Tutorato di Logica

Manuel Di Agostino

Università di Parma

4 novembre 2025

Sommario

Sommario

Definizione

Definizione (Funzione)

*Una **funzione** $f : A \to B$ è una relazione su A, B*

- ***ovunque definita***: $\forall x \in A . \exists y \in B : (x, y) \in f$
- ***funzionale***: $\forall x \in A . \exists$*al più* $y \in B : (x, y) \in f$

Proprietà (iniettività)

*Una funzione $f : A \to B$ è **iniettiva** sse*

$$\forall x_1 \in A. \forall x_2 \in A. (f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2) \equiv$$
$$\forall x_1 \in A. \forall x_2 \in A. (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$$

Proprietà (suriettività)

*Una funzione $f : A \to B$ è **suriettiva** sse*

$$\forall y \in B. \exists x \in A : y = f(x)$$

Proprietà (biettività)

*Una funzione $f : A \to B$ è **biettiva** (biunivoca) sse*

$$\forall y \in B. \exists! x \in A : y = f(x)$$

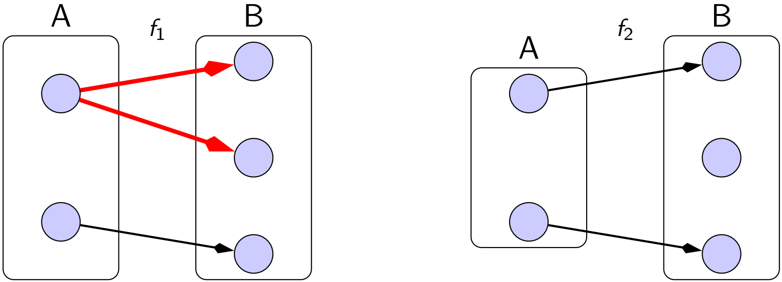
Proprietà

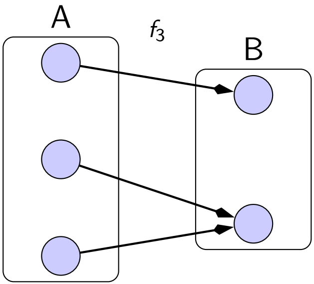
*Due insiemi A, B si dicono **equipotenti** sse esiste una funzione $f : A \to B$ biunivoca.*

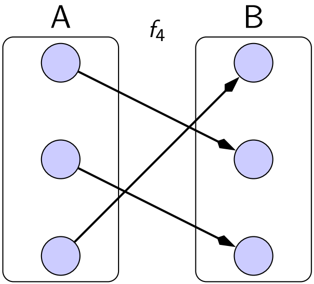
Sommario

Esercizio 1

Si classifichino (in termini di iniettività, suriettività e biettività) le seguenti relazioni da A a B.




A
f_3
B


A
f_4
B

Esercizio 2

Si classifichino (in termini di iniettività, suriettività e biettività) le seguenti funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$.

1. $f(n) = 42$
2. $f(n) = 2n$
3. $f(n) = 2n + 1$
4. $f(n) = n^2$

Esercizio 3

Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni.
Si supponga che **sia** f **che** g **siano biettive**.

Si consideri la funzione composta $g \circ f : A \to C$, definita come:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Dimostrare che la funzione composta $g \circ f$ è anch'essa **biettiva**.

Soluzione dell'esercizio 3

Iniettività:

- Siano $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 \neq x_2$
- Per iniettività di f

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

Soluzione dell'esercizio 3

Iniettività:

- Siano $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 \neq x_2$
- Per iniettività di f
$$f(x_1) \neq f(x_2)$$
- Visto che $f(x_1), f(x_2) \in B$, possiamo applicare g a entrambi gli elementi

Soluzione dell'esercizio 3

Iniettività:

- Siano $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 \neq x_2$
- Per iniettività di f

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

- Visto che $f(x_1), f(x_2) \in B$, possiamo applicare g a entrambi gli elementi
- Per iniettività di g si ottiene che

$$g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$$

ossia $g \circ f$ è iniettiva.

