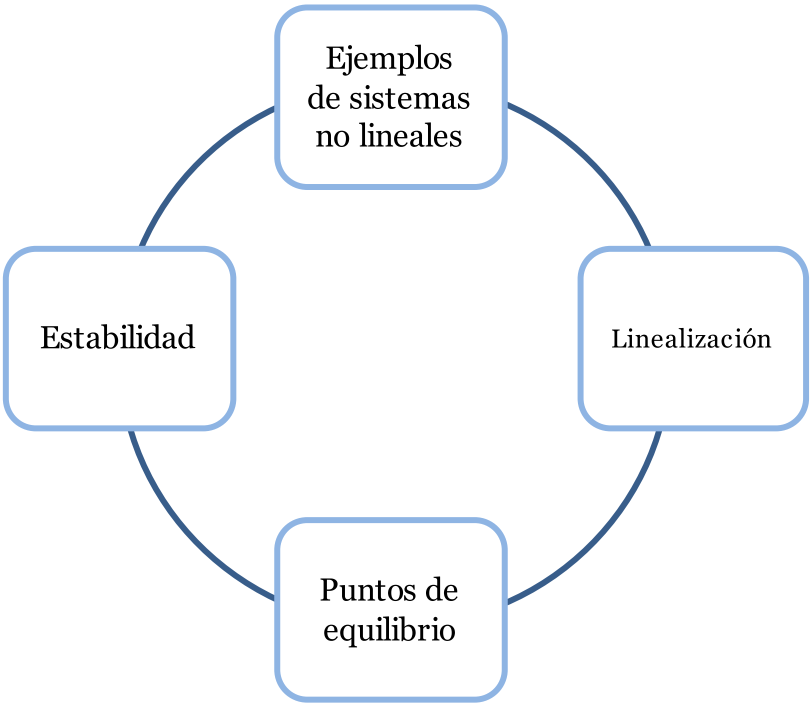
SDC: Sistemas no lineales

TEMA 4

Esquema


Ejemplos de sistemas no lineales
Linealización
Puntos de equilibrio
Estabilidad

Ideas clave

4.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

En este tema vamos a hablar sobre los sistemas dinámicos continuos que se representan a partir de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales.

Este tipo de sistemas tienen muchas semejanzas a los sistemas lineales estudiados en el capítulo anterior, pero bajo una serie de condiciones.

En el punto 4.2 mostraremos algunos casos de sistemas no lineales y cómo son sus soluciones; en el punto 4.3 nos centraremos en el caso general, describiendo los puntos de equilibrio para, finalmente, caracterizar la estabilidad de estos puntos en el apartado 4.4.

4.2. Sistemas no lineales

La mayoría de sistemas de ecuaciones diferenciales son imposibles de resolver de forma analítica. Con los sistemas no lineales estamos obligados a recurrir a diferentes técnicas para entender estos sistemas. Con el uso de técnicas analíticas, geométricas y topológicas se derivan resultados rigurosos al respecto del comportamiento de las soluciones de estas ecuaciones.

En el caso de sistemas lineales, bajo determinadas condiciones, quedaban caracterizados mediante la expresión:

$$X' = AX$$

En el caso de sistemas no lineales, esta caracterización será:

$$X' = F(X)$$

Los sistemas no lineales se linealizarán alrededor de su punto de equilibrio. A continuación veremos tres ejemplos de sistemas no lineales y su linealización.

Ejemplo 1 | Considera el sistema**:**

$$\begin{aligned} x' &= x + y^2 \\ y' &= -y \end{aligned}$$

Se puede comprobar que el único punto de equilibrio es el origen, por tanto, cuando y es pequeño, y^2 todavía lo es más. Si eliminamos el término y^2 de la primera ecuación, tenemos el sistema linealizado:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -y \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Cuyos valores propios son $\lambda = \pm 1$ y cuya solución dinámica es un punto de silla como ilustra la figura 1:

