La matrice stocastica per la CODA

Abbiamo convenuto che la nostra scelta per il PARAMETRO che IDENTIFICA la CONFIGURAZ. della CODA sia

Q_m = LUNGHEZZA della CODA al COMPIMENTO del SERVIZIO m-mo

E' chiaro infatti che la LUNGHEZZA (quante persone siano in coda...) è un buon parametro per identificare la configurazione, ma questa osservazione è insufficiente fino a quando non si stabilisca QUANDO MISURARE la lunghezza!
Se così vogliamo dire, abbiamo assunto il PUNTO di VISTA dello SPORTELLO; mentre si dice "Avanti il prossimo!" si misura quando è lunga la coda...

Riconosciamo immediatamente che avremo 2 (diversi) casi

(a) c'è una SALA di ATTESA con N poltrone: le CONFIGURAZIONI POSSIBILI sono N+1
$Q_m = 0, 1, 2, \dots, N$

(b) NON c'è SALA di ATTESA. TUTTI gli INTERI ≥ 0 sono ACCETTABILI
$Q_m = 1, 2, 3, \dots, i, \dots$

(a) Corrisponde a uno SPAZIO delle CONFIGURAZIONI di DIMENSIONE FINITA (pari a N+1) $\longrightarrow$ sono SICURO della ESISTENZA di una DISTRIBUZIONE STAZIONARIA

(b) lo SPAZIO delle CONFIGURAZIONI ha DIMENSIONE INFINITA e la DISTRIBUZIONE STAZIONARIA POTREBBE NON ESISTERE

(esperienza comune... la CODA potrebbe ALLUNGARSI INDEFINITAMENTE!)

Come SONO LEGATE Q_{m+1} e Q_m?

Possiamo dare una EQUAZIONE di EVOLUZIONE di Q_m ... precisamente:

Escludiamo al momento $Q_m = 0$ e diciamo che

per $Q_m > 0$ $\boxed{Q_{m+1} = Q_m - 1 + X_{m+1}}$ dove

$\boxed{X_m = \text{NUMERO di ARRIVI DURANTE il COMPIMENTO del SERVIZIO } m\text{-mo}}$

Infatti – la CODA si ACCORCIA di 1 per il fatto che un cliente ($l'm+1$-mo) è stato invitato a lasciare la coda e quindi servito ($Q_m - 1$)
– la CODA si ALLUNGA per effetto delle PERSONE che si AGGIUNGONO mentre l'$m+1$-mo cliente viene servito (X_m)

In generale, definendo $H(Q) = \begin{cases} 0 & Q \leq 0 \\ 1 & Q > 0 \end{cases}$ (funzione di Heaviside)

$$\boxed{Q_{m+1} = Q_m - H(Q_m) + X_{m+1}}$$

Qual è la PROBABILITA' che $X_m = j$, ovvero che siano j (numero generico...) gli arrivi durante il SERVIZIO m-mo?

Per rispondere devo SPECIFICARE la DISTRIBUZ. di PROBABILITA' dei TEMPI di SERVIZIO

Sia S_m = durata del Servizio m-mo

DEFINISCO $B(x) = P(S_m < x)$ FUNZIONE di DISTRIBUZIONE

con $B'(x) = \frac{d}{dx} B(x)$ DENSITA' di PROB. e $\boxed{B'(x)dx = dB(x) \text{ PROBABILITA' che } S_m \text{ assuma un valore in } [x, x+dx]}$

ATTENZIONE! Ricordiamo che (essendo la VARIABILE ALEATORIA S_m CONTINUA)

$P(S_m = x) = 0$! Posso però pensare alla PROBAB. INFINITESIMA $dB(x)$

Detto (richiamato ciò), vale $$\boxed{K_j \equiv P(X_n = j) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \, dB(t)}$$

