Modelado y Simulación Numérica

Daniel Pérez Palau

Tema 5. Generación de números aleatorios

Calendario

	Semana	Tema	Refuerzo	Laboratorio	Actividad
09/11/2020					
16/11/2020	1	S0 + T1			
23/11/2020	2	T2			
30/11/2020	3	T3		L1	
07/12/2020	4	T4			
14/12/2020	5	T5			L1
21/12/2020	--	Semana de repaso	R-L1		
28/12/2020	--	Semana de repaso			
04/01/2021	6	T6			
11/01/2021	7	T6			
18/01/2021	8	T7			
25/01/2021	9	T7			AG
01/02/2021	10	T8			
08/02/2021	11	T9		L2	
15/02/2021	12	T10	R-AG1		
22/02/2021	13	T11			L2
01/03/2021	14	Sesión examen	R-L2		
08/03/2021	15	Repaso (sesión doble)			
15/03/2021	16	Semana			

Próximas sesiones
T5-> (15/12 18:00CET)

Contenidos

- Tema 1. Conceptos generales de modelado matemático y simulación
- Tema 2. Modelado matemático de sistemas físicos
- Tema 3. Sistemas físicos y sus modelos
- Tema 4.Simulación
- Tema 5. Generación de números aleatorios
- Tema 6. Generación de variables aleatorias
- Tema 7. Medidas estadísticas
- Tema 8. Simulación de Monte Carlo
- Tema 9. Conceptos y elementos de simulación con eventos
- Tema 10. Modelado y simulación de sistemas de eventos discretos
- Tema 11. *Software* para modelado matemático y simulación

Objetivos

- Conocer métodos para generar números aleatorios de forma eficiente.
- Saber calcular los periodos de generación de los diferentes métodos.

Introducción

Necesitamos números aleatorios para:

- Describir la aleatoriedad de modelos.
- Reproducir datos que no se conocen con exactitud.

Un número de forma aislada no es aleatorio

Características básicas

- Eficiencia.
- Generación de números independientes estadísticamente y uniformemente distribuidos (IID).
- Sin ciclos de repetición.
- Ocupar poca memoria.
- Reproductibilidad.
- Rapidez.

Características básicas

- ¿Propuestas?

Métodos iterativos de generación

- Base matemática → números pseudoaleatorios

- Objetivo: producir una secuencia de números aleatorios e idénticamente distribuidos entre 0 y 1.

- Idea del método:
  - Tomamos un valor inicial x_0.
  - Aplicamos una función f para obtener $x_{n+1} = f(x_n)$.
  - Calculamos el valor aleatorio como $u_n = g(x_n)$

  Llamamos a x_i el estado de generación.

El periodo de generación

- Las sucesiones de números aleatorios serán siempre cíclicas.
  - Un ordenador puede representar un número finito de números.

Número finito de estados $\longrightarrow$ Existen $i, j,\ j > i$ tales que $x_j = x_i$

$$x_{j+k} = x_{i+k}$$
$$u_{j+k} = u_{i+k}$$

- El **periodo** es el menor número entero de pasos $T > 0$ para el que el estado del generador se repite, y se verifica que el estado:

$$x_{T+k} = x_k$$

La operación módulo

Es la operación básica de los métodos de congruencia.
Consiste en calcular el resto de una división.

Ejemplos:

- 5 mod 3 =
- 17 mod 4 =

Métodos de congruencia

La recursión empleada es

$$x_{n+1} = (a \cdot x_n + b) \bmod m$$

a, m y b son números enteros positivos denominados multiplicador, módulo e incremento. Se verifica que $a < m$ y $b < m$.

- Si $b = 0$ se denomina **generador multiplicativo**.
- En caso contrario se denomina **mixto**.

La sucesión de números pseudoaleatorios $u_i, i \geq 1$ se obtiene:

$$u_i = \frac{x_i}{m}$$

Métodos de congruencia

Se dice que el generador es de ciclo completo si el periodo es igual a m.

– El periodo será m independientemente de la semilla.

Si un generador no es de ciclo completo, la longitud de ciclo puede depender de la semilla utilizada.

Criterios para un buen generador:

– el módulo m es una potencia de 2.

