Un paseo por la asignatura

Geometría diferencial aplicada

14 de enero de 2021

unir
LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

Contenidos

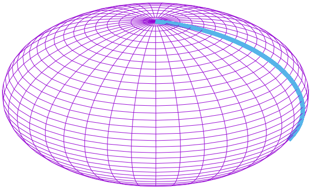
Consideremos la curva parametrizada y contenida en el plano $X - Z$

$$\alpha(\theta) = (r\cos(\theta), 0, r\sin(\theta)),$$

con $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.
Si llamamos $R_z(\varphi)$ a la matriz de rotación respecto al eje OZ, entonces podemos parametrizar la esfera como

$$f(\theta,\varphi) = R_z(\varphi)\alpha(\theta) =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cos(\theta) \\ 0 \\ r\sin(\theta) \end{bmatrix}.$$



$$f(\theta,\varphi) = (r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\cos(\theta)\sin(\varphi), r\sin(\theta)),$$

$$\varphi \in (0, 2\pi), \quad \theta \in (-\pi/2, \pi/2)$$

Es una parametrización

Notemos que, para $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\sin$ es una función biyectiva y $\cos$ una función positiva.

- f **es diferenciable:**. Es composición de funciones diferenciables.
- f **es inyectiva:**. Supongamos que existen (θ_1, φ_1) y (θ_2, φ_2) tal que $f(\theta_1, \varphi_2) = f(\theta_2, \varphi_2)$. Entonces:

$$\cos(\theta_1)\cos(\varphi_1) = \cos(\theta_2)\cos(\varphi_2),$$

$$\cos(\theta_1)\sin(\varphi_1) = \cos(\theta_2)\sin(\varphi_2),$$

$$\sin(\theta_1) = \sin(\theta_2).$$

Como $\sin$ es biyectiva, entonces $\theta_1 = \theta_2$. Como $\cos$ es positiva, podemos dividir por $\cos(\theta_1) = \cos(\theta_2)$ las dos primeras ecuaciones.

Es una parametrización

Se sigue:

$$\cos(\varphi_1) = \cos(\varphi_2),$$
$$\sin(_1) = \sin(\varphi_2).$$

este sistema de ecuaciones tiene solución:

$$\varphi_1 = n_1 2\pi + \pi,$$
$$\varphi_2 = n_2 2\pi + \pi,$$

con $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. La única solución de esta ecuación para $\varphi_1, \varphi_2 \in (0, 2\pi)$ es $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi$.

Es una parametrización (II)

- f **es suprayectiva:** Supongamos que tenemos (x, y, z) en la esfera. Entonces, $\theta = \operatorname{asin}(z/r)$ y $\varphi = \operatorname{atan}(y/x)$. Por lo tanto, existe f^{-1} y es composición de funciones diferenciables.
- df **es inyectiva:** La matriz jacobiana viene dada por:

$$\begin{bmatrix} -r\cos(\theta)\sin(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ 0 & r\cos(\theta), \end{bmatrix}$$

cuyas columnas son linealmente independientes (si llamamos a las columnas v_1 y v_2, entonces $av_1 + bv_2 = 0$ si y sólo si $a = b = 0$).

Tenemos los siguientes vectores (los subíndices denotan derivadas parciales):

$$f_\varphi = (-r\cos(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta)\cos(\varphi), 0),$$
$$f_\theta = (-r\sin(\theta)\cos(\varphi), -r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta).$$

La matriz de la primera forma fundamental viene dada por

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix},$$

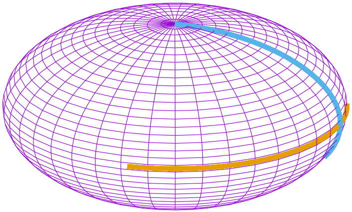
donde

$$E = \langle f_\varphi, f_\varphi \rangle = r^2\cos^2(\theta),$$

$$F = \langle f_\varphi, f_\theta \rangle = 0,$$

$$G = \langle f_\theta, f_\theta \rangle = r^2.$$

Los paralelos son las curvas contenidas en la esfera con $\theta = cte$ mientras que los meridianos son las curvas con $\varphi = cte$. Por ejemplo, elegir $\theta = 0$ nos da el paralelo de la imagen mientras que, elegir $\varphi = 0$ nos da el meridiano de la imagen. Eso son las curvas:



$$\alpha_1(t) = f(0, t)$$

y

$$\alpha_2(t) = f(t, 0)$$

respectivamente.
La longitud de éstos viene dada por la primera forma fundamental:

$$\int_{t_1}^{t2} \sqrt{E\varphi' + 2F\varphi'\theta' + G\theta'} dt$$

- **Para el paralelo α_1:** Tenemos que $\varphi' = 1$, $\theta' = 0$. Con lo cual:

$$\text{long}(\alpha_1) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E}dt = (t_2 - t_1)r.$$

- **Para el meridiano α_2:** Tenemos que $\varphi' = 0$ y $\theta' = 1$, luego

$$\text{long}(\alpha_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{G}dt = (t_2 - t_1)r.$$

Recordemos que los coeficientes de la segunda forma fundamental vienen dados por:

$$L = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det(f_{\varphi,\varphi}, f_\varphi, f_\theta),$$

$$M' = M = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det(f_{\varphi,\theta}, f_\varphi, f_\theta),$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det(f_{\theta,\theta}, f_\varphi, f_\theta).$$

Donde:

$$f_{\varphi,\varphi} = (-r\cos(\theta)\cos(\varphi), -r\cos(\theta)\sin(\varphi), 0),$$

$$f_{\varphi,\theta} = (r\sin(\theta)\sin(\varphi), -r\sin(\theta)\cos(\varphi), 0),$$

$$f_{\theta,\theta} = (-r\cos(\theta)\cos(\varphi), -r\cos(\theta)\sin(\varphi), -r\sin(\theta)).$$

Los calculos resultan en $L = r\cos^2(\theta)$, $M = 0$, $N = r$.

Recordemos que las curvaturas vienen dadas por:

- **Gauss:**

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{r^2\cos^2(\theta)}{r^4\cos^2(\theta)} = \frac{1}{r^2}.$$

- **Media:**

$$H = -\frac{2FM - EN - LG}{EG - F^2} = \frac{r^3\cos^2(\theta) + r^3\cos^2(\theta)}{r^4\cos^2(\theta)} = \frac{2}{r}.$$

- **Principales:**

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \qquad K = k_1 k_2,$$

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{r}$$

unir
LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET