Tema 8. La transformada de Fourier

Procesamiento de Señales, Sonido e Imágenes Digitales

Carlos Quemada Mayoral

UNIVERSIDAD
INTERNACIONAL
DE LA RIOJA

Índice

8.1. Introducción

- Fourier no solo trabajó con señales periódicas.

- Definió un mecanismo para representar una señal aperiódica como una combinación lineal de exponenciales complejas infinitésimamente juntas en frecuencia.

- Este método constituye la llamada transformada de Fourier o Fourier Transform (FT).

- De esta forma, las ecuaciones de síntesis y análisis pasan de ser sumatorios a ser integrales.

8.2. Ecuación de análisis de la FT

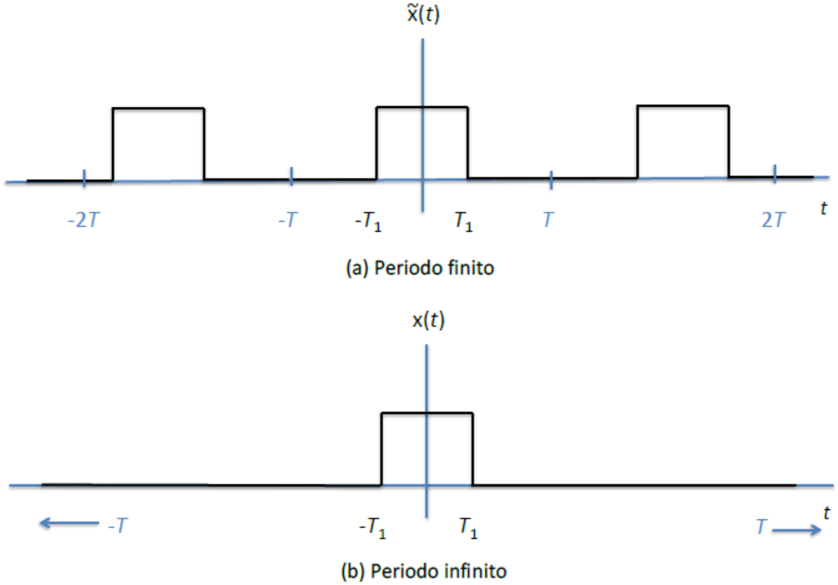
- Dada una señal temporal x(t) no periódica, su transformada de Fourier se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$X(jw) = FT\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt}dt$$

- X(jw) proporciona información de la señal en el dominio de la frecuencia

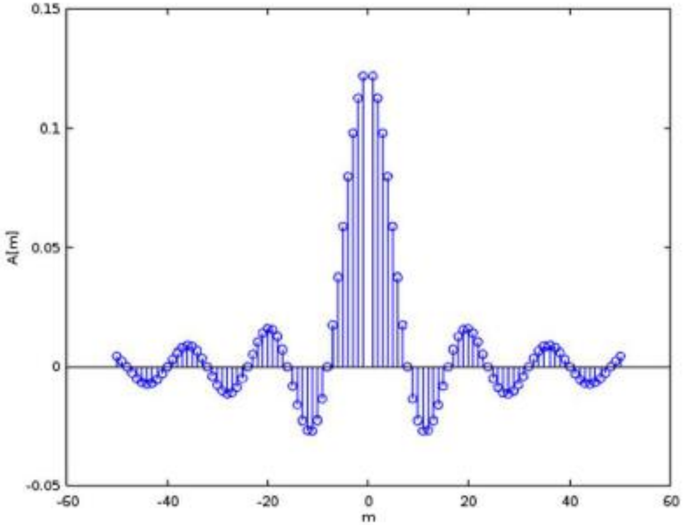
- **Interpretación**. Fourier propuso que una señal aperiódica se puede ver como una señal periódica con periodo T infinito. Ejemplo: tren de ondas cuadradas.

$$c_m = \frac{2T_1}{T}\operatorname{sinc}\left(\frac{2mT_1}{T}\right)$$

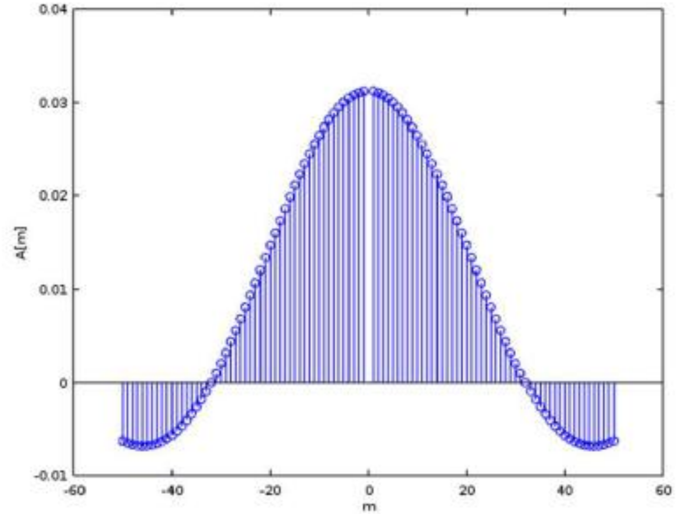


8.2. Ecuación de análisis de la FT

- Se calculan los coeficientes para distintos valores de T



(a) Coeficientes con T=16T_1

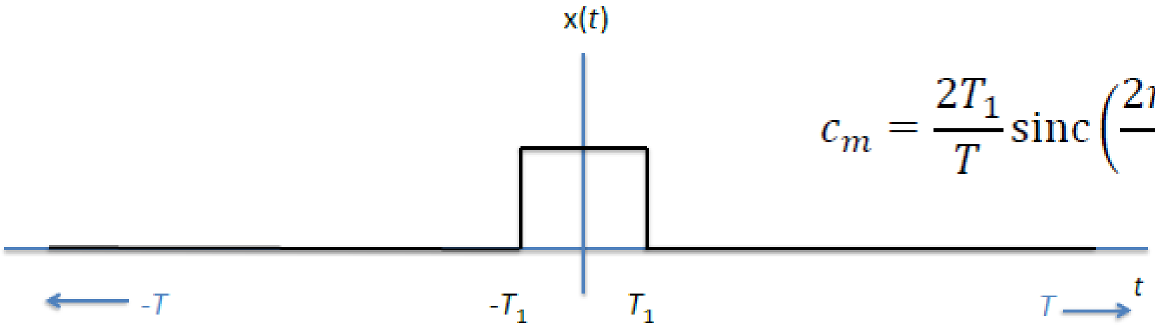


(b) Coeficientes con T=64T_1

- Puede observarse como a medida que T aumenta la separación frecuencial entre armónicos ($mw_0 = m2\pi/T$) disminuye
- Cuando $T \rightarrow \infty$ se puede considerar a mw_0 como una variable continua w. Multiplicando c_m por T, ya que ahora la señal es finita y no serviría la FS para señales periódicas infinitas, y haciendo $T \rightarrow \infty$ se obtiene la FT de la señal de energía de la diapositiva anterior.

