DATOS PERSONALES		FIRMA
Nombre:	DNI:	
Apellidos:		
ESTUDIO	**ASIGNATURA**	**CONVOCATORIA**
MÁSTER UNIVERSITARIO EN INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN (PLAN 2016)	4391029008.- SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS Y CONTINUOS	Ordinaria
FECHA	**MODELO**	**CIUDAD DEL EXAMEN**
09-11/07/2021	Modelo - D	
Etiqueta identificativa		

INSTRUCCIONES GENERALES

1. Ten disponible tu documentación oficial para identificarte, en el caso de que se te solicite.
2. Rellena tus datos personales en todos los espacios fijados para ello y lee atentamente todas las preguntas antes de empezar.
3. Las preguntas se contestarán en la lengua vehicular de esta asignatura.
4. Si tu examen consta de una parte tipo test, indica las respuestas en la plantilla según las características de este.
5. Debes contestar en el documento adjunto, respetando en todo momento el espaciado indicado para cada pregunta. Si este es en formato digital, los márgenes, el interlineado, fuente y tamaño de letra vienen dados por defecto y no deben modificarse. En cualquier caso, asegúrate de que la presentación es suficientemente clara y legible.
6. Entrega toda la documentación relativa al examen, revisando con detenimiento que los archivos o documentos son los correctos. El envío de archivos erróneos o un envío incompleto supondrá una calificación de “no presentado”.
7. Durante el examen y en la corrección por parte del docente, se aplicará el Reglamento de Evaluación Académica de UNIR que regula las consecuencias derivadas de las posibles irregularidades y prácticas académicas incorrectas con relación al plagio y uso inadecuado de materiales y recursos.
8. No se permite la comunicación a lo largo del examen.
9. No se permite el uso de recursos externos en el examen.
10. En caso que se realice en domicilio, se podrá acceder a Internet exclusivamente para descargar el enunciado y la plantilla del examen, y cargar el examen completado en la plataforma habilitada para tal efecto.

11. Para facilitar la transcripción de las expresiones matemáticas, puedes utilizar una cámara de fotos, tu teléfono móvil en modo avión, conectado por cable a tu ordenador, o un escáner para incorporar las imágenes a tu examen. No se permite el uso de correo electrónico, ni de aplicaciones de mensajería (incluye Whatsapp Web, Teams, Discord, entre otras), ni servicios en la nube (incluye a One Drive, Google Drive, Dropbox, entre otros) para realizar esta acción.

Puntuación

Preguntas

- Puntuación máxima 10.00 puntos

Vas a comenzar el examen de Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos.

Responde a las preguntas en el espacio indicado entre las páginas 4 y 17.

Encontrarás las preguntas del examen a partir de la página 18.

- Puntuación máxima: 10 puntos.
- Puntuación:
  - Pregunta 1: 1.5 puntos
  - Pregunta 2: 2.5 puntos
  - Pregunta 3: 2 puntos
  - Pregunta 4: 2.5 puntos
  - Pregunta 5: 1.5 puntos
- Todas las preguntas se deben justificar y razonar, incluyendo todos los pasos utilizados en su desarrollo hasta llegar al resultado final.
- Asegúrate de que las gráficas necesarias para desarrollar las preguntas se visualizan correctamente.
- Indica claramente a qué pregunta y apartado corresponde cada respuesta.

1. Pregunta 1 (Responder en 1 caras)

2. Pregunta 2 (Responder en 2 caras)

---

3. Pregunta 3 (Responder en 2 caras)

4. Pregunta 4 (Responder en 3 caras)

5. Pregunta 5 (Responder en 1 caras)

1. El campo de direcciones es una herramienta gráfica utilizada en sistemas dinámicos continuos modelizados por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias.

   a) Describe con tus propias palabras en qué consiste, qué representa y cuáles son sus características fundamentales.

   b) La Figura 1 corresponde al campo de direcciones de un determinado sistema dinámico continuo $x' = F(t, x)$. Describe las características dinámicas que observas en la gráfica.

