

Actividad grupal: Sistemas dinámicos discretos complejos

Solución

Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos

Dra. Neus Garrido Sàez

Máster en Ingeniería Matemática y Computación
Escuela Superior en Ingeniería y Tecnología



1 Ejercicio 1

2 Ejercicio 2

3 Ejercicio 3

1

Ejercicio 1

Enunciado

Consideremos en \mathbb{C} la siguiente familia de polinomios cuadrática

$$f_{\gamma}(z) = z^2 - 2\gamma + 1$$

donde $\gamma \in \mathbb{C}$.

- (a) Calcula los puntos fijos del sistema dinámico.
- (b) Determina la estabilidad de los puntos fijos dependiendo del valor de γ .
Resuelve las desigualdades considerando únicamente la parte real del parámetro.
- (c) Calcula los puntos críticos de $f_{\gamma}(z)$.

Solución:

$$f_{\gamma}(z) = z^2 - 2\gamma + 1, \quad \gamma \in \mathbb{C}.$$

(a) Puntos fijos

Resolviendo $f_{\gamma}(z) = z$:

$$z_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{-3 + 8\gamma} \right), \quad z_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{-3 + 8\gamma} \right).$$

En particular, si $\gamma = \frac{3}{8}$ entonces $z_1 = z_2 = \frac{1}{2}$.

(b) Estabilidad de los puntos fijos ($\gamma \in \mathbb{R}$)

$$f'_{\gamma}(z_1) = 1 - \sqrt{-3 + 8\gamma}$$

$$f'_{\gamma}(z_2) = 1 + \sqrt{-3 + 8\gamma}$$

■ z_1 es atractor si:

$$\left| 1 - \sqrt{-3 + 8\gamma} \right| < 1 \Leftrightarrow \gamma \in \left(\frac{3}{8}, \frac{7}{8} \right)$$

■ z_2 es atractor si:

$$\left| 1 + \sqrt{-3 + 8\gamma} \right| < 1 \Rightarrow \nexists \gamma \in \mathbb{R}$$

■ z_1 es repulsor si $\gamma > \frac{7}{8}$

■ z_2 es repulsor si $\gamma > \frac{3}{8}$

(c) Puntos críticos

$$f'_{\gamma}(z) = 0 \Leftrightarrow z^C = 0$$

2

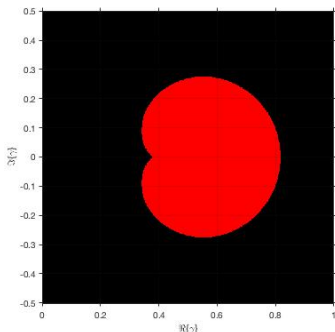
Ejercicio 2

Ejercicio 2

Enunciado

La figura representa el plano de parámetros asociado a un punto crítico libre de la familia de polinomios $f_\gamma(z) = z^2 - 2\gamma + 1$.

- (a) Describe en qué consiste un plano de parámetros, qué representa y cómo se genera.
- (b) Describe las características que observas en el plano de la figura, y relaciónalo con el estudio de la estabilidad de los puntos fijos realizado en el ejercicio 1.



Solución:

- $\Re(\gamma) \in \left(\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right) :$

z_1 atractor

z_2 repulsor

- $\Re(\gamma) > \frac{7}{8} :$

z_1, z_2 repulsores

3

Ejercicio 3

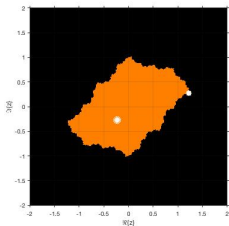
Ejercicio 3

Enunciado

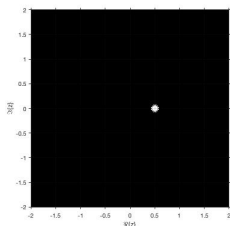
La familia de polinomios $f_\gamma(z) = z^2 - 2\gamma + 1$ tiene dos puntos fijos cuyas cuencas de atracción representamos en los planos dinámicos para valores concretos del parámetro. En las figuras se muestran tres planos dinámicos de la familia obtenidos para valores distintos de $\gamma \in \mathbb{C}$:

- ➔ Naranja y azul: cuencas de atracción de los dos puntos fijos
- ➔ Negro: divergencia

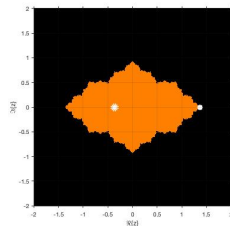
Utiliza el estudio dinámico realizado en el Ejercicio 1 y el plano de parámetros del Ejercicio 2 para determinar qué valor de $\gamma = \{3/4, 3/8, 0.6 + 0.2i\}$ se corresponde con cada gráfica. Justifica tu respuesta.



(a)

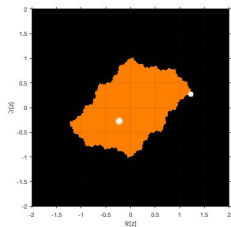


(b)

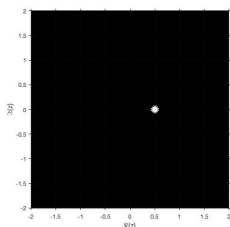


(c)

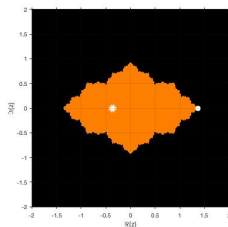
Solución:



(d) $\gamma = 0.2 + 0.6i$



(e) $\gamma = \frac{3}{8}$



(f) $\gamma = \frac{3}{4}$

Justificación:

(d) Si $\gamma = 0.2 + 0.6i \in \mathbb{C}$, el estudio previo no permite extraer ninguna conclusión.

(e) Si $\gamma = \frac{3}{8}$, entonces $z_1 = z_2 = \frac{1}{2}$ y los dos puntos fijos son neutros:

$$f'_\gamma(z_{1,2}) = 1$$

(f) Si $\gamma = \frac{3}{8}$, entonces $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ y γ está representado en rojo.

