ESAME del 23/01/2024

ES 1) 8 PUNTI

Sia R la relazione così definita:
$\forall x, y \in \mathbb{Q} : R(x,y) \iff \exists k \in \mathbb{Z} : y - x = 3k$

Dimostrare che R è di equivalenza.
Quante sono le classi di equivalenza di R?

SOLUZIONE

1 RIFLESSIVA: $R(x,x) \iff x - x = 3k \iff k = 0$ VERA

2 SIMMETRICA: $R(x,y) \iff y - x = 3k \iff x - y = -3k$
Siccome $-k \in \mathbb{Z}$, vale $R(y,x)$

3 TRANSITIVA: $R(x,y) \land R(y,z) \iff y - x = 3k \land z - y = 3q$

$$\begin{cases} y - x = 3k \\ z - y = 3q \end{cases} \iff \begin{cases} y = x + 3k \\ z - x - 3k = 3q \end{cases} \iff \begin{cases} y = x + 3k \\ z - x = 3(k+q) \end{cases}$$

Siccome $(k+q) \in \mathbb{Z}$, vale $R(x,z)$ $\square$

Sia Q il QUOZIENTE della divisione intera di x con 3, e R il suo RESTO. Analogamente, sia Q' il QUOZIENTE della divisione intera di y con 3 e R' il suo RESTO. Si ha:

$$\begin{cases} y = 3Q' + R' \\ x = 3Q + R \end{cases}$$

sottraggo la II eq. dalla I

$$y - x = 3\underbrace{(Q' - Q)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(R' - R)}_{\in \mathbb{Z}}$$

Se $R(x,y)$, allora $R' - R = 0$, cioè y e x hanno lo stesso resto nella divisione per 3.

2 Siccome ci sono solo 3 possibili resti (0, 1 e 2), ci sono 3 classi di equivalenza.

ES 2) 10 PUNTI

Sia $D_{28} = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$ l'insieme dei divisori di 28.
Si consideri la relazione così definita:

$\forall x, y \in D_{28} : R(x,y) \iff x \mid y$

R su D_{28} è d'ordine? Totale o parziale?
Ha elementi minimali e/o massimali?

SOLUZIONE

1 RIFLESSIVA: $R(x,x) \iff x \mid x \iff x = n x \iff n = 1$ VERA

4 ANTI-SIMMETRICA:

$R(x,y) \wedge R(y,x) \iff y = nx \wedge x = qy \iff$

$$\begin{cases} y = nx \\ x = qy \end{cases} \iff \begin{cases} y = m \cdot q \cdot y \\ x = qy \end{cases} \iff n \cdot q = 1$$

Siccome $\forall x \in D_{28} : x > 0$, si ha $n = q = 1$

Da cui:

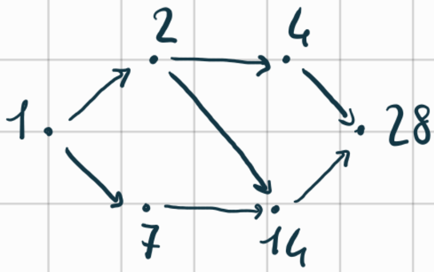
$$\begin{cases} y = 1 \cdot x \\ x = 1 \cdot y \end{cases} \iff x = y \quad \text{VERA}$$

2 TRANSITIVA: $R(x,y) \wedge R(y,z) \iff y = nx \wedge z = qy \iff$

$$\begin{cases} y = nx \\ z = qy \end{cases} \iff \begin{cases} y = nx \\ z = q \cdot m \cdot x \end{cases}$$

Siccome $(q \cdot m) \in \mathbb{Z}$, allora $R(x,z)$ $\square$

Grafico della relazione:

1 

R è parziale, perchè ad esempio

$2 \nmid 7 \wedge 7 \nmid 2$

1 R ha un elemento minimale: 1

1 R ha un elemento massimale: 28

ES 3) 8 PUNTI

Si calcoli il valore della somma:

$$\sum_{i=1}^{n} (6i^2 - 1)$$

Poi dimostrarlo per induzione.

SOLUZIONE

2 $$\sum_{i=1}^{n} (6i^2 - 1) = 6 \sum_{i=1}^{n} i^2 - 1 \cdot \sum_{i=1}^{n} 1 = 6 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n =$$

$$= (n^2+n)(2n+1) - n = 2n^3 + n^2 + 2n^2 + n - n =$$

$$= 2n^3 + 3n^2$$

Dimostrazione:

2 CASO BASE: $n = 1$: $\sum_{i=1}^{1} (6i^2 - 1) = 6 \cdot 1 - 1 = 5$

$2n^3 + 3n^2 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5$ VERO

PASSO INDUTTIVO: $P(n)$: $\sum_{i=1}^{n} (6i^2 - 1) = 2n^3 + 3n^2$

$P(n+1)$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} (6i^2 - 1) = 2(n+1)^3 + 3(n+1)^2 =$

$= (n+1)^2 [2n + 2 + 3] =$

$= (n+1)^2 (2n+5)$

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$?

