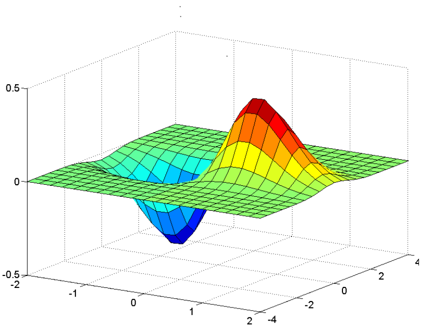
Tema 5: Problemas de contorno unidimensionales. Método de disparo

Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Francisco I. Chicharro, Alicia Cordero, Juan R. Torregrosa



Contenido

1. Conceptos básicos
2. Problemas de contorno lineales en una variable
   - Método de disparo
3. Problemas de contorno no lineales en una variable
   - Método de disparo
4. Ejercicios propuestos
5. Referencias

¿Qué es un problema de contorno?

¡Debemos distinguir entre el contexto de una y varias variables independientes!.

Este tema va a estar dedicado a una variable (ecuaciones diferenciales), mientras que en el siguiente abordaremos los problemas de contorno en varias variables (ecuaciones en derivadas parciales).

Problema de contorno

Buscamos la solución de una ecuación diferencial de segundo orden $y'' = f(x, y, y')$, $x \in [a, b]$, que cumpla ciertas condiciones en la frontera de nuestro dominio, es decir, en los puntos a y b.

- Se llama orden del problema de frontera al mayor orden de la derivada que aparece en la ecuación.
- El número de condiciones coincide con el orden del problema.
- El problema de contorno es lineal o no lineal dependiendo de la linealidad o no de la ecuación diferencial.
- La solución del problema es siempre, cuando existe, una función real de variable real que satisface las condiciones de contorno.

- Condiciones de Dirichlet
  - Homogéneas: $y(a) = 0, \quad y(b) = 0,$
  - No homogéneas: $y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$
- Condiciones naturales

$$\begin{array}{rcl} \alpha_a y'(a) + \beta_a y(a) & = & \gamma_a, \\ \alpha_b y'(b) + \beta_b y(b) & = & \gamma_b, \end{array}$$

  con todos los parámetros reales y $\alpha_a,\ \alpha_b \neq 0$.

- Condiciones mixtas

$$\begin{array}{rcl} \alpha_a y'(a) + \beta_a y(a) & = & \gamma_a, \\ y(b) & = & \gamma_b, \end{array}$$

  con todos los parámetros reales y $\alpha_a \neq 0$.

- Variación de potencial entre dos esferas concéntricas de radios r_1 y r_2, con un potencial en la esfera inferior de V_1 voltios y en la exterior de 0 voltios.

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = 0, \quad r \in [r_1, r_2], \quad u(r_1) = V_1, u(r_2) = 0.$$

- Deflección de un sólido rígido de longitud L, sujeto a una carga $q(x)$ con extremos fijos

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{s}{EI(x)}w + \frac{xq(x)}{2EI(x)}(x-L), \quad x \in [0, L], \quad w(0) = 0, w(L) = 0.$$

- $y'' + xyy' - xy^2 = x\sin x, \quad x \in [-1, 1], \quad y(-1) + y'(-1) = 0, y'(1) = 2$
- $x^3y''' - 4x^2y'' + 8xy' - 8y = 4\ln x, \quad x \in [1, 2], \quad y(1) = y'(1) = 0, y''(2) = 1$
- $y^{iv} + x^2y'' - e^{-x}y = \sin x, \quad x \in [0, 5], \quad y(0) = y'(0) = 0, y(5) = y''(5) = 0$
- $2yy'' = y'^2 - 4y^2, \quad x \in [\pi/4, \pi/2], \quad y'(\pi/4) = 1, y'(\pi/2) = 0$

Problemas lineales de segundo orden

Problemas descritos por una ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad x \in [a, b]$$

y condiciones, por ejemplo, tipo Dirichlet: $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$. Las funciones $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ arbitrarias.

Teorema

Consideremos el problema de contorno $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad x \in [a, b]$, $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$. Si se cumplen las condiciones:

(i) $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ continuas en $[a, b]$,

(ii) $q(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$,

entonces el problema tiene solución única.

Método que permite encontrar la solución aproximada en los puntos elegidos, mediante la solución aproximada de dos problemas de valor inicial

Problema 1

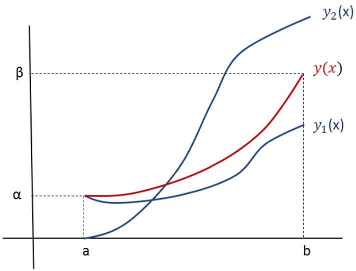
$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad x \in [a,b], \quad y(a) = \alpha, y'(a) = 0, \qquad \text{Solución: } y_1(x)$$

Problema 2

$$y'' = p(x)y' + q(x)y, \quad x \in [a,b], \quad y(a) = 0, y'(a) = 1, \qquad \text{Solución: } y_2(x)$$

Entonces, la solución de nuestro problema de contorno es

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x).$$



Tranformación de los problemas

Problema 1

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad x \in [a,b], \quad y(a) = \alpha, y'(a) = 0,$$

$$u_1 = y, \quad u_2 = y' \quad \Rightarrow \left.\begin{array}{rl} u_1' = & u_2 \\ u_2' = & p(x)u_2 + q(x)u_1 + r(x) \end{array}\right\}, \quad \left(\begin{array}{c} u_1(a) \\ u_2(a) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \alpha \\ 0 \end{array}\right).$$

$$[u_1, u_2] = Runge - Kutta('funcion1',\ a:h:b,\ [\alpha, 0]')$$

Problema 2

$$y'' = p(x)y' + q(x)y, \quad x \in [a,b], \quad y(a) = 0, y'(a) = 1,$$

$$v_1 = y, \quad v_2 = y' \quad \Rightarrow \left.\begin{array}{rl} v_1' = & v_2 \\ v_2' = & p(x)v_2 + q(x)v_1 \end{array}\right\}, \quad \left(\begin{array}{c} v_1(a) \\ v_2(a) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right).$$

$$[v_1, v_2] = Runge - Kutta('funcion2',\ a:h:b,\ [0, 1]')$$

- ENTRADA funciones $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$; extremos a, b; condiciones contorno α, β; número de puntos N.
- SALIDA aproximaciones y_i de $y(x_i)$; z_i de $y'(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, N$.

- Paso 1 elección de los nodos x_i, $h = \dfrac{b-a}{N}$; $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$.
- Paso 2 aplicar Runge-Kutta para resolver Problema 1. Obtención de valores aproximados u_{1i} y u_{2i} para $y_1(x_i)$ e $y_1'(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$.
- Paso 3 aplicar Runge-Kutta para resolver Problema 2. Obtención de valores aproximados v_{1i} y v_{2i} para $y_2(x_i)$ e $y_2'(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$.
- Paso 4 tomar $y_0 = \alpha$ y $C = \dfrac{\beta - u_{1N}}{v_{1N}}$.
- Paso 5 desde $i = 1$ hasta N tomar

$$\begin{aligned} y_i &= u_{1i} + C v_{1i}, \\ z_i &= u_{2i} + C v_{2i}. \end{aligned}$$

¡ Utilizando el método de Runge-Kutta podemos afirmar que este algoritmo tiene orden 4!

Convergencia Método de Disparo

En general, si u_{1i} y v_{1i} son aproximaciones de orden $O(h^n)$ para $y_1(x_i)$ e $y_2(x_i)$, respectivamente, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$, entonces se puede demostrar que y_i es una aproximación de orden $O(h^n)$ para $y(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$, solución del problema de contorno.
En particular,

$$|y_i - y(x_i)| \leq Kh^n \left| 1 + \frac{v_{1i}}{v_{1N}} \right|,$$

para una constante $K > 0$.

