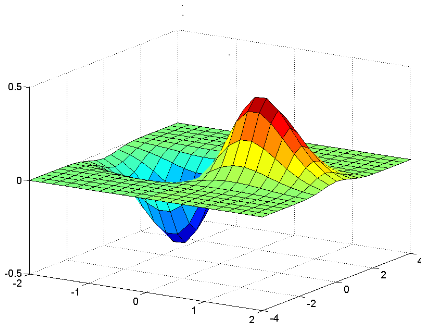
Problemas resueltos sobre Problemas de Contorno

Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Alicia Cordero, Neus Garrido, Juan R. Torregrosa

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA



Contenido

PROBLEMA EDP1

Consideremos la ecuación en derivadas parciales:

$$u_t = u_{xx} + e^{-t}, \qquad x \in [0,1], \;\; t > 0$$

con las condiciones:

$$\begin{array}{ll} u(x,0) = 1 - x, & x \in [0,1] \\ u_x(0,t) = 0, & t > 0 \\ u_x(1,t) + u(1,t) = 0, & t > 0 \end{array}$$

a) Describe la transformación del problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden $O(k + h^2)$.

b) Aplica este esquema para determinar la solución en el instante $t = 1$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.0005$. Representa la solución.

c) Aplica el método de Crank-Nicholson para determinar la solución en el instante $t = 1$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.0005$. Compara los resultados obtenidos con los del apartado b).

a) Tomamos los nodos $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, nx$ y $t_j = jk$, $j = 0, 1, \dots, nt$, con $h = 1/nx$ y $k = 1/nt$, siendo nx y nt el número de subintervalos en cada variable. Aplicando diferencias progresivas en u_t y simétricas en u_{xx}, obtenemos:

$$u_{i,j+1} = (1-2\lambda)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + ke^{-t_j}, \quad i = 0, \dots, nx, \; j = 0, \dots, nt-1,$$

siendo $\lambda = k/h^2$. Sin embargo, para los valores de los índices $i = 0$ y $i = nx$ aparecen en esta expresión las incógnitas $u_{-1,j}$ y $u_{nx+1,j}$, respectivamente, que no están definidas. Para evitarlo, discretizamos las condiciones de contorno derivadas mediante diferencias finitas de orden 2,

$$\begin{aligned} 0 &= u_x(0, t_j) \approx \frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2h}, \\ 0 &= u_x(1, t_j) + u(1, t_j) \approx \frac{u_{nx+1,j} - u_{nx-1,j}}{2h} + u_{nx,j}, \end{aligned}$$

de donde se deduce que $u_{-1,j} \approx u_{1,j}$ y $u_{nx+1,j} \approx u_{nx-1,j} - 2hu_{nx,j}$.

Solución PROBLEMA EDP1

Sustituyendo estas aproximaciones obtenemos, para cada j fija y arbitraria en $j = 0, \ldots, nt-1$, el sistema:

$$
\begin{aligned}
u_{0,j+1} &= (1-2\lambda)u_{0,j} + 2\lambda u_{1,j} + ke^{-t_j}, \\
u_{i,j+1} &= (1-2\lambda)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + ke^{-t_j}, i = 1, \ldots, nx-1, \\
u_{nx,j+1} &= (1-2\lambda-2\lambda h)u_{nx,j} + 2\lambda u_{nx-1,j} + ke^{-t_j},
\end{aligned}
$$

Vamos a implementar este método en un archivo .m adaptando el que se hizo para la ecuación del calor homogénea con condiciones Dirichlet. Tendremos que modificar la inicialización de la matriz U y el contenido del bucle, que debe incluir expresiones específicas para la primera y última fila de U.

Llamamos al fichero expcalorEDP1.m

Solución PROBLEMA EDP1

$function\ U = expcalorEDP1(nx, a, b, nt, T, \alpha, f)$
$h = (b-a)/nx;\ k = T/nt$
$\lambda = \alpha^2 * k/h^2;$ % parámetro de la convergencia
$x = a : h : b;;\ t = 0 : k : T;$
$U = zeros(nx+1, nt+1);$ % inicialización matriz U
$U(:,1) = feval(f, x);$ % solución en el instante t=0
$L = 1 : nx-1;\ C = 2 : nx;\ R = 3 : nx+1;$ % rangos de indices
$for\ j = 1 : nt$
$U(1, j+1) = 2*\lambda*U(2, j) + (1-2*\lambda)*U(1, j) + k*exp(-t(j));$
$U(C, j+1) = \lambda*(U(L, j) + U(R, j)) + (1-2*\lambda)*U(C, j) + k*exp(-t(j));$
$U(nx+1, j+1) = 2*\lambda*U(nx, j) + (1-2*\lambda*(1+h))*U(nx+1, j) + k*exp(-t(j));$
end

En este caso, el parámetro de convergencia es $\lambda = \dfrac{\alpha^2 k}{h^2} = 0.05 \leq 1/2$ por lo que podemos asegurar la convergencia del método. Además, teniendo en cuenta que el instante final es $T = 1$, el número de subintervalos en el eje temporal es $nt = 2000$. Con todos estos valores llamamos a la función expcalorEDP1.m:

$$U = expcalorEDP1(10, 0, 1, 2000, 1, 1, 'f')$$

En la Tabla mostramos, tanto la solución aproximada en el instante máximo $T = 1$ así como la solución aproximada en instantes intermedios.

x	$u(x, 0.25)$	$u(x, 0.5)$	$u(x, 0.75)$	$u(x, 1)$
0	0.729305	0.768393	0.774869	0.750627
0.1	0.726125	0.765870	0.772289	0.748074
0.2	0.716686	0.758300	0.764545	0.740419
0.3	0.701281	0.745676	0.751637	0.727671
0.4	0.680352	0.727990	0.733559	0.709846
0.5	0.654434	0.705226	0.710308	0.686967
0.6	0.624081	0.677361	0.681881	0.659065
0.7	0.589789	0.644359	0.648275	0.626181
0.8	0.551922	0.606177	0.609495	0.588366
0.9	0.510655	0.562758	0.565551	0.545683
1	0.465934	0.514039	0.516462	0.498211

Table: Aproximaciones por el método explícito

En la Figura se muestra el valor de la función incógnita en todos los pares de nodos.

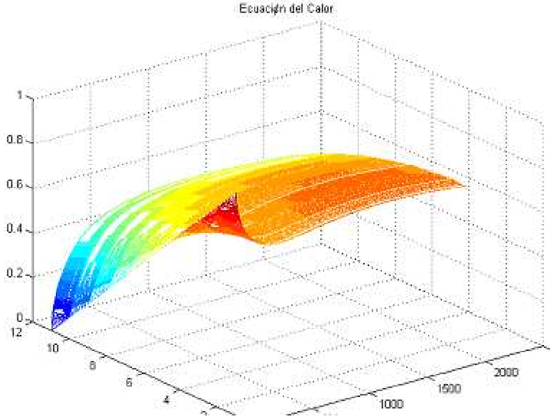


Figure: Solución aproximada por el método explícito

c) Al aplicar la idea de Crank-Nicholson sobre el problema que nos ocupa, obtenemos para $i = 0, \ldots, nx$ y $j = 0, \ldots, nt-1$:

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} - u_{i,j} &= \frac{\lambda}{2}\left(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) \\ &+ \frac{k}{2}\left(e^{-t_j} + e^{-t_{j+1}}\right) \end{aligned}$$

