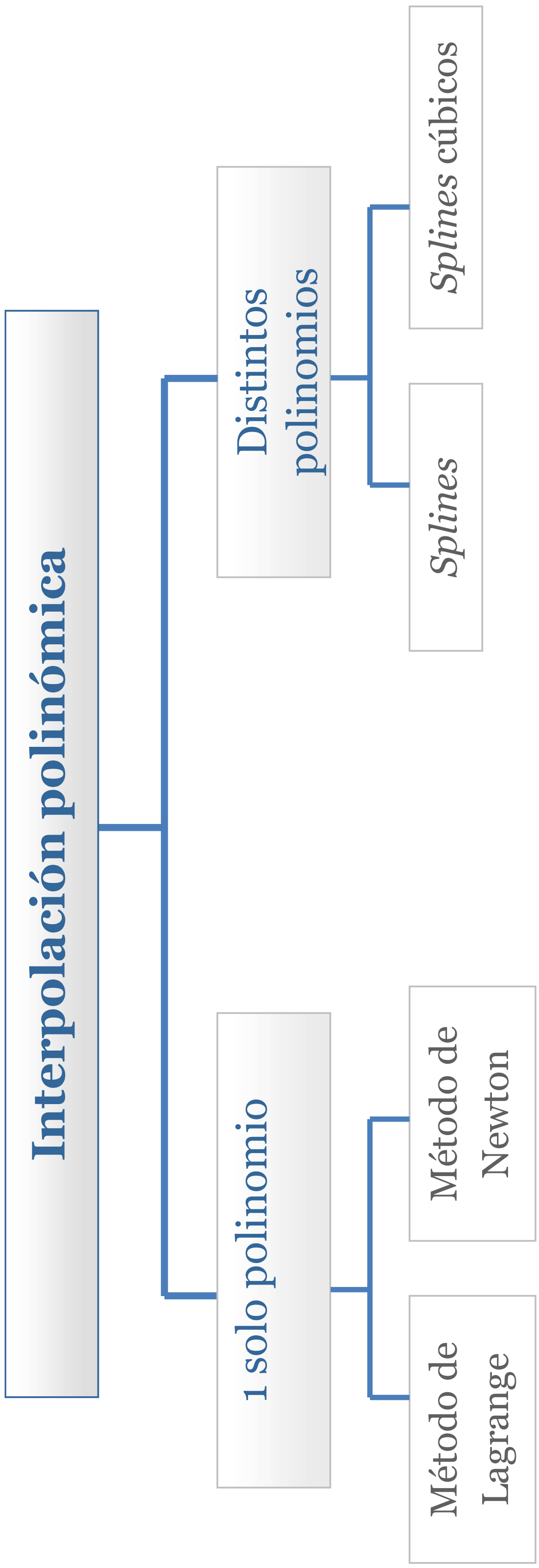
Interpolación numérica

8

TEMA

Esquema


Interpolación polinómica
1 solo polinomio
Distintos polinomios
Método de Lagrange
Método de Newton
Splines
Splines cúbicos

Ideas clave

8.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

En este tema se estudian tres métodos clásicos de interpolación:

- Polinomio de Lagrange.
- Ventajas e inconvenientes del polinomio de Lagrange.
- Fórmula de interpolación de Newton: diferencias finitas y divididas.
- Ventajas e inconvenientes de ambos métodos.
- Interpolación con *splines*.

8.2. Introducción

Existen muchos problemas en la ingeniería en los que es necesario trazar una curva que pase por una serie de valores conocidos. Por ejemplo, definir la trayectoria de un objeto móvil sabiendo que tiene que pasar por unos puntos dados, representación de imágenes 2D y 3D, etc.

En este tema se van a ver dos métodos clásicos de interpolación por polinomios: la interpolación de Lagrange y el método de las diferencias de Newton.

