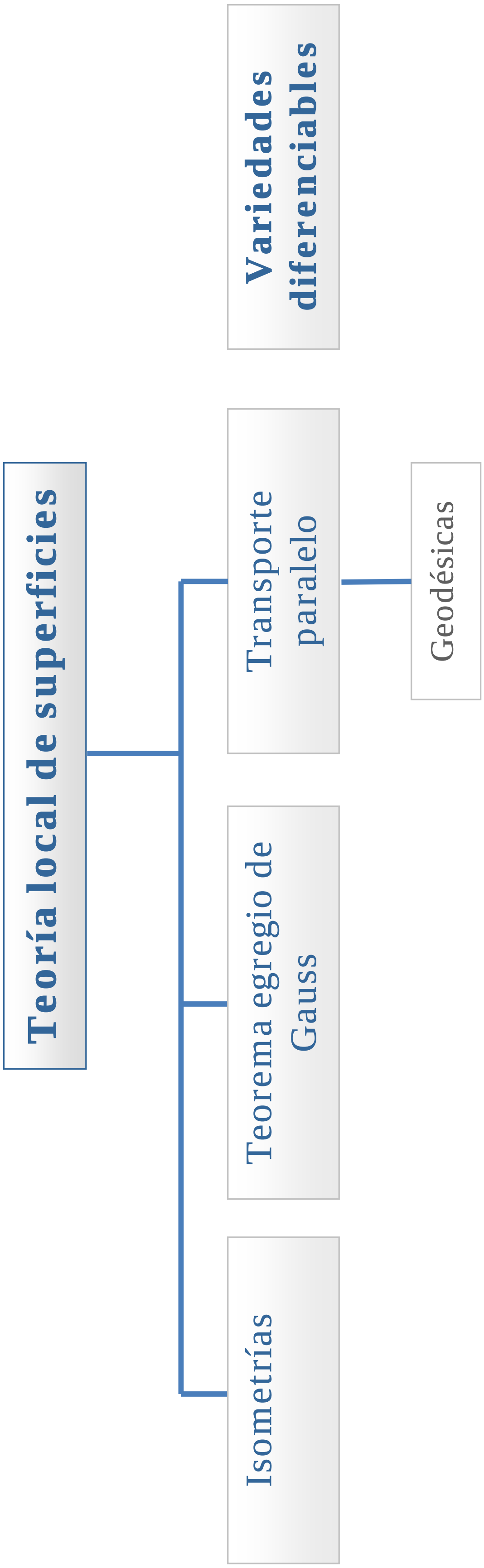
Teoría local de superficies

TEMA 7

Esquema


Teoría local de superficies
Isometrías
Teorema egregio de Gauss
Transporte paralelo
Geodésicas
Variedades diferenciables

Ideas clave

7.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

En este tema se estudia la geometría local intrínseca de superficies, es decir, aquellos elementos que permanecen invariantes por isometrías locales. Por tanto es necesario conocer:

» Isometrías locales y globales.
» Teorema egregio de Gauss. Aplicaciones.
» Transporte paralelo.
» Geodésicas.

7.2. Isometrías

El concepto de isometría entre superficies se utiliza para decidir si puede representarse una superficie en la otra sin sufrir ninguna deformación. Por ejemplo, podemos preguntarnos si puede construirse un mapa perfecto de la Tierra aproximada como una esfera o un elipsoide, entendiendo por mapa perfecto aquel que conserva los ángulos y las distancias. Es decir, nos preguntamos si existe alguna isometría entre el plano y la esfera o el elipsoide.

Este tipo de cuestiones que son tan interesantes desde el punto de vista de la ingeniería suelen ser bastante complicadas desde el punto de vista matemático. Para demostrar que dos superficies son isométricas basta con encontrar la isometría entre ellas pero si no lo son la demostración es bastante más complicada, ya que en principio implicaría la comprobación de que ninguna de las posibles aplicaciones entre las superficies es una isometría. Como hay infinitas aplicaciones, a priori resulta una tarea inabordable.

La principal aplicación del teorema egregio de Gauss es determinar que dos superficies dadas no son localmente isométricas.

