# Tema 3. Transformación de señales

Procesamiento de Señales, Sonido e Imágenes Digitales

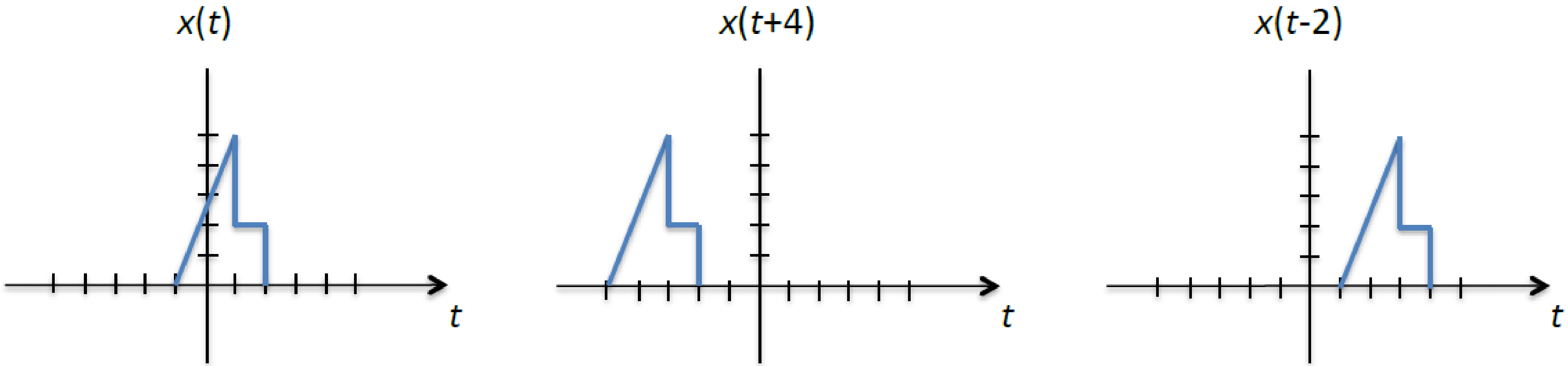
Carlos Quemada Mayoral

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA
La Universidad en Internet
01/12/2020

# Índice

# 3.1. Transformación de señales de tiempo continuo

- **Desplazamiento en el tiempo**: $x(t) \Rightarrow x(t+t_0)$




**$t_0$ > 0 Adelanto**

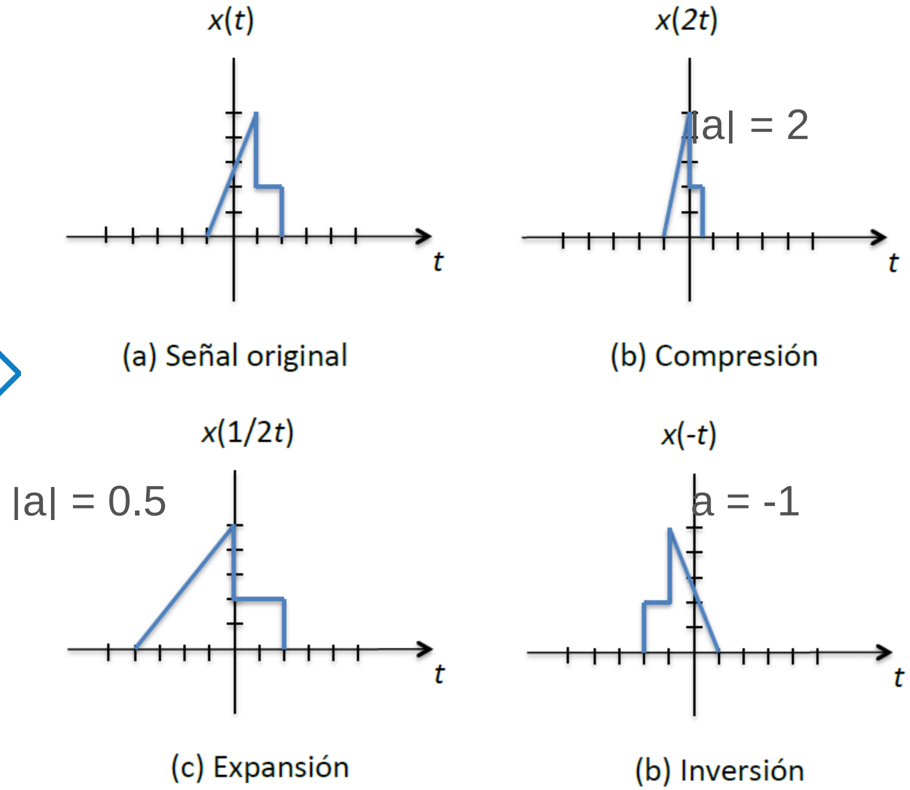
**$t_0$ < 0 Retraso**

**P. ej., propagación de una señal de audio a 330 m/S**

# 3.1. Transformación de señales de tiempo continuo

- **Escalado en el tiempo**: x(t) ⇒ x(at)
- Si |a| > 1 ⇒ La señal se comprime en el eje t
- Si |a| < 1 ⇒ La señal se expande en el eje t
- Un valor negativo de a invierte la señal en el tiempo (la refleja respecto al eje de coordenadas)

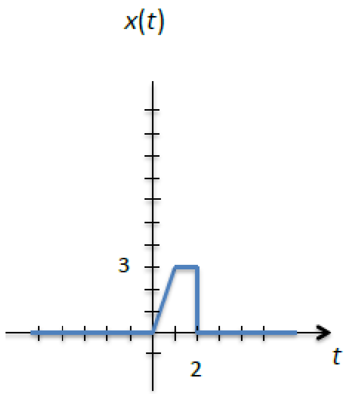
**Detectar el error**



# 3.1. Transformación de señales de tiempo continuo

- **Transformación lineal de la variable independiente**: $x(t) \Rightarrow x(at+b)$
- $x(at+b) = x[a(t+b/a)] \Rightarrow$ Escalado por un factor a + desplazamiento en t=b/a

$$x(t) = \begin{cases} 3t, & 0 < t < 1 \\ 3, & 1 < t < 2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

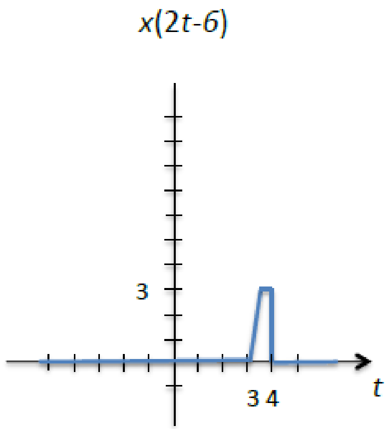



X(2t-6)

Reemplazo: sustituyendo en x(t), t por 2t - 6

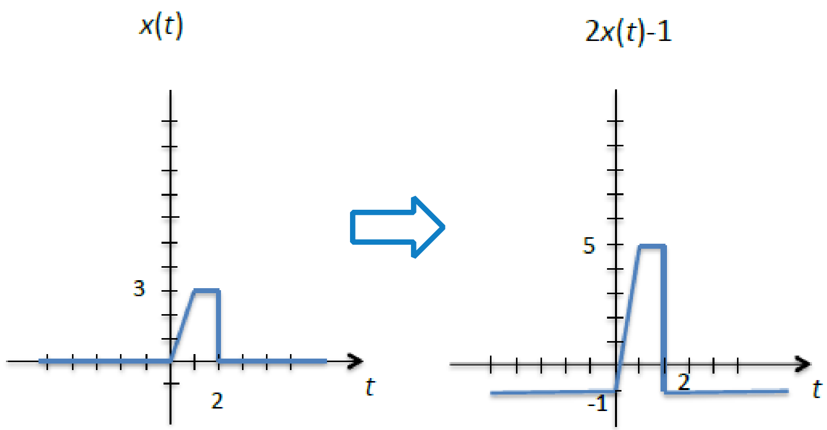
$$x(2t-6) = \begin{cases} 6t - 18, & 3 < t < 3.5 \\ 3, & 3.5 < t < 4 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Factorización: factorizando X(2t-6) como X[2(t-3)]
Retraso de b = -3 y compresión a = 2



