

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos	Apellidos:	24/05/2021
	Nombre:	

## Actividad 2

### 1. Sistemas dinámicos discretos complejos.

#### 1.1. Objetivos

Llevar a cabo diferentes ejercicios en los que se ponga de manifiesto que se han adquirido las competencias correspondientes y los conceptos vistos en clase relacionados con sistemas dinámicos discretos complejos. Asimismo, comprender las representaciones gráficas fundamentales asociadas a este tipo de sistemas.

#### 1.2. Descripción

En esta actividad, efectuaremos el estudio dinámico de una familia de funciones que depende de un parámetro, para lo cual emplearemos herramientas de dinámica compleja. Se recomienda realizar los ejercicios de forma secuencial, a fin de utilizar la información obtenida en cada ejercicio para completar el siguiente.

Para realizar la actividad, consideraremos en  $C$  la familia de polinomios cuadrática de la ecuación 1.

$$f_{\gamma}(z) = z^2 - 2\gamma + 1$$

$$y \in C$$
(1)

### 2. Ejercicio 1.

- **Calcula los puntos fijos del sistema dinámico:** Para calcular los puntos fijos, debemos igualar la ecuación 1 a su variable independiente, siendo en este caso  $z$ , como se desglosa y se muestra en la ecuación 2.

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos	Apellidos:	24/05/2021
	Nombre:	

$$z = z^2 - 2\gamma + 1 \quad (2)$$

$$z^2 - z + (1 - 2\gamma) = 0$$

Obtenemos los puntos fijos del sistema a través de la ecuación cuadrática, siendo los que se representan en la ecuación 3.

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{8\gamma-3}}{2} \quad (3)$$

$$z^* = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{8\gamma-3}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{8\gamma-3}}{2} \right\}$$

- **Determina la estabilidad de los puntos fijos dependiendo del valor de  $\gamma$ :** Para calcular la estabilidad, debemos derivar la función. Determinamos la estabilidad de los puntos fijos dependiendo del valor de  $\gamma$ , ya que los puntos fijos y el estudio de estabilidad también dependen de  $\gamma$ . La dinámica según los puntos fijos se muestra en la ecuación 4, y de forma ordenada se muestra en la ecuación 5.

$$f'_\gamma(z) = 2z$$

$$f_{\gamma_1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{8\gamma-3}}{2} \longrightarrow \gamma_1 = 1 + \sqrt{8\gamma-3} \quad (4)$$

$$f_{\gamma_2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{8\gamma-3}}{2} \longrightarrow \gamma_2 = 1 - \sqrt{8\gamma-3}$$

$$f'_\gamma(z) = 2z \longrightarrow \begin{cases} |f'_\gamma(z_1^*)| = |1 + \sqrt{8\gamma-3}| \\ |f'_\gamma(z_2^*)| = |1 - \sqrt{8\gamma-3}| \end{cases} \quad (5)$$

- **Resuelve las desigualdades considerando únicamente la parte real del parámetro:**

Para esto, partimos de los conceptos del procedimiento 6, que clasifican los puntos fijos depen-

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
<b>Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos</b>	<b>Apellidos:</b>	24/05/2021
	<b>Nombre:</b>	

diendo su comportamiento asintótico.

$$Atractor \longrightarrow |f'(z^*)| < 1$$

$$Repulsor \longrightarrow |f'(z^*)| > 1 \quad (6)$$

$$Neutro \longrightarrow |f'(z^*)| = 1$$

Para poder determinar si la dinámica de los puntos fijos es atractor, repulsor o neutro tal y como se muestra en la ecuación 6, debemos operar 2 desigualdades y una igualdad por cada punto fijo. Tomamos el valor de la derivada de la función en cada uno de los puntos fijos, y la igualamos al valor de  $\gamma$  buscado. Dado que en  $z_{1,2}$ .

Para determinar si  $z_{\gamma 1}^*$  es neutro, vemos el procedimiento 7.

$$|1 + \sqrt{8\gamma - 3}| = 1 \longrightarrow 1 + \sqrt{8\gamma - 3} = \pm 1$$

$$1 + \sqrt{8\gamma - 3} = 1 \longrightarrow \sqrt{8\gamma - 3} = 0 \longrightarrow \gamma = \frac{3}{8}$$

$$1 + \sqrt{8\gamma - 3} = -1 \longrightarrow \sqrt{8\gamma - 3} = -2 \longrightarrow \gamma = \frac{7}{8}$$

$$\gamma = \left\{ \frac{3}{8}, \frac{7}{8} \right\}$$

(7)

Para determinar si  $z_{\gamma 1}^*$  es repulsor, vemos el procedimiento 8.

