Tema 9. Propiedades y aplicaciones de la FT

Procesamiento de Señales, Sonido e Imágenes Digitales

Carlos Quemada Mayoral

UNIR
UNIVERSIDAD
INTERNACIONAL
DE LA RIOJA

09/02/2021

Índice

9.1. Propiedades básicas de la FT y DTFT

- Si existen **diferencias** entre FT y DTFT se indicarán.
- **Linealidad**. Si $\begin{array}{l} x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(jw) \\ y(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} Y(jw) \end{array}$, entonces $\Rightarrow ax(t) + by(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} aX(jw) + bY(jw)$
- **Desplazamiento en t**. Si $x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(jw)$, entonces $\Rightarrow x(t - t_0) \overset{FT}{\leftrightarrow} e^{-jwt_0} X(jw)$
- **Desplazamiento en f.** Si $x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(jw)$, entonces $\Rightarrow e^{jw_0 t} x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(j(w - w_0))$
- **Inversión temporal**. Si $x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(jw)$, entonces $\Rightarrow x(-t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(-jw)$
- **Escalado temporal**. Si $x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(jw)$, entonces $\Rightarrow x(at) \overset{FT}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|} X(\frac{jw}{a})$
- **Simetría del conjugado**. Si $x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(jw)$, entonces $\Rightarrow x^*(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X^*(-jw)$
- **Dualidad**. Si $x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(jw)$, entonces $\Rightarrow$ X(t) $\overset{FT}{\leftrightarrow}$ 2πx(-jw)
- Si x(t) real $\Rightarrow$ x(t) = x*(t) $\Rightarrow$ X(jw) = X*(-jw) $\Rightarrow \begin{cases} \text{Re(X(jw)) = Re(X(-jw))} & \text{(par)} \\ \text{Im(X(jw)) = -Im(X(-jw))} & \text{(impar)} \end{cases}$

9.1. Propiedades básicas de la FT y DTFT

- **Simetría par e impar**. Si $x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(jw)$ y $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$, entonces $\Rightarrow$

$$x_e(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \mathrm{Re}\{X(jw)\}$$

  - **Re(X(jw)) es par**

$$x_o(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} j\mathrm{Im}\{X(jw)\}$$

- Si x(t) real y par ($x(t) = x_e(t)$), entonces $\Leftrightarrow$ X(jw) es real y par.

- Si x(t) real e impar ($x(t) = x_o(t)$), entonces $\Leftrightarrow$ X(jw) es imaginaria pura e impar.

  - **Im(X(jw)) es impar**

- **Relación de Parseval en señales aperiódicas**. La energía de una señal x(t) en el dominio del tiempo es igual a la energía de su representación en frecuencia.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(jw)|^2 dw$$

  - **Señales continuas aperiódicas (FT)**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\Omega})|\, d\Omega$$

  - **Señales discretas aperiódicas (DTFT)**

9.2. Propiedad de convolución

$$y(t) = x(t) * h(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} Y(jw) = X(jw)H(jw)$$

- **Ejemplo**. Dadas las señales x(t) y h(t), calcular su convolución

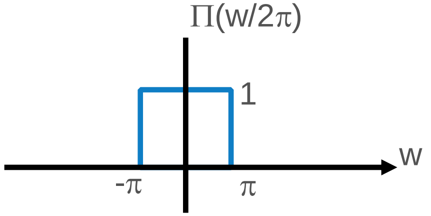
$$x(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \overset{FT}{\leftrightarrow} X(jw) = \begin{cases} 1, & |w| < \pi \\ 0, & |w| > \pi \end{cases}$$

$$h(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} \overset{FT}{\leftrightarrow} H(jw) = \begin{cases} 1, & |w| < 2\pi \\ 0, & |w| > 2\pi \end{cases}$$

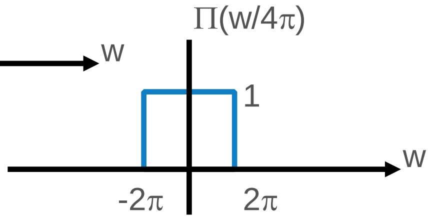
FT de una función π de altura 1 y anchura $2T_1$

$$X(jw) = 2T_1 sinc\left(\frac{2T_1 w}{2\pi}\right)$$

- Aplicando dualidad, sinc(t) $\leftrightarrow \Pi(w/2\pi) \rightarrow$



- Conociendo sinc(t) $\leftrightarrow \Pi(w/2\pi)$, 2sinc(2t) $\leftrightarrow \Pi(w/4\pi) \rightarrow$



- Aplicando la propiedad de convolución $\Rightarrow$ Y(jw) = $\Pi(w/2\pi)$
- La antitransformada de $\Pi(w/2\pi)$ es sinc(t) = sen(πt)/πt $\Rightarrow$ y(t) = sinc(t)
- Puede observarse la simplicidad del cálculo!!!!!!

9.2. Propiedad de convolución

$$y(t) = x(t) * h(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} Y(jw) = X(jw)H(jw)$$

- **Función de transferencia**. La propiedad de convolución nos permite obtener la respuesta en frecuencia de un sistema como el ratio entre la representación en frecuencia de la salida y la entrada. A este ratio se le conoce como función de transferencia del sistema.

$$H(jw) = \frac{Y(jw)}{X(jw)}$$

9.2. Propiedad de convolución

- **Propiedad de convolución de señales periódicas continuas (FS)**

- **Convolución de señales periódicas**. Se define la convolución periódica de dos señales del mismo periodo T como:

$$z(t) = x(t) \circledast y(t) = \int_T x(\tau) y(t-\tau)\, d\tau$$

9.2. Propiedad de convolución

- **Propiedad de convolución de señales periódicas continuas (FS)**

- Dadas dos señales periódicas y sus coeficientes de la FS $x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_m \quad y(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} b_m$
- Los coeficientes c_m de la FS de la convolución z(t) = x(t)*y(t) se calculan como $c_m = Ta_mb_m$

$$c_m = \frac{1}{T}\int_T z(t)\,e^{-jmw_0t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T\left(\int_0^T x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right)e^{-jmw_0t}dt$$

$$= T\left[\frac{1}{T}\int_0^T x(\tau)\left(\frac{1}{T}\int_0^T y(t-\tau)\,e^{-jmw_0t}dt\right)d\tau\right]$$

Ambas señales tienen el mismo periodo T

t - τ = v

$$= T\left[\frac{1}{T}\int_0^T x(\tau)\left(\frac{1}{T}\int_{-\tau}^{T-\tau} y(v)\,e^{-jmw_0(v+\tau)}dv\right)d\tau\right]$$

$$= T\left[\frac{1}{T}\int_0^T x(\tau)\left(\frac{1}{T}\int_{-\tau}^{T-\tau} y(v)\,e^{-jmw_0v}dv\right)e^{-jmw_0\tau}d\tau\right] = T\left[\frac{1}{T}\int_0^T x(\tau)b_m e^{-jmw_0\tau}d\tau\right]$$

$$= Tb_m\left[\frac{1}{T}\int_0^T x(\tau)e^{-jmw_0\tau}d\tau\right] = Ta_mb_m$$

9.3. Propiedad de multiplicación

- **Multiplicación con espectros aperiódicos**.

