

# Tema 10. Procesamiento de audio

Procesamiento de Señales, Sonido e Imágenes Digitales

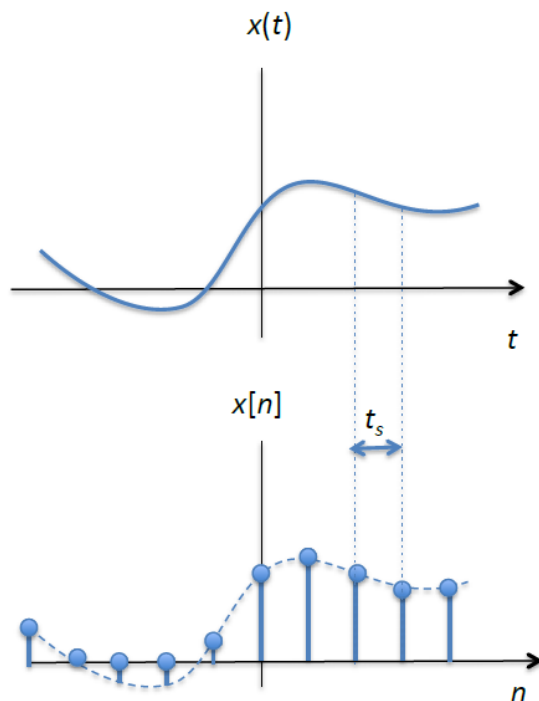
Carlos Quemada Mayoral

# Índice

- ▶ 10.1. Digitalización de audio
- ▶ 10.2. Frecuencia de muestreo
- ▶ 10.3. Enventanado
- ▶ 10.4. La STFT
- ▶ 10.5. El efecto Doppler

# 10.1. Digitalización de audio

- ▶ El micrófono convierte una señal analógica (continua) en muestras discretas mediante los procesos de **muestreo** y **cuantificación** que realiza un **Conversor Analógico Digital** (CAD) incluido en el micrófono.
- ▶ **Muestreo.** Consiste en adquirir valores de tensión a intervalos de tiempo, habitualmente equiespaciados.



$$t_s = \frac{1}{f_s} = \frac{2\pi}{w_s} \quad f_s = \frac{1}{t_s} \quad w_s = \frac{2\pi}{t_s} \quad w_s = 2\pi f_s$$

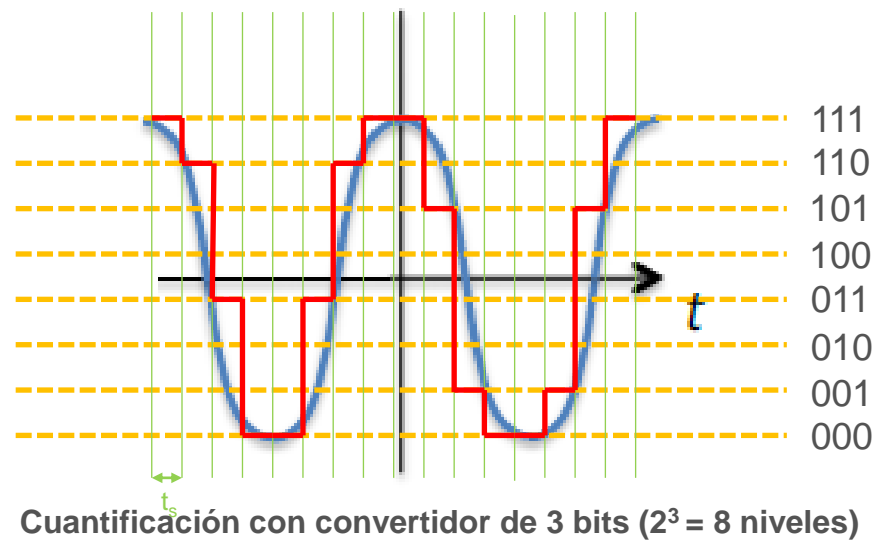
$t_s$ : periodo de muestreo

$f_s$ : frecuencia cíclica de muestreo

$w_s$ : frecuencia angular de muestreo

## 10.1. Digitalización de audio

- ▶ El micrófono convierte una señal analógica (continua) en muestras discretas mediante los procesos de **muestreo** y **cuantificación** que realiza un **Conversor Analógico Digital** (CAD) incluido en el micrófono.
- ▶ **Cuantificación.** Consiste en asignar un valor numérico discreto a la amplitud de cada muestra. En la práctica la cuantificación se hace con valores de 8 bits, 16 bits, o 32 bits.

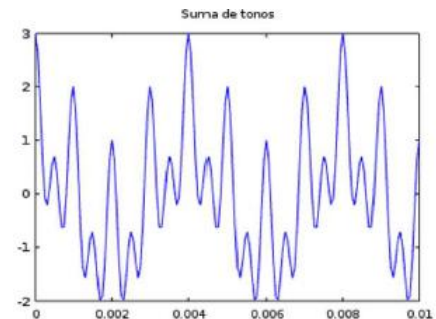
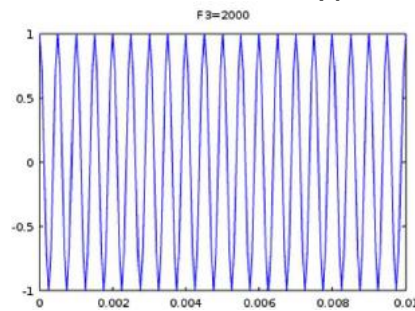
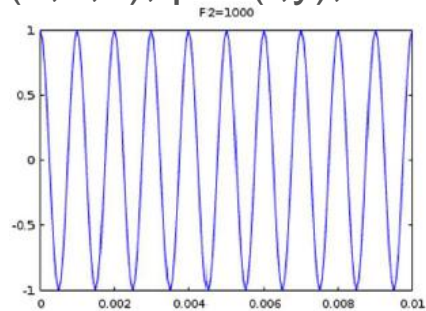
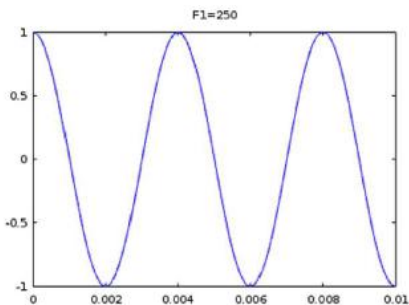


## 10.1. Digitalización de audio

- ▶ Para reproducir el audio en un altavoz un Conversor Digital Analógico (CDA) realiza el proceso contrario, es decir, recibe la señal digitalizada y genera variaciones de voltaje continuas en el altavoz.

