$\begin{aligned} x - x_0 &= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ &= (75 \text{ km/h})(3,7 \times 10^{-3} \text{ h}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(-2,05 \times 10^4 \text{ km/h}^2)(3,7 \times 10^{-3} \text{ h})^2 \\ &= 0,137 \text{ km} \approx 140 \text{ m}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

(Se o sinal da aceleração não for considerado, o resultado será incorreto. Na resolução de problemas, devemos estar atentos aos sinais.)

e. Num outro exemplo, suponha que a velocidade inicial é diferente, a aceleração é a mesma calculada em (a) e o carro consegue parar após 200 m. Qual o tempo total de frenagem?

Solução Agora, a variável ausente é a velocidade inicial, então, usamos a Eq. 2-16. Observando que v (velocidade final) é zero, obtemos dessa equação o valor de t

$$t = \left(-\frac{(2)(x - x_0)}{a} \right)^{1/2} = \left(-\frac{(2)(200 \text{ m})}{-1,6 \text{ m/s}^2} \right)^{1/2} = 16 \text{ s}. \quad (\text{Resposta})$$

TÁTICA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 11: VERIFICAÇÃO DIMENSIONAL

A dimensão da velocidade é (L/T) , isto é, distância (L) dividida pelo tempo (T). A dimensão da aceleração é (L/T^2) ; e assim por diante. Numa equação física, a dimensão de todos os termos deve ser a mesma. Se houver dúvida acerca de uma equação, verifique suas dimensões.

Procedendo à verificação das dimensões da Eq. 2-13 ($x - x_0 = v_0 t + a t^2/2$), observamos que cada termo deve ser uma distância, pois essa é a dimensão de x e x_0 . No segundo membro, a dimensão do termo $v_0 t$ é $(L/T)(T)$, que é igual a (L). A dimensão de $a t^2/2$ é $(L/T^2)(T^2)$, que também é (L). Assim, a equação está dimensionalmente correta. Um número puro como $1/2$ ou π não tem dimensão.

2-7 Aceleração Constante: Outro Aspecto*

As duas primeiras equações da Tabela 2-2 são as básicas, das quais as outras são deduzidas. As duas podem ser obtidas por integração da aceleração, com a condição de que seja a constante. A definição de a (na Eq. 2-8) é

$$a = \frac{dv}{dt},$$

que pode ser reapresentada como

$$dv = a dt.$$

Se fizermos a *integral indefinida* (ou *antiderivada*) de ambos os membros, teremos

$$\int dv = \int a dt,$$

* Esta seção se aplica, somente, àqueles que já tenham visto cálculo integral.

que é reduzida a

$$v = \int a dt + C,$$

onde C é uma constante de integração. Como a é constante, podemos retirá-la do sinal de integração. Então,

$$v = a \int dt + C = at + C. \quad (2-17)$$

Para calcular C , fazemos $t = 0$, o instante para o qual $v = v_0$. Substituindo na Eq. 2-17 (que deve valer para todos os valores de t , inclusive $t = 0$), vem

$$v_0 = (a)(0) + C = C.$$

Substituindo em 2-17, temos a Eq. 2-9.

Para obter a outra equação básica da Tabela 2-2, reescrevemos a definição de velocidade (Eq. 2-4) como

$$dx = v dt$$

fazendo a integral indefinida de ambos os membros, temos

$$x = \int v dt + C',$$

onde C' é uma outra constante de integração. Como v não é constante, não pode ser colocada fora do sinal de integral. Podemos substituir v pela Eq. 2-9:

$$x = \int (v_0 + at) dt + C'.$$

Como v_0 é constante, tal equação pode ser reescrita como

$$x = v_0 t + a \int t dt + C'.$$

Integrando, vem

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + C'. \quad (2-18)$$

Em $t = 0$, temos $x = x_0$. Substituindo na Eq. 2-18, obtemos $x_0 = C'$. Usando esse valor para C' na Eq. 2-18, obtemos a Eq. 2-13.

Tabela 2-3
Equações para Queda Livre

Número da Equação	Equação	Variável Ausente
2-19	$v = v_0 - gt$	$y = y_0$
2-20	$y - y_0 = v_0 t - 1/2gt^2$	v
2-21	$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$	t
2-22	$y - y_0 = 1/2(v_0 + v)t$	g
2-23	$y - y_0 = vt + 1/2gt^2$	v_0

2-8 Aceleração de Queda Livre

Se lançarmos um objeto para cima, ou para baixo, e de alguma forma eliminarmos a resistência do ar, verificaremos que ele sofrerá uma determinada aceleração para baixo, a qual se denomina **aceleração de queda livre** g . A aceleração g é independente da massa, densidade, ou forma do objeto.

A Fig. 2-10 mostra dois exemplos da aceleração em queda livre, através de uma série estroboscópica de fotos, de uma pena e de uma maçã. À medida que os objetos caem, são acelerados para baixo a uma taxa g , aumentando suas velocidades escalares. O valor de g varia ligeiramente com a altura e a latitude. Em latitudes médias, ao nível do mar, o valor de g é $9,8 \text{ m/s}^2$ (ou 32 ft/s^2), o que será utilizado nos problemas deste capítulo.

As equações da Tabela 2-2 para aceleração constante se aplicam à queda livre, próximo à superfície da Terra. Isto é, se aplicam a todo objeto em deslocamento vertical, para cima ou para baixo, quando os efeitos da resistência do ar são desprezíveis. Entretanto, podemos simplificá-las fazendo duas pequenas alterações. (1) A direção do movimento se dá ao longo do eixo vertical y , em vez do eixo x , com y orientado positivamente para cima. (Esta alteração minimizará a confusão nos capítulos seguintes, quando for examinada a combinação dos movimentos horizontal e vertical.) (2) A aceleração de queda livre está orientada para baixo no eixo y , sendo portanto negativa. Logo, a deve ser substituído por $-g$ nas equações.

Com essas pequenas alterações, transformamos as equações da Tabela 2-2 nas equações da Tabela 2-3, válidas para a queda livre.

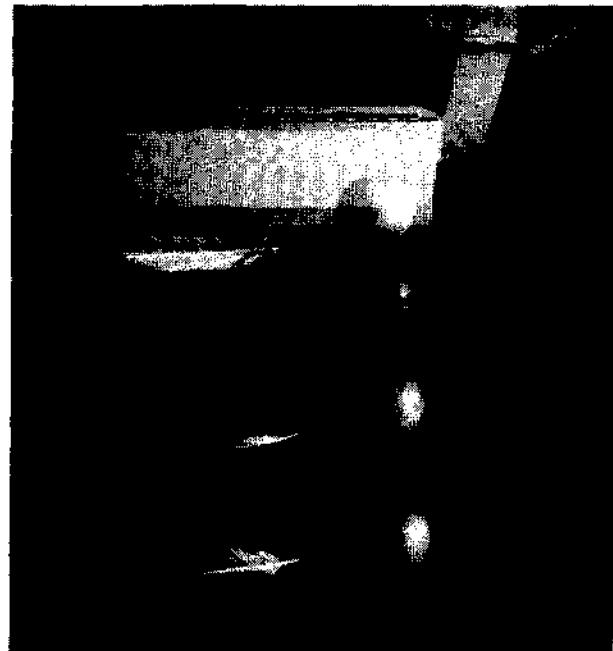


Fig. 2-10 Uma pena e uma maçã em queda livre no vácuo caem com a mesma aceleração g . A aceleração provoca um aumento no distanciamento entre as imagens durante a queda.

EXEMPLO 2-9 Um trabalhador deixa cair uma chave inglesa do alto de um edifício no poço do elevador.

a. Onde estava a chave inglesa 1,5 s após a queda?

Solução A velocidade v é a variável que não é fornecida nem pedida. Isso sugere o uso da Eq. 2-20, da Tabela 2-3. Escolhemos como origem do eixo y o ponto do qual a chave inglesa foi largada. Fazendo $y_0 = 0$, $v_0 = 0$ e $t = 1,5$ s, na Eq. 2-20, temos

$$\begin{aligned} y &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ &= (0)(1,5 \text{ s}) - \frac{1}{2}(9,8 \text{ m/s}^2)(1,5 \text{ s})^2 \\ &= -11 \text{ m.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

O sinal negativo ($-$) indica que a chave inglesa está abaixo do ponto em que foi solta, o que está de acordo com o previsto.

b. Com que velocidade a chave inglesa está caindo em $t = 1,5$ s?

Solução A velocidade é dada pela Eq. 2-19:

$$\begin{aligned} v &= v_0 - gt = 0 - (9,8 \text{ m/s}^2)(1,5 \text{ s}) \\ &= -15 \text{ m/s.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

O sinal negativo ($-$) significa que a chave inglesa está-se deslocando para baixo. Novamente, como esperado. A Fig. 2-11 mostra as características significativas do movimento até o instante $t = 4$ s.

EXEMPLO 2-10 Em 1939, Joe Sprinz, do San Francisco Baseball Club, tentou quebrar o recorde de agarrar uma bola de beisebol, lançada do ponto mais alto. O recorde anterior pertencia a um jogador do Cleveland Indians, que pegou uma bola lançada do alto de um edifício de 210 m de altura. Sprinz se utilizou de um dirigível a 240 m de altura. Admitamos que a bola cai da altura de 240 m, e que a resistência do ar, sobre a bola, é desprezível.

a. Calcule o tempo de queda.

y	t	y	v	a
	(s)	(m)	(m/s)	(m/s ²)
0	0	0	0	-9,8
	1	-4,9	-9,8	-9,8
	2	-19,6	-19,6	-9,8
	3	-44,1	-29,4	-9,8
	4	-78,4	-39,2	-9,8

Fig. 2-11 Exemplo 2-9. A posição, a velocidade e a aceleração de um corpo em queda livre.

Solução Construa, mentalmente, um eixo vertical y , com a origem no ponto onde a bola foi solta, o que significa dizer que $v_0 = 0$. A velocidade inicial v_0 é zero. A variável ausente é v , então, usamos a Eq. 2-20.

$$\begin{aligned} y - y_0 &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ -240 \text{ m} &= 0t - \frac{1}{2}(9,8 \text{ m/s}^2)t^2 \\ 4,9t^2 &= 240 \\ t &= 7,0 \text{ s.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Quando extraímos a raiz quadrada, temos a solução com sinal + e sinal -. Adotamos o sinal + porque a bola chega ao solo *depois* do lançamento.

b. Qual a velocidade da bola, pouco antes de ser agarrada?

Solução Pela Eq. 2-21, obtemos a velocidade utilizando os dados fornecidos pelo problema, em vez de usarmos o resultado obtido em (a).

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 - 2g(y - y_0) \\ &= 0 - (2)(9,8 \text{ m/s}^2)(-240 \text{ m}) \\ &= 4,7 \times 10^3 \text{ m}^2/\text{s}^2 \\ v &= -68 \text{ m/s} (\approx -247 \text{ km/h}). \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Escolhemos o sinal negativo ($-$) ao extrair a raiz quadrada porque a bola está caindo.

Neste tipo de problema, o fato de desprezarmos a resistência do ar introduz distorções na resposta final. Se levarmos em conta esse fator, veremos que o tempo de queda é maior, e a velocidade escalar final é menor. Ainda assim, a velocidade deve ter sido considerável, porque quando Sprinz finalmente conseguiu pegar a bola com sua luva (na quinta tentativa), o impacto jogou a mão e a luva contra seu rosto, fraturando o maxilar superior em 12 partes, quebrando cinco dentes e deixando-o desacordado. E ele deixou a bola cair.

EXEMPLO 2-11 Um lançador atira uma bola de beisebol para cima, em linha reta, com uma velocidade inicial de 12 m/s, conforme a Fig. 2-12.

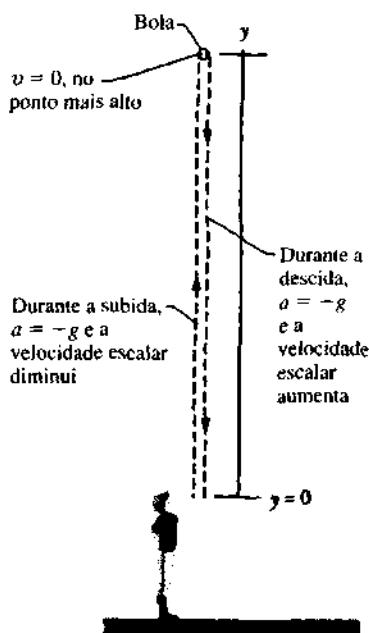


Fig. 2-12 Exemplo 2-11. Um lançador de beisebol atira uma bola para cima em linha reta. As equações para a queda livre se aplicam tanto para a subida quanto para a descida da bola, desde que a resistência do ar possa ser desprezada.

a. Quanto tempo a bola levou para alcançar a altura máxima?

Solução Na altura máxima, a velocidade v da bola é zero. Então, da Eq. 2-19, temos

$$t = \frac{v_0 - v}{g} = \frac{12 \text{ m/s} - 0}{9,8 \text{ m/s}^2} = 1,2 \text{ s.} \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual a altura máxima?

Solução Definimos a origem do eixo y no ponto em que a bola foi lançada. Fazendo $y_0 = 0$ na Eq. 2-21 e calculando o valor de y , temos

$$\begin{aligned} y &= \frac{v_0^2 - v^2}{2g} = \frac{(12 \text{ m/s})^2 - (0)^2}{(2)(9,8 \text{ m/s}^2)} \\ &= 7,3 \text{ m.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Uma outra maneira é utilizar o resultado do item (a) e calcular a altura máxima pela Eq. 2-23. Verifique.

c. Em quanto tempo a bola atinge um ponto 5 m acima do ponto de lançamento?

Solução Verificando a Tabela 2-3, escolhemos a Eq. 2-20. Fazendo $y_0 = 0$, temos

$$\begin{aligned} y &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \\ 5,0 \text{ m} &= (12 \text{ m/s}) t - \left(\frac{1}{2}\right)(9,8 \text{ m/s}^2) t^2. \end{aligned}$$

Omitindo temporariamente as unidades (observando, no entanto, que são consistentes), podemos reescrever esta equação de outra forma:

$$4,9 t^2 - 12 t + 5,0 = 0.$$

Resolvendo essa equação do segundo grau para t , temos*

$$t = 0,53 \text{ s} \quad \text{e} \quad t = 1,9 \text{ s.} \quad (\text{Resposta})$$

Existem dois tempos a serem considerados! Isso, de fato, não surpreende, porque a bola passa pelo ponto $y = 5,0$ m duas vezes, uma vez na subida e outra na descida.

Podemos verificar as respostas obtidas, porque o tempo que a bola leva para atingir a altura máxima deve ser a média entre esses dois tempos, ou seja,

$$t = \frac{1}{2}(0,53 \text{ s} + 1,9 \text{ s}) = 1,2 \text{ s.}$$

Este é, exatamente, o tempo calculado no item (a).

TÁTICAS PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 12: O SINAL NEGATIVO

Nos Exemplos 2-9, 2-10 e 2-11, muitas respostas foram obtidas, diretamente, com o sinal menos. É importante saber o que isso significa. Para problemas de queda livre, estabelecemos um eixo vertical (eixo y) e escolhemos — de forma arbitrária — o sentido positivo para cima.

Adotamos a origem do eixo y (ponto $y = 0$) de forma conveniente para cada problema. No Exemplo 2-9, a origem foi a mão do trabalhador; no 2-10 foi o dirigível e no 2-11 foi a mão do lançador. Um valor negativo de y significa que o objeto está abaixo do ponto de origem estabelecido.

Uma velocidade negativa indica que o objeto está se movendo no sentido decrescente de y , que é para baixo. Isso é verdadeiro, não importando o ponto onde o objeto está localizado.

Convencionamos uma aceleração negativa ($= -9,8 \text{ m/s}^2$) em todos os problemas sobre queda livre. Uma aceleração negativa indica que a velocidade do corpo torna-se menos positiva, ou mais negativa, à medida que o tempo passa. Isso também é verdadeiro, não importando onde o objeto está localizado, ou com que velocidade se desloca, ou em que sentido é o movimento. A aceleração da bola, no Exemplo 2-11, é sempre negativa, na subida e na descida.

TÁTICA 13: RESPOSTAS INESPERADAS

O resultado matemático às vezes apresenta respostas cuja possibilidade não havíamos considerado, como no Exemplo 2-11c. Se obtiver uma resposta inesperada, não a abandone pelo fato de parecer inadequada. Examine-a cuidadosamente do ponto de vista físico; muitas vezes, está correta.

Se a variável for o tempo, mesmo um valor negativo pode significar algo; como um instante antes de $t = 0$, o instante escolhido (arbitrariamente) como o início da contagem de tempo.

2-9 As Partículas da Física

Pretendemos, no decorrer deste livro, nos afastar ocasionalmente do mundo familiar dos corpos palpáveis e de grandes dimensões, e examinar, numa escala muito fina, a natureza dos corpos microscópicos. As “partículas” com as quais lidamos neste capítulo incluíram, por exemplo, coelhos, bolas de beisebol e carros de corrida. De acordo com esse raciocínio, perguntamos: “Qual o menor tamanho que uma partícula pode ter? Quais são as partículas *fundamentais* da natureza?” A **física de partículas** — como é chamado o campo de investigação a que estamos nos referindo — atrai a atenção de muitos dos melhores e mais brilhantes físicos contemporâneos.

A compreensão de que a matéria, em escala microscópica, não é contínua, e sim composta de átomos, foi o **início do entendimento da relação entre a física e a química**. Com o microscópio de varredura por tunelamento, pode-

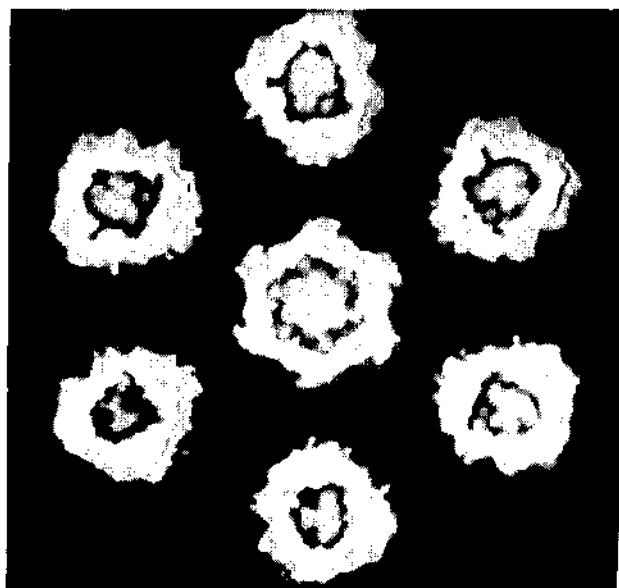


Fig. 2-13 A imagem de um microscópio eletrônico de varredura revela a estrutura hexagonal dos átomos de urânio.

* Ver a fórmula de resolução da equação do segundo grau no Apêndice G.

mos agora “fotografar” esses átomos, conforme mostrado na Fig. 2-13. É possível também manter um único átomo numa minúscula “armadilha” eletromagnética e monitorá-lo tranquilamente. Na Universidade de Washington, um único elétron foi mantido aprisionado numa dessas armadilhas por mais de 10 meses, até que — por infelicidade — colidiu com uma parede e escapou.

Descrevemos a “granularidade” da matéria dizendo que ela é *quantizada* — palavra que vem do latim *quantus*, que significa “quantidade”. A quantização é uma característica fundamental da natureza. Veremos, ao longo do livro, outras grandezas físicas que são quantizadas quando as observamos numa escala suficientemente fina. Essa importância da quantização está refletida no nome que se dá à física em nível atômico e subatômico — **física quântica**, — a que estuda as partículas fundamentais da natureza.

Entre o universo dos objetos macroscópicos e o universo quântico, não há descontinuidade brusca.

O mundo quântico e as leis que o governam são universais, mas, à medida que passamos de átomos e elétrons para bolas de beisebol e automóveis, verificamos que a quantização se torna menos evidente e, no final, totalmente imperceptível. A “granularidade” efetivamente desaparece, e as leis da **física clássica**, que governam o movimento de objetos de grandes dimensões, emergem como formas limites especiais das leis mais gerais da física quântica.

A Estrutura dos Átomos

Um **átomo** é constituído de um **núcleo** central, extremamente denso e compacto, envolvido por um ou mais **elétrons**, de massa pequena. Em geral, consideramos que o átomo e o núcleo têm forma esférica. O raio típico de um átomo é da ordem de 10^{-10} m; o raio do núcleo é 100.000 vezes menor, da ordem de 10^{-15} m. A coesão do átomo é devida à atração entre os elétrons, que são eletricamente negativos, e os **prótons**, que estão no interior do núcleo e são eletricamente positivos. A natureza da atração entre essas partículas será apresentada mais adiante, neste livro. No momento, basta compreender que sem essa interação um átomo não existiria e, por consequência, nós também não.

A Estrutura dos Núcleos

O núcleo mais simples, que é o do hidrogênio comum, tem apenas um próton. Existem dois outros tipos de hidrogênio, que são mais raros: diferem do mais simples pela presença de um ou dois **nêutrons** (partículas eletricamente neutras) no interior do núcleo. O hidrogênio, em qualquer versão, é um exemplo de **elemento**; cada elemento se distingue de todos os outros pelo número de prótons no núcleo. Quando há somente um próton, o elemento é o hidrogênio. Quando há seis prótons, por exemplo, o elemento é o carbono. **Isótopos** são as várias versões de cada elemento, diferenciados pelo número de nêutrons.

Em termos superficiais, a função dos nêutrons é manter os prótons unidos, porque, sendo estes eletricamente positivos e estando muito próximos, apresentam uma intensa repulsão mútua. Se os nêutrons não proporcionassem essa união, somente o átomo de hidrogênio comum existiria; todos os outros se desintegrariam.

Essa instabilidade é verificada em muitos isótopos de elementos comuns. Felizmente, nossa existência não depende desses elementos. Dos 17 isótopos de cobre, por exemplo, 15 são instáveis e sofrem transformações para tornarem-se outros elementos. Os isótopos estáveis são os usados na eletrônica e em outras tecnologias.

A Estrutura das Partículas Dentro dos Átomos

O elétron é muito simples. Parece ser infinitesimal, ou seja, não ter tamanho, nem estrutura. Pertence a uma família de partículas puntiformes chamadas **léptons**; existem seis tipos básicos de léptons, cada um apresentando uma **antipartícula** correspondente.

Acredita-se que os prótons e os nêutrons sejam diferentes dos elétrons e de outros léptons, porque cada um é formado por um conjunto de três partículas mais simples chamadas **quarks***¹, dos tipos “*up*” ou “*down*”. Um próton consiste em dois quarks “*up*” e um “*down*”, e um nêutron, no inverso (Fig. 2-14). Outras partículas mais exóticas, que foram inicialmente tratadas como fundamentais, se apresentam com estruturas similares.

Os quarks, de forma interessante, se apresentam em seis tipos básicos** (cada um com sua antipartícula), como os léptons. Neste ponto, os físicos se perguntam: Existe alguma razão básica para a igualdade do número de tipos? Ou a igualdade é mera coincidência? Não sabemos.

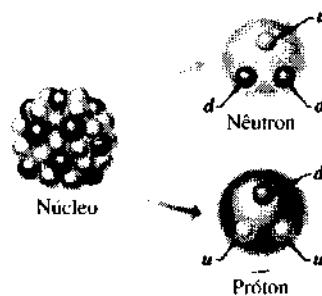


Fig. 2-14 Uma representação do núcleo de um átomo, mostrando os nêutrons e prótons que o compõem. Essas partículas, por sua vez, são compostas de quarks *u* e *d*.

* A palavra “quark” foi tirada de *Finnegans Wake*, de James Joyce:
Three quarks for Muster Mark
Sure he hasn’t got much of a bark
And sure any he has it’s all beside the mark.

** Os outros tipos são chamados de charme, estranho, em cima e embaixo. Mesmo os físicos mais sérios têm seus momentos de humor... (N.S.)

RESUMO

Posição

A posição x de uma partícula num eixo é a sua localização em relação à origem. A posição é positiva ou negativa, dependendo de que lado em relação à origem a partícula se encontra, ou é zero se estiver na origem. Sentido positivo em um eixo é o do crescimento dos números positivos; o oposto é o sentido negativo.

Deslocamento

O deslocamento Δx de uma partícula é a variação da sua posição:

$$\Delta x = x_2 - x_1. \quad (2-1)$$

Deslocamento é uma grandeza vetorial. Se a partícula se move no sentido positivo do eixo x , o deslocamento é positivo; se for no sentido oposto, é negativo.

Velocidade Média

Quando uma partícula se move da posição x_i para x_f , num intervalo de tempo $\Delta t = t_f - t_i$, sua velocidade média é dada por:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (2-2)$$

O sinal algébrico de \bar{v} indica o sentido do movimento (\bar{v} é uma grandeza vetorial). A velocidade média depende da distância entre o ponto inicial e final do movimento, e não da distância total percorrida pela partícula. O cálculo da velocidade média é mostrado nos Exemplos 2-1 e 2-2.

Num gráfico de x versus t , a velocidade média, em um intervalo Δt , é a inclinação da reta que une os pontos correspondentes ao início e ao fim do intervalo considerado.

Velocidade Escalar Média

A velocidade escalar média $|\bar{v}|$ de uma partícula depende da distância total percorrida no intervalo de tempo Δt :

$$\bar{v} = \frac{\text{distância total}}{\Delta t}. \quad (2-3)$$

Velocidade Instantânea

Se Δt tende a zero na Eq. 2-2, então Δx também tenderá a zero; entretanto, sua razão, que é \bar{v} , tenderá a um valor limite v , que é a velocidade instantânea (ou simplesmente velocidade) da partícula no instante considerado, ou

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (2-4)$$

A velocidade instantânea (num determinado instante) pode ser representada pela inclinação (naquele ponto) da curva de x versus t . Ver Exemplo 2-3 e Fig. 2-9. A velocidade pode ser calculada derivando-se a função $x(t)$, conforme mostra o Exemplo 2-5. O módulo da velocidade instantânea é a velocidade escalar.

Aceleração Média

A aceleração média é a razão entre a variação da velocidade Δv e o intervalo de tempo correspondente Δt :

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (2-7)$$

O sinal algébrico indica o sentido de \bar{a} . Veja o Exemplo 2-6.

Aceleração Instantânea

A aceleração instantânea (ou simplesmente aceleração) é a taxa de variação da velocidade.

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \quad (2-8)$$

O Exemplo 2-7 mostra como obter $a(t)$, por derivação de $v(t)$. A aceleração $a(t)$ é a inclinação da curva no gráfico de v versus t .

Aceleração Constante

A Fig. 2-9 mostra $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ para o caso particular em que a é constante. As cinco equações da Tabela 2-2 descrevem o movimento, nessa circunstância.

$$v = v_0 + at, \quad (2-9)$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2, \quad (2-13)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0), \quad (2-14)$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t, \quad (2-15)$$

$$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2. \quad (2-16)$$

Essas equações *não* são válidas quando a aceleração é variável. O uso dessas equações é ilustrado no Exemplo 2-8.

Aceleração de Queda Livre

Um exemplo importante de movimento retilíneo com aceleração constante é o de um objeto subindo ou caindo livremente próximo à superfície da Terra. As equações para a aceleração constante descrevem esse movimento, com duas pequenas alterações na notação: (1) o eixo vertical y é a referência para esse movimento, com o sentido positivo orientado para cima; (2) a aceleração a é substituída por $-g$, onde g é o módulo da aceleração de queda livre. O valor de g , próximo à superfície da Terra, é $9,8 \text{ m/s}^2 (= 32 \text{ ft/s}^2)$. Com essas convenções, as Eqs. 2-19 a 2-23 retratam o movimento de queda livre. Os Exemplos 2-9, 2-10 e 2-11 mostram aplicações dessas equações.

A Estrutura da Materia

Toda matéria comum é constituída de átomos, que, num modelo simples, apresentam um núcleo extremamente compacto circundado por elétrons. O núcleo é formado por nêutrons e prótons. Cada elemento é identificado pelo número de prótons em seu núcleo. Os isótopos são variações de um elemento, que diferem pelo número de nêutrons.

Quarks e Léptons

Os elétrons parecem ser partículas puntiformes, que não possuem tamanho nem estrutura interna, mas os prótons e os nêutrons têm dimensões e contêm outras partículas elementares chamadas quarks. Existem seis tipos básicos de quarks, cada um com sua antipartícula. Os elétrons são da família de partículas conhecida como léptons, que também possui seis tipos básicos, cada um com a sua respectiva antipartícula.

QUESTIONÁRIO

- 1.** Cite alguns fenômenos físicos, relacionados com a Terra, em que ela não possa ser tratada como uma partícula.
- 2.** A velocidade escalar de uma partícula pode ser negativa? Se pode, dê um exemplo; se não, explique por quê.
- 3.** Um coelho percorre, a cada segundo, metade da distância entre seu nariz e um pé de alface. O coelho consegue alcançar o pé de alface? Qual o valor limite da velocidade do coelho? Trace os gráficos da posição e da velocidade média versus o tempo para o movimento do coelho.
- 4.** Neste livro, a velocidade escalar média é a razão da distância total percorrida pelo tempo gasto em percorrê-la. Todavia, algumas vezes, esse conceito é usado para expressar o módulo da velocidade média. Como, e em que casos, os conceitos diferem?
- 5.** Numa prova de duas voltas, para qualificação, um carro de corrida completa a primeira volta com uma velocidade escalar média de 145 km/h. Ao realizar a segunda volta, o piloto pode fazer com que a velocidade escalar média das duas voltas seja de 290 km/h? Explique.
- 6.** Bob vence Judy por 10 m, numa prova de 100 m rasos. Querendo dar a Judy uma nova chance, em igualdade de condições, Bob concorda em correr novamente, iniciando 10 m atrás da linha de partida. Isso dará a Judy, realmente, igualdade de condições?
- 7.** Quando a velocidade é constante, a velocidade média, num intervalo qualquer de tempo, pode ser diferente da velocidade instantânea em um instante qualquer? Em caso afirmativo, exemplifique; se negativo, explique por quê.
- 8.** Se a aceleração não é constante, a velocidade média de uma partícula, movendo-se no eixo x, pode ser $(v_i + v)/2$? Prove, com um gráfico, a sua resposta.
- 9.** (a) Um objeto, com velocidade zero, pode estar acelerado? (b) Um objeto pode ter velocidade constante e ter, ao mesmo tempo, velocidade escalar variável? Para cada caso, se a resposta for sim, dê um exemplo; se for não, explique por quê.
- 10.** A velocidade de um móvel, com aceleração constante, pode mudar o sentido? Se pode, dê um exemplo; se não, explique por quê.
- 11.** A velocidade escalar de um móvel, com aceleração decrescente, pode aumentar? Em caso afirmativo, exemplifique; em caso negativo, explique.
- 12.** Se uma partícula é acelerada a partir do repouso ($v_0 = 0$) em $x_0 = 0$, a partir do instante $t = 0$, a Eq. 2-13 diz que ela passa pelo ponto x duas vezes, nos instantes $+ \sqrt{2x/a}$ e $- \sqrt{2x/a}$. A raiz negativa tem significado? Se, por outro lado, a partícula estivesse se movendo antes de $t = 0$, a raiz negativa teria significado?
- 13.** Dê exemplos de objetos em queda para os quais não seria razoável desprezar a resistência do ar.
- 14.** Uma pessoa na beira de um penhasco lança uma bola para cima em linha reta, com velocidade escalar inicial u , e outra para baixo com a mesma velocidade escalar inicial. Que bola, se for o caso, chega ao solo com maior velocidade escalar? Despreze a resistência do ar.
- 15.** Suponha que o tripulante de um balão deixe cair uma maçã pela janela, no momento em que o balão está decolando com uma aceleração inicial de $4,0 \text{ m/s}^2$. Qual a aceleração da maçã, depois que foi solta? Se a velocidade do balão era de 2 m/s no instante em que a maçã foi solta, qual era a velocidade da maçã logo depois?
- 16.** Num planeta, onde o valor de g corresponde à metade do valor na Terra, um objeto é solto do repouso e cai ao solo. Qual o tempo necessário para que ele alcance o solo, em relação ao tempo que levaria para uma queda da mesma altura, na Terra?
- 17.** Uma segunda bola é solta no poço de um elevador 1 s depois de a primeira ser solta. (a) O que acontece no decorrer do tempo com a distância entre as bolas? (b) Como a razão v_1/v_2 , entre a velocidade da primeira bola e a velocidade da segunda, varia com o tempo?

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

A seguir, serão solicitados, em muitos problemas, gráficos de posição, velocidade e aceleração versus tempo. Em geral, basta desenhar as retas e curvas devidamente identificadas e numa escala adequada. Você pode usar a ajuda de um computador ou uma calculadora programável.

Seção 2-3 Velocidade Média e Velocidade Escalar Média

1E. Carl Lewis corre os 100 m rasos em cerca de 10 s, e Bill Rodgers corre a maratona (42,19 km) em cerca de 2h10min. (a) Qual a velocidade escalar média deles? (b) Se Lewis pudesse manter a sua velocidade durante uma maratona, em quanto tempo cruzaria a faixa de chegada?

2E. Ao dar um espirro forte, seus olhos podem fechar por 0,50 s. Se você estiver dirigindo um carro a 90 km/h, que distância percorrerá durante esse tempo?

3E. Um piscar de olhos dura, em média, 100 ms. Que distância um Mig-25 "Foxbat" voará, durante um piscar de olhos do piloto, se a velocidade média do avião é de 3.395 km/h?

4E. Roger Clemens, lançador do Boston Red Sox, lançava, costumadamente uma bola de beisebol com velocidade horizontal de 160 km/h, conforme verificado por um radar. Em quanto tempo a bola alcançava a base, 18,4 m à frente?

5E. A Fig. 2-15 é o gráfico, em milhões de anos, da idade de um antigo sedimento, em função da distância a uma determinada elevação oceanica. O material, no fundo do mar, se afasta dessa elevação a uma velocidade aproximadamente constante. Qual a velocidade escalar, em centímetros por ano, com que esse material se afasta?

6E. O limite de velocidade na via expressa Nova Iorque-Búfalo foi alterado de 88,5 km/h (= 55 mi/h) para 105 km/h (= 65 mi/h). Qual o tempo economizado por um motorista, nos 700 km entre Búfalo e Nova Iorque, dirigindo à velocidade limite?

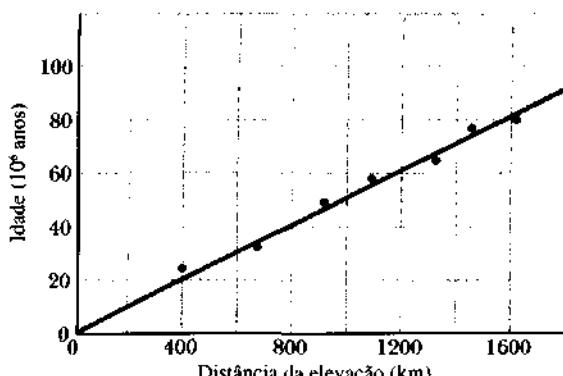


Fig. 2-15 Exercício 5.

7E. Usando com atenção as tabelas do Apêndice F, calcule a velocidade da luz ($= 3 \times 10^8$ ms) em milhas por hora, pés por segundo e anos-luz por ano.

8E. Um automóvel viaja 40 km numa estrada retilínea, à velocidade de 30 km/h. Depois, percorre mais 40 km no mesmo sentido com uma velocidade de 60 km/h. (a) Qual a velocidade média do carro nesses 80 km de viagem? (Suponha que o movimento é no sentido positivo do eixo x .) (b) Qual a velocidade escalar média? (c) Trace o gráfico x versus t e mostre como a velocidade média é encontrada.

9P. Calcule a sua velocidade média, nos seguintes casos: (a) Numa pista retilínea, você anda 72 m à velocidade de 1,2 m/s, depois corre 72 m a 3 m/s. (b) Na mesma pista, você caminha a 1,2 m/s, durante 1,0 min e depois corre a 3,0 m/s, durante 1,0 min. (c) Faça o gráfico x versus t para ambos os casos e indique, no mesmo, como obter a velocidade média.

10P. Um carro sobe um morro na velocidade constante de 40 km/h, e volta, descendo, a 60 km/h. Calcule a velocidade escalar média de todo o percurso.

11P. Durante a metade do tempo, você vai de San Antonio a Houston a 60 km/h, e a outra metade a 90 km/h. Na volta, você viaja a metade da distância a 60 km/h, e a outra metade a 90 km/h. Qual a sua velocidade escalar média (a) de San Antonio a Houston, (b) de Houston a San Antonio e (c) em toda a viagem? (d) Qual a velocidade média de toda a viagem? (e) Trace o gráfico x versus t para o item (a), considerando que o movimento é no sentido positivo do eixo x . Mostre como a velocidade média pode ser determinada a partir do gráfico.

12P. A posição de um objeto em movimento retilíneo é dada por $x = 3t - 4t^2 + t^3$, onde x está em metros e t em segundos. (a) Qual a posição do objeto em $t = 1$ s, 2 s, 3 s e 4 s? (b) Qual o deslocamento entre $t = 0$ e $t = 4$ s? (c) Qual a velocidade média no intervalo $t = 2$ s a $t = 4$ s? (d) Trace o gráfico x versus t para $0 \leq t \leq 4$ s e mostre como a resposta de (c) pode ser encontrada a partir dele.

13P. A posição, em centímetros, de uma partícula em movimento no eixo x é dada por $x = 9,75 + 1,50t^3$, onde t é dado em segundos. Considere o intervalo $t = 2,00$ s a $t = 3,00$ s e calcule: (a) a velocidade média; (b) a velocidade instantânea em $t = 2,00$ s; (c) a velocidade instantânea em $t = 3,00$ s; (d) a velocidade instantânea em $t = 2,50$ s; e (e) a velocidade instantânea, quando a partícula está no ponto médio das posições em $t = 2,00$ s e $t = 3,00$ s; (f) indique suas respostas num gráfico x versus t .

14P. Um jato, em manobra anti-radar, voa, horizontalmente, a 35 m acima do solo. De repente, o avião está diante de uma leve inclinação de $4,3^\circ$ no terreno, um obstáculo difícil de detectar. Veja a Fig. 2-16. Quanto tempo o piloto tem para fazer a correção da aeronave, de modo a evitar a colisão com o solo? A velocidade do avião é de 1.300 km/h.

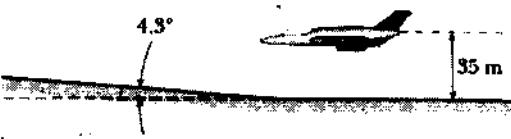


Fig. 2-16 Problema 14.

15P. Dois trens trafegam, no mesmo trilho, um em direção ao outro, cada um com a velocidade escalar de 30 km/h. Quando estão a 60 km de distância um do outro, um pássaro, que voa a 60 km/h, parte da frente de um trem para a do outro. Alcançando o outro trem, ele volta para o primeiro, e assim por diante. (Não temos idéia da razão desse comportamento do pássaro.) (a) Quantas viagens o pássaro faz, de um trem para o outro, até a colisão? (b) Qual a distância total percorrida pelo pássaro?

Seção 2-4 Velocidade Instantânea e Velocidade Escalar

16E. (a) Se a posição de uma partícula é dada por $x = 4 - 12t + 3t^2$ (onde t é dado em segundos e x , em metros), qual é a velocidade em $t = 1$ s? (b) Nesse instante, ela está se movendo no sentido crescente ou decrescente de x ? (c) Qual a velocidade escalar nesse instante? (d) A velocidade escalar aumenta ou diminui nos instantes seguintes? (Tente responder os próximos dois itens sem efetuar outros cálculos.) (e) A velocidade é zero em algum instante? (f) Em algum instante, após $t = 3$ s, a partícula estará se movendo para a esquerda, no eixo x ?

17E. O gráfico da Fig. 2-17 descreve o movimento de um animal que corre para a esquerda (sentido decrescente de x) e para a direita ao longo do eixo x . (a) Quando, se for o caso, o animal está à esquerda da origem? Em que instantes, se for o caso, a velocidade é (b) negativa (c) positiva ou (d) zero?

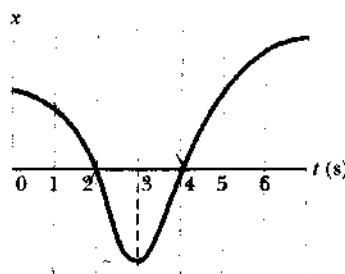


Fig. 2-17 Exercício 17.

18E. Trace o gráfico x versus t relativo à correria de um rato colocado num corredor estreito (eixo x), que se move nesta seqüência: (1) corre para a esquerda (x decrescente) com a velocidade escalar constante de 1,2 m/s, (2) diminui gradualmente a velocidade escalar para 0,6 m/s, para a esquerda, (3) aumenta gradualmente a velocidade escalar para 2,0 m/s, ainda para a esquerda, (4) diminui continuamente até parar e depois acelera até atingir 1,2 m/s, para a direita. Onde é maior a inclinação da curva? E menor?

19P. Considere o gráfico velocidade-tempo, do movimento de um corredor, mostrado na Fig. 2-18. Que distância o corredor percorre em 16 s?

Seção 2-5 Aceleração

20E. Um carro acelera a 9,2 km/h-s. Qual a sua aceleração em m/s²?

21E. A velocidade de uma partícula passou de 18 m/s para 30 m/s, no sentido oposto, depois de 2,4 s. Qual o módulo da aceleração média da partícula nesse intervalo de tempo? Mostre, num gráfico v versus t , como podemos calcular a velocidade média.

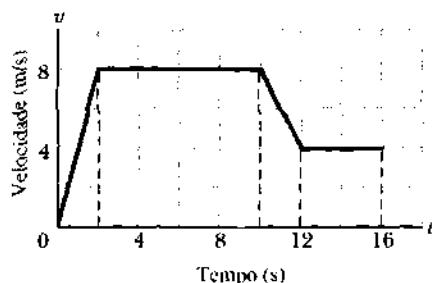


Fig. 2-18 Problema 19.

22E. O gráfico velocidade-tempo da Fig. 2-19 descreve o movimento retilíneo de um objeto. Trace o gráfico da aceleração em função do tempo para o mesmo objeto.

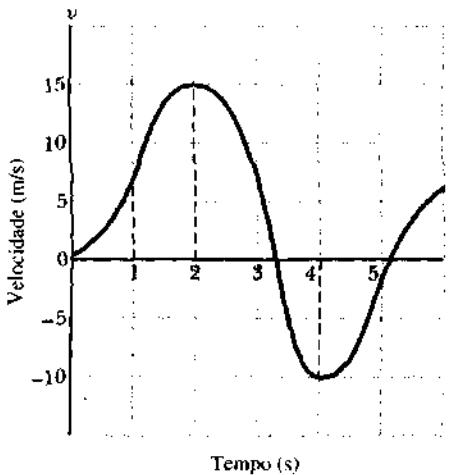
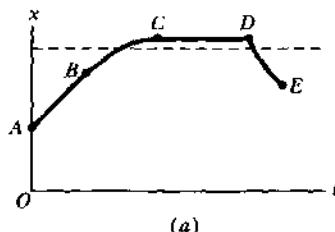
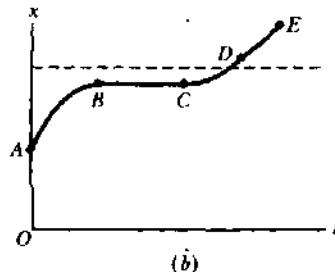


Fig. 2-19 Exercício 22.

23E. A Fig. 2-20(a) mostra o gráfico x versus t de uma partícula em movimento retilíneo. (a) Diga se a velocidade v é positiva, negativa, ou zero, e se a aceleração a é positiva, negativa, ou zero, nos intervalos AB , BC , CD e DE . (Ignore os pontos finais dos intervalos.) (b) Para algum intervalo da curva, pode-se dizer que a aceleração obviamente não é constante? (c) Se os dois eixos forem deslocados para cima, de forma que o eixo t fique sobre a linha pontilhada da figura, as respostas anteriores mudam?



(a)



(b)

Fig. 2-20 Exercícios 23 e 24.

24E. Repita o Exercício 23 para o movimento descrito pelo gráfico da Fig. 2-20b.

25E. O gráfico $x(t)$ do movimento de uma partícula ao longo do eixo x é mostrado na Fig. 2-21. Faça um esboço dos gráficos da velocidade versus o tempo e da aceleração versus o tempo para esse movimento.

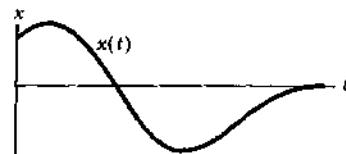


Fig. 2-21 Exercício 25.

26E. Esboce um gráfico que seja uma possível descrição da posição em função do tempo para uma partícula que se move no eixo x e tem, em $t = 1$ s: (a) aceleração positiva e velocidade zero; (b) aceleração negativa e velocidade zero; (c) velocidade negativa e aceleração positiva; (d) velocidade e aceleração negativas. (e) Em qual dessas situações a velocidade escalar da partícula está aumentando em $t = 1$ s?

27E. Considere as grandezas $(dx/dt)^2$ e d^2x/dt^2 . (a) As duas são expressões diferentes para representar a mesma coisa? (b) Quais são as unidades SI das duas grandezas?

28E. Uma partícula se move ao longo do eixo x de acordo com a equação $x = 50t + 10t^2$, onde x está em metros e t em segundos. Calcule (a) a velocidade média da partícula, durante os primeiros 3,0 s de movimento, (b) a velocidade instantânea da partícula em $t = 3,0$ s e (c) a aceleração instantânea em $t = 3,0$ s. (d) Faça o gráfico x versus t e mostre como a resposta de (a) pode ser obtida dele. (e) Indique no gráfico a resposta de (b). Faça o gráfico v versus t e indique nele a resposta ao item (c).

29E. (a) A posição de uma partícula é dada por $x = 20t - 5t^3$, com x em metros e t em segundos. Quando, se ocorrer, a velocidade da partícula é zero? (b) Quando a aceleração é zero? (c) Quando a aceleração é negativa? Positiva? (d) Trace o gráfico de $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$.

30P. Um homem permanece parado de $t = 0$ a $t = 5,00$ min; de $t = 5,00$ min a $t = 10,0$ min ele caminha rapidamente em linha reta, com a velocidade constante de 2,20 m/s. Quais suas velocidade e aceleração médias durante os seguintes intervalos de tempo: (a) 2,00 min a 8,00 min e (b) 3,00 min a 9,00 min? (c) Esboce os gráficos x versus t e v versus t , indicando ainda como as respostas de (a) e (b) podem ser obtidas a partir dos mesmos.

31P. Se a posição de um objeto é dada por $x = 2,0t^3$, com x em metros e t em segundos, calcule (a) a velocidade média e a aceleração média entre $t = 1,0$ s e $t = 2,0$ s e (b) as velocidades e as acelerações instantâneas em $t = 1,0$ s e $t = 2,0$ s. (c) Compare as grandezas médias e instantâneas, explicando em cada caso, por que uma é maior do que a outra. (d) Mostre nos gráficos x versus t e v versus t as respostas aos itens (a) e (b).

32P. Numa aventura de videogame, um ponto é programado para se mover pela tela, segundo a equação $x = 9,00t - 0,750t^3$, onde x é a distância, em centímetros, em relação ao canto esquerdo da tela, e t é o tempo em segundos. Quando o ponto alcança um dos cantos da tela, em $x = 0$ ou $x = 15,0$ cm, t se torna zero e o ponto volta a se mover de acordo com $x(t)$. (a) Em que instante, após iniciar o movimento, o ponto pára? (b) Em que ponto isso ocorre? (c) Quando isso acontece, qual é a aceleração? (d) Em que sentido está-se movendo imediatamente antes de parar? (e) E logo depois? (f) Em que instante, após $t = 0$, ele alcança um canto da tela pela primeira vez?

33P. A posição de uma partícula, se movendo no eixo x , se relaciona com o tempo pela equação $x = et^2 - bt^3$, onde x está em metros e t , em segundos. (a) Quais devem ser as dimensões e as respectivas unidades de e e b ? A seguir, atribua os valores 3.0 e 1.0 a e e b , respectivamente. (b) Em que instante a partícula alcança a posição máxima de x , no sentido positivo? (c) Que distância a partícula percorre nos primeiros 4,0 s? (d) Qual é o deslocamento de $t = 0$ a $t = 4.0$ s? (e) Qual é a velocidade em $t = 1.0$; 2.0; 3.0 e 4.0 s? (f) Qual é a aceleração nesses instantes?

Seção 2-6 Aceleração Constante: Um Caso Especial

34E. A cabeça de uma cascavel pode acelerar 50 m/s^2 no instante do ataque. Se um carro, partindo do repouso, também pudesse imprimir essa aceleração, em quanto tempo atingiria a velocidade de 100 km/h?

35E. Um objeto tem uma aceleração constante de $+3.2 \text{ m/s}^2$. Num determinado instante, sua velocidade é $+9.6 \text{ m/s}$. Qual é a velocidade (a) 2,5 s antes e (b) 2,5 s depois?

36E. Um automóvel aumenta, uniformemente, sua velocidade de 25 para 55 km/h, em 0,50 min. Um ciclista acelera uniformemente do repouso até atingir 30 km/h em 0,50 min. Calcule suas acelerações.

37E. Suponha que um foguete se move no espaço com uma aceleração constante igual a $9,8 \text{ m/s}^2$, o que dará, uma sensação de gravidade normal durante o vôo. (a) Se ele parte do repouso, em quanto tempo alcançará um décimo da velocidade da luz, que é de $3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$? (b) Que distância percorrerá nesse intervalo de tempo?

38E. Na decolagem, um jumbo tem que alcançar, na pista, a velocidade de 360 km/h ($= 225 \text{ mi/h}$). Qual a menor aceleração constante necessária para decolar em uma pista de 1,80 km?

39E. Um mísseis (uma partícula elementar) entra num campo elétrico com uma velocidade de $5,00 \times 10^6 \text{ m/s}$, onde é desacelerado à razão de $1,25 \times 10^{14} \text{ m/s}^2$. (a) Que distância o mísseis percorre até parar? (b) Faça os gráficos x versus t e v versus t para o mísseis.

40E. Um elétron, com velocidade inicial $v_0 = 1,50 \times 10^6 \text{ m/s}$, entra numa região de 1,0 cm de comprimento, onde é acelerado eletricamente (Fig. 2-22), e sai com uma velocidade $v = 5,70 \times 10^6 \text{ m/s}$. Supondo a aceleração constante, calcule-a. (Esse é o processo que ocorre no interior dos tubos de raios catódicos utilizados nos osciloscópios e receptores de televisão.)

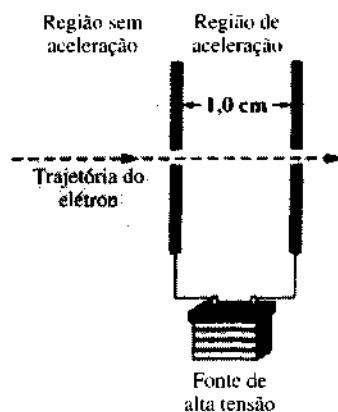


Fig. 2-22 Exercício 40.

41E. Um carro a 97 km/h é freado e pára em 43 m. (a) Qual o módulo da aceleração (na verdade, da desaceleração) em unidades SI e em "unidades g"? (Suponha que a é constante.) (b) Qual é o tempo de frenagem? Se o seu tempo de reação T , para frear, é de 400 ms, a quantos "tempos de reação" corresponde o tempo de frenagem?

42E. Um recorde mundial de velocidade em terra foi estabelecido em 19 de março de 1954 pelo Coronel John P. Stapp, pilotando um veículo impulsionado por um foguete deslizando sobre um trilho a 1.020 km/h. Ele e o veículo pararam em 1,4 s. Veja Fig. 2-8. A que aceleração ele foi submetido? Expressse a resposta em função da aceleração de queda livre g .

43E. Numa estrada seca, um carro com pneus em bom estado é capaz de frear com uma desaceleração de $4,92 \text{ m/s}^2$ (suponha constante). (a) Viajando inicialmente a 24,6 m/s, em quanto tempo esse carro consegue parar? (b) Que distância percorre nesse tempo? (c) Faça os gráficos x versus t e v versus t , para a desaceleração.

44E. Um carro-foguete, correndo num trilho retilíneo, é usado para investigar os efeitos fisiológicos de grandes acelerações em seres humanos. Um carro desses pode alcançar a velocidade de 1.600 km/h, em 1,8 s, partindo do repouso. (a) Supondo a aceleração constante, calcule-a em unidades g . (b) Qual a distância percorrida nesse tempo?

45E. Os freios de um carro são capazes de produzir uma desaceleração de $5,1 \text{ m/s}^2$. (a) Se você está dirigindo a 140 km/h e avista, de repente, um posto policial, qual o tempo mínimo necessário para reduzir a velocidade até o limite permitido de 80 km/h? (A resposta revela a inutilidade de frear para evitar que a alta velocidade seja detectada pelo radar.) (b) Trace o gráfico x versus t e v versus t para essa desaceleração.

46P. Um certo carro de corrida pode acelerar de 0 a 60 km/h em 5,4 s. (a) Durante esse tempo, qual a aceleração média em m/s^2 ? (b) Supondo a aceleração constante, quanto se deslocará nesses 5,4 s? (c) Mantendo a mesma aceleração, em quanto tempo percorrerá a distância de 0,25 km?

47P. Um trem parte do repouso e se move com aceleração constante. Em um determinado instante, ele viaja a 30 m/s e, 160 m adiante, tráfega a 50 m/s. Calcule (a) a aceleração, (b) o tempo necessário para percorrer os 160 m mencionados, (c) o tempo necessário para atingir a velocidade de 30 m/s e (d) a distância percorrida desde o repouso até o instante em que sua velocidade era de 30 m/s. (e) Faça o gráfico x versus t e v versus t para o movimento do trem a partir do repouso.

48P. Um automóvel viajando a 56,0 km/h está a 24,0 m de um obstáculo, quando o motorista aciona os freios. O carro colide com o obstáculo 2,00 s depois. (a) Qual foi a desaceleração, suposta constante, do automóvel antes do impacto? (b) Qual a velocidade do carro, no impacto?

49P. Um carro se movendo com aceleração constante percorre, em 6,0 s, a distância entre dois pontos separados de 60,0 m. Quando passa pelo segundo ponto, sua velocidade é de 15,0 m/s. (a) Qual é a velocidade no primeiro ponto? (b) Qual a aceleração? (c) A que distância do primeiro ponto o carro estava em repouso? (d) Trace o gráfico x versus t e v versus t para o movimento do carro a partir do repouso.

50P. Duas estações de metrô estão separadas por 1.100 m. Se o trem do metrô parte do repouso e mantém uma aceleração de $+1,2 \text{ m/s}^2$ durante a primeira metade da distância, e depois desacelera a $-1,2 \text{ m/s}^2$ durante a segunda metade, quais são (a) o tempo de viagem e (b) a velocidade máxima? (c) Trace os gráficos x , v e a versus t , para a viagem.

51P. Para parar um carro, você necessita de um certo tempo de reação antes de começar a frear; a partir daí, o carro diminui sua velocidade em função da desaceleração constante da freada. Suponha que o carro percorre uma distância total de 56 m nessas duas fases, quando a velocidade inicial é de 80 km/h, e 24 m quando a velocidade inicial é de 50 km/h. Qual é (a) o tempo de reação e (b) o módulo da desaceleração?

52P. Quando um motorista pára um carro, tão rápido quanto possível, a distância percorrida, até o carro parar, é obtida da soma da "distância de reação", que é igual à velocidade inicial multiplicada pelo tempo de reação do motorista, com a "distância de frenagem", que é a distância percorrida pelo carro enquanto está freando. A tabela mostra valores típicos:

<i>Velocidade Inicial (m/s)</i>	<i>Distância de Reação (m)</i>	<i>Distância de Frenagem (m)</i>	<i>Distância até Parar (m)</i>
10	7,5	5,0	12,5
20	15	20	35
30	22,5	45	67,5

(a) Qual o tempo de reação do motorista? (b) Se a velocidade inicial do carro é 25 m/s, qual a distância percorrida até o carro parar?

53P. (a) Se a aceleração máxima tolerável pelos passageiros num metrô é $1,34 \text{ m/s}^2$, e as estações estão separadas por 806 m, qual a velocidade máxima que o trem pode alcançar, entre as estações? (b) Qual o tempo de viagem entre as estações? (c) Qual a máxima velocidade média que o trem pode atingir, se ele pára 20 s em cada estação? (d) Faça os gráficos x , v e a versus t .

54P. Quando a luz verde de um sinal de trânsito acende, um carro parte com aceleração constante $a = 2,2 \text{ m/s}^2$. No mesmo instante, um caminhão, com velocidade constante de 9,5 m/s, ultrapassa o automóvel. (a) A que distância, após o sinal, o carro ultrapassará o caminhão? (b) Qual a velocidade do carro nesse instante?

55P. A cabine do elevador do New York Marquis Marriot percorre uma distância total de 187 m. Sua velocidade máxima é de 304 m/min. A aceleração e a desaceleração têm módulos iguais a $1,2 \text{ m/s}^2$. (a) Que distância percorre, a partir do repouso, acelerando até a velocidade máxima? (b) Quanto tempo leva, a partir do repouso, para fazer todo o percurso sem parar?

56P. Um trem de passageiros de alta velocidade, viajando a 160 km/h, entra numa curva e o maquinista se surpreende ao avistar uma locomotiva que acabara de entrar indevidamente no mesmo trilho, oriunda de um desvio 0,68 km adiante; veja a Fig. 2-23. A locomotiva está-se

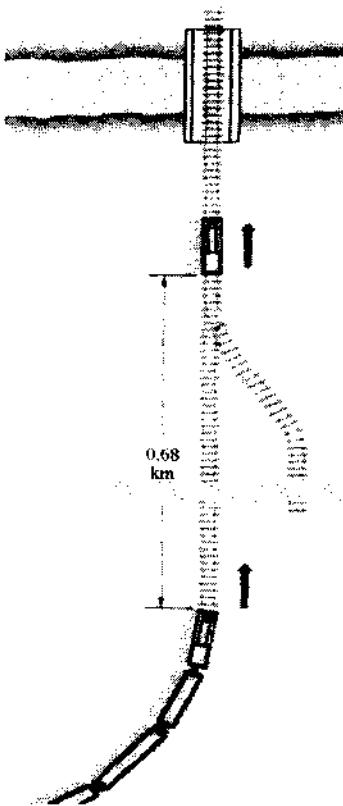


Fig. 2-23 Problema 56.

movendo a 29 km/h. O maquinista do trem de passageiros aplica imediatamente os freios. (a) Qual deve ser o módulo da aceleração resultante (suposta constante) para evitar a colisão? (b) Suponha que o maquinista está na posição $x = 0$ quando avista a locomotiva em $t = 0$. Trace as curvas $x(t)$ para a locomotiva e o trem na situação limite em que a colisão é evitada. Acrescente outra curva para representar o que acontece se a taxa de frenagem não for suficiente para evitar a colisão.

57P. Dois trens, em movimento retilíneo, viajam, na mesma direção e em sentidos opostos, um a 72 km/h e o outro a 144 km/h. Quando estão a 950 m um do outro, os maquinistas se avistam e aplicam os freios. Determine se haverá colisão, sabendo-se que a desaceleração de cada trem é de $1,0 \text{ m/s}^2$.

58P. Trace o gráfico $v(t)$ associado ao gráfico $a(t)$ mostrado na Fig. 2-24.

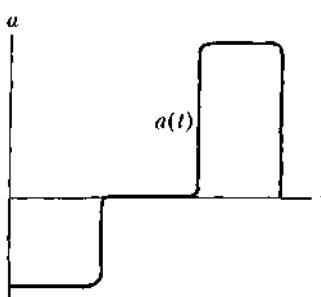


Fig. 2-24 Problema 58.

Seção 2-8 Aceleração de Queda Livre

59E. Numa construção, uma ferramenta cai e chega ao solo com a velocidade de 24 m/s. (a) De que altura a ferramenta caiu? (b) Qual foi o tempo de queda? (c) Trace os gráficos de y , v e a versus t .

60E. (a) Com que velocidade uma bola deve ser lançada verticalmente para cima, de forma a alcançar a altura máxima de 50 m? (b) Quanto tempo ela ficará no ar? (c) Desenhe os gráficos y , v e a versus t . Indique, nos dois primeiros gráficos, o instante em que ela alcança os 50 m.

61E. Considere que a chuva cai de uma nuvem, 1.700 m acima da superfície da Terra. Se desconsiderarmos a resistência do ar, com que velocidade as gotas de chuva atingiriam o solo? Seria seguro caminhar ao ar livre durante um temporal?

62E. Um elevador de construção vazio é sustentado por um cabo que quebra quando o elevador está parado no alto da construção de 120 m de altura. (a) Com que velocidade o elevador bate no solo? (b) Qual o tempo de queda? (c) Qual era a sua velocidade na metade do caminho de descida? (d) Qual o tempo de queda até a metade da descida?

63E. Um vândalo joga uma pedra com velocidade inicial de 12 m/s, verticalmente para baixo, do telhado de um prédio de 30,0 m de altura. (a) Em quanto tempo a pedra alcança o solo? (b) Qual a velocidade dela no instante do impacto?

64E. O dispositivo para pesquisa sob gravidade zero, localizado no Lewis Research Center, da NASA, inclui uma torre de 145 m de altura. Faz-se vácuo no interior dessa torre e deixa-se cair uma esfera de 1 m de diâmetro contendo equipamentos de pesquisa. (a) Qual o tempo de queda livre da esfera? (b) Qual a velocidade no instante em que chega à base da torre? (c) Ao bater no fundo da torre, a esfera é submetida a uma desaceleração média de $25g$, até sua velocidade ser reduzida a zero. Qual a distância percorrida pelo centro da esfera durante a desaceleração?

65E. Um modelo de foguete, propelido por queima de combustível, decola verticalmente. Trace qualitativamente (não são necessários valores numéricos) os gráficos y , v e a versus t para o vôo do foguete. Indi-

que, ao terminar o combustível, quando o foguete alcança a altura máxima e quando retorna ao solo.

66E. Uma rocha despenca de um penhasco de 100 m de altura. Quanto tempo leva para cair (a) os primeiros 50 m e (b) os 50 m restantes?

67P. Um tatu assustado salta para cima (Fig. 2-25), subindo 0,544 m em 0,200 s. (a) Qual era sua velocidade inicial? (b) Qual a sua velocidade nessa altura? (c) Quanto ele ainda subirá?



Fig. 2-25 Problema 67.

68P. Um modelo de foguete é lançado verticalmente e sobe com uma aceleração constante de $4,00 \text{ m/s}^2$, por 6,00 s. Seu combustível então acaba e ele passa a mover-se como uma partícula em queda livre. (a) Qual a altura máxima atingida pelo foguete? (b) Qual o tempo total decorrido desde o lançamento até sua queda na Terra?

69P. Um objeto é largado de uma ponte a 45 m acima da água. O objeto cai dentro de um barco que se desloca com velocidade constante e estava a 12 m do ponto de impacto no instante em que o objeto foi solto. Qual é a velocidade do barco?

70P. Um jogador de basquetebol, em pé próximo à cesta para agarrar um rebote, salta verticalmente 76,0 cm. Quantos tempos ele gasta (a) nos 15,0 cm mais altos desse pulo e (b) nos 15,0 cm mais baixos? Isso ajuda a explicar por que esses jogadores parecem ficar parados no ar, no alto de seus pulos? Veja a Fig. 2-26.

71P. No National Physical Laboratory, na Inglaterra, foi realizada uma medida da aceleração da gravidade g atirando-se uma bola de vidro para cima no interior de um tubo onde se fez vácuo. Na Fig. 2-27, consideremos ΔT_s , o intervalo de tempo entre duas passagens da bola pelo nível inferior, ΔT_f , o intervalo entre duas passagens pelo nível superior e H a distância entre os dois níveis. Mostre que

$$g = \frac{8H}{\Delta T_s^2 - \Delta T_f^2}.$$



Fig. 2-26 Problema 70.

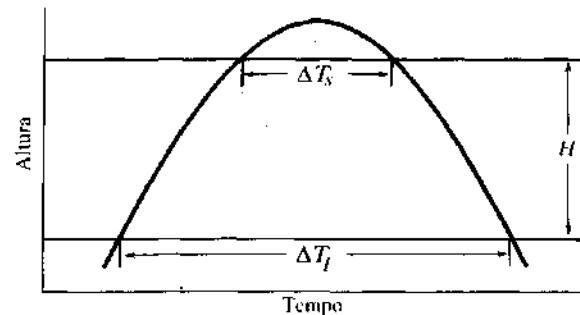


Fig. 2-27 Problema 71.

72P. Uma bola de argila umedecida cai de uma altura de 15,0 m. Fica em contato com o solo por 20,0 ms, antes de parar. Qual a aceleração média da bola, durante o tempo de contato com o solo? (Considere a bola como uma partícula.)

73P. Uma bola é atirada verticalmente *para baixo*, de uma altura H , com velocidade inicial v_0 . (a) Qual será sua velocidade, no instante que bater no solo? (b) Quantos tempos levará para a bola chegar ao solo? (c) Quais seriam as respostas de (a) e (b) se a bola fosse jogada para cima, da mesma altura, e com a mesma velocidade inicial? Antes de resolver qualquer equação, decida se cada resposta aqui deve ser maior, igual ou menor do que em (a) e (b).

74P. A Fig. 2-28 mostra um dispositivo simples para você medir o seu tempo de reação. É feito com uma tira de papel-cartão, com uma escala graduada e duas marcas. Um amigo segura a tira entre o polegar e o indicador, na altura da marca superior, e você posiciona seu polegar e seu

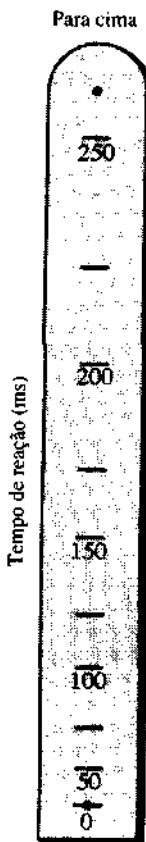


Fig. 2-28 Problema 74.

indicador, na altura da marca inferior, sem entretanto tocar na fira. Seu amigo solta a tira e você tenta agarrá-la o mais rápido possível. A posição na escala em que você conseguiu segurar a tira dá o seu tempo de reação. (a) A que distância da marca inferior você colocaria o ponto de 50,0 ms? (b) Quanto mais acima estariam os pontos de 100, 150, 200 e 250 ms? (O ponto de 100 ms, por exemplo, estaria no dobro da distância do ponto de 50 ms? Você consegue encontrar algum padrão nas suas respostas?)

75P. Um malabarista joga bolas verticalmente para cima até uma certa distância, no ar. A que altura deve jogá-las para que elas fiquem o dobro do tempo no ar?

76P. Uma pedra é atirada verticalmente para cima. Na subida, passa pelo ponto *A* com velocidade *v* e pelo ponto *B*, 3,00 m acima, com velocidade *v*/2. Calcule (a) a velocidade *v* e (b) a altura máxima alcançada pela pedra acima do ponto *B*.

77P. Para testar a qualidade de uma bola de tênis, você a solta de uma altura de 4,00 m. Ela quica e volta até uma altura de 3,00 m. Qual a aceleração média, durante o contato com o chão, se o tempo de contato foi de 10,0 ms?

78P. Do cano de um chuveiro, a água pinga no chão, 200 cm abaixo. As gotas caem a intervalos regulares, e a primeira gota bate no chão, no instante em que a quarta gota começa a cair. Determine as posições da segunda e da terceira gotas, no instante em que a primeira bate no chão.

79P. Uma bola de chumbo é deixada cair de um trampolim localizado a 5,20 m acima da superfície de um lago. A bola bate na água com uma certa velocidade e afunda com a mesma velocidade constante. Ela chega ao fundo 4,80 s após ter sido largada. (a) Qual é a profundidade do lago? (b) Qual é a velocidade média da bola? (c) Suponha que toda a água do lago seja drenada. A bola é atirada do trampolim e, novamente, chega ao fundo 4,80 s depois. Qual é a velocidade inicial da bola?

80P. Se um objeto percorre a metade do percurso total no último segundo de sua queda, tendo partido do repouso, determine: (a) o tempo e (b) a altura da queda. Explique a solução fisicamente inaceitável da equação quadrática no tempo obtida aqui.

81P. Uma mulher sofreu uma queda de 43 m do alto de um prédio, sobre uma caixa metálica de ventilação, provocando um afundamento de 46 cm na caixa. Ela sobreviveu, sem ferimentos graves. Qual a aceleração dela (supondo constante) durante a colisão? Expresse a resposta em função da aceleração da gravidade *g*.

82P. Uma pedra é largada de uma ponte a 43 m acima da superfície da água. Outra pedra é atirada, para baixo, 1,00 s depois da primeira cair. Ambas chegam na água ao mesmo tempo. (a) Qual era a velocidade inicial da segunda pedra? (b) Faça o gráfico da velocidade versus o tempo, para cada pedra, considerando *t* = 0 o instante em que a primeira pedra foi largada.

83P. Um pára-quedista salta e cai livremente por 50 m. Em seguida, o pára-quedas se abre e ele desacelera a $2,0 \text{ m/s}^2$. Quando chega ao solo, sua velocidade é de 3,0 m/s. (a) Quanto tempo o pára-quedista fica no ar? (b) De que altura ele saltou?

84P. Dois objetos caem da mesma altura em queda livre, com 1,0 s de intervalo. Quanto tempo os dois ficam separados por 10 m depois de o primeiro objeto cair?

85P. A Fig. 2-29 mostra Clara pulando de uma ponte, seguida de perto por Jim. Quanto tempo Jim esperou para saltar depois de Clara? Admita que Jim tem 170 cm de altura e que a origem do salto é o topo da figura. Faça medidas em escala, diretamente sobre a figura.



Fig. 2-29 Problema 85.

86P. Um balão sobe com velocidade de 12 m/s e, quando está a 80 m de altura, um pacote se desprende dele. (a) Em quanto tempo o pacote atinge o solo? (b) Com que velocidade o pacote chega ao solo?

87P. Um elevador sem teto está subindo com uma velocidade constante de 10 m/s. Um menino dentro do elevador atira para cima uma bola, de uma altura de 2,0 m acima do piso do elevador, no momento em que o piso do elevador está a 28 m acima do solo. A velocidade inicial da bola

em relação ao elevador é de 20 m/s. (a) Qual a altura máxima alcançada pela bola? (b) Quanto tempo leva para a bola cair de volta no elevador?

88P Uma bola de aço cai do telhado de uma construção, e, ao passar por uma janela de 1,20 m, leva 0,125 s para cruzá-la de alto a baixo. A bola sofre uma colisão perfeitamente elástica com a calçada e retorna, passando pela mesma janela, de baixo para cima, em 0,125 s. (O movi-

mento de subida é o inverso do de descida.) O tempo decorrido abaixo da base da janela é de 2,00 s. Qual a altura da construção?

89P Um gato sonolento é despertado por um vaso de planta que sobe e desce, diante de uma janela aberta. De alto a baixo, a janela tem 2,00 m, e o vaso fica visível durante um tempo total de 0,50 s. Que altura, acima da parte superior da janela, o vaso alcançou?

PROBLEMAS ADICIONAIS

90. Um veículo elétrico parte do repouso e acelera, em linha reta, a 2,0 m/s², alcançando a velocidade de 20 m/s. Depois diminui, a uma taxa constante de 1,0 m/s², até parar. (a) Qual é o intervalo de tempo entre o início e o fim do movimento? (b) Que distância percorre da partida até a parada?

91. Uma motocicleta se move a 30 m/s, quando o motociclista aplica os freios e a submete a uma desaceleração constante. A velocidade diminui para 15 m/s no intervalo de 3,0 s após a aplicação dos freios. Qual a distância total percorrida pela motocicleta, do início da freada até parar?

92. A posição de uma partícula que se move ao longo do eixo x é dada por $x = 15e^{-t}$ m, onde t está em segundos. (a) Qual a posição da partícula em $t = 0$; 0,50 e 1,0 s? (b) Qual a velocidade média da partícula entre $t = 0$ e $t = 1,0$ s? (c) Qual a velocidade instantânea em $t = 0$; 0,50 e 1,0 s? (d) Trace o gráfico x versus t , para o intervalo $0 \leq t \leq 1,0$ s e estime, pelo gráfico, a velocidade instantânea em $t = 0,50$ s.

93. Uma bola é atirada verticalmente para baixo, do alto de um prédio de 36,6 m de altura. A bola passa pelo alto de uma janela, que está 12,2 m acima do solo, 2,00 s após ter sido atirada. Qual é a velocidade da bola ao passar pelo alto da janela?

94. A Fig. 2-30 representa uma partícula se movendo com aceleração constante ao longo do eixo x . Qual o valor da aceleração?

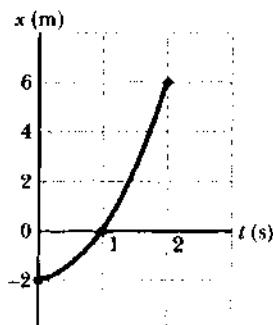


Fig. 2-30 Problema 94.

95. A Fig. 2-31 mostra o gráfico x versus t de uma partícula em movimento retilíneo. (a) Qual a velocidade média entre $t = 0,50$ s e $t = 4,5$ s? (b) Qual é a velocidade instantânea em $t = 4,5$ s? (c) Qual a acelera-

ção média entre $t = 0,50$ s e $t = 4,5$ s? (d) Qual a aceleração instantânea em $t = 4,5$ s?

96. Uma pedra é lançada verticalmente para cima do topo de um edifício muito alto. A pedra alcança a altura máxima, acima do prédio, 1,60 s após o lançamento. A seguir, ela passa junto à borda do prédio, chocan-

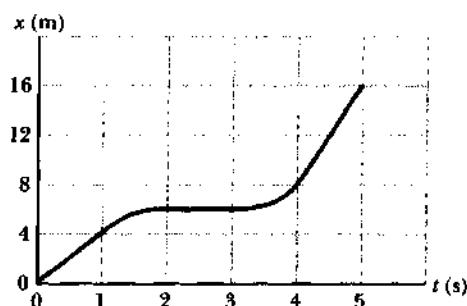


Fig. 2-31 Problema 95.

do-se com o solo 6,00 s após ter sido lançada. Calcule em unidades SI: (a) com que velocidade inicial foi lançada, (b) que altura máxima acima do prédio a pedra alcançou e (c) qual a altura do prédio.

97. A posição de uma partícula se movendo ao longo do eixo y é dada por

$$y = 2,0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} t\right),$$

onde t está em segundos e y , em centímetros. (a) Qual a velocidade média da partícula entre $t = 0$ e $t = 2,0$ s? (b) Qual a velocidade instantânea da partícula em $t = 0$; 1,0 e 2,0 s? (c) Qual a aceleração média entre $t = 0$ e $t = 2,0$ s? (d) Qual a aceleração instantânea em $t = 0$; 1,0 e 2,0 s? (e) Trace o gráfico v versus t para o intervalo $0 \leq t \leq 2,0$ s e, a partir dele, estime a aceleração instantânea em $t = 1,0$ s.

98. A velocidade de um projétil, ao sair de um cano de 1,2 m de comprimento, é de 640 m/s. Considerando a aceleração constante, calcule por quanto tempo o projétil fica dentro do cano após o disparo.

99. A posição de uma partícula em movimento no eixo x é dada por $x = 16te^t$ m, onde t está em segundos. A que distância a partícula está da origem, quando pára momentaneamente? (Não considere a parada em $t = \infty$.)

O Tráfego na Hora do Rush

JEARL WALKER
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CLEVELAND

Os sinais de trânsito numa cidade pequena normalmente não exigem uma sequência sincronizada. O fluxo de tráfego através deles pode ser meramente casual, e as filas, diante de um sinal vermelho, raramente são longas. Entretanto, o trânsito numa cidade grande, sobretudo na hora do *rush*, requer cuidadoso planejamento. Sem ele, as filas de carros estender-se-ão, interrompendo muitos cruzamentos e bloqueando toda uma área. Como somente os carros que estão na periferia da área congestionada podem mover-se, os que estão retidos no seu interior podem levar horas para ser liberados.

Suponhamos que projetássemos um sistema de sinais de trânsito para uma via de mão única possuindo muitas pistas de fluxo de tráfego. Os sinais devem permanecer verdes durante 50 s, amarelos por 5 s e vermelhos por 25 s (valores tipicamente utilizados em ruas movimentadas de grandes cidades). Podemos ser tentados a aumentar a duração do sinal verde, ou diminuir a do vermelho, para facilitar o fluxo de tráfego. Contudo, devemos lembrar que o trânsito em ruas transversais não deve ser retido por muito tempo, pois do contrário grandes filas de carros se formariam nelas.

De que forma devemos acionar os sinais verdes nas várias interseções? Caso todos os sinais sejam programados para se tornarem verdes simultaneamente, o trânsito poderia fluir por apenas 50 s. Em cada período de sinalização verde, grupos de veículos se moveriam ao longo da pista até que todos os sinais ficassem simultaneamente vermelhos. Para aumentar a distância percorrida, os motoristas teriam que correr ao longo do sistema. Um grande número de carros trafegando a, digamos, 90 km/h numa via movimentada de um grande centro urbano pareceria, à primeira vista, um "grande prêmio", sendo obviamente perigoso.

Um projeto melhor e mais seguro aciona o sinal verde, em cada cruzamento, somente quando os primeiros veículos de um grupo começam a se aproximar dele.* (O sinal deve tornar-se verde antes que os carros realmente o alcancem, senão terão que diminuir a velocidade para evitar um possível avanço do sinal vermelho.) Nesse caso, correr muito ao longo do sistema torna-se fútil, porque um carro em alta velocidade alcançará um sinal antes que ocorra a comutação de vermelho para verde.

A Fig. 1 mostra parte de uma via a ser controlada. Suponhamos que, num grande bloco de veículos, os primeiros motoristas tenham alcançado o segundo cruzamento, onde o sinal tornou-se verde quando ainda estavam a uma dis-

tância d desse cruzamento. Continuam a trafegar com uma certa velocidade v_p (a velocidade limite) em direção ao terceiro cruzamento e, quando estão a uma distância d desse sinal, ele torna-se verde. Os cruzamentos estão separados por uma distância D_{23} .

Questão 1

Qual deveria ser a demora no acionamento da luz verde no terceiro cruzamento, em relação ao segundo cruzamento, de forma a manter o movimento regular do bloco de veículos? (Nesta e em outras questões, a resposta deverá estar sempre em função das variáveis fornecidas.)

A situação (e a resposta) muda(m) se o bloco tiver sido parado por um sinal vermelho no cruzamento anterior. Na Fig. 1, por exemplo, o bloco de veículos está parado no primeiro cruzamento. Quando a luz verde acende, os primeiros motoristas levarão um certo tempo t , para responder à mudança de sinal e um tempo adicional para acelerar a uma taxa a até alcançar uma velocidade de cruzeiro v_p . Durante a aceleração, os primeiros veículos se deslocam uma certa distância, que é menor do que se estivessem se movendo à velocidade v_p .

Questão 2

Se a separação entre o primeiro e o segundo cruzamento é D_{12} e o sinal verde no segundo cruzamento acende quando os primeiros carros estão a uma distância d daquele cruzamento, quanto tempo depois de o sinal se tornar verde no primeiro cruzamento deverá tornar-se verde no segundo?

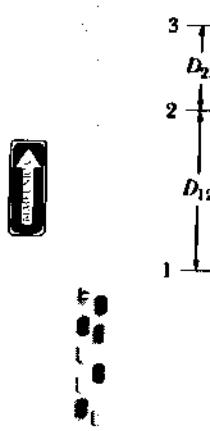


Fig. 1 Uma via de mão única, cujo tráfego deve ser controlado.

LEITURA COMPLEMENTAR 1



Jearl Walker é professor de física da Cleveland State University. Recebeu o título de Bacharel em Ciências em física do M.I.T. e o Ph.D. em física da University of Maryland. De 1977 a 1990, conduziu a seção "The Amateur Scientist", da revista *Scientific American*. Seu livro, *The Flying Circus of Physics with Answers*, está publicado em 10 idiomas.

*Esse processo é conhecido pelo nome de "onda verde". (N. do R.)

Mesmo com um sistema de sinais temporizados, o tráfego ainda pode ficar congestionado. O problema consiste no fato de que um bloco de motoristas parado não consegue acelerar, simultaneamente, quando o sinal fica verde. O que acontece é que uma "onda de partida" viaja, a partir do líder, ao longo do bloco de veículos, com uma velocidade v_o . Cada motorista reage somente quando a onda de partida o alcança. Os motoristas atrás do líder devem, além disso, percorrer uma distância maior até o próximo cruzamento.

Questão 3

Suponha que um motorista esteja a uma distância d_p , atrás do líder de um bloco parado no primeiro cruzamento e que a duração do sinal verde no segundo cruzamento é t_v . Se o sinal verde no segundo cruzamento apaga quando o motorista está a uma distância d do cruzamento (permitindo passar, ainda, com o sinal amarelo), qual deveria ser então o intervalo de tempo entre os acionamentos dos sinais verdes nos cruzamentos?

Todos esses pontos estão detalhados na Fig. 2, que mostra o mapa de uma rua, à esquerda, e um gráfico da progressão do bloco de veículos (com o ciclo dos sinais de trânsito), à direita. Um comprimento d_1 de um bloco, que estava

initialmente parado no primeiro cruzamento, tráfega através de todo o sistema de sinais. Os períodos iniciais de aceleração são representados por linhas curvas, com os últimos carros do bloco acelerando depois. O sinal fica verde, em cada cruzamento, poucos segundos antes de os primeiros carros do bloco o alcançarem.

A figura mostra também que nem todos os carros do bloco conseguem passar no primeiro cruzamento antes que o sinal volte a ficar vermelho. Se essa falha se repetir por vários ciclos do sinal, o comprimento do grupo de "abandonados" cresce, chegando talvez ao cruzamento anterior e provocando um bloqueio do tráfego naquele ponto. É o que provoca um congestionamento.

Questão 4

O que representa (a) v_p e (b) v_o no gráfico? (c) Qual a duração do período de aceleração?

Um congestionamento pode acontecer mesmo num sistema de controle de tráfego bem projetado. Uma vez fiquei preso num congestionamento porque, de repente, uma forte nevasca apareceu à tarde, na hora do rush, em Cleveland. Como a rua em que eu estava era escorregadia, os líderes do bloco prosseguiam cautelosamente. As ondas de partida tornaram-se mais lentas. Em 20 min, o grupamento de

"abandonados" prolongou-se para trás, bloqueando os cruzamentos anteriores. O tráfego praticamente parou ao longo de 3 km, tanto na rua em que eu estava como em cinco vias paralelas que levam para fora da cidade. Só consegui prosseguir porque os carros na parte externa da rodovia iam gradativamente se desviando para os subúrbios. À medida que deixavam o congestionamento, uma onda de partida se deslocava vagarosamente através do bloco de 3 km, permitindo-me avançar o comprimento de uns poucos carros de cada vez. O problema se agravava à medida que a neve se amontoava e os carros enguiçados bloqueavam a rua. Embora normalmente leve apenas cinco minutos nesse trajeto, naquele dia infeliz levei mais de duas horas para escapar do congestionamento.

Respostas das Questões

1. $t = D_{23}/v_p$.

2. $t = t_r + v_p/2a + (D_{12} - d)/v_p$.

3. $t = t_r + v_p/2a + d_1/v_i - t_g$
+ $(D_{12} - d + d_1)/v_p$.

4. (a) Inclinação da porção reta de $x(t)$ para os carros em movimento. (b) Inclinação de $x(t)$ para a onda de partida. (c) v_o/a .

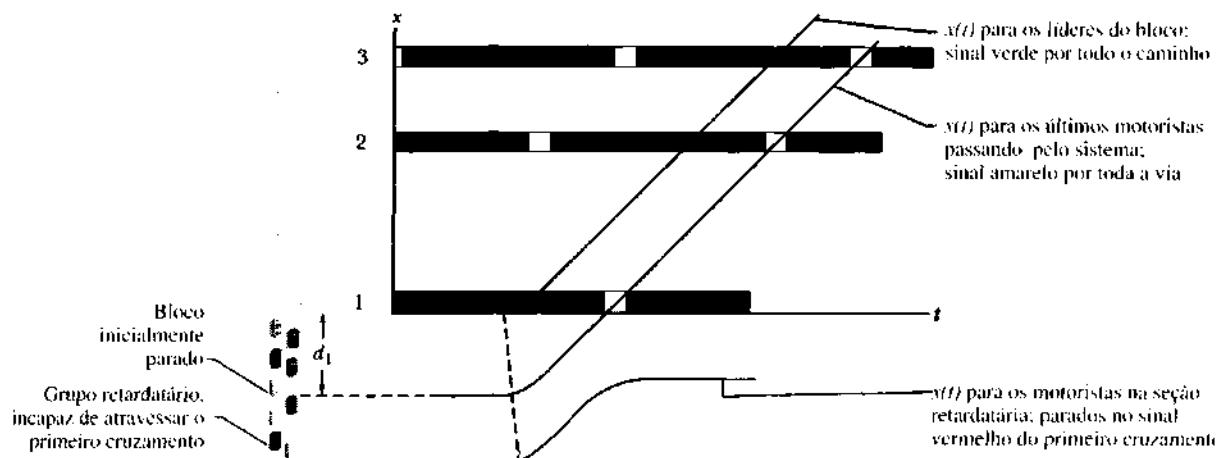


Fig. 2 Representação gráfica da progressão de um bloco de carros, parado inicialmente no primeiro cruzamento. As barras cinza, preta e branca mostram a duração real dos sinais de trânsito. (Obs.: o cinza corresponde ao sinal amarelo; o preto, ao vermelho, e o branco, ao verde.)

VETORES



Durante duas décadas, grupos de espeleólogos vinham explorando os 200 km do sistema de cavernas de Mammoth Cave e Flint Ridge em busca de uma ligação. A fotografia mostra Richard Zopf atravessando o Tubo Estreito, nas profundezas do sistema de Flint Ridge.

Depois de 12 horas de exploração, seguindo um caminho tortuoso, Zopf e seis companheiros atravessaram um regato de águas gélidas e chegaram a Mammoth Cave, provando assim que o sistema Mammoth-Flint é a caverna mais comprida do mundo. Como é possível relacionar o seu ponto de chegada ao ponto de partida de uma forma que não seja considerado o caminho percorrido?

3-1 Vetores e Escalares

Uma partícula confinada a uma linha reta pode se mover apenas em uma direção. Podemos considerar o movimento positivo em um sentido e negativo no outro. Para uma partícula que esteja em movimento no espaço, porém, um sinal positivo ou negativo não é suficiente para indicar a direção e o sentido do movimento. Em vez disso, precisamos de uma seta para mostrar a direção e o sentido, chamada de **vetor**.

Um vetor tem um módulo, uma direção e um sentido e obedece a certas regras de combinação, que discutiremos mais adiante. Uma **grandeza vetorial** é uma grandeza que pode ser representada por um vetor, isto é, uma grandeza que pode ser caracterizada por um módulo, uma direção e um sentido. Entre as grandeszas físicas que podem ser representadas por vetores estão o deslocamento, a velocidade, a aceleração, a força e o campo magnético.

Nem todas as grandeszas físicas envolvem uma direção. Não podemos, por exemplo, associar uma direção no espaço as grandeszas como a temperatura, a pressão, a energia, a massa e o tempo. Essas grandeszas são chamadas de **escalares** e nós as combinamos através das leis da álgebra comum.

Os mais simples de todos os vetores é o **vetor deslocamento**, usado para indicar uma mudança de posição. Se uma partícula muda de posição deslocando-se de *A* para *B* na Fig. 3-1a, dizemos que sofreu um deslocamento de *A* para *B*, o qual representamos por uma seta, que é o símbolo de um vetor, apontando de *A* para *B*. Para distinguir os vetores de outros tipos de setas, usamos um triângulo vazado como ponta do vetor.

As setas de *A* para *B*, de *A'* para *B'* e de *A''* para *B''* na Fig. 3-1a representam a mesma *mudança de posição* da partícula e não fazemos distinção entre elas. Todas as três setas têm o mesmo módulo, a mesma direção e o mes-

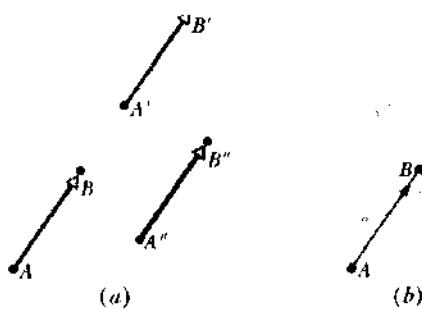


Fig. 3-1 (a) Todas as três setas representam o mesmo deslocamento. (b) Todas as três trajetórias que ligam os dois pontos correspondem ao mesmo vetor deslocamento.

mo sentido e, portanto, são vetores deslocamento idênticos.

Os vetores deslocamento não fornecem qualquer indicação a respeito da trajetória real seguida pela partícula. Na Fig. 3-1b, por exemplo, todas as três trajetórias que ligam os pontos *A* e *B* correspondem ao mesmo vetor deslocamento, o que aparece na Fig. 3-1a. Os vetores deslocamento representam apenas o efeito global do movimento e não o movimento em si.

EXEMPLO 3-1 O grupo que descobriu em 1972, a ligação Mammoth-Flint, viajou da Entrada de Austin, no sistema de Flint Ridge, até o Rio do Eco, no sistema de Mammoth Cave (veja a Fig. 3-2a), deslocando-se de 2,6 km para oeste, 3,9 km para o sul e 25 m para cima. Qual o vetor deslocamento correspondente?

Solução Primeiro observamos a situação de cima (Fig. 3-2b) para determinar o deslocamento horizontal d_h . O módulo de d_h pode ser calculado com o auxílio do teorema de Pitágoras:

$$d_h = \sqrt{(2,6 \text{ km})^2 + (3,9 \text{ km})^2} = 4,69 \text{ km}.$$

O ângulo θ em relação ao oeste é dado por

$$\tan \theta = \frac{3,9 \text{ km}}{2,6 \text{ km}} = 1,5,$$

ou

$$\theta = \tan^{-1} 1,5 = 56^\circ.$$

Em seguida, observamos a situação de lado (Fig. 3-2c) para determinar o deslocamento total d .

$$d = \sqrt{(4,69 \text{ km})^2 + (0,025 \text{ km})^2} = 4,69 \text{ km} \approx 4,7 \text{ km},$$

e o ângulo ϕ ,

$$\phi = \tan^{-1} \frac{0,025 \text{ km}}{4,69 \text{ km}} = 0,3^\circ.$$

Assim, o grupo se deslocou 4,7 km em uma direção 56° ao sul da direção oeste e 0,3° para cima em relação à horizontal. Naturalmente, o deslocamento vertical foi insignificante em comparação com o movimento horizontal, mas o fato não facilitou o trabalho do grupo, que teve que realizar inúmeras e difíceis subidas e descidas. O caminho realmente tomado foi bem diferente do indicado pelo vetor deslocamento, que apenas aponta do ponto inicial para o ponto final.

3-2 Soma de Vetores: Método Gráfico

Suponhamos que, como na Fig. 3-3a, a partícula se desloque de *A* para *B* e depois de *B* para *C*. Podemos representar o deslocamento global (qualquer que seja a trajetória seguida pela partícula) como a soma de dois vetores deslocamento sucessivos, *AB* e *BC*. O efeito resultante dos dois deslocamentos corresponde a um deslocamento de *A* para *C*. Dizemos que *AC* é a **soma vetorial** dos vetores *AB* e *BC*. Esta soma não é uma soma algébrica comum; precisamos de mais do que simples números para especificá-la.

Na Fig. 3-3b, desenhamos de novo os vetores da Fig. 3-3a e os rotulamos da forma que usaremos daqui em diante, isto é, com letras em negrito como **a**, **b** e **s**. Se você

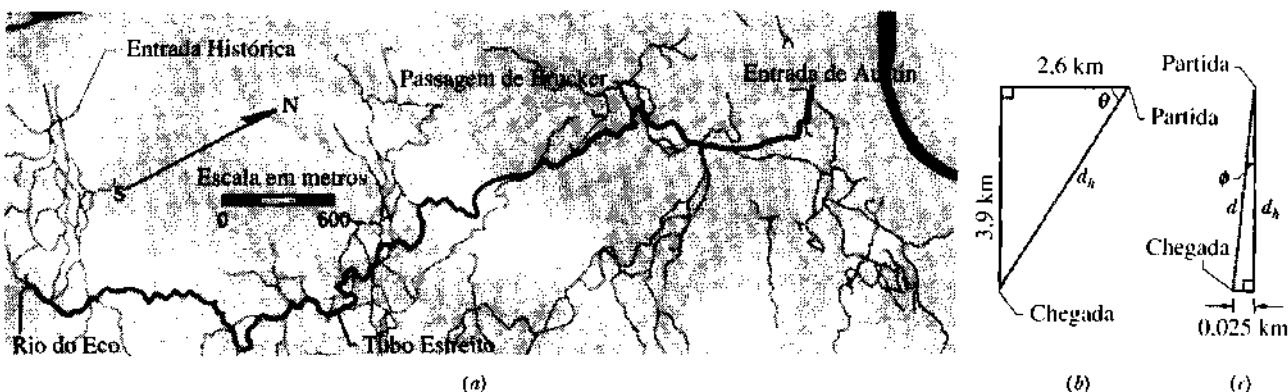


Fig. 3-2 Exemplo 3-1. (a) Parte do sistema de cavernas Mammoth-Flint, mostrando o caminho seguido pelos espeleólogos desde a Entrada de Austin até o Rio do Eco. (b) Deslocamento do grupo, visto de cima. (c) Deslocamento do grupo, visto de lado. (Adaptado de um mapa da Cave Research Foundation.)

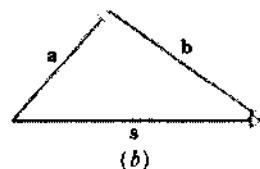
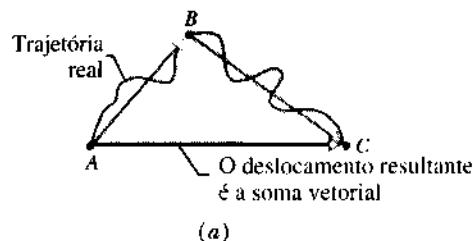


Fig. 3-3 (a) AC é a soma vetorial dos vetores AB e BC . (b) Outra forma de rotular os mesmos vetores.

estiver escrevendo à mão, desenhe uma seta acima do símbolo, como em \bar{a} . Quando quisermos nos referir apenas ao módulo do vetor (um número que é sempre positivo), usaremos um símbolo em itálico, como a , b ou s . (Se você estiver escrevendo à mão, use apenas o símbolo.) Um símbolo em negrito indica que a grandeza correspondente tem as três propriedades de um vetor: módulo, direção e sentido.

Podemos representar a relação entre os três vetores da Fig. 3-3b por meio da equação

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad (3-1)$$

em que dizemos que o vetor s é a **soma vetorial** dos vetores a e b . O processo para somar vetores desta forma (isto é, graficamente) é o seguinte: (1) Em uma folha de papel, desenhe o vetor a numa escala conveniente e com a inclinação correta. (2) Desenho o vetor b na mesma escala, começando na extremidade do vetor a e novamente com a inclinação correta. (3) Construa o vetor soma s desenhando um terceiro vetor que começa no início de a e termina na extremidade de b . É fácil generalizar este processo para somar mais de dois vetores.

Já que os vetores são novas entidades, devemos esperar que possuam novas propriedades matemáticas. O símbolo “+” na Eq. 3-1 e as palavras “adicionar” e “somar” não têm o mesmo significado que na aritmética ou na álgebra comum. Eles nos dizem para executar uma operação muito diferente, que considera tanto os módulos dos vetores quanto as suas *direções e sentidos*.

A soma vetorial, definida dessa forma, apresenta duas propriedades importantes. Em primeiro lugar, a ordem em que a adição é efetuada é irrelevante, isto é,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad (\text{propriedade comutativa}), \quad (3-2)$$

A Fig. 3-4 ilustra tal fato.

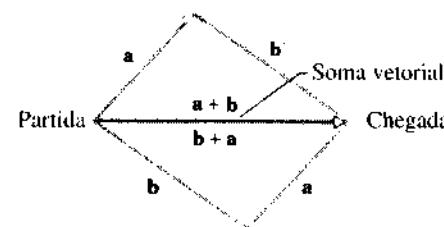


Fig. 3-4 Os dois vetores a e b podem ser somados em qualquer ordem; veja a Eq. 3-2.

Em segundo lugar, quando a soma envolve mais de dois vetores, não importa como agrupamos os vetores para somá-los. Assim, se queremos somar os vetores a , b e c , podemos somar primeiro a e b e depois somar o vetor resultante a c . Por outro lado, podemos primeiro somar b e c e depois somar o vetor resultante ao a . O resultado obtido será exatamente o mesmo, isto é,

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \quad (\text{propriedade associativa}). \quad (3-3)$$

Observando a Fig. 3-5 com atenção, você se convencerá de que a Eq. 3-3 está correta.

O vetor $-\mathbf{b}$ é um vetor com o mesmo módulo e a mesma direção que \mathbf{b} , mas com o sentido oposto (veja a Fig. 3-6). Se você tentar somar os dois vetores da Fig. 3-6, verá que

$$\mathbf{b} + (-\mathbf{b}) = 0.$$

Somar $-\mathbf{b}$ é a mesma coisa que subtrair \mathbf{b} ! Usamos esta propriedade para definir a diferença entre dois vetores. Seja $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Então,

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \quad (\text{subtração}). \quad (3-4)$$

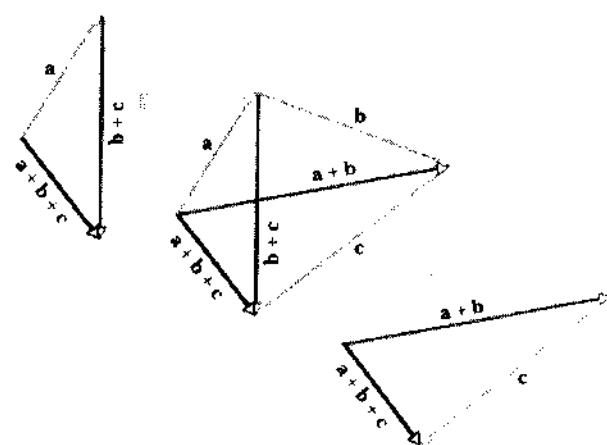
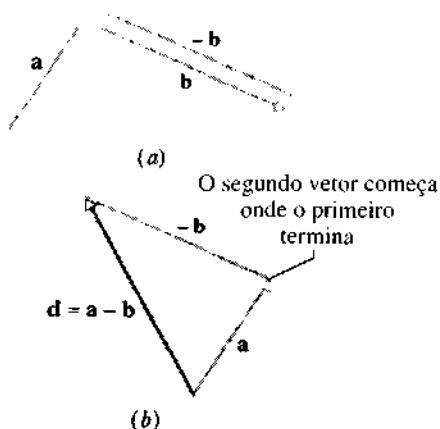


Fig. 3-5 Os vetores a , b , e c podem ser agrupados de qualquer maneira para serem somados; veja a Eq. 3-3.

Fig. 3-6 Os vetores \mathbf{b} e $-\mathbf{b}$.Fig. 3-7 (a) Vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} e $-\mathbf{b}$. (b) Para subtrair o vetor \mathbf{b} do vetor \mathbf{a} , somamos o vetor $-\mathbf{b}$ ao vetor \mathbf{a} .

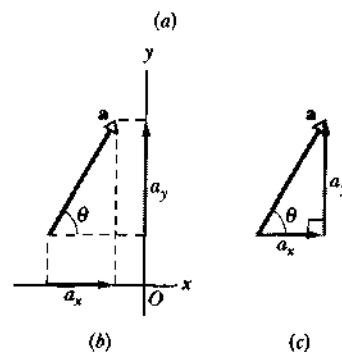
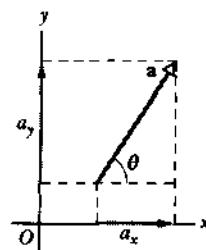
Assim, calculamos o vetor diferença \mathbf{d} somando o vetor $-\mathbf{b}$ ao vetor \mathbf{a} . Este processo está ilustrado na Fig. 3-7.

É importante observar que, embora tenhamos usado os vetores deslocamento como exemplo, as regras de adição e subtração são válidas para qualquer tipo de vetor, quer ele represente força, velocidade ou qualquer outra grandeza física vetorial. Entretanto, como na aritmética comum, só podemos somar quantidades (vetores, no nosso caso) do mesmo tipo. Podemos somar dois deslocamentos, por exemplo, ou duas velocidades, mas não faz sentido somar um deslocamento a uma velocidade. No mundo dos escalares, seria como tentar somar 21 s a 12 m.

3-3 VETORES E SUAS COMPONENTES

Somar vetores graficamente pode ser tedioso. Uma técnica mais simples e elegante utiliza a álgebra mas exige que os vetores sejam colocados num sistema de coordenadas retangulares. Os eixos dos x e dos y são geralmente desenhados no plano da página, como na Fig. 3-8a. O eixo dos z , que vamos ignorar, por enquanto, é perpendicular ao plano da página; apontando para fora.

O vetor \mathbf{a} da Fig. 3-8 está no plano xy . Quando traçamos perpendiculares aos eixos coordenados a partir das extremidades de \mathbf{a} , as grandezas a_x e a_y assim definidas são chamadas de **componentes** do vetor \mathbf{a} em relação aos eixos dos x e dos y . O processo de obter as componentes é chamado de **decomposição do vetor**. Em geral, um vetor possui três componentes embora no caso da Fig. 3-8a, a componente em relação ao eixo z seja nula. Como se pode ver na Fig. 3-8b, se deslocarmos um vetor de modo que ele permaneça sempre paralelo à sua direção original, os valores das suas compo-

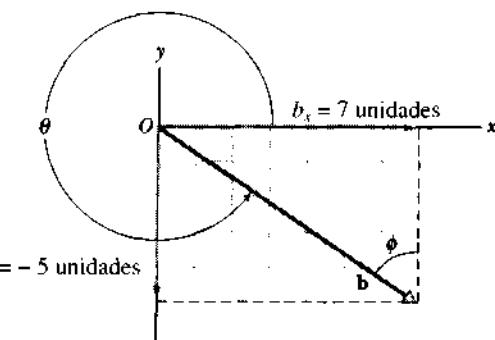
Fig. 3-8 (a) As componentes do vetor \mathbf{a} . (b) As componentes não mudam quando o vetor é deslocado, contanto que o módulo, a direção e o sentido sejam mantidos. (c) As componentes formam os catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é o módulo do vetor.

nentes permanecerão os mesmos. Os sentidos das componentes são coerentes com o sentido do vetor.

Podemos calcular facilmente as componentes de \mathbf{a} na Fig. 3-8a a partir do triângulo retângulo que aparece na figura:

$$a_x = a \cos \theta \quad \text{e} \quad a_y = a \sin \theta \quad (3-5)$$

em que θ é o ângulo que o vetor \mathbf{a} faz com o sentido crescente dos x . A Fig. 3-8c mostra que o vetor e suas componentes x e y formam um triângulo retângulo. Dependendo do valor de θ , as componentes de um vetor podem ser positivos, negativos, ou nulas. Na figura, usamos triângulos cheios, menores que os dos vetores, para indicar os sinais das componentes, de acordo com a convenção usual: positivos no sentido em que os valores das coordenadas aumentam e negativos no sentido oposto. A Fig. 3-9 mostra um vetor \mathbf{b} para o qual b_y é negativo e b_x é positivo.

Fig. 3-9 A componente \mathbf{b} em relação ao eixo dos x é positivo e a componente em relação ao eixo dos y é negativa.

Depois que um vetor é decomposto em suas componentes, essas componentes podem ser usadas em lugar do vetor. Ao invés de especificar o vetor por seu módulo a e ângulo θ , podemos fazê-lo através das componentes a_x e a_y . Os dois pares de números contêm exatamente a mesma informação e podem ser convertidos com facilidade um no outro. Para calcular a e θ a partir de a_x e a_y , basta observarmos (veja a Fig. 3-8a) que

$$\begin{aligned} \text{d} &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\ \tan \theta &= \frac{a_y}{a_x} \end{aligned} \quad (3-6)$$

Na solução de um problema específico, podemos usar a notação a_x , a_y ou a notação a , θ .

EXEMPLO 3-2 Um pequeno avião deixa um aeroporto num dia nublado e mais tarde é avistado a 215 km de distância, voando numa direção que faz um ângulo de 22° com o norte para o lado leste. A que distância a leste e ao norte do aeroporto se encontra o avião no momento em que é avistado?

Solução Em um sistema de coordenadas xy , a situação é a representada na Fig. 3-10, onde, por conveniência, a origem do sistema foi colocada no aeroporto. O vetor deslocamento do avião, d , vai da origem até o ponto em que o avião foi avistado.

Para resolver o problema, é preciso calcular as componentes de d . Usando a Eq. 3-5 com $a = 215$ km e $\theta = 68^\circ$ ($90^\circ - 22^\circ$), temos:

$$\begin{aligned} dx &= d \cos \theta = (215 \text{ km}) (\cos 68^\circ) \\ &= 81 \text{ km} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

e

$$\begin{aligned} dy &= d \sin \theta = (215 \text{ km}) (\sin 68^\circ) \\ &= 199 \text{ km.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

O avião foi avistado, portanto, 199 km ao norte e 81 km a leste do aeroporto.

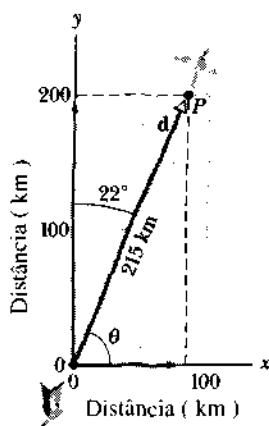


Fig. 3-10 Exemplo 3-2. Um avião decola de um aeroporto localizado na origem e mais tarde é avistado no ponto P .

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 1: ÂNGULOS — GRAUS E RADIANOS

Os ângulos medidos em relação ao sentido crescente dos x são positivos quando medidos no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio* e negativos quando medidos no sentido dos ponteiros do relógio.† Assim, por exemplo, 210° e -150° são duas formas diferentes de especificar o mesmo ângulo. A maioria das calculadoras (experimente na sua) aceita os ângulos em qualquer das duas formas para calcular funções trigonométricas.

Os ângulos podem ser medidos em graus ou em radianos (rad). Para relacionar as duas medidas, basta lembrar que uma circunferência completa corresponde a 360° e a 2π rad. Assim, para converter, digamos, 40° em radianos, escreveríamos

$$40^\circ \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = 0,70 \text{ rad.}$$

A resposta é razoável? Observe que 40° correspondem a $1/9$ de circunferência; como uma circunferência completa equivale a 2π rad ou $6,3$ rad, aproximadamente, o ângulo em radianos deve corresponder a $1/9$ de $6,3$ ou $0,7$. Outra forma de verificar o resultado é lembrar que 1 rad $\approx 57^\circ$.

Quase todas as calculadoras entram no modo grau ao serem ligadas, de modo que os ângulos devem ser digitados em graus. Na maioria dos casos, porém, é possível passar para o modo radiano. Para descobrir como fazê-lo, consulte o manual da sua calculadora.

TÁTICA 2: FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

É importante que você conheça as definições das funções trigonométricas mais comuns (seno, cosseno e tangente) porque são muito usadas na ciência e na engenharia. Essas definições são apresentadas na Fig. 3-11 numa forma que não depende da maneira como o triângulo é rotulado.

Você deve conhecer o modo como as funções trigonométricas variam com o ângulo (veja a Fig. 3-12) para poder verificar se o resultado fornecido por uma calculadora é razoável. Também é importante que conheça os sinais das funções nos vários quadrantes.

TÁTICA 3: FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

As funções trigonométricas inversas mais importantes são sen^{-1} , \cos^{-1} e \tan^{-1} . Ao determinar os valores dessas funções com o auxílio de uma calculadora, é importante verificar se a resposta é razoável, porque em geral existem duas soluções possíveis e a calculadora fornece apenas uma delas. Os valores fornecidos pelas calculadoras estão indicados pelas linhas mais escuras na Fig. 3-12. Assim, por exemplo, $\text{sen}^{-1}(0,5)$ tem dois valores: 30° (que é o valor fornecido pela calculadora) e 150° . Para observar os dois valores, trace uma reta horizontal passando por 0,5 na Fig. 3-12a e determine os pontos onde a reta intercepta a curva do seno.

$\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}}$ $\cos \theta = \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}}$ $\tan \theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{cateto adjacente a } \theta}$		
--	--	--

Fig. 3-11 Triângulo usado para definir as funções trigonométricas. Veja o Apêndice G.

*Também chamado de sentido anti-horário. (N. do R.)

†Também chamado de sentido horário. (N. do R.)

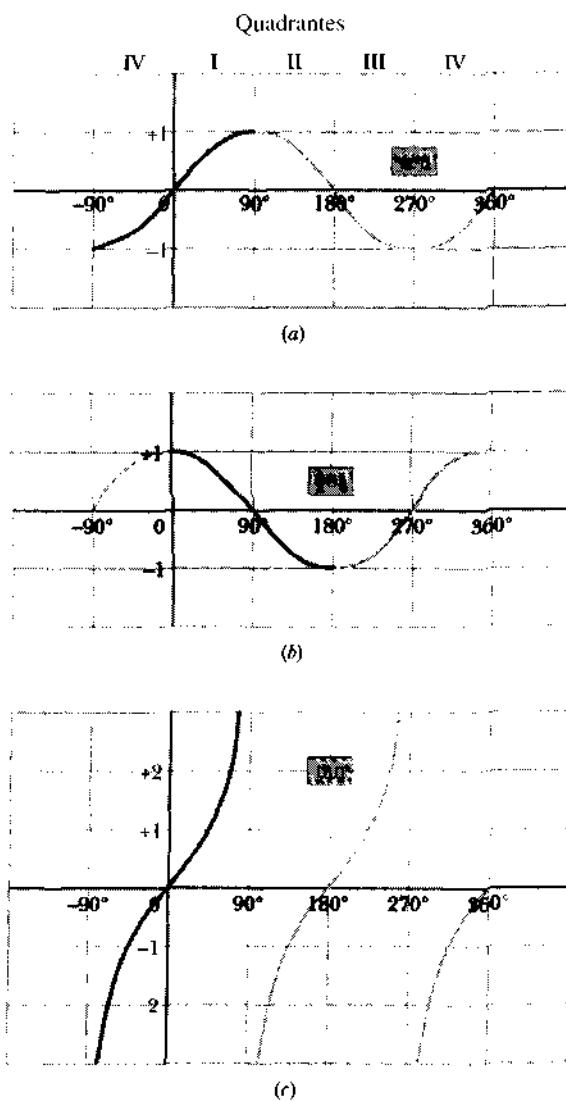


Fig. 3-12 As três principais funções trigonométricas. Os valores fornecidos por uma calculadora ao determinar as funções trigonométricas inversas correspondem às linhas mais escuras.

Como descobrir qual dos valores é o correto? Vejamos, por exemplo, o cálculo de θ no Exemplo 3-1, em que $\tan \theta = 1.5$. Determinando o valor de $\tan^{-1} 1.5$ com o auxílio da calculadora, obtemos $\theta = 56^\circ$, mas a tangente de $\theta = 236^\circ$ ($180^\circ + 56^\circ$) também é igual a 1.5. Qual das duas soluções devemos escolher? Examinando a situação real (Fig. 3-2b), vemos que 56° é um valor razoável, mas o mesmo não se pode dizer de 236° . Escolhemos, portanto, a primeira solução.

TÁTICA 4: MEDIDA DOS ÂNGULOS DE UM VETOR

A Eq. 3-5 e a segunda parte da Eq. 3-6 são válidas apenas se o ângulo for medido em relação ao sentido positivo dos x . Se o ângulo for medido em relação a alguma outra direção, talvez seja necessário mudar as funções trigonométricas da Eq. 3-5 e inverter a relação da Eq. 3-6. É mais seguro converter o ângulo dado num ângulo medido em relação ao sentido positivo dos x , como fizemos no Exemplo 3-2.

3-4 Vetores Unitários

Chamamos de **vetor unitário** um vetor que possui módulo exatamente igual a 1 e aponta numa determinada dire-

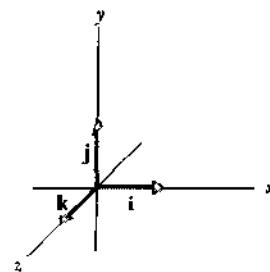


Fig. 3-13 Os vetores unitários i , j e k definem um sistema de coordenadas retangulares destrógiro. O sistema permanecerá destrógiro direita se o fizermos girar como um todo para uma nova orientação.

ção. Os vetores unitários não apresentam dimensões nem unidades; sua única função é especificar certas direções no espaço. Os vetores unitários que apontam no sentido positivo dos eixos x , y e z são chamados de i , j e k (veja a Fig. 3-13).* Sistemas de eixos como o da Fig. 3-13, são chamados de **sistemas de coordenadas destrógiro**. Todos os sistemas de coordenadas usados neste livro são deste tipo.†

Qualquer vetor pode ser expresso em função dos vetores unitários; assim, por exemplo, podemos especificar a e b das Figs. 3-8 e 3-9 na forma

$$\mathbf{a} = a_x i + a_y j \quad (3-7)$$

e

$$\mathbf{b} = b_x i + b_y j. \quad (3-8)$$

Esses vetores aparecem novamente na Fig. 3-14. As grandezas $a_x i$ e $a_y j$ são chamadas de **componentes vetoriais** de \mathbf{a} para distingui-las de a_x e a_y , que são as **componentes escalares** ou simplesmente **componentes** do vetor.

Examine o vetor deslocamento do Exemplo 3-1. Se você colocar o sistema de coordenadas da Fig. 3-13 na Entrada de Austin da Fig. 3-2a, com i para o leste, j para o norte e k para cima, o vetor deslocamento \mathbf{d} até o Rio do Eco poderá ser expresso na forma

$$\mathbf{d} = -(2.6 \text{ km})i - (3.9 \text{ km})j + (0.025 \text{ km})k.$$

3-5 Somando Vetores através das Componentes

Somar vetores usando lápis, régua e transferidor é um método cansativo, de precisão limitada e difícil de usar em

*Se você estiver escrevendo à mão, coloque um acento circunflexo acima de um vetor para indicar que ele é unitário: \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} .

†Para identificar se um sistema de coordenadas é destrógiro, proceda da seguinte forma: usando sua mão direita, coloque o dedo polegar no sentido positivo do eixo x e o dedo indicador no sentido positivo do eixo y . Se, nessa situação, você conseguir colocar o dedo médio no sentido positivo do eixo z , trata-se de um sistema destrógiro. Caso o seu dedo médio só possa apontar no sentido *negativo* do eixo z , diz-se que o sistema é levógiro. (N. do R.)

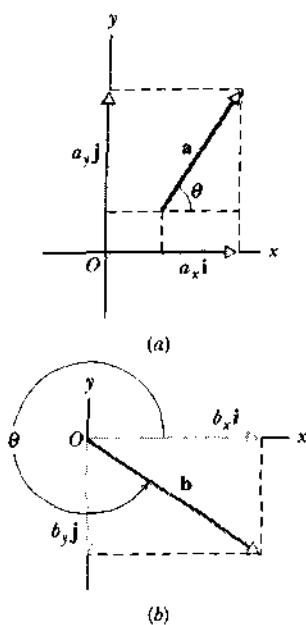


Fig. 3-14 (a) Componentes vetoriais do vetor \mathbf{a} . (b) Componentes vetoriais do vetor \mathbf{b} .

três dimensões. Nesta seção, vamos estudar uma técnica mais direta, na qual os vetores são somados, combinando-se suas componentes, eixo por eixo.

Para começar, considere a equação

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad (3-9)$$

que diz que o vetor \mathbf{r} é igual ao vetor $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$. Se isso é verdade, então cada componente de \mathbf{r} deve ser igual a componente correspondente de $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$:

$$r_x = a_x + b_x, \quad (3-10)$$

$$r_y = a_y + b_y, \quad (3-11)$$

$$r_z = a_z + b_z. \quad (3-12)$$

Em outras palavras, dois vetores são iguais somente se todas as suas componentes correspondentes forem iguais. De acordo com as Eqs. 3-10 a 3-12, para somar os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} , precisamos: (1) decompor os vetores em suas componentes; (2) somar as componentes correspondentes, eixo por eixo, para calcular as componentes do vetor soma \mathbf{r} ; e (3) se necessário, combinar as componentes de \mathbf{r} para determinar o próprio vetor \mathbf{r} . (O vetor \mathbf{r} pode ser representado de duas formas. Podemos expressá-lo em função dos vetores unitários ou fornecer o módulo e a orientação de \mathbf{r} , usando a Eq. 3-6 em duas dimensões ou o método do Exemplo 3-1 para três dimensões.)

EXEMPLO 3-3 Você está participando de um rali e recebe as seguintes instruções: do ponto de partida, use as estradas disponíveis para viajar 36 km para leste até o ponto de controle “Alfa”, depois 45 km para o norte até o ponto de controle “Bala” e, finalmente, 25 km para noroeste até o ponto de controle “Cruz”. (As estradas e os pontos de contro-

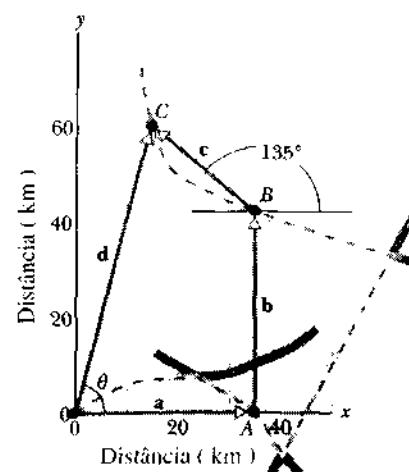


Fig. 3-15 Exemplo 3-3. Mapa de um rali, mostrando a origem, os pontos de controle Alfa, Bala e Cruz e as estradas da região.

le aparecem na Fig. 3-15.) Ao chegar ao ponto de controle “Cruz”, quais são o módulo e a orientação do seu deslocamento \mathbf{d} em relação ao ponto de partida?

Solução A Fig. 3-15 mostra uma orientação conveniente para um sistema de coordenadas, e os vetores que representam os três deslocamentos envolvidos. As componentes escalares de \mathbf{d} são

$$d_x = a_x + b_x + c_x = 36 \text{ km} + 0 + (25 \text{ km}) (\cos 135^\circ) \\ = (36 + 0 - 17.7) \text{ km} = 18.3 \text{ km}$$

e

$$d_y = a_y + b_y + c_y = 0 + 45 \text{ km} + (25 \text{ km}) (\sin 135^\circ) \\ = (0 + 45 + 17.7) \text{ km} = 62.7 \text{ km}.$$

Agora podemos usar a Eq. 3-6 para calcular o módulo e a orientação de \mathbf{d} :

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{(18.3 \text{ km})^2 + (62.7 \text{ km})^2} \\ = 65 \text{ km} \quad (\text{Resposta})$$

e

$$\theta = \tan^{-1} \frac{d_y}{d_x} = \tan^{-1} \frac{62.7 \text{ km}}{18.3 \text{ km}} = 74^\circ, \quad (\text{Resposta})$$

onde θ é o ângulo que aparece na Fig. 3-15.

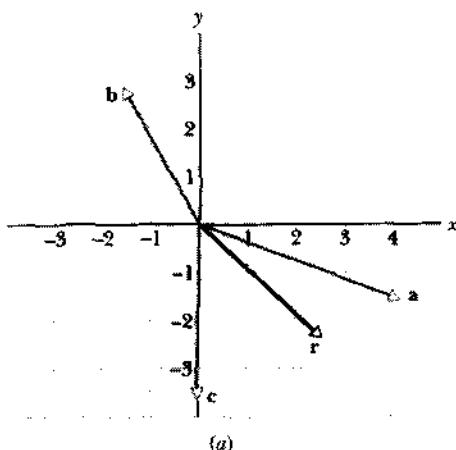
EXEMPLO 3-4 Os três vetores abaixo estão expressos em termos dos vetores unitários:

$$\mathbf{a} = 4.2 \mathbf{i} - 1.6 \mathbf{j}.$$

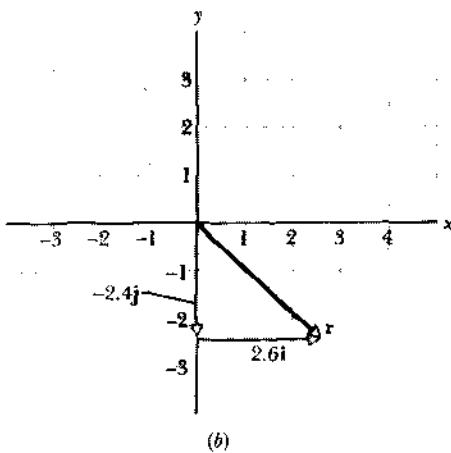
$$\mathbf{b} = -1.6 \mathbf{i} + 2.9 \mathbf{j}.$$

$$\mathbf{c} = -3.7 \mathbf{j}.$$

Todos os três vetores estão no plano xy , já que nenhum deles possui componentes em relação ao eixo dos z . Determine o vetor \mathbf{r} que é a soma destes três vetores. Por conveniência, as unidades foram omitidas nas expressões acima; se quiser, você pode imaginar que as coordenadas estão expressas em metros.



(a)



(b)

Fig. 3-16 Exemplo 3-4. O vetor \mathbf{r} é a soma vetorial dos outros três vetores.

Solução De acordo com as Eqs. 3-10 e 3-11, temos:

$$r_x = a_x + b_x + c_x = 4.2 - 1.6 + 0 = 2.6$$

e

$$r_y = a_y + b_y + c_y = -1.6 + 2.9 - 3.7 = -2.4.$$

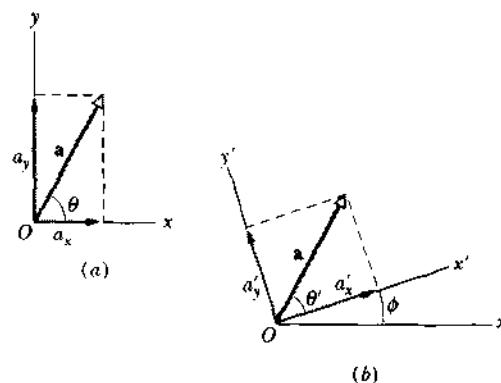
Assim,

$$\mathbf{r} = 2.6\mathbf{i} - 2.4\mathbf{j}. \quad (\text{Resposta})$$

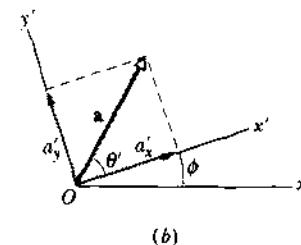
A Fig. 3-16a mostra os três vetores e a sua soma. A Fig. 3-16b mostra \mathbf{r} e suas componentes vetoriais.

3-6 Os Vetores e as Leis da Física

Em todos os sistemas de coordenadas que mostramos até agora, os eixos dos x e dos y foram traçados paralelamente às bordas do papel. Assim, quando um vetor \mathbf{a} aparece no desenho, suas componentes vetoriais $a_x\mathbf{i}$ e $a_y\mathbf{j}$ também são paralelas às bordas do papel (veja a Fig. 3-17a). Esta orientação dos eixos foi escolhida apenas por razões estéticas. Poderíamos usar um outro sistema de coordenadas cujos eixos fizessem um ângulo ϕ com o antigo sistema, como na Fig. 3-17b,



(a)



(b)

Fig. 3-17 (a) O vetor \mathbf{a} e suas componentes. (b) O mesmo vetor, depois que os eixos dos sistema de coordenadas sofrem uma rotação de um ângulo ϕ .

caso em que as componentes do vetor \mathbf{a} (cuja orientação não muda) passariam a ter novos valores, que vamos chamar de a'_x e a'_y . Como existe um número infinito de valores para ϕ , existe um número infinito de modos de representar o vetor \mathbf{a} em termos de suas componentes.

Qual é, então, o “verdadeiro” par de componentes? A resposta é que todos os pares são igualmente válidos, já que cada par (com seus respectivos eixos) é apenas uma forma diferente de representar o mesmo vetor \mathbf{a} ; todos dão origem a um vetor com o mesmo módulo e a mesma orientação. Na Fig. 3-17, temos:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a'_x^2 + a'_y^2} \quad (3-13)$$

e

$$\theta = \theta' + \phi. \quad (3-14)$$

O fato é que temos uma grande liberdade para escolher um sistema de coordenadas, porque as relações entre vetores (entre elas, por exemplo, a soma de vetores da Eq. 3-1) não dependem da origem escolhida para o sistema de coordenadas nem da orientação dos eixos. O que também se aplica às relações da física; elas são todas independentes da escolha do sistema de coordenadas. Acrescente a isso a simplicidade e versatilidade da linguagem dos vetores e será fácil compreender por que as leis da física são quase sempre apresentadas nessa linguagem: uma equação, como a Eq. 3-9, pode representar três (ou mais) relações, como as Eqs. 3-10, 3-11 e 3-12.

3-7 Multiplicação de Vetores*

Existem três formas diferentes de multiplicar vetores. Nenhuma delas é exatamente igual à multiplicação algébrica comum.

*Como as informações contidas nesta seção não são essenciais para a compreensão dos capítulos seguintes (os produtos escalares serão discutidos apenas no Cap. 7 e os produtos vetoriais no Cap. 12), talvez o seu professor prefira deixá-lo para mais tarde.

Multiplicação de um Vetor por um Escalar

Quando multiplicamos um vetor \mathbf{a} por um escalar s , o resultado é um novo vetor cujo módulo é o produto do módulo de \mathbf{a} pelo valor absoluto de s e cuja direção é a mesma de \mathbf{a} . O sentido é o mesmo de \mathbf{a} se s for positivo e o sentido é o oposto se s for negativo. Para dividir \mathbf{a} por s , multiplicamos \mathbf{a} por $1/s$.

Tanto na multiplicação como na divisão, o escalar pode ser um número puro ou uma grandeza física; no segundo caso, o vetor resultante não representará a mesma grandeza física que o vetor original \mathbf{a} .

Um Olhar à Frente

Vejamos, por exemplo, a equação abaixo, que aparece no Cap. 5:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

onde \mathbf{a} é um vetor aceleração, m é uma massa (que é um escalar positivo) e \mathbf{F} é um vetor força. Embora você possa não compreender o significado da equação, está em condições de observar dois aspectos. Em primeiro lugar, como m é um escalar positivo, \mathbf{F} e \mathbf{a} têm a mesma direção e o mesmo sentido. Em segundo lugar, como m é uma grandeza física (como vimos no Cap. 1, a unidade de massa é o quilograma), \mathbf{F} não representa a mesma grandeza que o vetor original \mathbf{a} .

O Produto Escalar

Existem duas formas de multiplicar um vetor por outro vetor. A primeira produz um escalar; a segunda, um novo vetor. Os alunos costumam confundir os dois tipos de multiplicação; é importante que, desde o começo, você preste atenção nas diferenças entre eles.

O **produto escalar** dos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} da Fig. 3-18a é representado pela expressão $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ e definido da seguinte forma:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \phi \quad (3-15)$$

onde a é o módulo de \mathbf{a} , b é o módulo de \mathbf{b} e ϕ é o ângulo* entre \mathbf{a} e \mathbf{b} . Observe que o lado direito da equação contém apenas escalares (incluindo o valor de $\cos \phi$); assim, o resultado é um escalar. Quando nos referimos ao **produto escalar** de dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} , em geral falamos em “ \mathbf{a} escalar \mathbf{b} ”.

O produto escalar pode ser considerado como o produto de duas grandezas: (1) o módulo de um dos vetores; (2)

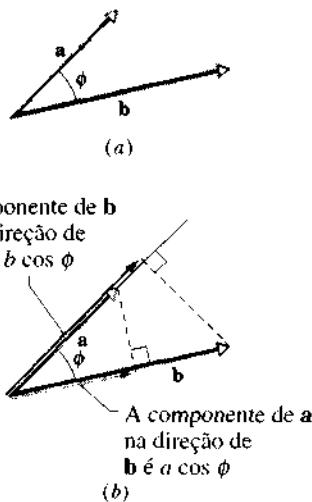


Fig. 3-18 (a) Dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} , fazendo um ângulo ϕ . (b) Cada vetor tem uma componente na direção do outro vetor.

a componente escalar do segundo vetor na direção do primeiro. Assim, por exemplo, na Fig. 3-18b, a componente escalar de \mathbf{a} na direção de \mathbf{b} é $a \cos \phi$; observe que essa componente pode ser obtida, traçando-se uma perpendicular a \mathbf{b} a partir da extremidade de \mathbf{a} . Da mesma forma, a componente escalar de \mathbf{b} na direção de \mathbf{a} é dada por $b \cos \phi$. Quando ϕ é igual a 0° , a componente de um dos vetores na direção do outro tem o maior valor possível, o que também ocorre com o produto escalar. Por outro lado, quando ϕ é igual a 90° , a componente de um dos vetores na direção do outro é zero e o produto escalar também é zero.

A Eq. 3-15 pode ser reescrita da seguinte forma para destacar as componentes e mostrar que a ordem da multiplicação é irrelevante:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = (a \cos \phi)(b) \\ &= (a)(b \cos \phi). \end{aligned} \quad (3-16)$$

Em outras palavras, a lei comutativa se aplica ao produto escalar. Quando os dois vetores são expressos em termos dos vetores unitários, o produto escalar assume a forma

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}), \quad (3-17)$$

que obedece à **lei distributiva**, como será demonstrado no Exemplo 3-5.

Um Olhar à Frente

Como exemplo de produto escalar, escolhemos a definição do trabalho W (um escalar) realizado por uma força \mathbf{F} quando seu ponto de aplicação sofre um deslocamento \mathbf{d} . Se ϕ é o ângulo entre os vetores \mathbf{F} e \mathbf{d} , o trabalho W é definido como

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = Fd \cos \phi.$$

Voltaremos a esta definição no Cap. 7.

*Na Fig. 3-18a existem na verdade dois ângulos entre os vetores: ϕ e $360^\circ - \phi$. Qualquer um dos dois pode ser usado na Eq. 3-15, porque os seus cosenos são iguais.

EXEMPLO 3-5 Qual é o ângulo ϕ entre $\mathbf{a} = 3.0\mathbf{i} - 4.0\mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = -2.0\mathbf{i} + 3.0\mathbf{k}$?

Solução De acordo com a Eq. 3-15, o produto escalar é dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= ab \cos \phi = \sqrt{3.0^2 + 4.0^2} \sqrt{2.0^2 + 3.0^2} \cos \phi \\ &= 18.0 \cos \phi.\end{aligned}\quad (3-18)$$

Por outro lado, de acordo com a Eq. 3-17,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (3.0\mathbf{i} - 4.0\mathbf{j}) \cdot (-2.0\mathbf{i} + 3.0\mathbf{k}).$$

Usando a lei distributiva da multiplicação, temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (3.0\mathbf{i}) \cdot (-2.0\mathbf{i}) + (3.0\mathbf{i}) \cdot (3.0\mathbf{k}) \\ &\quad + (-4.0\mathbf{j}) \cdot (-2.0\mathbf{i}) + (-4.0\mathbf{j}) \cdot (3.0\mathbf{k}).\end{aligned}$$

Vamos agora aplicar a Eq. 3-15 a todas as parcelas. Para a primeira parcela, o ângulo entre os dois vetores é 0° ; para as outras três parcelas, o ângulo é 90° . Assim, temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= -(6.0)(1) + (9.0)(0) + (8.0)(0) - (12)(0) \\ &= -6.0.\end{aligned}\quad (3-19)$$

Igualando os resultados das Eqs. 3-18 e 3-19, temos:

$$18.0 \cos \phi = -6.0.$$

ou

$$\phi = \cos^{-1} \frac{-6.0}{18.0} = 109^\circ \approx 110^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

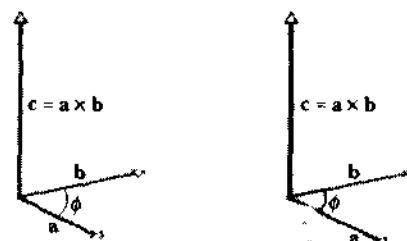
O Produto Vetorial

O **produto vetorial** de dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} é representado pela expressão $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e produz um terceiro vetor, \mathbf{c} , cujo módulo é dado por

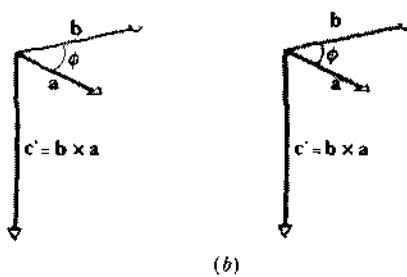
$$c = ab \sin \phi, \quad (3-20)$$

onde ϕ é o menor dos dois ângulos entre \mathbf{a} e \mathbf{b} .* Quando nos referimos ao **produto vetorial** do vetor \mathbf{a} pelo vetor \mathbf{b} , em geral falamos em “a vetorial \mathbf{b} ” ou “o vetor \mathbf{b} ”. Quando \mathbf{a} e \mathbf{b} são paralelos ou antiparalelos, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$. O módulo $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é máximo quando \mathbf{a} e \mathbf{b} são perpendiculares.

A direção de \mathbf{c} é perpendicular ao plano que contém \mathbf{a} e \mathbf{b} . A Fig. 3-19a mostra como o sentido de \mathbf{c} pode ser determinado com o auxílio da chamada **regra da mão direita**. Disponha os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} de modo que suas origens coincidam. Imagine uma reta que seja perpendicular ao plano que contém os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} e passe pela sua origem comum. Finja que está segurando essa linha com a mão *direita* de tal forma que os seus dedos empurrem o vetor \mathbf{a} na



(a)



(b)

Fig. 3-19 Ilustração da regra da mão direita para produtos vetoriais. (a) Empurre o vetor \mathbf{a} na direção do vetor \mathbf{b} com os dedos da mão direita: seu polegar mostrará a direção e o sentido do vetor $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. (b) Demonstração de que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$.

direção de \mathbf{b} através do menor ângulo entre eles. O seu polegar estendido apontará no sentido de \mathbf{c} .

No caso do produto vetorial, a ordem dos vetores é importante. Na Fig. 3-19b, estamos determinando o sentido de $\mathbf{c}' = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$, de modo que os dedos são colocados de modo a empurrarem o vetor \mathbf{b} na direção de \mathbf{a} . Em consequência, o polegar fica apontado no sentido oposto ao do caso anterior. Vemos portanto que $\mathbf{c}' = -\mathbf{c}$, ou seja,

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}. \quad (3-21)$$

Em outras palavras, a lei comutativa não se aplica ao produto vetorial.

Quando os vetores são expressos em termos dos vetores unitários, o produto vetorial assume a forma

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \times (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}), \quad (3-22)$$

à que pode ser aplicada a lei distributiva, como será visto no Exemplo 3-7.

Um Olhar à Frente

Vamos encontrar o produto vetorial pela primeira vez no Cap. 12, quando discutirmos uma força \mathbf{F} cujo ponto de aplicação está a uma distância \mathbf{r} de uma certa origem. O torque, τ (um efeito de rotação) que esta força exerce em relação à origem é definido através da equação

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

*Neste caso, é preciso usar o menor dos dois ângulos entre os vetores porque $\sin \phi$ e $\sin(360^\circ - \phi)$ têm sinais opostos.

EXEMPLO 3-6 O vetor \mathbf{a} está contido no plano xy da Fig. 3-20. Ele tem um módulo de 18 unidades e faz um ângulo de 250° com o sentido positivo dos x . O vetor \mathbf{b} tem um módulo de 12 unidades e está alinhado com o eixo dos z no sentido positivo.

a. Qual é o produto escalar dos dois vetores?

Solução O ângulo ϕ entre os dois vetores é igual a 90° , de modo que, de acordo com a Eq. 3-15,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \phi = (18)(12) (\cos 90^\circ) = 0. \quad (\text{Resposta})$$

O produto escalar de dois vetores perpendiculares é sempre zero. Coerente, portanto, com o fato de que, nesse caso, nenhum dos dois vetores tem componente na direção do outro vetor.

b. Qual é o produto vetorial \mathbf{c} dos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} ?

Solução De acordo com a Eq. 3-20, o módulo do produto vetorial é dado por

$$ab \sin \phi = (18)(12) (\sin 90^\circ) = (216). \quad (\text{Resposta})$$

O vetor \mathbf{c} é perpendicular ao plano formado por \mathbf{a} e \mathbf{b} . Ele deve ser portanto perpendicular a \mathbf{b} , o que significa que deve estar no plano xy . Usando a regra da mão direita ilustrada na Fig. 3-19, vemos que \mathbf{c} tem o sentido indicado na Fig. 3-20. Como \mathbf{c} também é perpendicular a \mathbf{a} , a direção de \mathbf{c} faz um ângulo de $250^\circ - 90^\circ = 160^\circ$ com o sentido positivo dos x .

EXEMPLO 3-7 Se $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, obtenha o vetor $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Solução De acordo com a Eq. 3-22, temos:

$$\mathbf{c} = (3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \times (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}),$$

Usando a lei distributiva, temos:

$$\mathbf{c} = -(3\mathbf{i} \times 2\mathbf{i}) + (3\mathbf{i} \times 3\mathbf{k}) + (4\mathbf{j} \times 2\mathbf{i}) - (4\mathbf{j} \times 3\mathbf{k}).$$

Em seguida, calculamos os valores de todas as parcelas, usando a Eq. 3-20 e determinando os sinais com o auxílio da regra da mão direita. O resultado é o seguinte:

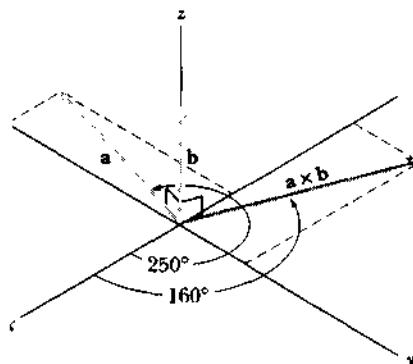


Fig. 3-20 Exemplo 3-6. Multiplicação de vetores.

$$\mathbf{c} = 0 - 9\mathbf{j} - 8\mathbf{k} - 12\mathbf{i} = -12\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 8\mathbf{k}. \quad (\text{Resposta})$$

O vetor \mathbf{c} é perpendicular a \mathbf{a} e \mathbf{b} , um fato que você pode comprovar mostrando que $\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 0$ e $\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = 0$, isto é, que o vetor \mathbf{c} não tem componentes nas direções de \mathbf{a} e de \mathbf{b} .

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 5: ERROS COMUNS NO CÁLCULO DE PRODUTOS VETORIAIS

Vários erros podem ser cometidos durante o cálculo de um produto vetorial. (1) Deixar de representar os dois vetores com uma origem comum quando na ilustração original a extremidade do primeiro vetor coincide com a origem do segundo. É preciso deslocar mentalmente (ou, melhor ainda, tornar a desenhar) um deles na posição correta, sem modificar sua orientação. (2) Deixar de usar a mão direita ao aplicar a regra da mão direita porque ela está ocupada com um lápis ou calculadora. (3) Erro ao empurrar o primeiro vetor do produto na direção do segundo quando as orientações dos vetores exigem um movimento incômodo da mão para aplicar a regra da mão direita. Isso também pode acontecer quando você tenta imaginar o movimento em vez de executá-lo. (4) Deixar de trabalhar com um sistema de coordenadas destrógiro (veja a Fig. 3-13).

|RESUMO

Escalares e Vetores

Os **escalares**, como a temperatura, são especificados apenas por número e uma unidade (20°C) e obedecem às regras da álgebra comum. Os **vetores**, como o deslocamento, são especificados por um módulo e uma orientação (5 m, norte) e obedecem às regras especiais da álgebra vetorial.

Soma Geométrica de Vetores

Dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} podem ser somados geometricamente. Para isso, basta desenhá-los na mesma escala e fazer com que a origem do segundo vetor coincida com a extremidade do primeiro. Nesse caso, o vetor soma, \mathbf{s} , é o vetor que liga a origem do primeiro à extremidade do segundo (veja a Fig. 3-3). Para subtrair \mathbf{b} de \mathbf{a} , basta inverter o sentido de \mathbf{b} para obter $-\mathbf{b}$ e em seguida somar $-\mathbf{b}$ a \mathbf{a} (veja a Fig. 3-7). A soma e subtração de vetores são comutativas e obedecem à lei associativa.

Componentes de um Vectors

As **componentes** a_x e a_y de um vetor \mathbf{a} são determinadas, traçando-se perpendiculares aos eixos do sistema de coordenadas a partir da extremidade do vetor, como na Fig. 3-8 e no Exemplo 3-2. As componentes são dadas por

$$a_x = a \cos \theta \quad \text{e} \quad a_y = a \sin \theta, \quad (3-5)$$

onde θ é medido em relação ao sentido positivo dos x . O sinal da componente indica o seu sentido em relação ao eixo. Dadas as componentes, podemos reconstruir o vetor usando as expressões

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{e} \quad \tan \theta = \frac{a_y}{a_x}, \quad (3-6)$$

onde novamente θ é medido em relação ao sentido positivo dos x .

Vetores Unitários

É possível definir **vetores unitários** \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , que possuem módulo unitário e cujas direções são as dos eixos dos x , dos y e dos z de um sistema de coordenadas destrógiro como o que aparece na Fig. 3-13. Em termos dos vetores unitários, um vetor \mathbf{a} pode ser escrito na forma

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad (3-7)$$

onde $a_x \mathbf{i}$, $a_y \mathbf{j}$ e $a_z \mathbf{k}$ são as **componentes vetoriais** e a_x , a_y e a_z são as **componentes escalares** de \mathbf{a} . O Exemplo 3-4 mostra como é possível somar vetores usando vetores unitários.

Soma de Vetores Usando as Componentes

Para somarmos vetores através das componentes, usamos as equações

$$\mathbf{r}_1 = a_1 \mathbf{i} + b_1 \mathbf{j}; \quad \mathbf{r}_2 = a_2 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j}; \quad \mathbf{r}_3 = a_3 \mathbf{i} + b_3 \mathbf{j}. \quad (3-10 \text{ a } 3-12)$$

Veja o Exemplo 3-3.

Vetores e Leis Físicas

Qualquer situação física que envolva vetores pode ser descrita em um número infinito de diferentes sistemas de coordenadas. Em geral, escolhemos um sistema que torne o nosso trabalho mais simples; entretanto, a relação entre as grandezas vetoriais não depende do sistema escolhido. As leis da física são independentes do sistema de coordenadas.

Produto de um Escalar por um Vetor

O produto de um escalar s por um vetor \mathbf{v} é um novo vetor cujo módulo é $s|\mathbf{v}|$ e cuja direção é a mesma de \mathbf{v} . O sentido é o mesmo de \mathbf{v} se s for positivo e o sentido é contrário ao de \mathbf{v} se s for negativo. Para dividir \mathbf{v} por s , basta multiplicar \mathbf{v} por $(1/s)$.

Produto Escalar

O produto escalar de dois vetores, representado pela expressão $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, é a grandeza escalar dada por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \phi, \quad (3-15)$$

onde ϕ é o ângulo entre as direções de \mathbf{a} e \mathbf{b} (veja a Fig. 3-18a).

O produto escalar pode ser positivo, negativo ou nulo, dependendo do valor de ϕ . A Fig. 3-18b mostra que o produto escalar pode ser considerado como o produto do módulo de um dos vetores pela componente do segundo vetor na direção do primeiro. Em termos dos vetores unitários, o produto escalar é dado pela equação

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}), \quad (3-17)$$

que obedece à lei distributiva, como está demonstrado no Exemplo 3-5. Observe que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.

Produto Vetorial

O produto vetorial de dois vetores, representado pela expressão $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, é um vetor \mathbf{c} cujo módulo é dado por

$$c = ab \sin \phi, \quad (3-20)$$

onde ϕ é o menor dos dois ângulos entre as direções de \mathbf{a} e \mathbf{b} . O vetor \mathbf{c} é perpendicular ao plano definido por \mathbf{a} e \mathbf{b} e seu sentido é dado pela regra da mão direita, ilustrada na Fig. 3-19. Observe que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. Em termos dos vetores unitários, o produto vetorial é dado pela equação

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \quad (3-22)$$

que obedece à lei distributiva. O produto vetorial está ilustrado nos Exemplos 3-6 e 3-7.

QUESTIONÁRIO

1. Em 1969, três astronautas do Projeto Apolo partiram de Cabo Canaveral, foram até a Lua e retornaram à Terra, descendo no Oceano Pacífico. Um almirante assistiu a partida dos astronautas em Cabo Canaveral e depois viou para o Oceano Pacífico num porta-aviões para recolher os. Compare os deslocamentos dos astronautas e do almirante.
2. É possível combinar dois vetores de módulos diferentes de tal forma que a resultante seja zero? E se forem três vetores?
3. Um vetor pode ter módulo zero se uma das suas componentes for diferente de zero?
4. A soma dos módulos de dois vetores pode ser igual ao módulo da soma desses vetores?
5. O módulo da diferença entre dois vetores pode ser maior do que o módulo dos vetores? Pode ser maior do que o módulo da soma dos dois vetores? Dê alguns exemplos.
6. Se a soma de três vetores é nula, eles estão necessariamente no mesmo plano?
7. Explique em que sentido uma equação vetorial contém mais informações do que uma equação escalar.
8. Por que os vetores unitários \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} não têm unidades?
9. Dê alguns exemplos de grandezas escalares. O valor de uma grandeza escalar depende do sistema de coordenadas escolhido?
10. É possível ordenar eventos no tempo. Assim, por exemplo, se o evento b preceder o evento c mas for posterior ao evento a , a ordem temporal desses eventos será a , b , c . O tempo tem, portanto, um sentido que nos permite distinguir passado, presente e futuro. Isso significa que o tempo é um vetor? Justifique sua resposta.
11. As leis comutativa e associativa se aplicam à subtração de vetores?
12. Um produto escalar pode ser negativo?
13. (a) Se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, podemos concluir que \mathbf{a} e \mathbf{b} são perpendiculares?
(b) Se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, podemos concluir que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?
14. Se $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, podemos concluir que \mathbf{a} e \mathbf{b} são paralelos? A recíproca é verdadeira?
15. É preciso especificar um sistema de coordenadas quando (a) somamos, (b) calculamos o produto escalar, (c) calculamos o produto vetorial, (d) calculamos as componentes de dois vetores?

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS**Seção 3-2 Soma de Vetores: Método Gráfico**

- 1E. Considere dois deslocamentos, um de módulo 3 m e outro de módulo 4 m. Mostre como os vetores deslocamento devem ser combinados para que o módulo do deslocamento resultante seja (a) 7 m, (b) 1 m e (c) 5 m.

- 2E. Quais são as propriedades de dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} tais que

$$(a) \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c} \quad e \quad a + b = c;$$

$$(b) \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{b};$$

$$(c) \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c} \quad e \quad a^2 + b^2 = c^2?$$

- 3E. Uma mulher caminha 250 m na direção 30° a leste do norte e depois 175 m para o leste. (a) Usando métodos gráficos, determine o seu deslocamento resultante a partir do ponto inicial. (b) Compare o módulo do deslocamento com a distância total que a mulher percorreu.

4E. Uma pessoa caminha 3,1 km para o norte, 2,4 km para oeste e 5,2 km para o sul. (a) Represente os movimentos da pessoa em um diagrama vetorial. (b) Em que direção um passarinho teria que voar em linha reta para chegar ao mesmo ponto de destino? Que distância teria que percorrer?

5E. Um carro viaja 50 km para leste, 30 km para o norte e 25 km em uma direção 30° a leste do norte. Represente os movimentos do carro em um diagrama vetorial e determine o deslocamento total do veículo em relação ao ponto de partida.

6P. O vetor \mathbf{a} tem um módulo de 5,0 unidades e está dirigido para leste. O vetor \mathbf{b} está dirigido para 35° a oeste do norte e tem um módulo de 4,0 unidades. Construa diagramas vetoriais para calcular $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} - \mathbf{a}$. Estime o módulo e a orientação dos vetores $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ a partir desses diagramas.

7P. Três vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} , todos com um módulo de 50 unidades, estão em plano xy e fazem ângulos de 30° , 195° e 315° com o sentido positivo dos x , respectivamente. Estime graficamente o módulo e orientação dos vetores (a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$ e (c) um vetor \mathbf{d} tal que $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = 0$.

8P. Um banco no centro de Boston foi assaltado (veja o mapa da Fig. 3-21). Os ladrões, para despistarem a polícia, fugiram de helicóptero, viajando primeiro 20 milhas numa direção 45° ao sul do leste, depois 33 milhas em uma direção 26° ao norte do oeste e finalmente 16 milhas numa direção 18° a leste do sul. Concluída a terceira etapa do voo, foram capturados. Em que cidade os ladrões foram presos? (Use o método geométrico para somar os deslocamentos no mapa.)

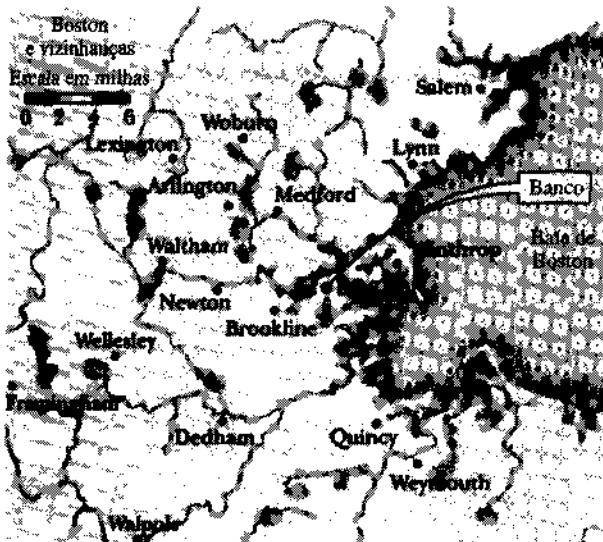


Fig. 3-21 Problema 8.

Seção 3-3 Vetores e seus Componentes

9E. Quais são as componentes x e y de um vetor \mathbf{a} situado no plano xy se ele faz um ângulo de 250° com o sentido positivo dos x no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio e seu módulo vale 7,3 unidades?

10E. A componente x de um certo vetor vale $-25,0$ unidades e a componente y vale $+40,0$ unidades. (a) Qual é o módulo do vetor? (b) Qual é o ângulo entre o vetor e o sentido positivo dos x ?

11E. Um vetor deslocamento \mathbf{r} situado no plano xy tem 15 m de comprimento e a orientação indicada na Fig. 3-22. Determine as componentes x e y do vetor.

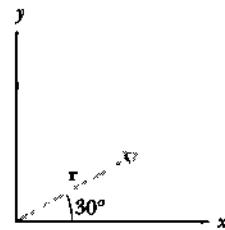


Fig. 3-22 Exercício 11.

12E. Uma máquina pesada é colocada numa prancha que faz um ângulo de 20° com a horizontal e arrastada por uma distância de 12,5 m (Fig. 3-23). (a) Qual a altura final da máquina em relação ao solo? (b) Qual a distância horizontal percorrida por ela?

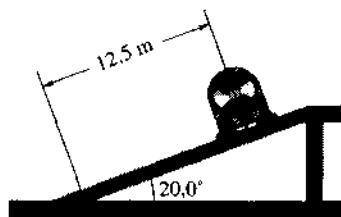


Fig. 3-23 Exercício 12.

13E. O ponteiro dos minutos de um relógio de parede tem 10 cm de comprimento. Qual é o vetor deslocamento da extremidade do ponteiro (a) quando ele se move de um quarto de hora para meia hora, (b) quando se move na meia hora seguinte e (c) quando se move na hora seguinte?

14E. Um iate pretendia viajar para um ponto situado 120 km ao norte, mas uma ventania inesperada fez com que fosse parar 100 km a leste do ponto de partida. Em que direção deve navegar e que distância deve percorrer para chegar ao destino original?

15P. Uma pessoa deseja chegar a um ponto situado a 3,40 km da sua localização atual numa direção $35,0^\circ$ ao norte do leste. Entretanto, todas as ruas que podem levá-la ao destino têm direção norte-sul ou direção leste-oeste. Qual a menor distância que a pessoa terá que percorrer para chegar ao ponto desejado?

16P. *Faias geológicas* são planos de separação que se formam entre dois blocos de rocha quando um deles se desloca. Na Fig. 3-24, os pontos A e B coincidiam antes que o bloco que está em primeiro plano se deslocasse para baixo e para a direita. O deslocamento AB é medido no plano da falha. A componente horizontal de AB é o *rejeito horizontal* AC . A componente de AB na direção de maior inclinação no plano de falha é o *rejeito de mergulho* AD . (a) Qual é o deslocamento AB se o rejeito horizontal é 22,0 m e o rejeito de mergulho é 17,0 m? (b) Se o plano da falha tem uma inclinação de $52,0^\circ$ em relação à horizontal, qual é o componente vertical de AB ?

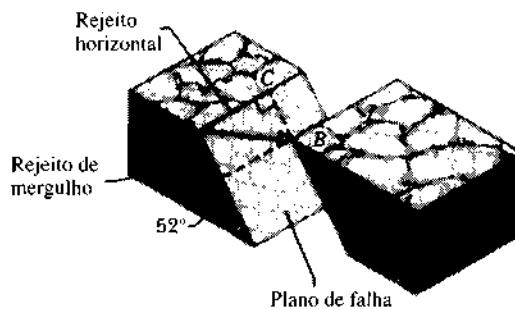


Fig. 3-24 Problema 16.

17P. Uma roda com 45,0 cm de raio roda sem escorregar num piso horizontal (Fig. 3.25). P é um ponto pintado na borda da roda. No tempo t_1 , P está no ponto de contato entre a roda e o piso. Num tempo posterior t_2 , a roda descreveu meia rotação. Qual foi o deslocamento de P entre os tempos t_1 e t_2 ?

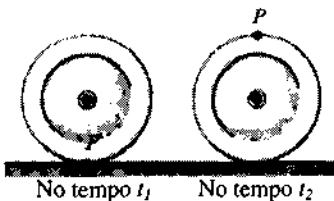


Fig. 3-25 Problema 17.

18P. A localização de duas cidades da América do Sul difere de 1° de latitude e 1° de longitude. Mostre que o módulo do vetor deslocamento de B em relação a A é dado aproximadamente por $d(1 + \cos^2 \lambda)^{1/2}$, onde λ é a latitude de A e $d = 111$ km.

19P. Um sala tem 5 m de comprimento, 4 m de largura e 3 m de altura. Uma mosca parte do chão, de um canto da sala, voa para o teto e pousa no canto diagonalmente oposto. (a) Qual é o módulo de deslocamento da mosca? (b) A distância percorrida pela mosca pode ser menor do que esse valor? Maior do que ele? Igual a ele? (c) Escolha um sistema de coordenadas apropriado e calcule as componentes do vetor deslocamento neste sistema. (d) Se a mosca decide andar e não voar, qual a menor distância que ela terá que percorrer?

Seção 3-5 Somando Vetores através de suas Componentes

20E. (a) Expresse os seguintes ângulos em radianos: $20,0^\circ$, $50,0^\circ$, 100° . (b) Converta os seguintes ângulos para graus: $0,330$ rad, $2,10$ rad, $7,70$ rad.

21E. Calcule as componentes escalares da soma \mathbf{r} dos vetores deslocamento \mathbf{c} e \mathbf{d} cujas componentes em metros, ao longo de três direções mutuamente perpendiculares, são: $c_x = 7,4$, $c_y = -3,8$, $c_z = -6,1$; $d_x = 4,4$, $d_y = -2,0$, $d_z = 3,3$.

22E. (a) Qual é a soma, em termos de vetores unitários, dos dois vetores $\mathbf{a} = 4,0\mathbf{i} + 3,0\mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = -13\mathbf{i} + 7,0\mathbf{j}$? (c) Qual é o módulo e a orientação do vetor $\mathbf{a} + \mathbf{b}$?

23E. Calcule as componentes x e y , o módulo e a orientação de (a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ e (b) $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ se $\mathbf{a} = 3,0\mathbf{i} + 4,0\mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = 5,0\mathbf{i} - 2,0\mathbf{j}$.

24E. Dois vetores são dados por $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Calcule (a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ e (c) um vetor \mathbf{c} tal que $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$.

25E. Dados dois vetores $\mathbf{a} = 4,0\mathbf{i} - 3,0\mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = 6,0\mathbf{i} + 8,0\mathbf{j}$, calcule o módulo de orientação de (a) \mathbf{a} , (b) \mathbf{b} , (c) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, (d) $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ e (e) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Qual é a relação entre as orientações dos últimos dois vetores?

26P. Se $\mathbf{a} - \mathbf{b} = 2\mathbf{c}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 4\mathbf{c}$ e $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, quanto valem \mathbf{a} e \mathbf{b} ?

27P. Dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} têm módulos iguais a 10,0 unidades. A orientação é a indicada na Fig. 3-26. Se $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, calcule (a) as componentes x e y de \mathbf{r} , (b) o módulo de \mathbf{r} e (c) o ângulo que \mathbf{r} faz com o sentido positivo dos x .

28P. Depois da tacada inicial, um golfista necessitou de mais três tacadas para colocar a bola no buraco. Na primeira, a bola se deslocou 12 m para o norte; na segunda, 6 m para sudeste; na terceira, 3 m para sudoeste. Que deslocamento seria necessário para colocar a bola no buraco com uma única tacada após a tacada inicial?

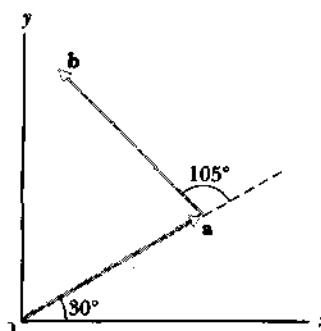


Fig. 3-26 Problema 27.

29P. Uma estação de radar detecta um avião que vem do leste. No momento em que é observado pela primeira vez, o avião está a 400 m de distância, 40° acima do horizonte. O avião é acompanhado por mais 123° no plano vertical leste-oeste e está a 860 m de distância quando é observado pela última vez. Calcule o deslocamento da aeronave durante o período de observação.

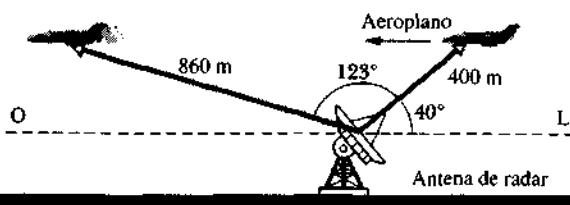


Fig. 3-27 Problema 29.

30P. (a) Um homem sai de casa, caminha 1.000 m para leste, 2.000 m para o norte, tira uma moeda do bolso e a deixa cair de um penhasco com 500 m de altura. Escolha um sistema de coordenadas e escreva uma expressão, usando vetores unitários, para o deslocamento da moeda desde a casa, até a base do penhasco. (b) O homem volta para casa seguindo um caminho diferente. Qual o seu deslocamento desde que saiu de casa?

31P. Uma partícula sofre três deslocamentos sucessivos num plano: 4,00 m para sudoeste, 5,00 m para leste e 6,00 m numa direção $60,0^\circ$ ao norte do leste. Tome o eixo dos y na direção norte e o eixo dos x na direção leste e calcule (a) as componentes dos três deslocamentos, (b) as componentes do deslocamento resultante, (c) o módulo e a orientação do deslocamento resultante e (d) o deslocamento que seria necessário para levar a partícula de volta ao ponto de partida.

32P. Prove que dois vetores devem ter o mesmo módulo para que sua soma seja perpendicular à sua diferença.

33P. Dois vetores de comprimentos a e b fazem entre si um ângulo θ . Prove, calculando as componentes dos vetores em relação a dois eixos perpendiculares, que o comprimento da soma dos dois vetores é dado por

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta} .$$

34P. (a) Usando vetores unitários, expresse as diagonais (retas que ligam dois vértices passando pelo centro) de um cubo em função das arestas, cujo comprimento é a . (b) Calcule os ângulos que os diagonais fazem com as arestas adjacentes. (c) Calcule o comprimento das diagonais.

35P*. Uma pessoa viaja de Washington até Manila. (a) Descreva o vetor deslocamento. (b) Calcule o módulo do vetor deslocamento, sabendo que a latitude e longitude das duas cidades são 39° N, 77° O e 15° N e 121° L, respectivamente.

Seção 3-6 Os Vetores e as Leis da Física

- 36E. Um vetor \mathbf{a} , cujo módulo é de 17,0 m, faz um ângulo de 56,0° com o sentido positivo dos x (Fig. 3-28). (a) Quais são as componentes a_x e a_y do vetor? (b) Um segundo sistema de coordenadas faz um ângulo de 18° com o primeiro. Quais são as componentes a'_x e a'_y do vetor \mathbf{a} no segundo sistema?

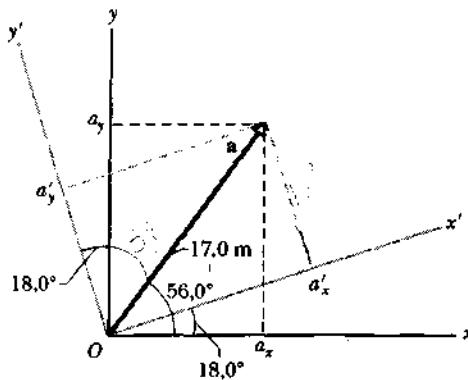


Fig. 3-28 Exercício 36.

Seção 3-7 Multiplicação de Vetores

- 37E. Um vetor \mathbf{d} tem um módulo de 2,5 m e aponta para o norte. Calcule o módulo e a orientação dos seguintes vetores: (a) 4,0 \mathbf{d} ; (b) 3,0 \mathbf{d} .

38E. Considere um vetor \mathbf{a} no sentido positivo do eixo dos x , um vetor \mathbf{b} no sentido positivo do eixo dos y e um escalar d . Qual é a orientação do vetor b/d se d for (a) positivo e (b) negativo? Qual é o módulo de (c) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ e (d) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}/d$? Qual é a orientação de (e) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e (f) $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$? (g) Quais são os módulos dos produtos vetoriais em (e) e (f)? (h) Qual é o módulo e a orientação de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}/d$?

39E. Mostre que, num sistema de coordenadas de destrógiro

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

e

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0.$$

Os resultados serão diferentes se o sistema de coordenadas for retangular mas não destrógiro?

40E. Mostre que, em um sistema de coordenadas destrógiro

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$$

e

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}; \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}; \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}.$$

Os resultados serão diferentes se o sistema de coordenadas for retangular mas não destrógiro?

41E. Mostre que para qualquer vetor \mathbf{a} , $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$ e $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$.

42E. Calcule os produtos (a) "norte vetorial oeste", (b) "para baixo escalar sul", (c) "leste vetorial para cima", (d) "oeste escalar oeste" e (e) "sul vetorial sul". Suponha que todos os vetores têm módulo unitário.

43E. Um vetor \mathbf{a} de módulo 10 unidades e outro vetor \mathbf{b} de módulo 6 unidades fazem entre si um ângulo de 60°. Calcule (a) o produto escalar dos dois vetores e (b) o módulo do produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

44E. Dois vetores, \mathbf{r} e \mathbf{s} , estão contidos no plano xy . Seus módulos são 4,50 e 7,30 unidades, respectivamente, e eles fazem ângulos de +320° e +85,0°, respectivamente, com o sentido positivo dos x . Quais são os valores de (a) $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}$ e (b) $\mathbf{r} \times \mathbf{s}$?

45E. Para os vetores da Fig. 3-29, calcule (a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, (b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ e (c) $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.

46E. Para os vetores da Fig. 3-29, calcule (a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, (b) $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$ e (c) $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

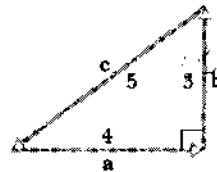


Fig. 3-29 Exercícios 45 e 46.

47P. Produto Escalar em Função das Coordenadas. Suponha que dois vetores sejam representados em termos das coordenadas como

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

e

$$\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$$

Mostre que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

48P. Use a definição de produto escalar, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta$, e o fato de que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ (veja o Problema 47) para calcular o ângulo entre os dois vetores dados por $\mathbf{a} = 3,0 \mathbf{i} + 3,0 \mathbf{j} + 3,0 \mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = 2,0 \mathbf{i} + 1,0 \mathbf{j} + 3,0 \mathbf{k}$.

49P. (a) Determine as componentes e o módulo de $\mathbf{r} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$ se $\mathbf{a} = 5,0 \mathbf{i} + 4,0 \mathbf{j} - 6,0 \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2,0 \mathbf{i} + 2,0 \mathbf{j} + 3,0 \mathbf{k}$ e $\mathbf{c} = 4,0 \mathbf{i} + 3,0 \mathbf{j} + 2,0 \mathbf{k}$. (b) Calcule o ângulo entre \mathbf{r} e o sentido positivo dos z .

50P. Produto Vetorial em Função das Coordenadas. Mostre que para os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} do Problema 47, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i}(a_z b_x - a_x b_z) + \mathbf{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \mathbf{k}(a_x b_y - a_y b_x)$.

51P. Dois vetores são dados por $\mathbf{a} = 3,0 \mathbf{i} + 5,0 \mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = 2,0 \mathbf{i} + 4,0 \mathbf{j}$. Calcule (a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, (b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ e (c) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b}$.

52P. Dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} têm componentes, em unidades arbitrárias, $a_x = 3,2$, $a_y = 1,6$, $b_x = 0,50$, $b_y = 4,5$. (a) Calcule o ângulo entre \mathbf{a} e \mathbf{b} . (b) Calcule as componentes de um vetor \mathbf{c} que é perpendicular a \mathbf{a} , está no plano xy e cujo módulo vale 5,0 unidades.

53P. O vetor \mathbf{a} está no plano yz , faz um ângulo de 63° com o eixo $+y$, tem uma componente z positiva e seu módulo vale 3,20 unidades. O vetor

54 MECÂNICA

b está no plano xz , faz um ângulo de 48° com o eixo $+x$, tem uma componente z positiva e seu módulo vale 1,40 unidades. Calcule (a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e (c) o ângulo entre \mathbf{a} e \mathbf{b} .

54P. Três vetores são dados por $\mathbf{a} = 3,0\mathbf{i} + 3,0\mathbf{j} - 2,0\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -1,0\mathbf{i} - 4,0\mathbf{j} + 2,0\mathbf{k}$ e $\mathbf{c} = 2,0\mathbf{i} + 2,0\mathbf{j} + 1,0\mathbf{k}$. Calcule (a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, (b) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ e (c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

55P. Calcule os ângulos entre as diagonais de um cubo de aresta a . Veja o Problema 34.

56P. Mostre que a área do triângulo contido entre os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} da Fig. 3-30 é dada por $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|/2$, onde as barras verticais significam módulo.

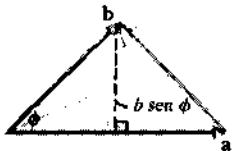


Fig. 3-30 Problema 56.

57P. (a) Mostre que $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ é igual a zero quaisquer que sejam os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} . (b) Qual é o valor de $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ se o ângulo entre os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} é ϕ ?

58P. Os módulos dos três vetores que aparecem na Fig. 3-31 são $a = 3,00$, $b = 4,00$ e $c = 10,0$. (a) Calcule as componentes x e y desses vetores. (b) Determine os dois números p e q tais que $\mathbf{c} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b}$.

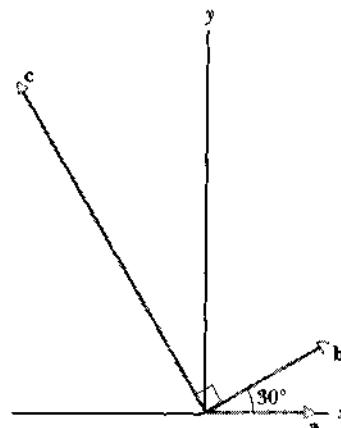


Fig. 3-31 Problema 58.

59P. Mostre que o *produto misto* $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ tem módulo igual ao volume do paralelepípedo formado pelos vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} , como mostra a Fig. 3-32.

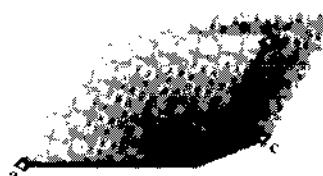


Fig. 3-32 Problema 59.

PROBLEMAS ADICIONAIS

60. O oásis B fica 25 km a leste do oásis A. Partindo do oásis A, um camelo viaja 24 km numa direção 15° ao sul do leste e depois viaja 8,0 km para o norte. A que distância o camelo se encontra do oásis B nesse momento?

61. Um vetor \mathbf{B} , cujo módulo vale 8,0, é somado a um vetor \mathbf{A} localizado sobre o eixo dos x . A soma desses vetores é um terceiro vetor situado sobre o eixo dos y e cujo módulo é o dobro do módulo de \mathbf{A} . Qual é o módulo de \mathbf{A} ?

62. Se o vetor \mathbf{B} é somado ao vetor \mathbf{A} , o resultado é $6,0\mathbf{i} + 1,0\mathbf{j}$. Se \mathbf{B} é subtraído de \mathbf{A} , o resultado é $-4,0\mathbf{i} + 7,0\mathbf{j}$. Qual é o módulo de \mathbf{A} ?

63. Quando um vetor \mathbf{B} é somado ao vetor $\mathbf{C} = 3,0\mathbf{i} + 4,0\mathbf{j}$, o vetor resultante está no sentido positivo dos y e tem o mesmo módulo que \mathbf{C} . Qual é o módulo de \mathbf{B} ?

4

MOVIMENTO EM DUAS E EM TRÊS DIMENSÕES



Quando uma “bala humana” é lançada de um canhão, a fumaça e o ruído são apenas para impressionar, porque a propulsão é realizada por mola ou por ar comprimido, e não por uma explosão. Apesar disso, esse número é perigoso para o artista por duas razões. A primeira é que a rápida propulsão na boca do canhão, em geral, causa um desmaio momentâneo, do qual ele deve despertar, antes de cair na rede, para não quebrar o pescoço. A outra é que a rede pode não estar no lugar certo, com relação ao ângulo e à velocidade do lançamento.

4-1 Movimento em Duas ou Três Dimensões

Neste capítulo, estendemos as considerações apresentadas nos dois anteriores, para os casos bidimensionais e tridimensionais. Muitos dos conceitos utilizados no Cap. 2, como posição, velocidade e aceleração, também aparecem neste capítulo de uma forma mais complexa. Vamos usar a álgebra vetorial apresentada no Cap. 3, que nos permitirá trabalhar com uma notação formalmente idêntica à do caso unidimensional. Dessa forma, se necessário, poderemos recorrer àqueles capítulos anteriores.

Um exemplo de movimento em duas dimensões é o vôo de um homem-balão. A versão moderna deste perigoso evento remonta ao ano de 1922, quando os Zacchinis, uma famosa família circense, pela primeira vez atiraram um de seus membros de um canhão para uma rede montada numa arena. A família foi, gradualmente, aumentando a altura e a duração do vôo, para tornar o espetáculo mais emocionante. Por volta de 1939 ou 1940, foi alcançado o limite de segurança razoável,

quando Emanuel Zacchini voou sobre três rodas-gigantes, atravessando uma distância horizontal de 68 metros.

Como Zacchini poderia saber onde colocar a rede? E como poderia ter certeza de que conseguiria transpor as rodas-gigantes? Esteja certo de que ele não gostaria de responder a essas perguntas, através de tentativas e erros.

4-2 Posição e Deslocamento

De maneira geral, a localização de uma partícula é dada através do **vetor posição \mathbf{r}** , um vetor que vai de um ponto de referência (geralmente a origem de um sistema de coordenadas), até a partícula. Usando a notação de vetores unitários da Seção 3-4, podemos escrever \mathbf{r} como

$$\mathbf{r} = xi + yj + zk \quad (4-1)$$

onde \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} são as componentes vetoriais de \mathbf{r} , e os coeficientes x , y e z são suas componentes escalares. (Esta notação é ligeiramente diferente daquela usada no Cap. 3. Perca um minuto e convença-se de que as duas são comparáveis.)

Os coeficientes x , y e z dão a localização da partícula relativa aos eixos e referente à origem. Por exemplo, a Fig. 4-1 mostra um objeto P , cujo vetor posição, naquele instante, é

$$\mathbf{r} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}. \quad (4-2)$$

Ao longo do eixo x , P está a 3 unidades da origem, no sentido $-\mathbf{i}$. Ao longo do eixo y , está a 2 unidades da origem, no sentido $+\mathbf{j}$. E, ao longo do eixo z , está a 5 unidades da origem, no sentido $+\mathbf{k}$.

Quando um objeto está em movimento, seu vetor posição varia, ligando sempre a origem ao objeto. Se o vetor posição do objeto no instante t_1 é \mathbf{r}_1 e o vetor posição no instante $t_1 + \Delta t$ seguinte é \mathbf{r}_2 , então seu *deslocamento* $\Delta \mathbf{r}$ durante o intervalo Δt é



EXEMPLO 4-1

Inicialmente, o vetor posição de uma partícula é

$$\mathbf{r}_1 = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

e logo depois é

$$\mathbf{r}_2 = 9\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

(veja a Fig. 4-2). Qual é o deslocamento de \mathbf{r}_1 para \mathbf{r}_2 ?

Solução Relembrando do Cap. 3 que a subtração de dois vetores, utilizando notação de vetores unitários, é feita subtraindo cada componente, eixo a eixo, temos, usando a Eq. 4-3,

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{r} &= (9\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) - (-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \\ &= 12\mathbf{i} + 3\mathbf{k}.\end{aligned}\quad (\text{Resposta})$$

Este vetor deslocamento é paralelo ao plano xz , porque sua componente y é nula; um fato mais facilmente visto pelo resultado numérico que pela Fig. 4-2.

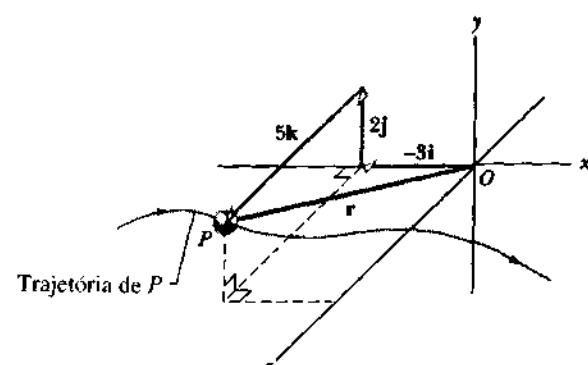


Fig. 4-1 O vetor posição \mathbf{r} do objeto P é a soma das componentes vetoriais paralelas aos eixos coordenados.

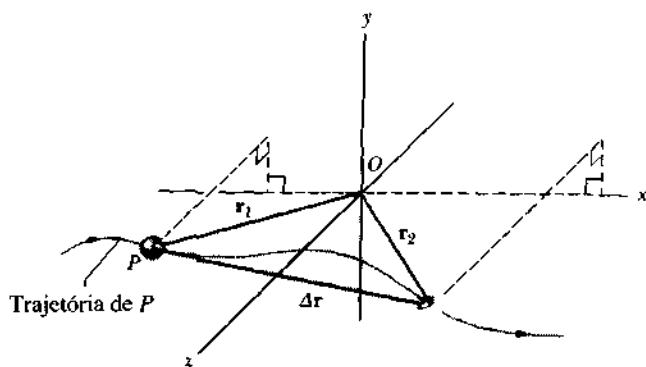


Fig. 4-2 O deslocamento $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ vai da extremidade final de \mathbf{r}_1 para a de \mathbf{r}_2 .

4-3 Velocidade e Velocidade Média

Se uma partícula sofre um deslocamento $\Delta \mathbf{r}$, durante um intervalo de tempo Δt , então, sua *velocidade média* é

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (4-4)$$

que pode ser escrita por extenso como

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}} &= \frac{\Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j} + \Delta z \mathbf{k}}{\Delta t} \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \mathbf{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \mathbf{k}.\end{aligned}\quad (4-5)$$

A *velocidade* (instantânea) \mathbf{v} é o limite de $\bar{\mathbf{v}}$, quando Δt tende para zero. No cálculo diferencial, lembramos que este limite é a derivada de \mathbf{r} em relação a t , ou seja,

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (4-6)$$

Substituindo \mathbf{r} pela sua expressão dada pela Eq. 4-1, vem

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}$$

que pode ser reescrita como

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \quad (4-7)$$

Os coeficientes são as componentes escalares de \mathbf{v} :

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (4-8)$$

A Fig. 4-3 mostra a trajetória da partícula P no plano xy . À medida que a partícula se desloca para a direita sobre a curva, seu vetor posição também se desloca para a direita. No instante t_1 , o vetor posição é \mathbf{r}_1 , e num instante posterior qualquer $t_1 + \Delta t$, o vetor posição é \mathbf{r}_2 . O deslocamento da partícula, no intervalo Δt , é $\Delta \mathbf{r}$. Da Eq. 4-4, a velocida-

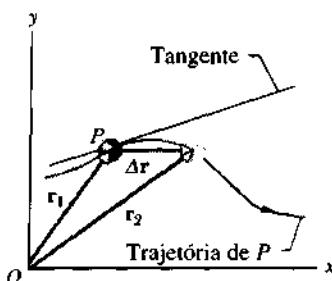


Fig. 4-3 A posição da partícula P , na sua trajetória, é mostrada no instante t_1 e no instante $t_1 + \Delta t$ seguinte. O vetor Δr é o deslocamento da partícula, no intervalo Δt . É mostrada a tangente à trajetória no instante t_1 .

de média \bar{v} da partícula, no intervalo Δt , tem o mesmo sentido de Δr .

Três coisas acontecem, quando fazemos o intervalo Δt tender a zero: (1) o vetor r_2 , na Fig. 4-3, se move em direção a r_1 , fazendo Δr tender a zero; (2) a direção de Δr (logo, a direção de \bar{v}) se aproxima da direção da tangente, na Fig. 4-3 e (3) a velocidade média \bar{v} tender à velocidade instantânea v .

No limite, quando Δt tender a 0, \bar{v} tender a v e, o que é mais importante, \bar{v} tem a direção da tangente. Logo, v também tem a mesma direção. Isto é, a velocidade instantânea v é sempre tangente à trajetória da partícula. Isto é mostrado na Fig. 4-4, onde v e suas componentes escalares estão representadas. Para o caso tridimensional, o resultado é idêntico: v é sempre tangente à trajetória da partícula.

A Fig. 4-5 representa um disco de borracha, usado nas partidas de hóquei sobre o gelo, preso a uma extremidade de uma corda, cuja outra extremidade está fixa ao ponto O , obrigando assim o disco a descrever uma trajetória circular com centro em O . O vetor posição r do disco varia apenas sua direção; seu módulo (igual ao comprimento da corda) permanece constante. Novamente, o vetor velocidade é tangente à trajetória, em qualquer instante. Se a corda se rompesse, o disco continuaria se movendo, em linha reta, na mesma direção que v possuía no instante em que ela se rompeu. (O disco nunca poderia descrever uma trajetória em espiral, como se tivesse memorizado a sua trajetória circular anterior.)

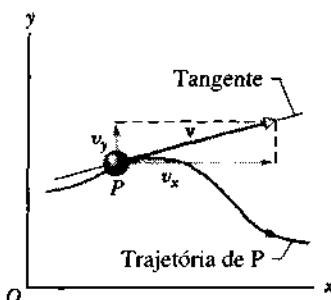


Fig. 4-4 O vetor velocidade v da partícula P juntamente com suas componentes escalares. Observe que v é tangente à trajetória no ponto considerado.

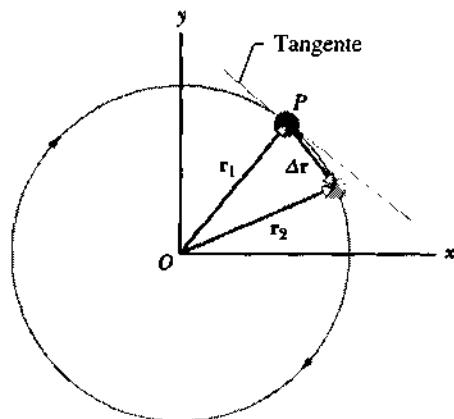


Fig. 4-5 A partícula P está se movendo numa trajetória circular em torno do ponto O . Quando Δt tender a zero, a direção do vetor Δr coincide com a da tangente no ponto. Logo, v é tangente à trajetória.

4-4 Aceleração e Aceleração Média

Quando a velocidade de uma partícula varia de v_1 para v_2 , no intervalo de tempo Δt , sua aceleração média \bar{a} , durante este intervalo de tempo, é

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \quad (4-9)$$

A aceleração (instantânea) a é o limite de \bar{a} , quando fazemos Δt tender a zero, ou seja,

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (4-10)$$

Se a velocidade varia em módulo ou direção (ou ambos), então existe uma aceleração.

