Esercizi

Esame di Elementi di Logica e Strutture Discrete

Corso di Laurea in Informatica

Appello del 05·06·2024

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Esercizio 1. (4 punti) Sia R la relazione su $\mathbb{N}$ così definita:

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : R(x, y) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k + y$$

Ad esempio, $15 = 2 \cdot 7 + 1$, quindi vale $R(15, 1)$.

- Dimostrare che R su $\mathbb{N}$ è una relazione di equivalenza.
- Quante classi di equivalenza si ottengono partizionando $\mathbb{N}$ con R?

(*Suggerimento*: se $R(x, y)$, allora x e y hanno lo stesso *resto* nella divisione per 2.)

Esercizio 2. (5 punti) Si consideri l'insieme $D = \{2, 11, 23, 44, 1012, 2024\}$, a cui si applica la relazione R così definita:

$$\forall x, y \in D : R(x, y) \Leftrightarrow x | y$$

si ricorda che $x|y$ si legge "x divide y", ovvero $\exists m \in \mathbb{Z} : y = mx$.

- R su D è una relazione di ordine? Se sì, è parziale o totale?
- R su D ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

(*Suggerimento*: rappresentare graficamente la relazione R sull'insieme D, dove può essere utile ricordare che $23 \cdot 44 = 1012$.)

Esercizio 3. (4 punti) Calcolare il valore della seguente somma:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i + 2)$$

Poi dimostrarlo per induzione.

Esercizio 4. (5 punti) Usando la definizione di interpretazione $v : \text{FBF} \to \{0, 1\}$ per la logica proposizionale, dimostrare che:

$$\models \neg(a \vee b) \wedge a \Rightarrow b$$

Successivamente, scrivere la tavola di verità della formula $\neg(a \vee \neg b)$.

Esercizio 5. (5 punti) Usando il metodo di deduzione naturale, dimostrare che:

$$\vdash \neg(a \vee b) \wedge a \Rightarrow b$$

Esercizio 6. (4 punti) Descrivere l'alfabeto dei linguaggi del I ordine, dopodiché dare la definizione di termine $t \in \text{TER}$.