Tutorato di Logica

Manuel Di Agostino

Università di Parma

14 ottobre 2025

Sommario

Sommario

1. Relazioni
   - Definizione
   - Relazione d'equivalenza
   - Relazione d'ordine

Definizione (Relazione)

*Dati due insiemi A, B, una **relazione** $\mathcal{R}$ tra essi è un qualsiasi sottoinsieme del loro prodotto cartesiano.*

$$\mathcal{R} \subseteq A \times B$$

Definizione (Relazione)

*Dati due insiemi A, B, una **relazione** $\mathcal{R}$ tra essi è un qualsiasi sottoinsieme del loro prodotto cartesiano.*

$$\mathcal{R} \subseteq A \times B$$

Dati:

- $A = \{i \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq i \leq 3\}$
- $B = \{i \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq i \leq 0\}$

alcune relazioni su $A \times B$ potrebbero essere:

- $\mathcal{R}_1 = \{(a, b) \in A \times B \mid a \leq b\} = \{(0, 0)\}$
- $\mathcal{R}_2 = \{(a, b) \in A \times B \mid a + b = 0\} = \{(3, -3), (2, -2), (1, -1), (0, 0)\}$
- $\mathcal{R}_3 = \{(a, b) \in A \times B \mid a = 1\} = \{(1, -3), (1, -2), \ldots, (1, 0)\}$

Proprietà (Riflessività)

*Una relazione $\mathcal{R}$ su A si dice **riflessiva** sse*

$$\forall x \in A : x\mathcal{R}x$$

Proprietà (Simmetricità)

*Una relazione $\mathcal{R}$ su A si dice **simmetrica** sse*

$$\forall x, y \in A : x\mathcal{R}y \to y\mathcal{R}x$$

Proprietà (Transitività)

*Una relazione $\mathcal{R}$ su A si dice **transitiva** sse*

$$\forall x, y, z \in A : x\mathcal{R}y \land y\mathcal{R}z \to x\mathcal{R}z$$

Sommario

Definizione (Rel. d'equivalenza)

*Data una relazione $\mathcal{R}$ su A, essa si dice essere d'**equivalenza** sse*

- ***riflessiva***: $\forall x \in A.(x\mathcal{R}x)$
- ***simmetrica***: $\forall x, y \in A.(x\mathcal{R}y \to y\mathcal{R}x)$
- ***transitiva***: $\forall x, y, z \in A.(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \to x\mathcal{R}z)$

Esercizio 1 Appello del 23/01/2024

Sia R la relazione su $\mathbb{N}$ così definita:

$$\forall x, y \in \mathbb{N}. R(x, y) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y - x = 3k$$

Ad esempio, $23 - 8 = 3 \cdot 5$, quindi vale $R(8, 23)$.

1. Dimostrare che R su $\mathbb{N}$ è di equivalenza.
2. Quante classi di equivalenza si ottengono partizionando $\mathbb{N}$ con R?

Suggerimento: se $R(x, y)$, allora x e y hanno lo stesso *resto* nella divisione per 3.

Soluzione dell'esercizio 1

Dimostro che R è di equivalenza.

- riflessività:

$$\begin{aligned} xRx &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - x = 3k \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 0 = 3k \end{aligned}$$

che è chiaramente vero per $k = 0$.

Soluzione dell'esercizio 1

Dimostro che R è di equivalenza.

- riflessività:

$$\begin{aligned} xRx &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - x = 3k \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 0 = 3k \end{aligned}$$

  che è chiaramente vero per $k = 0$.

- simmetricità:

$$\begin{aligned} xRy &\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{Z} : y - x = 3a \\ &\overset{(a=-a')}{\Leftrightarrow} \exists a' \in \mathbb{Z} : a' = -a \wedge y - x = -3a' \\ &\Leftrightarrow \exists a' \in \mathbb{Z} : -(x - y) = -3a' \\ &\Leftrightarrow \exists a' \in \mathbb{Z} : (x - y) = 3a' \\ &\Leftrightarrow yRx. \end{aligned}$$

