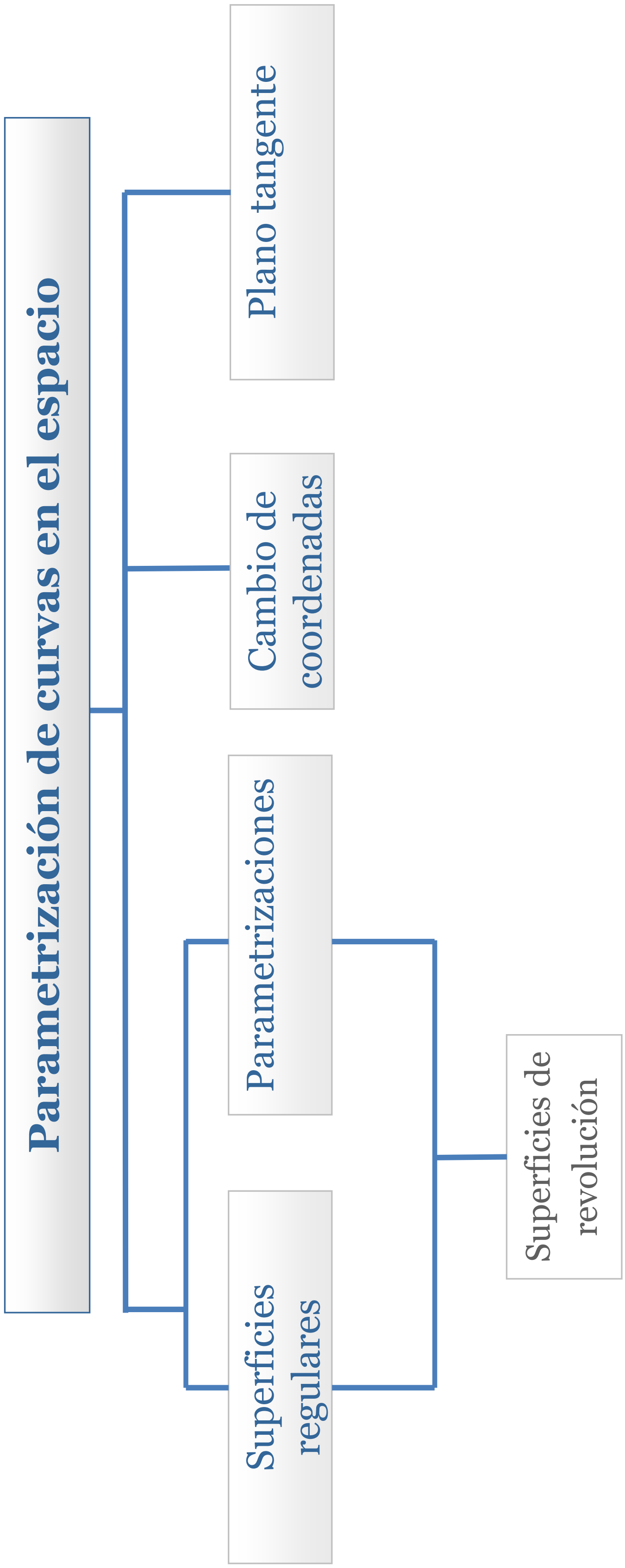
Superficies regulares

TEMA 4

Esquema


Parametrización de curvas en el espacio
Plano tangente
Cambio de coordenadas
Parametrizaciones
Superficies regulares
Superficies de revolución

Ideas clave

4.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

En este tema se estudian qué es una superficie regular y qué es una parametrización. Vamos a ver un tipo de superficie muy común y también cómo se define el plano tangente a una superficie en un punto. Los aspectos más importantes de este tema son:

» Superficies: definición e interpretación intuitiva.
» Parametrización de superficies.
» Cambios de coordenadas.
» Superficies de revolución.
» Plano tangente a una superficie en un punto.

4.2. Definición de superficie. Parametrizaciones

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una **superficie regular** si $\forall\, p \in S, \exists$ un conjunto abierto V en $\mathbb{R}^3$ y una aplicación $\varphi: U \longrightarrow V \cap S$, donde U es un abierto de $\mathbb{R}^2$ tal que:
i) φ es diferenciable.
ii) φ es un homeomorfismo.
iii) $d\varphi_a: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva $\forall\, p \in S$.