- El producto de señales aperiódicas en el tiempo es equivalente a su convolución en frecuencia con un factor de escalado $1/2\pi$

$$x(t)y(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X(jw) * Y(jw) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(jv) Y(j(w-v))\, dv$$

- En la FS esta propiedad se modifica del siguiente modo:

$$x(t)y(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_m * b_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{m-k}$$

- La multiplicación de dos señales periódicas (de tiempo continuo o discreto) siempre da una señal con el mismo periodo que las señales multiplicadas.

9.3. Propiedad de multiplicación

- **Multiplicación con espectros periódicos**.

- Cuando los espectros son periódicos se hace una convolución periódica sobre un único periodo.

- En la **DTFT** se hace una convolución periódica:

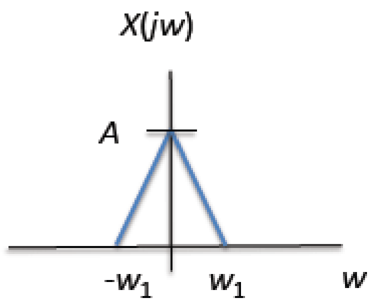
$$x[n]y[n] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi} X(e^{j\Omega}) \circledast Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\Theta})Y(e^{j\Omega-\Theta})\, d\Theta$$

- En la **DTFS** no existe factor de escalado y es suma de convolución periódica:

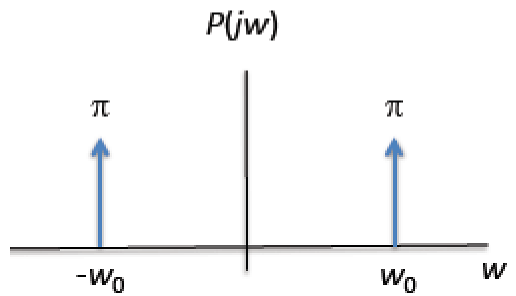
$$x[n]y[n] \xleftrightarrow{DTFS} h_m = a_m \circledast b_m = \sum_{k=<N>} a_k b_{m-k}$$

9.4. Modulación en amplitud

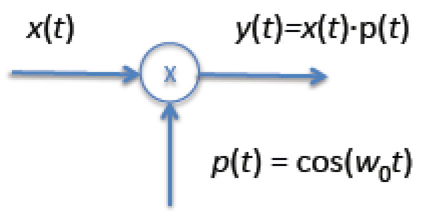
- Permite modular una señal de voz de baja frecuencia a una frecuencia superior antes de ser transmitida mediante una multiplicación temporal de la señal por una portadora.



Espectro de la señal a transmitir



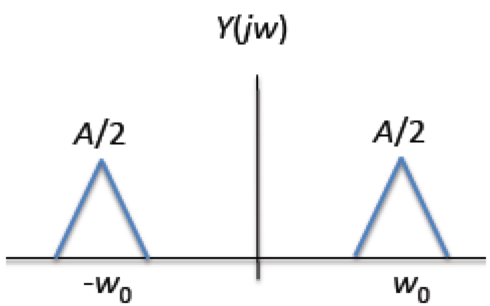
Espectro de la portadora

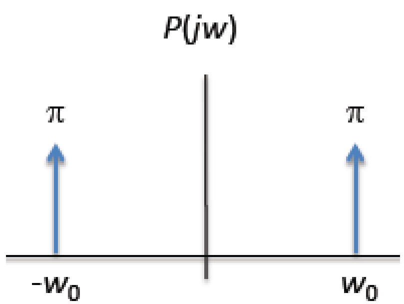


Esquema del modulador

- Puesto que la multiplicación en t da lugar a una convolución en w:

$$Y(jw) = \frac{1}{2\pi} X(jw) * \pi[\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)] = \frac{1}{2}[X(j(w - w_0) + X(j(w + w_0))]$$





9.4. Modulación en amplitud

- Para demodular la señal en recepción se debe multiplicar de nuevo y(t) por la misma portadora $\Rightarrow \; z(t) = y(t)\cos(w_0 t)$

- El espectro es de nuevo una convolución en w.

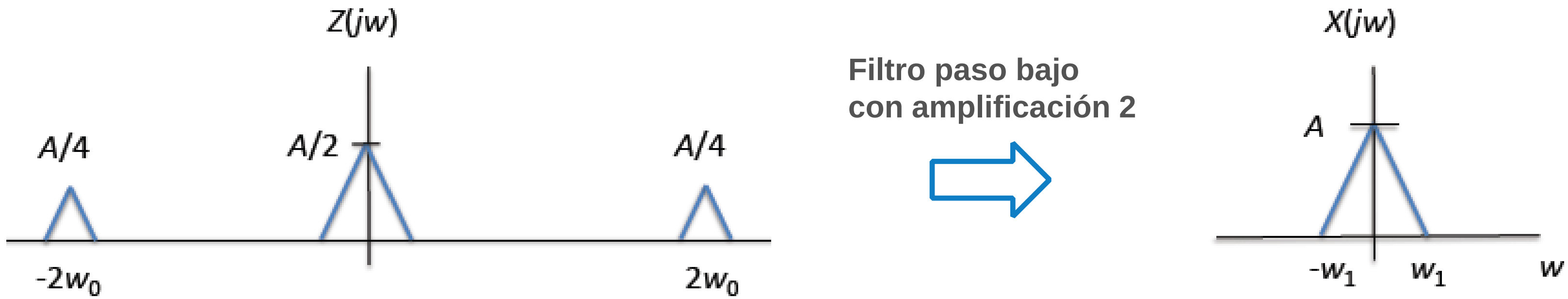
$$Z(jw) = \frac{1}{2}[Y(j(w - w_0)) + Y(j(w + w_0))]$$

- Como Y(jw) se puede poner en función de X(jw) del siguiente modo:

$$Y(jw) = \frac{1}{2\pi}X(jw) * \pi[\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)] = \frac{1}{2}[X(j(w - w_0) + X(j(w + w_0))]$$

- Z(jw) se puede escribir como:

