

Dispense di Ottica Geometrica

Corso di Elementi di Ottica

CdL Ottica e Optometria

M. De Seta

Indice

1- Natura ondulatoria della luce	3
2- Principi dell'ottica Geometrica	14
2.1 Propagazione rettilinea della luce	14
2.2 La propagazione della luce nei mezzi materiali	16
2.2.1 Riflessione rifrazione della luce: le leggi di Snell	18
2.2.2 La dispersione della luce	24
3- Sistemi ottici e formazione delle immagini	32
3.1- Il Diottro sferico	40
3.2 Le lenti	58
3.2.1 Lenti sottili	60
3.2.2 Lenti spesse	80
3.2.3 Sistemi di lenti sottili	99
3.2.4 Aberrazioni prodotte dalle lenti	104
3.3 Gli specchi	122
3.3.1 Lo specchio piano	124
3.3.2 Specchi sferici	128

1- La natura ondulatoria della luce

La propagazione della luce è un fenomeno ondulatorio. Più precisamente, l'energia emessa da una sorgente luminosa, di natura qualsiasi, viene trasportata nello spazio mediante onde elettromagnetiche. Prima di addentrarci nello studio dei fenomeni luminosi è bene fornire alcune elementari informazioni sulla struttura di tali onde. Poiché un'onda elettromagnetica è definibile concettualmente attraverso due vettori, il campo elettrico **E** e il campo magnetico **B**, cominciamo con il chiarire il loro significato fisico.

Campo elettrico **E**

La presenza di cariche elettriche in una data regione di spazio determina una variazione del suo stato fisico : tale regione è sede di un campo elettrico. Se una carica elettrica di prova venisse posta in ciascun punto della regione, essa sarebbe soggetta all'azione di una forza di natura elettrica. Il campo elettrico non è un concetto astratto ma una realtà fisica concretamente misurabile mediante il vettore **E** definito come la forza elettrica che in un dato punto del campo agisce sull'unità di carica elettrica. Il modulo di tale vettore (intensità del campo elettrico) è pertanto misurabile in Newton/Coulomb (N/C). la direzione e il verso del vettore **E** indicano in quale direzione e in quale verso agirebbe la forza elettrica su una carica positiva. Quando l'intensità del campo **E** è costante nel tempo, per ciascun punto del campo, allora in campo viene detto elettrostatico. Campi elettrostatici sono, per esempio, quelli generati da elettrizzazione per strofinamento o quelli generati da una carica $+Q$ ferma in un punto o quelli esistenti tra le armature di un condensatore piano alle quali sia stata applicata una tensione elettrica costante. Il campo elettrico associato a un'onda elettromagnetica è in realtà un campo la cui intensità varia in uno stesso punto con il tempo e che si propaga nello spazio con una certa velocità **v**.

Campo magnetico **B**

La proprietà della magnetite di attrarre limatura di ferro è nota fin dall'antichità. Per molti secoli si è supposto che il magnetismo fosse del tutto indipendente da altri fenomeni fisici. Soltanto nel XIX secolo ci si rese conto che effetti magnetici si possono ottenere mediante cariche elettriche in movimento. In particolare se una carica elettrica si muove con velocità **v**, per esempio, lungo un conduttore metallico, allora su opportuni corpi di prova, come un ago magnetico, posti nella regione circostante, si osservano effetti magnetici proporzionali alla velocità. Diciamo allora che tale regione è divenuta sede di un campo magnetico. Se in un filo metallico circola una corrente di intensità costante generata quindi da un campo elettrico stazionario, anche il campo magnetico attorno al filo sarà a sua volta stazionario. Se invece varia l'intensità di corrente, le variazioni di campo elettrico generano campi magnetici anche essi variabili nel tempo. A sua volta un campo magnetico variabile genera un campo elettrico variabile.

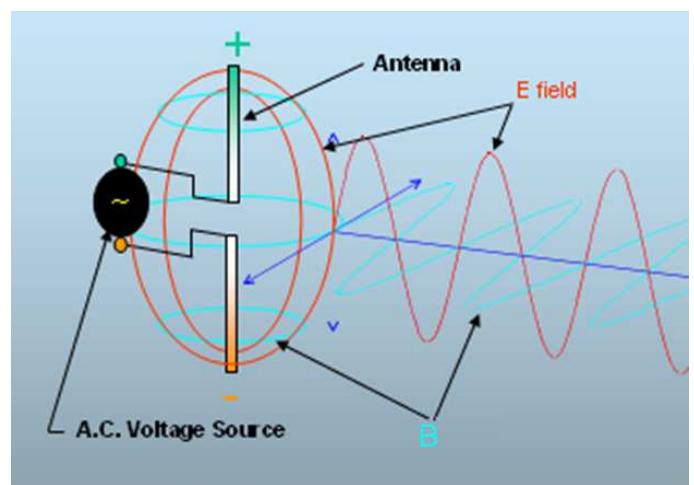
Riassumendo:

Il **campo elettrico** è un campo di forze generato nello spazio dalla presenza di carica elettrica o di un campo magnetico variabile nel tempo.

Il **campo magnetico** è un campo di forze generato nello spazio dal moto di una carica elettrica o da un campo elettrico variabile nel tempo.

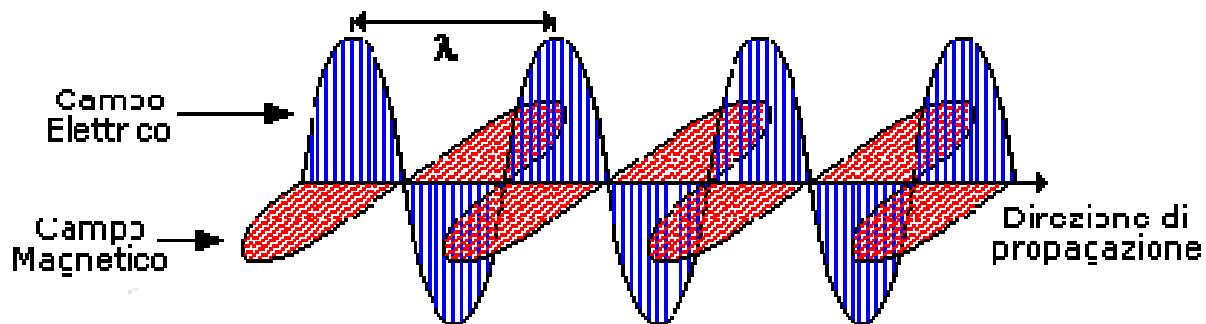
I due campi insieme costituiscono il **campo elettromagnetico**.

Benché le interazioni tra campi elettrici e magnetici fossero già note all'inizio del XIX secolo si deve a Maxwell il merito di avere formulato nel 1873 una teoria mediante la quale tutti i fenomeni elettromagnetici sono riconducibili a un sistema di quattro equazioni, dette appunto "Equazioni di Maxwell". Da tali equazioni si ricava ad esempio che le accelerazioni prodotte su cariche elettriche in movimento generano campi elettrici e magnetici, mutuamente concatenati, che si propagano nello spazio mediante onde elettromagnetiche la cui frequenza è uguale alla frequenza di oscillazione delle cariche elettriche. Questo è il funzionamento di un'antenna che produce appunto onde elettromagnetiche, mostrato nella figura al lato.

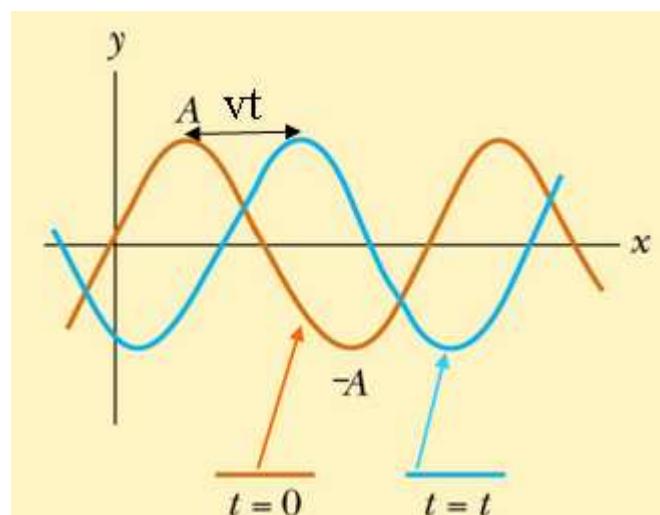


Onde elettromagnetiche

Un'onda è una perturbazione di una grandezza fisica (densità, campo elettrico, altezza...) che viaggia nello spazio. Nell'onda elettromagnetica la perturbazione che si propaga è la variazione di campo magnetico e di campo elettrico. Secondo la teoria del campo elettromagnetico in un'onda elettromagnetica armonica i vettori **E** e **B** oscillano con andamento sinusoidale su piani mutuamente ortogonali. La direzione di propagazione dell'onda è ortogonale al piano individuato dai vettori **E** e **B** e ciò significa che le onde elettromagnetiche sono trasversali, come mostrato nella seguente figura



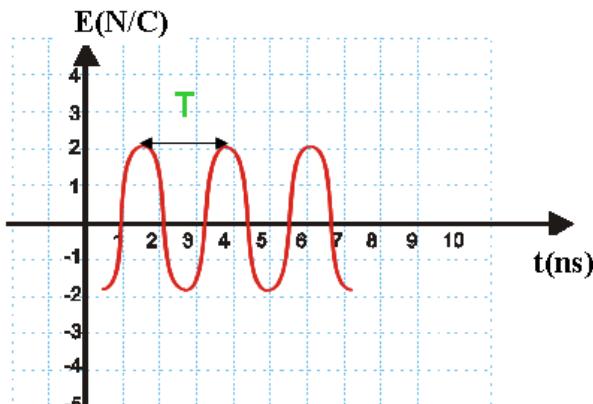
In un generico punto dello spazio sede di propagazione delle onde elettromagnetiche i vettori **E** e **B** oscillano in modo sincrono e la loro intensità varia da un massimo positivo (ampiezza A) a zero, da zero a un massimo negativo (-A), nel tempo di un periodo **T**. Se l'onda elettromagnetica si muove con velocità **v** nel mezzo considerato in un tempo **t** la perturbazione si sarà spostata di **vt** come mostrato in figura.



In un periodo di tempo T in cui la perturbazione in un certo punto dello spazio fa una oscillazione completa, la perturbazione si sposta di una distanza λ pari a una **lunghezza d'onda**. Pertanto, vale la relazione $\lambda=vT$.

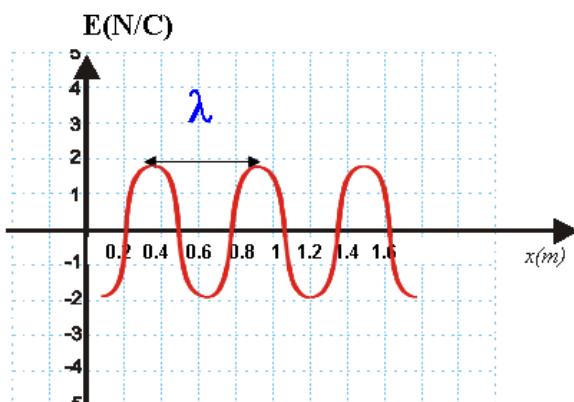
In un'onda elettromagnetica il campo elettrico e il campo magnetico variano quindi sinusoidalmente sia in funzione del tempo in uno stesso punto, sia in funzione della posizione ad un certo istante.

Se misuriamo la variazione nel tempo del campo elettrico in un certo punto x_0 otteniamo un grafico del tipo:



Da tale grafico possiamo misurare il periodo T rappresentato dal *tempo* nel quale la perturbazione in un certo punto fa un'oscillazione completa e la frequenza $f=1/T$ (si misura in Hz= s^{-1}), pari al numero di oscillazioni in un secondo.

Se viceversa misuriamo i valori del campo a un certo istante t_0 in funzione della posizione nello spazio otteniamo un grafico del tipo:



Da tale grafico possiamo misurare la lunghezza d'onda λ rappresentata dalla *distanza* tra due punti che in un certo istante hanno lo stesso valore della perturbazione.

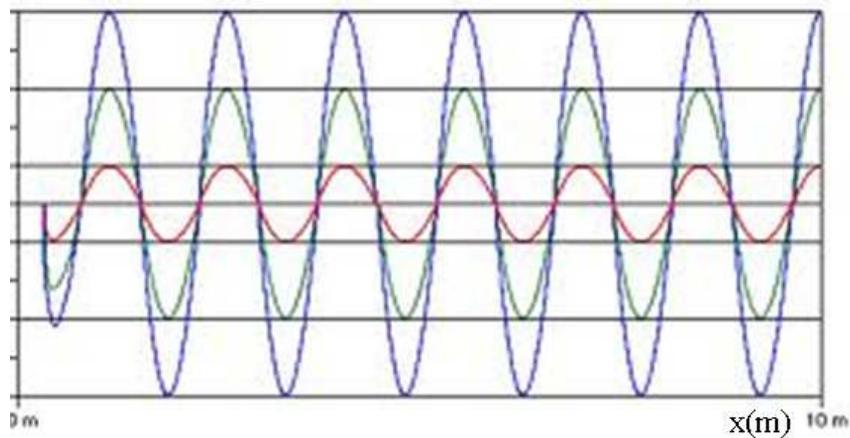
**L'onda elettromagnetica sinusoidale è quindi caratterizzata da:
ampiezza, lunghezza d'onda, periodo o frequenza e velocità di propagazione**

Lunghezza d'onda e periodo sono legate tra loro attraverso la velocità di propagazione v . Si ha:

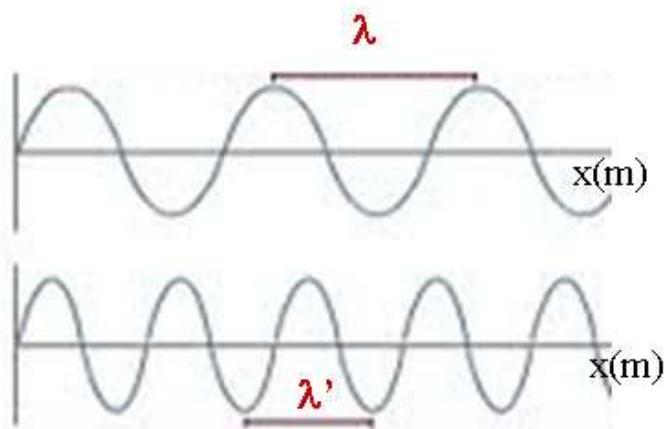
$$\lambda = vT = \frac{v}{f} \quad v = \frac{\lambda}{T}$$

Esempi: onde che si propagano nello stesso mezzo con la stessa velocità (per esempio luce nel vuoto).

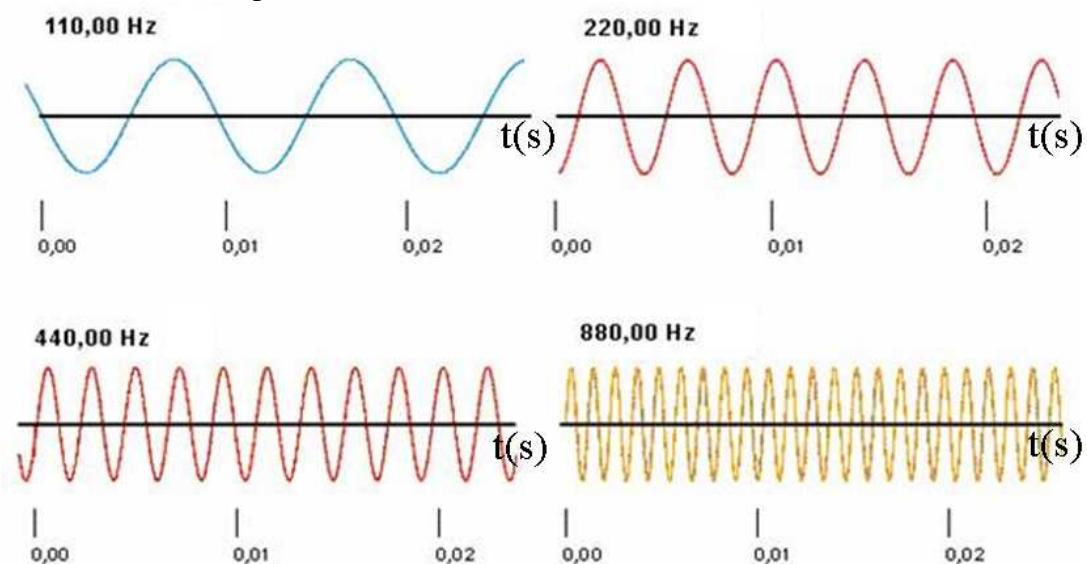
a) Onde di diversa ampiezza, stessa lunghezza d'onda (e quindi stesso periodo, stessa frequenza)



b) Onde di diversa lunghezza d'onda (e quindi diverso periodo e frequenza), stessa ampiezza



c) Onde di diversa frequenza e periodo (inversamente proporzionali!) (e quindi diversa lunghezza d'onda) e stessa ampiezza.



La velocità delle onde elettromagnetiche

La velocità dell'onda elettromagnetica dipende dal mezzo in cui si propaga. Nel vuoto la velocità è pari a $c=300000$ Km/s, la massima velocità possibile per il trasporto dell'energia.

La luce può propagarsi in un mezzo trasparente (aria, vetro, acqua) ma anche nel VUOTO.

La sua velocità nel vuoto è $c= 300\ 000$ km / s

La luce proveniente dal sole impiega circa 8 minuti per arrivare a noi.



In un mezzo diverso dal vuoto la velocità della luce è minore. In quasi tutti i fenomeni luminosi è essenziale conoscere il valore del rapporto tra le due velocità e pertanto si definisce **indice di rifrazione n** di un mezzo trasparente il rapporto tra la velocità della luce nel vuoto e quella nel mezzo considerato:

$$n = \frac{c}{v}$$

Tale rapporto è sempre un numero puro ed è sempre >1 . Un altro fatto degno di nota è che nel vuoto la velocità della luce è sempre la stessa mentre nei mezzi materiali la velocità della luce varia al variare della lunghezza d'onda, ossia il valore di n dipende dalla lunghezza d'onda. In molti questioni di ottica non è necessario conoscere i valori di n per diverse lunghezze d'onda comprese nello spettro visibile, e pertanto si fa riferimento al valore dell'indice di rifrazione standard per una lunghezza d'onda convenzionalmente scelta ($\lambda=589,3$ nm linea gialla del sodio). Noti i valori dell'indice di rifrazione n (riportati nella tabella a fianco per diversi mezzi), possiamo ricavare la velocità della luce nel mezzo invertendo la precedente relazione. Si ha:

Acqua (20°)	1.33335
Acqua (100°)	1.31819
Acqua (vapore acqueo)	1.000261
Aria	1.0002926
Alcool	1.329
Ambra	1.546
Ametista	1.544
Diamante	2.417
Ossigeno (stato gassoso)	1.000276
Ossigeno (stato liquido)	1.221
Plastica	1.460
Plexiglas	1.50
Quarzo	1.544
Smeraldo	1.576
Topazio	1.620
Vetro	1.51714

$$v = \frac{c}{n}$$

Aria $n \sim 1$ $v=c=300000$ Km/s

vetro $n \sim 1.5$ $v=c/1.5=200000$ Km/s

Meccanismo di propagazione delle onde

L'onda sinusoidale è caratterizzata da: ampiezza, lunghezza d'onda, periodo o frequenza e velocità di propagazione.

- La sorgente fissa la frequenza f o il periodo T
- Le proprietà fisiche del mezzo fissano la velocità di propagazione v
- La relazione $\lambda = vT = \frac{v}{f}$ fissa la lunghezza d'onda λ

Il periodo dell'onda (e quindi la frequenza) è lo stesso della sorgente, esso non cambia durante la propagazione in mezzi diversi.

Al contrario se v diminuisce perché l'onda passa da un mezzo all'altro, λ diminuisce a sua volta

f, T e il rapporto v/λ restano costanti se l'onda cambia mezzo (per esempio se la luce che passa dall'aria all'acqua) $f = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}$

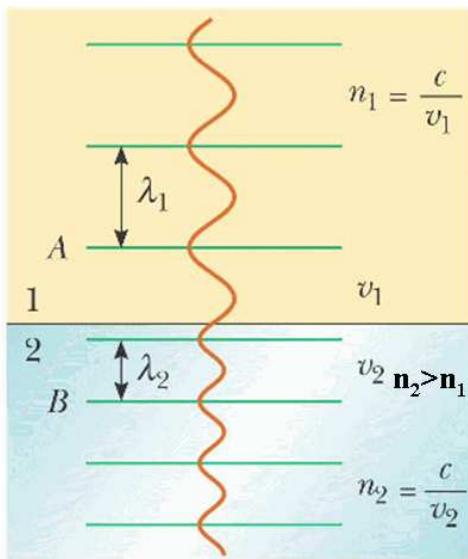
Come varia λ nelle onde e.m. se varia v

Un osservatore posto in A e uno posto in B vedono passare lo stesso numero di creste d'onda in uno stesso intervallo di tempo, quindi entrambi misurano la stessa frequenza.
La frequenza dell'onda non cambia con il mezzo

Poiché cambia la velocità cambia anche la lunghezza d'onda:
la lunghezza d'onda è minore nel mezzo in cui la luce viaggia più lentamente cioè in cui n è maggiore

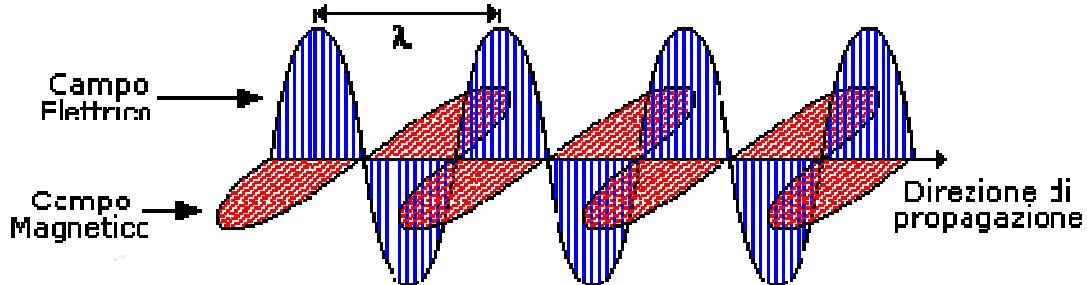
$$v = \frac{c}{n}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{nf} = \frac{\lambda_0}{n} \quad \lambda_0 = \frac{c}{f} \text{ lunghezza d'onda nel vuoto}$$



Classificazione delle onde elettromagnetiche

Le onde elettromagnetiche sono caratterizzate da:



- La lunghezza d'onda λ : la distanza tra una cresta e la successiva
- La frequenza f : il numero di oscillazioni in un secondo
- L'ampiezza: il valore massimo assunto dal campo elettrico e da quello magnetico
- La perpendicolarità dei campi: campo elettrico e campo magnetico sono sempre perpendicolari tra loro
- La direzione di propagazione: è sempre perpendicolare sia al campo magnetico che al campo elettrico (onde trasversali)
- La velocità: nel vuoto è sempre 3×10^8 m/s

Nel vuoto, abbiamo:
$$f = \frac{c}{T} = \frac{c}{\lambda}$$

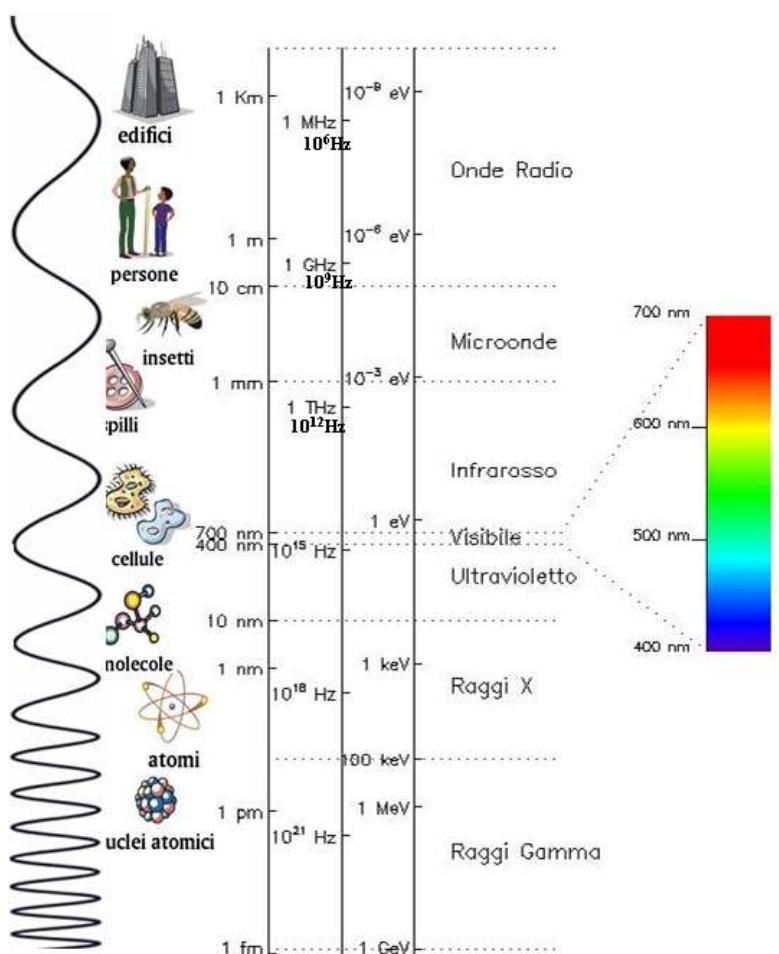
Le onde elettromagnetiche vengono classificate in base alla loro frequenza o alla lunghezza d'onda nel vuoto

In linea di principio la frequenza di un'onda elettromagnetica può assumere qualsiasi valore positivo.

L'intero intervallo di frequenze è noto come **spettro elettromagnetico**. Ad alcuni intervalli dello spettro sono stati dati nomi particolari come mostrato in figura.

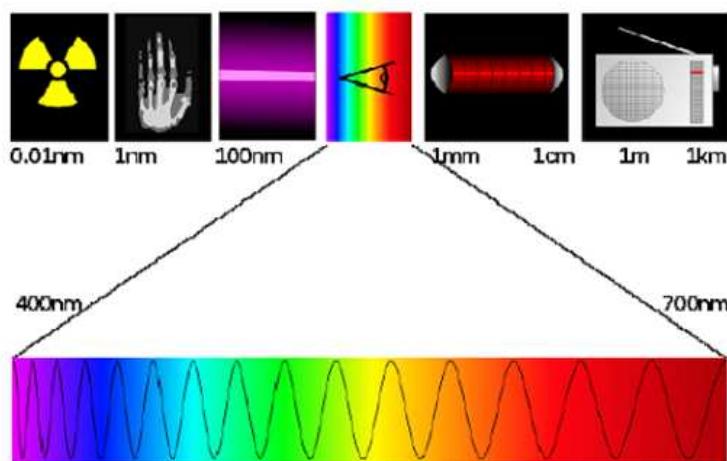
Lo spettro elettromagnetico nelle scale di:

- ❖ Lunghezze d'onda, λ
- ❖ Frequenza, f : $f=c/\lambda$
- ❖ Energia, $E=hf$ (energia fotoni)
dove l'energia è espressa in electronVolt (eV)
 $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$



Lo spettro visibile è quella parte dello spettro elettromagnetico capace di stimolare il meccanismo della visione. In termini di lunghezza d'onda lo spettro visibile è compreso tra 750 nm e 400 nm circa. Nella regione del visibile la percezione degli oggetti è accompagnata da una sensazione cromatica, che è il risultato di un complesso processo di interazione tra la radiazione incidente sull'occhio, le cellule della retina (fotoricettori), il nervo ottico e il cervello. Per la parte fisica il colore dipende dalla lunghezza d'onda della radiazione che investe l'occhio. Lo **spettro visibile** va dal rosso (620-750 nm) al violetto (380-450 nm) includendo tutti i colori percepibili dall'occhio umano. La massima sensibilità dell'occhio la si ha attorno ai 555 nm (540 THz), in corrispondenza del colore verde.

Lo spettro visibile



Viola ha λ tra 420 e 380 10^{-9} m

f tra 7,89 e 7,14 10^{14} Hz

Rosso ha λ tra 630 e 760 10^{-9} m

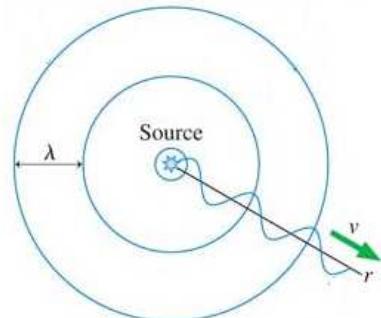
f tra 4,76 e 3,95 10^{14} Hz

Colore	Lunghezza d'onda
Violetto	380–450 nm
Blu	450–495 nm
Verde	495–570 nm
Giallo	570–590 nm
Arancione	590–620 nm
Rosso	620–750 nm

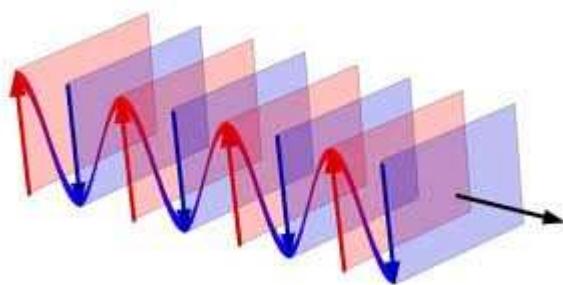
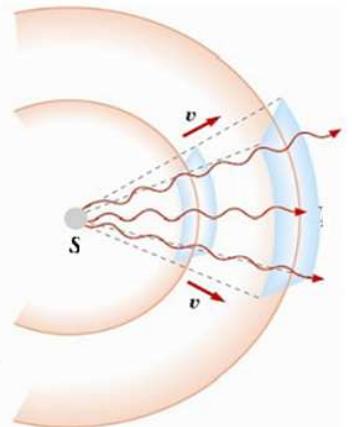
Fronti d'onda e raggi ottici

Fronte d'onda

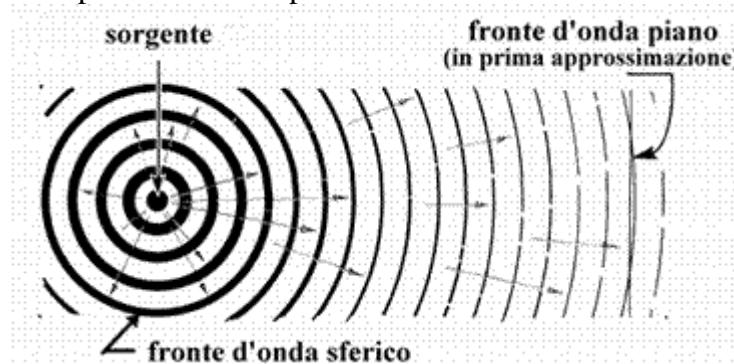
Si consideri una radiazione luminosa monocromatica emessa da una sorgente le cui dimensioni sono così piccole da poter essere considerata puntiforme. Per quanto detto a proposito delle oscillazioni sinusoidali del campo elettrico e magnetico, assumiamo che al tempo $t=0$ i valori di E e B siano massimi. Dopo un intervallo di tempo pari a un periodo T , l'onda elettromagnetica avrà raggiunto tutti i punti dello spazio che giacciono su una superficie sferica di raggio $\lambda=vT$, se v è la velocità di propagazione dell'onda nel mezzo. In tali punti i valori di E e B sono simultaneamente massimi. Si dice cioè che i punti di tale superficie sono in concordanza di fase. Dopo un intervallo di tempo $2T$ l'onda avrà raggiunto i punti della superficie sferica di raggio 2λ , essendo in quei punti sempre massimo il valore di E e B . Il ragionamento può essere esteso a superfici sferiche di qualsiasi raggio in quanto i punti di esse sono simultaneamente investiti dalla perturbazione e oscillano in fase. In generale si definisce **fronte d'onda** il luogo dei punti dello spazio che oscillano in concordanza di fase.



La forma del fronte d'onda dipende dal tipo di sorgente. Così le onde luminose generate da una sorgente puntiforme hanno fronti d'onda sferici, come mostrato nella figura a destra (onde sferiche). Viceversa le onde luminose generate da un laser hanno fronti d'onda piani (onde piane), come mostrato nella figura in basso.



A grande distanza dalla sorgente l'onda sferica, in porzioni piccole di spazio, può essere approssimata da un'onda piana. Così per esempio il fronte d'onda della radiazione solare che incide sulla superficie terrestre si può considerare piano.

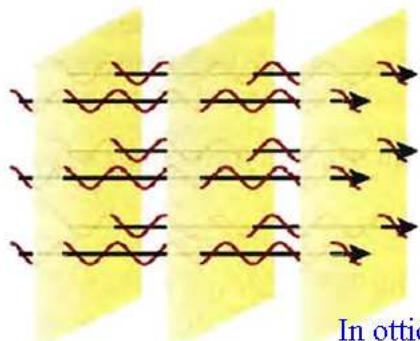


Raggio ottico

Lo studio dei fenomeni di propagazione della luce andrebbe correttamente affrontato mediante la teoria ondulatoria, cioè studiando il comportamento e la progressione di fronti d'onda. Un simile approccio ai fenomeni di propagazione è fondamentale per studiare alcuni fenomeni tipici delle onde quali diffrazione e interferenza. In molti casi si può però utilizzare un approccio più semplice introducendo il concetto di **raggio ottico**, ovvero *la linea immaginaria tracciata nella direzione di propagazione*. Se il fronte d'onda è sferico i raggi ottici coincidono con i raggi geometrici delle superfici sferiche, se le onde sono piane i raggi ottici sono perpendicolari a tali piani e sono quindi paralleli tra loro. La perpendicolarità tra i raggi e i fronti d'onda è un fatto del tutto generale.

In un mezzo omogeneo la radiazione si propaga in linea retta i raggi ottici sono sempre rettilinei. Se l'indice di rifrazione varia da un mezzo all'altro il raggio ottico varia la sua direzione per effetto della rifrazione ma sarà sempre rettilineo e sempre perpendicolare ai fronti d'onda nei due mezzi. E' bene chiarire che il raggio ottico non è una realtà fisica ma un'utile costruzione geometrica che consente in modo semplice di seguire il percorso della luce.

Onda piana

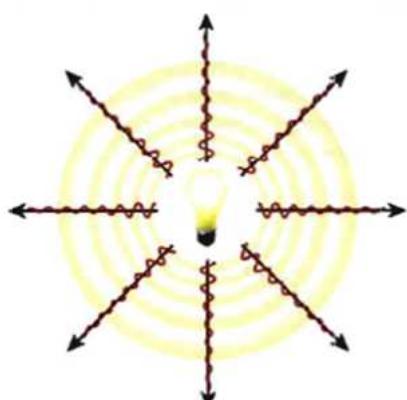


- La propagazione avviene lungo una unica direzione
- raggi paralleli
- fronti d'onda piani
- L'ampiezza dell'onda rimane costante allontanandosi dalla sorgente

In ottica, ad esempio, l'onda piana è quella prodotta da un laser



Onda sferica



- L'onda sferica è prodotta da una sorgente puntiforme
- La propagazione dell'onda è radiale
 - I raggi sono radiali
 - I fronti d'onda sono sferici
 - L'ampiezza dei campi decresce allontanandosi dalla sorgente (conservazione dell'energia: la potenza irradiata si distribuisce su una superficie più grande)

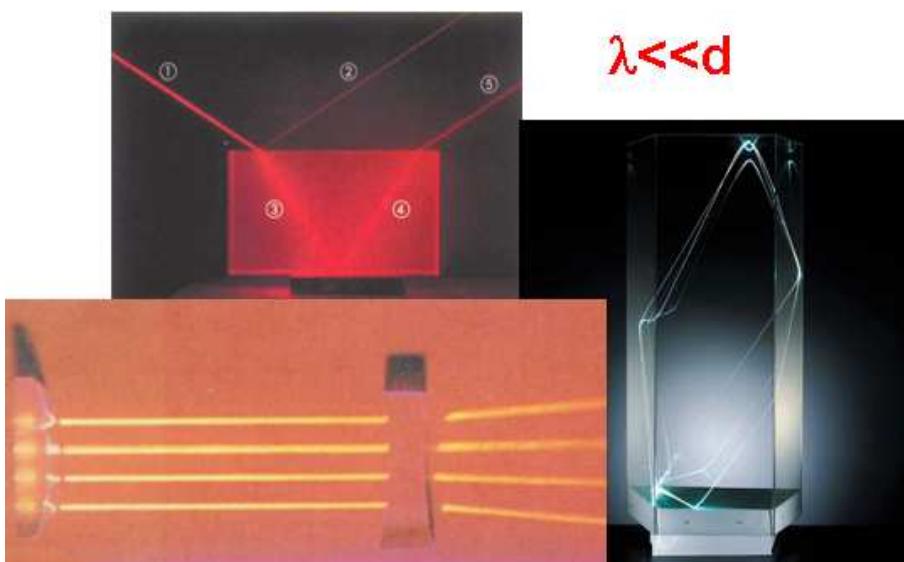
Ottica Geometrica e Ottica Fisica

In generale un problema di ottica consiste nel determinare il campo elettromagnetico nei vari punti dello spazio e in tempi successivi, noto il suo valore ad un determinato istante e conoscendo la posizione e la natura di eventuali ostacoli nella zona. Il problema è complicato e deve in generale essere risolto in base alle equazioni di Maxwell, ma a seconda dei fenomeni che si vogliono studiare si possono utilizzare teorie più o meno approssimate.

In particolare l'ottica classica si può tradizionalmente dividere in due capitoli:

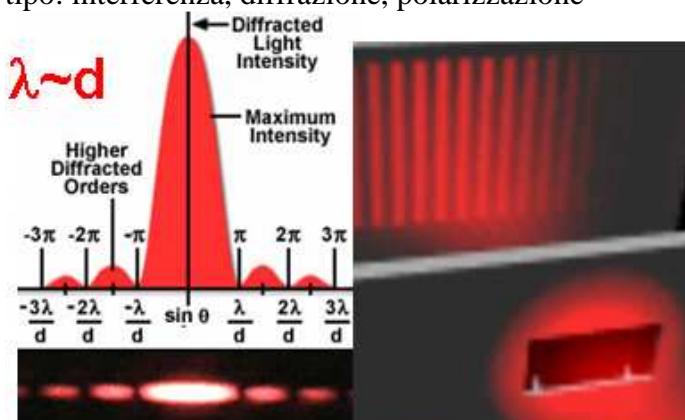
Ottica geometrica:

L'ottica geometrica definisce le leggi della riflessione e della rifrazione **assumendo che la propagazione della luce in un mezzo omogeneo avvenga in linea retta**. Tale assunzione è valida quando la luce deve superare fenditure e costrizioni la cui dimensione d è comunque molto maggiore della lunghezza d'onda. Il centro dello studio dell'ottica geometrica è quindi il comportamento di dispositivi ottici quali specchi, diottri e lenti.



Ottica Fisica

Studia i fenomeni per i quali non sono valide le ipotesi semplificative dell'ottica geometrica, ma per i quali è necessario ricorrere alla descrizione ondulatoria della radiazione elettromagnetica tipo: interferenza, diffrazione, polarizzazione



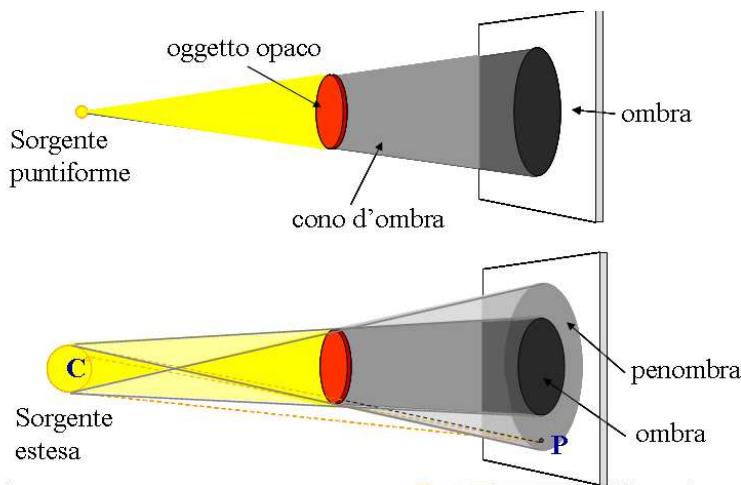
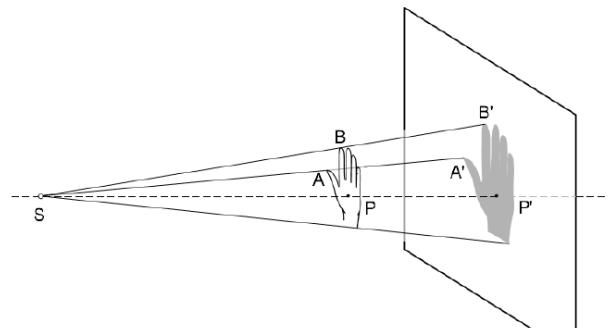
2- Principi dell'ottica Geometrica

2.1 Propagazione rettilinea della luce

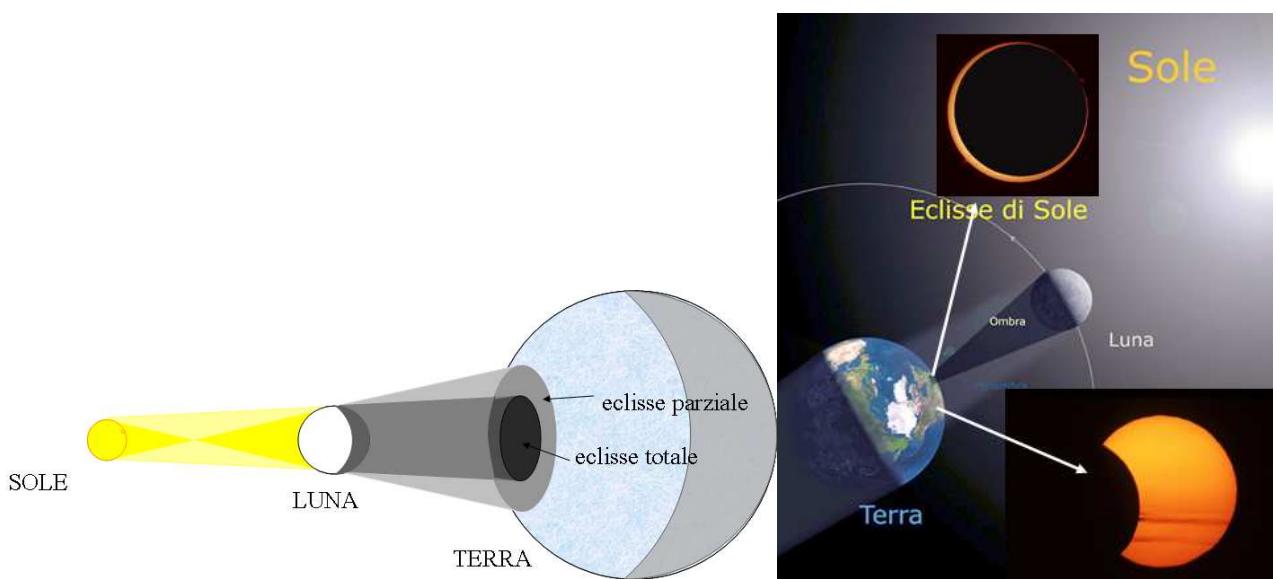
Come abbiamo detto l'ottica geometrica definisce le leggi della riflessione e della rifrazione **assumendo che la propagazione della luce in un mezzo omogeneo avvenga in linea retta.**

L'Ottica geometrica si basa quindi sul concetto di raggio luminoso o raggio di luce inteso come asse di un cono di luce di apertura infinitesima e dunque come linea perpendicolare ai fronti d'onda. La propagazione rettilinea in presenza di ostacoli e fenditure di dimensione molto maggiori della lunghezza d'onda della luce si evidenzia in molti fenomeni che ci appaiono nella vita di tutti i giorni.

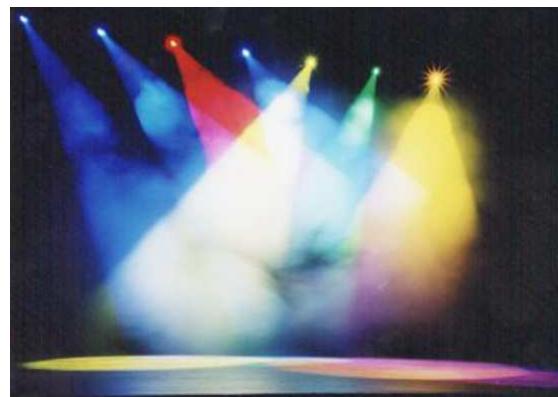
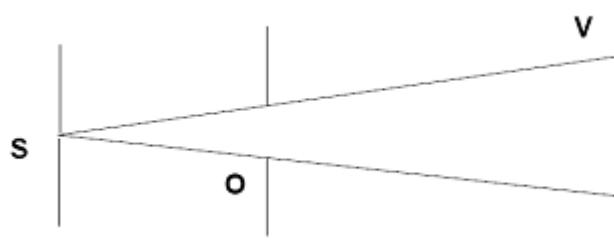
Quando un oggetto opaco, per esempio una mano, intercetta un cono di luce proveniente da una sorgente puntiforme otteniamo un'ombra netta la cui forma si ottiene disegnando i raggi rettilinei che partono dalla sorgente puntiforme e toccano i punti estremali dell'oggetto.



Quando la sorgente è estesa i coni di luce uscenti dagli estremi di essa e intercettati dall'oggetto, formano attorno all'ombra una zona di parzialmente oscurata detta penombra. Mentre nei punti dell'ombra la sorgente non è visibile, nei punti entro la penombra la sorgente è parzialmente visibile. Quando si verifica una eclissi solare le zone della superficie terrestre che si trovano nel cono d'ombra formato dalla luna subiscono un'eclissi totale quelle che si trovano nella zona di penombra una eclissi parziale.



La propagazione rettilinea della luce è evidente anche quando questa si propaga oltre dei fori di dimensione grandi rispetto alla sua lunghezza d'onda. Per esempio, come mostrato in figura, la luce emessa da una sorgente puntiforme genera passando attraverso uno schermo forato circolare O, una zona luminosa nettamente delineata su uno schermo V. Tale zona corrisponde alla sezione del cono avente la sorgente per vertice e delineato dal contorno del foro.



2.2 La propagazione della luce nei mezzi materiali

Quando la luce si propaga in un mezzo materiale diverso dal vuoto subisce una diminuzione di intensità luminosa. Tale fenomeno è detto attenuazione della luce. L'attenuazione della luce può essere dovuta a un parziale assorbimento di energia da parte del mezzo stesso oppure al fatto che lungo il suo percorso una parte della luce viene deviata dalla sua direzione di propagazione. In tal caso si parla di attenuazione per diffusione.

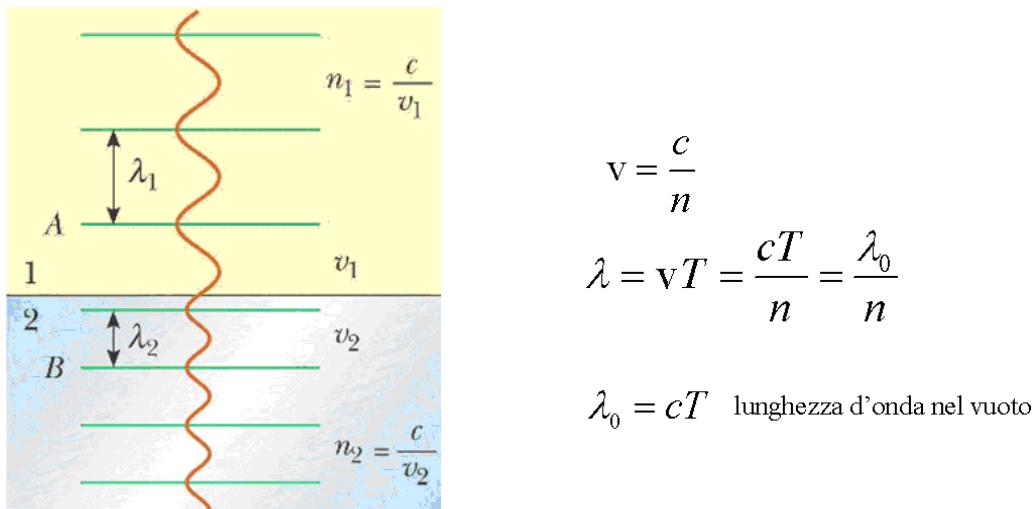
Siamo soliti definire trasparenti quei mezzi che si lasciano attraversare dalle onde luminose senza perdere l'informazione ottica, ovvero che insieme all'energia radiante è in grado di trasmettere anche l'immagine associata alla radiazione luminosa.

Quando la luce si propaga attraverso più mezzi aventi indice di rifrazione differente, sulla superficie di separazione possono verificarsi diversi processi, a seconda della struttura chimica dei mezzi interessati, dello stato di levigatezza e della forma geometrica della superficie di separazione.

Di seguito cercheremo di capire che cosa succede alla luce quando incontra una superficie di separazione tra due mezzi. Innanzitutto possiamo introdurre il concetto di cammino ottico.

Il cammino ottico della luce

Come abbiamo visto quando la luce passa da un mezzo trasparente all'altro avente indice di rifrazione differente, solo la sua frequenza e il periodo restano costanti mentre cambiano velocità e lunghezza d'onda. La relazione tra lunghezza d'onda velocità e periodo è riportata nella figura seguente.



Si può osservare che se P e P' sono due punti di un mezzo materiale di indice di rifrazione n distanti tra loro l il tempo impiegato dalla luce per percorrere la distanza l è dato da:

$$t = \frac{l}{v} = \frac{nl}{c}$$

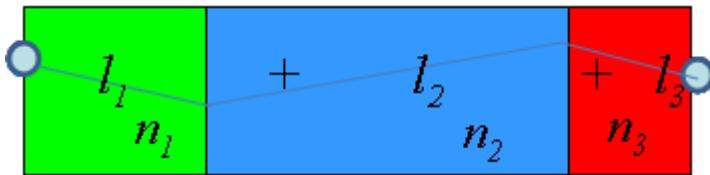
da cui si ricava: $nl = ct$.

Si definisce **cammino ottico l_0** il prodotto dell'indice di rifrazione per la distanza percorsa

$$l_0 = nl = ct$$

Si definisce cammino ottico l_0 il prodotto dell'indice di rifrazione per la distanza percorsa

Il cammino ottico corrisponde alla distanza che la luce avrebbe percorso nel vuoto nello stesso intervallo di tempo. Questo vale qualunque sia il numero di mezzi attraverso cui la luce si propaga. Consideriamo infatti un raggio che si propaga in più mezzi diversi come mostrato in figura



Il cammino effettivamente percorso dal raggio è:

$$l = l_1 + l_2 + l_3 + \dots$$

Il cammino ottico è:

$$l_0 = l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3 + \dots$$

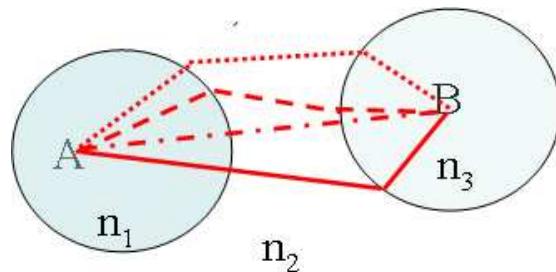
Tenendo conto che $n=c/v$, si ha:

$$l_0 = l_1 \frac{c}{v_1} + l_2 \frac{c}{v_2} + l_3 \frac{c}{v_3} + \dots = c(t_1 + t_2 + t_3 + \dots) = ct_{\text{tot}}$$

Il principio di Fermat

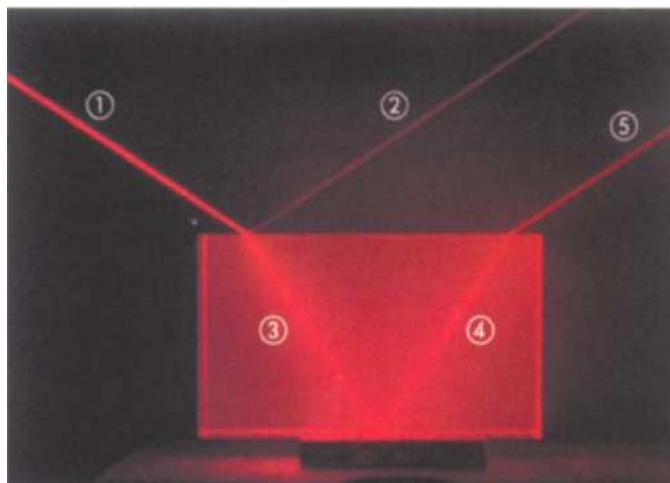
Per determinare seguire il percorso della luce in presenza di più mezzi materiali si può utilizzare il principio di Fermat che afferma **“Il percorso seguito da un raggio di luce per andare da un punto ad un altro attraverso un qualsiasi insieme di mezzi è quello che richiede il minimo tempo, ovvero il minimo cammino ottico”**

Dati due punti A e B per trovare il cammino effettivamente percorso dalla luce tra i due punti possiamo calcolare il cammino ottico di tutti i possibili percorsi tra A e B e trovare quello minimo. Questo sarà il cammino effettivamente percorso dal raggio ottico.



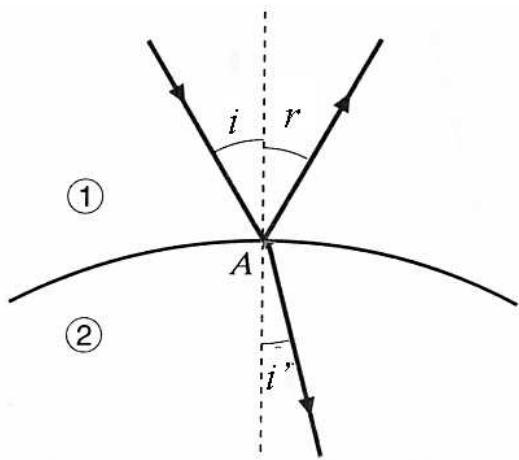
2.2.1 Riflessione e rifrazione della luce: le leggi di Snell

Se si invia un'onda elettromagnetica piana su una superficie piana, praticamente illimitata (cioè di dimensioni assai grandi rispetto alla lunghezza d'onda), che separa due mezzi materiali isotropi diversi si osserva che:



- parte della luce viene rinvia nel mezzo dal quale proviene: fenomeno della **riflessione**
- parte della luce penetra e si propaga, invece, nel secondo mezzo, in una direzione differente da quella del raggio incidente: fenomeno della **rifrazione**
- le percentuali (in energia) della luce riflessa e rifratta e le direzioni dei raggi riflessi e rifratti dipendono dalle caratteristiche dei mezzi a contatto e dall'angolo col quale l'onda incide sulla superficie di separazione dei mezzi.

Le direzioni dei raggi riflessi e rifratti si possono calcolare utilizzando le leggi di Snell.
Per enunciarle definiamo innanzitutto la geometria dei due processi. Si chiamano:



- **angolo di incidenza** i l'angolo tra la direzione di propagazione della luce incidente e la normale alla superficie,
- **angolo di riflessione** r l'angolo tra la normale e la direzione di propagazione dell'onda riflessa,
- **angolo di rifrazione** i' l'angolo tra la normale e la direzione di propagazione dell'onda rifratta.

La **legge di Snell della riflessione** ci dice che:

- 1) Il raggio incidente, quello riflesso e la normale N alla superficie che separa i due mezzi giacciono sullo stesso piano.
- 2) L'angolo di incidenza è uguale a quello di riflessione $i = r$

La **legge di Snell della rifrazione** ci dice che:

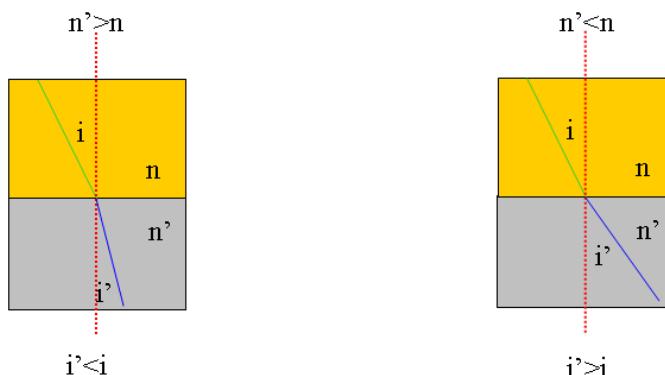
- 1) Il raggio incidente, quello riflesso e la normale N alla superficie che separa i due mezzi giacciono sullo stesso piano.
- 2) Gli angoli di rifrazione i' e incidente ‘ soddisfano la relazione:

$$\frac{\sin i'}{\sin i} = \frac{n}{n'} = \cos \tan te$$

Dalla legge della rifrazione **$n \sin i = n' \sin i'$** si ricava che

:

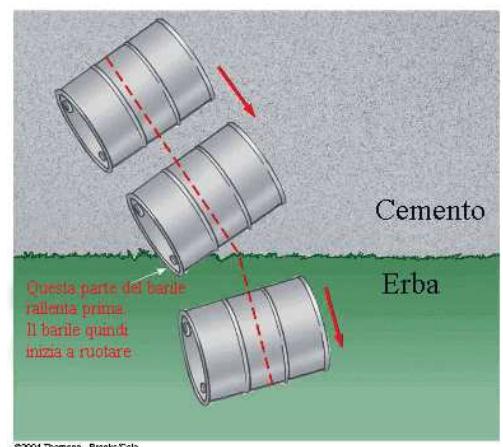
- se la luce passa da un mezzo con indice di rifrazione più **basso** a uno con indice di rifrazione più **alto**, il raggio viene deflesso **avvicinandosi alla normale**
- se la luce passa da un mezzo con indice di rifrazione più **alto** a uno con indice di rifrazione più **basso**, il raggio viene deflesso **allontanandosi dalla normale**



in incidenza normale ($i=0$) il raggio non viene deviato

La deviazione dei raggi luminosi per effetto della riflessione e rifrazione è in pratica dovuto alla diversa velocità di propagazione della luce nei due mezzi. Mentre il raggio riflesso si propaga nello stesso mezzo di quello incidente e quindi con la stessa velocità, quello rifratto si propaga in un mezzo differente e quindi con una velocità diversa. Per comprendere come una diversa velocità può comportare una variazione della direzione di propagazione, esaminiamo il comportamento di un bidone che rotola in una certa direzione in un posto in cui è presente una zona di cemento in cui il bidone rotola più velocemente e una zona di erba in cui è più lento. Come si vede dalla figura, la parte del bidone che arriva prima all'erba rallenta mentre l'altro estremo del bidone continua a muoversi con la stessa velocità. Questa differenza di velocità tra le due parti determina una variazione della direzione di spostamento del bidone quando ha attraversato la linea di separazione tra i due terreni.

Le leggi di riflessione e rifrazione della luce possono essere più rigorosamente spieghiate con il principio di Fermat.



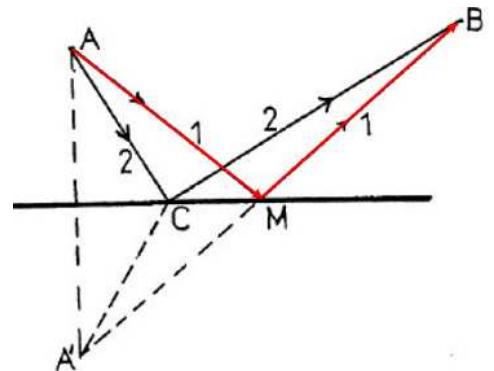
Il principio di Fermat per la riflessione

Il principio di Fermat afferma che un raggio di luce percorre sempre tra due punti il minimo cammino ottico possibile. La legge della riflessione ci dice che un raggio viene riflesso in modo che valga la relazione $i=r$. Si può facilmente dimostrare che il percorso individuato da tale legge corrisponde al minimo cammino ottico possibile. Il raggio 1 in figura soddisfa la relazione $i=r$. Se consideriamo il punto A' simmetrico di A rispetto alla superficie riflettente, si ha che:

$$AM = A'M.$$

Il cammino ottico percorso dal raggio 1 è quindi:

$$nAMB = nAM + nMB.$$



Consideriamo ora un qualsiasi raggio 2 per cui si abbia $i \neq r$. Nella figura si è assunto $i < r$ ma la dimostrazione è valida anche nel caso opposto. Il cammino ottico del raggio 2 è:

$$nACB = nAC + nCB.$$

Se applichiamo la diseguaglianza triangolare al triangolo A'BC si ha che:

$$A'B < A'C + CB;$$

essendo $A'B = A'M + MB = AM + MB$ e $A'C = AC$ si ha che:

$$AM + MB < AC + CB.$$

Se moltiplichiamo tutto per n otteniamo:

$$nAM + nMB < nAC + nCB \text{ per ogni } n \text{ e posizione del punto } C.$$

Questo significa che il cammino ottico percorso dal raggio 1 che soddisfa la legge di Snell della riflessione è il minimo possibile

Il principio di Fermat per la rifrazione

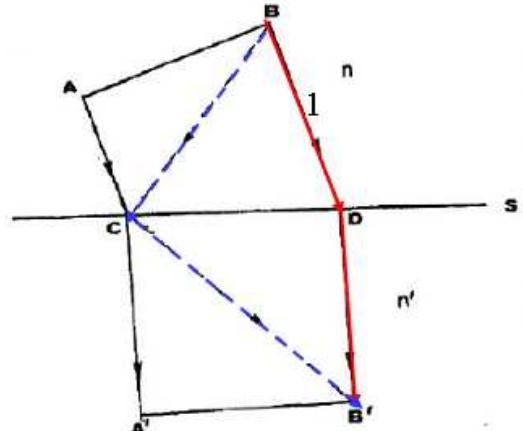
Usiamo il principio di Fermat per dimostrare la legge di Snell della rifrazione. Il raggio rosso in figura rappresenta il percorso BDB' fatto dalla luce per andare dal punto B a B' in base alla legge di Snell.

Dobbiamo dimostrare che il cammino ottico di tale raggio $nBD + n + DB'$ è il minimo possibile.

Consideriamo un qualsiasi percorso alternativo BCB' .

Vogliamo dimostrare che il cammino ottico lungo tale percorso è maggiore di quello che si ottiene in base alla legge di Snell, cioè:

$$nBC + nN'CB' > nBD + n + DB'.$$



Sia AB una porzione del fronte d'onda piano dell'onda incidente e B'A' una porzione di quello rifratto delimitata dal raggio 1 e dal raggio parallelo al raggio 1 passante per C. Per tale proprietà il cammino ottico misurato lungo ACA' deve essere uguale a quello misurato lungo BDB', cioè deve essere:

$$nAC + n'CA' = nBD + n'DB'.$$

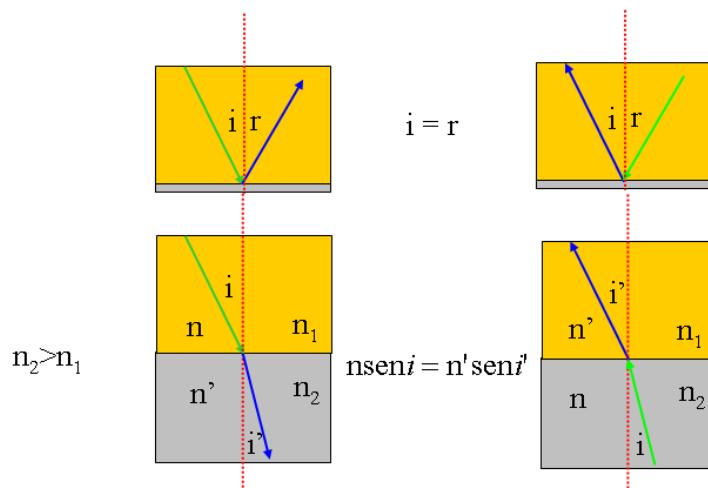
Ma dal triangolo rettangolo ABC segue che l'ipotenusa BC è maggiore del cateto AC e quindi $nBC > nAC$. Analogamente dal triangolo rettangolo A'B'C si vede che $CB' > CA'$ ovvero $n'CB' > n'CA'$.

Sommando tali relazioni si ottiene proprio:

$$nBC + n'CB' > nAC + n'CA' = nBD + n'DB'.$$

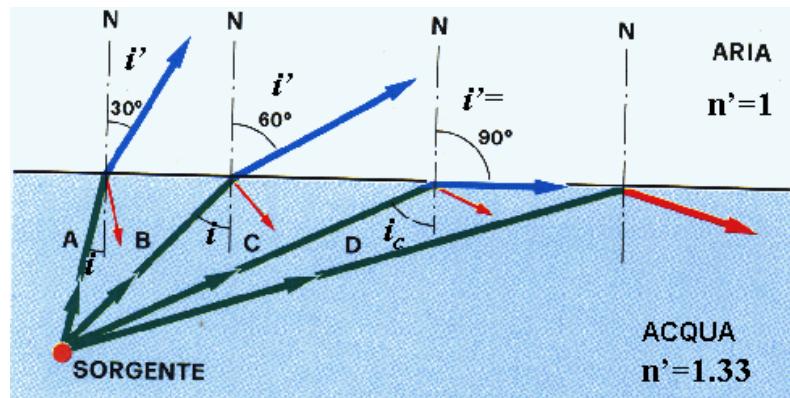
Reversibilità del cammino ottico

Le leggi di riflessione e rifrazione godono del "principio di reversibilità", cioè come mostrato in figura, la costruzione geometrica rimane la stessa quando invertiamo il verso del raggio luminoso, scambiando raggio incidente con raggio riflesso, o rifratto, rispettivamente.



La riflessione totale

Abbiamo visto che quando la luce passa da un mezzo più denso, con indice di rifrazione più grande, a uno meno denso, il raggio refratto si allontana dalla normale, cioè $i' > i$. Il caso tipico è la rifrazione della luce alla superficie acqua-aria, quando la sorgente è in acqua.



Poiché all'aumentare dell'angolo di incidenza l'angolo di rifrazione aumenta, per un certo valore dell'angolo di incidenza i_c detto **angolo critico** il raggio refratto risulta parallelo alla superficie di separazione, cioè $i'=90^\circ$. Il valore dell'angolo critico si trova proprio imponendo questa condizione alla legge di Snell della rifrazione. Si ha:

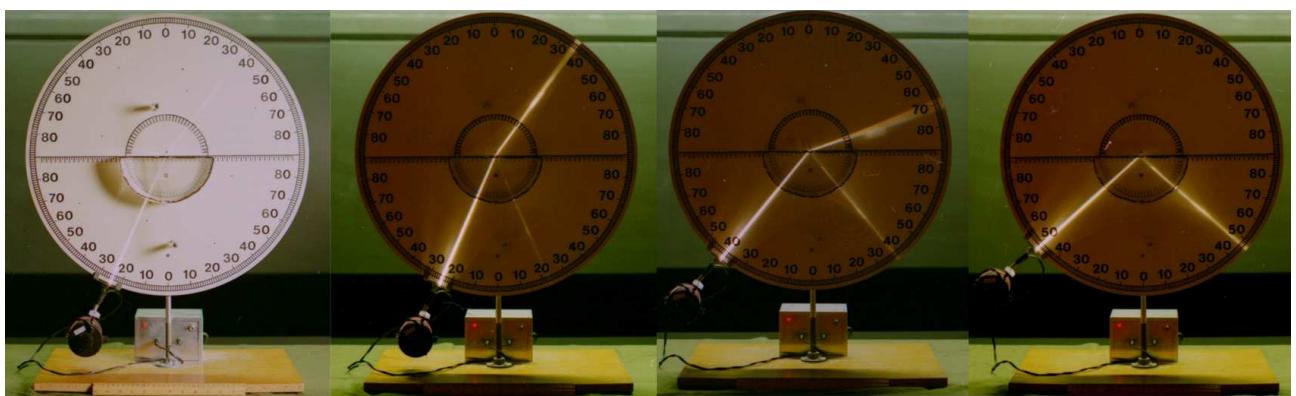
$$\frac{\sin(i_c)}{\sin(90^\circ)} = \frac{n'}{n}$$

Da cui si ricava:

$$i_c = \arcsin\left(\frac{n'}{n}\right)$$

Se si invia dal mezzo con indice di rifrazione maggiore ($n > n'$) un raggio di luce con non si ha rifrazione ma tutta la radiazione viene riflessa (riflessione totale) se

$$i > \arcsin\left(\frac{n'}{n}\right) = i_c$$



Come si può vedere nella figura in cui è riportato un esperimento di rifrazione da dielettrico ad aria, all'aumentare dell'angolo di incidenza si ha un travaso di intensità luminosa dal raggio refratto al

raggio riflesso. Quando il raggio incidente è maggiore dell'angolo critico tutta l'intensità luminosa del raggio incidente va nel raggio riflesso e il raggio rifratto scompare.

Nel caso in cui il secondo mezzo è l'aria ($n=1$) si ha che l'angolo critico vale:

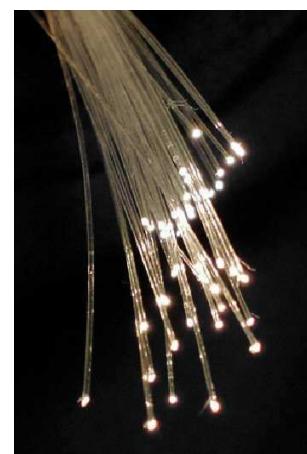
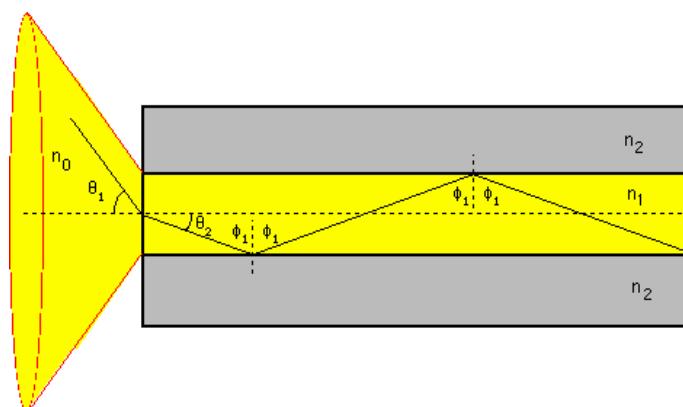
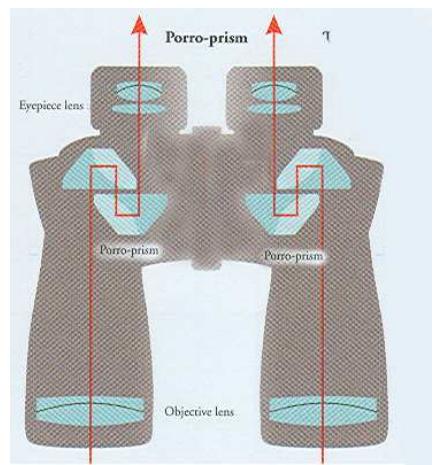
$$i_c = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Per esempio se la sorgente è posta in acqua si ottiene

$$i_c = \arcsin\left(\frac{1}{1,33}\right) = 48.7^\circ$$

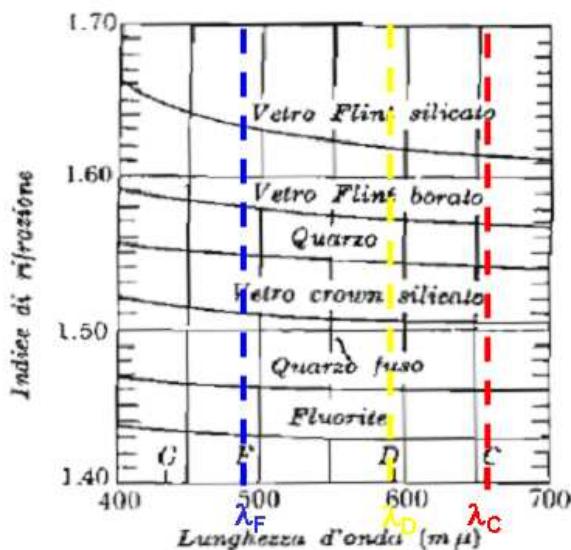
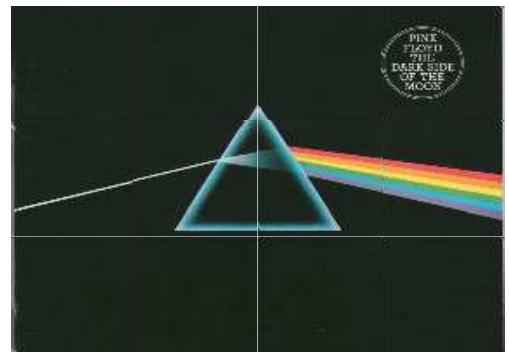
Il fenomeno della riflessione totali ha molteplici possibili applicazioni. Per esempio molti binocoli contengono un insieme di prismi, chiamati prismi di Porro, che utilizzano la riflessione totale per far compiere alla luce un cammino ben determinato all'interno del binocolo senza subire perdite. Ciò permette di utilizzare la costruzione di strumenti piccoli e maneggevoli con caratteristiche simili a quelli più grandi e ingombranti. Le fibre ottiche sono un'altra possibile e importante applicazione.

Queste fibre sottili sono composte da un nucleo di materiale di alto indice di rifrazione, circondato da una guaina con basso indice di rifrazione. La luce viene introdotta da un estremo nella parte interna della fibra e si propaga lungo la fibra in un cammino a zig-zag, eseguendo una serie di riflessioni multiple come mostrato nella figura seguente. La parte centrale della fibra è così trasparente e la riflessione totale così efficiente che anche in fibre molto lunghe l'attenuazione della luce è molto ridotta. Inoltre tali fibre sono flessibili e hanno quindi la capacità di convogliare la luce lungo cammini curvi, caratteristica molto utilizzata in medicina per esempio negli endoscopi.



2.2.2 La dispersione della luce

L'indice di rifrazione di un mezzo materiale dipende, oltre che dal particolare mezzo considerato, dalla lunghezza d'onda della radiazione. Il primo studio dettagliato sperimentale di tale dipendenza fu compiuto da Newton nel 1672 attraverso la separazione in vari colori subita dalla luce bianca nell'attraversare un prisma di vetro. Nella figura seguente è riportato l'andamento dell'indice di rifrazione in funzione della lunghezza d'onda in diversi materiali ottici.



- $\lambda_C = 656.3 \text{ nm}$ lunghezza d'onda del rosso;
- $\lambda_D = 589.3 \text{ nm}$ lunghezza d'onda del giallo;
- $\lambda_F = 486.1 \text{ nm}$ lunghezza d'onda del blu;

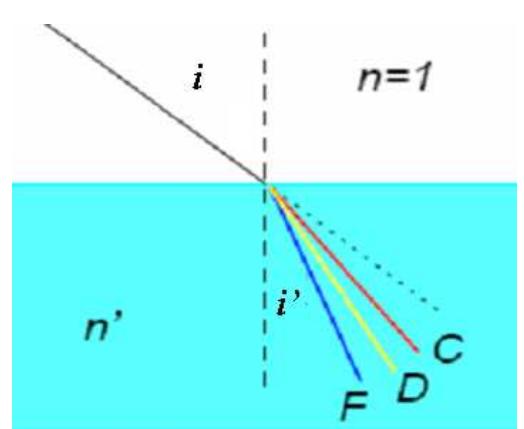
Fig. 2.27 - Variazione dell'indice di rifrazione in funzione della lunghezza d'onda.

Nella regione del visibile n decresce all'aumentare di λ . Questo significa che uno stesso materiale ha un indice di rifrazione più grande nel blu che nel rosso.

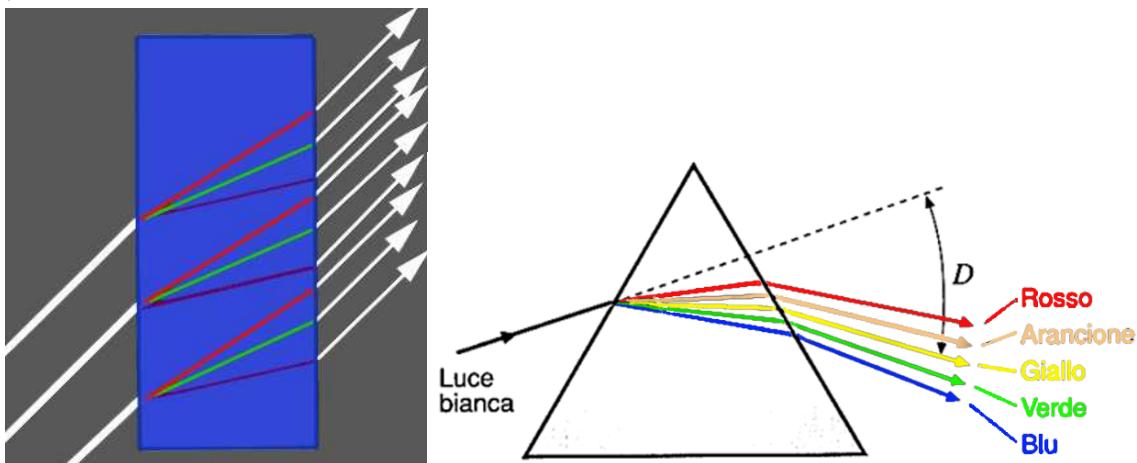
Quando la luce bianca incontra una superficie di separazione tra due mezzi, la rifrazione causa la scomposizione della luce, ne separa cioè i colori costituenti, ciascuno dei quali ha un diverso indice. Per le righe spettrali evidenziate in figura, nel caso di vetro crown, si ha, ad esempio:

$$n_F = 1.52933 \quad n_D = 1.52300 \quad n_C = 1.52042$$

Supponiamo che un fascio di luce bianca incida su una superficie di separazione aria-vetro, provenendo dall'aria, come mostrato in figura. Per la legge di Snell $n \sin i = n' \sin i'$, il colore cui corrisponde un indice di rifrazione più grande (blu) viene rifratto con un angolo di rifrazione più piccolo (più vicino alla normale alla superficie) mentre il colore cui corrisponde un indice di rifrazione più grande (rosso) con un angolo più grande (più lontano dalla normale alla superficie). Se la luce bianca attraversa una lastra a facce piane e parallele, tale scomposizione tuttavia si ricompone all'uscita dalla lastra in quanto i diversi colori subiscono ora una nuova rifrazione opposta alla prima. Pertanto i vari colori si



propagano nella stessa direzione una volta attraversata la lastra. I vari colori vengono invece dispersi ad angoli diversi se le due facce non sono parallele come in una lente o in un prisma

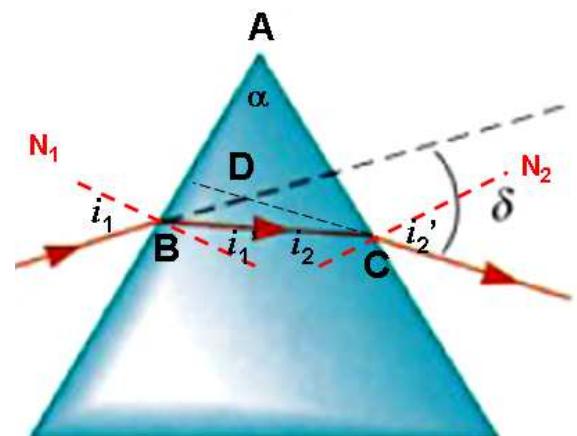


Poiché l'angolo di deviazione dipende da n che a sua volta dipende dalla lunghezza d'onda della luce, facendo passare della luce bianca in un prisma si può quindi scomporre la luce stessa nei diversi colori che la compongono.

Prisma ottico e angolo di deviazione prismatica

Si definisce prisma ottico un mezzo omogeneo e trasparente di indice di rifrazione n limitato da due superfici piane non parallele tra loro. Nella sezione piana mostrata in figura, possiamo vedere che la capacità di deviare i raggi luminosi del prisma dipende dal suo indice di rifrazione e dal valore dell'angolo al vertice α . Le lunghezze dei lati e della base sono puramente indicativi in quanto non intervengono nel fenomeno ottico. Si definisce angolo di deviazione prismatica, l'angolo δ che si forma tra la direzione del raggio incidente sulla prima faccia del prisma e la direzione del raggio emergente dalla seconda faccia.

Un raggio incide nel punto C sulla prima faccia del prisma con un angolo i_1 rispetto alla normale N_1 . Viene rifratto con un angolo i'_1 rispetto alla stessa normale e arriva sulla seconda faccia incidendo nel punto B con un angolo di incidenza i_2 rispetto alla normale N_2 . Qui subisce una nuova rifrazione e fuori esce con un angolo i'_2 rispetto a N_2 . Chiamiamo D il punto di intersezione tra i prolungamenti del raggio entrante emergente. Calcoliamo l'angolo di deviazione prismatica δ . Applichiamo la regola sulla somma degli angoli interni di un triangolo ai triangoli BDC e ABC. Avremo che:



$$\hat{B} + \hat{D} + \hat{C} = (\pi - \delta) + (i_1 - i'_1) + (i'_2 - i_2) = \pi \Rightarrow \delta = (i_1 - i'_1) + (i'_2 - i_2)$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \alpha + \left(\frac{\pi}{2} - i'_1 \right) + \left(\frac{\pi}{2} - i_2 \right) = \pi \Rightarrow \alpha = i'_1 + i_2$$

Da tali equazioni ricaviamo la relazione: $\delta = i_1 + i'_2 - \alpha$

Dalla relazione precedente si vede che l'angolo di deviazione prismatica dipende dall'angolo di incidenza oltre che dall'angolo al vertice α e dall'indice di rifrazione. Poiché quest'ultimo dipende dalla lunghezza d'onda, per ogni colore otteniamo un valore di δ differente (dispersione della luce)

Calcoliamo l'angolo di deviazione prismatica

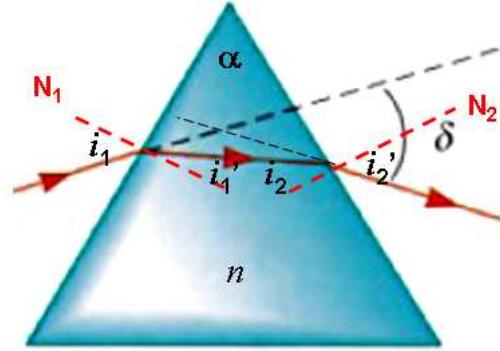
Supponiamo noti α e n . Per determinare δ una volta fissato l'angolo di incidenza sulla prima faccia dobbiamo trovare i_2'

$$\delta = i_1 + i_2' - \alpha$$

$$\alpha = i_1' + i_2$$

1) Troviamo i_1'

$$\sin i_1 = n \sin i_1' \Rightarrow i_1' = \arcsin \left[\frac{1}{n} \sin i_1 \right]$$



2) Troviamo i_2

$$\alpha = i_1' + i_2 \Rightarrow i_2 = \alpha - i_1'$$

3) Troviamo i_2'

$$n \sin i_2 = \sin i_2' \Rightarrow i_2' = \arcsin[n \sin i_2]$$

4) Troviamo δ

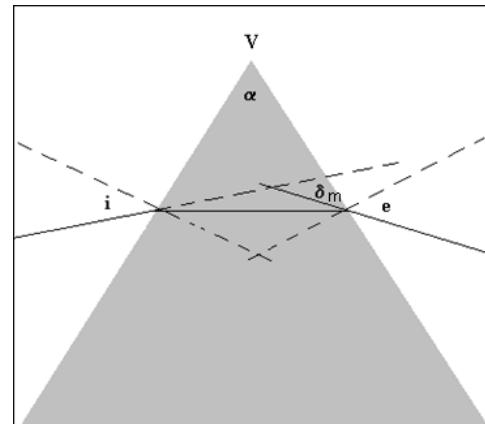
$$\delta = i_1 + i_2' - \alpha$$

Angolo di deviazione minima

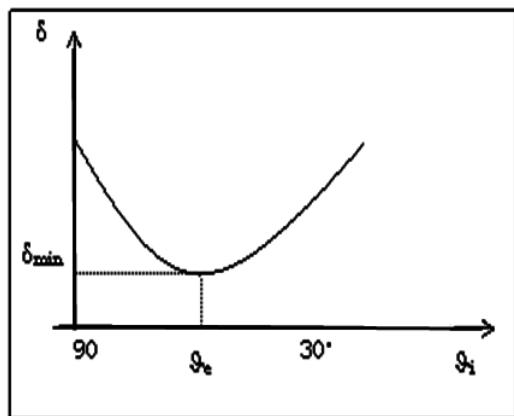
Abbiamo visto che l'angolo di deviazione dipende dall'angolo di incidenza. Si può dimostrare che l'angolo di deviazione è minimo quando il raggio ottico che attraversa il prisma è parallelo alla base del prisma, cioè quando l'angolo di ingresso θ_i (o i_1) è uguale all'angolo di uscita θ_e (o i_2').

In tale situazione si ha:

$$\delta_m = 2i_1 - \alpha$$



- La misura della deviazione minima $\delta_{\min}(\lambda)$ è particolarmente interessante perché si può facilmente vedere che essa può essere messa in relazione con l' indice di rifrazione n del prisma tramite la formula:



$$n(\lambda) = \frac{\sin \frac{\delta_{\min} + \alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

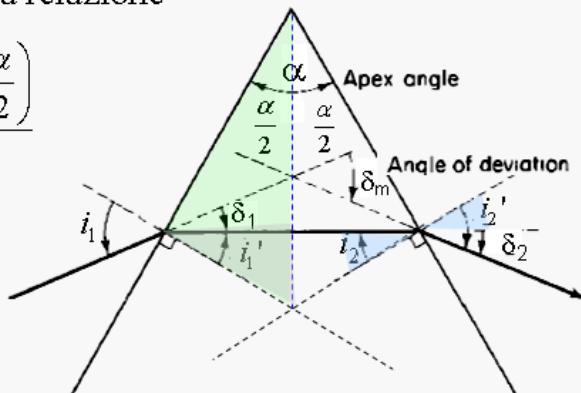
dove α è l'angolo al vertice del prisma

La misura sperimentale di δ_m permette di determinare l'indice di rifrazione $n(\lambda)$ se questo non è noto

Facoltativo:

Dimostriamo la relazione

$$n = \frac{\sin \left(\frac{\delta_m + \alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$



$$\delta_m = 2i_2 - \alpha = 2i_1 - \alpha$$

I triangoli rettangoli verde e grigio hanno gli stessi angoli $i_1' = \frac{\alpha}{2} = i_2$ per simmetria

Per simmetria si ha metà della deviazione su ogni faccia $\delta_1 = \delta_2 = \frac{\delta_m}{2}$

$$\delta_2 = i_2' - i_2 \Rightarrow \frac{\delta_m}{2} = i_2' - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow i_2' = \frac{\delta_m}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

$$n \sin i_2' = \sin i_2' \Rightarrow n \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \left(\frac{\delta_m}{2} + \frac{\alpha}{2} \right)$$



$$n = \frac{\sin \left(\frac{\delta_m + \alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

Prisma con angolo al vertice piccolo

$$n = \frac{\frac{\delta_m + \alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \rightarrow \delta_m = (n-1)\alpha$$

Prismi sottili

Si consideri il caso di un prisma ottico avente l'angolo al vertice piccolo e supponiamo che l'angolo di incidenza sia anche esso piccolo. In tali condizioni possiamo approssimare i valori del seno nella legge di Snell per la rifrazione sulle due facce del prisma, $\sin i_1 = n \sin i'_1$ e $n \sin i_2 = \sin i'_2$ con il valore degli angoli.

In tale approssimazione:

$$i_1 = n i'_1 \quad n i_2 = i'_2$$

Sostituendo tali relazioni nell'espressione di δ , si ha:

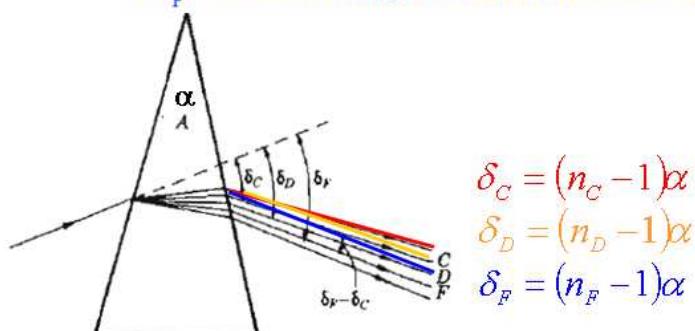
$$\delta = i_1 + i_2 - \alpha = n i'_1 + n i'_2 - \alpha = n(i'_1 + i'_2) - \alpha$$

Poichè $i'_1 + i'_2 = \alpha$

$$\delta = (n-1)\alpha$$

Questa relazione indica che, per piccoli angoli, la deviazione prismatica è una funzione lineare dell'indice di rifrazione. Poiché l'indice di rifrazione dipende dalla lunghezza d'onda, avremo che per i diversi colori la deviazione sarà:

- $\lambda_c = 656.3$ nm lunghezza d'onda del rosso;
- $\lambda_d = 589.3$ nm lunghezza d'onda del giallo;
- $\lambda_f = 486.1$ nm lunghezza d'onda del blu;



$$\delta_c = (n_c - 1)\alpha$$

$$\delta_d = (n_d - 1)\alpha$$

$$\delta_f = (n_f - 1)\alpha$$

Potere dispersivo del prisma

Poiché l'indice di rifrazione dipende dalla lunghezza d'onda, l'angolo di deviazione dipende dalla lunghezza d'onda e le diverse lunghezze d'onda della luce bianca vengono "disperse" ad angoli differenti da un prisma.

Per quantificare il potere dispersivo di un materiale vengono usate tre lunghezze d'onda di riferimento:

- $\lambda_C = 656.3 \text{ nm}$ lunghezza d'onda del **rosso**;
- $\lambda_D = 589.3 \text{ nm}$ lunghezza d'onda del **giallo**;
- $\lambda_F = 486.1 \text{ nm}$ lunghezza d'onda del **azzurro**;

In approssimazione di prisma sottile $\delta = (n-1) \alpha$

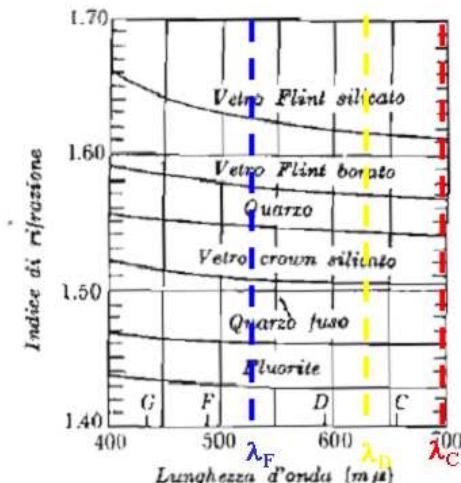
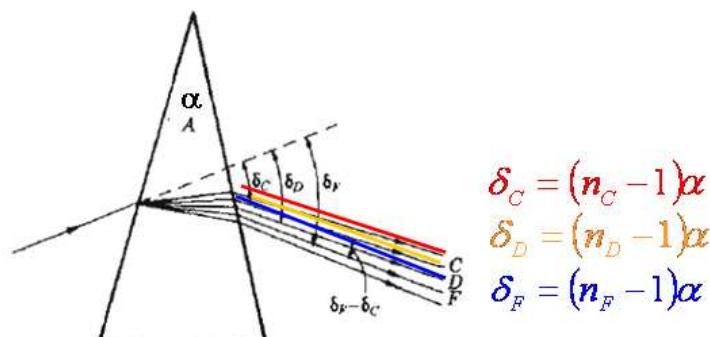


Fig. 2.27 . Variazione dell'indice di rifrazione in funzione della lunghezza d'onda.



Da cui si ricava:

$$\delta_F - \delta_C = (n_F - 1)\alpha - (n_C - 1)\alpha = (n_F - n_C)\alpha$$

Si definisce $\omega = \frac{\delta_F - \delta_C}{\delta_D} = \frac{(n_F - n_C)\alpha}{(n_D - 1)\alpha} = \frac{(n_F - n_C)}{(n_D - 1)}$ Potere dispersivo del mezzo

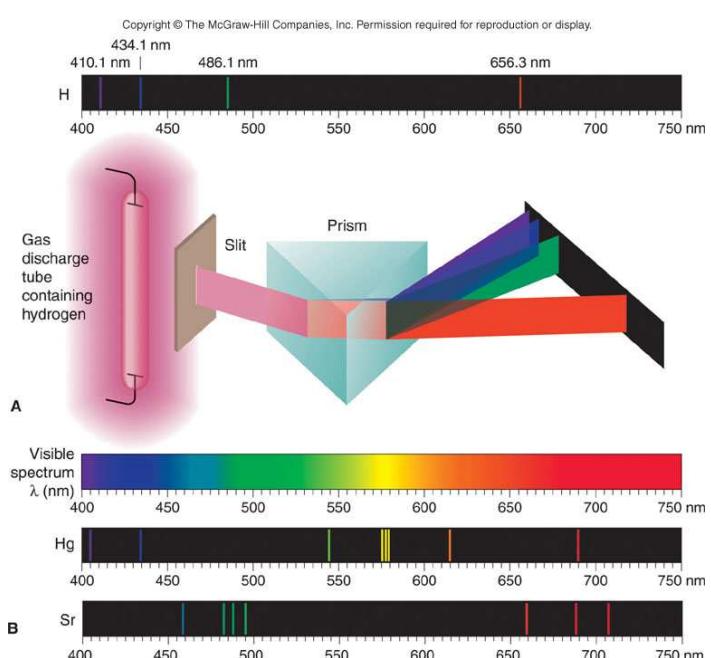
L'inverso del potere dispersivo

$$V = \frac{1}{\omega} = \frac{(n_D - 1)}{(n_F - n_C)} \quad \text{è il detto Numero di Abbe}$$

Si può osservare che più V è grande meno dispersivo è il materiale

Per costruire lenti è meglio avere un materiale con numero di Abbe grande per minimizzare l'aberrazione cromatica. Se vogliamo viceversa usare un prisma in uno spettrometro cioè per separare le diverse componenti (colori) della luce (si veda la figura a fianco per una applicazione di questo tipo), si deve usare un materiale con potere dispersivo grande e quindi numero di Abbe piccolo.

Nella seguente tabella sono riportati le principali proprietà ottiche dei materiali più comunemente utilizzati. In particolare si può osservare che il vetro crown è prodotto da silicati di calcio-alcali (RCH) contenenti circa il 10% di ossido di potassio. Esso ha un basso indice di rifrazione (\approx



1,52) e di una bassa dispersione (con numeri di Abbe circa 60). Il vetro flint ha invece un indice di rifrazione particolarmente alto (1,6—1,89) e numeri di Abbe più bassi

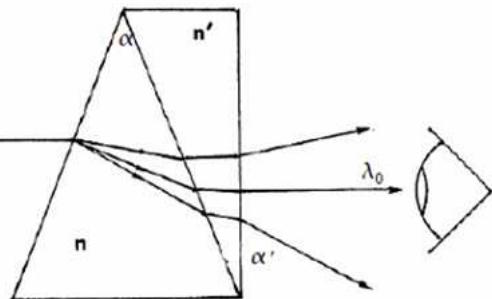
Medium	n _λ	n _λ	CVF	Density	UV cut-off	Abbe	ρ(%)
Glasses							
White Crown	1.523	1.525	1.0	2.5	320	59	4.3
Light flint	1.600	1.604	0.87	2.6	334	42	5.3
1.7 glasses	1.700	1.705	0.75	3.2	340	35	6.7
	1.701	1.706	0.75	3.2	320	42	6.7
1.8 glasses	1.802	1.807	0.65	3.7	332	35	8.2
	1.830	1.838	0.63	3.6	340	32	8.6
1.9 glasses	1.885	1.893	0.59	4.0	340	31	9.4
Plastics							
CR39	1.498	1.500	1.0	1.3	355	58	4.0
INDO Superfin	1.523	1.525	0.95	1.3	350	48	4.3
Trivex®	1.532	1.535	0.94	1.1	380	46	4.4
Sola Spectralite	1.537	1.540	0.93	1.2	385	47	4.5
Corning SunSensors®	1.555	1.558	0.90	1.2	380	38	4.7
PPG HIP	1.560	1.563	0.89	1.2	370	38	4.8
AO Alphalite 16XT	1.582	1.585	0.86	1.3	380	34	5.1
Polycarbonate	1.586	1.589	0.85	1.2	385	30	5.2
Hoya Eyas 1.6	1.600	1.603	0.83	1.3	380	42	5.3
Polyurethanes	1.600	1.603	0.83	1.3	380	36	5.3
	1.609	1.612	0.82	1.4	380	32	5.4
	1.660	1.664	0.75	1.4	375	32	6.2
	1.670	1.674	0.74	1.4	395	32	6.3
Hoya Ery 1.7	1.695	1.710	0.72	1.4	380	36	6.7
High index 1.71	1.710	1.715	0.70	1.4	380	36	6.9
Very high index	1.740	1.746	0.67	1.5	400	33	7.3



Applicazione dei prismi sottili

Due prismi accoppiati come in figura introducono deviazioni di segno opposto.

Nel caso in cui si voglia effettuare la *visione diretta* della solo lunghezza d'onda λ_0 selezionandola da un fascio di luce bianca, è possibile scegliere opportunamente i materiali (e quindi n e n') e gli angoli α e α' , e fare in modo che la lunghezza d'onda λ_0 , unica tra quelle presenti nel raggio, non sia deviata.



Affinchè le due deviazioni si compensino deve essere: $\delta_0 = (n_0 - 1)\alpha = \delta'_0 = (n'_0 - 1)\alpha'$.

I due prismi da selezionare per poter avere la visione diretta devono quindi soddisfare la relazione:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{n'_0 - 1}{n_0 - 1}$$

Esempio:

L'accoppiamento di un prisma di crown ($n_D = 1.511$) con un prisma flint ($n'_D = 1.591$) corrisponde ad un rapporto angolare $\alpha/\alpha' = 1.156$; se il prisma in flint ha un'apertura $\alpha' = 10^\circ$ allora quello in crown deve avere un'apertura $\alpha = 11.56^\circ$

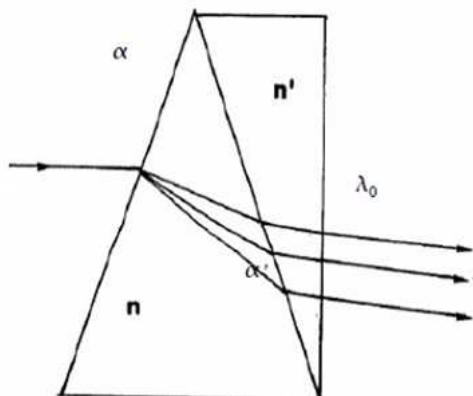
affinchè non venga deviata radiazione con lunghezza d'onda λ_D

Due prismi possono essere accoppiati in modo da *compensare mutuamente le rispettive dispersioni, senza tuttavia compensare le rispettive deviazioni*.

Affinchè la dispersione angolare introdotta dal primo prisma sia compensata dal secondo prisma si deve avere

$$\delta_F - \delta_C = \delta'_F - \delta'_C$$

dove, per i prismi sottili, $\delta = (n-1)\alpha$



da cui segue:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{n'_F - n'_C}{n_F - n_C}$$

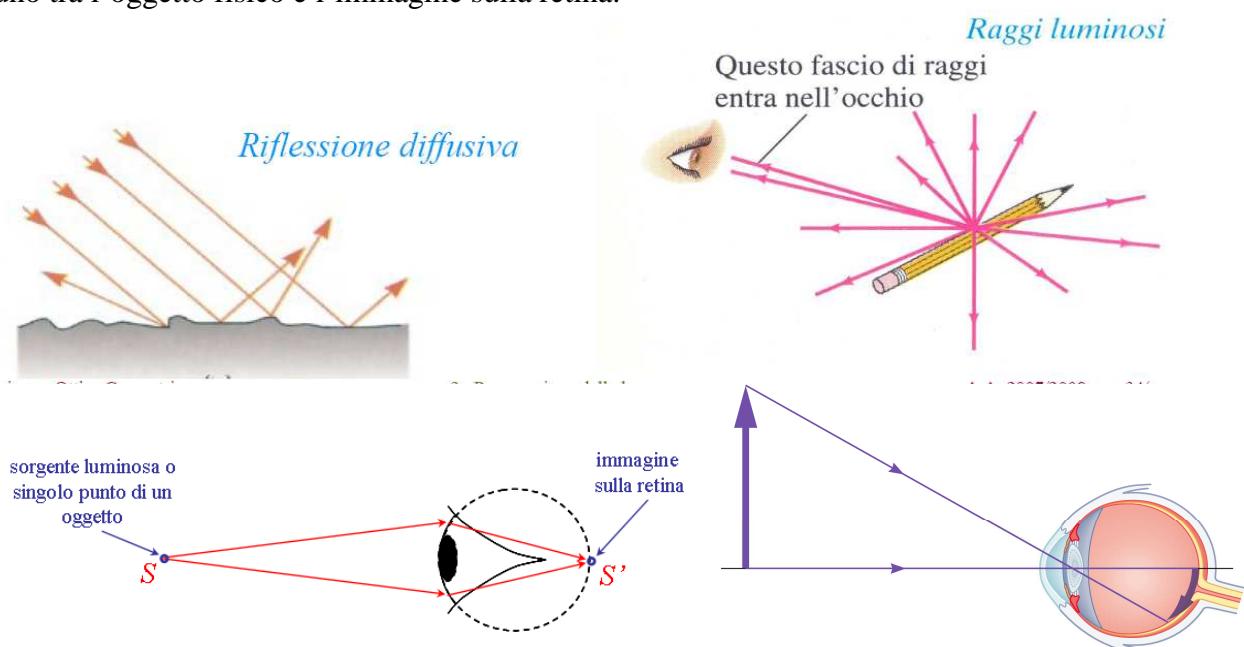
Il prisma acromatico riveste particolare importanza in tutti quegli strumenti ottici in cui è necessario deviare un fascio luminoso senza scomporre le sue componenti cromatiche.

3- Sistemi ottici e formazione delle immagini

I nostri occhi, i microscopi, i telescopi, le macchine fotografiche etc. utilizzano la riflessione e la rifrazione per formare le immagini che forniscono una rappresentazione visiva della realtà.



Noi vediamo gli oggetti perché da essi partono radiazioni luminose che giungono al nostro occhio. Una **SORGENTE LUMINOSA** emette luce propria, mentre gli **OGGETTI ILLUMINATI** diffondono in tutte le direzioni la luce da cui vengono investiti. Ogni suo punto agisce come una sorgente di luce che emette raggi in tutte le direzioni. Quando vediamo l'oggetto la luce che proviene da ogni suo punto entra nei nostri occhi e viene focalizzata in un punto sulla nostra retina. Il processo avviene per ogni punto dell'oggetto che possiamo vedere; ogni punto di un oggetto è rivelato da un differente punto della retina. Questo meccanismo crea una sorta di mappatura uno a uno tra l'oggetto fisico e l'immagine sulla retina.



Questa mappatura punto oggetto – punto immagine è una caratteristica di tutti i sistemi ottici, dei quali l'occhio è un esempio.

Un sistema ottico è infatti una successione di superfici riflettenti e di superfici rifrangenti che separano mezzi con indici di rifrazione diversi. Le superfici in questione sono lisce e regolari e, nella maggioranza dei casi, hanno forma piana o sferica (nel seguito, tranne esplicito avviso contrario, le superfici non piane considerate sono sferiche).

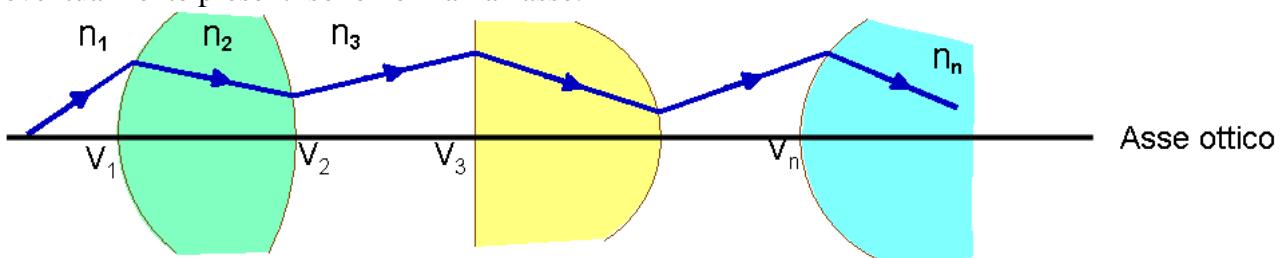
Se tutte le superfici del sistema ottico sono riflettenti, il sistema viene detto **catottrico** (sistema ottico di soli specchi), se sono tutte rifrangenti il sistema è **diottrico** (sistema di sole lenti), se, invece, alcune sono riflettenti e altre rifrangenti il sistema è **catadiottrico**.

Quando osserviamo un oggetto attraverso un sistema ottico, la luce viene riflessa o rifratta e i raggi luminosi cambiano direzione. Di conseguenza vediamo un'immagine diversa per forma, orientazione o posizione apparente rispetto all'oggetto reale. Esempi di sistemi ottici sono mostrati in figura.



Sistemi ottici centrati

Quando tutti i centri di curvatura delle superfici si trovano sulla stessa retta, questa viene chiamata asse o asse ottico e il sistema ottico è detto **centrato**: in tale situazione le superfici piane eventualmente presenti sono normali all'asse.

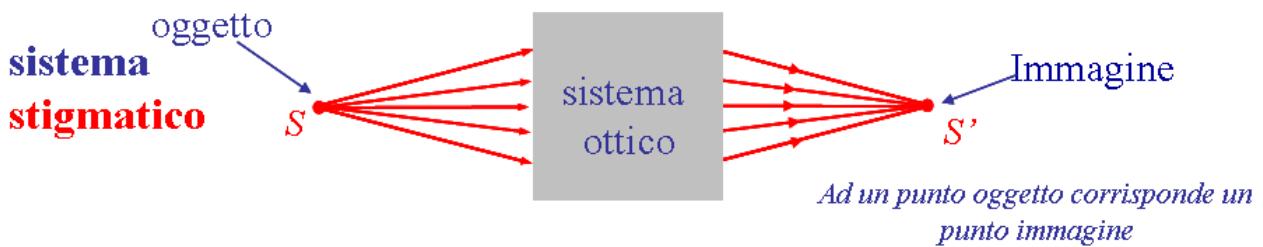


L'asse ottico è asse di simmetria di rotazione per il sistema; il punto V di incontro tra l'asse ottico e una superficie riflettente o rifrangente viene chiamato vertice.

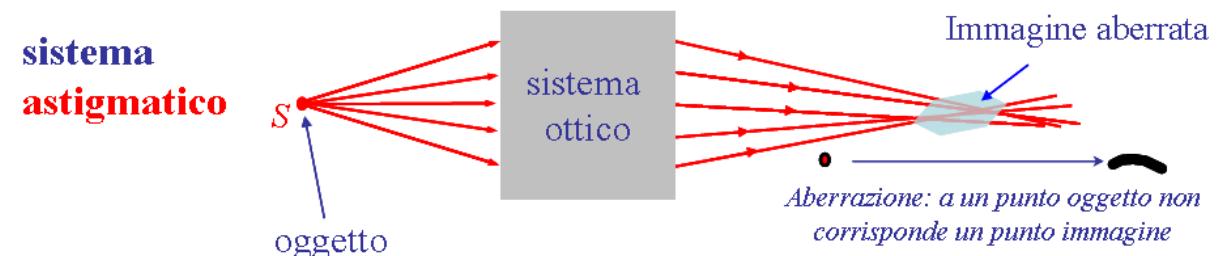
Sistemi ottici stigmatici e astigmatici

Una sorgente puntiforme emette una onda sferica. Se l'onda investe una superficie riflettente o rifrangente si trasforma in una nuova superficie d'onda. Si possono avere due casi:

- La nuova superficie è sferica: allora i raggi passano per un punto che viene chiamato immagine. In tal caso il sistema è **stigmatico**.



- La nuova superficie d'onda non è sferica. Allora i raggi corrispondenti non passano per un punto e si parla di sistema ottico astigmatico.



Mentre un sistema ottico stigmatico trasforma un punto oggetto, sorgente di luce, in un punto immagine, questo non è vero nel caso astigmatico. L'immagine prodotta dal sistema ottico astigmatico risulta quindi aberrata.

Costruzione dell'immagine in un sistema stigmatico:

Nella costruzione dell'immagine di un sistema ottico stigmatico è importante tenere in conto questi concetti:

A ogni punto oggetto S corrisponde un punto immagine S' : S e S' sono punti coniugati

Ogni punto di un oggetto esteso emette un intero fascio di luce che diverge dal punto oggetto. I raggi di luce emessi dai punti della superficie dell'oggetto appartengono ad un'onda sferica e sono quindi perpendicolari ai fronti d'onda emisferici emergenti dal punto oggetto.

