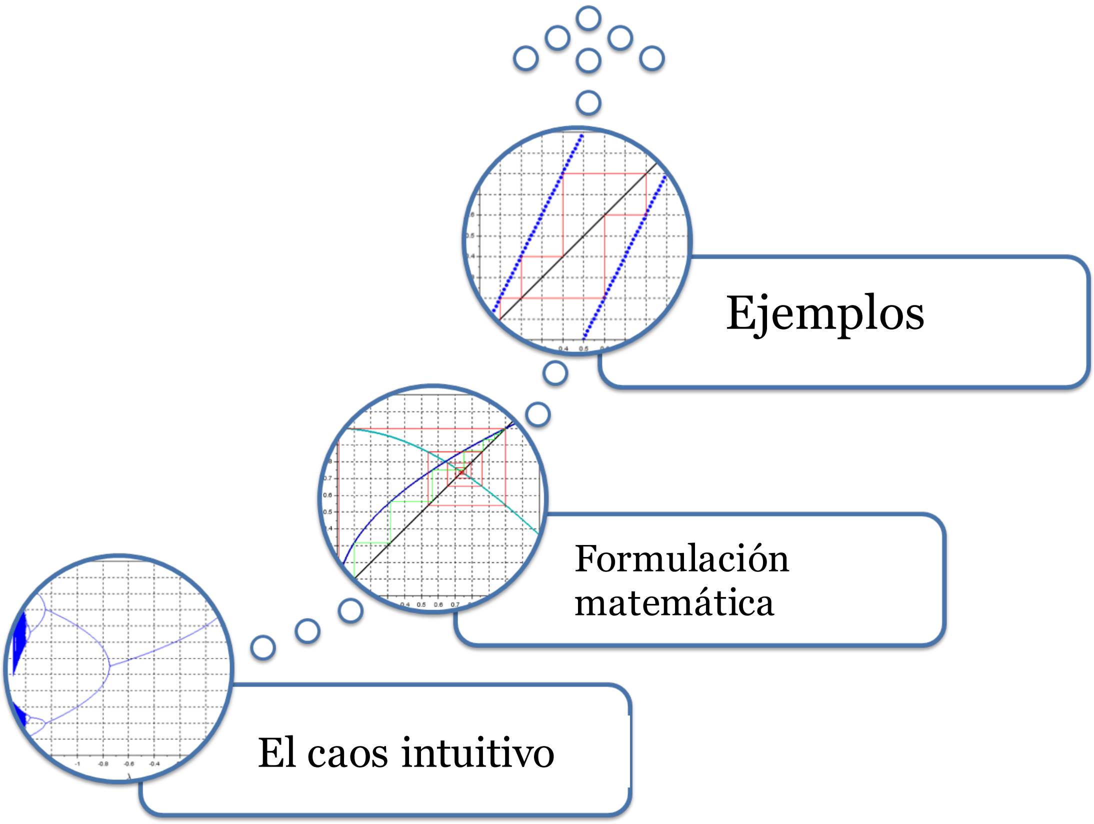
Introducción al caos

13

TEMA

Esquema



Ideas clave

13.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

A lo largo de este tema se van a introducir los sistemas caóticos. Al tratarse de un tipo de sistemas dinámicos muy particulares, en la primera parte del capítulo se introducirán de forma intuitiva algunos de los conceptos a partir de un análisis puramente gráfico.

Una vez familiarizados con estos sistemas se presentará la formulación matemática de forma rigurosa tratando de evidenciar qué implica cada uno de los conceptos asociados a los sistemas caóticos.

Por último, se presentarán dos ejemplos muy habituales en la literatura asociada a los contenidos de este tema para reflejar las características de los sistemas caóticos y la forma de demostrar que cumplen unas determinadas propiedades.

13.2. Los sistemas caóticos

Una vez concluidos los dos bloques fundamentales de la asignatura compuestos por los sistemas dinámicos continuos y discretos, y sus respectivas sesiones prácticas, vamos a profundizar en otro tipo de sistemas. No se trata de una nueva clasificación porque los sistemas que vamos a describir en este tema pueden ser tanto discretos como continuos. No obstante, nos centraremos en el caso discreto por su mayor facilidad a la hora de transmitir los conceptos.

En los temas que hemos visto a lo largo del curso hemos podido comprobar que en determinadas situaciones se producían comportamientos anómalos, extraños, no esperados.

Algunos de estos comportamientos se pueden recoger dentro del concepto de caos. Un paseo por cualquier buscador de Internet nos indicará que el origen de la palabra caos evoca a lo impredecible o lo desordenado.

Recordemos que el objetivo de esta asignatura era predecir qué iba a ocurrir en los sistemas a largo plazo, por lo que en principio nombrar lo impredecible es una completa descortesía.

Partiendo de conceptos y representaciones conocidas vamos a introducir el diagrama orbital para relacionarlo con los sistemas caóticos. Estos sistemas reúnen una serie de características identificables, como podremos observar y demostrar al final del tema.

Al acabar este tema serás capaz de identificar las características de un sistema caótico y su comportamiento habitual de forma que el caos deje de ser un concepto extraño.

13.3. Análisis gráfico de sistemas caóticos

El diagrama orbital

La primera herramienta gráfica que vamos a ver es el diagrama orbital. En apariencia y contenido se trata de un diagrama de bifurcación como los vistos en el tema 7. Sin embargo, tiene una característica que lo diferencia.

Recordemos que el diagrama de bifurcación representa cambios cualitativos en el comportamiento de un sistema dinámico gobernado por un parámetro, de modo que si representamos el sistema por $x_{n+1} = f_\lambda(x_n)$, el parámetro λ será quien nos otorgue los diferentes comportamientos.