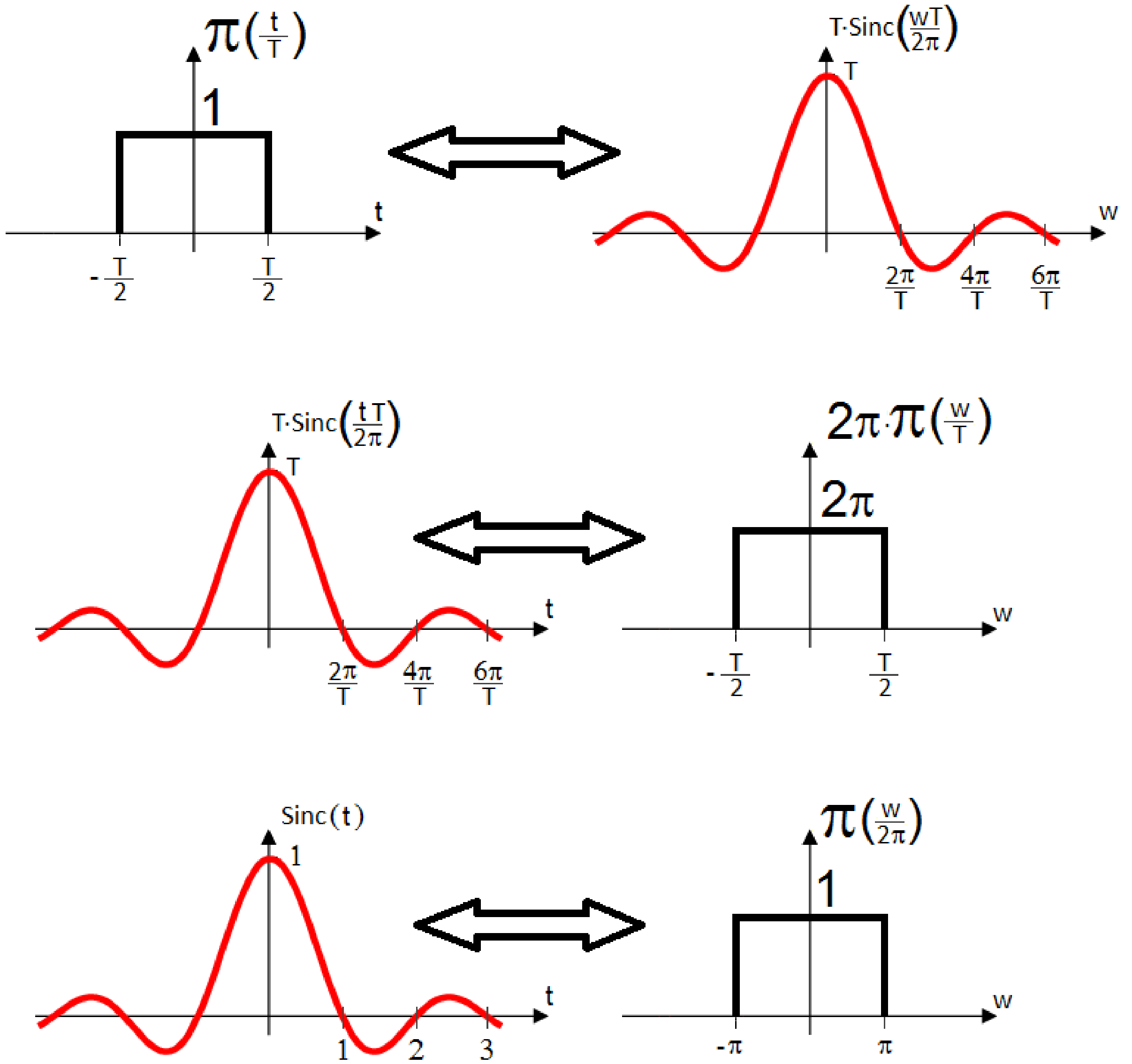
$$Z(jw) = \frac{1}{2}X(jw) + \frac{1}{4}X(j(w - 2w_0)) + \frac{1}{4}X(j(w + 2w_0))$$



9.5. Propiedad de dualidad

- Si $x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(jw)$, entonces $\Rightarrow$ $X(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} 2\pi x(-jw)$
- **Ejemplo**.
- $\Pi(t/T) \leftrightarrow T\,\mathrm{sinc}(wT/2\pi) \Rightarrow$ Dualidad $\Rightarrow T\,\mathrm{sinc}(tT/2\pi) \leftrightarrow 2\pi\,\Pi(w/T)$
- Dividiendo por T $\Rightarrow \mathrm{sinc}(tT/2\pi) \leftrightarrow (2\pi/T)\,\Pi(w/T)$
- Escalando temporalmente por $2\pi/T \Rightarrow \mathrm{sinc}(t) \leftrightarrow \Pi(w/2\pi)$

9.5. Propiedad de dualidad



9.6. La DFT

- La DFT (*Discrete Fourier Transform*) es una herramienta para calcular transformadas de Fourier en un ordenador.

- Se representa con una secuencia de longitud N, tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia.

- La FFT (*Fast Fourier Transform*) es un algoritmo eficiente para calcular la DFT en un ordenador.

9.6. La DFT

- **Ecuación de análisis y síntesis**.

Ecuación de análisis ⇨ $$X[m] = DFT\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} \quad \text{con} \quad m = 0, 1, .., N-1$$

Ecuación de síntesis ⇨ $$x[n] = IDFT\{X[m]\} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X[m]e^{j\frac{2\pi}{N}mn} \quad \text{con} \quad n = 0, 1, .., N-1$$

9.6. La DFT

- **Ecuación de análisis y síntesis**. **Ejemplo**.

$$X[m] = DFT\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} \quad \text{con} \quad m = 0, 1, .., N-1$$

- Sea la señal discreta $x[n] = \{1, -2, 1, 3\}$. Calcular la DFT.

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = 1 - 2e^{-j\frac{\pi}{2}m} + e^{-j\pi m} + 3^{-j\frac{3\pi}{2}m}$$

$$= 1 - 2\cos\left(\frac{-\pi}{2}m\right) - j2\sin\left(\frac{-\pi}{2}m\right) + \cos(-\pi m) + j\sin(-\pi m)$$

$$+ 3\cos\left(\frac{-3\pi}{2}m\right) + j3\sin\left(\frac{-3\pi}{2}m\right) \Longrightarrow X[m] = \begin{cases} 3, & m = 0 \\ 0 + 5j, & m = 1 \\ 1, & m = 2 \\ 0 - 5j, & m = 3 \end{cases}$$

9.6. La DFT

- **Relación con la DTFS**.

- Diferencias entre la DFT y la DTFS:

  - En la DTFS, tanto x[n] como los coeficientes Cm son series infinitas y periódicas de periodo N. En la DFT, x[n] y X[m] son señales finitas de longitud N y aperiódicas.

  - La DTFS recorre cualquier secuencia de longitud N (es decir sumamos sobre <N>) mientras que la DFT recorre una secuencia que por convenio está situada en las posiciones 0, ... , N-1.

  - En la DTFS el escalado 1/N se suele aplicar en la ecuación de análisis, mientras que en la DTF se acostumbra a aplicarlo en la ecuación de síntesis.

9.6. La DFT

- **Relación con la DTFS**.
- Ec. de análisis de la DTFS $\Rightarrow$ $$c_m = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]\, e^{-jm\Omega_0 n} \quad \text{con} \quad m =< N >$$
- Ec. de análisis de la DFT $\Rightarrow$ $$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} \quad \text{con} \quad m = 0, 1, .., N-1$$
- Para obtener los coeficientes de la DTFS podemos calcular la DFT de un periodo y después aplicamos la relación $\Rightarrow$ $$c_m = \frac{1}{N} X[m]$$
- Obviamente, luego habría que replicar de forma periódica y hasta el infinito el resultado obtenido de la operación anterior X[m]/N

9.6. La DFT

- **Relación con la DTFT**.

