¿Qué vimos la última semana?

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

- Curvaturas principales.
- Curvatura de Gauss y media.
- Coeficientes de la segunda forma fundamental
- Isometrías y Teorema Egregio de Gauss.

Tema 7. Teoría Local de Superficies

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

Isometrías

- Isometría: si puede llevarse una superficie a otra sin sufrir ninguna deformación.

- **Ejemplo,** ¿puede construirse un mapa perfecto de la Tierra? equivaldría a ¿ existe alguna isometría entre el plano y la esfera o el elipsoide?

- Dificultad: demostrar que no lo son

- Teorema Egregio de Gauss

Isometrías

La aplicación entre superficies $F\colon S_1 \longrightarrow S_2$ es una **isometría** si

- Es un difeomorfismo
- $\forall\, p \in S_1, \forall\, w_1, w_2 \in T_pS, < dF_p(w_1), dF_p(w_2) >_{F(p)} = < w_1, w_2 >_p$

Ejemplo: Movimiento rígido

$$M(p) = Ap + b, A \in O(3) \Longrightarrow < Au, Av > = < u, v >, \forall\, u, v \in \mathbb{R}^3$$

Observación: no todas las isometrías entre superficies proceden de movimientos rígidos.

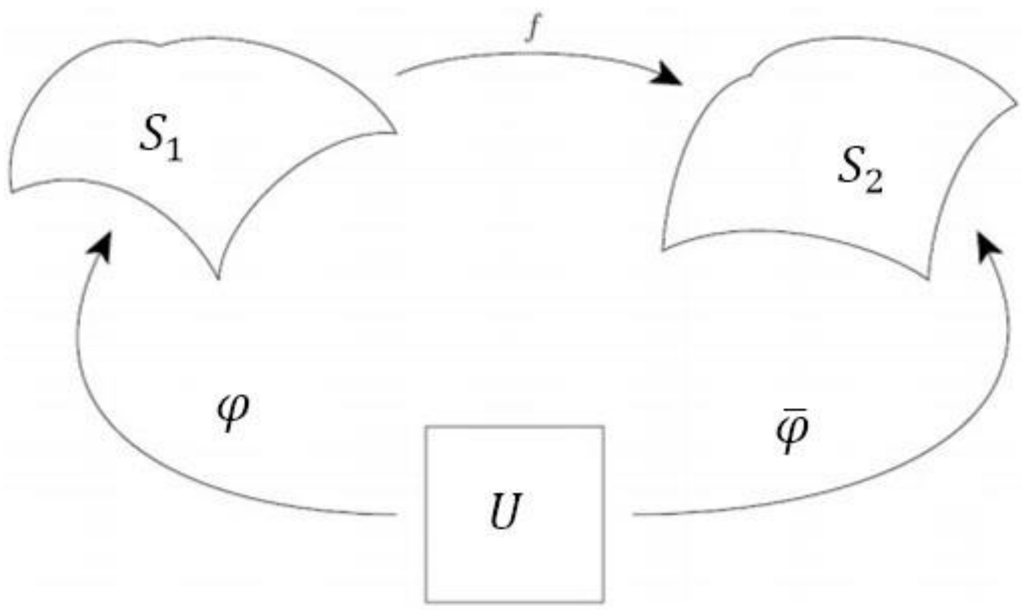
Isometrías

La aplicación entre superficies $F: S_1 \longrightarrow S_2$ es una **isometría local** si $\forall\, p \in S_1$ existe un entorno V de p y un entorno W de $F(p)$ tal que $F|_v: V \longrightarrow W$ es isometría.

Para que se pudiera hacer un mapa perfecto de la Tierra bastaría con que existiera una isometría local de la esfera (o del elipsoide) al plano.

Isometrías

Dadas las parametrizaciones, φ y $\bar{\varphi}$ de S_1 y S_2 respectivamente, $\varphi: U \longrightarrow S$, $\bar{\varphi}: U \longrightarrow \bar{S}$ tales que $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$ y $G = \bar{G}$, entonces $\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ es una isometría



Fuente: http://graphics.stanford.edu/

Isometrías

Teorema Egregio de Gauss

Si $F\colon S_1 \longrightarrow S_2$ es una **isometría local**, entonces $K(F(p)) = K(p)$, $\forall\, p \in S$

Idea: la curvatura gaussiana, $K = \frac{1}{E}$. Por tanto, se conserva por isometrías locales.

Aplicación del teorema: contrarrecíproco

Isometrías

Ejemplo:

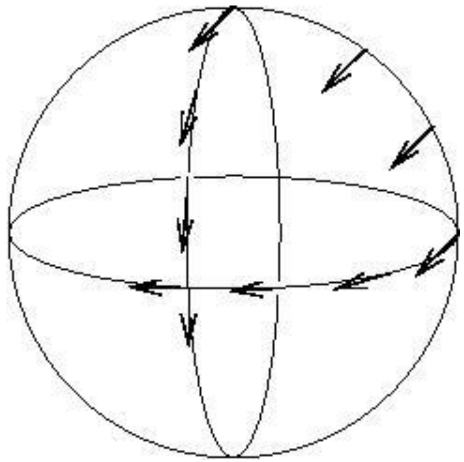
No es posible construir una isometría local entre la esfera y el plano.

