

Tutorato di Logica

Manuel Di Agostino

Università di Parma

30/09/2025

Qualche info utile

- Dove trovo le slide?
 - Elly2025
 - Unipr-org (<https://github.com/unipr-org/tutorati>)



- Per qualsiasi domanda:
 - manuel.diagostino@studenti.unipr.it

1 Logica proposizionale

- Connettivi
- Proprietà dei connettivi
- Forme normali

2 Quantificatori

1 Logica proposizionale

- Connettivi
- Proprietà dei connettivi
- Forme normali

2 Quantificatori

Tavola di verità

Operatore NOT ($\neg p$)

p	q	$\neg p$		
1	1	0		
1	0	0		
0	1	1		
0	0	1		

Tavola di verità

Operatore AND ($p \wedge q$)

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	0

Tavola di verità

Operatore OR ($p \vee q$)

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

Definizione (Costanti \top , \perp)

*Definiamo la costante \top come proposizione sempre **vera**.*

*Definiamo la costante \perp come proposizione sempre **falsa**.*

Definizione (Costanti \top, \perp)

*Definiamo la costante \top come proposizione sempre **vera**.*

*Definiamo la costante \perp come proposizione sempre **falsa**.*

Definizione (Equivalenza tra proposizioni)

*Diciamo che due proposizioni p, q sono **equivalenti** (semanticamente) se e solo se hanno la stessa tavola di verità. In simboli:*

$$p \equiv q$$

Principio del terzo escluso

$p \vee \neg p$ è sempre vero.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
1	0	1
0	1	1

Principio del terzo escluso

$p \vee \neg p$ è sempre vero.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
1	0	1
0	1	1

Principio di non contraddizione

$\neg(p \wedge \neg p)$ è sempre vero.

p	$\neg p$	$\neg(p \wedge \neg p)$
1	0	1
0	1	1

Principio del terzo escluso

$p \vee \neg p$ è sempre vero.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
1	0	1
0	1	1

Principio di non contraddizione

$\neg(p \wedge \neg p)$ è sempre vero.

p	$\neg p$	$\neg(p \wedge \neg p)$
1	0	1
0	1	1

Queste formule sono Tautologie

1 Logica proposizionale

- Connettivi
- Proprietà dei connettivi
- Forme normali

2 Quantificatori

Proprietà

- *Involuzione di \neg :*

$$\neg\neg a \equiv a$$

- *Idempotenza di \wedge, \vee :*

$$a \wedge a \equiv a \quad a \vee a \equiv a$$

- *Commutativa:*

$$a \wedge b \equiv b \wedge a \quad a \vee b \equiv b \vee a$$

- *Associativa:*

$$(a \wedge b) \wedge c \equiv a \wedge (b \wedge c)$$

$$(a \vee b) \vee c \equiv a \vee (b \vee c)$$

Proprietà

- *Distributiva:*

$$(a \wedge b) \vee c \equiv (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$

$$(a \vee b) \wedge c \equiv (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

- *Leggi di De Morgan:*

$$\neg(a \wedge b) \equiv (\neg a \vee \neg b)$$

$$\neg(a \vee b) \equiv (\neg a \wedge \neg b)$$

Proprietà

- *Elemento neutro e dominante:*

$$a \wedge \top \equiv a \qquad a \wedge \perp \equiv \perp$$

$$a \vee \perp \equiv a \qquad a \vee \top \equiv \top$$

Tutte queste proprietà si possono dimostrare utilizzando le tavole di verità (esercizio).

Equivalenza con la Contronominale

Un'implicazione logica $p \rightarrow q$ è sempre equivalente alla sua **contronominale**, ovvero $\neg q \rightarrow \neg p$.

Dimostrazione

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$	(Definizione di implicazione)
$\equiv \neg p \vee \neg(\neg q)$	(Doppia negazione)
$\equiv \neg(\neg q) \vee \neg p$	(Proprietà commutativa di \vee)
$\equiv \neg q \rightarrow \neg p$	(Riscrivendo come implicazione)

Esercizio 1

Dimostrare la prima legge dell'assorbimento, usando le tavole di verità:

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

Legge dell'Assorbimento (1) II

Soluzione

Costruiamo la tavola di verità.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	0

Poiché la colonna dei valori di verità di p è identica alla colonna finale di $p \wedge (p \vee q)$, l'equivalenza logica è dimostrata.

Esercizio 2

Dimostrare la seconda legge dell'assorbimento, usando le tavole di verità:

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

Soluzione

Costruiamo la tavola di verità.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

Poiché la colonna dei valori di verità di p è identica alla colonna finale di $p \vee (p \wedge q)$, l'equivalenza logica è dimostrata.

Doppia Implicazione (Bicondizionale)

Definizione

*Date due proposizioni p e q , la loro **doppia implicazione** si indica con $p \leftrightarrow q$ e si legge " p se e solo se q ".*

*L'espressione è **vera** quando p e q hanno lo stesso valore di verità (entrambe vere o entrambe false).*

Equivale alla congiunzione di due implicazioni:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Esercizio 3

Ricavare le tavole di verità delle seguenti:

- ① $a \wedge (b \rightarrow a)$
- ② $(a \rightarrow b) \wedge ((c \leftrightarrow \neg a) \vee b)$
- ③ $(a \wedge (a \rightarrow b)) \rightarrow b$
- ④ $(a \leftrightarrow a) \rightarrow (b \leftrightarrow \neg b)$

1 Logica proposizionale

- Connettivi
- Proprietà dei connettivi
- **Forme normali**

2 Quantificatori

Proposizione dalla tabella di verità

Data la proposizione $p \rightarrow q$:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

vogliamo costruirne una equivalente a partire dalla tabella di verità.

Definizione (Forma Normale Disgiuntiva (DNF))

Si costruisce facendo la **disgiunzione** (OR) di congiunzioni (AND) di formule basiche^a, delle righe in cui il risultato è 1.

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

^aUna formula basica è una variabile proposizionale o la sua negazione.

Proposizione dalla tabella di verità

Data la proposizione $p \rightarrow q$:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

vogliamo costruirne una equivalente a partire dalla tabella di verità.

Definizione (Forma Normale Congiuntiva (CNF))

Si costruisce facendo la **congiunzione** (AND) di disgiunzioni (OR) di formule basiche^a, delle righe in cui il risultato è 1.

$$(\neg p \vee q)$$

^aUna formula basica è una variabile proposizionale o la sua negazione.

Dimostrazione dell'equivalenza

Si può dimostrare che le due formulazioni sono equivalenti. Nel nostro esempio:

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) &\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge (q \vee \neg q)) \\ &\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge (\top)) \\ &\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p) \\ &\equiv (p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p) \\ &\equiv (\top) \wedge (q \vee \neg p) \\ &\equiv q \vee \neg p \\ &\equiv \neg p \vee q\end{aligned}$$

Esercizio 4

Dimostrare la seguente equivalenza, che lega l'implicazione alla congiunzione, senza usare le tavole di verità:

$$(p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$$

Soluzione

$(p \wedge q) \rightarrow r \equiv \neg(p \wedge q) \vee r$	Def. di \rightarrow
$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r$	De Morgan
$\equiv \neg p \vee \neg q \vee (r \vee r)$	Idempotenza di \vee
$\equiv (\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r)$	Associatività e Commutatività
$\equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$	Def. di \rightarrow

Esercizio 5

Dimostrare che la formula del *Modus Tollens* è una tautologia (cioè è sempre vera), usando le tavole di verità:

$$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$$

Esercizio: Tautologia del Modus Tollens II

Soluzione

Costruiamo la tavola di verità completa.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Poiché la colonna finale della tavola di verità contiene solo valori 1, la formula è una tautologia.

Esercizio 6

Dimostrazione con equivalenze logiche

Sfruttando le proprietà viste (distributività, De Morgan, etc.), dimostrare la seguente equivalenza, senza usare le tavole di verità:

$$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$$

Esercizio 6

Dimostrazione con equivalenze logiche

Sfruttando le proprietà viste (distributività, De Morgan, etc.), dimostrare la seguente equivalenza, senza usare le tavole di verità:

$$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$$

Soluzione

$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$	Def. di \rightarrow
$\equiv \neg p \vee (q \wedge r)$	Prop. distributiva
$\equiv p \rightarrow (q \wedge r)$	Def. di \rightarrow

- 1 Logica proposizionale
 - Connettivi
 - Proprietà dei connettivi
 - Forme normali

- 2 Quantificatori

Definizione (Regole per la negazione dei quantificatori)

Valgono le seguenti:

$$\neg(\forall x. p(x)) \equiv \exists x : \neg p(x)$$
$$\neg(\exists x : p(x)) \equiv \forall x. \neg p(x)$$

Definizione (Regole per la negazione dei quantificatori)

Valgono le seguenti:

$$\neg(\forall x. p(x)) \equiv \exists x : \neg p(x)$$
$$\neg(\exists x : p(x)) \equiv \forall x. \neg p(x)$$

La prima regola equivale a esibire un **controesempio** per confutare un enunciato.

Example

"Il quadrato di un intero è sempre pari."

Definizione (Regole per la negazione dei quantificatori)

Valgono le seguenti:

$$\neg(\forall x. p(x)) \equiv \exists x : \neg p(x)$$
$$\neg(\exists x : p(x)) \equiv \forall x. \neg p(x)$$

La prima regola equivale a esibire un **controesempio** per confutare un enunciato.

Example

"Il quadrato di un intero è sempre pari." **Falso**, esiste il numero 5 il cui quadrato è 25 (dispari).

Esercizio 7

Confutare le seguenti proposizioni (dominio: \mathbb{N}):

① $\forall n, 3n + 6 \geq 5n$

② $\forall n, 10n^2 > n^3$

③ $\forall n, -\frac{3}{56}n + 2 > e^{\frac{n^2}{577}}$

In alcuni casi meglio farsi aiutare dal PC :)