– m debe ser grande.

Métodos mixtos – Condiciones T máximo

Criterio de periodo completo ($T = m$):

- Caso m general:
  - m y b son primos entre sí.
  - Si q es un número primo que divide a $m \Longrightarrow q$ divide a $a - 1$.
  - Si m es un múltiplo de 4, $a - 1$ debe ser un múltiplo de 4.

- Caso $m = 2^k$:
  - b es impar
  - $a \bmod 4 = 1$.

Mts. multiplicativos – Condiciones T máximo

No puede tener periodo completo

$b = 0$ y entonces m y b no son primos entre sí

Hablaremos de periodo máximo. Deberemos escoger a y m de la forma adecuada.

- Caso general ($b = 0, m$ cualquiera)
  - Si $T = m - 1 \Longrightarrow m$ es primo.
  - Si m primo $\Longrightarrow T$ divide a $m - 1$.
  - Si m es primo, entonces T=m−1 si y sólo si a es una raíz primitiva de módulo m

a es raíz primitiva de modulo m si todo $b < m$ es resultado de $a^k \, mod \, m \; = \; b$ para algún k.

Mts. multiplicativos – Condiciones T máximo

No puede tener periodo completo

$b = 0$ y entonces m y b no son primos entre sí

Hablaremos de periodo máximo. Deberemos escoger a y m de la forma adecuada.

- Caso general ($b = 0, m$ cualquiera)
  - Si $T = m - 1 \Longrightarrow m$ es primo.
  - Si m primo $\Longrightarrow T$ divide a $m - 1$.
  - Si m es primo, entonces T=m−1 si y sólo si a es una raíz primitiva de módulo m

- Caso $m = 2^k$ $(b = 0)$
  - x_0 es impar.
  - $a \bmod 8$ es 3 ó 5.

  Entonces $T = 2^{k-2}$

Tiene malas propiedades estadísticas

Ejemplo 1

Sea el generador $x_n = (3x_{n-1}) mod\ 2^5$ y la semilla $x_0 = 1$.

- ¿Podemos calcular su periodo sin realizar ninguna iteración?
- Realizar las primeras iteraciones
- Encontrar los primeros valores aleatorios generados.

Ejemplo 1

Sea el generador $x_n = (3x_{n-1}) mod\ 2^5$ y la semilla $x_0 = 1$.

- ¿Podemos calcular su periodo sin realizar ninguna iteración?
  - Se trata de un método multiplicativo ($b = 0$).
  - Debemos verificar:
    - Semilla impar
    - $a \text{ mod } 8 = 3 \text{ o } 5$

- Realizar las primeras iteraciones.

$$x_1 = 3x_0 \text{ mod } 2^5 = 3 \cdot 1 \text{ mod } 32 = 3$$
$$x_2 = 3x_1 \text{ mod } 2^5 = 3 \cdot 3 \text{ mod } 32 = 9 \text{ mod } 32 = 9$$
$$x_3 = 3x_2 \text{ mod } 2^5 = 3 \cdot 9 \text{ mod } 32 = 27 \text{ mod } 32 = 27$$
$$x_4 = 3x_3 \text{ mod } 2^5 = 3 \cdot 27 \text{ mod } 32 = 81 \text{ mod } 32 = 17$$

La secuencia sigue: 3, 9, 27, 17, 19, 25, 11, 1, 3,…

El periodo coincide con el calculado.

Ejemplo 1

Sea el generador $x_n = (3x_{n-1}) mod\ 2^5$ y la semilla $x_0 = 1$.

- Encontrar los primeros valores aleatorios generados.

Hemos obtenido la secuencia: 3, 9, 27, 17, 19, 25, 11, 1, 3,…

$$u_0 = \frac{x_0}{m} = \frac{1}{32} = 0.03125$$

$$u_1 = \frac{x_1}{m} = \frac{3}{32} = 0.09375$$

$$u_2 = \frac{x_2}{m} = \frac{9}{32} = 0.28125$$

$$u_3 = \frac{x_3}{m} = \frac{27}{32} = 0.85375$$

Ejemplo 1b

Sea el generador $x_n = (7x_{n-1}) mod\ 2^5$ y la semilla $x_0 = 1$.