Infatti: devo SOMMARE (integrare da $\int_0^{\infty} \ldots$) le PROBABILITA' (infinitesime) PRODOTTO $P_{\lambda t}(j) \cdot dB(t)$ su tutti i valori POSSIBILI (positivi...) di t ($\int_0^{\infty} \ldots$)

dove $P_{\lambda t}(j)$ = PROB. di j arrivi nel tempo t (λ è la solita DENSITA' di ARRIVI)

e $dB(t) = B'(t)\,dt$ = PROB. (infinitesima!) che S_m valga t

Nota la espressione per le K_j, posso esprimere le entrate della W in termini di esse. Infatti

$$W_{ij} = P(i \leftarrow j)$$ ovvero Prob. di passare da $Q_m = j$ a $Q_{m+1} = i$

dove (attenzione...) tanto i quanto j valgono $i, j = 0, 1, 2, \ldots$

Ora per $j = 0$ (PRIMA COLONNA) vale $Q_m = 0 \Rightarrow$ allora $Q_{m+1} = X_{m+1}$

(c.f. $Q_{n+1} = Q_m - H(Q_m) + X_{m+1}$
e $Q_m = H(Q_m) = 0 \ldots$)

ma allora
$$\begin{aligned} W_{i0} &= P(i \leftarrow 0) \\ &= P(X_{m+1} = Q_{n+1} = i) \\ &= P(X_{n+1} = i) \\ &= K_i \end{aligned}$$

e dunque la prima COLONNA è

$$\begin{matrix} K_0 \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ \vdots \end{matrix}$$

Viceversa per $Q_n \neq 0$, ovvero $j \neq 0$ (le COLONNE dalla seconda in avanti) sarà

$$W_{ij} = P(i \leftarrow j) = P(i = Q_{n+1} \longleftarrow j = Q_n) = P(X_{n+1} = i - j + 1)$$

infatti da $Q_{n+1} = Q_n - 1 + X_{n+1}$

ottengo $X_{n+1} = Q_{n+1} - Q_n + 1$

Tale PROB. vale $W_{ij} = P(X_{n+1} = i-j+1) = \begin{cases} 0 & \text{se } i+1-j<0 \\ K_{i-j+1} & \text{se } i-j+1 \geq 0 \end{cases}$

(le K_s con $s<0$ NON sono infatti DEFINITE: non può arrivare un NUM. NEGATIVO di PERSONE!!!)

A conti fatti questo comporta per W (ricorda: $i,j = 0,1,2,\dots$)

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & j=0 & j=1 & j=2 & j=3 & j=4 & \dots \\
\hline
i=0 & K_0 & K_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
i=1 & K_1 & K_1 & K_0 & 0 & 0 & \dots \\
i=2 & K_2 & K_2 & K_1 & K_0 & 0 & \dots \\
i=3 & K_3 & K_3 & K_2 & K_1 & K_0 & \dots \\
i=4 & K_4 & K_4 & K_3 & K_2 & K_1 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array} = W$$

e il problema sarà determinare SE ESISTE π: $W\pi = \pi$

π = distribuzione stazionaria = autovettore di W corrispondente all'autovalore 1

Nel caso in cui ci sia una SALA D'ATTESA con N POSTI ; il massimo valore di $Q_n = N$ mi dice che avrò una MATRICE QUADRATA di dim $N+1$

e sarà di conseguenza

$$\begin{pmatrix} K_0 & K_0 & 0 & 0 & \dots \\ K_1 & K_1 & K_0 & 0 & \dots \\ K_2 & K_2 & K_1 & K_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ K_{N-1} & K_{N-1} & K_{N-2} & K_{N-3} & \dots \\ 1-\sum_{i=0}^{N-1} K_i & 1-\sum_{i=0}^{N-1} K_i & 1-\sum_{i=0}^{N-2} K_i & 1-\sum_{i=0}^{N-3} K_i & \dots \end{pmatrix} = W$$

dove (ATTENZIONE!) l'ULTIMA RIGA è fissata da $\sum_i W_{ij} = 1 \ \forall j$

IL CASO PIU' SEMPLICE è quello in cui

- c'è SALA di ATTESA
- il tempo di servizio è $S_n = S =$ costante

In questo caso $K_j = P(X_n = j) = P_{s\lambda}(j) = e^{-\lambda s} \dfrac{(\lambda s)^j}{j!}$

(la POISSONIANA mi dice TUTTO...)

e la matrice W è interamente esprimibile in forma chiusa...

... pronta da essere "data in pasto a matlab..." (NB $K_j = \text{poisspdf}(j, \lambda s)$)