

# Tutorato di Logica

Manuel Di Agostino

Università di Parma

21 ottobre 2025

# Sommario

## 1 Principio d'induzione

## Definizione (Principio d'induzione)

*Siano  $A \subseteq \mathbb{N}$  e  $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  la funzione successore. Se*

- $0 \in A$
- $\forall a \in A. (S(a) \in A)$

*allora  $A = \mathbb{N}$ .*

- **Perché è utile?** Ci permette di dimostrare che una certa proprietà è valida per tutti i numeri naturali.

- **Perché è utile?** Ci permette di dimostrare che una certa proprietà è valida per tutti i numeri naturali.
- **Perché funziona?**

- **Perché è utile?** Ci permette di dimostrare che una certa proprietà è valida per tutti i numeri naturali.
- **Perché funziona?**
  - Sia  $p$  un certo predicato unario con dominio in  $\mathbb{N}$  e sia  $P = \{x \in \mathbb{N} \mid "p(x) \text{ è vero}\}\}$  l'insieme degli interi per cui esso è verificato. Se dimostro che  $P = \mathbb{N}$ , posso affermare che  $p$  è vero  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

- **Perché è utile?** Ci permette di dimostrare che una certa proprietà è valida per tutti i numeri naturali.
- **Perché funziona?**
  - Sia  $p$  un certo predicato unario con dominio in  $\mathbb{N}$  e sia  $P = \{x \in \mathbb{N} \mid "p(x) \text{ è vero}\}\}$  l'insieme degli interi per cui esso è verificato. Se dimostro che  $P = \mathbb{N}$ , posso affermare che  $p$  è vero  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
  - Verifico che  $0 \in P \Leftrightarrow "p(0) \text{ è vero}"$ .

- **Perché è utile?** Ci permette di dimostrare che una certa proprietà è valida per tutti i numeri naturali.

- **Perché funziona?**

- Sia  $p$  un certo predicato unario con dominio in  $\mathbb{N}$  e sia  $P = \{x \in \mathbb{N} \mid "p(x)" \text{ è vero}\}$  l'insieme degli interi per cui esso è verificato. Se dimostro che  $P = \mathbb{N}$ , posso affermare che  $p$  è vero  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
- Verifico che  $0 \in P \Leftrightarrow "p(0)" \text{ è vero}$ .
- Verifico che  $\forall n.(n \in P \Rightarrow n + 1 \in P)$ , che per definizione di  $P$  equivale a dire che  $\forall n.(p(n) \Rightarrow p(n + 1))$ .

- **Perché è utile?** Ci permette di dimostrare che una certa proprietà è valida per tutti i numeri naturali.
- **Perché funziona?**
  - Sia  $p$  un certo predicato unario con dominio in  $\mathbb{N}$  e sia  $P = \{x \in \mathbb{N} \mid "p(x) \text{ è vero}\}\}$  l'insieme degli interi per cui esso è verificato. Se dimostro che  $P = \mathbb{N}$ , posso affermare che  $p$  è vero  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
  - Verifico che  $0 \in P \Leftrightarrow "p(0) \text{ è vero}"$ .
  - Verifico che  $\forall n.(n \in P \Rightarrow n + 1 \in P)$ , che per definizione di  $P$  equivale a dire che  $\forall n.(p(n) \Rightarrow p(n + 1))$ .
  - A questo punto, poiché vale il **principio di induzione**, posso affermare che  $P = \mathbb{N}$ . Per definizione di  $P$ , questo equivale a dire che  $\forall n \in \mathbb{N}. ("p(x) \text{ è vero}")$ .

