

# Esercizi

## ESAME DI ELEMENTI DI LOGICA E STRUTTURE DISCRETE

Corso di Laurea in Informatica

Appello del 24-07-2023

Nome: \_\_\_\_\_  
Cognome: \_\_\_\_\_  
Matricola: \_\_\_\_\_

**Esercizio 1. (5 punti)** Sia  $R$  la relazione di proporzionalità (“ $a$  sta a  $c$  come  $b$  sta a  $d$ ”) tra coppie di interi non nulli, cioè  $(a, b) \in P$  e  $(c, d) \in P$ , dove  $P = \mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

Formalmente, la relazione  $R$  è così definita:

$$\forall (a, b), (c, d) \in P : R((a, b), (c, d)) \Leftrightarrow ad = cb$$

Dimostrare che la relazione  $R$  è di equivalenza.

---

**Esercizio 2. (5 punti)** Si consideri l'insieme  $D = \{2, 4, 6, 10, 12, 20, 30, 60\}$  a cui si applica la relazione  $R$  così definita:

$$\forall x, y \in D : R(x, y) \Leftrightarrow x|y$$

si ricorda che  $x|y$  si legge “ $x$  divide  $y$ ”, ovvero  $\exists m \in \mathbb{Z} : y = mx$ .

- $R$  su  $D$  è una relazione di ordine? Se sì, è parziale o totale?
- $R$  su  $D$  ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

(*Suggerimento*: rappresentare graficamente la relazione  $R$  sull'insieme  $D$ .)

---

**Esercizio 3. (5 punti)** Dimostrare per induzione che la somma dei primi  $n$  termini di una progressione geometrica di ragione  $q = \frac{1}{2}$  è uguale a  $\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$ :

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}$$

---

**Esercizio 4. (4 punti)** Usando la definizione di interpretazione  $v : X \rightarrow \{0, 1\}$  per la logica proposizionale, dimostrare che:

$$\models (a \wedge \neg a) \Rightarrow \neg((b \vee c) \wedge (a \vee c))$$

Successivamente, scrivere la tavola di verità della formula  $(b \vee c) \wedge (a \vee c)$ .

---

**Esercizio 5. (4 punti)** Usando il metodo di deduzione naturale, dimostrare che:

$$\vdash (a \wedge b) \Rightarrow (b \wedge a)$$

---

**Esercizio 6. (4 punti)** Dare la definizione di struttura  $\mathcal{A} = (D_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$  e di ambiente per la logica del I ordine.