ESAME del 06/02/2024

ES 1) 8 PUNTI

Sia R la relazione così definita:

$\forall x, y \in \mathbb{Q} : R(x,y) \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = 7k + y$

Dimostrare che R è di equivalenza.
Quante classi di equivalenze ha R?

SOLUZIONE

1 RIFLESSIVA: $R(x,x) \iff x = 7k + x \iff k = 0$ VERA

2 SIMMETRICA: $R(x,y) \iff x = 7k + y \iff y = -7k + x$

Siccome $-k \in \mathbb{Z}$, vale $R(y,x)$

3 TRANSITIVA: $R(x,y) \wedge R(y,z) \iff x = 7k + y \wedge y = 7q + z$

$$\begin{cases} x = 7k + y \\ y = 7q + z \end{cases} \iff \begin{cases} y = x - 7k \\ x - 7k = 7q + z \end{cases} \iff \begin{cases} y = x - 7k \\ x = 7(k+q) + z \end{cases}$$

Siccome $(k+q) \in \mathbb{Z}$, vale $R(x,z)$ $\square$

Sia Q il QUOZIENTE della divisione intera di x con 7, e R il suo RESTO. Analogamente, sia Q' il QUOZIENTE della divisione intera di y con 7 e R' il suo RESTO. Si ha:

$$\begin{cases} y = 7Q' + R' \\ x = Q + R \end{cases}$$

sottraggo la II eq. dalla I

$$y - x = 7\underbrace{(Q' - Q)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(R' - R)}_{\in \mathbb{Z}}$$

Se $R(x,y)$, allora $R' - R = 0$, cioè y e x hanno lo stesso resto nella divisione per 7.

2 Siccome ci sono solo 7 possibili resti $(0,1,2,3,4,5,6)$ ci sono 7 classi di equivalenza.

ES 2) 10 PUNTI

Sia $D = \{2,3,4,6,8,12,24\}$ e R la relazione così definita:

$\forall x,y \in D: R(x,y) \iff x \mid y$

R su D è d'ordine? Totale o parziale?

Ha elementi minimali e/o massimali?

SOLUZIONE

1 RIFLESSIVA: $R(x,x) \iff x \mid x \iff x = n x \iff n = 1$ VERA

4 ANTI-SIMMETRICA:

$$R(x,y) \wedge R(y,x) \iff y = nx \wedge x = qy \iff$$

$$\begin{cases} y = nx \\ x = qy \end{cases} \iff \begin{cases} y = m \cdot q \cdot y \\ x = qy \end{cases} \iff n \cdot q = 1$$

Siccome $\forall x \in D_{28} : x > 0$, si ha $n = q = 1$

Da cui:

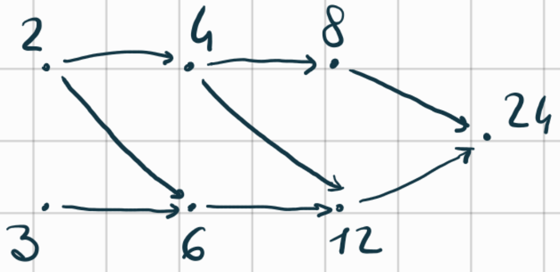
$$\begin{cases} y = 1 \cdot x \\ x = 1 \cdot y \end{cases} \iff x = y \quad \text{VERA}$$

2 TRANSITIVA: $R(x,y) \wedge R(y,z) \iff y = nx \wedge z = qy \iff$

$$\begin{cases} y = nx \\ z = qy \end{cases} \iff \begin{cases} y = nx \\ z = q \cdot m \cdot x \end{cases}$$

Siccome $(q \cdot m) \in \mathbb{Z}$, allora $R(x,z)$ $\square$

Grafico della relazione



1 R è parziale, perchè ad esempio

$2 \nmid 3 \wedge 3 \nmid 2$

1 R ha due elementi minimali : 2, 3
1 R ha un elemento massimale : 24

ES 3) 8 PUNTI

Si calcoli il valore della somma:

$$\sum_{i=1}^{n} (2^i + 2)$$

Poi dimostrarlo per induzione.