Ejemplo

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \quad x \in [1,2], \quad y(1) = 1, y(2) = 2.$$

Problemas de valor inicial que debemos resolver:

$$y_1'' = -\frac{2}{x}y_1' + \frac{2}{x^2}y_1 + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \quad x \in [1,2], \quad y_1(1) = 1, y_1'(1) = 0,$$

$$y_2'' = -\frac{2}{x}y_2' + \frac{2}{x^2}y_2, \quad x \in [1,2], \quad y_2(1) = 0, y_2'(1) = 1,$$

Solución exacta

$$y(x) = 1.1392x - \frac{0.0392}{x^2} - \frac{3}{10}\sin(\ln x) - \frac{1}{10}\cos(\ln x).$$

Tabla de resultados

x_i	u_{1i}	v_{1i}	y_i	$y(x_i)$	$\vert y(x_i) - y_i \vert$
1.0	1.0000	0.0000	1.0000	1.0000	-
1.1	1.0089	0.0911	1.0926	1.0926	1.43e-7
1.2	1.0324	0.1685	1.1870	1.1870	1.34e-7
1.3	1.0667	0.2360	1.2833	1.2833	9.78e-8
1.4	1.1092	0.2965	1.3814	1.3814	6.02e-8
1.5	1.1583	0.3518	1.4811	1.4811	3.06e-8
1.6	1.2124	0.4031	1.5823	1.5823	1.08e-8
1.7	1.2708	0.4553	1.5850	1.5850	5.43e-10
1.8	1.3327	0.4971	1.7888	1.7888	5.05e-9
1.9	1.3971	0.5409	1.8939	1.8939	4.41e-9
2.0	1.4647	0.5833	2.0000	2.0000	-

Table: Resultados numéricos

¡ El error máximo está alrededor de 10^{-7} !

Problema de contorno

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad x \in [a, b]$$

con las condiciones $y(a) - y'(a) = \alpha$, $y(b) + y'(b) = \beta$.

Planteamos los mismos PVIs anteriores Problema 1 y Problema 2, con soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$, respectivamente.
Determinamos λ_1 y λ_2 de manera que

$$y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x),$$

sea la solución del problema de contorno. Los valores de los parámetros λ_1 y λ_2 se obtienen de las condiciones de contorno. En este caso:

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\beta - (y_1(b) + y_1'(b))}{y_1(b) + y_1'(b) + \alpha(y_2(b) + y_2'(b))}$$

y

$$\lambda_2 = \alpha \frac{\beta - (y_1(b) + y_1'(b))}{y_1(b) + y_1'(b) + \alpha(y_2(b) + y_2'(b))}.$$

Problemas no lineales de segundo orden

Problemas descritos por una ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b]$$

y condiciones, por ejemplo, tipo Dirichlet: $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$. La función f no lineal en y ó y'.

Métodos para aproximar la solución del problema:

- Método de disparo
- Método de diferencias finitas

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

Método parecido al del caso lineal, excepto que la solución no se expresa como combinación lineal de las soluciones de dos problemas de valor inicial. En su lugar, necesitamos utilizar las soluciones de una sucesión finita de problemas de valor inicial de la forma

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, y'(a) = t,$$

que involucran un parámetro t, que debemos ir cambiando hasta conseguir la solución de nuestro problema de contorno.

Elegimos los valores del parámetro $t = t_k$, tal que

$$\lim_{k \to +\infty} y(t_k, b) = y(b) = \beta,$$

donde $y(t_k, x)$ es la solución del PVI con $t = t_k$ e $y(x)$ es la solución del problema de contorno. Es decir, estamos buscando una solución aproximada de la ecuación

$$F(t) := y(t, b) - \beta = 0.$$

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

- Tomamos $t = t_0$ y resolvemos el problema de valor inicial

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, y'(a) = t_0 \quad \rightarrow \quad \text{Solución} \quad y(t_0, x)$$

- Si $|y(t_0, b) - \beta| > tol$, tomamos $t = t_1$ y resolvemos el PVI

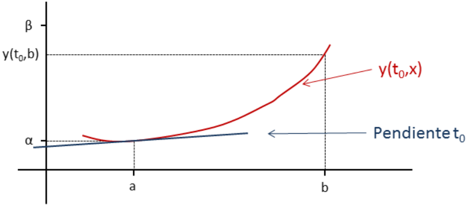
$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, y'(a) = t_1 \quad \rightarrow \quad \text{Solución} \quad y(t_1, x)$$

