



**Manuel Di Agostino**

[manuel.diagostino@studenti.unipr.it](mailto:manuel.diagostino@studenti.unipr.it)

*UniPR*

*Università di Parma*

14 ottobre 2025

# Tutorato di Logica

## 1 Relazioni

- Definizione di Relazione
- Relazione d'equivalenza
- Relazione d'ordine

## 1 Relazioni

- Definizione di Relazione
- Relazione d'equivalenza
- Relazione d'ordine

## Definizione (Relazione)

Dati due insiemi  $A, B$ , una **relazione  $\mathcal{R}$**  tra essi è un qualsiasi sottoinsieme del loro prodotto cartesiano.

$$\mathcal{R} \subseteq A \times B$$

## Definizione (Relazione)

Dati due insiemi  $A, B$ , una **relazione  $\mathcal{R}$**  tra essi è un qualsiasi sottoinsieme del loro prodotto cartesiano.

$$\mathcal{R} \subseteq A \times B$$

Dati:

- $A = \{i \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq i \leq 3\}$
- $B = \{i \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq i \leq 0\}$

alcune relazioni su  $A \times B$  potrebbero essere:

- $\mathcal{R}_1 = \{(a, b) \in A \times B \mid a \leq b\} = \{(0, 0)\}$
- $\mathcal{R}_2 = \{(a, b) \in A \times B \mid a + b = 0\} = \{(3, -3), (2, -2), (1, -1), (0, 0)\}$
- $\mathcal{R}_3 = \{(a, b) \in A \times B \mid a = 1\} = \{(1, -3), (1, -2), \dots, (1, 0)\}$

## Proprietà (Riflessività)

Una relazione  $\mathcal{R}$  su A si dice **riflessiva** sse

$$\forall x \in A : x\mathcal{R}x$$

## Proprietà (Simmetricità)

Una relazione  $\mathcal{R}$  su A si dice **simmetrica** sse

$$\forall x, y \in A : x\mathcal{R}y \rightarrow y\mathcal{R}x$$

## Proprietà (Transitività)

Una relazione  $\mathcal{R}$  su A si dice **transitiva** sse

$$\forall x, y, z \in A : x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \rightarrow x\mathcal{R}z$$

## 1 Relazioni

- Definizione di Relazione
- Relazione d'equivalenza
- Relazione d'ordine

## Definizione (Rel. d'equivalenza)

Data una relazione  $\mathcal{R}$  su  $A$ , essa si dice essere **d'equivalenza** sse

- **riflessiva:**  $\forall x \in A. (x\mathcal{R}x)$
- **simmetrica:**  $\forall x, y \in A. (x\mathcal{R}y \rightarrow y\mathcal{R}x)$
- **transitiva:**  $\forall x, y, z \in A. (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \rightarrow x\mathcal{R}z)$

## Esercizio 1      Appello del 23/01/2024

Sia  $R$  la relazione su  $\mathbb{N}$  così definita:

$$\forall x, y \in \mathbb{N}. R(x, y) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y - x = 3k$$

Ad esempio,  $23 - 8 = 3 \cdot 5$ , quindi vale  $R(8, 23)$ .

1. Dimostrare che  $R$  su  $\mathbb{N}$  è di equivalenza.
2. Quante classi di equivalenza si ottengono partizionando  $\mathbb{N}$  con  $R$ ?

*Suggerimento:* se  $R(x, y)$ , allora  $x$  e  $y$  hanno lo stesso *resto* nella divisione per 3.

## Soluzione dell'esercizio 1

Dimostro che  $R$  è di equivalenza.

➤ riflessività:

$$\begin{aligned}xRx &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - x = 3k \\&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 0 = 3k\end{aligned}$$

che è chiaramente vero per  $k = 0$ .

## Soluzione dell'esercizio 1

Dimostro che  $R$  è di equivalenza.

› riflessività:

$$\begin{aligned}xRx &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - x = 3k \\&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 0 = 3k\end{aligned}$$

che è chiaramente vero per  $k = 0$ .

› simmetricità:

$$\begin{aligned}xRy &\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{Z} : y - x = 3a \\(a = -a') &\Leftrightarrow \exists a' \in \mathbb{Z} : a' = -a \wedge y - x = -3a' \\&\Leftrightarrow \exists a' \in \mathbb{Z} : -(x - y) = -3a' \\&\Leftrightarrow \exists a' \in \mathbb{Z} : (x - y) = 3a' \\&\Leftrightarrow yRx.\end{aligned}$$

➤ transitività:

$$x, y, z \in \mathbb{N} \wedge xRy \wedge yRz$$

(Def. di R)

$$\Leftrightarrow \exists j, k \in \mathbb{Z} : y - x = 3j \wedge z - y = 3k$$

$$\Leftrightarrow \exists j, k \in \mathbb{Z} : y = 3j + x \wedge z - y = 3k$$

$$\Leftrightarrow \exists j, k \in \mathbb{Z} : y = 3j + x \wedge z - (3j + x) = 3k$$

$$\Leftrightarrow \exists j, k \in \mathbb{Z} : y = 3j + x \wedge z - 3j - x = 3k$$

$$\Leftrightarrow \exists j, k \in \mathbb{Z} : y = 3j + x \wedge z - x = 3(k + j)$$

( $l = k+j$ )

$$\Rightarrow \exists l \in \mathbb{Z} : z - x = 3l$$

(Def. di R)

$$\Leftrightarrow xRz.$$

➤ transitività:

$$\begin{aligned} & x, y, z \in \mathbb{N} \wedge xRy \wedge yRz \\ (\text{Def. di } R) \quad & \Leftrightarrow \exists j, k \in \mathbb{Z} : y - x = 3j \wedge z - y = 3k \\ & \Leftrightarrow \exists j, k \in \mathbb{Z} : y = 3j + x \wedge z - y = 3k \\ & \Leftrightarrow \exists j, k \in \mathbb{Z} : y = 3j + x \wedge z - (3j + x) = 3k \\ & \Leftrightarrow \exists j, k \in \mathbb{Z} : y = 3j + x \wedge z - 3j - x = 3k \\ & \Leftrightarrow \exists j, k \in \mathbb{Z} : y = 3j + x \wedge z - x = 3(k + j) \\ (l = k+j) \quad & \Rightarrow \exists l \in \mathbb{Z} : z - x = 3l \\ (\text{Def. di } R) \quad & \Leftrightarrow xRz. \end{aligned}$$

Quindi  $R$  è di equivalenza.

## Soluzione dell'esercizio 1

Come conto il numero di classi di equivalenza? Osserviamo che

- ›  $0R3, 3R6, 6R9, \dots$
- ›  $1R4, 4R7, 7R10, \dots$
- ›  $2R5, 5R8, 8R11, \dots$

L'ipotesi è che ci siano 3 classi di equivalenza con 0, 1, 2 come rispettivi rappresentanti.

## Soluzione dell'esercizio 1

Come conto il numero di classi di equivalenza? Osserviamo che

- ›  $0R3, 3R6, 6R9, \dots$
- ›  $1R4, 4R7, 7R10, \dots$
- ›  $2R5, 5R8, 8R11, \dots$

L'ipotesi è che ci siano 3 classi di equivalenza con 0, 1, 2 come rispettivi rappresentanti. Per la divisione intera euclidea ogni numero naturale  $n$  si può scrivere come

$$n = 3 \cdot k + r, \quad k \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 3$$

## Soluzione dell'esercizio 1

Come conto il numero di classi di equivalenza? Osserviamo che

- ›  $0R3, 3R6, 6R9, \dots$
- ›  $1R4, 4R7, 7R10, \dots$
- ›  $2R5, 5R8, 8R11, \dots$

L'ipotesi è che ci siano 3 classi di equivalenza con 0, 1, 2 come rispettivi rappresentanti. Per la divisione intera euclidea ogni numero naturale  $n$  si può scrivere come

$$n = 3 \cdot k + r, \quad k \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 3$$

che equivale a

$$n - r = 3 \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 3$$

ossia

$$rRn, \quad 0 \leq r < 3$$

## Soluzione dell'esercizio 1

Come conto il numero di classi di equivalenza? Osserviamo che

- ›  $0R3, 3R6, 6R9, \dots$
- ›  $1R4, 4R7, 7R10, \dots$
- ›  $2R5, 5R8, 8R11, \dots$