Esta es una de las definiciones menos intuitivas que hay en matemáticas. Todos tenemos la idea de lo que es una superficie (una esfera, un plano, etc.) y es complicado ver la relación entre la imagen de superficie que nos hemos formado y esta definición.

La idea es que una superficie es algo que localmente se extiende en dos dimensiones. Por eso, por ejemplo, se puede navegar teniendo en cuenta solo dos variables: longitud y latitud. La aplicación φ precisamente define cómo se pasa de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$. La figura 4.1 representa esta idea.

¿Para qué son importantes las condiciones i), ii) y iii) de la definición de superficie?

- La primera condición garantiza que la matriz jacobiana de la condición tercera existe.
- Un homeomorfismo es una aplicación biyectiva y bicontinua, es decir, nos aseguramos de que cada punto del conjunto tridimensional se corresponde con un único punto abierto del plano y que esto se hace sin saltos. Es decir, que localmente se comporta como un abierto en $\mathbb{R}^2$.
- Hace que la superficie no tenga picos.

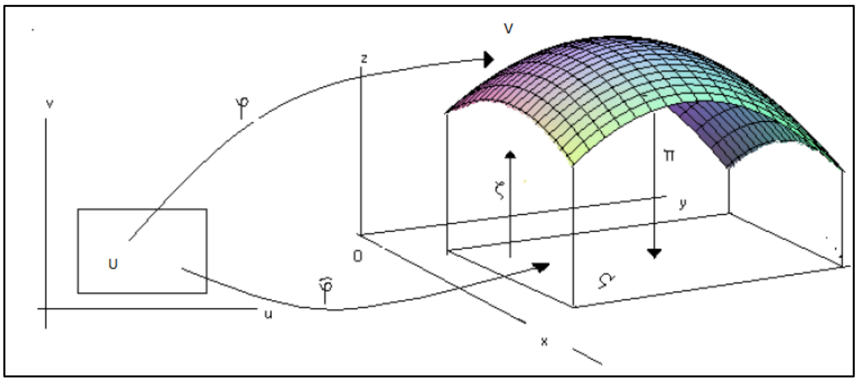


Figura 4.1. Representación de una superficie regular

Fuente: http://www.mat.ucm.es

La aplicación φ de la definición anterior se llama **parametrización** de S en p.

Esto hace que tengamos que restringir un poco más la idea intuitiva de superficie: por ejemplo, un disco abierto en el espacio es superficie regular pero el disco cerrado no.

También debemos descartar todas aquellas figuras que presenten picos y cortes en su superficie.

En este curso vamos a trabajar con funciones no ya diferenciables, sino C^∞.

Sea $q \epsilon S$ superfice regular, sabemos que existe una parametrización φ tal que $q = \varphi(u_0, v_0)$. Entonces, al par (u_0, v_0) se le llama **coordenadas** de q en φ.

Ejemplo:

Vamos a ver una parametrización de la esfera unidad, S^2.

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

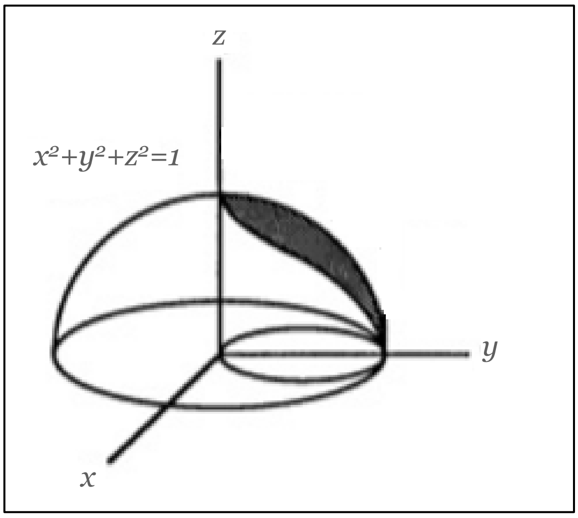


Figura 4.2. Representación de una superficie regular
Fuente: http://www.mat.ucm.es

La parametrización más sencilla de la esfera (aunque no la más utilizada) consiste en despejar una de las componentes, por ejemplo:

» **Caso 1**: $z > 0$

Tomamos $\varphi(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$, donde $\varphi: \{(u, v): u^2 + v^2 < 1\} \longrightarrow S^2 \cap \{z > 0\}$. Es decir, para pasar de tres variables a dos despejamos una de ellas (en este caso z) en la ecuación de la esfera. Veamos que φ es parametrización:

- φ es diferenciable. u y v lo son de forma trivial. Como $1 - u^2 - v^2$ no se anula, también es diferenciable.
- φ es un homeomorfismo.

