Algoritmi e Strutture Dati

Foglio 8
09/05/2025

Tutti i grafi degli esercizi seguenti sono non-diretti, senza cappi (i.e., archi della forma (v, v)) e senza archi paralleli.

Esercizio 1. Determinate grado e diametro del grafo di Petersen.

Esercizio 2. Dimostrate che un qualsiasi grafo ha un numero pari di vertici il cui grado è dispari.

Esercizio 3. Dimostrate che, se un grafo contiene un cammino tra due vertici u e v, allora contiene un cammino semplice tra u e v.

Esercizio 4. Sia $G = (V, E)$ un grafo. Sia $\sim$ la relazione definita su V nel modo seguente: $u \sim v$ se e solo se u è raggiungibile da v in G (i.e., esiste un cammino tra u e v in G). Verificate che $\sim$ è una relazione di equivalenza. Dimostrate poi che i vertici delle classi di equivalenza per la relazione $\sim$ sono esattamente i vertici delle componenti connesse di G.

Esercizio 5. Sia G un grafo in cui tutti i vertici hanno grado almeno 2. Dimostrate che G contiene un ciclo.

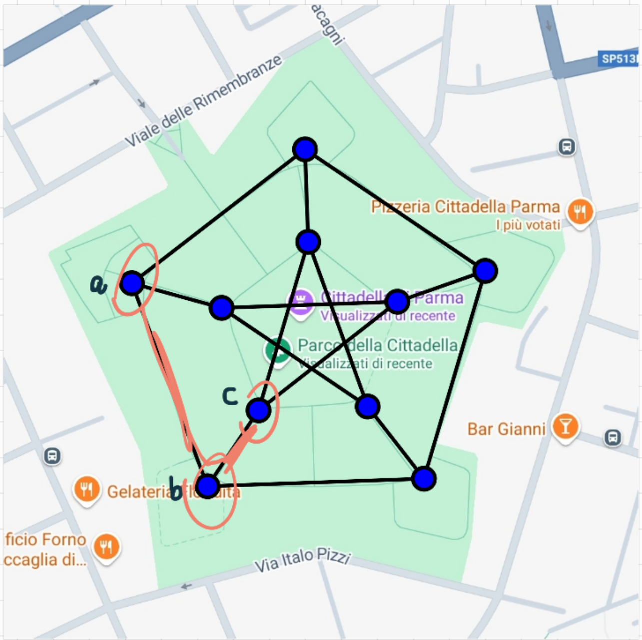
Sugg.: Cominciate considerando un cammino in G di lunghezza massima.

Esercizio 6. Sia G un grafo in cui tutti i vertici hanno grado almeno δ. Dimostrate che G contiene un cammino di lunghezza almeno δ.

Esercizio 7. Sia K_n il grafo completo su n vertici, vale a dire il grafo contenente un arco tra una qualsiasi coppia di vertici. Abbiamo visto a lezione che K_4 è un grafo planare. Dimostrate che K_5 non è un grafo planare.

Sugg.: Procedete per assurdo, cominciando a disegnare un ciclo di lunghezza 3.

Esercizio 1. Determinate grado e diametro del grafo di Petersen.



1) GRADO : " Massimo numero di archi incidenti su un singolo nodo "

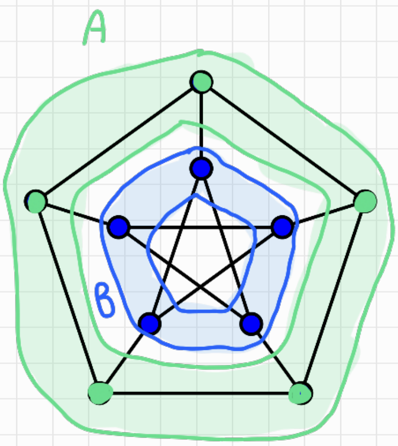
$\rightsquigarrow$ 3

2) DIAMETRO : " Massima distanza tra due vertici " $d(G) := \max\limits_{u,v \in V} \delta(u,v)$

$\rightsquigarrow$ 2

- Dimostriamolo.