# 10.1. Digitalización de audio

- ▶ **Generación de un audio sintético.** Pasos:
- ▶ Seleccionamos la duración del audio a generar  $\Rightarrow d = 0.01$ ;
- ▶ Seleccionamos la frecuencia y periodo de muestreo  $\Rightarrow F_s = 16000$ ;  $T_s = 1/F_s$ ;
- ▶ El número total de muestras es  $d/T_s = 160$  muestras
- ▶ Generamos los valores de  $t$  de muestreo  $\Rightarrow t = [0:T_s:d-T_s]$ ;
- ▶ Generamos tres tonos y su suma  $\Rightarrow A = 1$ ;  $F_1 = 250$ ;  $F_2 = 1000$ ;  $F_3 = 2000$ ;
- ▶  $y_1 = A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_1 \cdot t)$ ;       $y_2 = A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_2 \cdot t)$ ;       $y_3 = A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_3 \cdot t)$ ;
- ▶  $y = y_1 + y_2 + y_3$ ;
- ▶ El apóstrofe (') convierte el vector fila en un vector columna
- ▶ Dibujamos los tonos y su suma:
  - ▶ `subplot(2,2,1), plot(t,y1), title('F1=250');`
  - ▶ `subplot(2,2,2), plot(t,y2), title('F1=1000');`
  - ▶ `subplot(2,2,3), plot(t,y3), title('F1=2000');`
  - ▶ `subplot(2,2,4), plot(t,y), title('Suma de tonos');`



## 10.1. Digitalización de audio

- ▶ **Reproducción de los tonos.** Pasos:
- ▶ Para reproducir un sonido en Octave podemos usar el comando `sound(x,Fs,nBits)`.
- ▶  $x \equiv$  Muestras a reproducir. Tradicionalmente Octave ha usado vectores columna pero si se los pasamos en un vector fila también los acepta.
- ▶  $Fs \equiv$  La frecuencia de muestreo de la señal de audio.
- ▶  $nBits \equiv$  Número de bits del ADC para realizar la cuantificación antes de ser enviados al dispositivo de salida. Pueden ser 8, 16 o 32 bits. Defecto, 8 bits.
- ▶ La señal a reproducir debe estar comprendida entre  $[-1.0,1.0]$ . Para normalizarla se puede usar el comando `y = y ./ max(abs(y));`
- ▶ Ahora podemos reproducir `y` con el comando `sound(y,Fs);`

# 10.1. Digitalización de audio

- ▶ **Señales mono y estéreo.**
- ▶ En Octave, un vector columna representa una señal mono y 2 vectores columna representa una señal estéreo. Por ejemplo, podemos generar una señal de audio que en el lado izquierdo genere un tono de 250Hz y en el lado derecho un tono de 2000Hz con los comandos:
- ▶ `y_estereo = [y1 y3];` generamos una matriz con dos columnas
- ▶ `sound(y_estereo,Fs);` reproducimos en estéreo `y1` e `y3`
- ▶ Una forma sencilla de convertir este sonido estéreo en mono es promediando las muestras del lado izquierdo y derecho  $\Rightarrow y\_mono = \text{sum}(y\_estereo, 2) ./ 2;$
- ▶ Si no ponemos el `.2` hace la suma de los elementos de cada columna y los divide por dos, dando como resultado solo dos números, uno para la suma de la primera columna entre dos y otro para la suma de la segunda columna entre dos (vector 1 x 2).

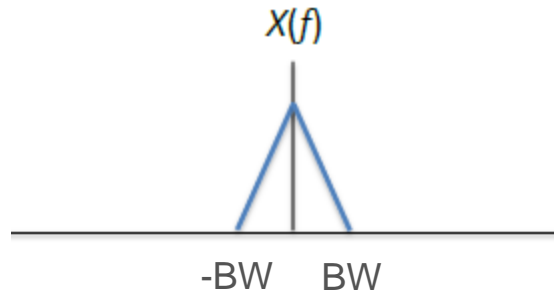


# 10.1. Digitalización de audio

- ▶ **Grabar y leer ficheros de audio.**
- ▶ Para guardar señales de audio podemos usar el comando **wavwrite**:  
`wavwrite(y,Fs,nBits,filename)`
- ▶ El nombre del fichero **filename** y las muestras a grabar **y** son parámetros obligatorios.
- ▶ Los parámetros **opcionales** que podemos no proporcionar son:
  - La frecuencia de muestreo que por defecto vale  $F_s=8000$ .
  - El número de bits por muestra, que por defecto vale  $n_{\text{Bits}}=16$ .
- ▶ Análogamente, podemos usar el comando **wavread** para leer un fichero de audio:
  - ▶ `[y,Fs,nBits] = wavread('tono1.wav');`
  - ▶ Además de las muestras **y**, devuelve la frecuencia muestreo del fichero  $F_s$  y la profundidad de bits  $n_{\text{Bits}}$  de las muestras.
  - ▶ También se puede indicar un número de muestras  $N$  a leer:
  - ▶ `[y,Fs,nBits] = wavread('tono1.wav',N);`
  - ▶ O incluso indicar un rango de muestras a leer:
  - ▶ `[y,Fs,nBits] = wavread('tono1.wav',[N1 N2]);`

## 10.2. Frecuencia de muestreo

- **Criterio de Nyquist.** Establece que la frecuencia de muestreo  $F_s$  necesaria para recuperar la señal original continua sin *aliasing* debe ser al menos el doble de la frecuencia más alta de la señal original a digitalizar. Es decir, debe ser el doble del ancho de banda BW de la señal original.



- El oído humano es sensible a señales acústicas entre 20 Hz y 22 KHz. La frecuencia de muestreo que nos permite representar todos los sonidos audibles debería ser un poco mayor a 44 KHz. Por esta razón los formatos de digitalización de audio de alta fidelidad utilizan como frecuencia de muestreo 44.1 KHz.

## 10.2. Frecuencia de muestreo

- ▶ **Aliasing.** Solapamiento frecuencial que se produce cuando muestreamos la señal original a digitalizar a una frecuencia inferior a dos veces el ancho de banda BW de la señal.
- ▶ La señal muestreada  $x_\delta(t)$  será el producto de la original  $x(t)$  por un tren de deltas.
- ▶ La transformada de Fourier de la señal muestreada será la convolución de la transformada de  $x(t)$  y la transformada del tren de deltas.
- ▶ La operación se simplifica porque es fácil demostrar, usando la fórmula de los coeficientes de la FS, que la transformada de un tren de deltas en el dominio del  $t$  es otro tren de deltas en el dominio de  $w$ .