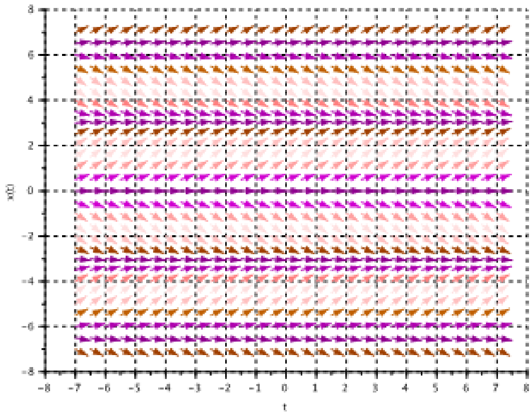


Figura 1: Campo de direcciones

2. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & \alpha x + y - x^2 \\ y' & = & x + \alpha y \end{array} \right. ,$$

   donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcula:

   - Puntos de equilibrio del sistema.
   - Linealiza el sistema en torno al origen y calcula sus valores propios.
   - Determina la estabilidad del origen dependiendo del valor del parámetro α.
   - Calcula la solución general del sistema lineal.

3. Realiza un estudio dinámico real completo de la siguiente familia de funciones:

$$G(x) = x - \frac{k(x^2 - 2)}{5x}$$

   calculando:

   - Puntos fijos.
   - Estabilidad en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$.
   - Puntos críticos.

- ¿Qué herramientas gráficas se pueden utilizar para completar el estudio dinámico real? Explica brevemente en qué consiste cada una de ellas.

4. Consideremos la familia de métodos iterativos $M\lambda$ cuya expresión iterativa es la siguiente:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\lambda f(x_k)}{f'(x_k) - f(x_k)f''(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Realizaremos un estudio dinámico de la familia $M\lambda$ sobre el polinomio $f(z) = z^2 + 1$ utilizando herramientas de dinámica compleja. Para ello, determina:

- La expresión del operador de punto fijo resultante de aplicar la familia $M\lambda$ a $f(z) = z^2 + 1$.
- Los puntos fijos del operador y su estabilidad en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{C}$.
- Los puntos críticos del operador.

5. El plano de parámetros es una herramienta gráfica utilizada para el estudio de la estabilidad de sistemas dinámicos discretos asociados a los métodos iterativos de variable compleja que dependen de un parámetro.

   a) Describe con tus propias palabras en qué consiste, qué representa y cuáles son sus características fundamentales.

   b) La Figura 2 corresponde al plano de parámetros asociado al operador de punto fijo de un determinado método iterativo. Describe las características dinámicas que observas en la gráfica.

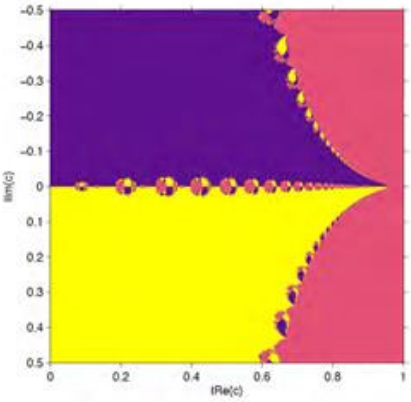


Figura 2: Plano de parámetros

Sobre todo disculpas por los tachones en las hojas, lo hice a lapicero para que se observara mejor el contraste entre la hoja y lo escrito. Me disculpo de igual manera por el formato, no me ha funcionado bien office 365

Pregunta 1:(1.5)

A)
Un campo de direcciones muestra como cual es la tendencia de las derivadas en varios puntos determinados, creando de esta manera una malla entre el valor del eje de las abcisas y las ordenadas, donde cada punto(x,y), representa una pendiente. Sirve para encontrar si un punto es atractor o repulsor, o los lugares donde el sistema se encuentra en equilibrio. Generalmente las tendencias de atraccion o repulsion son hacia los puntos de equilibrio.

B) El plano dinamico de la figura, muestra un sistema que es periodico para valores de x(t), dado que repite en valores de x(t) la misma tendencia. Las regiones donde las lineas son morado color fuerte, son los sitios de equilibrio, cabe destacar que son puntos donde la funcion equivale a cero. Cuando las demas flechas se dirigen hacia un punto de equilibrio, se dice que es atractor, y cuando las flechas se alejan de un punto de equilibrio, se dice que el punto es repulsor.

El plano se muestra entre valores de t (-8,8) y x(t) (-8,8).

Pregunta 2: (2.5)

En el problema 2, parqa encontrar los puntos de equilibrio se deben igualar las funciones a cero. Luego se linealiza el sistema a traves de la matriz jacobiana, en torno al origen, y se calculan los valores propios haciendo una resta de la matriz identidad por lambda, restadas a la matriz A, donde A es la matriz jacobiana evaluada en los puntos del orrigen en este caso. Luego se determina la estabilidad del sistema evaluando el parametro alfa obtenido. Y se calcula la solucion general dependiendo el comportamiento de los lambdas.

