Manuel Di Agostino
manuel.diagostino@studenti.unipr.it

UniPR
Università di Parma

30/09/2025

Tutorato di Logica

Qualche info utile

- Dove trovo le slide?
  - Elly2025
  - Unipr-org (`https://github.com/unipr-org/tutorati`)

- Per qualsiasi domanda:
  - manuel.diagostino@studenti.unipr.it

Sommario

Sommario

Connettivi logici di base

Tavola di verità

Operatore NOT ($\neg p$)

p	q	$\neg p$		
1	1	0		
1	0	0		
0	1	1		
0	0	1		

Tavola di verità

Operatore AND ($p \wedge q$)

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	
1	1	0	1	
1	0	0	0	
0	1	1	0	
0	0	1	0	

Tavola di verità

Operatore OR ($p \vee q$)

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

Costanti logiche ed equivalenza

Definizione (Costanti $\top, \bot$)

Definiamo la costante $\top$ come proposizione sempre **vera**.
Definiamo la costante $\bot$ come proposizione sempre **falsa**.

Costanti logiche ed equivalenza

Definizione (Costanti $\top, \bot$)

Definiamo la costante $\top$ come proposizione sempre **vera**.
Definiamo la costante $\bot$ come proposizione sempre **falsa**.

Definizione (Equivalenza tra proposizioni)

Diciamo che due proposizioni p, q sono **equivalenti** (semanticamente) se e solo se hanno la stessa tavola di verità. In simboli:

$$p \equiv q$$

Alcuni capisaldi

Principio del terzo escluso

$p \vee \neg p$ è sempre vero.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
1	0	1
0	1	1

Alcuni capisaldi

Principio del terzo escluso

$p \lor \neg p$ è sempre vero.

p	$\neg p$	$p \lor \neg p$
1	0	1
0	1	1

Principio di non contraddizione

$\neg(p \land \neg p)$ è sempre vero.

p	$\neg p$	$\neg(p \land \neg p)$
1	0	1
0	1	1

Alcuni capisaldi

Principio del terzo escluso

$p \vee \neg p$ è sempre vero.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
1	0	1
0	1	1

Principio di non contraddizione

$\neg(p \wedge \neg p)$ è sempre vero.

p	$\neg p$	$\neg(p \wedge \neg p)$
1	0	1
0	1	1

Osservazione

Queste formule sono **tautologie**.

Sommario

Proprietà dei Connettivi Logici

Proprietà

- *Involuzione* di $\neg$:

$$\neg\neg a \equiv a$$

- *Idempotenza* di $\wedge, \vee$:

$$a \wedge a \equiv a \qquad a \vee a \equiv a$$

- *Commutativa*:

$$a \wedge b \equiv b \wedge a \qquad a \vee b \equiv b \vee a$$

- *Associativa*:

$$(a \wedge b) \wedge c \equiv a \wedge (b \wedge c)$$

$$(a \vee b) \vee c \equiv a \vee (b \vee c)$$

Proprietà dei Connettivi Logici

Proprietà

- *Distributiva*:

$$(a \land b) \lor c \equiv (a \lor c) \land (b \lor c)$$

$$(a \lor b) \land c \equiv (a \land c) \lor (b \land c)$$

- *Leggi di De Morgan*:

$$\neg(a \land b) \equiv (\neg a \lor \neg b)$$

$$\neg(a \lor b) \equiv (\neg a \land \neg b)$$

Proprietà dei Connettivi Logici

Proprietà

- *Elemento neutro e dominante*:

$$a \wedge \top \equiv a \qquad a \wedge \bot \equiv \bot$$

$$a \vee \bot \equiv a \qquad a \vee \top \equiv \top$$

Tutte queste proprietà si possono dimostrare utilizzando le tavole di verità (esercizio).

Equivalenza con la Contronominale

Un'implicazione logica $p \to q$ è sempre equivalente alla sua **contronominale**, ovvero $\neg q \to \neg p$.

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
p \to q &\equiv \neg p \vee q && \text{(Definizione di implicazione)}\\
&\equiv \neg p \vee \neg(\neg q) && \text{(Doppia negazione)}\\
&\equiv \neg(\neg q) \vee \neg p && \text{(Proprietà commutativa di } \vee\text{)}\\
&\equiv \neg q \to \neg p && \text{(Riscrivendo come implicazione)}
\end{aligned}$$

Legge dell'Assorbimento (1) I

Exercise 1

Dimostrare la prima legge dell'assorbimento, usando le tavole di verità:

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

Soluzione

Costruiamo la tavola di verità.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	0

Poiché la colonna dei valori di verità di p è identica alla colonna finale di $p \wedge (p \vee q)$, l'equivalenza logica è dimostrata.

Legge dell'Assorbimento (2) I

Exercise 2

Dimostrare la seconda legge dell'assorbimento, usando le tavole di verità:

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

Legge dell'Assorbimento (2) II

Soluzione

Costruiamo la tavola di verità.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

Poiché la colonna dei valori di verità di p è identica alla colonna finale di $p \vee (p \wedge q)$, l'equivalenza logica è dimostrata.

Doppia Implicazione (Bicondizionale)

Definizione

Date due proposizioni p e q, la loro **doppia implicazione** si indica con $p \leftrightarrow q$ e si legge "p se e solo se q".
L'espressione è **vera** quando p e q hanno lo stesso valore di verità (entrambe vere o entrambe false).
Equivale alla congiunzione di due implicazioni:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \land (q \to p)$$

Exercise 3

Ricavare le tavole di verità delle seguenti:

1. $a \wedge (b \to a)$
2. $(a \to b) \wedge ((c \leftrightarrow \neg a) \vee b)$
3. $(a \wedge (a \to b)) \to b$
4. $(a \leftrightarrow a) \to (b \leftrightarrow \neg b)$

Sommario

Proposizione dalla tabella di verità

Data la proposizione $p \to q$:

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

vogliamo costruirne una equivalente a partire dalla tabella di verità.

