

Esercizio 1. Dimostrare le seguenti affermazioni usando le definizioni di $\Theta(\cdot)$ e $O(\cdot)$. In questo esercizio, così come nei seguenti, \log denota il logaritmo in base 2.

1. $(n^n + n2^n + 5^n)(n! + 5^n) = O(n^n n!)$
2. $(n! + 2^n)(n^3 + \log(n^2 + 1)) = O(n^3 n!)$ \rightsquigarrow simile a 1.
3. $n! \neq O(2^n)$
4. $\log n! = \Theta(n \log n)$

$f_1(n)$

$$1) (n^n + n2^n + 5^n)(n! + 5^n) = O(n^n n!) \Leftrightarrow \exists c, n_0 > 0 : 0 < f_1(n) \leq cn^n n! \quad \forall n \geq n_0$$

$\checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark$

$$n^n n! + n2^n n! + 5^n n! + n^n 5^n + n2^n 5^n + 5^n 5^n$$

o $n^n n! = O(n^n n!)$

o $n2^n n! \leq n^n n!$

$$\Leftrightarrow n2^n \leq n^n$$

$$\Leftrightarrow 2^n \leq \frac{n^n}{n} = n^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{n^{n-1}}{2^n} = \underbrace{\frac{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}}_{n-1 \text{ volte}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow n \geq 3$$

IDEA: provo $c = 1$ per trovare n_0 che soddisfa la diseguaglianza

$$\rightsquigarrow \text{prendo } n_0 = 3 \text{ così } \frac{n_0}{2} \geq 2 \Rightarrow \left(\frac{n_0}{2}\right)^{n-1} \geq 2 \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow n2^n n! = O(n^n n!)$$

o $5^n n! \leq n^n n!$

$$\Leftrightarrow 5^n \leq n^n$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{n^n}{5^n} = \underbrace{\frac{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}{5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5}}_{n \text{ volte}} = \frac{n}{5} \cdot \frac{n}{5} \cdot \dots \cdot \frac{n}{5} = \left(\frac{n}{5}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{5} \geq 1 \Leftrightarrow n \geq 5$$

$\rightsquigarrow n_0 = 5$

$$\circ \quad 5^n \leq n!$$

$$\Leftrightarrow 5^n \leq n!$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{n!}{5^n} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdots 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \boxed{\frac{n \cdot (n-1) \cdots 5}{5 \cdot 5 \cdots 5}} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{n \cdot (n-1) \cdots 5}{5 \cdot 5 \cdots 5} \cdot \frac{1}{\alpha}$$

$$\left[\frac{1}{\alpha} = \frac{4!}{5^4} \right]$$

$$\frac{4!}{5^4} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{n}{5} \cdot \frac{n-1}{5} \cdots \frac{5}{5} \cdot \frac{1}{\alpha}$$

E' sufficiente che

$$1 \leq \frac{n}{5} \cdot \frac{1}{\alpha} \quad \left[\leq \frac{n}{5} \cdot \frac{n-1}{5} \cdots \frac{5}{5} \cdot \frac{1}{\alpha} \right]$$

$$\Leftrightarrow n \geq 5\alpha = \frac{5^5}{4!}$$

$$\rightsquigarrow \text{prendo } n_0 = \left\lceil \frac{5^5}{4!} \right\rceil$$

Esempio

$$n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 \leq n \cdot n \cdot (n-2) \cdots (n-3) \cdots 2 \cdot 1$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ | \quad | \quad | \quad | \end{array} \leq n \cdot n \cdot n \cdot n \cdots n \cdot n \\ = n^n$$

$\forall n \geq 1$

$$\begin{aligned} 5! &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \leq 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \leq 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 \\ &\leq 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \leq 5^5 \end{aligned}$$

$$\circ \quad n^2 5^n \leq n^n n!$$

$$\Leftrightarrow 2^n 5^n \leq n^{n-1} \cdot n!$$

$[\forall n \geq 1]$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{n^{n-1} \cdot n!}{10^n} = \frac{n^{n-1} \cdot n!}{10^n}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{n}{10} \cdot \frac{n-1}{10} \cdot \dots \cdot \frac{10}{10} \cdot \frac{9!}{10^9} \cdot \overbrace{\frac{n-1}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}}^{n-1}$$

E' sufficiente che

$$1 \leq \frac{n}{10} \cdot \frac{9!}{10^9} \left[\leq \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{10^n} \cdot \overbrace{\frac{n-1}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}}^{n-1} \right]$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{10^{10}}{9!}$$

$$\rightarrow \text{prendo } n_0 = \left\lceil \frac{10^{10}}{9!} \right\rceil$$

$$\circ \quad 5^n \cdot 5^n \leq n^n \cdot n!$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{n^n \cdot n!}{25^n} = \frac{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}{5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 4!}{5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5 \cdot 5^4}$$