I raggi provenienti da un punto oggetto reale sono sempre divergenti da quel punto. La presenza di un sistema ottico cambia il flusso di luce divergente da un punto dell'oggetto in un altro flusso che può essere convergente o divergente.

Ogni punto dell'immagine corrisponde ad un punto dell'oggetto. Anche se infiniti raggi di luce lasciano l'oggetto nelle diverse direzioni, solo quei raggi che sono in grado di giungere al punto immagine considerato, attraverso il sistema ottico, contribuiscono alla costruzione di quel particolare punto immagine.

L'immagine può essere reale o virtuale. Nel primo caso i raggi emergenti dal sistema ottico si intersecano effettivamente nel punto immagine, nel secondo caso sono i loro prolungamenti che si intersecano nel punto immagine. Tale distinzione è schematizzata nella seguente figura.

Immagine reale: formata dalla reale intersezione di un sistema di raggi convergenti;

I raggi si intersecano effettivamente in ciascun punto immagine.

L'immagine reale si può osservare:

- tramite occhio umano, sistema ottico aggiuntivo che fa convergere sulla retina i raggi che divergono dall'immagine reale.
- tramite uno schermo posto in corrispondenza dei punti di convergenza che diffonde i raggi su esso incidenti in tutte le direzioni
- tramite pellicola o una ccd

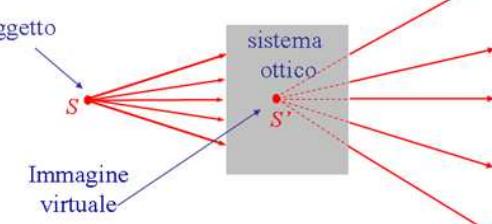


Immagine virtuale: formata da intersezione dei prolungamenti dei raggi divergenti;

I raggi non si intersecano effettivamente nel punto immagine virtuale.

L'immagine virtuale si può osservare attraverso l'occhio che agendo come sistema ottico aggiuntivo fa convergere sulla retina il flusso di raggi che divergono dall'immagine virtuale.

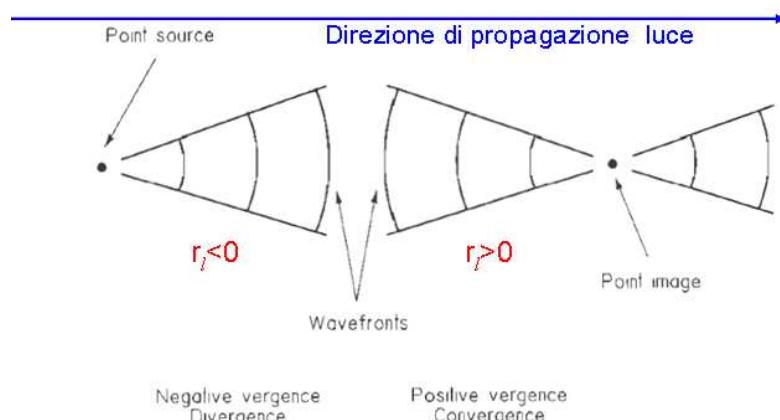
Non si può osservare attraverso uno schermo o una pellicola.



Vergenza della luce

Abbiamo visto che la presenza di un sistema ottico cambia il flusso di luce divergente da un punto dell'oggetto in un altro flusso che può essere convergente o divergente. Per quantificare tale effetto è importante introdurre il concetto di vergenza della luce.

- La luce il cui fronte d'onda si allarga è detta **divergente (vergenza negativa)**. Tale luce può venire da un punto sorgente alla sua sinistra come mostrato nella figura e ha un fronte d'onda curvato in maniera concava sulla sinistra. Il centro di curvatura del fronte d'onda è sulla sinistra e il suo raggio di curvatura si misura dal fronte d'onda sulla sinistra ($r_l < 0$).
- La luce il cui fronte d'onda si restringe è detta **convergente (vergenza positiva)**. Il fronte d'onda ha una curvatura concava sulla destra (convessa a sinistra), il suo centro di curvatura è sulla destra e il raggio di curvatura si misura dal fronte d'onda sulla destra ($r_l > 0$).



Quantitativamente la vergenza della luce è data dall'inverso del raggio di curvatura r_l .

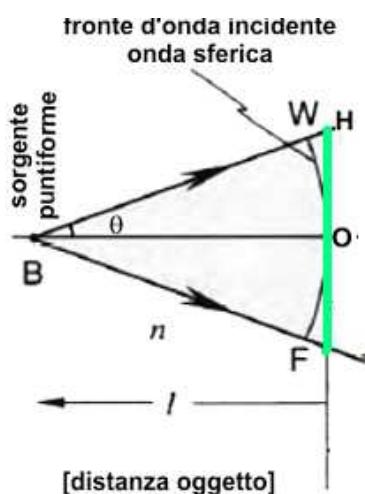
$$\text{Vergenza} = L = \frac{1}{r_l}$$

si misura in m^{-1} (il reciproco di una distanza) unità comunemente chiamata **dioptria D**.

Per capire cosa rappresenta la vergenza, consideriamo una sorgente puntiforme che emette un'onda sferica in B. L'onda sferica arriva all'ingresso del sistema ottico che ha una superficie di accettanza della luce di raggio OH (per esempio dimensione di una lente o di uno specchio). La radiazione che cade in OH è quindi la porzione di radiazione utile alla formazione dell'immagine. Tale radiazione ha una inclinazione rispetto all'asse ottico compresa tra 0 e θ dove:

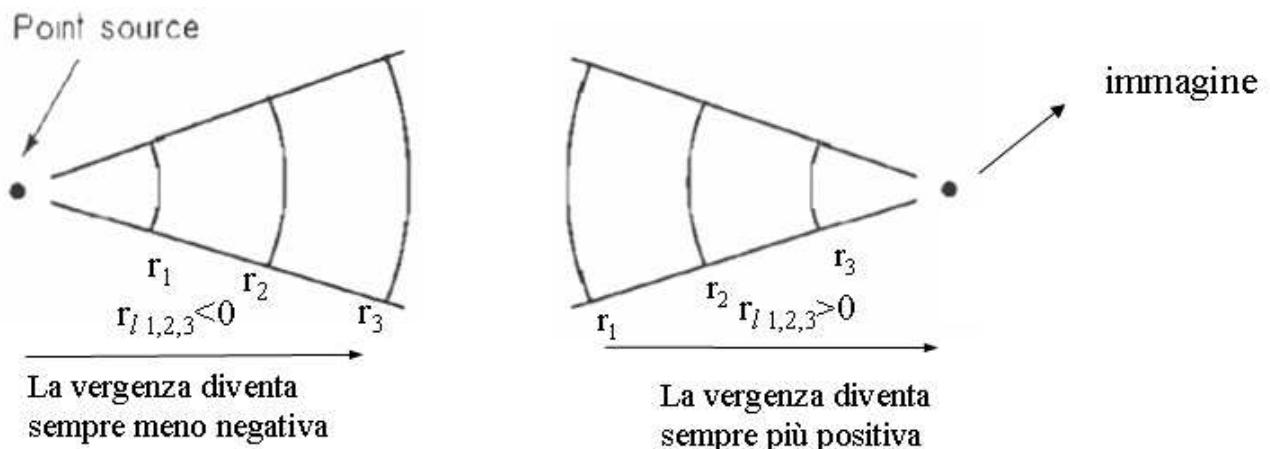
$$\tan \theta = \frac{OH}{OB}$$

La vergenza, $\frac{1}{OB} = \frac{1}{r_l} = L$ è quindi una grandezza



importante: rappresenta l'unità di inclinazione della radiazione che si propaga.

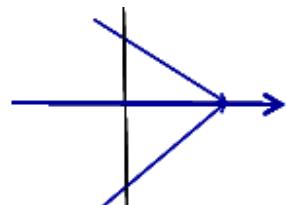
Poiché tutti i fronti d'onda sferici di una onda sferica hanno come centro il punto sorgente (o il punto immagine) il raggio di curvatura del fronte d'onda sferico è pari proprio alla distanza della sorgente (immagine) puntiforme dal fronte d'onda con l'opportuno segno. Abbiamo pertanto che la vergenza è molto negativa in prossimità di un punto oggetto da cui diverge l'onda sferica e tende a zero mano a mano che la si calcola lontano dal punto sorgente. Viceversa la vergenza è positiva in un fascio convergente e diventa sempre più grande mano a mano che la si calcola in prossimità di un punto immagine reale.



Esempi:

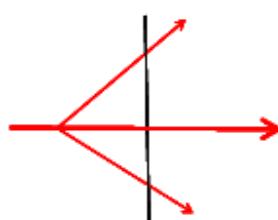
Un fascio di raggi convergenti in un punto distante 10 cm (0,1 m) ha una vergenza positiva di:

$$L = 1/0,1 = 10 \quad (10 \text{ diottrie})$$



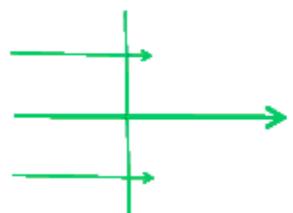
Un fascio di raggi divergenti provenienti da una sorgente distante 0,5 m ha una vergenza di:

$$L = 1/-0,5 = -2 \quad (-2 \text{ diottrie})$$

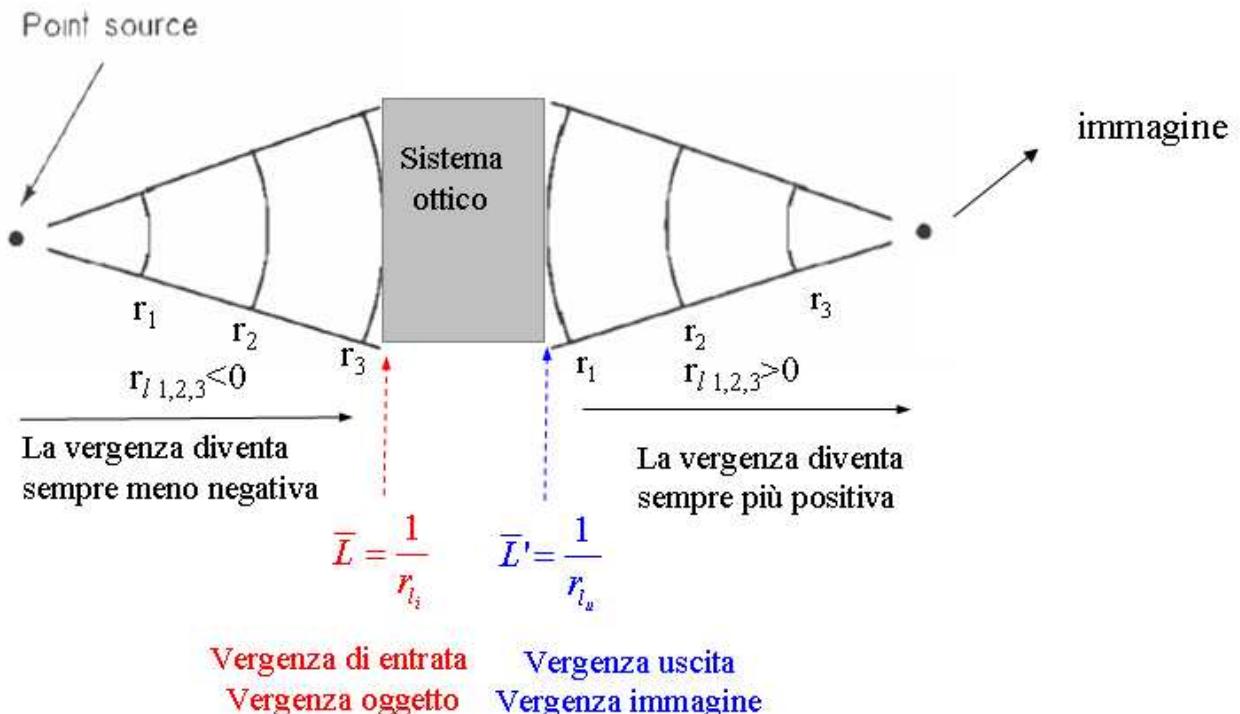


Un fascio di raggi paralleli provenienti dall'infinito ha una vergenza di:

$$L = 1/\infty = 0 \quad (0 \text{ diottrie})$$



Abbiamo visto che un sistema ottico stigmatico, trasformando un punto oggetto, sorgente di luce, in un punto immagine, cambia l'inclinazione dei raggi rispetto all'asse ottico, possiamo quindi dire che agisce sulla vergenza della luce.



La luce può in realtà viaggiare in un mezzo che non è l'aria e ha un indice di rifrazione n diverso da 1. La deviazione dei raggi da parte del sistema ottico (dovuta alle leggi di Snell) dipende da tale indice di rifrazione. Pertanto la quantità rilevante in un sistema ottico è in realtà la vergenza ridotta:

$$\bar{L} = \frac{n}{r_l}$$

In generale un sistema ottico cambia la vergenza ridotta della luce



Tale capacità è quantificata dal potere effettivo F_E che caratterizza il sistema ottico, in base alla relazione:

$$\bar{L}' = \bar{L} + F_E$$

Da tale relazione ricaviamo che:

$$F_E = \bar{L}' \text{ con } \bar{L} = 0$$

Il potere effettivo (o equivalente) è pari alla vergenza in uscita quando la vergenza di ingresso è nulla (raggi incidenti paralleli all'asse ottico).

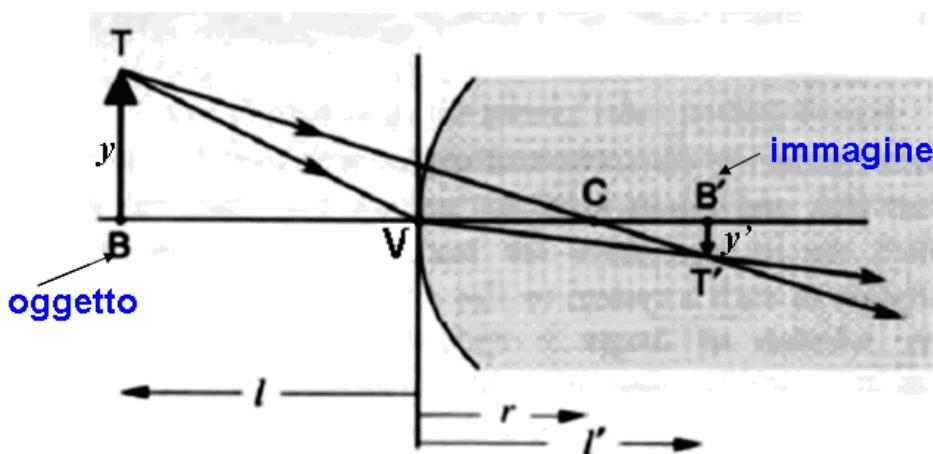
Nel seguito studieremo sistemi ottici più semplici: il diottro sferico, le lenti semplici sottili e spesse, i sistemi di lenti e gli specchi piani e sferici. In particolare ci proponiamo di risolvere nei vari casi i seguenti problemi:

- 1) Data la posizione dell'oggetto trovare quella della immagine.
- 2) Trovare il rapporto tra la grandezza dell'immagine e quella dell'oggetto (Ingrandimento lineare)
- 3) Trovare il rapporto tra l'angolo con cui viene vista l'immagine e quello con cui è vista l'oggetto (ingrandimento angolare)

3.1- Il Diottro sferico

Definiamo diottro sferico una superficie sferica separante due mezzi trasparenti di diverso indice di rifrazione. Il comportamento della luce quando attraversa un diottro sferico è di fondamentale importanza per la comprensione del funzionamento delle lenti e degli strumenti ottici in generale; infatti salvo rare eccezioni, essi sono costituiti da materiali trasparenti delimitati da superfici sferiche.

Consideriamo un oggetto TB di altezza y (rappresentato da un vettore). I raggi emessi dai vari punti dell'oggetto quando giungono sul diottro vengono rifratti. I raggi rifratti vanno a formare l'immagine. Nella figura V è il vertice del diottro di raggio r e C il centro di curvatura della superficie sferica.



Vogliamo trovare l'immagine $T'B'$ formata dal diottro ovvero l'insieme dei punti coniugati di tutti i punti che formano l'oggetto.

Per far questo dobbiamo introdurre un sistema di coordinate. Chiamiamo:

l distanza oggetto

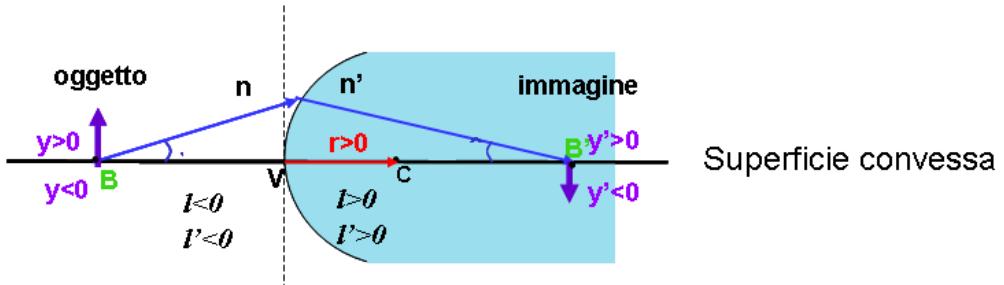
l' distanza immagine

r raggio di curvatura della superficie

y altezza oggetto

y' altezza immagine

Naturalmente per trovare numericamente le caratteristiche delle immagini dovremo fissare delle convenzioni per le varie coordinate. Tali convenzioni sono riassunte nella scheda seguente.

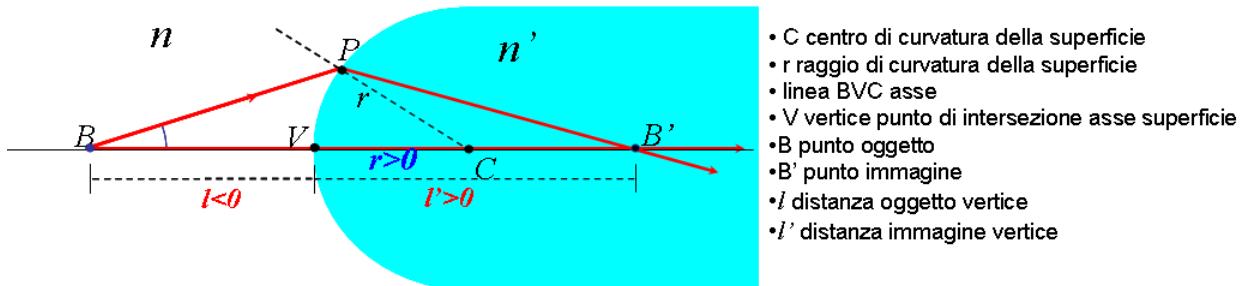


1. Disegnare tutte le figure in modo che la luce incidente provenga da sinistra
2. Le distanze misurate alla sinistra del vertice, in direzione opposta alla propagazione della luce sono negative. Le distanze misurate alla destra del vertice sono positive.
3. I raggi di curvatura (r) sono misurati dalla superficie verso il centro della curvatura. Sono positivi quando il centro di curvatura C giace alla destra del vertice (superficie convessa) e negativi quando C giace alla sinistra del vertice (superficie concava)
4. Le dimensioni trasversali sono positive quando sono misurate al disopra dell'asse, negative al disotto.

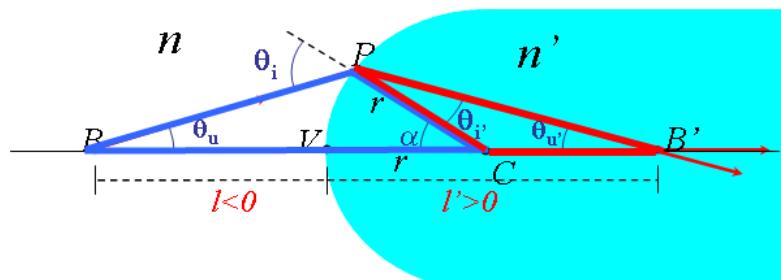
Cominciamo con il considerare la rifrazione di un'onda luminosa generata da una sorgente puntiforme.

Cerchiamo l'equazione che lega la coordinata l' (posizione del punto immagine) a l (posizione del punto oggetto).

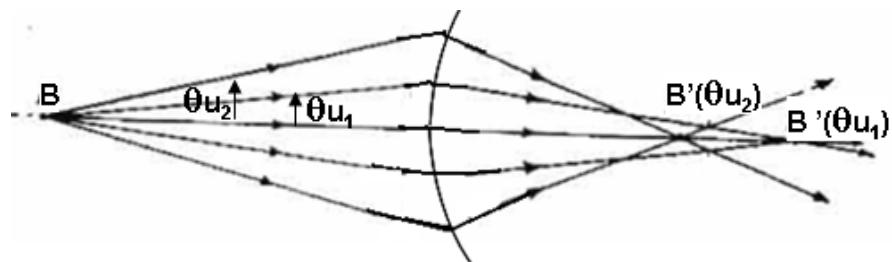
Consideriamo un diottro convesso con $n' > n$ e un particolare raggio che parte da B e che viene deviato a seguito della rifrazione sulla superficie di separazione dei due mezzi. Il raggio rifratto va a intersecare l'asse ottico in B' . Tenendo conto delle convenzioni da noi stabilite, vale lo schema mostrato in figura.



Tenendo conto della legge di Snell della rifrazione nel punto P e delle proprietà dei triangoli BPC e PCB' , possiamo l' (posizione di B') e θ_u' in funzione di l (posizione di B) e θ_u (angolo tra raggio e asse ottico) note le costanti del sistema r, n, n'



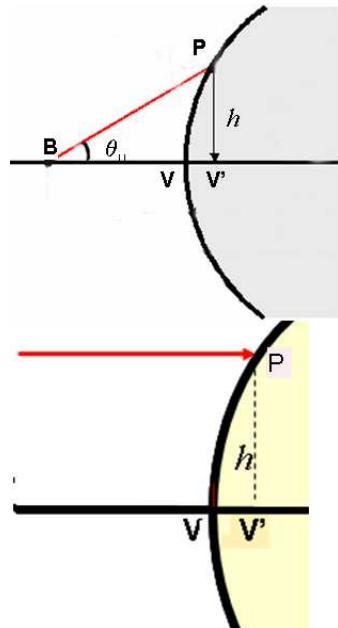
In generale l' dipende dall'angolo θ_u del raggio rispetto all'asse ottico. l' è massimo per angoli θ_u piccoli e decresce quando θ_u cresce. Il sistema è quindi astigmatico.



Perché il diottro si comporti come un sistema stigmatico bisogna “selezionare”, per la formazione dell’immagine, solo alcuni raggi emessi dalla sorgente. Deve cioè essere valida **l’approssimazione di Gauss**, descritta nel paragrafo seguente.

Approssimazione di Gauss

Il diottro risulta un sistema ottico stigmatico quando è verificata l'approssimazione di Gauss, cioè se i raggi che vanno a formare l'immagine soddisfano le seguenti condizioni:



1) θ_u piccolo cioè
 $\sin \theta_u \approx \tan \theta_u \approx \theta_u$

2) approssimazione parassiale
(raggi vicino all'asse)

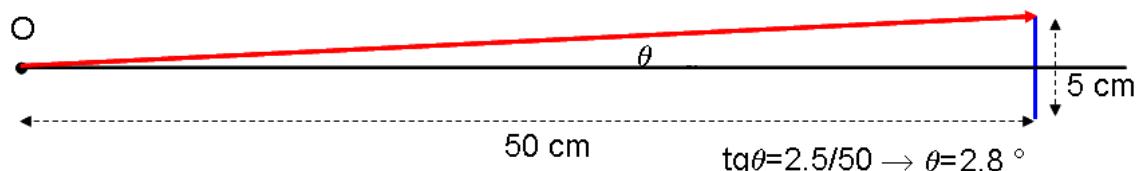
$$PV' = PV = h$$

$$BV' = BV = -l$$

In tali condizioni si ha: $\tan(\theta_u) = \theta_u = \frac{h}{-l}$

Validità della approssimazione di Gauss:

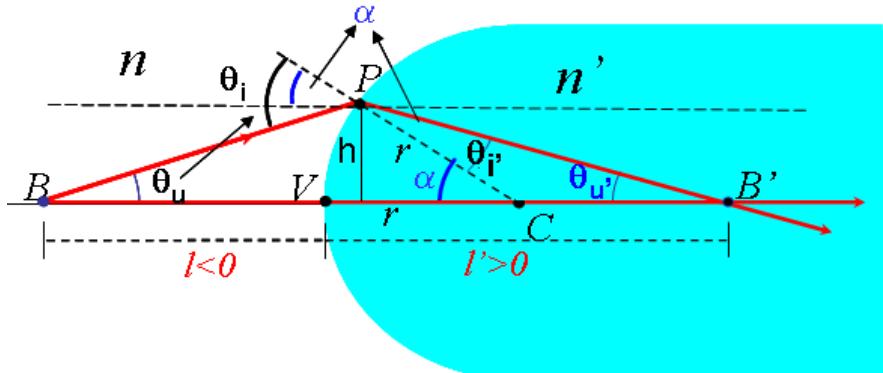
per angoli piccoli si intendono angoli inferiori ai 10° . Consideriamo una situazione tipica in cui un oggetto è posto a 50 cm da una lente di diametro pari a 5 cm. Solo i raggi che entrano nella lente contribuiscono a formare l'immagine. Gli angoli di tali raggi risultano inferiori a 2.8°



Equazione del diottro in approssimazione di Gauss

Per trovare l'equazione dei punti coniugati, cioè la relazione tra la posizione dell'oggetto e quella dell'immagine in approssimazione di Gauss, disegniamo la parallela all'asse ottico passante per P e chiamiamo h l'altezza di P rispetto all'asse ottico; in approssimazione di Gauss, il punto P è vicino al vertice e tutti gli angoli sono piccoli.

Dalla figura si vede che:



$$\theta_u = \frac{h}{-l}; \theta_{u'} = \frac{h}{l}; \alpha = \frac{h}{r}$$

Per la legge di Snell si ha: $n \sin(\theta_i) = n' \sin(\theta_{i'}) \rightarrow n \theta_i = n' \theta_{i'}$

Valgono inoltre le relazioni tra gli angoli:

$$\begin{aligned} \theta_i &= \alpha + \theta_u \\ \alpha &= \theta_{i'} + \theta_{u'} \end{aligned}$$

• Moltiplichiamo la prima per n e la seconda per n' $\begin{cases} n \theta_i = n \alpha + n \theta_u \\ n' \alpha = n' \theta_{i'} + n' \theta_{u'} \end{cases} \rightarrow n' \theta_{i'} = n' \alpha - n' \theta_{u'}$

• Applichiamo la legge di Snell $n(\theta_i) = n'(\theta_{i'})$ sulla prima equazione. Otteniamo:

$$\begin{cases} n' \theta_{i'} = n \alpha + n \theta_u \\ n' \theta_{i'} = n' \alpha - n' \theta_{u'} \end{cases} \quad \rightarrow \quad n \alpha + n \theta_u = n' \alpha - n' \theta_{u'}$$

• Sostituendo le espressioni per θ_u , $\theta_{u'}$ e α , si ricava: $\frac{n}{r} - \frac{n}{l} = \frac{n'}{r} - \frac{n'}{l}$

• Semplifichiamo h e otteniamo:

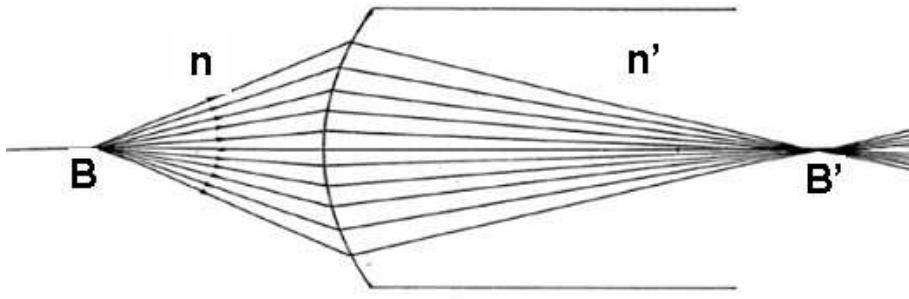
$$\frac{n'}{l} - \frac{n}{l} = \frac{n' - n}{r}$$

Equazione del diottro
equazione parassiale fondamentale

Possiamo osservare che: l' dipende solo dai parametri n , n' , r e l

l' non dipende da θ_u

Tutti i raggi parassiali convergono nello stesso punto B': fascio stigmatico



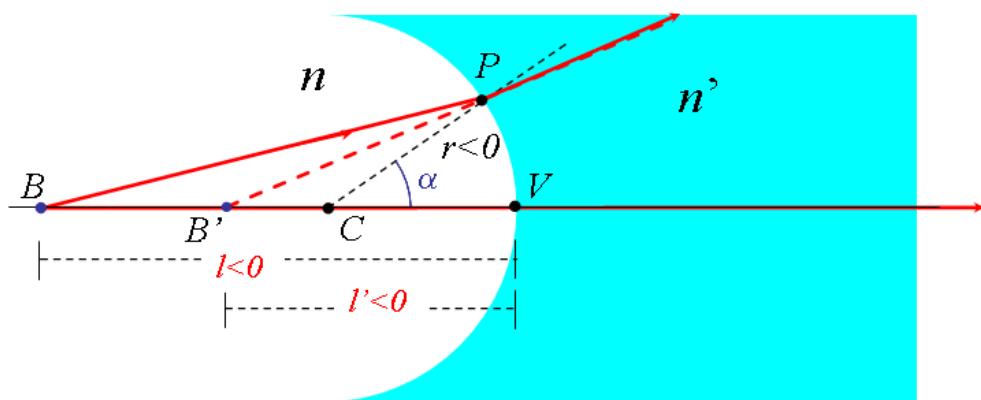
B e B' sono punti coniugati

Da tale equazione possiamo ricavare la coordinata del punto immagine nota la coordinata del punto oggetto e le caratteristiche del diottro.

$$\frac{1}{l'} = \frac{1}{n'} \left(\frac{n'-n}{r} + \frac{n}{l} \right) \Rightarrow l' = \frac{n'}{\frac{n'-n}{r} + \frac{n}{l}}$$

L'equazione del diottro (detta anche equazione dei punti coniugati) che qui abbiamo ricavato per un diottro convesso vale anche per i diottri concavi. E' ovviamente fondamentale mettere i giusti segni ai vari termini che compaiono nell'equazione.

Avremo che $l' < 0$ se l'oggetto è reale ed è quindi alla sinistra del vertice, $r > 0$ se il centro di curvatura C è a destra del vertice (diottro convesso) e $r < 0$ se il centro di curvatura C è a sinistra del vertice (diottro concavo). l' sarà > 0 se l'immagine è a destra del vertice (immagine reale), < 0 se è a sinistra del vertice (immagine virtuale).



Nel diottro concavo con $n' > n$ il punto immagine di un punto oggetto reale è sempre virtuale

$$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n'-n}{r} \quad r < 0, l < 0 \rightarrow l' < 0$$

Punti focali e distanze focali

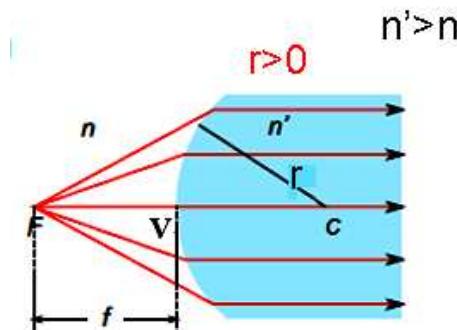
In tutti i sistemi ottici è importante individuare la posizione del primo e del secondo fuoco.

Il primo fuoco F del sistema ottico è il punto oggetto i cui raggi vengono deviati e resi paralleli all'asse ottico dal sistema, ossia la cui immagine è infinitamente lontana.

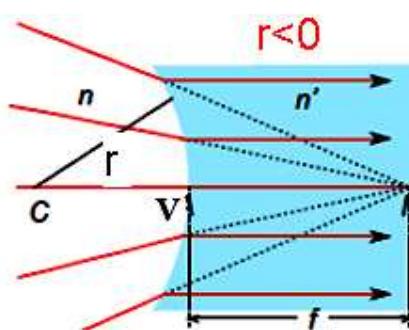
La coordinata f del primo fuoco per il quale il corrispondente valore della coordinata f' dell'immagine è all'infinito, viene chiamata **prima distanza focale f** .

Primo Fuoco F del diottro

Punto oggetto sull'asse ottico per il quale i raggi rifratti dal diottro sono paralleli all'asse ottico



Il primo fuoco è a sinistra del vertice
 $f < 0$



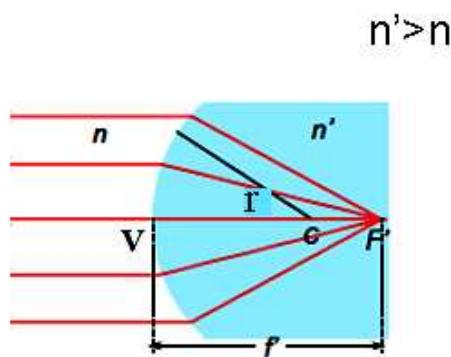
Il primo fuoco è a destra del vertice
 $f > 0$

Il secondo fuoco F' del sistema ottico è il punto immagine corrispondente a raggi che incidono sul sistema parallelamente all'asse ottico, ossia a un punto oggetto infinitamente lontano.

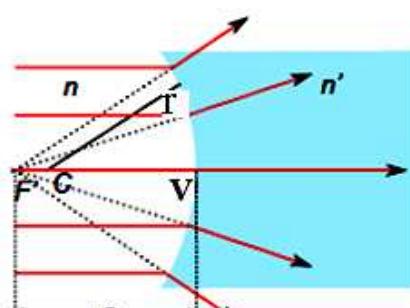
La coordinata f' del secondo fuoco per la quale il corrispondente valore della coordinata f dell'oggetto è a $-\infty$ (molto lontano dal vertice) si chiama **seconda distanza focale** (o semplicemente focale) **f'**

Secondo Fuoco F' del diottro

Punto immagine sull'asse prodotto da raggi incidenti paralleli all'asse ottico



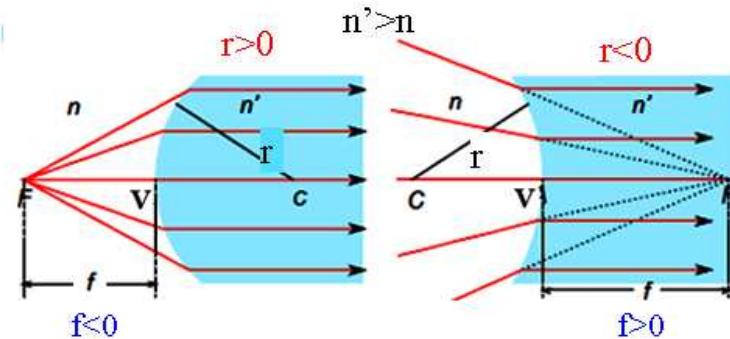
Il secondo fuoco è a destra del vertice
 $f' > 0$



Il primo fuoco è a sinistra del vertice
 $f' < 0$

Troviamo i punti focali del diottro:

Il primo fuoco è il punto oggetto per il quale l'immagine è all'infinito
 $l'=\infty \rightarrow$ oggetto è nel primo fuoco F del diottro

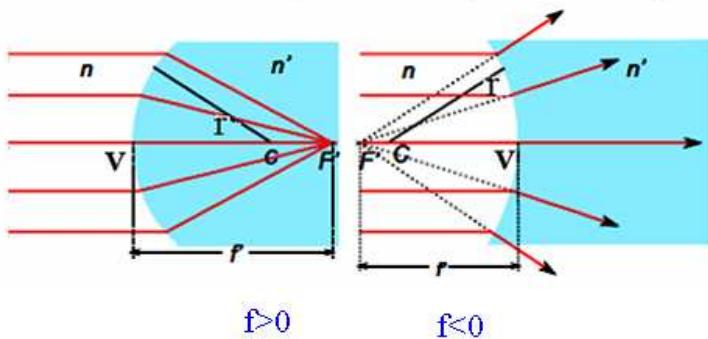


$$\cancel{\frac{n'}{l'}} - \frac{n}{l} = \frac{n'-n}{r}$$

$$l = f = r \frac{n}{n-n'}$$

prima distanza focale

Il secondo fuoco è il punto immagine di un oggetto molto lontano $l=-\infty$



$$\frac{n'}{l'} - \cancel{\frac{n}{l}} = \frac{n'-n}{r}$$

$$l' = f' = r \frac{n'}{n'-n}$$

seconda distanza focale

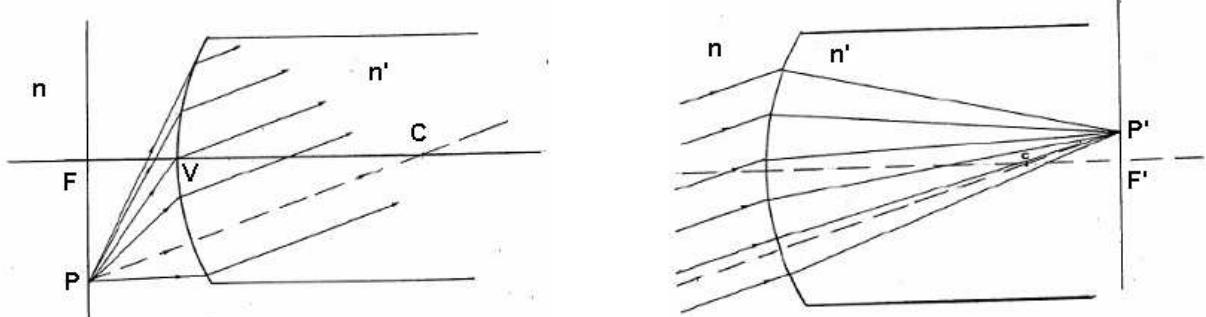
Si ricava: $\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$

Piani focali

Si definisce:

Primo piano focale: il piano perpendicolare all'asse passante per il primo fuoco F

Secondo piano focale: il piano perpendicolare all'asse passante per il secondo fuoco F'



Ogni punto di ciascun piano focale ha le stesse proprietà del fuoco corrispondente con la differenza che i raggi che vanno o provengono dall'infinito non sono più paralleli all'asse ma solo paralleli tra loro

Equazione del diottro in termini della distanza focale

Sostituendo nell'equazione:

$$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n'-n}{r}$$

le espressioni per le distanze focali:

$$f' = r \frac{n'}{n'-n} \quad f = r \frac{n}{n-n'} \quad \frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$$

Otteniamo:

$$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}$$

Da tale equazione possiamo ricavare la coordinata del punto immagine nota la coordinata del punto oggetto e le caratteristiche del diottro.

$$\frac{1}{l'} = \frac{1}{n'} \left(\frac{n'}{f'} + \frac{n}{l} \right) \Rightarrow l' = \frac{n'}{\left(\frac{n'}{f'} + \frac{n}{l} \right)}$$

Potere rifrattivo del diottro

Ogni superficie rifrattiva ha un certo potere rifrattivo. Il potere rifrattivo è positivo se il sistema tende a far convergere i raggi, negativo se tende a farli divergere.

Come abbiamo detto, quantitativamente il potere **F** determina la variazione di vergenza (ridotta) della luce.

Si ha:

$$\bar{L}' = \bar{L} + F$$

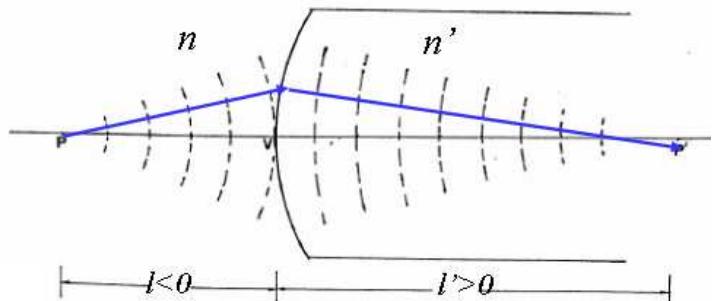
Consideriamo il caso di un diottro. Definiamo

Vergenza oggetto: il rapporto

$$\bar{L} = \frac{n}{l}$$

Vergenza immagine: il rapporto

$$\bar{L}' = \frac{n'}{l'}$$



Possiamo osservare che l'equazione del diottro può essere scritta in termini di tali quantità. Infatti

$$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}$$

↓ ↓ ↓
Vergenza Vergenza Potere
immagine oggetto diottro

$$\bar{L}' - \bar{L} = F$$

$$\bar{L}' = \bar{L} + F$$

Il potere agisce sulla vergenza di ingresso propria del fronte d'onda incidente (vergenza oggetto) e la cambia nella vergenza di uscita (vergenza immagine)

Quantitativamente

$$F = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} = \frac{n'-n}{r}$$

è il potere rifrattivo del diottro

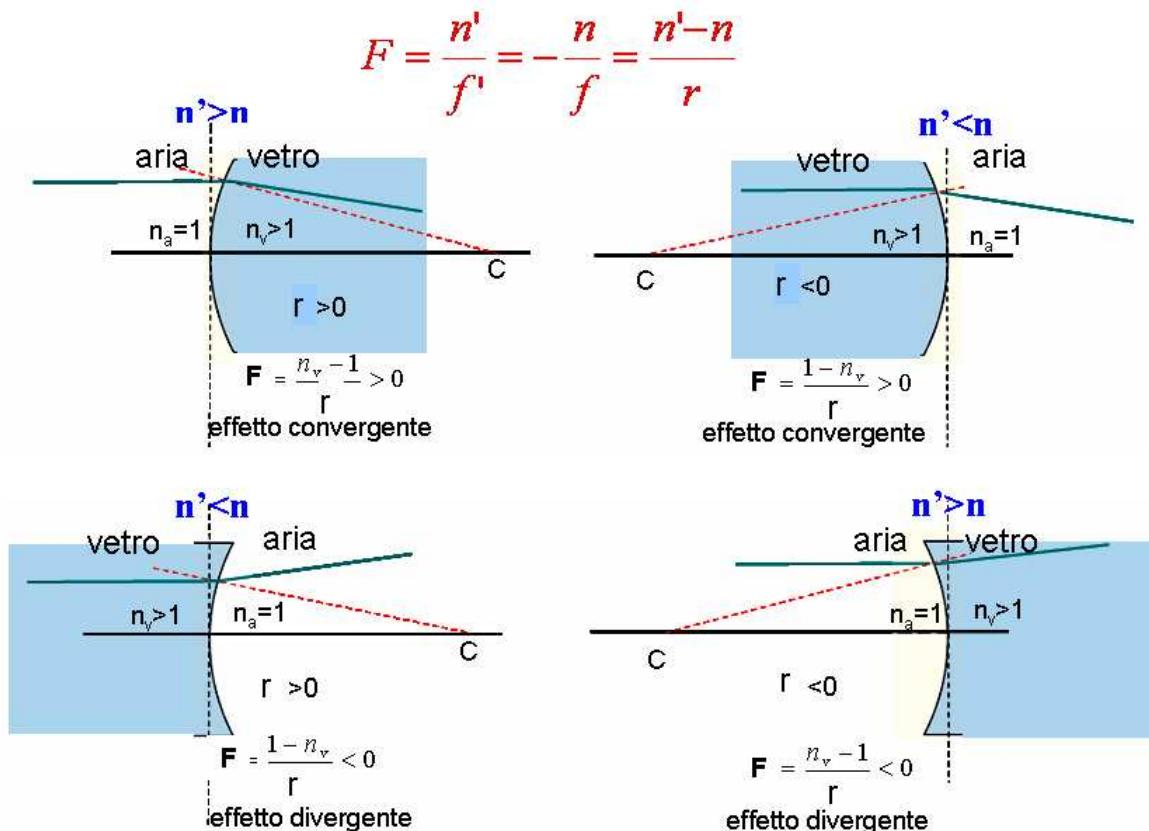
(unità di misura diottria $D=m^{-1}$)

Come in tutti i sistemi ottici il potere del diottro è pari alla vergenza in uscita quando la vergenza di ingresso è nulla (raggi incidenti paralleli all'asse ottico).

$$F = \bar{L}' \text{ con } \bar{L} = 0$$

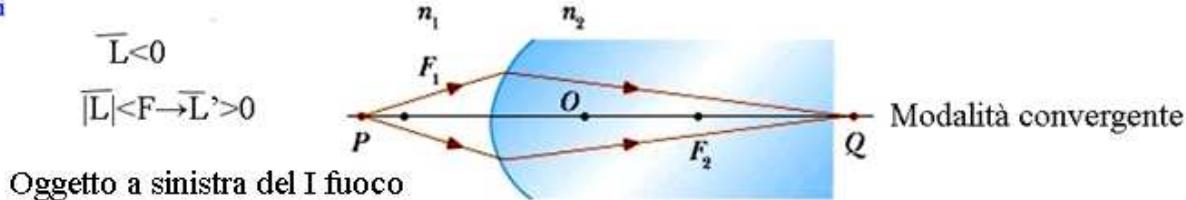
Esprime la capacità del diottro di far convergere/divergere la luce

Il potere dipende dalla curvatura e dagli indici di rifrazione dell'ambiente n e del diottro n'

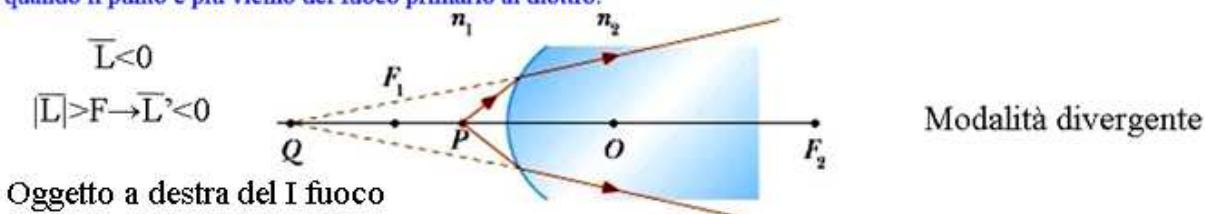


Lo stesso diottro convesso può lavorare in modalità convergente (i raggi emergenti convergono, l'immagine è reale) e divergente (i raggi emergenti divergono, l'immagine è virtuale) dipendentemente dalla distanza dell'oggetto dal vertice. Consideriamo il caso di un diottro convesso con l'indice di rifrazione del secondo mezzo maggiore del primo

- **Immagine reale:** formata dall'*effettiva intersezione dei raggi*. Su un diottro sferico positivo (convesso) l'immagine si forma nel lato rifrangente ed è reale quando il punto è più

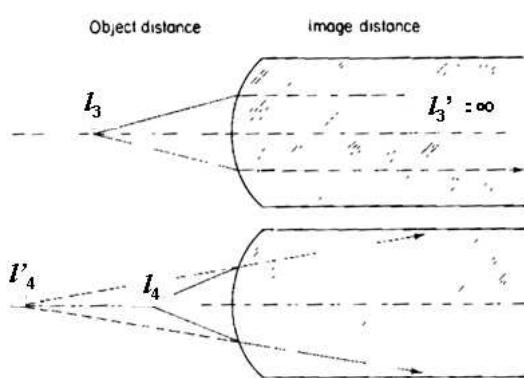
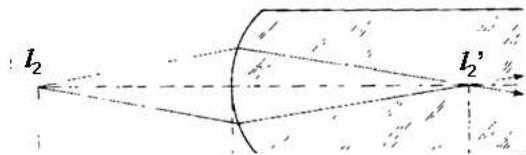
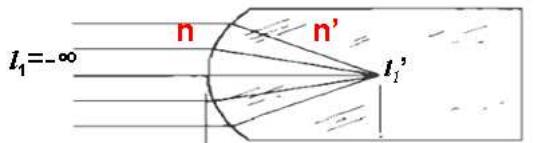


- **Immagine virtuale:** formata dall'*intersezione dei prolungamenti dei raggi*. Su un diottro sferico positivo (convesso) l'immagine si forma nel lato incidente ed è virtuale quando il punto è più vicino del fuoco primario al diottro.



Che succede al variare della distanza dell'oggetto dal vertice del diottro?

Consideriamo un oggetto reale ($l < 0$), variamo la sua distanza dalla sfera e troviamo i corrispondenti punti immagine



$$\begin{array}{ll} n' > n & l' = \frac{n'}{n'-n} + \frac{n}{l} \\ r > 0 & \end{array}$$

$$l_1 = -\infty \Rightarrow l'_1 = \frac{n'r}{n'-n} = f' \text{ posizione II fuoco F'}$$

Se avviciniamo l'oggetto al vertice $|l_2| < |l_1|$, l'immagine si allontana dal vertice

$$l'_2 > l'_1 \quad l'_2 > \frac{n'r}{n'-n}$$

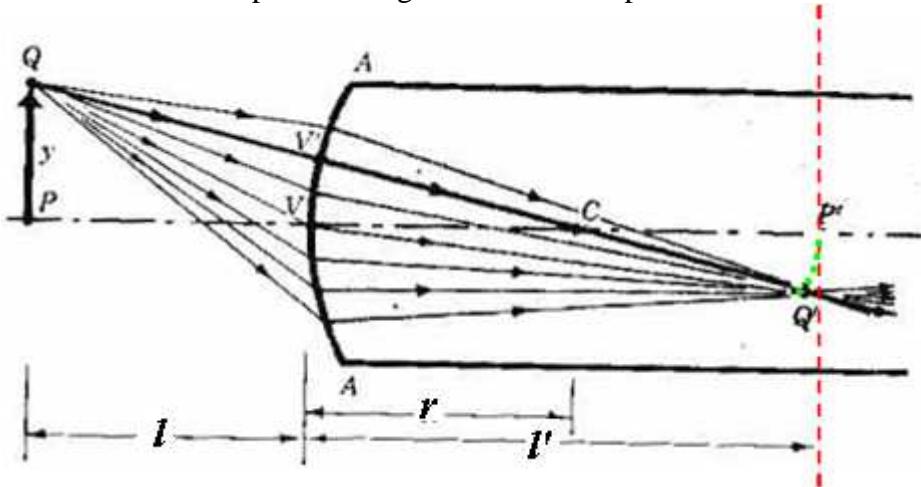
$$\text{posizione I fuoco F } l'_3 = -\frac{nr}{n'-n} = f \Rightarrow l'_3 = \infty$$

Se avviciniamo ancora l'oggetto al vertice $|l|$ diventa negativo e l'immagine diventa virtuale

$$|l_4| < \frac{nr}{n'-n} \Rightarrow l'_4 < 0$$

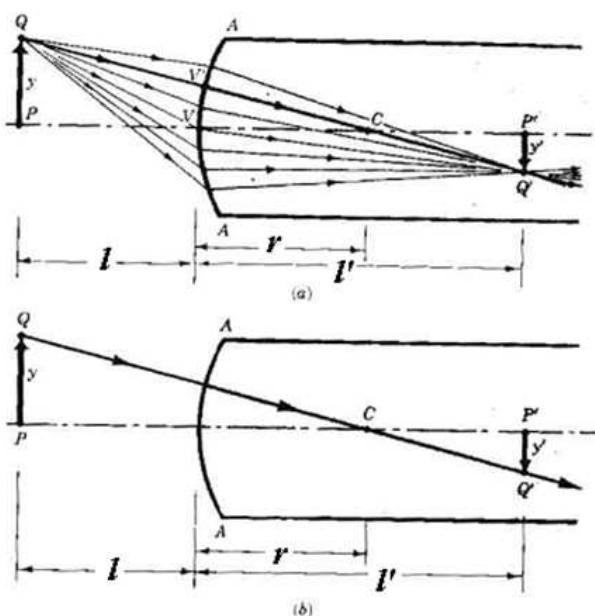
Ingrandimento trasversale: immagine di un oggetto esteso

Per costruire l'immagine di un oggetto esteso nella direzione ortogonale all'asse ottico, dobbiamo trovare i punti coniugati di tutti i suoi punti.



In generale l'immagine $P'Q'$ non giace in un piano normale all'asse PVC, ma su una superficie concava verso sinistra (Effetto curvatura di campo)

Se l'angolo sotteso dall'oggetto (o dall'immagine) sulla superficie rifrangente è piccolo (raggi parassiali) tale deviazione è piccola. Le stesse distanze l e l' valgono per tutti i punti dell'oggetto e dell'immagine: l'immagine è in un piano ortogonale all'asse ottico a distanza l' dal vertice.



y, y' si misurano a partire dall'asse ottico, sono >0 se Q e/o Q' sono al disopra dell'asse ottico, sono <0 se Q e/o Q' sono al disotto dell'asse ottico

Fig. 3-5. - I raggi provenienti da Q convergono in Q' dopo la rifrazione.

In tale approssimazione:

$$m = \frac{y}{y'}$$

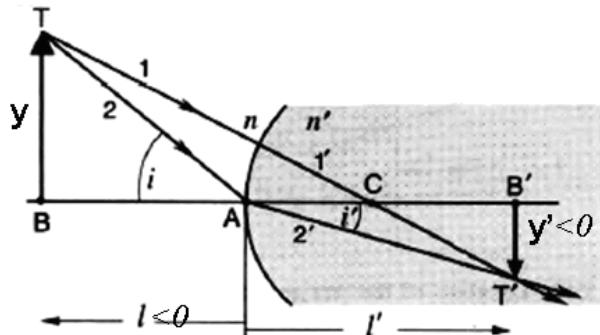
è l'**ingrandimento trasversale**.