L'ipotesi è che ci siano 3 classi di equivalenza con 0, 1, 2 come rispettivi rappresentanti. Per la divisione intera euclidea ogni numero naturale  $n$  si può scrivere come

$$n = 3 \cdot k + r, \quad k \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 3$$

che equivale a

$$n - r = 3 \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 3$$

ossia

$$rRn, \quad 0 \leq r < 3$$

Poiché nella divisione intera  $r \in \{0, 1, 2\}$  è unico, è evidente che  $n$  è in relazione con solo uno dei 3 possibili resti. Quindi l'**insieme quoziante** è

$$\mathbb{N}/R = \{[0], [1], [2]\}$$

## Esercizio 2 Parziale del 02/11/2023

Sia  $R \subseteq \mathbb{N}$  la relazione così definita:

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : R(x, y) \Leftrightarrow x \bmod 5 = y \bmod 5$$

dove  $\cdot \bmod 5$  è l'operazione che restituisce il *resto* della divisione per 5. Ad esempio  $27 \bmod 5 = 2$ .

1.  $R$  su  $\mathbb{N}$  è di equivalenza?
2. Se sì, quante classi di equivalenza si ottengono partizionando  $\mathbb{N}$  con  $R$ ?

*Suggerimento:* si ricorda che per  $n < 5$  si ha  $n \bmod 5 = n$ .

## Soluzione dell'esercizio 2

- Riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow x \mod 5 = x \mod 5$$

Vero, il resto è unico.

## Soluzione dell'esercizio 2

- Riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow x \mod 5 = x \mod 5$$

Vero, il resto è unico.

- Simmetricità:

$$\begin{aligned} xRy &\Leftrightarrow x \mod 5 = y \mod 5 \\ (\text{Simmetricità di } =) \\ &\Leftrightarrow y \mod 5 = x \mod 5 \\ &\Leftrightarrow yRx \end{aligned}$$

➤ transitività:

$$\begin{aligned}xRy \wedge yRz &\Leftrightarrow x \mod 5 = y \mod 5 \wedge y \mod 5 = z \mod 5 \\&\quad (\text{Transitività di } =) \\&\Leftrightarrow x \mod 5 = z \mod 5 \\&\Leftrightarrow xRz\end{aligned}$$

### Esercizio 3      Appello del 09/01/2024

Sia  $R$  la relazione su  $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} - \{0\}$  così definita:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^* : R(x, y) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : \frac{x}{y} = q \wedge q \neq 0$$

1. Dimostrare che  $R$  su  $\mathbb{R}^*$  è di equivalenza.

## Esercizio 4      Appello del 14/02/2023

Sia  $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , con  $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} - \{0\}$  l'insieme delle coppie di numeri naturali, in cui si è escluso lo zero. Supponiamo di applicare ad  $A$  la relazione  $R$  così definita:

$$\forall (a, b), (c, d) \in A : R((a, b), (c, d)) \Leftrightarrow ad = cb$$

1. La relazione  $R$  è di equivalenza?

## Esercizio 5 Appello del 31/01/2023

Sia  $R$  una relazione di equivalenza su un insieme  $A$ . Tale insieme contiene almeno tre elementi  $a, b, c$  e inoltre

$$\neg R(a, b) \wedge \neg R(a, c) \wedge \neg R(b, c)$$

cioè  $a, b, c$  non sono in relazione tra loro.

Si supponga che  $R$  abbia tre classi di equivalenza, definite in questo modo:

$$A_1 = \{x \in A : R(a, x)\}, \quad A_2 = \{x \in A : R(b, x)\}, \quad A_3 = \{x \in A : R(c, x)\}$$

e inoltre  $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ .

1. Dimostrare che  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ,  $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ ,  $A_2 \cap A_3 = \emptyset$ .

