Tutorato di Logica

Manuel Di Agostino

Università di Parma

11 novembre 2025

Sommario

1. Combinatoria
   - Principi (di somma e prodotto)
   - Permutazioni e Disposizioni
   - Combinazioni

Sommario

1. Combinatoria
   - Principi (di somma e prodotto)
   - Permutazioni e Disposizioni
   - Combinazioni

Teorema (Principio della somma)

La cardinalità dell'unione di due insiemi finiti S e T disgiunti ($S \cap T = \varnothing$) è la somma delle cardinalità.

$$|S \cup T| = |S| + |T|, \quad S \cap T = \varnothing$$

Teorema (Principio del prodotto)

Dati due insiemi S_1, S_2 per cui $|S_1| = m$ e $|S_2| = n$ allora

$$|S_1 \times S_2| = |S_1| \cdot |S_2|, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

Teorema (Principio della somma generalizzato)

Siano $S_1, S_2, \ldots, S_n$ insiemi finiti a due a due disgiunti; allora

$$|S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n| = \sum_{i=1}^{n} |S_i|, \quad S_j \cap S_k = \varnothing, \quad 1 \leq j, k \leq n, j \neq k$$

Teorema (Principio del prodotto generalizzato)

Siano $S_1, S_2, \ldots, S_n$ insiemi finiti; allora

$$|S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n| = \prod_{i=1}^{n} |S_i|$$

Esercizio 1

Dato un insieme S per il quale $|S| = n$, quante sono le possibili *permutazioni* dei suoi elementi?

Esercizio 1

Dato un insieme S per il quale $|S| = n$, quante sono le possibili *permutazioni* dei suoi elementi?

Soluzione dell'esercizio 1

- Ricordiamo che una permutazione di k elementi su un insieme generico S di n elementi è una qualsiasi *funzione iniettiva* $p_k : I_k \to S$, con I_k insieme dei k elementi da permutare

Esercizio 1

Dato un insieme S per il quale $|S| = n$, quante sono le possibili *permutazioni* dei suoi elementi?

Soluzione dell'esercizio 1

- Ricordiamo che una permutazione di k elementi su un insieme generico S di n elementi è una qualsiasi *funzione iniettiva* $p_k : I_k \to S$, con I_k insieme dei k elementi da permutare
- Se consideriamo $k = n$ la funzione in questione p verifica $p : S \to S$. Osserviamo che p può essere completamente definita tramite una tupla del tipo:

$$(p(s_1), \ldots, p(s_n)) \in S^n$$

Esercizio 1

Dato un insieme S per il quale $|S| = n$, quante sono le possibili *permutazioni* dei suoi elementi?

Soluzione dell'esercizio 1

- Ricordiamo che una permutazione di k elementi su un insieme generico S di n elementi è una qualsiasi *funzione iniettiva* $p_k : I_k \to S$, con I_k insieme dei k elementi da permutare
- Se consideriamo $k = n$ la funzione in questione p verifica $p : S \to S$. Osserviamo che p può essere completamente definita tramite una tupla del tipo:

$$(p(s_1), \ldots, p(s_n)) \in S^n$$

- Per essere iniettiva, $\forall x, y \in S.(x \neq y \Rightarrow p(x) \neq p(y))$, che è equivalente a dire che:

$$\forall i, j \in [1..n].(i = j \vee p(s_i) \neq p(s_j))$$

- Questo significa che ogni volta che si sceglie $p[i]$, il successivo elemento della tupla $p[i+1]$ deve essere *diverso* dai precedenti. In altre parole, scelgo gli elementi della tupla in sottoinsiemi sempre più piccoli di S.

- Questo significa che ogni volta che si sceglie $p[i]$, il successivo elemento della tupla $p[i+1]$ deve essere *diverso* dai precedenti. In altre parole, scelgo gli elementi della tupla in sottoinsiemi sempre più piccoli di S.
- Ci sono $|S|$ modi di scegliere $p(s_1)$

- Questo significa che ogni volta che si sceglie $p[i]$, il successivo elemento della tupla $p[i+1]$ deve essere *diverso* dai precedenti. In altre parole, scelgo gli elementi della tupla in sottoinsiemi sempre più piccoli di S.
- Ci sono $|S|$ modi di scegliere $p(s_1)$
- Fissato $p(s_1)$, ci sono $|S|-1$ modi di scegliere $p(s_2)$

- Questo significa che ogni volta che si sceglie $p[i]$, il successivo elemento della tupla $p[i+1]$ deve essere *diverso* dai precedenti. In altre parole, scelgo gli elementi della tupla in sottoinsiemi sempre più piccoli di S.
- Ci sono $|S|$ modi di scegliere $p(s_1)$
- Fissato $p(s_1)$, ci sono $|S|-1$ modi di scegliere $p(s_2)$
- Fissati $p(s_1), p(s_2)$, ci sono $|S|-2$ modi di scegliere $p(s_3)$

- Questo significa che ogni volta che si sceglie $p[i]$, il successivo elemento della tupla $p[i+1]$ deve essere *diverso* dai precedenti. In altre parole, scelgo gli elementi della tupla in sottoinsiemi sempre più piccoli di S.
- Ci sono $|S|$ modi di scegliere $p(s_1)$
- Fissato $p(s_1)$, ci sono $|S|-1$ modi di scegliere $p(s_2)$
- Fissati $p(s_1), p(s_2)$, ci sono $|S|-2$ modi di scegliere $p(s_3)$
- ...