E' sufficiente che

$$1 \leq \frac{n}{5} \cdot \frac{4!}{5^4} \left[\leq \frac{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}{5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 4!}{5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5 \cdot 5^4} \right]$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{5^5}{4!}$$

$$\rightarrow \text{prendo } n_0 = \left\lceil \frac{5^5}{4!} \right\rceil$$

3) $n! \neq O(2^n)$

- o per assurdo supp. $n! = O(2^n) \Leftrightarrow \exists c, n_0 > 0 : 0 \leq n! \leq c2^n \forall n \geq n_0$
- o quindi $\exists c, n_0 > 0$ tali per cui

$$n! \leq c2^n \Leftrightarrow \frac{n!}{2^n} \leq c \quad \forall n \geq n_0$$

ossia la successione $\frac{n!}{2^n}$ sarebbe superiormente limitata da c da n_0 in poi

- o questo e' **assurdo**, infatti

$$\begin{aligned} \frac{n!}{2^n} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2} = \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \\ &\geq \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1) \end{aligned}$$

- o inoltre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{4} = +\infty \quad (2)$$

TEO. CONFRONTO (1), (2)

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{2^n} = +\infty \Leftrightarrow \forall c > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{n!}{2^n} > c \quad \forall n \geq n_0 \quad \square$$

4) $\log(n!) = \Theta(n \log(n))$

$$\begin{aligned} o \quad \log(n!) &= \log(n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1) \\ &= \log(n) + \log(n-1) + \dots + \log(2) + \log(1) \quad \forall n \geq 1 \\ &\leq \log(n) + \log(n) + \dots + \log(n) + \log(n) \\ &= n \log(n) \\ &= O(n \log n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} o \quad \log(n!) &= \log(n) + \log(n-1) + \dots + \log\left(\frac{n}{2}+1\right) + \log\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + \log(1) \\ &\geq \log\left(\frac{n}{2}\right) + \log\left(\frac{n}{2}-1\right) + \dots + \log(2) + \log(1) \\ &\geq \log\left(\frac{n}{2}\right) + \log\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + \log\left(\frac{n}{2}\right) + \log\left(\frac{n}{2}\right) \quad \forall n \geq 1 \\ &\geq \frac{n}{2} \log\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2} [\log(n) - \log(2)] = \frac{n}{2} \log(n) - \frac{n}{2} \\ &= \Omega(n \log(n)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \log(n!) = \Theta(n \log(n)).$$

Esercizio 2. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni:

1. $n \log n = O(\log n!)$ ✓ $\log n! = \Theta(n \log n) \xrightarrow{\Theta \text{ simm.}} n \log n = \Theta(\log n!)$...
2. $\log_{16} n = O(\log_4 n)$ e $\log_8 n = O(\log_{10} n)$ ✓ cambio base log
3. $\log(n^2 + 1) = O(\log n)$ ✓ $\log(n^2 + 1) \sim \log(n^2) = 2 \log(n)$
4. Per risolvere un certo problema abbiamo a disposizione due algoritmi, A_1 e A_2 . Se l'input ha dimensione n , A_1 impiega esattamente $n^2 2^n$ passi, mentre A_2 impiega esattamente $n!$ passi. Al crescere di n , A_1 impiega un numero minore di passi rispetto ad A_2 . ✓

4. $T_{A_1}(n) = \Theta(n^2 2^n)$, $T_{A_2}(n) = \Theta(n!)$

$$\begin{aligned} \circ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 2^n}{n!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot n \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1} \cdot 2^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{2}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot 2^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \prod_{i=2}^{n-2} \frac{2}{n-i} \cdot 2^3 \\ &\quad \text{ogni fattore tende a 0} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \prod_{i=2}^{n-2} 0 \cdot 2^3 \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

quindi $n^2 2^n = o(n!)$ $\Leftrightarrow \forall c > 0 \exists n_0 > 0 : 0 \leq n^2 2^n < cn! \forall n \geq n_0$

Esercizio 3. Fornire un limite asintotico stretto per ognuna delle seguenti funzioni $f(n)$:

$$1. f(n) = (n^2 + 1)^{10} = \Theta(n^{20})$$

$$2. f(n) = 2n \log(n+2)^2 + (n+2)^2 \log \frac{n}{2} \sim n \log n^2 + n^2 \log n = \Theta(n^2 \log n)$$

$$3. f(n) = 2^{n+1} + 3^{n-1} = \Theta(3^n)$$

4. $f(n)$ è la somma dei primi n interi positivi \rightarrow somma di Gauss, $\Theta(n^2)$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n-1}}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{2^{n+1}}}{\cancel{3^n}} + \frac{\cancel{3^{n-1}}}{\cancel{3^n}} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 2^{n+1} + 3^{n-1} = \Theta(3^n)$$

Esercizio 4. Quale delle seguenti sequenze di funzioni è tale che ogni funzione è O della successiva?