- transitività:

$$
\begin{aligned}
& x, y, z \in \mathbb{N} \wedge xRy \wedge yRz \\
\text{(Def. di R)} & \\
\Leftrightarrow\quad & \exists j, k \in \mathbb{Z} : y - x = 3j \wedge z - y = 3k \\
\Leftrightarrow\quad & \exists j, k \in \mathbb{Z} : y = 3j + x \wedge z - y = 3k \\
\Leftrightarrow\quad & \exists j, k \in \mathbb{Z} : y = 3j + x \wedge z - (3j + x) = 3k \\
\Leftrightarrow\quad & \exists j, k \in \mathbb{Z} : y = 3j + x \wedge z - 3j - x = 3k \\
\Leftrightarrow\quad & \exists j, k \in \mathbb{Z} : y = 3j + x \wedge z - x = 3(k + j) \\
\text{(l = k+j)} & \\
\Rightarrow\quad & \exists l \in \mathbb{Z} : z - x = 3l \\
\text{(Def. di R)} & \\
\Leftrightarrow\quad & xRz.
\end{aligned}
$$

- transitività:

$$
\begin{aligned}
& x, y, z \in \mathbb{N} \wedge xRy \wedge yRz \\
\text{(Def. di R)} & \\
\Leftrightarrow \quad & \exists j, k \in \mathbb{Z} : y - x = 3j \wedge z - y = 3k \\
\Leftrightarrow \quad & \exists j, k \in \mathbb{Z} : y = 3j + x \wedge z - y = 3k \\
\Leftrightarrow \quad & \exists j, k \in \mathbb{Z} : y = 3j + x \wedge z - (3j + x) = 3k \\
\Leftrightarrow \quad & \exists j, k \in \mathbb{Z} : y = 3j + x \wedge z - 3j - x = 3k \\
\Leftrightarrow \quad & \exists j, k \in \mathbb{Z} : y = 3j + x \wedge z - x = 3(k + j) \\
\text{(l = k+j)} & \\
\Rightarrow \quad & \exists l \in \mathbb{Z} : z - x = 3l \\
\text{(Def. di R)} & \\
\Leftrightarrow \quad & xRz.
\end{aligned}
$$

Quindi R è di equivalenza.

Soluzione dell'esercizio 1

Come conto il numero di classi di equivalenza? Osserviamo che

- $0R3, 3R6, 6R9, \ldots$
- $1R4, 4R7, 7R10, \ldots$
- $2R5, 5R8, 8R11, \ldots$

L'ipotesi è che ci siano 3 classi di equivalenza con $0, 1, 2$ come rispettivi rappresentanti.

Soluzione dell'esercizio 1

Come conto il numero di classi di equivalenza? Osserviamo che

- $0R3, 3R6, 6R9, \dots$
- $1R4, 4R7, 7R10, \dots$
- $2R5, 5R8, 8R11, \dots$

L'ipotesi è che ci siano 3 classi di equivalenza con $0, 1, 2$ come rispettivi rappresentanti. Per la divisione intera euclidea ogni numero naturale n si può scrivere come

$$n = 3 \cdot k + r, \quad k \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 3$$

Soluzione dell'esercizio 1

Come conto il numero di classi di equivalenza? Osserviamo che

- $0R3, 3R6, 6R9, \ldots$
- $1R4, 4R7, 7R10, \ldots$
- $2R5, 5R8, 8R11, \ldots$

L'ipotesi è che ci siano 3 classi di equivalenza con $0, 1, 2$ come rispettivi rappresentanti. Per la divisione intera euclidea ogni numero naturale n si può scrivere come

$$n = 3 \cdot k + r, \quad k \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 3$$

che equivale a

$$n - r = 3 \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 3$$

ossia

$$rRn, \quad 0 \leq r < 3$$

Soluzione dell'esercizio 1

Come conto il numero di classi di equivalenza? Osserviamo che

- $0R3, 3R6, 6R9, \dots$
- $1R4, 4R7, 7R10, \dots$
- $2R5, 5R8, 8R11, \dots$

L'ipotesi è che ci siano 3 classi di equivalenza con $0, 1, 2$ come rispettivi rappresentanti. Per la divisione intera euclidea ogni numero naturale n si può scrivere come

$$n = 3 \cdot k + r, \quad k \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 3$$

che equivale a

$$n - r = 3 \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 3$$

ossia

$$rRn, \quad 0 \leq r < 3$$

Poiché nella divisione intera $r \in \{0, 1, 2\}$ è unico, è evidente che n è in relazione con solo uno dei 3 possibili resti. Quindi l'**insieme quoziente** è

$$\mathbb{N}/R = \{[0], [1], [2]\}$$

Esercizio 2 Parziale del 02/11/2023

Sia $R \subseteq \mathbb{N}$ la relazione così definita:

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : R(x, y) \Leftrightarrow x \bmod 5 = y \bmod 5$$

dove $\cdot \bmod 5$ è l'operazione che restituisce il *resto* della divisione per 5. Ad esempio $27 \bmod 5 = 2$.