- Questo significa che ogni volta che si sceglie $p[i]$, il successivo elemento della tupla $p[i+1]$ deve essere *diverso* dai precedenti. In altre parole, scelgo gli elementi della tupla in sottoinsiemi sempre più piccoli di S.
- Ci sono $|S|$ modi di scegliere $p(s_1)$
- Fissato $p(s_1)$, ci sono $|S|-1$ modi di scegliere $p(s_2)$
- Fissati $p(s_1), p(s_2)$, ci sono $|S|-2$ modi di scegliere $p(s_3)$
- ...
- Fissati $p(s_1), \ldots, p(s_{n-1})$, c'è 1 modo di scegliere $p(s_n)$

- Questo significa che ogni volta che si sceglie $p[i]$, il successivo elemento della tupla $p[i+1]$ deve essere *diverso* dai precedenti. In altre parole, scelgo gli elementi della tupla in sottoinsiemi sempre più piccoli di S.
- Ci sono $|S|$ modi di scegliere $p(s_1)$
- Fissato $p(s_1)$, ci sono $|S|-1$ modi di scegliere $p(s_2)$
- Fissati $p(s_1), p(s_2)$, ci sono $|S|-2$ modi di scegliere $p(s_3)$
- $\ldots$
- Fissati $p(s_1), \ldots, p(s_{n-1})$, c'è 1 modo di scegliere $p(s_n)$
- Quindi l'elemento i-esimo della tupla viene scelto da un insieme $S_i \subseteq S$ di cardinalità $|S_i| = |S| - i + 1$

- È possibile quindi sfruttare il principio del prodotto generalizzato per ottenere la risposta cercata, infatti:

$$\begin{aligned}
|P| &= |\{(p(s_1), \ldots, p(s_n)) \mid \text{“}p \text{ è iniettiva”}\}| \\
&= |S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n| \\
&= |S_1| \cdot |S_2| \cdot \ldots \cdot |S_n| \\
&= (|S| - 1 + 1) \cdot (|S| - 2 + 1) \cdot \ldots \cdot (|S| - n + 1) \\
&= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1
\end{aligned}$$

- È possibile quindi sfruttare il principio del prodotto generalizzato per ottenere la risposta cercata, infatti:

$$
\begin{aligned}
|P| &= |\{(p(s_1), \ldots, p(s_n)) \mid \text{“}p \text{ è iniettiva”}\}| \\
&= |S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n| \\
&= |S_1| \cdot |S_2| \cdot \ldots \cdot |S_n| \\
&= (|S| - 1 + 1) \cdot (|S| - 2 + 1) \cdot \ldots \cdot (|S| - n + 1) \\
&= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1
\end{aligned}
$$

In definitiva, ci sono $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$ possibili permutazioni su un insieme di n elementi.

Esercizio 2

Dato un gruppo di 6 persone, in quanti modi è possibile scegliere un Presidente (p), un Vice-presidente (v) e un Segretario (s)?

Esercizio 2

Dato un gruppo di 6 persone, in quanti modi è possibile scegliere un Presidente (p), un Vice-presidente (v) e un Segretario (s)?

Soluzione dell'esercizio 8

- Si può procedere in maniera analoga all'esercizio precedente. Infatti, il problema è riconducibile a quello di formare delle triple

$$(p, v, s) \in S_1 \times S_2 \times S_3$$

Esercizio 2

Dato un gruppo di 6 persone, in quanti modi è possibile scegliere un Presidente (p), un Vice-presidente (v) e un Segretario (s)?

Soluzione dell'esercizio 8

- Si può procedere in maniera analoga all'esercizio precedente. Infatti, il problema è riconducibile a quello di formare delle triple

$$(p, v, s) \in S_1 \times S_2 \times S_3$$

- S_1 costituisce l'insieme su cui scegliere un presidente, quindi $|S_1| = 6$

Esercizio 2

Dato un gruppo di 6 persone, in quanti modi è possibile scegliere un Presidente (p), un Vice-presidente (v) e un Segretario (s)?

Soluzione dell'esercizio 8

- Si può procedere in maniera analoga all'esercizio precedente. Infatti, il problema è riconducibile a quello di formare delle triple

$$(p, v, s) \in S_1 \times S_2 \times S_3$$

- S_1 costituisce l'insieme su cui scegliere un presidente, quindi $|S_1| = 6$
- Fissato p, il vice può essere scelto in $|S_2| = 5$ modi differenti

Esercizio 2

Dato un gruppo di 6 persone, in quanti modi è possibile scegliere un Presidente (p), un Vice-presidente (v) e un Segretario (s)?

Soluzione dell'esercizio 8

- Si può procedere in maniera analoga all'esercizio precedente. Infatti, il problema è riconducibile a quello di formare delle triple

$$(p, v, s) \in S_1 \times S_2 \times S_3$$

- S_1 costituisce l'insieme su cui scegliere un presidente, quindi $|S_1| = 6$
- Fissato p, il vice può essere scelto in $|S_2| = 5$ modi differenti
- Fissati p, v rimane scegliere s in $|S_3| = 4$ modi

Esercizio 2

Dato un gruppo di 6 persone, in quanti modi è possibile scegliere un Presidente (p), un Vice-presidente (v) e un Segretario (s)?

Soluzione dell'esercizio 8

- Si può procedere in maniera analoga all'esercizio precedente. Infatti, il problema è riconducibile a quello di formare delle triple

$$(p, v, s) \in S_1 \times S_2 \times S_3$$

- S_1 costituisce l'insieme su cui scegliere un presidente, quindi $|S_1| = 6$
- Fissato p, il vice può essere scelto in $|S_2| = 5$ modi differenti
- Fissati p, v rimane scegliere s in $|S_3| = 4$ modi
- Per il principio del prodotto generalizzato, si ha

$$\begin{aligned} |S_1 \times S_2 \times S_3| &= |S_1| \cdot |S_2| \cdot |S_3| \\ &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \\ &= 120 \end{aligned}$$

Esercizio 3

In quanti modi diversi è possibile anagrammare le seguenti parole?