- ¿Podemos calcular su periodo sin realizar ninguna iteración?
  - trata de un método multiplicativo ($b = 0$).
  - Debemos verificar:
    - Semilla impar
    - $a \text{ mod } 8 = 3 \text{ o } 5$

- Realizar las primeras iteraciones.

La secuencia obtenida es 7,17, 23, 1, 7,…

Periodo es 4!

Ejemplo 2

Sea el generador $x_n = (3x_{n-1}) mod\ 31$ y la semilla $x_0 = 1$.

- ¿Podemos calcular su periodo sin realizar ninguna iteración?
- Realizar las primeras iteraciones
- Encontrar los primeros valores aleatorios generados.

Ejemplo 2

Sea el generador $x_n = (3x_{n-1}) mod\ 31$ y la semilla $x_0 = 1$.

- ¿Podemos calcular su periodo sin realizar ninguna iteración?
  - Se trata de un método multiplicativo ($b = 0$).
  - El módulo no es potencia de 2.
  - Debemos verificar:
    - m primo
    - a raíz primitiva de módulo 31:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
3	9	27	19	26	16	17	20	29	25	13	8	24	10	30	28	22	4	12	5	15	14	11	2	6	18	23	7	21	1

- Realizar las primeras iteraciones.

$$x_1 = 3x_0 \text{ mod } 31 = 3 \cdot 1 \text{ mod } 31 = 3$$
$$x_2 = 3x_1 \text{ mod } 31 = 3 \cdot 3 \text{ mod } 31 = 9 \text{ mod } 32 = 9$$
$$x_3 = 3x_2 \text{ mod } 31 = 3 \cdot 9 \text{ mod } 31 = 27 \text{ mod } 32 = 27$$
$$x_4 = 3x_3 \text{ mod } 31 = 3 \cdot 27 \text{ mod } 31 = 81 \text{ mod } 32 = 19$$

Ejemplo 2

Sea el generador $x_n = (3x_{n-1}) mod\ 31$ y la semilla $x_0 = 1$.

- Encontrar los primeros valores aleatorios generados.

Hemos obtenido la secuencia: 3, 9, 27, 19, 26, 16, 17, 20, 29, 25, 13, 8, 24, 10, 30, 28, 22, 0, 12, 5, 15, 14, 11, 2, 6, 18, 23, 7, 21, 1, 3,…

$$u_0 = \frac{x_0}{m} = \frac{1}{31} = 0.03226$$

$$u_1 = \frac{x_1}{m} = \frac{3}{31} = 0.09677$$

$$u_2 = \frac{x_2}{m} = \frac{9}{31} = 0.29032$$

$$u_3 = \frac{x_3}{m} = \frac{27}{31} = 0.87097$$

Ejemplo 3

Sea el generador $x_n = (8x_{n-1} + 15) mod\ 31$ y la semilla $x_0 = 13$.

- ¿Podemos calcular su periodo sin realizar ninguna iteración?
- Realizar las primeras iteraciones
- Encontrar los primeros valores aleatorios generados.

Ejemplo 3

Sea el generador $x_n = (8x_{n-1} + 15) mod\ 31$ y la semilla $x_0 = 13$.

- ¿Podemos calcular su periodo sin realizar ninguna iteración?
  - Se trata de un método mixto ($b \neq 0$).
  - El módulo no es potencia de 2.
  - Debemos verificar:
    - m y b coprimos
    - Los factores de m dividen a $a - 1$
    - Si 4 es factor de m entonces 4 es factor de $a - 1$

- Realizar las primeras iteraciones.

$$x_1 = 8x_0 + 15 \text{ mod } 31 = 8 \cdot 13 + 15 \text{ mod } 31 = 119 \text{ mod } 31 = 26$$
$$x_2 = 8x_1 + 15 \text{ mod } 31 = 8 \cdot 26 + 15 \text{ mod } 31 = 223 \text{ mod } 31 = 6$$
$$x_3 = 8x_2 + 15 \text{ mod } 31 = 8 \cdot 6 + 15 \text{ mod } 31 = 63 \text{ mod } 31 = 1$$
$$x_4 = 8x_3 + 15 \text{ mod } 31 = 8 \cdot 1 + 15 \text{ mod } 31 = 23 \text{ mod } 31 = 23$$

Ejemplo 3

Sea el generador $x_n = (8x_{n-1} + 15) mod\ 31$ y la semilla $x_0 = 13$.