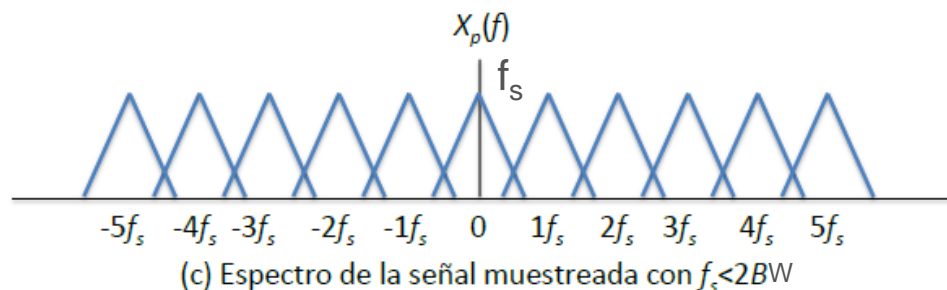
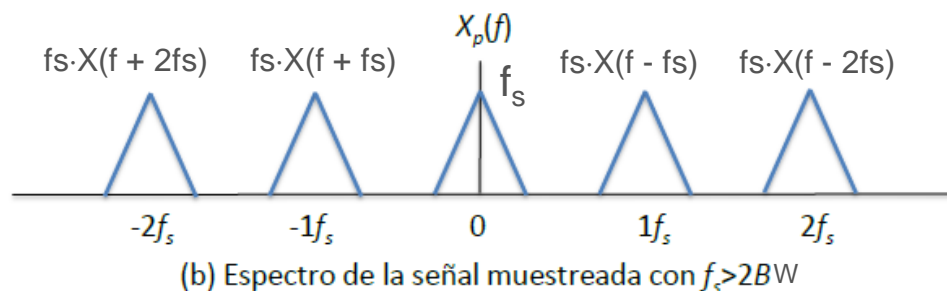
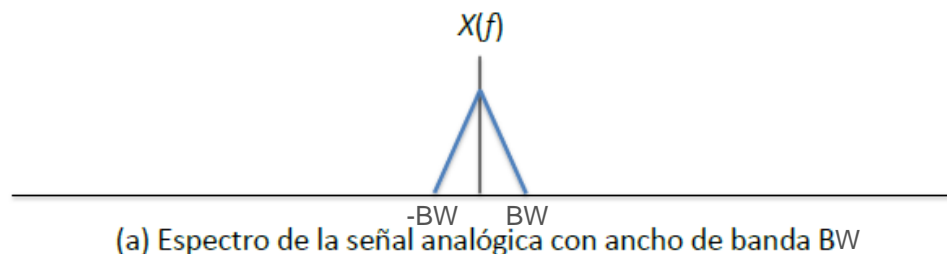
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \iff F_s \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - mf_s)$$

$$x_\delta(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \iff X_\delta(f) = X(f) * F_s \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - mf_s)$$

- ▶ Observando  $X_\delta(f)$ , consiste en replicar  $X(f)$  en frecuencias múltiplo de  $F_s$ .

## 10.2. Frecuencia de muestreo

- **Aliasing.** Solapamiento frecuencial que se produce cuando muestreamos la señal original a digitalizar a una frecuencia inferior a dos veces el ancho de banda  $BW$  de la señal.



## 10.2. Frecuencia de muestreo

- **Aliasing.** Ejemplo: Sea la señal  $x(t) = \cos(2\pi 500t) + \cos(2\pi 1000t) + \cos(2\pi 2000t)$ , que sucede cuando la muestreamos 3000 muestras/seg y 5000 muestras/seg.

$F_s = 3000$ ; Definimos la frecuencia de muestreo

$T_s = 1/F_s$ ; Definimos la separación temporal entre muestras

$t = [0: T_s : 10 - T_s]$ ; Definimos los instantes de muestreo hasta 10 segundos –  $T_s$   
(Para seleccionar un número entero de periodos. Si lo definimos hasta 10 estamos seleccionando una muestra más correspondiente al periodo siguiente y el resultado cambia)

$x = \cos(2\pi 500t) + \cos(2\pi 1000t) + \cos(2\pi 2000t)$ ; definimos  $x(t)$

$X = \text{fft}(x)$ ; Calculamos la fft de  $x(t)$

$N = \text{length}(X)$ ;

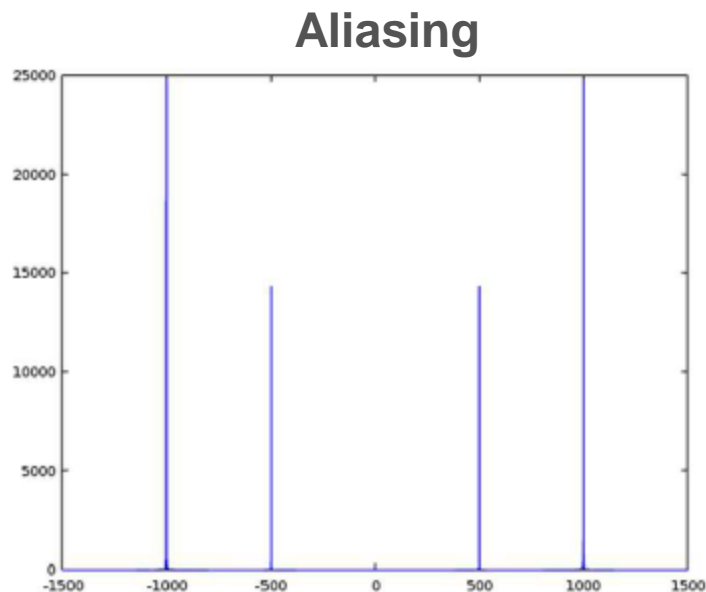
$T_f = F_s/N$ ; Calculamos la separación entre dos componentes contiguas de la fft

$f = [-0.5F_s:T_f:0.5F_s]$ ; Definimos el eje de frecuencias considerando la separación anterior. Puesto que el muestreo de una señal genera réplicas del espectro original cada  $F_s$  Hz, es suficiente con pintar un rango de  $F_s$  Hz

$f = f(1:\text{end}-1)$ ; Quitamos una muestra para que tenga las mismas que la fft  
 $\text{plot}(f, \text{abs}(\text{fftshift}(X)))$ ; Pintamos la fft centrada en cero