  - $d(G) \geq 2$, perché esiste il cammino $\langle a, b, c \rangle$ e i nodi a, c non sono adiacenti
  - $d(G) \leq 2$ sempre infatti, siano $u, v \in V$; ci sono solo questi casi:
    - $u, v \in A \Rightarrow$ tutte le distanze sono max 2
    - $u, v \in B \Rightarrow$ " "
    - $u \in A$, $v \in B$ o viceversa : analogo



Esercizio 2. Dimostrate che un qualsiasi grafo ha un numero pari di vertici il cui grado è dispari.

- Ricordiamo che $\underbrace{\sum_{v \in V} \delta(v)}_{\text{PARI !}} = 2|E|$ per ogni $G = (V, E)$.

- Essendo:

$$\underbrace{\sum_{\substack{v \in V: \\ \delta(v) \text{ pari}}} \delta(v)}_{=: P} + \sum_{\substack{v \in V: \\ \delta(v) \text{ dispari}}} \delta(v) = 2|E|$$

segue che

$$\sum_{\substack{v \in V: \\ \delta(v) \text{ dispari}}} \delta(v) = 2|E| - P$$

e' pari

- Ma quindi il n. di vertici con grado dispari e' pari, poichè devo sommare necessariamente un numero pari di interi dispari per ottenere una quantità pari.

$\square$

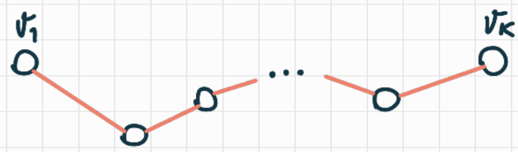
Esercizio 3. Dimostrate che, se un grafo contiene un cammino tra due vertici u e v, allora contiene un cammino semplice tra u e v.

- Definiamo un cammino generico tra u e v:

  $p := \langle v_1, v_2, —, v_K \rangle \quad , \quad v_1 = u \quad , v_K = v$

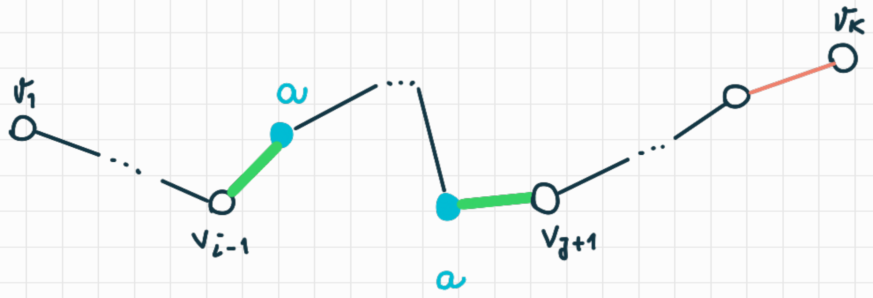
  supponiamo anche che non sia SEMPLICE.

- Proviamo a capire com'e' fatto p:

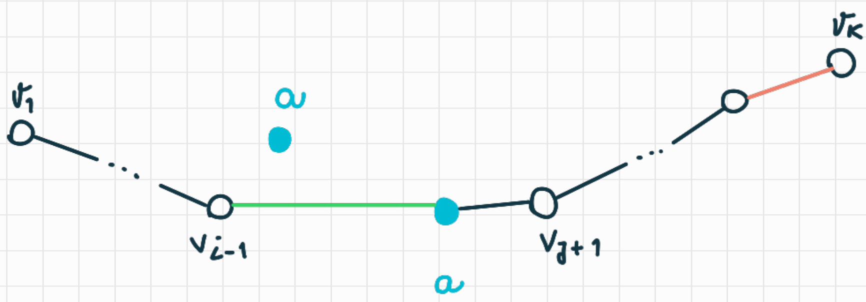


se non e' semplice, c'e' almeno un nodo che si ripete in p, diciamo che

$\exists\, i,j \in [1,K] : \quad v_i = v_j \ , \ i \neq j$



quindi esistono gli archi (v_{i-1}, a) e (a, v_{j+1})



- Il nuovo cammino $\langle v_1, —, v_{i-1}, a, v_{j+1}, —, v_K \rangle$ ha sicuramente un vertice ripetuto in meno rispetto all'originale.

