# Tutorato di Logica

Manuel Di Agostino

Università di Parma

7 ottobre 2025

# Sommario

# Sommario

1. Insiemistica
   - Definizione tramite proprietà
   - Relazioni di base
   - Operazioni tra insiemi
   - Insieme prodotto

## Definizione (Insieme)

*Un insieme $S$ è definito da una proprietà $p(x)$:*

$$S := \{x : p(x)\} \equiv \forall x.(x \in S \leftrightarrow p(x))$$

# Insiemi e proposizioni

## Definizione (Insieme)

*Un insieme $S$ è definito da una proprietà $p(x)$:*

$$S := \{x : p(x)\} \equiv \forall x.(x \in S \leftrightarrow p(x))$$

## Esempio

L'insieme dei numeri naturali pari:

$$P = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ è pari}\}$$

Qui la proprietà $p(x)$ è "$x$ è un numero pari". Ad esempio, $4 \in P$ perché $p(4)$ è vera, mentre $3 \notin P$ perché $p(3)$ è falsa.

## Definizione (Quantificatori su insiemi)

*Si hanno inoltre le seguenti definizioni (che sono proposizioni!):*

$$\forall x \in S . p(x) \equiv \forall x . (x \in S \rightarrow p(x))$$
$$\exists x \in S : p(x) \equiv \exists x : (x \in S \wedge p(x))$$

## Definizione (Quantificatori su insiemi)

*Si hanno inoltre le seguenti definizioni (che sono proposizioni!):*

$$\forall x \in S.p(x) \equiv \forall x.(x \in S \rightarrow p(x))$$
$$\exists x \in S : p(x) \equiv \exists x : (x \in S \wedge p(x))$$

## Corollario (Negazione di quantificatori su insiemi)

*Grazie a esse, possiamo dimostrare che:*

$$\neg(\forall x \in S.p(x)) \equiv \exists x \in S : \neg p(x)$$
$$\neg(\exists x \in S : p(x)) \equiv \forall x \in S.\neg p(x)$$

# Esempi di quantificatori e negazioni

## Esempio pratico

Sia $S = \{1, 2, 5, 10\}$ e sia $p(x)$ la proposizione "$x$ è un numero pari".

- **Quantificatore Universale:** $\forall x \in S.p(x)$

  "Per ogni $x$ in $S$, $x$ è pari".

  Questa proposizione è **falsa**, perché $1 \in S$ ma non è pari.

# Esempi di quantificatori e negazioni

## Esempio pratico

Sia $S = \{1, 2, 5, 10\}$ e sia $p(x)$ la proposizione "$x$ è un numero pari".

- **Quantificatore Universale:** $\forall x \in S.p(x)$

  "Per ogni $x$ in $S$, $x$ è pari".
  Questa proposizione è **falsa**, perché $1 \in S$ ma non è pari.

- **Negazione dell'Universale:** $\neg(\forall x \in S.p(x)) \equiv \exists x \in S : \neg p(x)$

  "Esiste un $x$ in $S$ tale che $x$ non è pari".
  Questa proposizione è **vera**. Ad esempio, per $x = 5$, si ha che $5 \in S$ e 5 non è pari.

**Esercizio 1**

Traduci e nega la proposizione: "Tutti i numeri interi sono positivi."

## Esercizio 1

Traduci e nega la proposizione: "Tutti i numeri interi sono positivi."

- **Formalizzazione**: $\forall x \in \mathbb{Z}. x > 0$
- **Valore di verità**: Falso (es. -1).
- **Negazione**: $\exists x \in \mathbb{Z} : \neg(x > 0) \equiv \exists x \in \mathbb{Z} : x \leq 0$
  ("Esiste almeno un numero intero che non è positivo.")

## Esercizio 2

Traduci e nega la proposizione: "Nessun numero primo è pari."

## Esercizio 2

Traduci e nega la proposizione: "Nessun numero primo è pari."

- **Formalizzazione**: Sia $P$ l'insieme dei numeri primi.

$$\forall x \in P . x \text{ è dispari}$$

- **Valore di verità**: Falso (il 2 è primo e pari).
- **Negazione**: $\exists x \in P : x$ è pari
  ("Esiste almeno un numero primo che è pari.")

## Esercizio 3 Quantificatori annidati

Formalizza e nega la seguente proposizione (dominio $\mathbb{Z}$), determinando il valore di verità dell'originale e della negazione:
"Per ogni intero x, esiste un intero y tale che la loro somma è zero."

## Esercizio 3 Quantificatori annidati

Formalizza e nega la seguente proposizione (dominio $\mathbb{Z}$), determinando il valore di verità dell'originale e della negazione:
"Per ogni intero x, esiste un intero y tale che la loro somma è zero."