8.2. Ecuación de análisis de la FT

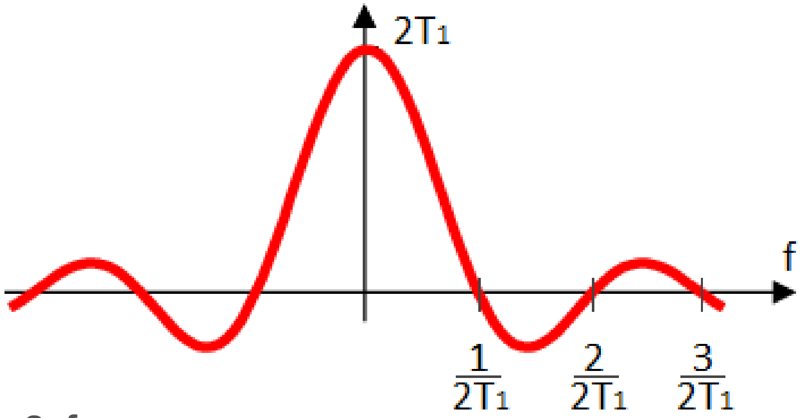
- Aplicando estos cambios:



$$c_m = \frac{2T_1}{T}\operatorname{sinc}\left(\frac{2mT_1}{T}\right) = 2T_1 sinc\left(\frac{2T_1 w}{2\pi}\right)$$

Se multiplica por T y se hace T→ ∞

(b) Periodo infinito

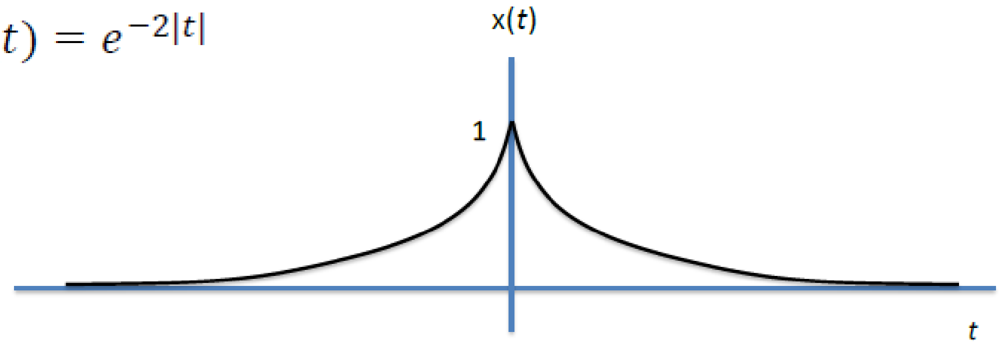


w = 2πf

Si se representa en función de w, los pasos por cero son (2π)/(2T_1), (4π)/(2T_1), (6π)/(2T_1)

8.2. Ecuación de análisis de la FT

- Ejemplo. Calcular la FT de $x(t) = e^{-2|t|}$



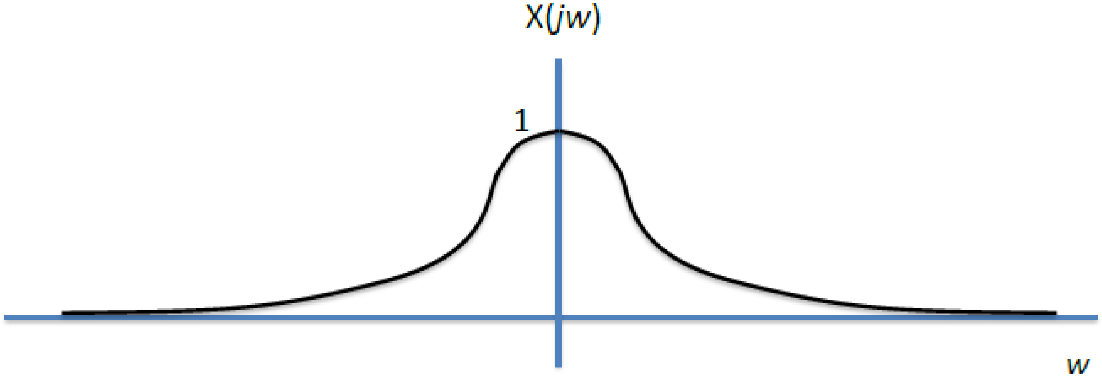
$$X(jw) = FT\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt}dt$$

- Aplicando la definición de FT:

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t|}e^{-jwt}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t}e^{-jwt}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t}e^{-jwt}dt$$

$$= \frac{1}{2-jw}e^{t(2-jw)}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2+jw}e^{-t(2+jw)}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{2-jw} + \frac{1}{2+jw} = \frac{4}{4+w^2}$$

Real



8.3. Ecuación de síntesis de la FT

- A partir del espectro de una señal X(jw), se puede obtener su representación en el dominio del tiempo aplicando la ecuación de síntesis de la FT también llamada transformada inversa de Fourier (IFT).

$$x(t) = IFT\{X(jw)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)e^{jwt}dw$$

- En consecuencia, la señal x(t) y su transformada X(jw) son señales emparejadas mediante la FT

$$x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(jw)$$

8.4. Convergencia de la FT

- Condiciones de Dirichlet suficientes para que una función x(t) aperiódica tenga FT:

- Integral absolutamente limitada.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

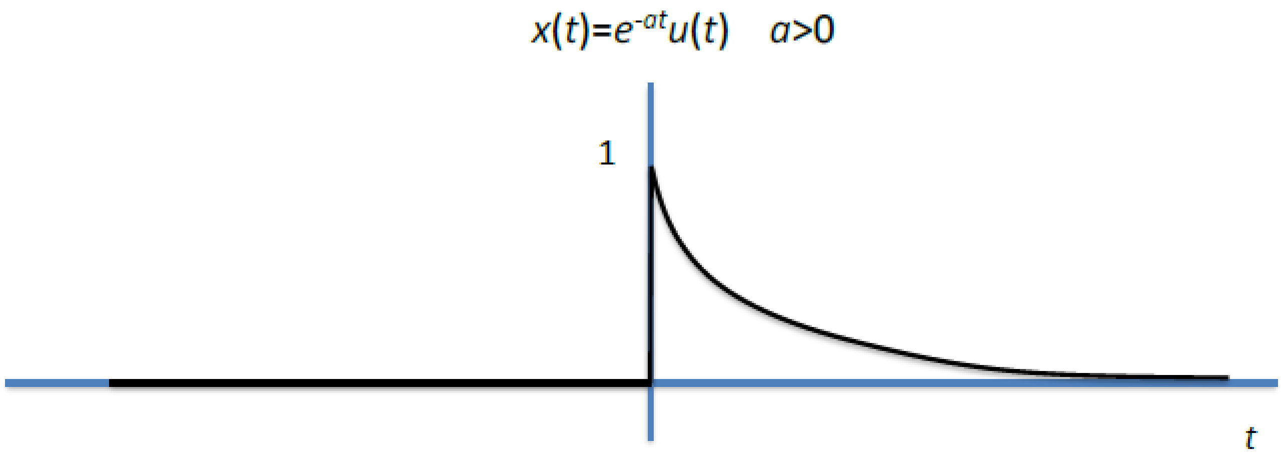
- Oscilaciones limitadas. x(t) debe tener un número finito de máximos y mínimos.

- Discontinuidades limitadas. x(t) debe tener un número finito de discontinuidades, y cada discontinuidad debe ser finita.

8.4. Convergencia de la FT

- **Ejemplo**. Encontrar la FT de $x(t) = e^{-at}u(t)$
- Solo está definida pata t > 0.
- Si a < 0, e^{-at} $\rightarrow \infty$ cuando t $\rightarrow \infty$ y por tanto no se cumple $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty$
- Si a $\geq$ 0, existe la FT converge $\Rightarrow$

$$X(jw) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-jwt} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(a+jw)} dt = \frac{-1}{a+jw} e^{-t(a+jw)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+jw}$$



8.5. FT de señales periódicas

- Las condiciones de Dirichlet son condiciones suficientes pero no necesarias. Es decir, existen señales que tienen FT y no cumplen las condiciones de Dirichlet. Por ejemplo, las señales periódicas tienen FT a pesar de no cumplir las condiciones de Dirichlet. La única condición para que las señales periódicas tengan FT es permitir el impulso unitario en la transformación.

