Tema 4
SDC: Sistemas no lineales
Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos

Dra. Neus Garrido Sàez

Máster en Ingeniería Matemática y Computación
Escuela Superior en Ingeniería y Tecnología

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

Contenido

1

Introducción

- Sistemas lineales $\Rightarrow$ Temas 2 y 3

$$X' = AX$$

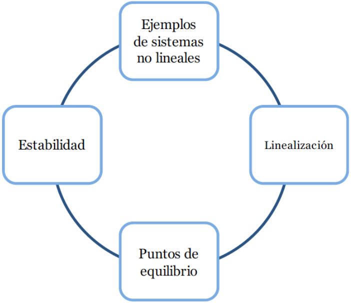
1. Valores y vectores propios
2. Expresión de la solución general

- Sistemas no lineales $\Rightarrow$ Tema 4

$$X' = F(X)$$

$$\Downarrow$$

Linealización alrededor de su punto de equilibrio



2

Ejemplos de sistemas no lineales

Ejemplos de sistemas no lineales

Ejemplo 1. $\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x + y^2 \\ y' & = & -y \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ Linealización

Ejemplos de sistemas no lineales

Ejemplo 1. $\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x + y^2 \\ y' & = & -y \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ Linealización

- Punto de equilibrio: $(0,0)$

Ejemplos de sistemas no lineales

Ejemplo 1. $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x + y^2 \\ y' & = & -y \end{array} \right. \Rightarrow$ Linealización

- Punto de equilibrio: $(0,0)$

  y pequeño $\Rightarrow y^2$ todavía más pequeño

Ejemplos de sistemas no lineales

Ejemplo 1. $\begin{cases} x' &= x + y^2 \\ y' &= -y \end{cases}$ $\Rightarrow$ Linealización

- Punto de equilibrio: $(0,0)$

  y pequeño $\Rightarrow y^2$ todavía más pequeño

- Sistema linealizado:

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= -y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X$$

Ejemplos de sistemas no lineales

Ejemplo 1. $\begin{cases} x' &= x + y^2 \\ y' &= -y \end{cases}$ $\Rightarrow$ **Linealización**

- Punto de equilibrio: $(0,0)$

  y pequeño $\Rightarrow y^2$ todavía más pequeño

- Sistema linealizado:

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= -y \end{cases} \Rightarrow \quad X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X$$

- Valores y vectores propios:

$$\lambda_1 = 1, \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = -1, \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- El origen es un punto de silla

Ejemplos de sistemas no lineales

Ejemplo 1. $\begin{cases} x' &= x + y^2 \\ y' &= -y \end{cases} \Rightarrow$ Linealización

- Punto de equilibrio: $(0,0)$

  y pequeño $\Rightarrow y^2$ todavía más pequeño

- Sistema linealizado:

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= -y \end{cases} \Rightarrow \quad X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X$$

- Valores y vectores propios:

$$\lambda_1 = 1, \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = -1, \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- El origen es un punto de silla
- Solución del sistema linealizado:

$$X(t) = C_1 e^t \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] + C_2 e^{-t} \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \Rightarrow \begin{cases} x(t) = C_1 e^t \\ y(t) = C_2 e^{-t} \end{cases}$$

Ejemplo 1. $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x+y^2 \\ y' & = & -y \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ Linealización

- Punto de equilibrio: $(0,0)$

  y pequeño $\Rightarrow y^2$ todavía más pequeño

- Sistema linealizado:

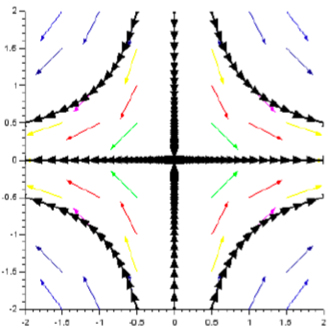
$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x \\ y' & = & -y \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X$$

- Valores y vectores propios:

$$\lambda_1 = 1, \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = -1, \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- El origen es un punto de silla
- Solución del sistema linealizado:

$$X(t) = C_1 e^{t} \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] + C_2 e^{-t} \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \Rightarrow \begin{cases} x(t) = C_1 e^{t} \\ y(t) = C_2 e^{-t} \end{cases}$$



