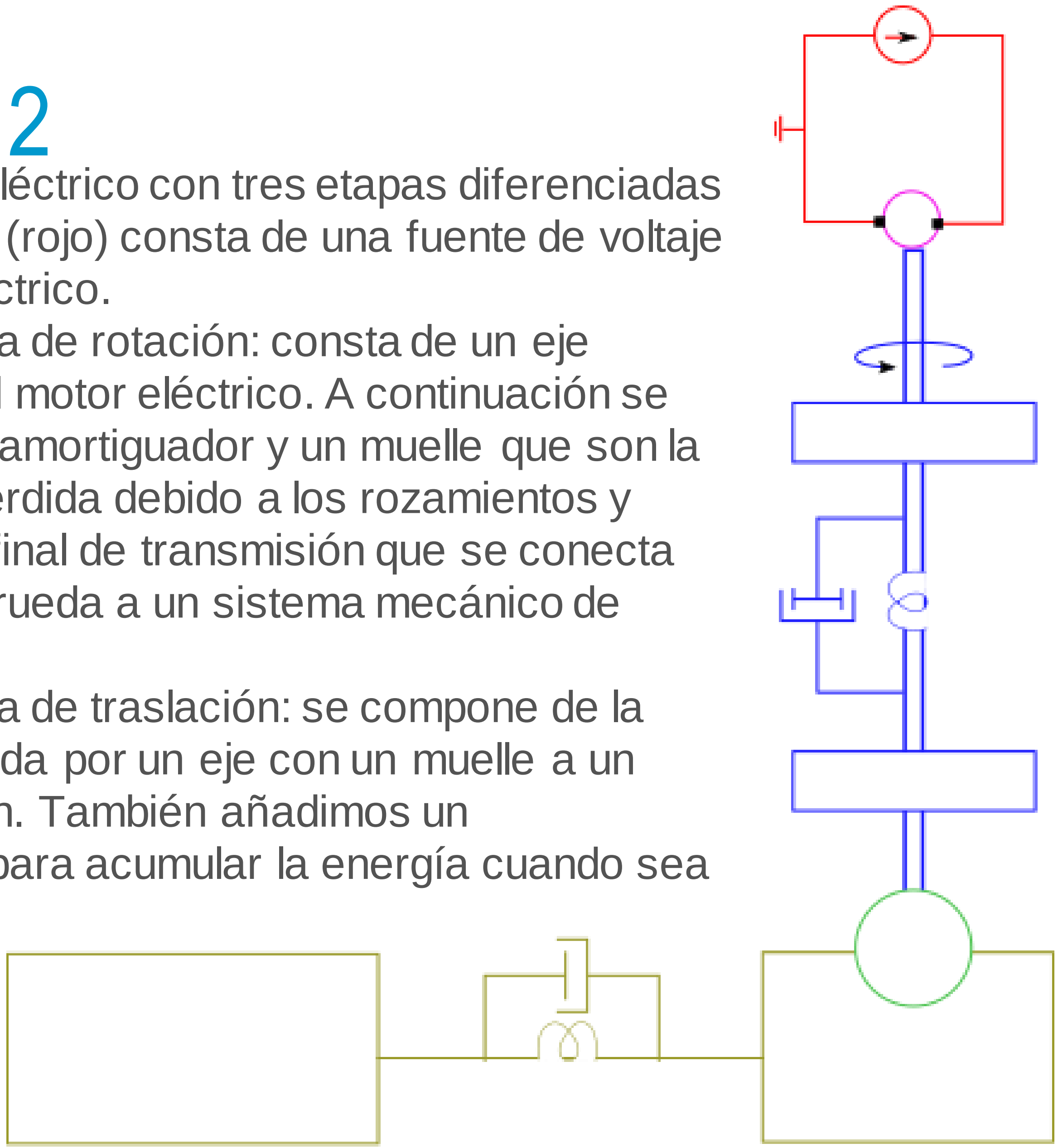
Modelado y simulación numérica

Daniel Pérez Palau

Comentarios Actividad 1: Modelado de un sistema físico

► Ejemplo 2

- Tenemos un tren eléctrico con tres etapas diferenciadas
  - Zona eléctrica (rojo) consta de una fuente de voltaje y un motor eléctrico.
  - Zona mecánica de rotación: consta de un eje enganchado al motor eléctrico. A continuación se representa un amortiguador y un muelle que son la fuente de la perdida debido a los rozamientos y llega a un eje final de transmisión que se conecta mediante una rueda a un sistema mecánico de traslación.
  - Zona mecánica de traslación: se compone de la locomotora unida por un eje con un muelle a un segundo vagón. También añadimos un amortiguador para acumular la energía cuando sea necesaria.

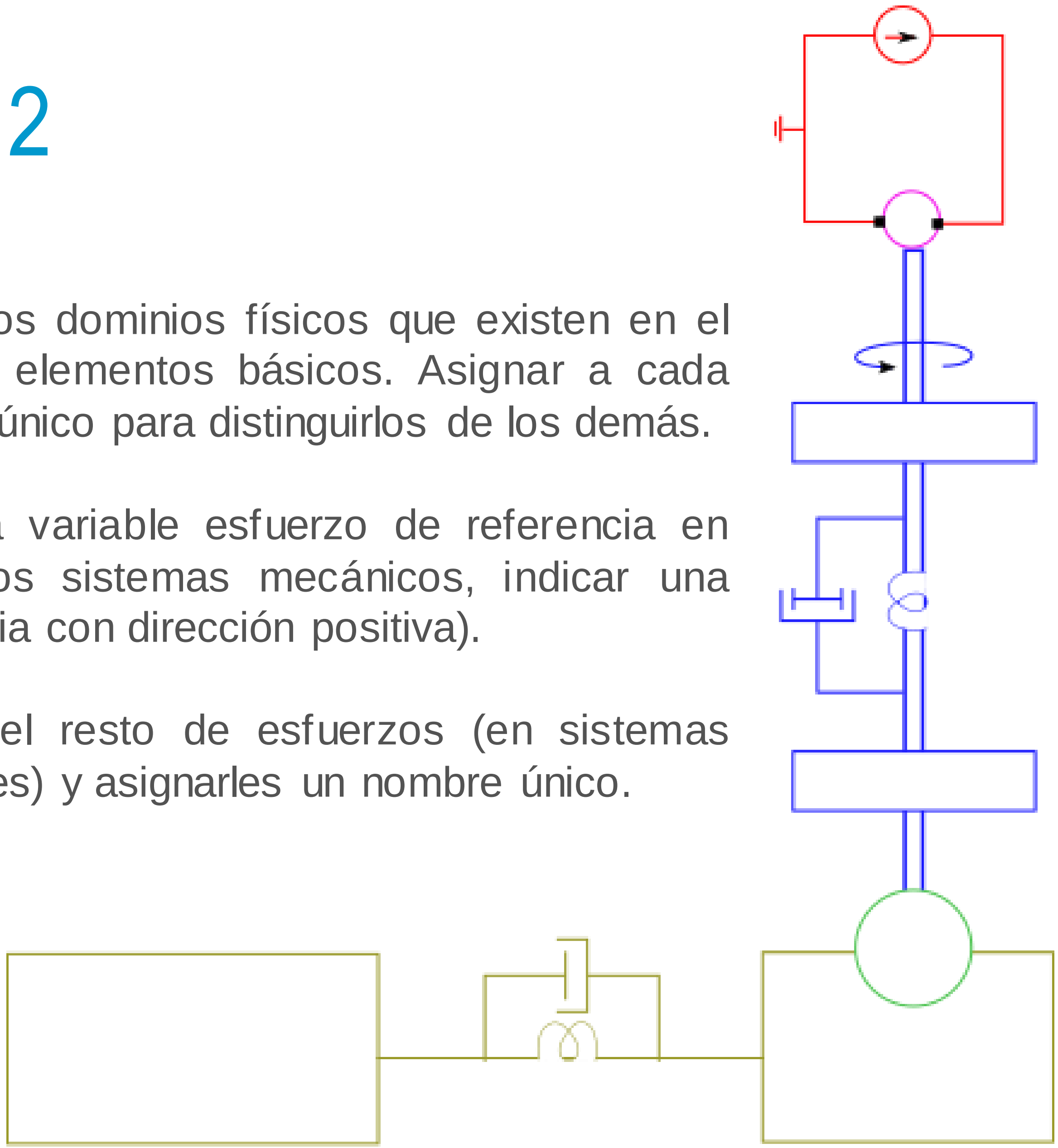


► Ejemplo 2

Paso1: Determinar los dominios físicos que existen en el sistema y todos los elementos básicos. Asignar a cada elemento un nombre único para distinguirlos de los demás.

Paso 2: Indicar una variable esfuerzo de referencia en cada dominio (en los sistemas mecánicos, indicar una velocidad de referencia con dirección positiva).

Paso 3: Identificar el resto de esfuerzos (en sistemas mecánicos velocidades) y asignarles un nombre único.

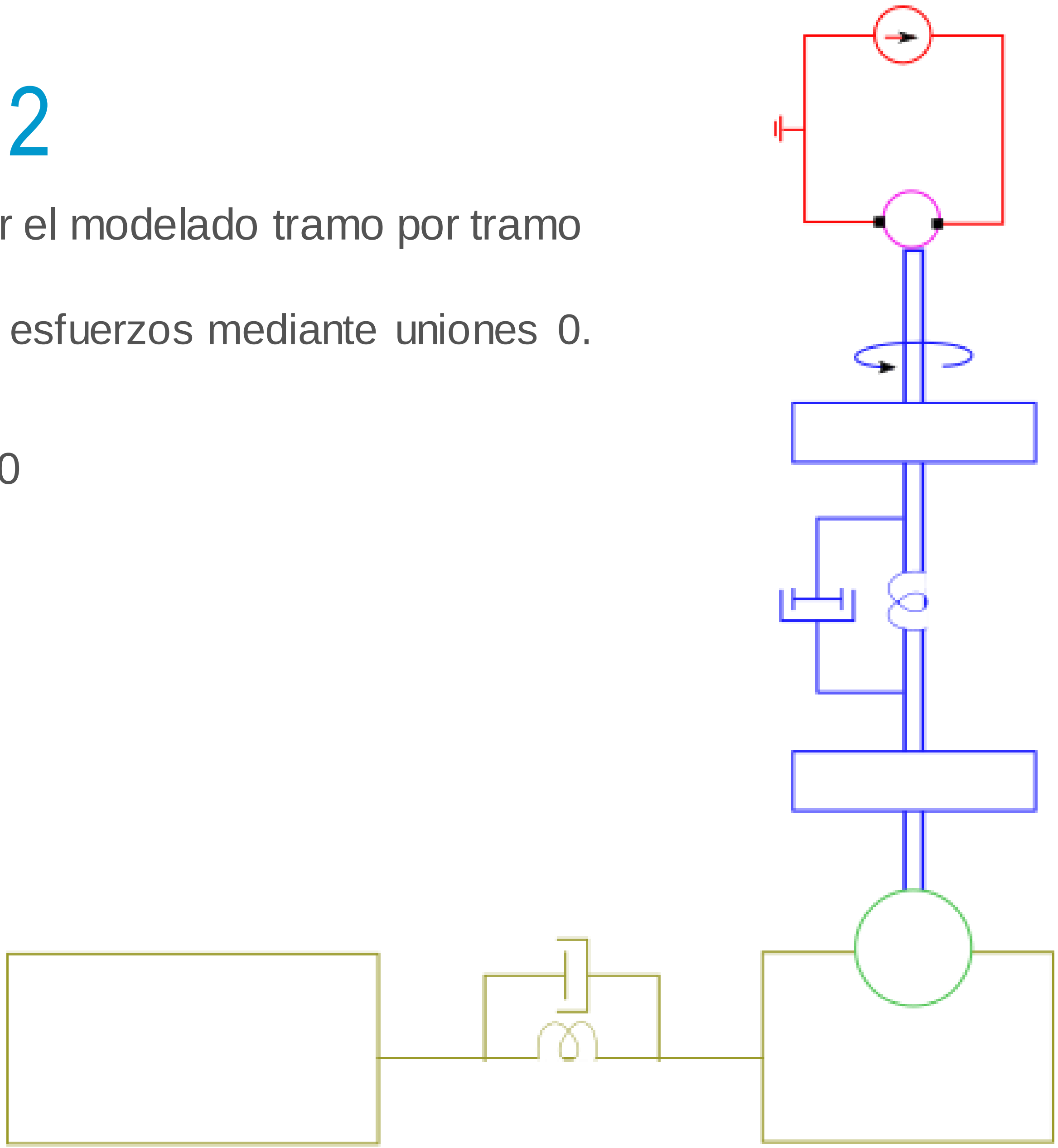


▶ Ejemplo 2

- Vamos a estudiar el modelado tramo por tramo

Paso 4: Dibujar los esfuerzos mediante uniones 0.