- **Ejemplo**. La FT de $x(t) = e^{jw_0 t}$ es $X(jw) = 2\pi\delta(w - w_0)$

- Demostración. Se aplica la FT^{-1} $\Rightarrow$ $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(w - w_0)e^{jwt}dw$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jw_0 t}\delta(w - w_0)dw = e^{jw_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(w - w_0)dw = e^{jw_0 t}$$

La multiplicación da cero excepto para $w = w_0$

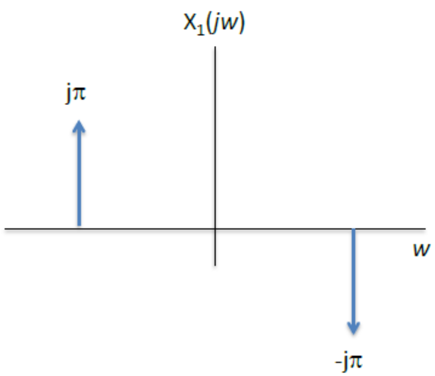
8.5. FT de señales periódicas

- **Ejemplo**. FT de sen(w_0t) y cos(w_0t)
- Usando la fórmula de Euler ⇒ sen(w_0t) = $\dfrac{e^{jw_0t} - e^{-jw_0t}}{2j}$
- Usando la propiedad de linealidad de la FT ⇒ FT{sen(w_0t)} =

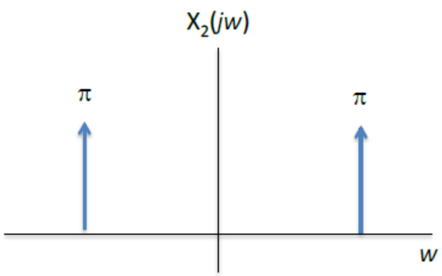
$$FT\{sen(w_0t)\} = \frac{FT\{e^{jW_0t}\} - FT\{e^{-jW_0t}\}}{2j} = \frac{2\pi(\delta(w-w_0) - \delta(w+w_0))}{2j} = \pi j(\delta(w+w_0) - \delta(w-w_0))$$

- Con el coseno es similar

$$FT\{cos(w_0t)\} = \frac{FT\{e^{jW_0t}\} + FT\{e^{-jW_0t}\}}{2} = \frac{2\pi(\delta(w-w_0) + \delta(w+w_0))}{2} = \pi(\delta(w+w_0) + \delta(w-w_0))$$



(a) FT de sin(w_0t)

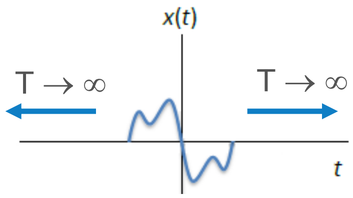


(a) FT de cos(w_0t)

8.5. FT de señales periódicas

- **Correspondencia entre coeficientes de la FS y la FT**. Los coeficientes de la FS de una señal periódica x(t) de periodo T pueden obtenerse a partir de la FT a través de: $X(jw)|_{w=mw_0} = c_m T$

- X(jw) es la FT de x(t) haciendo T $\rightarrow \infty$



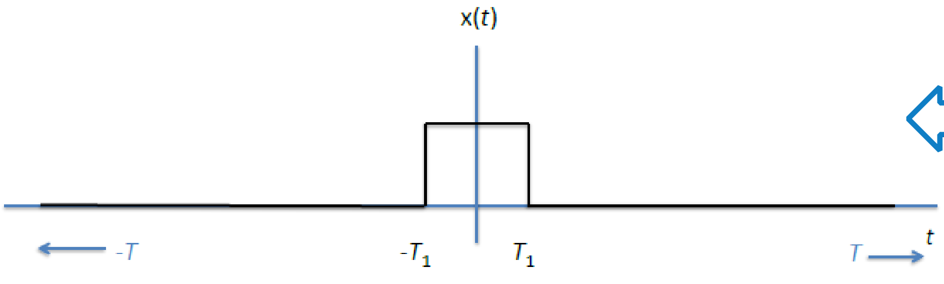
- $c_m = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_T x(t)e^{-jmw_0 t}dt = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jmw_0 t}dt \rightarrow c_m = \dfrac{1}{T}X(jw)|_{w=mw_0} \rightarrow \boxed{X(jw)|_{w=mw_0} = c_m T}$

El periodo de x(t) es infinito

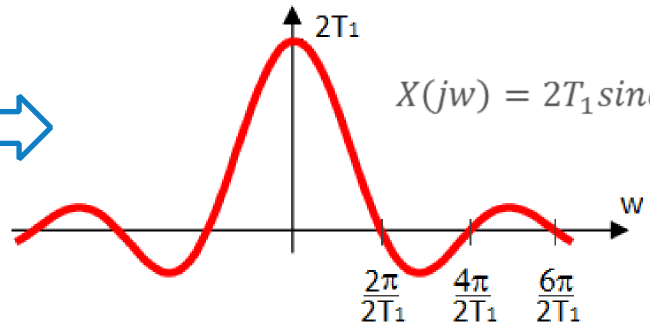
$$c_m = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jmw_0 t}dt \qquad\qquad X(jw) = FT\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt}dt$$

8.5. FT de señales periódicas

- **Ejemplo**. Pasos:
- Se calcula primero la FT de la señal correspondiente a T $\rightarrow \infty$ (un periodo)



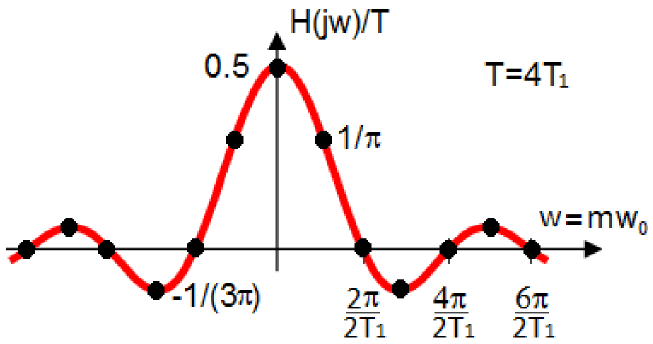
(b) Periodo infinito



$$X(jw) = 2T_1 sinc\left(\frac{2T_1 w}{2\pi}\right)$$

- Se escoge un periodo con el que hacer periódica x(t). Por ejemplo T = $4T_1$
- Se calcula c_m sustituyendo w en X(jw) por mw_0, w_0 por $2\pi/T$ y T por $4T_1$

$$c_m = \frac{2T_1}{T}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{2mT_1}{T}\right) = \frac{1}{2}\,sinc\left(\frac{m}{2}\right)$$

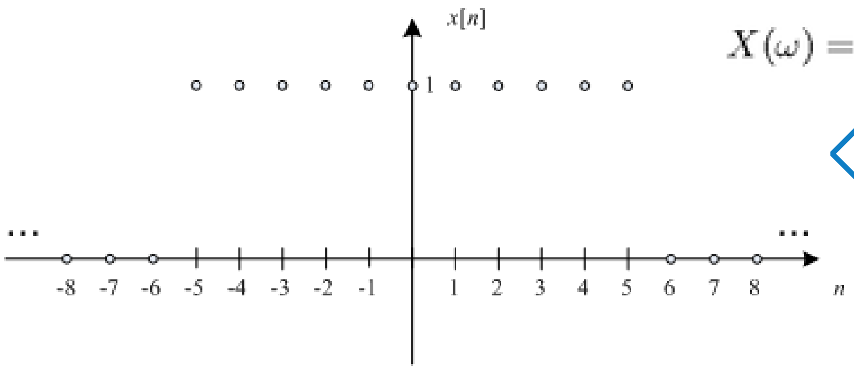


8.6. Ecuación de análisis de la DTFT

- Proporciona la representación frecuencial de una serie temporal aperiódica.