Al despejar los términos en el instante t_{j+1} y sustituir $u_{-1,j}$ y $u_{nx+1,j}$ por sus aproximaciones, tal y como se ha hecho en b), nos queda:

$$\begin{aligned} (1+\lambda)u_{0,j+1} - \lambda u_{1,j+1} &= (1-\lambda)u_{0,j} + \lambda u_{1,j} + \tfrac{k}{2}\left(e^{-t_j} + e^{-t_{j+1}}\right) \\ (1+\lambda)u_{i,j+1} - \tfrac{\lambda}{2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) &= (1-\lambda)u_{i,j} + \tfrac{\lambda}{2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \\ &\quad + \tfrac{k}{2}\left(e^{-t_j} + e^{-t_{j+1}}\right) \\ (1+\lambda+h\lambda)u_{nx,j+1} - \lambda u_{nx-1,j+1} &= (1-\lambda-h\lambda)u_{nx,j} + \lambda u_{nx-1,j} \\ &\quad + \tfrac{k}{2}\left(e^{-t_j} + e^{-t_{j+1}}\right) \end{aligned}$$

Así pues, en cada paso j hay que resolver el sistema lineal tridiagonal:

$$Au^{(j+1)} = Bu^{(j)} + p_j,$$

donde $u^{(j)}$ representa la solución en el instante t_j,

$$A = \begin{pmatrix} 1+\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1+\lambda+h\lambda \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & 1-\lambda & \frac{\lambda}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1-\lambda-h\lambda \end{pmatrix}$$

y $p_j = \frac{k}{2}(e^{-t_j} + e^{-t_{j+1}})(1, 1, \ldots, 1)^T$.

Solución PROBLEMA EDP1

Implementamos este método de diferencias finitas, en un fichero dfcalorEDP1.m adaptando el del caso base desarrollado en teoría.

$function\ \ U = dfcalorEDP1(nx, a, b, nt, T, c, f)$
$h = (b - a)/nx;\ x = a : h : b;$ % vector de nodos espaciales
$k = T/nt;\ t = 0 : k : T;$ % vector de nodos temporales
$fx = feval(f, x);\ fx = fx(:);$
$a = c * k/h^2;$
$U = zeros(nx + 1, nt + 1);$
$U(:, 1) = fx;$
$L = 1 : nx - 1;\ C = 2 : nx;\ R = 3 : nx + 1;$ % rangos de índices
$d0 = [(1 + a) * ones(1, nx)\ 1 + a + a * h];$
$d1 = [-a\ \ -a/2 * ones(1, nx - 1)];$
$d2 = [-a/2 * ones(1, nx - 1)\ \ -a];$
$b = zeros(nx + 1, 1);$
$dp = [(1 - a) * ones(1, nx)\ 1 - a - a * h];$
$ds = [a\ a/2 * ones(1, nx - 1)];$
$di = [a/2 * ones(1, nx - 1)\ a];$
$B = diag(dp) + diag(ds, 1) + diag(di, -1);$
$for\ j = 1 : nt$
$\quad p = k/2 * (exp(-t(j)) + exp(-t(j + 1))) * ones(nx + 1, 1);$
$\quad p = B * U(:, j) + p;$
$\quad U(:, j + 1) = Crout(d0, d1, d2, p)';$ % solución del sistema
end

Ejecutando esta función con los datos del problema:

$$U = dfcalorEDP1(10, 0, 1, 2000, 1, 1,' f')$$

x	$u(x, 0.25)$	$u(x, 0.5)$	$u(x, 0.75)$	$u(x, 1)$
0	0.729378	0.768292	0.774739	0.750495
0.1	0.726189	0.765769	0.772158	0.747943
0.2	0.716726	0.758196	0.764416	0.740289
0.3	0.701284	0.745571	0.751510	0.727544
0.4	0.680309	0.727883	0.733435	0.709722
0.5	0.654342	0.705118	0.710188	0.686847
0.6	0.623944	0.677252	0.681765	0.658950
0.7	0.589614	0.644251	0.648165	0.626072
0.8	0.551724	0.606072	0.609392	0.588264
0.9	0.510450	0.562659	0.565455	0.545589
1	0.465740	0.513948	0.516374	0.498125

Table: Aproximaciones por el método de Crank-Nicholson

PROBLEMA EDP2

Consideremos la siguiente ecuación en derivadas parciales, conocida como la ecuación del telégrafo

$$u_{tt} + u_t + 2u = u_{xx}, \qquad 0 < x < 1,\ t > 0$$

con las condiciones de contorno $u(0,t) = u(1,t) = 0$ y las condiciones iniciales $u(x,0) = \text{sen}(\pi x)$ y $u_t(x,0) = 0$.

a) Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden $O(k^2 + h^2)$. Determina la solución en el instante $t = 0.5$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.005$. Representa la solución en los instantes $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.

b) Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas implícito de orden $O(k^2 + h^2)$. Determina la solución en el instante $t = 0.5$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.005$. Compara los resultados obtenidos con los del apartado a).

a) Tomamos $h = 1/nx$ y $k = 0.5/nt$, como pasos espacial y temporal respectivamente, con lo que los nodos de nuestro problema son $x_i = 0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, nx$, y $t_j = 0 + jk$, $j = 0, 1, \ldots, nt$. Utilizamos diferencias finitas centrales y la notación $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$. Así, obtenemos

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} + 2u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2},$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$ y $j = 1, 2, \ldots, nt - 1$. Despejando la solución en el instante t_{j+1} obtenemos

$$\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k}\right) u_{i,j+1} = \left(\frac{2}{k^2} - 2 - \frac{2}{h^2}\right) u_{i,j} + \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{k^2}\right) u_{i,j-1}$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$ y $j = 1, 2, \ldots, nt - 1$.

Primera columna de la matriz U (solución en el instante $t = t_0$)

$$u_{i,0} = \sin(\pi x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, nx - 1$$

A partir de las dos condiciones iniciales, aproximamos la solución en el instante t_1 (segunda columna de la matriz U)

$$\begin{aligned} u(x, 0 + k) &\approx u(x, 0) + u_t(x, 0)k + u_{tt}(x, 0)\frac{k^2}{2} \\ &= \sin(\pi x) + 0k + \frac{k^2}{2}(u_{xx}(x, 0) - u_t(x, 0) - 2u(x, 0)) \\ &= (1 - k^2)\sin(\pi x) + \frac{k^2}{2}u_{xx}(x, 0), \end{aligned}$$

y como

$$u_{xx}(x, 0) \approx \frac{u(x_{i+1}, 0) - 2u(x_i, 0) + u(x_{i-1}, 0)}{h^2} = \frac{\sin(\pi x_{i+1}) - 2\sin(\pi x_i) + \sin(\pi x_{i-1})}{h^2},$$

$$u_{i,1} = \left(1 - k^2 - \frac{k^2}{h^2}\right)\sin(\pi x_i) + \frac{k^2}{2h^2}\left(\sin(\pi x_{i+1}) + \sin(\pi x_{i-1})\right),$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$.

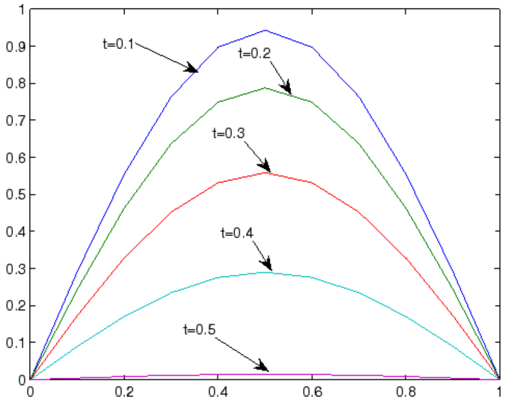
Solución PROBLEMA EDP2

$$U(C,2) = (k^2/(2*h^2))*(fx(L)+fx(R)) + (1-k^2-k^2/h^2)*fx(C);$$

$$U(C,j+1) \quad = \quad c1*(U(L,j)+U(R,j)) + c2*U(C,j) + c3*U(C,j-1);$$

donde $c1 = (2*k^2/(h^2*(2+k)))$, $c2 = (2*k^2/(2+k))*(2/k^2-2-2/h^2)$ y $c3 = (2*k^2/(2+k))*(1/(2*k)-1/k^2)$.

