# Medidas estadísticas



7

TEMA

# Esquema

**Medidas estadísticas**

- Media y varianza
  - Media muestral
  - Varianza muesetral
  - Estimador insesgado
  - Convergencia de la media muestral
- Independencia de las variables aleatorias
  - Variables dependientes
  - Métodos de estimación
  - Variables independientes
  - Estimación de la media mediante intervalos
- Técnicas de reducción de varianza
  - Números aleatorios comunes
  - Variable de control
  - Variación antitética
- Test de hipótesis
  - Test de hipótesis con respecto a un parámetro
  - Test de bondad de ajuste


© Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

# Ideas clave

## 7.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

Además, lee la «Unidad 2», **páginas 33-76** del siguiente libro:

» Sánchez, E. A. (2014). *Probabilidad y estadística II*. México: Larousse- Grupo Editorial Patria.
Disponible en la Biblioteca Virtual de UNIR.

**Las medidas estadísticas miden el comportamiento de las variables aleatorias y su estimación es esencial en los modelos de simulación.** Para medir la bondad de ajuste de las estimaciones realizadas se realizan posteriormente al cálculo unos test de hipótesis que las refrendan o no.

Las ideas claves de este tema son:

» Media y varianza de una variable aleatoria.
» Media muestral y varianza muestral.
» Estimadores insesgados.
» Independencia de las variables.
» Estimación de la media.
» Métodos de reducción de varianza.
» Test de hipótesis.

## 7.2. Media y varianza

Con el objeto de cuantificar o resumir el comportamiento de una variable aleatoria, existen distintas funciones y medidas. En concreto, se considera medida de posición, a la media o esperanza $\mu$ y medida de dispersión a la varianza $\sigma^2$.

El cálculo de la media se puede realizar por medio de las siguientes ecuaciones para una variable discreta y una variable continua, respectivamente.

 © Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

$$E[X] = \sum_i x_i P[X = x_i],$$

$$siendo\ x_i, los\ valores\ que\ toma\ la\ variable\ aleatoria\ discreta\ con\ i = 1,2, \ldots$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

$$con\ f(x), función\ de\ densidad\ de\ la\ variable\ aleatoria\ continua$$

Ecuación 1Esperanza de una variable aleatoria X discreta y esperanza de una variable aleatoria X continua.

La varianza de una variable aleatoria X se define como:

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

Ecuación 2 Varianza de una variable aleatoria X

Para profundizar sobre algunos conceptos y consulta de ejercicios resueltos lee la «Unidad 2», **páginas 33-76** del siguiente libro:

» Sánchez, E. A. (2014). *Probabilidad y estadística II*. México: Larousse- Grupo Editorial Patria.
  Disponible en la Biblioteca Virtual de UNIR.

En cada una de las ejecuciones de un simulador, se generan una serie de valores aleatorios concretos que son los valores de la variables aleatorias $X_1$, $X_{2, \ldots,}$ $X_n$ que no son otra cosa los elementos de un fenómeno o proceso estocástico discreto en el tiempo. Este proceso, si se considera estacionario en sentido amplio, cumple que todas las variables tienen la misma media y la misma desviación típica ya que su distribución de probabilidad instantánea es la misma en todos los instantes de tiempo.

Sin embargo, lo que interesa conocer es la estimación de la media a partir de una muestra obtenida en una simulación.

Para ello se definirán los siguientes estimadores, dada una muestra de tamaño *n*

$$\bar{X}(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Ecuación 3Media muestral o promedio

$$S^2(n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} [X_i - \bar{X}(n)]^2}{n-1}$$

Ecuación 4. Varianza muestral o cuasi-varianza


© Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

En un proceso estocástico estacionario en sentido amplio, la media muestral es un estimador insesgado de la media del proceso $\mu$, es decir, $E[\bar{X}(n)] = \mu$. Además se puede afirmar que si el proceso estocástico tiene media finita, la probabilidad de que la media muestral converja a la media es 1, según la ley débil de los grandes números (Grimmett & Stirzaker, 2001) mediante la relación siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} P[|\bar{X}(n) - \mu| < \varepsilon] = 1 \ \forall \varepsilon > 0$$

