



Manuel Di Agostino

manuel.diagostino@studenti.unipr.it

UniPR

Università di Parma

7 ottobre 2025

Tutorato di Logica

1 Insiemistica

- Definizione tramite proprietà
- Relazioni di base
- Operazioni tra insiemi
- Insieme prodotto

1 Insiemistica

- Definizione tramite proprietà
- Relazioni di base
- Operazioni tra insiemi
- Insieme prodotto

Definition (Insieme)

Un insieme S è definito da una proprietà $p(x)$:

$$S := \{x : p(x)\} \equiv \forall x.(x \in S \leftrightarrow p(x))$$

Definition (Insieme)

Un insieme S è definito da una proprietà $p(x)$:

$$S := \{x : p(x)\} \equiv \forall x.(x \in S \leftrightarrow p(x))$$

Esempio

L'insieme dei numeri naturali pari:

$$P = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ è pari}\}$$

Qui la proprietà $p(x)$ è "x è un numero pari". Ad esempio, $4 \in P$ perché $p(4)$ è vera, mentre $3 \notin P$ perché $p(3)$ è falsa.

Definition (Quantificatori su insiemi)

Si hanno inoltre le seguenti definizioni (che sono proposizioni!):

$$\forall x \in S. p(x) \equiv \forall x. (x \in S \rightarrow p(x))$$

$$\exists x \in S : p(x) \equiv \exists x : (x \in S \wedge p(x))$$

Definition (Quantificatori su insiemi)

Si hanno inoltre le seguenti definizioni (che sono proposizioni!):

$$\forall x \in S. p(x) \equiv \forall x. (x \in S \rightarrow p(x))$$

$$\exists x \in S : p(x) \equiv \exists x : (x \in S \wedge p(x))$$

Corollary (Negazione di quantificatori su insiemi)

Grazie a esse, possiamo dimostrare che:

$$\neg(\forall x \in S. p(x)) \equiv \exists x \in S : \neg p(x)$$

$$\neg(\exists x \in S : p(x)) \equiv \forall x \in S. \neg p(x)$$

Esempi di quantificatori e negazioni

Esempio pratico

Sia $S = \{1, 2, 5, 10\}$ e sia $p(x)$ la proposizione "x è un numero pari".

➤ **Quantificatore Universale:** $\forall x \in S. p(x)$

"Per ogni x in S , x è pari".

Questa proposizione è **falsa**, perché $1 \in S$ ma non è pari.

Esempi di quantificatori e negazioni

Esempio pratico

Sia $S = \{1, 2, 5, 10\}$ e sia $p(x)$ la proposizione "x è un numero pari".

➤ **Quantificatore Universale:** $\forall x \in S. p(x)$

"Per ogni x in S , x è pari".

Questa proposizione è **falsa**, perché $1 \in S$ ma non è pari.

➤ **Negazione dell'Universale:**

$\neg(\forall x \in S. p(x)) \equiv \exists x \in S : \neg p(x)$

"Esiste un x in S tale che x non è pari".

Questa proposizione è **vera**. Ad esempio, per $x = 5$, si ha che $5 \in S$ e 5 non è pari.

Exercise 1

Traduci e nega la proposizione: "Tutti i numeri interi sono positivi."

Exercise 1

Traduci e nega la proposizione: "Tutti i numeri interi sono positivi."

- › **Formalizzazione:** $\forall x \in \mathbb{Z}. x > 0$
- › **Valore di verità:** Falso (es. -1).
- › **Negazione:** $\exists x \in \mathbb{Z} : \neg(x > 0) \equiv \exists x \in \mathbb{Z} : x \leq 0$
("Esiste almeno un numero intero che non è positivo.")

Exercise 2

Traduci e nega la proposizione: "Nessun numero primo è pari."

Exercise 2

Traduci e nega la proposizione: "Nessun numero primo è pari."

- › **Formalizzazione:** Sia P l'insieme dei numeri primi.

$$\forall x \in P. x \text{ è dispari}$$

- › **Valore di verità:** Falso (il 2 è primo e pari).
- › **Negazione:** $\exists x \in P : x \text{ è pari}$
("Esiste almeno un numero primo che è pari.")

Exercise 3 Quantificatori annidati

Formalizza e nega la seguente proposizione (dominio \mathbb{Z}), determinando il valore di verità dell'originale e della negazione:
"Per ogni intero x , esiste un intero y tale che la loro somma è zero."

Exercice 3 Quantificatori annidati

Formalizza e nega la seguente proposizione (dominio \mathbb{Z}), determinando il valore di verità dell'originale e della negazione:
"Per ogni intero x , esiste un intero y tale che la loro somma è zero."