  Inyectiva: $\varphi(u, v) = \varphi(u', v') \Rightarrow \begin{cases} u = u' \\ v = v' \end{cases}$

  Sobreyectiva: sea $(x, y, z) \in S^2 \cap \{z > 0\}$, $z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2} = \varphi(x, y)$. Entonces (x, y) está en el disco unidad, ya que $x^2 + y^2 = 1 - z^2 < 1$.

Así, si $(x, y, z) \in S^2 \cap \{z > 0\}$, $\varphi^{-1}(x, y, z) = (x, y)$.
φ^{-1} es continua:

$\begin{array}{l} \varphi^{-1}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longrightarrow (x, y) \end{array}$ es una proyección, por tanto es continua.

- $d\varphi$ es inyectiva. Calculamos las derivadas parciales:

  $\varphi_u = (1, 0, *)$.
  $\varphi_v = (0, 1, *)$.

  No hace falta calcular la derivada de la tercera componente, ya sabiendo que $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1 \neq 0 \Rightarrow d\varphi$ es inyectiva.

Para completar la prueba habría que hacer lo mismo en los siguientes casos.

- **Caso 2**: $z < 0$, $\varphi(u, v) = (u, v, -\sqrt{1 - u^2 - v^2})$. Con estos dos casos dejaríamos toda la esfera cubierta salvo la circunferencia $\{x^2 + y^2 = 1\}$. Para cubrir toda la esfera consideramos además.
- **Caso 3**: $y > 0$, $\varphi(u, v) = (u, \sqrt{1 - u^2 - v^2}, v)$.
- **Caso 4**: $y < 0$, $\varphi(u, v) = (u, -\sqrt{1 - u^2 - v^2}, v)$.
- **Caso 5**: $x > 0$, $\varphi(u, v) = (\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v)$.
- **Caso 6**: $x > 0$, $\varphi(u, v) = (-\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v)$.

Como el resto de casos son completamente análogos al primero, se dejan como ejercicio.

4.3. Cambios de coordenadas

Sea una superficie S con dos parametrizaciones, φ y ψ, $\varphi: V \longrightarrow S$, $\psi: U \longrightarrow S$.