Ecuación 5 Convergencia de la media muestral

La interpretación de todo esto desde el punto de vista de la simulación es que cuanto más dure la simulación los valores que se obtienen se van acercando a la media $\mu$. Es decir, cuanto mayor sea el tamaño de la muestra se obtendrán resultados mejores y más fiables. En una simulación, por tanto, es imprescindible determinar el tamaño de la muestra para que la variable aleatoria $\bar{X}(n)$ y por tanto el experimento de simulación, cumplan con unos estándares de calidad.

## 7.3. Variables aleatorias independientes y no independientes

Un factor que se debe tener en cuenta en cuenta para la estimación de la media del proceso estocástico a partir de una muestra, es la independencia de las variables aleatorias.

Si el proceso estocástico es aleatorio puro, sus variables aleatorias son independientes, es decir, el comportamiento de unas no dependen del comportamientos de las otras, e idénticamente distribuidas, se cumple que la varianza muestral es un estimador insesgado, es decir, $E[S^2(n)] = \sigma^2$.

Sin embargo, no siempre se puede suponer que las variables aleatorias son independientes entre sí, como por ejemplo, en sistemas de cola en los que el tiempo de espera en la cola depende del tiempo de espera de las otras y en estos casos, aunque la media muestral sigue siendo un estimador insesgado, la varianza muestral no lo es.
Por tanto, se pueden dar dos situaciones:

 © Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

» Estimación de la media mediante intervalos con variables aleatorias independientes, con media y varianza muestrales como estimadores insesgados, se definen dos parámetros:

a. Calidad, que es la probabilidad $1-\alpha$ de que la media $\mu$, se encuentre en un intervalo centrado en la estimación de la media muestral, $\bar{X}(n)$, de ancho la tolerancia.

b. Tolerancia $t$, que representa la longitud del semi-intervalo centrado en la media muestral y en el que se encontrará el valor real de la media con la probabilidad que indica la calidad.

En este caso, a partir de la obtención de un número indeterminado de muestras aleatorias se calcula un intervalo de confianza del 100 % con calidad $1-\alpha$, para el parámetros estimado, en este caso, la media, para cada una de las muestras y por tanto, el 100 % de los intervalos contiene el verdadero valor de la muestra.

» En el caso de variables dependientes, existen diversos métodos como el método de bloques, el algoritmo de Law y Carson y el método de regeneración, entre otros (Alexopoulos & Seila, 1998) .

**Estimación mediante intervalos**

Con este método se trata de obtener el valor de un parámetro determinando entre que dos valores se encuentra con un cierto grado de confianza.

Por tanto se trata de establecer el intervalo de confianza del parámetro poblacional que está delimitado por un par de valores que se calcula en función de las medidas de una muestra aleatoria.

A continuación se enumerará la forma de calcular los intervalos de confianza para los parámetros y las distribuciones más importantes Intervalo de confianza para la media de una distribución Normal $N(\mu,\sigma)$de varianza conocida

$$I_{\mu}^{1-\alpha} = [\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}],$$

$$donde\ Z_{\frac{\alpha}{2}}\ es\ el\ \frac{100\alpha}{2}\ percentil\ de\ la\ distribución\ N(0,1)$$

 © Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

Intervalo de confianza para la media de una distribución Normal $N(\mu, \sigma)$ de varianza desconocida:

$$I_{\mu}^{1-\alpha} = [\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}]$$

$donde\ \ t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\ \ es\ valor\ de\ la\ distribución\ t - student\ con\ n-1\ grados\ de\ libertad\ y\ s^2$ $es\ la\ cuasivarianza\ muestral.$

Intervalo de confianza para la varianza y la desviación típica ☐de una distribución Normal $N(\mu, \sigma)$

$$I_{\sigma}^{1-\alpha} = [\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},n-1)}}}, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},n-1)}}}]$$

$$distribución\ \chi^2\ con\ n-1\ grados\ de\ libertad\ y\ s^2\ el\ estimador\ varianza\ muestral$$