# 3.1. Transformación de señales de tiempo continuo

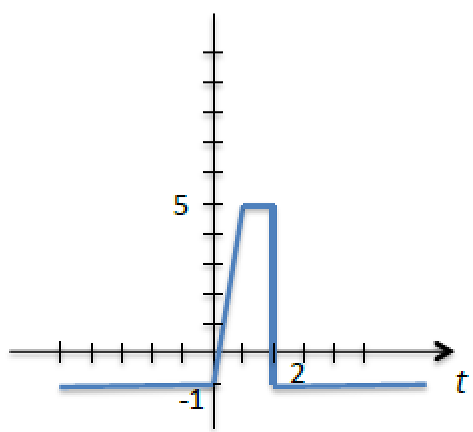
- **Escalado en amplitud**: x(t) ⇒ y(t) = A·x(t)
- Si A >1, se amplia la señal en el eje y o eje de ordenadas
- Si 0< A <1, se reduce la señal
- Si A es negativo, se refleja la señal respecto al eje horizontal o eje de abscisas



# 3.1. Transformación de señales de tiempo continuo

- **Transformación lineal de la variable dependiente**: x(t) ⇒ y(t) = A·x(t) + B
- B implica un desplazamiento de la señal en el eje y
- B>0 desplaza la señal en sentido positivo
- B<0 desplaza la señal en sentido negativo
- Además de por factorización, se puede hacer por reemplazo: consiste en sustituir la x(t) en la definición original por 2x(t) - 1

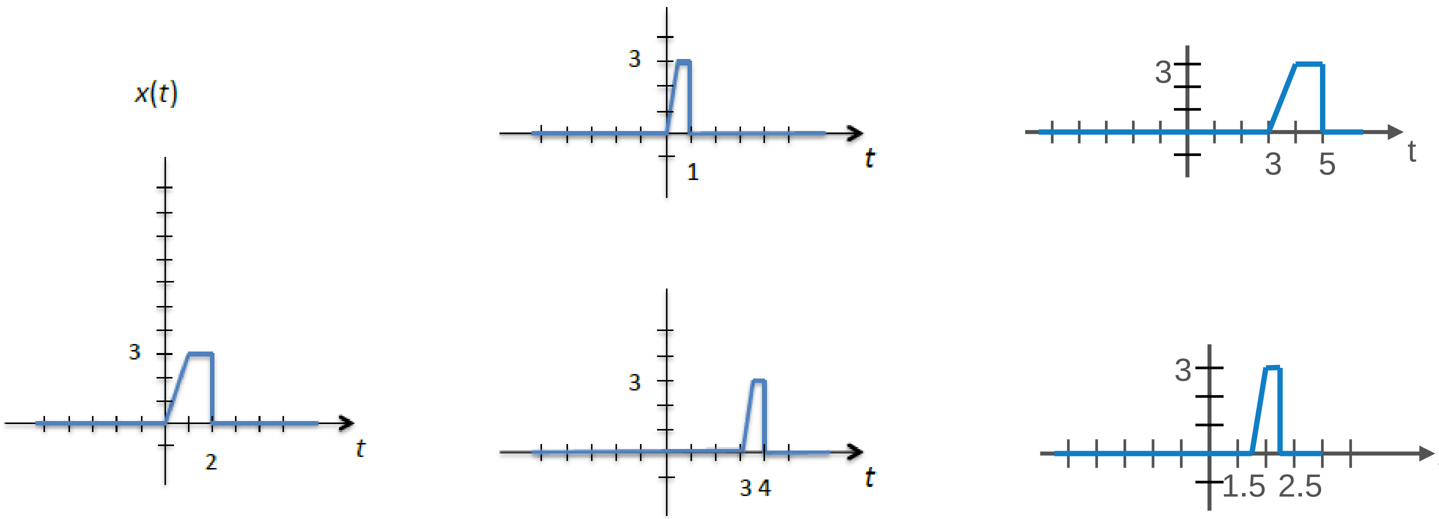
$$x(t) = \begin{cases} 3t, & 0 < t < 1 \\ 3, & 1 < t < 2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \quad \xRightarrow[2x(t)\text{-}1]{} \quad y(t) = \begin{cases} 6t - 1, & 0 < t < 1 \\ 5, & 1 < t < 2 \\ -1, & \text{resto} \end{cases}$$



# 3.1. Transformación de señales de tiempo continuo

- **Orden de transformaciones**: existen dos reglas.
- **Regla 1**: Cuando existen cambios en la variable dependiente e independiente el orden no influye porque cada cambio afecta a ejes diferentes.
- **Regla 2**: Cuando existen cambios en un mismo eje, primero se hace el escalado y después el desplazamiento. Ejemplo:

$$x(2t-6)=x(2(t-3))$$



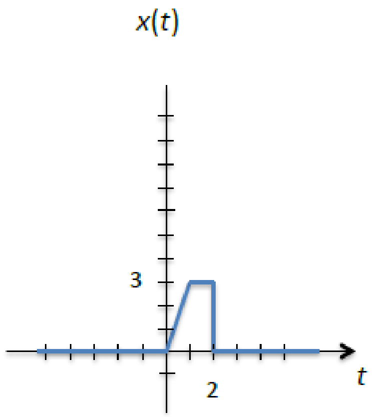

(a) Orden correcto

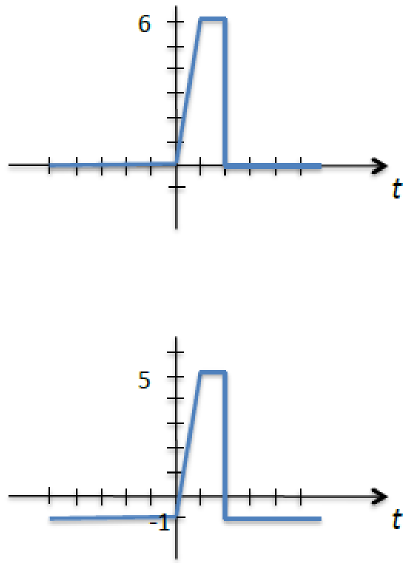
(b) Orden incorrecto

# 3.1. Transformación de señales de tiempo continuo

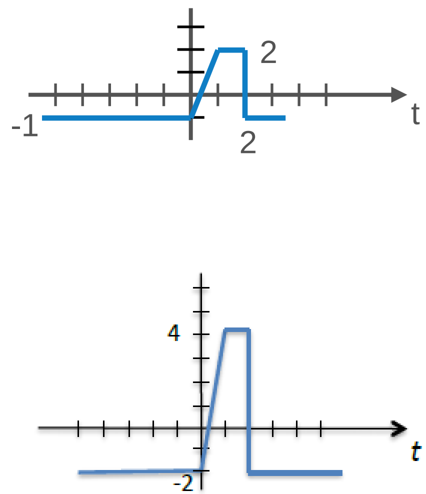
- **Otro** ejemplo sobre la regla 2 de transformaciones sobre un mismo eje:

$$y(t) = 2x(t) - 1$$




(a) Orden correcto

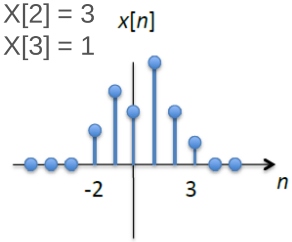



(b) Orden incorrecto

# 3.2. Transformación de señales de tiempo discreto

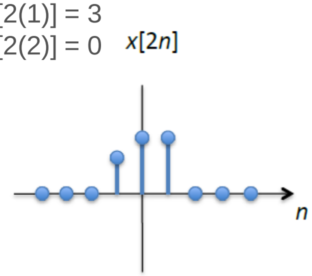
- Las transformaciones de escalado y desplazamiento de la variable dependiente (x[n]) son exactamente iguales que en el caso continuo.
- El desplazamiento de la variable independiente (n) es similar con la excepción de que el desplazamiento tiene que ser entero.
- El escalado de la variable independiente presenta dificultades añadidas en la compresión y expansión de la señal.
- **Compresión de tiempo discreto**: $x[n] \Rightarrow x[kn]$ con $|k|>1$ y k entero. Se comprime la señal pero con un diezmado o reducción del número de muestras.
- **Expansión de tiempo discreto**: $x[n] \Rightarrow x[n/k]$ con $|k|>1$ y k entero. Se expande la señal interpolando las muestras indefinidas de dos formas:
  - **Interpolación de orden cero**: Asignar cero a las muestras indefinidas.
  - **Interpolación de orden uno**: Media entre la muestra anterior y siguiente.