1 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} (6i^2 - 1) = \sum_{i=1}^{n} (6i^2 - 1) + 6(n+1)^2 - 1 =$

1 $\overset{HP}{=} 2n^3 + 3n^2 + 6n^2 + 12n + 6 - 1 =$

$10n + 2n$

$= 2n^3 + 9n^2 + 12n + 5 =$

$5n^2 + 4n^2$

$= 2n(n^2 + 2n + 1) + 5n^2 + 10n + 5$

$= 2n(n^2 + 2n + 1) + 5(n^2 + 2n + 1) =$

2 $= (n+1)^2 (2n+5) \quad \square$

ES 4) 10 PUNTI

Usando $v : FBF \to \{0,1\}$, si dimostri che:

$\models (p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q) \Rightarrow \bot$

Poi, scrivere la tavola di verità di

$(a \Rightarrow (b \vee \neg c)) \Leftrightarrow ((\neg b \wedge c) \Rightarrow \neg a)$

SOLUZIONE

$v((p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q) \Rightarrow \bot) = 1$

1 SE E SOLO SE

$v((p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)) \leq v(\bot)$

Siccome $v(\bot) = 0$ sempre, bisogna mostrare che $v((p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)) = 0$:

1 $v((p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)) = \min(v(p \Rightarrow q), v(p \wedge \neg q)) =$

1 $= \min(v(p \Rightarrow q), \min(v(p), 1 - v(q))) = \star$

1 Se $v(p) = 0$, $\star = \min(1, \min(0, 1 - v(q))) =$

$$= \min(1, 0) = 0$$

1 Se $v(p) = 1$, $\star = \min(v(p \Rightarrow q), \min(1, 1 - v(q)))$

$$= \min(v(p \Rightarrow q), 1 - v(q)) = \star\star$$

1 Avendo $v(p) = 1$, se fosse $v(q) = 0$, si ha

$$\star\star = \min(0, 1) = 0$$

1 altrimenti, se fosse $v(q) = 1$:

$$\star\star = \min(1, 0) = 0$$

Siccome in tutti i casi $v((p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)) = 0$, si ottiene $v((p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q) \Rightarrow \bot) = 1$

$\square$

3 TAVOLA DI VERITÀ:

a	b	c	$\neg c$	$b \vee \neg c$	① $a \Rightarrow (b \vee \neg c)$	$\neg b$	$\neg b \wedge c$	$\neg a$	② $(\neg b \wedge c) \Rightarrow \neg a$	① $\Leftrightarrow$ ②
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1

ES 5) 10 PUNTI / 9 PUNTI (ES. COMPLETO / II PARZ.)

Usando il metodo di deduzione naturale, mostrare che:

$\vdash (a \Rightarrow (b \wedge c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c))$

SOLUZIONE

2
2
2
1 (+1)
2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a \qquad a \Rightarrow b \wedge c}{b \wedge c}\,(MP)}{b}\,(E\wedge)}{a \Rightarrow b}\,(I\Rightarrow) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{a \qquad a \Rightarrow b \wedge c}{b \wedge c}\,(MP)}{c}\,(E\wedge)}{a \Rightarrow c}\,(I\Rightarrow)}{(a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c)}\,(I\wedge)}{(a \Rightarrow (b \wedge c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c))}\,(I\Rightarrow)$$

ES 6) 8 PUNTI

Dopo aver definito l'alfabeto della logica del I ordine, dare la definizione di termine $t \in TER$.

SOLUZIONE

L'alfabeto della logica del I ordine è costituito da:

1 - Un insieme di COSTANTI
- Un insieme infinito di VARIABILI

1 - Un insieme di SIMBOLI FUNZIONALI
- Un insieme di SIMBOLI PREDICATIVI

1 - CONNETTIVI: $\bot, \wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \oplus, \Leftrightarrow$

1 - QUANTIFICATORI: $\forall, \exists$
- SIMBOLI AUSILIARI: (,) , :

1 TER è il MINIMO insieme t.c.:

1 - Se c è una costante, allora $c \in TER$

1 - Se x è una variabile, allora $x \in TER$

1 - Se $t_1, \ldots, t_n$ sono termini, cioè $t_1, \ldots, t_n \in TER$ e f è un simbolo funzionale n-ario, allora $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in TER$

TOTALE ESAME COMPLETO: 54 PUNTI $\Rightarrow$ VOTO: $\frac{\text{PUNTI}}{2}$

TOTALE II PARZIALE: 27 PUNTI == VOTO