$plot(x,U(:,21),x,U(:,41),x,U(:,61),x,U(:,81),x,U(:,101))$



b) Para el método implícito utilizamos diferencias finitas centrales y aproximamos u_{xx} por la media entre la diferencia central en el instante t_{j+1} y en el instante t_{j-1},

$$\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{k^2}+\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{2k} = \frac{1}{2}\left[\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j-1}-2u_{i,j-1}+u_{i-1,j-1}}{h^2}\right]-2u_{i,j}$$

para $i=1,2,\ldots,nx-1$, $j=1,2,\ldots,nt-1$.

Agrupando los términos en el paso $j+1$ a un lado y todos los demás al otro, resulta

$$\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{h^2}\right)u_{i,j+1}-\frac{1}{2h^2}(u_{i+1,j+1}+u_{i-1,j+1}) =$$
$$=\left(\frac{2}{k^2}-2\right)u_{i,j}+\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{k^2}-\frac{1}{h^2}\right)u_{i,j-1}+\frac{1}{2h^2}(u_{i+1,j-1}+u_{i-1,j-1})$$

para $i=1,2,\ldots,nx-1$ y $j=1,2,\ldots,nt-1$.
La segunda columna de la matriz U, es decir, $u_{i,1}$, $i=1,2,\ldots,nx-1$, se calcula de la misma forma que en el método explícito.

Fijando j y escribiendo todas las ecuaciones para $i = 1, 2, \ldots, nx-1$, obtenemos la expresión matricial del método

$$Au^{(j+1)} = (2/k^2 - 2)u^{(j)} + Bu^{(j-1)}, \quad j = 1, 2, \ldots, nt-1,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{2h^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2h^2} & \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{2h^2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2h^2} & \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{h^2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{2h^2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2h^2} & \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{h^2} \end{pmatrix},$$

$$Au^{(j+1)} = (2/k^2 - 2)u^{(j)} + Bu^{(j-1)}, \quad j = 1, 2, \ldots, nt - 1,$$

$$u^{(0)} = \begin{pmatrix} \sin(\pi x_1) \\ \sin(\pi x_2) \\ \vdots \\ \sin(\pi x_{nx-1}) \end{pmatrix}, \quad u^{(1)} = \begin{pmatrix} \left(1 + k^2 - \frac{k^2}{h^2}\right)\sin(\pi x_1) + \frac{k^2}{2h^2}(\sin(\pi x_2) + \sin(\pi x_0)) \\ \left(1 + k^2 - \frac{k^2}{h^2}\right)\sin(\pi x_2) + \frac{k^2}{2h^2}(\sin(\pi x_3) + \sin(\pi x_1)) \\ \vdots \\ \left(1 + k^2 - \frac{k^2}{h^2}\right)\sin(\pi x_{nx-1}) + \frac{k^2}{2h^2}(\sin(\pi x_{nx}) + \sin(\pi x_{nx-2})) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{h^2} & \frac{1}{2h^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2h^2} & \frac{1}{2k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{h^2} & \cdots & 0 & 0 & \\ 0 & \frac{1}{2h^2} & \frac{1}{2k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{h^2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{h^2} & \frac{1}{2h^2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2h^2} & \frac{1}{2k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{h^2} \end{pmatrix}$$

Solución PROBLEMA EDP2

x	Método explícito Sol. en $t = 0.5$	Método implícito Sol. en $t = 0.5$
0	0	0
0.1	0.004493	0.004515
0.2	0.008545	0.008588
0.3	0.011762	0.011820
0.4	0.013827	0.013896
0.5	0.014538	0.014611
0.6	0.013827	0.013896
0.7	0.011762	0.011820
0.8	0.008545	0.008588
0.9	0.004493	0.004515
1.0	0	0

Table: Solución por los métodos explícito e implícito

El valor máximo de la diferencia, en valor absoluto, de ambos vectores es $m = 7.2668 \times 10^{-5}$.

PROBLEMA EDP3

Consideremos la ecuación de Laplace con condiciones de contorno:

$$\begin{array}{ll} u_{xx}+u_{yy}=0, & -1<x<1,\ -1<y<-1 \\ u(x,1)=0, & u(x,-1)=1 \\ u_x(1,y)=u(1,y), & u_x(-1,y)=-\frac{1}{2}u(-1,y) \end{array} \qquad (1)$$

a) Transforma este problema en un sistema lineal, aplicando diferencias finitas de segundo orden con paso $h=k=0.25$ para x e y, respectivamente.

b) Aplica el método de Gauss-Seidel con tolerancia 0.00001 para resolver el sistema anterior. ¿Cuántas iteraciones son necesarias?

a) Definimos, en primer lugar, sendas particiones de los intervalos en que están definidas las variables x e y:

$$\begin{array}{llll} x_i = -1 + ih, & \text{con} & h = 2/nx, & i = 0, 1, \dots, nx \\ y_j = -1 + jk, & \text{con} & k = 2/ny, & j = 0, 1, \dots, ny \end{array}$$

A continuación, discretizamos la ecuación en derivadas parciales mediante diferencias finitas centrales.

$$u_{i,j} = \frac{1}{2(1+\lambda^2)} \left(\lambda^2 (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\right)$$
$$i = 0, 1, \dots, nx, \; j = 1, 2, \dots, ny - 1$$

donde $\lambda = k/h$.

Observemos que para $i = 0$ e $i = nx$ aparece la función incógnita evaluada en el nodo x_{-1}, y x_{nx+1}, respectivamente. Estos nodos, evidentemente, no pertenecen al intervalo $[-1, 1]$, por lo que utilizaremos las condiciones que sobre la derivada de la función incógnita nos proporciona el enunciado del problema para aproximar el valor de la función incógnita en estos nodos:

$$u_x(-1,y_j)=\frac{u(-1+h,y_j)-u(-1-h,y_j)}{2h}+O(h^2)=-\frac{1}{2}u(-1,y_j)$$
$$u_x(1,y_j)=\frac{u(1+h,y_j)-u(1-h,y_j)}{2h}+O(h^2)=u(1,y_j)$$

de donde obtenemos

$$u_{-1,j}=hu_{0,j}+u_{1,j}$$
$$u_{nx+1,j}=2hu_{nx,j}+u_{nx-1,j}$$

El sistema resultante queda:

$$u_{0,j}=\frac{2\lambda^2u_{1,j}+u_{0,j-1}+u_{0,j+1}}{2(1+\lambda^2)-h\lambda^2} \qquad j=1,\ldots,ny-1$$
$$u_{i,j}=\frac{\lambda^2(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})+u_{i,j-1}+u_{i,j+1}}{2(1+\lambda^2)} \qquad \begin{array}{l} i=1,\ldots,nx-1 \\ j=1,\ldots,ny-1 \end{array}$$
$$u_{nx,j}=\frac{2\lambda^2u_{nx-1,j}+u_{nx,j+1}+u_{nx,j-1}}{2(1+\lambda^2)-2h\lambda^2} \qquad j=1,\ldots,ny-1$$

b) Para aplicar el método de Gauss-Seidel al sistema lineal, generamos la función GSEDP1.m Hay ciertas variaciones con respecto al problema de Laplace estándar.