0 0



▶ Ejemplo 2

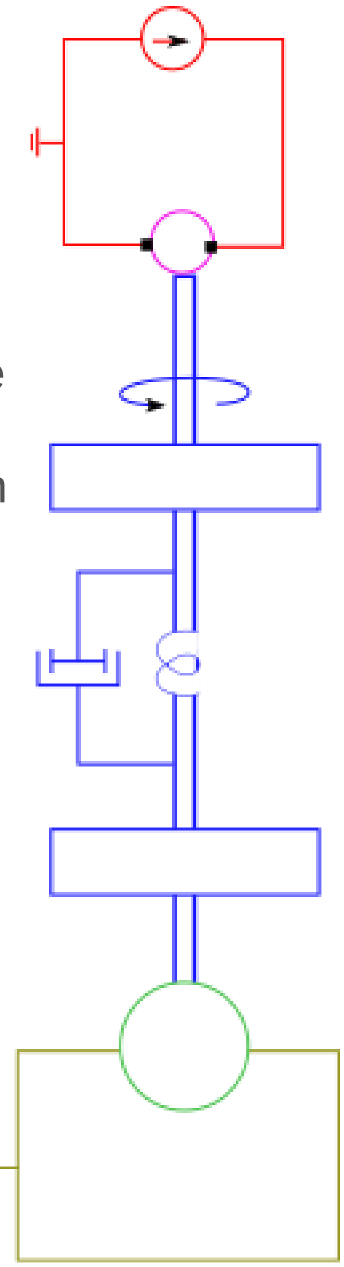
- Vamos a estudiar el modelado tramo por tramo

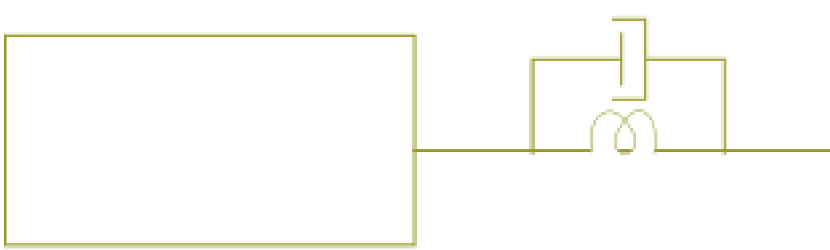
Paso 5: Identificar todas las diferencias de esfuerzo que se necesitan para conectar los puertos de todos los elementos.
Paso 6: Construir las diferencias de esfuerzo usando un nudo de unión 1.

1

0 0

1





► Ejemplo 2

- ► Vamos a estudiar el modelado tramo por tramo
- ► **Paso 7:** Conectar los puertos de todos los elementos con las uniones 0.

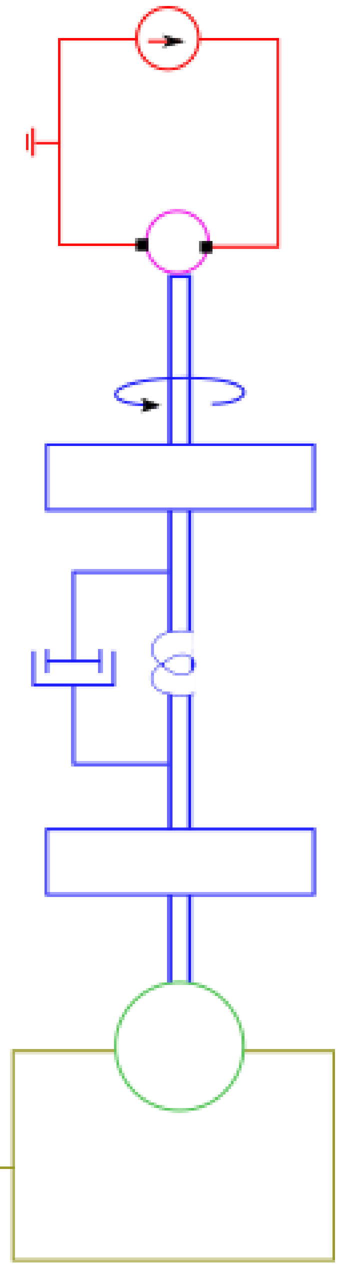
Se

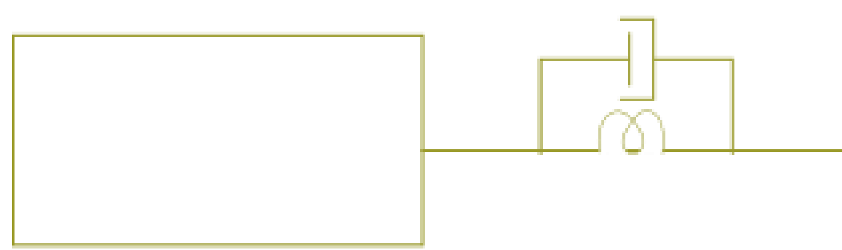
1

0 0

1

GY





► Ejemplo 2

- Vamos a estudiar el modelado tramo por tramo
- **Paso 8:** Simplificar el grafo resultante.