X[-2] = 2
X[-1] = 4
X[0] = 3
X[1] = 5
X[2] = 3
X[3] = 1



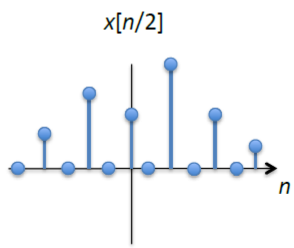

(a) Señal original

X[2(-2)] = 0
X[2(-1)] = 2
X[2(0)] = 3
X[2(1)] = 3
X[2(2)] = 0



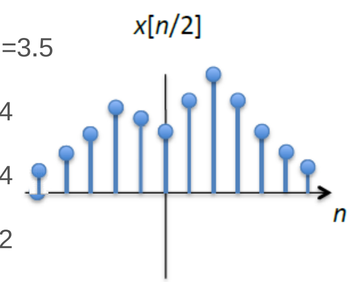

(b) Señal comprimida

X[-5/2] = ind. ⇒ 0
X[-4/2] = 2
X[-3/2] = ind. ⇒ 0
X[-2/2] = 4
X[-1/2] = ind. ⇒ 0
X[0/2] = 3
X[1/2] = ind. ⇒ 0
X[2/2] = 5
X[3/2] = ind. ⇒ 0
X[4/2] = 3
X[5/2] = ind. ⇒ 0
X[6/2] = 1




(c) Expansión con interpolación de orden cero

X[-5/2] = ind. ⇒ (x[-3]+x[-2])/2=1
X[-4/2] = 2
X[-3/2] = ind. ⇒ (x[-2]+x[-1])/2=3
X[-2/2] = 4
X[-1/2] = (x[-1]+x[0])/2=3.5
X[0/2] = 3
X[1/2] = (x[0]+x[1])/2=4
X[2/2] = 5
X[3/2] = (x[1]+x[2])/2=4
X[4/2] = 3
X[5/2] = (x[2]+x[3])/2=2
X[6/2] = 1




**(d) Expansión con Interpolación de orden uno**

# 3.3. Derivación e integración

- La derivada de una función respecto a t indica su pendiente en ese instante de tiempo.
- **Aplicaciones de la integral**:

  - **Antiderivada**: operación inversa a la derivación.

$$\cos t = \int \sin t \ dt$$

  - **Integral indefinida**: es la antiderivada más una cte.

$$x(t) = \int x'(t)\, dt + C$$

  - **Integral definida entre dos límites**: área bajo la función en [a,b].

$$A = \int_a^b x(t)\, dt$$

  - **Integral de acumulación**: área acumulada bajo la función hasta t.

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

# 3.3. Derivación e integración

- **Derivación e integración simbólica en Matlab**. Pasos:

- Se define la variable simbólica $\Rightarrow$ t = sym('t');

- Se define una función simbólica $\Rightarrow$ x = sin(t^2);

- Se deriva la función simbólica usando diff $\Rightarrow$ diff(x) $\Rightarrow$ 2*t*cos(t^2)

- Se integra usando int $\Rightarrow$ int(x) $\Rightarrow$ (2^(1/2)*pi^(1/2)*fresnelS((2^(1/2)*t)/pi^(1/2)))/2,

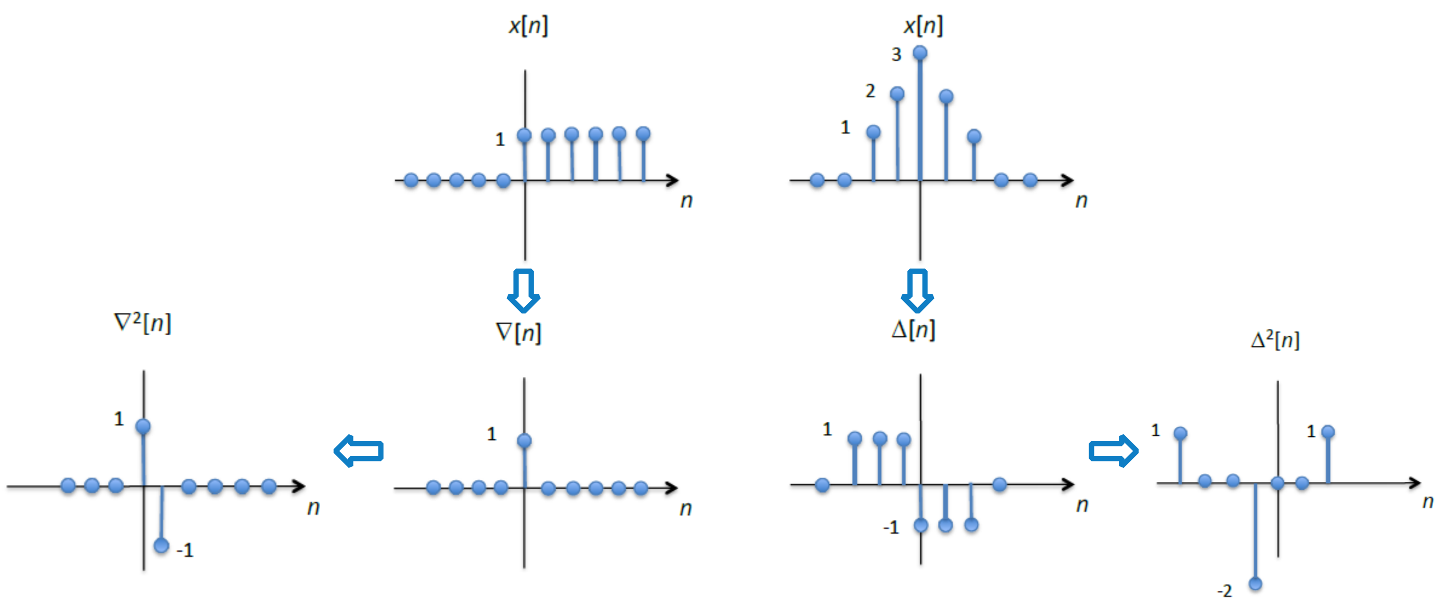
  donde $fresnelS(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{\pi\tau^2}{2}\right) d\tau$

# 3.4. Diferenciación y acumulación

- En tiempo discreto, derivación $\Rightarrow$ diferenciación e integración $\Rightarrow$ acumulación

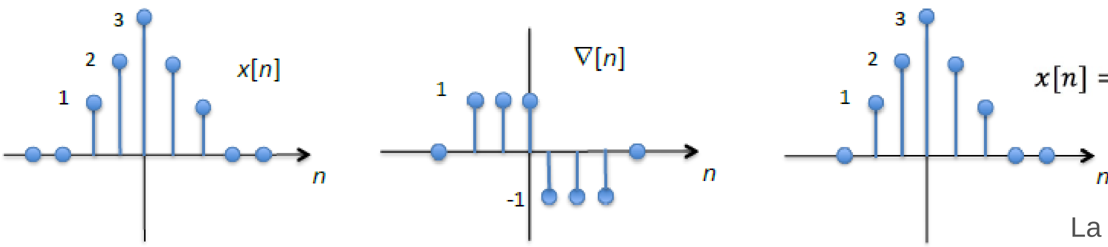
- **Diferenciación**: mismo concepto que derivación $\Rightarrow$ pendiente de la señal

- Diferencia hacia delante $\Rightarrow$ $\Delta[n] = x[n+1] - x[n]$
- Diferencia hacia atrás $\Rightarrow$ $\nabla[n] = x[n] - x[n-1]$
- Se cumple $\nabla[n] = \Delta[n-1]$
- Diferenciación de segundo orden hacia delante $\Rightarrow$ $\Delta^2[n] = \Delta[n+1] - \Delta[n]$
- Diferenciación de segundo orden hacia atrás $\Rightarrow$ $\nabla^2[n] = \nabla[n] - \nabla[n-1]$



# 3.4. Diferenciación y acumulación

- En tiempo discreto, derivación $\Rightarrow$ diferenciación e integración $\Rightarrow$ acumulación
- **Acumulación**: mismo concepto que integración $\Rightarrow$ Definición: $h[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$
- Acumulación y primera diferencia hacia atrás son operaciones inversas




(a) Señal original (b) Diferencia hacia atrás (c) Acumulación

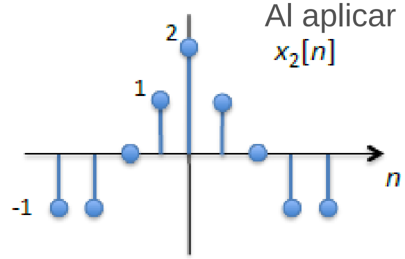
$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \nabla[m]$$

La acumulación de la diferencia hacia atrás da la señal original

- La acumulación no es única: múltiples funciones que difieren en una cte tienen la misma diferencia hacia atrás.

