Esercizi

Esame di Elementi di Logica e Strutture Discrete

Corso di Laurea in Informatica

Appello del 06·02·2024

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Esercizio 1. (4 punti) Sia R la relazione su $\mathbb{N}$ così definita:

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : R(x, y) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = 7k + y$$

Ad esempio, $15 = 7 \cdot 1 + 8$, quindi vale $R(15, 8)$.

- Dimostrare che R su $\mathbb{N}$ è una relazione di equivalenza.
- Quante classi di equivalenza si ottengono partizionando $\mathbb{N}$ con R?

(*Suggerimento*: se $R(x, y)$, allora x e y hanno lo stesso *resto* nella divisione per 7.)

Esercizio 2. (5 punti) Si consideri l'insieme $D = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, a cui si applica la relazione R così definita:

$$\forall x, y \in D : R(x, y) \Leftrightarrow x|y$$

si ricorda che $x|y$ si legge "x divide y", ovvero $\exists m \in \mathbb{Z} : y = mx$.

- R su D è una relazione di ordine? Se sì, è parziale o totale?
- R su D ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

(*Suggerimento*: rappresentare graficamente la relazione R sull'insieme D.)

Esercizio 3. (4 punti) Calcolare il valore della seguente somma:

$$\sum_{i=1}^{n} (2^i + 2)$$

Poi dimostrarlo per induzione.

Esercizio 4. (4 punti) Usando la definizione di interpretazione $v : \text{FBF} \to \{0, 1\}$ per la logica proposizionale, dimostrare che:

$$\models \neg(\neg a \vee \neg\neg a) \Rightarrow b \vee c$$

Successivamente, scrivere la tavola di verità della formula $(a \vee \neg b) \oplus c$.

Esercizio 5. (5 punti) Usando il metodo di deduzione naturale, dimostrare che:

$$\vdash (a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow (b \wedge c))$$

Esercizio 6. (5 punti) Dopo aver descritto l'alfabeto dei linguaggi del I ordine, dare la definizione di insieme delle variabili libere $FV(P)$ per $P \in \text{FBF}$.