### Soluzione

- **Formalizzazione**: $\forall x \in \mathbb{Z}.\exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0$.
  (**Vero**: per ogni $x$, basta prendere $y = -x$).

## Esercizio 3 Quantificatori annidati

Formalizza e nega la seguente proposizione (dominio $\mathbb{Z}$), determinando il valore di verità dell'originale e della negazione:
"Per ogni intero x, esiste un intero y tale che la loro somma è zero."

### Soluzione

- **Formalizzazione**: $\forall x \in \mathbb{Z}. \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0$.
  (**Vero**: per ogni $x$, basta prendere $y = -x$).
- **Negazione**: $\neg(\forall x \ldots) \equiv \exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z}. x + y \neq 0$.
  (**Falso**).

# Sommario

Esistono alcune relazioni di base tra gli insiemi.

## Definizione (Relazione di appartenenza)

*Dato un insieme $A$ si ha che*

$$x \in A \equiv \mathcal{B}(x, A) \equiv \text{“}x \textit{ appartiene all'insieme } A\text{”}$$

## Definizione (Relazione di inclusione)

*Dati due insiemi $A, B$ si ha che*

$$A \subseteq B \equiv \mathcal{I}(A, B) \equiv \forall x.(x \in A \to x \in B)$$

## Definizione (Relazione di uguaglianza)

*Dati due insiemi $A, B$ si ha che*

$$A = B \equiv \mathcal{E}(A, B) \equiv \forall x.(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

# Sommario

## Definizione (Insieme delle parti, *Powerset*)

*Dato un insieme $A$, il suo* ***insieme delle parti*** $\wp(A)$ *è definito come*

$$\wp(A) := \{x : x \subseteq A\}$$

## Definizione (Insieme delle parti, *Powerset*)

*Dato un insieme $A$, il suo **insieme delle parti** $\wp(A)$ è definito come*

$$\wp(A) := \{x : x \subseteq A\}$$

Ad esempio:

- $A_1 = \{a, b, c\}$

## Definizione (Insieme delle parti, *Powerset*)

*Dato un insieme $A$, il suo **insieme delle parti** $\wp(A)$ è definito come*

$$\wp(A) := \{x : x \subseteq A\}$$

Ad esempio:

- $A_1 = \{a, b, c\}$

$$\wp(A_1) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

## Definizione (Insieme delle parti, *Powerset*)

*Dato un insieme $A$, il suo **insieme delle parti** $\wp(A)$ è definito come*

$$\wp(A) := \{x : x \subseteq A\}$$

Ad esempio:

- $A_1 = \{a, b, c\}$

$$\wp(A_1) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

- $A_2 = \{\varnothing\}$

## Definizione (Insieme delle parti, *Powerset*)

*Dato un insieme $A$, il suo **insieme delle parti** $\wp(A)$ è definito come*

$$\wp(A) := \{x : x \subseteq A\}$$

Ad esempio:

- $A_1 = \{a, b, c\}$

$$\wp(A_1) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

- $A_2 = \{\varnothing\}$

$$\wp(A_2) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

## Definizione (Insieme delle parti, *Powerset*)

*Dato un insieme $A$, il suo* ***insieme delle parti*** $\wp(A)$ *è definito come*

$$\wp(A) := \{x : x \subseteq A\}$$

Ad esempio:

- $A_1 = \{a, b, c\}$

$$\wp(A_1) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

- $A_2 = \{\varnothing\}$

$$\wp(A_2) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

- $A_3 = \wp(A_1)$

## Definizione (Insieme delle parti, *Powerset*)

*Dato un insieme $A$, il suo* ***insieme delle parti*** $\wp(A)$ *è definito come*

$$\wp(A) := \{x : x \subseteq A\}$$

Ad esempio:

- $A_1 = \{a, b, c\}$

$$\wp(A_1) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

- $A_2 = \{\varnothing\}$

$$\wp(A_2) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

- $A_3 = \wp(A_1)$

$$\wp(A_3) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{c\}\}, \ldots, \wp(A_1)\}$$

## Definizione (Insieme delle parti, *Powerset*)

*Dato un insieme $A$, il suo* ***insieme delle parti*** $\wp(A)$ *è definito come*

$$\wp(A) := \{x : x \subseteq A\}$$

Ad esempio:

- $A_1 = \{a, b, c\}$

$$\wp(A_1) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

- $A_2 = \{\varnothing\}$

$$\wp(A_2) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

- $A_3 = \wp(A_1)$

$$\wp(A_3) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{c\}\}, \dots, \wp(A_1)\}$$
$$|\wp(A_3)| = 2^{|\wp(A_1)|} = 2^{2^3} = 256$$

### Definizione (Intersezione)

*Dati due insiemi $A, B$ definiamo*

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

### Definizione (Unione)

*Dati due insiemi $A, B$ definiamo*

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

### Definizione (Complementare)

*Dato un insieme $A$ definiamo*

$$\overline{A} = \{x : x \notin A\}$$

## Definizione (Differenza)

*Dati due insiemi* $A, B$ *definiamo*

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

## Definizione (Differenza simmetrica)

*Dati due insiemi* $A, B$ *definiamo*

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

## Proprietà

- *Idempotenza:*

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$$

- *Commutativa:*

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

- *Associativa:*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cap C)$$

- *Distributiva:*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

## Proprietà

- *Assorbimento:*

$$A \cap (A \cup B) = A, \quad A \cup (A \cap B) = A$$

- *De Morgan:*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Queste proprietà si dimostrano facilmente sfruttando le definizioni appena viste (esercizio).