Tiene la misma diferencia hacia atrás que la señal original. Al aplicar la acumulación, se obtiene la señal original (a)

$$x[n] = C + \sum_{m=-\infty}^{n} \nabla[m]$$



# 3.4. Diferenciación y acumulación

- **Relación** de diferenciación/acumulación entre las funciones impulso, escalón y rampa unitaria.

- El escalón unitario es la acumulación del impulso unitario.

$$u[n] = \sum_{m=0}^{\infty} \delta[n-m]$$

- El impulso unitario es la diferencia hacía atrás del escalón unitario.

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

- La rampa unitaria es la acumulación del escalón retrasado en una unidad.

$$r[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} u[m-1]$$

- El escalón unitario se obtiene a partir de la primera diferencia hacía delante de la rampa unitaria.

$$u[n] = r[n+1] - r[n]$$

# 3.4. Diferenciación y acumulación

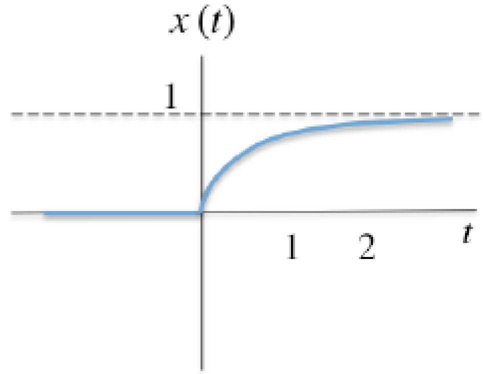
- Diferenciación y acumulación en Matlab y Octave:

- diff(x), para un vector x, es [x(2)-x(1)  x(3)-x(2) ... x(n)-x(n-1)]

- cumsum(x), para un vector x = [x(1)…x[n]], calcula la acumulación [x(1)  x(1)+x(2) ... x(1)+x(2)+…+x(n)]

- diff(x,2) = diff(diff(x)) calcula la diferenciación de segundo orden de x.

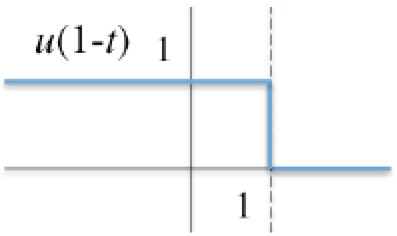
# Ejercicio 1



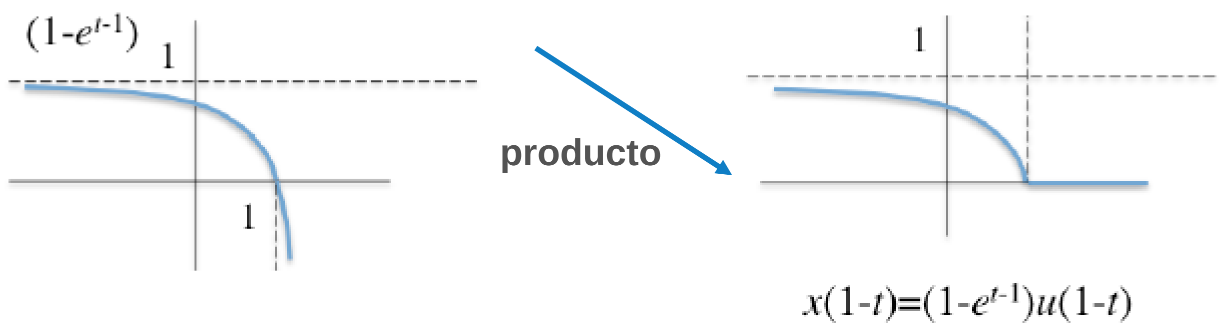

- Dada la señal $x(t) = (1 - e^{-t})u(t)$, obtener x(1-t)
- **Matemáticamente**: sustituimos t por 1-t

$$x(1-t) = (1 - e^{-(1-t)})u(1-t) = (1 - e^{t-1})u(1-t) = x(-(t-1))$$

- **Gráficamente**: Se puede descomponer en dos señales.
- u(1-t) es como hacer el espejo de u(t) $\Rightarrow u_e(t) = u(-t)$ y después desplazar una unidad a la derecha $\Rightarrow u_e(t-1) = u(-t+1)$




- 1-$e^{t-1}$ puede verse en la figura:
- Pasa por (1,0) y (0,1-1/e).
- $t \rightarrow \infty \Rightarrow 1\text{-}e^{t-1} \rightarrow -\infty$
- $t \rightarrow -\infty \Rightarrow 1\text{-}e^{t-1} \rightarrow 1$

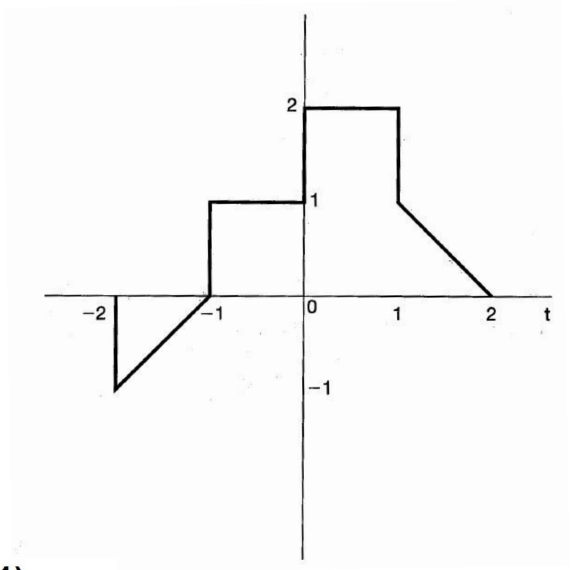


# Ejercicios adicionales

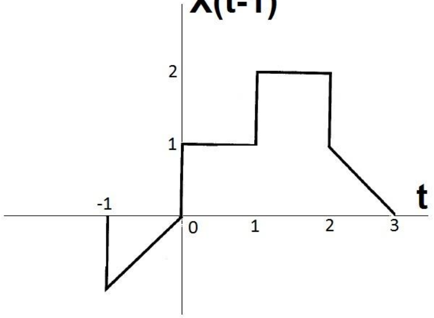
- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicios 1.4, 1.21, 1.22**

# Ejercicios adicionales (1.21)

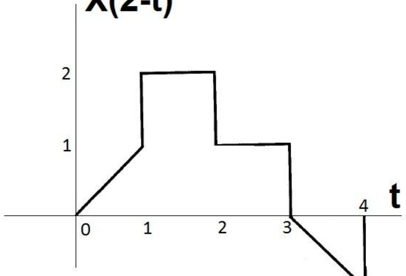
- Sea x(t) la de la figura. Calcular:
- x(t - 1)
- x(2 - t)
- x(2t + 1)
- x(4 - t/2)
- x(t) [δ(t+3/2) - δ(t-3/2))]



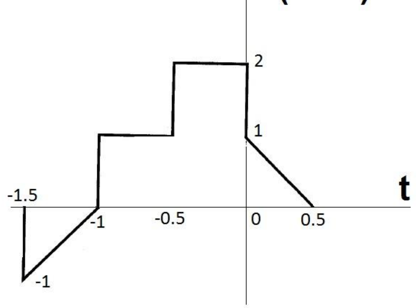

X(t-1)