8.3. Interpolación de Lagrange

En la interpolación de Lagrange, dada una función f de la que conocemos los valores que toma en una serie de puntos $x_i, i = 1, \ldots, n$, se trata de encontrar un polinomio P tal que $P(x_i) = f(x_i)$. Estos puntos no tienen por qué estar ordenados pero no puede haber ninguno repetido.

Dados n puntos, hay un único polinomio de orden $n-1$ que tome los valores $y_i = f(x_i)$ en los puntos x_i. Este polinomio se calcula como la solución del sistema:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 {x_0}^2 + \cdots + a_{n-1} {x_0}^{n-1} = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 {x_1}^2 + \cdots + a_{n-1} {x_1}^{n-1} = y_1 \\ \cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 {x_n}^2 + \cdots + a_{n-1} {x_n}^{n-1} = y_n \end{cases}$$

Y su expresión final es:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

Donde:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Si queremos calcular el polinomio de Lagrange para una curva paramétrica tenemos:

$$P(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Donde:

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{i=0}^{n} x_k L_i(t) \\ y(t) = \sum_{i=0}^{n} y_k L_i(t) \\ z(t) = \sum_{i=0}^{n} z_k L_i(t) \end{cases}$$

Ventajas e inconvenientes

Uno de los principales inconvenientes es que un mayor número de puntos no da lugar a una mejor aproximación: si el orden del polinomio es suficientemente grande en los extremos se apreciarán fuertes oscilaciones que se conocen como **efectos de borde** (figura 8.1).

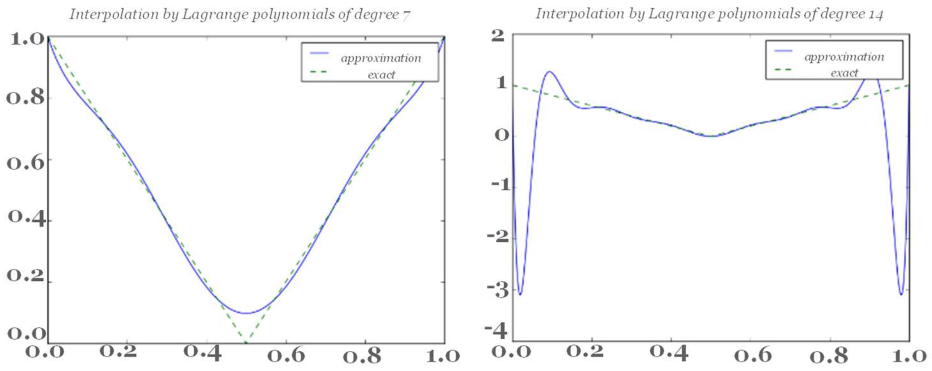


Figura 8.1. Efectos de borde en interpolación con polinomios de grado alto
Fuente: http://hplgit.github.io/

Además, si se quieren añadir nuevos puntos hay que recalcular el polinomio por completo.

8.4. Fórmula de interpolación de Newton

La fórmula de interpolación de Newton da como resultado el mismo polinomio que la interpolación de Lagrange (ya que vimos que es único), solo que se calcula por un procedimiento más eficiente que además permite ir añadiendo nuevos puntos sin tener que recalcularlo todo.

Para hacerlo hay que introducir los conceptos de **diferencias finitas y divididas**.

La **diferencia dividida** de orden $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de f en el punto x_i es:

$$\begin{cases} f[x_i] = f(x_i) \\ f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m}] = \dfrac{f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+m}]}{x_i - x_{i+m}} \end{cases}$$

Análogamente la **diferencia finita** de orden $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de f en el punto x_i es:

$$\begin{cases} \Delta^0 f(x_i) = f(x_i) \\ \Delta^m f(x_i) = \Delta^{m-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{m-1} f(x_i) \end{cases}$$

Y así resulta que el polinomio que pasa por n puntos dados es:

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \prod_{i-1} (x - x_i)\, f[x_0, x_1, \dots, x_i]$$