- Inicialización de la matriz U. No conocemos el valor de la función incógnita para $x = -1$ y $x = 1$. Así, inicializamos la primera fila $u(-1, y_j)$, $j = 0, 1, \ldots, ny$ como un vector progresivo desde $u(-1, -1) = 1$ hasta $u(-1, 1) = 0$. Del mismo modo, inicializamos la última fila $u(1, y_j)$, $j = 0, 1, \ldots, ny$ como el vector progresivo definido desde $u(1, -1) = 1$ hasta $u(1, 1) = 0$.
- Inicializamos el resto de la matriz como el promedio de los valores de contorno.
- Dos bucles anidados que nos permitan movernos por todos los pares de nodos centrales. En el interior del doble bucle, para cada valor fijo de los índices i y j, recalculamos por separado $u_{0,j}$, $u_{i,j}$ y $u_{nx,j}$ empleando las expresiones anteriores.

Solución PROBLEMA EDP3

```
function  [U,iter] = GSEDP1(a,b,c,d,h,k,f0,f1,tol,maxiter)

x = a:h:b;                nx = (b-a)/h;          ny = (d-c)/k;
lambda = k/h;             lambda2 = lambda^2;    beta = 2*(1+lambda2);
beta2 = beta-2*h*lambda2; f0x = feval(f0,x);     f1x = feval(f1,x);

g0 = f0x(1):-k/2:f1x(1);  g1 = g0;
u0 = (sum(f0x+f1x)/(nx+1)+sum(g0+g1)/(ny+1))/4;  % inicializacion
U = u0*ones(nx+1,ny+1);
U(1,:) = g0;              U(nx+1,:) = g1;
U(:,1) = f0x(:);          U(:,ny+1) = f1x(:);

incr = tol+1;          iter = 0;
while  incr>tol && iter<maxiter
    incr = 0;
    for  i = 2:nx
    for  j = 2:ny
            U(1,j) = (2*lambda2*U(2,j)+U(1,j-1)+U(1,j+1))/(beta-h*lambda2);
            v = (lambda2*(U(i-1,j)+U(i+1,j))+U(i,j-1)+U(i,j+1))/beta;
            U(nx+1,j) = (2*lambda2*U(nx,j)+U(nx+1,j-1)+U(nx+1,j+1))/beta2;
            incr = max(incr,abs(U(i,j)-v));
            U(i,j) = v;
    end
    end
iter = iter+1;
end
```

Solución PROBLEMA EDP3

```
>> [U,iter] = GSEDP1(-1,1,-1,1,.25,.25,inline('1+0*x'),inline('0*x'),.00001,200)
```

Al ejecutar la función GSEDP1.m obtenemos, tras 170 iteraciones, la estimación de u tabulada en los nodos (x_i, y_j). Mostramos algunos de estos resultados.

i	$u(x_i,-1)$	$u(x_i,-0.5)$	$u(x_i,0)$	$u(x_i,0.5)$	$u(x_i,1)$
0	1	1.121929	0.921286	0.517137	0
1	1	1.019062	0.831645	0.466834	0
2	1	0.969829	0.787006	0.442498	0
3	1	0.961091	0.783852	0.443206	0
4	1	0.989013	0.822892	0.470209	0
5	1	1.058027	0.910157	0.527349	0
6	1	1.181760	1.057971	0.621463	0
7	1	1.386767	1.285863	0.762708	0
8	1	1.719086	1.620880	0.964777	0

Table: Aproximaciones de Gauss-Seidel

Podemos observar la matriz completa representada en la Figura.

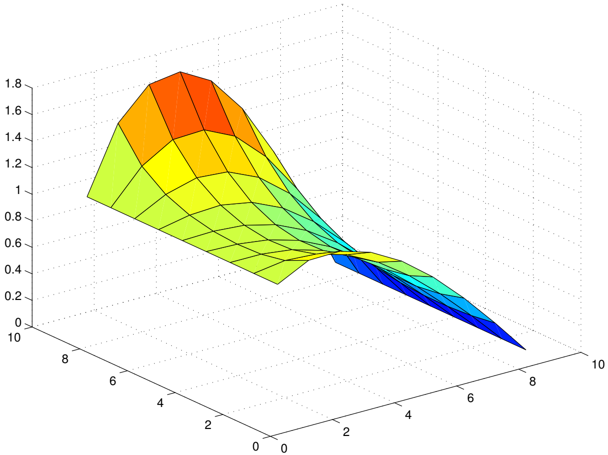


Figure: Aproximación de U por Gauss-Seidel

PROBLEMA EDP4

Consideremos la ecuación en derivadas parciales parabólica

$$u_t - \frac{4}{\pi^2} u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < 4,\ t > 0$$

con la condición inicial

$$u(x,0) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)\left(1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right),\ 0 \leq x \leq 4$$

y las condiciones de contorno

$$u(0,t) = u(4,t) = 0,\ t > 0$$

a) Tomando como paso espacial $h = 0.4$, aproxima la solución del problema en $t = \pi^2$ con el método explícito, tomando el mayor paso temporal que asegure la convergencia.

b) Utilizando los pasos espacial y temporal del apartado anterior, aproxima la solución en el instante $t = \pi^2$ mediante el método de Crank-Nicholson.

c) Compara las aproximaciones obtenidas con la solución exacta del problema

$$u(x,t) = e^{-t}\text{sen}(\pi/2)x + e^{-t/4}\text{sen}(\pi/4)x$$

Solución PROBLEMA EDP4

a) Este problema se ciñe a las condiciones estándar del problema parabólico, lineal, homogéneo y con condiciones de tipo Dirichlet. En nuestro caso, $\lambda = \dfrac{\alpha^2 k}{h^2} = \dfrac{25}{\pi^2} k$ y necesitamos $\lambda \leq 1/2$, por lo que el valor mayor que puede tomar k es $k = \pi^2/50$. Como el instante final es $T = \pi^2$, resulta que $nt = 50$. En la tabla aparecen también los resultados obtenidos para $nt = 1000$ y $nt = 5000$.

x	$nt = 50$	$nt = 1000$	$nt = 5000$
0	0		0
0.1	0.025151	0.026702	0.026767
0.2	0.047836	0.050778	0.050902
0.3	0.065831	0.069866	0.070036
0.4	0.077376	0.082096	0.082295
0.5	0.081342	0.086279	0.086486
0.6	0.077346	0.082016	0.082212
0.7	0.065784	0.069736	0.069901
0.8	0.047788	0.050649	0.050768
0.9	0.025121	0.026621	0.026684
1	0	0	0

Table: Aproximaciones por el método explícito

b) Llamamos a la función `nicalor` con los parámetros de entrada correspondientes a los datos del problema

```
U = nicalor(10,4,50,pi^2,4/pi^2,'f','g','g')
```

y obtenemos una matriz de tamaño 11×51 en cuyas columnas aparecen valores aproximados de la solución en los distintos instantes de tiempo.

```
U(:,51)=
        0
        0.026769
        0.050907
        0.070042
        0.082303
        0.086496
        0.082221
        0.069911
        0.050775
        0.026688
        0
```

c) En la tabla mostramos la solución exacta evaluada en $t = \pi^2$ para todos los nodos espaciales, así como los errores exactos de los métodos explícito y de Crank-Nicholson con 50 subintervalos temporales.

x	Exacta	Error explícito nt=50	Error Crank-Nicholson nt=50
0	0	0	0
0.4	0.026237	0.001086	0.000533
0.8	0.049896	0.002061	0.001010
1.2	0.068658	0.002827	0.001384
1.6	0.080684	0.003309	0.001618
2.0	0.084805	0.003463	0.001691
2.4	0.080624	0.003278	0.001598
2.8	0.068559	0.002776	0.001351
3.2	0.049798	0.002010	0.000977
3.6	0.026176	0.001054	0.000512
4	0.000000	0.000000	0.000000

Table: Solución exacta y errores

PROBLEMA EDP5

Una cuerda de un determinado instrumento musical mide L=80 cm de largo y pesa 1 gramo. Se estira con una tensión T de 40000 gr. En un punto a 20 cm de un extremo, se tira de la cuerda 0.6 cm con respecto a la posición de equilibrio y luego se suelta. El desplazamiento de la cuerda respecto al tiempo viene dado por:

$$u_{tt} = \frac{Tg}{w} u_{xx},$$

siendo w el peso por unidad de longitud y g la aceleración de la gravedad.