- Diferencias entre la DFT y la DTFT:

  - La DTFT se aplica a una secuencia x[n] aperiódica de cualquier longitud

$$X(e^{j\Omega}) = DTFT\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

  - La DFT se aplica a una secuencia x[n] aperiódica de longitud N

$$X[m] = DFT\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} \quad \text{con} \quad m = 0, 1, .., N-1$$

- Si se quiere calcular la DFT a partir de la DTFT se deben primero quitar muestras hasta obtener una secuencia de longitud N ya que la DTFT se aplica a señales de cualquier longitud $\Rightarrow x[n] = 0 \quad \forall n < 0 \text{ y } n \geq N$
- Observando ambas ecuaciones de análisis, posteriormente se deberá reemplazar Ω por $\Rightarrow \Omega = \frac{2\pi}{N}m$. La DTFT es continua con periodo 2π y la DFT discreta con un número N de muestras.

9.6. La DFT

- **Cálculo con Octave y Matlab**.

- X = fft(x); Calcula la DFT de x

- Ejemplo:
- x = [1 -2 1 3];
- X = fft(x)
- X = 3.0000 + 0.0000i   0.0000 + 5.0000i   1.0000 + 0.0000i   0.0000 - 5.0000i

- x = ifft(X); Calcula de DFT inversa de X $\Rightarrow$ x = 1 -2 1 3

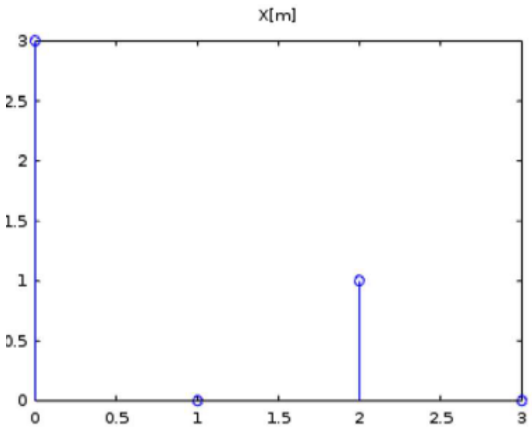
- Teniendo en cuenta la relación entre los coeficientes de la DTFS y la DFT se puede usar la operación fft para calcular la DTFS:

- c = (1/N)fft(x);

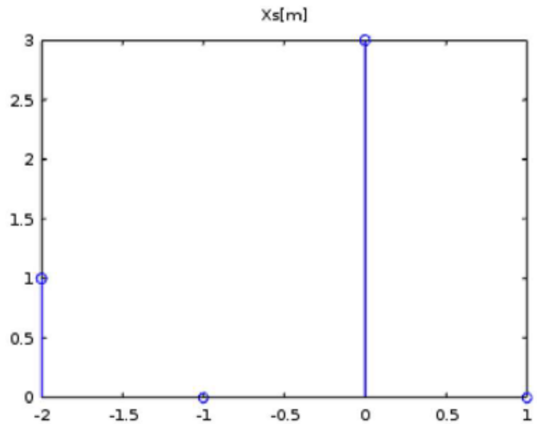
9.6. La DFT

- **Desplazamiento**. Hace referencia a desplazar el espectro de la DFT al origen para que aparezcan a ambos lados las frecuencias negativas y positivas y que sea más fácil identificar simetrías. Se usa el comando **fftshift**.

- Ejemplo:
- x = [1 -2 1 3];
- X = fft(x);
- Xs = fftshift(X); Desplazamos al origen
- subplot(2,2,1), stem([0:3],X), title('X[m]'); Pintamos la DFT sin desplazar
- subplot(2,2,2), stem([-2:1],Xs), title('Xs[m]'); Pintamos la DFT desplazada



DFT sin desplazar



DFT desplazada

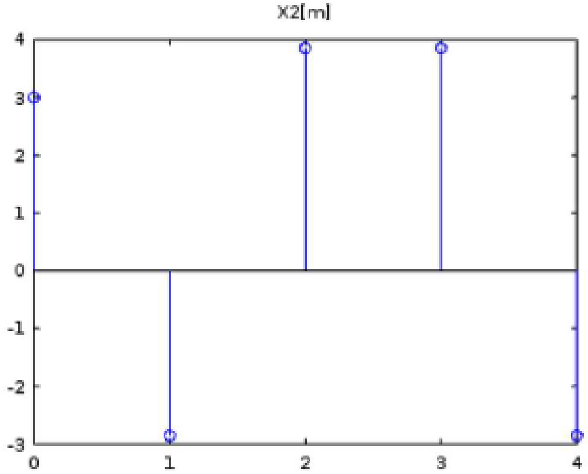
Se parte de la DFT sin desplazar, se hace periódica y se escogen las muestras de -2 a 1

Debido a que el número de muestras es par el espectro queda desplazado a la izquierda. Se soluciona añadiendo ceros a x[n] hasta que sea impar

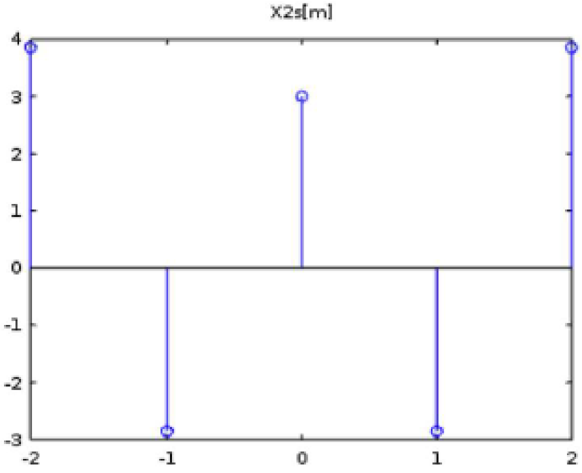
9.6. La DFT

- **Padding**. Consiste en añadir ceros a x[n] buscando la simetría de la DFT desplazada. En el ejemplo anterior podemos añadir un cero a x[n] para centrar el espectro de la DFT.

