CORREZIONE ESAME DEL 09.01.2024

domenica 7 gennaio 2024 14:31

ESERCIZI

1) RIFLESSIVA: $R(x,x) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : \frac{x}{x} = q$ VERA, basta prendere $q=1$ 2 PUNTI

SIMMETRICA: $R(x,y) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : \frac{x}{y} = q \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{q} \quad (q \neq 0)$ 3 PUNTI

Siccome $\frac{1}{q} \in \mathbb{Q}$, allora vale $R(y,x)$.

TRANSITIVA: $R(x,y) \wedge R(y,z) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : \frac{x}{y} = q \wedge \exists k \in \mathbb{Q} : \frac{y}{z} = k$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = q \\ \frac{y}{z} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = q \\ y = kz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{kz} = q \\ y = kz \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{z} = q \cdot k$$ 4 PUNTI

Siccome $q \cdot k \in \mathbb{Q}$, allora vale $R(x,z)$.

Valendo le tre proprietà, R è di equivalenza. 1 PUNTO

TOT: 10

2) RIFLESSIVA: $R(x,x) \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : x = mx$, VERA basta prendere $m=1$ 1 PUNTO

TRANSITIVA: $R(x,y) \wedge R(y,z) \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : y = mx \wedge \exists k \in \mathbb{Z} : z = ky$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = mx \\ z = ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx \\ z = k \cdot m x \end{cases}$$ Siccome $k \cdot m \in \mathbb{Z}$, vale $R(x,z)$. 2 PUNTI

ANTISIMMETRICA: $R(x,y) \wedge R(y,x) \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : y = mx \wedge \exists k \in \mathbb{Z} : x = ky$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = mx \\ x = ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = m \cdot k y \\ x = ky \end{cases} \Leftrightarrow m \cdot k = 1 \Rightarrow m = k = 1$$ perché $\forall n \in P,\ n > 0$ 3 PUNTI

$\Rightarrow x = y$

Siccome valgono le tre proprietà, la relazione R è d'ordine. 1 PUNTO

ORDINE TOTALE: 1 PUNTO

$1 \to 2 \to 4 \to 8 \ \dots \ 2^{m-1} \to 2^m \to 2^{m+1} \dots$

$\forall x,y \in P : x | y \vee y | x$ VERA perché $2^p | 2^q \Leftrightarrow 2^q = m 2^p$, dove $m = 2^{q-p}$

Se $q \geq p$, allora $m \in \mathbb{Z}$

ELEMENTI MINIMALI: $1 = 2^0$

ELEMENTI MASSIMALI: nessuno

2 PUNTI

TOT: 10

3) $$\sum_{i=0}^{m}(2^i+3+2i) = \sum_{i=0}^{m} 2^i + \sum_{i=0}^{m} 3 + \sum_{i=0}^{m} 2i = \frac{1-2^{m+1}}{1-2} + 3(m+1) + 2 \cdot \frac{m(m+1)}{2} =$$
$$= 2^{m+1} - 1 + 3m + 3 + m^2 + m = 2^{m+1} + m^2 + 4m + 2$$ 3 PUNTI

Dim:

CASO BASE: $n = 0$ $\quad \sum_{i=0}^{0}(2^i+3+2i) = 2^0 + 3 = 4 = 2^1 + 0^2 + 4 \cdot 0 + 2$ 2 PUNTI

PASSO INDUTTIVO:

$$\sum_{i=0}^{m+1}(2^i+3+2i) = \sum_{i=0}^{m}(2^i+3+2i) + 2^{m+1} + 3 + 2(m+1) \overset{HP}{=} 2^{m+1} + m^2 + 4m + 2 + 2^{m+1} + 3 + 2m + 2 =$$
$$= 2 \cdot 2^{m+1} + m^2 + 2m + 1 + 4m + 4 + 2 = 2^{m+2} + (m+1)^2 + 4(m+1) + 2 \quad \square$$ 5 PUNTI

TOT: 10

4) $\models (a \wedge \neg a) \Rightarrow (b \wedge \neg b) \vee c$

1 PUNTO

$$v((a \wedge \neg a) \Rightarrow (b \wedge \neg b) \vee c) = 1 \Leftrightarrow \underbrace{v(a \wedge \neg a)}_{①} \leq \underbrace{v((b \wedge \neg b) \vee c)}_{②}$$

① $v(a \wedge \neg a) = \min(v(a), 1 - v(a)) = *$ 1 PUNTO

Se $v(a) = 1$, allora $1 - v(a) = 0$ e $* = \min(1,0) = 0$ 1 PUNTO

Se $v(a) = 0$, allora $1 - v(a) = 1$ e $* = \min(0,1) = 0$ 1 PUNTO

Quindi ① è sempre = a 0 e la disuguaglianza ① ≤ ② è sempre verificata. 1 PUNTO

TAVOLA DI VERITÀ:

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$a \wedge \neg b$	$\neg a \vee b$	$(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \vee b)$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1

3 PUNTI

TOT: 8

5) $\vdash (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge b) \Rightarrow b$

$$\dfrac{\dfrac{(a\wedge b)\vee(\neg a\wedge b) \qquad \dfrac{a\wedge b}{b}\,(E_\wedge) \qquad \dfrac{\neg a\wedge b}{b}\,(E_\wedge)}{b}\,(E_\vee)}{(a\wedge b)\vee(\neg a\wedge b)\Rightarrow b}\,(I_\Rightarrow)$$

1 PUNTO $(E_\wedge)$ — $(E_\wedge)$ 1 PUNTO — $(E_\vee)$ 4 PUNTI — $(I_\Rightarrow)$ 2 PUNTI

TOT: 8

6) L'alfabeto $\mathcal{A}$ della logica del I ordine è costituito da:

- Un insieme di COSTANTI
- Un insieme infinito di VARIABILI

2 PUNTI

- Un insieme di simboli funzionali
- Un insieme di simboli predicativi

2 PUNTI

- Connettivi: $\perp, \wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, \oplus$
- Quantificatori: $\forall, \exists$
- Simboli ausiliari: (,) , :

4 PUNTI

TOT: 8

TOTALE dell'ESAME: 54 PUNTI ⇝ VOTO: punteggio/2