En el caso de que los puntos estén distribuidos de manera uniforme con un paso h, la fórmula resulta:

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \prod_{i-1} (x - x_i) \frac{\Delta^i f(x_0)}{i!\, h^i}$$

Si se quiere añadir un punto nuevo, el polinomio de interpolación resulta:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \prod_{n} (x - x_i)\, f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}]$$

Ventajas e inconvenientes

Aunque este método soluciona algunos problemas del método de Lagrange, como el cálculo más eficiente, el problema principal sigue sin resolverse: el polinomio de interpolación que pase por muchos puntos tendrá un orden elevado y producirá oscilaciones indeseadas. En los próximos temas vamos a ver cómo eliminarlos y otras técnicas como la aproximación.

8.5. *Splines*

La palabra *spline* designaba una varilla flexible que se utilizaba para dibujar a mano una curva regular que debía pasar por varios puntos dados (figura 8.2). Ahora designa el método matemático para calcular ese tipo de curvas.

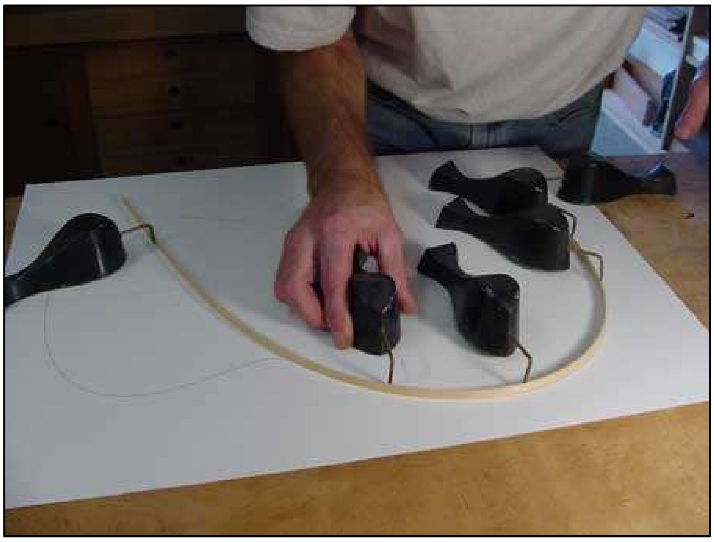


Figura 8.2. *Spline* original
Fuente: http://engineering.stackexchange.com/

Intuitivamente, un *spline* por varios puntos del intervalo $[a, b]$ es un conjunto de polinomios definidos en esos puntos y que satisfacen una serie de condiciones de regularidad.

Sea $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. $S_\Delta: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función *spline* de orden k si S_Δ es C^{k-1} y S_Δ coincide en cada intervalo con un polinomio de grado menor o igual que k.

Si $k = 1$, entonces el *spline* es una poligonal (figura 8.3). Su cálculo es muy sencillo pero no tiene apenas aplicaciones en robótica y diseño, ya que la curva resultante no es derivable en todo $[a, b]$.

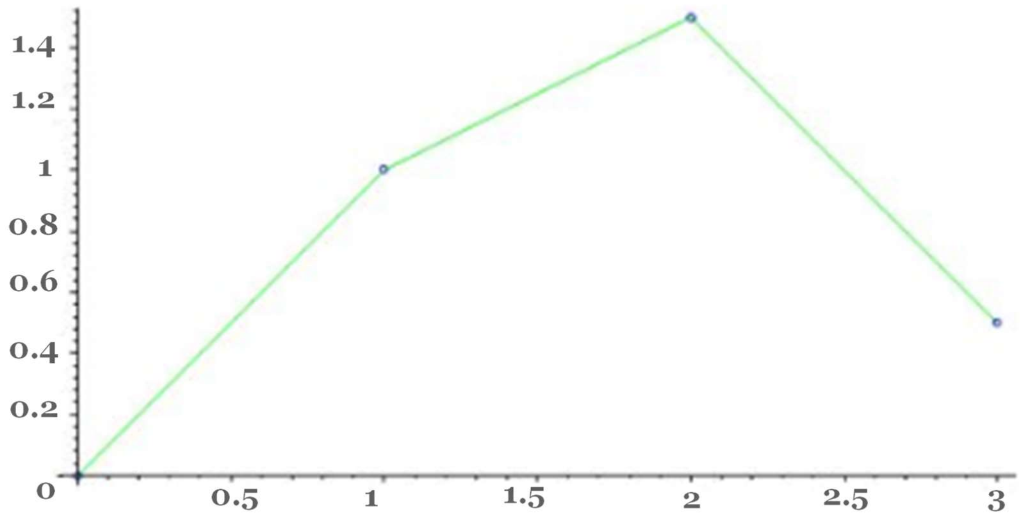


Figura 8.3. *Spline* original
Fuente: http://slideplayer.es/

Los *splines* de orden 3 o cúbicos son lo más utilizados porque son de grado bastante bajo y tienen la suficiente regularidad.

Vamos a ver cómo calcular un *spline* cúbico donde que pase por los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3). Como el *spline* es cúbico en cada tramo estará definido por un polinomio de grado 3 que pasará por los puntos dados. Entonces:

$$\begin{cases} a_3x_0^3 + a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0 = y_0 \\ a_3x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = y_1 \\ b_3x_1^3 + b_2x_1^2 + b_1x_1 + b_0 = y_1 \\ b_3x_2^3 + b_2x_2^2 + b_1x_2 + b_0 = y_2 \\ c_3x_2^3 + c_2x_2^2 + c_1x_2 + c_0 = y_2 \\ c_3x_3^3 + c_2x_3^2 + c_1x_3 + c_0 = y_3 \end{cases}$$

Cada polinomio tiene 4 coeficientes que determinar y hay 3 polinomios (uno por cada tramo). Por tanto necesitamos un sistema de 12 ecuaciones. Imponiendo las condiciones de regularidad que igualan las primeras y segundas derivadas en los extremos resulta:

$$\begin{cases} 3a_3x_1^2 + 2a_2x_1 + a_1 = 3b_3x_1^2 + 2b_2x_1 + b_1 \\ 3b_3x_2^2 + 2b_2x_2 + b_2 = 3c_3x_2^2 + 2c_2x_2 + c_1 \\ 6a_3x_1 + 2a_2 = 6b_3x_1 + 2b_2 \\ 6b_3x_2 + 2b_2 = 6c_3x_1 + 2c_2 \end{cases}$$

Faltan dos ecuaciones para poder resolver el sistema. Las más habituales son las condiciones naturales:

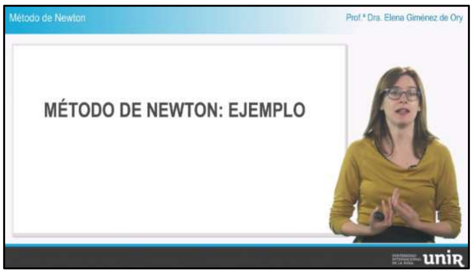
$$\begin{cases} 6a_3x_1 + 2a_2 = 0 \\ 6c_3x_3 + 2c_2 = 0 \end{cases}$$

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

Método de Newton: ejemplo

En esta clase magistral vamos a ver un ejemplo de cómo se calcula el polinomio que interpola una serie de puntos utilizando el método Newton.



La lección magistral está disponible en el aula virtual

No dejes de leer…

Interpolación con *splines* cúbicos

En este enlace se muestra una herramienta gráfica para el dibujo de *splines* cúbicos.

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://blog.ivank.net/interpolation-with-cubic-splines.html

Ejemplo de cálculo con el método de Lagrange

En este enlace se muestra un ejemplo de cómo calcular el polinomio de interpolación con el método de Lagrange.