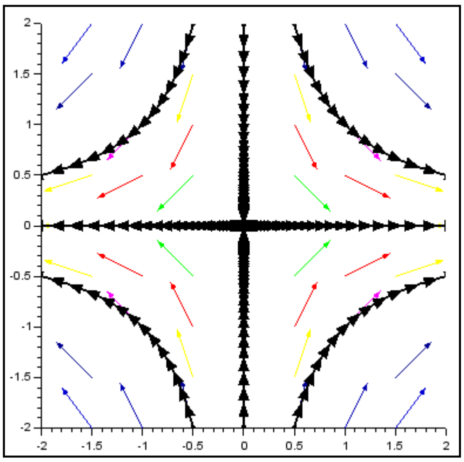


Figura 1. Plano de fase de $x' = x, y' = -y$

Si volvemos al sistema no lineal podemos obtener de la segunda ecuación que la solución es $y(t) = y_0 e^{-t}$ de modo que, sustituyendo en la primera ecuación, tenemos $x' = x + y_0^2 e^{-2t}$.

Ante una ecuación diferencial forzada obtendremos la solución general como la suma de las soluciones homogéneas y particular. Conjeturando que la solución particular será del tipo ce^{-2t} se obtiene que la solución general es:

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(x_0 + \frac{1}{3}y_0^2\right)e^t - \frac{1}{3}y_0^2 e^{-2t} \\ y(t) &= y_0 e^{-t} \end{aligned}$$

Para $y_0 = 0$, $x(t) = x_0 e^t$ como en el caso lineal (curva azul de figura 2). Para $x_0 + \frac{1}{3}y_0^2 = 0$, $x(t) + \frac{1}{3}y^2(t) = 0$ y la solución tiende al punto de equilibrio (curva verde de la figura 2).

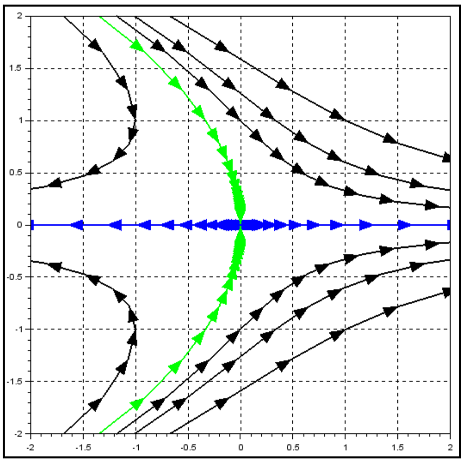


Figura 2. Plano de fase del sistema no lineal. En azul la solución al sistema lineal. En verde la única solución estable.

Ejemplo 2 | Considera el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}(x^3 + y^2 x) \\ y' &= x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}(y^3 + x^2 y) \end{aligned}$$

El sistema lineal asociado es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Cuyos valores propios son $\lambda = \frac{1}{2} \pm i$ y su plano de fase se representa en la figura 3:

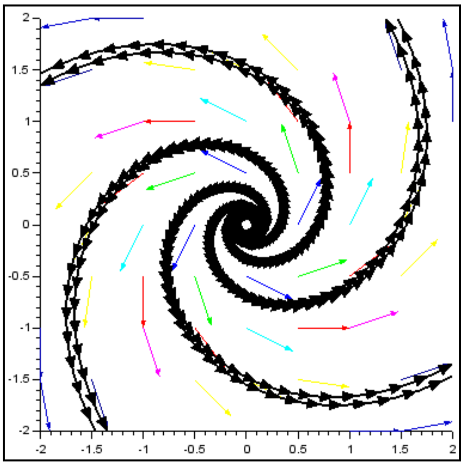


Figura 3. Plano de fase de $\boldsymbol{x}' = \frac{x}{2} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{x} + \frac{y}{2}$

El sistema no lineal, con cambio a variables polares, es:

$$
\begin{aligned}
r' &= \frac{r(1-r^2)}{2} \\
\theta' &= 1
\end{aligned}
$$

Al estar las ecuaciones desacopladas es fácil resolver que:

$$
\begin{aligned}
r(t) &= r_0 \sqrt{\frac{2e^t}{1+e^t}} \\
\theta(t) &= t + \theta_0
\end{aligned}
$$

Cuyo plano de fase se representa en la figura 4. Se observa para $r < 1$ que las órbitas tienden a una órbita fija, mientras que para $r > 1$ las órbitas tienden a ∞.