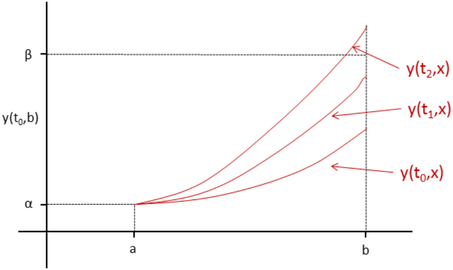
- Si $|y(t_1, b) - \beta| > tol$, tomamos $t = t_2$ y ...
- Debemos tener algún criterio para la elección de los valores t_k. Como buscamos una raíz de la función $F(t) = y(t, b) - \beta$, aplicamos por ejemplo el método de la secante

$$t_{k+1} = t_k - \frac{F(t_k)(t_k - t_{k-1})}{F(t_k) - F(t_{k-1})} = t_k - \frac{(y(t_k, b) - \beta)(t_k - t_{k-1})}{y(t_k, b) - y(t_{k-1}, b)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Método de disparo

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$





- ENTRADA función f; extremos a, b; condiciones contorno α, β; número de incógnitas N; tolerancia tol; número máximo de iteraciones $maxiter$.
- SALIDA aproximaciones y_i de $y(x_i)$ e yp_i de $y'(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, N+1$; o mensaje de fracaso.
- Paso 1 Elegir los nodos x_i, $h = \dfrac{b-a}{N+1}$; tomar $x = a : h : b$;
- Paso 2 Inicializar contador e incremento, $iter = 1$, $incre = tol + 1$; Primeros valores del parámetro t, $t0 = \beta$, $t1 = (\beta - \alpha)/(b - a)$;
- Paso 3 Resolver mediante un método numérico el PVI con $t = t_0$. Obtener los valores aproximados $y_i(t0)$ e $yp_i(t_0)$ para $y(t0, x_i)$ e $y'(t0, x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N+1$
- Paso 4 Resolver mediante un método numérico el PVI con $t = t_1$. Obtener los valores aproximados $y_i(t1)$ e $yp_i(t_1)$ para $y(t1, x_i)$ e $y'(t1, x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N+1$
- Paso 5 Mientras $iter < maxiter$ y $incre > tol$, hacer los pasos 4 a 8
  - Paso 6 Elegir el nuevo t
  $$t = t1 - \frac{(y_{N+1}(t1) - \beta)(t1 - t0)}{y_{N+1}(t1) - y_{N+1}(t0)};$$
  - Paso 7 Tomar $t0 = t1$ y $t1 = t$.
  - Paso 8 Resolver mediante un método numérico el PVI con $t = t_1$. Obtener los valores aproximados $y_i(t1)$ e $yp_i(t_1)$ para $y(t1, x_i)$ e $y'(t1, x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N+1$
  - Paso 9 Actualizar: $iter = iter + 1$; $incre = abs(y_{N+1}(t1) - \beta)$; $y_{N+1}(t0) = y_{N+1}(t1)$,
- Paso 10 Analizar porqué nos hemos salido del bucle.

Programa del método de disparo con secante

- function $[x, Y] = disecant(funcion, a, b, alpha, beta, n, maxiter, tol)$
- % Inicialización del proceso
  $t0 = 0$; $h = (b - a)/(n + 1)$;
  $[x, Y] = ode23(funcion, a : h : b, [alpha, t0]')$;
  $yb0 = Y(n + 2, 1)$; $t1 = (beta - alpha)/(b - a)$;
  $[x, Y] = ode23(funcion, a : h : b, [alpha, t1]')$;
  $yb1 = Y(n + 2, 1)$;
  $incre = abs(yb1 - beta)$; $iter = 1$;
- % Bucle hasta alcanzar la solución deseada
  while $incre > tol$ & $iter < maxiter$
  $$t = t1 - \frac{(yb1 - beta)(t1 - t0)}{yb1 - yb0};$$
  $t0 = t1$; $t1 = t$;
  $[x, Y] = ode23(funcion, a : h : b, [alpha, t1]')$;
  $yb0 = yb1$; $yb1 = Y(n + 2, 1)$;
  $incre = abs(yb1 - beta)$; $iter = iter + 1$;
  end
- % Salida por pantalla
  if $incre > tol$
  disp('Se necesitan más iteraciones')
  else
  $[x, Y]$
  end

Vamos a elegir los valores t_k que se van aproximando a la solución de la ecuación $F(t) := y(t,b) - \beta = 0$, utilizando el método de Newton

$$t_{k+1} = t_k - \frac{y(t_k,b) - \beta}{\dfrac{d}{dt} y(t_k,b)}$$

¡ No tenemos una expresión explícita de la función $y(t,b)$!

