

Ottica Geometrica

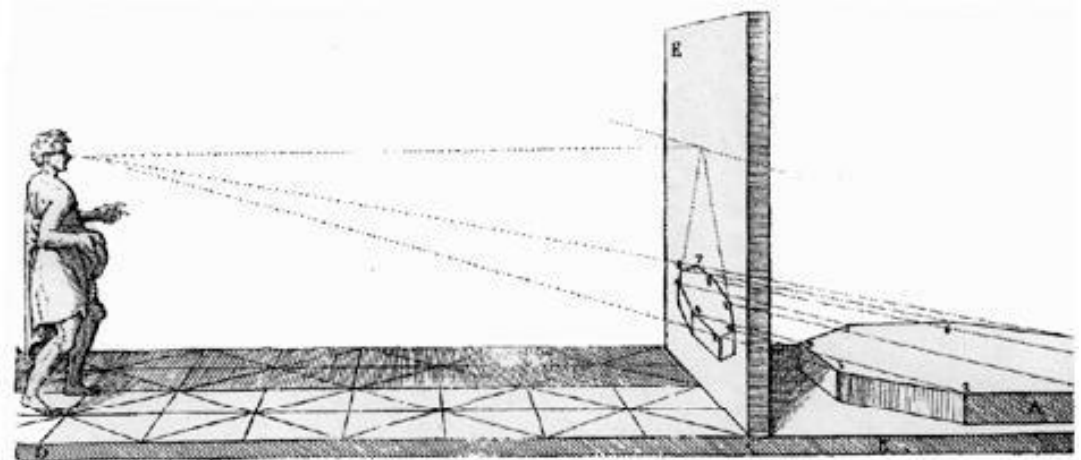
Corso per Fisici: 2024-2025

Sergio.giudici@unipi.it

- In ottica geometrica, la luce è rappresentata come raggi che si propagano in linea retta, cambiando direzione alle interfacce tra materiali trasparenti.
- **Euclide (III sec. a.C.):** Propagazione rettilinea della luce e teoria della visione.
- **Archimede (II sec. a.C.):** specchi ustori.
- **Tolomeo (II sec. d.C.):** Studio della rifrazione astronomica.
- **Ibn Sahl (940-1000):** Formula la legge della rifrazione (legge dei seni).
- **Alhazen (965-1040):** Riprende Euclide e stima l'altezza dell'atmosfera.
- **Galileo (1609) e Keplero (1611):** Telescopio e teoria delle immagini.
- **Snell-Cartesio (XVII sec.):** Riscoprono la legge della rifrazione.
- **Ole Romer (1676):** Misura la velocità della Luce
- **Cassini (~1680):** Primo modello analitico della rifrazione astronomica.
- **Newton:** dispersione della luce, telescopio riflettore.

I raggi «tastatori» di Euclide

Euclide ipotizzava «raggi» uscenti dall'occhio che "tastavano" gli oggetti e rimandavano indietro l'informazione. Oggi, si pensa che gli oggetti emettano raggi luminosi che l'occhio percepisce. Per l'invertibilità dei cammini ottici, le due teorie sono equivalenti.



La distanza dell'Orizzonte

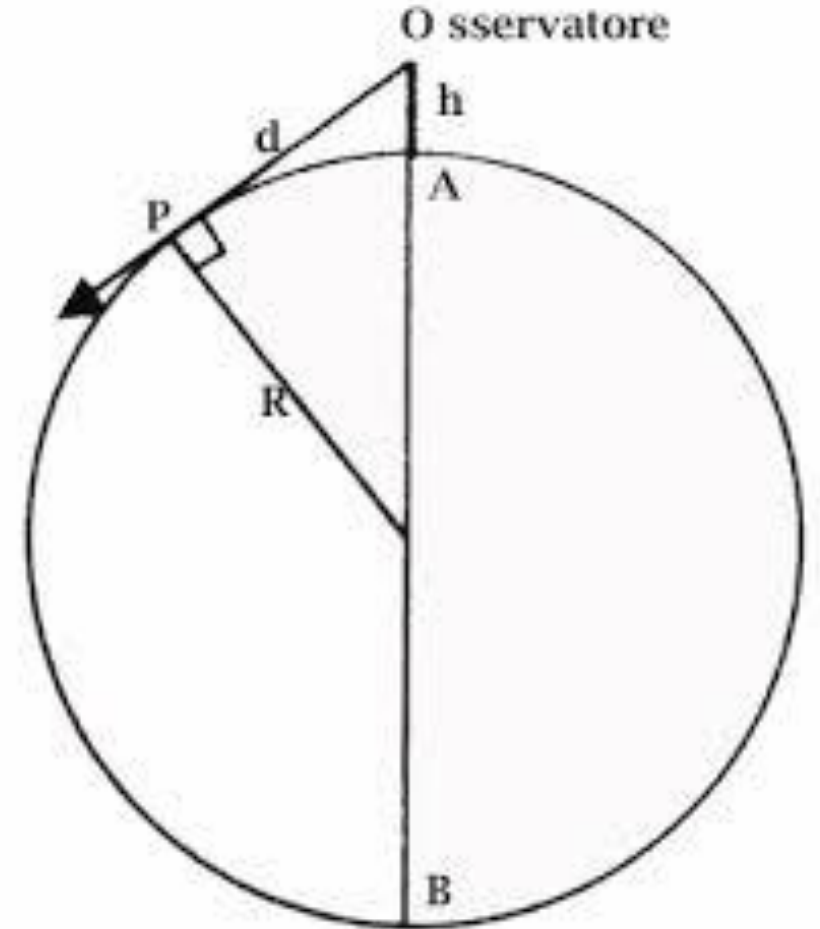
Dal teorema di Pitagora $d^2 = (R + h)^2 - R^2$
Essendo $h \ll R$, il termine quadratico in h è trascurabile

$$d \approx \sqrt{2hR}$$

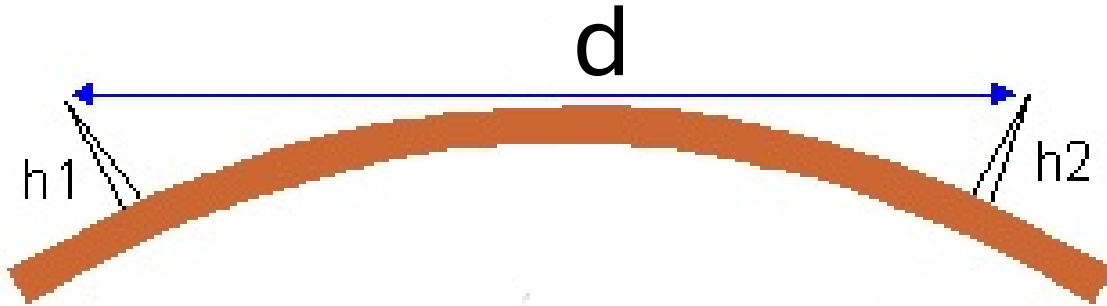
In piedi in riva al mare si ha $h \approx 2 \text{ m}$ e $R \approx 6370 \text{ km}$.
La distanza risulta $d \approx 5 \text{ km}$

Esercizio:

La stazione Spaziale Internazionale orbita a 400 km dal suolo.
Quanta frazione di superficie terrestre risulta visibile?
[circa **3%**]



Condizione di Mutua visibilità



Due cime poste rispettivamente a quota h_1 e h_2 sul livello del mare (con $h_1, h_2 \ll R$) e distanti d , sono visibili l'una dall'altra se soddisfano la condizione:

$$d < \sqrt{2h_1R} + \sqrt{2h_2R}$$

Nel calcolo si assume la propagazione rettilinea della luce. In realtà, la **rifrazione atmosferica incurva le traiettorie** estendendo la visibilità di circa il 10%-15%.

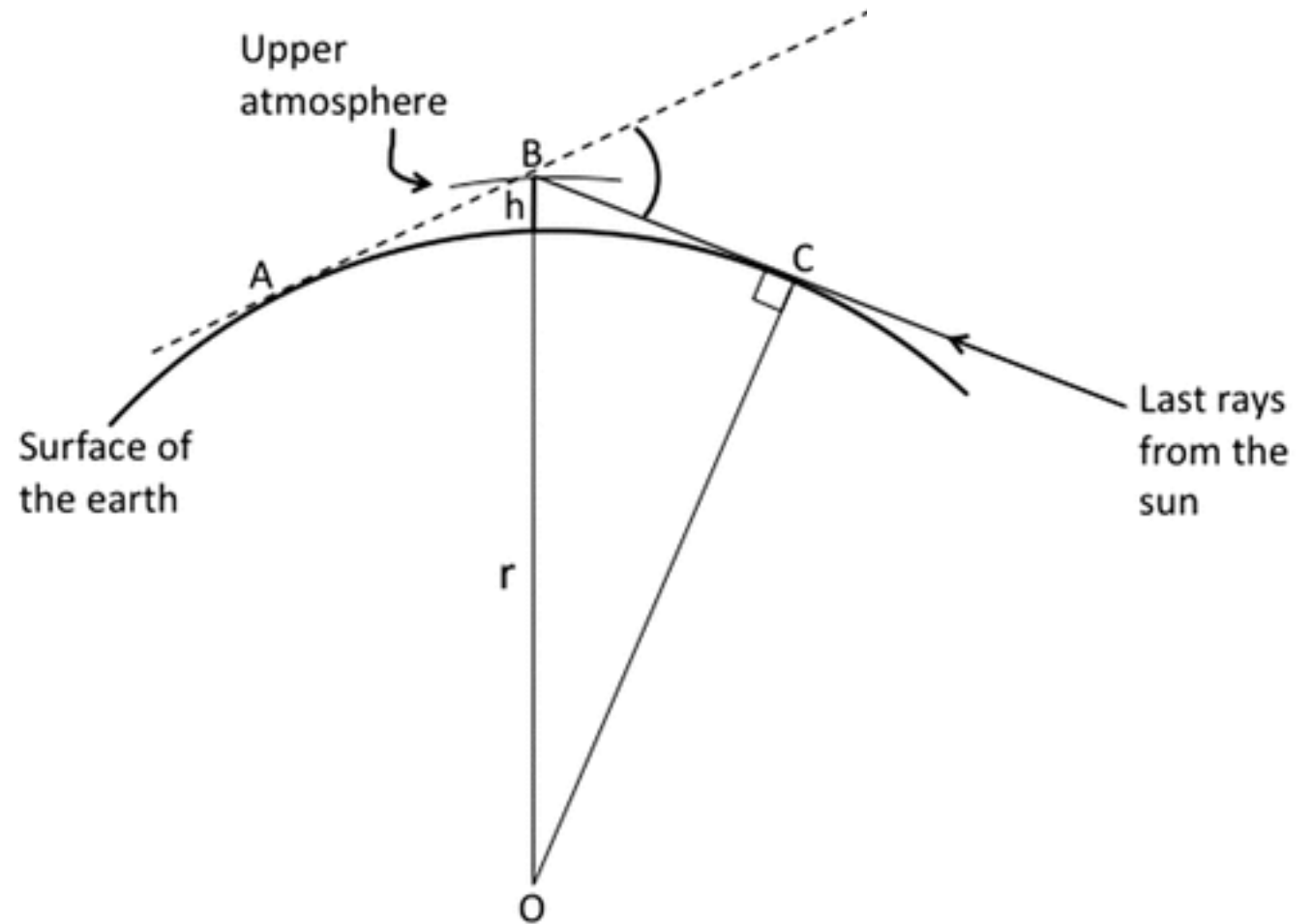
Nel calcolo, l'effetto equivale a sostituire il raggio terrestre con il raggio efficace:

$$R_{eff} = R (1 + k)$$

Dove la quantità adimensionale k (coefficiente di Gauss) «parametrizza» gli effetti rifrattivi. Tipicamente $k \approx 1/6$ con significative variazioni dovute a **temperatura, pressione e posizione dello zero termico**.

Esercizio:

- All'equatore, il crepuscolo dura non oltre mezz'ora dal tramonto del Sole. Stimare lo spessore della atmosfera (Al-Hazen, IX sec.) [circa 50 km]
- Suggerimento: in mezz'ora il sole si abbassa di 7.5° gradi!

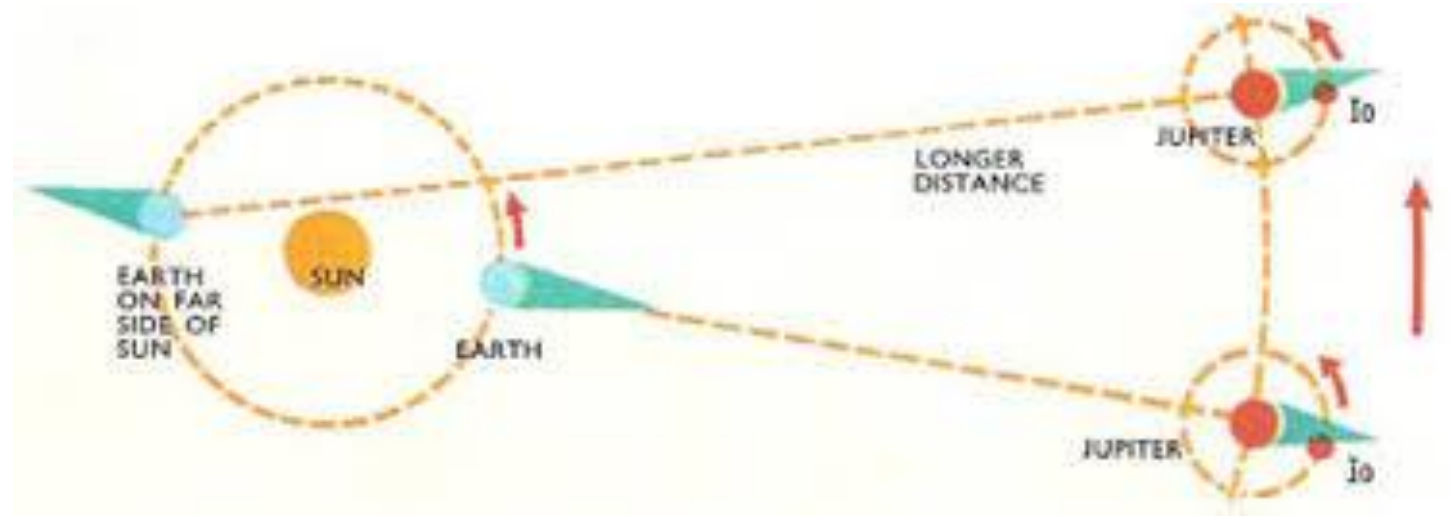


La velocità della Luce

Ole Rømer (1676) osservò che le occultazioni di Io, il satellite di Giove più interno, avvenivano sistematicamente in **anticipo** rispetto all'orario previsto (nel semestre in cui la Terra si avvicina a Giove) oppure in **ritardo** (nel semestre in cui si allontana). Misurato con un pendolo, il ritardo (e l'anticipo) massimo risultava pari a

$$\Delta t = 21 \pm 1 \text{ minuti}$$

Attribuì la deviazione alla finita «finita» velocità di propagazione della luce.



$$c = \frac{\text{Diametro orbita terrestre}}{\text{ritardo massimo}} = \frac{2 \cdot (149 \pm 5) 10^6 \text{ km}}{(21 \pm 1) 60 \text{ s}}$$

$$c = 233000 \pm 14000 \text{ km/s}$$

La sottostima è dovuta ad una sovrastima del ritardo. Comunque, l'ordine di grandezza trovato è corretto!