Substituindo v , da Eq. 4-7 na Eq. 4-10, temos

$$\begin{aligned} a &= \frac{d}{dt} (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}) \\ &= \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{k} \end{aligned}$$

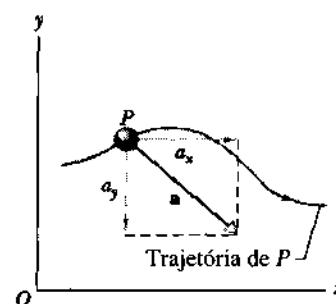


Fig. 4-6 A aceleração a da partícula P juntamente com suas componentes escalares.

ou

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (4-11)$$

onde as três componentes escalares do vetor aceleração são

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad \text{e} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \quad (4-12)$$

A Fig. 4-6 mostra o vetor aceleração \mathbf{a} e suas componentes escalares, para o movimento bidimensional da partícula P .

EXEMPLO 4-2 Uma lebre atravessa correndo um estacionamento onde, por estranho que possa parecer, um par de eixos cartesianos foi desenhado. A trajetória percorrida pela lebre é tal que as componentes do seu vetor posição com relação à origem das coordenadas são funções do tempo dadas por

$$x = -0,31t^2 + 7,2t + 28$$

e

$$y = 0,22t^2 - 9,1t + 30.$$

As unidades dos coeficientes numéricos nessas equações são tais que, se substituirmos t em segundos, obteremos x e y em metros.

a. Calcule o vetor posição \mathbf{r} da lebre (módulo e direção) em $t = 15$ s.

Solução Em $t = 15$ s, as componentes de \mathbf{r} são

$$x = (-0,31)(15)^2 + (7,2)(15) + 28 = 66 \text{ m}$$

e

$$y = (0,22)(15)^2 - (9,1)(15) + 30 = -57 \text{ m}.$$

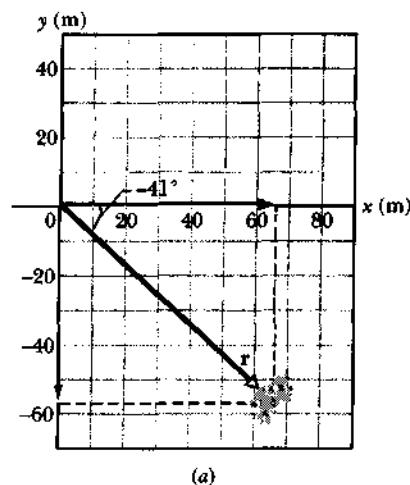
O vetor \mathbf{r} e suas componentes são mostrados na Fig. 4-7a.

O módulo de \mathbf{r} é dado por

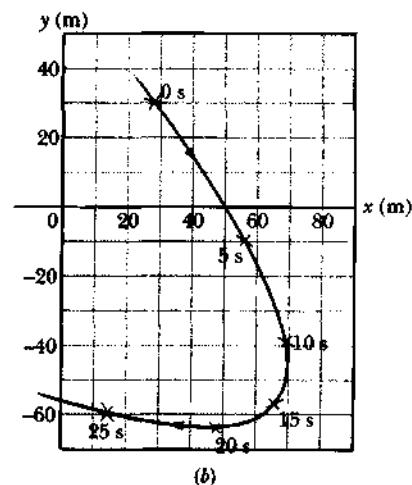
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(66 \text{ m})^2 + (-57 \text{ m})^2}$$

$$= 87 \text{ m.}$$

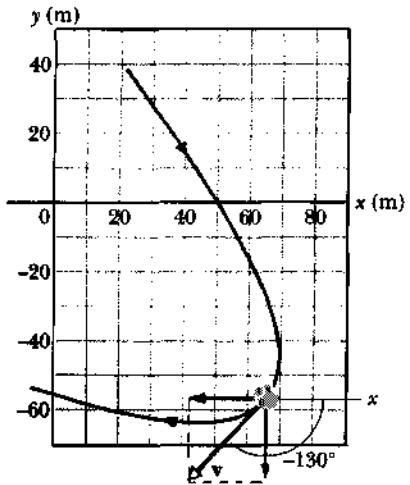
(Resposta)



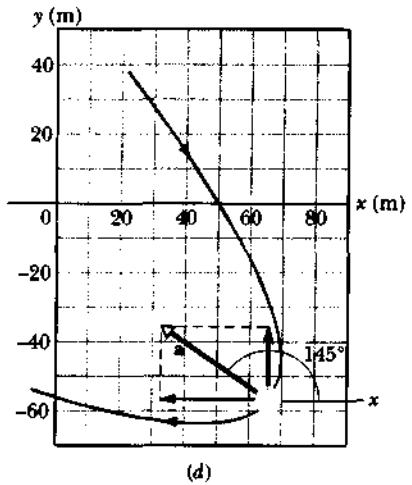
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 4-7 Exemplos 4-2, 4-3 e 4-4. (a) O vetor \mathbf{r} e suas componentes, em $t = 15$ s. O módulo de \mathbf{r} é 87 m. (b) A trajetória de uma lebre através de um estacionamento, mostrando a sua posição em cada instante. (c) A velocidade \mathbf{v} da lebre em $t = 15$ s. Observe que \mathbf{v} é tangente à trajetória, no instante considerado. (d) A aceleração \mathbf{a} da lebre em $t = 15$ s. Quando isso acontece, ela tem a mesma aceleração em todos os pontos da trajetória.

O ângulo θ que \mathbf{r} faz com o semi-eixo positivo x é

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} \left(\frac{-57 \text{ m}}{66 \text{ m}} \right) = -41^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

(Embora a tangente de $\theta = 139^\circ$ seja igual à de $\theta = -41^\circ$, excluímos o ângulo de 139° , por ser incompatível com os sinais das componentes de \mathbf{r} .)

b. Calcule também a posição da lebre em $t = 0, 5, 10, 20$ e 25 s , e esboce a sua trajetória.

Solução Como em (a), obtemos os seguintes valores para r e θ .

$t \text{ (s)}$	$x \text{ (m)}$	$y \text{ (m)}$	$r \text{ (m)}$	θ
0	28	30	41	+47°
5	56	-10	57	-10°
10	69	-39	79	-29°
15	66	-57	87	-41°
20	48	-64	80	-53°
25	14	-60	62	-77°

A Fig. 4-7b mostra o gráfico da trajetória da lebre.

EXEMPLO 4-3 Calcule, no Exemplo 4-2, o módulo e a direção do vetor velocidade da lebre em $t = 15 \text{ s}$.

Solução A componente da velocidade na direção x é (veja a Eq. 4-8)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (-0.31t^2 + 7.2t + 28) = -0.62t + 7.2$$

Em $t = 15 \text{ s}$, obtemos

$$v_x = (-0.62)(15) + 7.2 = -2.1 \text{ m/s}$$

Do mesmo modo,

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} (0.22t^2 - 9.1t + 30) = 0.44t - 9.1.$$

Em $t = 15 \text{ s}$, obtemos

$$v_y = (0.44)(15) - 9.1 = -2.5 \text{ m/s}$$

O vetor \mathbf{v} e suas componentes são mostrados na Fig. 4-7c.

O módulo e a direção de \mathbf{v} são dados por

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-2.1 \text{ m/s})^2 + (-2.5 \text{ m/s})^2} = 3.3 \text{ m/s} \quad (\text{Resposta})$$

e

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1} \left(\frac{-2.5 \text{ m/s}}{-2.1 \text{ m/s}} \right) = \tan^{-1} 1.19 = -130^\circ \quad (\text{Resposta})$$

(Embora o ângulo de 50° tenha a mesma tangente, os sinais das componentes da velocidade indicam que o ângulo procurado está no terceiro quadrante, ou seja, $50^\circ - 180^\circ = -130^\circ$.) O vetor velocidade na Fig.

4-7c é tangente à trajetória da lebre e aponta na direção em que ela está correndo, em $t = 15 \text{ s}$.

EXEMPLO 4-4 Determine, no Exemplo 4-2, o módulo e a direção do vetor aceleração \mathbf{a} da lebre em $t = 15 \text{ s}$.

Solução As componentes da aceleração (veja Eq. 4-12) são dadas por

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} (-0.62t + 7.2) = -0.62 \text{ m/s}^2$$

e

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt} (0.44t - 9.1) = 0.44 \text{ m/s}^2.$$

Observamos que a aceleração não varia com o tempo; é constante. Quando calculamos a derivada segunda, a variável t desaparece! A decomposição de \mathbf{a} em suas componentes x e y está mostrada na Fig. 4-7d.

O módulo e a direção de \mathbf{a} são dados por

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0.62 \text{ m/s}^2)^2 + (0.44 \text{ m/s}^2)^2} = 0.76 \text{ m/s}^2 \quad (\text{Resposta})$$

e

$$\theta = \tan^{-1} \frac{a_y}{a_x} = \tan^{-1} \left(\frac{0.44 \text{ m/s}^2}{-0.62 \text{ m/s}^2} \right) = 145^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

O vetor aceleração tem módulo e direção constantes em toda a trajetória da lebre. Talvez um forte vento sudeste estivesse soprando no local.

EXEMPLO 4-5 Uma partícula com velocidade $\mathbf{v}_0 = -2.0\mathbf{i} + 4.0\mathbf{j}$ (em m/s), em $t = 0$ está sob uma aceleração constante \mathbf{a} , de módulo igual a 3.0 m/s^2 , fazendo um ângulo $\theta = 130^\circ$ com o semi-eixo positivo x . Qual a velocidade \mathbf{v} da partícula em $t = 2.0 \text{ s}$, na notação de vetores unitários, assim como seu módulo e direção (em relação ao semi-eixo positivo x)?

Solução Como \mathbf{a} é constante, a Eq. 2-9 é aplicável; entretanto, deverá ser usada separadamente para calcular v_x e v_y (as componentes x e y do vetor velocidade \mathbf{v}), pois as componentes variam de maneira independente uma da outra. Encontramos então

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

e

$$v_y = v_{0y} + a_y t.$$

Onde $v_{0x} = -2.0 \text{ m/s}$ e $v_{0y} = 4.0 \text{ m/s}$ são as componentes x e y de \mathbf{v}_0 , e a_x e a_y são as componentes x e y de \mathbf{a} . Para determinar a_x e a_y , decomponemos \mathbf{a} com o auxílio da Eq. 3-5:

$$a_x = a \cos \theta = (3.0 \text{ m/s}^2) (\cos 130^\circ) = -1.93 \text{ m/s}^2,$$

$$a_y = a \sin \theta = (3.0 \text{ m/s}^2) (\sin 130^\circ) = +2.30 \text{ m/s}^2.$$

Substituindo esses valores em v_x e v_y , temos

$$v_x = -2.0 \text{ m/s} + (-1.93 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ s}) = -5.9 \text{ m/s},$$

$$v_y = 4.0 \text{ m/s} + (2.30 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ s}) = 8.6 \text{ m/s}.$$

Então, em $t = 2.0 \text{ s}$, temos

$$\mathbf{v} = (-5.9 \text{ m/s})\mathbf{i} + (8.6 \text{ m/s})\mathbf{j}. \quad (\text{Resposta})$$

O módulo de \mathbf{v} é

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{(-5.9 \text{ m/s})^2 + (8.6 \text{ m/s})^2} \\ &= 10 \text{ m/s.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

O ângulo de \mathbf{v} é

$$\theta = \tan^{-1} \frac{8.6 \text{ m/s}}{-5.9 \text{ m/s}} = 124^\circ \approx 120^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

Verifique a última resposta com sua calculadora. O resultado mostrado é 124° ou -55.5° ? Agora, desenhe o vetor \mathbf{v} e suas componentes, para ver qual dos ângulos é mais compatível com as condições do problema. Para entender por que a calculadora apresenta uma resposta matematicamente correta, porém fisicamente inadequada no caso, releia a Tática 3, no Cap. 3.

TÁTICAS PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 1: TRAÇAR UM GRÁFICO

A Fig. 4-7 ilustra vários elementos que devem ser considerados no traçado de um gráfico. No Exemplo 4-2b, as grandezas a serem colocadas no gráfico são as variáveis x e y , que expressam a posição em metros. Nesse problema, a escolha da mesma escala para os dois eixos é razoável. Experimente qual a escala mais adequada e de fácil leitura para o espaço disponível. O problema pede para calcular seis pontos. Se achar necessário mais pontos para o traçado da curva, calcule-os a partir das fórmulas dadas na proposição do problema. Se um dos pontos calculados não se ajustar à curva, é provável que haja erro no cálculo ou no traçado do gráfico.

Os pontos assinalados na Fig. 4-7b mostram os instantes t em que a lebre ocupou cada posição. Podemos assim mostrar uma terceira variável no nosso gráfico.

TÁTICA 2: FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E ÂNGULOS

No Exemplo 4-3, foi dado que $\theta = \tan^{-1} 1.19$ e foi pedido para determinar θ . Utilizando a calculadora, obtivemos $\theta = 50^\circ$. Entretanto, a Fig. 3-12c mostra que para $\theta = 230^\circ$ ($= 50^\circ + 180^\circ$) a tangente é a mesma. Observando os sinais das componentes v_x e v_y da velocidade na Fig. 4-7c, vemos que esse último ângulo é o correto.

Há ainda outra decisão a tomar. Podemos trabalhar com o ângulo de 230° ou com o de -130° . São exatamente o mesmo, como mostrado na Tática 1 do Cap. 3. Escolhemos $\theta = -130^\circ$ simplesmente por questão de preferência.

TÁTICA 3: TRAÇANDO VETORES — DIREÇÃO

Os vetores na Fig. 4-7 foram orientados da seguinte maneira: (1) Escolhemos um ponto como origem do vetor. (2) Deste ponto, traçamos uma linha no sentido positivo do eixo x . (3) Usando um transferidor, construímos, a partir do eixo x , o ângulo θ apropriado, no sentido anti-horário (se θ for positivo) ou no sentido horário (se θ for negativo).

TÁTICA 4: TRAÇANDO VETORES — DIMENSÃO

O vetor \mathbf{r} na Fig. 4-7a deve ser desenhado usando-se a mesma escala nos dois eixos, porque ele tem dimensão de comprimento. O vetor velocidade \mathbf{v} , na Fig. 4-7c, e o vetor aceleração \mathbf{a} , na Fig. 4-7d, no entanto, não estão em escala naquele problema, e podemos fazê-los tão grandes ou pequenos quanto quisermos.

Não faz sentido perguntar se, por exemplo, um vetor velocidade deverá ser maior ou menor do que um vetor deslocamento. Representam grandezas físicas diferentes expressas em unidades desiguais e, portanto, não podem ser comparados.

4-5 Movimento de Projéteis

Agora vamos considerar uma partícula — ou seja, um **projétil** — que executa um movimento bidimensional com

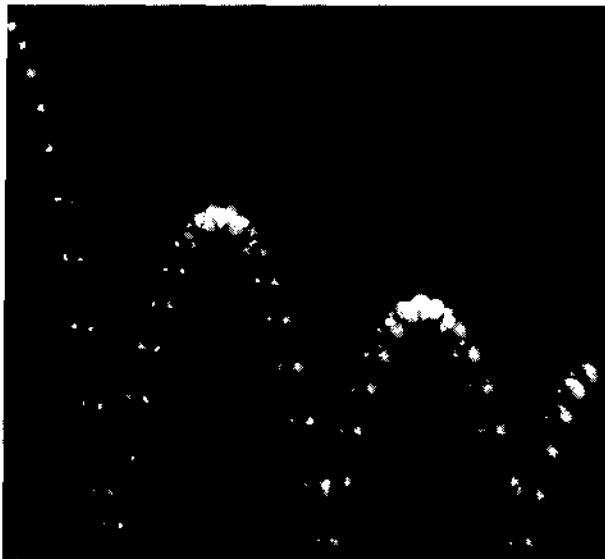


Fig. 4-8 Uma foto estroboscópica de uma bola de golfe, quicando numa superfície rígida. Entre os impactos, a trajetória da bola é idêntica à do movimento de um projétil.

aceleração \mathbf{g} de queda livre para baixo. O projétil pode ser uma bola de golfe (como na Fig. 4-8), de beisebol ou qualquer outro objeto. Na análise que se segue do movimento de projéteis, vamos desprezar os efeitos da resistência do ar.

A Fig. 4-9, analisada na próxima seção, mostra a trajetória de um projétil em condições ideais.

O projétil é lançado com uma certa velocidade inicial \mathbf{v}_0 , que pode ser escrita como

$$\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j}. \quad (4-13)$$

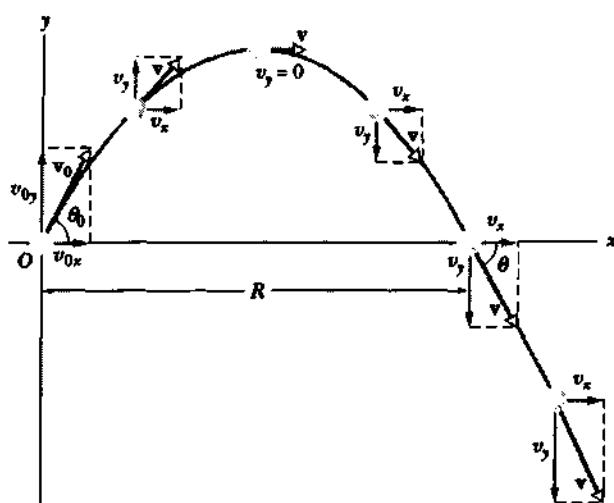


Fig. 4-9 A trajetória de um projétil lançado em $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ com velocidade inicial \mathbf{v}_0 . São mostradas a velocidade inicial e as velocidades, juntamente com suas componentes escalares, em vários pontos da trajetória. Observe que a componente horizontal da velocidade permanece constante, enquanto a componente vertical varia continuamente. O alcance R é a distância horizontal do ponto de lançamento, até o ponto em que o projétil volta à mesma altura do lançamento.

Podemos calcular as componentes v_{0x} e v_{0y} se conhecermos o ângulo θ_0 entre \mathbf{v}_0 e o semi-eixo positivo x :

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0 \quad \text{e} \quad v_{0y} = v_0 \sin \theta_0. \quad (4-14)$$

Durante seu movimento bidimensional, o projétil acelera para baixo e seu vetor posição \mathbf{r} , bem como o vetor velocidade \mathbf{v} , variam continuamente. Por outro lado, tanto o movimento horizontal quanto o vertical são independentes um do outro, fato que nos permite separar um problema bidimensional em dois unidimensionais mais fáceis, um para o movimento horizontal e outro para o vertical. A seguir, veremos duas experiências que demonstram essa independência entre o movimento vertical e o horizontal.

As Duas Bolas de Golfe

A Fig. 4-10 é uma fotografia estroboscópica de duas bolas de golfe, uma largada do repouso e a outra atirada por um disparador acionado por mola. Elas têm o mesmo movimento vertical, cada bola percorrendo, na queda, a mesma distância, no mesmo intervalo de tempo. *O fato de uma bola se mover na horizontal enquanto cai não tem efeito sobre o seu movimento vertical.* Considerando um caso extremo, podemos afirmar que, se atirássemos com um rifle horizontalmente e, ao mesmo tempo, deixássemos cair uma bala, desprezando a resistência do ar, as duas alcançariam o solo ao mesmo tempo.

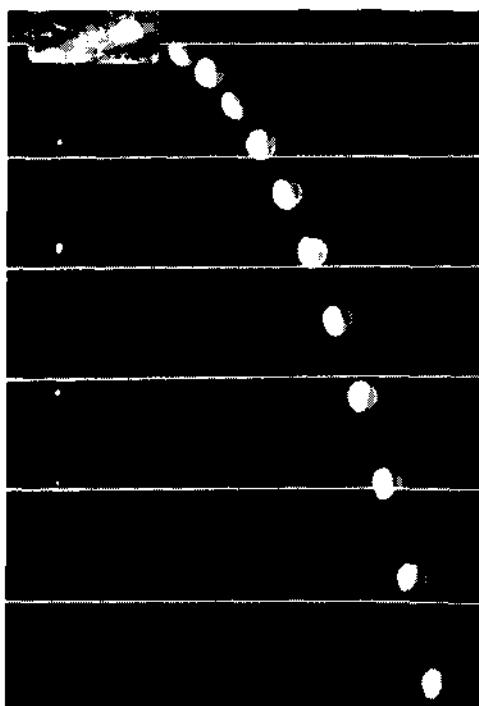


Fig. 4-10 Uma bola em repouso é largada no mesmo instante em que outra é lançada horizontalmente para a direita. Seus movimentos verticais são idênticos.

Uma Experiência Interessante

Na Fig. 4-11, vemos uma demonstração que tem animado muitos em aulas de física. Trata-se de um tubo G que dispara uma bola, através do sopro, como se fosse um projétil. O alvo é uma pequena lata C, suspensa por um ímã M, e o tubo está apontado na direção da lata. A experiência é preparada de forma que o ímã solte a lata, exatamente quando a bola é disparada do tubo.

Se g (a aceleração em queda livre) fosse zero, a bola seguiria a linha reta mostrada na Fig. 4-11 e a lata ficaria suspensa no ar, mesmo depois de liberada pelo ímã. Com certeza, a bola atingiria a lata.

No entanto, g não é zero. *Ainda assim*, a bola atinge a lata! A Fig. 4-11 mostra que, durante o tempo de percurso da bola, tanto ela quanto a lata se deslocam, em queda, da mesma distância h , com relação àquele ponto que estariam se g fosse zero. Quanto mais forte for o sopro, maior a velocidade inicial da bola, menor o tempo de deslocamento e menor o valor de h .

4-6 Análise do Movimento de Projéteis

Agora estamos prontos para analisar detalhadamente o movimento de um projétil.

O Movimento Horizontal

Como não existe aceleração na direção horizontal, a componente horizontal da velocidade permanece constante durante o movimento, como demonstrado na Fig. 4-12. O deslocamento horizontal $x - x_0$ a partir de uma posição inicial x_0 é dado pela Eq. 2-13, fazendo $a = 0$ e substituindo v_{0x} ($= v_0 \cos \theta_0$) por v_0 . Então,

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t. \quad (4-15)$$

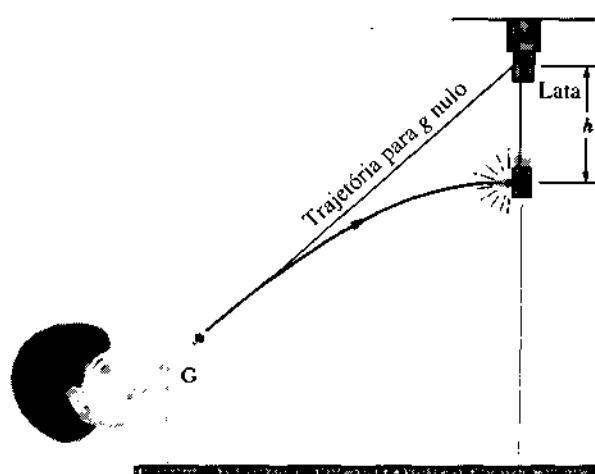


Fig. 4-11 A bola sempre atinge a lata que está caindo. Ambas caem de uma distância h em relação ao ponto em que estariam, se não houvesse aceleração da gravidade.

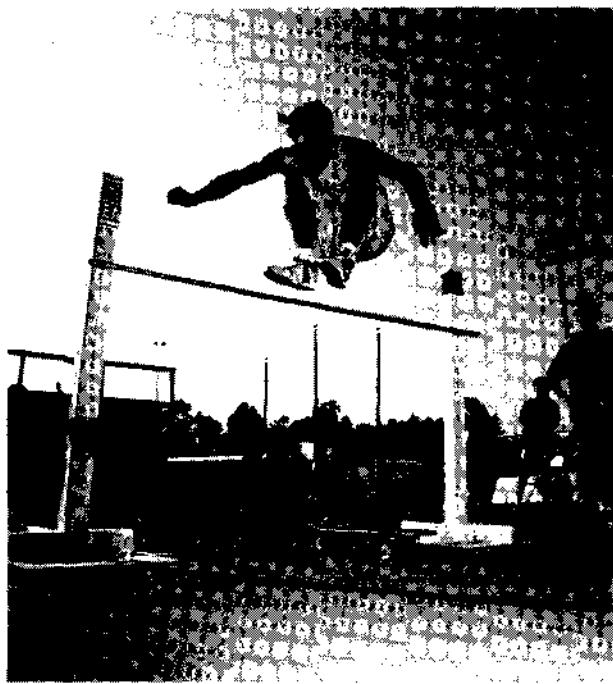


Fig. 4-12 A componente vertical da velocidade deste *skate-boarder* está variando, mas a componente horizontal não, e coincide com a velocidade do *skate*. Como resultado, este permanece sob o jovem, permitindo que ele caia exatamente sobre o *skate*.

O Movimento Vertical

A análise do movimento vertical é a mesma feita na Seção 2-8, para uma partícula em queda livre. Logo, as Eqs. 2-19 a 2-23 são aplicáveis. A Eq. 2-20, por exemplo, torna-se

$$y - y_0 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (4-16)$$

onde v_0 foi substituído pela componente vertical da velocidade $v_0 \operatorname{sen} \theta_0$. De acordo com a Fig. 4-9, a componente vertical da velocidade se comporta exatamente como se fosse a de uma bola atirada para cima. Inicialmente, está dirigida para cima e seu módulo diminui constantemente até zero, no ponto correspondente à altura máxima alcançada por ela. A partir deste ponto, o sentido da componente vertical se inverte e seu módulo volta a crescer no decorrer do tempo.

As Eqs. 2-19 e 2-21 também são úteis na análise do movimento de projéteis. Após adaptá-las para o caso em estudo, temos

$$v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - gt \quad (4-17)$$

e

$$v_y^2 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \quad (4-18)$$

A Equação da Trajetória

Podemos determinar a equação do caminho percorrido (a **trajetória**) pelo projétil, eliminando t nas Eqs. 4-15 e 4-16.

Resolvendo a Eq. 4-15 para t e substituindo na Eq. 4-16, temos, depois de um pequeno arranjo,

$$y = (\tan \theta_0)x - \left(\frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} \right) x^2 \quad (\text{trajetória}). \quad (4-19)$$

Essa é a equação da trajetória mostrada na Fig. 4-9. Para simplificar, fazemos $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ nas Eqs. 4-15 e 4-16, respectivamente. Como g , θ_0 e v_0 são constantes, a Eq. 4-19 tem a forma $y = ax + bx^2$, onde a e b são constantes, que é a equação de uma parábola.

A Fig. 4-13 mostra uma versão moderna de uma experiência realizada por Galileu em 1608, onde foi mostrado, pela primeira vez, que um projétil descreve uma trajetória parabólica. Ele fez uma bola rolar para baixo, em uma calha inclinada, repetindo a experiência para diferentes alturas e medindo as posições correspondentes em que a bola atingiu o solo.

O Alcance Horizontal

O *alcance horizontal* R do projétil, como mostra a Fig. 4-9, é a distância horizontal percorrida pelo projétil, desde o ponto inicial (lançamento) até retornar a esta mesma altura. Este ponto é determinado, fazendo $x - x_0 = R$ na Eq. 4-15 e $y - y_0 = 0$ na Eq. 4-16, obtendo

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t = R$$

e

$$y - y_0 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0.$$

Eliminando t nessas duas equações, temos

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0.$$

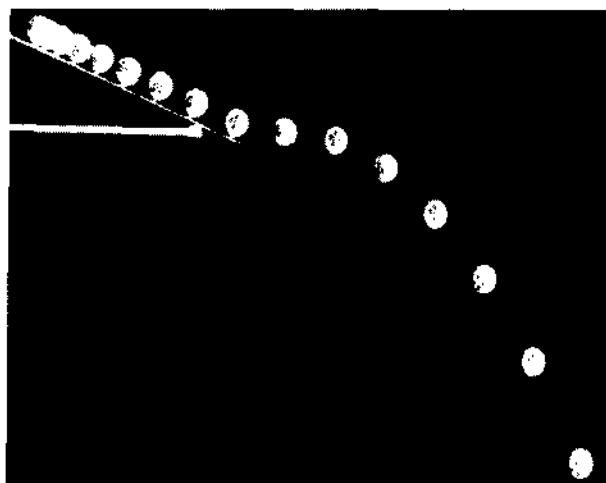


Fig. 4-13 Uma foto estroboscópica de uma bola descendo, sobre um plano inclinado, e caindo segundo uma trajetória parabólica, após ser projetada horizontalmente do plano.

Usando a identidade $\sin 2\theta_0 = 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0$ (veja o Apêndice G), obtemos

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0. \quad (4-20)$$

Observe que R atinge seu valor máximo, quando $\sin 2\theta_0 = 1$, que corresponde a $2\theta_0 = 90^\circ$ ou $\theta_0 = 45^\circ$.

Os Efeitos do Ar

Supomos que o efeito do ar é desprezível no movimento de projéteis, o que é razoável para pequenas velocidades. Entretanto, para grandes velocidades, a discrepância entre os cálculos e a realidade, no movimento de projéteis, pode ser bem grande, devido à resistência (ou oposição) do ar ao movimento. A Fig. 4-14, por exemplo, mostra duas trajetórias para uma bola lançada pela batida de um taco num jogo de beisebol, com um ângulo de 60° com a horizontal, e velocidade inicial de 160 km/h. (Veja "The Trajectory of a Fly Ball", de Peter J. Brancazio, *The Physics Teacher*, January 1985.) A trajetória I (do lançamento no jogo de beisebol) é a calculada para as condições normais do jogo, onde a influência do ar é importante. A trajetória II (a bola do problema de física) é aquela que a bola seguiria no vácuo. A Tabela 4-1 apresenta alguns dados para os dois casos. Quando admitimos que a resistência do ar pode ser desprezada, isto não se aplica, logicamente, a experiências realizadas ao ar livre, como no Shea Stadium e no Candlestick Park. No Cap. 6, vamos discutir os efeitos da resistência do ar sobre o movimento.

Na verdade, *nenhum* problema de física tem uma resposta *exata*, não importa quantos algarismos significativos sejam obtidos no cálculo: será sempre necessário fazer aproximações. O físico P. A. M. Dirac* disse que o truque é dividir o problema em duas partes, uma simples e a outra que consideramos como uma pequena perturbação insignificante. Então, resolvemos com exatidão a parte simples, e fazemos o melhor possível com a insignificante. Às vezes, a parte "insignificante" é tão pequena que podemos desprezá-la completamente, como no caso da resistência do ar para pequenas velocidades.

EXEMPLO 4-6 Um avião de salvamento está voando a uma altitude constante de 1.200 m, à velocidade de 430 km/h, numa trajetória direta sobre o ponto em que uma pessoa está se debatendo na água (veja Fig. 4-15). Em que ângulo ϕ de mira o piloto deve lançar a cápsula de salvamento, para que esta caia bem próximo à pessoa?

Solução A velocidade inicial da cápsula é a mesma do avião. Isto é, a velocidade inicial v_0 é horizontal e vale 430 km/h. Da Eq. 4-16, podemos calcular o tempo de vôo da cápsula,

$$y - y_0 = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2.$$

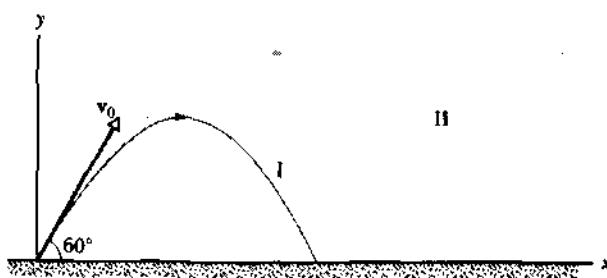


Fig. 4-14 (I) A trajetória do lançamento de uma bola, levando em conta a resistência do ar (calculada por computador). (II) A trajetória que a bola teria no vácuo, calculada pelos métodos deste capítulo. Veja também a Tabela 4-1.

Tabela 4-1
A Trajetória das Duas Bolas*

	Trajetória I (Ar)	Trajetória II (Vácuo)
Alcance	97 m	175 m
Altura máxima	52 m	75 m
Tempo de percurso	6.6 s	7.9 s

*Veja a Fig. 4-14. O ângulo de lançamento é de 60° e a velocidade de lançamento é de 160 km/h.

Fazendo $y - y_0 = -1.200$ m (o sinal menos significa que a pessoa está abaixo da origem) e $\theta_0 = 0$, obtemos

$$-1.200 \text{ m} = 0 - \frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2)t^2.$$

Resolvendo para t , achamos*

$$t = \sqrt{\frac{(2)(1.200 \text{ m})}{9.8 \text{ m/s}^2}} = 15.65 \text{ s.}$$

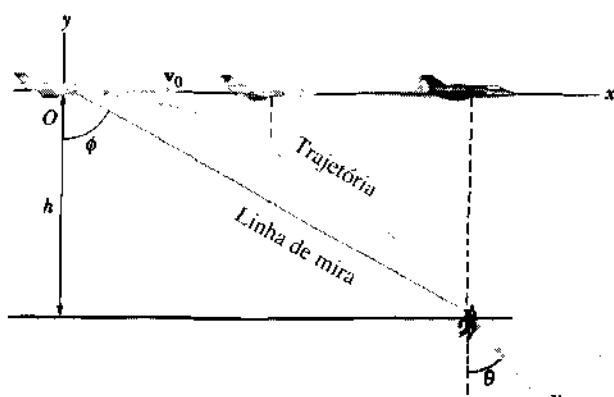


Fig. 4-15 Exemplo 4-6. Um avião lança uma cápsula de salvamento e continua a sua trajetória. Enquanto a cápsula está caindo, a componente horizontal da sua velocidade é igual à velocidade do avião. A cápsula cai na água com velocidade v , fazendo um ângulo θ com a vertical.

*Prêmio Nobel de Física e um dos criadores da Mecânica Quântica. (N. do R.)

*Na Tática 5, explicamos por que, no caso de algumas grandezas, trabalhamos (temporariamente) com mais algarismos significativos que os justificados pelos dados do problema.

Da Eq. 4-15 obtemos a distância horizontal percorrida pela cápsula (e pelo avião) durante esse tempo:

$$\begin{aligned}x - x_0 &= (v_0 \cos \theta_0)t \\&= (430 \text{ km/h})(\cos 0^\circ)(15,65 \text{ s})(1 \text{ h}/3.600 \text{ s}) \\&= 1,869 \text{ km} = 1.869 \text{ m.}\end{aligned}$$

Se $x_0 = 0$, então $x = 1.869 \text{ m}$. O ângulo de mira então é (veja a Fig. 4-15)

$$\phi = \tan^{-1} \frac{x}{h} = \tan^{-1} \frac{1.869 \text{ m}}{1.200 \text{ m}} = 57^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

Como o avião e a cápsula têm a mesma velocidade horizontal, o avião permanece verticalmente sempre sobre a cápsula, enquanto ela estiver voando.

EXEMPLO 4-7 Num filme publicitário, um ator corre pelo telhado de um prédio e salta, na horizontal, para o telhado de outro prédio mais abaixo, conforme mostrado na Fig. 4-16. Antes de tentar o salto, sabiamente quer avaliar se isto é possível. Ele pode realizar o salto se sua velocidade máxima sobre o telhado for de 4,5 m/s?

Solução Ele levará um tempo t para cair 4,8 m, o que pode ser determinado pela Eq. 4-16. Fazendo $y - y_0 = -4,8 \text{ m}$ (observe o sinal) e $\theta_0 = 0$, e utilizando a Eq. 4-16, obtemos

$$\begin{aligned}t &= \sqrt{-\frac{2(y - y_0)}{g}} = \sqrt{-\frac{(2)(-4,8 \text{ m})}{9,8 \text{ m/s}^2}} \\&= 0,990 \text{ s.}\end{aligned}$$

Agora, perguntamos: "Que distância ele alcançaria horizontalmente nesse tempo?" Da Eq. 4-15, temos

$$\begin{aligned}x - x_0 &= (v_0 \cos \theta_0)t \\&= (4,5 \text{ m/s})(\cos 0^\circ)(0,990 \text{ s}) \approx 4,5 \text{ m.}\end{aligned}$$

Para alcançar o outro prédio, o homem teria de se deslocar 6,2 m na horizontal. Logo, o conselho que damos ao ator é: "Não salte."

EXEMPLO 4-8 A Fig. 4-17 mostra um navio pirata ancorado a 560 m de um forte, que defende a entrada de um porto, em uma ilha. O canhão de defesa está localizado ao nível do mar e tem uma velocidade de tiro de 82 m/s.

a. Qual o ângulo de elevação do canhão, para atingir o navio pirata?

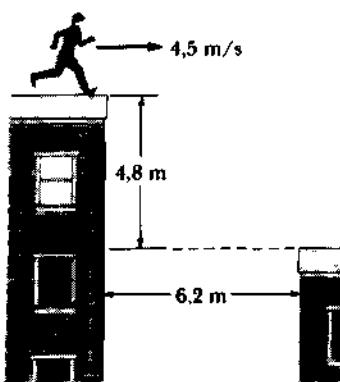


Fig. 4-16 Exemplo 4-7. O homem deve saltar?

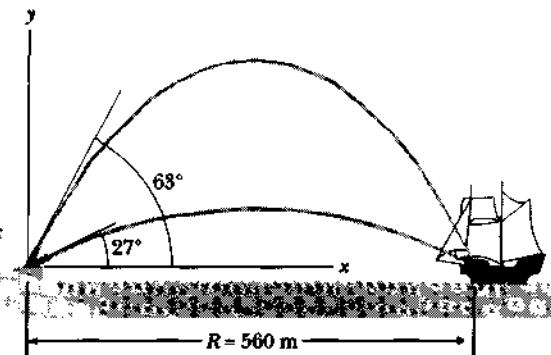


Fig. 4-17 Exemplo 4-8. Nesta distância, o canhão de defesa do forte pode atingir o navio pirata estando em dois ângulos de elevação diferentes.

Solução Resolvendo a Eq. 4-20 para $2\theta_0$, obtemos

$$\begin{aligned}2\theta_0 &= \sin^{-1} \frac{gR}{v_0^2} = \sin^{-1} \frac{(9,8 \text{ m/s}^2)(560 \text{ m})}{(82 \text{ m/s})^2} \\&= \sin^{-1} 0,816.\end{aligned}$$

Há dois ângulos cujo seno é 0,816, ou seja, 54,7° e 125,3°. Logo, achamos

$$\theta_0 = \frac{1}{2}(54,7^\circ) \approx 27^\circ \quad (\text{Resposta})$$

e

$$\theta_0 = \frac{1}{2}(125,3^\circ) \approx 63^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

O comandante do forte pode ordenar qualquer uma dessas duas elevações para o canhão atingir o navio pirata (se não houver influência do ar!).

b. Qual o tempo de percurso do projétil, até alcançar o navio, para cada um dos ângulos de elevação calculados anteriormente?

Solução Calculando t na Eq. 4-15 para $\theta_0 = 27^\circ$, temos

$$\begin{aligned}t &= \frac{x - x_0}{v_0 \cos \theta_0} = \frac{560 \text{ m}}{(82 \text{ m/s})(\cos 27^\circ)} \\&= 7,7 \text{ s.} \quad (\text{Resposta})\end{aligned}$$

Repetindo o cálculo para $\theta_0 = 63^\circ$, obtemos $t = 15 \text{ s}$. O que é razoável, pois o tempo de percurso para maiores ângulos de elevação deve ser, também, maior.

c. A que distância do forte deve ficar o navio pirata, para se manter fora do alcance do canhão?

Solução Vimos que o alcance máximo corresponde a um ângulo de elevação θ_0 de 45°. Então, fazendo $\theta_0 = 45^\circ$ na Eq. 4-20, temos

$$\begin{aligned}R &= \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0 = \frac{(82 \text{ m/s})^2}{9,8 \text{ m/s}^2} \sin(2 \times 45^\circ) \\&= 690 \text{ m.} \quad (\text{Resposta})\end{aligned}$$

À medida que o navio pirata se afasta, os dois ângulos de elevação com que o navio pode ser atingido se aproximam, tendendo para $\theta_0 = 45^\circ$ quando o navio está a 690 m de distância. Além desse ponto, o navio está a salvo.

EXEMPLO 4-9 A Fig. 4-18 ilustra o vôo de Emanuel Zacchini sobre três rodas-gigantes, cada uma com 18 m de altura e dispostas conforme mostrado na figura. Ele é lançado de uma altura de 3,0 m acima do solo, com velocidade $v_0 = 26,5 \text{ m/s}$, fazendo um ângulo $\theta_0 = 53^\circ$ com a horizontal. A rede onde deverá cair está à mesma altura do lançamento.

a. Conseguirá o artista transportar a primeira roda-gigante? Em caso afirmativo, a que distância horizontal do seu topo?

Solução Admitamos que a boca do canhão é a origem, então $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. Para determinar a altura y em que ele estaria em $x = 23 \text{ m}$, vamos usar a Eq. 4-19:

$$\begin{aligned} y &= (\tan \theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} \\ &= (\tan 53^\circ)(23 \text{ m}) - \frac{(9,8 \text{ m/s}^2)(23 \text{ m})^2}{2(26,5 \text{ m/s})^2(\cos 53^\circ)^2} \\ &= 20,3 \text{ m.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Como ele é lançado de 3,0 m acima do solo, passará a 5,3 m acima do topo da primeira roda-gigante.

b. Se a altura máxima do vôo é alcançada sobre a roda-gigante do meio, a que altura ele passa sobre ela?

Solução Na altura máxima, $v_y = 0$ e a Eq. 4-18 pode ser escrita como

$$v_y^2 = (v_0 \sin \theta_0)^2 - 2gy = 0.$$

Resolvendo para y , temos

$$y = \frac{(v_0 \sin \theta_0)^2}{2g} = \frac{(26,5 \text{ m/s})^2(\sin 53^\circ)^2}{2(9,8 \text{ m/s}^2)} = 22,9 \text{ m,}$$

o que significa que ele passará a 7,9 m acima daquela roda-gigante.

c. Qual o seu tempo de vôo t ?

Solução Como podemos determinar t de várias maneiras, vamos usar a Eq. 4-16 e o fato de que $y = 0$ quando ele cai na rede. Então, temos

$$y = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0,$$

ou

$$\begin{aligned} t &= \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g} = \frac{(2)(26,5 \text{ m/s})(\sin 53^\circ)}{9,8 \text{ m/s}^2} \\ &= 4,3 \text{ s.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

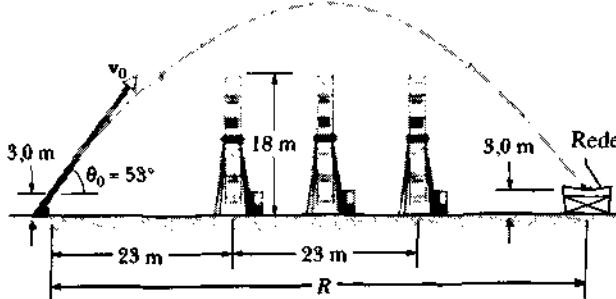


Fig. 4-18 Exemplo 4-9. O vôo de um homem-bala, sobre três rodas-gigantes, e a rede colocada no local esperado da queda.

d. A que distância do canhão deve estar posicionado o centro da rede?

Solução Uma forma de responder é usar a Eq. 4-15, fazendo $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} x &= (v_0 \cos \theta_0)t \\ &= (26,5 \text{ m/s})(\cos 53^\circ)(4,3 \text{ s}) \\ &= 69 \text{ m,} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

que é o alcance R do vôo. Naturalmente, Zacchini usaria uma rede retangular de grandes dimensões e iria posicioná-la com o lado maior apontando para o canhão, pois a resistência do ar diminuiria sua velocidade e ele não alcançaria a distância desejada, como calculamos.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 5: ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS

Em alguns problemas, calculamos o valor numérico em uma etapa e, depois, usamos este resultado na etapa seguinte. Nestes casos, é conveniente, apenas para efeito de cálculo, manter mais algarismos significativos que o necessário no resultado final.

No Exemplo 4-6, calculamos o tempo de vôo da cápsula e encontramos $t = 15,65 \text{ s}$. Se fosse perguntado qual o tempo de vôo, poderíamos arredondar a resposta para 16 s. Todavia, é mais conveniente usar $t = 15,65 \text{ s}$ nos demais cálculos, *fazendo* o arredondamento no resultado final. Se a cada etapa arredondarmos o resultado, a precisão de nossa resposta será reduzida.

TÁTICA 6: NÚMEROS VERSUS ÁLGEBRA

Uma maneira de evitar erros pelo arredondamento numérico, é resolver os problemas pela álgebra, substituindo os valores numéricos apenas na etapa final. É fácil fazer isso nos exemplos apresentados nesta seção, e é uma forma utilizada por pessoas experientes. Nos capítulos anteriores, entretanto, preferimos resolver alguns problemas em etapas, para que você tivesse uma percepção quantitativa do que estava fazendo. No entanto, à medida que avançarmos no texto, vamos nos fixar cada vez mais na álgebra, apontando as vantagens desse procedimento.

4-7 Movimento Circular Uniforme

Uma partícula está em **movimento circular uniforme** se percorre um círculo ou um arco circular com velocidade constante. Embora o módulo da velocidade não varie, a *partícula está acelerada*. Este fato pode causar surpresa, porque normalmente associamos a aceleração a um aumento no módulo da velocidade. Mas, na verdade, \mathbf{v} é um vetor, não um escalar. Se \mathbf{v} varia, mesmo que seja somente em direção, há uma aceleração, e este é o caso do movimento circular uniforme.

Vamos usar a Fig. 4-19 para determinar o módulo e a direção da aceleração. Esta figura representa o movimento circular uniforme de uma partícula com velocidade v , num círculo de raio r . Os vetores velocidade estão representados para os pontos p e q , que são simétricos em relação ao eixo y . Esses vetores, \mathbf{v}_p e \mathbf{v}_q , têm o mesmo módulo v , mas — como apontam em diferentes direções — são diferentes. Suas componentes x e y são

$$v_{px} = +v \cos \theta, \quad v_{py} = +v \sin \theta$$

e

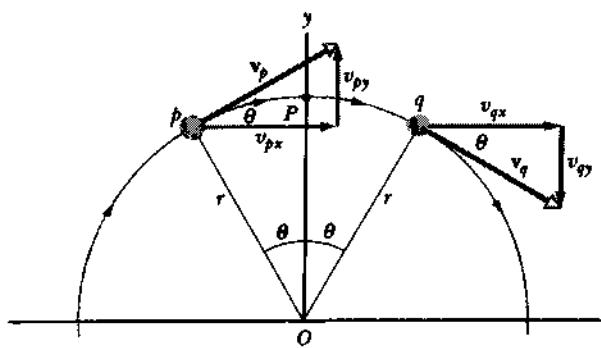


Fig. 4-19 Uma partícula se desloca em movimento circular uniforme, com velocidade constante v , num círculo de raio r . Suas velocidades nos pontos p e q , equidistantes do eixo y , são v_p e v_q , dadas por suas componentes horizontal e vertical, naqueles pontos, conforme mostra a figura. A aceleração instantânea da partícula, em qualquer ponto, tem módulo v^2/r e aponta para o centro do círculo.

$$v_{qx} = +v \cos \theta, \quad v_{qy} = -v \sin \theta.$$

O tempo necessário para a partícula se mover de p até q , com velocidade constante v é

$$\Delta t = \frac{\text{arc}(pq)}{v} = \frac{r(2\theta)}{v}, \quad (4-21)$$

onde $\text{arc}(pq)$ é o comprimento do arco de p até q .

Agora, temos informações suficientes para calcular as componentes da aceleração média \bar{a} , da partícula, enquanto se move de p até q na Fig. 4-19. Para a componente x , temos

$$\bar{a}_x = \frac{v_{qx} - v_{px}}{\Delta t} = \frac{v \cos \theta - v \cos \theta}{\Delta t} = 0.$$

Esse resultado não causa surpresa, porque fica claro, pela simetria da Fig. 4-19, que a componente x da velocidade tem o mesmo valor em p e em q .

Usando a Eq. 4-21, temos, para a componente y da aceleração média,

$$\begin{aligned} \bar{a}_y &= \frac{v_{qy} - v_{py}}{\Delta t} = \frac{-v \sin \theta - v \sin \theta}{\Delta t} \\ &= -\frac{2v \sin \theta}{2r\theta/v} = -\left(\frac{v^2}{r}\right)\left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right). \end{aligned}$$

O sinal negativo significa que essa componente da aceleração aponta verticalmente para baixo, na Fig. 4-19.

Agora, vamos admitir que o ângulo θ , na Fig. 4-19, diminua, tendendo a zero. Para isso, é necessário que os pontos p e q tendam para o ponto médio P , no alto do círculo. A aceleração média \bar{a} , cujas componentes já determinamos, tende, então, para a aceleração instantânea a , no ponto P .

A direção desse vetor aceleração instantâneo, no ponto P da Fig. 4-19, aponta para baixo, em direção ao centro O do círculo, pois a direção da aceleração média não varia enquanto θ diminui. Para determinar o módulo a do vetor aceleração instantâneo, necessitamos somente da regra matemática que diz: quanto mais o ângulo θ diminui, mais

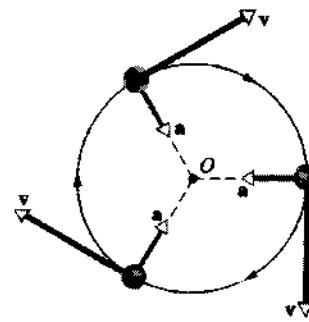


Fig. 4-20 Os vetores velocidade e aceleração para uma partícula em movimento circular uniforme. Os módulos são constantes, mas as direções variam continuamente.

a razão $(\sin \theta)/\theta$ tende para a unidade. Na relação dada anteriormente para \bar{a}_y , temos

$$\bar{a}_y = \frac{v^2}{r} \left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right) \quad (\text{aceleração centrípeta}) \quad (4-22)$$

Concluímos que, quando uma partícula se move em um círculo de raio r (ou em um arco circular) com velocidade constante v , podemos afirmar que tem uma aceleração de módulo v^2/r dirigida para o centro do círculo.

A Fig. 4-20 mostra a relação entre os vetores velocidade e aceleração, nos vários estágios de um movimento circular uniforme. Ambos os vetores têm módulo constante durante o movimento, mas suas direções variam continuamente. A velocidade é sempre tangente ao círculo, na direção do movimento; a aceleração está sempre dirigida radialmente para o centro do círculo. Por isso, a aceleração associada ao movimento circular uniforme é chamada de **aceleração centrípeta** (que significa “à procura do centro”), designação criada por Isaac Newton.

A aceleração resultante da variação da direção da velocidade é tão real quanto aquela que resulta da variação do módulo da velocidade. Na Fig. 2-8, por exemplo, mostramos o Coronel John P. Stapp, enquanto seu veículo, provido de foguete, era freado até parar. Sua velocidade tinha direção constante, mas com o módulo variando rapidamente. Por outro lado, um astronauta girando numa centrífuga no Centro de Veículos Tripulados, da NASA, em Houston, se movimenta com uma velocidade de módulo constante, mas com a direção variando rapidamente. As acelerações sentidas por essas duas pessoas são indistinguíveis.

Não há uma relação fixa entre a direção do vetor velocidade e a direção do vetor aceleração de uma partícula em movimento. A Fig. 4-21 mostra exemplos em que o ângulo entre esses dois vetores varia de 0° a 180° . Em apenas um caso os dois vetores apontam na mesma direção.

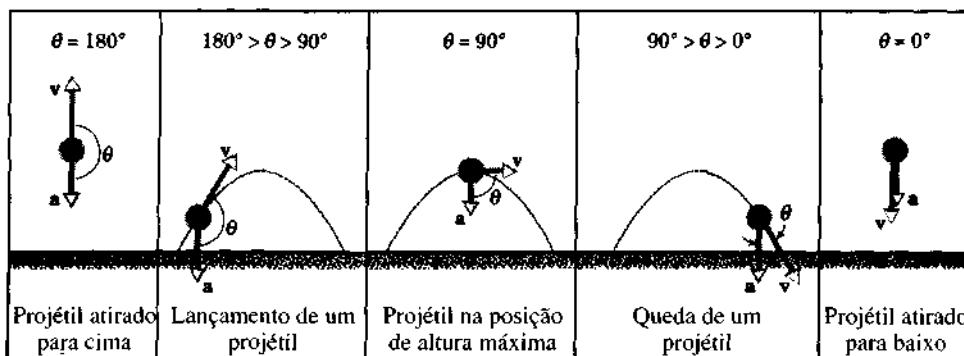


Fig. 4-21 Os vetores velocidade e aceleração de um projétil, para diferentes movimentos. Observe que os vetores aceleração e velocidade não têm relação direcional fixa entre si.

aceleração de queda livre g é $9,20 \text{ m/s}^2$. Qual é a velocidade orbital v do satélite?

Solução Temos um movimento circular uniforme em torno da Terra. Podemos encontrar v usando a Eq. 4-22, fazendo $a = g$ e $r = R_T + h$, onde R_T é o raio da Terra (veja o Apêndice C):

$$g = \frac{v^2}{R_T + h}$$

Resolvendo para v , temos

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{g(R_T + h)} \\ &= \sqrt{(9,20 \text{ m/s}^2)(6,37 \times 10^6 \text{ m} + 200 \times 10^3 \text{ m})} \\ &= 7.770 \text{ m/s} = 7,77 \text{ km/s.} \end{aligned}$$

Podemos mostrar que isso é equivalente a 17.400 mi/h e que o satélite levará $1,47 \text{ h}$ para completar uma revolução orbital.

Você pode ficar intrigado com o fato de que, caso o satélite fosse tripulado, embora $g = 9,20 \text{ m/s}^2$ na posição orbital do satélite, um astronauta experimentaria o que chamamos de “ausência de peso”, como se o peso não existisse. A explicação é que tanto o astronauta quanto o satélite têm a aceleração de $9,20 \text{ m/s}^2$ dirigida para o centro da Terra. Ambos estão em queda livre, da mesma forma que um passageiro dentro de um elevador, caindo livremente. Então, o astronauta (como o passageiro do elevador) parece flutuar, como se não tivesse peso. Veja a Leitura Complementar 3, no final do Cap. 15 (Vol. 2).

Quando um guarda rodoviário nos diz que estamos dirigindo a 110 km/h , embora não seja dito, sempre relacionamos isso “a um sistema de coordenadas em relação ao solo”.

Quando estamos viajando num avião ou num veículo espacial, nem sempre a Terra é o melhor sistema de referência. Podemos escolher qualquer outro que desejarmos. Entretanto, uma vez feito isso, devemos cuidar para que todas as medidas sejam feitas em relação ao referencial escolhido.

Suponha que Alex (referencial A) está parado no acostamento de uma rodovia, observando o carro P (a “partícula”) que se movimenta em relação a ele. Bárbara (referencial B), que está dirigindo na rodovia com velocidade constante, também observa o carro P . Suponhamos que, conforme a Fig. 4-22, ambos determinem a posição do carro em um certo instante. De acordo com a figura, observamos que

$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}. \quad (4-23)$$

Os termos na Eq. 4-23 são escalares e podem ter qualquer sinal. A equação é lida como: “A posição de P medida com relação a A é igual à posição de P medida em relação a B mais a posição de B medida com relação a A .” Observe que esta interpretação está de acordo com a seqüência de subscritos da Eq. 4-23.

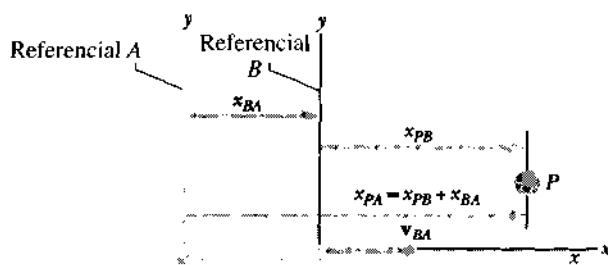


Fig. 4-22 Alex (referencial A) e Bárbara (referencial B) observam o carro P . O movimento é realizado no eixo x , comum aos dois referenciais. O vetor v_{BA} mostra a velocidade de afastamento relativa dos referenciais A e B . As três posições mostradas são referentes ao mesmo instante.

4-8 Movimento Relativo em uma Dimensão

Suponha que um pato voe para o norte a, digamos, 32 km/h . Para um outro pato voando ao lado do primeiro, ele está parado. Em outras palavras, a velocidade de uma partícula depende do **referencial** que o observador usa para realizar a medida. No nosso estudo, um referencial é um sistema físico de referência, um objeto a que relacionamos o nosso sistema de coordenadas.

O sistema de referência que nos parece mais familiar, em nossos vaivéns diáriamente, é o chão sob os nossos pés.*

*Até Shakespeare parecia pensar assim. Ele fez Hamlet dizer: “Esse agradável referencial, a Terra...”

Derivando a Eq. 4-23 em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{d}{dt}(x_{PA}) = \frac{d}{dt}(x_{PB}) + \frac{d}{dt}(x_{BA}),$$

ou (como $v = dx/dt$)

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}. \quad (4-24)$$

Esta equação escalar é a relação entre as velocidades do mesmo móvel (carro P), medido em relação aos dois referenciais;* essas medidas de velocidade fornecem resultados diferentes. Isto é, a Eq. 4-24 diz: “A velocidade de P medida em relação a A é igual à velocidade de P medida em relação a B mais a velocidade de B medida em relação a A . ” O termo v_{BA} é a velocidade de afastamento do referencial B em relação ao A ; veja Fig. 4-22.

Consideraremos apenas referenciais que se movem, *um em relação ao outro*, com velocidade constante; chamados de **referenciais inerciais**. No exemplo apresentado, significa que Bárbara (referencial B) dirigirá sempre com velocidade constante em relação a Alex (referencial A). O carro P (a partícula móvel), no entanto, pode aumentar ou diminuir a velocidade, pode parar ou até mudar o sentido do movimento.

Derivando a Eq. 4-24, em relação ao tempo, obtemos a relação entre as acelerações,

$$a_{PA} = a_{PB} + a_{BA}. \quad (4-25)$$

Observe que, como v_{BA} é constante, sua derivada em relação ao tempo é zero. A Eq. 4-25 mostra que *observadores em referenciais inerciais diferentes (sua velocidade de separação constante é constante) medem a mesma aceleração para o movimento da partícula*.

EXEMPLO 4-11 Alex, estacionado ao lado de uma rodovia na direção leste-oeste, observa um carro P que se move para oeste. Bárbara, dirigindo no sentido leste a uma velocidade $v_{BA} = 52 \text{ km/h}$, observa o mesmo carro. Considere o sentido leste como positivo.

a. Se Alex mede uma velocidade de 78 km/h para o carro P , que velocidade Bárbara medirá?

Solução Rearrmando a Eq. 4-24, temos

$$v_{PB} = v_{PA} - v_{BA}.$$

Sabemos que $v_{PA} = -78 \text{ km/h}$, o sinal menos indica que o carro P está se movendo para oeste, isto é, no sentido negativo. Sabemos, também, que $v_{BA} = 52 \text{ km/h}$, logo,

$$\begin{aligned} v_{PB} &= (-78 \text{ km/h}) - (52 \text{ km/h}) \\ &= -130 \text{ km/h}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

*É importante observar que os dois subscritos interiores, no termo da direita dessa equação (B, B), são os mesmos; os outros dois (P, A) são os mesmos que aparecem no termo da esquerda, na mesma sequência.

Se o carro P estivesse amarrado ao de Bárbara, por uma corda enrolada num cilindro, ela se desenrolaria a essa velocidade, enquanto os dois carros se separariam.

b. Se Alex vê o carro P frear, parando em 10 s , que aceleração (considerando-a constante) mediria?

Solução Da Eq. 2-9 ($v = v_0 + at$), temos

$$\begin{aligned} a &= \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - (-78 \text{ km/h})}{10 \text{ s}} \\ &= \left(\frac{78 \text{ km/h}}{10 \text{ s}} \right) \left(\frac{1 \text{ m/s}}{3.6 \text{ km/h}} \right) \\ &= 2.2 \text{ m/s}^2. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

c. Que aceleração Bárbara mediria para o carro freando?

Solução Para Bárbara, a velocidade inicial do carro é -130 km/h , conforme calculado no item (a), anteriormente. Embora o carro tenha sido freado até parar, está parado somente em relação ao referencial de Alex. Para Bárbara, o carro P não está de modo algum parado e, sim, parece se afastar a 52 km/h , pois a sua velocidade final, em relação ao seu referencial, é -52 km/h . Logo, da relação $v = v_0 + at$, temos

$$\begin{aligned} a &= \frac{v - v_0}{t} = \frac{(-52 \text{ km/h}) - (-130 \text{ km/h})}{10 \text{ s}} \\ &= 2.2 \text{ m/s}^2. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Esta é exatamente a mesma aceleração medida por Alex, o que sem dúvida não poderia ser diferente.

4-9 Movimento Relativo em Duas Dimensões

Agora vamos passar do mundo escalar do movimento relativo em uma dimensão para o mundo vetorial do movimento relativo em duas dimensões (e, por extensão, em três). A Fig. 4-23 mostra os referenciais A e B , agora bidimensionais. Nossos dois observadores estão novamente analisando o movimento de uma partícula P . Vamos admitir mais uma vez que os dois referenciais se afastam a

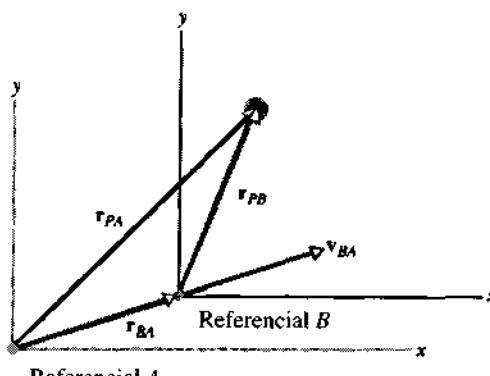


Fig. 4-23 Referenciais em duas dimensões. Os vetores r_{PA} e r_{PB} mostram a posição da partícula P nos referenciais A e B , respectivamente. O vetor r_{BA} mostra a posição do referencial B , em relação ao referencial A . O vetor v_{BA} mostra a velocidade de afastamento (constante) dos dois referenciais.

uma velocidade constante \mathbf{v}_{BA} (os referenciais são inertiais) e além disso, simplificando, admitamos que seus eixos x e y se mantêm paralelos entre si.

Os observadores nos referenciais A e B medem, cada um, a posição da partícula P em um determinado instante. Do triângulo de vetores na Fig. 4-23, obtemos a equação vetorial

$$\mathbf{r}_{PA} = \mathbf{r}_{PB} + \mathbf{r}_{BA}. \quad (4-26)$$

Esta relação é o equivalente vetorial da Eq. escalar 4-23.

Se derivarmos a Eq. 4-26 com referência ao tempo, acharemos a relação entre as velocidades (vetoriais) da partícula, conforme medida pelos dois observadores; isto é,



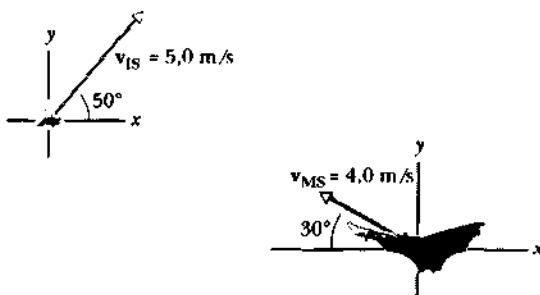
Esta relação é o equivalente vetorial da Eq. escalar 4-24. Observe que a ordem dos subscritos é a mesma daquela equação, e \mathbf{v}_{BA} é novamente a velocidade relativa constante do referencial B , medida pelo observador no referencial A .

Derivando a Eq. 4-27 com referência ao tempo, teremos a relação entre as duas acelerações medidas, ou seja,

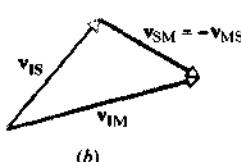


Que permanece válida no movimento tridimensional, pois todos os observadores, em cada referencial inercial, medião a mesma aceleração para o movimento da partícula.

EXEMPLO 4-12 Um morcego detecta um inseto (seu alimento) enquanto os dois estão voando, respectivamente, com velocidades \mathbf{v}_{MS} e \mathbf{v}_{IS} , em relação ao solo. Veja a Fig. 4-24a. Qual a velocidade \mathbf{v}_{IM} do inseto com relação ao morcego, em notação de vetores unitários?



(a)



(b)

Fig. 4-24 Exemplo 4-12. (a) Um morcego percebe um inseto. (b) Os vetores velocidade do inseto e do morcego.

Solução Da Fig. 4-24a, as velocidades do inseto e do morcego, em relação ao solo, são dadas por

$$\mathbf{v}_{IS} = (5,0 \text{ m/s}) (\cos 50^\circ) \mathbf{i} + (5,0 \text{ m/s}) (\sin 50^\circ) \mathbf{j}$$

e

$$\mathbf{v}_{MS} = (4,0 \text{ m/s}) (\cos 150^\circ) \mathbf{i} + (4,0 \text{ m/s}) (\sin 150^\circ) \mathbf{j},$$

onde o ângulo, em cada termo, é em relação ao sentido positivo do eixo x . A velocidade \mathbf{v}_{IM} do inseto em relação ao morcego é dada pela soma vetorial da velocidade \mathbf{v}_{IS} do inseto em relação ao solo e a velocidade \mathbf{v}_{SM} do solo em relação ao morcego; isto é,

$$\mathbf{v}_{IM} = \mathbf{v}_{IS} + \mathbf{v}_{SM}.$$

conforme mostrado na Fig. 4-24b. O vetor \mathbf{v}_{SM} tem sentido oposto ao vetor \mathbf{v}_{MS} . Logo, $\mathbf{v}_{SM} = -\mathbf{v}_{MS}$, então,

$$\mathbf{v}_{IM} = \mathbf{v}_{IS} + (-\mathbf{v}_{MS}).$$

Substituindo as expressões vetores unitários para \mathbf{v}_{IS} e \mathbf{v}_{MS} nessa expressão, encontramos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{IM} &= (5,0 \text{ m/s}) (\cos 50^\circ) \mathbf{i} + (5,0 \text{ m/s}) (\sin 50^\circ) \mathbf{j} \\ &\quad - (4,0 \text{ m/s}) (\cos 150^\circ) \mathbf{i} - (4,0 \text{ m/s}) (\sin 150^\circ) \mathbf{j} \\ &= 3,21 \mathbf{i} + 3,83 \mathbf{j} + 3,46 \mathbf{i} - 2,0 \mathbf{j} \\ &\approx (6,7 \text{ m/s}) \mathbf{i} + (1,8 \text{ m/s}) \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

EXEMPLO 4-13 A bússola de um avião indica que ele está alinhado na direção leste; o medidor de velocidade do ar indica 215 km/h. (A velocidade do ar é a do avião com relação ao ar.) Um vento constante de 65,0 km/h está soprando na direção norte.

a. Qual a velocidade do avião com relação ao solo?

Solução A “partícula” em movimento, neste problema, é o avião P . Há dois referenciais, o solo (S) e a massa de ar (M). Podemos reescrever a Eq. 4-27, fazendo uma simples modificação na notação,

$$\mathbf{v}_{PS} = \mathbf{v}_{PM} + \mathbf{v}_{MS} \quad (4-29)$$

A Fig. 4-25a mostra que esses vetores formam um triângulo retângulo. Os termos na Eq. 4-29 são, na ordem, a velocidade do avião em relação ao solo, a velocidade do avião em relação ao ar e a velocidade do ar em relação ao solo (isto é, a velocidade do vento). Observe a orientação do avião que, de acordo com a leitura da sua bússola, está direcionado para leste. Na verdade, embora o avião esteja apontado para leste, pode não estar se movendo naquela direção.

O módulo da velocidade do avião com relação ao solo é obtido de

$$\begin{aligned} v_{PS} &= \sqrt{v_{PM}^2 + v_{MS}^2} \\ &= \sqrt{(215 \text{ km/h})^2 + (65,0 \text{ km/h})^2} \\ &= 225 \text{ km/h}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

O ângulo α na Fig. 4-25a é determinado através de

$$\begin{aligned} \alpha &= \tan^{-1} \frac{v_{MS}}{v_{PM}} = \tan^{-1} \frac{65,0 \text{ km/h}}{215 \text{ km/h}} \\ &= 16,8^\circ. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Logo, o avião está voando a 225 km/h com relação ao solo, na direção 16,8° nordeste. Observe que sua velocidade com relação ao solo (a “velocidade do solo”) é maior do que aquela com relação ao ar.

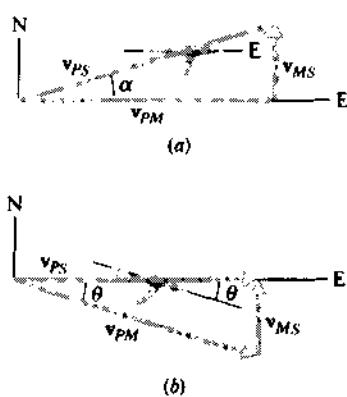


Fig. 4-25 Exemplo 4-13. (a) Um avião apontando para leste é desviado para o norte. (b) Para viajar na direção leste, o avião deve dirigir-se para o sentido oposto ao do vento.

b. Se o piloto desejar voar para leste, qual deverá ser a sua orientação? Isto é, qual deve ser a leitura da bússola?

Solução Neste caso, o piloto deve direcionar a aeronave contra o vento, para que a velocidade do avião, em relação ao solo, aponte para leste. A velocidade do vento é constante e o diagrama vetorial que representa a nova situação está mostrado na Fig. 4-25b. Observe que os três vetores ainda formam um triângulo retângulo, como na Fig. 4-25a, e a Eq. 4-29 ainda continua válida.

A velocidade do piloto, em relação ao solo, agora é

$$\begin{aligned} v_{PS} &= \sqrt{v_{PM}^2 - v_{MS}^2} \\ &= \sqrt{(215 \text{ km/h})^2 - (65.0 \text{ km/h})^2} = 205 \text{ km/h}. \end{aligned}$$

Conforme a orientação na Fig. 4-25b, o piloto deve alinhar o avião contra o vento, segundo um ângulo θ dado por

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1} \frac{v_{MS}}{v_{PM}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{65.0 \text{ km/h}}{215 \text{ km/h}} = 17.6^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

Observe que, para essa orientação, a velocidade em relação ao solo é menor do que a em relação ao ar.

4-10 Movimento Relativo para Altas Velocidades (Opcional)

Um satélite está em órbita a uma velocidade de 27.200 km/h. Antes que você chame isto de uma alta velocidade, deve responder a esta pergunta: "Alta, comparada a quê?" A natureza nos deu um padrão: a velocidade c da luz, que é (no vácuo)

$$c = 299.792.458 \text{ m/s} \quad (\text{velocidade da luz}) \quad (4-30)$$

Como veremos mais adiante, nenhuma entidade — seja uma partícula ou uma onda — pode mover-se com velocidade superior à da luz, não importa que referencial seja usado para a observação. Com esse padrão, quaisquer obje-

tos de grandes dimensões — não importa quão grandes suas velocidades possam ser com relação a um padrão ordinário — são sempre muito mais lentos. A velocidade do satélite em órbita, por exemplo, é apenas 0,0025% da velocidade da luz. Entretanto, partículas subatômicas, como os elétrons ou os prótons, podem alcançar velocidades bem próximas à da luz (mas nunca igual ou maior). Nas experiências, por exemplo, observamos que um elétron, acelerado através de 10 milhões de volts, alcança uma velocidade de $0,9988c$; se dobrarmos o valor da diferença de potencial, sua velocidade aumentará para, apenas, $0,9997c$. A velocidade da luz é um limite do qual os objetos podem se aproximar, mas nunca alcançar. (Infelizmente, a velocidade supraluminal, utilizada na ficção científica, como a "dobra espacial", em *Jornada nas Estrelas*, quando a velocidade é $c2^n$, onde n é o número de dobragem, é apenas uma ficção.)

Agora, pergutamos: "Como podemos afirmar que a cinemática, que examinamos há muito tempo, estudando objetos muito lentos, também é válida para objetos muito rápidos, como os elétrons ou os prótons, altamente energéticos?" A resposta, conseguida apenas de modo experimental, é que a cinemática para pequenas velocidades não permanece válida para as que se aproximam da velocidade da luz. A teoria especial da relatividade, de Einstein, no entanto, tem concordado com as experiências em todas as velocidades. Daremos, aqui, uma visão resumida dessa teoria, que será apresentada com mais detalhes no Cap. 42 (Vol. 4).

Em "baixas" velocidades — as velocidades que podem ser alcançadas por objetos comuns mensuráveis —, as equações da cinemática da teoria de Einstein se reduzem àquelas que estudamos. A falha da "cinemática mais lenta" é gradativa, suas previsões, quando a velocidade aumenta, vão ficando cada vez menos de acordo com os fatos experimentais. Vamos dar um exemplo: A Eq. 4-24,

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA} \quad (\text{baixas velocidades}), \quad (4-31)$$

dá a relação da velocidade da partícula P , vista por um observador no referencial B , em relação a um outro no referencial A . Na teoria de Einstein, a equação correspondente é

$$v_{PA} = \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + v_{PB}v_{BA}/c^2} \quad (\text{qualquer velocidade}). \quad (4-32)$$

Se $v_{PB} \ll c$ e $v_{BA} \ll c$ (que é sempre o caso para objetos que encontramos em nosso cotidiano), então o denominador na Eq. 4-32 tende para a unidade e a Eq. 4-32 se reduz à Eq. 4-31, como era de se esperar.

A velocidade c da luz é a constante central da teoria de Einstein, e aparece em todas as equações relativísticas. Uma forma de testar essas equações é tornar c infinitamente grande. Nesta condição, todas as velocidades seriam "pequenas", e a "cinemática lenta" nunca falharia. Fazendo $c \rightarrow \infty$ na Eq. 4-32, esta equação, realmente, se reduz à Eq. 4-31.

EXEMPLO 4-14 (Pequenas velocidades) Para o caso de $v_{PB} = v_{BA} = 0,0001c$ ($= 107,200 \text{ km/h}$!), que valor fornecem as Eqs. 4-31 e 4-32 para v_{PA} ?

Solução Da Eq. 4-31,

$$\begin{aligned} v_{PA} &= v_{PB} + v_{BA} \\ &= 0,0001c + 0,0001c \\ &= 0,0002c. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Da Eq. 4-32,

$$\begin{aligned} v_{PA} &= \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + v_{PB}v_{BA}/c^2} \\ &= \frac{0,0001c + 0,0001c}{1 + (0,0001c)^2/c^2} = \frac{0,0002c}{1,00000001} \\ &\approx 0,0002c. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Conclusão: Para qualquer velocidade alcançada por objetos comuns, as Eqs. 4-31 e 4-32 fornecem, essencialmente, a mesma resposta. Podemos usar a Eq. 4-31 (“cinemática lenta”), sem pensar duas vezes.

EXEMPLO 4-15 (Grandes velocidades) Para o caso de $v_{PB} = v_{BA} = 0,65c$, que valor fornecem as Eqs. 4-31 e 4-32 para v_{PA} ?

Solução Da Eq. 4-31,

$$\begin{aligned} v_{PA} &= v_{PB} + v_{BA} \\ &= 0,65c + 0,65c = 1,30c. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Da Eq. 4-32,

$$\begin{aligned} v_{PA} &= \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + v_{PB}v_{BA}/c^2} \\ &= \frac{0,65c + 0,65c}{1 + (0,65c)(0,65c)/c^2} \\ &= \frac{1,30c}{1,423} = 0,91c. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Conclusão: Para grandes velocidades (próximas a c), a “cinemática lenta” e a relatividade especial levam a resultados bem diferentes. A “cinemática lenta” não determina limite superior para a velocidade, o que facilmente leva (como neste caso) a velocidades maiores do que a da luz. A relatividade especial, por outro lado, *never* admite uma velocidade maior do que c , não importando quão altas sejam as velocidades que se combinam. As experiências, até hoje, têm concordado sempre com a relatividade especial.

RESUMO

Vetor Posição

A localização de uma partícula, em relação à origem de um sistema de coordenadas, é dada pelo *vetor posição* \mathbf{r} que, na notação de vetores unitários, se escreve

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (4-1)$$

onde $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$ e $z\mathbf{k}$ são as *componentes vetoriais* e x , y e z são as *componentes escalares* do vetor posição \mathbf{r} . Um vetor posição também pode ser determinado pelo seu módulo e um ou mais ângulos para orientação.

Deslocamento

Se o movimento de uma partícula é representado pela variação do seu vetor posição de \mathbf{r}_1 para \mathbf{r}_2 , então, seu *deslocamento* $\Delta\mathbf{r}$ é

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \quad (4-3)$$

O Exemplo 4-1 é um problema sobre deslocamento.

Velocidade Média

Se uma partícula se desloca durante um intervalo de tempo Δt , sua *velocidade média* $\bar{\mathbf{v}}$ é

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (4-4)$$

Velocidade

Quando Δt , na Eq. 4-4, tende para 0, o limite de $\bar{\mathbf{v}}$ é chamado de *velocidade instantânea*:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (4-6)$$

que pode ser representada na notação de vetores unitários como

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}, \quad (4-7)$$

onde $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$ e $v_z = dz/dt$. Uma demonstração bidimensional de \mathbf{v} é mostrada no Exemplo 4-3.

Quando a posição de uma partícula em movimento é representada num sistema de coordenadas, \mathbf{v} é sempre tangente à curva que representa a trajetória da partícula.

Aceleração Média

Se a velocidade de uma partícula varia de \mathbf{v}_1 para \mathbf{v}_2 , no intervalo de tempo Δt , sua *aceleração média*, neste intervalo de tempo, é

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}. \quad (4-9)$$

Aceleração

Na Eq. 4-9, quando Δt tende para 0, o limite de 0 $\bar{\mathbf{a}}$ é chamado de *aceleração instantânea*,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (4-10)$$

Na notação de vetores unitários,

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \quad (4-11)$$

onde $a_x = dv_x/dt$, $a_y = dv_y/dt$ e $a_z = dv_z/dt$. O Exemplo 4-4 mostra como a Eq. 4-10 pode ser usada.

Quando \mathbf{a} é constante, as componentes de \mathbf{a} , \mathbf{v} e \mathbf{r} , na direção de qualquer eixo, podem ser tratadas como no movimento unidimensional, apresentado no Cap. 2. Veja Exemplo 4-5.

Movimento de Projéteis

O *movimento de projéteis* é o movimento de uma partícula lançada com velocidade inicial \mathbf{v}_0 , sob a influência apenas da aceleração da gravida-

de g . Se v_0 é definido por um módulo (a velocidade v_0) e uma orientação (ângulo θ_0), as equações do movimento nos eixos x e y , horizontal e vertical, são, respectivamente,

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0) t, \quad (4-15)$$

$$y - y_0 = (v_0 \sin \theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (4-16)$$

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - g t, \quad (4-17)$$

e

$$v_y^2 = (v_0 \sin \theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \quad (4-18)$$

No movimento de projéteis, a trajetória da partícula é parabólica e dada por

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2}, \quad (4-19)$$

onde a origem é escolhida de maneira que x_0 e y_0 sejam zero. O **alcance** R , é a distância horizontal do ponto de lançamento, até o ponto em que a partícula retorna à mesma altura da qual foi lançada, ou seja,

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}. \quad (4-20)$$

Os Exemplos 4-6 a 4-9 tratam do movimento de projéteis.

Movimento Circular Uniforme

Se uma partícula se desloca sobre um círculo ou um arco circular, com raio r e velocidade constante v , está em **movimento circular uniforme** com uma aceleração a de módulo

$$a = \frac{v^2}{r}. \quad (4-22)$$

A direção de a aponta para o centro do círculo ou do arco circular. A aceleração a é chamada de **centrípeta**. O Exemplo 4-10 ilustra o uso da Eq. 4-22.

Movimento Relativo

Quando dois sistemas de referência, A e B , estão se movendo um em relação ao outro com velocidade constante, são chamados de **sistemas de referência inerciais**. A velocidade de uma partícula em movimento, medida por um observador no referencial A , em geral difere daquela medida por um observador no referencial B . Estas velocidades estão relacionadas por

$$\mathbf{v}_{PA} = \mathbf{v}_{PB} + \mathbf{v}_{BA}, \quad (4-27)$$

onde \mathbf{v}_{BA} é a velocidade de B em relação a A . Ambos os observadores medem a mesma aceleração para a partícula, ou seja,

$$\mathbf{a}_{PA} = \mathbf{a}_{PB}. \quad (4-28)$$

O Exemplo 4-11 ilustra o uso dessas equações para o movimento unidimensional; os Exemplos 4-12 e 4-13 tratam do movimento bidimensional.

Se as velocidades consideradas estão próximas à velocidade da luz, a Eq. 4-24 deve ser substituída pela equação usada na **teoria da relatividade especial**. Para o movimento unidimensional, o resultado correto é

$$v_{PA} = \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + v_{PB}v_{BA}/c^2}, \quad (4-32)$$

que se torna idêntica à Eq. 4-24, se todas as velocidades envolvidas forem desprezíveis em relação à velocidade c da luz. Os Exemplos 4-14 e 4-15 ilustram o uso dessa equação.

QUESTIONÁRIO

1. A aceleração de um corpo pode mudar de direção (a) sem que o deslocamento mude repentinamente de direção, e (b) sem que a velocidade também mude, de imediato, sua direção? Se afirmativo, dê um exemplo.
2. Num salto à distância, algumas vezes chamado de salto em comprimento, que fatores determinam o alcance do salto?
3. Em que ponto da trajetória de um projétil a velocidade é mínima? E máxima?
4. A Fig. 4-26 mostra a trajetória de um Learjet da NASA num percurso destinado a simular as condições de pouca gravidade, por um curto período. Demonstre que os passageiros experimentarão uma ausência de peso, se o avião seguir uma determinada trajetória parabólica.
5. Um lançamento (arremesso) é feito por cima do ombro de um jogador. O ângulo de lançamento, que permite o maior alcance, é menor do que 45° ; ou seja, uma trajetória mais alongada tem um maior alcance. Explique por quê.
6. Você está dirigindo um carro logo atrás de um caminhão, com a mesma velocidade dele. Um engradado cai da carroceria na estrada. Se você não se desviar, nem frear, poderá seu carro colidir com o engradado, antes que este toque no chão? Explique sua resposta.
7. Na Fig. 4-27, são mostradas trajetórias para três quiques de uma bola de futebol. Desprezando o efeito do ar sobre a bola, ordene as trajetórias de acordo com (a) o tempo de permanência no ar, (b) a componente vertical da velocidade inicial, (c) a componente horizontal da velocidade inicial e (d) a velocidade inicial. Ordene, do maior para o menor, indicando qualquer resultado igual.

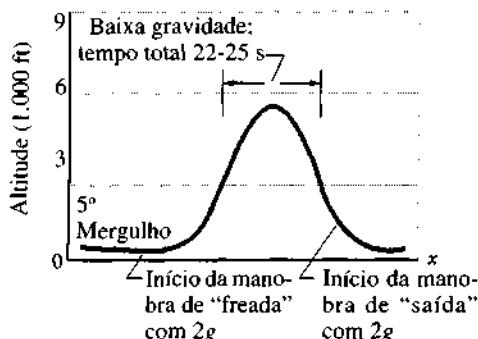


Fig. 4-26 Questão 4.



Fig. 4-27 Questão 7.

8. Um atirador mantém o centro de um alvo exatamente na sua linha de mira. Nestas condições, será necessário dar uma certa inclinação ao rifle usado pelo atirador, para que a bala descreva uma trajetória parabólica correta e acerte o centro do alvo. (Se o rifle for mantido na horizontal, a bala acertará o alvo *abaixo* do centro. Por quê?) Agora, se em vez de o atirador e o alvo estarem no mesmo nível horizontal, o alvo estiver acima ou abaixo do nível do atirador, a uma distância deste igual à do caso anterior, prove que, se o atirador inclinar a arma em relação à linha de mira, com o mesmo ângulo, ela acertará o alvo *acima* do centro, nos dois casos. (Veja o artigo "Puzzle in Elementary Ballistics", de Ole Anton Haugland, *The Physics Teacher*, April 1983, pág. 246.)

9. Quando os alemães bombardearam Paris, a 112 km de distância, com uma peça de artilharia de longo alcance apelidada de "Grande Bertha", os bombardeios foram feitos num ângulo maior do que 45°; os alemães descobriram que, para ângulos maiores, o alcance era maior, talvez até o dobro do de um ângulo de 45°. Considerando que a densidade do ar diminui com a altura, explique tal descoberta.

10. No movimento de projéteis, quando a resistência do ar é desprezada, é necessário considerar o movimento como tridimensional, em vez de bidimensional?

11. É possível estar acelerado, se você se move com velocidade constante em módulo? É possível fazer uma curva com aceleração zero? E com aceleração constante?

12. Mostre que, levando em conta a rotação e a translação da Terra, um livro parado sobre sua mesa se move mais rápido à noite do que durante o dia. Em qual sistema de referência esta declaração é verdadeira?

13. Um aviador, saindo de um mergulho, descreve um arco de circunferência e diz que "experimentou uma aceleração de 3g", durante o mergulho. Explique o significado desta afirmação.

14. Um rapaz, sentado em um trem que se move com velocidade constante, atira uma bola verticalmente para cima. A bola cairá atrás dele? Na frente? Em suas mãos? O que acontece se o trem acelerar ou fizer uma curva, enquanto a bola estiver no ar?

15. Uma mulher, no vagão de um trem que se move com velocidade constante, deixa cair uma moeda, ao inclinar-se num gradil. Descreva a trajetória da moeda vista (a) pela mulher no trem, (b) por uma pessoa parada junto aos trilhos e (c) por uma pessoa num outro trem, se movendo em sentido contrário, num trilho paralelo.

16. Se a aceleração de um corpo é constante, em relação a um determinado referencial, será também constante, quando medida de qualquer outro referencial?

17. A Eq. 4-31 é tão familiar em nosso cotidiano, que muitas vezes é considerada "obviamente correta, não necessitando ser comprovada". Muitas das chamadas contestações da teoria da relatividade se basearam nessa afirmação. Como você contestaria alguém que fizesse tal consideração?

18. Um elevador está descendo com velocidade constante. Um passageiro deixa cair uma moeda no chão. Que aceleração seria observada na queda da moeda (a) pelo passageiro e (b) por uma pessoa parada, em relação à cabine do elevador?

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

Seção 4-2 Posição e Deslocamento

1E. Certa melancia tem as seguintes coordenadas: $x = -5,0\text{ m}$, $y = 8,0\text{ m}$ e $z = 0\text{ m}$. Ache seu vetor posição (a) em notação de vetores unitários e (b) em função do seu módulo e da sua direção. (c) Represente o vetor num sistema de coordenadas dextrogiro.

2E. O vetor posição para um elétron é $\mathbf{r} = 5,0\mathbf{i} - 3,0\mathbf{j} + 2,0\mathbf{k}$, onde a unidade não mencionada é o metro. (a) Determine o módulo de \mathbf{r} . (b) Desenhe o vetor num sistema de coordenadas dextrogiro.

3E. Inicialmente, o vetor posição para um próton é $\mathbf{r} = 5,0\mathbf{i} - 6,0\mathbf{j} + 2,0\mathbf{k}$ e, logo depois, é $\mathbf{r} = -2,0\mathbf{i} + 6,0\mathbf{j} + 2,0\mathbf{k}$, onde a unidade não mencionada é o metro. (a) Qual é o vetor deslocamento do próton e (b) a que plano ele está paralelo?

4E. Um pósitron sofre um deslocamento $\Delta\mathbf{r} = 2,0\mathbf{i} - 3,0\mathbf{j} + 6,0\mathbf{k}$, o vetor posição final é $\mathbf{r} = 3,0\mathbf{j} - 4,0\mathbf{k}$. (A unidade não mencionada é o metro.) Qual era o vetor posição inicial do pósitron?

Seção 4-3 Velocidade e Velocidade Média

5E. Um avião voa 480 km da cidade *A* para a cidade *B* na direção leste em 45,0 min e, depois, voa 960 km da *B* para a *C* na direção sul em 1,50 h. (a) Qual o vetor deslocamento que representa a viagem total? Quais são o vetor velocidade média e (c) a velocidade escalar média nesta viagem?

6E. Um trem se move para leste com uma velocidade constante de 60,0 km/h, durante 40,0 min, depois, na direção 50,0° nordeste, durante 20,0 min e, finalmente, na direção oeste, durante 50,0 min. Qual a velocidade média do trem durante esse percurso?

7E. Um balão, em 3,50 h, se desvia 21,5 km ao norte, 9,70 km a leste e 2,88 km acima do seu ponto de decolagem no solo. Determine (a) o

módulo da sua velocidade média e (b) o ângulo que a sua velocidade média faz com a horizontal.

8E. Inicialmente, o vetor posição de um íon é $\mathbf{r} = 5,0\mathbf{i} - 6,0\mathbf{j} + 2,0\mathbf{k}$ e, 10 s depois, é $\mathbf{r} = -2,0\mathbf{i} + 8,0\mathbf{j} - 2,0\mathbf{k}$. (A unidade não mencionada é o metro.) Qual foi a sua velocidade média durante os 10 s?

9E. A posição de um elétron é dada por $\mathbf{r} = 3,0\mathbf{i} - 4,0t^2\mathbf{j} + 2,0\mathbf{k}$ (onde t está em segundos e as unidades dos coeficientes são tais que \mathbf{r} está em metros). (a) Qual é $\mathbf{v}(t)$ para o elétron? (b) Na notação de vetores unitários, qual é \mathbf{v} em $t = 2,0\text{ s}$? (c) Quais são o módulo e a direção de \mathbf{v} , logo depois?

Seção 4-4 Aceleração e Aceleração Média

10E. Um próton tem inicialmente $\mathbf{v} = 4,0\mathbf{i} - 2,0\mathbf{j} + 3,0\mathbf{k}$ e, 4,0 s depois, tem $\mathbf{v} = -2,0\mathbf{i} - 2,0\mathbf{j} + 5,0\mathbf{k}$ (a unidade omitida é o m/s). (a) Qual a aceleração média $\bar{\mathbf{a}}$ em 4,0 s? (b) Quais são o módulo e a direção de $\bar{\mathbf{a}}$?

11E. Uma partícula se move de forma que sua posição, em função do tempo, é $\mathbf{r} = \mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, em unidades SI. Deduza expressões para (a) sua velocidade e (b) sua aceleração, em função do tempo.

12E. A posição \mathbf{r} de uma partícula em movimento, num plano *xy* é dada por $\mathbf{r} = (2,00t^3 - 5,00t)\mathbf{i} + (6,00 - 7,00t)\mathbf{j}$. Com \mathbf{r} em metros e t em segundos. Calcule (a) \mathbf{r} , (b) \mathbf{v} e (c) \mathbf{a} quando $t = 2,00\text{ s}$. (d) Qual a direção da tangente à trajetória da partícula em $t = 2,00\text{ s}$?

13E. Um barco à vela desliza na superfície congelada de um lago, com aceleração constante produzida pelo vento. Em um determinado instante, sua velocidade é $6,30\mathbf{i} - 8,42\mathbf{j}$, em metros por segundo. Três segundos depois, devido à mudança do vento, o barco pára de imediato. Qual a sua aceleração média, durante este intervalo de 3 s?

14P. Uma partícula *A* se move ao longo da reta $y = 30\text{ m}$ com velocidade constante v ($v = 3,0\text{ m/s}$), paralela ao semi-eixo positivo x (Fig. 4-28). Uma segunda partícula *B* parte da origem com velocidade zero e aceleração constante a ($a = 0,40\text{ m/s}^2$), no mesmo instante em que a partícula *A* cruza o eixo y . Que ângulo θ , entre a e o semi-eixo positivo y , resultaria em uma colisão entre essas duas partículas? (Seus cálculos resultarem numa equação de quarto grau, substitua o termo t^4 por $u = t^2$ e resolva a equação quadrática em u .)

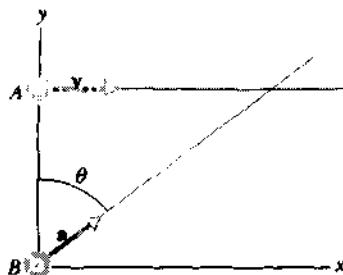


Fig. 4-28 Problema 14.

15P. Uma partícula parte da origem com uma velocidade inicial $v = 3,00\text{i}$, em metros por segundo, sob a ação de uma aceleração constante $a = -1,00\text{i} - 0,500\text{j}$, em metros por segundo ao quadrado. (a) Qual é a velocidade da partícula, quando alcança sua coordenada x máxima? (b) Onde a partícula está, nesse instante?

16P. A velocidade v de uma partícula se movendo no plano xy é dada por $v = (6,0t - 4,0t^2)\text{i} + 8,0\text{j}$. Com v em metros por segundo e t (> 0) em segundos. (a) Qual é a aceleração em $t = 3,0\text{ s}$? (b) Quando (se for o caso) sua aceleração é zero? (c) Quando (se for o caso) sua velocidade é zero? Quando (se for o caso) sua velocidade escalar é igual a 10 m/s ?

Seção 4-6 Análise do Movimento de Projéteis

Em alguns destes problemas, não é desejável desprezar os efeitos do ar, mas ajuda a simplificar os cálculos.

17E. Um dardo é atirado horizontalmente em direção à mosca, ponto *P* no centro do alvo da Fig. 4-29, com uma velocidade inicial de 10 m/s . Ele atinge o ponto *Q*, embaixo de *P*, na borda do alvo, após $0,19\text{ s}$. (a) Qual a distância PQ ? (b) A que distância do alvo está o arremessador dos dardos?

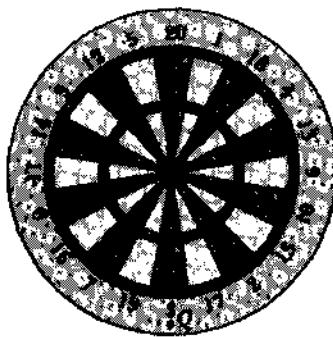


Fig. 4-29 Exercício 17.

18E. Um rifle está apontado horizontalmente para um alvo a 300 m de distância. A bala atinge o alvo $2,25\text{ m}$ abaixo do ponto visado. (a) Qual o tempo de percurso da bala? (b) Qual a velocidade da bala ao sair do rifle?

19E. Elétrons, como qualquer outro objeto material, podem cair em queda livre. (a) Se um elétron é projetado, horizontalmente, com uma velocidade de $3,0 \times 10^6\text{ m/s}$, quanto ele cairá, em relação à horizontal, após percorrer $1,0\text{ m}$? (b) Se a velocidade inicial for aumentada, a resposta do item (a) aumenta ou diminui?

20E. Um feixe de elétrons é projetado, na horizontal, com uma velocidade de $1,0 \times 10^6\text{ cm/s}$, na região entre duas placas horizontais de $2,0\text{ cm}^2$, no interior de uma válvula. Um campo elétrico entre as placas causa uma desaceleração constante dos elétrons, de módulo igual a $1,0 \times 10^{17}\text{ cm/s}^2$. Determine (a) o tempo necessário para os elétrons passarem entre as placas, (b) o deslocamento vertical do feixe entre as placas (ele não penetra nas placas) e (c) a velocidade do feixe, assim que sai da região entre as placas.

21E. Uma bola se movimenta horizontalmente para fora da superfície de uma mesa a $12,0\text{ m}$ de altura. Atinge o solo a $15,0\text{ m}$ da borda da mesa, na horizontal. (a) Quanto tempo a bola ficou no ar? Qual era sua velocidade no instante em que deixou a mesa?

22E. Um projétil é atirado horizontalmente de uma arma que está $45,0\text{ m}$ acima de um solo plano. A velocidade na saída do cano é 250 m/s . (a) Por quanto tempo o projétil permanece no ar? (b) A que distância da arma, na horizontal, ele cai ao solo? (c) Qual o módulo do componente vertical da velocidade, no instante em que atinge o solo?

23E. Uma bola de beisebol é lançada a uma velocidade de 160 km/h , horizontalmente. O rebatedor está a uma distância de 18 m . (a) Quanto tempo a bola leva para percorrer os primeiros 9 m , na horizontal? E os 9 m restantes? (b) De quanto a bola cai, sob a ação da gravidade, durante os primeiros 9 m , em relação à trajetória horizontal? (c) E durante os 9 m restantes? (d) Por que os resultados de (b) e (c) são diferentes? (Despreze a resistência do ar.)

24E. Um projétil é lançado com uma velocidade inicial de 30 m/s , num ângulo de 60° acima da horizontal. Calcule o módulo e a direção da velocidade (a) $2,0\text{ s}$ e (b) $5,0\text{ s}$, depois do lançamento.

25E. Uma pedra é catapultada para a direita com uma velocidade inicial de $20,0\text{ m/s}$, num ângulo de $40,0^\circ$ acima do solo. Calcule seus deslocamentos horizontal e vertical (a) $1,10\text{ s}$, (b) $1,80\text{ s}$ e (c) $5,00\text{ s}$ depois do lançamento.

26E. Você atira uma bola do alto de um penhasco com uma velocidade inicial de $15,0\text{ m/s}$, fazendo um ângulo de $20,0^\circ$, abaixo da horizontal. Calcule (a) o deslocamento horizontal da bola e (b) o vertical $2,30\text{ s}$ depois.

27E. Você atira uma bola com uma velocidade de $25,0\text{ m/s}$, num ângulo de $40,0^\circ$ acima da horizontal, diretamente contra uma parede, conforme mostrado na Fig. 4-30. A parede está a $22,0\text{ m}$ do ponto de lançamento. (a) Quanto tempo a bola fica no ar antes de bater na parede? (b) A que distância acima do ponto de lançamento a bola bate na parede? (c) Quais são as componentes horizontal e vertical da velocidade quando ela bate na parede? (d) Ela ultrapassa o ponto mais alto de sua trajetória antes de bater na parede?

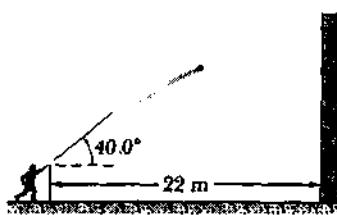


Fig. 4-30 Exercício 27.

28E. (a) Prove que a razão da altura máxima H pelo alcance R , para um projétil atirado do nível do solo com um ângulo θ_0 acima da hori-

zontal, é dada por $H/R = (\tan \theta_0)/4$. Veja Fig. 4-31. (b) Para que ângulo θ_0 temos $H = R$?

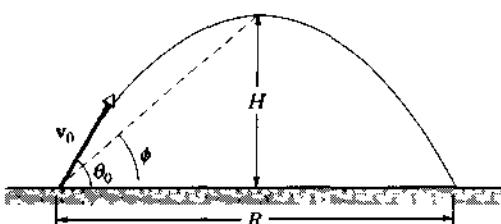


Fig. 4-31 Exercícios 28 e 29.

29E. Um projétil é atirado do nível do solo com um ângulo θ_0 , acima da horizontal. (a) Mostre que o ângulo de elevação ϕ do ponto mais alto, visto do local de lançamento, está relacionado com θ_0 , o ângulo de elevação do lançamento, por $\tan \phi = (\tan \theta_0)/2$. Veja Fig. 4-31 e Exercício 28. (b) Calcule ϕ para $\theta_0 = 45^\circ$.

30E. Uma pedra é lançada para o alto de um penhasco, de altura h , com uma velocidade inicial de 42,0 m/s com um ângulo de $60,0^\circ$, acima da horizontal, conforme mostrado na Fig. 4-32. A pedra cai em A 5,50 s após o lançamento. Calcule (a) a altura h do penhasco; (b) a velocidade da pedra imediatamente antes do impacto em A ; e (c) a altura máxima H , acima do nível do solo.

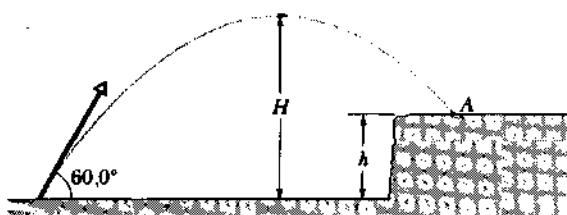


Fig. 4-32 Exercício 30.

31P. No Exemplo 4-6, calcule (a) a velocidade da cápsula, quando ela cai na água e (b) o ângulo de impacto θ mostrado na Fig. 4-15.

32P. Nos Jogos Olímpicos de 1968, na Cidade do México, Bob Beamon quebrou o recorde com um salto à distância de 8,90 m. (Veja a Fig. 4-33.) Suponha que a sua velocidade na impulsão foi de 9,5 m/s, parecida com a de um velocista. O quanto esse atleta chegou perto do alcance máximo possível na ausência da resistência do ar? O valor de g , na Cidade do México, é $9,78 \text{ m/s}^2$.

33P. Um rifle com uma velocidade de tiro de 500 m/s atira num alvo, a 50 m de distância. A que altura, acima do alvo, deve ser apontado o cano do rifle, para que a bala atinja o alvo?

34P. Mostre que a altura máxima alcançada por um projétil é $y_{\max} = (v_0 \sin \theta_0)^2/2g$.

35P. Numa história policial, um corpo é encontrado a 4,5 m da base de um prédio e sob uma janela aberta a 24 m acima. Você conseguiria dizer se a morte foi ou não acidental? Explique sua resposta.

36P. Em *Duas Novas Ciências*, de Galileu, ele afirma que “para elevações [ângulos de projeção] que estejam deslocados, acima ou abaixo de 45° , pelo mesmo intervalo, os alcances são iguais...”. Prove tal afirmação. (Veja a Fig. 4-34.)

37P. Uma bola é jogada do solo para o ar. A uma altura de 9,1 m, a velocidade é $v = 7.6\mathbf{i} + 6.1\mathbf{j}$ em metros por segundo (\mathbf{i} horizontal, \mathbf{j} vertical). (a) Qual a altura máxima alcançada pela bola? (b) Qual será a



Fig. 4-33 Problema 32. O salto de Bob Beamon.

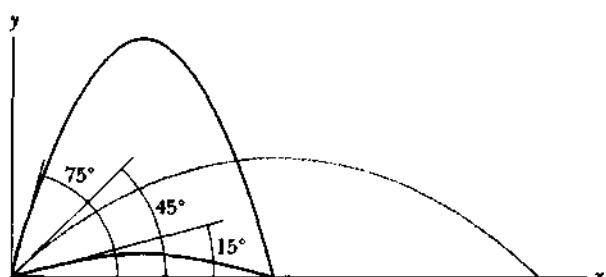


Fig. 4-34 Problema 36.

distância horizontal alcançada pela bola? (c) Qual a velocidade da bola (módulo e direção), no instante em que bate no solo?

38P. O alcance de um projétil não depende apenas de v_0 e θ_0 , mas também do valor da aceleração g , que varia de um lugar para o outro. Em 1936, Jesse Owens estabeleceu o recorde mundial de salto à distância com a marca de 8,09 m, nos Jogos Olímpicos de Berlim ($g = 9,8128 \text{ m/s}^2$). Supondo os mesmos valores para v_0 e θ_0 de quanto seu recorde teria diferido se ele tivesse competido em Melbourne ($g = 9,7999 \text{ m/s}^2$) em 1956?

39P. Num jogo de beisebol, o jogador da terceira base quer fazer um lançamento para a primeira, a 38,1 m de distância. Sua melhor velocidade de lançamento é 136 km/h. (a) Se ele lança a bola horizontalmente, 1,0 m acima do solo, a que distância da primeira base ela alcançará o solo? (b) Com que ângulo de elevação o jogador da terceira base deverá lançar a bola, para a da primeira agarrá-la a 1,0 m, acima do solo? (c) Qual o tempo de percurso da bola nesse caso?

40P. Durante uma erupção vulcânica, lascas de rocha sólida podem ser lançadas de um vulcão; tais projéteis são chamados de *bombas vulcânicas*. A Fig. 4-35 mostra a seção transversal do Monte Fuji, no Japão. (a) Com que velocidade inicial uma dessas bombas deve ser lançada do ponto A , boca da cratera, fazendo um ângulo de 35° com a horizontal, de forma a alcançar o ponto B , na base do vulcão? Despreze os efeitos do ar.

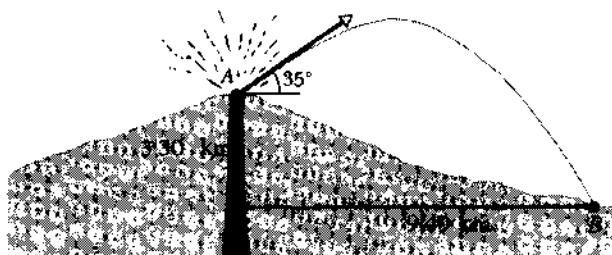


Fig. 4-35 Problema 40.

durante o trajeto da bomba. (b) Qual será o tempo de percurso da bomba? (c) O efeito do ar irá aumentar ou diminuir o valor calculado em (a)?

41P. Com que velocidade inicial um jogador de basquete deve lançar a bola, num ângulo de 55° acima da horizontal, para fazer a cesta, conforme mostra a Fig. 4-36?

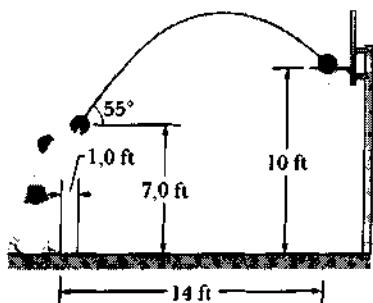


Fig. 4-36 Problema 41.

42P. Um goleiro levanta a bola com as mãos, para chutá-la a uma distância de 45,5 m, alcançada em 4,5 s. Se a bola deixa os pés do jogador a 1,5 m acima do solo, qual deve ser a velocidade inicial dela (módulo e direção)?

43P. O B-52 mostrado na Fig. 4-37 tem 49 m de comprimento e, no instante do bombardeio, está voando a uma velocidade de 820 km/h. Qual a distância entre as crateras das bombas? Faça as medidas que sejam necessárias, diretamente da figura. Suponha que não há vento e despreze a resistência do ar. Como a resistência do ar afetaria a sua resposta?



Fig. 4-37 Problema 43.

44P. Um projétil é atirado com uma velocidade inicial $v_0 = 30,0 \text{ m/s}$, do nível do solo, para um alvo a uma distância $R = 20,0 \text{ m}$, no mesmo nível (Fig. 4-38). Determine os dois ângulos de projeção.

45P. Qual a altura máxima, na vertical, que um jogador de beisebol pode lançar uma bola, se seu alcance máximo de lançamento é 60 m?

46P. Uma bola de futebol é chutada com uma velocidade inicial de $19,2 \text{ m/s}$, num ângulo de 45° , em direção ao gol. Um goleiro, que está a 54,6

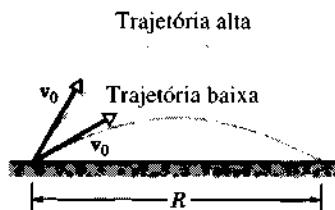


Fig. 4-38 Problema 44.

m de distância, na linha do gol, começa a correr para interceptá-la. Qual deve ser a sua velocidade média, para agarrar a bola no exato instante em que ela bate no solo? Despreze a resistência do ar.

47P. Uma bola rola, horizontalmente, do alto de uma escadaria com velocidade inicial de $1,5 \text{ m/s}$. Os degraus têm $20,32 \text{ cm}$ de altura por $20,32 \text{ cm}$ de largura. Em qual degrau a bola bate primeiro?

48P. Um determinado avião está voando a $333,35 \text{ km/h}$ e mergulha num ângulo de $30,0^\circ$ abaixo da horizontal, no instante em que lança um foguete anti-radar. (Veja a Fig. 4-39.) A distância horizontal, entre o ponto de lançamento e o ponto em que o foguete atinge o solo, é 690 m . (a) A que altura estava o avião, quando lançou o foguete? (b) Quanto tempo o foguete voou, antes de cair?

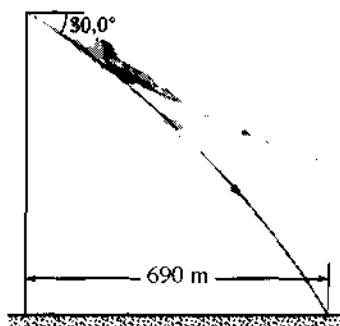


Fig. 4-39 Problema 48.

49P. Um avião mergulhando num ângulo de $53,0^\circ$ com a vertical a uma altitude de 730 m lança um projétil, que bate no solo $5,00 \text{ s}$ depois de ser lançado. (a) Qual a velocidade do avião? (b) Que distância o projétil percorreu, horizontalmente, durante seu vôo? (c) Quais eram as componentes horizontal e vertical de sua velocidade no instante em que caiu no solo?

50P. Uma bola é atirada na horizontal de uma altura de 20 m , batendo no chão com o triplo de sua velocidade inicial. Qual a sua velocidade inicial?

51P. A velocidade de lançamento de um determinado projétil é o quíntuplo de sua velocidade na altura máxima. Calcule o ângulo de elevação no lançamento.

52P. (a) Durante uma partida de tênis, um jogador saca com uma velocidade de $23,6 \text{ m/s}$ (conforme registrado por um radar); a bola deixa a raquete, horizontalmente, $2,37 \text{ m}$ acima da quadra. A que altura a bola passa sobre a rede, que está a 12 m de distância e tem $0,90 \text{ m}$ de altura? (b) Suponha que o jogador saque a bola como antes, exceto que ela deixa a raquete sob um ângulo de $5,00^\circ$ abaixo da horizontal. Agora, a bola consegue ultrapassar a rede?

53P. No Exemplo 4-8, suponha que um segundo canhão de defesa, idêntico ao primeiro, é posicionado 30 m acima do nível do mar, de forma diferente do primeiro. Se o ângulo de elevação de tiro é 45° , de quanto

difere o alcance horizontal do segundo canhão, em relação ao primeiro, que era 690 m?

54P. Um rebatedor bate uma bola arremessada, cujo centro está 1,2 m acima do solo, de forma que o ângulo de projeção seja 45° e o alcance seja 105 m. A bola alcançará a base do corredor, se ultrapassar um obstáculo de 7,2 m de altura, que está a 96 m da base principal. Ela ultrapassará o obstáculo? Em caso afirmativo, passará a que altura do obstáculo?

55P*. Um jogador de futebol pode chutar a bola com uma velocidade inicial de 25 m/s. Em que ângulos de elevação deve chutá-la, para fazer o gol, se está a 50 m em frente à baliza, que tem 3,44 m de altura? (Você pode usar a relação $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ para obter uma relação entre $\tan^2 \theta$ e $1/\cos^2 \theta$, e então resolver a equação do segundo grau resultante.)

56P*. Um canhão antitanque está localizado na borda de um platô, 60 m acima de um solo plano (Fig. 4-40). Seu artilheiro avista um tanque inimigo parado no solo plano, a 2,2 km de distância. Ao mesmo tempo, a equipe do tanque vê o canhão e começa a afastar-se com uma aceleração de $0,90 \text{ m/s}^2$. Se o canhão antitanque dispara com uma velocidade de 240 m/s e com 10° de elevação, em relação à horizontal, quanto tempo o artilheiro deve esperar, antes de atirar, para que o projétil alcance o tanque?

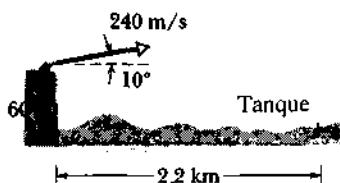


Fig. 4-40 Problema 56.

57P*. Um foguete é lançado num ângulo de $70,0^\circ$ com a horizontal a partir do repouso e se move em linha reta com uma aceleração de $46,0 \text{ m/s}^2$. Após 30,0 s de vôo retilíneo propulsado, o motor pára e o foguete volta à Terra fazendo uma trajetória parabólica (veja a Fig. 4-41). Suponha que a aceleração em queda livre é $9,8 \text{ m/s}^2$, durante todo o tempo, e despreze a resistência do ar. (a) Calcule o tempo de vôo, desde o lançamento até o impacto no solo. (b) Qual a altura máxima alcançada? (c) A que distância o ponto de impacto está da rampa de lançamento?

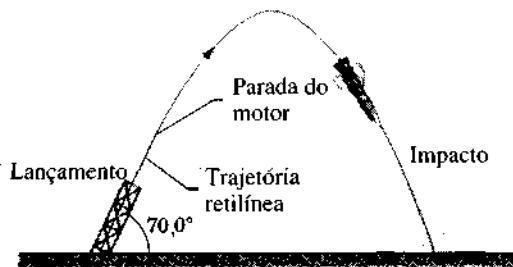


Fig. 4-41 Problema 57.

Seção 4-7 Movimento Circular Uniforme

58E. No modelo de Bohr do átomo de hidrogênio, um elétron orbita em torno de um próton, num círculo de raio $5,28 \times 10^{-11} \text{ m}$ com uma velocidade de $2,18 \times 10^6 \text{ m/s}$. Qual a aceleração do elétron nesse modelo?

59E. (a) Qual é a aceleração de um velocista, ao fazer uma curva de 25 m de raio com a velocidade de 10 m/s? (b) Para onde aponta o vetor aceleração a?

60E. Uma partícula carregada se move numa trajetória circular, sob o efeito de um campo magnético. Suponha que um elétron, sob a ação de um determinado campo magnético, experimente uma aceleração radial de $3,0 \times 10^{14} \text{ m/s}^2$. Qual a velocidade do elétron, se o raio de sua trajetória circular for 15 cm?

61E. Um velocista corre em volta de uma pista circular com a velocidade de 9,2 m/s e com aceleração centrípeta de $3,8 \text{ m/s}^2$. (a) Qual o raio da pista? (b) Quanto tempo ele leva para dar uma volta completa na pista a essa velocidade?

62E. Um satélite se move em volta da Terra, numa órbita circular, a 640 km de altitude. O tempo de uma revolução é 98,0 min. (a) Qual a velocidade do satélite? (b) Qual a aceleração em queda livre na órbita?

63E. Se uma sonda espacial operada por controle remoto pode resistir ao esforço causado por uma aceleração de 20 g , (a) qual o raio mínimo da trajetória desse veículo espacial, quando está se movendo com um décimo da velocidade da luz? (b) Quanto tempo levaria para descrever um arco de 90° , a essa velocidade?

64E. Um ventilador completa 1.200 rotações a cada minuto. Considere um ponto na borda da hélice, que tem um raio de 0,15 m. (a) Qual a distância percorrida pelo ponto em uma rotação? (b) Qual a velocidade do ponto? (c) Qual a aceleração?

65E. Um trem de grande velocidade, conhecido como TGV (do francês *train à grande vitesse*), que trafega de Paris para o sul da França, tem uma velocidade média programada de 216 km/h. (a) Se o trem fizer uma curva a tal velocidade, qual o menor raio possível para a ferrovia, de forma que os passageiros não experimentem uma aceleração superior a $0,050g$? (b) Para fazer uma curva com 1,00 km de raio, para que valor o trem deve ter sua velocidade reduzida, de forma a manter a aceleração abaixo deste limite?

66E. Quando uma grande estrela se transforma numa supernova, seu núcleo é tão fortemente comprimido que ela se torna uma estrela de nêutrons, com um raio de cerca de 20 km (aproximadamente o tamanho da cidade de San Francisco!). Se uma estrela de nêutrons efetua uma rotação por segundo, (a) qual a velocidade de uma partícula no equador da estrela e (b) qual a aceleração centrípeta da partícula em m/s^2 e em unidades g (onde g é igual a $9,8 \text{ m/s}^2$)? (c) Se a estrela de nêutrons girar ainda mais rápido, o que acontecerá com as respostas de (a) e (b)?

67E. Um astronauta está girando numa centrifuga de 5,0 m de raio. (a) Qual a velocidade do astronauta, se a sua aceleração é $7,0g$? (b) Quantas rotações por minuto são necessárias para produzir essa aceleração?

68P. Uma roda-gigante tem 15 m de raio e completa cinco voltas em torno de seu eixo horizontal a cada minuto. (a) Qual a aceleração de um passageiro no ponto mais alto? (b) E no mais baixo?

69P. (a) Qual é a aceleração centrípeta de um objeto no equador terrestre, devido à rotação da Terra? (b) Qual deveria ser o período de rotação da Terra, de maneira que a aceleração centrípeta de um objeto no equador terrestre fosse igual a $9,8 \text{ m/s}^2$?

70P. Calcule a aceleração de uma pessoa na latitude 40° , em função da rotação da Terra. (Veja a Fig. 4-42.)

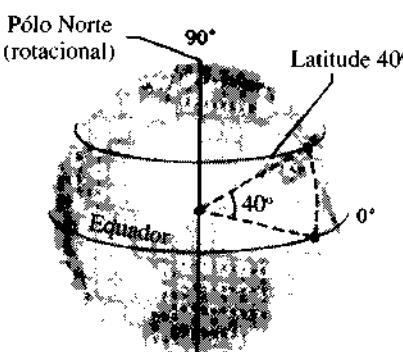


Fig. 4-42 Problema 70.

71P. Uma partícula P se desloca com velocidade constante, num círculo de 3,00 m de raio (Fig. 4-43) e completa uma revolução em 20,0 s. A partícula passa pelo ponto O , no instante $t = 0$. Calcule o módulo e a direção de cada um dos seguintes vetores: (a) Em relação ao ponto O , determine o vetor posição da partícula nos instantes $t = 5,00$ s; 7,50 s e 10,0 s. Para o intervalo de 5,00 segundos, entre o final do quinto e o final do décimo segundo, calcule (b) o deslocamento e (c) a velocidade média da partícula. Calcule suas (d) velocidade e (e) aceleração, no início e no fim desse intervalo de 5,00 s.

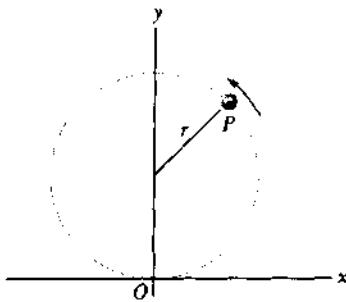


Fig. 4-43 Problema 71.

72P. Uma pedra, presa a um cordão de 1,5 m de comprimento, é girada por um menino, fazendo um círculo horizontal a 2,0 m acima do solo. Quando o cordão arrebenta, a pedra é lançada horizontalmente, caindo ao solo 10 m adiante. Qual era a aceleração centrípeta da pedra, enquanto estava em movimento circular?

Seção 4-8 Movimento Relativo em Uma Dimensão

73E. Um barco está navegando rio acima, a 14 km/h em relação à água do rio. A velocidade da água, em relação ao solo, é 9 km/h. (a) Qual a velocidade do barco em relação ao solo? (b) Uma criança no barco caminha da proa para a popa a 6 km/h, em relação ao barco. Qual a velocidade da criança com relação ao solo?

74E. Uma pessoa caminha até uma escada rolante de 15 m de comprimento, que está parada, em 90 s. Ao ficar em pé na escada, esta começa a se mover, transportando a pessoa para cima em 60 s. Quantos tempo a pessoa levaria, se continuasse a subir na escada em movimento? A resposta depende do comprimento da escada?

75E. Um vôo transcontinental de 5.000 km é programado para durar mais 50 min na direção oeste do que na leste. A velocidade do avião é 1.100 km/h e as correntes de ar se movem tanto para leste quanto para oeste. Que considerações acerca da velocidade dessas correntes devem ser levadas em conta na preparação do plano de vôo?

76E. Um cinegrafista, viajando na direção oeste numa camioneta a 60 km/h, filma um guepardo que se desloca na mesma direção, 50 km/h mais rápido que o veículo. De repente, o guepardo pára e volta, correndo a 90 km/h na direção leste, conforme registrado por um dos membros da equipe, de pé, nervoso, ao lado da trajetória do guepardo. A variação da velocidade do animal levou 2,0 s. Qual sua aceleração, do ponto de vista do cinegrafista? E do ponto de vista do membro da equipe, que registrou tudo nervosamente?

77P. O terminal do aeroporto de Genebra, na Suíça, tem uma "passarela rolante" para agilizar o deslocamento dos passageiros através de um longo corredor. Peter, que caminhava pelo corredor, porém sem usar a passarela, levou 150 s para cruzar toda a sua extensão. Paul, de pé sobre a passarela rolante, cobriu a mesma distância em 70 s. Mary, apesar de usar a passarela, caminhou sobre ela. Em quanto tempo Mary cruzou o corredor? Suponha que Peter e Mary caminharam com a mesma velocidade.

Seção 4-9 Movimento Relativo em Duas Dimensões

78E. Num jogo de *rugby* (Fig. 4-44), um jogador pode passar a bola legalmente para o seu companheiro de equipe, contanto que o passe não seja "para a frente" (não pode existir componente do vetor velocidade da bola, paralelo à lateral do campo, no sentido do gol adversário). Suponha que um jogador corra paralelo à lateral do campo com uma velocidade de 4,0 m/s, quando passa a bola com uma velocidade de 6,0 m/s, em relação a si próprio. Qual o menor ângulo possível com a direção do gol adversário, para que o lançamento seja considerado legal?



Fig. 4-44 Problema 78.

79E. Duas rodovias se cruzam, como mostrado na Fig. 4-45. No instante mostrado na figura, um carro de polícia P está a 800 m do cruzamento e movendo-se a 80 km/h. O carro M está a 600 m do cruzamento com a velocidade de 60 km/h. (a) Qual a velocidade do carro M em relação ao carro de polícia, em notação de vetores unitários? (b) Para o instante considerado na figura, qual a direção da velocidade calculada em (a), em relação à linha de mira entre os dois carros? (c) Se as velocidades dos carros se mantiverem constantes, as respostas dos itens (a) e (b) mudam, enquanto os carros se aproximam mais do cruzamento?

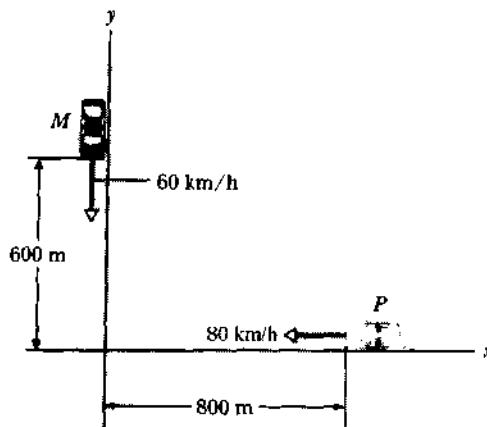


Fig. 4-45 Exercício 79.

80E. A neve cai, verticalmente, com a velocidade constante de 8,0 m/s. O motorista de um carro, viajando em linha reta numa estrada com a velocidade de 50 km/h, vê os flocos de neve caírem formando um ângulo com a vertical. Qual é este ângulo?

81E. Numa grande loja de departamentos, um comprador está subindo numa escada rolante que faz um ângulo de 40° com a horizontal e se

move com uma velocidade de 0,75 m/s. Ele passa por sua filha, descedendo numa outra escada rolante idêntica, ao lado da sua (veja Fig. 4-46). Calcule a velocidade do comprador, em relação à sua filha, em notação de vetores unitários.

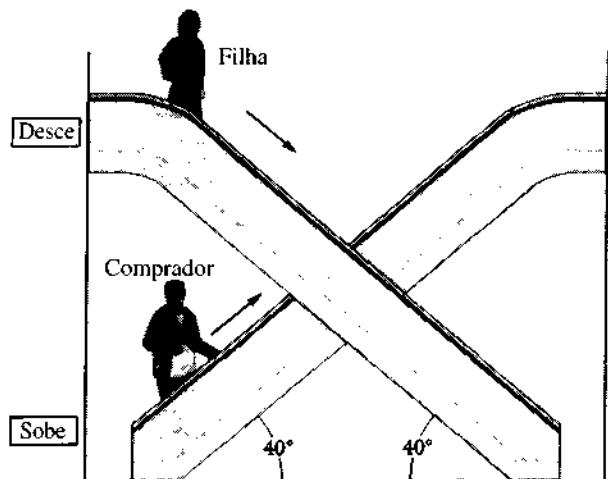


Fig. 4-46 Exercício 81.

82P. Um helicóptero está voando sobre um campo, em trajetória retílinea, com velocidade constante de 6,2 m/s, a uma altitude de 9,5 m. Um pacote é lançado, horizontalmente, do helicóptero com velocidade inicial de 12 m/s, em relação ao aparelho e no sentido oposto ao movimento deste. (a) Calcule a velocidade inicial do pacote, em relação ao solo. (b) Qual a distância horizontal, entre o helicóptero e o pacote, no instante em que este bate no solo? (c) Qual o ângulo, visto do solo, que o vetor velocidade do pacote faz com o chão, no instante anterior ao impacto?

83P. Um trem viaja em direção ao sul a 30 m/s (em relação ao solo), sob uma chuva que está caindo, também em direção ao sul, sob a ação do vento. A trajetória das gotas de chuva formam um ângulo de 22° com a vertical, conforme registrado por um observador parado no solo. Entretanto, um observador no trem vê as gotas caírem exatamente na vertical. Determine a velocidade da chuva em relação ao solo.

84P. Dois navios, *A* e *B*, deixam o porto ao mesmo tempo. O navio *A* viaja para noroeste com a velocidade de 24 nós, e o *B* com a de 28 nós a 40° sudoeste. (1 nó = 1 milha náutica por hora; veja Apêndice F.) (a) Qual o módulo e a direção do vetor velocidade do navio *A* em relação ao *B*? (b) Depois de quanto tempo estarão a 160 milhas náuticas um do outro? (c) Qual será o rumo de *B* em relação a *A*, nesse instante?

85P. Um avião leve alcança uma velocidade de 500 km/h. O piloto se dirige a um destino 800 km para o norte, mas descobre que o avião deve ser alinhado 20° para nordeste, para que o destino seja alcançado. O avião chega em 2,00 h. Qual o vetor velocidade do vento?

86P. A polícia americana usa um aeroplano para fazer respeitar o limite de velocidade numa rodovia estadual. Suponha que um de seus aeroplanos tenha uma velocidade de vôo de 250 km/h. Ele está voando em direção ao norte, de forma que fique todo o tempo sobre a rodovia norte-sul. Um observador, no solo, informa ao piloto que o vento está soprando a 130,0 km/h, mas se esquece de informar a direção. O piloto observa que, apesar do vento, o avião pode voar 250 km ao longo da rodovia, durante 1,00 h. Em outras palavras, a velocidade em relação ao solo é constante, havendo ou não vento. (a) Qual a direção do vento? (b) Qual a direção do avião, isto é, o ângulo entre seu eixo longitudinal e a rodovia?

87P. Um vagão fechado, de madeira, se move ao longo de uma ferrovia retílinea com a velocidade v_1 . Um atirador, escondido, dispara um projétil (com velocidade inicial v_2) de um rifle de alta potência. O projétil passa por ambas as paredes do vagão e seus orifícios de entrada e saída são exatamente opostos, quando vistos do interior do vagão. De qual direção, em relação aos trilhos, o tiro partiu? Suponha que o projétil não foi desviado, ao atingir o vagão, mas sua velocidade diminuiu cerca de 20%. Considere $v_1 = 85 \text{ km/h}$ e $v_2 = 650 \text{ m/s}$. (Por que a largura do vagão não precisa ser conhecida?)

88P. Uma certa mulher pode remar um bote a 7,5 km/h, em água parada. (a) Se ela atravessar um rio com uma correnteza de 3,7 km/h, em que direção deve aprumar o bote, para alcançar o local diretamente oposto ao seu ponto de partida? (b) Se o rio tiver 7,5 km de largura, quanto tempo levará para atravessá-lo? (c) Suponha que, em vez de atravessar o rio, ela reme 3,7 km rio *abaixo* e, depois, volte ao ponto de partida. Qual o tempo gasto neste percurso? (d) Quanto tempo levaria, se tivesse remado 3,7 km rio *acima* e, depois, voltasse ao ponto de partida? (e) Em que direção deveria aprumar o bote, se quisesse atravessar o rio no mais curto espaço de tempo possível, e qual seria este tempo?

89P*. Um navio de guerra se dirige para leste a 24 km/h. Um submarino, a 4,0 km de distância, dispara um torpedo que tem uma velocidade de 50 km/h; veja Fig. 4-47. Se o navio, visto do submarino, está rumando a 20° nordeste. (a) em que direção o torpedo deve ser disparado, para atingir o navio e (b) em quanto tempo o torpedo alcançará o navio?

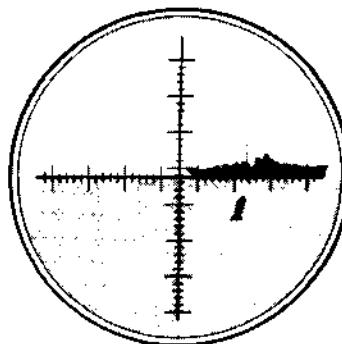


Fig. 4-47 Problema 89.

90P*. Um homem quer atravessar um rio de 500 m de largura. Sua velocidade de remada (em relação à água) é 3.000 m/h. A velocidade da correnteza do rio é de 2.000 m/h. A velocidade do homem, caminhando em terra, é de 5.000 m/h. (a) Determine a sua trajetória (combinando os movimentos na água e na terra), para que alcance o ponto diretamente oposto ao local de partida, no mais curto espaço de tempo. (b) Quanto tempo levaria para fazê-lo?

Seção 4-10 Movimento Relativo para Altas Velocidades

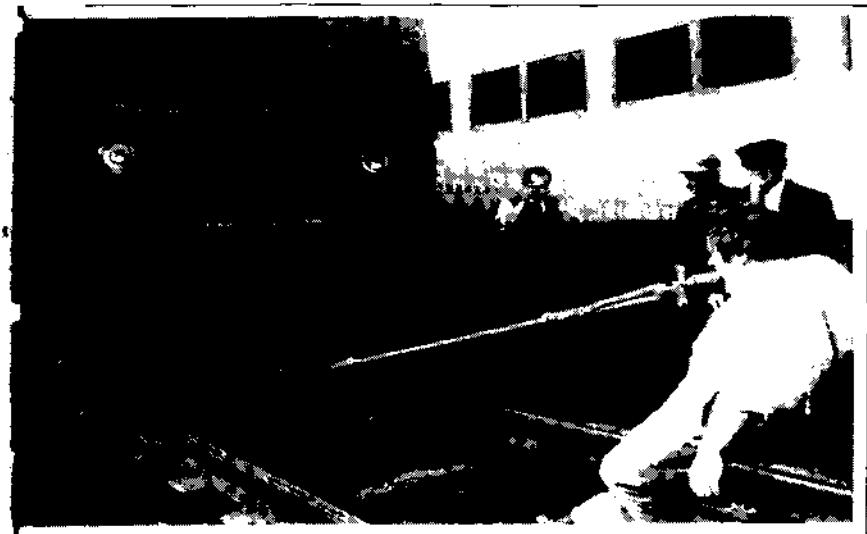
91E. Um elétron se move com a velocidade de $0,42c$, em relação a um observador *B*, que se move a uma velocidade de $0,63c$, em relação ao observador *A*, no mesmo sentido do elétron. Qual a velocidade do elétron, medida pelo observador *A*?

92P. Segundo observações, a galáxia Alfa está se afastando da nossa com a velocidade de $0,35c$. A galáxia Beta, localizada na direção exatamente oposta, também está se afastando de nós com a mesma velocidade. Para um observador na galáxia Alfa, determine a velocidade de afastamento (a) da nossa galáxia e (b) da Beta?

PROBLEMAS ADICIONAIS

- 93.** Uma bola de beisebol é atirada a partir do solo. A altura máxima é alcançada 3,0 s após o lançamento. Então, 2,5 s após alcançar a altura máxima, a bola mal consegue ultrapassar uma cerca que está a 97,5 m do ponto de lançamento, ao nível do solo. (a) Qual a altura máxima alcançada pela bola? (b) Qual a altura da cerca? (c) A que distância da cerca a bola caiu?
- 94.** A posição \mathbf{r} de uma partícula se movendo no plano xy é dada por $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + [2 \operatorname{sen}(\pi/4)(\operatorname{rad}/\text{s})t]\mathbf{j}$, onde \mathbf{r} está em metros e t está em segundos. (a) Calcule as componentes x e y da posição da partícula em $t = 0; 1,0; 2,0; 3,0$ e $4,0$ s e desenhe a trajetória da partícula no plano xy , para o intervalo $0 \leq t \leq 4,0$ s. (b) Calcule as componentes da velocidade da partícula em $t = 1,0; 2,0$ e $3,0$ s. Desenhando o vetor velocidade, no gráfico da trajetória da partícula calculado em (a), mostre que a velocidade é tangente à trajetória e tem a mesma direção do movimento, a cada instante considerado. (c) Calcule as componentes da aceleração da partícula em $t = 1,0; 2,0$ e $3,0$ s.
- 95.** Um rio, de 200 m de largura, corre para leste com a velocidade uniforme de 2,0 m/s. Um bote com a velocidade de 8,0 m/s, em relação à água, deixa a margem sul, rumando na direção 30° noroeste. (a) Qual a velocidade do bote com relação à margem? (b) Em quanto tempo o bote atravessa o rio?
- 96.** Dois segundos depois de ter sido lançado do solo, um projétil está a 40 m na horizontal e 53 m na vertical do seu ponto de lançamento. (a) Quais são as componentes horizontal e vertical da ve-
- locidade inicial do projétil? (b) No instante em que o projétil alcança a sua altura máxima, a que distância horizontal está do seu ponto de lançamento?
- 97.** Uma partícula salta de sua origem em $t = 0$ com a velocidade de 8,0 \mathbf{j} m/s e se move no plano xy com aceleração constante de $(4,0\mathbf{i} + 2,0\mathbf{j})$ m/s². (a) Em determinado instante, a coordenada x da partícula é 29 m; qual é a coordenada y ? (b) Qual é a velocidade da partícula nesse instante?
- 98.** Um carro se move, num círculo, com a velocidade constante de 12 m/s. Em determinado instante, o carro tem uma aceleração de 3 m/s² na direção leste. Qual a sua distância do centro do círculo e a sua posição angular naquele instante se ele está se deslocando (a) no sentido horário e (b) no sentido anti-horário?
- 99.** Um jogador de golfe dá uma tacada numa bola, no alto de uma elevação, imprimindo a ela uma velocidade inicial de 43 m/s, com um ângulo de 30°, acima da horizontal. A bola cai sobre a grama a 180 m, horizontalmente, do ponto de lançamento. Suponha que o gramado é horizontal. (a) Qual a altura da elevação? (b) Qual a velocidade da bola, ao atingir o gramado?
- 100.** O piloto de um avião, depois de voar 15 min sob um vento de 42 km/h, num ângulo de 20° sudeste, se encontra sobre uma cidade, a 55 km ao norte do seu ponto de partida. Qual a velocidade do avião com relação ao ar?

FORÇA E MOVIMENTO - I



Em 4 de abril de 1974, John Massis, da Bélgica, conseguiu movimentar dois vagões de passageiros pertencentes à ferrovia Long Island, de Nova Iorque. Ele prendeu com seus dentes um aro que estava atado a um dos vagões por uma corda, e depois inclinou-se para trás, enquanto pressionava seus pés contra os dormentes dos trilhos. Os vagões pesavam cerca de 80 ton. Massis teve de usar força sobre-humana para conseguir puxá-los? Responderemos esta pergunta brevemente.

5-1 Por Que a Velocidade de uma Partícula Varia?

Algumas vezes, o objeto que estamos observando — por exemplo, um automóvel, uma bola, um gato — pode variar sua velocidade. Pode acelerar. A observação nos tem mostrado que, quando isso acontece, podemos encontrar um ou mais objetos nas proximidades que parecem estar associados com essa variação. Relacionamos a aceleração de uma partícula pela interação entre ela e sua vizinhança. Estamos tão acostumados a isso que, quando percebemos um objeto variar sua velocidade, sem causa aparente, suspeitamos de um truque. Se uma bola, ao rolar, muda sua direção de repente, suspeitamos que há um ímã ou um jato de ar escondido.

Nosso problema principal neste capítulo é: (1) Estamos lidando com uma partícula (daqui em diante referida como *corpo*) cujas características conhecemos (por exemplo, massa, forma, volume, carga elétrica). (2) Também conhecemos a localização e as propriedades de todos os objetos

de interesse nas proximidades. Isto é, sabemos tudo acerca do meio onde se situa o corpo. (3) Queremos saber como o corpo se moverá.

Isaac Newton (1642-1727), ao propor suas leis do movimento e sua teoria gravitacional, foi o primeiro a solucionar o problema que acabamos de colocar. Nossa plana para dar prosseguimento ao assunto é: (1) Introduzir o conceito de **força** (empurrar ou puxar), em termos da aceleração fornecida a um corpo-padrão selecionado. (2) Definir **massa** e mostrar como atribuir uma determinada massa a um corpo, para que possamos entender como diferentes corpos têm acelerações diferentes na mesma vizinhança. (3) Encontrar uma maneira de calcular a força que atua em um corpo a partir das propriedades desse corpo e da vizinhança em que se situa. Isto é, descobrir as **leis de força**. (4) Mostrar como várias forças atuantes em um corpo podem ser combinadas numa **força resultante**.

A Fig. 5-1 mostra as relações entre essas grandezas, cujo estudo constitui a **mecânica**. A força aparece tanto nas leis de força (que nos informam como calcular a força que atua

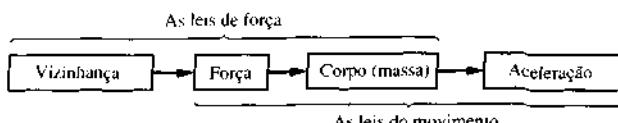


Fig. 5-1 As relações da mecânica. Os três blocos da esquerda propõem que a força é uma interação entre um corpo e sua vizinhança. Os três blocos da direita propõem que a força aplicada a um corpo causará uma aceleração nesse corpo.

em um corpo, numa determinada vizinhança), como nas leis do movimento (que nos informam qual a aceleração a que um corpo está submetido, quando uma força atua sobre ele). Esta é a maior glória da mecânica newtoniana, que consegue prever resultados concordantes com os experimentos num grande número de fenômenos.

Há alguns problemas importantes para os quais a mecânica newtoniana não fornece resultados corretos. Como discutido no Cap. 4, se as velocidades das partículas envolvidas forem próximas da velocidade da luz, devemos abandonar a mecânica newtoniana e aplicar a teoria da relatividade especial de Einstein. Para problemas na escala atômica (por exemplo, o movimento dos elétrons dentro do átomo), devemos abandonar a mecânica newtoniana e aplicar a mecânica quântica. Atualmente, os físicos consideram a mecânica newtoniana como um caso especial dessas duas teorias mais amplas. Entretanto, é um caso especial muito importante, porque compreende o movimento de objetos que vão desde moléculas até galáxias. E é altamente precisa nessa ampla faixa de fenômenos, como nos mostram as manobras bem-sucedidas das sondas espaciais.

5-2 Primeira Lei de Newton

Antes de Newton formular suas leis da mecânica, pensava-se que era necessária alguma influência ou “força” para manter um corpo em movimento com velocidade constante. Julgava-se que um corpo em repouso estivesse em seu “estado natural”. De forma análoga, para que o corpo se movesse com velocidade constante, seria necessário que, de alguma forma, fosse impulsionado, caso contrário, ele pararia “naturalmente”.

Isso não deixa de ser razoável. Se fizermos um livro deslizar sobre um carpete, ele com certeza irá parar. Para fazê-lo se mover sobre o carpete com velocidade constante, podemos, por exemplo, amarrá-lo a um cordão e puxá-lo.

Entretanto, se fizermos o livro deslizar sobre a superfície de gelo de um rink de patinação, ele alcançará uma distância bem maior. Podemos imaginar outras superfícies, maiores e mais lisas, sobre as quais o livro poderia deslizar cada vez mais. Num caso extremo, poderíamos pensar numa superfície muito grande e extremamente lisa (ou seja, uma **superfície sem atrito**) na qual o livro não diminuisse sua velocidade. Num laboratório, podemos chegar bem próximo dessa condição, fazendo o livro deslizar em uma mesa de ar horizontal, sobre a qual ele se move numa fina camada de ar.

Acabamos por concluir que *não* precisamos de uma força para manter um corpo em movimento com velocidade constante. Isso concorda plenamente com o que discutimos na Seção 4-8 em relação aos referenciais: um corpo em repouso num referencial pode estar se movendo com velocidade constante em relação a outro referencial. Então, *repouso e movimento com velocidade constante* não são, de forma alguma, diferentes. Isto nos leva à primeira das três leis de Newton sobre o movimento:

PRIMEIRA LEI DE NEWTON: Considere um corpo sobre o qual não atue força resultante alguma. Se o corpo está em repouso, ele permanece em repouso. Se o corpo está em movimento com velocidade constante, ele permanecerá assim indefinidamente.

A primeira lei de Newton é de fato uma afirmação sobre referenciais, pois ela define os tipos de referenciais nos quais as leis da mecânica newtoniana são válidas. Desse ponto de vista, a primeira lei pode ser expressa como:

PRIMEIRA LEI DE NEWTON: Se a força resultante sobre um corpo é nula, é possível encontrar referenciais nos quais aquele corpo não tenha aceleração

A primeira lei de Newton também é conhecida como *lei da inércia* e os referenciais que ela define são chamados *referenciais inerciais*.

A Fig. 5-2 mostra como podemos avaliar um determinado referencial para ver se ele é ou não inercial. Com o vagão em repouso, marque a posição do pêndulo parado sobre a mesa. Com o vagão em movimento, o pêndulo *sómente* permanece sobre a marca, se o vagão estiver se movendo em linha reta com velocidade constante. Se o vagão estiver aumentando ou diminuindo a velocidade ou estiver fazendo uma curva, o pêndulo se desloca da marca e o vagão é um referencial não-inercial.

Se colocarmos uma bola de boliche parada sobre um carrossel infantil em movimento, nenhuma força parecerá atuar na bola, mas ela não permanecerá em repouso. Se rolarmos a bola radialmente para fora, ela se desviará dessa direção. Referenciais girantes *não* são referenciais inerciais. Rigorosamente falando, a Terra não é um referencial inercial, por causa da sua rotação. Todavia, exceto para os

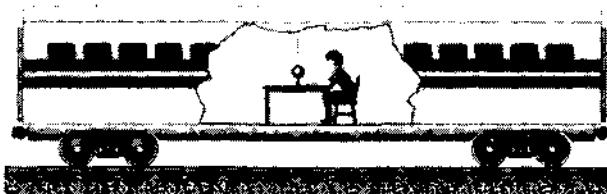


Fig. 5-2 Teste para verificar se um vagão de trem é ou não um referencial inercial.

movimentos em grande escala como as correntes de vento e as correntes oceânicas, podemos admitir que a Terra seja, aproximadamente, um referencial inercial. Daqui em diante, exceto quando especificado o contrário, faremos essa aproximação.*

5-3 Força

Agora, vamos definir **força** com mais precisão, em termos da aceleração fornecida a um corpo-padrão de referência. Vamos usar, ou melhor, vamos imaginar o quilograma-padrão da Fig. 1-7 como o corpo-padrão. A este corpo foi atribuído, exatamente e por definição, a massa de 1 kg. Mostraremos depois como atribuir massas a outros corpos.

Vamos colocar esse corpo sobre uma mesa horizontal, sem atrito, e puxá-lo para a direita (Fig. 5-3) de maneira que, por tentativa, ele adquira uma aceleração de 1 m/s^2 . Por definição, dizemos, então, que estamos exercendo sobre o corpo uma força de 1 newton (abreviado por N).

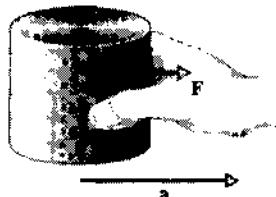


Fig. 5-3 A força F sobre um corpo padrão causa uma aceleração a nesse corpo.

Podemos exercer, sobre esse corpo, uma força de 2 N, puxando-o de forma a submetê-lo a uma aceleração de 2 m/s^2 , e assim por diante. Em geral, observamos que se um corpo está submetido a uma aceleração a , existe uma força F (em newtons) atuante nele com módulo igual ao da aceleração (em m/s^2).

A aceleração é um vetor. E a força é um vetor? Podemos, facilmente, atribuir à força a mesma direção e o mesmo sentido da aceleração produzidos por essa força sobre o corpo-padrão. Isso, entretanto, não é suficiente para provar que a força é um vetor. Temos que mostrar que a força também obedece às leis da adição vetorial, e só experimentalmente podemos saber se, de fato, ela obedece a essas leis.

Vamos fazer com que o corpo-padrão seja submetido a uma força de 4 N ao longo do eixo x e a uma força de 3 N ao longo do eixo y ; suponhamos que esses eixos estejam no plano horizontal da superfície de uma mesa sem atrito. A primeira dessas forças, se atuar sozinha sobre o corpo, produzirá uma aceleração de 4 m/s^2 ao longo do eixo x . A segunda, de forma idêntica, produzirá uma aceleração de 3 m/s^2 ao longo do eixo y .

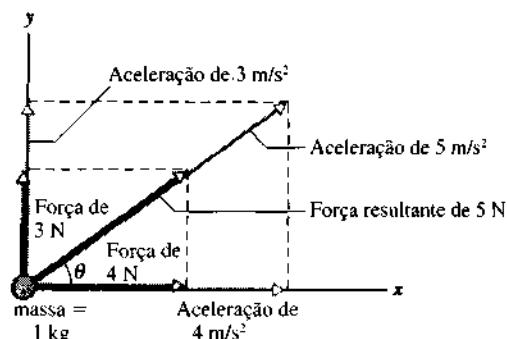


Fig. 5-4 Uma força de 3 N e outra de 4 N aplicadas, simultaneamente, ao corpo padrão, que tem massa exatamente igual a 1 kg. A aceleração do corpo é a mesma que ele teria, se uma única força, igual à soma vetorial das forças, fosse aplicada sobre ele. As forças se somam como vetores.

E se as forças atuarem simultaneamente, como na Fig. 5-4? Poderíamos determinar experimentalmente (e só experimentalmente) que a aceleração sobre o corpo seria de 5 m/s^2 , na direção mostrada na Fig. 5-4. Essa é exatamente a aceleração que encontrámos, se o corpo estivesse sob a ação de uma única força igual à soma vetorial (ou *resultante*) das duas forças que atuam nele. Esse vetor soma, de módulo igual a 5 N, direção e sentido indicados na Fig. 5-4, é a força resultante. Experiências desse tipo mostram, com certeza, que as forças são vetores. Elas possuem módulo, direção e sentido, e obedecem às regras da adição vetorial. Daqui em diante, vamos simbolizar uma força por uma letra em negrito, na maioria das vezes, a letra F .

5-4 Massa

A experiência diária nos mostra que uma mesma força produz diferentes acelerações em diferentes corpos. Imagine uma bola de beisebol e uma bola de boliche sobre um plano, e que cada uma receba a mesma pancada inicial; a aceleração da bola de beisebol será muito maior que a de boliche. A diferença entre as duas acelerações é causada pela diferença de massa entre as duas bolas. Mas o que vem a ser massa, exatamente?

Para uma definição quantitativa, vamos fixar uma mola ao corpo-padrão, conforme ilustra a Fig. 5-5, e vamos submetê-lo a uma aceleração $a_0 = 1 \text{ m/s}^2$. A força que exercemos na mola e que esta transmite ao corpo é igual a 1 N. Registrarmos, cuidadosamente, o alongamento ΔL da mola, devido a essa força de 1 N. Então, por definição, a massa m_0 do corpo-padrão é exatamente 1 kg.

Agora, vamos substituir o corpo-padrão por um corpo X qualquer e vamos aplicar a este corpo a mesma força de 1 N. De forma análoga ao que foi feito para o corpo-padrão, vamos puxar esse corpo X utilizando mola distendida do mesmo comprimento ΔL . Suponha que a aceleração a_X do corpo X venha a ser $0,25 \text{ m/s}^2$. Considerando este resultado experimental, podemos atribuir ao corpo X a massa m_X , e já que uma mesma força produz acelerações

* A característica não-inercial da Terra é revelada quando se observa que um corpo em queda livre não cai em linha reta, mas sofre um pequeno desvio para leste. Na latitude 45°, por exemplo, um corpo que cair da altura de 50 m (desprezando a resistência do ar) alcançará o solo 5 mm a leste da vertical que ele seguiria, se não houvesse a rotação da Terra.

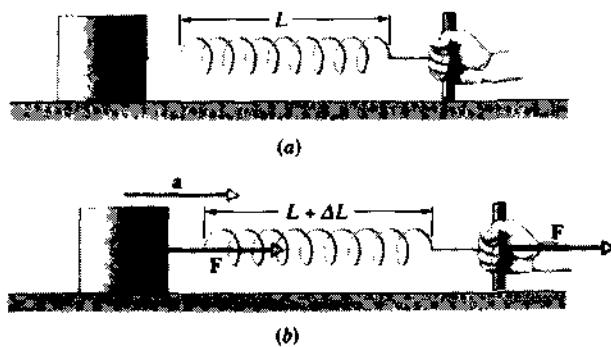


Fig. 5-5 (a) Mola de comprimento L é fixada a um corpo padrão de massa igual a 1 kg. (b) Uma aceleração a é aplicada ao corpo padrão, quando puxamos aquela mola com uma força F que causa uma variação ΔL no seu comprimento. O atrito na superfície é nulo.

diferentes em corpos diferentes, podemos definir a razão entre as massas como sendo inversamente proporcional à razão entre as suas acelerações. Logo,

$$\frac{m_X}{m_0} = \frac{a_0}{a_X},$$

ou

$$m_X = m_0 \frac{a_0}{a_X} = (1 \text{ kg}) \frac{1 \text{ m/s}^2}{0,25 \text{ m/s}^2} = 4 \text{ kg}.$$

Assim, o corpo X que está submetido a somente um quarto da aceleração do corpo-padrão, quando a mesma força é aplicada sobre ele, tem, por esta definição, o quádruplo da massa daquele corpo.

Dessa maneira, podemos atribuir massas a quaisquer corpos diferentes do corpo-padrão. Entretanto, antes de aceitarmos essa metodologia, vamos verificá-la de duas diferentes maneiras.

O Primeiro Teste

Vamos repetir a comparação com o corpo-padrão, mas aplicando agora uma outra força a ambos os corpos. Suponha, por exemplo, que estiquemos mais ainda a mola, de forma que a aceleração a'_0 do corpo-padrão seja 5 m/s^2 . Isto é, usarmos uma força de 5 N , em vez de uma de 1 N , para comparar as massas.

Vamos observar que, se aplicarmos ao corpo X essa mesma força de 5 N , a aceleração a'_X é $1,25 \text{ m/s}^2$. Então, determinamos a massa do corpo X como

$$m_X = m_0 \frac{a'_0}{a'_X} = (1 \text{ kg}) \frac{5 \text{ m/s}^2}{1,25 \text{ m/s}^2} = 4 \text{ kg},$$

exatamente como antes.

O Segundo Teste

Considere que — usando ainda o método da mola — na comparação de um segundo corpo, o corpo Y , com o corpo-padrão, tenhamos encontrado $m_Y = 6 \text{ kg}$. Agora, vamos

comparar o corpo X e o corpo Y diretamente. Isto é, aplicamos uma força \mathbf{F} (de qualquer intensidade conveniente) a cada um deles e, depois, medimos as acelerações resultantes a''_X e a''_Y . Digamos que as acelerações encontradas tenham sido $a''_X = 2,4 \text{ m/s}^2$ e $a''_Y = 1,6 \text{ m/s}^2$.

Vamos, agora, determinar a massa do corpo Y comparando-o diretamente com o corpo X , cuja massa já conhecemos, ao invés de compará-lo com o corpo-padrão. Encontramos

$$m_Y = m_X \frac{a''_X}{a''_Y} = (4 \text{ kg}) \frac{2,4 \text{ m/s}^2}{1,6 \text{ m/s}^2} = 6 \text{ kg},$$

que é o mesmo resultado da comparação com o corpo-padrão.

O Que é Massa?

Vimos que nosso método de atribuir massa a um corpo arbitrariamente apresenta resultados consistentes, independente da força aplicada e do corpo utilizado para comparação com o corpo-padrão. Na verdade, a massa parece ser uma característica intrínseca de um corpo.

Como a palavra *massa* é usada diariamente, deverfamos ter um conhecimento intuitivo dela, talvez algo que pudéssemos sentir fisicamente. Será que ela se refere ao tamanho do corpo, ao seu peso ou à sua densidade? A resposta é não, embora essas características sejam, algumas vezes, confundidas com a massa. A *massa de um corpo é a característica que relaciona a força a ele aplicada com a aceleração resultante*. Não existe uma definição mais familiar do que esta para massa; e a única ocasião em que percebemos fisicamente a massa é quando tentamos acelerar um corpo. Se, por exemplo, empurramos primeiro a bola de beisebol e em seguida a bola de boliche, vamos notar que elas têm massas diferentes.

5-5 Segunda Lei de Newton

Todas as definições, experiências e observações até aqui descritas podem ser resumidas, graças a Newton, numa simples equação vetorial, que é conhecida como a segunda lei de Newton para o movimento:

$$\sum \mathbf{F} = m \mathbf{a} \quad (\text{segunda lei de Newton}) \quad (5-1)$$

Ao usarmos a Eq. 5-1, devemos estar bem certos sobre o corpo no qual as forças estão sendo aplicadas. Assim, $\sum \mathbf{F}$ na Eq. 5-1 é a soma *vetorial*, ou a **força resultante**, de *todas* as forças que *atuam* naquele corpo. Se esquecermos alguma força (ou computarmos duas vezes alguma delas), chegaremos a um resultado falso. Somente as forças que *atuam* no corpo são consideradas. Num determinado problema, várias forças podem estar envolvidas, mas devemos computar somente aquelas que atuam no corpo em questão. Finalmente, $\sum \mathbf{F}$ inclui somente forças *externas*, isto é,

Tabela 5-1
Unidades na Segunda Lei de Newton
(Eqs. 5-1 e 5-2)

Sistema	Força	Massa	Aceleração
SI	newton (N)	quilograma (kg)	m/s^2
CGS	dina	grama (g)	cm/s^2
Britânico ^a	libra (lb)	slug	ft/s^2

^a1 lb = 1 slug · ft/s².

forças exercidas sobre o corpo por outros corpos. Não incluímos as forças internas, resultantes da interação mútua entre partes do próprio corpo.

Na resolução de problemas pela Eq. 5-1, freqüentemente desenhamos um **diagrama de corpo isolado**. Neste diagrama, o corpo é representado por um ponto e cada força externa (ou a força resultante ΣF) que atua no corpo é representada por um vetor com origem nesse ponto.

Como qualquer equação vetorial, a Eq. 5-1 é equivalente a três equações escalares:

$$\sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y, \quad \sum F_z = ma_z. \quad (5-2)$$

Essas equações relacionam as três componentes da força resultante sobre um corpo com as três componentes da aceleração desse corpo.

Finalmente, observamos que a primeira lei de Newton é um caso especial da segunda lei. Isto é, se nenhuma força atua no corpo, a sua aceleração é nula, conforme mostra a Eq. 5-1. Isso, no entanto, não torna menos importante a primeira lei de Newton; seu papel na definição dos referenciais iniciais, na qual a mecânica se apóia, justifica seu enunciado como uma lei independente.

Da Eq. 5-2, encontramos, em unidades SI,

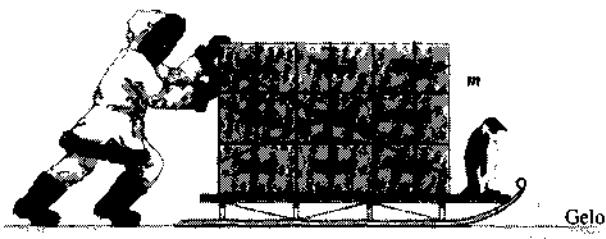
$$1 \text{ N} = (1 \text{ kg})(1 \text{ m/s}^2) = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2, \quad (5-3)$$

que concorda com a discussão da Seção 5-3. Embora daqui em diante passemos a usar, quase que exclusivamente, o sistema de unidades SI, outros sistemas ainda estão em uso. Entre estes, os principais são o Sistema Britânico e o Sistema CGS (centímetro-grama-segundo). A Tabela 5-1 mostra as unidades nas quais as Eqs. 5-1 e 5-2 podem ser expressas. (Veja também o Apêndice F.)

EXEMPLO 5-1 Um homem empurra um trenó, carregado com massa $m = 240 \text{ kg}$, por uma distância $d = 2,3 \text{ m}$, sobre a superfície sem atrito de um lago gelado. Ele exerce sobre o trenó uma força horizontal constante F , com módulo $F = 130 \text{ N}$ (veja Fig. 5-6a). Se o veículo parte do repouso, qual a sua velocidade final?

Solução A Fig. 5-6b mostra um diagrama de corpo isolado para essa situação. Traçamos um eixo horizontal x , arbitrando o sentido positivo para a direita e tratamos o trenó como uma partícula representada por um ponto. Supomos que a componente F_x da força F exercida pelo homem seja a única força horizontal atuante no veículo. Então, pela segunda lei de Newton, podemos achar o módulo da aceleração a_x do trenó:

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{130 \text{ N}}{240 \text{ kg}} = 0,542 \text{ m/s}^2.$$



(a)

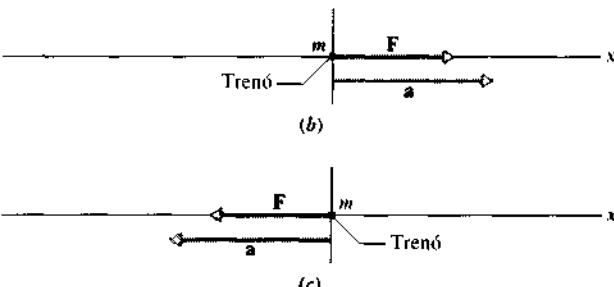


Fig. 5-6 Exemplo 5-1. (a) Um homem empurra um trenó carregado sobre uma superfície sem atrito. (b) Um “diagrama de corpo isolado” mostrando a força resultante aplicada sobre o trenó e a aceleração que ela produz. (c) Um diagrama de corpo isolado para o Exemplo 5-2. O homem agora empurra no sentido oposto, revertendo a aceleração.

Como a aceleração é constante, podemos usar a Eq. 2-14, $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ para calcular a velocidade final. Fazendo $v_0 = 0$ e $x - x_0 = d$, e identificando a , com a_x , calculamos v :

$$v = \sqrt{2ad} \\ = \sqrt{(2)(0,542 \text{ m/s}^2)(2,3 \text{ m})} = 1,6 \text{ m/s}. \quad (\text{Resposta})$$

A força, a aceleração, o deslocamento e a velocidade final do trenó carregado são todos positivos, o que significa que eles apontam para a direita, na Fig. 5-6b.

EXEMPLO 5-2 O homem do Exemplo 5-1 quer reverter o sentido da velocidade do trenó carregado em 4,5 s. Com que força constante ele deve empurrá-lo para conseguir isso?

Solução Usando a Eq. 2-9, $v = v_0 + at$, vamos achar primeiro a aceleração constante necessária para reverter a velocidade do veículo em 4,5 s. Explicitando para a , temos

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{(-1,6 \text{ m/s}) - (1,6 \text{ m/s})}{4,5 \text{ s}} \\ = -0,711 \text{ m/s}^2.$$

Em módulo, essa aceleração é maior do que a do Exemplo 5-1 ($0,542 \text{ m/s}^2$), logo, o homem dessa vez deve utilizar uma força bem maior para empurrar o trenó. Da Eq. 5-2, fazendo $a_x = a$, podemos calcular essa força:

$$F_x = ma_x = (240 \text{ kg})(-0,711 \text{ m/s}^2) \\ = -171 \text{ N}. \quad (\text{Resposta})$$

O sinal menos significa que o homem está empurrando o trenó no sentido negativo de x , isto é, para a esquerda, no diagrama de corpo isolado da Fig. 5-6c.

EXEMPLO 5-3 Um caixote de massa $m = 360 \text{ kg}$ está parado sobre a carroceria de um caminhão que se move com uma velocidade $v_0 = 120 \text{ km/h}$, conforme mostrado na Fig. 5-7a. O motorista freia e diminui a velocidade para $v = 62 \text{ km/h}$ em 17 s. Qual a força (suposta constante) so-

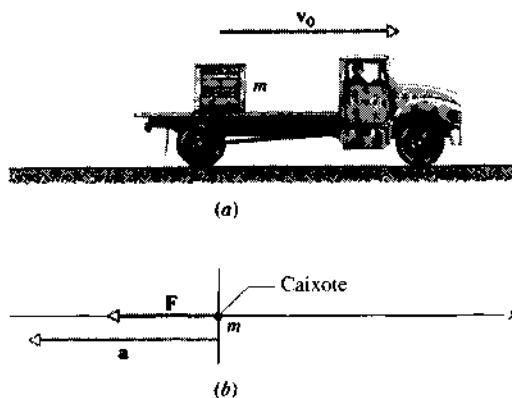


Fig. 5-7 Exemplo 5-3. (a) Um caixote sobre um caminhão que está diminuindo a velocidade. (b) O diagrama de corpo isolado do caixote. A força F produz uma aceleração (ou desaceleração) a no caixote.

bre o caixote, durante esse intervalo de tempo? Suponha que o caixote não deslize sobre a carroceria do caminhão.

Solução Vamos determinar primeiro a aceleração do caixote, que é constante, usando a Eq. $v = v_0 + at$:

$$\begin{aligned} a &= \frac{v - v_0}{t} = \frac{(62 \text{ km/h}) - (120 \text{ km/h})}{17 \text{ s}} \\ &= \left(-3,41 \frac{\text{km}}{\text{h} \cdot \text{s}} \right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right) \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right) \\ &\approx -0,947 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Como mostra a Fig. 5-7 o vetor velocidade do caixote aponta para a direita e seu vetor aceleração aponta para a esquerda.

A força sobre o caixote é obtida usando a segunda lei de Newton:

$$\begin{aligned} F &= ma \\ &= (360 \text{ kg})(-0,947 \text{ m/s}^2) \\ &= -340 \text{ N}. \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

Essa força, que poderia ser exercida por tirantes para manter preso o caixote, atua no mesmo sentido da aceleração, ou seja, para a esquerda, na Fig. 5-7b.

EXEMPLO 5-4 Numa brincadeira de cabo-de-guerra, Alex, Bete e Charles puxam um pneu de automóvel, nas direções mostradas na Fig. 5-8a, vista do alto. Alex puxa com uma força F_A (220 N) e Charles com uma força F_C (170 N). Qual a força F_B aplicada por Bete? O pneu permanece parado e o sentido da força de Charles não está indicado.

Solução A Fig. 5-8b mostra o diagrama de corpo isolado do pneu. A aceleração do pneu é zero, porque, da Eq. 5-1, a força resultante sobre o pneu também deve ser zero. Isto é,

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C = \mathbf{0}.$$

Essa equação vetorial é equivalente às duas equações escalares

$$\sum F_x = F_C \cos \phi - F_A \cos 47.0^\circ = 0 \quad (5-4)$$

e

$$\sum F_y = F_C \sin \phi + F_A \sin 47.0^\circ - F_B = 0. \quad (5-5)$$

Os sinais dos termos das Eqs. 5-4 e 5-5 indicam os sentidos das componentes das respectivas forças, na Fig. 5-8b. Substituindo os valores conhecidos, temos, pela Eq. 5-4,

$$(170 \text{ N}) (\cos \phi) = (220 \text{ N}) (\cos 47.0^\circ)$$

ou

$$\phi = \cos^{-1} \frac{(220 \text{ N})(0,682)}{170 \text{ N}} = 28.0^\circ.$$

Substituindo na Eq. 5-5, temos

$$\begin{aligned} F_B &= F_C \sin \phi + F_A \sin 47.0^\circ \\ &= (170 \text{ N}) (\sin 28.0^\circ) + (220 \text{ N}) (\sin 47.0^\circ) \\ &= 241 \text{ N}. \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

Certifique-se de que os três vetores da Fig. 5-8b, se convenientemente deslocados, formam um triângulo. Ou seja, sua soma é nula.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 1: LEIA O PROBLEMA COM ATENÇÃO

Leia o enunciado do problema várias vezes até ter um quadro bem definido da situação, observe quais os dados fornecidos e quais os pedidos. Nos Exemplos 5-1 e 5-2, você deve refletir assim: "Alguém está empurrando um trenó. Se a velocidade deste varia, então há uma aceleração envolvida. O movimento é retilíneo. No exemplo, é dada uma força e pedida a outra. Logo, a situação requer que apliquemos a segunda lei de Newton ao movimento unidimensional."

TÁTICA 2: RELEIA O TEXTO

Se você sabe a que o problema se refere, mas não sabe o que fazer a seguir, ponha-o de lado e releia o texto. Se tem dúvidas acerca da segunda lei de Newton, releia aquela seção. Estude os exemplos. Parte dos Exemplos 5-1 e 5-2 refere-se a movimento unidimensional e leva você ao Cap. 2, mais especificamente à Tabela 2-2, que mostra todas as equações que você provavelmente irá precisar.

TÁTICA 3: ESQUEMATIZE UMA FIGURA

Você pode precisar de duas figuras. Uma é a representação aproximada da situação real. Quando você esquematizar as forças, desenhe o vetor sobre o limite ou no interior do corpo que está sendo submetido àquela força. A outra é o diagrama de corpo isolado, no qual as forças são

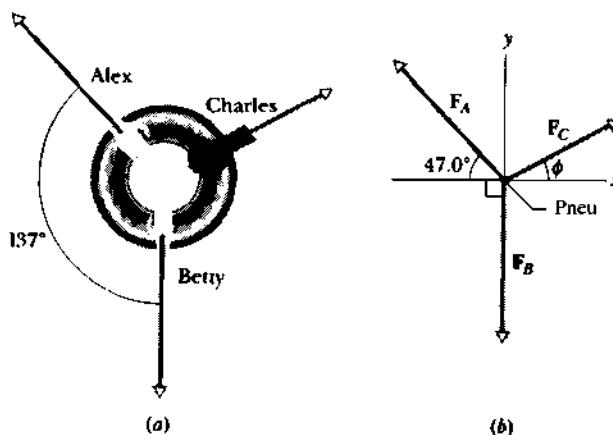


Fig. 5-8 Exemplo 5-4. (a) Vista do alto de três pessoas puxando um pneu. (b) Diagrama de corpo isolado do pneu.

mostradas, com o corpo representado por um ponto. Atribua a origem de cada vetor nesse ponto.

TÁTICA 4: QUAL É O SEU SISTEMA?

Se estiver utilizando a segunda lei de Newton, é necessário saber a que corpo ou sistema ela está sendo aplicada. Nos Exemplos 5-1 e 5-2, o corpo é o trenó (não o homem, ou o gelo). No Exemplo 5-3, é o caixote (não o caminhão). No Exemplo 5-4, é o pneu (não os cabos, ou as pessoas).

TÁTICA 5: QUAL É O REFERENCIAL?

Seja claro sobre que referencial está utilizando. Vamos utilizar um referencial relativo à Terra para todos os exemplos seguintes. No Exemplo 5-3, você, com certeza, não deve utilizar o caminhão. Nesse exemplo, o caminhão está acelerado. Um referencial relativo a ele não seria do tipo inercial.

TÁTICA 6: ESCOLHA OS EIXOS ADEQUADAMENTE

No Exemplo 5-4, reduzimos bastante o trabalho fazendo um dos eixos coincidir com uma das forças (o eixo y com \mathbf{F}_g). Tente fazer esse exemplo utilizando um sistema de coordenadas em que nenhuma força coincida com qualquer eixo.

5-6 Algumas Forças Específicas

O Peso

O **peso** P de um corpo é a força que o atrai para o objeto astronômico mais próximo, que no nosso caso é a Terra. A força é devida, primariamente, a uma atração — a **atração gravitacional** — entre as massas dos dois corpos, cuja descrição mais pormenorizada será apresentada mais tarde, no Cap. 15. Por ora, vamos considerar apenas as situações em que um corpo de massa m está localizado em um ponto onde o módulo da aceleração em queda livre é g . Nessa situação, o **módulo** do vetor peso (uma força) é

$$P = mg. \quad (5-6)$$

Esse *vetor* pode ser apresentado como

$$\mathbf{P} = -mg\mathbf{j} = -P\mathbf{j} \quad (5-7)$$

(onde $+\mathbf{j}$ aponta para cima, afastando-se da Terra), ou como

$$\mathbf{P} = mg, \quad (5-8)$$

onde \mathbf{g} representa o vetor aceleração em queda livre. Em muitos casos, compete a nós a escolha da notação, mas é necessário sermos claros para não nos confundirmos, por exemplo, ao escrevermos a Eq. 5-6, quando na verdade queríamos a Eq. 5-8.

Já que o peso é uma força, sua unidade SI é o newton. Peso *não é massa*, e seu módulo, em qualquer lugar, depende do valor de g neste local. Uma bola de boliche pode pesar 71 N na Terra, mas apenas 12 N na Lua, porque lá g é menor. A massa da bola, 7,2 kg, é a mesma em ambos os lugares, porque é uma propriedade intrínseca da bola. (Se

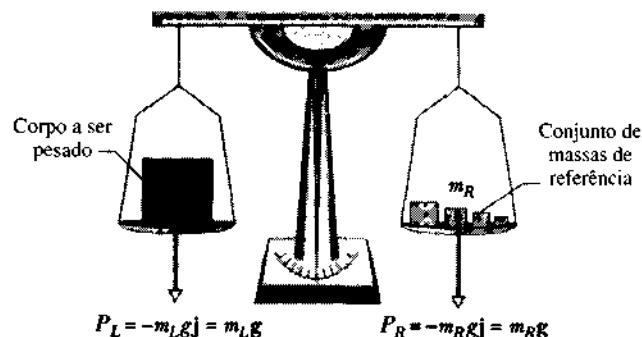


Fig. 5-9 Uma balança de braços simétrica. Quando a massa no prato da esquerda (E) é igual à massa do prato da direita (D), a balança está em equilíbrio.

quisermos perder peso, devemos subir montanhas. Não apenas pelo exercício, que reduzirá nossa massa, mas pelo aumento da altitude, que tornará menor o valor de g , à medida que nos afastarmos do centro da Terra. Assim, nosso peso diminuirá.)

Normalmente, estabelecemos que o peso é medido em relação a um referencial inercial. Se, ao invés disso, for medido em relação a um referencial não-inercial (como veremos no Exemplo 5-12), obteremos um **peso aparente** e não o peso real.

Podemos *pesar* um corpo colocando-o em um dos pratos de uma balança (Fig. 5-9) e, no outro, vários corpos (de massas conhecidas) como referência, até equilibrarmos os pratos. Então, quando as massas, em ambos os pratos, estiverem igualadas (supondo o mesmo valor para g em ambos os pratos), faremos a pesagem. Ficaremos sabendo, então, a massa m do corpo. Se soubermos o valor de g no local da balança, poderemos determinar o peso do corpo pela Eq. 5-6.

Também podemos pesar um corpo com o auxílio de mola e de escala previamente graduada em unidades de massa ou de peso (Fig. 5-10). O corpo distende aquela mola, deslocando o ponteiro através da escala. (A maioria das ba-

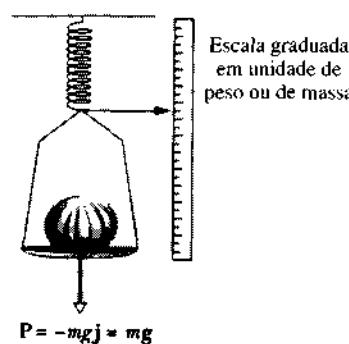


Fig. 5-10 Uma balança de mola. A leitura é proporcional ao peso do objeto colocado no prato, e a escala, graduada em unidades de peso, fornece o peso. Se, ao contrário, estiver graduada em unidades de massa, a leitura será precisa somente se a aceleração da gravidade g for a mesma do local onde ela foi calibrada.



Fig. 5-11 Cada elefante é suportado por uma força normal direcionada para cima.

lanças domésticas de banheiro utiliza este sistema.) Se a escala estiver graduada em unidades de massa, ela será exata somente se o valor de g for o mesmo do local onde foi calibrada.

A Força Normal

Quando um corpo pressiona uma superfície, experimenta uma força perpendicular a esta, chamada de **força normal** N ; o nome vem do termo matemático *normal*, que significa “perpendicular”.

Se um corpo repousa sobre uma superfície horizontal, como nas Figs. 5-11 e 5-12a, N está dirigido para cima e o

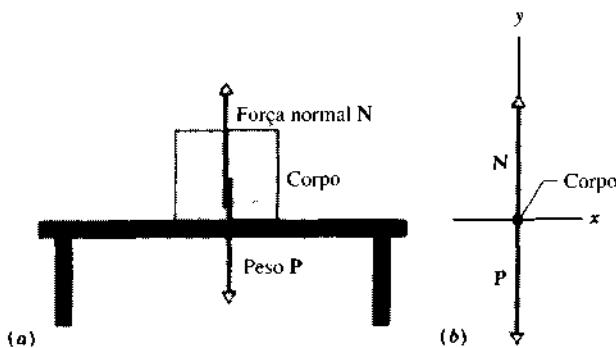


Fig. 5-12 (a) O corpo parado sobre o tampo de uma mesa é submetido a uma força normal N , perpendicular à mesa. (b) O diagrama de corpo isolado correspondente.

peso do corpo $P = mg$ está direcionado para baixo. Da Eq. 5-2, obtemos o módulo de N :

$$\sum F_y = N - mg = ma_y, \quad (5-9)$$

logo, com $a_y = 0$,

$$N = mg. \quad (5-10)$$

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 7: FORÇA NORMAL

A Eq. 5-10 é válida para a força normal somente quando N está dirigido para cima e a aceleração vertical é nula. Assim, não devemos aplicá-la para outras orientações de N ou quando a aceleração vertical for diferente de zero. Por isso, vamos aprender um procedimento para determinar N , utilizando a segunda lei de Newton em termos de suas componentes.

Podemos mover N livremente numa figura, desde que sua orientação seja mantida. Por exemplo, na Fig. 5-12a podemos deslocar o vetor para baixo até que a ponta da seta coincida com a interface corpo-mesa. Todavia, N pode ser, provavelmente, menos mal-interpretada se a sua origem estiver sobre o corpo ou no interior deste (conforme mostrado). A melhor técnica é mesmo desenhar o diagrama de corpo isolado, como na Fig. 5-12b, com a origem de N no ponto que representa o corpo.

O Atrito

Se deslizarmos ou tentarmos deslizar um corpo sobre uma superfície, o movimento será dificultado pelo contato entre o corpo e a superfície. (Vamos discutir mais isso no próximo capítulo.) Vamos supor que a resistência ao movimento é devida a uma única força f , denominada **força de atrito**, ou simplesmente **atrito**. A força tem sentido contrário ao movimento e é paralela à superfície (Fig. 5-13). Algumas vezes, por simplicidade, admitimos que essa força é desprezível, ou seja, falamos em superfície *sem atrito*.

A Tração

Quando uma corda (um tirante, um cabo ou assemelhado) é presa a um corpo e esticada, dizemos que ela está sob **tração** (ou tensão). Ela puxa o corpo com uma força T , aplicada ao ponto de conexão da corda com o corpo, na direção da corda e no sentido para fora do corpo (Fig. 5-14a).

Em geral, a corda é considerada *sem massa* (significando que sua massa em relação à do corpo é desprezível) e *não-extensível*. A corda existe somente como conexão entre dois corpos. Ela puxa um corpo em cada extremidade com a mesma magnitude T , mesmo que os corpos e a corda estejam acelerados e mesmo que a corda se movimente

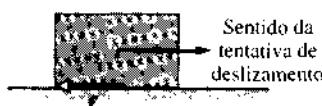


Fig. 5-13 Força de atrito f que se opõe à tentativa de deslizamento do corpo sobre uma superfície.

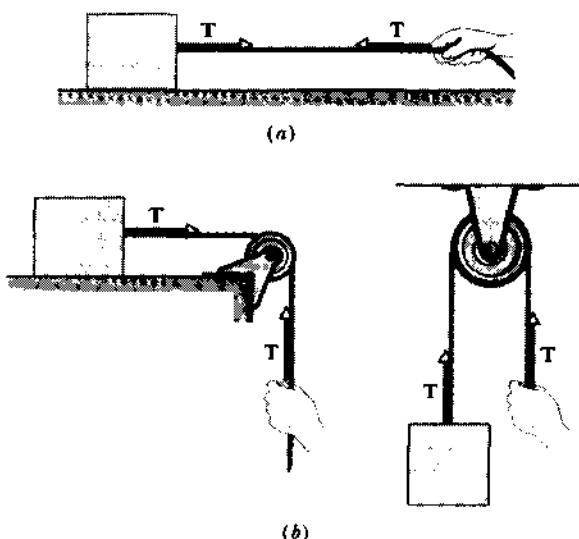


Fig. 5-14 (a) A corda esticada está sob tensão. Ela puxa os corpos em cada extremidade com força T . (b) A mesma situação é válida para uma corda que passa por uma polia de massa e atrito desprezíveis.

sobre uma polia de *massa* e *atrito desprezíveis* (Fig. 5-14b). Ou seja, a polia tem massa desprezível, comparada às massas dos corpos, e atrito desprezível no seu eixo de rotação.

EXEMPLO 5-5 Vamos voltar a John Massis e o vagão de trem, e supor que ele puxou-o (com seus dentes) pela extremidade da corda com uma força constante igual a 2,5 vezes o peso do seu corpo, fazendo um ângulo θ de 30° com a horizontal. Sua massa m era 80 kg. O peso P do vagão era 7.0×10^5 N (cerca de 80 ton) e ele deslocou-o por cerca de 1,0 m sobre os trilhos. Suponha que as rodas não sofreram resistência dos trilhos ao rolagem. Qual era a velocidade do vagão quando acabou de ser puxado?

Solução A Fig. 5-15 mostra o diagrama de corpo isolado, no qual o vagão é representado por um ponto. O eixo x representa a direção dos trilhos. Da Eq. 5-2, temos

$$\sum F_x = T \cos \theta = Ma_x \quad (5-11)$$

onde M é a massa do vagão.

De acordo com as suposições acima, a força que Massis usou para puxar o vagão foi

$$T = 2.5mg = (2.5)(80 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 1.960 \text{ N}$$

que é o peso médio que pode ser levantado por um bom halterofilista.

O peso P do vagão é

$$P = Mg,$$

e sua massa M é

$$M = \frac{P}{g} = \frac{7.0 \times 10^5 \text{ N}}{9.8 \text{ m/s}^2} = 7.143 \times 10^4 \text{ kg.}$$

Da Eq. 5-11, determinamos sua aceleração, como sendo

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{T \cos \theta}{M} = \frac{(1960 \text{ N}) (\cos 30^\circ)}{7.143 \times 10^4 \text{ kg}} \\ &= 2.376 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

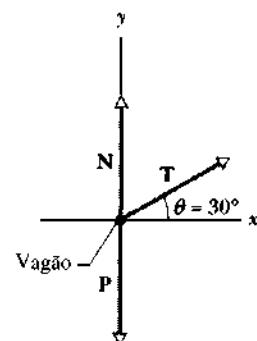


Fig. 5-15 Exemplo 5-5. Diagrama de corpo isolado para os vagões puxados por Massis. Os vetores estão fora de escala; a tensão na corda é muito menor do que o peso e a força normal.

Vamos utilizar a Eq. 2-14 para determinar a velocidade do vagão, quando acabou de ser puxado, com o subscrito relativo ao eixo x e fazendo $v_0 = 0$ e $x - x_0 = 1.0 \text{ m}$:

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0),$$

ou

$$v_x = \sqrt{0 + (2)(2.376 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2)(1.0 \text{ m})}$$

= 0.22 m/s. (Resposta)

Se a corda fosse presa a um ponto mais alto do vagão, de maneira que ficasse na horizontal, o resultado de Massis teria sido bem melhor. Você consegue ver por quê?

5-7 Terceira Lei de Newton

As forças existem em pares. Se um martelo exerce uma força sobre um prego, o prego exerce uma força igual e de sentido contrário sobre o martelo. Se nos apoiamos numa parede de tijolos, a parede nos empurra de volta (Fig. 5-16).



Fig. 5-16 O homem aplica uma força para a direita sobre a parede. A parede exerce uma força para a esquerda sobre o homem. As forças têm o mesmo módulo.

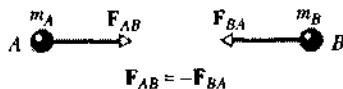


Fig. 5-17 A terceira lei de Newton. O corpo A exerce uma força \mathbf{F}_{BA} sobre o corpo B , ao mesmo tempo que o corpo B exerce uma força \mathbf{F}_{AB} sobre o corpo A , onde $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$.

Esta situação pode ser resumida nestas simples palavras: “Não podemos tocar sem ser tocados.”

Na Fig. 5-17, considere que o corpo A exerça uma força \mathbf{F}_{BA} sobre o corpo B ; a experiência revela que o corpo B , então, exerce uma força \mathbf{F}_{AB} sobre o corpo A . Estas duas forças têm o mesmo módulo e sentidos contrários. Isto é,

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA} \quad (\text{terceira lei de Newton}) \quad (5-12)$$

Observe a ordem dos subscritos. \mathbf{F}_{AB} , por exemplo, é a força exercida pelo corpo B sobre o corpo A . A Eq. 5-12 permanece válida, não importa se os corpos estão parados ou em movimento.

A Eq. 5-12 resume a terceira lei de Newton para o movimento. Em geral, uma dessas forças (não importa qual) é chamada de **força de ação**. A outra é chamada de **força de reação**. Toda vez que determinarmos uma força, uma boa pergunta será: “Onde está a força de reação?”