SOLUZIONE

2 $$\sum_{i=1}^{n}(2^i+2) = \sum_{i=0}^{n} 2^i - 2^0 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 1 + 2n =$$

$$= 2^{n+1} - 2 + 2n$$

Dimostrazione:

2 CASO BASE : $n = 1$: $\sum_{i=1}^{1}(2^i+2) = 2^1 + 2 = 4$

$2^{n+1} - 2 + 2n = 2^2 - 2 + 2 = 4$ VERO

PASSO INDUTTIVO : $P(n)$: $\sum_{i=1}^{n}(2^i+2) = 2^{n+1} - 2 + 2n$

$$P(n+1): \sum_{i=1}^{n+1} (2^i+2) = 2^{n+2} - 2 + 2(n+1) =$$

4 $$\sum_{i=1}^{n+1} (2^i+2) = \sum_{i=1}^{n} (2^i+2) + 2^{n+1} + 2 \overset{HP}{=} 2^{n+1} - 2 + 2n + 2^{n+1} + 2 =$$

$$= 2 \cdot 2^{n+1} + 2n = 2^{n+2} + 2n \qquad \square$$

ES 4) 8 PUNTI

Usando $v: FBF \to \{0,1\}$, si dimostri che:

$$\models \neg(\neg a \vee \neg\neg a) \Rightarrow b \vee c$$

Poi, scrivere la tavola di verità di

$$(a \vee \neg b) \oplus c$$

SOLUZIONE

$v(\neg(\neg a \vee \neg\neg a) \Rightarrow b \vee c) = 1$

1 SE E SOLO SE

$$\underbrace{v(\neg(\neg a \vee \neg\neg a))}_{①} \leq \underbrace{v(b \vee c)}_{②}$$

2 ①: $v(\neg(\neg a \vee \neg\neg a)) = 1 - v(\neg a \vee \neg\neg a) =$

$= 1 - \max(1 - v(a), 1 - (1 - v(a))) =$

$= 1 - \max(1 - v(a), v(a)) = \star$

1 Se $v(a) = 1$, $\star = 1 - \max(0, 1) = 1 - 1 = 0$

1 Se $v(a)=0$, $\star = 1 - \max(1,0) = 1-1=0$

1 Perciò ① è sempre $=0$ e qualsiasi sia il valore di ②, si ha sempre ① $\leq$ ②.

Perciò vale $v(\neg(\neg a \vee \neg\neg a) \Rightarrow b \vee c) = 1$.

2 TAVOLA DI VERITÀ

a	b	c	$\neg b$	$a \vee \neg b$	$(a \vee \neg b) \oplus c$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0

ES 5) 10 PUNTI

Usando il metodo di deduzione naturale, mostrare che:

$\vdash (a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow (b \wedge c))$

SOLUZIONE

2

2

2

$$\dfrac{\dfrac{a \qquad \dfrac{(a\Rightarrow b)\wedge(a\Rightarrow c)}{a\Rightarrow b}\,(E\wedge)}{b}\,(MP) \qquad \dfrac{a \qquad (E\wedge)\,\dfrac{(a\Rightarrow c)\wedge(a\Rightarrow b)}{a\Rightarrow c}}{c}\,(MP)}{b\wedge c}\,(I\wedge)$$

2 $$\frac{\qquad\qquad}{a \Rightarrow (b \wedge c)}\ (I \Rightarrow)$$

2 $$\frac{\qquad\qquad}{(a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow (b \wedge c))}\ (I \Rightarrow)$$

ES 6) 10 PUNTI / 9 PUNTI (ES. COMPLETO / II PARZIALE)

Dopo aver definito l'alfabeto della logica del I ordine, dare la definizione di insieme FV per FBF.

SOLUZIONE

L'alfabeto della logica del I ordine è costituito da:

1 - Un insieme di COSTANTI
- Un insieme infinito di VARIABILI

1 - Un insieme di SIMBOLI FUNZIONALI
- Un insieme di SIMBOLI PREDICATIVI

1 - CONNETTIVI: $\perp, \wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \oplus, \Leftrightarrow$

1 - QUANTIFICATORI: $\forall, \exists$

(+1) - SIMBOLI AUSILIARI: (,) , :

Sia $P \in FBF$, si dice $FV(P)$ l'insieme:

1 - $FV(\perp) = \emptyset$

1 - $FV(A(t_1, \ldots, t_n)) = FV(t_1) \cup \ldots \cup FV(t_n)$

1 - $FV(\neg P) = FV(P)$

1 $\begin{cases} - FV(P \vee Q) = FV(P) \cup FV(Q) \\ - FV(P \wedge Q) = FV(P) \cup FV(Q) \\ - FV(P \Rightarrow Q) = FV(P) \cup FV(Q) \end{cases}$

1 $\begin{cases} - FV(\forall x : P) = FV(P) \setminus \{x\} \\ - FV(\exists x : P) = FV(P) \setminus \{x\} \end{cases}$

TOTALE ESAME COMPLETO: 54 PUNTI $\Rightarrow$ VOTO: $\frac{\text{PUNTI}}{2}$

TOTALE II PARZIALE: 27 PUNTI == VOTO