LAGRANGE'S INTERPOLATION FORMULA

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://mat.iitm.ac.in/home/sryedida/public_html/caimna/interpolation/lagrange.html

Ejemplo de cálculo con el método de Newton

En este enlace se muestra un ejemplo de cómo calcular el polinomio de interpolación con el método de Newton.

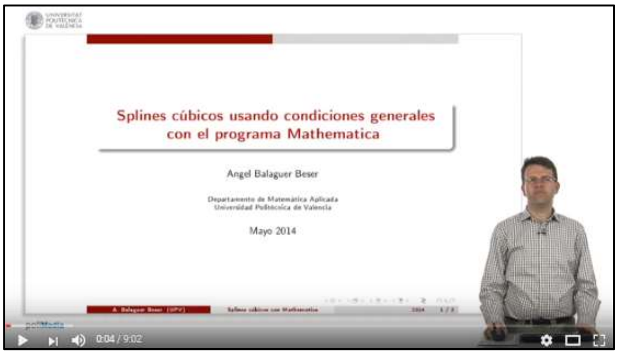
Newton Interpolation polynomial:

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://nptel.ac.in/courses/122104019/numerical-analysis/Rathish-kumar/rathish-oct31/fratnode5.html

No dejes de ver…

Generación de *splines* con *Mathematica*

En este vídeo se muestra cómo calcular *splines* con *Mathematica*.



Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://www.youtube.com/watch?v=HLIsq74gaSA

+ Información

A fondo

Interpolación de Lagrange

En este enlace se explica el método de interpolación de Lagrange.

Interpolation for polynomial parametric curves

Accede al documento desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://www.math.ucla.edu/~baker/149.1.02w/handouts/x_lagrange.pdf

Interpolación de Lagrange en Java

En este enlace se muestra una implementación del método de interpolación de Lagrange en Java.

Lagrange Interpolation Demo

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://www.math.ucla.edu/~baker/java/hoefer/Lagrange.htm

Test

1. Para construir un polinomio que pase por n puntos dados se puede utilizar:

A. El método de Lagrange y el método de Newton.

B. El método de Lagrange y un *spline*.

C. Un *spline* y el método de Newton.

2. Un polinomio que pase por 12 puntos dados tendrá grado:

A. 11.

B. 12.

C. 13.

3. El método de Newton:

A. Produce un polinomio que se ajusta mejor a los datos que el del método de Lagrange.

B. Hace que sea menos costoso añadir un punto nuevo.

C. A y B son ciertas.

4. Los efectos de borde:

A. Se producen cuando se aproxima una cantidad de puntos por un polinomio de orden muy alto.

B. Solo se produce con el método de Lagrange.

C. Solo se produce con el método de Newton.

5. Las diferencias finitas:

A. Se utilizan para que no sea costoso añadir un nuevo punto a un polinomio.

B. Se utilizan en el método de Newton.

C. A y B son correctas.

6. ¿Qué ventajas tiene el método de Newton frente al de Lagrange?

A. Evita las oscilaciones.

B. El cálculo es más eficiente.

C. A y B son correctas.

7. Si se quiere construir un polinomio de grado 3 que pase por 4 puntos dados debe utilizarse:

A. Un *spline*.

B. El método de Newton.

C. A y B son correctas.

8. Una ventaja de un *spline* frente a los polinomios de Lagrange o Newton es:

A. Se evitan los efectos de borde.

B. Si se cambia un punto no hay que recalcular el resto.

C. A y B son correctas.

9. Los *splines* que ofrecen una regularidad que se suele considerar suficiente son:

A. Lineales.

B. Cuadráticos.

C. Cúbicos.

10. Un *spline* cúbico se construye a trozos:

A. En intervalos de 3 puntos.

B. En intervalos de 4 puntos.

C. En todos los puntos por los que se quiere interpolar.