Ejemplo 1. $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x+y^2 \\ y' & = & -y \end{array}\right. \Rightarrow$ Sistema no lineal

- $y(t) = y_0 e^{-t}$

$$x' = x + y^2 \quad \Rightarrow \quad x' = x + y_0^2 e^{-2t}$$

- Solución general: $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$
- Ecuación homogénea: $x' = x \Rightarrow x_H(t) = c_1 e^t$
- Conjetura: $x_P(t) = c_2 e^{-2t}$

$$\left.\begin{array}{l} x'(t) = -2c_2 e^{-2t} \\ x'(t) = x(t) + y_0^2 e^{-2t} = c_2 e^{-2t} + y_0^2 e^{-2t} \end{array}\right\} \Rightarrow -2c_2 = c_2 + y_0^2 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{3} y_0^2$$

- $x_P(t) = -\frac{1}{3} y_0^2 e^{-2t}$

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t) = c_1 e^t - \frac{1}{3} y_0^2 e^{-2t}$$

- Aplicando $x(0) = x_0$, $c_1 = x_0 + \frac{1}{3} y_0^2$

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{1}{3} y_0^2\right) e^t - \frac{1}{3} y_0^2 e^{-2t}$$

Ejemplo 1. $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x+y^2 \\ y' & = & -y \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ Sistema no lineal

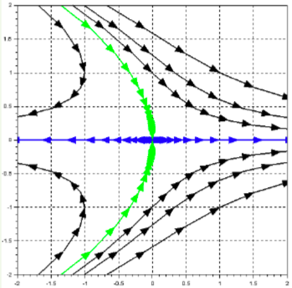
$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \left(x_0+\frac{1}{3}y_0^2\right)e^t-\frac{1}{3}y_0^2e^{-2t} \\ y(t) & = & y_0e^{-t} \end{array}\right.$$

Ejemplos de sistemas no lineales

Ejemplo 1. $\begin{cases} x' &= x + y^2 \\ y' &= -y \end{cases} \Rightarrow$ Sistema no lineal

$$\begin{cases} x(t) &= \left(x_0 + \frac{1}{3}y_0^2\right)e^t - \frac{1}{3}y_0^2 e^{-2t} \\ y(t) &= y_0 e^{-t} \end{cases}$$

- Si $y_0 = 0 \Rightarrow x(t) = x_0 e^t,\ y(t) = 0$ (curva azul)
- Si $x_0 + \dfrac{1}{3}y_0^2 = 0 \Rightarrow x(t) + \dfrac{1}{3}y^2(t) = 0$ (curva verde)



- Azul: solución al sistema lineal
- Verde: la solución tiende al punto de equilibrio, única solución estable

Ejemplo 2. $\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & \frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}(x^3 + y^2 x) \\ y' & = & x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}(y^3 + x^2 y) \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ Linealización

Ejemplo 2. $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}(x^3 + y^2 x) \\ y' & = & x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}(y^3 + x^2 y) \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ Linealización

- Punto de equilibrio: $(0, 0)$

Ejemplos de sistemas no lineales

Ejemplo 2. $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}(x^3 + y^2 x) \\ y' & = & x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}(y^3 + x^2 y) \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ Linealización

- Punto de equilibrio: $(0,0)$
- Sistema linealizado:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \frac{1}{2}x - y \\ y' & = & x + \frac{1}{2}y \end{array}\right. \Rightarrow \quad X' = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} X$$

Ejemplo 2. $\begin{cases} x' &= \frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}(x^3 + y^2 x) \\ y' &= x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}(y^3 + x^2 y) \end{cases}$ $\Rightarrow$ **Linealización**

- Punto de equilibrio: $(0, 0)$
- Sistema linealizado:

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{2}x - y \\ y' &= x + \frac{1}{2}y \end{cases} \Rightarrow \quad X' = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} X$$

- Valores propios:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} - i, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2} + i \quad \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2^*$$