El PVI que queremos resolver es

$$y''(t,x) = f(x, y(t,x), y'(t,x)), \quad x \in [a,b], \quad y(t,a) = \alpha, y'(t,a) = t$$

Derivando el problema respecto de t y llamando $z(t,x) = \frac{\partial y}{\partial t}(t,x)$, para encontrar z debemos resolver otro PVI

$$z'' = f_y(x,y,y')z + f_{y'}(x,y,y')z', \quad x \in [a,b], \quad z(a) = 0, z'(a) = 1.$$

Vamos a resolver los dos PVI anteriores introduciendo las variables auxiliares

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = z, \quad y_4 = z'$$

con los que transformamos los dos PVI en el sistema de primer orden

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1' &=& y_2 \\ y_2' &=& f(x, y_1, y_2) \\ y_3' &=& y_4 \\ y_4' &=& f_{y_1} y_3 + f_{y_2} y_4 \end{array}\right\}, \qquad \begin{array}{c} y_1(a) = \alpha \\ y_2(a) = t \\ y_3(a) = 0 \\ y_4(a) = 1 \end{array}$$

La función que describe este sistema la programamos en un archivo.m de la forma

```
function F=funcion(x,y)
F = zeros(4,1);
F(1) = y(2);
F(2) = f(x,y(1),y(2));
F(3) = y(4);
F(4) = f_{y1} y(3) + f_{y2} y(4);
```

- ENTRADA función F; extremos a, b; condiciones contorno α, β; número de incógnitas N; tolerancia tol; número máximo de iteraciones $maxiter$.
- SALIDA aproximaciones y_i de $y(x_i)$ e yp_i de $y'(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, N+1$; o mensaje de fracaso.
- Paso 1 Elegir los nodos x_i, $h = \dfrac{b-a}{N+1}$; tomar $x = a : h : b$;
- Paso 2 Inicializar contador e incremento, $iter = 1$, $incre = tol + 1$;
  Primer valor del parámetro t, $t0 = (\beta - \alpha)/(b - a)$;
- Paso 3 Mientras $iter < maxiter$ y $incre > tol$, hacer los pasos siguientes:
  - Paso 4 Resolver mediante un método numérico el PVI con $t = t_0$. Obtener los valores aproximados $y_i(t0)$ e $yp_i(t_0)$ para $y(t0, x_i)$ e $y'(t0, x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N+1$. Además, obtener los valores $z_i(t0)$ y $z_i'(t0)$.
  - Paso 5 $yb = y_{N+1}(t0)$, $zb = z_{N+1}(t0)$.
  - Paso 6 Actualizar $iter$ e $incre$: $iter = iter + 1$; $incre = abs(yb - \beta)$;
  - Paso 7 Elegir el nuevo t
  $$t = t0 - \frac{yb - \beta}{zb};$$
  - Paso 8 Tomar $t0 = t$.
- Paso 9 Analizar porqué el programa se ha salido del bucle.

Ejemplo

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad x \in [1,3], \quad y(1) = 17, y(3) = \frac{43}{3}.$$

Solución exacta: $y(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$

Planteamos los dos problemas de valor inicial que requiere el método de disparo con Newton

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad x \in [1,3], \quad y(1) = 17, y'(1) = t_k.$$

$$z'' = \frac{\partial f}{\partial y} z + \frac{\partial f}{\partial y'} z' = -\frac{1}{8}(yz' + y'z), \quad x \in [1,3], \quad z(1) = 0, z'(1) = 1.$$

Iniciamos el proceso con $t_0 = 0$ y criterio de parada

$$\left| y_{1,N+1}(t_k) - \frac{43}{3} \right| \leq 10^{-5} = tol,$$

y tras 4 iteraciones y $t_4 = -14.000203$ el programa se detiene, mostrando por pantalla:

Ejemplo

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad x \in [1,3], \quad y(1) = 17, y(3) = \frac{43}{3}.$$

x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i) - y_i\rvert$
1.0	17.000000	17.000000	-
1.1	15.755495	15.755455	4.06e-5
1.2	14.773389	14.773333	5.60e-5
1.3	13.997752	13.997692	5.94e-5
1.4	13.388629	13.388571	5.71e-5
1.5	12.916719	12.916667	5.23e-5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2.4	12.426673	12.426667	6.68e-6
2.5	12.650004	12.650000	3.61e-6
2.6	12.913847	12.913846	9.17e-7
2.7	13.215924	13.215926	1.43e-6
2.8	13.554282	13.554286	3.47e-6
2.9	13.927236	13.927241	5.21e-6
3.0	14.333327	14.333333	6.69e-6

¡ El error real máximo está alrededor de 10^{-5} !