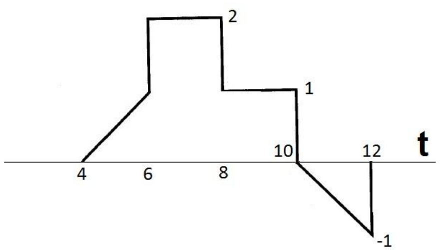

X(2-t)



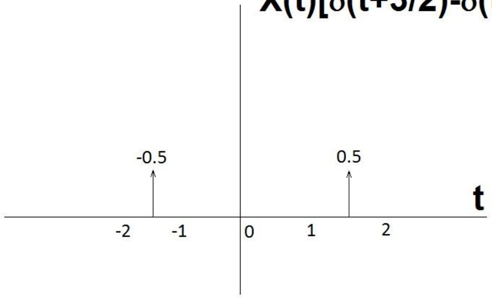

X(2t+1)




X(4-t/2)

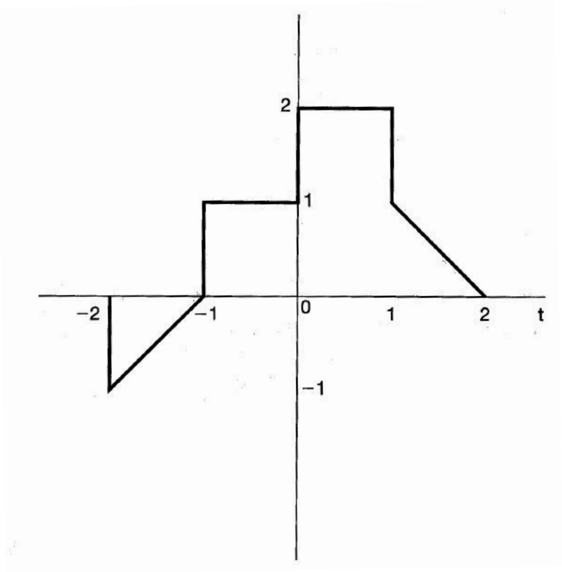


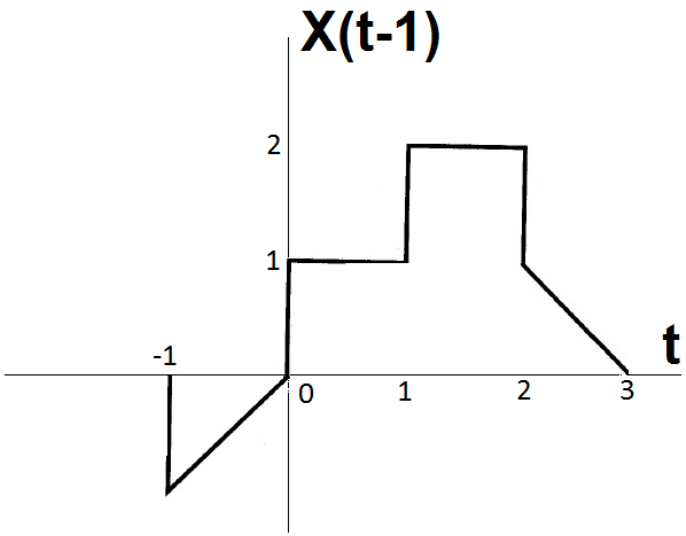

X(t)[δ(t+3/2)-δ(t-3/2)]



# Ejercicios adicionales (1.21)

- Sea x(t) la de la figura. Calcular:
- x(t - 1) $\Rightarrow$ inmediata

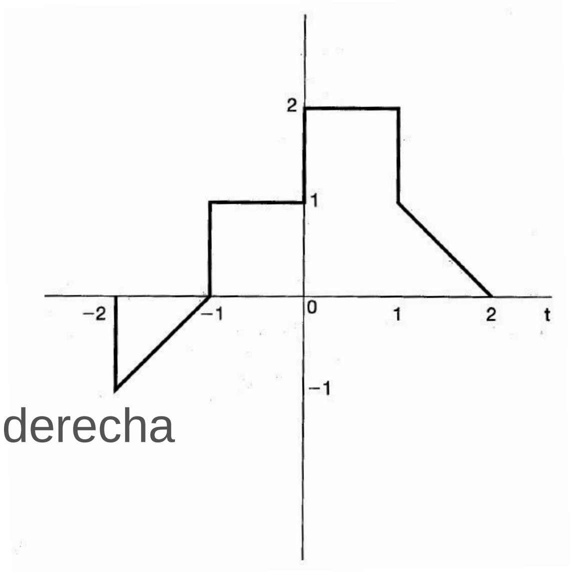


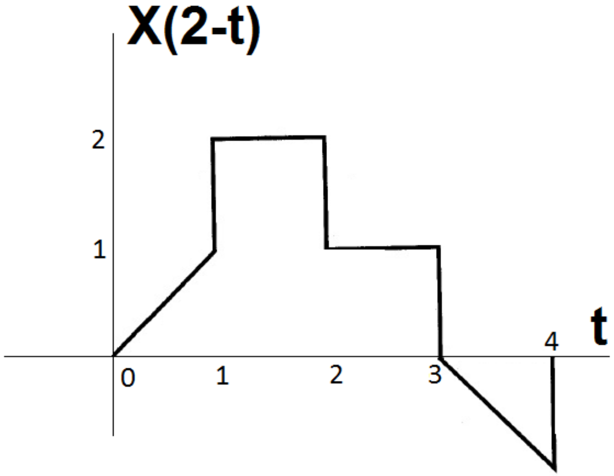



# Ejercicios adicionales (1.21)

- Sea x(t) la de la figura. Calcular:
- x(2 - t) = x(-(t - 2))

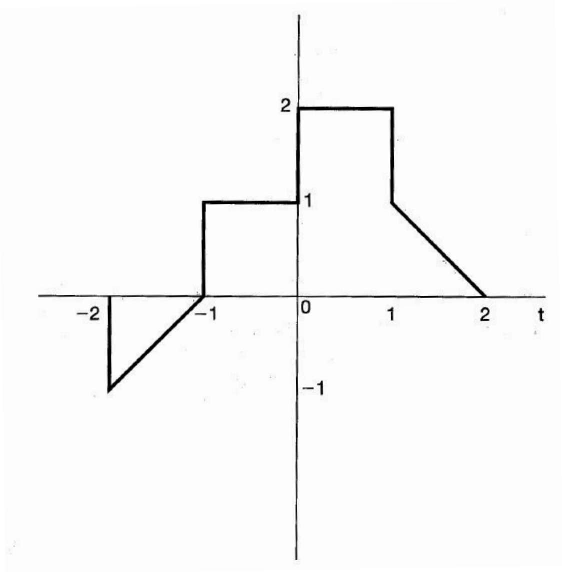
- x1(t) = x(-t)   hacemos el espejo respecto a y
- x1(t-2) = x(2-t)   la señal espejada la movemos 2 a derecha



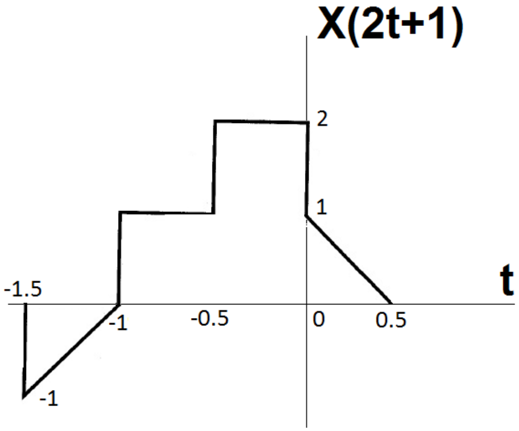



# Ejercicios adicionales (1.21)

- Sea x(t) la de la figura. Calcular:
- $x(2t + 1) = x(2(t + 1/2))$

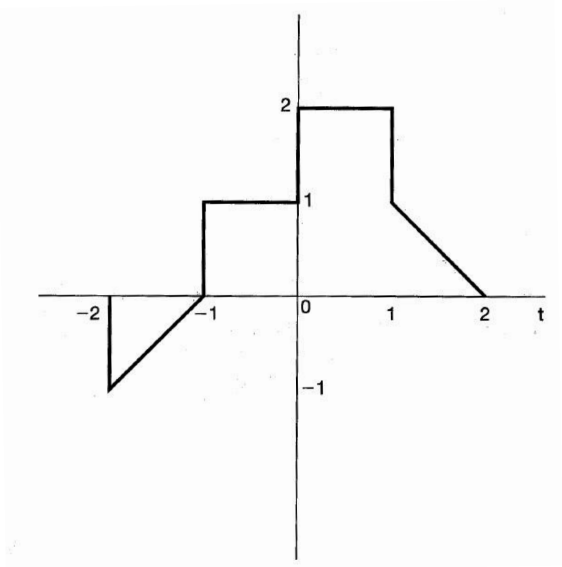



- Primero se escala $\Rightarrow$ $x1(t) = x(2t)$ (compresión)
- $x1(t+0.5) = x(2t + 1)$ desplazamos la señal comprimida 0.5 a la izquierda