- Ejemplo:
- x2 = [1 -2 1 3 0];
- X2 = fft(x2);
- X2s = fftshift(X2);
- subplot(2,2,3), stem([0:4],X2), title('X2[m]');
- subplot(2,2,4), stem([-2:2],X2s), title('X2s[m]');



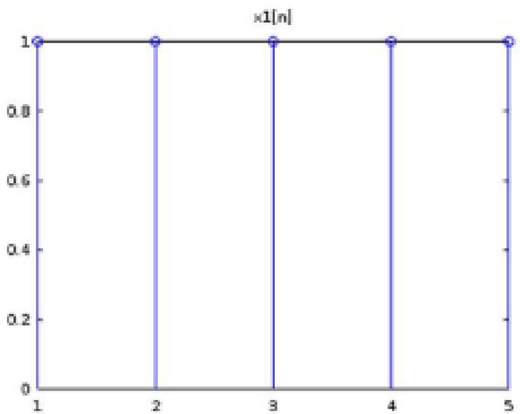
DFT sin desplazar



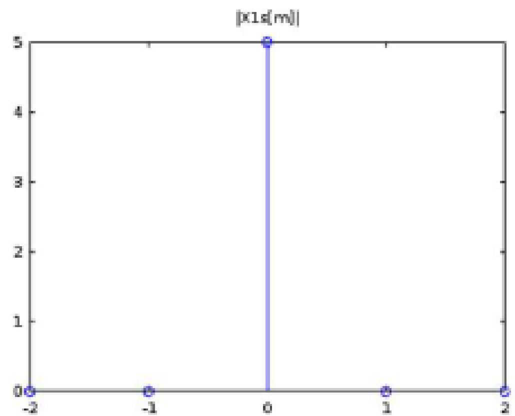
DFT desplazada

9.6. La DFT

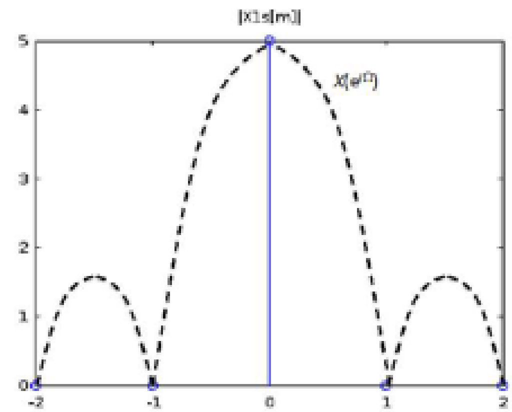
- **Padding**. No solo se utiliza para centrar los coeficientes, sino que también se utiliza para aumentar el número de valores N que se pasa a fft, y así mejorar la resolución frecuencial de una señal.
- Ejemplo.



X[n] ≡ Onda cuadrada N = 5



DFT desplazada

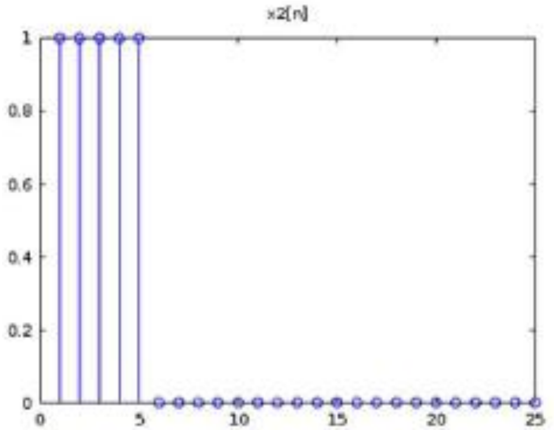


DTFT correspondiente

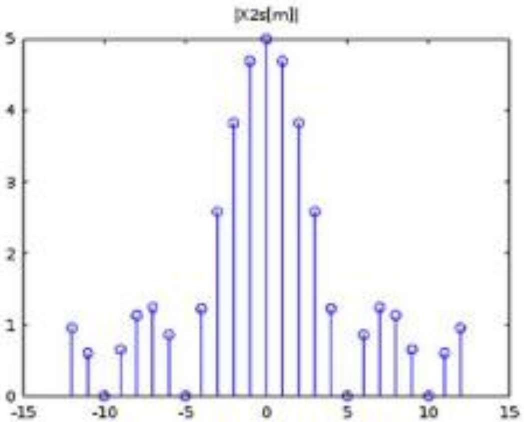
- La DTFT es periódica de periodo 2π. En la figura solo se representa un periodo.

9.6. La DFT

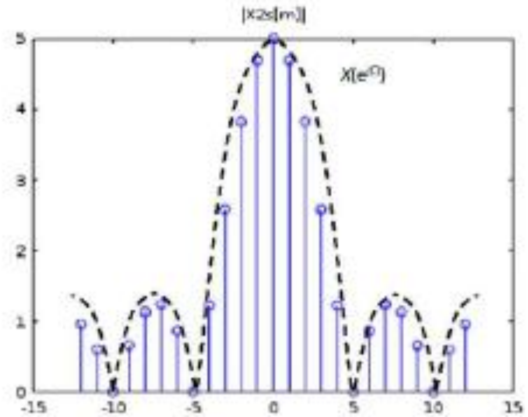
- **Padding**. No solo se utiliza para centrar los coeficientes, sino que también se utiliza para aumentar el número de valores N que se pasa a fft, y así mejorar la resolución frecuencial de una señal.
- Ejemplo. Se hace N = 25 añadiendo ceros.



X[n] ≡ Onda cuadrada N = 25



DFT desplazada



DTFT correspondiente

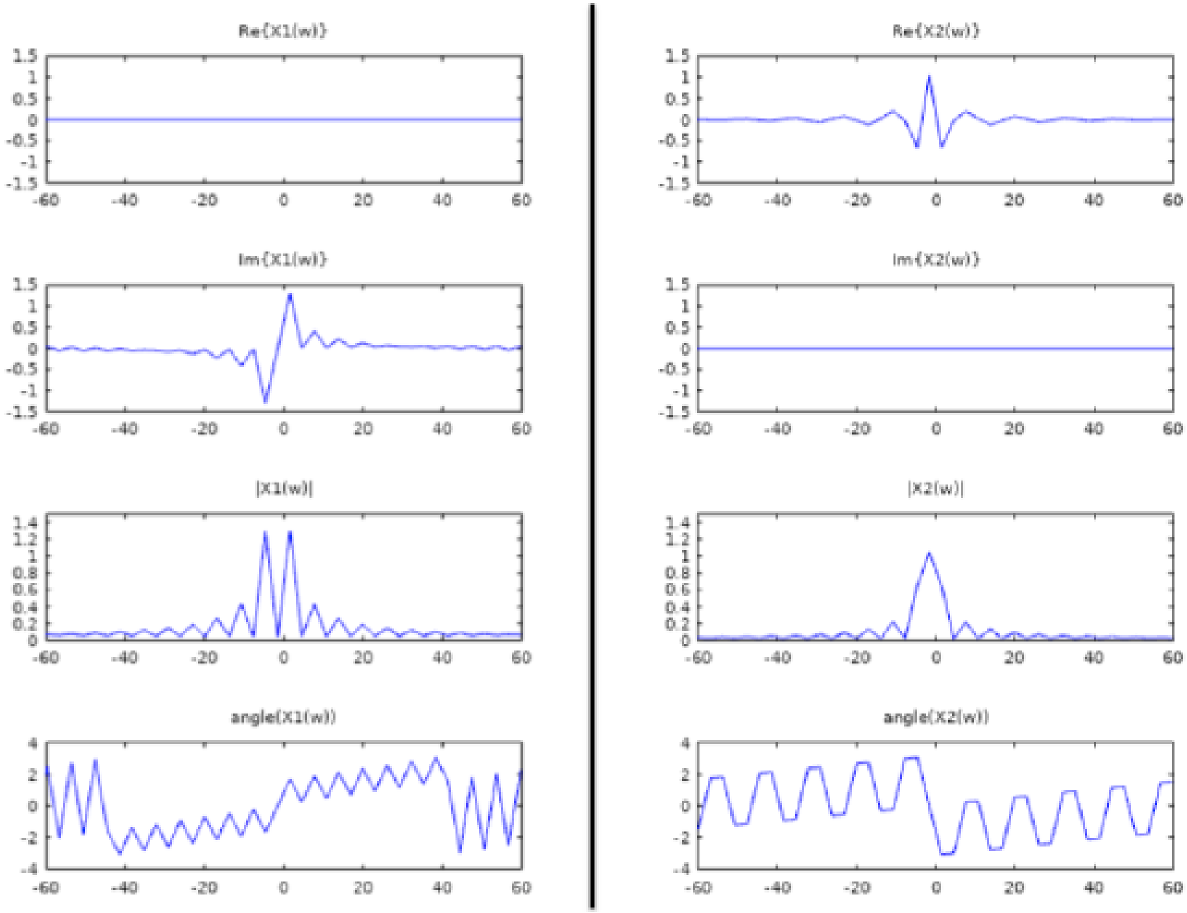
- Al aumentar el número de ceros, la DTFT de la señal se aproxima cada vez más a la transformada FT de un pulso rectangular. $\Pi(t/T) \leftrightarrow T\, \mathrm{sinc}(wT/2\pi)$