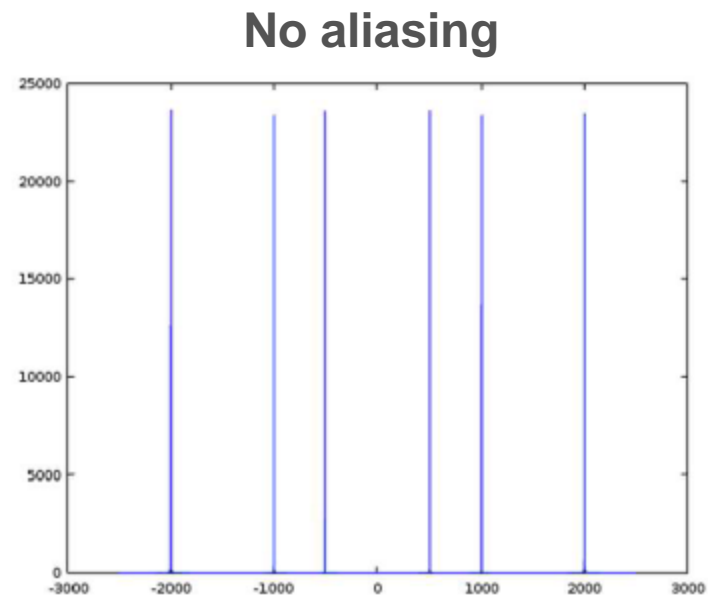
## 10.2. Frecuencia de muestreo

- **Aliasing.** Ejemplo: Sea la señal  $x(t) = \cos(2\pi 500t) + \cos(2\pi 1000t) + \cos(2\pi 2000t)$ , que sucede cuando la muestreamos 3000 muestras/seg y 5000 muestras/seg.



(a)  $f_{s1}=3000$  muestras/seg

Podemos ver el aliasing donde el pulso a 2000Hz se suma al pulso a -1000Hz (y el pulso a -2000Hz se suma al pulso a 1000Hz)



(b)  $f_{s1}=5000$  muestras/seg

Todas las amplitudes llegan hasta 25000. Comprobado en simulación. Al dividir entre el número de muestras, 50000, da amplitud 0.5 que es la amplitud de cada componente del coseno ( $f_0$  y  $-f_0$ ).

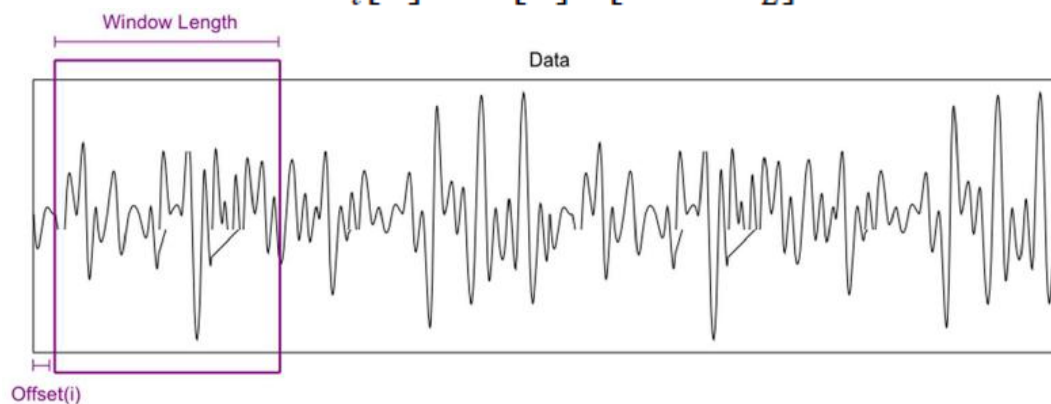
## 10.3. Enventanado

- ▶ La señal de audio es no estacionaria, es decir, que varía con el tiempo.
- ▶ Por esta razón, en la mayoría de aplicaciones de audio la señal se divide en ventanas de corta duración (10ms-50ms) y se analiza la señal ventana por ventana.
- ▶ Se llama enventanado a la operación de multiplicar una señal  $x[n]$  por una ventana  $w[n]$  de duración definida  $W_L$ :

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq W_L - 1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

- ▶ En cada iteración multiplicamos la señal de audio  $x[n]$  por una versión desplazada de la ventana. El resultado es la señal enventanada  $x_i[n]$ :

$$x_i[n] = x[n]w[n - iW_L]$$



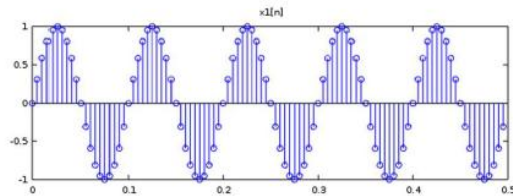
## 10.3. Enventanado

- ▶ **Compromiso entre resolución frecuencial y espacial.**
- ▶ En el tema 9 se vio que añadiendo ceros a  $x[n]$  (aumentando el número de muestras) daba lugar a una DFT con mayor resolución frecuencial.
- ▶ Este incremento de la resolución frecuencial es válido siempre que la señal permanezca estacionaria.
- ▶ Si las frecuencias que componen la señal cambian con el tiempo, el incremento de  $N$  da lugar a un promediado de las frecuencias en diferentes instantes de tiempo.
- ▶ Existe por tanto un compromiso entre la resolución frecuencial y la resolución temporal. Experimentalmente se ha comprobado que los mejores análisis de señales de audio se producen con ventanas de entre 10 ms y 50 ms.

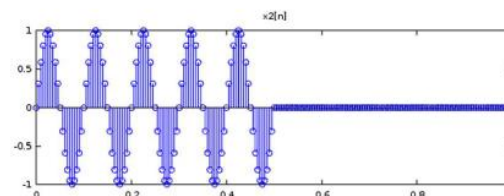


## 10.3. Enventanado

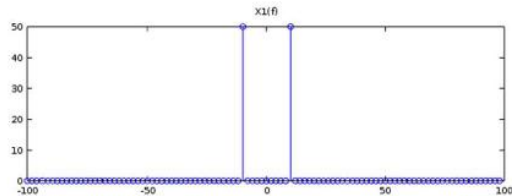
- ▶ **Goteo espectral.** La señal se desparrama por frecuencias distintas a la de la señal.
- ▶ Dependiendo de la ventana seleccionada, la señal final sobre la que se calcula la FFT puede contener saltos y picos temporales que pueden dar lugar al goteo espectral.
- ▶ La primera señal selecciona un número entero de periodos. Si replicamos de forma infinita (que es lo que hace la fft) la señal, obtenemos un seno perfecto. Debido a esto el espectro son deltas puras. Con la segunda, no ocurre eso.