## Esercizio 6      Appello del 16/01/2023

Sia  $A$  un insieme non vuoto. Si consideri suddiviso in questo modo:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

dove  $A_1, A_2, A_3$  sono insiemi non vuoti e disgiunti a due a due.  
Sia  $R$  la relazione definita in questo modo:

$$\forall x, y \in A : R(x, y) \Leftrightarrow \exists i \in \{1, 2, 3\} : x \in A_i \wedge y \in A_i$$

1. Dimostrare che  $R$  è di equivalenza.

## 1 Relazioni

- Definizione di Relazione
- Relazione d'equivalenza
- Relazione d'ordine

## Definizione (Rel. d'ordine)

Data una relazione  $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ , essa si dice essere d'**ordine** sse

- **riflessiva:**  $\forall x \in A. (x\mathcal{R}x)$
- **anti-simmetrica:**  $\forall x, y \in A. (x\mathcal{R}y \wedge yRx \rightarrow x = y)$
- **transitiva:**  $\forall x, y, z \in A. (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \rightarrow x\mathcal{R}z)$

## Definizione (Ordine parziale, totale)

Data una relazione d'ordine  $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ , essa si dice:

- › **parziale**:  $\exists x, y \in A : x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x$
- › **totale**:  $\forall x, y \in A . x \mathcal{R} y \vee y \mathcal{R} x$

## Definizione (Ordine parziale, totale)

Data una relazione d'ordine  $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ , essa si dice:

- › **parziale**:  $\exists x, y \in A : x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x$
- › **totale**:  $\forall x, y \in A . x \mathcal{R} y \vee y \mathcal{R} x$

## Definizione (Poset)

Un **Insieme Parzialmente Ordinato** (*Partially Ordered Set, Poset*) è un qualsiasi insieme  $A$  dotato di una relazione d'ordine (parziale)  $\leq$  su di esso. Si indica con la coppia

$$(A, \leq)$$

## Definizione (Insieme dei Massimali)

Dato un poset  $(A, \leq)$  si definisce l'insieme degli elementi **massimali** come

$$\{m \in A \mid \forall x \in A . m \leq x \rightarrow x = m\}$$

## Definizione (Elemento Massimo)

Dato un poset  $(A, \leq)$  l'elemento **massimo** **M**, se esiste, soddisfa

$$\forall x \in A . x \leq M$$

## Esercizio 7 Appello del 23/01/2024

Si consideri l'insieme  $D_{28} = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$  dei divisori di 28 a cui si applica la relazione  $R$  così definita:

$$\forall x, y \in D_{28}. R(x, y) \Leftrightarrow x|y$$

si ricorda che  $x|y$  si legge “ $x$  divide  $y$ ”, ovvero  $\exists m \in \mathbb{Z} : y = mx$

1.  $R$  su  $D_{28}$  è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
2.  $R$  su  $D_{28}$  ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?  
*Suggerimento:* rappresentare graficamente la relazione  $R$  sull'insieme  $D_{28}$

## Soluzione dell'esercizio 7

(1)  $R$  su  $D_{28}$  è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?

➤ riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow x|x.$$

## Soluzione dell'esercizio 7

(1)  $R$  su  $D_{28}$  è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?

➤ riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow x|x.$$

➤ anti-simmetricità:

$$\begin{aligned} & (Def. \ di \ R) \\ xRy \wedge yRx & \Leftrightarrow x|y \wedge y|x \\ & (Def. \ di \ |) \\ & \Leftrightarrow \exists i, j \in \mathbb{Z} : y = ix \wedge x = jy \\ & \Leftrightarrow \exists i, j \in \mathbb{Z} : y = i\cancel{j}y \wedge x = jy \\ & \Rightarrow \exists i, j \in \mathbb{Z} : 1 = ij \wedge x = jy \\ & \Leftrightarrow \exists i, j \in \mathbb{Z} : (i = j = \pm 1) \wedge x = jy \\ & \Rightarrow (x = -y) \vee (x = y) \\ & (x, y > 0) \\ & \Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

➤ transitività:

$$\begin{aligned}xRy \wedge yRz &\Leftrightarrow x|y \wedge y|z \\&\Leftrightarrow \exists i, j \in \mathbb{Z} : y = ix \wedge z = jy \\&\Rightarrow \exists i, j \in \mathbb{Z} : z = j(ix) \\(k = ji \in \mathbb{Z}) \quad &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : z = kx \\&\Leftrightarrow x|z \\&\Leftrightarrow xRz.\end{aligned}$$

➤ transitività:

$$\begin{aligned}xRy \wedge yRz &\Leftrightarrow x|y \wedge y|z \\&\Leftrightarrow \exists i, j \in \mathbb{Z} : y = ix \wedge z = jy \\&\Rightarrow \exists i, j \in \mathbb{Z} : z = j(ix) \\(k = ji \in \mathbb{Z}) \quad &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : z = kx \\&\Leftrightarrow x|z \\&\Leftrightarrow xRz.\end{aligned}$$

Quindi  $R$  è d'ordine.