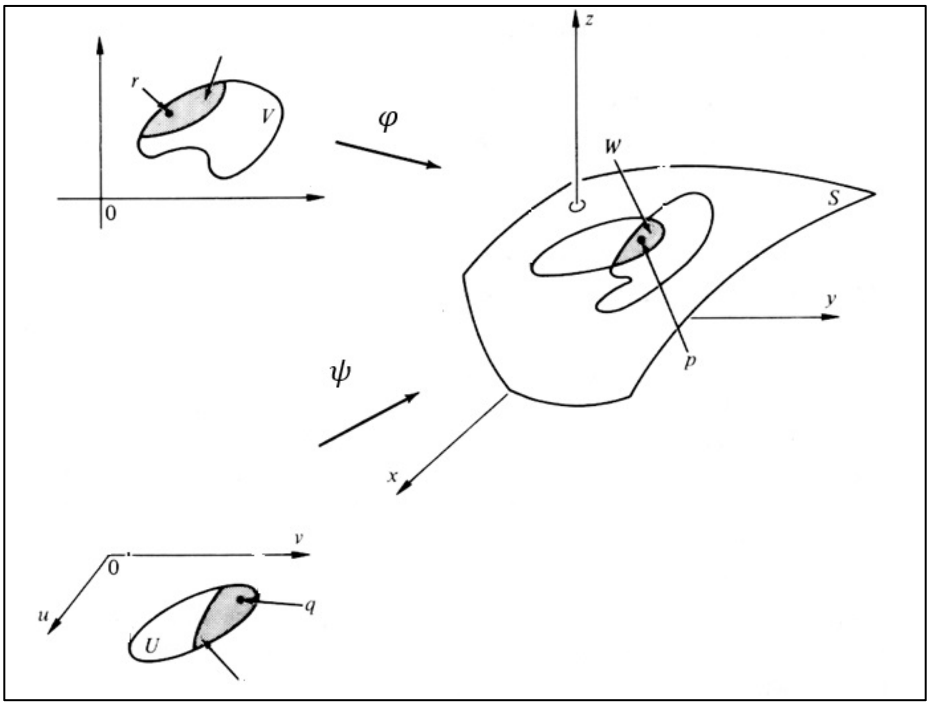


Figura 4.3. Cambio de coordenadas
Fuente: http://www.math.hmc.edu

Sea $W = \varphi(V) \cap \psi(U)$ abierto de S que contiene a p. Sabemos que:

$\varphi^{-1}(W)$ es un abierto de $\mathbb{R}^2 \subseteq V$
$\psi^{-1}(W)$ es un abierto de $\mathbb{R}^2 \subseteq U$

Entonces, $\psi^{-1} \circ \varphi$ es un difeomorfismo. Aunque en el próximo tema estudiaremos este concepto con más detalle, de momento basta con saber que un difeomorfismo **es una aplicación biyectiva y diferenciable cuya inversa también es diferenciable**.

$\psi^{-1} \circ \varphi$ es un **cambio de coordenadas**.

Por tanto, dadas dos parametrizaciones de una misma superficie podemos considerar la función de cambio de coordenadas $\psi^{-1} \circ \varphi$, definida de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, localmente es un homeomorfismo. Por tanto, está perfectamente definido el cambio de coordenadas y tiene **buenas** propiedades.

Sea $F: S_1 \longrightarrow S_2$ una aplicación entre superficies. Decimos que F es diferenciable en $p \in S_1$ si $\exists\ \bar{F}$ diferenciable en $\varphi^{-1}(p)$ tal que $\bar{F}$ restringida a U es igual a F.

$$\begin{array}{ccc} F: \varphi(U) \subseteq S_1 & \rightarrow & \psi(V) \subseteq S_2 \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \psi \\ \bar{F}: U & \rightarrow & V \end{array}$$

Es decir, se amplía el concepto de función diferenciable para poder aplicarlo a superficies.

¿Para qué estamos interesados en definir aplicaciones entre superficies? Para poder estudiar, por ejemplo, si dos superficies pueden considerarse **parecidas** (en un sentido que explicaremos más adelante) a través del estudio de ciertas aplicaciones que llevan los puntos de una superficie a otra. Por ejemplo, sabemos que no es posible hacer un mapa perfecto, es decir, ningún mapa puede conservar distancias y ángulos al mismo tiempo, por lo que la elaboración de todo mapa implica una deformación en la representación de la superficie terrestre. La razón la veremos con más detalle en el tema 6.

4.4. Superficies de revolución

En esta sección vamos a ver un tipo de superficies que son muy sencillas de generar y parametrizar: las **superficies de revolución**. Estas superficies se construyen partiendo de una curva plana regular (α) que no se autointerseca ni corta a uno de los ejes coordenados. Esta curva se hace girar sobre dicho eje y la figura que se dibuja es una superficie de revolución (figura 4.4).