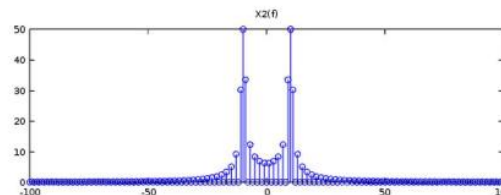
(a) Señal sin padding



(c) Señal con padding



(b) Representación frecuencial de (a)



(d) Representación frecuencial de (c)

**El padding ha introducido goteo espectral**

## 10.4. STFT

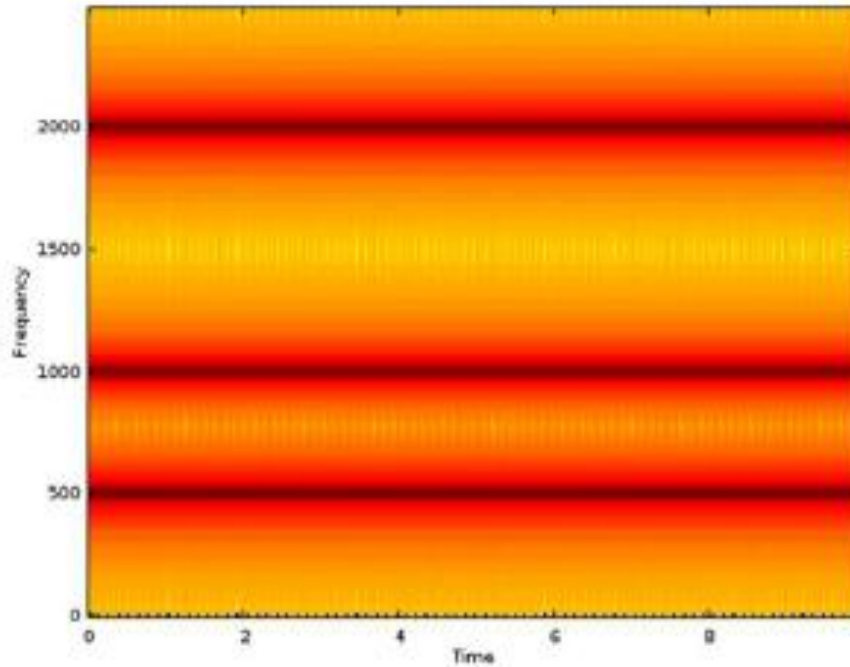
- ▶ La **STFT** (Short Time Fourier Transform) es una representación frecuencial para señales que varían en el tiempo. Consiste en dividir la señal en ventanas y calcular la DFT de cada ventana. La longitud de la ventana juega un papel importante: ventanas más largas dan una mejor resolución espectral a cambio de reducir la calidad de la resolución temporal.
- ▶ La forma de representar la STFT es mediante un espectrograma.
- ▶ Un espectrograma es una imagen que representa la evolución de una señal en los dominios del tiempo y de la frecuencia. Para generarlo, los coeficientes DFT de cada ventana se colocan en una columna de una matriz. Las filas indican las diferentes frecuencias.
- ▶ Al poner en cada columna los coeficiente de la DFT de cada ventana, cada columna representa un instante temporal correspondiente a la longitud de la ventana.
- ▶ Del mismo modo, cada fila da información frecuencial de la señal.

## 10.4. STFT

- ▶ En Octave se puede calcular el espectrograma de una señal  $x$  usando el comando `specgram(x,N,Fs)`, donde **N** indica el tamaño de la ventana en número de muestras y **Fs** la frecuencia de muestreo.
- ▶ Ejemplo: Calcular el espectrograma de los tres tonos del ejemplo anterior.
- ▶ Ejecutando `specgram(x)`, Octave selecciona por defecto una frecuencia de muestreo de 2 Hz, con lo que es muy recomendable pasar siempre la frecuencia a la que está muestreada la señal. Dado que nuestra señal está muestreada a  $f_s = 5000$  Hz, la forma correcta de ejecutarlo es:
- ▶ `specgram(x,256,5000);`

## 10.4. STFT

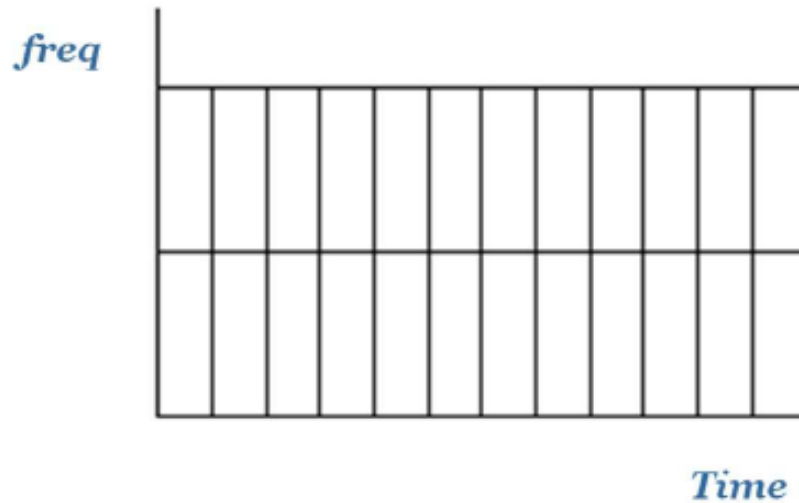
- ▶ `specgram(x,256,5000);`



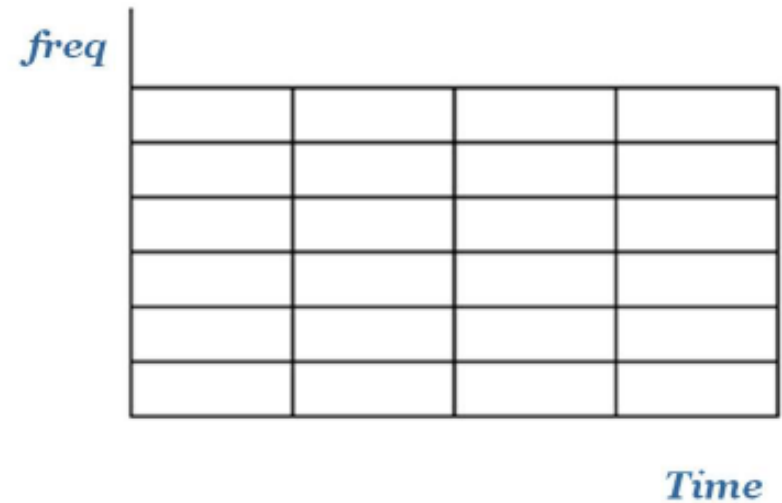
- ▶ Eje y: frecuencia, Eje x: tiempo
- ▶ Se observa como la energía se concentra en las frecuencias de los tonos y como al cambiar el tiempo, el espectrograma no varía (como debe ser)