Preguntas

2) $x' = \alpha x + y - x^2$
$y' = x + \alpha y$

Puntos de equilibrio $\quad 0 = \alpha x + y - x^2$
$0 = x + \alpha y \Rightarrow x = -\alpha y$

$0 = \alpha(-\alpha y) + y - (-\alpha y)^2 = -\alpha^2 y + y - \alpha^2 y^2 = 0$

$-\alpha^2 y^2 + (1-\alpha^2) y = 0 \Rightarrow \quad y\left(-\alpha^2 y + (1-\alpha^2)\right) = 0$

$y_1 = 0$
$x = 0$

$y = -\dfrac{(1-\alpha^2)}{-\alpha^2} \Rightarrow \dfrac{\alpha^2 - 1}{-\alpha^2}$

$y = \dfrac{1-\alpha^2}{\alpha^2}$

$x = -\alpha\left(\dfrac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\right) \Rightarrow \dfrac{\alpha^2 - 1}{\alpha}$

Linealizar el sistema en torno al origen y calcula sus valores propios

sacar jacobiano

$$\begin{array}{ccc} & x & y \\ J = \begin{array}{c} dx \\ dy \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} \alpha - 2x & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}} \end{array}$$

$\leftarrow$ la matriz jacobiana se evalúa en torno al punto $(0,0)$

$J \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$ $\leftarrow$ Los valores propios se evalúan como $|A - \lambda I| = 0$

$|A - \lambda I| = \begin{bmatrix} \alpha - \lambda & 1 \\ 1 & \alpha - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (\alpha-\lambda)(\alpha-\lambda) - 1(1) = 0$

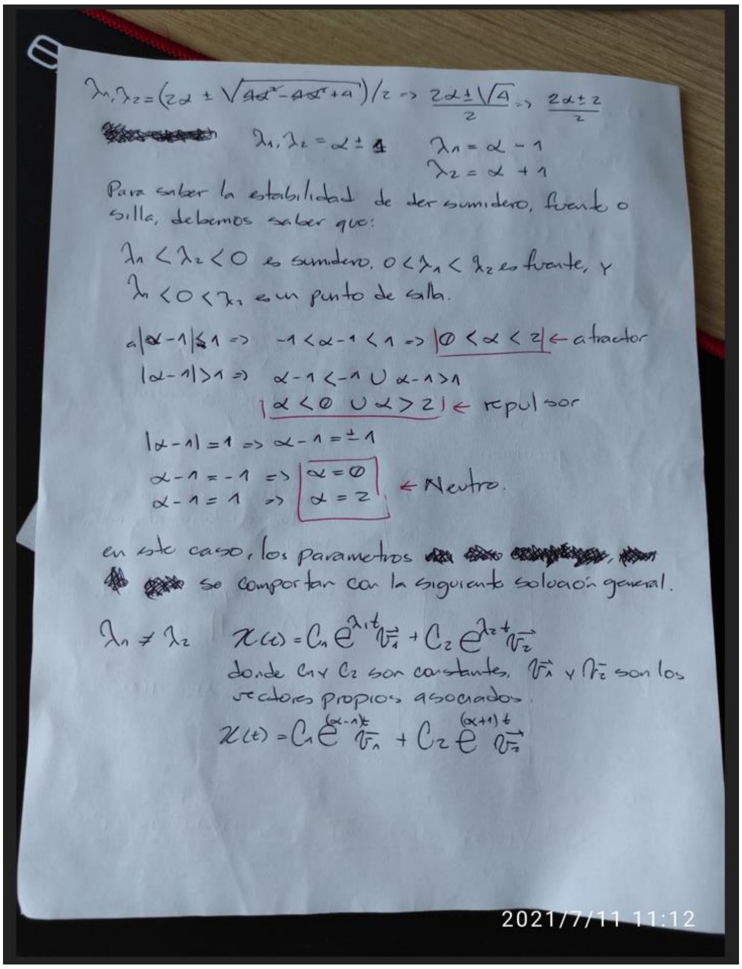
$(\alpha - \lambda)^2 - 1 = 0$

$(\alpha-\lambda)^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha\lambda + \lambda^2 = 1$

$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 - 1 = 0$

$$\frac{-(-2\alpha) \pm \sqrt{(-2\alpha)^2 - 4(1)(\alpha^2-1)}}{2(1)} \Rightarrow \frac{2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\alpha^2 + 4}}{2}$$