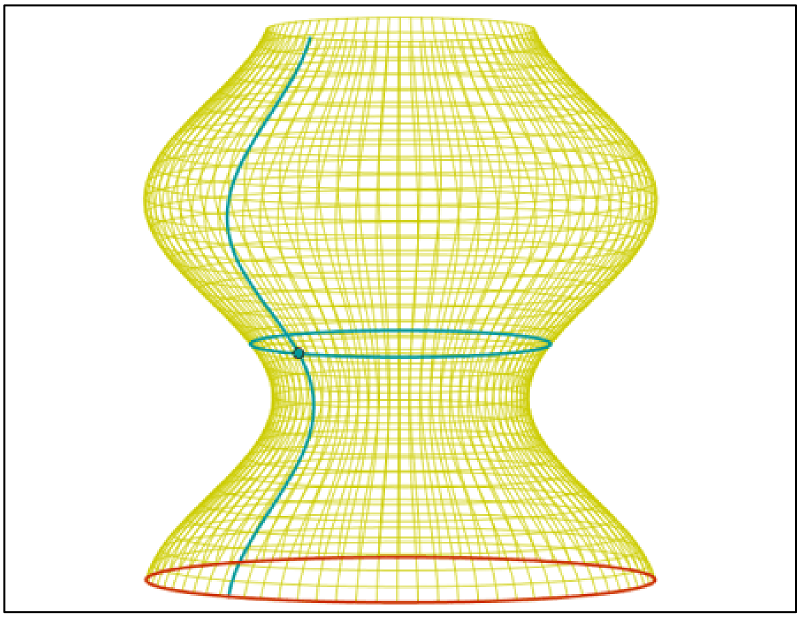


Figura 4.4. Superficie de revolución

Fuente: http://geogebra.es/

Supongamos que α está en el plano XZ. Entonces, podemos escribir $\alpha(t) = (f(t), 0, g(t))$, con $f > 0$. Sea S la superficie que se obtiene girando la traza de α respecto al eje OZ. Una parametrización de la superficie es:

$$\begin{aligned} \varphi\colon\ & (0, 2\pi) \times I \to \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) \to (f(v)cosu, f(v)senu, g(v)) \end{aligned}$$

Veamos que φ es una parametrización:

- φ es obviamente diferenciable.
- φ es homeomorfismo.
    - φ es inyectiva:

      Spg $\varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2) \Rightarrow \begin{cases} f(v_1)cosu_1 = f(v_2)cosu_2 \\ f(v_1)senu_1 = f(v_2)senu_2 \Rightarrow \\ g(v_1) = g(v_2) \end{cases}$

      $\begin{cases} f^2(v_1) = f^2(v_2) \\ g(v_1) = g(v_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(v_1) = f(v_2) \\ g(v_1) = g(v_2) \end{cases}$ y como α es inyectiva, resulta que $v_1 = v_2$.

      Por tanto, tenemos que $\begin{cases} cosu_1 = cosu_2 \\ senu_1 = senu_2 \end{cases} \Rightarrow u_1 = u_2$.

      Así, $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$

    - φ es sobreyectiva:

      Sea $(x, y, z) \in S, \Rightarrow \begin{cases} x = f(v)cosu \\ y = f(v)senu \Rightarrow \left(u \neq k\frac{\pi}{2}\right) \frac{y}{x} = \tan(u) \Rightarrow u = \arctan(y/x) \\ z = g(v) \end{cases}$

      Podemos definir $v = g^{-1}(z)$ o $v = f^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2})$ en función de si se anula o no la derivada. Por tanto, φ es sobreyectiva.

    - φ es continua: obvio.

    - φ^{-1}es continua:

      Como φ es biyectiva, sabemos que φ^{-1} está definida. De hecho, sabemos que:

      $\varphi^{-1}(q) = (\arctan\left(\frac{y}{x}\right), f^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}))$.

      O bien $\varphi^{-1}(q) = (\arctan\left(\frac{y}{x}\right), g^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}))$.

» $d\varphi$ es inyectiva:

$d\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} -fsenu & f'cosu \\ fcosu & f'senu \\ 0 & g' \end{pmatrix}$. Supongamos que todos los menores son cero.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} f'f = 0 \\ fg'senu = 0 \\ fg'cosu = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow f'(v) = g'(v) = 0 \Longrightarrow \alpha \text{ es no regular.}$$

Hay muchas superficies conocidas que son de revolución: la esfera (figura 4.5), el cilindro, el cono, el elipsoide de dos hojas, el toro (figura 4.6), etc. Sabiendo la curva generatriz podemos calcular una parametrización de la superficie de forma muy sencilla.

Lo único que puede variar es que la curva gire alrededor de otro eje (y, lógicamente, esté en otro plano). La parametrización de estos dos casos se deja como ejercicio.