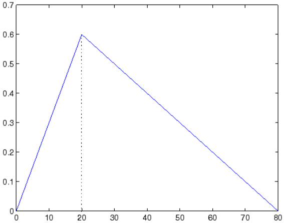
a) Tomando un paso espacial de 10 cm, determina la posición de la cuerda en el instante $t = 1$, utilizando el método explícito con el paso temporal mas grande posible que garantice la convergencia del método.

b) Representa la posición de la cuerda en diferentes instantes de tiempo. ¿Es posible determinar en cuánto tiempo se completa un ciclo de movimiento?

c) Compara el resultado obtenido en el apartado anterior, en lo que a comportamiento periódico se refiere, con la frecuencia exacta que se obtiene mediante la fórmula física correspondiente,

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{Tg}{w}}.$$

a) La ecuación en derivadas parciales que describe las vibraciones de una cuerda es, en nuestro caso
$$u_{tt} = \frac{40000 \cdot 980}{1/80} u_{xx} = 3136 \times 10^6 u_{xx}$$



La condición inicial del problema vendrá dada por

$$u(x,0) = \begin{cases} 0.03x, & 0 \leq x \leq 20 \\ 0.8 - 0.01x, & 20 \leq x \leq 80 \end{cases}$$
$$u_t(x,0) = 0$$

Por otra parte, como la cuerda está sujeta en los extremos,
$$u(0,t) = u(80,t) = 0$$

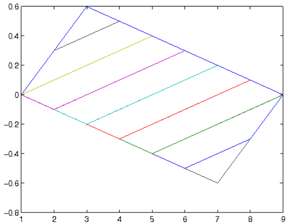
Solución PROBLEMA EDP5

Para aplicar el método explícito analizamos el valor del parámetro de Courant, $\lambda = \dfrac{1}{10}\sqrt{3136 \times 10^6}k = 5600k$, siendo k el paso temporal. Dado que el método explícito es convergente si $\alpha \leq 1$, el valor mayor de k, que cumple esta condición es $k = 1/5600$. El valor de la matriz solución en el último instante es:

```
U(:,5601) =
            0
            0.300000
            0.600000
            0.500000
            0.400000
            0.300000
            0.200000
            0.100000
            0
```

Solución PROBLEMA EDP5

b) Al ejecutar `plot(U)` obtenemos 5601 curvas, pero no se refleja en la gráfica por el movimiento periódico de la cuerda. Calcularemos la periodicidad, utilizando una tolerancia de 10^{-12}.




```
tol = 10^(-12);   j = 1;    incr = tol+1;
while incr>tol
   incr = norm(U(:,1)-U(:,j+1));
   j = j+1;
end
```

Obtenemos $j = 17$. Por tanto, la cuerda sigue un movimiento periódico de periodo $16k$. Luego la frecuencia es

$$fc = \frac{1}{16k} = \frac{1}{16 \cdot 0.000179} = 350\ ciclos/s$$

c) La fórmula estándar de física para el cálculo de la frecuencia es

$$fc = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{Tg}{w}} = \frac{1}{160}\sqrt{\frac{40000 \cdot 980}{1/80}} = 350\ ciclos/s$$

PROBLEMA EDP6

Una cuerda vibrante que se desplaza en un medio elástico satisface la ecuación:

$$u_{xx} - u = u_{tt}, \qquad x \in [0,1], \;\; t > 0 \tag{2}$$

Supongamos que la cuerda está fija en los extremos y que se suelta sin velocidad inicial a partir de la posición inicial $u(x,0) = \text{sen}(\pi x)$.

a) Describe la transformación del problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden $O(k^2 + h^2)$.

b) Aplica este esquema para determinar la solución en el instante $t = 1$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.0005$. Representa la solución en los instantes $t = 0.25$, $t = 0.5$ y $t = 0.75$.

c) Describe la transformación del problema en un esquema en diferencias finitas implícito de orden $O(k^2 + h^2)$. Aplica este esquema para determinar la solución en el instante $t = 1$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.0005$.

a) Consideramos los nodos $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, nx$ y $t_j = jk$, $j = 0, 1, \ldots, nt$, con $h = 1/nx$ y $k = 1/nt$, siendo nx y nt el número de subintervalos en cada variable. Aplicando diferencias simétricas en u_{xx} y u_{tt}, obtenemos:

$$u_{i,j+1} = (2 - 2\lambda^2 - k^2)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}, \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, nx - 1, \\ j = 0, \ldots, nt - 1 \end{array}$$

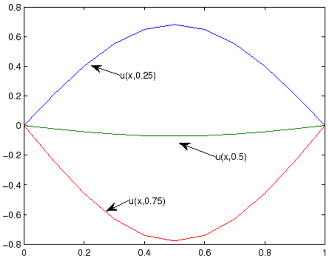
donde $\lambda = k/h$. Dado que los extremos de la cuerda son fijos, sabemos que $u(0, t) = u(1, t) = 0$. Asimismo, la posición inicial de la cuerda, es $u_{i,0} = \text{sen}(\pi x_i)$, para $i = 0, 1, \ldots, nx$.
El hecho de soltar la cuerda sin velocidad inicial nos permite deducir que $u_t(x_i, 0) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, nx$. Si aproximamos esta derivada respecto a la variable temporal por diferencias simétricas, se deduce que $u_{i,-1} = u_{i,1}$. Empleando esta aproximación en el esquema en diferencias anterior para $j = 0$,

$$u_{i,1} = (1 - \lambda^2 - \frac{k^2}{2})\text{sen}(\pi x_i) + \frac{\lambda}{2}(\text{sen}(\pi x_{i+1}) + \text{sen}(\pi x_{i-1})), \quad i = 0, \ldots, nx$$

b) Modificando en el programa estándar el cálculo de $u_{i,1}$ y $u_{i,j+1}$ según se ha descrito, obtenemos para $t = 1$,

x	M. Explícito $u(x,1)$
0	0
0.1	-0.305862
0.2	-0.581784
0.3	-0.800757
0.4	-0.941346
0.5	-0.989790
0.6	-0.941346
0.7	-0.800757
0.8	-0.581784
0.9	-0.305862
1	0

En la gráfica podemos ver las distintas curvas que aproximan la posición de la cuerda en los instantes $t = 0.25$, $t = 0.5$ y $t = 0.75$.