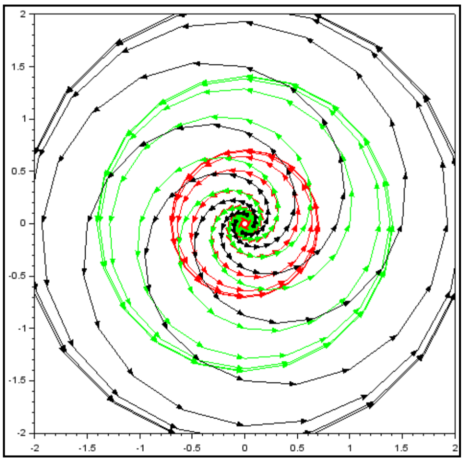


Figura 4. Plano de fase del sistema no lineal. En rojo$\boldsymbol{r_0} = \mathbf{0.5}$,; en verde, $\boldsymbol{r_0} = \mathbf{1}$; en negro, $\boldsymbol{r_0} = \mathbf{1.5}$.

Ejemplo 3 | Considera el sistema:

$$\begin{array}{rcl} x' & = & x^2 \\ y' & = & -y \end{array}$$

El sistema linealizado es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Cuyos valores propios son $\lambda = \{-1,0\}$ y su plano de fase se representa en la figura 5:

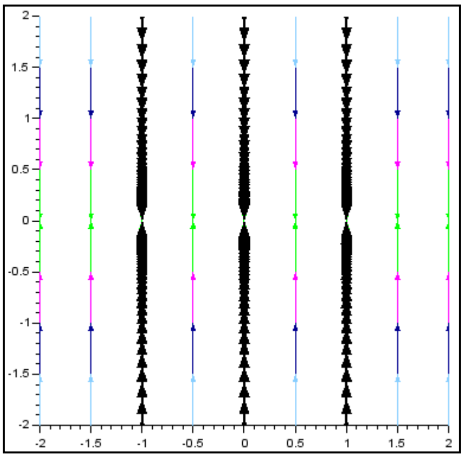


Figura 5. Plano de fase del sistema$\boldsymbol{x'} = \mathbf{0}, \boldsymbol{y'} = -\boldsymbol{y}$.

El sistema no lineal es sencillo de resolver puesto que sus ecuaciones están desacopladas, siendo:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_0}{1 - x_0 t} \\ y(t) &= y_0 e^{-t} \end{aligned}$$

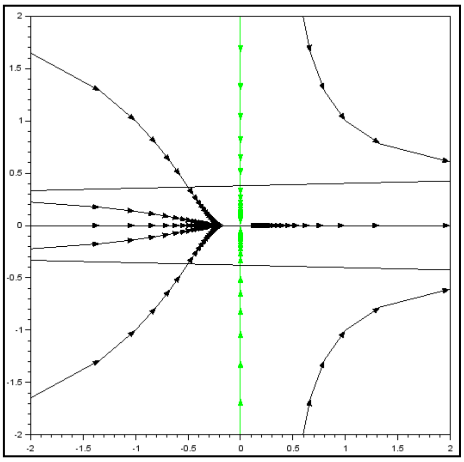


Figura 6. Plano de fase del sistema no lineal. En verde la órbita que tiende al origen.

Los tres ejemplos vienen a evidenciar cómo varían los sistemas cuando se tienen en cuenta los términos lineales. Si bien en los ejemplos 1 y 2 los planos de fase sufren ligeras modificaciones, en el ejemplo 3 el plano de fase cambia completamente.

Un punto de equilibrio es hiperbólico si el sistema lineal asociado no tiene como valores propios ningún valor real nulo.

La diferencia entre los ejemplos 1 y 2 y el ejemplo 3 es que en los dos primeros casos el punto de equilibrio es hiperbólico, mientras que en el tercer ejemplo no lo es.