“A toda ação corresponde sempre uma reação de igual magnitude e de sentido contrário”, são palavras consagradas na linguagem popular, que significam coisas diferentes para várias pessoas. Na física, entretanto, essas palavras significam apenas a Eq. 5-12 e nada mais. Não estão envolvidos causa e efeito, de forma particular; a força de ação pode ser qualquer uma delas.

Você pode indagar: “Se a cada força corresponde uma força igual e de sentido contrário, associada a ela, porque não se cancelam mutuamente? Como alguma coisa consegue se mover?” A resposta é simples. Conforme vemos na Fig. 5-17, os dois membros do par ação-reação *sempre* se referem a corpos diferentes, de maneira que não há possibilidade de se cancelarem mutuamente. Se duas forças atuam no *mesmo* corpo, elas *não* são um par ação-reação, mesmo que tenham módulos iguais e sentidos opostos. Vamos identificar, em dois exemplos, o par ação-reação.

Um Satélite em Órbita

A Fig. 5-18 mostra um satélite orbitando a Terra. A única força que atua sobre ele é \mathbf{F}_{ST} , a força exercida sobre o satélite *pela* atração gravitacional da Terra. Onde está a força de reação correspondente? É a força \mathbf{F}_{TS} , que atua na Terra, devido à atração gravitacional do satélite; seu ponto de aplicação efetivo é considerado no centro da Terra.

Podemos achar que o pequeno satélite não pode exercer uma força gravitacional muito grande sobre a Terra, mas ele o faz, exatamente como estabelece a terceira lei de

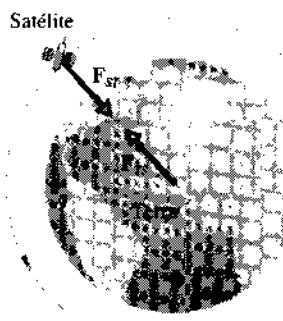


Fig. 5-18 Um satélite orbitando a Terra. As forças mostradas são um par ação-reação. Observe que elas atuam sobre corpos distintos.

Newton. Ou seja, considerando apenas os módulos, $F_{TS} = F_{ST}$. A força \mathbf{F}_{TS} provoca uma aceleração na Terra, mas, devido à grande massa desta, sua aceleração é muito pequena para ser detectada.

Um Melão sobre uma Mesa*

A Fig. 5-19a mostra um melão em repouso sobre uma mesa. A Terra puxa o melão para baixo com uma força \mathbf{F}_{MT} , peso do melão. O melão não é acelerado porque essa força é cancelada por uma força igual e de sentido contrário, a força normal \mathbf{F}_{Mm} , exercida pela mesa m sobre o melão M . (Veja Fig. 5-19b.) Todavia, \mathbf{F}_{MT} e \mathbf{F}_{Mm} *não* formam um par ação-reação, *porque elas atuam no mesmo corpo, o melão*.

A força de reação para \mathbf{F}_{MT} é \mathbf{F}_{mT} , a força (gravitacional) com a qual o melão atrai a Terra. Esse par ação-reação está mostrado na Fig. 5-19c.

A força de reação para \mathbf{F}_{Mm} é \mathbf{F}_{mm} , a força do melão sobre a mesa. Este par está mostrado na Fig. 5-19d. Então, os pares ação-reação, nesse problema, e os corpos onde eles atuam, são

Primeiro par: $\mathbf{F}_{MT} = -\mathbf{F}_{mT}$ (melão e Terra)

e

Segundo par: $\mathbf{F}_{Mm} = -\mathbf{F}_{mm}$ (melão e mesa).

Podemos usar uma cabine de elevador em movimento para classificar, apropriadamente, as quatro forças mostradas na Fig. 5-19 num par ação-reação. Suponhamos um elevador acelerando para cima. O melão e a mesa dentro do elevador se pressionariam mutuamente com uma força maior. As forças de contato \mathbf{F}_{mM} e \mathbf{F}_{MM} (veja Fig. 5-19d) aumentariam em módulo, mas permaneceriam iguais e com sentidos opostos. No entanto, as forças gravitacionais \mathbf{F}_{MT} e \mathbf{F}_{mT} (veja Fig. 5-19c) permaneceriam invariáveis. Ambos os pares de forças continuariam a obedecer à terceira lei de Newton. O melão se movimentaria, porque \mathbf{F}_{MT} e \mathbf{F}_{mT}

* Vamos ignorar pequenas complicações causadas pela rotação da Terra.

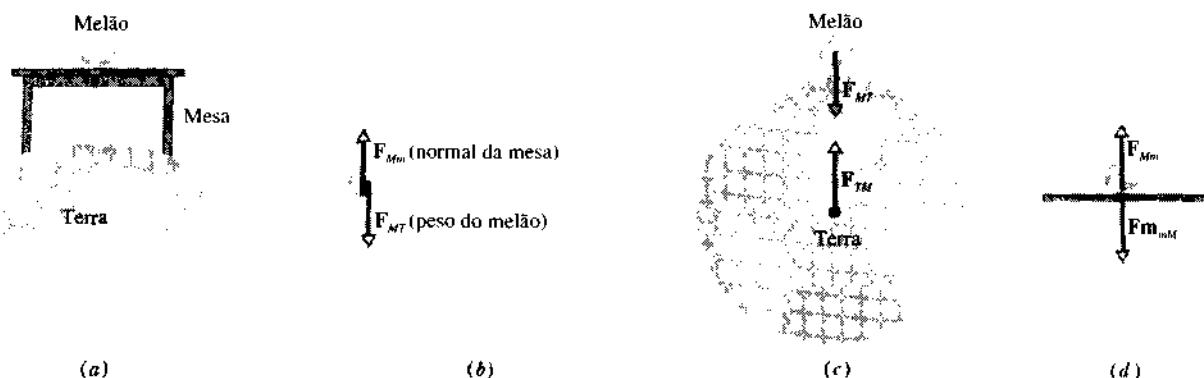


Fig. 5-19 (a) Um melão repousa sobre a mesa, que repousa sobre a Terra. (b) As forças sobre o melão F_{Mm} e F_{Mg} . O melão está em repouso porque estas forças se anulam. (c) O par ação-reação para as forças melão-Terra. (d) O par ação-reação para as forças melão-mesa.

(que não é um par ação-reação) não mais se cancelariam mutuamente.

Você poderia acreditar ser mais simples analisar um satélite em órbita — dentro do contexto da terceira lei de Newton — do que um melão em repouso sobre uma mesa?

5-8 Aplicação das Leis de Newton

O restante deste capítulo consiste nos Exemplos 5-6 até 5-12. Devemos analisar profundamente esses exemplos, aprendendo não apenas as respostas específicas de cada um, mas, principalmente, como proceder na abordagem de um problema. É muito importante saber como transformar a representação de uma experiência física num diagrama de corpo isolado, com eixos adequados, para que as leis de Newton possam ser aplicadas. Vamos iniciar com o Exemplo 5-6, que está desenvolvido com bastantes detalhes, utilizando o esquema pergunta-resposta.

EXEMPLO 5-6 A Fig. 5-20 mostra um bloco (o bloco deslizante) de massa $M = 3,3 \text{ kg}$. Ele se move livremente, sem atrito, sobre uma fina camada de ar na superfície horizontal de uma mesa. O bloco deslizante está preso a uma corda que passa em volta de uma polia de massa e atrito desprezíveis e tem, na outra extremidade, um segundo bloco (o bloco suspenso) de massa $m = 2,1 \text{ kg}$. O bloco suspenso, ao cair, acelera o bloco deslizante para a direita.

Determine (a) a aceleração do bloco deslizante, (b) a aceleração do bloco suspenso e (c) a tensão na corda.

P *O que é abordado neste exemplo?*

Foram dadas duas massas, um bloco deslizante e um bloco suspenso. Pode não nos ocorrer, mas a Terra também é um dado, porque puxa (atrai) as massas; sem a Terra, nada poderia acontecer. Nesses blocos há cinco forças envolvidas, como mostra a Fig. 5-21:

1. A corda puxa o bloco deslizante para a direita com uma força de intensidade T .
2. A corda puxa o bloco suspenso para cima com uma força de igual intensidade T . Ela impede que o bloco suspenso caia livremente. Supomos que a tensão seja uniforme em toda a corda; a polia apenas muda a direção da força, sem variar sua magnitude.
3. A Terra puxa o bloco deslizante para baixo com uma força Mg , que é o peso deste bloco.

4. A Terra puxa o bloco suspenso para baixo com uma força mg , que é o peso do bloco suspenso.

5. A mesa empurra o bloco deslizante para cima com a força normal N .

Há outra coisa que devemos notar. Vamos estabelecer que a corda tem comprimento constante, ou seja, se o bloco suspenso cair 1 mm, num certo intervalo de tempo, o bloco deslizante também se deslocará 1 mm para a direita, no mesmo intervalo de tempo. Os blocos se deslocam solidariamente e suas acelerações têm módulos iguais.

P *Como classificar este exemplo? Ele nos sugere alguma lei da física em particular?*

Sim, sugere. Forças, massas e acelerações estão envolvidas, e isto propõe a aplicação da segunda lei de Newton para o movimento, $\sum F = ma$.

P *Se usássemos essa lei neste exemplo, a que corpo a aplicaríamos?*

Neste exemplo, dois corpos são enfocados: o bloco deslizante e o bloco suspenso. Embora sejam objetos mensuráveis, podemos tratá-los como partículas, porque todas as partes minúsculas (como os átomos) se movem exatamente da mesma forma. Vamos aplicar a segunda lei de Newton a cada bloco, separadamente.

P *E em relação à polia?*

Não podemos representar a polia como uma partícula porque suas várias partes se movem de diferentes maneiras. Quando estudarmos rotação, vamos tratar de polias com mais detalhes. Enquanto isso, contornamos esse problema de uma forma prática, isto é, vamos admitir que

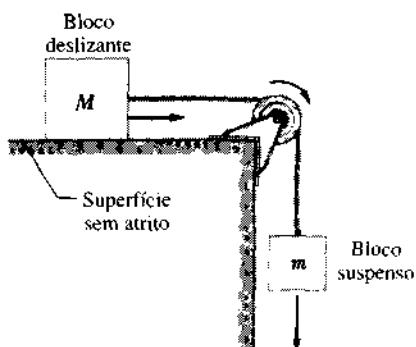


Fig. 5-20 Exemplo 5-6. Um bloco de massa M sobre uma superfície horizontal, sem atrito, está ligado a outro bloco de massa m por uma corda que passa em volta de uma polia. As massas da corda e da polia são nulas; ou seja, são desprezíveis se comparadas às massas dos blocos. A polia não tem atrito, ou seja, a força de atrito que se opõe ao movimento rotacional do seu eixo é desprezível. As setas indicam o movimento quando o sistema parte do repouso.

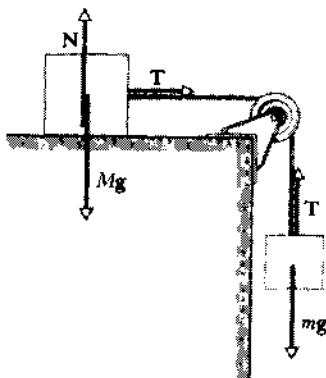


Fig. 5-21 As forças que atuam nos dois blocos da Fig. 5-20.

a massa da polia é desprezível em relação às massas dos blocos. A única função da polia (que supostamente é isenta de atrito em seu eixo) é mudar a direção da corda que une os dois blocos.

P *Muito bem! Agora, como aplicar $\sum F = ma$ ao bloco deslizante?*

Vamos representar o bloco deslizante como uma partícula de massa M e desenhar todas as forças que atuam sobre ele, como na Fig. 5-22. Este é o diagrama de corpo isolado do bloco. Há três forças envolvidas. A seguir, vamos estabelecer um eixo horizontal (eixo x). É interessante desenhar esse eixo paralelo à superfície da mesa, na direção da movimentação do bloco.

P *Grato, mas ainda não foi dito como aplicar $\sum F = ma$ ao bloco deslizante.*

Tudo o que foi dito é como desenhar o diagrama de corpo isolado.

Certo. $\sum F = ma$ é uma equação vetorial, mas podemos apresentá-la como três equações escalares. Assim,

$$\sum F_x = Ma_x, \quad \sum F_y = Ma_y, \quad \sum F_z = Ma_z, \quad (5-13)$$

onde $\sum F_x$, $\sum F_y$ e $\sum F_z$ são os componentes da força resultante. Sabemos, da Eq. 5-10, que não há força resultante na direção de y : o peso \mathbf{P} do bloco está equilibrado pela força normal \mathbf{N} , que atua no bloco para cima. Nenhuma força atua na direção z , que é perpendicular à página. Logo, só a primeira das Eqs. 5-13 tem utilidade.

Como na direção x há somente um componente, então $\sum F_x = Ma_x$ vem a ser

$$T = Ma_x. \quad (5-14)$$

Esta equação tem duas grandezas desconhecidas, T e a , então, não podemos resolvê-la por enquanto. Entretanto, é bom lembrar que ainda não falamos nada acerca do bloco suspenso.

P *De acordo. Como aplicar $\sum F = ma$ ao bloco suspenso?*

Vamos desenhar um diagrama de corpo isolado para este bloco, conforme a Fig. 5-23. Desta vez, vamos usar a segunda das Eqs. 5-13, encontrando

$$\sum F_y = T - mg = -ma, \quad (5.15)$$

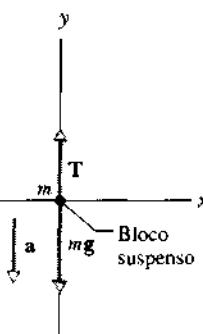


Fig. 5-23 O diagrama de corpo isolado para o bloco suspenso da Fig. 5-20.

onde o sinal menos, no segundo membro da equação, significa que o bloco acelera para baixo, no sentido negativo do eixo y . A Eq. 5-15 fica

$$mg - T = ma. \quad (5.16)$$

que contém as mesmas grandezas desconhecidas da Eq. 5-14. Ao somarmos essas duas equações, T se cancelará. Resolvendo para a temos

$$a = \frac{m}{M+m} g. \quad (\text{Resposta}) \quad (5.17)$$

Substituindo este resultado em 5-14, fica

$$T = \frac{Mm}{M+m} g. \quad (\text{Resposta}) \quad (5.18)$$

Substituindo as incógnitas pelos valores numéricos fornecidos, temos

$$\begin{aligned} a &= \frac{m}{M+m} g = \frac{2.1 \text{ kg}}{3.3 \text{ kg} + 2.1 \text{ kg}} (9.8 \text{ m/s}^2) \\ &= 3.8 \text{ m/s}^2 \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

e

$$\begin{aligned} T &= \frac{Mm}{M+m} g = \frac{(3.3 \text{ kg})(2.1 \text{ kg})}{3.3 \text{ kg} + 2.1 \text{ kg}} (9.8 \text{ m/s}^2) \\ &= 13 \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

P *O exemplo agora está resolvido, certo?*

Esta é uma boa pergunta, mas não estamos aqui apenas para resolver problemas e sim para aprender física, principalmente. Este exemplo não estará realmente resolvido até que tenhamos examinado os resultados para ver se são consistentes. Esta, freqüentemente, é uma experiência muito mais construtiva do que simplesmente obter a resposta certa.

Vamos olhar primeiro para a Eq. 5-17. Observamos que ela está dimensionalmente correta, e também que a aceleração a sempre será menor do que g . Como, aliás, deve ser, porque o bloco suspenso não cai. A corda o puxa para cima.

Agora, vamos examinar a Eq. 5-18, que será reescrita na forma

$$T = \frac{M}{M+m} mg. \quad (5.19)$$

Assim, é mais fácil ver que esta equação também está dimensionalmente correta, porque tanto T como mg são forças. Pela Eq. 5-19 também vemos que a tensão na corda é sempre menor do que mg , o peso do bloco suspenso. O que é razoável, porque se T fosse maior do que mg , o bloco suspenso estaria se movendo para cima!

Também podemos conferir os resultados através de casos especiais, onde podemos adivinhar qual seria a resposta. Um exemplo simples é fazer $g = 0$, como se a experiência fosse levada para o espaço intereste-

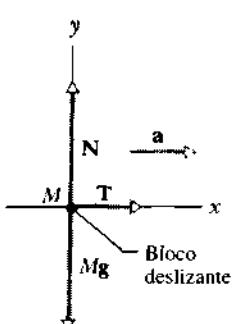


Fig. 5-22 O diagrama de corpo isolado para o bloco deslizante da Fig. 5-20.

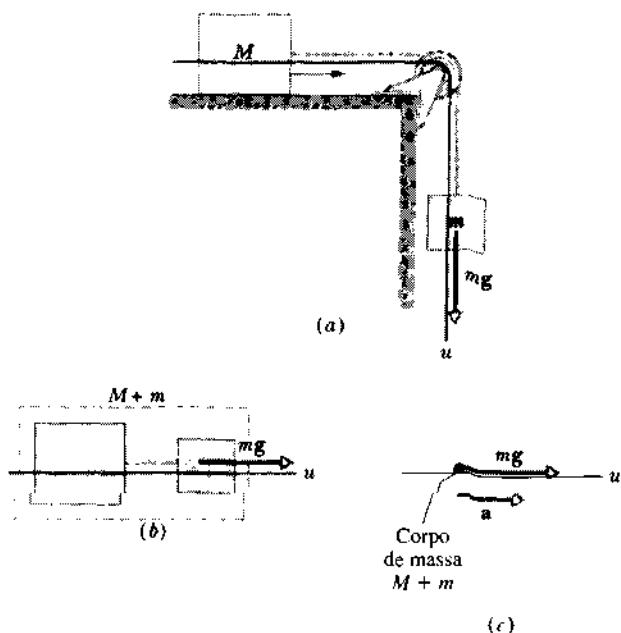


Fig. 5-24 (a) Um “eixo” u passando pelo sistema da Fig. 5-20. (b) Os blocos são representados retilíneamente em u e são tratados, agora, como um único corpo de massa $M + m$. (c) O diagrama de corpo livre associado, considerando apenas as forças no eixo u . Existe só uma força.

lar. Sabemos que, neste caso, os blocos permanecem em repouso e não haveria nenhuma tensão na corda. As fórmulas estão de acordo com isso? Sim, claro. Se fizermos $g = 0$ nas Eqs. 5-17 e 5-18, encontramos $a = 0$ e $T = 0$. Dois outros casos especiais são $M = 0$ e $m \rightarrow \infty$.

EXEMPLO 5-6 — UMA OUTRA MANEIRA* A aceleração a dos blocos da Fig. 5-20 pode ser determinada em apenas duas linhas de álgebra se (a) utilizarmos um eixo não-convencional chamado de u , que passa por ambos os blocos na extensão da corda, conforme mostrado na Fig. 5-24a, depois, (b) mentalmente tornamos esse eixo retilíneo, como na Fig. 5-24b, e tratamos os dois blocos como sendo um único corpo formado pelas massas $M + m$. A Fig. 5-24c mostra um diagrama de corpo livre para o sistema de dois blocos.

Solução Observe que há somente uma força atuando no sistema, no sentido positivo do eixo u , que é a força mg . A tensão T da Fig. 5-21 é agora uma força interna do sistema de corpos e, portanto, não é considerada pela segunda lei de Newton. A força exercida pela polia na corda é perpendicular ao eixo u , e também não é considerada no cálculo.

Usando a Eq. 5-2 como referência, escrevemos a equação do componente da aceleração no eixo u :

$$\sum F_u = (M + m)a_u,$$

onde a massa do corpo é $M + m$. A aceleração do sistema no eixo u (e de cada bloco individualmente, já que eles estão conectados) tem módulo a . A única força, no eixo u , que atua no sistema tem módulo mg . Assim, nossa equação vem a ser

$$mg = (M + m)a,$$

ou

$$a = \frac{m}{M + m} g, \quad (5-20)$$

*No Brasil, há controvérsias a respeito dessa outra maneira de resolver o Exemplo. Optamos por mantê-la por ser parte integrante da obra. (N. do S.)

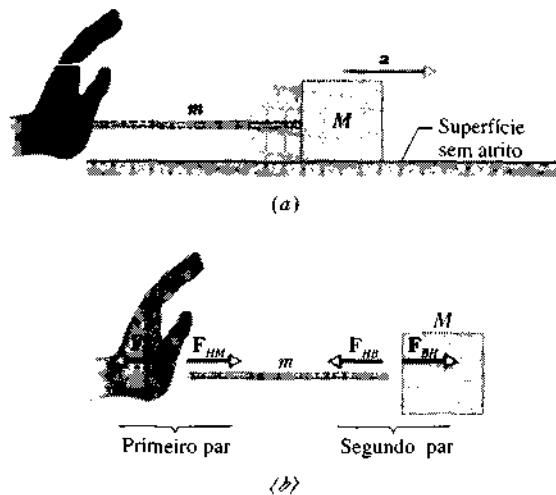


Fig. 5-25 Exemplo 5-7. (a) Um bloco de massa M é empurrado por meio de uma haste de massa m sobre uma superfície sem atrito. (b) Vista expandida mostrando os pares ação-reação, entre a mão e a haste (primeiro par) e entre a haste e o bloco (segundo par).

que está de acordo com a Eq. 5-17.

Para determinarmos T , aplicamos a segunda lei de Newton a cada corpo, separadamente, obtendo cada uma das Eq. 5-14 ou Eq. 5-16. Então substituímos o valor de a da Eq. 5-20 e calculamos T , obtendo a Eq. 5-18.

EXEMPLO 5-7 Um bloco de massa $M = 33 \text{ kg}$ é empurrado sobre uma superfície sem atrito por meio de uma haste de massa $m = 3.2 \text{ kg}$, conforme a Fig. 5-25a. O bloco se desloca (a partir do repouso) por uma distância $d = 77 \text{ cm}$, em 1.7 s , com aceleração constante.

a. Identifique todos os pares ação-reação neste exemplo.

Solução Como mostra o esquema detalhado da Fig. 5-25b, há dois pares ação-reação:

$$\text{Primeiro par: } F_{MH} = -F_{HM} \quad (\text{mão e haste})$$

$$\text{Segundo par: } F_{BH} = -F_{HB} \quad (\text{haste e bloco}).$$

A força da haste sobre a mão F_{MH} é a força que sentiríamos se a mão da Fig. 5-25 fosse a nossa.

b. Que força a mão deve exercer sobre a haste?

Solução Esta é a força que move o bloco e a haste. Para encontrá-la, devemos primeiro determinar a aceleração constante a , através da Eq. 2-13:

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

Fazendo $v_0 = 0$ e $x - x_0 = d$, calculamos a

$$a = \frac{2d}{t^2} = \frac{(2)(0.77 \text{ m})}{(1.7 \text{ s})^2} = 0.533 \text{ m/s}^2.$$

Para calcular a força exercida pela mão, aplicamos a segunda lei de Newton ao sistema formado pela haste e o bloco juntos. Então,

$$F_{HM} = (M + m)a = (33 \text{ kg} + 3.2 \text{ kg})(0.533 \text{ m/s}^2) \\ = 19.3 \text{ N} \approx 19 \text{ N}. \quad (\text{Resposta})$$

c. Com que força a haste empurra o bloco?

Solução Para determinar esta força, vamos aplicar a segunda lei de Newton para o bloco individualmente:

$$\begin{aligned} F_{BH} &= Ma = (33 \text{ kg})(0.533 \text{ m/s}^2) \\ &= 17.6 \text{ N} \approx 18 \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

d. Qual a força resultante na haste?

Solução Podemos determinar o módulo F dessa força de duas maneiras. Primeiro, usando os resultados de (b) e (c) anteriormente calculados; temos

$$\begin{aligned} F &= F_{HM} - F_{HB} = 19.3 \text{ N} - 17.6 \text{ N} \\ &= 1.7 \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Observe que aqui foi usada a terceira lei de Newton, ao estabelecermos que \mathbf{F}_{HS} , a força do bloco sobre a haste, tem o mesmo módulo de \mathbf{F}_{BH} (17.6 N, sem arredondamento).

A segunda maneira de obter a resposta é aplicar a segunda lei de Newton diretamente à haste. Então, temos

$$F = ma = (3.2 \text{ kg})(0.533 \text{ m/s}^2) = 1.7 \text{ N,} \quad (\text{Resposta})$$

que concorda com o nosso primeiro resultado. Como deve ser, porque os dois métodos são algebricamente idênticos; verifique.

EXEMPLO 5-8 A Fig. 5-26a mostra um bloco de massa $m = 15 \text{ kg}$ suspenso por três cordas. Quais as tensões nas cordas?

Solução A Fig. 5-26b mostra o diagrama de corpo isolado para o bloco: a tensão T_C na corda C puxa para cima, enquanto o peso do bloco mg está direcionado para baixo. Como o sistema está em repouso, aplicando a segunda lei de Newton ao bloco, temos

$$\sum F_y = T_C - mg = 0,$$

ou

$$\begin{aligned} T_C &= mg = (15 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) \\ &= 147 \text{ N} \approx 150 \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

A dica para o próximo passo é compreender que o nó, na junção das três cordas, é apenas o ponto de atuação das três forças, e é neste ponto que aplicaremos a segunda lei de Newton. A Fig. 5-26c mostra o diagrama de corpo isolado para o nó. Como o nó não está acelerado, a força resultante neste ponto é nula. Logo,

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{T}_A + \mathbf{T}_B + \mathbf{T}_C = 0.$$

Esta equação vetorial é equivalente a duas equações escalares

$$\sum F_y = T_A \sin 28^\circ + T_B \sin 47^\circ - T_C = 0 \quad (5-21)$$

e

$$\sum F_x = -T_A \cos 28^\circ + T_B \cos 47^\circ = 0. \quad (5-22)$$

Observe com atenção que, quando escrevemos a componente x de \mathbf{T}_A como $T_A \cos 28^\circ$, devemos incluir o sinal menos para indicar que ela está no sentido negativo do eixo x .

Substituindo os valores numéricos em 5-21 e 5-22 ficamos com

$$T_A(0.469) + T_B(0.731) = 147 \text{ N} \quad (5-23)$$

e

$$T_B(0.682) = T_A(0.883). \quad (5-24)$$

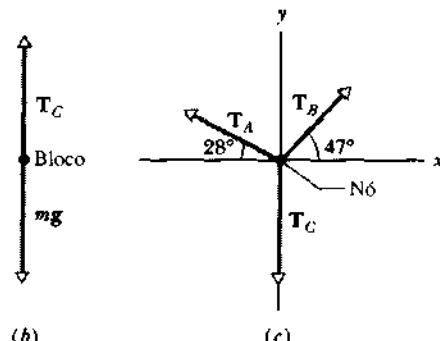
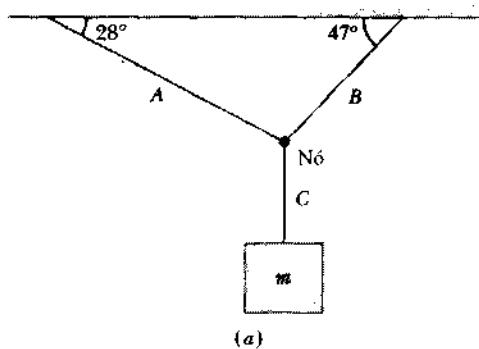


Fig. 5-26 Exemplo 5-8. (a) Um bloco de massa m está suspenso por três cordas. (b) O diagrama de corpo isolado do bloco. (c) O diagrama de corpo isolado do ponto de interseção das três cordas.

Da Eq. 5-24, temos

$$T_B = \frac{0.883}{0.682} T_A = 1.29 T_A.$$

Substituindo esta grandeza em 5-23 e resolvendo para T_A , vamos obter

$$\begin{aligned} T_A &= \frac{147 \text{ N}}{0.469 + (1.29)(0.731)} \\ &= 104 \text{ N} \approx 100 \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Finalmente, T_B é calculado de

$$\begin{aligned} T_B &= 1.29 T_A = (1.29)(104 \text{ N}) \\ &= 134 \text{ N} \approx 130 \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

EXEMPLO 5-9 A Fig. 5-27a mostra um bloco de massa $m = 15 \text{ kg}$ seguro por uma corda, sobre um plano inclinado sem atrito. Se $\theta = 27^\circ$, qual a tensão na corda? Que força é exercida pelo plano sobre o bloco?

Solução A Fig. 5-27b é o diagrama de corpo isolado para o bloco. Sobre ele atuam as seguintes forças: (1) a força normal N , direcionada para fora do plano em que ele repousa; (2) a tensão T na corda; e (3) o peso $P (= mg)$. Como a aceleração do bloco é zero, a força resultante sobre ele é, então, pela segunda lei de Newton, nula

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{T} + \mathbf{N} + \mathbf{mg} = 0. \quad (5-25)$$

Vamos escolher um sistema de coordenadas com o eixo x paralelo ao plano. Com esta escolha, não apenas uma, mas duas forças (N e T) ficam alinhadas com os eixos (uma vantagem). Observe que o ângulo entre o vetor peso e o sentido negativo do eixo y é igual ao ângulo de inclinação do plano. As componentes x e y desse vetor são determinadas pelo triângulo da Fig. 5-27c.

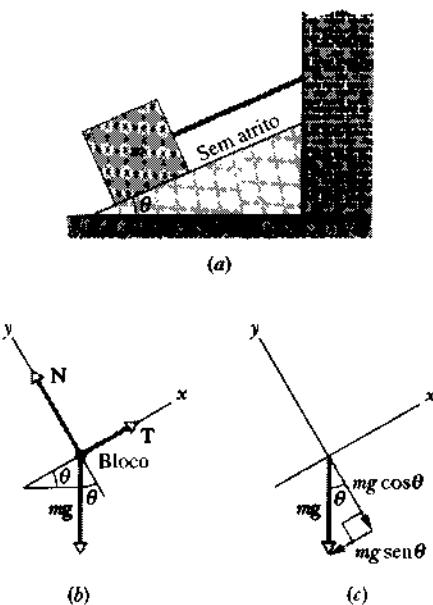


Fig. 5-27 Exemplos 5-9 e 5-10. (a) Um bloco de massa m em repouso sobre um plano liso, preso por uma corda. (b) O diagrama de corpo isolado do bloco. Observe como são localizados os eixos coordenados. (c) Determinação das componentes x e y de mg .

As componentes da Eq. 5-25 são

$$\sum F_x = T - mg \sin \theta = 0$$

e

$$\sum F_y = N - mg \cos \theta = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} T &= mg \sin \theta \\ &= (15 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(\sin 27^\circ) \\ &= 67 \text{ N} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

e

$$\begin{aligned} N &= mg \cos \theta \\ &= (15 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(\cos 27^\circ) \\ &= 131 \text{ N} \approx 130 \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

EXEMPLO 5-10 Suponha que a corda que segura o bloco da Fig. 5-27a seja cortada. Qual a aceleração do bloco?

Solução Ao cortarmos a corda, a tensão T na Fig. 5-27b deixa de existir. As duas forças restantes não se cancelam e, realmente, não poderiam, porque não são colineares. Aplicando a segunda lei de Newton às componentes x das forças N e mg , na Fig. 5-27b, temos agora

$$\sum F_x = 0 - mg \sin \theta = ma,$$

assim,

$$a = -g \sin \theta. \quad (5-26)$$

Observe que a força normal N não contribui para a aceleração, porque sua componente x é zero.

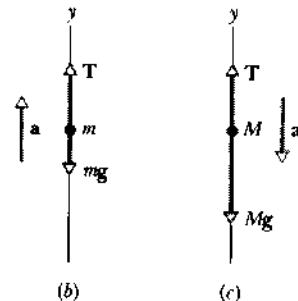
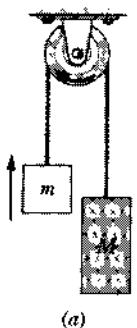


Fig. 5-28 Exemplo 5-11. (a) Um bloco de massa M e outro de massa m estão ligados por uma corda que passa por uma polia. Quando o sistema sai do repouso, o sentido do movimento é mostrado pelos vetores a . (b) O diagrama de corpo isolado do bloco m . (c) O diagrama de corpo isolado do bloco M .

Da Eq. 5-26, temos

$$a = - (9.8 \text{ m/s}^2) (\sin 27^\circ) = -4.4 \text{ m/s}^2. \quad (\text{Resposta})$$

O sinal menos indica que a aceleração está no sentido decrescente do eixo x , isto é, descendo o plano.

A Eq. 5-26 mostra que a aceleração do bloco independe da massa, assim como a aceleração de um corpo em queda livre também é independente da massa. Realmente, a Eq. 5-26 mostra que um plano inclinado pode ser usado para “diluir” a aceleração da gravidade — “moderá-la” — de maneira que os efeitos da “queda” possam ser estudados mais facilmente. Para $\theta = 90^\circ$, a Eq. 5-26 estabelece $a = -g$; para $\theta = 0^\circ$, estabelece $a = 0$. Ambos são resultados esperados.

EXEMPLO 5-11 A Fig. 5-28a mostra dois blocos ligados por uma corda, passando por uma polia de massa e atrito desprezíveis. Fazendo $m = 1.3 \text{ kg}$ e $M = 2.8 \text{ kg}$, determine a tensão na corda e o módulo da aceleração (simultânea) dos dois blocos.

Solução As Figs. 5-28b e 5-28c são diagramas de corpo isolado para os dois blocos. Como foi dado que $M > m$, é esperado que M desça e m suba. Esta informação nos permite estabelecer os sinais algébricos convenientes para a aceleração dos blocos.

Antes de iniciarmos os cálculos, observemos que a tensão na corda deve ser menor que o peso do bloco M (caso contrário, este bloco não cairia) e maior do que o peso do bloco m (se não, este bloco não subiria). Na Fig. 5-28 estão mostrados os vetores nos dois diagramas de corpo isolado que representam essa situação.

Aplicando a segunda lei de Newton ao bloco de massa m , que tem aceleração a no sentido positivo do eixo y , encontramos

$$T - mg = ma. \quad (5-27)$$

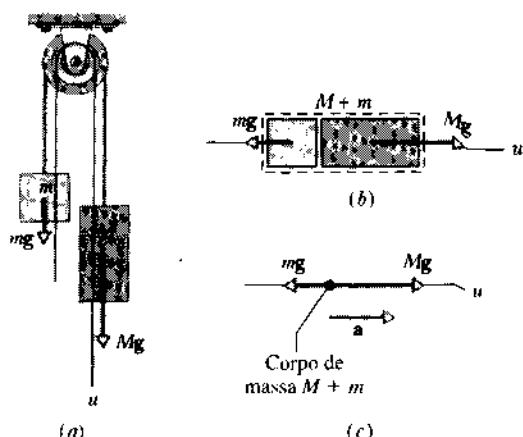


Fig. 5-29 (a) Um “eixo” u passando pelo sistema da Fig. 5-28. (b) Os blocos são reorganizados de forma retilínea em u e, depois, tratados como um único corpo de massa $M + m$. (c) O diagrama de corpo isolado associado, considerando somente as forças em u . Existem apenas duas forças.

Para o bloco de massa M , que tem aceleração $-a$, temos

$$T - Mg = -Ma, \quad (5-28)$$

ou

$$-T + Mg = Ma. \quad (5-29)$$

Somando as Eqs. 5-27 e 5-29 (ou eliminando T por substituição), obtemos

$$a = \frac{M - m}{M + m} g. \quad (5-30)$$

Substituindo este resultado em 5-27 ou 5-29 e calculando T , vem

$$T = \frac{2mM}{M + m} g. \quad (5-31)$$

A Eq. 5-31 pode ser reescrita nas formas equivalentes

$$T = \frac{M + M}{M + m} mg \quad \text{e} \quad T = \frac{m + m}{M + m} Mg. \quad (5-32)$$

A primeira equação mostra que $T > mg$ e a segunda mostra que $T < Mg$. Isto é, a tensão T tem um valor intermediário entre os pesos dos dois corpos, conforme acabamos de ver. E mais, se $M = m$, as Eqs. 5-30 e 5-31 estabelecem $a = 0$ e $T = mg = Mg$, como era de se esperar. Ou seja, se os blocos têm a mesma massa, a aceleração deles é zero (os blocos permanecem parados) e a tensão é igual ao peso de cada bloco. (Note que ela não é o dobro do peso de cada bloco.)

Substituindo os dados fornecidos, temos

$$\begin{aligned} a &= \frac{M - m}{M + m} g = \frac{2.8 \text{ kg} - 1.3 \text{ kg}}{2.8 \text{ kg} + 1.3 \text{ kg}} (9.8 \text{ m/s}^2) \\ &= 3.6 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

(Resposta)

e

$$\begin{aligned} T &= \frac{2Mm}{M + m} g = \frac{(2)(2.8 \text{ kg})(1.3 \text{ kg})}{2.8 \text{ kg} + 1.3 \text{ kg}} (9.8 \text{ m/s}^2) \\ &= 17 \text{ N.} \end{aligned}$$

(Resposta)

Podemos mostrar que o peso de cada bloco é 13 N ($= mg$) e 27 N ($= Mg$). Logo, a tensão ($= 17$ N) está realmente entre estes dois valores.

EXEMPLO 5-11 — UMA OUTRA MANEIRA* Da mesma forma que fizemos no Exemplo 5-6, vamos refazer o Exemplo 5-11 utilizando um eixo não-convencional u .

Solução Consideremos o eixo através do sistema, conforme mostrado na Fig. 5-29a. Tornemos este eixo retilíneo, como na Fig. 5-29b, e consideremos os blocos como um único corpo de massa $M + m$. Depois, desenhemos o diagrama de corpo livre, como na Fig. 5-29c. Observe que há duas forças atuando sobre o sistema de dois blocos ao longo do eixo u : mg , no sentido negativo, e Mg , no sentido positivo. (A força exercida pela polia na corda é perpendicular ao eixo u .) As duas forças no eixo u dão a aceleração a do sistema (e de cada bloco). A segunda lei de Newton para a componente do movimento em u é

$$\sum F_u = Mg - mg = (M + m)a, \quad (5-33)$$

que dá

$$a = \frac{M - m}{M + m} g,$$

conforme anteriormente. Para obter T , aplicamos a segunda lei de Newton a cada bloco individualmente, utilizando um eixo y convencional, como na solução original. Para o bloco de massa m , vamos obter a Eq. 5-27. Substituindo o resultado de a , calculado anteriormente na Eq. 5-27, vamos obter a Eq. 5-31.

EXEMPLO 5-12 Um passageiro de massa $m = 72.2$ kg está de pé sobre uma balança, dentro de um elevador (Fig. 5-30). Quais as leituras na balança para as acelerações dadas na figura?

Solução Vamos considerar este exemplo do ponto de vista de um observador em um referencial (inercial) fixo em relação à Terra. Façamos esse observador aplicar a segunda lei de Newton à aceleração do passageiro. A Fig. 5-30a-e mostra o diagrama de corpo isolado para o passageiro, considerado como uma partícula (alguma partícula!), para as diversas acelerações do elevador.

Apesar da aceleração do elevador, a Terra puxa o passageiro para baixo com uma força de intensidade mg , onde $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ é a aceleração em queda livre no referencial inercial da Terra. A balança empurra o passageiro para cima com uma força normal, cuja intensidade N é lida na escala da balança. O peso que o passageiro, sob aceleração, julga ter é o que ele lê na balança. Este valor, freqüentemente, é chamado de *peso aparente*, o termo *peso* (ou *peso real*) sendo reservado para a grandeza mg .

Pela segunda lei de Newton, temos

$$N - mg = ma,$$

ou

$$N = m(g + a). \quad (5-34)$$

a. Se o elevador permanecer em repouso ou se movimentar com velocidade constante, qual a leitura na balança? (Veja Fig. 5-30a.)

Solução Nesse caso, $a = 0$, então,

$$\begin{aligned} N &= m(g + a) = (72.2 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2 + 0) \\ &= 708 \text{ N.} \end{aligned}$$

(Resposta)

b. Qual a leitura na balança, se o elevador tiver uma aceleração de 3.20 m/s^2 para cima? (Veja Fig. 5-30b.)

*Idem pág. 93.

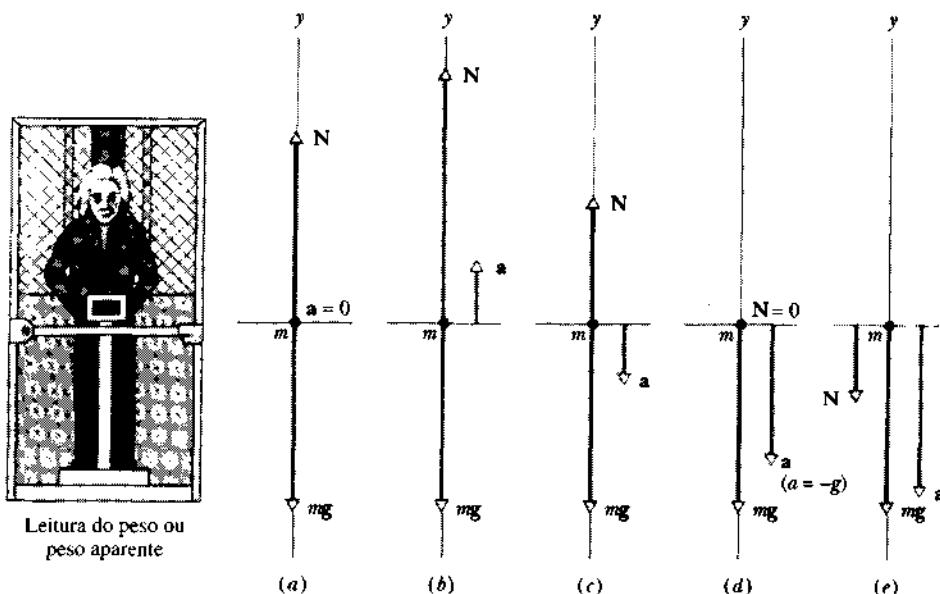


Fig. 5-30 Exemplo 5-12. Um passageiro de massa m está dentro de um elevador, sobre uma balança que indica seu peso aparente. (a) O diagrama de corpo isolado, quando a aceleração do elevador é nula. (b) Para $a = +3,20 \text{ m/s}^2$. (c) Para $a = -3,20 \text{ m/s}^2$. (d) Para $a = -g = -9,80 \text{ m/s}^2$. (e) Para $a = -12,0 \text{ m/s}^2$.

Solução Uma aceleração para cima significa que o elevador está aumentando a velocidade para cima ou diminuindo-a para baixo. Em qualquer caso, a Eq. 5-34 fornece

$$\begin{aligned} N &= m(g + a) = (72,2 \text{ kg})(9,80 \text{ m/s}^2 + 3,20 \text{ m/s}^2) \\ &= 939 \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

O passageiro pressiona a balança para baixo com uma força maior do que a exercida no repouso. Ele pode concluir — pela leitura da balança — que ganhou 231 N!

c. Qual a leitura na balança, se o elevador tiver uma aceleração de 3,20 m/s^2 para baixo? (Veja Fig. 5-30c.)

Solução Uma aceleração para baixo significa que o elevador está aumentando a velocidade para baixo ou diminuindo-a para cima. A Eq. 5-34 fornece

$$\begin{aligned} N &= m(g + a) = (72,2 \text{ kg})(9,80 \text{ m/s}^2 - 3,20 \text{ m/s}^2) \\ &= 477 \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

O passageiro pressiona a balança para baixo com menos força do que a exercida com o elevador em repouso. Ele parece ter perdido 231 N.

d. Qual a leitura da balança, se o cabo romper e o elevador cair em queda livre? (Veja Fig. 5-30d.)

Solução Nesse caso, o passageiro e a balança estão em queda livre, com $a = -g$. Da Eq. 5-34, temos

$$N = m(g + a) = m(g - g) = 0. \quad (\text{Resposta})$$

Logo, em queda livre, a leitura da balança indica zero, e o passageiro, em seu referencial acelerado, conclui que não tem peso. Esta é a mesma sensação de perda de peso que os astronautas experimentam na órbita da Terra. Em ambos os casos (passageiro do elevador ou astronauta), o sentimento de perda de peso resulta *não* porque a força gravitacional tenha deixado de atuar — pois ela não deixa — mas porque o veículo (elevador ou cápsula espacial) e seus ocupantes estão, ambos, em queda livre com a *mesma* aceleração.

e. O que aconteceria se o elevador fosse puxado (para baixo) com uma aceleração de $-12,0 \text{ m/s}^2$? (Veja Fig. 5-30e.)

Solução Essa é uma aceleração maior do que a aceleração da gravidade. Da Eq. 5-34, vem

$$\begin{aligned} N &= m(g + a) = (72,2 \text{ kg})(9,80 \text{ m/s}^2 - 12,0 \text{ m/s}^2) \\ &= -159 \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Se a balança estivesse fixada no chão do elevador e os pés do passageiro presos a ela, a leitura apresentada seria negativa, ou seja, -159 N . Se o passageiro soltasse seus pés, ele subiria dentro do elevador até sua cabeça tocar o teto e empurrá-lo com uma força de 159 N. Observando a partir de um referencial inercial, o passageiro poderia cair em queda livre até sua cabeça tocar o teto.

RESUMO

Mecânica

A velocidade de uma partícula ou de um corpo representado por uma partícula varia — isto é, a partícula acelera — porque há uma ou mais forças atuando sobre ela — empurrando ou puxando — devido à inte-

ração com outros objetos. A **mecânica** é o estudo das relações entre acelerações e forças. Nesse estudo procuramos descobrir as **leis de força**, com as quais podemos calcular as forças que atuam sobre um corpo, a partir das propriedades deste corpo e do meio no qual se situa.

Força

As intensidades das forças são definidas em termos da aceleração fornecida ao quilograma-padrão. Uma força que imprima uma aceleração de 1 m/s^2 a um corpo-padrão é definida como uma força de módulo igual a 1 N. A força tem o mesmo sentido da aceleração. As forças são, experimentalmente, consideradas como grandezas vetoriais, de forma que sobre elas operamos de acordo com as regras da álgebra vetorial. A **força resultante** em um corpo é a soma vetorial de todas as forças que atuam naquele corpo.

Massa

A **massa** m de um corpo é a característica que relaciona a sua aceleração com a força (ou força resultante) que causa essa aceleração. A massa é uma grandeza escalar.

Primeira Lei de Newton

Se a força resultante sobre um corpo é nula, ele deve permanecer em repouso ou em movimento retílineo com velocidade constante, conforme esteja em repouso ou em movimento, respectivamente. Para este corpo, há um sistema de referência chamado de *referencial inercial*, no qual sua aceleração a vem a ser zero. Medidas de a , em relação a outros referenciais não-inerciais, indicarão uma força inexistente sobre o corpo.

Segunda Lei de Newton

A força resultante $\sum F$ sobre um corpo de massa m está relacionada com a sua aceleração a por

$$\sum F = ma, \quad (5-1)$$

que pode ser escrita em suas componentes escalares:

$$\sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y, \quad \text{e} \quad \sum F_z = ma_z, \quad (5-2)$$

Em unidades SI, a segunda lei indica que

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2. \quad (5-3)$$

O **diagrama de corpo isolado** é útil na resolução de problemas utilizando a segunda lei de Newton: é um diagrama detalhado no qual somente *um* corpo é considerado. Este corpo é representado por um ponto. As forças externas sobre o corpo são representadas como vetores e um sistema de coordenadas é estabelecido, orientado de forma a simplificar a solução.

Algumas Forças Específicas

O **peso** P de um corpo é a força que atua sobre o corpo devido à interação deste corpo com o corpo astronômico mais próximo:

$$P = mg, \quad (5-8)$$

onde g é o vetor aceleração da gravidade. Geralmente, esse corpo astronômico é a Terra.

A **força normal** N é a força exercida sobre um corpo pela superfície contra a qual ele é pressionado. A força normal é sempre perpendicular a esta superfície.

A **força de atrito** f é a força exercida sobre um corpo, quando este desliza ou tenta deslizar sobre uma superfície. A força é paralela à superfície e se opõe ao movimento do corpo. Uma **superfície sem atrito** é aquela na qual a força de atrito é desprezível.

A **tensão** (ou tração) T é a força exercida por uma corda esticada sobre um corpo, no ponto de conexão. A força é direcionada para fora do corpo, ao longo da corda. Para cordas **sem massa** (sua massa é desprezível) a tensão, em ambas as extremidades da corda, tem a mesma magnitude T , mesmo que a corda passe ao redor de uma **polia sem massa e sem atrito** (sua massa é desprezível e o atrito em seu eixo é desconsiderado).

Terceira Lei de Newton

Se o corpo A exerce uma força F_{BA} sobre o corpo B , então B deve exercer uma força F_{AB} sobre o corpo A . As forças têm o mesmo módulo e sentidos contrários:

$$F_{AB} = -F_{BA}. \quad (5-12)$$

Essas forças atuam em corpos *diferentes*.

QUESTIONÁRIO

- Se você estiver em pé, voltado para a frente, dentro de um ônibus ou metrô em movimento, por que uma rápida desaceleração faz você tombar para a frente e uma rápida aceleração joga você para trás? Por que, se ficar voltado para a lateral do ônibus ou metrô, você tem um melhor equilíbrio?
- Usando a primeira lei de Newton, explique o que acontece a uma criança, sentada no banco dianteiro de um carro, sem usar o cinto de segurança, quando o motorista pisca no freio, de repente. Ao invés disso, suponha que a criança está no colo de um adulto que não faz uso do cinto de segurança; se o carro parar de repente, a criança fica segura nos braços do adulto ou, na realidade, corre mais perigo? O que acontece com uma pessoa que viaja na carroceria de um caminhão, se o veículo parar repentinamente?
- Um bloco de massa m está preso ao teto por um cordão C , e um outro cordão D está preso ao fundo do bloco (Fig. 5-31). Explique: se for dado um rápido puxão em D ele arrebentará; mas se aumentarmos a tração em D progressivamente, C arrebentará.
- Se duas forças atuam num corpo em movimento, há alguma maneira do corpo se mover com (a) velocidade escalar constante ou (b) com velocidade constante? De alguma forma a velocidade poderia ser zero (c) por um instante ou (d) continuamente?
- O manual do proprietário de um determinado carro sugere que o cinto de segurança deve ser ajustado "para prender confortavelmente" e que

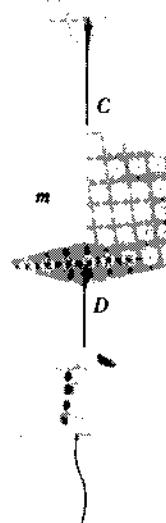


Fig. 5-31 Questão 3.

o apoio de cabeça do banco dianteiro *não* deve apoiar confortavelmente a parte de trás do pescoço, ele deve ser ajustado de forma que "o alto do encosto fique na altura de suas orelhas". Explique o bom senso desse instruções em função das leis de Newton.

6. Um francês, ao preencher um formulário, escreve "78 kg" na lacuna marcada *Poids* (peso). Entretanto, peso é uma força e quilograma é uma unidade de massa. O que o francês (entre outros) tem em mente, quando usa uma unidade de massa para informar o seu peso? Por que ele não informa o seu peso em newtons? Quantos newtons o francês pesa? Quantas libras?

7. Qual a sua massa em slugs? Qual o seu peso em newtons?

8. Usando a força, o comprimento e o tempo como grandezas fundamentais, determine as dimensões da massa.

9. Um cavalo é obrigado a puxar uma carroça. Ele refuga e invoca, em sua defesa, a terceira lei de Newton: a força do cavalo sobre a carroça é igual e de sentido contrário à força da carroça sobre o cavalo. "Se eu não posso exercer sobre a carroça uma força maior do que a que ela exerce sobre mim, como posso colocar a carroça em movimento?" — pergunta o cavalo. Como você responderia?

10. Comentar se os seguintes pares de força são exemplos de ação e reação: (a) A Terra atrai um tijolo; o tijolo atrai a Terra. (b) A turbina de um avião empurra o ar em direção à cauda; o ar empurra o avião para a frente. (c) Um cavalo puxa uma carroça para frente, movimentando-a; a carroça puxa o cavalo para trás. (d) Um cavalo puxa uma carroça para frente, sem movimentá-la; a carroça puxa o cavalo para trás. (e) Um cavalo puxa uma carroça para a frente, sem movimentá-la; a Terra exerce uma força igual e de sentido oposto sobre a carroça. (f) A Terra puxa a carroça para baixo; o chão empurra a carroça para cima com a mesma força e sentido oposto.

11. Comente, de acordo com as afirmativas abaixo sobre peso e massa, extraídas de provas. (a) Massa e peso são as mesmas quantidades físicas expressas em diferentes unidades. (b) Massa é uma propriedade de um único objeto, enquanto o peso resulta de uma interação de dois objetos. (c) o peso de um objeto é proporcional à sua massa. (d) A massa de um corpo varia de acordo com mudanças em seu peso local.

12. Descreva várias maneiras pelas quais você poderia experimentar, mesmo que rapidamente, a ausência de peso.

13. O braço mecânico de um ônibus espacial pode ser esticado até 12 m e manipular um satélite de 2.200 kg. Contudo, no solo, este sistema manipulador remoto (RMS) não suporta seu próprio peso. Por que o RMS seria capaz de exercer qualquer força nas condições de ausência de peso em órbita?

14. Na Fig. 5-32 há quatro forças de intensidade igual. Você pode fazer com que três delas, atuando sobre um corpo, o mantenham em velocidade constante?

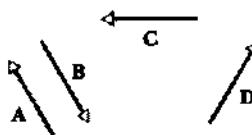


Fig. 5-32 Questão 14.

15. Um elevador é suportado por um único cabo. Não existe contrapeso. O elevador transporta passageiros do térreo ao nível superior, onde esses passageiros desembarcam, dando lugar a novos passageiros, que são levados ao térreo. Em que momento, dessa viagem de ida e volta, a tensão no cabo é igual ao peso do elevador mais o dos passageiros? Quando ela é maior? Quando é menor?

16. Você está na plataforma do ônibus espacial *Discovery*, num voo orbital, e alguém lhe passa duas bolas de madeira aparentemente idênticas.

cas. Uma delas, entretanto, tem um núcleo de chumbo. Descreva as várias maneiras de distingui-las.

17. Você é um astronauta na sala de estar de uma estação espacial em órbita e remove a tampa de uma jarra fina e comprida que contém uma única azeitona. Descreva diversas maneiras de remover a azeitona da jarra — sempre tirando proveito da massa da jarra ou da azeitona.

18. Uma força horizontal é aplicada a um corpo que pode se mover livremente. Tal força consegue acelerar o corpo, se for menor do que o seu peso?

19. Por que a aceleração de um objeto em queda livre não depende do seu peso?

20. Qual a relação — se houver — entre a força aplicada a um objeto e o sentido no qual ele se move?

21. Um pássaro pousa num fio telegráfico esticado. Isto muda o tensionamento no fio? Se mudar, esta variação é menor, igual ou maior do que o peso do pássaro?

22. Em novembro de 1984, os astronautas Joe Allen e Dale Gardner resgataram, no espaço, o satélite de comunicação *Westar-6* e o colocaram no compartimento de carga do ônibus espacial *Discovery*; veja Fig. 5-33. Ao descrever a experiência sobre o satélite, Joe Allen falou: "Ele não é pesado; é massivo." O que ele quis dizer?

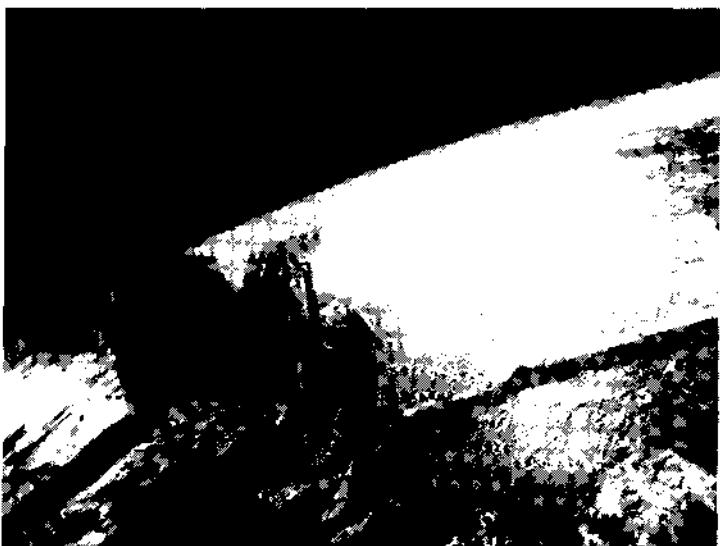


Fig. 5-33 Questão 22. Os astronautas Joe Allen e Dale Gardner.

23. Num cabo-de-guerra, três homens puxam uma corda no ponto A para a esquerda, e três homens puxam no ponto B para a direita, com a mesma força. Nessa situação, um peso de 2 kg é pendurado no centro da corda. (a) Os homens conseguem manter a corda AB na horizontal? (b) Se negativo, explique. Se positivo, determine as intensidades das forças em A e B necessárias para isso.

24. A seguinte afirmação é verdadeira; explique-a. Duas equipes disputam um cabo-de-guerra; a equipe que empurra com mais força (horizontalmente) contra o solo é a vencedora.

25. Uma corda sem massa está suspensa por uma polia sem atrito. Um macaco está pendurado numa das extremidades da corda e, na outra, um espelho, com o mesmo peso, na mesma altura do macaco. Este se afasta da sua imagem no espelho (a) subindo pela corda, (b) descendo pela corda ou (c) se soltando da corda?

26. Você está de pé em cima da plataforma de uma balança de mola e observa o seu peso. Quando dá um passo sobre esta balança, observa que seu peso é menor no início do passo e maior no final. Explique.

27. Poderíamos nos pesar numa balança cuja leitura máxima fosse menor que o nosso peso? Em caso afirmativo, como?

28. Um peso está suspenso por um cordão no alto do teto de um elevador. Ordene as seguintes situações, de acordo com as tensões produzidas no cordão, listando primeiro a maior: (a) elevador em repouso; (b) elevador subindo com velocidade constante; (c) elevador descendo com desaceleração; (d) elevador descendo acelerado.

29. Uma mulher está em pé sobre uma balança de mola, dentro de um elevador. Ordene as situações de acordo com a leitura da escala da balança, listando primeiro a de maior leitura: (a) elevador parado; (b) rompimento do cabo do elevador (queda livre); (c) elevador acelerando para cima; (d) elevador acelerando para baixo; (e) elevador se movendo em velocidade constante.

30. Sob que condições diferentes massas podem ficar suspensas numa polia, sem fazê-la se mover.

31. Em cada extremidade do cabo de uma vassoura foi colocada uma agulha e a ponta de cada uma foi apoiada na borda de duas finas taças

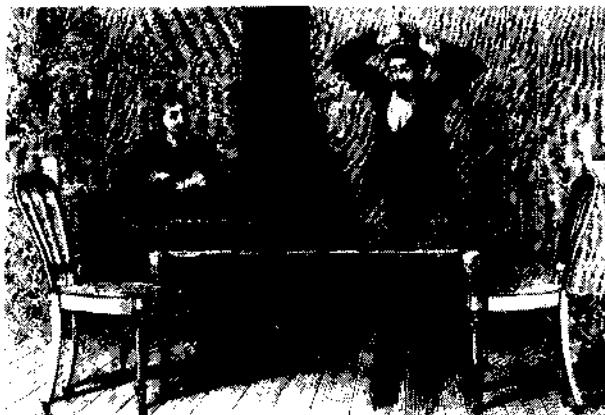


Fig. 5-34 Questão 31.

com vinho, conforme mostrado na Fig. 5-34. Um homem desfere, sobre o cabo de vassoura, um rápido e violento golpe com um sólido bastão. O cabo de vassoura quebra e cai ao chão, mas as taças de vinho permanecem no mesmo lugar e nenhum vinho é derramado. Esta impressionante demonstração pública tornou-se popular no final do último século. Qual a física que está por trás disso? (Se quiser tentar, pratique primeiro com latas de refrigerante vazias.)

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

Seção 5-3 Força

1E. Se o corpo padrão de 1 kg tem uma aceleração de $2,00 \text{ m/s}^2$, fazendo um ângulo de 20° com o semi-eixo positivo x , então, (a) quais são as componentes x e y da força resultante sobre o corpo e (b) qual a força resultante, em notação de vetores unitários?

2E. Se o corpo padrão de 1 kg é acelerado por $\mathbf{F}_1 = (3,0 \text{ N})\mathbf{i} + (4,0 \text{ N})\mathbf{j}$ e $\mathbf{F}_2 = (-2,0 \text{ N})\mathbf{i} + (-6,0 \text{ N})\mathbf{j}$, então, (a) qual a força resultante, em notação de vetores unitários, e qual o módulo e o sentido (b) da força resultante e (c) da aceleração?

3P. Suponha que o corpo padrão de 1 kg é acelerado a $4,00 \text{ m/s}^2$, fazendo um ângulo de 160° com o semi-eixo positivo x , devido a duas forças, sendo uma delas $\mathbf{F}_1 = (2,50 \text{ N})\mathbf{i} + (4,60 \text{ N})\mathbf{j}$. Qual é a outra força em (a) notação de vetores unitários e (b) módulo e sentido?

Seção 5-5 Segunda Lei de Newton

4E. Duas forças são aplicadas sobre uma partícula que se move continuamente com velocidade $\mathbf{v} = (3 \text{ m/s})\mathbf{i} - (4 \text{ m/s})\mathbf{j}$. Uma das forças é $\mathbf{F}_1 = (2 \text{ N})\mathbf{i} + (-6 \text{ N})\mathbf{j}$. Qual é a outra força?

5E. Três forças são aplicadas sobre uma partícula que se move com velocidade constante $\mathbf{v} = (2 \text{ m/s})\mathbf{i} - (7 \text{ m/s})\mathbf{j}$. Duas das forças são $\mathbf{F}_1 = (2 \text{ N})\mathbf{i} + (3 \text{ N})\mathbf{j} + (-2 \text{ N})\mathbf{k}$ e $\mathbf{F}_2 = (-5 \text{ N})\mathbf{i} + (8 \text{ N})\mathbf{j} + (-2 \text{ N})\mathbf{k}$. Qual é a terceira força?

6E. Na caixa de 2,0 kg, da Fig. 5-35, são aplicadas duas forças, mas somente uma é mostrada. A caixa se move exatamente sobre o eixo x .



Fig. 5-35 Exercício 6.

Determine a segunda força para os seguintes valores da componente a_x da aceleração da caixa: (a) 10 m/s^2 ; (b) 20 m/s^2 ; (c) 0; (d) -10 m/s^2 e (e) -20 m/s^2 .

7E. Na caixa de 2,0 kg, da Fig. 5-36, são aplicadas duas forças, mas somente uma é mostrada. A aceleração da caixa também é mostrada na figura. Determine a segunda força (a) em notação de vetores unitários e (b) em módulo e sentido.

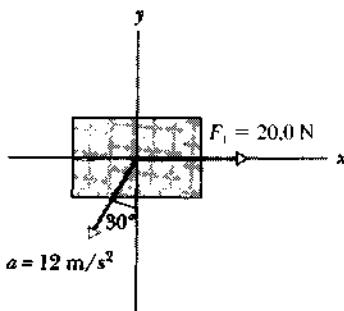


Fig. 5-36 Exercício 7.

8E. Cinco forças são aplicadas sobre uma caixa de 4,0 kg, conforme a Fig. 5-37. Determine a aceleração da caixa (a) em notação de vetores unitários e (b) em módulo e sentido.

9P. Três astronautas, movidos por mochilas jato-propulsadas, guiam um asteroide de 120 kg empurrando-o para uma doca de processamento, aplicando as forças mostradas na Fig. 5-38. Qual é a aceleração do asteroide (a) em notação de vetores unitários e (b) em módulo e sentido?

10P. A Fig. 5-39 é uma vista de cima de um pneu de 12 kg puxado por três cordas. Uma força está indicada (\mathbf{F}_1 , com módulo de 50 N). Oriente

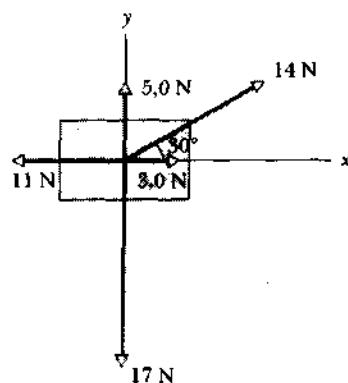


Fig. 5-37 Exercício 8.

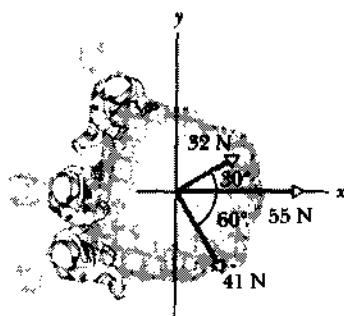


Fig. 5-38 Problema 9.

as outras duas forças, F_2 e F_3 , de forma que o módulo da aceleração resultante seja o menor, e determine o módulo se (a) $F_2 = 30\text{ N}$, $F_3 = 20\text{ N}$; (b) $F_2 = 30\text{ N}$, $F_3 = 10\text{ N}$; e (c) $F_2 = F_3 = 30\text{ N}$.



Fig. 5-39 Problema 10.

Seção 5-6 Algumas Forças Específicas

11E. Quais são a massa e o peso de (a) um trenó de 630 kg e (b) de uma bomba térmica de 421 kg?

12E. Quais são o peso em newtons e a massa em quilogramas de (a) um saco de açúcar de 2,25 kg, (b) um jogador de 108 kg e (c) um automóvel de 1,8 ton?

13E. Um astronauta com 75 kg de massa deixa a Terra. Calcule seu peso (a) na Terra, (b) em Marte, onde $g = 3.8\text{ m/s}^2$, e (c) no espaço interestelar, onde $g = 0$. (d) Qual a sua massa em cada um desses locais?

14E. Uma determinada partícula tem um peso de 22 N num ponto onde $g = 9.8\text{ m/s}^2$. (a) Quais são o peso e a massa da partícula, se ela for para um ponto do espaço onde $g = 4.9\text{ m/s}^2$? (b) Quais são o peso e a massa da partícula, se ela for deslocada para um ponto do espaço onde a aceleração de queda livre seja nula?

15E. Um pinguim com 15,0 kg de massa está sobre uma balança de banheiro (Fig. 5-40). Qual (a) o peso \mathbf{P} do pinguim e (b) a força normal \mathbf{N} sobre o pinguim? (c) Qual a leitura da balança, supondo que ela está calibrada em unidades de peso?



Fig. 5-40 Exercício 15.

16E. Um móbil grosseiro pende de um teto com duas peças metálicas presas por uma corda de massa desprezível, conforme a Fig. 5-41. São dadas as massas das peças. Qual a tensão (a) na corda inferior e (b) na corda superior?

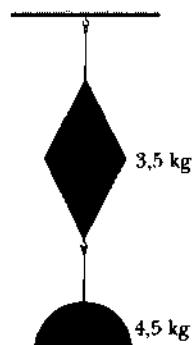


Fig. 5-41 Exercício 16.

17E. A Fig. 5-42 mostra um móbil de três peças, preso por uma corda de massa desprezível. São dadas as massas das peças superior e inferior. A tensão no topo da corda é 199 N. Qual a tensão (a) no pedaço inferior da corda e (b) no trecho médio da corda?

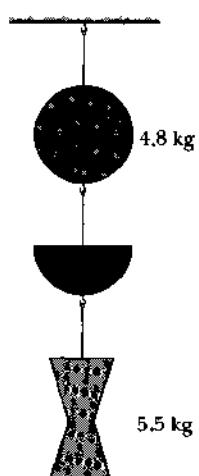


Fig. 5-42 Exercício 17.

18E. (a) Um salame de 11,0 kg está preso por uma corda a uma balança de mola, que está presa ao teto por outra corda (Fig. 5-43a). Qual a leitura na balança? (b) Na Fig. 5-43b, o salame está suspenso por uma corda que passa por uma roldana e se prende a uma balança de mola que, por sua vez, está presa à parede por outra corda. Qual a leitura na balança? (c) Na Fig. 5-43c, a parede foi substituída por um outro salame de 11,0 kg, à esquerda, e o conjunto ficou equilibrado. Qual a leitura na balança agora?

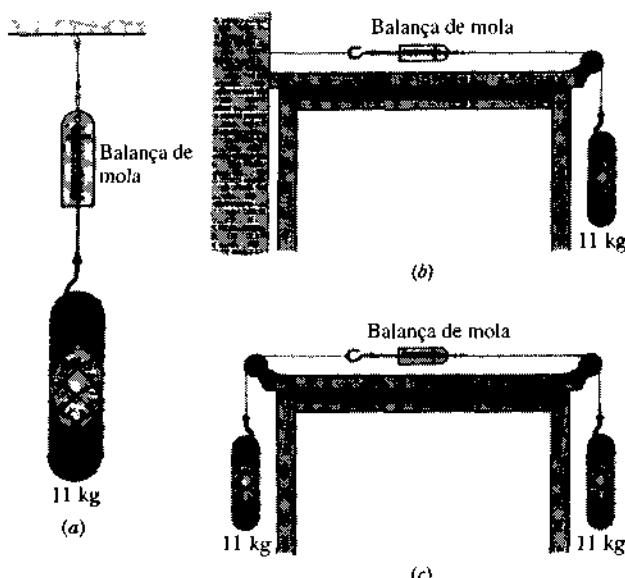


Fig. 5-43 Exercício 18.

Seção 5-8 Aplicação das Leis de Newton

19E. Quando um avião está em voo nivelado, seu peso é equilibrado por uma “sustentação” vertical, que é uma força exercida pelo ar. Com que intensidade esta força atua sobre o avião nessa condição, se sua massa é $1,20 \times 10^3$ kg?

20E. Qual a intensidade da força resultante aplicada a um automóvel de 1,7 ton, com aceleração de $3,6 \text{ m/s}^2$?

21E. Um foguete experimental pode partir do repouso e alcançar a velocidade de 1.600 km/h em 1,8 s, com aceleração constante. Qual a intensidade da força média necessária, se a massa do veículo é 500 kg?

22E. Um carro se movendo a 53 km/h bate num pilar de uma ponte. Um passageiro é lançado a uma distância de 65 cm para a frente (em relação à estrada), enquanto sua vida é salva por uma bolsa inflável de ar. Qual a intensidade da força (suposta constante) aplicada à parte superior do tronco do passageiro, que tem 41 kg de massa?

23E. Se um neutrônio livre é capturado por um núcleo, ele pode ser parado no interior do núcleo por uma *força forte*. Esta força, que mantém o núcleo coeso, é nula fora do núcleo. Suponha que um neutrônio livre com velocidade inicial de $1,4 \times 10^7 \text{ m/s}$ acaba de ser capturado por um núcleo com diâmetro $d = 1,0 \times 10^{-14} \text{ m}$. Admitindo que a força sobre o neutrônio é constante, determine a sua intensidade. A massa do neutrônio é $1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

24E. O feixe de luz do canhão laser de um satélite atinge um míssil balístico, acidentalmente lançado (Fig. 5-44). O feixe exerce uma força de $2,5 \times 10^{-5} \text{ N}$ sobre o míssil. Se o “tempo de incidência” do feixe

sobre o míssil for 2,3 s, de quanto o míssil será deslocado de sua trajetória se tiver (a) uma ogiva de 280 kg e (b) um chamariz de 2,1 kg? (Esses deslocamentos podem ser medidos pela observação do feixe refletido.)

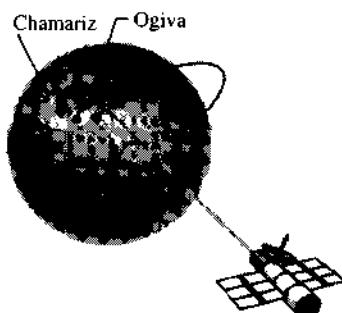


Fig. 5-44 Exercício 24.

25E. Num jogo de cabo-de-guerra modificado, duas pessoas puxam em sentidos opostos, não uma corda, mas um trenó de 25 kg parado numa estrada congelada. Se as pessoas exercerem forças de 90 N e 92 N, qual será o módulo da aceleração do trenó?

26E. Uma motocicleta de 202 kg alcança 90 km/h em 6,0 s, a partir do repouso. (a) Qual o módulo da sua aceleração? (b) Qual o módulo da força resultante sobre ela (suposta constante)?

27E. Com base na Fig. 5-20, suponha que as duas massas são $m = 2,0 \text{ kg}$ e $M = 4,0 \text{ kg}$. (a) Descubra, sem qualquer cálculo, qual delas deve estar suspensa para o módulo da aceleração ser máximo. Quais são (b) o módulo e (c) a tensão na corda?

28E. Veja a Fig. 5-27. Vamos considerar a massa do bloco igual a 8,5 kg e o ângulo $\theta = 30^\circ$. Determine (a) a tensão na corda e (b) a força normal aplicada sobre o bloco. (c) Determine o módulo da aceleração do bloco, se a corda for cortada.

29E. Um avião a jato, parado numa pista, inicia a decolagem acelerando a $2,3 \text{ m/s}^2$. Ele tem duas turbinas, que exercem uma força (de empuxo) de $1,4 \times 10^5 \text{ N}$, cada uma, sobre o avião. Qual o peso do avião?

30E. O “iate solar” *Sunjamming* é um veículo espacial com uma grande vela, que é impulsionado pela luz do Sol. Embora esta propulsão seja muito pequena nas atuais circunstâncias, é suficientemente grande para afastar o veículo espacial do Sol a custo zero. Suponha que essa espaçonave tenha 900 kg de massa e receba uma força de 20 N. (a) Qual o módulo da aceleração resultante? Se o veículo parte do repouso, (b) qual a distância que ele viaja em 1 dia e (c) qual será a sua velocidade?

31E. A tensão na qual uma linha de pesca arrebenta é, geralmente, chamada de “resistência” da linha. Qual a resistência mínima necessária para uma linha que pára, num espaço de 11,0 cm, um salmão de 8,5 kg, se o peixe está nadando com uma velocidade de $2,8 \text{ m/s}$? Admita uma desaceleração constante.

32E. Um elétron percorre uma trajetória retilínea de exatamente 1,5 cm, entre o “catodo” e o “anodo” de uma “válvula eletrônica”. Ele parte com velocidade igual a zero e alcança o anodo com velocidade de $6,0 \times 10^6 \text{ m/s}$. (a) Admita que a aceleração é constante e calcule o módulo da força sobre o elétron. (A força é elétrica, mas este dado não é necessário.) A massa do elétron é $9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$. (b) Calcule o peso do elétron.

33E. Um elétron é lançado horizontalmente com velocidade de $1,2 \times 10^7 \text{ m/s}$ no interior de um campo elétrico, que exerce sobre ele uma força vertical constante de $4,5 \times 10^{-16} \text{ N}$. A massa do elétron é $9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$. Determine a distância vertical de deflexão do elétron, no intervalo de tempo em que ele percorre 30 mm, horizontalmente.

34E. Um carro que pesa 1.30×10^4 N está se movendo, inicialmente, com uma velocidade de 40 km/h, quando os freios são aplicados e ele pára após 15 m. Supondo que o carro é parado por uma força constante, determine (a) a magnitude desta força e (b) o tempo necessário para mudar a velocidade. Se, por outro lado, a velocidade inicial dobrar e o carro for submetido à mesma força durante a parada, qual (c) a distância de frenagem e (d) a variação do tempo de parada? (Isto poderá servir como lição acerca do perigo de se dirigir em altas velocidades.)

35P. Calcule a aceleração inicial de subida de um foguete com 1.3×10^4 kg de massa, se a força inicial de subida, produzida pelos seus motores (o empuxo), é 2.6×10^6 N. O peso do foguete não deve ser desprezado.

36E. Um foguete e sua carga têm uma massa total de 5.0×10^4 kg. Qual a magnitude da força produzida pelo motor (o empuxo) quando (a) o foguete está "planando" sobre a plataforma de lançamento, logo após a ignição, e (b) o foguete está acelerando para cima a 20 m/s^2 ?

37P. Um bombeiro de 72 kg desliza num poste vertical, diretamente para baixo, com uma aceleração de 3 m/s^2 . Quais são os módulos e sentidos das forças verticais (a) exercidas pelo poste sobre o bombeiro e (b) exercidas pelo bombeiro sobre o poste?

38P. Uma esfera de massa 3.0×10^{-4} kg está suspensa por uma corda. Uma brisa horizontal constante empurra a esfera de maneira que ela faça um ângulo de 37° com a vertical de repouso da mesma. Determine (a) a intensidade da força aplicada e (b) a tensão na corda.

39P. Uma moça de 40 kg e um trenó de 8,4 kg estão sobre a superfície de um lago gelado, separados por 15 m. A moça aplica sobre o trenó uma força horizontal de 5,2 N, puxando-o por uma corda, em sua direção. (a) Qual a aceleração do trenó? (b) Qual a aceleração da moça? (c) A que distância, em relação à posição inicial da moça, eles se juntam, supondo nulas as forças de atrito?

40P. Dois blocos estão em contato sobre uma mesa sem atrito. Uma força horizontal é aplicada a um dos blocos, como mostrado na Fig. 5-45. (a) Se $m_1 = 2.3$ kg, $m_2 = 1.2$ kg e $F = 3.2$ N, determine a força de contato entre os dois blocos. (b) Mostre que, se a mesma força F for aplicada a m_2 , ao invés de m_1 , a força de contato entre os dois blocos é 2,1 N, que não é o mesmo valor obtido em (a). Explique a diferença.

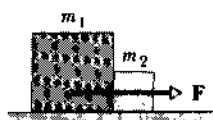


Fig. 5-45 Problema 40.

41P. Um trabalhador arrasta um caixote pelo chão de uma fábrica, puxando-o por uma corda (Fig. 5-46). Ele exerce sobre a corda, que faz um ângulo de 38° com a horizontal, uma força de 450 N, e o chão exerce uma

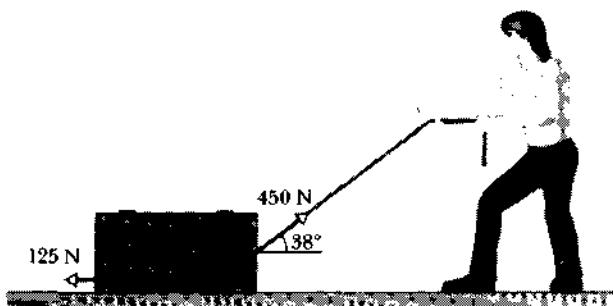


Fig. 5-46 Problema 41.

força horizontal de 125 N que se opõe ao movimento. Calcule a aceleração do caixote (a) se sua massa for 310 kg e (b) se seu peso for 310 N.

42P. Você puxa um pequeno refrigerador com uma força constante \mathbf{F} através de um chão lubrificado (sem atrito), com \mathbf{F} horizontal (caso 1) ou com \mathbf{F} inclinada para cima com um ângulo θ (caso 2). (a) Qual a razão entre a velocidade do refrigerador, no caso 2, e sua velocidade no caso 1, se ele for puxado por um certo tempo T ? (b) Qual é esta razão, se for puxado por uma certa distância d ?

43P. Um tatu de 12 kg corre, por divertimento, por cima de um grande lago gelado de superfície plana, sem atrito, com velocidade inicial de 5.0 m/s , no sentido positivo do eixo x . Considere sua posição inicial sobre o gelo como sendo a origem. Ele escorrega sobre o gelo, enquanto é empurrado por um vento de força igual a 17 N, no sentido positivo do eixo y . Usando a notação de vetores unitários, quais são (a) seu vetor velocidade e (b) seu vetor posição, depois de ter deslizado por 3.0 s ?

44P. Um elevador e sua carga, juntos, têm massa de 1.600 kg. Determine a tensão no cabo de sustentação, quando o elevador, inicialmente descendo a 12 m/s , é parado numa distância de 42 m com aceleração constante.

45P. Um objeto está pendurado numa balança de mola presa ao teto de um elevador. A balança marca 65 N, quando o elevador ainda está parado. (a) Qual a indicação na balança, quando o elevador está subindo com uma velocidade constante de 7.6 m/s ? (b) Qual a indicação na balança, quando o elevador, subindo com uma velocidade de 7.6 m/s , é desacelerado à razão de 2.4 m/s^2 ?

46P. Um motor a jato de 1.400 kg é fixado à fuselagem de um avião de passageiros por apenas três parafusos (esta é a prática usual). Suponha que cada parafuso suporte um terço da carga. (a) Calcule a força em cada parafuso, enquanto o avião espera na pista para decolar. (b) Durante o voo, o avião enfrenta turbulência que, de repente, implica numa aceleração vertical para cima de 2.6 m/s^2 . Calcule a força em cada parafuso, nesta condição.

47P. Na Fig. 5-47, um helicóptero de 15.000 kg está levantando um caminhão de 4.500 kg, com uma aceleração para cima de 1.4 m/s^2 . Calcule (a) a força que o ar exerce nas pás das hélices e (b) a tensão na parte superior do cabo.



Fig. 5-47 Problema 47.

48P. Um homem de 80 kg pula para um pátio, da beirada de uma janela que está a apenas 0,50 m acima do solo. Ele esqueceu de dobrar seus joelhos, quando aterrissou, e o seu movimento cessou numa distância de 2,0 cm. (a) Qual a aceleração média do homem, entre o primeiro instante em

que seus pés tocaram o chão, ao instante em que ficou completamente parado? (b) Qual a força que o pulo transmitiu à sua estrutura óssea?

49P. Três blocos são conectados, como na Fig. 5-48, sobre uma mesa horizontal, sem atrito, e puxados para a direita com uma força $T_1 = 65,0 \text{ N}$. Se $m_1 = 12,0 \text{ kg}$, $m_2 = 24,0 \text{ kg}$ e $m_3 = 31,0 \text{ kg}$, calcule (a) a aceleração do sistema e (b) as tensões T_1 e T_2 .

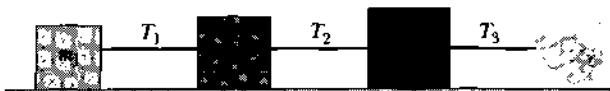


Fig. 5-48 Problema 49.

50P. A Fig. 5-49 mostra quatro pinguins que estão sendo puxados pelo brincadeira, sobre uma superfície de gelo escorregadia (sem atrito). São dadas as massas de três pinguins e a tensão em dois trechos da corda. Determine a massa que não foi dada.

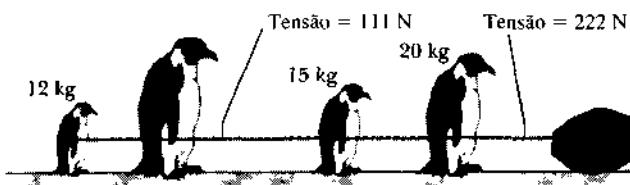


Fig. 5-49 Problema 50.

51P. Um elevador pesando 2.800 kg é puxado para cima, por um cabo, com uma aceleração de $1,2 \text{ m/s}^2$. (a) Calcule a tensão no cabo. (b) Qual a tensão no cabo, quando o elevador, ainda subindo, desacelera a $1,2 \text{ m/s}^2$?

52P. Uma pessoa de 80 kg salta de pára-quedas e experimenta uma aceleração, para baixo, de $2,5 \text{ m/s}^2$. O pára-quedas tem $5,0 \text{ kg}$ de massa. (a) Qual a força exercida, para cima, pelo ar sobre o pára-quedas? (b) Qual a força exercida, para baixo, pela pessoa sobre o pára-quedas?

53P. Um homem de 85 kg desce de uma altura de $10,0 \text{ m}$ preso a uma corda que passa por uma polia, sem atrito, e tem na outra extremidade um saco de areia de 65 kg . (a) Partindo do repouso, com que velocidade o homem chega ao solo? (b) Ele poderia fazer alguma coisa para reduzir a velocidade com que chega ao solo?

54P. Um novo jato naval americano de 26 ton (Fig. 5-50) necessita de uma velocidade de vôo de 84 m/s para decolar. Sua turbina desenvolve uma força máxima de 10.800 kgf , que é insuficiente para fazê-lo decolar nos 90 m de pista disponíveis em um porta-aviões. Qual a força mínima necessária (suposta constante) na catapulta que é usada para auxiliar o lançamento do jato? Admita que a catapulta e a turbina do avião exerçam, individualmente, uma força constante nos 90 m de pista.

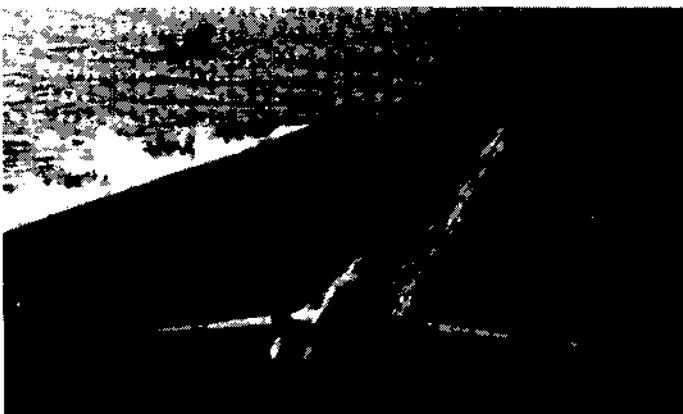


Fig. 5-50 Problema 54.

iliar o lançamento do jato? Admita que a catapulta e a turbina do avião exerçam, individualmente, uma força constante nos 90 m de pista.

55P. Imagine um módulo de aterrissagem se aproximando da superfície de Callisto, uma das luas de Júpiter. Se o motor fornece uma força para cima (empuxo) de 3.260 N , o módulo desce com velocidade constante; se o motor fornece apenas 2.200 N , o módulo desce com uma aceleração de $0,39 \text{ m/s}^2$. (a) Qual o peso do módulo de aterrissagem nas proximidades da superfície de Callisto? (b) Qual a massa do módulo? (c) Qual a aceleração em queda livre, próxima à superfície de Callisto?

56P. Um artista de circo de 52 kg escorrega por uma corda, que arrebentará se a tensão exceder 425 N . (a) O que acontece se o artista ficar pendurado na corda? (b) Qual a intensidade da aceleração mínima permitida ao artista para evitar o rompimento da corda?

57P. Uma corrente formada por cinco elos, com massa de $0,100 \text{ kg}$ cada um, é levantada verticalmente com uma aceleração constante de $2,50 \text{ m/s}^2$, como mostrado na Fig. 5-51. Determine (a) as forças que atuam entre elos adjacentes. (b) a força F exercida sobre o elo superior pela pessoa que levanta a corrente e (c) a força resultante que acelera cada elo.



Fig. 5-51 Problema 57.

58P. Um bloco de massa $m_1 = 3,70 \text{ kg}$ está sobre um plano com $30,0^\circ$ de inclinação, sem atrito, preso por uma corda que passa por uma polia, de massa e atrito desprezíveis, e tem na outra extremidade um segundo bloco de massa $m_2 = 2,30 \text{ kg}$, pendurado verticalmente (Fig. 5-52). Quais são (a) os módulos das acelerações de cada bloco e (b) o sentido da aceleração de m_2 ? (c) Qual a tensão na corda?

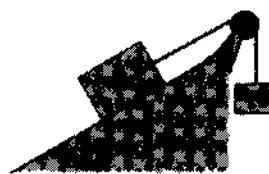


Fig. 5-52 Problema 58.

59P. Você precisa levar para o chão uma sucata de material de construção de telhado que pesa 45 kg , utilizando uma corda que arrebentará se a tensão exceder 39 kg . (a) Como você pode evitar o rompimento da corda durante a descida? (b) Se a altura é 6 m e você não consegue evitar o rompimento da corda, com que velocidade a sucata de material baterá no chão?

60P. Um bloco é lançado para cima sobre um plano inclinado, sem atrito, com velocidade inicial v_0 . O ângulo de inclinação é θ . (a) Que distância ao longo do plano ele alcança? (b) Quanto tempo leva para chegar até lá? (c) Qual a sua velocidade, quando retorna e chega embaixo? Calcule numericamente as respostas para $\theta = 32,0^\circ$ e $v_0 = 3,50 \text{ m/s}$.

61P. Uma lâmpada pende verticalmente de uma corda num elevador que desce com uma desaceleração de $2,4 \text{ m/s}^2$. (a) Se a tensão na corda é 89 N , qual a massa da lâmpada? (b) Qual a tensão na corda, quando o elevador sobe com uma aceleração para cima de $2,4 \text{ m/s}^2$?

- 62P.** Um caixote de 100 kg é empurrado para cima com velocidade constante, sobre uma rampa com inclinação de $30,0^\circ$ e de atrito desprezível, conforme mostrado na Fig. 5-53. (a) Qual a força horizontal F necessária? (b) Qual a força exercida pela rampa sobre o caixote?

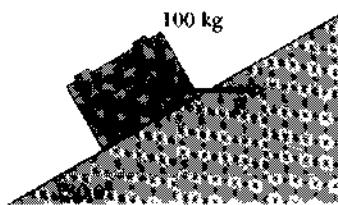


Fig. 5-53 Problema 62.

- 63P.** Um macaco de 10 kg sobe por uma corda de massa desprezível, que passa sobre o galho de uma árvore, sem atrito, e tem presa na outra extremidade uma caixa de 15 kg, que está no solo (Fig. 5-54). (a) Qual o módulo da aceleração mínima que o macaco deve ter para levantar a caixa do solo? Se, após levantar a caixa, o macaco parar de subir e ficar agarrado à corda, quais são (b) sua aceleração e (c) a tensão na corda?



Fig. 5-54 Problema 63.

- 64P.** A Fig. 5-55 mostra uma seção de um teleférico. A maior massa permitível a cada carro com passageiros é 2.800 kg. Os carros, que correm

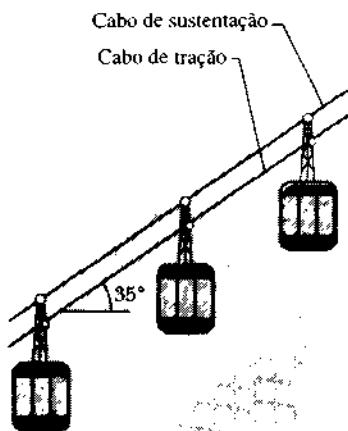


Fig. 5-55 Problema 64.

sobre um cabo de sustentação, são puxados por um segundo cabo, preso a um suporte metálico. Qual a diferença na tensão entre seções adjacentes do cabo de tração, se os carros estão com a maior massa permitida e sendo puxados para cima, a 35° de inclinação, com uma aceleração de $0,81 \text{ m/s}^2$?

- 65P.** Uma sonda interestelar tem uma massa de $1,20 \times 10^6 \text{ kg}$, e está inicialmente em repouso em relação a um sistema estelar. (a) Qual a aceleração constante necessária para levar a sonda à velocidade de $0,10c$ (onde c é a velocidade da luz), em relação àquele sistema estelar, em 3,0 dias? (Não é necessário considerar a teoria da relatividade de Einstein.) (b) Qual é essa aceleração em unidades g ? (c) Que força é necessária para acelerar a sonda? (d) Se os motores forem desligados, quando $0,10c$ é alcançada, quanto tempo a sonda leva (do início ao fim) numa jornada de 5,0 meses-luz (a distância que a luz viaja em 5,0 meses)?

- 66P.** Um elevador, como o da Fig. 5-56, é formado por uma cabine (*A*) de 1.150 kg, um contrapeso (*B*) de 1.400 kg, um mecanismo de tração (*C*), um cabo e duas roldanas. Quando em operação, o mecanismo *C* segura o cabo, tracionando-o ou parando seu movimento. Este processo implica que a tensão T_1 no cabo, de um lado de *C*, difere da tensão T_2 no outro lado. Suponha que as acelerações de subida de *A* e descida de *B* tenham módulo $a = 2,0 \text{ m/s}^2$. Desprezando as roldanas e a massa do cabo, determine (a) T_1 , (b) T_2 e (c) a força produzida no cabo por *C*.

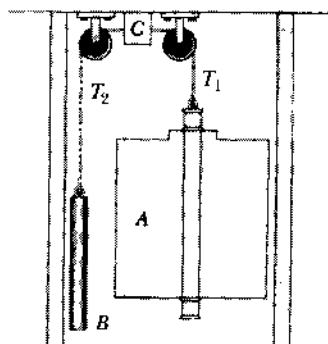


Fig. 5-56 Problema 66.

- 67P.** Um bloco de 5,0 kg é puxado sobre uma superfície horizontal, sem atrito, por uma corda que exerce uma força $F = 12,0 \text{ N}$, fazendo um ângulo $\theta = 25,0^\circ$ com a horizontal, conforme a Fig. 5-57. (a) Qual a aceleração do bloco? (b) A força F é lentamente aumentada. Qual é esta força no instante anterior ao levantamento do bloco da superfície? (c) Qual a aceleração nesse mesmo instante?

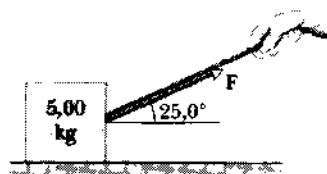


Fig. 5-57 Problema 67.

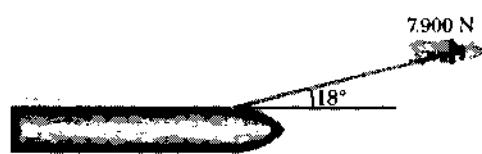


Fig. 5-58 Problema 68.

68P. No passado, cavalos puxavam barcas através de canais, conforme mostrado na Fig. 5-58. Suponha que o cavalo tracione a corda com uma força de 7.900 N, fazendo um ângulo de 18° com a direção do movimento da embarcação, que é paralela ao canal. A massa da mesma é 9.500 kg e sua aceleração é $0,12 \text{ m/s}^2$. Calcule a força da água sobre a barca.

69P. Uma determinada força causa uma aceleração de $12,0 \text{ m/s}^2$ na massa m_1 , e uma aceleração de $3,30 \text{ m/s}^2$ na massa m_2 . Que aceleração essa força causaria num objeto com massa (a) $m_2 - m_1$ ou (b) $m_2 + m_1$?

70P. Um balão de massa M , com ar quente, está descendo verticalmente com uma aceleração a para baixo (Fig. 5-59). Que quantidade de massa deve ser atirada para fora do balão, para que ele suba com uma aceleração a (mesmo módulo e sentido oposto)? Suponha que a força de subida, devido ao ar, não varie em função da massa (carga de estabilização) que ele perdeu.

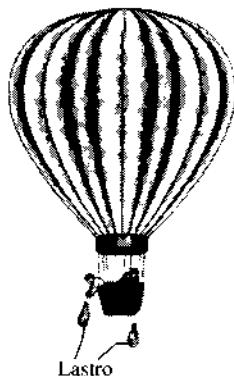


Fig. 5-59 Problema 70.

71P. Um foguete com massa de 3.000 kg é lançado do solo com um ângulo de elevação de 60° . O motor aplica ao foguete uma força de $6,0 \times 10^4 \text{ N}$ (empuxo) com um ângulo constante de 60° com a horizontal, por 50 s, e depois desliga. Fazendo uma aproximação grosseira, ignore a massa do combustível consumido e da força de resistência do ar. Calcule (a) a altitude do foguete quando o motor pára e (b) a distância horizontal do ponto de lançamento ao eventual ponto de impacto com o solo (supondo que estão no mesmo nível).

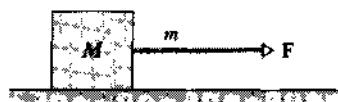


Fig. 5-60 Problema 72.

73P. A Fig. 5-61 mostra um homem sentado numa plataforma de trabalho, pendendo de uma corda de massa desprezível que passa por uma polia, de massa e atrito nulos, e volta até às mãos do homem. A massa conjunta do homem e da plataforma é 95,0 kg. (a) Com que força o homem deve puxar a corda para que ele consiga subir com velocidade constante? (b) Qual a força necessária para subir com a aceleração de $1,30 \text{ m/s}^2$? (c) Suponha, ao invés disso, que a corda à direita é segurada por uma pessoa no chão. Repita os itens (a) e (b) para esta nova situação. (d) Qual a força aplicada ao teto pela polia, em cada um dos quatro casos?

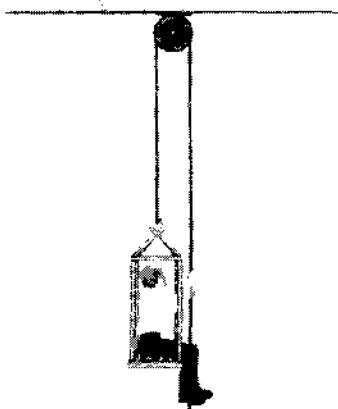


Fig. 5-61 Problema 73.

PROBLEMAS ADICIONAIS

74. Uma motocicleta e um motociclista de 60,0 kg estão subindo uma rampa que faz 10° com a horizontal, com uma aceleração de $3,0 \text{ m/s}^2$. (a) Qual é o módulo da força resultante sobre o motociclista? (b) Qual o módulo da força exercida pela motocicleta sobre o motociclista?

75. Um bloco pesando 3,0 N repousa numa superfície horizontal. Uma força de 1,0 N, para cima, é aplicada ao bloco por mola fixada verticalmente. Qual o módulo e sentido da força do bloco sobre a superfície horizontal?

76. Determinada massa de 1,0 kg está sobre uma superfície inclinada, sem atrito, e ligada a uma outra massa de 2,0 kg, conforme mostrado na Fig. 5-62. Desconsidere a massa e o atrito da polia. Uma força $F = 6,0 \text{ N}$, para cima, é aplicada sobre a massa de 2,0 kg, que tem uma aceleração de $5,5 \text{ m/s}^2$ para baixo. (a) Qual a tensão na corda de conexão? (b) Qual o ângulo β ?

77. Sobre um objeto de 3,0 kg, que se move com aceleração de $3,0 \text{ m/s}^2$ no sentido positivo do eixo y , são aplicadas apenas duas forças. Se uma das forças tem módulo de 8,0 N e atua no sentido positivo de x , qual a magnitude da outra?

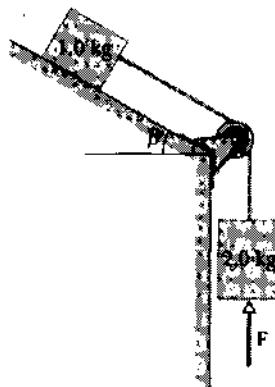


Fig. 5-62 Problema 76.

78. Um módulo espacial decola verticalmente da Lua, onde a aceleração em queda livre é $1,6 \text{ m/s}^2$. Se o módulo tem uma aceleração para

cima de $1,0 \text{ m/s}^2$, enquanto decola, qual a força do módulo sobre um astronauta que pesa 735 N na Terra?

79. Um disco de hóquei de 0,20 kg tem uma velocidade de 2,0 m/s para leste, deslizando sobre a superfície, sem atrito, de um lago gelado. Qual o módulo e o sentido da força média que devem ser aplicados ao disco, durante um intervalo de 0,50 s, para mudar sua velocidade para (a) 5,0 m/s para oeste e (b) 5,0 m/s para sul?

80. Certa massa de 1,0 kg, sobre um plano inclinado de 37° , está conectada a uma outra de 3,0 kg, sobre uma superfície horizontal (Fig. 5-63). As superfícies e a polia não têm atrito. Se $\mathbf{F} = 12 \text{ N}$, qual a tensão na corda de ligação?

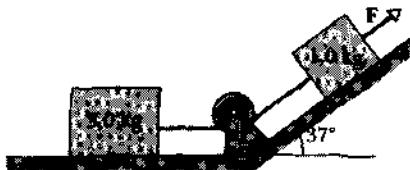


Fig. 5-63 Problema 80.

81. Sobre uma certa massa de 3,0 kg, são aplicadas apenas duas forças. Uma de 9,0 N, aplicada no sentido leste, e a outra de 8,0 N, aplicada a 62° noroeste. Qual o módulo da aceleração da massa?

82. Quando o sistema da Fig. 5-64 é liberado do repouso, a massa de 3,0 kg tem uma aceleração de $1,0 \text{ m/s}^2$ para a direita. As superfícies e a polia não têm atrito. (a) Qual a tensão na corda de conexão? (b) Qual o valor de M ?

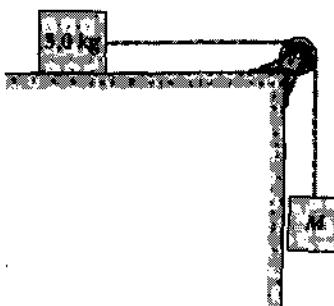


Fig. 5-64 Problema 82.

FORÇA E MOVIMENTO — II



Em geral, os gatos criados em apartamentos gostam de dormir nos parapeitos das janelas. Quando um deles cai, accidentalmente, de uma janela sobre a calçada, a extensão das lesões (como o número de fraturas ou de mortes) diminui com a altura, se a queda ocorre do sétimo ou oitavo andares para cima. (Há até mesmo um recorde de um gato que caiu do 32º andar de um edifício e sofreu apenas leves contusões no seu tórax e em um dente.) Brevemente veremos por quê.

6-1 Atrito

As forças de atrito inevitavelmente fazem parte do nosso cotidiano. Se deixássemos que agissem sozinhas, todas as rodas em movimento parariam, bem como tudo que estivesse em movimento rotacional. Num automóvel, cerca de 20% da gasolina é consumida para superar o atrito nas partes do motor, eixos e rodas. Por outro lado, se o atrito fosse totalmente eliminado, não poderíamos caminhar nem andar de bicicleta. Não poderíamos segurar um lápis e, se pudéssemos, não conseguiríamos escrever. Não poderíamos utilizar pregos ou parafusos, os tecidos das roupas se desfariam e os nós seriam desfeitos.

Neste capítulo, vamos trabalhar amplamente com as forças de atrito que existem entre as superfícies sólidas não-lubrificadas, que se movem a velocidades relativamente

baixas, umas sobre as outras. Consideremos duas experiências simples:

1. Primeira experiência. Façamos um livro deslizar sobre certa mesa. A força de atrito, exercida pela mesa sobre o livro que desliza, retarda o seu movimento e acaba por fazê-lo parar. Se quisermos que o livro se movimente sobre a mesa com velocidade constante, devemos empurrá-lo ou puxá-lo com uma força constante, de módulo igual ao da força de atrito que se opõe ao movimento.

2. Segunda experiência. Um caixote pesado está parado sobre o chão em um depósito de mercadorias. Podemos empurrá-lo horizontalmente, aplicando sobre ele uma força constante, mas ele não se move. Isso porque a força que aplicamos é equilibrada pela força de atrito exercida na horizontal pelo chão sobre o fundo do caixote, no sentido oposto ao do empurrão. É interessante notar como esta força

de atrito se ajusta automaticamente, em módulo e sentido, cancelando a que aplicamos. É claro que, se pudermos empurrar com força suficiente, conseguiremos mover o caixote (veja a primeira experiência).

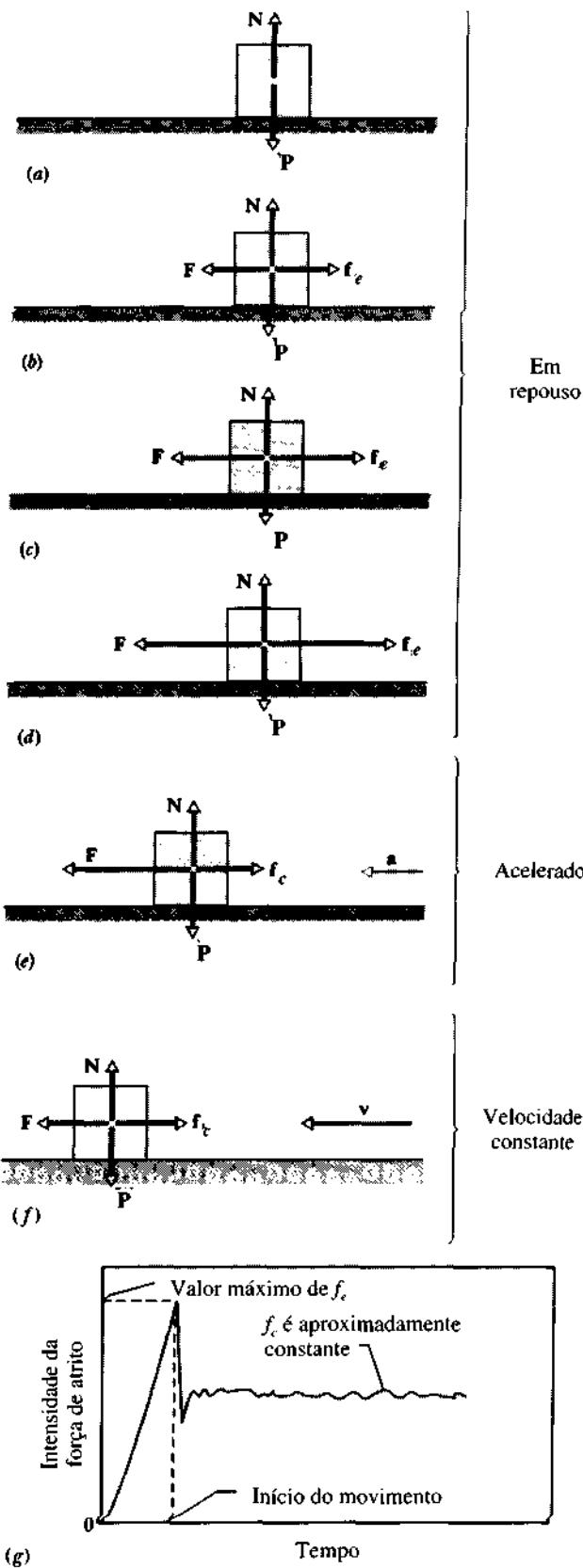
A Fig. 6-1 mostra uma situação parecida em detalhes. Na Fig. 6-1a, um bloco está parado sobre a mesa, seu peso P está equilibrado por uma força normal N de mesmo módulo e de sentido oposto. Na Fig. 6-1b, aplicamos uma força F ao bloco, tentando puxá-lo para a esquerda. Como consequência, surge uma força de atrito f_e , apontando para a direita, que equilibra a que foi aplicada. A força f_e é chamada de **força de atrito estático**.

As Figs. 6-1c e 6-1d mostram que, se aumentarmos a força aplicada, a de atrito estático f_e também aumentará e o bloco permanecerá estacionário. Entretanto, para um determinado valor da força aplicada, o bloco "rompe" o contato sólido com a mesa e se movimenta para a esquerda, como na Fig. 6-1e. Então, a força de atrito que se opõe ao movimento é chamada de **força de atrito cinético** f_c .

Em geral, a força de atrito cinético, que atua quando há movimento, é menor do que a força máxima de atrito estático que atua quando não há movimento. Logo, se quisermos que o bloco se move na superfície da mesa com uma velocidade constante, geralmente teremos de diminuir a força aplicada sobre o bloco, assim que começar a se mover, conforme ilustrado na Fig. 6-1f.

A Fig. 6-1g mostra os resultados de uma experiência, em que a força sobre um bloco de 400 g foi lentamente aumentada até romper a ligação entre as superfícies. Observe a redução no módulo da força necessária para manter o bloco em movimento com velocidade constante, após o rompimento da ligação entre as superfícies.*

Embora a transição da força de atrito estático para a de atrito cinético pareça abrupta, não é instantânea. De fato, o atrito cinético entre superfícies não-lubrificadas a baixas velocidades é produzido por um processo de "prende-e-desliza", o deslizamento estando mais relacionado com o rompimento inicial da condição estática. É esse prende-e-desliza repetitivo que provoca um rangido no movimento relativo entre duas superfícies não-lubrificadas. Por isso, um pneu "canta" durante uma derrapagem em pista seca, as dobradiças enferrujadas produzem um chiado e o rangido de um giz num quadro de escrita provoca um som desconfor-



* Veja "Undergraduate Computer-Interfacing Projects", de Joseph Priest e John Snider, *The Physics Teacher*, Maio de 1987.

Fig. 6-1 (a) As forças sobre o bloco em repouso. (b-d) Uma força externa F , aplicada sobre o bloco, é equilibrada por uma força de atrito estático f_e , de igual intensidade e de sentido contrário. Conforme F aumenta, f_e também aumenta, até alcançar um valor máximo. (e) Quando o bloco "rompe" a inércia, é acelerado repentinamente para a esquerda. (f) Se agora o bloco está se movendo com velocidade constante, a força F aplicada deve ser reduzida do valor inicial que possuía no instante imediatamente antes dele iniciar o movimento. (g) Alguns resultados experimentais para a seqüência de (a) até (f).

tável. Algumas vezes, o atrito seco provoca sons agradáveis como, por exemplo, o do prende-e-desliza do arco sobre as cordas de um violino.

Basicamente, a força de atrito é uma força que atua entre os átomos superficiais de dois corpos em contato. Se duas superfícies metálicas, altamente polidas e cuidadosamente limpas, forem colocadas em contato numa região de alto vácuo, não conseguirão deslizar uma sobre a outra. Ao contrário, as duas peças *se soldarão a frio* no mesmo instante, formando um pedaço único de metal. Se blocos polidos de calibragem forem mantidos juntos em presença do ar, aderem um ao outro quase tão intensamente como no caso anterior e só conseguem ser separados por meio de um puxão. Em circunstâncias comuns, todavia, esses contatos interatônicos não são possíveis. Mesmo uma superfície metálica altamente polida, como a mostrada na Fig. 6-2, está longe de ser plana, em escala atômica. Além disso, as superfícies dos objetos comuns sofrem oxidação, ficando recobertas por uma camada de óxido e outros contaminantes, o que reduz a possibilidade de fusão sob pressão.

Quando duas superfícies são colocadas em contato, somente os pontos salientes se tocam. (É como se duas cadeias de montanhas fossem colocadas uma sobre a outra.) A área *microscópica* real de contato é muito menor do que a *macroscópica* aparente, por um fator quase igual a 10^4 . Em muitos pontos de contato ocorre fusão. Quando as superfícies são deslocadas umas sobre as outras, há uma ruptura e uma regeneração contínua das fusões, à medida que novos contatos são estabelecidos (Fig. 6-3).

Experiências com traçadores radioativos mostram que, quando uma superfície de metal não-lubrificada é arrastada sobre outra, na realidade minúsculos fragmentos de metal são arrancados de cada uma. Os anéis que revestem um pistão têm sido testados com a utilização de anéis irradiados em reatores nucleares. O material arrancado desses anéis é transportado para fora pelo óleo lubrificante, sendo detectado pela sua radioatividade.

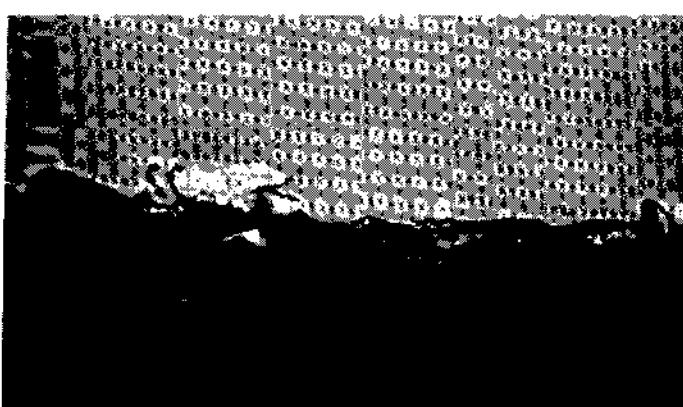


Fig. 6-2 Uma seção ampliada de uma superfície de metal intensamente polida. A altura das irregularidades da superfície é igual a vários milhares de diâmetros atômicos.

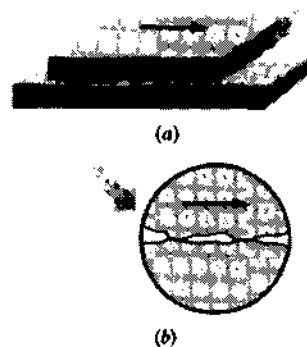


Fig. 6-3 O mecanismo do atrito de deslizamento. (a) Numa visão macroscópica, a superfície superior está deslizando para a direita sobre a inferior. (b) O detalhe mostra os dois pontos onde a fusão ocorre. É necessária uma força para romper estas soldas e manter o movimento.

6-2 Propriedades do Atrito

É demonstrado experimentalmente que, quando um corpo é pressionado contra uma superfície (estando ambos secos e não-lubrificados) e uma força \mathbf{F} é aplicada na tentativa de fazer o corpo deslizar sobre a superfície, a força de atrito resultante tem três propriedades:

Propriedade 1. Se o corpo não se move, então a força de atrito estático f_e e a componente de \mathbf{F} paralela à superfície são iguais em módulo e têm sentidos opostos.

Propriedade 2. O módulo de f_e tem o valor máximo $f_{e,\text{máx}}$ dado por

$$f_{e,\text{máx}} = \mu_e N \quad (6-1)$$

onde μ_e é o **coeficiente de atrito estático** e N é o módulo da reação normal. Se o módulo da componente de \mathbf{F} paralela à superfície for maior do que $f_{e,\text{máx}}$, então o corpo começará a deslizar sobre a superfície.

Propriedade 3. Se o corpo começar a deslizar sobre a superfície, o módulo da força de atrito decrescerá rapidamente para o valor f_c , dado por

$$f_c = \mu_c N \quad (6-2)$$

onde μ_c é o **coeficiente de atrito cinético**. Enquanto o corpo deslizar, o módulo da força de atrito cinético f_c será dado pela Eq. 6-2.

As Propriedades 1 e 2 foram formuladas em termos de uma única força \mathbf{F} , mas também são válidas para a força resultante das várias que atuam num corpo. As Eqs. 6-1 e 6-2 não são equações vetoriais; a direção de \mathbf{f}_e ou \mathbf{f}_c é sempre paralela à superfície e o sentido oposto à intenção de movimento; a força \mathbf{N} é perpendicular à superfície.

Os coeficientes μ_e e μ_c são adimensionais e devem ser determinados experimentalmente. Já que seus valores dependem do corpo e da superfície, são geralmente referidos com o uso da preposição “entre”, como em “o valor de μ_e entre um veículo e o asfalto é 0,5”. Vamos supor, neste livro, que o valor de μ_c é independente da velocidade com que o corpo desliza sobre a superfície.

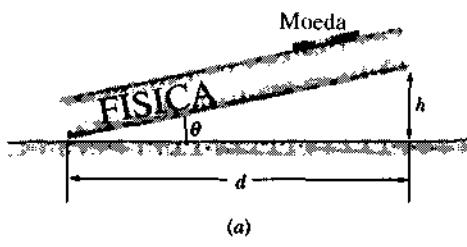
EXEMPLO 6-1 A Fig. 6-4a mostra uma moeda imóvel sobre um livro que foi inclinado de um ângulo θ com a horizontal. Por um processo de tentativa e erro determinamos que a moeda começa a deslizar sobre o livro quando θ é igual a 13° . Qual o coeficiente de atrito estático μ_e entre a moeda e o livro?

Solução A Fig. 6-4b é um diagrama de corpo isolado da moeda quando ela está prestes a deslizar. As forças que atuam sobre a moeda são a normal N , que aponta para fora do plano do livro, o peso P da moeda e a força de atrito f_e , que aponta no sentido de subida do plano, de forma a impedir o movimento de descida da moeda. Como esta está em equilíbrio, a força resultante sobre ela deve ser nula. Da segunda lei de Newton, temos

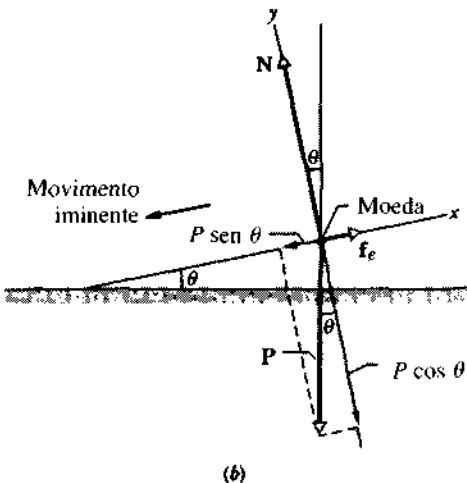
$$\sum F = f_e + P + N = 0. \quad (6-3)$$

Para as componentes x , esta equação vetorial fornece

$$\sum F_x = f_e - P \sin \theta = 0, \text{ ou } f_e = P \sin \theta. \quad (6-4)$$



(a)



(b)

Fig. 6-4 Exemplo 6-1. (a) Uma determinada moeda está na iminência de deslizar sobre a capa de um livro. (b) Um diagrama de corpo isolado para a moeda, mostrando as três forças (em escala) que atuam sobre ela. O peso P está decomposto em suas componentes nos eixos x e y , orientados de forma a simplificar o problema.

Para as componentes y , temos

$$\sum F_y = N - P \cos \theta = 0, \text{ ou } N = P \cos \theta. \quad (6-5)$$

Quando a moeda está na iminência de deslizar, o módulo máximo da força de atrito estático atuando sobre ela é $\mu_e N$. Substituindo na Eq. 6-4 e dividindo pela Eq. 6-5, obtemos

$$\frac{f_e}{N} = \frac{\mu_e N}{N} = \frac{P \sin \theta}{P \cos \theta} = \tan \theta,$$

ou

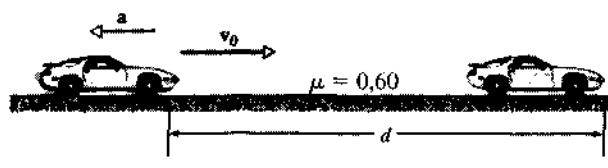
$$\mu_e = \tan \theta = \tan 13^\circ = 0.23. \quad (\text{Resposta}) \quad (6-6)$$

Por que não tentar medir μ_e utilizando este livro e a moeda? Podemos dispensar um transferidor. A razão h/d das duas dimensões mostradas na Fig. 6-4a é a $\tan \theta$, e essas dimensões podem ser medidas com uma régua.

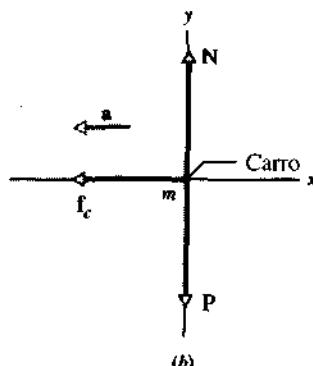
EXEMPLO 6-2 Quando as rodas de um carro são “travadas” (impeditidas de rolar) durante uma freada, o carro desliza sobre a pista. Resíduos de pneus e pequenas partes derretidas de asfalto formam as “marcas da derrapagem”, que evidenciam a fusão dos dois materiais durante o deslizamento. A maior marca de derrapagem em uma rodovia pública foi produzida em 1960 por um Jaguar, na Inglaterra — as marcas tinham 290 m de comprimento! Supondo que $\mu_c = 0,60$, qual a velocidade escalar do veículo no momento em que as rodas foram bloqueadas?

Solução A Fig. 6-5a reproduz a trajetória do carro; a Fig. 6-5b é o diagrama de corpo isolado dele durante a desaceleração, onde estão representados o peso P do carro, a força normal N e a força de atrito cinético f_c , que atuam sobre o carro. Podemos usar a Eq. 2-14,

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x(x - x_0).$$



(a)



(b)

Fig. 6-5 Exemplo 6-2. (a) Um carro deslizando para a direita e finalmente parando, após um deslocamento d . (b) Um diagrama de corpo isolado para a desaceleração do carro, os vetores representando as três forças estão em escala. O vetor aceleração aponta para a esquerda, no sentido da força de atrito f_c .

com $v = 0$ e $x - x_0 = d$, para determinar a velocidade escalar inicial v_0 do carro. Substituindo esses valores e rearrumando, obtemos

$$v_0 = \sqrt{-2a_x d}. \quad (6-7)$$

Para determinar a_x , aplicamos a segunda lei de Newton em relação ao eixo x . Se desprezarmos os efeitos da resistência do ar sobre o carro, a única força na direção do eixo x será f_c . Então, para o módulo de f_c , temos

$$f_c = -ma_x, \text{ ou } a_x = -\frac{f_c}{m} = -\frac{\mu_c N}{m}, \quad (6-8)$$

onde m é a massa do carro, e da Eq. 6-2, $f_c = \mu_c N$.

A força normal N tem módulo $N = P = mg$. Substituindo este resultado na Eq. 6-8, obtemos

$$a_x = -\frac{\mu_c mg}{m} = -\mu_c g. \quad (6-9)$$

Substituindo a Eq. 6-9 na Eq. 6-7, encontramos

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{2\mu_c gd} = \sqrt{(2)(0,60)(9,8 \text{ m/s}^2)(290 \text{ m})} \\ &= 58 \text{ m/s} = 210 \text{ km/h} \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

Para resolver este problema, supomos implicitamente que $v = 0$ no final das marcas de derrapagem. Na verdade, as marcas terminaram apenas porque o Jaguar saiu da estrada depois de 290 m. Logo, v_0 era no mínimo de 210 km/h, possivelmente muito mais.

EXEMPLO 6-3 Uma mulher puxa um trenó carregado de massa $m = 75 \text{ kg}$ sobre uma superfície horizontal, com velocidade constante. O coeficiente μ_c do atrito cinético entre o trenó e a neve é 0,10 e o ângulo ϕ , na Fig. 6-6, é 42° .

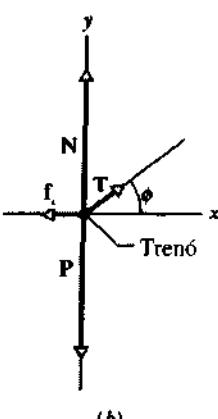
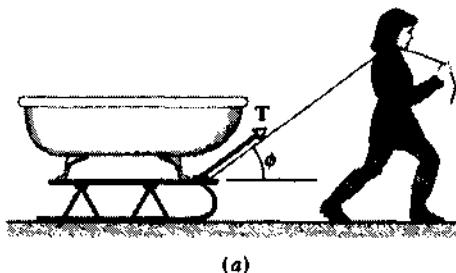


Fig. 6-6 Exemplo 6-3. (a) A mulher aplica uma força T ao trenó, puxando-o a uma velocidade constante. (b) Um diagrama de corpo isolado para o trenó e sua carga, fora de escala.

a. Qual a tensão T na corda?

Solução A Fig. 6-6b é o diagrama de corpo isolado para o trenó. Aplicando a segunda lei de Newton na direção do eixo horizontal, temos

$$T \cos \phi - f_c = ma_x = 0, \quad (6-10)$$

onde a_x é zero porque a velocidade é constante. Na direção vertical, temos

$$T \sin \phi + N - mg = ma_y = 0, \quad (6-11)$$

em que mg é o peso do trenó. Da Eq. 6-2,

$$f_c = \mu_c N. \quad (6-12)$$

Essas três equações contêm as incógnitas T , N e f_c . Eliminando N e f_c , poderemos calcular T .

Começamos adicionando as Eqs. 6-10 e 6-12, o que fornece

$$T \cos \phi = \mu_c N,$$

ou

$$N = \frac{T \cos \phi}{\mu_c}. \quad (6-13)$$

Substituindo esse valor de N na Eq. 6-11, obtemos para T

$$\begin{aligned} T &= \frac{\mu_c mg}{\cos \phi + \mu_c \sin \phi} \\ &= \frac{(0,10)(75 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)}{\cos 42^\circ + (0,10)(\sin 42^\circ)} \\ &= 91 \text{ N}, \quad (\text{Resposta}) \end{aligned} \quad (6-14)$$

que é consideravelmente menor do que o peso do trenó.

b. Qual a força normal que a neve exerce verticalmente para cima sobre o trenó?

Solução Substituindo T da Eq. 6-14 na Eq. 6-13, temos

$$\begin{aligned} N &= \frac{\cos \phi}{\cos \phi + \mu_c \sin \phi} mg \\ &= \frac{\cos 42^\circ}{\cos 42^\circ + (0,10)(\sin 42^\circ)} mg \\ &= 0,917 mg = 670 \text{ N}. \quad (\text{Resposta}) \end{aligned} \quad (6-15)$$

Então, a componente da tração para cima reduz a reação normal para 92% do peso do trenó.

EXEMPLO 6-4 Na Fig. 6-7a, uma caixa de massa $m_1 = 14 \text{ kg}$ se move sobre um plano com uma inclinação $\theta = 30^\circ$ com a horizontal. A caixa está ligada a uma outra de massa $m_2 = 14 \text{ kg}$, por uma corda tensionada, de massa desprezível, que desliza sem atrito sobre uma polia de massa também desprezível. A caixa pendurada desce com velocidade constante.

a. Qual o módulo e o sentido da força de atrito entre o plano e m_1 ?

Solução O fato de m_2 descer indica que m_1 se move para cima ao longo do plano, logo, a força de atrito cinético f_c deve apontar para baixo, também ao longo do plano.

Não podemos usar a Eq. 6-2 para calcular o módulo de f_c , porque não conhecemos o coeficiente de atrito cinético μ_c entre m_1 e o plano.

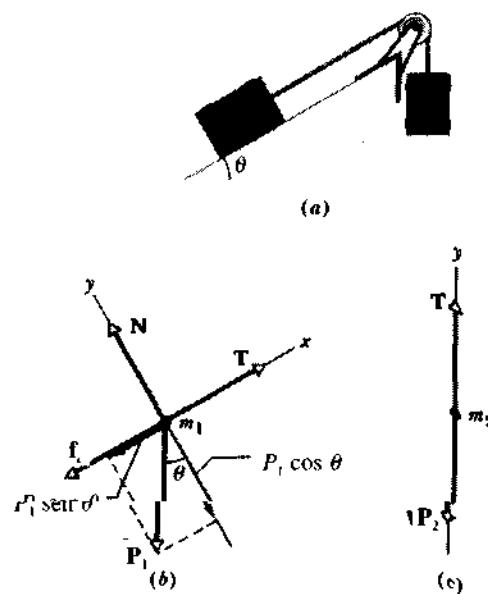


Fig. 6-7 Exemplo 6-4. (a) A massa m_1 se move para cima no plano, enquanto a massa m_2 desce com uma velocidade constante. (b) Um diagrama de corpo isolado para a massa m_1 . (c) Um diagrama de corpo isolado para a massa m_2 .

Contudo, podemos utilizar as técnicas do Cap. 5. Para começar, vamos desenhar o diagrama de corpo isolado para m_1 e m_2 nas Figs. 6-7b e 6-7c, onde T é a tensão na corda que puxa a caixa, e os vetores peso são $P_1 = m_1 g$ e $P_2 = m_2 g$.

Decompondo P_1 em suas componentes x e y temos, pela aplicação da segunda lei de Newton em relação ao eixo x , na Fig. 6-7b,

$$\begin{aligned} \sum F_x &= T - f_c - m_1 g \sin \theta = m_1 a_x \\ &= (m_1)(0) = 0, \end{aligned} \quad (6-16)$$

onde $a_x = 0$, pois m_1 se move com velocidade constante. Em seguida, aplicamos a segunda lei de Newton para m_2 , em relação ao eixo y na Fig. 6-7c, considerando que m_2 se move com velocidade constante. Encontramos

$$\sum F_y = T - m_2 g = m_2 a_y = (m_2)(0) = 0,$$

ou

$$T = m_2 g. \quad (6-17)$$

Substituindo T da Eq. 6-17 na Eq. 6-16 e resolvendo para f_c , obtemos

$$\begin{aligned} f_c &= m_2 g - m_1 g \sin \theta \\ &= (14 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) - (14 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) (\sin 30^\circ) \\ &= 68,6 \text{ N} \approx 69 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual o valor de μ_c ?

Solução Podemos usar a Eq. 6-2 para calcular μ_c , mas primeiro temos de saber o módulo da normal N sobre m_1 . Para calcular N , aplicamos a segunda lei de Newton para m_1 , sobre o eixo y na Fig. 6-7b:

$$\sum F_y = N - m_1 g \cos \theta = m_1 a_y = 0,$$

Da Eq. 6-2 temos

$$\begin{aligned} \mu_c &= \frac{f_c}{N} = \frac{f_c}{m_1 g \cos \theta} \\ &= \frac{68,6 \text{ N}}{(14 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(\cos 30^\circ)} = 0,58. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

6-3 Força de Viscosidade e Velocidade Limite

Um **fluído** é qualquer substância que pode escoar — em geral, um líquido ou um gás. Quando há uma velocidade relativa entre um corpo e um fluido (ou porque o corpo se move através do fluido ou porque este se move em volta do corpo), este experimenta uma **força de viscosidade** \bar{F}_v , que se opõe ao movimento relativo e aponta no sentido da corrente do fluido em relação ao corpo.

Vamos estudar apenas os casos em que o fluido é o ar, o corpo é arredondado e volumoso (como uma bola ou um gato caindo), em vez de fino e pontiagudo (como um dardo), e o movimento relativo é rápido o suficiente para causar uma turbulência no ar (em forma de redemoinho) atrás do corpo. Nesses casos, o módulo da força de viscosidade \bar{F}_v está relacionado à velocidade escalar relativa v pelo **coeficiente de viscosidade** C , de acordo com

$$\bar{F}_v = \frac{1}{2} C \rho A v^2 \quad (6-18)$$

onde ρ é a densidade do ar (massa por volume) e A é a área da seção reta efetiva do corpo (considerada perpendicularmente à velocidade v). O coeficiente de viscosidade C (tipicamente varia de 0,4 a 1,0) na verdade não é constante para um determinado corpo porque, se v varia significativamente, o valor de C também varia. Não vamos considerar, aqui, este complicador.

Uma esquiadora, descendo velozmente determinada montanha, sabe bem que a força de viscosidade depende de A e v^2 . Para atingir grandes velocidades, deve reduzir \bar{F}_v tanto quanto possível e, por exemplo, esquiar “agachada” (Fig. 6-8) para reduzir A .

A Eq. 6-18 indica que, quando um objeto inicialmente em repouso cai através do ar, \bar{F}_v cresce gradativamente com o aumento da velocidade do corpo, a partir de zero. Como indica a Fig. 6-9, se o corpo cair de uma altura muito grande, \bar{F}_v acabará por se tornar igual ao peso do corpo P ($= mg$) e a força vertical resultante sobre ele será nula. Pela segunda lei de Newton, a aceleração também será nula e, por isso, a velocidade escalar do corpo não aumentará mais. Então, ele cairá com uma **velocidade limite** constante v_f , fazendo $\bar{F}_v = mg$ na Eq. 6-18, obtendo

$$\frac{1}{2} C \rho A v_f^2 = mg,$$



Fig. 6-8 Esta esquiadora se agacha para minimizar sua área de seção reta efetiva e, consequentemente, a ação da viscosidade do ar sobre ela.

o que dá



a Tabela 6-1 fornece os valores de v_f para alguns objetos comuns.

Um gato deve cair cerca de seis andares para atingir a velocidade limite. Até este instante, $P > \vec{F}_v$, e o movimento do gato é acelerado para baixo por causa da força resultante no mesmo sentido. Lembre-se do Cap. 2, que dizia ser o nosso corpo um acelerômetro, não um velocímetro. Daí o gato sentir também a aceleração, ficar assustado e manter seus pés por baixo do seu corpo, a cabeça encolhida e a espinha curvada para cima, diminuindo A e aumentando v_f , provavelmente se ferindo na queda.

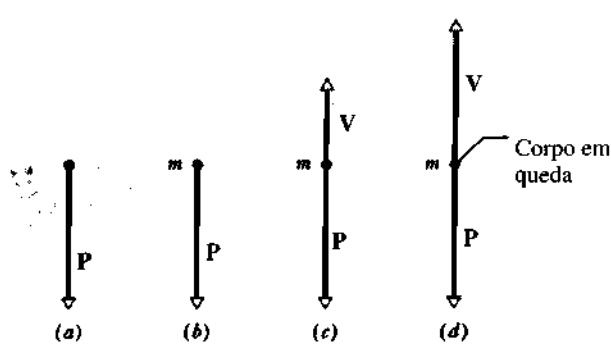


Fig. 6-9 As forças que atuam sobre um corpo caindo no ar: (a) o corpo assim que começou a cair, (b) o diagrama de corpo isolado nesse instante e (c) o diagrama de corpo isolado logo em seguida, depois de aparecer a força de viscosidade. (d) A força de viscosidade aumenta até equilibrar o peso do corpo. Agora, o corpo cai com a sua velocidade limite constante.

Tabela 6-1
Algumas Velocidades Limite no Ar

Objeto	Velocidade Limite (m/s)	Distância com 95% (m)
Tiro de 16 lb	145	2.500
Pára-quedista (salto livre — típico)	60	430
Bola de beisebol	42	210
Bola de tênis	31	115
Bola de basquete	20	47
Bola de pingue-pongue	9	10
Gotas de chuva (1,5 mm de raio)	7	6
Pára-quedista (típico)	5	3

*Esta é a distância que o corpo deve percorrer em queda, a partir do repouso, para atingir 95% da sua velocidade limite.

Fonte: Adaptado de Peter J. Brancazio, *Sport Science*, Simon & Schuster, Nova Iorque, 1984.

Entretanto, quando o gato atinge v_f , a aceleração é nula, ele fica relaxado, estica as pernas e o pescoço horizontalmente e sua espinha fica reta (parecendo com um esquilo voador). Estas atitudes aumentam A e \vec{F}_v , e a velocidade do gato diminui porque agora $\vec{F}_v > P$ — a força resultante aponta para cima — diminuindo v_f . Esta diminuição reduz a possibilidade de danos físicos na queda. Um pouco antes do final da queda, quando se aproxima do solo, o gato puxa suas patas traseiras para debaixo do seu corpo, preparando-o para a aterrissagem.

EXEMPLO 6-5 Um gato caindo atinge uma primeira velocidade limite de 96 km/h, enquanto está encolhido, quando então se estica duplicando A . Qual a velocidade escalar da queda quando ele atinge uma nova velocidade limite?

Solução Sejam v_{f_1} e v_{f_2} as velocidades terminais, e A_o e A_n as áreas correspondentes. Usamos então a Eq. 6-19 para estabelecer a razão entre as velocidades:

$$\frac{v_{f_1}}{v_{f_2}} = \sqrt{\frac{2mg/C\rho A_n}{2mg/C\rho A_o}} = \sqrt{\frac{A_o}{A_n}} = \sqrt{\frac{A_o}{2A_o}} = \sqrt{0.5} \approx 0.7,$$

isso significa que $v_{f_2} \approx 0.7v_{f_1}$, ou cerca de 67 km/h.

Em abril de 1987, durante um salto, o pára-quedista Gregory Robertson notou que sua companheira, Debbie Williams, havia sido nocauteadada numa colisão com um terceiro companheiro, ficando impossibilitada de abrir seu pára-quedas. Robertson, que estava bem acima de Williams naquele momento e ainda não havia aberto seu pára-quedas para um mergulho de 4.117 m, reorientou-se de cabeça para baixo de forma a minimizar A e aumentar sua velocidade de descida. Atingindo uma v_f estimada em 322 km/h, alcançou Williams e assumiu, então, a posição conhecida como “grande águia” na horizontal (veja Fig. 6-10), para aumentar \vec{F}_v e poder agarrá-la. Então, abriu o pára-quedas dela e depois o seu próprio, a apenas 10 s do impacto. Williams sofreu várias lesões internas por causa da aterrissagem descontrolada, mas sobreviveu.

EXEMPLO 6-6 Uma gota de chuva com raio $R = 1,5$ mm cai de uma nuvem que está a uma altura $h = 1.200$ m acima do solo. O coeficiente de viscosidade C para a gota é 0,60. Suponha que a gota seja esférica



Fig. 6-10 Os pára-quedistas estão na posição “vôo de águia” para maximizar a força de viscosidade do ar.

durante a queda. A densidade da água ρ_w é de 1.000 kg/m^3 , e a densidade do ar ρ_{ar} é de 1.2 kg/m^3 .

a. Qual é a velocidade limite da gota?

Solução O volume de uma esfera é $4\pi R^3/3$ e a sua área efetiva A é a de um círculo de raio R . Assim, para a gota, temos

$$m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_w \quad \text{e} \quad A = \pi R^2.$$

Então, da Eq. 6-19, encontramos

$$\begin{aligned} v_f &= \sqrt{\frac{2mg}{C\rho_{ar}A}} = \sqrt{\frac{8\pi R^3 \rho_w g}{3C\rho_{ar}\pi R^2}} = \sqrt{\frac{8R\rho_w g}{3C\rho_{ar}}} \\ &= \sqrt{\frac{(8)(1.5 \times 10^{-3} \text{ m})(1.000 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)}{(3)(0.60)(1.2 \text{ kg/m}^3)}} \\ &\approx 7.4 \text{ m/s} (= 17 \text{ mi/h}). \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Observe que a altura da nuvem não faz parte do cálculo. As gotas de chuva atingem a velocidade limite logo após alguns metros de queda (veja Tabela 6-1).

b. Qual seria a velocidade imediatamente antes do impacto, se não houvesse a força de viscosidade?

Solução Da Eq. 2-21, fazendo $h = -(y - y_0)$ e $v_0 = 0$, temos

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.8 \text{ m/s}^2)(1.200 \text{ m})} \\ &\approx 150 \text{ m/s} (= 340 \text{ mi/h}). \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Nessas condições, Shakespeare mal poderia ter escrito, “ela cai do céu como uma chuva suave sobre o chão”.

6-4 Movimento Circular Uniforme

Uma partícula está em movimento circular uniforme quando se move num círculo ou num arco circular, de raio r ,

com velocidade escalar constante v , e sua aceleração aponta para o centro do círculo. A sua **aceleração centrípeta** tem módulo constante dado pela Eq. 4-22:

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (6-20)$$

A aceleração centrípeta é devido a uma **força centrípeta** que atua sobre o corpo, direcionada para o centro do círculo. Esta força tem módulo constante dado pela segunda lei de Newton:

$$F = ma = \frac{mv^2}{r} \quad (6-21)$$

Se essa força não existir, o corpo não se manterá em movimento circular uniforme. Tanto a aceleração quanto a força centrípeta são grandezas vetoriais que têm módulo constante, mas suas direções variam continuamente, de modo a manter o sentido sempre apontando para o centro do círculo.

Se o corpo em movimento circular uniforme é, por exemplo, um disco de borracha girando preso a um cordão, como na Fig. 6-11, a força centrípeta é devido à tensão no cordão. Para a Lua, em seu movimento (aproximadamente) circular uniforme em torno da Terra, a força centrípeta se deve à atração gravitacional da Terra. Logo, a força centrípeta não é um novo tipo de força; pode ser uma força de tensão, uma força gravitacional ou qualquer outra.

Vamos comparar dois exemplos conhecidos de movimento circular uniforme:

1. **Um carro fazendo uma curva.** Quando estamos sentados no meio do banco traseiro de um carro, movendo-se

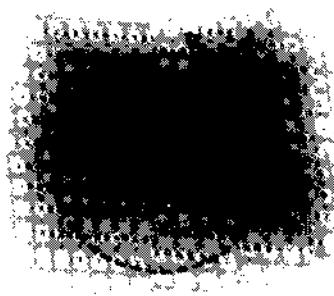


Fig. 6-11 Um disco de hóquei de massa m se move com velocidade constante v , numa trajetória circular sobre uma superfície horizontal sem atrito. T é a força centripeta sobre o disco e também a tração da corda.

em alta velocidade por uma rodovia plana, e de repente o motorista dobra à esquerda, descrevendo um arco circular, deslizamos pelo assento em direção à direita e somos pressionados contra a lateral interna do carro. Por que isso ocorre?

No momento em que o carro está percorrendo um arco circular, está em movimento circular uniforme. A força centripeta responsável pelo movimento é causada pelo atrito dos pneus sobre a estrada. Esta força aponta radialmente para o interior do arco de círculo — abrangendo os quatro pneus — e o seu módulo é dado pela Eq. 6-21.

Durante o movimento circular uniforme, poderíamos continuar sentados no meio do banco traseiro, se a força de atrito entre nós e o assento fosse suficientemente grande. Entretanto, como não é, deslizamos sobre o assento. Visto de um referencial no solo, continuariamos nos movendo em linha reta, enquanto o assento deslizaria sob o nosso corpo até que a lateral do carro nos alcançasse. A força da lateral sobre nós seria uma força centripeta e, então, nos tornaríamos solidários com o movimento circular uniforme do carro.

2. Um corpo em órbita da Terra. Desta vez somos os passageiros do ônibus espacial *Atlantis*, orbitando a Terra e experimentando a “ausência de peso”. O que acontece neste caso?

A força centripeta que nos mantém e a espaçonave em movimento circular uniforme é a atração gravitacional da Terra. Esta força é dirigida radialmente para o centro da Terra, com módulo dado pela Eq. 6-21.

Tanto no carro quanto na espaçonave, estamos em movimento circular uniforme submetidos a uma força centripeta. Contudo, experimentamos sensações bem diferentes em cada situação. No carro, percebemos que estamos sendo comprimidos contra a lateral interna do veículo. Por outro lado, no ônibus espacial em órbita, estamos flutuando com a sensação de que nenhuma força está atuando sobre nós. Por que essa grande diferença?

A diferença deve-se à natureza das duas forças centripetas. No carro, a força centripeta é uma *força de contato*, exercida pela lateral interna do carro sobre a parte de seu corpo com que está em contato. No ônibus espacial, a

força centripeta é uma *força volumétrica*, porque a atração gravitacional da Terra é aplicada sobre todos os átomos, tanto os do nosso corpo como os do ônibus espacial, de modo proporcional à massa de cada átomo. Assim, nenhuma parte de nosso corpo sofre compressão, por isso termos a sensação de nenhuma força atuando sobre nós.

EXEMPLO 6-7 Igor é o engenheiro de bordo da nave espacial *Vostok II*, orbitando à Terra a uma altitude h de 520 km, com uma velocidade escalar v de 7,6 km/s. A massa m de Igor é de 79 kg.

a. Qual a sua aceleração?

Solução Igor está em movimento circular uniforme num círculo de raio $R_T + h$, onde R_T é o raio da Terra. Sua aceleração centripeta é dada pela Eq. 6-20:

$$\begin{aligned} a &= \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R_T + h} \\ &= \frac{(7.6 \times 10^3 \text{ m/s})^2}{6.37 \times 10^6 \text{ m} + 0.52 \times 10^6 \text{ m}} \\ &= 8.38 \text{ m/s}^2 \approx 8.4 \text{ m/s}^2, \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

que é o valor da aceleração em queda livre na altitude em que Igor se encontra. Se ele fosse erguido e largado a essa altitude, em vez de ser colocado em órbita, cairia em direção ao centro da Terra com essa aceleração inicial. A diferença entre os dois casos é que, quando ele orbita a Terra, tem sempre um movimento “lateral”: à medida que cai, se move para o lado ao mesmo tempo, de maneira que acaba descrevendo uma trajetória curvilínea em volta da Terra.

b. Qual a força gravitacional (centrípeta) que a Terra exerce sobre Igor?

Solução A força centripeta é

$$\begin{aligned} F &= ma = (79 \text{ kg})(8.38 \text{ m/s}^2) \\ &= 660 \text{ N} \approx 68 \text{ kgf} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Se Igor ficasse sobre uma balança no topo de uma torre de altura $h = 520$ km, a leitura da balança seria de 660 N ou 68 kg f. Em órbita, a leitura da balança (se Igor pudesse “ficar” sobre ela) seria zero, porque tanto ele como a balança estariam em queda livre, logo, seus pés não exerceriam pressão sobre ela.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 1: CONSULTAR

No Exemplo 6-7, tínhamos de saber o raio da Terra, que não foi fornecido no enunciado do problema. Precisamos nos familiarizar com as fontes de consulta, começando por este livro. Muitos dados úteis são fornecidos no início do livro, nos diversos apêndices e nas tabelas. O *Handbook of Chemistry and Physics (Manual de Química e Física)*, publicado anualmente pelo Chemical Rubber Company (CRC), é uma fonte de consulta valiosa.

Para praticar, veja se consegue encontrar a densidade do ferro, a expansão em série de e' , o número de centímetros em uma milha, a distância média de Saturno ao Sol, a massa do próton, a velocidade da luz e o número atômico do samário. Tudo isso pode ser encontrado aqui neste livro.

EXEMPLO 6-8 Em 1901, num espetáculo circense, Allo Diavolo, o “Destemido”, apresentou-se montando uma bicicleta numa pista em *loop*

no plano vertical (veja Fig. 6-12a). Supondo que o loop é um círculo de raio $R = 2,7 \text{ m}$, qual a menor velocidade escalar v que ele deverá ter no topo do loop, para permanecer em contato com a pista?

Solução A Fig. 6-12b é um diagrama de corpo isolado para Diavolo e sua bicicleta no topo do loop (considerados como uma única partícula), onde são mostrados a força normal N exercida sobre eles pelo loop, e seu peso $P = mg$. Sua aceleração a aponta para baixo, dirigida para o centro do loop e, de acordo com a Eq. 6-20, tem módulo $a = v^2/R$. Aplicando a segunda lei de Newton em relação ao eixo y , temos

$$\sum F_y = -N - mg = -ma = -m \frac{v^2}{R}.$$

Se ele está a ponto de perder contato com a pista, $N = 0$ e temos, então

$$mg = m \frac{v^2}{R}$$

ou

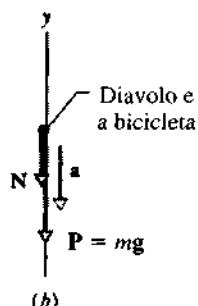
$$v = \sqrt{gR} = \sqrt{(9,8 \text{ m/s}^2)(2,7 \text{ m})} \\ = 5,1 \text{ m/s.} \quad (\text{Resposta})$$

Para evitar a perda de contato, Diavolo certificou-se de ter no topo do loop uma velocidade maior, neste caso, $N > 0$.

EXEMPLO 6-9 Um pêndulo cônicos está mostrado na Fig. 6-13a. A massa m de 1,5 kg está presa à ponta de um cordão de comprimento $L = 1,7 \text{ m}$, medido até o centro da massa, que descreve um círculo horizontal com velocidade escalar constante v . O cordão faz um



(a)



(b)

Fig. 6-12 Exemplo 6-8. (a) Propaganda e (b) diagrama de corpo isolado para Diavolo.

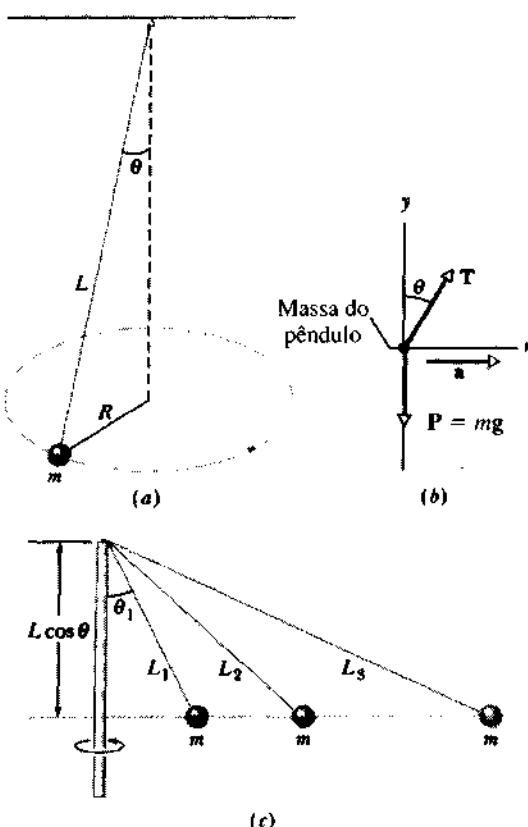


Fig. 6-13 Exemplo 6-9. (a) Um pêndulo cônicos com sua corda fazendo um ângulo θ com a vertical. (b) Um diagrama de corpo isolado para a massa do pêndulo. Os eixos apontam nas direções vertical e radial. A força resultante (e também a aceleração) aponta radialmente em direção ao centro do círculo. (c) Três pêndulos, de diferentes comprimentos, são girados pela rotação de um eixo; suas massas circulam no mesmo plano horizontal, como prevê a Eq. 6-25.

ângulo $\theta = 37^\circ$ com a vertical. Como a massa descreve um círculo, o cordão varre a superfície de um cone. Determine o período do pêndulo, isto é, o tempo T para a massa completar uma volta no círculo.

Solução Na Fig. 6-13b, o diagrama de corpo isolado mostra as forças que atuam na massa: a tensão T da corda e o peso $P (= mg)$ da massa. Fazemos a origem dos eixos coincidir com o centro da massa, conforme mostrado na figura. Em vez do eixo x tradicional (que é estacionário), vamos utilizar o eixo radial r , que sempre aponta da massa para o centro do círculo. As componentes de T em y e r são $T \cos \theta$ e $T \sin \theta$, respectivamente. Como $a_r = 0$, a segunda lei de Newton dá

$$T \cos \theta - mg = ma_r = 0, \quad \text{ou} \quad T \cos \theta = mg. \quad (6-22)$$

Deve haver uma força resultante no eixo r responsável pela aceleração centrípeta da massa. A única componente de força naquela direção é $T \sin \theta$. Então, aplicando a segunda lei de Newton ao eixo r , temos

$$T \sin \theta = ma_r = \frac{mv^2}{R}, \quad (6-23)$$

onde R é o raio da trajetória circular. Dividindo a Eq. 6-23 pela Eq. 6-22 e resolvendo para v , vamos obter

$$v = \sqrt{\frac{gR \sin \theta}{\cos \theta}}.$$

Podemos substituir $2\pi R/\tau$ (a distância ao longo do círculo dividida pelo tempo de uma revolução) para a velocidade escalar v da massa. Fazendo isso e resolvendo para τ , temos

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{R \cos \theta}{g \operatorname{sen} \theta}}. \quad (6-24)$$

Entretanto, da Fig. 6-13a vemos que $R = L \operatorname{sen} \theta$. Fazendo esta substituição na Eq. 6-24, vem

$$\begin{aligned} \tau &= 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{(1,7 \text{ m}) (\cos 37^\circ)}{9,8 \text{ m/s}^2}} = 2,3 \text{ s.} \quad (\text{Resposta}) \end{aligned} \quad (6-25)$$

Da Eq. 6-25 vemos que o período τ não depende da massa e sim de $L \cos \theta$, a distância vertical da massa a seu ponto de sustentação. Assim, conforme mostrado na Fig. 6-13c, se diversos pêndulos cônicos, de diferentes comprimentos, estão girando em relação ao mesmo ponto de sustentação, com o mesmo período, suas massas estarão no mesmo plano horizontal.

EXEMPLO 6-10 A Fig. 6-14a representa um carro de massa $m = 1.600 \text{ kg}$ se movendo com velocidade escalar constante $v = 20 \text{ m/s}$ sobre uma rodovia circular plana de raio $R = 190 \text{ m}$. Qual o valor mínimo de μ_c entre os pneus do carro e a rodovia, para evitar a derrapagem do carro?

Solução A força radial de atrito f_c , exercida pela rodovia sobre os pneus, é a força centrípeta responsável pelo movimento do carro em círculo. (Embora o carro esteja em movimento, não desliza radialmente. Então, a força de atrito é f_c e não f_r .)

O diagrama de corpo isolado, na Fig. 6-14b, mostra as forças que atuam sobre o carro: f_c , N , e $P = mg$. Como o carro não tem aceleração vertical, $a_y = 0$, e a segunda lei de Newton nos leva ao resultado conhecido $N = P = mg$.

Entretanto, no sentido radial deve haver uma força resultante ΣF_r , responsável pela aceleração centrípeta a_r do carro. Pela segunda lei de Newton, $\Sigma F_r = ma_r$. Como a aceleração centrípeta é v^2/R e a única força radial existente é f_c , temos:

$$f_c = \frac{mv^2}{R}. \quad (6-26)$$

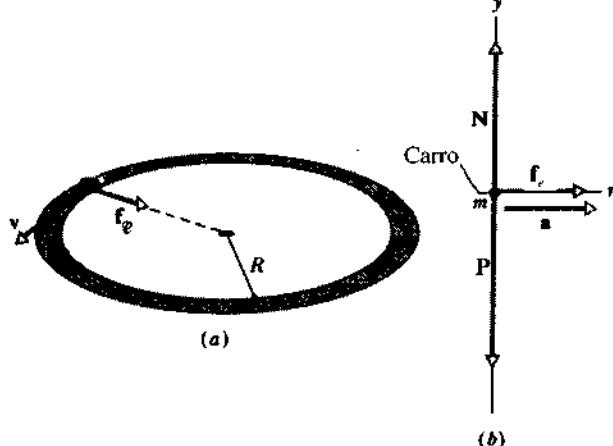


Fig. 6-14 Exemplo 6-10. (a) Um carro se move sobre uma pista plana circular com velocidade constante. A força centrípeta necessária é a força de atrito f_c . (b) Um diagrama de corpo isolado para o carro (fora de escala).

Prosseguindo, vamos relembrar que um corpo está no limiar da derrapagem quando f_c atinge o seu valor máximo $\mu_c N$. Como o problema se refere a esta situação crítica, fazemos $f_c = \mu_c N$ na Eq. 6-26 e depois substituímos mg por N . Vamos obter

$$\mu_c mg = \frac{mv^2}{R},$$

ou

$$\begin{aligned} \mu_c &= \frac{v^2}{gR} \\ &= \frac{(20 \text{ m/s})^2}{(9,8 \text{ m/s}^2)(190 \text{ m})} = 0,21. \quad (\text{Resposta}) \end{aligned} \quad (6-27)$$

Se $\mu_c \geq 0,21$, o carro será mantido em movimento circular por f_c . Mas se $\mu_c < 0,21$, o carro derrapará radialmente para fora do círculo.

Observe dois aspectos interessantes na Eq. 6-27. Primeiro, o valor de μ_c depende do quadrado de v . O que significa que é necessário muito mais atrito à medida que a velocidade escalar aumenta. Você pode ter notado este efeito ao fazer uma curva plana em velocidade e sentir, de repente, os pneus deslizarem. Segundo, a massa m não aparece na Eq. 6-27. Isto significa que a Eq. 6-27 é válida independentemente da massa do veículo, que pode ser um carrinho, uma bicicleta ou um caminhão.

EXEMPLO 6-11 Não se pode contar sempre com o atrito ao fazer uma curva com um carro, principalmente se a estrada estiver molhada. Por isso, as auto-estradas são inclinadas nas curvas. Então, no Exemplo 6-10, suponha que o carro de massa m faça a curva de raio $R = 190 \text{ m}$, agora inclinada, com velocidade escalar constante $v = 20 \text{ m/s}$ (veja Fig. 6-15a). Para que ângulo de inclinação θ o atrito seria desnecessário?

Solução A aceleração e a força centrípetas são as mesmas do problema anterior. O efeito da inclinação é desviar a força normal N em direção ao centro da curva, de modo que a sua componente radial N_r seja a força centrípeta necessária.

Como não há aceleração na direção vertical,

$$N_y = N \cos \theta = P = mg. \quad (6-28)$$

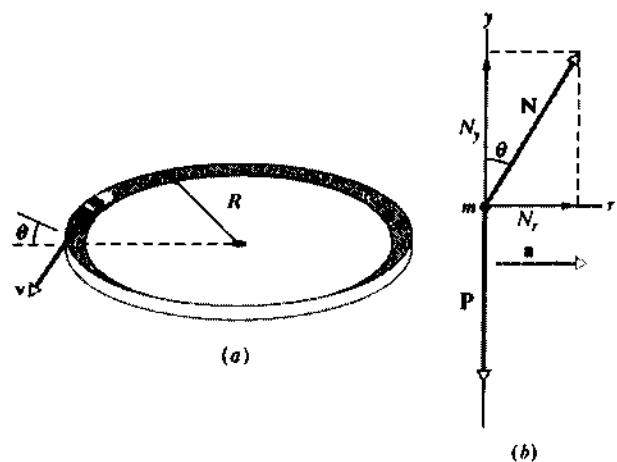


Fig. 6-15 Exemplo 6-11. (a) Um carro se move com velocidade constante sobre uma pista circular inclinada. A força centrípeta é a componente radial da força normal. O ângulo de inclinação foi exagerado para maior clareza. (b) Um diagrama de corpo isolado para o carro. A força resultante (e logo, a aceleração) aponta para o centro.

Na direção radial, a única força compõemente é N_r (supondo-se ser a força de atrito desnecessária). Então, pela Eq. 6-21,

$$N_r = N \operatorname{sen} \theta = \frac{mv^2}{R}. \quad (6-29)$$

Dividindo a Eq. 6-29 pela Eq. 6-28, temos

$$\tan \theta = \frac{v^2}{gR}.$$

Logo,

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v^2}{gR} \quad (6-30)$$

$$= \tan^{-1} \frac{(20 \text{ m/s})^2}{(9,8 \text{ m/s}^2)(190 \text{ m})} = 12^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

Das Eqs. 6-27 e 6-30, concluímos que o coeficiente de atrito crítico para uma rodovia não-inclinada é a tangente do ângulo de inclinação da rodovia inclinada. De um modo ou de outro, a rodovia tem de possibilitar o aparecimento de uma determinada força centrípeta — ou pelo atrito ou pela inclinação.

EXEMPLO 6-12 Até mesmo alguém que já tenha experimentado a sensação de girar num rotor (essencialmente um grande cilindro oco que gira rapidamente ao redor de um eixo central) empalidece cada vez que entra num (Fig. 6-16). Certa mulher entra no cilindro por uma porta lateral, antes de começar a girar; fica em pé sobre o piso e se apoia na parede do cilindro, que está coberta por uma lona. A porta é fechada e o cilindro começa a girar; a mulher, a parede e o piso girando solidariamente. Quando a velocidade do conjunto atinge um valor predeterminado, o piso desce, repentina e assustadoramente. A mulher não cai, ao contrário, permanece pregada à parede, como se alguma coisa invisível estivesse pressionando seu corpo. Depois, o piso é novamente levantando até os seus pés, o cilindro diminui a velocidade e a mulher cai alguns centímetros e começa a caminhar pelo piso. (Algumas pessoas consideram isso bem divertido.)

Suponha que o coeficiente de atrito estático μ_e entre a roupa da mulher e a lona é 0,40 e que o raio R do cilindro é de 2,1 m.

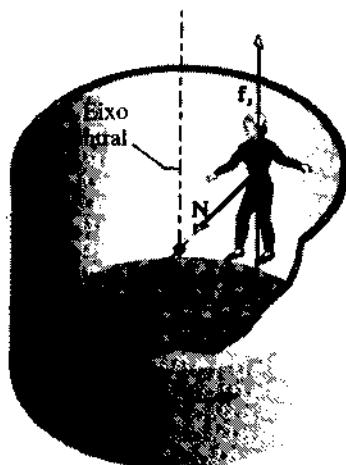


Fig. 6-16 Exemplo 6-12. Um rotor de um parque de diversões. A força centrípeta é a força normal com que a parede nos empurra para o centro do cilindro.

- a. Qual a velocidade escalar mínima v do cilindro para que a mulher não caia quando o piso descer?

Solução A mulher não cairá pela ação do seu peso P , porque o módulo de P e a força de atrito f_e , exercida sobre ela pela parede, são iguais. Na velocidade mínima necessária, ela está no limiar do deslizamento, significando que f_e atingiu o seu valor máximo $\mu_e N$. Assim, nessa situação crítica,

$$\mu_e N = mg, \quad (6-31)$$

onde m é a massa da mulher.

A força normal N é, em geral, perpendicular à superfície contra a qual o corpo (aqui, o da mulher) está pressionado; no entanto, observe que neste caso ela aponta para o eixo central do cilindro. Esta força é a força centrípeta responsável pela aceleração centrípeta a , que mantém a mulher em movimento circular. Assim, pela Eq. 6-21,

$$N = m \frac{v^2}{R}. \quad (6-32)$$

Substituindo esse valor de N na Eq. 6-31 e resolvendo para v , temos

$$v = \sqrt{\frac{gR}{\mu_e}} = \sqrt{\frac{(9,8 \text{ m/s}^2)(2,1 \text{ m})}{0,40}} = 7,17 \text{ m/s} \approx 7,2 \text{ m/s.} \quad (\text{Resposta})$$

Observe que o resultado independe da massa da mulher; isto é válido para qualquer pessoa dentro do cilindro, quer seja criança ou adulto.

- b. Se a massa da mulher for de 49 kg, qual o módulo da força centrípeta que atuará sobre ela?

Solução De acordo com a Eq. 6-32,

$$N = m \frac{v^2}{R} = (49 \text{ kg}) \frac{(7,17 \text{ m/s})^2}{2,1 \text{ m}} \approx 1.200 \text{ N.} \quad (\text{Resposta})$$

Embora essa força seja orientada diretamente para o eixo central, a mulher tem uma estranha sensação de que a força que a mantém presa contra a parede é direcionada radialmente para fora. Esta sensação da mulher é devido ao fato dela estar num referencial não-inercial (ela e o referencial estão em movimento acelerado). Forças medidas em relação a esse referencial podem ser ilusórias. Esta ilusão faz parte da atração do rotor.

6-5 As Forças da Natureza*

Usamos a letra F como um símbolo genérico para a força. Também usamos outros símbolos: P para o peso de um corpo, T para a força que tensiona uma corda, f para a força de atrito, N para a força normal e F_v para a força de viscosidade exercida, por exemplo, pelo ar sobre

* Veja P. C. W. Davies, *The Forces of Nature*, 2.ª ed., Cambridge University Press, Nova Iorque, 1986, para uma leitura mais completa.

Tabela 6-2
A Busca da Superforça — Um Informe

Data	Pesquisador	Realização
1687	Newton	Mostrou que as mesmas leis são aplicáveis tanto a corpos astronômicos como objetos na Terra. Unificação da mecânica celeste e da terrestre.
1820	Oersted	Mostrou, através de experiências notáveis, que a eletricidade e o magnetismo estão intimamente ligados.
1830s	Faraday	Unificação da eletricidade, do magnetismo e da ótica em uma única disciplina, o eletromagnetismo.
1873	Maxwell	Receberam o prêmio Nobel por mostrar que a força fraca e a força eletromagnética podiam ser vistas como diferentes tipos de uma <i>força eletrofraca</i> única. Isso reduz de quatro para três o número de forças fundamentais.
1979	Glashow	Receberam o prêmio Nobel pela verificação experimental da teoria da força eletrofraca.
Salam	Weinberg	
1984	Rubbia	
van der Meer		
Trabalhos em Andamento		
<i>Teorias da grande unificação:</i> Estas teorias, chamadas GUT (do inglês Grand unification theories), procuram unificar a força eletrofraca e a forte.		
<i>Teorias supersimétricas:</i> Estas teorias procuram unificar todas as forças, inclusive a força gravitacional, numa única estrutura.		
<i>Teorias das supercordas:</i> Estas teorias tentam interpretar as partículas puntiformes, como os elétrons, que são incrivelmente minúsculas, como linhas formando circuitos fechados. Parecem necessitar dimensões extras, além das quatro dimensões do espaço-tempo, já conhecidas.		

um pára-quedista em salto livre. Basicamente, todas essas forças se resumem em dois tipos: (1) a **força gravitacional**, da qual o peso é o nosso único exemplo, e (2) a **força eletromagnética**, que inclui — sem exceção — todas as outras. A força que prende um balão eletricamente carregado a uma parede e a que faz um ímã atrair um prego são outros exemplos de força eletromagnética. De fato, junto com a gravitacional, *todas* as que experimentamos na vida diária, quando examinadas mais detalhadamente, sejam de tração ou de compressão, são forças eletromagnéticas. Isto é, todas essas forças, inclusive o atrito, a normal, a atração, a viscosidade e a tensão envolvem basicamente forças eletromagnéticas exercidas por um átomo sobre outro. A tensão numa corda esticada, por exemplo, é mantida apenas porque os átomos da corda atraem-se mutuamente.

Há outras forças fundamentais conhecidas que atuam a curtas distâncias, mas que não podem ser experimentadas diretamente através dos nossos sentidos. São a **força fraca**, que está presente em certos tipos de decaimento radioativo, e a **força forte**, que mantém os prótons e nêutrons

juntos e faz o papel da “cola” que mantém o núcleo atômico agregado.

Há muito tempo, os físicos acreditam que a natureza é basicamente simples e que o número de forças fundamentais pode ser reduzido. Einstein passou a maior parte de sua vida tentando interpretar essas forças como diferentes aspectos de uma única *superforça*. Não conseguiu, mas nos anos 1960 e 1970 outros físicos mostraram que a força fraca e a eletromagnética são diferentes aspectos de uma única **força eletrofraca**. A procura por outras unificações continua atual na vanguarda da física. A Tabela 6-2 relaciona o progresso que tem sido obtido para essa **unificação** (como é denominado esse objetivo), e faz algumas tentativas de previsão.

As forças e as partículas da natureza estão intimamente ligadas com a origem e o desenvolvimento do universo. Se conseguirmos construir uma teoria unificada das forças, poderá ser possível responder a perguntas do tipo: “Como o universo evoluiu até o estágio atual?” e “Como será o universo no futuro?” No Cap. 49 (Vol. 4) desta obra, examinaremos essas questões.

RESUMO

Atrito

Quando uma força F tenta fazer um corpo deslizar sobre uma superfície, esta exerce sobre o corpo uma **força de atrito**, que é paralela à superfície e tem sentido contrário ao deslizamento. Isto é devido à adesão do corpo à superfície.

Se o corpo não desliza, a força de atrito é uma **força de atrito estático** f_s . Se há deslizamento, a força de atrito é uma **força de atrito cinético** f_c .

Propriedades do Atrito

Propriedade 1. Se o corpo não se move, então a força de atrito estático f_s e a componente de F paralela à superfície têm o mesmo módulo e sentidos opostos.

Propriedade 2. O módulo de f_s tem um valor máximo $f_{s,\max}$, dado por

$$f_{s,\max} = \mu_s N, \quad (6-1)$$

onde μ_s é o **coeficiente de atrito estático** e N é o módulo da força normal. Se a componente de F paralela à superfície for maior do que $f_{s,\max}$, então o corpo começa a deslizar sobre a superfície.

Propriedade 3. Se o corpo começa a deslizar sobre a superfície, o módulo da força de atrito diminui rapidamente para um valor f_c , dado por

$$f_c = \mu_c N, \quad (6-2)$$

onde μ é o **coeficiente de atrito cinético**. Depois, durante o deslizamento, o módulo da força de atrito cinético f_c é dado pela Eq. 6-2.

Força de Viscosidade

Quando existe uma velocidade relativa entre um corpo e o ar, aquele experimenta uma **força de viscosidade** F_v , que se opõe ao movimento relativo e aponta no sentido do fluxo de ar em relação ao corpo. O módulo de F_v está relacionado com a velocidade escalar relativa v pelo **coeficiente de viscosidade** C , determinado experimentalmente, de acordo com

$$V = \frac{1}{2} C \rho A v^2, \quad (6-18)$$

onde ρ é a densidade do ar (massa por volume) e A é a **área da seção reta efetiva** do corpo (a área de uma seção reta considerada perpendicularmente à velocidade v).

Velocidade Limite

Quando um objeto arredondado cai de uma altura significativa através do ar, o módulo da força de viscosidade e o peso do objeto são iguais. Então, o corpo cai com uma **velocidade limite** constante v_l , dada por

$$v_l = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho A}}, \quad (6-19)$$

onde m é a massa do corpo.

Movimento Circular Uniforme

Se uma partícula se move sobre um círculo ou um arco circular com raio r e velocidade escalar constante v , dizemos que ela está em movimento circular uniforme. A partícula está sob o efeito de uma aceleração centrípeta com módulo dado por

$$a = \frac{v^2}{r}, \quad (6-20)$$

e que se deve a uma força centrípeta com módulo dado por

$$F = m \frac{v^2}{r}, \quad (6-21)$$

onde m é a massa da partícula. Os vetores a e F apontam para o centro de curvatura da trajetória da partícula.

Forças Fundamentais

As várias espécies de forças podem ser reduzidas a três tipos fundamentais: gravitacional, eletrofraca (uma combinação das forças elétrica e magnética com a fraca) e forte. Apenas as forças gravitacional, elétrica e magnética são evidentes no cotidiano. Os físicos desejam reduzir a lista de três forças fundamentais a uma única, a superforça, que reuniria todas as outras.*

* Até agora isto não foi conseguido. (N. do R.)

QUESTIONÁRIO

1. Há um limite além do qual um maior polimento das superfícies aumenta a resistência de atrito, em vez de diminuir. Explique por quê.
2. O coeficiente de atrito estático pode ter um valor maior do que 1? E o de atrito cinético?
3. Um caixote mais pesado que você está em repouso sobre uma superfície irregular. O coeficiente de atrito estático entre ambos é idêntico ao da sola dos seus sapatos sobre a mesma superfície. Você consegue empurrar o caixote sobre ela?
4. Como uma pessoa que está em repouso sobre um lago congelado, com superfície completamente isenta de atrito, pode alcançar uma das margens? Poderia fazer isso caminhando, rolando, agitando seus braços ou saltando sobre seus pés? Em primeiro lugar, como uma pessoa poderia chegar a essa localização?
5. Por que os pneus agarram melhor numa estrada plana do que numa subida ou descida?
6. Qual a finalidade das superfícies curvas, chamadas aerofólios, colocadas na traseira dos carros de corrida? São projetadas de forma que o fluxo de ar que passa por elas exerça, naquele ponto, uma força para baixo.
7. Que gotas de chuva, se for o caso, caem mais rápido: as pequenas ou as grandes?
8. A velocidade limite de uma bola de beisebol é 153 km/h. Entretanto, a medida da velocidade escalar na batida, em geral, é maior do que essa marca, superando algumas vezes 161 km/h. Como isso é possível?
9. Uma tora está flutuando rio abaixo. Como poderíamos calcular a força de viscosidade atuando sobre ela?
10. O que acontece com uma bola que é lançada para baixo, através do ar, com o dobro de sua velocidade limite: acelera, desacelera ou continua a se mover com a mesma velocidade inicial?
11. Considere uma bola atirada verticalmente para cima. Levando em conta a resistência do ar, o tempo de subida é maior ou menor do que o de queda? Por quê? Trace um gráfico qualitativo da velocidade escalar v da bola versus o tempo t .
12. Por que as ferrovias e as auto-estradas são inclinadas nas curvas?
13. Você está voando num avião a uma altitude constante e deseja fazer uma volta de 90°. Por que inclina o avião?
14. O que acontece ao período T e à velocidade escalar u quando $\theta = 90^\circ$, no pêndulo côncico do Exemplo 6-9? Por que este ângulo é fisicamente inatingível? Discuta o caso para $\theta = 0^\circ$.
15. Certa moeda é colocada sobre o prato de um toca-discos. O motor começa a funcionar, mas antes da velocidade final de rotação ser alcançada, a moeda escapa do prato. Explique por quê.
16. Um carro está se movendo com velocidade escalar constante por uma rodovia que lembra a montanha russa de um parque de diversões. Compare a força que o carro exerce sobre uma seção horizontal da rodovia, com a que exerce sobre ela no alto de um morro e no fundo de um vale. Explique.
17. Um passageiro, sentado no banco da frente de um carro, percebe estar deslizando em direção à porta, enquanto o motorista faz uma curva repentina para a esquerda. Descreva as forças sobre o passageiro e o carro, nesse instante, para o movimento visto de um referencial (a) fixo na Terra e (b) fixo no carro.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

Seção 6-2 Propriedades do Atrito

1E. Um armário de quarto com massa de 45 kg, incluindo gavetas e roupas, está em repouso sobre o assoalho. (a) Se o coeficiente de atrito estático entre o móvel e o chão for 0,45, qual a menor força horizontal que uma pessoa deverá aplicar sobre o armário para colocá-lo em movimento? (b) Se as gavetas e as roupas, que têm 17 kg de massa, forem removidas antes do armário ser empurrado, qual a nova força mínima?

2E. Um jogador com massa $m = 79$ kg escorrega no campo e seu movimento é retardado por uma força de atrito $f = 470$ N. Qual o coeficiente de atrito cinético μ_c entre o jogador e o campo?

3E. Um trabalhador empurra um caixote de 35 kg com uma força horizontal de 110 N. O coeficiente de atrito estático entre o caixote e o chão é 0,37. (a) Qual a força de atrito exercida pelo chão sobre o caixote? (b) Qual o valor máximo $f_{s,max}$ da força de atrito estático nessas circunstâncias? (c) O caixote se moverá? (d) Suponha, então, que um segundo trabalhador puxa o caixote para cima para facilitar o movimento. Qual a menor força que deve aplicar ao caixote, para permitir que a força de 110 N do primeiro trabalhador movimente o caixote? (e) Se, em vez disso, o segundo trabalhador puxar o caixote horizontalmente, qual a menor força que precisará aplicar para conseguir mover o caixote?

4E. O coeficiente de atrito estático entre o teflon e a gema de um ovo é cerca de 0,04. Qual o menor ângulo, em relação à horizontal, que fará a gema deslizar pelo fundo de uma frigideira revestida de teflon?

5E. Uma força de 100 N, fazendo um ângulo θ acima da horizontal, é aplicada a uma cadeira de 25 kg colocada sobre o chão. (a) Calcule o módulo da força normal que o chão exerce sobre a cadeira e a componente horizontal da força aplicada, para cada um dos seguintes ângulos θ : (i) 0° , (ii) 30.0° , (iii) 60.0° . (b) Considere que o coeficiente de atrito estático entre o chão e a cadeira é 0,420 e determine, para cada um desses valores de θ , se a cadeira desliza ou permanece parada.

6E. Em Nevada e no sul da Califórnia, as pedras deixam marcas de trilha no chão duro do deserto como se tivessem se deslocado (Fig. 6-17). Foram anos de curiosidade acerca do movimento invisível que formava as trilhas. Finalmente, na década de 70 a resposta surgiu: quando uma tempestade ocasional atinge o deserto, uma fina camada de lama pode se formar sobre o chão ainda firme, reduzindo consideravelmente o coeficiente de atrito entre as pedras e o chão. Se a tempestade for acompanhada por um vento forte, ele empurra as pedras, deixando trilhas que mais tarde são endurecidas pelo

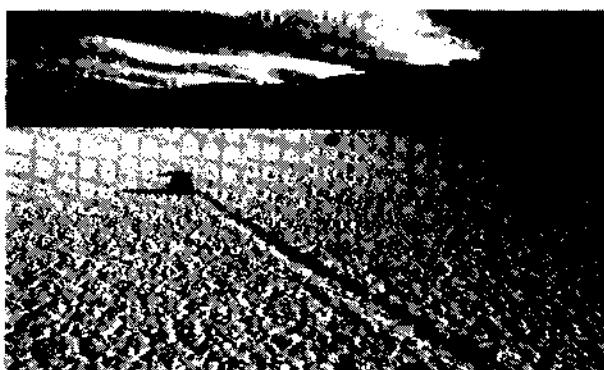


Fig. 6-17 Exercício 6. A trilha deixada por uma pedra.

calor do Sol. Suponha que a massa de uma pedra seja 300 kg (mais ou menos a massa da maior pedra que formou uma trilha) e o coeficiente de atrito estático seja reduzido para 0,15. Qual o módulo da força da rajada horizontal de vento necessária para mover a pedra?

7E. Qual a maior aceleração que pode ser produzida por um corredor, se o coeficiente de atrito estático entre os seus sapatos e o chão é 0,95? (Apenas um pé fica em contato com o chão durante a aceleração.)

8E. Uma pessoa empurra horizontalmente uma caixa de 55 kg, para movê-la sobre o chão, com uma força de 220 N. O coeficiente de atrito cinético é 0,35. (a) Qual o módulo da força de atrito? (b) Qual a aceleração da caixa?

9E. Um tronco com peso de 220 N está colocado sobre o chão. O coeficiente de atrito estático entre o tronco e o chão é 0,41, enquanto o de atrito cinético é 0,32. (a) Qual o módulo da força horizontal mínima que uma pessoa deve aplicar para empurrar o tronco e começar a movê-lo? (b) Uma vez em movimento, qual o módulo da força horizontal que deve ser aplicada pela pessoa, para manter o tronco em movimento com velocidade constante? (c) Se a pessoa continuasse a empurrar com a mesma força utilizada para iniciar o movimento, qual seria a aceleração do tronco?

10E. Um arquivo com um peso de 556 N está parado sobre o chão. O coeficiente de atrito estático entre ele e o chão é 0,68, e o de atrito cinético é 0,56. Em quatro diferentes tentativas para movê-lo, foi empurrado com forças horizontais de (a) 222 N, (b) 334 N, (c) 445 N e (d) 556 N. Determine, para cada tentativa, se o arquivo se move e calcule o módulo da força de atrito do chão sobre ele. O arquivo está sempre parado antes de cada tentativa.

11E. Uma força horizontal F de 12 N comprime um bloco pesando 5,0 N contra uma parede vertical (Fig. 6-18). O coeficiente de atrito estático entre a parede e o bloco é 0,60, e o coeficiente de atrito cinético é 0,40. Suponha que inicialmente o bloco não esteja em movimento. (a) O bloco se moverá? (b) Qual a força exercida pela parede sobre o bloco, em notação de vetores unitários?

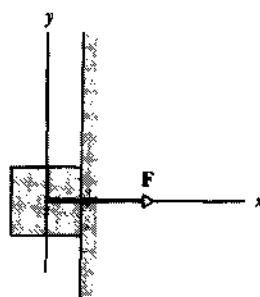


Fig. 6-18 Exercício 11.

12E. Uma alpinista de 49 kg está escalando uma “chaminé” entre duas lajes de rocha, como mostrado na Fig. 6-19. O coeficiente de atrito estático entre seus sapatos e a rocha é 1,2; entre suas costas e a rocha é 0,80. Ela reduziu sua compressão sobre a rocha até o limiar de deslizamento de seus pés e suas costas. (a) Com que força ela comprime a rocha? (b) Que fração de seu peso é equilibrada, pela força de atrito em seus sapatos?



Fig. 6-19 Exercício 12.

13E. Uma casa é construída em cima de uma montanha com 45° de inclinação, aproximadamente (Fig. 6-20). Um estudo de engenharia indica que o ângulo de inclinação deve ser reduzido porque as camadas superiores do solo, ao longo da inclinação, podem deslizar sobre as camadas inferiores. Se o coeficiente de atrito estático entre duas dessas camadas é 0,5, qual o menor ângulo de redução ϕ da atual inclinação, de forma a evitar um deslizamento?



Fig. 6-20 Exercício 13.

14E. O coeficiente de atrito cinético na Fig. 6-21 é 0,20. Qual a aceleração do bloco se (a) deslizar para baixo no plano inclinado e (b) se for dado um empurrão para cima, fazendo-o deslizar sobre o plano inclinado?

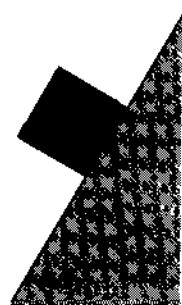


Fig. 6-21 Exercício 14.

15E. Um disco de hóquei de 110 g desliza cerca de 15 m sobre o gelo antes de parar. (a) Para uma velocidade escalar inicial de 6,0 m/s, qual é o módulo da força de atrito sobre o disco durante o deslizamento? (b) Qual o coeficiente de atrito entre o disco e o gelo?

16P. Um aluno deseja determinar os coeficientes de atrito estático e cinético entre uma caixa e uma prancha. Ele coloca a caixa sobre a prancha e lentamente vai levantando uma das extremidades. Quando o ângulo de inclinação faz 30° com a horizontal, ela começa a deslizar, deslizando pela prancha cerca de 2,5 m em 4,0 s. Quais os coeficientes de atrito determinados?

17P. Um trabalhador deseja empilhar um monte de areia, em forma de cone, dentro de uma área circular. O raio do círculo é R e nenhuma areia vaza para fora do círculo (Fig. 6-22). Se μ_s é o coeficiente de atrito estático entre a camada de areia da superfície inclinada e a camada logo abaixo (sobre a qual ela pode deslizar), mostre que o maior volume de areia que pode ser empilhado dessa forma é $\pi\mu_s R^3/3$. (O volume de um cone é $Ah/3$, onde A é a área da base e h a altura do cone.)

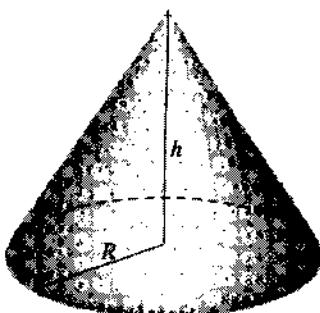


Fig. 6-22 Problema 17.

18P. Um esqui em repouso sobre a neve ficará preso a ela. Entretanto, quando começa a se mover, a fricção provoca um aquecimento que derrete parcialmente a neve, reduzindo o coeficiente de atrito e facilitando o deslizamento. A graxa usada no esqui tem a finalidade de repelir a água, reduzindo o atrito entre a parte metálica e a camada de água resultante do derretimento da neve. Uma revista informou que um novo tipo de esqui, feito de um material plástico desenvolvido para repelir a água, foi utilizado por um esquiador numa inclinação suave de 200 m, nos Alpes, o que permitiu reduzir seu tempo de descida de 61 para 42 s. (a) Determine os módulos das acelerações médias para cada par de esquis. (b) Suponha que a inclinação é de 3.0° , calcule o coeficiente de atrito cinético para cada caso.

19P. Um bloco de aço de 11 kg está em repouso sobre uma mesa horizontal. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a mesa é 0,52. (a) Qual o módulo da força horizontal que iniciará o movimento do bloco? (b) Qual o módulo de uma força aplicada num ângulo de 60° acima da horizontal que iniciará o seu movimento? (c) Se a força for aplicada num ângulo de 60° abaixo da horizontal, qual o maior módulo que ela pode assumir sem movimentá-lo?