Barriendo los diferentes valores de λ y diferentes semillas x_0 obteníamos el diagrama de bifurcación. La figura 1 representa el diagrama de bifurcación del sistema dinámico dado por $x_{n+1} = x_n^2 + \lambda$.

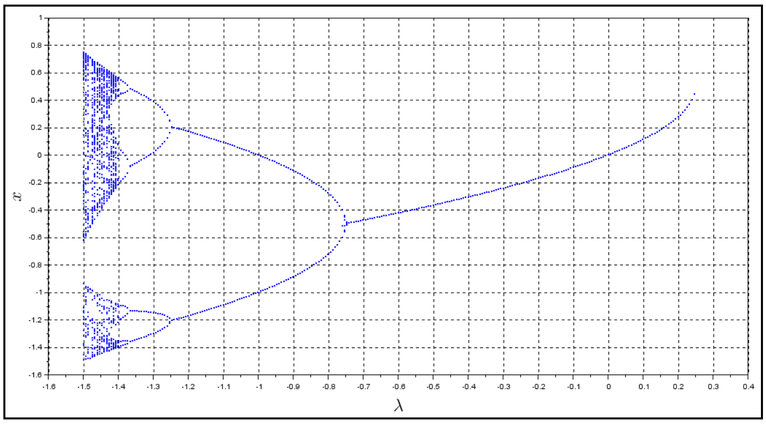


Figura 1. Diagrama de bifurcación de $f_\lambda(x) = x^2 + \lambda$

Antes de entrar en la definición del diagrama orbital será necesario que introduzcamos algunos conceptos que ya vimos en los sistemas dinámicos complejos.

En un sistema dinámico $x_{n+1} = f(x_n)$ se definen los puntos críticos x^C como aquellos puntos que satisfacen $f'(x^C) = 0$.

Si, además $f''(x^C) \neq 0$, el punto crítico es no degenerado; en caso contrario, el punto crítico es degenerado.

A partir de esta definición podemos presentar el diagrama orbital como el diagrama de bifurcación en el cual se toma como semilla uno de los puntos críticos del sistema. El diagrama orbital del sistema dinámico $x_{n+1} = x_n^2 + \lambda$ se representa en la figura 2.

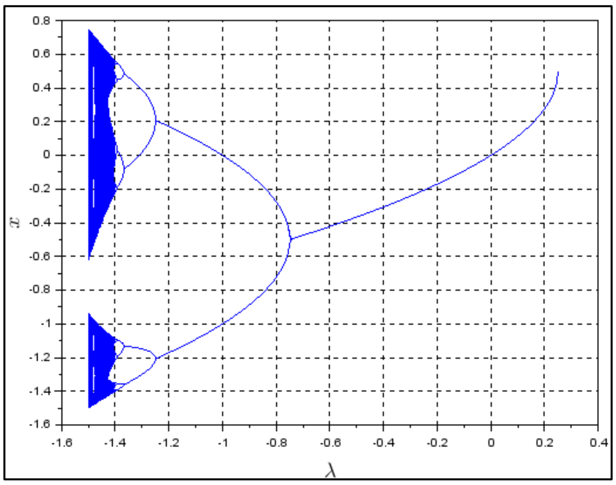


Figura 2. Diagrama orbital de $f_\lambda(x) = x^2 + \lambda$

Como se puede observar, las figuras 1 y 2 son muy parecidas. En el diagrama orbital lo que representamos es el destino de la órbita de un punto crítico. Dado que se van a producir diferentes órbitas periódicas, en lugar de representar solo el destino tras iterar un número determinado de veces, se representan las últimas iteraciones. En este caso hemos dibujado las iteraciones 501 a 700.

La familia cuadrática

El ejemplo que hemos visto en el punto anterior es sobre el que vamos a trabajar. La familia cuadrática, $x_{n+1} = x_n^2 + \lambda$, es la que nos va a aportar las nociones caóticas desde un punto de vista gráfico.

Comenzaremos por hacer un *zoom* en determinadas regiones del diagrama orbital representadas en la figura 3, tomando siempre la parte inferior de la bifurcación.

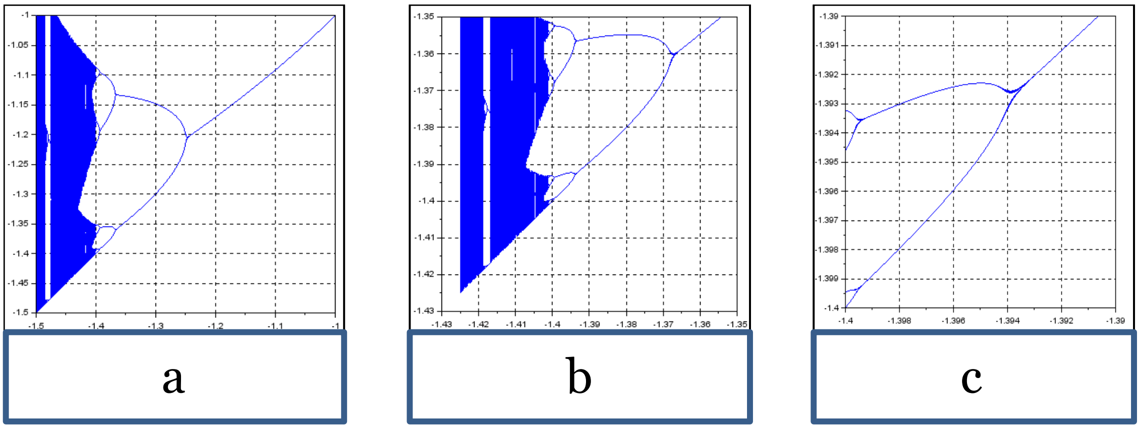


Figura 3. Diagramas orbitales de $f_\lambda(x) = x^2 + \lambda$, para $\lambda \in (-1.5, -1)$ (a), $\lambda \in (-1.425, -1.35)$ y $\lambda \in (-1.4, -1.39)$

Lo primero que observamos es que, conforme el valor de λ disminuye, aparece una sucesión en la que los puntos periódicos se van duplicando, dando lugar a diferentes bifurcaciones de forma que hay órbitas periódicas de períodos 1, 2, 4, 8, ...