c) Al aplicar el método implícito aproximamos u_{xx} por la media de las diferencias centrales en los instantes t_{j-1} y t_{j+1} y u_{tt} por diferencias simétricas. Tras agrupar los términos del instante t_{j+1}, obtenemos:

$$\frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) - (1+\lambda^2)u_{i,j+1}$$
$$= -\frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) + (1+\lambda^2)u_{i,j-1} + (k^2-2)u_{i,j}$$

para $i = 1, \ldots, nx-1$ y $t = 1, \ldots, nt-1$. Es un sistema tridiagonal en el que son conocidos los valores de la función incógnita para $x = 0$, $x = 1$, $t = 0$ y $t = k$. Además, $u_{i,1}$ se obtiene del mismo modo que en el apartado a).

$$u_{i,1} = (1 - \lambda^2 - \frac{k^2}{2})\text{sen}(\pi x_i) + \frac{\lambda}{2}(\text{sen}(\pi x_{i+1}) + \text{sen}(\pi x_{i-1})), \quad i = 0, \ldots, nx$$

Así pues, en cada paso j hay que resolver el sistema lineal tridiagonal

$$Au^{(j+1)} = Bu^{(j-1)} + (k^2 - 2)u^{(j)}$$

donde $u^{(j)}$ representa la solución en el instante t_j,

$$A = \begin{pmatrix} -1-\lambda^2 & \lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda^2/2 & -1-\lambda^2 & \lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1-\lambda^2 & \lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^2/2 & -1-\lambda^2 \end{pmatrix},$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda^2/2 & 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda^2/2 & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Modificando en el programa estándar el cálculo de $u_{i,1}$ y $u_{i,j+1}$ según se ha descrito, obtenemos la aproximación de la solución para $t = 1$ por el método implícito, que comparamos con la anterior.

x	M. Explícito $u(x,1)$	M. Implícito $u(x,1)$
0	0	0
0.1	-0.305862	-0.305862
0.2	-0.581784	-0.581784
0.3	-0.800757	-0.800757
0.4	-0.941346	-0.941346
0.5	-0.989790	-0.989790
0.6	-0.941346	-0.941346
0.7	-0.800757	-0.800757
0.8	-0.581784	-0.581784
0.9	-0.305862	-0.305862
1	0	0

PROBLEMA EDP7

Consideremos la ecuación en derivadas parciales parabólica

$$u_t = u_{xx} + xu_x + u, \qquad 0 < x < 1, \ t > 0$$

con las condiciones

$$\begin{array}{ll} u(0,t) = 2t, & t > 0 \\ u(1,t) = t^2/2, & t > 0 \\ u(x,0) = \text{sen} x + \cos x, & 0 < x < 1 \end{array}$$

a) Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden $O(k + h^2)$. Aplica este esquema para determinar la solución en el instante $t = 0.5$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.0005$.

b) Transforma el problema en un esquema en diferencias implícito de orden $O(k + h^2)$. A partir de este esquema obtén la solución en el instante $t = 0.5$.

c) Describe el esquema en diferencias finitas que resulta al aplicar la idea de Crank-Nicholson a esta ecuación en derivadas parciales.

a) En la partición de los intervalos, consideramos los nodos $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, nx$ y $t_j = jk$, $j = 0, 1, \dots, nt$, con $h = 1/nx$ y $k = 1/nt$, siendo nx y nt el número de subintervalos en cada variable.
$u_t \Rightarrow$ diferencias progresivas, u_x y $u_{xx} \Rightarrow$ diferencias centrales.

$$u_{i,j+1} = \left(\frac{k}{h^2} + \frac{kx_i}{2h}\right) u_{i+1,j} + \left(\frac{-2k}{h^2} + k + 1\right) u_{i,j} + \left(\frac{k}{h^2} - \frac{kx_i}{2h}\right) u_{i-1,j},$$

para $i = 1, \dots, nx - 1$ y $j = 0, \dots, nt - 1$.
En la implementación del método nos basaremos en la función básica del método explícito. Basta con modificar la expresión en diferencias contenida en el bucle:

```
U(C,j+1) = (k/h^2+k*x(C)'/(2*h))*U(R,j) + (-2*k/h^2+k+1)*U(C,j)+...
           (k/h^2-k*x(C)'/(2*h))*U(L,j);
```

Al ejecutar esta función con las condiciones inicial y de contorno del problema obtenemos la aproximación de la solución en $t = 0.5$ que se muestra en el apartado b).

b) Aplicando diferencias regresivas en la derivada u_t de la ecuación diferencial y diferencias simétricas en u_x y u_{xx} obtenemos, para cada instante t_j, $j = 1, \ldots, nt$ el sistema lineal tridiagonal:

$$-\left(\frac{k}{h^2} + \frac{kx_i}{2h}\right) u_{i+1,j} + \left(1 + \frac{2k}{h^2} - k\right) u_{i,j} - \left(\frac{k}{h^2} - \frac{kx_i}{2h}\right) u_{i-1,j} = u_{i,j-1}$$

donde $i = 1, \ldots, nx - 1$.
A continuación mostramos su implementación en Matlab.

Solución PROBLEMA EDP7

```
function U = impcalor10(nx,a,b,nt,T,f,l,r)
h = (b-a)/nx;   x = a:h:b;           \% vector de nodos espaciales
k = T/nt;       t = 0:k:T;           \% vector de nodos temporales
U = zeros(nx+1,nt+1);
U(:,1) = feval(f,x)';
U(1,:) = feval(l,t);    U(nx+1,:) = feval(r,t);
L = 1:nx-1; C = 2:nx; R = 3:nx+1;   \% rangos de \'{\i}ndices
d0 = (1-k+2*k/h^2)*ones(1,nx-1);
d1 = -(k/h^2+k*x(C)/(2*h));
d2 = -(k/h^2-k*x(C)/(2*h));
for j = 2:nt+1
    b = U(C,j-1);
    b(1) = b(1) + (k/h^2-k*x(2)/(2*h))*U(1,j);
    b(nx-1) = b(nx-1) + (k/h^2+k*x(nx)/(2*h))*U(nx+1,j);
    U(C,j) = Crout(d0,d1,d2,b)';       \% soluci\'on del sistema
end
```

x	Expl. $u(x, 0.5)$	Impl. $u(x, 0.5)$
0	1.000000	1.000000
0.1	0.864310	0.874954
0.2	0.739442	0.760696
0.3	0.625790	0.653261
0.4	0.523405	0.553350
0.5	0.432082	0.461402
0.6	0.351443	0.377658
0.7	0.280997	0.302216
0.8	0.220184	0.235058
0.9	0.168399	0.176062
1	0.125000	0.125000

Table: Aproximaciones por distintos métodos

c) Para aplicar la técnica de Crank-Nicholson a esta ecuación en derivadas parciales, promediamos las expresiones en diferencias resultantes de discretizar la ecuación en derivadas parciales en el instante t_j, aproximando u_t mediante una diferencia progresiva, y después en el instante t_{j+1}, aproximando u_t mediante una diferencia regresiva. De esta forma obtenemos de nuevo un sistema lineal tridiagonal para cada $j = 0, \ldots, nt-1$:

$$\left(-\frac{k}{2h^2} - \frac{kx_i}{4h}\right) u_{i+1,j+1} + \left(1 + \frac{k}{h^2} - \frac{k}{2}\right) u_{i,j+1} + \left(-\frac{k}{2h^2} + \frac{kx_i}{4h}\right) u_{i-1,j+1} =$$
$$\left(\frac{k}{2h^2} + \frac{kx_i}{4h}\right) u_{i+1,j} + \left(1 - \frac{k}{h^2} + \frac{k}{2}\right) u_{i,j} + \left(\frac{k}{2h^2} - \frac{kx_i}{4h}\right) u_{i-1,j}$$

donde $i = 1, \ldots, nx-1$.

