Manuel Di Agostino
manuel.diagostino@studenti.unipr.it

UniPR
Università di Parma

18 novembre 2025

Tutorato di Logica

Sommario

Sommario

Definizione (Alfabeto)

Si dice **alfabeto** e si indica con A un insieme per cui:

- $A \neq \emptyset$
- $|A| = n, n \in \mathbb{N}$

Definizione (Stringa, lunghezza di una stringa)

Si dice **stringa** su un alfabeto A una qualsiasi **successione finita** di simboli di A.
Data x stringa su A, indichiamo con $|x|$ la sua **lunghezza**, ossia il numero di simboli di A da cui è composta.

Definizione (Stringa vuota)

Indichiamo con ϵ la **stringa vuota**, ossia l'unica stringa x tale che $|x| = 0$.

Definizione

Dato un alfabeto A, indichiamo con A^* l'insieme di tutte le stringhe su A.
Il simbolo $*$ viene detto **stella di Kleene**.

Definizione (induttiva di $|\cdot|$)

Sia $x \in A^*$ una stringa. Definiamo la sua lunghezza $|s|$ induttivamente come:

$$|s| = \begin{cases} 0 & \text{se } s = \epsilon \\ 1 + |r| & \text{se } s = cr, c \in A, r \in A^* \end{cases}$$

Esercizio 1

Sia A un alfabeto di n simboli.

1. Qual è il numero delle stringhe su A, ossia $|A^*|$?

- Proviamo con qualche esempio concreto. Consideriamo l'insieme $\{\}$

- Proviamo con qualche esempio concreto. Consideriamo l'insieme $\{\}$
  - Possiamo costruire un'unica stringa, ossia ϵ

- Proviamo con qualche esempio concreto. Consideriamo l'insieme $\{\}$
  - Possiamo costruire un'unica stringa, ossia ϵ
- Consideriamo ora l'alfabeto con un solo elemento: $\{\texttt{0}\}$

- Proviamo con qualche esempio concreto. Consideriamo l'insieme $\{\}$
  - Possiamo costruire un'unica stringa, ossia ϵ
- Consideriamo ora l'alfabeto con un solo elemento: $\{\mathtt{0}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{00}, \mathtt{000}, \ldots$

- Proviamo con qualche esempio concreto. Consideriamo l'insieme $\{\}$
  - Possiamo costruire un'unica stringa, ossia ϵ
- Consideriamo ora l'alfabeto con un solo elemento: $\{\mathtt{0}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{00}, \mathtt{000}, \ldots$
- Consideriamo un alfabeto con due elementi: $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$

- Proviamo con qualche esempio concreto. Consideriamo l'insieme $\{\}$
  - Possiamo costruire un'unica stringa, ossia ϵ
- Consideriamo ora l'alfabeto con un solo elemento: $\{\mathtt{0}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{00}, \mathtt{000}, \ldots$
- Consideriamo un alfabeto con due elementi: $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{00}, \mathtt{01}, \mathtt{10}, \mathtt{11}, \ldots$

- Proviamo con qualche esempio concreto. Consideriamo l'insieme $\{\}$
  - Possiamo costruire un'unica stringa, ossia ϵ
- Consideriamo ora l'alfabeto con un solo elemento: $\{\mathtt{0}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{00}, \mathtt{000}, \ldots$
- Consideriamo un alfabeto con due elementi: $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{00}, \mathtt{01}, \mathtt{10}, \mathtt{11}, \ldots$
- Fissiamo ora $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$, insieme di 2 simboli, e ragioniamo su quante sono le possibili stringhe di lunghezza k che è possibile formare:

- Proviamo con qualche esempio concreto. Consideriamo l'insieme $\{\}$
  - Possiamo costruire un'unica stringa, ossia ϵ
- Consideriamo ora l'alfabeto con un solo elemento: $\{\mathtt{0}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{00}, \mathtt{000}, \ldots$
- Consideriamo un alfabeto con due elementi: $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{00}, \mathtt{01}, \mathtt{10}, \mathtt{11}, \ldots$
- Fissiamo ora $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$, insieme di 2 simboli, e ragioniamo su quante sono le possibili stringhe di lunghezza k che è possibile formare:
  - $1 = 2^0$ stringa di lunghezza 0: $A_0 = \{\epsilon\}$