A continuación, vamos a realizar un *zoom* diferente representado en la figura 4 para valores de λ menores.

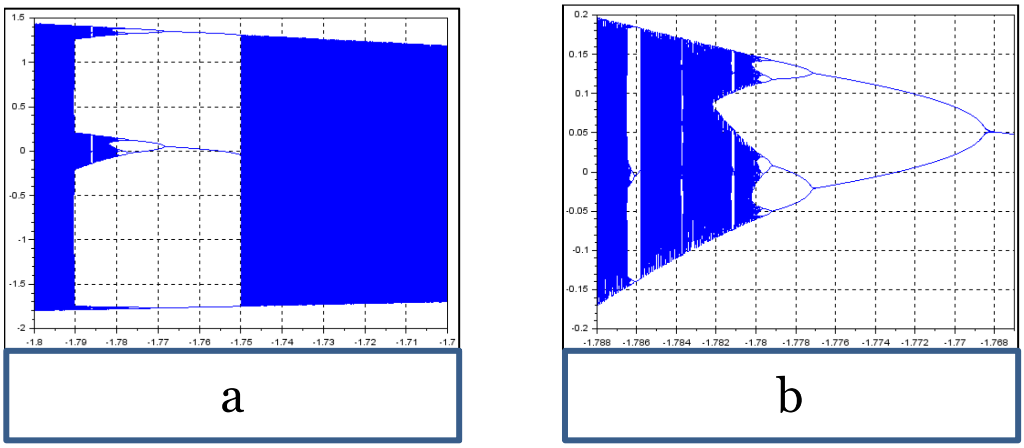


Figura 4. Diagramas orbitales de $f_\lambda(x) = x^2 + \lambda$, para $\lambda \in (-1.8, -1.7)$ (a) y $\lambda \in (-1.788, -1.767)$ (b)

Se observa en el *zoom* de la figura 4(b) como aparecen, en las regiones verticales blancas, tres marcas azules en las partes superior, intermedia e inferior. A esta región se le denomina ventana de periodo 3. A partir de estas regiones se vuelven a suceder bifurcaciones en las que el periodo se duplica. Asimismo, si nos fijamos en otras regiones aparecerán ventanas de período n.

Por otro lado, como se puede intuir de los *zooms* presentados en las figuras 3 y 4, conforme nos acercamos a una región en concreto parece que la estructura inicial se repita. Este concepto se denomina auto-semejanza y es típico de estos sistemas.

Si en lugar de representar las últimas 200 iteraciones en el diagrama de la órbita solo representáramos la última iteración, veríamos como en cada bifurcación solo seguiríamos un camino. La figura 5 representa este comportamiento.

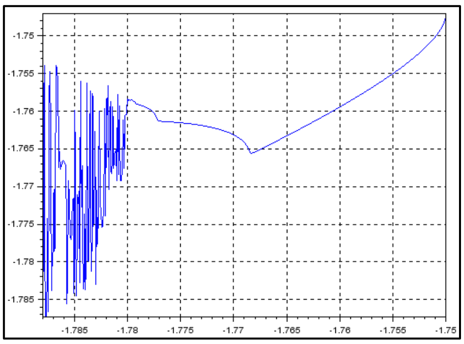


Figura 5. Representación de la figura 4(b) tomando solo los valores de la última iteración

Itinerario al caos

En la figura 6 se representan los sistemas dinámicos para diferentes valores de λ junto con la caracterización gráfica de sus puntos fijos.