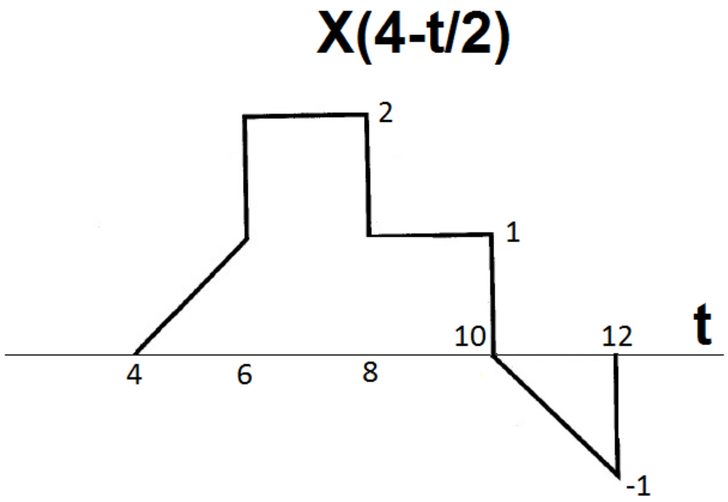


# Ejercicios adicionales (1.21)

- Sea x(t) la de la figura. Calcular:
- x(4 - t/2) = x(-1/2(t - 8))

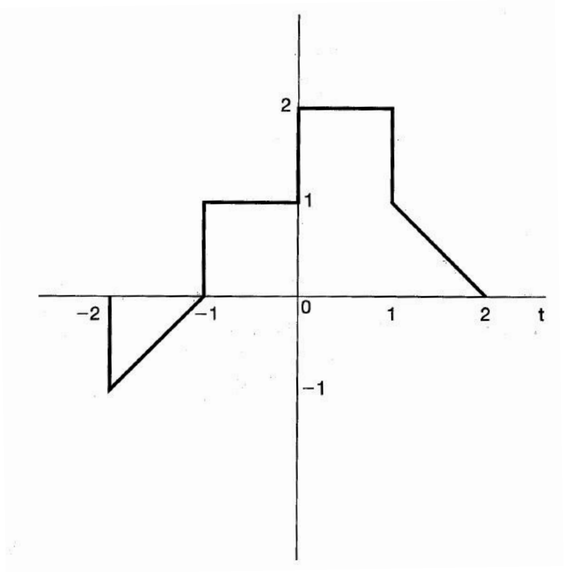



- x1(t) = x(-t/2)   invertimos y escalamos por 2 (expansión)
- x1(t-8) = x(-t/2+4)   desplazamos la señal anterior 8 a la derecha

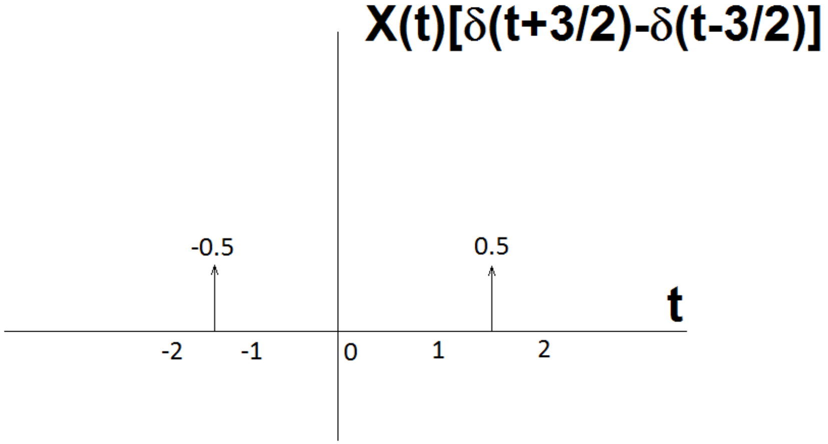


# Ejercicios adicionales (1.21)

- Sea x(t) la de la figura. Calcular:
- $x(t)\ [\delta(t+3/2) - \delta(t-3/2))]$

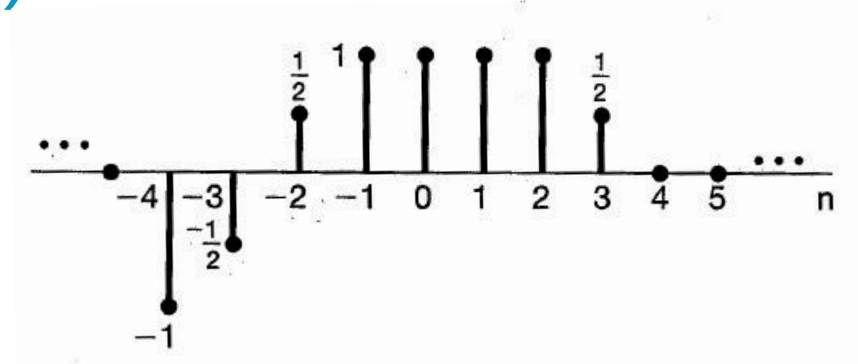


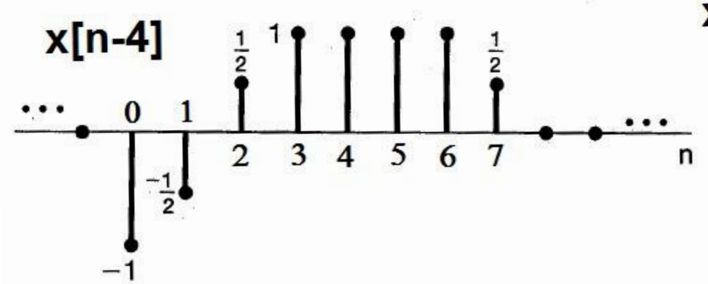

- El resultado serán dos deltas cuya área será el valor de x(t) en 1.5 y -1.5.
- $x(1.5) = 0.5$
- $x(-1.5) = -0.5$

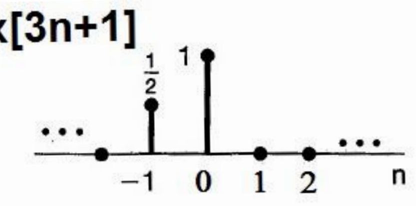


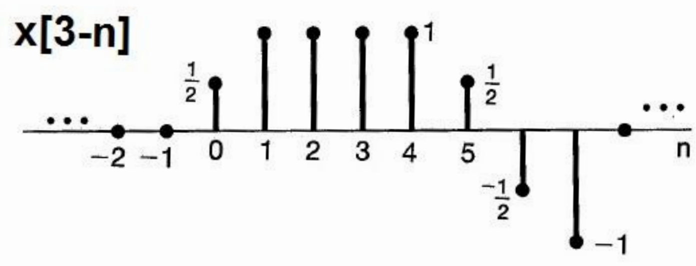
# Ejercicios adicionales (1.22)