## 10.4. STFT

- Forma que adoptan los coeficientes dependiendo de  $N$



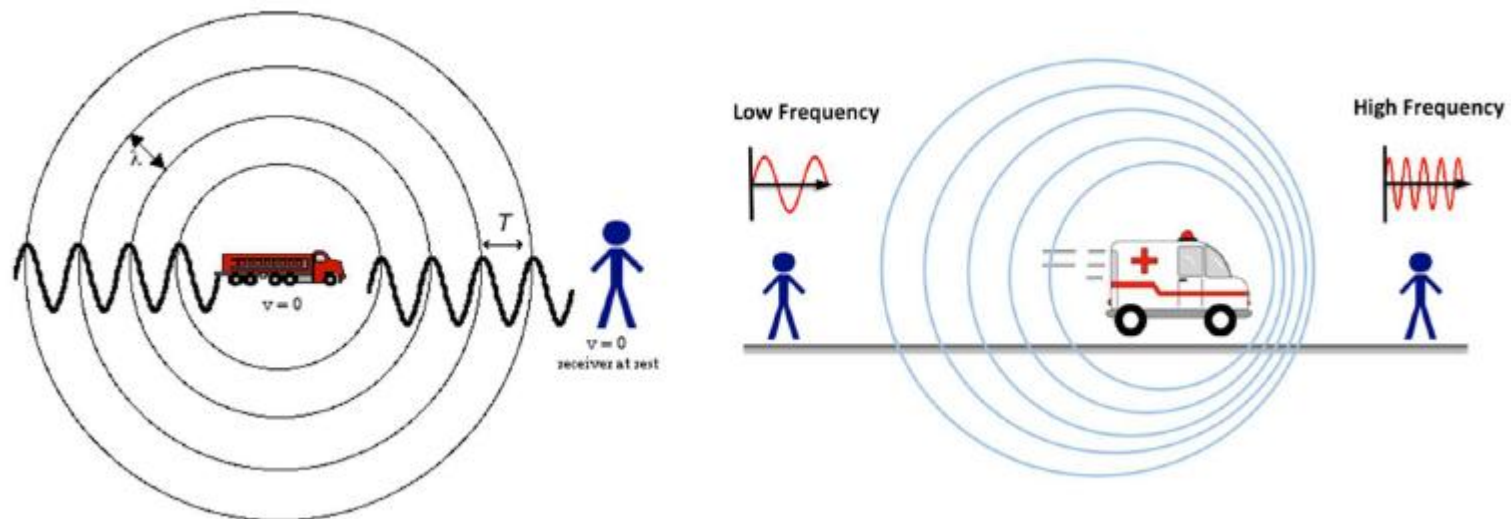
$N$  más pequeño da lugar a más resolución temporal y menos frecuencial



$N$  más grande da lugar a más resolución frecuencial y menos temporal

## 10.5. Efecto Doppler

- ▶ Cuando está en movimiento el emisor o receptor de una onda (p.e., ondas acústicas o electromagnéticas) se produce una diferencia entre la frecuencia a la que el emisor produce las ondas  $f_e$  y la frecuencia a la que el receptor las recibe  $f_r$ . Este fenómeno recibe el nombre de efecto **Doppler**, en honor a su descubridor, el físico Australiano Christian Doppler (1842).



- ▶ En la figura izq. el emisor está en reposo. En la figura se muestran los frentes de onda: ondas concéntricas centradas en el emisor y separadas por un periodo  $T$ . La figura dcha. muestra que cuando el emisor se acerca al receptor la frecuencia percibida en el receptor  $f_r$  aumenta y cuando se aleja disminuye.

## 10.5. Efecto Doppler

- ▶ **Longitud de onda.** Llamamos longitud de onda  $\lambda_e$  a la distancia recorrida por la onda en un periodo de vibración