1. base
2. logica
3. fattore
4. fattoriale
5. coefficiente

Soluzione dell'esercizio 3

- Per le prime due parole, la risposta è banale:

$$\pi(\text{base}) = 4!$$
$$\pi(\text{logica}) = 6!$$

Soluzione dell'esercizio 3

- Per le prime due parole, la risposta è banale:

$$\pi(\text{base}) = 4!$$
$$\pi(\text{logica}) = 6!$$

- Cosa succede se ci sono delle lettere ripetute? Proviamo a numerare le lettere che compaiono più di una volta in 3:

$$\text{fattore} \to \text{fat}_1\text{t}_2\text{ore}$$

Soluzione dell'esercizio 3

- Per le prime due parole, la risposta è banale:

$$\pi(\text{base}) = 4!$$
$$\pi(\text{logica}) = 6!$$

- Cosa succede se ci sono delle lettere ripetute? Proviamo a numerare le lettere che compaiono più di una volta in 3:

$$\text{fattore} \to \text{fat}_1\text{t}_2\text{ore}$$

- Bisogna quindi evitare di contare permutazioni di questo tipo due volte:

$$\text{fat}_1\text{t}_2\text{ore},\ \text{fat}_2\text{t}_1\text{ore}$$

- Ragioniamo in maniera duale: fissata una certa permutazione p, quante sono le versioni che posso generare permutando le lettere ripetute?

- Ragioniamo in maniera duale: fissata una certa permutazione p, quante sono le versioni che posso generare permutando le lettere ripetute?
- In *fattore* la lettera t si ripete 2 volte; quindi per ogni permutazione esistono due versioni equivalenti della stessa parola:

$$\mathrm{t_1t_2faore},\ \mathrm{t_2t_1faore}$$
$$\mathrm{ft_1t_2aore},\ \mathrm{ft_2t_1aore}$$
$$\mathrm{ft_1at_2ore},\ \mathrm{ft_2at_1ore}$$
$$\dots$$

- Ragioniamo in maniera duale: fissata una certa permutazione p, quante sono le versioni che posso generare permutando le lettere ripetute?
- In *fattore* la lettera t si ripete 2 volte; quindi per ogni permutazione esistono due versioni equivalenti della stessa parola:

$$\begin{gathered}\mathrm{t_1t_2faore},\ \mathrm{t_2t_1faore}\\ \mathrm{ft_1t_2aore},\ \mathrm{ft_2t_1aore}\\ \mathrm{ft_1at_2ore},\ \mathrm{ft_2at_1ore}\\ \dots\end{gathered}$$

- Per calcolare le *permutazioni con ripetizione* basta dunque eliminare la metà dei casi:

$$\pi(\text{fattore}) = \frac{7!}{2}$$

- In *fattoriale* sia la *t* che la *a* si ripetono 2 volte; si ragiona in modo analogo al caso precedente, considerando che per ogni anagramma esistono $2 \cdot 2$ versioni equivalenti:

$$\pi(\text{fattoriale}) = \frac{10!}{2 \cdot 2}$$

- In *fattoriale* sia la t che la a si ripetono 2 volte; si ragiona in modo analogo al caso precedente, considerando che per ogni anagramma esistono $2 \cdot 2$ versioni equivalenti:

$$\pi(\text{fattoriale}) = \frac{10!}{2 \cdot 2}$$

- L'ultimo caso è leggermente differente. In *coefficiente* ci sono 3 ripetizioni di e, 2 ripetizioni di c, 2 ripetizioni di f e 2 di i.

- In *fattoriale* sia la t che la a si ripetono 2 volte; si ragiona in modo analogo al caso precedente, considerando che per ogni anagramma esistono $2 \cdot 2$ versioni equivalenti:

$$\pi(\text{fattoriale}) = \frac{10!}{2 \cdot 2}$$

- L'ultimo caso è leggermente differente. In *coefficiente* ci sono 3 ripetizioni di e, 2 ripetizioni di c, 2 ripetizioni di f e 2 di i.
- Numerando le lettere ripetute, si nota che per ogni anagramma esistono $3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!$ versioni equivalenti. Ne deriva che:

$$\pi(\text{coefficiente}) = \frac{12!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}$$

Sommario

1. Combinatoria
   - Principi (di somma e prodotto)
   - Permutazioni e Disposizioni
   - Combinazioni

Permutazioni

Definizione (Permutazioni semplici)

Sia n la lunghezza di una stringa su di un alfabeto. Il numero di ***permutazioni semplici*** *P_n è*

$$P_n := n!$$

Definizione (Permutazioni con ripetizione)

Sia n la lunghezza di una stringa su di un alfabeto e siano $n_1, \ldots, n_k$ le ripetizioni dei k caratteri distinti che la compongono. Il numero di ***permutazioni con ripetizione*** *$P_n^{n_1,\ldots,n_k}$ è*

$$P_n^{n_1,\ldots,n_k} := \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

con $n_1 + \ldots + n_k = n$, $k \leq n$.

Disposizioni

Definizione (Disposizioni semplici)

*Il numero di **disposizioni semplici** di classe k di n elementi $D_{n,k}$ è*

$$D_{n,k} := \frac{n!}{(n-k)!}$$

con $0 \leq k \leq n$.

Definizione (Disposizioni con ripetizione)

*Il numero di **disposizioni con ripetizione** $D'_{n,k}$ è*

$$D'_{n,k} := n^k$$

con $n > 0, k \geq 0$.

Esercizio 4

Dato un lucchetto a combinazione di 3 cifre, ognuna delle quali può andare da 0 a 9, quante sono le combinazioni possibili?

Esercizio 4

Dato un lucchetto a combinazione di 3 cifre, ognuna delle quali può andare da 0 a 9, quante sono le combinazioni possibili?

Soluzione dell'esercizio 4

- Sfruttiamo il principio del prodotto generalizzato, considerando l'insieme S delle cifre da 0 a 9:

$$\begin{aligned}|S \times S \times S| &= |S|^3 \\ &= 10^3 \\ &= 1000\end{aligned}$$

Esercizio 4

Dato un lucchetto a combinazione di 3 cifre, ognuna delle quali può andare da 0 a 9, quante sono le combinazioni possibili?