$m > 0$ immagine diritta

$m < 0$ immagine capovolta

Ingrandimento trasversale in approssimazione di Gauss

Consideriamo un oggetto esteso alto y . Disegniamo il raggio che parte dalla punta dell'oggetto passante per il vertice della superficie. In approssimazione di Gauss :



$$i = \frac{y}{-l} \quad i' = \frac{-y'}{l'} \quad \rightarrow \frac{i'}{i} = \frac{y'}{l} \frac{l}{y} \quad \rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{l}{l} \frac{i'}{i}$$

per la legge di Snell

$$ni = n'i' \rightarrow \frac{i'}{i} = \frac{n}{n'}$$

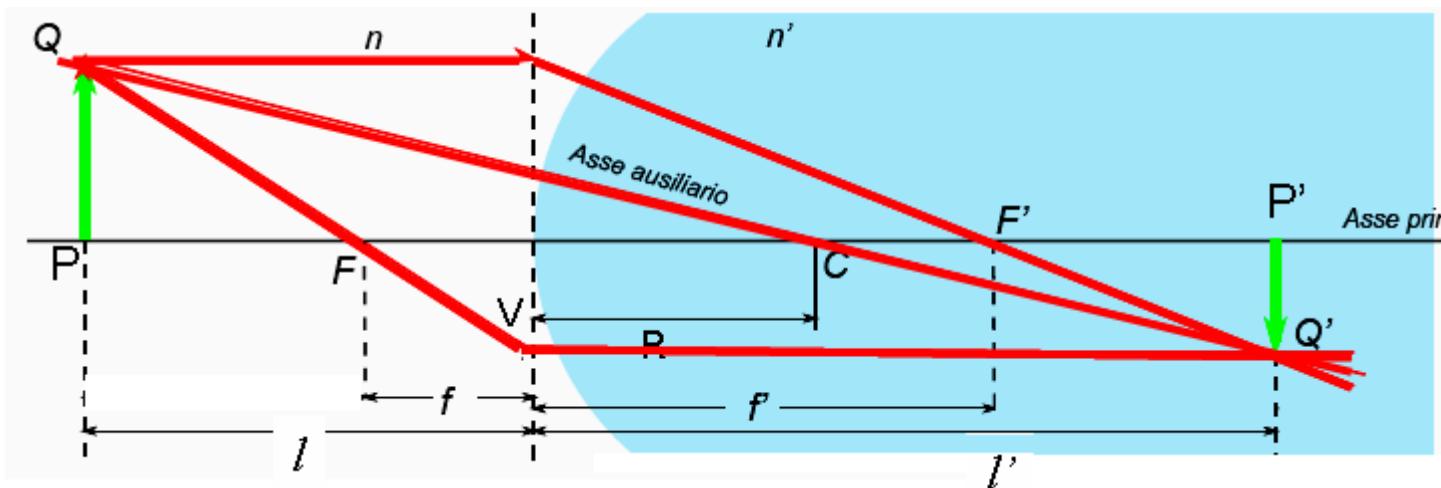
Se m è positivo, l'immagine di un oggetto reale sarà diritta e virtuale, se m è negativo, l'immagine sarà capovolta e reale.

In termini di vergenza di entrata L e di uscita L'

$$\frac{n}{l} = L; \quad \frac{n'}{l'} = L'$$

$$\frac{y'}{y} = m = \frac{L}{L'}$$

Costruzione grafica dell'immagine



Nell'approssimazione di raggi parassiali, è come se i raggi fossero rifratti dal piano tangente al vertice del diottro.

Tra i raggi emessi dal punto estremo dell'oggetto Q si considerano:

- 1) Il raggio parallelo all'asse ottico → passa per definizione nel secondo fuoco F'
- 2) Il raggio normale alla superficie del diottro → rimane indeviato
- 3) Il raggio che passa per il primo fuoco → diventa parallelo all'asse ottico

Questi 3 raggi si incrociano nel punto immagine Q' (per determinare la posizione di Q' ne bastano 2)

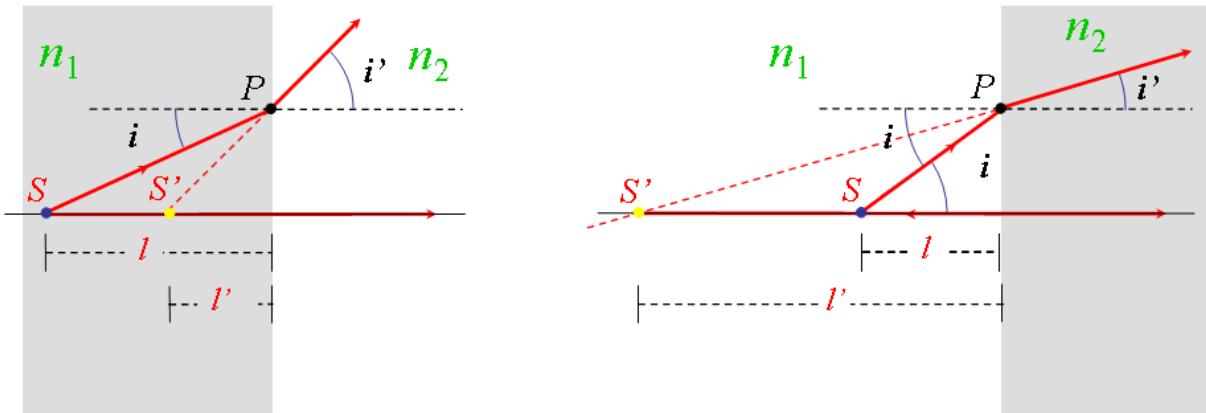
L'immagine dell'oggetto giace sul piano ortogonale all'asse ottico e si estende dal punto immagine di P' (che sta sull'asse ottico) al punto immagine Q'.

Un diottro particolarmente semplice: il piano

Un diottro piano è caratterizzato da un raggio di curvatura infinito. Si consideri quindi il limite per $r \rightarrow \infty$ dell'equazione del diottro

$$\rightarrow \frac{n_2}{l'} - \frac{n_1}{l} = \frac{n_2 - n_1}{r} = 0 \rightarrow l' = \frac{n_2}{n_1} l$$

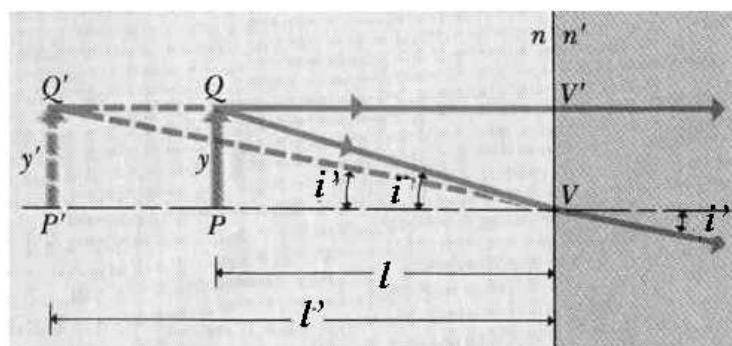
$l' < 0$ per oggetti reali ($l < 0$) Immagine virtuale



$$n_1 > n_2 \Rightarrow |l'| < |l|$$

$$n_1 < n_2 \Rightarrow |l'| > |l|$$

Immagine di un oggetto esteso



Dalla figura si può osservare che $y = y'$

La stessa equazione si ottiene dall'espressione dell'ingrandimento del diottro tenendo conto che $\mu = \frac{l'}{l} \frac{n}{n'}$

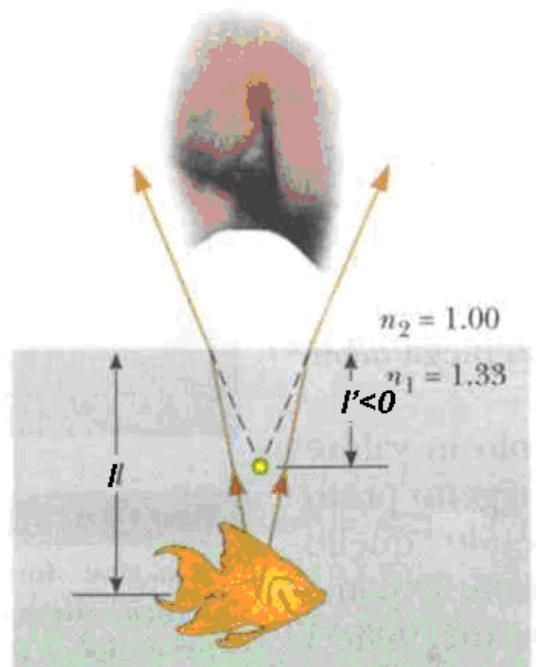
$$\rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{l' n}{n' l} = 1$$

Esempi

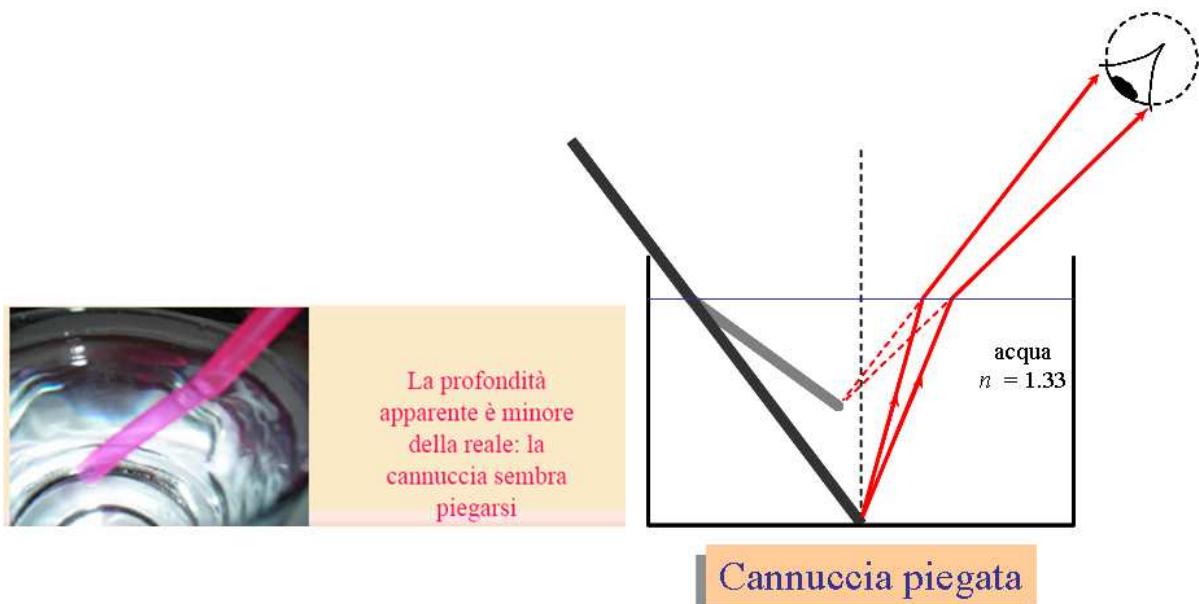
Se guardiamo dall'alto un oggetto immerso in un mezzo di indice di rifrazione $n_1 > n_2$ (vedi figura), gli angoli dei raggi che entrano nei nostri occhi sono piccoli. Per calcolare il punto in cui ci appare l'immagine dell'oggetto possiamo utilizzare l'equazione dei punti coniugati in approssimazione di Gauss. Si ha:

$$l' = l \frac{n_2}{n_1} = l \frac{1}{1.33} = 0.752l$$

L'oggetto ci appare più vicino di quanto è in realtà.



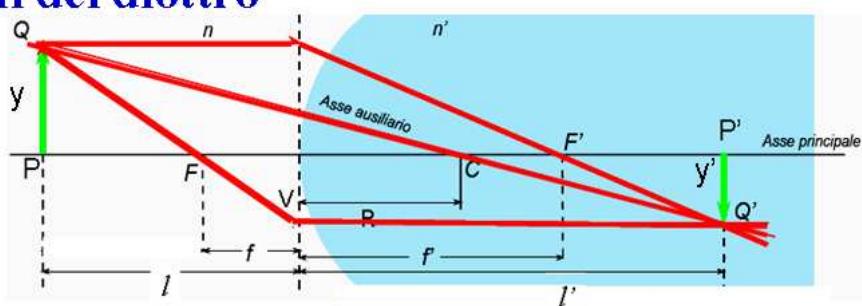
Lo stesso succede quando guardiamo una cannuccia immersa in un liquido. La cannuccia sembra piegarsi perché la parte immersa ci appare più vicina di dove è in realtà.



Riassunto equazioni del diottro

Sostituendo nell'equazione: y

$$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n'-n}{r}$$



le espressioni per le distanze focali: $f' = r \frac{n'}{n'-n}$ $f = r \frac{n}{n-n'}$ $\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}$

Otteniamo: $\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n'-n}{r} = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}$ $\frac{1}{l'} = \frac{1}{n'} \left(\frac{n'}{f'} + \frac{n}{l} \right) \Rightarrow l' = \frac{n'}{\left(\frac{n'}{f'} + \frac{n}{l} \right)}$

Equazione per le vergenze

$$\begin{array}{lll} \mathbf{L}' - \mathbf{L} = \mathbf{F} & F = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} = \frac{n'-n}{r} & \text{Potere della superficie} \\ \mathbf{L}' = \mathbf{L} + \mathbf{F} & & \text{rifrangente} \end{array}$$

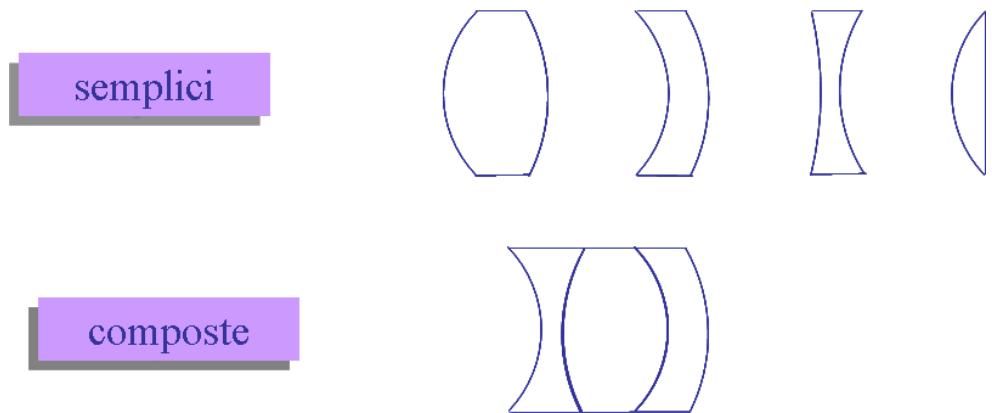
$$\frac{y'}{y} = m = \frac{nl'}{n'l} = \frac{\bar{L}}{\bar{L}'} \quad \text{Ingrandimento trasversale}$$

3.2 Le lenti

La lente è un sistema ottico formato da più superfici rifrangenti aventi un asse in comune. Possiamo distinguere tra due categorie fondamentali di lenti:

Lenti semplici: formate da 2 superfici rifrangenti

Lenti composte: formate da più di 2 superfici rifrangenti

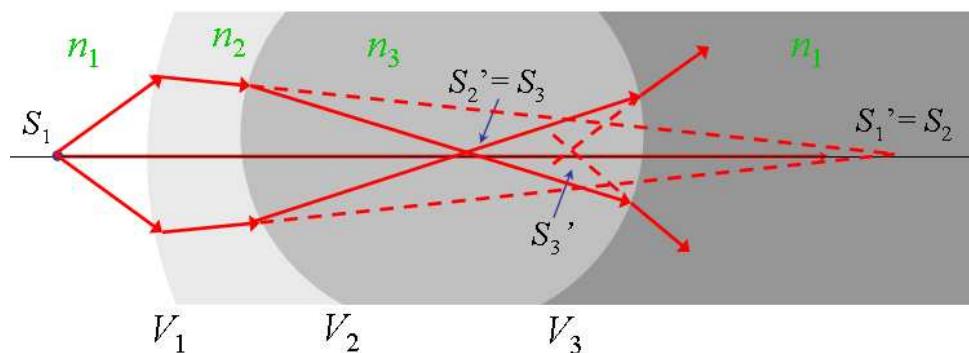


Rifrazione e formazione dell'immagine da diottri successivi

Un raggio di luce che incide su una lente subisce una rifrazione ad ogni superficie di separazione tra un mezzo e l'altro. L'equazione derivata per un diottro sferico può essere usata per determinare il percorso di un raggio parassiale attraverso varie superfici rifrangenti e ottenere così la posizione e le dimensioni dell'immagine di un oggetto formata da un sistema ottico.

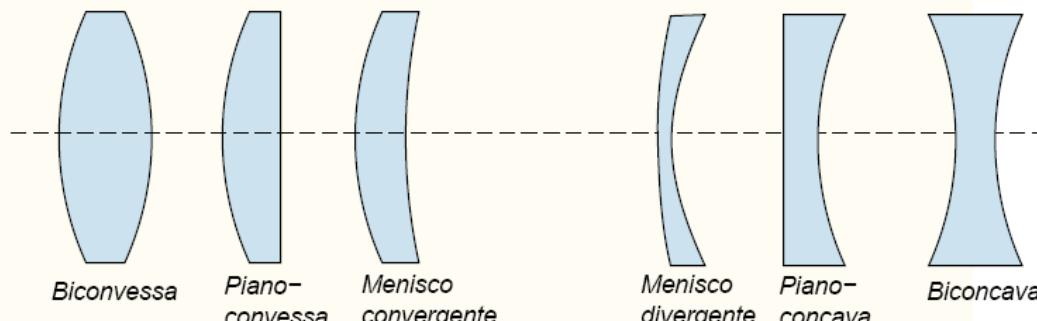
Come si vede dalla figura seguente, poiché la rifrazione su una certa superficie dipende solo dalla vergenza della luce quando arriva sulla superficie, per studiare l'effetto di più diottri possiamo applicare la seguente regola:

L'immagine dell'oggetto formata da una superficie costituisce l'oggetto per la rifrazione sulla superficie successiva



Lenti semplici

Le lenti semplici sono costituite da due diottri. Sono costruite con materiali ottici aventi indice di rifrazione più alto di quello dell'aria, tipicamente di vetro o plastica. Le due superfici che le delimitano possono essere piane, concave o convesse, come mostrato in figura.



Ciascuno dei raggi che incidono su una lente semplice subisce una prima rifrazione, rispetto alla normale alla superficie di entrata nel punto di incidenza e una seconda rifrazione rispetto alla normale alla superficie di uscita. La non complanarità delle due facce fa sì che il raggio venga deviato. Una **lente semplice** può quindi essere trattata come una successione di due diottri sferici posti a distanza t .

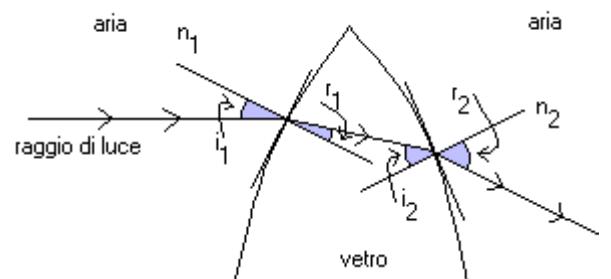
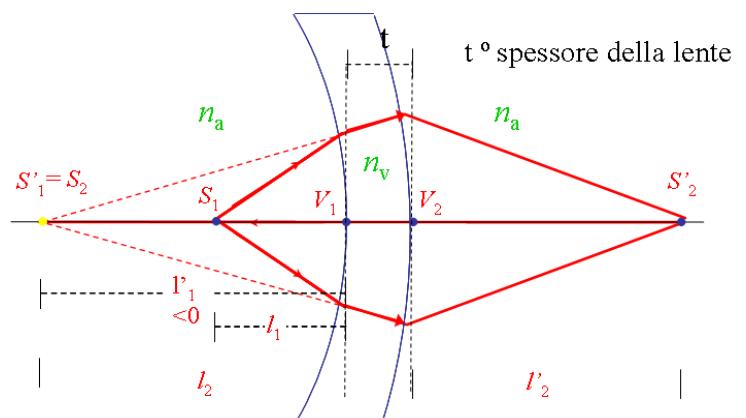


Immagine prodotta da una lente semplice

Seguendo la notazione riportata nella figura in basso, se una lente di vetro avente indice di rifrazione n_v è posta in un mezzo ambiente con indice di rifrazione n_a , possiamo scrivere le equazioni per i due diottri, utilizzando delle coordinate aventi come origine i vertici dei due diottri. Definiamo:

- l_1 coordinata dell'oggetto rispetto a V_1
 - l_1' coordinata rispetto a V_1 della sua immagine.
 - l_2 coordinata dell'immagine del I diottro, oggetto per il II diottro, rispetto a V_2
 - l_2' coordinata della sua immagine rispetto a V_2 .
- Poiché, come detto, la distanza tra i due vertici è t e l'immagine dell'oggetto formata dalla prima superficie costituisce l'oggetto per la seconda superficie, $l_2 = l_1' - t$.

Avremo:



per il primo diottro (ambiente/vetro):

$$\frac{n_v}{l'_1} - \frac{n_a}{l_1} = \frac{n_v - n_a}{r_1} = \frac{n_v}{f_1'}$$

per il secondo diottro (vetro/ambiente):

$$\frac{n_a}{l'_2} - \frac{n_v}{l_2} = \frac{n_a - n_v}{r_2} = \frac{n_a}{f_2'}$$

con $l_2 = l_1' - t$

Risolvendo le due equazioni possiamo trovare la posizione dell'immagine finale del sistema

3.2.1 Lenti sottili

Si dice lente sottile una lente semplice in cui lo spessore t è trascurabile rispetto ai raggi di curvatura, alla distanza focale dei due diottri e alle distanze tra la sorgente, l' immagine e la lente. Usando lo stesso procedimento del paragrafo precedente,

se la lente è *sottile*: $t \rightarrow 0$ quindi: $l_2 = l'_1 - t = l'_1$

Sostituendo $t=0$ nelle equazioni per le due superficie otteniamo:

$$\frac{n_v}{l'_1} - \frac{n_a}{l_1} = \frac{n_v - n_a}{r_1} = \frac{n_v}{f'_1} \quad \text{I superficie}$$

$$\frac{n_a}{l'_2} - \frac{n_v}{l'_1} = \frac{n_a - n_v}{r_2} = \frac{n_a}{f'_2} \quad \text{II superficie}$$

Sommando le due equazioni, si ha:

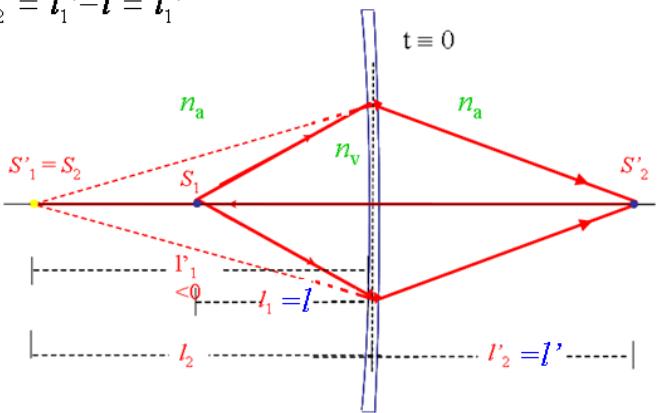
$$\frac{n_a}{l'_2} - \frac{n_a}{l_1} = (n_v - n_a) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \rightarrow$$

Definiamo:

$$l_1 = l \quad l'_2 = l' \quad n_{va} \equiv \frac{n_v}{n_a}$$

$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = (n_{va} - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

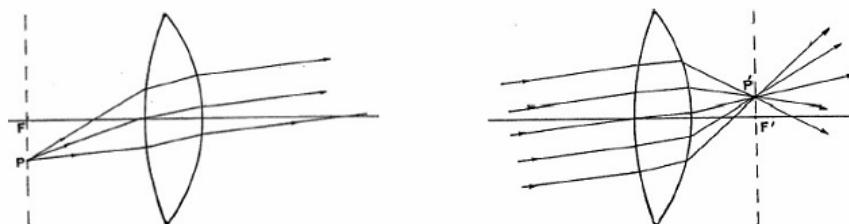
**equazione dei punti coniugati
per la lente sottile**



Da questa equazione, nota la posizione dell'oggetto rispetto alla lente (nella lente sottile i due vertici coincidono), è possibile ricavare la posizione dell'immagine. Possiamo vedere che la relazione tra posizione dell'immagine e dell'oggetto dipende dall'indice di rifrazione relativo della lente rispetto all'ambiente e dai raggi di curvatura delle due superfici che delimitano la lente stessa, cioè dalla sua forma.

Fuochi della lente sottile

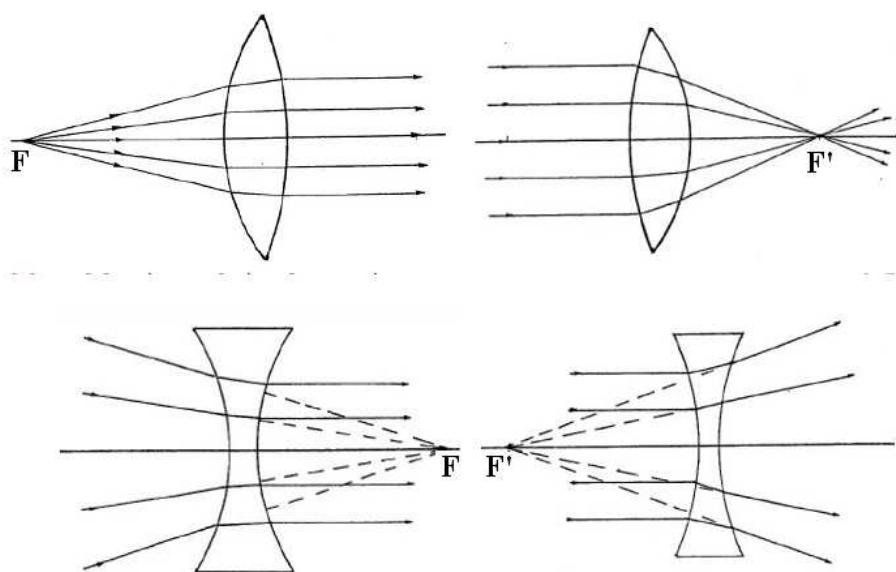
Come per i diottri anche la lente sottile è caratterizzata dalla posizione dei due fuochi, che sono definiti nella stessa maniera :



I fuoco F: punto oggetto sull'asse la cui immagine è all' ∞ (raggi emergenti paralleli all'asse ottico)

II fuoco F': punto immagine di un punto oggetto sull'asse a distanza infinita (raggi incidenti paralleli all'asse ottico)

Nella figura sono mostrati i due fuochi nel caso di una lente convergente e divergente.



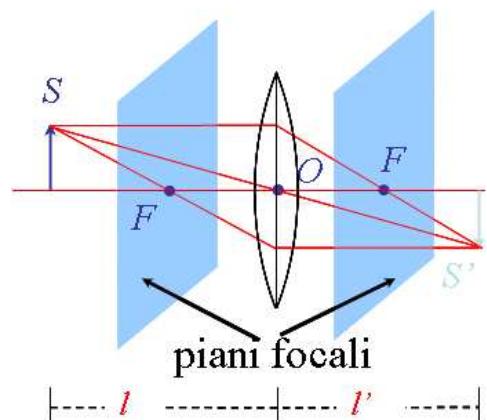
Analogamente i piani principale sono:

I piano focale: piano normale all'asse passante per il primo fuoco

II piano focale: piano normale all'asse passante per il secondo fuoco

I raggi divergenti dai punti del I piano focale dopo la lente diventano paralleli tra loro ma non paralleli all'asse ottico

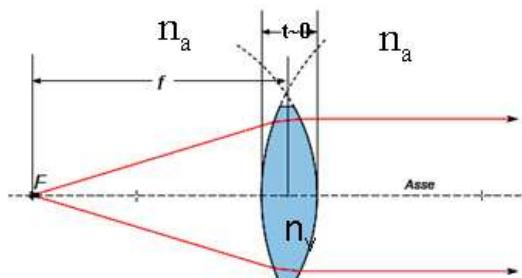
I punti del II piano focale sono punti immagine di oggetti all'infinito non sull'asse ottico (raggi incidenti paralleli tra loro ma non all'asse ottico)



Per trovare la posizione dei fuochi della lente utilizziamo l'equazione dei punti coniugati.

$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = (n_{va} - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

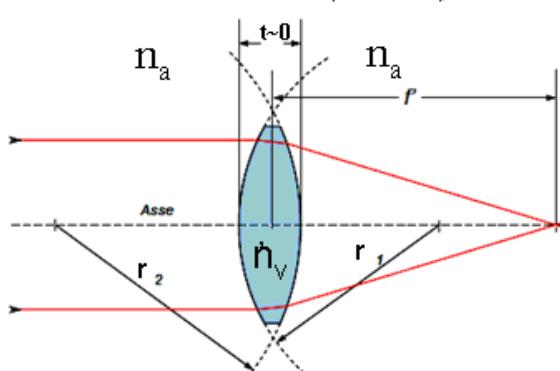
I fuoco: $l' = \infty \rightarrow l = f$ ($H \equiv V$)



$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = (n_{va} - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\frac{1}{f} = (1 - n_{va}) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

II fuoco: $l = -\infty \rightarrow l' = f'$ ($H' \equiv V'$)



$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = (n_{va} - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\frac{1}{f'} = (n_{va} - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

La formula precedente lega la focale della lente alla sua forma geometrica.

Invertendo questa relazione si ricava infatti **la seconda distanza focale** f' (o focale) della lente. Si può osservare che quando lo stesso mezzo è presente a sinistra e a destra della lente

$$f' = -f$$

Nelle lenti sottili immerse in un unico mezzo, i due fuochi sono simmetrici rispetto al centro della lente, sono cioè alla stessa distanza dalla lente, da parti opposte.

Lente in aria $n_a=1$ $n_{va}=n$

$$\frac{1}{l} - \frac{1}{l'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Formula del costruttore di lenti

f' = f distanza focale della lente

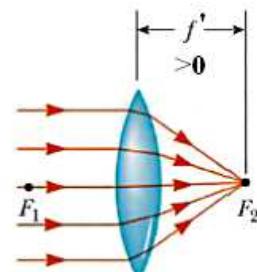
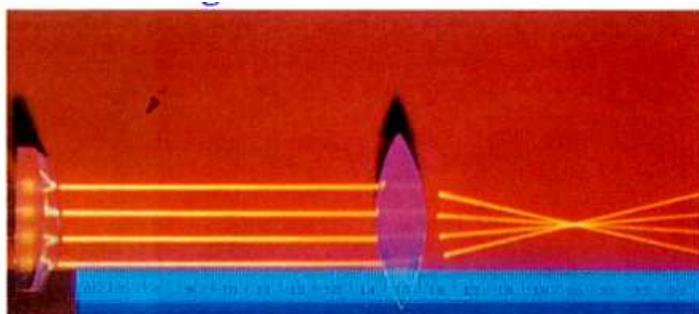
La focale di una lente sottile in aria è funzione solo dell'indice di rifrazione della lente e dei raggi di curvatura delle due superfici.

La formula del costruttore di lenti ci dice che forma bisogna dare alla lente per avere la distanza focale voluta.

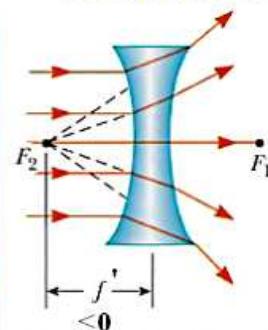
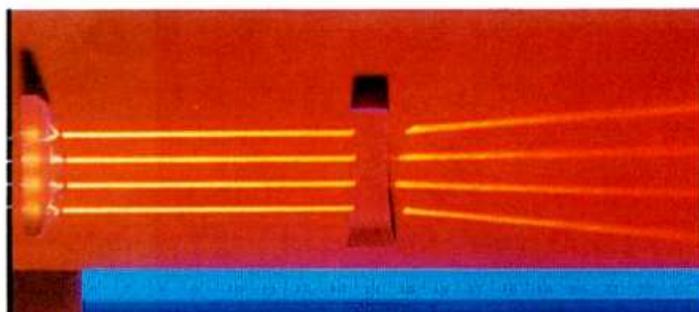
Se analizziamo la formula del costruttore di lenti possiamo osservare che:

$$f' > 0 \text{ se } \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) > 0 \quad f' < 0 \text{ se } \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) < 0$$

Quindi una lente più spessa al centro avrà una focale positiva (lente convergente) mentre una lente più sottile al centro avrà una focale negativa (lente divergente)

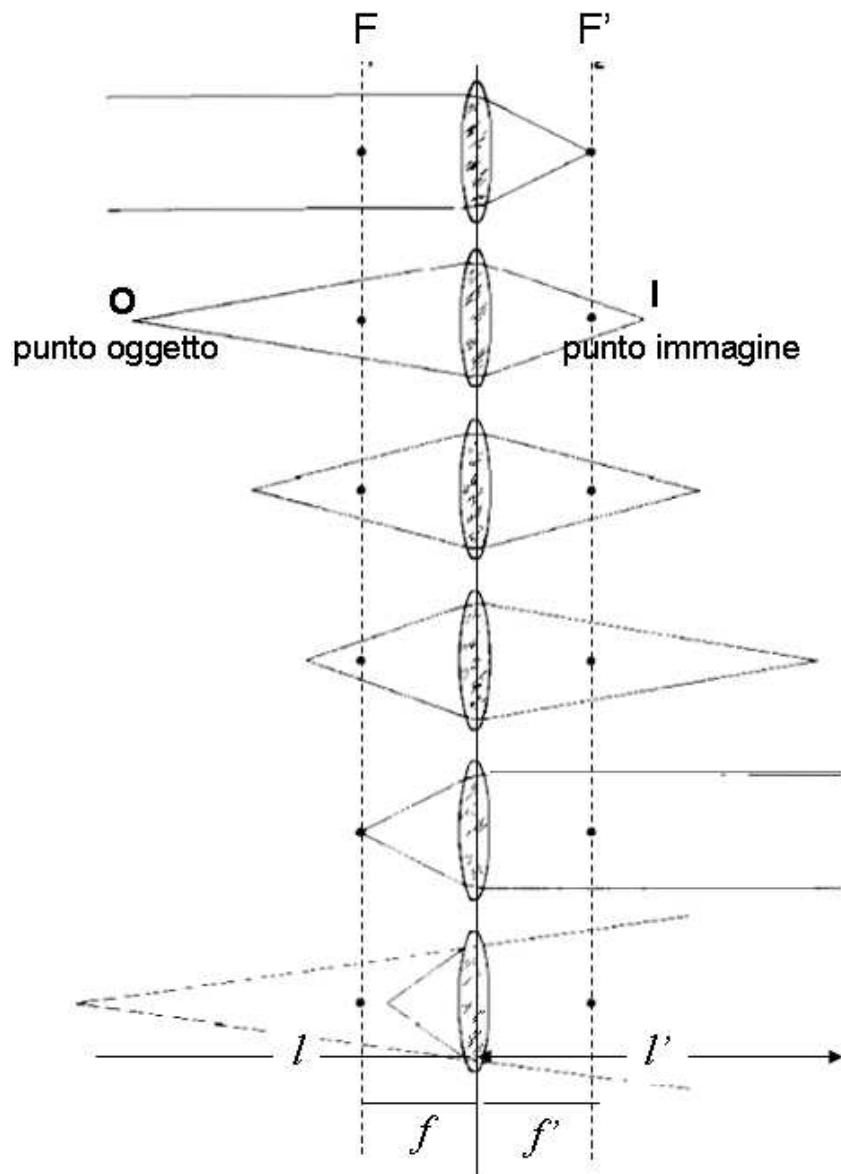


Una lente più spessa al centro rispetto ai lati si comporta come una lente convergente



Una lente meno spessa al centro rispetto ai lati si comporta come una lente divergente

Come mostrato nella figura seguente, fissata la focale f' della lente, la posizione dell'immagine dipende dalla posizione dell'oggetto.



Il potere della lente sottile

Il potere di una lente sottile quantifica la capacità della lente di deviare i raggi incidenti.

$$\bar{L}' - \bar{L} = F$$

Consideriamo l'equazione dei punti coniugati

$$\frac{n_a}{l'} - \frac{n_a}{l} = (n_v - n_a) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\bar{L}' - \bar{L} = F = (n_v - n_a) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{n_a}{f}$$

Potere di una lente sottile in aria

Il potere di una lente sottile è l'inverso della distanza focale f' :

$$F = \frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Il potere è positivo per lenti convergenti, negativo per lenti divergenti.



$$F = \frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) > 0 \quad \text{Lenti più spesse al centro}$$



$$F = \frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) < 0 \quad \text{Lenti meno spesse al centro}$$

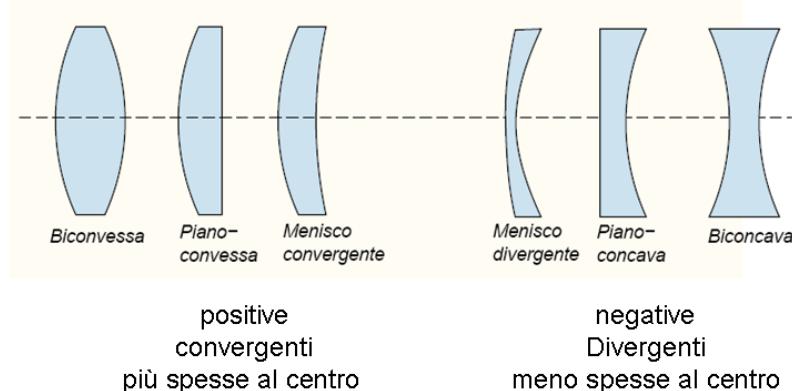
Tenendo conto che i poteri dei due diottri che costituiscono la lente sono dati dalle relazioni:

$$\text{diottero aria/vetro} \quad F_1 = \frac{(n-1)}{r_1} \quad F_2 = \frac{(1-n)}{r_2} \quad \text{diottero vetro/aria}$$

$$\text{si ha: } F = \frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{(n-1)}{r_1} - \frac{(n-1)}{r_2} = \frac{(n-1)}{r_1} + \frac{(1-n)}{r_2} = F_1 + F_2$$

Il potere di una lente sottile è la somma algebrica dei poteri dei diottri che la compongono, e dipende dalla forma della lente

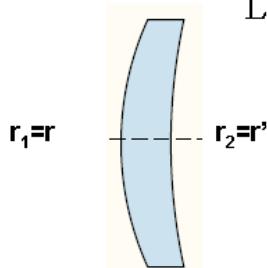
Nella figura seguente sono riportate le geometrie possibili per le lenti positive e negative:



Possiamo osservare che:

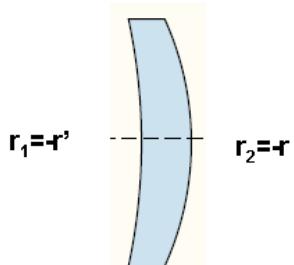
Il potere è lo stesso se i raggi incidono da una parte o dall'altra della lente

La lente si comporta nella stessa maniera se viene girata



$$F = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = (n - 1) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)$$

se giro la lente di 180°

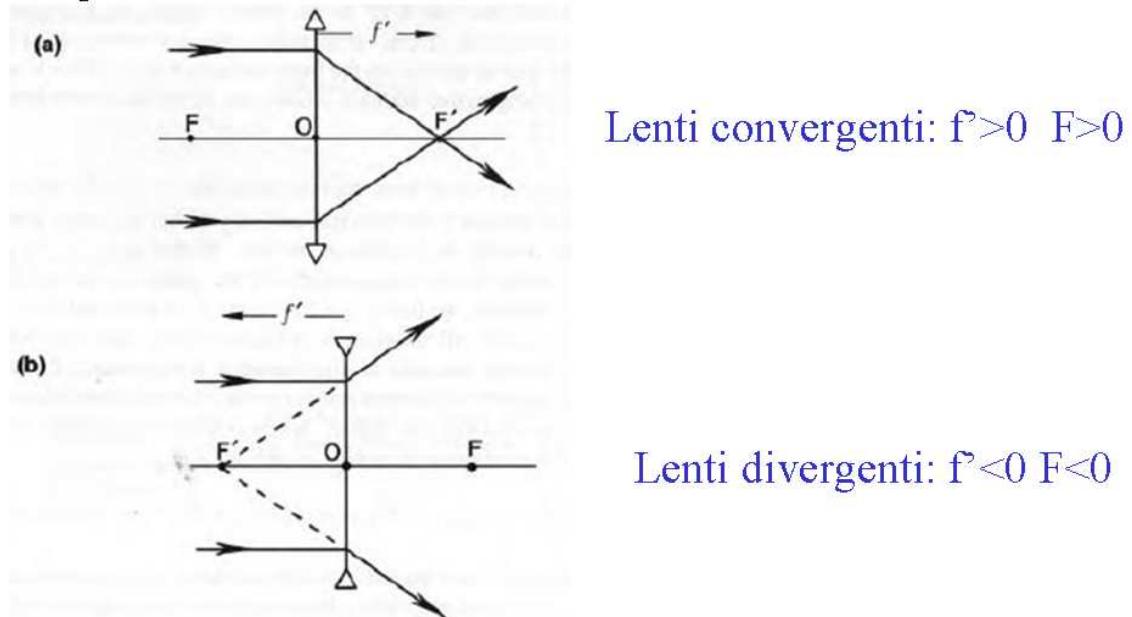


$$F = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = (n - 1) \left(\frac{1}{-r'} - \frac{1}{-r} \right) = (n - 1) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)$$

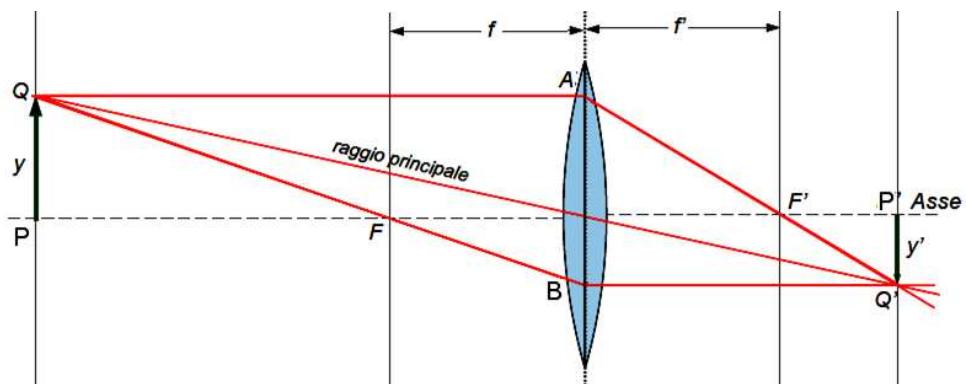
Le aberrazioni possono però essere più o meno accentuate nei due casi

Schematizzazione delle lenti sottili

Poiché la lente sottile non ha spessore, può essere schematizzata con una singolo segmento ortogonale all'asse ottico. Le lenti sottili convergenti e divergenti si distinguono per il verso delle punte poste agli estremi del segmento



Costruzione grafica dell'immagine prodotta da una lente sottile



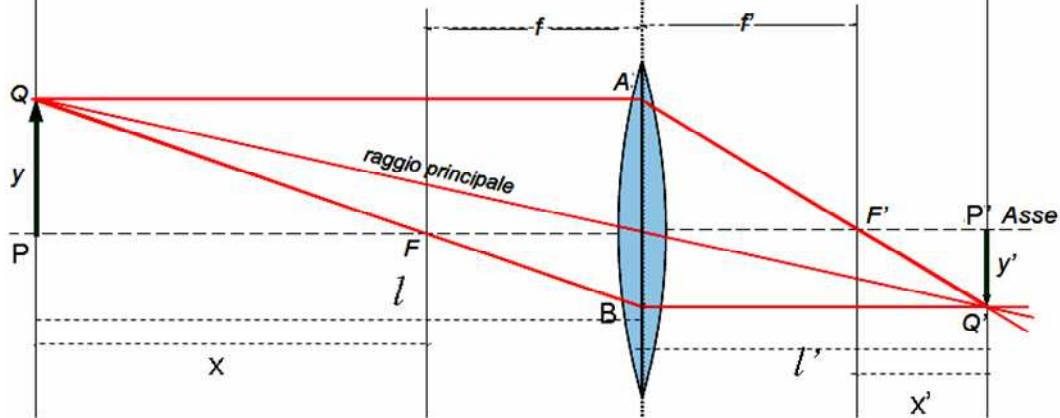
Per costruire graficamente l'immagine di un oggetto esteso PQ possiamo utilizzare 3 raggi emessi dal punto estremale Q il cui cammino è noto:

- 1 Nell'*approssimazione parassiale* il raggio passante per il centro della lente è indeviato perché attraversa superfici parallele con *piccolo* angolo di incidenza.
- 2 Il raggio parallelo all'asse passa per il secondo fuoco
- 3 Il raggio incidente passante per il primo fuoco diventa parallelo all'asse

Due di questi raggi sono sufficienti a definire il punto immagine Q'

Equazioni fondamentali della lente sottile

Dalla costruzione geometrica possiamo trovare le equazioni fondamentali delle lenti sottili



definiamo:

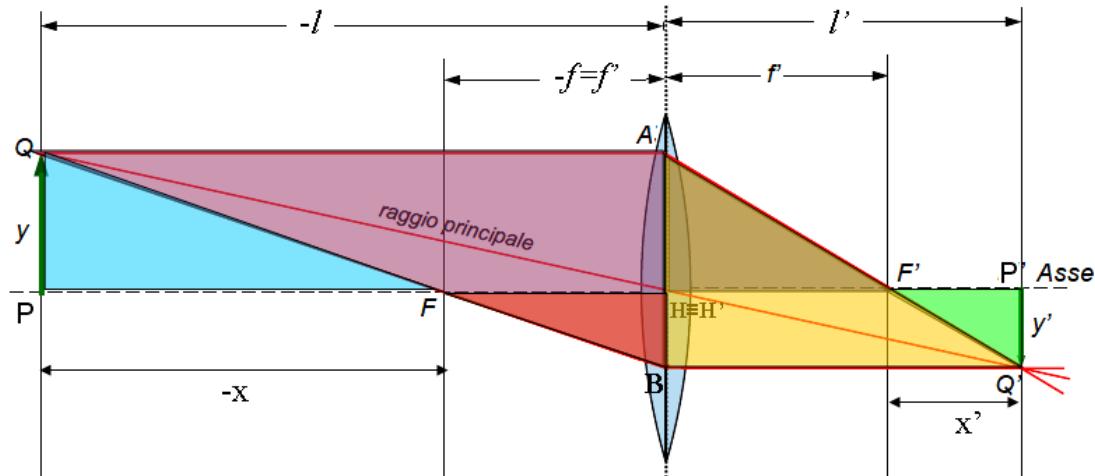
l distanza dell'oggetto dal centro della lente sottile ($l < 0$ se è alla sinistra della lente);

l' distanza dell'immagine dal centro della lente sottile ($l' > 0$ se è alla destra della lente);

x distanza dell'oggetto dal primo fuoco F ($x < 0$ se è alla sinistra di F);

x' distanza dell'immagine dal secondo fuoco F' ($x' > 0$ se è alla destra di F')

Dalla figura possiamo osservare che:



I triangoli PQF e FHB sono simili

$$\frac{PQ}{PF} = \frac{HB}{FH} \Rightarrow \frac{y}{-x} = \frac{-y'}{f}$$

I triangoli $AH'F'$ e $F'P'Q'$ sono simili

$$\frac{AH}{H'F'} = \frac{P'Q'}{F'P'} \Rightarrow \frac{y}{f} = \frac{-y'}{x'}$$

I triangoli QAB e FHB sono simili

$$\frac{AB}{AQ} = \frac{HB}{FH} \Rightarrow \frac{y - y'}{-l} = \frac{-y'}{f}$$

I triangoli ABQ' e $AH'F'$ sono simili

$$\frac{AB}{BQ'} = \frac{H'A}{F'H'} \Rightarrow \frac{y - y'}{l'} = \frac{y}{f}$$

Ricaviamo quindi le seguenti relazioni:

$$1) \frac{y}{x} = \frac{y'}{f'} \quad 2) -\frac{y}{f'} = \frac{y'}{x'} \quad 3) \frac{y-y'}{l} = \frac{y'}{f'} \quad 4) \frac{y-y'}{l} = \frac{y}{f'}$$

sottraendo 3) da 4) otteniamo:

$$\frac{y-y'}{l} - \frac{y-y'}{l} = \frac{y}{f'} - \frac{y'}{f'} = \frac{y-y'}{f'} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{l} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f'}} \text{ Equazione gaussiana della lente}$$

Dividiamo 1) e 2)

$$\frac{f'}{x} = -\frac{x'}{f'} \Rightarrow \boxed{xx' = -f'^2}$$

Equazione di Newton della lente

Dividiamo 3) e 4)

$$\boxed{\frac{l}{l} = \frac{y'}{y} = m}$$

Ingrandimento trasversale gaussiano

Dalla 1) e 2) si ricava inoltre

$$\boxed{m = \frac{y'}{y} = \frac{f'}{x} = -\frac{x'}{f'}}$$

Ingrandimento trasversale newtoniano

Possiamo scrivere le relazioni gaussiane in termini di potere e vergenze. Avremo:

$$\frac{1}{l} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f'} \quad \text{Equazione gaussiana della lente}$$

$$\overline{L}' - \overline{L} = F \rightarrow \overline{L}' = \overline{L} + F$$

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{l}{l}$$

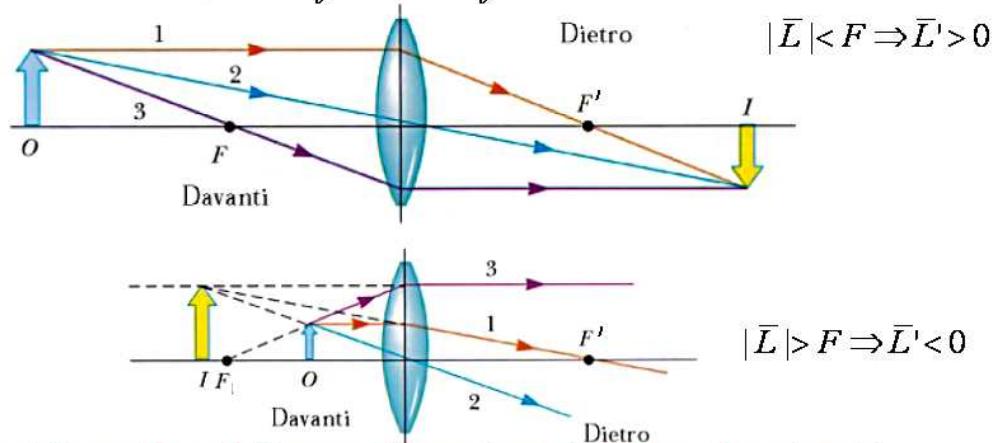
$$m = \frac{\overline{L}}{\overline{L}'} \quad \text{Ingrandimento trasversale gaussiano}$$

Immagini di lenti positive

Consideriamo l'equazione gaussiana della lente sottile per una lente con potere $F>0$ ($f>0$)

$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f} \Rightarrow l' = \frac{lf}{f+l}$$

$$\bar{L}' = \bar{L} + F$$

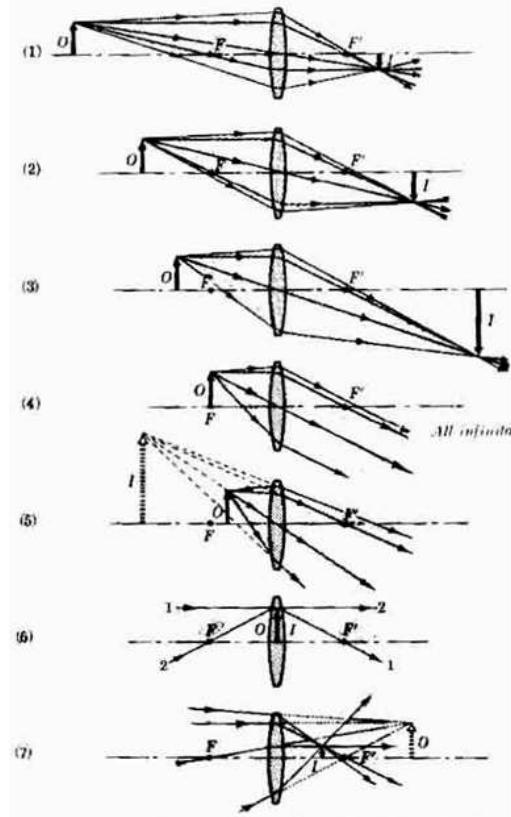


A seconda della posizione dell'oggetto l'immagine può essere reale o virtuale!