4.3. Equilibrio en sistemas no lineales

Sea el sistema $X' = F(X)$. El sistema lineal asociado es $Y' = J_F(X_0)Y$, donde $J_F(X_0)$ es la matriz Jacobiana de F evaluada en X_0:

$$J_F(X_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{X_0}$$

En este caso, el sistema lineal asociado es el mismo Jacobiano. Sea el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned}$$

Con $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. Para simplificar asumiremos que $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Si un punto de equilibrio es hiperbólico, el comportamiento de las soluciones en un entorno del punto de equilibrio es semejante al comportamiento de las soluciones del sistema lineal asociado. Si no es hiperbólico no podemos afirmar nada.

Cuando linealizamos un sistema y llegamos a uno de los casos de los sistemas que vimos en el tema anterior, podremos concluir en función de la parte real de los valores propios asociados al sistema en cada punto de equilibrio que:

» Si todas las partes reales son negativas, el punto de equilibrio es un sumidero.
» Si las partes reales tienen signos distintos, el punto de equilibrio es un punto de silla.
» Si todas las partes reales son positivos, el punto de equilibrio es una fuente.

Ejemplo 4 | El sistema dinámico:

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= y + x^2 \end{aligned}$$

Tiene como punto de equilibrio el $[x, y] = [0,0]$. El sistema lineal asociado es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Cuyos valores propios son $\lambda = \pm 1$ y, por tanto, estamos ante una fuente en torno al punto de equilibrio. La figura 7a ilustra el plano de fase del problema no lineal, mientras que la figura 7b muestra el plano de fase del problema linealizado:

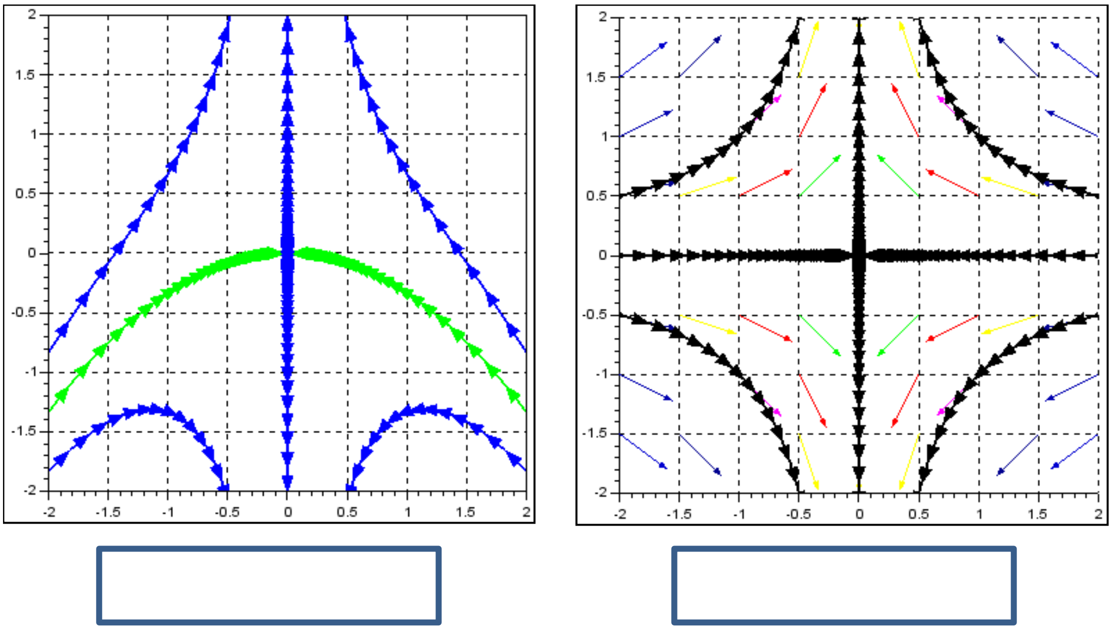


Figura 7. Plano de fase del sistema $x' = -x, y' = y + x^2$ para el caso no lineal (a) y para el caso linealizado (b)

Podemos observar cómo en el punto de equilibrio el comportamiento para el sistema no lineal y el sistema lineal asociado es similar.