Soluzione dell'esercizio 4

- Sfruttiamo il principio del prodotto generalizzato, considerando l'insieme S delle cifre da 0 a 9:

$$\begin{aligned} |S \times S \times S| &= |S|^3 \\ &= 10^3 \\ &= 1000 \end{aligned}$$

- Questo numero rappresenta il numero **disposizioni con ripetizione** di classe 3 di 10 cifre.

Esercizio 5

Ho a disposizione 2 paia di scarpe, 2 pantaloni e 5 magliette. In quanti modi diversi mi posso vestire?

Esercizio 5

Ho a disposizione 2 paia di scarpe, 2 pantaloni e 5 magliette. In quanti modi diversi mi posso vestire?

Soluzione dell'esercizio 5

- La risposta segue banalmente dal teorema del prodotto generalizzato. Posso contarli trovando il numero di triple

$$(s, p, m) \in S_s \times S_p \times S_m$$

Esercizio 5

Ho a disposizione 2 paia di scarpe, 2 pantaloni e 5 magliette. In quanti modi diversi mi posso vestire?

Soluzione dell'esercizio 5

- La risposta segue banalmente dal teorema del prodotto generalizzato. Posso contarli trovando il numero di triple

$$(s, p, m) \in S_s \times S_p \times S_m$$

- Sapendo che $|S_s| = 2, |S_p| = 2, |S_m| = 5$ si ottiene:

$$\begin{aligned} |S_s \times S_p \times S_m| &= |S_s| \cdot |S_p| \cdot |S_m| \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 5 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Esercizio 6

Si hanno a disposizione 5 sedie e 7 colori.

1. In quanti modi possiamo colorare le sedie se tutte le sedie devono avere colori diversi?
2. In quanti modi possiamo colorare le sedie se lo stesso colore può essere usato per colorare più sedie (eventualmente tutte)?

Soluzione dell'esercizio 6

(1) In quanti modi possiamo colorare le sedie se tutte le sedie devono avere colori diversi?

- Supponiamo di ordinare le sedie; a questo punto basta imporre che ogni colore nella quintupla $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ sia diverso dagli altri. Saranno possibili

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{7!}{(7-5)!} = 2520$$

  colorazioni, ossia il numero di **disposizioni semplici** di classe 5 di 7 colori.

Soluzione dell'esercizio 7

(2) In quanti modi possiamo colorare le sedie se lo stesso colore può essere usato per colorare più sedie (eventualmente tutte)?

- Diversamente dal quesito precedente, ad ogni scelta posso utilizzare tutti i colori disponibili. Saranno possibili

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5 = 16807$$

colorazioni.

Esercizio 7

Se abbiamo 4 monete da 10 centesimi, 3 monete da 20 centesimi e 2 monete da 50 centesimi, in quanti modi possiamo scegliere monete in modo da formare 1 euro? Il tutto dipende da come scegliamo le monete da 50 centesimi.

Esercizio 7

Se abbiamo 4 monete da 10 centesimi, 3 monete da 20 centesimi e 2 monete da 50 centesimi, in quanti modi possiamo scegliere monete in modo da formare 1 euro? Il tutto dipende da come scegliamo le monete da 50 centesimi.

Soluzione dell'esercizio 7

- Il problema è equivalente a formare delle triple (m_{50}, m_{20}, m_{10}) in modo da rispettare i seguenti vincoli:

$$\begin{cases} m_{50} \cdot 0.50 + m_{20} \cdot 0.20 + m_{10} \cdot 0.10 = 1 \\ m_{50} \in [0..2] \\ m_{20} \in [0..3] \\ m_{10} \in [0..4] \end{cases}$$

- Se scelgo 2 monete da 50 cent. ($m_{50} = 2$), necessariamente $m_{20} = m_{10} = 0$

- Se scelgo 2 monete da 50 cent. ($m_{50} = 2$), necessariamente $m_{20} = m_{10} = 0$
- Se scelgo 1 moneta da 50 cent. ($m_{50} = 1$), potrei scegliere 2 monete da 20 cent. ($m_{20} = 2$) e 1 moneta da 10 cent. ($m_{10} = 1$)

- Se scelgo 2 monete da 50 cent. ($m_{50} = 2$), necessariamente $m_{20} = m_{10} = 0$
- Se scelgo 1 moneta da 50 cent. ($m_{50} = 1$), potrei scegliere 2 monete da 20 cent. ($m_{20} = 2$) e 1 moneta da 10 cent. ($m_{10} = 1$)
- Se scelgo 1 moneta da 50 cent. ($m_{50} = 1$), potrei scegliere 1 moneta da 20 cent. ($m_{20} = 1$) e 3 monete da 10 cent. ($m_{10} = 3$)

- Se scelgo 2 monete da 50 cent. ($m_{50} = 2$), necessariamente $m_{20} = m_{10} = 0$
- Se scelgo 1 moneta da 50 cent. ($m_{50} = 1$), potrei scegliere 2 monete da 20 cent. ($m_{20} = 2$) e 1 moneta da 10 cent. ($m_{10} = 1$)
- Se scelgo 1 moneta da 50 cent. ($m_{50} = 1$), potrei scegliere 1 moneta da 20 cent. ($m_{20} = 1$) e 3 monete da 10 cent. ($m_{10} = 3$)
- Se scelgo 0 monete da 50 cent. ($m_{50} = 0$), devo scegliere tutte le monete da 20 cent. ($m_{20} = 3$) e tutte le monete da 10 cent. ($m_{10} = 4$)