Suriettività:

- Per ipotesi g, f sono suriettive, ossia

$$\forall b \in B. \exists a \in A : f(a) = b$$
$$\forall c \in C. \exists b \in B : g(b) = c$$

Suriettività:

- Per ipotesi g, f sono suriettive, ossia

$$\forall b \in B. \exists a \in A : f(a) = b$$
$$\forall c \in C. \exists b \in B : g(b) = c$$

- Consideriamo ora un elemento $c \in C$. Per suriettività di g esiste un certo elemento $b \in B$ per cui $g(b) = c$
- Analogamente, per suriettività di f si ha che esiste un certo $a \in A$ per cui $f(a) = b$

Suriettività:

- Per ipotesi g, f sono suriettive, ossia

$$\forall b \in B . \exists a \in A : f(a) = b$$
$$\forall c \in C . \exists b \in B : g(b) = c$$

- Consideriamo ora un elemento $c \in C$. Per suriettività di g esiste un certo elemento $b \in B$ per cui $g(b) = c$
- Analogamente, per suriettività di f si ha che esiste un certo $a \in A$ per cui $f(a) = b$
- Ma allora

$$\forall c \in C . \exists a \in A : g(f(a)) = c$$

ossia $g \circ f$ è suriettiva. $\square$

Esercizio 4 Appello del 10/07/2023

Sia $i \in \mathbb{N}$ fissato. Si consideri la seguente funzione:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^i \end{aligned}$$

Supponiamo che i sia pari, ovvero che $\exists n : i = 2n$. Stabilire se:

- f è iniettiva,
- f è suriettiva,
- f è biunivoca.

Soluzione dell'esercizio 4

- f **è iniettiva?**
- Ricordiamo la definizione di iniettività:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.(f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2)$$

- Per dimostrare che f *non* è iniettiva, dobbiamo trovare un controesempio che soddisfi la negazione:

$$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} : (f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2)$$

- Scegliamo ad esempio $x_1 = 2, x_2 = -2$
- Osserviamo che:

$$f(x_1) = (x_1)^i \overset{(i \text{ pari})}{=} (x_1)^{2n} = (2^2)^n = 4^n$$

- Analogamente:

$$f(x_2) = (x_2)^i \overset{(i \text{ pari})}{=} (x_2)^{2n} = ((-2)^2)^n = 4^n$$

- Scegliamo ad esempio $x_1 = 2, x_2 = -2$
- Osserviamo che:

$$f(x_1) = (x_1)^i \overset{(i \text{ pari})}{=} (x_1)^{2n} = (2^2)^n = 4^n$$

- Analogamente:

$$f(x_2) = (x_2)^i \overset{(i \text{ pari})}{=} (x_2)^{2n} = ((-2)^2)^n = 4^n$$

Quindi f **NON è iniettiva**.

- **f è suriettiva?**
- Ricordiamo la definizione di suriettività:

$$\forall y \in \mathbb{R}.\exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)$$

- Per dimostrare che f *non* è suriettiva, dobbiamo trovare un controesempio che soddisfi la negazione:

$$\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}. f(x) \neq y$$

- **f è suriettiva?**
- Ricordiamo la definizione di suriettività:

$$\forall y \in \mathbb{R}.\exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)$$

- Per dimostrare che f *non* è suriettiva, dobbiamo trovare un controesempio che soddisfi la negazione:

$$\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}.f(x) \neq y$$

- Essendo i pari, necessariamente $\forall x \in \mathbb{R}.x^i \geq 0$
- Ossia l'immagine di f è l'insieme dei reali non negativi

- f **è suriettiva?**
- Ricordiamo la definizione di suriettività:

$$\forall y \in \mathbb{R}.\exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)$$

- Per dimostrare che f *non* è suriettiva, dobbiamo trovare un controesempio che soddisfi la negazione:

$$\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}.f(x) \neq y$$

- Essendo i pari, necessariamente $\forall x \in \mathbb{R}.x^i \geq 0$
- Ossia l'immagine di f è l'insieme dei reali non negativi
- Allora basta scegliere $y = -1$: non esiste alcun $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = x^i = -1$.

- f **è suriettiva?**
- Ricordiamo la definizione di suriettività:

$$\forall y \in \mathbb{R}. \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)$$

- Per dimostrare che f *non* è suriettiva, dobbiamo trovare un controesempio che soddisfi la negazione:

$$\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}. f(x) \neq y$$

- Essendo i pari, necessariamente $\forall x \in \mathbb{R}. x^i \geq 0$
- Ossia l'immagine di f è l'insieme dei reali non negativi
- Allora basta scegliere $y = -1$: non esiste alcun $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = x^i = -1$.

