Manuel Di Agostino
manuel.diagostino@studenti.unipr.it

UniPR
Università di Parma

21 ottobre 2025

Tutorato di Logica

Sommario

Definizione (Principio d'induzione)

Siano $A \subseteq \mathbb{N}$ e $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione successore. Se

- $0 \in A$
- $\forall a \in A.(S(a) \in A)$

allora $A = \mathbb{N}$.

- **Perché è utile?** Ci permette di dimostrare che una certa proprietà è valida per tutti i numeri naturali.

- **Perché è utile?** Ci permette di dimostrare che una certa proprietà è valida per tutti i numeri naturali.
- **Perché funziona?**

- **Perché è utile?** Ci permette di dimostrare che una certa proprietà è valida per tutti i numeri naturali.
- **Perché funziona?**
  - Sia p un certo predicato unario con dominio in $\mathbb{N}$ e sia $P = \{x \in \mathbb{N} \mid \text{“}p(x) \text{ è vero”}\}$ l'insieme degli interi per cui esso è verificato. Se dimostro che $P = \mathbb{N}$, posso affermare che p è vero $\forall n \in \mathbb{N}$.

- **Perché è utile?** Ci permette di dimostrare che una certa proprietà è valida per tutti i numeri naturali.
- **Perché funziona?**
  - Sia p un certo predicato unario con dominio in $\mathbb{N}$ e sia $P = \{x \in \mathbb{N} \mid \text{“}p(x) \text{ è vero”}\}$ l'insieme degli interi per cui esso è verificato. Se dimostro che $P = \mathbb{N}$, posso affermare che p è vero $\forall n \in \mathbb{N}$.
  - Verifico che $0 \in P \Leftrightarrow$ “$p(0)$ è vero”.

- **Perché è utile?** Ci permette di dimostrare che una certa proprietà è valida per tutti i numeri naturali.
- **Perché funziona?**
  - Sia p un certo predicato unario con dominio in $\mathbb{N}$ e sia $P = \{x \in \mathbb{N} \mid \text{“}p(x) \text{ è vero”}\}$ l'insieme degli interi per cui esso è verificato. Se dimostro che $P = \mathbb{N}$, posso affermare che p è vero $\forall n \in \mathbb{N}$.
  - Verifico che $0 \in P \Leftrightarrow$ “$p(0)$ è vero”.
  - Verifico che $\forall n.(n \in P \Rightarrow n + 1 \in P)$, che per definition di P equivale a dire che $\forall n.(p(n) \Rightarrow p(n + 1))$.

- **Perché è utile?** Ci permette di dimostrare che una certa proprietà è valida per tutti i numeri naturali.
- **Perché funziona?**
  - Sia p un certo predicato unario con dominio in $\mathbb{N}$ e sia $P = \{x \in \mathbb{N} \mid \text{“}p(x) \text{ è vero”}\}$ l'insieme degli interi per cui esso è verificato. Se dimostro che $P = \mathbb{N}$, posso affermare che p è vero $\forall n \in \mathbb{N}$.
  - Verifico che $0 \in P \Leftrightarrow$ “$p(0)$ è vero”.
  - Verifico che $\forall n.(n \in P \Rightarrow n + 1 \in P)$, che per definition di P equivale a dire che $\forall n.(p(n) \Rightarrow p(n + 1))$.
  - A questo punto, poiché vale il **principio di induzione**, posso affermare che $P = \mathbb{N}$. Per definition di P, questo equivale a dire che $\forall n \in \mathbb{N} \,.\, (\text{“}p(x) \text{ è vero”})$.

- **Perché è utile?** Ci permette di dimostrare che una certa proprietà è valida per tutti i numeri naturali.
- **Perché funziona?**
  - Sia p un certo predicato unario con dominio in $\mathbb{N}$ e sia $P = \{x \in \mathbb{N} \mid \text{“}p(x) \text{ è vero”}\}$ l'insieme degli interi per cui esso è verificato. Se dimostro che $P = \mathbb{N}$, posso affermare che p è vero $\forall n \in \mathbb{N}$.
  - Verifico che $0 \in P \Leftrightarrow \text{“}p(0) \text{ è vero”}$.
  - Verifico che $\forall n.(n \in P \Rightarrow n+1 \in P)$, che per definition di P equivale a dire che $\forall n.(p(n) \Rightarrow p(n+1))$.
  - A questo punto, poiché vale il **principio di induzione**, posso affermare che $P = \mathbb{N}$. Per definition di P, questo equivale a dire che $\forall n \in \mathbb{N}\,.\,(\text{“}p(x) \text{ è vero”})$.

Notate che non ho specificato nulla sul predicato p.