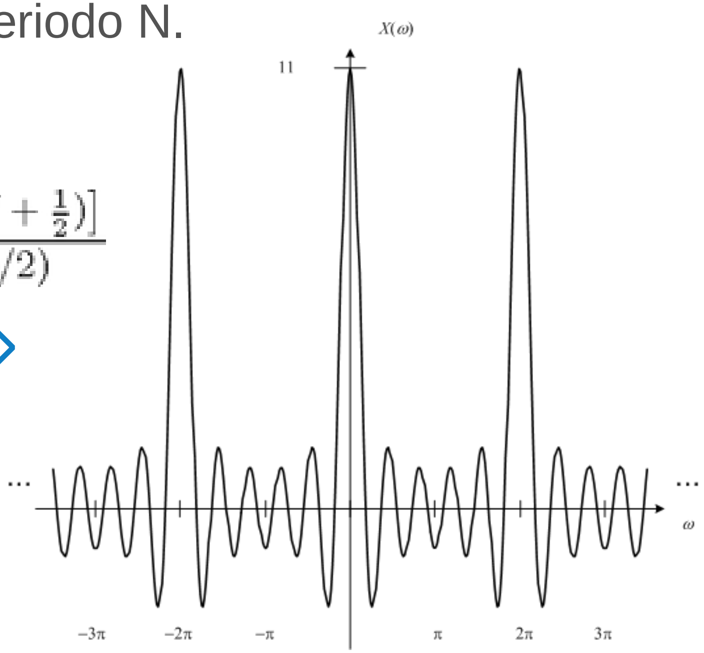
$$X(e^{j\Omega}) = DTFT\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

- La DTFT es periódica con periodo 2π.
- Los espectros de la FS y FT son aperiódicos.
- El espectro de la DTFS es periódico con periodo N.



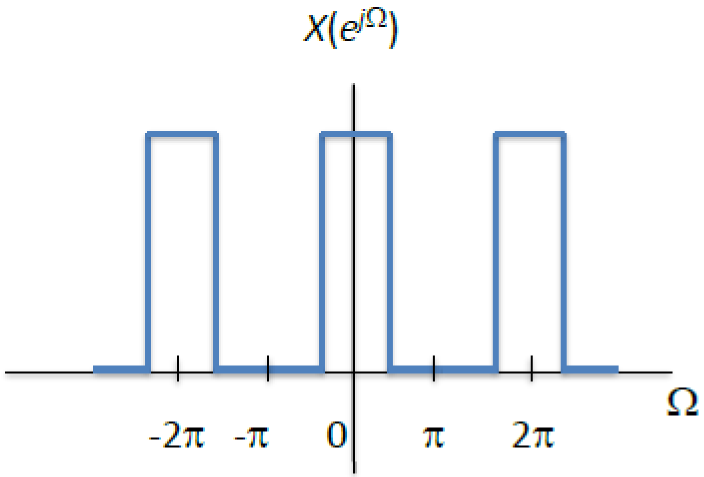
N = 5

$$X(\omega) = \frac{\sin\left[\omega\left(N+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin(\omega/2)}$$

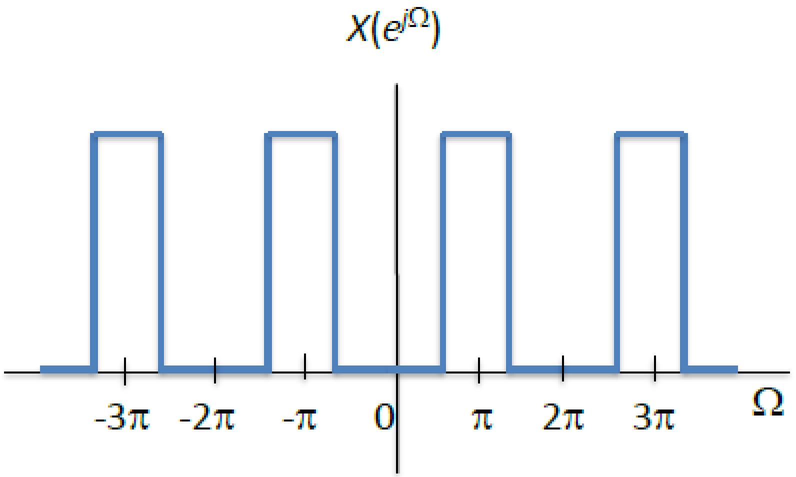


8.6. Ecuación de análisis de la DTFT

- **Bajas y altas frecuencias**.
- En la DTFT las bajas frecuencias se concentran en $\Omega = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$
- Las altas frecuencias se concentran en $\Omega = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$
- DTFT de la respuesta al impulso de filtros ideales paso bajo (LPF) y paso alto (HPF):



Paso bajo



Paso alto

8.6. Ecuación de análisis de la DTFT

- **Ejemplo**. Filtro paso bajo y paso alto.

- Calcular la respuesta en frecuencia de un sistema con la siguiente respuesta al impulso y estudiar con qué valores de a actúa como filtro paso bajo o como filtro paso alto $\Rightarrow$ $h[n] = a^n u[n] \quad \text{con} \quad |a| < 1$

- Aplicando la ecuación de análisis:

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a e^{-j\Omega}\right)^n$$

- Es una progresión geométrica de razón $a e^{-j\Omega}$

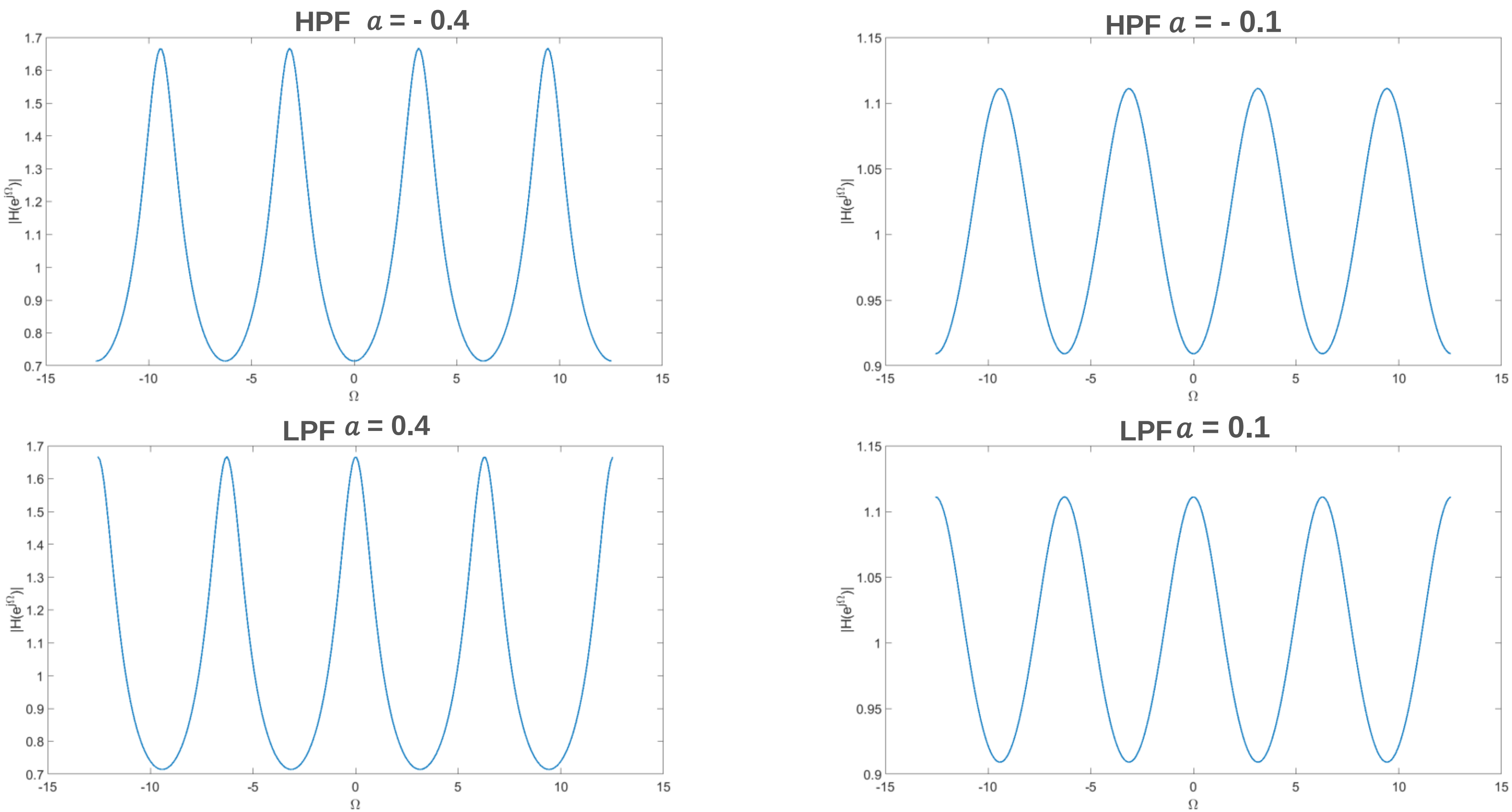
- Aplicando ahora $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad \text{con} \quad |r| < 1 \qquad |r| = |a e^{-j\Omega}| = |a| < 1$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\Omega}}$$