## Esercizio 4

Dimostrare formalmente le seguenti identità.

1. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
2. $A = B \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$
3. $\overline{\mathcal{T}} = \varnothing, \quad \overline{\varnothing} = \mathcal{T}$
4. $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$
5. $A \subseteq (A \cup B)$
6. $A \subseteq B \equiv \overline{B} \subseteq \overline{A}$
7. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$
8. $(A \cap B) \cup \overline{(A \cup \overline{B})} = B$
9. $A \triangle B = B \triangle A$

# Esercizio 1: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

- Un elemento $x$ appartiene a $A \setminus B$ se e solo se $x$ appartiene ad $A$ e non appartiene a $B$.

$$x \in A \setminus B \overset{\text{(Def. 4,10)}}{\equiv} (x \in A) \wedge (x \notin B)$$

- La condizione $x \notin B$ è per definizione equivalente a $x \in \overline{B}$.

$$\equiv (x \in A) \wedge (x \in \overline{B})$$

- Quest'ultima condizione è la definizione di appartenenza all'insieme $A \cap \overline{B}$.

$$\equiv x \in A \cap \overline{B}$$

- Poiché le condizioni di appartenenza sono logicamente equivalenti, i due insiemi sono uguali.

# Esercizio 2: $A = B \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

- L'uguaglianza $A = B$ significa che i due insiemi hanno esattamente gli stessi elementi.

$$
\begin{aligned}
&\text{(Def. 5, uguaglianza)}\\
&A = B \equiv \forall x.(x \in A \leftrightarrow x \in B)\\
&\qquad\quad \equiv \forall x.((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A))\\
&\qquad\quad \equiv \forall x.(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x.(x \in B \rightarrow x \in A)\\
&\text{(Def. 4, inclusione)}\\
&\qquad\quad \equiv A \subseteq B \wedge B \subseteq A
\end{aligned}
$$

## Esercizio 3: $\overline{\mathcal{T}} = \varnothing$ e $\overline{\varnothing} = \mathcal{T}$

- L'insieme $\mathcal{T}$ è l'insieme *Universo*
- Per definizione di insieme complementare (9):

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{T}} &= \{x \in \mathcal{T} : x \notin \mathcal{T}\} \\ &= \{x \in \mathcal{T} : x \in \mathcal{T} \land x \notin \mathcal{T}\}\end{aligned}$$

# Esercizio 3: $\overline{\mathcal{T}} = \varnothing$ e $\overline{\varnothing} = \mathcal{T}$

- L'insieme $\mathcal{T}$ è l'insieme *Universo*
- Per definizione di insieme complementare (9):

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{T}} &= \{x \in \mathcal{T} : x \notin \mathcal{T}\} \\ &= \{x \in \mathcal{T} : x \in \mathcal{T} \land x \notin \mathcal{T}\}\end{aligned}$$

- La proprietà che definisce questo insieme è una **contraddizione**!

$$\overline{\mathcal{T}} = \varnothing$$

# Esercizio 3: $\overline{\mathcal{T}} = \varnothing$ e $\overline{\varnothing} = \mathcal{T}$

- L'insieme $\mathcal{T}$ è l'insieme *Universo*
- Per definizione di insieme complementare (9):

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{T}} &= \{x \in \mathcal{T} : x \notin \mathcal{T}\} \\ &= \{x \in \mathcal{T} : x \in \mathcal{T} \wedge x \notin \mathcal{T}\}\end{aligned}$$

- La proprietà che definisce questo insieme è una **contraddizione**!

$$\overline{\mathcal{T}} = \varnothing$$

- Analogamente:

$$\begin{aligned}\overline{\varnothing} &= \{x \in \mathcal{T} : x \notin \varnothing\} \\ &= \{x \in \mathcal{T} : \top\} \\ &= \mathcal{T}\end{aligned}$$

# Esercizio 4: $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

- Analizziamo l'appartenenza di un elemento $x$ all'insieme di sinistra.