- **Perché è utile?** Ci permette di dimostrare che una certa proprietà è valida per tutti i numeri naturali.
- **Perché funziona?**

- Sia  $p$  un certo predicato unario con dominio in  $\mathbb{N}$  e sia  $P = \{x \in \mathbb{N} \mid "p(x)" \text{ è vero}\}$  l'insieme degli interi per cui esso è verificato. Se dimostro che  $P = \mathbb{N}$ , posso affermare che  $p$  è vero  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
- Verifico che  $0 \in P \Leftrightarrow "p(0)" \text{ è vero}$ .
- Verifico che  $\forall n.(n \in P \Rightarrow n + 1 \in P)$ , che per definizione di  $P$  equivale a dire che  $\forall n.(p(n) \Rightarrow p(n + 1))$ .
- A questo punto, poiché vale il **principio di induzione**, posso affermare che  $P = \mathbb{N}$ . Per definizione di  $P$ , questo equivale a dire che  $\forall n \in \mathbb{N}.("p(x)" \text{ è vero})$ .

Notate che non ho specificato nulla sul predicato  $p$ .

## Esercizio 1

Dimostrare per induzione che  $\forall n \in \mathbb{N}$  vale

$$\sum_{i=0}^n 2i = 0 + 2 + 4 + \dots + 2n = n \cdot (n + 1) \quad (1)$$

## Esercizio 1

Dimostrare per induzione che  $\forall n \in \mathbb{N}$  vale

$$\sum_{i=0}^n 2i = 0 + 2 + 4 + \dots + 2n = n \cdot (n + 1) \quad (1)$$

### Soluzione dell'esercizio 1

In questo caso, possiamo considerare

$p(x)$  = "la somma dei primi  $x$  numeri interi pari è data da (1)"

## Esercizio 1

Dimostrare per induzione che  $\forall n \in \mathbb{N}$  vale

$$\sum_{i=0}^n 2i = 0 + 2 + 4 + \dots + 2n = n \cdot (n + 1) \quad (1)$$

### Soluzione dell'esercizio 1

In questo caso, possiamo considerare

$p(x)$  = "la somma dei primi  $x$  numeri interi pari è data da (1)"

Quindi:

- verifico che valga  $p(0)$ :

$$p(0) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^0 = 0 = 0 \cdot (0 + 1).$$

- ora devo verificare che se  $p(n)$  vero per un certo  $n$ , allora  $p(n + 1)$  è vero. Scriviamo cos'è  $p(n + 1)$ :

$$p(n + 1) \equiv \sum_{i=0}^{n+1} 2i = (n + 1) \cdot (n + 2)$$

- ora devo verificare che se  $p(n)$  vero per un certo  $n$ , allora  $p(n+1)$  è vero. Scriviamo cos'è  $p(n+1)$ :

$$p(n+1) \equiv \sum_{i=0}^{n+1} 2i = (n+1) \cdot (n+2)$$

Supponiamo allora  $p(n)$  e osserviamo che:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} 2i &= \sum_{i=0}^n 2i + 2(n+1) \\&= n(n+1) + 2(n+1) \quad (\text{ip. induttiva}) \\&= (n+1) \cdot (n+2). \quad (\text{prop. distributiva}).\end{aligned}$$

- ora devo verificare che se  $p(n)$  vero per un certo  $n$ , allora  $p(n+1)$  è vero. Scriviamo cos'è  $p(n+1)$ :

$$p(n+1) \equiv \sum_{i=0}^{n+1} 2i = (n+1) \cdot (n+2)$$

Supponiamo allora  $p(n)$  e osserviamo che:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} 2i &= \sum_{i=0}^n 2i + 2(n+1) \\&= n(n+1) + 2(n+1) \quad (\text{ip. induttiva}) \\&= (n+1) \cdot (n+2). \quad (\text{prop. distributiva}).\end{aligned}$$

il che equivale a dire che  $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ .

- ora devo verificare che se  $p(n)$  vero per un certo  $n$ , allora  $p(n+1)$  è vero. Scriviamo cos'è  $p(n+1)$ :

$$p(n+1) \equiv \sum_{i=0}^{n+1} 2i = (n+1) \cdot (n+2)$$

Supponiamo allora  $p(n)$  e osserviamo che:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} 2i &= \sum_{i=0}^n 2i + 2(n+1) \\ &= n(n+1) + 2(n+1) \quad (\text{ip. induttiva}) \\ &= (n+1) \cdot (n+2). \quad (\text{prop. distributiva}). \end{aligned}$$

il che equivale a dire che  $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ .

Per il principio di induzione, (1) è vera  $\forall n \in \mathbb{N}$ . □

## Esercizio 2

Dimostrare per induzione che  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  vale:

$$\sum_{i=1}^n 2i - 1 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (2)$$

## Esercizio 2

Dimostrare per induzione che  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  vale:

$$\sum_{i=1}^n 2i - 1 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (2)$$

### Soluzione dell'esercizio 2

- caso base, stavolta  $n = 1$ :

$$\sum_{i=1}^1 2i - 1 = 2 - 1 = 1 = (1)^2.$$

- passo induttivo, suppongo che per un qualche intero  $n$  valga (2); allora:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} 2i - 1 &= \sum_{i=1}^n 2i - 1 + [2(n+1) - 1] && (\text{ip. induttiva}) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2.\end{aligned}$$

- passo induttivo, suppongo che per un qualche intero  $n$  valga (2); allora:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} 2i - 1 &= \sum_{i=1}^n 2i - 1 + [2(n+1) - 1] && (\text{ip. induttiva}) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2.\end{aligned}$$

Per il principio di induzione,  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  vale: (2). □

## Esercizio 3

Dimostrare per induzione che  $\forall n \in \mathbb{N}$  e per ogni  $x \in \mathbb{R}$  con  $x > -1$ , vale la **diseguaglianza di Bernoulli**:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad (3)$$

## Esercizio 3

Dimostrare per induzione che  $\forall n \in \mathbb{N}$  e per ogni  $x \in \mathbb{R}$  con  $x > -1$ , vale la **diseguaglianza di Bernoulli**:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad (3)$$

### Soluzione dell'esercizio 3

Sia  $p(n)$  il predicato (3).

- caso base,  $n = 0$ :

$$p(0) \Leftrightarrow (1 + x)^0 = 1 \quad \geq \quad 1 + (0 \cdot x) = 1.$$

$p(0)$  è vera (vale  $1 \geq 1$ ).

- passo induttivo. Assumiamo  $p(n)$  vera (ipotesi induttiva):  
$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

- passo induttivo. Assumiamo  $p(n)$  vera (ipotesi induttiva):  
 $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ . Dobbiamo dimostrare  $p(n + 1)$ , cioè  
 $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$ .

- passo induttivo. Assumiamo  $p(n)$  vera (ipotesi induttiva):  
 $(1+x)^n \geq 1+nx$ . Dobbiamo dimostrare  $p(n+1)$ , cioè  
 $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ .
- Sviluppiamo il lato sinistro:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \\&\geq (1+nx)(1+x) \quad (\text{ip. induttiva e } 1+x > 0) \\&= 1+x+nx+nx^2 \\&= 1+(n+1)x+nx^2 \quad (\text{raggruppo}) \\&\geq 1+(n+1)x \quad (n, x^2 \geq 0 \Rightarrow nx^2 \geq 0)\end{aligned}$$

- Abbiamo dimostrato che  $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ .

- passo induttivo. Assumiamo  $p(n)$  vera (ipotesi induttiva):  
 $(1+x)^n \geq 1+nx$ . Dobbiamo dimostrare  $p(n+1)$ , cioè  
 $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ .
- Sviluppiamo il lato sinistro:

$$\begin{aligned}
 (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \\
 &\geq (1+nx)(1+x) \quad (\text{ip. induttiva e } 1+x > 0) \\
 &= 1+x+nx+nx^2 \\
 &= 1+(n+1)x+nx^2 \quad (\text{raggruppo}) \\
 &\geq 1+(n+1)x \quad (n, x^2 \geq 0 \Rightarrow nx^2 \geq 0)
 \end{aligned}$$

- Abbiamo dimostrato che  $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ .

Per il principio di induzione, (3) è vera  $\forall n \in \mathbb{N}$ .



## Esercizio 4

Dimostrare per induzione che  $\forall n \in \mathbb{N}$ , l'espressione  $n^3 - n$  è divisibile per 3.