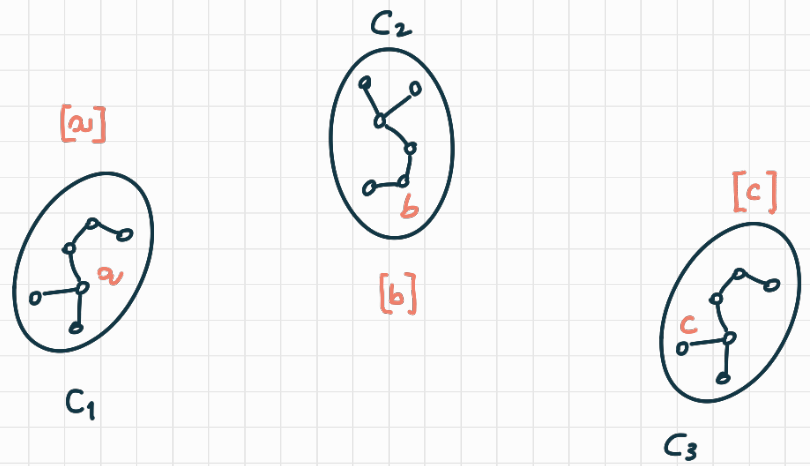
→ RIPETO finchè non ho ∅ vertici ripetuti ! $\square$

Esercizio 4. Sia $G = (V, E)$ un grafo. Sia $\sim$ la relazione definita su V nel modo seguente: $u \sim v$ se e solo se u è raggiungibile da v in G (i.e., esiste un cammino tra u e v in G). Verificate che $\sim$ è una relazione di equivalenza. Dimostrate poi che i vertici delle classi di equivalenza per la relazione $\sim$ sono esattamente i vertici delle componenti connesse di G.

1) '$\sim$' e' di EQUIVALENZA :

- RIFLESSIVA : $v \sim v \quad \forall v \in V$, si cammino banale
- SIMMETRICA : se $u \sim v$ esiste $(u, v) \Rightarrow v \sim u$, G non diretto
- TRANSITIVA : se $u \sim v$, $v \sim x$ vuol dire che esistono $(u,v), (v,x)$
  $\Rightarrow p := \langle u, v, x \rangle \Rightarrow u \sim x$.

2)



Sia $\mathbb{E} = \{e_1, \dots, e_J\}$ l'insieme delle classi di equivalenza di G . Vogliamo dimostrare che :

Un insieme di vertici e' una classe di eq. indotta da '$\sim$' su G
sse quell' insieme e' un sottografo connesso di G

$\boxed{\Rightarrow}$

- Sia e_i una classe di eq. e consideriamo un suo rappresentante x . Per definizione di '$\sim$'

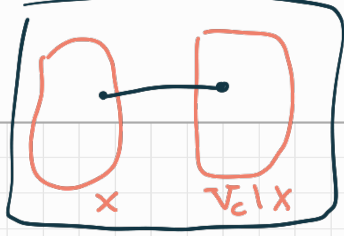
  $\forall v \in e_i : \quad v \sim x$

  ossia tutti i nodi della partizione sono raggiungibili da x .
  Inoltre

  $\forall u \notin e_i : \quad u \nsim x$

  ossia u non e' raggiungibile da x

$\Rightarrow$ e_i e' SOTTOGRAFO CONNESSO



- Sia $C = (V_c, E_c)$ un sottografo connesso di G. Per definizione, per qualunque sottoinsieme $X \subset V_c$, $\delta(X) \neq \emptyset$. (*)
- Vogliamo dimostrare che $\forall u,v \in V_c$ esiste un path che collega u e v
  - Fissiamo $L_1 = \{u\}$ $\overset{(*)}{\Rightarrow} \exists x_2 \in V_c \setminus \{u\} : x_2 \sim u$