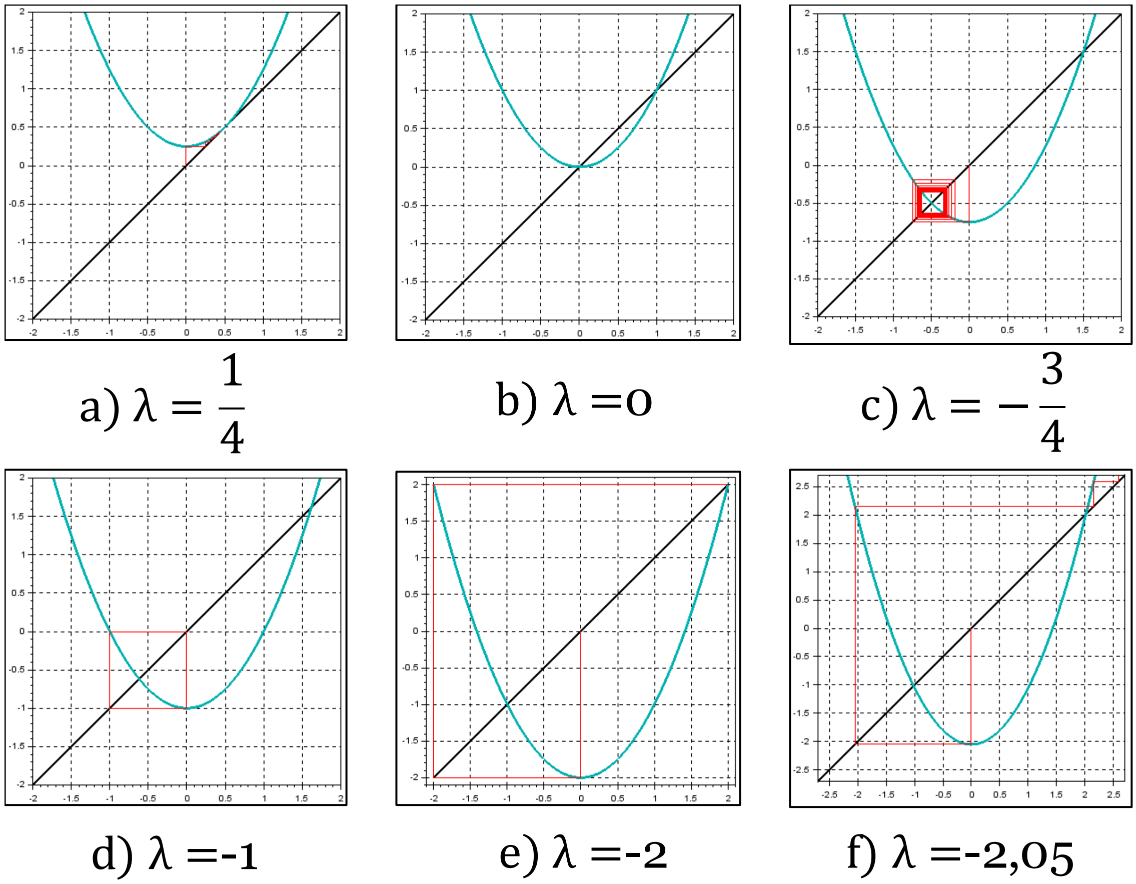


Figura 6. Sistemas dinámicos $f_\lambda(x) = x^2 + \lambda$ y órbita con la semilla igual al punto crítico $x^C = 0$

En la figura 6(a) vemos el comportamiento de un punto de silla porque la gráfica es tangente a la función $y = x$. En la figura 6(b) estamos ante la situación de que el punto crítico es un punto fijo del sistema. La figura 6(c) representa un punto de bifurcación en el que el periodo se duplica. En la figura 6(d) nos encontramos con que el punto crítico tiene período 2. La figura 6(e) muestra el comportamiento caótico del sistema. Por lo que respecta a la figura 6(f), estamos ante un conjunto de Cantor.

A continuación, vamos a representar las figuras 6(c), 6(d) y 6(e) junto con el sistema dinámico f_λ^2. Para una mejor visualización, lo representaremos como figuras 7, 8 y 9, respectivamente.