## Esercizio 4

Dimostrare per induzione che  $\forall n \in \mathbb{N}$ , l'espressione  $n^3 - n$  è divisibile per 3.

### Soluzione dell'esercizio 4

Sia  $p(n) = "n^3 - n \text{ è divisibile per } 3"$ .

- caso base,  $n = 0$ :

$$p(0) \Leftrightarrow 0^3 - 0 = 0.$$

Poiché  $0 = 3 \cdot 0$ ,  $p(0)$  è vera.

- passo induttivo. Assumiamo  $p(n)$  vera (ipotesi induttiva), cioè  $\exists k \in \mathbb{Z}$  tale che  $n^3 - n = 3k$ .

- passo induttivo. Assumiamo  $p(n)$  vera (ipotesi induttiva), cioè  $\exists k \in \mathbb{Z}$  tale che  $n^3 - n = 3k$ .
- Dobbiamo dimostrare  $p(n+1)$ , cioè che  $(n+1)^3 - (n+1)$  è divisibile per 3.

$$\begin{aligned}
 (n+1)^3 - (n+1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n + 1) \\
 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\
 &= (n^3 - n) + (3n^2 + 3n) && \text{(raggruppo)} \\
 &= 3k + 3(n^2 + n) && \text{(ip. induttiva)} \\
 &= 3 \cdot (k + n^2 + n)
 \end{aligned}$$

- passo induttivo. Assumiamo  $p(n)$  vera (ipotesi induttiva), cioè  $\exists k \in \mathbb{Z}$  tale che  $n^3 - n = 3k$ .
- Dobbiamo dimostrare  $p(n+1)$ , cioè che  $(n+1)^3 - (n+1)$  è divisibile per 3.

$$\begin{aligned}
 (n+1)^3 - (n+1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n+1) \\
 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\
 &= (n^3 - n) + (3n^2 + 3n) && \text{(raggruppo)} \\
 &= 3k + 3(n^2 + n) && \text{(ip. induttiva)} \\
 &= 3 \cdot (k + n^2 + n)
 \end{aligned}$$

- Poiché  $(k + n^2 + n)$  è un numero intero, abbiamo mostrato che  $(n+1)^3 - (n+1)$  è un multiplo di 3.

- passo induttivo. Assumiamo  $p(n)$  vera (ipotesi induttiva), cioè  $\exists k \in \mathbb{Z}$  tale che  $n^3 - n = 3k$ .
- Dobbiamo dimostrare  $p(n+1)$ , cioè che  $(n+1)^3 - (n+1)$  è divisibile per 3.

$$\begin{aligned}
 (n+1)^3 - (n+1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n+1) \\
 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\
 &= (n^3 - n) + (3n^2 + 3n) && \text{(raggruppo)} \\
 &= 3k + 3(n^2 + n) && \text{(ip. induttiva)} \\
 &= 3 \cdot (k + n^2 + n)
 \end{aligned}$$

- Poiché  $(k + n^2 + n)$  è un numero intero, abbiamo mostrato che  $(n+1)^3 - (n+1)$  è un multiplo di 3.

Per il principio di induzione,  $p(n)$  è vera  $\forall n \in \mathbb{N}$ . □

## Esercizio 5

Dimostrare per induzione che per ogni insieme finito  $S$ , se  $|S| = n$  con  $n \in \mathbb{N}$ , allora  $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}. (|S| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(S)| = 2^n) \quad (4)$$

## Esercizio 5

Dimostrare per induzione che per ogni insieme finito  $S$ , se  $|S| = n$  con  $n \in \mathbb{N}$ , allora  $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}. (|S| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(S)| = 2^n) \quad (4)$$

### Soluzione dell'esercizio 5

Sia  $p(n)$  il predicato “ $|S| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(S)| = 2^n$ ”.

- caso base,  $n = 0$ : Se  $|S| = 0$ , allora  $S = \emptyset$ . L'insieme delle parti è  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ . Si ha  $|\mathcal{P}(S)| = 1$  e la formula dà  $2^0 = 1$ . Quindi  $p(0)$  è vera.