Soluzione

- **Formalizzazione:** $\forall x \in \mathbb{Z}. \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0.$
(Vero: per ogni x , basta prendere $y = -x$).)

Exercice 3 Quantificatori annidati

Formalizza e nega la seguente proposizione (dominio \mathbb{Z}), determinando il valore di verità dell'originale e della negazione:
"Per ogni intero x , esiste un intero y tale che la loro somma è zero."

Soluzione

- **Formalizzazione:** $\forall x \in \mathbb{Z}. \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0.$
(Vero: per ogni x , basta prendere $y = -x$).)
- **Negazione:** $\neg(\forall x \dots) \equiv \exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z}. x + y \neq 0.$
(Falso).

1 Insiemistica

- Definizione tramite proprietà
- Relazioni di base
- Operazioni tra insiemi
- Insieme prodotto

Esistono alcune relazioni di base tra gli insiemi.

Definition (Relazione di appartenenza)

Dato un insieme A si ha che

$$x \in A \equiv \mathcal{B}(x, A) \equiv \text{"}x \text{ appartiene all'insieme } A\text{"}$$

Definition (Relazione di inclusione)

Dati due insiemi A, B si ha che

$$A \subseteq B \equiv \mathcal{I}(A, B) \equiv \forall x.(x \in A \rightarrow x \in B)$$

Definition (Relazione di uguaglianza)

Dati due insiemi A, B si ha che

$$A = B \equiv \mathcal{E}(A, B) \equiv \forall x.(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

1 Insiemistica

- Definizione tramite proprietà
- Relazioni di base
- Operazioni tra insiemi**
- Insieme prodotto

Definition (Insieme delle parti, *Powerset*)

Dato un insieme A , il suo **insieme delle parti** $\wp(A)$ è definito come

$$\wp(A) := \{x : x \subseteq A\}$$

Definition (Insieme delle parti, *Powerset*)

Dato un insieme A , il suo **insieme delle parti** $\wp(A)$ è definito come

$$\wp(A) := \{x : x \subseteq A\}$$

Ad esempio:

➤ $A_1 = \{a, b, c\}$

Definition (Insieme delle parti, *Powerset*)

Dato un insieme A , il suo **insieme delle parti** $\wp(A)$ è definito come

$$\wp(A) := \{x : x \subseteq A\}$$

Ad esempio:

➤ $A_1 = \{a, b, c\}$

$$\wp(A_1) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Definition (Insieme delle parti, *Powerset*)

Dato un insieme A , il suo **insieme delle parti** $\wp(A)$ è definito come

$$\wp(A) := \{x : x \subseteq A\}$$

Ad esempio:

➤ $A_1 = \{a, b, c\}$

$$\wp(A_1) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

➤ $A_2 = \{\emptyset\}$

Definition (Insieme delle parti, *Powerset*)

Dato un insieme A , il suo **insieme delle parti** $\wp(A)$ è definito come

$$\wp(A) := \{x : x \subseteq A\}$$

Ad esempio:

➤ $A_1 = \{a, b, c\}$

$$\wp(A_1) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

➤ $A_2 = \{\emptyset\}$

$$\wp(A_2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

Definition (Insieme delle parti, *Powerset*)

Dato un insieme A , il suo **insieme delle parti** $\wp(A)$ è definito come

$$\wp(A) := \{x : x \subseteq A\}$$

Ad esempio:

➤ $A_1 = \{a, b, c\}$

$$\wp(A_1) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

➤ $A_2 = \{\emptyset\}$

$$\wp(A_2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

➤ $A_3 = \wp(A_1)$

Definition (Insieme delle parti, *Powerset*)

Dato un insieme A , il suo **insieme delle parti** $\wp(A)$ è definito come

$$\wp(A) := \{x : x \subseteq A\}$$

Ad esempio:

➤ $A_1 = \{a, b, c\}$

$$\wp(A_1) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

➤ $A_2 = \{\emptyset\}$

$$\wp(A_2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

➤ $A_3 = \wp(A_1)$

$$\wp(A_3) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{c\}\}, \dots, \wp(A_1)\}$$

Definition (Insieme delle parti, *Powerset*)

Dato un insieme A , il suo **insieme delle parti** $\wp(A)$ è definito come

$$\wp(A) := \{x : x \subseteq A\}$$

Ad esempio:

➤ $A_1 = \{a, b, c\}$

$$\wp(A_1) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

➤ $A_2 = \{\emptyset\}$

$$\wp(A_2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

➤ $A_3 = \wp(A_1)$

$$\wp(A_3) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{c\}\}, \dots, \wp(A_1)\}$$

$$|\wp(A_3)| = 2^{|\wp(A_1)|} = 2^{2^3} = 256$$

Definition (Intersezione)