2021/7/11 11:12



$$\lambda_1, \lambda_2 = \left(2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\alpha^2 + 4}\right)/2 \Rightarrow \frac{2\alpha \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow \frac{2\alpha \pm 2}{2}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm 1 \qquad \lambda_1 = \alpha - 1$$
$$\lambda_2 = \alpha + 1$$

Para saber la estabilidad de der sumidero, fuente o silla, debemos saber que:

$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ es sumidero, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ es fuente, y $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ es un punto de silla.

$$|\alpha - 1| \leq 1 \Rightarrow -1 < \alpha - 1 < 1 \Rightarrow \boxed{0 < \alpha < 2} \leftarrow \text{atractor}$$

$$|\alpha - 1| > 1 \Rightarrow \alpha - 1 < -1 \cup \alpha - 1 > 1$$
$$\boxed{\alpha < 0 \cup \alpha > 2} \leftarrow \text{repulsor}$$

$$|\alpha - 1| = 1 \Rightarrow \alpha - 1 = \pm 1$$

$$\begin{array}{l} \alpha - 1 = -1 \Rightarrow \\ \alpha - 1 = 1 \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha = 2 \end{array}} \leftarrow \text{Neutro.}$$

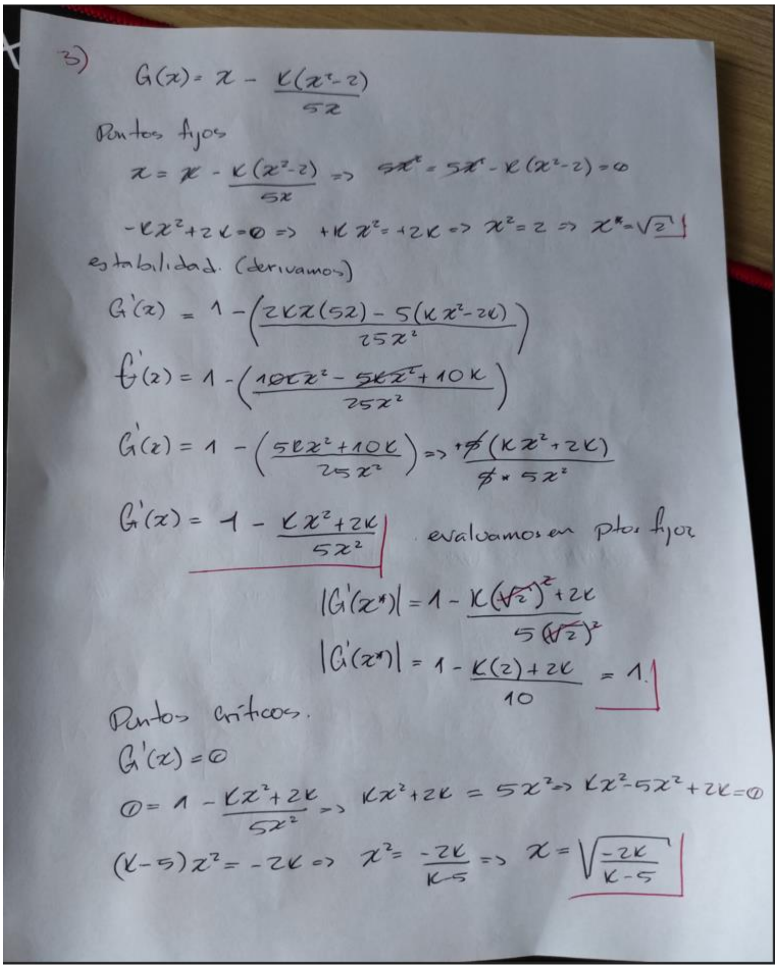
en este caso, los parametros se comportan con la siguiente solución general.

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \qquad x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v_2}$$

donde C_1 y C_2 son constantes. $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ son los vectores propios asociados.

$$x(t) = C_1 e^{(\alpha - 1)t} \vec{v_1} + C_2 e^{(\alpha + 1)t} \vec{v_2}$$

Pregunta 3: (2)



3) $G(x) = x - \frac{k(x^2-2)}{5x}$

Puntos fijos

$x = \cancel{x} - \frac{k(x^2-2)}{5x} \Rightarrow \cancel{5x^2} = \cancel{5x^2} - k(x^2-2) = 0$

$-kx^2 + 2k = 0 \Rightarrow +kx^2 = +2k \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow \boxed{x^* = \sqrt{2}}$

estabilidad. (derivamos)