8.6. Ecuación de análisis de la DTFT

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$$

- **Ejemplo**. Filtro paso bajo y paso alto.
- si $a < 0$, deja pasar altas frecuencias (HPF) o fs en torno a π. Si $a > 0$, deja pasar bajas frecuencias o fs en torno a 0 (LPF).



Si | a | aumenta, el sistema amplifica las frecuencias de paso y atenúa las frecuencias de rechazo

8.7. Ecuación de síntesis de la DTFT

- Permite obtener x[n] a partir de $X(e^{j\Omega})$.

$$x[n] = IDTFT\{X(e^{j\Omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega$$

- Mediante la DTFT se puede obtener $X(e^{j\Omega})$ a partir de x[n] y viceversa. Esto quiere decir que tanto x[n] como $X(e^{j\Omega})$ describen completamente la señal. Es decir, están emparejados mediante la DTFT.

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega})$$

8.8. Convergencia y truncado

- **Convergencia**. La condición suficiente para que exista (converja) la DTFT es:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

- **Truncado**. La DTFT no presenta problemas de truncado al aplicar la ecuación de síntesis ya que se integra sobre un intervalo finito de longitud 2π. Igual que con la DTFS la cual suma un número finito N de coeficientes.

8.9. DTFT de señales periódicas

- **Convergencia**. La condición suficiente para que exista (converja) la DTFT es:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

- Pero esta es una condición suficiente. Pueden existir señales x[n] que no cumplan esta relación y que converja su DTFT $\Rightarrow$ las exponenciales complejas

- Para calcular su DTFT es necesario introducir de nuevo la función impulso.

$$\delta(\Omega) = 0 \; para \;\; \Omega \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\Omega)\, d\Omega = \int_{0^-}^{0^+} \delta(\Omega)\, d\Omega = 1$$

- Usando esta propiedad, la exponencial compleja $e^{j\Omega_0 n}$ puede ponerse

$$e^{j\Omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) e^{j\Omega n}\, d\Omega$$

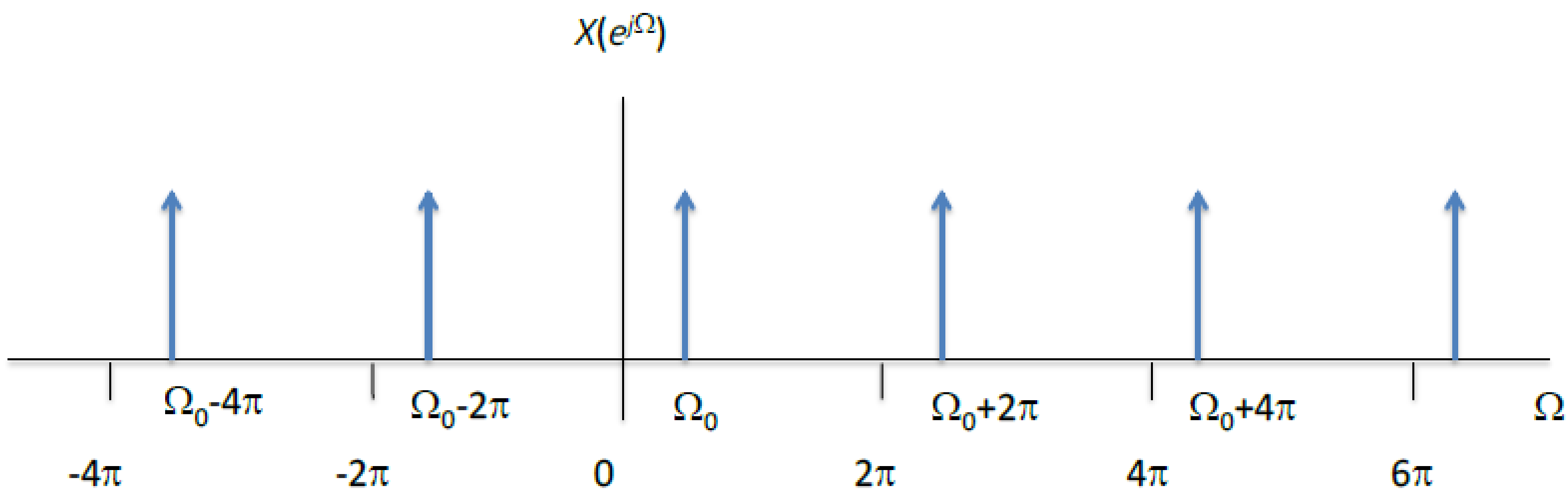
8.9. DTFT de señales periódicas

- Observando la ecuación de síntesis $\Rightarrow$ $x[n] = IDTFT\{X(e^{j\Omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega$

$$e^{j\Omega_0 n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)e^{j\Omega n}\,d\Omega$$

- $2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$ es la DTFT de $e^{j\Omega_0 n}$ $\Rightarrow$ $2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) \Leftrightarrow e^{j\Omega_0 n}$

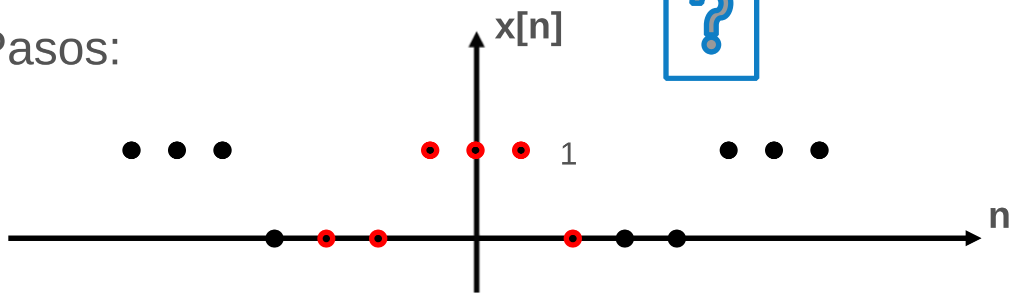
- Como la DTFT es periódica de periodo 2π:



