La convolución

[4.1] ¿Cómo estudiar este tema?

[4.2] La respuesta al impulso

[4.3] La suma de convolución

[4.4] La integral de convolución

[4.5] Técnicas de cálculo

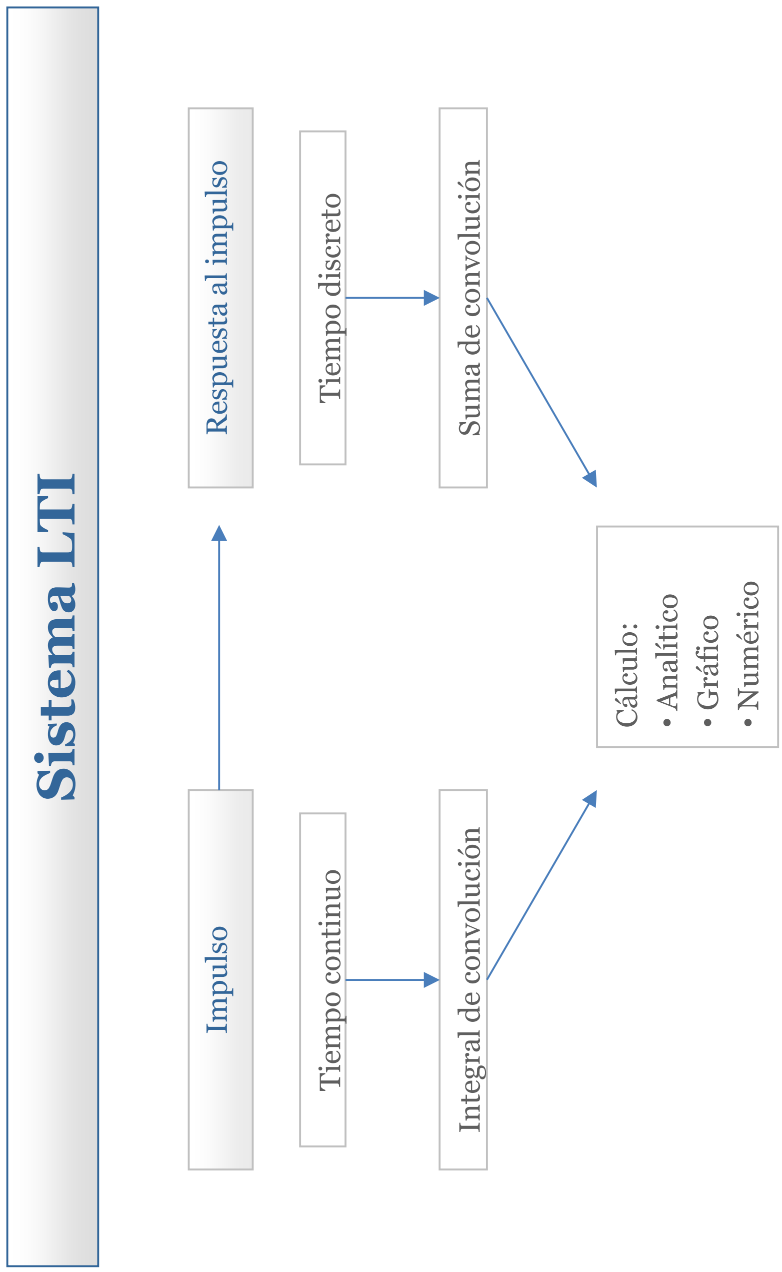
[4.6] Propiedades

[4.7] Sistemas con retroalimentación

4

TEMA

Esquema


Sistema LTI
Impulso
Respuesta al impulso
Tiempo continuo
Tiempo discreto
Integral de convolución
Suma de convolución
Cálculo:
• Analítico
• Gráfico
• Numérico

Ideas clave

4.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

En este tema abordaremos el problema de caracterizar un sistema, es decir, buscamos mecanismos para identificar la respuesta de un sistema $y(t)$ dada una entrada arbitraría $x(t)$.

En el tema anterior hemos visto una aproximación a este problema válida cuando tenemos un modelo matemático del sistema. En este caso podemos encontrar una ecuación que relaciona $x(t)$ con $y(t)$. En este tema vamos a ver otra aproximación, llamada convolución, que se usa cuando no tenemos un modelo matemático del sistema.

4.2. La respuesta al impulso

Se llama **sistema LTI** (*Linear Time Invariant*) a un sistema lineal e invariante en el tiempo. La técnica de la convolución que vamos a estudiar en este tema tiene como condición para poder aplicarse que el sistema sea LTI. Esta condición puede parecer limitante pero esto no es así por dos razones:

» Muchos sistemas físicos poseen las propiedades de linealidad e invariancia temporal.
» Los procedimientos para modelar analíticamente sistemas no-LTI son complicados o simplemente no existen.

En el tema anterior hemos visto que la salida representa la respuesta del sistema a la entrada. Es decir, un sistema realiza una transformación **T** a la señal de entrada $x(t)$ para obtener la señal de salida $y(t)$:

$$y(t) = \mathbf{T}\{x(t)\}$$

Se llama **respuesta al impulso** $h(t)$ a la respuesta de un sistema cuando la entrada es una delta. Es decir:

$$h(t) = \mathbf{T}\{\delta(t)\}$$

La respuesta al impulso nos permite caracterizar experimentalmente un sistema LTI.

Para obtener la respuesta al impulso simplemente tenemos que aplicar un impulso en la entrada del sistema $x(t)$=$\delta(t)$ y registrar la salida produce $y(t)$=$h(t)$.

La ventaja que aporta el que el sistema LTI sea invariante en el tiempo es que los desplazamientos en el impulso de entrada se traducen en desplazamientos en la respuesta al impulso:

$$h(t-\tau) = \mathbf{T}\{\delta(t-\tau)\} \tag{1}$$

La ventaja que aporta que el sistema sea LTI sea lineal es que si expresamos una señal de entrada como una combinación lineal de impulsos desplazados y escalados la salida será la suma de las respuestas del sistema a cada uno de los impulsos de entrada. Esta representación se llama **suma de convolución** en el caso de tiempo discreto e **integral de convolución** en el caso de tiempo continuo.

En las siguientes secciones vamos a estudiar estas convoluciones con más detalle.

4.3. La suma de convolución

En el tema 2 estudiamos la propiedad de criba de la delta, la cual nos permitía muestrear el valor de la función $x[n]$ en n=n_0:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]$$

Haciendo el cambio $n \to m$, $n_0 \to n$ podemos expresar $x[n]$ como:

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[m-n]$$

Y dado que la delta es una función par $\delta[n]=\delta[-n]$, podemos expresar $x[n]$ como una combinación lineal de deltas desplazadas a $\delta[n\text{-}m]$ y escaladas por $x[m]$:

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m]$$

Dado que el sistema es LTI:

» Podemos usar la propiedad (1) para calcular las respuestas a los impulsos desplazados $h[n\text{-}m]$.
» Podemos usar la propiedad de superposición para representar $y[n]$ como una combinación lineal de las respuestas al impulso desplazado a $h[n\text{-}m]$ y escaladas por $x[m]$:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

Dadas dos señales $x[n]$ y $h[n]$, su **suma de convolución** se representa con el operador «*» y se define como:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot h[n-m] \qquad (2)$$

Observar que, como ilustra la figura 1, la suma de convolución nos permite caracterizar completamente un sistema LTI conociendo solo su respuesta al impulso $h[n]$. Es decir, podemos expresar la salida del sistema $y[n]$ a partir de una entrada arbitraria $x[n]$.

Figura 1: concepto de convolución

4.4. La integral de convolución

En el tema 2 vimos que en el caso de tiempo discreto la delta se define como:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Mientras que en caso de tiempo continuo se define como:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

Con lo que vamos a definir:

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 < t < \Delta \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Y dado que $\Delta\delta_\Delta(t)$ tiene área 1, la figura 2 muestra cómo podemos aproximar $x(t)$ a una combinación lineal de deltas desplazadas a $\delta_\Delta(t - m\Delta)$ y escaladas por $x(m\Delta)$:

$$\hat{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\Delta) \cdot \delta_\Delta(t - m\Delta)\Delta$$

Cuando $\Delta \to 0$, $\delta_\Delta(t)$ tiende al impulso unitario $\delta(t)$ y el sumatorio se convierte en una integral:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau$$

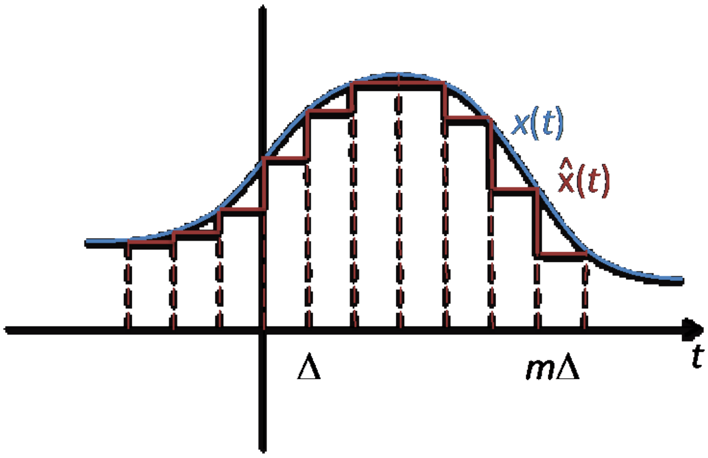


Figura 2: aproximación de función de tiempo continuo con sumatorio

Del mismo modo que en el caso de tiempo discreto, dado que el sistema es LTI, y asumiendo que $h_\Delta(t)$ es la respuesta a $\delta_\Delta(t)$, podemos usar la propiedad de superposición para aproximar $y(t)$ como:

$$\hat{y}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\Delta) \cdot h_\Delta(t - m\Delta)\, \Delta \qquad (3)$$

Y de nuevo, cuando $\Delta \to 0$, $h_\Delta(t)$ tiende a ser la respuesta al impulso unitario $h(t)$ y el sumatorio se convierte en la **integral de convolución**:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\, d\tau \qquad (4)$$

Con lo que hemos caracterizado completamente un sistema LTI de tiempo continuo conociendo solo su respuesta al impulso h(t).

4.5. Técnicas de cálculo

La suma/integral de convolución se puede calcular de tres técnicas. Son similares en el caso de tiempo continuo y el discreto, con lo que vamos a estudiarlas en paralelo. En concreto, estas técnicas son:

» **Analíticamente**. Lo cual requiere realizar la suma/integración de $x(t)$ y $h(t)$ con métodos analíticos.
» **Gráficamente**. Donde interpretamos gráficamente la operación de convolución.
» **Numéricamente**. Donde usamos Octave para obtener $y[n]$, haciendo la convolución discreta de $x[n]$ e $h[n]$.

A continuación vamos a detallar cada uno de estos métodos.

Cálculo analítico de la convolución

En este caso tenemos que resolver analíticamente la convolución dada en (2) o (4).

» **Ejemplo 1**: cálculo analítico de la convolución:

Obtener la convolución de:

$$x[n] = (0.7)^n u[u]$$

$$h[n] = (0.2)^n u[n]$$

Para aplicar (2) vamos a escribir:

$$\begin{cases} x[m] = (0.7)^m u[m] \\ h[n-m] = (0.2)^{n-m} u[n-m] \end{cases}$$

Con lo que la convolución sería:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot h[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (0.7)^m (0.2)^{n-m} u[m] u[n-m]$$

Y como $u[m]$=0 para m<0, y $u[n\text{-}m]$=0 para m>n, podemos reducir el sumatorio a:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n} (0.7)^m (0.2)^{n-m} = (0.2)^n \sum_{m=0}^{n} \frac{(0.7)^m}{(0.2)^m} = (0.2)^n \sum_{m=0}^{n} 3.5^m$$

Que es una suma geométrica cuya fórmula cerrada es:

$$\sum_{m=0}^{n} (a)^m = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Con lo que tomando a=3.5 y teniendo en cuenta que la fórmula cerrada solo es válida para n≥0 tenemos:

$$y[n] = (0.2)^n \frac{(3.5)^{n+1} - 1}{2.5} u[n] \qquad (5)$$

Cálculo gráfico de la convolución

El cálculo gráfico de la convolución implica estudiar el comportamiento de las dos señales en el eje τ. En concreto los pasos serían:

» **Reflejar**. A partir de $h(\tau)$ reflejamos verticalmente para dibujar $h(-\tau)$.
» **Desplazar**. Desplazamos $h(-\tau)$ para obtener $h(t-\tau)$.
» **Multiplicar**. Multiplicamos $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$.
» **Integrar**. Calculamos la integral del producto $x(\tau)\cdot h(t-\tau)$.

» **Ejemplo 2**: cálculo gráfico de la convolución.

Obtener la convolución de:

$$x(t) = e^{\frac{-t}{2}} u(t)$$

$$h(t) = u(t)$$

Para ello ejecutamos los pasos indicados:

- **Reflejar**. La figura 3 (a) muestra la señal $x(\tau)$ en el eje τ. La figura 3 (b) muestra $h(-\tau)$.
- **Desplazar.** Cuando $t>0$, tenemos $h(-\tau)$ adelantada a la posición $h(-\tau+t)$, que se muestra en la figura 3 (c) y cuando $t<0$, tenemos $h(-\tau)$ retrasada a $h(-\tau+t)$, que se muestra en la figura 3 (d).

