

CORREZIONE ESAME del 31.01.2023

Thursday, January 26, 2023 11:09 AM

RISPOSTE SBARRAMENTO:

C B B A A A B A D D

ESERCIZI:

1) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
 $A_2 \cap A_3 = \emptyset$
 $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ } Dimostrazione:
 $A_1 \cap A_2 \stackrel{1}{=} \{x \in A : x \in A_1 \wedge x \in A_2\} \stackrel{1}{=} \{x \in A : R(a, x) \wedge R(b, x)\}$
 $R(a, x) \wedge R(b, x) \stackrel{1}{\Leftrightarrow} R(a, x) \wedge R(x, b) \stackrel{1}{\Leftrightarrow} R(a, b)$ che è falso¹, quindi
 $\forall x \in A : x \notin A_1 \cap A_2 \stackrel{1}{\Leftrightarrow} A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Analogamente per gli altri casi.² \square

TOTALE 8 PUNTI

2) (P, R) è di ordine?

Riflessiva: $R(x, x) \stackrel{1}{\Leftrightarrow} x | x$ VERO¹ (2 PUNTI)

Antisimmetrica: $R(x, y) \wedge R(y, x) \stackrel{1}{\Leftrightarrow} x | y \wedge y | x \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : y = mx \wedge \exists q \in \mathbb{N} : x = qy \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists m, q \in \mathbb{N} : y = m \cdot q \cdot y \wedge x = qy \stackrel{1}{\Leftrightarrow} m = q = 1 \Rightarrow x = y$ VERO¹ (3 PUNTI)

Transitiva: $R(x, y) \wedge R(y, z) \stackrel{1}{\Leftrightarrow} x | y \wedge y | z \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : y = mx \wedge \exists q \in \mathbb{N} : z = qy \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists m, q \in \mathbb{N} : z = q \cdot (mx) \Leftrightarrow \exists m, q \in \mathbb{N} : z = (q \cdot m)x \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : z = kx \Leftrightarrow x | z \Leftrightarrow R(x, z)$ VERO¹
 (3 PUNTI)

(P, R) è di ordine parziale: $4 \nmid 6 \wedge 6 \nmid 4$. 1

Elementi minimali: 2

Elementi massimali: Nessuno } 1

TOTALE 10 PUNTI

3) $\sum_{i=1}^m (2i+6) \stackrel{2}{=} 2 \cdot \sum_{i=1}^m i + \sum_{i=1}^m 6 \stackrel{2}{=} 2 \cdot \frac{m(m+1)}{2} + 6m = m(m+7)$ (4 PUNTI)

Dimostrazione:

CASO BASE: $m=1$: $\sum_{i=1}^1 (2i+6) \stackrel{1}{=} 2+6=8 = 1 \cdot (1+7) = m \cdot (m+7)$ VERO¹ (2 PUNTI)

PASSO INDUTTIVO:

$\sum_{i=1}^{m+1} (2i+6) \stackrel{1}{=} \sum_{i=1}^m (2i+6) + (2(m+1)+6) \stackrel{2}{=} m(m+7) + 2m+8 = m^2 + 7m + 2m + 8 =$
 $= m^2 + m + 8(m+1) = m(m+1) + 8(m+1) \stackrel{1}{=} (m+1)(m+8) \square$ (4 PUNTI)

TOTALE 10 PUNTI

4) $\models (a \wedge \neg a) \Rightarrow \neg(p \wedge (p \Rightarrow \neg q))$

$v((a \wedge \neg a) \Rightarrow \neg(p \wedge (p \Rightarrow \neg q))) = 1 \stackrel{1}{\Leftrightarrow} v(a \wedge \neg a) \stackrel{*}{\leq} v(\neg(p \wedge (p \Rightarrow \neg q)))$

$v(a \wedge \neg a) \stackrel{1}{=} \min(v(a), 1-v(a)) \stackrel{2}{=} 0$ per qualsiasi $v(a)$

quindi la disuguaglianza $*$ è sempre verificata. 1 (5 PUNTI)

Tavola di verità:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$p \Rightarrow \neg q$	$p \wedge (p \Rightarrow \neg q)$	$\neg(p \wedge (p \Rightarrow \neg q))$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge (p \Rightarrow \neg q))$
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1

(5 PUNTI)

TOTALE 10 PUNTI

5) $\vdash a \Rightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

$$\frac{\frac{\boxed{a}}{a \vee b} \text{ Iv } 2 \quad \frac{\boxed{a}}{a \vee c} \text{ Iv } 2}{(a \vee b) \wedge (a \vee c)} \text{ I } \wedge 2$$

$$\frac{(a \vee b) \wedge (a \vee c)}{a \Rightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)} \boxed{\text{I } \Rightarrow} 2$$

TOTALE 8 PUNTI

6) Si dice struttura $\mathcal{A} = (\mathcal{D}_{\mathcal{A}}, \mathcal{I}_{\mathcal{A}})$ il dato di un insieme detto dominio $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ e di una assegnazione $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$, t.c.:

1. Se c è una costante, $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}(c) \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$

2. Se f è un simbolo funzionale n -ario, $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}(f) : \underbrace{\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \times \dots \times \mathcal{D}_{\mathcal{A}}}_{n \text{ volte}} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ è una funzione

3. Se B è un simbolo predicativo n -ario, $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}(B) : \underbrace{\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \times \dots \times \mathcal{D}_{\mathcal{A}}}_{n \text{ volte}} \rightarrow \{0, 1\}$ è una relazione

Si dice ambiente per una struttura \mathcal{A} una funzione $h : \text{VAR} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$

TOTALE 8 PUNTI

TOTALE DELL'ESAME: $8 + 10 + 10 + 10 + 8 + 8 = 54$

VOTO: punteggio / 2 \rightarrow MASSIMO 27