1. $\log(\log n)$, n , $\log n$, n^n
2. $\log n$, 2^{2^n} , n^n , $n!$
3. $\log(\log n)$, $\log n$, n , 2^{2^n}
4. nessuna delle precedenti

$$g(n) = \Omega(f(n)) \Leftrightarrow \exists c, n_0 > 0 : 0 \leq c f(n) \leq g(n) \quad \forall n \geq n_0$$

Esercizio 5. Siano $f(n)$ e $g(n)$ funzioni positive tali che $f(n) = O(g(n))$. Dimostrare che $g(n) = \underline{\Omega}(f(n))$.

$$\begin{aligned} f(n) = O(g(n)) &\Leftrightarrow \exists c, n_0 > 0 : 0 \leq f(n) \leq c g(n) \quad \forall n \geq n_0 \\ &\Leftrightarrow \exists c, n_0 > 0 : 0 \leq \frac{1}{c} f(n) \leq g(n) \quad \forall n \geq n_0 \\ &\Leftrightarrow \exists k, n_0 > 0 : 0 \leq k f(n) \leq g(n) \quad \forall n \geq n_0 \\ &\Leftrightarrow g(n) = \underline{\Omega}(f(n)) \end{aligned}$$

□

Esercizio 6. Sia k un intero positivo. Dimostrare che un insieme di n elementi ha $O(n^k)$ sottoinsiemi di cardinalità k .

o n . sottoinsiemi k elementi

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &:= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \\ &\leq \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{n-(n-k+1)+1 = k \text{ elementi}} \quad [k! > 0] \\ &\leq n^k. \end{aligned}$$

Esercizio 7. Si consideri il seguente algoritmo, il cui input è un array $A[0..n-1]$ di interi di dimensione n . Quale problema risolve? Determinare un limite asintotico stretto per il tempo di esecuzione nel caso peggiore. Esiste un algoritmo più efficiente nel caso in cui l'array in input sia ordinato? $\Theta(n)$

Algorithm UNIQUEELEMENTS(A)

scorro l'array
in una passata

```

1: for  $i \leftarrow 0$  to  $n - 2$  do 0 \rightarrow n-2
2:   for  $j \leftarrow i + 1$  to  $n - 1$  do i+1 \rightarrow n-1
3:     if  $A[i] = A[j]$  then return false
4:   end if
5: end for
6: end for
7: return true

```

} c

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} c = \sum_{i=0}^{n-2} c \cdot \sum_{j=i+1}^{n-1} 1 = \sum_{i=0}^{n-2} c \cdot [(n-1) - (i+1) + 1]$$

↑

$$= \sum_{i=0}^{n-2} c \cdot (n - i - 1) = c \cdot \sum_{i=0}^{n-2} (n - i - 1)$$

$$[\text{K} := n - i - 1] = c \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= c \cdot \left(\sum_{k=1}^n k - n \right)$$

nuovi indici: basta sostituire $i = 0, i = n-2$ nella def. di K

$i \in [0..n-2] \Rightarrow k \in [n-1..1]$

$$= c \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2} - n \right) = \Theta(n^2) .$$

Esercizio 8. Si consideri il seguente algoritmo, il cui input è un intero positivo n . Quale problema risolve? Determinare un limite asintotico stretto per il tempo di esecuzione nel caso peggiore.

Algorithm BINARY(n)

```

1:  $count \leftarrow 1$             $c_1$ 
2: while  $n > 1$  do
3:    $count \leftarrow count + 1$      $c_2$ 
4:    $n \leftarrow \lfloor n/2 \rfloor$      $c_3$ 
5: end while
6: return  $count$ 
  }
```

- perché il corpo del **while** e' eseguito $\lfloor \log n \rfloor$ volte ?

- ad ogni iterazione dimezzo l'input, inizialmente e' n . Quindi all'entrata del ciclo della i -esima iterazione il valore n_i sara'

$$n_i = \left\lfloor \frac{n}{2^{i-1}} \right\rfloor$$

- entro solo quando

$$\begin{aligned}
 n_i > 1 &\Leftrightarrow \left\lfloor \frac{n}{2^{i-1}} \right\rfloor > 1 \\
 &\Leftrightarrow n > 2^{i-1} \\
 &\Leftrightarrow \log n > \log 2^{i-1} = i-1 \\
 &\Leftrightarrow i < \log n + 1 \\
 &\Leftrightarrow i \leq \lfloor \log n \rfloor
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T(n) = c_1 + \lfloor \log n \rfloor (c_2 + c_3) = \Theta(\log n) .$$