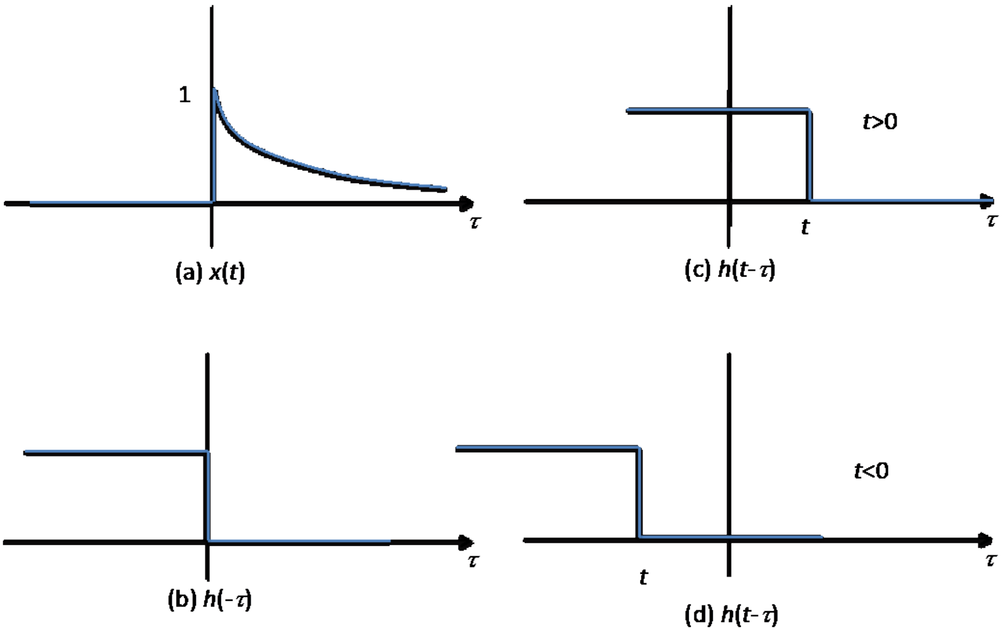


Figura 3: señales a convolucionar

- **Multiplicar.** En el cálculo de $x(\tau)\cdot h(t-\tau)$ podemos distinguir dos casos:

  - Caso 1. Cuando $t<0$, $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$ no solapan, con lo que su producto es siempre cero.
  - Caso 2. Cuando $t\geq 0$, $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$ solapan, y su producto es:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{\frac{-t}{2}}, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

- **Integrar.** En el caso 2 podemos reducir el rango de integración de la convolución (4) a:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t e^{\frac{-\tau}{2}}\, d\tau = -2e^{\frac{-\tau}{2}}\Big|_0^t = 2\left(1 - e^{\frac{-t}{2}}\right)$$

Y uniendo los casos 1 y 2 obtenemos que la salida del sistema es:

$$y(t) = 2\left(1 - e^{\frac{-t}{2}}\right)u(t) \qquad (6)$$

Cálculo numérico de la convolución

Octave proporciona la función *conv(x,h)* para calcular la convolución de dos vectores. Si *length(x)* es la longitud del vector x, y *length(h)* la longitud del vector h, la función *conv(x,h)* nos devuelve un vector de longitud *length(x)+ length(h)-1*.

La función *conv(x,h)* puede usarse para calcular la convolución de señales de tiempo discreto o continuo pero en el caso de tiempo continuo tenemos que tener en cuenta la longitud del periodo de muestreo t_s. Vamos a empezar viendo cómo realizar la convolución en tiempo discreto y después veremos cómo adaptar la operación para aplicarla en tiempo continuo.

Convolución en tiempo discreto

Si queremos realizar la convolución numérica de las señales del 0 necesitamos limitar la señal (p.e. a 20 muestras), ya que ambas son señales de longitud infinita. Es decir:

```
n = [0:19];
```

Después calculamos el valor de las muestras de las señales aplicando su fórmula:

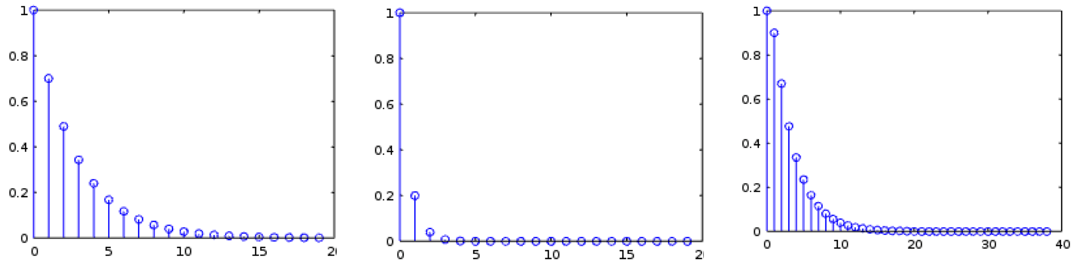
```
x = 0.7.^n;
h = 0.2.^n;
```

Y para calcular su convolución hacemos:

```
y = conv(x,h)
```

La figura 4 muestra el resultado de representar estas señales con los comandos:


```
subplot(1,3,1), stem(n,x)
subplot(1,3,2), stem(n,h)
ny = [0:length(y)-1];
subplot(1,3,3), stem(ny,y)
```



(a) x[n] (b) h[n] (c) y[n]

Figura 4: ejemplo de convolución de señales de tiempo discreto

En el **ejemplo 1** obtuvimos la solución analítica (5). Podemos validar esta solución representándola numéricamente:

```
y2 = (0.2.^ny).*((3.5.^(ny+1))-1)/2.5
```

Y contrastándola con y:

```
y-y2
```

Convolución en tiempo continuo

Para hacer la convolución de tiempo continuo necesitamos evaluar la integral de convolución numéricamente. En concreto, cogemos un periodo de muestreo t_s suficientemente pequeño y sustituimos $t=nt_s$, $\Delta=t_s$, $h_\Delta \rightarrow h$ en (3) para obtener la señal de tiempo continuo representada como una suma de convolución:

$$y(nT_s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mt_s) \cdot h((n-m)t_s)t_s = t_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mt_s) \cdot h((n-m)t_s)$$

En el tema 3 vimos que $y(nt_s)$ corresponde a la señal $y[n]$ escalada donde t_s es el factor de compresión. Dado que estamos cogiendo un periodo de muestreo pequeño t_s<1, la representación de tiempo discreto de la señal $y[n]$ se expande en el eje de abscisas respecto a su representación de tiempo continuo $y(nt_s)$. Dado que estamos multiplicando el sumatorio por t_s<1, la representación de tiempo discreto de la señal $y[n]$ se comprime en el eje de coordenadas respecto a su representación de tiempo continuo $y(nt_s)$. La figura 5 ilustra esta correspondencia.