Definizione (Forma Normale Disgiuntiva (DNF))

Si costruisce facendo la **disgiunzione** (OR) di congiunzioni (AND) di formule basiche[1] , delle righe in cui il risultato è 1.

$$(p \land q) \lor (\neg p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$$

[1] Una formula basica è una variabile proposizionale o la sua negazione.

Proposizione dalla tabella di verità

Data la proposizione $p \to q$:

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

vogliamo costruirne una equivalente a partire dalla tabella di verità.

Definizione (Forma Normale Congiuntiva (CNF))

Si costruisce facendo la **congiunzione** (AND) di disgiunzioni (OR) di formule basiche[1] , delle righe in cui il risultato è 0.

$$(\neg p \vee q)$$

[1] Una formula basica è una variabile proposizionale o la sua negazione.

Dimostrazione dell'equivalenza

Si può dimostrare che le due formulazioni sono equivalenti. Nel nostro esempio:

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) &\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge (q \vee \neg q)) \\
&\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge (\top)) \\
&\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p) \\
&\equiv (p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p) \\
&\equiv (\top) \wedge (q \vee \neg p) \\
&\equiv q \vee \neg p \\
&\equiv \neg p \vee q
\end{aligned}
$$

Esercizio: Implicazione e Congiunzione

Exercise 4

Dimostrare la seguente equivalenza, che lega l'implicazione alla congiunzione, senza usare le tavole di verità:

$$(p \wedge q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$$

Soluzione

$$\begin{aligned}
(p \wedge q) \to r &\equiv \neg(p \wedge q) \vee r && \text{Def. di } \to \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r && \text{De Morgan} \\
&\equiv \neg p \vee \neg q \vee (r \vee r) && \text{Idempotenza di } \vee \\
&\equiv (\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r) && \text{Associatività e Commutatività} \\
&\equiv (p \to r) \vee (q \to r) && \text{Def. di } \to
\end{aligned}$$

Esercizio: Tautologia del Modus Tollens I

Exercise 5

Dimostrare che la formula del *Modus Tollens* è una tautologia (cioè è sempre vera), usando le tavole di verità:

$$((p \to q) \land \neg q) \to \neg p$$

Esercizio: Tautologia del Modus Tollens II

Soluzione

Costruiamo la tavola di verità completa.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$(p \to q) \wedge \neg q$	$((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$
1	1	0	0	1	0	**1**
1	0	0	1	0	0	**1**
0	1	1	0	1	0	**1**
0	0	1	1	1	1	**1**

Poiché la colonna finale della tavola di verità contiene solo valori 1, la formula è una tautologia.

Exercise 6

Dimostrazione con equivalenze logiche
Sfruttando le proprietà viste (distributività, De Morgan, etc.), dimostrare la seguente equivalenza, senza usare le tavole di verità:

$$(p \to q) \land (p \to r) \equiv p \to (q \land r)$$

Exercise 6

Dimostrazione con equivalenze logiche
Sfruttando le proprietà viste (distributività, De Morgan, etc.), dimostrare la seguente equivalenza, senza usare le tavole di verità:

$$(p \to q) \land (p \to r) \equiv p \to (q \land r)$$

Soluzione

$$\begin{aligned}
(p \to q) \land (p \to r) &\equiv (\neg p \lor q) \land (\neg p \lor r) && \text{Def. di } \to \\
&\equiv \neg p \lor (q \land r) && \text{Prop. distributiva} \\
&\equiv p \to (q \land r) && \text{Def. di } \to
\end{aligned}$$

Sommario

Quantificatori: negazione

Definizione (Regole per la negazione dei quantificatori)

Valgono le seguenti:

$$\neg(\forall x.p(x)) \equiv \exists x : \neg p(x)$$
$$\neg(\exists x : p(x)) \equiv \forall x.\neg p(x)$$

Quantificatori: negazione

Definizione (Regole per la negazione dei quantificatori)

Valgono le seguenti:

$$\neg(\forall x.p(x)) \equiv \exists x : \neg p(x)$$
$$\neg(\exists x : p(x)) \equiv \forall x.\neg p(x)$$

La prima regola equivale a esibire un **controesempio** per confutare un enunciato.

Esempio

"Il quadrato di un intero è sempre pari."

Quantificatori: negazione

Definizione (Regole per la negazione dei quantificatori)

Valgono le seguenti:

$$\neg(\forall x. p(x)) \equiv \exists x : \neg p(x)$$
$$\neg(\exists x : p(x)) \equiv \forall x. \neg p(x)$$

La prima regola equivale a esibire un **controesempio** per confutare un enunciato.

Esempio

"Il quadrato di un intero è sempre pari." Falso, esiste il numero 5 il cui quadrato è 25 (dispari).

Esercizi: trovare un controesempio

Exercise 7

Confutare le seguenti proposizioni (dominio: $\mathbb{N}$):

1. $\forall n, 3n + 6 \geq 5n$
2. $\forall n, 10n^2 > n^3$
3. $\forall n, -\frac{3}{56}n + 2 > e^{\frac{n^2}{577}}$

In alcuni casi meglio farsi aiutare dal PC :)