L'immagine è reale e capovolta se l'oggetto (reale) è posto ad una distanza maggiore della distanza focale $|l|>f$ ($l>0$, $l'>0$, $m=l'/l>0$)

L'immagine è virtuale e diritta se l'oggetto è posto tra il fuoco e la lente $|l|<f$ ($l>0$, $l'>0$ $m=l'/l>0$)

Vediamo in una lente convergente ($f>0$) come cambia l'immagine al variare della posizione dell'oggetto. Consideriamo le diverse posizioni mostrate in figura e riportate in tabella. Applicando le formule trovate possiamo ricavare posizione e tipo dell'immagine



$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f}; \quad l' = \frac{lf}{f+l}; \quad m = \frac{y'}{y} = \frac{l'}{l}$$

$$xy' = -f^2; \quad x' = \frac{-f^2}{x}; \quad m = \frac{y'}{y} = \frac{f}{x} = -\frac{x'}{f}$$

caso	l	l'	x	x'	m	Oggetto	Immagine	Diritta o Capovolta
1	$-3f$	$3/2f$	$-2f$	$1/2f$	$-1/2$	Reale	Reale	Capovolta
2	$-2f$	$2f$	$-f$	f	-1	Reale	Reale	Capovolta
3	$-3/2f$	$3f$	$-2f$	$2f$	-2	Reale	Reale	Capovolta
4	$-f$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	Reale	Reale o Virtuale	Diritta o Capovolta
5	$-2/3f$	$-2f$	$1/3f$	$3f$	$+3$	Reale	Virtuale	Diritta
6	0	0	f	f	$+1$	Reale o Virtuale	Reale o Virtuale	Diritta
7	$2f$	$2/3f$	$3f$	$-1/3f$	$+1/3$	Virtuale	Reale	Diritta

Se grafichiamo i precedenti risultati otteniamo

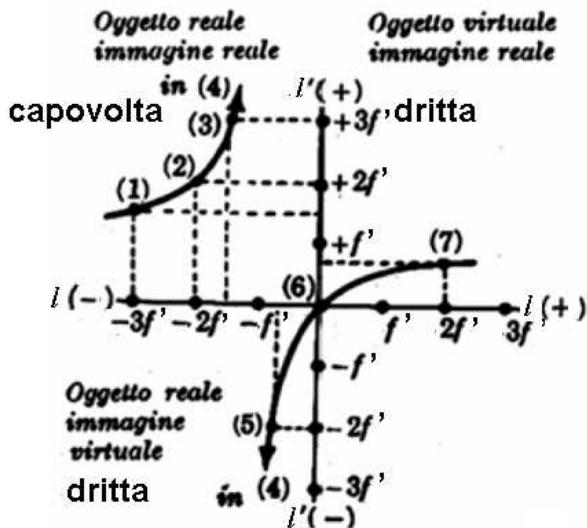
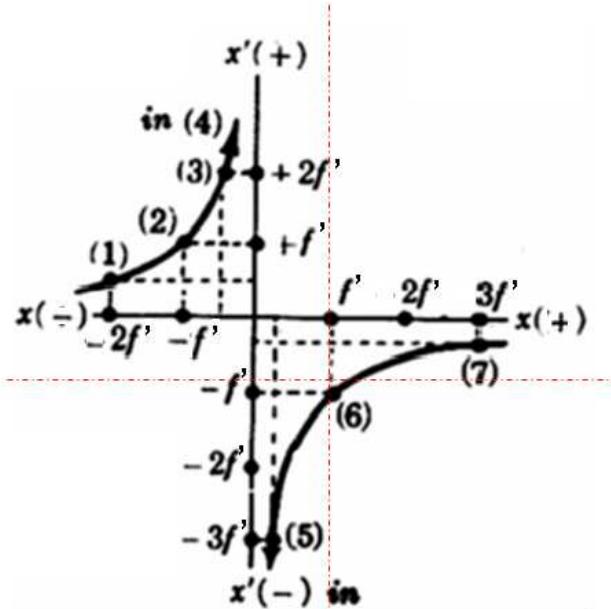


Grafico dell'equazione gaussiana

$$\frac{1}{l} - \frac{1}{l'} = \frac{1}{f}$$

$$l' = \frac{f^2}{f+l}$$

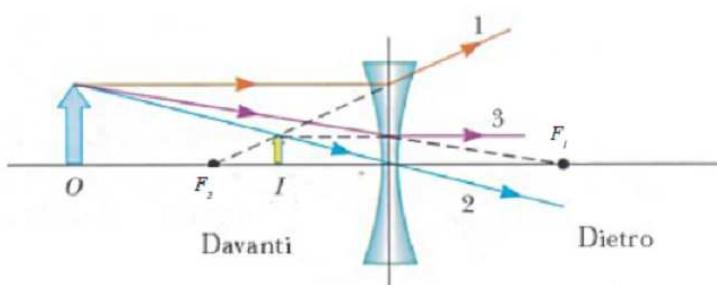


Graticolo dell'equazione newtoniana

$$xx' = -f'^2 \quad x' = \frac{-f'^2}{x}$$

Immagini di lenti negative

Consideriamo l'equazione gaussiana della lente sottile per una lente con potere $F<0$ ($f'<0$)



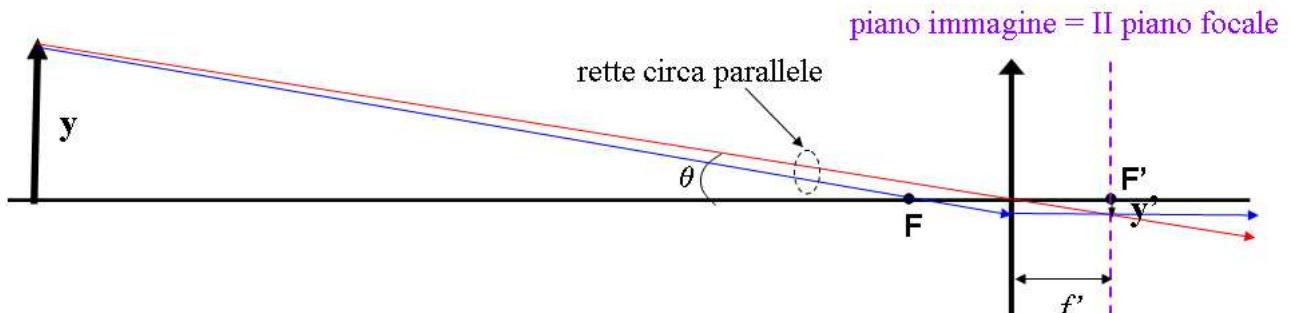
$$f' < 0, l < 0 \quad l' = \frac{f'}{f+l} < 0$$

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{l'}{l} > 0$$

L'immagine di un oggetto reale è sempre virtuale e diritta

Immagini di oggetti lontani

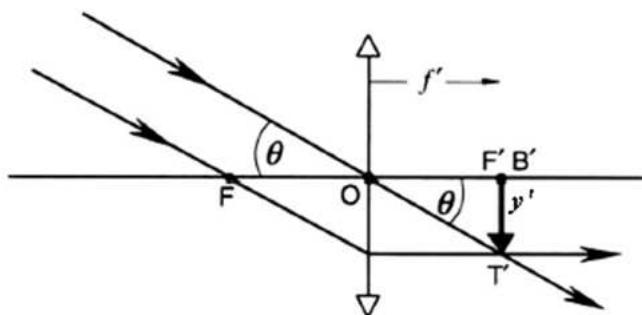
Quando l'oggetto sta molto lontano ($|l| \gg |f'|$) possiamo fare la seguente costruzione geometrica in cui il raggio passante per il fuoco e quello passante per il centro ottico della lente sono paralleli:



L'unica cosa che conta è l'inclinazione angolare dei raggi θ che vengono dalla parte alta dell'oggetto. L'immagine è nel piano focale.

Come si vede dalla figura, si ha:

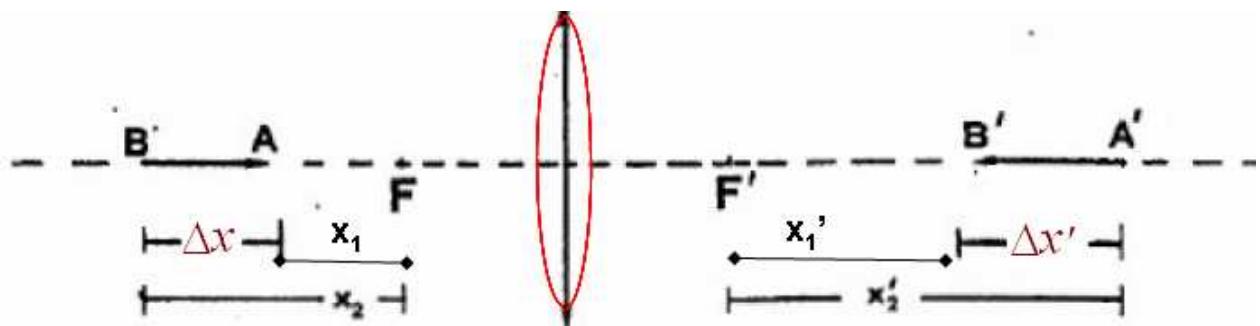
$$|y'| = f' \tan \theta = \tan \theta / F$$



Ingrandimento longitudinale

Molti oggetti hanno anche una profondità lungo l'asse ottico. E' importante quindi anche determinare l'ingrandimento longitudinale m' ossia il rapporto tra le dimensioni longitudinali (lungo l'asse ottico) dell'immagine e dell'oggetto, prodotto da una lente. Definiamo quindi:

$$m' = \frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{\Delta l'}{\Delta l}$$



Siano A e B i punti estremali lungo l'asse di un oggetto e x_1 e x_2 le loro coordinate (newtoniane). Per trovare l'espressione per m' possiamo applicare l'equazione newtoniana dei punti coniugati ai due estremi dell'oggetto, troviamo:

$$x_2' = \frac{-f'^2}{x_2} \quad x_1' = \frac{-f'^2}{x_1} \quad \Rightarrow \quad x_2' - x_1' = \frac{-f'^2}{x_2} - \frac{-f'^2}{x_1} = \frac{f'^2(x_2 - x_1)}{x_2 x_1}$$

$$\frac{x_2' - x_1'}{x_2 - x_1} = \frac{f'^2}{x_2 x_1} = \frac{f' f'}{x_2 x_1}$$

Ricordando l'equazione newtoniana per l'ingrandimento, $m = \frac{y'}{y} = \frac{f'}{x} = -\frac{x'}{f'}$ possiamo scrivere:

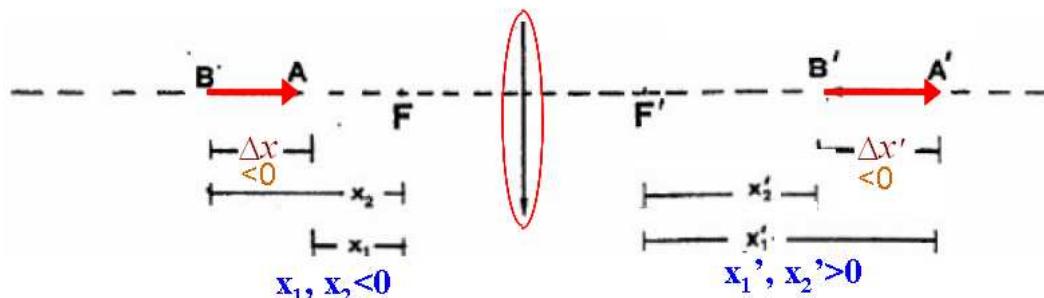
$$\begin{aligned} \frac{f'}{x_2} &= \frac{y_2'}{y_2} = m_2 \\ \frac{f'}{x_1} &= \frac{y_1'}{y_1} = m_1 \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione precedente, otteniamo:

$$m' = \frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{x_2' - x_1'}{x_2 - x_1} = m_1 m_2 \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} m^2$$

Vediamo allora che l'ingrandimento longitudinale di un oggetto piccolo è pari al quadrato dell'ingrandimento trasversale.

$$m' = \frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{x_2' - x_1'}{x_2 - x_1} = m^2 > 0$$

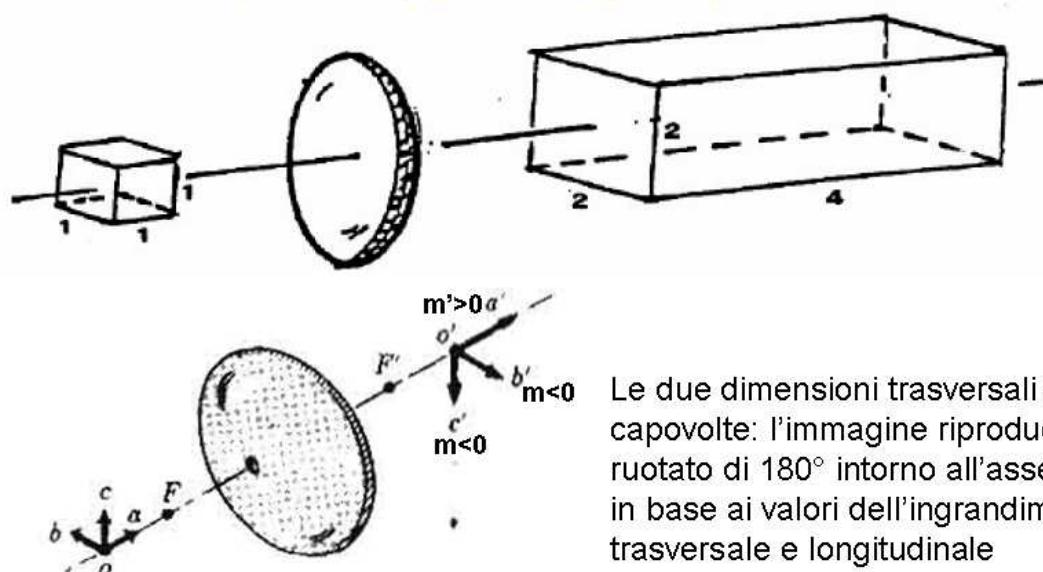


$$\Delta x < 0 \rightarrow \Delta x' < 0$$

Un oggetto assiale a forma di freccia e la sua immagine sono dirette nella stessa direzione

Immagine di oggetti 3D

L'ingrandimento longitudinale altera le forme degli oggetti: un cubo di spigolo h posto di fronte ad una lente genera un'immagine costituita da un parallelepipedo di sezione trasversale quadrata, di spigolo $m h$, e spigolo longitudinale $m^2 h$.

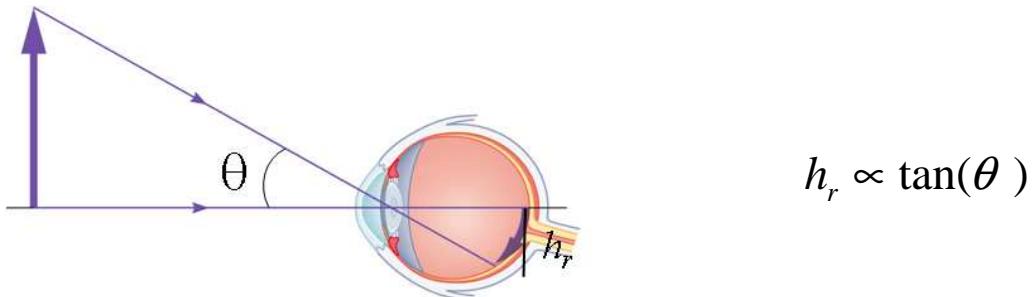


Le due dimensioni trasversali sono capovolte: l'immagine riproduce l'oggetto ruotato di 180° intorno all'asse e deformato in base ai valori dell'ingrandimento trasversale e longitudinale

Fig. 4-14. - Immagine tridimensionale capovolta.

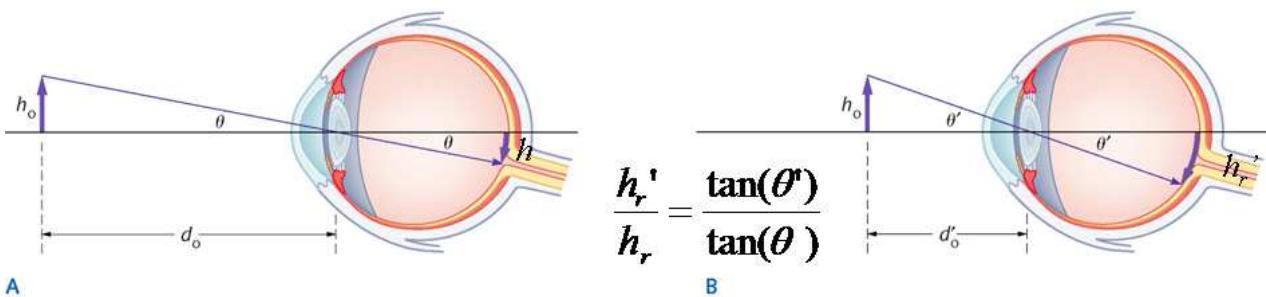
Ingrandimento angolare

L'altezza dell'immagine dell'oggetto che si forma sulla retina è proporzionale alla tangente dell'angolo sotteso:

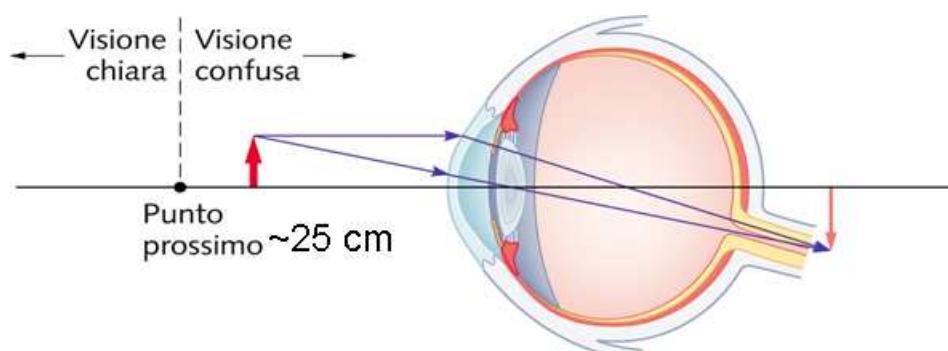


Per avere una immagine sulla retina più grande bisogna fare in modo che aumenti l'angolo θ (ingrandimento angolare)

Poiché l'angolo sotteso è tanto più grande quanto più l'oggetto è vicino, l'immagine sulla retina è tanto più alta quanto più l'oggetto è vicino.



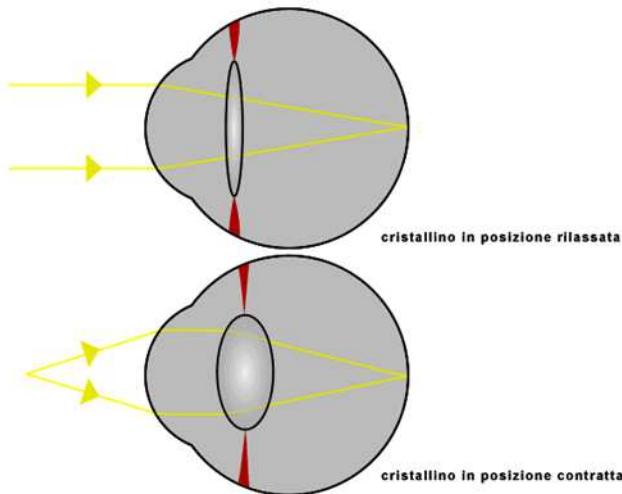
Riusciamo ad avvicinare gli oggetti continuando a vederli nitidamente perché possiamo modificare il profilo dell'occhio (**accomodamento**) in modo che l'immagine sia sempre sulla retina. Questo è però possibile solo fino a una certa distanza dall'occhio.



Accomodamento dell'occhio

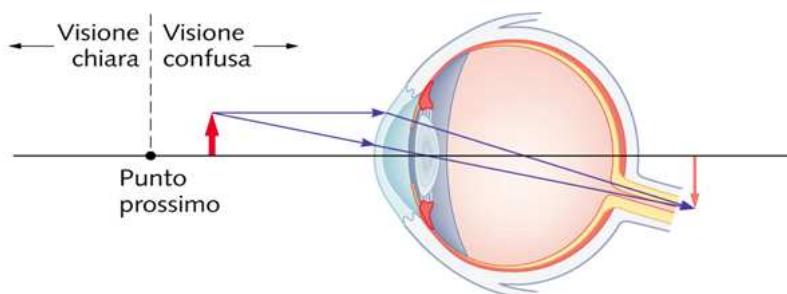
La messa a fuoco o accomodamento dell'occhio viene realizzato dalla lente cristallino che cambia la sua curvatura mediante l'azione di legamenti collegati ai muscoli ciliari. Normalmente i muscoli sono rilassati ed in tale stato tirano i legamenti collegati alla periferia del cristallino. La lente è nella posizione di minore rigonfiamento, con i raggi di curvatura e la focale massimi.

In condizioni di completo rilassamento i muscoli ciliari il potere del cristallino è minimo e un oggetto lontano è focalizzato sulla retina.



Se l'oggetto si avvicina all'occhio i muscoli ciliari si contraggono ed il cristallino si deforma diminuendo la distanza focale e aumentando il potere in modo da mantenere costante la posizione dell'immagine (I') (immagine sempre sulla retina).

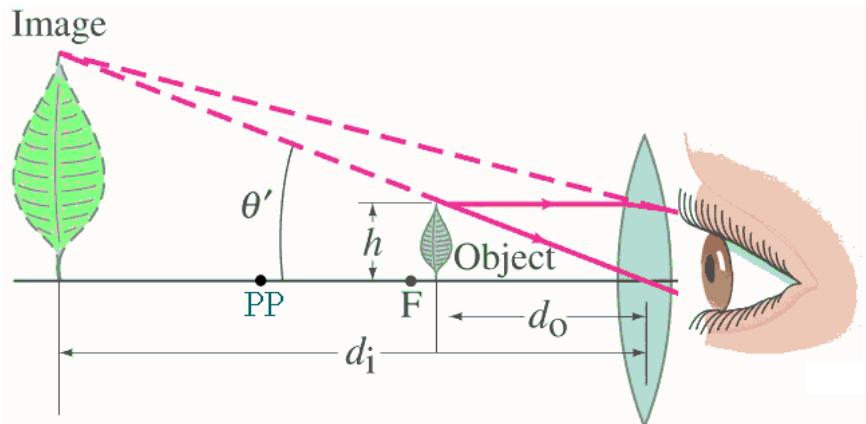
Se l'oggetto è troppo vicino la deformazione del cristallino che è possibile fare non è sufficientemente a portare il punto immagine sulla retina → visione confusa



Il punto più vicino di accomodamento di visione distinta (punto prossimo) varia da circa 7 cm in un ragazzo, 12 in un giovane adulto, 30-40 cm nella mezza età fino a 100 cm a 60 anni.

Lente di ingrandimento

Mettendo una opportuna lente convergente tra oggetto e occhio è possibile avere una visione chiara dell'oggetto quando questo è più vicino del punto prossimo

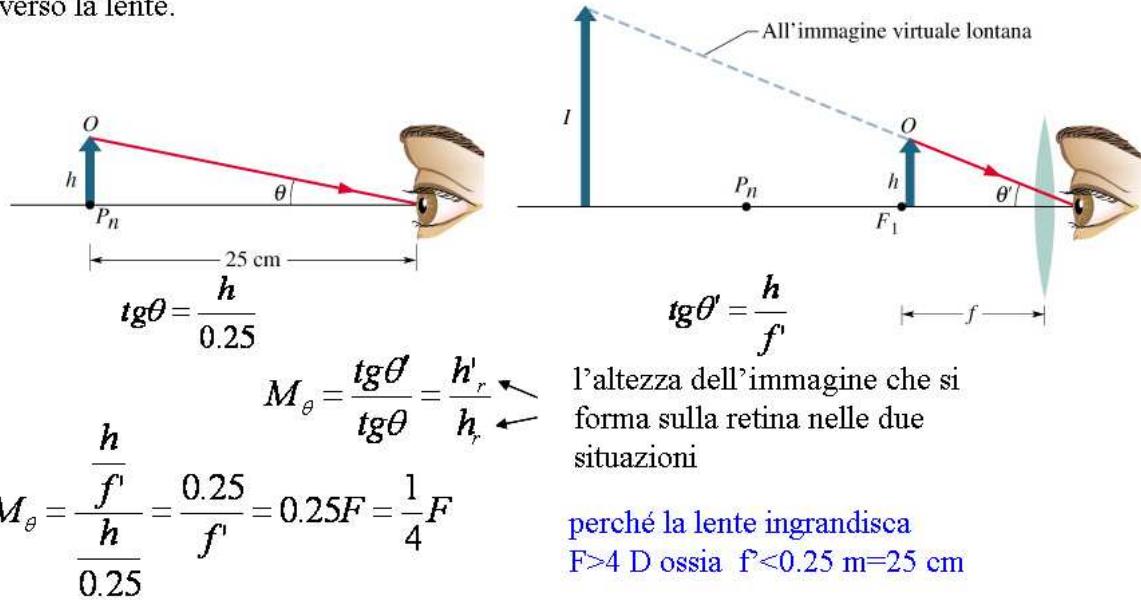


Se l'oggetto è vicino al fuoco di una lente convergente di focale $f' <$ della distanza del punto prossimo, la sua immagine virtuale sarà lontana e l'occhio (rilassato) la vedrà in maniera chiara con un angolo sotteso pari a:

$$\tan \theta' = \frac{h}{f'} > \tan \theta_{pp} = \frac{h}{d_{pp}} \text{ al punto prossimo}$$

La lente produce un ingrandimento angolare per cui l'immagine sulla retina dell'oggetto risulta ingrandita → **lente di ingrandimento**

Calcoliamo l'ingrandimento angolare prodotto da una lente convergente. Confrontiamo l'altezza dell'immagine sulla retina di un oggetto al punto prossimo senza lente con l'altezza dell'immagine sulla retina di un oggetto posto vicino al fuoco della lente (vedi figura) e visto attraverso la lente.



L'altezza dell'immagine che si forma sulla retina (senza accomodamento dell'occhio) di un oggetto visto attraverso una lente positiva è di $M_\theta = \frac{1}{4}F$ volte più grande di quando lo si osserva senza lente a una distanza di 25 cm, ossia alla minima distanza della visione distinta

L'ingrandimento angolare prodotto dalla lente può essere accresciuto se l'oggetto è posto ancora più vicino all'occhio rispetto al fuoco, in una posizione tale che l'immagine virtuale prodotta dalla lente si al punto prossimo. In tale posizione l'immagine dell'oggetto è vista nitidamente dall'occhio non rilassato (con accomodamento).

Confrontiamo le diverse situazioni

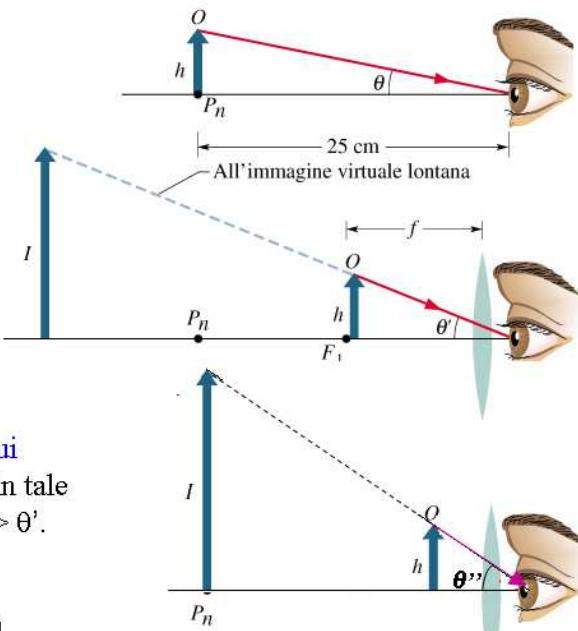
- Oggetto al punto prossimo senza lente:

$$\tan \theta = \frac{h}{0.25}$$

- Oggetto vicino al fuoco → immagine virtuale lontana:

Ingrandimento angolare senza accomodamento dell'occhio

$$M_\theta = \frac{\tan \theta'}{\tan \theta} = \frac{1}{4}F$$



- Oggetto più vicino alla lente nella posizione in cui l'immagine virtuale si forma nel punto prossimo: in tale situazione l'ingrandimento aumenta in quanto $\theta'' > \theta'$. Infatti:

$$M_\theta = \frac{\tan \theta''}{\tan \theta} > \frac{\tan \theta'}{\tan \theta} = \frac{1}{4}F$$

Calcoliamo l'ingrandimento massimo (con occhio non rilassato) rispetto alla situazione dell'oggetto al punto prossimo senza lente

in cui l'angolo sotteso è:

$$\tan \theta = \frac{h}{0.25}$$

Imponiamo che l'immagine virtuale generata dalla lente di focale f' si formi nel punto prossimo e calcoliamo l'ingrandimento rispetto alla situazione di oggetto al punto prossimo senza lente

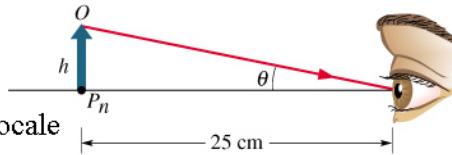


Immagine virtuale nel punto prossimo : $l = -25 \text{ cm} = -0.25 \text{ m}$

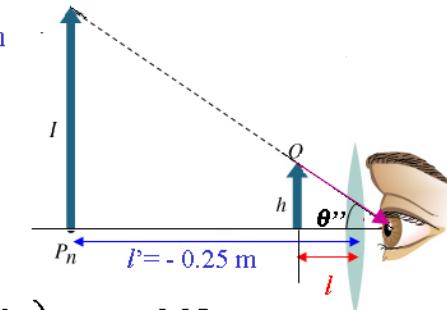
- troviamo l $\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f} \Rightarrow l = \frac{l'f'}{f'-l'} = \frac{-0.25f'}{f'+0.25}$

- troviamo $\tan \theta''$ $\tan \theta'' = \frac{h}{-l} = \frac{h(0.25 + f')}{0.25f'}$

$$M_\theta = \frac{\tan \theta''}{\tan \theta} = \frac{\frac{h(0.25 + f')}{0.25f'}}{\frac{h}{0.25}} = \frac{h(0.25 + f')}{0.25f'} \times \frac{0.25}{h} = \left(\frac{1}{f'} + \frac{1}{0.25} \right) \times 0.25 = \frac{0.25}{f'} + 1$$

$$M_\theta = \frac{1}{4}F + 1$$

Ingrandimento angolare con accomodamento dell'occhio

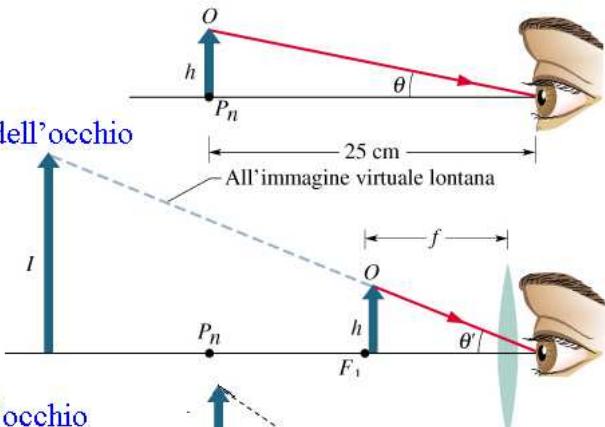


Esempio $f=10 \text{ cm}$

$F=10 \text{ D}$

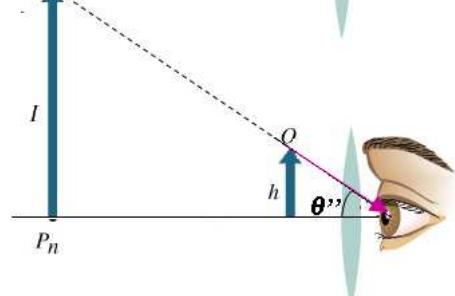
Ingrandimento angolare senza accomodamento dell'occhio

$$M_\theta = \frac{1}{4}F = \frac{1}{4} \times 10 = 2.5$$



Ingrandimento angolare con accomodamento dell'occhio

$$M_\theta = \frac{1}{4}F + 1 = \frac{1}{4} \times 10 + 1 = 3.5$$

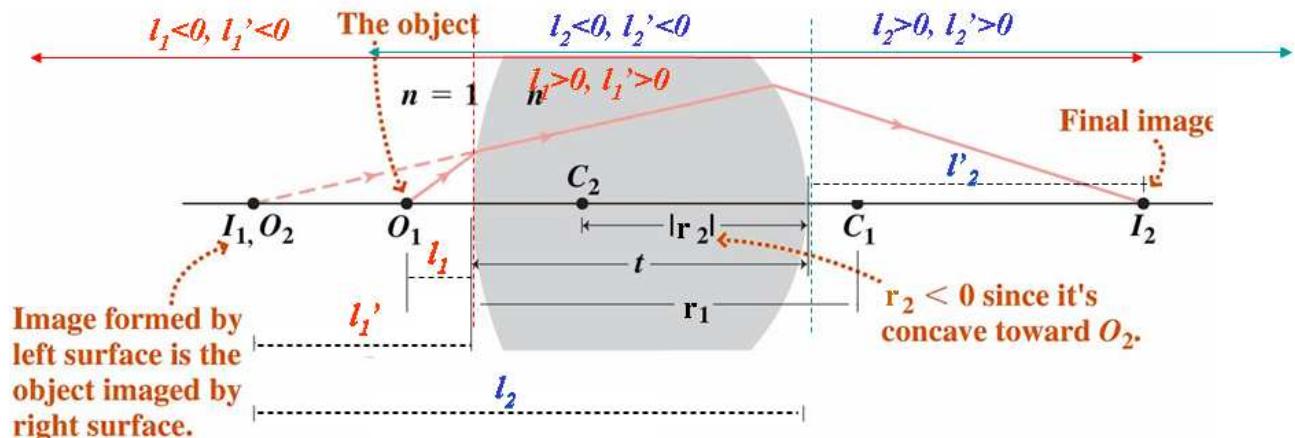


n.b. non si può ridurre troppo f' perché vengono aberrazioni. Con una lente semplice $M_\theta < 5x$

3.2.2 Lenti spesse

Se lo spessore della lente non è trascurabile rispetto alle altre lunghezze del sistema, dobbiamo tenere conto della propagazione dei raggi all'interno della lente stessa.

Descriviamo la lente spessa come una coppia di due sferici coassiali accoppiati: l'immagine dell'oggetto formata dalla prima superficie costituisce l'oggetto per la seconda superficie, come schematizzato in figura, in cui sono evidenziate anche le coordinate relative. Supponiamo che la lente sia immersa in aria.



Scrivere le equazioni gaussiane per la prima e seconda superficie:

$$\frac{n}{f_1} - \frac{1}{l_1} = \frac{n-1}{r_1} = \frac{n}{f_1'} \quad \text{I superficie (in questo caso } r_1 > 0 \text{ aria vetro)}$$

$$\frac{1}{f_2} - \frac{n}{l_2} = \frac{1-n}{r_2} = \frac{1}{f_2'} \quad \text{II superficie (in questo caso } r_2 < 0 \text{ vetro aria)}$$

con $l_2 = l_1' - t$

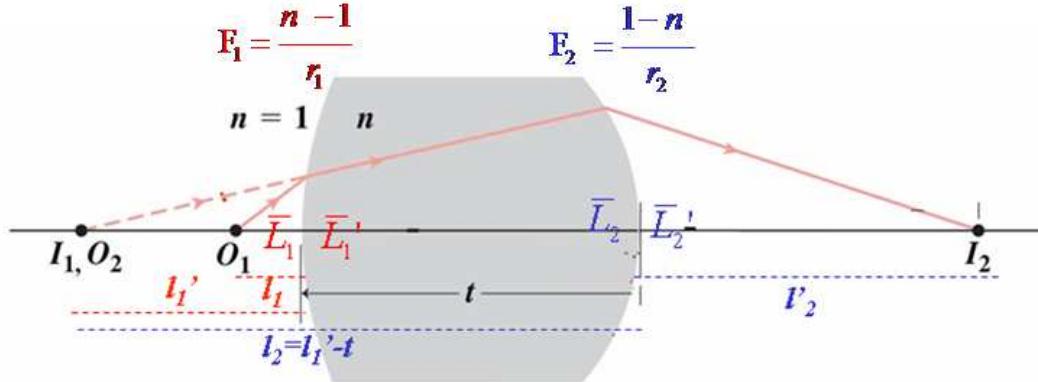
O_1 e I_2 sono i punti coniugati della lente: punto oggetto e corrispondente punto immagine

Pertanto risolvendo il sistema di equazioni precedente, nota la posizione dell'oggetto è possibile ricavare la posizione finale dell'immagine.

Risulta spesso più semplice, soprattutto in sistemi ottici caratterizzati da più superfici rifrangenti, lavorare con le vergenze e i poteri delle superfici, in quello che si chiama "metodo del passo avanti".

Metodo del passo avanti

Lavoriamo con le vergenze (ridotte) e il potere delle superfici.



$$\bar{L}_1 = \frac{1}{l_1} \text{ vergenza di ingresso I superficie}$$

$$\bar{L}_2 = \frac{n}{l_2} \text{ vergenza di ingresso II superficie}$$

$$\bar{L}_1' = \frac{n}{l_1'} \text{ vergenza di uscita I superficie}$$

$$\bar{L}_2' = \frac{1}{l_2'} \text{ vergenza di uscita II superficie}$$

La variazione di vergenza alla I superficie è:

$$\bar{L}_1' = \bar{L}_1 + F_1$$

$$\bar{L}_2' = \bar{L}_2 + F_2$$

Poiché la lente è spessa, nel viaggiare dalla prima alla seconda superficie la luce cambia vergenza. Infatti il centro di curvatura del fronte d'onda rimane in O_2 e di conseguenza il raggio di curvatura varia con la distanza dalla prima superficie.

Dobbiamo trovare la relazione tra \bar{L}_1' e \bar{L}_2

Poiché $l_2 = l_1' - t$

$$\text{si ha: } \bar{L}_2 = \frac{n}{l_2} = \frac{n}{l_1' - t} = \frac{n}{\frac{n}{\bar{L}_1'} - t} = \frac{\bar{L}_1'}{1 - \frac{t}{n} \bar{L}_1'}$$

Otteniamo quindi:

$$\bar{L}_2 = \frac{\bar{L}_1'}{1 - \frac{t}{n} \bar{L}_1'} \quad \text{Equazione del passo avanti}$$

Seguendo la variazione di vergenza lungo la lente spessa possiamo determinare la vergenza di uscita e da questa trovare la posizione dell'immagine. Avremo quindi che nota la vergenza di

ingresso che dipende dalla posizione dell'oggetto in base alla relazione $\bar{L}_2' = \frac{1}{l_2'} \quad ,$

$$\bar{L}_1' = \bar{L}_1 + F_1 \quad \text{I superficie } (r_1 > 0)$$

$$\bar{L}_2' = \frac{\bar{L}_1'}{1 - \frac{t}{n} \bar{L}_1'} \quad \text{Equazione del passo avanti}$$

$$\bar{L}_2' = \bar{L}_2 + F_2 \quad \text{II superficie } (r_2 < 0)$$

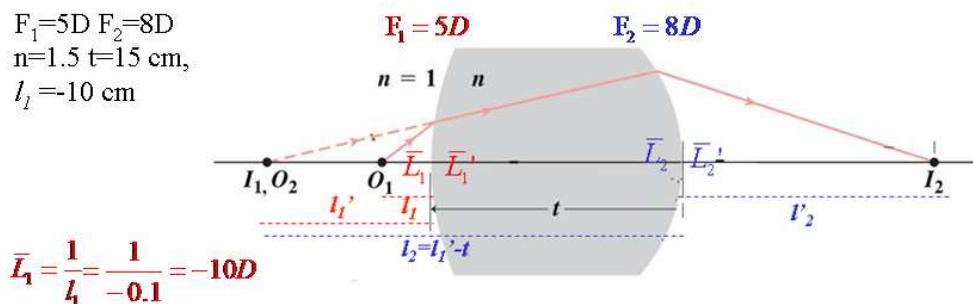
Poiché $\bar{L}_2' = \frac{1}{l_2'} \quad ,$

Invertendo tale relazione, possiamo ricavare la distanza dell'immagine dal II vertice V_2 della lente spessa

$$l_2' = \frac{1}{\bar{L}_2'}$$

Esempio

$$\begin{aligned} F_1 &= 5D \\ F_2 &= 8D \\ n &= 1.5 \\ t &= 15 \text{ cm} \\ l_1 &= -10 \text{ cm} \end{aligned}$$



Sulla prima superficie si ha: $\bar{L}_1' = \bar{L}_1 + F_1 = -10 + 5 = -5D$

Poiché la lente è spessa, nel viaggiare dalla prima alla seconda superficie la luce cambia vergenza. Si ha:

$$\bar{L}_2' = \frac{\bar{L}_1'}{1 - \frac{t}{n} \bar{L}_1'} = \frac{-5}{1 - \frac{0.15}{1.5} \times (-5)} = -3.3D$$

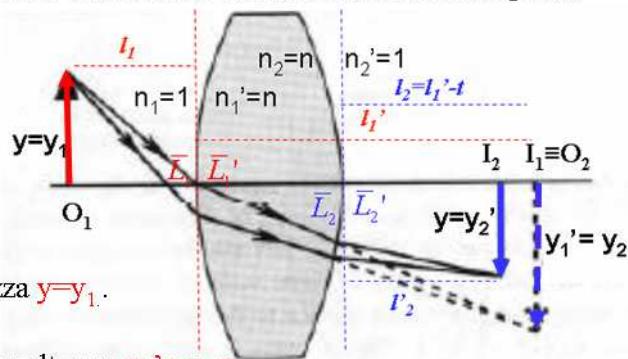
Infine alla seconda superficie si ha il cambio di vergenza: $\bar{L}_2' = \bar{L}_2 + F_2 = -3.3 + 8 = 4.7D$

$$\bar{L}_2' = \frac{1}{l_2'} = 4.7D \rightarrow l_2' = \frac{1}{\bar{L}_2'} = 0.21m$$

Ingrandimento trasversale nella lente spessa

Basandoci sul fatto che l'immagine della prima superficie costituisce l'oggetto per la seconda superficie possiamo ricavare anche l'ingrandimento trasversale introdotto da una lente spessa.

$$\frac{y_i'}{y_i} = m_i = \frac{\bar{L}_i}{\bar{L}_i'} = \frac{n_i l_i'}{l_i n_i'}$$



Consideriamo quindi un oggetto esteso di altezza $y=y_1$.

- Immagine I_1 generata dalla prima superficie ha altezza: $y_1'=m_1 y_1$
- $I_1 \equiv O_2 \rightarrow y_2=y_1'$
- Immagine finale I_2 generata dalla seconda superficie ha altezza $y_2'=m_2 y_2=m_2 y_1'$

Si ha quindi che l'altezza dell'immagine finale è $y=y_2'=m_1 m_2 y_1$

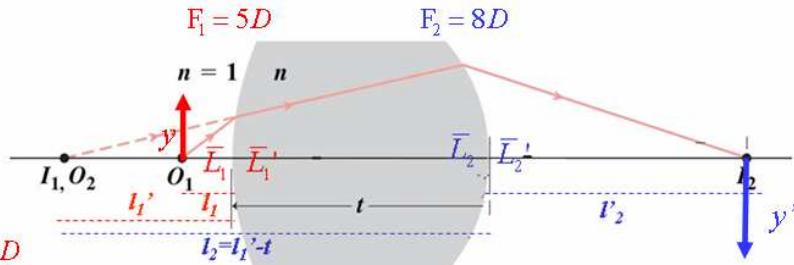
$$m = \frac{y'}{y} = m_1 m_2 = \frac{\bar{L}_1}{\bar{L}_1'} \frac{\bar{L}_2}{\bar{L}_2'} = \frac{l_1'}{nl_1} \frac{nl_2'}{l_2} = \frac{l_1' l_2'}{l_1 l_2}$$

Ingrandimento trasversale
lente spessa immersa in aria

Esempio

$$F_1=5D \quad F_2=10D \\ n=1.5 \quad t=15 \text{ cm}, \\ l_1=10 \text{ cm}$$

$$\bar{L}_1 = \frac{1}{l_1} = \frac{1}{-0.1} = -10D$$



Sulla prima superficie si ha: $\bar{L}_1' = \bar{L}_1 + F_1 = -10 + 5 = -5D$

Poiché la lente è spessa, nel viaggiare dalla prima alla seconda superficie la luce cambia vergenza. Si ha:

$$\bar{L}_2 = \frac{\bar{L}_1'}{1 - \frac{t}{n} \bar{L}_1'} = \frac{-5}{1 - \frac{0.15}{1.5} \times (-5)} = -3.3D$$

Infine alla seconda superficie si ha il cambio di vergenza: $\bar{L}_2' = \bar{L}_2 + F_2 = -3.3 + 8 = 4.7D$

$$\bar{L}_2' = \frac{1}{l_2'} = 4.7D \rightarrow l_2' = \frac{1}{\bar{L}_2'} = 0.21m$$

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{\bar{L}_1}{\bar{L}_1'} \frac{\bar{L}_2}{\bar{L}_2'} = \frac{-10}{-5} \times \frac{-3.3}{4.7} = -1.4 \quad \text{Immagine ingrandita e capovolta}$$

Fuochi e piani principali della lente

Come in tutti i sistemi ottici anche nella lente spessa vale la stessa definizione per i due fuochi.

I fuoco F: punto oggetto sull'asse la cui immagine è all' ∞ (raggi emergenti paralleli all'asse ottico)

II fuoco F': punto immagine di un punto oggetto sull'asse a distanza infinita (raggi incidenti paralleli all'asse ottico)

Naturalmente in una lente spessa non si può fare l'approssimazione in cui la lente è schematizzata come un unico piano in cui si concentra l'effetto della deviazione dei raggi sulle due superficie come nella lente sottile, in quanto come abbiamo visto la variazione di vergenza all'interno della lente non è trascurabile. In tal caso è possibile però individuare due piani, detti piani principali, in cui si può concentrare il potere di convergenza o divergenza di una lente. Tali piani vengono definiti geometricamente seguendo il cammino dei raggi ottici per il primo e secondo fuoco, come mostrato in figura.



Definizione del primo piano principale

Raggi divergenti da F e deviati dalla lente

Quando i raggi emergenti ed incidenti sono prolungati all'indietro e in avanti rispettivamente, i punti di intersezione giacciono su un piano comune detto primo piano principale normale all'asse (in approssimazione parassiale). L'intersezione del primo piano principale con l'asse è detto primo punto principale P

Definizione del secondo piano principale

Raggi incidenti paralleli deviati in F' dalla lente

Quando i raggi incidenti ed emergenti sono prolungati in avanti e all'indietro rispettivamente, i punti di intersezione giacciono su un piano comune detto secondo piano principale normale all'asse (in approssimazione parassiale). L'intersezione del secondo piano principale con l'asse è detto secondo punto principale P'

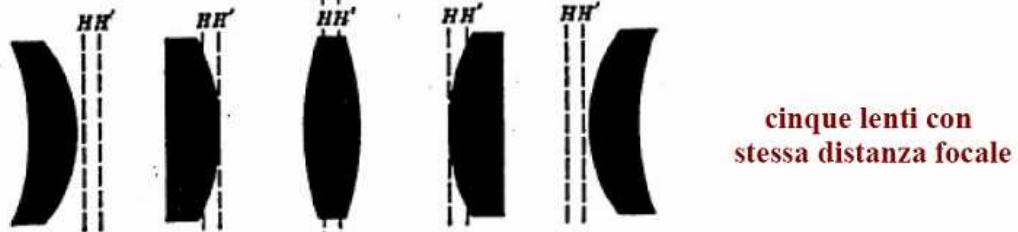
Proprietà dei piani principali

Indipendentemente dalla forma della lente H' si trova sempre a destra di H (sempre che la luce si propaghi come abbiamo assunto da sinistra a destra)

La posizione dei piani principali è tale che essi sono più vicini al dietro di maggior potere

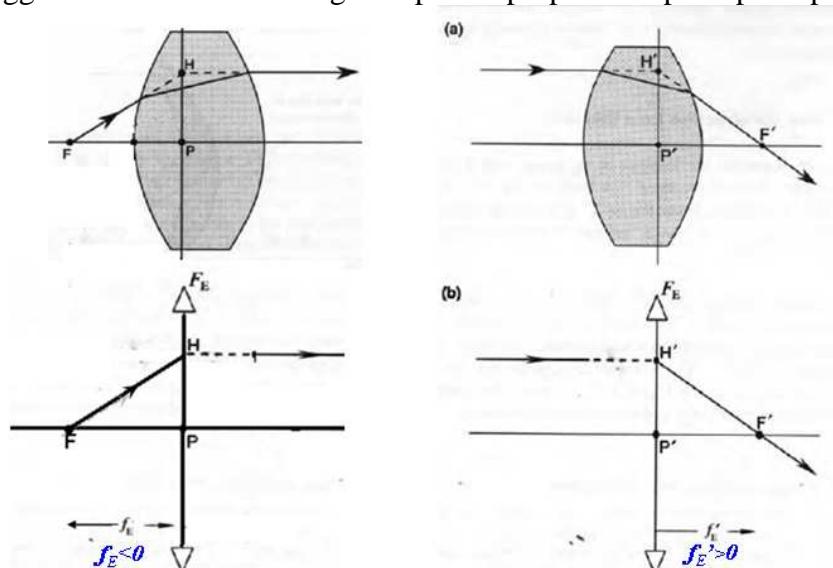
Essi sono assimilabili a una sorta di baricentro ottico.

- lenti biconvesse e biconcave: i piani principali sono sempre interni alle lenti
- lenti menisco- convergenti e divergenti: i piani principali possono anche essere esterni



Schematizzazione della lente spessa

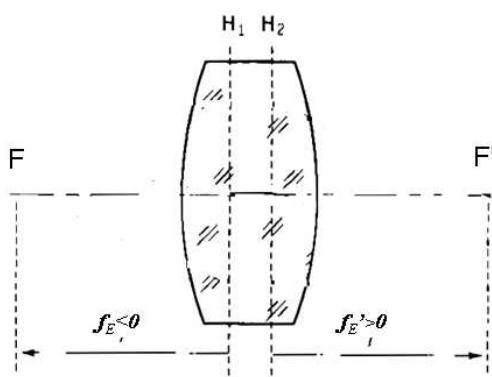
La definizione dei piani principali consente di utilizzare per le lenti spesse e i sistemi di lenti una schematizzazione analoga a quella della lente sottile a patto di misurare le distanze focali, la distanza oggetto e la distanza immagine a partire proprio dai piani principali.



Le lunghezze focali equivalenti f_E e f'_E sono misurate dai fuochi F e F' ai rispettivi punti principali H e H' (e non dai fuochi ai vertici)

Quando la lente è immersa in un unico mezzo ottico (stesso mezzo ottico di incidenza e emergenza) le lunghezze focali equivalenti sono uguali in valore assoluto $f_E = -f'_E$ ma questo non significa che i fuochi siano simmetrici rispetto alla lente.

Questo avviene se la lente è simmetrica: in questo caso H_1 e H_2 stanno alla stessa distanza dai due vertici, come nell'esempio in figura.



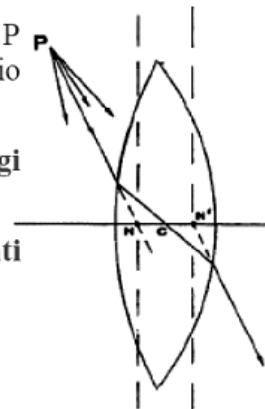
Punti nodali della lente spessa

Consideriamo tra i raggi che divergono da una sorgente puntiforme P quel particolare raggio che è parallelo al corrispondente raggio emergente: tale raggio esiste sempre. Si posso definire quindi i:

Punti nodali: l'intersezione dei prolungamenti della coppia di raggi incidente-emergente paralleli tra di loro.

Piani nodali: i piani perpendicolari all'asse ottico passanti per i punti nodali.

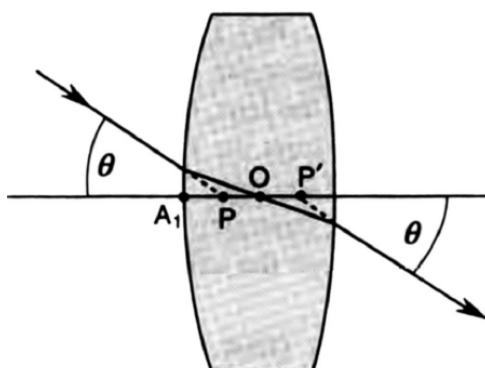
Centro ottico: l'intersezione del raggio ottico non deviato con l'asse ottico.



- le tangenti ai punti di incidenza sulle direzioni nodali sono parallele: la lente si comporta come una lamina sottile rispetto alla direzione passante per i punti nodali. I raggi quindi non vengono deviati, ma solo traslati. Rispetto alla direzione passante per i punti nodali la lente si comporta come se non avesse potere rifrattivo.
- i punti nodali sono l'analogo del centro di curvatura del diottro: nel diottro i raggi passanti per il centro di curvatura non venivano deviati. Il centro di curvatura del diottro è quindi il suo punto nodale.

I punti nodali, i fuochi e i punti principali costituiscono i punti cardinali di una lente o un sistema di lenti

Se il mezzo ai due lati della lente è lo stesso i punti nodali coincidono con i punti principali



$$P \equiv N \quad P' \equiv N'$$

Costruzione grafica dell'immagine per la lente spessa in aria

Una volta individuati la posizione dei punti focali e dei piani principali è possibile costruire graficamente l'immagine di un oggetto esteso. Disegniamo i tre raggi che partono dal punto estremale fuori asse :

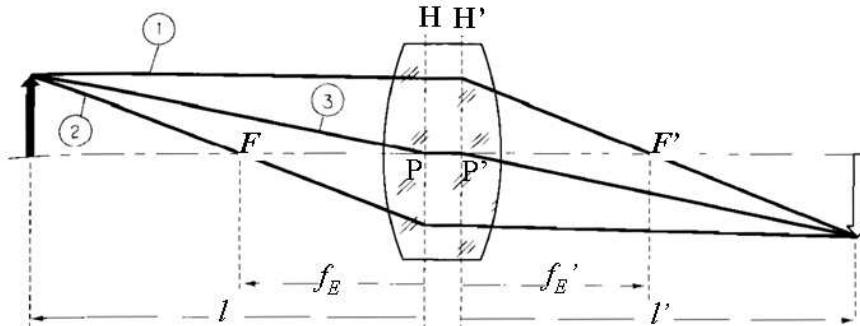


Figure 3-3 Principal planes, focal lengths, and object and image distances of a thick lens.

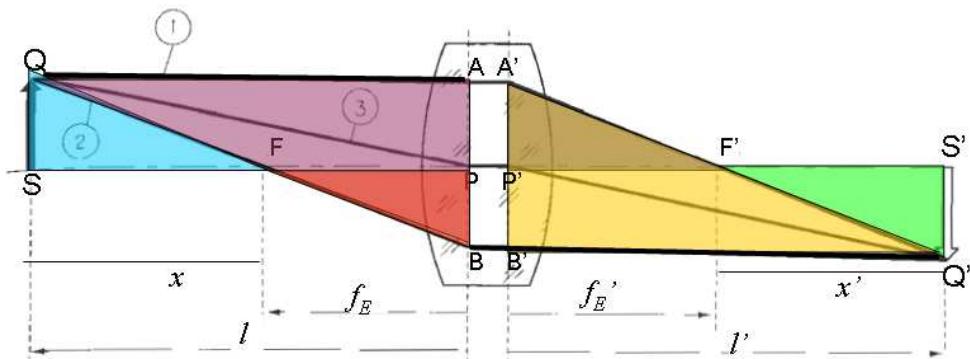
1-raggio parallelo all'asse: tale raggio passa per il secondo fuoco F' può considerarsi deviato sul secondo piano principale

2-raggio passante per il primo fuoco F : tale raggio può considerarsi deviato sul primo piano principale

3-il raggio principale: l'unico raggio che non subisce variazione di vergenza: va sul primo punto principale, è traslato sul secondo punto principale e continua parallelo alla sua direzione iniziale

Equazioni equivalenti per la lente spessa in aria

Spossiamo osservare che, se misuriamo le coordinate di oggetto e immagine a partire dai punti principali (coordinate l e l') o dai fuochi (coordinate x e x'), abbiamo la stessa costruzione geometrica che per la lente sottile, a parte la separazione $H H'$. Valgono quindi per la lente spessa le stesse relazioni trovate per la lente sottile, basate sulla similitudine dei triangoli mostrati in figura



Equazione gaussiana della lente

$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f_E'}$$

Equazione di Newton della lente

$$x x' = -f_E'^2$$

Ingrandimento trasversale gaussiano

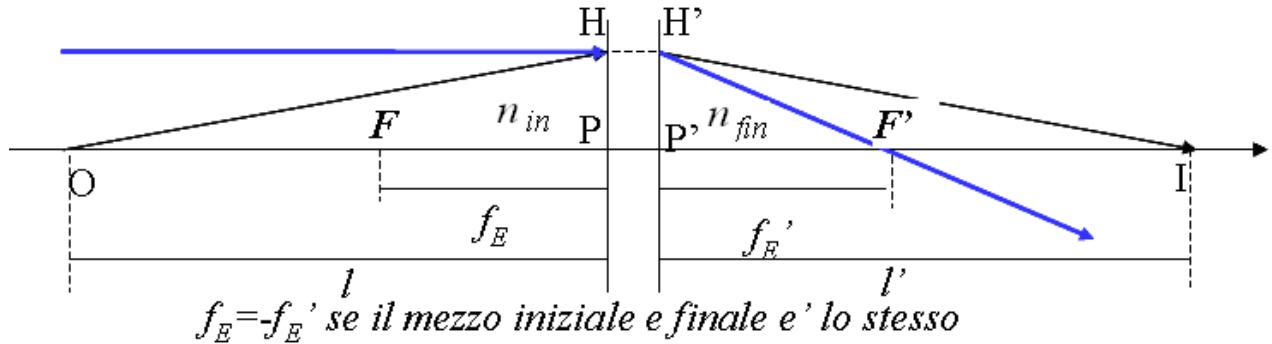
$$m = \frac{l'}{l} = \frac{y'}{y}$$

Ingrandimento trasversale newtoniano

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{f_E'}{x} = -\frac{x'}{f_E'}$$

Potere equivalente della lente spessa

Il potere equivalente di una lente spessa è la vergenza di uscita dal II piano principale quando la vergenza di ingresso è nulla.