La aplicación entre superficies $F: S_1 \longrightarrow S_2$ es una **isometría** si es un difeomorfismo y si $\forall\, p \in S_1, \forall\, w_1, w_2 \ \in T_pS$, se tiene que $< dF_p(w_1), dF_p(w_2) >_{F(p)} = < w_1, w_2 >_p$.

Es decir, una isometría es una aplicación uno a uno entre superficies que es suave y que preserva el producto escalar, es decir, la métrica. Así es fácil probar que una aplicación es una isometría si y solo si preserva la primera forma fundamental.

Se dice que las **superficies** S_1 y S_2 son si existe una aplicación $F: S_1 \longrightarrow S_2$ tal que F es una isometría.

Ejemplo:

Sea el movimiento rígido $M: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$Mp = Ap + b, A \in O(3) \Longrightarrow < Au, Av > = < u, v >, \forall\, u, v \ \in \ \mathbb{R}^3$$

Sabemos que M^{-1} existe y es movimiento rígido.

Sea $F: S_1 \longrightarrow S_2$, $F = M|_{S_1}$, $M(S_1) = S_2$, vamos a probar que F es una isometría.

» F es diferenciable (trivial).
» F es biyectiva.
» Veamos que $< dF_p(w_1), dF_p(w_2) >_{S_2} = < w_1, w_2 >_{S_1}$:

Sea $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S_1$, $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$.

$$dF_p(w) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (F \circ \alpha)(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (A \cdot \alpha(t) + b) = A\alpha'(0) = Aw$$

Por tanto, si $p \in S_1$,

$$< dF_p(w_1), dF_p(w_2) > = < Aw_1, Aw_2 > = < w_1, w_2 >$$

Observación: no todas las isometrías entre superficies proceden de movimientos rígidos.

La aplicación entre superficies $F: S_1 \longrightarrow S_2$ es una **isometría local** en $\forall\, p \in S_1$ si existe un entorno V de p y un entorno W de $F(p)$ tal que $F|_v: V \longrightarrow W$ es isometría.

S_1 es **localmente isométrica** a S_2 si $\forall\, p \in S_1$ existe una isometría local.

Ojo, una isometría local no tiene que ser necesariamente un isomorfismo, de hecho S_1 localmente isométrica a $S_2 \;\not\Rightarrow\; S_2$ localmente isométrica a S_1.

Decimos que dos superficies son localmente isométricas si S_1es localmente isométrica a S_2 y S_2 es localmente isométrica a S_1.

Para que se pudiera hacer un mapa perfecto de la Tierra bastaría con que existiera una isometría local de la esfera (o del elipsoide) al plano, que es una condición menos restrictiva que la de isometría global.

Como las isometrías preservan el producto escalar, es bastante intuitivo que dadas las parametrizaciones, φ y $\bar{\varphi}$ de S_1 y S_2 respectivamente, $\varphi: U \longrightarrow S$, $\bar{\varphi}: U \longrightarrow \bar{S}$ tales que $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$ y $G = \bar{G}$, entonces $\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ es una isometría.

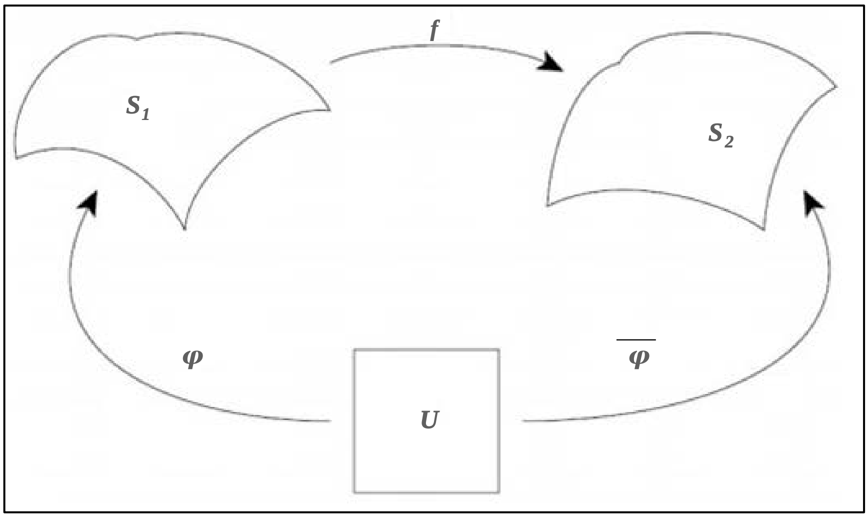


Figura 7.1**.** Isometría entre dos superficies

Fuente: http://graphics.stanford.edu/

Ejemplo:

El plano es localmente isométrico al cilindro. La idea es sencillísima, básicamente estamos diciendo que un cilindro es una tira de plano enrollada.