$$
\begin{aligned}
x \in (A \setminus B) \cup B &\overset{\text{(Def. 8, unione)}}{\equiv} x \in (A \setminus B) \lor x \in B \\
&\overset{\text{(Def. 10, differenza)}}{\equiv} (x \in A \land x \notin B) \lor x \in B \\
&\overset{\text{(Prop. distributiva)}}{\equiv} (x \in A \lor x \in B) \land (x \notin B \lor x \in B) \\
&\equiv (x \in A \lor x \in B) \land \top \\
&\overset{\text{(Def. 8, unione)}}{\equiv} x \in A \cup B
\end{aligned}
$$

# Esercizio 5: $A \subseteq (A \cup B)$

- Partiamo dalla definizione di inclusione:

$$\begin{aligned}
A \subseteq A \cup B &\overset{\text{(Def. 4)}}{\equiv} \forall x.(x \in A \rightarrow x \in A \cup B) \\
&\overset{\text{(Def. implicazione, unione)}}{\equiv} \forall x.((x \notin A) \vee (x \in A \vee x \in B)) \\
&\equiv \forall x.(x \notin A \vee x \in A \vee x \in B) \\
&\equiv \forall x.(x \notin A \vee x \in A \vee x \in B) \\
&\equiv \forall x.((x \notin A \vee x \in A) \vee x \in B) \\
&\equiv \forall x.(\top \vee x \in B) \\
&\equiv \top
\end{aligned}$$

- Quindi il predicato è sempre verificato.

# Esercizio 6: $A \subseteq B \equiv \overline{B} \subseteq \overline{A}$

- Dimostriamo l'equivalenza tra le definizioni logiche sottostanti.

$$
\begin{aligned}
&\text{(Def. di Inclusione)}\\
&A \subseteq B \equiv \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)\\
&\text{(Contronominale)}\\
&\equiv \forall x(x \notin B \rightarrow x \notin A)\\
&\text{(Def. di Complemento)}\\
&\equiv \forall x(x \in \overline{B} \rightarrow x \in \overline{A})\\
&\text{(Def. di Inclusione)}\\
&\equiv \overline{B} \subseteq \overline{A}
\end{aligned}
$$

# Esercizio 7: $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

- Analizziamo l'appartenenza di un elemento $x$ all'insieme di sinistra.

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) &\overset{\text{(Def. Unione/Intersezione)}}{\equiv} (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in \overline{B}) \\
&\overset{\text{(Def. di Complemento)}}{\equiv} (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B) \\
&\overset{\text{(Prop. Distributiva)}}{\equiv} x \in A \wedge (x \in B \vee x \notin B) \\
&\overset{\text{(Logica (Terzo escluso))}}{\equiv} x \in A \wedge \top \\
&\equiv x \in A
\end{aligned}
$$

# Esercizio 8: $(A \cap B) \cup \overline{(A \cup \overline{B})} = B$

- Analizziamo l'appartenenza di $x$ all'insieme di sinistra.

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cap B) \cup \overline{(A \cup \overline{B})} &\equiv (x \in A \wedge x \in B) \vee \neg(x \in A \vee x \notin B) \\
\text{(De Morgan)} \\
&\equiv (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge \neg(x \notin B)) \\
\text{(Doppia Negazione)} \\
&\equiv (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \in B) \\
\text{(Prop. Distributiva)} \\
&\equiv (x \in A \vee x \notin A) \wedge x \in B \\
\text{(Terzo escluso)} \\
&\equiv \top \wedge x \in B \\
&\equiv x \in B
\end{aligned}
$$

# Esercizio 9: $A \triangle B = B \triangle A$ (Commutatività)

- La dimostrazione si basa sulla commutatività dell'operatore di unione.

$$
\begin{aligned}
A \triangle B &\overset{\text{(Def. Diff. Simmetrica)}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\
&\overset{\text{(Commutatività di } \cup)}{=} (B \setminus A) \cup (A \setminus B) \\
&\overset{\text{(Def. Diff. Simmetrica)}}{=} B \triangle A
\end{aligned}
$$

# Sommario

**Definizione (Insieme prodotto)**

*Dati due insiemi $A, B$ definiamo*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \land b \in B\}$$

**Definizione (Insieme prodotto generalizzato)**

*Dati $k$ insiemi $A_1, \ldots, A_k$ definiamo*

$$A_1 \times \ldots \times A_k = \{(a_1, \ldots, a_k) : \forall i.(1 \leq i \leq k \land a_i \in A_i)\}$$

## Esercizio 5

Siano $A, B$ due insiemi non vuoti. Si considerino suddivisi in questo modo:

$$A = A_1 \cup A_2, \text{ con } A_1 \cap A_2 = \varnothing$$
$$B = B_1 \cup B_2, \text{ con } B_1 \cap B_2 = \varnothing$$

e inoltre $A_i \neq \varnothing, B_i \neq \varnothing$ per $i = 1, 2$.
Si dimostri che:

$$A \times B \neq (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$$