Intervalo de confianza para el parámetro p de una distribución Binomial $B(n, p)$

$$I_{\mu}^{1-\alpha} = [\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}],$$

$$donde\ Z_{\frac{\alpha}{2}}\ es\ el\ \frac{100\alpha}{2}\ percentil\ de\ la\ distribución\ N(0,1) y\ \hat{p} = \frac{f}{n}\ y\ \hat{q} = 1 - \frac{f}{n}, siendo\ f\ el\ número\ de\ veces\ que\ se\ obtiene\ éxito\ en\ n\ pruebas$$

**Ejemplo**: Se trata de obtener el intervalo de confianza para la estimación de la media de un parámetro en una población de 16 individuos, sabiendo que la media muestral es 68.71739 y la desviación típica de 3.7 con distribución normal y un grado de confianza de $\alpha = 0.05$. Se aplicará

$I_{\mu}^{1-\alpha} = [\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

Percentil de la variable normal N(0,1). $(1 - \alpha/2 = 1 - 0.025 = 0.975)$.

Aplicando la fórmula, el intervalo es:

$$[67.96133\ , 69.47345]$$


© Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

## 7.4. Técnicas de reducción de varianza

La complejidad de los sistemas simulados implica un tiempo de procesamiento elevado. Por tanto, es una tarea importante mejorar la eficiencia de la simulación, bien porque se pueda conseguir que el intervalo de confianza sea el mejor para un mismo tamaño de muestra o bien porque se pueda reducir el tamaño de la muestra necesaria para conseguir el intervalo de confianza oportuno.

Con el objeto de conseguir estos beneficios se han desarrollado lo que se conoce como técnicas de reducción de varianza para reducir la incertidumbre en la salida.

Existen tres técnicas, cuya aplicación depende de las características del modelo. Estas técnicas son el método de los números aleatorios comunes, el método de la variable de control y el método de la variación antitética o bien el *bootstrap* que es un método estadístico para facilitar los cálculos complejos mediante el muestreo de muestras.

**Método de los números aleatorios comunes**

Este método se usa para comparar dos configuraciones distintas $X_1 y\, X_2$ de una muestra de una variable aleatoria y se trata de estimar $E(X_1) \mp E(\,X_2)$. Para esto se usa la misma distribución uniforme y se busca introducir una correlación positiva entre los resultados comparados.

Si se consideran $X_i^1$ y $X_i^2$, como las muestras i-ésimas de las dos configuraciones, se pretende estimar la esperanza $\beta = E\left(X_i^1\right) - E(X_i^2)$, se puede obtener las muestra $Z_i = X_i^1$-$X_i^2, i = 1,2,..n$, de forma que se puede obtener $\beta = E[Z_i]$. Para ello se toma como estimador insesgado

$$\bar{Z}(n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{n}$$

y

$$Var(\bar{Z}(n)] = \frac{Var[Z_i]}{n}$$

 © Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

si las variables $Z_i$son independientes e idénticamente distribuidas se cumple que la covarianza es 0, por lo que

$$Var[\bar{Z}(n)] = \frac{Var\left[X_i^1\right] + Var[X_i^2]}{n}$$

**Ejemplo** (Gazmuri, Pedro, 2016)

Dado un sistema de colas se desea estimar el tiempo de espera de los 100 primeros clientes y se busca encontrar el modelo de simulación mejor entre dos, sabiendo que el segundo es mejor que el primero.
Se realizaron 100 muestras independientes para los siguientes casos:

» Números aleatorios independientes para cada modelo
» Servicios independientes, y tiempos de llegadas coordinados
» Tiempos de servicio coordinados
» Coordinación de ambos tiempos

Se consideran $X_i^1$y $X_i^2$ el valor medio de espera de 100 clientes en cada modelo y para la muestra i y se estimó $Var[\bar{Z}(n)]$, con el objeto de conocer si se obtiene que el segundo modelo es mejor que el primero. Así mismo se calculó la proporción de error en las 100 réplicas.