1. R su $\mathbb{N}$ è di equivalenza?
2. Se sì, quante classi di equivalenza si ottengono partizionando $\mathbb{N}$ con R?

Suggerimento: si ricorda che per $n < 5$ si ha $n \bmod 5 = n$.

Soluzione dell'esercizio 2

- Riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow x \mod 5 = x \mod 5$$

Vero, il resto è unico.

Soluzione dell'esercizio 2

- Riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow x \mod 5 = x \mod 5$$

  Vero, il resto è unico.

- Simmetricità:

$$\begin{aligned} xRy &\Leftrightarrow x \mod 5 = y \mod 5 \\ \text{(Simmetricità di } =) &\Leftrightarrow y \mod 5 = x \mod 5 \\ &\Leftrightarrow yRx \end{aligned}$$

- Transitività:

$$
\begin{aligned}
xRy \land yRz &\Leftrightarrow x \mod 5 = y \mod 5 \land y \mod 5 = z \mod 5 \\
&\text{(Transitività di } =\text{)} \\
&\Leftrightarrow x \mod 5 = z \mod 5 \\
&\Leftrightarrow xRz
\end{aligned}
$$

Esercizio 3 Appello del 09/01/2024

Sia R la relazione su $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} - \{0\}$ così definita:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^* : R(x, y) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : \frac{x}{y} = q \land q \neq 0$$

1. Dimostrare che R su $\mathbb{R}^*$ è di equivalenza.

Esercizio 4 Appello del 14/02/2023

Sia $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,$ con $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} - \{0\}$ l'insieme delle coppie di numeri naturali, in cui si è escluso lo zero. Supponiamo di applicare ad A la relazione R così definita:

$$\forall (a, b), (c, d) \in A : R((a, b), (c, d)) \Leftrightarrow ad = cb$$

1. La relazione R è di equivalenza?

Esercizio 5 Appello del 31/01/2023

Sia R una relazione di equivalenza su un insieme A. Tale insieme contiene almeno tre alementi a, b, c e inoltre

$$\neg R(a,b) \land \neg R(a,c) \land \neg R(b,c)$$

cioè a, b, c non sono in relazione tra loro.
Si supponga che R abbia tre classi di equivalenza, definite in questo modo:

$$A_1 = \{x \in A : R(a,x)\},\ A_2 = \{x \in A : R(b,x)\},\ A_3 = \{x \in A : R(c,x)\}$$

e inoltre $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

1. Dimostrare che $A_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad A_1 \cap A_3 = \emptyset, \quad A_2 \cap A_3 = \emptyset$.

Esercizio 6 Appello del 16/01/2023

Sia A un insieme non vuoto. Si consideri suddiviso in questo modo:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

dove A_1, A_2, A_3 sono insiemi non vuoti e disgiunti a due a due.
Sia R la relazione definita in questo modo:

$$\forall x, y \in A : R(x, y) \Leftrightarrow \exists i \in \{1, 2, 3\} : x \in A_i \wedge y \in A_i$$

1. Dimostrare che R è di equivalenza.

Sommario

Definizione (Rel. d'ordine)

*Data una relazione $\mathcal{R} \subseteq A \times A$, essa si dice essere d'**ordine** sse*

- ***riflessiva***: $\forall x \in A.(x\mathcal{R}x)$
- ***anti-simmetrica***: $\forall x, y \in A.(x\mathcal{R}y \land yRx \to x = y)$
- ***transitiva***: $\forall x, y, z \in A.(x\mathcal{R}y \land y\mathcal{R}z \to x\mathcal{R}z)$

Definizione (Ordine parziale, totale)

Data una relazione d'ordine $\mathcal{R} \subseteq A \times A$, *essa si dice:*

- ***parziale***: $\exists x, y \in A : x \not\mathcal{R} y \land y \not\mathcal{R} x$
- ***totale***: $\forall x, y \in A \,.\, x\mathcal{R}y \lor y\mathcal{R}x$

Definizione (Ordine parziale, totale)