$G'(x) = 1 - \left(\frac{2kx(5x) - 5(kx^2-2k)}{25x^2}\right)$

$G'(x) = 1 - \left(\frac{10kx^2 - 5kx^2 + 10k}{25x^2}\right)$

$G'(x) = 1 - \left(\frac{5kx^2 + 10k}{25x^2}\right) \Rightarrow \frac{\cancel{5}(kx^2+2k)}{\cancel{5} \cdot 5x^2}$

$\boxed{G'(x) = 1 - \frac{kx^2+2k}{5x^2}}$ evaluamos en ptos fijos

$|G'(x^*)| = 1 - \frac{k(\sqrt{2})^2 + 2k}{5(\sqrt{2})^2}$

$|G'(x^*)| = 1 - \frac{k(2)+2k}{10} \boxed{= 1.}$

Puntos críticos.

$G'(x) = 0$

$0 = 1 - \frac{kx^2+2k}{5x^2} \Rightarrow kx^2 + 2k = 5x^2 \Rightarrow kx^2 - 5x^2 + 2k = 0$

$(k-5)x^2 = -2k \Rightarrow x^2 = \frac{-2k}{k-5} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{-2k}{k-5}}}$

Pregunta 4: (2.5)

Preguntas

4) 4

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\lambda f(x_k)}{f'(x_k) - f(x_k) f''(x_k)} \qquad p \Rightarrow f(z) = z^2+1$$

$$f(x) = x^2+1$$

$$x_{k+1} = x - \frac{\lambda(x^2+1)}{2x - (x^2+1)(2)} \Rightarrow x - \frac{\lambda(x^2+1)}{2x - (2x^2+2)}$$

$$x_{k+1} = x - \frac{\lambda(x^2+1)}{2x - 2x^2 - 2} \Rightarrow x - \frac{\lambda(x^2+1)}{-(+2x^2+2x+2)}$$

$$\boxed{x_{k+1} = x + \frac{\lambda(x^2+1)}{2x^2-2x+2}}$$

Punto fijo:

$$x = x + \frac{\lambda(x^2+1)}{2x^2-2x+2} \Rightarrow \lambda(x^2+1) = 0$$

$$\lambda x^2 + \lambda = 0$$

$$x^2 = -\lambda/\lambda \Rightarrow x = \sqrt{-1}$$

$$\boxed{x = \pm i}$$

estabilidad en funcion de $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$M_\lambda = x + \frac{\lambda(x^2+1)}{2x^2-2x+2} \Rightarrow$$

$$M'_\lambda(x) = 1 + \left(2\lambda x(2x^2-2x+2) - (4x-2)(\lambda)(x^2+1)\right) / \text{den.}$$

$$M'_\lambda(z) = 1 + \left(\frac{4\lambda x^3 - 4\lambda x^2 + 4\lambda x - (4\lambda x - 2\lambda)(x^2+1)}{(2x^2-2x+2)^2}\right)$$

2021/7/11 11:05

Preguntas

$M'_\lambda(x) = \cancel{1 + 4\lambda^3 - 4\lambda x^2}\ 1 + \left(4\lambda x^3 - 4\lambda x^2 + 4\lambda x - (4\lambda x^3 + 4\lambda x - 2\lambda x^2 - 2\lambda)\right)$ 4

$M'_\lambda(x) = 1 + (\cancel{4\lambda x^3} - \cancel{4\lambda x^2} + \cancel{4\lambda x} - \cancel{4\lambda x^3} - \cancel{4\lambda x} + \cancel{2\lambda x^2} + 2\lambda) / \text{den.}$

$1 + \left(\frac{-2\lambda x^2 + 2\lambda}{(2x^2 - 2x + 2)^2}\right)$

$$M'_\lambda(x) = 1 + \left(\frac{2\lambda - 2\lambda x^2}{(2x^2 - 2x + 2)^2}\right) \qquad \lambda = \pm\lambda$$