$$\lambda_e = c \cdot T_e = \frac{c}{f_e}$$

$c \equiv$  Velocidad de propagación de la señal

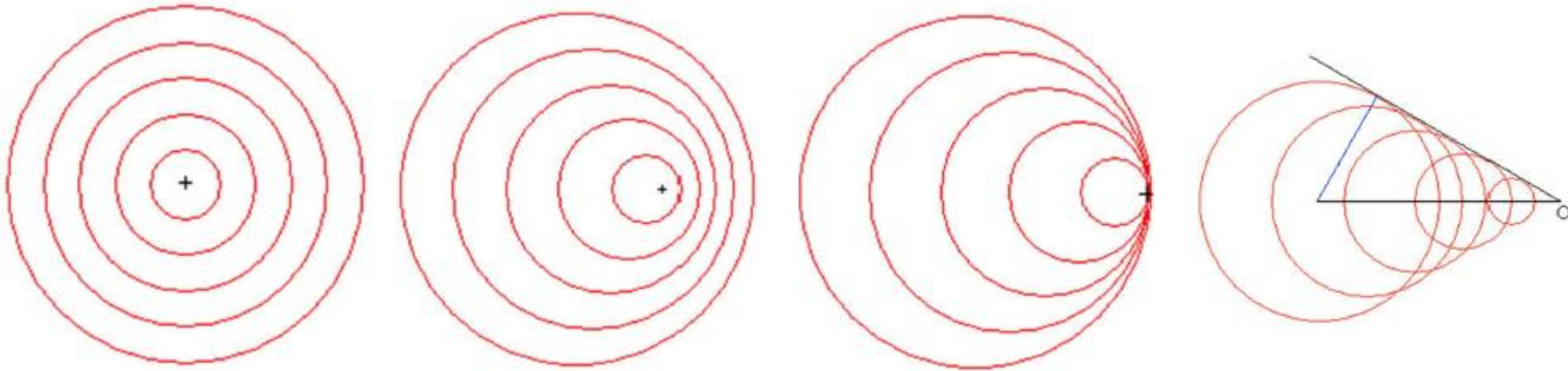
$T_e \equiv$  Periodo de la onda

$f_e \equiv$  frecuencia de la onda

- ▶ Donde  $c$  es la velocidad de propagación de la señal,

## 10.5. Efecto Doppler

- ▶ **Frentes de onda para el movimiento del emisor (Rx a la derecha).**

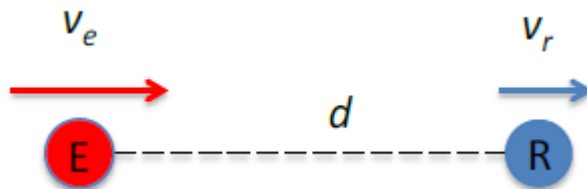


- ▶ **1.**  $V_e = 0$ . Los frentes de onda observados por el receptor son concéntricos y el receptor percibe la misma frecuencia  $f_e$
- ▶ **2.**  $V_e > 0$  y  $V_e < c$ . La longitud de onda percibida por el receptor es menor y la frecuencia mayor.
- ▶ **3.**  $V_e = c$ . La longitud de onda percibida por el receptor es cero y la frecuencia infinito.
- ▶ **4.**  $V_e > c$ . La longitud de onda percibida por el receptor comienza a ser negativa (aumenta en negativo conforme  $V_e$  aumenta) y la frecuencia percibida comienza a ser negativa (disminuye en negativo conforme  $V_e$  aumenta) (tiende a cero conforme  $V_e$  tiende a infinito). **La onda cónica se llama de choque.**



## 10.5. Efecto Doppler

- ▶ **Fórmula.** Supongamos que el emisor E y el receptor R se desplazan en la misma dirección y están separados por una distancia  $d$



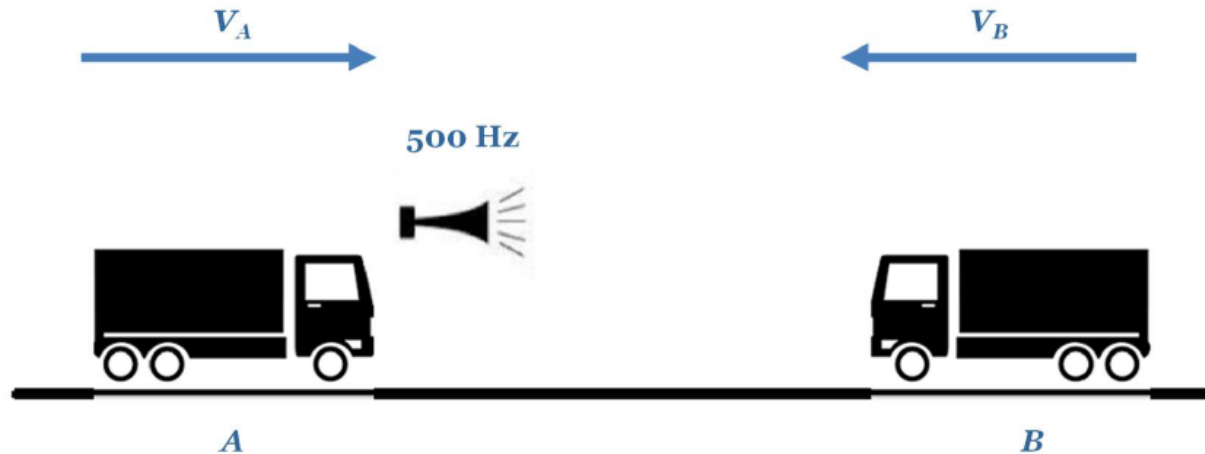
- ▶ La frecuencia de la señal recibida en el receptor  $f_r$  se relaciona con la frecuencia de la señal emitida por el emisor  $f_e$  del siguiente modo:

$$f_r = \frac{c - v_r}{c - v_e} f_e$$

- ▶ Si alguna de las velocidades cambia de sentido habría que cambiar el signo de  $v_r$  o  $v_e$ .
- ▶ Si el emisor y receptor no se mueven en la línea que une ambos, habría que calcular las componentes de velocidad en dicha dirección multiplicando por el seno o coseno del ángulo correspondiente.

## 10.5. Efecto Doppler

- **Ejemplo.** Los camiones A, B se desplazan en direcciones opuestas por una carretera, tal como muestra la figura. Sus respectivas velocidades son  $V_A=120$  km/h,  $V_B=95$  km/h. El camión A toca la bocina que emite un tono con una frecuencia de 500Hz. Asumiendo una propagación del sonido de 1224 km/h, ¿con qué frecuencia la recibirá el camión B?



- Dado que las direcciones son opuestas las velocidades de emisión y recepción serán  $v_e=+120$  km/h y  $v_r=-95$  km/h. Aplicando la fórmula de Doppler:

$$f_e = \frac{c - v_r}{c - v_e} f_e = \frac{1224 + 95}{1224 - 120} 500 \text{ Hz} = 597 \text{ Hz}$$

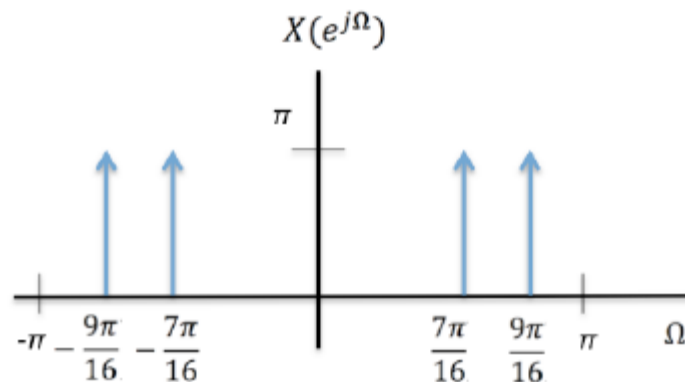
# Ejercicio 1

- ▶ Calcular la DTFT y DFT de la señal  $x_w[n]$  que resulta de truncar la señal sinusoidal  $x[n]$  con la ventana  $w[n]$ .

$$x_w[n] = x[n]w[n] \quad x[n] = \cos\left(\frac{7\pi}{16}n\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{16}n\right) \quad w[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq W_L/2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

- ▶ Calculamos la DTFT de  $x[n] \Rightarrow X(e^{j\Omega}) = DTFT\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$
- ▶ Para calcular la DTFT de señales periódicas ilimitadas en tiempo, se usa el par transformado  $\Rightarrow 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) \Leftrightarrow e^{j\Omega_0 n}$

$$X(e^{j\Omega}) = \pi\delta\left(\Omega + \frac{9\pi}{16}\right) + \pi\delta\left(\Omega + \frac{7\pi}{16}\right) + \pi\delta\left(\Omega - \frac{9\pi}{16}\right) + \pi\delta\left(\Omega - \frac{7\pi}{16}\right) \quad -\pi < \Omega < \pi$$

