

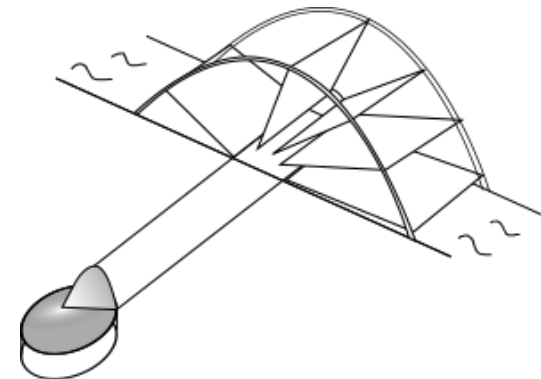
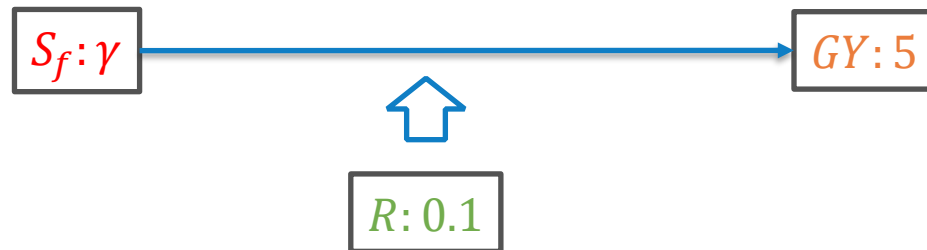
# Modelado y simulación numérica

Daniel Pérez Palau

## ► Resolución Actividad 1: Modelado de un sistema físico

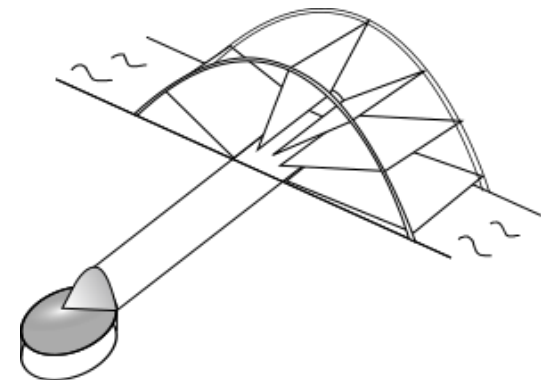
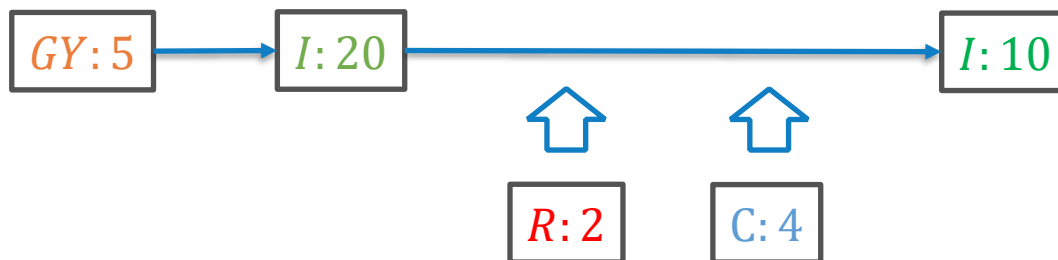
# Enunciado

- ▶ La esclusa que se encuentra aguas arriba se modeliza como una **fuentes de flujo** que genera un flujo  $\gamma \text{ m}^3/\text{s}$  que se puede regular.
- ▶ El canal por el que desciende el agua no es perfecto. Las deformidades del borde provocan unas **perdidas** por fricción con constante de rozamiento de  $0.1 \text{ kg m}^{(-4)} \text{ s}^{(-1)}$ .
- ▶ Las aspas del molino transforman la energía del sistema de fluidos a un sistema mecánico de rotación. Se pueden considerar como un **girador** con constante  $5 \text{ kg s}^{(-1)} \text{ m}^{(-1)}$ .



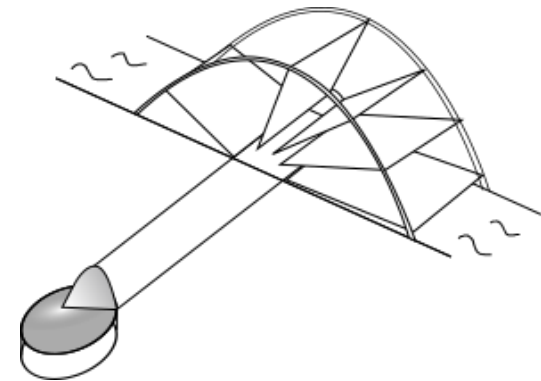
# Enunciado 2ª parte

- ▶ Las aspas del molino transforman la energía del sistema de fluidos a un sistema mecánico de rotación. Se pueden considerar como un **girador** con constante  $5 \text{ kg s}^{(-1)} \text{ m}^{(-1)}$ .
- ▶ La rotación de las aspas se considera como una **inercia** de  $20 \text{ kg m}^2$ .
- ▶ Para representar las pérdidas producidas en el molino se emplea un conjunto de **resistencia** y **resorte** con parámetros  $2 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{(-1)}$  y  $4 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{(-2)}$  respectivamente.
- ▶ Después de considerar las pérdidas se transmite la energía al eje de transmisión (una masa en rotación con una **inercia** de  $10 \text{ kg m}^2$ ).



# Enunciado 2ª parte

- ▶ Después de considerar las pérdidas se transmite la energía al eje de transmisión (una masa en rotación con una **inercia** de  $10 \text{ kg m}^2$ ).
- ▶ Finalmente, se cambia el eje de rotación mediante una rueda dentada cónica (**transformador**) con una relación de **0.8**. La muela tiene una **inercia** de  $20 \text{ kg m}^2$ .



# Paso 1

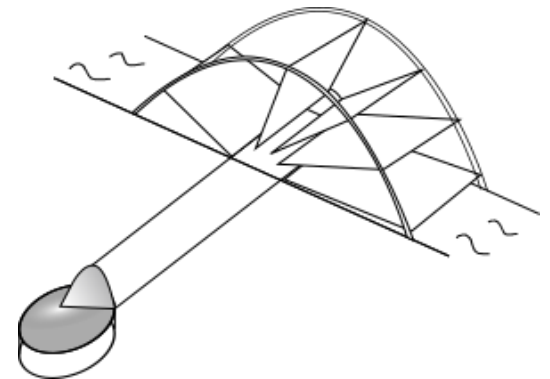
Determinar los dominios físicos que existen en el sistema y todos los elementos básicos. Asignar a cada elemento un nombre único para distinguirlos de los demás.

