1. Elementi di probabilità

Indice

Spazio degli esiti ed eventi

Consideriamo un esperimento il cui esito è casuale. L'insieme di tutti i possibili esiti si chiama **spazio degli esiti** e si indica con S. I sottoinsiemi di S sono chiamati **eventi** e si denotano tipicamente con lettere maiuscole come E o F. Se l'esito dell'esperimento appartiene a E, si dice che l'evento E si è verificato.

Siano E e F due eventi:

- L'**unione** di E e F, indicata con $E \cup F$, è l'insieme degli esiti che appartengono a E **oppure** a F (o a entrambi). L'evento $E \cup F$ si verifica se **almeno uno** tra E e F si verifica.
- L'**intersezione** di E e F, indicata con $E \cap F$, è l'insieme degli esiti che appartengono **sia a** E **che a** F. L'evento $E \cap F$ si verifica se **entrambi** gli eventi E e F si verificano.

Nota: Se $E \cap F = \emptyset$, allora i due eventi non possono verificarsi contemporaneamente e si dicono **mutuamente esclusivi** o **incompatibili**.

Nota: Se tutti gli esiti di E appartengono anche a F, si dice che E è **contenuto** in F e si indica con $E \subseteq F$.

Assiomi della probabilità

A ogni evento E nello spazio degli esiti S è associato un numero, indicato con $P(E)$, chiamato **probabilità** di E, che rappresenta la "plausibilità" che E si verifichi.

Gli assiomi fondamentali della probabilità sono:

1. **Non negatività:** $0 \leq P(E) \leq 1$ per ogni evento E.
2. **Normalizzazione:** $P(S) = 1$, cioè l'evento certo ha probabilità 1.
3. **Additività:** Se $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sono eventi **mutuamente esclusivi** (cioè $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$), allora:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i).$$

Nota: Per ogni evento $E \subseteq S$, l'**evento complementare** E^c (l'insieme degli esiti che non appartengono a E) ha probabilità $P(E^c) = 1 - P(E)$.

Per due eventi qualsiasi E e F, vale la **formula dell'unione**:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F).$$

Spazi degli esiti equiprobabili

Se ogni esito di S ha la stessa probabilità di verificarsi, lo spazio degli esiti si dice **equiprobabile**. In questo caso, la probabilità di un evento E è data dal rapporto tra il numero di esiti favorevoli (gli esiti in E) e il numero totale di esiti possibili:

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|},$$

dove $|E|$ e $|S|$ indicano la cardinalità (il numero di elementi) degli insiemi E e S.

Principio di Enumerazione: Se due esperimenti A e B hanno rispettivamente m e n esiti possibili, allora il numero totale di esiti possibili quando si eseguono **contemporaneamente** i due esperimenti è $m \times n$. Questo principio si estende a più esperimenti.

Una **permutazione** è un modo di ordinare un insieme di oggetti. Il numero totale di permutazioni di n oggetti distinti è $n!$ (fattoriale di n).

Coefficiente binomiale

Il **coefficiente binomiale** $\binom{n}{k}$ rappresenta il numero di modi in cui si possono scegliere k elementi da un insieme di n elementi, indipendentemente dall'ordine (combinazioni). È calcolato con la formula:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Probabilità condizionata

La **probabilità condizionata** di un evento E dato che un altro evento F si è verificato, indicata con $P(E \mid F)$, è definita come:

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)},$$

purché $P(F) > 0$. Questa misura rappresenta la probabilità che si verifichi E sapendo che F è accaduto.

Fattorizzazione di un evento e teorema di Bayes

Siano E e F due eventi con $P(F) > 0$. Possiamo scomporre E in:

$$E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c).$$

Poiché $(E \cap F)$ e $(E \cap F^c)$ sono eventi mutuamente esclusivi, si ha:

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F^c).$$

Utilizzando la definizione di probabilità condizionata, otteniamo il **teorema delle probabilità totali**:

$$P(E) = P(E \mid F) \cdot P(F) + P(E \mid F^c) \cdot P(F^c).$$

Il **teorema di Bayes** consente di invertire le probabilità condizionate:

$$P(F \mid E) = \frac{P(E \mid F) \cdot P(F)}{P(E)},$$

dove $P(E)$ è calcolato come sopra.

Eventi indipendenti

Due eventi E e F si dicono **indipendenti** se il verificarsi di uno non influenza la probabilità dell'altro. Formalmente, E e F sono indipendenti se:

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F).$$

In questo caso, la probabilità condizionata di E dato F è uguale a $P(E)$:

$$P(E \mid F) = P(E).$$

Se questa condizione non è soddisfatta, gli eventi si dicono **dipendenti**.