- Proviamo con qualche esempio concreto. Consideriamo l'insieme $\{\}$
  - Possiamo costruire un'unica stringa, ossia ϵ
- Consideriamo ora l'alfabeto con un solo elemento: $\{\mathtt{0}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{00}, \mathtt{000}, \ldots$
- Consideriamo un alfabeto con due elementi: $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{00}, \mathtt{01}, \mathtt{10}, \mathtt{11}, \ldots$
- Fissiamo ora $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$, insieme di 2 simboli, e ragioniamo su quante sono le possibili stringhe di lunghezza k che è possibile formare:
  - $1 = 2^0$ stringa di lunghezza 0: $A_0 = \{\epsilon\}$
  - $2 = 2^1$ stringhe di lunghezza 1: $A_1 = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$

- Proviamo con qualche esempio concreto. Consideriamo l'insieme $\{\}$
  - Possiamo costruire un'unica stringa, ossia ϵ
- Consideriamo ora l'alfabeto con un solo elemento: $\{\mathtt{0}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{00}, \mathtt{000}, \ldots$
- Consideriamo un alfabeto con due elementi: $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{00}, \mathtt{01}, \mathtt{10}, \mathtt{11}, \ldots$
- Fissiamo ora $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$, insieme di 2 simboli, e ragioniamo su quante sono le possibili stringhe di lunghezza k che è possibile formare:
  - $1 = 2^0$ stringa di lunghezza 0: $A_0 = \{\epsilon\}$
  - $2 = 2^1$ stringhe di lunghezza 1: $A_1 = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$
  - $4 = 2^2$ stringhe di lunghezza 2: $A_2 = \{\mathtt{00}, \mathtt{01}, \mathtt{10}, \mathtt{11}\}$

- Proviamo con qualche esempio concreto. Consideriamo l'insieme $\{\}$
  - Possiamo costruire un'unica stringa, ossia ϵ
- Consideriamo ora l'alfabeto con un solo elemento: $\{\texttt{0}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \texttt{0}, \texttt{00}, \texttt{000}, \ldots$
- Consideriamo un alfabeto con due elementi: $\{\texttt{0}, \texttt{1}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{00}, \texttt{01}, \texttt{10}, \texttt{11}, \ldots$
- Fissiamo ora $A = \{\texttt{0}, \texttt{1}\}$, insieme di 2 simboli, e ragioniamo su quante sono le possibili stringhe di lunghezza k che è possibile formare:
  - $1 = 2^0$ stringa di lunghezza 0: $A_0 = \{\epsilon\}$
  - $2 = 2^1$ stringhe di lunghezza 1: $A_1 = \{\texttt{0}, \texttt{1}\}$
  - $4 = 2^2$ stringhe di lunghezza 2: $A_2 = \{\texttt{00}, \texttt{01}, \texttt{10}, \texttt{11}\}$

$$\vdots$$

  - 2^k stringhe di lunghezza k

- Notiamo che A^* si può scrivere come l'unione infinita di tutti gli insiemi che contengono stringhe lunghe k, ossia:

$$A^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots$$

- Notiamo che A^* si può scrivere come l'unione infinita di tutti gli insiemi che contengono stringhe lunghe k, ossia:

$$A^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots$$

- Potremmo pensare di **ordinare lessicograficamente** tutte queste stringhe. Ad ognuna di esse corrisponderà quindi una posizione:

$$\begin{array}{rcl} \epsilon & \mapsto & 0 \\ \mathtt{0} & \mapsto & 1 \\ \mathtt{1} & \mapsto & 2 \\ \mathtt{00} & \mapsto & 3 \\ \mathtt{01} & \mapsto & 4 \\ \mathtt{10} & \mapsto & 5 \\ \mathtt{11} & \mapsto & 6 \\ \mathtt{000} & \mapsto & 7 \\ & \vdots & \end{array}$$

- Stiamo quindi definendo una funzione $\sigma : A^* \rightarrow \mathbb{N}$ che assegna ad ogni stringa un numero naturale. Una possibile definition per σ è la seguente:

$$\sigma(\mathtt{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathtt{x} = \epsilon \\ \sum_{i=0}^{|\mathtt{x}|-1} 2^i + \mathcal{I}(\mathtt{x}) = (2^{|\mathtt{x}|} - 1) + \mathcal{I}(\mathtt{x}) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $\mathcal{I} : A^* \rightarrow \mathbb{N}$ calcola il valore decimale della stringa binaria considerata.