- El centro es una espiral fuente

Ejemplo 2. $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}(x^3 + y^2x) \\ y' = x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}(y^3 + x^2y) \end{cases} \Rightarrow$ Linealización

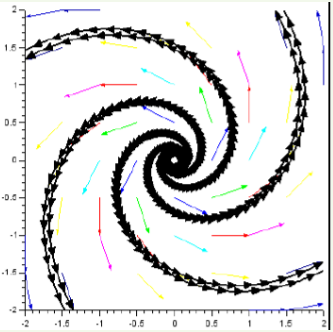
- Punto de equilibrio: $(0,0)$
- Sistema linealizado:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - y \\ y' = x + \frac{1}{2}y \end{cases} \Rightarrow \quad X' = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} X$$

- Valores propios:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} - i, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2} + i \quad \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2^*$$

- El centro es una espiral fuente

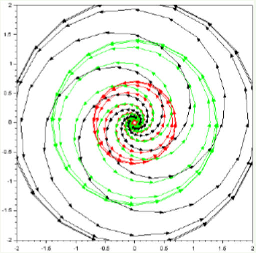


Ejemplo 2. $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}(x^3 + y^2 x) \\ y' & = & x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}(y^3 + x^2 y) \end{array}\right. \Rightarrow$ Sistema no lineal

- Cambio a coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r'r = x'x + y'y \\ \theta' = \dfrac{y'x - x'y}{r^2} \end{cases}$$

- Sistema no lineal resultante: $\left\{\begin{array}{lcl} r' & = & \frac{r}{2}(1 - r^2) \\ \theta' & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} r(t) & = & r_0\sqrt{\frac{2e^t}{1+e^t}} \\ \theta(t) & = & t + \theta_0 \end{array}\right.$



- $r \leq 1 \Rightarrow$ las órbitas tienden a una órbita fija
- $r > 1 \Rightarrow$ las órbitas tienden a infinito

Rojo: $r_0 = 0.5$

Verde: $r_0 = 1$

Negro: $r_0 = 1.5$

Ejemplos de sistemas no lineales

Ejemplo 3. $\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x^2 \\ y' & = & -y \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ Linealización

Ejemplo 3. $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x^2 \\ y' & = & -y \end{array}\right. \Rightarrow$ **Linealización**

- Punto de equilibrio: $(0,0)$
- Sistema linealizado:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 0 \\ y' & = & -y \end{array}\right. \Rightarrow \quad X' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X$$

Ejemplo 3. $\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x^2 \\ y' & = & -y \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ Linealización

- Punto de equilibrio: $(0,0)$
- Sistema linealizado:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & 0 \\ y' & = & -y \end{array} \right. \Rightarrow \quad X' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X$$

- Valores y vectores propios:

$$\lambda_1 = -1, \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = 0, \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3. $\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = -y \end{cases}$ $\Rightarrow$ Linealización

- Punto de equilibrio: $(0,0)$
- Sistema linealizado:

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow \quad X' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X$$

- Valores y vectores propios:

$$\lambda_1 = -1, \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = 0, \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Solución del sistema linealizado:

$$X(t) = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = C_2 \\ y(t) = C_1 e^{-t} \end{cases}$$

Ejemplo 3. $\begin{cases} x' &= x^2 \\ y' &= -y \end{cases} \Rightarrow$ Linealización

- Punto de equilibrio: $(0,0)$
- Sistema linealizado:

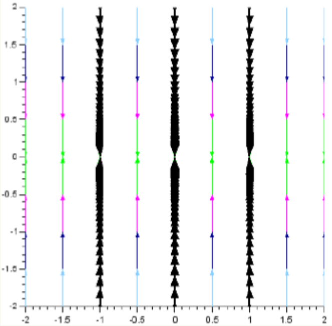
$$\begin{cases} x' &= 0 \\ y' &= -y \end{cases} \Rightarrow \quad X' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X$$

- Valores y vectores propios:

$$\lambda_1 = -1, \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = 0, \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