Esercizio 1

Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{i=0}^{n} 2i = 0 + 2 + 4 + \ldots + 2n = n \cdot (n+1) \tag{1}$$

Esercizio 1

Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{i=0}^{n} 2i = 0 + 2 + 4 + \ldots + 2n = n \cdot (n+1) \tag{1}$$

Soluzione dell'esercizio 1

In questo caso, possiamo considerare

$$p(x) = \text{“la somma dei primi } x \text{ numeri interi pari è data da (1)”}$$

Esercizio 1

Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{i=0}^{n} 2i = 0 + 2 + 4 + \ldots + 2n = n \cdot (n+1) \tag{1}$$

Soluzione dell'esercizio 1

In questo caso, possiamo considerare

$$p(x) = \text{“la somma dei primi } x \text{ numeri interi pari è data da (1)”}$$

Quindi:

- verifico che valga $p(0)$:

$$p(0) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{0} = 0 \quad = \quad 0 \cdot (0+1).$$

- ora devo verificare che se $p(n)$ vero per un certo n, allora $p(n+1)$ è vero. Scriviamo cos'è $p(n+1)$:

$$p(n+1) \equiv \sum_{i=0}^{n+1} 2i = (n+1) \cdot (n+2)$$

- ora devo verificare che se $p(n)$ vero per un certo n, allora $p(n+1)$ è vero. Scriviamo cos'è $p(n+1)$:

$$p(n+1) \equiv \sum_{i=0}^{n+1} 2i = (n+1) \cdot (n+2)$$

Supponiamo allora $p(n)$ e osserviamo che:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} 2i &= \sum_{i=0}^{n} 2i + 2(n+1) \\ &= n(n+1) + 2(n+1) && \text{(ip. induttiva)} \\ &= (n+1) \cdot (n+2). && \text{(prop. distributiva).}\end{aligned}$$

- ora devo verificare che se $p(n)$ vero per un certo n, allora $p(n+1)$ è vero. Scriviamo cos'è $p(n+1)$:

$$p(n+1) \equiv \sum_{i=0}^{n+1} 2i = (n+1) \cdot (n+2)$$

Supponiamo allora $p(n)$ e osserviamo che:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} 2i &= \sum_{i=0}^{n} 2i + 2(n+1) \\
&= n(n+1) + 2(n+1) && \text{(ip. induttiva)} \\
&= (n+1) \cdot (n+2). && \text{(prop. distributiva).}
\end{aligned}$$

il che equivale a dire che $p(n) \Rightarrow p(n+1)$.

- ora devo verificare che se $p(n)$ vero per un certo n, allora $p(n+1)$ è vero. Scriviamo cos'è $p(n+1)$:

$$p(n+1) \equiv \sum_{i=0}^{n+1} 2i = (n+1) \cdot (n+2)$$

Supponiamo allora $p(n)$ e osserviamo che:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} 2i &= \sum_{i=0}^{n} 2i + 2(n+1) \\ &= n(n+1) + 2(n+1) && \text{(ip. induttiva)} \\ &= (n+1) \cdot (n+2). && \text{(prop. distributiva).} \end{aligned}$$

il che equivale a dire che $p(n) \Rightarrow p(n+1)$.

Per il principio di induzione, (1) è vera $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Esercizio 2

Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vale:

$$\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2 \tag{2}$$

Esercizio 2

Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vale:

$$\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \tag{2}$$

Soluzione dell'esercizio 2

- caso base, stavolta $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} 2i - 1 = 2 - 1 = 1 \quad = \quad (1)^2.$$

- passo induttivo, suppongo che per un qualche intero n valga (2); allora:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} 2i-1 &= \sum_{i=1}^{n} 2i-1+[2(n+1)-1] \qquad \text{(ip. induttiva)}\\ &= n^2+2n+1\\ &= (n+1)^2.\end{aligned}$$

- passo induttivo, suppongo che per un qualche intero n valga (2); allora:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} 2i-1 &= \sum_{i=1}^{n} 2i-1+[2(n+1)-1] \qquad \text{(ip. induttiva)}\\ &= n^2+2n+1\\ &= (n+1)^2.\end{aligned}$$

Per il principio di induzione, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vale: (2). $\square$

Esercizio 3

Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x > -1$, vale la **disuguaglianza di Bernoulli**:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \tag{3}$$

Esercizio 3

Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x > -1$, vale la **disuguaglianza di Bernoulli**:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \tag{3}$$

Soluzione dell'esercizio 3

Sia $p(n)$ il predicato (3).

- caso base, $n = 0$:

$$p(0) \Leftrightarrow (1+x)^0 = 1 \quad \geq \quad 1 + (0 \cdot x) = 1.$$

  $p(0)$ è vera (vale $1 \geq 1$).