Esta idea hay que afinarla un poco: lo primero que tenemos que hacer es quitar una generatriz del cilindro («abrirlo»). Ahora vamos a usar el resultado anterior para demostrar que la tira del plano es isométrica al cilindro sin generatriz.

Consideramos las parametrizaciones φ y $\bar{\varphi}$ del cilindro (C) y el plano (P) respectivamente:

$$\begin{aligned}\varphi: (0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\longrightarrow C \\ (u, v) &\longrightarrow (cosu, senv, v)\end{aligned}$$

Sabemos que: $E = 1, F = 0, G = 1$

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow P \\ (u, v) &\longrightarrow (u, v, 0)\end{aligned}$$

Sabemos que: $\bar{E} = 1, \bar{F} = 0, \bar{G} = 1$

Por el resultado anterior sabemos que hay un isomorfismo entre las superficies. Como estamos quitando la generatriz no es un difeomorfismo, por tanto las superficies no son isométricas. Lo que sí podemos decir es que el plano es localmente isométrico al cilindro.

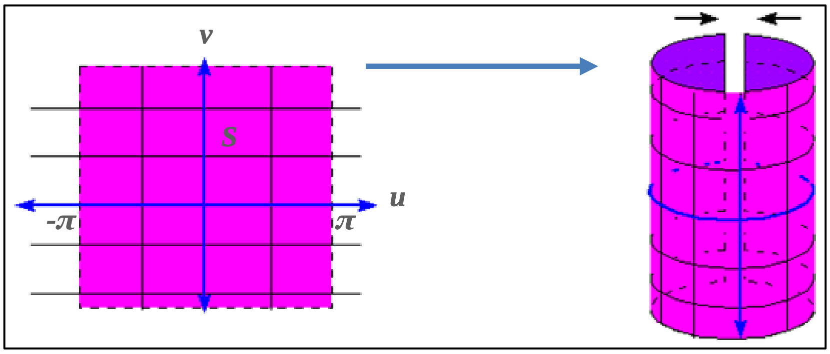


Figura 7.2. Isometría entre el plano y el cilindro

Fuente: http://math.etsu.edu/

Esta aplicación también es un ejemplo de isometría que no procede de un movimiento rígido en $\mathbb{R}^3$, ya que no lleva rectas a rectas.

7.3. Teorema egregio de Gauss

Puede probarse que la curvatura de Gauss depende únicamente de la primera forma fundamental. Esto hace que sea invariante a través de isometrías locales.

Es un resultado sorprendente ya que la curvatura media, por ejemplo, no tiene esta propiedad.

El teorema egregio de Gauss se enuncia:

Si $F\colon \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{S}'$ es una **isometría local**, entonces $K'S'(F(p)) = KS(p), \forall\, p \in S$.

Es decir, que la curvatura gaussiana se conserva a través de isometrías: la curvatura gaussiana depende de la primera forma fundamental que es invariante por isometrías.

Por tanto, si dos superficies tienen la misma curvatura gaussiana, ¿entonces son localmente isométricas? No, el enunciado del teorema no dice eso, dice que si son localmente isométricas, la curvatura gaussiana es la misma en puntos correspondientes.

La aplicación de este teorema utiliza su contra recíproco: si sabemos que dos superficies dadas nunca van a tener la misma curvatura gaussiana, entonces no son localmente isométricas.

Ejemplo:

No es posible construir una isometría local entre la esfera y el plano.

Sabemos que en un plano todos sus puntos tienen curvatura cero. También sabemos que en la esfera todos los puntos tienen la misma curvatura, $c > 0$.

Por tanto, es imposible definir una isometría local entre la esfera y el plano. El mismo razonamiento puede utilizarse con un elipsoide y el plano. Este resultado confirmó lo que los cartógrafos sospechaban desde hacía varios siglos.