Quindi f **NON è suriettiva**.

Esercizio 5

Si consideri la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (la funzione **Fattoriale**, solitamente indicata con $n!$) definita ricorsivamente nel seguente modo:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n \cdot f(n-1) & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Si risponda alle seguenti domande:

- Quanto vale $f(4)$?
- Quanto vale $f(7)$?

Soluzione dell'esercizio 5

- Calcoliamo $f(4)$:

$$
\begin{aligned}
f(4) &= 4 \cdot f(3) \\
&= 4 \cdot 3 \cdot f(2) \\
&= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot f(1) \\
&= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot f(0) \\
&= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \\
&= 24
\end{aligned}
$$

Soluzione dell'esercizio 5

- Calcoliamo $f(4)$:

$$\begin{aligned} f(4) &= 4 \cdot f(3) \\ &= 4 \cdot 3 \cdot f(2) \\ &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot f(1) \\ &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot f(0) \\ &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 24 \end{aligned}$$

- Calcoliamo ora $f(7)$:

$$\begin{aligned} f(7) &= 7 \cdot f(6) \\ &= 7 \cdot 6 \cdot f(5) \\ &= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot f(4) \\ &= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 24 \\ &= 5040 \end{aligned}$$

Esercizio 6 Appello del 14/02/2023

Sia $a \in \mathbb{N}$ un numero naturale arbitrario e sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione definita ricorsivamente nel seguente modo:

$$f(n) = \begin{cases} a & \text{se } n = 0 \\ \frac{f(n-1)}{2} & \text{se } f(n-1) \text{ è pari} \\ 3f(n-1) + 1 & \text{se } f(n-1) \text{ è dispari} \end{cases}$$

Si risponda alle seguenti domande:

- Se $f(0) = 6$, quanto vale $f(10)$?
- Se $f(0) = 52$, quanto vale $f(10)$?
- Se $f(0) = 2048$, quanto vale $f(10)$?

Soluzione

- **Caso** $f(0) = 6$:

$$
\begin{aligned}
& f(0) = 6 \text{ (pari)} \\
\Rightarrow\ & f(1) = \frac{f(0)}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ (dispari)} \\
\Rightarrow\ & f(2) = 3(f(1)) + 1 = 3(3) + 1 = 10 \text{ (pari)} \quad (*) \\
\Rightarrow\ & f(3) = \frac{f(2)}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ (dispari)} \\
\Rightarrow\ & f(4) = 3(f(3)) + 1 = 3(5) + 1 = 16 \text{ (pari)} \\
\Rightarrow\ & f(5) = \frac{f(4)}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ (pari)} \\
& \quad\vdots
\end{aligned}
$$

- **Caso** $f(0) = 6$ (continua):

$$\Rightarrow f(6) = \frac{f(5)}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ (pari)}$$
$$\Rightarrow f(7) = \frac{f(6)}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ (pari)}$$
$$\Rightarrow f(8) = \frac{f(7)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ (dispari)}$$
$$\Rightarrow f(9) = 3(f(8)) + 1 = 3(1) + 1 = 4 \text{ (pari)}$$
$$\Rightarrow \mathbf{f(10)} = \frac{f(9)}{2} = \frac{4}{2} = \mathbf{2}$$

- **Caso** $f(0) = 52$:

$$\begin{aligned}
& f(0) = 52 \text{ (pari)} \\
\Rightarrow\ & f(1) = \frac{f(0)}{2} = \frac{52}{2} = 26 \text{ (pari)} \\
\Rightarrow\ & f(2) = \frac{f(1)}{2} = \frac{26}{2} = 13 \text{ (dispari)} \\
\Rightarrow\ & f(3) = 3(f(2)) + 1 = 3(13) + 1 = 40 \text{ (pari)} \\
\Rightarrow\ & f(4) = \frac{f(3)}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ (pari)} \\
\Rightarrow\ & f(5) = \frac{f(4)}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ (pari)}
\end{aligned}$$

I passaggi successivi da $f(5) = 10$ sono uguali a quelli fatti da $(*)$, quindi $\mathbf{f(10) = 2}$.