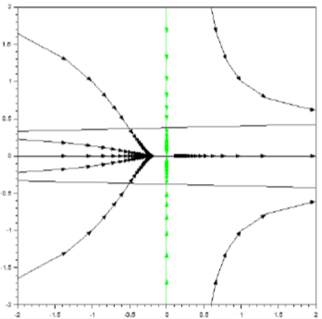
- Solución del sistema linealizado:

$$X(t) = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = C_2 \\ y(t) = C_1 e^{-t} \end{cases}$$



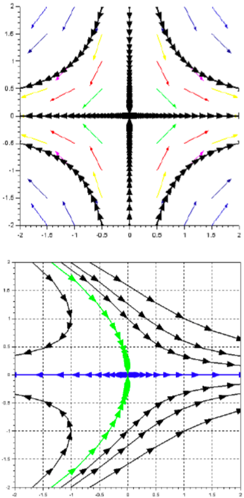
Ejemplo 3. $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x^2 \\ y' & = & -y \end{array}\right. \Rightarrow$ Sistema no lineal

- Solución general: $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & -\frac{1}{t+K_1} \\ y(t) & = & K_2 e^{-t} \end{array}\right.$
- Solución particular $(x(0) = x_0,\ y(0) = y_0)$: $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & -\frac{x_0}{1-x_0 t} \\ y(t) & = & y_0 e^{-t} \end{array}\right.$

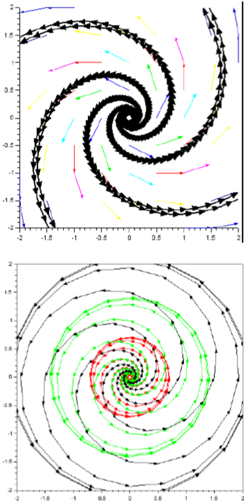


Verde: órbita que tiende al origen

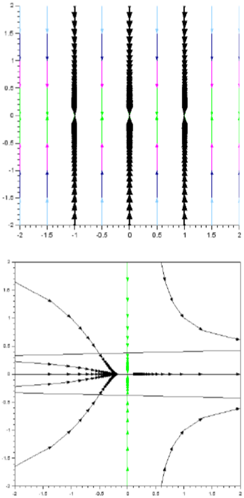
Ejemplo 1



Ejemplo 2

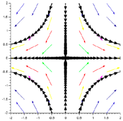
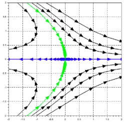


Ejemplo 3



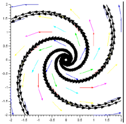
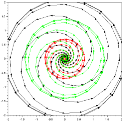
Ejemplo 1

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = -1$$

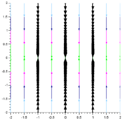
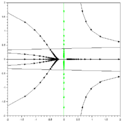
Ejemplo 2

$$\lambda_1 = 1/2 - i$$
$$\lambda_2 = 1/2 + i$$

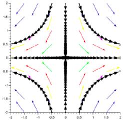
Ejemplo 3

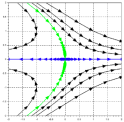
$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_2 = 0$$

Ejemplo 1

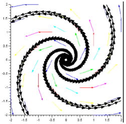
$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1\\ \lambda_2 &= -1\end{aligned}$$

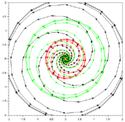




Ejemplo 2

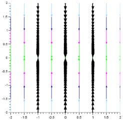
$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1/2 - i\\ \lambda_2 &= 1/2 + i\end{aligned}$$

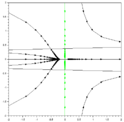




Ejemplo 3

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -1\\ \lambda_2 &= 0\end{aligned}$$





Punto de equilibrio hiperbólico

Un punto de equilibrio es hiperbólico si el sistema lineal asociado no tiene como valores propios ningún valor con parte real nula.