Indice di Rifrazione

La velocità della luce nel vuoto vale $c \approx 300.000 \text{ km/s}$. In un mezzo trasparente $v < c$ e la diminuzione si parametrizza ponendo $v = c/n$. La grandezza adimensionale n è detta indice di rifrazione e dipende dal mezzo considerato.

- Vuoto $n=1$ (per definizione)
- Aria ($n \approx 1.0003$)
- Acqua $n \approx 1.33$
- Vetro, plastiche, plexiglass $n \approx 1.5$

Spesso si usa la **Refrattività: $\eta = n - 1$**

- $10^{-4} < \eta < 10^{-3}$ gas
- $10^{-2} < \eta < 10^{-1}$ liquidi e solidi

Mezzo o sostanza	Indice di rifrazione	Velocità di propagazione
vuoto	1	$3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
aria	1,00029	$2,999 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
acqua	1,33	$2,26 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
ghiaccio	1,31	$2,29 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
sale	1,54	$1,95 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
alcool	1,36	$2,2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
vetro (Crown)	1,5	$2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
vetro (Flint)	1,65	$1,82 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
solfuro di carbonio	1,63	$1,84 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
sodio liquido	4,22	$0,7 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
arseniuro di gallio	3,6	$0,83 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
silicio	3,4	$0,88 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
diamante	2,417	$1,24 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
quarzo	1,51	$1,98 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

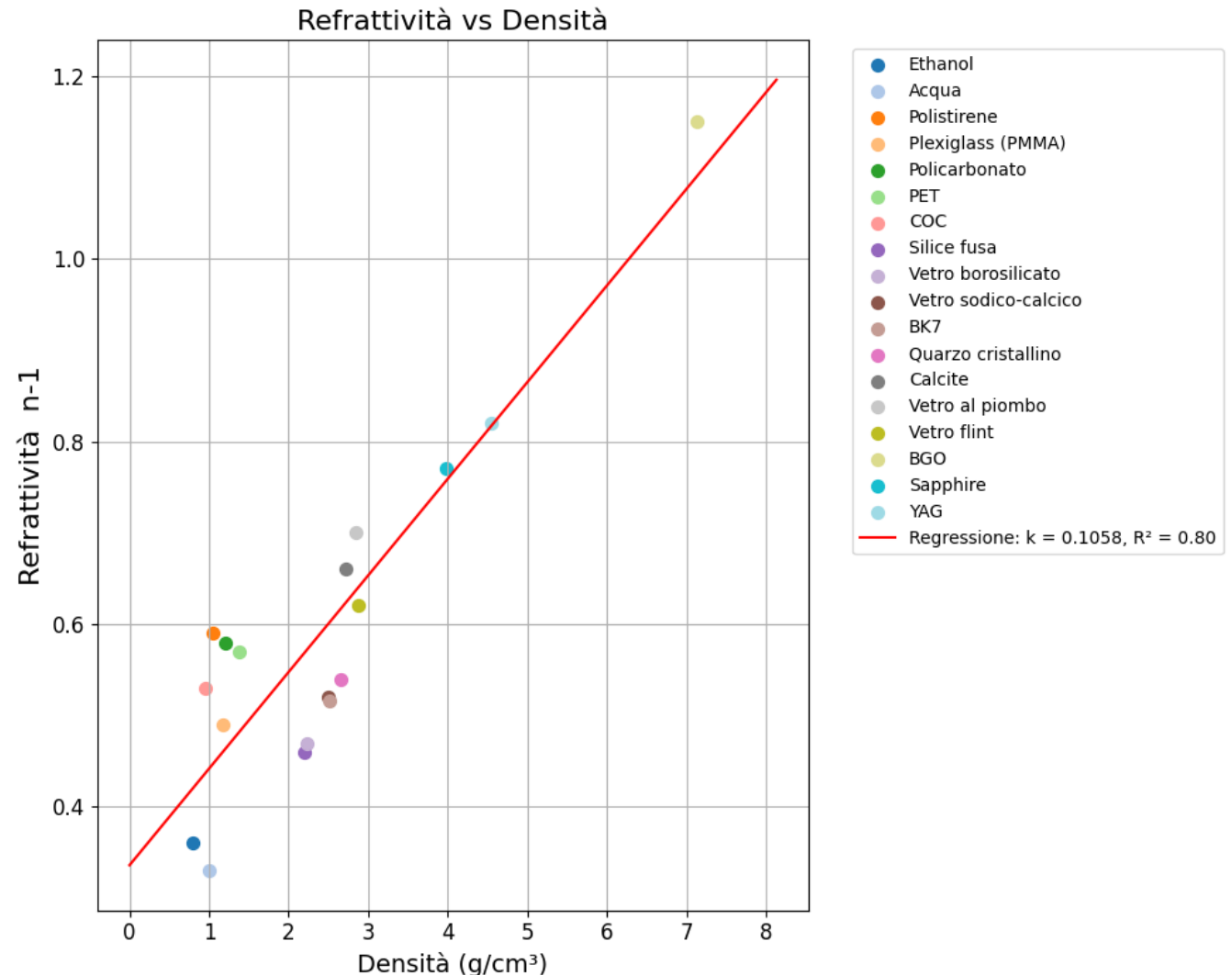
Legge di Gladstone-Dale

L'indice di rifrazione parametrizza il comportamento emergente macroscopico delle numerose interazioni che il raggio di luce subisce su scala atomica. Nel grafico, **correlazione tra refrattività e densità**.

$$n - 1 = k\rho$$

Nei gas, la densità è proporzionale al rapporto tra pressione e temperatura (legge dei gas perfetti). Pertanto, noto l'indice di rifrazione in condizioni standard (indicate con il pedice), esso è riscalabile a valori diversi di Pressione e Temperatura

$$\frac{n - 1}{n_0 - 1} = \frac{P}{P_0} \frac{T_0}{T}$$



Riflessione e rifrazione

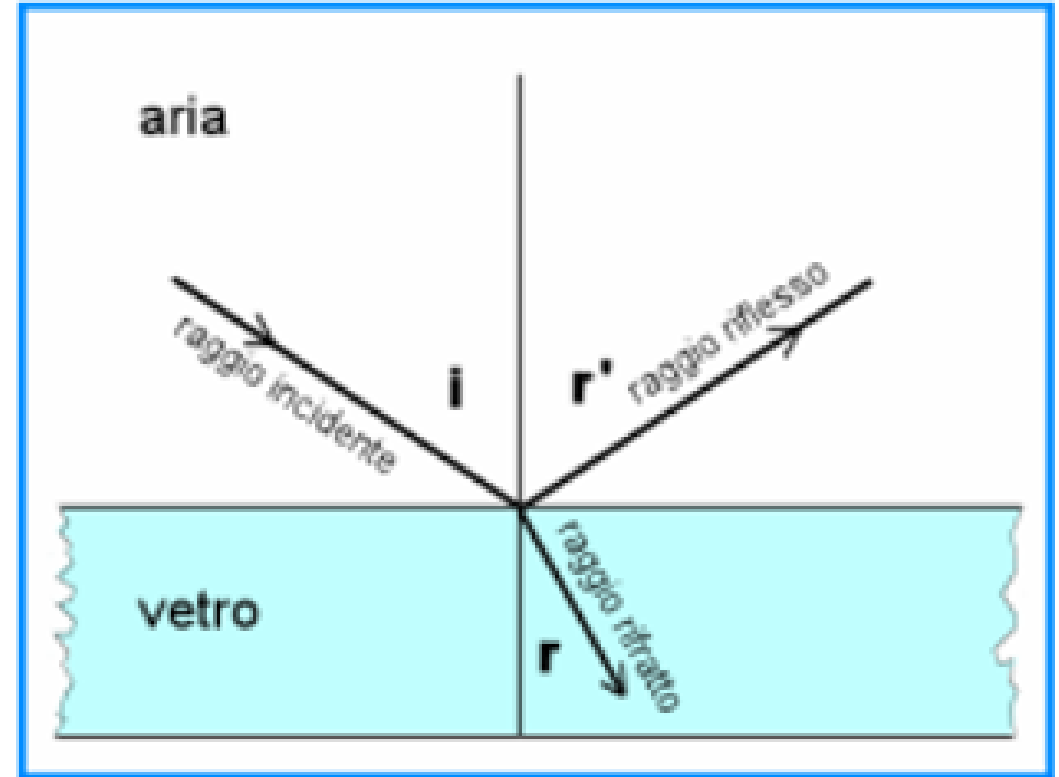
Quando un raggio luminoso incide sulla superficie di separazione tra due mezzi aventi indice di rifrazione diversi si divide in un raggio riflesso e uno rifratto

L'angolo di riflessione è uguale a quello di incidenza: $r' = i$

L'angolo di rifrazione soddisfa la Legge di Snell-Cartesio:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

N.B. Gli angoli sono misurati rispetto alla **normale** alla superficie nel punto di incidenza



Lo specchio parabolico

Considerare lo specchio $y = \frac{x^2}{4f}$ e un raggio luminoso parallelo all'asse Y, incidente nel punto $P = \left(a, \frac{a^2}{4f}\right)$

Detto i l'angolo di incidenza, valgono le eguaglianze

$$\alpha = i, \quad \beta = 2i - 90^\circ$$

$$\tan i = \frac{a}{2f} \quad (\text{derivata prima in } P)$$

Inoltre vale l'identità

$$\tan \beta = \tan (2i - 90^\circ) = - \frac{1 - \tan^2 i}{2 \tan i}$$

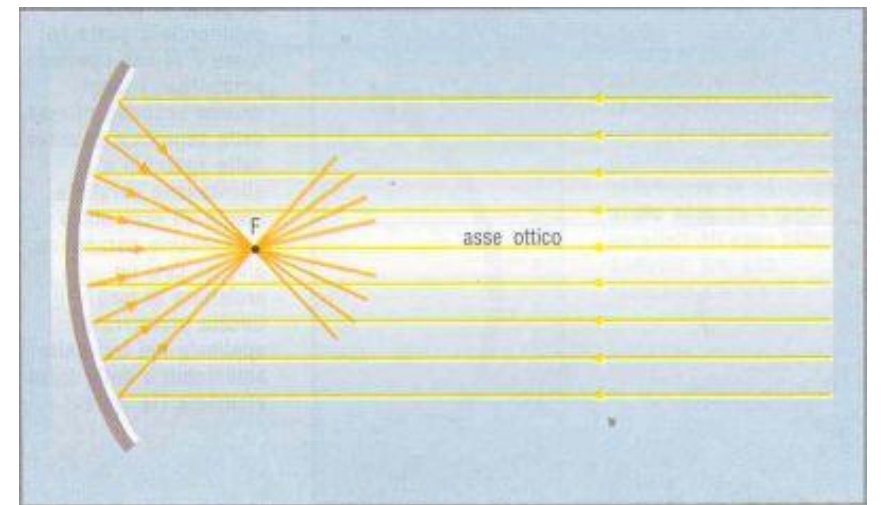
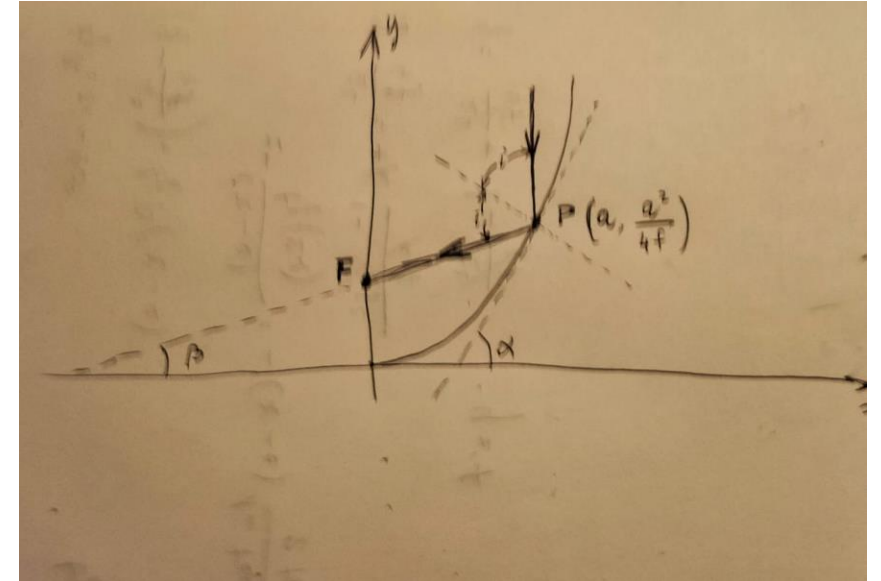
La riflessione avviene lungo la retta passante per PF

$$y - \frac{a^2}{4f} = (x - a) \tan \beta$$

che intercetta l'asse Y in $F=(0,f)$

Conclusione: **Tutti i raggi paralleli all'asse ottico sono riflessi in F.**

La lunghezza f è detta lunghezza focale.



Approssimazione Parassiale

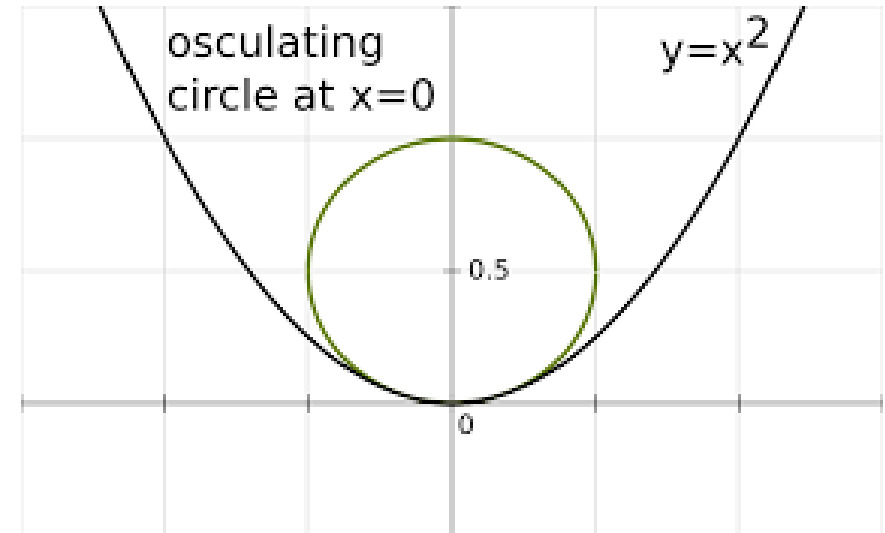
La **circonferenza osculatrice** una curva in un punto è la circonferenza che meglio approssima la curva in quel punto. (In sostanza è tangente ed ha la stessa curvatura)

La circonferenza osculatrice alla parabola $y = \frac{x^2}{4f}$ ha centro in $(0, 2f)$ e raggio $R = 2f$

L'approssimazione è valida per $|x| \ll f$ dove lo specchio parabolico si può approssimare con quello sferico ottenuto dalla circonferenza osculatrice.