$$|1 + \sqrt{8\gamma - 3}| > 1$$

$$1 + \sqrt{8\gamma - 3} < -1 \cup 1 + \sqrt{8\gamma - 3} > 1$$

$$\begin{cases} \sqrt{8\gamma - 3} < -2 \rightarrow 8\gamma - 3 < 4 \rightarrow 8\gamma < 7 \rightarrow \gamma < \frac{7}{8} \\ \sqrt{8\gamma - 3} > 0 \rightarrow 8\gamma - 3 > 0 \rightarrow 8\gamma > 3 \rightarrow \gamma > \frac{3}{8} \end{cases}$$

(8)

$$\frac{7}{8} > \gamma > \frac{3}{8}$$

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos	Apellidos:	24/05/2021
	Nombre:	

Para determinar si  $z_{\gamma 1}^*$  es atractor, vemos el procedimiento 9.

$$\begin{aligned}
 |1 + \sqrt{8\gamma - 3}| &< 1 \\
 -1 &< 1 + \sqrt{8\gamma - 3} < 1 \\
 \begin{cases} \sqrt{8\gamma - 3} > -2 \rightarrow 8\gamma - 3 > 4 \rightarrow 8\gamma > 7 \rightarrow \gamma > \frac{7}{8} \\ \sqrt{8\gamma - 3} < 0 \rightarrow 8\gamma - 3 < 0 \rightarrow 8\gamma < 3 \rightarrow \gamma < \frac{3}{8} \end{cases} & \quad (9) \\
 \frac{3}{8} > \gamma > \frac{7}{8}
 \end{aligned}$$

La dinámica de los puntos fijos para el punto  $z_1^*$  se muestra en la ecuación 10.

$$\begin{aligned}
 \text{Atractor} &\rightarrow \gamma > \frac{7}{8} \cap \gamma < \frac{3}{8} \\
 \text{Repulsor} &\rightarrow \gamma < \frac{7}{8} \cap \gamma > \frac{3}{8} \\
 \text{Neutro} &\rightarrow \gamma = \left\{ \frac{3}{8}, \frac{7}{8} \right\}
 \end{aligned} \quad (10)$$

La dinámica de los puntos fijos para el punto  $z_2^*$  se muestra en la ecuación 11.

(11)

En la figura 1 se muestra el diagrama de bifurcación correspondiente a la función logística 1, de la cual, se han hecho anteriormente los cálculos correspondientes para período 1, que corresponde a los valores mostrados en el procedimiento 7.

► **Calcula los puntos críticos de  $f_\gamma$ :**

### 3. Ejercicio 2.

La Figura 2 representa el plano de parámetros asociado a un punto crítico libre de la familia de polinomios  $f_\gamma$ .

► Describe en qué consiste un plano de parámetros, qué representa y cómo se genera.

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
<b>Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos</b>	<b>Apellidos:</b>	24/05/2021
	<b>Nombre:</b>	

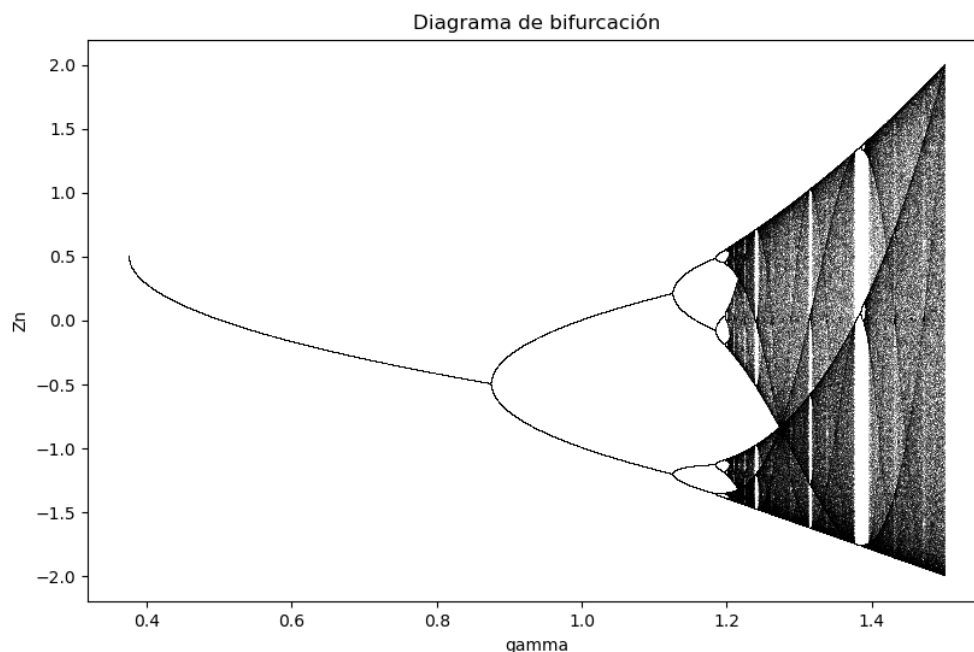


Figura 1: Diagrama de bifurcación de ejercicio 1.