20P. Um vagão aberto de trem está carregado com caixas que têm um coeficiente de atrito estático de 0,25 com o assoalho do vagão. Se o trem se move a 48 km/h, qual a menor distância em que pode ser parado, com uma desaceleração constante, sem provocar o deslizamento das caixas?

21P. Um bloco desliza para baixo com velocidade constante sobre um plano com inclinação θ . Em seguida, é lançado para cima sobre o mesmo plano com uma velocidade escalar inicial v_0 . (a) Que altura do plano alcança antes de parar? (b) Ele deslizará para baixo novamente? Justifique sua resposta.

22P. Uma caixa de 68 kg é puxada pelo chão por uma corda que faz um ângulo de 15° acima da horizontal. (a) Se o coeficiente de atrito estático é 0,50, qual a tensão mínima necessária para iniciar o movimento da caixa? (b) Se $\mu_s = 0,35$, qual a sua aceleração inicial?

23P. Um porco desliza para baixo, num plano inclinado de 35° (Fig. 6-23), no dobro do tempo que levaria deslizando no mesmo plano sem atrito. Qual o coeficiente de atrito cinético entre ele e o plano?



Fig. 6-23 Problema 23.

24P. Na Fig. 6-24, A e B são blocos com pesos de 44 N e 22 N, respectivamente. (a) Determine o menor peso (bloco C) que deve ser colocado sobre o bloco A para impedi-lo de deslizar, sabendo que μ_s entre A e a mesa é 0,20. (b) Se o bloco C for repentinamente retirado, qual será a aceleração do bloco A, sabendo que μ_s entre A e a mesa é 0,15?

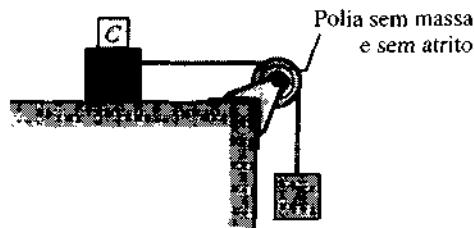


Fig. 6-24 Problema 24.

25P. Um bloco de 3,5 kg é empurrado sobre um piso horizontal por uma força $F = 15 \text{ N}$, que faz um ângulo $\theta = 40^\circ$ com a horizontal (Fig. 6-25). O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o chão é 0,25. Calcule (a) a força de atrito exercida sobre o bloco e (b) a aceleração do bloco.

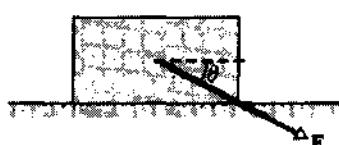


Fig. 6-25 Problema 25.

26P. Na Fig. 6-26, um trabalhador cuidadoso aplica uma força F ao longo do cabo de um esfregão. O cabo faz um ângulo θ com a vertical, sendo μ_s e μ_k os respectivos coeficientes de atrito estático e cinético entre o esfregão e o chão. Despreze a massa do cabo e suponha que toda massa m esteja no esfregão. (a) Qual o valor de F , se o esfregão se move pelo chão com velocidade constante? (b) Mostre que, se θ é menor do que um determinado valor θ_0 , então F (ainda aplicada ao longo do cabo) é incapaz de mover o esfregão. Determine θ_0 .

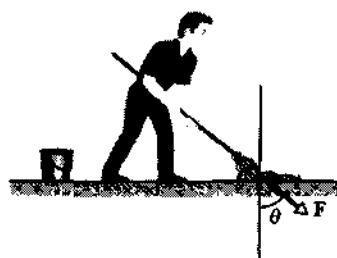


Fig. 6-26 Problema 26.

27P. Uma força horizontal de 50 N é aplicada a um bloco de 5,0 kg que está sobre um plano inclinado (Fig. 6-27). O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano é 0,30. O de atrito estático não é fornecido (mas você pode saber algo a respeito dele). (a) Qual a aceleração do bloco ao se mover para cima, no plano? (b) Mantendo a força horizontal aplicada, que altura o bloco atingirá no plano inclinado, se a velocidade inicial de subida for 4,0 m/s? (c) O que acontece ao bloco depois que alcança o ponto mais alto? Justifique a sua resposta.

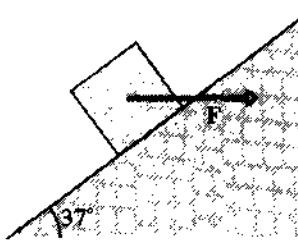


Fig. 6-27 Problema 27.

28P. A Fig. 6-28 mostra a seção reta de uma rodovia que corta a vertente de uma montanha. A linha cheia AA' representa a base de um plano ao longo do qual um deslizamento é possível. O bloco B, logo acima da estrada, está separado do alto da montanha por uma grande fenda (chamada junta), de forma que apenas a força de atrito entre ele e a base do plano evita o deslizamento. A massa do bloco é $1,8 \times 10^3 \text{ kg}$, o ângulo de inclinação θ do plano de deslizamento é 24° , e o coeficiente de atrito estático entre o bloco e esse plano é 0,63. (a) Mostre que o bloco não deslizará. (b) A água que se infiltra na fenda congela e, ao se expandir, exerce sobre o bloco uma força F paralela a AA'. Que valor mínimo de F iniciará um deslizamento?

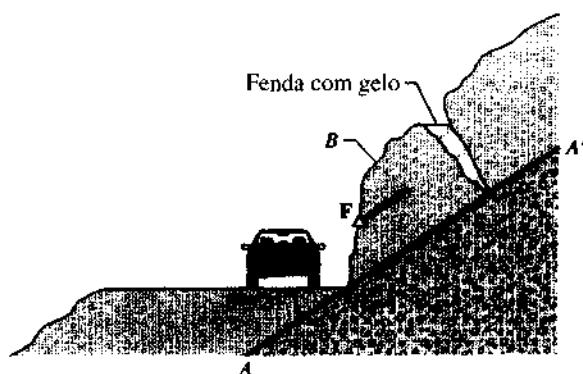


Fig. 6-28 Problema 28.

29P. Um bloco pesando 80 N está em repouso sobre um plano, com uma inclinação de 20° em relação à horizontal (Fig. 6-29). O coeficiente de atrito estático é 0,25 e o de atrito cinético é 0,15. (a) Qual a menor força F , paralela ao plano, que evitará o deslizamento do bloco para baixo? (b) Qual o módulo mínimo de F que iniciará o movimento do bloco para cima? Qual o valor de F necessário para fazer o bloco subir o plano com velocidade constante?

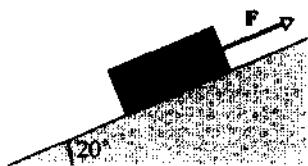


Fig. 6-29 Problema 29.

30P. O bloco B da Fig. 6-30 pesa 711 N. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície horizontal é 0,25. Determine qual o peso máximo do bloco A para o qual o sistema ainda permanece equilibrado.

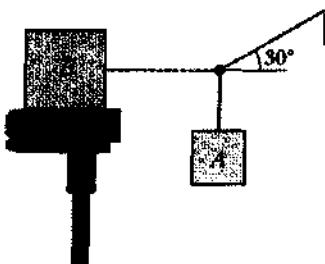


Fig. 6-30 Problema 30.

31P. O corpo B na Fig. 6-31 pesa 102 N e o corpo A pesa 32 N. Os coeficientes de atrito entre B e o plano inclinado são $\mu_s = 0,56$ e $\mu_k = 0,25$. Determine a aceleração do sistema se (a) B estiver inicialmente em repouso, (b) B estiver se movendo para cima no plano inclinado e (c) B estiver se movendo para baixo.

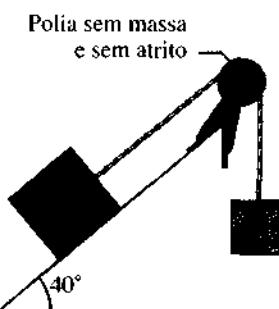


Fig. 6-31 Problema 31.

32P. Dois blocos são ligados através de uma polia, conforme mostrado na Fig. 6-32. A massa do bloco A é de 10 kg e o coeficiente de atrito cinético é 0,20. O bloco A desliza para baixo sobre o plano com velocidade constante. Qual a massa de B ?



Fig. 6-32 Problema 32.

33P. O bloco m_1 na Fig. 6-33 tem massa de 4,0 kg e m_2 , de 2,0 kg. O coeficiente de atrito entre m_2 e o plano horizontal é 0,50. No plano inclinado não há atrito. Determine (a) a tensão na corda e (b) a aceleração dos blocos.

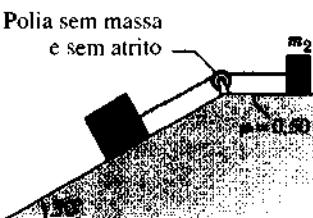


Fig. 6-33 Problema 33.

34P. Dois blocos pesando 3,6 kg e 7,2 kg estão ligados por uma corda de massa desprezível e deslizam para baixo sobre um plano inclinado a 30° . O coeficiente de atrito cinético entre o bloco de 3,6 kg e o plano é 0,10; entre o de 7,2 kg e o plano é 0,20. Supondo que o bloco de 3,6 kg esteja na frente, determine (a) a aceleração dos blocos e (b) a tensão na corda. (c) Descreva o movimento, se os blocos forem invertidos.

35P. Duas massas, $m_1 = 1,65$ kg e $m_2 = 3,30$ kg, deslizam para baixo sobre um plano inclinado, conectadas por um bastão de massa desprezível (veja Fig. 6-34), com m_1 seguindo m_2 . O ângulo de inclinação é $\theta = 30^\circ$. O coeficiente de atrito cinético entre m_1 e o plano é $\mu_1 = 0,226$; e entre m_2 e o plano é $\mu_2 = 0,113$. Calcule (a) a tensão no bastão e (b) a

aceleração conjunta das duas massas. (c) Como ficariam as respostas de (a) e (b) se as massas m_1 e m_2 fossem invertidas?

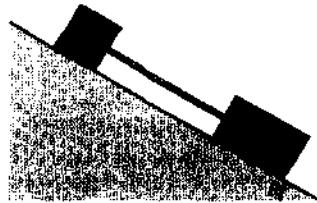


Fig. 6-34 Problema 35.

36P. Um bloco de 4,0 kg é colocado em cima de um outro de 5,0 kg. Para fazer o bloco de cima deslizar sobre o de baixo, que é mantido fixo, uma força horizontal de pelo menos 12 N deve ser aplicada ao de cima. O conjunto de blocos é colocado agora sobre uma mesa horizontal sem atrito (veja Fig. 6-35). Determine (a) a força horizontal F máxima aplicada ao bloco inferior para que ainda se movimentem juntos e (b) a aceleração resultante dos blocos.



Fig. 6-35 Problema 36.

37P. Uma tábua de 40 kg está em repouso sobre um assoalho sem atrito, e um bloco de 10 kg está colocado em cima da tábua (veja Fig. 6-36). O coeficiente de atrito estático μ_s entre o bloco e a tábua é 0,60, enquanto o de atrito cinético μ_k é 0,40. O bloco de 10 kg é puxado por uma força horizontal de 100 N. Quais as acelerações resultantes (a) do bloco e (b) da tábua?

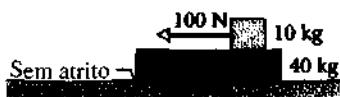


Fig. 6-36 Problema 37.

38P. A Fig. 6-37 mostra dois blocos em contato ($m = 16 \text{ kg}$ e $M = 88 \text{ kg}$) que não estão fixados um ao outro. O coeficiente de atrito estático entre eles é $\mu_s = 0,38$, mas na superfície embaixo de M não há atrito. Qual a menor força horizontal F necessária para manter m em contato com M ?

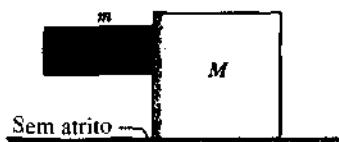


Fig. 6-37 Problema 38.

39P. Uma caixa desliza para baixo através de uma calha de perfil de 90° , que está inclinada, conforme mostra a Fig. 6-38. O coeficiente de atrito cinético entre elas é μ_c . Qual a aceleração da caixa em função de μ_c , θ e g ?



Fig. 6-38 Problema 39.

40P. Uma locomotiva movimenta 25 vagões sobre uma ferrovia plana. Cada vagão tem massa de 50 t métricas e está sujeito a uma força de atrito $f = 250v$, onde v é a velocidade escalar em metros por segundo e f é a força em newtons. No instante em que a velocidade escalar do trem é de 30 km/h, a aceleração é de $0,20 \text{ m/s}^2$. (a) Qual a tensão no engate entre o primeiro vagão e a locomotiva? (b) Se esta tensão for a força máxima que a locomotiva pode exercer sobre os vagões, qual a inclinação mais íngreme em que a locomotiva conseguirá puxar o trem a 30 km/h?

41P. Uma caixa de areia, inicialmente em repouso, é puxada pelo chão por uma corda onde a tensão não pode ultrapassar 1.100 N. O coeficiente de atrito estático entre o chão e a caixa é 0,35. (a) Qual deverá ser o ângulo da corda em relação à horizontal, de forma a permitir puxar a maior quantidade de areia possível, e (b) qual o peso da caixa de areia nessa situação?

42P*. Um barco de 1.000 kg está navegando a 90 km/h, quando seu motor é desligado. A força de atrito f , entre o barco e a água é proporcional à velocidade escalar v do barco: $f_c = 70v$, onde v está em metros por segundo e f_c em newtons. Determine o tempo necessário para o barco chegar à velocidade de 45 km/h.

Seção 6-3 Força de Viscosidade e a Velocidade Limite

43E. Calcule a força de viscosidade sobre um míssil de 53 cm de diâmetro, viajando na velocidade de cruzeiro de 250 m/s, a baixa altitude, onde a densidade do ar é de $1,2 \text{ kg/m}^3$. Suponha $C = 0,75$.

44E. A velocidade limite de um pára-quedista na chamada posição de água é de 160 km/h. No mergulho de cabeça, a velocidade limite é de 310 km/h. Supondo que C seja o mesmo para as duas posições, determine a razão da seção reta efetiva da área A na posição mais lenta em relação àquela da posição mais rápida.

45E. Calcule a razão entre a força de viscosidade sobre um jato de passageiro à velocidade de 1.000 km/h, a uma altitude de 10 km, e sobre um turboélice de transporte com a metade da velocidade, voando na metade da altura do jato. A densidade do ar a 10 km de altitude é de $0,38 \text{ kg/m}^3$ e a 5 km é de $0,67 \text{ kg/m}^3$. Suponha que os aviões tenham a mesma área de seção reta e o mesmo coeficiente de viscosidade C .

46P. Utilizando os dados da Tabela 6-1, determine o diâmetro de uma bala de 16 lb. Suponha $C = 0,49$.

Seção 6-4 Movimento Circular Uniforme

47E. Se o coeficiente de atrito estático dos pneus numa rodovia é 0,25, com que velocidade máxima um carro pode fazer uma curva plana de 47,5 m de raio, sem derrapar?

48E. Durante uma corrida olímpica de trenó duplo, uma equipe europeia faz uma curva de 7,6 m de raio a uma velocidade de 97 km/h. A

quantos g 's (aceleração gravitacional) os corredores são submetidos, durante a curva?

49E. Qual deverá ser o menor raio de uma curva não-inclinada que um ciclista poderá fazer à velocidade de 29 km/h, se o coeficiente de atrito entre os pneus e a pista for 0,32?

50E. Um carro pesando 10,7 kN e se movendo a 13,4 m/s tenta fazer uma curva não-inclinada de raio igual a 61,0 m. (a) Qual a força de atrito necessário para mantê-lo nessa trajetória circular? (b) Se o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a estrada for 0,35, a tentativa de fazer a curva será bem-sucedida?

51E. Uma curva circular de uma auto-estrada é projetada para velocidades de 60 km/h. (a) Se o raio da curva é de 150 m, qual deve ser o ângulo de inclinação da rodovia? (b) Se a curva não fosse inclinada, qual deveria ser o coeficiente de atrito mínimo entre os pneus e a estrada para permitir o tráfego a essa velocidade, sem derrapagem?

52E. Uma curva inclinada de uma auto-estrada circular é projetada para um tráfego de 60 km/h. O raio da curva é de 200 m. O tráfego está fluindo a 40 km/h, sob uma tempestade. Qual o coeficiente de atrito mínimo, entre os pneus e a rodovia, que permitirá aos carros realizar a curva sem sair da estrada?

53E. Uma criança coloca uma cesta de piquenique na parte externa de um carrossel que tem 4,6 m de raio e faz uma volta a cada 30 s. (a) Qual a velocidade de um ponto sobre a borda do carrossel? (b) Qual deve ser o coeficiente de atrito estático entre a cesta e o carrossel, para que a cesta permaneça sobre este?

54E. Um pêndulo cônicos é formado por massa de 50 g presa a um cordão de 1,2 m. A massa gira formando um círculo horizontal de 25 cm de raio. (a) Qual é a sua velocidade? (b) Qual a sua aceleração? (c) Qual a tensão no cordão?

55E. No modelo de Bohr do átomo de hidrogênio, o elétron descreve uma órbita circular em torno do núcleo. Se o raio é $5,3 \times 10^{-11}$ m e o elétron circula 6,6 $\times 10^{15}$ vezes por segundo, determine (a) a velocidade do elétron, (b) a aceleração do elétron (módulo e sentido) e (c) a força centrípeta que atua sobre ele. (Esta força é resultante da atração entre o núcleo, positivamente carregado, e o elétron, negativamente carregado.) A massa do elétron é $9,11 \times 10^{-31}$ kg.

56E. A massa m está sobre uma mesa, sem atrito, presa a um peso de massa M , pendurado por uma corda que passa através de um furo no centro da mesa (veja Fig. 6-39). Determine a velocidade escalar com que m deve se mover para M permanecer em repouso.

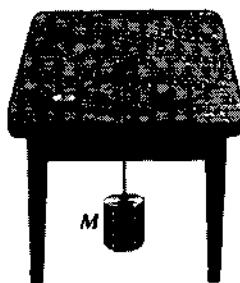


Fig. 6-39 Exercício 56.

57E. Um dublê dirige um carro sobre o alto de uma montanha, cuja seção reta é aproximadamente um círculo de 250 m de raio, conforme a Fig. 6-40. Qual a maior velocidade em que pode dirigir o carro sem sair da estrada, no alto da montanha?

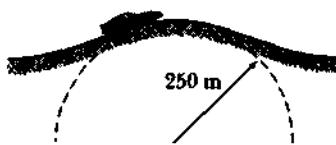


Fig. 6-40 Exercício 57.

58P. Uma pequena moeda é colocada sobre certa mesa horizontal plana que gira. A mesa faz três revoluções em 3,14 s. (a) Qual a velocidade da moeda que está a 5,0 cm do centro e não desliza? (b) Qual a aceleração da moeda (módulo e sentido)? (c) Qual a intensidade da força de atrito que age sobre a moeda, se a sua massa é de 2,0 g? (d) Qual o coeficiente de atrito estático entre a moeda e a mesa, se aquela desliza para fora, quando é colocada a mais de 10 cm do centro da mesa?

59P. Um pequeno objeto é colocado a 10 cm do centro de um prato de toca-discos. Observamos que permanece sobre o prato na rotação de $33\frac{1}{2}$ rev/min (revoluções por minuto), mas desliza para fora quando a rotação é de 45 rev/min. Qual o limite de variação do coeficiente de atrito estático entre o objeto e a superfície do toca-discos?

60P. Um ciclista percorre um círculo de 25,0 m de raio a uma velocidade escalar constante de 9,00 m/s. A massa do conjunto ciclista-bicicleta é de 85,0 kg. Calcule as intensidades (a) da força de atrito exercida pela pista sobre a bicicleta e (b) a força total exercida pela pista.

61P. Um carro está fazendo uma curva plana de raio $R = 220$ m, com uma velocidade $v = 94,0$ km/h, projetada para a curva. Que força de atrito um passageiro com massa $m = 85,0$ kg exerce sobre a almofada do assento?

62P. Um estudante de 68 kg, numa roda-gigante com velocidade constante, tem um peso aparente de 56 kg no ponto mais alto. (a) Qual o seu peso aparente no ponto mais baixo? (b) E no ponto mais alto, se a velocidade da roda-gigante dobrar?

63P. Uma pedra presa à ponta de uma corda gira em um círculo vertical de raio R . Determine a velocidade crítica abaixo da qual a corda pode afrouxar no ponto mais alto.

64P. Uma determinada corda pode suportar uma tensão máxima de 4,0 kgf sem romper. Uma criança amarra uma pedra de 371 g a uma das pontas da corda e segura a outra extremidade, girando a pedra num círculo vertical de 0,9 m de raio e aumentando lentamente a velocidade até a corda arrebentar. (a) Em que ponto da trajetória a pedra está, quando a corda arrebenta? (b) Qual a velocidade da pedra, quando a corda arrebenta?

65P. Um avião está voando num círculo horizontal com uma velocidade de 480 km/h. Se as asas do avião estão inclinadas 40° sobre a horizontal, qual o raio do círculo que o avião faz? Veja a Fig. 6-41. Suponha que a força necessária seja obtida da "sustentação aerodinâmica", que é perpendicular à superfície das asas.

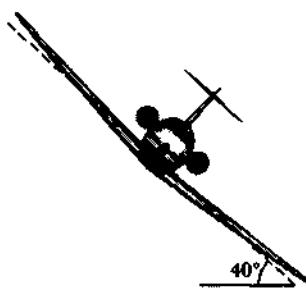


Fig. 6-41 Problema 65.

66P. Uma gaivota está subindo em uma trajetória circular. Seu ângulo de inclinação (em relação à horizontal) é aproximadamente 25° e ela leva 13 s para completar um círculo. (a) Com que velocidade a gaivota está voando? (b) Qual o raio do círculo?

67P. Um aeromodelo de 0,75 kg de massa está preso na ponta de uma corda de 30 m, voando a uma altura de 18 m, num círculo horizontal com velocidade constante. A outra ponta da corda está presa ao solo. O avião faz 4,4 voltas por minuto e mantém suas asas na horizontal, para que o ar o empurre verticalmente para cima. (a) Qual é a aceleração do avião? (b) Qual a tensão na corda? (c) Qual a força total para cima (empuxo) sobre as asas?

68P. Um velho bonde faz uma curva não-inclinada. Se o raio da curva é 9,0 m e a velocidade do bonde é de 16 km/h, que ângulo as correias de mão verticais, penduradas livremente, farão com a vertical?

69P. Admita que a massa do quilograma padrão pesasse exatamente 9,80 N ao nível do mar, no equador da Terra, se esta não girasse. Mas como gira, essa massa se moverá num círculo de $6,40 \times 10^6$ m (raio da Terra), com uma velocidade constante de 465 m/s. (a) Determine a força centípeta necessária para manter a massa padrão se movendo em sua trajetória circular. (b) Determine a força exercida pela massa padrão sobre uma balança de mola de onde ela pende, ao nível do equador (essa força é seu "peso aparente").

70P. A Fig. 6-42 mostra uma bola de 1,34 kg presa a um eixo girante vertical por duas cordas de massa desprezível. As cordas estão

esticadas e formam os lados de um triângulo equilátero. A tensão na corda superior é de 35 N. (a) Desenhe o diagrama de corpo isolado para a bola. (b) Qual a tensão na corda inferior? (c) Qual a força resultante sobre a bola, no instante mostrado na figura? (d) Qual a velocidade da bola?

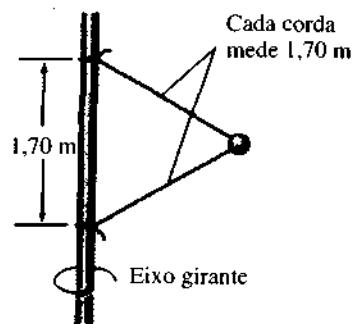


Fig. 6-42 Problema 70.

71P. Por causa da rotação da Terra, um fio de prumo não aponta exatamente para o centro dela, desviando-se ligeiramente. Calcule este desvio (a) na latitude 40° , (b) nos pólos e (c) no equador.

PROBLEMAS ADICIONAIS

72. Uma força \mathbf{P} , paralela a uma superfície inclinada 15° acima da horizontal, age sobre um bloco de 45 N, como mostra a Fig. 6-43. Os coeficientes de atrito entre o bloco e a superfície são $\mu_r = 0,50$ e $\mu_c = 0,34$. Se o bloco inicialmente está em repouso, determine o módulo e o sentido da força de atrito que atua nele, para as seguintes intensidades de \mathbf{P} (a) 5,0 N, (b) 8,0 N e (c) 15 N.



Fig. 6-43 Problema 72.

73. Uma força \mathbf{P} de 80 N é usada para empurrar um bloco de 5,0 kg através do teto de uma sala, conforme mostrado na Fig. 6-44. Se o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é 0,40, qual é a aceleração do bloco?



Fig. 6-44 Problema 73.

74. Uma das atrações de um parque de diversões consiste em um carro que se move num círculo vertical, preso na ponta de uma haste rígida, de massa desprezível. O peso do conjunto carro-motorista é de 5,0 kN e o raio do círculo é de 10 m. Quais serão o módulo e o sentido da força

da haste sobre o carro no alto do círculo, se a sua velocidade ali for de (a) 5,0 m/s e (b) 12 m/s?

75. Dois blocos são acelerados em uma superfície horizontal por uma força paralela a essa superfície, aplicada sobre um dos blocos, como mostra a Fig. 6-45. A força de atrito no bloco menor é de 2,0 N e no bloco maior, de 4,0 N. Se o módulo de \mathbf{F} é de 12 N, qual a força exercida pelo bloco menor sobre o maior?

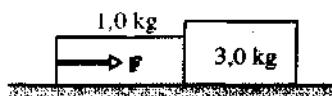


Fig. 6-45 Problema 75.

76. Um bloco de 2,5 kg está inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal. Uma força horizontal de 6,0 N e uma vertical \mathbf{P} são aplicadas a ele, como mostra a Fig. 6-46. Os coeficientes de atrito entre o bloco e a superfície são $\mu_r = 0,40$ e $\mu_c = 0,25$. Determine o módulo e o sentido da força de atrito que agirão sobre o bloco, se o módulo de \mathbf{P} for de (a) 8,0 N, (b) 10 N e (c) 12 N.

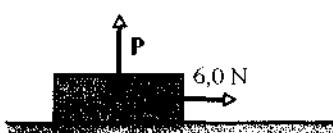


Fig. 6-46 Problema 76.

77. Enquanto um bloco de 40 N desliza para baixo sobre um plano com inclinação de 25° em relação à horizontal, sua aceleração é de $0,80 \text{ m/s}^2$, no sentido de subida do plano. Qual o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano?

78. Um esquiador de 45 kg esquia, sem atrito, sobre uma montanha circular de 15 m de raio e depois desce para um vale circular de 25 m de profundidade, conforme a Fig. 6-47. No alto da montanha, o chão exerce sobre o esquiador uma força para cima de 320 N e, no fundo do vale,

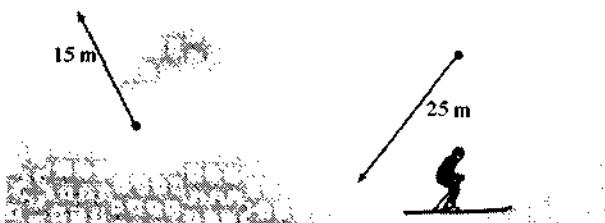


Fig. 6-47 Problema 78.

uma força para cima de 1,1 kN. Qual a velocidade escalar do esquiador (a) no alto da montanha e (b) no fundo do vale?

79. Os três blocos, na Fig. 6-48, partem do repouso e aceleram a uma taxa de $1,5 \text{ m/s}^2$. Se $M = 2,0 \text{ kg}$, qual a força de atrito sobre o bloco que desliza na horizontal?

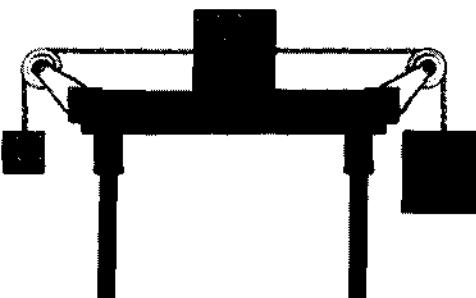


Fig. 6-48 Problema 79.

TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA



Numa das provas de levantamento de peso das Olimpíadas de 1976, Vasili Alexeev (na foto à esquerda) assombrou o mundo ao bater o recorde mundial levantando 255 kg (2.500 N) do chão até acima da cabeça (cerca de 2 m). Em 1957, Paul Anderson se enfiou debaixo de uma plataforma de madeira reforçada, apoiou as mãos num banquinho e empurrou a plataforma para cima com as costas, levantando-a cerca de um centímetro. Sobre a plataforma havia peças de automóvel e um cofre cheio de chumbo; o peso total da carga era de 2.844 kg (27.900 N)! Quem realizou um trabalho maior, Alexeev ou Anderson?

7-1 Um Passeio pela Mecânica Newtoniana

Os montanhistas nunca se dão por satisfeitos com uma vista de uma montanha, por mais bela que seja. Sempre fazem questão de caminhar em torno dela para estudá-la de vários ângulos. Desta forma, podem conhecê-la melhor e aprender como percorrer trilhas conhecidas com mais facilidade. Às vezes também descobrem picos mais altos, antes encobertos, com a possibilidade de novas conquistas. Vamos fazer a mesma coisa com a mecânica newtoniana.

Neste capítulo discutiremos dois conceitos novos: energia cinética, que é uma propriedade associada ao estado de movimento de um corpo, e trabalho, que produz mudanças na energia cinética. As idéias de trabalho e energia cinética permitem observar a mecânica newtoniana de um novo ângulo; desta forma, podemos conhecê-la melhor e aprender

novos métodos para resolver certos tipos de problemas com incrível facilidade.

Mais importante ainda é que, como veremos no Cap. 8, o trabalho e a energia levam à descoberta de um novo pico, /a lei da conservação da energia.. Esta lei é compatível com as de Newton, mas pode ser aplicada mesmo quando elas não são mais válidas — para velocidades próximas às da luz, por exemplo, e para dimensões menores do que as do átomo. Ela é independente da mecânica newtoniana e, pelo menos até o momento, não tem exceções. Trata-se, portanto, de um pico ainda mais alto; vamos começar a escalá-lo.

7-2 Trabalho: Movimento em uma Dimensão com Força Constante

Imagine (veja a Fig. 7-1a,b) que, numa corrida de camas entre universitários, você empurre uma cama com rodas

com uma força horizontal constante \mathbf{F} e a cama sofra um deslocamento horizontal \mathbf{d} . Nesse caso, você estará realizando um trabalho W dado por

$$W = Fd. \quad (7-1)$$

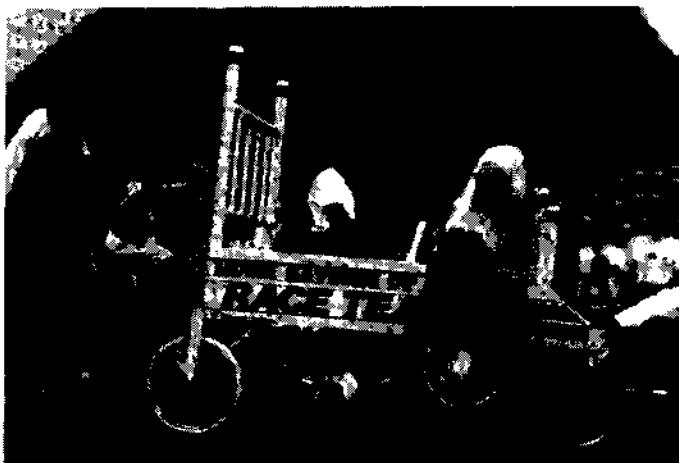
Na equação acima, F é o módulo da força aplicada e d é o módulo do deslocamento sofrido pelo ponto da cama onde a força é aplicada. Pode-se dizer que W é o trabalho que você realizou, sobre a cama, mais rigorosamente, porém, é o trabalho realizado sobre a cama pela força \mathbf{F} que você aplicou.

A Fig. 7-1c mostra um diagrama de corpo isolado em que a cama é representada como uma partícula e onde também está indicado o deslocamento. Observe que o ângulo ϕ entre o vetor força \mathbf{F} e o vetor deslocamento \mathbf{d} é zero.

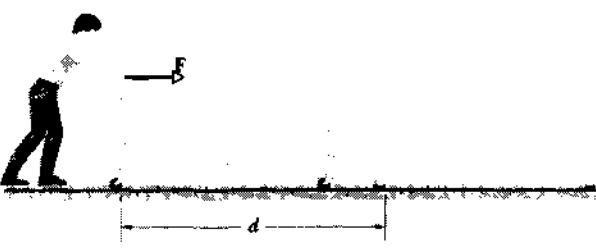
A Fig. 7-2 é uma generalização da Fig. 7-1c na qual o ângulo ϕ entre o vetor força \mathbf{F} e o vetor deslocamento \mathbf{d} é diferente de zero. Nesta situação mais geral, definimos o trabalho W executado pela força \mathbf{F} sobre a partícula através da equação

$$W = Fd \cos \phi. \quad (7-2)$$





(a)



(b)



(c)

Fig. 7-1 (a) Uma corrida de camas. (b) Uma força constante \mathbf{F} é aplicada a uma cama (com rodas) e a faz deslocar-se por uma distância d . (c) Diagrama de corpo isolado correspondente, mostrando a força \mathbf{F} e o deslocamento \mathbf{d} . O ângulo entre \mathbf{F} e \mathbf{d} é zero.

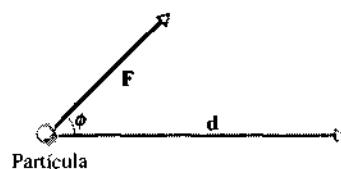


Fig. 7-2 Uma força constante \mathbf{F} age sobre uma partícula que sofre um deslocamento \mathbf{d} . Os dois vetores fazem um ângulo constante ϕ entre si.

Observe que se $\phi = 0$, $\cos \phi = 1$; nesse caso, a Eq. 7-2 se reduz à Eq. 7-1, como era de se esperar.

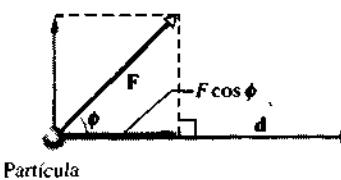
Podemos reescrever a Eq. 7-2 na forma

$$W = (d)(F \cos \phi) = (F)(d \cos \phi), \quad (7-3)$$

para mostrar que existem duas formas de calcular o trabalho: multiplicar o módulo d do deslocamento pelo componente da força na direção do deslocamento (Fig. 7-3a) ou multiplicar o módulo F da força pelo componente do deslocamento na direção da força (Fig. 7-3b). Os dois métodos sempre dão o mesmo resultado.

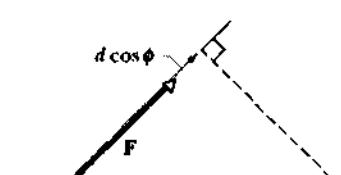
Se a força e o deslocamento têm o mesmo sentido, então, de acordo com a Eq. 7-2, o trabalho realizado pela força é positivo. Se a força e o deslocamento têm sentidos opostos, $\phi = 180^\circ$ e, segundo a Eq. 7-2 (com $\cos 180^\circ = -1$), o trabalho realizado pela força é negativo. Quando a força e o deslocamento são perpendiculares, $\phi = 90^\circ$ e, de acordo com a Eq. 7-2 (com $\cos 90^\circ = 0$), o trabalho realizado pela força é nulo.

Suponha que você levante um gato do chão. Carregue-o com velocidade constante para a outra extremidade de um aposento e deposite-o novamente no chão (Fig. 7-4). Enquanto você estava levantando o gato, a força \mathbf{F} que exerceu



Partícula

(a)



Partícula

(b)

Fig. 7-3 Os vetores da Fig. 7-2: (a) a componente de \mathbf{F} na direção de \mathbf{d} é $F \cos \phi$; (b) a componente de \mathbf{d} na direção de \mathbf{F} é $d \cos \phi$.

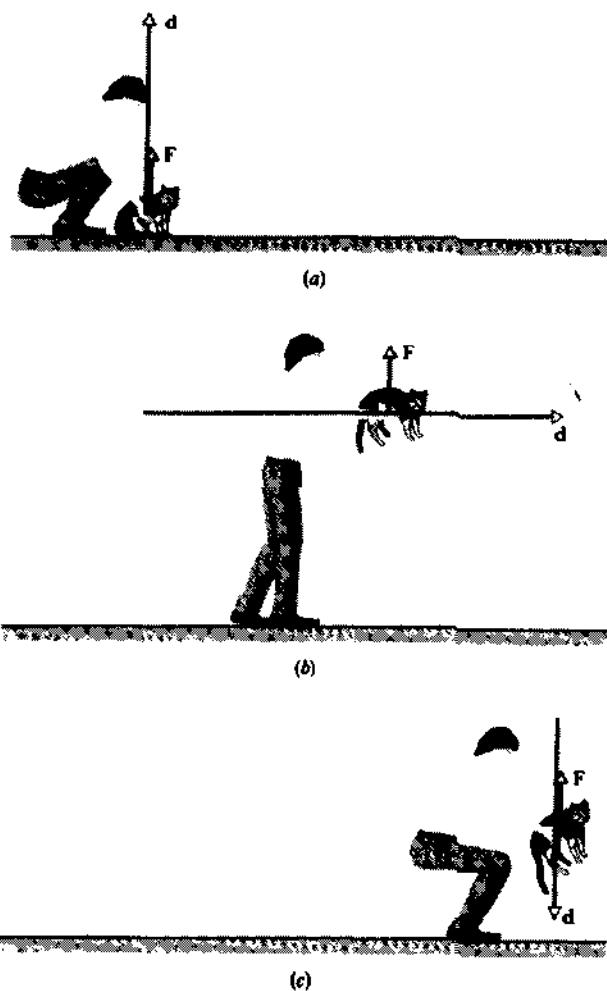


Fig. 7-4 (a) Quando você levanta um gato, o trabalho realizado por você é positivo. (b) Quando você carrega um gato para o outro lado de um aposento, o trabalho realizado pela força de sustentação é nulo. (c) Quando você deposita o gato no chão, o trabalho realizado é negativo.

sobre o gato tinha o mesmo sentido que o deslocamento do gato, de modo que você realizou um trabalho positivo. Enquanto atravessava o aposento, a força que usou para sustentar o gato foi perpendicular ao deslocamento dele, de modo que o trabalho realizado por esta força foi nulo. Quando depositou o gato no chão, continuou exercendo uma força para cima, contrária ao deslocamento do gato, de modo que o trabalho realizado foi negativo.

Observe que não estamos usando a palavra “trabalho” no seu sentido denotativo. É claro que sustentar o gato e carregá-lo para o outro lado de um aposento pode ser cansativo*, mas nenhuma das duas atividades realiza trabalho, da forma como trabalho foi definido na Eq. 7-2. Além disso, embora se possa dizer referencialmente que você realiza trabalho para levantar o gato e depositá-lo no chão, na verdade é a força que você aplica ao gato que faz o trabalho.

*Para sustentar um objeto e carregá-lo é preciso contrair os músculos, o que pode ser cansativo.

O trabalho é uma grandeza escalar, embora as duas grandezas envolvidas em sua definição, força e deslocamento, sejam vetores. Podemos escrever a Eq. 7-2 em forma vetorial, como um **produto escalar***:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} \quad (\text{trabalho, força constante}) \quad (7-4)$$

Esta equação é idêntica à Eq. 7-2.

A unidade de trabalho no sistema SI é o **newton-metro**. Esta unidade é tão usada que recebeu um nome especial, o **joule** (J), em homenagem a James Prescott Joule, um cientista inglês do século XIX. No sistema inglês de unidades, a unidade de trabalho é o **pé-libra** (ft·lb). As relações são:

$$\begin{aligned} 1 \text{ joule} &= 1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \\ &= 0,738 \text{ ft} \cdot \text{lb}. \end{aligned} \quad (7-5)$$

Fatores de conversão para outros sistemas de unidades em que o trabalho pode ser medido aparecem no Apêndice F.

Uma unidade de trabalho conveniente quando estamos lidando com átomos ou com partículas subatômicas é o **elétron-volt** (eV); seus múltiplos mais comuns são o quilo-elétron-volt ($1 \text{ keV} = 10^3 \text{ eV}$), o megaelétron-volt ($1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$) e o gigaelétron-volt ($1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$). Vamos definir precisamente o elétron-volt no Cap. 26, mas podemos adiantar qual é a sua relação com o joule:

$$1 \text{ elétron-volt} = 1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}. \quad (7-6)$$

Até agora, discutimos situações em que uma única força age sobre uma partícula e realiza trabalho. Na verdade, mais de uma força pode agir sobre a mesma partícula, cada uma realizando um trabalho. O trabalho de cada uma dessas forças deve ser calculado separadamente. Para calcular o trabalho total, podemos somar os trabalhos realizados por todas as forças. Podemos também calcular a força resultante e usá-la como uma força única nas Eqs. 7-2 e 7-4.

EXEMPLO 7-1 Vamos voltar às proezas de levantamento de peso de Vasili Alexeev e Paul Anderson.

- a. Qual o trabalho executado por Alexeev (ou, mais precisamente, pela força aplicada por ele) ao levantar um peso de 2.500 N a uma altura de 2,0 m?

Solução Vamos ignorar a breve aceleração do peso** no início e no final do movimento e supor que ele tenha sido levantado com velocidade constante. (Esta hipótese simplifica os cálculos e não altera o resultado

*Esta é a primeira aplicação do produto escalar neste livro. Veja a Seção 3-7, onde o produto escalar de dois vetores é definido e a Eq. 7-4 é usada como exemplo.

**Nesta seção a palavra peso aparecerá ora no seu sentido corriqueiro, ora no sentido técnico. Preste atenção para não confundir as duas formas. Veja como o uso dos dois sentidos numa única frase pode levar a expressões estranhas como a que aparece na pergunta do item b deste exemplo ou na legenda da Fig. 7-5b. (N. do R.)

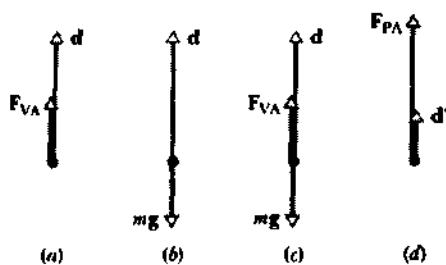


Fig. 7-5 Exemplo 7-1. Diagrama de corpo isolado, com os deslocamentos indicados. (a) Força F_{VA} exercida por Vasili Alexeev sobre o peso que ele levantou por uma distância d . (b) Peso mg do peso. (c) As duas forças aplicadas ao peso. (d) Força F_{PA} exercida por Paul Anderson no peso que ele levantou por uma distância d' .

final.) O módulo da força para cima F_{VA} exercida por Alexeev é igual ao peso que ele levantou:

$$F_{VA} = mg = 2.500 \text{ N.}$$

O ângulo ϕ entre a força F_{VA} e o deslocamento d do peso é zero (Fig. 7-5a). De acordo com a Eq. 7-2, o trabalho realizado pela força F_{VA} é

$$\begin{aligned} W &= F_{VA}d \cos \phi \\ &= (2.500 \text{ N})(2,0 \text{ m}) (\cos 0^\circ) \\ &= 5.000 \text{ J.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual o trabalho executado sobre o peso pelo seu peso mg ?

Solução O módulo do peso é mg . O ângulo ϕ entre a força mg e o deslocamento d é 180° (Fig. 7-5b). De acordo com a Eq. 7-2, o trabalho realizado pela força mg é

$$\begin{aligned} W &= mgd \cos \phi \\ &= (2.500 \text{ N})(2,0 \text{ m}) (\cos 180^\circ) \\ &= -5.000 \text{ J.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

c. Qual o trabalho executado pela força resultante durante o levantamento do peso?

Solução A força resultante aplicada ao peso durante o levantamento é a soma das forças que aparecem na Fig. 7-5c, que é zero, de modo que, de acordo com a Eq. 7-2, o trabalho executado pela força resultante também é zero. Podemos chegar ao mesmo resultado somando os trabalhos calculados em (a) e (b) para determinar o trabalho executado por Alexeev e pelo peso mg .

d. Qual o trabalho que Alexeev executou enquanto mantinha o peso estacionário sobre a cabeça?

Solução Quando ele está sustentando o peso, o deslocamento é zero e portanto, de acordo com a Eq. 7-2, o trabalho é zero.

e. Qual o trabalho executado por Paul Anderson para levantar um peso de 27.900 N por uma distância $d' = 1,0 \text{ cm}$?

Solução O diagrama de corpo isolado correspondente aparece na Fig. 7-5d. O módulo da força exercida por Anderson é $F_{PA} = 27.900 \text{ N}$; o trabalho executado por ele é dado por:

$$\begin{aligned} W &= F_{PA}d' = (27.900 \text{ N})(0,01 \text{ m}) \\ &= 279 \text{ J} \approx 300 \text{ J.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

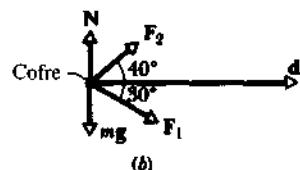
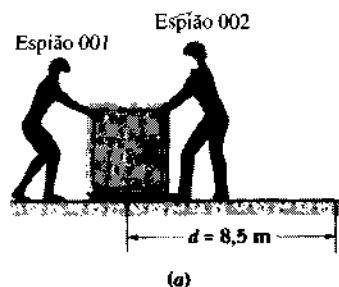


Fig. 7-6 Exemplo 7-2. (a) Dois espiões empurram um cofre. (b) Diagrama de corpo isolado correspondente.

A proeza realizada por Anderson exigiu uma força muito grande mas o trabalho executado foi relativamente pequeno, porque o deslocamento foi muito pequeno.

EXEMPLO 7-2 A Fig. 7-6a mostra dois espiões industriais empurrando um cofre por uma distância de 8,5 m em linha reta na direção do seu caminhão. A força F_1 exercida pelo espião 001 é de 320 N e faz um ângulo de 30° para baixo a partir da horizontal; a força F_2 exercida pelo espião 002 é de 250 N e faz um ângulo de 40° para cima com a horizontal.

a. Qual o trabalho total realizado sobre o cofre pelos espiões?

Solução A Fig. 7-6b é um diagrama de corpo isolado do cofre, considerado como uma partícula. Podemos calcular o trabalho total executado pelos espiões determinando o trabalho executado por cada espião individualmente e somando os resultados. De acordo com a Eq. 7-2, o trabalho executado pelo espião 001 é dado por

$$\begin{aligned} W_1 &= F_1 d \cos \phi_1 = (320 \text{ N})(8,5 \text{ m}) (\cos 30^\circ) \\ &= 2.356 \text{ J.} \end{aligned}$$

e o trabalho executado pelo espião 002 é dado por

$$\begin{aligned} W_2 &= F_2 d \cos \phi_2 = (250 \text{ N})(8,5 \text{ m}) (\cos 40^\circ) \\ &= 1.628 \text{ J.} \end{aligned}$$

Assim, o trabalho total é dado por

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 = 2.356 \text{ J} + 1.628 \text{ J} \\ &\approx 4.000 \text{ J.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual o trabalho executado sobre o cofre pelo seu peso mg e pela força normal N exercida pelo piso?

Solução As duas forças são perpendiculares à direção do movimento e portanto o trabalho executado por elas é nulo.

EXEMPLO 7-3 Um engradado de 15 kg é arrastado com velocidade constante por uma distância $d = 5,7 \text{ m}$ sobre uma rampa sem atrito, até atingir uma altura $h = 2,5 \text{ m}$ acima do ponto de partida; veja a Fig. 7-7a.

a. Qual o valor da força F que o cabo deve exercer sobre o engradado?

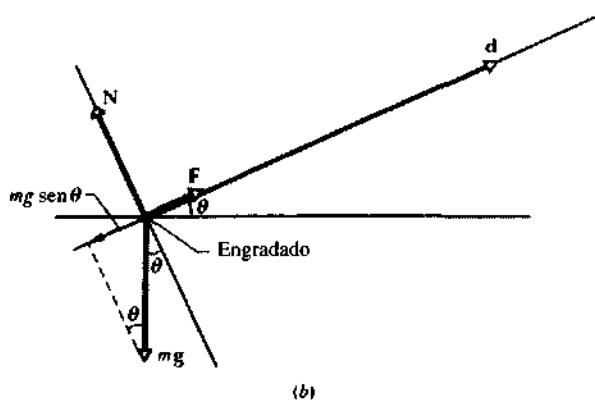
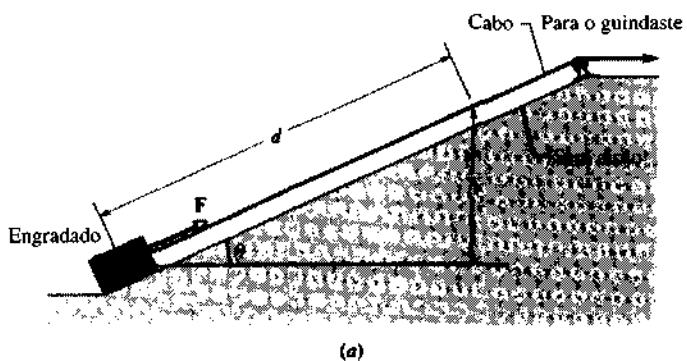


Fig. 7-7 Exemplo 7-3. (a) Um engradado é levantado até o alto de uma rampa sem atrito por uma força paralela à rampa. (b) Diagrama de corpo isolado para o problema, mostrando todas as forças envolvidas e também o deslocamento \mathbf{d} .

Solução A Fig. 7-7b mostra o diagrama de corpo isolado correspondente. Sabemos que o engradado está em equilíbrio, porque a aceleração é zero. Aplicando a segunda lei de Newton paralelamente à rampa, temos:

$$\begin{aligned} F &= mg \sin \theta = (15 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(2,5 \text{ m}/5,7 \text{ m}) \\ &= 64,5 \text{ N} \approx 65 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Observe que calculamos o valor de $\sin \theta$ diretamente a partir dos valores de h e d , sem que houvesse necessidade de calcular o valor de θ .

b. Qual o trabalho executado sobre o engradado pela força \mathbf{F} ?

Solução De acordo com a Eq. 7-2, temos:

$$\begin{aligned} W_F &= Fd \cos \phi = (64,5 \text{ N})(5,7 \text{ m})(\cos 0^\circ) \\ &= 368 \text{ J} \approx 370 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Não confunda o ângulo ϕ (que é o ângulo entre os vetores \mathbf{F} e \mathbf{d} na Fig. 7-7) com o ângulo θ (que é o ângulo da rampa).

c. Se levantarmos o engradado até a mesma altura h usando uma rampa com uma outra inclinação θ , qual será o trabalho executado por \mathbf{F} ?

Solução Em (a), temos $F = mg \sin \theta$. Em (b), $W_F = Fd \cos \phi = Fd \cos 0^\circ = Fd$. Combinando essas equações, temos:

$$W_F = mgd \sin \theta.$$

Mas $d \sin \theta = h$, de modo que

$$W_F = mgh.$$

Assim, o trabalho executado para levantar o engradado não depende do ângulo da rampa. Se h é igual a 2,5 m, o trabalho é, então,

$$\begin{aligned} W_F &= (15 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(2,5 \text{ m}) \\ &= 368 \text{ J} \approx 370 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

d. Qual o trabalho necessário para levantar verticalmente o engradado até uma altura h ?

Solução Seria necessário usar uma força igual ao peso do engradado e o ângulo ϕ entre essa força e o deslocamento seria zero. Assim,

$$\begin{aligned} W_h &= Fh \cos \phi = mgh \cos \phi \\ &= (15 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(2,5 \text{ m})(\cos 0^\circ) \\ &= 368 \text{ J} \approx 370 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Esta é a mesma resposta que encontramos em (b) e (c). A diferença é que em (b) e (c) aplicamos forças menores e as distâncias percorridas pelo engradado foram maiores. Em outras palavras, com o auxílio das rampas, conseguimos levantar o engradado usando uma força menor do que o seu peso. É para isso que servem as rampas; permitem-nos realizar o mesmo trabalho com uma força menor.

e. Qual o trabalho realizado pelo peso mg do engradado em (b), (c) e (d)?

Solução Considere o caso geral (c) onde o ângulo θ da rampa pode ter qualquer valor. De acordo com a Eq. 7-4,

$$W_g = mg \cdot \mathbf{d}.$$

De acordo com a Fig. 7-7b, o ângulo entre mg e \mathbf{d} é $\theta + 90^\circ$, de modo que

$$W_g = mg \cdot \mathbf{d} = mgd \cos(\theta + 90^\circ) = mgd(-\sin \theta).$$

De acordo com (c), sabemos que $d \sin \theta = h$, de modo que

$$W_g = -mgh = -368 \text{ J} \approx -370 \text{ J}. \quad (\text{Resposta})$$

O resultado é o mesmo quer o engradado seja levantado verticalmente ou empurrado em uma rampa com qualquer inclinação.

EXEMPLO 7-4 Na Fig. 7-8a, uma corda passa por uma polia, sem atrito e de massa desprezível, e está presa a um bloco de massa m . A polia está presa no teto e você puxa para baixo a extremidade livre da corda.

a. Qual o módulo da força F que você deve aplicar à corda para levantar o bloco?

Solução Supondo que o bloco seja levantado com velocidade constante, a força T exercida sobre ele pela corda deve ter um módulo $T = mg$. A força exercida pela corda sobre a sua mão tem o mesmo módulo. Assim, você deve puxar para baixo com uma força de módulo $F = mg$.

b. De que distância sua mão deve se deslocar para que o bloco suba uma distância d ?

Solução Você deve deslocar a mão para baixo de uma distância d para que o bloco suba a mesma distância.

c. Qual o trabalho realizado sobre o bloco durante esse levantamento?

Solução De acordo com a Eq. 7-1, o trabalho realizado sobre o bloco é dado por

$$W = Td = mgd.$$

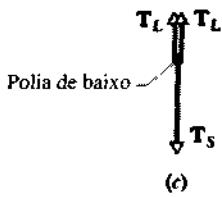
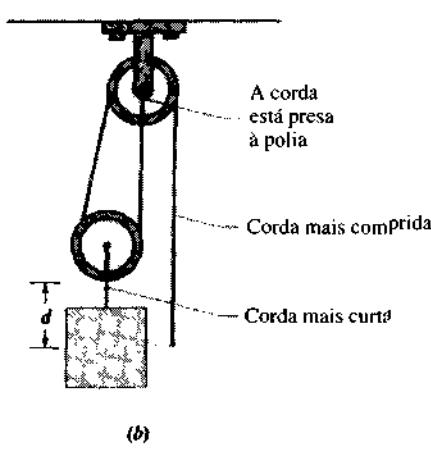
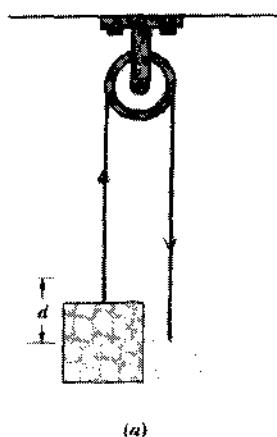


Fig. 7-8 Exemplo 7-4. (a) Você faz o bloco subir uma distância d puxando a ponta livre de uma corda que passa por uma polia. (b) Você faz o bloco subir a mesma distância puxando uma corda que passa por duas polias. (c) Diagrama de corpo isolado para a polia mais baixa de (b).

O trabalho que você executa na extremidade livre da corda é o mesmo:

$$W = Fd = mgd.$$

Assim, podemos dizer que você realiza trabalho sobre o bloco através da corda.

d. A Fig. 7-8b mostra um arranjo que envolve duas polias. A corda que passa pela polia de baixo puxa essa polia para cima com uma força que é o dobro da tensão T_L na mesma corda. Qual o módulo da força F que você deve aplicar à corda para levantar o bloco?

Solução O diagrama de corpo isolado para a polia de baixo aparece na Fig. 7-8c, onde T_S é a tensão na corda mais curta que está presa ao bloco e T_L é tensão na corda mais comprida que você está segurando. Como a tensão deve ser a mesma em todos os pontos da corda mais comprida, a força que você exerce tem um módulo igual a T_L . Se o bloco é levantado

com velocidade constante, a segunda lei de Newton nos dá $2T_L = T_S$; nesse caso, a força é dada por

$$F = T_L = \frac{T_S}{2} = \frac{mg}{2},$$

que é igual à metade da força calculada em (a).

e. De que distância sua mão deve se deslocar para que o bloco suba uma distância d ?

Solução Como a corda mais comprida passa em volta da polia de baixo, esta se move apenas metade da distância percorrida pela sua mão. Assim, para que o bloco suba de uma distância d , você deve deslocar a mão para baixo de uma distância $2d$, que é o dobro da distância calculada em (b).

f. Qual o trabalho realizado sobre o bloco durante esse levantamento?

Solução De acordo com a Eq. 7-1, o trabalho executado sobre o bloco pela corda mais curta é dado por

$$W = T_S d = mgd.$$

Este trabalho é igual ao que você executa sobre a corda mais comprida,

$$W = F(2d) = \left(\frac{mg}{2}\right)(2d) = mgd.$$

Assim, mais uma vez podemos dizer que você realiza trabalho sobre o bloco através da corda.

g. Qual a vantagem do sistema de duas polias da Fig. 7-8b em relação ao sistema de uma polia da Fig. 7-8a?

Solução Nos dois casos, você precisa realizar um trabalho igual a mgd para levantar o bloco a uma altura d . Entretanto, com o sistema de duas polias, a força que você precisa exercer é metade da força necessária com o sistema de uma polia.

EXEMPLO 7-5 Um caixote de passas que caiu de um caminhão desliza pelo solo em direção a uma menina. Para tentar parar o caixote, ela o empurra com uma força $\mathbf{F} = (2,0 \text{ N})\mathbf{i} + (-6,0 \text{ N})\mathbf{j}$, recuando ao mesmo tempo (Fig. 7-9). Enquanto ela está empurrando, o caixote sofre um deslocamento $\mathbf{d} = (-3,0 \text{ m})\mathbf{i}$. Qual o trabalho que a menina executou sobre o caixote?

Solução De acordo com a Eq. 7-4, o trabalho é dado por

$$\begin{aligned} W &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} \\ &= [(2,0 \text{ N})\mathbf{i} + (-6,0 \text{ N})\mathbf{j}] \cdot [(-3,0 \text{ m})\mathbf{i}]. \end{aligned}$$

Lembre-se de que, de todos os produtos escalares possíveis entre os vetores unitários, os únicos diferentes de zero são $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}$ e $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ (veja a Seção 3-7). Assim, temos:

$$\begin{aligned} W &= (2,0 \text{ N})(-3,0 \text{ m})\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + (-6,0 \text{ N})(-3,0 \text{ m})\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} \\ &= (-6,0 \text{ J})(1) + 0 = -6,0 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$



Fig. 7-9 Exemplo 7-5. Trabalho executado sobre um caixote de passas.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 1: CÁLCULO DO TRABALHO

Em problemas que envolvem o cálculo do trabalho, desenhe um diagrama de corpo isolado e certifique-se de que sabe responder às seguintes perguntas: Com que partícula estou lidando? Quais são as forças que agem sobre ela? Em qual dessas forças estou interessado? Seria talvez na força *resultante*? Qual é o deslocamento da partícula? Qual é o ângulo entre o deslocamento e as forças envolvidas? Qual é o sinal do trabalho executado? O sinal do trabalho executado é fisicamente razoável? (Talvez seja interessante referir os Exemplos 7-1 a 7-5 com essas perguntas em mente.)

7-3 Trabalho Executado por uma Força Variável

Análise Unidimensional

Agora vamos supor que a força que age sobre uma partícula e o deslocamento dessa partícula estejam sobre a mesma reta, que vamos tomar como sendo o eixo dos x . Vamos supor ainda que o módulo da força *não seja constante*, mas dependa da posição da partícula.

A Fig. 7-10a mostra um gráfico de uma força variável do tipo que acabamos de descrever. Qual é o trabalho executado sobre a partícula por esta força quando a partícula se desloca de um ponto inicial x_i até um ponto final x_f ? Não podemos usar a Eq. 7-2 porque ela supõe uma força constante \mathbf{F} . Para encontrar a resposta, vamos dividir o deslocamento total da partícula em uma série de intervalos de largura Δx . Escolhemos um intervalo Δx suficientemente pequeno para que a força $F(x)$ seja aproximadamente constante durante esse intervalo. Vamos chamar de $\bar{F}(x)$ o valor médio de $F(x)$ no intervalo.

O incremento (pequena quantidade) de trabalho ΔW realizado pela força durante qualquer intervalo particular pode ser calculado com o auxílio da Eq. 7-2:

$$\Delta W = \bar{F}(x) \Delta x. \quad (7-7)$$

No gráfico da Fig. 7-10b, ΔW é igual em módulo à área da faixa vertical correspondente; $\bar{F}(x)$ é a altura da faixa e Δx é a sua largura.

Para aproximar o trabalho total W feito pela força à medida que a partícula se move de x_i até x_f , somamos as áreas de todas as faixas entre x_i e x_f na Fig. 7-10b.

Assim,

$$W = \sum \Delta W = \sum \bar{F}(x) \Delta x. \quad (7-8)$$

A Eq. 7-8 é uma aproximação porque a linha quebrada formada pelas extremidades superiores das faixas retangulares na Fig. 7-10b é apenas uma aproximação da curva real naquela figura.

Podemos tornar a aproximação melhor, reduzindo a largura Δx das faixas e usando um número maior de faixas, como mostrado na Fig. 7-10c. No limite, fazemos a largura de cada faixa tender a zero; o número de faixas torna-se, então, infinitamente grande. Temos, assim, como resultado exato,

$$W = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \bar{F}(x) \Delta x. \quad (7-9)$$

Este limite é exatamente o que entendemos por integral da função $F(x)$ entre os limites x_i e x_f . Assim, a Eq. 7-9 se torna

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx \quad (\text{trabalho, força variável}) \quad (7-10)$$

Se conhecemos a função $F(x)$, podemos substituí-la na Eq. 7-10, introduzir os limites de integração apropriados, efetuar a integração e, assim, obter o trabalho. (Veja no Apêndice G uma lista de integrais comuns.) Geometricamente, o trabalho é igual à área sob a curva $F(x)$ entre os limites x_i e x_f , como ilustrado na Fig. 7-10d.

Análise Tridimensional

Considere uma partícula que esteja submetida a uma força tridimensional

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}, \quad (7-11)$$

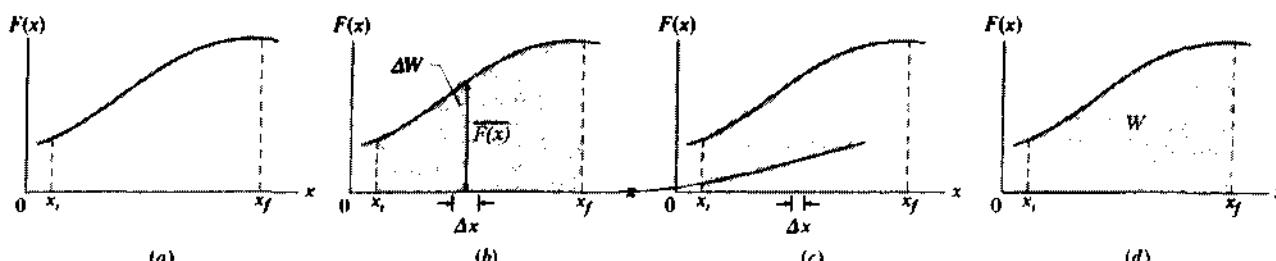


Fig. 7-10 (a) Gráfico de uma força variável unidimensional $F(x)$ em função do deslocamento da partícula sobre a qual é exercida. A partícula se move de x_i até x_f . (b) O mesmo que (a), mas com a área sob a curva dividida em faixas estreitas. (c) O mesmo que (b), mas com a área dividida em faixas ainda mais estreitas. (d) O caso limite. O trabalho executado pela força é dado pela Eq. 7-10 e pode ser representado graficamente pela área sombreada sob a curva.

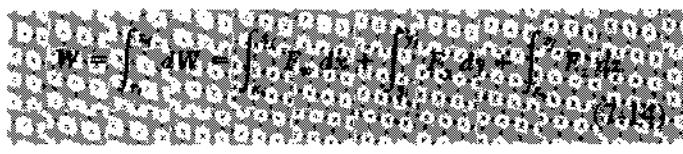
e suponha que algumas ou todas as componentes F_x , F_y e F_z dependam da posição da partícula. Imagine ainda que a partícula sofre um deslocamento incremental

$$dr = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}. \quad (7-12)$$

De acordo com a Eq. 7-4, o incremento de trabalho dW executado sobre a partícula pela força \mathbf{F} durante o deslocamento dr é dado por

$$dW = \mathbf{F} \cdot dr = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (7-13)$$

O trabalho W executado por \mathbf{F} enquanto a partícula se desloca de uma posição inicial r_i de coordenadas (x_i, y_i, z_i) para uma posição final r_f de coordenadas (x_f, y_f, z_f) é portanto dado por



Quando \mathbf{F} tem apenas a componente x , a Eq. 7-14 se reduz à Eq. 7-10.

EXEMPLO 7-6 Qual o trabalho executado por uma força $\mathbf{F} = (3x \text{ N})\mathbf{i} + (4\text{N})\mathbf{j}$, com x em metros, que age sobre uma partícula enquanto ela se move das coordenadas $(2 \text{ m}, 3 \text{ m})$ para as coordenadas $(3 \text{ m}, 0 \text{ m})$?

Solução De acordo com a Eq. 7-14, temos:

$$W = \int_2^3 3x \, dx + \int_3^0 4 \, dy = 3 \int_2^3 x \, dx + 4 \int_3^0 dy.$$

Usando a lista de integrais do Apêndice G, temos:

$$\begin{aligned} W &= 3 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_2^3 + 4 \left[y \right]_3^0 \\ &= \frac{3}{2}[3^2 - 2^2] + 4[0 - 3] \\ &= -4,5 \text{ J} \approx -5 \text{ J}. \quad (\text{Resposta})^* \\ &\qquad\qquad\qquad (\text{Resposta})^* \end{aligned}$$

7-4 Trabalho Realizado por uma Mola

Como um exemplo importante de força variável, vamos considerar a força exercida por uma mola. A Fig. 7-11a mostra uma mola no **estado relaxado**, isto é, nem comprimida nem distendida. Uma extremidade é mantida fixa e um objeto, um bloco, digamos, é ligado à outra extremidade. Na Fig. 7-11b, o bloco foi puxado para a direita, dis-

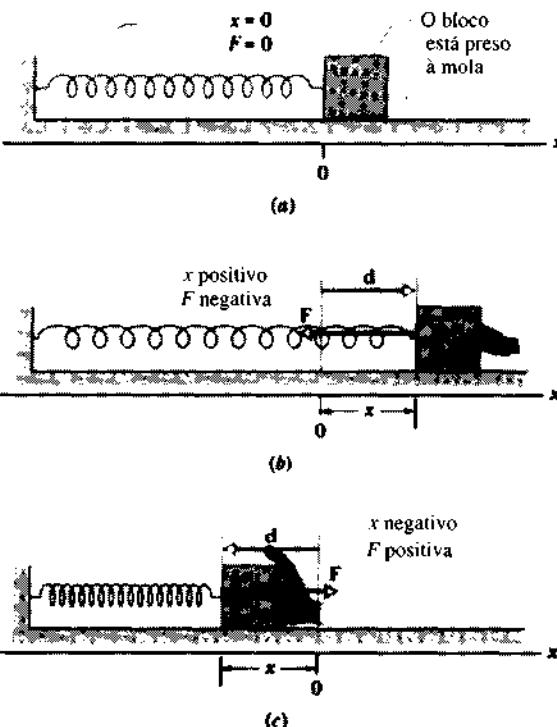


Fig. 7-11 (a) Uma mola no estado relaxado. A origem do eixo dos x foi colocada na extremidade da mola. (b) O bloco sofreu um deslocamento d e a mola se distendeu de um valor x . Observe a força restauradora F exercida pela mola. (c) A mola foi comprimida de um valor x . Observe novamente a força restauradora.

tendendo a mola. Ao mesmo tempo, a mola puxa o bloco para a esquerda, tentando restaurar o estado relaxado. (A força exercida pela mola é chamada de **força restauradora**.) Na Fig. 7-11c, o bloco foi empurrado para a esquerda, comprimindo a mola. Ao mesmo tempo, a mola empurra o bloco para a direita, tentando novamente restaurar o estado relaxado.

Com uma boa aproximação para muitas molas, a força \mathbf{F} exercida pela mola é proporcional ao deslocamento d da extremidade livre em relação à sua posição quando a mola está no estado relaxado. A força da mola é dada por



que é conhecida como **lei de Hooke** em homenagem a Robert Hooke, um cientista inglês que viveu no final do século XVII. O sinal negativo na Eq. 7-15 indica que a força exercida pela mola tem sempre o sentido oposto ao do deslocamento da sua extremidade livre. A constante k é chamada de **constante da mola** e é uma medida da rigidez da mola. Quanto maior o valor k , mais rígida é a mola, isto é, maior a força com que ela reage a um dado deslocamento. A unidade de k no sistema SI é o newton por metro.

Na Fig. 7-11, um eixo dos x foi traçado ao longo do comprimento da mola, com a origem ($x = 0$) na posição da ex-

*Em geral, a integração em (7-14) depende do caminho entre os pontos i e f . No entanto, para certas forças (ditas *conservativas*), o resultado é independente do caminho. Neste capítulo, vamos considerar só este tipo de forças. (N. do S.)

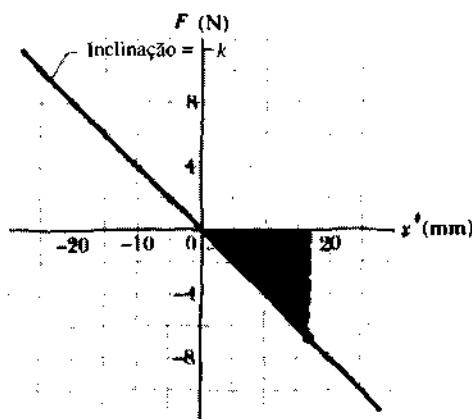


Fig. 7-12 Gráfico da força em função da distância para a mola dos Exemplos 7-7 e 7-8. A mola obedece à lei de Hooke (Eqs. 7-15 e 7-16) e tem uma constante de mola $k = 410 \text{ N/m}$. O significado do ponto está explicado no Exemplo 7-7 e o da área sombreada no Exemplo 7-8.

tremidade livre quando a mola se encontra no estado relaxado. Neste caso, a Eq. 7-15 assume a forma



Observe que a força da mola é variável porque depende da posição da extremidade livre: F pode ser representada como $F(x)$, como na Seção 7-3. A lei de Hooke é uma relação linear; um gráfico possível para F é o que aparece na Fig. 7-12.

Se deslocarmos o bloco de uma posição inicial x_i para uma posição final x_f , realizamos trabalho sobre o bloco, e a mola executa um trabalho sobre o bloco com o sinal oposto. O trabalho W executado pela mola sobre o bloco pode ser calculado substituindo o valor de F dado pela Eq. 7-16 na Eq. 7-10 e integrando:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = -k \int_{x_i}^{x_f} x dx. \\ = (-\frac{1}{2}k) \left[x^2 \right]_{x_i}^{x_f} = (-\frac{1}{2}k)(x_f^2 - x_i^2) \quad (7-17)$$

ou



O trabalho é positivo se $x_i^2 > x_f^2$ e negativo se $x_i^2 < x_f^2$. Se $x_i = 0$ e se chamarmos a posição final de x , a Eq. 7-18 se torna



A Eq. 7-18 e seu caso especial, Eq. 7-19, permitem calcular o trabalho executado pela mola. O trabalho realizado por nós (ou por quem quer que distenda ou comprima a mola) tem o mesmo valor absoluto, mas o sinal oposto.

Observe que o comprimento da mola não aparece explicitamente nas expressões para a força exercida pela mola (Eqs. 7-15 e 7-16) e para o trabalho executado por ela (Eqs. 7-18 e 7-19). O comprimento da mola é um dos fatores que contribuem para o valor da constante de mola k . Outros fatores são a forma geométrica da mola e as propriedades elásticas do material de que é feita.

EXEMPLO 7-7 Você aplica uma força F de $4,9 \text{ N}$ a um bloco ligado à extremidade livre de uma mola, distendendo-a de 12 mm em relação ao seu comprimento no estado relaxado, como na Fig. 7-11b.

- a. Qual é o valor da constante da mola?

Solução A mola distendida exerce uma força de $-4,9 \text{ N}$. De acordo com a Eq. 7-16, com $x = 12 \text{ mm}$, temos:

$$k = -\frac{F}{x} = -\frac{-4,9 \text{ N}}{12 \times 10^{-3} \text{ m}} \\ = 408 \text{ N/m} \approx 410 \text{ N/m.} \quad (\text{Resposta})$$

Neste caso, x é positivo (a mola é distendida) e a força F exercida pela mola é negativa. Observe que não precisamos conhecer o comprimento da mola. O gráfico da Eq. 7-16 que aparece na Fig. 7-12 se refere a esta mola. A inclinação da reta é -410 N/m .

- b. Qual a força exercida pela mola quando ela é distendida de 17 mm ?

Solução De acordo com a Eq. 7-16, temos:

$$F = -kx = -(408 \text{ N/m})(17 \times 10^{-3} \text{ m}) \\ \approx -6,9 \text{ N.} \quad (\text{Resposta})$$

O ponto sobre a reta da Fig. 7-12 representa esta força e o correspondente deslocamento. Observe que x é positivo e F é negativo, como na Fig. 7-11b.

EXEMPLO 7-8 Você distende a mola do Exemplo 7-7, 17 mm a partir do estado relaxado; veja a Fig. 7-11b. Qual é o trabalho realizado pela mola sobre o bloco?

Solução Como a mola se encontra inicialmente no estado relaxado, podemos usar a Eq. 7-19:

$$W = -\frac{1}{2}kx^2 = -(\frac{1}{2})(408 \text{ N/m})(17 \times 10^{-3} \text{ m})^2 \\ = -5,9 \times 10^{-2} \text{ J} = -59 \text{ mJ.} \quad (\text{Resposta})$$

A área sombreada na Fig. 7-12 representa este trabalho. O trabalho realizado pela mola é negativo porque o deslocamento do bloco e a força exercida pela mola têm sentidos opostos. Observe que o trabalho realizado pela mola seria o mesmo se ela tivesse sido comprimida (em vez de distendida) 17 mm .

EXEMPLO 7-9 A mola da Fig. 7-11b se encontra inicialmente com uma distensão de 17 mm . Você permite que ela volte lentamente ao estado relaxado e depois a comprime 12 mm . Qual o trabalho realizado pela mola durante o deslocamento total?

Solução Nesta situação, temos $x_i = +17 \text{ mm}$ (distensão) e $x_f = -12 \text{ mm}$ (compressão). De acordo com a Eq. 7-18,

$$W = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 = \frac{1}{2}k(x_i^2 - x_f^2) \\ = (\frac{1}{2})(408 \text{ N/m})[(17 \times 10^{-3} \text{ m})^2 - (12 \times 10^{-3} \text{ m})^2] \\ = 0,030 \text{ J} = 30 \text{ mJ.} \quad (\text{Resposta})$$

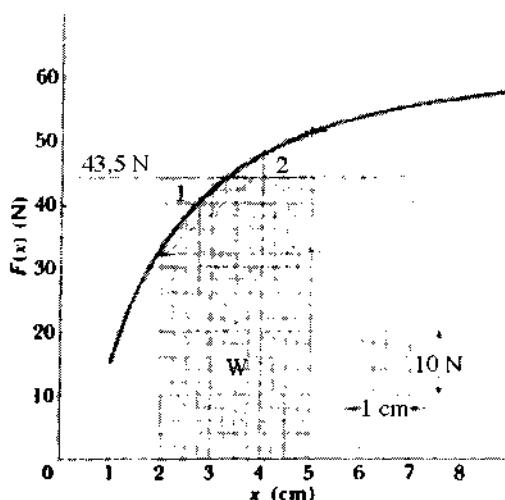


Fig. 7-13 Gráfico de uma função $F(x)$. A área sombreada (que representa o trabalho) é aproximada por um retângulo. O pequeno retângulo à direita serve para calibrar as quadrículas em unidades de trabalho; suas 20 quadrículas são equivalentes a 10 N·cm.

Neste caso, a mola realizou mais trabalho positivo (ao passar do estado de distensão inicial para o estado relaxado) do que trabalho negativo (ao passar do estado relaxado para o estado comprimido final). Assim, o trabalho total executado pela mola é positivo.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 2: DERIVADAS E INTEGRAIS; INCLINAÇÕES E ÁREAS

Quando uma função $y = F(x)$ é conhecida, é possível calcular a sua derivada (para qualquer valor de x) e sua integral (entre dois valores de x) usando as regras do cálculo. Se você não conhece a função analiticamente mas dispõe de um gráfico da função, pode calcular a derivada e a integral usando métodos gráficos. Vimos como calcular graficamente uma derivada na Tática 9 do Cap. 2; agora vamos ver como calcular graficamente uma integral.

A Fig. 7-13 é um gráfico de uma força particular $F(x)$. Vamos determinar graficamente o trabalho W realizado por esta força quando a partícula sobre a qual atua se move de $x_i = 2,0\text{ cm}$ até $x_f = 5,0\text{ cm}$. O trabalho é a área sombreada sob a curva entre esses dois pontos.

Podemos aproximar esta área por um retângulo formado pela substituição da curva que representa a função por uma reta horizontal. A reta deve ser traçada numa altura tal que duas áreas rotuladas como "1" e "2"

sejam aproximadamente iguais. Uma reta em $F = 43,5\text{ N}$ satisfaz a esta exigência. A área do retângulo equivalente ($= W$) é dada por

$$\begin{aligned} W &= \text{altura} \times \text{base} = (43,5\text{ N})(5,0\text{ cm} - 2,0\text{ cm}) \\ &= 130\text{ N} \cdot \text{cm} = 1,3\text{ N} \cdot \text{m} = 1,3\text{ J}. \end{aligned}$$

Também é possível calcular a área contando as quadrículas sob a curva. O retângulo da direita na Fig. 7-13 pode ser usado para calibrar as quadrículas; mostra que 20 quadrículas correspondem a $10\text{ N} \cdot \text{cm}$. Contando grandes blocos de quadrículas sempre que possível, não é difícil verificar que a área sombreada contém cerca de 260 quadrículas. O trabalho é portanto

$$\begin{aligned} W &= (260 \text{ quadrados}) \left(\frac{10\text{ N} \cdot \text{cm}}{20 \text{ quadrados}} \right) = 130\text{ N} \cdot \text{cm} \\ &= 1,3\text{ J}, \end{aligned}$$

O resultado é idêntico ao anterior. *Não se esqueça:* num gráfico bidimensional, toda derivada representa a inclinação de uma reta e toda integral representa a área sob uma curva.

7-5 Energia Cinética

Se você vê uma bola de futebol em repouso no gramado e mais tarde observa a mesma bola se dirigindo para o gol, provavelmente pensará: “Alguém chutou esta bola.” Um físico talvez afirme: “Alguém realizou trabalho sobre esta bola, exercendo uma força ao longo de uma pequena distância.” Na verdade, sempre que vemos um objeto em movimento, isto é sinal de que algum trabalho foi executado sobre o objeto para colocá-lo em movimento. O que existe no movimento de uma partícula que pode ser relacionado quantitativamente ao trabalho que foi executado sobre a partícula?

A propriedade que estamos buscando é a **energia cinética** da partícula, que pode ser definida através da equação

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (\text{energia cinética}) \quad (7-20)$$

onde m é a massa da partícula e v a sua velocidade. Repare que a energia cinética é proporcional ao quadrado da velocidade e portanto nunca pode ser negativa. Suas unidades são as mesmas do trabalho (no sistema SI, por exem-

Tabela 7-1
Energias Cinéticas de Alguns Objetos

Objeto	Comentários	Energia Cinética (J)
O maior meteorito conhecido	$5 \times 10^{10}\text{ kg}$ a 7.200 m/s	$1,3 \times 10^{18}$
Porta-aviões <i>Nimitz</i>	91.400 toneladas a 30 nós	$9,9 \times 10^9$
Satélite em órbita	100 kg a 300 km de altitude	$3,0 \times 10^9$
Caminhão	Modelo de 18 rodas, a 100 km/h	$2,2 \times 10^6$
Jogador de futebol americano	110 kg a 9 m/s	$4,5 \times 10^3$
Bala de fuzil	4 g a 950 m/s	$1,8 \times 10^3$
Bola de beisebol	160 km/h	$1,5 \times 10^2$
Moeda caindo	3,2 g depois de cair 50 m	1,6
Abelha em vôo	1 g a 2 m/s	2×10^{-3}
Caracol	5 g a $0,05\text{ km/h}$	$4,5 \times 10^{-7}$
Elétron em tubo de TV	20 keV	$3,2 \times 10^{-15}$
Elétron no cobre	No zero absoluto	$6,7 \times 10^{-19}$

plo, a unidade é o joule). A energia cinética é uma grandeza escalar; não depende da direção do movimento. A Tabela 7-1 mostra a energia cinética de alguns objetos.

Se uma única força F realiza um trabalho W sobre uma partícula, mudando a sua velocidade, a energia cinética da partícula varia de um valor inicial K_i para um valor final K_f . A variação de energia cinética é numericamente igual ao trabalho executado:

$$\Delta K = K_f - K_i = W \quad (7-21)$$

(Teorema do trabalho-energia cinética)

A Eq. 7-21, em qualquer das duas formas, é conhecida como **teorema do trabalho-energia cinética** (ou simplesmente **teorema do trabalho-energia**). Quando a partícula é submetida a várias forças, o trabalho W da Eq. 7-21 é o *trabalho total executado por todas as forças*, ou, o que dá no mesmo, o trabalho executado pela força resultante.

A utilidade da Eq. 7-21 está em que nos permite encarar de outra forma problemas conhecidos e torna muito mais simples a solução de certos tipos de problemas. Antes de provarmos o teorema do trabalho-energia cinética, vamos ver como aplicá-lo a alguns problemas simples.

Uma Partícula em Queda Livre

Se você deixa cair uma bola de tênis (Fig. 7-14a), a única força que age sobre ela (desprezando a resistência do ar) é o peso mg . Esta força aponta na mesma direção e no mesmo sentido em que a bola está se movendo, de modo que o trabalho realizado pelo peso da bola é positivo. De acordo com a Eq. 7-21, a energia cinética da bola deve aumentar com o tempo. Sabemos que isso acontece, já que a velocidade da bola aumenta.

Quando você joga uma bola de tênis verticalmente para cima (Fig. 7-14b), durante a subida o vetor peso tem o sentido oposto ao do movimento, de modo que o trabalho realizado por esta força sobre a partícula é negativo. Nesse caso, de acordo com a Eq. 7-21, a energia cinética da bola

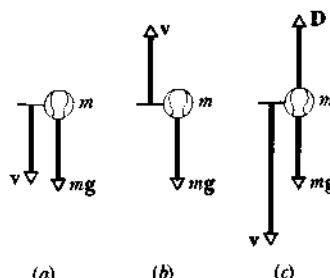


Fig. 7-14 (a) O peso mg de uma bola realiza um trabalho positivo quando a bola cai livremente. (b) O peso realiza um trabalho negativo quando a bola está se movendo verticalmente para cima. (c) Quando a bola atinge sua velocidade limite, o trabalho resultante passa a ser zero, porque a força resultante que age sobre a bola se anula: o peso mg passa a ser compensado pela força de arrasto F_v exercida pelo ar.

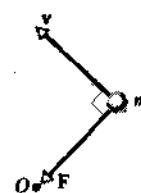


Fig. 7-15 Uma partícula em movimento circular uniforme. A força centrípeta F não realiza trabalho sobre a partícula porque é sempre perpendicular à direção em que a partícula está se movendo.

deve diminuir durante a subida. Mais uma vez, sabemos que isso é verdade, já que a velocidade da bola diminui.

Suponha que uma bola de tênis seja jogada de uma grande altura. Nessé caso, depois de algum tempo, ela atingirá uma velocidade limite (Fig. 7-14c) quando o peso for equilibrado exatamente por uma força para cima (chamada força de arrasto) devido à resistência do ar. Neste caso, a força resultante sobre a bola será zero e o trabalho executado sobre a bola também será zero. De acordo com a Eq. 7-21, a energia cinética permanece constante ($\Delta K = 0$) depois que a bola atinge a velocidade terminal.

Uma Partícula em Movimento Circular Uniforme

O módulo da velocidade de uma partícula em movimento circular uniforme é constante, de modo que sua energia cinética não varia. De acordo com a Eq. 7-21, a força centrípeta que age sobre a partícula não realiza trabalho. As Eqs. 7-2 e 7-4 mostram a realidade do fato porque a força é sempre perpendicular à direção em que a partícula está se movendo (Fig. 7-15).

Demonstração do Teorema do Trabalho-Energia Cinética

Este teorema, que se aplica também a partículas que estejam se movendo em três dimensões, é uma consequência direta da segunda lei de Newton. Vamos demonstrá-lo, porém, apenas para o caso especial de uma partícula que esteja se movendo numa dimensão. Vamos supor que a força que age sobre a partícula não seja necessariamente constante, podendo variar em módulo.

Considere uma partícula de massa m que esteja se movendo ao longo do eixo dos x sob o efeito de uma força $F(x)$ dirigida ao longo do mesmo eixo. De acordo com a Eq. 7-10, o trabalho realizado pela força sobre a partícula enquanto se move de uma posição inicial x_i para uma posição final x_f é dado por

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx = \int_{x_i}^{x_f} ma dx, \quad (7-22)$$

onde usamos a segunda lei de Newton para substituir $F(x)$ por ma . Podemos reescrever o produto $ma dx$ da Eq. 7-22 na forma

$$ma dx = m \frac{dv}{dt} dx. \quad (7-23)$$

Usando a "regra da cadeia" do cálculo, temos:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v, \quad (7-24)$$

e a Eq. 7-23 se torna

$$ma dx = m \frac{dv}{dx} v dx = mv dv. \quad (7-25)$$

Substituindo a Eq. 7-25 na Eq. 7-22, temos:

$$\begin{aligned} W &= \int_{v_i}^{v_f} mv dv = m \int_{v_i}^{v_f} v dv \\ &= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2. \end{aligned} \quad (7-26)$$

Observe que quando mudamos a variável de x para v tivemos que expressar os limites da integral em termos da nova variável. Observe também que, como a massa m é constante, pudemos passá-la para fora da integral.

Reconhecendo os termos da direita da Eq. 7-26 como energias cinéticas, podemos escrever esta equação na forma

$$W = K_f - K_i = \Delta K,$$

que é o teorema do trabalho-energia cinética.

EXEMPLO 7-10 Em 1896, em Waco, Texas, William Crush, da estrada de ferro "Katy", colocou duas locomotivas nas extremidades opostas de uma pista de 6,4 km, aqueceu-as, amarrou os aceleradores na posição de velocidade máxima e permitiu que se chocasse de frente (Fig. 7-16) diante de 30.000 espectadores. Centenas de pessoas foram feridas pelos destroços; várias morreram. Supondo que cada locomotiva pesasse $1,2 \times 10^6$ N e que até o momento da colisão estivessem se movendo com uma aceleração constante de $0,26 \text{ m/s}^2$, qual a energia cinética total das duas locomotivas no momento da colisão?

Solução Para calcular a energia cinética de uma das locomotivas, é preciso conhecer a sua massa e a sua velocidade no momento da colisão. Para determinar a velocidade, usamos a Eq. 2-14:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0),$$

que, com $v_0 = 0$ e $x - x_0 = 3,2 \times 10^3$ m (metade da separação inicial) nos dá:

$$v^2 = 0 + 2(0,26 \text{ m/s}^2)(3,2 \times 10^3 \text{ m}),$$

ou

$$v = 40,8 \text{ m/s},$$

(cerca de 150 km/h). Para calcular a massa das locomotivas, dividimos o peso por g :



Fig. 7-16 Exemplo 7-10. Choque entre duas locomotivas (1896).

$$m = \frac{1,2 \times 10^6 \text{ N}}{9,8 \text{ m/s}^2} = 1,22 \times 10^5 \text{ kg.}$$

A energia cinética total antes da colisão era portanto

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 = (1,22 \times 10^5 \text{ kg})(40,8 \text{ m/s})^2 \\ &= 2,0 \times 10^8 \text{ J.} \end{aligned}$$

Esta energia é da mesma ordem que a produzida pela explosão de cerca de 50 kg de TNT. Não admira que os espectadores mais próximos tenham sido feridos ou mortos pelos destroços.

EXEMPLO 7-11 Um elevador com uma massa de 500 kg está descendo com uma velocidade $v_i = 4,0 \text{ m/s}$ quando o sistema de guincho que o sustenta começa a patinar, permitindo que caia com aceleração constante $a = g/5$ (Fig. 7-17a).

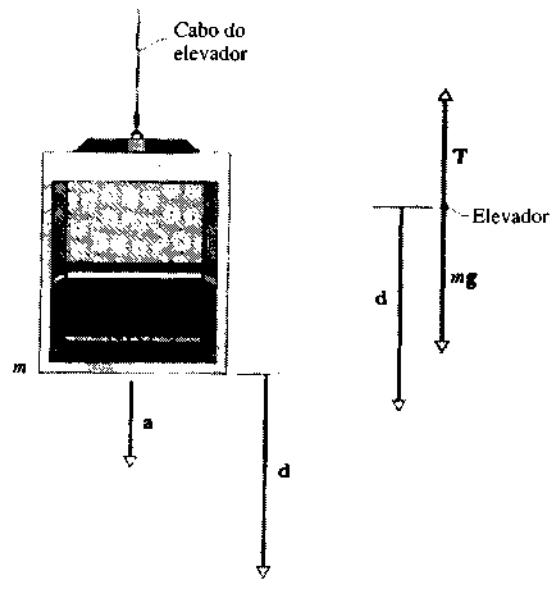


Fig. 7-17 Exemplo 7-11. Um elevador que está descendo com velocidade v_i comece de repente a acelerar para baixo. (a) O elevador sofre um deslocamento d com aceleração constante $a = g/5$. (b) Diagrama de corpo isolado do elevador, mostrando também o deslocamento.

- a. Se o elevador cai por uma distância $d = 12 \text{ m}$, qual o trabalho W_1 realizado sobre o elevador pelo seu peso mg ?

Solução O diagrama de corpo isolado do elevador durante a queda de 12 m aparece na Fig. 7-17b. Observe que o ângulo entre o deslocamento do elevador \mathbf{d} e o seu peso mg é 0° . De acordo com a Eq. 7-2, temos:

$$\begin{aligned} W_1 &= mgd \cos 0^\circ = (500 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(12 \text{ m})(1) \\ &= 5,88 \times 10^4 \text{ J} \approx 5,9 \times 10^4 \text{ J}. \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

- b. Durante a queda, qual é o trabalho W_2 executado sobre o elevador pela tração \mathbf{T} exercida pelo cabo?

Solução Para calcular W_2 usando a Eq. 7-2, precisamos conhecer o valor de \mathbf{T} na Fig. 7-17b. Aplicando a segunda lei de Newton ao elevador, temos:

$$\sum F = T - mg = ma,$$

ou

$$\begin{aligned} T &= m(g + a) = m(g - g/5) \\ &= (500 \text{ kg})\left(\frac{4}{5}\right)(9,8 \text{ m/s}^2) \\ &= 3.920 \text{ N}. \end{aligned}$$

O ângulo entre \mathbf{T} e o deslocamento \mathbf{d} do elevador é 180° . Podemos agora usar a Eq. 7-2 para calcular o trabalho executado pela tração \mathbf{T} :

$$\begin{aligned} W_2 &= Td \cos 180^\circ = (3.920 \text{ N})(12 \text{ m})(-1) \\ &= -4,7 \times 10^4 \text{ J}. \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

- c. Qual o trabalho total W realizado sobre o elevador durante a queda de 12 m?

Solução O trabalho total é a soma das respostas dos itens (a) e (b):

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 = 5,88 \times 10^4 \text{ J} - 4,7 \times 10^4 \text{ J} \\ &= 1,18 \times 10^4 \text{ J} \approx 1,2 \times 10^4 \text{ J}. \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

Podemos calcular W de outra forma. Primeiro calculamos a força resultante a que o elevador está submetido, usando a segunda lei de Newton:

$$\sum F = ma = (500 \text{ kg})\left(-\frac{9,8 \text{ m/s}^2}{5}\right) = -980 \text{ N}.$$

Em seguida, calculamos o trabalho executado sobre o elevador por essa força resultante, que está orientada para baixo e portanto faz um ângulo de 0° com \mathbf{d} :

$$\begin{aligned} W &= (980 \text{ N})(12 \text{ m})\cos 0^\circ \\ &= 1,18 \times 10^4 \text{ J} \approx 1,2 \times 10^4 \text{ J}. \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

- d. Qual a energia cinética do elevador no final da queda de 12 m?

Solução A energia cinética K_i no início da queda, quando a velocidade é $v_i = 4,0 \text{ m/s}$, é dada por

$$K_i = \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}(500 \text{ kg})(4,0 \text{ m/s})^2 = 4.000 \text{ J}.$$

De acordo com a Eq. 21, a energia cinética K_f no final da queda é dada por:

$$\begin{aligned} K_f &= K_i + W = 4.000 \text{ J} + 1,18 \times 10^4 \text{ J} \\ &= 1,58 \times 10^4 \text{ J} \approx 1,6 \times 10^4 \text{ J}. \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

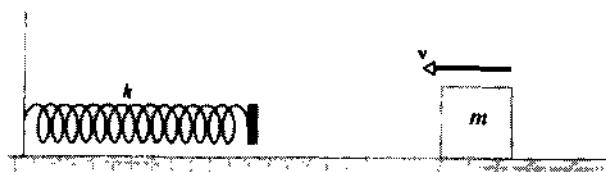


Fig. 7-18 Exemplo 7-12. Um bloco se move em direção a uma mola. Ele irá comprimir-la por uma distância máxima d .

- e. Qual é a velocidade v_f do elevador no final da queda de 12 m?

Solução De acordo com a Eq. 7-20, temos:

$$K_f = \frac{1}{2}mv_f^2,$$

que podemos usar para obter o valor de v_f :

$$\begin{aligned} v_f &= \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{\frac{(2)(1,58 \times 10^4 \text{ J})}{500 \text{ kg}}} \\ &= 7,9 \text{ m/s}. \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

EXEMPLO 7-12 Um bloco de massa $m = 5,7 \text{ kg}$ desliza sem atrito num plano horizontal com velocidade constante $v = 1,2 \text{ m/s}$. Ele se choca com uma mola (Fig. 7-18) e sua velocidade se reduz a zero no momento em que o comprimento da mola diminui de d em relação ao comprimento natural. Qual é o valor de d ? A constante de mola k é 1.500 N/m .

Solução De acordo com a Eq. 7-19, o trabalho realizado sobre o bloco pela força da mola quando ela é comprimida até seu comprimento diminuir de d em relação ao comprimento natural é dado por

$$W = \frac{1}{2}kd^2.$$

A variação da energia cinética do bloco durante este intervalo é dada por

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2}mv^2.$$

De acordo com o teorema do trabalho-energia cinética (Eq. 7-21), essas duas grandezas devem ser iguais. Igualando as equações acima e calculando o valor de d , temos:

$$\begin{aligned} d &= v \sqrt{\frac{m}{k}} = (1,2 \text{ m/s}) \sqrt{\frac{5,7 \text{ kg}}{1500 \text{ N/m}}} \\ &= 7,4 \times 10^{-2} \text{ m} = 7,4 \text{ cm}. \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

7-6 Potência

Um mestre-de-obras precisa transportar uma carga de tijolos da calçada até o alto de um edifício em construção. É fácil calcular o trabalho necessário para fazer isto. O mestre-de-obras, porém, está muito mais interessado na rapidez com que o guindaste poderá fazer o serviço. Será que ele vai durar 5 minutos (o que é aceitável) ou 1 semana (o que é inaceitável)?

Quando uma pessoa escolhe um motor de popa para o seu barco, não está interessada no trabalho que o motor é capaz de fazer e sim na rapidez com que é capaz de fazer esse trabalho, pois é o que determina a velocidade que o barco será capaz de desenvolver.

Certamente você será capaz de imaginar muitas outras situações nas quais o que importa é a rapidez com que um

trabalho é feito. Esta rapidez é chamada de **potência** e, como o trabalho, é uma grandeza escalar. Se uma quantidade de trabalho W é executada em um intervalo de tempo Δt , a **potência média** desenvolvida nesse intervalo é definida por

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t} \quad (\text{potência média}). \quad (7-27)$$

A **potência instantânea** P é a taxa instantânea com que o trabalho é executado, que pode ser escrita na forma

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (\text{potência instantânea}). \quad (7-28)$$

A unidade de potência no sistema SI é joule por segundo, que é chamado de **watt** (W) em homenagem a James Watt, o homem que aperfeiçoou os motores a vapor. No sistema inglês, a unidade de potência é o pé-libra por segundo. Também se usa o cavalo-vapor. As relações entre essas unidades são as seguintes:

$$1 \text{ watt} = 1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 0,738 \text{ ft} \cdot \text{lb/s} \quad (7-29)$$

e

$$\begin{aligned} 1 \text{ cavalo-vapor} &= 1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s} \\ &= 746 \text{ W}. \end{aligned} \quad (7-30)$$

Examinando a Eq. 7-27, vemos que o trabalho pode ser expresso como uma potência multiplicada por um intervalo de tempo. É o que acontece no caso de uma das unidades práticas para medir trabalho, o quilowatt-hora. Temos:

$$\begin{aligned} 1 \text{ quilowatt-hora} &= 1 \text{ kW} \cdot \text{h} = (10^3 \text{ W})(3.600 \text{ s}) \\ &= 3,60 \times 10^6 \text{ J} \\ &= 3,60 \text{ MJ}. \end{aligned} \quad (7-31)$$

Talvez por causa das contas de eletricidade, o watt e o quilowatt-hora são geralmente associados a grandes elétricas, mas na verdade podem ser usados para medir qualquer tipo de potência e energia. Assim, se você pega um livro no chão e o coloca sobre uma mesa, pode perfeitamente afirmar que realizou um trabalho de 4×10^{-6} kW·h (ou 4 mW·h).

Podemos também expressar a rapidez com que uma força executa um trabalho sobre um corpo em termos do valor dessa força e da velocidade do corpo. Para uma partícula em movimento ao longo do eixo dos x e submetida a uma força constante F na mesma direção, a Eq. 7-28 se torna

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F dx}{dt} = F \left(\frac{dx}{dt} \right)$$

Podemos escrever a equação acima na forma mais simples

$$P = Fv, \quad (7-32)$$

onde P é a potência instantânea e v a velocidade da partícula. No caso mais geral de um movimento em duas ou três dimensões, podemos generalizar a Eq. 7-32 para

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (\text{potência instantânea}) \quad (7-33)$$

Assim, por exemplo, o caminhão da Fig. 7-19 está exercendo uma força F em sua carga, que tem velocidade v . A potência desenvolvida pelo caminhão num instante qualquer é dada pelas Eqs. 7-32 e 7-33.

EXEMPLO 7-13 Uma carga de tijolos cuja massa total m é 420 kg deve ser levantada por um guindaste até uma altura h de 120 m em 5,0 min. Qual deve ser a potência mínima do motor do guindaste?

Solução O trabalho a ser executado é dado por

$$\begin{aligned} W &= mgh = (420 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(120 \text{ m}) \\ &= 4,94 \times 10^5 \text{ J}. \end{aligned}$$

De acordo com a Eq. 7-27, a potência média é dada por

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{W}{\Delta t} = \frac{4,94 \times 10^5 \text{ J}}{5 \times 60 \text{ s}} \\ &= 1650 \text{ W} = 1,65 \text{ kW} = 2,2 \text{ hp}. \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

A potência do motor deve ser maior do que o valor acima por causa do atrito e de outras forças que se opõem ao movimento do guindaste. Supusemos que os pesos da plataforma (que sustenta os tijolos) e do cabo sejam desprezíveis em relação ao peso dos tijolos e que a carga seja içada com velocidade praticamente constante.

EXEMPLO 7-14 Um motor de popa de 80 hp, funcionando a toda velocidade, faz com que um barco viaje a 22 nós ($= 40 \text{ km/h} = 11 \text{ m/s}$). Quanto vale o empuxo (força) do motor?



Fig. 7-19 Um caminhão puxa uma carga pesada, desenvolvendo potência.

Solução De acordo com a Eq. 7-32, temos:

$$F = \frac{P}{v} = \frac{(80 \text{ hp})(746 \text{ W/hp})}{11 \text{ m/s}} = 5.400 \text{ N} (= 1.200 \text{ lb}). \quad (\text{Resposta})$$

Observe que, como a velocidade é constante, a força do motor é equilibrada pela resistência da água.

7-7 Energia Cinética a Velocidades Elevadas (Opcional)

No caso de partículas que se movem com velocidades próximas às da luz, a mecânica newtoniana conduz a resultados incorretos e deve ser substituída pela teoria da relatividade de Einstein.* Uma consequência deste fato é que não podemos mais usar a expressão $K = mv^2/2$ para calcular a energia cinética de uma partícula. A equação que devemos utilizar é:

$$K = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right), \quad (7-34)$$

onde c é a velocidade da luz.**

A Fig. 7-20 mostra que essas duas equações de aparências tão diferentes fornecem realmente resultados bem distintos para velocidades elevadas. As experiências revelam que, sem a menor sombra de dúvida, a expressão relativística (Eq. 7-34) é a correta e a expressão clássica (Eq. 7-20) leva a resultados errôneos. Para baixas velocidades, porém, as duas equações levam aos mesmos resultados. Em particular, as duas equações permitem prever que $K = 0$ para $v = 0$.

Para baixas velocidades, *todas* as fórmulas relativísticas devem se reduzir aos resultados clássicos. Para vermos como isso acontece no caso particular da Eq. 7-34, vamos escrever essa equação na forma

$$K = mc^2[(1 - \beta^2)^{-1/2} - 1]. \quad (7-35)$$

Na Eq. 7-35, a relação de velocidades v/c foi substituída, por conveniência, pelo *parâmetro de velocidade*, representado pela letra grega β .

Para velocidades muito pequenas, $v \ll c$ e portanto $\beta \ll 1$. Para baixas velocidades, portanto, podemos expandir o termo $(1 - \beta^2)^{-1/2}$ pelo teorema binomial, obtendo (veja a Tática 3)

$$(1 - \beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots \quad (7-36)$$

Substituindo a Eq. 7-36 na Eq. 7-35, temos:

$$K = mc^2[(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots) - 1]. \quad (7-37)$$

*Já nos referimos a este fato na Seção 4-10 (Movimento Relativo em Velocidades Elevadas).

**Nas equações relativísticas apresentadas neste livro, a massa m será sempre considerada como a massa que é medida quando a partícula se encontra em repouso ou praticamente em repouso.

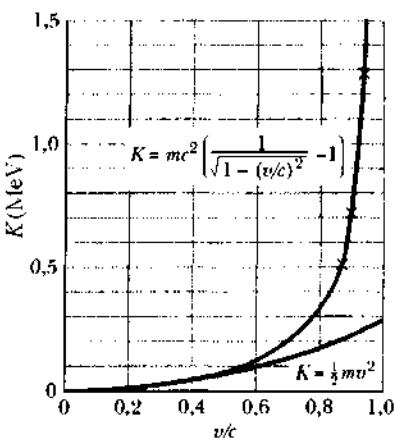


Fig. 7-20 Gráficos da expressão relativística (Eq. 7-34) e da expressão clássica (Eq. 7-20) da energia cinética de um elétron em função de v/c , onde v é a velocidade do elétron e c a velocidade da luz. Observe que as curvas coincidem para baixas velocidades mas são muito diferentes para velocidades elevadas. As cruzes assinalam pontos determinados experimentalmente, mostrando que, para velocidades elevadas, a curva relativística concorda com os resultados experimentais mas a curva clássica não.

Para β muito pequeno, os termos representados pelos pontos na Eq. 7-37 se tornam desprezíveis. Podemos portanto substituir a soma pelos dois primeiros termos, obtendo

$$K \approx (mc^2)[(1 + \frac{1}{2}\beta^2) - 1]$$

ou levando em conta que $\beta = v/c$,

$$K \approx (mc^2)(\frac{1}{2}\beta^2) = \frac{1}{2}mv^2$$

que é a equação clássica para a energia cinética.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 3: APROXIMAÇÕES

Freqüentemente estamos interessados em determinar o valor aproximado de uma expressão da forma $(a + b)^n$ para o caso em que $b \ll a$. É mais simples reescrever a expressão na forma $(1 + x)^n$, onde x é um número adimensional muito menor que a unidade. Assim, temos:

$$(a + b)^n = a^n(1 + b/a)^n = (a^n)(1 + x)^n.$$

A expressão acima, onde $x = b/a$, está na forma desejada. Podemos então calcular o valor de $(1 + x)^n$ usando o teorema binomial e conservando um número apropriado de termos. (Esta escolha exige alguma experiência.)

O teorema binomial (veja o Apêndice G) pode ser escrito na forma

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots \quad (7.38)$$

Para aplicar a Eq. 7-38 à Eq. 7-36, basta tomar $x = -\beta^2$ e $n = -1/2$. Os pontos de exclamação na Eq. 7-38 são usados para representar fatoriais, ou seja, produtos de todos os números inteiros desde o número dado até 1. Assim, por exemplo, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$; muitas calculadoras dispõem de uma tecla para fatoriais.

Como exercício, calcule $(1 + 0,045)^{-2,3}$ usando uma calculadora e a expansão da Eq. 7-38 com $x = 0,045$ e $n = -2,3$. Compare os termos da soma binomial para verificar com que rapidez eles decrescem.

7-8 Sistemas de Referência

As leis da mecânica de Newton se aplicam apenas a sistemas de referência inerciais. Lembre-se de que esses sistemas se movem uns em relação aos outros com velocidades constantes.

Para algumas grandezas físicas, observadores situados em diferentes sistemas de referência inerciais medem exatamente os mesmos valores. Na mecânica newtoniana, essas grandezas *invariantes* (como são chamadas) são a força, a massa, a aceleração e o tempo. Assim, por exemplo, se um observador num referencial inercial descobre que certa partícula tem uma massa de 3,15 kg, observadores em todos os outros referenciais inerciais obterão o mesmo valor para a massa da partícula. No caso de outras grandezas físicas, como o deslocamento e a velocidade de uma partícula, observadores em diferentes referenciais inerciais medirão valores diferentes; essas grandezas *não são invariantes*.

Se o deslocamento de uma partícula depende do referencial usado pelo observador, o trabalho também dependerá do referencial, já que o trabalho ($W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$) é definido em termos do deslocamento. Se o deslocamento de uma partícula durante um dado intervalo de tempo é $+2,47\text{ m}$ num referencial, pode ser zero em outro referencial e $-3,64\text{ m}$ em um terceiro. Como a força \mathbf{F} não muda (é invariante), um trabalho que é positivo num referencial pode ser nulo em outro referencial e negativo em um terceiro.

O que dizer da energia cinética da partícula? Se a velocidade depende do referencial escolhido, a energia cinética também deve depender, já que a energia cinética ($K = mv^2/2$) é função da velocidade. Será que isso invalida o teorema do trabalho-energia cinética?

De Galileu a Einstein, os físicos sempre acreditaram no chamado **princípio da invariância**:

As leis da física devem ter a mesma forma em todos os referenciais de inércia.

Em outras palavras, mesmo que algumas *grandezas físicas* tenham valores diferentes em diferentes sistemas de referência, as *leis da física* devem ser as mesmas em todos os sistemas. Por trás da definição formal de invariância está um sentimento de que, se diferentes observadores analisam um dado evento, eles devem perceber a natureza operando da mesma forma.

Entre as leis a que pode ser aplicado este princípio da invariância está o teorema do trabalho-energia cinética. Assim, mesmo que diferentes observadores, ao estudarem o movimento da mesma partícula, possam medir diferentes valores de trabalho-energia cinética, todos verificarão que o teorema do trabalho e energia cinética é válido em seus

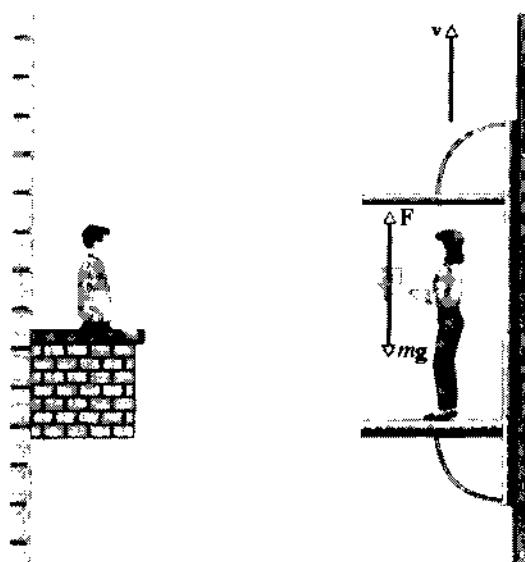


Fig. 7-21 Sônia está num elevador e segura um livro. Sérgio a observa. Ambos verificam a validade do teorema do trabalho-energia cinética aplicado ao movimento do livro em seus respectivos sistemas de referência.

respectivos sistemas de referência. Vejamos um exemplo simples.

Na Fig. 7-21, Sônia está subindo de elevador com velocidade constante, com um livro na mão. Sérgio, que se encontra numa varanda do edifício vizinho, observa a subida do elevador até uma altura h . Como se aplicam ao livro as relações entre o trabalho e energia cinética do ponto de vista dos dois jovens?

1. A visão de Sônia. “Meu sistema de coordenadas está fixo em relação ao elevador. Estou exercendo uma força para cima sobre o livro, mas esta força não realiza nenhum trabalho porque o livro está imóvel no meu sistema de coordenadas. O peso do livro, uma força dirigida para baixo, também não realiza nenhum trabalho, pelo mesmo motivo. Assim, o trabalho total realizado sobre o livro por todas as forças envolvidas é igual a zero. De acordo com o teorema do trabalho-energia cinética, a energia cinética do livro não deve mudar. É exatamente o que observo; a energia cinética do livro é zero o tempo todo. Tudo funciona bem.”

2. A visão de Sérgio. “Meu sistema de coordenadas está fixo em relação à varanda. Observo que Sônia está exercendo uma força \mathbf{F} sobre o livro. No meu sistema de coordenadas, o ponto de aplicação de \mathbf{F} está em movimento e o trabalho que a força \mathbf{F} executa quando o livro sobe de uma distância h é igual a $+mgh$. Sei também que o peso do livro realiza um trabalho igual a $-mgh$. Assim, o trabalho total executado sobre o livro durante a subida é igual a zero. De acordo com o teorema do trabalho-energia cinética, a energia cinética do livro não deve mudar. É exatamente o que observo; a energia cinética do livro é igual a $mv^2/2$ o tempo todo. Tudo funciona bem.”

Embora Sérgio e Sônia não concordem quanto ao deslocamento do livro e sua energia cinética, ambos chegam à conclusão de que o teorema do trabalho-energia cinética é válido em seus respectivos sistemas de referência.

Na hora de resolver um problema, você tem toda a liberdade para escolher o sistema de referência (inercial), contanto que (1) saiba exatamente qual é esse sistema e (2) use o mesmo sistema em todas as fases do problema.

RESUMO

Trabalho Realizado por uma Força Constante

Quando uma força constante \mathbf{F} age sobre um objeto enquanto ele se desloca de uma distância d , dizemos que a força realizou um trabalho W sobre o objeto. Quando \mathbf{F} e d são co-lineares,

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} \quad (7-1)$$

Quando \mathbf{F} e d fazem entre si um ângulo constante,

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}. \quad (7-4)$$

Este **produto escalar** pode ser escrito na forma

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = Fd \cos \phi, \quad (7-2)$$

onde ϕ é o ângulo entre \mathbf{F} e \mathbf{d} . Quando mais de uma força age sobre o objeto, a força que aparece nas Eqs. 7-1, 7-2 e 7-4 é a **força resultante**.

Unidades de Trabalho e Energia

A unidade de trabalho e energia no sistema SI é o **joule** (J); a unidade inglesa é o **pé-libra** (ft·lb):

$$\begin{aligned} 1 \text{ J} &= 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \\ &= 0,738 \text{ ft} \cdot \text{lb}. \end{aligned} \quad (7-5)$$

O **elétron-volt** (eV) é uma unidade de energia muito usada na física atômica nuclear:

$$1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}. \quad (7-6)$$

O **quilowatt-hora** (kW·h) é uma unidade de energia usada pelos engenheiros:

$$1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}. \quad (7-31)$$

Trabalho Realizado por uma Força Variável

Quando a força \mathbf{F} que age sobre o objeto depende da posição, o trabalho realizado por \mathbf{F} enquanto o objeto se desloca da posição original r_i de coordenadas (x_i, y_i, z_i) para uma posição final r_f de coordenadas (x_f, y_f, z_f) é dado por

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z dz. \quad (7-14)$$

Se \mathbf{F} tem apenas a componente x , a Eq. 7-14 se reduz a

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx. \quad (7-10)$$

Molas

A força \mathbf{F} exercida por uma mola é dada por

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{d} \quad (\text{lei de Hooke}), \quad (7-15)$$

onde \mathbf{d} é o deslocamento da extremidade livre da mola em relação à posição em que se encontra quando a mola está **relaxada** (nem dilatada nem comprimida) e k é a **constante de mola** (uma medida da rigidez da mola).

Se escolhemos o eixo dos x paralelo à mola e com a origem na sua extremidade livre durante o relaxamento, a Eq. 7-15 pode ser escrita na forma

$$F = -kx \quad (\text{lei de Hooke}), \quad (7-16)$$

Trabalho Realizado por uma Mola

Se um objeto é ligado à extremidade livre de uma mola, o trabalho W realizado sobre o objeto pela mola quando ele é deslocado de uma posição inicial x_i para uma posição final x_f é dado por

$$\text{ou} \quad W = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2 \quad (7-18)$$

Se $x_i = 0$ e $x_f = x$, a Eq. 7-18 pode ser escrita na forma

$$W = -\frac{1}{2}kx^2. \quad (7-19)$$

Energia Cinética

A **energia cinética** é uma propriedade escalar associada ao estado de movimento de um objeto e definida pela equação

$$K = \frac{1}{2}mv^2. \quad (7-20)$$

As unidades de energia cinética são as mesmas que as do trabalho.

Teorema do Trabalho-Energia Cinética

Podemos reescrever a segunda lei de Newton, $\mathbf{F} = ma$, para relacionar o trabalho total W realizado sobre um corpo com a variação ΔK da energia cinética do corpo:

$$W = K_f - K_i = \Delta K, \quad \text{ou} \quad K_f = K_i + W, \quad (7-21)$$

onde K_i é a energia cinética inicial do corpo e K_f é a energia cinética final. A Eq. 7-21 (em qualquer das duas formas) é conhecida como o **teorema do trabalho-Energia cinética**.

Potência

Potência é a **rapidez** com que um trabalho é realizado. Se uma força realiza um trabalho W durante um intervalo de tempo Δt , a **potência média** é dada por

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t}. \quad (7-27)$$

Potência instantânea é a taxa instantânea da realização de trabalho:

$$P = \frac{dW}{dt}. \quad (7-28)$$

Quando uma força \mathbf{F} age sobre um objeto que está se movendo em linha reta com velocidade \mathbf{v} , a potência instantânea é dada por

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (7-33)$$

Como o trabalho e a energia, a potência é uma grandeza escalar. A unidade de potência no sistema SI é o watt (W). Outras unidades de potência são o pé-libra por segundo (ft·lb/s) e o cavalo-vapor (hp):

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 0.738 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}, \quad (7-29)$$

$$\text{e} \quad 1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s} = 746 \text{ W}. \quad (7-30)$$

Energia Cinética Relativística

Quando um objeto está se movendo com uma velocidade v próxima da velocidade da luz c , sua energia cinética deve ser calculada com o auxílio da expressão relativística

$$K = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right). \quad (7-34)$$

Esta equação se reduz à Eq. 7-20 quando v é muito menor do que c .

O Princípio da Invariância

Algumas grandezas (como a massa, a força, a aceleração e o tempo na mecânica newtoniana) são *invariantes*, isto é, apresentam o mesmo valor numérico quando são medidas em diferentes referenciais de inércia. Outras (como a velocidade, a energia cinética e o trabalho) apresentam valores diferentes em diferentes referenciais. Entretanto, as *leis* da física têm a mesma forma em todos os referenciais de inércia. Este é o chamado **princípio da invariância**.

QUESTIONÁRIO

1. Dê alguns exemplos de palavras, como “trabalho”, que significam uma coisa quando usadas no cotidiano e outra quando definidas cientificamente.

2. Por que é cansativo segurar um objeto pesado, embora nenhum trabalho esteja sendo executado?

3. O plano inclinado (Exemplo 7-3) é uma “máquina” simples que permite usar uma força menor para realizar um dado trabalho. O mesmo se pode dizer da cunha, da alavanca, do parafuso sem fim, da roda dentada e de um conjunto de polias (como o do Exemplo 7-4). Longe de reduzirem o trabalho, essas máquinas na prática aumentam ligeiramente o trabalho necessário. Por que isso acontece? Qual a vantagem de usarmos essas máquinas?

4. Num jogo de cabo-de-guerra, um time está perdendo terreno aos poucos. Está sendo executado um trabalho sobre o time que está perdendo? E sobre o time que está ganhando?

5. Imagine uma situação em que um trabalho positivo é executado por uma força de atrito estático.

6. Suponha que a órbita da Terra seja um círculo perfeito. Nesse caso, o Sol executa algum trabalho sobre a Terra?

7. Se você levanta vagarosamente do chão uma bola de boliche, duas forças agem sobre a bola: o peso mg e a força que você usa para levantá-la, $\mathbf{F} = -mg$. Essas duas forças se cancelam, de modo que, ao que parece, o trabalho executado é nulo. Entretanto, você sabe que realizou um trabalho. Onde está o erro?

8. A Fig. 7-22 mostra seis situações nas quais duas forças agem simultaneamente sobre uma caixa *depois* que a caixa foi posta a deslizar sem atrito numa superfície plana, para a direita ou para a esquerda. As forças são de 1 N ou 2 N, dependendo do comprimento do vetor indicado na figura. Para cada situação, determine se o trabalho executado sobre a caixa pela força resultante durante o deslocamento indicado d é positivo, negativo ou nulo.

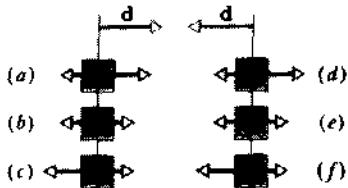


Fig. 7-22 Questão 8.

9. A Fig. 7-23 mostra três situações em que uma caixa, vista de cima, está sujeita a duas forças de mesma intensidade. Enquanto a caixa se move, as forças mantêm a mesma orientação em relação à velocidade v . Para cada situação, determine se o trabalho realizado sobre a caixa pela força resultante durante o movimento é positivo, negativo ou nulo.

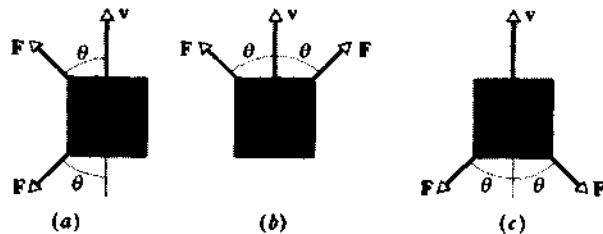


Fig. 7-23 Questão 9.

10. Uma formiga precisa carregar um pedaço de comida até o alto de um cone (Fig. 7-24). Compare o trabalho executado pela formiga sobre o pedaço de comida quando sobe por um caminho em espiral com o trabalho executado quando sobe em linha reta.



Passo da espiral = 10°

Fig. 7-24 Questão 10.

11. Um porco encebado pode usar três escorregas sem atrito para descer até o chão (Fig. 7-25). Compare os três escorregas do ponto de vista do trabalho executado pelo peso mg do porco durante a descida.

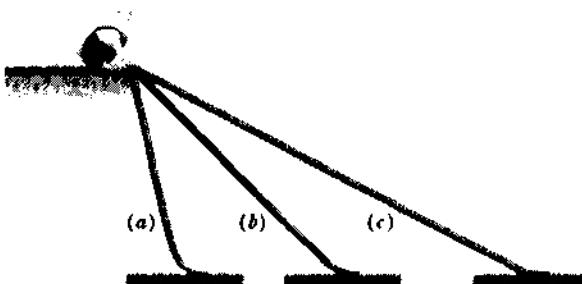


Fig. 7-25 Questão 11.

12. Você corta uma mola ao meio. Qual é a relação entre a constante de mola k da mola original e a constante das novas molas? (Sugestão: Considere a deformação sofrida individualmente por uma espira da mola para um dado valor da força.)

13. As molas A e B são idênticas, exceto pelo fato de que A é mais rígida do que B , isto é, $k_A > k_B$. Qual das duas molas realiza um trabalho maior

(a) quando elas sofrem o mesmo deslocamento e (b) quando elas são distendidas por forças iguais?

14. Quando você apanha um livro no chão e o coloca sobre uma mesa, realiza determinado trabalho. Entretanto, os valores inicial e final da energia cinética do livro são nulos. Isso quer dizer que o teorema do trabalho-energia cinética está sendo violado? Explique.

15. Você joga uma bola verticalmente para cima e a pega de volta. O que acontece com a energia cinética da bola durante o percurso? Primeiro ignore a resistência do ar e depois leve-a em consideração.

16. A potência necessária para levantar uma caixa até uma plataforma depende da velocidade com que é levantada?

17. Você muda alguns livros de uma biblioteca de uma prateleira mais baixa para uma prateleira mais alta num tempo Δt . O trabalho que você executa depende (a) da massa dos livros, (b) do peso dos livros, (c) da altura da prateleira mais alta em relação ao piso, (d) do tempo Δt e (e) da forma como você transporta os livros de uma prateleira para a outra?

18. A imprensa tem falado muito da "crise de energia". Seria mais correto falar de "crise de potência"?

19. Dizemos que um elétron de 1 keV (isto é, um elétron com uma energia cinética de 1 keV) é uma partícula "clássica", um elétron de 1 MeV é uma partícula "relativística" e um elétron de 1 GeV é uma partícula "ultra-relativística". O que significam essas expressões?

20. O deslocamento de um corpo depende do sistema de referência escolhido pelo observador. Segue-se que o trabalho executado sobre um corpo também depende do sistema de referência escolhido. Suponha que você arraste uma arca por um piso áspero, puxando-a com uma corda. Escolha um sistema de referência para o qual o trabalho executado pela corda sobre a arca seja (a) positivo; (b) nulo; (c) negativo.

21. Sally e Yuri estão pilotando dois aviões a jato que voam em baixa altitude, lado a lado e com a mesma velocidade. De repente, Sally aciona os flaps, fazendo seu avião perder velocidade. Considere a situação do ponto de vista de Yuri, que continua voando com a mesma velocidade que antes. (a) Ele diria que o avião de Sally ganhou ou perdeu energia cinética? (b) Ele diria que o trabalho executado sobre o avião de Sally é positivo ou negativo? (c) Ele chegaria à conclusão de que o teorema do trabalho-energia cinética está sendo respeitado? (d) Responda às mesmas perguntas do ponto de vista de Chang, que observa do solo.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

Seção 7-2 Trabalho: Movimento em uma Dimensão com uma Força Constante

1E. (a) Em 1975, o telhado do Velódromo de Montreal, que pesava 3.7×10^7 N, foi levantado 10 cm para ser centralizado. Qual o trabalho executado pelas máquinas que levantaram o telhado? (b) Em 1960, a Sra. Maxwell Rogers, de Tampa, na Flórida, levantou uma extremidade de um carro que pesava 16.000 N. O carro tinha caído sobre o seu filho quando o macaco cedeu. Se em pânico a Sra. Rogers levantou um peso efetivo de 4.000 N a uma altura de 5 cm, qual o trabalho que ela executou?

2E. Para empurrar um caixote de 50 kg num piso sem atrito, um operário aplica uma força de 210 N, dirigida 20° acima da horizontal. Se o caixote se desloca de 3,0 m, qual o trabalho executado sobre o caixote (a) pelo operário, (b) pelo peso do caixote e (c) pela força normal exercida pelo piso sobre o caixote? (d) Qual o trabalho total executado sobre o caixote?

3E. Para empurrar um caixote de 25,0 kg numa rampa sem atrito que faz um ângulo de 25° com a horizontal, um operário exerce uma força de 209 N, paralela à rampa. Se o caixote se desloca de 1,5 m, qual o trabalho executado sobre o caixote (a) pelo operário, (b) pelo peso do caixote e (c) pela força normal exercida pela rampa sobre o caixote? (d) Qual o trabalho total executado sobre o caixote?

4E. Um objeto de 102 kg está inicialmente se movendo em linha reta com uma velocidade de 53 m/s. Se ele sofre uma desaceleração de $2,0 \text{ m/s}^2$ até ficar imóvel, (a) qual a intensidade da força utilizada, (b) qual a distância que o objeto percorreu antes de parar e (c) qual o trabalho executado pela força de desaceleração? (d) Responda às perguntas (a)–(c) para uma desaceleração de $4,0 \text{ m/s}^2$.

5E. Um bloco de gelo de 45 kg escorrega por uma rampa sem atrito de 1,5 m de comprimento e 0,91 m de altura. Um operário aplica uma força no bloco, para cima, paralelamente à rampa, com uma intensidade suficiente para que ele desça com velocidade constante. Determine (a) a força exercida pelo operário, (b) o trabalho executado sobre o bloco pelo operário, (c) o trabalho executado sobre o bloco pelo seu peso, (d) o trabalho executado sobre o bloco pela força normal exercida pela rampa e (e) o trabalho total executado sobre o bloco.

6E. Um bloco de gelo flutuante sofre um deslocamento $\mathbf{d} = (15 \text{ m})\mathbf{i} + (12 \text{ m})\mathbf{j}$ ao longo de uma margem reta por efeito de uma corrente de água

que exerce uma força $\mathbf{F} = (210 \text{ N})\mathbf{i} - (150 \text{ N})\mathbf{j}$ sobre o bloco. Qual o trabalho executado pela corrente sobre o bloco durante o deslocamento?

7E. Uma partícula se move em linha reta sofrendo um deslocamento $\mathbf{d} = (8 \text{ m})\mathbf{i} + \mathbf{c}\mathbf{j}$ enquanto está sendo submetida a uma força $\mathbf{F} = (2 \text{ N})\mathbf{i} - (4 \text{ N})\mathbf{j}$. (Outras forças também agem sobre a partícula.) Qual o valor de c para que o trabalho realizado por \mathbf{F} sobre a partícula seja (a) zero, (b) positivo e (c) negativo?

8E. Na Fig. 7-26, uma corda passa por duas polias de massa e atrito desprezíveis; um objeto de massa $m = 20 \text{ kg}$ é pendurado numa das polias; e você exerce uma força \mathbf{F} na extremidade livre da corda. (a) Qual deve ser o módulo de \mathbf{F} para que o objeto seja levantado com velocidade constante? (b) Para levantar o objeto 2,0 cm, qual deve ser o deslocamento da extremidade livre da corda? Durante esse deslocamento, qual o trabalho realizado sobre o objeto (c) por você e (d) pelo peso mg do objeto?

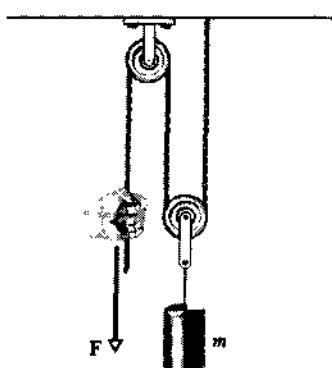


Fig. 7-26 Exercício 8.

9P. A Fig. 7-27 mostra um conjunto de polias usado para facilitar o levantamento de um peso L . Suponha que o atrito seja desprezível e que as duas polias de baixo, às quais está presa a carga, pesem juntas 20 N. Uma carga de 840 N deve ser levantada 12 m. (a) Qual a força mínima F necessária para levantar a carga? (b) Qual o trabalho executado para

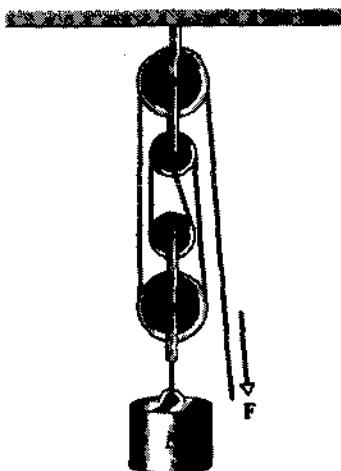


Fig. 7-27 Problema 9.

levantar a carga até a altura de 12 m? (c) Qual o deslocamento da extremidade livre da corda? (d) Qual o trabalho executado pela força \mathbf{F} para realizar esta tarefa?

10P. Um operário empurrou um bloco de 27 kg por uma distância de 9,2 m num piso plano, com velocidade constante, aplicando uma força dirigida 32° abaixo da horizontal. Se o coeficiente de atrito dinâmico é 0,20, qual o trabalho executado pelo operário sobre o bloco?

11P. Uma arca de 50 kg é empurrada por uma distância de 6,0 m, com velocidade constante, numa rampa com inclinação de 30° por uma força horizontal constante. O coeficiente de atrito dinâmico entre a arca e a rampa é 0,20. Calcule o trabalho realizado (a) pela força aplicada e (b) pelo peso da arca.

12P. Um bloco de 3,57 kg é puxado com velocidade constante por uma distância de 4,06 m em um piso horizontal por uma corda que exerce uma força de 7,68 N fazendo um ângulo de $15,0^\circ$ acima da horizontal. Calcule (a) o trabalho executado pela corda sobre o bloco e (b) o coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e o piso.

Seção 7-3 Trabalho Executado por uma Força Variável

13E. Um bloco de 5,0 kg se move em linha reta numa superfície horizontal sem atrito sob a influência de uma força que varia com a posição da forma indicada na Fig. 7-28. Qual o trabalho executado pela força quando o bloco se desloca da origem até o ponto $x = 8,0$ m?

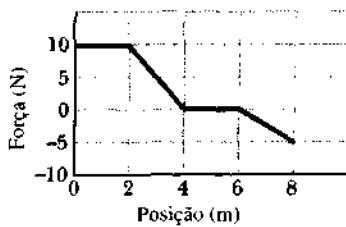


Fig. 7-28 Exercício 13.

14E. Uma massa de 10 kg está se movendo ao longo do eixo dos x . Sua aceleração varia com a posição da forma indicada na Fig. 7-29. Qual o trabalho total executado sobre a massa quando ela se move de $x = 0$ até $x = 8,0$ m?

15P. (a) Estime o trabalho realizado pela força indicada no gráfico da Fig. 7-30 ao deslocar uma partícula de $x = 1$ m até $x = 3$ m. Refine o seu método para chegar o mais perto possível da resposta exata, que é 6

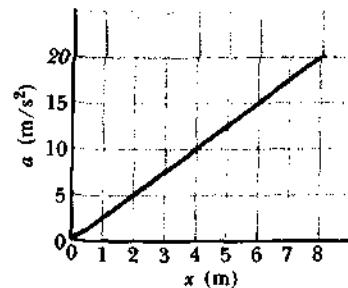


Fig. 7-29 Exercício 14.

J. (b) A curva é dada analiticamente por $F = a/x^2$, onde $a = 9 \text{ N}\cdot\text{m}^2$. Calcule o trabalho por integração.

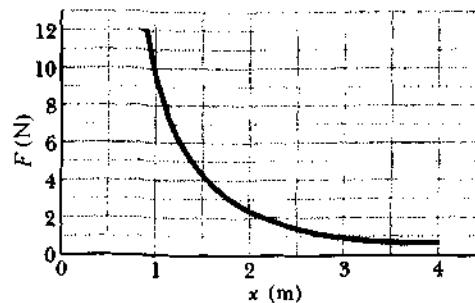


Fig. 7-30 Problema 15.

16P. A força exercida num objeto é $F = F_0(x/x_0 - 1)$. Calcule o trabalho realizado para deslocar o objeto de $x = 0$ até $x = 2x_0$ (a) fazendo um gráfico de $F(x)$ e determinando a área sob a curva e (b) calculando a integral analiticamente.

17P. Qual o trabalho realizado por uma força $\mathbf{F} = (2x \text{ N})\mathbf{i} + (3 \text{ N})\mathbf{j}$, onde x está em metros, que é exercida sobre uma partícula enquanto ela se move da posição $\mathbf{r}_i = (2 \text{ m})\mathbf{i} + (3 \text{ m})\mathbf{j}$ para a posição $\mathbf{r}_f = -(4 \text{ m})\mathbf{i} - (3 \text{ m})\mathbf{j}$?

Seção 7-4 Trabalho Realizado por uma Mola

18.E Uma mola com uma constante de mola de 15 N/cm está presa a uma gaiola, como na Fig. 7-31. (a) Qual o trabalho executado pela mola sobre a gaiola se a mola é distendida de 7,6 mm em relação ao seu estado relaxado? (b) Qual o trabalho adicional executado pela mola se ela é distendida por mais 7,6 mm?

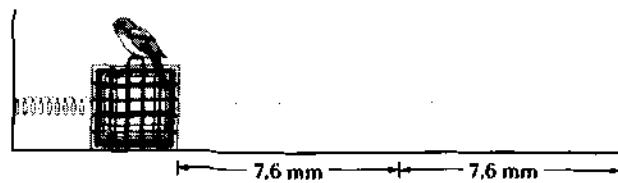


Fig. 7-31 Exercício 18.

19E. Durante o semestre de primavera do MIT, os residentes de dois dormitórios vizinhos do Campus Oriental costumam brigar com grandes atiradeiras feitas de pedaços de borracha presos no caixilho das janelas. Um balão cheio de tinta é colocado numa bolsa presa à tira de borracha, que é então distendida ao máximo. Suponha que a distensão da borracha obedeça à lei de Hooke com uma constante de mola de 100 N/m. Se a tira de borracha é distendida 5 m e depois solta, qual o trabalho executado sobre o balão que está na bolsa até o momento em que a tira volta à posição inicial?

20P. A Fig. 7-32 mostra uma mola, a cuja extremidade livre está preso um ponteiro, colocado ao lado de uma escala graduada em milímetros. Três diferentes pesos são pendurados na mola, como indicado na figura. (a) Se não for pendurado nenhum peso na mola, qual será a indicação do ponteiro? (b) Quanto vale o peso W ?

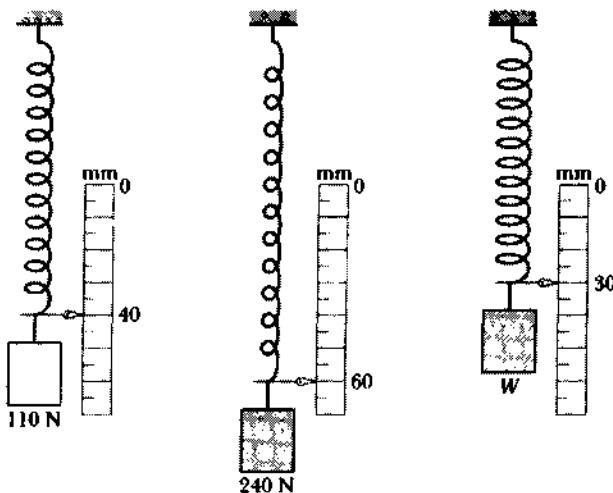


Fig. 7-32 Problema 20.

Seção 7-5 Energia Cinética

21E. Se um foguete Saturno V com uma espaçonave Apolo acoplada tem uma massa total de $2,9 \times 10^5$ kg e atinge uma velocidade de 11,2 km/s, qual a sua energia cinética nesse instante?

22E. Um elétron de condução (massa $m = 9,11 \times 10^{-31}$ kg) do cobre, numa temperatura próxima do zero absoluto, tem uma energia cinética de $6,7 \times 10^{-19}$ J. Qual é a velocidade do elétron?

23E. Calcule as energias cinéticas dos seguintes objetos: (a) um jogador de futebol americano de 110 kg correndo a 8,1 m/s; (b) uma bala de 4,2 g a 950 m/s; (c) o porta-aviões *Nimitz*, de 91.400 toneladas, a 32 nós.

24E. Um próton (massa $m = 1,67 \times 10^{-27}$ kg) está sendo acelerado num acelerador linear. Em cada estágio do aparelho, o próton sofre uma aceleração linear de $3,6 \times 10^{15}$ m/s². Se um próton entra num dos estágios com uma velocidade de $2,4 \times 10^7$ m/s e o estágio tem 3,5 cm de comprimento, calcule (a) a velocidade do próton no final do estágio e (b) o aumento de energia cinética correspondente, em elétrons-volt.

25E. Um próton é acelerado num ciclotrônico a partir do repouso até atingir uma velocidade de $3,0 \times 10^6$ m/s (cerca de 1% da velocidade da luz). Qual o trabalho, em elétrons-volt, realizado sobre o próton pela força elétrica do ciclotrônico?

26E. Uma força única age sobre um corpo que está se movendo em linha reta. A Fig. 7-33 mostra o gráfico da velocidade em função do tempo para esse corpo. Determine o sinal (positivo ou negativo) do trabalho realizado pela força sobre o corpo nos intervalos AB, BC, CD e DE.

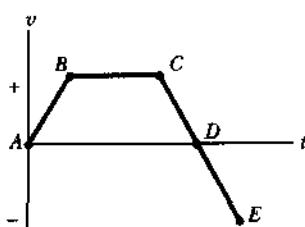


Fig. 7-33 Exercício 26.

27E. Uma mangueira de incêndio (Fig. 7-34) é desenrolada puxando-se horizontalmente uma de suas extremidades ao longo de uma superfície sem atrito com uma velocidade constante de 2,3 m/s. A massa de 1,0 m da mangueira é 0,25 kg. Qual a energia cinética fornecida para desenrolar 12 m da mangueira?



Fig. 7-34 Exercício 27.

28E. De que altura um automóvel de 12.000 N de peso teria que cair para ganhar uma energia cinética equivalente à que teria quando estivesse viajando a 89 km/h? Por que a resposta não depende do peso do carro?

29E. Um carro de 1.000 kg está viajando a 60 km/h numa estrada plana. Os freios são aplicados por um tempo suficiente para reduzir a energia cinética do carro de 50 kJ. (a) Qual a velocidade final do carro? (b) Qual a redução adicional de energia cinética necessária para fazê-lo parar?

30E. Em 10 de agosto de 1972, um grande meteorito atravessou a atmosfera sobre os Estados Unidos e o Canadá. A bola de fogo resultante foi tão intensa que podia ser vista à luz do dia (Fig. 7-35). O meteorito tinha uma massa aproximada de 4×10^6 kg; sua velocidade era de cerca de 15 km/s. Se tivesse entrado verticalmente na atmosfera, teria chegado à superfície da Terra praticamente com a mesma velocidade. (a) Calcule a energia cinética (em joules) que o meteorito perderia no momento do impacto com a Terra. (b) Expressse a energia como o múltiplo da energia resultante da explosão de 1 megaton de TNT, que é $4,2 \times 10^{15}$ J. (c) A energia associada à explosão da bomba atômica lançada sobre Hiroshima foi equivalente a 13 quilotonas de TNT. O impacto do meteorito seria equivalente a quantas "bombas de Hiroshima"?

31E. Uma explosão no nível do solo produz uma cratera com um diâmetro que é proporcional à raiz cúbica da energia da explosão; uma explosão de 1 megaton de TNT produz uma cratera com 1 km de diâmetro. Sob o lago Huron, em Michigan, parece haver uma antiga cratera de impacto com 50 km de diâmetro. Qual a energia cinética associada a esse impacto, em termos (a) de megatons de TNT e (b) em bombas atômicas de Hiroshima equivalentes (veja o problema anterior)? (Os impactos de meteoritos ou cometas podem ter modificado significativamente o clima da Terra e contribuído para a extinção dos dinossauros e outras formas de vida.)

32P. Um homem que está apostando corrida com o filho tem metade da energia cinética do filho, que tem metade da massa do pai. O homem aumenta sua velocidade em 1,0 m/s e passa a ter a mesma energia cinética que o filho. Quais eram as velocidades originais do pai e do filho?

33P. Uma força age sobre uma partícula de 3,0 kg de tal forma que a posição da partícula em função do tempo é dada por $x = 3,0t - 4,0t^2 + 1,0t^3$, onde x está em metros e t em segundos. Determine o trabalho executado pela força entre $t = 0$ e $t = 4,0$ s.

34P. A Terra dá uma volta por ano em torno do Sol. Qual seria o trabalho necessário para fazer a Terra ficar imóvel em relação ao Sol? Use os dados numéricos do Apêndice C e ignore a rotação da Terra em torno do seu próprio eixo.

35P. Um helicóptero levanta verticalmente um astronauta de 72 kg até 15 m de altura acima do oceano com o auxílio de um cabo. A aceleração do astronauta é $g/10$. Qual o trabalho realizado sobre o astronauta (a) pelo helicóptero e (b) pelo seu próprio peso? Quais são (c) a energia cinética e (d) a velocidade do astronauta no momento em que chega ao helicóptero?

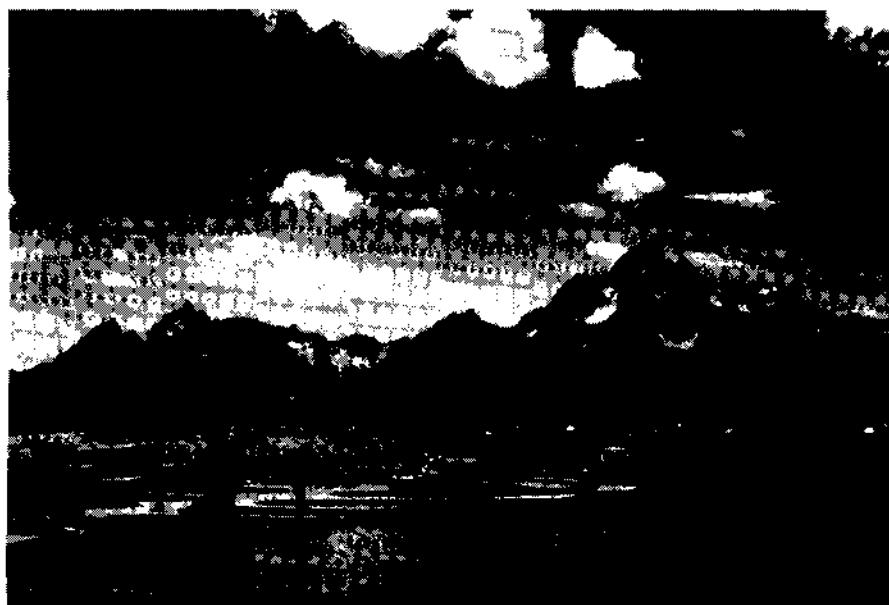


Fig. 7-35 Um grande meteorito atravessa a atmosfera acima das montanhas.

36P. Uma corda é usada para fazer descer verticalmente um bloco, inicialmente em repouso de massa M com uma aceleração constante de $g/4$. Depois que o bloco desceu uma distância d , calcule (a) o trabalho realizado pela corda sobre o bloco, (b) o trabalho realizado sobre o bloco pelo seu peso, (c) a energia cinética do bloco e (d) a velocidade do bloco.

37P. Um caixote com uma massa de 230 kg está pendurado na extremidade de uma corda de 12,0 m. Você empurra horizontalmente o caixote com uma força variável F , até deslocá-lo 4,00 m para o lado (Fig. 7-36). (a) Qual é o módulo de F quando o caixote se encontra na posição final? Durante o deslocamento do caixote, quais são (b) o trabalho total executado sobre eles, (c) o trabalho executado pelo peso do caixote e (d) o trabalho executado pela corda sobre o caixote? (e) A partir das respostas (b), (c) e (d) e do fato de que o caixote está imóvel antes e depois de ser deslocado, calcule o trabalho que você executou sobre o caixote. (f) Por que o seu trabalho não é igual ao produto do deslocamento horizontal pela resposta (a)?

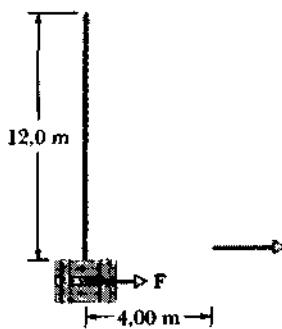


Fig. 7-36 Problema 37.

38P. Um bloco de 250 kg é deixado cair sobre uma mola vertical com uma constante de mola $k = 2,5 \text{ N/cm}$ (Fig. 7-37). A compressão máxima da mola produzida pelo bloco é de 12 cm. Enquanto a mola está sendo comprimida, qual o trabalho executado (a) pelo peso no bloco e (b) pela mola? (c) Qual era a velocidade do bloco no momento em que se chocou com a mola? (d) Se a velocidade no momento do impacto for multiplicada por dois, qual será a compressão máxima da mola? Suponha que o atrito é desprezível.

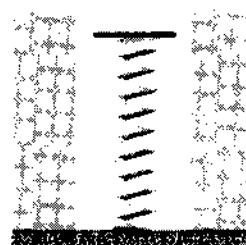


Fig. 7-37 Problema 38.

Seção 7-6 Potência

39E. Um elevador lotado tem uma massa de $3.0 \times 10^3 \text{ kg}$ e é capaz de subir 210 m em 23 s com velocidade constante. Qual a potência média aplicada ao elevador pelo cabo?

40E. Se um teleférico transporta 100 passageiros com um peso médio de 70 kg a uma altura de 150 m em 60 s com velocidade constante, qual a potência média do teleférico?

41E. Um elevador do hotel Marriot Marquis, em Nova Iorque, tem uma massa de 4.500 kg e pode transportar uma carga máxima de 1.800 kg. O elevador está subindo lotado com uma velocidade de 3,8 m/s. De que potência necessita para manter essa velocidade?

42E. (a) Num certo instante, uma partícula experimenta uma força $\mathbf{F} = (4,0 \text{ N})\mathbf{i} - (2,0 \text{ N})\mathbf{j} + (9,0 \text{ N})\mathbf{k}$ enquanto se move com uma velocidade $\mathbf{v} = -(2,0 \text{ m/s})\mathbf{i} + (4,0 \text{ m/s})\mathbf{k}$. Qual a potência instantânea aplicada à partícula pela força? (b) Em outro instante, a velocidade tem apenas uma componente j . Se a força continua a mesma e a potência instantânea é -12 W , qual a velocidade da partícula nesse instante?

- 43P.** Um bloco de granito de 1.400 kg é puxado por um guindaste a vapor ao longo de uma rampa com uma velocidade constante de 1,34 m/s (Fig. 7-38). O coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e a rampa é 0,40. Qual a potência do guindaste?

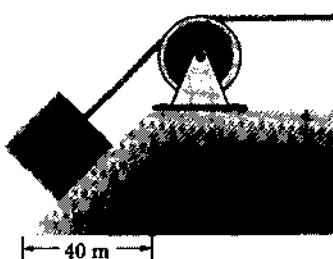


Fig. 7-38 Problema 43.

- 44P.** Um bloco de 100 kg é puxado com uma velocidade constante de 5,0 m/s sobre um piso horizontal por uma força de 122 N orientada 37° acima da horizontal. Qual a potência aplicada pela força?

- 45P.** Um cavalo puxa uma carroça com uma força de 180 N que faz um ângulo de 30° com a horizontal e se move com uma velocidade de 10 km/h. (a) Qual o trabalho executado pelo cavalo em 10 minutos? (b) Qual a potência média do cavalo em cavalos-vapor?

- 46P.** Um objeto de 2,0 kg sofre uma aceleração uniforme desde o repouso até atingir a velocidade de 10 m/s em 3,0 s. (a) Qual o trabalho executado sobre o objeto durante o intervalo de 3,0 s? Qual a potência aplicada ao objeto (b) no final do intervalo e (c) no final da primeira metade do intervalo?

- 47P.** Uma força de 5,0 N age sobre um corpo de 15 kg inicialmente em repouso. Determine (a) o trabalho executado pela força no primeiro, segundo e terceiro segundos e (b) a potência instantânea aplicada pela força no final do terceiro segundo.

- 48P.** Um elevador de carga totalmente cheio tem uma massa total de 1.200 kg e deve subir 54 m em 3,0 min. O contrapeso do elevador tem uma massa de 950 kg. Calcule a potência (em cavalos-vapor) que o motor do elevador deve desenvolver. Ignore o trabalho necessário para colocar o elevador em movimento e para freá-lo, isto é, suponha que se move o tempo todo com velocidade constante.

- 49P.** A força (mas não a potência) necessária para rebocar um barco com velocidade constante é proporcional à velocidade. Se são necessários 10 hp para manter uma velocidade de 4,0 km/h, quantos cavalos-vapor são necessários para manter uma velocidade de 12 km/h?

Seção 7-7 Energia Cinética a Velocidades Elevadas

- 50E.** Um elétron se desloca de 5,1 cm em 0,25 ns. (a) Qual é a relação entre a velocidade do elétron e a velocidade da luz? (b) Qual é a energia do elétron em elétrons-volt? (c) Qual o erro percentual que você cometaria se usasse a fórmula clássica para calcular a energia cinética do elétron?

- 51E.** O teorema do trabalho-energia cinética vale também para partículas que estejam se movendo em alta velocidade. Qual o trabalho, em keV, necessário para acelerar um elétron a partir do repouso até uma velocidade de (a) 0,500c, (b) 0,990c, (c) 0,999c?

- 52P.** Um elétron está se movendo com uma velocidade de 0,999c. (a) Qual é a sua energia cinética? (b) Se a velocidade do elétron aumenta de 0,05%, qual é o aumento percentual de sua energia cinética?

PROBLEMAS ADICIONAIS

- 53.** A única força que age sobre um corpo de 2,0 kg que está se movendo no sentido positivo do eixo dos x tem uma componente $xF_x = -6x$ N, onde x está em metros. A velocidade do corpo em $x = 3,0$ m é 8,0 m/s. (a) Qual a velocidade do corpo em $x = 4,0$ m? (b) Para que valor positivo de x o corpo terá uma velocidade de 5,0 m/s?

- 54.** Uma força F no sentido positivo do eixo dos x é aplicada a um objeto que está se movendo ao longo do mesmo eixo. Se a intensidade da força é dada por $F = 10e^{-x/2.0}$ N, onde x está em metros, calcule o trabalho executado pela força F enquanto o objeto se desloca de $x = 0$ até $x = 2,0$ m (a) desenhando um gráfico de $F(x)$ e determinando a área sob a curva e (b) integrando a força para determinar o trabalho analiticamente.

- 55.** A única força que age sobre um corpo de 2,0 kg que se move ao longo do eixo dos x varia da forma indicada na Fig. 7-39. A velocidade do corpo em $x = 0$ é 4,0 m/s. (a) Qual é a energia cinética do corpo em $x = 3,0$ m? (b) Para que valor de x o corpo terá uma energia cinética de 8,0 J? (c) Qual a maior energia cinética adquirida pelo corpo no intervalo entre $x = 0$ e $x = 5,0$ m?

- 56.** Uma força constante de 10 N de intensidade faz um ângulo de 150° (no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio) com o sentido positivo dos x enquanto age sobre um objeto de 2,0 kg. Qual o trabalho executado

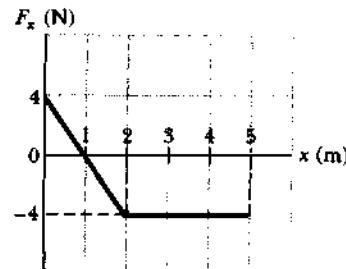
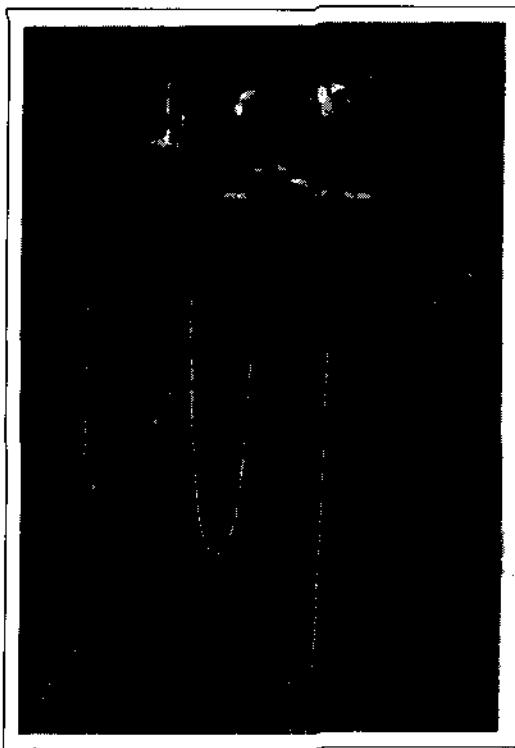


Fig. 7-39 Problema 55.

do pela força sobre o objeto quando este se desloca da origem até um ponto cujo vetor posição é $(2,0 \text{ m})\mathbf{i} - (4,0 \text{ m})\mathbf{j}$?

- 57.** Um corpo de 0,30 kg que se desloca sem atrito numa superfície horizontal está preso a uma extremidade de uma mola horizontal (com $k = 500 \text{ N/m}$). A outra extremidade da mola é mantida fixa. O corpo tem uma energia cinética de 10 J ao passar pela sua posição de equilíbrio. (a) Qual a potência exercida pela mola sobre o corpo quando este passa pela posição de equilíbrio? (b) Qual a potência exercida pela mola sobre o corpo quando a mola foi comprimida em 0,10 m e a massa está se afastando da posição de equilíbrio?

CONSERVAÇÃO DA ENERGIA



No perigoso “esporte” do ioiô humano, uma participante amarra uma corda elástica nos tornozelos e salta de grande altura. Como calcular a que distância chegará do chão? A resposta, naturalmente, é importante para a “atleta”, que sabe muito bem o que a aguarda se o cálculo estiver errado.

8-1 Trabalho e Energia Potencial

Começamos este capítulo com uma definição: **energia** é uma propriedade associada ao estado de um ou mais corpos. No Cap. 7, discutimos um tipo de energia: a energia cinética K , associada ao estado de movimento dos corpos. Neste capítulo, vamos falar de outro tipo: a energia potencial U , associada à configuração de um ou mais corpos. (Um terceiro tipo de energia, do ponto de vista macroscópico, a térmica, associada aos movimentos aleatórios dos átomos e moléculas de um corpo, também entrará na discussão. As mudanças de energia térmica de um corpo são demonstradas por mudanças na temperatura do corpo.)

Quando Vasili Alexeev levantou 254 kg acima da própria cabeça, não aumentou a energia cinética dos pesos, é sim a distância entre os pesos e a Terra, que se atraem mutuamente através da força gravitacional. O trabalho rea-

lizado pelo atleta aumentou a energia potencial gravitacional do sistema pesos-Terra porque mudou a sua configuração, isto é, mudou a posição relativa entre os pesos e a Terra. **Energia potencial gravitacional** é aquela associada ao estado de separação entre dois ou mais corpos que se atraem através da força gravitacional.

Quando você comprime ou distende uma mola, a posição relativa das espiras da mola é modificada. Elas resistem a essa mudança, e o resultado do seu trabalho é um aumento da energia potencial elástica da mola. **Energia potencial elástica** é a energia associada ao estado de compressão ou distensão de um objeto elástico.

Na linguagem usada para descrever os fenômenos que envolvem trabalho e energia, dizemos freqüentemente que a energia potencial foi “armazenada” num sistema, no sentido de que essa energia pode se manifestar mais tarde em forma de movimento. Assim, por exemplo, dizemos que o saltador da Fig. 8-1 armazena energia potencial na vara ao



Fig. 8-1 Um saltador realiza um certo trabalho para encurvar a vara de fibra de vidro, armazenando assim uma certa quantidade de energia potencial elástica. No meio do salto, recupera essa energia na forma de energia potencial gravitacional. O recorde mundial com uma vara rígida (feita de alumínio, aço ou bambu) foi de 4,76 m, estabelecido em 1942, e durou 17 anos. Quando foram introduzidas as varas flexíveis de fibra de vidro, o recorde aumentou quase imediatamente para 5,18 m.

encurvá-la. Quando a vara volta a ficar reta, ela imprime um impulso adicional ao saltador.

Quando as pedras da catedral de Rheims (Fig. 8-2) foram transportadas de uma pedreira para a localização atual, uma energia potencial foi “armazenada” no sistema pedras-Terra. Entretanto, usando uma linguagem menos precisa, podemos dizer que a energia foi armazenada nas pedras e assim podemos nos referir à “energia potencial da pedra” ou mesmo à energia potencial da catedral como um todo. Este modo de falar é aceitável, desde que se tenha em mente que a Terra é parte importante do sistema de armazenamento de energia.

8-2 Energia Mecânica

Vamos ver agora como três forças diferentes mudam o estado de um sistema para verificar se é possível atribuir uma energia potencial à configuração do sistema. Nossa teste (que será justificado na Seção 8-4) é o seguinte: o sistema começa num estado inicial, com um corpo do sistema possuindo uma certa quantidade de energia cinética, e a força realiza um trabalho sobre o corpo, fazendo mudar a sua energia cinética. Quando o sistema volta ao estado inicial, verificamos se o corpo tem a mesma energia cinética que no início do teste. Se isso é verdade, então podemos defini-



Fig. 8-2 A catedral de Rheims, construída por volta de 1240 d.C. Cada pedra da estrutura pode ser considerada como um depósito de energia potencial. Onde se encontram, na sua opinião, as pedras que armazem maior energia potencial?

mir uma energia potencial (uma energia armazenada) para o sistema. Vamos ver que isso pode ser feito quando a força é uma força elástica (como a de uma mola) ou uma força gravitacional. Entretanto, quando a força é de atrito dinâmico, não podemos definir uma energia potencial.

Vamos também falar da **energia mecânica** E de um sistema, que é a soma da energia cinética e da energia potencial. Nossa objetivo será verificar o que acontece com o valor da energia mecânica quando uma força gravitacional, de atrito ou elástica, age dentro do sistema. Será que E varia? Ou será que permanece constante, caso em que podemos dizer que é **conservada**?

A Força Elástica

A Fig. 8-3a mostra uma mola no estado relaxado, com uma das extremidades presa a uma parede. Um bloco de massa m , deslizando com energia cinética K , está prestes a se chocar com a extremidade livre da mola. Supomos que não existe atrito no plano horizontal, que a mola não tem massa e é *ideal* (isto é, não apresenta atrito interno quando é comprimida ou distendida), e que obedece à lei de Hooke (Eq. 7-16):

$$F(x) = -kx. \quad (8-1)$$

Na equação 8-1, $F(x)$, a *força da mola*, é a força exercida pela mola sobre o bloco, e x é o deslocamento que a mola sofre ao ser comprimida ou distendida.

Depois que o bloco da Fig. 8-3a se choca com a mola, começa a comprimi-la (Fig. 8-3b) e perde velocidade, e, portanto, energia cinética, até parar momentaneamente (Fig. 8-3c). Em seguida, começa a se mover no sentido oposto, empurrado pela mola, que começa a se distender (Fig. 8-3d). Quando o bloco está prestes a se separar da mola, tem a mesma energia cinética (Fig. 8-3e) que na situação inicial (Fig. 8-3a).

Como a energia cinética é totalmente devolvida ao bloco quando este completa a “viagem” e volta ao ponto de partida, e o sistema volta ao estado inicial (isto é, o bloco está na posição inicial e a mola tem o comprimento inicial), podemos atribuir uma energia potencial ao sistema bloco-mola. Essa energia potencial é função do estado de compressão da mola.

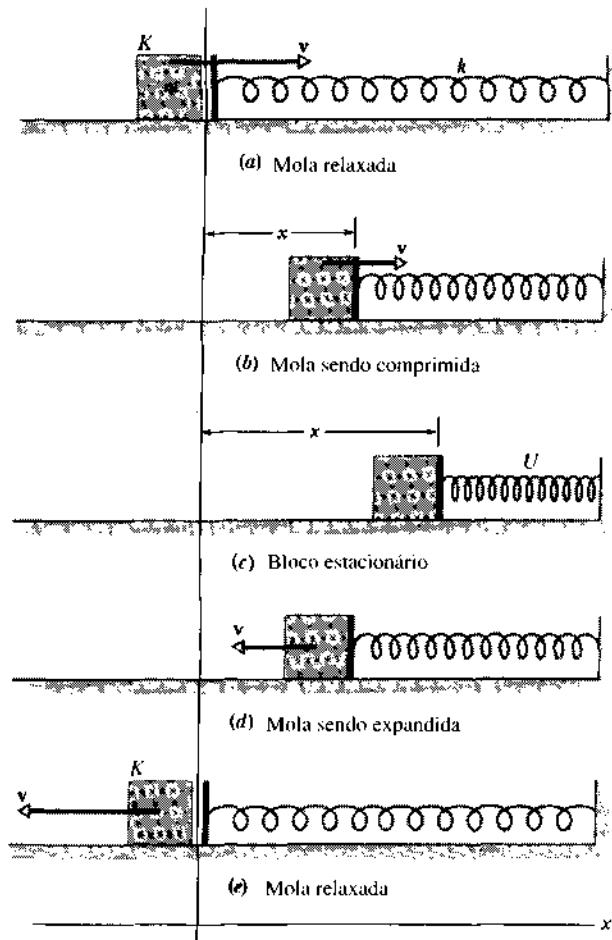


Fig. 8-3 A energia cinética K de um bloco em movimento se transforma na energia potencial U de uma mola comprimida e se transforma de novo em energia cinética. (a) O bloco está prestes a atingir a extremidade da mola, que se encontra no estado relaxado. (b) A velocidade do bloco diminui e a mola é comprimida. (c) O bloco fica imóvel, depois de transferir toda a sua energia cinética para a mola. (d) A mola se distende, empurrando o bloco para trás. (e) O bloco recupera toda a sua energia cinética inicial.

Quando o bloco está comprimindo a mola, está perdendo energia cinética, mas a mola está ganhando energia potencial. Durante este processo, podemos dizer que a energia está sendo transferida do bloco para a mola. Quando a mola está se distendendo, está perdendo energia potencial, mas a energia cinética do bloco está aumentando. Durante este processo, podemos dizer que a energia está sendo transferida da mola para o bloco.

A energia mecânica E do sistema bloco-mola é a soma da energia cinética do bloco e da energia potencial da mola no mesmo instante de tempo. O que há de notável numa situação como a da Fig. 8-3 é que E permanece constante durante os vários estágios de transferência de energia. Em outras palavras, a energia mecânica do sistema bloco-mola é conservada. Se E não fosse conservada, o bloco não acabaria no estado inicial com a energia cinética inicial.

A transferência de energia entre o bloco e a mola é como uma transferência de dinheiro entre uma caderneta de poupança e uma conta corrente. Se você transfere dinheiro da caderneta de poupança para a conta corrente, o saldo da caderneta diminui no valor em que o saldo da conta corrente aumenta, mas a soma das duas contas permanece a mesma, ou seja, é conservada.

A conservação da energia mecânica do sistema bloco-mola pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} E &= U_1 + K_1 = U_2 + K_2 = \dots \\ &= U_n + K_n = \text{constante}, \end{aligned} \quad (8-2)$$

onde o índice inferior é usado para indicar diferentes instantes durante o processo de transferência de energia. Uma forma equivalente de escrever a Eq. 8-2, desta vez em termos de variações de energia, é

$$\Delta K + \Delta U = 0, \quad (8-3)$$

que nos diz que cada variação da energia cinética do bloco é acompanhada por uma variação igual e oposta da energia potencial elástica da mola.

A Força Gravitacional

A Fig. 8-4 mostra uma bola de massa m se movendo verticalmente para cima próximo à superfície da Terra e sujeita apenas ao seu próprio peso mg , que se deve à força gravitacional exercida pela Terra. Enquanto a bola sobe, o peso faz trabalho sobre ela, reduzindo sua velocidade e portanto sua energia cinética, até que, no ponto c, a bola pára momentaneamente. Em seguida, começa a cair, enquanto o peso continua a fazer trabalho sobre ela, mas desta vez aumentando sua velocidade e energia cinética.

As Figs. 8-3 e 8-4 são semelhantes; os estados equivalentes estão rotulados com as mesmas letras. Nas duas figuras, um corpo percorre um trajeto ao longo do qual perde toda a sua energia cinética e torna a recuperá-la ao voltar ao ponto de partida.

Quando a bola sobe na Fig. 8-4, perdendo energia cinética, podemos dizer que a energia está sendo transferida da

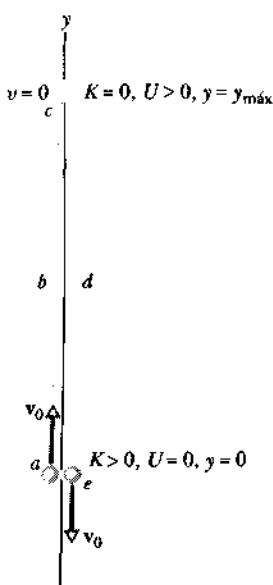


Fig. 8-4 Uma bola de massa m é arremessada para cima. Durante a subida, a energia é transferida da energia cinética da bola para a energia potencial do sistema bola-Terra, até que a bola pára por um instante no ponto c . Em seguida, a bola começa a cair, recuperando a energia cinética, ao mesmo tempo que a energia potencial do sistema bola-Terra diminui. Os pontos rotulados correspondem aos estados (a) a (e) da Fig. 8-3.

bola para o sistema bola-Terra, onde é armazenada na forma de energia potencial gravitacional. Quando a bola cai e sua energia cinética aumenta, a energia potencial do sistema bola-Terra diminui. Neste processo, podemos dizer que a energia está sendo transferida do sistema para a bola, transformando-se em energia cinética. Durante a subida e a descida da bola, a energia mecânica do sistema é conservada.

A Força de Atrito Dinâmico

Considere um bloco de massa m deslizando num piso até que a força de atrito exercida sobre ele pelo piso faça-o parar. A situação é diferente das situações ilustradas nas Figs. 8-3 e 8-4, porque a energia cinética que o bloco perdeu não pode ser recuperada.

O motivo por que a energia cinética não pode ser recuperada liga-se ao fato de que é transferida para o bloco e para o piso na forma de energia térmica. Esta transferência é irreversível (reverter este processo seria como devolver um ovo mexido a sua forma original). Assim, neste exemplo não podemos dizer que a energia é armazenada como energia potencial. Em vez disso, dizemos que a energia é **dissipada** (transferida de forma irreversível). Concluímos que a energia mecânica do sistema bloco-piso não é conservada, mas diminui com o tempo.

8-3 Determinação da Energia Potencial

Vamos agora à parte quantitativa. Suponha que uma única força \mathbf{F} , que pode ser um peso ou a força de uma mola, age

sobre uma partícula, realizando uma quantidade de trabalho W . Combinando a Eq. 8-3 com o teorema do trabalho-energia cinética,

$$W = \Delta K, \quad (8-4)$$

temos:

$$\Delta U = -W \quad (\text{definição de } \Delta U) \quad (8-5)$$

Assim, se uma força muda a energia potencial de um sistema e altera a sua configuração, a variação de energia potencial é igual ao trabalho realizado pela força com o sinal oposto. Vemos também que a unidade de energia potencial no sistema SI é a mesma que a unidade de trabalho, isto é, o joule.

No caso de um movimento unidimensional, a Eq. 8-5 se torna

$$\Delta U = -W = - \int_{x_i}^x F(x) \, dx, \quad (8-6)$$

onde x_i representa a configuração inicial do sistema e x é qualquer outra configuração.

Apenas as *variações* da energia potencial são fisicamente importantes. Este fato permite simplificar uma situação que envolva a energia potencial (1) escolhendo arbitrariamente uma *configuração de referência* x_0 , (2) atribuindo a essa configuração uma energia potencial de referência $U(x_0)$ (que em geral é tomada como sendo igual a zero) e (3) calculando a energia potencial de uma configuração qualquer em relação à configuração de referência. A energia potencial $U(x)$ de uma configuração qualquer é dada por

$$U(x) = U(x_0) + \int_{x_0}^x F(x) \, dx \quad (8-7)$$

Para compreendermos melhor essas idéias, vamos aplicá-las a dois casos específicos.

Energia Potencial Elástica

Vamos tomar a configuração de referência x_0 de uma mola como seu estado relaxado, com a extremidade livre na posição $x = 0$. Vamos tomar ainda a energia potencial dessa configuração de referência como igual a zero: $U(x_0) = 0$. Vamos supor que a única força presente seja a força da mola. Substituindo $F(x)$ da Eq. 8-1 na Eq. 8-7, temos

$$U(x) = 0 - \int_0^x (-kx) \, dx,$$

ou

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad (8-8)$$

A Eq. 8-8 permite calcular a energia potencial da mola para qualquer valor de compressão ou distensão x . Como x aparece elevado ao quadrado, a energia potencial da mola é sempre positiva, quer a mola seja comprimida (o que equivale a tomar x positivo, se usarmos a convenção da Fig. 8-3), quer ela seja distendida (o que equivale a tomar x negativo, usando a mesma convenção).

Consideremos agora um sistema onde um bloco está preso a uma mola e apoiado numa superfície sem atrito. Primeiro empurramos o bloco para comprimir ou distender a mola e depois largamos o bloco. Ele oscila de um lado para outro. Usando a Eq. 8-8 e $K = mv^2/2$, a equação 8-2 se torna, para o sistema bloco-mola,

$$\frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = E \quad (\text{sistema bloco-mola}), \quad (8-9)$$

onde a energia mecânica E do sistema é constante. A Eq. 8-9 é a expressão matemática da lei de conservação de energia mecânica para o sistema bloco-mola.

A Fig. 8-5 mostra como ocorrem as trocas de energia entre a mola e o bloco durante um *ciclo* do movimento, no qual o bloco faz uma “viagem” de ida e volta. Quando o bloco se encontra no ponto $x = 0$, a energia se encontra totalmente na forma de energia cinética; quando está em $x = +x_{\max}$ ou em $x = -x_{\max}$, a energia se encontra totalmente na forma de energia potencial. Em pontos intermediários,

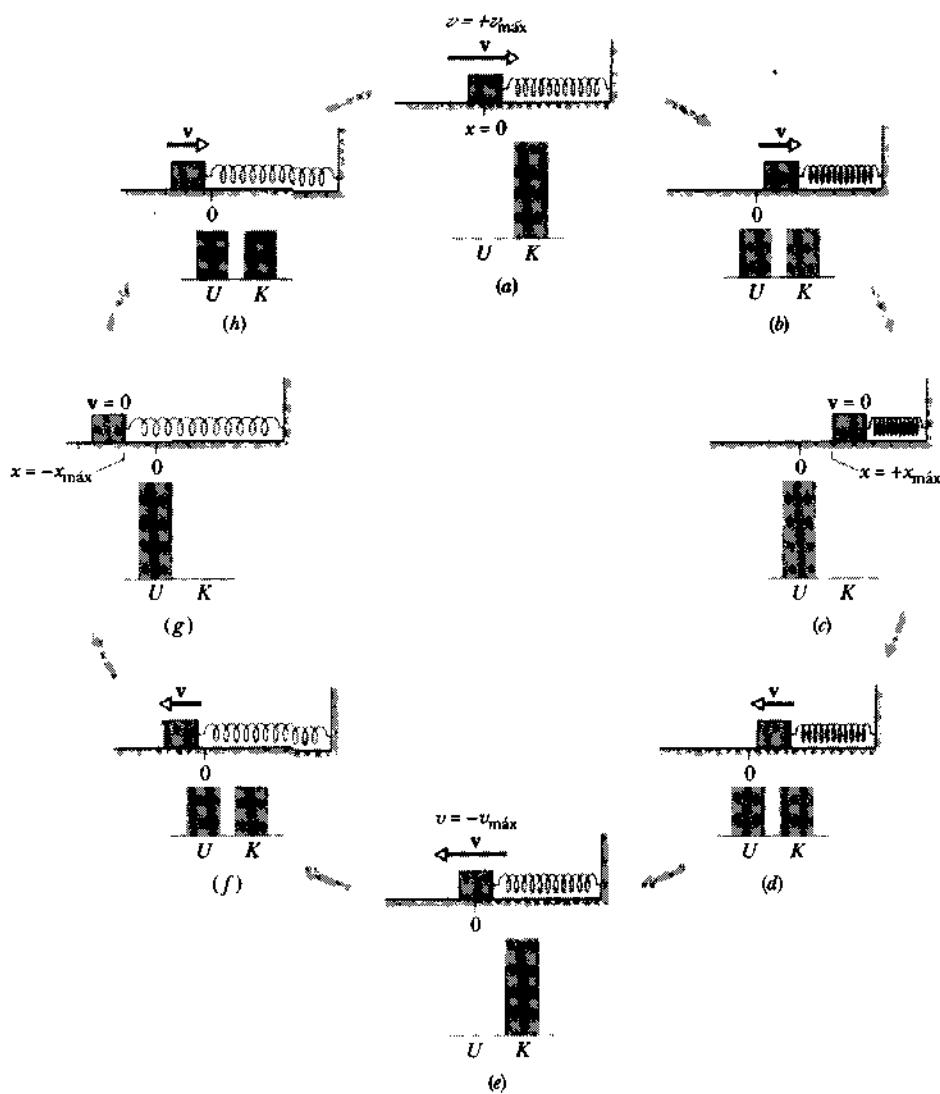


Fig. 8-5 Um bloco preso a uma mola oscila de um lado para outro numa superfície horizontal sem atrito. A figura mostra um ciclo completo do movimento. Podemos imaginar que o ciclo começa quando o bloco se encontra em qualquer ponto da trajetória e termina quando o bloco retorna às condições iniciais. Durante o ciclo, os valores das energias cinética e potencial do sistema bloco-mola variam continuamente, como está indicado pelos histogramas, mas a soma das duas energias, que é a energia mecânica E do sistema, permanece constante. Podemos dizer que a energia E está continuamente oscilando entre as formas cinética e potencial. Nos estágios (a) e (e), toda a energia se encontra na forma de energia cinética, a velocidade do bloco é máxima e a mola está relaxada. Nos estágios (c) e (g), toda a energia se encontra sob a forma de energia potencial, a velocidade do bloco é zero e a mola apresenta compressão máxima ou distensão máxima. Nos estágios (b), (d), (f) e (h), metade da energia se encontra na forma de energia cinética e metade na forma de energia potencial.

a energia se encontra dividida entre as duas formas. A energia mecânica E , que é a soma das energias nas duas formas, permanece constante durante todo o ciclo.

Observe que o peso do bloco e a força normal exercida pela superfície sobre a qual ele está deslizando não têm nenhuma influência sobre a energia potencial; essas forças são perpendiculares à direção do movimento do bloco e portanto não realizam nenhum trabalho sobre ele.

Energia Potencial Gravacional

Considere uma partícula se movendo para cima ou para baixo ao longo de um eixo vertical y perto da superfície da

Terra, sujeita apenas à força gravitacional. Essa força tem o valor $F(y) = -mg$, onde o sinal negativo indica que a força é para baixo, no sentido negativo do eixo dos y . Vamos tomar $y = 0$ como a posição de referência y_0 para a qual a energia potencial do sistema partícula-Terra é zero.

Nesse caso, a Eq. 8-7 assume a forma

$$U(y) = 0 - \int_0^y (-mg) dy,$$

ou

$$U(y) = mgy \quad (8-12)$$

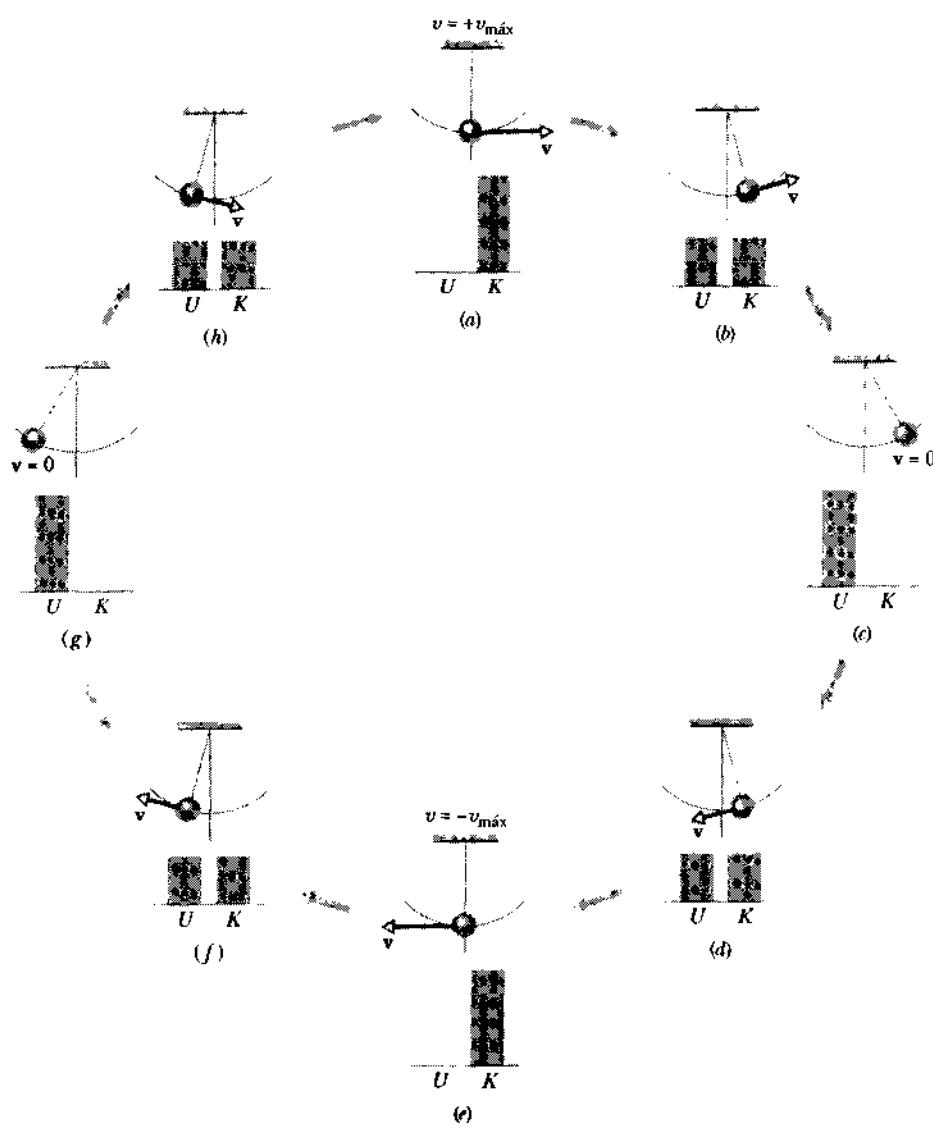


Fig. 8-6 Um pêndulo, com a sua massa concentrada numa esfera na extremidade inferior, balança para um lado e para outro. A figura mostra um ciclo completo do movimento. Durante o ciclo, os valores das energias cinética e potencial do sistema pêndulo-Terra variam continuamente, mas a energia mecânica E do sistema permanece constante. Podemos dizer que a energia E está continuamente oscilando entre as formas cinética e potencial. Nos estágios (a) e (e), toda a energia se encontra na forma de energia cinética, a velocidade da esfera é máxima e está no ponto mais baixo da trajetória. Nos estágios (c) e (g), toda a energia se encontra na forma de energia potencial, a velocidade da esfera é zero e ela está no ponto mais alto da trajetória. Nos estágios (b), (d), (f) e (h), metade da energia se encontra na forma de energia cinética e metade na forma de energia potencial. Se a oscilação do pêndulo incluisse uma força de atrito no ponto onde ele está preso no teto ou uma força de arrasto em razão da resistência do ar, o valor de E diminuiria com o tempo e o pêndulo acabaria parando.

Usando a Eq. 8-10 e $K = mv^2/2$, a Eq. 8-2 se torna, para o sistema partícula-Terra,

$$\cancel{mgy + \frac{1}{2}mv^2 = E} \quad (\text{sistema partícula-Terra}), \quad (8-11)$$

onde E é a energia mecânica do sistema. Embora a posição y e a velocidade v da partícula possam variar, mas de maneira tal que o valor de E na Eq. 8-11 permanece constante.

As Eqs. 8-10 e 8-11 são válidas não só para um corpo que se move verticalmente mas também para um corpo que se move fazendo um certo ângulo com a vertical, como uma bala de canhão. Para demonstrar que isso é possível, basta calcularmos o trabalho realizado por um corpo que se move em mais de uma dimensão. De acordo com a Eq. 7-14, temos:

$$W = \int_{x_0}^x F_x dx + \int_{y_0}^y F_y dy + \int_{z_0}^z F_z dz, \quad (8-12)$$

onde os índices dos limites das integrais foram modificados para se adequarem à situação que estamos discutindo. A única força a que o corpo está sujeito é o seu peso mg , de modo que $F_x = F_z = 0$ e $F_y = -mg$. Assim, o primeiro e o terceiro termos do lado direito da Eq. 8-12 são iguais a zero. Se tomarmos $y_0 = 0$, o segundo termo do lado direito da Eq. 8-12 será igual a mgy . Substituindo W por $-\Delta U$ podemos então transformar a Eq. 8-12 na Eq. 8-10. O resultado significa (1) que o trabalho realizado pelo peso mg depende apenas dos valores inicial e final de y e não da trajetória seguida pelo corpo e (2) que a energia potencial U de um corpo sujeito apenas ao próprio peso depende da sua posição vertical y mas não das coordenadas horizontais x e z .