    Se $x_2 \equiv v$ ho finito, altrimenti continuo.
  - Ora $L_2 = \{u, x_2\} \equiv X$ $\overset{(*)}{\Rightarrow} \exists x_3 \in V_c \setminus \{u, x_2\} : x_3 \sim u$

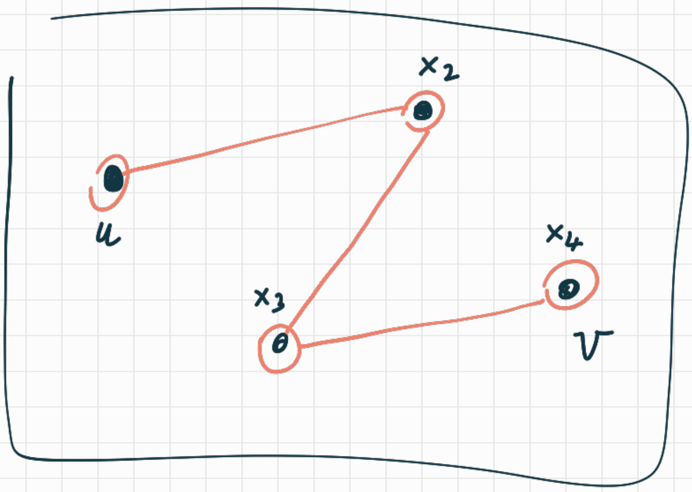
    Se $x_2 \equiv v$ ho finito, altrimenti continuo.

    $\vdots$ // dopo al piu' $|V_c|$ passi
  - $L_{|V_c|-1} = \underbrace{\{u, x_2, x_3, \dots, x_{|V_c|-1}\}}_{|V_c|-1 \text{ elem.}} \overset{(*)}{\Rightarrow} \exists v \in V \setminus L_{|V_c|-1} : v \sim u$

$\Rightarrow \exists x_K \equiv v : \quad u \sim v$ con percorso $\langle u, x_1, \dots, x_{K-1}, v \rangle$

- Per l'arbitrarietà di u,v possiamo affermare che tutti i vertici in C sono mutualmente raggiungibili e costituiscono una classe di equivalenza per '$\sim$'.

$\square$



Esercizio 5. Sia G un grafo in cui tutti i vertici hanno grado almeno 2. Dimostrate che G contiene un ciclo.

Sugg.: Cominciate considerando un cammino in G di lunghezza massima.

- Consideriamo un cammino di G con lunghezza massimale K.

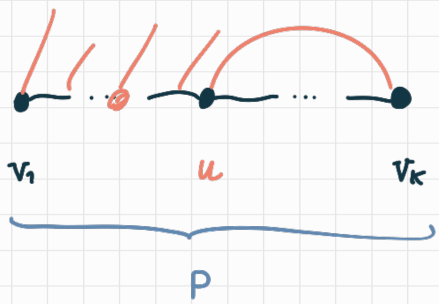
  $$p := \langle v_1, v_2, \ldots, v_{K-1}, v_K \rangle$$

- Poiché $\delta(v_K) \geq 2$ per Hp, allora:

  $$\exists u \in V : u \neq v_{K-1},\ (v_K, u) \in E$$

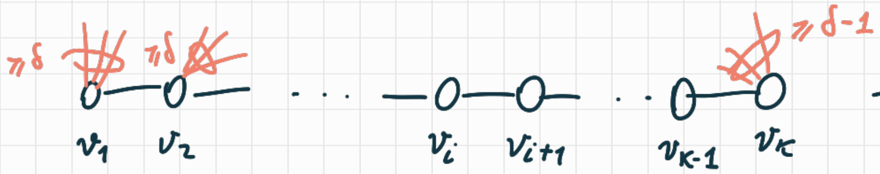
  ossia esiste un nodo diverso da v_{K-1} a cui v_K e' collegato.