PROBLEMA EDP8

Consideremos la ecuación de Poisson

$$u_{xx} + u_{yy} = -(\cos(x+y) + \cos(x-y)), \qquad 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi/2$$

con las condiciones de contorno

$$\begin{array}{lll} u(0,y) = \cos y, & u(\pi,y) = -\cos y, & 0 \le y \le \pi/2 \\ u(x,0) = \cos x, & u(x,\pi/2) = 0, & 0 \le x \le \pi \end{array}$$

a) Utilizando diferencias finitas de orden 2, transforma el problema en un sistema lineal. Toma como pasos para x e y, $h = \pi/10$ y $k = \pi/20$ respectivamente.

b) Determina la solución del sistema anterior iterando por el método de Jacobi hasta que la variación sea menor que 10^{-10}, partiendo de la estimación inicial nula en todos los puntos interiores.

c) Comprueba que el factor de relajación w tiene un valor óptimo en

$$w = \frac{4}{2 + \sqrt{4 - (\cos \pi/n + \cos \pi/m)^2}}$$

siendo n y m el número de subintervalos considerados en el eje x e y respectivamente. Aplica el método de sobrerrelajación con factor óptimo, para resolver el sistema del apartado a). Compara la iteraciones necesarias en ambos casos.

d) Sabiendo que la solución exacta del problema es $u(x,y) = \cos x \cos y$, determina el error máximo de cada método utilizado.

a) Sean $x_i = 0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, 10$, e $y_j = 0 + jk$, $j = 0, 1, \ldots, 10$, los nodos elegidos en el eje x e y, respectivamente.

Llamamos $f(x, y) = -(\cos(x + y) + \cos(x - y))$. Aplicando diferencias finitas centrales de orden 2 y denotando $u_{ij} = u(x_i, y_j)$, la ecuación de Poisson se transforma en el sistema lineal

$$\lambda^2(u_{i-1j} + u_{i+1,j}) + u_{ij-1} + u_{ij+1} - 2(1 + \lambda^2)u_{ij} = k^2 f(x_i, y_j), \quad i, j = 1, 2, \ldots, 9$$

donde $\lambda = k/h$. Los valores de u para $i = 0$, $i = 10$; $j = 0$, $j = 10$ vienen dados por las condiciones de contorno del problema.

Hemos transformado la ecuación de Poisson en un sistema lineal de 81 ecuaciones con 81 incógnitas.

b) Para resolver el sistema por cualquier método iterativo despejamos u_{ij} de la expresión anterior

$$2(1+\lambda^2)u_{ij} = \lambda^2(u_{i-1j} + u_{i+1,j}) + u_{ij-1} + u_{ij+1} - k^2 f(x_i, y_j)$$

sustituimos a la derecha los valores actuales y tenemos una nueva aproximación a la izquierda.

Construimos los archivos .m necesarios para definir las funciones que describen los términos independientes y las condiciones de contorno.

Llamamos a la función `Laplace`, con los parámetros de entrada indicados en el enunciado y un número máximo de iteraciones de 1000.

```
[U,iter] = Laplace(0,pi,0,pi/2,10,10,'f','f0','f1','g0','g1',1e-10,1000)
```

Solución PROBLEMA EDP8

Tras 251 iteraciones obtenemos los siguientes resultados:

```
U=
  1.00  0.99  0.95  0.89  0.81  0.71  0.59  0.45  0.31  0.16  0.00
  0.95  0.94  0.91  0.85  0.77  0.67  0.56  0.43  0.29  0.15  0
  0.81  0.80  0.77  0.72  0.66  0.57  0.48  0.37  0.25  0.13  0
  0.59  0.58  0.56  0.52  0.48  0.42  0.35  0.27  0.18  0.09  0
  0.31  0.31  0.29  0.28  0.25  0.22  0.18  0.14  0.10  0.05  0
  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0
 -0.31 -0.31 -0.29 -0.28 -0.25 -0.22 -0.18 -0.14 -0.10 -0.05  0
 -0.59 -0.58 -0.56 -0.52 -0.48 -0.42 -0.35 -0.27 -0.18 -0.09  0
 -0.81 -0.80 -0.77 -0.72 -0.66 -0.57 -0.48 -0.37 -0.25 -0.13  0
 -0.95 -0.94 -0.91 -0.85 -0.77 -0.67 -0.56 -0.43 -0.29 -0.15  0
 -1.00 -0.99 -0.95 -0.89 -0.81 -0.71 -0.59 -0.45 -0.31 -0.16 -0.00
```

Cada columna corresponde a la solución para un valor de y fijo (de entre los nodos elegidos del intervalo $[0, \pi/2]$).

c) Aplicamos el método de sobrerrelajación para distintos valores del parámetro w. Mostramos el número de iteraciones que ha necesitado el método para los distintos valores del parámetro w. En todos los casos la solución obtenida coincide con la proporcionada por el método de Jacobi.

w	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
Iteraciones	1292	640	398	268	185	125	78	50	105

El valor óptimo para el parámetro w se encuentra en el intervalo $]1.4, 1.6[$. Repetimos el proceso tomando valores en este intervalo y obtenemos los siguientes resultados:

w	1.42	1.46	1.48	1.50	1.52	1.54	1.56	1.58	1.6
Iteraciones	73	68	58	53	46	41	43	46	50

El valor óptimo del parámetro del método de sobrerrelajación está alrededor de 1.54. Si evaluamos la expresión del enunciado del problema obtenemos $w = 1.5279$.

d) Podemos construir una matriz S, del mismo tipo que la U del apartado a), que contenga los valores exactos de la solución en los distintos puntos del mallado:

```
for i = 1:11
   for j = 1:11
    S(i,j) = cos(x(i))*cos(y(j));
   end
end
```

S=

1.00	0.99	0.95	0.89	0.81	0.71	0.59	0.45	0.31	0.16	0.00
0.95	0.94	0.90	0.85	0.77	0.67	0.56	0.43	0.29	0.15	0.00
0.81	0.80	0.77	0.72	0.65	0.57	0.48	0.37	0.25	0.13	0.00
0.59	0.58	0.56	0.52	0.48	0.42	0.35	0.27	0.18	0.09	0.00
0.31	0.31	0.29	0.28	0.25	0.22	0.18	0.14	0.10	0.05	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-0.31	-0.31	-0.29	-0.28	-0.25	-0.22	-0.18	-0.14	-0.10	-0.05	-0.00
-0.59	-0.58	-0.56	-0.52	-0.48	-0.42	-0.35	-0.27	-0.18	-0.09	-0.00
-0.81	-0.80	-0.77	-0.72	-0.65	-0.57	-0.48	-0.37	-0.25	-0.13	-0.00
-0.95	-0.94	-0.90	-0.85	-0.77	-0.67	-0.56	-0.43	-0.29	-0.15	-0.00
-1.00	-0.99	-0.95	-0.89	-0.81	-0.71	-0.59	-0.45	-0.31	-0.16	-0.00

Podemos calcular la matriz de error mediante `E=abs(S-U)` para la aproximación U obtenida por cualquier método. El error máximo se calcula con

```
Emax = max(max(E))
```

obteniendo $Emax = 9.1389 \times 10^{-4}$

Problema 1

Demuestra que la transformación $v(x,t) = \ln(u(x,t))$ transforma el problema no lineal

$$\begin{array}{ll} v_t = v_{xx} + v_x^2, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ v_x(0,t) = 1, & v(1,t) = 0,\ t > 0 \\ v(x,0) = 0, & 0 < x < 1 \end{array}$$

en el problema lineal

$$\begin{array}{ll} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u(0,t), & u(1,t) = 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = 1, & 0 < x < 1 \end{array}$$

a) Transforma el problema lineal en un esquema en diferencias explícito. Aplica dicho esquema para aproximar la solución en el instante $t = 1.5$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.001$.

b) Utiliza el método de Crank-Nicholson para aproximar la solución del problema lineal en $t = 1.5$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.01$. Compara los resultados con los obtenidos en a).

