Esercizi

Esame di Elementi di Logica e Strutture Discrete

Corso di Laurea in Informatica

Appello del 09·01·2024

Nome: ____________________________________
Cognome: ____________________________________
Matricola: ____________________________________

Esercizio 1. (5 punti) Sia R la relazione su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ così definita:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : R(x,y) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : \frac{x}{y} = q \wedge q \neq 0$$

Dimostrare che R su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è una relazione di equivalenza.

Esercizio 2. (5 punti) Si consideri l'insieme $P = \{x \mid \exists n \in \mathbb{N} : x = 2^n\} = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$ delle potenze di 2, a cui si applica la relazione R così definita:

$$\forall x, y \in P : R(x,y) \Leftrightarrow x|y$$

si ricorda che $x|y$ si legge "x divide y", ovvero $\exists m \in \mathbb{Z} : y = mx$.

- R su P è una relazione di ordine? Se sì, è parziale o totale?
- R su P ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

Esercizio 3. (5 punti) Calcolare il valore della seguente somma:

$$\sum_{i=0}^{n} (2^i + 3 + 2i)$$

Poi dimostrarlo per induzione.

Esercizio 4. (4 punti) Usando la definizione di interpretazione $v : \text{FBF} \to \{0,1\}$ per la logica proposizionale, dimostrare che:

$$\models (a \wedge \neg a) \Rightarrow (b \wedge \neg b) \vee c$$

Successivamente, scrivere la tavola di verità della formula $(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \vee b)$.

Esercizio 5. (4 punti) Usando il metodo di deduzione naturale, dimostrare che:

$$\vdash (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge b) \Rightarrow b$$

(*Suggerimento*: utilizzare opportunamente la regola di eliminazione dell'$\vee$.)

Esercizio 6. (4 punti) Definire l'alfabeto $\mathcal{A}$ della logica del I ordine.