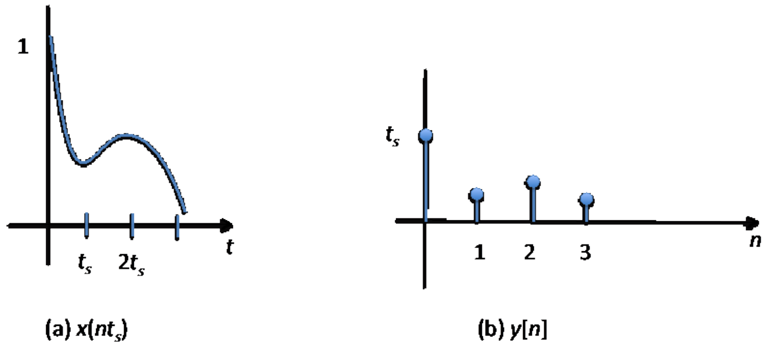


Figura 5: representación en tiempo discreto de suma de convolución de tiempo continuo

Luego la representación de la señal de tiempo continuo $y(t)$ como suma de convolución es:

$$y[n] = T_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot h[n-m] \tag{7}$$

La cual es similar a la representación de tiempo discreto de la suma de convolución pero multiplicada por t_s.

Vamos a realizar la convolución de las señales de tiempo continuo del 0. Para ello empezamos definiendo la variable independiente con un periodo de muestreo t_s inct:

```
inct=0.1
t=0:inct:10;
```

Obtenemos los valores de las señales de tiempo continuo para este intervalo:

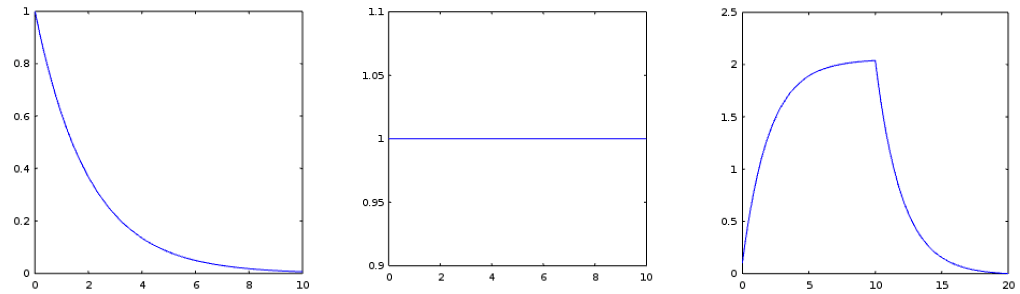
```
x = e.^(-t/2);
h = ones(size(t));
```

Y finalmente calculamos la convolución discreta (7):


```
y = inct*conv(x,h);
```

La figura 6 representa las señales $x(t)$ e $y(t)$ y el resultado de su convolución $y(t)$. Para hacer esta representación ejecutamos los comandos:

```
subplot(1,3,1), plot(t,x)
subplot(1,3,2), plot(t,h)
ty = (0:1:length(y)-1)*inct;
subplot(1,3,3), plot(ty,y)
```

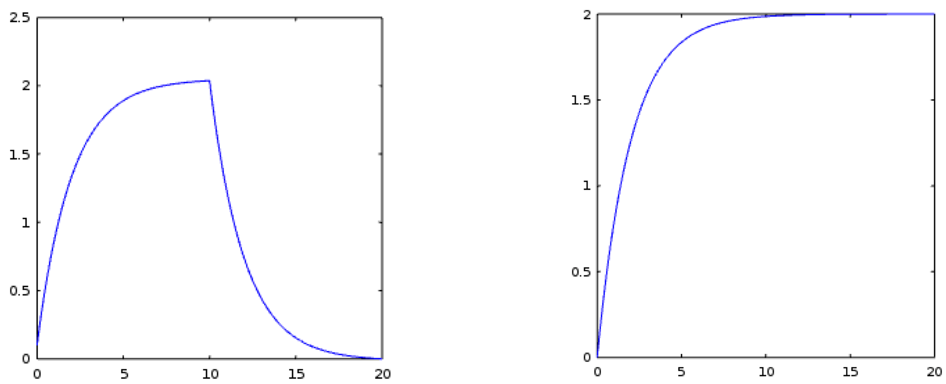


(a) $x(t)$ (b) $h(t)$ (c) $y(t)$

Figura 6: ejemplo de convolución de señales de tiempo continuo

De nuevo podemos contrastar este resultado con la solución analítica que obtuvimos en (6) calculando:

```
y2 =2*(1-e.^(-ty/2));
```



(a) $y(t)$ numérica (b) $y(t)$ analítica

Figura 7: solución numérica y analítica

La figura 7 compara la curva obtenida con la solución numérica y analítica. Podemos ver que en la solución numérica se produce un decaimiento a partir de t=10 que no se produce en la solución analítica.

Esto se debe a que las señales de la figura 6 (a) y (b) solo han sido generadas hasta t=10, es decir, son t/t_s=100 muestras, mientras que la función *conv(x,h)* genera un vector con el doble de muestras. Para evitar este efecto, en el cálculo numérico de la integral de convolución usando (7) debemos limitarnos a coger el intervalo de $y(t)$ donde las muestras de $x(y)$ e $h(t)$ no han decaído:

y = y(1:length(x))

4.6. Propiedades

En esta sección vamos a estudiar las propiedades de la convolución, tanto en el tiempo continuo como en el tiempo discreto. Estas propiedades se resumen en tabla 1:

