S — suscettibili (numero dei ...)

I — infetti/infettivi (num. degli ...)

R — resistenti o rimossi | "recovered" (numero dei ...)

Modello **SIR** [1927 Kermack McKendrick]

(morbillo, parotite, rosolia ...)

TASSI (tasso o "rate") — di INFEZIONE β / di RECUPERO γ → sono dei t^{-1} (inverso di un TEMPO)

Posso pensare (come vedremo)

$$\underbrace{\beta = \tilde{\beta}}_{\text{PROB. che un CONTATTO risulti in INFEZIONE}} \; \frac{c}{N}$$

c → num. medio di CONTATTI di una PERSONA per unità di TEMPO

N è sempre la consistenza della POPOLAZIONE (numero di persone che costituiscono la comunità che studiamo)

IPOTESI per $\boxed{\text{SIR}}$ ad ogni tempo t

$$S(t) + I(t) + R(t) = N = \text{costante}$$

(ipotesi non banale... non ci sono NASCITE ... né MORTI... non ci sono persone che SE NE VANNO né persone che ARRIVANO...)

MODELLO COMPARTIMENTALE (non è l'unico... es

SIS $S \to I \to S$

SEIR $S \to E \to I \to R$ (Esposti)

SIRS

...)

$$\begin{tikzcd}
\boxed{S} \arrow[r] & \boxed{I} \arrow[r] & \boxed{R} \arrow[ll, bend right, dashed, "\cancel{\ } \ \text{NO!}"']
\end{tikzcd}$$

Si passa da un compartimento ad un altro ... non tutti i passaggi sono possibili!

- I S per effetto dei contatti e della contagiosità si Infettano

$$S \to I$$

- Gli I in accordo al tasso di remissione sono Rimossi (guariti o morti...)

$$I \to R$$

- Una volta guariti, non ci si può più infettare ($S \to I \to R$) No!

- S non può che decrescere $\forall t$

- R non può che crescere $\forall t$

- Ad ogni t, I ha
  - un decremento per effetto di $I \to R$
  - un aumento per effetto di $S \to I$

In un intervallo di tempo Δt

✓ $\Delta S < 0$

$$\Delta S = -\beta \, S I \, \Delta t$$

il calo di S è proporzionale all'intervallo di tempo Δt
al numero tot. di contatti possibili SI

secondo il RATE β

NB Δt è un TEMPO $[\Delta t] = t$

SI è un numero, come ΔS

β è un inverso di TEMPO $[\beta] = t^{-1}$

RICORDA (peraltro...) che $\beta = \hat{\beta} \frac{c}{N}$ ...

quindi β^{-1} è un TEMPO!

✓ $\Delta R > 0$

$$\Delta R = \gamma \, I \, \Delta t$$

(la crescita di R è prop. al numero I, a Δt secondo il RATE γ)

come sopra $[\gamma] = t^{-1}$ e γ^{-1} è un TEMPO

Ovviamente... facciamo le cose semplici e passiamo alle DERIVATE...

$$\frac{dS}{dt} = -\tilde{\beta}\frac{c}{N} SI < 0 \quad e \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I > 0$$

Siccome $N = S(t) + I(t) + R(t) = cost$

$$\frac{dN}{dt} = 0 = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} \Rightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{dR}{dt} - \frac{dS}{dt}$$

e dunque ho il <u>SISTEMA</u>

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\tilde{\beta}\dfrac{c}{N} SI \\[2ex] \dfrac{dI}{dt} = \tilde{\beta}\dfrac{c}{N} SI - \gamma I \\[2ex] \dfrac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases}$$

Notare che $\dfrac{dI}{dt} = \left(\tilde{\beta}\dfrac{c}{N} S - \gamma\right) I$

e dunque I aumenta $\dfrac{dI}{dt} > 0$ per $\tilde{\beta}\dfrac{c}{N} S > \gamma$

I diminuisce $\dfrac{dI}{dt} < 0$ per $\tilde{\beta}\dfrac{c}{N} S < \gamma$

IPOTESI che si assume $\dfrac{S}{N} \sim 1$ Non è assurda... non arriviamo a sterminare una popolazione...

$\downarrow$

Sotto questa ipotesi la descrizione si semplifica! UTILE per guardare a una FASE...

NB γ^{-1} è un TEMPO ... $\gamma^{-1} = T_r$ = tempo medio in cui una persona rimane infetta e contagiosa

(per il COVID $T_r \sim 5 gg$)

e $(\tilde{\beta} c)^{-1} = T_c$ = tempo medio fra un contatto di contagio e un altro

e allora $$\boxed{R = \frac{\tilde{\beta} c}{\gamma} = \frac{T_r}{T_c}}$$ = num. di persone che un infettore contagia durante il suo periodo infettivo

questo è il famoso parametro R_t (il pedice mi dice "al tempo t" ... vs R_0 costante ...)

NB $$\frac{dI}{dt} = (\tilde{\beta} c - \gamma) I = \gamma (R-1) I$$

$R > 1$ $\quad \frac{dI}{dt} > 0$ AUMENTO degli INFETTI

$R < 1$ $\quad \frac{dI}{dt} < 0$ DIMINUZIONE degli infetti

NB $$\frac{1}{I}\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \ln I = \gamma (R-1)$$

QUICK & DIRTY ... se torno ai ΔI, Δt ... naturale $\Delta t = 1$ (1 giorno ...)

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\Delta I}{I} = R - 1$$ ovvero $$\boxed{R = 1 + T_r \frac{\Delta I}{I}}$$

che era in discreto accordo con il dato ufficiale per R_t

Vedremo come era determinato (indip. da SIR !)