- Problema 1 Representamos por u el potencial electroestático entre dos esferas metálicas concéntricas de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$), tales que el potencial de la esfera interior se mantiene constante a V_1 voltios y el de la esfera exterior a 0 voltios. El potencial en la región entre las dos esferas está gobernado por la ecuación

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = 0, \quad r \in [R_1, R_2], \quad u(R_1) = V_1, u(R_2) = 0.$$

Supongamos que $R_1 = 2mm$, $R_2 = 4mm$ y $V_1 = 110$ voltios.

(a) Aproxima el valor $u(3)$ utilizando el algoritmo de disparo lineal con $N = 20$ y $N = 40$.

(b) Transforma el problema de frontera en un sistema lineal de tamaño 9×9 y encuentra su solución.

(c) Compara los resultados de (a) y (b) con la solución exacta del problema

$$u(r) = \frac{V_1 R_1}{r}\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1}.$$

- Problema 2 Consideremos el problema de contorno

$$y''' = f(x, y, y', y''), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, y'(a) = \beta, y''(b) = \gamma.$$

(a) Diseña un método de disparo para resolver este problema aplicando el método de la secante.
(b) Programa el método diseñado en Matlab.
(c) Aplica el método construido al problema de contorno

$$x^3 y''' - 4x^2 y'' + 8xy' - 8y = 4 \ln x, \quad x \in [1, 2], \quad y(1) = y'(1) = 0, y''(2) = 1.$$

- Problema 3 Consideremos el problema de contorno

$$y'' - yy' = e^{-x/2}, \quad x \in [1, 2], \quad y'(1) = 1, y'(2) = 1.$$

(a) Transforma el problema en un sistema de ecuaciones no lineales de tamaño 11×11, teniendo en cuenta que en este problema $y(1)$ e $y(2)$ son incógnitas.
(b) Resuelve el sistema anterior por el método de Newton.
(c) Diseña, implementa en Matlab y aplica a este problema un método de disparo que se ajuste a las condiciones de contorno naturales del mismo.

- Problema 4 Consideremos el problema de contorno,

$$y'' = -yy' - 2\sin x - x\cos x + x\cos 2x - \frac{x^2 \sin 2x}{2}, x \in [0,2],$$

con las condiciones mixtas $y(0) = 0$ e $y'(2) = \cos 2 - 2\sin 2$.

(a) Aproxima la solución del problema mediante el método de disparo con $N = 40$.

(b) Transforma el problema de contorno en un sistema no lineal de 10 ecuaciones con 10 incógnitas. Resuélvelo mediante el método de Newton.

(c) Compara los resultados obtenidos con el método de disparo y con diferencias finitas con la solución exacta $y(x) = x\cos x$.

(d) Representa el error exacto cometido en los apartados (a) y (b).

- Problema 5 Consideremos el problema de contorno,

$$y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}, \quad x \in [2,4], \quad y(2) = 0, y'(4) = 8\sqrt{2}.$$

(a) Comprueba que la función $y = \frac{2}{5}x^2\sqrt{2x} - \frac{16}{5}$ es solución del problema de contorno.
(b) Aplica el método de disparo, utilizando $N = 40$ y el método de Newton, para aproximar la solución del problema de contorno.
(c) Representa el error exacto que cometemos en el apartado (b).

- Problema 6 Aproxima, mediante el método de disparo con secante y $N = 40$, la solución del problema de contorno

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + y \\ \frac{dz}{dt} &= x + z \end{aligned}\right\}, \qquad t \in [0,1], \qquad x(0) = 1, y(0) = 2, z(1) = -2 + 4e$$

Referencias

- R. Burden, J. Faires, *Análisis Numérico*, Ed. Thompson, 2002.
- A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, *Problemas resueltos de métodos numéricos*, Ed. Thompson, 2006.
- J. Mathews, K. Fink, *Métodos Numéricos con Matlab*, Ed. Prentice-Hall, 1999.