- Stiamo quindi definendo una funzione $\sigma : A^* \to \mathbb{N}$ che assegna ad ogni stringa un numero naturale. Una possibile definition per σ è la seguente:

$$\sigma(\mathtt{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathtt{x} = \epsilon \\ \sum_{i=0}^{|\mathtt{x}|-1} 2^i + \mathcal{I}(\mathtt{x}) = (2^{|\mathtt{x}|} - 1) + \mathcal{I}(\mathtt{x}) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  dove $\mathcal{I} : A^* \to \mathbb{N}$ calcola il valore decimale della stringa binaria considerata.
  Ad esempio: $\sigma(\mathtt{1}) = (2^1 - 1) + 1 = 2$, $\sigma(\mathtt{010}) = (2^3 - 1) + 2 = 9$

- Stiamo quindi definendo una funzione $\sigma : A^* \to \mathbb{N}$ che assegna ad ogni stringa un numero naturale. Una possibile definition per σ è la seguente:

$$\sigma(\mathtt{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathtt{x} = \epsilon \\ \sum_{i=0}^{|\mathtt{x}|-1} 2^i + \mathcal{I}(\mathtt{x}) = (2^{|\mathtt{x}|} - 1) + \mathcal{I}(\mathtt{x}) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  dove $\mathcal{I} : A^* \to \mathbb{N}$ calcola il valore decimale della stringa binaria considerata.
  Ad esempio: $\sigma(\mathtt{1}) = (2^1 - 1) + 1 = 2$, $\sigma(\mathtt{010}) = (2^3 - 1) + 2 = 9$
- Si dimostra che la funzione di ordinamento σ è biettiva. Questo è equivalente a dire che

$$|A^*| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$$

  ossia le possibili stringhe su A^* sono **numerabili**!

- Il caso generale in cui $|A| = n \in \mathbb{N}$ è analogo. Infatti, dati n simboli distinti è sempre possibile definire per essi un ordinamento lessicografico univoco

- Il caso generale in cui $|A| = n \in \mathbb{N}$ è analogo. Infatti, dati n simboli distinti è sempre possibile definire per essi un ordinamento lessicografico univoco
- Ne segue che è possibile ordinare le stringhe generate da A con una funzione di ordinamento $\sigma_A : A^* \to \mathbb{N}$ biettiva

- Il caso generale in cui $|A| = n \in \mathbb{N}$ è analogo. Infatti, dati n simboli distinti è sempre possibile definire per essi un ordinamento lessicografico univoco
- Ne segue che è possibile ordinare le stringhe generate da A con una funzione di ordinamento $\sigma_A : A^* \to \mathbb{N}$ biettiva
- Quindi $\forall n \in \mathbb{N}. |A| = n$ si ha che

$$|A^*| = \aleph_0$$

(**Bonus**) Esempio di possibile fuzione σ_S, con $S = \{\star, \heartsuit, \diamond\}$

- Definiamo il seguente ordinamento tra gli elementi dell'insieme:

$$\star \leq \heartsuit \leq \diamond$$

- A questo punto le stringhe di S^* possono essere univocamente ordinate:

$$\epsilon \leq \star \leq \heartsuit \leq \diamond \leq \star\star \leq \star\heartsuit \leq \star\diamond \leq \heartsuit\star \leq \dots$$

- La definition di σ_S potrebbe essere la seguente:

$$\sigma_S(\mathtt{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathtt{x} = \epsilon \\ \sum_{m=0}^{|\mathtt{x}|-1} |S|^m + \mathcal{I}(\mathtt{x}) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $\mathcal{I}$ così definita:

$$\mathcal{I}(\mathtt{x}) = \sum_{p=0}^{|x|-1} i(\mathtt{x}_p) \cdot |S|^p$$

ponendo $i(\star) = 0, i(\heartsuit) = 1, i(\diamond) = 2$ e considerando x_p come il simbolo in posizione p-esima contando da destra.