Consideriamo il caso di una lente spessa in aria. Scriviamo le equazioni gaussiane per le vergenze. Avremo:

Equazione gaussiana della lente
in aria

$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f_E}$$

Ingrandimento trasversale gaussiano

$$m = \frac{l'}{l} = \frac{y'}{y}$$

In termini di vergenza si ha:

$$\bar{L}' = \bar{L} + F_E$$

$$m = \frac{\bar{L}}{\bar{L}'} = \frac{y'}{y}$$

Se imponiamo: $F_E = \bar{L}'$ con $\bar{L} = 0$

possiamo ricavare: $F_E = \frac{1}{\bar{L}'}$

Più in generale, se c'è un mezzo diverso dall'aria come ultimo mezzo si ha:

$$F_E = \bar{L}' \text{ con } \bar{L} = 0 \rightarrow F_E = \frac{n_{fin}}{f_E'} \quad n_{fin} = \text{indice rifrazione ultimo mezzo}$$

Determinazione della distanza focale equivalente

Consideriamo una lente spessa di indice di rifrazione n e spessore t nella situazione più generale in cui si ha un mezzo di indice di rifrazione differente a sinistra (n_{in}) e a destra (n_{fin}) della lente.

Disegniamo un raggio parallelo all'asse che incide sulla lente ad una altezza h e finisce nel secondo fuoco F' dopo aver subito le due rifrazioni sulle due superfici AD e DF'. Notiamo che:

- $l_1 = -\infty$: il punto immagine della prima superficie è il secondo fuoco F'_1 della prima superficie $\rightarrow l_1' = f_1'$ **distanza focale del primo diottro**
- Il raggio emergente (DF'), se prolungato all'indietro, interseca il II piano principale nel punto E ad una altezza h
- $h' = CD \neq h$

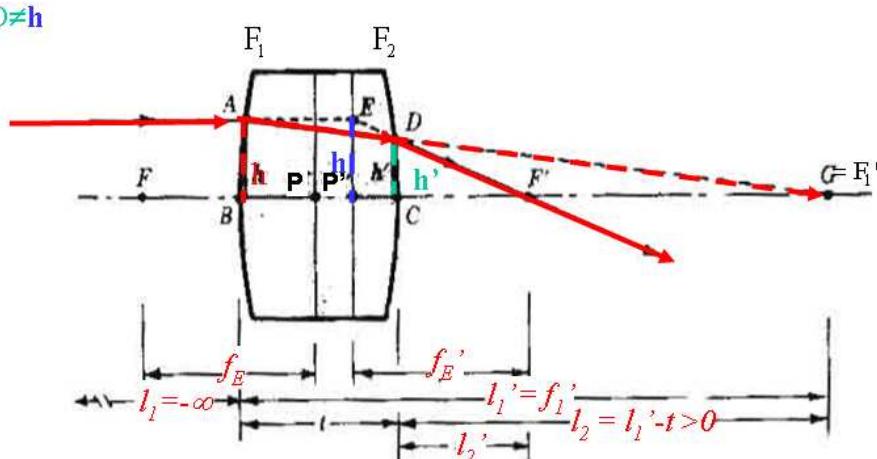


Fig. 4-18. - Lente semplice spessa.

Per trovare la relazione tra la seconda distanza focale equivalente f_E' , distanza del secondo fuoco dal secondo piano principale, e le coordinate l_1, l_1', l_2, l_2' , usiamo la similitudine tra i triangoli mostrati in figura.

I triangoli $EP'F'$ e DCF' sono simili

$$1) \quad \frac{h}{f_E'} = \frac{h'}{l_2'}$$

I triangoli ABG e DCG sono simili

$$2) \quad \frac{h}{l_1} = \frac{h'}{l_2}$$

Se dividiamo 1) e 2)

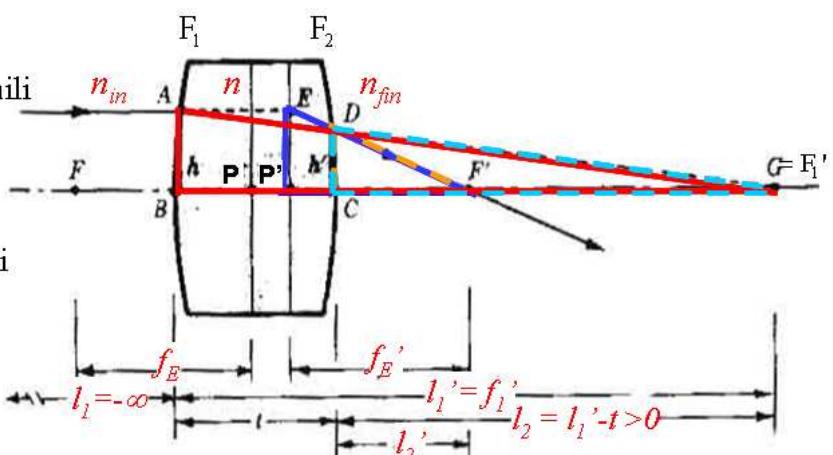


Fig. 4-18. - Lente semplice spessa.

$$\frac{f_E'}{l_1} = \frac{l_2'}{l_2} \quad \Rightarrow \quad f_E' = l_1 \frac{l_2'}{l_2} = f_1 \frac{l_2'}{l_2} \quad \text{con } l_1 = -\infty$$

Tale relazione ci permette di ricavare la focale equivalente della lente spessa trovando l_1' , e $l_2 = l_1' - t$ applicando l'equazione di Gauss dei punti coniugati alla prima superficie, l_2' quella alla seconda superficie della lente, il tutto assumendo che i raggi incidenti siano paralleli all'asse ottico ($l_1 = -\infty$).

Determinazione del potere equivalente F_E

Abbiamo visto che il potere equivalente è dato da:

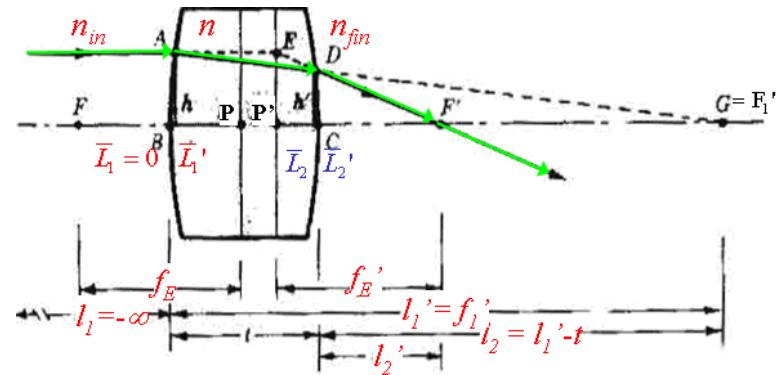
$$F_E = \frac{n_{fin}}{f'_E}$$

Dalla relazione per la focale effettiva possiamo ricavare quella per il potere effettivo. Si ha che:

$$f'_E = l'_1 \frac{l'_2}{l_2} = f_1' \frac{l'_2}{l_2} \quad \text{con } l_1 = -\infty$$

Tenendo conto che:

- la vergenza ridotta di uscita dalla I superficie è $\bar{L}_1 = \frac{n}{l_1}$
- la vergenza ridotta di ingresso sulla II superficie $\bar{L}_2 = \frac{n}{l_2}$
- la vergenza ridotta di uscita sulla II superficie $\bar{L}_2' = \frac{n_{fin}}{l_2}$
- il potere della prima superficie è $F_1 = \frac{n}{f_1'}$



Possiamo ricavare che:

$$F_E = \frac{n_{fin}}{f'_E} = F_1 \frac{\bar{L}_2'}{\bar{L}_2}$$

dove i valori delle vergenze vanno calcolati imponendo $\bar{L}_1 = 0$

Possiamo infine trovare la relazione tra potere equivalente e i poteri delle due superfici, utilizzando il metodo del passo avanti. Seguiamo cioè la variazione di vergenza lungo il percorso ottico dei raggi incidente parallelo all'asse ottico. Avremo:

I superficie (in figura $r_1 > 0$) $\bar{L}_1 = 0$

$$\bar{L}_1' = \bar{L}_1 + F_1 = F_1$$

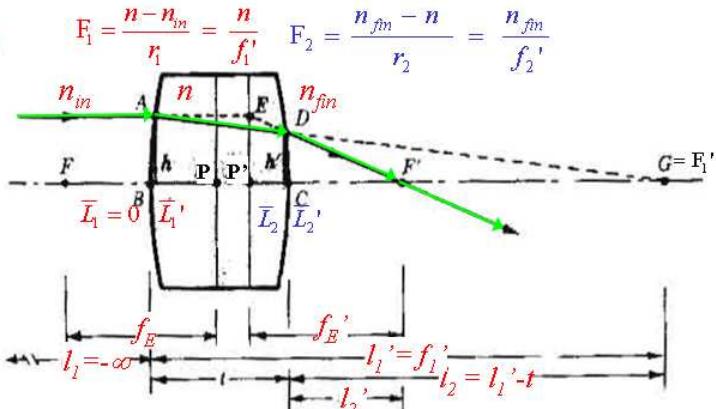
Equazione del passo avanti

$$\bar{L}_2 = \frac{\bar{L}_1'}{1 - \frac{t}{\bar{L}_1'}} = \frac{F_1}{1 - \frac{t}{F_1}}$$

II superficie (in figura $r_2 < 0$)

$$\bar{L}_2' = \bar{L}_2 + F_2 = \frac{F_1}{1 - \frac{t}{F_1}} + F_2$$

$$F_1 = \frac{n - n_{in}}{r_1} = \frac{n}{f_1'} \quad F_2 = \frac{n_{fin} - n}{r_2} = \frac{n_{fin}}{f_2'}$$

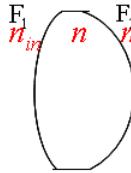


Sostituendo tali espressioni nella formula del potere equivalente, otteniamo:

$$F_E = F_1 \frac{\bar{L}_2'}{\bar{L}_2} = F_1 + F_2 - \frac{t}{n} F_1 F_2 \quad \text{Formula di Gulstrand per il potere equivalente}$$

Confronto tra potere nominale e potere e equivalente

Conoscendo la forma della lente (raggi di curvatura delle due superfici e spessore) e l'indice di rifrazione del materiale con cui è stata costruita, possiamo calcolare il **potere nominale** della lente, ossia la somma dei poteri delle due superfici che le compongono, e il **potere equivalente** dato dalla formula di Gullstrand. Chiamiamo F_1 e F_2 i poteri delle due superfici e t lo spessore della lente (distanza tra i vertici dei due diottri che la compongono). Avremo:



$$F_1 = \frac{n - n_{in}}{r_1} = \frac{n}{f_1'}$$

$$F_2 = \frac{n_{fin} - n}{r_2} = \frac{n_{fin}}{f_2'}$$

$$F_n = F_1 + F_2 \quad \text{potere nominale}$$

$$F_E = F_1 + F_2 - \frac{t}{n} F_1 F_2 \quad \text{potere equivalente}$$

Il termine che tiene conto dello spessore della lente è: $-\frac{t}{n} F_1 F_2$

Quindi l'effetto dello spessore della lente sul potere equivalente dipende dalla geometria della lente ed in particolare dal segno del prodotto $F_1 F_2$. In particolare se consideriamo i vari tipi di lente, avremo:



Esempio: Determinare il potere nominale e il potere effettivo e la focale effettiva di una lente spessa in aria avente indice di rifrazione $n=1.5$, raggi di curvatura $r_1=15$ cm e $r_2=-10$ cm e spessore $t=20$ cm

$$F_1 = \frac{n-1}{r_1}$$

$$F_2 = \frac{1-n}{r_2}$$

$$F_n = F_1 + F_2$$

$$F_E = F_1 + F_2 - \frac{t}{n} F_1 F_2 \quad F_E = \frac{1}{f_E'}$$

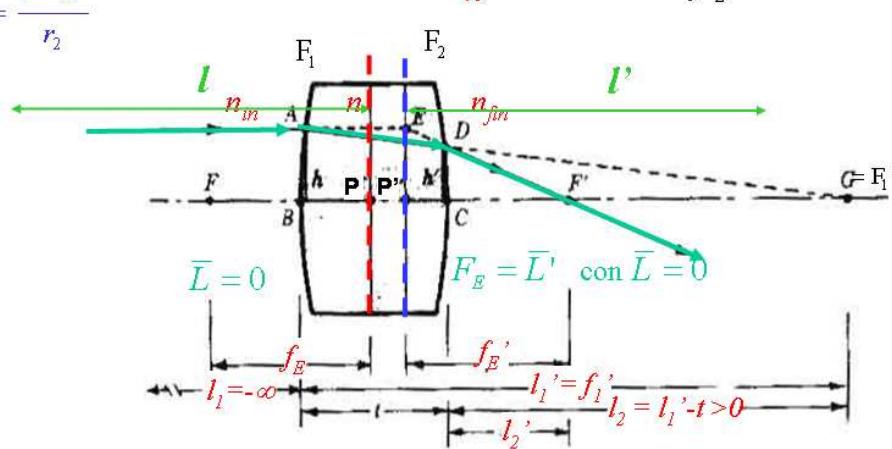
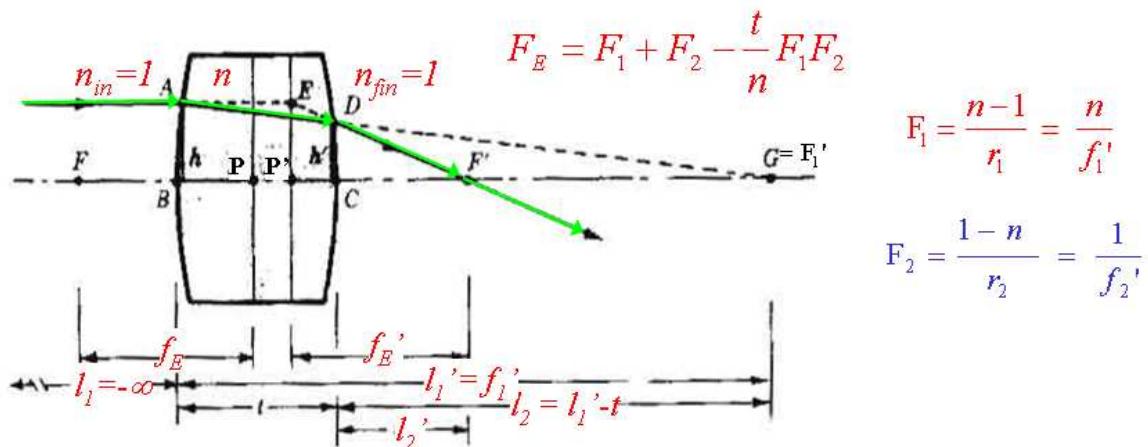


Fig. 4-18. - Lente semplice spessa.

Distanza focale di una lente spessa (lente in aria)

Possiamo ricavare anche la distanza focale equivalente di una lente spessa in aria in termini di quelle delle due superfici, sostituendo le varie focali nella formula di Gullstrand:



$$F_E = F_1 + F_2 - \frac{t}{n} F_1 F_2$$

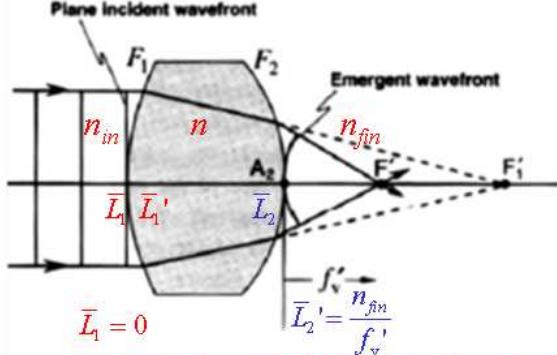
$$F_1 = \frac{n-1}{r_1} = \frac{n}{f_1'}$$

$$F_2 = \frac{1-n}{r_2} = \frac{1}{f_2'}$$

$$F_E = \frac{1}{f'_E} = \frac{1}{f'_2} + \frac{n}{f'_1} - \frac{t}{f'_1 f'_2} \quad \rightarrow \quad f'_E = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + n f'_2 - t} = -f_E$$

Poteri Frontali

Poiché i punti principali non sono punti specifici e reali della nostra lente, spesso nella pratica oftalmica si specifica il potere di una lente per mezzo del suo **potere posteriore** (Back Vertex Power), definito come:

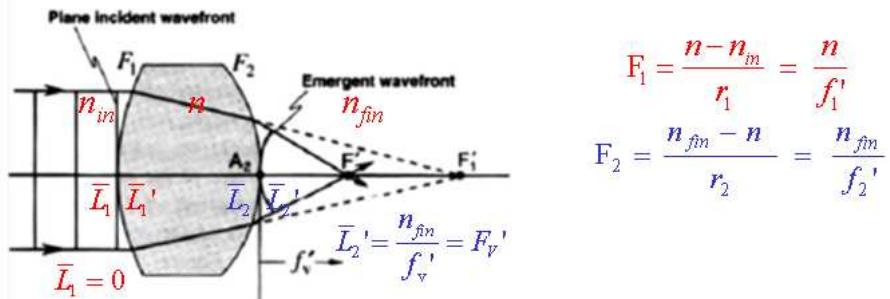


Il potere posteriore è la vergenza (ridotta) di uscita dalla lente di un'onda piana che ha attraversato la lente dalla parte anteriore (la vergenza di uscita della luce che raggiunge il secondo fuoco F').

$$BVP = F'_v = \bar{L}_2'(F') \quad (\text{quando } \bar{L}_1 = 0) \quad >0 \text{ se il primo fuoco è a sinistra del primo vertice}$$

dove f'_v è la distanza focale posteriore, ossia la coordinata del secondo fuoco misurata dal vertice posteriore della lente. Nella pratica oftalmica questa distanza è misurata con il frontifocometro.

Per trovare l'espressione per il potere del vertice posteriore, dobbiamo considerare la variazione di vergenza alle varie superficie e dentro la lente di raggi paralleli all'asse ottico ($\bar{L}_1 = 0$).



- I superficie $\bar{L}_1' = \bar{L}_1 + F_1 = F_1 \quad (\bar{L}_1 = 0)$

- la vergenza di uscita dalla prima superficie cambia per il passaggio nella lente spessa prima di arrivare alla seconda superficie. Si ha (step-along eq.)

$$\bar{L}_2 = \frac{\bar{L}_1'}{1 - \frac{t}{n} \bar{L}_1'} = \frac{F_1}{1 - \frac{t}{n} F_1}$$

$$\bar{L}_2' = \bar{L}_2 + F_2$$

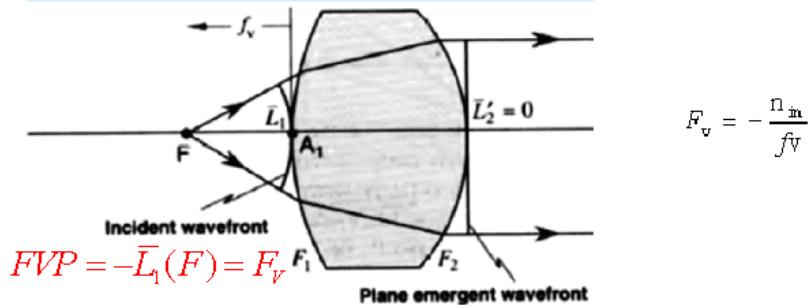
$$F_v' = \bar{L}_2'(F') = \frac{F_1}{1 - \frac{t}{n} F_1} + F_2$$

$$F_1 = \frac{n - n_m}{r_1} = \frac{n}{f_1'} \\ F_2 = \frac{n_{fin} - n}{r_2} = \frac{n_{fin}}{f_2'}$$

$$F'_v = \frac{F_1}{1 - \frac{t}{n} F_1} + F_2 = \frac{F_E}{1 - \frac{t}{n} F_1}$$

In maniera simile si ricava che il potere frontale anteriore (Front Vertex Power):

Il potere frontale anteriore è la vergenza (ridotta) di entrata, cambiata di segno, nella lente di un'onda sferica con centro di curvatura nel primo fuoco che una volta attraversata la lente produce vergenza in uscita nulla.



$$FVP = -\bar{L}_1(F) = F_v = \frac{F_E}{1 - \frac{t}{n} F_2} = F_1 + \frac{F_2}{1 - \frac{t}{n} F_2} > 0 \text{ se il primo fuoco è a sinistra del primo vertice}$$

Le espressioni per i poteri frontali posteriore e anteriore possono essere invertite per trovare le corrispondenti distanze focali. Se **la lente è immersa in aria**, si ha:

$$f'_v = \frac{1}{F'_v} = f_E' \left(1 - \frac{t}{f'_1} \right) \quad f_v = -\frac{1}{F_v} = -f_E' \left(1 - \frac{t}{nf'_2} \right)$$

Esempio: Determinare il potere frontale posteriore e anteriore e la posizione dei fuochi rispetti ai vertici di una lente spessa in aria avente indice di rifrazione $n=1.5$, raggi di curvatura $r_1=15$ cm e $r_2=-10$ cm e spessore $t=18$ cm

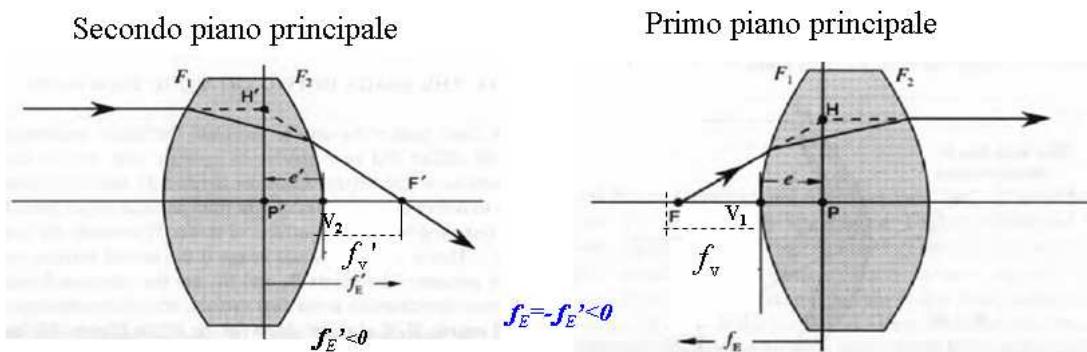
$$F_1 = \frac{n-1}{r_1} = 3.3D \quad F_n = F_1 + F_2 = 8.8D$$

$$F_2 = \frac{1-n}{r_2} = 5D \quad F_E = F_1 + F_2 - \frac{t}{n} F_1 F_2 = 6.6D$$

$$BVP = F'_v = \frac{F_E}{1 - \frac{t}{n} F_1} = \frac{6.6}{1 - \frac{0.18}{1.5} \times 3.3} = 10.92D$$

$$FVP = -\bar{L}_1(F) = F_v = \frac{F_E}{1 - \frac{t}{n} F_2} = \frac{6.6}{1 - 0.18 \times 5} = 66D$$

Calcolo della posizione dei punti principali rispetto al vertice:



Note le distanze focali effettiva f'_E , del vertice posteriore f'_v e del vertice anteriore f_v possiamo determinare la posizione dei piani principali rispetto al vertice. Si ha:

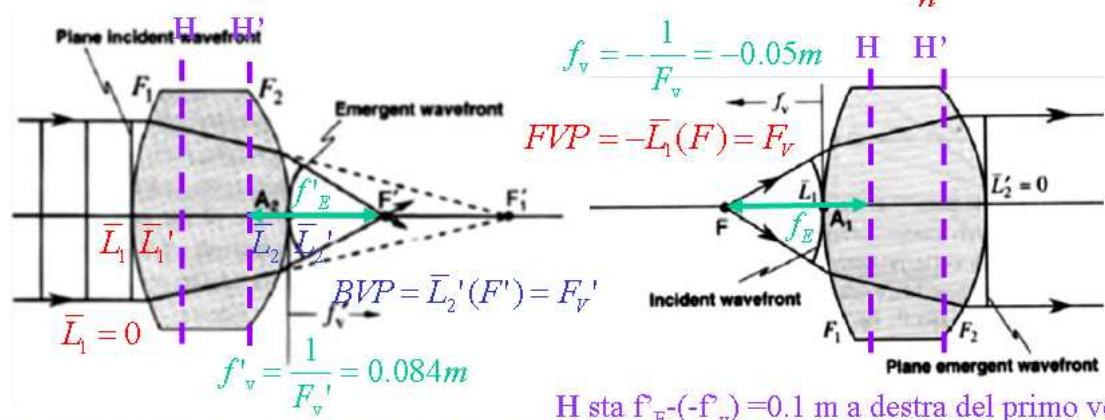
$$e' = P'V_2 = -(f'_E - f'_v) \quad <0 \text{ se } P' \text{ è a sinistra di } V_2 \quad \text{distanza di } H' \text{ dal secondo vertice come in figura}$$

$$e = PV_1 = f'_E - FV_1 = f'_E + f_v = f_v - f_E \quad >0 \text{ se } P \text{ è a destra di } V_1 \quad \text{distanza di } H \text{ dal primo vertice come in figura}$$

Esempio: Determinare la posizione dei piani principali di una lente spessa in aria avente indice di rifrazione $n=1.5$, raggi di curvatura $r_1=15 \text{ cm}$ e $r_2=-10 \text{ cm}$ e spessore $t=20 \text{ cm}$

$$F_1 = \frac{n-1}{r_1} = 3.3D \quad F_2 = \frac{1-n}{r_2} = 5D \quad F_E = F_1 + F_2 - \frac{t}{n} F_1 F_2 = 6.6D \quad f'_E = \frac{1}{F_E} = 0.15m$$

$$BVP = F'_v = \frac{F_E}{1 - \frac{t}{n} F_1} = 11.8D \quad FVP = -\bar{L}_1(F) = F_V = \frac{F_E}{1 - \frac{t}{n} F_2} = 19.8D$$



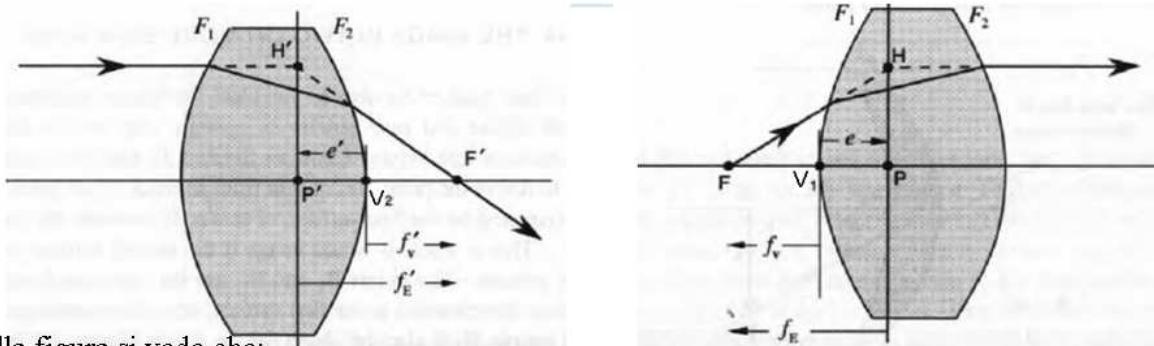
H' sta $f'_E - f'_v = 0.066 \text{ m a sinistra del secondo vertice}$

$$e' = P'V_2 = -(f'_E - f'_v) = -0.066m$$

$$e = PV_1 = f'_E - FV_1 = f'_E + f_v = 0.1m$$

Posizione dei piani principali della lente spessa in aria in termini dei poteri frontali

E' possibile determinare la posizione dei piani principali H e H' rispetto ai vertici in termini del potere equivalente e dei poteri frontali



Dalla figura si vede che:

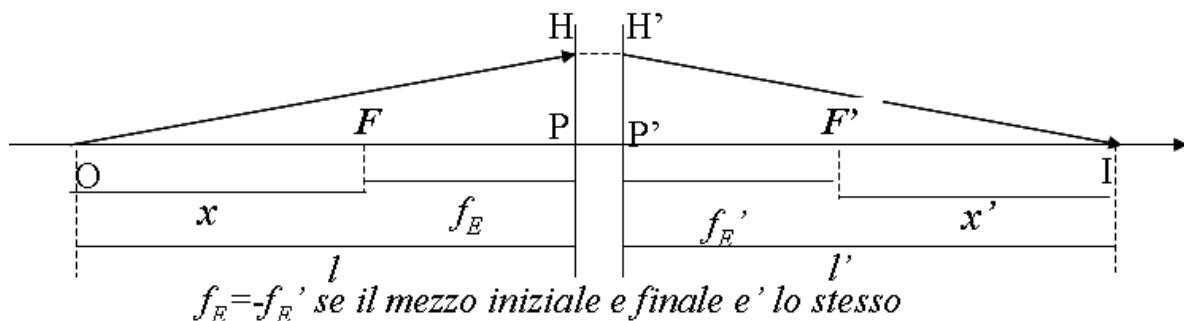
$$V_2 P' = e' = f_V' - f_E' = \frac{1}{F_V'} - \frac{1}{F_E} = \frac{1}{F_E} - \frac{1}{F_E} = -\frac{t}{n} \frac{F_1}{F_E} < 0 \text{ se } P' \text{ è a sinistra di } V_2$$

$$1 - \frac{t}{n} F_1$$

$$V_1 P = e = f_V - f_E = -\frac{1}{F_V} + \frac{1}{F_E} = -\frac{1}{F_E} + \frac{1}{F_E} = \frac{t}{n} \frac{F_2}{F_E} > 0 \text{ se } P \text{ è a destra di } V_1$$

$$1 - \frac{t}{n} F_2$$

Come abbiamo visto in precedenza, una volta determinata la posizione dei piani principali, delle distanze focali, possiamo schematizzare la lente come mostrato in figura.



Possiamo quindi calcolare le coordinate dell'oggetto l (rispetto al I piano principale), x (rispetto al primo fuoco) e applicare le equazioni gaussiane e newtoniane equivalenti, già scritte in precedenza, per determinare l'immagine.

Equazione gaussiana della lente

$$\frac{1}{l} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f_E}$$

Equazione di Newton della lente

$$xx' = -f_E'^2$$

In termini di vergenza si ha:

$$\bar{L} = \frac{1}{l}; \quad \bar{L}' = \frac{1}{l'}$$

$$\bar{L}' = \bar{L} + F_E$$

Ingrandimento trasversale gaussiano

$$m = \frac{l'}{l} = \frac{y'}{y}$$

Ingrandimento trasversale newtoniano

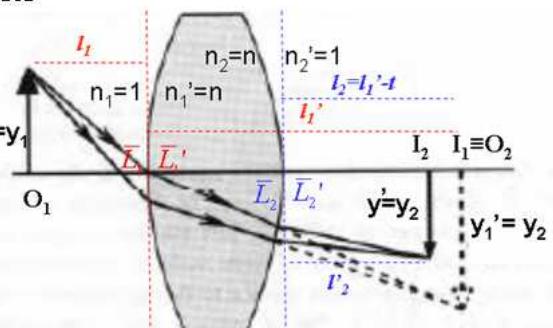
$$m = \frac{y'}{y} = \frac{f_E'}{x} = -\frac{x'}{f_E'}$$

$$m = \frac{l}{l} = \frac{y'}{y} = \frac{\bar{L}}{\bar{L}'}$$

Riepilogo: determinazione dell'immagine per una lente spessa

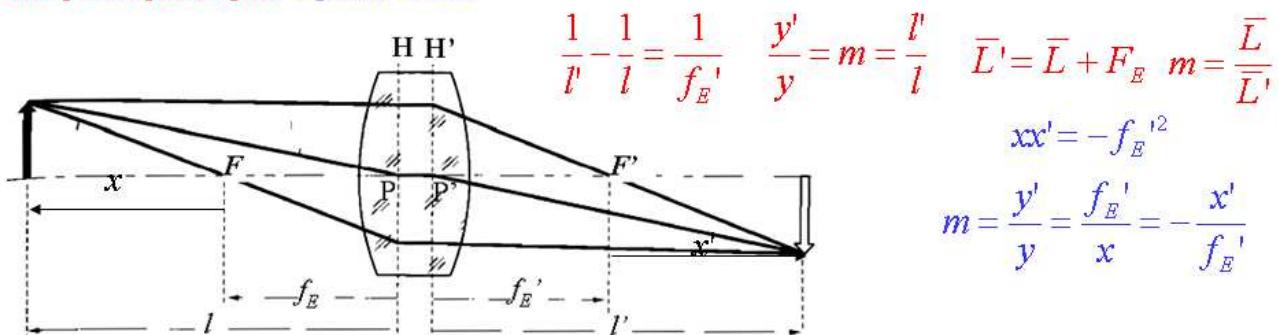
Per trovare l'immagine prodotta da un sistema di superfici rifrangenti possiamo:

- 1) Seguire la deviazione dei raggi reali sulle varie superfici rifrangenti (in pratica tenendo conto che ad $y=y_1$ ogni passo l'immagine formata da una superficie funge da oggetto per quella successiva). La cosa più semplice è **seguire la variazione della vergenza lungo il percorso del raggio reale**. Tale metodo si chiama “**metodo del passo avanti**”



$$m = \frac{y'}{y} = m_1 m_2 = \frac{\bar{L}_1}{\bar{L}'_1} \frac{\bar{L}_2}{\bar{L}'_2} = \frac{l'_1 l'_2}{l_1 l_2}$$

- 2) Trovare i punti principali e i fuochi del sistema, il potere e le distanze focali equivalenti e lavorare secondo la costruzione geometrica seguente e le equazioni equivalenti corrispondenti: equazioni di **Gauss o Newton** con coordinata oggetto e immagine a partire **dai punti principali o punti focali**



Step along method: dettagli e generalizzazione a più superfici

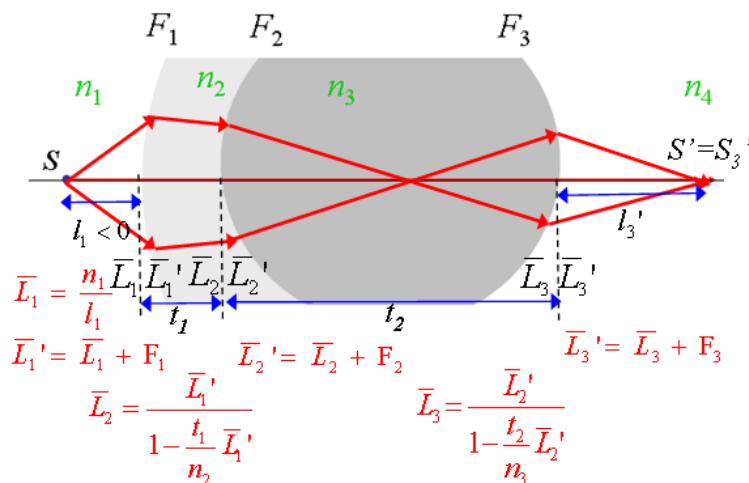
Il metodo del passo avanti è molto utile perché può essere applicato a un numero qualsiasi di superfici rifrangenti. Infatti per seguire la variazione di vergenza lungo il percorso della luce dobbiamo considerare:

- La vergenza della luce incidente su una superficie rifrangente si somma al potere di questa per ottenere la vergenza emergente dalla superficie
- Per calcolare la vergenza di arrivo sulla superficie successiva dobbiamo tenere conto della distanza e dell'indice di rifrazione del mezzo tra le due superfici e applicare l'equazione del passo avanti:

$$\bar{L}'_i = \bar{L}_i + F_i$$

$$\bar{L}'_{i+1} = \frac{\bar{L}'_i}{1 - \frac{t_i}{n_{i+1}} \bar{L}'_i}$$

Questi calcoli possono essere ripetuti per tutti i componenti ottici presenti lungo il percorso della luce e se necessario possono essere applicati anche in direzione contraria (dall'immagine all'oggetto)



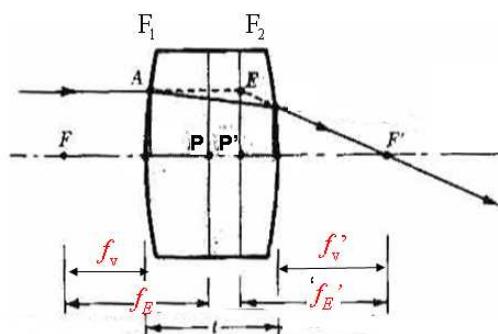
Una volta determinata la vergenza finale possiamo determinare la posizione dell'immagine rispetto all'ultimo vertice

$$\bar{L}_3' = \frac{n_4}{l_3'} \Rightarrow l_3' = \frac{n_4}{\bar{L}_3'}$$

Se l'oggetto ha un'altezza y si ha:

$$\frac{y'}{y} = m = \prod_i \frac{\bar{L}_i}{L_i}$$

Riassunto poteri e distanze focali (lente spessa in aria)



$$F_1 = \frac{n-1}{r_1} = \frac{n}{f_1'}$$

$$F_2 = \frac{1-n}{r_2} = \frac{1}{f_2'}$$

$$F_E = F_1 + F_2 - \frac{t}{n} F_1 F_2 \quad f_E' = \frac{f_1' f_2'}{f_1' + n f_2' - t} = -f_E$$

$$BVP = F_v' = \frac{F_E}{1 - \frac{t}{n} F_1} = \frac{F_1}{1 - \frac{t}{n} F_1} + F_2 \quad f_v' = \frac{1}{F_v'} = f_E' \left(1 - \frac{t}{f_1'} \right)$$

$$FVP = F_v = \frac{F_E}{1 - \frac{t}{n} F_2} = F_1 + \frac{F_2}{1 - \frac{t}{n} F_2} \quad f_v = -\frac{1}{F_v} = -f_E' \left(1 - \frac{t}{n f_2'} \right)$$

3.2.3 Sistemi di lenti sottili in aria

Consideriamo 2 lenti sottili in aria poste a distanza t tra loro, riportato in figura.

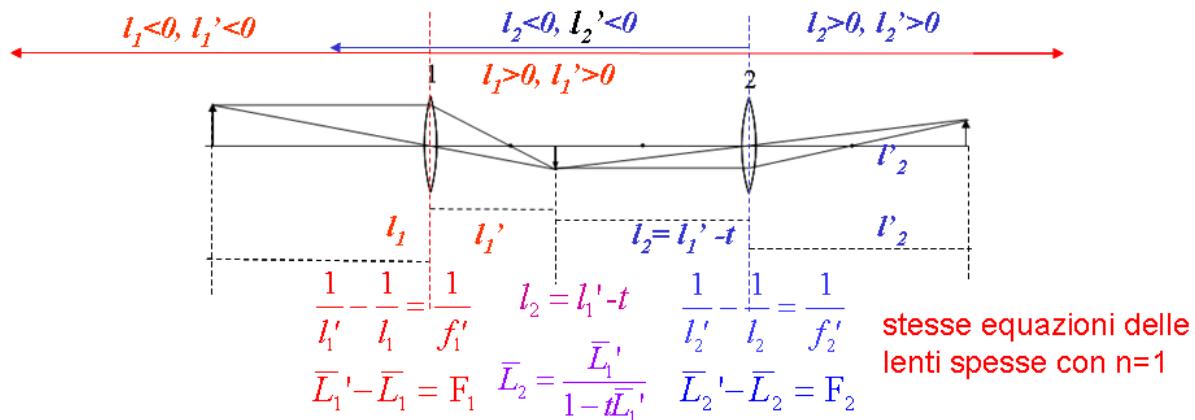
f'_1 distanza focale prima lente

f'_2 distanza focale seconda lente

$$F_1 = \frac{1}{f'_1} \text{ potere prima lente}$$

$$F_2 = \frac{1}{f'_2} \text{ potere seconda lente}$$

Per trovare l'immagine di un oggetto esteso, possiamo trovare l'immagine prodotta dalla prima lente, considerare tale immagine come oggetto per la seconda lente e quindi trovare mente l'immagine finale prodotta dalla seconda lente. Questo può essere fatto sia graficamente che applicando le equazioni della lente sottile sulla prima e sulla seconda lente. Avremo:

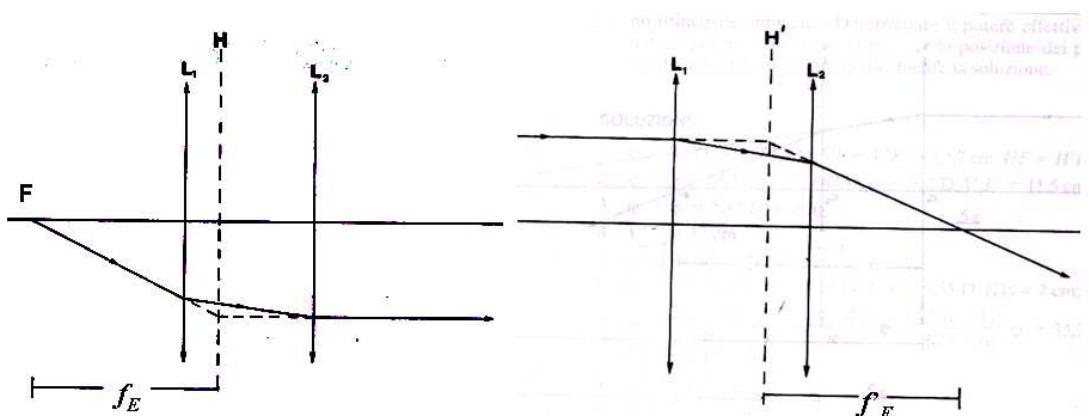


Anche in questo caso l'ingrandimento trasversale è: $m = \frac{y'}{y} = m_1 m_2 = \frac{\bar{L}'_1}{\bar{L}'_1 - \bar{L}_1} \cdot \frac{\bar{L}'_2}{\bar{L}'_2 - \bar{L}_2} = \frac{l'_1 l'_2}{l_1 l_2}$

In un sistema di 2 lenti sottili a distanza t in aria, ci aspettiamo che valgano le stesse relazioni trovate per una lente di spessore t , a patto di sostituire il potere delle due superfici con i poteri delle due lenti e di considerare il fatto che il mezzo tra tali due poteri rifrangenti è l'aria che ha $n=1$.

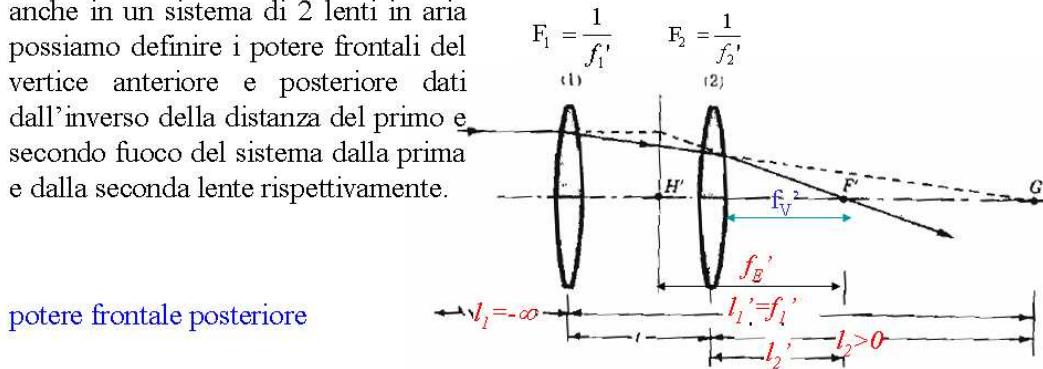
Piani principali in un sistema di lenti sottili

Anche nei sistemi di lenti si possono definire i piani principali sui quali può considerarsi concentrato tutto il potere rifrattivo del sistema. La costruzione grafica dei piani principali è del tutto analoga a quella che abbiamo visto nel caso delle lenti spesse.



Sistemi di 2 lenti sottili in aria: poteri frontali

Come nel caso della lente spessa, anche in un sistema di 2 lenti in aria possiamo definire i poteri frontali del vertice anteriore e posteriore dati dall'inverso della distanza del primo e secondo fuoco del sistema dalla prima e dalla seconda lente rispettivamente.



$$BVP = F'_v = \frac{1}{f'_v} = F_2 + \frac{F_1}{1-tF_1} = \frac{F_E}{1-tF_1}$$

$$f'_v = \frac{1}{F'_v} = f_E' \left(1 - \frac{t}{f'_1} \right)$$

potere frontale anteriore:

$$FVP = F_v = -\frac{1}{f_v} = F_1 + \frac{F_2}{1-tF_2} = \frac{F_E}{1-tF_2}$$

$$f_v = -\frac{1}{F_v} = -f_E' \left(1 - \frac{t}{f'_2} \right)$$

Determinazione della posizione dei piani principali

Determiniamo la posizione dei punti principali rispetto alla posizione delle lenti:

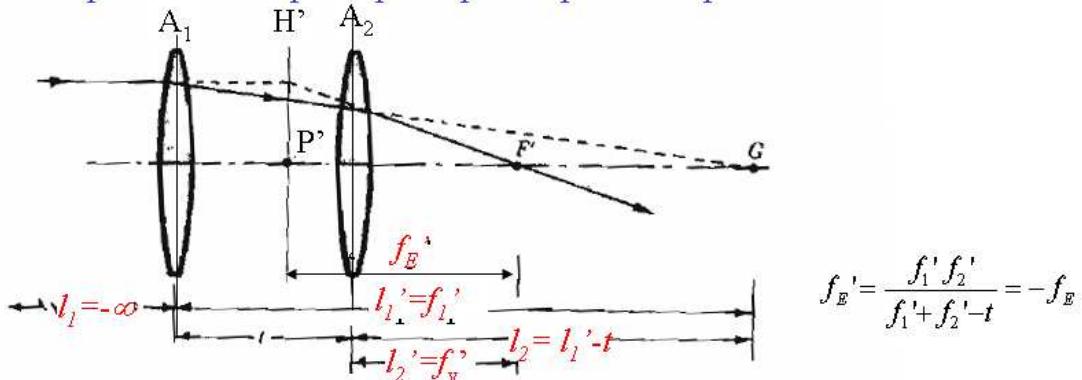


Fig. 4-20. Lente composta costituita da due lenti sottili.

Dalla figura si vede che:

$$A_2 P' = e' = f'_v - f_E' = \frac{1}{F'_v} - \frac{1}{F_E} = \frac{1}{F_E} - \frac{1}{F_E} = -t \frac{F_1}{F_E} < 0 \text{ se } P' \text{ è a sinistra di } A_2$$

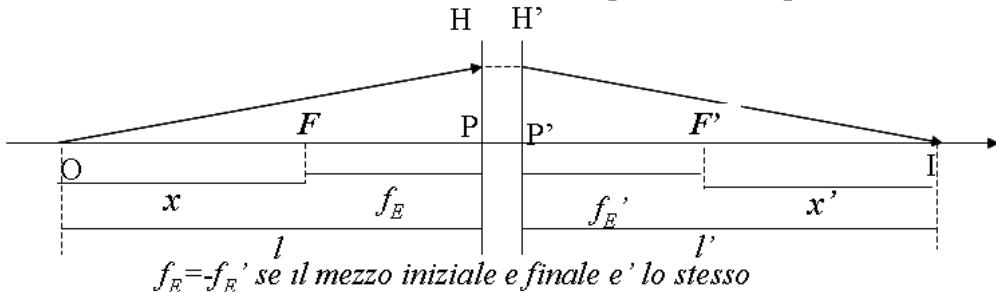
Analogamente al caso delle lenti spesse ($n=1$), la posizione del I piano principale può essere trovata con la relazione:

$$A_1 P = e = f_v - f_E = -\frac{1}{F_v} + \frac{1}{F_E} = -\frac{1}{F_E} + \frac{1}{F_E} = t \frac{F_2}{F_E} > 0 \text{ se } P \text{ sta a destra di } A_1$$

N. B. Nei sistemi di lenti il II piano principale H' può essere a sinistra di H

Equazioni di Gauss e Newton equivalenti

Una volta individuati i piani principali e la distanza focale equivalente, possiamo schematizzare il sistema nella stessa maniera fatta per le lenti spesse:



Anche in questo caso valgono le equazioni:

Equazione gaussiana

$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f'_E}$$

Equazione di Newton

$$xx' = -f'_E{}^2$$

Ingrandimento trasversale gaussiano

$$m = \frac{l'}{l} = \frac{y'}{y}$$

Ingrandimento trasversale newtoniano

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{f'_E}{x} = -\frac{x'}{f'_E}$$

In termini di vergenza si ha:

$$\bar{L} = \frac{1}{l}; \bar{L}' = \frac{1}{l'}$$

$$\bar{L}' = \bar{L} + F_E$$

$$m = \frac{l'}{l} = \frac{y'}{y} = \frac{\bar{L}}{\bar{L}'}$$

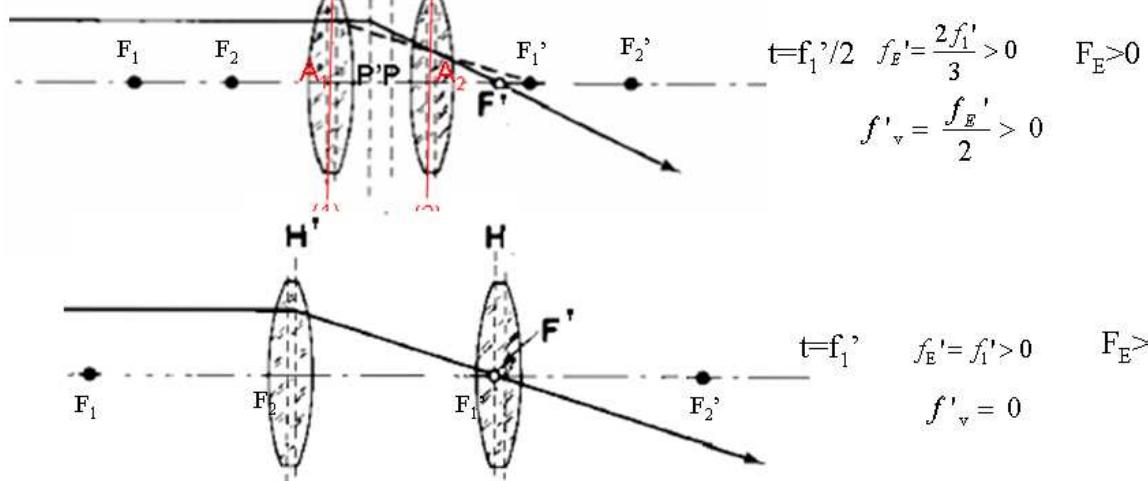
Cosa succede al variare di t ?

Consideriamo due lenti sottili convergenti di uguale focale $f_1' > 0$. Vediamo come variano la posizione dei piani principali, la distanza focale effettiva e il potere effettivo del sistema al variare della separazione tra le due lenti.

$$f_1' = f_2' \Rightarrow F_1 = F_2 = \frac{1}{f_1'} \quad F_E = F_1 + F_2 - tF_1F_2 = F_1(2 - t) \quad f_E' = \frac{f_1'f_2'}{f_1'+f_2'-t} = \frac{f_1'^2}{2f_1'-t}$$

$$A_2P' = -t \frac{F_1}{F_E} = -\frac{f_1't}{2f_1'-t} \quad < 0 \text{ P' è a sinistra di A}_2 \quad PA_1 = t \frac{F_2}{F_E} = \frac{f_1't}{2f_1'-t} \quad > 0 \text{ P è a destra di A}_1$$

$$f'_{\text{v}} = f_E' \left(1 - \frac{t}{f_1'} \right)$$



Continuiamo ad aumentare t , ma facciamo il disegno più piccolo perché il tutto entri nel foglio

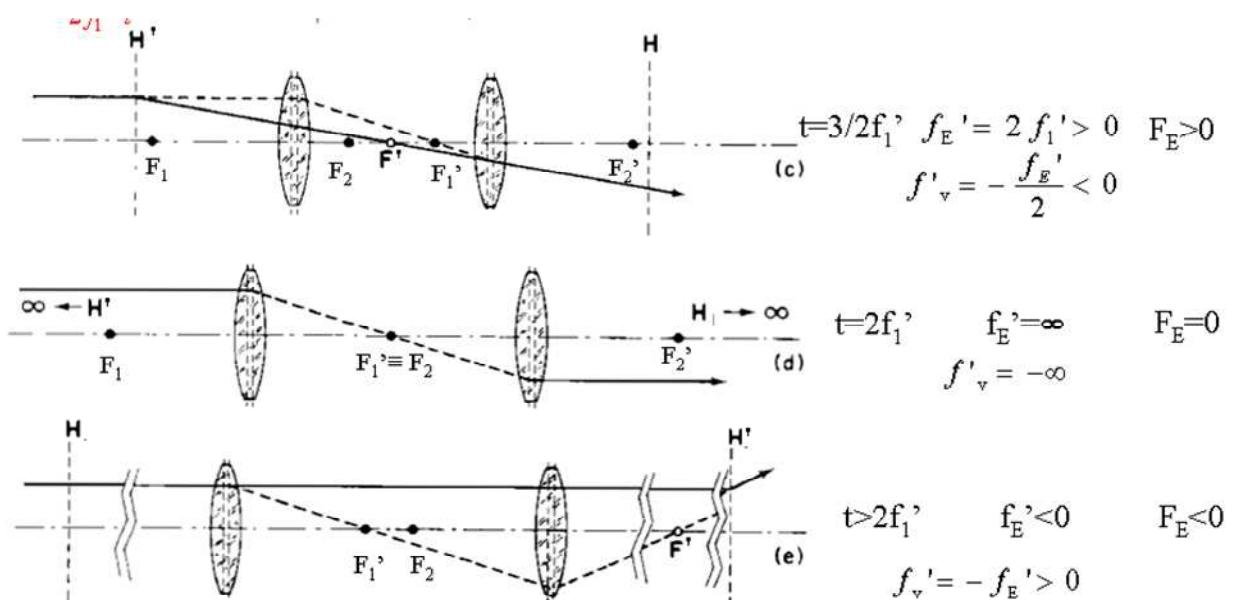


Figure 3-6 Location of principal planes of a system of two lenses as a function of distance between the lenses. Focal points of individual lenses are identified by dots, second focal points of system, F' by hollow circles.