➤ transitività:

$$\begin{aligned}xRy \wedge yRz &\Leftrightarrow x|y \wedge y|z \\&\Leftrightarrow \exists i, j \in \mathbb{Z} : y = ix \wedge z = jy \\&\Rightarrow \exists i, j \in \mathbb{Z} : z = j(ix) \\(k = ji \in \mathbb{Z}) \quad &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : z = kx \\&\Leftrightarrow x|z \\&\Leftrightarrow xRz.\end{aligned}$$

Quindi  $R$  è d'ordine.

➤ È totale? No,  $4R7 \wedge 7R4$ .

## Soluzione dell'esercizio 7

(2)  $R$  su  $D_{28}$  ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

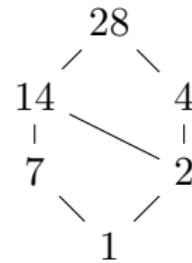
*Suggerimento:* rappresentare graficamente la relazione  $R$  sull'insieme  $D_{28}$

## Soluzione dell'esercizio 7

(2)  $R$  su  $D_{28}$  ha elementi minimi e massimali? Se sì, quali?

*Suggerimento:* rappresentare graficamente la relazione  $R$  sull'insieme  $D_{28}$

- Iniziamo costruendo il diagramma di Hasse che descrive  $R$  su  $D_{28}$ :

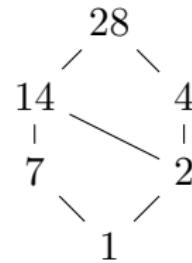


## Soluzione dell'esercizio 7

(2)  $R$  su  $D_{28}$  ha elementi minimi e massimali? Se sì, quali?

*Suggerimento:* rappresentare graficamente la relazione  $R$  sull'insieme  $D_{28}$

- › Iniziamo costruendo il diagramma di Hasse che descrive  $R$  su  $D_{28}$ :



- › È evidente che esiste un massimo, 28, e un minimo, 1.

## Esercizio 8 Appello del 05/06/2024

Si consideri l'insieme  $D = \{2, 11, 23, 44, 1012, 2024\}$ , a cui si applica la relazione  $R$  così definita:

$$\forall x, y \in D : R(x, y) \Leftrightarrow x|y$$

si ricorda che  $x|$  si legge “ $x$  divide  $y$ ”, ovver  $\exists m \in \mathbb{Z} : y = mx$ .

1.  $R$  su  $D$  è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?

2.  $R$  su  $D$  ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

*Suggerimento:* rappresentare graficamente la relazione  $R$  sull'insieme  $D$  dove può essere utile ricordare che  $23 \cdot 24 = 1012$ .

## Soluzione dell'esercizio 8

(1)  $R$  su  $D$  è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?

## Soluzione dell'esercizio 8

- (1)  $R$  su  $D$  è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?  
Analogo al precedente esercizio.

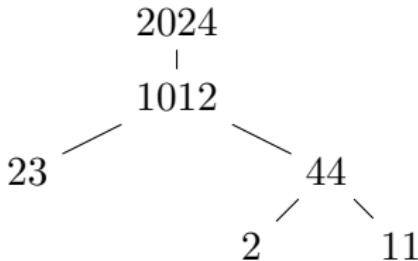
## Soluzione dell'esercizio 8

- (1)  $R$  su  $D$  è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?  
Analogo al precedente esercizio.
- (2)  $R$  su  $D$  ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?  
*Suggerimento:* rappresentare graficamente la relazione  $R$   
sull'insieme  $D$  dove può essere utile ricordare che  $23 \cdot 24 = 1012$ .