- Encontrar los primeros valores aleatorios generados.

La secuencia sigue como: 13, 26, 6, 1, 23, 13,…

El periodo es $T = 5$

$$u_0 = \frac{x_0}{m} = \frac{13}{31} = 0.4194$$

$$u_1 = \frac{x_1}{m} = \frac{26}{31} = 0.8387$$

$$u_2 = \frac{x_2}{m} = \frac{6}{31} = 0.1935$$

$$u_3 = \frac{x_3}{m} = \frac{1}{31} = 0.0322$$

Ejemplo 4

Sea el generador $x_n = (5x_{n-1} + 3) mod\ 8$ y la semilla $x_0 = 7$.

- ¿Podemos calcular su periodo sin realizar ninguna iteración?
- Realizar las primeras iteraciones
- Encontrar los primeros valores aleatorios generados.

Ejemplo 3

Sea el generador $x_n = (5x_{n-1} + 3)mod\ 8$ y la semilla $x_0 = 7$.

- ¿Podemos calcular su periodo sin realizar ninguna iteración?
  - Se trata de un método mixto ($b \neq 0$).
  - El módulo es potencia de 2.
  - Debemos verificar:
    - b impar
    - $a \bmod 4 = 1$

    Periodo máximo $T = 8$.
- Realizar las primeras iteraciones.
  - La secuencia de estados es: 7, 6, 1, 0, 3, 2, 5, 4, 7,…
- Encontrar los primeros valores aleatorios generados.
  - $u_0 = 0.875, u_1 = 0.75, u_2 = 0.125, u_3 = 0$, ...

Combinación de métodos congruenciales

- Los generadores de congruencia se pueden generalizar y definir recursiones de orden mayor. Estos métodos se definen de forma general como se muestra a continuación,

$$x_n = (a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_k x_{n-k}) \bmod m$$

- Donde m y k, son números enteros positivos y los coeficientes a_i toman sus valores entre $-(m - 1)$ y $(m - 1)$.

Combinación de métodos congruenciales

- Para obtener periodos más largos combinamos generadores multiplicativos. Sumamos los números obtenidos de dos o más generadores. La fórmula para obtener los números de la secuencia es

$$x_n = \left(\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} X_{i,j} \right) \mathrm{mod}\ M$$

- Donde las $X_{i,j}, j = 1, \ldots, k$ son las salidas obtenidas de diferentes generadores de congruencia multiplicativa y $M = \max(m_1, \ldots, m_k)$.

Combinación de métodos congruenciales

- A su vez se deberán obtener los números pseudo-aleatorios buscados según la siguiente definición:

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{X_n}{M}, & \text{si } X_n > 0 \\ \dfrac{M-1}{M}, & \text{si } X_n = 0 \end{cases}$$

- El periodo se obtiene como el mínimo común múltiplo de los periodos de los generadores.

Ejemplo de combinación

Dados los siguientes generadores de congruencia multiplicativos.

- $v_n = 157 \cdot v_{n-1}\, mod\; 32363 \;\rightarrow\; T_v = 32362$
- $t_n = 146 \cdot t_{n-1}\, mod\; 31727 \rightarrow T_t = 31726$
- $w_n = 142 \cdot w_{n-1}\, mod\; 31657 \rightarrow T_w = 31656$