- Inoltre questo nodo $u \in p$: se così non fosse, il cammino $\langle v_1, -, v_K, u \rangle$ avrebbe lunghezza $> K$ ↯



$\Rightarrow$ esiste un ciclo ! $\square$

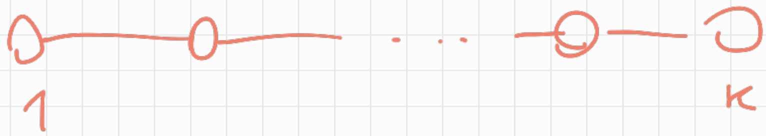
Esercizio 6. Sia G un grafo in cui tutti i vertici hanno grado almeno δ. Dimostrate che G contiene un cammino di lunghezza almeno δ.



$\rightsquigarrow$ P massimale

$|P| = k$

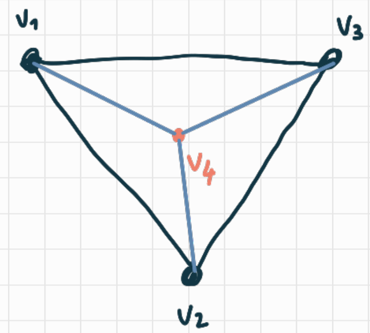
- per assurdo, supponiamo $\underline{k < \delta}$



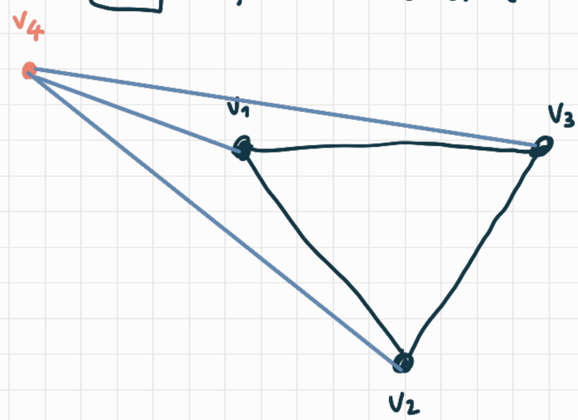
Esercizio 7. Sia K_n il grafo completo su n vertici, vale a dire il grafo contenente un arco tra una qualsiasi coppia di vertici. Abbiamo visto a lezione che K_4 è un grafo planare. Dimostrate che K_5 non è un grafo planare.

Sugg.: Procedete per assurdo, cominciando a disegnare un ciclo di lunghezza 3.

$\boxed{\mathrm{I}}$ v_4 dentro la curva $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

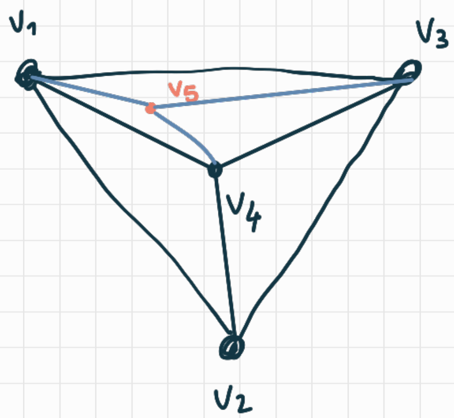


$\boxed{\mathrm{II}}$ v_4 fuori la curva



Vediamo i sottocasi di $\boxed{\mathrm{I}}$:

$\boxed{\mathrm{I}}$ v_5 dentro una delle curve interne $v_{1,4,3}$, $v_{2,3,4}$, $v_{1,2,4}$



Arco (v_5, v_2) ?

$\rightarrow$ INTERSEZIONE : v_5 è in una curva chiusa ma deve raggiungere un vertice fuori dalla curva

$\boxed{\mathrm{II}}$ v_5 fuori dalle curve interne $v_{1,4,3}$, $v_{2,3,4}$, $v_{1,2,4}$

Arco (v_5, v_4) ?

$\rightarrow$ INTERSEZIONE : v_5 è fuori dalla curva chiusa $v_{1,2,3}$ mentre v_4 e' interno