Plano → curvatura cero

Esfera → curvatura estrictamente positiva

Geodésicas

De todos los posibles **campos de vectores** X en un abierto O de S, vamos a considerar aquellos que están **sobre el plano tangente**, es decir, una correspondencia que asigna a cada $p \in O$ un vector $x_p \in T_pS$.



Fuente: http://math.ucr.edu

Geodésicas

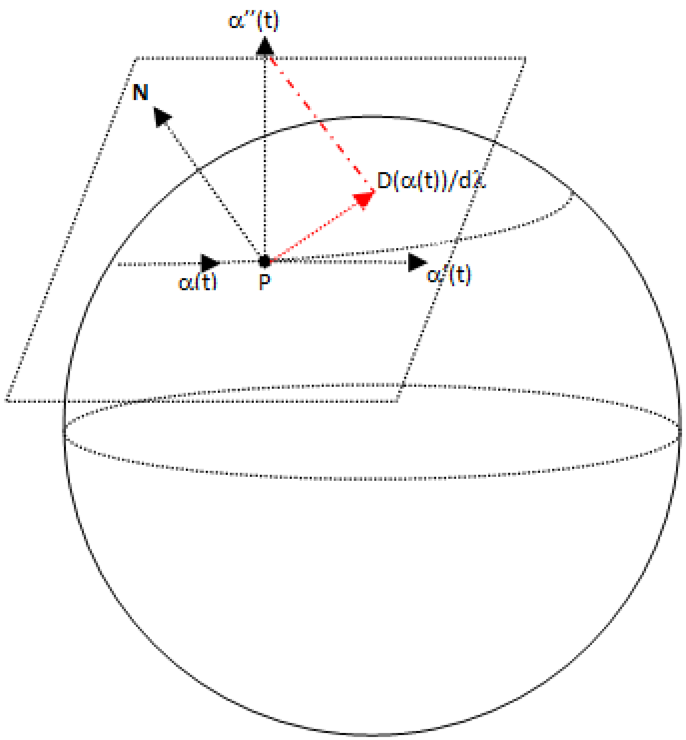
Sea V es un campo de vectores a lo largo de α, se dice que es un **campo de vectores paralelo a lo largo de $\boldsymbol{\alpha}$** si la proyección de su derivada sobre el plano tangente es cero.

Es decir, el ángulo que forma la curva con una dirección del plano tangente no varía.

Ojo: un campo de vectores paralelo no tiene por qué parecerlo desde fuera.

Geodésicas

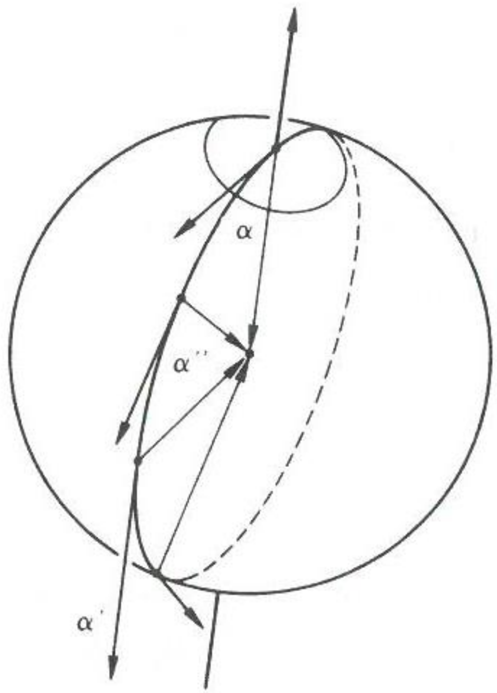
Si consideramos el campo vectorial dado por el vector tangente de una , vamos a considerar **la proyección de su aceleración** sobre el plano tangente

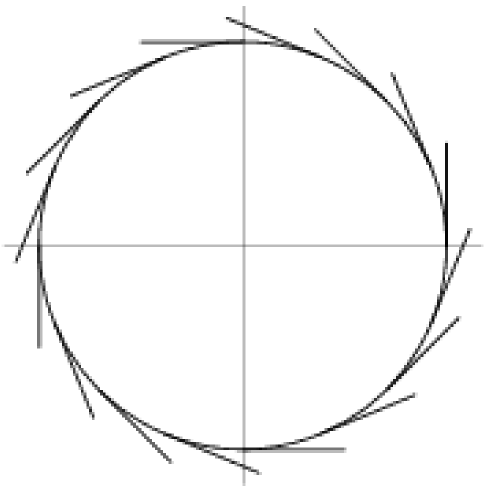


Fuente: http://www.mathstools.com/

Geodésicas

Ejemplo: esfera, cilindro





Fuente: http://mathworld.wolfram.com/

Fuente: "Geometría deferencial de curvas y superfices", M. P. do Carmo

Geodésicas

$\alpha: I \longrightarrow S$ diferenciable es una **geodésica** si α' es paralelo a lo largo de α.

