Esercizi

Esame di Elementi di Logica e Strutture Discrete

Corso di Laurea in Informatica

Appello del 02·07·2024

Nome: ______________________________
Cognome: ______________________________
Matricola: ______________________________

Esercizio 1. (4 punti) Sia R la relazione su $\mathbb{N}$ così definita:

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : R(x, y) \Leftrightarrow x \bmod 9 = y \bmod 9$$

dove $\cdot \bmod 9$ è l'operazione che restituisce il *resto* della divisione per 9. Ad esempio, $27 \bmod 9 = 0$.

- Dimostrare che R su $\mathbb{N}$ è una relazione di equivalenza.
- Quante classi di equivalenza si ottengono partizionando $\mathbb{N}$ con R?

(*Suggerimento*: si ricorda che per $n < 9$ si ha $n \bmod 9 = n$.)

Esercizio 2. (5 punti) Si consideri l'insieme $D_{40} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$ dei divisori di 40, a cui si applica la relazione R così definita:

$$\forall x, y \in D_{40} : R(x, y) \Leftrightarrow x|y$$

si ricorda che $x|y$ si legge "x divide y", ovvero $\exists m \in \mathbb{Z} : y = mx$.

- R su D_{40} è una relazione di ordine? Se sì, è parziale o totale?
- R su D_{40} ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

(*Suggerimento*: rappresentare graficamente la relazione R sull'insieme D_{40}.)

Esercizio 3. (4 punti) Dimostrare per induzione che la somma dei primi n numeri naturali dispari è uguale a n^2.

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$$

Esercizio 4. (5 punti) Usando la definizione di interpretazione $v : \text{FBF} \to \{0, 1\}$ per la logica proposizionale, dimostrare che:

$$\models (a \land \neg a) \Rightarrow \neg(b \land \neg c) \lor \neg(a \Rightarrow c)$$

Successivamente, scrivere la tavola di verità della formula $\neg(b \land \neg c) \lor \neg(a \Rightarrow c)$.

Esercizio 5. (5 punti) Usando il metodo di deduzione naturale, dimostrare che:

$$\vdash a \Rightarrow (a \lor b) \land (a \lor c)$$

Esercizio 6. (4 punti) Definire induttivamente l'insieme delle variabili libere $FV(P)$ per le formule ben formate $P \in \text{FBF}$ della logica del I ordine.