Dominio de fluidos (hidrodinámico)

- Fuente de flujo  $S_f: \gamma$
- Resistencia (rugosidades):  $R: 0,1$
- Girador:  $GY: 5$

Dominio mecánico de rotación:

- Girador:  $GY: 5$
- Inercia (aspas):  $I: 20$
- Resistencia:  $R: 2$
- Capacitador (muelles):  $C: 4$
- Inercia (tronco de transmisión):  $I: 10$
- Transformador:  $TR: 0.8$
- Inercia (muela):  $I: 20$

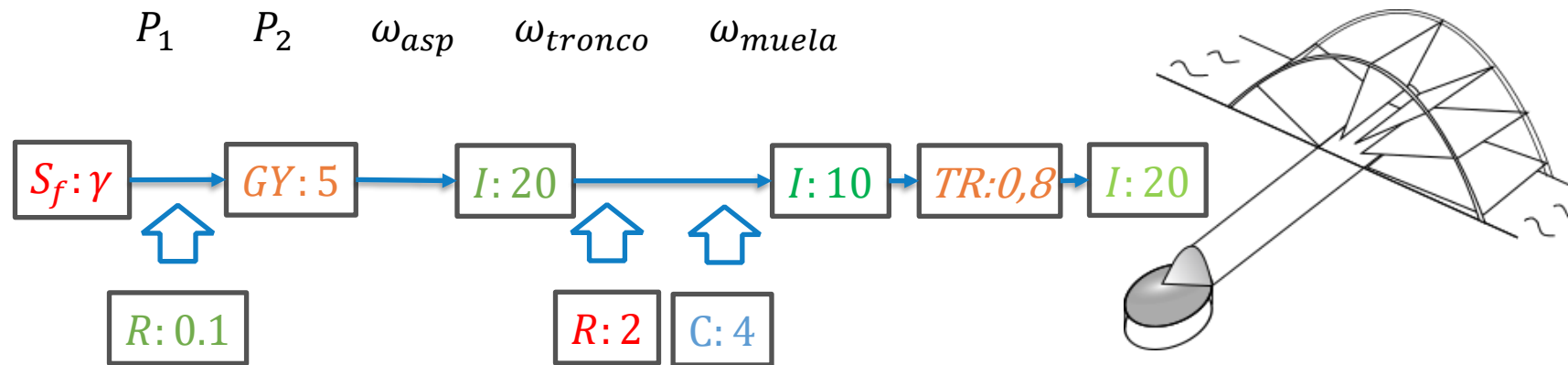


# Paso 2 y 3

Paso 2: indicar una variable de esfuerzo/flujo de referencia en el dominio de fluidos/mecánico

- En fluidos, la presión de referencia después de la fuente.
- En rotación, velocidad angular de referencia después de las aspas

Paso 3: Identificar el resto de las presiones/velocidades y asignarles un nombre único