Um caso semelhante é o de um pêndulo constituído por uma esfera pendurada na ponta de uma corda de massa desprezível. A Fig. 8-6 mostra a variação com o tempo da energia cinética e da energia potencial gravitacional de um pêndulo desse tipo. Tomamos a energia potencial do sistema como igual a zero quando a esfera se encontra no ponto mais baixo da trajetória. Nessa situação (Fig. 8-6a, e), a velocidade da esfera é máxima e toda a energia do sistema se encontra na forma de energia cinética. Nos pontos extremos da trajetória (Fig. 8-6c, g), a esfera está momentaneamente em repouso e toda a energia do sistema se encontra na forma de energia potencial. Em outras posições, uma parte da energia se encontra na forma de energia cinética e outra parte na forma de energia potencial. A soma destas duas partes é a energia mecânica E que permanece constante durante o movimento (na ausência de atrito). Observe que a força exercida pela corda sobre a esfera não tem nenhuma influência sobre a energia potencial; essa força é sempre perpendicular à direção do movimento da esfera e portanto não realiza nenhum trabalho sobre ela.

EXEMPLO 8-1 Uma preguiça de 2,0 kg escorrega de um galho de árvore e cai ao chão, que está a uma distância de 5,0 m (Fig. 8-7).

- a. Qual era a energia potencial inicial U da preguiça se tomarmos o ponto de referência $y_0 = 0$ como (1) o chão, (2) o piso de uma varanda situado 3,0 m acima do chão, (3) o galho e (4) um ponto situado 1,0 m acima do galho?

Solução Usando a Eq. 8-10, podemos calcular U para cada escolha do ponto de referência $y_0 = 0$. Por exemplo: para a opção (1), a preguiça se encontra inicialmente em $y = 5,0$ m e

$$U = mgy = (2,0 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(5,0 \text{ m}) \\ = 98 \text{ J.} \quad (\text{Resposta})$$

Para as outras opções, os valores de U são

- $$(2) U = mgy = mg(2,0 \text{ m}) = 39 \text{ J.}$$
- $$(3) U = mgy = mg(0) = 0 \text{ J.}$$
- $$(4) U = mgy = mg(-1,0 \text{ m}) = -19,6 \text{ J.} \\ \approx -20 \text{ J.} \quad (\text{Resposta})$$

- b. Para cada ponto de referência escolhido, qual é a variação da energia potencial do sistema preguiça-Terra graças à queda?

Solução A variação de energia potencial é dada por

$$\Delta U = mgy_f - mgy_i = mg(y_f - y_i) = mg \Delta y.$$

Para as quatro opções, temos $\Delta y = -5,0$ m. Assim, em todos os casos,

$$\Delta U = (2,0 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(-5,0 \text{ m}) \\ = -98 \text{ J.} \quad (\text{Resposta})$$

Vemos portanto que o valor de U depende do ponto de referência escolhido, mas a variação de energia potencial não depende.

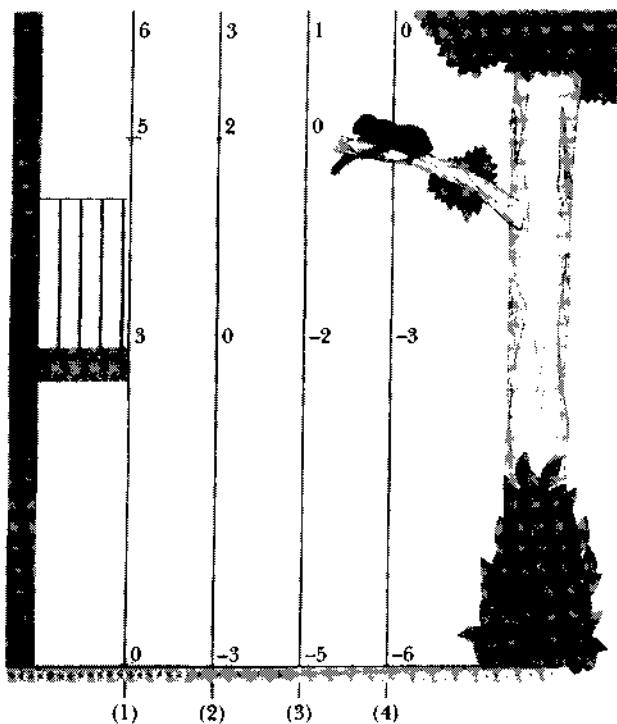


Fig. 8-7 Exemplo 8-1. Quatro escolhas para o eixo y . Os valores apresentados estão expressos em metros.

c. Qual é a velocidade v da preguiça ao tocar o chão?

Solução No momento em que a preguiça toca o chão, toda a sua energia potencial se transformou em energia cinética. De acordo com a Eq. 8-3, temos:

$$\Delta K = -\Delta U. \quad (8-13)$$

Como a velocidade inicial da preguiça era zero,

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - 0 = \frac{1}{2}(2,0 \text{ kg})v_f^2,$$

e

$$\Delta U = -98 \text{ J}.$$

Assim,

$$\frac{1}{2}(2,0 \text{ kg})v_f^2 = 98 \text{ J},$$

e

$$v_f = \sqrt{\frac{98 \text{ J}}{1,0 \text{ kg}}} \approx 9,9 \text{ m/s}. \quad (\text{Resposta})$$

d. Se a preguiça cai de novo do mesmo galho depois de se alimentar com folhas e frutas, a velocidade com que toca o solo é maior, menor ou igual à calculada em (c)?

Solução Na parte (b), verificamos que $\Delta U = mg \Delta y$. Substituindo este valor na Eq. 8-13, temos:

$$\Delta K = -\Delta U = -mg \Delta y,$$

que pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - 0 = -mg \Delta y$$

ou

$$v_f = \sqrt{-2g \Delta y}.$$

Como m não aparece na equação acima, v é independente da massa da preguiça. A sua velocidade ao tocar o solo continua a ser

$$v_f = \sqrt{(-2)(9,8 \text{ m/s}^2)(-5,0 \text{ m})} \approx 9,9 \text{ m/s}. \quad (\text{Resposta})$$

EXEMPLO 8-2 A mola de uma espingarda de mola é comprimida de uma distância $d = 3,2 \text{ cm}$ a partir do estado relaxado e uma bala de massa $m = 12 \text{ g}$ é introduzida no cano. Qual a velocidade com que a bala deixa o cano quando a arma é disparada? A constante da mola, k , é $7,5 \text{ N/cm}$. Suponha que não existe atrito e que o cano é mantido na horizontal.

Solução Seja E , a energia mecânica do sistema espingarda-bala no estado inicial (antes que a arma seja disparada) e E_f , a energia mecânica no estado final (depois que a arma é disparada). Inicialmente, a energia mecânica é a energia potencial da mola $U_i = kd^2/2$. No estado final, a energia mecânica é a energia cinética da bala $K_f = mv^2/2$. Como a energia mecânica é conservada, temos:

$$E_i = E_f,$$

$$U_i + K_i = U_f + K_f,$$

$$\frac{1}{2}kd^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2.$$

Calculando o valor de v , temos:

$$v = d \sqrt{\frac{k}{m}} = (0,032 \text{ m}) \sqrt{\frac{750 \text{ N/m}}{12 \times 10^{-3} \text{ kg}}} = 8,0 \text{ m/s}. \quad (\text{Resposta})$$

EXEMPLO 8-3 Na Fig. 8-3, o bloco, cuja massa m é $1,7 \text{ kg}$, tem uma velocidade inicial v de $2,3 \text{ m/s}$. A constante de mola k é 320 N/m .

a. De que distância x a mola é comprimida na situação da Fig. 8-3c?

Solução A energia mecânica E do sistema bloco-mola deve ser a mesma nas situações das Figs. 8-3a e 8-3c. Assim,

$$E_a = E_c,$$

$$U_a + K_a = U_c + K_c,$$

$$0 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 + 0.$$

Calculando o valor de x , temos:

$$x = v \sqrt{\frac{m}{k}} = (2,3 \text{ m/s}) \sqrt{\frac{1,7 \text{ kg}}{320 \text{ N/m}}} = 0,17 \text{ m} = 17 \text{ cm}. \quad (\text{Resposta})$$

b. Para que valor de x a energia está dividida igualmente entre energia potencial e energia cinética?

Solução Na Fig. 8-3a, a energia E é toda cinética e é dada por

$$E = K = \frac{1}{2}mv^2 = (\frac{1}{2})(1,7 \text{ kg})(2,3 \text{ m/s})^2 = 4,50 \text{ J}.$$

A questão que temos a resolver é a seguinte: para que compressão x da mola a energia potencial tem metade do valor acima? Em outras palavras, para que valor de x a relação

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}E$$

é verdadeira? Calculando o valor de x , temos:

$$x = \sqrt{\frac{E}{k}} = \sqrt{\frac{4,50 \text{ J}}{320 \text{ N/m}}} = 0,12 \text{ m} = 12 \text{ cm}. \quad (\text{Resposta})$$

Observe que este valor *não corresponde* à metade da compressão máxima.

EXEMPLO 8-4 Na Fig. 8-8, uma criança de massa m desce por um escorregador de altura $h = 8,5 \text{ m}$, partindo do repouso. Qual a velocidade da criança ao bater na água? Despreze o atrito entre a criança e o escorregador.

Solução À primeira vista, o problema parece impossível, porque não conhecemos nem a massa da criança nem a forma do escorregador. Entretanto, torna-se de fácil resolução se repararmos que, na ausência de atrito, a única força que o escorregador exerce sobre a criança é a força normal, que é sempre perpendicular à superfície do escorregador. Como a direção do movimento da criança é sempre *paralela* à superfície do escorregador, a força normal não pode realizar nenhum trabalho sobre a criança. A única força que realiza trabalho é o peso mg da criança. A energia mecânica E é portanto conservada durante o movimento e podemos escrever, de acordo com as Eqs. 8-2 e 8-11,

$$E_b = E_t$$

ou

$$\frac{1}{2}mv_b^2 + mgy_b = \frac{1}{2}mv_t^2 + mgy_t,$$

onde o índice b se refere à base do escorregador e o índice t ao topo.

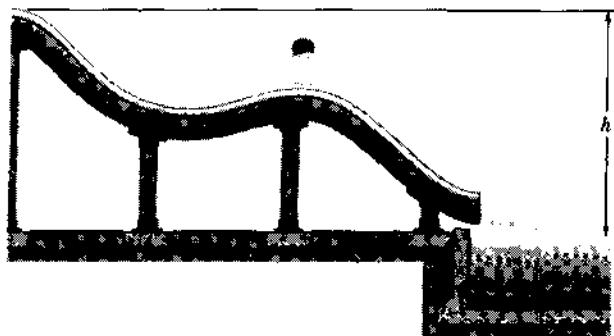


Fig. 8-8 Exemplo 8-4. Uma criança desce por um escorregador e cai em uma piscina. O escorregador é mostrado de perfil. Se o atrito puder ser desprezado, a velocidade da criança ao chegar à água não dependerá nem da sua massa nem da forma do escorregador.

Dividindo os dois membros da equação acima por \$m\$, a massa da criança, temos:

$$v_b^2 = v_i^2 + 2g(y_i - y_b).$$

Fazendo \$v_i = 0\$ e \$y_i - y_b = h\$, temos:

$$v_b = \sqrt{2gh} = \sqrt{(2)(9,8 \text{ m/s}^2)(8,5 \text{ m})} = 13 \text{ m/s.} \quad (\text{Resposta})$$

Esta é a mesma velocidade com que a criança chegaria à água se caísse verticalmente de uma altura de 8,5 m. Em um escorregador de verdade, o atrito nunca é exatamente zero, de modo que a velocidade final da criança será um pouco menor.

Este problema é difícil de resolver diretamente com base apenas nas leis de Newton; o uso da conservação da energia mecânica torna a solução muito mais simples. Por outro lado, se você tivesse que calcular o tempo necessário para a criança chegar à base do escorrega de nada adiantaria recorrer à conservação da energia mecânica; seria preciso conhecer a forma do escorregador e você teria nas mãos um problema muito difícil.

EXEMPLO 8-5 Uma praticante de ióio humano tem uma massa de 61,0 kg e está em uma ponte, 45,0 m acima de um rio. No estado relaxado, sua corda elástica tem um comprimento \$L = 25,0\$ m. Suponha que a corda obedece à lei de Hooke, com uma constante de mola de 160 N/m.

a. A que distância \$h\$ os pés da moça estão da água no ponto mais baixo da queda?

Solução Seja \$d\$ (Fig. 8-9) a distância de que a corda se alongou quando a moça parou momentaneamente no ponto mais baixo da queda. A variação \$\Delta U_g\$ da energia potencial gravitacional do sistema moça-Terra é dada por

$$\Delta U_g = mg \Delta y = -mg(L + d),$$

onde \$m\$ é a massa da moça. A variação \$\Delta U_e\$ da energia potencial elástica da corda é dada por

$$\Delta U_e = \frac{1}{2}kd^2.$$

A energia cinética \$K\$ da moça é igual a zero tanto no momento inicial como no ponto mais baixo da queda.

De acordo com a Eq. 8-3 e as equações acima, temos:

$$\Delta U_e + \Delta U_g + \Delta K = 0$$

$$\frac{1}{2}kd^2 - mg(L + d) + 0 = 0$$

$$\frac{1}{2}kd^2 = mgd - mgL = 0.$$

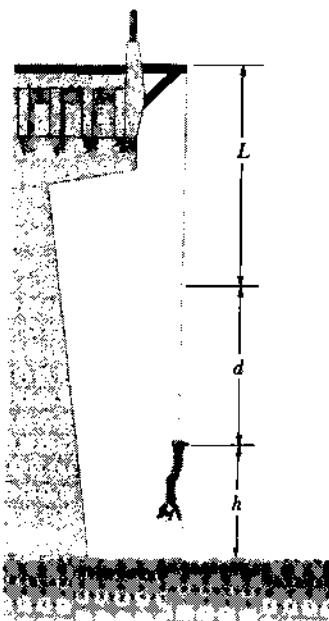


Fig. 8-9 Exemplo 8-5. Uma praticante de ióio humano no ponto mais baixo da queda.

Substituindo os respectivos valores numéricos, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(160 \text{ N/m})d^2 - (61,0 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)d \\ - (61,0 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(25,0 \text{ m}) = 0. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação de segundo grau em \$d\$, obtemos:

$$d = 17,9 \text{ m.}$$

(A equação do segundo grau também fornece um valor negativo para \$d\$ que, neste caso, não tem significado físico e deve ser ignorado.) Os pés da moça estão portanto a uma distância \$(L + d) = 42,9\$ m abaixo da ponte de onde ela pulou. Assim,

$$h = 2,1 \text{ m.} \quad (\text{Resposta})$$

Se a moça for alta, vai chegar muito perto da água.

b. Qual é a força resultante que age sobre a moça no ponto mais baixo da queda?

Solução O peso da moça, \$mg\$, está dirigido para baixo e tem módulo \$mg = 597,8\$ N. A força para cima exercida sobre ela pela corda no ponto mais baixo da queda é dada pela lei de Hooke, \$F = -kx\$, onde \$x\$ é o deslocamento da extremidade livre da corda. Neste caso, o deslocamento é para baixo e \$x = -d\$, de modo que

$$F = -kx = -(160 \text{ N/m})(-17,9 \text{ m}) = 2.864 \text{ N.}$$

A força resultante que age sobre a moça é portanto

$$2.864 \text{ N} - 597,8 \text{ N} \approx 2.270 \text{ N.} \quad (\text{Resposta})$$

Assim, no ponto mais baixo da queda, em que a moça momentaneamente pára, ela está submetida a uma força resultante para cima de 2.270 N. Esta força puxa a moça de volta para cima.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 1: CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA

As perguntas abaixo irão ajudá-lo a resolver problemas que envolvem a conservação da energia mecânica. Releia os Exemplos 8-1 a 8-5 tendo em mente essas perguntas.

Para que sistema a energia mecânica é conservada? Você deve ser capaz de desenhar uma superfície fechada de tal forma que tudo que se encontra do lado de dentro seja o sistema e tudo que se encontra do lado de fora seja o ambiente externo. No Exemplo 8-1, o sistema é a pinguí + a Terra. No Exemplo 8-2, é a bala + a espingarda. No Exemplo 8-3, é o bloco + a mola. No Exemplo 8-4, é a criança + a Terra. No Exemplo 8-5, é a moça + a Terra.

Existe atrito? Quando forças de atrito ou arrasto estão presentes, a energia mecânica não é conservada.

O sistema está isolado? A conservação da energia mecânica só é aplicável a sistemas isolados. Isso significa que nenhuma força externa deve realizar trabalho sobre um objeto pertencente ao sistema. No Exemplo 8-2, se você escolhesse apenas a bala como sistema, descobriria que ele não está isolado; a mola realiza trabalho sobre a bala através da fronteira do sistema. Assim, você não pode usar a conservação da energia mecânica apenas para a bala (nem apenas para a mola).

Quais são os estados inicial e final do sistema? O sistema passa de um estado inicial para um estado final. De acordo com a conservação da energia mecânica, E deve ter o mesmo valor nos dois estados, isto é, $E_i = E_f$. É preciso definir com precisão quais são esses dois estados.

8-4 Forças Conservativas e Não-conservativas

Quando uma força muda o estado de um sistema, se uma mudança de energia potencial pode ser associada a essa mudança de estado, dizemos que a força é **conservativa**; caso contrário, dizemos que a força é **não-conservativa**. A força de uma mola e a força gravitacional (peso) são conservativas; a força de arrasto do ar e a força de atrito são não-conservativas.

Existem dois testes que podemos aplicar a uma força para verificar se é conservativa. Os testes são totalmente equivalentes no sentido de que se uma força satisfizer a um deles, automaticamente satisfará ao outro.

Primeiro Teste

Suponhamos que você jogue uma bola para cima e a pegue de volta. Já que a bola voltou ao ponto de partida, dizemos que percorreu um *círculo fechado*. Dizemos também que a energia que você fornece à bola ao arremessá-la é armazenada como energia potencial do sistema bola-Terra durante parte do circuito (enquanto a bola está subindo). Entretanto, a idéia de energia armazenada só tem significado se a mesma quantidade de energia é devolvida na parte restante do circuito (enquanto a bola está descendo). Em outras palavras, a variação total de energia potencial do sistema para qualquer circuito fechado deve ser igual a zero.

Isto realmente acontece no caso do sistema bola-Terra; quando a bola completa o circuito fechado, toda a energia armazenada durante a subida se transformou novamente em energia cinética.

De acordo com a Eq. 8-5, esta exigência de que $\Delta U = 0$ para qualquer circuito fechado equivale a dizer que o trabalho W realizado pela força em questão ao longo do circuito fechado também deve ser zero. Assim, nosso primeiro teste pode ser expresso da seguinte forma:

Uma força é conservativa se o trabalho realizado por ela numa partícula que percorre um circuito fechado é igual a zero; caso contrário, a força é não-conservativa.

De acordo com este critério, a força gravitacional é conservativa: realizou um trabalho negativo sobre a bola quando ela estava subindo e uma quantidade igual de trabalho positivo quando estava descendo. O trabalho total foi igual a zero.

A exigência de que o trabalho total seja zero para um circuito fechado não é satisfeita pela força de atrito. Quando você arrasta um apagador num quadro-negro, fazendo com que percorra uma certa distância, a força de atrito realiza um trabalho negativo sobre o apagador. Quando, porém, você arrasta o apagador de volta ao ponto de partida, a força de atrito muda automaticamente de sentido e o trabalho exercido sobre o apagador continua a ser negativo. Assim, o trabalho total exercido sobre o apagador num circuito fechado não é igual a zero. A força de atrito é não-conservativa.

Segundo Teste

Suponha que, como na Fig. 8-10a, uma partícula se move de a até b percorrendo a trajetória 1 e depois volte para a percorrendo a trajetória 2. Se a força que age sobre a partícula for conservativa, então, de acordo com o primeiro teste, o trabalho total realizado sobre a partícula durante este circuito fechado deverá ser igual a zero. Podemos escrever:

$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0$$

ou

$$W_{ab,1} = -W_{ba,2}. \quad (8-14)$$

Assim, o trabalho realizado durante o movimento de a para b percorrendo a trajetória 1 deve ser o negativo do trabalho realizado durante o movimento de b para a percorrendo a trajetória 2. Vamos supor agora que a partícula se move de a até b percorrendo a trajetória 2, como na Fig. 8-10b.

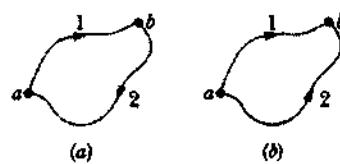


Fig. 8-10 (a) Uma partícula, submetida a uma força conservativa, descreve um circuito fechado, partindo do ponto a , passando pelo ponto b e voltando ao ponto a . (b) Uma partícula pode viajar do ponto a ao ponto b seguindo dois caminhos diferentes.

Como o sentido do movimento foi invertido, o trabalho realizado troca de sinal:

$$W_{ab,2} = -W_{ba,2} \quad (8-15)$$

De acordo com as Eqs. 8-14 e 8-15, temos:

$$W_{ab,1} = W_{ab,2}. \quad (8-16)$$

De acordo com a Eq. 8-16, o trabalho realizado sobre uma partícula por uma força conservativa não depende da trajetória seguida pela partícula. Assim, nosso segundo teste pode ser expresso da seguinte forma:

Uma força é conservativa se o trabalho realizado por ela sobre uma partícula que se move de um ponto para outro é o mesmo para todos os caminhos que ligam os dois pontos; caso contrário, a força é não-conservativa.

Vamos aplicar este teste à força gravitacional. Tome uma pedra de massa m , situada inicialmente no ponto i da Fig. 8-11a, transporte-a horizontalmente até o ponto a e depois levante-a verticalmente até o ponto f , situado a uma altura h . Chame o caminho iaf de trajetória 1. Durante o percurso horizontal ia , o trabalho realizado sobre a pedra por seu peso mg é zero porque a força e o deslocamento são perpendiculares entre si. Para o percurso vertical af , o trabalho é $-mgh$. Assim, o trabalho total W realizado pela força mg sobre a pedra ao longo da trajetória 1 é $-mgh$.

Considere agora a trajetória 2 da Fig. 8-11a, uma reta que liga os pontos i e f . Para calcular o trabalho W executado por mg sobre a pedra ao longo desta trajetória, basta observar que o ângulo entre a força mg e o deslocamento d é $180^\circ - \phi$, onde o ângulo ϕ está indicado na figura. Assim, temos:

$$W = Fd \cos(180^\circ - \phi) = -Fd \cos \phi.$$

Como $d \cos \phi = h$, temos $W = -mgh$, o mesmo valor calculado para a trajetória 1.

Também é fácil mostrar que o trabalho realizado pela força mg sobre a pedra ao longo de uma trajetória totalmente arbitrária, como a trajetória X da Fig. 8-11b, também é igual a $-mgh$. Para isso, basta aproximar a trajetória X por uma série de degraus. Como o número de degraus é arbitrário, a trajetória pode estar tão próxima da trajetória X quanto quisermos. Se a partícula seguir os degraus ao se deslocar de i para f na Fig. 8-11b, a força mg não realizará nenhum trabalho nos segmentos horizontais da trajetória. A soma dos segmentos verticais é igual a h , de modo que o trabalho realizado por mg será novamente igual a $-mgh$.

8-5 Usando uma Curva de Energia Potencial

Suponha que uma partícula possa se mover apenas ao longo do eixo dos x . Podemos descobrir muita coisa a respeito do movimento da partícula a partir do gráfico da sua energia potencial $U(x)$ em função da posição (se esse gráfico for conhecido). Antes de discutirmos este gráfico, porém, vamos precisar de mais uma equação.

Cálculo da Força a Partir da Energia Potencial

A Eq. 8-7 pode ser usada para calcular a energia potencial $U(x)$ numa situação unidimensional a partir da força $F(x)$. Agora, porém, estamos interessados no cálculo inverso, isto é, queremos determinar a força a partir da energia potencial $U(x)$.

Para um movimento unidimensional, o trabalho W realizado por uma força que age sobre uma partícula enquanto ela sofre um deslocamento Δx é dado por $F(x) \Delta x$. Podemos portanto escrever a Eq. 8-5 na forma

$$\Delta U(x) = -W = -F(x) \Delta x.$$

Calculando o valor de $F(x)$ e tomando o limite quando Δx tende a zero, temos:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (\text{movimento unidimensional}) \quad (8-17)$$

Podemos verificar que este resultado está correto tomando $U(x) = kx^2/2$, que é a função energia potencial elástica de uma mola. Nesse caso, usando a Eq. 8-17, obtemos $F = -kx$, que é a lei de Hooke. Da mesma forma, se fizermos $U(x) = mgx$, que é a função energia potencial gravitacio-

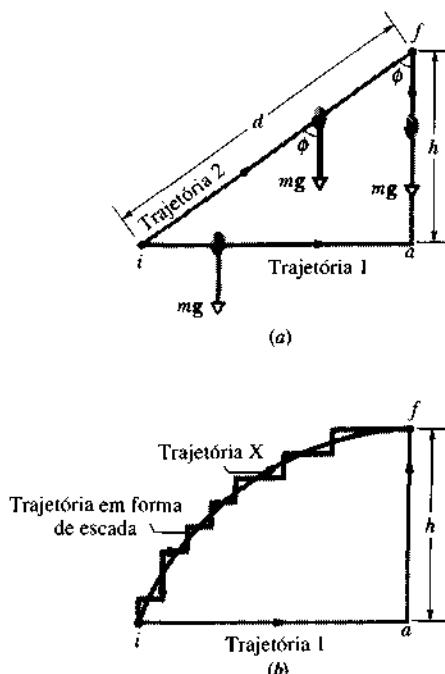


Fig. 8-11 (a) Uma pedra se move do ponto i para o ponto f . O trabalho executado sobre a pedra pelo seu peso mg é o mesmo para as trajetórias 1 e 2. (b) O trabalho também é o mesmo para a trajetória X e para a trajetória em forma de escada que acompanha aproximadamente a trajetória X. Na verdade, o trabalho é o mesmo para *qualquer* trajetória que ligue os pontos i e f .

nal para uma partícula de massa m a uma altura x da superfície da Terra, o resultado da aplicação da Eq. 8-17 será $F = -mg$, que é o peso da partícula.

O Gráfico da Função Energia Potencial

A Fig. 8-12a é um gráfico da função energia potencial $U(x)$ de uma partícula que se move ao longo do eixo dos x . De acordo com a Eq. 8-17, podemos calcular a força $F(x)$ que age sobre a partícula determinando (graficamente) a derivada de $U(x)$ em vários pontos do gráfico. A Fig. 8-12b é um gráfico de $F(x)$ calculada desta forma.

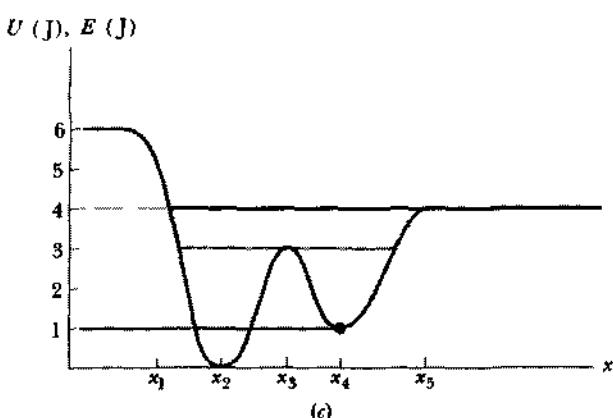
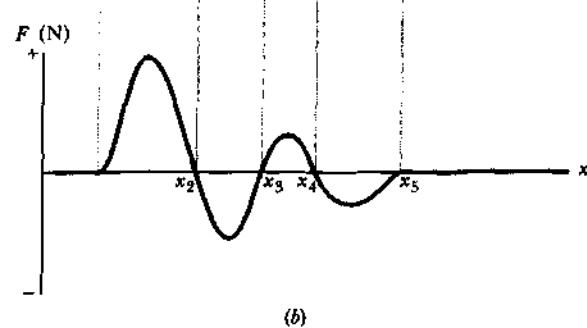
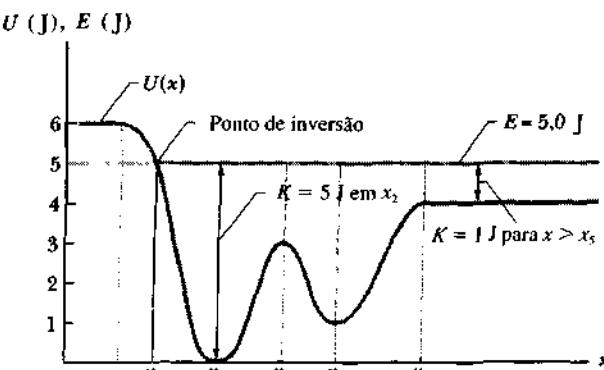


Fig. 8-12 (a) Gráfico de $U(x)$, a função energia potencial de uma partícula que se move ao longo do eixo dos x . Como não há atrito, a energia mecânica é conservada. (b) Gráfico da força $F(x)$ que age sobre a partícula, obtido calculando-se a derivada da função energia potencial em vários pontos da curva. (c) Gráfico da energia potencial $U(x)$, mostrando três valores possíveis de E .

Pontos de Retorno

Na ausência de forças de atrito, a energia mecânica E da partícula tem um valor constante, dado por

$$U(x) + K(x) = E \quad (8-18)$$

onde $K(x)$ é a função energia cinética da partícula (isto é, $K(x)$ expressa a energia cinética em função da posição da partícula, x). Podemos reescrever a Eq. 8-18 na forma

$$K(x) = E - U(x). \quad (8-19)$$

Suponha que E (um valor constante) seja igual a 5,0 J. Este valor pode ser representado na Fig. 8-12a por uma reta horizontal passando pelo valor 5,0 J do eixo vertical (eixo das energias). A Eq. 8-19 mostra como determinar a energia cinética K para qualquer posição x da partícula: basta determinar o valor de U correspondente ao valor dado de x e em seguida subtrair U de E . Assim, por exemplo, se a partícula estiver em qualquer ponto à direita de x_5 , $K = 1,0$ J. O valor de K é máximo (5,0 J) quando a partícula está em x_2 e mínimo (0 J) quando a partícula está em x_1 .

Como K não pode ser negativa (porque v^2 é sempre positiva), a partícula não pode entrar na região à esquerda de x_1 , onde a diferença $E - U$ é negativa. Quando a partícula se move na direção de x_1 a partir de x_2 , K diminui (a velocidade da partícula diminui) até que $K = 0$ em $x = x_1$ (a partícula pára). Observe que quando a partícula chega a x_1 , a força que age sobre ela, dada pela Eq. 8-17, é positiva. Isto significa que a partícula não fica parada em $x = x_1$, mas começa a se mover para a direita, no sentido oposto àquele em que estava se movendo anteriormente. Por isso, x_1 é chamado de **ponto de retorno**. Não existe nenhum ponto de retorno (nenhum ponto para o qual $K = 0$) do lado direito da curva. Assim, depois que a partícula começa a se mover no sentido positivo do eixo dos x , esse movimento prossegue indefinidamente.

Pontos de Equilíbrio

A Fig. 8-12c mostra outros três possíveis valores de E superpostos ao gráfico da função energia potencial $U(x)$. Vejamos como a mudança do valor de E afetaria o movimento da partícula. Se $E = 4,0$ J, o ponto de retorno se desloca de x_1 para um ponto situado entre x_1 e x_2 . Além disso, para qualquer ponto à direita de x_5 , a energia mecânica da partícula passa a ser igual à energia potencial; a energia cinética é zero e nenhuma força age sobre a partícula, de modo que deve permanecer parada. Num caso como este, dizemos que a partícula se encontra em **equilíbrio neutro**.* (Uma bola de gude sobre uma mesa horizontal está em equilíbrio neutro.)

*Este estado também é chamado de *equilíbrio indiferente*. (N. de R.)

Se $E = 3,0 \text{ J}$, existem dois pontos de retorno, um entre x_1 e x_2 e outro entre x_4 e x_5 . Além disso, x_3 é um ponto no qual $K = 0$. Se a partícula se encontra exatamente neste ponto, a força é zero e a partícula permanece parada. Entretanto, quando a partícula é deslocada ligeiramente em qualquer sentido, uma força faz com que continue se movendo no mesmo sentido, afastando-a do ponto x_3 . Em um caso como este, dizemos que a partícula se encontra em **equilíbrio instável**. (Uma bola de gude equilibrada sobre uma bola de boliche está em equilíbrio instável.)

Vejamos, finalmente, qual é o comportamento da partícula se $E = 1,0 \text{ J}$. Se colocarmos a partícula em x_4 , ela permanece indefinidamente no mesmo lugar; não pode se mover para a direita ou para a esquerda, porque, ao fazê-lo, fica com uma energia cinética negativa. Se a deslocarmos ligeiramente em qualquer sentido, uma força restauradora fará com que ela se desloque de volta para x_4 . Num caso como este, dizemos que a partícula se encontra em **equilíbrio estável**. (Uma bola de gude no fundo de uma tigela hemisférica está em equilíbrio estável.) Se colocarmos a partícula no *vale de potencial* que existe nas proximidades de x_2 , ela poderá se deslocar para a esquerda ou para a direita, mas sem jamais chegar a x_1 ou x_5 .

8-6 Conservação da Energia

Vamos supor que uma força de atrito dinâmico f esteja agindo sobre o bloco do sistema bloco-mola da Fig. 8-5. Esta força faz com que as oscilações diminuam gradualmente de amplitude até o bloco parar. A experiência demonstra que a diminuição de energia mecânica é acompanhada por um aumento da *energia térmica* do bloco e do piso em que ele está deslizando; ambos se aquecem durante o processo. A energia térmica é uma forma de energia interna, pois está associada aos movimentos aleatórios dos átomos e moléculas de um corpo. Vamos representar a variação de energia interna pelo símbolo ΔE_{int} .

Como ΔE_{int} é a variação da energia interna tanto do bloco como do piso em que está deslizando, só podemos calcular corretamente a transformação de energia mecânica em energia térmica se considerarmos um sistema que inclua o bloco, a mola e o piso. Se isolarmos o sistema bloco-mola-piso (de modo que nenhum corpo fora do sistema possa trocar energia com os corpos do sistema) a energia mecânica perdida pelo bloco e pela mola não será perdida pelo sistema mas transferida internamente nele, na forma de energia térmica.

Somos levados a postular que, para um sistema isolado,

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = 0. \quad (8-20)$$

Os valores de K , U e E_{int} podem mudar com o tempo para um ou mais corpos do sistema isolado, mas a sua soma para todos os corpos do sistema é invariável. Observe que a Eq. 8-20 é uma extensão da Eq. 8-3 (conservação da energia mecânica) que leva em conta a presença da energia térmica.

Acontece que em todas as situações reais (mesmo as que envolvem, por exemplo, fenômenos elétricos e magnéticos) sempre podemos identificar novas formas de energia como E_{int} , o que nos permite preservar, em uma forma mais geral, a lei de conservação da energia. Em outras palavras, sempre podemos escrever, para um sistema isolado,

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} + \left(\begin{array}{l} \text{variação de outras} \\ \text{formas de energia} \end{array} \right) = 0. \quad (8-21)$$

Esta forma generalizada da lei da conservação da energia pode ser expressa nos seguintes termos:

Num sistema isolado, a energia pode ser transformada de uma forma para outra, mas a energia total do sistema permanece constante.

A lei acima é uma generalização confirmada experimentalmente. Até hoje, nunca foi violada em nenhuma experiência ou observação da natureza.

Se alguma força externa ao sistema executa um trabalho W sobre corpos do sistema, o sistema não está isolado e a Eq. 8-20 não é aplicável. Nesse caso, devemos substituir a Eq. 8-20 por

$$W = \Delta K + \Delta U + \Delta E_{int}. \quad (8-22)$$

De acordo com a Eq. 8-22, quando um trabalho W é executado sobre um sistema por forças externas, a quantidade total de energia do sistema, incluindo todas as formas possíveis, aumenta de um valor igual a W . Se W é negativo, o que indica que é o sistema que realiza trabalho sobre corpos externos, a quantidade total de energia do sistema diminui de um valor igual a $|W|$.

Embora às vezes seja conveniente considerar um sistema que não esteja isolado dos corpos vizinhos, nunca somos forçados a fazê-lo. Podemos sempre ampliar o sistema de modo a incluir os elementos externos que trocam energia com o antigo sistema. Desta forma, o novo sistema passa a ser um sistema isolado e podemos aplicar a Eq. 8-20. As forças envolvidas continuam a agir, mas afetam apenas corpos pertencentes ao sistema ampliado; o trabalho que realizam é interno ao sistema e portanto não deve ser incluído no W da Eq. 8-22, que se refere apenas ao trabalho executado por forças externas sobre corpos do sistema ou por forças do sistema sobre corpos externos.

A Fig. 8-13 mostra um exemplo de conservação de energia. Quando uma alpinista sobe uma encosta, como na Fig. 8-13a, a energia bioquímica dos seus músculos (uma forma de energia interna) é convertida em energia potencial gravitacional. A Fig. 8-13b mostra uma alpinista descendo com velocidade aproximadamente constante, escorregando por uma corda que passa por um freio de metal. A energia potencial gravitacional que perde durante a descida é convertida em energia térmica das cordas e dos freios. Eles se aquecem. (O objetivo do freio é evitar que a energia potencial gravitacional se transforme em energia cinética da alpinista!)



Fig. 8-13 (Esquerda) Subindo! A energia bioquímica dos músculos é transformada em energia potencial gravitacional. (*Direita*) Descendo! A energia potencial gravitacional é transformada em energia térmica das cordas e dos freios. Eles se aquecem.

Várias vezes, na história da física, foram observadas aparentes violações da lei da conservação de energia. Essas violações aparentes sempre serviram de estímulo para que os cientistas buscassem suas causas. Até agora, as causas sempre foram descobertas e a lei da conservação da energia tem se mantido válida. Como teremos oportunidade de ver em outros capítulos, a conservação da energia é uma das grandes idéias unificadoras da física.

Potência

Agora que vimos que a energia pode ser convertida de uma forma para outra e sabemos que existem muitas formas diferentes de energia, algumas das quais serão tratadas em outros capítulos deste livro, podemos ampliar a definição de potência apresentada na Seção 7-6, em que afirmamos que potência era uma medida da rapidez com que um trabalho é executado. De uma forma mais geral, potência é uma medida da rapidez com que a energia é transformada de uma forma para outra.

Por exemplo: quando a alpinista da Fig. 8-13a está subindo, a potência média desenvolvida por ela é a taxa média em que converte energia bioquímica em energia potencial gravitacional e em sua própria energia térmica. A potência instantânea é a taxa em que a conversão ocorre num dado instante.

8-7 Trabalho Executado por Forças de Atrito

Considere um bloco de massa m escorregando num piso horizontal e sujeito a uma força de atrito dinâmico constante f (não-conservativa) e a uma força constante \mathbf{F} (conservativa). Para simplificar o problema, vamos supor que as duas forças tenham a mesma direção e sentido e que o movimento do bloco tenha o sentido oposto (considerado como o sentido positivo). Vamos tomar o bloco e a força conservativa (e não o conjunto bloco-piso) como o nosso sistema. O nosso sistema *não é* um sistema isolado porque a força f é exercida por um corpo (o piso) externo ao sistema.

Vamos agora aplicar ao bloco a segunda lei de Newton. Até agora, só aplicamos essa lei a partículas. Entretanto, se supusermos que todos os pontos do bloco se movem da mesma forma, poderemos aplicar a lei ao bloco como se ele fosse uma única partícula. Assim, para a direção de movimento do bloco, podemos escrever:

$$\sum F = -F - f = ma. \quad (8-23)$$

Como as forças são constantes, a desaceleração a do bloco também é constante. Assim, podemos usar a Eq. 2-14 para relacionar a à velocidade inicial v_i e à velocidade final v_f

do bloco quando ele percorre uma distância d no piso horizontal:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2ad$$

ou

$$a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2d}. \quad (8-24)$$

Substituindo o valor de a dado pela Eq. 8-24 na Eq. 8-23, temos:

$$-Fd - fd = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \Delta K, \quad (8-25)$$

onde ΔK é a variação de energia cinética do bloco. A quantidade $-Fd$ é o trabalho realizado pela força conservativa. De acordo com a Eq. 8-6, podemos substituir $-Fd$ por $-\Delta U$, onde ΔU é a variação de energia potencial do sistema. Nesse caso, a Eq. 8-25 assume a forma

$$-fd = \Delta K + \Delta U + \Delta E \quad (8-26)$$

A Eq. 8-26 pode ser interpretada da seguinte forma:

O produto $-fd$, onde f é a força de atrito dinâmico, é igual à variação ΔE da energia mecânica do sistema.

O produto $-fd$ é negativo porque a força de atrito tem o sentido oposto ao do deslocamento. Assim, ΔE é negativo, ou seja, a energia mecânica do sistema diminui em consequência do atrito.

O lado esquerdo da Eq. 8-26 poderia ser erroneamente interpretado como o trabalho realizado sobre o bloco pela força de atrito. O fato de que isso não é verdade tem a ver com a natureza complexa da força de atrito dinâmico. Como discutimos na Seção 6-1, f é a média de um grande número de forças complexas que agem nos pontos de contato entre o bloco e o piso. O trabalho total realizado por todas essas forças *não é igual a* $-fd$.

Para compreendermos melhor a natureza do trabalho realizado por forças de atrito, vamos aplicar as Eqs. 8-22 e 8-26 a um bloco que desliza num piso horizontal até que a força de atrito dinâmico exercida sobre ele pelo piso o faça parar. (Nossa sistema é constituído apenas pelo bloco.) Podemos tomar $\Delta U = 0$ nas duas equações, porque não há variações de energia potencial envolvidas no processo. Substituindo na Eq. 8-22 W por W_f , o trabalho realizado pela força de atrito, temos:

$$W_f = \Delta K + \Delta E_{int}, \quad (8-27)$$

onde ΔE_{int} é a variação da energia interna *apenas do bloco*. A Eq. 8-26 se torna:

$$-fd = \Delta K. \quad (8-28)$$

Comparando as Eqs. 8-27 e 8-28, podemos ver que, como já foi dito, $-fd$ não é igual a W_f , o trabalho realizado pela força de atrito. Na verdade, fd é a perda de energia mecânica (a energia que é dissipada pela força de atrito) e W_f é a parte dessa energia que deixa o sistema (transformando-se em energia interna do piso). A parte que não deixa o sistema é transformada em energia interna do bloco.

Suponhamos, por exemplo, que o bloco tenha uma energia cinética inicial de 100 J e que a ação da força de atrito resulte em aumento de 40 J na energia interna do bloco. Nesse caso, a energia dissipada pela força de atrito será igual a -100 J; de acordo com a Eq. 8-27, o trabalho realizado por essa força será igual a -60 J. Em outras palavras, 60 J de energia serão transferidos do bloco para o piso.

A Eq. 8-27 também mostra que o teorema do trabalho-energia cinética (segundo o qual deveríamos ter $W_f = \Delta K$) não se aplica ao bloco do problema. Isso acontece porque o teorema do trabalho-energia cinética se baseia na hipótese de que o sistema se comporta como uma única partícula. Entretanto, *do ponto de vista das transformações de energia*, não podemos tratar o bloco do problema como uma partícula porque ela não tem estrutura interna e portanto não pode possuir energia interna.

O leitor poderia objetar observando que tratamos o bloco como uma partícula, porque usamos a segunda lei de Newton para deduzir a Eq. 8-26. Naquela ocasião, porém, tudo que supusemos foi que todos os pontos do bloco se moviam da mesma forma; não havia nenhuma transformação de energia envolvida. Na física é relativamente comum tratar um corpo como partícula em algumas situações mas não em outras.

EXEMPLO 8-6 Na Fig. 8-14, um cachorro de circo, de massa 6,0 kg, chega à extremidade esquerda de uma rampa irregular, que está a uma altura $y_0 = 8,50$ m do chão, com uma velocidade $v_0 = 7,8$ m/s. O ca-

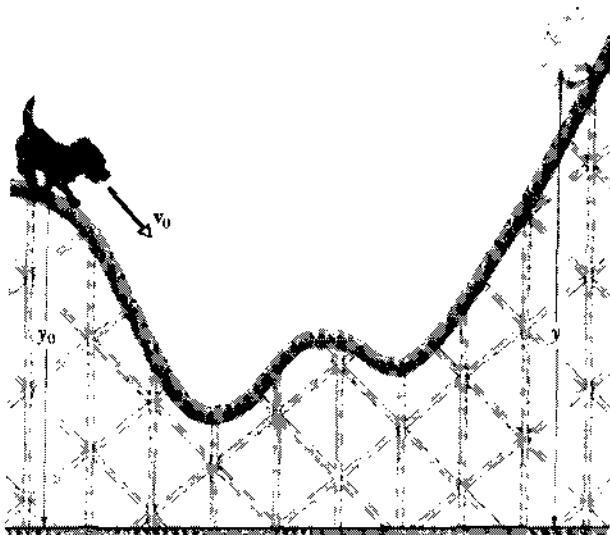


Fig. 8-14 Exemplo 8-6. Um cachorro de circo escorrega por uma rampa, começando com velocidade v_0 a uma altura y_0 e parando numa altura y .

chorro escorrega para a direita e pára quando atinge uma altura $y = 11,1$ m acima do chão. Qual o aumento da energia térmica do cachorro e da rampa durante o processo?

Solução O sistema isolado a que a Eq. 8-20 se aplica é o sistema cachorro-Terra-rampa, porque, uma vez que o cachorro comece a escorregar, as únicas forças que agem sobre ele são o seu peso mg (devido à Terra) e as forças (força de atrito e força normal) exercidas pela rampa. Como a força normal é sempre perpendicular à direção de movimento do cachorro, não realiza nenhum trabalho sobre ele e portanto não modifica a energia do sistema cachorro-Terra-rampa. Por outro lado, a força de atrito realiza trabalho sobre o cachorro, dissipando energia mecânica e aumentando a energia térmica dele e da rampa de uma quantidade ΔE_{int} .

No ponto em que o cachorro pára, sua energia cinética é zero. Aplicando a Eq. 8-20 ao sistema cachorro-Terra-rampa, temos:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = 0,$$

ou

$$(0 - \frac{1}{2}mv_0^2) + mg(y - y_0) + \Delta E_{int} = 0.$$

Calculando o valor de ΔE_{int} , temos:

$$\Delta E_{int} = \frac{1}{2}mv_0^2 - mg(y - y_0),$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{int} &= \frac{1}{2}(6,0 \text{ kg})(7,8 \text{ m/s})^2 \\ &\quad - (6,0 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(11,1 \text{ m} - 8,5 \text{ m}) \\ &\approx 30 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

EXEMPLO 8-7 Uma bala de aço de massa $m = 5,2 \text{ g}$ é disparada verticalmente para baixo de uma altura $h_1 = 18 \text{ m}$ com uma velocidade inicial $v_0 = 14 \text{ m/s}$ (Fig. 8-15a). A bala penetra no solo arenoso até uma profundidade $h_2 = 21 \text{ cm}$.

a. Qual a variação da energia mecânica da bala?

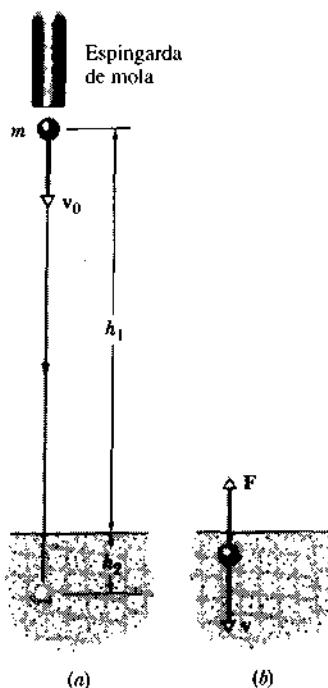


Fig. 8-15 Exemplo 8-7. (a) Uma bala é disparada para baixo e penetra no solo arenoso. A energia mecânica é conservada no trecho h , do percurso mas não no trecho h_2 , em que uma força (não-conservativa) de atrito age sobre a bala. (b) Detalhe da ação da força F sobre a bala.

Solução Quando a bala chega à profundidade h_2 , sua energia cinética é zero. A variação de energia mecânica é dada por

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U, \quad (8-29)$$

ou

$$\Delta E = (0 - \frac{1}{2}mv_0^2) - mg(h_1 + h_2),$$

onde $-(h_1 + h_2)$ é o deslocamento total da bala (o sinal é negativo porque o deslocamento é para baixo). Substituindo os parâmetros por seus valores numéricos, temos:

$$\begin{aligned} \Delta E &= -\frac{1}{2}(5,2 \times 10^{-3} \text{ kg})(14 \text{ m/s})^2 \\ &\quad -(5,2 \times 10^{-3} \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(18 \text{ m} + 0,21 \text{ m}) \\ &= -1,437 \text{ J} \approx -1,4 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual a variação da energia interna do sistema bala-Terra-areia?

Solução Este sistema é isolado porque, depois que a bala é disparada, as únicas forças que agem sobre ela são o seu peso mg (devido à Terra) e a força de atrito F exercida pela areia (Fig. 8-15b). Substituindo a Eq. 8-29 na Eq. 8-20, descobrimos que, para o sistema bala-Terra-areia,

$$\Delta E + \Delta E_{int} = 0,$$

ou

$$\Delta E_{int} = -\Delta E = -(-1,437 \text{ J}) \approx 1,4 \text{ J}. \quad (\text{Resposta})$$

Assim, quando a bala penetra no solo, toda a sua energia mecânica é dissipada, transformando-se em energia interna (principalmente térmica) da bala e da areia.

c. Qual o módulo da força média F exercida pela areia sobre a bala?

Solução A energia mecânica da bala é conservada até que ela se choque com o solo. Em seguida, durante o percurso h_2 , sua energia mecânica é convertida em energia interna. Assim, a Eq. 8-26 ($-fd = \Delta E$) pode ser reescrita como:

$$-Fh_2 = \Delta E.$$

Calculando o valor de F , temos:

$$F = \frac{\Delta E}{-h_2} = \frac{-1,437 \text{ J}}{-0,21 \text{ m}} = 6,84 \text{ N} \approx 6,8 \text{ N}. \quad (\text{Resposta})$$

Poderíamos também calcular F usando as técnicas do Cap. 2 para determinar a velocidade da bala no momento em que atinge o solo e sua desaceleração no trecho h_2 . O valor de F poderia então ser calculado com o auxílio da segunda lei de Newton. É evidente, porém, que o número de passos seria maior do que na solução acima.

8-8 Massa e Energia (Opcional)

A ciência da química foi desenvolvida com base na suposição de que, nas reações químicas, a energia e a massa são conservadas separadamente.* Em 1905, Einstein demons-

*Nesta seção, a palavra *massa* e o símbolo m se referem à massa de um objeto da forma como é normalmente medida, isto é, com o objeto em repouso. No Cap. 42 discutiremos com maior profundidade a relação entre massa e energia na teoria da relatividade restrita de Einstein.

trou que, como consequência da teoria da relatividade restrita, a massa pode ser considerada como uma forma de energia. Assim, a lei da conservação de energia é na realidade a lei de conservação de massa e energia.

Nas reações químicas, a quantidade de massa que se transforma em outras formas de energia (ou vice-versa) é uma fração tão pequena da massa total envolvida que se torna impossível medir a variação de massa, mesmo na mais sensível das balanças. Assim, parece que a massa e a energia são conservadas separadamente. Nas reações nucleares, por outro lado, as variações de massa são da ordem de um milhão de vezes maiores do que nas reações químicas, e as variações de massa podem ser medidas com facilidade. Para os físicos nucleares, as transformações de massa em energia e vice-versa constituem um fenômeno trivial, que deve ser levado em conta na maioria dos cálculos.

A relação entre massa e energia é expressa pela que é, sem dúvida, a mais famosa das equações da física (veja a Fig. 8-16):

$$E = mc^2 \quad (8-30)$$

onde E é o equivalente em energia da massa m e c é a velocidade da luz. A Tabela 8-1 mostra a equivalência entre massa e energia para alguns objetos.

Os objetos comuns contêm quantidades enormes de energia. A energia equivalente à massa de uma moeda, por exemplo, custaria mais de um milhão de dólares se fosse comprada na forma de energia elétrica. A relação inversa também conduz a resultados espantosos. Toda a produção



Fig. 8-16 Os alunos da Shenandoah Junior High School, em Miami, Flórida, homenageiam Einstein no 100.º aniversário do seu nascimento escrevendo a famosa fórmula com seus corpos. Cortesia de Rocky Raisen, professor de física.

Tabela 8-1
Energias Equivalentes para Alguns Objetos

Objeto	Massa (kg)	Energia Equivalente
Elétron	$9,1 \times 10^{-31}$	$8,2 \times 10^{-14} \text{ J} (= 511 \text{ keV})$
Próton	$1,7 \times 10^{-27}$	$1,5 \times 10^{-10} \text{ J} (= 938 \text{ MeV})$
Átomo de urânio	$4,0 \times 10^{-25}$	$3,6 \times 10^{-8} \text{ J} (= 225 \text{ GeV})$
Partícula de poeira	1×10^{-13}	$1 \times 10^{-4} \text{ J} (= 2 \text{ kcal})$
Moeda	$3,1 \times 10^{-3}$	$2,8 \times 10^{14} \text{ J} (= 78 \text{ GW}\cdot\text{h})$

anual de energia elétrica dos Estados Unidos, por exemplo, corresponde a uma massa de apenas algumas centenas de quilogramas de matéria (pedras, batatas, livros, qualquer coisa!).

Para aplicar a Eq. 8-30 a reações químicas ou nucleares entre partículas, podemos escrevê-la na forma

$$Q = \Delta mc^2 \quad (8-31)$$

onde Q (chamado simplesmente de *Q da reação*) é a energia liberada ou absorvida na reação e Δm é o correspondente aumento ou diminuição da massa total das partículas que participam da reação. Nas reações de fissão nuclear, menos de 0,1% da massa inicialmente presente se transforma em outras formas de energia. Nas reações químicas, essa porcentagem é um milhão de vezes menor. Em termos de extração de energia da matéria, ainda estamos engatinhando.

Na prática, raramente se usam unidades do sistema SI quando se trabalha com a Eq. 8-31, porque são grandes demais. A unidade mais comum de massa é a unidade de massa atômica (representada pela letra u ; veja a Seção 1-6), definida através da relação

$$1 \text{ u} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}, \quad (8-32)$$

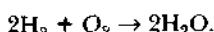
A unidade mais comum de energia é o elétron-volt, já definido na Eq. 7-6:

$$1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}. \quad (8-33)$$

Nas unidades das Eqs. 8-32 e 8-33, a constante c^2 tem os valores

$$\begin{aligned} c^2 &= 9,32 \times 10^8 \text{ eV/u} = 9,32 \times 10^5 \text{ keV/u} \\ &= 932 \text{ MeV/u}. \end{aligned} \quad (8-34)$$

EXEMPLO 8-8 Suponha que 1,0 mol de oxigênio (diatômico) interage com 2,0 mol de hidrogênio (diatômico) para formar 2,0 mol de vapor d'água, através da reação



A energia Q liberada é de $4,85 \times 10^5 \text{ J}$. Que fração da massa dos reagentes desaparece para gerar esta energia?

Solução De acordo com a Eq. 8-31, a redução de massa necessária para produzir a energia liberada é dada por

$$\Delta m = \frac{-Q}{c^2} = \frac{-4,85 \times 10^5 \text{ J}}{(3,00 \times 10^8 \text{ m/s})^2} = -5,39 \times 10^{-12} \text{ kg.}$$

A massa M dos reagentes é igual a duas vezes a massa molar (massa de 1 mol) de H_2 mais a massa molar de O_2 . De acordo com o Apêndice D, temos:

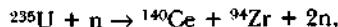
$$M = 2(2,02 \text{ g}) + 32,0 \text{ g} = 36,0 \text{ g} = 0,036 \text{ kg.}$$

A fração desejada é, portanto,

$$\frac{|\Delta m|}{M} = \frac{5,39 \times 10^{-12} \text{ kg}}{0,036 \text{ kg}} = 1,5 \times 10^{-10}. \quad (\text{Resposta})$$

Essa perda fracionária de massa, típica das reações químicas, é tão pequena que não pode ser medida nem com uma balança de precisão, mas a energia equivalente ($4,85 \times 10^5 \text{ J}$ por mol de O_2) pode facilmente ser detectada.

EXEMPLO 8-9 Uma reação de fissão nuclear típica é



onde n representa um nêutron. As massas envolvidas são as seguintes:

$$\text{massa} (^{235}\text{U}) = 235,04 \text{ u} \quad \text{massa} (^{94}\text{Zr}) = 93,91 \text{ u}$$

$$\text{massa} (^{140}\text{Ce}) = 139,91 \text{ u} \quad \text{massa} (n) = 1,00867 \text{ u}$$

a. Qual a variação percentual de massa associada à reação?

Solução Para calcular a variação de massa Δm , subtraímos a massa dos reagentes da massa dos produtos:

$$\begin{aligned} \Delta m &= (139,91 + 93,91 + 2 \times 1,00867) \\ &\quad - (235,04 + 1,00867) \\ &= -0,211 \text{ u.} \end{aligned}$$

A massa total dos reagentes é dada por:

$$M = 235,04 + 1,00867 = 236,05 \text{ u.}$$

portanto a variação percentual da massa é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta m|}{M} &= \frac{0,211 \text{ u}}{236,05 \text{ u}} \\ &= 0,00089, \text{ ou cerca de } 0,1\%. \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

Embora essa variação seja pequena, pode ser medida com facilidade e é muito maior do que a variação obtida no Exemplo 8-8.

b. Qual a quantidade de energia liberada durante a reação?

Solução De acordo com a Eq. 8-31, temos:

$$Q = -\Delta mc^2 = (-0,211 \text{ u})(932 \text{ MeV/u}) = 197 \text{ MeV}, \quad (\text{Resposta})$$

onde foi usado o valor de c^2 em MeV/u que aparece na Eq. 8-34. A energia liberada, 197 MeV, é muito maior do que a energia liberada numa reação química típica, que é da ordem de alguns elétrons-volts.

EXEMPLO 8-10 O núcleo do átomo de deutério (hidrogênio pesado) é chamado de **dêuteron**. Ele é composto de um próton e um nêutron. Qual a energia envolvida na separação de um ônico em suas parti-

culas constituintes? Essa energia é liberada ou absorvida durante a reação?

Solução As massas envolvidas são as seguintes:

$$\text{dêuteron: } m_d = 2,01355 \text{ u}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{próton: } m_p = 1,00728 \text{ u} \\ \text{nêutron: } m_n = 1,00867 \text{ u} \end{array} \right\} 2,01595 \text{ u}$$

Como a soma das massas do próton e do nêutron é maior do que a massa do ônico, é preciso fornecer energia ao ônico para que a reação ocorra. O aumento de massa resultante é dado por

$$\begin{aligned} \Delta m &= (m_p + m_n) - m_d \\ &= (1,00728 + 1,00867) - (2,01355) = 0,00240 \text{ u.} \end{aligned}$$

De acordo com a Eq. 8-31, a energia correspondente é dada por

$$\begin{aligned} Q &= -\Delta mc^2 = -(0,00240 \text{ u})(932 \text{ MeV/u}) \\ &= -2,24 \text{ MeV.} \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

A energia Q acima é chamada de **energia de ligação** do ônico. Para fazermos uma comparação, a energia necessária para arrancar o elétron de um átomo de hidrogênio é de apenas 13,6 eV, ou seja, cerca de 6×10^{-6} vezes menor.

8-9 Quantização da Energia (Opcional)

Quando agitamos a mão no ar, ele nos parece perfeitamente contínuo. Entretanto, sabemos que, numa escala fina, o ar não é um meio contínuo, mas um meio “granular”, composto de vários tipos de partículas, das quais as mais numerosas são as moléculas de nitrogênio e oxigênio. Por isso, dizemos que a massa do ar é **quantizada**. Quando estudamos os mundos atômico e subatômico, que ficam fora da nossa realidade “imediata”, descobrimos que muitas outras grandezas físicas são quantizadas, isto é, só podem assumir certos valores bem definidos (discretos). A energia é uma dessas grandezas.

Todos concordaríamos ao dizer que a energia de um pêndulo pode assumir qualquer valor dentro de um certo intervalo, dependendo do impulso que dermos à massa. No mundo atômico, porém, os fatos são diferentes. Um átomo só pode existir em certos estados característicos, os chamados **estados quânticos**, cada um está associado a um valor de energia.

A Fig. 8-17 mostra os valores permitidos de energia (ou *níveis de energia*) de um átomo isolado de sódio. Cada valor corresponde a um diferente estado quântico. O nível mais baixo, chamado E_0 na Fig. 8-17, ao qual em geral é atribuído arbitrariamente o valor zero de energia, é o **estado fundamental** do átomo de sódio. Um átomo isolado de sódio normalmente é encontrado no estado fundamental, da mesma forma como uma bola de gude no interior de uma tigela normalmente é encontrada no fundo da tigela. Para passar para um dos outros estados, que são chamados de **estados excitados**, o átomo de sódio deve receber energia de alguma fonte externa, talvez colidindo com elétrons numa lâmpada de vapor de sódio. Quando volta ao estado fundamental, o átomo deve diminuir sua energia, possivelmente emitindo luz.

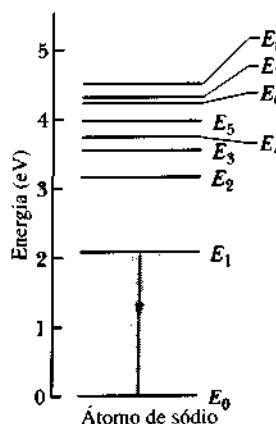


Fig. 8-17 O diagrama acima mostra alguns dos níveis de energia de um átomo de sódio, que correspondem aos estados quânticos que o átomo pode ocupar. O estado de menor energia, indicado pelo símbolo E_0 , é chamado de estado fundamental. O átomo emite a luz amarela característica do sódio quando passa do estado de energia E_1 para o estado fundamental, como está indicado na figura pela seta vertical. O átomo não pode ter uma energia que se encontre entre estes dois valores ou entre quaisquer dois valores consecutivos mostrados aqui.

Na verdade, a energia de *qualquer* objeto formado por átomos (incluindo o pêndulo) é quantizada. Entretanto, no caso de objetos macroscópicos, os valores permitidos de energia estão tão próximos que não podem ser observados separadamente e parecem formar um contínuo. Nesse caso, podemos ignorar totalmente a quantização.

Quantização e a Emissão de Luz

Vejamos agora como os conceitos de quantização e de conservação da energia podem explicar de forma elegante a emissão de luz por átomos isolados. Considere a luz amarela emitida por átomos de sódio, que pode ser facilmente observada jogando-se sal de cozinha (cloreto de sódio) numa chama. Essa cor é emitida quando os átomos de sódio passam do estado excitado de energia E_x , da Fig. 8-17 para o estado fundamental de energia E_0 ; a transição está indicada por uma seta na figura. De acordo com a **teoria ondulatória da luz**, a cada cor corresponde uma certa frequência f . (A **frequência** de uma onda é o número de ve-

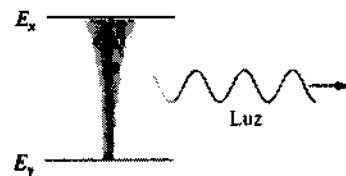


Fig. 8-18 Um átomo pode passar de um estado excitado para um estado de menor energia emitindo luz.

zes por segundo que a onda oscila ao passar por um dado ponto; a unidade de f é o hertz, que corresponde a um ciclo por segundo.)

Em geral, ondas como a luz são emitidas pelos átomos sempre que eles passam de um estado de energia E_x para outro estado de energia menor E_y , como mostra a Fig. 8-18. No caso da emissão de luz, a lei da conservação da energia assume a forma

$$E_x - E_y = hf \quad (8-35)$$

onde h é uma constante e f é a frequência da luz emitida. Esta equação, proposta pelo físico dinamarquês Niels Bohr, nos diz que $E_x - E_y$, a energia perdida pelo átomo, é igual à energia da luz emitida. A Eq. 8-35 se aplica à emissão (e também à absorção) de todos os tipos de ondas eletromagnéticas, não só as emitidas pelos átomos, mas também as emitidas por núcleos, moléculas e sólidos aquecidos.

A constante h que aparece na Eq. 8-35 é chamada de **constante de Planck** e tem o valor

$$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (\text{constante de Planck}) \quad (8-36)$$

$$= 4.14 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$$

A constante de Planck, assim denominada em homenagem ao físico alemão Max Planck, que a introduziu em 1900, é a constante mais importante da física quântica. Ela aparece em quase todas as equações que envolvem fenômenos quânticos, assim como a velocidade da luz c aparece em quase todas as equações que envolvem fenômenos relativísticos. Vamos tornar a encontrá-la em outros capítulos deste livro.

RESUMO

Energia

Energia é uma propriedade associada ao estado de um ou mais corpos. A **energia cinética** K está associada ao estado de **movimento** de um corpo. A **energia térmica** está associada aos movimentos aleatórios dos átomos e moléculas de um corpo. A **energia potencial** está associada à configuração de um ou mais corpos. Dois tipos importantes de energia potencial são a **energia potencial gravitacional**, associada ao estado de separação entre corpos que se atraem através da força gravitacional, e a **energia potencial elástica**, associada ao estado de compressão ou distensão de um objeto elástico (cujas propriedades são semelhantes às de uma mola).

Energia Mecânica

A **energia mecânica** E de um sistema é a soma da energia cinética K e da energia potencial U . Se as únicas forças presentes são a força gravitacional e a força elástica, o valor de E permanece constante mesmo que a energia cinética e a energia potencial variem com o tempo. Esta **lei da conservação de energia mecânica** pode ser escrita na forma

$$E = U_1 + K_1 = U_2 + K_2 = \text{constante}, \quad (8-2)$$

onde os índices foram usados para designar diferentes instantes de tempo. A Eq. 8-2 também pode ser escrita na forma

$$\Delta K + \Delta U = 0. \quad (8-3)$$

Quando forças de atrito dinâmico estão presentes, a energia mecânica E não permanece constante, mas diminui com o tempo. Por isso, dizemos que as forças de atrito **dissipam** energia mecânica; a energia dissipada se transforma em **energia interna**. A forma principal de energia interna é a energia térmica.

Energia Potencial Elástica

Para uma mola que obedece à lei de Hooke, $F = -kx$, a **energia potencial elástica** da mola é dada por

$$U = \frac{1}{2}kx^2. \quad (8-8)$$

Energia Potencial Gravitacional

Quando um objeto situado nas proximidades da superfície da Terra se move em relação à Terra, a variação da **energia potencial gravitacional** do sistema objeto-Terra é dada por

$$\Delta U = mg \Delta y,$$

onde Δy é a variação da distância entre o objeto e a superfície da Terra. Em geral, tomamos U como zero em $y = 0$ e dizemos que a energia potencial do objeto é dada por

$$U = mgy. \quad (8-10)$$

Forças Conservativas e Não-conservativas

Dizemos que uma força é **conservativa** quando o trabalho que realiza numa partícula que percorre um circuito fechado é zero; caso contrário, dizemos que a força é **não-conservativa**. Também podemos dizer que uma força é conservativa quando o trabalho que realiza sobre uma partícula que se move de um ponto a outro é a mesma para todas as trajetórias possíveis entre os dois pontos; caso contrário, dizemos que a força é não-conservativa. As duas definições são equivalentes.

Curvas de Energia Potencial

Se a função **energia potencial** $U(x)$ de uma partícula é conhecida, a força responsável pelas variações de $U(x)$ pode ser calculada com o auxílio da equação

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}. \quad (8-17)$$

Se a função $U(x)$ é fornecida em forma de gráfico, a força F , para qualquer valor de x , pode ser determinada tomando-se o negativo da inclinação da tangente à curva no ponto correspondente a esse valor de x .

O comportamento de uma partícula que se move ao longo do eixo dos x pode ser conhecido a partir de um gráfico de $U(x)$. A energia cinética da partícula num ponto x qualquer é dada por

$$K(x) = E - U(x), \quad (8-19)$$

onde E é a energia mecânica da partícula. Os pontos onde o movimento muda de sentido são chamados de **pontos de retorno**; nesses pontos, $K = 0$. Nos pontos onde a tangente à curva $U(x)$ é paralela ao eixo dos x , dizemos que a partícula se encontra em **equilíbrio**.

Lei da Conservação de Energia

Nos sistemas isolados, a energia pode ser transformada de uma forma para outra, mas a energia total permanece constante. Esta lei de conservação pode ser expressa da seguinte forma:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} + \left(\begin{array}{l} \text{variação de outras} \\ \text{formas de energia} \end{array} \right) = 0, \quad (8-21)$$

onde ΔE_{int} é a variação da energia interna dos corpos presentes no sistema.

Trabalho Realizado sobre um Sistema

Se alguma força externa ao sistema executa um trabalho W sobre corpos do sistema, o sistema não está isolado e a sua energia total não permanece constante. A variação de energia está relacionada ao trabalho através da equação

$$W = \Delta K + \Delta U + \Delta E_{int}. \quad (8-22)$$

Massa e Energia

A energia equivalente à massa de um objeto pode ser calculada através da equação

$$E = mc^2. \quad (8-30)$$

onde m é a **massa** do objeto e c é a **velocidade da luz**.

Quantização da Energia

A energia de sistemas de pequenas dimensões, como os átomos, é quantizada, isto é, pode assumir apenas certos valores. Quando um sistema passa de um estado de energia E_i para um estado de menor energia, E_f , a energia em excesso é liberada, muitas vezes sob a forma de radiação eletromagnética como a luz. A radiação emitida tem uma freqüência f dada por

$$E_i - E_f = hf, \quad (8-35)$$

onde h é a constante de Planck:

$$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 4,14 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}. \quad (8-36)$$

QUESTIONÁRIO

- Um automóvel está viajando numa rodovia. O motorista pisa no freio com força e o carro desliza até parar, o que reduz sua energia cinética a zero. Que tipo de energia aumenta em consequência da freada?
- Na Questão 1, suponha que o motorista pisa suavemente no freio, de modo que não há escorregamento entre o pneu e a estrada. Nesse caso, que tipo de energia aumenta?
- Você deixa cair um objeto e observa que ele quica no chão e chega à metade da altura inicial. Que conclusões pode tirar desse fato? Que conclusões tiraria se o objeto chegasse a 1,5 vez a altura inicial?
- Quando um elevador desce do último andar de um edifício e pára no andar térreo, o que acontece com a energia potencial que possuía no início do trajeto?
- Por que nas regiões montanhosas as estradas raramente sobem as encostas pelo caminho mais curto?
- Os sacos de ar reduzem consideravelmente a probabilidade de que os ocupantes de um veículo sofram ferimentos graves em caso de colisão. Explique por que isso acontece, em termos de transferência de energia.
- Você observa um pássaro em vôo e chega à conclusão de que ele possui uma certa quantidade de energia cinética. Entretanto, outro pássaro, que

está voando ao lado do primeiro e conhece um pouco de física, declara que a energia cinética do vizinho é zero. Quem está certo, você ou o segundo pássaro? Como a lei de conservação de energia se aplica a esta situação?

8. Um terremoto pode liberar energia suficiente para destruir uma cidade. Onde está “armazenada” essa energia antes de começar o terremoto?

9. A Fig. 8-19 mostra um tubo de vidro circular que está pendurado numa parede vertical. O tubo está cheio d’água, exceto por uma bolha de ar que se encontra temporariamente em repouso na parte inferior do tubo. Discuta o movimento subsequente da bolha em termos de transferência de energia, primeiro desprezando as forças que se opõem ao movimento da bolha e depois levando-as em consideração.

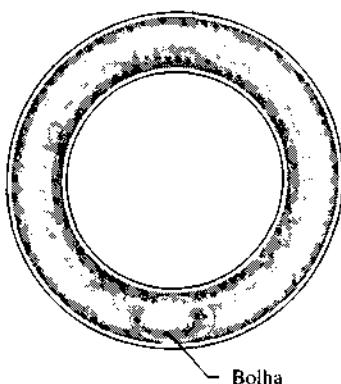


Fig. 8-19 Questão 9.

10. Cite alguns exemplos práticos de equilíbrio instável, neutro e estável.

11. No artigo “Energia e o Automóvel”, publicado no número de outubro de 1980 da revista *The Physics Teacher*, o autor Gene Waring afirma o seguinte: “É interessante observar que *toda* a energia do combustível acaba se transformando em energia térmica, que se espalha ao longo do percurso seguido pelo automóvel.” Analise os vários mecanismos que poderiam ser responsáveis por este fenômeno. Considere, por exemplo, o atrito com a estrada, a resistência do ar, os freios, o rádio do carro, os faróis, a bateria, as perdas no motor e no sistema de tração, a buzineta e assim por diante. Suponha que a estrada é reta e plana.

12. Determine a relação entre o Sol e as fontes de energia que você conhece. Existe alguma fonte de energia cuja origem não possa ser atribuída ao Sol?

13. Explique, usando as idéias de trabalho e energia, como você pode fazer um balanço subir mais alto sem recorrer a um impulso externo. Se o balanço se encontra inicialmente em repouso, é possível colocá-lo em movimento sem recorrer a um impulso externo?

14. Dois discos estão ligados por uma mola (Fig. 8-20). É possível comprimir o disco superior de tal forma que, ao ser liberado, ele suba o suficiente para que o disco inferior deixe a mesa em que está apoiado? A energia mecânica pode ser conservada num caso como esse?



Fig. 8-20 Questão 14.

15. Discuta a expressão “conservação de energia” da forma como é usada (a) neste capítulo e (b) nas discussões da “crise energética”. De que modo estas duas formas diferem?

16. A energia elétrica de uma pequena cidade é fornecida por uma usina hidrelétrica situada num rio próximo. Quando você apaga uma lâmpada elétrica neste sistema, a lei de conservação da energia exige que uma quantidade igual de energia, talvez numa forma diferente, apareça em outro lugar do sistema. Onde e em que forma essa energia aparece?

17. Uma mola é comprimida e suas extremidades são amarradas. Em seguida, é mergulhada em ácido e se dissolve. O que acontece com a energia potencial armazenada na mola?

18. A equação $E = mc^2$ revela que pequenos objetos, como moedas e pedrinhas, contêm enormes quantidades de energia. Por que essa energia levou tanto tempo para ser descoberta?

19. “As explosões nucleares, em termos de massa, liberam cerca de um milhão de vezes mais energia do que as explosões químicas, porque se baseiam na equação de Einstein, $E = mc^2$.” O que você pensa a respeito desta afirmativa?

20. Como a massa e a energia podem ser equivalentes, já que se trata de grandezas físicas totalmente diferentes, definidas de forma diferente e medidas em unidades diferentes?

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

Seção 8-3 Determinação da Energia Potencial

1E. Uma determinada mola armazena 25 J de energia potencial quando sofre uma compressão de 7,5 cm. Qual é a constante da mola?

2E. Uma das armas do projeto “Guerra nas Estrelas” seria um “canhão eletromagnético” a ser colocado em órbita para derrubar mísseis inimigos ainda na fase de subida. O canhão (um tipo de arma de energia cinética) usaria forças eletromagnéticas para disparar um projétil de 2,4 kg com uma velocidade de 10 km/s. Suponha que, em vez de forças eletromagnéticas, o canhão usasse a força de uma mola. Qual deveria ser a constante da mola para que o projétil atingisse a velocidade desejada, supondo que fosse comprimida 1,5 m a partir do estado relaxado?

3E. Você deixa cair um livro de 2,0 kg para um amigo que está de pé na calçada, 10 m abaixo (Fig. 8-21). (a) Se a energia potencial é tomada como zero na calçada, qual a energia potencial do livro no momento em que você o deixa cair? (b) Qual a energia cinética do livro no momento em que o seu amigo o apara nas mãos estendidas, que se encontram 1,5 m acima da calçada? (c) Com que velocidade o livro está se movendo no momento em que chega às mãos do seu amigo?

4E. Um homem de 90 kg pula de uma janela para uma rede de bombeiros, 10 m abaixo. A rede se estica 1,0 m antes de deter a queda e arremessar o homem para cima. Qual a energia potencial da rede esticada, supondo que a energia mecânica é conservada?

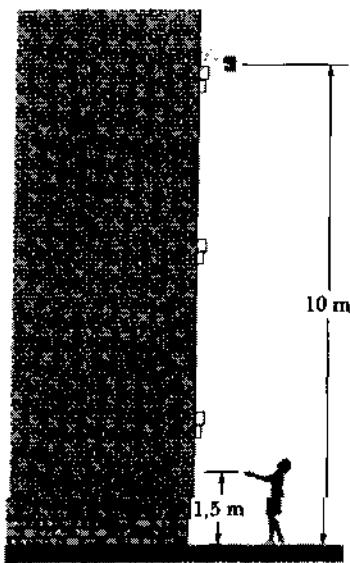


Fig. 8-21 Exercício 3.

5E. Uma bala de morteiro de 8,0 kg é disparada verticalmente com uma velocidade inicial de 100 m/s. (a) Qual a energia cinética da bala no momento em que deixa o morteiro? (b) Qual a variação de energia potencial da bala desde o momento em que é disparada até o ponto mais alto da sua trajetória, supondo que a resistência do ar possa ser desprezada?

6E. Um pedacinho de gelo se desprende da borda de uma taça hemisférica sem atrito com 22 cm de raio (Fig. 8-22). Com que velocidade o gelo está se movendo ao chegar ao fundo da taça?

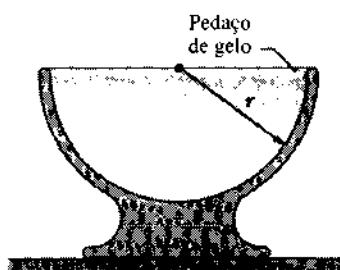


Fig. 8-22 Exercício 6.

7E. Um carrinho de montanha-russa sem atrito chega ao alto da primeira rampa da Fig. 8-23 com velocidade v_0 . Qual a sua velocidade (a) no ponto A, (b) no ponto B e (c) no ponto C? (d) A que altura chegará à última rampa, que é alta demais para ser ultrapassada?

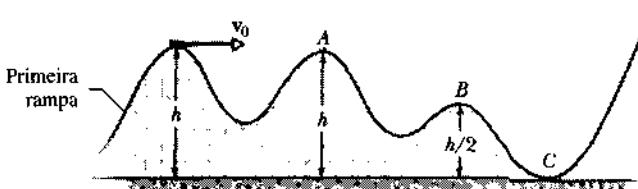


Fig. 8-23 Exercício 7.

8E. Um caminhão que perdeu os freios está descendo uma estrada em declive a 120 km/h. Felizmente, a estrada dispõe de uma rampa de escape, com uma inclinação de 15° (Fig. 8-24). Qual o menor comprimento da rampa para que a velocidade do caminhão chegue a zero antes do final da rampa? As rampas de escape são quase sempre cobertas com uma grossa camada de areia ou cascalho. Por quê?

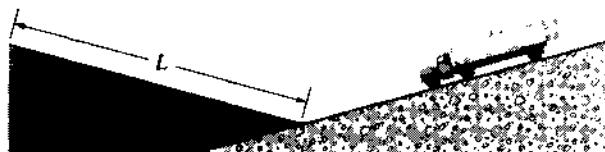


Fig. 8-24 Exercício 8.

9E. Uma avalanche de cinzas vulcânicas que estava se movendo em terreno plano chega a uma encosta com uma inclinação de 10° e sobe 920 m antes de parar. As cinzas vulcânicas estão misturadas com gás, de modo que o atrito entre elas e o solo é muito pequeno e pode ser desprezado. Com que velocidade as cinzas estavam se movendo ao chegarem à encosta? (Sugestão: Use a lei de conservação de energia.)

10E. Um projétil com uma massa de 2,40 kg é disparado para cima, do alto de uma colina de 125 m de altura, com uma velocidade de 150 m/s e numa direção que faz 41,0° com a horizontal. (a) Qual a energia cinética do projétil no momento em que é disparado? (b) Qual a energia potencial do projétil no mesmo momento? Suponha que a energia potencial é nula na base da colina ($y = 0$). (c) Determine a velocidade do projétil no momento em que atinge o solo. Supondo que a resistência do ar possa ser ignorada, as respostas acima dependem da massa do projétil?

11E. A Fig. 8-25 mostra uma pedra de 8,00 kg apoiada numa mola. O peso da pedra faz com que a mola sofra uma compressão de 10,0 cm. (a) Qual é a constante da mola? (b) A mola é comprimida mais 30,0 cm e depois liberada. Qual a energia potencial da mola antes de ser liberada? (c) A que altura será levantada a pedra acima do ponto em que se encontrava quando a mola foi liberada?

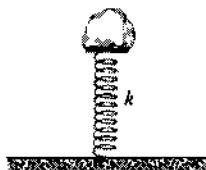


Fig. 8-25 Exercício 11.

12E. Uma bola de gude de 5,0 g é disparada verticalmente para cima por uma espingarda de mola. A mola deve ser comprimida 8,0 cm para que a bola de gude apenas alcance um alvo situado a 20 m de distância. (a) Qual a variação de energia potencial gravitacional da bola de gude durante a subida? (b) Qual a constante da mola?

13E. Uma bola de massa m está presa à extremidade de uma barra de comprimento L e massa desprezível. A outra extremidade da barra é articulada, de modo que a bola pode descrever um círculo no plano vertical. A barra é mantida na posição horizontal, como na Fig. 8-26, até receber um impulso para baixo suficiente para chegar ao ponto mais alto do círculo com velocidade zero. (a) Qual a variação da energia potencial da bola? (b) Qual a velocidade inicial da bola?

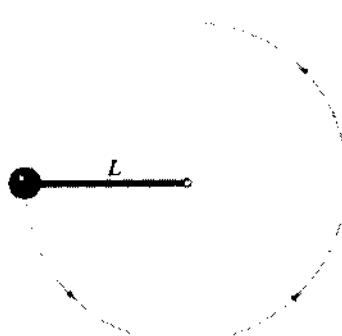


Fig. 8-26 Exercício 13.

14E. Uma barra de comprimento $L = 2,00\text{ m}$ e massa desprezível é articulada numa das extremidades para que possa descrever um círculo no plano vertical. Uma bola de massa m está presa à outra extremidade da barra. A bola é levantada até que a barra faça um ângulo $\theta = 30,0^\circ$ com a vertical (Fig. 8-27) e depois liberada. Com que velocidade a bola está se movendo ao passar pelo ponto mais baixo de sua trajetória?

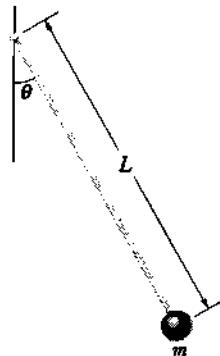


Fig. 8-27 Exercício 14.

15P. O gráfico da Fig. 8-28a mostra a variação da força da mola da espingarda de rolha da Fig. 8-28b com a compressão ou distensão a que é submetida. A mola é comprimida 5,5 cm e usada para disparar uma rolha de 3,8 g. (a) Qual a velocidade da rolha se é lançada no momento em que a mola atinge o comprimento que possui quando relaxada? (b) Suponha que a rolha fica presa na mola e só é lançada depois que a mola se distendeu 1,5 cm. Neste caso, qual a velocidade da rolha no momento em que é lançada?

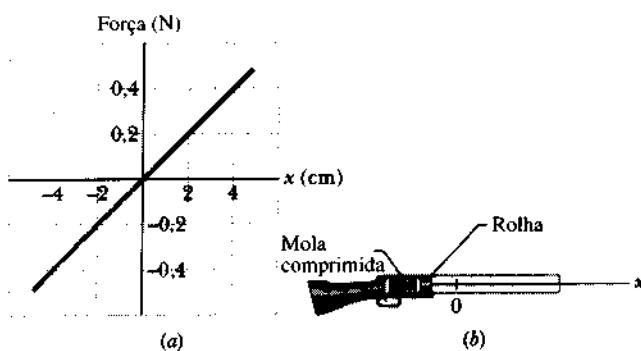


Fig. 8-28 Problema 15.

16P. Um bloco de 2,0 kg é apoiado numa mola num plano inclinado sem atrito e com uma inclinação de 30° (Fig. 8-29). A mola, cuja constante vale $19,6\text{ N/cm}$, é comprimida mais 20 cm e depois liberada. A que distância ao longo do plano inclinado é arremessado o bloco?

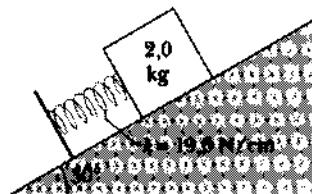


Fig. 8-29 Problema 16.

17P. Uma mola pode ser comprimida 2,0 cm por uma força de 270 N. Um bloco de 12 kg de massa é liberado a partir do repouso do alto de um plano inclinado sem atrito cuja inclinação é 30° (Fig. 8-30). O bloco comprime a mola 5,5 cm antes de parar. (a) Qual a distância total percorrida pelo bloco até parar? (b) Qual a velocidade do bloco no momento em que se choca com a mola?

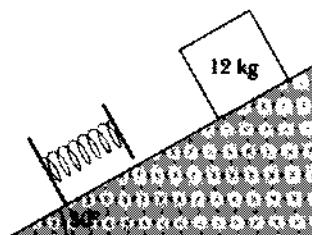


Fig. 8-30 Problema 17.

18P. Um projétil de 0,55 kg é lançado da borda de um penhasco com uma energia cinética inicial de 1.550 J e, no ponto mais alto da trajetória, está 140 m acima do ponto de lançamento. (a) Qual a componente horizontal da velocidade do projétil? (b) Qual a componente vertical da velocidade do projétil no momento do disparo? (c) Em um certo instante, a componente vertical da velocidade do projétil é 65 m/s. Neste momento, a que altura ele se encontra acima ou abaixo do ponto de lançamento?

19P. Uma bola de 50 g é arremessada de uma janela com uma velocidade inicial de 8,0 m/s e um ângulo de 30° para cima em relação à horizontal. Determine (a) a energia cinética da bola no ponto mais alto da trajetória e (b) a sua velocidade quando se encontra 3,0 m abaixo da janela. A resposta do item (b) depende (c) da massa da bola ou (d) do ângulo de arremesso?

20P. A mola de uma espingarda de mola tem uma constante de 1 N/cm. Quando a espingarda faz um ângulo de 30° para cima em relação à horizontal, uma bala de 50 g é disparada e atinge uma altura de 2 m acima do cano da espingarda. (a) Qual a velocidade da bala ao deixar o cano? (b) De quanto a mola estava comprimida no momento do disparo?

21P. Uma bala de morteiro de 5,0 kg é disparada para cima com uma velocidade inicial de 100 m/s e um ângulo de 34° em relação à horizontal. (a) Qual a energia cinética da bala no momento do disparo? (b) Qual é a variação na energia potencial da bala até o momento em que atinge o ponto mais alto da trajetória? (c) Qual a altura atingida pela bala?

22P. Um pêndulo é constituído por uma pedra de 2,0 kg amarrada na ponta de uma corda de 4,0 m. A pedra passa pelo ponto mais baixo da

trajetória com uma velocidade de 8,0 m/s. (a) Qual a velocidade da pedra quando a corda faz um ângulo de 60° com a vertical? (b) Qual o maior ângulo que a corda faz com a vertical durante o movimento? (c) Tomando a energia potencial gravitacional como igual a zero no ponto mais baixo da trajetória, qual a energia mecânica total do sistema?

23P. A corda da Fig. 8-31 tem $L = 120$ cm de comprimento e a distância d até o pino fixo P é 75 cm. Quando a bola é liberada em repouso na posição indicada na figura, descreve a trajetória indicada pela linha tracjada. Qual a velocidade da bola (a) quando está passando pelo ponto mais baixo da trajetória e (b) quando chega ao ponto mais alto da trajetória, depois que a corda toca no pino?

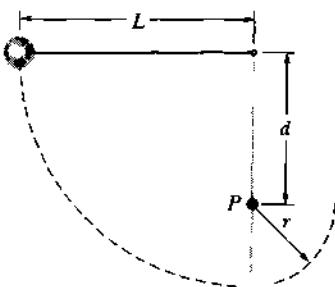


Fig. 8-31 Problemas 23 e 32.

24P. Uma das extremidades de uma mola vertical está presa ao teto. Um objeto é amarrado à outra extremidade e baixado lentamente até a posição de equilíbrio em que a força para cima exercida pela mola é igual ao peso do objeto. Mostre que a redução na energia potencial gravitacional sofrida pelo objeto durante o processo é igual ao dobro do ganho de energia potencial elástica da mola. (Por que as duas grandezas não são iguais?)

25P. Deixa-se cair um bloco de 2,0 kg de uma altura de 40 cm sobre uma mola cuja constante é $k = 1.960 \text{ N/m}$ (Fig. 8-32). Determine a compressão máxima da mola.

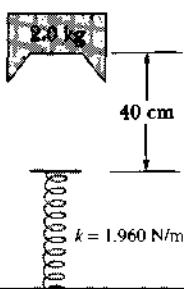


Fig. 8-32 Problema 25.

26P. A Fig. 8-33 mostra um pêndulo de comprimento L . A esfera de massa m (na qual podemos supor que está concentrada toda a massa do sistema) está se movendo com velocidade v_0 quando o fio faz um ângulo θ_0 com a vertical. (a) Determine uma expressão para a velocidade da esfera quando está passando pelo ponto mais baixo de sua trajetória. Qual o valor mínimo de v_0 para que a corda (b) chegue à posição horizontal e (c) chegue à posição vertical, com a corda permanecendo esticada?

27P. Duas crianças estão competindo para ver quem consegue acertar numa pequena caixa com uma bola de gude disparada por uma espingarda de mola colocada sobre uma mesa. A distância horizontal entre a

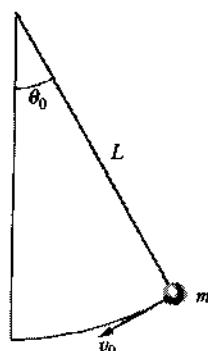


Fig. 8-33 Problema 26.

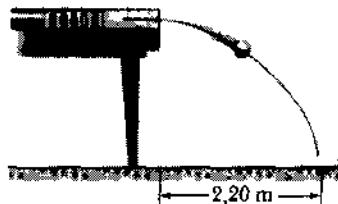


Fig. 8-34 Problema 27.

borda da mesa e a caixa é de 2,20 m (Fig. 8-34). João comprime a mola 1,10 cm e a bola cai 27,0 cm antes do alvo. Em quanto Maria deve comprimir a mola para acertar na caixa?

28P. O módulo da força de atração gravitacional entre duas partículas de massas m_1 e m_2 é dado por

$$F(x) = G \frac{m_1 m_2}{x^2}$$

onde G é uma constante e x a distância entre as partículas. (a) Qual é a função da energia potencial $U(x)$? Suponha que $U(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$. (b) Qual o trabalho necessário para aumentar a distância entre as partículas de $x = x_1$ para $x = x_1 + d$?

29P. Um objeto de 20 kg é submetido a uma força $F = -3,0x - 5,0x^2$, onde F é dada em newtons e x em metros. Suponha que enquanto o objeto se move por ação da força a sua energia mecânica é conservada. Suponha também que a energia potencial U do objeto é zero em $x = 0$. (a) Qual a energia potencial do objeto em $x = 2,0 \text{ m}$? (b) Se o objeto tem uma velocidade de 4,0 m/s no sentido negativo do eixo dos x quando se encontra em $x = 5,0 \text{ m}$, qual a sua velocidade ao passar pela origem? (c) Suponha agora que a energia potencial do objeto é $-8,0 \text{ J}$ em $x = 0$ e responda novamente aos itens (a) e (b).

30P. Um pequeno bloco de massa m desliza sem atrito na pista da Fig. 8-35. (a) O bloco é liberado em repouso no ponto P . Qual a força resultante que age sobre ele no ponto Q ? (b) De que altura em relação ao ponto mais baixo da pista o bloco deve ser liberado para que esteja na iminência de perder contato com a pista no ponto mais alto do semicírculo?

31P. Tarzan, que pesa 688 N, decide usar um cipó de 18 m de comprimento para atravessar um abismo (Fig. 8-36). Do ponto de partida até o ponto mais baixo da trajetória, desce 3,2 m. O cipó é capaz de resistir a uma força máxima de 950 N. Tarzan consegue chegar ao outro lado?

32P. Na Fig. 8-31 mostre que, se a bola faz uma volta completa em torno do pino, então $d > 3L/5$. (Sugestão: A bola ainda deve estar se movendo quando chegar ao ponto mais alto da trajetória. Você saberia explicar por quê?)

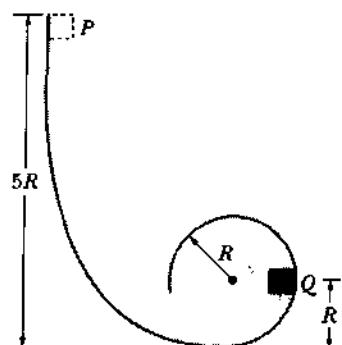


Fig. 8-35 Problema 30.

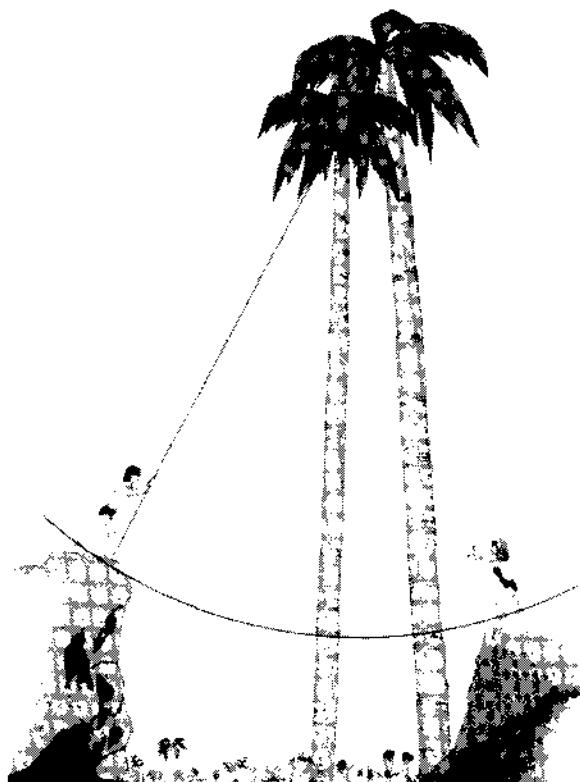


Fig. 8-36 Problema 31.

33P. Uma bola de massa m é pendurada na ponta de uma vara de comprimento L e massa desprezível, formando um pêndulo. A bola é colocada verticalmente acima do ponto de apoio e depois liberada em repouso. (a) Qual a velocidade da bola no ponto mais baixo da trajetória? (b) Qual a tração a que é submetida a vara no mesmo ponto? (c) A bola é agora colocada na mesma horizontal que o ponto de apoio e liberada sem velocidade inicial. Para que ângulo em relação à vertical o peso da bola tem módulo igual ao da tração a que a vara é submetida?

34P. Uma escada rolante é usada para ligar dois andares. Um andar está 8,0 m acima do outro; a escada tem 12 m de comprimento e se move ao longo do seu comprimento com uma velocidade de 60 cm/s. (a) Qual deve ser a potência do motor da escada para que ela transporte 100 pessoas por minuto, supondo que a massa média das pessoas é 75 kg? (b) Um homem de 80 kg sobe a escada em 10 s. Qual o trabalho executado pela escada sobre o homem? (c) Se o homem desse meia volta no meio do caminho e começasse a descer os degraus, mantendo-se sempre na mesma altura, a escada continuaria a realizar trabalho sobre ele? Se a resposta é sim, qual é a potência requerida para isto? (d) Existe alguma

(outra?) forma de o homem usar a escada sem que a escada realize trabalho sobre ele?

35P*. Uma corrente é mantida sobre uma mesa sem atrito com um quarto do seu comprimento pendurado para fora da mesa, como na Fig. 8-37. Se a corrente tem um comprimento L e uma massa m , qual o trabalho necessário para puxá-la totalmente para cima da mesa?



Fig. 8-37 Problema 35.

36P*. Um bloco de 3,20 kg parte do repouso e escorrega uma distância d num plano sem atrito com uma inclinação de 30° antes de se chocar com uma mola (Fig. 8-38). O bloco escorrega mais 21,0 cm antes que a força da mola, cuja constante é 431 N/m, faça-o parar momentaneamente. (a) Qual o valor de d ? (b) Qual a distância entre o ponto em que o bloco se choca com a mola e o ponto em que sua velocidade é máxima?

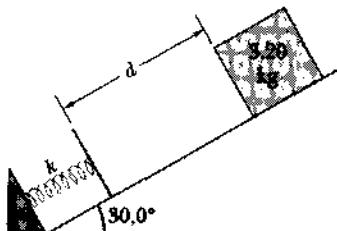


Fig. 8-38 Problema 36.

37P Um menino está sentado no alto de um monte hemisférico de gelo (Fig. 8-39). Ele recebe um pequeníssimo empurrão e começa a escorregar para baixo. Mostre que, se o atrito com o gelo puder ser desprezado, ele perde contato com o gelo num ponto cuja altura é $2R/3$. (Sugestão: A força normal desaparece no momento em que o menino perde contato com o gelo.)



Fig. 8-39 Problema 37.

Seção 8-5 Usando uma Curva de Energia Potencial

38E. Uma partícula se move ao longo do eixo dos x numa região em que sua energia potencial $U(x)$ varia da forma indicada na Fig. 8-40. (a) Faça um gráfico da força $F(x)$ que age sobre a partícula, usando o mesmo eixo horizontal da Fig. 8-40. (b) A partícula tem uma energia mecânica (constante) de 4,0 J. Faça um gráfico da sua energia cinética $K(x)$ diretamente na Fig. 8-40.

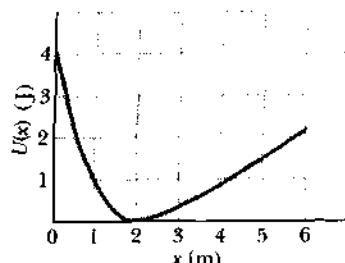


Fig. 8-40 Exercício 38.

39P. A energia potencial de uma molécula diatômica (H_2 ou O_2 , por exemplo) é dada por

$$U = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}$$

onde r é a distância entre os átomos que formam a molécula e A e B são constantes positivas. Esta energia potencial se deve à força que mantém os átomos unidos. (a) Calcule a distância de equilíbrio, isto é, a distância entre os átomos para a qual a força a que estão submetidos é zero. Verifique se a força é repulsiva (os átomos tendem a se separar) ou atrativa (os átomos tendem a se aproximar) se a distância entre eles é (b) menor e (c) maior do que a distância de equilíbrio.

40P. Uma partícula de massa 2,0 kg se move ao longo do eixo dos x numa região em que sua energia potencial $U(x)$ varia da forma indicada na Fig. 8-41. Quando a partícula se encontra em $x = 2,0$ m, sua velocidade é $-2,0$ m/s. (a) Qual a força a que a partícula está submetida neste instante? (b) Entre que limites de x a partícula se move? (c) Qual a velocidade da partícula em $x = 7,0$ m?

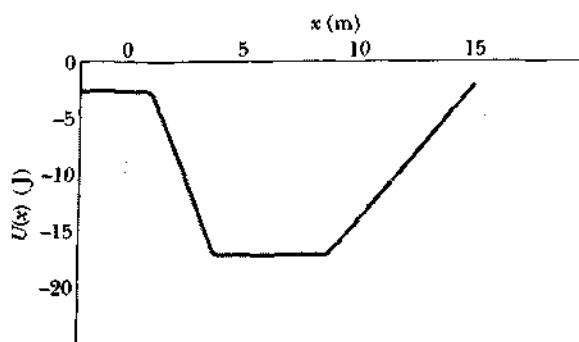
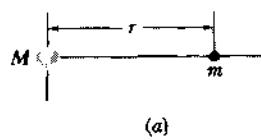


Fig. 8-41 Problema 40.



(a)

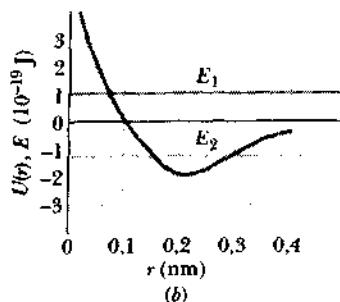


Fig. 8-42 Problema 41.

41P. A Fig. 8-42a mostra dois átomos de massas m e M ($m \ll M$) separados por uma distância r . A Fig. 8-42b mostra a energia potencial $U(r)$ do sistema de dois átomos em função de r . Descreva o movimento dos átomos (a) se a energia mecânica total E é maior do que zero (como é E_1) e (b) se E é menor do que zero (como é E_2). Para $E_1 = 1 \times 10^{-19}$ J e $r = 0,3$ nm, calcule (c) a energia potencial do sistema, (d) a energia cinética total dos átomos e (e) a força (módulo, direção e sentido) que age sobre cada átomo. Para que valores de r a força é (f) repulsiva, (g) atrativa e (h) nula?

Seção 8-6 Conservação da Energia

Seção 8-7 Trabalho Executado por Forças de Atrito

42E. Quando o ônibus espacial (massa = 79.000 kg) retorna à Terra (Fig. 8-43), entra na atmosfera com uma velocidade de 29.000 km/h, que é reduzida gradualmente para uma velocidade de pouso de 350 km/h. Qual é a energia cinética do ônibus espacial (a) ao entrar na atmosfera e (b) no momento do pouso? (c) O que acontece com toda essa energia “perdida”?



Fig. 8-43 Exercício 42. Pouso do ônibus espacial.

43E. Os cientistas afirmam que uma árvore de grande porte pode provocar a evaporação de até 900 kg de água por dia. (a) A evaporação ocorre nas folhas. Para chegar às folhas, a água precisa subir das raízes até elas. Supondo que a distância percorrida seja em média de 9 m, qual a energia que deve ser fornecida por dia para fazer a água subir? (c) Qual a potência desenvolvida pela árvore, supondo que a evaporação ocorra em 12 h por dia?

44E. O ponto culminante do monte Everest fica 8.850 m acima do nível do mar. (a) Qual a energia gasta por um alpinista de 90 kg para vencer a força gravitacional (o seu próprio peso) e chegar ao cume do monte Everest a partir do nível do mar? (c) Quantas barras de chocolate, a 300 kcal por barra, são necessárias para fornecer esta energia? A resposta mostra que o trabalho para vencer a força gravitacional é apenas uma pequena parte da energia gasta para subir uma montanha.

45E. Aproximadamente $5,5 \times 10^6$ kg de água caem por segundo nas Cataratas do Niágara a partir de uma altura de 50 m. (a) Qual a energia potencial perdida por segundo pela água que cai? (b) Qual seria a potência gerada por uma usina hidrelétrica se toda a energia potencial da água fosse convertida em energia elétrica? (c) Se a companhia de energia elétrica vendesse essa energia pelo preço industrial de 1 centavo de dólar por quilowatt·hora, qual seria a sua receita anual?

46E. A área da parte continental dos Estados Unidos é aproximadamente 8×10^6 km² e a altitude média do seu território é de 500 m. A precipitação anual média é de 75 cm. Dois terços dessa chuva voltam à atmosfera em forma de vapor, mas o resto chega aos oceanos através dos rios. Se toda esta água pudesse ser usada para gerar eletricidade em usinas hidrelétricas, qual seria a potência gerada?

47E. Um disco de plástico de 75 g é jogado de uma altura de 1,1 m acima do solo com uma velocidade de 12 m/s. Quando ele atinge uma altura de 2,1 m, sua velocidade é de 10,5 m/s. (a) Qual o trabalho realizado sobre o disco pelo seu próprio peso? (b) Qual a energia mecânica dissipada pela resistência do ar?

48E. Um jogador de futebol chuta uma bola com uma velocidade inicial de 90 km/h. No momento em que o goleiro agarra a bola, na mesma altura em que foi chutada, sua velocidade diminuiu para 80 km/h. Qual a energia mecânica dissipada pela resistência do ar? Uma bola de futebol tem uma massa de 425 g.

49E. Um carro faz em média 10 km/l de gasolina, que produz uma energia de 30 MJ/l. (a) Que distância o carro percorre para cada 1,0 kW·h de energia consumida? (b) Se o carro está viajando a uma velocidade de 90 km/h, qual a potência gerada pela gasolina?

50E. Um menino de 51 kg sobe, com velocidade constante, por uma corda de 6,0 m em 10 s. (a) Qual o aumento da energia potencial gravitacional do menino? (b) Qual a potência desenvolvida pelo menino durante a subida?

51E. Uma mulher de 55 kg sobe correndo um lance de escada de 4,5 m de altura em 3,5 s. Qual a potência desenvolvida pela mulher?

52E. Um corredor com 670 N de peso corre os primeiros 7,0 m de uma prova em 1,6 s, partindo do repouso e acelerando uniformemente. (a) Qual a velocidade do corredor no final dos 1,6 s? (b) Qual a sua energia cinética neste momento? (c) Qual a potência desenvolvida pelo corredor até este momento?

53E. O transatlântico de luxo *Queen Elizabeth 2* (Fig. 8-44) dispõe de um conjunto motor-gerador a óleo diesel capaz de gerar uma potência de 92 MW à velocidade máxima de 32,5 nós. Qual a força de propulsão do navio quando ele está viajando com esta velocidade? (1 nó = 1,853 km/h).

54E. Que potência, em cavalos-vapor, desenvolve o motor de um carro de 1.600 kg viajando a 25,1 m/s em uma estrada plana se a soma das forças de resistência é igual a 703 N?

55E. Um nadador se desloca na água com uma velocidade média de 0,22 m/s. A força média de arrasto que se opõe a esse movimento é de 110 N. Qual a potência média desenvolvida pelo nadador?

56E. A energia necessária para uma pessoa correr é cerca de 335 J/m, seja qual for a velocidade. Qual a potência média desenvolvida por um corredor (a) durante uma corrida de 100 metros rasos (tempo = 10 s) e (b) durante uma maratona (distância = 42 km; tempo = 2 h 10 min)?

57E. (a) Mostre que a potência desenvolvida por um aeroplano que se move na horizontal com velocidade v é proporcional a v^3 . Suponha que a força de arrasto aerodinâmico é dada pela Eq. 6-18. (b) Por que fator deve ser multiplicada a potência dos motores do avião para que sua velocidade aumente 50%?

58E. A cada segundo, 1.200 m³ de água passam por uma cachoeira de 100 metros de altura. Supondo que três quartos da energia cinética adquirida pela água durante a queda sejam transformados em energia elétrica por um conjunto turbina-gerador, qual a potência do gerador? (*Sugestão:* Leve em conta o fato de que 1 m³ de água tem uma massa de 10³ kg.)

59E. Uma bala de 30 g, viajando inicialmente a 500 m/s, penetra 12 cm numa parede antes de parar. (a) Qual a redução na energia mecânica da bala? (b) Suponha que a força exercida pela parede sobre a bala é constante e calcule o seu valor.

60E. Um homem de 68 kg salta de um avião e enquanto se encontra em queda livre sua velocidade atinge o valor terminal de 59 m/s. Com que taxa a energia potencial gravitacional do sistema Terra-homem passa a diminuir depois que o homem chega à velocidade terminal? O que acontece com a energia potencial perdida?

61E. As corredeiras de um rio têm um desnível de 15 m. A velocidade da água é 3,2 m/s no início das corredeiras e 13 m/s no final. Que porcentagem da energia potencial perdida por 10 kg de água ao atravessarem as corredeiras é transformada em energia cinética? (A resposta depende da massa de água considerada?) O que acontece com o resto da energia?

62E. Um projétil de 9,4 kg é disparado verticalmente para cima. Durante a subida, uma energia de 68 kJ é dissipada pelo atrito com o ar. De quanto aumentaria a altura máxima atingida pelo projétil se fosse possível tornar desprezível o atrito com o ar (tornando, por exemplo, a forma do projétil mais aerodinâmica)?

63E. Uma bola de 0,63 kg é lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 14 m/s. A bola atinge uma altura de 8,1 m antes de começar a cair. Supondo que as únicas forças que agem sobre a bola



Fig. 8-44 Exercício 53.

são a resistência do ar e o peso da bola, calcule o trabalho realizado durante a subida pela resistência do ar.

64E. Um urso de 25 kg escorrega para baixo num tronco de árvore a partir do repouso. O tronco tem 12 m de altura e a velocidade do urso ao chegar ao chão é de 5,6 m/s. (a) Qual a variação da energia potencial do urso? (b) Qual a energia cinética do urso no momento em que chega ao chão? (c) Qual a força média de atrito que agiu sobre o urso durante a descida?

65E. Durante uma avalanche, uma pedra de 520 kg desce uma encosta de 500 m de extensão e 300 m de altura. O coeficiente de atrito dinâmico entre a pedra e a encosta é 0,25. (a) Qual era a energia potencial U da pedra antes do desabamento? (Faça $U = 0$ na base da encosta.) (b) Qual a energia mecânica dissipada pelas forças de atrito durante a descida da pedra? (c) Qual a energia cinética da pedra ao chegar à base da encosta? (d) Qual a velocidade da pedra nesse momento?

66P. Um bloco de 3,5 kg é empurrado a partir do repouso por uma mola comprimida cuja constante de mola é 640 N/m (Fig. 8-45). Depois que a mola se encontra totalmente relaxada, o bloco viaja por uma superfície horizontal com um coeficiente de atrito dinâmico de 0,25, percorrendo uma distância de 7,8 m antes de parar. (a) Qual a energia mecânica dissipada pela força de atrito? (b) Qual a energia cinética máxima possuída pelo bloco? (c) De quanto foi comprimida a mola antes que o bloco fosse liberado?



Fig. 8-45 Problema 66.

67P. Você empurra um bloco de 2,0 kg contra uma mola horizontal, comprimindo-a em 15 cm. Quando solta o bloco, a mola faz com que ele deslize numa mesa até parar, depois de percorrer uma distância total de 75 cm. A constante de mola vale 200 N/m. Qual o coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e a mesa?

68P. Um bloco de 2,5 kg (Fig. 8-46) colide com uma mola horizontal cuja constante de mola é 320 N/m. O bloco comprime a mola até que seu comprimento diminua de 7,5 cm em relação ao comprimento inicial. O coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e a superfície horizontal é 0,25. (a) Qual o trabalho realizado pela mola até o bloco parar? (b) Qual a energia mecânica dissipada pela força de atrito enquanto o bloco está sendo levado ao repouso pela mola? (c) Qual a velocidade do bloco no momento da colisão com a mola?



Fig. 8-46 Problema 68.

69P. Dois montes nevados têm altitudes de 850 m e 750 m em relação ao vale que os separa (Fig. 8-47). Uma pista de esqui vai do alto do monte maior até o alto do monte menor, passando pelo vale. O comprimento total da pista é 3,2 km e a inclinação média é 30°. (a) Um esquiador parte do repouso no alto do monte maior. Com que velocidade chegará ao alto



Fig. 8-47 Problema 69.

do pico maior sem se impulsionar com os bastões? Ignore o atrito. (b) Qual deve ser aproximadamente o coeficiente de atrito dinâmico entre a neve e os esquis para que o esquiador pare exatamente no alto do pico menor?

70P. Um operário deixa escorregar acidentalmente um caixote de 200 kg que estava sendo mantido em repouso no alto de uma rampa de 4 m de comprimento e com uma inclinação de 39°. O coeficiente de atrito cinético entre o caixote e a rampa e entre o caixote e o piso da fábrica é 0,28. (a) Com que velocidade o caixote está se movendo ao chegar ao final da rampa? (b) Que distância o caixote percorre depois de chegar ao final da rampa? (Suponha que a energia cinética do caixote não muda quando ele passa da rampa para o piso.) (c) Por que as respostas dos itens (a) e (b) não dependem da massa do caixote?

71P. Dois blocos são ligados por uma corda, como na Fig. 8-48, e libertados a partir do repouso. Mostre que, depois de percorrerem uma distância L , sua velocidade é dada por

$$v = \sqrt{\frac{2(m_2 - \mu m_1)gL}{m_1 + m_2}}$$

onde μ é o coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco de cima e a superfície na qual está se movendo. Despreze a massa e o atrito da roldana.

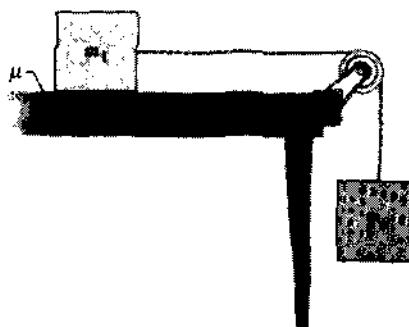


Fig. 8-48 Problema 71.

72P. Um pacote de 4,0 kg começa a subir uma rampa de 30° com uma energia cinética de 128 J. Que distância percorrerá se o coeficiente de atrito for 0,30?

73P. Um bloco está subindo uma rampa de 40°. Num ponto a 0,5 m do início da rampa, possui uma velocidade de 1,3 m/s. O coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e a rampa é 0,15. (a) Qual a distância adicional percorrida pelo bloco até parar? (b) Qual a velocidade do bloco ao chegar de volta à base da rampa?

74P. Uma determinada mola *não* obedece à lei de Hooke. A força (em newtons) que ela exerce quando é distendida de uma distância x (em metros) é de $52,8x + 38,4x^2$, no sentido oposto ao da distensão. (a) Calcule o trabalho necessário para distender a mola de $x = 0,500$ m até $x =$

1,00 m. (b) Com uma das extremidades da mola mantida fixa, uma partícula de 2,17 kg é presa à outra extremidade e a mola é distendida de uma distância $x = 1,00$ m. Em seguida, a partícula é liberada sem velocidade inicial. Calcule sua velocidade no instante em que a distensão da mola diminuiu para $x = 0,500$ m. (c) A força exercida pela mola é conservativa ou não-conservativa? Explique sua resposta.

75P. Uma menina de 267 N de peso desce por um escorregador de 6,1 m de comprimento e 20° de inclinação. O coeficiente de atrito cinético é 0,10. (a) Calcule o trabalho realizado sobre a menina pelo seu peso. (b) Calcule a energia dissipada pela força de atrito. (c) Se a menina começa a descida com uma velocidade de 0,457 m/s, qual a sua velocidade ao chegar ao chão?

76P. Um automóvel de 1.500 kg parte do repouso numa estrada horizontal e atinge a velocidade de 72 km/h em 30 s. (a) Qual a energia cinética do automóvel no final dos 30 s? (b) Qual a potência média desenvolvida pelo automóvel durante esse intervalo? (c) Qual a potência instantânea no final dos 30 s, supondo que a aceleração tenha sido constante?

77P. Um bloco com velocidade inicial $v_0 = 6,0$ m/s desliza por uma pista constituída por dois trechos planos e uma depressão intermediária (Fig. 8-49). O atrito entre a pista e o bloco é desprezível até que ele chegue ao segundo trecho plano, cujo coeficiente de atrito dinâmico é $\mu = 0,60$ e onde percorre uma distância d antes de parar. Determine o valor de d , sabendo que a diferença de altura entre os dois trechos planos é $h = 1,1$ m.

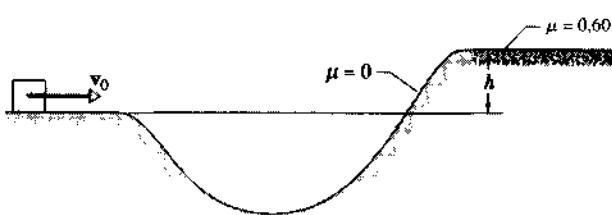


Fig. 8-49 Problema 77.

78P. No átomo de hidrogênio, o módulo da força de atração entre o núcleo de carga positiva (um próton) e o elétron de carga negativa é dado por

$$F = k \frac{e^2}{r^2},$$

onde e é o módulo das cargas do elétron (e do próton), k é uma constante e r é a distância entre o elétron e o núcleo. Suponha que a posição do núcleo não varia. Imagine que o elétron, que está inicialmente se movendo em torno do núcleo ao longo de uma circunferência de raio r_1 , dê um "salto" para uma órbita circular de raio menor r_2 (Fig. 8-50). (a)

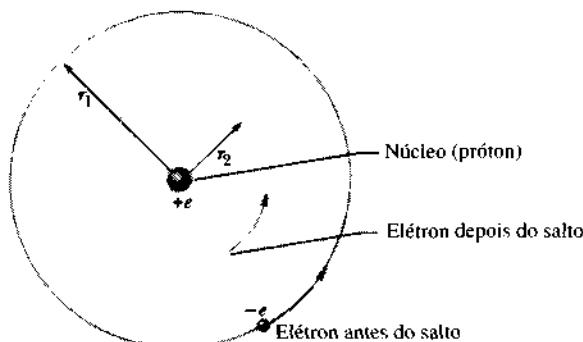


Fig. 8-50 Problema 78.

Calcule a variação de energia cinética do elétron, usando a segunda lei de Newton. (b) Usando a refração entre força e energia potencial, calcule a variação de energia potencial do átomo. (c) De quanto a energia total do átomo diminuiu durante o processo? (Esta variação de energia é igual à energia da luz emitida pelo átomo em consequência do "salto".)

79P. Uma pedra de peso w é jogada verticalmente para cima com velocidade inicial v_0 . Se uma força constante f devido à resistência do ar age sobre a pedra durante todo o percurso, (a) mostre que a altura máxima atingida pela pedra é dada por

$$h = \frac{v_0^2}{2g(1 + f/p)}.$$

(b) Mostre que a velocidade da pedra ao chegar ao solo é dada por

$$v = v_0 \left(\frac{p - f}{p + f} \right)^{1/2}.$$

80P. Um escorregador tem a forma de um arco de circunferência tangente ao solo com uma altura máxima de 4,0 m e um raio de 12 m (Fig. 8-51). Uma criança de 25 kg desce pelo escorregador partindo do repouso e chega ao chão com uma velocidade de 6,2 m/s. (a) Qual o comprimento do escorregador? (b) Qual o valor médio da força de atrito que age sobre a criança durante a descida? Se, em vez de ser tangente ao solo, o escorregador fosse tangente a uma linha vertical que passa pelo topo do escorregador, quais seriam (c) o comprimento do escorregador e (d) o valor médio da força de atrito sobre a criança?

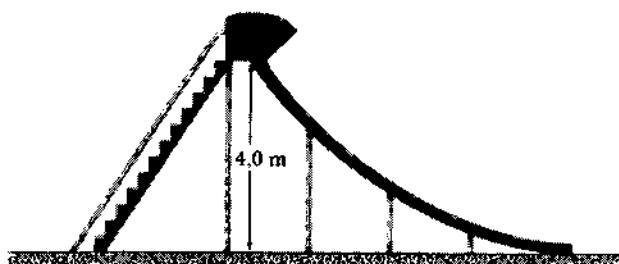


Fig. 8-51 Problema 80.

81P. Uma pequena partícula escorrega por uma pista com extremidades elevadas e uma parte plana central de comprimento L (Fig. 8-52). O atrito com as partes elevadas da pista é desprezível, mas na parte plana o coeficiente de atrito dinâmico é $\mu_d = 0,20$. A partícula começa a descer a partir de repouso no ponto A , que se encontra a uma altura $h = L/2$ acima da parte plana da pista. Determine a posição da partícula quando ela atinge o repouso.



Fig. 8-52 Problema 81.

82P. Uma bola de massa m está presa a uma das extremidades de uma barra rígida de massa desprezível e comprimento L (Fig. 8-53). A outra extremidade da barra está presa a um eixo de tal forma que a barra pode girar num plano vertical. A bola é colocada no ponto A e recebe um impulso que a faz deslocar-se para baixo com velocidade inicial v_0 , e é suficiente para que a bola chegue ao ponto D com velocidade zero. (a) Determine uma expressão para v_0 em função de L , m e g . (b) Qual a tração a que está submetida a barra quando a bola se encontra no ponto B ?

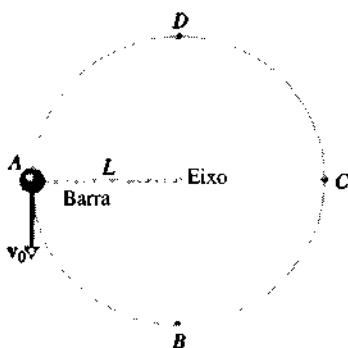


Fig. 8-53 Problema 82.

(c) Depois de se colocar um pouco de areia no rolamento do eixo, a bola passa a chegar apenas ao ponto *C* quando é lançada a partir do ponto *A* com a mesma velocidade inicial que antes. Qual a energia mecânica dissipada pelo atrito durante o movimento da bola? (d) Qual a energia mecânica total dissipada pelo atrito quando se permite que a bola oscile na região entre o ponto *A* e o ponto *C* até parar no ponto *B*?

83P. O cabo do elevador de 17.800 N da Fig. 8-54 arrebenta quando o elevador se encontra parado no primeiro andar, onde o seu piso está a uma distância *d* = 3,7 m da mola amortecedora, cuja constante de mola é *k* = 44.500 N/m. Um freio de segurança entra automaticamente em ação, aplicando aos trilhos laterais uma força de atrito constante de 4.450 N. (a) Calcule a velocidade do elevador no momento em que se choça com a mola. (b) Calcule a distância adicional *x* que o elevador percorre até parar. (c) Calcule a distância a que o elevador é arremessado para cima pela força da mola. (d) Usando a lei da conservação de energia, calcule aproximadamente a distância total percorrida pelo elevador até parar. Por que a resposta não é exata?

84P. Enquanto um automóvel de 1.710 kg está se movendo com uma velocidade constante de 15,0 m/s, o motor desenvolve uma potência de 16,0 kW para compensar o atrito, a resistência do ar etc. (a) Qual é a força total efetiva que se opõe ao movimento do carro? (b) Que potência o motor deve desenvolver para que o carro suba uma rampa de 8% (8,00 m de deslocamento vertical para cada 100 m de deslocamento horizontal) a 15,0 m/s? (c) O motor do carro é desligado e ele desce uma rampa com uma velocidade constante de 15,0 m/s. Qual a inclinação da rampa, expressa da mesma forma que no item (b)?

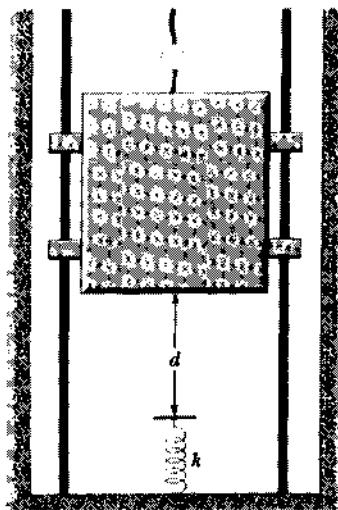


Fig. 8-54 Problema 83.

85P. Qual a potência desenvolvida por uma máquina de amolar, cuja roda tem um raio de 20 cm e está girando a 2,5 rotações por segundo, quando a ferramenta a ser amolada é pressionada contra a roda com uma força de 180 N? O coeficiente de atrito cinético entre a ferramenta e a roda é 0,32.

86P. Um caminhão sobe uma rampa de 2% (ver Problema 84P) com uma velocidade de 24 km/h. Uma força de atrito igual a 1/25 do peso do caminhão se opõe ao movimento. Qual a velocidade do caminhão, caso desça a mesma rampa desenvolvendo a mesma potência? Suponha que a força de atrito permanece a mesma.

87P. Se uma locomotiva capaz de desenvolver uma potência máxima de 1,5 MW pode acelerar um trem de uma velocidade de 10 m/s para 25 m/s em 6,0 min, determine (a) a massa do trem, (b) a velocidade do trem em função do tempo (em segundos) durante o intervalo de 6,0 min, (c) a força que acelera o trem em função do tempo (em segundos) durante o mesmo intervalo e (d) a distância percorrida pelo trem durante o mesmo intervalo.

88P. A resistência ao movimento de um automóvel depende do atrito com a estrada, praticamente independente da velocidade, e do atrito com o ar, proporcional ao quadrado da velocidade. Para um determinado carro de 12.000 N de peso, a resistência total *F* é dada pela equação $F = 300 + 1,8 v^2$, onde *F* está em newtons e *v* em metros por segundo. Calcule a potência necessária para imprimir uma aceleração de 0,92 m/s² ao carro, quando este está se movendo com uma velocidade de 80 km/h.

89P*. Um *regulador* é constituído por duas bolas de 200 g ligadas a um eixo vertical por hastes rígidas de 10 cm de comprimento e massa desprezível (Fig. 8-55). As hastes são articuladas de tal forma que se afastam do eixo quando o conjunto está girando. Entretanto, quando o ângulo *θ* chega a 45°, as bolas tocam as paredes do cilindro que envolve o regulador. (a) Qual é a menor velocidade de rotação, em rotações por minuto, para a qual as bolas tocam a parede do cilindro? (b) Se o coeficiente de atrito cinético entre as bolas e a parede é 0,35, qual a potência mecânica dissipada pelo atrito com a parede quando o mecanismo está girando a 300 rotações por minuto?

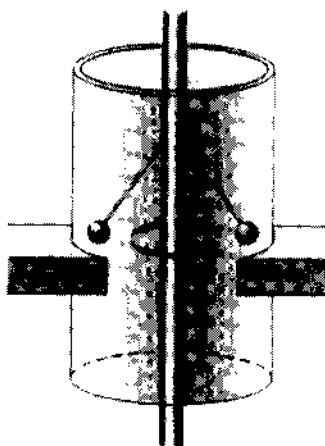


Fig. 8-55 Problema 89.

90P*. Um *dragster* de massa *m* percorre uma distância *d* a partir do repouso. Suponha que o motor fornece uma potência constante *P* durante toda a corrida e que o carro pode ser tratado como uma partícula. Determine o tempo de duração da corrida.

91P*. Numa fábrica, uma máquina de empacotamento deixa cair verticalmente um engradado de 300 kg numa esteira rolante que se move com uma velocidade de 1,20 m/s (Fig. 8-56). (A velocidade da esteira é

mantida constante por um motor.) O coeficiente de atrito cinético entre o engradado e a esteira é 0,400. Depois de um pequeno intervalo de tempo, o engradado deixa de escorregar e passa a se mover com a mesma velocidade que a esteira. Para o intervalo de tempo durante o qual o engradado está se movendo em relação à esteira, calcule, para um sistema de coordenadas estacionário em relação à fábrica, (a) a energia cinética fornecida ao engradado, (b) o módulo da força de atrito cinético que age sobre o engradado e (c) a energia fornecida pelo motor. (d) Por que as respostas de (a) e (c) são diferentes?

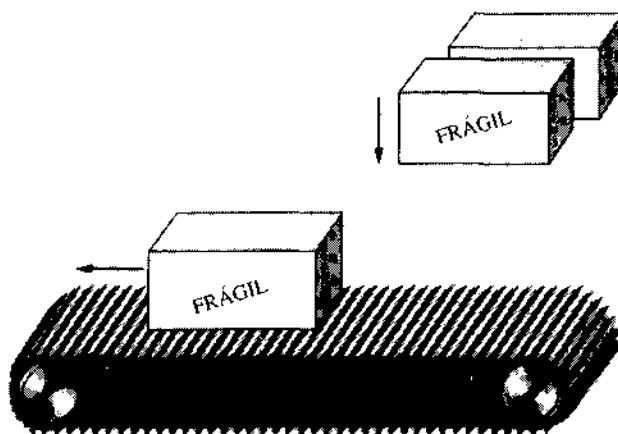


Fig. 8-56 Problema 91.

Seção 8-8 Massa e Energia

92E. (a) Qual a energia em joules equivalente a uma massa de 102 g? (b) Durante quantos anos esta energia atenderia às necessidades de uma família que consome em média 1,00 kW?

93E. A magnitude M de um terremoto na escala Richter está relacionada à energia E liberada (em joules) através da equação

$$\log E = 5,24 + 1,44 M.$$

(a) O terremoto de San Francisco de 1906 foi de magnitude 8,2 (Fig. 8-57). Qual a energia liberada? (b) Qual a massa equivalente a esta energia?

94E. O núcleo de um átomo de ouro contém 79 prótons e 118 nêutrons e tem uma massa de 196,9232 u. Calcule a energia de ligação do núcleo. Os outros dados numéricos necessários para resolver o problema estão no Exemplo 8-10.

95P. Uma usina nuclear em Oregon desenvolve uma potência de 5.980 MW, da qual 1.030 MW são convertidos em energia elétrica e 2.100 MW se transformam em energia térmica, que é transferida para a água do rio Colúmbia. Qual a massa equivalente à energia perdida de outras formas nesta usina durante um ano?



Fig. 8-57 Exercício 93. Destrução da Nob Hill, em San Francisco, causada pelo terremoto de 1906. Mais de 400 km da falha de Santo André se romperam durante o terremoto.

96P. Os Estados Unidos produziram cerca de $2,31 \times 10^{12}$ kW·h de energia elétrica em 1983. Qual a massa equivalente a esta energia?

97P. Um comprimido de aspirina tem uma massa de 320 mg. Quantas vezes um carro poderia dar a volta à Terra com a energia equivalente a esta massa? Suponha que o carro pode fazer 10 km/l de gasolina e que a gasolina produz uma energia de 30 MJ/l.

98P. Qual a quantidade de massa que deve ser transformada em energia cinética para acelerar uma espaçonave com massa de $1,66 \times 10^6$ kg do repouso até um décimo da velocidade da luz? Use a expressão não-relativística para a energia cinética.

99P. O sol irradia luz com uma potência de 4×10^{26} W. Quantos quilogramas de luz solar são recebidos pela Terra durante 1 dia?

Seção 8-9 Quantização da Energia

100E. De quanto varia a energia de um átomo quando ele emite luz com uma freqüência de $4,3 \times 10^{14}$ s⁻¹?

101P. (a) Um átomo de hidrogênio tem uma energia de $-3,40$ eV. Se a energia do átomo muda para $-13,6$ eV, qual a freqüência da luz envolvida nesta mudança? A luz é emitida ou absorvida pelo átomo?

PROBLEMAS ADICIONAIS

102. Uma mola de constante $k = 200$ N/m está suspensa verticalmente com a extremidade superior presa ao teto e a extremidade inferior na posição $y = 0$ (Fig. 8-58). Um bloco de 20 N é amarrado à extremidade inferior, mantido na mesma posição por um momento e depois liberado. Quais são a energia cinética e as variações da energia potencial gravitacional e da energia potencial elástica do sistema mola-bloco quando a coordenada y do bloco é igual a (a) $-5,0$ cm, (b) -10 cm, (c) -15 cm e (d) -20 cm?

103. Uma esquiadora de 60 kg chega à extremidade de uma rampa de salto com uma velocidade de 24 m/s, orientada 25° acima da horizontal. Suponha que em consequência da resistência do ar a esquiadora chega ao solo com uma velocidade de 22 m/s, num ponto que está 14 m abaixo da extremidade da rampa. Qual a energia dissipada pela resistência do ar durante o salto?

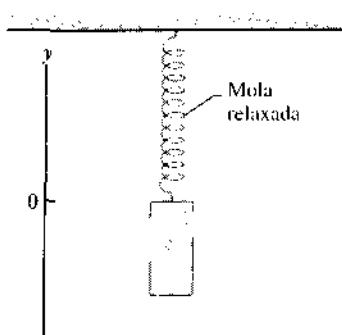


Fig. 8-58 Problema 102.

- 104.** Uma partícula de 0,40 kg se move sob a influência de uma única força conservativa. No ponto *A*, onde a partícula tem uma velocidade de 10 m/s, a energia potencial associada é 40 J. Quando a partícula se move de *A* para *B*, a força realiza um trabalho de 25 J sobre a partícula. Qual a energia potencial no ponto *B*?

- 105.** Uma das extremidades de uma mola ($k = 200 \text{ N/m}$) é mantida fixa no alto de uma rampa sem atrito com uma inclinação de 40° (Fig. 8-59). Um bloco de 1,0 kg sobe a rampa, de uma posição inicial a 0,60 m de distância da outra extremidade da mola relaxada, com uma energia cinética inicial de 16 J. (a) Qual a energia cinética do bloco no momento em que a mola foi comprimida 0,20 m? (b) Com que energia cinética o bloco deve iniciar o movimento para que a mola sofra uma compressão máxima de 0,40 m?

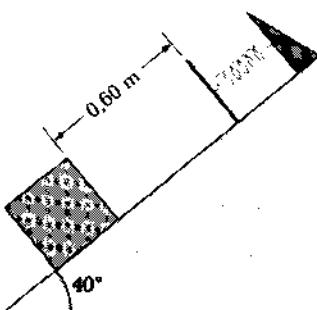


Fig. 8-59 Problema 105.

- 106.** Um bloco desce uma rampa entre os pontos *A* e *B*, situados a 5,0 m de distância, sob o efeito de uma força $\mathbf{F} = 2,0 \text{ N}$ paralela à rampa (Fig. 8-60). O módulo da força de atrito que age sobre o bloco é igual a 10 N. Se a energia cinética do bloco aumenta de 35 J durante o percurso de *A* para *B*, qual o trabalho realizado sobre o bloco pelo seu peso, no mesmo percurso?

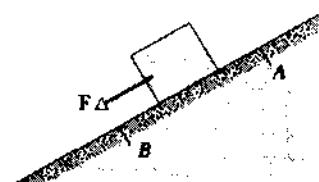


Fig. 8-60 Problema 106.

- 107.** Em $t = 0$, uma bola de 1,0 kg é jogada do alto de uma torre com uma velocidade $\mathbf{v} = (18 \text{ m/s})\mathbf{i} + (24 \text{ m/s})\mathbf{j}$. Qual a variação da energia potencial da bola entre $t = 0$ e $t = 6,0 \text{ s}$?

- 108.** Na Fig. 8-61, a massa da roldana e os atritos da roldana e do plano inclinado são desprezíveis. Se o sistema é liberado a partir do repouso, qual a energia cinética total das duas massas depois que a massa de 2,0 kg desceu 25 cm?

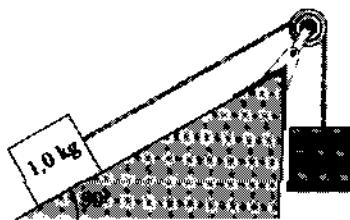


Fig. 8-61 Problema 108.

- 109.** Dois blocos, de massas M e $2M$ onde $M = 2,0 \text{ kg}$, são ligados a uma mola de constante de mola $k = 200 \text{ N/m}$ que está presa a uma parede (Fig. 8-62). A massa da roldana e os atritos da roldana e da superfície horizontal são desprezíveis. O sistema é liberado sem velocidade inicial, com a mola relaxada. (a) Qual é a energia cinética total das duas massas depois que a massa que está pendurada desceu 0,090 m? Qual é a energia cinética da massa que está pendurada depois que ela desceu 0,090 m? (c) Qual a distância percorrida pela massa que está pendurada até que a força exercida pela mola faça parar momentaneamente?

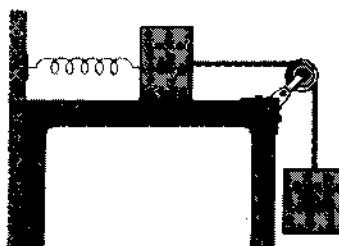


Fig. 8-62 Problema 109.

- 110.** Um bloco de 20 kg é colocado sobre uma mesa plana e ligado a uma mola horizontal de constante $k = 4,0 \text{ kN/m}$. O bloco é puxado para a direita, distendendo a mola de 10 cm em relação ao seu comprimento quando relaxada, e depois liberado sem velocidade inicial. A força de atrito entre o bloco em movimento e a mesa é de 80 N. (a) Qual a energia do bloco depois que ele se moveu 2,0 cm em relação ao ponto de partida? (b) Qual a energia cinética do bloco ao passar pela primeira vez pelo ponto em que a mola está com o comprimento inicial? (c) Qual a energia cinética máxima adquirida pelo bloco durante o percurso?

SISTEMAS DE PARTÍCULAS



Quando você dá um salto para a frente, o normal é que sua cabeça e tronco descrevam uma trajetória parabólica, parecida com a de uma bala de canhão. Entretanto, quando uma bailarina clássica executa um grand jeté como se mostra na fotografia ao lado, a cabeça e o tronco permanecem paralelos ao piso durante boa parte do salto. A bailarina parece flutuar no palco. A plateia pode não conhecer as leis do movimento de Newton, mas mesmo assim percebe que algo fora do comum está acontecendo. Como a bailarina consegue "desafiar" as leis de Newton?

9-1 Um Ponto Especial

Os físicos adoram observar fenômenos complicados e descobrir neles alguma coisa simples e familiar. Eis um exemplo. Quando você joga um machado para cima, o movimento é bem mais complexo do que, por exemplo, o de uma bola (Fig. 9-1a). Como cada ponto do machado se move de forma diferente, não pode ser representado como uma partícula única (Fig. 9-1b). Entretanto, se você examinar o movimento mais de perto, verificará que existe um ponto especial do machado que descreve uma trajetória parabólica, semelhante à percorrida pela bola. Este ponto, chamado **centro de massa**, fica perto da junção entre o cabo e a lâmina. Você pode localizá-lo equilibrando o machado sobre um dedo estendido; no momento em que o machado ficar em equilíbrio, o centro de massa estará bem acima do seu dedo. Se o machado fosse arremessado no escuro, com uma pequena lâmpada no centro de massa, a simplicidade do movimento deste ponto seria bem visível.

9-2 O Centro de Massa

Em nossa discussão do centro de massa, vamos começar com sistemas simples de partículas e depois passar para objetos mais complexos como machados.

Sistemas de Partículas

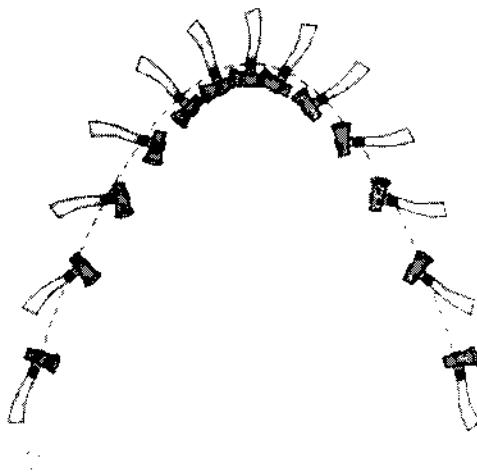
A Fig. 9-2a mostra duas partículas de massas m_1 e m_2 separadas por uma distância d . Escolhemos arbitrariamente a origem do eixo dos x para que coincidisse com m_1 . A posição do centro de massa deste sistema de duas partículas é definida através da seguinte equação:

$$x_{cm} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d. \quad (9-1)$$

Suponhamos, por exemplo, que $m_2 = 0$. Nesse caso, só existe uma partícula (m_1) e a posição do centro de massa

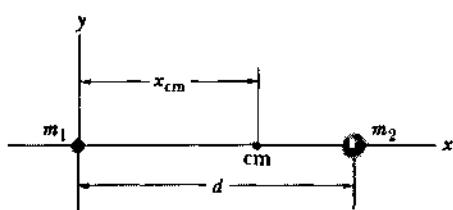


(a)

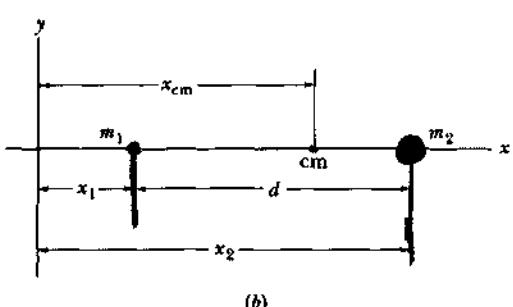


(b)

Fig. 9-1 (a) O centro de massa de uma bola, localizado no seu centro, segue uma trajetória parabólica quando a bola é lançada no ar. Os outros pontos da bola seguem trajetórias semelhantes. (b) O centro de massa de um machado (representado na figura por um círculo preto) também segue uma trajetória parabólica, embora os outros pontos do machado percorram trajetórias bem mais complexas.



(a)



(b)

Fig. 9-2 (a) Duas partículas de massas m_1 e m_2 , estão separadas por uma distância d . O ponto cm indica a posição do centro de massa, calculada com o auxílio da Eq. 9-1. (b) A mesma situação de (a), exceto pelo fato de que a origem do sistema de coordenadas foi deslocada para a esquerda. A posição do centro de massa pode ser calculada com o auxílio da Eq. 9-3. A posição do centro de massa em relação às duas partículas é a mesma nos dois casos.

deve coincidir com a posição dessa partícula. Realmente, de acordo com a Eq. 9-1, temos $x_{cm} = 0$. Se, por outro lado, $m_1 = 0$, teremos novamente apenas uma partícula (m_2) e, como seria de se esperar, $x_{cm} = d$. Se $m_1 = m_2$, as massas das partículas são iguais e o centro de massa deve ficar no ponto médio entre elas; de acordo com a Eq. 9-1, temos, como seria de se esperar, $x_{cm} \neq d/2$. Finalmente, se m_1 e m_2 forem diferentes entre si e diferentes de zero, x_{cm} , de acordo com a Eq. 9-1, deverá ter um valor compreendido entre 0 e d , isto é, o centro de massa terá que estar localizado entre as duas partículas.

A Fig. 9-2b mostra uma situação mais geral em que a origem do sistema de coordenadas foi deslocada para a esquerda. A posição do centro de massa é agora definida através da equação

$$\rightarrow x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \quad (9-2)$$

Observe que se fizermos $x_1 = 0$, x_2 será igual a d e a Eq. 9-2 ficará idêntica à Eq. 9-1, como seria de se esperar. Observe também que, apesar do deslocamento da origem do sistema de coordenadas, as distâncias do centro de massa até as duas partículas se mantêm inalteradas.

A Eq. 9-2 pode ser escrita na forma

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}, \quad (9-3)$$

onde M é a massa total do sistema. No exemplo que estamos considerando, $M = m_1 + m_2$. Podemos aplicar a mesma definição a uma situação mais geral em que n partículas estão situadas em diferentes pontos do eixo dos x . Nesse caso, a massa total é $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ e a posição do centro de massa é dada por

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_n x_n}{M} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i. \end{aligned} \quad (9-4)$$

onde i é um índice que assume todos os valores inteiros entre 1 e n e é usado para identificar as várias partículas e suas coordenadas.

Quando as partículas estão distribuídas em três dimensões, são necessárias três coordenadas para especificar a localização do centro de massa. Por extensão da Eq. 9-4, essas coordenadas são dadas por

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_n x_n}{M} \\ y_{cm} &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots + m_n y_n}{M} \\ z_{cm} &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \dots + m_n z_n}{M} \end{aligned} \quad (9-5)$$

Podemos também definir a posição do centro de massa usando a notação vetorial. A posição de uma partícula cujas coordenadas são x_i , y_i e z_i é dada pelo vetor posição

$$\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k} \quad (9-6)$$

onde o índice i identifica a partícula e \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} são vetores unitários na direção dos eixos x , y e z . Da mesma forma, a posição do centro de massa de um sistema de partículas pode ser expressa por um vetor-posição:

$$\mathbf{r}_{cm} = x_{cm} \mathbf{i} + y_{cm} \mathbf{j} + z_{cm} \mathbf{k}. \quad (9-7)$$

As três equações escalares da Eq. 9-5 podem, portanto, ser substituídas por uma única equação vetorial,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{cm} &= \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 + \dots + m_n \mathbf{r}_n}{M} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \end{aligned} \quad (9-8)$$

onde M é novamente a massa total do sistema. Para verificar que a Eq. 9-8 está correta, basta substituir \mathbf{r}_{cm} e \mathbf{r}_i por seus valores, dados pelas Eqs. 9-6 e 9-7, e separar as componentes x , y e z . Como resultado, aparecerão as três equações escalares da Eq. 9-5.

Corpos Rígidos

Um objeto comum, como um machado, contém um número tão grande de partículas (átomos) que é mais simples

considerá-lo como uma distribuição contínua de matéria. Nesse caso, as “partículas” se tornam elementos infinitesimais de massa, dm , os somatórios da Eq. 9-5 se transformam em integrais e as coordenadas do centro de massa passam a ser dadas por

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{M} \int x dm, \\ y_{cm} &= \frac{1}{M} \int y dm, \\ z_{cm} &= \frac{1}{M} \int z dm. \end{aligned} \quad (9-9)$$

Em princípio, as integrais devem ser calculadas para todos os elementos de massa do objeto. Na prática, porém, existe uma forma mais simples de calculá-las. Se o objeto tem uma densidade (massa por unidade de volume ou massa específica) uniforme, podemos escrever:

$$\frac{dm}{dV} = \frac{M}{V}, \quad (9-10)$$

onde dV é o volume ocupado por um elemento de massa e V é o volume total do objeto. Substituindo dm , dado pela Eq. 9-10, na Eq. 9-9, temos:

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{V} \int x dV, \\ y_{cm} &= \frac{1}{V} \int y dV, \\ z_{cm} &= \frac{1}{V} \int z dV. \end{aligned} \quad (9-11)$$

As integrais acima são calculadas sobre o volume do objeto (veja o Exemplo 9-4).

Muitos objetos possuem um ponto, eixo ou plano de simetria. Nesse caso, o centro de massa do objeto está sobre esse ponto, eixo ou plano. Por exemplo: o centro de massa de uma esfera homogênea (que possui um ponto de simetria) fica no centro da esfera. O centro de massa de um cone homogêneo (que possui um eixo de simetria, fica no eixo do cone. O centro de massa de uma banana (que possui um plano de simetria, que a divide em duas partes iguais) fica nesse plano.

O centro de massa de um objeto não está necessariamente localizado no interior do objeto. Não existe borracha no centro de massa de um pneu, nem ferro no centro de massa de uma ferradura.

EXEMPLO 9-1 A Fig. 9-3 mostra três partículas de massas $m_1 = 1,2$ km, $m_2 = 2,5$ kg e $m_3 = 3,4$ kg situadas nos vértices de um triângulo equilátero de lado $a = 140$ cm. Qual a localização do centro de massa?

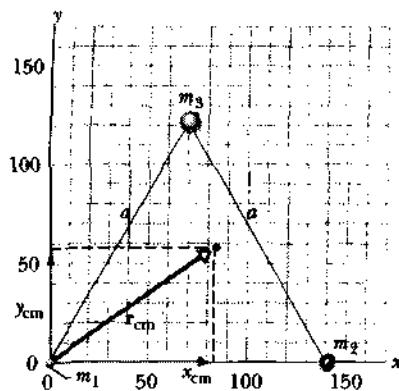


Fig. 9-3 Exemplo 9-1. Três partículas de massas diferentes formam um triângulo equilátero de lado a . A posição do centro de massa é definida pelo vetor \mathbf{r}_{cm} .

Solução Escolhemos os eixos de coordenadas x e y de tal forma que uma das partículas fique na origem e o eixo dos x coincida com um dos lados do triângulo. Nesse caso, as coordenadas das três partículas terão os seguintes valores:

Partícula	Massa (kg)	x (cm)	y (cm)
m_1	1.2	0	0
m_2	2.5	140	0
m_3	3.4	70	121

Devido à nossa escolha dos eixos, três das coordenadas que aparecem na tabela acima são nulas, o que simplifica os cálculos. A massa total M do sistema é 7.1 kg.

De acordo com a Eq. 9-5, as coordenadas do centro de massa são dadas por

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{M} \\ &= \frac{(1.2 \text{ kg})(0) + (2.5 \text{ kg})(140 \text{ cm}) + (3.4 \text{ kg})(70 \text{ cm})}{7.1 \text{ kg}} \\ &= 83 \text{ cm} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{M} \\ &= \frac{(1.2 \text{ kg})(0) + (2.5 \text{ kg})(0) + (3.4 \text{ kg})(121 \text{ cm})}{7.1 \text{ kg}} \\ &= 58 \text{ cm.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

A posição do centro de massa é definida pelo vetor \mathbf{r}_{cm} da Fig. 9-3.

EXEMPLO 9-2 Determine a posição do centro de massa da placa triangular homogênea que aparece na Fig. 9-4.

Solução A Fig. 9-4a mostra a placa dividida em fatias finas, paralelas a cada um dos três lados. Por razões de simetria, o centro de massa de uma fatia fina fica no ponto médio da fatia; assim, o centro de massa da placa deve ficar sobre a reta que liga os pontos médios de todas as fatias. Essa reta é a mesma que liga o vértice superior ao ponto médio do lado oposto. A placa ficaria em equilíbrio se fosse colocada sobre uma lâmina de faca de tal forma que os pontos de contato entre a lâmina e a placa coincidissem com essa reta de simetria.

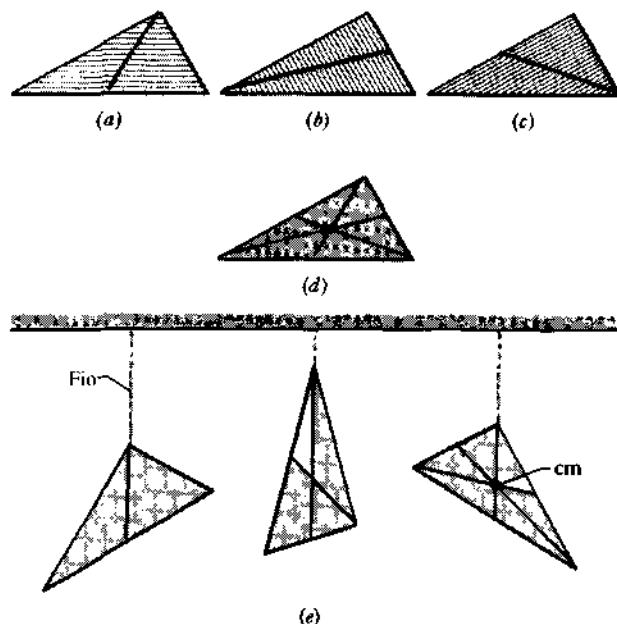


Fig. 9-4 Exemplo 9-2. Em (a), (b) e (c), o triângulo foi dividido em fatias finas, paralelas a cada um dos três lados. O centro de massa deve estar localizado sobre as retas bissetrizes a tais paralelas. (d) O centro de massa está no ponto de interseção das três retas. (e) O centro de massa também pode ser determinado pendurando-se o triângulo pelos três vértices, um de cada vez.

Nas Figs. 9-4b e 9-4c, a placa foi dividida em fatias paralelas aos dois outros lados do triângulo. Mais uma vez, o centro de massa deve estar localizado sobre as retas indicadas, que ligam um dos vértices do triângulo ao ponto médio do lado oposto. Assim, o centro de massa da placa deve estar situado na interseção das três retas de simetria, como se pode ver na Fig. 9-4d. Este é o único ponto que as três retas têm em comum.

É possível verificar experimentalmente esta conclusão partindo da ideia intuitiva (e correta) de que um objeto suspenso por um ponto se orienta de tal forma que o seu centro de massa fica na mesma vertical que o ponto de suspensão. Suspenda o triângulo pelos três vértices, um de cada vez, e trace uma linha vertical a partir de cada ponto de suspensão, como indicado na Fig. 9-4e. O centro de massa do triângulo será o ponto de interseção das três linhas.

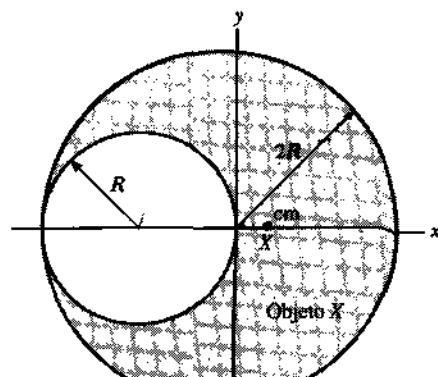
EXEMPLO 9-3 A Fig. 9-5(a) mostra uma placa de metal circular de raio $2R$ da qual foi removido um disco de raio R . Vamos chamar esta placa com um furo de objeto X . O centro de massa está indicado como um ponto sobre o eixo dos x . Determine a posição deste ponto.

Solução A Fig. 9-5b mostra o objeto X antes que o disco fosse removido. Chame o disco de objeto D e a placa original de objeto C . Por simetria, o centro de massa do objeto C fica na origem do sistema de coordenadas escolhido, como está indicado na figura.

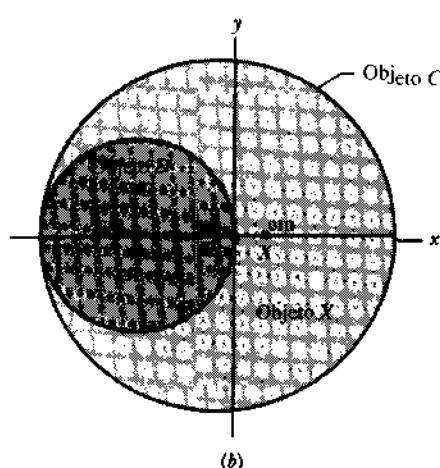
Para determinar a localização do centro de massa de um objeto composto de várias partes, supomos que a massa de cada uma das partes está concentrada no centro de massa dessa parte. Assim, o objeto C pode ser considerado como equivalente a duas massas pontuais, que representam os objetos X e D . A Fig. 9-5c mostra as posições dos centros de massa dos três objetos.

De acordo com a Eq. 9-2, a posição do centro de massa do objeto C é dada por

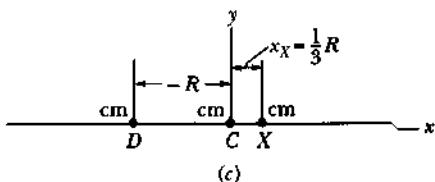
$$x_C = \frac{m_D x_D + m_X x_X}{m_D + m_X},$$



(a)



(b)



(c)

Fig. 9-5 Exemplo 9-3. (a) O objeto X é um disco de metal de raio $2R$ com um furo de raio R ; o seu centro de massa fica em x_X . (b) o objeto D é um disco de metal com a mesma posição e as mesmas dimensões que o furo do objeto X ; o seu centro de massa fica em $x_D = -R$. O objeto C é um objeto constituído pelos objetos X e D ; o seu centro de massa fica na origem do sistema de coordenadas. (c) Os centros de massa dos três objetos.

onde x_D e x_X são as posições dos centros de massa dos objetos D e X , respectivamente. Levando em conta o fato de que $x_C \approx 0$ e calculando o valor de x_X , temos:

$$x_X = -\frac{x_D m_D}{m_D + m_X} \quad (9-12)$$

Chamando de ρ a densidade (massa específica) do material de que é feita a placa e t a sua espessura, temos:

$$m_D = \pi R^2 \rho t \quad \text{e} \quad m_X = \pi(2R)^2 \rho t - \pi R^2 \rho t.$$

Com essas substituições e com $x_D = -R$, a Eq. 9-12 se torna

$$x_X = -\frac{(-R)(\pi R^2 \rho t)}{\pi(2R)^2 \rho t - \pi R^2 \rho t} = \frac{1}{3}R. \quad (\text{Resposta})$$

Observe que a densidade e a espessura da placa uniforme não aparecem na expressão final.

EXEMPLO 9-4 Silbury Hill (Fig. 9-6a), um monte de terra em uma planície perto de Stonehenge, foi construído há 4.600 anos por motivos desconhecidos, talvez para servir de cemitério. É um tronco de cone circular reto (Fig. 9-6b) de raios $r_i = 16$ m e $r_f = 88$ m e altura $h = 40$ m. Os lados do monte fazem um ângulo $\theta = 30^\circ$ com a horizontal.

a. Qual a posição do centro de massa do monte?

Solução Como o monte tem simetria circular, podemos dizer que o centro de massa está sobre o eixo do tronco de cone, a uma distância z_{cm} da base. Para determinar o valor de z_{cm} , usamos a terceira linha da Eq. 9-11. Podemos simplificar a integral levando em conta a simetria do monte. Para isso, consideramos uma "fatiá" horizontal de espessura in-

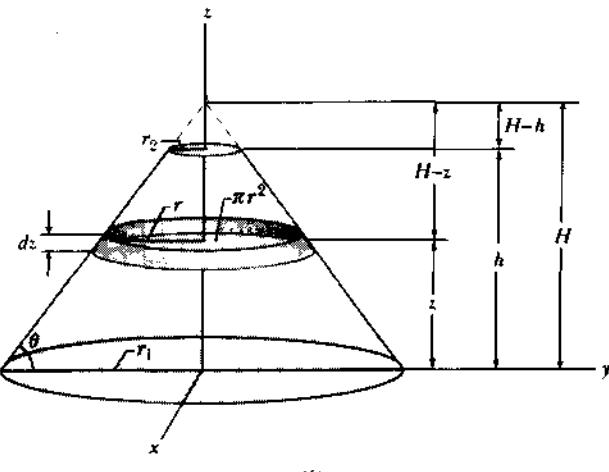


Fig. 9-6 Exemplo 9-4. (a) A construção de Silbury Hill, na Inglaterra, feita durante o período neolítico, exigiu cerca de 1.8×10^7 horas de trabalho. Sua finalidade é desconhecida. (b) Silbury Hill tem a forma aproximada de um tronco de cone circular reto. A figura mostra uma "fatiá" de raio r e espessura dz a uma distância z da base.

finitesimal, como a mostrada na Fig. 9-6b. A fatia tem raio r , espessura dz , área πr^2 e está a uma distância z da base. O volume dV da fatia é dado por

$$dV = \pi r^2 dz. \quad (9-13)$$

O monte é constituído por uma pilha dessas fatias, cujos raios variam desde r_1 , na base do monte, até r_2 , no seu topo. Se o cone fosse completo, teria uma altura que chamamos de H na Fig. 9-6b. A relação entre r e H é dada por

$$\tan \theta = \frac{H}{r_1} = \frac{H - z}{r},$$

ou

$$r = (H - z) \frac{r_1}{H}. \quad (9-14)$$

Substituindo as Eqs. 9-13 e 9-14 na terceira linha da Eq. 9-11, temos:

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \frac{1}{V} \int z dV = \frac{\pi r_1^2}{VH^2} \int_0^h z(H - z)^2 dz \\ &= \frac{\pi r_1^2}{VH^2} \int_0^h (z^3 - 2z^2H + zH^2) dz \\ &= \frac{\pi r_1^2}{VH^2} \left[\frac{z^4}{4} - \frac{2z^3H}{3} + \frac{z^2H^2}{2} \right]_0^h \\ &= \frac{\pi r_1^2 h^4}{VH^2} \left[\frac{1}{4} - \frac{2H}{3} + \frac{H^2}{2h^2} \right]. \end{aligned} \quad (9-15)$$

O volume de um cone circular reto é $\pi R^2 Z / 3$, onde R é o raio da base e Z a altura. O cone completo da Fig. 9-6b tem uma altura $H = r_1 \tan 30^\circ = 50,8 \text{ m}$. Para calcular o volume do monte, subtraímos o volume de um cone cujo raio da base é r_2 e cuja altura é $(H - h)$ do volume de um cone cujo raio da base é r_1 , e cuja altura é H :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi r_1^2 H - \frac{1}{3}\pi r_2^2 (H - h) \\ &= \frac{1}{3}\pi [(88 \text{ m})^2(50,8 \text{ m}) - (16 \text{ m})^2(50,8 \text{ m} - 40 \text{ m})] \\ &= 4,091 \times 10^5 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

Substituindo este e outros valores conhecidos na Eq. 9-15, temos:

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \frac{\pi (88 \text{ m})^2 (40 \text{ m})^4}{(4,091 \times 10^5 \text{ m}^3)(50,8 \text{ m})^2} \\ &\times \left[\frac{1}{4} - \frac{2(50,8 \text{ m})}{3(40 \text{ m})} + \frac{(50,8 \text{ m})^2}{2(40 \text{ m})^2} \right] \\ &= 12,37 \text{ m} \approx 12 \text{ m.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

b. Se a densidade do material de que é feito Silbury Hill é $\rho = 1,5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, qual o trabalho necessário para construir o monte, supondo que todo o material utilizado se encontrava inicialmente na sua base?

Solução O trabalho usado para construir o monte é igual à energia potencial gravitacional U associada ao monte, que pode ser calculada supondo que toda a massa está concentrada no centro de massa. A massa do monte é dada por $m = \rho V$. Temos, então:

$$\begin{aligned} W &= U = mgz_{cm} = \rho V g z_{cm} \\ &= (1,5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(4,091 \times 10^5 \text{ m}^3) \\ &\times (9,8 \text{ m/s}^2)(12,37 \text{ m}) \\ &= 7,4 \times 10^{10} \text{ J.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 1: PROBLEMAS DE CENTRO DE MASSA

Os Exemplos 9-1 a 9-3 apresentam três estratégias para simplificar problemas de centro de massa. (1) Fazer uso da simetria do objeto, seja ela pontual, axial ou planar. (2) Se o objeto puder ser dividido em várias partes, tratar cada uma dessas partes como uma partícula, localizada no centro de massa correspondente. (3) Tomar cuidado com a escolha dos eixos. Se o sistema é um grupo de partículas, a origem deve ficar na posição de uma das partículas. Se o sistema é um corpo com um eixo de simetria, o eixo de simetria deve ser tomado como eixo dos x . A escolha da origem do sistema é completamente arbitrária. A posição do centro de massa é independente do sistema de coordenadas escolhido, mas a escolha criteriosa do sistema de eixos pode simplificar consideravelmente a resolução do problema.

9-3 A Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas

Quando você dá uma tacada na sinuca, atingindo com a bola branca uma bola parada, é natural esperar que o sistema de duas bolas apresente algum movimento “para a frente” após o impacto. Seria muito estranho, por exemplo, se as duas bolas recuassem, ou se ambas se movessem para a direita ou para a esquerda.

O que continua a se mover para a frente, com um movimento inafetado pela colisão, é o centro de massa das duas bolas. Se você der várias tacadas e prestar atenção no centro de massa — que, no caso de dois corpos de massas iguais, como duas bolas de sinuca, fica no ponto médio da reta que liga os dois corpos — verá que o que estamos afirmado é verdade. Não importa que a colisão seja frontal ou de raspão; em todos os casos, o centro de massa das duas bolas move-se numa continuação natural da trajetória da bola branca, como se a colisão jamais tivesse acontecido. Vamos examinar este fenômeno mais de perto.

Substituímos o par de bolas de sinuca por um conjunto de n partículas de massas (possivelmente) diferentes. Não estamos interessados no movimento individual dessas partículas, mas *apenas* no movimento do seu centro de massa. Embora o centro de massa seja apenas um ponto imaginário, move-se como uma partícula cuja massa é igual à massa total do sistema; podemos associar uma posição, uma velocidade e uma aceleração a essa “partícula”. Como será demonstrado daqui a pouco, a equação que rege o movimento do centro de massa de um sistema de partículas é a seguinte:

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = M \mathbf{a}_{cm} \quad (\text{sistemas de partículas}) \quad (9-16)$$

A Eq. 9-16 nada mais é que a segunda lei de Newton aplicada ao centro de massa de um sistema de partículas. Observe que conserva a mesma forma ($\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$) que a equação que rege o movimento de uma única partícula. Para aplicar a Eq. 9-16 a casos concretos, é necessário interpretar com cuidado as três grandezas que aparecem na equação:

1. $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$ é a soma vetorial de todas as forças *externas* que agem sobre o sistema. As forças exercidas por uma parte do sistema sobre outra são chamadas de *forças internas* e não devem ser incluídas na Eq. 9-16.

2. M é a *massa total* do sistema. Estamos supondo que não há entrada nem saída de massa no sistema durante o movimento das partículas, de modo que M permanece constante. Nesse caso, dizemos que o sistema é **fechado**.

3. \mathbf{a}_{cm} é a aceleração do *centro de massa* do sistema. A Eq. 9-16 não fornece nenhuma informação a respeito da aceleração de outros pontos do sistema.

A Eq. 9-16, como todas as equações vetoriais, é equivalente a três equações escalares que envolvem as componentes de $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$ e \mathbf{a}_{cm} em relação aos três eixos do sistema de coordenadas. Essas equações são as seguintes:

$$\begin{aligned}\sum F_{\text{ext},x} &= Ma_{\text{cm},x} \\ \sum F_{\text{ext},y} &= Ma_{\text{cm},y} \\ \sum F_{\text{ext},z} &= Ma_{\text{cm},z}\end{aligned}\quad (9-17)$$

Podemos agora investigar o comportamento das bolas de sinuca. Enquanto a bola branca está se movendo, nenhuma força externa age sobre o sistema de duas bolas. De acordo com a Eq. 9-16, $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ implica $\mathbf{a}_{\text{cm}} = 0$. Como aceleração é a mesma coisa que taxa de variação da velocidade, chegamos à conclusão de que a velocidade do centro de massa das duas bolas não pode variar. Quando as duas bolas se chocam, as forças envolvidas são *internas*, exercidas pelas bolas uma sobre a outra. Essas forças não contribuem para $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$, que continua igual a zero. Assim, o centro de massa do sistema, que estava se movendo antes da colisão, continua a se mover depois da colisão, na mesma direção, no mesmo sentido e com a mesma velocidade.

Considere agora outro exemplo de sistema constituído por dois corpos, a Terra (de massa m_T) e a Lua (de massa

m_L). Ao contrário do que acontece com as bolas de sinuca, existe uma força externa agindo sobre o sistema, a força de atração gravitacional do Sol. De acordo com a Eq. 9-16, o centro de massa do sistema Terra-Lua se move sob a influência da força gravitacional do Sol como se uma única partícula de massa $m_T + m_L$ se encontrasse nessa posição, sob o efeito da força gravitacional do Sol. Como a Terra e a Lua giram em torno do centro de massa, que por sua vez está se movendo em torno do Sol, elas descrevem trajetórias onduladas, como se pode ver na Fig. 9-7.

A Eq. 9-16 se aplica não só a sistemas de partículas mas também a corpos sólidos, como o machado da Fig. 9-1b. Nesse caso, M da Eq. 9-16 é a massa do machado e $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$ é o peso Mg do machado. De acordo com a Eq. 9-16, $\mathbf{a}_{\text{cm}} = g$. Em outras palavras, o centro de massa do machado se move como se fosse uma única partícula de massa M .

A Fig. 9-8 mostra outro caso interessante. Suponha que um fogo de artifício seja lançado em uma trajetória parabólica. A certa altura, explode em fragmentos. Se a explosão não tivesse ocorrido, seguiria a trajetória indicada na figura por uma linha tracejada. As forças da explosão são *internas* ao sistema, isto é, são exercidas por partes do sistema sobre outras partes do mesmo sistema. Se ignorarmos a resistência do ar, a força *externa* total $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$ que age sobre o sistema será apenas o peso Mg do sistema, que é o mesmo antes e depois da explosão. Assim, de acordo com a Eq. 9-16, a aceleração do centro de massa dos fragmentos (enquanto não se chocam com o solo) permanece igual à g e este ponto segue a mesma trajetória parabólica que o fogo de artifício teria seguido se não tivesse explodido.

Quando uma bailarina executa um *grand jeté*, levanta os braços e estica as pernas horizontalmente assim que os pés deixam o chão (Fig. 9-9). Com isso, o centro de massa se desloca para cima em relação ao tronco da bailarina. Embora o centro de massa continue a descrever uma trajetória parabólica, esse deslocamento faz com que a cabeça e o tronco da bailarina atinjam uma altura menor do que em um salto normal. O resultado é que a cabeça e o tronco descrevem uma trajetória quase horizontal.

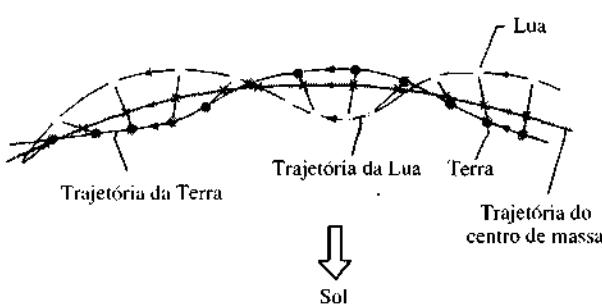


Fig. 9-7 A atração gravitacional do Sol é uma força externa que age sobre o sistema Terra-Lua. O centro de massa deste sistema descreve uma órbita simples em torno do Sol, como se toda a massa estivesse concentrada neste ponto. A Terra e a Lua seguem trajetórias onduladas, como se pode ver na figura, onde os pontos representam os centros da Terra e da Lua e os "X" o centro de massa do sistema. (Na verdade, o centro de massa fica no *interior* da Terra, de modo que as oscilações do movimento da Terra são muito menores do que a figura dá a entender.)

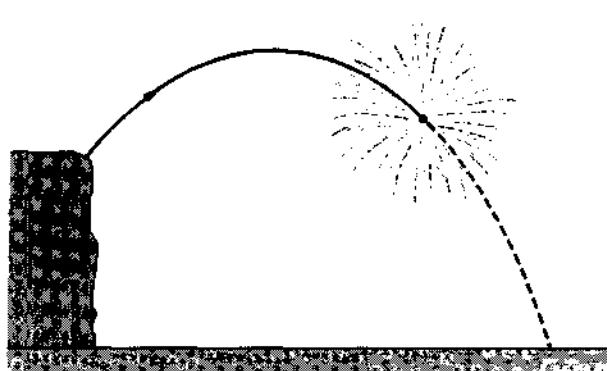


Fig. 9-8 Um fogo de artifício explode em pleno vôo. Na ausência de atrito com o ar, o centro de massa dos fragmentos continuaria a seguir a trajetória parabólica original até que os primeiros fragmentos atingissem o solo.

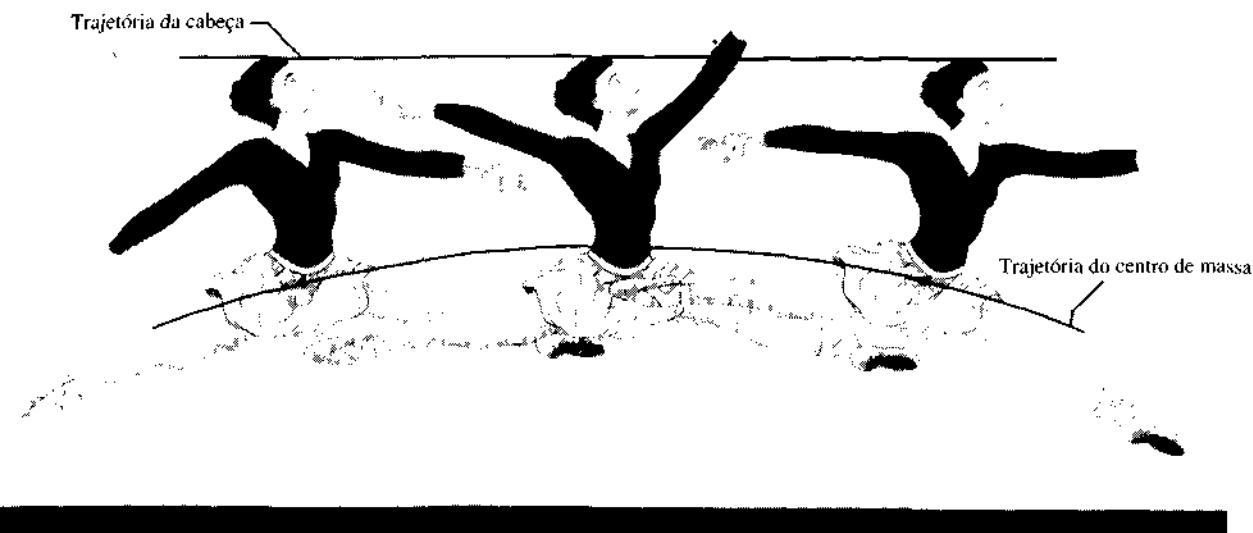


Fig. 9-9 Um grand jeté. (Adaptado de *The Physics of Dance*, de Kenneth Laws, Schirmer Books, 1984.)

Demonstração da Equação 9-16

Vamos agora demonstrar esta importante equação. De acordo com a Eq. 9-8, temos, para um sistema de n partículas,

$$Mr_{cm} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3 + \dots + m_n\mathbf{r}_n, \quad (9-18)$$

onde M é a massa total do sistema e \mathbf{r}_{cm} é o vetor que indica a posição do centro de massa.

Derivando a Eq. 9-18 em relação ao tempo, temos:

$$M\mathbf{v}_{cm} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + m_3\mathbf{v}_3 + \dots + m_n\mathbf{v}_n, \quad (9-19)$$

onde $\mathbf{v}_1 (= d\mathbf{r}_1/dt)$ é a velocidade da primeira partícula, e assim por diante, e $\mathbf{v}_{cm} (= d\mathbf{r}_{cm}/dt)$ é a velocidade do centro de massa.

Derivando a Eq. 9-19 em relação ao tempo, temos:

$$Ma_{cm} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + m_3\mathbf{a}_3 + \dots + m_n\mathbf{a}_n. \quad (9-20)$$

Onde $\mathbf{a}_1 (= d\mathbf{v}_1/dt)$ é a aceleração da primeira partícula, e assim por diante, e $\mathbf{a}_{cm} (= d\mathbf{v}_{cm}/dt)$ é a aceleração do centro de massa. Embora o centro de massa seja apenas um ponto geométrico, possui uma posição, uma velocidade e uma aceleração, como se fosse uma partícula.

De acordo com a segunda lei de Newton, $m_1\mathbf{a}_1$ é a força resultante \mathbf{F}_1 que age sobre a primeira partícula, e assim por diante. Podemos portanto reescrever a Eq. 9-20 na forma

$$Ma_{cm} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots + \mathbf{F}_n. \quad (9-21)$$

Entre as forças que aparecem no lado direito da Eq. 9-21 estão forças que as partículas do sistema exercem umas sobre as outras (forças internas) e forças exercidas sobre as partículas do sistema por partículas que não pertencem ao sistema (forças externas). De acordo com a terceira lei de Newton, as forças internas formam pares de tipo ação e reação e se cancelam mutuamente na soma que aparece do lado direito da Eq. 9-21. O que resta é a soma vetorial de todas as forças *externas* que agem sobre o sistema. A Eq.

9-21 se reduz portanto à Eq. 9-16, a equação que nos propusemos a demonstrar.

EXEMPLO 9-5 Uma bola de massa m e raio R é colocada no interior de uma casca esférica com a mesma massa m e raio interno $2R$. O sistema está em repouso sobre uma mesa na posição indicada na Fig. 9-10a. A bola é liberada, balança várias vezes para um lado e para outro e finalmente se imobiliza na parte inferior da casca esférica, como na Fig. 9-10c. Qual o deslocamento d da casca esférica durante o processo?

Solução As únicas forças externas que agem sobre o sistema são o peso do sistema e a força normal exercida pela mesa. Como nenhuma dessas forças tem componente horizontal, $\sum F_{ext,x} = 0$. De acordo com a Eq. 9-17, a componente da aceleração $a_{cm,x}$ do centro de massa do sistema também deve ser zero. Como a velocidade inicial é zero, a posição horizontal do centro de massa do sistema não pode variar durante o processo.

Podemos representar a bola e a casca esférica como partículas de massa m , localizadas nos respectivos centros de massa. A Fig. 9-10b mostra o sistema antes de a bola ser liberada e a Fig. 9-10d a situação final, depois que a bola está em repouso na parte inferior da casca esférica. Escolhemos a origem para que coincida com a posição inicial do centro da casca esférica. A Fig. 9-10b mostra que, em relação a esta origem, o centro de massa do sistema está localizado inicialmente a uma distância $R/2$ para a esquerda, na metade da distância entre as duas partículas (lembre-se de que ambas possuem a mesma massa m). Quando o sistema volta ao repouso, os centros de massa da bola e da casca esférica possuem a mesma coordenada horizontal que o centro de massa do sistema. Assim, como se pode ver na Fig. 9-10d, a casca esférica deve se mover para a esquerda de uma distância

$$d = \frac{1}{2}R \quad (\text{Resposta})$$

para que o centro de massa se mantenha estacionário em relação à horizontal.

EXEMPLO 9-6 A Fig. 9-11a mostra um sistema de três partículas, cada uma submetida a uma força externa diferente e todas inicialmente em repouso. Qual a aceleração do centro de massa deste sistema?

Solução A posição do centro de massa, calculada utilizando-se o método do Exemplo 9-1, está indicada na figura por um ponto. Como mostra a Fig. 9-11(b), tratamos este ponto como se fosse uma partícula real.

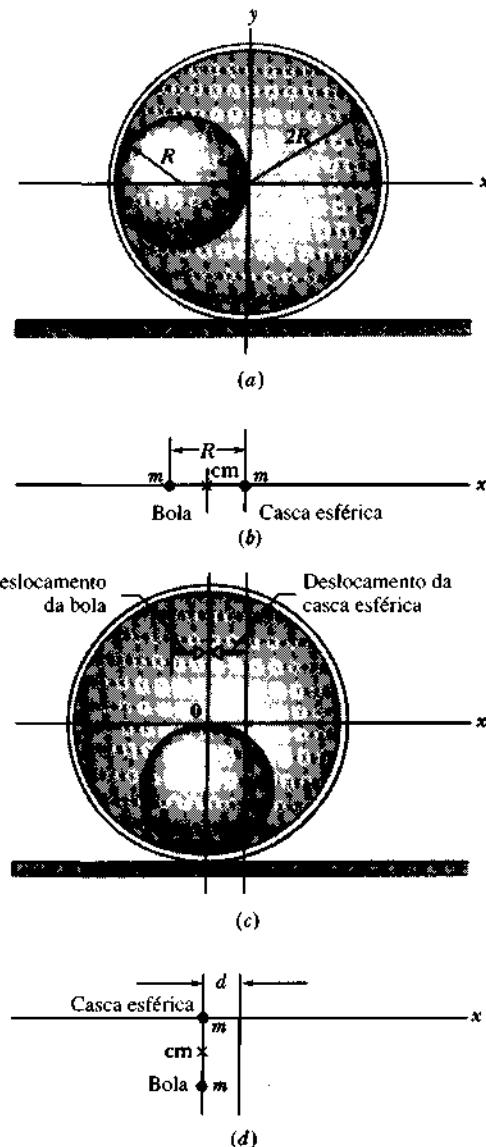


Fig. 9-10 Exemplo 9-5. (a) Uma bola de raio R é liberada a partir desta posição inicial e rola sem atrito no interior de uma casca esférica de raio $2R$. (b) Os centros de massa da bola, da casca esférica e do sistema constituído pelos dois corpos. (c) O estado final, depois que a bola volta ao repouso. A casca esférica deve se mover de tal forma que a coordenada horizontal do centro de massa do sistema não se modifique. (d) Os centros de massa da bola, da casca esférica e do sistema constituído pelos dois corpos possuem agora a mesma coordenada horizontal.

atribuindo a ele uma massa M igual à massa total do sistema (16 kg) e supondo que todas as forças externas sejam aplicadas a esse ponto.

A componente x da força externa resultante $\sum F_{\text{ext},x}$ que age sobre o centro de massa é dada por

$$\begin{aligned}\sum F_{\text{ext},x} &= 14 \text{ N} - 6,0 \text{ N} + (12 \text{ N})(\cos 45^\circ) \\ &= 16,5 \text{ N},\end{aligned}$$

e a componente y é dada por

$$\sum F_{\text{ext},y} = (12 \text{ N})(\sin 45^\circ) = 8,49 \text{ N}.$$

A força externa resultante tem portanto um módulo

$$\sum F_{\text{ext}} = \sqrt{(16,5 \text{ N})^2 + (8,49 \text{ N})^2} = 18,6 \text{ N}$$

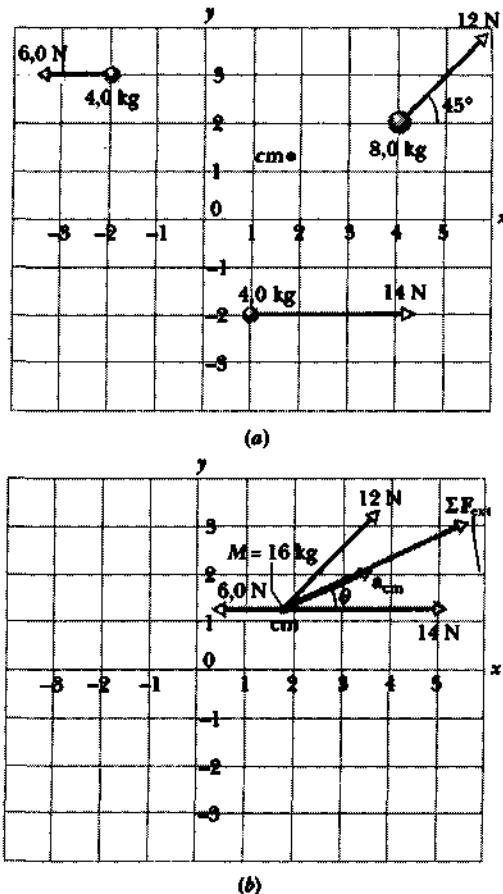


Fig. 9-11 Exemplo 9-6. (a) Três partículas, inicialmente em repouso nas posições indicadas, são submetidas a forças externas. O centro de massa do sistema está indicado na figura. (b) As forças são transferidas para o centro de massa do sistema, que se comporta como uma partícula cuja massa M é igual à massa total do sistema. A força resultante e a aceleração do centro de massa estão indicadas na figura.

e faz um ângulo com o eixo dos x dado por

$$\theta = \tan^{-1} \frac{8,49 \text{ N}}{16,5 \text{ N}} = \tan^{-1} 0,515 \\ = 27^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

Esta também é a direção do vetor aceleração \mathbf{a}_{cm} do centro de massa. De acordo com a Eq. 9-16, o módulo de \mathbf{a}_{cm} é dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{\text{cm}} &= \frac{\sum F_{\text{ext}}}{M} = \frac{18,6 \text{ N}}{16 \text{ kg}} = 1,16 \text{ m/s}^2 \\ &\approx 1,2 \text{ m/s}^2. \quad (\text{Resposta})\end{aligned}$$

As três partículas da Fig. 9-11a e o centro de massa do sistema se movem com acelerações diferentes. Cada partícula se move em linha reta (com velocidade cada vez maior) na direção da força que age sobre ela. O centro de massa, por sua vez, se move na direção de \mathbf{a}_{cm} .