Sommario

Definizione (Formule ben formate, FBF)

Dato un alfabeto A del linguaggio della logica proposizionale, l'insieme delle **formule ben formate** (FBF) del linguaggio proposizionale è definito dalle seguenti:

- $\forall a \in A$ con a formula atomica, $a \in \text{FBF}$
- $\perp \in \text{FBF}$
- $\forall x \in \text{FBF}. \neg x \in \text{FBF}$
- $\forall x, y \in \text{FBF}. x \bowtie y \in \text{FBF}$, con $\bowtie \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \oplus\}$

Definizione (Induzione strutturale su FBF)

Sia P una proprietà su FBF. Si dice che $\forall x \in \text{FBF}.\, P(x)$ se e solo se:

- $\forall a \in \text{FBF}$ con a formula atomica, vale $P(a)$
- vale $P(\bot)$
- $\forall x \in \text{FBF}.\, P(x) \Rightarrow P(\neg x)$
- $\forall x, y \in \text{FBF}.\, (P(x) \land P(y)) \Rightarrow P(x \bowtie y)$, con $\bowtie \in \{\land, \lor, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \oplus\}$

Sommario

Sommario

Definizione (Valutazione semantica)

Si dice **valutazione** ogni funzione

$$v : \text{FBF} \to \{0, 1\}$$

dove $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ è l'insieme dei *valori di verità*.

Definizione (Esempio di f. di valutazione)

Date $p, q \in \mathrm{FBF}$, un esempio di funzione di valutazione è il seguente:

- $v(\perp) = 0$
- $v(\neg p) = 1 - v(p)$
- $v(p \wedge q) = v(p) \cdot v(q)$
- $v(p \vee q) = v(p) + v(q) - v(p)v(q)$
- $v(p \Rightarrow q) = 1 - v(p) + v(p)v(q)$

Definizione (Funzione di interpretazione)

Date $p, q \in \text{FBF}$, una funzione $\mathcal{I} : \text{FBF} \to \mathcal{B}$ si dice **interpretazione** se:

- $\mathcal{I}(\bot) = 0$
- $\mathcal{I}(\neg p) = 1 - \mathcal{I}(p)$
- $\mathcal{I}(p \land q) = \min(\mathcal{I}(p), \mathcal{I}(q))$
- $\mathcal{I}(p \lor q) = \max(\mathcal{I}(p), \mathcal{I}(q))$
- $\mathcal{I}(p \Rightarrow q) = 1 \iff \mathcal{I}(p) \leq \mathcal{I}(q)$

Solitamente, $\mathcal{I}$ si indica con $[\![\cdot]\!]$.

Definizione (Funzione di interpretazione)

Date $p, q \in \text{FBF}$, una funzione $\mathcal{I} : \text{FBF} \to \mathcal{B}$ si dice **interpretazione** se:

- $\mathcal{I}(\bot) = 0$
- $\mathcal{I}(\neg p) = 1 - \mathcal{I}(p)$
- $\mathcal{I}(p \wedge q) = \min(\mathcal{I}(p), \mathcal{I}(q))$
- $\mathcal{I}(p \vee q) = \max(\mathcal{I}(p), \mathcal{I}(q))$
- $\mathcal{I}(p \Rightarrow q) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{I}(p) \leq \mathcal{I}(q)$

Solitamente, $\mathcal{I}$ si indica con $[\![\cdot]\!]$.

La funzione v della slide precedente è una funzione di interpretazione!