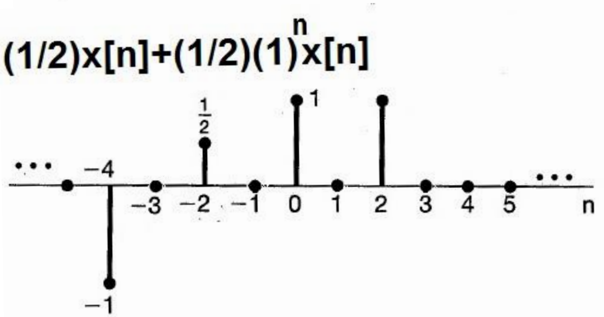
- Sea x[n] la de la figura. Calcular:
- x[n-4]
- x[3n+1]
- x[3-n]
- (1/2) x[n] + (1/2) $(-1)^n$ x[n]
- x[n] u[3-n]
- x[n-2] $\delta$[n-2]

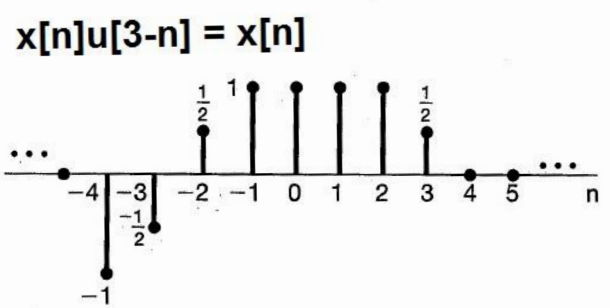


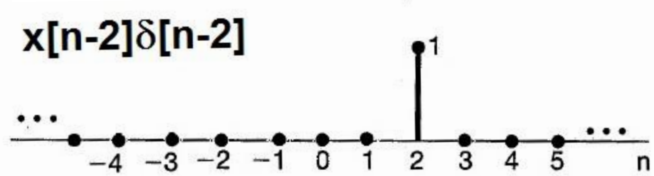



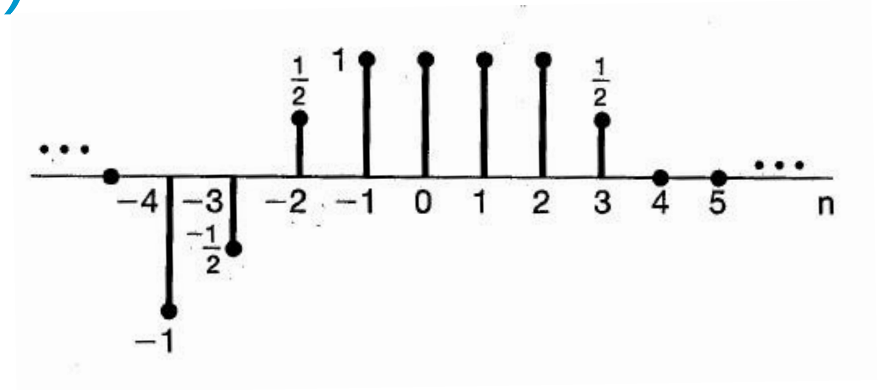



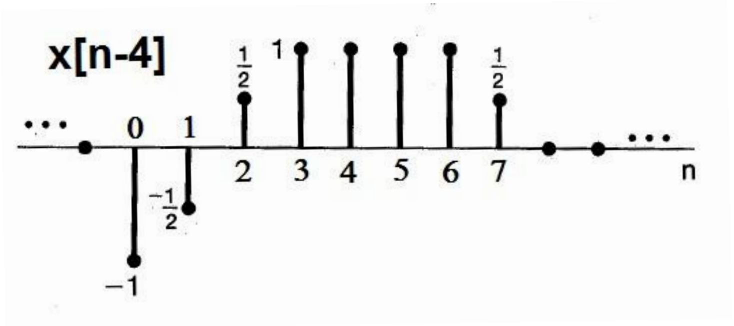



# Ejercicios adicionales (1.22)

- Sea x[n] la de la figura. Calcular:
- x[n-4]

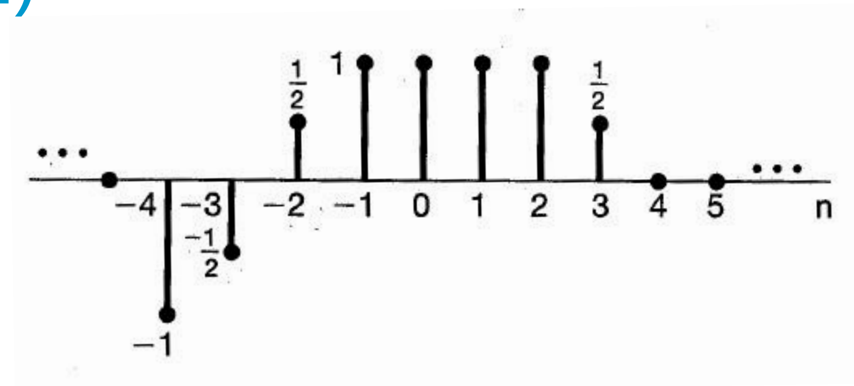



- Es un desplazamiento de 4 unidades a la derecha

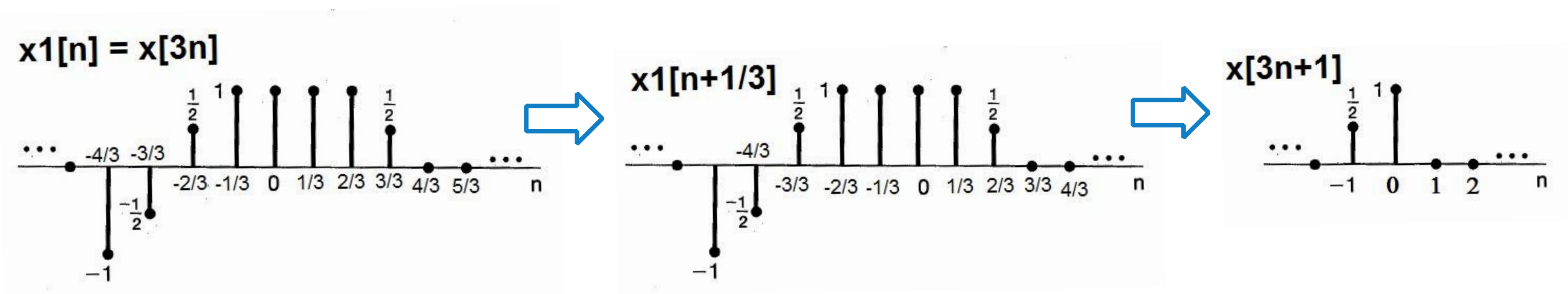


# Ejercicios adicionales (1.22)

- Sea x[n] la de la figura. Calcular:
- x[3n+1] = x[3(n+1/3)]

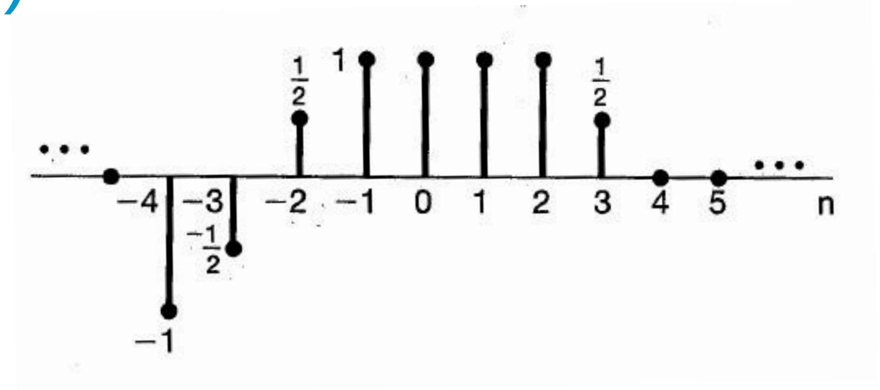



- Primero escalamos, que es una compresión por 3 ⇒ x1[n] = x[3n]
- Desplazamos x1 1/3 a la izquierda ⇒ x1[n+1/3] = x[3n+1]
- Cogemos las muestras enteras que son las que únicamente tienen sentido

