

Notiamo ancora una volta che abbiamo usato lo STESSO LINGUAGGIO e la STESSA LOGICA vista per le MATRICI W (si tratta ancora di PROCESSI di MARKOV!)

Vediamo allora come trovare una "soluzione" anche in questo contesto.

1) Mi interessano VALORI di ASPETTAZIONE

$$\langle f(X) \rangle = \sum_i f(X_i) \pi(X_i) \equiv \sum_i f(X_i) \pi_i$$

↓
Somma su tutte le possibili CONFIGURAZIONI (STATI) ovvero su tutti i valori possibili per X , pesati dalla distribuzione di probabilità π

2) Genero un processo di MARKOV dando una MATRICE W i cui elementi sono PROBABILITA' di TRANSIZIONE

$$W_{ij} = P(i \leftarrow j)$$

Valgono per W le proprietà viste: $W_{ij} \geq 0$

$$\sum_i W_{ij} = 1 \quad \forall j \quad \dots \text{etc} \dots$$

- 3) Iterando il processo a partire da una PROBABILITA' INIZIALE P_0 , la probabilità dopo N passi è

$$P^{(N)} = W^N P_0 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \pi$$

se vale $W\pi = \pi$ ovvero π è la

distribuzione stazionaria per il processo (autovettore di W in corrispondenza all'autovettore 1)

Anche in questo caso posso allora SOSTITUIRE MEDIE TEMPORALI sulla EVOLUZIONE (asintotica, ovvero a tempi lunghi) STOCASTICA del SISTEMA alle MEDIE su π .

- 4) Problema: Data π , come trovo W tale che $W\pi = \pi$?

Notare che, poiché $\sum_i W_{ij} = 1 \quad \forall j$

$W_{ij} \pi_j = W_{ji} \pi_i$ implica che (Sommo su i)

$$\sum_i W_{ij} \pi_j = \pi_j = \sum_i W_{ji} \pi_i \quad \text{ovvero} \quad \sum_i W_{ji} \pi_i = \pi_j$$

che è la condizione che voglio soddisfare.

5) Ho allora trovato una CONDIZIONE SUFFICIENTE (NB: non NECESSARIA!):

$$\text{BILANCIO DETTAGLIATO} \quad W_{ij} \pi_j = W_{ji} \pi_i$$

(ovvero all'equilibrio la probabilità di transire da j a i se si è in j eguaglia quella di transire da i a j se si è in i ...)

6) C'è sempre un modo semplice di soddisfare il BILANCIO DETTAGLIATO (in Fisica è noto come ALGORITMO di METROPOLIS)

Dico che $W_{ij} = \underbrace{P_{ij}^{(0)}}_{\substack{\text{PROBABILITA' di} \\ \text{PROPORRE UNA MOSSA}}} \underbrace{a_{ij}}_{\substack{\text{PROBABILITA' di} \\ \text{ACCETTARE LA PROPOSTA}}}$

In pratica: propongo una mossa e la accetto con una probabilità che mi rende soddisfatto il bilancio dettagliato!

Devo avere (BILANCIO DETTAGLIATO)

$$W_{ij} \pi_j = W_{ji} \pi_i \Rightarrow P_{ij}^{(0)} a_{ij} \pi_j = P_{ji}^{(0)} a_{ji} \pi_i$$

$$\text{ovvero} \quad \frac{a_{ij}}{a_{ji}} = \frac{P_{ji}^{(0)} \pi_i}{P_{ij}^{(0)} \pi_j}$$

Se ora le mie PROPOSTE sono SIMMETRICHE $P_{ij}^{(0)} = P_{ji}^{(0)}$

otengo $\frac{a_{ij}}{a_{ji}} = \frac{\pi_i}{\pi_j}$

cerco allora $a_{ij} = F\left(\frac{\pi_i}{\pi_j}\right)$ $F: [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$

nota $a_{ji} = F\left(\frac{\pi_j}{\pi_i}\right)$

e dunque ottengo una soluzione se trovo $F: \frac{F(z)}{F(z^{-1})} = z$

(Chiamo $z = \frac{\pi_i}{\pi_j}$ $\frac{a_{ij}}{a_{ji}} = \frac{F(z)}{F(z^{-1})} = z = \frac{\pi_i}{\pi_j}$ che è quello che voglio)

$\frac{F(z)}{F(z^{-1})} = z$ è soddisfatta da $F(z) = \min(1, z)$

Allora: 1) Proponi la mossa $j \rightarrow i$ (SIMMETRICA!)

2) Calcola $z = \frac{\pi_i}{\pi_j}$

3) Accetta la mossa con PROB. $\min(1, z)$

ovvero - se $\frac{\pi_i}{\pi_j} > 1$, accetta

- se $\frac{\pi_i}{\pi_j} < 1$, estrai r a caso in $[0, 1]$

e accetta se $r < \frac{\pi_i}{\pi_j}$

In pratica:
mosse che
vanno in stati
più probabili sono
sempre accettate;
le altre mosse
sono accettate
"sempre meno" se
 $\pi_i < \pi_j$...