L'approssimazione è tanto più buona quanto più i raggi sono «quasi» paralleli all'asse ottico e incidono sullo specchio vicino al vertice incidenza.

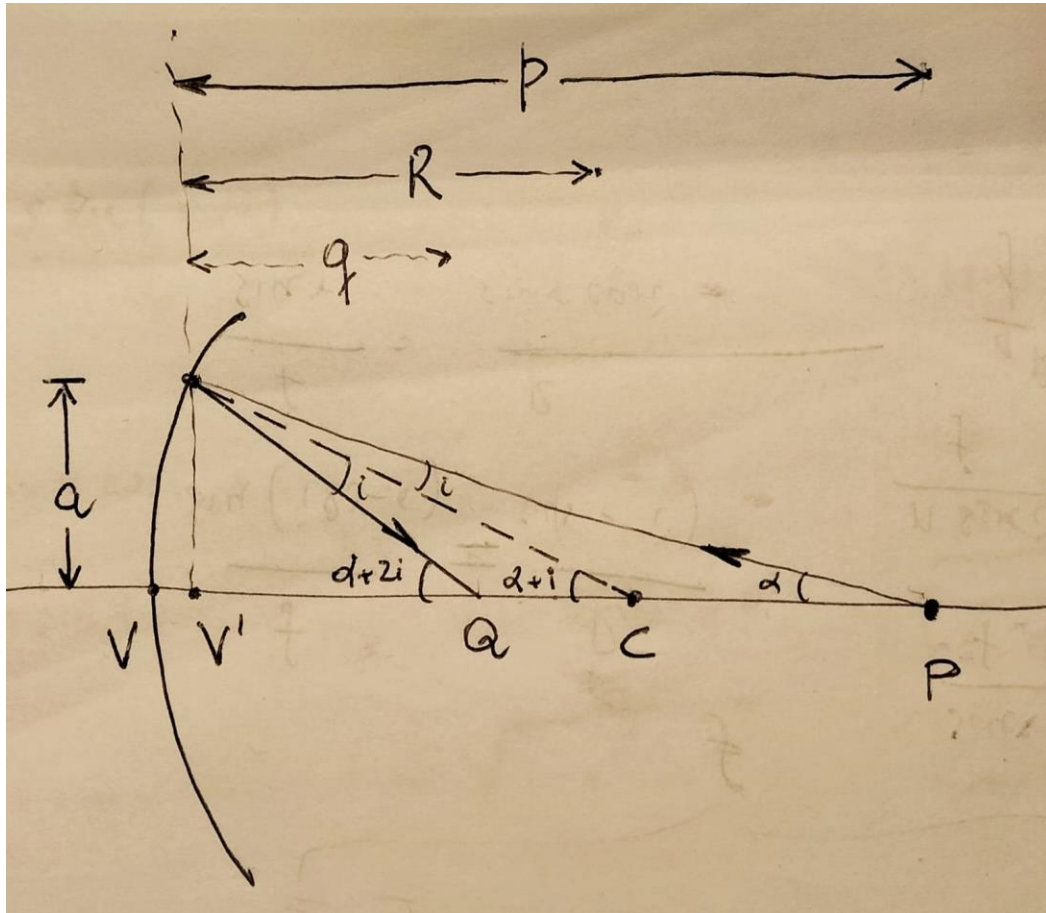
Tale approssimazione agevola i calcoli ed è detta **approssimazione parassiale** o **approssimazione di Gauss**.



In generale, il raggio del cerchio osculatore alla curva $f(x)$ in x è dato da

$$R = \frac{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}$$

Specchio sferico e punti otticamente coniugati



Un raggio luminoso è emesso da una sorgente posta in P ed è riflesso dallo specchio sferico con centro in C. Il raggio riflesso interseca l'asse ottico nel punto Q.

Notare: In approssimazione parassiale si confondono i punti V e V'. Inoltre, nella catena di uguaglianze

$$a = p \tan(\alpha) = R \tan(\alpha + i) = q \tan(\alpha + 2i)$$

si può ovunque approssimare $\tan(x) \approx x$.

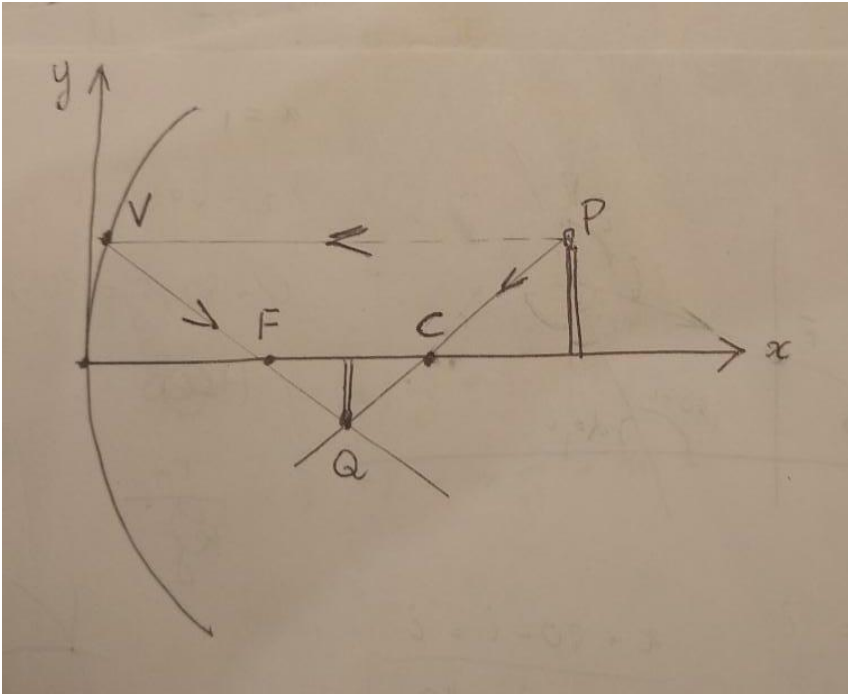
Eliminati gli angoli si ottiene la legge dei punti coniugati

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R}$$

Nel limite di sorgente infinitamente lontana ($p \rightarrow \infty$), i raggi luminosi sono paralleli all'asse ottico e convergono tutti in $q = R/2$.

Si ritrova la relazione tra raggio e lunghezza focale $R = 2f$.

Specchio sferico concavo e immagine reale



L'immagine del punto $P=(p,h)$ creata dallo specchio corrisponde al punto $Q(q,h')$ dove i raggi luminosi emessi da P si intersecano. La posizione di Q si determina considerando il raggio passante per il centro dello specchio $C=(R,0)$ e il raggio parallelo all'asse ottico, riflesso nel fuoco $F=(f,0)$. L'approssimazione parassiale equivale a trascurare la sagitta, ovvero attribuendo al punto V le coordinate $(0,h)$. Le coordinate di Q si determinano mettendo a sistema le rette

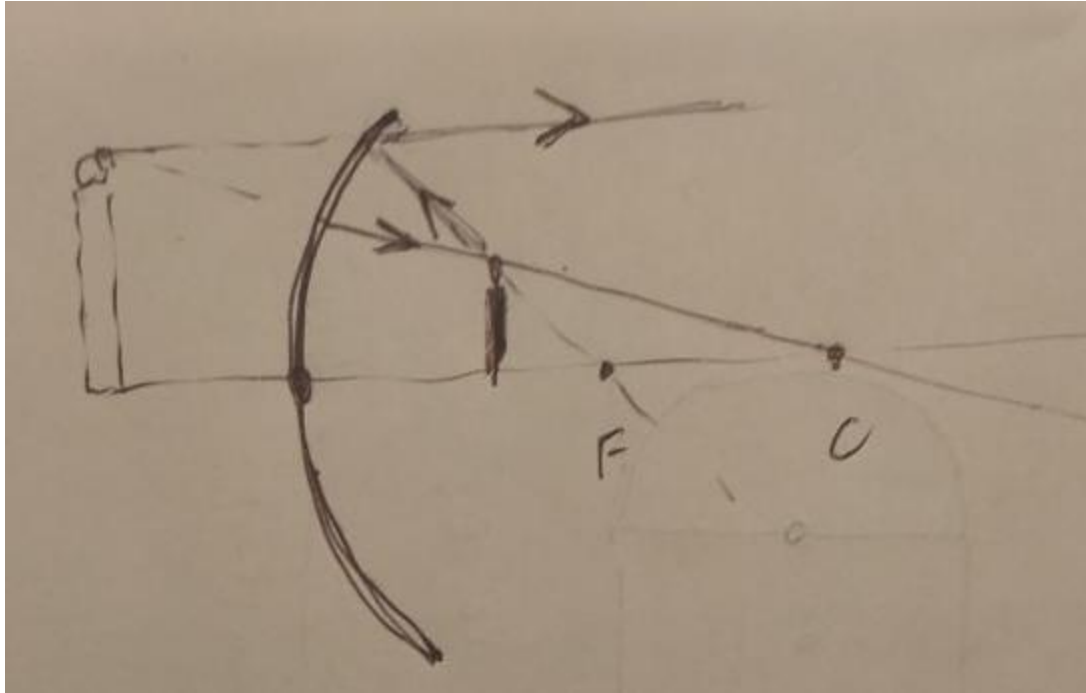
$$y - h = \left(\frac{h}{p-2f} \right) (x - p) \quad \text{Retta passante per } P \text{ e } C$$

$$y - h = -\left(\frac{h}{f} \right) x \quad \text{Retta passante per } V \text{ e } F$$

Se $0 < f < p$, i raggi riflessi convergono in Q con $q > 0$ e formano una «**immagine reale**» che danno luogo a fenomeni fisici «**reali**». L'immagine può essere raccolta su uno schermo e un termometro in Q registra il calore trasportato dalla luce.

$$Q = \left(\frac{pf}{p-f}, -\frac{fh}{p-f} \right)$$

Specchio sferico concavo e immagine virtuale



Se l'oggetto si trova tra in $0 < p < f$, si crea **una immagine virtuale**. I raggi sono riflessi **come se** provenissero da un oggetto posto dietro lo specchio.

L'immagine virtuale si forma nell'intersezione tra i prolungamenti dei raggi dietro lo specchio.

Si noti che l'immagine dello specchio è illusoria e non dà luogo a fenomeni fisici reali.

Se $0 < p < f$ la legge dei punti coniugati fornisce $q < 0$ (immagine «dietro» lo specchio!)

Si definisce **ingrandimento trasversale** il rapporto tra l'altezza dell'immagine e quella dell'oggetto.