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $Var[\bar{Z}(n)]$ | 25.5 | 11.6 | 10.5 | 0.1 |
| Proporción de error | 0.44 | 0.37 | 0.4 | 0.05 |

Con la reducción se mejora la precisión del intervalo de confianza.

 © Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

## 7.5. Test de hipótesis

Los test de hipótesis se realizan para refrendar o no una serie de hipótesis sobre una o más variables aleatorias o sobre la distribución de probabilidad de una variable, a partir de la información que se extrae del conjunto de muestras de esa variable, obtenidas en un experimento.

**Test de hipótesis con respecto a un parámetro**

Los test de hipótesis paramétricos se realizan a partir de las muestras de una variable aleatoria.

Los pasos que se llevan a cabo una serie de pasos:

- Determinación de la hipótesis nula $\mathcal{H}_0$y la hipótesis alternativa $\mathcal{H}_1$.
- Selección del **estadístico del test** o estadístico de contraste que se puede calcular a partir de las muestras, por ejemplo la media o la varianza muestral.
- Elección de la **región crítica** o de rechazo que estará formada por el conjunto de valores tales que si la hipótesis nula es verdadera la probabilidad de que el estadístico del test pertenezca al conjunto sea un valor preestablecido $\alpha$, que se conoce como **nivel de significación del test** y que normalmente suele ser de un 5 % o un 1 %.
- Cálculo del estadístico del test sobre las muestras que se conoce como **valor experimental del estadístico de contraste**. Dependiendo de su valor, si está en la región crítica entonces se rechaza la hipótesis nula y se acepta la alternativa y en otro caso no se puede rechazar la nula, lo que no implica que la hipótesis nula sea verdadera.

La decisión final del test puede dar lugar a que se cometan una serie de errores.

**Errores tipo I.** Error cometido al rechazar la hipótesis nula cuando en realidad era verdadera. Se produce con probabilidad α.

**Errores tipo II.** Error cometido al aceptar la hipótesis cuando es falsa. Se produce con probabilidad β.


© Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

La **potencia del test** está determinada por

$$P[Rechazar\ \mathcal{H}_0|\mathcal{H}_0\ es\ falsa] = 1 - \beta$$

Si el test no consigue rechazar la hipótesis nula se mostrará la incapacidad del test para rechazarla y quizás sea necesario un test más potente.

**Ejemplo:** Se realiza una encuesta a 1500 personas para que respondan a la pregunta sobre si las redes sociales ayudan a mejorar el nivel de vida. Las respuestas se daban en una escala de 1 (muy en desacuerdo) a 10 (muy de acuerdo). La media de las respuestas fue de 4,28 y la desviación típica fue de 1,34.

Se trata de probar la siguiente hipótesis:

$$\mathcal{H}_0:\ \mu = 4$$

$$\mathcal{H}_1: \mu \neq 4$$

- » El estadístico de contraste será la media.
- » La regla de decisión será que $\mathcal{H}_0$ se rechaza si $Z < -1{,}96$ ó $Z > 1{,}96$
- » Se calculará el valor del estadístico, dado que se conoce la desviación típica será:

$$Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{4{,}28-4}{1{,}34/\sqrt{1500}=} = \frac{0{,}28}{0.034} = 8{,}23$$

Luego se rechaza la hipótesis.

### Test de hipótesis de bondad de ajuste: test Chi-cuadrado

En este caso se trata de realizar un test de bondad de ajuste de la distribución de una variable aleatoria. Es decir, a partir de una muestra se trata de considerar si los valores obtenidos se corresponden con la distribución de la variable.


© Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

Las hipótesis son las siguientes:

**Hipótesis nula:** la variable aleatoria sigue la distribución de probabilidad considerada.

**Hipótesis alternativa:** la variable aleatoria no sigue la distribución de probabilidad considerada.

Para refrendar o no estas hipótesis se puede usar el test chi-cuadrado, que básicamente consiste en la clasifican las muestras obtenidas de acuerdo a unas categorías que se establecen de forma que cada muestra solo puede pertenecer a una categoría.