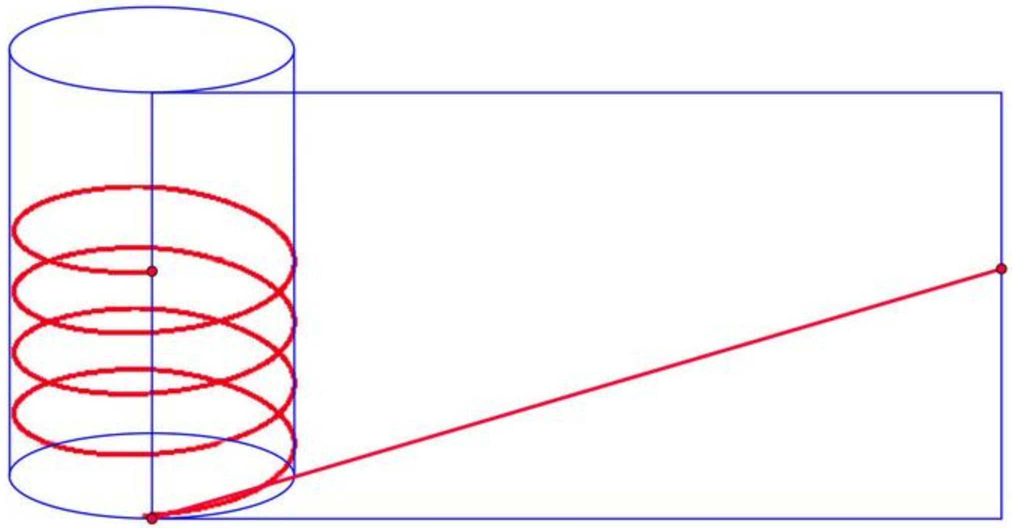
Es la generalización de línea recta en espacios curvos: la forma más corta de ir de un punto A a un punto B por una superficie es ir a lo largo de una geodésica.

Siempre hay una geodésica por cada punto y en cada dirección.

Las geodésicas se mantienen a través de isometrías locales.

Geodésicas

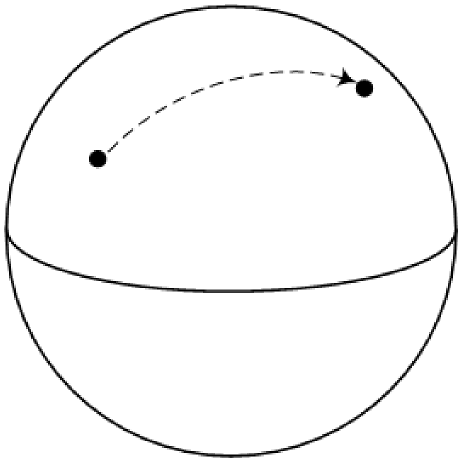
Ejemplo: cilindro



Fuente: https://fernandoalcalde.wordpress.com/

Geodésicas

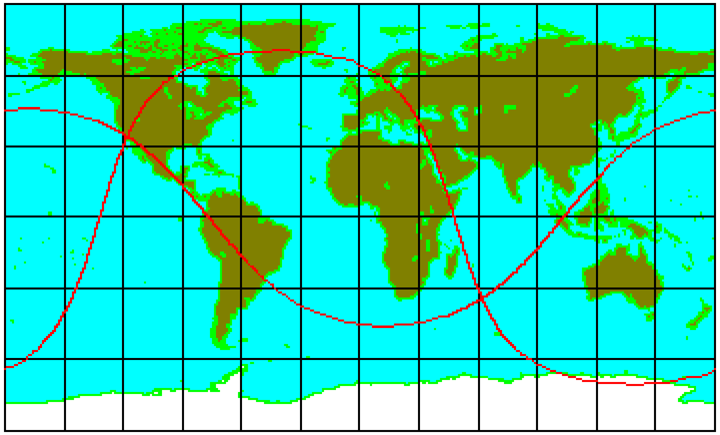
Ejemplo: esfera



https://blogs.msdn.microsoft.com

Geodésicas

Ejemplo: proyección Mercator



http://astronomia.net

Variedades diferenciables

- El concepto de superficie regular puede extenderse a espacios de más de tres dimensiones. En este caso recibe el nombre de **variedad diferenciable**.

- Generalización de métrica: no tiene por qué venir del producto escalar euclídeo, sino de un tensor (Sobre los fundamentos de la geometría)

- Métrica semi-riemanniana

- Teoría de la relatividad