Ejemplo 5 | El sistema dinámico:

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= 2x^2 \end{aligned}$$

Tiene como punto de equilibrio el $[x, y] = [0,0]$. El sistema lineal asociado es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Cuyos valores propios son $\lambda = \{-1{,}0\}$. En este caso, el punto de equilibrio no es hiperbólico, puesto que existe un valor propio asociado cuya parte real es nula.

En la figura 8 se representa el plano de fase del problema original (a) y del problema linealizado (b). A pesar de que el comportamiento en torno al origen sea similar, no podemos concluir nada al respecto de la estabilidad del sistema no lineal en función del sistema linealizado.

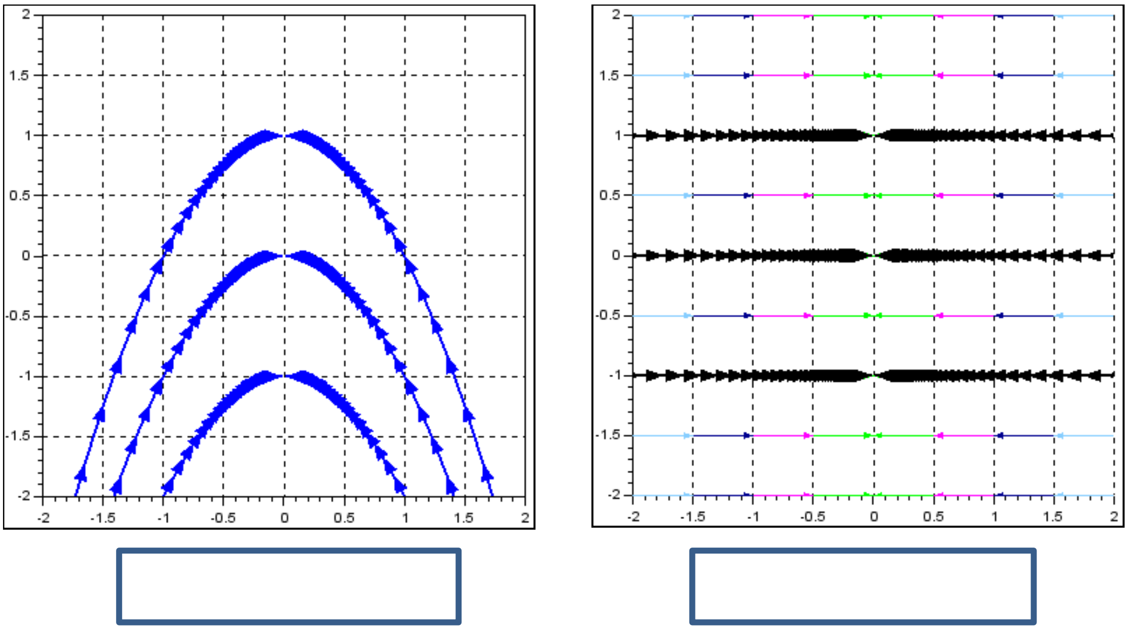


Figura 8. Plano de fase asociado al sistema $x' = -x, y' = 2x^2$ para el caso no lineal (a) y para el caso linealizado (b)

4.4. Estabilidad de Liapunov

El matemático ruso Liapunov (1857-1918) estableció un método alternativo para demostrar la estabilidad de un punto de equilibrio, para lo cual establece el siguiente teorema de estabilidad de Liapunov:

Sea X^* un punto de equilibrio de $x' = F(X)$. Sea $L: \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un conjunto abierto $\mathcal{O}$ que contiene a X^*. En el caso que $L(X^*) = 0$ y, entonces:

» Si $\dot{L} \leq 0$ en $\mathcal{O} \sim \mathbb{R}$, X^* es estable, y L es una función Liapunov.

» Si $\dot{L} < 0$ en $\mathcal{O}\sim\mathbb{R}$, X^* es asintóticamente estable, y L es una función Liapunov estricta.

Ejemplo 6. Sea el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x' &= y - x(x^2 + y^2) \\ y' &= -x - y(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Cuyo único punto de equilibrio es el origen. El sistema lineal asociado es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Y sus valores propios $\boldsymbol{\lambda} = \pm \boldsymbol{i}$. Los valores propios tienen parte real nula, con lo que el punto de equilibrio no es hiperbólico. Veamos si es estable.