Los pasos que se deben realizar son:

- » Se considera una muestra aleatoria de tamaño $n$ agrupada en $k$ clases para una variable aleatoria $X$, y sea $n_i$ la frecuencia absoluta de la i-ésima clase, para $i = 1,2, \dots k$.
- » Sea $p_i$ la probabilidad asociada a la clase $i$ , y $n.p_i$ los valores esperados asociados a cada clase $i$ . Los valores esperados deberían se mayores o iguales que 5 por lo que si alguno es menor se agrupa con otros.
- » Se calcula el estadístico chi-cuadrado mediante la siguiente ecuación:

$$\chi[n,k]^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n.p_i)^2}{n.p_i}$$

- » Se calcula el número de grados de libertad $m$ de chi-cuadrado, de forma que:
    - $m = k - 1$ y restar una unidad por cada parámetro independiente estimado.
- » El criterio de rechazo de la hipótesis nula será $\chi[n,k]^2 \geq \chi_\alpha^2$

y α es la probabilidad de que una variable chi cuadrado con m grados de libertad exceda $\chi_\alpha^2$

 © Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

**Ejemplo:** Con el objeto de mejorar los hábitos alimenticios de los niños se ha realizado un programa de concienciación sobre el consumo de fruta entre las 420 familias de los niños de un colegio. Antes de comenzar con el programa se ha realizado una encuesta de la que se extrajo que el 55 % de las familias consumía la ración de fruta recomendada menos de dos días a la semana, el 25 % la consumía más de dos, pero menos de cuatro días y el 20 % la consumía todos los días.

Tras el programa de concienciación se volvió a realizar la misma encuesta y se obtuvo que 150 familias consumían la ración de fruta recomendada menos de dos días a la semana, 126 consumía más de dos, pero menos de cuatro días, 144 la consumía todos los días.

» El test se va a ejecutar con un nivel de significancia del 5 %, es decir, $\alpha = 0.05$

**La hipótesis nula** $\mathcal{H}_0$ representa que el programa no ha surtido ningún efecto y por tanto la distribución de probabilidad seguirá siendo la misma 0.55, 0.25 y 0.20.

**La hipótesis alternativa** $\mathcal{H}_1$ es que la hipótesis nula es falsa.

» El estadístico elegido es:

$$\chi[n,k]^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n.p_i)^2}{n.p_i}$$

Y primero se debe comprobar si el tamaño de la muestra elegido es adecuado. Para ello se calcula $\min(n.p_0, n.p_1, n.p_2) \geq 5$. Y se obtiene $\min(420.0.55, 420.0.25, 420.0{,}2) = \min(231{,}105{,}84) = 84$. Luego si es adecuado.

» Se establece la regla de decisión que dependerá de los grados de libertad que en este caso son 2 y del nivel de significancia 5%. Un valor adecuado es 5,99. Se rechaza $\mathcal{H}_0$ si $\chi[n,k]^2 \geq 5{,}99$

» Se calcula el estadístico del test

$$\chi[n,k]^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n.p_i)^2}{n.p_i} = \frac{(150-420.0.55)^2}{420.0.55} + \frac{(126-420.0.25)^2}{420.0.25} + \frac{(144-420.0.2)^2}{420.0.2} = \frac{(150-231)^2}{231} + \frac{(126-105)^2}{105} + \frac{(144-84)^2}{84} = \frac{6561}{231} + \frac{441}{105} + \frac{60}{84} = 28{,}40 + 4{,}2 + 0{,}71 = 33{,}31$$


© Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

» Luego se rechaza la hipótesis nula o lo que es lo mismo, el programa ha cambiado los hábitos alimenticios. Aunque este test no aporta detalles de cómo se ha producido el cambio, si se construye una tabla comparando los valores de la segunda encuesta y la distribución esperada de acuerdo con la primera encuesta se observa que:

| | No más de 2 días | Entre 2 y 4 días | Todos los días |
|---|---|---|---|
| Frecuencias obtenidas | 150 | 126 | 144 |
| Frecuencias esperadas | 231 | 105 | 84 |

Los hábitos han cambiado de forma bastante radical porque ha subido mucho el número de familias que consumen fruta todos los días.