8.9. DTFT de señales periódicas

- Los coeficientes de la DTFS pueden obtenerse a partir de la DTFT del siguiente modo $\Rightarrow$ $c_m = \frac{1}{N} X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega = m\Omega_0} \stackrel{?}{=} c_m = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n]\, e^{-jm\Omega_0 n}$

- **Ejemplo**. Pasos:



- Se coge un periodo (se hace N infinito)
- Se calcula la DTFT $\Rightarrow$ $X(e^{j\Omega}) = e^{j\Omega} + e^{-j\Omega} + 1 = 1 + 2\cos(\Omega)$
- Se calculan los coeficientes escogiendo un periodo con el que periodizar x[n]. En este caso N = 6 $\Rightarrow$ $\Omega 0 = 2\pi/6$
- $c_m = (1+ 2\cos(m2\pi/6))/6 \Rightarrow c_0 = 1/2,\ c_1 = 1/3,\ c_2 = 0,\ c_3 = -1/6,\ c_4 = 0,\ c_5 = 1/3$
- Ahora se aplica la DTFS a x[n] y se ve que **coincide**!!!!

$$c_m = \frac{1}{6}\left(\sum_{n=-3}^{2} x[n] e^{-jm\frac{2\pi}{6}n}\right) = \frac{1}{6}\left(e^{jm\frac{2\pi}{6}} + 1 + e^{-jm\frac{2\pi}{6}}\right) = \frac{1}{6}\left(1 + 2\cos\left(\frac{m\pi}{3}\right)\right)$$

8.10. Resumen

	Periódicas **Frecuencia discreta (m)**	**Aperiódicas** **Frecuencia continua (w, Ω)**
Tiempo continuo (t)	FS	FT
Frecuencia aperiódica (m,w)	$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jmw_0 t}$ **C. y P.**	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)e^{jwt}dw$ **C. y A.**
	$c_m = \frac{1}{T}\int_{T} x(t)e^{-jmw_0 t}\,dt$ **D. Y A.**	$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-jwt}dt$ **C. Y A.**
Tiempo discreto (n)	DTFS	DTFT
Frecuencia periódica (m,Ω)	$x[n] = \sum_{m=<N>} c_m e^{jm\Omega_0 n}$ **D. y P.**	$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega$ **D. y A.**
	$c_m = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jm\Omega_0 n}$ **D. y P.**	$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$ **C. y P.**

Ejercicio 1 (Parte I)

- Calcular módulo y fase de la FT de la siguiente señal: $x(t) = e^{-bt}u(t)$

  b es una constante real positiva.

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bt}u(t)e^{-jwt}dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-bt}e^{-jwt}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(b+jw)t}dt = \frac{-1}{b+jw}e^{-(b+jw)t}\Big|_{t=0}^{t=\infty}$$

$$X(jw) = \frac{-1}{b+jw}(0-1) = \frac{1}{b+jw} = \frac{b-jw}{b^2+w^2} = \frac{b}{b^2+w^2} - j\frac{w}{b^2+w^2}$$

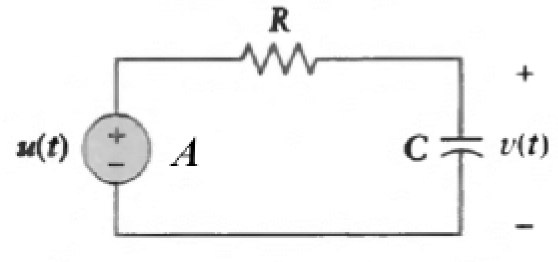
$$|X(jw)| = \sqrt{\frac{b^2}{(b^2+w^2)^2} + \frac{w^2}{(b^2+w^2)^2}} = \frac{\sqrt{b^2+w^2}}{b^2+w^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2+w^2}}$$

$$\angle X(jw) = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}\{X(jw)\}}{\mathrm{Re}\{X(jw)\}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-w}{b}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{w}{b}\right)$$

Ejercicio 2 (Parte I)

- Calcular la respuesta en frecuencia del circuito RC siendo h(t) de la siguiente forma:

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{\frac{-t}{RC}} u(t)$$

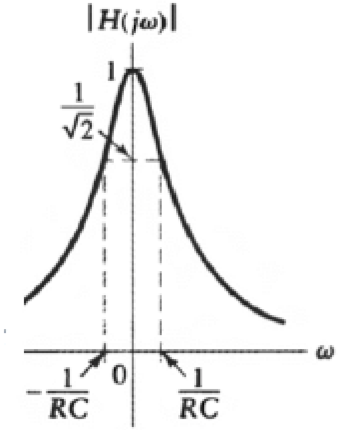


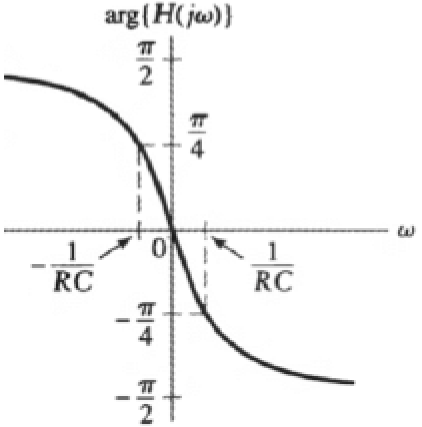
Ejercicio 2 (Parte I)

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{\frac{-t}{RC}} u(t)$$

- Calcular la respuesta en frecuencia del circuito RC siendo h(t) de la siguiente forma:
- Aplicando la FT $\Rightarrow$ $H(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-jwt}dt = \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t}{RC}}u(t)e^{-jwt}dt = \frac{1}{RC}\int_{0}^{\infty} e^{-t\left(\frac{1}{RC}+jw\right)}dt$

$$= \frac{1}{RC}\frac{-1}{\left(\frac{1}{RC}+jw\right)} e^{-t\left(\frac{1}{RC}+jw\right)}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{RC}\frac{-1}{\left(\frac{1}{RC}+jw\right)}(0-1) = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC}+jw}$$



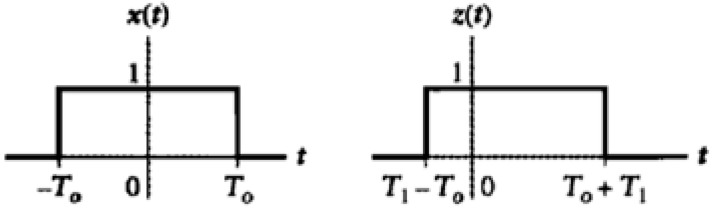


- Puede observarse el módulo y fase de H(jw). Viendo el módulo, puede deducirse que se trata de un filtro paso bajo de BW=2/(RC). Para w = 1/(RC), el módulo cae 3 dB (20log√2).