Data una relazione d'ordine $\mathcal{R} \subseteq A \times A$, *essa si dice:*

- ***parziale***: $\exists x, y \in A : x \not\mathcal{R} y \land y \not\mathcal{R} x$
- ***totale***: $\forall x, y \in A \,.\, x\mathcal{R}y \lor y\mathcal{R}x$

Definizione (Poset)

Un ***Insieme Parzialmente Ordinato*** *(Partially Ordered Set, Poset) è un qualsiasi insieme A dotato di una relazione d'ordine (parziale)* $\leq$ *su di esso. Si indica con la coppia*

$$(A, \leq)$$

Definizione (Insieme dei Massimali)

*Dato un poset $(A, \leq)$ si definisce l'insieme degli elementi **massimali** come*

$$\{m \in A \mid \forall x \in A \,.\, m \leq x \to x = m\}$$

Definizione (Elemento Massimo)

*Dato un poset $(A, \leq)$ l'elemento **massimo** $\mathbf{M}$, se esiste, soddisfa*

$$\forall x \in A \,.\, x \leq M$$

Esercizio 7 Appello del 23/01/2024

Si consideri l'insieme $D_{28} = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$ dei divisori di 28 a cui si applica la relazione R così definita:

$$\forall x, y \in D_{28}. R(x, y) \Leftrightarrow x|y$$

si ricorda che $x|y$ si legge "x divide y", ovvero $\exists m \in \mathbb{Z} : y = mx$

1. R su D_{28} è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
2. R su D_{28} ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali? *Suggerimento*: rappresentare graficamente la relazione R sull'insieme D_{28}

Soluzione dell'esercizio 7

(1) R su D_{28} è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?

- riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow x|x.$$

Soluzione dell'esercizio 7

(1) R su D_{28} è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?

- riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow x|x.$$

- anti-simmetricità:

$$\begin{aligned}
xRy \wedge yRx &\overset{\text{(Def. di } R\text{)}}{\Leftrightarrow} x|y \wedge y|x \\
&\overset{\text{(Def. di } |\text{)}}{\Leftrightarrow} \exists i,j \in \mathbb{Z} : y = ix \wedge x = jy \\
&\Leftrightarrow \exists i,j \in \mathbb{Z} : y = ijy \wedge x = jy \\
&\Rightarrow \exists i,j \in \mathbb{Z} : 1 = ij \wedge x = jy \\
&\Leftrightarrow \exists i,j \in \mathbb{Z} : (i = j = \pm 1) \wedge x = jy \\
&\Rightarrow (x = -y) \vee (x = y) \\
&\overset{(x,y>0)}{\Rightarrow} x = y.
\end{aligned}$$

- transitività:

$$\begin{aligned}
xRy \land yRz &\Leftrightarrow x|y \land y|z \\
&\Leftrightarrow \exists i, j \in \mathbb{Z} : y = ix \land z = jy \\
&\Rightarrow \exists i, j \in \mathbb{Z} : z = j(ix) \\
{\scriptstyle (k = ji \in \mathbb{Z})} &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : z = kx \\
&\Leftrightarrow x|z \\
&\Leftrightarrow xRz.
\end{aligned}$$

- transitività:

$$
\begin{aligned}
xRy \wedge yRz &\Leftrightarrow x|y \wedge y|z \\
&\Leftrightarrow \exists i, j \in \mathbb{Z} : y = ix \wedge z = jy \\
&\Rightarrow \exists i, j \in \mathbb{Z} : z = j(ix) \\
{\scriptstyle (k = ji \in \mathbb{Z})} \\
&\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : z = kx \\
&\Leftrightarrow x|z \\
&\Leftrightarrow xRz.
\end{aligned}
$$

Quindi R è d'ordine.

- transitività:

$$
\begin{aligned}
xRy \wedge yRz &\Leftrightarrow x|y \wedge y|z \\
&\Leftrightarrow \exists i, j \in \mathbb{Z} : y = ix \wedge z = jy \\
&\Rightarrow \exists i, j \in \mathbb{Z} : z = j(ix) \\
{\scriptstyle (k = ji \in \mathbb{Z})} &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : z = kx \\
&\Leftrightarrow x|z \\
&\Leftrightarrow xRz.
\end{aligned}
$$

Quindi R è d'ordine.

- È totale? No, $4 \not{R} 7 \wedge 7 \not{R} 4$.