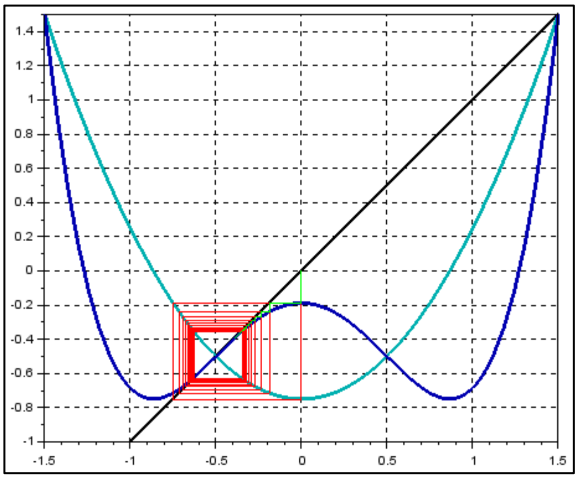


Figura 7. Sistemas dinámicos f_λ y f_λ^2, para $\lambda = -3/4$

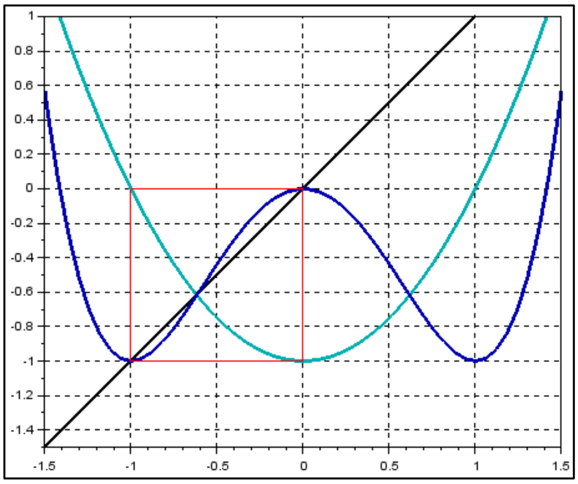


Figura 8. Sistemas dinámicos f_λ y f_λ^2, para $\lambda = -1$

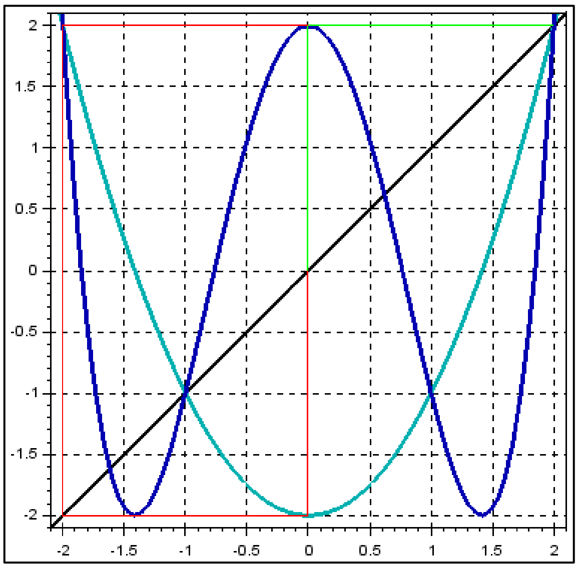


Figura 9. Sistemas dinámicos f_λ y f_λ^2, para $\lambda = -2$

13.4. Formulación matemática de sistemas caóticos

Definiciones previas

De nuevo, resulta necesario realizar unas definiciones previas para dar una definición formal de sistema caótico. Esta definición final depende en gran parte del autor que la dé. Por eso vamos a indicar la definición que se aporta por parte de los autores indicados en la bibliografía.

Por otro lado, para denotar a los sistemas dinámicos, utilizaremos F.

Un sistema dinámico F es sensible a las condiciones iniciales si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in F$ y todo $\epsilon > 0$ existe $y \in F$ tal que la distancia entre x e y es menor que ϵ y, para $n \in \mathbb{N}$, la distancia entre $F^n(x)$ y $F^n(y)$ es menor que δ.

Este concepto nos da a entender que no importa ni la semilla ni la región entorno a x porque siempre podemos encontrar un valor y en dicha región cuya órbita se separa eventualmente de x al menos una cantidad δ. Además, la distancia δ es independiente de x. De modo que para cada x hay puntos próximos cuyas órbitas se alejan eventualmente de dicho valor.

Ejemplo 1 | La función $C(x) = cos(x)$ no es sensible a las condiciones iniciales. Sin embargo, la función $R(x) = \sqrt{x}$ es sensible en $x = 0$. La figura 10 representa las funciones $C(x)$ y $R(x)$ cuando se toma como semilla el valor $x_0 = 0.01$.

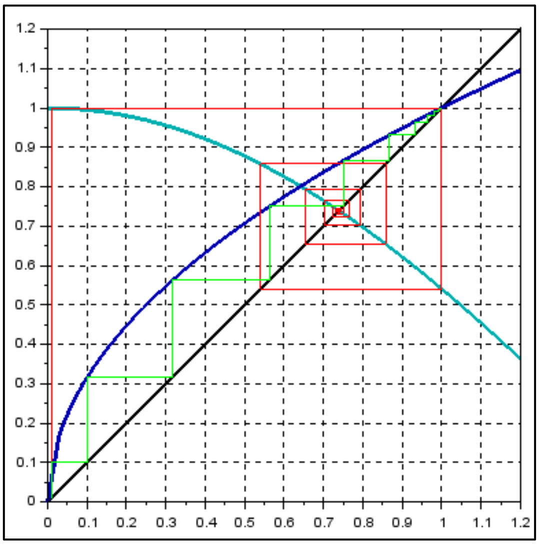


Figura 10. Funciones $C(x)$ y $R(x)$ cuya semilla es $x_0 = 0.01$

Podemos observar cómo la órbita de $C(x)$ siempre tiende al valor 0.739, independientemente de las condiciones iniciales. No obstante, par $R(x)$a, partiendo de un punto muy próximo al punto fijo $x^* = 0$, la órbita tiende al punto fijo $x^* = 1$.

Un sistema dinámico F es transitivo si para dos subconjuntos $U, V \in F$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $F^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Básicamente, en un sistema dinámico transitivo, dados dos puntos se puede encontrar una órbita que arbitrariamente permanece cerca de ambos puntos.

Sean X un conjunto e Y un subconjunto de X. Y es denso en X si, para cada $x \in X$ existe un punto $y \in Y$ arbitrariamente próximo a x.

Ejemplo 2 | El subconjunto de los números racionales es denso en el conjunto de los números reales. El subconjunto de los números enteros no es denso dentro del conjunto de los números reales.

Sistemas caóticos

Un sistema dinámico F es caótico si:

» Es sensible a las condiciones iniciales.
» Es topológicamente transitivo.
» Sus puntos periódicos son densos en F.

Debido a la primera premisa, un pequeño error en la estimación inicial puede dar lugar a un gran error al iterar. Respecto de la segunda propiedad, F no puede descomponerse en dos subconjuntos disjuntos invariantes con interior no vacío. Además, si F posee una órbita densa entonces es topológicamente transitivo.

De este modo, un sistema caótico es parcialmente impredecible debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales, parcialmente irreducible por su característica transitiva y regular debido a la densidad de los puntos periódicos.

Estas tres condiciones que pueden resumir en una sola:

Un sistema es caótico si y solo si para cualesquiera U, V abiertos existe una órbita periódica que visita ambos.

El operador *shift*

Veremos un ejemplo de sistema caótico aplicando la última de las definiciones aportadas.

El operador *shift* es el operador $S: [0,1] \to [0,1]$ tal que:

$$S(x) = \begin{cases} 2x & , 0 \leq x < 1/2 \\ 2x - 1 & , 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

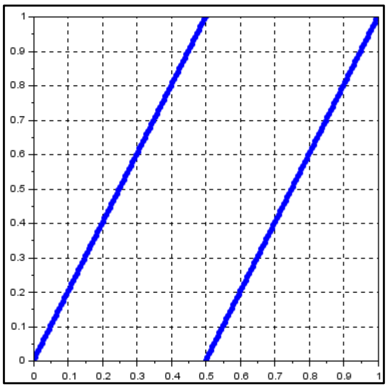


Figura 11. Representación de la función *shift*

La figura 11 representa la función $S(x)$, mientras que la figura 12 pone en evidencia que, dada cualquier semilla, la órbita va a tener un comportamiento periódico.