- passo induttivo. Assumiamo  $p(n)$  vera (ip. induttiva):  
 $|S| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(S)| = 2^n$ .

- passo induttivo. Assumiamo  $p(n)$  vera (ip. induttiva):  
 $|S| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(S)| = 2^n$ . Dimostriamo  $p(n+1)$ :  
 $|T| = n + 1 \Rightarrow |\mathcal{P}(T)| = 2^{n+1}$ .

- passo induttivo. Assumiamo  $p(n)$  vera (ip. induttiva):  
 $|S| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(S)| = 2^n$ . Dimostriamo  $p(n+1)$ :  
 $|T| = n+1 \Rightarrow |\mathcal{P}(T)| = 2^{n+1}$ .
- Sia  $T$  con  $|T| = n+1$ . Scegliamo  $x \in T$  e sia  $S = T \setminus \{x\}$ . Chiaramente  $|S| = n$ .

- passo induttivo. Assumiamo  $p(n)$  vera (ip. induttiva):  
 $|S| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(S)| = 2^n$ . Dimostriamo  $p(n+1)$ :  
 $|T| = n+1 \Rightarrow |\mathcal{P}(T)| = 2^{n+1}$ .
- Sia  $T$  con  $|T| = n+1$ . Scegliamo  $x \in T$  e sia  $S = T \setminus \{x\}$ . Chiaramente  $|S| = n$ .
- Partizioniamo  $\mathcal{P}(T)$  in due insiemi disgiunti:

$$A = \{U \subseteq T \mid x \notin U\} = \mathcal{P}(S).$$

$$B = \{V \subseteq T \mid x \in V\}.$$

$$A = \{U \subseteq T \mid x \notin U\} = \mathcal{P}(S).$$

$$B = \{V \subseteq T \mid x \in V\}.$$

- Per l'ipotesi induttiva,  $|A| = |\mathcal{P}(S)| = 2^n$ .

$$A = \{U \subseteq T \mid x \notin U\} = \mathcal{P}(S).$$

$$B = \{V \subseteq T \mid x \in V\}.$$

- Per l'ipotesi induttiva,  $|A| = |\mathcal{P}(S)| = 2^n$ .
- Esiste una biezione  $f : A \rightarrow B$  definita da  $f(U) = U \cup \{x\}$ . Dunque  $|B| = |A| = 2^n$ .

$$A = \{U \subseteq T \mid x \notin U\} = \mathcal{P}(S).$$

$$B = \{V \subseteq T \mid x \in V\}.$$

- Per l'ipotesi induttiva,  $|A| = |\mathcal{P}(S)| = 2^n$ .
- Esiste una biezione  $f : A \rightarrow B$  definita da  $f(U) = U \cup \{x\}$ . Dunque  $|B| = |A| = 2^n$ .
- Essendo  $A$  e  $B$  partizioni di  $\mathcal{P}(T)$ :

$$|\mathcal{P}(T)| = |A| + |B| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Questo dimostra  $p(n+1)$ .

$$A = \{U \subseteq T \mid x \notin U\} = \mathcal{P}(S).$$

$$B = \{V \subseteq T \mid x \in V\}.$$

- Per l'ipotesi induttiva,  $|A| = |\mathcal{P}(S)| = 2^n$ .
- Esiste una biezione  $f : A \rightarrow B$  definita da  $f(U) = U \cup \{x\}$ . Dunque  $|B| = |A| = 2^n$ .
- Essendo  $A$  e  $B$  partizioni di  $\mathcal{P}(T)$ :

$$|\mathcal{P}(T)| = |A| + |B| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Questo dimostra  $p(n+1)$ . Per il principio di induzione, (4) è vera  
 $\forall n \in \mathbb{N}$ . □

## Altri esercizi

Dimostrare le seguenti proprietà:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \geq 0 \quad \forall n \geq 1.$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left( \sum_{k=1}^n k \right)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

$$\text{Sia } a_n := 1 + \frac{1}{n-5} \text{ allora } a_n \geq 1 \quad \forall n \geq 6.$$

*(Attenzione al caso base per l'ultimo esercizio!)*