7.4. Geodésicas

Sea un **campo de vectores** X en un abierto O de S, aquellos que están **sobre el plano** tangente, es decir, una correspondencia que asigna a cada $p \in O$ un vector $x_p \in T_pS$.

En concreto estamos interesados en los **campos de vectores diferenciables**, es decir, en aquellos en los que para todo punto p existen a y b diferenciables tales que:

$$x_p = a(u,v)\varphi_u + b(u,v)\varphi_u$$

Ejemplos:

» Sea $\varphi: U \longrightarrow S$ una parametrización, sea $O = \varphi(U)$.

$X_p = \varphi_u(\varphi^{-1}(p))$ es un campo de vectores ya que para todo p tenemos un vector tangente x_p y se tiene que:

$$a(u,v) = 1$$
$$b(u,v) = 0$$

Por lo que además es un campo de vectores diferenciable.

Sea S la esfera unidad $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ el conjunto $\{(-y,x,0)\}$ es un campo de vectores (figura 7.3).

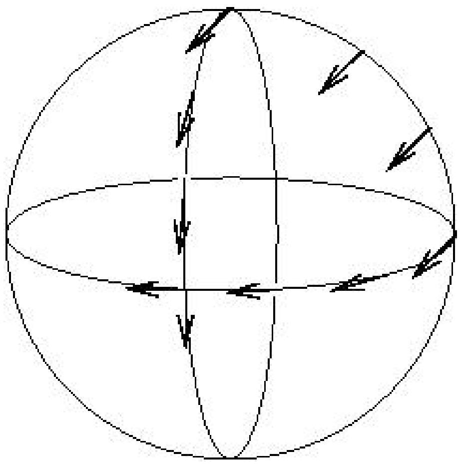


Figura 7.3. Campo de vectores de una esfera

Fuente: http://math.ucr.edu/

Sea $\alpha: I \longrightarrow S$ diferenciable. W es un **campo de vectores a lo largo de α** si $\forall\, t \in I$ $w(t) \in T_{\alpha(t)}S$. Es decir, consideramos la proyección de α'' sobre el plano tangente como en la siguiente figura.

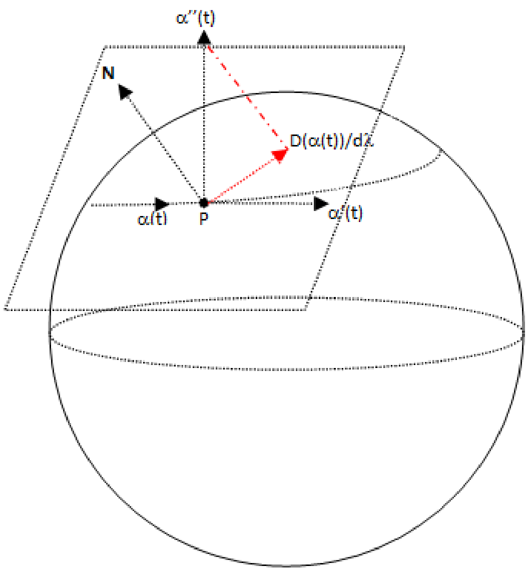


Figura 7.4. Campo de vectores a lo largo de una curva

Fuente: http://www.mathstools.com/

Es importante aclarar que hay un vector para cada momento t, no para cada punto de la traza. Por tanto, si una curva se autointerseca en ese punto tendrá asociados dos vectores.

Sea V un campo de vectores a lo largo de α se dice que es un **campo de vectores paralelo a lo largo de α** si su proyección sobre el plano tangente es cero.

La idea del transporte paralelo es que el ángulo que forma el vector del plano tangente con la curva no varíe. Hay que tener en cuenta que un campo de vectores paralelo no tiene por qué parecerlo desde fuera.

Ejemplo:

La Figura 7.5 muestra un campo de vectores paralelo en una circunferencia. En esta figura puede verse cómo la proyección sobre el plano tangente de la segunda derivada es cero.

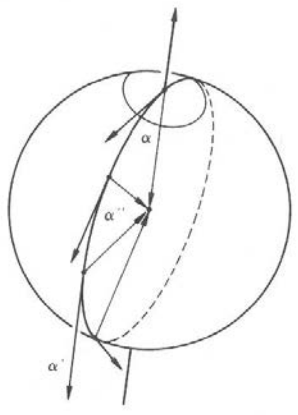


Figura 7.5. Campo de vectores paralelo en una esfera.
Fuente: Do Carmo, 1995.