Esercizio 2

Siano $p, q \in \mathrm{FBF}$. Dimostrare le seguenti:

1. $v(\neg\neg p) = v(p)$
2. $v(\neg(p \wedge q)) = v((\neg p) \vee (\neg q))$
3. $v(\neg(p \vee q)) = v((\neg p) \wedge (\neg q))$
4. $v(p \Rightarrow q) = v(\neg p \vee q)$

Soluzione dell'esercizio 2

Utilizziamo la definition di v:

1. osserviamo che:

$$\begin{aligned} v(\neg\neg p) &= 1 - v(\neg p) && (v \text{ di } \neg) \\ &= 1 - \big(1 - v(p)\big) && (v \text{ di } \neg) \\ &= v(p) \end{aligned}$$

2 analogamente:

$$
\begin{aligned}
& v((\neg p) \vee (\neg q)) \\
& = v(\neg p) + v(\neg q) - v(\neg p)v(\neg q) && (v \text{ di } \vee) \\
& = (1 - v(p)) + (1 - v(q)) - (1 - v(p))(1 - v(q)) && (v \text{ di } \neg) \\
& = 2 - v(p) - v(q) - (1 - v(p) - v(q) + v(p)v(q)) \\
& = 2 - \cancel{v(p)} - \cancel{v(q)} - 1 + \cancel{v(p)} + \cancel{v(q)} - v(p)v(q)) \\
& = 1 - v(p)v(q) \\
& = 1 - v(p \wedge q) && (v \text{ di } \wedge) \\
& = v(\neg(p \wedge q)) && (v \text{ di } \neg)
\end{aligned}
$$

3 analogamente:

$$
\begin{aligned}
& v(\neg p \wedge \neg q) \\
& = v(\neg p) v(\neg q) && (v \text{ di } \wedge) \\
& = (1 - v(p))(1 - v(q)) && (v \text{ di } \wedge) \\
& = 1 - v(p) - v(q) + v(p)v(q) \\
& = 1 - (v(p) + v(q) - v(p)v(q)) \\
& = 1 - v(p \vee q) && (v \text{ di } \wedge) \\
& = v(\neg(p \vee q)) && (v \text{ di } \neg)
\end{aligned}
$$

4. analogamente:

$$
\begin{aligned}
& v(\neg p \vee q) \\
& = v(\neg p) + v(q) - v(\neg p)v(q) && (v \text{ di } \vee) \\
& = (1 - v(p)) + v(q) - (1 - v(p))v(q) && (v \text{ di } \neg) \\
& = 1 - v(p) + \cancel{v(q)} - \cancel{v(q)} + v(p)v(q) \\
& = 1 - v(p) + v(p)v(q) \\
& = v(p \Rightarrow q) && (v \text{ di } \Rightarrow)
\end{aligned}
$$

Sommario

Definizione

Siano $p \in \text{FBF}$ e v una qualche interpretazione. Se $v(p) = 1$ allora si dice che:

- p è **soddisfatta** nell'interpretazione v
- v è **modello** per p

Si scrive $v \models p$ e si legge "v modella p".

Definizione

Sia $p \in \text{FBF}$ allora è

- **soddisfacibile** se ha almeno un modello:

$$\exists v : v \models p$$

- **contraddittoria** se non è soddisfacibile:

$$\forall v : v \not\models p$$

  e si scrive $\not\models p$

- **valida** (tautologia) se:

$$\forall v : v \models p$$

  e si scrive $\models p$

Esercizio 3

Usando la definition di valutazione per la logica proposizionale (non devono essere usate le tavole di verità) stabilire se, per ogni formula $A \in \mathrm{FBF}$, le formule

1. $A \vee \neg A$ (*p. del terzo escluso*)
2. $\neg(A \wedge \neg A)$ (*p. di non contraddizione*)
3. $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$ (*consequentia mirabilis*)

sono tautologie.

Soluzione dell'esercizio 3

1. Utilizziamo la funzione di interpretazione.
   - Si ottiene:

$$
\begin{aligned}
v(A \lor \neg A) &= v(A) + v(\neg A) - v(A)v(\neg A) \\
&= \cancel{v(A)} + (1 - \cancel{v(A)}) - v(A)(1 - v(A)) \\
&= 1 - v(A) + v(A)^2
\end{aligned}
$$

Soluzione dell'esercizio 3

1. Utilizziamo la funzione di interpretazione.
   - Si ottiene:

$$\begin{aligned} v(A \vee \neg A) &= v(A) + v(\neg A) - v(A)v(\neg A) \\ &= \cancel{v(A)} + (1 - \cancel{v(A)}) - v(A)(1 - v(A)) \\ &= 1 - v(A) + v(A)^2 \end{aligned}$$

   - $v(A)$ può assumere solo due valori, 0 o 1; quindi:

$$\begin{cases} v(A \vee \neg A) = 1 & \text{se } v(A) = 0 \\ v(A \vee \neg A) = 1 & \text{se } v(A) = 1 \end{cases}$$

   ma allora $\forall v$ si ottiene $v(A) = 1$, ossia (1) è una tautologia.