Propiedad	Tiempo continuo	Tiempo discreto
Conmutativa	$x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$	$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$
Asociativa	$[h_1(t)*h_2(t)]*h_3(t)= h_1(t)*[h_2(t)*h_3(t)]$	$(h_1[n]*h_2[n])*h_3[n]= h_1[n]*(h_2[n]*h_3[n])$
Distributiva	$x_1(t)*[h_1(t)+h_2(t)]= x_1(t)*h_1(t)+ x_1(t)*h_2(t)$	$x_1[n]* (h_1[n]+h_2[n])= x_1[n]*h_1[n]+ x_1[n]*h_2[n]$
Duración	Si length($x(t)$)=T_1 y length($h(t)$)=T_2 entonces length($y(t)$)=T_1+T_2	Si length($x[n]$)=N_1 y length(h[n])=N_2 entonces length($y[n]$)=N_1+N_2-1
Identidad	$x(t)*\delta(t) = x(t)$	$x[n]*\delta[n] = x[n]$
Invertibilidad	$h(t)h^{-1}(t) = \delta(t)$	$h[n]h^{-1}[n] = \delta[n]$
Acumulación	$h(t)=u(t)$	$h[n]=u[u]$
Diferenciación	$h(t)=\delta'(t)$	$h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$
Causalidad	$h(t)$=0 para t<0	$h[n]$=0 para n<0
Reposo inicial	$x(t)$=0 para $t<t_0$	$x[n]$=0 para $n<n_0$

Tabla 1: propiedades de la convolución

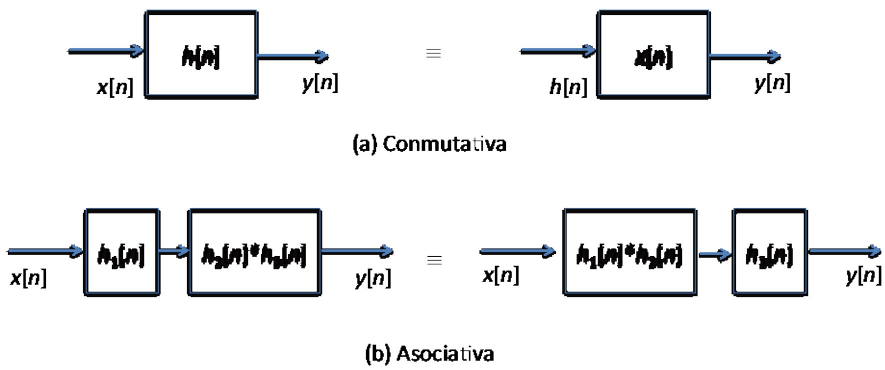
La propiedad **conmutativa** indica que el orden en que se convolucionan las funciones es intercambiable. La figura 8 (a) ilustra gráficamente esta propiedad. A menudo se usa esta propiedad para simplificar el cálculo gráfico de la convolución en los casos en los que la señal $x(\tau\text{-}t)$ es más sencilla de representar que $h(\tau\text{-}t)$.

La propiedad se puede demostrar fácilmente realizando la sustitución de variables $r=n-m$, $m=n-r$:

$$x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-r]h[r] = h[n] * x[n]$$

La propiedad **asociativa** indica que la salida de un sistema es independiente del orden en que agrupemos los sistemas en cascada. La figura 8 (b) ilustra gráficamente esta propiedad.

La propiedad **distributiva** indica que la convolución distribuye sobre la suma. La figura 8 (c) ilustra esta propiedad, donde vemos que si la salida de dos sistemas se suma, podemos combinarlos en un único sistema cuya respuesta al impulso es la suma de las respuestas al impulso individuales.



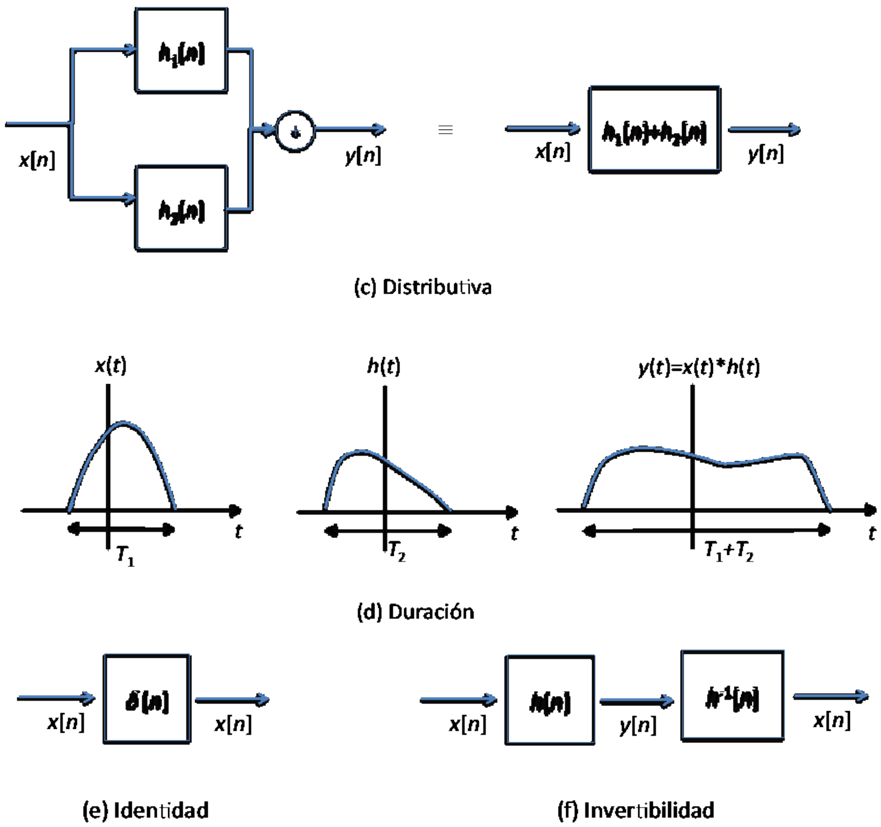


Figura 8: propiedades de la convolución

La propiedad de **duración** nos dice que si T_1 es la duración de la señal $x(t)$ y T_2 es la duración de la señal $h(t)$, la duración de la convolución será T_1+T_2. La figura 8 (d) muestra gráficamente esta idea.

En el caso de tiempo discreto, la propiedad de duración nos dice que si N_1 es la duración de $x[n]$ y N_2 es la duración de $h[n]$, la duración de su convolución será N_1+N_2-1.