- passo induttivo. Assumiamo $p(n)$ vera (ipotesi induttiva): $(1+x)^n \geq 1+nx$.

- passo induttivo. Assumiamo $p(n)$ vera (ipotesi induttiva): $(1+x)^n \geq 1+nx$. Dobbiamo dimostrare $p(n+1)$, cioè $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

- passo induttivo. Assumiamo $p(n)$ vera (ipotesi induttiva): $(1+x)^n \geq 1+nx$. Dobbiamo dimostrare $p(n+1)$, cioè $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.
- Sviluppiamo il lato sinistro:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \\
&\geq (1+nx)(1+x) && \text{(ip. induttiva e } 1+x>0\text{)} \\
&= 1+x+nx+nx^2 \\
&= 1+(n+1)x+nx^2 && \text{(raggruppo)} \\
&\geq 1+(n+1)x && (n, x^2 \geq 0 \Rightarrow nx^2 \geq 0)
\end{aligned}$$

- Abbiamo dimostrato che $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

- passo induttivo. Assumiamo $p(n)$ vera (ipotesi induttiva): $(1+x)^n \geq 1+nx$. Dobbiamo dimostrare $p(n+1)$, cioè $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.
- Sviluppiamo il lato sinistro:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) && \\
&\geq (1+nx)(1+x) && \text{(ip. induttiva e } 1+x>0\text{)} \\
&= 1+x+nx+nx^2 && \\
&= 1+(n+1)x+nx^2 && \text{(raggruppo)} \\
&\geq 1+(n+1)x && (n, x^2 \geq 0 \Rightarrow nx^2 \geq 0)
\end{aligned}$$

- Abbiamo dimostrato che $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

Per il principio di induzione, (3) è vera $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Esercizio 4

Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$, l'espressione $n^3 - n$ è divisibile per 3.

Esercizio 4

Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$, l'espressione $n^3 - n$ è divisibile per 3.

Soluzione dell'esercizio 4

Sia $p(n) =$ "$n^3 - n$ è divisibile per 3".

- caso base, $n = 0$:

$$p(0) \Leftrightarrow 0^3 - 0 = 0.$$

  Poiché $0 = 3 \cdot 0$, $p(0)$ è vera.

- passo induttivo. Assumiamo $p(n)$ vera (ipotesi induttiva), cioè $\exists k \in \mathbb{Z}$ tale che $n^3 - n = 3k$.

- passo induttivo. Assumiamo $p(n)$ vera (ipotesi induttiva), cioè $\exists k \in \mathbb{Z}$ tale che $n^3 - n = 3k$.
- Dobbiamo dimostrare $p(n+1)$, cioè che $(n+1)^3 - (n+1)$ è divisibile per 3.

$$
\begin{aligned}
(n+1)^3 - (n+1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n+1) \\
&= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\
&= (n^3 - n) + (3n^2 + 3n) && \text{(raggruppo)} \\
&= 3k + 3(n^2 + n) && \text{(ip. induttiva)} \\
&= 3 \cdot (k + n^2 + n)
\end{aligned}
$$

- passo induttivo. Assumiamo $p(n)$ vera (ipotesi induttiva), cioè $\exists k \in \mathbb{Z}$ tale che $n^3 - n = 3k$.
- Dobbiamo dimostrare $p(n+1)$, cioè che $(n+1)^3 - (n+1)$ è divisibile per 3.

$$
\begin{aligned}
(n+1)^3 - (n+1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n+1) \\
&= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\
&= (n^3 - n) + (3n^2 + 3n) && \text{(raggruppo)} \\
&= 3k + 3(n^2 + n) && \text{(ip. induttiva)} \\
&= 3 \cdot (k + n^2 + n)
\end{aligned}
$$

- Poiché $(k + n^2 + n)$ è un numero intero, abbiamo mostrato che $(n+1)^3 - (n+1)$ è un multiplo di 3.

- passo induttivo. Assumiamo $p(n)$ vera (ipotesi induttiva), cioè $\exists k \in \mathbb{Z}$ tale che $n^3 - n = 3k$.
- Dobbiamo dimostrare $p(n+1)$, cioè che $(n+1)^3 - (n+1)$ è divisibile per 3.

$$
\begin{aligned}
(n+1)^3 - (n+1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n+1) \\
&= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\
&= (n^3 - n) + (3n^2 + 3n) && \text{(raggruppo)} \\
&= 3k + 3(n^2 + n) && \text{(ip. induttiva)} \\
&= 3 \cdot (k + n^2 + n)
\end{aligned}
$$

- Poiché $(k + n^2 + n)$ è un numero intero, abbiamo mostrato che $(n+1)^3 - (n+1)$ è un multiplo di 3.