2. Utilizziamo la funzione di interpretazione.
   - Si ottiene:

$$\begin{aligned} v(\neg(A \wedge \neg A)) &= 1 - v(A \wedge \neg A) \\ &= 1 - v(A)v(\neg A) \\ &= 1 - v(A)(1 - v(A)) \\ &= 1 - v(A) + v(A)^2 \end{aligned}$$

2. Utilizziamo la funzione di interpretazione.
   - Si ottiene:

$$\begin{aligned} v(\neg(A \wedge \neg A)) &= 1 - v(A \wedge \neg A) \\ &= 1 - v(A)v(\neg A) \\ &= 1 - v(A)(1 - v(A)) \\ &= 1 - v(A) + v(A)^2 \end{aligned}$$

   - analogo al precedente.

3 Utilizziamo la funzione di interpretazione.

» Si ottiene:

$$
\begin{aligned}
& v((\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \\
&= 1 - v(\neg A \Rightarrow A) + v(\neg A \Rightarrow A)v(A) \\
&= 1 - (1 - v(\neg A) + v(\neg A)v(A)) \\
&\quad + (1 - v(\neg A) + v(\neg A)v(A))v(A) \\
&= v(\neg A) - v(\neg A)v(A) + v(A) - v(\neg A)v(A) + v(\neg A)v(A)^2 \\
&= v(\neg A) + v(A) - 2v(\neg A)v(A) + v(\neg A)v(A)^2 \\
&= v(A) + v(\neg A)(1 - 2v(A) + v(A)^2) \\
&= v(A) + v(\neg A)(1 - v(A))^2 \\
&= v(A) + (1 - v(A))^3
\end{aligned}
$$

3 Utilizziamo la funzione di interpretazione.

- Si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&v((\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A)\\
&= 1 - v(\neg A \Rightarrow A) + v(\neg A \Rightarrow A)v(A)\\
&= 1 - (1 - v(\neg A) + v(\neg A)v(A))\\
&\quad + (1 - v(\neg A) + v(\neg A)v(A))v(A)\\
&= v(\neg A) - v(\neg A)v(A) + v(A) - v(\neg A)v(A) + v(\neg A)v(A)^2\\
&= v(\neg A) + v(A) - 2v(\neg A)v(A) + v(\neg A)v(A)^2\\
&= v(A) + v(\neg A)(1 - 2v(A) + v(A)^2)\\
&= v(A) + v(\neg A)(1 - v(A))^2\\
&= v(A) + (1 - v(A))^3
\end{aligned}
$$

- $v(A)$ può assumere solo due valori, 0 o 1; quindi:

$$
\begin{cases}
v((\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A) = 0 + (1-0)^3 = 1 & \text{se } v(A) = 0\\
v((\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A) = 1 + (1-1)^3 = 1 & \text{se } v(A) = 1
\end{cases}
$$

Esercizio 4

Si considerino le seguenti formule:

1. $(a \vee c) \wedge \neg c$
2. $b \Rightarrow a$
3. $\neg(b \wedge c)$

Esiste un'interpretazione per gli atomi a, b, c che le modelli contemporaneamente?