3

Equilibrio de sistemas no lineales

Dado el sistema no lineal

$$X' = F(X)$$

con punto de equilibrio $X^* \in \mathbb{R}^n$, el sistema lineal asociado es:

$$X' = J_F(X^*)X$$

donde $J_F(X^*)$ es la matriz Jacobiana de F evaluada en X^*:

$$J_F(X^*) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{X=X^*}$$

- **Ejemplo 1:** $X^* = (0,0)$

$$J_F(X) = \begin{bmatrix} 1 & 2y \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad J_F(X^*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- **Ejemplo 2:** $X^* = (0,0)$

$$J_F(X) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 & -1 - xy \\ 1 - xy & \frac{1}{2} - \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 \end{bmatrix} \Rightarrow J_F(X^*) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- **Ejemplo 3:** $X^* = (0,0)$

$$J_F(X) = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad J_F(X^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4. $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & y - x^2 \\ y' & = & x - 2 \end{array} \right.$

Ejemplo 4. $\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & y - x^2 \\ y' & = & x - 2 \end{array} \right.$

- Punto de equilibrio:

$$\left.\begin{array}{r} y - x^2 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x = 2, y = 4 \quad \Rightarrow \quad X^* = (2, 4)$$

Ejemplo 4. $\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & y - x^2 \\ y' & = & x - 2 \end{array} \right.$

- Punto de equilibrio:

$$\left. \begin{array}{r} y - x^2 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = 2, y = 4 \quad \Rightarrow \quad X^* = (2, 4)$$

- Matriz Jacobiana:

$$J_F(X) = \begin{bmatrix} -2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4. $\begin{cases} x' &= y - x^2 \\ y' &= x - 2 \end{cases}$

- Punto de equilibrio:

$$\left.\begin{aligned} y - x^2 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow x = 2, y = 4 \quad \Rightarrow \quad X^* = (2, 4)$$

- Matriz Jacobiana:

$$J_F(X) = \begin{bmatrix} -2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Sistema linealizado:

$$X' = J_F(X^*)X \quad \Rightarrow \quad X' = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X$$

Ejemplo 4. $\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & y - x^2 \\ y' & = & x - 2 \end{array} \right.$

- Punto de equilibrio:

$$\left. \begin{array}{r} y - x^2 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = 2, y = 4 \quad \Rightarrow \quad X^* = (2,4)$$

- Matriz Jacobiana:

$$J_F(X) = \begin{bmatrix} -2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Sistema linealizado:

$$X' = J_F(X^*)X \quad \Rightarrow \quad X' = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X$$

- Valores propios: $\lambda_1 = -2 - \sqrt{5}$, $\lambda_2 = -2 + \sqrt{5}$
- X^* es un punto de silla

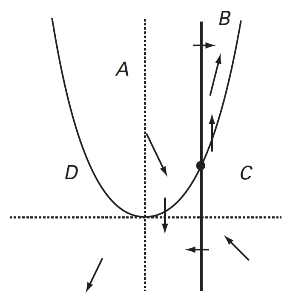
Nulclinas

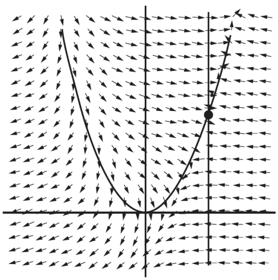
- **x-nulclina:** $x' = 0$
- **y-nulclina:** $y' = 0$

Permiten separar el plano en regiones donde los vectores del campo de direcciones tienen una misma dirección

Ejemplo 4. (cont.) $\begin{cases} x' = y - x^2 \\ y' = x - 2 \end{cases}$

- Punto de equilibrio: $X^* = (2, 4)$
- x-nulclina: $y = x^2$
- y-nulclina: $x = 2$
- Determinar en cada región (A, B, C o D) la dirección de los vectores del campo de direcciones





Equilibrio de sistemas no lineales

Estabilidad de los puntos de equilibrio

- **Punto de equilibrio hiperbólico:** el comportamiento de las soluciones en un entorno del punto de equilibrio es semejante al comportamiento de las soluciones del sistema lineal asociado

  $\Rightarrow$ Estabilidad a partir del sistema linealizado:
  - $Re(\lambda_i) < 0, \, \forall i \Rightarrow$ nodo estable o sumidero
  - $Re(\lambda_i) > 0, \, \forall i \Rightarrow$ nodo inestable o fuente
  - Existen valores propios λ_i, λ_j con $Re(\lambda_i) > 0$ y $Re(\lambda_j) < 0 \Rightarrow$ punto de silla