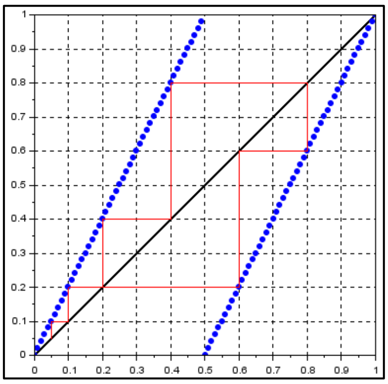


Figura 12. Órbitas periódicas en la función *shift*

Veamos la representación binaria de este sistema. Recordemos que los puntos estarán dentro del intervalo [0,1], de manera que podemos representar cualquier número como se indica en la tabla 1.

Binario	0/1	.	0/1	0/1	0/1	0/1
Decimal	2^0	.	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}

Tabla 1. Equivalencia de números decimales menores que uno a notación binaria

De este modo, los números $0.5, 0.25$ y 0.125 se expresarán como $(0.1), (0.01)$ y (0.001).

Nótese que $S^2(0.125) = S(0.25) = 0.5$, siendo su equivalente en binario $S^2(0.001) = S(0.01) = (0.1)$, de manera que dado un número en binario $(0.a_1a_2a_3 \dots)$, la aplicación de la función *shift* resulta $S(0.a_1a_2a_3 \dots) = (0.a_2a_3 \dots)$.

Estudiemos las órbitas periódicas de la función *shift*. Las órbitas de periodo 2 pasan por los puntos $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$, que en binario son $\{0.010101 \ldots, 0.101010 \ldots\}$. Las órbitas de período 3 pasan por los puntos $\left\{\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right\}$ o $\left\{\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{5}{7}\right\}$, que equivalen en binario a $\{0.001001 \ldots, 0.010010 \ldots, 0.100100\}$ o $\{0.011011 \ldots, 0.110110 \ldots, 0.101101 \ldots\}$, respectivamente.

Se puede observar el patrón de repetición en cada caso, de modo que las órbitas 2-periódicas repiten el patrón binario de dos en dos, mientras que las órbitas 3-periódicas lo repiten de tres en tres. Para órbitas n-períodicas, el patrón se repite de n en n.

Si tomamos dos puntos $x = (0.a_1a_2a_3 \ldots a_n) \in U$ e $y = (0.b_1b_2b_3 \ldots b_n) \in V$, entonces:

$z = (0.a_1a_2 \ldots a_nb_1b_2 \ldots b_na_1a_2 \ldots a_nb_1b_2 \ldots b_n \ldots) \in U$ y
$S^n(z) = (0.b_1b_2 \ldots b_na_1a_2 \ldots a_nb_1b_2 \ldots b_n \ldots) \in V$.

Por tanto, el sistema dinámico *shift* es un sistema caótico.

La utilización de los símbolos para representar el operador *shift* será profundizado en el tema siguiente, correspondiente a la dinámica simbólica.

La tienda de campaña

Otro de los ejemplos típicos en la demostración de sistemas caóticos es el de la tienda de campaña. En este caso, esta función vuelve a ser $T: [0,1] \to [0,1]$, definida por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & , 0 \leq x < 1/2 \\ 2(1-x) & , 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

La figura 13 representa la función $T(x)$ y una órbita de la misma.

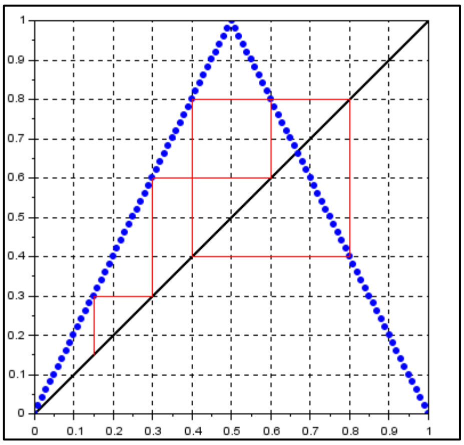


Figura 13. Representación de $T(x)$ y una órbita

Al igual que con la función *shift*, al iterar sobre diferentes semillas siempre se obtienen órbitas periódicas. La expresión de la función tienda de campaña en binario es:

$$T(0.a_1a_2a_3\dots) = \begin{cases} 0.a_2a_3\dots & , a_1 = 0 \\ 0.\bar{a}_2\bar{a}_3\dots & , a_1 = 1 \end{cases}$$

Siendo $\bar{a} = 1 - a$.

A continuación, vamos a relacionar las expresiones de $T(x)$ y $S(x)$.

Cuando $a_1 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} T\circ S = T[S(x)] \to T[S(0.0a_2a_3a_4\dots)] = T[0.a_2a_3a_4\dots] \\ T\circ T = T[T(x)] \to T[T(0.0a_2a_3a_4\dots)] = T[0.a_2a_3a_4\dots] \end{array}\right\} \to T\circ S = T\circ T = T^2$$

Cuando $a_1 = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} T\circ S = T[S(x)] \to T[S(0.1a_2a_3a_4\dots)] = T[0.a_2a_3a_4\dots] \\ T\circ T = T[T(x)] \to T[T(0.1a_2a_3a_4\dots)] = T[0.\bar{a}_2\bar{a}_3\bar{a}_4\dots] \end{array}\right\} \to T\circ S = T\circ T = T^2$$

En general, $T^{k+1} = TS^k$.