$$I = \frac{h'}{h} = \frac{f}{f - p}$$

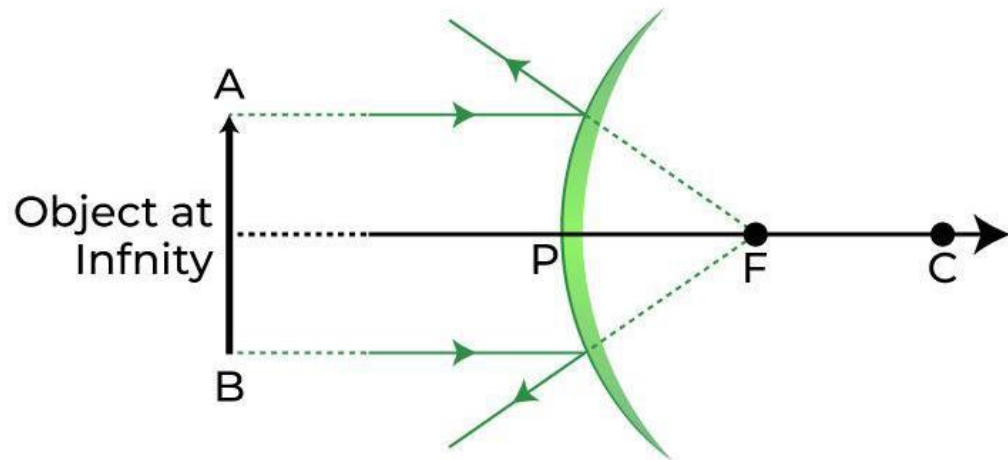


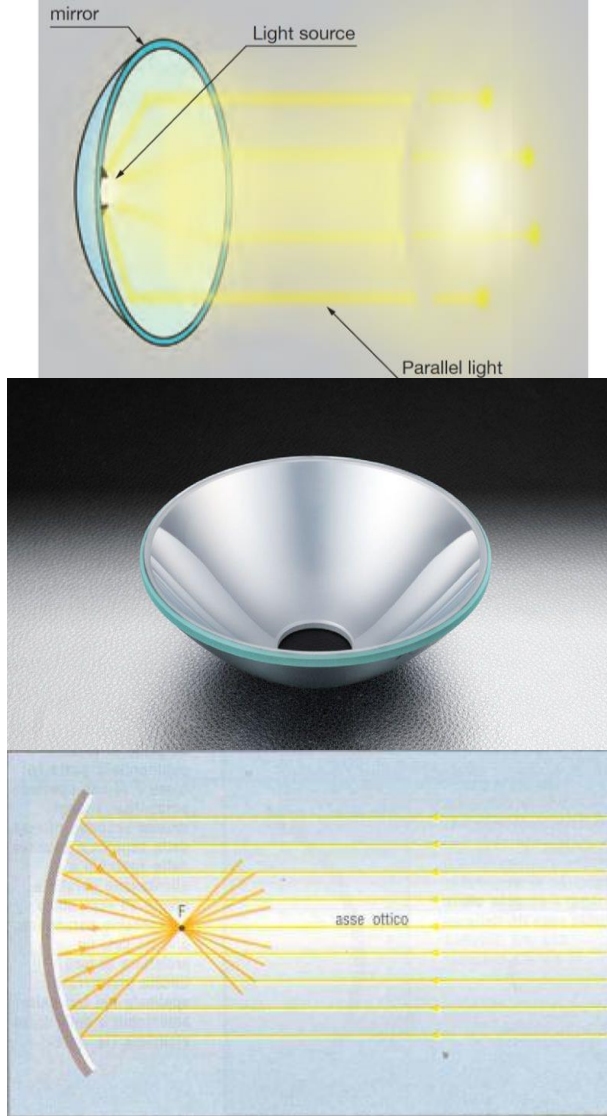
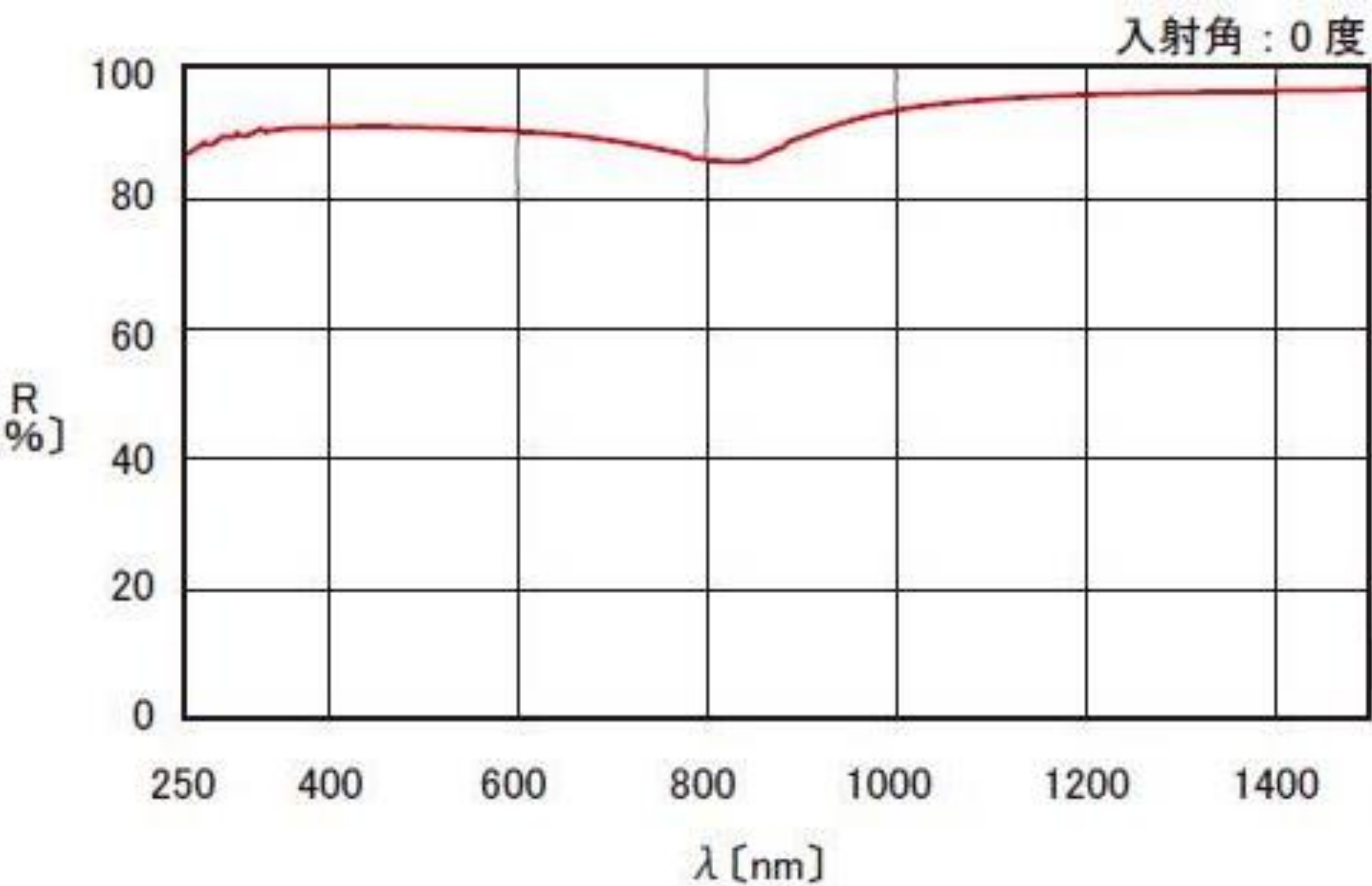
Specchio convesso

I raggi paralleli all'asse ottico sono riflessi come mostrato in figura e appaiono **come se** provenissero da una sorgente puntiforme posta dietro lo specchio ($f < 0$) in F. Vale la legge dei punti coniugati ma la focale è negativa!

Esercizio: dimostrare che uno specchio convesso produce soltanto immagini virtuali rimpicciolite.

Negli USA è obbligo riportare sugli specchi retrovisori convessi la dicitura: «**Object in the mirror are closer than they appear**», perché?





Riflettività tipica di uno specchio con rivestimento in alluminio.
La frazione di luce riflessa è pari a circa il 90%.

Domande

- Le proprietà focali della parabola valgono anche per le onde EM
- Perché la ricezione di certi segnali TV utilizza antenne paraboliche mentre la telefonia mobile no



Esercizio: Dimensionamento di uno specchio

- Cercare il valore della costante solare (Energia solare che incide sulla superficie terrestre nella unità di tempo e superficie). Capire come la costante solare è stata misurata per la prima volta con il Pireliometro inventato da Pouillet
- Cercare il valore tipico di riflettività di uno specchio (vedere voce "reflectance" su wikipedia)
- Progettare uno specchio parabolico specificando il materiale di cui è fatto (Alluminio ? Argento ? Oro ?) e le dimensioni (sezione trasversa e distanza focale) affinché 5 litri di acqua, inizialmente a temperatura ambiente, raggiungano il punto ebollizione dopo 20' di esposizione allo specchio? Stimare il peso dello specchio

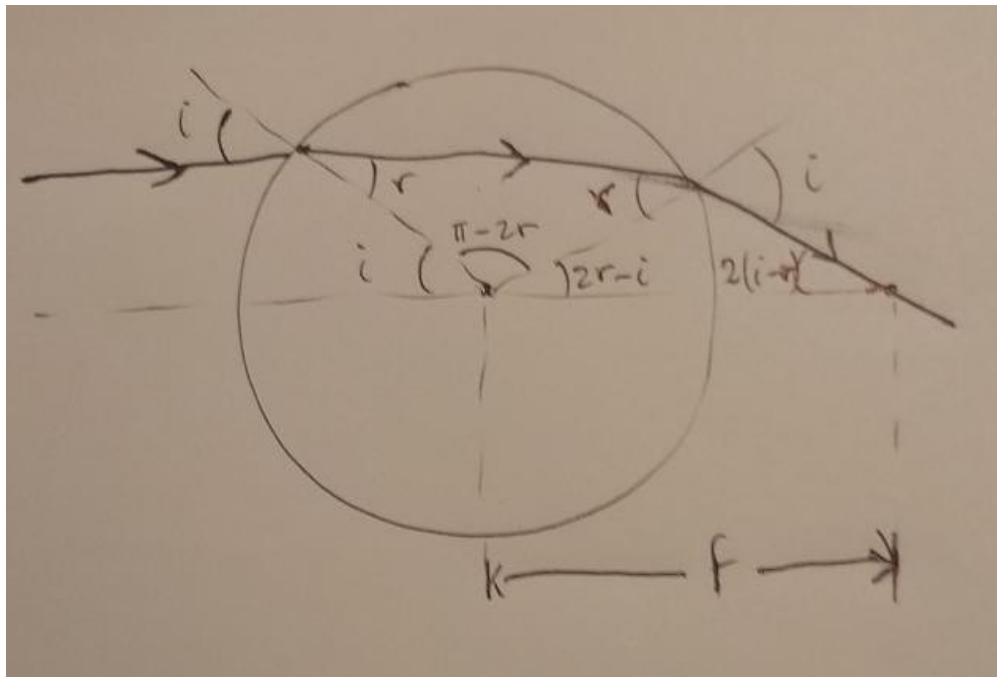


Esercizio: Discutere con argomenti quantitativi se gli Specchi Ustori di Archimede Siano da considerarsi leggenda oppure no... muoversi tra la sterminata bibliografia!

Lente cilindrica

Si consideri cilindro di materiale trasparente ($n > 1$) e raggio R .

Raggi incidenti paralleli all'asse sono deflessi nel fuoco F , infatti per il teorema dei seni e nell'approssimazione di piccolo angolo si ha

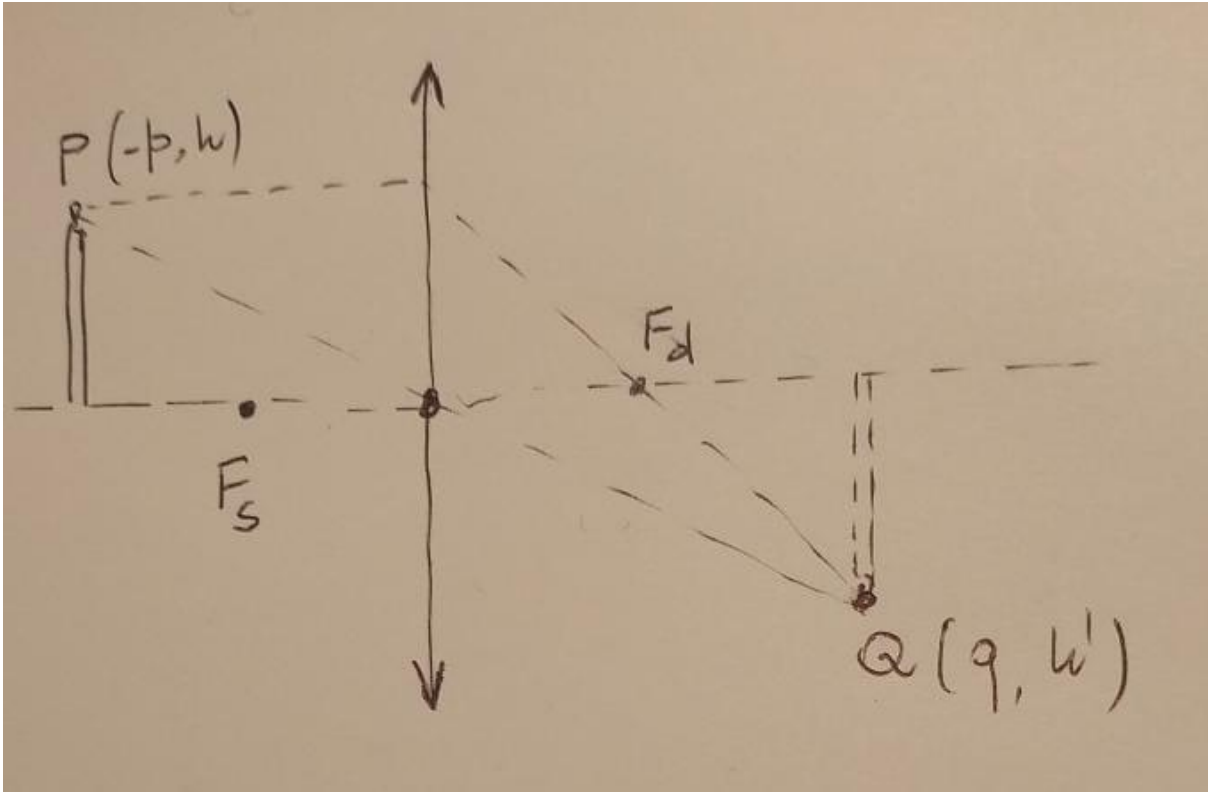


$$\frac{\sin[2(i - r)]}{R} = \frac{\sin(\pi - i)}{f}$$

$$\frac{1}{f} \approx \frac{n - 1}{nR}$$

Per simmetria, ogni diametro può essere pensato come asse ottico e su ogni asse è definito un fuoco destro e un fuoco sinistro, equidistanti dal centro.

Costruzione dell'immagine



L'immagine dell'oggetto posto in $P=(-p,h)$ è il punto $Q(q,h')$. Le coordinate di Q si trovano intersecando il raggio passante per il centro della lente $(0,0)$ e quello parallelo all'asse ottico, e per il fuoco destro $F=(f,0)$.

$$y = -\frac{h}{p}x \quad \text{Raggio passante per l'origine}$$

$$y - h = -\left(\frac{h}{f}\right)x \quad \text{Raggio passante per il fuoco destro}$$

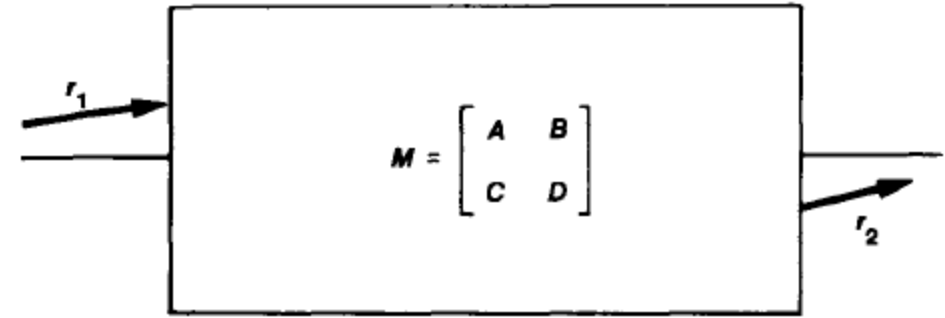
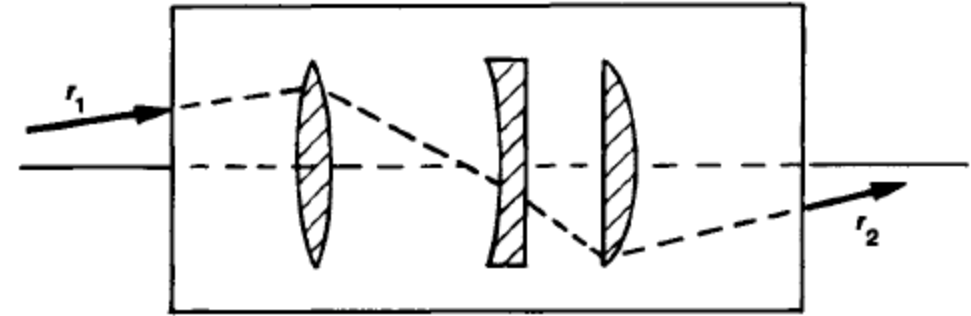
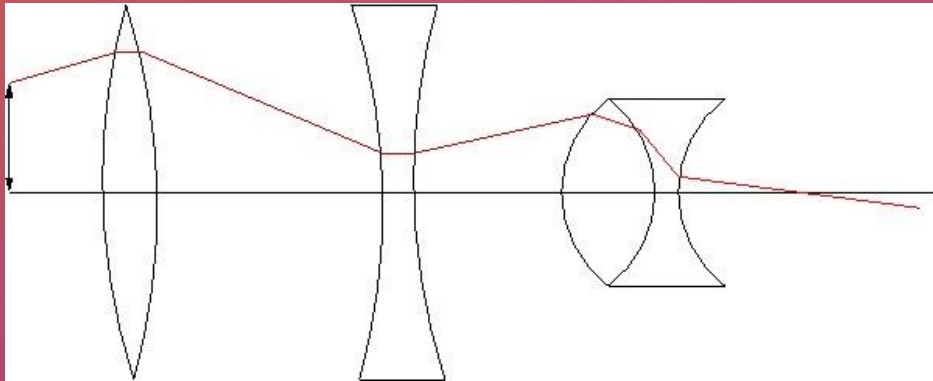
Da cui segue