Busquemos una función de Liapunov de la form $L(xy) = ax^2 + by^2$,a con $a, b > 0$. Esta función cumple $L(X^*) = 0$ y $L(X) > 0, X \neq X^*$.

Comprobemos la condición de $\dot{L} < 0$:

$$\begin{aligned} \dot{L} &= 2axx' + 2byy' = 2ax[y - x(x^2 + y^2)] + 2by[-x - y(x^2 + y^2)] \\ &= 2axy - 2ax^2(x^2 + y^2) - 2bxy - 2by^2(x^2 + y^2) \\ &= -(2ax^2 + 2by^2)(x^2 + y^2) + xy(2a - 2b) = \langle a = b = \frac{1}{2} \rangle = -(x^2 + y^2)^2 \\ &< 0 \end{aligned}$$

Por tanto, el sistema es estable en el origen.

Ejemplo 7. Sea el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x' &= (\phi x + 2y)(z + 1) \\ y' &= (-x + \phi y)(z + 1) \\ z' &= -z^3 \end{aligned}$$

Cuyo único punto de equilibrio es el origen. El sistema lineal asociado es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \phi & 2 & 0 \\ -1 & \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Y sus valores propios son $\lambda = \{0, \phi \pm i\sqrt{2}\}$. Como hay un valor propio nulo, podemos concluir que el origen no es un punto hiperbólico. Ahora bien, si $\phi > 0$ entonces directamente el origen es inestable. Pero, ¿qué ocurre si $\phi \leq 0$?

Busquemos una función de Liapunov de la forma $L(xyz) = ax^2 + by^2 + cz^2$, con $a, b, c > 0$. Esta función cumple $L(X^*) = 0$ y $L(X) > 0, X \neq X^*$.

A continuación tenemos que averiguar si $\dot{L} < 0$ para unos determinados valores de a, b, c.

$$\begin{aligned} \dot{L} = 2axx' + 2byy' + 2czz' &= 2ax(\phi x + 2y)(z+1) + 2by(-x + \phi y)(z+1) + 2cz(-z^3) \\ &= 2\phi(ax^2 + by^2)(z+1) + 2(2a - b)xy(z+1) - cz^4 = \langle b = 2a \rangle \\ &= 2\phi a(x^2 + 2y^2)(z+1) - cz^4 \end{aligned}$$

» Si $\phi = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{L} = -cz^4 \leq 0$, así que el origen es estable.
» Si $\phi < 0 \rightarrow \dot{L} = 2\phi a(x^2 + 2y^2)(z+1) - cz^4 \leq 2\phi a(x^2 + 2y^2)(z+1) \leq \phi(z+1)$, cumpliéndose que es negativo para $z > -1$, por lo que el origen es asintóticamente estable en dicha región.

4.5. Referencias bibliográficas

Aracil, J., Salas, F. y Gordillo, F. (2007). *Análisis de sistemas no lineales*. http://www.esi2.us.es/~fsalas/asignaturas/TS3IT07_08/apuntes.pdf

Hirsch, M. W., Smale, S. y Devaney, R. L. (2004). *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Elsevier.

Madrid, C. (2011). *La mariposa y el tornado*. RBA.

Teschl, G. (2012). *Ordinary differential equations and dynamical systems*. American Mathematical Society.

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

Concurso matemático

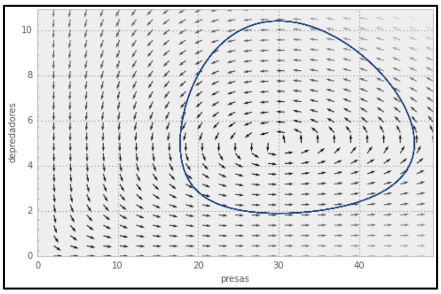
En 1889, con motivo del sexagésimo aniversario de Óscar II, Rey de Suecia y Noruega, se convocó un concurso matemático consistente en obtener la solución al problema de n cuerpos. En esta clase explicaremos el fallo grave que se encontró en el trabajo ganador.