La Figura 7.6 muestra un campo de vectores paralelo a lo largo de la circunferencia de un cilindro. Como puede verse, lo que se mantiene constante es el ángulo entre la curva y el vector.

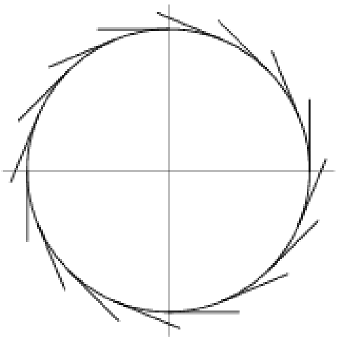


Figura 7.6. Campo de vectores de la sección transversal de un cilindro
Fuente: http://mathworld.wolfram.com/

La figura 7.7 es análoga: muestra el campo de vectores paralelo a través de la sección transversal de un toro.

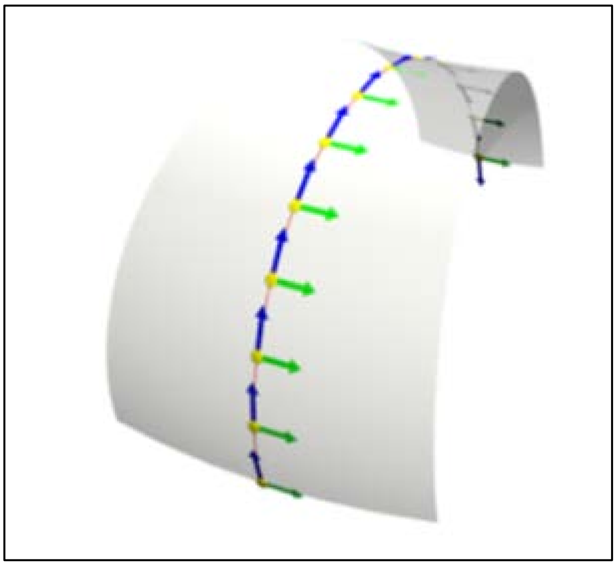


Figura 7.7. Campo de vectores de la sección transversal de un toro
Fuente: https://www.tue.nl/

Geodésicas

Una geodésica es la generalización de línea recta en espacios curvos: la forma más corta de ir de un punto A a un punto B por una superficie es ir a lo largo de una geodésica. Por tanto, las geodésicas en un plano van a ser las rectas y en este apartado vamos a ver cómo son las geodésicas de algunas de las superficies más comunes.

$\alpha: I \longrightarrow S$ diferenciable es una **geodésica** si α' es paralelo a lo largo de α.

Puede demostrarse que, para cualquier punto de la superficie y cualquier dirección v de T_pS siempre existe una geodésica que pasa por ese punto tal que $\alpha' = v$. En otras palabras siempre hay una geodésica por cada punto y en cada dirección.

Las geodésicas se mantienen a través de isometrías locales, es decir, si $F: S_1 \longrightarrow S_2$ es una isometría local y $\alpha: I \longrightarrow S_1$ es una geodésica en S_1, entonces $F \circ \alpha$ es una geodésica en S_2.

Ejemplos:

» En un **plano** las geodésicas son las rectas. La idea intuitiva es que dado un punto del plano y una dirección v la única forma de transportar v de forma paralela es tomar una recta que pase por p y tenga a v como vector director.

» En el **cilindro**, como ya hemos visto, las circunferencias son geodésicas. Es fácil ver que las generatrices también son geodésicas. Por último, las hélices también son geodésicas (figura 7.8).