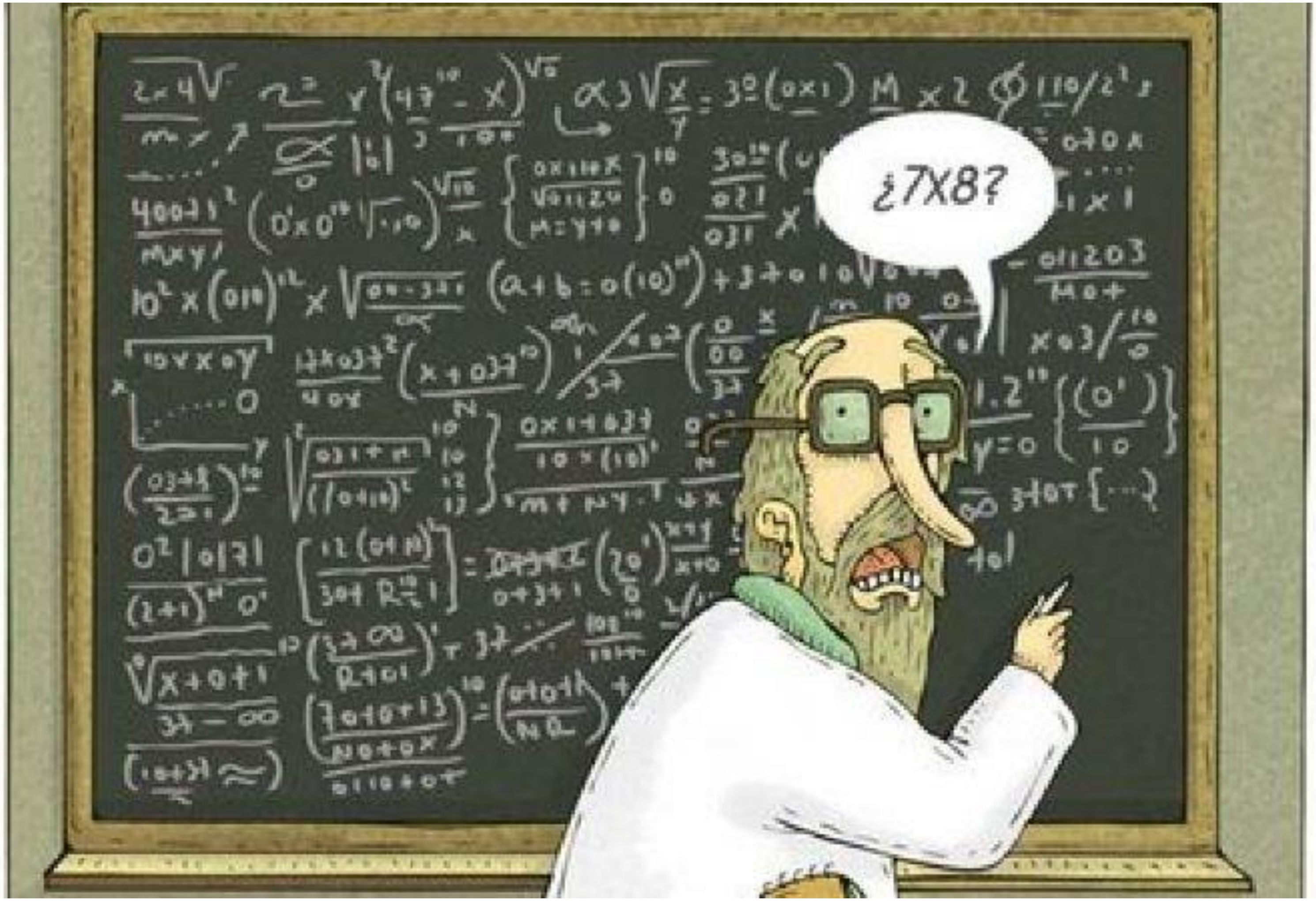
- El generador combinado se define a partir de los anteriores como:
  - $X_n = (v_n - t_n + w_n) mod\; 32363$

- Y el periodo es:

$$T = m.c.m.(32369 - 1{,}31727 - 1{,}31657 - 1)$$
$$= 2^3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 547 \cdot 1319 \cdot 1471$$
$$= 8\,125\,436\,850\,168$$

$$\boxed{\begin{aligned} 32362 &= 2 \cdot 11 \cdot 1471 \\ 31726 &= 2 \cdot 29 \cdot 547 \\ 31656 &= 2^3 \cdot 3 \cdot 1319 \end{aligned}}$$

¿Dudas?



unir

LA UNIVERSIDAD EN INTERNET

www.unir.net