Ejercicio 3 (Parte I)

- Calcular la FT de la señal z(t) de la figura sabiendo que:

$$x(t) \overset{\text{FT}}{\leftrightarrow} X(jw) = \frac{2}{w}\sin(wT_0)$$



- Vamos a usar la propiedad de desplazamiento en t:

Propiedad de desplazamiento en el tiempo

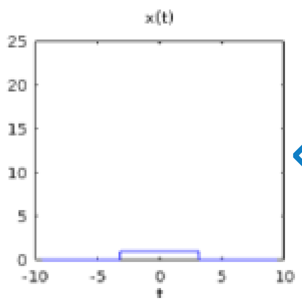
$$x(t-t_0) \overset{\text{FT}}{\leftrightarrow} e^{-jwt_0}X(jw)$$

- Por tanto, z(t) = x(t - T1)

$$z(t) = x(t-T_1) \overset{\text{FT}}{\leftrightarrow} Z(jw) = e^{-jwT_1}\frac{2}{w}\sin(wT_0)$$

Ejercicio 4 (Parte I)

- Calcular la FT del pulso exponencial $\Pi(t/(2\pi))e^{jt}$ a partir del pulso rectangular $\Pi(t/(2\pi))$:



Pulso rectangular de anchura 2π **FT** $x(t) \overset{\text{FT}}{\leftrightarrow} X(jw) = \dfrac{2}{w}\sin(w\pi)$

- Usamos la propiedad de desplazamiento en frecuencia:

Propiedad de desplazamiento en frecuencia

$$e^{jw_0t}x(t) \overset{\text{FT}}{\leftrightarrow} X(j(w-w_0))$$

- Por tanto, la transformada será $\Rightarrow \dfrac{2}{w-1}\sin((w-1)\pi)$

Ejercicios adicionales (Parte I)

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicios 4.1, 4.4, 4.11**

Ejercicios adicionales (Parte I)

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicio 4.1.** Use la ecuación de análisis para calcular la FT de:

$$e^{-2(t-1)}u(t-1)$$

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{1}^{\infty} e^{-2(t-1)}e^{-j\omega t}dt = e^{2}\int_{1}^{\infty} e^{-t(2+j\omega)}dt = -\frac{e^{2}}{2+j\omega}e^{-t(2+j\omega)}\Big]_{1}^{\infty}$$

$$= \frac{e^{2}}{2+j\omega}e^{-2-j\omega} = \frac{e^{-j\omega}}{2+j\omega}$$

Ejercicios adicionales (Parte I)

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicio 4.4.** Use la ecuación de síntesis para calcular la FT inversa de:

$$X_1(j\omega) = 2\pi\,\delta(\omega) + \pi\,\delta(\omega - 4\pi) + \pi\,\delta(\omega + 4\pi)$$

$$x(t) = IFT\{X(jw)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)e^{jwt}dw$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (2\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega - 4\pi) + \pi\delta(\omega + 4\pi))e^{j\omega t}d\omega =$$

- Al multiplicar una delta por una función, valdrá cero en todos los puntos excepto donde esté posicionada la delta. Debido a esto tenemos:

$$= e^{j0t}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)d\omega + \frac{1}{2}e^{j4\pi t}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 4\pi)d\omega + \frac{1}{2}e^{-j4\pi t}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 4\pi)\,d\omega$$

$$= 1 + \frac{1}{2}e^{j4\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j4\pi t} = 1 + \cos(4\pi t)$$

Ejercicios adicionales (Parte I)

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall

- **Ejercicio 4.11.** Dadas las relaciones:

$$y(t) = x(t) * h(t) \qquad g(t) = x(3t) * h(3t)$$

y sabiendo que X(jw) y H(jw) son las FT de x(t) y h(t), usar las propiedades de la FT para demostrar que:

$$g(t) = Ay(Bt)$$

y hallar A y B.

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Ejercicios adicionales (Parte I)

$$g(t) = x(3t) * h(3t)$$

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicio 4.11.** Usando la propiedad de escalado:

$$x(at) \overset{FT}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{jw}{a}\right)$$

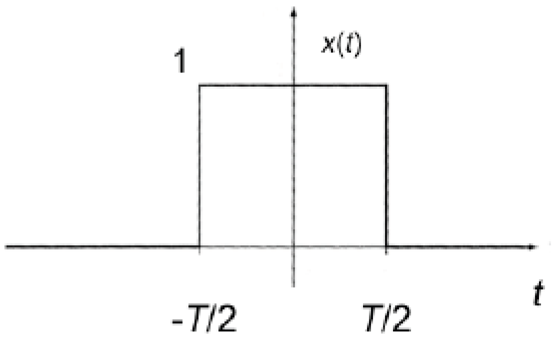
$$x(3t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{3} X\left(j\frac{\omega}{3}\right), \qquad h(3t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{3} H\left(j\frac{\omega}{3}\right)$$

- Aplicando la FT a g(t) y h(t) (la convolución en t pasa a producto en w):
- Y(jw) = X(jw)H(jw)
- G(jw) = (1/3) H(jw/3) (1/3) X(jw/3)
- De estas dos relaciones se deduce que G(jw) = Y(jw/3)/9
- Aplicando la FT inversa y la propiedad de escalado ⇒ g(t) = y(3t)/3
- Por tanto B = 3 y A = 1/3

$$g(t) = Ay(Bt)$$

Ejercicio 1 (Parte II)

- Calcular la FT del pulso rectangular de la figura usando la ecuación de análisis trigonométrica.



$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(wt)\,dt - j\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(wt)\,dt$$

- Si x(t) es real y par ($x(t) = x_e(t)$), entonces $\Rightarrow$ X(jw) es real y par. Por tanto:

$$X(jw) = 2\int_{0}^{T/2} 1\cdot\cos(wt)\,dt = \frac{2}{w}\sin(wt)\Big|_{t=0}^{t=T/2} = \frac{2}{w}\sin\left(\frac{Tw}{2}\right)$$

- Ahora vamos a expresar X(jw) en función de la función $\mathrm{sinc}(u) = \dfrac{\sin(\pi u)}{\pi u}$
- Comparando ambos senos: $\sin(\pi u) = \sin\left(\frac{Tw}{2}\right) \rightarrow u = \frac{Tw}{2\pi} \rightarrow w = \frac{2\pi u}{T}$
- Sustituimos w por $2\pi u/T$ $X(jw) = \dfrac{2}{\left(\frac{2\pi u}{T}\right)}\sin\left(\dfrac{T\left(\frac{2\pi u}{T}\right)}{2}\right) = T\dfrac{\sin(\pi u)}{\pi u} = T\,\mathrm{sinc}(u) = T\,\mathrm{sinc}\left(\dfrac{Tw}{2\pi}\right)$

Ejercicio 2 (Parte II)

- Dados los sistemas y1[n] y y2[n] encontrar la respuesta al impulso y respuesta en frecuencia.

$$y_1[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[n-1]) \qquad y_2[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[n-1])$$

Respuesta al impulso

$$h_1[n] = \frac{1}{2}(\delta[n] + \delta[n-1]) \qquad h_2[n] = \frac{1}{2}(\delta[n] - \delta[n-1])$$

Respuesta en frecuencia

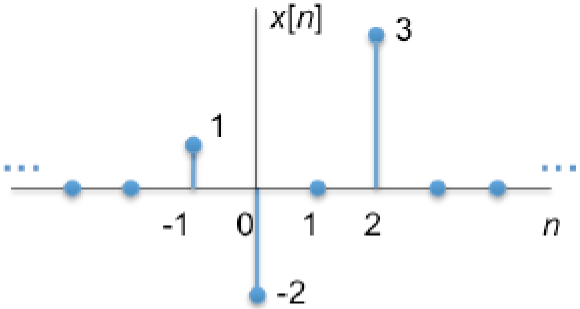
$$H_1(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1[n]e^{-j\Omega n} = \frac{1}{2}e^{-j\Omega 0} + \frac{1}{2}e^{-j\Omega 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}$$

$$H_2(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_2[n]e^{-j\Omega n} = \frac{1}{2}e^{-j\Omega 0} - \frac{1}{2}e^{-j\Omega 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}$$

Ecuación de análisis $\Rightarrow$ $X(e^{j\Omega}) = DTFT\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$

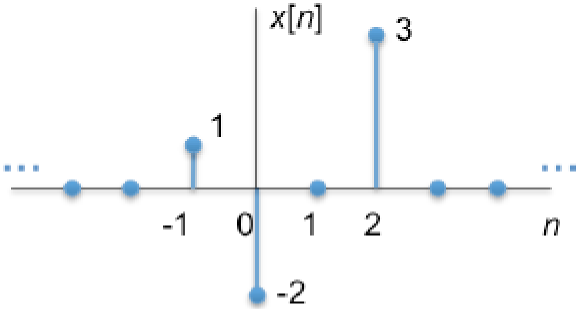
Ejercicio 3 (Parte II)

- Dada la señal aperiódica x[n], calcular su DTFT.