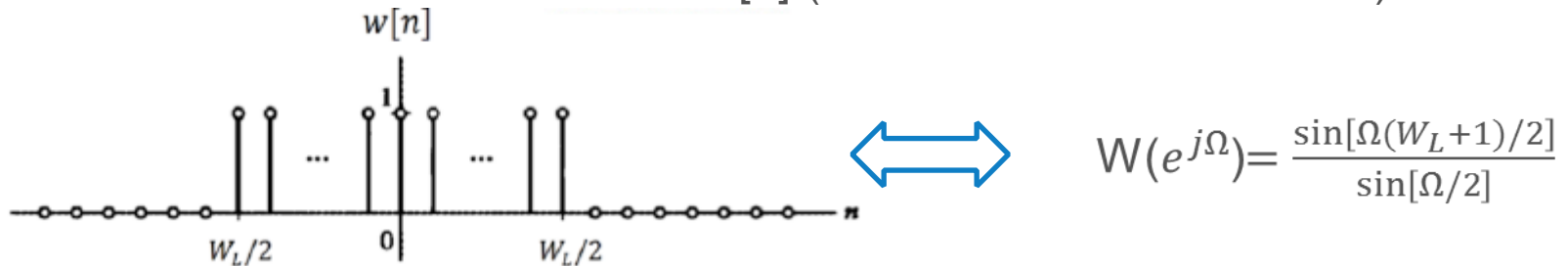


# Ejercicio 1

- ▶ Calcular la DTFT y DFT de la señal  $x_w[n]$  que resulta de truncar la señal sinusoidal  $x[n]$  con la ventana  $w[n]$ .

$$x_w[n] = x[n]w[n] \quad x[n] = \cos\left(\frac{7\pi}{16}n\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{16}n\right) \quad w[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq W_L/2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

- ▶ Ahora calculamos la DTFT de  $w[n]$  (vista en Tema 8. Punto 8.6):



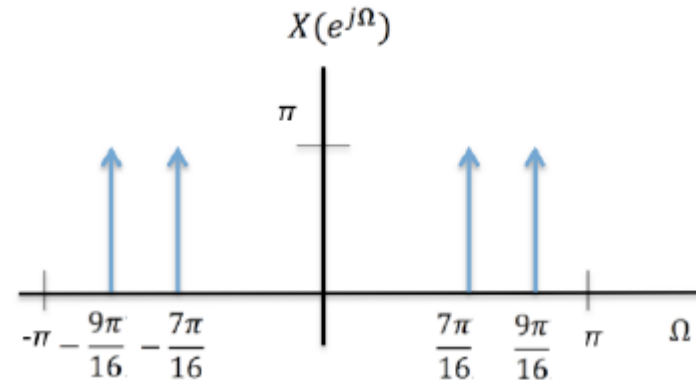
- ▶ Ahora aplicamos la propiedad del producto de señales de la DTFT:

$$x_w[n] = x[n]w[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X_w(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\Omega}) \odot W(e^{j\Omega})$$

# Ejercicio 1

$$x_w[n] = x[n]w[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X_w(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\Omega}) \circledast W(e^{j\Omega})$$

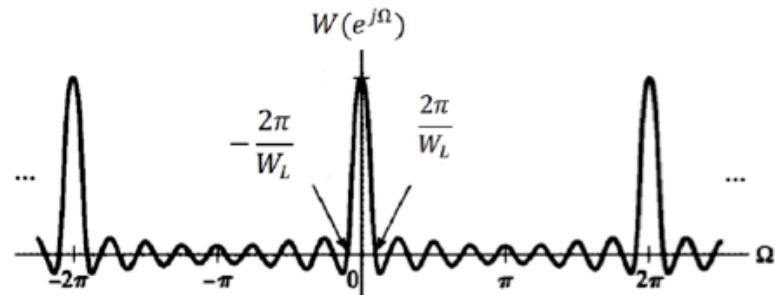
$$W(e^{j\Omega}) = \frac{\sin[\Omega(W_L+1)/2]}{\sin[\Omega/2]}$$



- Hay que hacer la convolución de  $W$  con cuatro deltas. Esto consistirá en evaluar  $W$  en las posiciones de las deltas.

**Error: sustituir  $W_L$  por  $W_L + 1$**

$$X_w(e^{j\Omega}) = \frac{\sin\left(\left(\Omega + \frac{9\pi}{16}\right)W_L/2\right)}{2 \sin\left(\left(\Omega + \frac{9\pi}{16}\right)/2\right)}$$



$$+ \frac{\sin\left(\left(\Omega + \frac{7\pi}{16}\right)W_L/2\right)}{2 \sin\left(\left(\Omega + \frac{7\pi}{16}\right)/2\right)} + \frac{\sin\left(\left(\Omega - \frac{9\pi}{16}\right)W_L/2\right)}{2 \sin\left(\left(\Omega - \frac{9\pi}{16}\right)/2\right)} + \frac{\sin\left(\left(\Omega - \frac{7\pi}{16}\right)W_L/2\right)}{2 \sin\left(\left(\Omega - \frac{7\pi}{16}\right)/2\right)}$$

# Ejercicio 1

## Relación de la DTFT con la DFT

$$X[m] = X(e^{j\Omega})|_{\Omega=\frac{2\pi m}{N}} = X\left(e^{j\frac{2\pi m}{N}}\right) \quad \text{con } m = 0, 1, \dots, N-1$$

## Coeficientes de la DFT Error: sustituir WL por WL + 1

$$X_w[m] = \frac{\sin\left(\left(\frac{2\pi m}{N} + \frac{9\pi}{16}\right)W_L/2\right)}{2\sin\left(\left(\frac{2\pi m}{N} + \frac{9\pi}{16}\right)/2\right)} + \frac{\sin\left(\left(\frac{2\pi m}{N} + \frac{7\pi}{16}\right)W_L/2\right)}{2\sin\left(\left(\frac{2\pi m}{N} + \frac{7\pi}{16}\right)/2\right)} \\ + \frac{\sin\left(\left(\frac{2\pi m}{N} - \frac{9\pi}{16}\right)W_L/2\right)}{2\sin\left(\left(\frac{2\pi m}{N} - \frac{9\pi}{16}\right)/2\right)} + \frac{\sin\left(\left(\frac{2\pi m}{N} - \frac{7\pi}{16}\right)W_L/2\right)}{2\sin\left(\left(\frac{2\pi m}{N} - \frac{7\pi}{16}\right)/2\right)}$$

← Sustituimos  $\Omega$  por  $2\pi m/N$

UNIVERSIDAD  
INTERNACIONAL  
DE LA RIOJA

**unir**

[www.unir.net](http://www.unir.net)