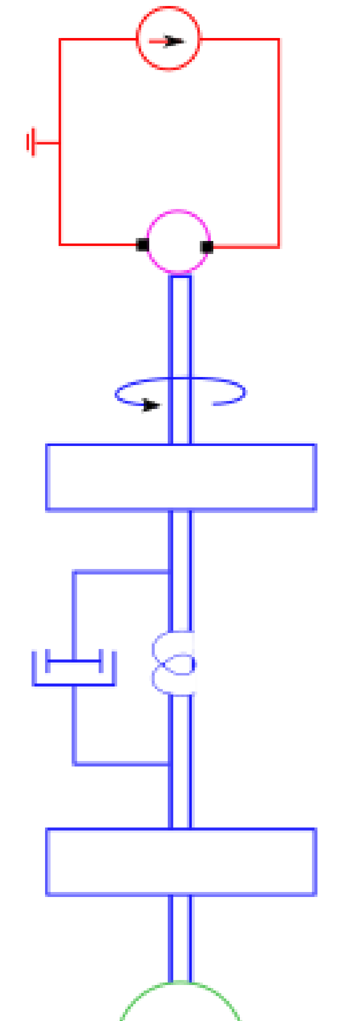
Se

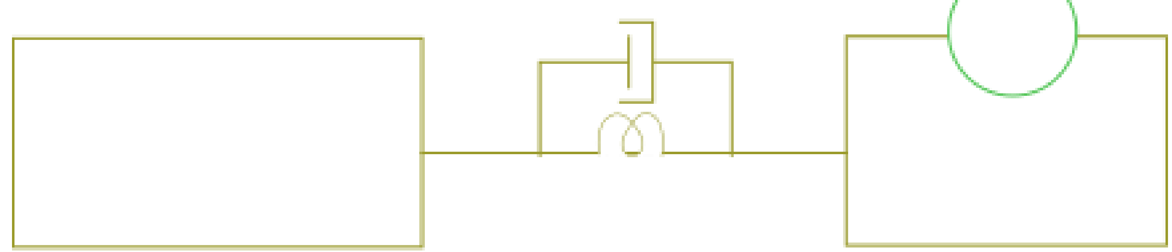
1 Se

0 0

1 GY

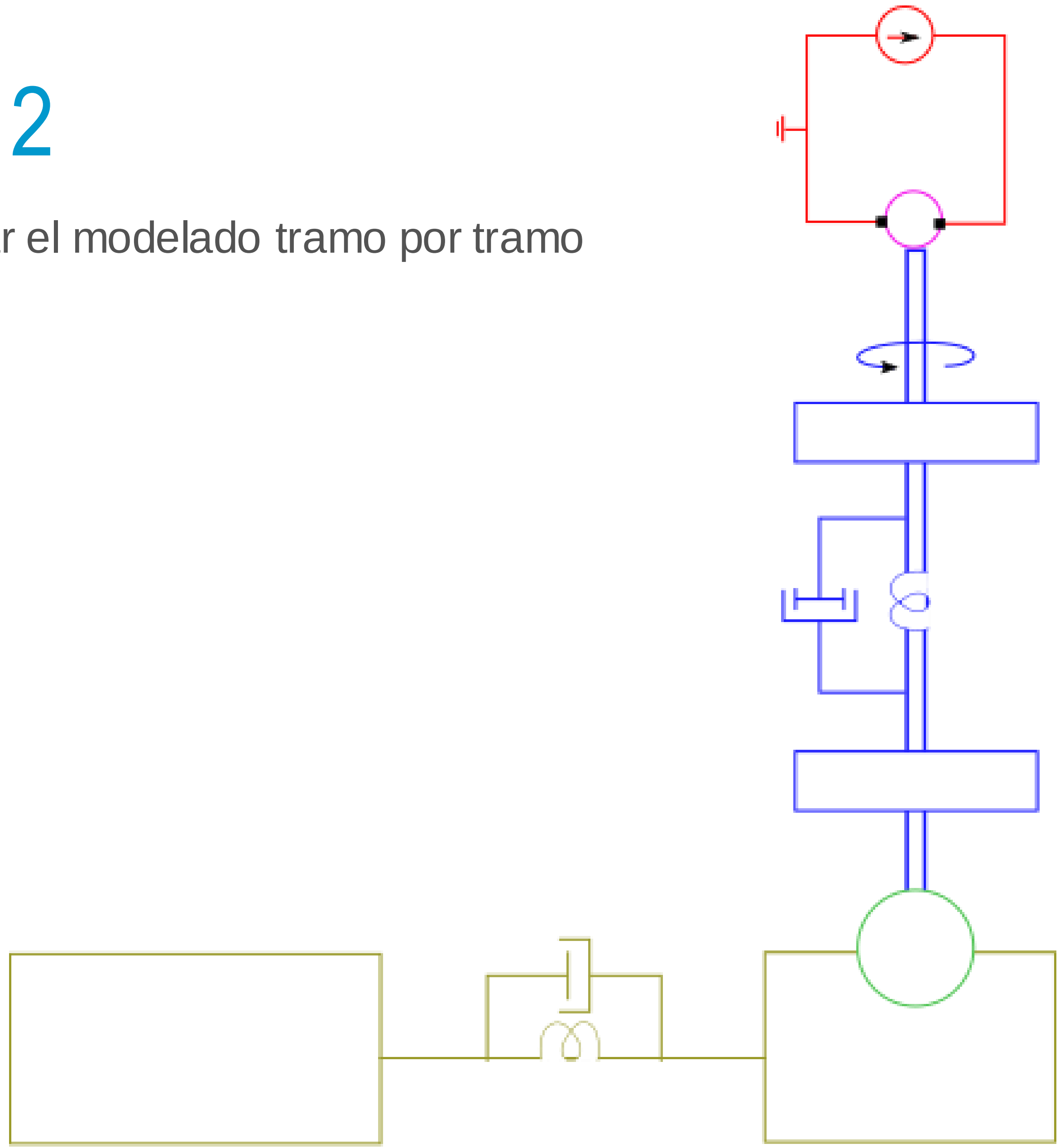
GY





▶ Ejemplo 2

- Vamos a estudiar el modelado tramo por tramo

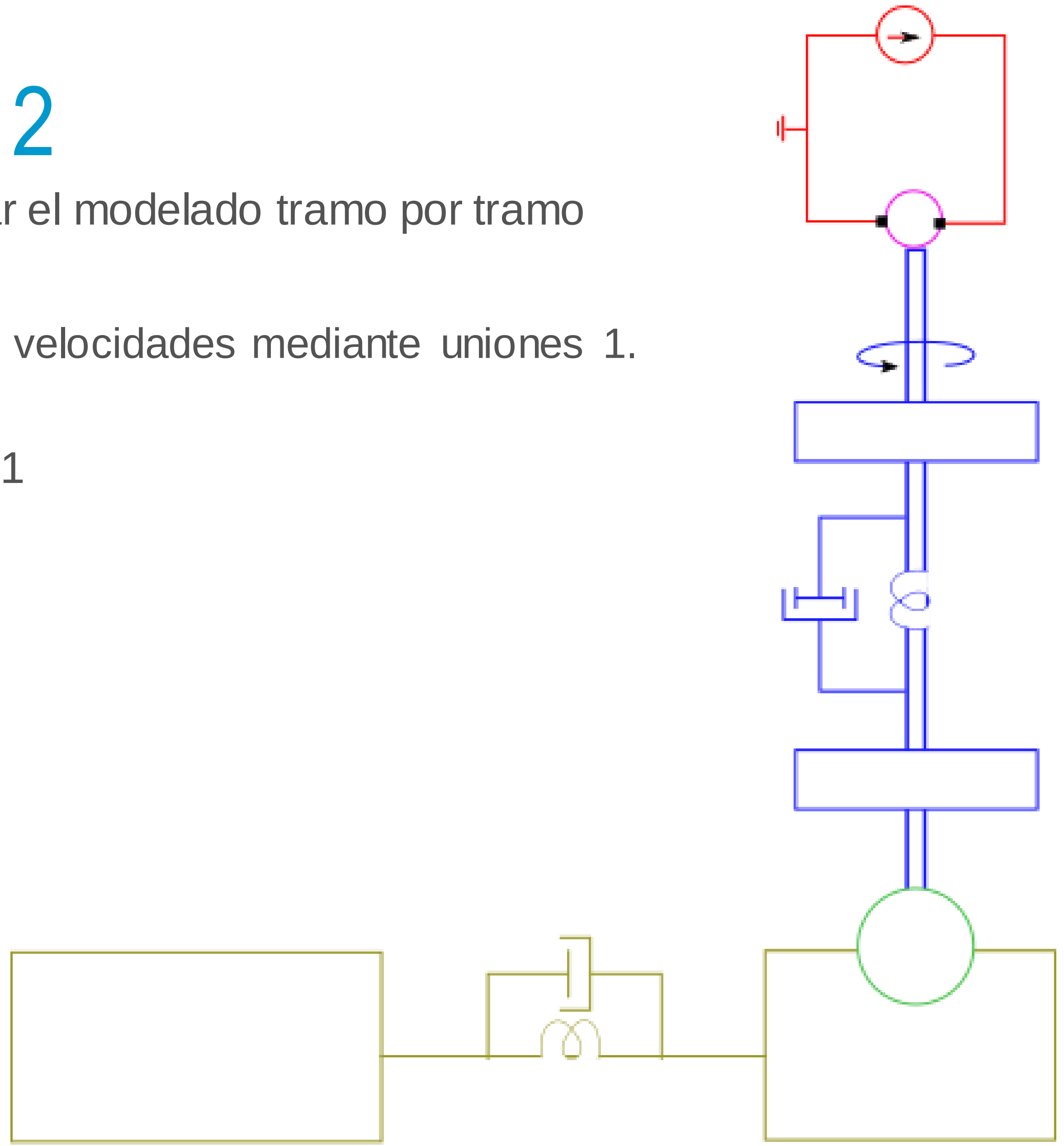


► Ejemplo 2

- ► Vamos a estudiar el modelado tramo por tramo

Paso 4: Dibujar las velocidades mediante uniones 1.

1 1

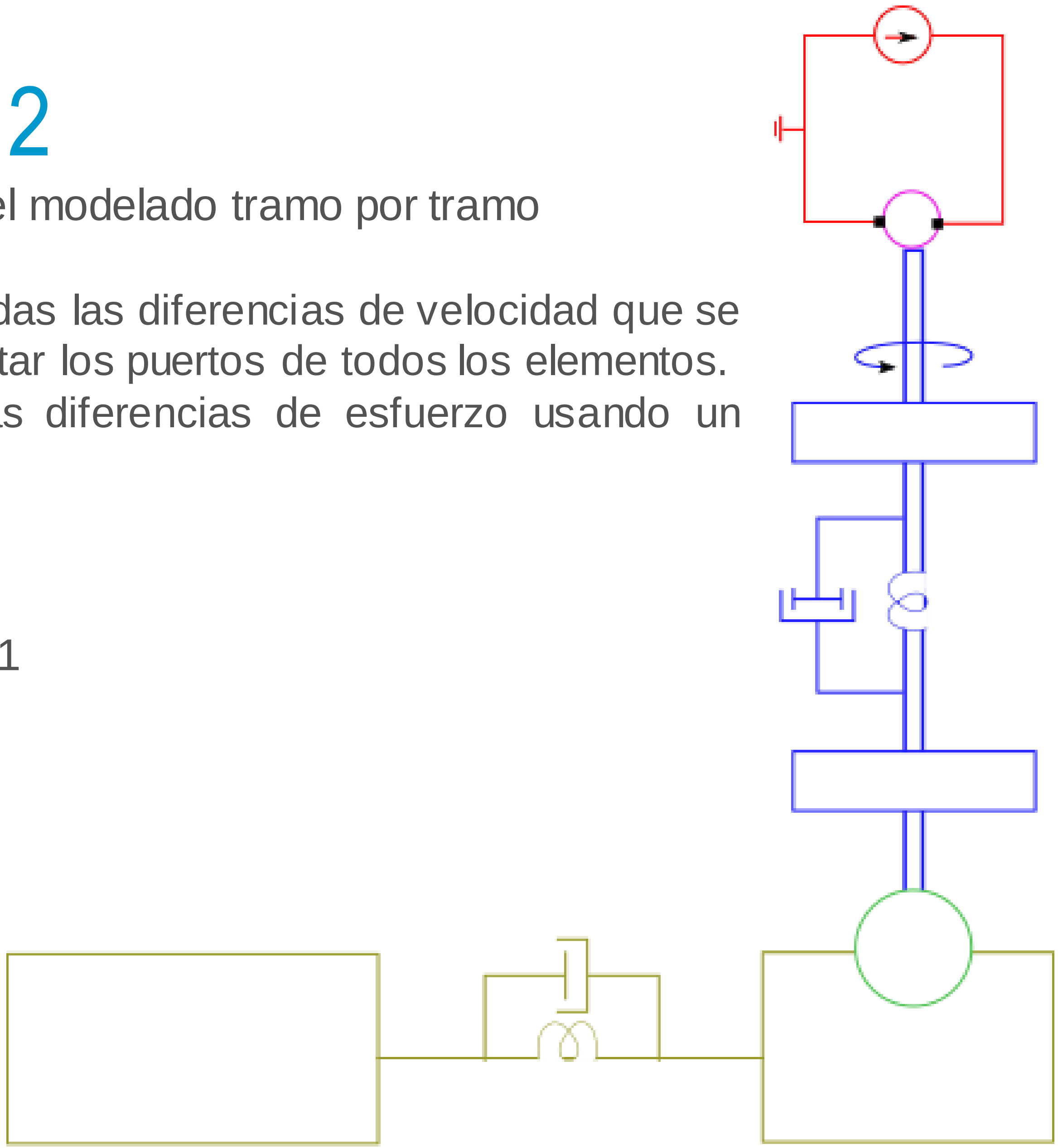


► Ejemplo 2

► Vamos a estudiar el modelado tramo por tramo

Paso 5: Identificar todas las diferencias de velocidad que se necesitan para conectar los puertos de todos los elementos.
Paso 6: Construir las diferencias de esfuerzo usando un nudo de unión 0.

1 0 1

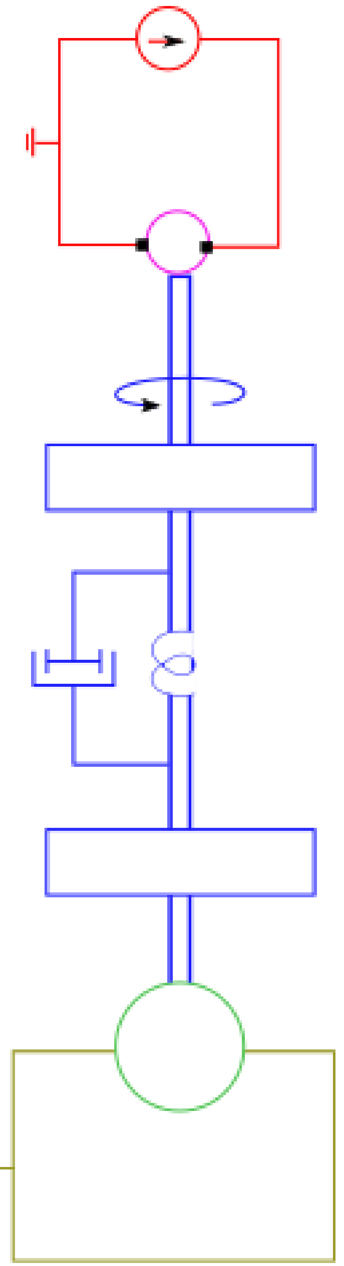


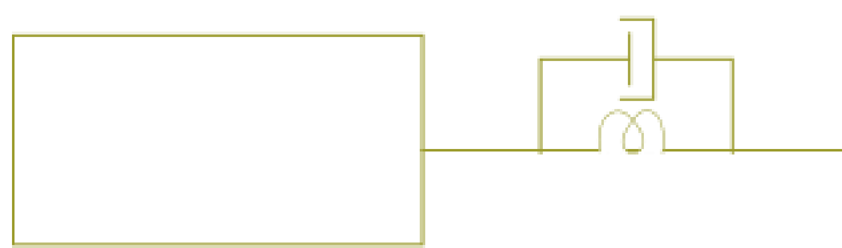
▶ Ejemplo 2

▶ Vamos a estudiar el modelado tramo por tramo

▶ **Paso 7:** Conectar los puertos de todos los elementos con las uniones 1.

	R	1	C	
GY	1	0	1	TF
	I		I	





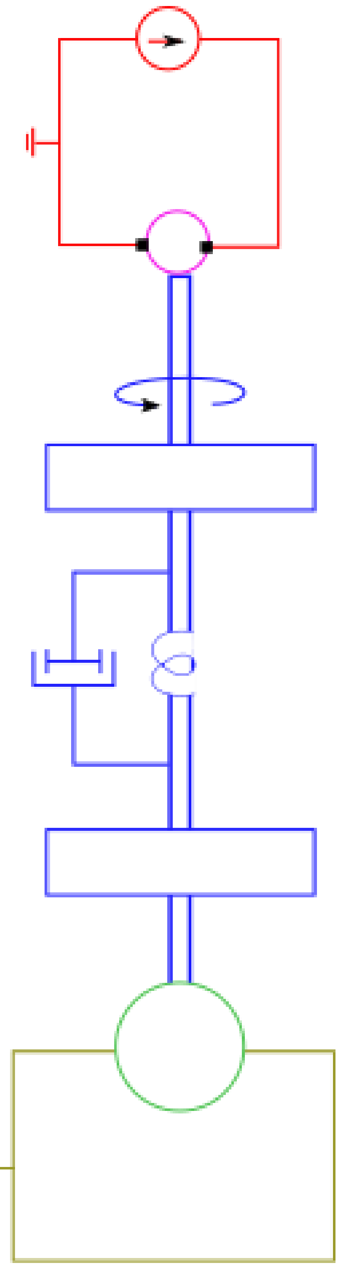
▶ Ejemplo 2

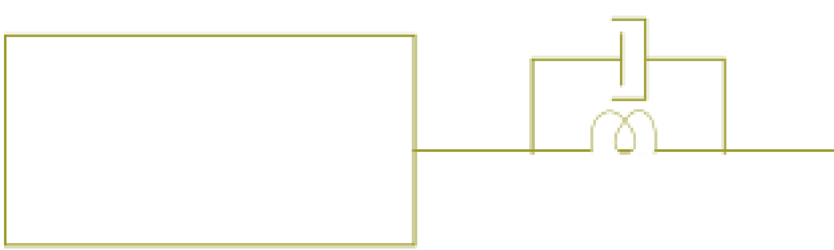
- Vamos a estudiar el modelado tramo por tramo
- **Paso 8:** Simplificar el grafo resultante.

R 1 C

GY 1 0 1 TF

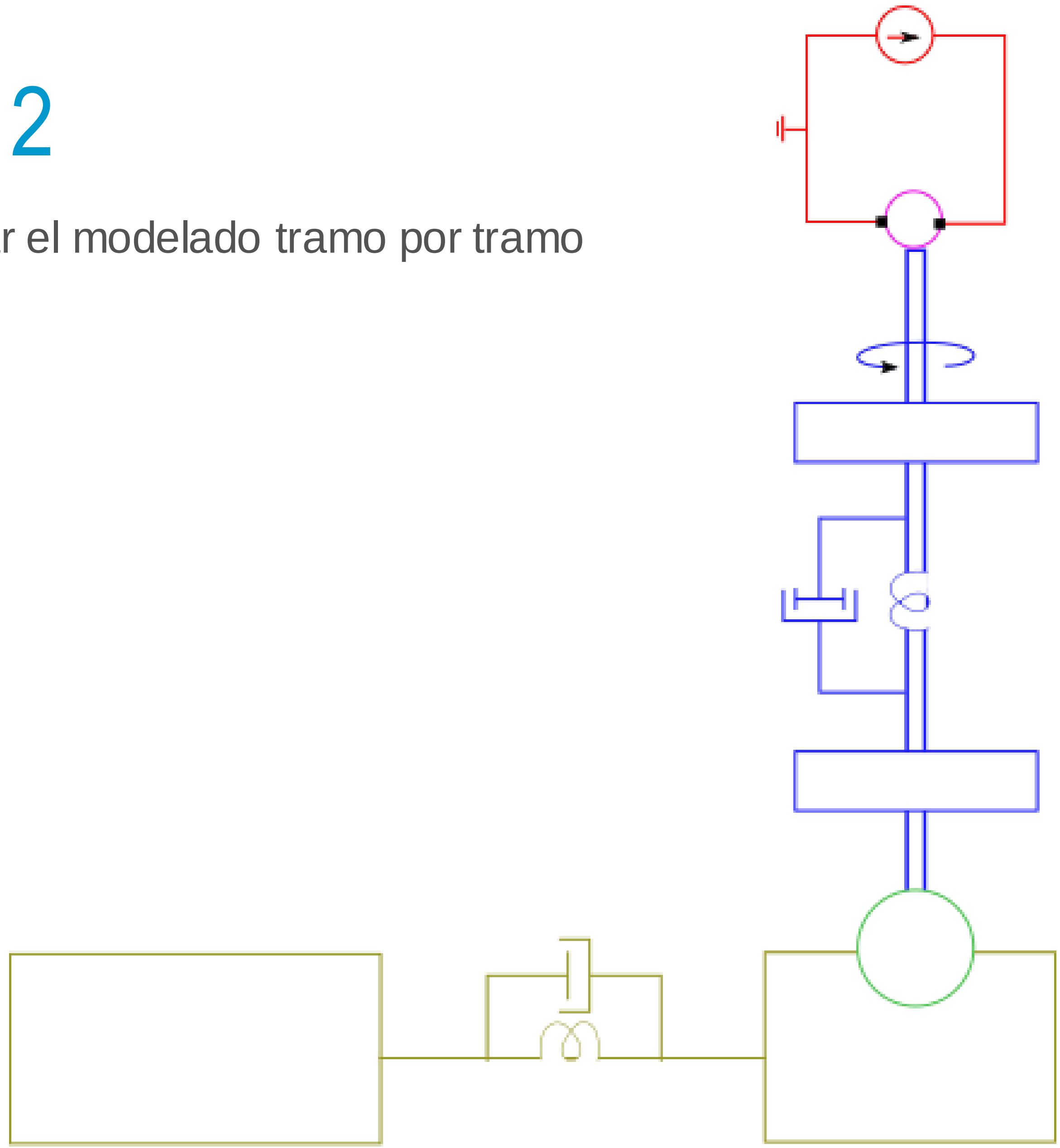
I I





▶ Ejemplo 2

- Vamos a estudiar el modelado tramo por tramo

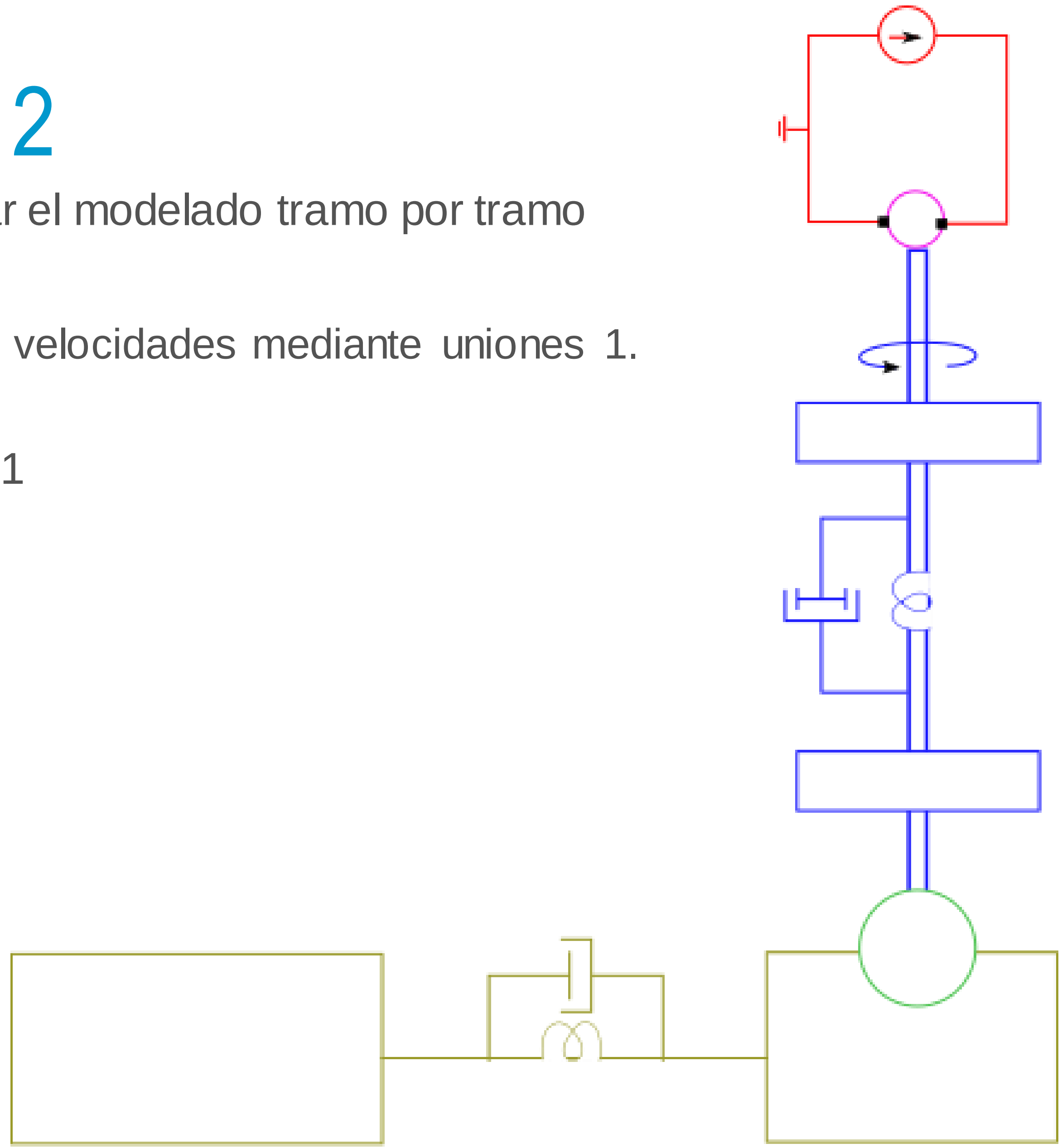


▶ Ejemplo 2

- ▶ Vamos a estudiar el modelado tramo por tramo

Paso 4: Dibujar las velocidades mediante uniones 1.

1 1

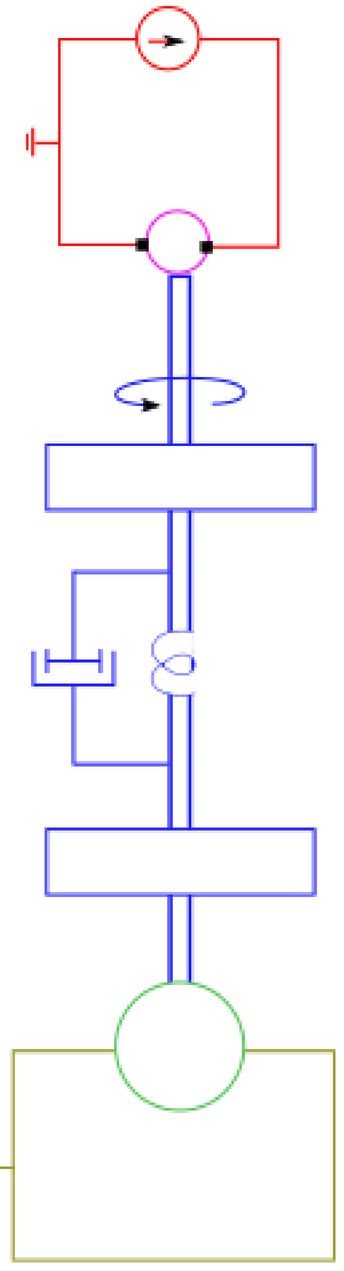


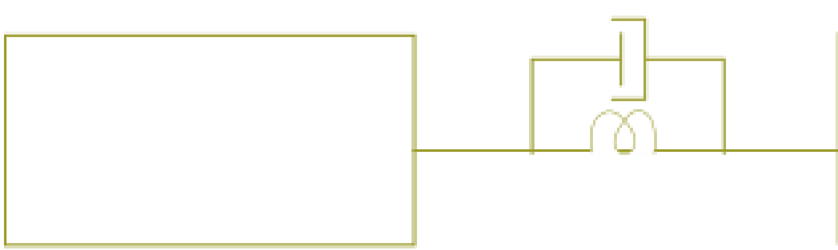
► Ejemplo 2

► Vamos a estudiar el modelado tramo por tramo

Paso 5: Identificar todas las diferencias de velocidad que se necesitan para conectar los puertos de todos los elementos.
Paso 6: Construir las diferencias de esfuerzo usando un nudo de unión 0.

1 0 1

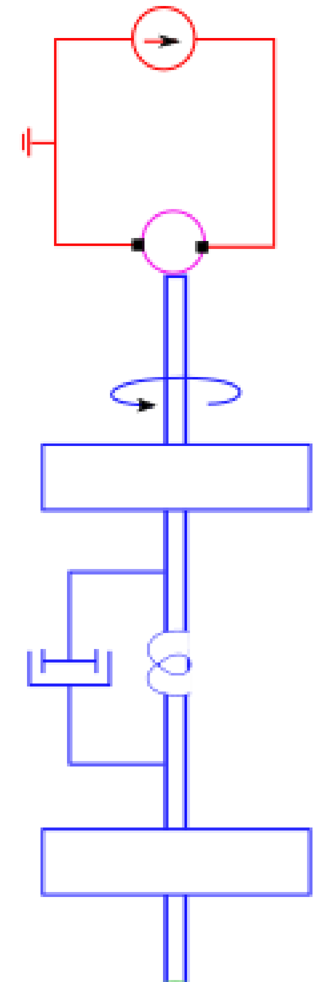


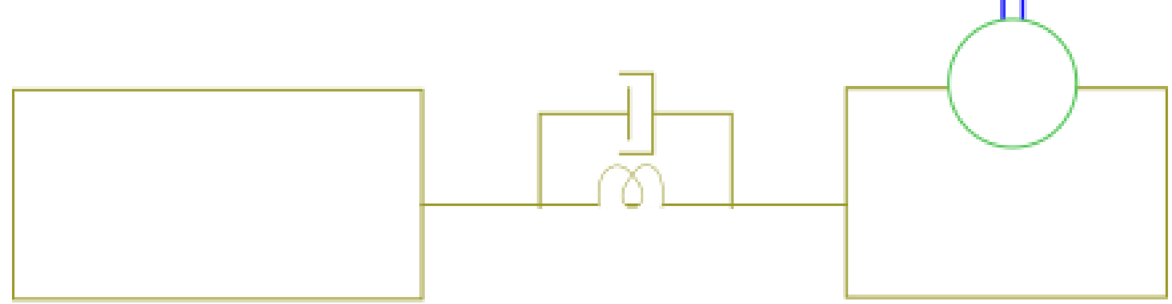


▶ Ejemplo 2

- ▶ Vamos a estudiar el modelado tramo por tramo
- ▶ **Paso 7:** Conectar los puertos de todos los elementos con las uniones 1.

R	1	C	
1	0	1	TF
I		I	





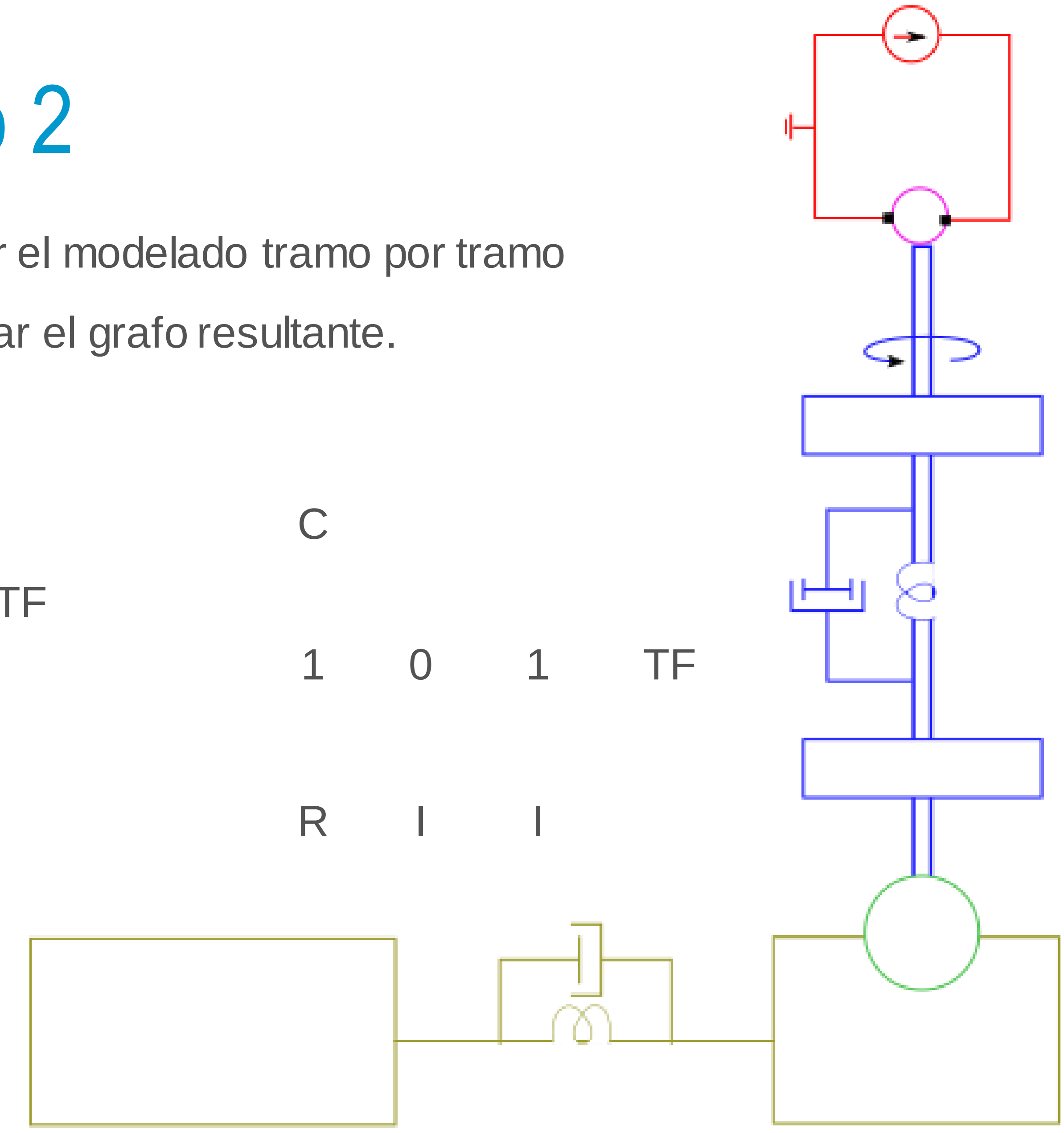
▶ Ejemplo 2

- Vamos a estudiar el modelado tramo por tramo
- **Paso 8:** Simplificar el grafo resultante.

R 1 C

1 0 1 TF

I I



C

1 0 1 TF

R I I

Ejemplo 2

- De manera que nos quedará el grafo

		R	1	C				R
Se	GY	1	0	1	TF	1	0	1
		I		I		I	I	C

Ejemplo 2

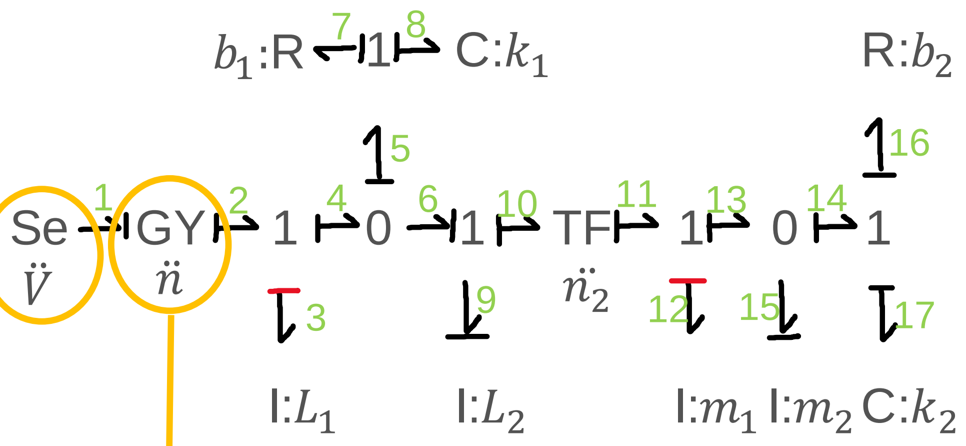
- Paso 9: asignar causalidades

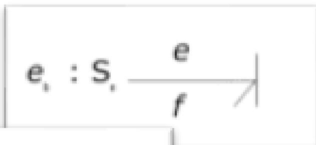
		R	1	C				R
Se	GY	1	0	1	TF	1	0	1
		I		I		I	I	C

Ejemplo 2

- Vamos a transcribir las ecuaciones

$e_1 = V$

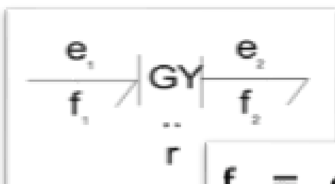




$e = e_b$

$$f_1 = \frac{1}{n} e_2$$

$$f_2 = \frac{1}{n} e_1$$

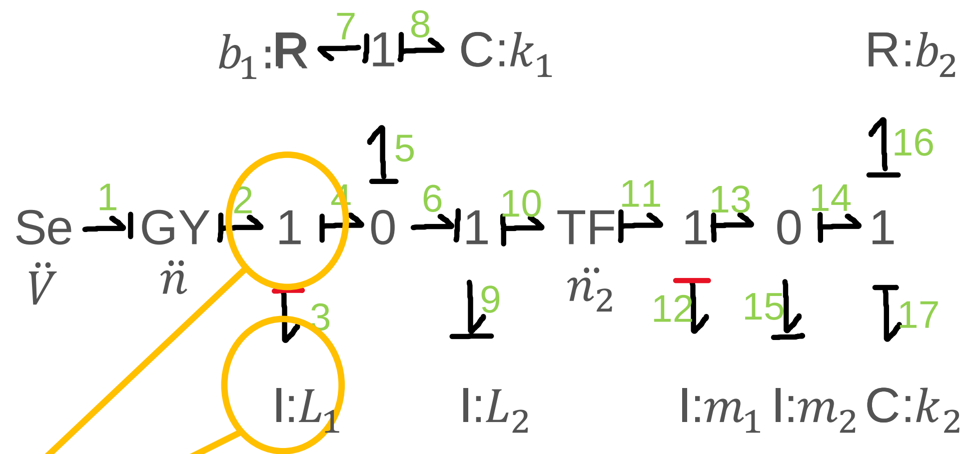


$f_2 = e_1 / r$

$f_1 = e_2 / r$

▶ Ejemplo 2

▶ Vamos a transcribir las ecuaciones

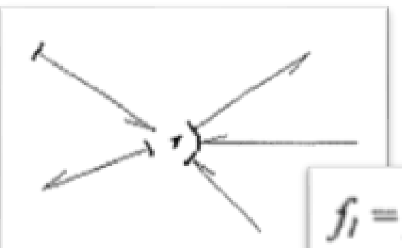


$$e_3 = L_1\, f_3'$$

$$f_2 = f_3 = f_4$$
$$e_2 = e_3 + e_4$$

Causalidad no preferencial

$$esfuerzo = m \cdot d(flujo)/dt$$

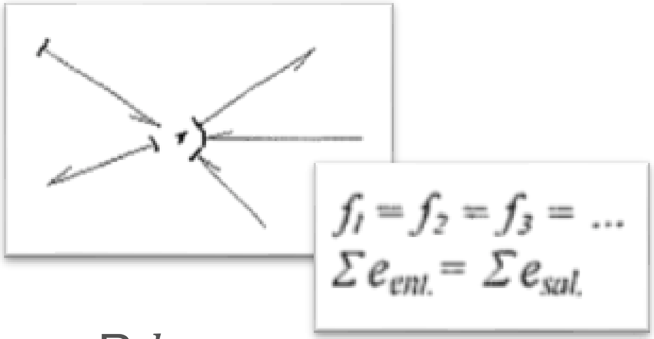


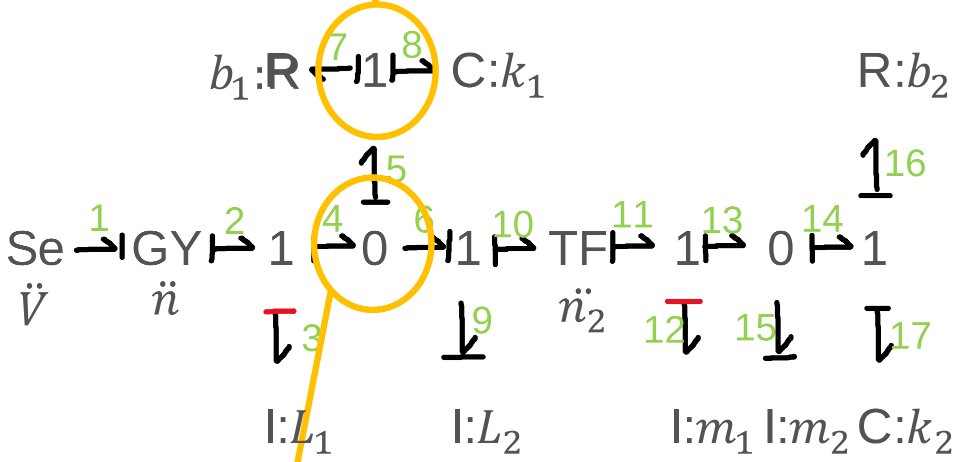
$$f_1 = f_2 = f_3 = \ldots$$
$$\Sigma e_{ent.} = \Sigma e_{sal.}$$

► Ejemplo 2

$$f_6 = f_7 = f_8$$
$$e_6 = e_7 + e_8$$

- ► Vamos a transcribir las ecuaciones

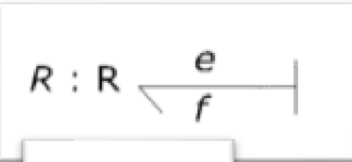




$$e_4 = e_5 = e_6$$
$$f_4 = f_5 + f_6$$

▶ Ejemplo 2

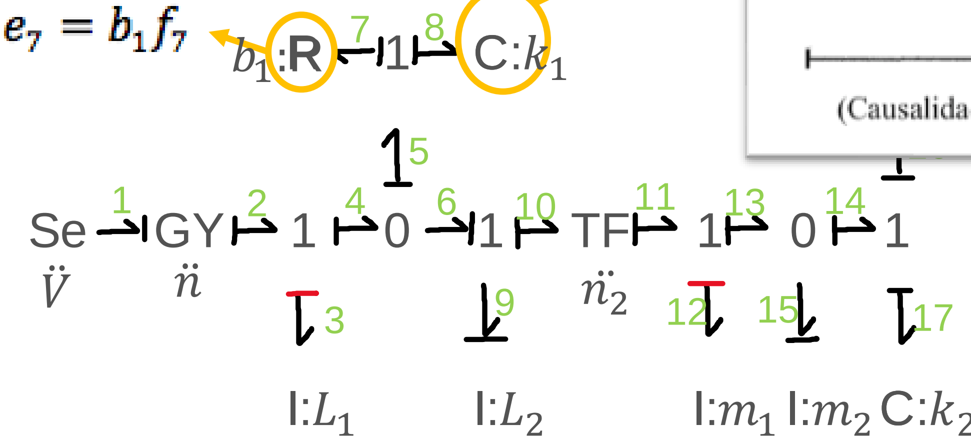
▶ Vamos a transcribir las ecuaciones

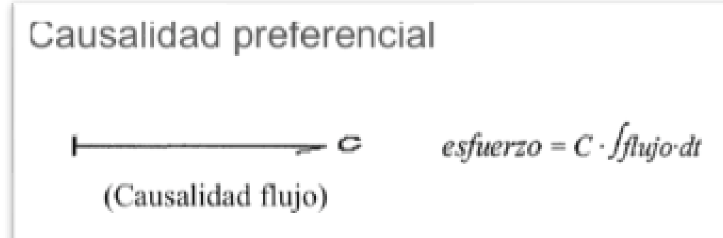


$e = Rf$

$e_7 = b_1 f_7$

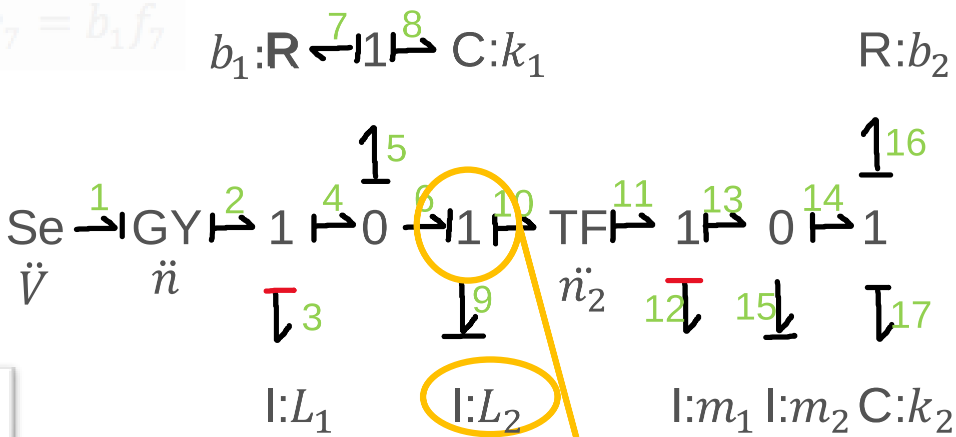
$e_8 = k_1 \int f_8 dt$





▶ Ejemplo 2

- ▶ Vamos a transcribir las ecuaciones

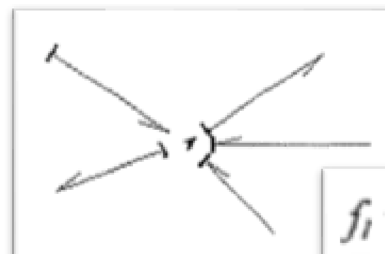


Causalidad preferencial

(Causalidad esfuerzo)

$$flujo = 1/m \cdot \int esfuerzo \cdot dt$$

$$f_5 = f_9 = f_{10}$$
$$e_5 = e_9 + e_{10}$$

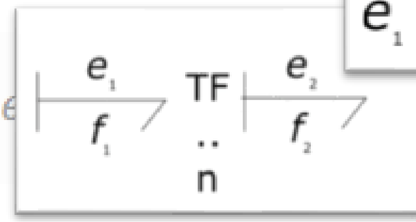


$$f_1 = f_2 = f_3 = \ldots$$
$$\Sigma e_{ent.} = \Sigma e_{sal.}$$

$$f_9 = \frac{1}{L_2}\int e_9 dt$$

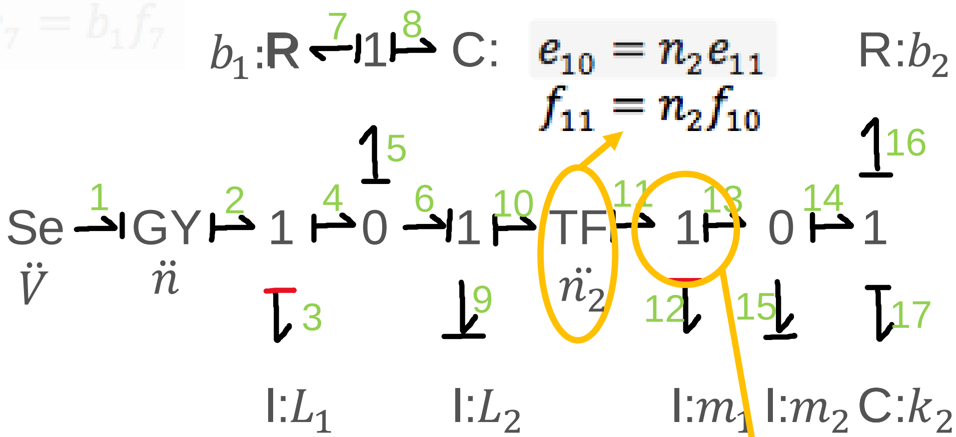
► Ejemplo 2

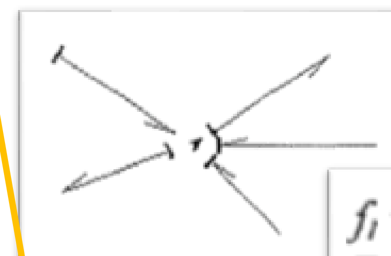
► Vamos a transcribir las ecuaciones



$$f_2 = nf_1$$
$$e_1 = ne_2$$

$$e_{10} = n_2 e_{11}$$
$$f_{11} = n_2 f_{10}$$



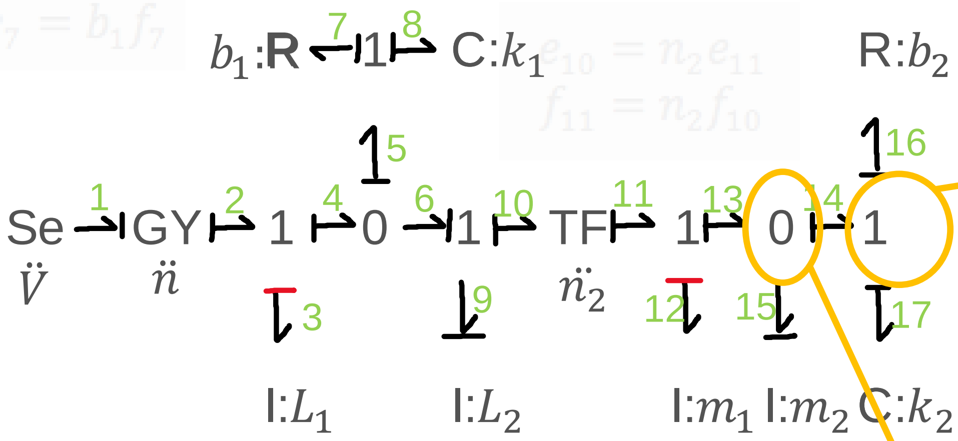


$$f_1 = f_2 = f_3 = \ldots$$
$$\Sigma e_{ent.} = \Sigma e_{sal.}$$

$$f_{11} = f_{12} = f_{13}$$
$$e_{11} = e_{12} + e_{13}$$

▶ Ejemplo 2

- ▶ Vamos a transcribir las ecuaciones

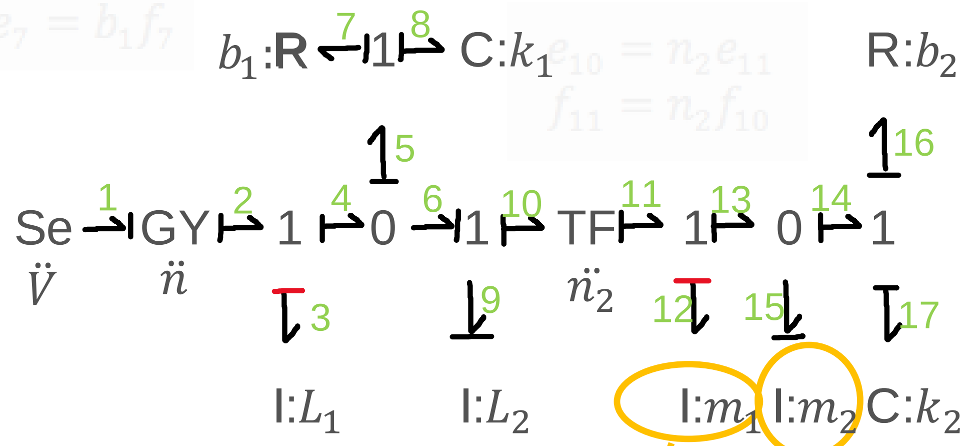


$$f_{14} = f_{16} = f_{17}$$
$$e_{14} = e_{16} + e_{17}$$

$$e_{13} = e_{14} = e_{15}$$
$$f_{13} = f_{14} + f_{15}$$

▶ Ejemplo 2

▶ Vamos a transcribir las ecuaciones



$$e_{12} = m_1 f_{12}'$$

Causalidad preferencial

(Causalidad esfuerzo)

$$flujo = 1/m \cdot \int esfuerzo \cdot dt$$

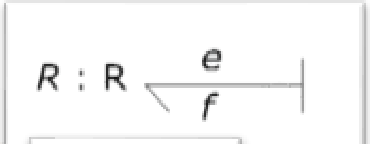
$$f_{15} = \frac{1}{m_2} \int e_{15} dt$$

Causalidad no preferencial

$$esfuerzo = m \cdot d(flujo)/dt$$

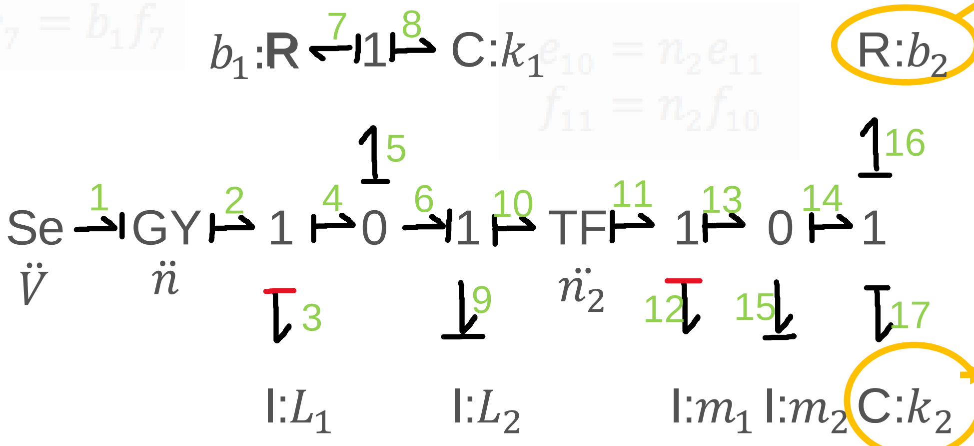
▶ Ejemplo 2

▶ Vamos a transcribir las ecuaciones



$$e = Rf$$

$$e_{16} = b_2 f_{16}$$



$$e_{17} = k_2 \int f_{17} dt$$

Causalidad preferencial

$esfuerzo = C \cdot \int flujo \cdot dt$

(Causalidad flujo)

► Ejemplo 2

- ► Vamos a transcribir las ecuaciones

$$f_6 = f_7 = f_8$$
$$e_6 = e_7 + e_8$$

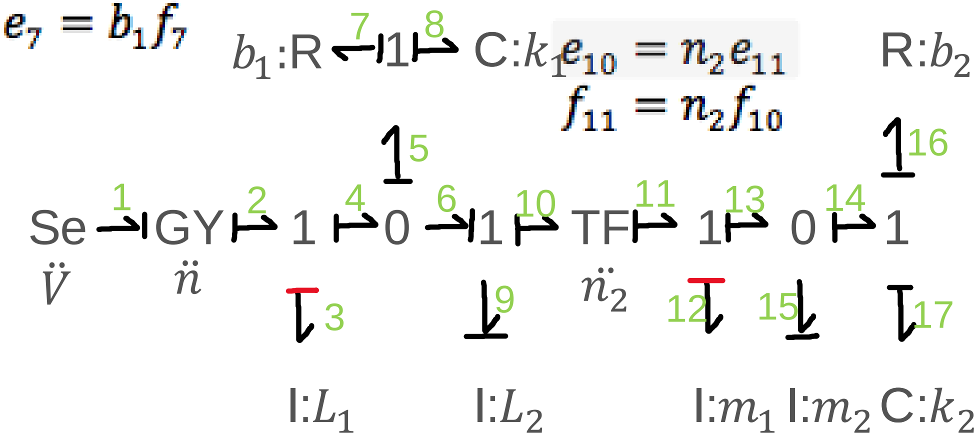
$$e_8 = k_1 \int f_8 dt$$

$$e_{16} = b_2 f_{16}$$

$$e_7 = b_1 f_7$$

$$e_1 = V$$

$$e_{10} = n_2 e_{11}$$
$$f_{11} = n_2 f_{10}$$



$$f_{14} = f_{16} = f_{17}$$
$$e_{14} = e_{16} + e_{17}$$

$$f_1 = \frac{1}{n} e_2$$
$$f_2 = \frac{1}{n} e_1$$

$$e_{17} = k_2 \int f_{17} dt$$

$$e_3 = L_1 f_3'$$

$$e_{12} = m_1 f_{12}'$$

$$e_{13} = e_{14} = e_{15}$$
$$f_{13} = f_{14} + f_{15}$$

$$f_2 = f_3 = f_4$$
$$e_2 = e_3 + e_4$$

$$e_4 = e_5 = e_6$$
$$f_4 = f_5 + f_6$$

$$f_5 = f_9 = f_{10}$$
$$e_5 = e_9 + e_{10}$$

$$f_{15} = \frac{1}{m_2} \int e_{15} dt$$

$$f_9 = \frac{1}{L_2} \int e_9 dt$$

$$f_{11} = f_{12} = f_{13}$$
$$e_{11} = e_{12} + e_{13}$$

▶ Ejemplo 2

▶ Finalmente simplificamos:

$e_1 = V$ $f_1 = \frac{1}{n} e_2$ $f_2 = \frac{1}{n} e_1$ $f_2 = f_3 = f_4$ $e_2 = e_3 + e_4$ $e_3 = L_1 f_3'$ $e_4 = e_5 = e_6$ $f_4 = f_5 + f_6$ $f_6 = f_7 = f_8$ $e_6 = e_7 + e_8$	$e_7 = b_1 f_7$ $e_8 = k_1 \int f_8 dt$ $f_5 = f_9 = f_{10}$ $e_5 = e_9 + e_{10}$ $f_9 = \frac{1}{L_2} \int e_9 dt$ $e_{10} = n_2 e_{11}$ $f_{11} = n_2 f_{10}$ $f_{11} = f_{12} = f_{13}$ $e_{11} = e_{12} + e_{13}$	$e_{12} = m_1 f_{12}'$ $e_{13} = e_{14} = e_{15}$ $f_{13} = f_{14} + f_{15}$ $f_{15} = \frac{1}{m_2} \int e_{15} dt$ $f_{14} = f_{16} = f_{17}$ $e_{13} = e_{16} + e_{17}$ $e_{16} = b_2 f_{16}$ $e_{17} = k_2 \int f_{17} dt$
En el primer paso de la simplificación de ecuaciones tomaremos las igualdades de nodos 0 y 1 y nos quedaremos con el subíndice menor		

▶ Ejemplo 2

▶ Finalmente simplificamos:

$e_1 = V$ $f_1 = \frac{1}{n} e_2$ $f_2 = \frac{1}{n} e_1$ $e_2 = e_3 + e_4$ $e_3 = L_1 f_2'$ $f_2 = f_5 + f_6$ $e_4 = e_7 + e_8$	$e_7 = b_1 f_6$ $e_8 = k_1 \int f_6 dt$ $e_4 = e_9 + e_{10}$ $f_5 = \frac{1}{L_2} \int e_9 dt$ $e_{10} = n_2 e_{11}$ $f_{11} = n_2 f_5$ $e_{11} = e_{12} + e_{13}$	$e_{12} = m_1 f_{11}'$ $f_{11} = f_{14} + f_{15}$ $f_{15} = \frac{1}{m_2} \int e_{13} dt$ $e_{13} = e_{16} + e_{17}$ $e_{16} = b_2 f_{14}$ $e_{17} = k_2 \int f_{14} dt$
Variables restantes: 20 $f_1, f_2, f_5, f_6, f_{11}, f_{14}, f_{15}$ $e_1, e_2, e_3, e_4, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{16}, e_{17}$		
Variables eliminadas: $f_3, f_4, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{12}, f_{13}, f_{16}, f_{17}, e_5, e_6, e_{14}, e_{15}$		

▶ Ejemplo 2

▶ Finalmente simplificamos:

$e_1 = V$ $f_1 = \frac{1}{n} e_2$ $f_2 = \frac{1}{n} e_1$ $e_2 = e_3 + e_4$ $e_3 = L_1 f_2'$ $f_2 = f_5 + f_6$ $e_4 = e_7 + e_8$	$e_7 = b_1 f_6$ $e_8 = k_1 \int f_6 dt$ $e_7 + e_8 = e_9 + e_{10}$ $f_5 = \frac{1}{L_2} \int e_9 dt$ $e_{10} = n_2 e_{11}$ $f_{11} = n_2 f_5$ $e_{11} = e_{12} + e_{13}$	$e_{12} = m_1 f_{11}{}'$ $f_{11} = f_{14} + f_{15}$ $f_{15} = \frac{1}{m_2} \int e_{13} dt$ $e_{13} = e_{16} + e_{17}$ $e_{16} = b_2 f_{14}$ $e_{17} = k_2 \int f_{14} dt$
Substituimos el valor de e_1, e_3, e_4 (atención: aparece dos veces), e_{10} y f_{11}(atención, aparece dos veces y una de ellas derivado, por lo tanto, como n_2 es una constante será equivalente a derivar únicamente f_5		

Ejemplo 2

- Finalmente simplificamos:

$f_1 = \frac{1}{n} e_2$ $f_2 = \frac{1}{n} V$ $e_2 = L_1 f_2' + e_7 + e_8$ $f_2 = f_5 + f_6$	$e_7 = b_1 f_6$ $e_8 = k_1 \int f_6 dt$ $e_7 + e_8 = e_9 + n_2 e_{11}$ $f_5 = \frac{1}{L_2} \int e_9 dt$ $e_{11} = e_{12} + e_{13}$	$e_{12} = m_1 n_2 f_5'$ $n_2 f_5 = f_{14} + f_{15}$ $f_{15} = \frac{1}{m_2} \int e_{13} dt$ $e_{13} = e_{16} + e_{17}$ $e_{16} = b_2 f_{14}$ $e_{17} = k_2 \int f_{14} dt$
Variables restantes: 15 $f_1, f_2, f_5, f_6, f_{14}, f_{15}$ $e_2, e_7, e_8, e_9, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{16}, e_{17}$		
Variables eliminadas en este paso: $e_1, e_3, e_4, e_{10}, f_{11}$		
Variables eliminadas anteriormente: $f_3, f_4, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{12}, f_{13}, f_{16}, f_{17}, e_5, e_6, e_{14}, e_{15}$		

▶ Ejemplo 2

▶ Finalmente simplificamos:

$f_1 = \frac{1}{n} e_2$ $f_2 = \frac{1}{n} V$ $e_2 = L_1\, f_2' + e_7 + e_8$ $f_2 = f_5 + f_6$	$e_7 = b_1 f_6$ $e_8 = k_1 \int f_6 dt$ $b_1 f_6 + k_1 \int f_6 dt \; = e_9 + n_2 e_{11}$ $f_5 = \frac{1}{L_2} \int e_9 dt$ $e_{11} = e_{12} + e_{13}$	$e_{12} = m_1 n_2 f_5'$ $n_2 f_5 = f_{14} + f_{15}$ $f_{15} = \frac{1}{m_2} \int e_{13} dt$ $e_{13} = e_{16} + e_{17}$ $e_{16} = b_2 f_{14}$ $e_{17} = k_2 \int f_{14} dt$
Substituimos el valor de f_2, e_7, e_8, e_{13} y e_{17}. Como en el paso anterior tenemos que ir con cuidado de las duplicidades, derivadas e integrales.		

▶ Ejemplo 2

▶ Finalmente simplificamos:

<table>
<tr><td>

$$f_1 = \frac{1}{n} e_2$$

$$e_2 = L_1 \left(\frac{1}{n} V \right)' + b_1 f_6 + k_1 \int f_6 dt$$

$$\frac{1}{n} V = f_5 + f_6$$

$$b_1 f_6 + k_1 \int f_6 dt = e_9 + n_2 e_{11}$$

$$f_5 = \frac{1}{L_2} \int e_9 dt$$

</td><td>

$$e_{11} = e_{12} + e_{13}$$

$$e_{12} = m_1 n_2 f_5'$$

$$n_2 f_5 = f_{14} + f_{15}$$

$$f_{15} = \frac{1}{m_2} \int e_{13} dt$$

$$e_{13} = b_2 f_{14} + k_2 \int f_{14} dt$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Variables restantes: 10

$f_1, f_5, f_6, f_{14}, f_{15}$

$e_2, e_9, e_{11}, e_{12}, e_{13}$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Variables eliminadas en este paso: $f_2, e_7, e_8, e_{16}, e_{17}$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Variables eliminadas anteriormente:

$f_3, f_4, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{16}, f_{17}$

$e_1, e_3, e_4, e_5, e_6, e_{10}, e_{14}, e_{15}$

</td></tr>
</table>

Ejemplo 2

- Finalmente simplificamos:

$$f_1 = \frac{1}{n} e_2$$

$$e_2 = L_1 \left(\frac{1}{n} V\right)' + b_1 f_6 + k_1 \int f_6 dt$$

$$\frac{1}{n} V = f_5 + f_6$$

$$b_1 f_6 + k_1 \int f_6 dt = e_9 + n_2 e_{11}$$

$$f_5 = \frac{1}{L_2} \int e_9 dt$$

$$e_{11} = e_{12} + e_{13}$$

$$e_{12} = m_1 n_2 f_5'$$

$$n_2 f_5 = f_{14} + f_{15}$$

$$f_{15} = \frac{1}{m_2} \int e_{13} dt$$

$$e_{13} = b_2 f_{14} + k_2 \int f_{14} dt$$

Observamos que $\left(\frac{1}{n} V\right)'$ es una derivada de una constante, por lo tanto se cancelará. Despejamos e_2 en la primera ecuación y lo substituimos en la segunda. También substituimos f_5 y f_{15}

Ejemplo 2

- Finalmente simplificamos:

$nf_1 = 0 + b_1 f_6 + k_1 \int f_6 dt$ $\frac{1}{n} V = \frac{1}{L_2} \int e_9 dt + f_6$ $b_1 f_6 + k_1 \int f_6 dt = e_9 + n_2 e_{11}$ $n_2 \frac{1}{L_2} \int e_9 dt = f_{14} + \frac{1}{m_2} \int e_{13} dt$	$e_{11} = e_{12} + e_{13}$ $e_{12} = m_1 n_2 \left(\frac{1}{L_2} \int e_9 dt \right)'$ $e_{13} = b_2 f_{14} + k_2 \int f_{14} dt$
Variables restantes:7 f_1, f_6, f_{14} $e_9, e_{11}, e_{12}, e_{13}$	
Variables eliminadas en este paso: e_2, f_5, f_{15}	
Variables eliminadas anteriormente: $f_2, f_3, f_4, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{16}, f_{17}$ $e_1, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_{10}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}$	

▶ Ejemplo 2

▶ Finalmente simplificamos:

$$nf_1 = b_1 f_6 + k_1 \int f_6 dt$$ $$\frac{1}{n}V = \frac{1}{L_2}\int e_9 dt + f_6$$ $$b_1 f_6 + k_1 \int f_6 dt = e_9 + n_2 e_{11}$$ $$n_2 \frac{1}{L_2}\int e_9 dt = f_{14} + \frac{1}{m_2}\int e_{13} dt$$	$$e_{11} = e_{12} + e_{13}$$ $$e_{12} = m_1 n_2 \left(\frac{1}{L_2}\int e_9 dt\right)'$$ $$e_{13} = b_2 f_{14} + k_2 \int f_{14} dt$$
Substituimos e_{12} y e_{13}, también despejamos f_6 y substituimos en la primera ecuación.	

Ejemplo 2

- Finalmente simplificamos:

$$n f_1 = b_1 \frac{1}{n} V - \frac{1}{L_2} \int e_9 dt + k_1 \int \frac{1}{n} V - \frac{1}{L_2} \int e_9 dt\, dt$$ $$b_1 \frac{1}{n} V - \frac{1}{L_2} \int e_9 dt + k_1 \int \frac{1}{n} V - \frac{1}{L_2} \int e_9 dt\, dt = e_9 + n_2 e_{11}$$ $$n_2 \frac{1}{L_2} \int e_9 dt = f_{14} + \frac{1}{m_2} \int b_2 f_{14} + k_2 \int f_{14} dt\, dt$$ $$e_{11} = m_1 n_2 \left(\frac{1}{L_2} \int e_9 dt \right)' + b_2 f_{14} + k_2 \int f_{14} dt$$
Variables restantes:4 f_1, f_{14} e_9, e_{11}
Variables eliminadas en este paso: e_{12} , e_{13}, f_6
Variables eliminadas anteriormente: $f_2, f_3, f_4, f_5, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{15}, f_{16}, f_{17}$ $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_{10}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}$

▶ Ejemplo 2

▶ Finalmente simplificamos:

$$nf_1 = b_1\left(\frac{1}{n}V - \frac{1}{L_2}\int e_9 dt\right) + k_1\int \frac{1}{n}V - \frac{1}{L_2}\int e_9 dt\, dt$$

$$nf_1 = e_9 + n_2 e_{11}$$

$$n_2\frac{1}{L_2}\int e_9 dt = f_{14} + \frac{1}{m_2}\int b_2 f_{14} + k_2\int f_{14} dt\ dt$$

$$e_{11} = m_1 n_2\left(\frac{1}{L_2}\int e_9 dt\right)' + b_2 f_{14} + k_2\int f_{14} dt$$

En la primera ecuación aparece una integral con dos sumandos, el primero lo podemos resolver puesto que únicamente está formada por constantes. La segunda parte nos quedará una integral doble. Actuamos de forma parecida en la tercera ecuación, con la integral doble. Atención, aquí no podemos resolver puesto que f_{14} depende del tiempo.

En la segunda ecuación substituimos el término izquierdo por nf_1 puesto que se repite de la primera.

Substituimos e_{11} de la cuarta en la segunda (atención al paréntesis).

Ejemplo 2

- Finalmente simplificamos:

$$nf_1 = b_1\left(\frac{1}{n}V - \frac{1}{L_2}\int e_9 dt\right) + \frac{k_1 V}{n}\,t - k_1\frac{1}{L_2}\int\int e_9 dt\,dt$$

$$e_9 = nf_1 - n_2\left(m_1 n_2\left(\frac{1}{L_2}\int e_9 dt\right)' + b_2 f_{14} + k_2\int f_{14} dt\right)$$

$$n_2\frac{1}{L_2}\int e_9 dt = f_{14} + \frac{b_2}{m_2}\int f_{14} dt + \frac{k_2}{m_2}\int\int f_{14} dt\ dt$$

Variables restantes:4

f_1, f_{14}

e_9

Variables eliminadas en este paso: e_{11}

Variables eliminadas anteriormente:

$f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{15}, f_{16}, f_{17}$

$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}$

▶ Ejemplo 2

▶ Finalmente simplificamos:

En virtud del teorema fundamental del cálculo tenemos que $\left(\frac{1}{L_2}\int e_9 dt\right)' = \frac{e_9}{L_2}$.En la segunda ecuación:

$$e_9\left(1+\frac{n_2^2 m_1}{L_2}\right) = e_9 + n_2^2 m_1 \frac{e_9}{L_2} = nf_1 - n_2\left(b_2 f_{14} + k_2\int f_{14}dt\right)$$

$$e_9 = \frac{nf_1}{L_2+n_2^2 m_1} + \frac{-n_2 L_2}{L_2+n_2^2 m_1}\left(b_2 f_{14} + k_2\int f_{14}dt\right)$$

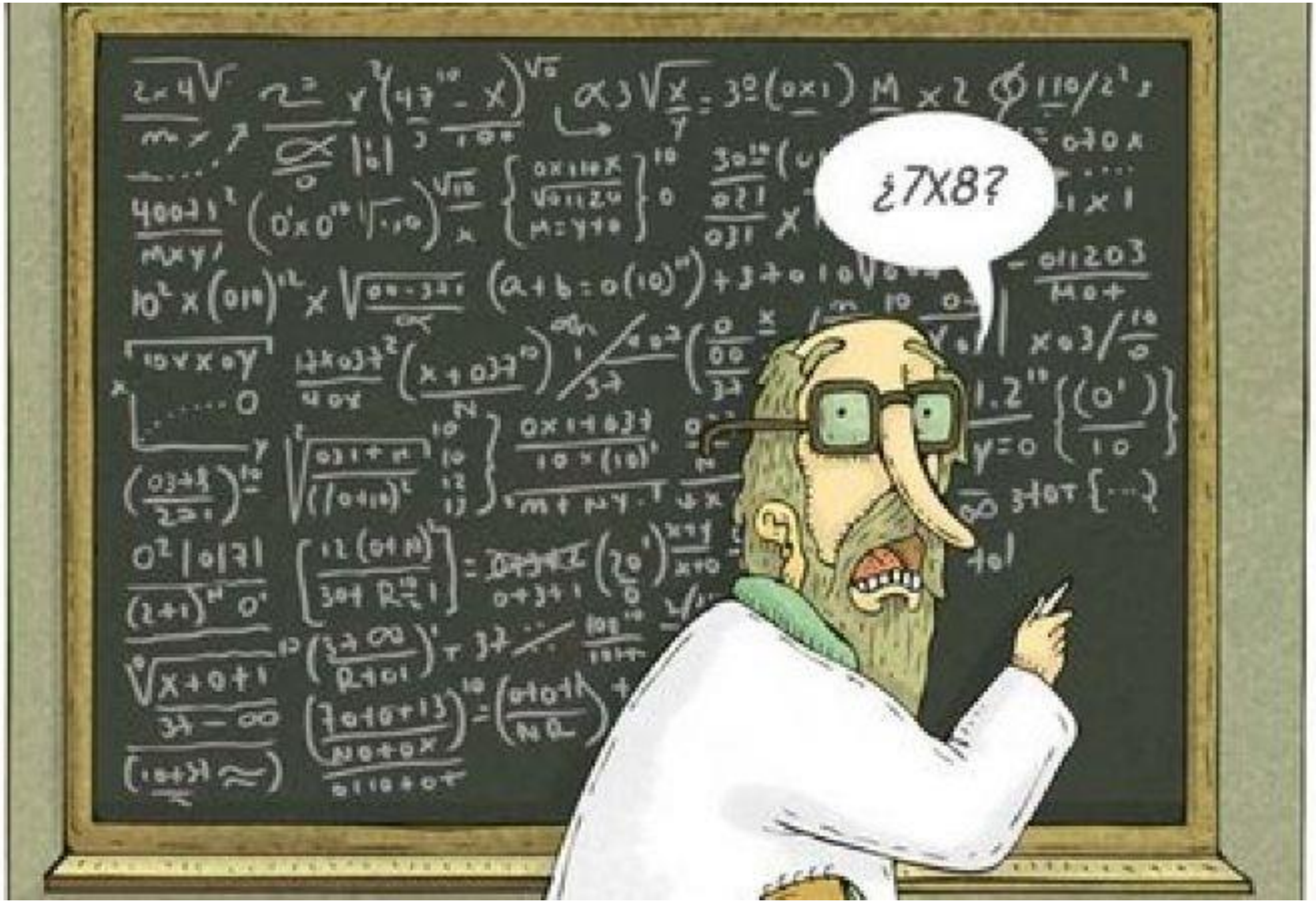
Nos quedarían las ecuaciones:

$$nf_1 = b_1\left(\frac{1}{n}V - \frac{1}{L_2}\int \frac{nf_1}{L_2+n_2^2 m_1} + \frac{-n_2 L_2}{L_2+n_2^2 m_1}\left(b_2 f_{14} + k_2\int f_{14}dt\right)dt\right) + \frac{k_1 V}{n}t$$
$$- k_1\frac{1}{L_2}\int\int \frac{nf_1}{L_2+n_2^2 m_1} + \frac{-n_2 L_2}{L_2+n_2^2 m_1}\left(b_2 f_{14} + k_2\int f_{14}dt\right)dt\,dt$$

$$n_2\frac{1}{L_2}\int \frac{nf_1}{L_2+n_2^2 m_1} + \frac{-n_2 L_2}{L_2+n_2^2 m_1}\left(b_2 f_{14} + k_2\int f_{14}dt\right)dt = f_{14} + \frac{b_2}{m_2}\int f_{14}dt + \frac{k_2}{m_2}\int\int f_{14}dt\ dt$$

Que dependen únicamente de las variables f_1 y f_{14}.

► ¿Dudas?



UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

unir

www.unir.net