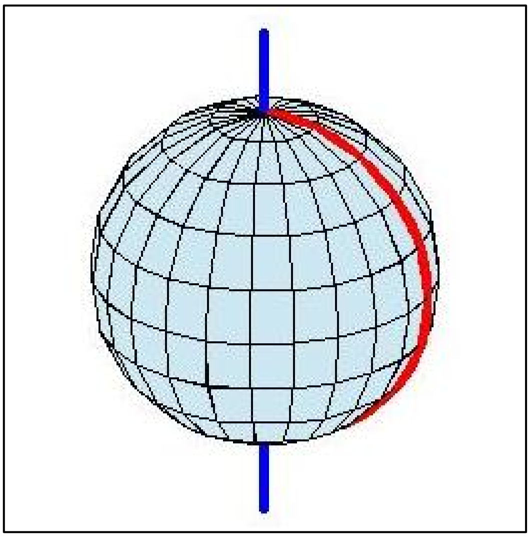


Figura 4.5. Esfera como superficie de revolución

Fuente: http://www.lemat.unican.es/

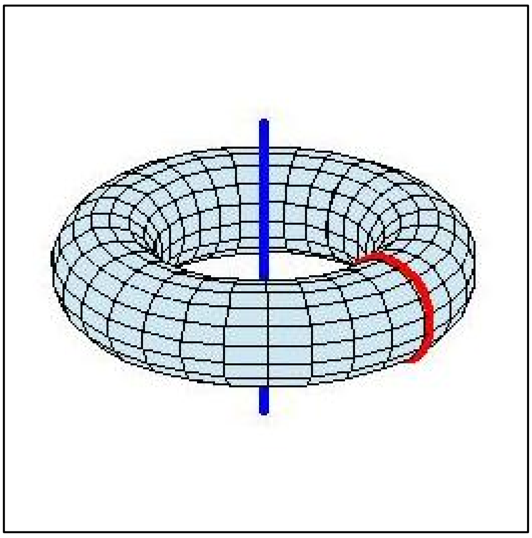


Figura 4.6. Toro como superficie de revolución
Fuente: http://www.lemat.unican.es/

4.5. Plano tangente

Sea $p \in S$, sea $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ una curva regular tal que $\alpha(0) = p$. El vector $\alpha'(0)$ se llama **vector tangente** a S en p.

Como α está en S, α', que es tangente a α, también lo es a la superficie que la contiene.

Esta definición puede generalizarse:

Un **vector tangente** a S en $p \in S$ es un vector de la forma $\alpha'(0)$, donde $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una curva regular y $\alpha(0) = p$.

De hecho, si $\varphi: \theta \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ es una parametrización de S en p, con $a = \varphi^{-1}(p)$, en conjunto de vectores tangentes a S en p coincide con $d\varphi_a(\mathbb{R}^2)$.

Este conjunto recibe el nombre de **plano tangente** a S en $p \in S$. Este plano se denota por T_pS.

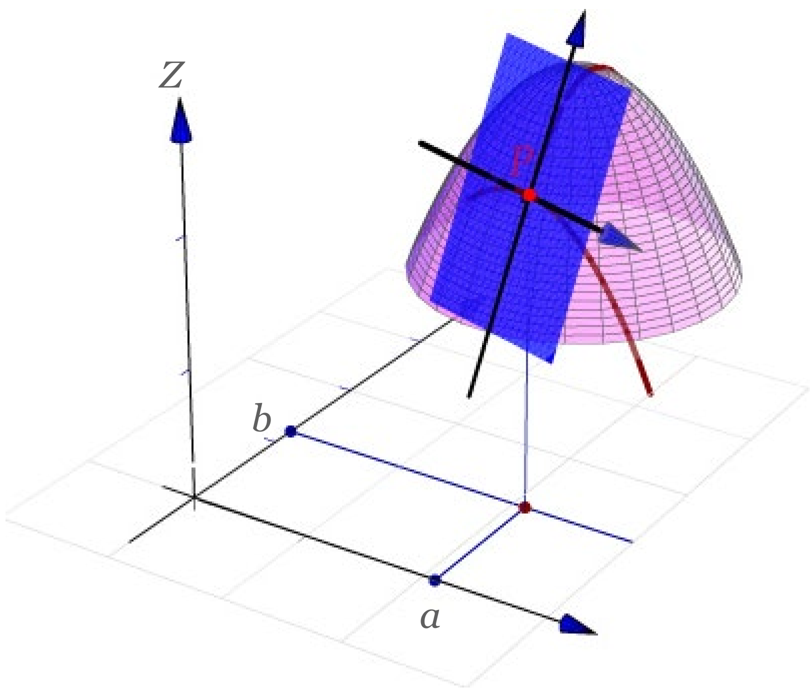


Figura 4.7. Plano tangente afín a una superficie
Fuente: http://www.lemat.unican.es/

Hemos definido un plano en $\mathbb{R}^3$, el plano tangente a una superficie por un punto dado.