Dati due insiemi A, B definiamo

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

Definition (Unione)

Dati due insiemi A, B definiamo

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

Definition (Complementare)

Dato un insieme A definiamo

$$\overline{A} = \{x : x \notin A\}$$

Definition (Differenza)

Dati due insiemi A, B definiamo

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Definition (Differenza simmetrica)

Dati due insiemi A, B definiamo

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Proprietà

➤ *Idempotenza:*

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$$

➤ *Commutativa:*

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

➤ *Associativa:*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cap C)$$

➤ *Distributiva:*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Proprietà

➤ *Assorbimento:*

$$A \cap (A \cup B) = A, \quad A \cup (A \cap B) = A$$

➤ *De Morgan:*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Queste proprietà si dimostrano facilmente sfruttando le definizioni appena viste (esercizio).

Exercise 4

Dimostrare formalmente le seguenti identità.

$$1 \quad A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

$$2 \quad A = B \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

$$3 \quad \overline{\mathcal{T}} = \emptyset, \quad \overline{\emptyset} = \mathcal{T}$$

$$4 \quad (A \setminus B) \cup B = A \cup B$$

$$5 \quad A \subseteq (A \cup B)$$

$$6 \quad A \subseteq B \equiv \overline{B} \subseteq \overline{A}$$

$$7 \quad (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$$

$$8 \quad (A \cap B) \cup \overline{(A \cup \overline{B})} = B$$

$$9 \quad A \Delta B = B \Delta A$$

Esercizio 1: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

- Un elemento x appartiene a $A \setminus B$ se e solo se x appartiene ad A e non appartiene a B .

$$(Def. 5,11) \\ x \in A \setminus B \equiv (x \in A) \wedge (x \notin B)$$

- La condizione $x \notin B$ è per definizione equivalente a $x \in \overline{B}$.

$$\equiv (x \in A) \wedge (x \in \overline{B})$$

- Quest'ultima condizione è la definizione di appartenenza all'insieme $A \cap \overline{B}$.

$$\equiv x \in A \cap \overline{B}$$

- Poiché le condizioni di appartenenza sono logicamente equivalenti, i due insiemi sono uguali.

Esercizio 2: $A = B \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

- › L'uguaglianza $A = B$ significa che i due insiemi hanno esattamente gli stessi elementi.

(Def. 6, uguaglianza)

$$A = B \equiv \forall x.(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$\equiv \forall x.((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A))$$

$$\equiv \forall x.(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x.(x \in B \rightarrow x \in A)$$

(Def. 5, inclusione)

$$\equiv A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Esercizio 3: $\overline{\mathcal{T}} = \emptyset$ e $\overline{\emptyset} = \mathcal{T}$

- › L'insieme \mathcal{T} è l'insieme *Universo*
- › Per definizione di insieme complementare (10):

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{T}} &= \{x \in \mathcal{T} : x \notin \mathcal{T}\} \\ &= \{x \in \mathcal{T} : x \in \mathcal{T} \wedge x \notin \mathcal{T}\}\end{aligned}$$

Esercizio 3: $\overline{\mathcal{T}} = \emptyset$ e $\overline{\emptyset} = \mathcal{T}$

- › L'insieme \mathcal{T} è l'insieme *Universo*
- › Per definizione di insieme complementare (10):

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{T}} &= \{x \in \mathcal{T} : x \notin \mathcal{T}\} \\ &= \{x \in \mathcal{T} : x \in \mathcal{T} \wedge x \notin \mathcal{T}\}\end{aligned}$$

- › La proprietà che definisce questo insieme è una **contraddizione!**

$$\overline{\mathcal{T}} = \emptyset$$

Esercizio 3: $\overline{\mathcal{T}} = \emptyset$ e $\overline{\emptyset} = \mathcal{T}$

- › L'insieme \mathcal{T} è l'insieme *Universo*
- › Per definizione di insieme complementare (10):

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{T}} &= \{x \in \mathcal{T} : x \notin \mathcal{T}\} \\ &= \{x \in \mathcal{T} : x \in \mathcal{T} \wedge x \notin \mathcal{T}\}\end{aligned}$$

- › La proprietà che definisce questo insieme è una **contraddizione!**

$$\overline{\mathcal{T}} = \emptyset$$

- › Analogamente:

$$\begin{aligned}\overline{\emptyset} &= \{x \in \mathcal{T} : x \notin \emptyset\} \\ &= \{x \in \mathcal{T} : \top\} \\ &= \mathcal{T}\end{aligned}$$