- Describe las características que observas en el plano de la Figura 2, y relacionalo con el estudio de la estabilidad de los puntos fijos realizado en el ejercicio 1.

## 4. Ejercicio 3.

La familia de polinomios tiene dos puntos fijos cuyas cuencas de atracción representamos en los planos dinámicos para valores concretos del parámetro. En la Figura 3 se muestran tres planos dinámicos de la familia obtenidos para valores distintos de  $\gamma$ . En estos planos observamos las cuencas de atracción de los dos puntos fijos (en naranja o azul), la divergencia (en negro) y los dos puntos fijos. Utiliza el estudio dinámico realizado en el ejercicio 1 y el plano de parámetros de la Figura 2 para determinar qué valor de  $\gamma$  de los valores mostrados en 12 se corresponde con la gráfica. Justifica tu respuesta.

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos	Apellidos:	24/05/2021
	Nombre:	

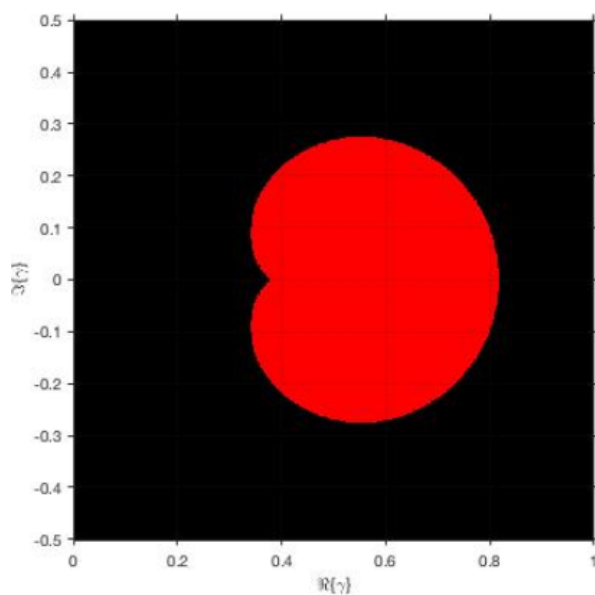


Figura 2: Plano de parámetros.

$$\gamma = \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, 0,6 + 0,2i \quad (12)$$

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos	Apellidos:	24/05/2021
	Nombre:	

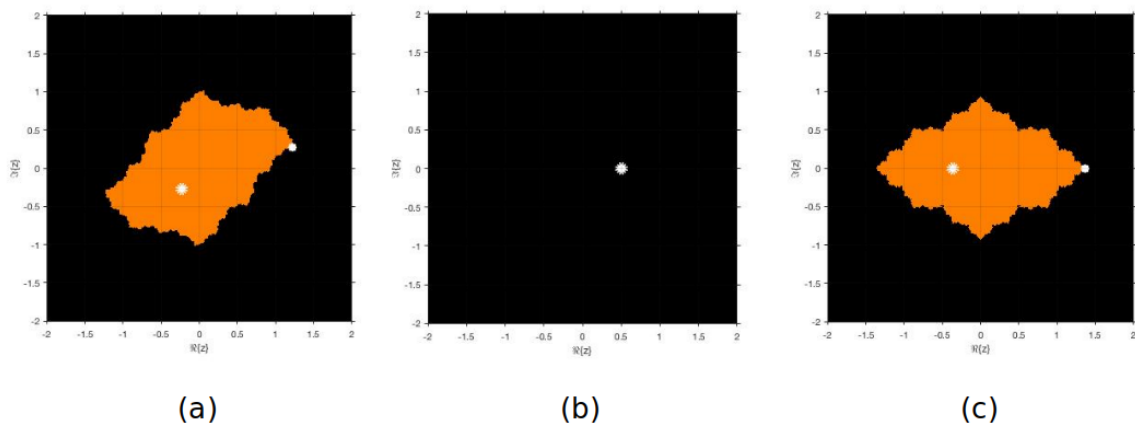


Figura 3: Planos dinámicos de  $f_\gamma$  para distintos valores de  $\gamma$ .