- **Caso** $f(0) = 2048$:

$$
\begin{aligned}
& f(0) = 2048 \text{ (pari)} \\
\Rightarrow\ & f(1) = \frac{f(0)}{2} = 1024 \text{ (pari)} \\
\Rightarrow\ & f(2) = \frac{f(1)}{2} = 512 \text{ (pari)} \\
\Rightarrow\ & f(3) = \frac{f(2)}{2} = 256 \text{ (pari)} \\
\Rightarrow\ & f(4) = \frac{f(3)}{2} = 128 \text{ (pari)} \\
\Rightarrow\ & f(5) = \frac{f(4)}{2} = 64 \text{ (pari)}
\end{aligned}
$$

- **Caso** $f(0) = 2048$ (continua):

$$\Rightarrow f(6) = \frac{f(5)}{2} = 32 \text{ (pari)}$$

$$\Rightarrow f(7) = \frac{f(6)}{2} = 16 \text{ (pari)}$$

$$\Rightarrow f(8) = \frac{f(7)}{2} = 8 \text{ (pari)}$$

$$\Rightarrow f(9) = \frac{f(8)}{2} = 4 \text{ (pari)}$$

$$\Rightarrow \mathbf{f(10)} = \frac{f(9)}{2} = \mathbf{2}$$

Esercizio 7

Siano A, B due insiemi non vuoti tali che $|A| = n$ e $|B| = k$. Si dimostri che il numero di funzioni $f : A \to B$ è k^n.

Soluzione

- Dobbiamo dimostrare che l'insieme

$$\{f \in \mathcal{F} \mid \text{"}f \text{ funzione da } A \text{ a } B\text{"}, |A| = n, |B| = k\}$$

è equipotente ad un insieme con k^n elementi.

Soluzione

- Dobbiamo dimostrare che l'insieme

$$\{f \in \mathcal{F} \mid \text{"}f \text{ funzione da } A \text{ a } B\text{"}, |A| = n, |B| = k\}$$

  è equipotente ad un insieme con k^n elementi.
- Possiamo identificare una funzione in base a come vengono mappati i valori da A in B:

$$\underbrace{\begin{matrix} a_1 & \mapsto & b_1 \\ a_2 & \mapsto & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & \mapsto & b_1 \end{matrix}}_{f_1} \qquad \underbrace{\begin{matrix} a_1 & \mapsto & \color{red}{b_2} \\ a_2 & \mapsto & \color{red}{b_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & \mapsto & \color{red}{b_2} \end{matrix}}_{f_2}$$

  In questo esempio f_1, f_2 sono funzioni costanti che mappano tutti gli elementi di A in b_1, rispettivamente in b_2.

- Quindi posso identificare una funzione tramite una tupla di n elementi che rappresenta come sono stati mappati i valori $a_1, \ldots, a_n$:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= (b_1, b_1, \ldots, b_1) \\
f_2 &= (b_2, b_2, \ldots, b_2) \\
f_3 &= (b_1, b_2, \ldots, b_2) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

- Quindi posso identificare una funzione tramite una tupla di n elementi che rappresenta come sono stati mappati i valori $a_1, \ldots, a_n$:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= (b_1, b_1, \ldots, b_1) \\
f_2 &= (b_2, b_2, \ldots, b_2) \\
f_3 &= (b_1, b_2, \ldots, b_2) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

- Il nuovo problema da risolvere è trovare la cardinalità dell'insieme:

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in B, \ldots, x_n \in B\} = B \times \ldots \times B = B^k$$

- Quindi posso identificare una funzione tramite una tupla di n elementi che rappresenta come sono stati mappati i valori $a_1, \ldots, a_n$:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= (b_1, b_1, \ldots, b_1) \\
f_2 &= (b_2, b_2, \ldots, b_2) \\
f_3 &= (b_1, b_2, \ldots, b_2) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

- Il nuovo problema da risolvere è trovare la cardinalità dell'insieme:

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in B, \ldots, x_n \in B\} = B \times \ldots \times B = B^k$$

- Banalmente, $|B^k| = k^n$. $\square$