9.6. La DFT

- **Muestreo y relación con la FT**. Dado que la que FT se aplica a una señal continua, para calcularla con un computador se usa una aproximación numérica aplicando la DFT a muestras de la señal continua.

Ejercicio 1

- Determinar si son reales o imaginarias, pares o impares las señales x1(t) y x2(t) a partir de las FTs de la figura.



Ejercicio 1

- Determinar si son reales o imaginarias, pares o impares las señales x1(t) y x2(t) a partir de las FTs de la figura.
- Observamos que X1(w) es imaginaria pura e impar $\Rightarrow$ x1(t) es real e impar
- Observamos que X2(w) es real y par $\Rightarrow$ x2(t) es real y par

Ejercicio 2

- Dada la señal periódica $x[n]=\{1,-2,1,3\}$ con periodo $N=4$, verificar que se cumple la relación de Parseval.
- Relación de Parseval para la DTFS: $\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}|x[n]|^2=\sum_{m=<N>}|c_m|^2$
- La potencia de x[n] es: $P_{x[n]}=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}|x[n]|^2=\frac{1}{4}(|1|^2+|-2|^2+|1|^2+|3|^2)=\frac{15}{4}$
- Calculamos los coeficientes de la DTFS:

$$c_m=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-jm\Omega_0 n}=\frac{1}{4}\left(1-2e^{-j\frac{\pi}{2}m}+e^{-j\pi m}+3e^{-j\frac{3\pi}{2}m}\right)\qquad \Omega_0=\frac{2\pi}{N}=\frac{\pi}{2}$$

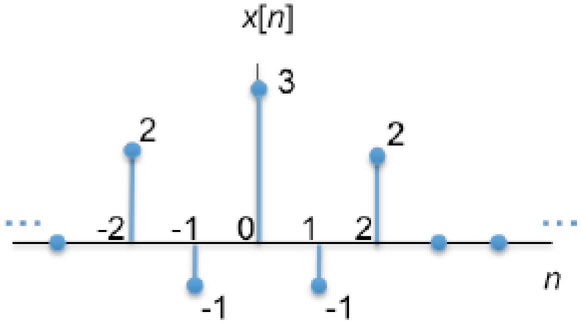
- Calculamos la potencia de los coeficientes:

$$P_{c_m}=\sum_{m=<N>}|c_m|^2=\frac{1}{16}[|1-2e^0+1+3e^0|^2+|1+2j-1+3j|^2+|1+2+1-3|^2+|1-2j-1-3j|^2]$$

$$=\frac{1}{16}[|3|^2+|5j|^2+|1|^2+|5j|^2]=\frac{15}{4}$$

Ejercicio 3

- Dada la señal aperiódica x[n] de la figura, obtener $\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega$



- Usamos la relación de Parseval para la DTFT: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega$

Aperiódica Periódica

- Por tanto,

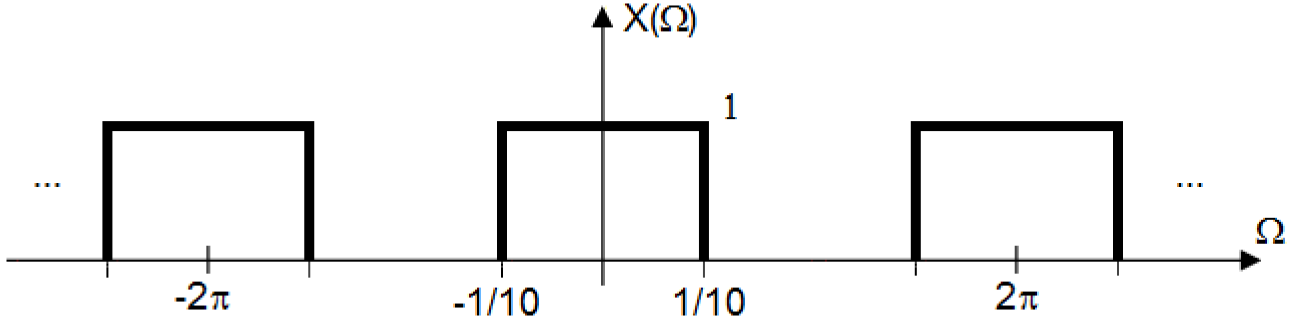
$$\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = 2\pi\ (|2|^2 + |-1|^2 + |3|^2 + |-1|^2 + |2|^2) = 38\pi$$

Ejercicio 4

- Encontrar la energía de la siguiente señal: $x[n] = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi n}{10}\right)}{\pi n}$

- Para ello usaremos el par $\dfrac{\sin(\pi W n)}{\pi n} \Leftrightarrow X(\Omega) = \begin{cases} 1 \quad , \quad 0 \leq |\Omega| \leq W \\ 0 \quad , \quad W < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$

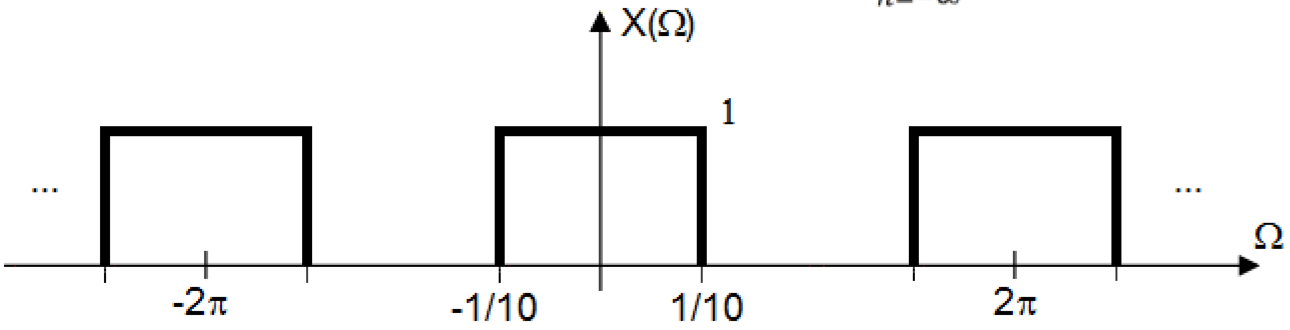
$X(\Omega)$ is periodic with period 2π



- Por tanto w = 1/10.