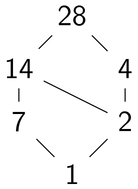
Soluzione dell'esercizio 7

(2) R su D_{28} ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?
Suggerimento: rappresentare graficamente la relazione R sull'insieme D_{28}

Soluzione dell'esercizio 7

(2) R su D_{28} ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?
Suggerimento: rappresentare graficamente la relazione R sull'insieme D_{28}

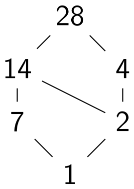
- Iniziamo costruendo il diagramma di Hasse che descrive R su D_{28}:



Soluzione dell'esercizio 7

(2) R su D_{28} ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?
Suggerimento: rappresentare graficamente la relazione R sull'insieme D_{28}

- Iniziamo costruendo il diagramma di Hasse che descrive R su D_{28}:



- È evidente che esiste un massimo, 28, e un minimo, 1.

Esercizio 8 Appello del 05/06/2024

Si consideri l'insieme $D = \{2, 11, 23, 44, 1012, 2024\}$, a cui si applica la relazione R così definita:

$$\forall x, y \in D : R(x, y) \Leftrightarrow x|y$$

si ricorda che $x|$ si legge "x divide y", ovver $\exists m \in \mathbb{Z} : y = mx$.

1. R su D è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
2. R su D ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?
   Suggerimento: rappresentare graficamente la relazione R sull'insieme D dove può essere utile ricordare che $23 \cdot 24 = 1012$.

Soluzione dell'esercizio 8

(1) R su D è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?

Soluzione dell'esercizio 8

(1) R su D è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
Analogo al precedente esercizio.

Soluzione dell'esercizio 8

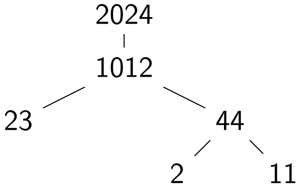
(1) R su D è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
Analogo al precedente esercizio.
(2) R su D ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?
Suggerimento: rappresentare graficamente la relazione R sull'insieme D dove può essere utile ricordare che $23 \cdot 24 = 1012$.

Soluzione dell'esercizio 8

(1) R su D è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
Analogo al precedente esercizio.

(2) R su D ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?
Suggerimento: rappresentare graficamente la relazione R sull'insieme D dove può essere utile ricordare che $23 \cdot 24 = 1012$.

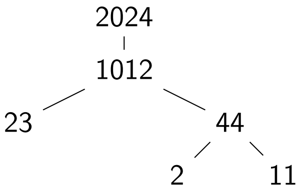
- Costruiamo il diagramma di Hasse:



Soluzione dell'esercizio 8

(1) R su D è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
Analogo al precedente esercizio.
(2) R su D ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?
Suggerimento: rappresentare graficamente la relazione R sull'insieme D dove può essere utile ricordare che $23 \cdot 24 = 1012$.

- Costruiamo il diagramma di Hasse:



- Massimo: 2024, minimali: $\{2, 11, 23\}$

Esercizio 9 Appello del 09/01/2024

Si consideri l'insieme $P = \{x | \exists n \in \mathbb{N} : x = 2^n\} = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$, delle potenze di 2, a cui si applica la relazione R così definita: relazione R così definita:

$$\forall x, y \in P : R(x, y) \Leftrightarrow x | y$$

si ricorda che $x|$ si legge “x divide y", ovver $\exists m \in \mathbb{Z} : y = mx$.

1. R su P è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
2. R su P ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

Soluzione dell'esercizio 9

(1) R su P è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?

Soluzione dell'esercizio 9

(1) R su P è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
Analogo al precedente esercizio. Si noti però che è totale; infatti:

$$\begin{aligned} x, y \in P &\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} : x = 2^n \wedge y = 2^m \\ &\Rightarrow (m \geq n \wedge x|y) \vee (n \geq m \wedge y|x) \\ &\Leftrightarrow xRy \vee yRx. \end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 9

(1) R su P è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
Analogo al precedente esercizio. Si noti però che è totale; infatti:

$$\begin{aligned} x, y \in P &\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} : x = 2^n \wedge y = 2^m \\ &\Rightarrow (m \geq n \wedge x|y) \vee (n \geq m \wedge y|x) \\ &\Leftrightarrow xRy \vee yRx. \end{aligned}$$