Sean $x = (0.a_1a_2a_3 \ldots) \in U$ e $y = (0.b_1b_2b_3 \ldots) \in V$, entonces:

$$
\begin{aligned}
z &= (0.a_1a_2a_3 \ldots a_n0b_1b_2b_3 \ldots b_n0a_1a_2a_3 \ldots a_n0b_1b_2b_3 \ldots b_n \ldots) \in U,\\
T^{n+1}(z) &= T \circ S^n(z) = T[(0.0b_1b_2b_3 \ldots b_n0a_1a_2a_3 \ldots a_n0b_1b_2b_3 \ldots b_n \ldots)]\\
&= (0.b_1b_2b_3 \ldots b_n0a_1a_2a_3 \ldots a_n0b_1b_2b_3 \ldots b_n \ldots) \in V
\end{aligned}
$$

Por lo que se trata de un sistema caótico. Además:

$$
\begin{aligned}
T^{2n+2}(z) &= T \circ S^{2n+1}(z) = T[(0.0a_1a_2a_3 \ldots a_n0b_1b_2b_3 \ldots b_n \ldots)]\\
&= (0.a_1a_2a_3 \ldots a_n0b_1b_2b_3 \ldots b_n \ldots) = z
\end{aligned}
$$

De forma que z es periódico.

13.5. Referencias bibliográficas

Devaney, R. L. (1992). *A first course in chaotic dynamical systems*. Boston University.

Giraldo, A. S. (2002). *Sistemas dinámicos discretos y caos. Teoría, ejemplos y algoritmos*. Universidad Politécnica de Madrid.

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

Sistema logístico

El contenido de esta sesión consiste en la identificación del sistema logístico como un sistema caótico para unos determinados valores del parámetro.

Accede al vídeo desde el aula virtual

No dejes de leer…

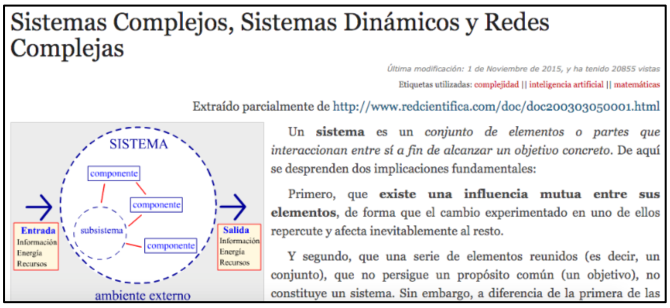
7 afortunados casos en los que los juegos de azar cambiaron las matemáticas

El artículo describe cómo determinados juegos de azar han dado lugar a la apertura de los estudios en determinados campos de las matemáticas. En lo que respecta al caos, el ejemplo se plantea sobre la ruleta de los casinos.

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://www.bbc.com/mundo/noticias-38013901

Sistemas complejos, sistemas dinámicos y redes complejas

En este documento se proporciona una introducción a los sistemas dinámicos y al caos, así como a la complejidad que requiere intentar describir el comportamiento de un sistema a largo plazo. Se pueden estudiar ejemplos de sistemas dinámicos, y se introducen los fractales y las redes complejas.

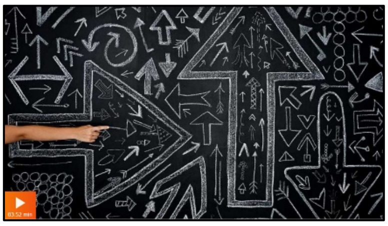


Accede al documento a través de la siguiente dirección web:
http://www.cs.us.es/~fsancho/?e=64

No dejes de ver…

La teoría del caos: el mundo no funciona como un reloj

Con motivo de la investidura como Doctor Honoris Causa por parte de la Universidad Rey Juan Carlos de Madrid al profesor James Yorke se emitió esta noticia, en la que se describe la teoría del caos y cómo ha ido desarrollándose.



Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://www.rtve.es/alacarta/videos/telediario/teoria-del-caos-mundo-no-funciona-como-reloj/2356115/

Jurassic Park: teoría del caos

En la película Jurassic Park se menciona a la teoría del caos a partir de la explicación del efecto mariposa. De hecho, es el fenómeno que desencadena la tragedia que sucede a lo largo de la película. Este es el fragmento.

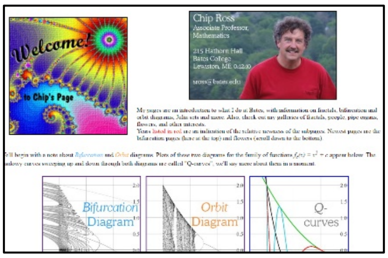
Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://www.youtube.com/watch?v=0XQ-SqZlaMs

+ Información

A fondo

Welcome! To chip´s page

El profesor Chip Ross presenta en su página web una gran cantidad de contenidos relacionados con los sistemas caóticos. De hecho, hace una profunda explicación sobre la diferencia entre los diagramas de bifurcación y los diagramas orbitales.



Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://abacus.bates.edu/~sross/

Sistemas dinámicos caóticos

La Universidad Politécnica de Madrid, dentro de su curso de Introducción a los Sistemas Dinámicos, tiene un tema relacionado con el caos. Los contenidos son similares a los presentados en el tema. En la web se pueden encontrar más recursos, como ejercicios asociados.

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://www.dma.fi.upm.es/docencia/plan96/sistemas_dinamicos/3_sd_caoticos.html

Bibliografía

Alligood, K. T. (1996). *Chaos: an introduction to dynamical systems*. Springer.