Ejercicio 4

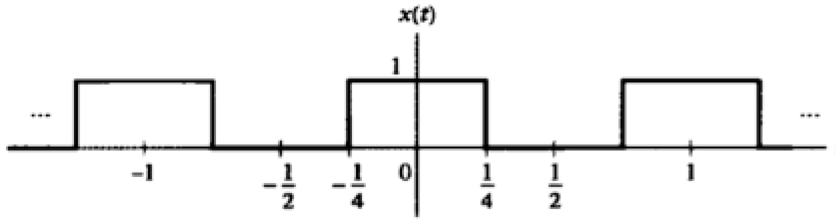
- Aplicamos ahora la relación de Parseval. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega$$



- La integral del módulo de X(Ω) al cuadrado en un periodo vale 1/5
- Dividiendo entre 2π, la energía de la señal da **1/(10π)**

Ejercicio 5

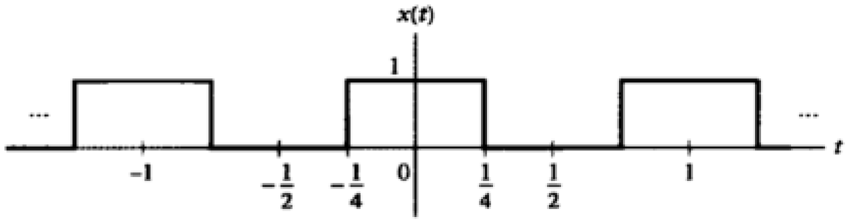
- Evaluar la convolución periódica de x(t) con y(t)



$$y(t) = 2\cos(2\pi t) + \sin(4\pi t)$$

Ejercicio 5

- Evaluar la convolución periódica de x(t) con y(t)

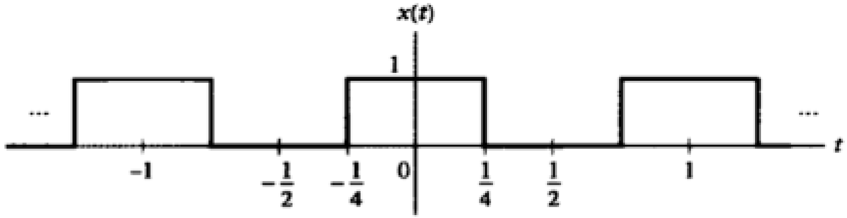


$$y(t) = 2\cos(2\pi t) + \sin(4\pi t)$$

- El periodo de ambas es 1.
- Vamos a usar la propiedad siguiente:
- Dadas dos señales periódicas y sus coeficientes de la FS $x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_m \quad y(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} b_m$
- Los coeficientes c_m de la FS de la convolución z(t) = x(t)*y(t) se calculan como $c_m = Ta_m b_m$, siendo T el periodo de ambas.

Ejercicio 5

- Evaluar la convolución periódica de x(t) con y(t)

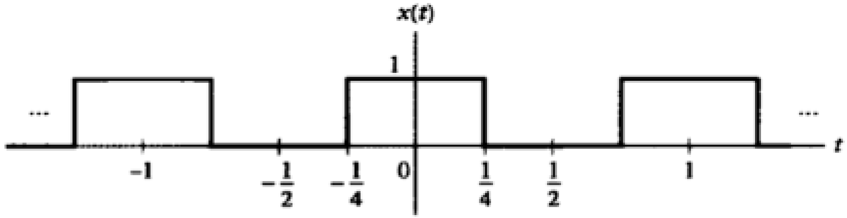


$$y(t) = 2\cos(2\pi t) + \sin(4\pi t)$$

- Por tanto, vamos a calcular los coeficientes de ambas.
- Los coeficientes de la onda cuadrada son: $a_m = \dfrac{\sin(mT_0 w_0)}{m\pi} = \dfrac{\sin\left(m\frac{\pi}{2}\right)}{m\pi}$
- T_0 = ¼ y $w_0 = 2\pi/T = 2\pi$

Ejercicio 5

- Evaluar la convolución periódica de x(t) con y(t)



$$y(t) = 2\cos(2\pi t) + \sin(4\pi t)$$

- Desarrollando el seno y coseno en forma de exponenciales complejas y comparando con la ecuación de síntesis, tenemos.

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jmw_0 t}$$

- $w_0 = 2\pi/T = 2\pi$

$$b_m = \begin{cases} \frac{-1}{2j}, & m = -2 \\ 1, & m = -1 \\ 1, & m = 1 \\ \frac{1}{2j}, & m = 2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Ejercicio 5

- Hacemos ahora el producto de los coeficientes.

$$a_m = \frac{\sin(mT_0w_0)}{m\pi} = \frac{\sin\left(m\frac{\pi}{2}\right)}{m\pi}$$

$$b_m = \begin{cases} \frac{-1}{2j}, & m = -2 \\ 1, & m = -1 \\ 1, & m = 1 \\ \frac{1}{2j}, & m = 2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

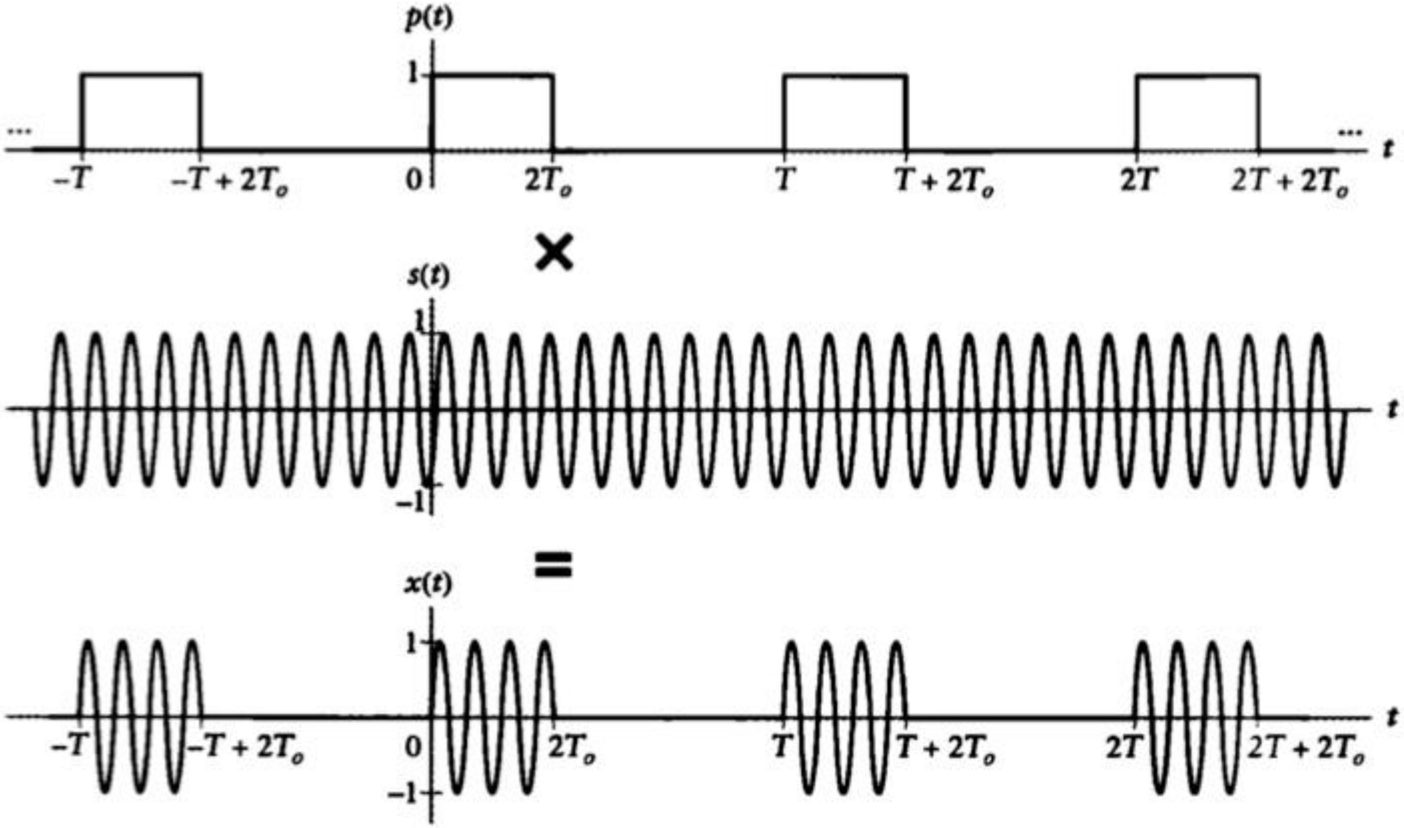
$$c_m = a_m b_m = \begin{cases} \frac{-1}{2j}\frac{\sin(-\pi)}{-2\pi}, & m = -2 \\ 1\frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{-\pi}, & m = -1 \\ 1\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi}, & m = 1 \\ \frac{1}{2j}\frac{\sin(\pi)}{k\pi}, & m = 2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases} = \begin{cases} 0, & m = -2 \\ \frac{1}{\pi}, & m = -1 \\ \frac{1}{\pi}, & m = 1 \\ 0, & m = 2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & m = \pm 1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

- Usamos ahora la ec. de síntesis para obtener la señal final de convolución.

$$z(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{-jmw_0t} = \frac{1}{\pi}e^{j2\pi t} + \frac{1}{\pi}e^{-j2\pi t} = \frac{2}{\pi}\cos(2\pi t)$$

Ejercicio 6

- Dada la señal s(t) = sin(1000πt/T) y la portadora p(t) de onda rectangular de la figura, encontrar los coeficientes de la FS de la señal x(t) emitida por este radar de radio-frecuencia.



Ejercicio 6

- Lo más fácil es emplear la ecuación de análisis. $c_m = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jmw_0 t}dt$

$$c_m = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jmw_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_0^{2T_0} \sin(500w_0 t)e^{-jmw_0 t}dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{2T_0} \frac{1}{2j}(e^{j500w_0 t} - e^{-j500w_0 t})e^{-jmw_0 t}dt = \frac{1}{2jT}\left[\int_0^{2T_0} e^{jw_0 t(500-m)}dt - \int_0^{2T_0} e^{-jw_0 t(500+m)}dt\right]$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{\left(e^{jw_0(500-m)2T_0} - 1\right)}{2\pi j(500-m)} + \frac{\left(e^{-jw_0(500+m)2T_0} - 1\right)}{2\pi j(500+m)}\right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\left(e^{jw_0(500-m)2T_0} - 1\right)}{(500-m)} + \frac{\left(e^{-jw_0(500+m)2T_0} - 1\right)}{(500+m)}\right]$$

Ejercicio 7

- Dados los siguientes coeficientes de la DFT, aplicar la ecuación de síntesis exponencial.

$$X[m] = \begin{cases} 6, & m = 0 \\ -1 - j, & m = 1 \\ 0, & m = 2 \\ -1 + j, & m = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 7

- Dados los siguientes coeficientes de la DFT, aplicar la ecuación de síntesis exponencial.

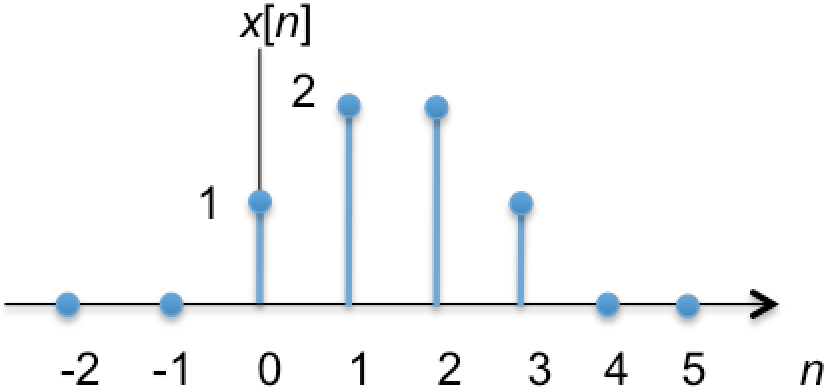
$$X[m] = \begin{cases} 6, & m = 0 \\ -1 - j, & m = 1 \\ 0, & m = 2 \\ -1 + j, & m = 3 \end{cases}$$

- Empleamos la ecuación de síntesis exponencial de la DFT:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X[m]e^{j\frac{2\pi}{N}mn} = \frac{1}{4}\left[6 + (-1-j)e^{j\frac{\pi}{2}n} + 0 + (-1+j)e^{j\frac{3\pi}{2}n}\right]$$

- El resultado final es:

$$x[n] = [1\ 2\ 2\ 1]$$



Ejercicios adicionales

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicios 4.13, 4.14, 5.12**

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

unir

www.unir.net