- Se scelgo 2 monete da 50 cent. ($m_{50} = 2$), necessariamente $m_{20} = m_{10} = 0$
- Se scelgo 1 moneta da 50 cent. ($m_{50} = 1$), potrei scegliere 2 monete da 20 cent. ($m_{20} = 2$) e 1 moneta da 10 cent. ($m_{10} = 1$)
- Se scelgo 1 moneta da 50 cent. ($m_{50} = 1$), potrei scegliere 1 moneta da 20 cent. ($m_{20} = 1$) e 3 monete da 10 cent. ($m_{10} = 3$)
- Se scelgo 0 monete da 50 cent. ($m_{50} = 0$), devo scegliere tutte le monete da 20 cent. ($m_{20} = 3$) e tutte le monete da 10 cent. ($m_{10} = 4$)

Quindi ci sono 4 modi di formare 1 euro:

$$\{(2,0,0),(1,2,1),(1,1,3),(0,3,4)\}$$

Sommario

Definizione (Combinazioni semplici)

*Il numero di **combinazioni semplici** di classe k di n elementi distinti è il numero di k-sottoinsiemi di un insieme S, $|S| = n$, $k \leq n$. Si indica con $C_{n,k}$ ed equivale a*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Esercizio 8

Dimostrare che vale

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n \tag{1}$$

ricordando che se A è un insieme finito e $|A| = n$, allora $|\wp(A)| = 2^n$.

Soluzione dell'esercizio 8

- L'esercizio ci chiede quindi di dimostrare che la somma delle cardinalità di tutti gli *i-sottoinsiemi* di A sia proprio 2^n. Sfruttiamo l'induzione per dimostrare che $|\wp(A)| = 2^n$

Soluzione dell'esercizio 8

- L'esercizio ci chiede quindi di dimostrare che la somma delle cardinalità di tutti gli *i-sottoinsiemi* di A sia proprio 2^n. Sfruttiamo l'induzione per dimostrare che $|\wp(A)| = 2^n$
- **Caso base**: $n = |A| = 0 \Leftrightarrow A = \varnothing$

Soluzione dell'esercizio 8

- L'esercizio ci chiede quindi di dimostrare che la somma delle cardinalità di tutti gli *i-sottoinsiemi* di A sia proprio 2^n. Sfruttiamo l'induzione per dimostrare che $|\wp(A)| = 2^n$
- **Caso base**: $n = |A| = 0 \Leftrightarrow A = \varnothing$
  - trovo l'insieme delle parti

$$\wp(A) = \wp(\varnothing) = \{\varnothing\}$$

Soluzione dell'esercizio 8

- L'esercizio ci chiede quindi di dimostrare che la somma delle cardinalità di tutti gli *i-sottoinsiemi* di A sia proprio 2^n. Sfruttiamo l'induzione per dimostrare che $|\wp(A)| = 2^n$
- **Caso base**: $n = |A| = 0 \Leftrightarrow A = \varnothing$
  - trovo l'insieme delle parti

$$\wp(A) = \wp(\varnothing) = \{\varnothing\}$$

  - quindi

$$|\wp(A)| = |\{\varnothing\}| = 1 = 2^0$$

    ossia il caso base è verificato

- **Passo induttivo**: suppongo vera $|\wp(A)| = 2^n$ per un certo n naturale.
  - osserviamo che per un generico insieme $B = A \cup \{x\}, x \notin A$, si ha:

$$\wp(A) = \{\varnothing, A_1, A_2, \dots, A\}$$
$$\wp(B) = \{\varnothing, \varnothing \cup \{x\}, A_1, A_1 \cup \{x\}, A_2, A_2 \cup \{x\}, \dots, A, A \cup \{x\}\}$$

- **Passo induttivo**: suppongo vera $|\wp(A)| = 2^n$ per un certo n naturale.
  - osserviamo che per un generico insieme $B = A \cup \{x\}, x \notin A$, si ha:

$$\wp(A) = \{\emptyset, A_1, A_2, \dots, A\}$$
$$\wp(B) = \{\emptyset, \emptyset \cup \{x\}, A_1, A_1 \cup \{x\}, A_2, A_2 \cup \{x\}, \dots, A, A \cup \{x\}\}$$

- **Passo induttivo**: suppongo vera $|\wp(A)| = 2^n$ per un certo n naturale.
  - osserviamo che per un generico insieme $B = A \cup \{x\}, x \notin A$, si ha:

$$\wp(A) = \{\varnothing, A_1, A_2, \dots, A\}$$
$$\wp(B) = \{\varnothing, \varnothing \cup \{x\}, A_1, A_1 \cup \{x\}, A_2, A_2 \cup \{x\}, \dots, A, A \cup \{x\}\}$$

- **Passo induttivo**: suppongo vera $|\wp(A)| = 2^n$ per un certo n naturale.
  - osserviamo che per un generico insieme $B = A \cup \{x\}, x \notin A$, si ha:

$$\wp(A) = \{\varnothing, A_1, A_2, \ldots, A\}$$
$$\wp(B) = \{\varnothing, \varnothing \cup \{x\}, A_1, A_1 \cup \{x\}, A_2, A_2 \cup \{x\}, \ldots, A, A \cup \{x\}\}$$

- **Passo induttivo**: suppongo vera $|\wp(A)| = 2^n$ per un certo n naturale.
  - osserviamo che per un generico insieme $B = A \cup \{x\}, x \notin A$, si ha:

$$\wp(A) = \{\varnothing, A_1, A_2, \dots, A\}$$
$$\wp(B) = \{\varnothing, \varnothing \cup \{x\}, A_1, A_1 \cup \{x\}, A_2, A_2 \cup \{x\}, \dots, A, A \cup \{x\}\}$$

- **Passo induttivo**: suppongo vera $|\wp(A)| = 2^n$, con $|A| = n$ per un certo n naturale.
  - osserviamo che per un generico insieme $B = A \cup \{x\}, x \notin A$, si ha:

$$\wp(A) = \{\varnothing, A_1, A_2, \dots, A\}$$
$$\wp(B) = \{\varnothing, \varnothing \cup \{x\}, A_1, A_1 \cup \{x\}, A_2, A_2 \cup \{x\}, \dots, A, A \cup \{x\}\}$$

  - infatti in $\wp(B)$ ci sono i possibili sottoinsiemi di A (in quanto $A \subset B$) e tutti i sottoinsiemi di B che si possono ottenere aggiungendo l'elemento x ad essi.