- **Punto de equilibrio no hiperbólico:** no podemos afirmar nada

  $\hookrightarrow$ Estabilidad de Liapunov

4

Estabilidad de Liapunov

Teorema de estabilidad de Liapunov

Sea X^* un punto de equilibrio de $X' = F(X)$. Sea $L : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable definida en un conjunto abierto $\mathcal{O}$ que contiene a X^*. Supongamos además que

(a) $L(X^*) = 0$ y $L(X) > 0$ si $X \neq X^*$;

(b) $\dot{L} \leq 0$ en $\mathcal{O} - X^*$;

Entonces X^* es un punto de equilibrio **estable**. Si además, L satisface

(c) $\dot{L} < 0$ en $\mathcal{O} - X^*$,

entonces X^* es un punto de equilibrio **asintóticamente estable**.
La función L que satisface las condiciones (a) y (b) se denomina **función Liapunov** de X^*. Si L también satisface la condición (c), se denomina **función Liapunov estricta** de X^*.

- *Análisis de la estabilidad interna de los sistemas no lineales*
- *Estabilidad de sistemas no lineales basada en la teoría de Liapunov*

Ejemplo 5. $\begin{cases} x' & = & y - x(x^2+y^2) \\ y' & = & -x - y(x^2+y^2) \end{cases}$

- Punto de equilibrio: $X^* = (0,0)$
- Sistema lineal asociado:

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X$$

- Valores propios: $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$
- $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = 0 \Rightarrow X^*$ no es un punto de equilibrio hiperbólico

¿estabilidad?

- Función de Liapunov de la forma: $L(x,y) = ax^2 + by^2$, $a, b > 0$
  - (a) $L(X^*) = 0$ y $L(X) > 0$, $X \neq X^*$
  - (b) $\dot{L} \leq 0$ en $\mathcal{O} - X^*$:

$$\begin{aligned} \dot{L} &= 2axx' + 2byy' = 2ax(y - x(x^2+y^2)) + 2by(-x - y(x^2+y^2)) \\ &= -(2ax^2 + 2by^2)(x^2+y^2) + xy(2a-2b) \underset{a=b=\frac{1}{2}}{=} -(x^2+y^2)^2 \\ &< 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 5. $\begin{cases} x' &= y - x(x^2+y^2) \\ y' &= -x - y(x^2+y^2) \end{cases}$

- Punto de equilibrio: $X^* = (0,0)$
- Sistema lineal asociado:

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X$$

- Valores propios: $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$
- $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = 0 \Rightarrow X^*$ no es un punto de equilibrio hiperbólico

¿estabilidad?

- Función de Liapunov de la forma: $L(x,y) = ax^2 + by^2$, $a, b > 0$
  - (a) $L(X^*) = 0$ y $L(X) > 0$, $X \neq X^*$
  - (b) $\dot{L} \leq 0$ en $\mathcal{O} - X^*$:

$$\begin{aligned} \dot{L} &= 2axx' + 2byy' = 2ax(y - x(x^2+y^2)) + 2by(-x - y(x^2+y^2)) \\ &= -(2ax^2 + 2by^2)(x^2+y^2) + xy(2a-2b) \underset{a=b=\frac{1}{2}}{=} -(x^2+y^2)^2 \\ &< 0 \end{aligned}$$

- X^* es un punto de equilibrio estable

- Ejercicios recomendados del tema
- Lección magistral: El error de Poincaré $\Rightarrow$ Aula Virtual
- *Ecuaciones de Lotka-Volterra: modelo presa-depredador* $\Rightarrow$ Aula Virtual
  http://pybonacci.org/2015/01/05/ecuaciones-de-lotka-volterra-modelo-presa-depredador/

- Lectura ampliación:
  - *Análisis de la estabilidad interna de los sistemas no lineales*
  - *Estabilidad de sistemas no lineales basada en la teoría de Liapunov*

...Y por supuesto:

TEST DE APRENDIZAJE!!

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET