Esercizi

Esame di Elementi di Logica e Strutture Discrete

Corso di Laurea in Informatica

Appello del 23·01·2024

Nome: ____________________________________
Cognome: ____________________________________
Matricola: ____________________________________

Esercizio 1. (4 punti) Sia R la relazione su $\mathbb{N}$ così definita:

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : R(x, y) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y - x = 3k$$

Ad esempio, $23 - 8 = 3 \cdot 5$, quindi vale $R(8, 23)$.

- Dimostrare che R su $\mathbb{N}$ è una relazione di equivalenza.
- Quante classi di equivalenza si ottengono partizionando $\mathbb{N}$ con R?

(*Suggerimento*: se $R(x, y)$, allora x e y hanno lo stesso *resto* nella divisione per 3.)

Esercizio 2. (5 punti) Si consideri l'insieme $D_{28} = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$ dei divisori di 28, a cui si applica la relazione R così definita:

$$\forall x, y \in D_{28} : R(x, y) \Leftrightarrow x|y$$

si ricorda che $x|y$ si legge "x divide y", ovvero $\exists m \in \mathbb{Z} : y = mx$.

- R su D_{28} è una relazione di ordine? Se sì, è parziale o totale?
- R su D_{28} ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

(*Suggerimento*: rappresentare graficamente la relazione R sull'insieme D_{28}.)

Esercizio 3. (4 punti) Calcolare il valore della seguente somma:

$$\sum_{i=1}^{n} (6i^2 - 1)$$

Poi dimostrarlo per induzione.

Esercizio 4. (5 punti) Usando la definizione di interpretazione $v : \text{FBF} \to \{0, 1\}$ per la logica proposizionale, dimostrare che:

$$\models (p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q) \Rightarrow \bot$$

Successivamente, scrivere la tavola di verità della formula $(a \Rightarrow (b \vee \neg c)) \Leftrightarrow ((\neg b \wedge c) \Rightarrow \neg a)$.

Esercizio 5. (5 punti) Usando il metodo di deduzione naturale, dimostrare che:

$$\vdash (a \Rightarrow (b \wedge c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c))$$

Esercizio 6. (4 punti) Dopo aver descritto l'alfabeto dei linguaggi del I ordine, dare la definizione di termine $t \in \text{TER}$ per la logica del I ordine.