- **Passo induttivo**: suppongo vera $|\wp(A)| = 2^n$, con $|A| = n$ per un certo n naturale.
  - osserviamo che per un generico insieme $B = A \cup \{x\}, x \notin A$, si ha:

$$\wp(A) = \{\varnothing, A_1, A_2, \dots, A\}$$
$$\wp(B) = \{\varnothing, \varnothing \cup \{x\}, A_1, A_1 \cup \{x\}, A_2, A_2 \cup \{x\}, \dots, A, A \cup \{x\}\}$$

  - infatti in $\wp(B)$ ci sono i possibili sottoinsiemi di A (in quanto $A \subset B$) e tutti i sottoinsiemi di B che si possono ottenere aggiungendo l'elemento x ad essi.
  - quindi ci sono il **doppio** dei sottoinsiemi rispetto a $\wp(A)$. Inoltre $|B| = n + 1$.

- **Passo induttivo**: suppongo vera $|\wp(A)| = 2^n$, con $|A| = n$ per un certo n naturale.
  - osserviamo che per un generico insieme $B = A \cup \{x\}, x \notin A$, si ha:

$$\wp(A) = \{\varnothing, A_1, A_2, \dots, A\}$$
$$\wp(B) = \{\varnothing, \varnothing \cup \{x\}, A_1, A_1 \cup \{x\}, A_2, A_2 \cup \{x\}, \dots, A, A \cup \{x\}\}$$

  - infatti in $\wp(B)$ ci sono i possibili sottoinsiemi di A (in quanto $A \subset B$) e tutti i sottoinsiemi di B che si possono ottenere aggiungendo l'elemento x ad essi.
  - quindi ci sono il **doppio** dei sottoinsiemi rispetto a $\wp(A)$. Inoltre $|B| = n + 1$.
  - allora

$$\begin{aligned} |\wp(B)| &= 2 \cdot |\wp(A)| \\ &= 2 \cdot 2^n && \text{(Ip. induttiva)} \\ &= 2^{n+1}. \end{aligned}$$

- Per induzione su n, abbiamo dimostrato che $|\wp(A)| = 2^{|A|}$, con $|A| = n$.

- Per induzione su n, abbiamo dimostrato che $|\wp(A)| = 2^{|A|}$, con $|A| = n$.
- Calcolare la (1) corrisponde a valutare quindi la somma del numero di tutti i possibili sottoinsiemi di un insieme avente cardinalità n.

- Per induzione su n, abbiamo dimostrato che $|\wp(A)| = 2^{|A|}$, con $|A| = n$.
- Calcolare la (1) corrisponde a valutare quindi la somma del numero di tutti i possibili sottoinsiemi di un insieme avente cardinalità n.
- In particolare,

$$\binom{n}{i}$$

ci dice quanti sono i sottoinsiemi di i elementi che è possibile formare.

- Per induzione su n, abbiamo dimostrato che $|\wp(A)| = 2^{|A|}$, con $|A| = n$.
- Calcolare la (1) corrisponde a valutare quindi la somma del numero di tutti i possibili sottoinsiemi di un insieme avente cardinalità n.
- In particolare,

$$\binom{n}{i}$$

ci dice quanti sono i sottoinsiemi di i elementi che è possibile formare.
- Ma allora

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = |\wp(A)| = 2^n$$

$\square$

Esercizio 9

Sia S un insieme di 16 elementi. Qual è il numero dei 2-sottoinsiemi di S? E quello dei 14-sottoinsiemi?

Esercizio 9

Sia S un insieme di 16 elementi. Qual è il numero dei 2-sottoinsiemi di S? E quello dei 14-sottoinsiemi?

Soluzione dell'esercizio 9

- Il numero dei 2-sottoinsiemi di S equivale al numero di tutti i possibili sottoinsiemi di S da 2 elementi. Questi si possono contare con:

$$\binom{16}{2} = \frac{16!}{2!14!} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$$

Esercizio 9

Sia S un insieme di 16 elementi. Qual è il numero dei 2-sottoinsiemi di S? E quello dei 14-sottoinsiemi?

Soluzione dell'esercizio 9

- Il numero dei 2-sottoinsiemi di S equivale al numero di tutti i possibili sottoinsiemi di S da 2 elementi. Questi si possono contare con:

$$\binom{16}{2} = \frac{16!}{2!14!} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$$

- Contiamo ora i 14-sottoinsiemi:

$$\binom{16}{14} = \frac{16!}{14!2!} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$$

- Notiamo che il risultato è lo stesso! Valgono infatti la seguenti:

Proprietà

Dati n, k naturali con $k \leq n$, si hanno

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{2}$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \tag{3}$$

Esercizio 10

10 professori devono scegliere un presidente, un vicepresidente ed un segretario. Si deve anche scegliere una commissione di 3 membri.

1. In quanti modi si possono fare queste scelte?

Inoltre i 10 professori fanno da tutori ad un gruppo di allievi.

2. Se 3 nuovi allievi si aggiungono al gruppo, in quanti modi diversi i 3 allievi possono scegliere i loro tutori?

Soluzione dell'esercizio 10

(1) In quanti modi si possono fare queste scelte?

- Il problema di scegliere presidente, vice e segretario è analogo a (8); ci sono

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{(10-3)!}$$

  modi per farlo (l'ordine conta, differenzia i ruoli nelle triplette formate)

Soluzione dell'esercizio 10

(1) In quanti modi si possono fare queste scelte?

- Il problema di scegliere presidente, vice e segretario è analogo a (8); ci sono
$$10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{(10-3)!}$$
modi per farlo (l'ordine conta, differenzia i ruoli nelle triplette formate)
- Per scegliere la commissione da 3 membri l'ordine è ininfluente; bisogna cercare quanti sono i 3-sottoinsiemi possibili da un insieme d 10 elementi (presidente, vice e segretario possono far parte della commissione):
$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 10 \cdot 4 \cdot 3$$

- A questo punto, per il principio del prodotto le possibili scelte sono:

$$\left(\frac{10!}{(10-3)!}\right) \cdot \binom{10}{3} = \frac{10!}{7!} \cdot \frac{10!}{3!7!} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{10!}{7!}\right)^2 = 86400$$

che equivale ai modi di scegliere le seguenti coppie:

$$(d, c) \in D \times C$$

con D, insieme delle triple possibili di presidente, vice e segretario e C, insieme dei possibili 3-sottoinsiemi formati sui 10 professori.

Soluzione dell'esercizio 10

(2) Se 3 nuovi allievi si aggiungono al gruppo, in quanti modi diversi i 3 allievi possono scegliere i loro tutori?

- Ogni allievo può scegliere uno tra i 10 professori disponibili; un professore può quindi essere scelto più di una volta

Soluzione dell'esercizio 10

(2) Se 3 nuovi allievi si aggiungono al gruppo, in quanti modi diversi i 3 allievi possono scegliere i loro tutori?

- Ogni allievo può scegliere uno tra i 10 professori disponibili; un professore può quindi essere scelto più di una volta
- La risposta equivale al numero di **disposizioni con ripetizione** di classe 3 di 10 elementi distinti:

$$D_{10,3} = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$$

Esercizio 11

12 amici, dopo aver partecipato ad una cena, si salutano e ognuno stringe la mano a tutti gli altri.

1. Quante sono le strette di mano?

Soluzione dell'esercizio 11

- Ogni persona stringe la mano ad altre 11

Soluzione dell'esercizio 11

- Ogni persona stringe la mano ad altre 11
- Inoltre, se a saluta b, è equivalente a dire che b saluta a. Quindi l'ordine delle coppie è ininfluente

Soluzione dell'esercizio 11

- Ogni persona stringe la mano ad altre 11
- Inoltre, se a saluta b, è equivalente a dire che b saluta a. Quindi l'ordine delle coppie è ininfluente
- Possiamo contare i possibili 2-sottoinsiemi su 12 elementi per trovare la risposta:

$$\binom{12}{2} = \frac{12!}{2!10!} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$$

Esercizio 12

Quanti sono i numeri di 6 cifre che non contengono 0, hanno la cifra 1 almeno 2 volte e la cifra 2 almeno 2 volte?

Esercizio 12

Quanti sono i numeri di 6 cifre che non contengono 0, hanno la cifra 1 almeno 2 volte e la cifra 2 almeno 2 volte?

Soluzione dell'esercizio 12

- Scriviamo un generico numero che rispetti le condizioni date dal testo. Esso sarà una qualsiasi permutazione di:

$$ab1122, \quad a, b \in [1..9]$$

Esercizio 12

Quanti sono i numeri di 6 cifre che non contengono 0, hanno la cifra 1 almeno 2 volte e la cifra 2 almeno 2 volte?

Soluzione dell'esercizio 12

- Scriviamo un generico numero che rispetti le condizioni date dal testo. Esso sarà una qualsiasi permutazione di:

$$ab1122, \quad a, b \in [1..9]$$

- Possiamo quindi trovare il numero di soluzioni studiando i sottoproblemi generati dalle scelte delle cifre a, b

Esercizio 12

Quanti sono i numeri di 6 cifre che non contengono 0, hanno la cifra 1 almeno 2 volte e la cifra 2 almeno 2 volte?

Soluzione dell'esercizio 12

- Scriviamo un generico numero che rispetti le condizioni date dal testo. Esso sarà una qualsiasi permutazione di:

$$ab1122, \quad a, b \in [1..9]$$

- Possiamo quindi trovare il numero di soluzioni studiando i sottoproblemi generati dalle scelte delle cifre a, b
- Scegliendo a, b in modo da formare sottoinsiemi disgiunti di soluzioni e coprendo tutti i casi possibili, sfruttiamo il principio della somma per trovare il numero di casi totali

- Il criterio utilizzato per distinguere le casistiche è la frequenza di cifre 1 (#1) e 2 (#2). È importante notare che la scelta di a, b **non** è ordinata

- Il criterio utilizzato per distinguere le casistiche è la frequenza di cifre 1 (#1) e 2 (#2). È importante notare che la scelta di a, b **non** è ordinata
  - **caso** $\#1 = 2, \#2 = 2, a \neq b$ $(a, b \in [3..9])$

$$S_1 = \underbrace{\binom{7}{2}}_{\substack{\text{scelte di } \{a,b\} \\ \text{in } [3..9]}} \cdot \frac{6!}{2!2!} = 21 \cdot 180 = 3780$$

- Il criterio utilizzato per distinguere le casistiche è la frequenza di cifre 1 (#1) e 2 (#2). È importante notare che la scelta di a, b **non** è ordinata
  - **caso** $\#1 = 2, \#2 = 2, a \neq b$ $(a, b \in [3..9])$

$$S_1 = \underbrace{\binom{7}{2}}_{\substack{\text{scelte di } \{a,b\} \\ \text{in } [3..9]}} \cdot \frac{6!}{2!2!} = 21 \cdot 180 = 3780$$