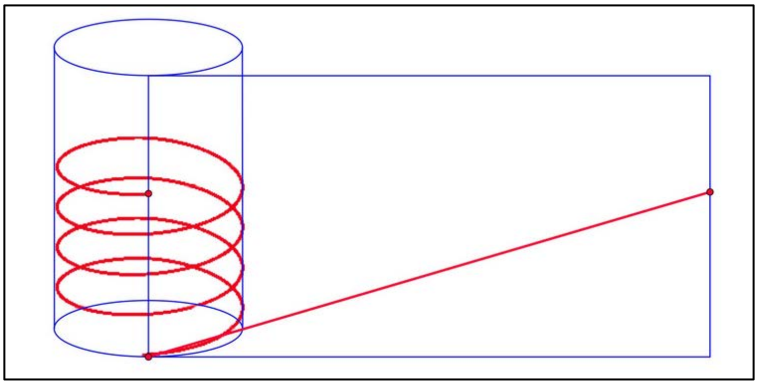


Figura 7.8. Geodésica de un cilindro

Fuente: https://www.tue.nl/

Además sabemos que el plano es localmente isométrico al cilindro, por tanto si $(u(t), v(t))$ es una recta en el plano a través de la isometría local se transformará en:

- Una generatriz, si $u = constante$.
- Una circunferencia, si $v = constante$.
- Una hélice, si $u = av$.

» Las geodésicas en la esfera son los círculos máximos (figura 7.9):

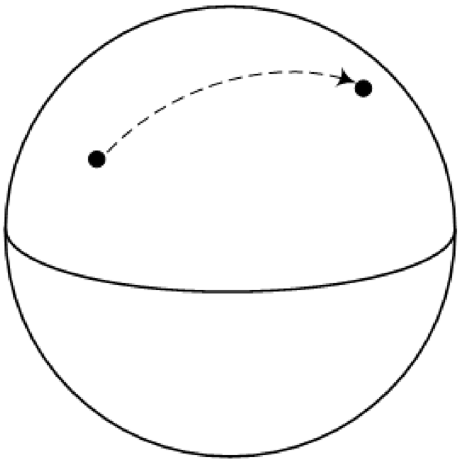


Figura 7.9. Geodésica en la esfera

Fuente: https://blogs.msdn.microsoft.com/

La figura 7.10 muestra un mapa de la Tierra con una proyección de Mercator y en rojo algunas geodésicas. Es evidente que la proyección no es una isometría local.

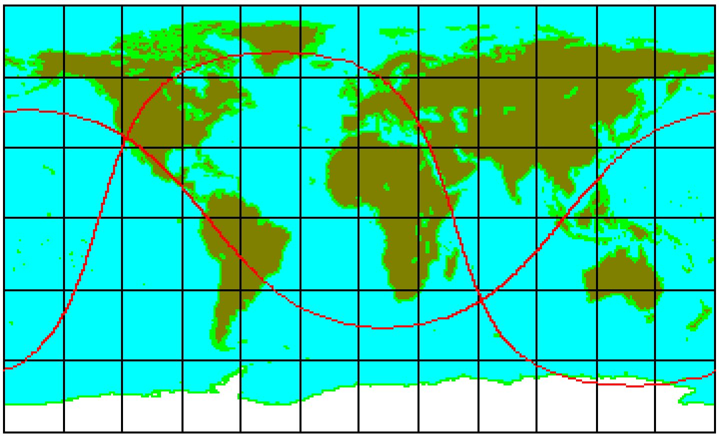


Figura 7.10. Proyección de Mercator con geodésicas

Fuente: http://astronomia.net/

7.5. Variedades diferenciables

El concepto de superficie regular puede extenderse a espacios de más de tres dimensiones. En este caso recibe el nombre de **variedad diferenciable**.

Por tanto, en una primera aproximación:

Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^m$ es una **variedad diferenciable** de dimensión k si para cada $p \in \mathrm{M}$ existen conjuntos abiertos $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^m$ y una función continuamente diferenciable $\varphi: U \longrightarrow V \cap S$ tales que:

» φ es diferenciable.
» φ es un homeomorfismo.
» $d\varphi_a: \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es inyectiva $\forall\, p \in S$.

Por tanto una variedad diferenciable es un conjunto en $\mathbb{R}^m$ con las mismas condiciones de regularidad que una superficie y que se comporta localmente como $\mathbb{R}^k$. En realidad el concepto de variedad diferenciable es algo más general pero vamos a quedarnos con esta definición más intuitiva.

De forma completamente análoga, en cada punto de la variedad se va a definir un producto escalar que verifique que cuando se varía el punto este producto escalar varía de forma regular. En este caso se dice que la **variedad** es **riemanniana**.