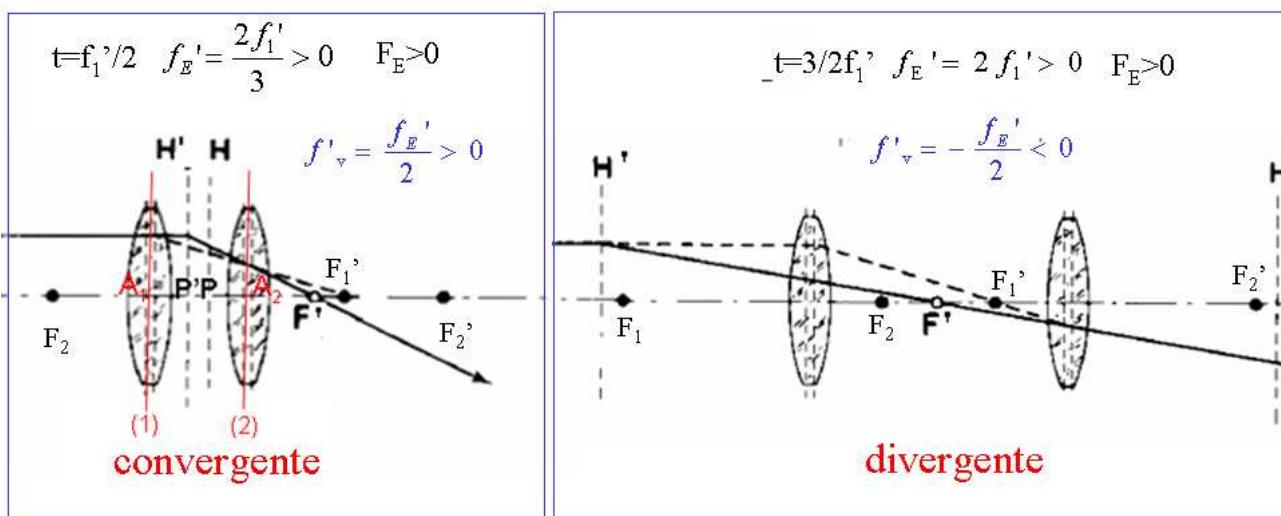
Convergenza o divergenza di un sistema di lenti

Come abbiamo visto, il un sistema di lenti la posizione dei piani principali varia significativamente al variare della separazione tra le lenti e i piani principali possono anche invertirsi. Il concetto di sistema convergente o divergente non è quindi strettamente legato al segno del potere equivalente del sistema ottico.

Un sistema di due lenti si dirà convergente o divergente rispetto a un fascio di luce parallelo all'asse ottico che incide sulla prima lente, se i raggi uscenti dalla seconda lente sono rispettivamente convergenti verso l'asse o divergenti.

Occorre chiarire che il segno della distanza focale equivalente e del potere equivalente del sistema non indica necessariamente che il sistema sia convergente o divergente.

Viceversa per poter stabilire la convergenza o divergenza dobbiamo calcolare la distanza focale frontale posteriore: se f'_v è positiva allora il sistema è convergente, altrimenti è divergente.

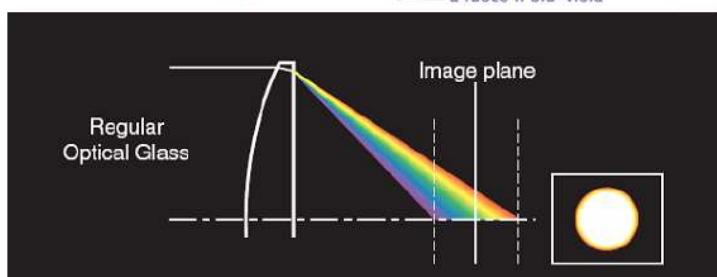
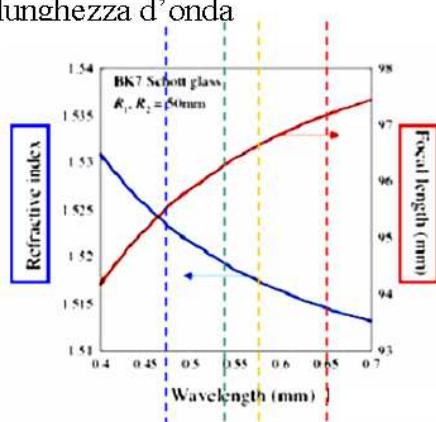
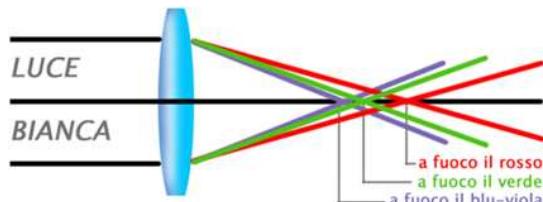


3.2.4 Aberrazioni prodotte dalle lenti

Aberrazione cromatica

Poiché l'indice di rifrazione n dipende dalla lunghezza d'onda, la distanza focale della lente varia a sua volta con la lunghezza d'onda della luce. Si ha infatti

$$\frac{1}{f'} = (n(\lambda) - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$



La luce bianca che attraversa la lente non si focalizza tutta nello stesso punto. Di conseguenza, sul piano immagine, si forma una alone colorato intorno all'immagine dell'oggetto visto attraverso la lente

Una sola lente è sempre soggetta a cromatismo. Per contrastare l' "aberrazione cromatica" si è soliti utilizzare, nell'obiettivo, più lenti che generano aberrazioni cromatiche di intensità equivalenti ma di segno opposto, così che l'una compensi l'altra. Quando, grazie a questo accorgimento, si fa in modo che il rosso ed il blu finiscano a fuoco sullo stesso punto, siamo in presenza di un obiettivo "acromatico".

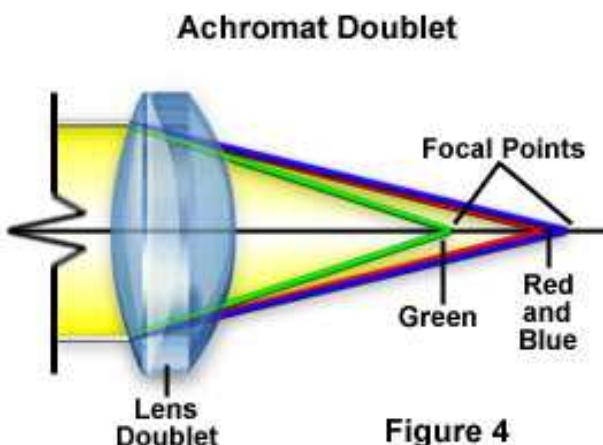
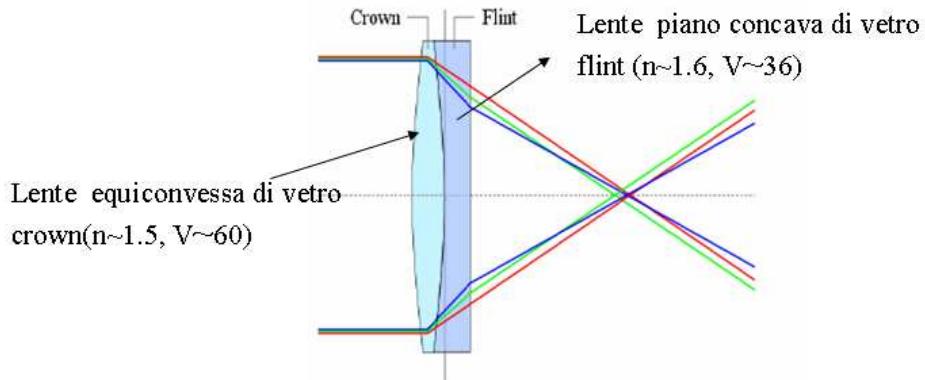


Figure 4

Per correggere l'aberrazione cromatica si può usare un doppietto di Fraunhofer: costituito da due lenti sottili di vetri diversi e di opportuno potere incollate tra loro.

Doppietto di Fraunhofer: accoppiamento di due tipi di vetro

- 1) Vetro *crown*: n basso & bassa dispersione (n varia lentamente con λ)
- 2) vetro *flint*: n alto & alta dispersione (n varia più velocemente con λ)



Dovremo imporre nella progettazione del doppietto:

- 1- che il potere totale F_D alla lunghezza d'onda intermedia della linea D (giallo) sia pari al potere che ci serve
- 2- che il potere nel rosso sia uguale al potere nel blu.

Poiché il potere di un doppietto a contatto è dato dalla somma dei poteri, avremo:

$$F_D = F_D^{vc} + F_D^{vf}$$

$$F_C = F_C^{vc} + F_C^{vf} = F_F = F_F^{vc} + F_F^{vf}$$

Per la prima di queste condizioni, dobbiamo imporre:

$$F_D = F_D^{vc} + F_D^{vf} = \underbrace{\left(n_D^{vc} - 1 \right)}_{crown} \left(\frac{1}{r_1^{vc}} - \frac{1}{r_2^{vc}} \right) + \underbrace{\left(n_D^{vf} - 1 \right)}_{flint} \left(\frac{1}{r_1^{vf}} - \frac{1}{r_2^{vf}} \right) = K^{vc} \left(n_D^{vc} - 1 \right) + K^{vf} \left(n_D^{vf} - 1 \right)$$

dove abbiamo posto:

$$K^{vc} = \left(\frac{1}{r_1^{vc}} - \frac{1}{r_2^{vc}} \right); \quad K^{vf} = \left(\frac{1}{r_1^{vf}} - \frac{1}{r_2^{vf}} \right)$$

Vogliamo poi imporre che il nostro doppietto abbia lo stesso potere nel rosso e nel blu ossia che:

$$F_C = F_F$$

potere nel rosso = potere nel blu

$$(n_C^{vc} - 1)K^{vc} + (n_C^{vf} - 1)K^{vf} = (n_F^{vc} - 1)K^{vc} + (n_F^{vf} - 1)K^{vf}$$

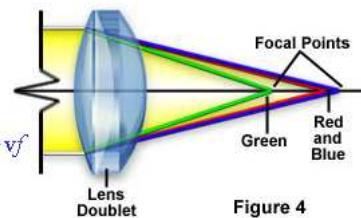


Figure 4

$$n_C^{vc} K^{vc} + n_C^{vf} K^{vf} = n_F^{vc} K^{vc} + n_F^{vf} K^{vf} \rightarrow K^{vc} (\underbrace{n_F^{vc} - n_C^{vc}}_{\downarrow}) = -K^{vf} (\underbrace{n_F^{vf} - n_C^{vf}}_{\downarrow})$$

$$\text{In termini del numero di Abbe} \quad V = \frac{(n_D - 1)}{(n_F - n_C)} \quad \frac{(n_D^{vc} - 1)}{V^{vc}} \quad \frac{(n_D^{vf} - 1)}{V^{vf}}$$

Si ha quindi:

$$\frac{K^{vc} (n_D^{vc} - 1)}{V^{vc}} = - \frac{K^{vf} (n_D^{vf} - 1)}{V^{vf}} \Rightarrow \frac{K^{vc} (n_D^{vc} - 1)}{K^{vf} (n_D^{vf} - 1)} = \frac{F_D^{vc}}{F_D^{vf}} = - \frac{V^{vc}}{V^{vf}}$$

Debbono quindi valere le due relazioni:

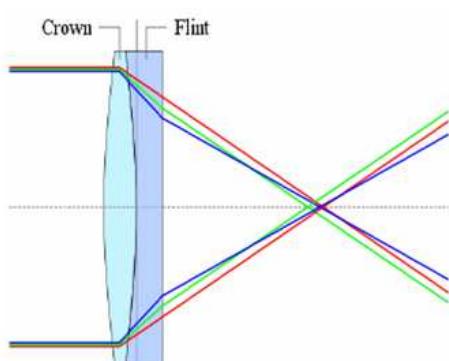
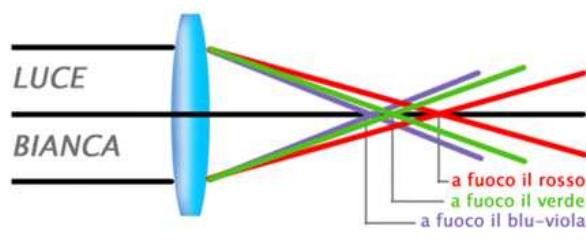
$$\begin{cases} \frac{F_D^{vc}}{V^{vc}} + \frac{F_D^{vf}}{V^{vf}} = 0 \\ F_D = F_D^{vc} + F_D^{vf} \end{cases} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \begin{aligned} F_D^{vc} &= F_D \frac{V^{vc}}{V^{vc} - V^{vf}} \\ F_D^{vf} &= -F_D \frac{V^{vf}}{V^{vc} - V^{vf}} \end{aligned}$$

Esempio

Lente singola equiconvessa di vetro crown con $F_D = +10 \text{ D}$ ($f_D = 100 \text{ mm}$)
presenta una separazione tra i fuochi C e F pari a **1.6mm**

Doppietto di Fraunhofer di pari Potenza e vetri come in Tab
presenta una separazione tra i fuochi C e F pari a **$12\mu\text{m}$!!**

vetro	n_C	n_D	n_F
crown	1.50868	1.51100	1.51673
flint	1.61611	1.62100	1.63327



$$V = \frac{(n_D - 1)}{(n_F - n_C)}$$

$$V^{\text{flint}} = \frac{(0.621)}{(1.63327 - 1.61611)} = 36$$

$$V^{\text{crown}} = \frac{(0.51)}{(1.51673 - 1.50868)} = 63$$

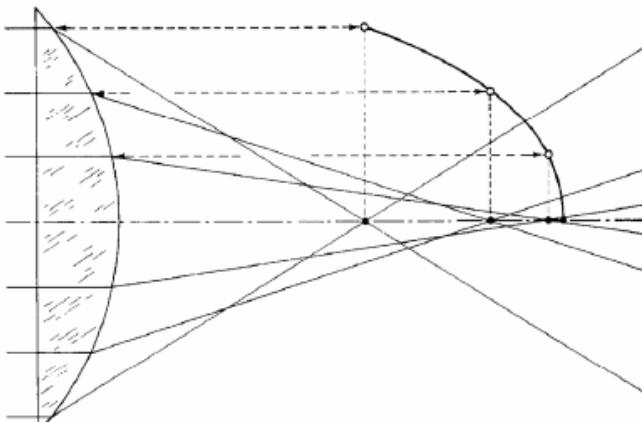
$$F_D = 10 \text{ D}$$

$$F_D^{vc} = F_D \frac{V^{\text{crown}}}{V^{\text{crown}} - V^{\text{flint}}} = 10 \frac{63}{63 - 36} = 23.3D$$

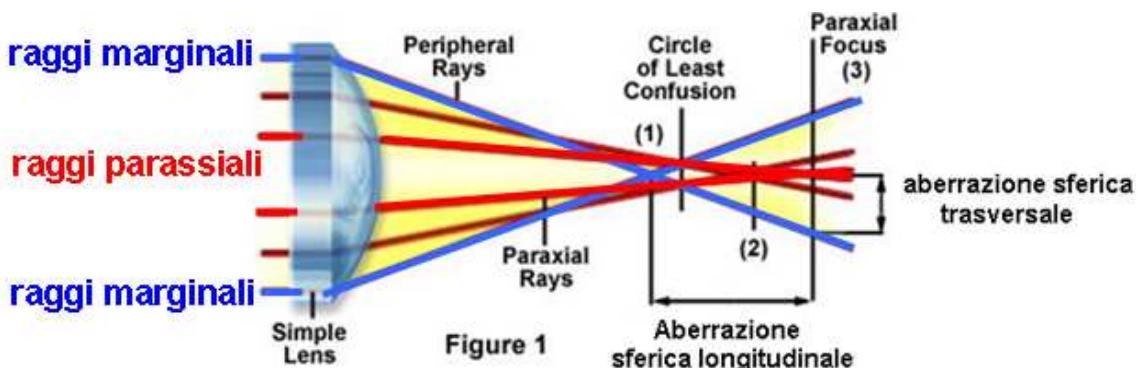
$$F_D^{vf} = -F_D \frac{V^{\text{flint}}}{V^{\text{crown}} - V^{\text{flint}}} = -10 \frac{36}{63 - 36} = -13.3D$$

Aberrazione sferica

L'aberrazione sferica è dovuta al fatto che i raggi più vicini all'asse ottico (raggi parassiali) e quelli più distanti (raggi marginali) non hanno una focale esattamente identica. Questo avviene perché i raggi più lontani dall'asse ottico non vale più l'approssimazione di Gauss. Nella figura seguente è riportato l'andamento della focale della lente in funzione della posizione del raggio parallelo che incide sulla lente stessa.



Si può vedere che i raggi che incidono nella regione più esterna della lente (**raggi marginali**) hanno una distanza focale minore rispetto a quelli che incidono in prossimità dell'asse ottico (**raggi parassiali**).

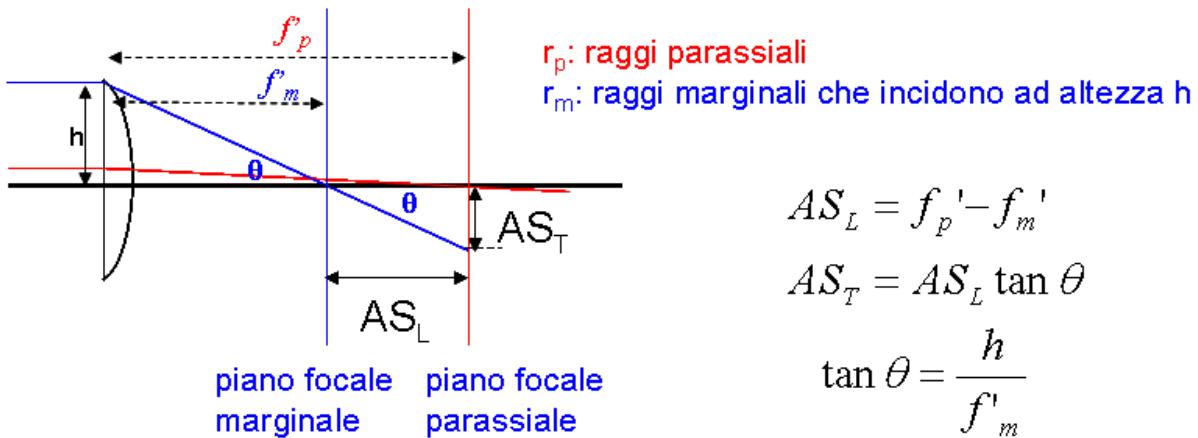


Nell'esempio riportato in figura possiamo osservare che il punto immagine parassiale è più lontano del punto immagine marginale. Possiamo quantificare il livello di aberrazione sferica definendo:

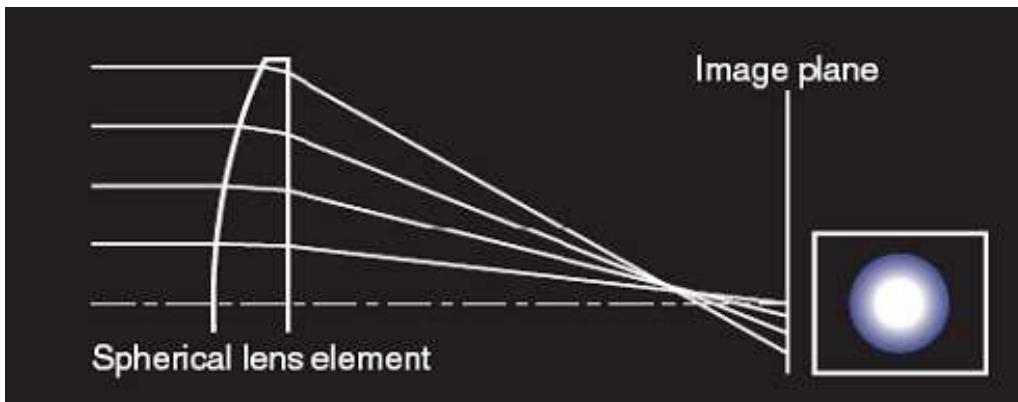
Aberrazione sferica longitudinale: distanza tra il secondo punto focale parassiale e marginale sull'asse ottico

Aberrazione sferica trasversale: distanza tra il raggio rifratto parassiale e marginale sul piano immagine parassiale.

Dalla figura seguente vediamo allora che la relazione tra l'aberrazione sferica trasversale e longitudinale è data da:



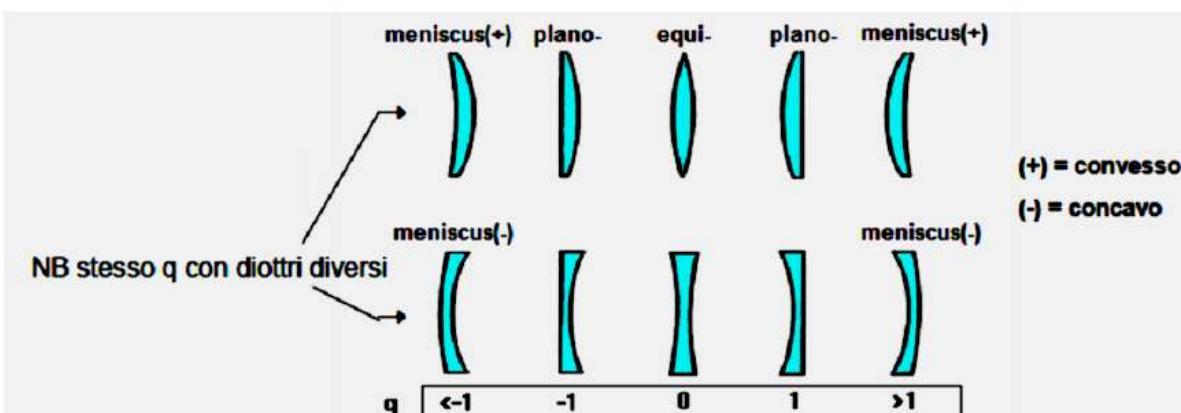
L'effetto di tale aberrazione è quello di trasformare un punto immagine, per esempio il secondo punto focale, sul piano immagine parassiale in un cerchio di dimensione finita.



L'aberrazione sferica di una lente di un dato potere può essere resa minima scegliendo opportunamente i raggi di curvatura. Infatti vi sono diverse scelte possibili dei raggi di curvatura della lente che danno luogo allo stesso valore del potere.

Nella seguente figura riportiamo lenti di diversa forma che hanno lo stesso potere, rispettivamente >0 nella fila in alto e <0 in quella in basso. Le diverse forme sono identificate dal valore del fattore

di forma della lente definito dalla quantità: $q = \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}$



Nella figura successiva è invece riportato il valore dell'aberrazione sferica longitudinale AS_L in funzione di q . Si può vedere che c'e' una forma "ottimale" per la quale l'aberrazione sferica è minima.

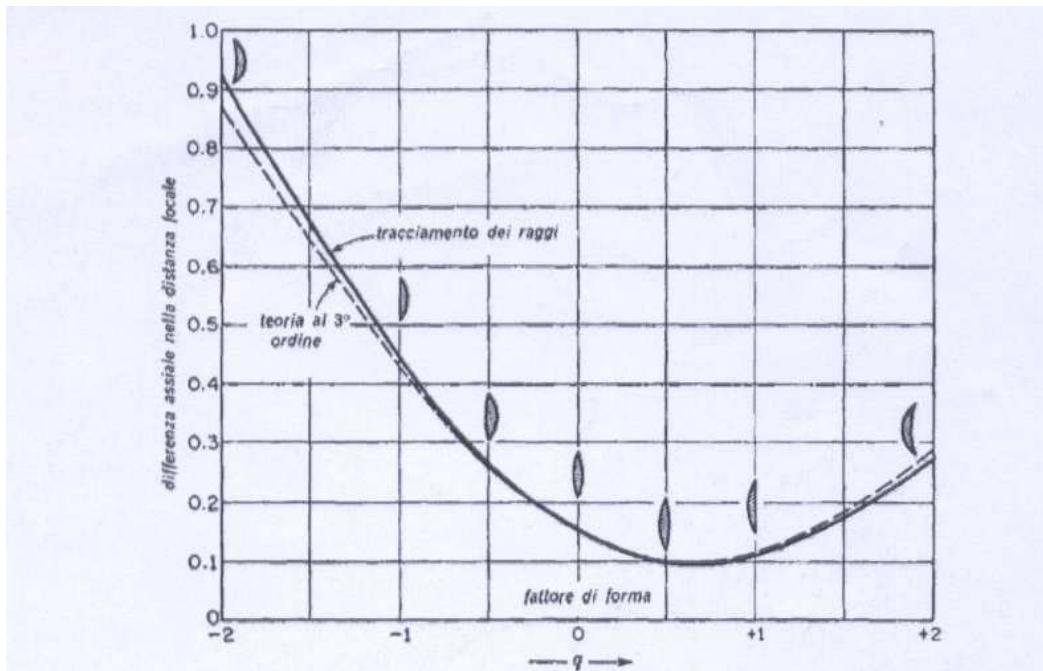
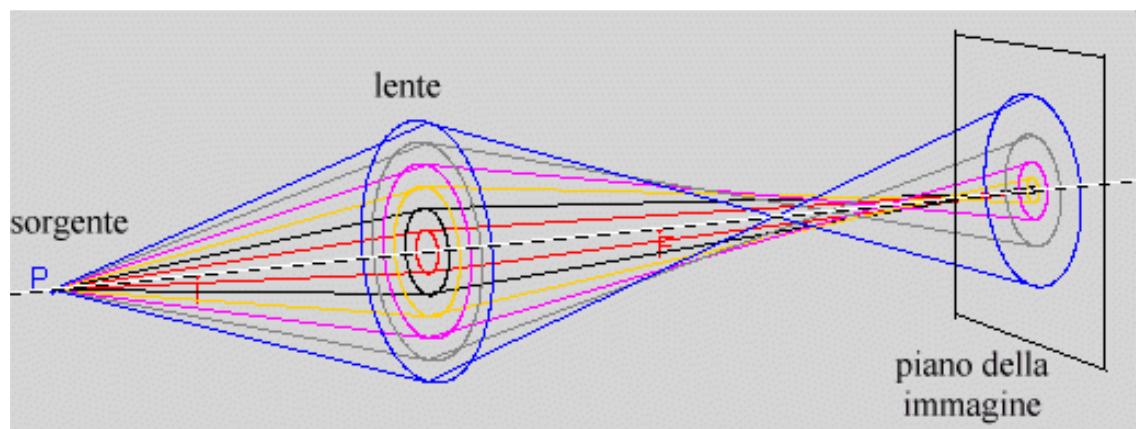


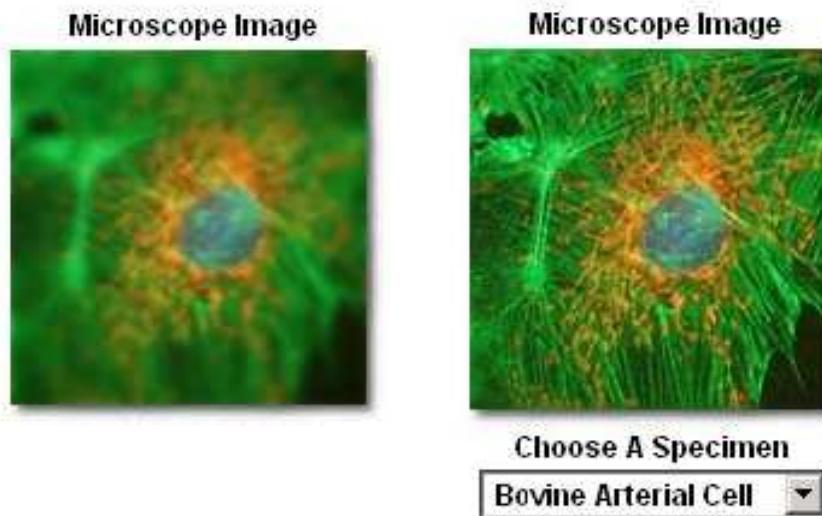
Grafico dell'aberrazione sferica relativa a lenti di forma diversa ma di uguale distanza focale.

Per le lenti considerate: $h = 1 \text{ cm}$, $f' = +10 \text{ cm}$, $n = 1,51700$

L'effetto di tale aberrazione è quello di trasformare un punto immagine sul piano immagine parassiale in un cerchio di dimensione finita.

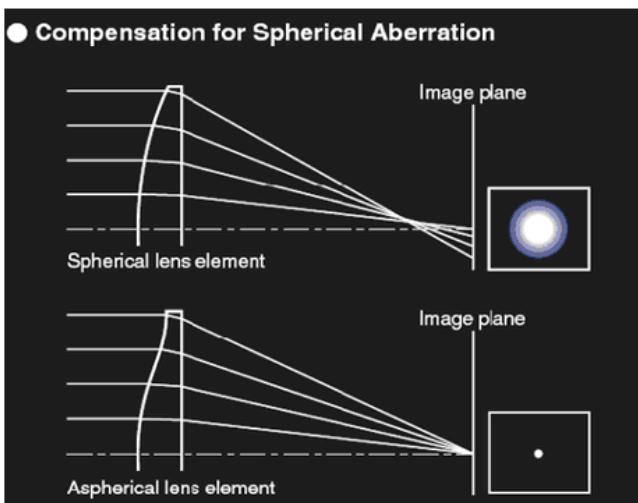


Nella figura seguente è mostrato l'effetto dell'aberrazione sferica sull'immagine prodotta da un microscopio in cui l'aberrazione sferica non è stata minimizzata e l'immagine dello stesso oggetto prodotta da un microscopio in cui l'aberrazione sferica è stata minimizzata

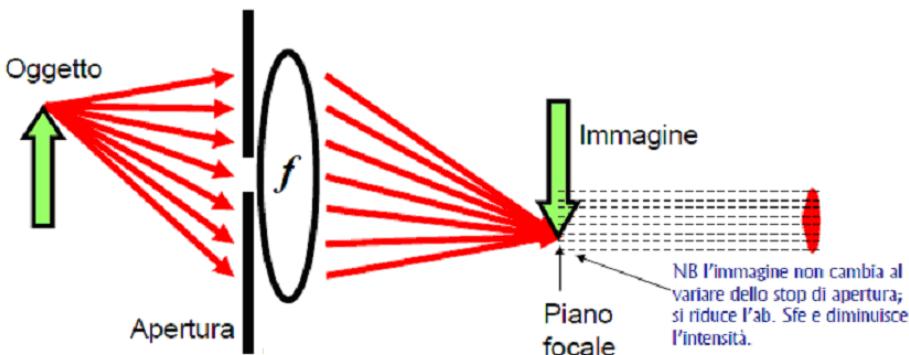


Altri metodi per correggere l'aberrazione sferica:

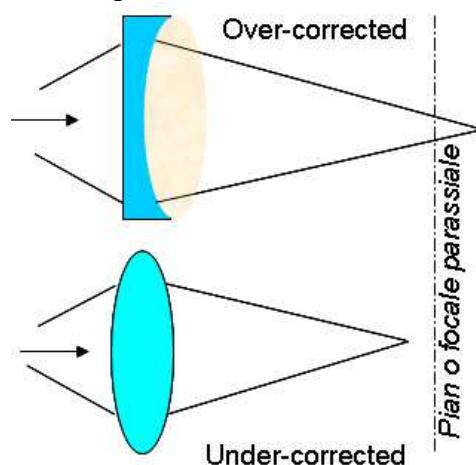
- a) Uso di lenti con superfici asferiche



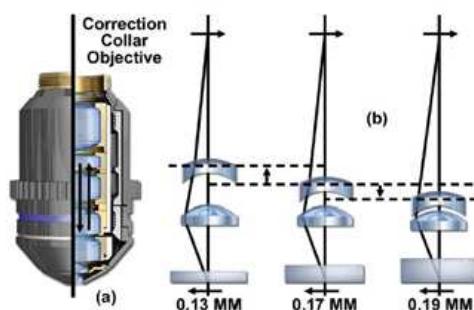
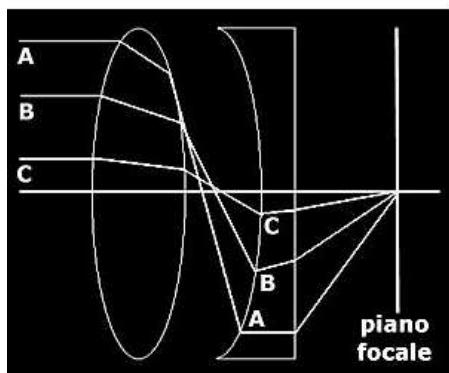
- b) Introduzione di diaframmi per selezionare solo raggi parassiali



- c) Utilizzazione di un doppietto di lenti nelle quali aberrazioni sferiche delle due lenti si compensino.



Abbinando una lente positiva con una negativa di minor potere (in modo che l'insieme rimanga positivo) è possibile far sì che le due aberrazioni sferiche si sommino algebricamente, annullandosi. In questo modo si portano tanto i raggi rifratti presso i bordi quanto i raggi rifratti presso il centro a convergere in un unico punto.



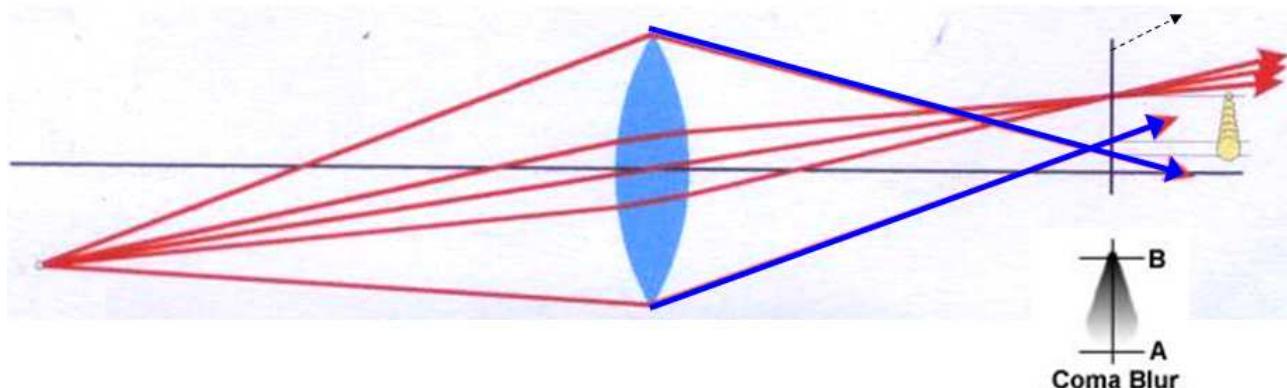
Coma

La coma è una aberrazione presente nell'immagine di oggetti fuori asse: i raggi passanti per i bordi della lente (raggi marginali) convergono a distanza diversa dalla lente rispetto ai raggi passanti per il centro (raggi parassiali) e a distanza diversa dall'asse ottico.

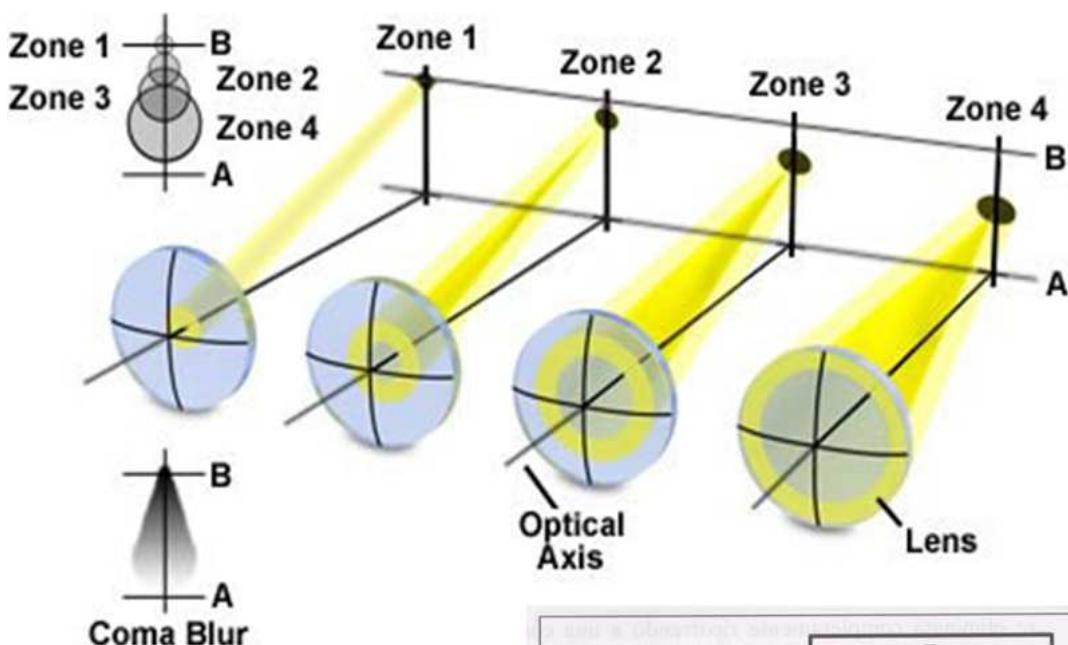
I raggi che incidono su diverse zone di apertura della lente danno origine, sul piano immagine parassiale, ad anelli luminosi di raggio differente e posizione trasversale differente.

Questi anelli, di grandezza crescente, si sovrappongono parzialmente dando origine nel piano immagine par assiale ad una macchia a forma di goccia che ricorda la coda di una cometa.

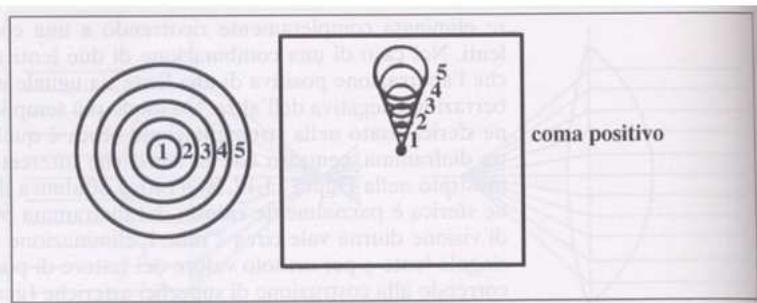
Piano immagine parassiale



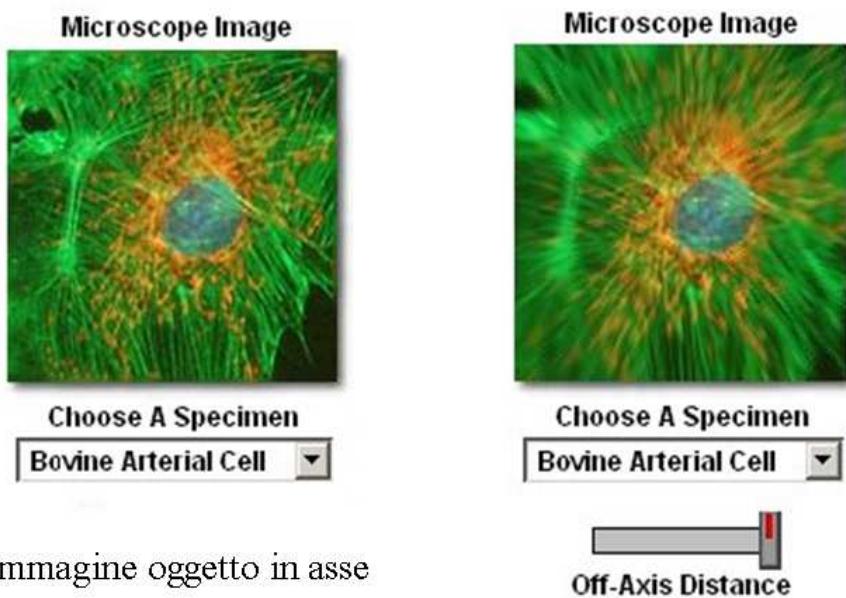
Off-Axis Comatic Aberration



coma negativo: la punta della cometa sta verso l'alto



Nell'immagine seguente è mostrato l'effetto del coma sull'immagine



Anche questa aberrazione può essere minimizzata scegliendo in maniera opportuna la forma della lente. In figura si mostra l'andamento dell'aberrazione coma in funzione del fattore di forma q precedentemente definito. Nello stesso grafico è riportato anche l'andamento dell'aberrazione sferica

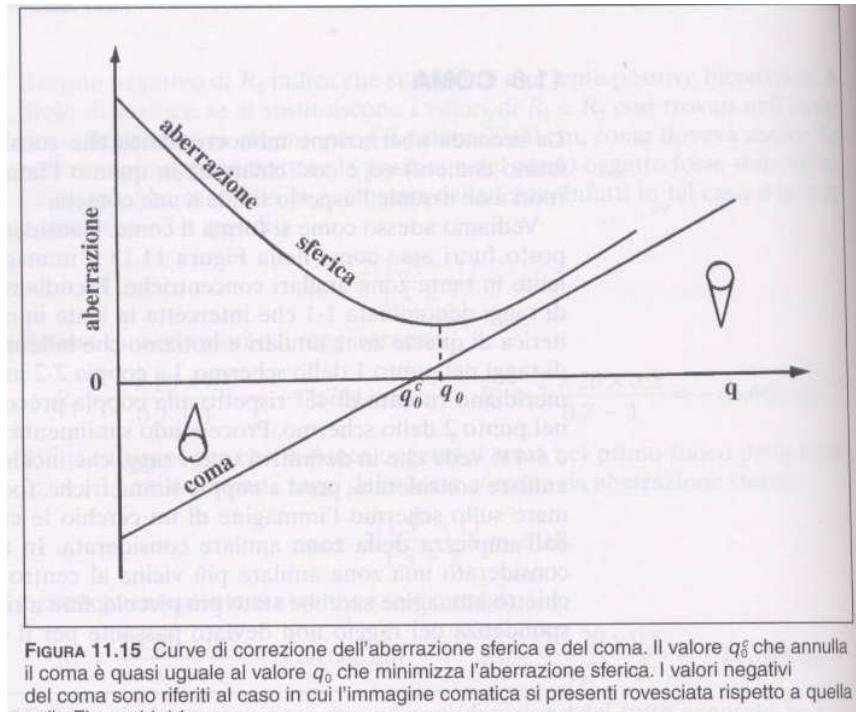


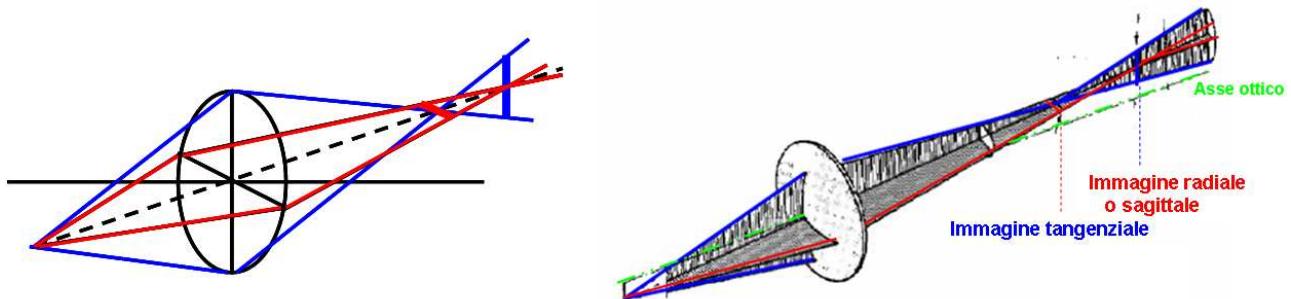
FIGURA 11.15 Curve di correzione dell'aberrazione sferica e del coma. Il valore q_0^c che annulla il coma è quasi uguale al valore q_0 che minimizza l'aberrazione sferica. I valori negativi del coma sono riferiti al caso in cui l'immagine comatica si presenti rovesciata rispetto a quella nella Figura 11.14.

Come si vede aberrazione sferica e coma sono minimizzati con valori molto simili di q . La forma ottimale della lente permette di ottimizzare sia aberrazione sferica che coma.

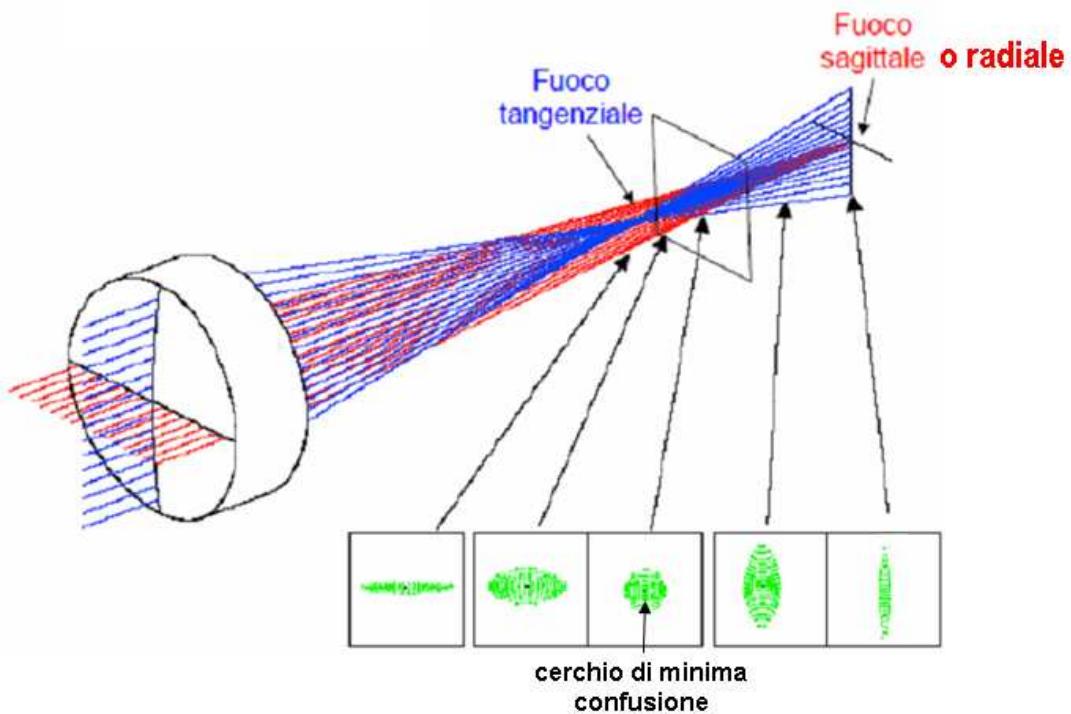
Astigmatismo

Anche l'astigmatismo è un'aberrazione che come il coma altera l'immagine formata dalla lente di punti oggetto fuori asse: il cono di raggi emessi da un punto oggetto fuori asse incide asimmetricamente sulla lente e forma su questa un ellisse con diametro maggiore nella direzione in cui l'oggetto è spostato rispetto all'asse.

La proiezione dei raggi nei due piani perpendicolari tra loro: piani tangenziale e sagittale è diversa, con il risultato che le focali in questi due piani sono anch'esse diverse.

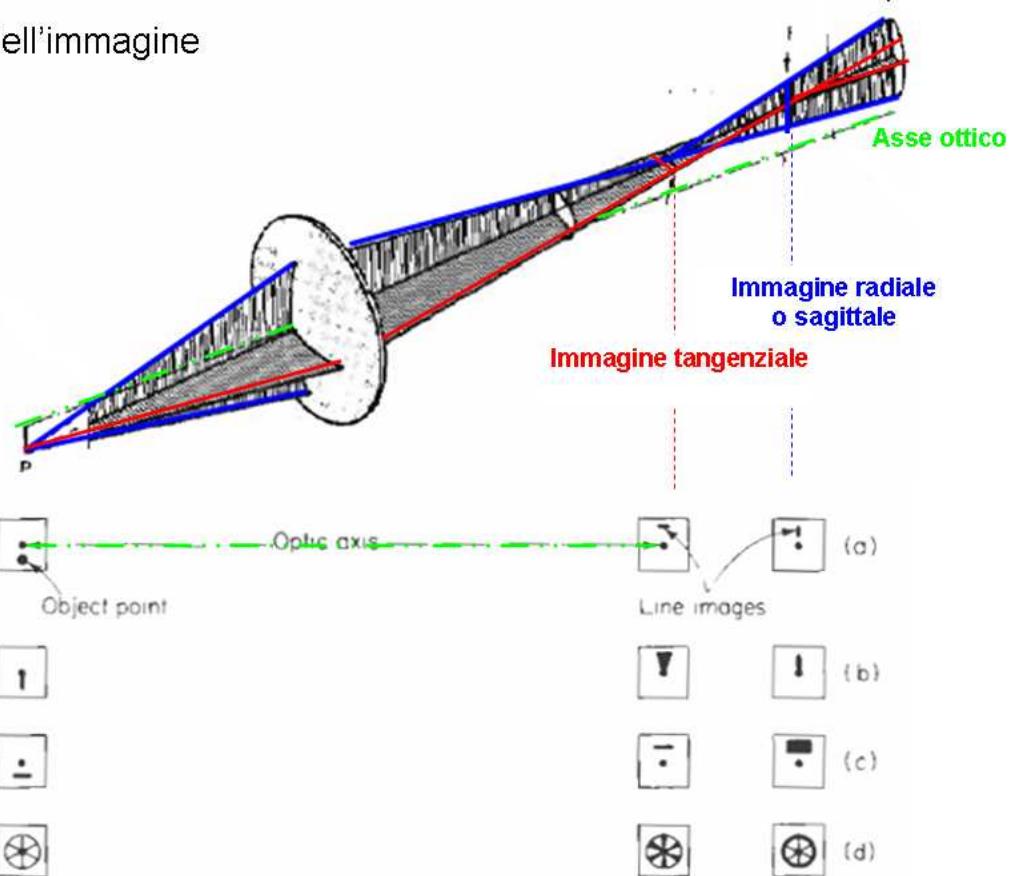


In presenza di astigmatismo, la forma dell'immagine di un oggetto puntiforme immagine di un oggetto puntiforme dipende da dove si pone lo schermo (piano immagine).



Pertanto al variare della forma dell'oggetto si ottengono le seguenti aberrazioni nell'immagine

Forma dell'immagine



Curvatura di campo

Al variare della posizione del punto P ortogonalmente all'asse otteniamo le superfici corrispondenti all'insieme dei punti immagine primaria (più vicina alla lente, immagine T tangenziale in figura) e secondaria (più lontana, R-radiale in figura). Anche se correggiamo l'astigmatismo otteniamo una unica superficie immagine, la superficie di Petzval. Tali superfici sono curve poiché, come abbiamo visto in precedenza, la relazione di coniugazione è soddisfatta non su un piano ma su una superficie curva. Questo produce un altro tipo di aberrazione: la curvatura di campo.

Tale effetto si ha anche se non si corregge l'astigmatismo ma si considera la superficie di miglior fuoco (corrispondente alla posizione del cerchio di minima confusione, al variare della distanza dell'oggetto dall'asse)

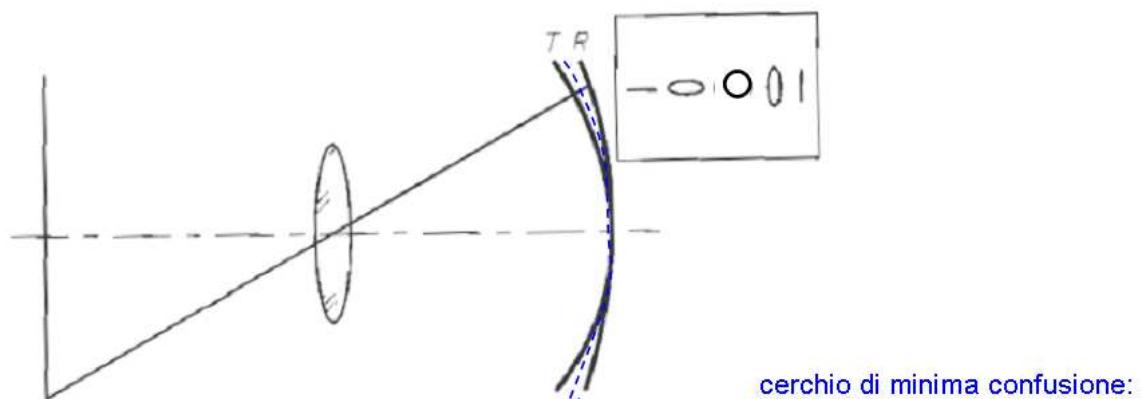
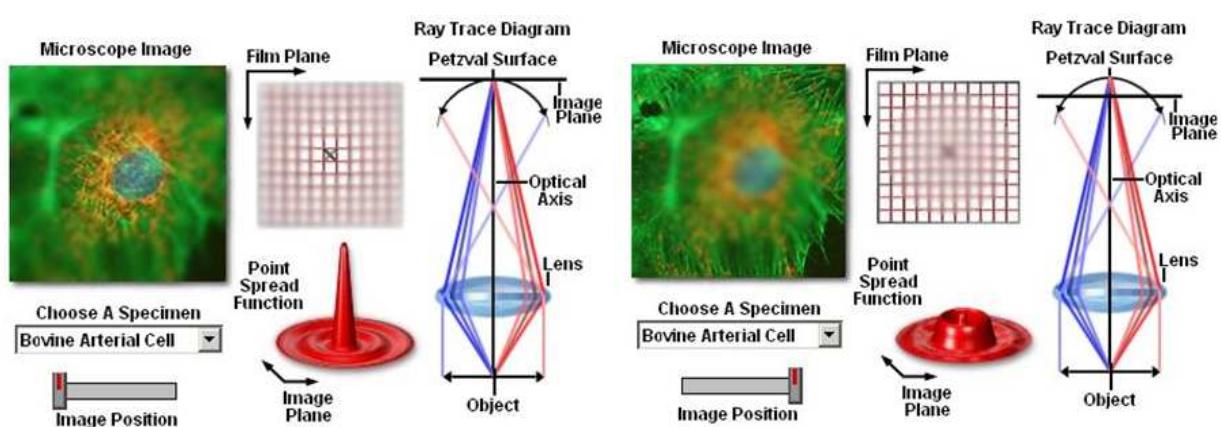


Figure 5-7 Tangential surface (*T*) and radial surface (*R*) as they occur in positive oblique astigmatism. Insert shows cross sections through conoid.

Ne segue che ponendo uno schermo piano nell'intersezione tra tali superfici e l'asse ottico (piano immagine valido in approssimazione di Gauss), l'immagine di un oggetto esteso risulta discretamente a fuoco nella zona centrale mentre è "sfocata" nella zona periferica. Spostando lo schermo si può avere la situazione opposta, come mostrato in figura.



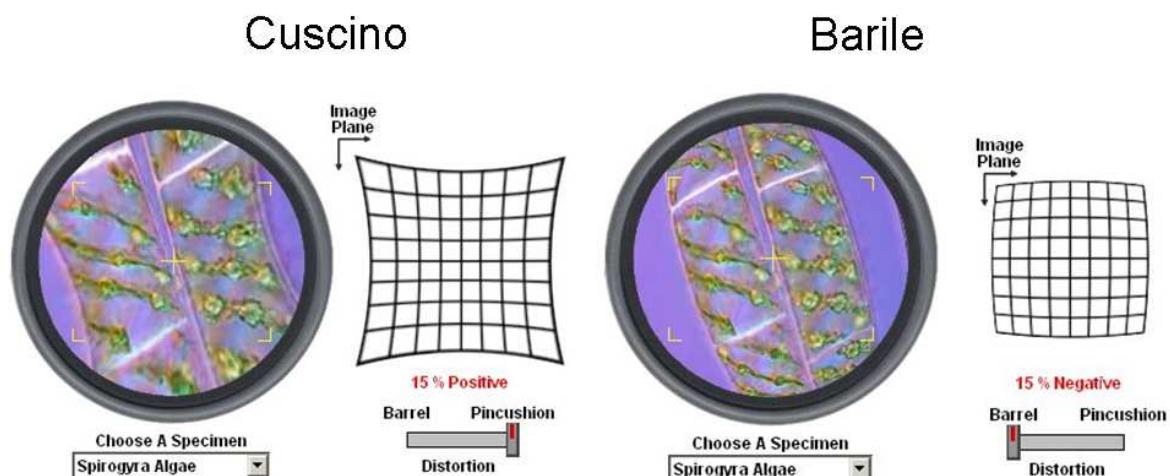
Distorsione dell'immagine

Il posizionamento di diaframmi (operazione che come già visto può essere utilizzata per far passare nella lente soltanto i raggi parassiali, i meno soggetti ad aberrazioni) lungo il cammino ottico non è esente da disturbi: se i diaframmi sono collocati troppo vicini alle lenti e agli specchi si causa il fenomeno della **distorsione**. Tale aberrazione deforma il campo di vista variandone l'ingrandimento trasversale verso i bordi ("stiracchiandoli" cioè verso il centro o al contrario allargandoli). La distorsione, che può essere limitata attraverso l'utilizzo di un sistema più complesso di diaframmi e lenti, dipende esclusivamente dall'inclinazione dei raggi

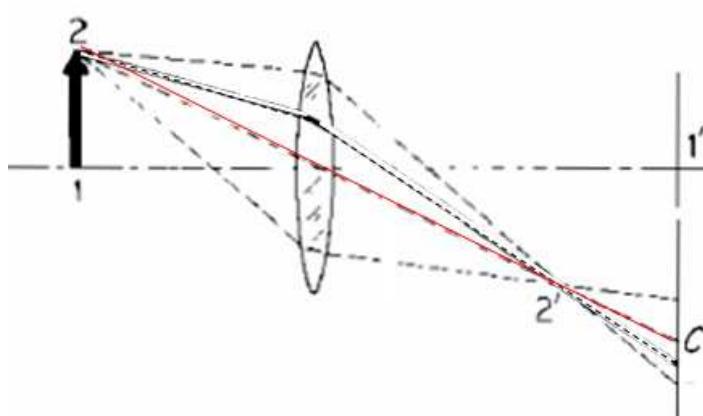
Diversamente dalle altre aberrazioni, la distorsione non è correlata alla focheggiaatura ma alla forma delle immagini. Essa è dovuta al fatto che quando non è più valida l'approssimazione di Gauss, l'ingrandimento trasversale di un oggetto esteso non è costante ma dipende da quanto ciascuna parte dell'oggetto è distante dall'asse ottico. Pertanto l'immagine è una rappresentazione distorta dell'oggetto

Anche in questo caso l'effetto è presente solo sui raggi non parassiali che vengono diversamente deviati causando un cambiamento di magnificazione. Abbiamo due tipi di distorsione:

- Distorsione a cuscino: m aumenta quanto più i raggi sono obliqui
- Distorsione a barile: m diminuisce quanto più i raggi sono obliqui



Per capire come nasce la distorsione, consideriamo l'immagine che si forma sullo schermo S dell'oggetto 1-2, mostrato in figura.



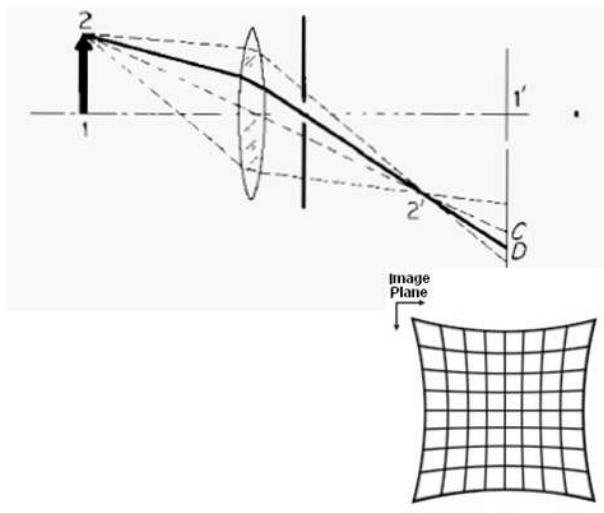
Il punto 1, sull'asse ottico, ha il suo punto immagine 1' sullo schermo.

Il punto 2, significativamente fuori asse (non è più valida l'approssimazione di Gauss) ha il suo punto immagine nel punto 2' (astigmatismo e curvatura di campo) situato prima dello schermo. Quando i raggi che formano l'immagine 2' raggiungono lo schermo si sono allargati intorno a C (punto immagine in approssimazione di Gauss). Per selezionare solo raggi parassiali possiamo mettere un diaframma o dopo la lente o prima. Vediamo l'effetto nei due casi.

Mettiamo un diaframma dopo la lente

selezioniamo solo alcuni raggi per cui lo spot sullo schermo relativo al 2 si restringe ed è centrato intorno al punto D più lontano di C dall'asse ottico.

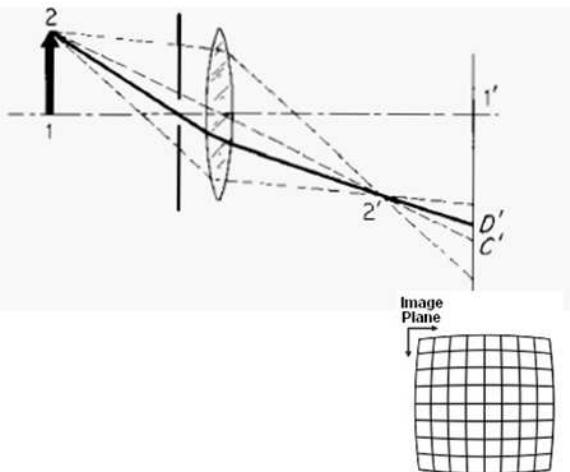
L'ingrandimento trasversale m della parte estremale dell'immagine è maggiore di quello della regione più vicina all'asse (distorsione a cuscino).



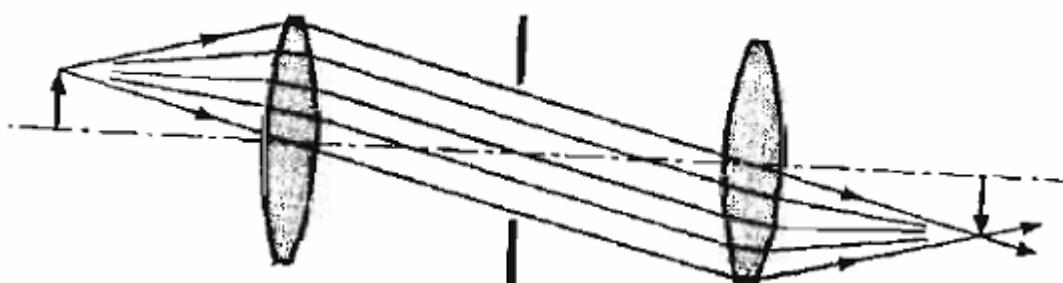
Mettiamo un diaframma prima della lente

selezioniamo solo alcuni raggi per cui lo spot sullo schermo relativo al 2 si restringe ed è centrato intorno al punto D' più vicino di C all'asse ottico.

L'ingrandimento trasversale m della parte estremale dell'immagine è minore di quello della regione più vicina all'asse (distorsione a barile).



Per eliminare la distorsioni si può ricorrere a un sistema di due lenti in cui si posiziona il diaframma tra le due lenti. In questo modo la deformazione a cuscino introdotta dalla prima lente viene compensata da quella a barile della seconda lente. Tale sistema viene definito **doppietto ortoscopico**.



Distorsione



Barrel



Pincushion

Ottimizzazione dei sistemi ottici: considerazioni generali

Un sistema ottico ideale dovrebbe soddisfare a due requisiti principali:

- dovrebbe essere stigmatico, cioè dovrebbe far corrispondere ad un punto oggetto uno ed un solo punto immagine (non dove cioè moltiplicare l'immagine osservata né rendere impossibile la perfetta focheggatura);

- dovrebbe essere ortoscopico cioè non deformare in alcun modo il campo osservato, in partenza piatto.

Tale obiettivo dovrebbe passare per la minimizzazione di almeno 6 termini relativi alle aberrazioni sopraccitate ed è a tutti gli effetti impossibile.

Bisogna realizzare dei buoni compromessi soprattutto tenendo in considerazione le diverse necessità di osservazione, ad esempio:

- le dimensioni lineari dell'oggetto da osservare;

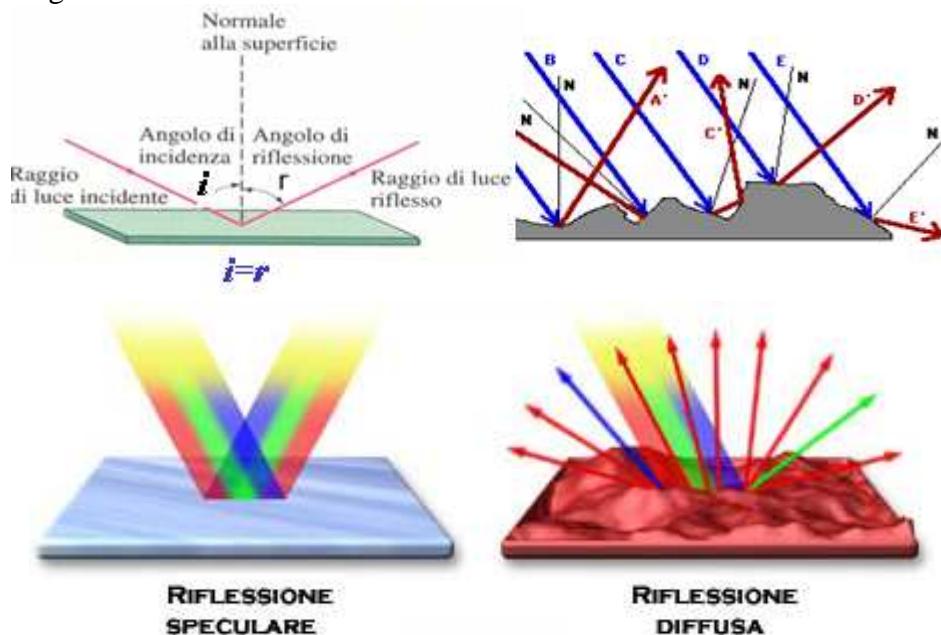
la risoluzione dello strumento,

il budget e la tecnologia di supporto disponibili, dal momento che alcune delle migliori tecniche di correzione delle aberrazioni sono anche molto costose.

3.3 Gli specchi

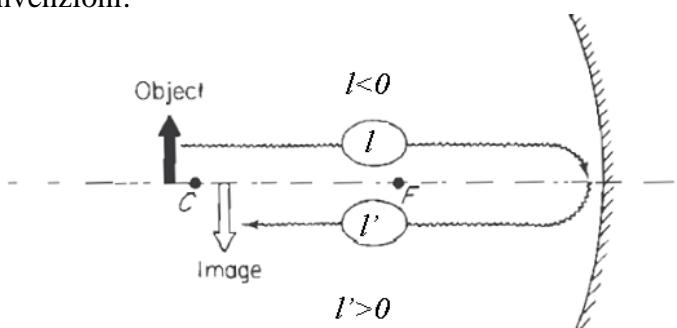
L'immagine formata dagli specchi è conseguenza della legge di Snell della riflessione che ci dice che **l'angolo di incidenza = angolo di riflessione**.

Naturalmente tale legge vale per ogni raggio che incide su un qualsiasi punto della superficie riflettente. Perché si formi una immagine nitida la superficie riflettente deve essere liscia e lucida, altrimenti un fascio di luce che incide in una data direzione viene diffuso in diverse direzioni, come mostrato nelle figure in basso.



Gli specchi sono un altro elemento dei sistemi ottici che ha caratteristiche simili a quelle delle lenti: possono focalizzare la luce e formano immagini che possono essere reali o virtuali.

La differenza principale tra lenti e specchi sta nel fatto che gli specchi invertono il cammino della luce mentre le lenti la lasciano passare. E' molto utile, soprattutto nell'analisi di sistemi ottici complessi costituiti da elementi diottrici e da specchi, continuare ad usare coordinate che misurino le distanze assiali nella direzione di propagazione della luce. Pertanto nel caso degli specchi si usano le seguenti convenzioni:



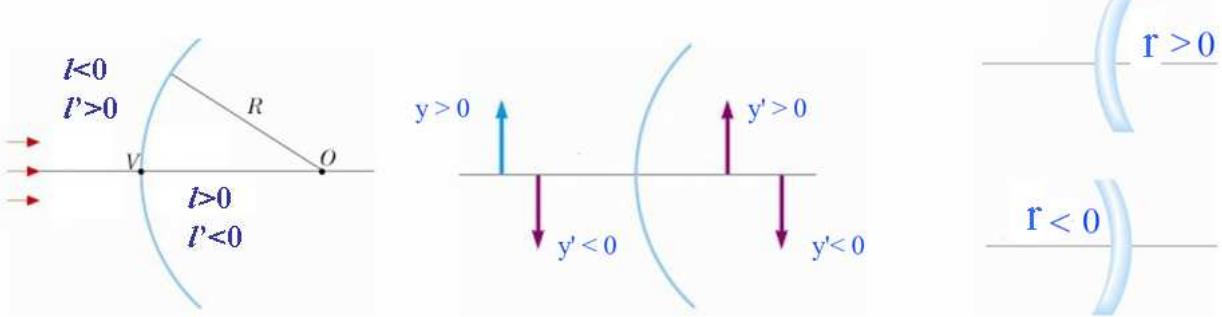
$I < 0$ se l'oggetto è a sinistra del vertice dello specchio:

$I' > 0$ se l'immagine è a sinistra del vertice dello specchio:

Con queste convenzioni anche per gli specchi le coordinate di un oggetto reale sono negative e quelle di un'immagine reale sono positive, come nelle lenti.

Le altre convenzioni restano le stesse delle lenti.

Complessivamente avremo quindi:



1. Disegnare tutte le figure in modo che la luce incidente sulla superficie rifrangente o riflettente provenga da sinistra
2. Le distanze oggetto (l) misurate alla sinistra del vertice, in direzione opposta alla propagazione della luce sono negative. Le distanze misurate alla destra del vertice sono positive.
3. Le distanze immagine (l') si considerano positive quando l'immagine è alla sinistra del vertice della superficie nella direzione di propagazione della luce riflessa
4. I raggi di curvatura (r) sono misurati dalla superficie verso il centro della curvatura. Sono positivi quando il centro di curvatura C giace alla destra del vertice (superficie convessa) e negativi quando C giace alla sinistra del vertice (superficie concava)
5. Le dimensioni trasversali sono positive quando sono misurate al disopra dell'asse, negative al disotto.

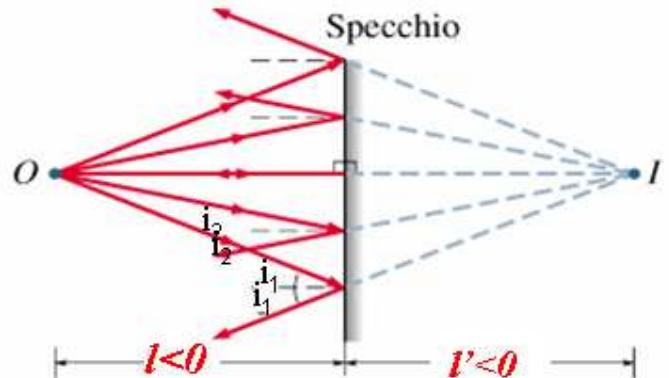
3.3.1 Lo specchio piano

Consideriamo un oggetto puntiforme O e determiniamo il corrispondente punto immagine generato da uno specchio piano. Come si vede dalla figura, i raggi luminosi provenienti dal punto O sono riflessi ma i loro prolungamenti oltre lo specchio si incontrano nel punto I , detto immagine di O .

L'immagine è virtuale in quanto i raggi luminosi non passano per I .

Si può osservare che per trovare il punto immagine basta disegnare 2 raggi:

- 1) Raggio normale alla superficie: cambia solo il verso
- 2) Una altro raggio avente angolo di incidenza θ



I triangoli rettangoli aOb e alb sono uguali
 \downarrow
 $Ob = bl$



Da tale costruzione geometrica ricaviamo che:

Il punto immagine si trova sulla retta passante per il punto oggetto perpendicolare al piano dello specchio e a una distanza da questo pari alla distanza dell'oggetto dal piano

Se l'oggetto è esteso possiamo applicare il procedimento precedente per i due punti estremali dell'oggetto, come mostrato in figura.

Si può osservare che:

L'immagine riflessa da un oggetto esteso ha la stessa altezza e lo stesso orientamento dell'oggetto

$$\text{L'ingrandimento } m = \frac{y'}{y} = 1$$

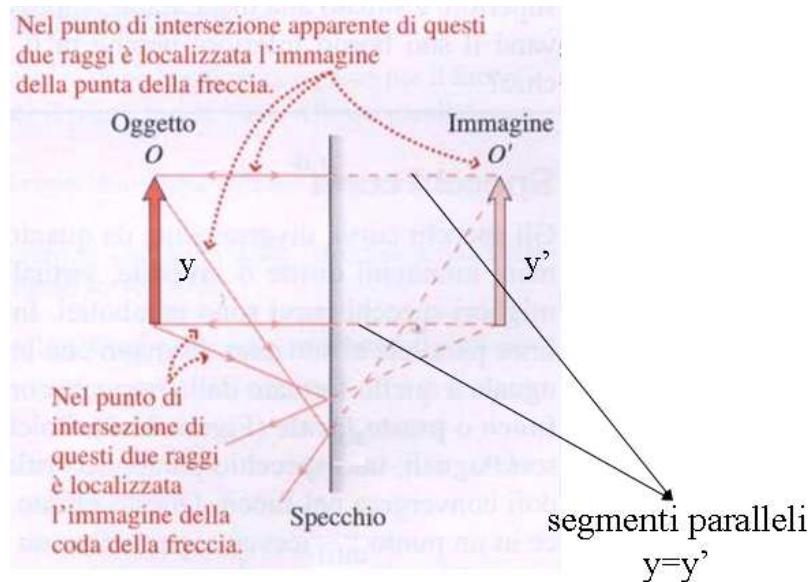
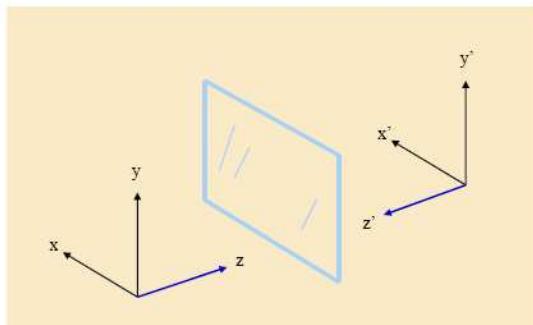


Immagine di oggetti 3D

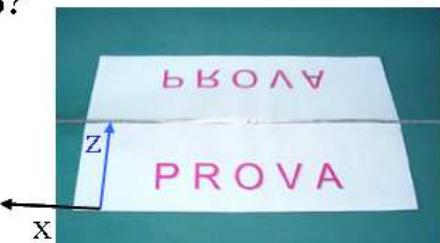


L'immagine virtuale di ogni punto dell'oggetto giace sulla normale allo specchio ad una distanza pari alla distanza oggetto-specchio ma dietro lo specchio.

Che succede nella direzione parallela allo specchio?



Il palmo della mano sinistra si trova di fronte allo specchio e così anche la sua immagine. Questo fa sì che l'immagine sembri la mano destra



la scritta è fatta in modo tale da apparire AMBULANZA nello specchietto retrovisore del veicolo che la precede.

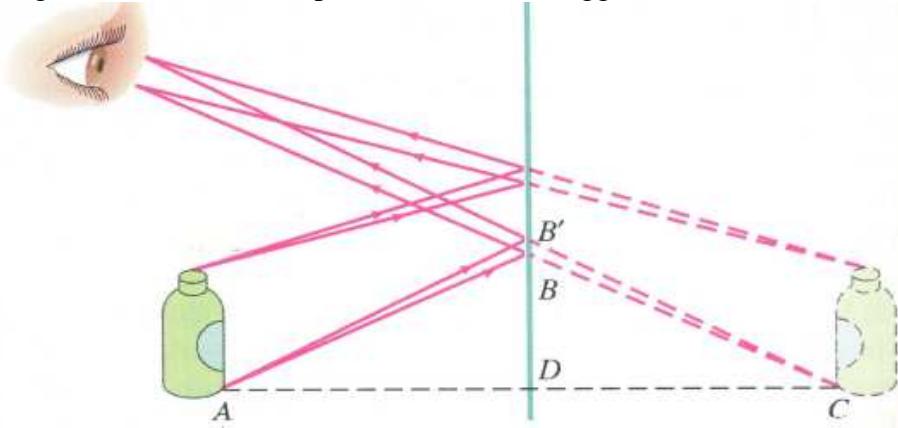


L'inversione di direzione della luce sulla superficie speculare costringe un osservatore che guardava l'oggetto-sorgente a girarsi per guardare l'immagine attraverso lo specchio. A seguito di questa rotazione l'immagine gli appare rovesciata da sinistra a destra

L'immagine di uno specchio piano è dritta ma speculare

Osservazione dell'immagine in specchi di dimensioni finite

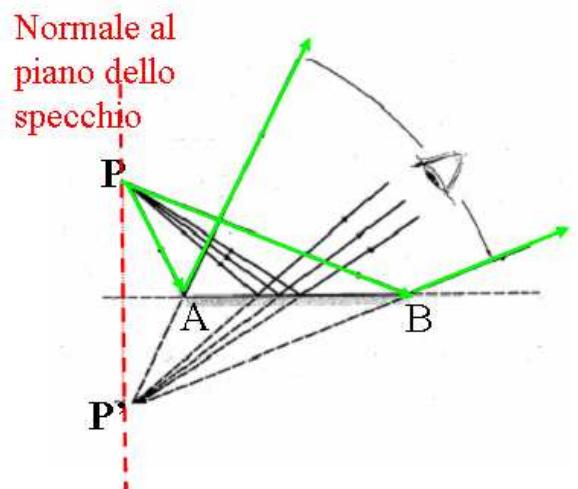
L'osservazione dell'immagine è operata dall'occhio umano o da un sistema ottico ausiliario; Poiché la luce non passa fisicamente per l'immagine virtuale, tale immagine non può essere acquisita attraverso uno schermo o una pellicola. L'occhio interpreta i raggi divergenti dai punti immagine virtuale come se provenissero da un oggetto.



Perché l'osservatore veda un punto immagine i raggi divergente da tale punto devono arrivare fisicamente al suo occhio

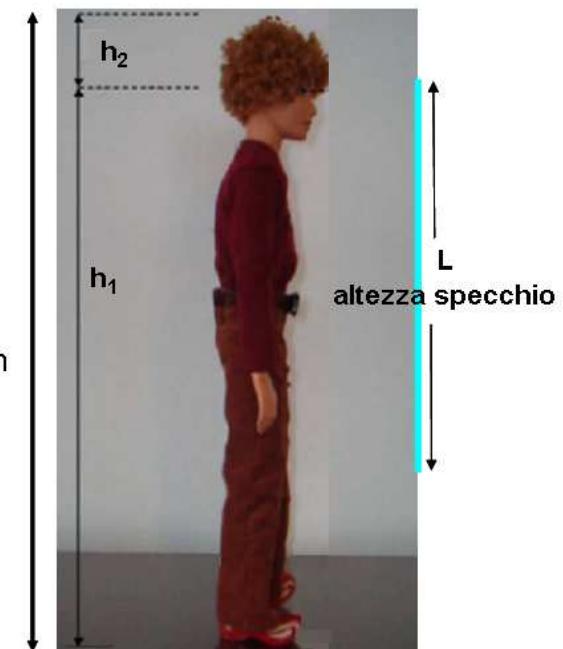
In presenza di uno specchio di dimensione finita, l'immagine sarà completamente visibile solo se l'occhio dell'osservatore intercetterà raggi provenienti da tutti punti dell'immagine.

Consideriamo un singolo punto oggetto P. Si può vedere dalla figura che tale punto sarà visibile all'osservatore solo se il suo occhio sta nel cono individuato dai raggi provenienti da P e riflessi nei punti estremali A e B dello specchio



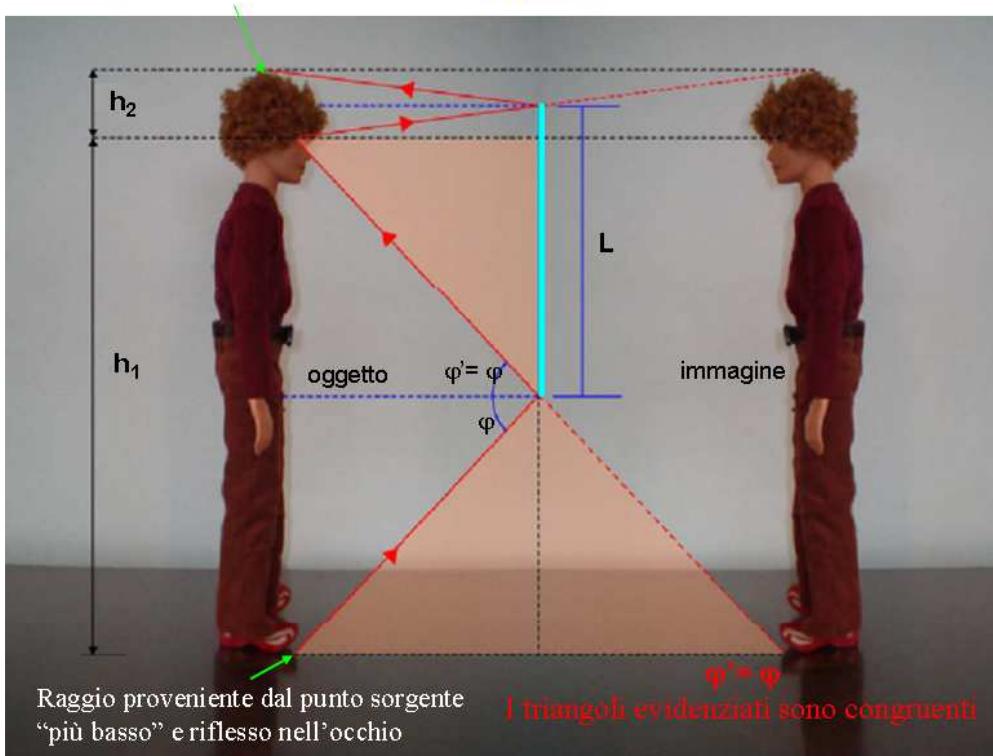
Esempio:

Si consideri una persona alta h con gli occhi distanti h_2 dalla sommità della testa e posta alla distanza p dallo specchio. Quanto deve essere alto lo specchio affinché la persona possa vedersi completamente?



Raggio proveniente dal punto sorgente “più alto” e riflesso nell’occhio

Le linee blu tratteggiate sono le normali allo specchio e le bisettrici degli angoli formati dal raggio incidente e da quello riflesso

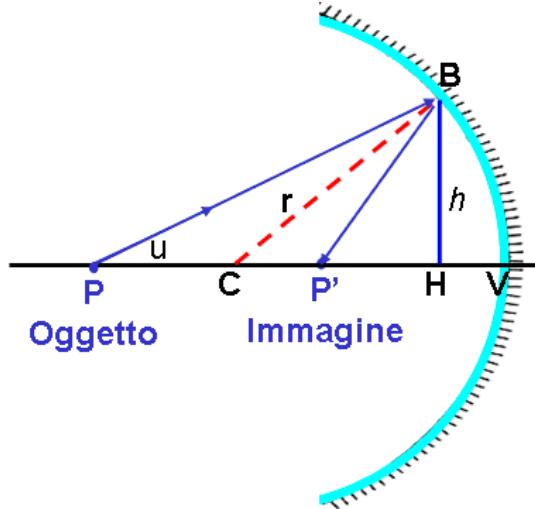


$$L = \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2} = \frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{h}{2}$$

Non dipende dalla distanza specchio persona!

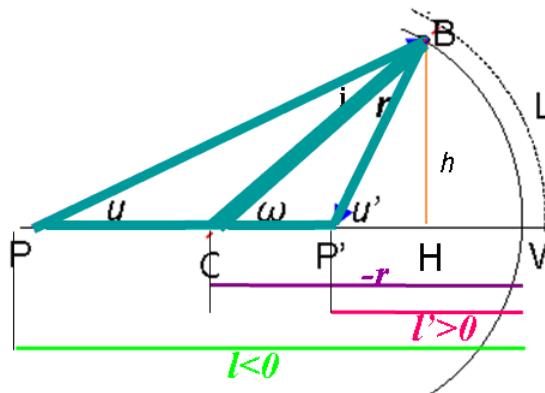
3.3.2 Specchi sferici

Consideriamo una superficie specolare ricavata da una porzione di superficie sferica. Nel piano della pagi a tale calotta sferica corrisponde la traccia di un arco di cerchio di centro C e raggio r , come mostrato in figura.



Il centro di simmetria della calotta è indicato con V (vertice dello specchio sferico) e l'asse ottico è la retta che passa per C e per V. Sempre con riferimento alla figura consideriamo un punto oggetto P posto sull'asse ottico. Si consideri, tra gli infiniti raggi emessi da P, quello che va a incidere sullo specchio nel punto B, ad un'altezza h dall'asse ottico. Chiamiamo u l'angolo tra tale raggio e l'asse ottico.

Troviamo il punto immagine P' generato sull'asse ottico dal raggio di angolo u applicando la legge di Snell per la riflessione. Facendo riferimento alla figura in basso, chiamiamo ω l'angolo tra la normale al punto B (retta passante per B e C) e l'asse ottico e u' l'angolo tra il raggio riflesso e l'asse ottico.



Utilizzando le proprietà dei triangoli, possiamo osservare che:

$$\text{Triang. } \text{PCB} \rightarrow u + i + (\pi - \omega) = \pi \rightarrow u + i = \omega \quad (1)$$

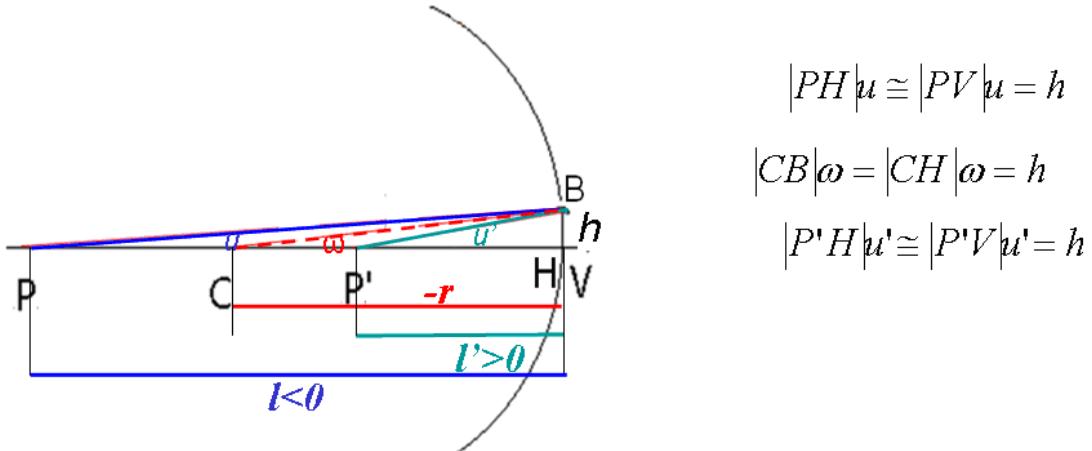
$$\text{Triang. } \text{CBP}' \rightarrow \omega + |r| + (\pi - u') = \pi \rightarrow u' = \omega + |r| \rightarrow u' = \omega + i \quad (2)$$

visto che si ha, per le leggi della riflessione: $i = |r|$

$$\rightarrow \text{ sommando 1) e 2)} \quad u + u' = 2\omega$$

In generale la posizione del punto P' dipende dall'angolo u. Lo specchio quindi non è in generale un sistema ottico stigmatico. Tuttavia se si considerano angoli piccoli e raggi parassiali (approssimazione di Gauss) lo specchio si comporta come un sistema stigmatico, in cui ad ogni punto oggetto P corrisponde un solo punto immagine P'. **In approssimazione di Gauss** si ha che:

se u è piccolo (Gauss) $BH=BV$ (HV è trascurabile)



$$|PH|u \cong |PV|u = h$$

$$|CB|\omega = |CH|\omega = h$$

$$|P'H|u' \cong |P'V|u' = h$$

Tenendo conto dei segni delle coordinate, ricaviamo:

$$u = \frac{h}{-l} \quad \omega = \frac{h}{-r} \quad u' = \frac{h}{l'}$$

Sostituendo tali espressioni nella relazione trovata precedentemente, $u + u' = 2\omega$

si ottiene: $\frac{h}{-l} + \frac{h}{l'} = \frac{2h}{-r} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = -\frac{2}{r}$ equazione dello specchio sferico

Vale sia per specchi concavi ($r < 0$) che convessi ($r > 0$)

Fuochi e distanza focale dello specchio sferico

Dall'equazione per i punti coniugati possiamo ricavare la posizione dei fuochi dello specchio e della distanza focale. Tali quantità sono definite come in tutti i sistemi ottici.

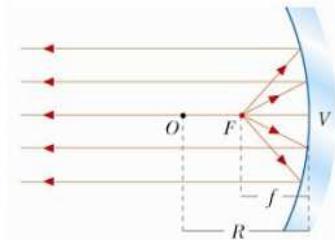
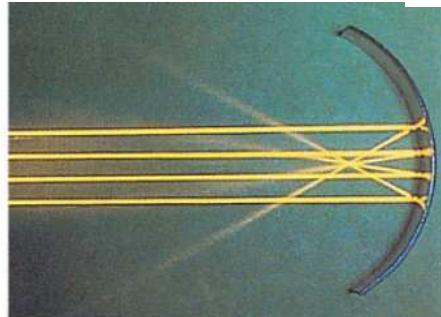
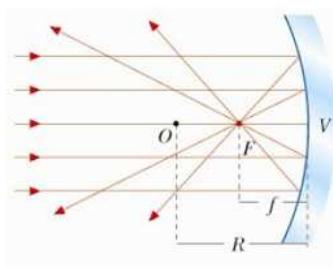
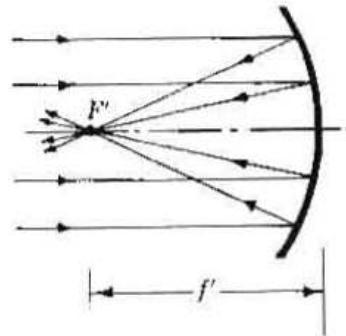
In particolare avremo che:

II fuoco F' : punto immagine di un oggetto molto lontano $l = -\infty$
distanza focale f' = coordinata immagine con $l = -\infty$

sostituendo $l = -\infty$ in

$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = -\frac{2}{r}$$

otteniamo: $\frac{1}{f'} = -\frac{2}{r} \Rightarrow f' = -\frac{r}{2}$



Osserviamo inoltre che, per la reversibilità dei cammini ottici, in uno specchio sferico primo e secondo fuoco coincidono.

I fuoco F : punto oggetto con immagine all'infinito $l' = \infty$

I distanza focale f = coordinata oggetto con immagine $l' = \infty$

$$f = -f' = \frac{r}{2}$$

Nel caso di uno **specchio concavo** (quale quello mostrato nelle figure precedenti) si ha:

$r < 0 \Rightarrow f' > 0, f < 0 : F \text{ e } F' \text{ sono alla sinistra di } V$

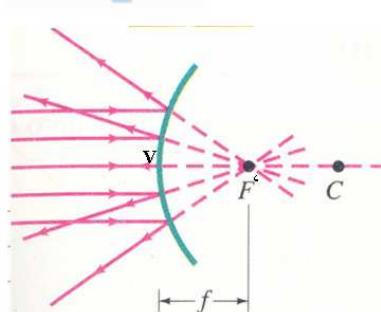
Nel caso di uno **specchio convesso** (quale quello mostrato nelle figure in basso) si ha:

$r > 0 \Rightarrow f' < 0, f > 0 : F \text{ e } F' \text{ sono alla destra di } V$

$$\text{r} > 0 \quad \frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = -\frac{2}{r}$$

$$l = -\infty \rightarrow f' = -\frac{r}{2} < 0$$

$$l' = \infty \rightarrow f = \frac{r}{2} > 0$$



Equazione dei punti coniugati per lo specchio sferico

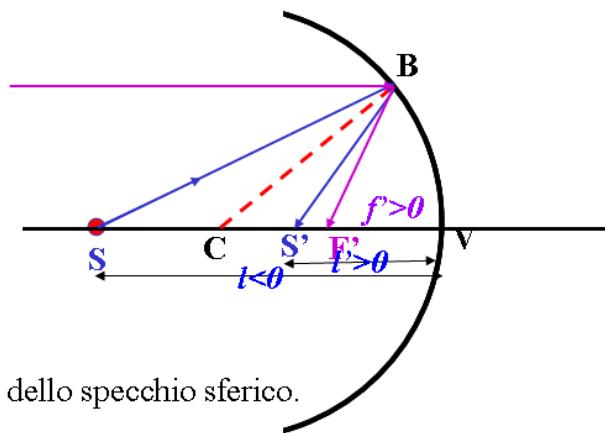
Se nell'equazione

$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = -\frac{2}{r}$$

sostituendo $f' = -\frac{r}{2}$

Si ricava:

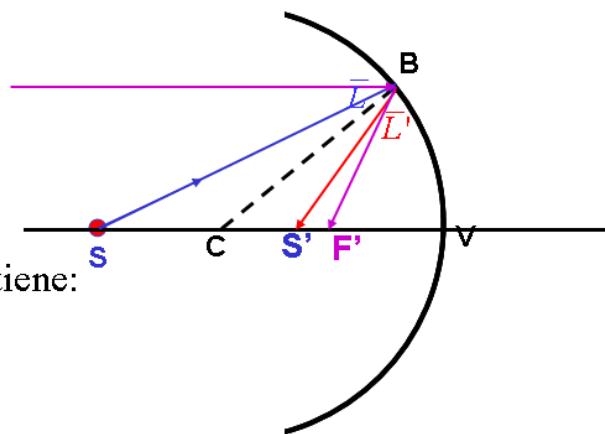
$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f'} \quad \text{che è l' equazione dello specchio sferico.}$$



Potere dello specchio sferico

Il potere dello specchio è:

$$F = \frac{1}{f'} = -\frac{2}{r}$$



Dall'equazione dello specchio si ottiene:

$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f'}$$

$$\bar{L}' - \bar{L} = F \Rightarrow \bar{L}' = L + F$$

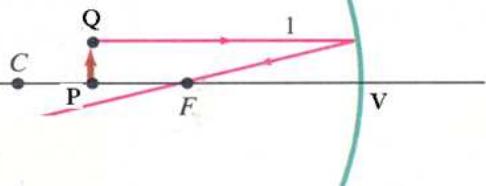
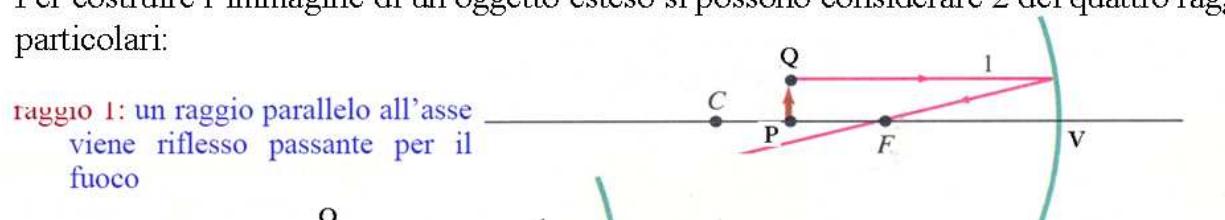
Specchio concavo: $F > 0$

Specchio convesso: $F < 0$

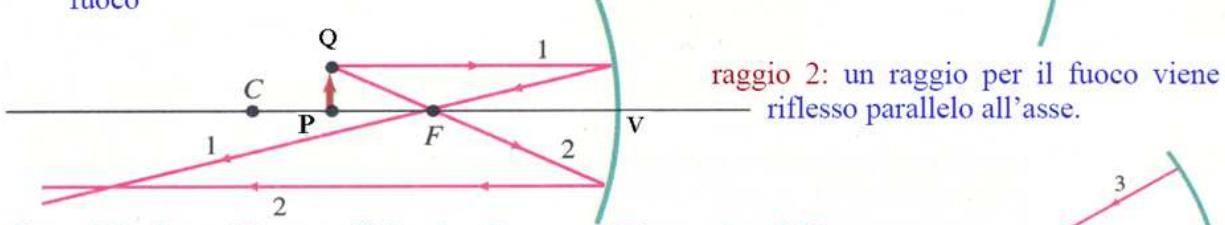
Costruzione grafica dell'immagine

Per costruire l'immagine di un oggetto esteso si possono considerare 2 dei quattro raggi particolari:

raggio 1: un raggio parallelo all'asse viene riflesso passante per il fuoco

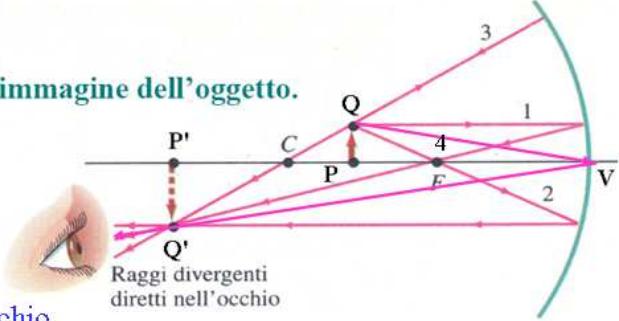


raggio 2: un raggio per il fuoco viene riflesso parallelo all'asse.



I raggi 1 e 2 sarebbero sufficienti a disegnare l'immagine dell'oggetto.

raggio 3: un raggio normale allo specchio viene riflesso su se stesso e passa per il centro di curvatura.

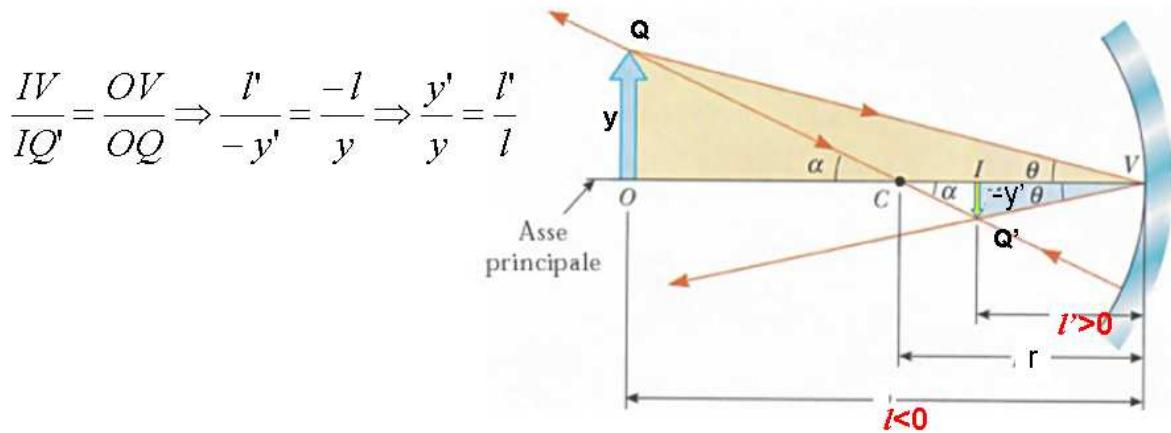


raggio 4: Raggio incidente nel vertice dello specchio (è simmetrico rispetto all'asse focale)

In questo caso (specchio concavo) la luce passa effettivamente per i punti dell'immagine:
immagine reale

Ingrandimento trasversale

Per determinare l'ingrandimento trasversale prodotto dallo specchio sferico consideriamo i due triangoli OQV e $VQ'I'$ che sono tra loro simili. Si ha:



$$m = \frac{l'}{l}$$

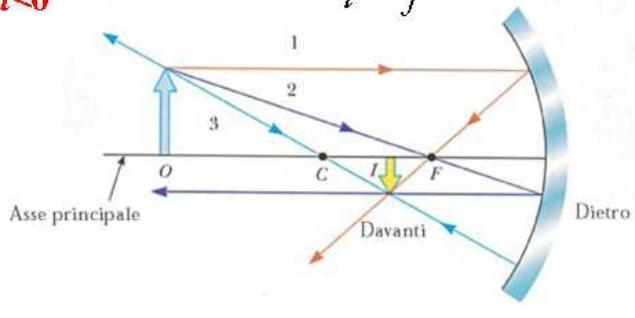
Immagini dello specchio concavo

$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f'} \Rightarrow l' = \frac{1}{\frac{1}{l} + \frac{1}{f'}} = \frac{lf'}{f'+l}$$

Oggetto reale $l < 0$

$$|l| > f \rightarrow l' > 0$$

immagine reale



$$f' > 0$$



$$|l| < f \rightarrow l' < 0$$

immagine virtuale

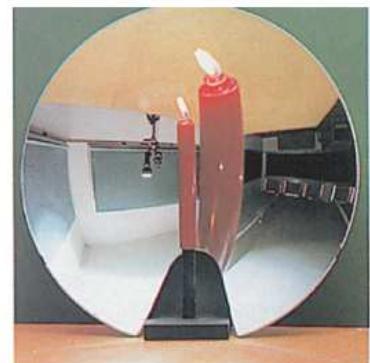
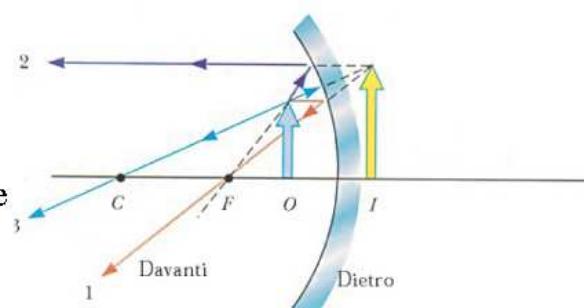
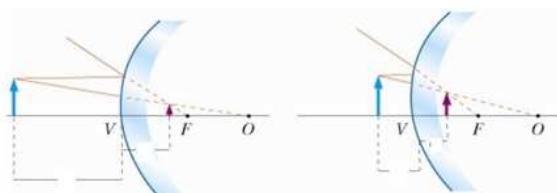
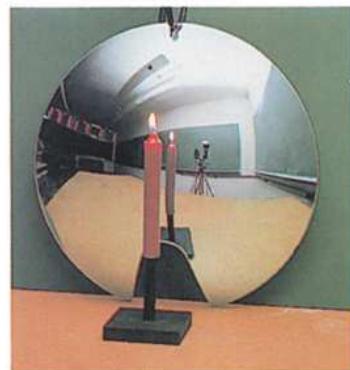
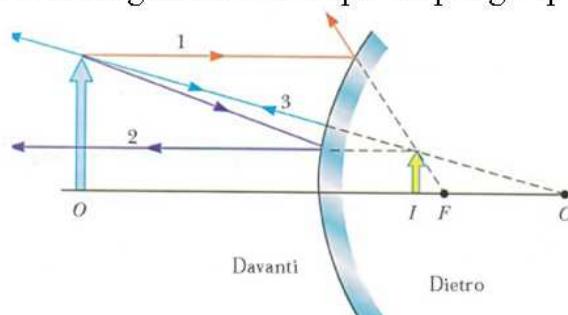


Immagine di uno specchio convesso

La costruzione dell'immagine nello specchio convesso si ottiene sfruttando la stessa costruzione geometrica adoperata per gli specchi concavi.



$$f' = -\frac{r}{2} < 0$$

$$l' = \frac{l f'}{f' + l} < 0 \Rightarrow |l'| < f'$$

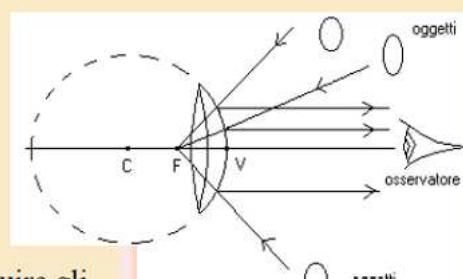
$$0 < m = \frac{l'}{l} < 1$$

Qualunque sia il punto dove l'oggetto viene situato, la sua immagine sarà **virtuale, diritta e rimpicciolita**

Applicazioni degli specchi convessi



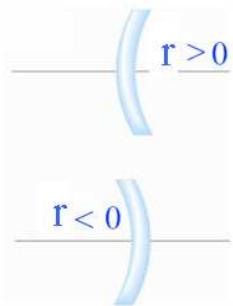
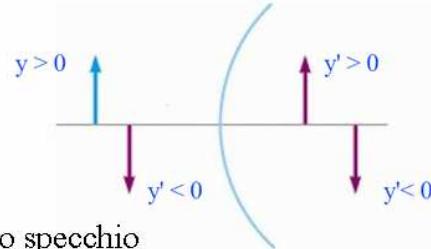
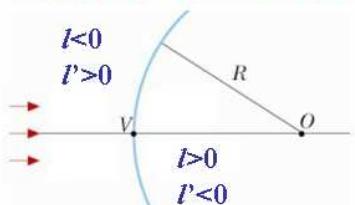
Con specchi convessi è possibile "vedere" oggetti sotto un grande angolo



per questo gli **specchi convessi** sono usati per costruire gli specchietti retrovisori, gli specchi stradali e gli specchi antitaccheggio:



RIASSUNTO SPECCHIO SFERICO



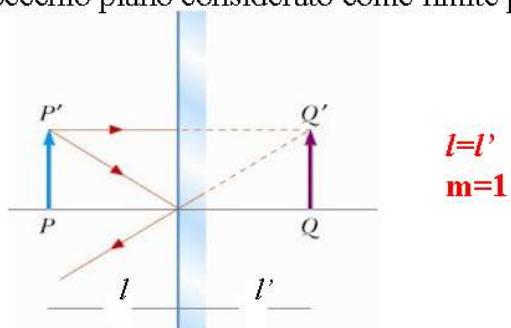
Le equazioni dello specchio

$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = -\frac{2}{r} = \frac{1}{f'}$$

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{l'}{l} \quad f' = -\frac{r}{2}$$

>0 concavi
 <0 convessi

- valgono sia per specchi concavi ($r < 0$) che convessi ($r > 0$).
- valgono anche per lo specchio piano considerato come limite per $r = \infty$ dello specchio sferico



Riassunto specchio sferico

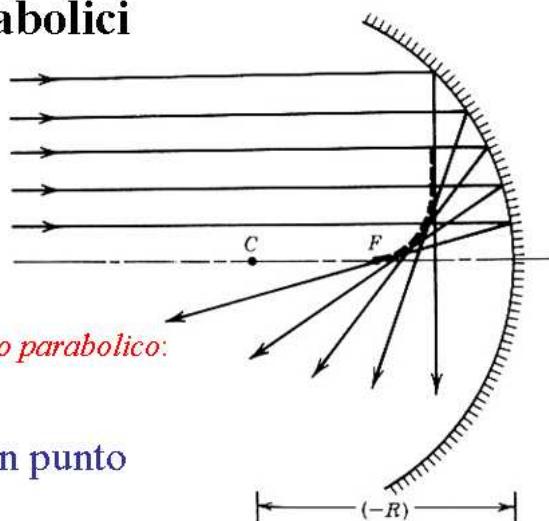
$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = -\frac{2}{r} = \frac{1}{f'} \quad m = \frac{l'}{l}$$

TABLE 31.1 Image Formation with Mirrors: Sign Conventions

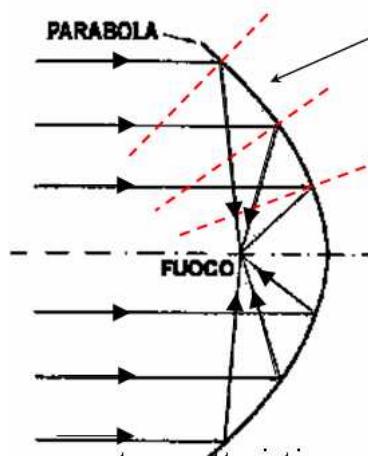
Focal Length, f	Object Distance, s	Image Distance, s'	Type of Image	Ray Diagram
+ (concave)	- (in front of mirror)	+ (in front of mirror) $ l' < 2f$	Real, inverted, reduced	
+ (concave)	- (in front of mirror) $f < l < 2f$	+ (in front of mirror) $l' > 2f$	Real, inverted, enlarged	
+ (concave)	- (in front of mirror) $ l < f$	- (behind mirror)	Virtual, upright, enlarged	
- (convex)	- (in front of mirror)	- (behind mirror)	Virtual, upright, reduced	

Raggi non parassiali: specchi parabolici

In uno specchio sferico, al di fuori dell'ottica di Gauss si ha il fenomeno dell'aberrazione sferica anche per i punti oggetto ad infinito. I raggi che giungono paralleli all'asse principale ma lontani dall'asse ottico, non convergono in un unico punto



Questa aberrazione sferica è assente in specchi a *profilo parabolico*:



il fuoco è un punto

Questa caratteristica è conseguenza del fatto che la parabola ha la seguente proprietà:

in un qualsiasi punto P di una parabola la normale per esso biseca l'angolo tra la retta parallela all'asse per P e la congiungente il suo fuoco sempre con P.

Indipendentemente dalla distanza dall'asse

Proprio per questa caratteristica, per molte applicazioni vengono utilizzati specchi parabolici