Per il principio di induzione, $p(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Esercizio 5

Dimostrare per induzione che per ogni insieme finito S, se $|S| = n$ con $n \in \mathbb{N}$, allora $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}. \, (|S| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(S)| = 2^n) \tag{4}$$

Esercizio 5

Dimostrare per induzione che per ogni insieme finito S, se $|S| = n$ con $n \in \mathbb{N}$, allora $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}. \, (|S| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(S)| = 2^n) \tag{4}$$

Soluzione dell'esercizio 5

Sia $p(n)$ il predicato "$|S| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(S)| = 2^n$".

- caso base, $n = 0$: Se $|S| = 0$, allora $S = \emptyset$. L'insieme delle parti è $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Si ha $|\mathcal{P}(S)| = 1$ e la formula dà $2^0 = 1$. Quindi $p(0)$ è vera.

- passo induttivo. Assumiamo $p(n)$ vera (ip. induttiva): $|S| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(S)| = 2^n$.

- passo induttivo. Assumiamo $p(n)$ vera (ip. induttiva): $|S| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(S)| = 2^n$. Dimostriamo $p(n+1)$: $|T| = n + 1 \Rightarrow |\mathcal{P}(T)| = 2^{n+1}$.

- passo induttivo. Assumiamo $p(n)$ vera (ip. induttiva): $|S| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(S)| = 2^n$. Dimostriamo $p(n+1)$: $|T| = n + 1 \Rightarrow |\mathcal{P}(T)| = 2^{n+1}$.
- Sia T con $|T| = n + 1$. Scegliamo $x \in T$ e sia $S = T \setminus \{x\}$. Chiaramente $|S| = n$.

- passo induttivo. Assumiamo $p(n)$ vera (ip. induttiva): $|S| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(S)| = 2^n$. Dimostriamo $p(n+1)$: $|T| = n+1 \Rightarrow |\mathcal{P}(T)| = 2^{n+1}$.
- Sia T con $|T| = n+1$. Scegliamo $x \in T$ e sia $S = T \setminus \{x\}$. Chiaramente $|S| = n$.
- Partizioniamo $\mathcal{P}(T)$ in due insiemi disgiunti:

$$A = \{U \subseteq T \mid x \notin U\} = \mathcal{P}(S).$$
$$B = \{V \subseteq T \mid x \in V\}.$$

$$A = \{U \subseteq T \mid x \notin U\} = \mathcal{P}(S).$$
$$B = \{V \subseteq T \mid x \in V\}.$$

- Per l'ipotesi induttiva, $|A| = |\mathcal{P}(S)| = 2^n$.

$$A = \{U \subseteq T \mid x \notin U\} = \mathcal{P}(S).$$
$$B = \{V \subseteq T \mid x \in V\}.$$

- Per l'ipotesi induttiva, $|A| = |\mathcal{P}(S)| = 2^n$.
- Esiste una biezione $f : A \to B$ definita da $f(U) = U \cup \{x\}$. Dunque $|B| = |A| = 2^n$.

$$A = \{U \subseteq T \mid x \notin U\} = \mathcal{P}(S).$$
$$B = \{V \subseteq T \mid x \in V\}.$$

- Per l'ipotesi induttiva, $|A| = |\mathcal{P}(S)| = 2^n$.
- Esiste una biezione $f : A \to B$ definita da $f(U) = U \cup \{x\}$. Dunque $|B| = |A| = 2^n$.
- Essendo A e B partizioni di $\mathcal{P}(T)$:

$$|\mathcal{P}(T)| = |A| + |B| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Questo dimostra $p(n+1)$.

$$A = \{U \subseteq T \mid x \notin U\} = \mathcal{P}(S).$$
$$B = \{V \subseteq T \mid x \in V\}.$$

- Per l'ipotesi induttiva, $|A| = |\mathcal{P}(S)| = 2^n$.
- Esiste una biezione $f : A \to B$ definita da $f(U) = U \cup \{x\}$. Dunque $|B| = |A| = 2^n$.
- Essendo A e B partizioni di $\mathcal{P}(T)$:

$$|\mathcal{P}(T)| = |A| + |B| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Questo dimostra $p(n+1)$. Per il principio di induzione, (4) è vera $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Altri esercizi

Dimostrare le seguenti proprietà:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \geq 0 \qquad \forall n \geq 1.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Sia $a_n := 1 + \dfrac{1}{n-5}$ allora $a_n \geq 1 \qquad \forall n \geq 6.$

(Attenzione al caso base per l'ultimo esercizio!)