  - **caso** $\#1 = 2, \#2 = 2, a = b$ $(a, b \in [3..9])$

$$S_2 = \underbrace{\binom{7}{1}}_{\substack{\text{scelte di } \{a\} \\ \text{in } [3..9]}} \cdot \frac{6!}{2!2!2!} = 7 \cdot 90 = 630$$

- Questa volta consideriamo 3 ripetizioni di uno solo tra 1 e 2
  - **caso** $\#1 = 3, \#2 = 2, b$ $(b \in [3..9])$

$$S_3 = \underbrace{\binom{7}{1}}_{\substack{\text{scelte di } \{a\} \\ \text{in } [3..9]}} \cdot \frac{6!}{3!2!} = 7 \cdot 60 = 420$$

- Questa volta consideriamo 3 ripetizioni di uno solo tra 1 e 2
  - **caso** $\#1 = 3, \#2 = 2, b$ $\quad (b \in [3..9])$

$$S_3 = \underbrace{\binom{7}{1}}_{\substack{\text{scelte di } \{a\} \\ \text{in } [3..9]}} \cdot \frac{6!}{3!2!} = 7 \cdot 60 = 420$$

  - **caso** $\#1 = 2, \#2 = 3, b$ $\quad (b \in [3..9])$

$$S_4 = \underbrace{\binom{7}{1}}_{\substack{\text{scelte di } \{a\} \\ \text{in } [3..9]}} \cdot \frac{6!}{2!3!} = 7 \cdot 60 = 420$$

- Questa volta consideriamo 3 ripetizioni di entrambi 1 e 2
  - **caso** $\#1 = 3, \#2 = 3$

$$S_5 = \frac{6!}{3!3!} = 7 \cdot 60 = 20$$

- Questa volta consideriamo 4 ripetizioni di uno solo tra 1 e 2
    - **caso** $\#1 = 4, \#2 = 2$

$$S_6 = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

- Questa volta consideriamo 4 ripetizioni di uno solo tra 1 e 2
  - **caso** $\#1 = 4, \#2 = 2$
$$S_6 = \frac{6!}{4!2!} = 15$$
  - **caso** $\#1 = 2, \#2 = 4$
$$S_7 = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

- Questa volta consideriamo 4 ripetizioni di uno solo tra 1 e 2
  - **caso** $\#1 = 4, \#2 = 2$
$$S_6 = \frac{6!}{4!2!} = 15$$
  - **caso** $\#1 = 2, \#2 = 4$
$$S_7 = \frac{6!}{2!4!} = 15$$
- Per il principio della somma generalizzato, basta sommare il numero di anagrammi delle varie casistiche ottenute (sono a due a due disgiunte):
$$\sum_{i=1}^{7} S_i = 3780 + 630 + 2 \cdot 420 + 20 + 2 \cdot 15 = 5300$$

Esercizio 13

Uno studente deve rispondere a 5 domande su 10. Solo 5 su 10.

1. Quante possibili scelte ha?
2. E se deve per forza scegliere 2 tra le prime 5 e le restanti 3 tra le ultime 5?

Soluzione dell'esercizio 13

(1) Quante possibili scelte ha?

- Bisogna scegliere 5 domande tra 10 elementi, l'ordine non è importante:

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 252$$

Soluzione dell'esercizio 13

(1) Quante possibili scelte ha?

- Bisogna scegliere 5 domande tra 10 elementi, l'ordine non è importante:

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 252$$

(2) E se deve per forza scegliere almeno 2 tra le prime 5?

- Bisogna scegliere 2 domande tra le prime 5 e le rimanenti 3 tra le altre 5

Soluzione dell'esercizio 13

(1) Quante possibili scelte ha?

- Bisogna scegliere 5 domande tra 10 elementi, l'ordine non è importante:

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 252$$

(2) E se deve per forza scegliere almeno 2 tra le prime 5?

- Bisogna scegliere 2 domande tra le prime 5 e le rimanenti 3 tra le altre 5
- Quindi possiamo sfruttare il principio del prodotto:

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{3} = \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{5!}{3!2!} = \left(\frac{5!}{2!3!}\right)^2 = 100$$

Esercizio 14

Dimostrare che il numero di diagonali d di un poligono convesso con n vertici (e quindi n lati) è dato da:

$$d = \binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

Soluzione dell'esercizio 14

- I vertici del poligono sono n.

Soluzione dell'esercizio 14

- I vertici del poligono sono n.
- Un segmento qualsiasi (lato o diagonale) è individuato da una coppia non ordinata di vertici.

Soluzione dell'esercizio 14

- I vertici del poligono sono n.
- Un segmento qualsiasi (lato o diagonale) è individuato da una coppia non ordinata di vertici.
- Il numero totale di coppie non ordinate che si possono formare con n vertici è dato dalle combinazioni semplici di n elementi di classe 2:

$$C_{n,2} = \binom{n}{2}$$

Soluzione dell'esercizio 14

- I vertici del poligono sono n.
- Un segmento qualsiasi (lato o diagonale) è individuato da una coppia non ordinata di vertici.
- Il numero totale di coppie non ordinate che si possono formare con n vertici è dato dalle combinazioni semplici di n elementi di classe 2:

$$C_{n,2} = \binom{n}{2}$$

- Questo numero $\binom{n}{2}$ include sia i lati del poligono (che sono n) sia le sue diagonali.

Soluzione dell'esercizio 14

- I vertici del poligono sono n.
- Un segmento qualsiasi (lato o diagonale) è individuato da una coppia non ordinata di vertici.
- Il numero totale di coppie non ordinate che si possono formare con n vertici è dato dalle combinazioni semplici di n elementi di classe 2:

$$C_{n,2} = \binom{n}{2}$$

- Questo numero $\binom{n}{2}$ include sia i lati del poligono (che sono n) sia le sue diagonali.
- Per ottenere il numero di diagonali d, sottraiamo il numero di lati n dal numero totale di segmenti:

$$d = \binom{n}{2} - n$$