Esercizio 4: $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

- › Analizziamo l'appartenenza di un elemento x all'insieme di sinistra.

$$\begin{aligned}x \in (A \setminus B) \cup B &\stackrel{\text{(Def. 9, unione)}}{\equiv} x \in (A \setminus B) \vee x \in B \\&\stackrel{\text{(Def. 11, differenza)}}{\equiv} (x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in B \\&\stackrel{\text{(Prop. distributiva)}}{\equiv} (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \in B) \\&\equiv (x \in A \vee x \in B) \wedge \top \\&\stackrel{\text{(Def. 9, unione)}}{\equiv} x \in A \cup B\end{aligned}$$

Esercizio 5: $A \subseteq (A \cup B)$

- Partiamo dalla definizione di inclusione:

(Def. 5)

$$A \subseteq A \cup B \equiv \forall x.(x \in A \rightarrow x \in A \cup B)$$

(Def. implicazione, unione)

$$\equiv \forall x.((x \notin A) \vee (x \in A \vee x \in B))$$

$$\equiv \forall x.(x \notin A \vee x \in A \vee x \in B)$$

$$\equiv \forall x.(x \notin A \vee x \in A \vee x \in B)$$

$$\equiv \forall x.((x \notin A \vee x \in A) \vee x \in B)$$

$$\equiv \forall x.(\top \vee x \in B)$$

$$\equiv \top$$

- Quindi il predicato è sempre verificato.

Esercizio 6: $A \subseteq B \equiv \overline{B} \subseteq \overline{A}$

- › Dimostriamo l'equivalenza tra le definizioni logiche sottostanti.

(Def. di Inclusione)

$$A \subseteq B \equiv \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

(Contronominale)

$$\equiv \forall x(x \notin B \rightarrow x \notin A)$$

(Def. di Complemento)

$$\equiv \forall x(x \in \overline{B} \rightarrow x \in \overline{A})$$

(Def. di Inclusione)

$$\equiv \overline{B} \subseteq \overline{A}$$

Esercizio 7: $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

- › Analizziamo l'appartenenza di un elemento x all'insieme di sinistra.

(Def. Unione/Intersezione)

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \equiv (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in \overline{B})$$

(Def. di Complemento)

$$\equiv (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B)$$

(Prop. Distributiva)

$$\equiv x \in A \wedge (x \in B \vee x \notin B)$$

(Logica (Terzo escluso))

$$\equiv x \in A \wedge \top$$

$$\equiv x \in A$$

Esercizio 8: $(A \cap B) \cup \overline{(A \cup \overline{B})} = B$

- › Analizziamo l'appartenenza di x all'insieme di sinistra.

$$\begin{aligned}x \in (A \cap B) \cup \overline{(A \cup \overline{B})} &\equiv (x \in A \wedge x \in B) \vee \neg(x \in A \vee x \notin B) \\&\quad (\text{De Morgan}) \\&\equiv (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge \neg(x \notin B)) \\&\quad (\text{Doppia Negazione}) \\&\equiv (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \in B) \\&\quad (\text{Prop. Distributiva}) \\&\equiv (x \in A \vee x \notin A) \wedge x \in B \\&\quad (\text{Terzo escluso}) \\&\equiv \top \wedge x \in B \\&\equiv x \in B\end{aligned}$$

Esercizio 9: $A \Delta B = B \Delta A$ (Commutatività)

- La dimostrazione si basa sulla commutatività dell'operatore di unione.

$$\begin{aligned} & (\text{Def. Diff. Simmetrica}) \\ A \Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ & (\text{Commutatività di } \cup) \\ &= (B \setminus A) \cup (A \setminus B) \\ & (\text{Def. Diff. Simmetrica}) \\ &= B \Delta A \end{aligned}$$

1 Insiemistica

- Definizione tramite proprietà
- Relazioni di base
- Operazioni tra insiemi
- Insieme prodotto

Definition (Insieme prodotto)

Dati due insiemi A, B definiamo

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

Definition (Insieme prodotto generalizzato)

Dati k insiemi A_1, \dots, A_k definiamo

$$A_1 \times \dots \times A_k = \{(a_1, \dots, a_k) : \forall i.(1 \leq i \leq k \wedge a_i \in A_i)\}$$

Exercise 5

Siano A, B due insiemi non vuoti. Si considerino suddivisi in questo modo:

$$A = A_1 \cup A_2, \text{ con } A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

$$B = B_1 \cup B_2, \text{ con } B_1 \cap B_2 = \emptyset$$

e inoltre $A_i \neq \emptyset, B_i \neq \emptyset$ per $i = 1, 2$.

Si dimostri che:

$$A \times B \neq (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$$