Soluzione dell'esercizio 4

- Dobbiamo trovare un'interpretazione v che soddisfi il seguente:

$$\begin{cases} v((a \lor c) \land \neg c) = 1 \\ v(b \Rightarrow a) = 1 \\ v(\neg(b \land c)) = 1 \end{cases}$$

Soluzione dell'esercizio 4

- Dobbiamo trovare un'interpretazione v che soddisfi il seguente:

$$\begin{cases} v((a \vee c) \wedge \neg c) = 1 \\ v(b \Rightarrow a) = 1 \\ v(\neg(b \wedge c)) = 1 \end{cases}$$

- Utilizzando la definition di v otteniamo:

$$\begin{cases} v((a \vee c) \wedge \neg c) = 1 \\ v(b \Rightarrow a) = 1 \\ v(\neg(b \wedge c)) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} v(a \vee c)v(\neg c) = 1 \\ 1 - v(b) + v(b)v(a) = 1 \\ 1 - v(b \wedge c) = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (v(a) + v(c) - v(a)v(c))(1 - v(c)) = 1 \\ -v(b) + v(b)v(a) = 0 \\ -v(b \wedge c) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (v(a) + v(c) - v(a)v(c))(1 - v(c)) = 1 \\ v(a)v(b) = v(b) \\ v(b)v(c) = 0 \end{cases}$$

- A questo punto, vediamo cosa succede nei casi $v(b) = 0$ e $v(b) \neq 0$.

- Caso $v(b) = 0$:

$$\begin{cases} v(b) = 0 \\ (v(a) + v(c) - v(a)v(c))(1 - v(c)) = 1 \\ v(a) \cdot 0 = 0 \\ 0 \cdot v(c) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} v(b) = 0 \\ v(a) + v(c) - 2v(a)v(c) - v(c)^2 + v(a)v(c)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} v(a) = 1 \\ v(b) = 0 \\ v(c) = 0 \end{cases}}$$

- Caso $v(b) \neq 0$:

$$\begin{cases} v(b) = 1 \\ (v(a) + v(c) - v(a)v(c))(1 - v(c)) = 1 \\ v(a) \cdot 1 = 1 \\ 1 \cdot v(c) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} v(b) = 1 \\ (1 + 0 - 1 \cdot 0)(1 - 0) = 1 \\ v(a) = 1 \\ v(c) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} v(a) = 1 \\ v(b) = 1 \\ v(c) = 0 \end{cases}}$$

- Deriva dunque che è possibile costruire due interpretazioni che soddisfano la richiesta:

$$v_1 : (a, b, c) \mapsto (1, 0, 0)$$
$$v_2 : (a, b, c) \mapsto (1, 1, 0)$$

Esercizio 5

Usando la definition di valutazione per la logica proposizionale (non devono essere usate le tavole di verità) stabilire se, per ogni formula $A, B, C \in \text{FBF}$, la formula

$$\neg(A \land \neg A) \Rightarrow ((B \lor C) \lor \neg C)$$

è una tautologia.

Soluzione dell'esercizio 5

- Osserviamo che la formula proposta è una tautologia se e solo se:

$$v(\neg(A \wedge \neg A) \Rightarrow ((B \vee C) \vee \neg C)) = 1$$

Soluzione dell'esercizio 5

- Osserviamo che la formula proposta è una tautologia se e solo se:
$$v(\neg(A \wedge \neg A) \Rightarrow ((B \vee C) \vee \neg C)) = 1$$
- Ma questo è vero se e solo se:
$$v(\neg(A \wedge \neg A)) \leq v((B \vee C) \vee \neg C)$$

Soluzione dell'esercizio 5

- Osserviamo che la formula proposta è una tautologia se e solo se:
$$v(\neg(A \wedge \neg A) \Rightarrow ((B \vee C) \vee \neg C)) = 1$$
- Ma questo è vero se e solo se:
$$v(\neg(A \wedge \neg A)) \leq v((B \vee C) \vee \neg C)$$
- Abbiamo già dimostrato che $v(\neg(A \wedge \neg A)) = 1$. Notiamo ora che:
$$\begin{aligned} v((B \vee C) \vee \neg C) &= v(B \vee (C \vee \neg C)) \\ &= \max(v(B), v(C \vee \neg C)) \\ &= \max(v(B), 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 5

- Osserviamo che la formula proposta è una tautologia se e solo se:

$$v(\neg(A \wedge \neg A) \Rightarrow ((B \vee C) \vee \neg C)) = 1$$

- Ma questo è vero se e solo se:

$$v(\neg(A \wedge \neg A)) \leq v((B \vee C) \vee \neg C)$$

- Abbiamo già dimostrato che $v(\neg(A \wedge \neg A)) = 1$. Notiamo ora che:

$$\begin{aligned} v((B \vee C) \vee \neg C) &= v(B \vee (C \vee \neg C)) \\ &= \max(v(B), v(C \vee \neg C)) \\ &= \max(v(B), 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Abbiamo ottenuto che

$$v(\neg(A \wedge \neg A)) \leq v((B \vee C) \vee \neg C) \Longleftrightarrow 1 \leq 1$$

il che conclude la dimostrazione.