(2) R su P ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

Soluzione dell'esercizio 9

(1) R su P è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
Analogo al precedente esercizio. Si noti però che è totale; infatti:

$$\begin{aligned} x, y \in P &\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} : x = 2^n \land y = 2^m \\ &\Rightarrow (m \geq n \land x|y) \lor (n \geq m \land y|x) \\ &\Leftrightarrow xRy \lor yRx. \end{aligned}$$

(2) R su P ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

- Costruiamo il diagramma di Hasse:

$$1 \text{ ——— } 2 \text{ ——— } 4 \text{ ——— } 8 \text{ ——— } 16 \text{ ——— } \cdots$$

Soluzione dell'esercizio 9

(1) R su P è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
Analogo al precedente esercizio. Si noti però che è totale; infatti:

$$\begin{aligned} x, y \in P &\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} : x = 2^n \wedge y = 2^m \\ &\Rightarrow (m \geq n \wedge x|y) \vee (n \geq m \wedge y|x) \\ &\Leftrightarrow xRy \vee yRx. \end{aligned}$$

(2) R su P ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

- Costruiamo il diagramma di Hasse:

$$1 \text{ —— } 2 \text{ —— } 4 \text{ —— } 8 \text{ —— } 16 \text{ —— } \cdots$$

- Minimo: 1, massimali: $\varnothing$

Esercizio 10

Si consideri l'insieme $A = \{a, b, c\}$. Sia R una relazione su $\wp(A)$ così definita:

$$\forall x, y \subseteq A : R(x, y) \Leftrightarrow x \subseteq y$$

1. R è d'ordine su $\wp(A)$? Se sì, è totale o parziale?
2. R su $\wp(A)$ ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

Soluzione dell'esercizio 10

(1) R è d'ordine su $\wp(A)$? Se sì, è totale o parziale?

Soluzione dell'esercizio 10

(1) R è d'ordine su $\wp(A)$? Se sì, è totale o parziale?

- riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow x \subseteq x.$$

Soluzione dell'esercizio 10

(1) R è d'ordine su $\wp(A)$? Se sì, è totale o parziale?

- riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow x \subseteq x.$$

- anti-simmetricità:

$$\begin{aligned} xRy \wedge yRx &\Leftrightarrow x \subseteq y \wedge y \subseteq x \\ &\Leftrightarrow x = y. \qquad (A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 10

- transitività:

$$\begin{aligned} xRy \land yRz &\Leftrightarrow x \subseteq y \land y \subseteq z \\ &\Leftrightarrow \forall i \in x.(i \in y) \land \forall j \in y.(j \in z) \\ &\Rightarrow \forall i \in x.(i \in z) \\ &\Leftrightarrow x \subseteq z \\ &\Leftrightarrow xRz. \end{aligned}$$

Quindi R è d'ordine su $\wp(A)$.

Soluzione dell'esercizio 10

- transitività:

$$
\begin{aligned}
xRy \wedge yRz &\Leftrightarrow x \subseteq y \wedge y \subseteq z \\
&\Leftrightarrow \forall i \in x.(i \in y) \wedge \forall j \in y.(j \in z) \\
&\Rightarrow \forall i \in x.(i \in z) \\
&\Leftrightarrow x \subseteq z \\
&\Leftrightarrow xRz.
\end{aligned}
$$

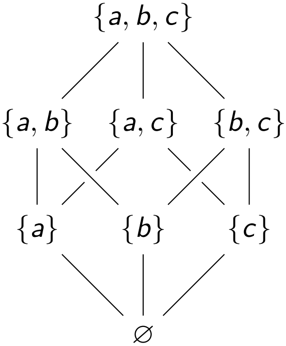
Quindi R è d'ordine su $\wp(A)$.

- È totale? No, $\{b\} \not\subseteq \{a, c\} \wedge \{a, c\} \not\subseteq \{b\}$

Soluzione dell'esercizio 10

(2) R su $\wp(A)$ ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

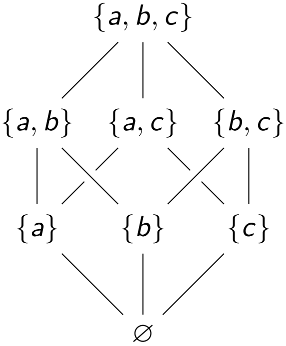
- diagramma di Hasse:



Soluzione dell'esercizio 10

(2) R su $\wp(A)$ ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

- diagramma di Hasse:



- Minimo: $\varnothing$, massimo: $\{a, b, c\}$.