Como muestra la figura 8 (e), la **respuesta al impulso identidad** es el impulso unitario $\delta(t)$, ya que es la respuesta al impulso que no modifica la señal:

$$x(t) = x(t) * \delta(t)$$

La figura 8 (f) muestra el concepto de **respuesta al impulso inversa** $h^{-1}(t)$, es decir, aquella que dada la salida de un sistema $y(t)$ nos genera la entrada $x(t)$:

$$x(t) = y(t) * h^{-1}(t)$$

Observar que la respuesta al impulso combinada en la figura 8 (f) es $h(t)*h^{-1}(t)$ y dado que la entrada es igual a la salida debe cumplirse que sea igual a la respuesta al impulso identidad:

$$h(t) * h^{-1}(t) = \delta(t)$$

Cuando la respuesta al impulso es el escalón unitario:

$$h[n] = u[n]$$

El sistema es un **acumulador**. Esto se puede demostrar a partir de la definición de suma de convolución (2):

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] * u[n-m]$$

Dado que $u[n\text{-}m]$ es cero cuando $m>n$ y uno cuando $m\leq n$, el sumatorio se puede escribir como:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$$

Que corresponde con la operación de acumulación. La operación de acumulación es invertible y su inversa es la **diferenciación**:

$$h^{-1}[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

La invertibilidad se puede verificar calculando:

$$\begin{aligned} h[n] * h^{-1}[n] = u[n] * \{\delta[n] - \delta[n-1]\} = u[n] * \delta[n] - u[u] * \delta[n-1] \\ = u[n] - u[-n-1] = \delta[n] \end{aligned}$$

Un sistema LTI es **causal** cuando $y[n]$ no depende de valores anteriores de la entrada $x[m]$ para $m<n$, es decir, $h[n\text{-}m]$=0 para $n\text{-}m$<0. Luego si el sistema es causal podemos limitar el rango de la suma de convolución (2) a:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \cdot h[n-m]$$

Luego un sistema causal cumple la propiedad:

$$h[n] = 0 \quad \text{para } n < 0$$

Un sistema está en **reposo inicial** cuando $x[m]$=0 para $m<m_0$. Habitualmente se elige m_0=0.

Si asumimos reposo inicial podemos limitar el rango de la suma de convolución (2) a:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=0}^{\infty} x[m] \cdot h[n-m]$$

Si el sistema es causal y tiene reposo inicial podemos limitar aún más el rango de la suma de convolución a:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=0}^{n} x[m] \cdot h[n-m]$$

La desconvolución

Sabemos que la convolución nos permite modelar la salida de un sistema $y[n]$ en función de la señal de entrada $x[n]$ y de la respuesta al impuso $h[n]$ que conocemos. La **deconvolución** es el proceso de obtener una de las señales constituyentes de una convolución, dada la salida del sistema $y[n]$=$x[n]$*$h[n]$.

Cuando conocemos la respuesta al impulso de un sistema $h[n]$, la deconvolución nos permite calcular cuál ha sido la entrada $x[n]$ que ha producido la salida conocida $y[n]$.

Cuando lo que conocemos es la entrada $x[n]$ y salida del sistema $y[n]$, la deconvolución nos permite calcular cuál es la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.

La operación deconv(y,h) de Octave nos permite calcular la deconvolución discreta de las señales dadas.

4.7. Sistemas con retroalimentación

Sabemos que modelar un sistema es representar matemáticamente las operaciones que relacionan la entrada y la salida. En tiempo continuo los sistemas con retroalimentación se modelan mediante ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes contantes. Del mismo modo, los sistemas en tiempo discreto se modelan mediante ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes. En esta sección vamos a ver cómo se definen estos modelos, primero en el caso de tiempo discreto, luego en el tiempo continuo y finalmente veremos cómo obtener explícitamente la ecuación del sistema.

Antes de leer este apartado deberás visualizar la lección magistral del tema.

Modelización de sistemas de tiempo discreto

Un sistema de tiempo discreto con retroalimentación puede modelarse mediante una ecuación en diferencias lineales con coeficientes contantes. La **ecuación en diferencias general** es:

$$\sum_{m=0}^{N} a_m y[n-m] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] \tag{8}$$

Este es el caso más general en el que asumimos que:

- Los coeficientes a_m, b_m son constantes.
- Las entradas $x[n\text{-}m]$ y salidas $y[n\text{-}m]$ son LTI.

Y observamos que la salida actual $y[n]$ depende de:

- Las N salidas anteriores $y[n\text{-}1],\ldots y[n\text{-}N]$.
- La entrada actual $x[n]$ y las M entradas anteriores $x[n\text{-}1],\ldots x[n\text{-}N]$.

Podemos reescribir este sistema de ecuaciones en diferencias como:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] - \sum_{m=1}^{N} a_m y[n-m]\right\} \qquad (9)$$

A (9) se le llama la **ecuación recursiva discreta** porque da un algoritmo recursivo para determinar la salida como una combinación lineal de entradas y salidas previas.

» **Ejemplo 3**: retroalimentación en tiempo discreto de primer orden.

Obtener la ecuación de los diagramas de sistema de la figura 9.

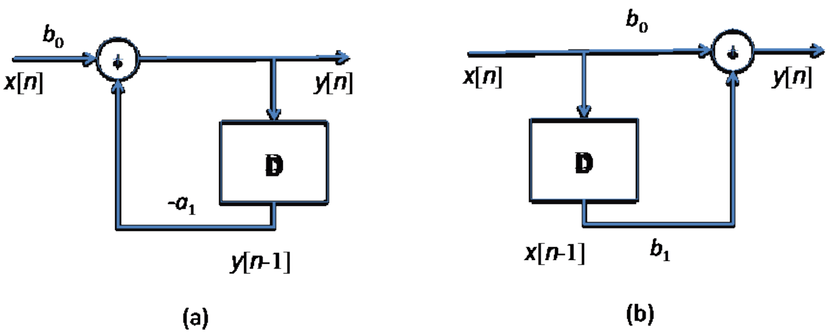


Figura 9: ejemplo de retroalimentación de primer orden

En el sistema de la figura 9 (a) se suman las entradas $b_0x[n]$ y $-a_1y[n-1]$, con lo que la ecuación del sistema es:

$$y[n] = b_0x[n] - a_1y[n-1]$$

O bien, si lo escribimos usando la ecuación en diferencias general (8):

$$y[n] + a_1y[n-1] = b_0x[n]$$

En el sistema de la figura 9 (b) se suman las entradas $b_0x[n]$ y $b_1n[n-1]$, con lo que la ecuación del sistema es:

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1]$$

Observar que la figura 9 (a) es un ejemplo de sistema con retroalimentación, ya que la salida se retroalimenta de valores anteriores de la salida, mientras que el ejemplo de la figura 9 (b) no tiene retroalimentación ya que solo usa valores anteriores de la entrada en el cálculo de la salida.

» **Ejemplo 4**: composición de sistemas con retroalimentación.

Calcular la ecuación del diagrama de sistema de la figura 10.