# Paso 4-7 (por tramos)

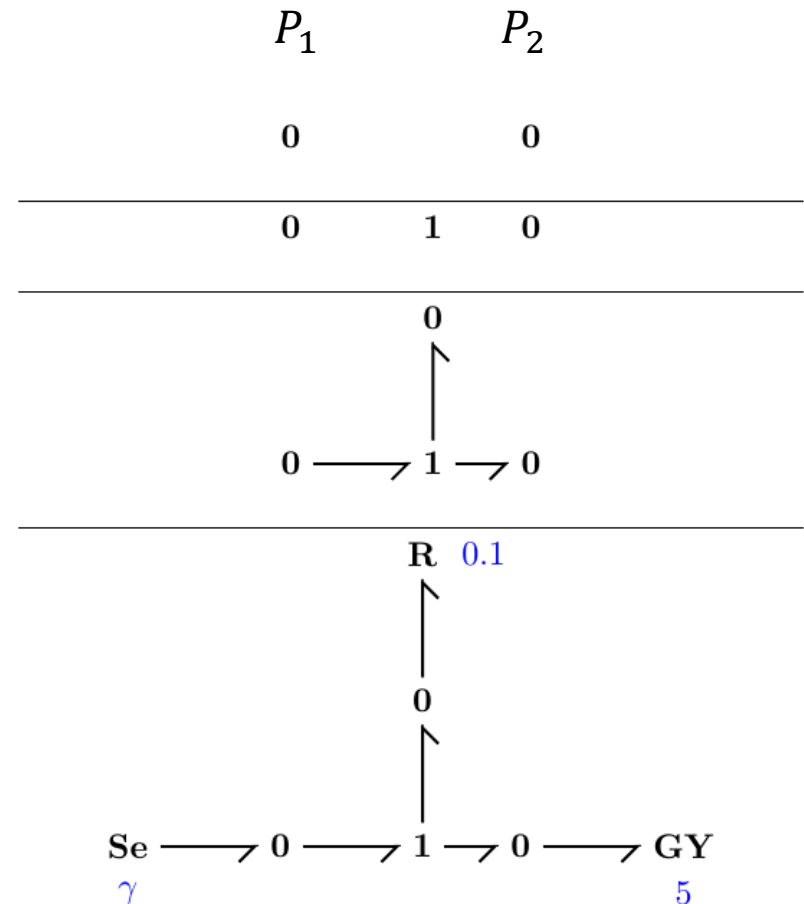
## Fluidos

**Paso 4:** Dibujar las presiones mediante uniones 0

**Paso 5:** Identificar las diferencias de presión para conectar los puertos de todos los elementos.

**Paso 6:** construir las diferencias de presión usando un nodo tipo 1.

**Paso 7:** Conectar los puertos de todos los elementos con las uniones 0.



# Paso 4-7 (por tramos)

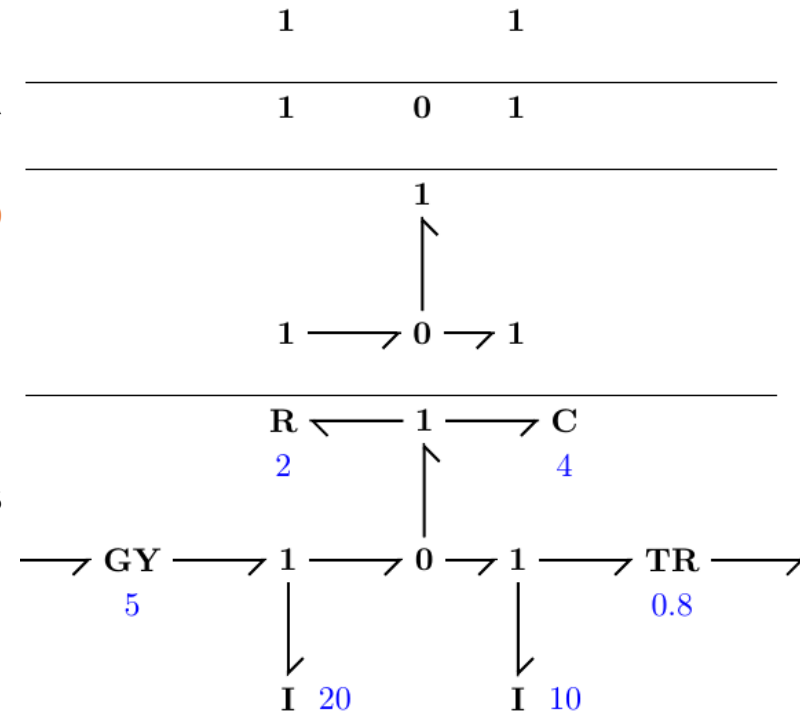
## Mecánico de rotación 1

**Paso 4:** Dibujar los flujos mediante uniones 1

**Paso 5:** Identificar las diferencias de flujo para conectar los puertos de todos los elementos.

**Paso 6:** construir las diferencias de flujo usando un nodo tipo 0.

**Paso 7:** Conectar los puertos de todos los elementos con las uniones 1.





# Paso 4-7 (por tramos)

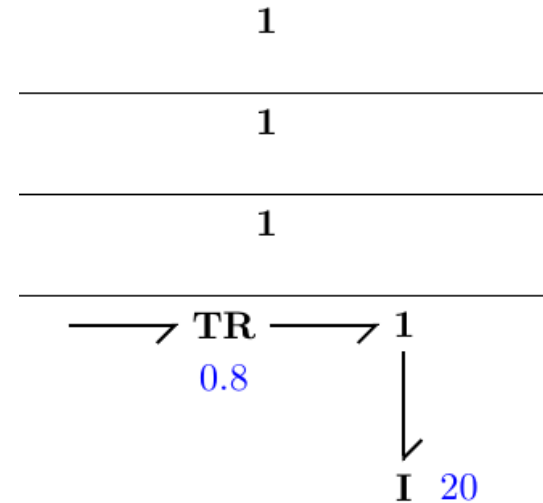
## Mecánico de rotación 2

**Paso 4:** Dibujar los flujos mediante uniones 1

**Paso 5:** Identificar las diferencias de flujo para conectar los puertos de todos los elementos.

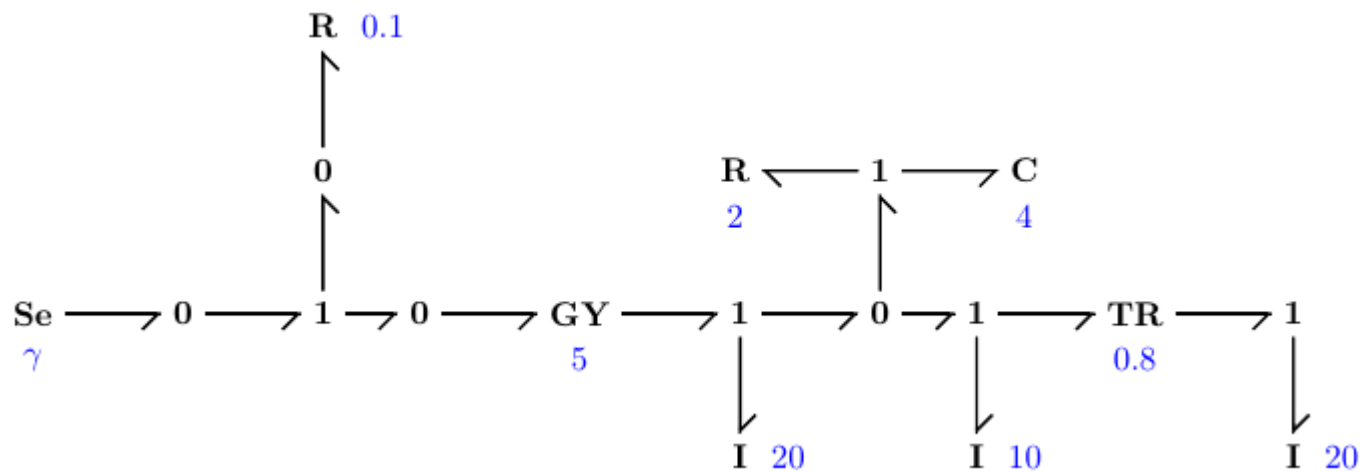
**Paso 6:** construir las diferencias de flujo usando un nodo tipo 0.

**Paso 7:** Conectar los puertos de todos los elementos con las uniones 1.



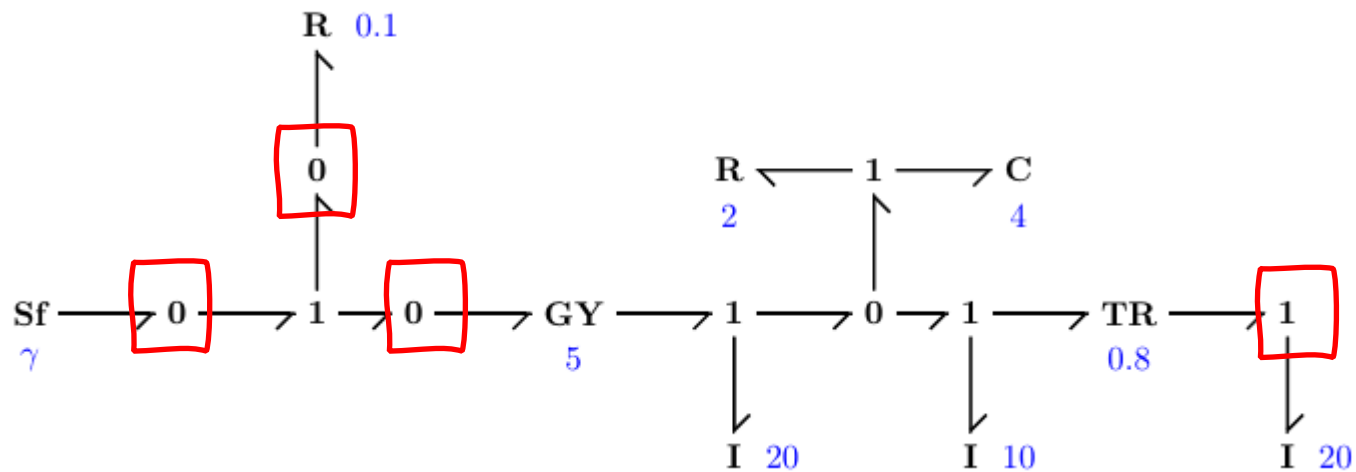
# Paso 4-7 (por tramos)

Juntando todo lo anterior



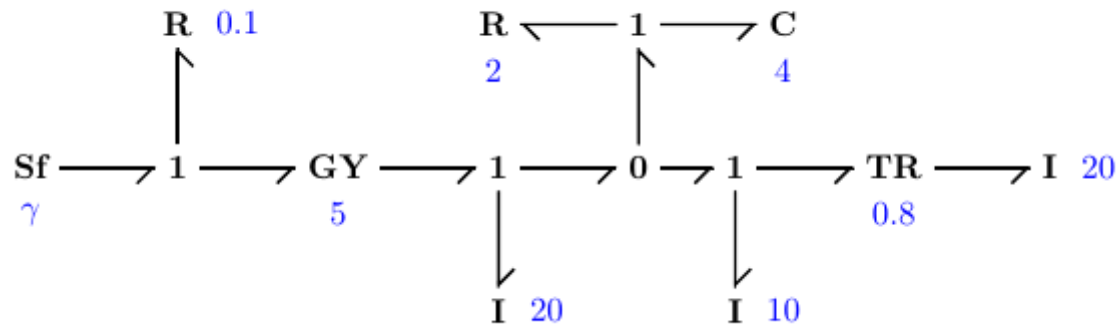
# Paso 8

## Simplificación del grafo



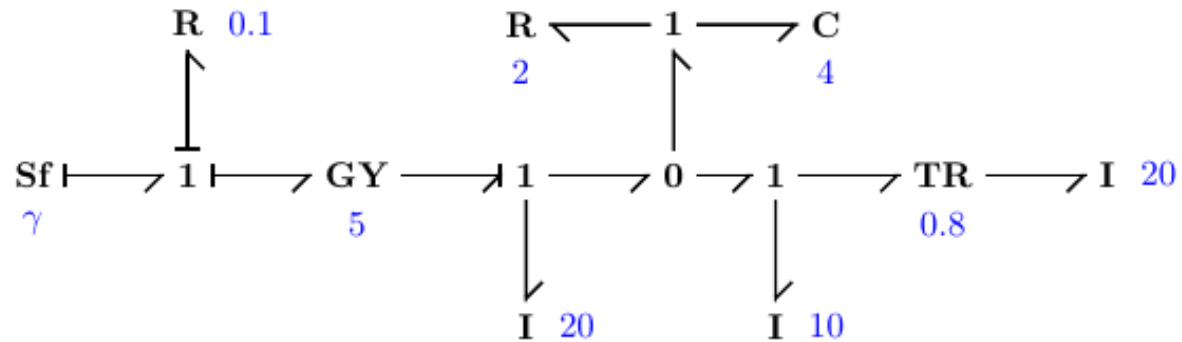
# Paso 8

## Simplificación del grafo



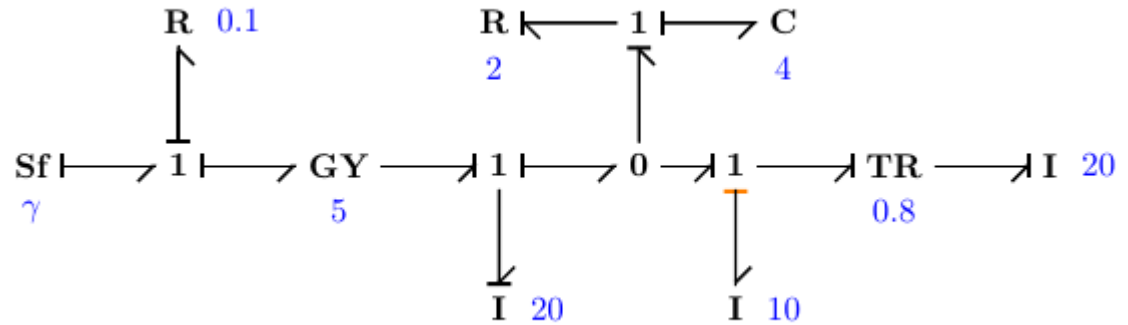
# Paso 9

Asignar causalidades (obligatorias)

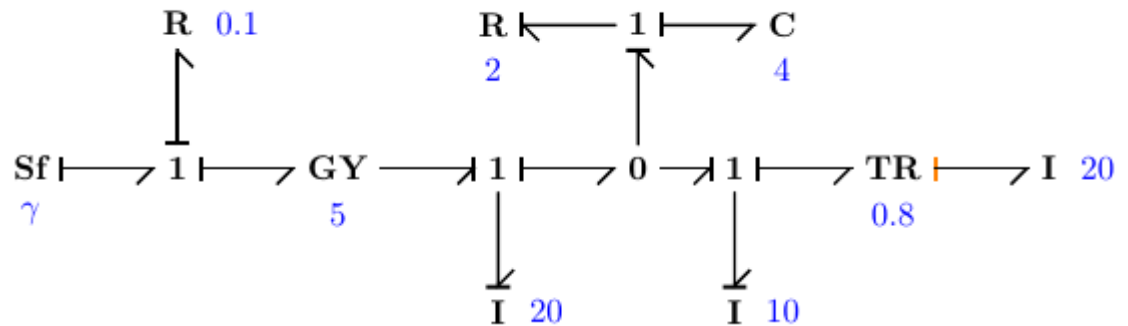


# Paso 9

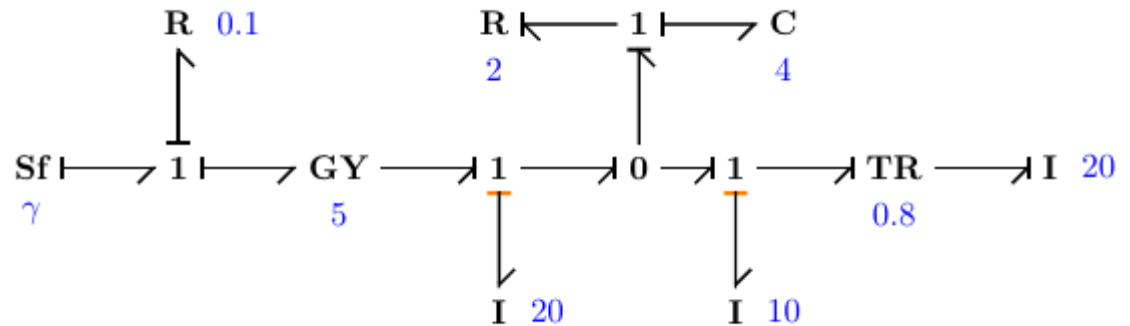
Caso 1.a



Caso 1.b



Caso 2

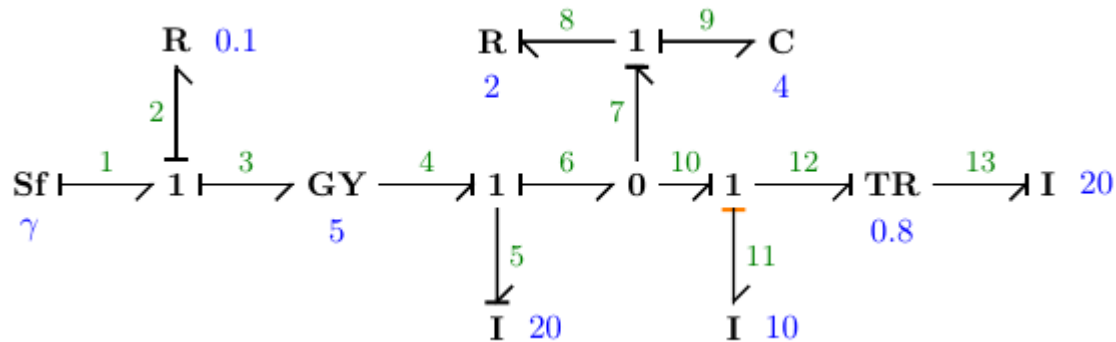


# Paso 10

Extraer ecuaciones

$$f_7 = f_8 = f_9$$

$$e_7 = e_8 + e_9$$



$$f_1 = \gamma$$

$$f_1 = f_2 = f_3$$

$$e_1 = e_2 + e_3$$

$$f_4 = f_5 = f_6$$

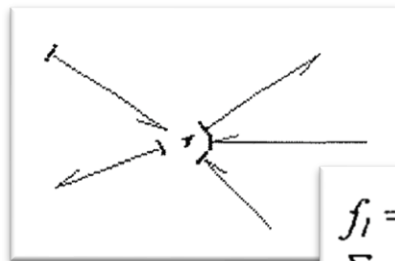
$$e_4 = e_5 + e_6$$

$$f_{10} = f_{11} = f_{12}$$

$$e_{10} = e_{11} + e_{12}$$

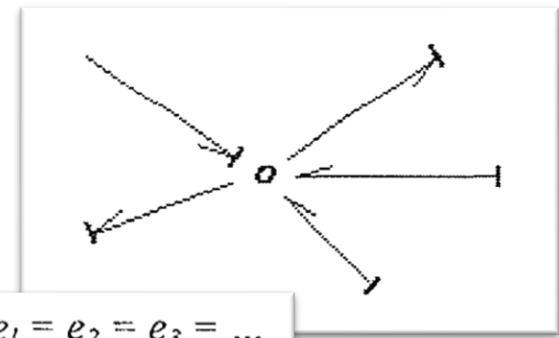
$$e_6 = e_7 = e_{10}$$

$$f_6 = f_7 + f_{10}$$



$$f_1 = f_2 = f_3 = \dots$$

$$\sum e_{ent.} = \sum e_{sal.}$$

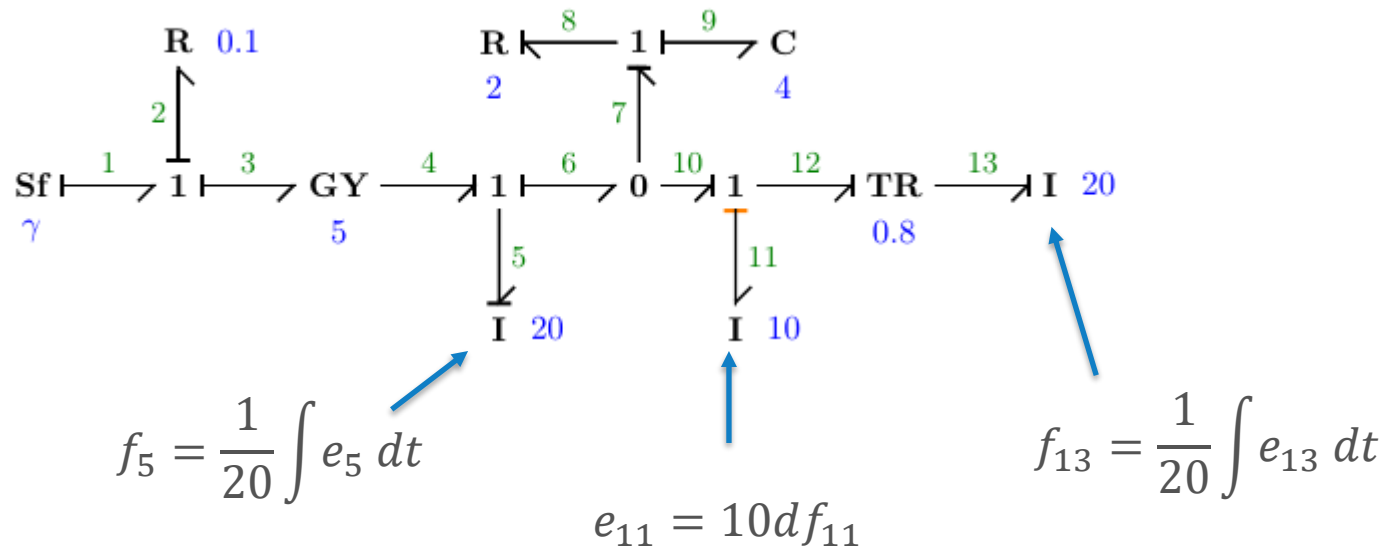


$$e_1 = e_2 = e_3 = \dots$$

$$\sum f_{ent.} = \sum f_{sal.}$$

# Paso 10

Extraer ecuaciones



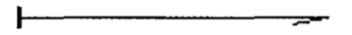
Causalidad preferencial



(Causalidad esfuerzo)

$$flujo = 1/m \cdot \int esfuerzo \cdot dt$$

Causalidad **no** preferencial

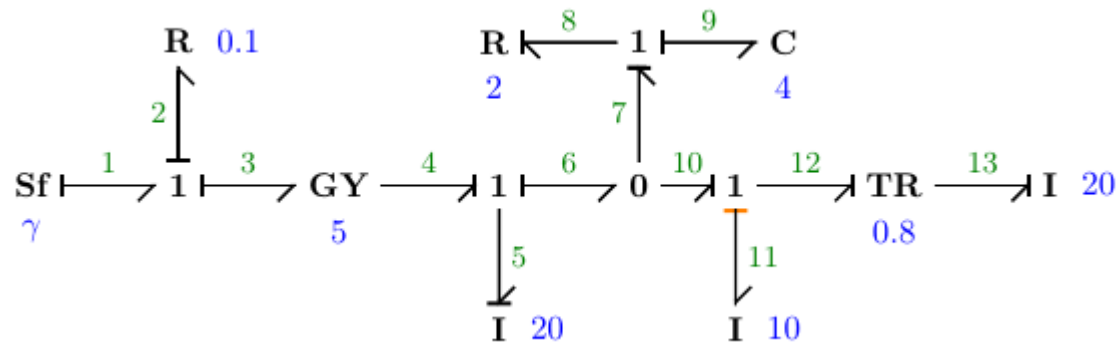


$$esfuerzo = m \cdot d(flujo)/dt$$



# Paso 10

Extraer ecuaciones



$$e_4 = 5f_3$$

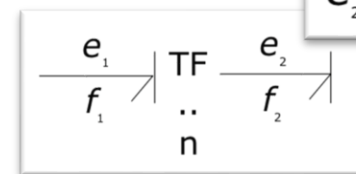
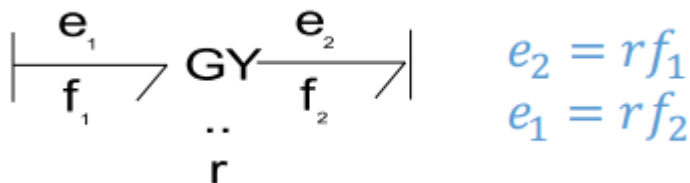
$$e_3 = 5f_4$$

$$f_{12} = f_{13}/0,8$$

$$e_{13} = e_{12}/0,8$$

$$f_1 = f_2/n$$

$$e_2 = e_1/n$$



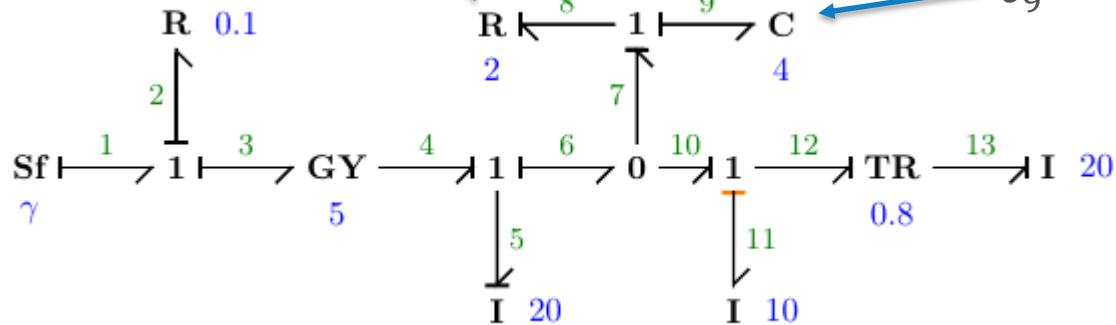
# Paso 10

Extraer ecuaciones

$$0,1f_2 = e_2$$

$$f_8 = \frac{e_8}{8}$$

$$e_9 = 4 \int f_9 dt$$



$$f = \frac{1}{R} e$$

$$R : R \left| \begin{array}{l} e \\ f \end{array} \right.$$

Causalidad preferencial

$$\text{---} \rightarrow C \quad \text{esfuerzo} = C \cdot \int \text{flujo} \cdot dt$$

(Causalidad flujo)

# Paso 10

Extraer ecuaciones:

$\begin{aligned}f_1 &= \gamma \\f_1 &= f_2 = f_3 \\e_1 &= e_2 + e_3 \\f_4 &= f_5 = f_6 \\e_4 &= e_5 + e_6 \\e_6 &= e_7 = e_{10} \\f_6 &= f_7 + f_{10} \\f_7 &= f_8 = f_9 \\e_7 &= e_8 + e_9 \\f_{10} &= f_{11} = f_{12} \\e_{10} &= e_{11} + e_{12}\end{aligned}$	$\begin{aligned}f_5 &= \frac{1}{20} \int e_5 \, dt \\e_{11} &= 10df_{11} \\f_{13} &= \frac{1}{20} \int e_{13} \, dt \\e_9 &= 4 \int f_9 \, dt \\f_8 &= \frac{e_8}{8} \\f_2/10 &= e_2\end{aligned}$	$\begin{aligned}e_4 &= 5f_3 \\e_3 &= 5f_4 \\f_{12} &= 5f_{13}/4 \\e_{13} &= 5e_{12}/4\end{aligned}$

# Paso 11

Finalmente simplificamos:

$\begin{aligned}f_1 &= \gamma \\f_1 &= f_2 = f_3 \\e_1 &= e_2 + e_3 \\f_4 &= f_5 = f_6 \\e_4 &= e_5 + e_6 \\e_6 &= e_7 = e_{10} \\f_6 &= f_7 + f_{10} \\f_7 &= f_8 = f_9 \\e_7 &= e_8 + e_9 \\f_{10} &= f_{11} = f_{12} \\e_{10} &= e_{11} + e_{12}\end{aligned}$	$\begin{aligned}f_5 &= \frac{1}{20} \int e_5 dt \\e_{11} &= 10df_{11} \\f_{13} &= \frac{1}{20} \int e_{13} dt \\e_9 &= 4 \int f_9 dt \\f_8 &= \frac{e_8}{8} \\f_2/10 &= e_2\end{aligned}$	$\begin{aligned}e_4 &= 5f_3 \\e_3 &= 5f_4 \\f_{12} &= 5f_{13}/4 \\e_{13} &= 5e_{12}/4\end{aligned}$
En el primer paso de la simplificación de ecuaciones tomaremos las igualdades de nodos 0 y 1 y nos quedaremos con el subíndice menor		

# Paso 11

Finalmente simplificamos:

$e_1 = e_2 + e_3$ $e_4 = e_5 + e_6$ $f_4 = f_7 + f_{10}$ $e_6 = e_8 + e_9$ $e_6 = e_{11} + e_{12}$	$f_4 = \frac{1}{20} \int e_5 dt$ $e_{11} = 10df_{10}$ $f_{13} = \frac{1}{20} \int e_{13} dt$ $e_9 = 4 \int f_7 dt$ $f_7 = \frac{e_8}{8}$ $\gamma/10 = e_2$	$e_4 = 5\gamma$ $e_3 = 5f_4$ $f_{10} = 5f_{13}/4$ $e_{13} = 5e_{12}/4$
<p>Variables restantes: 15</p> $f_4, f_7, f_{10}, f_{13}$ $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, e_9, e_{11}, e_{12}, e_{13}$		
<p>Variables eliminadas:</p> $f_1, f_2, f_3, f_5, f_6, f_8, f_9, f_{11}, f_{12}$ $e_7, e_{10}$		

# Paso 11

Finalmente simplificamos:

$e_1 = e_2 + e_3$ $e_4 = e_5 + e_6$ $f_4 = f_7 + f_{10}$ $e_6 = e_8 + e_9$ $e_6 = e_{11} + e_{12}$	$f_4 = \frac{1}{20} \int e_5 dt$ $e_{11} = 10df_{10}$ $f_{13} = \frac{1}{20} \int e_{13} dt$ $e_9 = 4 \int f_7 dt$ $f_7 = \frac{e_8}{8}$ $\gamma/10 = e_2$	$e_4 = 5\gamma$ $e_3 = 5f_4$ $f_{10} = 5f_{13}/4$ $e_{13} = 5e_{12}/4$
Realizamos la substitución de $f_4, e_{11}, f_{13}, f_7$ y $e_2$		

# Paso 11

Finalmente simplificamos:

$e_1 = \frac{\gamma}{10} + e_3$ $e_4 = e_5 + e_6$ $\frac{1}{20} \int e_5 dt = \frac{e_8}{8} + f_{10}$ $e_6 = e_8 + e_9$ $e_6 = 10df_{10} + e_{12}$	$e_9 = 4 \int \frac{e_8}{8} dt$	$e_4 = 5\gamma$ $e_3 = 5 \frac{1}{20} \int e_5 dt$ $f_{10} = \frac{5}{4} \frac{1}{20} \int e_{13} dt$ $e_{13} = 5e_{12}/4$
<p>Variables restantes: 10</p> $f_{10}$ $e_1, e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, e_9, e_{12}, e_{13}$		
<p>Variables eliminadas:</p> $f_1, f_2, f_3, f_5, f_6, f_8, f_9, f_{11}, f_{12}, f_4, f_{13}, f_7$ $e_7, e_{10}, e_2, e_{11}$		

# Paso 11

Finalmente simplificamos:

$e_1 = \frac{\gamma}{10} + e_3$ $e_4 = e_5 + e_6$ $\frac{1}{20} \int e_5 dt = \frac{e_8}{8} + f_{10}$ $e_6 = e_8 + e_9$ $e_6 = 10df_{10} + e_{12}$	$e_9 = 4 \int \frac{e_8}{8} dt$	$e_4 = 5\gamma$ $e_3 = \frac{1}{4} \int e_5 dt$ $f_{10} = \frac{1}{16} \int e_{13} dt$ $e_{13} = 5e_{12}/4$
Operamos		



# Paso 11

Finalmente simplificamos:

$e_1 = \frac{\gamma}{10} + e_3$ $e_4 = e_5 + e_6$ $\frac{1}{20} \int e_5 dt = \frac{e_8}{8} + f_{10}$ $e_6 = e_8 + e_9$ $e_6 = 10df_{10} + e_{12}$	$e_9 = 4 \int \frac{e_8}{8} dt$	$e_4 = 5\gamma$ $e_3 = \frac{1}{4} \int e_5 dt$ $f_{10} = \frac{1}{16} \int e_{13} dt$ $e_{13} = 5e_{12}/4$
Eliminamos $e_9, e_4, f_{10}$ y $e_3$		

# Paso 11

Finalmente simplificamos:

$e_1 = \frac{\gamma}{10} + \frac{1}{4} \int e_5 dt$ $5\gamma = e_5 + e_6$ $\frac{1}{20} \int e_5 dt = \frac{e_8}{8} + \frac{1}{16} \int e_{13} dt$ $e_6 = e_8 + 4 \int \frac{e_8}{8} dt$ $e_6 = 10d \frac{1}{16} \int e_{13} dt + e_{12}$	$e_{13} = 5e_{12}/4$
<p>Variables restantes: 6</p> <p><math>e_1, e_5, e_6, e_8, e_{12}, e_{13}</math></p>	
<p>Variables eliminadas:</p> <p><math>f_1, f_2, f_3, f_5, f_6, f_8, f_9, f_{11}, f_{12}, f_4, f_{13}, f_7, f_{10}</math></p> <p><math>e_7, e_{10}, e_2, e_{11}, e_9, e_3, e_4</math></p>	

# Paso 11

Finalmente simplificamos:

$$e_1 = \frac{\gamma}{10} + \frac{1}{4} \int e_5 dt$$

$$5\gamma = e_5 + e_6$$

$$\frac{1}{20} \int e_5 dt = \frac{e_8}{8} + \frac{1}{16} \int e_{13} dt$$

$$e_6 = e_8 + \int \frac{e_8}{2} dt$$

$$e_6 = \frac{5}{8} e_{13} + e_{12}$$

$$e_{13} = 5e_{12}/4$$

Operamos:

$$10d \frac{1}{16} \int e_{13} dt = \frac{5}{8} e_{13}$$

# Paso 11

Finalmente simplificamos:

$$e_1 = \frac{\gamma}{10} + \frac{1}{4} \int e_5 dt$$

$$5\gamma = e_5 + e_6$$

$$\frac{1}{20} \int e_5 dt = \frac{e_8}{8} + \frac{1}{16} \int e_{13} dt$$

$$e_6 = e_8 + \int \frac{e_8}{2} dt$$

$$e_6 = \frac{5}{8} e_{13} + e_{12}$$

$$e_{13} = 5e_{12}/4$$

Eliminamos  $e_6$  y  $e_{13}$

# Paso 11

Finalmente simplificamos:

$$e_1 = \frac{\gamma}{10} + \frac{1}{4} \int e_5 dt$$

$$5\gamma = e_5 + e_8 + \int \frac{e_8}{2} dt$$

$$\frac{1}{20} \int e_5 dt = \frac{e_8}{8} + \frac{1}{16} \int \frac{5e_{12}}{4} dt$$

$$e_8 + \int \frac{e_8}{2} dt = \frac{5}{8} \frac{5e_{12}}{4} + e_{12}$$

Variables restantes: 4

$$e_1, e_5, e_8, e_{12}$$

Variables eliminadas:

$$f_1, f_2, f_3, f_5, f_6, f_8, f_9, f_{11}, f_{12}, f_4, f_{13}, f_7, f_{10}$$

$$e_7, e_{10}, e_2, e_{11}, e_9, e_3, e_4, e_6, e_{13}$$

# Paso 11

Finalmente simplificamos:

$$e_1 = \frac{\gamma}{10} + \frac{1}{4} \int e_5 dt$$

$$5\gamma = e_5 + e_8 + \int \frac{e_8}{2} dt$$

$$\frac{1}{20} \int e_5 dt = \frac{e_8}{8} + \frac{5}{64} \int e_{12} dt$$

$$e_8 + \int \frac{e_8}{2} dt = \left( \frac{25}{32} + 1 \right) e_{12} = \frac{57}{32} e_{12}$$

Variables restantes: 4

$$e_1, e_5, e_8, e_{12}$$

Variables eliminadas:

$$f_1, f_2, f_3, f_5, f_6, f_8, f_9, f_{11}, f_{12}, f_4, f_{13}, f_7, f_{10}$$

$$e_7, e_{10}, e_2, e_{11}, e_9, e_3, e_4, e_6, e_{13}$$

# Paso 11

Finalmente simplificamos:

$$e_1 = \frac{\gamma}{10} + \frac{1}{4} \int e_5 dt$$

$$e_5 = 5\gamma - \left( e_8 + \int \frac{e_8}{2} dt \right)$$

$$\frac{1}{20} \int e_5 dt = \frac{e_8}{8} + \frac{5}{64} \int e_{12} dt$$

$$e_8 + \int \frac{e_8}{2} dt = \frac{57}{32} e_{12}$$

Variables restantes: 4

$$e_1, e_5, e_8, e_{12}$$

Variables eliminadas:

$$f_1, f_2, f_3, f_5, f_6, f_8, f_9, f_{11}, f_{12}, f_4, f_{13}, f_7, f_{10} \\ e_7, e_{10}, e_2, e_{11}, e_9, e_3, e_4, e_6, e_{13}$$

# Paso 11

Finalmente simplificamos:

$$e_1 = \frac{\gamma}{10} + \frac{1}{4} \int 5\gamma - \left( e_8 + \int \frac{e_8}{2} dt \right) dt$$
$$\frac{1}{20} \int 5\gamma - \left( e_8 + \int \frac{e_8}{2} dt \right) dt = \frac{e_8}{8} + \frac{5}{64} \int \frac{32}{57} \left( e_8 + \int \frac{e_8}{2} dt \right) dt$$

Variables restantes: 2

$e_1, e_8$

Variables eliminadas:

$f_1, f_2, f_3, f_5, f_6, f_8, f_9, f_{11}, f_{12}, f_4, f_{13}, f_7, f_{10}$   
 $e_7, e_{10}, e_2, e_{11}, e_9, e_3, e_4, e_6, e_{13}, e_5, e_{12}$



# Paso 11

Finalmente simplificamos:

$$e_1 = \frac{\gamma}{10} + \frac{5}{4} \int \gamma dt - \frac{1}{4} \int e_8 dt - \frac{1}{8} \iint e_8 dt dt$$
$$\frac{1}{4} \int \gamma dt - \frac{1}{20} \int e_8 dt - \frac{1}{40} \iint e_8 dt dt = \frac{e_8}{8} + \frac{5}{114} \int e_8 dt + \frac{5}{228} \iint e_8 dt dt$$

# Paso 11

Finalmente simplificamos:

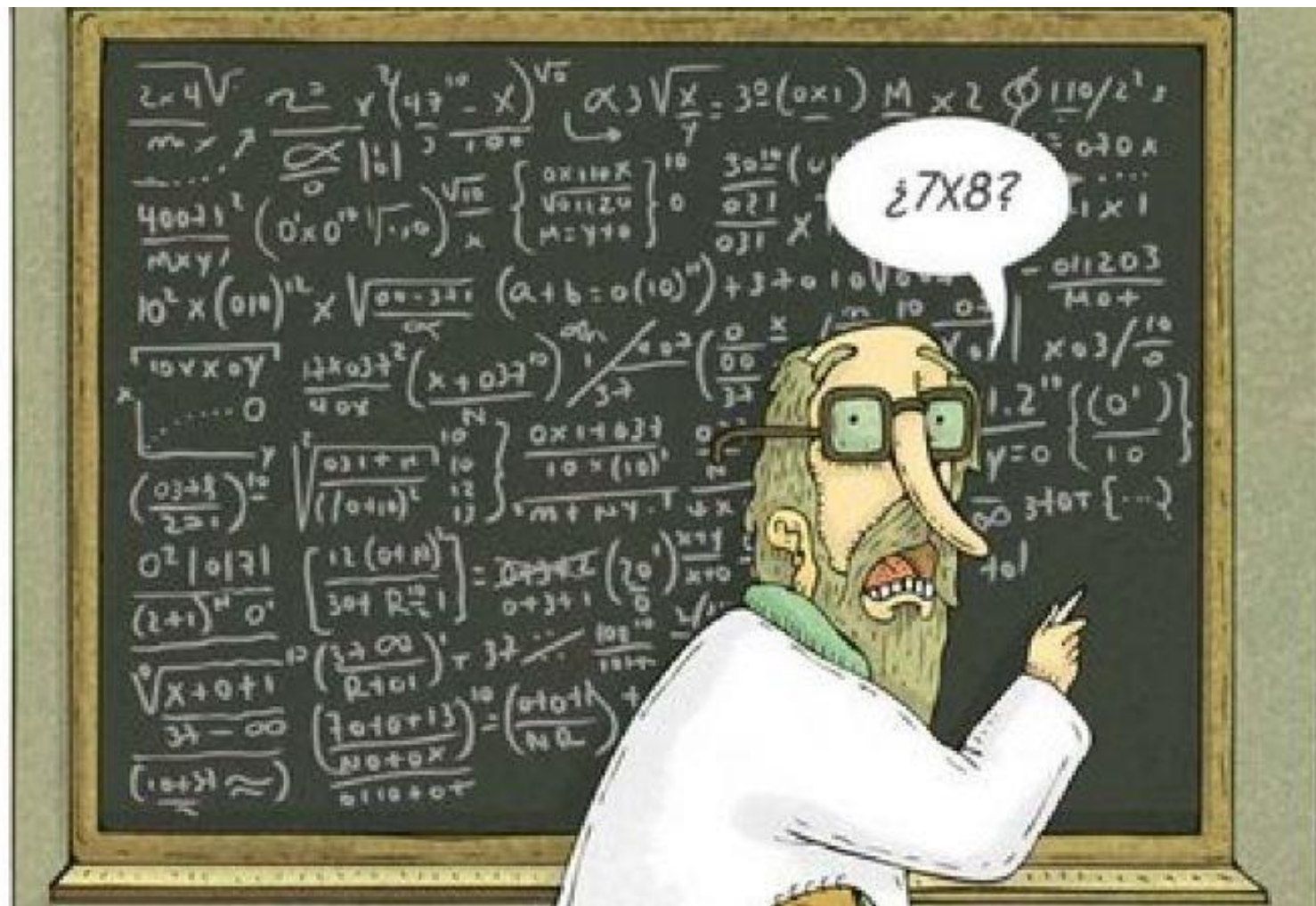
$$e_1 = \frac{\gamma}{10} + \frac{5}{4} \int \gamma dt - \frac{1}{4} \int e_8 dt - \frac{1}{8} \iint e_8 dt dt$$
$$\frac{1}{4} \int \gamma dt = \frac{e_8}{8} + \underbrace{\left( \frac{5}{114} + \frac{1}{20} \right)}_{\frac{107}{1140}} \int e_8 dt + \underbrace{\left( \frac{5}{228} + \frac{1}{40} \right)}_{\frac{107}{2280}} \iint e_8 dt dt$$

# Paso 11

Finalmente simplificamos:

$$e_1 = \frac{\gamma}{10} + \frac{5}{4} \int \gamma dt - \frac{1}{4} \int e_8 dt - \frac{1}{8} \iint e_8 dt dt$$
$$\frac{1}{4} \int \gamma dt = \frac{e_8}{8} + \frac{107}{1140} \int e_8 dt + \frac{107}{2280} \iint e_8 dt dt$$

# ► ¿Dudas?



UNIVERSIDAD  
INTERNACIONAL  
DE LA RIOJA

**unir**

► [www.unir.net](http://www.unir.net)