Fagella, N. y Jarque, X. (2007). *Iteración compleja y fractales: matemáticas y estadística*. Institut de Ciències de l´Educació.

Giraldo, A. y Sastre, M. A. (2000). *Geometría fractal. Aplicaciones y algoritmos*. Universidad Politécnica de Madrid.

Peitgen, H., Jürgens, H. y Saupe, D. (1992). *Chaos and fractals. New frontiers of science*. Springer.

Test

1. Respecto al diagrama de bifurcación (DB) y el diagrama orbital (DO):

A. El DB representa todas las iteraciones mientras que el DO solo representa la última iteración.

B. El DO representa las últimas iteraciones para una semilla formada por un punto crítico.

C. El DB representa la última iteración para un conjunto de semillas.

D. Todas las anteriores son correctas.

2. Un punto crítico degenerado:

A. Es un punto cuya primera derivada se anula y la segunda es distinta de cero.

B. Es un punto fijo cuya primera derivada es no nula.

C. Es un punto periódico cuya órbita pasa por el cero.

D. Ninguna de las anteriores es correcta.

3. Sobre un diagrama orbital vamos ampliando una zona cada vez más. La misma estructura se va repitiendo conforme realizamos los *zooms*. Esta propiedad se denomina:

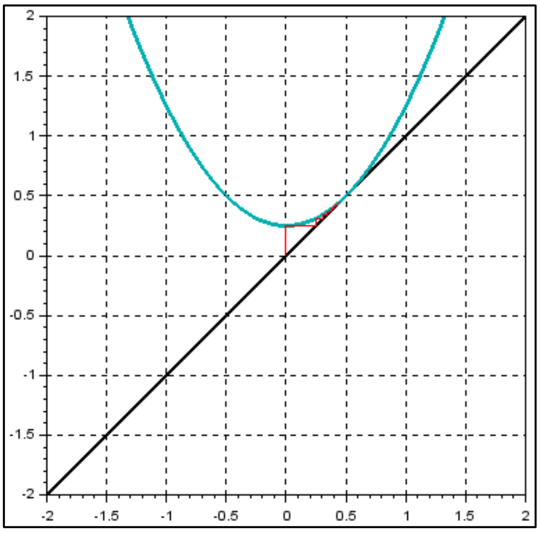
A. Autovectorizado.

B. Fractalidad.

C. Dimensionado.

D. Autosemejanza.

4. La figura representa el gráfico y una iteración del sistema dinámico cuadrático $x^2 + \lambda$ para $\lambda = 1/4$. Determina cuáles de las siguientes son correctas:



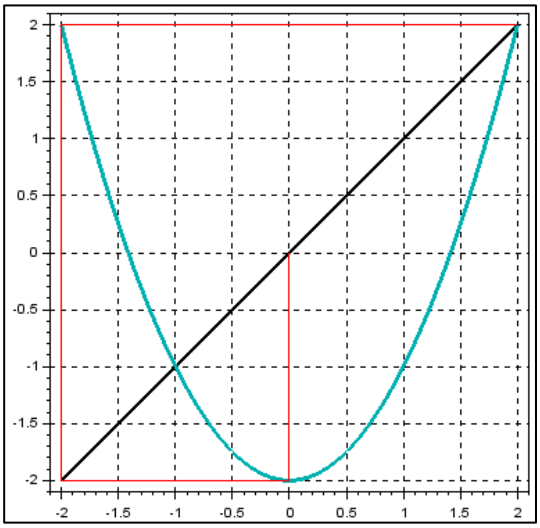
A. Se ha tomado como semilla el 0.5.

B. Se trata de un comportamiento en punto de silla, puesto que la gráfica es tangente a $y = x$.

C. Tiene dos puntos fijos.

D. Tiene un punto crítico no degenerado.

5. La figura representa el gráfico y una iteración del sistema dinámico cuadráticos $x^2 + \lambda$, para $\lambda = -2$. Determina cuáles de las siguientes son correctas:



A. Es un sistema caótico.

B. Tiene la semilla en el punto crítico.

C. Tiene dos puntos fijos.

D. Su punto crítico es degenerado.

6. ¿Cuáles de las siguientes son condiciones necesarias para que un sistema dinámico se determine caótico?

A. El sistema es sensible a las condiciones finales.

B. El sistema es topológicamente transitivo.

C. Sus puntos periódicos son densos.

D. Ninguna de las anteriores es correcta.

7. Respecto de la sensibilidad a las condiciones iniciales, las funciones $C(x) = \cos(x)$ y $R(x) = \sqrt{x}$:

A. Ambas son sensibles a las condiciones iniciales.

B. Ninguna es sensible a las condiciones iniciales.

C. Solo $C(x)$ es sensible a las condiciones iniciales.

D. Solo $R(x)$ es sensible a las condiciones iniciales.

8. ¿Cuál es la representación binaria del número 5/7?

A. 0.011011 …

B. 0.110110 …

C. 0.010010 …

D. 0.101101 …

9. Respecto del sistema dinámico determinado por la función *shift,* relaciona los valores binarios con el periodo de la órbita a la que pertenecen:

0.001001001001	**1**	**A**
0.011001100110	**2**	**B**
0.011110111101	**3**	**C**
0.010101010101	**4**	**D**

10. El sistema dinámico determinado por la función tienda de campaña:

A. Es caótico.

B. Es igual que el operador *shift* para $1/2 \leq x \leq 1$.

C. Es sensible a las condiciones iniciales.

D. Ninguna de las anteriores es correcta.