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad \text{Punti otticamente coniugati}$$

$$I = \frac{h'}{h} = \frac{f}{p-f} \quad \text{Ingrandimento trasversale}$$

Matrici di trasferimento

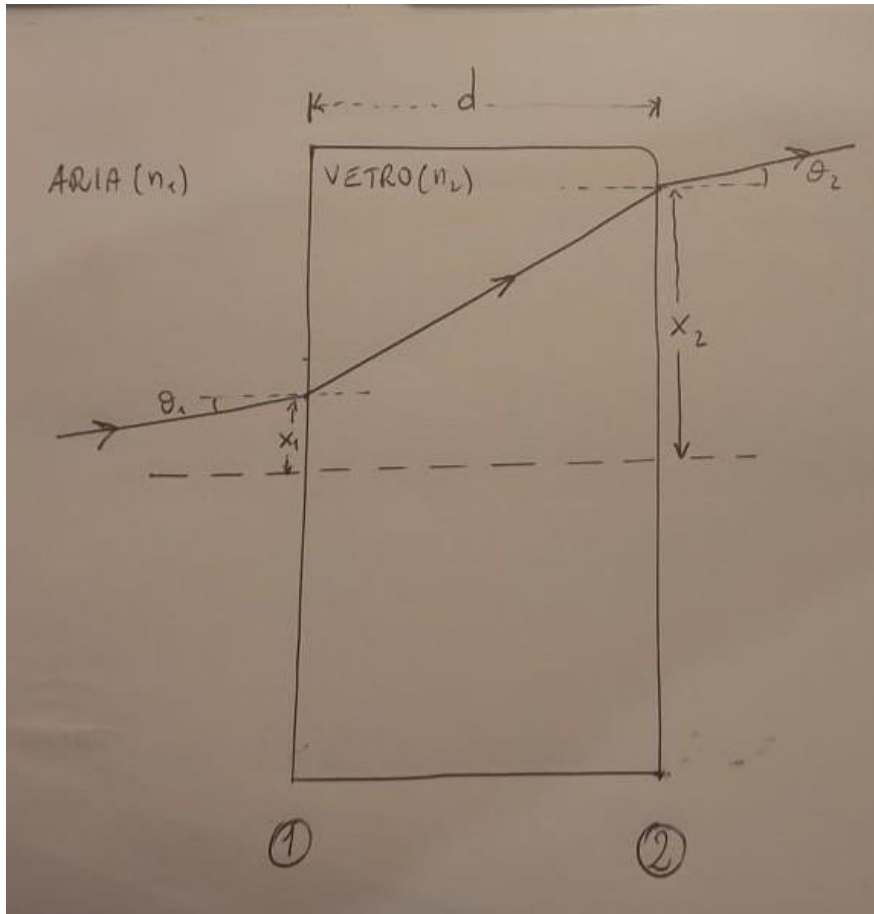
La traiettoria di un raggio luminoso attraverso diverse interfacce si può determinare con il metodo delle **Matrici di Trasferimento**: una tecnica di ray-tracing in cui la «linearità» dell'Algebra Lineare si prende carico della approssimazione parassiale di Gauss.



Discutiamo tre casi facili:

1. Una lastra trasparente omogenea
2. Lente biconvessa sottile
3. Menisco sferico sottile divergente

Lastra omogenea



Posizione e direzione del raggio in input sono associati alla coppia di valori (x_1, θ_1) che pensiamo come un vettore. Similmente, il raggio in output è descritto da (x_2, θ_2) . La trasformazione dal vettore in ingresso a quello in uscita è descritta da opportuno prodotto di Matrici

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

1. La prima matrice da destra descrive l'azione della l'interfaccia aria-vetro
2. la seconda descrive la propagazione in un mezzo omogeneo
3. la terza descrive l'interfaccia vetro-aria. (Notare il ruolo invertito degli indici di rifrazione!)

L'ordine dei fattori è importante! Il prodotto matriciale non è commutativo!

Lente biconvessa sottile

Una lente sottile è una porzione di spazio riempita con un mezzo trasparente (n) e delimitata da due calotte sferiche co-assiali.

L'azione su un raggio è descritta da 2 matrici

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_0 - n}{nR_1} & \frac{n_0}{n} \end{pmatrix} \text{ Interfaccia in ingresso}$$

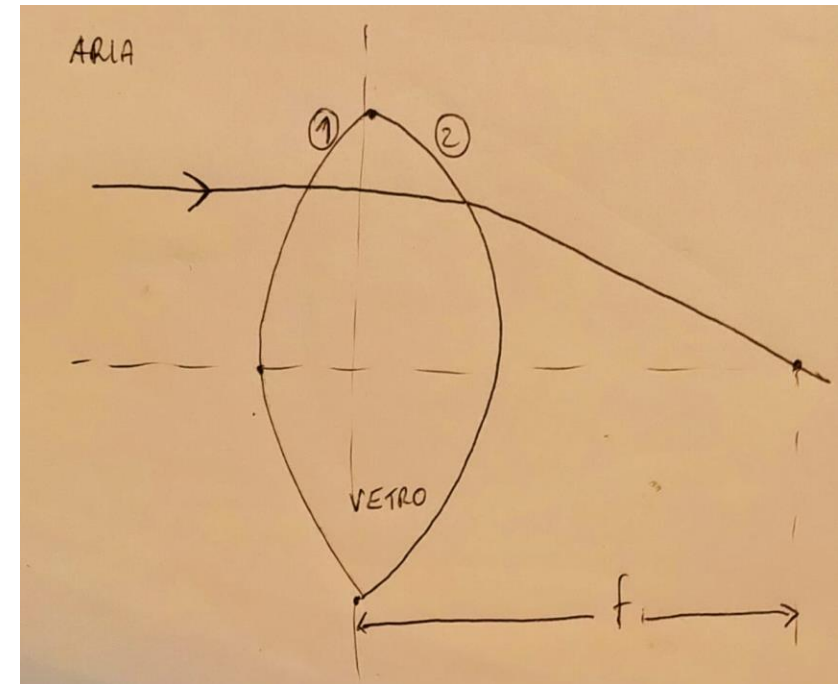
$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n - n_0}{n_0R_2} & \frac{n}{n_0} \end{pmatrix} \text{ Interfaccia in uscita}$$

l'azione complessiva è data dal prodotto

$$M = M_2 M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n-n_0}{n_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

Raggi paralleli all'asse ottico e provenienti da sinistra sono mandati nel punto $(f, 0)$ (fuoco destro).

Convincersi che esiste anche il fuoco sinistro in $(-f, 0)$



Se la lente è immersa in aria ($n_0 \approx 1$)

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

con: $R_1 > 0$ ed $R_2 < 0$ (Convenzione sui segni!)

Convenzione sui segni!

La scelta del segno per i raggi di curvatura dipende dalla convenzione adottata, che **deve essere usata in modo coerente in tutto il calcolo**. Una convenzione comunemente usata (quando la luce entra da sinistra) è la seguente:

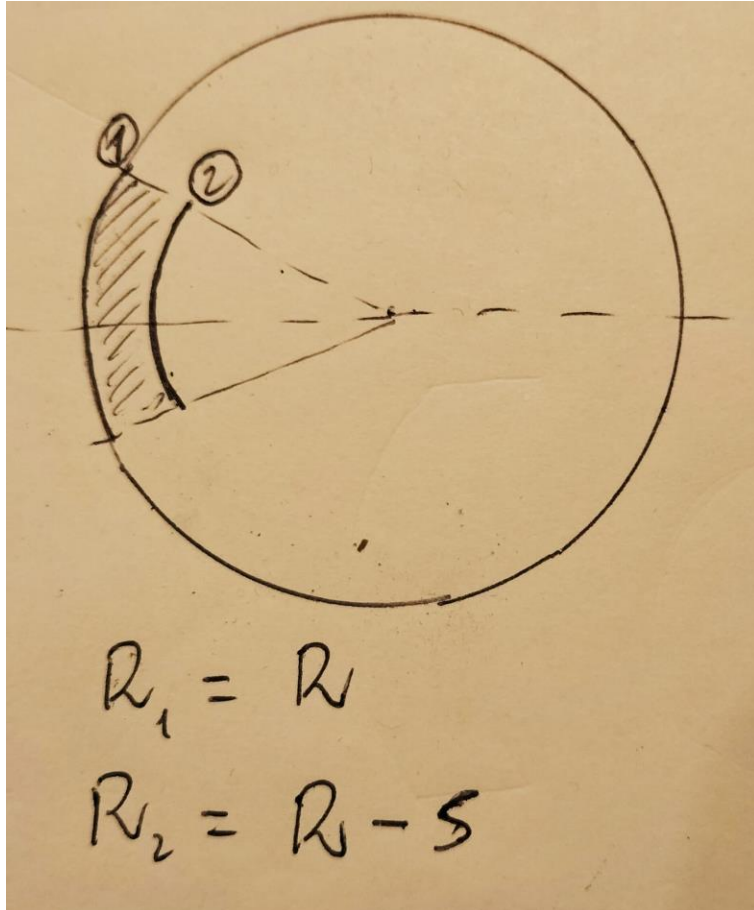
R1 (prima superficie):

- R1 è positivo se la prima superficie è convessa rispetto all'ingresso della luce (cioè, se il centro di curvatura si trova a destra della superficie).
- R1 è negativo se la superficie è concava (il centro di curvatura si trova a sinistra).

R2 (seconda superficie):

- R2 è positivo se la seconda superficie è convessa nel senso opposto, ovvero se il centro di curvatura si trova a sinistra (cioè, la superficie appare concava dal lato in cui esce la luce).
 - R2 è negativo se la seconda superficie è concava (centro di curvatura a destra).
- Nel caso della lente biconvessa si ha $R_1 > 0$, $R_2 < 0$

Menisco sottile divergente



Secondo la convenzione precedente entrambi i raggi hanno segno positivo. Per tanto, l'equazione del costruttore di lenti fornisce la lunghezza focale

$$\frac{1}{f} = \frac{n-n_0}{n_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R-s} \right)$$

Se lo spessore s è piccolo rispetto al raggio (menisco sottile) si può approssimare utilizzando l'espansione in serie di Taylor:
 $(1+x)^k \approx 1+kx$ valida quando $|x| \ll 1$

$$\frac{1}{f} \approx - \frac{n-n_0}{n_0} \frac{s}{R^2}$$

Se il menisco è in vetro ($n > 1$) e circondato da aria si ha

$$\frac{1}{f} \approx -(n-1) \frac{s}{R^2}$$

Notare la focale negativa! → Lente divergente

Doppietto di lenti

Il sistema formato da una coppia di lenti è descritto dal prodotto matriciale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_e} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{f_e} = \frac{f_1 + f_2 - s}{f_1 f_2 - s(f_1 + f_2)}$$

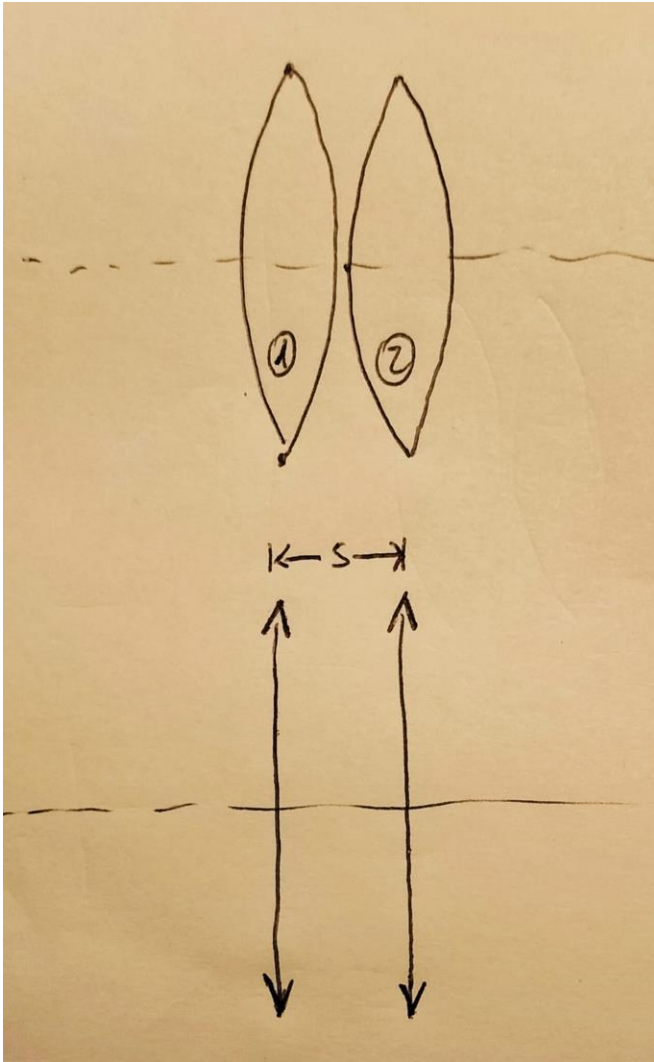
Se le lenti sono addossate (s piccolo), vale l'approssimazione al prim'ordine:

$$\frac{1}{f_e} \approx \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{s}{f_1 f_2}$$

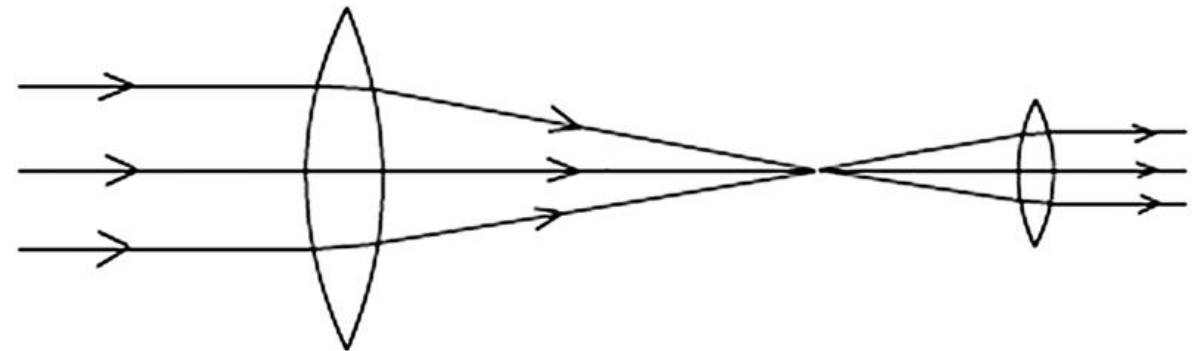
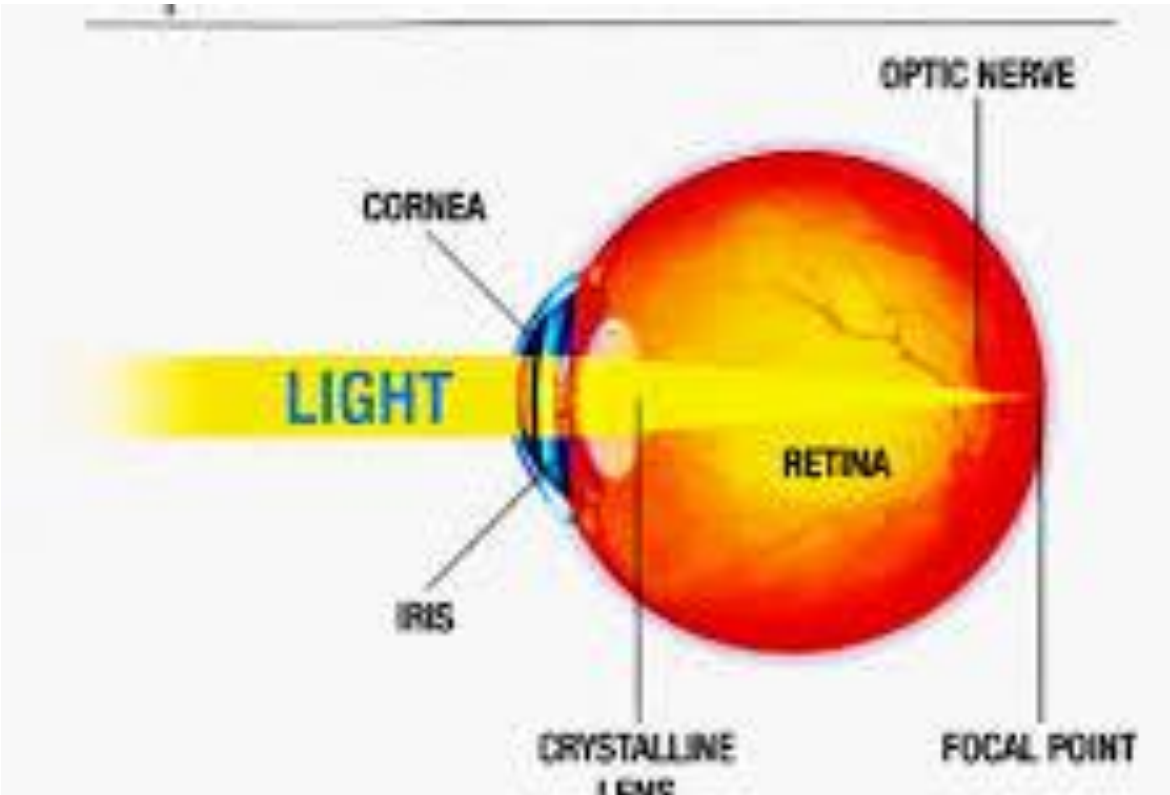
L'inverso della lunghezza focale si chiama «Potere Diottrico, l'unità di misura è la diottria $D = 1/\text{m}$ (diottria = inverso del metro).

I poteri diottrici di lenti addossate si sommano algebricamente. Ricordare che lenti convergenti hanno focale positiva, lenti divergenti hanno focale negativa.

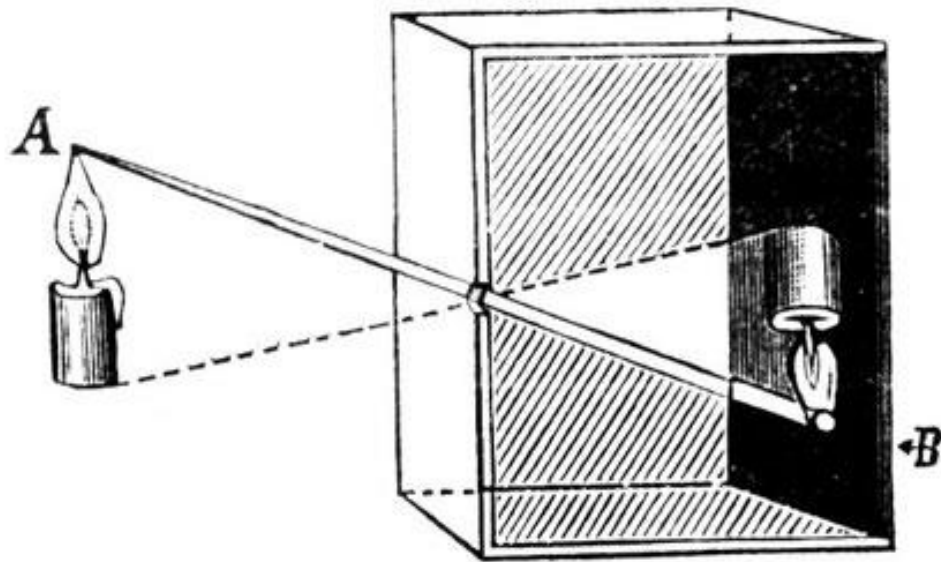
Esercizio: A quante diottrie corrisponde $f = 1.5 \text{ cm}$? [$1/0.015 \approx 67 \text{ D}$]



Due applicazioni del doppietto di lenti: Modelizzazione dell'occhio e il telescopio

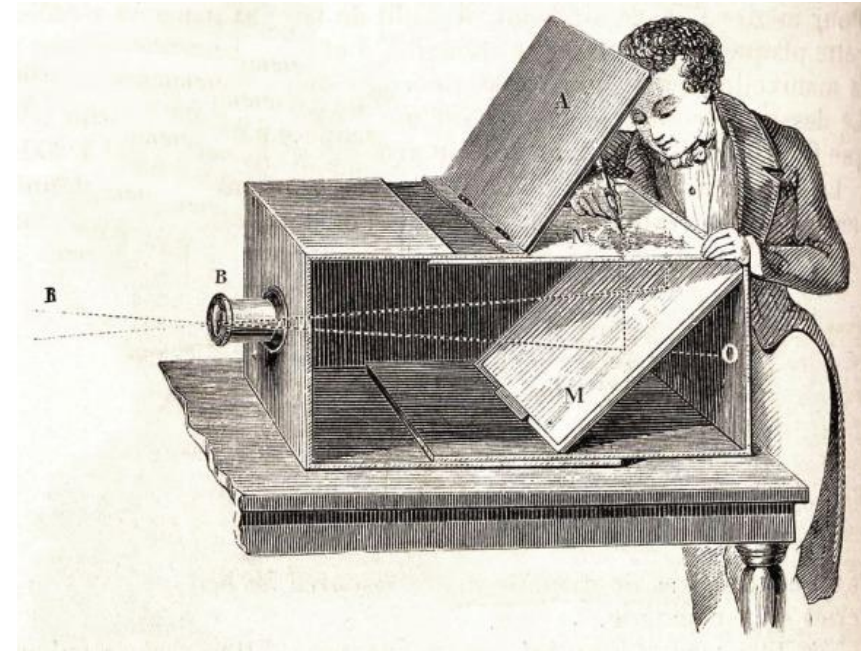


Foro stenopeico e Camera Oscura



Camera con foro stenopeico

I raggi di luce entrano da un piccolo foro formando sulla parete l'immagine capovolta dell'oggetto posto di fronte. Le immagini sono nitide ma poco luminose

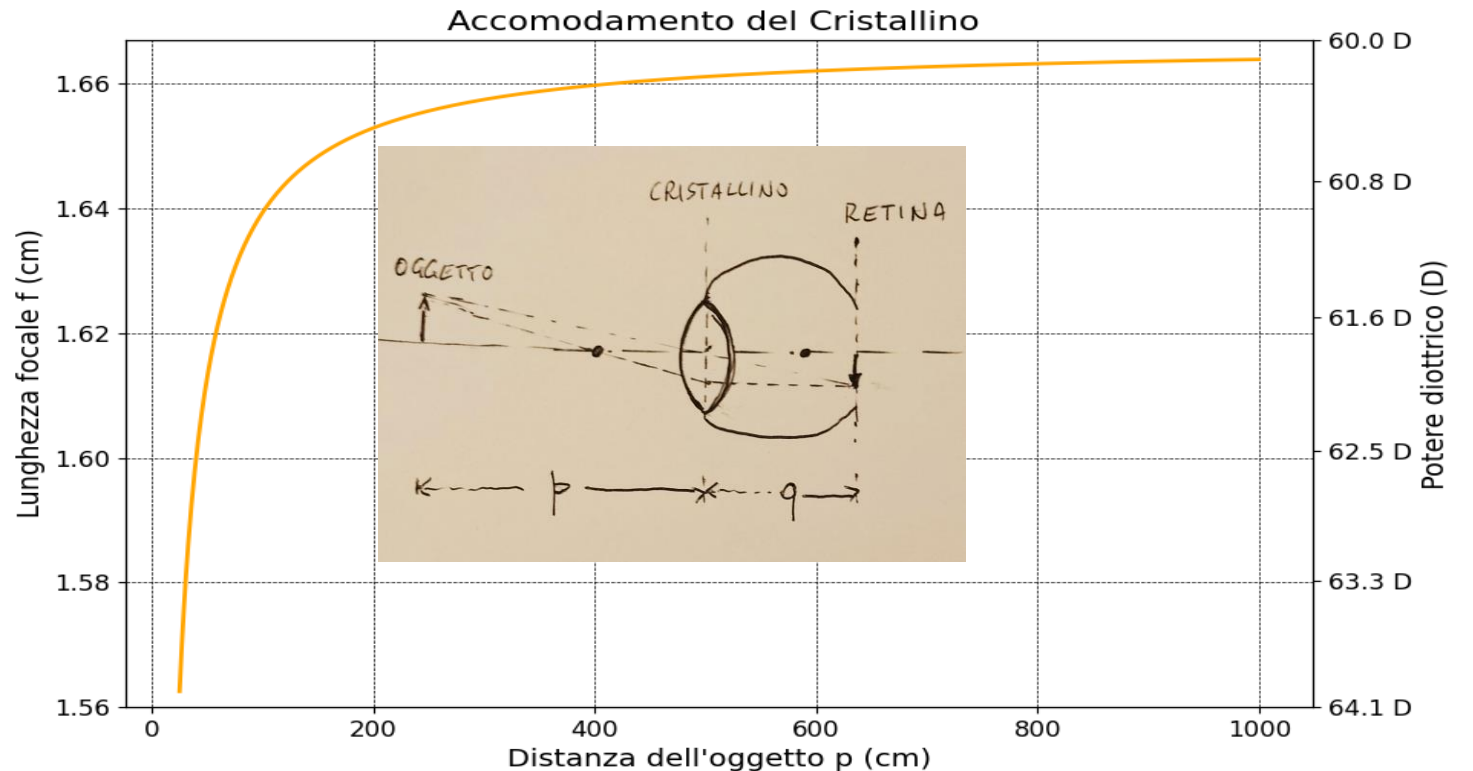


Camera oscura con lente convergente

La lente raccoglie più luce rispetto al semplice foro stenopeico. L'immagine risulta più luminosa e nitida. La messa a fuoco si regola modificando la distanza tra lente e schermo .

Modellizzazione dell'occhio

- L'occhio può essere modellizzato come una **camera oscura con lente convergente (cristallino)**. L'immagine di un oggetto si forma sul **piano retinico**, dove viene codificata in impulsi elettrici dalle **cellule fotorecetttrici**.
- La distanza tra **cristallino e retina** è **fissa** ($q \approx 1.6 \text{ cm}$ corrispondente a $1/q \approx 60 \text{ D}$). Pertanto, per mettere a fuoco un oggetto, la **lunghezza focale del cristallino si adatta** in tempo reale alla distanza dell'oggetto.
- Un occhio sano è in grado di **accomodare la focale** coprendo il **range diottrico** $60 < D < 64$.
- Se il range è più stretto, ad esempio, $60 < D < 62$, non si mettono a fuoco gli **oggetti vicini**. Il difetto è noto come **ipermetropia**.



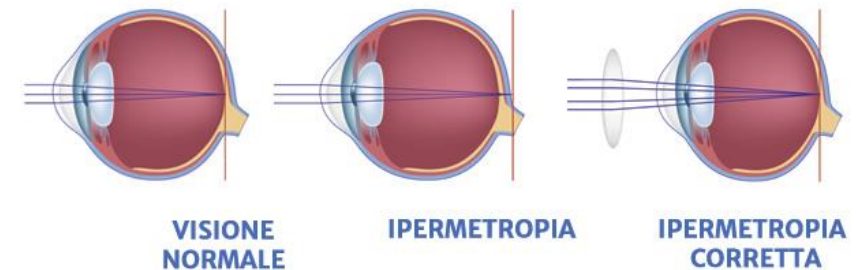
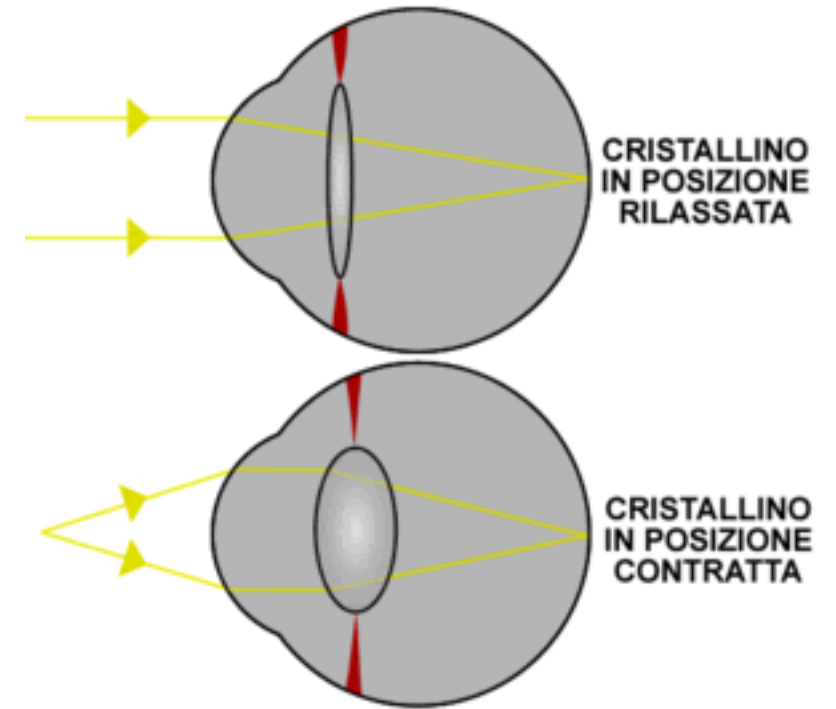
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

Accomodamento del cristallino

- Il **cristallino** può essere modellizzato come una **lente biconvessa** con raggi di curvatura **simili tra loro** ($R_1 \approx R_2 \approx R$).
- La **formula del costruttore di lenti** fa comprendere il meccanismo

$$\frac{1}{f} \approx (n - 1) \frac{2}{R}$$

- I **muscoli ciliari** (in rosso nella figura) premono i bordi del cristallino modificandone il **raggio di curvatura**. Questo meccanismo **modifica dinamicamente la lunghezza focale** e consente la messa a fuoco in **tempo reale**.
- Se i **muscoli ciliari sono inefficienti**, il deficit si cura indossando **una lente convergente** che fornisce le diottrie mancanti alla visione ravvicinata. (In figura è mostrata l'azione correttiva alla ipermetropia di una lente biconvessa).
- Il difetto opposto (miopia) si corregge con una lente divergente.



Telescopio rifrattore kepleriano

Due lenti convergenti disposte in modo che il **fuoco** di una coincida con il fuoco **dell'altra**

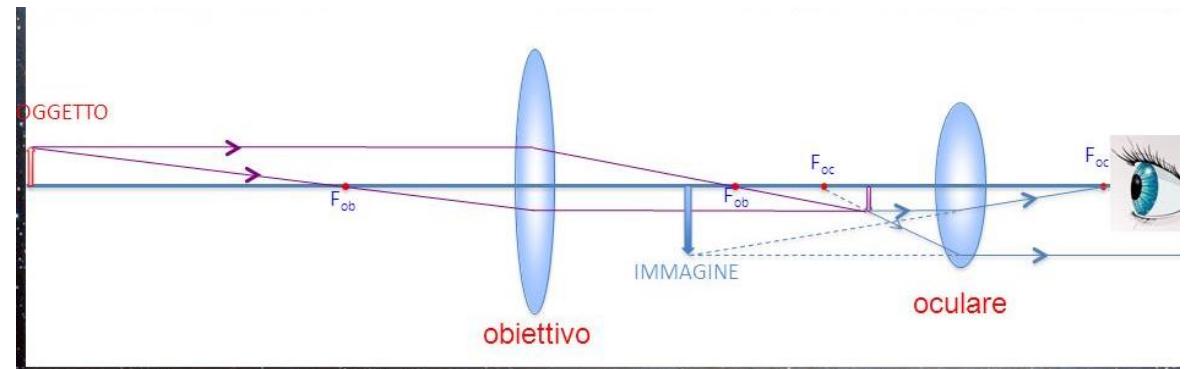
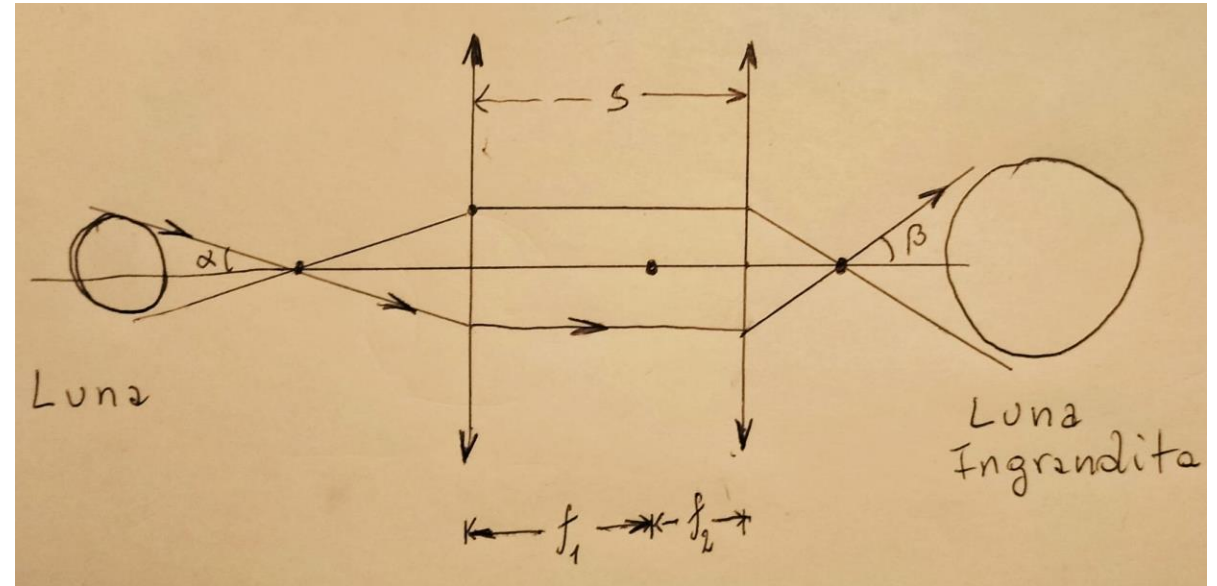
$$f_1 + f_2 = s$$

formano un «sistema afocale» con potere diottrico nullo ($1/f_e = 0$)

Notare l'ingrandimento angolare:

$$\frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{f_1}{f_2}$$

La **dimensione angolare apparente** della Luna osservata attraverso il sistema (β) è **maggiore** rispetto a quella osservata **a occhio nudo** ($\alpha \approx 0.5^\circ$)



Telescopio rifrattore galileiano

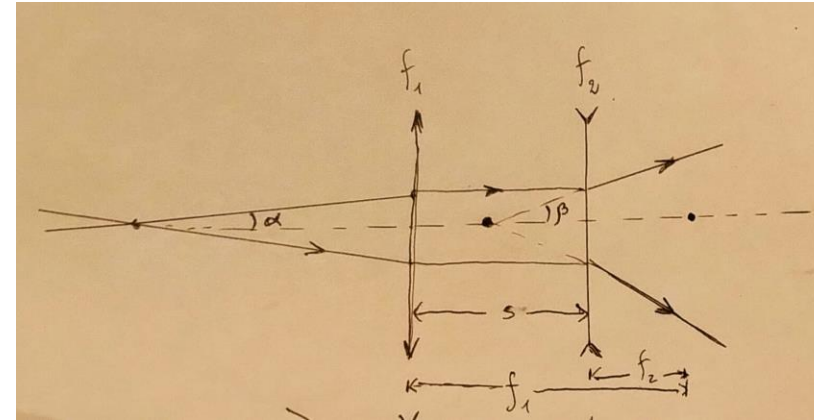
Esercizio: Progettare un telescopio rifrattore che impieghi una lente convergente ed una divergente. Lo strumento deve avere un ingombro totale di 100 cm e ingrandire 20 volte

Descrizione del telescopio galileiano conservato presso il Museo Galileo di Firenze:

« Il secondo cannocchiale (inv. 2428) è composto di un tubo principale alle cui estremità sono inserite due sezioni separate che portano l'obiettivo e l'oculare. L'obiettivo **piano-convesso**, con il lato convesso verso l'esterno, misura 37 mm di diametro, ha un'apertura di 15 mm, distanza focale di 980 mm e spessore al centro di 2,0 mm. L'oculare originale è perduto ed è stato sostituito nell'Ottocento da un oculare **biconcavo** di 22 mm di diametro, spessore al centro di 1,8 mm, distanza focale di -47,5 mm (la distanza focale negativa indica che si tratta di una lente divergente). Lo strumento può ingrandire gli oggetti di 21 volte e ha un campo visivo di 15' »

(fonte:

https://it.wikipedia.org/wiki/Cannocchiali_di_Galileo)



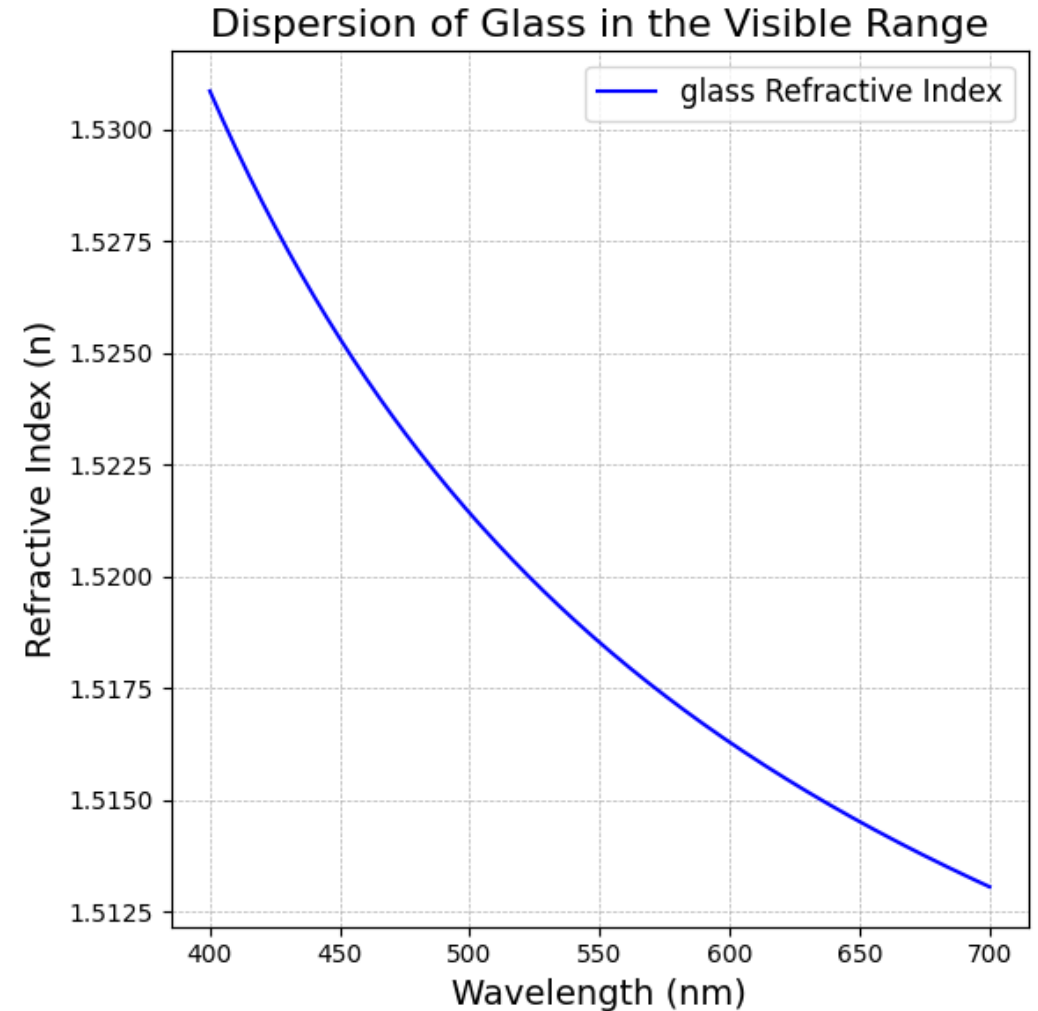
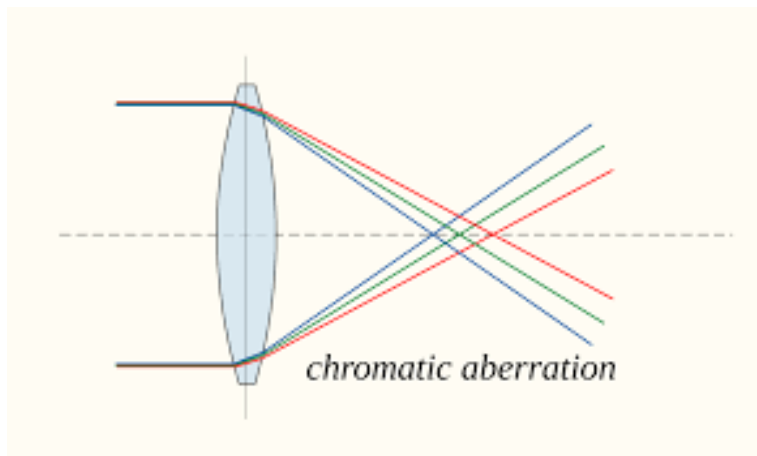
$$\begin{cases} f_1 + f_2 = 100 \text{ cm} \\ -f_1/f_2 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_1 &\approx 105 \text{ cm} \\ f_2 &\approx -5 \text{ cm} \end{aligned}$$



Aberrazione cromatica

L'indice di rifrazione del vetro dipende dalla lunghezza d'onda, quindi ciascun colore che compone la luce bianca è focalizzato in punti diversi dell'asse ottico. Pertanto, le immagini nei telescopi rifrattori possono risultare sfocate e con aloni colorati ai bordi (aberrazione cromatica)



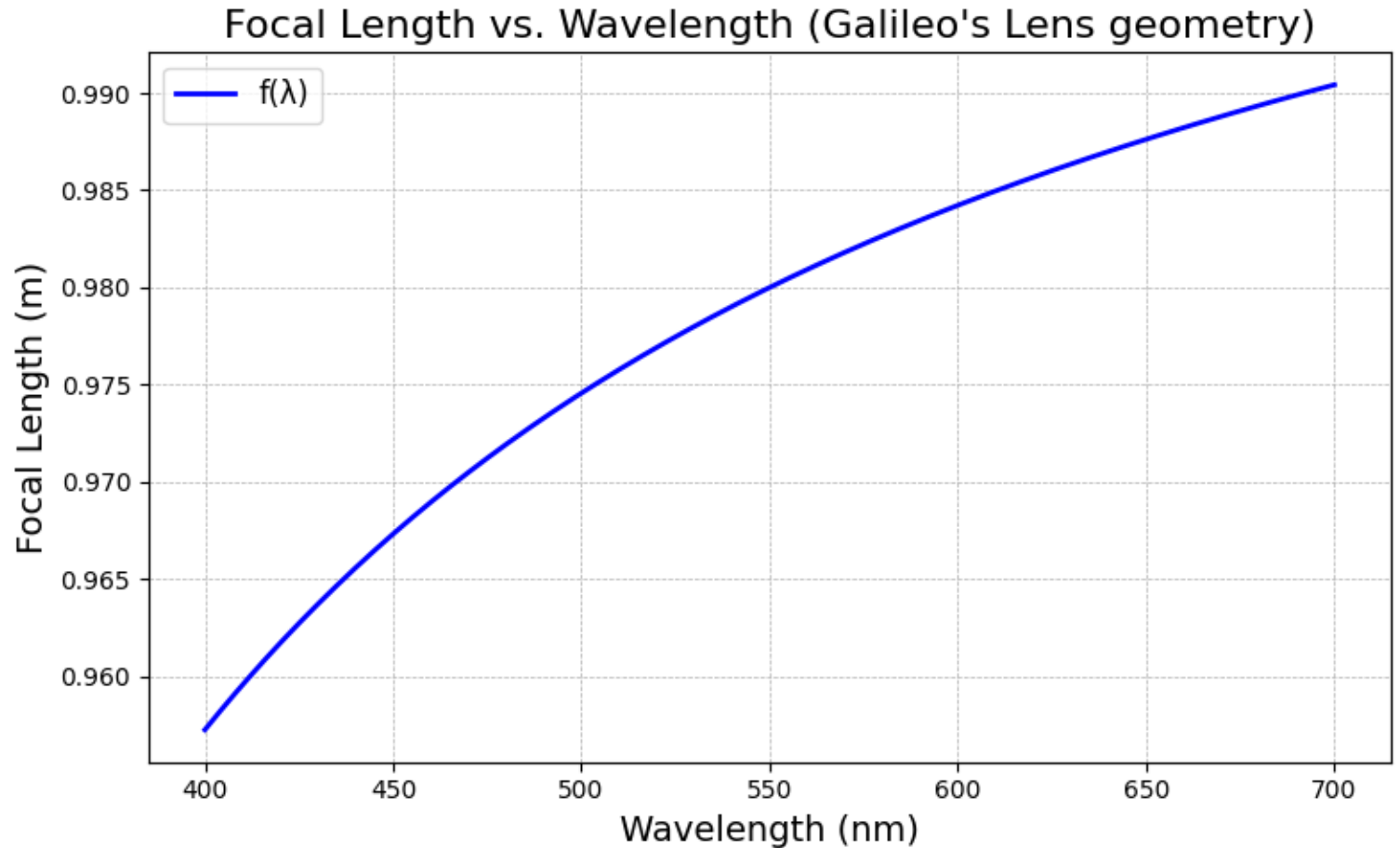
Aberrazione cromatica

$$\frac{1}{f} = \frac{n(\lambda) - 1}{R}$$

Formula del costruttore di Lenti, esplicitando la dipendenza dell'indice di rifrazione dalla lunghezza d'onda della luce.