Ejercicio 3 (Parte II)

- Dada la señal aperiódica x[n], calcular su DTFT.



Ecuación de análisis $\Rightarrow$ $X(e^{j\Omega}) = DTFT\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = e^{j\Omega} - 2 + 3e^{-j2\Omega}$$

Ejercicio 4 (Parte II)

- Calcular la DTFT de la siguiente señal.

$$x[n] = \cos(\Omega_0 n) \quad \text{con} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{3}$$

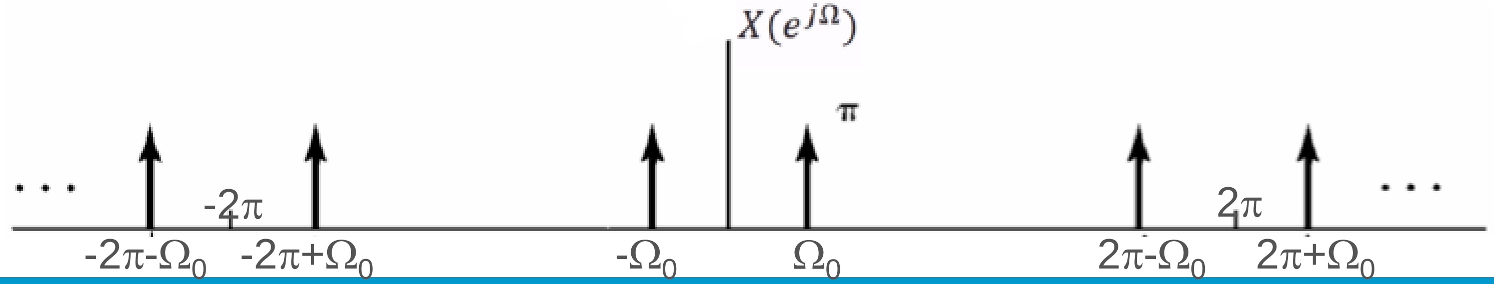
$$x[n] = \frac{1}{2}e^{j\Omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\Omega_0 n}$$

- Habitualmente se calcula la DTFT de señales limitadas en tiempo, ya que el sumatorio de la ecuación de análisis va desde $-\infty$ hasta ∞.

- Para calcular la DTFT de señales periódicas ilimitadas en tiempo, se usa el par transformado $\Rightarrow 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) \Leftrightarrow e^{j\Omega_0 n}$

- $X(e^{j\Omega}) = 0.5\ 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) + 0.5\ 2\pi\delta(\Omega + \Omega_0) = \pi\delta(\Omega - \Omega_0) + \pi\delta(\Omega + \Omega_0)$

- Como $X(e^{j\Omega})$ es periódico de periodo 2π, tenemos:



Ejercicios adicionales (Parte II)

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicios 4.17, 5.1, 5.4**

Ejercicios adicionales (Parte II)

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicios 4.17.** Determine si los siguientes enunciados son ciertos:
- Una señal impar e imaginaria siempre tiene una transformada impar e imaginaria.
- La convolución de una transformada impar de Fourier con una transformada par de Fourier siempre es impar.

Ejercicios adicionales (Parte II)

- **Ejercicios 4.17.** Determine si los siguientes enunciados son ciertos:

- **Una señal impar e imaginaria siempre tiene una transformada impar e imaginaria:**
- Al ser impar ⇒ x(t) = -x(-t)
- Al ser imaginaria pura ⇒ x*(t) = -x(t)

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$X(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t}\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{j\omega t}\,dt \underset{t=-\tau}{=} \int_{\infty}^{-\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau = -\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau = -X(j\omega)$$

- Por tanto, una señal impar tiene una transformada impar.

$$X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t}\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t}\,dt \underset{t=-\tau}{=} \int_{\infty}^{-\infty} x(-\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau = -\int_{\infty}^{-\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau = X(j\omega)$$

- Por tanto X*(jw) ≠ -X(jw) ⇒ No se cumple la afirmación inicial

Ejercicios adicionales (Parte II)

- **Ejercicios 4.17.** Determine si los siguientes enunciados son ciertos:
- **La convolución de una transformada impar de Fourier con una transformada par de Fourier siempre es impar:**
- X(jw) par, H(jw) impar $\Rightarrow$ X(jw) * H(jw) = Y(jw) es impar
- Esta afirmación puede verse en el dominio del tiempo ya que la convolución de dos trasformadas equivale al producto de las dos señales en el dominio del tiempo $\Rightarrow$ X(jw) * H(jw) $\Leftrightarrow$ x(t)·h(t)

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt$$

Ejercicios adicionales (Parte II)

- **Ejercicios 4.17.**

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} \, d\omega$$

- Como X(jw) es par ⇒ X(jw) = X(-jw)

$$x(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{-j\omega t} \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(-j\omega) e^{-j\omega t} \, d\omega = -\frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} X(j\varphi) e^{j\varphi t} \, d\varphi$$

ω = -φ

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\varphi) e^{j\varphi t} \, d\varphi = x(t)$$

- Luego si X(jw) es par ⇒ x(t) es par
- También es fácil de demostrar que si x(t) es par ⇒ X(jw) es par

Ejercicios adicionales (Parte II)

- **Ejercicios 4.17.**

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

- Como H(jw) es impar $\Rightarrow$ H(jw) = -H(-jw)

$$h(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{-j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -H(-j\omega) e^{-j\omega t}\, d\omega \underset{\omega = -\varphi}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} H(j\varphi) e^{j\varphi t}\, d\varphi$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\varphi) e^{j\varphi t}\, d\varphi = -h(t)$$

- Luego si H(jw) es impar $\Rightarrow$ h(t) es impar
- También es fácil de demostrar que si h(t) es impar $\Rightarrow$ H(jw) es impar

- Luego el producto x(t)·h(t) = y(t) será siempre impar.

- Por tanto, su transformada Y(jw) = X(jw) * H(jw) será siempre impar. **Afirmación cierta**.

Ejercicios adicionales (Parte I)

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicio 5.4.** Use la ecuación de síntesis para calcular la FT inversa de:

$$X_1(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{2\pi\delta(\omega - 2\pi k) + \pi\delta(\omega - \tfrac{\pi}{2} - 2\pi k) + \pi\delta(\omega + \tfrac{\pi}{2} - 2\pi k)\}$$

$$x[n] = IDTFT\{X(e^{j\Omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right)e^{j\Omega n}d\Omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi\delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right)e^{j\Omega n}d\Omega$$

- Al multiplicar una delta por una función, valdrá cero en todos los puntos excepto donde esté posicionada la delta. Debido a esto tenemos:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}e^{j0n}2\pi\int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega)d\Omega + \frac{1}{2\pi}e^{j\frac{\pi}{2}n}\pi\int_{-\pi}^{\pi} \delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right)d\Omega + \frac{1}{2\pi}e^{-j\frac{\pi}{2}n}\pi\int_{-\pi}^{\pi} \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right)d\Omega$$

$$= 1 + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}n} = 1 + \cos(\frac{\pi}{2}n)$$

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

unir

www.unir.net