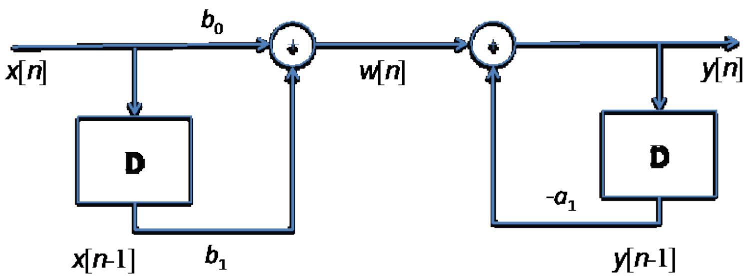


Figura 10: ejemplo de sistema con retroalimentación compuesto

En este caso tenemos dos sumatorios, con lo que el sistema está descrito por las ecuaciones en diferencias:

$$w[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$$

$$y[n] = -a_1 y[n-1] + w[n]$$

O bien, sustituyendo $w[n]$ en la segunda ecuación:

$$y[n] = -a_1 y[n-1] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] \qquad (10)$$

Observar que dado que los sistemas de la figura 10 son sistemas LTI, la respuesta del sistema no varía si conmutamos el orden de los sistemas en cascada, tal como muestra la figura 11.

Con lo que el sistema estará también descrito por las ecuaciones en diferencias:

$$z[n] = x[n] - a_1 z[n-1]$$

$$y[n] = b_0 z[n] + b_1 z[n-1]$$

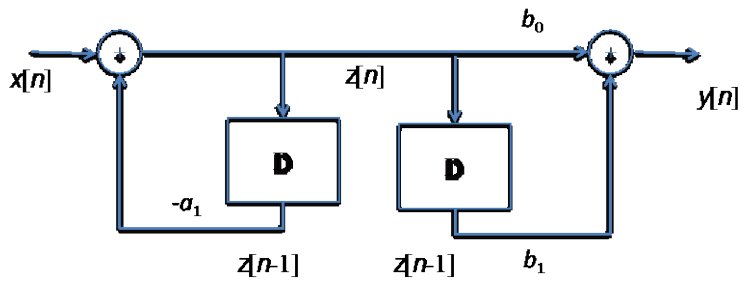


Figura 11: conmutación del orden de los sistemas

Observar que al mover el subsistema con retroalimentación al principio dificultamos el poder representar el sistema mediante ecuaciones en diferencias. Sin embargo, la propiedad conmutativa de la convolución nos dice que este sistema es equivalente a (10).

Sistemas con respuesta al impulso finita e infinita

Se llama **sistema con respuesta al impulso finita (RIF)** a un sistema en el que la respuesta al impulso $h[n]$ se vuelve cero transcurrido un tiempo. Del mismo modo, se llama sistema con **respuesta al impulso infinita (RII)** a un sistema en el que la respuesta al impulso $h[n]$ no se vuelve cero transcurrido un tiempo, sino que continúa infinitamente.

El que el sistema tenga una RIF es equivalente a decir que el sistema carece de retroalimentación, mientras que un sistema con retroalimentación es un sistema con RII.

En concreto, cuando en la ecuación en diferencias general (8) ocurre que N=0, tenemos una **ecuación no recursiva**:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} \frac{b_m}{a_0} x[n-m] \tag{11}$$

Donde no usamos valores anteriores de la salida para calcular nuevos valores de la salida, con lo que la respuesta al impulso es finita y viene dada por:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Es decir, la ecuación no recursiva (11) no es más que la suma de convolución.

Cuando en la ecuación en diferencias general (8) ocurre que M=0, tenemos una **ecuación homogénea** del sistema:

$$\sum_{m=0}^{N} a_m y[n-m] = 0$$

La cual representa la salida solo en función de valores anteriores de la salida.

Tanto la ecuación homogénea como la ecuación recursiva (9) no definen completamente la función del sistema sino que definen una solución general del sistema con infinitas soluciones particulares. Para definir completamente el sistema es necesario indicar M valores iniciales $y[n\text{-}1]$, ..., $y[n\text{-}N]$. Habitualmente estos valores se obtienen asumiendo:

» **Reposo inicial**, es decir, asumiendo que para un $n \le n_0$ $x[n]$=0.
» **Causalidad**. En este caso podemos resolver $y[n]$ en la ecuación recursiva (9) expandiendo la recursión con $n \ge n_0$ y usando como valores iniciales $y[n]$=0, $y[n_0\text{-}1]$=0, ..., $y[n_0\text{-}N]$=0.

Modelización de sistemas de tiempo continuo

Podemos proceder de forma análoga para modelar un sistema de tiempo continuo con retroalimentación. En este caso el sistema se modeliza mediante una ecuación diferencial lineal con coeficientes contantes. La **ecuación diferencial general** es:

$$\sum_{m=0}^{N} a_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \qquad (12)$$

Podemos reescribir este sistema de ecuaciones diferenciales como:

$$y(t) = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} - \sum_{m=1}^{N} a_m y \frac{d^m y(t)}{dt^m}\right\} \qquad (13)$$

A (13) se le llama la **ecuación recursiva continua** y nos permite modelar la salida en función de tres operaciones básicas: suma, multiplicación y diferenciación.

» **Ejemplo 5**: retroalimentación en tiempo continuo de primer orden.

Obtener el diagrama de bloques del sistema de tiempo continuo con retroalimentación:

$$y(t) = x(t) - 2\frac{dy(t)}{dt}$$

La figura 12 (a) muestra el diagrama de este sistema en función de las operaciones básicas de suma, multiplicación y diferenciación.

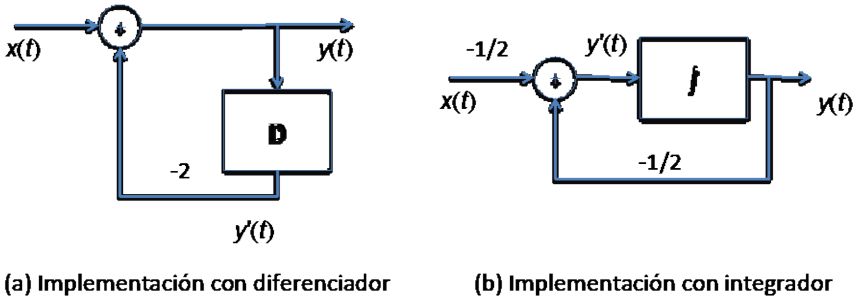


Figura 12: ejemplo de realimentación de primer orden

Una dificultad práctica es que no es fácil implementar con *hardware* un diferenciador de tiempo continuo. La solución más habitual es utilizar acumuladores, en vez de diferenciadores. Para ello reescribirnos la ecuación diferencial del ejemplo como:

$$y'(t) = \frac{1}{2}x(t) - \frac{1}{2}y(t)$$

La figura 12 (b) muestra el diagrama de bloques correspondiente, donde la entrada del acumulador es $y'(t)$, que es igual a la suma de las entradas $\frac{1}{2}x(t)$ y $\frac{1}{2}y(t)$.