9-4 Momento Linear*

Momento é outra dessas palavras que possuem vários significados na linguagem do dia-a-dia mas apenas um signi-

*Veja a nota de rodapé da Seção 10-1, onde se comenta a tradução da expressão *linear momentum*. (N. do R.)

ficado preciso na física. O momento linear de uma partícula é um vetor \mathbf{p} definido através da equação

$$\mathbf{p} = mv \quad (\text{momento linear de uma partícula}) \quad (9-22)$$

onde m é a massa da partícula e \mathbf{v} a sua velocidade. (O adjetivo *linear* é muitas vezes omitido, mas serve para distinguir \mathbf{p} do momento *angular*, que será definido no Cap. 12.) Observe que como m é uma grandeza escalar positiva, \mathbf{p} e \mathbf{v} , de acordo com a Eq. 9-22, têm sempre a mesma direção e o mesmo sentido.

Na verdade, Newton formulou a sua segunda lei em termos de momento:

A taxa de variação do momento de uma partícula é proporcional à resultante das forças que agem sobre a partícula e tem a mesma direção e o mesmo sentido que essa força.

Quando expressa em forma de equação, esta lei se torna:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (9-23)$$

Substituindo \mathbf{p} pelo seu valor, dado pela Eq. 9-22, temos:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(mv) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = ma.$$

Assim, as relações $\sum \mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ e $\sum \mathbf{F} = ma$ são expressões equivalentes da segunda lei de Newton quando aplicadas ao movimento de uma única partícula na mecânica clássica.

O Momento em Altas Velocidades

Para partículas que se movem com velocidades próximas às da luz, os resultados experimentais não estão de acordo com as previsões da mecânica newtoniana. Nesse caso, temos que usar a teoria da relatividade especial de Einstein. Nessa teoria, a relação $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ continua a ser válida, *contanto* que o momento de uma partícula não seja definido como mv , mas como

$$\mathbf{p} = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (9-24)$$

onde c é a velocidade da luz.

As velocidades de objetos de dimensões macroscópicas como bolas de futebol, balas de revólver e naves espaciais são tão menores que a velocidade da luz, que a grandeza $(v/c)^2$ na Eq. 9-24 é muito menor do que a unidade. Nesse caso, a Eq. 9-24 é equivalente à Eq. 9-22 e a teoria da relatividade conduz aos mesmos resultados que a mecânica newtoniana. No caso de elétrons e outras partículas subatômicas, porém, velocidades próximas às da luz são muito freqüentes e a definição da Eq. 9-24 deve ser usada, mesmo em problemas rotineiros de engenharia, como o projeto de aceleradores de partículas.

9-5 O Momento Linear de um Sistema de Partículas

Considere agora um sistema de n partículas, cada uma com sua massa, velocidade e momento linear. As partículas podem interagir umas com as outras e podem também estar sujeitas a forças externas. O sistema como um todo possui um momento linear total \mathbf{P} , definido como a soma vetorial dos momentos lineares de todas as partículas. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \cdots + \mathbf{p}_n \\ &= m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + m_3 \mathbf{v}_3 + \cdots + m_n \mathbf{v}_n. \end{aligned} \quad (9-25)$$

Comparando esta equação com a Eq. 9-19, vemos que

$$\mathbf{P} = M \mathbf{v}_{cm} \quad (\text{momento linear do sistema de partículas}) \quad (9-26)$$

o que nos permite definir de outra forma o momento linear de um sistema de partículas:

O momento linear de um sistema de partículas é igual ao produto da massa total M do sistema pela velocidade do seu centro de massa.

Derivando a Eq. 9-26 em relação ao tempo, temos:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \frac{d\mathbf{v}_{cm}}{dt} = Ma_{cm}. \quad (9-27)$$

Comparando as Eqs. 9-16 e 9-27, vemos que é possível escrever a segunda lei de Newton para um sistema de partículas na forma equivalente

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad (9-28)$$

A Eq. 9-28 é a generalização da equação $\sum \mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ para um sistema com mais de uma partícula. A Tabela 9-1 mostra algumas relações importantes que são válidas para partícula única e sistemas de partículas.

9-6 Conservação do Momento Linear

Suponha que a soma das forças externas que agem sobre um sistema de partículas seja zero (isto é, o sistema seja isolado) e que o número de partículas que compõem o sistema seja constante (isto é, o sistema seja fechado). Fazendo $\sum \mathbf{F}_{ext} = 0$ na Eq. 9-28, temos $d\mathbf{p}/dt = 0$, ou seja:

$$\mathbf{P} = \text{constante} \quad (\text{sistema isolado e fechado}) \quad (9-29)$$

Este importante resultado, chamado **lei de conservação do momento linear**, também pode ser escrito na forma

Tabela 9-1
Algumas Definições e Leis da Mecânica Clássica

Lei ou Definição	Partícula Única	Sistema de Partículas
Segunda lei de Newton	$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$	$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = M\mathbf{a}_{\text{cm}}$ (9-16)
Momento linear	$\mathbf{p} = mv$ (9-22)	$\mathbf{P} = Mv_{\text{cm}}$ (9-26)
Segunda lei de Newton	$\sum \mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ (9-23)	$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = d\mathbf{P}/dt$ (9-28)
Teorema do trabalho-energia cinética	$W = \Delta K$	

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f \quad (\text{sistema isolado e fechado}), \quad (9-30)$$

onde os índices se referem aos valores de \mathbf{P} em um certo instante inicial e em um instante subsequente. De acordo com as Eqs. 9-29 e 9-30, se nenhuma força externa agir sobre um sistema de partículas, o momento linear total do sistema permanecerá constante.

Como a lei da conservação da energia, discutida no Cap. 8, a lei de conservação do momento linear é mais geral do que a própria mecânica newtoniana; continua a ser válida no domínio das partículas subatômicas, onde as leis de Newton não mais se aplicam. Continua a ser válida quando as partículas possuem velocidades elevadas e a teoria da relatividade de Einstein deve ser utilizada, isto é, quando a Eq. 9-24 e não a Eq. 9-22 deve ser usada para calcular o momento linear.

Analizando a Eq. 9-26 ($\mathbf{P} = Mv_{\text{cm}}$), vemos que, se \mathbf{P} é constante, então v_{cm} , a velocidade do centro de massa, também deve ser constante. Isto, por sua vez, significa que \mathbf{a}_{cm} , a aceleração do centro de massa, deve ser igual a zero, o que está de acordo com a Eq. 9-16, ($\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = Ma_{\text{cm}}$) quando $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$. Assim, a lei da conservação do momento linear está de acordo com as duas formas da segunda lei de Newton para sistemas de partículas que aparecem na Tabela 9-1.

As Eqs. 9-29 e 9-30 são equações vetoriais e, portanto, equivalem a três equações escalares correspondentes à conservação do momento linear em três direções perpendiculares entre si. Dependendo das forças que agem sobre o sistema, o momento linear pode ser conservado em uma ou duas direções, mas não em todas.

Suponha, por exemplo, que você chute uma bola pelo alto. Enquanto a bola está se movendo, a única força externa que age sobre ela (supondo que o atrito com o ar possa ser desprezado) é o peso mg , dirigido verticalmente para baixo. Nessa situação, o momento linear da bola na direção vertical varia com o tempo, mas como a bola não está sendo submetida a nenhuma força horizontal, o momento linear na direção horizontal permanece constante.

EXEMPLO 9-7 Uma série de balas, todas de massa $m = 3,8 \text{ g}$, é disparada horizontalmente, com velocidade $v = 1.100 \text{ m/s}$, contra um bloco de madeira de massa $M = 12 \text{ kg}$ que se encontra inicialmente em repouso sobre uma mesa horizontal (Fig. 9-12). Desprezando o atrito do bloco com a mesa, qual a sua velocidade depois de ser atingido por oito balas?

Solução Para que o nosso sistema seja fechado, deve incluir tanto o bloco como as oito balas (veja a Fig. 9-12).

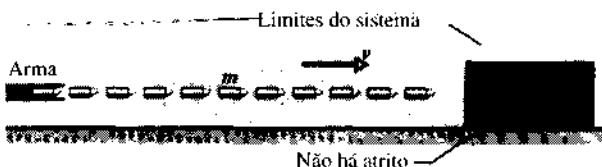


Fig. 9-12 Exemplo 9-7. Uma arma dispara uma série de balas na direção de um bloco de madeira. O sistema ao qual aplicamos a lei de conservação do momento linear está indicado na ilustração. O sistema é constituído pelo bloco e oito balas.

O sistema não está isolado, porque se encontra sob a influência de várias forças externas: as balas e bloco têm peso e a mesa que sustenta o bloco exerce uma força normal sobre ele. Entretanto, todas essas forças são verticais e portanto não podem mudar os momentos horizontais das balas e do bloco nem o momento horizontal do sistema como um todo. Não existe nenhuma força horizontal externa aplicada; as forças envolvidas nas colisões entre as balas e o bloco são *forças internas* e não podem, pois, mudar o momento horizontal do sistema.

Já que não existe nenhuma força capaz de mudar o momento horizontal do sistema, podemos aplicar a lei de conservação do momento linear (Eq. 9-30) na direção de movimento das balas. O momento linear horizontal inicial, medido enquanto as balas ainda não se chocaram com o bloco* e, portanto, em repouso, é dado por

$$P_i = n(mv),$$

onde mv é o momento linear de uma das balas e $n = 8$. O momento linear horizontal final, medido depois que todas as balas ficaram encravadas no bloco e este está se movendo sobre a mesa com velocidade V é dado por

$$P_f = (M + nm)V.$$

De acordo com a lei de conservação do momento linear, devemos ter

$$P_i = P_f$$

ou

$$n(mv) = (M + nm)V.$$

Calculando o valor de V , temos:

$$\begin{aligned} V &= \frac{nm}{M + nm} v \\ &= \frac{(8)(3.8 \times 10^{-3} \text{ kg})}{12 \text{ kg} + (8)(3.8 \times 10^{-3} \text{ kg})} (1.100 \text{ m/s}) \\ &= 2.8 \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

*Para simplificar, estamos supondo que os tiros foram disparados em rápida sucessão, de modo que a oitava bala deixou a arma antes que a primeira atingisse o alvo. (Esta hipótese não tem nenhuma influência sobre o resultado final.)

Com a escolha do sistema que foi feita, não foi necessário considerar os detalhes de como as balas atingiram o bloco. As forças envolvidas nessas colisões são todas internas.

EXEMPLO 9-8 Um canhão de massa $M = 1.300 \text{ kg}$ (Fig. 9-13) dispara uma bala de massa $m = 72 \text{ kg}$ na horizontal com uma velocidade $v = 55 \text{ m/s}$ em relação ao canhão, que recua (sem atrito) com uma velocidade V em relação à Terra.

a. Qual o valor de V ?

Solução Tomamos nosso sistema como constituído pelo canhão mais a bala. Fazendo isso, asseguramos que as forças envolvidas no disparo sejam internas ao sistema, e portanto possam ser ignoradas. As forças externas que agem sobre o sistema não têm componentes na direção horizontal. Assim, a componente horizontal do momento linear total do sistema deve ser a mesma antes e depois de o canhão ser disparado.

Escolhemos um eixo fixo em relação à Terra como referência e supomos que as velocidades são positivas quando estão dirigidas para a direita na Fig. 9-13. Como todas as velocidades que aparecem na figura são horizontais, podem ser representadas pelos seus respectivos valores escalares, usando-se o sinal negativo se o movimento for da direita para a esquerda. Assim, a velocidade v é representada por v . Embora a Fig. 9-13 mostre o vetor V apontando para a esquerda, não conhecemos de antemão o sentido de V , de modo que o representamos por V , que pode ser positivo ou negativo.

A velocidade da bala em relação à Terra é v_T , que representamos por v_T . A velocidade da bala em relação ao canhão é igual à diferença entre a velocidade da bala em relação à Terra e a velocidade do canhão em relação à Terra. Assim,

$$v = v_T - V,$$

ou

$$v_T = v + V. \quad (9-31)$$

Antes de o canhão ser disparado, o sistema possui um momento linear P_i igual a zero. Depois que o canhão é disparado, o sistema possui um momento linear horizontal P_f que, de acordo com a Eq. 9-31, é dado por

$$P_f = MV_f + mv = MV + m(v + V),$$

onde o primeiro termo do lado direito é o momento linear do canhão depois de sofrer o recuo e o segundo é o momento linear da bala.

De acordo com a lei de conservação do momento linear na direção horizontal, devemos ter $P_i = P_f$ ou

$$0 = MV + m(v + V)$$

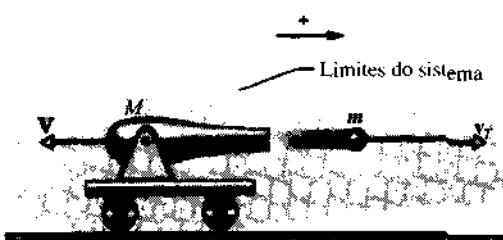


Fig. 9-13 Exemplo 9-8. Um canhão de massa M dispara uma bala de massa m . A bala tem uma velocidade v_T em relação à Terra e uma velocidade v em relação ao canhão. O canhão, depois de sofrer o recuo, adquire uma velocidade V em relação à Terra. A seta mostra o sentido que foi tomado como positivo para todas as velocidades.

Calculando o valor de V , temos:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{mv}{M+m} = -\frac{(72 \text{ kg})(55 \text{ m/s})}{1.300 \text{ kg} + 72 \text{ kg}} \\ &= -2,9 \text{ m/s.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

O sinal negativo mostra que o recuo faz com que o canhão se move da direita para a esquerda, como era de se esperar.

b. Qual o valor de v_T ?

Solução De acordo com a Eq. 9-31, temos:

$$\begin{aligned} v_T &= v + V = 55 \text{ m/s} + (-2,9 \text{ m/s}) \\ &= 52 \text{ m/s.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Por causa do recuo do canhão, a bala se move um pouco mais devagar em relação à Terra do que em relação ao canhão.

Observe que neste problema é importante escolher corretamente o sistema (canhão + bala) e especificar com clareza a referência (Terra ou canhão) em relação à qual são medidas as várias velocidades.

EXEMPLO 9-9 Uma espaçonave de massa M está viajando no espaço com uma velocidade $v_i = 2.100 \text{ km/h}$ em relação ao Sol. Em um determinado instante, ejetá para trás um estágio auxiliar de massa $0,20M$ com uma velocidade relativa $u = 500 \text{ km/h}$. Qual a velocidade da espaçonave depois que o estágio é ejetado?

Solução Vamos tomar o sistema como constituído pela espaçonave mais o estágio auxiliar e supor que a velocidade é positiva quando seu sentido é o mesmo em que a espaçonave está se movendo. Como o sistema é fechado e isolado, o momento linear é conservado, ou seja:

$$P_i = P_f, \quad (9-32)$$

onde os índices i e f se referem aos valores antes e depois da ejeção, respectivamente. Antes da ejeção, temos

$$P_i = Mv_i. \quad (9-33)$$

Seja U a velocidade do estágio ejetado e v_f a velocidade da espaçonave depois da ejeção, ambas medidas em relação ao Sol. O momento linear total do sistema depois da ejeção é dado por

$$P_f = 0,20MU + 0,80Mv_f, \quad (9-34)$$

onde o primeiro termo do lado direito é o momento linear do estágio e o segundo é o momento linear da espaçonave.

A velocidade relativa u do estágio ejetado é igual à diferença entre as velocidades da espaçonave e do estágio:

$$u = v_f - U,$$

ou

$$U = v_f - u.$$

Substituindo esta última expressão na Eq. 9-34 e substituindo as Eqs. 9-33 e 9-34 na Eq. 9-32, temos:

$$Mv_i = 0,20M(v_f - u) + 0,80Mv_f,$$

o que nos dá

$$v_f = v_i + 0,2u.$$

ou

$$\begin{aligned} v_f &= 2100 \text{ km/h} + (0.2)(500 \text{ km/h}) \\ &= 2200 \text{ km/h.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

EXEMPLO 9-10 A Fig. 9.14 mostra dois blocos ligados por uma mola e apoiados em uma superfície horizontal sem atrito. Os blocos, de massas m_1 e m_2 , são afastados e depois liberados sem velocidade inicial. Qual é a fração da energia cinética total em cada bloco depois que eles são liberados?

Solução Tomamos os dois blocos e a mola como o nosso sistema e a superfície horizontal onde estão apoiados como referência. Supomos que as velocidades são positivas quando os blocos se movem da esquerda para a direita (Fig. 9-14).

O momento P_i do sistema antes que os blocos sejam liberados é zero. O momento P_f depois que os blocos são liberados é dado por

$$P_f = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades dos blocos. De acordo com a lei de conservação do momento, devemos ter $P_i = P_f$, ou

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Assim, temos

$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{m_2}{m_1}. \quad (9-35)$$

O sinal negativo indica que as duas velocidades têm sempre sentidos opostos. A Eq. 9-35 é válida para qualquer instante depois que os blocos são liberados, sejam quais forem suas velocidades nesse momento.

As energias cinéticas dos dois blocos são $K_1 = m_1 v_1^2/2$ e $K_2 = m_2 v_2^2/2$ e a fração que queremos calcular, para o bloco de massa m_1 , é dada por

$$\text{frac}_1 = \frac{K_1}{K_1 + K_2} = \frac{\frac{1}{2}m_1 v_1^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2}. \quad (9-36)$$

De acordo com a Eq. 9-35, $-v_2 = -v_1 (m_1/m_2)$. Substituindo v_2 por seu valor na Eq. 9-36, obtemos, depois de algumas simplificações,

$$\text{frac}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (\text{Resposta}) \quad (9-37)$$

Da mesma forma, para o bloco de massa m_2 ,

$$\text{frac}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \quad (\text{Resposta}) \quad (9-38)$$

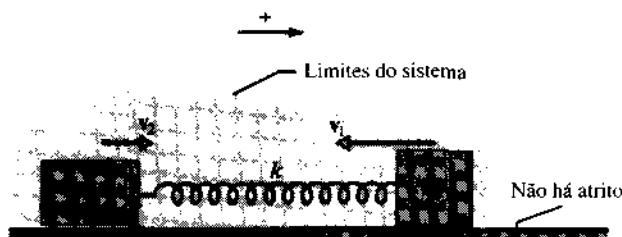


Fig. 9-14 Exemplo 9-10. Dois blocos apoiados em uma superfície sem atrito foram afastados e depois liberados sem velocidade inicial. A soma vetorial dos momentos lineares dos blocos na direção horizontal permanece nula no movimento subsequente. Os limites do sistema estão indicados na ilustração. A seta mostra o sentido que foi tomado como positivo para todas as velocidades.

Assim, a divisão de energia cinética entre os dois blocos é independente do tempo, com o bloco de menor massa recebendo a maior fração da energia cinética. Se, por exemplo, $m_2 = 10m_1$, temos:

$$\text{frac}_1 = \frac{10m_1}{m_1 + 10m_1} = 0.91$$

e

$$\text{frac}_2 = \frac{m_1}{m_1 + 10m_1} = 0.09.$$

Se $m_2 \gg m_1$, então, de acordo com as Eqs. 9-37 e 9-38, $\text{frac}_1 \approx 100\%$ e $\text{frac}_2 \approx 0$, isto é, praticamente toda a energia cinética se concentrará no bloco de massa menor.

As Eqs. 9-37 e 9-38 também podem ser aplicadas a uma pedra que cai. Nesse caso, m_2 é a massa da Terra, m_1 é a massa da pedra e a mola da Fig. 9-14 é substituída pela força gravitacional (atrativa) entre a Terra e a pedra. O melhor sistema de coordenadas para este problema é um sistema para o qual o centro de massa do sistema pedra-Terra esteja em repouso. Neste sistema, a pedra fica com praticamente toda a energia cinética ($\text{frac}_1 \approx 1$) e a energia cinética da Terra é praticamente zero ($\text{frac}_2 \approx 0$). De acordo com a Eq. 9-35, porém, vemos que os momentos lineares da pedra e da Terra permanecem constantes durante o movimento; a pequena velocidade v que a Terra adquire é compensada por sua gigantesca massa.

EXEMPLO 9-11 Uma bomba explode no interior de um coco de massa M , inicialmente em repouso em um piso sem atrito, quebrando-o em três pedaços, que são arremessados horizontalmente. A Fig. 9-15 mostra os pedaços vistos de cima. O pedaço C , com uma massa de $0.30M$, tem uma velocidade $v_{fC} = 5.0 \text{ m/s}$. (O índice f se refere à velocidade final do fragmento.)

a. Qual a velocidade do fragmento B , de massa $0.20M$?

Solução Escolhemos o sistema de coordenadas xy que aparece na Fig. 9-15b, com o semi-eixo negativo dos x coincidindo com v_{fA} . O eixo dos x faz um ângulo de 80° com v_{fC} e um ângulo de 50° com v_{fB} .

O momento linear do coco (e seus fragmentos) é conservado tanto na direção do eixo dos x como na direção do eixo dos y porque as forças envolvidas na explosão são forças internas e não existe nenhuma força externa agindo sobre o coco na direção desses eixos. Na direção do eixo dos y , a lei de conservação do momento linear assume a forma

$$P_{iy} = P_{fy}, \quad (9-39)$$

onde o índice i se refere ao valor inicial (antes da explosão) e o índice y se refere à componente y do vetor \mathbf{P}_i ou \mathbf{P}_r .

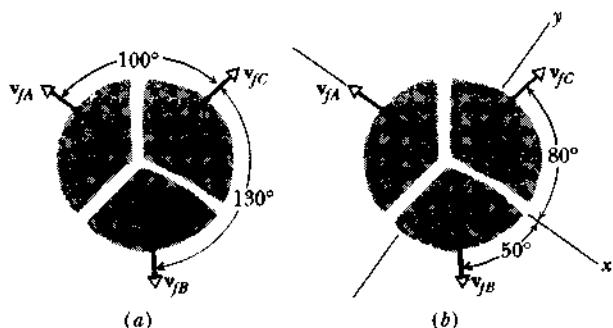


Fig. 9-15 Exemplo 9-11. Uma bomba explode e três pedaços de coco deslizam sem atrito em uma superfície plana. (a) A explosão vista de cima. (b) A mesma vista, mostrando o sistema de coordenadas usado para resolver o problema.

Como o coco se encontra inicialmente em repouso, a componente P_{ix} do momento linear inicial é zero. Para determinar uma expressão para P_{ix} , calculamos a componente y do momento linear final para cada fragmento:

$$p_{fA,y} = 0,$$

$$p_{fB,y} = -0.20Mv_{fB,y} = -0.20Mv_{fB} \text{ sen } 50^\circ$$

$$p_{fC,y} = 0.30Mv_{fC,y} = 0.30Mv_{fC} \text{ sen } 80^\circ.$$

(Observe que $p_{fA,x} = 0$ por causa da forma como os eixos foram escolhidos.) A Eq. 9-39 se torna portanto

$$P_{iy} = P_{fy} = p_{fA,y} + p_{fB,y} + p_{fC,y}.$$

Nesse caso, com $v_{fC} = 5.0 \text{ m/s}$, temos:

$$0 = 0 - 0.20Mv_{fB} \text{ sen } 50^\circ + (0.30M)(5.0 \text{ m/s}) \text{ sen } 80^\circ,$$

e portanto

$$v_{fB} = 9.64 \text{ m/s} \approx 9.6 \text{ m/s.} \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual a velocidade do fragmento A?

Solução Como o momento linear também é conservado na direção do eixo dos x , temos:

$$P_{ix} = P_{fx}, \quad (9-40)$$

onde $P_{ix} = 0$ porque o coco se encontra inicialmente em repouso. Para determinar P_{fx} , calculamos as componentes x dos momentos finais, usando o fato de que o fragmento A deve ter uma massa de $0.50M$:

$$p_{fA,x} = -0.50Mv_{fA},$$

$$p_{fB,x} = 0.20Mv_{fB,x} = 0.20Mv_{fB} \cos 50^\circ,$$

$$p_{fC,x} = 0.30Mv_{fC,x} = 0.30Mv_{fC} \cos 80^\circ.$$

A Eq. 9-40 se torna portanto

$$P_{ix} = P_{fx} = p_{fA,x} + p_{fB,x} + p_{fC,x}.$$

Nesse caso, com $v_{fC} = 5.0 \text{ m/s}$ e $v_{fB} = 9.64 \text{ m/s}$, temos:

$$0 = -0.50Mv_{fA} + 0.20M(9.64 \text{ m/s}) \cos 50^\circ$$

$$+ 0.30M(5.0 \text{ m/s}) \cos 80^\circ,$$

e portanto

$$v_{fA} = 3.0 \text{ m/s.} \quad (\text{Resposta})$$

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 2: CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR

Esta é uma boa ocasião para reler a Tática 1 do Cap. 8, que se refere a problemas que envolvem a conservação de energia mecânica. As mesmas sugestões apresentadas naquela ocasião se aplicam a problemas que envolvem a conservação de momento linear.

Em primeiro lugar, certifique-se de que você está trabalhando com um sistema fechado e isolado. *Fechado* significa que o número de partículas do sistema permanece constante (*nenhuma* partícula entra no sistema ou sai dele). *Isolado* significa que a força externa resultante sobre o sistema é nula. Quando o sistema não é fechado e isolado, as Eqs. 9-29 e 9-30 não são verdadeiras.

Lembre-se de que o momento linear é um vetor e que cada componente pode ser conservado separadamente, contanto que o componente correspondente da força externa resultante seja nulo. No Exemplo 9-8, o sistema canhão + bala não está submetido a nenhuma força externa na direção horizontal, de modo que a componente horizontal do momento linear é conservada. Entretanto, a força externa resultante que age ver-

ticalmente sobre este sistema não é nula: a bala está sujeita ao próprio peso durante toda a trajetória. Assim, neste sistema a componente vertical do momento linear não é conservada.

Escolha dois estados apropriados do sistema (que você pode chamar de estado inicial e estado final) e escreva expressões para o momento linear do sistema nesses dois estados. Ao escrever essas expressões, certifique-se de que os movimentos de todos os corpos do sistema foram especificados em relação ao mesmo sistema de coordenadas de um referencial inercial. Certifique-se também de que todos os corpos que fazem parte do sistema foram incluídos nas expressões e nenhum corpo exterior ao sistema foi incluído. O Exemplo 9-8 mostra como é importante saber exatamente em relação a que sistema de coordenadas (a Terra ou o canhão, no caso) o movimento está sendo especificado.

Finalmente, iguale as expressões de \mathbf{P}_i e \mathbf{P}_f e calcule o valor da grandeza pedida.

9-7 Sistemas de Massa Variável: Um Foguete (Opcional)

Nos sistemas que discutimos até agora, supusemos que a massa total do sistema permanecia constante. Nem sempre isso é verdade. No caso de um foguete, por exemplo (Fig. 9-16), o combustível constitui a maior parte da massa inicialmente presente; todo esse combustível é queimado e ejetado pelo foguete durante o vôo.

Trataremos do problema da variação de massa do foguete durante o vôo aplicando a segunda lei de Newton, não ao foguete, mas ao sistema constituído por ele, mais os produtos de combustão ejetados. A massa deste último sistema não varia durante o vôo.

Cálculo da Aceleração

Suponha que você esteja em um referencial de inércia observando um foguete que viaja pelo espaço sem estar sub-

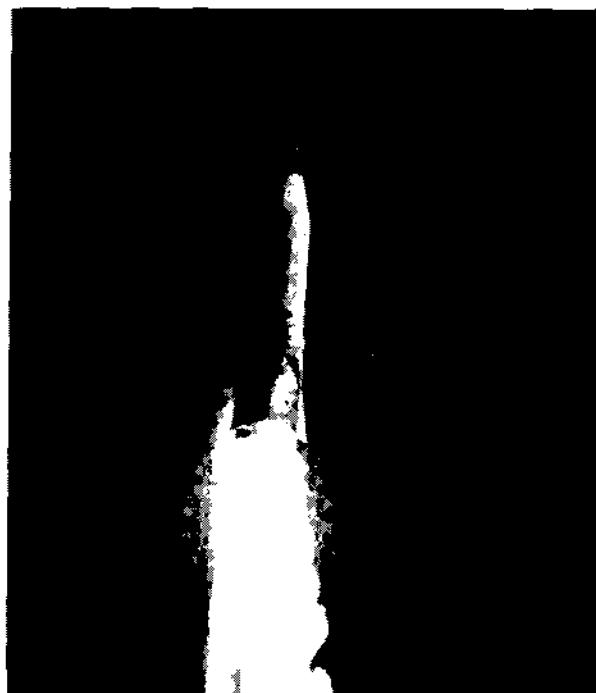


Fig. 9-16 Decolagem de um foguete do Projeto Mercury.

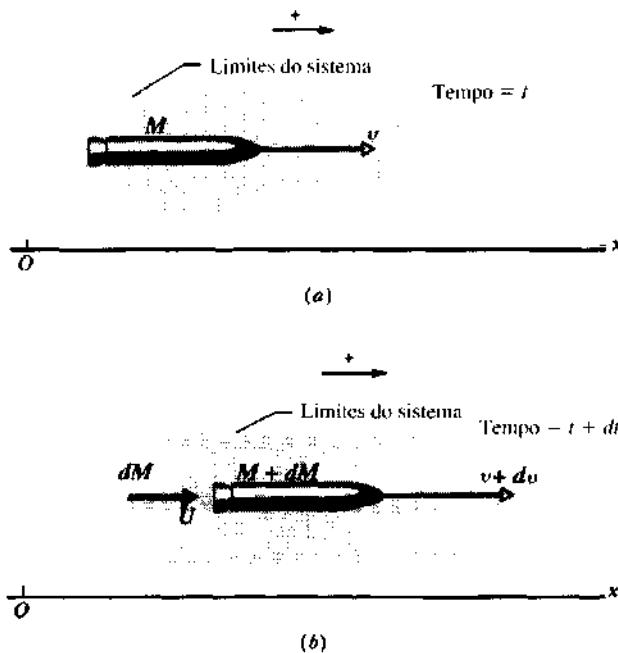


Fig. 9-17 (a) Um foguete de massa M no instante t . (b) O mesmo foguete no instante $t + dt$. Os produtos de combustão ejetados durante o intervalo dt também aparecem na ilustração. A seta mostra o sentido que foi tomado como positivo para todas as velocidades.

metido a nenhuma força gravitacional ou de atrito. Seja M a massa do foguete e v a sua velocidade em um certo instante de tempo t (Fig. 9-17a).

A Fig. 9-17b mostra a situação depois que se passa um intervalo de tempo dt . O foguete agora está viajando com velocidade $v + dv$ e possui uma massa $M + dM$, em que a variação de massa dM é uma quantidade negativa. Os produtos de combustão ejetados pelo foguete durante o intervalo de tempo dt têm massa $-dM$ e velocidade U em relação ao nosso referencial de inércia.

Nosso sistema é constituído pelo foguete mais os produtos de combustão ejetados durante o intervalo dt . Como o sistema é fechado e isolado, o momento linear deve ser conservado durante o intervalo dt , isto é,

$$P_i = P_f, \quad (9-41)$$

onde os índices i e f se referem aos valores no início e no final do intervalo dt . A Eq. 9-41 pode ser reescrita na forma

$$Mv = -dM U + (M + dM)(v + dv), \quad (9-42)$$

em que o primeiro termo do lado direito é o momento linear dos produtos de combustão ejetados durante o intervalo dt e o segundo termo é o momento linear do foguete no final do mesmo intervalo.

Podemos simplificar a Eq. 9-42 usando a velocidade u dos produtos de combustão em relação ao foguete. Para obter o valor de u , subtraímos a velocidade U dos produtos ejetados da velocidade $v + dv$ do foguete no final do intervalo dt :

$$u = (v + dv) - U.$$

Isso nos dá

$$U = v + dv - u. \quad (9-43)$$

Substituindo este resultado na Eq. 9-42, obtemos, depois de algumas simplificações,

$$-dM u = M dv. \quad (9-44)$$

Dividindo ambos os membros por dt , temos:

$$-\frac{dM}{dt} u = M \frac{dv}{dt}. \quad (9-45)$$

Podemos substituir dM/dt (a taxa com que o foguete perde massa) por $-R$, onde R é um número positivo que expressa o consumo de combustível do foguete. Além disso, dv/dt nada mais é que a aceleração do foguete. Com essas mudanças, a Eq. 9-45 se torna

$$Ru = Ma \quad (\text{primeira equação do foguete}). \quad (9-46)$$

A Eq. 9-46 é válida para qualquer instante de tempo, contanto que a massa M , o consumo de combustível R e a aceleração a sejam calculados para esse instante.

O lado esquerdo da Eq. 9-46 tem dimensões de força ($\text{kg}\cdot\text{m/s}^2 = \text{N}$) e depende apenas das características de projeto do motor do foguete, isto é, a taxa R (massa por unidade de tempo) com que os produtos de combustão são ejetados e a velocidade u com que eles são ejetados em relação ao foguete. Este termo Ru é chamado de **empuxo** do foguete e representado pela letra E . A relação entre a Eq. 9-46 e a segunda lei de Newton fica evidente quando escrevemos esta equação na forma $E = Ma$, onde a é a aceleração do foguete no momento em que sua massa é M .

Cálculo da Velocidade

Como varia a velocidade do foguete durante o vôo? De acordo com a Eq. 9-44, temos:

$$dv = -u \frac{dM}{M}.$$

Integrando ambos os membros, temos:

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -u \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M},$$

onde M_i é a massa inicial do foguete e M_f a massa final. Calculando a integral, temos:

$$v_f - v_i = u \ln \frac{M_i}{M_f} \quad (\text{segunda equação do foguete}). \quad (9-47)$$

A Eq. 9-47 permite calcular o aumento de velocidade do foguete quando a massa diminui de M_i para M_f .^{*} Ela deixa clara a vantagem dos foguetes de vários estágios, em que M_i é reduzida, ejetando-se os estágios sucessivos quando o combustível desses estágios se esgota. O ideal é que o foguete chegue ao destino apenas com a carga útil.

EXEMPLO 9-12 Um foguete cuja massa inicial M_i é 850 kg consome combustível a uma taxa $R = 2.3 \text{ kg/s}$. A velocidade u dos gases ejetados em relação ao foguete é de 2.800 m/s.

a. Qual o empuxo do foguete?

Solução O empuxo é dado por

$$\begin{aligned} E &= Ru = (2.3 \text{ kg/s})(2.800 \text{ m/s}) \\ &= 6.440 \text{ N} \approx 6400 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual a aceleração inicial do foguete?

Solução De acordo com a segunda lei de Newton, temos:

$$a = \frac{E}{M_i} = \frac{6.440 \text{ N}}{850 \text{ kg}} = 7.6 \text{ m/s}^2. \quad (\text{Resposta})$$

Para ser lançado da superfície da Terra, um foguete deve ter uma aceleração inicial maior do que $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Em outras palavras, o empuxo E ($= 6.400 \text{ N}$) do foguete deve ser maior do que o peso inicial do foguete, que é $M_i g = 850 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 = 8.300 \text{ N}$. Como os requisitos de aceleração ou empuxo não são satisfeitos, o foguete não pode ser lançado da superfície da Terra. Ele poderia ser lançado já no espaço, a partir de um outro foguete, mais potente.

c. Suponha, então, que o foguete seja lançado de uma nave que já se encontra no espaço, onde a força gravitacional é desprezível. A massa M_f do foguete quando o combustível se esgota é 180 kg. Qual a velocidade do foguete em relação à nave nesse momento?

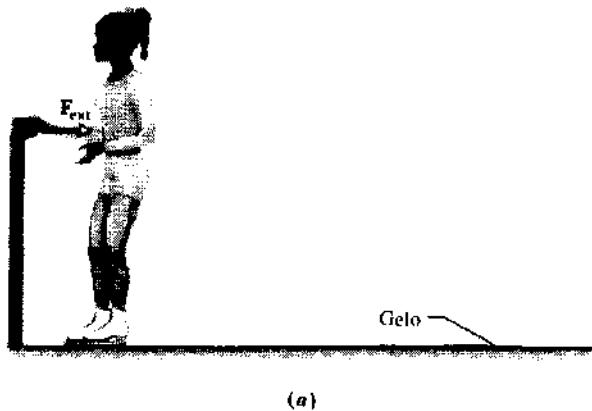
Solução O foguete começo com uma velocidade relativa $v_i = 0$. De acordo com a Eq. 9-47, temos:

$$\begin{aligned} v_f &= u \ln \frac{M_i}{M_f} \\ &= (2.800 \text{ m/s}) \ln \frac{850 \text{ kg}}{180 \text{ kg}} \\ &= (2.800 \text{ m/s}) \ln 4.72 \approx 4.300 \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

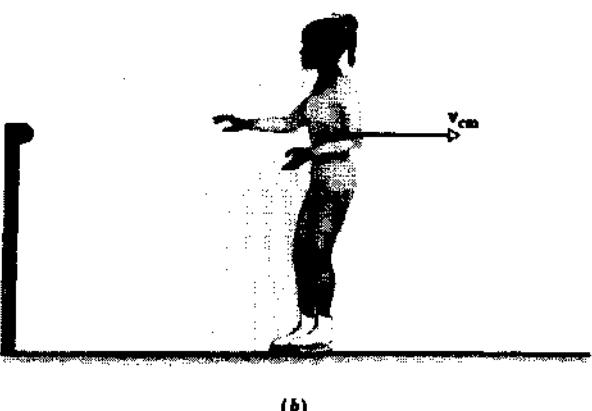
Observe que a velocidade final do foguete pode ser maior do que a velocidade de ejeção u .

9-8 Sistemas de Partículas: Variações na Energia Cinética (Opcional)

Suponha que uma patinadora se afaste de um corrimão, como na Fig. 9-18, ganhando energia cinética no proce-



(a)



(b)

Fig. 9-18 (a) Uma patinadora se afasta de um corrimão. O corrimão exerce uma força F_{ext} sobre ela. (b) A patinadora desliza no gelo, com velocidade v_{cm} .

so. De onde vem essa energia? Se você perguntar à patinadora, ela certamente responderá: "De mim!" E estará certa. A patinadora usa suas reservas internas de energia para esticar o braço e se afastar do corrimão, e tem plena consciência do esforço físico envolvido.

Entretanto, a variação da energia cinética da patinadora não pode ser explicada pelo teorema do trabalho e energia cinética, apresentado na Seção 7-5.

$$W = K_f - K_i = \Delta K \quad (\text{uma partícula}), \quad (9-48)$$

segundo o qual o aumento de energia cinética de uma partícula é igual ao trabalho realizado pela força F_{ext} a que tal partícula está submetida. A razão para isso é que a patinadora não pode ser considerada como uma partícula. O critério para representar o corpo como uma partícula é que todas as partes do corpo se movam da mesma forma. Ao esticar o braço para se afastar do corrimão, a patinadora viola esse requisito. Assim, deve ser tratada como um sistema de partículas, ao qual a Eq. 9-48 simplesmente não se aplica.

Este resultado nos leva a outra questão, uma questão formal. Encontramos pela primeira vez a segunda lei de Newton ($\sum F = ma$) no estudo de uma única partícula. Vimos na Seção 9-3 que escrevendo a mesma lei na forma $\sum F_{\text{ext}} = Ma_{\text{com}}$ podemos aplicá-la a sistemas de partículas. Para isso, trata-

*O símbolo "ln" na Eq. 9-47 significa logaritmo neperiano, ou logaritmo natural, que é o logaritmo na base e ($= 2.718\dots$). Aperte a tecla "ln" e não a tecla "log" na sua calculadora.

mos o sistema como uma partícula única de massa M , localizada no centro de massa do sistema. Em seguida, supomos que a força externa resultante $\sum F_{\text{ext}}$ age sobre o sistema neste ponto. A questão agora é a seguinte: "Podemos usar esta forma da segunda lei de Newton para estudar as variações da energia cinética de um sistema de partículas?" A resposta é afirmativa.

Considere um sistema de partículas, como a patinadora, submetido a uma força externa F_{ext} (que pode ser a resultante de várias forças), e tome o eixo dos x na direção da força. Suponha que o centro de massa do sistema se desloca de uma distância dx_{cm} ao longo deste eixo em um intervalo de tempo dt . Para este movimento unidimensional, a segunda lei de Newton assume a forma

$$F_{\text{ext}} = Ma_{\text{cm}}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação acima por dx_{cm} , temos:

$$\begin{aligned} F_{\text{ext}} dx_{\text{cm}} &= Ma_{\text{cm}} dx_{\text{cm}} = M \frac{dv_{\text{cm}}}{dt} dx_{\text{cm}} \\ &= M \frac{dx_{\text{cm}}}{dt} dv_{\text{cm}} \end{aligned}$$

ou

$$F_{\text{ext}} dx_{\text{cm}} = Mv_{\text{cm}} dv_{\text{cm}}. \quad (9-49)$$

Sob a ação da força, o centro de massa do sistema se desloca de uma posição inicial x_i até uma posição final x_f . Integrando a Eq. 9-49 entre esses limites, temos:

$$\int_{x_i}^{x_f} F_{\text{ext}} dx_{\text{cm}} = (\frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2)_f - (\frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2)_i. \quad (9-50)$$

A Eq. 9-50 pode ser escrita na forma



$$F_{\text{ext}} dx_{\text{cm}} = E_{\text{kin},f} - E_{\text{kin},i} - \Delta E_{\text{cm}}. \quad (9-51)$$

Se F_{ext} é uma força constante, podemos simplificar o lado esquerdo da Eq. 9-51 escrevendo:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_f} F_{\text{ext}} dx_{\text{cm}} &= F_{\text{ext}} \int_{x_i}^{x_f} dx_{\text{cm}} = F_{\text{ext}} (x_{\text{cm},f} - x_{\text{cm},i}) \\ &= F_{\text{ext}} d_{\text{cm}}, \end{aligned}$$

onde d_{cm} é o deslocamento do centro de massa durante o intervalo considerado. Com esta simplificação, a Eq. 9-51 se torna:



$$F_{\text{ext}} d_{\text{cm}} = E_{\text{kin},f} - E_{\text{kin},i} - \Delta E_{\text{cm}}. \quad (9-52)$$

As Eqs. 9-51 e 9-52 mostram que podemos determinar a variação da energia cinética do centro de massa de um sistema de partículas calculando o valor numérico do lado esquerdo da Eq. 9-51 (se a força externa resultante F_{ext} for

uma força variável) ou do lado esquerdo da Eq. 9-52 (se F_{ext} for uma força constante).

Por exemplo: se nossa patinadora empurrar o corrimão com uma força constante de 200 N enquanto seu centro de massa se desloca de uma distância $d_{\text{cm}} = 0,10 \text{ m}$, a força externa exercida sobre ela pelo corrimão será igual a 200 N e, de acordo com a Eq. 9-52, sua energia cinética aumentará de $(200 \text{ N})(0,10 \text{ m}) = 20 \text{ J}$.

A grandeza ΔK_{cm} nas Eqs. 9-51 e 9-52 é a variação de energia cinética associada apenas ao *movimento de translação* do sistema, isto é, o movimento do sistema quando é tratado como uma partícula única com toda a massa concentrada no centro de massa. As variações de energia associadas a rotações do sistema ou a vibrações ou movimentos internos não estão incluídas em ΔK_{cm} . (Voltaremos a abordar este assunto em outros capítulos.)

Na Seção 8-7, consideramos um bloco sujeito apenas a uma força de atrito cinético f que se move horizontalmente de uma distância d e cuja energia cinética varia de ΔK . Mostramos que

$$-fd = \Delta K. \quad (9-53)$$

Observe que a Eq. 9-53 é equivalente à Eq. 9-52: f é uma força externa constante que age sobre um sistema de partículas (o bloco), d é o deslocamento do centro de massa do bloco e ΔK é a variação de energia cinética do centro de massa. O sinal negativo é necessário porque a força de atrito e o deslocamento têm sentidos opostos.

O que Faz um Carro se Mover?

Uma situação comum em que uma força externá age sobre um sistema de partículas, fazendo variar a energia cinética do centro de massa do sistema, é aquela na qual um automóvel é acelerado a partir do repouso, como na Fig. 9-19. Nesta situação, a força externá F_{ext} é a força de atrito exercida pela estrada sobre os pneus. Quando o motor faz as rodas do carro girarem, os pneus exercem uma força sobre o piso, no sentido da traseira do carro. A força F_{ext} é a reação do piso, que aponta para a frente, no sentido da aceleração do carro. A medida que o carro ganha velocidade, sua energia cinética aumenta. Podemos fazer aqui a mesma pergunta que no caso da patinadora: "De onde vem esta energia?"

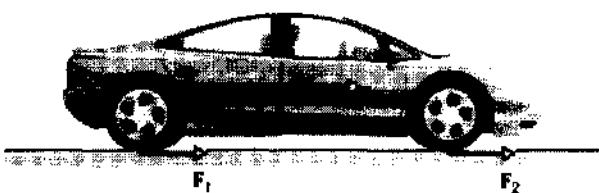


Fig. 9-19 Um automóvel, inicialmente em repouso, acelera para a direita. O piso exerce quatro forças de atrito (duas delas indicadas na figura) sobre os quatro pneus. A resultante dessas quatro forças é a força F_{ext} a que o carro está submetido.

A energia cinética adquirida pelo automóvel (todos nós sabemos) vem da combustão da gasolina. Por causa dos movimentos internos do motor, transmissão, rodas e pneus, o carro não pode ser tratado como uma única partícula. Devemos considerá-lo como um sistema de partículas, ao qual as Eqs. 9-51 e 9-52 se aplicam.

As Eqs. 9-51 e 9-52 também se aplicam à frenagem de um carro. Nesta situação, a força de atrito exercida pela estrada sobre os pneus tem o sentido contrário ao do movimento e a energia cinética do carro diminui. Os lados esquerdos das Eqs. 9-51 e 9-52 agora são negativos e a energia cinética “perdida” se transforma na energia térmica das superfícies de frenagem. Os freios se aquecem.

EXEMPLO 9-13 Um carro e seu motorista têm uma massa $M = 1.400 \text{ kg}$. O carro está viajando com uma velocidade $v_{cm} = 24,0 \text{ m/s}$ quando

o motorista pisa nos freios, fazendo com que ele pare depois de percorrer uma distância $d_{cm} = 180 \text{ m}$. Qual a força total de atrito F_{ext} (suposta constante) que o piso exerce sobre os pneus durante o processo? Suponha que os freios foram aplicados de modo a não bloquear as rodas.

Solução Como estamos supondo que a força eterna F_{ext} é constante, usamos a Eq. 9-52 para dar conta da variação de energia cinética do centro de massa do carro. Nesta situação F_{ext} está dirigida para a traseira do carro, isto é, tem o sentido oposto ao do deslocamento; assim, o lado esquerdo da Eq. 9-52 é negativo. Escrevendo a energia cinética inicial como $Mv_{cm}^2/2$ e levando em conta o fato de que a energia cinética final é zero, temos:

$$-F_{ext}d_{cm} = 0 - \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$$

e portanto

$$\begin{aligned} F_{ext} &= \frac{Mv_{cm}^2}{2d_{cm}} = \frac{(1400 \text{ kg})(24,0 \text{ m/s})^2}{(2)(180 \text{ m})} \\ &= 2.240 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

RESUMO

Centro de Massa

O centro de massa de um sistema de partículas é definido como o ponto cujas coordenadas são dadas por

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \\ y_{cm} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \\ z_{cm} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i, \end{aligned} \quad (9-5)$$

ou

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i, \quad (9-8)$$

onde M é a massa total do sistema. Para uma distribuição contínua de massa, o centro de massa é dado por

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{M} \int x dm, \\ y_{cm} &= \frac{1}{M} \int y dm, \\ z_{cm} &= \frac{1}{M} \int z dm. \end{aligned} \quad (9-9)$$

Quando a densidade (massa específica ou massa por unidade de volume) é uniforme, a Eq. 9-9 pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{V} \int x dV, \\ y_{cm} &= \frac{1}{V} \int y dV, \\ z_{cm} &= \frac{1}{V} \int z dV, \end{aligned} \quad (9-11)$$

onde V é o volume ocupado pela massa M .

Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas

O movimento do centro de massa de qualquer sistema de partículas obedece à **segunda lei de Newton para um sistema de partículas**, que pode ser escrita na forma

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = Ma_{cm} \quad (9-16)$$

onde $\sum \mathbf{F}_{ext}$ é a resultante das forças *externas* a que o sistema está submetido. M é a massa total do sistema e a_{cm} é a aceleração do centro de massa do sistema.

Momento Linear e a Segunda Lei de Newton

Para o caso de uma única partícula, definimos uma grandeza vetorial \mathbf{p} chamada **momento linear** através da equação

$$\mathbf{p} = mv. \quad (9-22)$$

Em termos do momento linear, a segunda lei de Newton pode ser escrita na forma

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (9-23)$$

Para um sistema de partículas, essas relações se tornam

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{cm} \quad \text{e} \quad \sum \mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \quad (9-26, 9-28)$$

(A Tabela 9-1 mostra algumas relações importantes usadas no estudo do movimento de partículas e sistemas de partículas.)

Momento Relativístico

Uma definição mais geral (relativística) do momento linear é a seguinte:

$$\mathbf{p} = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (9-24)$$

A forma acima deve ser usada sempre que a velocidade da partícula for uma fração considerável da velocidade da luz, c . A Eq. 9-24 é válida para qualquer velocidade e é equivalente à Eq. 9-22 quando $v \ll c$.

Conservação do Momento Linear

Quando um sistema é isolado, isto é, a força *externa* resultante sobre ele é nula, o momento linear \mathbf{P} do sistema permanece constante:

$$\mathbf{P} = \text{constante} \quad (\text{sistema isolado, fechado}). \quad (9-29)$$

A Eq. 9-29 também pode ser escrita na forma

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f \quad (\text{sistema isolado, fechado}). \quad (9-30)$$

onde os índices se referem aos valores de \mathbf{P} em um instante inicial e em um instante posterior. As Eqs. 9-29 e 9-30 são formulações equivalentes da lei de conservação do momento linear.

Sistemas de Massa Variável

A Seção 9-7 ilustra uma estratégia para lidar com sistemas de massa variável. Redefinimos o sistema, aumentando seus limites até que inclua um sistema maior cuja massa permaneça constante; em seguida, aplicamos a lei de conservação do momento linear. No caso de um foguete, isso significa que o sistema ampliado deve incluir tanto o foguete quanto os gases ejetados. Uma análise desse tipo mostra que, na ausência de forças externas, o movimento de um foguete obedece à equação

$$Ru = Ma \quad (\text{primeira equação do foguete}) \quad (9-46)$$

onde a é a aceleração instantânea do foguete, M é a massa instantânea do foguete (incluindo o combustível que ainda não foi queimado), R é a taxa de consumo de combustível (massa por unidade de tempo) e u é a velocidade dos gases ejetados em relação ao foguete. O produto

Ru é chamado de **empuxo do foguete**. Para um foguete com R e u constantes, cuja velocidade varia de v_i para v_f quando a massa varia de M_i para M_f , temos

$$v_f - v_i = u \ln \frac{M_i}{M_f} \quad (\text{segunda equação do foguete}) \quad (9-47)$$

Variação da Energia Cinética de um Sistema de Partículas

Quando uma força externa F_{ext} resultante atua sobre um sistema de partículas, podemos supor que a massa M do sistema está concentrada no centro de massa e que a força F_{ext} está aplicada a este ponto. Podemos então determinar a variação da energia cinética do centro de massa do sistema, ΔK_{cm} . Se F_{ext} é uma força variável, usamos a equação

$$\int_{x_i}^{x_f} F_{\text{ext}} dx_{\text{cm}} = K_{\text{cm},f} - K_{\text{cm},i} = \Delta K_{\text{cm}}, \quad (9-51)$$

onde dx_{cm} é o deslocamento incremental do centro de massa e $K_{\text{cm},f}$ e $K_{\text{cm},i}$ são, respectivamente, os valores inicial e final da energia cinética do centro de massa. Se F_{ext} é uma força constante, usamos a equação

$$F_{\text{ext}} d_{\text{cm}} = K_{\text{cm},f} - K_{\text{cm},i} = \Delta K_{\text{cm}}, \quad (9-52)$$

onde d_{cm} é o deslocamento do centro de massa. Se o deslocamento dx_{cm} na Eq. 9-51 ou o deslocamento d_{cm} na Eq. 9-52 tem o mesmo sentido de F_{ext} , o lado esquerdo da equação correspondente é positivo e a energia cinética do centro de massa aumenta. Se dx_{cm} ou d_{cm} tem o sentido oposto ao de F_{ext} , o lado esquerdo da equação correspondente é negativo e a energia cinética do centro de massa diminui.

QUESTIONÁRIO

1. A Fig. 9-20 mostra (a) um triângulo isósceles e (b) um cone circular reto cujo diâmetro tem o mesmo comprimento que a base do triângulo. O centro de massa do triângulo fica a um terço do topo, mas o do cone fica a apenas um quarto do topo. Como explicar a diferença?

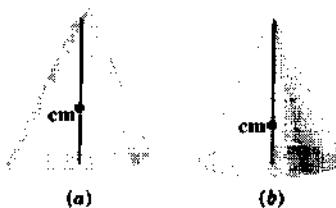


Fig. 9-20 Questão 1.

2. Qual a localização do centro de massa da atmosfera da Terra?
3. Um escultor amador decide fazer um modelo de um pássaro (Fig. 9-21). Felizmente, a obra fica de pé sozinha. O modelo é feito de uma única lâmina de metal de espessura uniforme. Dos pontos numerados, qual corresponde provavelmente à localização do centro de massa?



Fig. 9-21 Questão 3.

4. Alguém afirma que quando um atleta experiente de salto em altura passa pelo sarro o seu centro de massa na verdade está *abaixo* do sarro. Isso é possível?

5. Um passarinho se encontra em uma gaiola de arame, que, por sua vez, está pendurada em uma balança de mola. A leitura da balança quando o passarinho está voando é menor, igual ou maior do que quando está de pé no chão da gaiola?

6. Um barco à vela pode ser movido pelo vento lançado sobre ela, produzido por um ventilador a bordo do barco? Explique sua resposta.
7. Um barqueiro em um lago de águas calmas pode chegar à margem dando puxões em uma corda amarrada à proa do barco. Você sabe explicar como isto é possível?
8. Como uma pessoa sentada em repouso em uma superfície horizontal sem atrito pode se deslocar sobre a superfície?

9. Um homem está de pé em uma placa de gelo, segurando um fogo de artifício. Ele joga o fogo de artifício para o alto. Descreva sucintamente, mas da forma mais exata que puder, o movimento do centro de massa do fogo de artifício e o movimento do centro de massa constituído pelo homem mais o fogo de artifício. Será conveniente descrever os movimentos durante cada um dos seguintes períodos: (a) depois que o homem lança o fogo de artifício, mas antes que este exploda; (b) depois que o fogo de artifício explode, mas antes que o primeiro fragmento caia no gelo; (c) depois que o primeiro fragmento cai no gelo, mas antes que o último fragmento caia no gelo; (d) depois que o último fragmento cai no gelo, mas antes que o primeiro fragmento chegue à borda da placa.

10. Em 1920, um conhecido jornal publicou o seguinte comentário a respeito das experiências pioneiras com foguetes de Robert H. Goddard, negando a possibilidade de que um foguete pudesse funcionar no vácuo: "Que o Prof. Goddard, com sua 'catedra' no Clark College e o apoio da Smithsonian Institution não conheça a relação entre ação e reação e a necessidade de dispor de algo melhor do que o vácuo contra o que reagir... afirmar isso seria absurdo. Naturalmente, ele apenas parece não dispor do conhecimento que é ministrado diariamente nas escolas de segundo grau." O que está errado neste argumento?

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

Seção 9-2 O Centro de Massa

1E. (a) A que distância o centro de massa do sistema Terra-Lua se encontra do centro da Terra? (Use os valores das massas da Terra e da Lua e da distância entre os dois astros que aparecem no Apêndice C.) (b) Expressse a resposta do item (a) como uma fração do raio da Terra.

2E. A distância entre os centros dos átomos de carbono (C) e oxigênio (O) em uma molécula de monóxido de carbono (CO) é $1,131 \times 10^{-10}$ m. Determine a posição do centro de massa da molécula de CO em relação ao átomo de carbono. (Use as massas dos átomos de C e O que aparecem no Apêndice D.)

3E. (a) Quais são as coordenadas do centro de massa das três partículas que aparecem na Fig. 9-22? (b) O que acontece com o centro de massa quando a massa da partícula de cima aumenta gradualmente?

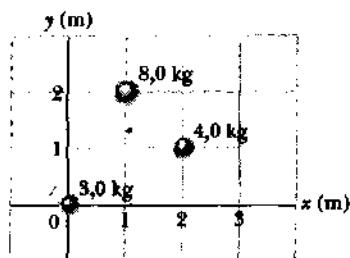


Fig. 9-22 Exercício 3.

4E. Três barras finas de comprimento L são dispostas em forma de U invertido, como na Fig. 9-23. As duas barras laterais têm massa M ; a barra central tem massa $3M$. Qual a localização do centro de massa do conjunto?

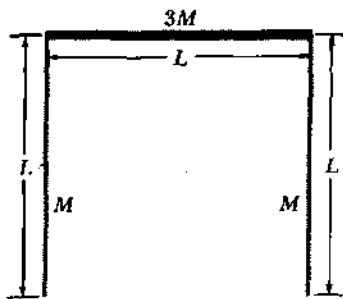


Fig. 9-23 Exercício 4.

5E. Uma placa quadrada homogênea de 6 m de lado tem um recorte quadrado com 2 m de lado (Fig. 9-24). O centro desse recorte fica em $x = 2$ m, $y = 0$. O centro da placa quadrada fica em $x = y = 0$. Calcule as coordenadas do centro de massa da placa recortada.

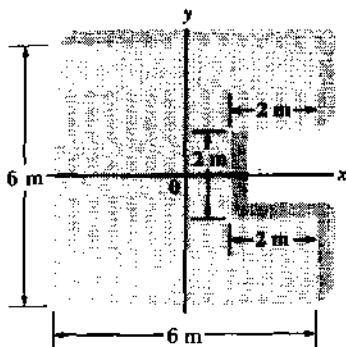


Fig. 9-24 Exercício 5.

6P. Mostre que a razão entre as distâncias de duas partículas ao seu centro de massa é o inverso da razão entre suas massas.

7P. A Fig. 9-25 mostra as dimensões de uma placa composta; metade da placa é feita de alumínio (densidade = $2,70 \text{ g/cm}^3$) e metade de ferro (densidade = $7,85 \text{ g/cm}^3$). Qual a localização do centro de massa da placa?

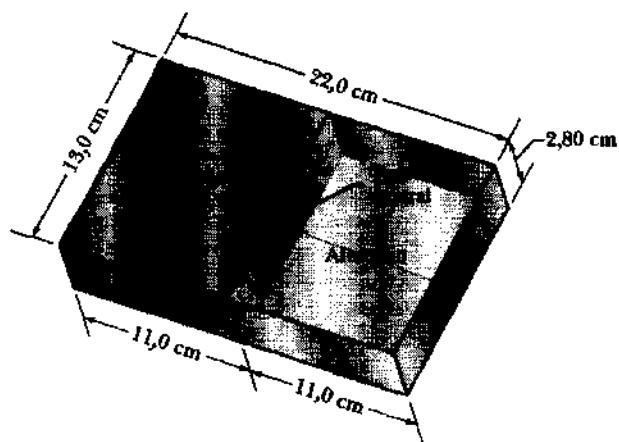


Fig. 9-25 Problema 7.

8P. Na molécula de amônia (NH_3) (Fig. 9-26), os três átomos de hidrogênio (H) formam um triângulo equilátero; o centro do triângulo fica a $9,40 \times 10^{-11}$ m de cada átomo de hidrogênio. O átomo de nitrogênio (N) fica no topo de uma pirâmide cuja base é formada pelos três átomos de hidrogênio. A distância nitrogênio-hidrogênio é $10,14 \times 10^{-11}$ m e a razão de massas atômicas nitrogênio-hidrogênio é 13,9. Determine a posição do centro de massa da molécula em relação ao átomo de nitrogênio.

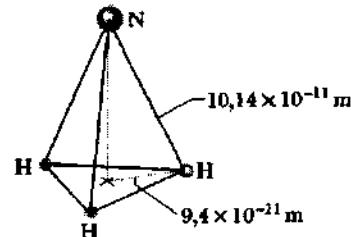


Fig. 9-26 Problema 8.

9P. Uma caixa cúbica, sem tampa, com 40 cm de lado, é feita de chapas de metal homogêneas de espessura desprezível (Fig. 9-27). Determine as coordenadas do centro de massa da caixa.

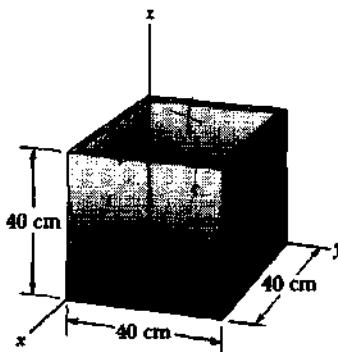


Fig. 9-27 Problema 9.

- 10P.** Duas placas metálicas em forma de triângulo retângulo, ambas de altura $H = 2.0$ cm e comprimento $L = 3.5$ cm, são dispostas como na Fig. 9-28. (a) Quais são as coordenadas do centro de massa do conjunto? (b) Se as duas placas sofrerem uma rotação de 180° em torno da vertical de modo que os lados de 2.0 cm fiquem adjacentes, quais são as coordenadas do centro de massa do novo conjunto?

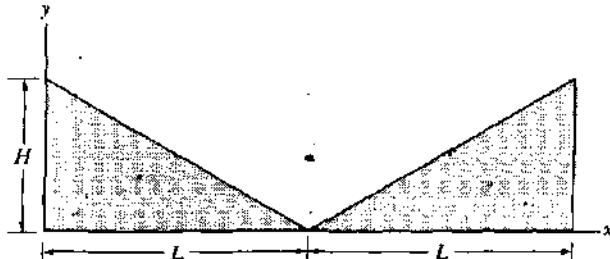
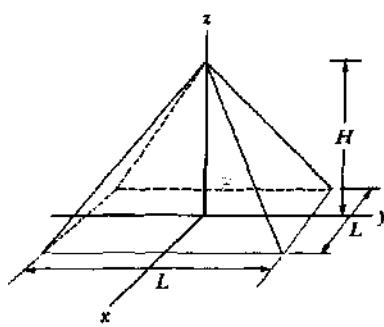


Fig. 9-28 Problema 10.

- 11P***. A Grande Pirâmide de Quéops, em Gizé, Egito (Fig. 9-29a), tinha uma altura $H = 147$ m antes que a pedra mais alta caísse. A base da estrutura é um quadrado de lado $L = 230$ m (veja a Fig. 9-29b). Supondo que a densidade da pirâmide é uniforme, calcule a que distância o centro de massa original ficava do centro da base.



(a)



(b)

Fig. 9-29 Problema 11.

- 12P***. Uma lata em forma de cilindro reto de massa M , altura H e densidade uniforme está cheia de refrigerante (Fig. 9-30). A massa total do refrigerante é m . Fazemos pequenos furos na base e na tampa da lata para drenar o conteúdo e medimos o valor de h , a distância vertical entre o centro de massa e a base da lata, para várias situações. Qual é o valor de h (a) com a lata cheia e (b) com a lata vazia? (c) O que acontece com h enquanto a lata está sendo esvaziada? (d) Se x é altura do líquido

que resta em um determinado instante, determine o valor de x (em função de M , H e m) no momento em que o centro de massa se encontra o mais próximo possível da base da lata.

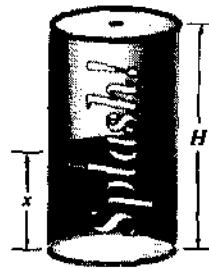


Fig. 9-30 Problema 12.

Seção 9-3 A Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas

- 13E.** Dois patinadores, um de 65 kg e outro de 40 kg, seguram as pontas de uma vara com 10 m de comprimento e massa desprezível. Os patinadores usam a vara como apoio para deslizarem um em direção ao outro até que se encontrem. Qual a distância percorrida pelo patinador de 40 kg?

- 14E.** Um velho Galaxy com uma massa de 2.400 kg está viajando por uma estradareta a 80 km/h. Ele é seguido por um Escort com uma massa de 1.600 kg viajando a 60 km/h. Qual a velocidade do centro de massa dos dois carros?

- 15E.** Um homem de massa m está pendurado em uma escada de corda presa a um balão de massa M ; veja a Fig. 9-31. O balão está parado em relação ao solo. (a) Se o homem começa a subir a escada com velocidade v (em relação à escada), em que direção e com que velocidade (em relação à Terra) o balão vai se mover? (b) Qual será o movimento depois que o homem parar de subir?

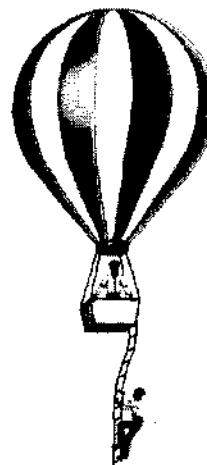


Fig. 9-31 Exercício 15.

- 16E.** Duas partículas P e Q estão inicialmente em repouso a 1,0 m uma da outra. P tem uma massa de 0,10 kg e Q uma massa de 0,30 kg. P e Q se atraem com uma força constante de $1,0 \times 10^{-2}$ N. Nenhuma força externa age sobre o sistema. (a) Descreva o movimento do centro de massa. (b) A que distância da posição original de P as duas partículas se chocam?

- 17E.** Um canhão e um suprimento de balas de canhão se encontram no interior de um vagão fechado de comprimento L , como na Fig. 9-32. O canhão dispara para a direita; o recuo faz o vagão se mover para a esquerda. As balas disparadas continuam no vagão depois de se cho-

carem com a parede oposta. (a) Qual a maior distância que o vagão pode ter percorrido depois que todas as balas forem disparadas? (b) Qual a velocidade do vagão depois que todas as balas forem disparadas?

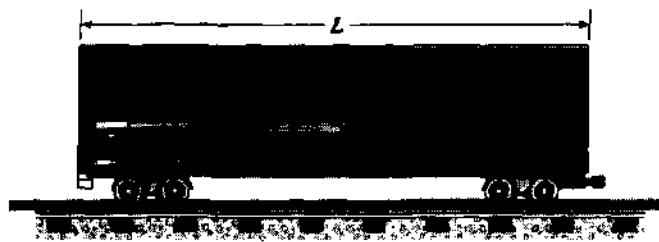


Fig. 9-32 Exercício 17.

- 18P.** Deixa-se cair uma pedra em $t = 0$. Uma segunda pedra, com uma massa duas vezes maior que a da primeira, é largada do mesmo ponto em $t = 100\text{ ms}$. (a) Onde está o centro de massa das duas pedras em $t = 300\text{ ms}$? Suponha que nenhuma das duas pedras chegou ao chão. (b) Qual a velocidade do centro de massa do sistema nesse momento?

- 19P.** Ricardo, com 80 kg de massa, e Carmelita, que é mais magra, estão passeando no Lago Mercedes em uma canoa de 30 kg. Com a canoa parada em águas tranqüilas, eles trocam de lugar. Seus bancos estão a 3,0 m de distância e simetricamente dispostos em relação ao centro da embarcação. Ricardo observa que durante a troca a canoa se deslocou de 40 cm em relação a um tronco submerso e calcula a massa de Carmelita. Qual foi o resultado obtido por Ricardo?

- 20P.** Um projétil é disparado por um canhão com uma velocidade inicial de 20 m/s. O ângulo do disparo é 60° em relação à horizontal. Quando chega ao ponto mais alto da trajetória, o projétil explode em dois fragmentos de massas iguais (Fig. 9-33). Um dos fragmentos, cuja velocidade imediatamente após a explosão é zero, cai verticalmente. A que distância do canhão o outro fragmento atinge o solo, supondo que o terreno seja plano e a resistência do ar possa ser desprezada?

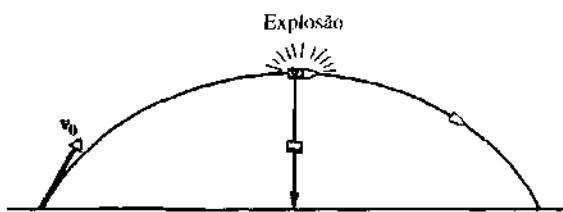


Fig. 9-33 Problema 20.

- 21P.** Dois sacos idênticos de açúcar são ligados por uma corda de massa desprezível que passa por uma roldana sem atrito, de massa desprezível, com 50 mm de diâmetro. Os dois sacos estão no mesmo nível e cada um possui originalmente uma massa de 500 g. (a) Determine a posição horizontal do centro de massa do sistema. (b) Suponha que 20 g de açúcar são transferidos de um saco para o outro, mas os sacos são mantidos nas posições originais. Determine a nova posição horizontal do centro de massa. (c) Os dois sacos são liberados. Em que direção se move o centro de massa? (d) Qual é a sua aceleração?

- 22P.** Um cachorro de 5,0 kg está em um bote de 20 kg que se encontra a 6,0 m da margem (que fica à esquerda na Fig. 9-34a). Ele anda 2,4 m no barco, em direção à margem, e depois pára. O atrito entre o bote e a água é desprezível. A que distância da margem está o cachorro depois da caminhada? (Sugestão: Veja a Fig. 9-34b. O cachorro se move para a esquerda; o bote se desloca para a direita; e o centro de massa do sistema *cachorro + barco*? Será que ele se move?)

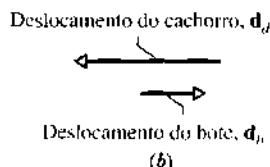
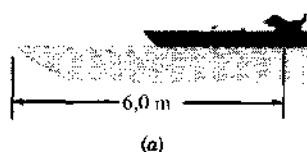


Fig. 9-34 Problema 22.

Seção 9-4 Momento Linear

- 23E.** Qual o momento linear de um automóvel que pesa 16.000 N e está viajando a 88 km/h?

- 24E.** Suponha que sua massa é 80 kg. Com que velocidade teria que correr para ter o mesmo momento linear que um automóvel de 1.600 kg viajando a 1,2 km/h?

- 25E.** Com que velocidade deve viajar um Volkswagen de 816 kg (a) para ter o mesmo momento linear que um Cadillac de 2.650 kg viajando a 16 km/h e (b) para ter a mesma energia cinética?

- 26E.** Qual o momento linear de um elétron viajando com uma velocidade de $0,99c$ ($= 2,97 \times 10^8\text{ m/s}$)?

- 27E.** O momento linear de uma partícula viajando a $1.5 \times 10^8\text{ m/s}$ é $2.9 \times 10^{-19}\text{ kg}\cdot\text{m/s}$. Determine a massa da partícula e portanto sua identidade com base neste resultado experimental.

- 28P.** Um objeto é rastreado por uma estação de radar, que descobre que seu vetor posição é dado por $\mathbf{r} = (3.500 - 160t)\mathbf{i} + 2.700\mathbf{j} + 300\mathbf{k}$, onde \mathbf{r} está em metros e t em segundos. O eixo x da estação de radar aponta para leste, o eixo y para o norte e o eixo z verticalmente para cima. Se o objeto é uma ogiva de míssil de 250 kg, determine (a) o seu momento linear, (b) a direção do seu movimento e (c) a força resultante a que está submetido.

- 29P.** Uma bola branca de 0,165 kg, com uma velocidade inicial de 2,00 m/s, se choca com a tabela de uma mesa de sinuca, como mostra a vista de cima da Fig. 9-35. Se os eixos dos x e dos y forem definidos como na figura, o choque inverterá a componente y da velocidade da bola mas não modificará a componente x . (a) Quantos vale o ângulo θ da Fig. 9-35? (b) Qual a variação do momento linear da bola na notação de vetores unitários? (O fato de que a bola está rolando é irrelevante para responder às duas perguntas.)

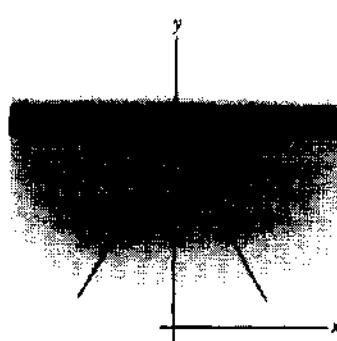


Fig. 9-35 Problema 29.

30P. Um caminhão de 2.100 kg, viajando para o norte a 41 km/h, vira para leste e aumenta a velocidade para 51 km/h. (a) Qual a variação da energia cinética do caminhão? (b) Qual o módulo, direção e sentido da variação de momento linear do caminhão?

31P. Uma bola de 50 g é lançada do nível do solo para o ar com uma velocidade inicial de 16 m/s. O ângulo de lançamento é de 30° em relação à horizontal. (a) Quais são os valores da energia cinética da bola, inicialmente e pouco antes de se chocar com o solo? (b) Determine os valores correspondentes de momento linear (módulo, direção e sentido). (c) Mostre que a variação do momento linear é igual ao peso da bola multiplicado pelo tempo de percurso.

32P. Uma partícula de massa m tem um momento linear \mathbf{p} cujo módulo é mc . Qual a velocidade da partícula em termos de c , a velocidade da luz?

Seção 9-6 Conservação do Momento Linear

33E. Um homem de 100 kg, de pé em uma superfície de atrito desprezível, dá um chute em uma pedra de 0,70 kg, fazendo com que ela adquira uma velocidade de 3,90 m/s. Qual a velocidade do homem depois do chute?

34E. Dois blocos de massas 1,0 kg e 3,0 kg, ligados por uma mola, estão em repouso em uma superfície sem atrito. Em um certo instante, são projetados um na direção do outro de tal forma que o bloco de 1,0 kg viaja inicialmente com uma velocidade de 1,7 m/s em direção ao centro de massa, que permanece em repouso. Qual a velocidade inicial do outro bloco?

35E. Um veículo espacial está viajando a 4.300 km/h em relação à Terra quando o motor, cujo combustível se esgotou, é desacoplado e arremessado para trás com uma velocidade de 82 km/h em relação ao módulo de comando. A massa do motor é quatro vezes a massa do módulo de comando. Qual a velocidade do módulo de comando em relação à Terra depois da separação?

36E. Um homem de 75 kg está viajando em uma carroça a 2,3 m/s. Ele salta para fora da carroça de modo a ficar com velocidade horizontal zero. Qual a variação resultante na velocidade da carroça?

37E. Um vagão-plataforma de peso P pode rolar sem atrito em um trecho reto e plano da linha férrea. Inicialmente, um homem de peso p está de pé no carro, que se move para a esquerda com velocidade v_0 ; veja a Fig. 9-36. Qual a variação de velocidade do vagão quando o homem corre para a esquerda com uma velocidade v_{rel} em relação ao vagão?



Fig. 9-36 Exercício 37.

38P. O último estágio de um foguete está viajando com uma velocidade de 7.600 m/s. Este último estágio é feito de duas partes presas por uma trava: um tanque de combustível com uma massa de 290,0 kg e uma cápsula de instrumentos com uma massa de 150,0 kg. Quando a trava é acionada, uma mola comprimida faz com que as duas partes se separem com uma velocidade relativa de 910,0 m/s. (a) Qual a velocidade das duas partes depois que elas se separam? Suponha que todas as velocidades têm a mesma direção. (b) Calcule a energia cinética total das duas partes antes e depois de se separarem e explique a diferença (se houver).

39P. Uma caldeira explode, partindo-se em três pedaços. Dois pedaços, de massas iguais, são arremessados em trajetórias perpendiculares entre si, com a mesma velocidade de 30 m/s. O terceiro pedaço tem uma massa de três vezes a de um dos outros pedaços. Qual o módulo, direção e sentido de sua velocidade logo após a explosão?

40P. Um núcleo radioativo, inicialmente em repouso, se desintegra emitindo um elétron e um neutrino, que se afastam do núcleo em trajetórias perpendiculares entre si. (O neutrino é uma das partículas fundamentais da física.) O momento linear do elétron é $1,2 \times 10^{-22}$ kg·m/s e o do neutrino é $6,4 \times 10^{-23}$ kg·m/s. (a) Determine o módulo, direção e sentido do momento linear do núcleo depois que ele se desintegra. (b) A massa do núcleo residual é $5,8 \times 10^{-26}$ kg. Qual a sua energia cinética logo após a desintegração?

41P. Um vagão-plataforma de 2.140 kg, que pode se mover praticamente sem atrito, está em repouso ao lado de uma plataforma. Um lutador de sumô de 242 kg corre pela plataforma (paralelamente aos trilhos) com uma velocidade de 5,3 m/s e pula no vagão. Qual a velocidade do vagão se o lutador (a) fica de pé no vagão; (b) continua correndo no mesmo sentido com uma velocidade de 5,3 m/s em relação ao vagão e (c) começa a correr no sentido oposto com uma velocidade de 5,3 m/s em relação ao vagão?

42P. Um trenó-foguete com uma massa de 2.900 kg viaja sobre trilhos a 250 m/s. A certa altura, uma caçamba do trenó mergulha em uma vala com água localizada entre os trilhos e transporta água para um tanque, inicialmente vazio, localizado no trenó. Aplicando a lei de conservação do momento linear, determine a velocidade do trenó depois que 920 kg de água foram recolhidos. Despreze o atrito entre a caçamba e a água que está na vala.

43P. Uma bala de 3,50 g é disparada horizontalmente contra dois blocos que se encontram em repouso em uma superfície plana sem atrito, como na Fig. 9-37a. A bala atravessa o primeiro bloco, que possui uma massa de 1,20 kg, e fica encravada no segundo bloco, cuja massa vale 1,80 kg. Com isso, os blocos adquirem velocidades de 0,630 m/s e 1,40 m/s, respectivamente (Fig. 9-37b). Desprezando a massa removida do primeiro bloco pela bala, determine (a) a velocidade da bala imediatamente após emergir do primeiro bloco e (b) a velocidade original da bala.

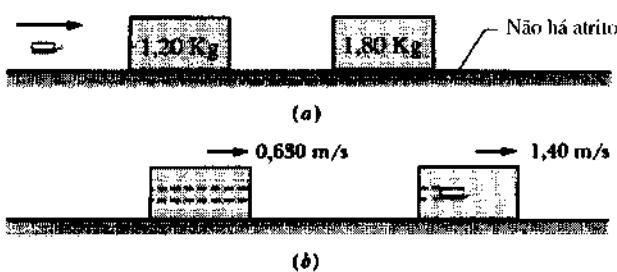


Fig. 9-37 Problema 43.

44P. Um corpo de 8 kg de massa está viajando a 2 m/s, sem estar submetido a nenhuma força externa. Em certo instante, ocorre uma explosão que divide o corpo em dois fragmentos de 4 kg. A explosão fornece aos fragmentos uma energia cinética adicional de 16 J. Os dois fragmentos continuam a viajar na mesma direção que o corpo original. Determine a velocidade e sentido do movimento dos fragmentos depois da explosão.

45P. Você está a bordo de um trenó, sobre uma superfície de gelo plana e com atrito desprezível. Junto com você estão duas pedras de massas m_1 e m_2 tais que $M = 6,00m_1 = 12,0m_2$, onde M é a massa do trenó mais a sua massa. Para colocar o trenó em movimento, você arremessa as pedras para trás, simultaneamente ou uma após a outra, mas sempre com uma velocidade v_{rel} em relação ao trenó. Qual a velocidade atingida pelo trenó (a) quando você joga as duas pedras ao mesmo tempo; (b) quando

você joga primeiro m_1 e depois m_2 , e (c), quando você joga primeiro m_2 e depois m_1 ?

46P. Um canhão de 1.400 kg, capaz de disparar um projétil de 70,0 kg com uma velocidade de 556 m/s em relação ao cano da arma, é ajustado para um ângulo de 39° acima da horizontal. O canhão está montado sobre trilhos sem atrito, de modo que pode recuar livremente. (a) Qual a velocidade do projétil em relação à Terra? (b) Qual o ângulo em relação ao solo com que o projétil é lançado? (*Sugestão:* A componente horizontal do momento linear do sistema não se altera quando o canhão é disparado.)

Seção 9-7 Sistemas de Massa Variável: Um Foguete

47E. Um foguete está se afastando do sistema solar com uma velocidade de 6.0×10^3 m/s. O motor é ligado e passa a ejetar gases com uma velocidade de 3.0×10^4 m/s em relação ao foguete. A massa do foguete no momento em que o motor é ligado é 4.0×10^4 kg e ele passa a experimentar uma aceleração de 2.0 m/s^2 . (a) Qual o empuxo do foguete? (b) A que taxa, em quilogramas por segundo, o combustível é ejetado durante o voo?

48E. Uma sonda espacial de 6.090 kg, viajando para Júpiter com uma velocidade de 105 m/s em relação ao Sol, aciona o motor, ejetando 80,0 kg de gases com uma velocidade de 253 m/s em relação à sonda. Supondo que os gases são ejetados no sentido oposto ao do movimento inicial da sonda, qual a sua velocidade final?

49E. Um foguete em repouso no espaço, em uma região em que a força gravitacional é desprezível, tem uma massa de 2.55×10^5 kg, da qual 1.81×10^5 kg são combustível. O consumo de combustível do motor é de 480 kg/s e a velocidade de escapamento dos gases é de 3,27 km/s. O motor é acionado durante 250 s. (a) Determine o empuxo do foguete; (b) Qual é a massa do foguete depois que o motor é desligado? (c) Qual é a velocidade final do foguete?

50E. Considere um foguete em repouso no espaço. Qual deve ser a razão de massas (razão entre a massa inicial e a massa final) para que, depois de ligado o motor, a velocidade final do foguete seja (a) igual à velocidade de escapamento dos gases e (b) o dobro da velocidade de escapamento dos gases?

51E. Durante uma missão lunar, é necessário aumentar a velocidade de uma espaçonave de 2,2 m/s quando está viajando a 400 m/s. A velocidade de saída dos gases é 1.000 m/s. Que fração da massa inicial da espaçonave deve ser queimada e ejetada para conseguir esse aumento de velocidade?

52E. Um vagão de estrada de ferro está se movendo com uma velocidade constante de 3,20 m/s debaixo de um elevador de cereais. O produto cai no vagão à razão de 540 kg/min. Qual o valor da força que deve ser aplicada ao vagão, desprezando-se o atrito, para que ele continue a se mover com a mesma velocidade?

53P. Um foguete de um estágio, em repouso em um certo referencial inercial, tem massa M quando o motor é ligado. Mostre que quando a massa diminui para $0,368M$ os gases que saem do motor estão em repouso em relação ao sistema de referência original.

54P. Um foguete de 6.100 kg é disparado verticalmente a partir da superfície da Terra. Se a velocidade de escapamento dos gases é 1.200 m/s, qual deve ser a massa de gás ejetada por segundo, se o empuxo (a) é igual ao peso do foguete e (b) é tal que o foguete recebe uma aceleração vertical inicial de 21 m/s^2 ?

55P. Um trenó de 5,4 kg transportando 35 kg de areia desliza a partir do repouso por uma rampa de gelo com 90 m de comprimento e uma inclinação de 30° em relação à horizontal. A areia escorre pelo fundo do trenó à razão de 2,3 kg/s. Quanto tempo leva o trenó para chegar ao final da

rampa? (*Sugestão:* Em vez de recorrer a cálculos complicados, verifique qual é a influência da massa de um corpo que está descendo um plano inclinado sobre a sua aceleração.)

56P. Duas longas barcaças estão viajando na mesma direção e no mesmo sentido em águas tranqüilas: uma com uma velocidade de 10 km/h, a outra com uma velocidade de 20 km/h. Quando estão passando uma pela outra, operários jogam carvão da mais lenta para a mais rápida à razão de 1.000 kg/min; veja a Fig. 9-38. Qual a força adicional que deve ser fornecida pelos motores das duas barcaças para que continuem a viajar com as mesmas velocidades? Suponha que a transferência de carvão se dá perpendicularmente à direção de movimento da barcaça mais lenta e que a força de atrito entre as embarcações e a água não depende do seu peso.

57P. Um avião a jato está viajando a 180 m/s. O motor consome por segundo 68 m^3 de ar, que têm uma massa de 70 kg. Esse ar é usado para queimar 2,9 kg de combustível por segundo. A energia resultante da queima é usada para comprimir os produtos da combustão e ejetá-los com uma velocidade de 490 m/s em relação à aeronave. Determine (a) o empuxo do motor e (b) a potência do motor em watts.

Seção 9-8 Sistemas de Partículas: Variações na Energia Cinética

58E. Um automóvel com passageiros tem um peso de 16.400 N e está viajando a 113 km/h quando o motorista freia até parar. O piso da estrada exerce uma força de atrito de 8.230 N sobre as rodas. Calcule a distância que o veículo percorre até parar, fazendo uso de considerações sobre energia.

59E. Você fica de pé e depois se agacha, fazendo com que o seu centro de massa se desloque 18 cm para baixo. Em seguida, salta para cima na vertical. A força média exercida sobre você pelo chão, enquanto há contato entre ambos, é o triplo do seu peso. Qual a sua velocidade para cima quando o seu centro de massa passa pela posição que ocupava quando você estava de pé?

60E. Uma mulher de 55 kg se agacha e depois salta para cima na vertical. Na posição agachada, seu centro de massa está 40 cm acima do piso; quando seus pés deixam o chão, o centro de massa está 90 cm acima do piso; no ponto mais alto do salto, está 120 cm acima do piso. (a) Qual a força média exercida sobre a mulher pelo piso, enquanto há contato entre ambos? (b) Qual a velocidade máxima atingida pela mulher?

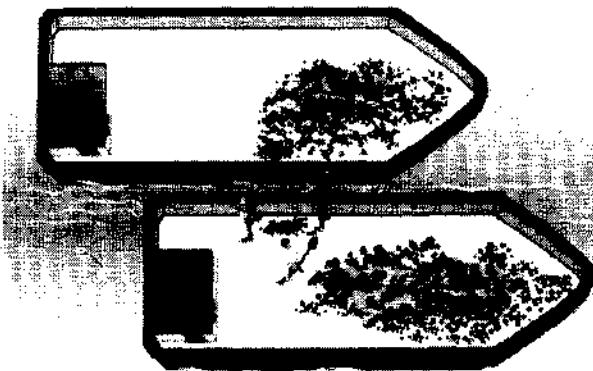


Fig. 9-38 Problema 56.

61P. Um jogador de hóquei de 110 kg patina a 3,0 m/s em direção a uma grade na beira do rink e se imobiliza segurando a grade com os braços estendidos. Durante o processo de frenagem, seu centro de massa se move 30 cm em direção à grade. (a) Qual a variação de energia

cinética do centro de massa do jogador durante este processo? (b) Qual a força média que o jogador exerce sobre a grade?

62P. Em muitas bicicletas, os freios são pedaços de borracha que podem ser comprimidos contra as rodas. Uma bicicleta desse tipo, que está viajando inicialmente a 40,2 km/h, é freada e pára depois que os pneus, que possuem um raio de 35,6 cm, descrevem 55 rotações. A massa da

bicicleta mais a do ciclista é de 51,1 kg. Suponha que os freios dianteiro e traseiro são idênticos e que os pneus não derrapam na pista. (a) Qual o trabalho realizado por um dos freios? (O pneu continua a girar enquanto sofre o atrito do freio.) (b) Suponha que a força exercida pelo freio sobre cada pneu é constante e calcule o seu valor. (c) Qual é a aceleração da bicicleta? (d) Qual é a força horizontal que o piso exerce sobre cada um dos pneus?

PROBLEMAS ADICIONAIS

63. Um corpo de 0,70 kg está se movendo horizontalmente com uma velocidade de 5,0 m/s quando se choca com uma parede vertical. O corpo ricocheteia com uma velocidade de 2,0 m/s. Qual o módulo da variação do momento linear durante o processo?

64. No instante em que uma partícula de 3,0 kg tem uma velocidade de 6,0 m/s no sentido negativo do eixo dos y , uma partícula de 4,0 kg tem uma velocidade de 7,0 m/s no sentido positivo do eixo dos x . Qual a velocidade do centro de massa do sistema das duas partículas?

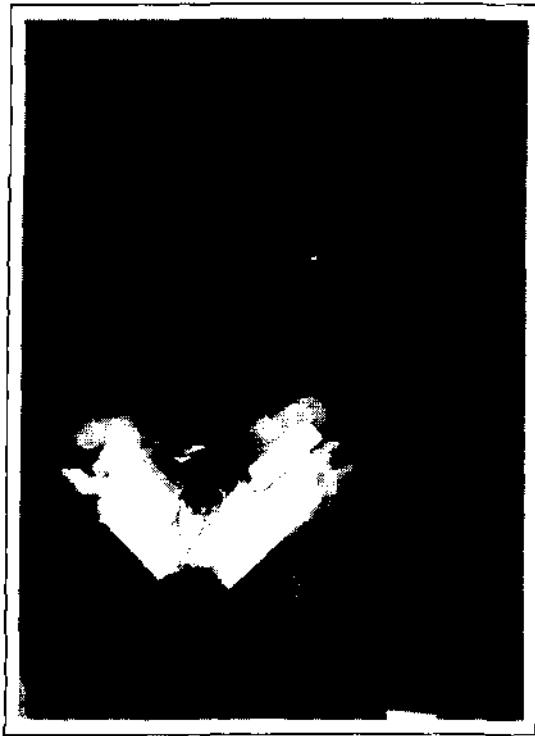
65. Um corpo de 2,0 kg, que está deslizando em uma superfície sem atrito, sofre uma explosão e se divide em dois fragmentos de 1,0 kg.

Depois da explosão, as velocidades dos fragmentos são de 3,0 m/s na direção norte e 5,0 m/s em uma direção 30° ao norte do leste. Qual a velocidade original da massa de 2,0 kg?

66. Um automóvel de 1.000 kg está parado em um sinal de trânsito. No momento em que o sinal abre, o automóvel começa a se mover com uma aceleração constante de $4,0 \text{ m/s}^2$. No mesmo instante, um caminhão de 2.000 kg, viajando com uma velocidade constante de 8,0 m/s, ultrapassa o automóvel. (a) A que distância do sinal de trânsito está o centro de massa do sistema automóvel-caminhão no tempo $t = 3,0 \text{ s}$? (b) Qual a velocidade do centro de massa do sistema automóvel-caminhão nesse momento?

COLISÕES

10



Ronald McNair, físico e um dos astronautas mortos na explosão do ônibus espacial Challenger, era faixa-preta em caratê. Aqui, ele quebra várias lajes de concreto. Em demonstrações de caratê como essa, usa-se tipicamente uma prancha de pinho ou um bloco de concreto. Quando atingida, a prancha ou bloco dobra-se, acumulando energia como o faz uma mola esticada, até atingir uma energia crítica. Então, o objeto se quebra. Surpreendentemente, a energia necessária para quebrar o bloco é cerca de um terço daquela para quebrar a prancha; mesmo assim, a prancha é consideravelmente mais fácil de se quebrar. Por quê?

10-1 O Que É uma Colisão?

Na linguagem do dia-a-dia, uma colisão ocorre quando objetos se chocam um contra o outro. Embora venhamos a aperfeiçoar tal definição, ela transmite bem o significado. Em nossa experiência diária, as coisas que colidem podem ser bolas de bilhar, um martelo e um prego, uma bola de beisebol e um bastão, e — com demasiada freqüência — automóveis. Pode-se dizer que uma pedra largada ou atirada à Terra colide com ela. A Fig. 10-1 mostra a evidência impressionante de um evento desse tipo, que ocorreu cerca de 20.000 anos atrás. Como mostra a Fig. 10-2, há colisões que estão além de nossa experiência direta, indo das colisões de partículas subatômicas às de galáxias.

Formalizemos nossa definição:

Uma colisão é um evento isolado em que uma força relativamente intensa age em cada um de dois ou mais

corpos que interagem por um tempo relativamente curto.

Além disso, deve ser possível fazer uma distinção clara entre instantes de tempo que estão *antes*, *durante* e *depois* da colisão. A Fig. 10-3 sugere o espírito dessa definição. A fronteira do sistema que circunda os corpos naquela figura sugere que, em uma colisão ideal, ajam apenas forças internas (entre os corpos).

Quando uma raquete atinge uma bola, o início e o fim da colisão podem ser determinados de maneira bem precisa. O tempo de contato raquete-bola (cerca de 4 ms) é pequeno, comparado ao tempo em que a bola está em voo para a raquete e a partir dela. Como mostra a Fig. 10-4, a força exercida sobre a bola é suficientemente intensa para deformá-la temporariamente. Exibe-se uma deformação semelhante na Fig. 10-5 para uma colisão de duração um tanto mais extensa.



Fig. 10-1 Cratera do Meteorito, no Arizona. Esta cratera é o resultado de uma colisão há cerca de 20.000 anos. A cratera tem aproximadamente 1.200 m de diâmetro e 200 m de profundidade.

Observe que a nossa definição formal de colisão não requer o “choque” que aparece na informal. Quando uma sonda espacial se aproxima de um grande planeta, contorna-o e, então, continua seu curso com maior velocidade (um encontro com efeito *estilingue*); isto também é uma colisão. A sonda e o planeta não se “tocam” realmente, mas uma colisão não requer contato, nem uma força de colisão tem de ser uma força de contato; ela pode muito bem ser uma força gravitacional, como neste caso.

Hoje, muitos físicos despendem seu tempo jogando o que podemos chamar de “o jogo da colisão”. Um objetivo principal deste jogo é descobrir o que for possível sobre as forças que agem durante a colisão, sabendo-se o estado das partículas tanto antes quanto depois da colisão. Virtualmente, todo o nosso conhecimento do mundo subatômico — elétrons, prótons, nêutrons, muôns, quarks e o resto — vem de experimentos desse tipo. As regras do jogo da colisão são as leis de conservação de momento linear, momento angular* e energia.

10-2 Impulso e Momentum Linear

Colisão Simples

A Fig. 10-6 mostra as forças iguais e opostas, $F(r)$ e $-F(t)$, que agem durante uma simples colisão frontal entre dois corpos semelhantes a partículas e de massas diferentes. Tais forças irão variar o momento linear de ambos os corpos; o valor da variação dependerá não apenas dos valores médi-

os das forças, mas também do tempo Δt durante o qual elas agem. Para ver isso quantitativamente, apliquemos a segun-

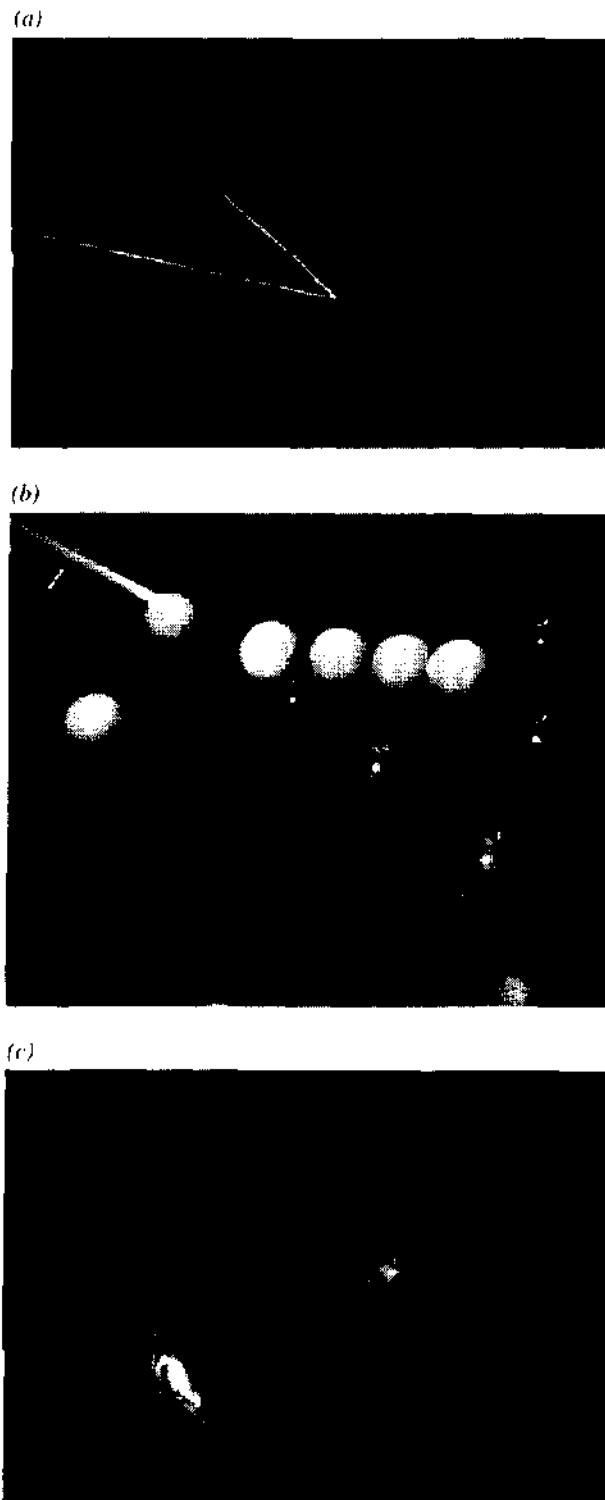


Fig. 10-2 Colisões para uma ampla variedade de massas. (a) Uma partícula alfa ($m = 10^{-26}$ kg) vinda da esquerda ricocheteia em um núcleo de nitrogênio que estava em repouso e que agora se desloca para baixo e para a direita. (b) Uma bola ($m \approx 0,1$ kg) ricocheteia em outra. (c) Uma simulação computacional de duas galáxias ($m \approx 10^{10}$ kg) a ponto de colidirem.

*O termo original em inglês, *linear momentum*, tem duas traduções em português: *momento linear* e *quantidade de movimento linear*, esta última sendo preferida. Por questões inerentes ao processo de tradução, empregamos a primeira, que o estudante não deve confundir com outros conceitos não relacionados, como momento de inércia ou momento de força. Da mesma forma, *angular momentum* foi traduzido como *momento angular*, sinônimo de *quantidade de movimento angular*. (N. do T.)

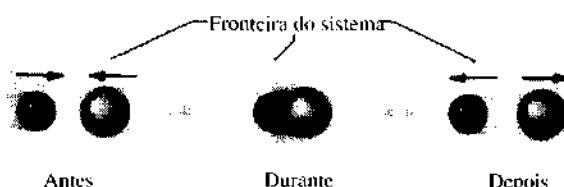


Fig. 10-3 Um diagrama exibindo o sistema onde ocorre uma colisão.

da lei de Newton na forma $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ ao corpo R , no lado direito da Fig. 10-6. Temos,

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}(t) dt, \quad (10-1)$$

onde $\mathbf{F}(t)$ dá a variação da força com o tempo, ilustrada pela curva na Fig. 10-7. Integremos a Eq. 10-1 sobre o intervalo de colisão Δt , ou seja, de um tempo inicial t_i (imediatamente antes da colisão) a um tempo final t_f (imediatamente após a colisão). Obtemos,

$$\int_{\mathbf{p}_i}^{\mathbf{p}_f} d\mathbf{p} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}(t) dt. \quad (10-2)$$

O lado esquerdo desta equação é $\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$, a variação do momento linear do corpo R . O lado direito, que é uma medida tanto da intensidade quanto da duração da força de colisão, é denominado de **impulso** \mathbf{J} da colisão. Assim,

$$\mathbf{J} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}(t) dt \quad (\text{definição de impulso}). \quad (10-3)$$



Fig. 10-5 Pode-se apreciar a severidade da colisão entre o punho e o saco pela visível deformação deste e pelo choque sentido pelo punho e antebraço.

A Eq. 10-3 nos diz que o impulso é igual à área sob a curva $\mathbf{F}(t)$ da Fig. 10-7.

Das Eqs. 10-2 e 10-3, vemos que a variação no momento linear de cada corpo em uma colisão é igual ao impulso que age naquele corpo:

$$\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \Delta\mathbf{p} = \mathbf{J} \quad (\text{Teorema do impulso-momento linear}) \quad (10-4)$$

Além disso, da conservação do momento linear, sabemos que $\Delta\mathbf{p}$ para o corpo R é igual a $-\Delta\mathbf{p}$ para o corpo L . A Eq. 10-4 também pode ser escrita, na forma de componentes, como

$$p_{fx} - p_{ix} = \Delta p_x = J_x, \quad (10-5)$$

$$p_{fy} - p_{iy} = \Delta p_y = J_y, \quad (10-6)$$

e

$$p_{fz} - p_{iz} = \Delta p_z = J_z. \quad (10-7)$$

Tanto impulso como momento linear são vetores e têm as mesmas unidades e dimensões. O **teorema do impulso-momento linear** representado pela Eq. 10-4, da mes-

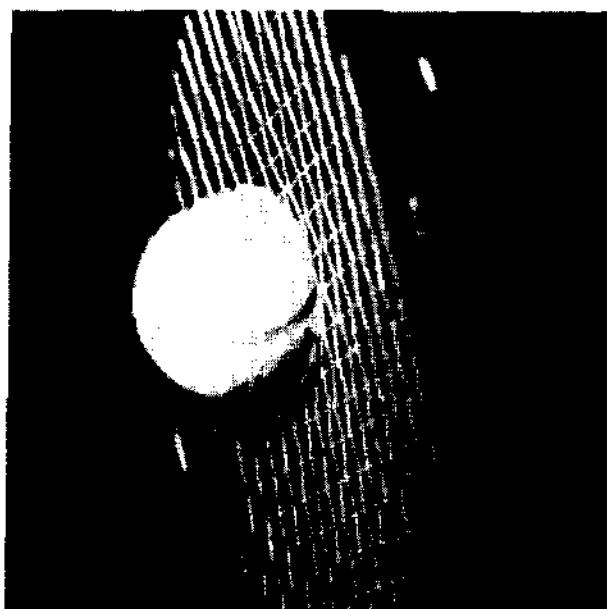


Fig. 10-4 Em uma colisão bola-raquete de tênis, a bola permanece em contato com a raquete por cerca de 4 ms. Durante uma típica partida de tênis de nível mundial, uma bola fica em contato com uma raquete por um tempo cumulativo de cerca de 1 s por set.

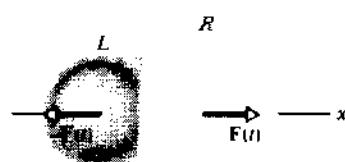


Fig. 10-6 Dois corpos, que se comportam como partículas, L e R , colidem um com o outro. Durante a colisão, o corpo L exerce a força $\mathbf{F}(t)$ sobre R , e este exerce a força $-\mathbf{F}(t)$ sobre L . As forças $\mathbf{F}(t)$ e $-\mathbf{F}(t)$ são um par ação-reAÇÃO. Suas intensidades variam com o tempo durante a colisão, mas, em qualquer instante dado, são iguais entre si.

ma forma que o teorema do trabalho-energia cinética, não é um novo teorema independente, mas uma consequência direta da segunda lei de Newton. Ambos os teoremas são formas especiais dessa lei, úteis para propósitos especiais.

Se F for o módulo médio da força na Fig. 10-7, podemos escrever o módulo do impulso como

$$J = \bar{F} \Delta t, \quad (10-8)$$

onde Δt é a duração da colisão. O valor de \bar{F} deve ser escolhido de forma que a área, dentro do retângulo da Fig. 10-7, seja igual à área sob a curva $F(t)$.

Série de Colisões

Na Fig. 10-8, um fluxo contínuo de corpos, com momentos lineares idênticos $m\bar{v}$, colide com o corpo R , que está fixo em sua posição. Em cada colisão desta situação unidimensional, o impulso J agindo sobre o corpo R e a variação Δp do momento linear de um corpo que colide têm o mesmo módulo, mas sentidos opostos. Se n corpos colidirem no intervalo de tempo Δt , então o impulso total J agindo sobre o corpo R durante Δt será

$$J = -n \Delta p. \quad (10-9)$$

Substituindo a Eq. 10-9 na Eq. 10-8, encontramos a força média \bar{F} agindo sobre o corpo R durante as colisões:

$$\bar{F} = -\frac{n}{\Delta t} \Delta p = -\frac{n}{\Delta t} m \Delta v. \quad (10-10)$$

A razão $n/\Delta t$ é a taxa com que os corpos colidem com o corpo R .

Se os corpos incidentes pararem com o impacto, então, na Eq. 10-10, substituímos

$$\Delta v = v_f - v_i = 0 - v = -v, \quad (10-11)$$

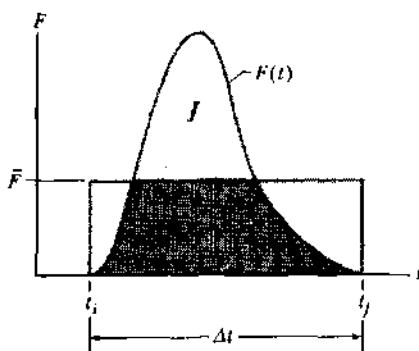


Fig. 10-7 A curva mostra a intensidade da força $F(t)$, variável no tempo, que age sobre o corpo R na Fig. 10-6. A altura do retângulo representa a força média que age durante o intervalo de tempo Δt . As áreas sob a curva $F(t)$ e dentro do retângulo são ambas iguais ao módulo do impulso J na colisão da Fig. 10-6.

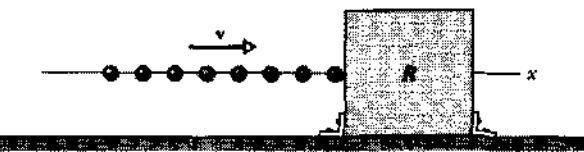


Fig. 10-8 Um fluxo contínuo de corpos, com momentos lineares idênticos, colide com o corpo R , que está fixo em sua posição. A força média sobre o corpo R é orientada para a direita e tem uma intensidade que depende da taxa em que os corpos colidem ou, equivalentemente, da taxa com que a massa colide.

onde $v_i (= v)$ e $v_f (= 0)$ são as velocidades antes e depois da colisão, respectivamente. Se, em lugar disso, os corpos que colidem “quicarem” diretamente para trás, a partir do corpo R e sem variação no módulo da velocidade, então $v_f = -v$ e substituímos

$$\Delta v = v_f - v_i = -v - v = -2v. \quad (10-12)$$

No intervalo de tempo Δt , uma quantidade de massa $\Delta m = nm$ colide com o corpo R . Com esse resultado, podemos reescrever a Eq. 10-10 como

$$\bar{F} = -\frac{\Delta m}{\Delta t} \Delta v, \quad (10-13)$$

onde $\Delta m/\Delta t$ é a taxa com que as massas colidem com o corpo R . Aqui, novamente, podemos utilizar a Eq. 10-11 ou 10-12 para Δv , dependendo de como se comportam os corpos que colidem.

EXEMPLO 10-1 Uma bola de beisebol de 140 g, em vôo horizontal com uma velocidade v_i de 39 m/s, é atingida por um rebatedor. Após abandonar o bastão, a bola viaja no sentido oposto com velocidade v_f , também de 39 m/s.

a. Qual é o impulso J que age sobre a bola, enquanto ela está em contato com o bastão?

Solução Podemos calcular o impulso a partir da variação que ele produz no momento linear da bola, usando a Eq. 10-4 para movimento unidimensional. Vamos escolher como positivo o sentido em que o bastão está se deslocando. Da Eq. 10-4, temos

$$\begin{aligned} J &= p_f - p_i = mv_f - mv_i \\ &= (0,14 \text{ kg})(39 \text{ m/s}) - (0,14 \text{ kg})(-39 \text{ m/s}) \\ &= 10,9 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \approx 11 \text{ kg} \cdot \text{m/s}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Com nossa convenção de sinais, a velocidade inicial da bola é negativa e a final é positiva. Vemos que o impulso é positivo, o que nos diz que o sentido do vetor impulso agindo sobre a bola é o mesmo em que o bastão se deslocava, um resultado coerente.

b. O tempo de impacto Δt para a colisão bola-bastão é de 1,2 ms, um valor típico. Qual é a força média que age sobre a bola?

Solução Da Eq. 10-8, temos

$$\bar{F} = \frac{\bar{J}}{\Delta t} = \frac{10,9 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{0,0012 \text{ s}} \\ = 9.100 \text{ N}, \quad (\text{Resposta})$$

o que equivale aproximadamente a uma tonelada-força. A força *máxima* será mais intensa. O sinal da força média exercida sobre a bola é positivo, o que significa que o sentido do vetor força é o mesmo do vetor impulso.

c. Qual é a aceleração média \bar{a} da bola?

Solução Encontramos esta aceleração usando

$$\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m} = \frac{9.100 \text{ N}}{0,14 \text{ kg}} = 6,5 \times 10^4 \text{ m/s}^2, \quad (\text{Resposta})$$

que é cerca de 6.600 vezes a aceleração de um corpo em queda livre.

Ao definir uma colisão, supomos que nenhuma força externa age sobre os corpos que colidem. Isto não é verdade neste caso, porque o peso mg da bola sempre age sobre ela, esteja a bola em voo ou em contato com o bastão. Entretanto, esta força, com um módulo de 1,4 N, é desprezível em comparação com a força média exercida pelo bastão, que tem uma intensidade de 9.100 N. Isto justifica o tratamento da colisão como “isolada”.

EXEMPLO 10-2 Como no Exemplo 10-1, a bola de beisebol aproxima-se do bastão a uma velocidade v_i de 39 m/s; mas agora a colisão não é frontal e a bola deixa o bastão com uma velocidade v_f de 45 m/s a um ângulo de 30° acima da horizontal (Fig. 10-9). Qual é a força média exercida sobre a bola, se a colisão durar 1,2 ms?

Solução Encontramos as componentes J_x e J_y do impulso a partir das Eqs. 10-5 e 10-6:

$$J_x = p_{fx} - p_{ix} = mv_{fx} - mv_{ix} \\ = (0,14 \text{ kg})[(45 \text{ m/s})(\cos 30^\circ) - (-39 \text{ m/s})] \\ = 10,92 \text{ kg} \cdot \text{m/s},$$

e

$$J_y = p_{fy} - p_{iy} = mv_{fy} - mv_{iy} \\ = (0,14 \text{ kg})[(45 \text{ m/s})(\sin 30^\circ) - 0] \\ = 3,150 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

O módulo do impulso J é dado por

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} \\ = \sqrt{(10,92 \text{ kg} \cdot \text{m/s})^2 + (3,150 \text{ kg} \cdot \text{m/s})^2} \\ = 11,37 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

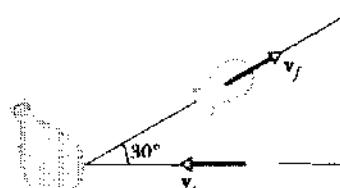


Fig. 10-9 Exemplo 10-2. Um bastão colide com uma bola de beisebol, rebatendo-a com um ângulo de 30° a partir da horizontal.

Da Eq. 10-8, o módulo \bar{F} da força média é

$$\bar{F} = \frac{\bar{J}}{\Delta t} = \frac{11,37 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{0,0012 \text{ s}} \\ = 9475 \text{ N} \approx 9500 \text{ N}. \quad (\text{Resposta})$$

O impulso \bar{J} está voltado para cima, em relação à horizontal, de um ângulo θ , onde θ é dado por

$$\tan \theta = \frac{J_y}{J_x} = \frac{3,150 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{10,92 \text{ kg} \cdot \text{m/s}} = 0,288,$$

$$\theta = 16^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

A força média está no mesmo sentido de \bar{J} . Observe que, nesta situação bidimensional, ao contrário do que ocorreu no Exemplo 10-1, e \bar{J} não estão na direção tomada pela bola, quando ela abandona o bastão.

10-3 Colisões Elásticas em Uma Dimensão

Alvo Estacionário

Considere uma colisão frontal simples de dois corpos de massas diferentes. Por conveniência, consideramos um dos corpos em repouso antes da colisão; ele será o “alvo” e o outro será o “projétil”.* Vamos supor que este sistema de dois corpos seja fechado (não há entrada ou saída de massa) e isolado (nenhuma força externa resultante age sobre ele). Também, suponhamos que a energia cinética do sistema seja a mesma antes e depois da colisão. Tais impactos, onde a energia cinética é conservada, são de um tipo especial chamado de **colisões elásticas**. O momento linear de um sistema fechado e isolado é *sempre* conservado em uma colisão, seja a mesma elástica ou não, porque as forças envolvidas são todas forças internas.

A aplicação das leis de conservação do momento linear e da energia cinética à colisão da Fig. 10-10 fornece-nos

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (\text{momento linear}), \quad (10-14)$$

e

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (\text{energia cinética}), \quad (10-15)$$

Em cada uma dessas equações, o índice i identifica as velocidades iniciais e o índice f , as velocidades finais dos corpos. Se soubermos as massas dos corpos e também v_{1i} , a velocidade inicial do corpo 1, as únicas incógnitas serão v_{1f} e v_{2f} , as velocidades finais dos dois corpos. Com duas equações à disposição, devemos ser capazes de encontrar essas duas incógnitas.

*Se o corpo alvo estiver em movimento em relação ao nosso referencial inercial, sempre podemos encontrar outro referencial inercial onde o corpo alvo esteja inicialmente em repouso.

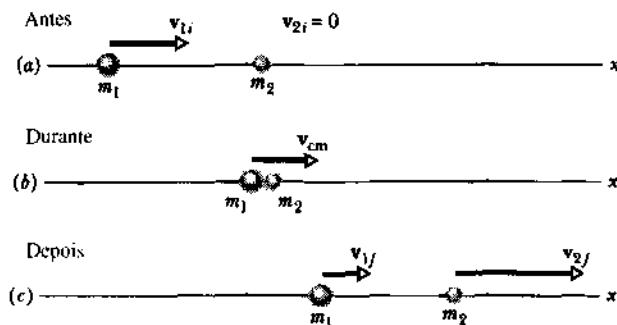


Fig. 10-10 Dois corpos sofrem uma colisão elástica. Um deles (o corpo alvo, com massa m_2) está inicialmente em repouso, antes da colisão. As velocidades são vistas (a) antes, (b) durante e (c) depois da colisão. (A velocidade durante a colisão é a velocidade do centro de massa dos dois corpos, que permanecem momentaneamente em contato.) As velocidades estão representadas em escala para o caso onde $m_1 = 3m_2$.

Para fazê-lo, reescrevemos a Eq. 10-14 como

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2 v_{2f} \quad (10-16)$$

e a Eq. 10-15 como*

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2 v_{2f}^2. \quad (10-17)$$

Após dividirmos a Eq. 10-17 pela Eq. 10-16 e utilizarmos mais alguma álgebra, obtemos

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (10-18)$$

e

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}. \quad (10-19)$$

Observamos, da Eq. 10-19, que v_{2f} é sempre positiva (o corpo alvo, com massa m_2 , sempre se move para a frente). Da Eq. 10-18, vemos que v_{1f} pode ter qualquer sinal (o corpo projétil, com massa m_1 , move-se para a frente se $m_1 > m_2$, mas é rebatido de volta se $m_1 < m_2$). Vejamos algumas situações especiais.

Massas Iguais

Se $m_1 = m_2$, as Eqs. 10-18 e 10-19 reduzem-se a

$$v_{1f} = 0 \quad \text{e} \quad v_{2f} = v_{1i}.$$

que poderíamos chamar de um resultado de jogador de sinuca. Ele prediz que, após uma colisão frontal de corpos com massas iguais, o corpo 1 (inicialmente em movimento) pára completamente e o 2 (inicialmente em repouso)

parte com a velocidade inicial do corpo 1. Em colisões frontais, corpos de massas iguais simplesmente trocam velocidades. Isto é verdade, mesmo se a partícula alvo não estiver inicialmente em repouso.

Um Alvo de Grande Massa

Em termos da Fig. 10-10, um alvo de grande massa significa que $m_2 \gg m_1$. Por exemplo, poderíamos disparar uma bola de golfe contra uma bala de canhão. As Eqs. 10-18 e 10-19 reduzem-se, então, a

$$v_{1f} \approx -v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{2f} \approx \left(\frac{2m_1}{m_2}\right) v_{1i}. \quad (10-20)$$

Esta equação diz-nos que o corpo 1 (a bola de golfe) simplesmente retorna, em sentido inverso, pela mesma direção por onde veio, com sua velocidade essencialmente inalterada. O corpo 2 (a bala de canhão) desloca-se para a frente a uma velocidade muito baixa, porque a quantidade entre parênteses na Eq. 10-20 é muito menor do que a unidade. Tudo isso corresponde ao que deveríamos esperar.

Um Projétil de Grande Massa

Este é o caso oposto; ou seja, $m_1 \gg m_2$. Desta vez, atiramos uma bala de canhão contra uma bola de golfe. As Eqs. 10-18 e 10-19 reduzem-se a

$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{2f} \approx 2v_{1i}. \quad (10-21)$$

A Eq. 10-21 diz-nos que o corpo 1 (a bala de canhão) simplesmente prossegue, com sua velocidade ligeiramente diminuída pela colisão. O corpo 2 (a bola de golfe) dispara adiante com o dobro da velocidade da bala de canhão.

Você pode perguntar-se: "Por que o dobro?" Como ponto de partida para pensar no assunto, lembre-se da colisão descrita pela Eq. 10-20, onde a velocidade do corpo leve incidente (a bola de golfe) mudou de $+v$ para $-v$, uma variação de $2v$ na velocidade. A mesma variação na velocidade (de zero a $2v$) ocorre também neste exemplo.

Movimento do Centro de Massa

O centro de massa de dois corpos que colidem continua a se deslocar sem sofrer qualquer influência da colisão. Isto é consequência da conservação do momento linear e da Eq. 9-26,

$$P = Mv_{cm} = (m_1 + m_2)v_{cm}, \quad (10-22)$$

que relaciona o momento linear P do sistema de dois corpos a v_{cm} , a velocidade de seu centro de massa. Uma vez que o momento linear P não é alterado pela colisão, v_{cm} também deve permanecer inalterada. Assim, o centro de massa continua a se movimentar na mesma direção, no mesmo sentido e com a mesma velocidade. Da Eq. 10-22,

*Neste ponto, usamos a identidade $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Ela reduz a quantidade de álgebra necessária para resolver as equações simultâneas, Eqs. 10-16 e 10-17.

a velocidade do centro de massa para a colisão exibida na Fig. 10-10 (alvo inicialmente em repouso) é

$$v_{cm} = \frac{P}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (10-23)$$

A Fig. 10-11, uma série de fotografias de uma colisão elástica típica, mostra que o centro de massa de fato se move uniformemente adiante, não sendo afetado de forma alguma pela colisão.

Alvo em Movimento

Agora que examinamos a colisão elástica de um projétil e um alvo estacionário, examinemos a situação onde ambos os corpos estejam em movimento antes de sofrer uma colisão elástica.

Para a situação da Fig. 10-12, a conservação do momento linear é escrita como

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}, \quad (10-24)$$

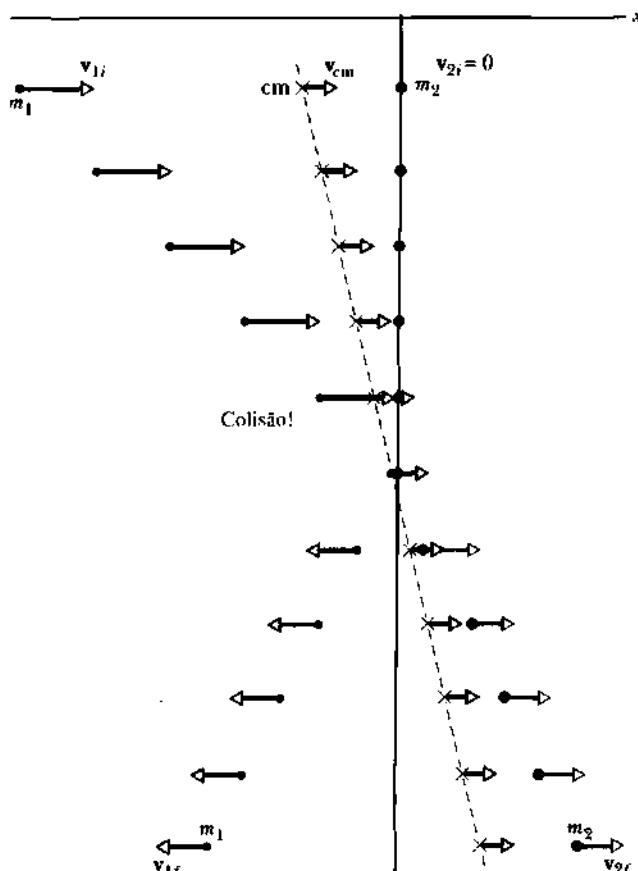


Fig. 10-11 Algumas fotografias de dois corpos sofrendo uma colisão elástica. O corpo 2 está inicialmente em repouso e $m_2 = 3m_1$. Também se mostra a velocidade do centro de massa. Observe que ela não é afetada pela colisão.

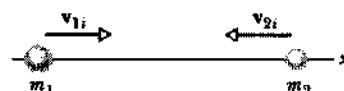


Fig. 10-12 Dois corpos a caminho de uma colisão elástica.

e a conservação da energia cinética é escrita como

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2. \quad (10-25)$$

Para resolver essas equações simultâneas para v_{1f} e v_{2f} , primeiramente reescrevemos a Eq. 10-24 como

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = -m_2(v_{2i} - v_{2f}), \quad (10-26)$$

e a Eq. 10-25 como

$$\begin{aligned} m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) \\ = -m_2(v_{2i} - v_{2f})(v_{2i} + v_{2f}). \end{aligned} \quad (10-27)$$

Após dividirmos a Eq. 10-27 pela Eq. 10-26 e utilizarmos mais alguma álgebra, obteremos

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \quad (10-28)$$

e

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}. \quad (10-29)$$

Observe que a atribuição dos índices 1 e 2 aos corpos é arbitrária. Se trocarmos tais índices na Fig. 10-12 e nas Eqs. 10-28 e 10-29, terminaremos com o mesmo conjunto de equações. Observe também que, se estabelecermos $v_2 = 0$, o corpo 2 tornar-se-á um alvo em repouso e as Eqs. 10-28 e 10-29 se reduzirão às Eqs. 10-18 e 10-19, respectivamente.

EXEMPLO 10-3 Duas esferas de metal, suspensas por fios verticais, estão inicialmente em contato, como mostra a Fig. 10-13. A esfera 1, com massa $m_1 = 30\text{ g}$, é puxada para a esquerda até uma altura $h_1 = 8.0\text{ cm}$ e, então, liberada. Após descer, ela sofre uma colisão elástica com a esfera 2, cuja massa é $m_2 = 75\text{ g}$.

a. Qual é a velocidade v_{1i} da esfera 1, imediatamente após a colisão?

Solução Representemos por v_{1i} a velocidade da esfera 1, imediatamente antes da colisão. A esfera inicia sua descida com energia cinética nula e com energia potencial gravitacional m_1gh_1 . Imediatamente antes da colisão, ela tem energia cinética $\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2$. Durante a descida, a conservação da energia mecânica fornece

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 = m_1gh_1,$$

que resolvemos para encontrar a sua velocidade v_{1i} , imediatamente antes da colisão:

$$v_{1i} = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{(2)(9.8\text{ m/s}^2)(0.080\text{ m})} = 1.252\text{ m/s}.$$

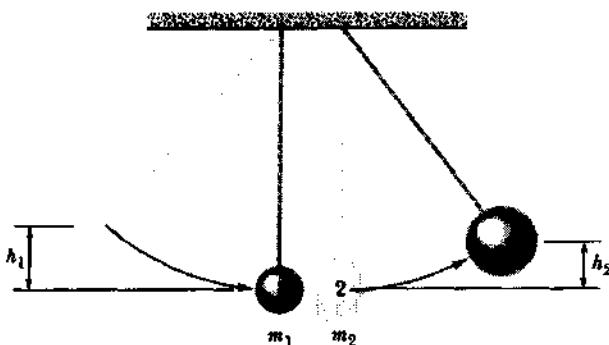


Fig. 10-13 Exemplo 10-3. Duas esferas de metal suspensas por cordas apenas se tocam quando estão em repouso. A esfera 1, com massa m_1 , é puxada para a esquerda até a altura h_1 e, então, liberada. A colisão elástica subsequente com a esfera 2 envia esta até a altura h_2 .

Embora ela descreva um movimento bidimensional, sua colisão com a esfera 2 é horizontal e, portanto, em uma dimensão. Podemos então representar a sua *velocidade*, imediatamente antes dessa colisão, por v_{1i} .

Para encontrar a velocidade v_{1f} da esfera 1, imediatamente após a colisão, usamos a Eq. 10-18:

$$\begin{aligned} v_{1f} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{0,030 \text{ kg} - 0,075 \text{ kg}}{0,030 \text{ kg} + 0,075 \text{ kg}} (1,252 \text{ m/s}) \\ &= -0,537 \text{ m/s} \approx -0,54 \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

O sinal de menos diz-nos que ela se desloca para a esquerda, imediatamente após a colisão.

b. Que altura h' , atinge a esfera 1 ao retornar para a esquerda, após a colisão?

Solução Ela começa a sua trajetória para a esquerda com energia cinética $\frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2$. Quando pára momentaneamente, à altura h' , tem energia potencial gravitacional $m_1 g h'$. Conservando a energia mecânica durante a subida, encontramos

$$m_1 g h' = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2,$$

ou

$$\begin{aligned} h' &= \frac{v_{1f}^2}{2g} = \frac{(-0,537 \text{ m/s})^2}{(2)(9,8 \text{ m/s}^2)} \\ &= 0,0147 \text{ m} \approx 1,5 \text{ cm}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

c. Qual é a velocidade v_{2f} da esfera 2, imediatamente após a colisão?

Solução Da Eq. 10-19, temos

$$\begin{aligned} v_{2f} &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{(2)(0,030 \text{ kg})}{0,030 \text{ kg} + 0,075 \text{ kg}} (1,252 \text{ m/s}) \\ &= 0,715 \text{ m/s} \approx 0,72 \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

d. Que altura h_2 atinge a esfera 2 após a colisão?

Solução Ela começa a sua subida com energia cinética $\frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2$. Quando pára momentaneamente, à altura h_2 , tem energia potencial gravitaci-

onal $m_2 g h_2$. A conservação da energia mecânica durante a subida fornece-nos

$$m_2 g h_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2,$$

ou

$$\begin{aligned} h_2 &= \frac{v_{2i}^2}{2g} = \frac{(0,715 \text{ m/s})^2}{(2)(9,8 \text{ m/s}^2)} \\ &= 0,0261 \text{ m} \approx 2,6 \text{ cm}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

EXEMPLO 10-4 Em um reator nuclear, nêutrons rápidos recém-emitidos devem ter suas velocidades diminuídas, antes de poder participar efetivamente no processo de reação em cadeia. Isto é feito permitindo-lhes colidir com os núcleos de átomos em um *moderador*.

a. De que fração se reduz a energia cinética de um nêutron (de massa m_1) em uma colisão elástica frontal com um núcleo de massa m_2 , inicialmente em repouso?

Solução As energias cinéticas inicial e final do nêutron são

$$K_i = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 \quad \text{e} \quad K_f = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2.$$

A fração que procuramos é, então,

$$\text{frac} = \frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{v_{1i}^2 - v_{1f}^2}{v_{1i}^2} = 1 - \frac{v_{1f}^2}{v_{1i}^2}. \quad (10-30)$$

Para tal colisão, temos, da Eq. 10-18,

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}. \quad (10-31)$$

A substituição da Eq. 10-31 na Eq. 10-30 fornece, após alguma álgebra,

$$\text{frac} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}. \quad (\text{Resposta}) \quad (10-32)$$

b. Estime esta fração para o chumbo, o carbono e o hidrogênio. As razões entre a massa nuclear e a massa do nêutron ($= m_2/m_1$) para esses núcleos são 206 para o chumbo, 12 para o carbono e cerca de 1 para o hidrogênio.

Solução Os seguintes valores da fração podem ser calculados com a Eq. 10-32: para o chumbo ($m_2 = 206m_1$),

$$\text{frac} = \frac{(4)(206)}{(1 + 206)^2} = 0,019 \text{ ou } 1,9\%; \quad (\text{Resposta})$$

para o carbono ($m_2 = 12m_1$),

$$\text{frac} = \frac{(4)(12)}{(1 + 12)^2} = 0,28 \text{ ou } 28\%; \quad (\text{Resposta})$$

e para o hidrogênio ($m_2 \approx m_1$),

$$\text{frac} = \frac{(4)(1)}{(1 + 1)^2} = 1 \text{ ou } 100\%. \quad (\text{Resposta})$$

Esses resultados explicam por que a água, que contém grande quantidade de hidrogênio, é um moderador de nêutrons muito melhor do que o chumbo.

EXEMPLO 10-5 Um deslizador alvo, cuja massa m_2 é de 350 g, está em repouso em um trilho de ar, a uma distância $d = 53$ cm do fim do trilho. Um deslizador projétil, cuja massa m_1 é de 590 g, aproxima-se do alvo com velocidade $v_{1i} = -75$ cm/s e colide elasticamente com ele (Fig. 10-14a). O deslizador alvo é devolvido elasticamente por uma mola curta no final do trilho e encontra o projétil por uma segunda vez, conforme mostra a Fig. 10-14b. A que distância do final do trilho ocorre esta segunda colisão?

Solução Usemos as Eqs. 10-18 e 10-19 para encontrar as velocidades dos dois deslizadores após colidirem. Da Eq. 10-18,

$$\begin{aligned} v_{1f} &= v_{1i} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = (-75 \text{ cm/s}) \frac{590 \text{ g} - 350 \text{ g}}{590 \text{ g} + 350 \text{ g}} \\ &= -19 \text{ cm/s}. \end{aligned} \quad (10-33)$$

Da Eq. 10-19,

$$\begin{aligned} v_{2f} &= v_{1i} \frac{2m_1}{m_1 + m_2} = (-75 \text{ cm/s}) \frac{(2)(590 \text{ g})}{590 \text{ g} + 350 \text{ g}} \\ &= -94 \text{ cm/s}. \end{aligned} \quad (10-34)$$

Até a segunda colisão, o deslizador 1 terá percorrido uma distância $d - x$ e o 2, uma distância $d + x$. Seus tempos t de percurso para essas distâncias são iguais, de forma que

$$t = \frac{d - x}{v_{1f}} = \frac{d + x}{v_{2f}}.$$

Substituindo os resultados das Eqs. 10-33 e 10-34 e estabelecendo $d = 53$ cm, obtemos

$$\frac{53 \text{ cm} - x}{-19 \text{ cm/s}} = \frac{53 \text{ cm} + x}{-94 \text{ cm/s}}.$$

A resolução para x fornece, após alguma álgebra,

$$x = 35 \text{ cm.} \quad (\text{Resposta})$$

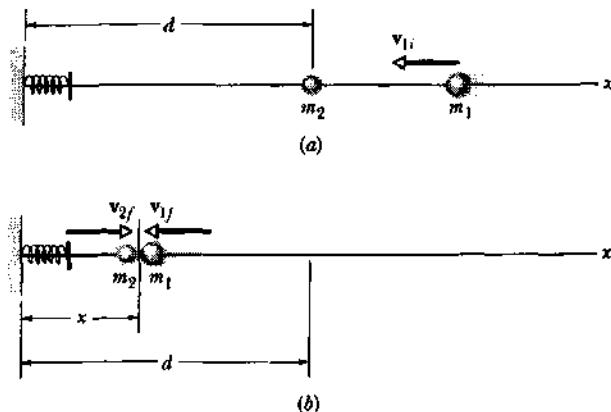


Fig. 10-14 Exemplo 10-5. (a) Dois deslizadores em um trilho de ar estão a ponto de colidir. O deslizador m_2 está inicialmente em repouso. (b) Após a colisão, o deslizador m_2 retorna elasticamente da mola na extremidade esquerda do trilho e encontra o deslizador m_1 por uma segunda vez. Onde ocorre este segundo encontro?

Veja a Tática 1 para aprender o que está errado com esse método de resolução do problema.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 1: NÚMEROS VERSUS ÁLGEBRA

Freqüentemente, os principiantes na resolução de problemas substituem números muito cedo. Essa “corrida para os números” pode desenvolver um sentimento de confiança, mas, muitas vezes, dá uma visão muito restrita do problema como um todo. O Exemplo 10-5, onde deliberadamente usamos os números muito cedo, é um bom exemplo. Se você resolver esse problema usando apenas símbolos e substituindo os passos na solução numérica acima, obterá

$$x = d \frac{m_1 + m_2}{3m_1 - m_2},$$

que nos mostra ser o resultado independente da velocidade inicial do deslizador.

Podemos reescrever essa expressão em termos da razão adimensional r entre as massas, como

$$x = d \frac{r + 1}{3r - 1} \quad \text{onde} \quad r = \frac{m_1}{m_2}.$$

Assim, a solução algébrica mostra que o resultado depende não das massas individuais, mas apenas de sua razão. Para os dados do Exemplo 10-5, $r = (590 \text{ g})/(350 \text{ g}) = 1,69$ e $x = 35 \text{ cm}$, concordando com a solução numérica.

A solução algébrica também nos permite analisar casos especiais. Por exemplo, $r = 1$ corresponde a $x = d$, conforme esperado. (A segunda colisão tem lugar exatamente onde a primeira ocorreu.) Podemos fazer perguntas como: “Para que valor de r teremos $x = \frac{1}{2}d$?” ou “Para que valor de r teremos $x = 2d$?” (As respostas são $r = 3$ e $r = 0,6$.) Também podemos perguntar: “Qual é o menor valor de r para o qual uma segunda colisão realmente ocorrerá?”. A resposta é $r = 1/3$, correspondendo a $x \rightarrow \infty$.

Você pode objetar que, se certos dados de entrada não eram necessários, não deveríamos tê-los fornecido no enunciado do problema. Mas, no mundo real, os solucionadores de problemas devem obter seus próprios dados de entrada e decidir por si mesmos o que é necessário e o que não é. Conselho: mantenha-se na álgebra até onde puder e estude os pré-requisitos e implicações da equação que você obtiver.

10-4 Colisões Inelásticas em Uma Dimensão

Uma **colisão inelástica** (ou **anelástica**) é aquela onde não é conservada a energia cinética do sistema de corpos que colidem. Se você largar uma superbola sobre um chão duro, ela perde muito pouco de sua energia cinética no impacto e quica quase até a sua altura de origem. Se, de fato, a bola recuperasse a altura original, sua colisão com o chão seria elástica. Contudo, a pequena perda de energia cinética na colisão diminui a altura até onde ela retorna e, portanto, a colisão é um tanto inelástica.

Uma bola de golfe largada perderá mais de sua energia cinética e quicará até apenas 60% de sua altura de origem. Esta colisão é notadamente inelástica. Se você largar uma bola de massa de modelar sobre o chão, ela adere ao chão e não quica de forma alguma. Por isso diz-se que esta colisão é uma **colisão perfeitamente inelástica**. (Em qualquer colisão inelásti-

ca, a energia cinética que se perde é transferida a alguma outra forma de energia, talvez energia térmica.)

Nesta seção, restringimo-nos em grande parte a colisões perfeitamente inelásticas. Embora um sistema de corpos em colisão sempre perca energia cinética em qualquer impacto inelástico, o momento linear do sistema sempre se conserva (considerando-se que o sistema seja isolado e fechado). Uma vez que tanto a energia cinética como o momento linear envolvem as velocidades dos corpos em colisão, a conservação do momento linear limita o quanto de energia cinética é perdido por um sistema em uma colisão inelástica. Quando os corpos aderem um ao outro em uma colisão perfeitamente inelástica, a quantidade de energia cinética que se perde é a máxima permitida pela conservação do momento linear. Em algumas situações, o sistema pode perder toda a sua energia cinética.

A Fig. 10-15 mostra uma colisão inelástica unidimensional onde um corpo está inicialmente em repouso. A lei da conservação do momento linear é válida neste caso de modo que

$$m_1 v = (m_1 + m_2) V, \quad (10-35)$$

ou

$$V = v \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad (10-36)$$

onde V representa a velocidade final dos corpos unidos. A Eq. 10-36 nos diz que a velocidade final é sempre menor do que a do corpo inicialmente em movimento.

A Fig. 10-16 (compare-a com a Fig. 10-11) mostra que o movimento do centro de massa em uma colisão perfeitamente inelástica não é afetado por ela. Aqui, apesar dos corpos aderirem um ao outro, a energia cinética associada ao movimento do centro de massa ainda está presente. A única maneira em que a energia cinética pode desaparecer *totalmente* em uma colisão inelástica é se o referencial for fixo em relação ao centro de massa dos corpos em colisão. Então, todo movimento relativo ao referencial cessa quando os corpos aderem um ao outro. Se o corpo alvo m_2 for de massa excessivamente grande, o centro de massa do sistema coincidirá essencialmente com o do alvo. Isto é o que

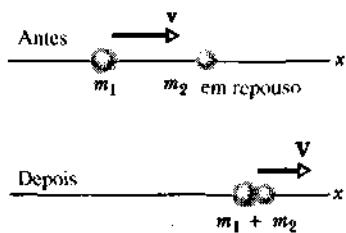


Fig. 10-15 Uma colisão inelástica entre dois corpos. Antes da colisão, o corpo de massa m_2 está em repouso. Posteriormente, os corpos se unem, o que é o critério para uma colisão *perfeitamente* inelástica. As velocidades estão representadas em escala para o caso onde $m_1 = 3m_2$.

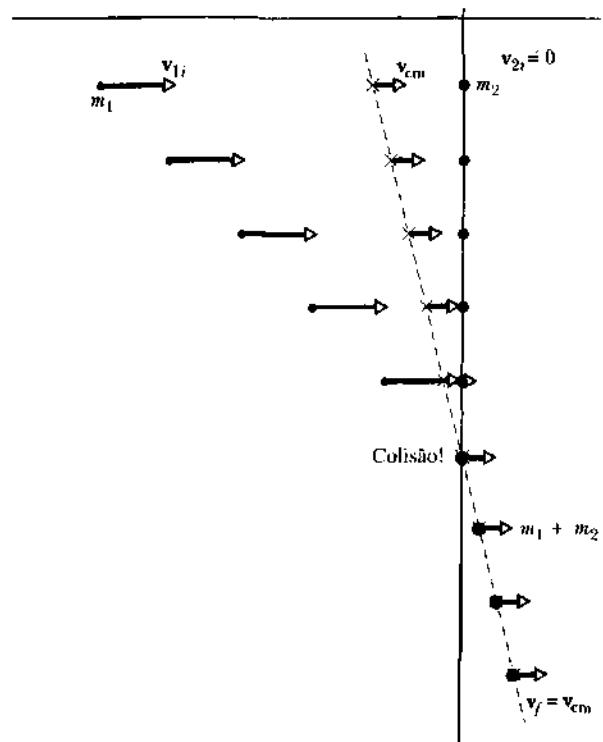


Fig. 10-16 Algumas fotografias de dois corpos sofrendo uma colisão perfeitamente inelástica. O corpo 2 está inicialmente em repouso, e $m_2 = 3m_1$. Os corpos permanecem unidos após a colisão e assim prosseguem em seu movimento adiante. Também se representa a velocidade do centro de massa. Observe que ela não é afetada pela colisão e que é igual à velocidade final dos corpos reunidos.

ocorre quando uma bola de massa de modelar é largada sobre o chão, o corpo alvo sendo a Terra. Quando a bola bate, toda a energia cinética é dissipada, sendo transferida para alguma outra forma de energia.

Se ambos os corpos estiverem se deslocando antes de uma colisão onde ficarão aderidos um ao outro, substituímos a Eq. 10-35 por

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V, \quad (10-37)$$

onde $m_1 v_1$ é o momento linear inicial de um corpo e $m_2 v_2$ é o do outro. Aqui, novamente toda a energia cinética será dissipada apenas se o referencial for fixo em relação ao centro de massa dos corpos. A Fig. 10-17 mostra um exemplo: carros idênticos, dirigidos a velocidades iguais, sofreram uma colisão quase frontal e quase perfeitamente inelástica. Seu centro de massa estava parado em relação à Terra. Portanto, uma pessoa que estivesse parada em relação à Terra teria visto esses carros pararem após a colisão, em lugar de se deslocarem em um sentido ou outro.

EXEMPLO 10-6 Um pêndulo balístico (Fig. 10-18) é um dispositivo que foi usado para medir as velocidades de projéteis, antes que se desenvolvessem dispositivos eletrônicos de medição. Este pêndulo consiste em um grande bloco de madeira de massa $M = 5,4 \text{ kg}$, pendurado por dois fios longos. Uma bala de massa $m = 9,5 \text{ g}$ é disparada para dentro do bloco, parando rapidamente. Então, bloco + bala deslocam-se para

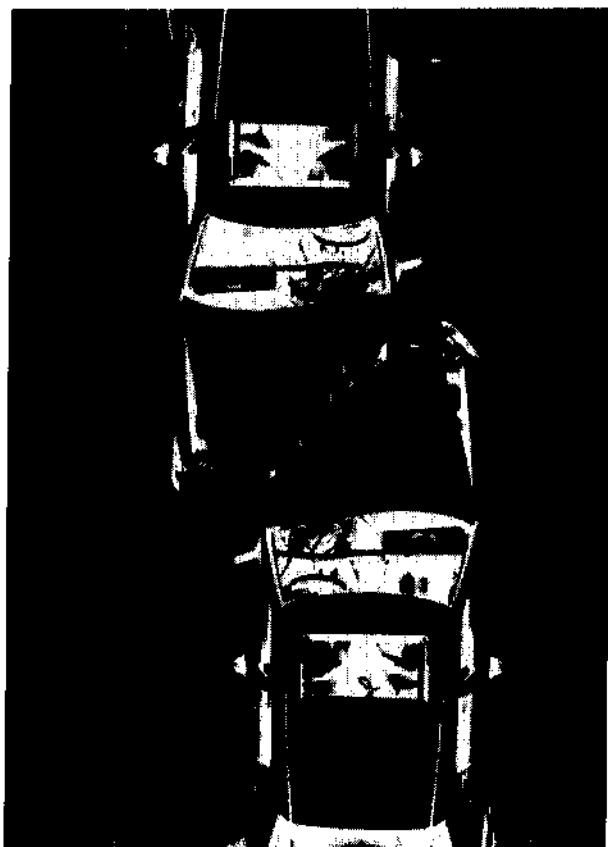


Fig. 10-17 Dois carros após uma colisão quase frontal e quase perfeitamente inelástica.

cima, seu centro de massa elevando-se de uma distância vertical $h = 6.3$ cm, antes que o pêndulo pare momentaneamente ao final de seu arco.

a. Qual era a velocidade v da bala, imediatamente antes da colisão?

Solução Imediatamente após a colisão, *bala + bloco* têm velocidade V . Aplicando a conservação do momento linear à colisão, temos

$$mv = (M + m)V.$$

Uma vez que a bala e o bloco permanecem unidos, a colisão é perfeitamente inelástica e a energia cinética não se conserva durante ela. Entretanto, *após* a colisão, a energia mecânica é conservada porque, então, nenhuma força age para dissipá-la. Assim, a energia cinética do sistema, quando o bloco está no ponto mais baixo de seu arco, deve ser igual à energia potencial do sistema, quando o bloco está no ponto mais alto:

$$\frac{1}{2}(M + m)V^2 = (M + m)gh.$$

A eliminação de V entre essas duas equações conduz a

$$\begin{aligned} v &= \frac{M + m}{m} \sqrt{2gh} \\ &= \left(\frac{5.4 \text{ kg} + 0.0095 \text{ kg}}{0.0095 \text{ kg}} \right) \sqrt{(2)(9.8 \text{ m/s}^2)(0.063 \text{ m})} \\ &= 630 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

(Resposta)

O pêndulo balístico é um tipo de "transformador", substituindo a alta velocidade de um objeto leve (a bala) pela baixa — e, portanto, mais

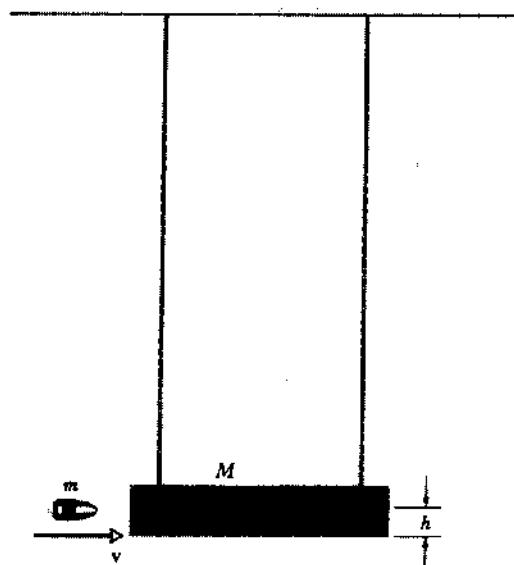


Fig. 10-18 Exemplo 10-6. Um pêndulo balístico, antigamente empregado para se medir as velocidades de balas de fuzil.

facilmente mensurável — velocidade de um objeto de maior massa (M) ou

b. Qual é a energia cinética inicial da bala? Quanto dessa energia permanece como energia mecânica do pêndulo em movimento?

Solução A energia cinética da bala é

$$\begin{aligned} K_b &= \frac{1}{2}mv^2 = (\frac{1}{2})(0.0095 \text{ kg})(630 \text{ m/s})^2 \\ &= 1.900 \text{ J.} \end{aligned}$$

(Resposta)

A energia mecânica do pêndulo em movimento é igual à sua energia potencial, quando o bloco está no ponto mais alto de sua trajetória, ou

$$\begin{aligned} E &= (M + m)gh \\ &= (5.4 \text{ kg} + 0.0095 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(0.063 \text{ m}) \\ &= 3.3 \text{ J.} \end{aligned}$$

(Resposta)

Assim, apenas $3.3/1.900$ ou 0.2% da energia cinética original da bala é transferido para a energia mecânica do pêndulo. O resto é deslocado para a energia térmica do bloco e da bala, ou vai para a quebra de fibras da madeira, à medida que a bala abre caminho para dentro dela.

EXEMPLO 10-7 Um mestre em karatê bate para baixo com seu punho (de massa $m_1 = 0.70 \text{ kg}$), quebrando uma prancha de 0.14 kg (Fig. 10-19a). Ele, então, faz o mesmo a um bloco de concreto de 3.2 kg . As constantes elásticas k para o dobramento são $4.1 \times 10^4 \text{ N/m}$ para a prancha e $2.6 \times 10^6 \text{ N/m}$ para o bloco. A quebra ocorre a uma deflexão d de 16 mm para a prancha e $1,1 \text{ mm}$ para o bloco (Fig. 10-19c).*

a. Imediatamente antes que a prancha e o bloco se quebrem, qual é a energia armazenada em cada um?

*Os dados foram tirados de "The Physics of Karate", de S. R. Wilk, R.E. McNair e M.S. Feld, *American Journal of Physics*, setembro de 1983.

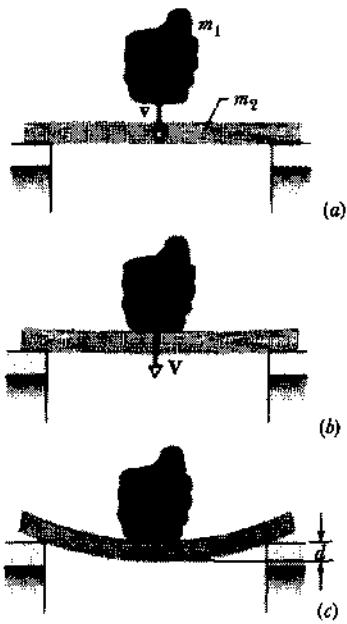


Fig. 10-19 Exemplo 10-7. (a) Um perito em caratê golpeia um objeto plano com velocidade v . (b) O punho e o objeto sofrem uma colisão perfeitamente inelástica e tem início o dobramento. O punho + objeto, então, têm velocidade V . (c) O objeto quebra-se quando seu centro é defletido de uma quantidade d . Supomos que o punho e o objeto parem exatamente nesse ponto.

Solução Tratamos o dobramento como a compressão de uma mola à qual se aplica a lei de Hooke. A energia armazenada é, então, da Eq. 7.19, $U = \frac{1}{2}kd^2$. Para a prancha,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}(4.1 \times 10^4 \text{ N/m})(0.016 \text{ m})^2 \\ &= 5,248 \text{ J} \approx 5.2 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Para o bloco,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}(2.6 \times 10^6 \text{ N/m})(0.0011 \text{ m})^2 \\ &= 1,573 \text{ J} \approx 1.6 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

b. Que velocidade v do punho, é necessária para quebrar a prancha e o bloco? Suponha que a energia mecânica seja conservada durante o dobramento, que o punho e o objeto atingido parem imediatamente antes da quebra e que a colisão punho-objeto, no início do dobramento (Fig. 10-19b), seja perfeitamente inelástica.

Solução Se a energia mecânica se conservar durante o dobramento, então a energia cinética K do sistema punho-objeto ao início do dobramento deverá ser igual a U , exatamente naquele: 5.2 J para a prancha e 1.6 J para o bloco. A velocidade do punho necessária para quebrar o objeto é a mesma para produzir aquela energia cinética K , que pode ser escrita como

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = U,$$

de modo que

$$V = \sqrt{\frac{2U}{m_1 + m_2}},$$

onde V é a velocidade do punho + objeto ao início do dobramento, $m_1 = 0.70 \text{ kg}$ e $m_2 = 0.14 \text{ kg}$ para a prancha ou 3.2 kg para o bloco. Para a prancha, temos

$$V = \sqrt{\frac{2(5,248 \text{ J})}{0.70 \text{ kg} + 0.14 \text{ kg}}} = 3,534 \text{ m/s}.$$

Para o bloco, temos

$$V = \sqrt{\frac{2(1,573 \text{ J})}{0.70 \text{ kg} + 3.2 \text{ kg}}} = 0.8981 \text{ m/s}.$$

imediatamente antes de atingir a prancha ou o bloco, o punho tem a velocidade v da Eq. 10-36. Assim, rearrumando aquela equação, obtemos

$$v = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)V.$$

Para a prancha, encontramos

$$\begin{aligned} v &= \left(\frac{0.70 \text{ kg} + 0.14 \text{ kg}}{0.70 \text{ kg}}\right)(3,534 \text{ m/s}) \\ &\approx 4.2 \text{ m/s}, \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

e para o bloco, temos

$$\begin{aligned} v &= \left(\frac{0.70 \text{ kg} + 3.2 \text{ kg}}{0.70 \text{ kg}}\right)(0.8981 \text{ m/s}) \\ &\approx 5.0 \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

A velocidade do punho deve ser aproximadamente 20% maior para que ele quebre o bloco, porque a massa maior do bloco dificulta a transferência de energia.

10-5 Colisões em Duas Dimensões

Aqui, consideraremos uma colisão oblíqua entre um corpo projétil e um corpo alvo em repouso. Na Fig. 10-20, vemos uma situação típica. A distância b pela qual a colisão deixa de ser frontal é denominada *parâmetro de impacto*. Ela é uma medida do quanto a colisão é direta, $b = 0$ cor-

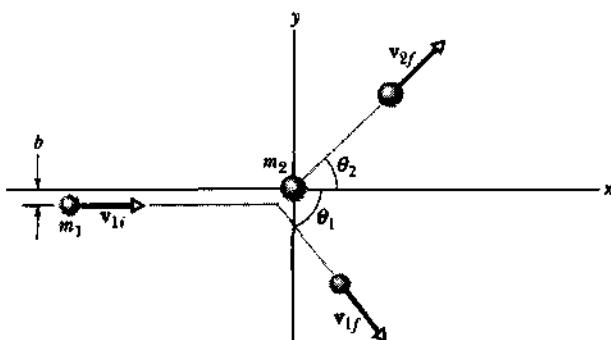


Fig. 10-20 Uma colisão elástica entre dois corpos onde a colisão não é frontal. O corpo com massa m_2 (o alvo) está inicialmente em repouso. A distância b é o parâmetro de impacto.

respondendo a uma colisão frontal. Após a colisão, os dois corpos afastam-se com ângulos θ_1 e θ_2 , como mostra a figura.

Da conservação do momento linear (uma relação vetorial), podemos escrever duas equações escalares:

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta_1 + m_2 v_{2f} \cos \theta_2 \quad (\text{componente } x) \quad (10-38)$$

e

$$0 = -m_1 v_{1f} \sin \theta_1 + m_2 v_{2f} \sin \theta_2 \quad (\text{componente } y). \quad (10-39)$$

Se a colisão for elástica, também se conservará a energia cinética:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (\text{energia cinética}). \quad (10-40)$$

Essas três equações contêm sete variáveis: duas massas, m_1 e m_2 ; três velocidades, v_{1i} , v_{1f} e v_{2f} ; e dois ângulos, θ_1 e θ_2 . Se soubermos apenas quatro dessas quantidades, podemos resolver as três equações para as três restantes. Frequentemente, as quantidades conhecidas são as duas massas, a velocidade inicial e um dos ângulos. As incógnitas a se determinarem são, então, as duas velocidades finais e o outro ângulo.

EXEMPLO 10-8 Duas partículas de massas iguais sofrem uma colisão elástica, a partícula alvo estando inicialmente em repouso. Mostre (a menos que a colisão seja frontal) que as duas partículas sempre irão afastar-se perpendicularmente entre si, após a colisão.

Solução Há um impulso de se abordar o problema e resolvê-lo de uma forma imediata, aplicando-se as Eqs. 10-38, 10-39 e 10-40. Existe um modo mais simples.

A Fig. 10-21a mostra a situação tanto antes como após a colisão, cada partícula com seu vetor momento linear associado. Sendo o momento linear conservado na colisão, esses vetores devem formar um triângulo fechado, como mostra a Fig. 10-21b. (O vetor mv_{1i} deve ser a soma vetorial de mv_{1f} e mv_{2f}). Como as massas das partículas são iguais, o triângulo fechado dos momentos lineares da Fig. 10-21b é também um triângulo fechado de velocidade, porque a divisão pelo escalar m não altera a relação dos vetores. Ou seja,

$$v_{1i} = v_{1f} + v_{2f}. \quad (10-41)$$

Conservando-se a energia cinética, vale a Eq. 10-40. Com o cancelamento da massa m , idêntica para as duas partículas, esta equação torna-se

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2. \quad (10-42)$$

A Eq. 10-42 aplica-se aos comprimentos dos lados no triângulo da Fig. 10-21b. Para que ela seja válida, o triângulo deve ser retângulo (e a Eq. 10-42 é, então, o teorema de Pitágoras). Portanto, o ângulo ϕ entre os vetores v_{1f} e v_{2f} deve ser de 90° , coincidindo com o que nos dispusemos a provar.

EXEMPLO 10-9 Dois patinadores colidem e abraçam-se, em uma colisão perfeitamente inelástica. Ou seja, eles permanecem unidos após o impacto, conforme sugerido pela Fig. 10-22, onde a origem é localizada no ponto da colisão. Alfred, cuja massa m_A é de 83 kg, está originalmente se deslocando para o leste com velocidade $v_A = 6,2 \text{ km/h}$. Bárbara

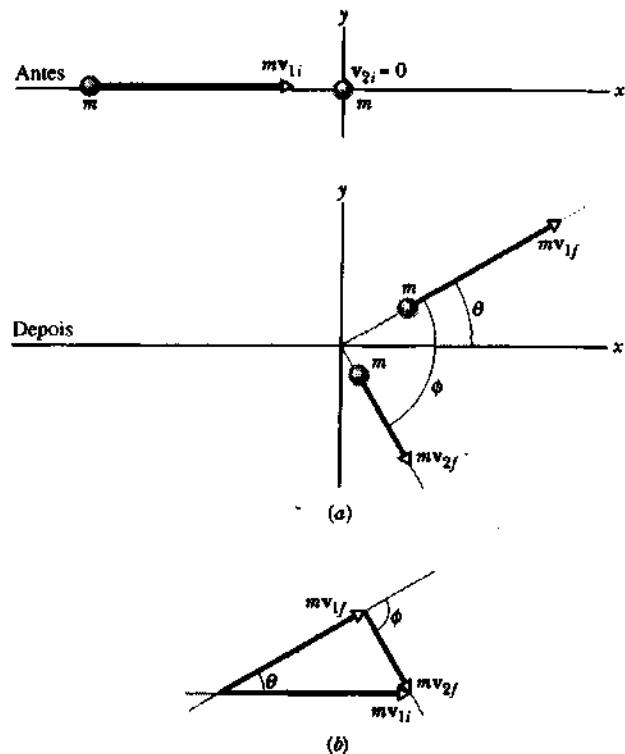


Fig. 10-21 Exemplo 10-8. Uma prova elegante do fato de que, em uma colisão elástica entre duas partículas de mesma massa, as partículas, em seguida, afastam-se a 90° entre si. Para que isto seja válido, a partícula alvo deve estar inicialmente em repouso e a colisão não pode ser frontal.

ra, cuja massa m_B é de 55 kg, está originalmente se deslocando para o norte com velocidade $v_B = 7,8 \text{ km/h}$.

a. Qual é a velocidade V do casal, após o impacto?

Solução O momento linear conserva-se durante a colisão. Podemos escrever, para as componentes do momento linear nas direções x e y ,

$$m_A v_A = M V \cos \theta \quad (\text{componente } x) \quad (10-43)$$

e

$$m_B v_B = M V \sin \theta \quad (\text{componente } y), \quad (10-44)$$

onde $M = m_A + m_B$. Dividindo-se a Eq. 10-44 pela Eq. 10-43, obtém-se

$$\tan \theta = \frac{m_B v_B}{m_A v_A} = \frac{(55 \text{ kg})(7,8 \text{ km/h})}{(83 \text{ kg})(6,2 \text{ km/h})} = 0,834.$$

Assim,

$$\theta = \tan^{-1} 0,834 = 39,8^\circ \approx 40^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

Da Eq. 10-44, temos, então,

$$V = \frac{m_B v_B}{M \sin \theta} = \frac{(55 \text{ kg})(7,8 \text{ km/h})}{(83 \text{ kg} + 55 \text{ kg}) (\sin 39,8^\circ)} \\ = 4,86 \text{ km/h} \approx 4,9 \text{ km/h}. \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual é a velocidade do centro de massa dos dois patinadores, antes e depois da colisão?

Solução Podemos responder a isto sem novos cálculos. Após a colisão, a velocidade do centro de massa é a mesma que calculamos no item (a); ou seja, 4,9 km/h a 40° ao norte do leste (Fig. 10-22). Como a velocidade do centro de massa não é alterada pela colisão, esse mesmo valor deve prevalecer antes da colisão.

c. Qual é a variação na energia cinética dos patinadores, expressa como fração, devido à colisão?

Solução A energia cinética inicial é

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 \\ &= (\frac{1}{2})(83 \text{ kg})(6.2 \text{ km/h})^2 + (\frac{1}{2})(55 \text{ kg})(7.8 \text{ km/h})^2 \\ &= 3.270 \text{ kg} \cdot \text{km}^2/\text{h}^2. \end{aligned}$$

A energia cinética final é

$$\begin{aligned} K_f &= \frac{1}{2}MV^2 \\ &= (\frac{1}{2})(83 \text{ kg} + 55 \text{ kg})(4.86 \text{ km/h})^2 \\ &= 1.630 \text{ kg} \cdot \text{km}^2/\text{h}^2. \end{aligned}$$

Então, a variação em fração é

$$\begin{aligned} \text{frac} &= \frac{K_f - K_i}{K_i} \\ &= \frac{1.630 \text{ kg} \cdot \text{km}^2/\text{h}^2 - 3.270 \text{ kg} \cdot \text{km}^2/\text{h}^2}{3.270 \text{ kg} \cdot \text{km}^2/\text{h}^2} \\ &= -0.50. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Assim, 50% da energia cinética inicial são perdidos como resultado da colisão.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 2: AINDA SOBRE UNIDADES

Freqüentemente, é sensato expressar todas as quantidades físicas em suas unidades básicas do SI; assim, todas as velocidades em metros por segundo, massas em quilogramas etc. Algumas vezes, entretanto, isso não é necessário. No Exemplo 10-9a, por exemplo, as unidades cancelam-se quando calculamos o ângulo θ . No Exemplo 10-9c, cancelam-se quando calculamos a quantidade adimensional frac . Neste último caso, por exemplo, não há necessidade de se mudar as unidades de energia cinética para joules, a unidade básica de energia no SI; podemos deixá-las nas unidades $\text{kg} \cdot \text{km}^2/\text{h}^2$, porque podemos observar adiante que elas vão cancelar-se, quando computarmos o quociente adimensional frac .

10-6 Reações e Processos de Decaimento (Opcional)

Aqui, consideramos colisões (denominadas **reações**) onde a identidade e mesmo o número de partículas nucleares em interação mudam devido às colisões. Consideramos, também, o *decaimento espontâneo* de partículas instáveis, em que uma partícula é transformada em duas outras. Para ambos os tipos de eventos, há uma clara distinção entre

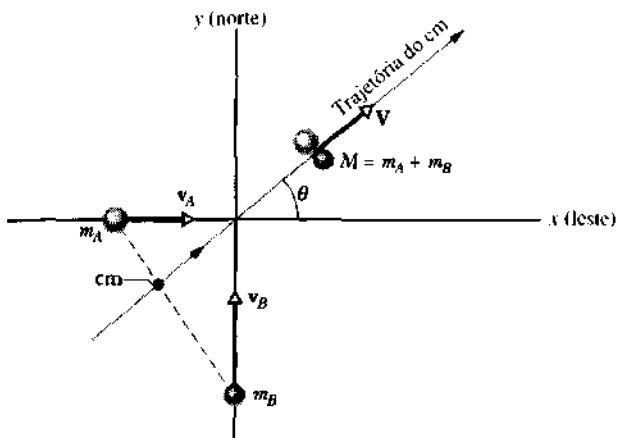
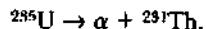


Fig. 10-22 Exemplo 10-9. Dois patinadores, Alfred (A) e Barbara (B), sofrem uma colisão perfeitamente inelástica. Posteriormente, eles se deslocam juntos segundo o ângulo θ , com velocidade V . O caminho de seu centro de massa está representado, assim como a posição do centro de massa para as posições indicadas dos patinadores antes da colisão.

instantes de tempo “antes do evento” e instantes de tempo “após o evento”, e valem as leis de conservação do momento linear e da energia *total*. Resumindo, podemos tratar esses eventos pelos métodos já desenvolvidos para colisões.

EXEMPLO 10-10 Um núcleo radioativo de urânio-235 decai espontaneamente para tório-231 pela emissão de uma partícula alfa:^{*}



A partícula alfa ($m_\alpha = 4.00 \text{ u}$) tem uma energia cinética K_α de 4,60 MeV. Qual é a energia cinética do núcleo de tório-231 que recua ($m_{\text{Th}} = 231 \text{ u}$)?

Solução O núcleo de ^{235}U está inicialmente em repouso no laboratório. Após o decaimento, a partícula alfa distancia-se e o ^{231}Th recua no sentido oposto, com energias cinéticas K_α e K_{Th} , respectivamente. A aplicação da lei de conservação do momento linear leva a

$$0 = m_{\text{Th}} v_{\text{Th}} + m_\alpha v_\alpha,$$

que podemos reescrever como

$$m_{\text{Th}} v_{\text{Th}} = -m_\alpha v_\alpha. \quad (10-45)$$

Como $K = \frac{1}{2}mv^2$, podemos elevar ao quadrado cada lado da Eq. 10-45 e reescrevê-la como

$$m_{\text{Th}} K_{\text{Th}} = m_\alpha K_\alpha.$$

Assim,

$$\begin{aligned} K_{\text{Th}} &= K_\alpha \frac{m_\alpha}{m_{\text{Th}}} = (4.60 \text{ MeV}) \frac{4.00 \text{ u}}{231 \text{ u}} \\ &= 7.97 \times 10^{-2} \text{ MeV} = 79.7 \text{ keV}. \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

*Uma partícula alfa (simbolizada como α , hélio-4 ou ${}^4\text{He}$) é o núcleo de um átomo de hélio.

Observamos que, da quantidade total de energia cinética tornada disponível durante o decaimento ($4,60 \text{ MeV} + 0,0797 \text{ MeV} = 4,68 \text{ MeV}$), o núcleo pesado que recua recebe apenas cerca de $0,0797/4,68$ ou 1,7%.

EXEMPLO 10-11 Uma reação nuclear de grande importância para a geração de energia por fusão nuclear é a assim chamada reação d-d, para a qual uma das formas é



As partículas representadas por tais letras são todas isótopos do hidrogênio, com as seguintes propriedades:

Símbolos	Nome	Massa
p	${}^1\text{H}$	Próton
d	${}^2\text{H}$	Déuteron
t	${}^3\text{H}$	Trítion

- a. Quanta energia cinética aparece devido à variação de massa Δm que ocorre nesta reação?

Solução Da relação de Einstein $E = mc^2$, sabemos que a variação em energia associada a Δm é Δmc^2 . Da Eq. 8-31, o Q de uma reação é definido como $Q = -\Delta mc^2$. Assim, neste problema, encontramos

$$\begin{aligned} Q &= -\Delta m c^2 = (2m_d - m_p - m_t)c^2 \\ &= (2 \times 2,01410 \text{ u} - 1,00783 \text{ u} - 3,01605 \text{ u}) \\ &\quad \times (932 \text{ MeV/u}) \\ &= (0,00432 \text{ u})(932 \text{ MeV/u}) \\ &= 4,03 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Aqui usamos o valor de 932 MeV/u para c^2 dado pela Eq. 8-34.

Um valor positivo para Q (como neste caso) significa que a reação é **exotérmica**; nessa reação, transfere-se energia de repouso para energia cinética. Apenas $0,00432/(2 \times 2,01410)$, ou cerca de 0,1% da massa originalmente presente foi transferida assim. Um Q negativo indica uma reação **endotérmica**, onde a transferência é de energia cinética para energia de repouso. E $Q = 0$ significa um *encontro elástico*, sem variação de massa e com conservação de energia cinética.

- b. Um déuteron de energia cinética $K_d = 1,50 \text{ MeV}$ atinge um déuteron em repouso, iniciando a reação da Eq. 10-46. Observa-se que um próton se afasta a um ângulo de 90° com a direção de incidência, com uma energia cinética de $3,39 \text{ MeV}$: veja a Fig. 10-23. Qual é a energia cinética do trítion?

Solução A energia Q , liberada devido ao decréscimo em energia de repouso, aparece como um incremento nas energias cinéticas das partículas. Assim, podemos escrever

$$Q = K_p + K_t - K_d,$$

onde Q é a energia computada para esta reação no item (a). A resolução para K_t fornece-nos

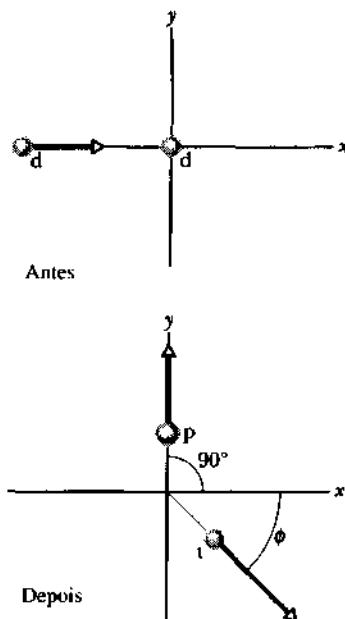


Fig. 10-23 Exemplo 10-11. Um déuteron em movimento (d) atinge outro em repouso. Ocorre a reação d-d da Eq. 10-46 e as partículas produzidas (p e t) afastam-se conforme representado.

$$\begin{aligned} K_t &= Q + K_d - K_p \\ &= 4,03 \text{ MeV} + 1,50 \text{ MeV} - 3,39 \text{ MeV} \\ &= 2,14 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

- c. A que ângulo ϕ com a direção de incidência (veja a Fig. 10-23) emerge o trítion?

Solução Ainda não fizemos uso do fato de que o momento linear se conserva na reação da Eq. 10-46. A lei de conservação do momento linear fornece duas equações escalares:

$$m_d v_d = m_p v_p \cos \phi \quad (\text{componente } x) \quad (10-47)$$

e

$$0 = m_p v_p + m_t v_t \sin \phi \quad (\text{componente } y). \quad (10-48)$$

Da Eq. 10-48, temos

$$\sin \phi = -\frac{m_p v_p}{m_t v_t}. \quad (10-49)$$

Usando a relação $K = \frac{1}{2} m v^2$, podemos reescrever cada momento linear $m v$ como $\sqrt{2mK}$ e, assim, recompor a Eq. 10-49 como

$$\begin{aligned} \phi &= \operatorname{sen}^{-1} \left(-\sqrt{\frac{m_p K_p}{m_t K_t}} \right) \\ &= \operatorname{sen}^{-1} \left(-\sqrt{\frac{(1,01 \text{ u})(3,39 \text{ MeV})}{(3,02 \text{ u})(2,14 \text{ MeV})}} \right) \\ &= \operatorname{sen}^{-1} (-0,728) = -46,7^\circ. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

RESUMO

Colisões

Em uma **colisão**, dois corpos exercem forças de grande intensidade um sobre o outro, por um intervalo de tempo relativamente curto. Tais forças são internas ao sistema de dois corpos e são significativamente maiores do que qualquer força externa durante a colisão. As leis de conservação de energia e do momento linear, aplicadas imediatamente antes e depois de uma colisão, permitem-nos predizer o resultado da colisão e entender as interações entre os corpos em colisão.

Impulso e Momento Linear

A aplicação da segunda lei de Newton, em termos de momento, a uma partícula envolvida em uma colisão leva ao **teorema do impulso-momento linear**:

$$\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \Delta \mathbf{p} = \mathbf{J}. \quad (10-4)$$

onde $\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \Delta \mathbf{p}$ é a variação do momento linear da partícula e \mathbf{J} é o **impulso** devido à força exercida sobre a partícula pelo outro corpo na colisão:

$$\mathbf{J} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}(t) dt. \quad (10-3)$$

Se \bar{F} for a média de $\mathbf{F}(t)$ durante o impacto e Δt for a duração da colisão, então, para movimento unidimensional,

$$J = \bar{F} \Delta t. \quad (10-8)$$

Quando um fluxo contínuo de corpos, cada um com massa m e velocidade v , colide com um corpo fixo em sua posição, a força média sobre este é

$$\bar{F} = -\frac{n}{\Delta t} \Delta p = -\frac{n}{\Delta t} m \Delta v, \quad (10-10)$$

onde $n/\Delta t$ é a taxa com que os corpos colidem com o corpo fixo, e Δv é a variação na velocidade de cada corpo que colide. Essa força média também pode ser escrita como

$$\bar{F} = -\frac{\Delta m}{\Delta t} \Delta v, \quad (10-13)$$

onde $\Delta m/\Delta t$ é a taxa com que a massa colide com o corpo fixo. Nas Eqs. 10-10 e 10-13, $\Delta v = -v$ (se os corpos pararem ao se dar o impacto) ou $\Delta v = -2v$ (se eles retornarem diretamente para trás, sem variação no módulo da velocidade).

Colisão Elástica — Uma Dimensão

Uma **colisão elástica** é aquela onde se conserva a energia cinética de um sistema de dois corpos que colidem. Para uma situação unidimensional onde um corpo (o alvo) está em repouso e o outro (o projétil) está inicialmente em movimento, as conservações da energia cinética e do momento linear levam às seguintes relações:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (10-18)$$

e

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}. \quad (10-19)$$

Aqui, os índices i e f referem-se às velocidades imediatamente antes e imediatamente depois da colisão, respectivamente. Se ambos os corpos estiverem em movimento antes da colisão, suas velocidades imediatamente após a colisão serão dadas por

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \quad (10-28)$$

e

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}. \quad (10-29)$$

Colisão Inelástica

Uma **colisão inelástica** é aquela onde não se conserva a energia cinética de um sistema de dois corpos que colidem. O momento linear total do sistema, entretanto, ainda deve conservar-se. Se os corpos que colidem aderirem um ao outro, a colisão é **perfeitamente inelástica**, e a redução em energia cinética é máxima (mas a energia cinética não chega necessariamente a anular-se). Para movimento unidimensional, com um corpo inicialmente em repouso e o outro com velocidade inicial v , encontra-se a velocidade dos corpos reunidos aplicando-se a conservação do momento linear ao sistema:

$$m_1 v = (m_1 + m_2) V. \quad (10-35)$$

Se ambos os corpos estiverem em movimento antes da colisão, a conservação do momento linear será escrita como

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V. \quad (10-37)$$

Colisões em Duas Dimensões

Colisões em duas dimensões são governadas pela conservação do vetor momento linear, uma condição que leva a duas equações para componentes. Estas determinarão o movimento final, se a colisão for perfeitamente inelástica. De outra forma, as leis de conservação do momento linear e da energia geralmente levam a equações que não podem ser resolvidas completamente, a menos que outros dados experimentais estejam disponíveis, como a direção final de uma das velocidades.

Reações e Decaimento

Em uma **reação** ou **decaimento** de partículas nucleares, conservam-se o momento linear e a energia **total**. Se a massa de um sistema de tais partículas mudar de Δm , a energia de repouso do sistema mudará de $\Delta m c^2$. Define-se o Q da reação ou decaimento como

$$Q = -\Delta m c^2.$$

Diz-se que este processo é **exotérmico** e Q uma quantidade positiva, se energia de repouso for transferida para energia cinética de partículas no sistema. Diz-se que é **endotérmico** e Q uma quantidade negativa, se energia cinética for transferida de partículas no sistema para energia de repouso.

QUESTIONÁRIO

- 1.** Explique como a conservação do momento linear se aplica a uma bola quicando numa parede.
- 2.** O impulso de uma força pode ser nulo, mesmo que ela não seja nula? Explique por que ou por que não.
- 3.** A Fig. 10-24 mostra um popular dispositivo de “teste de força” em feiras, onde competidores tentam ver a que altura podem levantar um pesado marcador atingindo um alvo com uma marreta. Que quantidade física o marcador mede? É a força média, a força máxima, o trabalho realizado, o impulso, a energia transferida, o momento linear transferido ou outra coisa? Discuta sua resposta.
- 4.** Rebatedores diferentes manejam bastões de modo diverso. Que características do manejo ajudam a determinar a velocidade e a trajetória da bola de beisebol?
- 5.** Muitas características de carros, como volantes não-rígidos e painéis acolchoados, são projetadas para proteger os passageiros durante acidentes. Explique sua utilidade usando o conceito de impulso.
- 6.** Por que o uso de luvas torna o boxe moderno, de certo modo, mais seguro que a luta com punhos nus? Quando dublês caem de edifícios, por que o pouso sobre um colchão de ar ajuda a protegê-los de ferimentos ou morte? Por que algumas vítimas da queda de grandes alturas podem sobreviver, se o chão estiver coberto de neve suja, se abrem caminho entre galhos de árvores antes de atingir o chão ou se caírem no flanco de uma ravina e então deslizarem ao longo dela? Em cada caso, defende seu argumento a partir de considerações sobre força média.
- 7.** Uma pára-quedista carregando um boneco como dublê de Dia das Bruxas descobre que ele é arrancado de suas mãos quando ela abre seu próprio pára-quedas. Explique por quê.
- 8.** Diz-se que, durante uma colisão a 50 km/h, uma criança de 5 kg pode exercer uma força de 140 kgf contra os braços de um adulto. Como pode surgir uma força tão grande?
- 9.** A seguinte declaração foi extraída de uma prova: “A colisão entre dois átomos de hélio é perfeitamente elástica, de forma que o momento se conserva.” A afirmação é logicamente correta? Explique.
- 10.** Você está dirigindo por uma auto-estrada a 80 km/h, seguido por outro carro que se desloca com a mesma velocidade. Você reduz para 65 km/h, mas o outro motorista não o faz e há uma colisão. Quais são as velocidades iniciais dos carros que colidem, conforme vistos do referencial de (a) você mesmo, (b) o outro motorista e (c) um guarda estatal, que está em um carro de patrulha estacionado no acostamento? (d) Um juiz pergunta se você bateu no outro motorista ou se foi o contrário. Como um físico, de que modo responderia?
- 11.** É óbvio, da inspeção das Eqs. 10-16 e 10-17, que uma solução válida para o problema de se encontrarem as velocidades finais de duas partículas em uma colisão elástica unidimensional é $v_{f1} = v_1$, e $v_{f2} = v_2 = 0$. O que isso significa do ponto de vista da física?
- 12.** Dois blocos cúbicos idênticos, deslocando-se na mesma direção e no mesmo sentido com a mesma velocidade v , atingem um terceiro bloco idêntico, inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito. Qual é o movimento dos blocos após a colisão? Faria diferença se os dois inicialmente em movimento estivessem em contato ou não? Faria diferença se esses dois blocos estivessem colados juntos?
- 13.** Em sequência, largue uma bola de beisebol e uma de basquete de cerca da altura do seu ombro sobre um chão duro e observe a que altura cada uma retorna. Então, alinhe a bola de beisebol sobre a de basquete (com uma pequena separação, como na Fig. 10-25a) e largue-as simultaneamente. (Esteja preparado para escapar e proteja seu rosto.) Por que a bola de basquete quase “morre” no chão, conforme a Fig. 10-25b, enquanto a de beisebol dispara em direção ao teto, indo mais alto do que a soma dos retornos individuais das duas? (Veja, também, o Problema 38.)
- 14.** Duas bolas de argila de massas e velocidades de módulos iguais colidem frontalmente, grudam e ficam em repouso. A energia cinética certamente não se conserva. O que aconteceu à energia? Como se conserva o momento linear?
- 15.** Um jogador de futebol americano, momentaneamente em repouso no campo, apanha uma bola quando é agarrado por um jogador em corrida, do outro time. Certamente, esta é uma colisão (inelástica!) e o momento linear deve conservar-se. No referencial do campo de futebol, há momento linear antes da colisão, mas parece não haver após. O momento linear é realmente conservado? Se for, explique como. Se não for, explique por que não.

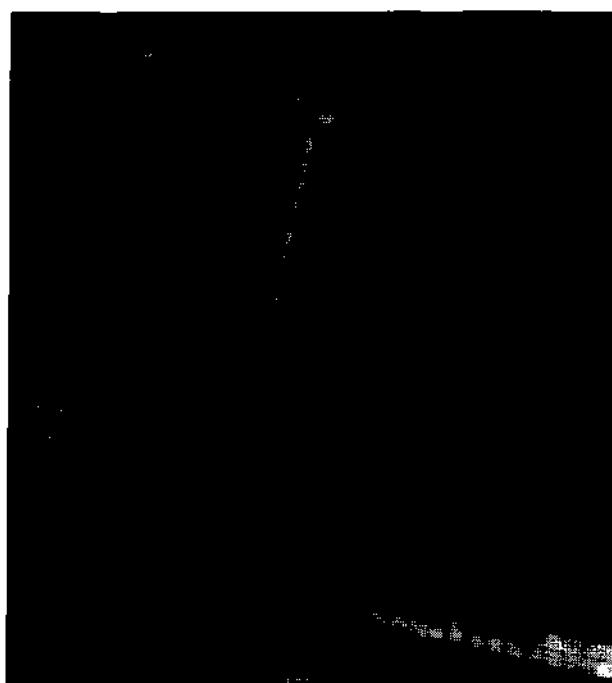


Fig. 10-24 Questão 3.

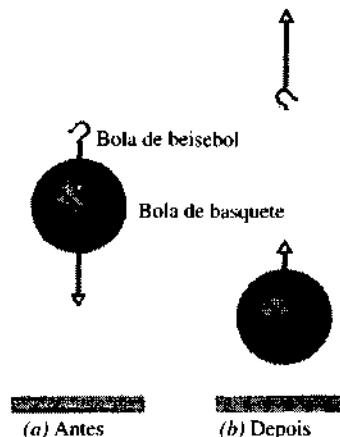


Fig. 10-25 Questão 13.

16. Considere uma colisão elástica unidimensional entre um objeto *A* em movimento e um outro *B* inicialmente em repouso. Como você escoheria a massa de *B*, em comparação com a de *A*, de forma que *B* recusasse com (a) a velocidade de maior módulo, (b) o maior momento linear e (c) a maior energia cinética?

17. Uma ampulheta invertida é pesada em uma balança sensível, do momento em que o primeiro grão se desloca até após o último grão haver pousado. Como varia o peso medido durante esse tempo? Por quê?

18. Uma caixa onde se fez vácuo está em repouso sobre uma mesa sem atrito. Você abre um pequeno buraco em uma face, de forma que o ar possa entrar. (Veja a Fig. 10-26.) Como irá a caixa deslocar-se? Que argumento você usou para chegar à sua resposta?