Problema 2

Consideremos la ecuación en derivadas parciales parabólica

$$u_t = u_{xx} - u_x u, \qquad 0 < x < 1,\ t > 0$$

con las condiciones

$$\begin{array}{ll} u(0,t) = 2t, & t > 0 \\ u(1,t) = t^2/2, & t > 0 \\ u(x,0) = \text{sen} x + \cos x, & 0 < x < 1 \end{array}$$

a) Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden $O(k + h^2)$. Aplica este esquema para determinar la solución en el instante $t = 0.5$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.0005$.

b) Transforma el problema en un esquema en diferencias implícito de orden $O(k + h^2)$. A partir de este esquema obtén la solución en el instante $t = 0.5$.

c) Describe el esquema en diferencias finitas que resulta al aplicar la idea de Crank-Nicholson a esta ecuación en derivadas parciales y plantea cómo resolver el sistema de ecuaciones resultante.

Problema 3 Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_t = u_{xx} + u_x^2, \qquad 0 < x < 1,\ t > 0$$

con las condición inicial $u(x,0) = x^2\text{sen}(\pi x)$, $0 < x < 1$, y las condiciones de contorno $u(0,t) = u(1,t) = 0$ para $t > 0$.

a) Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden $O(k + h^2)$. Aplica este esquema para determinar la solución en el instante $t = 2$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.005$.

b) Utiliza el cambio de variable $u = \ln v$ para transformar el problema anterior en un problema lineal.

c) Utiliza el método de Crank-Nicholson para aproximar la solución del problema lineal en $t = 2$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.05$. Compara los resultados obtenidos con los del apartado a).

Problema 4

Consideremos la intensidad $I(x,t)$ y el potencial $V(x,t)$ en un punto x e instante t, de una línea de transmisión uniforme con resistencia R, inductancia L, capacitancia C y una pérdida de conductancia G por unidad de longitud. Es conocido que I y V satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} LI_t + RI &= -V_x \\ CV_t + GV &= -I_x \end{aligned}$$

a) Determina las ecuaciones en derivadas parciales que describen I y V en los siguientes casos:
   - a1) Línea de transmisión de mínima pérdida, $R = G = 0$.
   - a2) Cable submarino, $L = G = 0$.

Supongamos que la línea es de $200\ m$ de longitud, $C = 0.1\ f/m$, $L = 0.3\ h/m$ y $R = 1\ \Omega$. Además se cumplen las condiciones de contorno $I(0,t) = I(200,t) = 0$, $t > 0$, y las condiciones iniciales $I(x,0) = 5.5\text{sen}(\pi x/200)$, $I_t(x,0) = 0$, $0 < x < 200$.

b) Para el caso a1) aproxima el valor de la corriente y del potencial en el instante $t = 1$, utilizando el método implícito con $h = 10$ y $k = 0.01$.

c) Para el caso a2) aproxima el valor de la corriente y del potencial en el instante $t = 1$, utilizando el método de Crank-Nicholson con $h = 10$ y $k = 0.01$.

Problema 5

Una cuerda vibrante que se desplaza en un medio elástico satisface la ecuación

$$\mu^2 u_{xx} - \mu^2 u = u_{tt}, \quad x \in [0,1], \; t > 0,$$

donde $\mu^2 = 1$ es proporcional al coeficiente de elasticidad del medio. Supongamos que la cuerda está fija en los extremos y que se suelta sin velocidad inicial a partir de la posición inicial $u(x,0) = \sin(\pi x)$.

a) Describe la transformación del problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden $O(k^2 + h^2)$.

b) Aplica el esquema anterior para determinar la solución en el instante $T = 1$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.0005$. Representa la solución en los instantes $t = 0.25$, $t = 0.5$ y $t = 0.75$ en una única gráfica.

c) Describe la transformación del problema en un esquema en diferencias finitas implícito de orden $O(k^2 + h^2)$.

d) Aplica el esquema de c) para determinar la solución en el instante $T = 1$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.0005$. Compara los resultados obtenidos con los del apartado (b).

Problema 6 Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad x \in [0,\pi],\ t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno e iniciales $u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \forall t$, $u(x,0) = 3\sin x$, $u_t(x,0) = 0$, $x \in [0,\pi]$. El instante máximo que nos interesa es $T = 2$ y la solución exacta es $u(x,t) = 3\cos t \sin x$. Se pide:

- Aproxima, mediante el método explícito, la solución del problema en el instante T, tomando $h = \pi/10$ y $k = 2/5$. Determina el error exacto y representa dicho error.
- Aproxima, mediante el método implícito, la solución del problema en el instante T, tomando $h = \pi/10$ y $k = 2/5$. Determina el error exacto y representa dicho error.

- Problema 7 Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + xu_t(x,t) - u(x,t) = 0, \quad x \in [0,1], \ t \geq 0,$$

  con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas y condiciones iniciales $u(x,0) = \sin \pi x$, $u_t(x,0) = 0$, $x \in [0,1]$.
    - Describe el método explícito de orden $O(k^2 + h^2)$, utilizando nx subintervalos en $[0,1]$ y nt subintervalos en $[0,T]$, donde T denota el instante máximo.
    - A partir del esquema anterior, determina la solución aproximada del problema en $T = 1.5$, tomando 10 subintervalos en el eje espacial y 1000 en el temporal.
    - Repite los dos pasos anteriores utilizando un método implícito de orden $O(k^2 + h^2)$ y los mismos subintervalos espaciales y temporales. Compara los resultados obtenidos.

- Problema 8 Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_{xx}(x,t) + 2u_{xt} - 3u_{tt}(x,t) = \cos \pi x 0, \quad x \in [0,1],\ t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno $u(0,t) = 0, u_x(i,t) = 2t, \forall t$ y la condición inicial

$$u(x,0) = \sin x, u_t(x,0) = x - 2x^2,\ x \in [0,1].$$

Se pide:

- Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden $O(k + h^2)$. Describe la expresión matricial del mismo.
- Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas implícito de orden $O(k + h^2)$. Describe la expresión matricial de dicho esquema.
- Aplica el esquema del apartado anterior para determinar la solución aproximada en el instante $T = 1$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.005$.
- Representa la solución en los instantes $t = 0.25$, $t = 0.5$, $t = 0.75$ y $t = 1$.

Problema 9

Consideremos la ecuación de Helmholtz

$$u_{xx} + u_{yy} = -4u, \quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$$

con las condiciones de contorno

$$\begin{array}{lll} u(x,0) = \cos(2x), & u(x,1) = \cos(2x) + \text{sen}2, & x \in [0,1] \\ u(0,y) = \text{sen}(2y) + 1, & u(1,y) = \text{sen}(2y) + \cos 2, & y \in [0,1] \end{array}$$

a) Discretiza el problema tomando $h = 0.2$ y $k = 0.1$ como pasos en x e y, respectivamente.

b) Resuelve el sistema mediante el método de relajación, para distintos valores del parámetro w. Comprueba que el valor óptimo de este parámetro es el que se introdujo en el problema resuelto 10.4.

c) Comprueba que la solución exacta es $u(x,y) = \text{sen}(2y) + \cos(2x)$. Calcula el error máximo cometido en las aproximaciones del apartado b).