Resolución de sistemas con retroalimentación

Tanto la ecuación recursiva discreta (9) como la ecuación recursiva continua (13) nos dan una representación implícita del sistema. **Resolver el sistema** es obtener la ecuación explícita del sistema.

En el caso de tiempo discreto, debemos resolver $y[n]$ en la ecuación recursiva discreta (9) expandiendo la recursión con $n \geq n_0$ y usando como valores iniciales $y[n_0-1]=0, \ldots, y[n_0-N]=0$.

En el caso de tiempo continuo resolvemos la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes (12). Para ello sabemos que la **solución general** de un sistema lineal $y(t)$ se puede escribir como la suma de una **solución particular** $y_p(t)$ y una **solución homogénea** $y_h(t)$:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

Donde la solución particular $y_p(t)$ satisface (12) y la solución homogénea $y_h(t)$ satisface su ecuación diferencial homogénea asociada:

$$\sum_{m=0}^{N} a_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} = 0$$

Para encontrar la solución general primero obtenemos la solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \ldots + c_N y_N(t)$$

Donde $y_1, y_2, \ldots, y_N$ son el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea.

Por último, obtenemos la ecuación general $y(t)$ del sistema no homogéneo como:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \ldots + c_N y_N(t) + y_p(t)$$

Debemos tener en cuenta que la ecuación general así obtenida no determina la salida $y(t)$ en función de la entrada $x(t)$, ya que las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_N$ no han sido determinadas todavía. Al igual que en el caso de tiempo discreto debemos indicar las condiciones iniciales, las cuales habitualmente son:

» **Reposo inicial**, es decir, $x(t)= 0$ para $t \leq t_0$.
» **Causalidad**, es decir $y(t_0)=0$, $y'(t_0)= 0$, ... , $y^{(N)}(t_0)= 0$.

De esta forma podemos obtener el valor de las constantes c_1, c_2, ... , c_N, y en consecuencia la función del sistema $y(t)$.

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

La sinusoidal compleja

En esta lección magistral vamos a estudiar las propiedades de la sinusoidal compleja.

Accede a la lección magistral a través del aula virtual.

No dejes de leer…

¿Convolución? ¡Pero si es muy fácil!

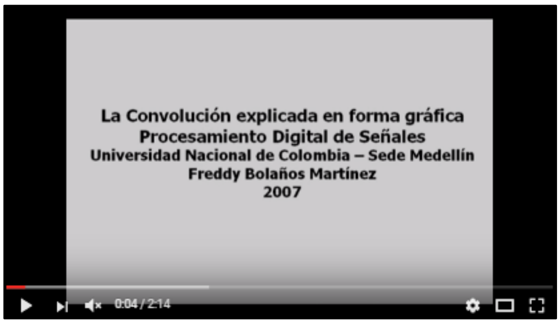
Este artículo describe muy detalladamente qué es la convolución y para qué sirve.

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://includeblogh.blogspot.com.es/2010/12/convolucion-pero-si-es-muy-facil-parte.html

No dejes de ver…

La convolución explicada de forma gráfica

Este tutorial describe la convolución gráfica de señales de tiempo discreto.



Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://www.youtube.com/watch?v=6F1tvOZF020

La convolución y la transformada de Laplace

Aquí tenemos otro ejemplo interesante de convolución en el contexto de la transformada de Laplace.

KHANACADEMY

Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://es.khanacademy.org/math/differential-equations/laplace-transform/convolution-integral/v/introduction-to-the-convolution

+ Información

A fondo

Señales y sistemas

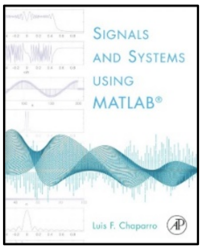
Oppenheim, A. V. (1998). *Señales y sistemas*. Méjico: Prentice Hall.

En las páginas 75-102 se describen la suma de convolución y sus propiedades y la integral de convolución y sus propiedades.

Accede al libro desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://books.google.es/books?id=g2750K3PxRYC&pg=PA75

Signal and Systems using MATLAB

Chaparro, L. (2010). *Signal and Systems using*. USA: Academic Press.



En el capítulo 2 de este libro se describe la convolución con ejemplos en MATLAB.

Accede al libro desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://books.google.es/books?id=v5tPauYDRC4C

Bibliografía

Oppenheim, A. V., Willsky, A. S. y Hamid, S. (1998). *Señales y sistemas*. México: Pearson.

Soria, E. (2003). *Tratamiento digital de señales: problemas y ejercicios resueltos*. Madrid: Pearson.

Test

1. ¿Qué características debe tener un sistema para poder modelarlo con la respuesta al impulso?

A. Causal e invariante en el tiempo.

B. Lineal e invariante en el tiempo.

C. Causal, lineal e invariante en el tiempo.

D. Ninguna de las anteriores.

2. En un sistema de tiempo discreto podemos hacer:

A. Sumas de convolución.

B. Integrales de convolución.

C. Las dos anteriores.

D. Ninguna de las anteriores.

3. La suma de convolución se basa en las propiedades de:

A. Causalidad.

B. Invariancia temporal.

C. Superposición e invariancia temporal.

D. Ninguna de las anteriores.

4. ¿Qué no hacemos durante el cálculo gráfico de la convolución?

A. Reflejar.

B. Escalar.

C. Cambiar la variable del eje.

D. Multiplicar señales.

5. La función *conv*(*x*,*h)* devuelve un vector de longitud:

A. $|x|+|h|-1$.

B. $|x|+|h|$.

C. $|x|+|h|+1$.

D. $|x|*|h|$

6. Cuando representamos una integral de convolución como suma de convolución:

A. Varía el rango del sumatorio.

B. Varía la señal que representa la respuesta al impulso.

C. Aparece multiplicada por t_s.

D. Ninguna de las anteriores es correcta.

7. Cuando calculamos la integral de convolución usando la suma de convolución:

A. Del vector resultado debemos coger $|x|$ muestras.

B. Del vector resultado debemos coger $2|x|$ muestras.

C. Del vector resultado debemos coger $|x|+|\mathrm{h}|$ muestras.

D. Ninguna de las anteriores es correcta.

8. ¿Qué propiedad nos permite intercambiar los papeles de la señal y la respuesta al impulso?

A. Conmutativa.

B. Asociativa.

C. Distributiva.

D. Afín.

9. ¿Qué propiedad nos permite combinar dos sistemas sumándolos?

A. Conmutativa.

B. Asociativa.

C. Distributiva.

D. Afín.

10. ¿Qué propiedad nos permite agrupar dos sistemas convolucionándolos?

A. Conmutativa.

B. Asociativa.

C. Distributiva.

D. Afín.