Esercizio 6

A partire dall'esercizio precedente e usando la definition di valutazione per la logica proposizionale (non devono essere usate le tavole di verità) stabilire se, per ogni formula $A, B, C \in \mathrm{FBF}$, la formula

$$\neg((B \vee C) \vee \neg C) \wedge \neg(A \wedge \neg A)$$

è una contraddizione.

Esercizio 7

Proprietà

Sia $p \in$ FBF. p è una tautologia se e solo se $\neg p$ è una contraddizione.

Esercizio 7

Proprietà

Sia $p \in \text{FBF}$. p è una tautologia se e solo se $\neg p$ è una contraddizione.

Soluzione dell'esercizio 7

- Sia p una tautologia; per definition

$$\models p \iff \forall v : v(p) = 1$$

Esercizio 7

Proprietà

Sia $p \in \text{FBF}$. p è una tautologia se e solo se $\neg p$ è una contraddizione.

Soluzione dell'esercizio 7

- Sia p una tautologia; per definition

$$\models p \iff \forall v : v(p) = 1$$

- Osserviamo ora che:

$$v(p) = 1 \iff 1 - v(p) = 0 \iff v(\neg p) = 0$$

Esercizio 7

Proprietà

Sia $p \in$ FBF. p è una tautologia se e solo se $\neg p$ è una contraddizione.

Soluzione dell'esercizio 7

- Sia p una tautologia; per definition

$$\models p \iff \forall v : v(p) = 1$$

- Osserviamo ora che:

$$v(p) = 1 \iff 1 - v(p) = 0 \iff v(\neg p) = 0$$

- Quindi

$$\models p \iff \forall v : v(\neg p) = 0 \iff \not\models \neg p$$

$\square$

Esercizio 8

Usando la definition di valutazione per la logica proposizionale (non devono essere usate le tavole di verità) stabilire se

$$(\neg\neg((\neg C) \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \vee B)$$

dove $B = (B_1 \vee (B_2 \vee (B_3 \vee (\cdots(B_{99} \vee B_{100})))))$.

Soluzione dell'esercizio 8

- Troviamo una formula logica equivalente, sfruttando quanto dimostrato nell'esercizio (2). Notiamo che:

$$v\Big(\neg\neg((\neg C) \Rightarrow B))\Big) = v((\neg C) \Rightarrow B))$$

Soluzione dell'esercizio 8

- Troviamo una formula logica equivalente, sfruttando quanto dimostrato nell'esercizio (2). Notiamo che:

$$v\Big(\neg\neg((\neg C) \Rightarrow B))\Big) = v((\neg C) \Rightarrow B))$$

- Inoltre si dimostra che:

$$v((\neg C) \Rightarrow B)) = v(C \vee B)$$

Soluzione dell'esercizio 8

- Troviamo una formula logica equivalente, sfruttando quanto dimostrato nell'esercizio (2). Notiamo che:

$$v\Big(\neg\neg((\neg C) \Rightarrow B))\Big) = v((\neg C) \Rightarrow B))$$

- Inoltre si dimostra che:

$$v((\neg C) \Rightarrow B)) = v(C \vee B)$$

- Quindi a questo punto:

$$v\Big((\neg\neg((\neg C) \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \vee B)\Big) = 1$$
$$\Leftrightarrow v\Big(\neg\neg((\neg C) \Rightarrow B))\Big) \leq v(C \vee B)$$
$$\Leftrightarrow v((\neg C) \Rightarrow B)) \leq v(C \vee B)$$
$$\Leftrightarrow v(C \vee B) \leq v(C \vee B)$$

chiaramente vero!