## 7.6. Referencias bibliográficas

Alexopoulos, C., y Seila, A. F. (1998). Output Data Analysis. En J. Banks, *Handbook of Simulation* (pp. 225–272). Nueva York: John Wiley & Sons, Inc. Recuperado de http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/9780470172445.ch7/summary

Gazmuri, P. (2016). *Clase n°11 métodos de reducción de varianza ics3723 simulación*. Recuperado de http://documents.mx/documents/clase-n11-metodos-de-reduccion-de-varianza-ics3723-simulacion-profesor.html

Grimmett, G. y Stirzaker, D. (2001). *Probability and Random Processes*. New York: OUP Oxford.

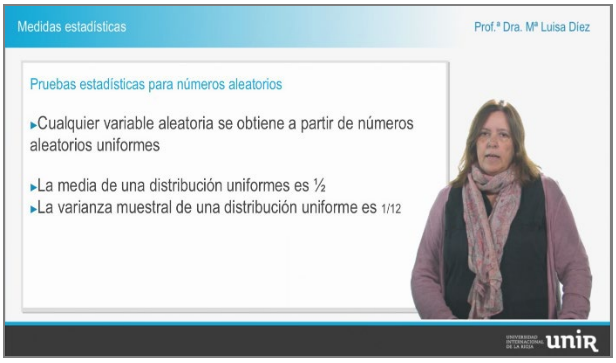

© Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

# Lo + recomendado

## Lecciones magistrales

**Medidas estadísticas**

En la siguiente lección magistral presentaremos brevemente alguna de las pruebas que se pueden realizar sobre los números aleatorios.




Accede a la lección magistral a través del aula virtual

## No dejes de leer…

**Prueba de hipótesis de una muestra de ejercicios resueltos**

Lista de ejercicios sobre prueba de hipótesis.

Accede al documento a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:
https://www.academia.edu/17064932/Prueba_de_Hipotesis_de_una_muestra_ejercicios_resueltos


© Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

**Cuarta Unidad Didáctica. Estadística Inferencial**

Capítulo sobre estadística inferencial con conceptos y ejercicios sobre métodos de estimación.

Accede al artículo a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:
http://biplot.usal.es/problemas/libro/4%20Inferencia.pdf

**Hypothesis Testing - Chi Squared Test**

Ejercicios resueltos sobre prueba de hipótesis con el test de Chi-cuadrado

Accede al artículo a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:
http://sphweb.bumc.bu.edu/otlt/MPH-Modules/BS/BS704_HypothesisTesting-ChiSquare/BS704_HypothesisTesting-ChiSquare_print.html

## No dejes de ver…

**Reducción de varianza**

Vídeo sobre métodos de reducción.


Accede al vídeo a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:
https://www.youtube.com/watch?v=57AZ-VkKlA0

 © Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

# + Información

## A fondo

**Métodos de reducción de varianza**

Presentación sobre los métodos que se pueden aplicar para la realización de reducción de varianza.

Accede al artículo a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:
http://www.fing.edu.uy/inco/cursos/simulacion/archivos/clases/clase12web.pdf

***Bootstrap: fundamentos e introducción a sus aplicaciones****

Solanas, A y Sierra, V. (1992). Bootstrap: fundamentos e introducción a sus palicaciones. *Anuario de Psicología, 55,* 143-154.

Artículo sobre técnicas de *boostrap* para estimación del error estadístico

Accede al artículo a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:
http://www.raco.cat/index.php/anuariopsicologia/article/viewFile/61175/88740

***Dos pruebas de hipótesis basadas en estimadores para el parámetro de forma de la distribución weibull***

Villanueva, A. y Villaseñor, J. A. (2006). *Dos pruebas de hipótesis basadas en estimadores para el parámetro de forma de la distribución weibull.* México: Red Agrociendia.