## Soluzione dell'esercizio 8

- (1)  $R$  su  $D$  è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?  
Analogo al precedente esercizio.
- (2)  $R$  su  $D$  ha elementi minimi e massimali? Se sì, quali?
- Suggerimento:* rappresentare graficamente la relazione  $R$  sull'insieme  $D$  dove può essere utile ricordare che  $23 \cdot 24 = 1012$ .

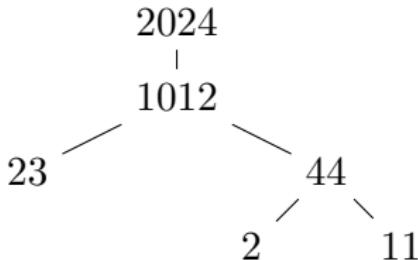
➤ Costruiamo il diagramma di Hasse:



## Soluzione dell'esercizio 8

- (1)  $R$  su  $D$  è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?  
Analogo al precedente esercizio.
- (2)  $R$  su  $D$  ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?
- Suggerimento:* rappresentare graficamente la relazione  $R$  sull'insieme  $D$  dove può essere utile ricordare che  $23 \cdot 24 = 1012$ .

➤ Costruiamo il diagramma di Hasse:



➤ Massimo: 2024, minimali:  $\{2, 11, 23\}$

## Esercizio 9      Appello del 09/01/2024

Si consideri l'insieme

$P = \{x \mid \exists n \in \mathbb{N} : x = 2^n\} = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$ , delle potenze di 2, a cui si applica la relazione  $R$  così definita: relazione  $R$  così definita:

$$\forall x, y \in P : R(x, y) \Leftrightarrow x|y$$

si ricorda che  $x|$  si legge “ $x$  divide  $y$ ”, ovver  $\exists m \in \mathbb{Z} : y = mx$ .

1.  $R$  su  $P$  è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
2.  $R$  su  $P$  ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

## Soluzione dell'esercizio 9

(1)  $R$  su  $P$  è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?

## Soluzione dell'esercizio 9

(1)  $R$  su  $P$  è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?  
Analogo al precedente esercizio. Si noti però che è totale; infatti:

$$\begin{aligned}x, y \in P &\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} : x = 2^n \wedge y = 2^m \\&\Rightarrow (m \geq n \wedge x|y) \vee (n \geq m \wedge y|x) \\&\Leftrightarrow xRy \vee yRx.\end{aligned}$$

## Soluzione dell'esercizio 9

(1)  $R$  su  $P$  è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?  
Analogo al precedente esercizio. Si noti però che è totale; infatti:

$$\begin{aligned}x, y \in P &\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} : x = 2^n \wedge y = 2^m \\&\Rightarrow (m \geq n \wedge x|y) \vee (n \geq m \wedge y|x) \\&\Leftrightarrow xRy \vee yRx.\end{aligned}$$

(2)  $R$  su  $P$  ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

## Soluzione dell'esercizio 9

(1)  $R$  su  $P$  è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?  
Analogo al precedente esercizio. Si noti però che è totale; infatti:

$$\begin{aligned}x, y \in P &\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} : x = 2^n \wedge y = 2^m \\&\Rightarrow (m \geq n \wedge x|y) \vee (n \geq m \wedge y|x) \\&\Leftrightarrow xRy \vee yRx.\end{aligned}$$

(2)  $R$  su  $P$  ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

➤ Costruiamo il diagramma di Hasse:

$$1 —— 2 —— 4 —— 8 —— 16 —— \dots$$

## Soluzione dell'esercizio 9

(1)  $R$  su  $P$  è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?  
Analogo al precedente esercizio. Si noti però che è totale; infatti:

$$\begin{aligned}x, y \in P &\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} : x = 2^n \wedge y = 2^m \\&\Rightarrow (m \geq n \wedge x|y) \vee (n \geq m \wedge y|x) \\&\Leftrightarrow xRy \vee yRx.\end{aligned}$$

(2)  $R$  su  $P$  ha elementi minimi e massimali? Se sì, quali?