Por tanto, de la misma forma se van a poder determinar las longitudes de las curvas en cualquier variedad, calcular ángulos, etc. También van a poder definirse curvas geodésicas y el equivalente a la curvatura gaussiana: la curvatura riemanniana.

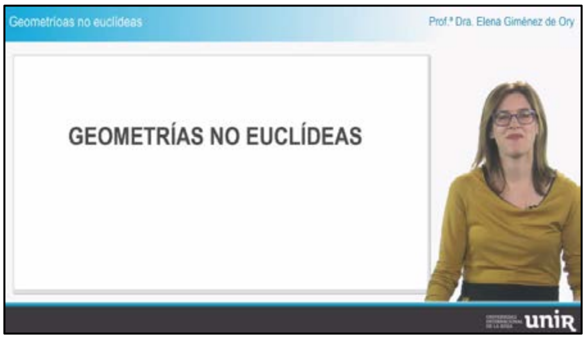
Esta generalización de la geometría diferencial tiene numerosas aplicaciones, por ejemplo, proporciona la base matemática para la teoría de la relatividad (en realidad la teoría de la relatividad necesita de un marco aún más general, el de las métricas semiriemannianas).

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

Geometrías no euclídeas

En esta clase magistral vamos a ver muy por encima las geometrías no euclídeas.



La lección magistral está disponible en el aula virtual

No dejes de leer…

Geometría en espacios curvos

En este enlace se repasan los conceptos esenciales de geometría en espacios curvos.

Curved Space and the Metric

Accede al documento desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://www.jb.man.ac.uk/~jpl/cosmo/metric.html

Variedades diferenciables

En este documento se definen las variedades diferenciables y se dan ejemplos.

Accede al documento desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web: http://web.stanford.edu/~jchw/WOMPtalk-Manifolds.pdf

Geodésicas

En este artículo se explica de forma muy divulgativa el concepto de geodésica.

Accede al documento desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web: http://blogs.20minutos.es/mati-una-profesora-muy-particular/tag/geodesicas/

+ Información

A fondo

Proyecciones

En este enlace se explican distintas proyecciones de la esfera al plano. Como no es posible definir una isometría local, todas ellas implican alguna deformación.

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://ingenieriademapas.wordpress.com/tag/proyeccion-conforme/

Geodésicas en superficies de revolución

En este documento se explica cómo calcular geodésicas en esferas y otras superficies de revolución.

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://mathworld.wolfram.com/Geodesic.html

Geodésicas como generalización de línea recta

En este documento se profundiza en el concepto de geodésica.

$$\boxed{\textbf{The Geodesic Equation}}$$

Accede al documento desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://people.oregonstate.edu/~drayt/Courses/MTH437/2007/hw/geodesic.pdf

Test

1. Las isometrías:

A. Siempre son movimientos rígidos.

B. Nunca son movimientos rígidos.

C. A y B son falsas.

2. Si dos superficies son localmente isométricas, entonces:

A. Son isométricas.

B. No son isométricas.

C. A y B son falsas.

3. El plano y el cilindro:

A. Son isométricos.

B. Son localmente isométricos.

C. A y B son falsas.

4. Si dos superficies tienen curvatura gaussiana distinta, entonces:

A. No son isométricas.

B. No son localmente isométricas en todos sus puntos.

C. A y B son falsas.

5. Si dos superficies tienen la misma curvatura gaussiana, entonces:

A. Son isométricas.

B. Son localmente isométricas.

C. A y B son falsas.

6. Si dos superficies son localmente isométricas, entonces:

A. Tienen la misma curvatura gaussiana en puntos correspondientes.

B. Tienen la misma curvatura gaussiana en alguna parametrización.

C. A y B son falsas.

7. La distancia más corta entre dos puntos se recorre a través de:

A. Una geodésica.

B. La sección normal.

C. A y B son falsas.

8. Las geodésicas en un cilindro son:

A. Las circunferencias y elipses de su sección normal.

B. Circunferencias, generatrices y hélices.

C. Circunferencias y generatrices.

9. Las geodésicas en una esfera son:

A. Los círculos.

B. Los círculos máximos.

C. A y B son falsas.

10. Una variedad diferenciable:

A. Generaliza la definición de superficie.

B. En ella pueden definirse curvaturas si disponemos de una métrica Riemanniana.

C. A y B son ciertas.