Una base de este plano puede calcularse con la matriz $d\varphi_a$, ya que $d\varphi_a\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y lleva una base de $\mathbb{R}^2$ a una base de T_pS.

$$d\varphi_a(1,0) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \\ \frac{dz}{du} & \frac{dz}{dv} \end{pmatrix}(1,0) = \left(\frac{dx}{du}(a), \frac{dy}{du}(a), \frac{dz}{du}(a)\right) = \varphi_u(a)$$

$$d\varphi_a(0,1) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \\ \frac{dz}{du} & \frac{dz}{dv} \end{pmatrix}(0,1) = \left(\frac{dx}{dv}(a), \frac{dy}{dv}(a), \frac{dz}{dv}(a)\right) = \varphi_v(a)$$

Por tanto, $\{\varphi_u(a), \varphi_v(a)\}$ es una base de T_pS, con $p = \varphi(a)$.

Sea $\varphi\colon U \longrightarrow S$ una parametrización de S en p y sea el par $(u_0, v_0) \in U$. Las curvas $\varphi(u, v_0)$ y $\varphi(u_0, v)$ se llaman **curvas coordenadas** para la parametrización φ.

Estas curvas definen una retícula en $\mathbb{R}^2$ que se transforma en una malla en S como ilustra la figura 4.8.

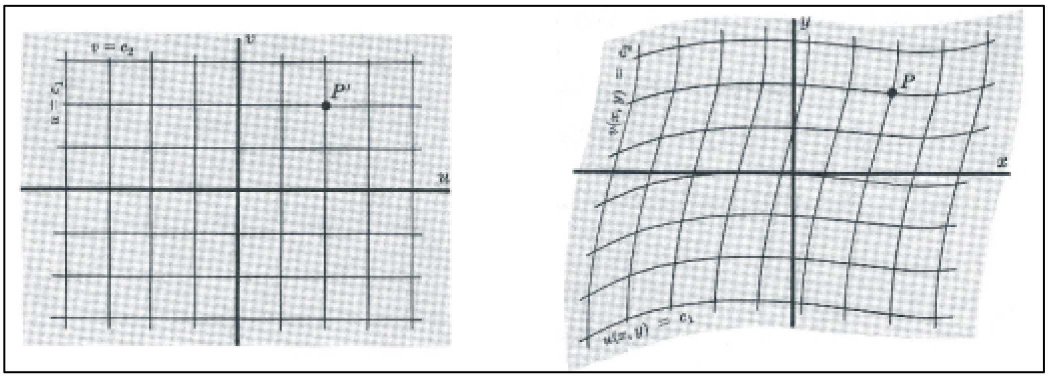


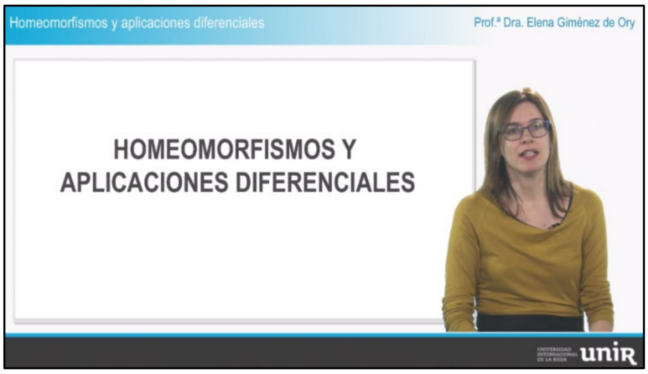
Figura 4.8. Representación de las curvas coordenadas
Fuente: http://www.solitaryroad.com/

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

Homeomorfismo y aplicaciones diferenciales

En esta clase magistral vamos a ver qué son los homeomorfismos y aplicaciones diferenciales.

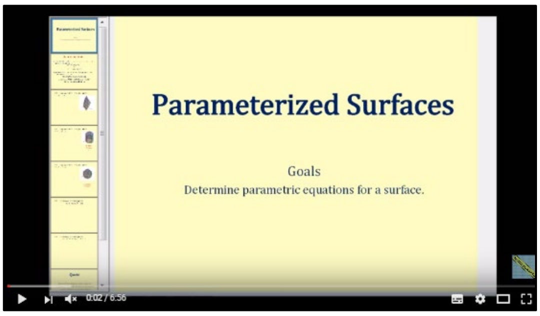


La lección magistral está disponible en el aula virtual

No dejes de leer

Superficies en forma paramétrica y rectangular

En este tutorial se muestran varios ejemplos de superficies expresadas en forma paramétrica y rectangular.



Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://www.youtube.com/watch?v=MmTNkRA0yyk

+ Información

A fondo

Cálculo de la matriz jacobiana

En este artículo se explica cómo calcular la matriz jacobiana de una aplicación.

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://www.youtube.com/watch?v=S61VNGHYLzM

Cálculo de la matriz jacobiana (II)

En este artículo se explica cómo calcular la matriz jacobiana de una aplicación.

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://www.youtube.com/watch?v=WLBtIFbGmGI

Superficies de revolución

En este artículo se explican ejemplos de parametrización de superficies.

Parametric Surfaces

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://math.harvard.edu/~ytzeng/worksheet/0926_sol.pdf

Test

1. La idea intuitiva de una superficie regular es:

A. Que no tiene picos ni bordes.

B. Que localmente se comporta como un abierto del plano.

C. A y B son correctas.

2. Un homeomorfismo es:

A. Una aplicación biyectiva y continua con inversa continua.

B. Una aplicación biyectiva y continua.

C. A y B son falsas.

3. Una superficie no presenta picos porque su parametrización φ:

A. Es diferenciable.

B. Es un homeomorfismo.

C. $d\varphi_a: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

4. ¿Cuál de las siguientes figuras no es una superficie regular?

A. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2+y^2 < 1,\ z = 0\}$.

B. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2+y^2 \leq 1, z = 0\}$.

C. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2+y^2 < 1,\ z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2+y^2 < 1,\ z = 1\}$.

5. Que podamos definir un cambio de coordenadas en una superficie implica:

A. Que la parametrización es única.

B. Que un cambio de coordenadas implica un cambio en la definición de la superficie.

C. A y B son falsa.

6. Selecciona la opción verdadera:

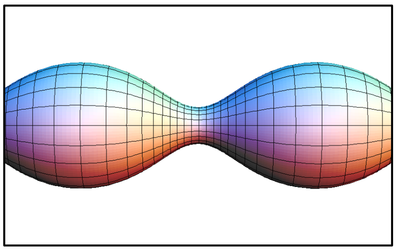
A. Todas las superficies son de revolución.

B. Las superficies de revolución se obtienen girando una curva generatriz arbitraria.

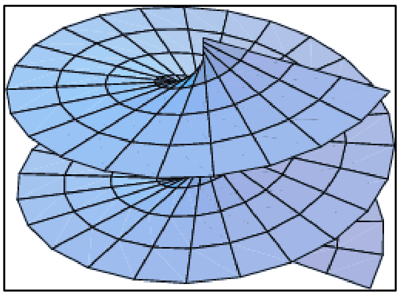
C. La curva generatriz de una superficie de revolución debe ser regular.

7. Señala cuál de las siguientes figuras no es de revolución:

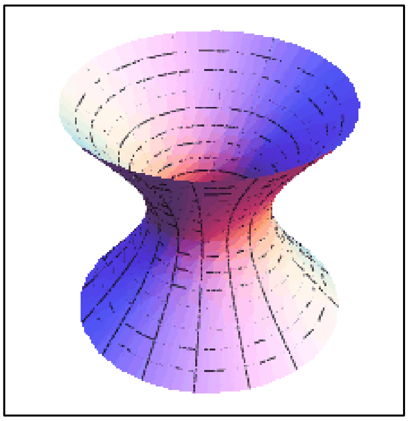
A.



B.



C.



8. ¿Cuál es la parametrización del cono?

A. $\{z^2 = x^2 + y^2\}$.

B. $\{(v \cdot cosu, v \cdot senu, v)\}$.

C. A y b son correctas.

9. Sea $\varphi: \theta \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ es una parametrización de S en p, $d\varphi_a(1{,}0)$ es igual a:

A. $\varphi_u(a)$.

B. $\varphi_v(a)$.

C. T_pS.

10. Las curvas coordenadas $\varphi(u, v_0)$ y $\varphi(u_0, v)$:

A. Son líneas rectas en la superficie.

B. Son líneas rectas en el abierto de $\mathbb{R}^2$.

C. A y B son falsas.