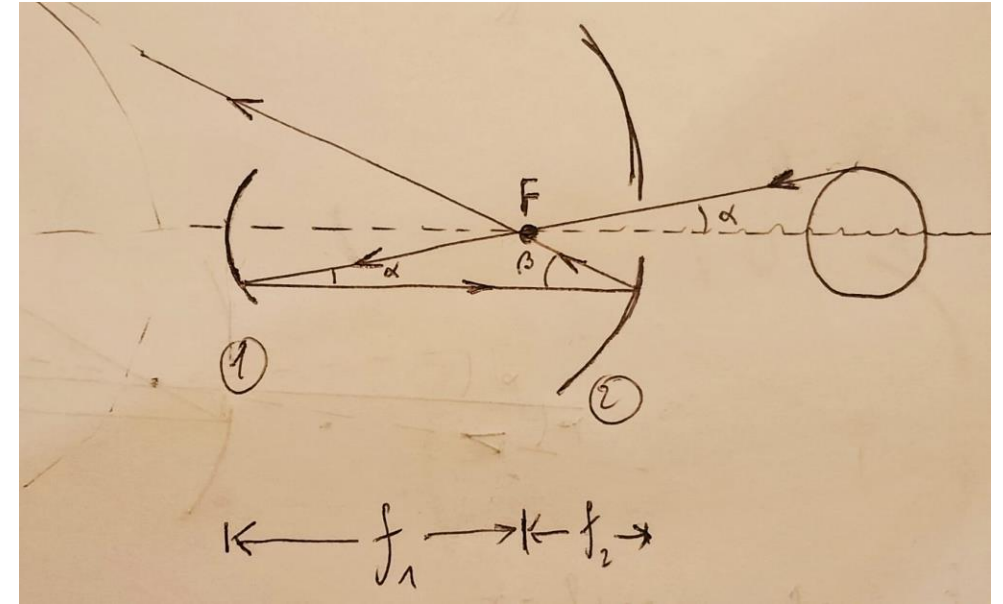
Nel caso del telescopio di Galileo, dispersione focale media di 1 m, è circa **±1.5 cm** su una focale media di **1m**.

L'effetto della aberrazione cromatica è molto più grande della aberrazione dovuta alle proprietà focali non esatte della forma sferica!



Telescopio riflettore Newtoniano

Si evita l'aberrazione cromatica sostituendo le lenti con specchi. In pratica, si realizza un sistema afocale con **una coppia di specchi sistemati in modo che il fuoco dell'uno coincida con quello dell'altro** (Gregory 1663, Newton 1668)



*“Might telescopes be made perfect enough, if not for the different ways that light rays refract! But because of this, I see no other way to improve refracting telescopes except by increasing their length. However, very long tubes are difficult to handle, bend easily, and shake, making objects appear unstable. Since improving telescopes using refraction seems hopeless, **I designed a new type of telescope using a concave mirror instead of a lens**”* (Adapted version of Newton’s original words from *Opticks*, 1704. Some vocabulary and sentence structures have been modernized for clarity, but the meaning remains unchanged.)

Alone Lunare

 **Credit** Alan Dyer / Amazing Sky Photography



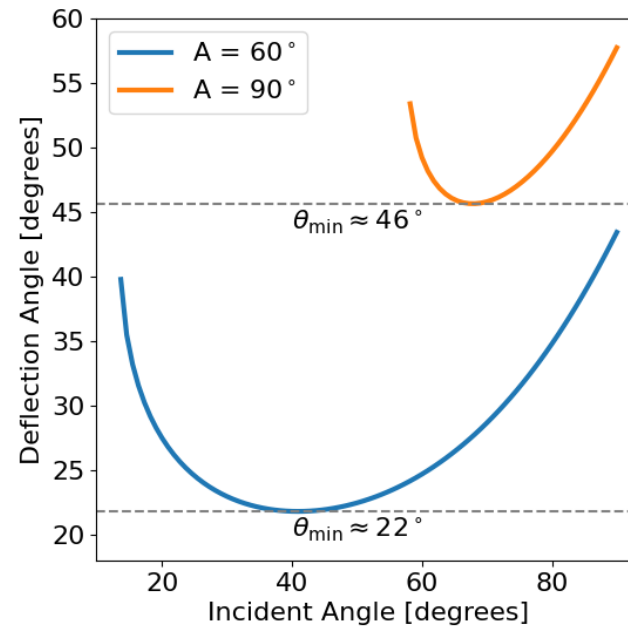
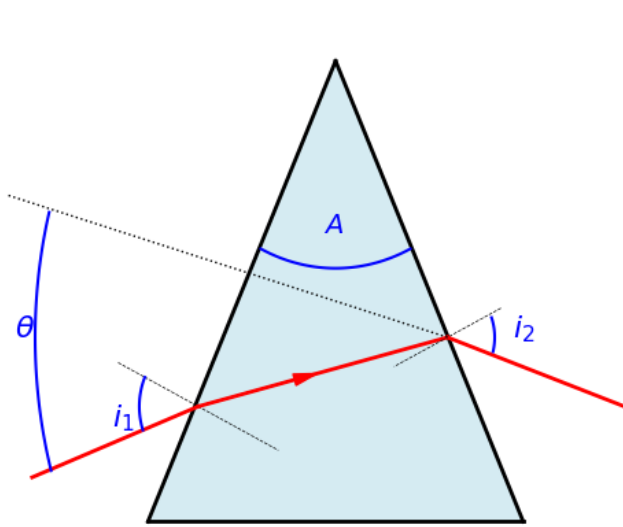
L'alone è causato dalla **rifrazione della luce lunare nei cristalli di ghiaccio** sospesi negli strati alti dell'atmosfera.

Nella fotografia sono visibili **Venere, Marte e Giove allineati lungo l'eclittica** oltre alle stelle **Regolo, Spica e Arturo**, che formano un caratteristico triangolo nel cielo.

L'immagine è stata acquisita con un **obiettivo fish-eye**, pertanto le **distanze angolari tra gli oggetti sono proporzionali alla loro separazione misurabile in pixel**.

Analizzando l'immagine si può misurare **l'indice di rifrazione dei cristalli di ghiaccio**.

Minima deflessione in un prisma



Un raggio di luce entra in un prisma subisce una doppia rifrazione (una in entrata e una in uscita). Il cambio di direzione (θ) dipende dall'angolo di incidenza. La deflessione minima dipende dall'indice di rifrazione (n) e dall'angolo al vertice (A)

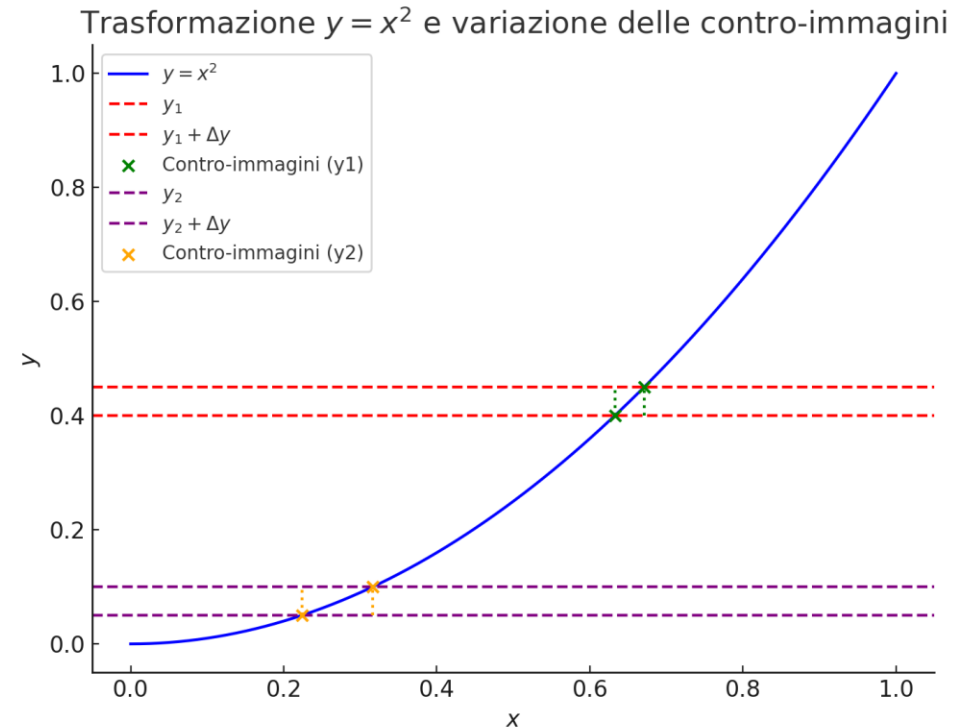
Se il prisma è orientato a caso rispetto alla luce incidente - come capita per i cristalli di ghiaccio sospesi in aria - **la deflessione più probabile è quella minima (*)**

$$n \sin \frac{A}{2} = \sin \frac{A + \theta_{min}}{2}$$

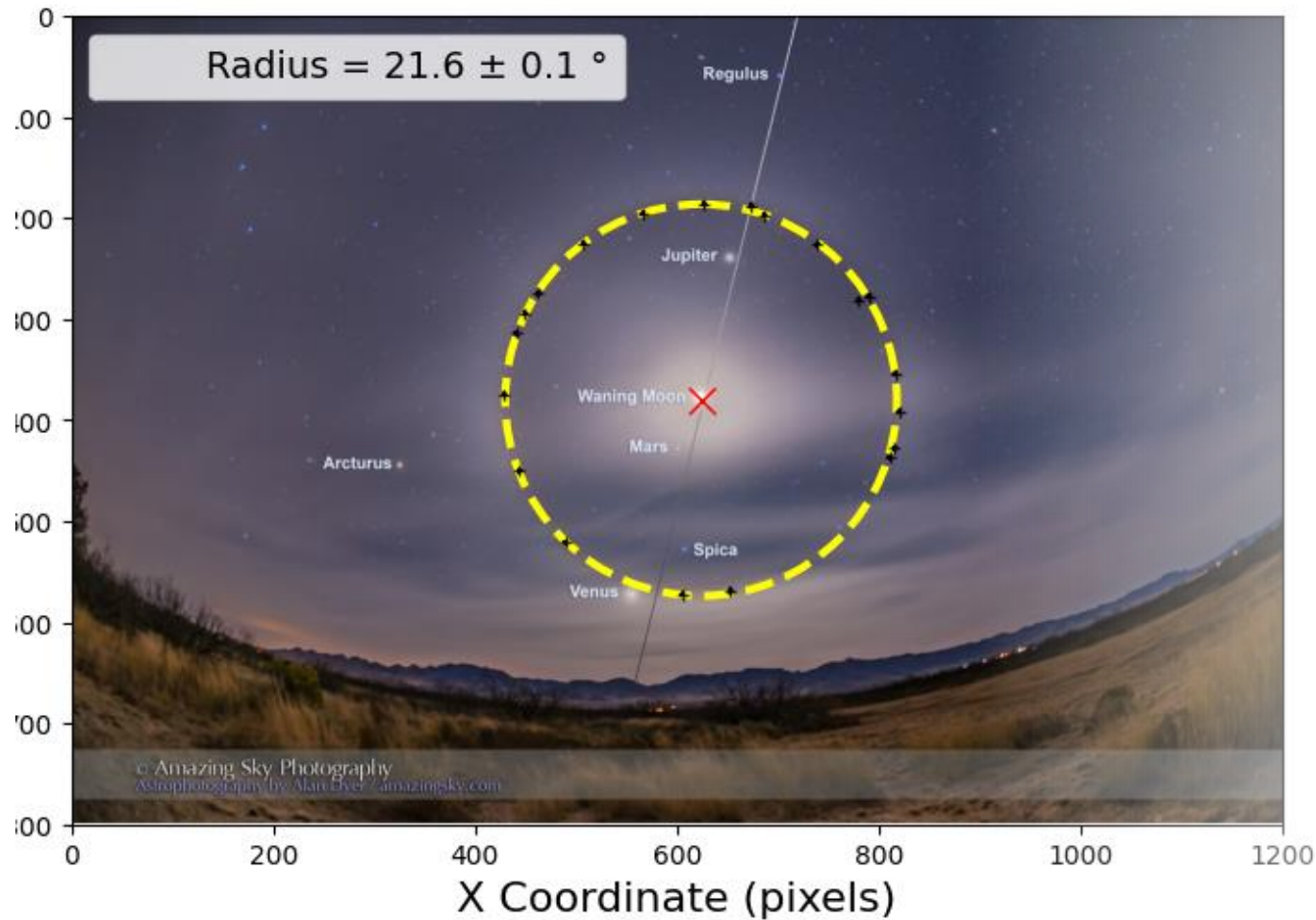
Probabilità e punti estremali (*)

- Prendiamo *un numero* x distribuito uniformemente in $[0,1]$
- Il quadrato $y = x^2$ cade in $[0,1]$ ma è ancora uniforme ?
- No! Il valore più probabile è lo zero!
- Ovvero la probabilità è massima in $x=0$ dove $y = x^2$ assume valore minimo.
- Vedere l'argomento della contro-immagine!

$$\Delta x \approx \Delta y / \frac{dy}{dx}$$



Notare come aumenta la dimensione della contro-immagine Δx mentre l'intervallino Δy è preso vicino a $y=0$



Determinare il **raggio dell'alone** in pixel con un **fit circolare**

Determinare il fattore di **conversione pixel-to-angolo** utilizzando le tre coppie di stelle visibili nella immagine

La *distanza angolare* (Δ) tra due stelle si determina dalle loro **coordinate celesti** (cercare in rete!)

$$\cos \Delta = \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

La calibrazione pixel-angolo è data la rapporto

$$scala = \frac{\Delta}{d_{pixel}}$$

Dal raggio espresso in gradi (θ_{min}) si trova l'indice di rifrazione del ghiaccio

La simmetria esagonale dei fiocchi di neve suggerisce l'angolo del prisma $A=60^\circ$

Il fit circolare:

Le Coordinate del centro e raggio della circonferenza si trovano minimizzando il chi-quadro così definito:

$$\chi^2 = \frac{1}{4d^2} \sum_{i=1}^n \frac{[(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 - R^2]^2}{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2}$$

d è l'errore sulle coordinate dei punti campionati sull'alone, uguale lungo x e lungo y