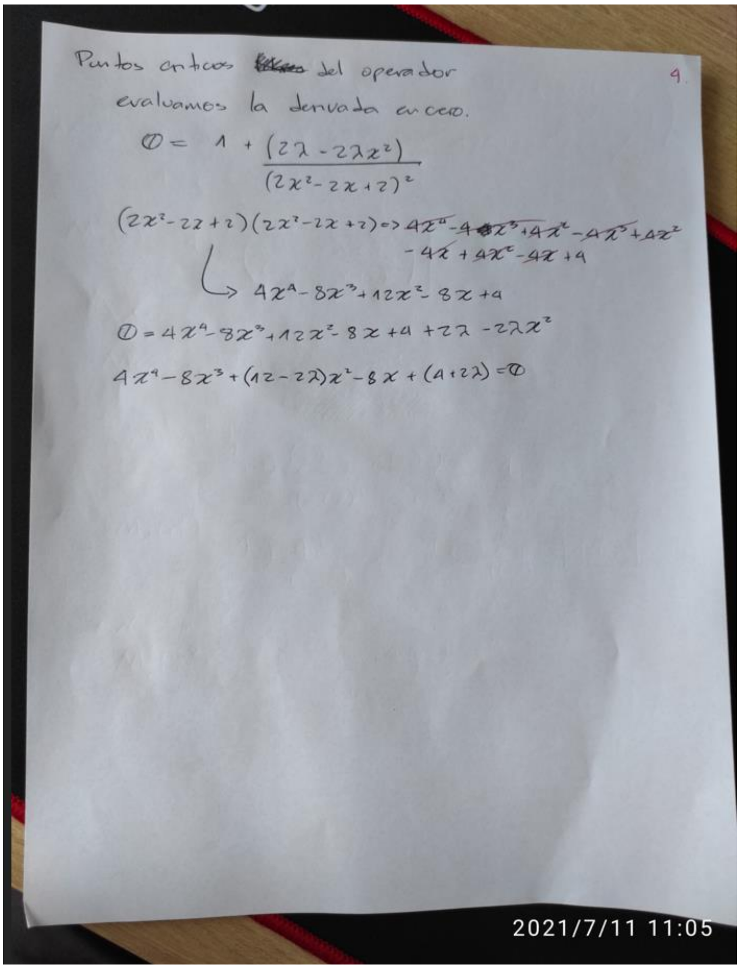
* $x = i$

$$M'_\lambda(x) = 1 + \frac{(2\lambda - 2\lambda(i)^2)}{(2(i)^2 - 2i + 2)^2} \Rightarrow 1 + \frac{2\lambda + 2\lambda}{(\cancel{-2} - 2i + \cancel{2})^2}$$

$$M'_\lambda(x_1^*) = 1 + \frac{4\lambda}{(-2i)^2} \Rightarrow 1 + \frac{4\lambda}{-4(-1)} \Rightarrow \boxed{1 + \lambda}$$

* $x = -i$

$$M'_\lambda(x_2^*) = 1 + \frac{2\lambda - \cancel{2\lambda(-i)^2}}{\text{den}\ldots}$$



Puntos criticos del operador 4.

evaluamos la derivada en cero.

$$0 = 1 + \frac{(2\lambda - 2\lambda x^2)}{(2x^2-2x+2)^2}$$

$$(2x^2-2x+2)(2x^2-2x+2) \Rightarrow 4x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 4x^2 - 4x + 4$$

$$\to 4x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 8x + 4$$

$$0 = 4x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 8x + 4 + 2\lambda - 2\lambda x^2$$

$$4x^4 - 8x^3 + (12-2\lambda)x^2 - 8x + (4+2\lambda) = 0$$

Pregunta 5: (1.5)

A) El plano de parametros muestra las regiones(de numeros complejos) en donde un parametro tiene, o no tiene estabilidad, o en otras palabras, donde el parametro tiende a comportarse de manera similar. Esto es referente a que puede ser estable o no en la manera en que se puede obtener el plano dinamico(cabe destacar que un plano de parametros y un plano dinamico no representan lo mismo, a pesar que se muestren siempre en las mismas abcisas y ordenadas). Un plano de parametros tiene en las abcisas la parte real del parametro complejo, mientras que tiene en las ordenadas la parte imaginaria del parametro complejo. Cabe mencionar que el plano dinamico depende de un punto de equilibrio que no puede ser igual a los puntos fijos.

B) En el plano de parametros mostrado en la figura 2, se muestra un plano de 3 regiones, donde posiblemente una de las 3 regiones pueda ser divergente(me atreveria a mencionar que la parte rosada puede llegar a ser divergente por la simetria que cumplen los otros 2 colores, dado que muchos planos dinamicos vistos en clase, la tendencia ha sido que las regiones estables han sido simetricas, no en todos los casos). Lo que nos interesa en este tipo de planos como el de la figura, no es en realidad si pertenecen a un conjunto de valores o a otro, sino la region completa en la que el parametro es estable.