Accede al vídeo desde el aula virtual

No dejes de leer…

Ecuaciones de Lotka-Volterra: modelo presa-depredador

Las ecuaciones de Lotka-Volterra son un modelo biomatemático que pretende describir dinámicas de sistemas biológicos en el que dos especies interactúan: una como presa y otra como depredador. En el siguiente enlace se hace un estudio exhaustivo tanto del planteamiento del problema como de las soluciones, dando una explicación gráfica de cómo se desarrolla la dinámica de estos sistemas biológicos tan comunes.

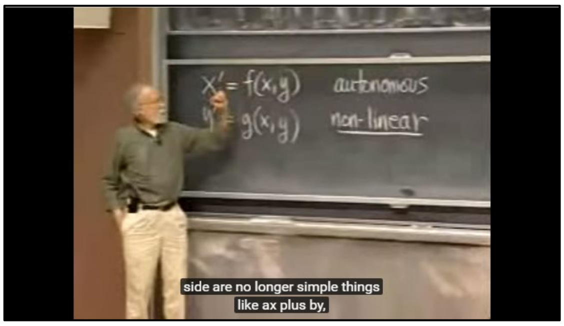


Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://pybonacci.org/2015/01/05/ecuaciones-de-lotka-volterra-modelo-presa-depredador/

No dejes de ver…

Differential equations

Este vídeo explica de una manera muy detallada el sistema del péndulo forzado, desde la generación de sus ecuaciones hasta un caso particular, utilizando dos técnicas de linealización del sistema. Se trata de un vídeo en inglés que está subtitulado y resulta completamente comprensible.



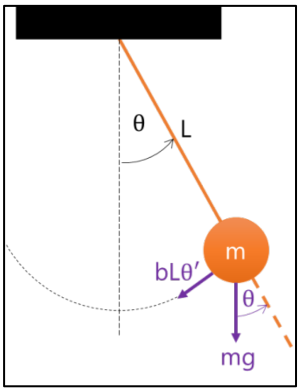
Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://www.youtube.com/watch?v=UJG0f0BSX14

No dejes de practicar...

Ejercicios recomendados

A continuación, encontrarás una serie de ejercicios para practicar los conceptos estudiados en el tema.

Ejercicio 1 El péndulo no lineal amortiguado. Sea el péndulo de la figura. Por la segunda ley de Newton:



$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

En el sentido del movimiento, la expresión anterior es:

$$-mg\sin\theta - bL\theta' = mL\theta'' \leftrightarrow -\frac{g}{L}\sin\theta - \frac{b}{m}\theta' = \theta''$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden, la podemos escribir como un sistema a través de:

$$\begin{aligned} \theta' &= \omega \\ \omega' &= -\frac{g}{L}\sin\theta - \frac{b}{m}\omega \end{aligned}$$

Para $\frac{g}{L} = 2$ y $\frac{b}{m} = 1$, obtén el comportamiento del sistema.

Accede a las soluciones a través del aula virtual.

+ Información

Enlaces relacionados

Resortes no lineales

En esta presentación se analizan los resortes no lineales. La aplicación de la segunda ley de Newton sobre este tipo de elementos que intervienen en el desplazamiento de las masas se describe a través de una ecuación diferencial no lineal. Se presentan dos casos: el resorte suave y el resorte duro.

Accede a la página desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://es.slideshare.net/magisterdibellum/resortes-nolineales

Bibliografía

Zill, D. G. y Cullen, M. R. (2008). *Matemáticas avanzadas para la ingeniería. Ecuaciones diferenciales*. McGraw Hill.

Glosario

Punto hiperbólico. Punto de equilibrio cuyos valores propios asociados no tienen parte real nula.

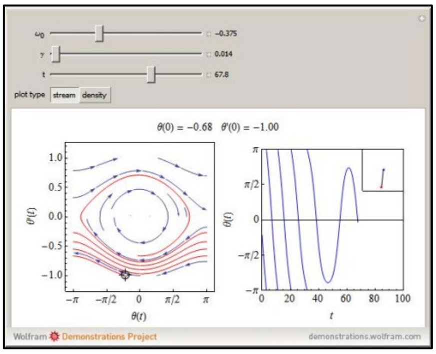
Sistema lineal asociado. Sistema obtenido de linealizar un sistema no lineal a partir de la matriz Jacobiana.

