Ripartiamo da

$$Q_{n+1} = \begin{cases} Q_n - 1 + X_{n+1} & \text{se } Q_n > 0 \\ 1 - 1 + X_{n+1} & \text{se } Q_n = 0 \end{cases}$$

Abbiamo visto che la W dipende dalle quantità

$$K_j = P(X_n = j) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \, dB(t)$$

dove i tempi di servizio S_n sono distribuiti in accordo a

$$P(S_n \leq x) = B(x)$$

con $E(S_n) = b$ e $V(S_n) = \sigma_s^2$

E = valore d'attesa (media)
V = varianza

Che dire di K_j?

Ricordate il trucco usato per Ehrenfest, quello della funzione generatrice?

Usiamolo ancora e definiamo la

FUNZIONE GENERATRICE

$$K(z) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j z^j \qquad (|z| \leq 1)$$

Notate che

$$E(X_n) = K'(1)$$

$$E(X_n^2) = K''(1) + K'(1) \qquad [1]$$

$$E(X_n^3) = K'''(1) + 3K''(1) + K'(1)$$

VERIFICATELO!

E' anche utile definire la <u>TRASFORMATA di LAPLACE di B</u>

$$\boxed{\psi(\vartheta) = \int_0^\infty e^{-\vartheta t}\, dB(t) \qquad (Re(\vartheta) > 0)}$$

<u>N.B.</u> Le Trasformate di Laplace sono utili in molti contesti e si trovano tabulate...

Notate che
$$b = E(S_n) = -\psi'(0)$$
$$E(S_n^2) = \psi''(0) \qquad [2]$$

Attenzione!
$$K(z) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t z)^j}{j!}\, dB(t) = \psi(\lambda - \lambda z) \qquad [3]$$

e dunque
$$K'(z) = -\lambda\, \psi'(\lambda - \lambda z)$$
$$K''(z) = \lambda^2\, \psi''(\lambda - \lambda z)$$
$$K'''(z) = -\lambda^3\, \psi'''(\lambda - \lambda z)$$

da cui posso tradurre [1] in
$$E(X_n) = -\lambda\psi'(0) = \lambda b \equiv \rho$$
$$E(X_n^2) = \lambda^2 E(S_n^2) + \rho$$
$$E(X_n^3) = \lambda^3 E(S_n^3) + 3\lambda^2 E(S_n^2) + \rho$$

Morale: tramite la funzione generatrice e la trasformata di Laplace che abbiamo introdotto, troviamo relazioni che legano tutti i momenti del numero di arrivi con tutti i momenti dei tempi di servizio!

Scrivo ora per esteso la equazione per la distribuzione stazionaria $W\pi = \pi$

$$\pi_0 = \pi_0 K_0 + \pi_1 K_0$$

$$\pi_1 = \pi_0 K_1 + \pi_1 K_1 + \pi_2 K_0 \qquad [4]$$

$$\pi_2 = \pi_0 K_2 + \pi_1 K_2 + \pi_2 K_1 + \pi_3 K_0$$

$$\vdots$$

Notate che, nel caso di tempo di servizio costante, le K_j sono note (basta valutare una poissoniana! cfr quanto visto per la coda con sala di attesa) e quindi sulla prima riga ci sono due incognite. Fra poco vedremo che sapremo calcolare la espressione di π_0, per cui la incognita sulla prima riga è solo π_1. Possiamo allora calcolarla e passare alla seconda riga, da risolvere per la π_2. Come capirete, questo vuol dire che iterativamente posso calcolare tutte le entrate che voglio ... e il problema è risolto!

Definisco ora (cfr $K(z)$ ...)

$$\pi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n z^n \qquad |z| \leq 1$$

→ Provate a derivare e calcolare in zero le varie derivate...

Manipolo ora [4] (moltiplico le equazioni per potenze di z e sommo...) ad ottenere (→ Provarlo!)

$$\pi(z) = \pi_0 K(z) + \pi_1 K(z) + \pi_2 z K(z) + \pi_3 z^2 K(z) + \dots$$

$$= \pi_0 K(z) + \frac{K(z)}{z} \left(\pi_1 z + \pi_2 z^2 + \pi_3 z^3 + \dots \right)$$

ovvero $$\pi(z) = \pi_0 K(z) + \frac{K(z)}{z} \left(\pi(z) - \pi_0 \right)$$

cioè $$\pi(z) \left[1 - \frac{K(z)}{z} \right] = \pi_0 K(z) \left(1 - \frac{1}{z} \right)$$

e $$\pi(z) = \frac{\pi_0 K(z)(z-1)}{z - K(z)} \qquad [5]$$

Notare che $\sum_n \pi_n = 1 \quad \longrightarrow \quad \pi(1) = \sum_n \pi_n = 1$

$$[5] \quad \rightarrow \quad 1 = \frac{\lim_{z\to1} \pi_0 \left[K(z) + (z-1)K'(z)\right]}{\lim_{z\to1} \left(1 - K'(z)\right)}$$

$\left(\rightarrow \boxed{\text{Cosa ho fatto?}}\right)$

ovvero $\quad 1 = \frac{\pi_0}{1-\rho} \qquad (\rho < 1)$

cioè $\quad \boxed{\pi_0 = 1-\rho}$

$$e \quad \boxed{\pi(z) = \frac{(1-\rho)(z-1)K(z)}{z - K(z)}}$$

Questo NON è il SOLO MODO in cui POSSO PROCEDERE ...

Definisco la FUNZIONE di Heaviside

$$H(X) = \begin{cases} 1 & \text{se } X > 0 \\ 0 & \text{se } X \leq 0 \end{cases}$$

che è utile per MANIPOLARE la formula per Q_{n+1}:

$$\boxed{Q_{n+1} = Q_n - H(Q_n) + X_{n+1}}$$

$$\text{cfr} \quad Q_{n+1} = \begin{cases} Q_n - 1 + X_{n+1} & \text{per } Q_n > 0 \\ 1 - 1 + X_{n+1} & \text{per } Q_n = 0 \end{cases}$$

E' facile vedere che

$$\begin{cases} H^2(X) = H(X) \\ X H(X) = X \quad \text{se } X \geq 0 \end{cases} \qquad [6]$$

$$H^3(X) = H(X)$$
$$X^2 H(X) = X^2$$
$$X H^2(X) = X$$

Prendo ora il quadrato di $Q_{n+1} = Q_n - H(Q_n) + X_{n+1}$

$$Q_{n+1}^2 = Q_n^2 + H^2(Q_n) + X_{n+1}^2 - 2\, Q_n H(Q_n) - 2\, X_{n+1} H(Q_n) + 2\, Q_n X_{n+1} \qquad [7]$$

Se esiste una distribuzione stazionaria

$$\lim_{n \to \infty} E(Q_{n+1}^r) = \lim_{n \to \infty} E(Q_n^r) \qquad r = 1,2,3,\dots$$

che è come dire: se in [7] prendi il valore di attesa, scrivi $E(Q_n) = E(Q_{n+1}) = E(Q)$

$$[7] \to \quad 0 = E(H(Q)) + E(X^2) - 2\,E(Q) - 2\,E(X H(Q)) + 2\,E(QX)$$

(cfr [6])

D'altronde $Q_{n+1} = Q_n - H(Q_n) + X_{n+1}$

mi dice <u>in termini di valori di attesa all'equilibrio</u> $E(H(Q)) = E(X)$

e dunque
$$2\,E(Q)\,(1 - E(X)) = E(X) + E(X^2) - 2\,E(X)\,E(H(Q))$$
$$= E(X) + E(X^2) - 2(E(X))^2$$

$$E(Q) = \frac{1}{2}\left[E(X) + \frac{V(X)}{1 - E(X)}\right]$$

Ovvero il VALORE di ATTESA di Q (all'equilibrio) vale

$$E(Q) = \rho + \frac{\lambda^2 E(S^2)}{2(1-\rho)}$$

→ Quanto vale la VARIANZA $V(Q)$?

Prendete la terza potenza di $Q_{n+1} = Q_n - H(Q_n) + X_{n+1}$

e procedete come sopra...

N.B. Posso anche scrivere

$$E(Q) = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda^2 \sigma_s^2}{2(1-\rho)}$$

→ PERCHE'? DIMOSTRARLO

che mi dice come va la lunghezza della coda in funzione della varianza del tempo di servizio...

→ Che succede per $\sigma_s^2 = 0$ (tempo di servizio costante)?

e per $B(x) = 1 - e^{-\mu x}$ $(x > 0)$?

→ Quanto vale il tempo di attesa medio?

Tutto sta nello scrivere le equazioni che lo definiscono, prendendo opportuni valori medi...