Artículo sobre pruebas de hipótesis.

Accede al artículo a través de la Biblioteca Virtual de UNIR

 © Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

# Bibliografía


Alexopoulos, C. y Seila, A. F. (1998). Output Data Analysis. En J. Banks, *Handbook of Simulation* (pp. 225–272). Nueva York: John Wiley & Sons, Inc. Recuperado de http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/9780470172445.ch7/summary

Félez, J., Suárez, B., y Romero, G. (2015). *Introducción*. Recuperado de http://ocw.upm.es/ingenieria-mecanica/simulacion-en-ingenieria-mecanica/contenidos/teoria/T01_Introduccion.pdf

Gazmuri, P. (2016). *Clase n°11 métodos de reducción de varianza ics3723 simulación*. Recuperado de http://documents.mx/documents/clase-n11-metodos-de-reduccion-de-varianza-ics3723-simulacion-profesor.html

Grimmett, G.y Stirzaker, D. (2001). *Probability and Random Processes*. Oxford: New York: OUP Oxford.

Taha, H. A. (2004). *Investigación de operaciones*. México: Pearson Educación.

Procesos Estocásticos. (2007). Teoría de la Comunicación. Universidad de Cantabria. Recuperado de http://ocw.unican.es/ensenanzas-tecnicas/teoria-de-la-comunicacion/material-de-clase-2/TC_Tema_7.pdf

Villanueva, A y Villaseñor, J. A. (2006). *Dos pruebas de hipótesis basadas en estimadores para el parámetro de forma de la distribución weibull*. México: Red Agrociendia.



© Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

# Recursos externos

**Simulations**

Aplicación para la simulación de distribuciones.

Accede a la página a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:
http://onlinestatbook.com/stat_sim/index.html


© Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

# Test

**1.** La media de una variable aleatoria se considera:

A. Una medida de posición.

B. Una medida de dispersión.

C. Un estimador estadístico.

D. Ninguna es verdadera.

**2.** La media muestral:

A. Es un estimador insesgado de la media solo si las variables aleatorias son independientes.

B. Es un estimador insesgado de la media solo si las variables aleatorias son dependientes.

C. Es un estimador insesgado de la media en proceso estocástico estacionario en sentido amplio.

D. Ninguna es verdadera.

**3.** El intervalo de confianza:

A. Está centrado en la media muestral.

B. Está centrado en la varianza muestral.

C. Está centrado en la media de la variable.

D. Ninguna de las anteriores es verdadera.

**4.** En la estimación de la media mediante intervalos con variables aleatorias independientes:

A. La calidad es la longitud del intervalo confianza.

B. La calidad es el error mínimo que se produce en la estimación.

C. Es la probabilidad de que la media estimada se encuentre en el intervalo de confianza.

D. Ninguna de las anteriores es verdadera.

**5.** Las técnicas de reducción de varianza (dos correctas):

A. Se usan para mejorar el tamaño del intervalo de confianza.

B. Para reducir el tamaño de la muestra.

C. No mejora la incertidumbre.

D. No es una técnica aplicable a la estimación de parámetros estadísticos.


© Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

**6.** El test de bondad de ajuste:

A. Comprueba la hipótesis referente a un parámetro de la variable aleatoria.

B. Comprueba las hipótesis referentes al ajuste de la variable a la distribución.

C. Comprueba las dos hipótesis mencionadas.

D. Ninguna de las anteriores es verdadera es una técnica aplicable a la estimación de parámetros estadísticos.

**7.** El error de tipo I del test de hipótesis:

A. Rechaza la hipótesis alternativa cuando es verdadera.

B. Rechaza la hipótesis alternativa cuando es falsa.

C. Rechaza la hipótesis nula cuando es verdadera.

D. Rechaza la hipótesis nula cuando es falsa.


© Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)