Funciones de Liapunov. Funciones que permiten estudiar la estabilidad de un punto de equilibrio.

Recursos externos

Wolfram Alpha y el péndulo no lineal amortiguado

Esta página tiene demostraciones de fenómenos físicos descritos a través de expresiones matemáticas. En este caso se trata del péndulo no lineal amortiguado que se ha planteado como actividad de este tema.



Accede a la página desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://demonstrations.wolfram.com/TheDampedNonlinearPendulum/

Test

1. Sea un sistema dado por $X' = F(X)$cuyo punto de equilibrio es el $X^* = (0,0)$. Relacionado con la linealización:

A. La matriz del sistema lineal asociado se obtiene con el *wronkskiano*.

B. La matriz del sistema lineal asociado se obtiene con el jacobiano.

C. La matriz del sistema lineal asociado se obtiene eliminando los términos no lineales.

D. Todas las anteriores son falsas.

2. Si un punto de equilibrio es hiperbólico, los valores propios asociados pueden ser:

A. Mayores que cero.

B. Iguales a cero.

C. Menores que cero.

D. Todas las anteriores son falsas.

3. Si un punto de equilibrio no es hiperbólico:

A. El comportamiento de los puntos de equilibrio del sistema no lineal es el mismo que el del sistema lineal en un entorno del punto crítico.

B. El comportamiento de los puntos de equilibrio del sistema no lineal no es el mismo que el del sistema lineal en un entorno del punto crítico.

C. No podemos concluir nada al respecto del comportamiento del sistema en el punto de equilibrio.

D. Todas las anteriores son falsas.

4. Si en un sistema no lineal existe un punto de equilibrio hiperbólico que tiene como valores propios asociados $\lambda = \{-1,2\}$:

A. No se puede decir nada al respecto del comportamiento del sistema en un entorno del punto de equilibrio.

B. El sistema tiene una fuente en un entorno del punto de equilibrio.

C. El sistema tiene un punto de silla en un entorno del punto de equilibrio.

D. Todas las anteriores son falsas.

5. Si en un sistema no lineal existe un punto de equilibrio hiperbólico que tiene como valores propios asociados $\lambda = \{-2+i, -2-i\}$:

A. No se puede decir nada al respecto del comportamiento del sistema en un entorno del punto de equilibrio.

B. El sistema tiene un sumidero en un entorno del punto de equilibrio.

C. El sistema tiene un punto de silla en un entorno del punto de equilibrio.

D. Todas las anteriores son falsas.

6. Si en un sistema no lineal existe un punto de equilibrio que tiene como valores propios asociados $\lambda = \{0,2\}$:

A. No se puede decir nada al respecto del comportamiento del sistema en un entorno del punto de equilibrio.

B. El sistema tiene una fuente en un entorno del punto de equilibrio.

C. El sistema tiene un punto de silla en un entorno del punto de equilibrio.

D. Todas las anteriores son falsas.

7. Las funciones de Liapunov:

A. Permiten dar un criterio de estabilidad entorno al punto de equilibrio.

B. Son funciones definidas positivas.

C. Sirven para demostrar que un punto de equilibrio es un punto de silla.

D. Todas las anteriores son falsas.

8. Sea X^* el punto de equilibrio de un sistema: ¿qué características son necesarias para que una función sea de Liapunov?

A. $L(X^*) \neq 0$.

B. $L(X) > 0, X \neq X^*$.

C. $\dot{L} \leq 0$ en $\mathcal{O}\sim X^*$.

D. Todas las anteriores son falsas.

9. ¿Cuál de las siguientes es una función de Liapunov?

A. $L = ax^2 + by^2$.

B. $L = axy + bx^2$.

C. $L = x^2(x-1)^2 + y^2$.

D. Todas las anteriores son falsas.

10. Considera el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= 2y(z+1) \\ y' &= -x(z+1) \\ z' &= -z^3 \end{aligned}$$

A. El origen es asintóticamente estable.

B. El origen es estable.

C. El origen es hiperbólico.

D. Todas las anteriores son falsas.