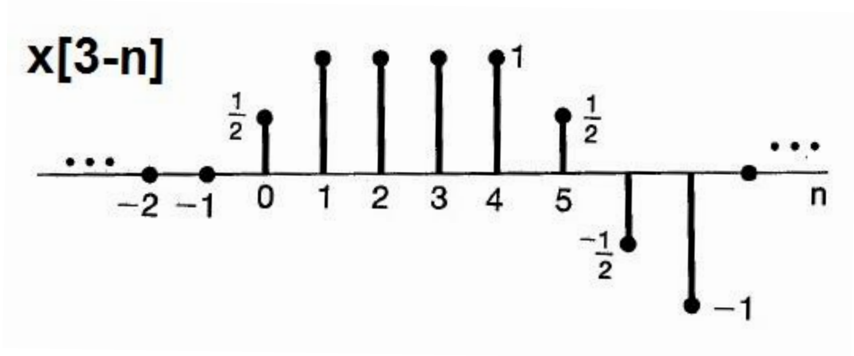


# Ejercicios adicionales (1.22)

- Sea x[n] la de la figura. Calcular:
- x[3-n] =x[-(n-3)]

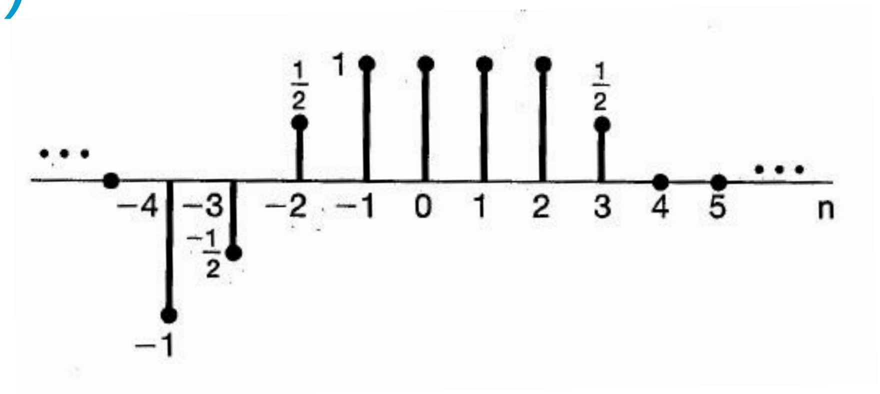



- Hacemos el espejo de x[n] $\Rightarrow$ x1[n] = x[-n]
- Desplazamos x1[n] 3 unidades a la derecha $\Rightarrow$ x1[n-3] = x[-n+3]

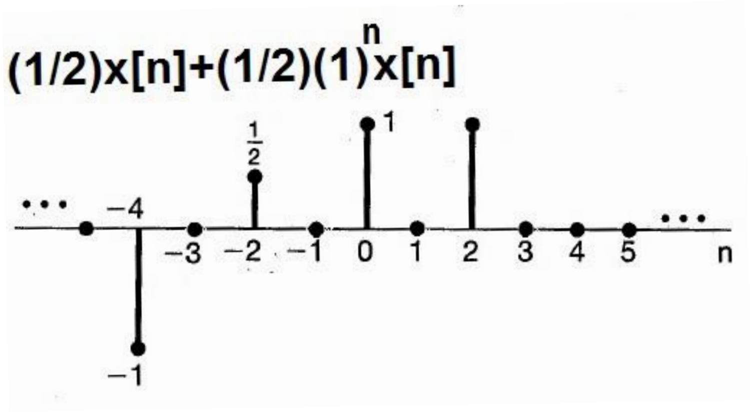


# Ejercicios adicionales (1.22)

- Sea x[n] la de la figura. Calcular:
- (1/2) x[n] + (1/2) $(-1)^n$ x[n]

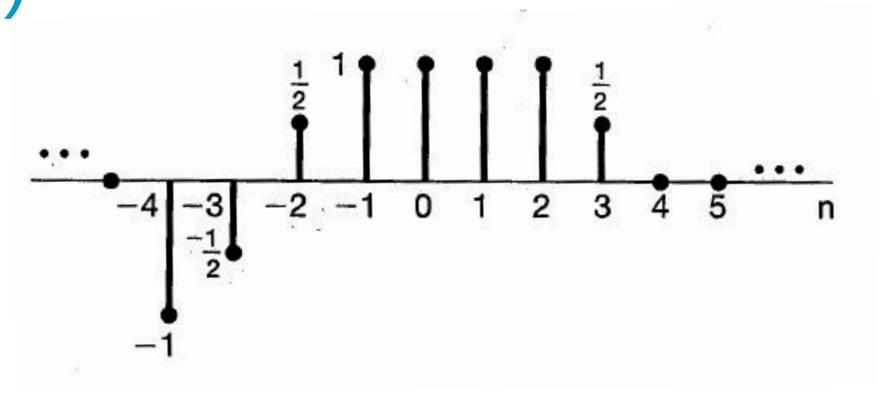



- Consiste en quedarse solamente con las muestras pares.



# Ejercicios adicionales (1.22)

- Sea x[n] la de la figura. Calcular:
- x[n] u[3-n]

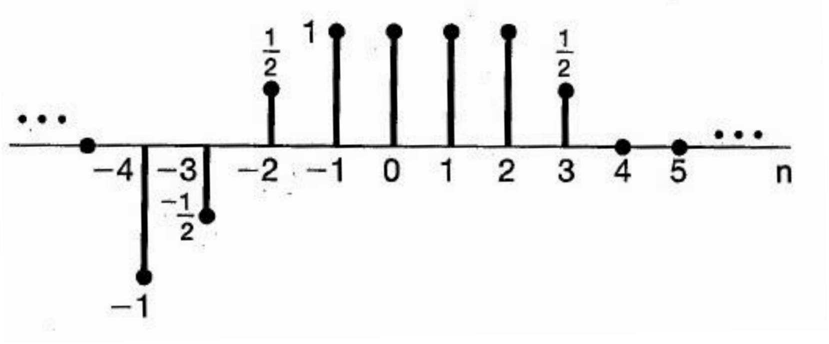



- u[3-n] vale 1 de n = - ∞ hasta n = 3 y cero para el resto

u[3-n] = u[-(n-3)]

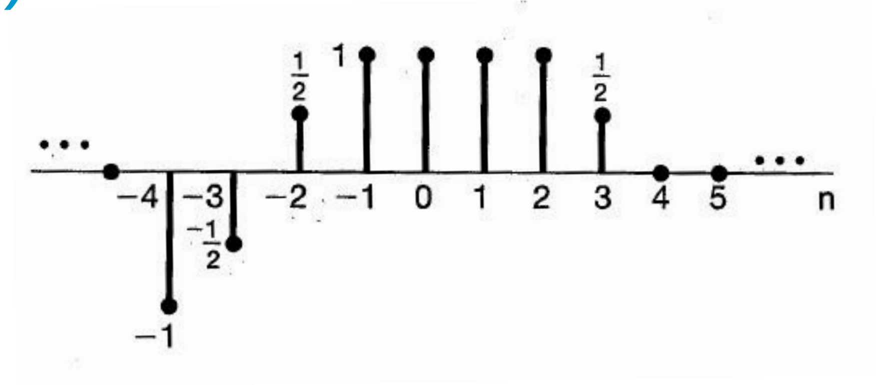
- Si multiplicamos esta señal por x[n], vuelve a dar x[n]

x[n]u[3-n] = x[n]

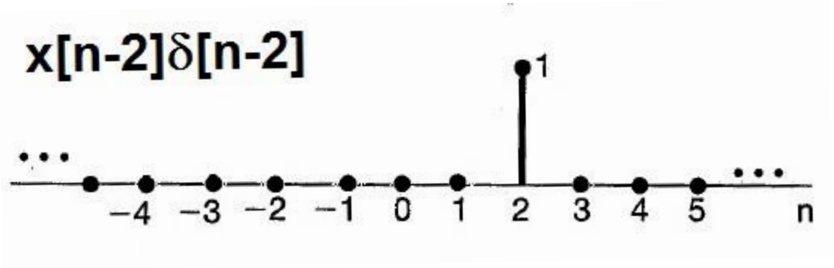


# Ejercicios adicionales (1.22)

- Sea x[n] la de la figura. Calcular:
- x[n-2] δ[n-2]




- Consiste en desplazar x[n] dos unidades a la derecha y quedarnos con la muestra n = 2
- Sería el valor de la muestra n = 0 de x[n] pero desplazada a n = 2



UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA unir

www.unir.net