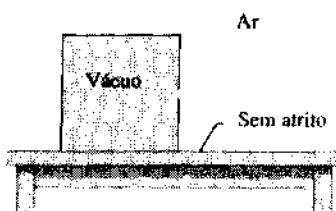


Fig. 10-26 Questão 18.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

Seção 10-2 Impulso e Momento Linear

1E. Um atleta de 95 kg está correndo a 4,2 m/s. Que impulso irá pará-lo?

2E. O momento linear de um carro de 1.500 kg aumenta de $9,0 \times 10^3$ kg · m/s em 12 s. (a) Qual é a intensidade da força que acelerou o carro? (b) De quanto aumentou o módulo da sua velocidade?

3E. Um taco de sinuca atinge uma bola, exercendo uma força média de 50 N em um intervalo de tempo de 10 ms. Se a bola tivesse massa de 0,20 kg, que velocidade ela teria após o impacto?

4E. O Conselho Nacional de Segurança dos Transportes dos EUA está testando a capacidade de um novo carro de suportar colisões. Faz-se com que o veículo, de 2.300 kg e movendo-se a 15 m/s, colida com um pilar de ponte, entrando em repouso em um tempo de 0,56 s. Que força, suposta constante, agiu sobre o carro durante o impacto?

5E. Uma bola de massa *m* e velocidade *v* atinge perpendicularmente uma parede e quica de volta no sentido oposto com uma velocidade de mesmo módulo. (a) Se o tempo da colisão fosse de Δt , qual seria a força média exercida pela bola sobre a parede? (b) Calcule essa força média numericamente para uma bola de borracha de 140 g de massa, movendo-se a 7,8 m/s; a duração da colisão é de 3,8 ms.

6E. Uma bola de beisebol de 150 g, atirada a uma velocidade de 40 m/s, é devolvida exatamente no sentido oposto a uma velocidade de 60 m/s. Que força média seria exercida pelo bastão, se ele estivesse em contato com a bola por 5,0 ms?

7E. Até haver passado dos setenta anos de idade, Henri LaMothe excitou audiências mergulhando de barriga de uma altura de 40 ft (12,2 m) em 12 in. (30,5 cm) de água (Fig. 10-27). Supondo que ele parasse exatamente quando chegasse ao fundo da água, qual seria a força média sobre ele, exercida pela água? Considere que seu peso fosse de 160 lb. (73 kg).

8E. Em fevereiro de 1955, um soldado pára-quedista caiu 1.200 ft (366 m) de um avião, sem conseguir abrir seu pára-quedas. Seu impacto na neve sobre o chão pareceu uma salva de morteiro explodindo. Suponha que sua velocidade no impacto fosse de 56 m/s (velocidade terminal), que sua massa (incluindo equipamento) fosse de 85 kg e que a força sobre ele, exercida pela neve, estivesse no limite suportável para sobrevivência de 1.2×10^5 N. Qual seria a profundidade mínima de neve que o teria parado com segurança?

9E. Uma força com valor médio de 1.200 N é aplicada a uma bola de aço de 0,40 kg, que se desloca a 14 m/s, em uma colisão que dura 27 ms. Se a força estivesse no sentido oposto ao da velocidade inicial da bola, encontre a velocidade final da bola.

10E. Uma bola de 1,2 kg cai verticalmente sobre o chão, atingindo-o com uma velocidade de 25 m/s. Ela quica com uma velocidade inicial de 10 m/s. (a) Que impulso age sobre a bola durante o contato? (b) Se ela permanecer em contato com o chão por 0,020 s, qual será a força média exercida sobre o chão?

11E. Um jogador de golfe atinge uma bola, dando-lhe uma velocidade inicial de módulo 50 m/s dirigida 30° acima da horizontal. Supondo que a massa da bola seja de 46 g e que o taco e a bola permaneçam em contato por 1,7 ms, encontre (a) o impulso sobre a bola, (b) o impulso sobre o taco, (c) a força média exercida sobre a bola pelo taco e (d) o trabalho realizado sobre a bola.

12P. Um carro de 1.400 kg, deslocando-se a 5,3 m/s, está inicialmente viajando para o norte, no sentido positivo do eixo *y*. Após completar uma curva à direita de 90° para o sentido positivo do eixo *x* em 4,6 s, o distraído motorista investe para cima de uma árvore, que pára o carro em



Fig. 10-27 Exercício 7.

350 ms. Em notação de vetores unitários, qual é o impulso sobre o carro (a) durante a curva e (b) durante a colisão? Qual é a intensidade da força média que age sobre o carro (c) durante a curva e (d) durante a colisão? (e) Qual é o ângulo entre a força média em (c) e o sentido positivo do eixo x ?

13P. A força sobre um objeto de 10 kg aumenta uniformemente de zero a 50 N em 4,0 s. Qual é a velocidade final do objeto, se ele partiu do repouso?

14P. Uma arma de ar comprimido atira dez chumbinhos de 2,0 g por segundo com uma velocidade de 500 m/s, que são detidos por uma parede rígida. (a) Qual é o momento linear de cada chumbinho? (b) Qual é a energia cinética de cada um? (c) Qual é a força média exercida pelo fluxo de chumbinhos sobre a parede? (d) Se cada chumbinho permanecer em contato com a parede por 0,6 ms, qual será a força média exercida sobre a parede por cada um deles enquanto estiver em contato? Por que esta força é tão diferente da força em (c)?

15P. Uma metralhadora dispara projéteis de 50 g a uma velocidade de 1.000 m/s. O atirador, segurando a arma em suas mãos, pode exercer uma força média de 180 N contra ela. Determine o número máximo de projéteis que ele pode disparar por minuto, ao mesmo tempo em que ainda segura firmemente a metralhadora.

16P. Sabe-se bem que balas e outros objetos disparados contra o Super-Homem simplesmente ricocheteiam em seu peito (Fig. 10-28). Suponha que um bandido varra o peito do Super-Homem com projéteis de 3 g à taxa de 100 projéteis/minuto, a velocidade de cada projétil sendo de

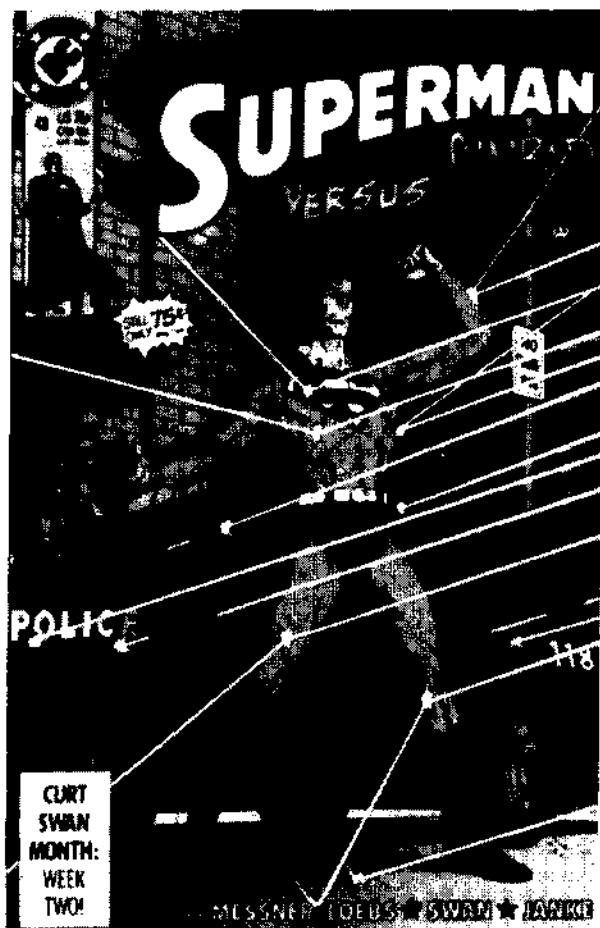


Fig. 10-28 Problema 16.

500 m/s. Suponha, também, que os projéteis ricocheteiem exatamente no sentido oposto, sem variação no módulo da velocidade. Qual seria a força média exercida pelo fluxo de projéteis sobre o peito do Super-Homem?

17P. A cada minuto, uma metralhadora especial de esporte dispara 220 balas de borracha de 10 g com uma velocidade de saída de 1.200 m/s. Quantas balas devem ser disparadas contra um animal de 85 kg em corrida contra o atirador a 4,0 m/s, de forma a pará-lo? (Suponha que as balas viajam horizontalmente e caiam ao chão após atingir o alvo, sem ricochetear.)

18P. Durante uma violenta tempestade, granizo de 1,0 cm de diâmetro cai a uma velocidade de 25 m/s. Estima-se que haja 120 pedras de granizo por metro cúbico de ar. Ignore o ricochete do granizo no impacto. (a) Qual é a massa de cada pedra de granizo (densidade = 0,92 g/cm³)? (b) Qual é a força média exercida pelo granizo sobre um telhado plano de 10 m × 20 m, durante a tempestade?

19P. Uma corrente de água colide contra uma pás de turbina estacionária em forma de "prato", conforme mostra a Fig. 10-29. O módulo da velocidade da água é v , tanto antes quanto depois dela atingir a superfície curva da pás, e a massa de água atingindo esta por unidade de tempo tem valor μ constante. Encontre a força exercida pela água sobre a pás.

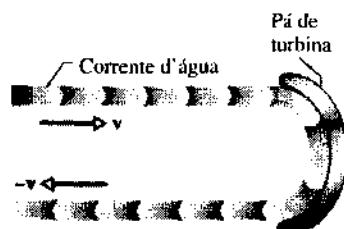


Fig. 10-29 Problema 19.

20P. Uma corrente de água de uma mangueira espalha-se sobre uma parede. Se a velocidade da água for de 5,0 m/s e a mangueira espalhar 300 cm³/s, qual será a força média exercida sobre a parede pela corrente de água? Suponha que a água não se espalhe de volta apreciavelmente. Cada centímetro cúbico de água tem massa de 1,0 g.

21P. A Fig. 10-30 mostra um gráfico aproximado de força versus tempo durante a colisão de uma bola de tênis de 58 g com uma parede. A velocidade inicial da bola é de 34 m/s, perpendicular à parede; ela quica com velocidade de mesmo módulo, também perpendicular à parede. Qual é $F_{\text{máx}}$, o valor máximo da força de contato durante a colisão?

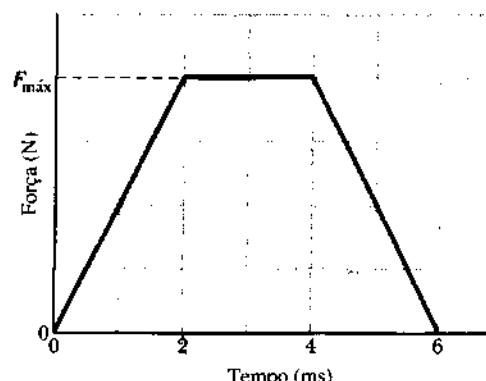


Fig. 10-30 Problema 21.

22P. Uma bola de 150 g de massa atinge uma parede com uma velocidade de 5,2 m/s e retorna com apenas 50% de sua energia cinética inicial. (a) Qual é a velocidade da bola, imediatamente após ser devolvida? (b) Qual foi o módulo do impulso da bola sobre a parede? (c) Se a bola estivesse em contato com a parede por 7,6 ms, qual seria a intensidade da força média exercida pela parede sobre ela, durante esse intervalo de tempo?

23P. Uma bola de 300 g com uma velocidade v de módulo 6,0 m/s atinge uma parede a um ângulo θ de 30° e, então, ricocheteia com mesmo ângulo e velocidade de mesmo módulo (Fig. 10-31). Ela fica em contato com a parede por 10 ms. (a) Qual foi o impulso sobre a bola? (b) Qual foi a força média exercida pela bola sobre a parede?

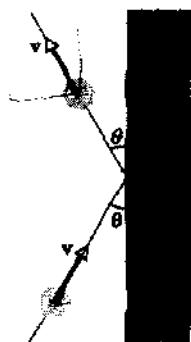


Fig. 10-31 Problema 23.

24P. Uma sonda espacial não tripulada, de 2.500 kg, desloca-se em linha reta a uma velocidade constante de 300 m/s. Foguetes de controle da sonda executam uma queima onde uma força de 3.000 N age por 65,0 s. (a) Qual é a variação no módulo do momento linear da sonda, se essa força for direcionada para trás, para a frente ou diretamente para um lado? (b) Qual será a variação da energia cinética sob as mesmas três condições? Suponha que a massa do combustível ejetado seja desprezível em comparação com a massa da sonda.

25P. Uma força exerce um impulso J sobre um objeto de massa m , variando sua velocidade de v para u . A força e o movimento do objeto estão ao longo da mesma linha reta. Mostre que o trabalho realizado pela força é $\frac{1}{2} J(u + v)$.

26P. Uma espaçonave é separada em duas partes detonando-se as ligações explosivas que as mantinham reunidas. As massas das partes são 1.200 e 1.800 kg; o módulo do impulso sobre cada parte é de 300 N·s. Com que velocidade relativa as duas partes se separam?

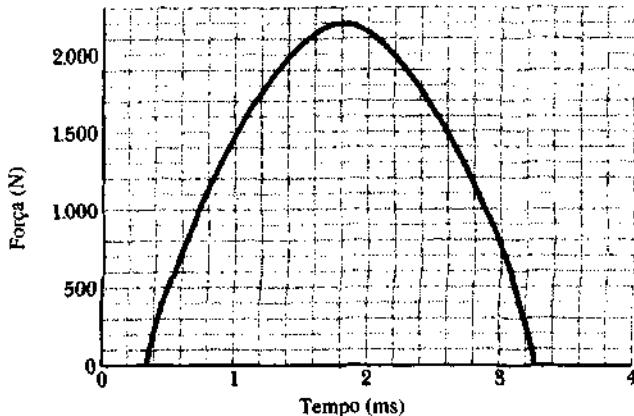


Fig. 10-32 Problema 27.

27P. Uma bola de críquete de 0,50 kg de massa é atingida por um mazão, recebendo o impulso exibido no gráfico da Fig. 10-32. Qual é a sua velocidade, imediatamente após a força se anular?

28P. A espaçonave *Voyager 2* (de massa m e velocidade v relativa ao Sol) aproxima-se do planeta Júpiter (de massa M e velocidade V relativa ao Sol) como mostra a Fig. 10-33. A espaçonave rodeia o planeta e parte no sentido oposto. Qual é sua velocidade, em relação ao Sol, após esse encontro com efeito estilingue? Considere $v = 12 \text{ km/s}$ e $V = 13 \text{ km/s}$ (a velocidade orbital de Júpiter). A massa de Júpiter é muito maior do que a da espaçonave; $M \gg m$. (Para informações adicionais, veja "The Slingshot Effect: Explanation and Analogies", de Albert A. Bartlett e Charles W. Hord, *The Physics Teacher*, novembro de 1985.)

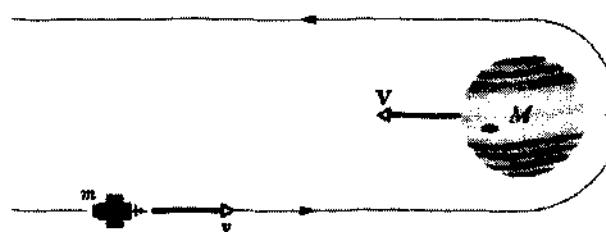


Fig. 10-33 Problema 28.

Seção 10-3 Colisões Elásticas em Uma Dimensão

29E. Os blocos da Fig. 10-34 deslizam sem atrito. (a) Qual é a velocidade v do bloco de 1,6 kg após a colisão? (b) A colisão é elástica? (c) Suponha que a velocidade inicial do bloco de 2,4 kg seja oposta à exibida. Após a colisão, a velocidade v do bloco de 1,6 kg pode estar no sentido ilustrado?

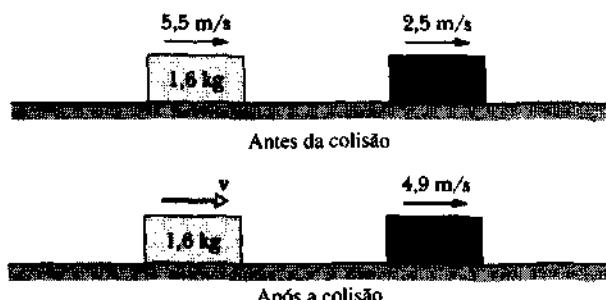


Fig. 10-34 Exercício 29.

30E. Um elefante enfurecido se aproxima, a 2,1 m/s, de uma mosca que flutua no ar. Supondo que a colisão seja elástica, a que velocidade a mosca é arremessada? Observe que o projétil (o elefante) é muito mais massivo do que o alvo em repouso (a mosca).

31E. Um elétron colide elasticamente com um átomo de hidrogênio inicialmente em repouso. (Todos os movimentos são ao longo da mesma linha reta.) Que percentagem da energia cinética inicial do elétron se transfere para o átomo de hidrogênio? A massa do átomo de hidrogênio é 1.840 vezes a do elétron.

32E. Uma partícula α (massa 4 u) experimenta uma colisão elástica frontal com um núcleo de ouro (massa 197 u), originalmente em repouso. Que percentagem de sua energia cinética inicial perde a partícula α ?

33E. Um carro de 340 g de massa, deslocando-se em um trilho de ar linear sem atrito, a uma velocidade inicial de 1,2 m/s, atinge um segun-

do carro de massa desconhecida, inicialmente em repouso. A colisão entre eles é elástica. Após a mesma, o primeiro carro continua em seu sentido original a 0,66 m/s. (a) Qual é a massa do segundo carro? (b) Qual é sua velocidade após o impacto?

34E. Um corpo de 2,0 kg de massa colide elasticamente com outro em repouso e continua a deslocar-se no sentido original com um quarto de sua velocidade inicial. Qual é a massa do corpo atingido?

35P. Uma bola de aço de 0,500 kg de massa é presa a uma corda, de 70,0 cm de comprimento e fixa na outra ponta, e é liberada quando a corda está em posição horizontal (Fig. 10-35). No ponto mais baixo de sua trajetória, a bola atinge um bloco de aço de 2,5 kg inicialmente em repouso sobre uma superfície sem atrito. A colisão é elástica. Encontre (a) a velocidade da bola e (b) a velocidade do bloco, ambos imediatamente após a colisão.

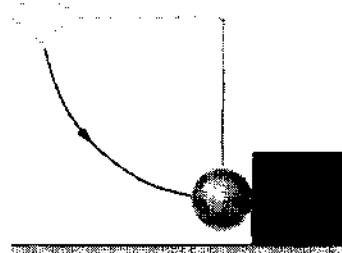


Fig. 10-35 Problema 35.

36P. Uma balança é calibrada para indicar a massa em quilogramas de um objeto colocado sobre ela. Partículas caem de uma altura de 3,5 m e colidem com o prato da balança. As colisões são elásticas; as partículas voltam para cima com velocidade de mesmo módulo da que tinham antes de atingir o prato. Se cada partícula tiver uma massa de 110 g e as colisões ocorrerem à taxa de 42 s^{-1} , qual será a leitura média na balança?

37P. Duas esferas de titânio se aproximam frontalmente com velocidades de mesmo módulo e colidem elasticamente. Após a colisão, uma das esferas, cuja massa é de 300 g, permanece em repouso. Qual é a massa da outra esfera?

38P. Alinha-se uma bola de massa m sobre uma bola de massa M (com uma pequena separação, como na Fig. 10-25a), e as duas são largadas simultaneamente da altura h . (Considere que o raio de cada bola seja desprezível comparado a h .) (a) Se M retornar elasticamente do chão e, então, m retornar elasticamente de M , que razão m/M resultará em M parando após sua colisão com m ? (A resposta é aproximadamente a razão entre as massas de uma bola de beisebol e uma de basquete, como na Questão 13.) (b) Que altura atingirá, então, a bola m ?

39P. Um bloco de massa m_1 está em repouso sobre uma mesa longa sem atrito, onde uma das extremidades termina em uma parede. Posiciona-se outro bloco, de massa m_2 , entre o primeiro e a parede, colocando-o em movimento para a esquerda, em direção a m_1 , com velocidade constante v_{2i} , conforme a Fig. 10-36. Supondo que todas as colisões sejam perfeitamente elásticas, encontre o valor de m_2 (em função de m_1) para o qual ambos os blocos se deslocam com a mesma velocidade, após m_2 haver colidido uma vez com m_1 e uma vez com a parede. Considere que a parede tenha massa infinita.

40P*. Um elevador está deslocando-se para cima a 6,0 ft/s (1,83 m/s). No instante em que o elevador está a 60 ft (18,3 m) do alto do poço, larga-se uma bola do mesmo lugar. A bola quica elasticamente no teto do elevador. (a) A que altura ela pode elevar-se em relação ao alto do

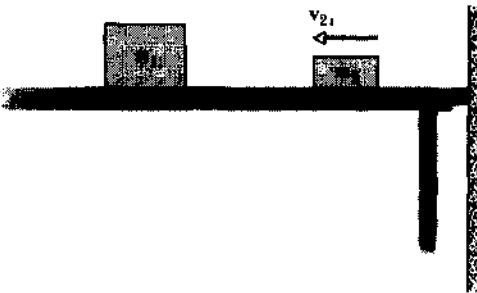


Fig. 10-36 Problema 39.

poço? (b) Faça o mesmo problema supondo que o elevador esteja descendo a 6,0 ft/s (1,83 m/s). (Sugestão: a velocidade da bola em relação ao elevador é meramente revertida pela colisão.)

Seção 10-4 Colisões Inelásticas em Uma Dimensão

41E. Acredita-se que a Cratera do Meteorito, no Arizona (Fig. 10.1), tenha sido formada pelo impacto de um meteoro com a Terra há cerca de 20.000 anos. Estima-se a massa do meteoro em $5 \times 10^{10} \text{ kg}$ e sua velocidade em 7.200 m/s. Que velocidade um meteoro assim transmitiria à Terra em uma colisão frontal?

42E. Um trenó em forma de caixa de 6,0 kg está deslocando-se sobre o gelo a uma velocidade de 9,0 m/s, quando um pacote de 12 kg é largado de cima para dentro dela. Qual é a nova velocidade do trenó?

43E. Um projétil de 5,20 g, deslocando-se a 672 m/s, atinge um bloco de madeira de 700 g em repouso sobre uma superfície sem atrito. O projétil emerge com sua velocidade reduzida para 428 m/s. Encontre a velocidade resultante do bloco.

44E. Duas massas de 2,0 kg, A e B , colidem. As velocidades antes da colisão são $v_A = 15i + 30j$ e $v_B = -10i + 5,0j$. Após a colisão, $v'_A = -5,0i + 20j$. Todas as velocidades são dadas em metros por segundo. (a) Qual é a velocidade final de B ? (b) Quanta energia cinética se ganhou ou perdeu na colisão?

45E. Um projétil de 10 g de massa atinge um pêndulo balístico de 2,0 kg de massa. O centro de massa do pêndulo eleva-se de uma distância vertical de 12 cm. Considerando-se que o projétil permaneça embutido no pêndulo, calcule a velocidade inicial do projétil.

46E. Um bloco de 5,0 kg com uma velocidade de 3,0 m/s colide com outro de 10 kg que tem uma velocidade de 2,0 m/s, no mesmo sentido. Após a colisão, observa-se que o bloco de 10 kg está viajando no sentido original com uma velocidade de 2,5 m/s. (a) Qual é a velocidade do bloco de 5,0 kg imediatamente após a colisão? (b) De quanto variou a energia cinética total do sistema de dois blocos devido à colisão? (c) Suponha, em lugar disso, que o bloco de 10 kg acabe com uma velocidade de 4,0 m/s. Qual é, então, a variação na energia cinética total? (d) Analise o resultado que obteve em (c).

47E. Um projétil de 4,5 g de massa é disparado horizontalmente contra um bloco de madeira de 2,4 kg, em repouso sobre uma superfície horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre bloco e superfície é 0,20. O projétil entra em repouso no bloco, que se desloca por 1,8 m. (a) Qual é a velocidade do bloco, imediatamente após o projétil entrar em repouso dentro dele? (b) A que velocidade é disparado o projétil?

48P. Dois carros, A e B , deslizam sobre uma estrada coberta de gelo, quando tentam parar em um sinal. A massa de A é de 1.100 kg e a de B , 1.400 kg. O coeficiente de atrito cinético entre as rodas travadas de ambos os carros e a estrada é 0,13. O carro A consegue atingir o repouso no

sinal, mas o *B* não conseguiu parar e atinge a traseira do *A*. Após a colisão, *A* entra em repouso 8,2 m à frente do ponto de impacto e *B*, 6,1 m à frente do mesmo ponto; veja a Fig. 10-37. Ambos os motoristas mantiveram seus freios travados durante todo o incidente. (a) A partir da distância de que cada carro se deslocou após a colisão, encontre a velocidade de cada um, imediatamente após o impacto. (b) Use a conservação do momento linear para encontrar a velocidade com que o carro *B* atingiu o *A*. Sob que argumento se pode criticar o uso da conservação do momento linear aqui?

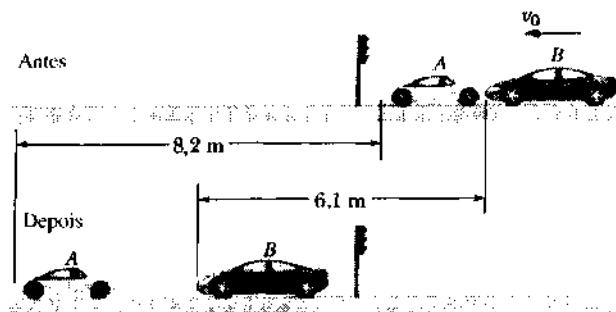


Fig. 10-37 Problema 48.

49P. Um peso de 3,0 t caindo através de uma distância de 6,0 ft (1,83 m) impele um cilindro de 0,50 t por 1,0 in. (2,54 cm) para dentro do chão. Supondo que a colisão peso-cilindro seja perfeitamente inelástica, encontre a força média de resistência exercida pelo chão.

50P. Duas partículas, uma tendo o dobro da massa da outra, são mantidas juntas com uma determinada mola comprimida entre elas. A energia armazenada na mola é de 60 J. Quanta energia cinética tem cada partícula após serem liberadas? Suponha que toda a energia armazenada se transfira às partículas e que nenhuma delas permaneça ligada à mola após ser liberada.

51P. Um objeto com massa *m* e velocidade *v* explode em dois pedaços, um deles com três vezes a massa do outro; a explosão ocorre numa região livre de gravidade. O pedaço de menor massa fica em repouso. Quanta energia cinética se acrescentou ao sistema na explosão?

52P. Coloca-se uma caixa sobre uma balança que está marcada em unidades de massa e ajustada para ler zero quando a caixa estiver vazia. Então, entorna-se um fluxo de pedras para dentro da caixa de uma altura *h* acima de seu fundo, a uma taxa de *R* (pedras por segundo). Cada pedra tem massa *m*. Se as colisões entre as pedras e a caixa forem perfeitamente inelásticas, encontre a leitura da balança num instante *t* após as pedras começarem a preencher a caixa. Determine uma resposta numérica quando *R* = 100 s⁻¹, *h* = 7,60 m, *m* = 4,50 g e *t* = 10,0 s.

53P. Um vagão de carga de 35 t colide com um carrinho auxiliar em repouso. Eles se unem e 27% da energia cinética inicial são dissipados como calor, som, vibrações etc. Encontre o peso do carrinho auxiliar.

54P. Projeta-se uma bola de massa *m* com velocidade *v*, para dentro do cano de um canhão de mola de massa *M*, inicialmente em repouso sobre uma superfície sem atrito; veja a Fig. 10-38. A bola une-se ao

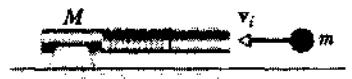


Fig. 10-38 Problema 54.

cano no ponto de máxima compressão da mola. Não se perde energia por atrito. (a) Qual é a velocidade do canhão após a bola entrar em repouso no cano? (b) Que fração da energia cinética inicial da bola é armazenada na mola?

55P. Um bloco de massa *m* = 2,0 kg desliza ao longo de uma mesa sem atrito com uma velocidade de 10 m/s. Diretamente à frente dele e deslizando-se no mesmo sentido a 3,0 m/s, está um bloco de massa *m* = 5,0 kg. Uma certa mola sem massa, de constante elástica *k* = 1.120 N/m, está ligada ao lado de *m* mais próximo de *m*, como mostra a Fig. 10-39. Quando os blocos colidem, qual é a compressão máxima da mola? (Sugestão: no instante de máxima compressão da mola, os dois blocos deslocam-se como um só. Encontre a velocidade observando que a colisão é perfeitamente inelástica até este ponto.)



Fig. 10-39 Problema 55.

56P. Dois trenós, de 22,7 kg cada, são separados por uma curta distância, um diretamente atrás do outro, como mostra a Fig. 10-40. Um gato de 3,63 kg, em pé sobre um trenó, salta para o outro e imediatamente retorna ao primeiro. Ambos os saltos são feitos a uma velocidade de 3,05 m/s em relação ao gelo. Encontre as velocidades finais dos dois trenós.



Fig. 10-40 Problema 56.

57P. O pára-choque de um carro de 1.200 kg é projetado de forma a poder absorver toda a energia quando ele bater frontalmente em uma parede sólida a 5,00 km/h. O carro envolve-se em uma colisão onde bate a 70,0 km/h na traseira de um outro de 900 kg, que se desloca a 60,0 km/h no mesmo sentido. O carro de 900 kg é acelerado para 70,0 km/h devido à colisão. (a) Qual é a velocidade do carro de 1.200 kg, imediatamente após o impacto? (b) Qual é a razão entre a energia cinética absorvida na colisão e a que pode ser absorvida pelo pára-choque do carro de 1.200 kg?

58P. Um vagão de carga de 32 toneladas e viajando a 5,0 ft/s (1,52 m/s) avança sobre outro de 24 toneladas e viajando a 3,0 ft/s (0,914 m/s) no mesmo sentido. Encontre (a) a velocidade dos vagões após a colisão e (b) a perda de energia cinética durante a colisão, se os vagões se unirem. (c) Se, em lugar disso, o que é muito improvável, a colisão for elástica, encontre as velocidades dos vagões após a colisão.

59P*. Um elétron de massa *m* colide frontalmente com um átomo de massa *M*, inicialmente em repouso. Como resultado da colisão, armazena-se internamente uma quantidade característica *E* de energia no átomo. Qual é a velocidade inicial mínima *v₀* que o elétron deve ter? (Sugestão: os princípios de conservação levam a uma equação quadrática para a velocidade final *v* do elétron e a uma equação quadrática para a velocidade final *V* do átomo. O valor mínimo *v₀* segue-se da exigência de que o radical nas soluções para *v* e *V* seja real.)

Seção 10-5 Colisões em Duas Dimensões

60E. Uma partícula α colide com um núcleo de oxigênio inicialmente em repouso. A partícula α é espalhada a um ângulo de $64,0^\circ$ acima de sua direção inicial de movimento, e o núcleo de oxigênio recua a um ângulo de $51,0^\circ$ abaixo da direção inicial. A velocidade final do núcleo é de $1,20 \times 10^5$ m/s. Quais são (a) a velocidade final e (b) a velocidade inicial da partícula α ? (A massa de uma partícula α é de 4,0 u e a de um núcleo de oxigênio é de 16 u.)

61E. Um próton (massa atômica 1 u) com uma velocidade de 500 m/s colide elasticamente com outro em repouso. O próton original é espalhado a 60° de sua direção original. (a) Qual é a direção da velocidade do próton alvo após a colisão? (b) Quais são os módulos das velocidades dos dois prótons após a colisão?

62E. Um certo núcleo, em repouso, desintegra-se espontaneamente em três partículas. Duas delas são detectadas; suas massas e velocidades são mostradas na Fig. 10-41. (a) Em notação de vetores unitários, qual é o momento linear da terceira partícula, cuja massa conhecida é de $11,7 \times 10^{-27}$ kg? (b) Quanta energia cinética aparece no processo de desintegração?

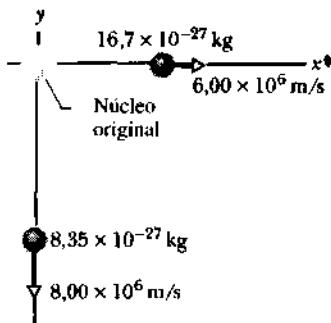


Fig. 10-41 Exercício 62.

63E. Em um jogo de sinuca, a bola branca atinge outra inicialmente em repouso. Após a colisão, a branca desloca-se a 3,50 m/s ao longo de uma linha em ângulo de $22,0^\circ$ com sua direção original de movimento, e o módulo da velocidade da segunda bola é de 2,00 m/s. Encontre (a) o ângulo entre a direção de movimento da segunda bola e a direção de movimento original da bola branca e (b) a velocidade original da branca. (c) A energia cinética se conserva?

64E. Dois veículos, *A* e *B*, estão viajando respectivamente para o oeste e para o sul, em direção à mesma interseção, onde colidem e se juntam. Antes da colisão, *A* (peso total 2.700 lb = 1.224,7 kgf) está deslocando-se com uma velocidade de 40 mi/h (64,4 km/h) e *B* (peso total 3.600 lb = 1.632,9 kgf) tem uma velocidade de 60 mi/h (96,5 km/h). Encontre o módulo e a direção da velocidade dos veículos ligados, imediatamente após a colisão.

65E. Em um jogo de bilhar, a bola branca recebe uma velocidade inicial V e atinge o conjunto de quinze bolas em repouso. Então, todas as dezenessas bolas envolvem-se em numerosas colisões bola-bola e bola-lateral da mesa. Algum tempo depois, observa-se que (por algum acidente) todas as 16 têm velocidades de mesmo módulo v . Supondo que todas as colisões sejam elásticas e ignorando o aspecto rotacional do movimento das bolas, calcule v em função de V .

66P. Um corpo de 20,0 kg está deslocando-se no sentido positivo do eixo x com uma velocidade de 200 m/s quando, devido a uma explosão interna, quebra-se em três partes. Uma parte, cuja massa é de 10,0 kg, distancia-se do ponto da explosão com uma velocidade de 100 m/s ao

longo do sentido positivo do eixo y . Um segundo fragmento, com massa de 4,00 kg, desloca-se ao longo do sentido negativo do eixo x com uma velocidade de 500 m/s. (a) Qual é a velocidade do terceiro fragmento (de 6,00 kg)? (b) Quanta energia se liberou na explosão? Ignore efeitos devidos à gravidade.

67P. Duas bolas, *A* e *B*, tendo massas diferentes mas desconhecidas, colidem. *A* está inicialmente em repouso e *B* tem velocidade v . Após a colisão, *B* tem velocidade $v/2$ e desloca-se perpendicularmente a seu movimento original. (a) Encontre a direção onde a bola *A* se desloca após a colisão. (b) Você pode determinar a velocidade de *A* a partir da informação dada? Explique.

68P. Mostre que, se um nêutron é espalhado a 90° em uma colisão elástica com um ôxígeno que esteja inicialmente em repouso, o nêutron perde dois terços de sua energia cinética inicial para o ôxígeno. (A massa de um nêutron é de 1,0 u; a massa de um ôxígeno é de 2,0 u.)

69P. Após uma colisão perfeitamente inelástica, descobre-se que dois objetos de mesma massa e com velocidades iniciais de mesmo módulo deslocam-se juntos com velocidade de módulo igual à metade do módulo de suas velocidades iniciais. Encontre o ângulo entre as velocidades iniciais dos objetos.

70P. Dois pêndulos, ambos de comprimento l , estão inicialmente situados conforme a Fig. 10-42. O pêndulo da esquerda é liberado e atinge o outro. Suponha que a colisão seja perfeitamente inelástica e despreze a massa das cordas e quaisquer efeitos de atrito. A que altura se eleva o centro de massa do sistema de pêndulos após a colisão?

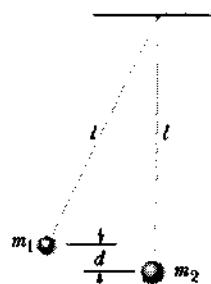


Fig. 10-42 Problema 70.

71P. Em uma colisão oblíqua, uma bola de bilhar deslocando-se a uma velocidade de 2,2 m/s atinge outra idêntica em repouso. Após a colisão, descobre-se que uma delas está deslocando-se a uma velocidade de 1,1 m/s em uma direção que faz um ângulo de 60° com a linha original de movimento. (a) Encontre a velocidade da outra bola. (b) Com esses dados, a colisão pode ser inelástica?

72P. Uma bola com velocidade inicial de 10 m/s colide elasticamente com duas outras idênticas a ela, cujos centros estão sobre uma linha perpendicular à velocidade inicial e que estão inicialmente em contato uma com a outra (Fig. 10-43). A primeira bola está apontada diretamente para o ponto de contato e todo o movimento é livre de atrito. Encontre as velocidades de todas as três bolas após a colisão. (Sugestão: com ausência de atrito, cada impulso é dirigido ao longo da linha que liga os centros das bolas que colidem, normalmente às superfícies em contato.)

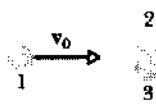


Fig. 10-43 Problema 72.

73P. Uma chata com massa de $1,50 \times 10^5$ kg está descendo um rio a 6,2 m/s, sob densa neblina, quando colide com a lateral de outra chata que atravessa o rio; veja a Fig. 10-44. A segunda tem massa de $2,78 \times 10^5$ kg e se deslocava a 4,3 m/s. Imediatamente após o impacto, a segunda chata encontra seu curso desviado de 18° para jusante e sua velocidade aumentada para 5,1 m/s. A corrente do rio era praticamente zero no instante do acidente. (a) Quais são o módulo e a direção da velocidade da primeira chata imediatamente após a colisão? (b) Quanta energia cinética se perde na colisão?

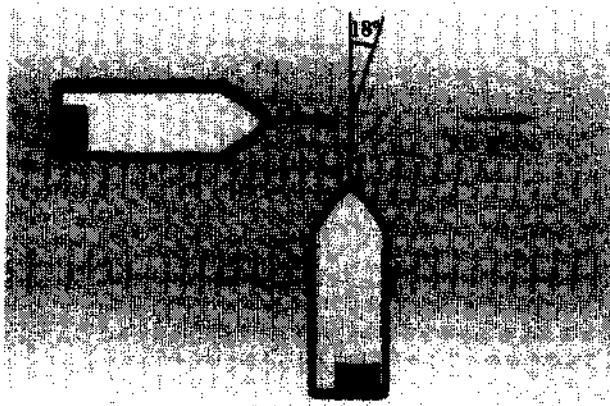
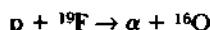


Fig. 10-44 Problema 73.

Seção 10-6 Reações e Processos de Decaimento (Opcional)

74E. Determinaram-se as massas precisas na reação



como sendo

$$\begin{aligned} m_p &= 1,007825 \text{ u}, & m_\alpha &= 4,002603 \text{ u}, \\ m_F &= 18,998405 \text{ u}, & m_O &= 15,994915 \text{ u}. \end{aligned}$$

78: Uma certa massa de 6,0 kg e outra de 4,0 kg deslocam-se sobre uma superfície sem atrito, como mostra a Fig. 10-45. Uma determinada mola de constante elástica $k = 8.000 \text{ N/m}$ é fixa à massa de 4,0 kg. A de 6,0 kg tem uma velocidade inicial de 8,0 m/s para a direita, e a de 4,0 kg tem uma velocidade inicial de 2,0 m/s para a direita. Ao final de algum tempo, a massa maior colide com a menor. (a) Qual será a velocidade da massa de 4,0 kg no instante em que a de 6,0 kg tiver uma velocidade de 6,4 m/s para a direita? (b) Qual é a energia potencial elástica do sistema nesse instante?

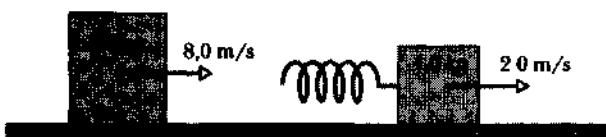


Fig. 10-45 Problema 78.

A partir desses dados, calcule o Q da reação.

75E. Uma partícula denominada Σ^- (sigma menos) está inicialmente em repouso e decai espontaneamente em duas outras partículas de acordo com



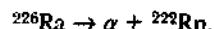
As massas são

$$m_\Sigma = 2,340,5 m_e, \quad m_\pi = 273,2 m_e, \quad m_n = 1,838,65 m_e,$$

onde m_e ($9,11 \times 10^{-31}$ kg) é a massa do elétron. (a) Quanta energia cinética é gerada nesse processo? (b) Como se comparam os momentos lineares dos produtos do decaimento (π^- e n)? (c) Que produto fica com a maior parcela da energia cinética gerada?

76P*. Uma partícula α com energia cinética 7,70 MeV atinge um núcleo de ${}^{14}N$ em repouso. Produzem-se um núcleo de ${}^{17}O$ e um próton; este é emitido a 90° com respeito à direção de incidência da partícula α e tem uma energia cinética de 4,44 MeV. As massas das várias partículas são: partícula α , 4,00260 u; ${}^{14}N$, 14,00307 u; próton, 1,007825 u; e ${}^{17}O$, 16,99914 u. (a) Qual é a energia cinética do núcleo de oxigênio? (b) Qual é o Q da reação?

77P*. Considere o decaimento α do rádio (Ra) para radônio (Rn), de acordo com a reação



As massas dos vários núcleos são: ${}^{226}\text{Ra}$, 226,0254 u; α , 4,0026 u; ${}^{222}\text{Rn}$, 222,0175 u. (a) Calcule o Q da reação. (b) Que valor de Q se obteria, se as massas precisas dadas acima fossem arredondadas para três algarismos significativos? Qual é a energia cinética (c) da partícula α e (d) do núcleo de radônio? (Para este cálculo, podem-se usar os valores arredondados das massas; por quê?)

PROBLEMAS ADICIONAIS

79. Um jogador de futebol chuta uma bola com massa de 0,45 kg que está inicialmente em repouso. O pé do jogador permanece em contato com a bola por $3,0 \times 10^{-3}$ s, e a força do chute é dada por

$$F(t) = [(6,0 \times 10^6)t - (2,0 \times 10^9)t^2] \text{ N},$$

para $0 \leq t \leq 3,0 \times 10^{-3}$ s, onde t está em segundos. Obtenha os módulos das seguintes grandezas: (a) o impulso recebido pela bola, (b) a força média exercida pelo pé do jogador sobre a bola, durante o período de contato, (c) a força máxima exercida pelo pé do jogador sobre a bola durante o período de contato e (d) a velocidade da bola, imediatamente após ela perder contato com o pé do jogador.

80. Um bloco de 1,0 kg, em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito, está conectado a mola não deformada ($k = 200 \text{ N/m}$), cuja outra ponta é fixa (Fig. 10-46). Um bloco de 2,0 kg cuja velocidade é de 4,0 m/s colide com o de 1,0 kg. Se os dois blocos se unirem após a colisão unidimensional, que compressão máxima da mola ocorrerá, quando eles pararem instantaneamente?

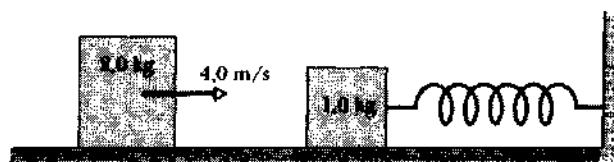


Fig. 10-46 Problema 80.

81. Uma colisão perfeitamente inelástica ocorre entre massa de 3,0 kg deslocando-se para cima a 20 m/s e outra de 2,0 kg deslocando-se para baixo a 12 m/s. A que altura a massa combinada se eleva acima do ponto de colisão?

82. Certa massa de 5,0 kg com uma velocidade inicial de 4,0 m/s, deslocando-se para leste, colide com outra de 4,0 kg cuja velocidade inicial é de 3,0 m/s, deslocando-se para oeste. Após a colisão, a de 5,0 kg tem uma velocidade de 1,2 m/s, deslocando-se para o sul. (a) Qual é o módulo da velocidade da massa de 4,0 kg após a colisão? (b) Quanta energia se dissipou na colisão?

83. Uma bola de 0,30 kg tem uma velocidade de 12 m/s a um ângulo de 35° abaixo da horizontal, imediatamente antes de fazer contato com um bastão. Ela deixa o bastão 2,0 ms depois, com uma velocidade vertical de 10 m/s, como mostra a Fig. 10-47. Qual é a intensidade da força média que age sobre a bola, enquanto esta tem contato com o bastão?

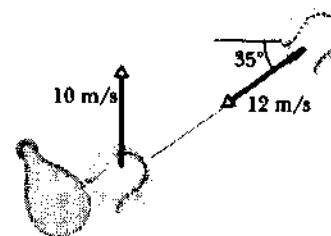


Fig. 10-47 Problema 83.

84. Um objeto de 3,0 kg, deslocando-se a 8,0 m/s no sentido positivo do eixo x , sofre uma colisão unidimensional perfeitamente elástica com um objeto de massa M , inicialmente em repouso. Após o impacto, o objeto de massa M tem uma velocidade de 6,0 m/s no sentido positivo do eixo x . Quanto vale M ?

85. Um homem de 60 kg está esquiando no gelo, em direção ao norte, com uma velocidade de 6,0 m/s, quando colide com uma criança de 38 kg. Imediatamente após a colisão, o homem e a criança permanecem juntos e têm uma velocidade de 3,0 m/s a um ângulo de 35° para o norte a partir do leste. Quais eram o módulo e a direção da velocidade da criança, imediatamente antes da colisão?

ROTAÇÃO



11-1 O Movimento de uma Patinadora

O gracioso movimento de uma patinadora pode ser usado para ilustrar, de uma forma esteticamente agradável, dois tipos de movimento simples, isto é, sem composição. A Fig. 11-1a mostra uma patinadora deslizando retilíneamente sobre o gelo com velocidade constante. Seu movimento é uma **translação pura**. A Fig. 11-1b mostra-a girando em torno de seu eixo vertical, com velocidade angular constante, efetuando uma **rotação pura**. É este segundo tipo que estudaremos neste capítulo.

Até agora, discutimos exclusivamente o movimento ao longo de uma linha reta, que é um movimento de translação. O movimento de rodas, de engrenagens, de motores, dos ponteiros de um relógio, das turbinas de um jato e das hélices de um helicóptero são movimentos de rotação. Este é o movimento de *spin* (o movimento em torno do próprio eixo) dos átomos, dos furacões, dos planetas, das estrelas

No judô, um lutador menor e mais fraco que souber física pode derrotar um lutador maior e mais forte que não tenha este conhecimento. Este fato é demonstrado pela técnica básica de "deslocamento em torno do quadril", em que um lutador gira seu oponente em torno do seu quadril e — se for bem-sucedido — atira-o ao solo. Sem o uso adequado da física, essa técnica exige força considerável, podendo facilmente falhar. Mas qual a vantagem oferecida pela física?

e das galáxias. É também o movimento dos acrobatas, dos praticantes de salto ornamental e dos astronautas em órbita. Estamos cercados de exemplos de rotação.

11-2 As Variáveis da Rotação

Vamos estudar, neste capítulo, a rotação dos corpos *rígidos* em torno de um eixo *fixo*. A primeira restrição é de que nos limitaremos a movimentos de rotação que não incluam corpos como o Sol, porque este — uma bola de gás — não é um corpo rígido. A segunda restrição elimina casos como o de uma bola de boliche *rolando* sobre a pista porque, neste caso, há um rolamento, isto é, uma rotação em torno de um eixo *móvel*.

A Fig. 11-2 mostra um corpo rígido de forma arbitrária num movimento simples de *rotação em torno de um eixo fixo*, chamado de **eixo de rotação**. Cada ponto do corpo se move sobre um círculo cujo centro fica no eixo de rotação, e cada ponto tem o mesmo deslocamento angular durante



(a)



(b)

Fig. 11-1 A patinadora Kristi Yamaguchi num movimento de translação pura, em (a), e de rotação pura, em (b). No primeiro caso, o movimento é ao longo de uma direção fixa. No segundo, é em torno de um eixo fixo.

um determinado intervalo de tempo. Este caso é diferente do de um corpo num *movimento de translação pura em uma determinada direção*, quando cada ponto do corpo se move em linha reta e todos se deslocam da mesma *distância linear*, durante um determinado intervalo de tempo. (A comparação entre movimento angular e movimento linear será uma constante nas seções seguintes.)

Agora, vamos estudar — individualmente — os equivalentes angulares de posição, deslocamento, velocidade e aceleração lineares.

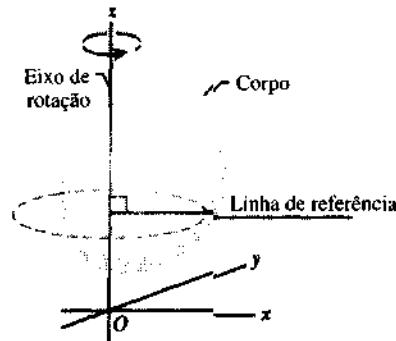


Fig. 11-2 Um corpo rígido, de forma arbitrária, num movimento puro de rotação em torno do eixo z de um sistema de coordenadas. A posição da linha de referência em relação ao corpo é arbitrária, mas é perpendicular ao eixo de rotação e gira solidária com o corpo.

Posição Angular

A Fig. 11-2 mostra também uma linha de referência, fixada no corpo, perpendicular ao eixo de rotação e girando juntamente com o corpo. Podemos descrever o movimento de rotação do corpo estabelecendo a **posição angular** dessa linha, isto é, o ângulo da linha em relação ao eixo fixo. Na Fig. 11-3, a posição angular θ é medida em relação ao eixo x , e θ é dado por

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (\text{medida em radianos})$$

Aqui, s é o comprimento do arco de uma seção circular qualquer entre o eixo x e a linha de referência, e r é o raio dessa seção circular.

Um ângulo definido dessa forma é medido em **radianos** (rad) ao invés de revoluções (rev) ou graus. O radiano, sendo uma razão entre duas distâncias, é um número adimensional. Como a circunferência de um círculo de raio r é $2\pi r$, um círculo completo tem 2π radianos:

$$1 \text{ rev} = 360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad} \quad (11-2)$$

ou

$$1 \text{ rad} = 57,3^\circ = 0,159 \text{ rev.} \quad (11-3)$$

O ângulo θ não assume o valor zero a cada volta completa da linha de referência em torno do eixo de rotação. Se a

linha de referência completar duas revoluções, então $\theta = 4\pi$ rad.

Para um movimento puro de translação de um corpo ao longo do eixo x , saberemos tudo sobre o movimento se conhecermos $x(t)$, que dá sua posição em função do tempo. Da mesma forma, para um movimento puro de rotação de um corpo, podemos saber tudo a respeito desse movimento se conhecermos a posição angular $\theta(t)$ da linha de referência do corpo em função do tempo.

Deslocamento Angular

Se o corpo da Fig. 11-3 girar em torno do eixo de rotação, como na Fig. 11-4, variando a posição angular da linha de referência de θ_1 a θ_2 , dizemos que o corpo sofreu um **deslocamento angular** $\Delta\theta$ dado por

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \quad (11-4)$$

Essa definição do deslocamento angular é válida não somente para o corpo rígido como um todo, mas para *todas as suas partículas*.

Se um corpo está em movimento de translação ao longo de um eixo x , seu deslocamento Δx pode ser positivo ou negativo, dependendo do sentido do movimento ser na direção positiva ou negativa do eixo. Da mesma forma, o deslocamento angular $\Delta\theta$ de um corpo em rotação pode ser positivo ou negativo, dependendo do corpo estar girando no sentido de θ crescente (anti-horário, como nas Figs. 11-3 e 11-4) ou de θ decrescente (sentido horário).

Velocidade Angular

Suponha (veja Fig. 11-4) que o corpo em rotação está na posição angular θ_1 no instante t_1 e na posição angular θ_2 no instante t_2 . Definimos a **velocidade angular média** do corpo por

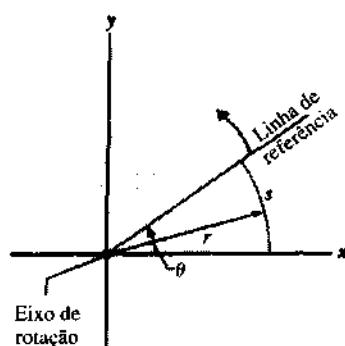


Fig. 11-3 Vista de cima da seção transversal do corpo da Fig. 11-2. O plano da seção transversal é ortogonal ao eixo de rotação. Nessa posição, a linha de referência faz um ângulo θ com o eixo x .

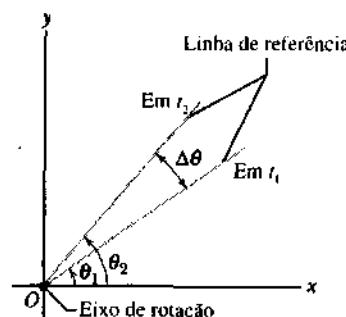


Fig. 11-4 A linha de referência do corpo das Figs. 11-2 e 11-3 está na posição angular θ_1 , no instante t_1 , e na posição θ_2 , no instante t_2 seguinte. A grandeza $\Delta\theta (= \theta_2 - \theta_1)$ é o deslocamento angular no intervalo $\Delta t (= t_2 - t_1)$. O corpo propriamente dito não está mostrado.

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad (11-5)$$

onde $\Delta\theta$ é o deslocamento angular que ocorre no intervalo de tempo Δt . (O símbolo ω é a letra grega ômega.)

A **velocidade angular (instantânea)** ω é definida como o limite da razão na Eq. 11-5, quando Δt tende para zero. Então,

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \quad (11-6)$$

Se conhecermos $\theta(t)$, poderemos determinar a velocidade angular ω por derivação. Essa definição de velocidade angular é válida não somente para a rotação do corpo rígido por inteiro como também para *todas as partículas deste corpo*. Geralmente, a unidade de velocidade angular é radianos por segundo (rad/s) ou revoluções por segundo (rev/s).

Se uma partícula estiver em movimento de translação ao longo de um eixo x , sua velocidade linear v poderá ser positiva ou negativa, conforme a partícula esteja se movendo no sentido crescente ou decrescente de x , respectivamente. Igualmente, a velocidade angular ω de um corpo rígido em rotação poderá ser positiva ou negativa, dependendo do sentido de rotação ser na direção de θ crescente (anti-horário) ou de θ decrescente (horário). O módulo da velocidade angular é chamado de **velocidade angular escalar**, também é representada por ω .

Aceleração Angular

Se a velocidade angular de um corpo em rotação não for constante, então o corpo terá uma aceleração angular. Sejam ω_2 e ω_1 as velocidades angulares nos instantes t_2 e t_1 , respectivamente. A **aceleração angular média** do corpo em rotação é definida por

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \quad (11-7)$$

onde $\Delta\omega$ é a variação da velocidade angular no intervalo de tempo Δt . A **aceleração angular (instantânea)** α é definida como o limite de α quando Δt tende para zero. Então,



Essa definição de aceleração angular se aplica não apenas à rotação de um corpo rígido como um todo, mas também a *cada partícula deste corpo*. Em geral, a unidade de aceleração angular é radiano por segundo ao quadrado (rad/s^2) ou revoluções por segundo ao quadrado (rev/s^2).

EXEMPLO 11-1 A posição angular da linha de referência de uma roda girando é dada por

$$\theta = t^3 - 27t + 4,$$

onde t está em segundos e θ em radianos.

a. Calcule $\omega(t)$ e $\alpha(t)$.

Solução Para obtermos $\omega(t)$, derivamos $\theta(t)$ em relação a t :

$$\omega = \frac{d\theta(t)}{dt} = 3t^2 - 27. \quad (\text{Resposta})$$

Para obtermos $\alpha(t)$, derivamos $\omega(t)$ em relação a t :

$$\alpha = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d(3t^2 - 27)}{dt} = 6t. \quad (\text{Resposta})$$

b. Teremos, em algum momento, $\omega = 0$?

Solução Fazendo $\omega(t) = 0$, temos

$$0 = 3t^2 - 27,$$

resolvendo, encontramos

$$t = \pm 3 \text{ s}. \quad (\text{Resposta})$$

Isto é, a velocidade angular é nula nos instantes 3 s antes e 3 s depois da leitura zero do nosso relógio.

c. Descreva o movimento da roda para $t \geq 0$.

Solução Vamos examinar as expressões para $\theta(t)$, $\omega(t)$ e $\alpha(t)$.

Em $t = 0$ a linha de referência da roda está em $\theta = 4$ rad e a roda está girando com uma velocidade angular de -27 rad/s (isto é, a velocidade angular *no sentido horário* é de 27 rad/s , em módulo) e uma aceleração angular nula.

Para $0 < t < 3$ s, a roda continua a girar no sentido horário, mas o módulo da velocidade angular diminui, porque agora a aceleração angular é positiva (sentido anti-horário). (Verifique $\omega(t)$ e $\alpha(t)$ para, por exemplo, $t = 2$ s.)

Em $t = 3$ s, a roda pára momentaneamente ($\omega = 0$), tendo girado, no sentido horário, do maior ângulo possível (a linha de referência agora está em $\theta = -50$ rad).

Para $t > 3$ s, a aceleração angular da roda continua a aumentar. Sua velocidade angular, que agora está no sentido anti-horário, aumenta rapidamente porque os sinais de ω e α são idênticos.

EXEMPLO 11-2 Um pião gira no solo com uma aceleração angular

$$\alpha = 5t^3 - 4t,$$

onde os coeficientes estão em unidades compatíveis com radianos e segundos. Em $t = 0$, o pião tem uma velocidade angular de 5 rad/s e a sua linha de referência está na posição angular $\theta = 2$ rad.

a. Determine uma expressão para a velocidade angular $\omega(t)$ do pião.

Solução Da Eq. 11-8 temos

$$d\omega = \alpha dt,$$

integrando, obtemos

$$\begin{aligned}\omega &= \int \alpha dt = \int (5t^3 - 4t) dt \\ &= \frac{5}{4}t^4 - \frac{4}{2}t^2 + C.\end{aligned}$$

Para calcular a constante de integração C , devemos observar que $\omega = 5$ rad/s em $t = 0$. Substituindo estes valores na expressão obtida para ω , temos

$$5 \text{ rad/s} = 0 = 0 + C,$$

logo, $C = 5$ rad/s. Então,

$$\omega = \frac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5. \quad (\text{Resposta})$$

b. Determine uma expressão para a posição angular $\theta(t)$ do pião.

Solução Da Eq. 11-6 temos

$$d\theta = \omega dt,$$

integrando, temos

$$\begin{aligned}\theta &= \int \omega dt = \int (\frac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5) dt \\ &= \frac{5}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 5t + C' \\ &= \frac{5}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 5t + 2, \quad (\text{Resposta})\end{aligned}$$

onde C' é determinada observando que $\theta = 2$ rad em $t = 0$.

11-3 Grandezas Angulares como Vetores: Uma Digressão

Podemos descrever a posição, a velocidade e a aceleração de uma partícula por meio de vetores. Se, todavia, a partícula estiver em uma trajetória retilínea, na verdade podemos dispensar o tratamento vetorial. Como a partícula tem apenas dois sentidos possíveis, podemos indicá-los pelos sinais mais e menos.

Da mesma forma, um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo pode fazê-lo apenas no sentido horário ou anti-horário, e novamente podemos associá-los aos sinais mais e menos. A pergunta que se faz é: “Podemos tratar o deslocamento angular, a velocidade e a aceleração de um corpo em rotação como vetores?” A resposta (com uma precaução que esclareceremos a seguir) é: “Sim.”

Vamos considerar a velocidade angular. A Fig. 11-5a mostra um disco girando sobre um eixo central fixo. O disco

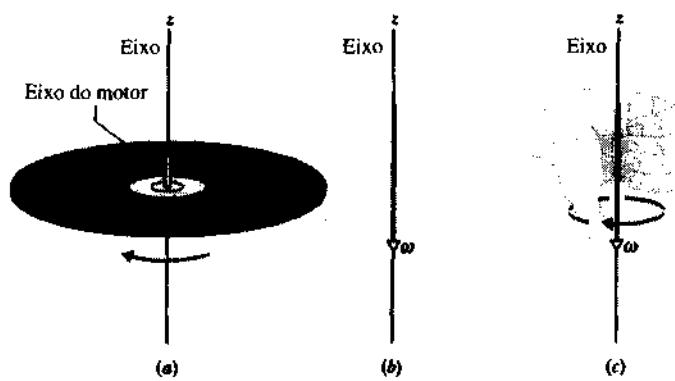


Fig. 11-5 (a) Um LP girando em relação a um eixo vertical, coincidente com o eixo do motor. (b) A velocidade angular de rotação pode ser representada pelo vetor ω , que está sobre o eixo, apontando para baixo, conforme mostrado. (c) O sentido do vetor velocidade angular foi estabelecido para baixo pela regra da mão direita. Os dedos da mão direita envolvem o LP no sentido do movimento deste, e o polegar estendido indica o sentido de ω .

gira a uma taxa de rotação constante ω ($= 33 \frac{1}{3}$ rev/min) e com um sentido de rotação fixo (no caso, sentido horário). Por convenção, vamos representar a sua velocidade angular como um vetor apontando ao longo do eixo de rotação, como na Fig. 11-5b. Escolhemos uma escala apropriada para representar esse vetor, por exemplo, 1 cm igual a 10 rev/min.

Estabelecemos um sentido para o vetor ω pela **regra da mão direita**, como na Fig. 11-5c. Posicionamos nossa mão direita aberta com os quatro dedos maiores apontando *no mesmo sentido da rotação do disco*. Então, nosso polegar

indicará o sentido do vetor velocidade angular. Se o disco estivesse girando no sentido contrário, o vetor velocidade angular, pela regra da mão direita, estaria apontando na direção oposta.

Esta regra não é fácil de ser usada na representação de grandezas angulares como vetores. Instintivamente, esperamos que alguma coisa esteja se deslocando *no mesmo sentido* do vetor. Não é o que acontece aqui. Ao contrário, algo (o corpo rígido) está girando *em torno* da direção do vetor. No universo da rotação pura, um vetor define um eixo de rotação, não o sentido de um deslocamento. Todavia, o vetor define também o movimento. E mais, ele obedece a todas as regras e propriedades vetoriais discutidas no Cap. 3. A aceleração angular α é outro vetor que também obedece a essas regras.

Agora, vamos fazer o esclarecimento a que nos referimos anteriormente. *Deslocamentos angulares* (a menos que sejam muito pequenos) *não podem* ser tratados como vetores. Por que não? Certamente, podemos ter módulo e sentido, como no caso do vetor velocidade angular na Fig. 11-5. Entretanto (como se diz matematicamente), isto é condição necessária, mas não suficiente. Para a grandeza ser representada por um vetor, *também* deve obedecer às regras da adição vetorial, uma delas diz que a ordem das parcelas não altera a soma. Os deslocamentos angulares, no entanto, não obedecem a essa propriedade.

Para exemplificar, vamos colocar um livro sobre uma superfície plana, como na Fig. 11-6a. Agora, vamos lhe aplicar dois deslocamentos angulares sucessivos de 90°, *primeiro* em torno do eixo x (horizontal) e *depois* em torno do y (vertical), usando a regra da mão direita para orientar o sentido positivo da rotação em cada caso.

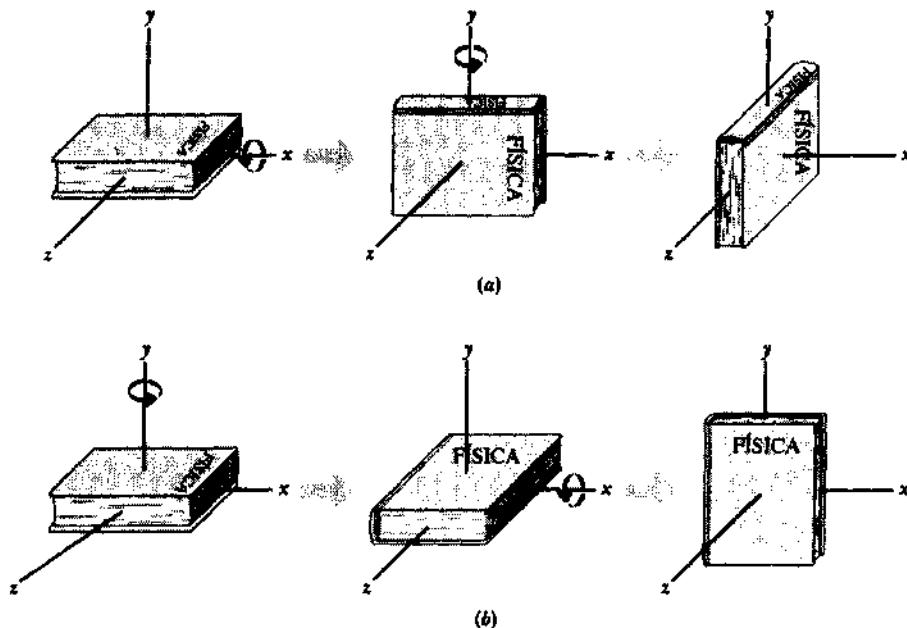


Fig. 11-6 (a) São dadas duas rotações sucessivas de 90° na posição inicial do livro à esquerda, primeiro em relação ao eixo x (horizontal) e depois em relação ao eixo y (vertical). (b) O livro sofre as mesmas rotações, mas agora na ordem inversa. Se o deslocamento angular fosse de fato uma grandeza vetorial, a ordem dos deslocamentos não importaria. Como isso não se verificou, então, deslocamentos angulares (finitos) não são grandezas vetoriais, embora possamos lhes atribuir módulo e direção.

Tabela 11-1
Equações do Movimento para Aceleração Linear Constante e para
Aceleração Angular Constante

Número da Equação	Fórmula Linear	Variável Ausente	Fórmula Angular	Número da Equação
(2-9)	$v = v_0 + at$	x	$\theta = \omega_0 t + \alpha t^2$	(11-9)
(2-13)	$x = v_0 t + 1/2 at^2$	v	$\theta = \omega_0 t + 1/2 \alpha t^2$	(11-10)
(2-14)	$v^2 = v_0^2 + 2ax$	t	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$	(11-11)
(2-15)	$x = 1/2(v_0 + v)t$	a	$\theta = 1/2(\omega_0 + \omega)t$	(11-12)
(2-16)	$x = vt - 1/2 at^2$	v_0	$\theta = \omega t - 1/2 \alpha t^2$	(11-13)

Agora, com o livro na mesma posição inicial (Fig. 11-6b), vamos executar os dois deslocamentos angulares na ordem inversa (isto é, *primeiro* em torno do eixo y e *depois* em torno do x). Vemos, pela figura, que a posição final do livro é bastante diferente.

Logo, dependendo da ordem em que são executadas, as mesmas operações produzem diferentes resultados. Então, a adição de deslocamentos angulares não é comutativa e o deslocamento angular não é uma grandeza vetorial. Na prática, podemos mostrar que as posições finais do livro são bem parecidas, se os deslocamentos forem bem menores do que 90° . No caso limite dos deslocamentos angulares infinitesimais (como $d\theta$ na Eq. 11-6), eles *podem* ser tratados como vetores.

11-4 Rotação com Aceleração Angular Constante

Na translação pura, um movimento com *aceleração linear constante* (como um corpo em queda livre, por exemplo) é um caso especial importante. Na Tabela 2-2, apresentamos uma série de equações válidas para esse movimento.

Na rotação pura, o caso da *aceleração angular constante* também é importante e, do mesmo modo, um conjunto análogo de equações permanece válido para este caso. Não vamos deduzi-las aqui, mas simplesmente escrevê-las partindo das equações lineares correspondentes, fazendo a substituição das grandezas lineares pelas grandezas angulares análogas. Na Tabela 11-1 são mostrados os dois conjuntos de equações. Simplificando, façamos $x_0 = 0$ e $\theta_0 = 0$ nestas equações. Com essas *condições iniciais*, um deslocamento linear Δx ($= x - x_0$) é igual a x e um deslocamento angular $\Delta\theta$ ($= \theta - \theta_0$) é igual a θ .

EXEMPLO 11-3 Um esmeril (Fig. 11-7) tem uma aceleração angular constante $\alpha = 0,35 \text{ rad/s}^2$. Ele parte do repouso (isto é, $\omega_0 = 0$) com uma linha horizontal de referência arbitraria na posição angular $\theta_0 = 0$.

a. Qual o deslocamento angular θ da linha de referência (consequente mente do esmeril) em $t = 18 \text{ s}$?

Solução Usando a Eq. 11-10 da Tabela 11-1, vamos obter

$$\begin{aligned}\theta &= \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ &= (0)(18 \text{ s}) + \frac{1}{2}(0,35 \text{ rad/s}^2)(18 \text{ s})^2 \\ &= 56,7 \text{ rad} \approx 57 \text{ rad} \approx 3.200^\circ \approx 9,0 \text{ rev.} \quad (\text{Resposta})\end{aligned}$$

b. Qual a velocidade angular do esmeril em $t = 18 \text{ s}$?

Solução Agora, usando a Eq. 11-9 da Tabela 11-1, vamos obter

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 + \alpha t \\ &= 0 + (0,35 \text{ rad/s}^2)(18 \text{ s}) \\ &= 6,3 \text{ rad/s} = 360^\circ/\text{s} = 1,0 \text{ rev/s.} \quad (\text{Resposta})\end{aligned}$$

EXEMPLO 11-4 Considerando o esmeril do Exemplo 11-3, vamos admitir que a aceleração angular seja a mesma ($\alpha = 0,35 \text{ rad/s}^2$), mas agora vamos supor que a velocidade angular inicial ω_0 é $-4,6 \text{ rad/s}$; isto é, inicialmente há uma desaceleração angular atuando sobre o esmeril.

a. Em que instante t o esmeril pára momentaneamente?

Solução Resolvendo a Eq. 11-9 ($\omega = \omega_0 + \alpha t$) para t , obtemos

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - (-4,6 \text{ rad/s})}{0,35 \text{ rad/s}^2} = 13 \text{ s.} \quad (\text{Resposta})$$

b. Em que instante o esmeril terá realizado um deslocamento angular de cinco revoluções no sentido positivo? (Então, o deslocamento angular da linha de referência será $\theta = 5 \text{ rev}$.)

Solução Inicialmente, o esmeril está girando no sentido negativo com $\omega_0 = -4,6 \text{ rad/s}$, mas sua aceleração angular α é positiva. Esta oposição de sinais entre a velocidade e a aceleração angulares iniciais significa que o esmeril está diminuindo sua rotação no sentido negativo, pára e, em seguida, reverte a rotação no sentido positivo. Depois que a linha de referência voltar à sua posição inicial, $\omega = 0$, o esmeril deverá realizar mais cinco revoluções para alcançar o deslocamento angular pedido. Isso tudo “é levado em conta” pelo uso da Eq. 11-10:

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2.$$

Substituindo os valores conhecidos e fazendo $\theta = 5 \text{ rev} = 10\pi \text{ rad}$, temos

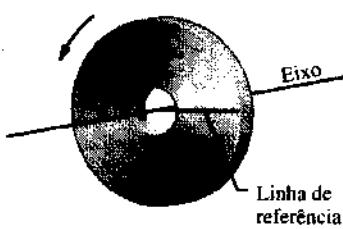


Fig. 11-7 Exemplos 11-3 e 11-4. Um esmeril. No instante $t = 0$, a linha de referência (imaginariamente marcada na pedra) está na horizontal.

$$10\pi \text{ rad} = (-4.6 \text{ rad/s})t + (\frac{1}{2})(0.35 \text{ rad/s}^2)t^2.$$

Observe que as unidades nesta equação são coerentes para t em segundos. Eliminando as unidades (por simplificação) e rearranjando, temos

$$t^2 - 26.3t - 180 = 0. \quad (11.14)$$

Resolvendo esta equação do segundo grau em t e desprezando a raiz negativa, obtemos

$$t = 32 \text{ s.} \quad (\text{Resposta})$$

TÁTICA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 1: RESPOSTAS INESPERADAS

Não se apresse em descartar uma das raízes de uma equação quadrática, como se ela nada significasse. Frequentemente, uma raiz desprezada, como no Exemplo 11-4, tem um significado físico.

As duas respostas para a Eq. 11-14 são $t = 32 \text{ s}$ e $t = -5.6 \text{ s}$. Escollhamos a primeira solução (positiva) e ignoramos a segunda, talvez como irrelevante. Mas e se ela tiver significado? Um tempo negativo nesse problema é simplesmente um instante anterior a $t = 0$, isto é, um instante antes de prestarmos atenção ao que estava acontecendo.

A Fig. 11-8 é um gráfico da posição angular θ , em função do tempo, da linha de referência no esmeril do Exemplo 11-4, tanto para instantes negativos como positivos. É um gráfico da Eq. 11-10 ($\theta = \omega_0 t + \alpha t^2/2$), com $\omega_0 = -4.6 \text{ rad/s}$ e $\alpha = +0.35 \text{ rad/s}^2$. O ponto a , correspondente a $t = 0$, é o instante em que arbitrariamente igualamos a posição angular da linha de referência a zero. O movimento do esmeril, neste instante, é no sentido decrescente de θ , e continua assim até parar no instante $t = 13 \text{ s}$, ponto b . Aí, reverte o movimento com a linha de referência retornando à sua posição inicial, $\theta = 0$, no ponto c e, após mais cinco revoluções ($= 31.4 \text{ rad}$), vai até o ponto d . Este último ponto ($t = 32 \text{ s}$) é a raiz escolhida como resposta para o problema apresentado.

No entanto, observe que a linha de referência estava nessa mesma posição angular em $t = -5.6 \text{ s}$, antes do início oficial "propriamente dito" do problema. Essa raiz (ponto e) é tão válida quanto aquela do ponto d . O mais importante é, através do questionamento do significado físico dessa raiz negativa, aprender um pouco mais sobre o movimento de rotação do esmeril.

EXEMPLO 11-5 Pela análise do motor de um helicóptero, determinamos que a velocidade do rotor varia de 320 rev/min a 225 rev/min em 1,50 min, enquanto diminui a rotação para parar.

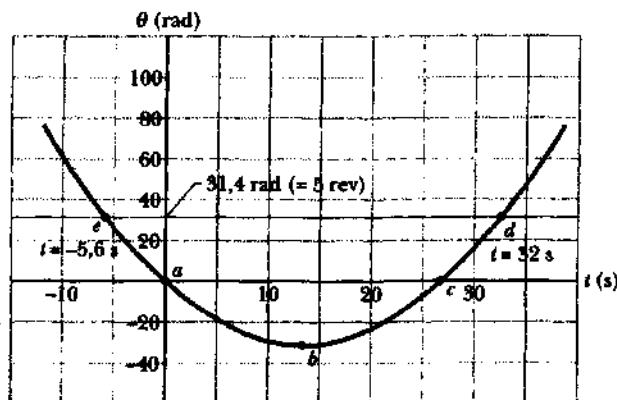


Fig. 11-8 Um gráfico da posição angular em função do tempo do esmeril do Exemplo 11-4. São assinalados instantes negativos (isto é, instantes antes de $t = 0$). Os pontos d e e indicam as duas raízes da Eq. 11-14.

- a. Qual é a aceleração angular média das lâminas do rotor durante esse intervalo?

Solução Da Eq. 11-7,

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t} = \frac{225 \text{ rev/min} - 320 \text{ rev/min}}{1.50 \text{ min}} \\ = -63.3 \text{ rev/min}^2. \quad (\text{Resposta})$$

O sinal menos significa que as lâminas do rotor estão parando.

- b. Quanto tempo as lâminas do rotor levarão para parar, com essa mesma aceleração média, a partir da velocidade angular inicial de 320 rev/min?

Solução Resolvendo a Eq. 11-9 ($\omega = \omega_0 + \alpha t$) para t , temos

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - 320 \text{ rev/min}}{-63.3 \text{ rev/min}^2} \\ = 5.1 \text{ min.} \quad (\text{Resposta})$$

- c. Quantas revoluções as lâminas do rotor farão, a partir da velocidade angular inicial de 320 rev/min, até parar?

Solução Resolvendo a Eq. 11-11 ($\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$) para θ , temos

$$\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha} = \frac{0 - (320 \text{ rev/min})^2}{(2)(-63.3 \text{ rev/min}^2)} \\ = 809 \text{ rev.} \quad (\text{Resposta})$$

11-5 As Variáveis Lineares e Angulares

Na Seção 4-7, discutimos o movimento circular uniforme, em que uma partícula se desloca com velocidade linear constante v sobre um círculo, em volta de um eixo de rotação. Quando um corpo rígido, como um carrossel (Fig. 11-9), gira em volta de um eixo de rotação, cada partícula deste corpo se move num círculo em volta desse eixo. Como o



Fig. 11-9 Todos os cavaleiros de um carrossel giram em volta de um eixo central com a mesma velocidade angular ω . Mas os cavaleiros mais afastados do eixo se movem com maior velocidade linear v .

corpo é rígido, todas as partículas completam uma revolução no mesmo intervalo de tempo; isto é, todas têm a mesma velocidade angular ω .

Entretanto, quanto mais afastada uma partícula está do eixo, maior é a circunferência de seu círculo e, portanto, maior deve ser sua velocidade linear. Isto pode ser observado num carrossel. Você gira com a mesma velocidade angular ω , independente de sua distância em relação ao centro, mas sua velocidade linear v aumentará consideravelmente se você se deslocar em direção à borda.

Com freqüência, precisamos relacionar as variáveis lineares s , v e a de um determinado ponto num corpo em rotação com as variáveis angulares θ , ω e α deste corpo. Os dois conjuntos de variáveis são relacionados por r) a distância perpendicular do ponto ao eixo de rotação. Esta distância é o raio r do círculo percorrido pelo ponto em volta do eixo de rotação.

A Posição

Se a linha de referência de um corpo rígido girar de um ângulo θ , um ponto no interior deste corpo se deslocará de uma distância s sobre um arco circular dada pela Eq. 11-1:

$$s = r\theta \quad (\text{em radianos}) \quad (11-1)$$

(11-1)

Essa é a primeira das quatro relações linear-angular. O ângulo θ deve ser medido em radianos porque a Eq. 11-15 é, por si própria, a definição da medida angular em radianos.

A Velocidade Escalar

Derivando a Eq. 11-15 em relação ao tempo, mantendo r constante, obtemos

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r.$$

Mas ds/dt é a velocidade linear (em módulo) do ponto considerado e $d\theta/dt$ é o módulo da velocidade angular de rotação do corpo, logo

$$v = \omega r \quad (\text{em módulo}) \quad (11-16)$$

(11-16)

Novamente, a velocidade angular ω deve ser expressa em radianos por segundo. Pela Eq. 11-16, vemos que, como todos os pontos de um corpo rígido têm a mesma velocidade angular ω , quanto maior o raio r , maior a velocidade linear v . A Fig. 11-10a mostra que a velocidade linear é sempre tangente à trajetória circular do ponto considerado, da mesma forma que no movimento circular uniforme (Seção 4-7).

A Aceleração

Derivando a Eq. 11-16 em relação ao tempo, novamente mantendo r constante, obtemos

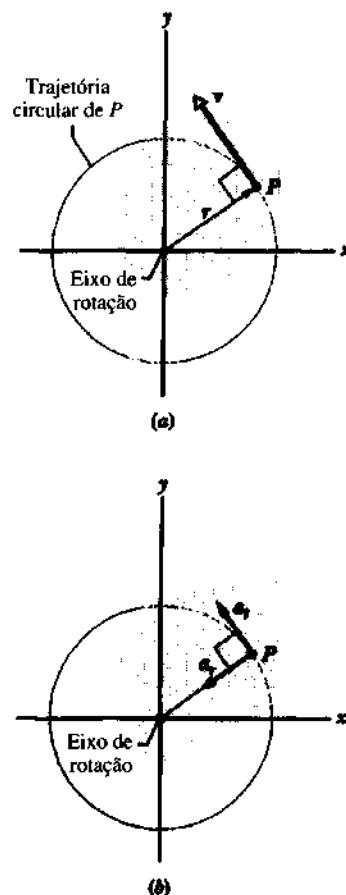


Fig. 11-10 A seção transversal do corpo rígido em rotação da Fig. 11-2. Todos os pontos do corpo (como P) se movem numa trajetória circular em volta do eixo de rotação. (a) O vetor velocidade linear v de todos os pontos é tangente à trajetória do ponto. (b) O vetor aceleração linear a do ponto (em geral) tem duas componentes: uma componente tangencial a_t e uma componente radial a_r .

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r. \quad (11-17)$$

Aqui, nos deparamos com um problema. Na Eq. 11-17, dv/dt representa apenas a parte da aceleração linear responsável pela variação do módulo v da velocidade linear v . Como v , essa parte da aceleração linear é tangente à trajetória do ponto considerado. É a chamada *componente tangencial* a_t , da aceleração linear do ponto em questão e é representada por

$$a_t = \omega v \quad (\text{em módulo}) \quad (11-18)$$

Além disso, pela Eq. 4-22, uma partícula (ou um ponto) se deslocando sobre uma trajetória circular tem uma *componente radial* da aceleração linear, $a_r = v^2/r$, que é responsável pela variação na direção da velocidade linear v . Substituindo o valor de v , dado pela Eq. 11-16, podemos representar essa componente por

$$a_r = \omega^2 r \quad (\text{em módulo}) \quad (11-19)$$

Assim, como mostra a Fig. 11-10b, a aceleração linear de um ponto de um corpo rígido em rotação tem, em geral, duas componentes. A componente radial a_r (dada pela Eq. 11-19) está sempre presente, desde que a velocidade angular do corpo seja diferente de zero. A componente tangencial a_t (dada pela Eq. 11-18) estará presente sempre que a aceleração angular for diferente de zero.

EXEMPLO 11-6 A Fig. 11-11 mostra uma centrífuga utilizada para submeter astronautas em treinamento a grandes acelerações. O raio r do círculo percorrido pelo astronauta é 15 m.

- a. Com que velocidade angular constante a centrífuga deve girar para que o astronauta seja submetido a uma aceleração linear 11 vezes maior do que a aceleração de queda livre? Essa é aproximadamente a máxima aceleração que um piloto de caça, altamente treinado, pode suportar, por um curto intervalo de tempo, sem desmaiar.

Solução Sendo a velocidade angular constante, a aceleração angular α ($= da/dt$), é zero e também a componente tangencial da aceleração linear (veja Eq. 11-18). Então, resta apenas a componente radial. Da Eq. 11-19 ($a_r = \omega^2 r$), temos

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\frac{a_r}{r}} = \sqrt{\frac{(11)(9.8 \text{ m/s}^2)}{15 \text{ m}}} \\ &= 2.68 \text{ rad/s} \approx 26 \text{ rev/min.} \quad (\text{Resposta})\end{aligned}$$

- b. Qual a velocidade linear do astronauta, nessas condições?

Solução Da Eq. 11-16,

$$v = \omega r = (2.68 \text{ rad/s})(15 \text{ m}) = 40 \text{ m/s.} \quad (\text{Resposta})$$

- c. Qual a aceleração tangencial do astronauta, se a centrífuga acelerar uniformemente a partir do repouso, alcançando a velocidade angular do item (a) em 120 s?

Solução Como a aceleração angular é constante durante o aumento da velocidade da centrífuga, aplicamos a Eq. 11-9:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{2.68 \text{ rad/s} - 0}{120 \text{ s}} = 0.0223 \text{ rad/s}^2.$$

Pela Eq. 11-18, temos

$$\begin{aligned}a_t &= \alpha r = (0.0223 \text{ rad/s}^2)(15 \text{ m}) \\ &= 0.33 \text{ m/s}^2. \quad (\text{Resposta})\end{aligned}$$

Embora a aceleração radial final a_r seja grande (e assustadora), a aceleração tangencial, durante o aumento da velocidade, não é.

TÁTICA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 2: UNIDADES DAS VARIÁVEIS ANGULARES

Na Eq. 11-1 ($\theta = s/r$), nos comprometemos a usar o radiano como medida para todas as variáveis angulares. Ou seja, devemos expressar deslocamentos angulares em radianos, velocidades angulares em rad/s e rad/min e acelerações angulares em rad/s² e rad/min². As únicas exceções a essa regra são as equações que envolvem *apenas* variáveis angulares, como aquelas listadas na Tabela 11-1. Neste caso, podemos usar a unidade que quisermos para as variáveis angulares. Isto é, podemos usar radianos, graus ou revoluções, contanto que as usemos coerentemente.



Fig. 11-11 Exemplo 11-6. Uma centrífuga em Cologne, Alemanha, usada para habituar os astronautas à grande aceleração da decolagem.

Nas equações onde o radiano deve ser usado, não precisamos, necessariamente, nos manter atrelados algebricamente à unidade "radiano" (rad), como acontece para outras unidades. Podemos acrescentá-lo ou retirá-lo livremente, de acordo com o contexto. No Exemplo 11-6a a unidade foi acrescentada à resposta, no Exemplo 11-6b e c foi suprimida.

11-6 Energia Cinética de Rotação

A rotação rápida da lâmina de uma serra de bancada tem, com certeza, uma energia cinética. Como podemos expressá-la? Não podemos usar a fórmula conhecida $K = mv^2/2$ diretamente, porque, ela sendo aplicável apenas para partículas, não saberíamos como usar as variáveis de v e m .

Em vez disso, trataremos a serra (ou qualquer corpo rígido em rotação) como um conjunto de partículas — com diferentes velocidades. Então, a soma das energias cinéticas de todas as partículas é a energia cinética total do corpo. Logo, a energia cinética de um corpo em rotação é

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_3 v_3^2 + \dots \\ &= \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2. \quad (11-20)\end{aligned}$$

onde m_i é a massa da i -ésima partícula e v_i a sua velocidade. A soma relaciona todas as partículas que compõem o corpo.

O problema com a Eq. 11-20 é que v_i não é a mesma para todas as partículas. Contornamos este problema, substituindo v pela relação apresentada na Eq. 11-16 ($v = \omega r$), obtendo, então

$$K = \sum \frac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum m_i r_i^2 \right) \omega^2, \quad (11-21)$$

onde ω é idêntico para todas as partículas.

A quantidade entre parênteses, no lado direito da Eq. 11-21, nos informa como a massa do corpo em rotação é distribuída em torno deste próprio eixo. Essa grandeza é

chamada de **inércia rotacional*** / do corpo em relação a esse eixo. Então,

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (\text{inércia rotacional}). \quad (11-22)$$

Substituindo essa equação na Eq. 11-21, obtemos a expressão procurada

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (\text{energia cinética}). \quad (11-23)$$

Tendo usado a relação $v = \omega r$ para obter a Eq. 11-23, ω deve ser expresso em radianos/s. A unidade SI para I é o quilograma-metro quadrado ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$).

A Eq. 11-23, que permite calcular a energia cinética de um corpo rígido em rotação pura, é a equivalente angular da fórmula $K = 1/2 M v_{\text{cm}}^2$, que é a energia cinética de um corpo rígido em movimento de translação pura. Em qualquer dos casos, o fator $1/2$ está presente. A massa M (que pode ser chamada de *inércia translacional*) aparece em uma fórmula, I (a *inércia rotacional*) aparece na outra. Finalmente, cada equação, translacional ou rotacional, contém o quadrado da velocidade apropriada. As energias cinéticas de translação e de rotação não são tipos diferentes de energia. Ambas são energia cinética expressa na forma apropriada ao movimento em questão.

A inércia rotacional de um corpo girando depende não só de sua massa, mas também de como esta massa é distribuída em relação ao eixo de rotação. A Fig. 11-12 sugere uma maneira prática de desenvolver a percepção física para o momento de inércia. A Fig. 11-12a mostra que os dois tubos plásticos parecem idênticos quando vistos do exterior. Ambos têm cerca de 1 m de comprimento. As dimensões e massas dos dois tubos são as mesmas e estão em equilíbrio em relação a seus pontos médios. Se segurarmos cada tubo pelo seu centro e o movimentarmos para trás e para a frente, rapidamente, num movimento translacional, não conseguiremos perceber nenhuma diferença entre eles.

Entretanto, se girarmos os tubos, rapidamente, uma diferença marcante aparecerá. É muito mais fácil girar um tubo que o outro. Como mostrado nas Figs. 11-12b e 11-12c, o “mais difícil” tem os pesos internos localizados nas suas extremidades, e o “mais fácil” os tem concentrados próximos ao seu centro. Embora os tubos tenham a mesma massa, os momentos de inércia em relação ao eixo central são bem diferentes por causa da distribuição desigual de massas.

11-7 Cálculo do Momento de Inércia

Quando um corpo rígido é composto por partículas discretas, podemos calcular seu momento de inércia ou inércia rotacional pela Eq. 11-22. Se o corpo for contínuo, pode-

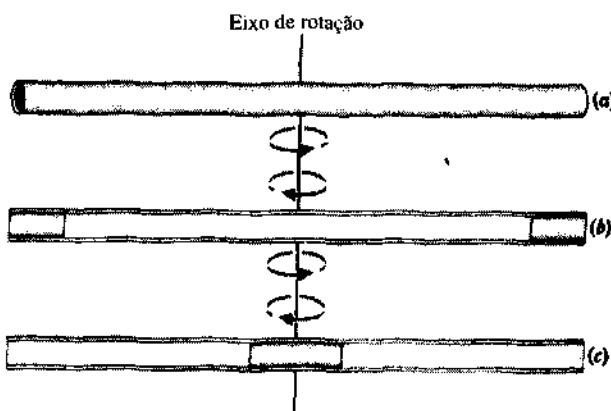


Fig. 11-12 (a) Dois tubos plásticos como este parecem idênticos até você tentar girá-los rapidamente, para trás e para frente, em torno do ponto médio. O tubo (c) gira com facilidade; o tubo (b) não. O segredo está na distribuição interna dos pesos em relação ao eixo de rotação. Embora os bastões tenham a massa igual, o momento de inércia do bastão (b), em relação a um eixo que passa pelo seu ponto médio, é consideravelmente maior do que o do bastão (c).

remos substituir o somatório na Eq. 11-22 por uma integral, e a definição de momento de inércia passará a ser

$$I = \int r^2 dm \quad (\text{momento de inércia, distribuição contínua}) \quad (11-24)$$

Nos exemplos seguintes desta seção, vamos calcular I para os dois tipos de distribuição. Em geral, a inércia rotacional de qualquer corpo rígido em relação ao seu eixo de rotação depende (1) da forma do corpo, (2) da distância ortogonal do eixo ao centro de massa do corpo e (3) da orientação do corpo em relação ao eixo.

A Tabela 11-2 fornece o momento de inércia em relação a diversos eixos de vários corpos conhecidos. Examine a tabela cuidadosamente para perceber como a distribuição de massa afeta a inércia rotacional.

O Teorema dos Eixos Paralelos

Se conhecermos o momento de inércia de um corpo em relação a um eixo qualquer que passe pelo seu centro de massa, poderemos determinar o momento de inércia desse corpo em relação a qualquer outro eixo paralelo ao primeiro, pelo **teorema dos eixos paralelos**,* ou seja,

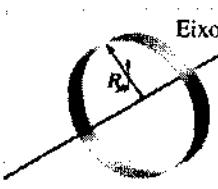
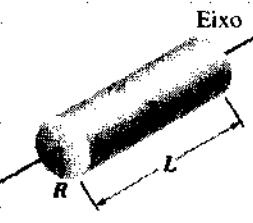
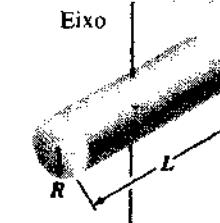
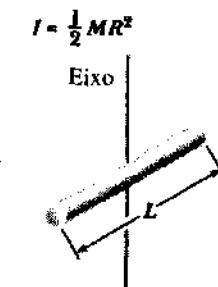
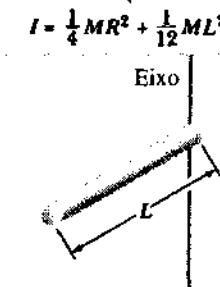
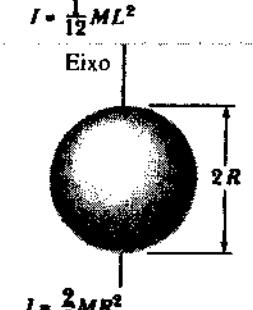
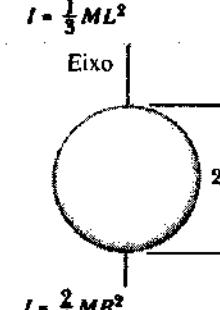
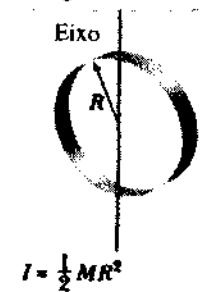
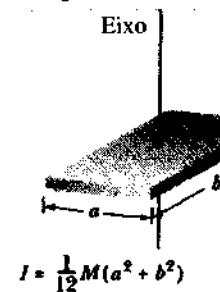
$$I = I_{\text{cm}} + M h^2 \quad (\text{teorema dos eixos paralelos}) \quad (11-25)$$

Onde M é a massa do corpo e h a distância perpendicular entre os dois eixos (paralelos). Esse teorema pode ser enunciado da seguinte forma:

*Frequentemente chamado de *momento de inércia*.

*Também conhecido como Teorema de Huygens-Steiner. (N. do T.)

Tabela 11-2
Alguns Momentos de Inércia

 <p>Eixo Aro em torno do eixo central</p>	 <p>Eixo Cilindro anular (ou anel) em torno do eixo central</p>
$I = MR^2$  <p>Eixo Cilindro sólido (ou disco) em torno do eixo central</p>	$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$  <p>Eixo Cilindro sólido (ou disco) em torno do diâmetro central</p>
$I = \frac{1}{2}MR^2$  <p>Eixo Bastão fino em torno do eixo central perpendicular ao seu comprimento</p>	$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$  <p>Eixo Bastão fino em torno do eixo que passa por uma das extremidades perpendicular ao seu comprimento</p>
$I = \frac{1}{12}ML^2$  <p>Eixo Esfera sólida em relação a um diâmetro qualquer</p>	$I = \frac{1}{3}ML^2$  <p>Eixo Casca esférica delgada em relação a um diâmetro qualquer</p>
$I = \frac{2}{5}MR^2$  <p>Eixo Aro em relação a um diâmetro qualquer</p>	$I = \frac{2}{3}MR^2$  <p>Eixo Tábua em relação a um eixo central ortogonal</p>
	$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$

O momento de inércia de um corpo em relação a um eixo qualquer é igual ao momento de inércia que ele teria em relação a esse eixo ($= Mh^2$), se toda a sua massa estivesse concentrada em seu centro de massa *mais* o seu momento de inércia em relação a um eixo paralelo passando pelo seu centro de massa ($= I_{cm}$).

Demonstração do Teorema dos Eixos Paralelos

Seja O o centro de massa de um corpo de forma arbitrária, cuja seção transversal é vista na Fig. 11-13. Vamos estabelecer em O a origem do sistema de coordenadas. Considere um eixo perpendicular ao plano da figura passando por O , e um outro eixo, paralelo ao primeiro, passando pelo ponto P . Chamemos de a e b as coordenadas de P .

Vamos chamar de dm um elemento de massa com coordenadas x e y . Então, da Eq. 11-24, o momento de inércia do corpo em relação ao eixo que passa por P é

$$I = \int r^2 dm = \int [(x - a)^2 + (y - b)^2] dm,$$

rearrumando, temos

$$\begin{aligned} I &= \int (x^2 + y^2) dm - 2a \int x dm \\ &\quad - 2b \int y dm + \int (a^2 + b^2) dm. \end{aligned} \quad (11-26)$$

De acordo com a definição de centro de massa (Eq. 9-9), as duas integrais intermediárias na Eq. 11-26 representam as coordenadas do centro de massa (multiplicadas por uma constante), logo, são iguais a zero. Como $x^2 + y^2$ é igual a R^2 , onde R é a distância de O a dm , a primeira integral é simplesmente I_{cm} , o momento de inércia do corpo em rela-

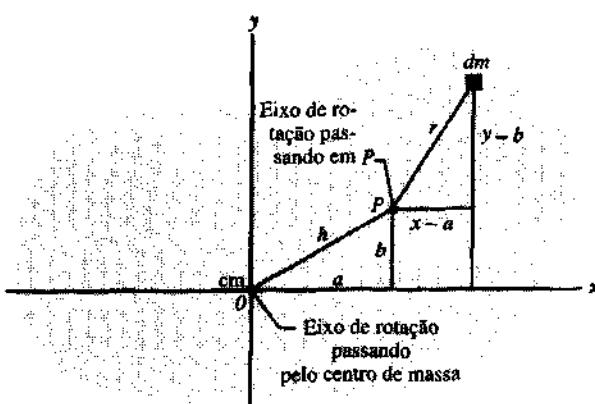


Fig. 11-13 A seção transversal de um corpo rígido com seu centro de massa no ponto O . O teorema dos eixos paralelos (Eq. 11-25) relaciona o momento de inércia do corpo em torno do eixo que passa pelo ponto O com aquele em torno de um eixo paralelo, que passa pelo ponto P a uma distância h do centro de massa. Os dois eixos são ortogonais ao plano da figura.

ção ao eixo que passa pelo seu centro de massa. Observando a Fig. 11-13, vemos que o último termo na Eq. 11-26 é Mh^2 , onde M é a massa total do corpo. Logo, a Eq. 11-26 se reduz à Eq. 11-25, como queríamos provar.

EXEMPLO 11-7 A Fig. 11-14 mostra um corpo rígido composto de duas partículas de massa m ligadas por uma haste de comprimento L e de massa desprezível.

- a. Qual é o momento de inércia desse corpo, em relação a um eixo que passa pelo seu centro e é perpendicular à haste (veja Fig. 11-14a)?

Solução Da Eq. 11-22, temos

$$\begin{aligned} I &= \sum m_r^2 = (m)(\frac{1}{2}L)^2 + (m)(\frac{1}{2}L)^2 \\ &= \frac{1}{2}mL^2. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

- b. Qual o momento de inércia do corpo em relação a um eixo que passa por uma das extremidades da haste e é paralelo ao primeiro, conforme a Fig. 11-14b?

Solução Podemos usar o teorema dos eixos paralelos da Eq. 11-25. No item (a), acabamos de calcular I_{cm} , e a distância h entre os eixos paralelos é a metade do comprimento da haste. Logo, da Eq. 11-25,

$$\begin{aligned} I &= I_{cm} + Mh^2 = \frac{1}{2}mL^2 + (2m)(\frac{1}{2}L)^2 \\ &= mL^2. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Usando a Eq. 11-22, podemos verificar esse resultado diretamente:

$$\begin{aligned} I &= \sum m_r^2 = (m)(0)^2 + (m)(L)^2 \\ &= mL^2. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

EXEMPLO 11-8 A Fig. 11-15 mostra um bastão fino, uniforme, de massa M e comprimento L .

- a. Qual o momento de inércia em relação a um eixo perpendicular ao bastão, passando pelo seu centro de massa?

Solução Escolhemos uma fatia dx como elemento de massa do bastão. O centro desta fatia está na posição x . A massa por unidade de comprimento do bastão é M/L , logo, a massa dm do elemento dx é

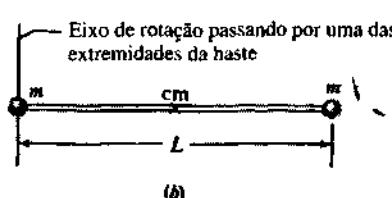
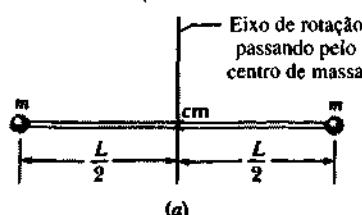


Fig. 11-14 Exemplo 11-7. Um corpo rígido formado por duas partículas de massa m ligadas por uma haste de massa desprezível.

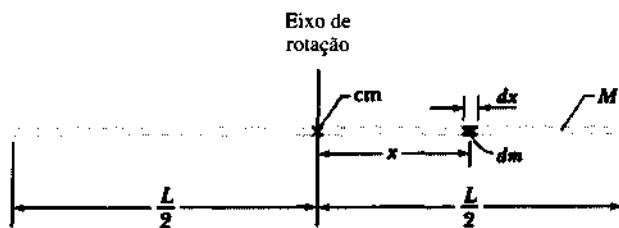


Fig. 11-15 Exemplo 11-8. Um bastão uniforme de comprimento L e de massa M .

$$dm = \left(\frac{M}{L}\right) dx.$$

Da Eq. 11-24, temos

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 dm = \int_{x=-L/2}^{x=L/2} x^2 \left(\frac{M}{L}\right) dx \\ &= \frac{M}{3L} \left[x^3\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{M}{3L} \left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3\right] \\ &= \frac{1}{12}ML^2. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

que concorda com o resultado apresentado na Tabela 11-2(e).

- b. Qual o momento de inércia do bastão em relação a um eixo ortogonal a ele, que passa por uma de suas extremidades?

Solução Combinando o resultado do item (a) com o teorema dos eixos paralelos (Eq. 11-25), obtemos

$$\begin{aligned} I &= I_{cm} + Mh^2 \\ &= \frac{1}{12}ML^2 + (M)(\frac{1}{2}L)^2 = \frac{1}{3}ML^2, \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

que está de acordo com o resultado apresentado na Tabela 11-2(f).

EXEMPLO 11-9 Uma molécula de ácido clorídrico é formada por um átomo de hidrogênio, de massa $m_H = 1,01$ u, e um átomo de cloro, de massa $m_{Cl} = 35,0$ u. Os centros dos dois átomos estão afastados por uma distância $d = 1,27 \times 10^{-10}$ m = 127 pm (veja Fig. 11-16). Qual o momento de inércia da molécula em relação a um eixo ortogonal à linha de junção dos dois átomos e passando pelo centro de massa da molécula?

Solução Vamos chamar de x a distância entre o centro de massa da molécula e o átomo de cloro. Então, da Fig. 11-16 e da Eq. 9-3, vemos que

$$0 = \frac{-m_{Cl}x + m_H(d - x)}{m_{Cl} + m_H},$$

ou

$$m_{Cl}x = m_H(d - x).$$

que dá

$$x = \frac{m_H}{m_{Cl} + m_H} d. \quad (11-27)$$

Pela Eq. 11-22, o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa é

$$I = \sum m_i r_i^2 = m_H(d - x)^2 + m_{Cl}x^2.$$

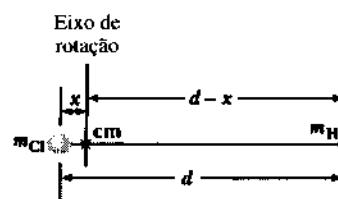


Fig. 11-16 Exemplo 11-9. A representação esquemática de uma molécula de ácido clorídrico. Um eixo de rotação passa pelo seu centro de massa perpendicularmente à linha que une os dois átomos.

Substituindo o valor de x dado pela Eq. 11-27 e manipulando algebraicamente, temos

$$\begin{aligned} I &= d^2 \frac{m_H m_{Cl}}{m_{Cl} + m_H} = (127 \text{ pm})^2 \frac{(1,01 \text{ u})(35,0 \text{ u})}{35,0 \text{ u} + 1,01 \text{ u}} \\ &= 15,800 \text{ u} \cdot \text{pm}^2. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Quando se trata de momento de inércia de moléculas, essas unidades são as mais apropriadas. Se utilizarmos o angström como unidade de comprimento ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$), a resposta anterior passará a ser $I = 1,58 \text{ u} \cdot \text{\AA}^2$, uma unidade mais apropriada ainda.

EXEMPLO 11-10 Utilizando a moderna tecnologia, é possível construir um volante que armazene suficiente energia para movimentar um automóvel. Quando o volante é previamente posto em rotação, a energia é armazenada como energia cinética rotacional. Esta energia armazenada é então transferida gradualmente para o automóvel, por meio de um sistema de engrenagens que movimenta o carro. Suponha que esse volante seja um cilindro sólido de massa M igual a 75 kg e raio R de 25 cm. Se o volante girar a 85.000 rev/min, que quantidade de energia cinética poderá armazenar?

Solução Da Tabela 11-2(c), vemos que o momento de inércia de um cilindro sólido é:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 = (\frac{1}{2})(75 \text{ kg})(0,25 \text{ m})^2 = 2,34 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

A velocidade angular do volante é

$$\begin{aligned} \omega &= (85.000 \text{ rev/min})(2\pi \text{ rad/rev})(1 \text{ min}/60 \text{ s}) \\ &= 8.900 \text{ rad/s}. \end{aligned}$$

Então, pela Eq. 11-23, a energia cinética de rotação é

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}I\omega^2 = (\frac{1}{2})(2,34 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(8.900 \text{ rad/s})^2 \\ &= 9,3 \times 10^7 \text{ J} = 26 \text{ kW} \cdot \text{h}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Essa quantidade de energia, se usada de forma eficiente, pode deslocar um pequeno carro por cerca de 320 km.

11-8 Torque

Há uma razão para que a maçaneta da porta fique o mais afastada possível das dobradiças. Se quisermos abrir uma porta muito pesada, com certeza temos de aplicar uma força; no entanto, só isso não é suficiente. O local de aplicação e o sentido dessa força também são importantes. Se aplicarmos a força mais próximo das dobradiças que da

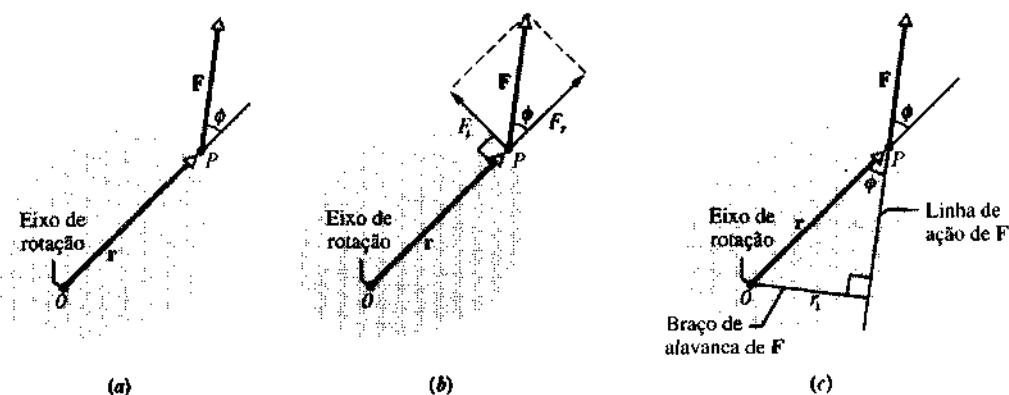


Fig. 11-17 (a) A seção transversal de um corpo rígido que gira livremente em torno de um eixo ortogonal ao plano da figura passando pelo ponto O . Uma força \mathbf{F} , aplicada ao ponto P , produz um torque igual a $F_r \sin \phi$. (b) O torque pode ser representado por $F_r r$, onde F_r é a componente tangencial de \mathbf{F} . (c) O torque também pode ser representado por $F r_\perp$, onde r_\perp é o braço de alavanca de \mathbf{F} .

maçaneta ou se a direção da força fizer um ângulo diferente de 90° com o plano da porta, teremos de usar muito mais força para mover a porta que se a aplicássemos perpendicularmente à porta, na altura da maçaneta.

A Fig. 11-17a mostra a seção reta de um corpo que gira livremente em torno de um eixo que passa pelo ponto O , ortogonalmente à seção reta. Uma força \mathbf{F} é aplicada ao ponto P , cuja posição em relação a O é definida pelo vetor \mathbf{r} . Os vetores \mathbf{F} e \mathbf{r} fazem um ângulo ϕ entre si. (Simplificando, consideraremos apenas as forças que não tenham componentes paralelas ao eixo de rotação.)

Para determinarmos a eficiência da força \mathbf{F} em girar um corpo em torno de seu eixo de rotação, vamos decomponê-la em duas componentes (veja Fig. 11-17b). Uma delas, chamada de *componente radial* F_r , aponta na direção de \mathbf{r} e não produz rotação porque atua na direção da linha que passa por O . (Se puxarmos uma porta paralelamente ao seu plano, não conseguiremos girá-la.) A outra, chamada de *componente tangencial* F_r , é perpendicular à \mathbf{r} e tem módulo $F_r = F \sin \phi$. Esta componente *produz* uma rotação. (Se puxarmos uma porta perpendicularmente ao seu plano, vamos girá-la.)

A possibilidade de F_r girar a porta não depende apenas do seu módulo, mas também do quanto afastada de O ela é, e consequentemente a força F_r está aplicada. Para introduzir esses fatores, vamos definir uma grandeza chamada **torque** τ como o produto desses dois fatores e defini-la como

$$\tau = (r)(F \sin \phi) \quad (11-28)$$

Duas maneiras equivalentes de calcular o torque são

$$\tau = (r)(F \sin \phi) = r F_r, \quad (11-29)$$

e

$$\tau = (r \sin \phi)(F) = r_\perp F, \quad (11-30)$$

onde r_\perp é a distância perpendicular entre o eixo de rotação em O e a linha de extensão da força \mathbf{F} (Fig. 11-17c). Essa

linha de extensão é chamada de **linha de ação** de \mathbf{F} , e r_\perp é chamada de **braço de alavanca** de \mathbf{F} . Na Fig. 11-17b, podemos dizer que r , o módulo de \mathbf{r} , é o braço de alavanca da componente F_r .

Torque, que significa “torcer” em latim, pode ser facilmente identificado pela ação da força \mathbf{F} de torcer ou virar. Quando aplicamos uma força a um objeto — como uma chave de fenda ou uma chave de boca — com a finalidade de torcê-lo, estamos aplicando um torque. A unidade de torque no SI é o newton-metro (N.m).* O torque τ é dito positivo se tender a girar o corpo no sentido anti-horário, na direção crescente de θ , como na Fig. 11-17. No sentido horário ele é negativo.

A definição de torque dada pela Eq. 11-28 pode ser representada pelo *produto vetorial*:

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (11-31)$$

Logo, torque τ é um vetor ortogonal ao plano que contém \mathbf{r} e \mathbf{F} . O módulo de τ é dado pelas Eqs. 11-28, 11-29 e 11-30, e seu sentido é dado pela regra da mão direita. No Cap. 12, retornaremos à Eq. 11-31.

11-9 A Segunda Lei de Newton para a Rotação

A Fig. 11-18 mostra um caso simples de rotação em torno de um eixo fixo. A rotação de um corpo rígido é representada por uma partícula de massa m presa a uma das extremidades de uma haste de comprimento r e massa desprezível. Uma força \mathbf{F} aplicada, conforme mostrado na figura, faz a partícula se mover em círculo. A componente tangencial a_t da aceleração da partícula obedece à segunda lei de Newton:

$$F_t = ma_t.$$

*O newton-metro é também uma unidade de trabalho. Entretanto, torque e trabalho são grandezas bem diferentes e não devem ser confundidas. Em geral, trabalho é expresso em joules ($1 J = 1 N \cdot m$), mas torque nunca.

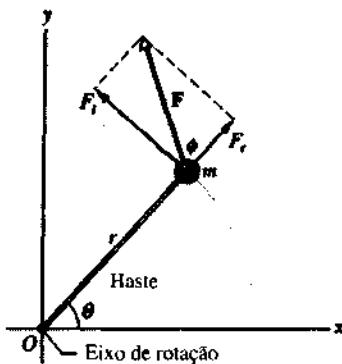


Fig. 11-18 Um corpo rígido simples, que gira livremente em torno de um eixo que passa por O , é composto por uma partícula de massa m presa à extremidade de uma haste de comprimento r e massa desprezível. O corpo gira pela aplicação da força F .

Pela Eq. 11-29, o torque que atua na partícula é

$$\tau = F_r r = ma_r r.$$

Da Eq. 11-18 ($a_r = \alpha r$), podemos escrever isso como

$$\tau = m(ar)r = (mr^2)\alpha. \quad (11-32)$$

A grandeza entre parênteses no lado direito da Eq. 11-32 é o momento de inércia da partícula em relação ao eixo de rotação (veja Eq. 11-22). Assim, a Eq. 11-32 se reduz a

$$\tau = I\alpha \quad (\text{medidas em radianos}) \quad (11-33)$$

Quando mais de uma força é aplicada à partícula, podemos ampliar a Eq. 11-33 para

$$\sum \tau = I\alpha \quad (\text{medidas em radianos}) \quad (11-34)$$

onde $\sum \tau$ é o torque resultante que atua sobre a partícula. A Eq. 11-34 é a forma angular (ou rotacional) da segunda lei de Newton.

Embora tenhamos deduzido a Eq. 11-33 para o caso especial de uma única partícula girando em torno de um eixo fixo, ela é válida para qualquer corpo rígido na mesma condição, considerando que esse corpo pode ser representado por um conjunto dessas partículas.

EXEMPLO 11-11 A Fig. 11-19a mostra uma polia uniforme de massa $M = 2,5 \text{ kg}$ e raio $R = 20 \text{ cm}$ fixada por um eixo horizontal. Um bloco de massa $m = 1,2 \text{ kg}$ está suspenso por uma corda, de massa desprezível, enrolada em volta da polia. Determine a aceleração de queda do bloco (supondo que ele cai), a aceleração angular da polia e a tensão na corda. A corda não desliza e não há atrito no eixo da polia.

Solução A Fig. 11-19b mostra o diagrama de forças do bloco. O bloco acelera para baixo, logo, seu peso ($= mg$) deve ser maior do que a tensão T na corda.

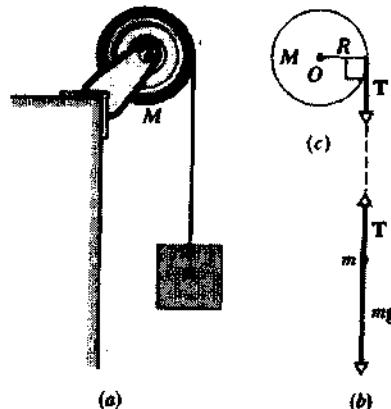


Fig. 11-19 Exemplos 11-11 e 11-13. (a) A queda do bloco produz uma rotação na polia. (b) Um diagrama das forças atuantes no bloco. (c) Um diagrama de forças atuantes na polia.

Da segunda lei de Newton, temos

$$T - mg = ma. \quad (11-35)$$

A Fig. 11-19c mostra o diagrama de forças da polia. O torque que atua na polia é $-TR$, negativo porque a polia gira no sentido horário. Pela Tabela 11-2(c), sabemos que o momento de inércia I de um disco é $MR^2/2$. (Duas outras forças atuam na polia: seu peso Mg e a força normal N exercida pelo suporte sobre a polia. Estas duas forças atuam sobre o eixo da polia, logo, não exercem qualquer torque sobre a polia.) Aplicando à polia a segunda lei de Newton na forma angular, $\tau = I\alpha$, e a Eq. 11-18, obtemos

$$-TR = \frac{1}{2}MR^2 \left(\frac{\alpha}{R} \right).$$

Que é simplificado para

$$T = -\frac{1}{2}Ma. \quad (11-36)$$

Como a corda não desliza, supomos que a aceleração linear do bloco seja igual à aceleração linear (tangencial) da borda, e podemos substituir α por a/R .

Combinando as Eqs. 11-35 e 11-36, fica

$$\begin{aligned} a &= -g \frac{2m}{M + 2m} = -(9.8 \text{ m/s}^2) \frac{(2)(1.2 \text{ kg})}{2.5 \text{ kg} + (2)(1.2 \text{ kg})} \\ &= -4.8 \text{ m/s}^2. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Então, usamos a Eq. 11-36 para determinar T :

$$\begin{aligned} T &= -\frac{1}{2}Ma = -\frac{1}{2}(2.5 \text{ kg})(-4.8 \text{ m/s}^2) \\ &= 6.0 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Como era de se esperar, a aceleração do bloco em queda é menor do que g , e a tensão na corda ($= 6.0 \text{ N}$) é menor do que o peso do bloco ($\approx mg = 11.8 \text{ N}$). Vemos também que a aceleração do bloco e a tensão dependem da massa da polia e não do raio. Como verificação, podemos observar que, se a massa da polia for desprezível ($M = 0$) $a = -g$ e $T = 0$, nas fórmulas que acabamos de deduzir. O que era de se esperar: o bloco simplesmente cai em queda livre, arrastando a corda atrás dele.

A aceleração angular da polia é dada pela Eq. 11-18:

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{-4.8 \text{ m/s}^2}{0.20 \text{ m}} = -24 \text{ rad/s}^2. \quad (\text{Resposta})$$

EXEMPLO 11-12 Para atirar ao solo um adversário de 80 kg, você utiliza o deslocamento em torno do quadril, um golpe básico do judô em que você tenta puxá-lo pelo uniforme com uma força F , que tem um braço de alavanca $d_1 = 0,30 \text{ m}$ em relação ao ponto de apoio (eixo de rotação) no seu quadril direito, sobre o qual deseja girá-lo com uma aceleração angular de -12 rad/s^2 , ou seja, uma aceleração no sentido horário (veja Fig. 11-20). Suponha que o momento de inércia I em relação ao ponto de rotação seja $15 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

- a. Qual deve ser o módulo de F se, inicialmente, você incliná-lo para a frente, para fazer com que o centro de massa dele coincida com o seu quadril (veja Fig. 11-20a)?

Solução Se o centro de massa dele estiver sobre o eixo de rotação, o vetor peso não produzirá torque em relação àquele eixo. Então, o único torque sobre ele é devido ao seu puxão F . Das Eqs. 11-29 e 11-33, temos, para o torque no sentido horário,

$$\tau = -d_1 F = I\alpha,$$

que resulta em

$$F = \frac{-I\alpha}{d_1} = \frac{-(15 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)(-12 \text{ rad/s}^2)}{0,30 \text{ m}} \\ = 600 \text{ N.} \quad (\text{Resposta})$$

- b. Qual será o módulo de F se o adversário permanecer ereto e o vetor peso dele tiver um braço de alavanca $d_2 = 0,12 \text{ m}$ em relação ao eixo de rotação (Fig. 11-20b)?

Solução Nessa situação, o peso do seu adversário produz um torque positivo (anti-horário) que é oposto ao torque aplicado por você. Das Eqs. 11-29 e 11-34, temos

$$\sum \tau = -d_1 F + d_2 mg = I\alpha,$$

que resulta em

$$F = -\frac{I\alpha}{d_1} + \frac{d_2 mg}{d_1}.$$

Sabemos, do item (a), que o primeiro termo no lado direito é 600 N. Fazendo essa substituição e aplicando os dados do problema, temos

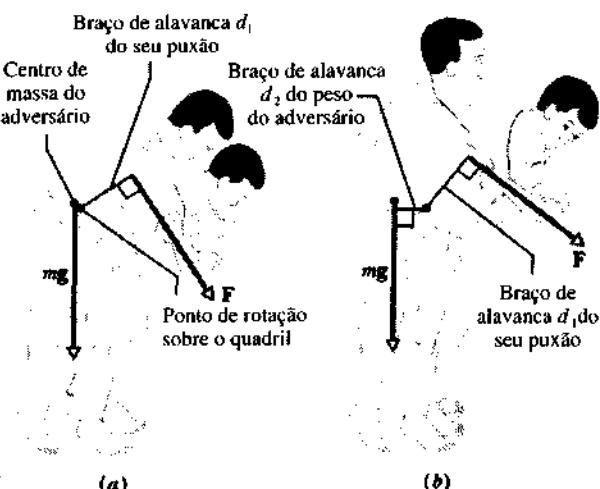


Fig. 11-20 Exemplo 11-12. (a) Movimento de rotação sobre o quadril, técnica do judô, executado corretamente e (b) de forma incorreta.

$$F = 600 \text{ N} + \frac{(0,12 \text{ m})(80 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)}{0,30 \text{ m}}$$

= 913,6 N ≈ 910 N. (Resposta)

Esse resultado indica que você terá de puxá-lo com 50% a mais de força do que se incliná-lo inicialmente, para trazer o centro de massa dele para o seu quadril. Um bom judoca conhece esta lição da física. (Para uma análise sobre judô e aikido veja "The Amateur Scientist", *Scientific American*, julho de 1980.)

11-10 Trabalho, Potência e o Teorema do Trabalho-Energia Cinética

Imagine que o corpo rígido na Fig. 11-18 (constituído por uma única partícula de massa m presa à extremidade de um bastão de massa desprezível) gira de um ângulo $d\theta$. O trabalho realizado pela força F_r é

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = (F_r)(r d\theta),$$

onde $ds (= r d\theta)$ é a distância (comprimento do arco) percorrida pela partícula. Da Eq. 11-29, vemos que F_r é o torque τ , assim,

$$dW = \tau d\theta. \quad (11-37)$$

Então, o trabalho realizado durante um deslocamento angular finito de θ_i a θ_f é



A Eq. 11-38, que é válida para a rotação de qualquer corpo rígido em torno de um eixo fixo, é o equivalente rotacional da Eq. 7-10, ou seja,

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} F_r d\theta.$$

Podemos determinar a potência P para o movimento rotacional descrito pela Eq. 11-37:



Esse é o análogo rotacional da Eq. 7-32, $P = Fv$, que determina a taxa pela qual a força F realiza trabalho sobre uma partícula que se desloca com velocidade v , numa direção fixa.

Para determinar o equivalente angular do teorema do trabalho-energia cinética, vamos começar substituindo $I\alpha$ pelo torque τ , na Eq. 11-38. Logo,

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I\alpha d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I \left(\frac{d\omega}{dt} \right) d\theta \\ = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I \left(\frac{d\theta}{dt} \right) d\omega = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega d\omega.$$

Tabela 11-3
Algumas Relações Correspondentes para Movimentos de Rotação e Translação

Translação Pura (Direção Fixa)	Rotação Pura (Eixo Fixo)
Posição	x
Velocidade	$v = dx/dt$
Aceleração	$a = dv/dt$
Massa (inércia de translação)	m
Segunda lei de Newton	$F = ma$
Trabalho	$W = \int F dx$
Energia cinética	$K = 1/2 mv^2$
Potência	$P = Fv$
Teorema trabalho-energia cinética	$W = \Delta K$
	Posição angular
	$\theta = d\theta/dt$
	$\alpha = d\omega/dt$
	Momento de inércia (inércia de rotação)
	I
	Segunda lei de Newton
	$\tau = I\alpha$
	Trabalho
	$W = \int \tau d\theta$
	Energia cinética
	$K = 1/2 I\omega^2$
	Potência
	$P = \tau\omega$
	Teorema trabalho-energia cinética
	$W = \Delta K$

Resolvendo a integral e aplicando a Eq. 11-23 ($K = I\omega^2/2$), temos

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta = \tau(\theta_f - \theta_i) \quad (11-40)$$

Esse *teorema do trabalho-energia cinética* nos diz que o trabalho realizado pelo torque resultante sobre um corpo rígido em rotação é igual à variação da energia cinética desse corpo. Esse é o equivalente angular do teorema do trabalho-energia cinética para o movimento translacional (Eq. 7-21), que podemos redefinir como: o trabalho realizado sobre um corpo rígido (ou uma partícula) pela força resultante que atua sobre ele é igual à variação da energia cinética de translação desse corpo.

A Tabela 11-3 resume as equações aplicadas à rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo e as relações equivalentes para o movimento de translação.

EXEMPLO 11-13 a. No dispositivo da Fig. 11-19, após 2,5 s, de qual ângulo a polia girou? Suponha que o sistema partiu do repouso.

Solução Da Eq. 11-10, fazendo $\omega_0 = 0$ e usando o valor de α calculado no Exemplo 11-11, temos

$$\begin{aligned} \theta &= \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ &= 0 + (\frac{1}{2})(-24 \text{ rad/s}^2)(2.5 \text{ s})^2 \\ &= -75 \text{ rad.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual a velocidade angular da polia em $t = 2,5 \text{ s}$?

Solução Vamos determiná-la utilizando a Eq. 11-9, fazendo $\omega_0 = 0$ e usando o valor de α calculado no Exemplo 11-11, obtemos

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ &= 0 + (-24 \text{ rad/s}^2)(2.5 \text{ s}) \\ &= -60 \text{ rad/s.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

c. Qual a energia cinética da polia em $t = 2,5 \text{ s}$?

Solução Pela Eq. 11-23, a energia cinética da polia é $I\omega^2/2$, onde $I = MR^2/2$. Então, usando o valor de ω calculado em (b),

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)\omega^2 \\ &= (\frac{1}{2})(2.5 \text{ kg})(0.20 \text{ m})^2(-60 \text{ rad/s})^2 \\ &= 90 \text{ J.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Uma outra forma de abordar esse problema é calcular a variação da energia cinética rotacional pelo teorema do trabalho-energia cinética. Para fazer isso, temos que calcular o trabalho realizado pelo torque sobre a polia. Este torque, exercido pela tensão T na corda, é constante, de forma que, pela Eq. 11-38,

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta = \tau(\theta_f - \theta_i) = \tau(\theta_f - \theta_i).$$

Vamos usar $-TR$ para o torque τ , onde T é a tensão na corda ($= 6,0 \text{ N}$; veja Exemplo 11-11) e R ($= 0,20 \text{ m}$) é o raio da polia. A grandeza $\theta_f - \theta_i$ é exatamente o deslocamento angular calculado no item (a). Assim,

$$\begin{aligned} W &= \tau(\theta_f - \theta_i) = -TR(\theta_f - \theta_i) \\ &= -(6.0 \text{ N})(0.20 \text{ m})(-75 \text{ rad}) \\ &= 90 \text{ J.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Como K_i é zero (o sistema parte do repouso), pela Eq. 11-40, essa resposta é igual a K .

EXEMPLO 11-14 Uma escultura rígida, formada por um aro fino de metal (de massa m e raio $R = 0,15 \text{ m}$) e duas hastes delgadas (de massa m e comprimento $L = 2,0R$), está montada conforme mostra a Fig. 11-21. A escultura pode girar em torno de um eixo horizontal, no plano do aro, passando pelo seu centro.

a. Qual o momento de inércia I da escultura, em relação ao eixo de rotação, em função de m e R ?

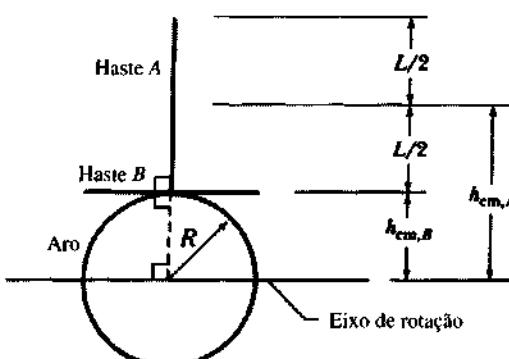


Fig. 11-21 Exemplo 11-14. Uma escultura, formada por um aro e duas hastes, gira em torno de um eixo.

Solução O momento de inércia do aro de metal fornecido pela Tabela 11-2(i) é igual a $mR^2/2$, em relação ao seu diâmetro. Ainda da Tabela 11-2(e), a haste A tem um momento de inércia igual a $mL^2/12$ em relação a um eixo, paralelo ao de rotação, que passa pelo seu centro de massa. Determinamos o momento de inércia total I_A da haste A , em relação ao seu eixo de rotação, usando o teorema dos eixos paralelos dado pela Eq. 11-25:

$$\begin{aligned} I_A &= I_{cm,A} + mh_{cm,A}^2 = \frac{mL^2}{12} + m\left(R + \frac{L}{2}\right)^2 \\ &= 4,33mR^2, \end{aligned}$$

onde $L = 2,0R$ e $h_{cm,A} (= R + 1/2 L)$ é a distância perpendicular entre o eixo de rotação e o centro da haste A .

Para a haste B , usamos tratamento idêntico: o momento de inércia $I_{cm,B}$ em relação a um eixo na extensão do seu comprimento é nulo, e o momento de inércia I_B em relação ao eixo de rotação é

$$I_B = I_{cm,B} + mh_{cm,B}^2 = 0 + mR^2 = mR^2.$$

Onde $h_{cm,B} (= R)$ é a distância perpendicular entre a haste B e o eixo de rotação. Logo, o momento de inércia I da escultura, em relação ao eixo de rotação, é

$$\begin{aligned} I &= I_{aro} + I_A + I_B = \frac{1}{2}mR^2 + 4,33mR^2 + mR^2 \\ &= 5,83mR^2 \approx 5,8mR^2. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

b. Partindo do repouso, a escultura gira em torno do eixo de rotação, partindo da posição inicial da Fig. 11-21. Qual a sua velocidade angular ω em volta do eixo quando é invertida?

Solução Antes de a escultura se movimentar, seu centro de massa está a uma distância y_{cm} acima do eixo de rotação, com y_{cm} dado pela Eq. 9-5:

$$y_{cm} = \frac{m(0) + mR + m(R + L/2)}{3m} = R,$$

onde $3m$ é a massa da escultura. Enquanto a escultura gira, seu centro de massa se desloca da mesma distância *abaixo* do eixo de rotação. Então, o centro de massa é submetido a um deslocamento vertical de $\Delta y_{cm} = -2R$. Durante a descida, a energia potencial gravitacional U da escultura é transferida para a energia cinética K da rotação. A variação da energia potencial ΔU é o produto do peso da escultura ($3mg$) pelo deslocamento vertical Δy_{cm} . Logo,

$$\Delta U = 3mg \Delta y_{cm} = 3mg(-2R) = -6mgR.$$

Pela Eq. 11-23, a variação correspondente na energia cinética é

$$\Delta K = \frac{1}{2}I\omega^2 - 0 = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Assim, pela conservação da energia,

$$\Delta K + \Delta U = 0,$$

e

$$\frac{1}{2}I\omega^2 - 6mgR = 0.$$

Fazendo $I = 5,83mR^2$ e resolvendo para ω , obtemos

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{12g}{5,83R}} = \sqrt{\frac{(12)(9,8 \text{ m/s}^2)}{(5,83)(0,15 \text{ m})}} \\ &= 12 \text{ rad/s.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

RESUMO

Posição Angular

Para descrever a rotação de um corpo rígido em relação a um eixo fixo, chamado **eixo de rotação**, supomos uma **linha de referência** fixada ao corpo, perpendicular a esse eixo e girando solidária com o corpo. Medimos a **posição angular** θ dessa linha em relação ao eixo fixo. Onde θ é medido em **radianos**,

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (\text{medidas em radianos}), \quad (11-1)$$

e s é o comprimento de arco de um círculo de raio r descrito por θ . A medida em radianos é relacionada ao ângulo medido em revoluções e graus por

$$1 \text{ rev} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad.} \quad (11-2)$$

Deslocamento Angular

Um corpo girando em volta de um eixo de rotação varia sua posição angular de θ_1 para θ_2 , sofrendo um **deslocamento angular**

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1, \quad (11-4)$$

onde $\Delta\theta$ é positivo para rotações anti-horário e negativo para o sentido inverso.

Velocidade Angular

Se um corpo sofre um deslocamento angular $\Delta\theta$ num intervalo de tempo Δt , sua **velocidade angular média** $\bar{\omega}$ é

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \quad (11-5)$$

A **velocidade angular (instantânea)** ω do corpo é

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}. \quad (11-6)$$

Tanto $\bar{\omega}$ como ω são vetores, com direção e sentido dados pela **regra da mão direita**, conforme a Fig. 11-5. São positivos na rotação anti-horário e negativos no sentido inverso. O módulo da **velocidade angular** é chamado de **velocidade angular escalar**.

Aceleração Angular

Se a velocidade angular de um corpo variar de ω_1 até ω_2 , num intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, a **aceleração angular média** $\bar{\alpha}$ do corpo será

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \quad (11-7)$$

A **aceleração angular (instantânea)** α do corpo é dada por

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}. \quad (11-8)$$

Tanto $\bar{\alpha}$ como α são vetores.

As Equações Cinemáticas para a Aceleração Angular Constante

A aceleração angular constante ($\alpha = \text{constante}$) é um caso especial importante do movimento rotacional. As equações cinemáticas apropriadas, dadas na Tabela 11-1, são

$$\omega = \omega_0 + \alpha t, \quad (11-9) \quad \theta = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t, \quad (11-12)$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2, \quad (11-10) \quad \theta = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2. \quad (11-13)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta. \quad (11-11)$$

Variáveis Angulares e Lineares

Um ponto num corpo rígido, a uma distância r perpendicular ao eixo de rotação, se move num círculo de raio r . Se o corpo girar de um ângulo θ , o ponto se moverá sobre um arco de comprimento s , dado por

$$s = \theta r \quad (\text{ângulos medidos em radianos}), \quad (11-15)$$

onde θ está em radianos.

A velocidade linear v do ponto é tangente ao círculo; a velocidade escalar v do ponto (o módulo da velocidade linear) é dada por

$$v = \omega r \quad (\text{ângulos medidos em radianos}), \quad (11-16)$$

onde ω é a velocidade angular escalar do corpo (em radianos por segundo).

A aceleração linear a tem componentes *tangencial* e *radial*. A componente tangencial é

$$a_t = \alpha r \quad (\text{ângulos medidos em radianos}). \quad (11-18)$$

onde α é o módulo da aceleração angular do corpo (em radianos por segundo ao quadrado). A componente radial de a é

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (\text{ângulos medidos em radianos}). \quad (11-19)$$

Energia Cinética Rotacional e Inércia Rotacional

A energia cinética K de um corpo rígido, girando em torno de um eixo fixo, é dada por

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (\text{ângulos medidos em radianos}), \quad (11-23)$$

onde I é o momento de inércia do corpo, definida como

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (11-22)$$

para um sistema constituído de partículas discretas, e como

$$I = \int r^2 dm \quad (11-24)$$

para um corpo com distribuição contínua de massa. Os termos r e r_i , nessas expressões, representam as distâncias perpendiculares de cada elemento de massa do corpo ao eixo de rotação.

O Teorema dos Eixos Paralelos (Teorema Huygens-Steiner)

O teorema dos eixos paralelos define o momento de inércia de um corpo relativo a qualquer eixo deste corpo paralelo ao eixo que passa pelo centro de massa:

$$I = I_{cm} + Mh^2. \quad (11-25)$$

Onde h é a distância perpendicular entre os dois eixos.

Torque

Uma força F , ao girar ou torcer um corpo em relação a um eixo de rotação, produz um torque. Se a força F for aplicada a um ponto determinado pelo vetor posição r em relação a esse eixo, então, o torque τ (uma grandeza vetorial) será

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (11-31)$$

O módulo do torque é

$$\tau = rF_r = r_\perp F = rF \sin \phi, \quad (11-28, 11-29, 11-30)$$

onde F_r é a componente de F perpendicular a r , e ϕ é o ângulo entre r e F . A quantidade r_\perp é a distância perpendicular entre o eixo de rotação e o prolongamento da linha suporte do vetor F . Esta linha é chamada de **linha de ação de F** , e r_\perp de **braço de alavanca de F** . Da mesma forma, r é o braço de alavanca de F_r .

A unidade SI para o torque é o newton-metro (N·m). Um torque τ é positivo se produzir uma rotação anti-horário no corpo, e negativo no sentido contrário.

A Segunda Lei de Newton na Forma Angular

O análogo da segunda lei de Newton para a rotação é

$$\sum \tau = I\alpha, \quad (11-34)$$

onde $\sum \tau$ é o torque resultante sobre uma partícula ou um corpo rígido, I é o momento de inércia da partícula ou do corpo em relação ao eixo de rotação, e α é a aceleração angular resultante em relação a esse eixo.

Trabalho e Energia Rotacionais

As equações utilizadas para calcular o trabalho e a potência no movimento de rotação são análogas às correspondentes para o movimento de translação, e são

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta \quad (11-38)$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega. \quad (11-39)$$

A forma do teorema do trabalho-energia cinética usada para corpos em movimento de rotação é

$$W = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = K_f - K_i = \Delta K. \quad (11-40)$$

QUESTIONÁRIO

- As grandezas angulares θ , ω e α podem ser expressas em graus, em vez de radianos, nas equações rotacionais da Tabela 11-1? Explique.
- Qual a razão para radiano ser uma medida "natural" de ângulo e grau ser uma medida "arbitrária" desta mesma grandeza? (Leve em conta as definições das duas medidas.)
- O vetor que representa a velocidade angular de rotação de uma roda em torno de um eixo fixo tem de estar necessariamente sobre este eixo?
- Experimente girar um livro conforme mostra a Fig. 11-6, mas desta vez realizando deslocamentos de 180° , em vez de 90° . Qual a sua conclusão em relação à posição final do livro? Isto muda sua opinião acerca da possibilidade de deslocamentos angulares (finitos) serem tratados como vetores?
- Estique seu braço direito para baixo, com a palma da mão voltada para a sua coxa. Mantendo seu pulso rígido, (1) levante o braço até que ele fique na horizontal e aponte para a frente, (2) mova-o horizontalmente até que ele aponte para a sua direita e (3) abaixe-o novamente por este mesmo lado. A palma de sua mão está voltada para a frente. Se você repetir o exercício, mas agora na seqüência inversa, por que a palma de sua mão *não* fica voltada para a frente?
- Enquanto uma moeda é mantida fixa sobre a superfície de uma mesa, uma segunda, idêntica à primeira, gira em volta dela sem deslizamento (veja Fig. 11-22). Quando a segunda moeda retornar à sua posição original, de quanto ela girou?

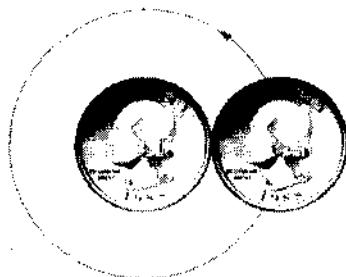


Fig. 11-22 Questão 6.

- A rotação do Sol pode ser acompanhada pelo rastreamento das *manchas solares*, tempestades magnéticas em partes da superfície do Sol que parecem escuros em relação às outras partes. A Fig. 11-23a retrata a posição inicial de cinco dessas manchas e a Fig. 11-23b, a posição das mesmas manchas depois de realizada uma rotação. O que podemos concluir, dessas duas observações, acerca da estrutura do Sol?



Fig. 11-23 Questão 7.

- Por que é conveniente expressar α em revoluções por segundo ao quadrado na expressão $\theta = \omega_0 t + 1/2\alpha t^2$ e não na expressão $a = \alpha r$?
- Um corpo rígido pode girar livremente em torno de um eixo fixo. É possível que a aceleração angular deste corpo seja diferente de zero, mesmo que a sua velocidade angular seja nula (talvez, instantaneamente)? Qual o equivalente linear dessa situação? Ilustre ambas as situações com exemplos.

- Um jogador de golfe gira um taco efetuando um arremesso a longa distância. Todos os pontos do taco terão a mesma velocidade angular ω em qualquer instante, enquanto o taco estiver em movimento?

- Quando dizemos que a velocidade angular de um ponto do equador é 2π rad/dia, que referencial estamos considerando?

- Levando em consideração o movimento orbital e a rotação da Terra (que têm o mesmo sentido), explique se uma árvore se move mais rápido durante o dia ou durante a noite. Que referencial foi considerado na sua resposta?

- Imagine uma roda girando sobre seu eixo e considere um ponto em sua borda. O ponto tem aceleração radial, quando a roda gira com velocidade angular constante? Tem aceleração tangencial? Quando ela gira com aceleração angular constante, o ponto tem aceleração radial? Tem aceleração tangencial? Os módulos dessas acelerações variam com o tempo?

- Suponha que fosse pedido para você determinar a distância percorrida por uma agulha num toca-discos. De que informações precisaria? Discuta a situação do ponto de vista de referenciais (a) fixo na sala; (b) fixo no prato do toca-discos e (c) fixo no braço do toca-discos.

- Qual a relação entre as velocidades angulares de um par de engrenagens acopladas, de raios diferentes?

- Podemos considerar que a massa de um corpo está concentrada no seu centro de massa, para efeito de cálculo do momento de inércia do corpo? Em caso afirmativo, explique por quê. Se não, justifique com um exemplo.

- Quando você fica ereto, em relação a que eixo o momento de inércia do seu corpo é (a) menor, (b) maior? (c) De que forma pode mudar o valor do momento de inércia do seu corpo em (a) e em (b)?

- Se dois discos circulares, de mesmo peso e mesma espessura, forem feitos de metal com densidades diferentes, que disco, se for o caso, terá o maior momento de inércia em relação ao seu eixo central?

- Sugira uma forma de medir experimentalmente o momento de inércia de um corpo, de forma não-definida, em relação a um determinado eixo desse corpo.

- A Fig. 11-24 mostra as seções transversais de cinco sólidos com massas idênticas. Todas as seções têm a mesma altura e a mesma largura máxima. Qual deles tem maior momento de inércia em relação a um eixo ortogonal à sua seção reta, passando pelo seu centro de massa? Qual tem o menor?

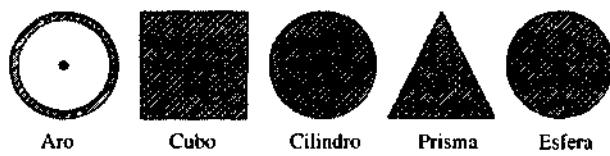


Fig. 11-24 Questão 20.

- A Fig. 11-25a mostra uma barra de 1 m, sendo metade de madeira e metade de metal, fixada por um eixo no ponto O da extremidade de madeira. Uma força F é aplicada ao ponto a da extremidade de metal. Na Fig. 11-25b, a barra é fixada por um eixo em O' na extremidade de metal e a mesma força é aplicada ao ponto a' da extremidade de madeira. A aceleração angular é a mesma para os dois casos? Se não, em que caso ela é maior?

- Comente cada uma destas situações em relação ao esqui. (a) Numa competição de descida de montanha são necessários esquis que não virem com facilidade. (b) Numa pista especial com obstáculos, são necessários esquis que virem com facilidade. (c) Então, o momento de

inércia na descida livre deve ser maior do que na descida com obstáculos. (d) Considerando o pouco atrito entre os esquis e a neve e que o centro de massa dos esquiadores está bem acima do centro dos esquis, como os esquiadores conseguem aplicar torques para fazer ou desfazer os desvios? (De "The Physics of Ski Turns", de J. I. Shonie e D. L. Mordick, *The Physics Teacher*, Dezembro 1972.)

- 23.** Considere um bastão reto apoiado (sem atrito) sobre a extremidade de um pedaço de gelo. Se ele cair, qual será a trajetória do seu centro de massa?

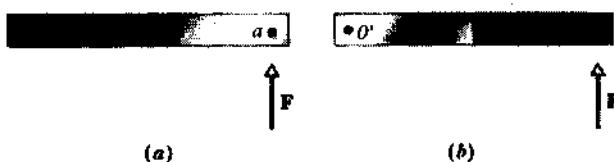


Fig. 11-25 Questão 21.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

Seção 11-2 As Variáveis da Rotação

- 1E.** (a) Que ângulo, em radianos, é formado por um arco de 1,80 m de comprimento num círculo de 1,20 m de raio? (b) Expresse esse ângulo em graus. (c) O ângulo entre dois raios de um círculo é 0,620 rad. Se o raio for 2,40 m, qual a extensão do arco subtendido?

- 2E.** Durante um intervalo de tempo t , a turbina de um gerador gira de um ângulo $\theta = at + bt^3 - ct^4$, onde a , b e c são constantes. Determine as expressões (a) de sua velocidade angular e (b) de sua aceleração angular.

- 3E.** O Sol está a $2,3 \times 10^4$ anos-luz do centro da Via Láctea e se move numa trajetória circular em relação a esse centro, com uma velocidade de 250 km/s. (a) Em quanto tempo ele completa uma revolução em torno do centro da galáxia? (b) Quantas revoluções o Sol já completou, desde que foi formado há cerca de $4,5 \times 10^9$ anos?

- 4E.** A posição angular de um ponto sobre a borda de uma roda em rotação é dada por $\theta = 4,0t - 3,0t^2 + t^3$, com θ em radianos e t em segundos. (a) Qual a velocidade angular em $t = 2,0$ s e em $t = 4,0$ s? (b) Qual a aceleração angular média entre $t = 2,0$ s e $t = 4,0$ s? (c) Qual a aceleração angular instantânea nesse mesmo intervalo?

- 5E.** A posição angular de um ponto sobre uma roda em rotação é dada por $\theta = 2 + 4t^2 + 2t^3$, com θ em radianos e t em segundos. Em $t = 0$, quais são (a) a posição angular e (b) a velocidade angular? (c) Qual a velocidade angular em $t = 4,0$ s? (d) Calcule a aceleração angular em $t = 2,0$ s. (e) A aceleração angular é constante?

- 6P.** Uma roda gira com uma aceleração angular α dada por $\alpha = 4at^3 - 3bt^2$, onde t é o tempo e a e b são constantes. Se ω_0 é a velocidade angular inicial da roda, deduza as equações para (a) a velocidade angular e (b) o deslocamento angular em função do tempo.

- 7P.** Qual a velocidade angular (a) do ponteiro dos segundos, (b) do ponteiro dos minutos e (c) do ponteiro das horas de um relógio?

- 8P.** Um bom jogador de beisebol pode arremessar uma bola em direção ao rebatedor a 136 km/h, com uma rotação de 1.800 rev/min. Quantas revoluções a bola faz durante a sua trajetória? Para simplificar, suponha uma trajetória retilínea de 18 m.

- 9P.** Um atleta de salto ornamental completa 2,5 revoluções, ao pular de uma plataforma a 10 m de altura sobre a superfície da água. Calcule a velocidade angular média durante o salto, supondo nula a velocidade vertical inicial.

- 10P.** Uma roda tem oito raios de 30 cm. Está montada sobre um eixo fixo e gira a 2,5 rev/s. Você pretende tirar uma flecha de 20 cm de comprimento através da roda, paralelamente ao eixo, sem que a flecha colida com qualquer raio. Suponha que tanto a flecha quanto os raios sejam muito finos; veja Fig. 11-26. (a) Qual a velocidade mínima que a flecha deve ter? (b) A localização do ponto que você mira, entre o eixo

e a borda da roda, tem importância? Em caso afirmativo, qual a melhor localização?

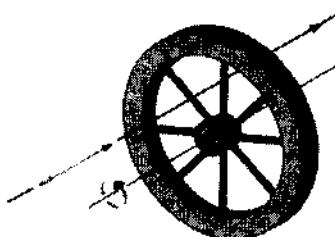


Fig. 11-26 Problema 10.

Seção 11-4 Rotação com Aceleração Angular Constante

- 11E.** Um disco, rodando inicialmente a 120 rad/s, diminui a rotação com uma aceleração angular constante de módulo igual a 4,0 rad/s². (a) Quantos tempos decorre antes de ele parar? (b) De quanto o disco gira até parar?

- 12E.** O prato de um toca-discos, rodando a 33 1/3 rev/min, diminui e pára 30 s após o motor ser desligado. (a) Determine a sua aceleração angular (uniforme) em unidades de rev/min². (b) Quantas revoluções ele fez nesse intervalo?

- 13E.** A velocidade angular do motor de um automóvel aumenta de 1.200 rev/min para 3.000 rev/min em 12 s. (a) Qual a sua aceleração angular, suposta uniforme, em rev/min²? (b) Quantas revoluções o motor realiza nesse intervalo?

- 14E.** Um pesado rotor girando sobre seu eixo está parando por causa do atrito em seus mancais. Ao final do primeiro minuto, sua velocidade angular é 0,90 da velocidade inicial de 250 rev/min. Supondo que as forças de atrito sejam constantes, determine sua velocidade angular ao final do segundo minuto.

- 15E.** O volante de um motor está girando a 25,0 rad/s. Quando o motor é desligado, o volante desacelera a uma taxa constante até parar em 20,0 s. Calcule (a) a aceleração angular do volante (em rad/s²), (b) o ângulo percorrido (em rad) até parar e (c) o número de revoluções completadas pelo volante até parar.

- 16E.** Um disco gira sobre seu eixo com aceleração angular constante, partindo do repouso. Após 5,0 s, ele girou 25 rad. (a) Qual foi a aceleração angular nesse intervalo? (b) Qual a velocidade angular média? (c) Qual a velocidade angular instantânea após os 5,0 s? (d) Supondo que a aceleração seja constante, qual o deslocamento angular que o disco sofrerá nos próximos 5,0 s?

- 17E.** Uma polia com 8,0 cm de diâmetro tem uma corda de 5,6 m de comprimento enrolada à sua volta. A polia é submetida a uma aceleração angular constante de 1,5 rad/s², a partir do repouso. (a) De quanto deve girar para desenrolar a corda? (b) Em quanto tempo isso é feito?

18P. Uma roda realiza 90 rev em 15 s, sua velocidade angular após esse tempo sendo 10 rev/s. (a) Qual a sua velocidade angular no início desse intervalo, admitindo que a aceleração angular é constante? (b) Quanto tempo decorreu entre o repouso e o início do intervalo de 15 s?

19P. Uma roda tem uma aceleração angular constante de 3.0 rad/s^2 . Num intervalo de 4,0 s, ela gira 120 rad. Supondo que a roda partiu do repouso, quanto tempo permaneceu em movimento até o início do intervalo de 4,0 s?

20P. Uma roda, partindo do repouso, gira com aceleração angular constante de 2.00 rad/s^2 . Durante um determinado intervalo de 3,00 s, gira 90,0 rad. (a) Quanto tempo permaneceu em movimento antes de iniciar o intervalo de 3,00 s? (b) Qual era a sua velocidade angular no início desse intervalo?

21P. Um rotor realiza 40 rev, enquanto freia desde uma velocidade angular de 1,5 rad/s até parar completamente. (a) Supondo que a aceleração seja uniforme, em quanto tempo ele pára? (b) Qual a sua aceleração angular? (c) Em quanto tempo completa as primeiras 20 rev?

22P. Em $t = 0$, uma turbina tem uma velocidade angular de 4.7 rad/s , uma aceleração angular de -0.25 rad/s^2 e uma linha de referência em $\theta_0 = 0$. (a) Qual o ângulo máximo θ_{\max} de deslocamento, no sentido positivo, da linha de referência? Em que instante t essa linha estará (b) em $\theta = 1/2\theta_{\max}$ e (c) em $\theta = -10.5 \text{ rad}$ (considere tanto valores positivos como negativos de t)? (d) Trace o gráfico de θ em função de t , assinalando as respostas dos itens anteriores.

23P. Um disco gira em torno de um eixo fixo, partindo do repouso com aceleração angular constante até alcançar a rotação de 10 rev/s. Depois de completar 60 revoluções, sua velocidade angular é 15 rev/s. Calcule (a) a aceleração angular, (b) o tempo necessário para completar as 60 revoluções, (c) o tempo necessário para alcançar a velocidade angular de 10 rev/s e (d) o número de revoluções desde o repouso até a velocidade de 10 rev/s.

24P. Uma roda está sob aceleração angular constante, a partir do repouso em $t = 0$. Em $t = 2.0 \text{ s}$, a velocidade angular é 5.0 rad/s . Ela continua acelerada e, em $t = 20 \text{ s}$, a aceleração é interrompida abruptamente. De quanto a roda gira no intervalo de $t = 0$ até $t = 40 \text{ s}$?

25P. Um pulsar é uma estrela de nêutrons em rápida rotação que emite um pulso de rádio, de forma sincronizada, a cada rotação. O tempo de uma rotação é o período T , determinado pela medida do tempo entre os pulsos. Atualmente, o pulsar na região central da nebulosa de Câncer (veja Fig. 11-27) tem um período de rotação $T = 0.033 \text{ s}$, que cresce à razão de $1.26 \times 10^{-5} \text{ s/ano}$. (a) Mostre que a velocidade angular ω da estrela está relacionada ao período por $\omega = 2\pi/T$. (b) Qual a aceleração angular em rad/s^2 ? (c) Se a aceleração angular for constante, daqui a quantos anos o pulsar vai cessar suas revoluções? (d) O pulsar, que se originou pela explosão de uma supernova, foi visto no ano de 1054. Qual o período T do pulsar quando ele se originou? (Suponha que desde então a aceleração angular seja constante.)

Seção 11-5 As Variáveis Lineares e Angulares

26E. Qual a aceleração de um ponto na borda de um disco de 30 cm (= 12 pol) de diâmetro, girando a $33 \frac{1}{3} \text{ rev/min}$?

27E. Um disco, num toca-discos, roda a $33 \frac{1}{3} \text{ rev/min}$. (a) Qual a velocidade angular em rad/s ? Qual a velocidade linear de um ponto sob a agulha (b) no início e (c) no fim do disco? As distâncias da agulha ao eixo central, relativas a essas duas posições, são 15 cm e 7,3 cm, respectivamente.

28E. Qual a velocidade angular de um carro a 50 km/h, numa curva circular de 110 m de raio?

29E. Uma turbina com 1,20 m de diâmetro está girando a 200 rev/min. (a) Qual a velocidade angular da turbina em rad/s ? (b) Qual a velocida-

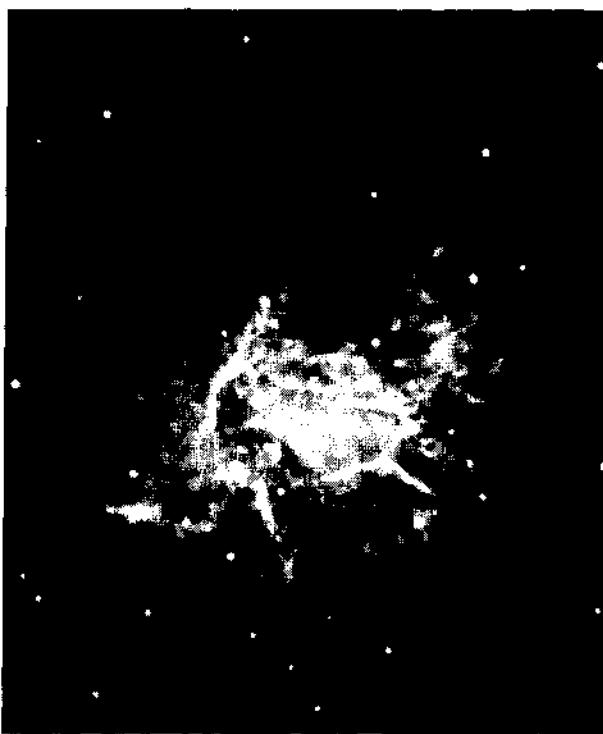


Fig. 11-27 Problema 25. A nebulosa de Câncer, resultado da explosão de uma estrela que foi avistada em 1054. Além do material gasoso visto aqui, a explosão criou uma estrela de nêutrons girante, que ocupa o centro da nebulosa.

de linear de um ponto na sua borda? (c) Que aceleração angular constante (rev/min^2) aumentará a sua velocidade para 1.000 rev/min em 60 s?

(d) Quantas revoluções completará durante esse intervalo de 60 s?

30E. Um ponto na borda de um esmeril de 0,75 m de diâmetro varia uniformemente sua velocidade de 12 m/s a 25 m/s em 6,2 s. Qual a aceleração angular média do esmeril nesse intervalo?

31E. A órbita da Terra em volta do Sol é aproximadamente circular. Determine (a) a velocidade angular, (b) a velocidade linear e (c) a aceleração da Terra, todas em relação ao Sol.

32E. Um astronauta está sendo treinado numa centrífuga. A centrífuga tem um raio de 10 m e começa a girar de acordo com a equação $\theta = 0.30t^2$, onde t é dado em segundos e θ em radianos. Em $t = 5.0 \text{ s}$, quais são (a) a velocidade angular, (b) a velocidade linear, (c) a aceleração tangencial (módulo) e (d) a aceleração radial (módulo) do astronauta?

33E. Quais são (a) a velocidade angular, (b) a aceleração radial e (c) a aceleração tangencial de uma espaçonave realizando uma curva circular de 3.220 km de raio, com uma velocidade constante de 29.000 km/h?

34E. Uma certa moeda de massa M é colocada a uma distância R do centro do prato de um toca-discos. O coeficiente de atrito estático é μ_s . A velocidade angular do toca-discos vai aumentando lentamente até ω_0 , quando, neste instante, a moeda escorrega para fora do prato. (a) Determine ω_0 em função das grandezas M , R , g e μ_s . (b) Faça um esboço mostrando a trajetória aproximada da moeda, quando é projetada para fora do toca-discos.

35P. (a) Qual a velocidade angular de um ponto na latitude 40° N da superfície da Terra em relação ao eixo polar? (b) Qual a velocidade linear? (c) Calcule essas mesmas grandezas para um ponto no equador.

36P. A turbina de um motor a vapor gira com uma velocidade angular constante de 150 rev/min. Quando o vapor é desligado, o atrito nos

manais e a resistência do ar param a turbina em 2,2 h. (a) Qual a aceleração angular constante da turbina, em rev/min², durante a parada? (b) Quantas revoluções realiza antes de parar? (c) Qual a componente tangencial da aceleração linear de uma partícula situada a 50 cm do eixo de rotação, quando a turbina está girando a 75 rev/min? (d) Em relação à partícula do item (c), qual o módulo da aceleração linear resultante?

37P. O volante de um giroscópio, de 2,83 cm de raio, é acelerado a 14,2 rad/s², a partir do repouso, até sua velocidade angular alcançar 2.760 rev/min. (a) Qual a aceleração tangencial de um ponto na borda do volante? (b) Qual a aceleração radial desse ponto quando o volante está girando a plena velocidade? (c) Qual a distância percorrida por um ponto na borda durante a aceleração?

38P. Se a turbina de um avião, de 1,5 m de raio, gira a 2.000 rev/min, enquanto ele voa com a velocidade de 480 km/h em relação ao solo, qual a velocidade de um ponto na extremidade da turbina quando visto (a) pelo piloto e (b) por um observador no solo? Considere que o vetor velocidade do avião é paralelo ao eixo de rotação da turbina.

39P. Um dos primeiros métodos para se medir a velocidade da luz utilizava a rotação de uma roda dentada. Um feixe de luz passava através de um dente na borda externa da roda, conforme mostra a Fig. 11-28, atingindo um espelho distante, que o refletia de volta de forma a passar exatamente pelo próximo dente. Essa roda tem 5,0 cm de raio e possui 500 dentes em sua borda. Medidas realizadas com o espelho, colocado a uma distância $l = 500$ m da roda, indicaram o valor de $3,0 \times 10^8$ km/s para a velocidade da luz. (a) Qual a velocidade angular (constante) da roda? (b) Qual a velocidade linear de um ponto em sua borda?

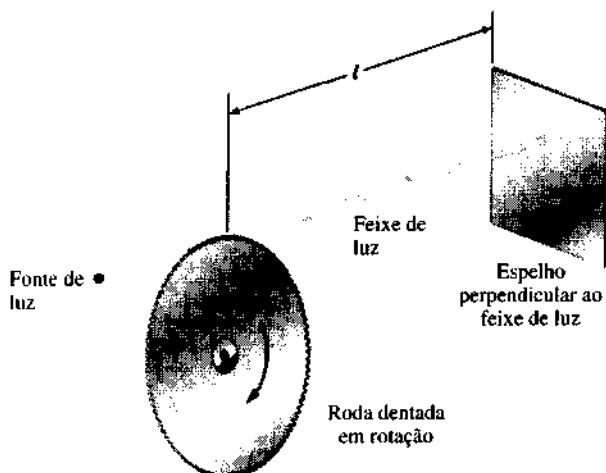


Fig. 11-28 Problema 39.

40P. Um carro parte do repouso e percorre uma trajetória circular de 30,0 m de raio. Sua velocidade aumenta na razão constante de 0,500 m/s². (a) Qual o módulo da sua aceleração linear *resultante*, depois de 15,0 s? (b) Que ângulo o vetor aceleração resultante faz com o vetor velocidade do carro nesse instante?

41P. A polia *A* de raio $r_A = 10$ cm está acoplada à *C* de raio $r_C = 25$ cm pela correia *B*, conforme mostra a Fig. 11-29. A polia *A* parte do repouso e aumenta uniformemente sua velocidade angular à razão de 1,6 rad/s². Supondo que a correia não deslize, determine o tempo necessário para a polia *C* alcançar a velocidade de rotação de 100 rev/min. (*Sugestão:* Se a correia não deslizar, a velocidade linear das bordas das duas polias deverá ser igual.)

42P. Quatro polias estão conectadas por duas correias conforme mostrado na Fig. 11-30. A polia *A* (15 cm de raio) é a polia motriz e gira a 10 rad/s. A *B* (10 cm de raio) está conectada à *A* pela correia 1. A *B'* (5 cm de raio) é concêntrica à *B* e está rigidamente ligada a ela. A polia *C*

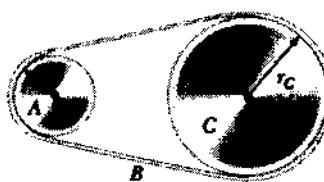


Fig. 11-29 Problema 41.

(25 cm de raio) está conectada à *B'* pela correia 2. Calcule (a) a velocidade linear de um ponto na correia 1, (b) a velocidade angular da polia *B*, (c) a velocidade angular da polia *B'*, (d) a velocidade linear de um ponto na correia 2 e (e) a velocidade angular da polia *C*. (Veja a sugestão do problema anterior.)

43P. O prato de um toca-discos gira numa rotação de 33 1/3 rev/min. Um pequeno objeto está sobre o prato a 6,0 cm do eixo de rotação. (a) Calcule a aceleração do objeto, supondo que ele não deslize. (b) Qual o coeficiente de atrito estático mínimo entre o objeto e o prato? (c) Suponha que o prato partiu do repouso e foi submetido a uma aceleração angular constante durante 0,25 s até alcançar sua velocidade angular. Calcule o coeficiente de atrito estático mínimo necessário para o objeto não deslizar durante o intervalo de aceleração.

44P. Um CD tem um raio interno de 2,50 cm e um raio externo de 5,80 cm em relação à superfície gravada. Ao tocar, o disco é varrido a uma velocidade linear constante de 130 cm/s, partindo de dentro para fora da superfície gravada. Qual a velocidade angular da varredura (a) no raio interno e (b) no raio externo? (c) A aceleração angular é constante? (d) A espiral de varredura tem um passo de 1,60 μm; qual a sua extensão total? (e) Qual o tempo de reprodução da gravação?

Seção 11-6 Energia Cinética de Rotação

45E. Calcule o momento de inércia de uma roda que tem 24.400 J de energia cinética ao girar a 602 rev/min.

46P. A molécula de oxigênio, O_2 , tem massa total de $5,30 \times 10^{-26}$ kg e um momento de inércia de $1,94 \times 10^{-46}$ kg·m², em relação ao eixo que atravessa perpendicularmente a linha de junção dos dois átomos. Suponha que essa molécula tenha em um gás à velocidade de 500 m/s e que sua energia cinética de rotação seja dois terços da energia cinética de translação. Determine sua velocidade angular.

Seção 11-7 Cálculo do Momento de Inércia

47E. Calcule as energias cinéticas de dois cilindros sólidos uniformes, que giram individualmente em torno de seu eixo central com a mesma velocidade angular de 235 rad/s. Ambos têm 1,25 kg de massa, mas o raio do primeiro é de 0,25 m e o do segundo, 0,75 m.

48E. Uma molécula tem um momento de inércia de $14.000 \mu\text{-pm}^2$ e está girando com uma velocidade angular de $4,3 \times 10^{12}$ rad/s. (a) Expresso o

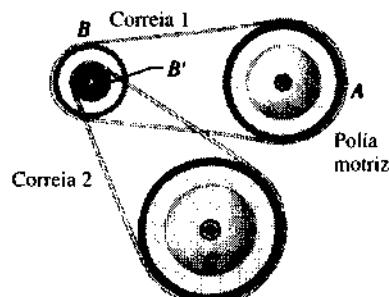


Fig. 11-30 Problema 42.

momento de inércia em $\text{kg}\cdot\text{m}^2$. (b) Calcule a energia cinética rotacional em elérons-volt.

49E. As massas e as coordenadas de quatro partículas são as seguintes: 50 g, $x = 2,0 \text{ cm}$, $y = 2,0 \text{ cm}$; 25 g, $x = 0$, $y = 4,0 \text{ cm}$; 25 g, $x = -3,0 \text{ cm}$, $y = -3,0 \text{ cm}$; 30 g, $x = -2,0 \text{ cm}$, $y = 4,0 \text{ cm}$. Qual o momento de inércia do conjunto em relação (a) ao eixo x , (b) ao eixo y e (c) ao eixo z ? (d) Se as respostas para (a) e (b) forem, respectivamente, A e B , então qual a resposta para (c) em função de A e B ?

50E. Um satélite de comunicações é um cilindro sólido de 1.210 kg de massa, 1,21 m de diâmetro e 1,75 m de comprimento. Antes de ser lançado do compartimento de carga de um ônibus espacial, é colocado em rotação a uma velocidade de 1,52 rev/s em torno de seu eixo (veja Fig. 11-31). Calcule (a) o momento de inércia em torno do eixo de rotação e (b) a energia cinética rotacional do satélite.

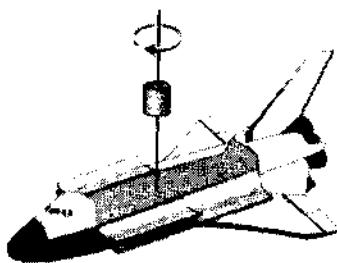


Fig. 11-31 Exercício 50.

51E. Duas partículas, de massa m cada uma, estão ligadas entre si e a um eixo de rotação em O por dois bastões delgados de comprimento l e massa M cada um, conforme mostrado na Fig. 11-32. O conjunto gira em torno do eixo de rotação com velocidade angular ω . Determine, algebraicamente, as expressões (a) para o momento de inércia do conjunto em relação a O e (b) para a energia cinética de rotação em relação a O .

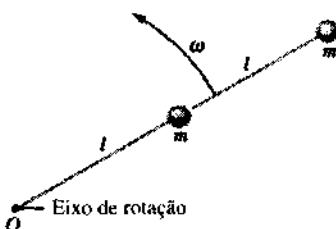


Fig. 11-32 Exercício 51.

52E. Cada uma das três lâminas da hélice de um helicóptero tem 5,20 m de comprimento e 240 kg de massa, conforme mostrado na Fig. 11-33. O rotor gira a 350 rev/min. (a) Qual o momento de inércia do conjunto em relação ao eixo de rotação? (Cada lâmina pode ser considerada um bastão delgado; por quê?) (b) Qual a energia cinética de rotação?

53E. Suponha que a Terra seja uma esfera de densidade uniforme. Calcule (a) seu momento de inércia e (b) sua energia cinética rotacional. (c) Suponha que essa energia pudesse ser utilizada por nós. Por quanto tempo a Terra poderia fornecer a potência de 1,0 kW a cada um dos $4,2 \times 10^9$ habitantes do planeta? (Calcule todas as quantidades em relação ao eixo da Terra.)

54E. Calcule o momento de inércia de uma régua de 0,56 kg de massa em relação a um eixo que passa pela marca de 20 cm, perpendicular a ela. (Considere a régua como um bastão delgado.)

55P. Mostre que o menor momento de inércia de um determinado corpo rígido é aguda em relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa.

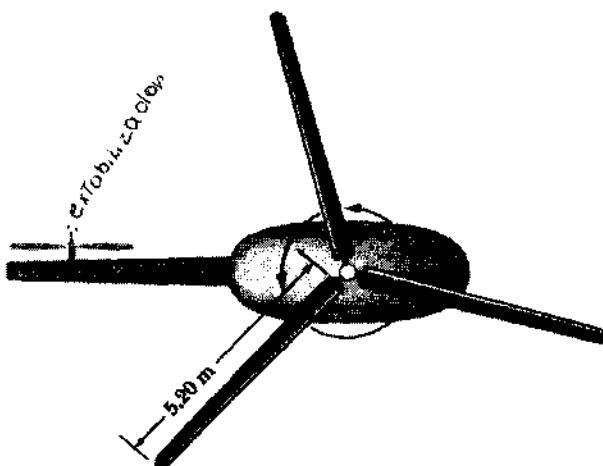


Fig. 11-33 Exercício 52.

56P. Deduza a expressão para o momento de inércia de um aro de massa M e raio R em relação a seu eixo central; veja a Tabela 11-2(a).

57P. Um bloco sólido, uniforme, de massa M e dimensões a , b e c é mostrado na Fig. 11-34. Calcule seu momento de inércia em relação a um eixo que passa por uma das arestas e é ortogonal ao plano da face maior.

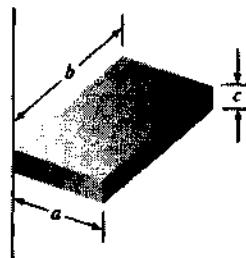


Fig. 11-34 Problema 57.

58P. (a) Mostre que o momento de inércia de um cilindro sólido, de massa M e raio R , em relação a seu eixo central é igual ao momento de inércia de um aro fino de massa M e raio $R/\sqrt{2}$ em relação a seu eixo central. (b) Mostre que o momento de inércia I de um corpo qualquer de massa M em relação a qualquer eixo é igual ao momento de inércia de um aro equivalente em relação a esse eixo, se o aro tiver a mesma massa M e raio k dado por

$$K = \frac{\sqrt{I}}{M}$$

O raio k do aro equivalente é chamado de *raio de giro* do corpo.

59P. Na Europa, alguns veículos de transporte se movimentam pelo uso da energia armazenada numa espécie de turbina. Os veículos utilizam um motor elétrico que carrega a turbina, fazendo-a girar a uma velocidade máxima de $200\pi \text{ rad/s}$. A turbina é um cilindro sólido, homogêneo, de 500 kg de massa e 1,0 m de raio. (a) Qual a energia cinética da turbina depois de carregada? (b) Se a potência média necessária para o veículo funcionar for 8,0 kW, quantos minutos ele conseguirá operar, antes de necessitar uma nova carga?

Seção 11-8 Torque

60E. Uma pequena bola de 0,75 kg está presa a uma das extremidades de uma haste de 1,25 m de extensão e de massa desprezível, a outra extremidade está presa a um eixo, formando um pêndulo. Quando

o pêndulo é desviado 30° da vertical, qual o módulo do torque sobre o eixo?

61E. Um ciclista de 70 kg de massa coloca todo o seu peso em cada um dos pedais, para movê-los para baixo, quando está subindo uma ladeira. Considerando que a roda da corrente, onde o pedal está preso, tem 0,40 m de diâmetro, determine o módulo do torque máximo exercido nesse processo.

62E. O comprimento da haste do pedal de uma bicicleta é 0,512 m, e o pé aplica uma força, para baixo, de 111 N. Qual o módulo do torque sobre o eixo do pedal, quando a haste faz um ângulo de (a) 30° , (b) 90° e (c) 180° com a vertical?

63P. Conforme mostra a Fig. 11-35, duas forças são aplicadas a um corpo que está fixado a um eixo no ponto O . (a) Deduza uma expressão para o módulo do torque resultante sobre o corpo em relação a esse eixo. (b) Sendo $r_1 = 1,30$ m, $r_2 = 2,15$ m, $F_1 = 4,20$ N, $F_2 = 4,90$ N, $\theta_1 = 75,0^\circ$ e $\theta_2 = 60,0^\circ$, qual o torque resultante em relação ao eixo?



Fig. 11-35 Problema 63.

64P. Na Fig. 11-36, o corpo está fixado a um eixo no ponto O . Três forças são aplicadas nas direções mostradas na figura: no ponto A , a 8,0 m de O , $F_A = 10$ N; no ponto B , a 4,0 m de O , $F_B = 16$ N; no ponto C , a 3,0 m de O , $F_C = 19$ N. Qual o torque resultante em relação a O ?

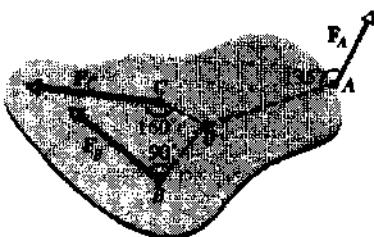


Fig. 11-36 Problema 64.

Seção 11-9 A Segunda Lei de Newton para a Rotação

65E. Uma determinada roda adquire uma aceleração angular de $25,0 \text{ rad/s}^2$, quando um torque de 32,0 N é aplicado sobre ela. Qual o momento de inércia da roda?

66E. Um atleta, ao saltar de um trampolim, variou sua velocidade angular de zero a $6,20 \text{ rad/s}$ em 220 ms. Seu momento de inércia é de $12,0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. (a) Durante o salto, qual foi a sua aceleração angular? (b) Qual o torque externo sobre ele durante o salto?

67E. Um cilindro, que tem uma massa de 2,0 kg, pode girar em torno de um eixo que passa pelo seu centro O . Nele são aplicadas quatro forças, conforme a Fig. 11-37: $F_1 = 6,0 \text{ N}$, $F_2 = 4,0 \text{ N}$, $F_3 = 2,0 \text{ N}$ e $F_4 = 5,0 \text{ N}$. Sabendo que $R_1 = 5,0 \text{ cm}$ e $R_2 = 12 \text{ cm}$, determine o módulo e o sentido da aceleração angular do cilindro. Suponha que durante a rotação as forças mantenham as mesmas orientações em relação ao cilindro.

68E. Um pequeno objeto de 1,30 kg de massa está montado em uma das extremidades de uma haste de 0,780 m e de massa desprezível. O sistema gira a 5.010 rev/min , descrevendo um círculo horizontal em relação à outra extremidade da haste. (a) Calcule o momento de inércia do sistema relativo ao eixo de rotação. (b) A resistência do ar exerce

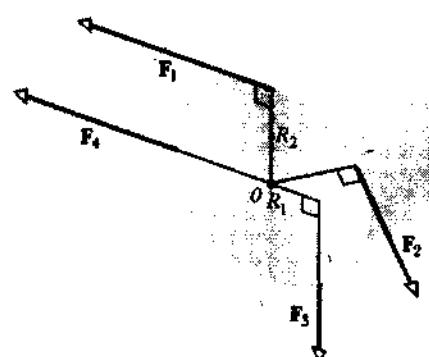


Fig. 11-37 Exercício 67.

uma força de $2,30 \times 10^{-2} \text{ N}$ sobre o objeto, em oposição ao movimento. Que torque deve ser aplicado ao sistema para que seja mantido em rotação com velocidade constante?

69E. Uma casca esférica fina tem um raio de 1,90 m. Um torque de 960 N·m aplicado a ela implica uma aceleração angular de $6,20 \text{ rad/s}^2$ em torno de um eixo que passa pelo seu centro. (a) Qual o momento de inércia da casca em relação a esse eixo de rotação? (b) Calcule a massa da casca.

70P. Uma força é aplicada tangencialmente à borda de uma polia que tem 10 cm de raio e momento de inércia de $1,0 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ em relação a seu eixo. A força tem módulo variável com o tempo, segundo a relação $F = 0,50t + 0,30t^2$, com F em newtons e t em segundos. A polia está inicialmente em repouso. Em $t = 3,0 \text{ s}$, quais são (a) sua aceleração angular e (b) sua velocidade angular?

71P. A Fig. 11-38 mostra uma porta blindada, maciça, para testes de nêutrons no Laboratório Lawrence Livermore; esta é a porta articulada mais pesada do mundo. Ela tem massa de 44.000 kg, um momento de inércia de $8,7 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, em torno do eixo das dobradiças, e 2,4 m de largura. Desprezando o atrito, que força, mantida constante, deve ser aplicada perpendicularmente ao plano da porta na sua lateral externa para movê-la de 90° , a partir do repouso, em 30 s? Admita que não haja atrito também nas dobradiças.

72P. Duas esferas sólidas, uniformes, têm a mesma massa de 1,65 kg, mas uma delas tem 0,226 m de raio, enquanto a outra tem 0,854 m. (a) Calcule, para cada esfera, o torque necessário para levá-la a uma velo-



Fig. 11-38 Problema 71.

cidade angular de 317 rad/s , em $15,5 \text{ s}$, a partir do repouso. Cada esfera gira em torno de um eixo que passa pelo seu centro. (b) Que força, aplicada tangencialmente e individualmente na altura do equador das esferas, produzirá o torque necessário?

73P. Numa máquina de Atwood (veja Fig. 5-28), um bloco tem massa de 500 g e o outro de 460 g . A polia, que está montada sobre um suporte horizontal sem atrito, tem um raio de $5,00 \text{ cm}$. Quando ela é solta, o bloco mais pesado cai $75,0 \text{ cm}$ em $5,00 \text{ s}$ (a corda não desliza na polia). (a) Qual a aceleração de cada bloco? Qual a tensão na corda que suporta (b) o bloco mais pesado e (c) o bloco mais leve? (d) Qual a aceleração angular da polia? (e) Qual o seu momento de inércia?

74P. A Fig. 11-39 mostra dois blocos de massa m suspensos nas extremidades de uma haste rígida, sem peso, de comprimento $l_1 + l_2$, com $l_1 = 20 \text{ cm}$ e $l_2 = 80 \text{ cm}$. A haste é mantida na posição horizontal mostrada na figura e, então, solta. Calcule as acelerações dos dois blocos quando eles começam a se mover.

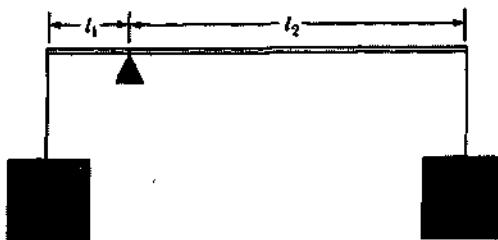


Fig. 11-39 Problema 74.

75P. Dois blocos idênticos, de massa M cada um, estão ligados por uma corda de massa desprezível, que passa por uma polia de raio R e de momento de inércia I (veja Fig. 11-40). A corda não desliza sobre a polia; desconhece-se existir ou não atrito entre o bloco e a mesa; não há atrito no eixo da polia. Quando esse sistema é liberado, a polia gira de um ângulo θ , num tempo t , e a aceleração dos blocos é constante. (a) Qual a aceleração angular da polia? (b) Qual a aceleração dos dois blocos? (c) Quais as tensões na parte superior e inferior da corda? Todas essas respostas devem ser expressas em função de M , I , R , θ , g e t .

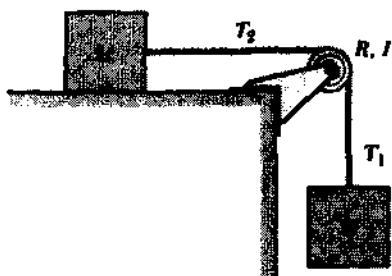


Fig. 11-40 Problema 75.

76P. A duração de um dia cresce à razão de 1 ms/século . Isso é devido ao atrito gerado pelo movimento das marés, por influência do Sol e da Lua. (a) Com que taxa a Terra perde energia cinética rotacional? (b) Qual a sua aceleração angular? (c) Qual a força tangencial aplicada pelos oceanos próximo à costa (em média) nas latitudes 60° N e 60° S ?

77P. Uma chaminé alta, de forma cilíndrica, cai se houver uma ruptura na sua base. Tratando a chaminé como um bastão fino, de altura h , expresse (a) a componente radial da aceleração linear do topo da chaminé, em função do ângulo θ que ela faz com a vertical, e (b) a componente tangencial dessa mesma aceleração. (c) Em que ângulo θ a aceleração linear é igual a g ?

Seção 11-10 Trabalho, Potência e Teorema do Trabalho-Energia Cinética

78E. Considere a Fig. 11-19. (a) Se $R = 12 \text{ cm}$, $M = 400 \text{ g}$ e $m = 50 \text{ g}$, calcule a velocidade escalar de m após descer 50 cm a partir do repouso. Resolva o problema usando o princípio de conservação de energia. (b) Refaça o item (a) com $R = 5,0 \text{ cm}$.

79E. Um motor de automóvel desenvolve 100 hp ($= 74,6 \text{ kW}$), quando gira a uma velocidade de 1.800 rev/min . Qual o seu torque?

80E. Um aro fino de $32,0 \text{ kg}$ tem $1,20 \text{ m}$ de raio e está girando a 280 rev/min . Ele é parado em $15,0 \text{ s}$. (a) Qual o trabalho realizado para pará-lo? (b) Qual a potência necessária?

81E. Um bastão fino de comprimento l e massa m está suspenso livremente por uma de suas extremidades. É puxado lateralmente para oscilar como um pêndulo, passando pela posição mais baixa com uma velocidade angular ω . (a) Calcule sua energia cinética ao passar por essa posição. (b) A partir deste ponto, qual a altura alcançada pelo seu centro de massa? Despreze o atrito e a resistência do ar.

82P. Uma régua, apoiada no chão verticalmente por uma das extremidades, cai. Determine a velocidade da outra extremidade quando bate no chão, supondo que o extremo apoiado não deslize. (Sugestão: Considere a régua como um bastão fino e use o princípio de conservação de energia.)

83P. Um corpo rígido é composto por três hastes finas, idênticas, de igual comprimento l , soldadas em forma de H (veja Fig. 11-41). O corpo gira livremente em volta de um eixo horizontal que passa ao longo de uma das pernas do H. Quando o plano de H é horizontal, o corpo cai, a partir do repouso. Qual a velocidade angular do corpo quando o plano de H passa pela posição vertical?

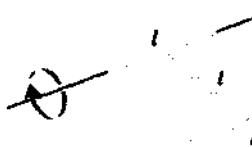


Fig. 11-41 Problema 83.

84P. Calcule (a) o torque, (b) a energia e (c) a potência média necessárias para acelerar a Terra, do repouso até a sua velocidade angular atual em volta do seu eixo, em um dia.