➤ Costruiamo il diagramma di Hasse:

$$1 —— 2 —— 4 —— 8 —— 16 —— \dots$$

➤ Minimo: 1, massimali:  $\emptyset$

## Esercizio 10

Si consideri l'insieme  $A = \{a, b, c\}$ . Sia  $R$  una relazione su  $\wp(A)$  così definita:

$$\forall x, y \subseteq A : R(x, y) \Leftrightarrow x \subseteq y$$

1.  $R$  è d'ordine su  $\wp(A)$ ? Se sì, è totale o parziale?
2.  $R$  su  $\wp(A)$  ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

## Soluzione dell'esercizio 10

(1)  $R$  è d'ordine su  $\wp(A)$ ? Se sì, è totale o parziale?

## Soluzione dell'esercizio 10

(1)  $R$  è d'ordine su  $\wp(A)$ ? Se sì, è totale o parziale?

➤ riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow x \subseteq x.$$

## Soluzione dell'esercizio 10

(1)  $R$  è d'ordine su  $\wp(A)$ ? Se sì, è totale o parziale?

➤ riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow x \subseteq x.$$

➤ anti-simmetricità:

$$xRy \wedge yRx \Leftrightarrow x \subseteq y \wedge y \subseteq x$$

$$\Leftrightarrow x = y. \quad (A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

## Soluzione dell'esercizio 10

➤ transitività:

$$\begin{aligned}xRy \wedge yRz &\Leftrightarrow x \subseteq y \wedge y \subseteq z \\&\Leftrightarrow \forall i \in x.(i \in y) \wedge \forall j \in y.(j \in z) \\&\Rightarrow \forall i \in x.(i \in z) \\&\Leftrightarrow x \subseteq z \\&\Leftrightarrow xRz.\end{aligned}$$

Quindi  $R$  è d'ordine su  $\wp(A)$ .

## Soluzione dell'esercizio 10

- transitività:

$$\begin{aligned}xRy \wedge yRz &\Leftrightarrow x \subseteq y \wedge y \subseteq z \\&\Leftrightarrow \forall i \in x.(i \in y) \wedge \forall j \in y.(j \in z) \\&\Rightarrow \forall i \in x.(i \in z) \\&\Leftrightarrow x \subseteq z \\&\Leftrightarrow xRz.\end{aligned}$$

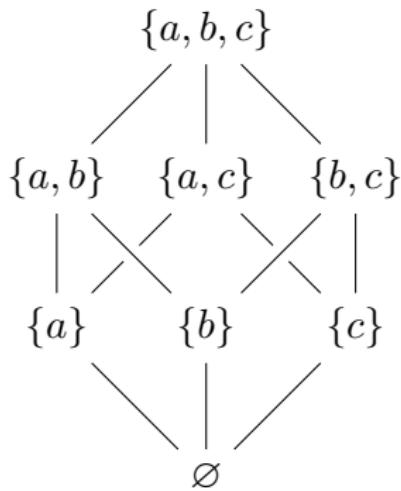
Quindi  $R$  è d'ordine su  $\wp(A)$ .

- È totale? No,  $\{b\} \not\subseteq \{a, c\} \wedge \{a, c\} \not\subseteq \{b\}$

## Soluzione dell'esercizio 10

(2)  $R$  su  $\wp(A)$  ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

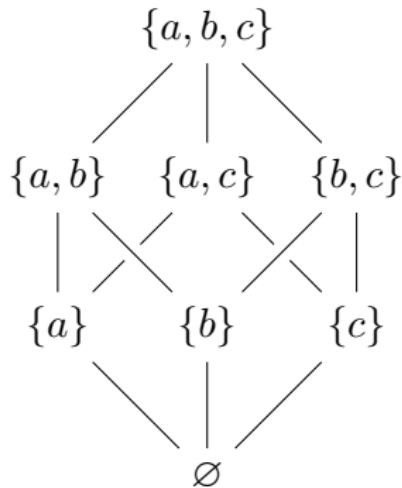
➤ diagramma di Hasse:



## Soluzione dell'esercizio 10

(2)  $R$  su  $\wp(A)$  ha elementi minimi e massimali? Se sì, quali?

➤ diagramma di Hasse:



➤ Minimo:  $\emptyset$ , massimo:  $\{a, b, c\}$ .