85P. Uma lâmina uniforme do rotor de um helicóptero (veja Fig. 11-33) tem $7,80 \text{ m}$ de comprimento e 110 kg de massa. (a) Qual a força exercida sobre o parafuso que prende a lâmina ao eixo do rotor, quando este gira a 320 rev/min ? (Sugestão: Para esse cálculo, podemos considerar que toda a massa da lâmina está concentrada no seu centro de massa. Por quê?) (b) Calcule o torque que deve ser aplicado ao rotor para que ele alcance a velocidade angular mencionada em (a) em $6,7 \text{ s}$, a partir do repouso. Despreze a resistência do ar. (Para esse cálculo não podemos considerar a massa da lâmina concentrada no centro de massa. Por quê? Suponha uma distribuição de massa uniforme, como em um bastão fino.) (c) Para a lâmina alcançar a velocidade de 320 rev/min , qual o trabalho realizado pelo torque?

86P. Uma casca esférica uniforme, de massa M e raio R , gira sobre um eixo vertical, sem atrito (veja Fig. 11-42). Uma corda, de massa desprezível, passa em volta do equador da esfera e prende um pequeno corpo de massa m , que pode cair livremente sob a ação da gravidade. A corda prende o corpo através de uma polia de momento de inércia I e raio r . O atrito da polia em relação ao eixo é nulo e a corda não desliza na polia. Qual a velocidade do corpo, depois de cair de uma altura h , partindo do repouso? Use o teorema do trabalho-energia.

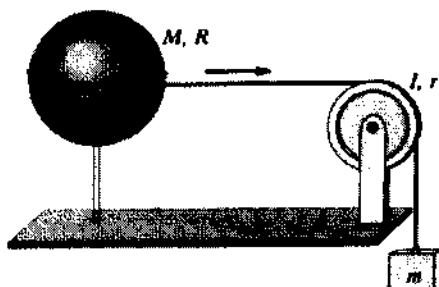


Fig. 11-42 Problema 86.

87P. Duas pequenas bolas de 1,06 kg de massa estão presas às extremidades de um bastão fino de aço, de 1,20 m de comprimento e 6,40 kg de massa. O bastão é mantido em rotação num plano horizontal, em volta de um eixo vertical que passa pelo seu ponto médio. Num determinado

instante ele está girando com uma velocidade angular de 39,0 rev/s. Após 32,0 s, pára devido ao atrito. Calcule, supondo constante o torque devido ao atrito, (a) a aceleração angular, (b) o torque exercido pelo atrito, (c) o trabalho resultante realizado pelo atrito e (d) o número de revoluções durante os 32,0 s. (e) Agora, suponha que o torque relativo ao atrito não seja constante. Quais das grandezas, em (a), (b), (c) ou (d), se for o caso, podem ser calculadas sem informações adicionais? Se existir, qual o seu valor?

88P*. O volante-motor de um carro é um dispositivo compensador de energia, que está acoplado a um eixo de transmissão e gira a 240 rev/s quando o carro está a 80 km/h. A massa total do carro é de 800 kg; o volante-motor, um disco uniforme de 1,1 m de diâmetro, pesa 200 N. O carro, partindo do repouso, desce um plano de 1.500 m de extensão e inclinação de 5°, engrenado e com o motor desligado. Sem considerar o atrito e o momento de inércia das rodas, determine (a) a velocidade do carro no final da inclinação, (b) a aceleração angular do volante-motor no final da inclinação e (c) a taxa com que a energia é armazenada no volante-motor em rotação, no final do plano inclinado.

PROBLEMAS ADICIONAIS

89. Quatro partículas idênticas, cada uma de 0,50 kg de massa, estão colocadas nos vértices de um quadrado de 2,0 m × 2,0 m, formado por quatro hastes de massa desprezível. Qual o momento de inércia desse corpo rígido em relação a um eixo (a) coplanar ao quadrado passando pelos pontos médios dos lados opostos, (b) ortogonal ao quadrado que passa pelo ponto médio de um dos lados, (c) coplanar ao quadrado passando por duas partículas diagonalmente opostas?

90. Um objeto que gira em torno de um eixo fixo tem uma linha de referência definida por $\theta = 0,40e^t$, onde θ está em radianos e t em segundos. Considere um ponto sobre o objeto a 4,0 cm do eixo de rotação. No instante $t = 0$, qual o módulo (a) da componente tangencial e (b) da componente radial da aceleração do ponto?

91. Uma polia de 0,20 m de raio está montada sobre um eixo horizontal sem atrito. Uma corda, de massa desprezível, está enrolada em volta da polia e presa a um corpo de 2,0 kg, que desliza sem atrito sobre uma superfície inclinada de 20° com a horizontal, conforme mostrado na Fig. 11-43. O corpo desce com uma aceleração de 2,0 m/s². Qual o momento de inércia da polia em torno do eixo de rotação?

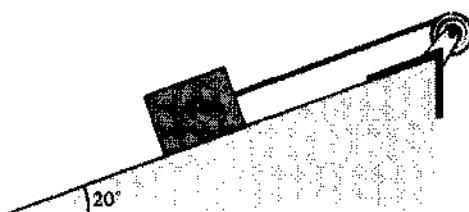


Fig. 11-43 Problema 91.

92. O prato de um toca-discos está a uma velocidade angular de 8,0 rad/s quando é desligado. Três segundos depois, a velocidade do toca-discos é 2,6 rad/s. De quantos radianos o toca-discos gira, desde o instante em que foi desligado até parar? (Considere a aceleração angular constante.)

93. Dois discos delgados, cada um de 4,0 kg de massa e raio de 0,40 m, são ligados conforme mostrado na Fig. 11-44 para formar um corpo rígido. Qual o momento de inércia desse corpo em volta de um eixo de um deles?



Fig. 11-44 Problema 93.

94. O corpo rígido apresentado na Fig. 11-45 é formado por três partículas interligadas por três hastes de massa desprezível. O corpo gira em torno de um eixo que passa pelo ponto P e é ortogonal ao seu plano. Sendo $M = 0,40$ kg, $a = 30$ cm e $b = 50$ cm, qual o trabalho necessário para levar o corpo do repouso a uma velocidade angular de 5,0 rad/s?

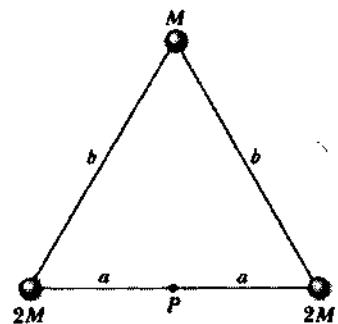


Fig. 11-45 Problema 94.

95. Um bastão uniforme tem 1,5 kg de massa e 2,0 m de comprimento (veja Fig. 11-46). O bastão pode girar, sem atrito, em torno de um pino horizontal preso em uma de suas extremidades. Ele está em repouso, fazendo um ângulo de 40° com a horizontal, quando inicia o movimento. (a) Qual a aceleração angular do bastão nesse instante? (O seu momento de inércia em relação ao pino é de 2,0 kg·m².) (b) Use o princípio de conservação da energia para determinar a velocidade angular do bastão quando ele passa pela posição horizontal.

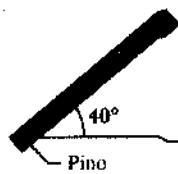
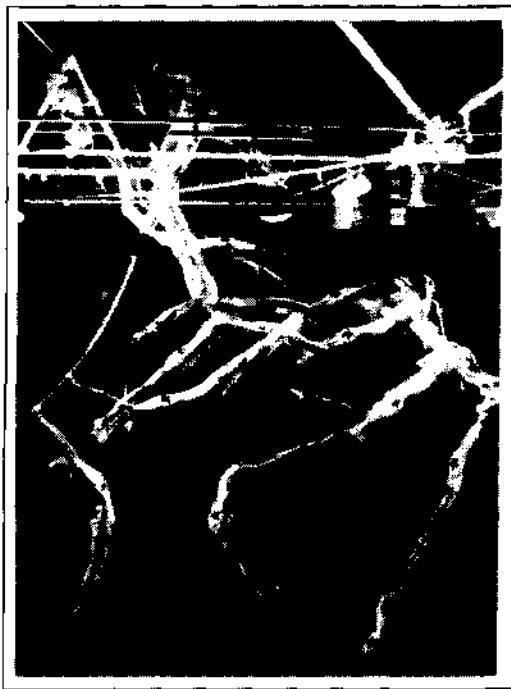


Fig. 11-46 Problema 95.

96. Um cilindro uniforme de 10 cm de raio e 20 kg de massa está montado de forma a girar livremente em torno de um eixo horizontal paralelo ao seu eixo longitudinal e distando 5,0 cm deste. (a) Qual o momento de inércia do cilindro em torno do eixo de rotação? (b) Se o cilindro partir do repouso, com seu eixo alinhado na mesma altura do eixo de rotação, qual a sua velocidade angular ao passar pelo ponto mais baixo da trajetória? (Sugestão: Use o princípio de conservação da energia.)

ROLAMENTO, TORQUE E MOMENTO ANGULAR



Em 1897, um trapezista europeu executou o primeiro salto mortal triplo, durante o voo do trapézio até as mãos de seu parceiro.

Durante os 85 anos seguintes, vários trapezistas tentaram realizar um salto mortal quadruplo, mas só em 1982 ele foi executado em público: Miguel Vazquez, do Circo Ringling Bros. e Barnum & Bailey girou o seu corpo em quatro círculos completos, em pleno ar, antes de ser agarrado por seu irmão Juan. Os dois ficaram atônitos com seu feito. Por que foi tão difícil conseguir realizá-lo e qual foi o princípio da Física que tornou possível (finalmente) executar aquele salto?

12-1 Rolamento

Quando uma bicicleta se move em linha reta, o centro de cada uma das rodas se desloca para a frente executando um movimento de translação pura. Entretanto, um ponto qualquer localizado no aro da roda segue uma trajetória mais complexa, como mostra a Fig. 12-1. Nesta seção, analisaremos o rolamento de uma roda considerando-o, primeiramente, como a combinação de uma translação pura com uma rotação pura e, em seguida, apenas como rotação.

O Rolamento Descrito como uma Combinação de Rotação e Translação

Imagine que você esteja observando a roda de uma bicicleta que passa a uma velocidade constante, rolando suavemente, sem deslizar. Como mostra a Fig. 12-2, o centro de massa O da roda move-se para a frente a uma velocidade constante v_{cm} .

O ponto P , onde a roda e o chão estão em contato, também se move para a frente com velocidade v_{cm} , de modo que ele está sempre situado diretamente abaixo do ponto O .

Durante um intervalo de tempo t , você vê os pontos O e P moverem-se para a frente, percorrendo uma distância s . O ciclista vê a roda girar um ângulo θ em torno do seu centro, enquanto o ponto da roda que tocava o chão no início de t descreve um arco de comprimento s . A Eq. 11-15 relaciona o comprimento do arco s com o ângulo de rotação θ :

$$s = R\theta \quad (12-1)$$

onde R é o raio da roda. A velocidade linear v_{cm} do centro da roda (que é o centro de massa desta roda uniforme) é ds/dt , e a velocidade angular ω da roda em torno do seu centro é $d\theta/dt$. Assim, derivando a Eq. 12-1 em relação ao tempo, obtemos

$$v_{cm} = \omega R \quad (\text{rolamento}) \quad (12-2)$$

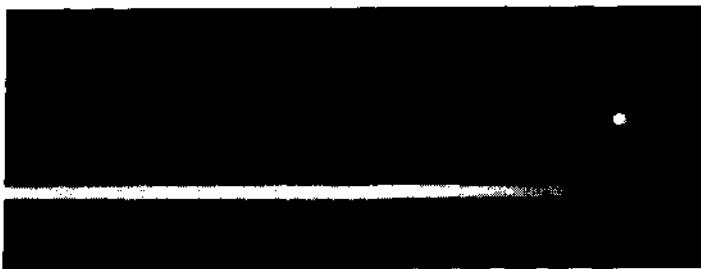


Fig. 12-1 Fotografia de um disco durante o roolamento, feita com múltiplas exposições. Pequenas lâmpadas foram presas ao disco, uma no centro e outra na borda. Esta última traça uma curva denominada ciclóide.

(Observe que a Eq. 12-2 vale apenas se a roda girar suavemente, isto é, sem deslizar sobre o solo.)

A Fig. 12-3 mostra que o movimento de roolamento de uma roda é uma combinação de dois movimentos: um puramente translacional e outro puramente rotacional. A Fig. 12-3a mostra o movimento puramente rotacional (como se o eixo de rotação que passa pelo centro estivesse estacionário): todos os pontos da roda giraram em torno do centro com velocidade angular ω . (Este é o tipo de movimento que estudamos no Cap. 11.) Todos os pontos situados na borda externa da roda têm velocidade linear v_{cm} , dada pela Eq. 12-2. A Fig. 12-3b mostra o movimento puramente translacional (como se a roda não estivesse rolando): cada ponto da roda se move para a direita com velocidade v_{cm} .

A combinação das Figs. 12-3a e 12-3b dá origem à Fig. 12-3c, que mostra o movimento de roolamento realmente executado pela roda. Observe que, nesta combinação de movimentos, a parte inferior da roda (no ponto P) está estacionária, enquanto a parte superior (no ponto T) se move a uma velocidade igual a $2v_{cm}$, mais rapidamente que qualquer outra parte da roda. Esses resultados são mostrados na Fig. 12-4, que é uma fotografia de uma roda de bicicleta se movendo. Os raios próximos ao topo da roda aparecem borradinhos, enquanto os da parte inferior estão bem mais nítidos, o que mostra que ela se move mais rapidamente na parte superior que na inferior.

O movimento de qualquer corpo circular rolando suavemente sobre uma superfície pode ser decomposto em um

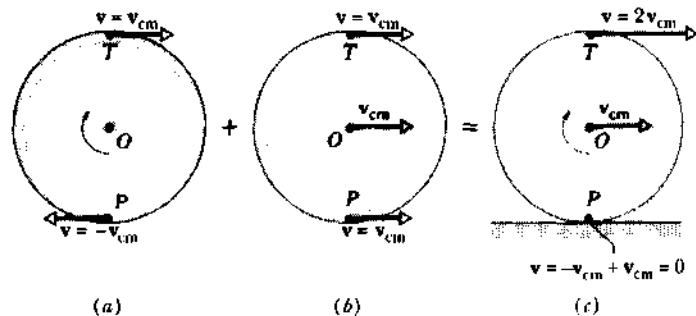


Fig. 12-3 O roolamento de uma roda, visto como uma combinação de um movimento puramente rotacional com outro puramente translacional. (a) O movimento puramente rotacional: todos os pontos da roda movem-se com a mesma velocidade angular ω . Todos os pontos que estão sobre a borda externa da roda movem-se com a mesma velocidade linear $v = v_{cm}$. As velocidades lineares v de dois destes pontos, no topo (T) e na base (P) da roda, são mostradas na figura. (b) O movimento puramente translacional: todos os pontos da roda movem-se para a direita com a mesma velocidade linear v_{cm} , idêntica à do centro da roda. (c) O movimento de roolamento da roda é a combinação de (a) e (b).

movimento puramente translacional e outro puramente rotacional, como nas Figs. 12-3a e 12-3b.

O Rolamento Visto como Rotação Pura

A Fig. 12-5 sugere um outro modo de analisar o roolamento de uma roda considerando-o, agora, como sendo uma rotação pura em torno de um eixo que passa pelo ponto em que ela toca o solo, durante todo o tempo em que se move, ou seja, um eixo que passa pelo ponto P na Fig. 12-3c e que é perpendicular ao plano da figura. Os vetores mostrados na Fig. 12-5 representam as velocidades instantâneas de vários pontos da roda durante o roolamento.

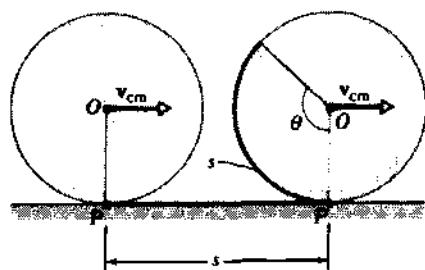


Fig. 12-2 O centro de massa O de uma roda que está rolando percorre uma distância s com velocidade v_{cm} , enquanto que a roda gira um ângulo θ . O ponto de contato P , entre a roda e a superfície sobre a qual está rolando, também percorre uma distância s .

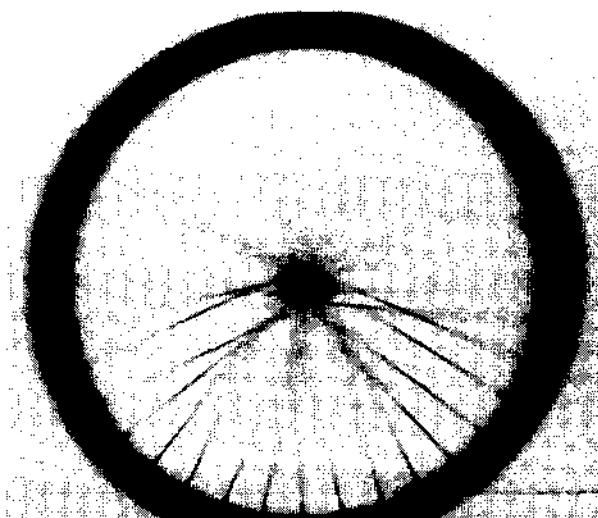


Fig. 12-4 Fotografia de uma roda de bicicleta ao se mover. Os raios próximos à parte superior da roda aparecem mais borradinhos que os que estão próximos à base, porque se movem mais depressa, como mostra a Fig. 12-3c.

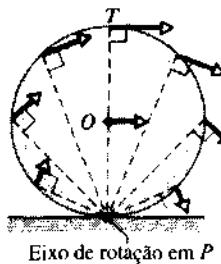


Fig. 12-5 O rolamento pode ser visto como uma rotação pura, com velocidade angular ω , em torno de um eixo que passa por P . Os vetores mostram as velocidades lineares instantâneas de alguns pontos da roda. Você pode obter esses vetores combinando os movimentos rotacional e translacional, como na Fig. 12-3.

Pergunta. Para um observador estacionário, qual é o valor da velocidade angular da roda de bicicleta, em torno desse novo eixo?

Resposta. A mesma velocidade angular ω que o ciclista atribui à roda, ao observá-la em rotação pura em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa.

Vamos usar esta resposta para calcular a velocidade linear do topo da roda, do ponto de vista de um observador estacionário. Sendo R o raio da roda, o topo está situado a uma distância $2R$ do eixo que passa por P na Fig. 12-5, de modo que a sua velocidade linear deve ser (usando a Eq. 12-2)

$$v_{\text{topo}} = (\omega)(2R) = 2(\omega R) = 2v_{\text{cm}},$$

o que concorda inteiramente com a Fig. 12-3c. Você pode fazer uma verificação semelhante para as velocidades lineares dos pontos O e P na Fig. 12-3c.

A Energia Cinética

Vamos agora calcular a energia cinética da roda, medida pelo observador estacionário. Se considerarmos que o rolamento é uma rotação pura em torno de um eixo que passa por P na Fig. 12-5, teremos

$$K = \frac{1}{2}I_p\omega^2 \quad (12-3)$$

onde ω é a velocidade angular da roda e I_p é o seu momento de inércia em torno do eixo que passa por P . Usando o teorema dos eixos paralelos (Eq. 11-25), temos

$$I_p = I_{\text{cm}} + MR^2, \quad (12-4)$$

onde M é a massa da roda e I_{cm} é o seu momento de inércia em torno de um eixo que passa através do centro de massa. Substituindo a Eq. 12-4 na Eq. 12-3, obtemos

$$K = \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

e, usando a relação $v_{\text{cm}} = \omega R$ (Eq. 12-2), temos então

$$K = \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 \quad (12-5)$$

Podemos interpretar o primeiro termo ($1/2(I_{\text{cm}}\omega^2)$) como sendo a energia cinética associada à rotação da roda em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa (como na Fig. 12-3a), enquanto o segundo termo ($1/2(Mv_{\text{cm}}^2)$) pode ser interpretado como sendo a energia cinética associada ao movimento de translação da roda (conforme mostra a Fig. 12-3b).

O Papel do Atrito

Se a roda girar com velocidade constante, como mostra a Fig. 12-2, não haverá tendência de ocorrer deslizamento no ponto de contato P e, deste modo, nenhuma força de atrito atuará sobre a roda naquele ponto. No entanto, se uma força for aplicada sobre a roda, alterando a velocidade v_{cm} do seu centro de massa ou a velocidade angular ω em torno do centro, então haverá a tendência de ocorrer deslizamento da roda em P e uma força de atrito agirá sobre a roda, no ponto de contato, opondo-se àquela tendência. Até que a roda comece realmente a deslizar, atuará sobre ela uma força de atrito estático f_s . Se a roda começar a deslizar, passará a atuar sobre ela uma força de atrito cinético f_k .

Na Fig. 12-6a, uma roda desce um plano inclinado. O peso Mg atua no seu centro de massa. Como a força Mg não possui braço de alavanca em relação ao centro da roda, ela não pode exercer torque em torno do centro e, deste modo, não pode fazer com que a roda inicie uma rotação! Entretanto, como Mg tende a fazer a roda deslizar sobre o plano inclinado, uma força de atrito atua sobre a roda em P , a parte que está em contato com o plano, opondo-se ao deslizamento. Esta força, que aponta para cima ao longo do plano inclinado, possui um braço de alavanca relativamente ao centro, que é o raio da roda. Deste modo, esta força de atrito produz um torque em torno do centro e faz com que a roda entre em rotação.

Na Fig. 12-6b, faz-se com que uma roda gire cada vez mais rápido à medida que rola sobre uma superfície plana,

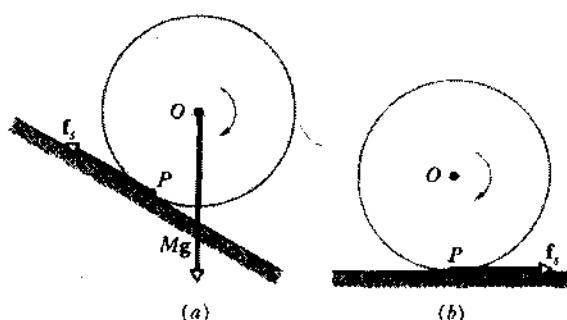


Fig. 12-6 (a) Uma roda desce girando em um plano inclinado sem deslizar. Uma força de atrito estático f_s atua sobre a roda em P , opondo-se à tendência da roda ao deslizamento, devido ao peso Mg . (b) Uma roda gira horizontalmente sem deslizar, enquanto sua velocidade angular aumenta. Uma força de atrito estático f_s atua sobre ela em P , opondo-se à tendência da roda ao deslizamento. Se em (a) ou (b) ela deslizar, a força de atrito será f_k , uma força de atrito cinético.

como ocorre com uma bicicleta ao ser acelerada. O acréscimo no valor de ω tende a fazer com que a parte inferior da roda deslize para a esquerda. Uma força de atrito, cujo sentido aponta para a direita, atua sobre a roda em P , opondo-se à tendência ao deslizamento. (Esta força de atrito é a força externa que atua sobre o sistema bicicleta-ciclista, fazendo-o acelerar.)

EXEMPLO 12-1 Um disco cilíndrico sólido e uniforme, de massa M de 1,4 kg e raio R de 8,5 cm, rola sobre uma mesa horizontal a uma velocidade v de 15 cm/s.

a. Qual é a velocidade instantânea da parte superior do disco?

Solução Quando se fala da velocidade de um objeto que rola, sempre nos referimos à velocidade do seu centro. Observando a Fig. 12-3c, vemos que a velocidade do topo do disco é exatamente duas vezes aquele valor, ou seja,

$$v_{\text{topo}} = 2v_{\text{cm}} = (2)(15 \text{ cm/s}) = 30 \text{ cm/s.} \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual é a velocidade angular ω do disco?

Solução Da Eq. 12-2, temos

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{v_{\text{cm}}}{R} = \frac{15 \text{ cm/s}}{8.5 \text{ cm}} = 1.8 \text{ rad/s} \\ &= 0.28 \text{ rev/s.} \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

Esse valor é o mesmo, tanto para um eixo de rotação passando por P , na Fig. 12-5, quanto para um eixo que passa pelo centro de massa.

c. Qual é a energia cinética K do disco?

Solução Fazendo $I_{\text{cm}} = (1/2)MR^2$ e usando a relação $v_{\text{cm}} = \omega R$ na Eq. 12-5, obtemos

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(v_{\text{cm}}/R\right)^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 = \frac{3}{4}Mv_{\text{cm}}^2 \\ &= \frac{3}{4}(1.4 \text{ kg})(0.15 \text{ m/s})^2 \\ &= 0.024 \text{ J} = 24 \text{ mJ.} \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

d. Qual é a fração da energia cinética que está associada ao movimento de translação e qual a que está relacionada com o movimento de rotação em torno de um eixo que passa pelo centro de massa?

Solução A energia cinética associada à translação é o segundo termo da Eq. 12-5, ou seja, $(1/2)Mv_{\text{cm}}^2$. A fração que procuramos é, então, usando a expressão obtida no item (c),

$$\text{frac} = \frac{\frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2}{\frac{3}{4}Mv_{\text{cm}}^2} = \frac{2}{3} \text{ ou } 67\%. \quad (\text{Resposta})$$

Os 33% restantes estão associados à rotação em torno de um eixo que passa pelo centro de massa.

A razão entre a energia translacional e a rotacional depende do momento de inércia do objeto. Como mostra a Tabela 12-1, o objeto cuja massa está mais distante do eixo central de rotação (e que, portanto, possui maior momento de inércia) — que é o aro — tem a maior parte de sua energia cinética envolvida na rotação. E aquele cuja massa esteja mais próxima do eixo central de rotação (e que, portanto, tenha o menor momento de inércia) — que é a esfera — é o que tem a menor fração de sua energia cinética envolvida na rotação.

Tabela 12-1

Distribuição Relativa das Energias Cinéticas Translacional e Rotacional para Corpos em Rolamento

Objeto	Momento de Inércia	Porcentagem de Energia Armazenada na	
	I_{cm}	Translação	Rotação
Aro	$1/2 MR^2$	50%	50%
Disco	$1/2 MR^2$	67%	33%
Esfera	$2/5 MR^2$	71%	29%
Genérico*	βMR^2	$100 \frac{1}{1+\beta}$	$100 \frac{\beta}{1+\beta}$

* β pode ser calculado, para qualquer objeto em rolamento, como I_{cm}/MR^2 .

As fórmulas apresentadas no final da Tabela 12-1 se aplicam ao objeto genérico em rolamento, que tem parâmetro de momento de inércia β . Este parâmetro vale 1 para o aro, $1/2$ para um disco e $2/5$ para uma esfera.

EXEMPLO 12-2 Uma bola de boliche, de raio $R = 11 \text{ cm}$ e massa M de 7,2 kg, desce rolando, a partir do repouso, uma rampa de comprimento L igual a 2,1 m. A rampa está inclinada de um ângulo θ igual a 34° em relação à horizontal; veja a esfera da Fig. 12-7. Qual é a velocidade da bola quando chega ao fim da rampa? Suponha que ela tenha densidade uniforme.

Solução O centro da bola percorre uma distância vertical $h = L \sin \theta$, de modo que a bola perde uma energia potencial gravitacional igual a $MgL \sin \theta$. Essa perda de energia potencial é igual ao ganho de energia cinética. Desse modo, podemos escrever (veja Eq. 12-5)

$$MgL \sin \theta = \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 \quad (12-6)$$

Vemos na Tabela 11-2(g) que, para uma esfera sólida, $I_{\text{cm}} = (2/5)MR^2$. Podemos também substituir ω pela razão equivalente v_{cm}/R . Substituindo essas duas quantidades na Eq. 12-6, teremos

$$MgL \sin \theta = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{5}\right)(MR^2)\left(v_{\text{cm}}/R\right)^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2$$

Resolvendo para v_{cm} , temos

$$\begin{aligned} v_{\text{cm}} &= \sqrt{\frac{1}{2}gL \sin \theta} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2)(2.1 \text{ m})(\sin 34^\circ)} \\ &= 4.1 \text{ m/s.} \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

Observe que a resposta não depende nem da massa nem do raio da bola.

EXEMPLO 12-3 Neste exemplo vamos generalizar o resultado obtido no Exemplo 12-2. Um aro, um disco e uma esfera uniformes, com a

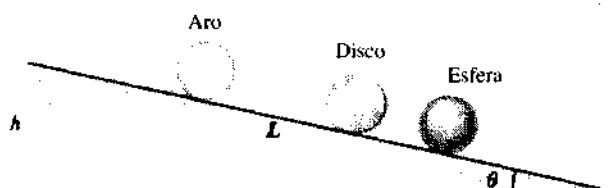


Fig. 12-7 Exemplos 12-2 e 12-3. Um aro, um disco e uma esfera uniformes, com a

mesma massa M e o mesmo raio R , são abandonados simultaneamente, partindo do repouso, do alto de uma rampa de comprimento L de 2,5 m e que faz um ângulo θ igual a 12° com a horizontal (Fig. 12-7).

a. Qual dos corpos alcança primeiro a base da rampa?

Solução A Tabela 12-1 nos dá a resposta. A esfera tem a maior parte de sua energia cinética (71%) envolvida no movimento de translação e, assim, ela ganha a corrida. Em seguida, vem o disco e, finalmente, o aro.

b. Quais são as velocidades dos corpos ao chegarem à base da rampa?

Solução O centro de massa de cada um dos corpos percorre a mesma distância vertical h , quando estes rolam a rampa. Assim, como acontece com um corpo em queda livre, a energia potencial do corpo sofre um decréscimo igual a Mgh , que é convertido em energia cinética. Deste modo, na base da rampa, as energias cinéticas dos três objetos são iguais. O modo como estas energias cinéticas se dividem nas formas translacional e rotacional depende da distribuição da massa de cada objeto.

Usando a Eq. 12-5, podemos escrever (fazendo $\omega = v_{cm}/R$)

$$\begin{aligned} Mgh &= \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 \\ &= \frac{1}{2}I_{cm}(v_{cm}^2/R^2) + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 \\ &\approx \frac{1}{2}(I_{cm}/R^2)v_{cm}^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2. \end{aligned} \quad (12-7)$$

Fazendo $h = L \sen \theta$ e resolvendo para obter v_{cm} , temos

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gL \sen \theta}{1 + I_{cm}/MR^2}}, \quad (\text{Resposta}) \quad (12-8)$$

que é a expressão algébrica da resposta que procuramos.

Observe que a velocidade não depende nem da massa nem do raio do objeto que rola, mas apenas da distribuição de sua massa em torno do seu eixo central, que aparece no termo I_{cm}/MR^2 . Uma bolinha de gude e uma bola de boliche terão a mesma velocidade na base da rampa e, assim, levarão o mesmo tempo para descê-la. Uma bola de boliche será mais rápida que um disco de qualquer massa ou raio, e quase todos os objetos serão mais rápidos que um aro. (Uma exceção aparece na Questão 8.)

Para o aro, temos (Veja a Tabela 12-1) $I_{cm}/MR^2 = 1$ e, portanto, a Eq. 12-8 fornece

$$\begin{aligned} v_{cm} &= \sqrt{\frac{2gL \sen \theta}{1 + I_{cm}/MR^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(2)(9,8 \text{ m/s}^2)(2,5 \text{ m})(\sen 12^\circ)}{1 + 1}} \\ &= 2,3 \text{ m/s.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Um cálculo semelhante fornece $v_{cm} = 2,6 \text{ m/s}$ para o disco ($I_{cm}/MR^2 = \frac{1}{2}$) e $2,7 \text{ m/s}$ para a esfera ($I_{cm}/MR^2 = 2/5$). Esse resultado confirma a previsão que fizemos em (a) de que a ordem de chegada nessa corrida seria esfera, disco e aro.

EXEMPLO 12-4 A Fig. 12-8 mostra um corpo esférico e uniforme de massa M e raio R que desce rolando um plano inclinado que faz um ângulo θ com a horizontal. Desta vez, vamos analisar o movimento de forma mais direta, usando as leis de Newton em vez de considerações sobre a energia, como fizemos no Exemplo 12-3.

a. Qual é a aceleração linear do corpo durante o rolamento?

Solução A Fig. 12-8 mostra as forças que atuam sobre o corpo: o peso Mg , a força normal N e uma força de atrito f_c . Podemos considerar que o peso atua no centro de massa, que está localizado no centro

deste corpo uniforme. A força normal e a de atrito atuam na porção do corpo que está em contato com a rampa, no ponto P . Os braços de alavanca do peso e da força normal, em torno de um eixo que passa pelo centro do corpo, são iguais a zero. Deste modo, essas forças não podem provocar a rotação do corpo em torno daquele centro. A rotação do corpo em sentido horário é o resultado de um torque negativo devido à força de atrito; essa força possui um braço de alavanca igual a R em relação ao centro do corpo.

Aplicaremos agora a forma linear da segunda lei de Newton ($\sum F = Ma$) ao longo da rampa, adotando o sentido da subida como sendo o positivo. Obtemos assim,

$$\sum F = f_c - Mg \sen \theta = Ma \quad (12-9)$$

Esta equação possui duas incógnitas f_c e a . Para obtermos outra equação nestas mesmas incógnitas, aplicamos em seguida a forma angular da segunda lei de Newton ($\sum \tau = I\alpha$) em torno de um eixo de rotação que passa pelo centro de massa. (Embora tenhamos obtido a relação $\sum \tau = I\alpha$, no Cap. 11, para um eixo fixo a um referencial inercial, ela vale para um eixo de rotação que passa pelo centro de massa de um corpo acelerado, desde que o eixo não mude de direção.) Deste modo, obtemos

$$\sum \tau = -f_c R = I_{cm}\alpha = I_{cm}\frac{a}{R}, \quad (12-10)$$

onde usamos a relação $\alpha = a/R$ (Eq. 11-18).

Resolvendo a Eq. 12-10 para obter a força de atrito, temos

$$f_c = -\frac{I_{cm}}{R^2}a \quad (12-11)$$

onde o sinal de menos nos recorda que a força de atrito f_c atua em sentido oposto ao da aceleração a . Substituindo a Eq. 12-11 na Eq. 12-9 e resolvendo-a para obter a , temos

$$a = -\frac{g \sen \theta}{1 + I_{cm}/MR^2}. \quad (\text{Resposta}) \quad (12-12)$$

Também poderíamos ter obtido uma segunda equação somando os torques e aplicando a segunda lei de Newton na forma angular em torno de um eixo que passa pelo ponto de contato P . Neste caso, o $\sum \tau$ consis-

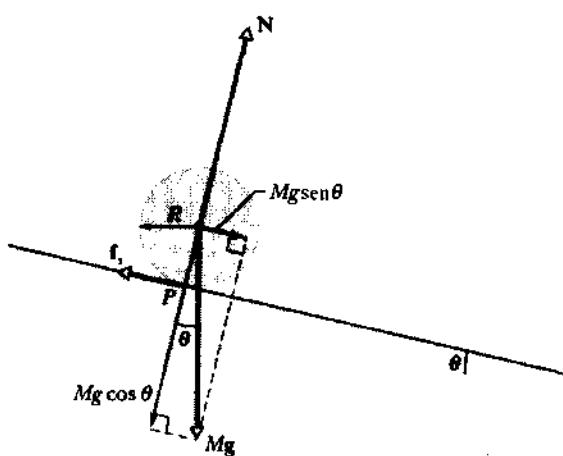


Fig. 12-8 Exemplo 12-4. Um corpo esférico, uniforme, de raio R , desce rolando um plano inclinado. As forças que atuam sobre ele são o peso Mg , a força normal N e uma força de atrito f_c , que aponta no sentido de subida da rampa. (Por clareza, N foi deslocada ao longo de sua linha de ação até que a sua origem estivesse no centro do corpo.)

tiria apenas no torque devido à componente $Mg \sin \theta$, que atua no centro do corpo e tem braço de alavanca igual a R :

$$\sum \tau = -(Mg \sin \theta)(R) = I_P \alpha = I_P \frac{a}{R} \quad (12-13)$$

onde I_P é o momento de inércia em relação a um eixo que passa por P . Para encontrarmos I_P , usaremos o teorema dos eixos paralelos:

$$I_P = I_{cm} + MR^2. \quad (12-14)$$

Substituindo-se I_P dado pela Eq. 12-14 na Eq. 12-13 e resolvendo esta última para obter a , chegariamos novamente à Eq. 12-12.

b. Qual é a força de atrito f_c ?

Solução Substituindo a Eq. 12-12 na Eq. 12-11, temos

$$f_c = Mg \frac{\sin \theta}{1 + MR^2/I_{cm}}. \quad (\text{Resposta}) \quad (12-15)$$

Examinando a Eq. 12-15, vemos que a força de atrito é menor do que $Mg \sin \theta$, que é a componente do peso que atua paralelamente à rampa. Isto deve ocorrer para que o objeto seja acelerado enquanto rola pela rampa.

A Tabela 12-1 mostra que, se o corpo que rola for um disco sólido, $I_{cm}/MR^2 = 1/2$. Assim, a aceleração e a força de atrito podem ser obtidas a partir das Eqs. 12-12 e 12-15. Temos, então:

$$a = -\frac{1}{3}g \sin \theta \quad \text{e} \quad f_c = \frac{1}{3}Mg \sin \theta$$

c. Qual é a velocidade do corpo quando ele chega à base da rampa, sabendo-se que esta tem comprimento L ?

Solução Como a aceleração do movimento é constante, podemos usar a relação

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (12-16)$$

Fazendo $x - x_0 = -L$, $v_0 = 0$ e usando o valor de a obtido na Eq. 12-12, teremos a Eq. 12-8 — o mesmo resultado a que chegamos usando o método da energia. Isso não é surpresa porque, afinal, tudo o que dissemos a respeito da energia mecânica é consistente com as leis de Newton.

12-2 O Ioiô

O ioiô é um laboratório de Física que pode ser guardado no bolso. Quando ele rola pelo fio percorrendo uma distância h , perde uma quantidade mgh de sua energia potencial, mas adquire energia cinética translacional ($\frac{1}{2}m\boxed{v}$) e rotacional ($\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$). Quando começa a subir novamente, perde energia cinética e ganha energia potencial.

Num ioiô moderno, o fio não é amarrado ao eixo, mas apenas passa em volta dele, formando uma argola. Quando ele desenrola todo o fio, ocorre um ligeiro impacto que remove toda a energia cinética translacional remanescente. Então, começa a girar, tendo apenas energia cinética rotacional. Ele permanece girando (“dormindo”) até que você o “acorde”, dando um puxão no fio para que este se enrole no eixo, fazendo-o tornar a subir. A sua energia cinética rotacional, quando o fio está todo esticado (quando ele está “dormindo”), pode ser aumentada consideravel-

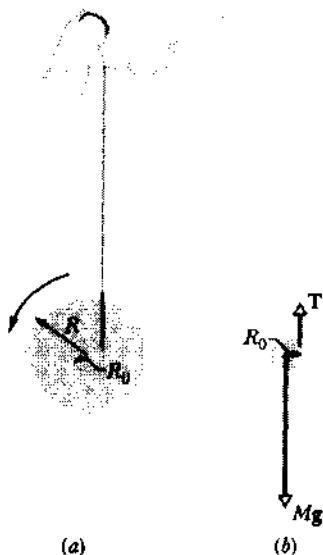


Fig. 12-9 (a) Um ioiô, visto em corte transversal. O fio, de espessura desprezível, está enrolado em torno de um eixo de raio R_0 . (b) Diagrama de forças do ioiô, em movimento descendente. Apenas o eixo foi representado.

mente se o jogarmos para baixo com alguma velocidade inicial v_{cm} e, consequentemente, ω , em vez de simplesmente abandoná-lo para que inicie seu movimento descendente a partir do repouso.

Vamos analisar o movimento do ioiô diretamente, usando a segunda lei de Newton. A Fig. 12-9a mostra um ioiô idealizado, no qual a espessura do fio é desprezível.* A Fig. 12-9b mostra um diagrama de forças, no qual apenas o seu eixo é mostrado. Aplicando-se a segunda lei de Newton, na sua forma linear, $\sum F = ma$, obtemos

$$\sum F = T - Mg = Ma \quad (12-17)$$

onde M é a sua massa e T é a tensão no fio.

Aplicando-se a segunda lei de Newton na sua forma angular ($\sum \tau = I\alpha$) em torno de um eixo que passa pelo centro de massa, obtemos

$$\sum \tau = TR_0 = I\alpha \quad (12-18)$$

onde R_0 é o raio do eixo do ioiô e I é o seu momento de inércia em torno do seu eixo central. A aceleração a do ioiô aponta para baixo (sendo, portanto, negativa). Do ponto de vista da Fig. 12-9, a sua aceleração angular α tem sentido anti-horário (portanto, é positiva) porque, ainda segundo a figura, o torque dado pela Eq. 12-18 tem este sentido. A

* Num ioiô real, a espessura do fio não pode ser desprezada, pois ela altera o raio efetivo do eixo do ioiô, que varia em função da quantidade de fio que está enrolada.

relação entre α e a é dada pela expressão $a = -\alpha R_0$. Resolvendo esta equação para obter $\alpha (= -a/R_0)$ e substituindo este valor na Eq. 12-18, encontramos

$$TR_0 = -\frac{Ia}{R_0}.$$

Depois de eliminarmos T , usando esta expressão e a Eq. 12-17, obtemos o valor de a

$$a = -g \frac{1}{1 + I/MR_0^2} \quad (12-19)$$

Portanto, um ioiô ideal desenrola o seu fio com aceleração constante. Para que a aceleração seja pequena, ele deve ser leve, com momento de inércia grande e ter um eixo cujo raio seja pequeno.

EXEMPLO 12-5 Um ioiô é composto de dois discos de latão cuja espessura b é igual a 8,5 mm e cujo raio R mede 3,5 cm. Os dois discos estão ligados por um eixo de raio $R_0 = 3,2$ mm.

a. Qual é o valor do momento de inércia em torno do eixo central? Despreze o momento de inércia do eixo. A densidade ρ do latão é de 8.400 kg/m³.

Solução O momento de inércia I de um disco em torno do seu eixo central é igual a $1/2(MR^2)$. Neste problema, podemos considerar os dois discos juntos como se fossem um só. Primeiramente, determinamos sua massa fazendo

$$\begin{aligned} M &= V\rho = (2)(\pi R^2)(b)(\rho) \\ &= (2)(\pi)(0.035 \text{ m})^2(0.0085 \text{ m})(8.400 \text{ kg/m}^3) \\ &= 0.550 \text{ kg}. \end{aligned}$$

O momento de inércia é, portanto,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}MR^2 = (\frac{1}{2})(0.550 \text{ kg})(0.035 \text{ m})^2 \\ &= 3.4 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

b. Um fio de comprimento $\ell = 1,1 \text{ m}$ e de espessura desprezível está enrolado em torno do eixo. Qual é a aceleração linear do ioiô quando ele rola descendo o fio, a partir do repouso?

Solução A Eq. 12-19 nos dá

$$\begin{aligned} a &= -g \frac{1}{1 + I/MR_0^2} \\ &= -\frac{9.8 \text{ m/s}^2}{1 + \frac{3.4 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{(0.550 \text{ kg})(0.0032 \text{ m})^2}} \\ &= -0.16 \text{ m/s}^2. \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

A aceleração aponta para baixo e o seu valor é o mesmo, quer o ioiô esteja rolando para baixo ou para cima.

Observe que a quantidade I/MR_0^2 que aparece na Eq. 12-19 é simplesmente o parâmetro de momento de inércia β que aparece na Tabela 12-1. Para este ioiô, temos $\beta = 60$, um valor muito maior do que o de

qualquer um dos objetos listados na tabela. A sua aceleração é pequena e corresponde à de um aro que desce rolando um plano inclinado a 1,9°.

c. Qual é a tensão no seu fio?

Solução Podemos calcular a tensão substituindo o valor de a , obtido na Eq. 12-19 na Eq. 12-17, e resolvendo esta última para obter T . Encontraremos, então, que

$$T = \frac{Mg}{1 + MR_0^2/I}, \quad (12-20)$$

que mostra, como era de se esperar, que a tensão no fio é menor do que o peso do ioiô. Numericamente, temos

$$\begin{aligned} T &= \frac{(0.550 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{1 + (0.550 \text{ kg})(0.0032 \text{ m})^2/(3.4 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2)} \\ &= 5.3 \text{ N}. \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

Este valor é o mesmo, quer ele esteja subindo, quer esteja descendo pelo fio.

12-3 Torque Revisitado

No Cap. 11, definimos o torque τ para um corpo rígido que pode girar em torno de um eixo fixo, sendo que cada partícula do corpo é forçada a mover-se em um círculo, de centro no eixo. Vamos agora generalizar a definição de torque de modo que ela se aplique a uma partícula (em vez de apenas um corpo rígido), que se move em relação a um ponto fixo (em vez de um eixo fixo), tomado geralmente como sendo a origem. A trajetória da partícula não precisa ser um círculo em torno daquele ponto e nem mesmo estar contida num plano.

A Fig. 12-10 mostra uma partícula localizada no ponto P no plano xy . Sua posição em relação à origem O é dada por um vetor posição \mathbf{r} . Uma única força \mathbf{F} , contida no plano xy , atua sobre a partícula, sendo que o vetor \mathbf{F} e uma extensão do vetor \mathbf{r} fazem um ângulo ϕ entre si.

O torque exercido sobre a partícula por essa força, em relação à origem O , é uma grandeza vetorial definida como

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (\text{definição de torque}) \quad (12-21)$$

De acordo com as regras do produto vetorial (veja a Fig. 3-19), τ é perpendicular ao plano que contém \mathbf{r} e \mathbf{F} . Portanto, o vetor τ da Fig. 12-10 é paralelo ao eixo z , no sentido de z crescente. Ao aplicarmos a regra da mão direita para encontrarmos o sentido de τ , é conveniente deslizarmos o vetor \mathbf{F} , sem mudarmos sua direção, até que a sua origem coincida com o ponto O , como mostra a Fig. 12-10. A origem do torque τ também está em O .

A magnitude do vetor τ é dada por (veja a Eq. 3-20)

$$\tau = rF \sin \phi. \quad (12-22)$$

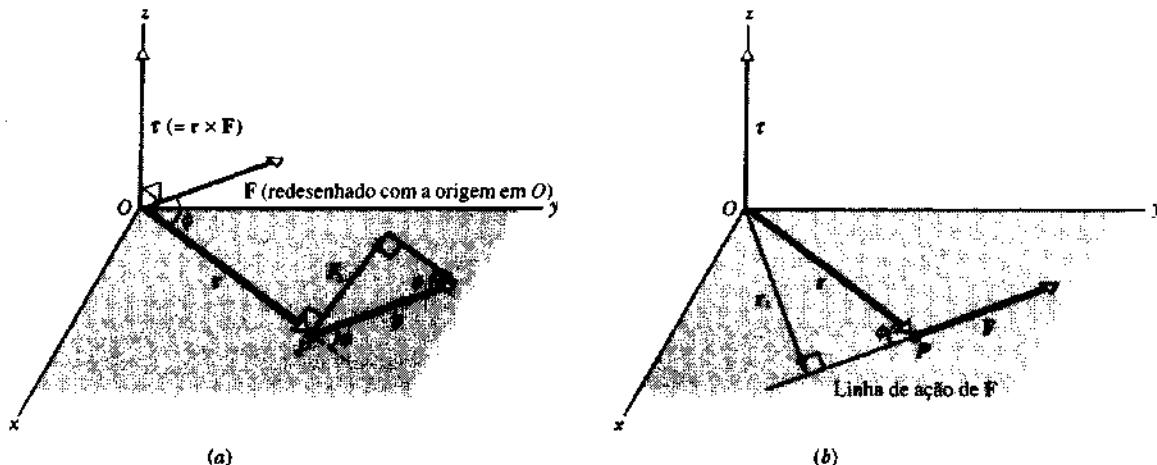


Fig. 12-10 Definindo o torque. Uma força \mathbf{F} , pertencente ao plano xy , atua sobre uma partícula localizada no ponto P . Esta força exerce um torque $\tau (= \mathbf{r} \times \mathbf{F})$ sobre a partícula, em relação à origem O . O vetor torque aponta na direção de z crescente. Sua magnitude é dada por rF_{\perp} em (a) e por $r_{\perp}F$ em (b).

A Eq. 12-22 pode ser reescrita como

$$\tau = rF_{\perp}, \quad (12-23)$$

onde F_{\perp} é a componente de \mathbf{F} perpendicular a \mathbf{r} (Fig. 12-10a). A Eq. 12-22 pode ainda ser reescrita como

$$\tau = r_{\perp}F \quad (12-24)$$

onde r_{\perp} (o braço de alavanca de \mathbf{F}) é a distância perpendicular entre O e a linha de ação de \mathbf{F} (Fig. 12-10b).

Observe que, se o ângulo entre a força \mathbf{F} e o vetor posição \mathbf{r} for 0 ou 180° , então, a Eq. 12-22 nos diz que o torque é zero. Obtemos o mesmo resultado usando a Eq. 12-23 (em que a componente perpendicular $F_{\perp} = 0$) e com a Eq. 12-24 (em que o braço de alavanca $r_{\perp} = 0$).

As Eqs. 12-22 a 12-24 concordam com a nossa definição de torque dada anteriormente, em que consideramos apenas o caso particular de uma força que atua sobre um corpo rígido forçado a girar em torno de um eixo fixo. (Veja as Eqs. 11-28 a 11-30.) Lembre-se de que identificamos o torque sobre um corpo rígido como sendo a *ação de rotação* de uma força aplicada: ele tende a girar o corpo; isto é, o vetor posição de uma parte qualquer do corpo gira em torno de um eixo fixo. Analogamente, o torque que atua sobre a partícula mostrada na Fig. 12-10 tende a fazer girar o vetor posição da partícula, \mathbf{r} , em torno da origem.

EXEMPLO 12-6 Na Fig. 12-11a, três forças, cada uma tendo módulo igual a 2,0 N, atuam sobre uma partícula, que está sobre o plano xz , num ponto P dado pelo vetor posição \mathbf{r} , onde $r = 3,0 \text{ m}$ e $\theta = 30^\circ$. A força \mathbf{F}_1 é paralela ao eixo x , a força \mathbf{F}_2 ao z e a \mathbf{F}_3 ao y . Qual é o torque devido a cada uma das forças, em relação à origem?

Solução As Figs. 12-11b e 12-11c são vistas superiores do plano xz , onde os vetores \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 foram redesenhados, tendo suas origens no ponto O , para mostrar melhor os ângulos que esses vetores fazem com o vetor \mathbf{r} .

O ângulo entre \mathbf{r} e \mathbf{F}_1 é de 90° . Aplicando a Eq. 12-22 para cada uma das forças, encontramos as magnitudes dos torques

$$\tau_1 = rF_1 \sin \phi_1 = (3,0 \text{ m})(2,0 \text{ N})(\sin 150^\circ)$$

$$= 3,0 \text{ N} \cdot \text{m},$$

$$\tau_2 = rF_2 \sin \phi_2 = (3,0 \text{ m})(2,0 \text{ N})(\sin 120^\circ)$$

$$= 5,2 \text{ N} \cdot \text{m},$$

$$\tau_3 = rF_3 \sin \phi_3 = (3,0 \text{ m})(2,0 \text{ N})(\sin 90^\circ)$$

$$= 6,0 \text{ N} \cdot \text{m}. \quad (\text{Resposta})$$

Para encontrarmos as direções desses torques, aplicamos a regra da mão direita, posicionando os dedos da mão direita de modo a girarem \mathbf{r} até alcançar \mathbf{F}_1 , através do menor ângulo formado pelos dois vetores. O torque τ_1 é perpendicular a \mathbf{r} e a \mathbf{F}_1 (Fig. 12-11d) e sua direção faz um ângulo $\theta = 30^\circ$ com a direção de z decrescente. Na Fig. 12-11d, representamos \mathbf{F}_3 por meio de um círculo cruzado, \otimes , sugerindo a cauda de uma flecha. (Se \mathbf{F}_3 possuísse sentido oposto, seria representada por um ponto no interior de um círculo, \odot , sugerindo a ponta de uma flecha.) Todos esses torques são mostrados na Fig. 12-11e.

12-4 Momento Angular

Como todas as grandezas lineares, o momento linear tem um correspondente angular. A Fig. 12-12 mostra uma partícula com momento linear $\mathbf{p} (= mv)$ situada no ponto P , no plano xy . O **momento angular** ℓ dessa partícula, relativamente à origem O , é uma grandeza vetorial definida como

$$\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}) \quad (12-25)$$

onde \mathbf{r} é o vetor posição da partícula em relação à origem O . Conforme aquela se move em relação a O , no sentido

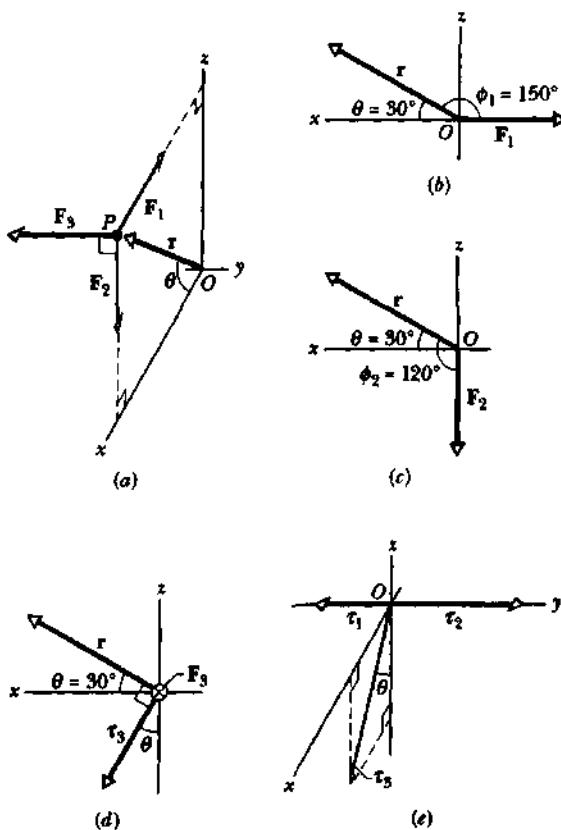


Fig. 12-11 Exemplo 12-6. (a) Uma partícula situada no ponto P sofre ação de três forças, cada uma paralela a um dos eixos coordenados. O ângulo ϕ (usado na determinação do torque) é mostrado em (b) para F_1 e (c) para F_2 . (d) O torque τ_3 é perpendicular a r e a F_3 (o símbolo \otimes indica que F_3 é perpendicular ao plano da figura e aponta para dentro). (e) Os torques (relativamente à origem O) que atuam sobre a partícula.

de seu momento \mathbf{p} ($= mv$), o vetor posição \mathbf{r} gira em torno de O . Para que uma partícula tenha momento angular, não é necessário que gire em torno de O . A comparação das Eqs. 12-21 e 12-25 mostra que a relação entre o momento angular e o linear é a mesma que existe entre o torque e a força. A unidade do momento angular no SI é o quilograma-metro-quadrado por segundo ($\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$), equivalente ao Joule-segundo (J.s).

O vetor momento angular ℓ na Fig. 12-12 é paralelo ao eixo z e aponta no sentido crescente de z . Assim, ℓ é positivo em concordância com a rotação em sentido anti-horário executada pelo vetor posição da partícula, \mathbf{r} , em torno do eixo z . (Um vetor ℓ negativo, consistente com uma rotação de \mathbf{r} em torno de z em sentido horário, apontaria no sentido decrescente de z .)

O módulo de ℓ é dado por

$$\ell = rmv \sin \phi. \quad (12-26)$$

onde ϕ é o ângulo entre \mathbf{r} e \mathbf{p} . A Eq. 12-26 pode ser reescrita como

$$\ell = r\mathbf{p}_\perp = rmv_\perp. \quad (12-27)$$

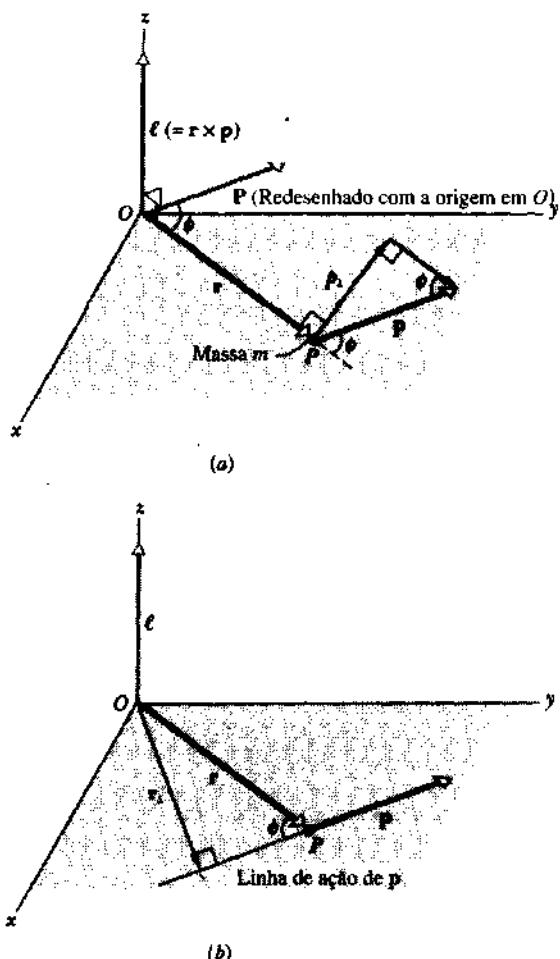


Fig. 12-12 Definindo o momento angular. Uma partícula de massa m , localizada no ponto P , possui momento linear \mathbf{p} ($= mv$), pertencente ao plano xy . A partícula tem momento angular ℓ ($= \mathbf{r} \times \mathbf{p}$), relativamente à origem O . O vetor momento angular aponta no sentido de z crescente. (a) A magnitude de ℓ é dada por $\ell = rp_1 = rmv_1$. (b) A magnitude de ℓ é também dada por $\ell = r_1p = r_1mv$.

onde p_\perp é a componente de \mathbf{p} perpendicular a \mathbf{r} (como na Fig. 12-12a), e $p_1 = mv_\perp$. A Eq. 12-26 pode também ser reescrita como

$$\ell = r_1p = r_1mv \quad (12-28)$$

onde r_1 é a distância perpendicular entre O e um prolongamento de \mathbf{p} (como na Fig. 12-12b). Se uma partícula estiver se afastando da origem em linha reta ($\phi = 0$) ou se aproximando da origem em linha reta ($\phi = 180^\circ$), a Eq. 12-26 nos diz que a partícula não possui momento angular em torno daquela origem.

Do mesmo modo que o torque, o momento angular só tem sentido se for especificada uma origem. Além disso, se a partícula da Fig. 12-12 não estivesse situada no plano xy ou se o momento linear \mathbf{p} da partícula também não estivesse naquele plano, o momento angular ℓ não seria paralelo ao eixo z . A direção do vetor momento angular é sempre perpendicular ao plano formado pelos vetores \mathbf{r} e \mathbf{p} .

12-5 Segunda Lei de Newton na Forma Angular

A segunda lei de Newton escrita na forma

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (\text{uma partícula}) \quad (12-29)$$

expressa a íntima relação que existe entre força e momento linear para uma partícula. Já examinamos bastante o paralelismo existente entre grandezas lineares e angulares e isso nos dá a certeza de que existe também uma relação íntima entre o torque e o momento angular. Guiando-nos pela Eq. 12-29, podemos até mesmo supor que esta relação deve ser

$$\sum \tau = \frac{d\ell}{dt} \quad (\text{uma partícula}) \quad (12-30)$$

A Eq. 12-30 é, de fato, uma forma angular da segunda lei de Newton, para uma partícula:

A soma vetorial de todos os torques que atuam sobre uma partícula é igual à sua taxa de variação do momento angular, em relação ao tempo.

A Eq. 12-30 não possui significado, a menos que os torques τ e o momento angular ℓ sejam definidos relativamente à mesma origem.

Demonstração da Eq. 12-30

Comecemos com a Eq. 12-25, a definição de momento angular:

$$\ell = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$$

Derivando* cada membro com relação ao tempo t , obtemos

$$\frac{d\ell}{dt} = m \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} \right). \quad (12-31)$$

Mas $d\mathbf{v}/dt$ é a aceleração \mathbf{a} da partícula e $d\mathbf{r}/dt$ é a sua velocidade \mathbf{v} . Assim, podemos reescrever a Eq. 12-31 como

$$\frac{d\ell}{dt} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{a} + \mathbf{v} \times \mathbf{v})$$

Como $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$ (o produto vetorial de qualquer vetor com ele mesmo é zero, porque o ângulo entre os dois vetores é necessariamente zero), temos

$$\frac{d\ell}{dt} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = \mathbf{r} \times m\mathbf{a}.$$

Usemos agora a segunda lei de Newton ($\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$) para substituirmos $m\mathbf{a}$ pelo seu equivalente, a soma vetorial das forças que atuam sobre a partícula, obtendo

$$\frac{d\ell}{dt} = \mathbf{r} \times \left(\sum \mathbf{F} \right) = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}). \quad (12-32)$$

Finalmente, a Eq. 12-21 mostra que $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ é o torque associado à força \mathbf{F} , de modo que a Eq. 12-32 se torna

$$\sum \tau = \frac{d\ell}{dt}.$$

Esta é a Eq. 12-30, a relação que desejávamos demonstrar.

EXEMPLO 12-7 Um pingüim de massa m cai do ponto A , localizado a uma distância horizontal d da origem O , partindo do repouso, como mostra a Fig. 12-13.

- a. Qual é o momento angular do pingüim em torno de O ?

Solução O momento angular é dado pela Eq. 12-25 ($\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$); sua magnitude é (pela Eq. 12-26):

$$\ell = r p \sin \phi.$$

Onde $r \sin \phi = d$, não importando qual a distância percorrida pelo pingüim na queda, e $p = mv = m(gt)$. Assim, ℓ tem magnitude

$$\ell = mgtd. \quad (\text{Resposta}) \quad (12-33)$$

A regra da mão direita mostra que o vetor momento angular ℓ aponta para dentro do plano da Fig. 12-13, no sentido decrescente de z . Representamos ℓ através de um círculo cruzado, \otimes , na origem. O vetor ℓ muda com o tempo apenas em magnitude, permanecendo o seu sentido constante.

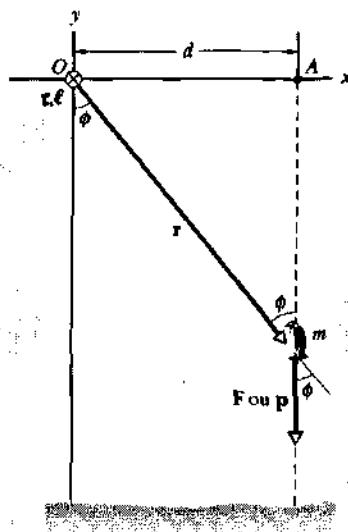


Fig. 12-13 Exemplo 12-7. Um pingüim de massa m cai verticalmente do ponto A . O torque τ e o momento angular ℓ do pingüim em queda, relativamente à origem O , apontam para dentro do plano da figura, em O .

* Ao derivar um produto vetorial, você deve ter o cuidado de não inverter a ordem das duas grandezas (no nosso caso, \mathbf{r} e \mathbf{v}) que formam o produto. (Veja a Eq. 3-21.)

b. Qual é o torque exercido pelo peso mg do pinguim em torno da origem O ?

Solução O torque é dado pela Eq. 12-21 ($\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$); sua magnitude é (pela Eq. 12-22):

$$\tau = rF \sin \phi.$$

Mais uma vez, $r \sin \phi = d$ e $F = mg$. Portanto,

$$\tau = mgd = \text{uma constante.} \quad (\text{Resposta}) \quad (12-34)$$

Observe que o torque é simplesmente o produto da força mg pelo braço de alavanca d . A regra da mão direita mostra que o vetor torque τ aponta para dentro do plano da Fig. 12-13, no sentido decrescente de z , sendo assim paralelo a ℓ . (Note que também podemos obter a Eq. 12-34 derivando a Eq. 12-33 em relação a t e substituindo o resultado na Eq. 12-30.)

Vemos que τ e ℓ dependem fortemente da escolha da origem (através do valor de d). Se o pinguim cai da origem, temos $d = 0$ e, portanto, não há torque nem momento angular.

12-6 Momento Angular de um Sistema de Partículas

Voltemos agora nossa atenção para o movimento de um sistema de partículas em relação a uma origem dada. Observe que “um sistema de partículas” inclui um corpo rígido como caso particular. O momento angular total \mathbf{L} de um sistema de partículas é a soma (vetorial) dos momentos angulares individuais ℓ_i de cada uma das partículas:

$$\mathbf{L} = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \cdots + \ell_i + \ell_{i+1} + \cdots + \ell_n = \sum \ell_i \quad (12-35)$$

onde $i (= 1, 2, 3, \dots)$ discrimina cada uma das partículas.

Com o tempo, os momentos angulares das partículas individuais podem mudar, seja por causa de interações com o sistema (entre as partículas individuais), seja por causa de influências externas que atuem sobre o sistema. Podemos encontrar a variação temporal do momento angular total \mathbf{L} do sistema, calculando a derivada temporal da Eq. 12-35. Assim,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\ell_i}{dt} \quad (12-36)$$

Pela Eq. 12-30, vemos que $d\ell_i/dt$ é simplesmente $\sum \tau_i$, a soma (vetorial) dos torques que atuam sobre a i -ésima partícula.

Alguns torques são *internos*, associados com forças que as partículas do sistema exercem umas sobre as outras; outros, são *externos*, associados com forças externas que atuam sobre o sistema. As forças internas se cancelam aos pares,* devido ao princípio da ação e reação de Newton. Portanto, ao somarmos os torques, temos que considerar apenas aqueles associados às forças externas. A Eq. 12-36 se torna, então

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (\text{sistema de partículas}) \quad (12-37)$$

A Eq. 12-37 é a segunda lei de Newton para um sistema de partículas, expressa em termos de grandezas angulares, e é análoga a $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = d\mathbf{P}/dt$ (Eq. 9-23). A Eq. 12-37 estabelece que a soma (vetorial) dos *torques externos* que atuam sobre um sistema de partículas é igual à taxa de variação temporal do *momento angular* do sistema. A Eq. 12-37 só tem significado se os vetores torque e momento angular estiverem referidos à mesma origem. Num referencial inercial, a Eq. 12-37 pode ser aplicada a qualquer ponto. Num referencial acelerado (como, por exemplo, uma roda que gira num plano inclinado), a Eq. 12-37 só se aplica ao *centro de massa* do sistema.

12-7 Momento Angular de um Corpo Rígido que Gira em Torno de um Eixo Fixo

Consideraremos a seguir o momento angular para o caso particular em que o sistema de partículas constitui um corpo rígido em rotação. A Fig. 12-14a mostra esta situação: o corpo está limitado a girar em torno de um eixo fixo, que identificamos como sendo o eixo z , e que atravessa o corpo. A velocidade angular do corpo é ω .

Podemos determinar o momento angular do corpo que gira somando as componentes z dos momentos angulares dos elementos de massa do corpo. Na Fig. 12-14a, um elemento de massa Δm_i se move, em torno do eixo z , numa trajetória circular. A posição do elemento de massa em relação à origem O é dada pelo vetor posição \mathbf{r}_i . O raio da trajetória circular é r_{1i} , que é a distância perpendicular entre o elemento e o eixo z .

A magnitude do momento angular ℓ_i deste elemento de massa, relativamente ao ponto O , é dada pela Eq. 12-26:

$$\ell_i = (r_i)(p_i)(\sin 90^\circ) = (r_i)(\Delta m_i v_i).$$

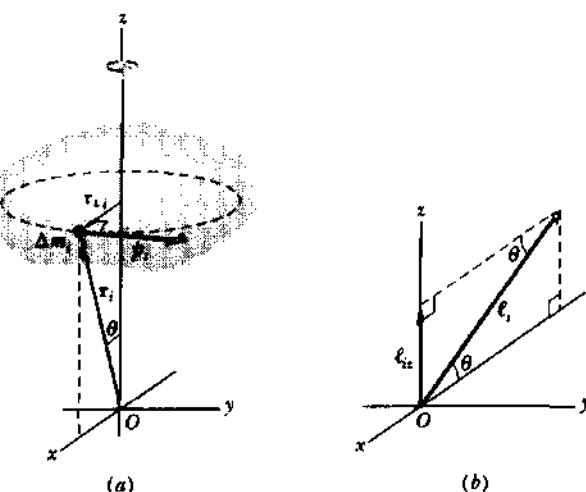


Fig. 12-14 (a) Um corpo rígido gira em torno do eixo z , com velocidade angular ω . Um elemento de massa do corpo, Δm_i , move-se em torno do eixo z num círculo de raio r_{1i} . Este elemento possui momento linear p_i , e sua posição em relação à origem O é dada pelo vetor \mathbf{r}_i . A figura mostra Δm_i , no instante em que \mathbf{r}_{1i} está paralelo ao eixo x . (b) Momento angular ℓ_i do elemento de massa que aparece em (a), em relação à origem O . A componente z ℓ_{iz} de ℓ_i , também está representada.

* Devermos supor além disso que ambas as forças, em cada par ação-reação interna, têm a mesma linha de ação.

Tabela 12-2

Outras Relações de Correspondência entre Translação e Rotação*

	<i>Translação</i>		<i>Rotação</i>
Força	\mathbf{F}	Torque	$\tau (= \mathbf{r} \times \mathbf{F})$
Momento linear	\mathbf{p}	Momento angular	$\ell (= \mathbf{r} \times \mathbf{p})$
Momento linear ^b	$\mathbf{P} (= \sum \mathbf{p}_i)$	Momento angular ^b	$\mathbf{L} (= \sum \ell_i)$
Momento linear ^b	$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{cm}$	Momento angular ^c	$L = I\omega$
Lei de Newton ^b	$\sum \mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$	Lei de Newton ^b	$\sum \tau_{ext} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$
Lei de conservação ^d	$\mathbf{P} = \text{uma constante}$	Lei de conservação ^d	$\mathbf{L} = \text{uma constante}$

*Veja também a Tabela 11-3.

^bPara sistemas de partículas, inclusive corpos rígidos.

^cPara um corpo rígido, em torno de um eixo fixo, sendo L a componente paralela àquele eixo.

^dPara um sistema isolado.

onde p_i e v_i são, respectivamente, o momento linear e a velocidade linear do elemento de massa, e o ângulo entre \mathbf{r}_i e \mathbf{p}_i é igual a 90° . O vetor momento angular do elemento de massa da Fig. 12-14a, ℓ_i , é mostrado na Fig. 12-14b.

Estamos interessados na componente de ℓ , que é paralela ao eixo de rotação que, neste caso, é o eixo z . Esta componente z é

$$\ell_{iz} = \ell_i \sin \theta = (r_i \sin \theta) (\Delta m_i v_i) = r_{\perp i} \Delta m_i v_i$$

A componente z do momento angular total do corpo rígido é obtida somando-se as contribuições de todos os elementos de massa que constituem o corpo. Assim, como $v = \omega r_{\perp}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} L_z &= \sum_{i=1}^n \ell_{iz} = \sum_{i=1}^n \Delta m_i v_i r_{\perp i} = \sum_{i=1}^n \Delta m_i (\omega r_{\perp i}) r_{\perp i} \\ &= \omega \left(\sum_{i=1}^n \Delta m_i r_{\perp i}^2 \right). \end{aligned} \quad (12-38)$$

Podemos remover ω do somatório, neste caso, porque ele é uma constante: tem o mesmo valor para todos os pontos do corpo rígido em rotação.

A quantidade $\sum \Delta m_i$ que aparece na Eq. 12-38 é o momento de inércia I do corpo em torno do eixo fixo (veja a Eq. 11-22). Assim, a Eq. 12-38 reduz-se a

$$L_z = I\omega \quad (\text{momento angular total}) \quad (12-39)$$

Eliminamos o subscrito z , porém você deve lembrar-se de que o momento angular definido pela Eq. 12-39 é apenas a componente do momento angular paralela ao eixo de rotação. Da mesma forma, I nessa equação é o momento de inércia do corpo em torno daquele mesmo eixo.

A Tabela 12-2, que complementa a Tabela 11-3, amplia a nossa lista de relações lineares e angulares correspondentes.

EXEMPLO 12-8 A Fig. 12-15 mostra a Terra girando em torno do seu eixo, enquanto descreve sua órbita ao redor do Sol.

a. Qual é o momento angular associado à rotação da Terra em torno do seu eixo?

Solução Da Eq. 12-39 e da Tabela 11-2(g), temos

$$L_{rot} = I\omega = \frac{2\pi}{T} MR^2$$

onde M e R são a massa e o raio da Terra e $T (= 24 \text{ h} = 8,64 \times 10^4 \text{ s})$ é o tempo necessário para que a Terra execute uma rotação completa (T é o período de rotação). Assim,

$$\begin{aligned} L_{rot} &= \left(\frac{2\pi}{T} \right) (5.98 \times 10^{24} \text{ kg}) (6.37 \times 10^6 \text{ m})^2 \frac{2\pi}{8.64 \times 10^4 \text{ s}} \\ &= 7,1 \times 10^{33} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

O vetor \mathbf{L}_{rot} é paralelo ao eixo de rotação da Terra, apontando (como mostra a regra da mão direita) do polo Sul para o polo Norte.

b. Qual é o momento angular associado ao movimento orbital da Terra em torno do Sol?

Solução Considerando a Terra como uma partícula e aplicando a Eq. 12-39, temos

$$L_{orb} = I\omega = MR^2 \frac{2\pi}{T}$$

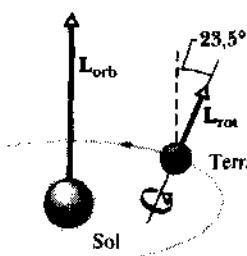


Fig. 12-15 Exemplo 12-8. Vista em perspectiva da Terra girando em torno do seu eixo, enquanto segue sua órbita em torno do Sol (suposta circular). Os vetores momento angular não foram desenhados em escala; na verdade, \mathbf{L}_{orb} é cerca de 4×10^6 vezes maior que \mathbf{L}_{rot} .

onde R é agora a distância média Terra-Sol e T ($= 1$ ano $= 3,16 \times 10^7$ s) é o período de revolução da Terra em torno do Sol. Assim,

$$L_{\text{orb}} = (5,98 \times 10^{24} \text{ kg})(1,50 \times 10^{11} \text{ m})^2 \frac{2\pi}{3,16 \times 10^7 \text{ s}} \\ = 2,7 \times 10^{40} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}. \quad (\text{Resposta})$$

O vetor L_{orb} é perpendicular ao plano da órbita da Terra. Devido à inclinação do eixo desta, os vetores momento angular orbital e rotacional fazem entre si um ângulo de $23,5^\circ$. Ambos os vetores permanecem constantes em magnitude e sentido, enquanto a Terra se move em sua órbita durante o ano.*

12-8 Conservação do Momento Angular

Até aqui, discutimos duas poderosas leis de conservação: a da energia e a do momento linear. Agora, estamos diante de uma terceira lei deste tipo, a conservação do momento angular. Comecemos com a Eq. 12-37 ($\sum \tau_{\text{ext}} = d\mathbf{L}/dt$), que é a segunda lei de Newton escrita na forma angular. Se nenhum torque externo resultante atuar sobre o sistema, esta equação se tornará $d\mathbf{L}/dt = 0$, ou seja,



Esta equação representa a lei da conservação do momento angular:

Se nenhum torque externo atuar sobre um sistema, o (vetor) momento angular \mathbf{L} deste sistema permanecerá constante, não importando quais sejam as alterações que ocorram dentro do sistema.

A Eq. 12-40 é uma equação vetorial e, como tal, é equivalente a três equações escalares que correspondem à conservação do momento angular em três direções mutuamente perpendiculares.

Semelhante às outras duas leis que já discutimos, a Eq. 12-40 permanece válida mesmo fora dos limites da mecânica newtoniana. Ela vale para partículas cujas velocidades são próximas à da luz (o domínio da teoria da relatividade), e permanece válida no universo das partículas subatômicas (governado pela Mecânica Quântica). Jamais foi encontrada uma exceção para essa lei.

12-9 Conservação do Momento Angular: Alguns Exemplos

1. O pião humano. A Fig. 12-16 mostra um estudante sentado num banco que pode girar livremente em torno de

um eixo vertical. O estudante, que foi posto em rotação com uma velocidade angular inicial ω_i , reduzida, segura dois halteres com os braços abertos. Seu vetor momento angular \mathbf{L} aponta para a parte superior da figura, ao longo do eixo vertical.

O instrutor pede, então, que o estudante encolha os braços, puxando-os para junto do corpo; isto faz com que o seu momento de inércia seja reduzido do valor inicial I_i para um valor inferior I_f , porque a massa está agora concentrada numa região mais próxima do eixo de rotação. Sua velocidade de rotação aumenta, consideravelmente, de ω_i a ω_f . Para diminuir sua velocidade, o estudante só precisa estender os braços novamente.

Não há nenhum torque externo atuando sobre o sistema constituído pelo estudante, o banco e os halteres. Deste modo, o momento angular do sistema em torno do eixo de rotação deve permanecer constante, não importando o modo como o estudante movimente os pesos. Das Eqs. 12-39 e 12-40, temos

$$\mathbf{L} = I\omega = \text{uma constante}$$

ou

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f.$$

Na Fig. 12-16a, a velocidade angular do estudante, ω_i , é relativamente baixa e o seu momento de inércia, I_i , relativamente grande. Na Fig. 12-16b, a velocidade angular precisa ser maior a fim de compensar a diminuição do momento de inércia.

2. O salto ornamental. A Fig. 12-17 mostra uma atleta executando um mergulho com salto mortal. Como você já deveria supor, o seu centro de massa segue uma trajetória parabólica. Ela deixa a prancha com um momento angular

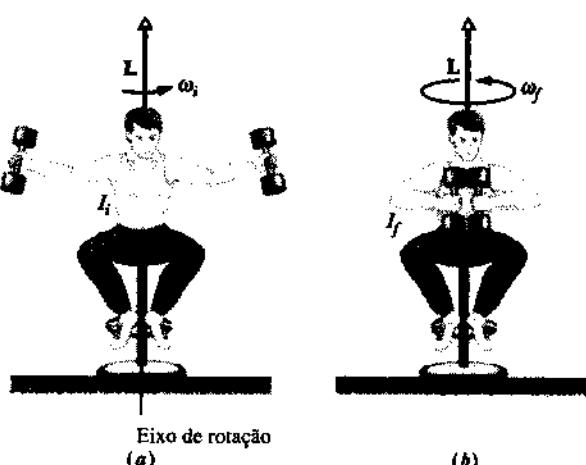


Fig. 12-16 (a) O estudante possui momento de inércia relativamente grande, enquanto sua velocidade angular é relativamente pequena. (b) Diminuindo seu momento de inércia, o estudante aumenta automaticamente sua velocidade angular. O momento angular do sistema, \mathbf{L} , permanece constante.

*Esta afirmativa é apenas aproximada, pois, devido à influência dos outros planetas, a força gravitacional sobre a Terra não é central, logo, seu momento angular orbital não se conserva. Além disso, como a Terra não é perfeitamente esférica, as forças gravitacionais — devido ao Sol e à Lua — exercem um torque que faz com que o eixo de rotação da Terra descreva um cone no espaço, um movimento chamado precessão dos equinócios. (N. do R.)

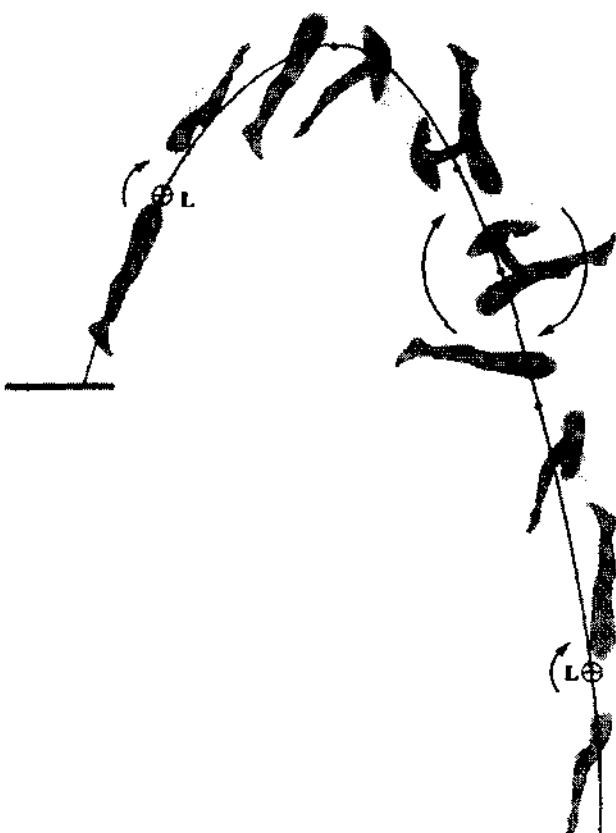


Fig. 12-17 O momento angular \mathbf{L} da atleta é constante durante o salto, sendo representado pela cauda de uma seta, \otimes , que é perpendicular ao plano da figura. Observe também que o centro de massa (veja os pontos) segue uma trajetória parabólica.

L bem definido, em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa, representado por um vetor que aponta para dentro do plano da Fig. 12-17, perpendicularmente à página. Enquanto está no ar, a atleta constitui-se num sistema isolado, no que concerne a torques externos, e o seu momento angular não pode se alterar. Juntando seus braços e pernas na *posição dobrada*, a atleta pode reduzir consideravelmente o seu momento de inércia em torno do eixo de rotação e, deste modo, aumentar muito a sua velocidade angular. Estendendo os braços e pernas (na *posição aberta*) no final do salto, ela aumenta o seu momento de inércia e, assim, diminui sua velocidade angular de modo a entrar na água o mais verticalmente possível, espalhando uma quantidade mínima de água. Mesmo num salto mais complicado, envolvendo movimentos em parafuso, o momento angular do atleta se conserva em módulo, direção e sentido, durante todo o tempo de execução do salto.

3. Estabilizando um satélite (ou um disco). Antes que um satélite seja lançado do compartimento de carga de um ônibus espacial (veja Fig. 12-18), faz-se com que ele entre em rotação em torno do seu eixo. Por quê?

É mais difícil alterar-se a direção da velocidade de uma partícula (por meio de um impulso lateral), quando o seu momento linear é grande. Do mesmo modo, a orientação



Fig. 12-18 Lançamento do satélite de comunicações mexicano Morelos-D, do compartimento de carga de um ônibus espacial. Faz-se o satélite girar em torno do seu eixo central para estabilizar a sua orientação, enquanto ele se dirige à sua órbita.

de um corpo que está girando é mais difícil de ser alterada (por meio de um torque externo) quando o momento angular do corpo é grande. A orientação de um satélite que *não* estivesse girando, poderia ser mudada até mesmo por um pequeníssimo torque externo devido, por exemplo, à tênue atmosfera residual ou à pressão de radiação da luz do Sol. Já a orientação de um satélite que está girando não é afetada por tais fatores.

O processo pelo qual um disco é estabilizado durante o vôo é exatamente o mesmo, sendo este um exemplo mais conhecido.

4. Orientação de um veículo espacial. Quando um sistema isolado de partículas não possui momento angular, a sua orientação no espaço pode ser mudada através de alterações internas ocorridas no sistema? Se ele não for um corpo rígido, a resposta é: “Sim, sob certas condições.”

A Fig. 12-19, que representa um veículo espacial dotado de um volante firmemente preso à sua estrutura, sugere um método para controlar a orientação. O conjunto *veículo espacial + volante* forma um sistema isolado. Se o momento angular \mathbf{L} do sistema for igual a zero, ele deverá permanecer assim.

Para mudar a orientação do veículo espacial, o volante é acionado, como na Fig. 12-19a. O veículo começa a girar em sentido oposto, para manter nulo o momento angular do sistema. Quando o volante retornar ao repouso, o veículo também deixará de girar, mas sua orientação terá mudado, como na Fig. 12-19b. Em nenhum instante durante esta manobra o momento angular do sistema *veículo espacial + volante* tem valor diferente de zero.

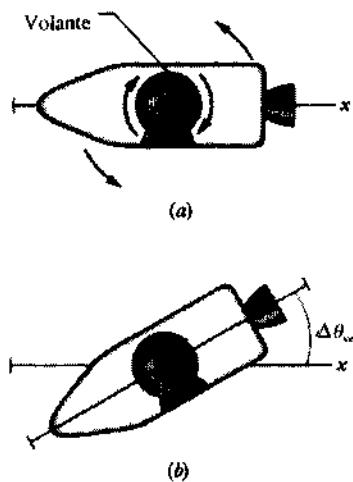


Fig. 12-19 (a) Um veículo espacial idealizado, dotado de um volante. Se o volante for posto para girar em sentido horário, como mostra a figura, o veículo irá girar em sentido anti-horário, porque o momento angular total deve permanecer nulo. (b) Quando o volante pára, a nave também pára de girar, mas a orientação do seu eixo terá sido alterada de um ângulo $\Delta\theta_{ve}$.

A conservação do momento angular exige que

$$I_{ve}\omega_{ve} + I_{vo}\omega_{vo} = 0 \quad (12-41)$$

durante todo o tempo. (O subscrito *ve* refere-se ao veículo espacial e *vo* ao volante.) As duas velocidades angulares têm sinais opostos, correspondendo aos sentidos opostos das rotações do veículo e do volante. Como $\omega = \Delta\theta/\Delta t$, podemos escrever a Eq. 12-41 como

$$I_{ve}\Delta\theta_{ve} = -I_{vo}\Delta\theta_{vo}$$

ou

$$\Delta\theta_{ve} = -\frac{I_{vo}}{I_{ve}}\Delta\theta_{vo}.$$

Onde $\Delta\theta_{ve}$ é o ângulo que o veículo espacial gira num dado intervalo de tempo, enquanto $\Delta\theta_{vo}$ é o ângulo de giro do volante no mesmo intervalo de tempo. O sinal negativo nos lembra que esses dois ângulos têm sentidos opostos. Como $I_{vo} \ll I_{ve}$, o volante precisa executar muitas revoluções para que a nave gire um ângulo pequeno. (Na verdade, estudos de engenharia demonstram que os retrofoguetes são mais eficientes que os volantes, quando se trata de alterar a orientação de naves espaciais.)

Um fato interessante ocorreu com a nave *Voyager 2*, na sua passagem pelo planeta Urano, em 1986. A nave sofria uma rotação indesejável toda vez que o seu gravador era acionado em alta velocidade. A equipe de Terra, no Laboratório de Propulsão a Jato, teve de programar o computador de bordo para acionar os retrofoguetes sempre que o gravador fosse ligado ou desligado, de modo a contrabalançar o seu efeito.

5. A incrível estrela que encolhe. Quando a intensidade das reações nucleares que ocorrem no núcleo de uma estrela diminui, ela pode entrar em colapso, gerando grandes pressões no seu interior. O colapso pode chegar ao ponto de reduzir o raio da estrela desde um valor próximo ao do nosso Sol até o valor incrivelmente pequeno de alguns poucos quilômetros. Ela se torna, então, uma *estrela de nêutrons*, assim chamada porque o material do qual ela é feita foi comprimido até formar um gás de nêutrons extremamente denso.

Durante este processo de contração, a estrela é um sistema isolado, e o seu momento angular L não pode mudar. Porque o seu momento de inércia se reduz enormemente, a sua velocidade angular aumenta proporcionalmente, até 600-800 revoluções por segundo. A título de comparação, o nosso Sol, que é uma estrela típica, executa cerca de uma revolução por mês.

EXEMPLO 12-9 A Fig. 12-20(a) mostra um estudante novamente sentado num banco que pode girar livremente em torno de um eixo vertical. O estudante, inicialmente em repouso, segura uma roda de bicicleta, cujo aro recebeu uma camada de chumbo, e seu momento de inércia I em torno do eixo central é igual a $1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. A roda está girando com velocidade angular ω_i igual a 3,9 r.p.s.; vista de cima, a rotação tem sentido anti-horário. O seu eixo é vertical e o seu momento angular L , aponta verticalmente para cima. O estudante agora inverte a roda (Fig. 12-20(b)). Como resultado, ele e o banco giram em torno do eixo deste último. Com que velocidade angular e em que sentido gira o estudante? (O momento de inércia I_0 do sistema *estudante + banco + roda* em torno do eixo do banco é igual a $6,8 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.)

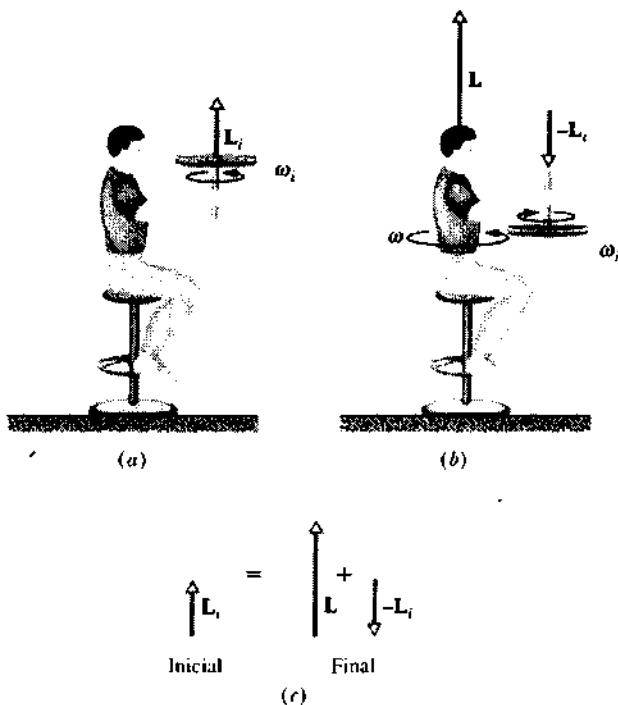


Fig. 12-20 Exemplo 12-9. (a) Um estudante segura uma roda de bicicleta que gira em torno da vertical. (b) O estudante inverte a roda e, assim, começa também a girar. (c) O momento angular total do sistema deve permanecer constante, apesar da inversão.

Solução Não há torque resultante atuando sobre o sistema *estudante + banco + roda* que possa alterar o seu momento angular em torno de qualquer eixo vertical. O momento angular inicial do sistema, L_i , é apenas o da roda de bicicleta. Depois que a roda é invertida, o sistema deve continuar a ter momento angular total de mesma magnitude e sentido.

Depois da inversão, o momento angular da roda é $-L_i$, e o conjunto *estudante + banco* deve adquirir algum momento angular, que chamaremos de L . Assim, como mostra a Fig. 12-20c, temos

$$L_i = L + (-L_i)$$

ou

$$L = 2L_i = I_0\omega_i$$

onde ω é a velocidade angular adquirida pelo estudante, após a inversão da roda. Isto nos dá

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2L_i}{I_0} = \frac{2I_0\omega_i}{I_0} \\ &= \frac{(2)(1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(3.9 \text{ rev/s})}{6.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} \\ &= 1.4 \text{ r.p.s.} \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

Este resultado positivo nos diz que o estudante gira em sentido anti-horário, em torno do eixo do banco, visto de cima. Se ele quiser parar de rodar, só precisa inverter a roda novamente.

Ao invertê-la, terá plena consciência da necessidade de aplicar um torque. Este torque, no entanto, é interno ao sistema *estudante + banco + roda* e, assim, não pode mudar o seu momento angular total.

Entretanto, podemos escolher como nosso sistema apenas o conjunto *estudante + banco*, sendo a roda externa ao novo sistema. De acordo com este ponto de vista, quando o estudante aplicar um torque sobre a roda, esta reagirá exercendo um torque sobre ele, e que será agora um torque externo. A ação deste torque externo é que muda o valor do momento angular do sistema *estudante + banco*, fazendo com que ele gire. O fato de um torque ser considerado externo ou interno depende inteiramente do modo como escolhemos definir o nosso sistema.

EXEMPLO 12-10 Um trapezista deve executar um salto mortal triplo durante o vôo até o seu parceiro, com a duração de $t = 1.87 \text{ s}$. No primeiro e último quartos de revolução, ele está na posição

esticada mostrada na Fig. 12-21, com momento de inércia $I_1 = 19.9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, em torno do seu centro de massa. Durante o restante do vôo, está em posição moderadamente dobrada, com momento de inércia $I_2 = 5.50 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

a. Qual deve ser sua velocidade angular inicial ω_1 , em torno do seu centro de massa?

Solução Ele gira, na posição estendida, um ângulo total $\theta_1 = 0.500$ revoluções num tempo total t_1 , e, na posição dobrada, um ângulo θ_2 no tempo t_2 , dados por

$$t_1 = \frac{\theta_1}{\omega_1}, \quad t_2 = \frac{\theta_2}{\omega_2}, \quad (12-42)$$

onde ω_2 é a sua velocidade angular na posição dobrada. Podemos obter uma expressão para ω_2 , observando que o seu momento angular se conserva durante o vôo:

$$I_2\omega_2 = I_1\omega_1$$

de onde temos

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \omega_1 \quad (12-43)$$

O seu tempo total de vôo é

$$t = t_1 + t_2$$

que, com substituições das Eqs. 12-42 e 12-43, pode ser escrito como

$$t = \frac{\theta_1}{\omega_1} + \frac{\theta_2 I_2}{\omega_1 I_1} = \frac{1}{\omega_1} \left(\theta_1 + \theta_2 \frac{I_2}{I_1} \right) \quad (12-44)$$

Inserindo os dados fornecidos, obtemos

$$1.87 \text{ s} = \frac{1}{\omega_1} \left(0.500 \text{ rev} + 2.50 \text{ rev} \frac{5.50 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{19.9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} \right),$$

de onde encontramos, finalmente,

$$\omega_1 = 0.6369 \text{ r.p.s.} \approx 0.637 \text{ r.p.s.} \quad (\text{Resposta})$$

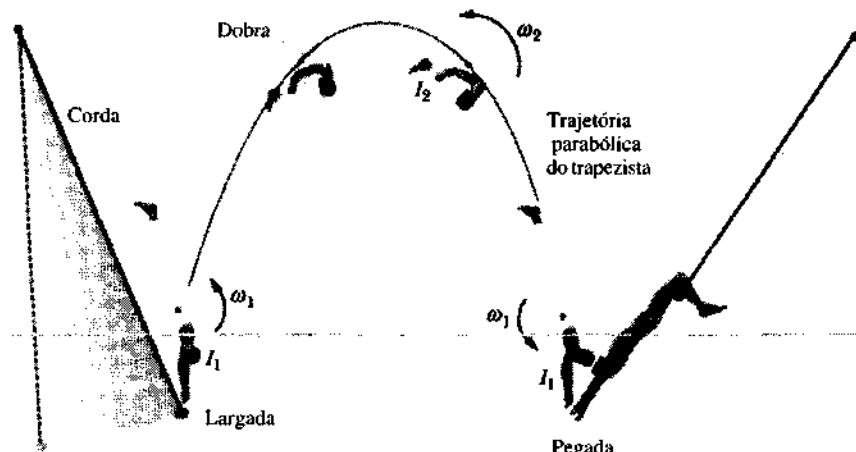


Fig. 12-21 Exemplo 12-10. O salto mortal triplo.

b. Se ele tentar agora um salto mortal quádruplo, com os mesmos valores de ω_i e t , porém dobrando mais o corpo, qual deverá ser o seu momento de inércia I_2 , na posição dobrada?

Solução O ângulo de rotação θ_2 , quando o corpo do trapezista está dobrado, é agora de 3,5 revoluções ($= 4,00 \text{ rev} - 0,500 \text{ rev}$) e a Eq. 12-44 se torna

$$1.87 \text{ s} = \frac{1}{0.6369 \text{ r.p.s.}} \times \left(0.500 \text{ rev} + 3.50 \text{ rev} \frac{I_2}{19.9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} \right),$$

de onde obtemos

$$I_2 = 3.929 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \approx 3.93 \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \quad (\text{Resposta})$$

Este valor menor para I_2 permite uma volta mais rápida durante a posição dobrada e é quase o menor valor possível para um trapezista. Para realizar um salto mortal de quatro e meia voltas, um trapezista teria de aumentar o tempo de vôo ou a velocidade angular inicial, mas qualquer uma dessas alterações tornaria mais difícil a pegada pelo seu parceiro. (Você saberia dizer por quê?)

c. Para o salto quádruplo, qual é o período de rotação T do trapezista (o tempo necessário para realizar uma rotação), durante a posição dobrada?

Solução Primeiramente, encontramos a velocidade angular ω_2 durante a posição dobrada, aplicando a Eq. 12-43:

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{I_1}{I_2} \omega_1 = \frac{19.9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{3.929 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} 0.6369 \text{ r.p.s.} \\ &= 3.226 \text{ r.p.s.} \end{aligned}$$

Determinamos, então, o intervalo de tempo T para uma rotação, fazendo

$$T = \frac{1 \text{ rev}}{\omega_2} = \frac{1 \text{ rev}}{3.226 \text{ r.p.s.}} = 0.310 \text{ s.} \quad (\text{Resposta})$$

Uma das razões por que o salto mortal quádruplo é tão difícil é que a rotação ocorre rápido demais para que o trapezista possa ver claramente o que ocorre à sua volta ou consiga ajustar a sua velocidade angular, alterando o seu momento de inércia durante o vôo.

EXEMPLO 12-11 Quatro hastes finas, cada uma com massa M e comprimento $d = 1,0 \text{ m}$, estão firmemente conectadas formando um sinal de adição: o conjunto gira num plano horizontal, em torno de um eixo vertical que passa pelo seu centro, com velocidade angular $\omega_i = -2,0 \text{ rad/s}$, em sentido horário (veja a Fig. 12-22). Uma bola de lama de massa m e velocidade inicial $v_i = 12 \text{ m/s}$ é atirada sobre o sinal e fica grudada à extremidade de uma das hastes. Seja $M = 3 \text{ m}$. Qual é a velocidade angular final ω_f do sistema sinal de adição + bola de lama, considerando-se que a trajetória inicial desta é cada uma das trajetórias mostradas na Fig. 12-22: trajetória 1 (o contato se dá quando a velocidade da bola é perpendicular à haste), trajetória 2 (contato radial), trajetória 3 (contato perpendicular) e trajetória 4 (o contato se dá num ângulo de 60° com a perpendicular)?

Solução O momento angular total L do sistema em torno do eixo é conservado durante a colisão:

$$L_f = L_i, \quad (12-45)$$

onde os subscritos f e i representam os valores final e inicial. Seja I_+ o momento de inércia do sinal de adição em torno do eixo da haste. Da Tabela 11-2 (f), temos, para as quatro hastes,

$$I_+ = 4 \left(\frac{Md^2}{3} \right)$$

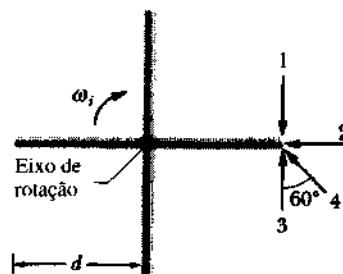


Fig. 12-22 Exemplo 12-11. Vista superior de quatro bastões firmemente unidos que giram em torno de um eixo central. Vêem-se também quatro trajetórias que uma bola de lama pode seguir até grudar num dos bastões.

O momento de inércia da bola de lama em torno do eixo, conforme a bola gira presa ao sinal de adição, é $I_{\text{bol}} = md^2$. Representemos o momento angular inicial (antes do contato) da bola de lama em torno do eixo por ℓ_i , e a velocidade angular final do sistema por ω_f . Usando a relação $L = I\omega$, podemos reescrever a Eq. 12-45 na forma

$$I_+ \omega_f + I_{\text{bol}} \omega_f = I_+ \omega_i + \ell_i,$$

e, em seguida, como

$$(4Md^2) \omega_f + (md^2) \omega_f = (4Md^2) \omega_i + \ell_i. \quad (12-46)$$

Substituindo $M = 3 \text{ m}$ e $\omega_i = -2,0 \text{ rad/s}$ e resolvendo a equação para obter ω_f , encontramos

$$\omega_f = \frac{1}{5md^2} \left(4md^2 (-2 \text{ rad/s}) + \ell_i \right). \quad (12-47)$$

Calculamos a magnitude de ℓ_i para as trajetórias 1 e 3 através da Eq. 12-28, com $r_\perp = d$ e $v = v_i$. Para a trajetória 2, usamos a Eq. 12-28 com $r_\perp = 0$. Para a trajetória 4, usamos a Eq. 12-27, onde $r = d$ e $v_\perp = v_i \cos 60^\circ$. Determinamos, então, o sinal de ℓ_i , verificando como um vetor que dá a posição da bola de lama em relação ao eixo gira em torno deste, à medida que ela se aproxima do sinal de adição: se ele girar em sentido horário, ℓ_i será negativo; se girar em sentido anti-horário, ℓ_i será positivo. Os resultados são:

$$\begin{array}{ll} \text{traj. 1: } \ell_i = -mdv_i; & \text{traj. 2: } \ell_i = 0; \\ \text{traj. 3: } \ell_i = mdv_i; & \text{traj. 4: } \ell_i = mdv_i \cos 60^\circ. \end{array}$$

Onde a velocidade $v_i = 12 \text{ m/s}$. Substituindo esses valores de volta na Eq. 12-47, juntamente com o valor de v_i , encontramos os valores de ω_f :

$$\begin{array}{ll} \text{traj. 1: } -4.0 \text{ rad/s; } & \text{traj. 2: } -1.6 \text{ rad/s;} \\ \text{traj. 3: } 0.80 \text{ rad/s; } & \text{traj. 4: } -0.40 \text{ rad/s.} \end{array}$$

12-10 Precessão de um Giroscópio (Opcional)

Um giroscópio simples consiste de uma roda que é presa a uma haste e está livre para girar em torno do eixo da haste. Se o extremo mais distante da haste de um giroscópio que não esteja girando for colocado sobre um suporte, como na Fig. 12-23a, e o giroscópio for solto, ele cairá, rodando para baixo em torno do suporte. Como a queda envolve uma

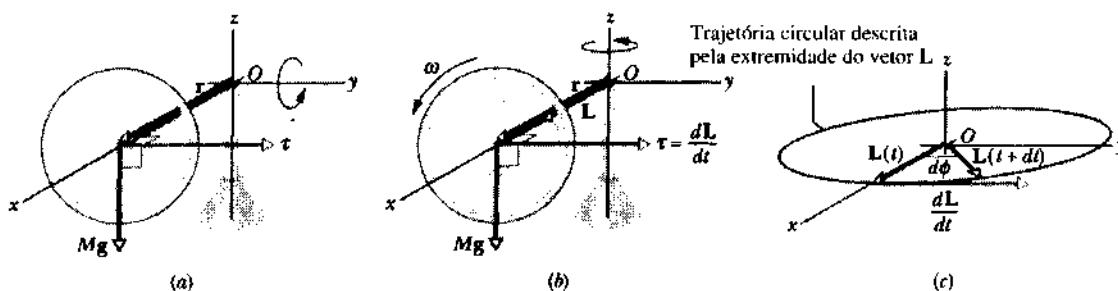


Fig. 12-23 (a) Um giroscópio que não está girando e que tem uma das extremidades do seu eixo apoiada num suporte cai com uma rotação em torno do eixo y , devido ao torque τ . (b) Um giroscópio que gira rapidamente, com momento angular L , precessa em torno do eixo z . (c) A taxa de variação temporal do momento angular, dL/dt , produz a rotação de L em torno de O .

rotação, ela é governada pela segunda lei de Newton na forma angular que, usando a Eq. 12-37, pode ser escrita como

$$\tau = dL/dt. \quad (12-48)$$

Esta equação nos diz que o torque que causa a rotação para baixo (a queda) muda o momento angular L do giroscópio, que inicialmente era igual a zero. O torque τ é devido ao peso Mg do giroscópio, que atua no seu centro de massa (que consideraremos como sendo o centro da roda), com braço de alavanca r relativamente ao suporte situado em O . A magnitude do torque é

$$\tau = Mg r \sin 90^\circ = Mg r \quad (12-49)$$

(pois o ângulo entre Mg e r é igual a 90°), e o seu sentido é mostrado na Fig. 12-23a.

Já um giroscópio que esteja girando rapidamente e seja solto do mesmo modo que o anterior, irá se comportar de modo muito diferente. Inicialmente, ele roda para baixo, ligeiramente, mas logo começa a girar em torno de um eixo vertical que passa através do suporte, executando um movimento denominado **precessão**. Por que o giroscópio que está girando fica suspenso no ar, em vez de cair? A chave para a solução deste mistério está no fato de que, quando o giroscópio é solto, o torque devido a Mg precisa mudar um momento angular inicial que não é mais igual a zero, mas tem um valor finito devido à rotação do giroscópio.

Para compreender como isso leva à precessão, consideremos primeiramente o momento angular L do giroscópio devido à sua rotação. Para simplificar a situação, vamos supor que a velocidade de rotação seja tão grande que o momento angular devido à precessão gradual é desprezível em comparação com L . Suponhamos também que a haste esteja na horizontal quando a precessão tem início (veja a Fig. 12-23b). A magnitude de L é dada pela Eq. 12-50 como

$$L = I\omega, \quad (12-50)$$

onde I é o momento de inércia do giroscópio em torno do seu eixo e ω é a velocidade angular do giroscópio. O vetor L aponta ao longo do eixo, como mostra a Fig. 12-23b. Como L é paralelo a r , o torque τ deve ser perpendicular a L .

De acordo com a Eq. 12-48, o torque τ provoca uma alteração infinitesimal dL no momento angular do giroscópio num intervalo de tempo dt ; isto é,

$$dL = \tau dt. \quad (12-51)$$

Entretanto, para um giroscópio que *gira rapidamente*, a magnitude de L é estabelecida pela Eq. 12-50. Portanto, como o torque atua de forma a alterar L , ele só pode modificar a sua direção e não a sua magnitude.

Da Eq. 12-51, vemos que a direção de dL é a direção de τ , perpendicular a L . O único modo de alterar L na direção de τ , sem alterar sua magnitude, é fazendo L rodar em torno do eixo z , como mostra a Fig. 12-23c; L mantém a sua magnitude, a extremidade do vetor L descreve uma trajetória circular, e τ é sempre tangente a esta trajetória. Como L deve sempre apontar ao longo do eixo do giroscópio, o eixo também deve rodar em torno de z , no sentido de τ . Deste modo, temos a precessão. Como o giroscópio deve obedecer à segunda lei de Newton na forma angular, em resposta a qualquer alteração do seu momento angular inicial ele deve precessar, em vez de simplesmente tombar.

Podemos encontrar a velocidade de precessão Ω usando, primeiramente, as Eqs. 12-49 e 12-51, para obtermos a magnitude de dL :

$$dL = \tau dt = Mg r dt \quad (12-52)$$

Quando L sofre uma alteração dL no intervalo de tempo dt , o eixo e L precessam em torno de z , descrevendo um ângulo infinitesimal $d\phi$. (Na Fig. 12-23c, o ângulo $d\phi$ aparece exagerado para maior clareza.) Com o auxílio das Eqs. 12-50 e 12-52, encontramos que $d\phi$ é dado por

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{Mgr dt}{I\omega}$$

Dividindo esta expressão por dt e fazendo a velocidade $\Omega = d\phi/dt$, obtemos

$$\Omega = \frac{Mg\tau}{I\omega} \quad (\text{velocidade angular de precessão}), \quad (12-53)$$

Este resultado é válido sob a hipótese de que a velocidade de rotação ω é grande. Observe que a velocidade de precessão Ω decresce quando ω aumenta. Note também que não ocorreria precessão, se uma força peso Mg não atuasse no giroscópio, mas como I é uma função de M , a massa se cancela na Eq. 12-53 e, assim, Ω é independente da massa do giroscópio.

A Eq. 12-53 também se aplica se o eixo de um giroscópio que esteja girando fizer um ângulo qualquer com a horizontal. Ela também é válida para um pião que esteja girando, pois este é, essencialmente, um giroscópio que gira fazendo um ângulo com a horizontal.

12-11 Quantização do Momento Angular (Opcional)

Dizemos que uma grandeza física é **quantizada** se ela puder assumir somente certos valores discretos, de tal forma que todos os valores intermediários sejam proibidos. Até agora, já encontramos dois exemplos que apresentam esta característica: a quantização da massa (na Seção 2-9) e a quantização da energia (na Seção 8-9). O momento angular é o nosso terceiro exemplo.

Embora a quantização seja universal, ela se mostra de modo mais marcante apenas nos níveis atômico e subatômico, e é lá que vamos buscar nosso exemplo. Todas as partículas da Física, tais como o elétron, o próton e o píon, possuem valores intrínsecos bem característicos de momento angular, *como se* elas estivessem girando como um pião.

(e, no entanto, não giram). Este momento angular intrínseco é dado pela relação

$$\ell = s \frac{\hbar}{2\pi} \quad (12-54)$$

onde s (denominado *número quântico de spin*) é um inteiro, um semi-inteiro ou zero. A quantidade \hbar que aparece na Eq. 12-54 é a constante de Planck, a constante básica da física quântica.

O número quântico de spin do elétron, por exemplo, é igual a $1/2$, de modo que o seu momento angular intrínseco é

$$\begin{aligned} \ell &= (\frac{1}{2})(6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}) \left(\frac{1}{2\pi} \right) \\ &= 5.28 \times 10^{-35} \text{ J} \cdot \text{s}. \end{aligned}$$

O fato de \hbar ter um valor tão pequeno significa que a quantização do momento angular não é perceptível nem mesmo no menor dos objetos macroscópicos. Do mesmo modo, as quantizações da massa e da energia não podem ser percebidas diretamente pelos nossos sentidos.

Os movimentos orbitais dos elétrons nos átomos — e os dos prótons e nêutrons no núcleo atômico — também são quantizados. As considerações sobre o momento angular ocupam uma posição central no nosso conhecimento acerca da estrutura da matéria nos níveis atômico e subatômico. Sempre que um físico se defronta com uma nova partícula ou estado quântico de um núcleo, átomo ou molécula, a pergunta mais provável que ele irá fazer a si mesmo é: “Qual é o seu momento angular?” Não há nada de surpreendente no fato da constante de Planck — que é a pedra fundamental da estrutura subatômica — ser expressa em unidades de momento angular.

RESUMO

Corpos em Rolamento

Para uma roda de raio R que se move sem deslizar,

$$v_{cm} = \omega R \quad (12-2)$$

onde v_{cm} é a velocidade do centro da roda e ω é a sua velocidade angular em torno do seu centro. Pode-se também descrever o movimento como se a roda executasse uma rotação instantânea em torno de um ponto P do solo, que está em contato com ela. A sua velocidade angular em torno deste ponto é idêntica à sua velocidade em torno do seu centro. Tendo isso em mente, podemos mostrar que a roda possui, ao se mover, energia cinética

$$K = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2, \quad (12-5)$$

onde I_{cm} é o momento de inércia da roda em torno do seu centro.

Análise Usando a Segunda Lei de Newton

O Exemplo 12-4 ilustra a aplicação da segunda lei de Newton, nas formas aplicáveis à translação ($F = Ma_{cm}$) e à rotação ($\tau = I\alpha$), na análise do movimento acelerado de objetos que rolam.

O Vetor Torque

Em três dimensões, o *torque* τ é uma grandeza definida em relação a um ponto fixo (geralmente uma origem) pela relação

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (12-21)$$

onde \mathbf{F} é a força aplicada à partícula e \mathbf{r} é um vetor que dá a posição da partícula em relação a um ponto fixo (ou origem). A magnitude de τ é dada por

$$\tau = rF \sin \phi = rF_{\perp} = r_{\perp}F \quad (12-22, 12-23, 12-24)$$

onde ϕ é o ângulo entre \mathbf{F} e \mathbf{r} , F_{\perp} é a componente de \mathbf{F} perpendicular a \mathbf{r} , e r_{\perp} é a distância perpendicular entre o ponto fixo e a linha de ação de \mathbf{F} . O sentido de τ é dado pela regra da mão direita.

Momento Angular de uma Partícula

O *momento angular* ℓ de uma partícula com momento linear \mathbf{p} , massa m e velocidade linear \mathbf{v} é uma grandeza vetorial definida em relação a um ponto fixo (geralmente a origem) e dada pela relação

$$\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \quad (12-25)$$

A magnitude de ℓ é dada por

$$\ell = rmv \sin \phi \quad (12-26)$$

$$= rp_{\perp} = rmv_{\perp} \quad (12-27)$$

$$= r_{\perp} p = r_{\perp} mv, \quad (12-28)$$

onde ϕ é o ângulo entre \mathbf{r} e \mathbf{p} , p_{\perp} e v_{\perp} são as componentes de \mathbf{p} e \mathbf{v} perpendiculares a \mathbf{r} , e r_{\perp} é a distância perpendicular entre o ponto fixo e a linha de ação de \mathbf{p} . A direção e o sentido de ℓ são dados pela regra da mão direita.

Forma Angular da Segunda Lei de Newton para uma Partícula

A segunda lei de Newton para uma partícula pode ser escrita na forma vetorial angular como

$$\sum \tau = \frac{d\ell}{dt}, \quad (12-30)$$

onde $\sum \tau$ é o torque total que atua sobre a partícula e ℓ é o momento angular da partícula.

Momento Angular de um Sistema de Partículas

O momento angular \mathbf{L} de um sistema de partículas é a soma vetorial dos momentos angulares das partículas individuais:

$$\mathbf{L} = \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_n = \sum_{i=1}^n \ell_i. \quad (12-35)$$

A taxa de variação temporal do momento angular é igual à soma dos torques externos que atuam sobre o sistema (os torques devidos a inter-

ações das partículas do sistema com partículas externas a ele). A relação exata é

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (\text{sistema de partículas}) \quad (12-37)$$

Momento Angular de um Corpo Rígido

Para um corpo rígido que está em rotação em torno de um eixo fixo, a componente do momento angular paralela ao eixo de rotação é

$$L = I\omega \quad (\text{corpo rígido, eixo fixo}) \quad (12-39)$$

Conservação do Momento Angular

O momento angular \mathbf{L} de um sistema permanece constante, se o torque externo total que atua sobre o sistema for igual a zero:

$$\mathbf{L} = \text{uma constante} \quad (\text{sistema isolado}). \quad (12-40)$$

Esta é a lei da conservação do momento angular. É uma das leis de conservação fundamentais da natureza, tendo sido verificada até mesmo em situações envolvendo partículas dotadas de altas velocidades ou de dimensões subatômicas, para as quais as leis de Newton não se aplicam.

Precessão de um Pião

A precessão de um pião pode ser analisada em termos da Eq. 12-37. A velocidade de precessão do pião, Ω , é dada por

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega}. \quad (12-53)$$

Quantização do Momento Angular

O momento angular é uma grandeza quantizada, ocorrendo na natureza apenas em múltiplos inteiros ou semi-inteiros de $h/2\pi$, onde h é a constante de Planck.

QUESTIONÁRIO

1. Uma bala de canhão esférica e uma bolinha de gude rolam num plano inclinado, partindo do repouso. Qual das duas chega primeiro à base do plano?

2. Uma lata cilíndrica cheia de carne e outra idêntica cheia de água rolam num plano inclinado. Compare suas acelerações angulares e lineares. Explique as diferenças.

3. Um cilindro sólido de madeira rola em dois planos inclinados de mesma altura, mas com ângulos de inclinação diferentes. A velocidade com que ele chega à base do plano é a mesma em cada caso? Ele demora mais tempo para rolar um dos planos do que o outro? Explique suas respostas.

4. Um cilindro sólido de latão e um de madeira têm o mesmo raio e massa idêntica, sendo que o de madeira é mais longo. Suponha que você os solte ao mesmo tempo, do alto de um plano inclinado. Qual deles alcançará a base primeiro? Suponha que agora os cilindros tenham o mesmo comprimento (e o mesmo raio) e que as massas sejam tornadas iguais, fazendo-se um furo ao longo do eixo do cilindro de latão. Qual dos dois cilindros chegará primeiro, desta vez? Explique as suas respostas. Suponha que os cilindros rolem sem deslizar.

5. Rute e Rogério andam de bicicleta, na mesma velocidade. As rodas da bicicleta de Rute possuem diâmetro um pouco maior do que as da bicicleta de Rogério. Qual é a comparação que se pode fazer entre as velocidades angulares das rodas de cada uma? O que se pode dizer sobre as velocidades das partes superiores dessas rodas?

6. Se o velocímetro de um carro é calibrado de forma a registrar um valor de velocidade linear proporcional à velocidade angular das rodas tra-

seiras, é necessário corrigir a leitura quando se usam pneus de maior diâmetro externo (como, por exemplo, pneus para neve)?

7. Um tambor cilíndrico é empurrado pela parte de cima por meio de uma tábua. Partindo da posição inicial mostrada na Fig. 12-24, ele rola para a frente uma distância $L/2$, igual à metade do comprimento da tábua. Não ocorre deslizamento em qualquer dos pontos de contato. Onde está a tábua agora? Qual a distância percorrida pela mulher?



Fig. 12-24 Questão 7.

8. Dois discos pesados estão conectados por uma haste curta de raio bem menor do que o raio deles. Este sistema é colocado sobre uma rampa de modo que os discos fiquem fora da superfície da rampa, como mostra a Fig. 12-25. O sistema rola pela rampa sem deslizar. (a) Perto da base desta, os discos tocam a mesa horizontal e o sistema passa a mover-se com uma velocidade translacional muito maior. Explique por quê. (b) Se este sistema competisse com um aro (de qualquer raio), qual dos dois chegaria primeiro à base? (c) Mostre que o sistema tem $\beta > 1$, onde β é o parâmetro de momento de inércia da Tabela 12-1.



Fig. 12-25 Questão 8.

9. Um iô-iô chega ao fim do seu fio e, então, sobe novamente. O sentido de sua rotação é invertido quando ele chega ao fim do fio? Explique sua resposta.

10. Um iô-iô está em repouso sobre uma mesa horizontal e pode rolar livremente (Fig. 12-26). Se uma força horizontal F_1 puxar o fio, para onde ele rolará? O que acontece quando a força F_2 é aplicada (a sua linha de ação passa através do ponto de contato entre o iô-iô e a mesa)? Se o fio for puxado verticalmente pela força F_3 , o que acontecerá?

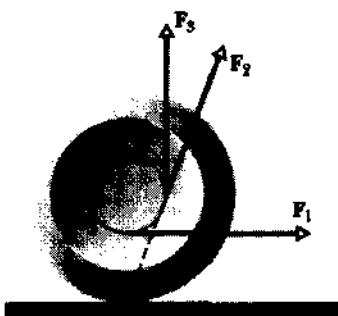


Fig. 12-26 Questão 10.

11. Um carro com tração traseira acelera rapidamente, partindo do repouso, e o motorista observa que o carro "levanta o nariz". Por que isto acontece? Isto aconteceria com um carro que tivesse tração dianteira?

12. Os parafusos que prendem os motores dos aviões a jato à estrutura foram projetados para se partirem se o motor (que gira rapidamente) emperrar de repente devido a alguma falha. Por que esses "fusíveis estruturais" são utilizados?

13. Existe alguma vantagem em se colocar em rotação as rodas do trem de aterrissagem de um avião pouco antes do pouso? Se existe, como você poderia determinar a velocidade e o sentido da rotação mais adequados?

14. Um jogador de hóquei, num momento de irritação, arremessa um disco sobre o gelo. Este gira em torno do seu centro de massa, enquanto desliza, e finalmente pára devido à ação do atrito. Por que o seu movimento de rotação deve cessar exatamente no mesmo instante em que o seu centro de massa chega ao repouso?

15. Quando a velocidade angular ω de um objeto aumenta, o seu momento angular pode também aumentar ou não. Dê um exemplo de cada um desses casos.

16. Um estudante fica de pé sobre uma mesa que gira com velocidade angular ω e segura dois halteres idênticos com os braços abertos. Sem mover mais nada, ele solta os dois halteres. Que alteração, se é que há

alguma, sofre a velocidade angular do estudante? O momento angular é conservado? Explique suas respostas.

17. Um helicóptero perde o controle com as pás do rotor girando. Por que o corpo do helicóptero gira em sentido oposto ao das pás?

18. Se toda a população do mundo se mudasse para a Antártida, isto afetaria a duração do dia? Em caso afirmativo, diga como.

19. Um prato giratório circular roda com velocidade constante em torno de um eixo vertical. Não há atrito nem torque externo. Um recipiente circular está sobre o prato e gira junto com ele (veja a Fig. 12-27). O fundo do recipiente está coberto por uma camada de gelo de espessura uniforme que, obviamente, gira com ela. Suponha agora que o gelo se derrete, mas que nenhuma porção de água escape do recipiente. Pode-se dizer que a velocidade angular é agora maior do que a velocidade angular original? Justifique sua resposta.

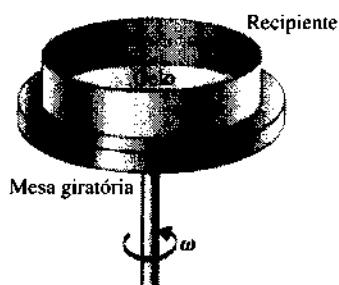


Fig. 12-27 Questão 19.

20. Você deseja distinguir um ovo cru de um cozido duro e, para isso, faz cada um deles girar sobre uma mesa. Explique como esta distinção pode ser feita. Explique também por que, se você parar um ovo cru que está girando tocando-o rapidamente no topo, ele volta a girar?

21. A Fig. 12-28a mostra um acrobata saltando numa cama elástica com momento angular zero. Ele pode, manobrando com seu corpo, aterrissar de costas, como na Fig. 12-28b? É interessante notar que 38% dos treinadores e 34% de uma amostra de físicos, a quem foi feita esta pergunta, tenham dado uma resposta errada. O que você acha? (Em "Do Springboard Divers Violate Angular Momentum Conservation?", de Cliff Frohlich, *American Journal of Physics*, julho de 1979.)

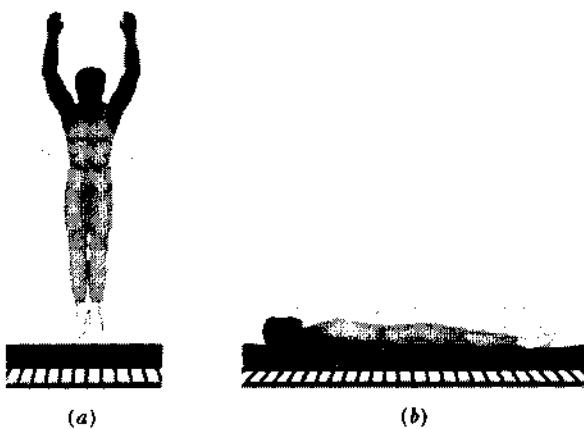


Fig. 12-28 Questão 21.

22. Quando se está num balanço, é possível fazer com que ele execute um círculo completo em torno do seu suporte? Suponha (se desejar) que o assento do balanço esteja preso ao suporte por meio de barras rígidas em vez de uma corda ou corrente. Explique sua resposta.

23. Uma roda de grande massa e que esteja girando pode ser usada para estabilizar um navio. Se ela for montada com seu eixo de rotação em

ângulo reto com o convés, qual será o seu efeito quando o navio tender a adernar?

24. Por que um zagueiro de futebol americano precisa fazer a bola girar rapidamente para assegurar-se de que ela se manterá na trajetória pretendida durante um passe longo?

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

Seção 12-1 Rolamento

1E. Um tubo de paredes finas rola pelo chão. Qual é a razão entre as suas energias cinéticas translacional e rotacional, em torno de um eixo paralelo ao seu comprimento e que passa pelo seu centro de massa?

2E. Um aro de 140 kg rola sobre um piso horizontal de modo que o seu centro de massa possui uma velocidade de 0,150 m/s. Qual é o trabalho que deve ser feito sobre o aro para fazê-lo parar?

3E. Os pneus de um automóvel, que trafega a 80,0 km/h, têm 75,0 cm de diâmetro. (a) Qual é a velocidade angular dos pneus em torno do eixo? (b) Se o carro chegar ao repouso, uniformemente, após 30,0 voltas dos pneus (sem derrapar), qual será a aceleração angular das rodas? (c) Qual é a distância percorrida pelo carro durante o período de frenagem?

4E. Um automóvel de massa igual a 1.000 kg possui quatro rodas de 10 kg cada. Quando o carro está em movimento, qual é a fração da sua energia cinética total devida à rotação das rodas em torno de seus eixos? Suponha que os momentos de inércia das rodas sejam idênticos aos de discos uniformes de mesma massa e tamanho. Explique por que não é necessário saber o raio das rodas.

5E. Um automóvel tem massa total de 1.700 kg. Ele é acelerado, a partir do repouso, até alcançar 40 km/h, em 10 s. Suponha que cada roda seja um disco uniforme de 32 kg. Determine, ao fim do intervalo de 10 s, (a) a energia cinética de rotação de cada roda em torno do seu eixo, (b) a energia cinética total de cada roda e (c) a energia cinética total do automóvel.

6E. Uma esfera uniforme rola num plano inclinado. (a) Qual deve ser o ângulo de inclinação para que a aceleração linear do centro da esfera seja igual a $0,10g$? (b) Com este ângulo, qual seria a aceleração de um bloco que deslizasse pelo plano inclinado sem atrito?

7E. Uma esfera sólida de peso igual a 35,58 N sobe rolando um plano inclinado, cujo ângulo de inclinação é igual a 30° . Na base do plano, o centro de massa da esfera tem uma velocidade linear de 4,88 m/s. (a) Qual é a energia cinética da esfera na base do plano inclinado? (b) Qual é a distância que a esfera percorre ao subir o plano? (c) A resposta ao item (b) depende do peso da esfera?

8E. Uma roda de raio igual a 0,250 m que, inicialmente, se move a 43,0 m/s, rola 225 m até parar. Calcule (a) sua aceleração linear e (b) sua aceleração angular. (c) Sendo o momento de inércia da roda igual a $0,155 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, calcule o torque exercido pelo atrito sobre a roda, em torno do seu centro.

9E. Considere um pneu de 66 cm de diâmetro de um carro que trafega a 80 km/h, numa estrada plana, no sentido positivo de x . Sob o ponto de vista de um passageiro no interior do carro, quais são a velocidade linear e o módulo da aceleração linear (a) do centro da roda, (b) de um ponto situado na parte superior do pneu e (c) de um ponto na base do pneu? (d) Repita os itens de (a) a (c) para o caso de um observador estacionário situado à beira da estrada.

10P. Um corpo de raio R e massa m rola horizontalmente, sem deslizar, com velocidade v . Ao encontrar uma elevação, ele a sobe rolando até uma altura máxima h . (a) Se $h = 3v^2/4g$, qual é o momento de inércia do corpo? (b) Qual deve ser a forma deste corpo?

11P. Uma esfera homogênea, inicialmente em repouso, rola sem deslizar, partindo da extremidade superior do trilho mostrado na Fig. 12-29, saindo pela extremidade da direita. Se $H = 60 \text{ m}$, $h = 20 \text{ m}$ e o extremo direito do trilho é horizontal, determine a distância horizontal do ponto A até o ponto que a esfera toca o chão.



Fig. 12-29 Problema 11.

12P. Uma pequena esfera, de raio r e massa m , rola sem deslizar no interior de um hemisfério fixo, de raio R e que possui um eixo de simetria vertical. A esfera inicia o seu movimento no alto do hemisfério, partindo do repouso. (a) Qual é a sua energia cinética no fundo do hemisfério? (b) Qual a fração dessa energia que está associada a uma rotação em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa? (c) Qual é a força normal exercida pela esfera pequena sobre o hemisfério, quando ela está no fundo, se $r \ll R$?

13P. Uma bolinha de gude sólida de massa m e raio r rola sem deslizar sobre o trilho mostrado na Fig. 12-30, tendo partido do repouso em algum ponto do trecho retificado do trilho. (a) Qual é a altura mínima h , medida a partir da base do trilho, de onde devemos soltar a bolinha para que ela não perca contato com o trilho na parte mais alta da curva? (O raio da curva é R ; considere $R \gg r$). (b) Se a bolinha for solta de uma altura igual a $6R$ acima da base do trilho, qual será a componente horizontal da força que atua sobre ela no ponto Q ?

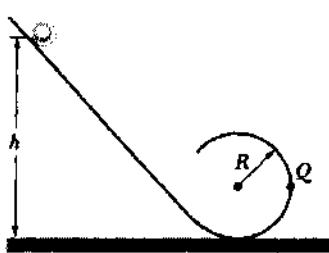


Fig. 12-30 Problema 13.

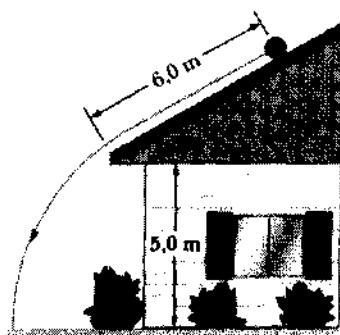


Fig. 12-31 Problema 14.

14P. Um cilindro sólido, de raio igual a 10 cm e massa de 12 kg, parte do repouso e rola sem deslizar uma distância de 6,0 m, descendo o telhado de uma casa, cuja inclinação é igual a 30° . (Veja a Fig. 12-31) (a) Qual é a velocidade angular do cilindro, em torno do seu centro, quando ele sai do telhado? (b) A parede externa da casa tem 5,0 m de altura. A que distância da beira do telhado o cilindro atinge o solo?

15P*. Um aparelho para testar a resistência dos pneus de automóvel numa derrapagem é construído como mostra a Fig. 12-32. Inicialmente, o pneu está parado, preso a uma estrutura de massa desprezível pivotada no ponto *B*. O momento de inércia da roda em torno do seu eixo é de $0,750 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, sua massa é de 15,0 kg e o seu raio é de 0,300 m. O pneu pode rodar livremente em torno do ponto *A*. Ele é colocado sobre a superfície de uma esteira rolante que se move com velocidade superficial de 12,0 m/s. (a) Se o coeficiente de atrito cinético entre o pneu e a esteira for igual a 0,60 e se o pneu não balançar, qual será o tempo necessário para que a roda alcance sua velocidade angular final? (b) Qual será o comprimento da marca de derrapagem sobre a superfície da esteira?

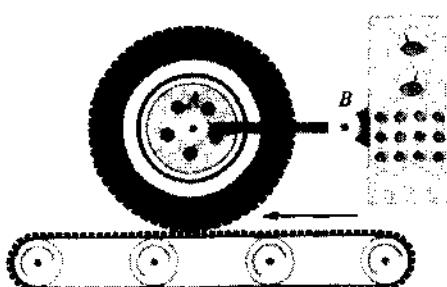


Fig. 12-32 Problema 15.

Seção 12-2 O Ioiô

16E. Um ioiô possui momento de inércia de $950 \text{ g}\cdot\text{cm}^2$ e massa de 120 g. O raio do seu eixo é de 3,2 mm e o comprimento do fio é de 120 cm. Ele rola até o final do fio, partindo do repouso. (a) Qual é a sua aceleração? (b) Quanto tempo ele leva para chegar ao final do fio? Quando chega ao final do fio, quais são (c) sua velocidade linear, (d) sua energia cinética de translação, (e) sua energia cinética de rotação e (f) sua velocidade angular?

17P. Suponha que o ioiô do Exercício 16, em vez de rolar a partir do repouso, fosse atirado para baixo com velocidade inicial de 1,3 m/s. Qual seria a sua velocidade angular quando chegasse ao final do fio?

Seção 12-3 Torque Revisitado

18E. Sendo $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ e $\mathbf{F} = F_i\mathbf{i} + F_j\mathbf{j} + F_k\mathbf{k}$, mostre que o torque $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ é dado por

$$\tau = (yF_z - zF_y)\mathbf{i} + (zF_x - xF_z)\mathbf{j} + (xF_y - yF_x)\mathbf{k}$$

19E. Mostre que, se \mathbf{r} e \mathbf{F} estão num dado plano, o torque $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ não possui componente naquele plano.

20E. Quais são o módulo, a direção e o sentido do torque em torno da origem que a força \mathbf{F} exerce sobre uma ameixa de coordenadas $(-2,0 \text{ m}; 0; 4,0 \text{ m})$, sendo que a única componente de \mathbf{F} é (a) $F_x = 6,0 \text{ N}$, (b) $F_y = -6,0 \text{ N}$, (c) $F_z = 6,0 \text{ N}$ e (d) $F_z = -6,0 \text{ N}$?

21E. Quais são o módulo, a direção e o sentido do torque em torno da origem exercido sobre uma partícula de coordenadas $(0; -4,0 \text{ m}; 3,0 \text{ m})$, pela força (a) \mathbf{F}_1 , de componentes $F_{1x} = 2,0 \text{ N}$, $F_{1y} = F_{1z} = 0$, e (b) \mathbf{F}_2 , de componentes $F_{2x} = 0$, $F_{2y} = 2,0 \text{ N}$ e $F_{2z} = 4,0 \text{ N}$?

22P. A força $\mathbf{F} = (2,0 \text{ N})\mathbf{i} - (3,0 \text{ N})\mathbf{k}$ atua sobre uma pedrinha cujo vetor posição é $\mathbf{r} = (0,50 \text{ m})\mathbf{j} - (2,0 \text{ m})\mathbf{k}$, em relação à origem. Qual é o torque resultante exercido sobre a pedrinha em torno (a) da origem e (b) de um ponto de coordenadas $(2,0 \text{ m}; 0; -3,0 \text{ m})$?

23P. Qual é o torque em torno da origem exercido sobre um grão de areia situado nas coordenadas $(3,0 \text{ m}; -2,0 \text{ m}; 4,0 \text{ m})$ devido (a) à força $\mathbf{F}_1 = (3,0 \text{ N})\mathbf{i} - (4,0 \text{ N})\mathbf{j} + (5,0 \text{ N})\mathbf{k}$, (b) à força $\mathbf{F}_2 = (-3,0 \text{ N})\mathbf{i} - (4,0 \text{ N})\mathbf{j} - (5,0 \text{ N})\mathbf{k}$ e (c) à resultante de \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 ? (d) Repita (c) para um ponto de coordenadas $(3,0 \text{ m}; 2,0 \text{ m}; 4,0 \text{ m})$ em vez da origem.

24P. Qual é o torque resultante, em torno da origem, aplicado a uma pulga de coordenadas $(0; -4,0 \text{ m}; 5,0 \text{ m})$ pelas forças $\mathbf{F}_1 = (3,0 \text{ N})\mathbf{k}$ e $\mathbf{F}_2 = (-2,0 \text{ N})\mathbf{j}$?

25P. A força $\mathbf{F} = (-8,0 \text{ N})\mathbf{i} + (6,0 \text{ N})\mathbf{j}$ atua sobre uma partícula cujo vetor posição é $\mathbf{r} = (3,0 \text{ m})\mathbf{i} + (4,0 \text{ m})\mathbf{j}$. Quais são (a) o torque aplicado à partícula, em torno da origem e (b) o ângulo entre \mathbf{r} e \mathbf{F} ?

Seção 12-4 Momento Angular

26E. Um avião de 1.200 kg voa em linha reta a uma velocidade de 80 m/s, numa altitude de 1,3 km. Qual é o módulo do seu momento angular em relação a um ponto situado no solo, diretamente abaixo da trajetória do avião?

27E. Dois objetos estão se movendo como mostra a Fig. 12-33. Qual é o seu momento angular total em torno do ponto *O*?

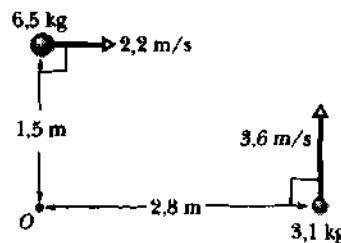


Fig. 12-33 Exercício 27.

28E. Uma partícula *P*, de massa igual a 2,0 kg, tem vetor posição $\mathbf{r} (r = 3,0 \text{ m})$ e velocidade $\mathbf{v} (v = 4,0 \text{ m/s})$, como mostra a Fig. 12-34. Sobre ela atua uma força $\mathbf{F} (F = 2,0 \text{ N})$. Todos os três vetores estão no plano xy . Quais são (a) o momento angular da partícula e (b) o torque exercido sobre ela, em torno da origem?

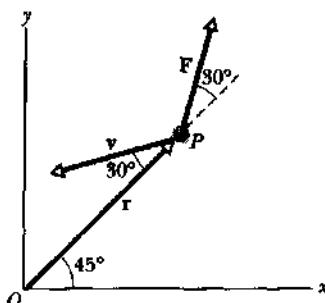


Fig. 12-34 Exercício 28.

29E. Sendo dados r , v e ϕ , podemos calcular o momento angular de uma partícula aplicando a Eq. 12-26. Entretanto, às vezes temos, em vez disso, as componentes (x, y, z) de r e (v_x, v_y, v_z) de v . (a) Mostre que as componentes de ℓ ao longo dos eixos x , y e z são dadas por

$$\ell_x = m(yv_z - zv_y),$$

$$\ell_y = m(zv_x - xv_z)$$

$$\ell_z = m(xv_y - yv_x)$$

(b) Mostre que, se a partícula se mover apenas no plano xy , o vetor momento angular possuirá apenas a componente z .

30E. Num certo instante de tempo, o vetor posição, medido em metros, de um objeto de massa igual a 0,25 kg, é $\mathbf{r} = 2.0\mathbf{i} - 2.0\mathbf{k}$. Naquele instante, a velocidade do objeto, em metros por segundo, é $\mathbf{v} = -5.0\mathbf{i} + 5.0\mathbf{k}$, e a força que atua sobre ele, em Newtons, é $\mathbf{F} = 4.0\mathbf{j}$. (a) Qual é o momento angular do objeto em torno da origem? (b) Qual é o torque que atua sobre ele? (Sugestão: Veja os Exercícios 18 e 29.)

31P. Calcule o momento angular, em torno do centro da Terra, de uma pessoa de 84 kg que esteja sobre o equador.

32P. Mostre que o momento angular, em torno de um ponto qualquer, de uma única partícula que se move com velocidade constante, permanece invariável durante todo o movimento.

33P. Duas partículas, cada uma com massa m e velocidade v , movem-se em sentidos opostos ao longo de linhas paralelas, separadas por uma distância d . Encontre uma expressão, em termos de m , v e d , para o momento angular total do sistema em torno de uma origem qualquer.

34P. Um objeto de 2,0 kg se move num plano com velocidade de componentes $v_x = 30 \text{ m/s}$ e $v_y = 60 \text{ m/s}$, ao passar pelo ponto $(x, y) = (3,0; -4,0) \text{ m}$. (a) Qual é o seu momento angular em relação à origem nesse instante? (b) Qual é o seu momento angular em relação ao ponto $(-2,0; -2,0)$ nesse mesmo instante?

35P. (a) Use os dados fornecidos nos apêndices para calcular o momento angular total de todos os planetas devido às suas revoluções em torno do Sol. (b) Que fração desse momento angular está associada ao planeta Júpiter?

Seção 12-5 Segunda Lei de Newton na Forma Angular

36E. Uma partícula de 3,0 kg está nas coordenadas $x = 3,0 \text{ m}$, $y = 8,0 \text{ m}$, com velocidade $\mathbf{v} = (5,0 \text{ m/s})\mathbf{i} - (6,0 \text{ m/s})\mathbf{j}$. Sobre ela atua uma força de 7,0 N que aponta no sentido negativo de x . (a) Qual é o momento angular da partícula? (b) Qual é o torque que atua sobre ela? (c) Qual é a taxa de variação do seu momento angular, em relação ao tempo?

37E. Uma partícula sofre a ação de dois torques em torno da origem: τ_1 tem módulo igual a 2,0 N·m e aponta no sentido crescente de x , e τ_2 tem

módulo de 4 N·m e aponta no sentido decrescente de y . Quais são o módulo, a direção e o sentido de $d\ell/dt$, onde ℓ é o momento angular da partícula?

38E. Qual é o torque, em torno da origem, que atua sobre uma partícula que se move no plano xy , se esta possuir os seguintes valores de momento angular em torno da origem:

$$(a) -4,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s},$$

$$(b) -4,0/t^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s},$$

$$(c) -4,0\sqrt{t} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s},$$

$$(d) -4,0/t^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

39E. Um carro de brinquedo de 3,0 kg move-se sobre o eixo x com velocidade $v = -2,0^3 \text{ m/s}$ ao longo daquele eixo. Para $t > 0$, quais são (a) o momento angular do carro e (b) o torque que atua sobre ele, ambos em relação à origem? (c) Repita (a) e (b) para um ponto de coordenadas $(2,0 \text{ m}; 5,0 \text{ m}; 0)$, em vez da origem (d) Repita (a) e (b) para um ponto de coordenadas $(2,0 \text{ m}; -5,0 \text{ m}; 0)$, em vez da origem.

40P. No instante $t = 0$, uma partícula de 2,0 kg tem vetor posição $\mathbf{r} = (4,0 \text{ m})\mathbf{i} - (2,0 \text{ m})\mathbf{j}$, relativamente à origem. Sua velocidade é dada por $\mathbf{v} = (-6,0t^3 \text{ m/s})\mathbf{i} + (3,0 \text{ m/s})\mathbf{j}$. Relativamente à origem, e para $t > 0$, quais são (a) o momento angular da partícula e (b) o torque que atua sobre ela? (c) Repita (a) e (b) para um ponto de coordenadas $(-2,0 \text{ m}; -3,0 \text{ m}; 0)$, em vez da origem.

41P. Um projétil de massa m é atirado do chão com velocidade inicial v_0 e a um ângulo inicial θ_0 , acima da horizontal. (a) Encontre uma expressão para o seu momento angular em torno do ponto de lançamento e como uma função do tempo. (b) Determine a taxa de variação do momento angular com o tempo. (c) Calcule $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ diretamente e compare o resultado com (b). Por que os resultados devem ser idênticos?

Seção 12-7 Momento Angular de um Corpo Rígido que Gira em Torno de um Eixo Fixo

42E. Um disco de lixa com momento de inércia igual a $1,2 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ é preso a uma furadeira elétrica cujo motor desenvolve um torque de 16 N·m. Determine (a) o momento angular e (b) a velocidade angular do disco, 33 ms depois que o motor é ligado.

43E. O momento angular de um volante, que possui momento de inércia igual a $0,140 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, decresce de 3,00 para $0,800 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ em 1,50 s. (a) Qual é o torque médio que atua sobre o volante durante esse período? (b) Supondo que a aceleração angular seja uniforme, qual foi o ângulo girado pelo volante? (c) Qual o valor do trabalho realizado sobre ele? (d) Qual é a sua potência média?

44E. Três partículas, cada uma de massa m , são presas umas às outras e a um eixo de rotação por três cordões sem massa, cada um de comprimento l , como mostra a Fig. 12-35. O conjunto gira em torno do eixo de rotação em O com velocidade angular ω , de tal forma que as partículas

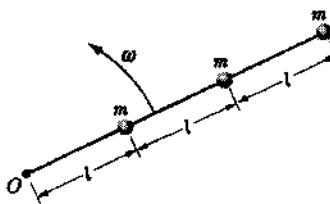


Fig. 12-35 Exercício 44.

permanecem numa linha reta. Quais são, em termos de m , l e ω e relativamente ao ponto O , (a) o momento de inércia do conjunto, (b) o momento angular da partícula do meio e (c) o momento angular total das três partículas?

45E. Uma barra uniforme gira num plano horizontal, em torno de um eixo vertical que passa por uma de suas extremidades. A barra tem 6,00 m de comprimento, pesa 10,0 N e gira a 240 r.p.m., em sentido horário, vista de cima. Calcule (a) o momento de inércia da barra em torno do eixo de rotação e (b) o momento angular da barra.

46P. As rodas A e B da Fig. 12-36 estão conectadas por uma correia que não desliza. O raio da roda B é três vezes maior do que o da A. Qual seria a razão entre os momentos de inércia I_A/I_B , se (a) ambas tivessem o mesmo momento angular e (b) ambas tivessem a mesma energia cinética de rotação?

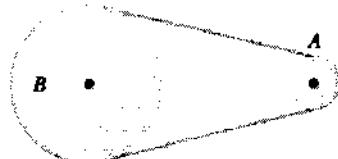


Fig. 12-36 Problema 46.

47P. Uma força impulsiva $F(t)$ atua durante um curto intervalo de tempo Δt sobre um corpo rígido que possui momento de inércia I e que está girando. Mostre que

$$\int \tau dt = \bar{F}R(\Delta t) = I(\omega_f - \omega_i)$$

onde R é o braço de alavanca da força, \bar{F} é o valor médio da força, durante o tempo em que ela atua sobre o corpo, e ω_i e ω_f são as velocidades angulares do corpo imediatamente antes e depois que a força atua. [A grandeza $\int \tau dt = \bar{F}R(\Delta t)$ é denominada *impulso angular*, em analogia com $\bar{F}\Delta t$, o impulso linear.]

48P*. Dois cilindros de raios R_1 e R_2 e momentos de inércia I_1 e I_2 , respectivamente, são sustentados por eixos perpendiculares ao plano da Fig. 12-37. O cilindro grande roda inicialmente com velocidade angular ω_0 . O cilindro menor é empurrado para a direita até tocar o maior, e começa a girar pela ação da força de atrito entre os dois. Finalmente, o deslizamento cessa e os dois giram com velocidades constantes, em sentidos opostos. Determine a velocidade angular final ω_2 do cilindro menor, em termos de I_1 , I_2 , R_1 , R_2 e ω_0 . [Sugestão: Nem o momento angular, nem a energia cinética são conservados. Aplique a equação do impulso angular apresentada no Problema 47.]

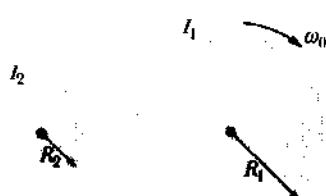


Fig. 12-37 Problema 48.

49P*. Um jogador de boliche principiante joga uma bola de massa M e raio $R = 11$ cm na pista, com velocidade inicial $v_0 = 8,5$ m/s. A bola é arremessada de tal maneira que desliza uma certa distância antes de começar a rolar. Ela não está girando quando atinge a pista, sendo o seu movimento puramente translacional. O coeficiente de atrito cinético entre

ela e a pista é igual a 0,21. (a) Por quanto tempo a bola desliza? (Sugestão: Enquanto ela desliza, sua velocidade v diminui e a angular ω aumenta até que o deslizamento cessa e ela começa a rolar.) (b) Qual a distância que ela desliza na pista? (c) Quantas revoluções faz antes de começar a rolar? (d) A que velocidade está se movendo quando começa a rolar? (e) A resposta ao item (d) depende de M , R ou v_0 ? Explique.

Seção 12-9 Conservação do Momento Angular: Alguns Exemplos

50E. O rotor de um motor elétrico tem momento de inércia $I_m = 2,0 \times 10^{-4}$ kg·m² em torno do seu eixo central. O motor é usado para mudar a orientação da sonda espacial na qual está instalado. O eixo do motor é montado paralelamente ao eixo da sonda, que tem momento de inércia $I_s = 12$ kg·m² em torno do seu eixo. Calcule o número de revoluções do rotor necessárias para fazer a sonda girar um ângulo de 30° em torno do seu eixo.

51E. Um homem está de pé sobre uma plataforma sem atrito que gira com velocidade angular de 1,2 r.p.s.; seus braços estão abertos e ele segura um peso em cada mão. Nesta posição, o momento de inércia do sistema composto pelo homem, os pesos e a plataforma é igual a 6,0 kg·m². Se, ao mover os pesos, o homem fizer o momento de inércia do sistema diminuir para 2,0 kg·m², (a) qual será a velocidade angular da plataforma e (b) qual será a razão entre a nova energia cinética do sistema e o seu valor original? (c) O que forneceu a energia cinética adicional?

52E. Dois discos são montados em mancais quase sem atrito, sobre um mesmo eixo e podem ser aproximados de modo a se acoparem e girar como um disco único. (a) O primeiro disco, com momento de inércia de 3,3 kg·m², é posto para girar a 450 r.p.m. O segundo, com momento de inércia de 6,6 kg·m², a 900 r.p.m., no mesmo sentido do primeiro. Eles são, então, acoplados. Qual é a sua velocidade angular após o acoplamento? (b) Se o segundo disco girar a 900 r.p.m., em sentido oposto ao do primeiro, qual será a velocidade angular após o acoplamento?

53E. Uma roda gira livremente com velocidade angular de 800 r.p.m., num eixo cujo momento de inércia é desprezível. Uma segunda roda, inicialmente em repouso e que possui o dobro do momento de inércia da primeira, é subitamente acoplada ao mesmo eixo. (a) Qual a velocidade angular do conjunto formado pelo eixo e as duas rodas? (b) Que fração da energia cinética rotacional original é perdida?

54E. O momento de inércia de uma estrela girando que está em colapso cai a um terço do seu valor inicial. Qual é a razão entre a nova energia cinética de rotação e o valor inicial?

55E. Suponha que o combustível nuclear do Sol se extinga e ele, subitamente, entre em colapso formando um tipo de estrela denominada anã branca, com um diâmetro igual ao da Terra. Supondo que não houvesse perda de massa, qual seria o novo período de rotação do Sol (tempo necessário para uma rotação), que atualmente é de cerca de 25 dias? Suponha que o Sol e a anã branca sejam esferas sólidas uniformes.

56E. Num playground, há um pequeno carrossel de 1,20 m de raio e massa igual a 180 kg. Seu raio de giro (veja o Problema 58 do Cap. 11) é igual a 91,0 cm. Uma criança, de massa igual a 44,0 kg, corre a uma velocidade de 3,00 m/s, numa trajetória tangente à borda do carrossel, que inicialmente está em repouso, e pula sobre ele. Despreze qualquer atrito entre os mancais e o eixo do carrossel. Calcule (a) o momento de inércia do carrossel em torno do seu eixo de rotação; (b) o momento angular da criança, enquanto corre em torno do eixo de rotação do carrossel; e (c) a velocidade angular do carrossel e da criança depois que esta sobe no brinquedo.

57P. Uma roda de bicicleta com centro e raios de massa desprezível tem um aro fino de raio igual a 0,35 m e peso de 37,19 N; ela gira no seu eixo com atrito desprezível. Um homem segura a roda acima da cabeça com o eixo na vertical, de pé sobre uma mesa giratória que pode rodar livremente, sem atrito; a roda gira em sentido horário, vista de cima, com

velocidade angular de $57,7 \text{ rad/s}$, e a mesa está inicialmente em repouso. O momento de inércia do sistema roda + homem + mesa em torno do eixo de rotação é de $2,09 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. O homem, repentinamente, interrompe com a mão a rotação da roda (em relação à mesa). Determine a velocidade angular resultante do sistema (módulo, direção e sentido).

58P. Duas patinadoras, cada uma com massa de 50 kg , aproximam-se uma da outra em trajetórias paralelas separadas por uma distância de $3,0 \text{ m}$. Elas possuem velocidades de sentidos opostos e módulo igual a $1,4 \text{ m/s}$. A primeira patinadora segura a extremidade de uma longa baliza de massa desprezível, e a segunda agarra o outro extremo da baliza ao passar. Veja a Fig. 12-38. Suponha que não haja atrito com o gelo. (a) Descreva de forma quantitativa o movimento das patinadoras, depois que estão conectadas pela baliza. (b) Puxando esta, as patinadoras reduzem a sua distância para $1,0 \text{ m}$. Qual é agora a sua velocidade angular? (c) Calcule a energia cinética do sistema nos itens (a) e (b). (d) De onde vem a energia cinética adicional?

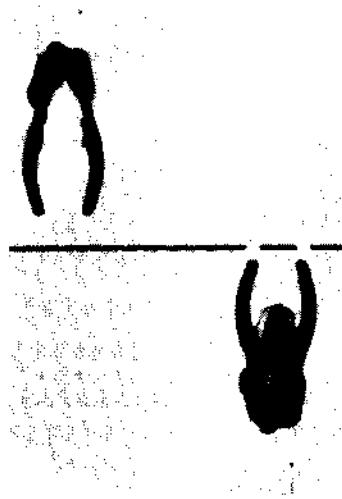


Fig. 12-38 Problema 58.

59P. Duas crianças, cada uma com massa M , sentam-se nos extremos opostos de uma prancha estreita de comprimento L e massa M (igual à das crianças). A prancha é pivotada no centro e pode girar livremente, sem atrito, num círculo horizontal. (Considere-a como se fosse uma haste fina.) (a) Qual é o momento de inércia do sistema formado pela prancha e as crianças, em torno de um eixo vertical que passa pelo centro da prancha? (b) Qual é o momento angular do sistema se ele roda com velocidade angular ω_0 em sentido horário, visto de cima? Quais são a direção e o sentido do momento angular? (c) Enquanto o sistema está rodando, as crianças puxam uma à outra em direção ao centro, até ficarem sentadas na metade da distância ao centro que tinham inicialmente. Qual é a nova velocidade angular, em termos de ω_0 ? (d) Qual é a mudança sofrida pela energia cinética do sistema como resultado da mudança de posição das crianças? (De onde vem a energia cinética adicional?)

60P. Um trilho de trem de brinquedo é montado sobre uma roda grande que pode girar livremente, com atrito desprezível, em torno de um eixo vertical (Fig. 12-39). Um trem de brinquedo de massa m é colocado sobre o trilho e, estando o sistema inicialmente em repouso, a eletricidade é ligada. O trem atinge uma velocidade constante v relativamente ao tri-

lho. Qual é a velocidade angular ω da roda, sendo sua massa igual a M e o seu raio igual a R ? (Considere a roda como um anel e despreze a massa dos raios e da engrenagem.)

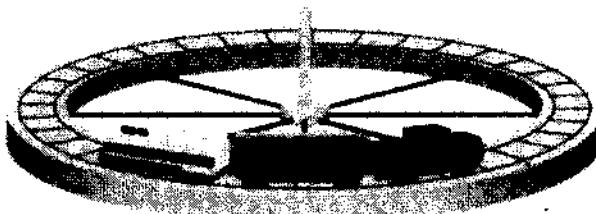


Fig. 12-39 Problema 60.

61P. Uma barata de massa m corre em sentido anti-horário na borda de um prato giratório (prato circular montado sobre um eixo vertical) de raio R e momento de inércia I , montado em mancais sem atrito. A velocidade da barata (em relação ao solo) é v , enquanto o prato gira em sentido horário com velocidade angular ω_0 . A barata encontra um pedaço de pão na borda do prato e pára. (a) Qual é a velocidade angular do prato giratório depois que a barata pára? (b) A energia mecânica é conservada?

62P. Uma menina de massa M está de pé sobre o aro externo de um carrossel sem atrito, de raio R e momento de inércia I , que não está em movimento. Ela atira uma pedra de massa m , horizontalmente, numa direção que é tangente à borda do carrossel. A velocidade da pedra, em relação ao chão, é v . Depois disso, quais são (a) a velocidade angular do carrossel e (b) a velocidade linear da menina?

63P. Se as calotas polares da Terra se derretessem e a água retornasse aos oceanos, a profundidade destes aumentaria cerca de 30 m . Que efeito isto teria sobre a rotação da Terra? Faça uma estimativa aproximada da mudança na duração do dia. (Teme-se que o aquecimento da atmosfera, resultante da poluição industrial, possa causar o derretimento das calotas polares.)

64P*. A partícula de massa m , mostrada na Fig. 12-40, desliza sobre uma superfície sem atrito e colide com uma barra vertical uniforme, ficando presa a ela. A barra oscila em torno de O , fazendo um ângulo θ antes de alcançar o repouso, temporariamente. Encontre o valor de θ em termos dos outros parâmetros dados na figura.

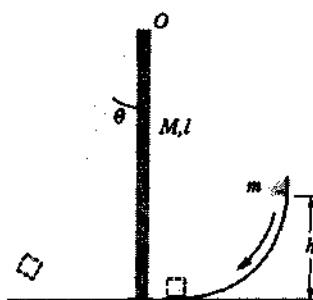


Fig. 12-40 Problema 64.

65P* Duas bolas de $2,00 \text{ kg}$ cada são presas às extremidades de uma barra fina de massa desprezível, de $50,0 \text{ cm}$ de comprimento. A barra pode girar livremente, sem atrito, num plano vertical, em torno de um eixo horizontal que passa pelo seu centro. Enquanto a barra está na ho-

rizental (Fig. 12-41), uma bolota de massa de vidraceiro de 50,0 g cai sobre uma das bolas com velocidade de 3,00 m/s e fica grudada a ela. (a) Qual é a velocidade angular do sistema, logo após ser atingido pela massa de vidraceiro? (b) Qual é a razão entre a energia cinética do sistema inteiro após a colisão e a energia cinética da bolota de massa de vidraceiro, pouco antes da colisão? (c) Qual será o ângulo em que o sistema irá girar até parar temporariamente?



Fig. 12-41 Problema 65.

68. Uma haste fina e uniforme de 0,50 m de comprimento e 4,0 kg de massa pode rodar num plano horizontal, em torno de um eixo vertical que passa pelo seu centro. A haste está em repouso quando uma bala de massa igual a 3,0 g, movendo-se no mesmo plano horizontal, atinge uma de suas extremidades. Visto de cima, o sentido da velocidade da bala faz um ângulo de 60° com a haste (Fig. 12-42). Sabendo-se que a bala se aloja na haste e que a velocidade angular desta é de 10 rad/s, imediatamente após o impacto, qual é o módulo da velocidade da bala pouco antes do impacto?

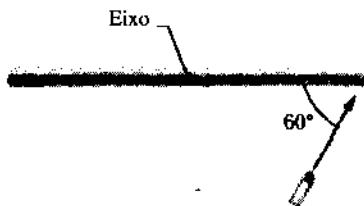


Fig. 12-42 Problema 68. A haste, vista de cima.

69. Uma plataforma horizontal, com o formato de um disco, roda sobre um mancal sem atrito, em torno de um eixo vertical que passa pelo centro do disco. A massa da plataforma é de 150 kg, seu raio é de 2,0 m e o seu momento de inércia em torno do eixo de rotação é de $300 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Uma estudante de 60 kg caminha lentamente da borda para o centro da plataforma. Se a velocidade angular do sistema for igual a 1,5 rad/s, quando a estudante começar a andar, qual será a velocidade angular quando ela estiver a 0,50 m do centro? (Sugestão: Use o princípio da conservação do momento angular.)

70. Uma força horizontal constante de 10 N é aplicada a uma roda de massa igual a 10 kg e raio de 0,30 m, como mostra a Fig. 12-43. A roda gira sem deslizar sobre uma superfície horizontal e a aceleração do seu centro de massa é de $0,60 \text{ m/s}^2$. (a) Quais são o módulo, a direção e o sentido da força de atrito que atua sobre a roda? (b) Qual é o momento

Seção 12-10 Precessão de um Giroscópio (Opcional)

- 66E. Um pião gira a 30 r.p.s. em torno de um eixo que faz um ângulo de 30° com a vertical. Sua massa é de 0,50 kg e o seu momento de inércia em torno do eixo central é de $5,0 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. O centro de massa dista 4,0 cm do ponto de contato entre o pião e o chão. Se a rotação, vista de cima, tiver sentido horário, quais serão o módulo, a direção e o sentido da velocidade de precessão?

- 67P. Um giroscópio consiste de um disco giratório uniforme, de 50 cm de raio, convenientemente montado no centro de um eixo de 12 cm de comprimento (de massa desprezível), de modo que o giroscópio possa girar e precessar livremente. Sua velocidade de rotação é de 1.000 rpm. Encontre a velocidade de precessão (em rpm), sabendo que o eixo é sustentado em uma das extremidades e está na posição horizontal.

PROBLEMAS ADICIONAIS

- de inércia desta, em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa e é perpendicular ao seu plano?

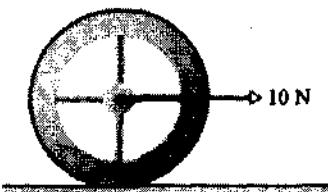


Fig. 12-43 Problema 70.

71. Uma partícula de massa igual a 0,80 kg está situada na posição $\mathbf{r} = (2,0 \text{ m})\mathbf{i} + (3,0 \text{ m})\mathbf{j}$. O momento linear da partícula está no plano xy , seu módulo é igual a $2,4 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$, e sua direção faz um ângulo de 115° , medidos em sentido anti-horário, com o eixo x . Qual é o momento angular da partícula em torno da origem, expresso em termos dos vetores unitários do sistema de coordenadas?

72. Um disco fonográfico, de massa igual a 0,10 kg e raio de 0,10 m, gira em torno de um eixo vertical que passa pelo seu centro com velocidade angular de 4,7 rad/s. Seu momento de inércia em torno do seu eixo de rotação é igual a $5,0 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Um pedaço de massa de vidraceiro de massa igual a 0,020 kg cai verticalmente sobre ele e fica grudado em sua borda. Qual é a velocidade angular do disco, imediatamente após a massa de vidraceiro aderir a ele?

73. Uma esfera oca, de massa igual a 3,0 kg e raio de 0,15 m, com momento de inércia $I = 0,040 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ em torno do seu centro de massa, rola sem deslizar, subindo um plano inclinado a 30° com a horizontal. Numa certa posição inicial, a energia cinética total da esfera é igual a 20 J. (a) Quanto da sua energia cinética inicial é rotacional? (b) Qual é a velocidade do centro de massa da esfera na posição inicial? Quais são (c) a energia cinética total da esfera e (d) a velocidade do seu centro de massa, depois que ela já subiu 1,0 m ao longo do plano inclinado, a partir de sua posição inicial?

A Dança e a Mecânica das Rotações

KENNETH LAWS
DICKINSON COLLEGE

Os bailarinos, quando se apresentam no palco, movimentam-se numa extraordinária variedade de formas — algumas graciosas em sua simplicidade, outras estonteantes na sua atlética complexidade. Alguns movimentos ou posições podem até inspirar a reação: "Puxa! Isto parece impossível!" De fato, os bailarinos executam freqüentemente movimentos que nos deixam maravilhados, parecendo até violarem, às vezes, as leis da Física. Esta observação, porém, requer uma análise mais detalhada!

O corpo humano em movimento não é um objeto rígido cujas dimensões e configurações sejam constantes e facilmente mensuráveis. Entretanto, alguns movimentos do "vocabulário" da dança podem ser descritos de modo suficientemente rigoroso para nos permitir aplicar os princípios da mecânica clássica ao corpo em movimento no espaço, sob a influência da força gravitacional, entre outras.

Uma categoria particularmente interessante de movimentos de dança envolve a rotação — voltas no chão ou no ar, rotações em torno de eixos verticais, horizontais ou inclinados, e rotações diversas nas quais se cria a ilusão de realizar o impossível. A base para uma análise das rotações é a relação entre o torque e o momento angular. Por exemplo, de que modo um bailarino consegue o torque sobre seu corpo necessário para iniciar uma *pirouette* (pirueta — rotação em torno de um eixo vertical, em que um dos pés é mantido no chão)? Ou como se consegue fazer um salto com giro, em que parece que o corpo só começa a girar depois de deixar o solo? Como um bailarino (ou patinador do gelo) consegue alterar sua velocidade de rotação durante o movimento?

O bailarino geralmente inicia uma *pirouette* com ambos os pés no chão, um atrás do outro (Fig. 1). Empurrando lateralmente, com um dos pés em um sentido e o outro no sentido oposto, produzem-se duas forças iguais e opostas que atuam contra o solo, tendo uma distância perpendicular d entre elas (Fig. 2). As forças correspondentes, exercidas pelo chão sobre os pés, produzem um torque sobre o corpo, que faz com que ele adquira momento angular. Quando o bailarino se eleva sobre um dos pés para a posição normal de *pirouette* (Fig. 3), existe uma rotação resultante cuja velocidade é determinada pela magnitude do torque, por sua duração e pelo momento de inércia do corpo na sua configuração de rotação. (Veja as Eqs. 12-37 e 12-39.) Observe que, como não há força resultante horizontal, o corpo não possui aceleração linear.

A magnitude do torque depende da magnitude das forças e da separação dos pés. Esta



Fig. 1 Posição de preparação para uma *pirouette*.

separação é, em geral, de meio metro, mas pode até ser de apenas alguns poucos centímetros, numa preparação para a "quinta posição", na qual os pés estão bem próximos um do outro e antiparalelos. Neste caso, geralmente se observa que o bailarino "dá corda" com os braços, fazendo com que eles começem a rodar antes que o resto do corpo suba para a posição de *pirouette*. Este procedimento de dar corda serve para permitir que algum momento angular fique armazenado numa parte do corpo que esteja em rotação — os braços — enquanto os

LEITURA COMPLEMENTAR 2



*Kenneth Laws é professor de Física no Dickinson College em Carlisle, PA, onde ensina desde 1962. Ele obteve seus títulos acadêmicos de B.S. (Bachelor of Science — Bacharel em Ciências), M.S. (Master of Science — Mestre em Ciências) e Ph.D. (Philosophie Doctor — Doutor em Filosofia) em Caltech, na Universidade da Pensilvânia e no Bryn Mawr College, respectivamente. Desde 1976 ele estuda o balé clássico no Central Pennsylvania Youth Ballet e, nos últimos tempos, vem aplicando os princípios da Física aos movimentos da dança. Seu trabalho o tem levado a ministrar numerosas palestras e aulas em todo o país, e resultou num livro, *The Physics of Dance*, publicado em 1984 (e em 1986 como brochura) pela Schirmer Books.*

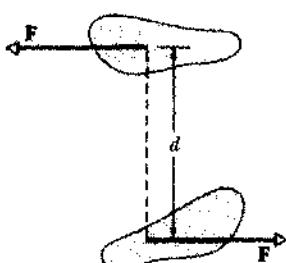


Fig. 2 Forças aplicadas ao chão pelos pés. As forças de reação exercidas pelo chão sobre os pés produzem um torque que gera a aceleração angular necessária para a execução de uma *pirouette*.

pés ainda estão plantados no chão e em condições de exercer forças sobre ele. Aumentando a duração do torque aplicado, compensa-se a sua menor intensidade, que advém da pequena separação entre os pontos de aplicação das forças, permitindo assim atingir um momento angular final de valor significativo.

Uma vez que a magnitude do torque e a sua duração tenham sido estabelecidos, a velocidade de rotação é determinada pelo momento de inércia do corpo. Numa posição normal de *pirouette*, como mostra a Fig. 3, o momento de inércia é pequeno e é possível alcançar-se velocidades angulares substanciais — às vezes superiores a duas revoluções por segundo. Voltas do tipo *Arabesque* ou *grandes pirouettes*, nas quais uma perna é estendida para trás ou para o lado, respectivamente, são rotações mais lentas porque o momento de inércia do corpo nessas configurações é consideravelmente maior. Alterando a distribuição da massa corporal em relação ao eixo de rotação, o bailarino pode modificar sua velocidade angular durante a rotação. Um patinador de gelo, por exemplo, aumenta a velocidade angular durante a execução de uma *pirouette* trazendo os braços e a perna livre para junto do eixo de rotação.

Suponha que dois bailarinos executem uma *pirouette* com a mesma música (mesmo ritmo e, deste modo, acelerações angulares iguais), mas que um deles seja 15% maior que o outro, em cada uma das dimensões lineares. Observe que o volume de um bailarino é, portanto a sua massa, depende do cubo da dimensão linear, enquanto o momento de inércia do corpo depende do quadrado da distância de cada elemento de massa ao eixo de rotação.

Questão 1

*Qual é o torque adicional necessário para o bailarino maior iniciar a *pirouette*, em relação ao menor?*



Fig. 3 Posição de *pirouette* de um bailarino durante a rotação.



Fig. 4 Uma *pirouette* executada com o auxílio de um parceiro, dita “com apoio”.

Agora, tenha em mente que, na posição de preparação antes de iniciar a rotação, os pés do bailarino maior estarão 15% mais afastados.

Questão 2

*O quanto maior é a força horizontal entre os pés e o chão que o bailarino maior precisa exercer a fim de realizar a *pirouette*, em relação ao menor?*

Uma situação interessante ocorre quando o torque para uma *pirouette* é aplicado pelas mãos de um parceiro, ao invés do chão. Tais *pirouettes* “com apoio”, comuns no balé clássico, são geralmente executadas como mostra a Fig. 4. Suponha que a mulher esteja na posição para essa *pirouette*, preparando-se para uma rotação para a direita. Se o seu parceiro tentar iniciar o giro puxando-a para trás com sua mão direita e empurrando-a para a frente com a esquerda, ela irá girar, mas seu corpo fará uma rotação de ângulo considerável antes que o torque tenha tido a chance de desenvolver um momento angular expressivo. Deste modo, a velocidade de rotação resultante será pequena.

Agora, suponha que, antes do bailarino aplicar o torque sobre a cintura da mulher, ela estenda sua perna direita para a frente e um pouco para a esquerda (*croisé*). Assim, quando ele aplica o torque, a perna da bailarina se move da frente para o lado direito. A perna reta, estendida horizontalmente, tem um momento de inércia que é igual a cerca de quatro vezes o do corpo girando na posição de *pirouette*. Deste modo, quando a perna está girando, ela pode ter uma quantidade substancial de momento angular, enquanto o resto do corpo permanece de frente para a platéia. Assim, o intervalo de tempo durante o qual o homem pode aplicar o torque sobre a cintura da sua parceira aumenta consideravelmente, gerando um momento angular final significativamente maior. Quando a mulher finalmente movimenta sua perna direita da posição lateral para a de *pirouette*, com o pé sobre o joelho esquerdo, o momento an-

gular é transferido da perna que estava girando para o corpo como um todo, produzindo uma velocidade angular muito maior do que seria possível obter sem a utilização da perna girante.

Outro movimento demonstra um processo similar envolvendo a transferência de momento angular entre diferentes partes do corpo. Uma série de voltas do tipo *fouetté*, comumente vistas no balé, representa um movimento no qual o estilo da dança e as propriedades mecânicas que permitem a execução suave do movimento se ajustam perfeitamente. A Fig. 5 mostra uma dentre uma série de *fouettés*. Esta é uma forma de *pirouette* com repetição, em que uma vez em cada revolução, quando o bailarino está de frente para a platéia, a perna direita é movida da sua posição de *pirouette*, sobre o joelho esquerdo, e levada à frente, de onde gira esticada para o lado e, então, retorna ao joelho esquerdo. Durante esse tempo, o momento angular da rotação é armazenado na perna que está girando, permitindo que o resto do corpo faça uma pausa na sua rotação enquanto está de frente para o público. Esta pausa tem dois propósitos. Em primeiro lugar, ela faz com que a forma do movimento seja compatível com o estilo do balé clássico, em que o corpo está, geralmente, numa posição “aberta” para a platéia. Neste caso, uma parcela significativa do tempo total do giro é gasta com o corpo de frente para a platéia, entre rotações sucessivas. Em segundo lugar, a pausa permite que o bailarino saia da posição de ponta e apoie o pé esquerdo, momentaneamente, no chão. Nesta posição, um giro contra o chão, com a planta do pé apoiada, pode produzir o torque necessário para repor o momento angular perdido, durante a rotação anterior, pela ação do atrito.

Vamos calcular a razão entre o tempo que o bailarino passa de frente para a platéia e o tempo gasto na rotação, em cada ciclo do movimento. Suponha que o momento de inércia do corpo que gira com velocidade angular ω , na posição normal de *pirouette* seja $I_p = 0,62 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, e, para a perna que roda horizontalmente com velocidade angular ω_p , em torno de um eixo vertical que passa pela junta do quadril, seja $I_{p'} = 2,55 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. (Estes e outros dados numéricos, relativos ao corpo de um bailarino, podem ser encontrados no livro *The Physics of Dance*, de Kenneth Laws, Schirmer Books, 1984, p. 137.) Se o momento angular permanecer aproximadamente constante durante um ciclo completo do movimento e se as transições entre as duas configurações forem breves, a razão ω / ω_p poderá ser calculada. A perna, durante sua fase ativa, irá girar de um ângulo de aproximadamente 90° , mas o corpo, como um todo, deverá girar 360° .

Questão 3

Calcule a razão entre o tempo de pausa (perna girando) e o tempo de giro.

Os saltos são comuns no balé, e os saltos com giros no ar são particularmente impressionantes. Um *tour jeté* é um salto com um giro de 180° em torno de um eixo quase vertical, onde as pernas

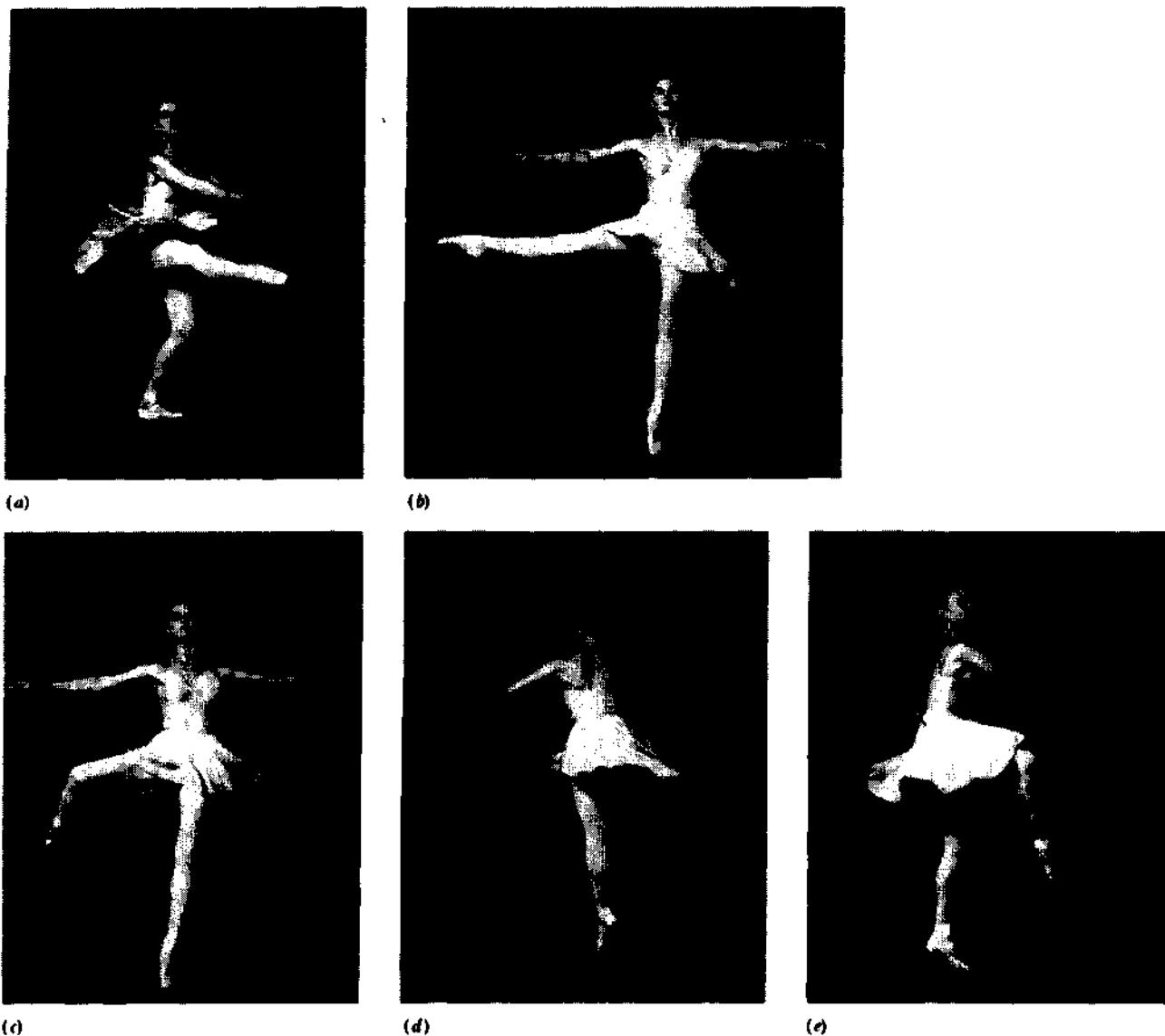


Fig. 5 Lisa de Ribère executando volteios em *fouetté*. Observe que ela gira muito pouco, enquanto que a perna concentra a maior parcela do momento angular nas fotos (a), (b) e (c). O corpo, então, gira rapidamente em (d) e (e), enquanto a perna é mantida recolhida, onde o seu momento de inércia é menor.

se cruzam no ar, de modo que o bailarino inicia o salto com uma perna e volta ao chão com a perna oposta. (Veja a Fig. 6.) O movimento será mais eficiente se a rotação aparentemente ocorrer só depois que o bailarino sair do chão. Será que o corpo pode girar de modo a alterar sua orientação no espaço, mesmo sem possuir momento angular?

Realmente, rotações com momento angular zero são possíveis. Observe que, quando o bailarino deixa o chão (Fig. 6a), a perna esquerda está estendida para a frente, possuindo um grande momento de inércia, pois está longe do eixo de rotação. Mas o tronco, a cabeça, a perna direita e os braços estão próximos ao eixo de rotação. Deste modo, a perna esquerda, com o seu grande momento de inércia, pode rodar um ângulo pequeno num dado sentido, enquanto o

restante do corpo gira um ângulo grande — próximo de 180° — em sentido oposto, de modo que a soma dos momentos angulares das duas rotações é igual a zero durante todo o processo. Depois que ocorre a rotação, as posições das pernas são invertidas, a perna esquerda desceendo para tocar o chão e a direita subindo para uma posição semelhante à que a esquerda ocupava no início, só que agora atrás do corpo. A rotação completa ocorreu sem nenhum momento angular resultante.

Esses movimentos de giro — *pirouettes*, *pirouettes* com apoio, rotações *fouetté*, *tours jetés* — são apenas uma pequena amostra do variado vocabulário da dança. Quando assistimos a uma apresentação de balé, podemos apreciar estes e outros movimentos mais profundamente quando, além do senso estético,

temos a compreensão do modo como os bailarinos trabalham dentro das restrições impostas pelas leis da Física.

Uma Experiência

Um *demi-fouetté* é uma rotação com momento angular igual a zero que pode ser executada de modo bem simples, e que demonstra o princípio descrito na análise do *tour jeté* feita acima. Iniciando com os braços acima da cabeça e a perna esquerda estendida para a frente, eleve-se sobre a ponta do pé direito e, então, gire a perna esquerda para a esquerda, na horizontal, rapidamente, levando-a para trás do corpo. Este movimento faz com que o tronco, a cabeça, os braços e a perna de apoio girem para a direita. Qual foi o ângulo de rotação da perna esquerda? E o ângulo de

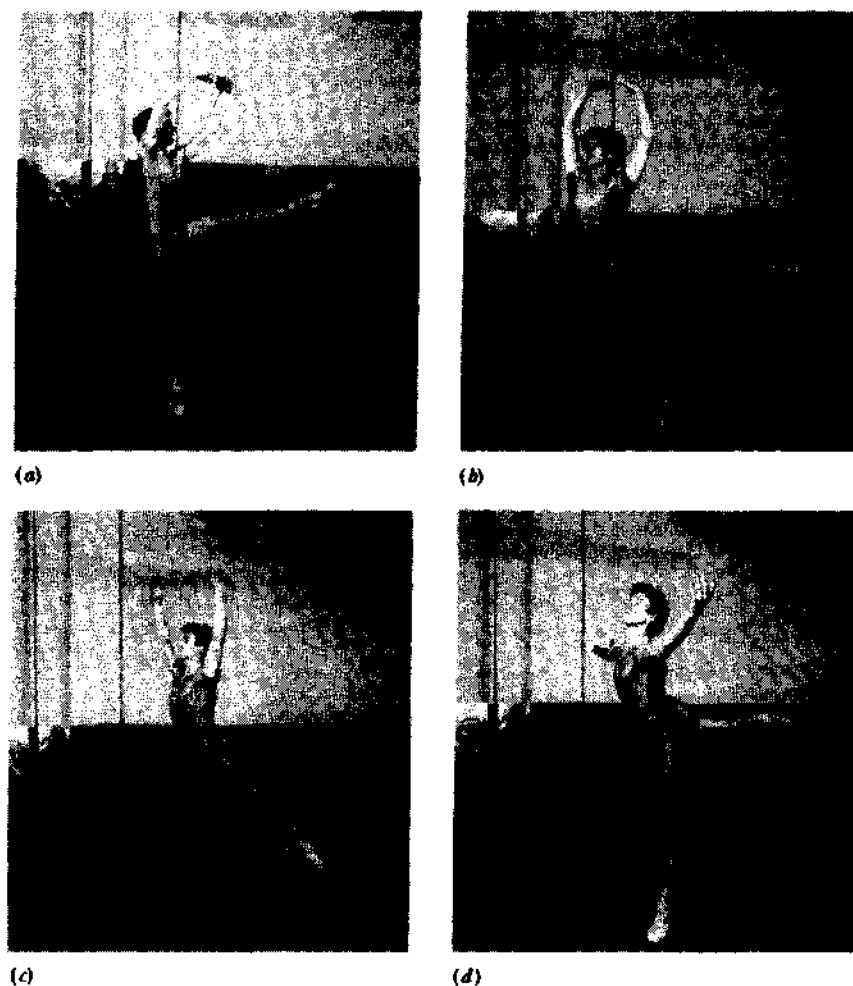


Fig. 6 Seqüência de posições num *tour jeté*, executado por Sean Lavery.

rotação do restante do corpo? O que esses ângulos revelam acerca do momento de inércia da perna que gira, que está distante do eixo de rotação, em comparação com o momento de inércia do resto do corpo, que é mantido o mais próximo possível do eixo de rotação?

Como o atrito entre o pé de apoio e o chão perturba o processo, um modo melhor de realizar o movimento é dar um salto no ar, a partir da posição inicial descrita acima e, então, realizar os movimentos de rotação, descendo ao chão com o mesmo pé, após a rotação.

Respostas das Questões

1. Cerca de duas vezes mais!
2. 75%.
3. Aproximadamente 1!