¿Qué vimos la última semana?

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

- **Definición de superficie. Parametrizaciones. Una parametrización “dobla” un trozo de plano para convertirlo en una superficie.**

- **Cambios de coordenadas: Distintas parametrizaciones nos dan distintas coordenadas. Componiendo una parametrización con su inversa, obtenemos un cambio de coordenadas.**

- **Plano tangente: Definimos un vector tangente en un punto de una superficie como el vector tangente de una curva pegada a la superficie. El conjunto de vectores tangentes forma un plano, denominado plano tangente.**

Tema 5. Superficies en el espacio euclídeo

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

Primera forma fundamental

Sea $p \in S$, la primera forma fundamental, I_p, es la forma cuadrática en T_pS definida como

$$\boldsymbol{I_p(v) = < v, v >}$$

Se introduce una **métrica** que sirve para:

- Calcular la longitud de una curva sobre una superficie
- El ángulo que forman dos curvas
- …

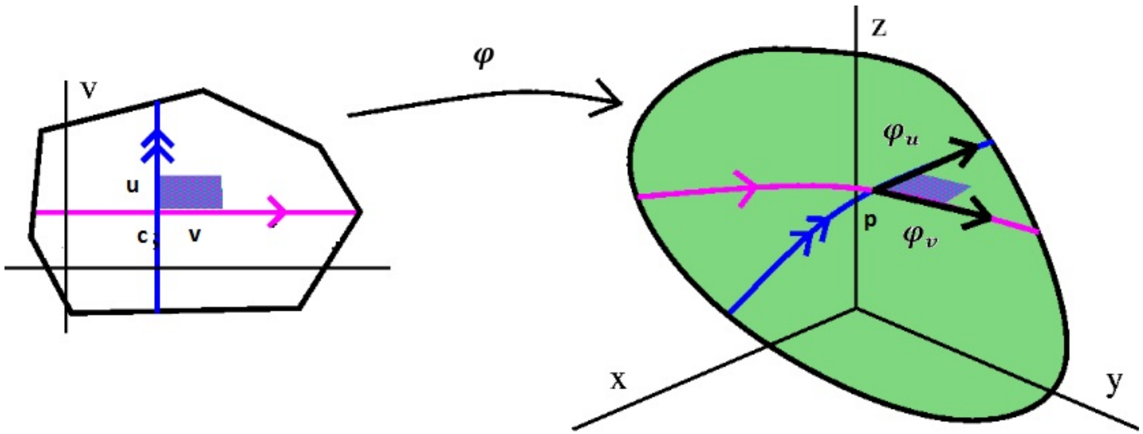
Primera forma fundamental

Sea S con parametrización φ y sea $p \in S, p = \varphi(c)$

Una base de T_pS es $\{\varphi_u(c), \varphi_v(c)\}$. Así, para cualquier $w \in T_pS$, $w = a\varphi_u(c) + b\varphi_v(c)$.

$\varphi_u(c)$ es tangente a la curva $\varphi_u(c_1 + t, c_2)$

$\varphi_v(c)$ es tangente a la curva $\varphi_v(c_1, c_2 + t)$



Fuente: https://www.math.rutgers.edu/

Primera forma fundamental

Sea un vector cualquiera del plano tangente, $w = a\varphi_u + b\varphi_v$

$$\boldsymbol{I_p(a\varphi_u + b\varphi_v)} = a^2 < \varphi_u, \varphi_u > +2ab < \varphi_u, \varphi_v > +b^2 < \varphi_v, \varphi_v >$$

Los coeficientes de la primera forma fundamental se denotan:

$E =< \varphi_u, \varphi_u > > 0$

$F =< \varphi_u, \varphi_v >$

$G =< \varphi_v, \varphi_v > > 0$

Primera forma fundamental

Sea $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$, $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$, $\alpha(0) = p$

Como φ_u, φ_v son base, $\alpha'(0) = u'(0)\varphi_u + v'(0)\varphi_v$

Entonces,

$$\boldsymbol{I_p\left(\alpha'(0)\right) = I_p(u'(0)\varphi_u + v'(0)\varphi_v)}$$
$$\boldsymbol{= E(u'(0))^2 + 2F(u'(0)v'(0)) + G(v'(0))^2}$$

Primera forma fundamental

Ejemplos: Plano

Dada una base ortonormal $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\}$, definimos una parametrización del plano $\varphi(u,v) = p + u\overrightarrow{w_1}, +v\overrightarrow{w_2}$.

Es obvio que

$$\varphi_u = \overrightarrow{w_1}$$

$$\varphi_v = \overrightarrow{w_2}$$

Primera forma fundamental

$$E = < \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_1} > = 1$$

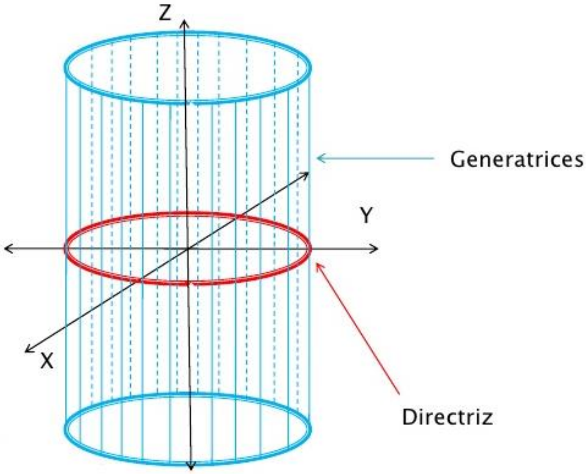
$$F = < \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2} > = 0$$

$$G = < \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_2} > = 1$$

$\boldsymbol{E}$**,** $\boldsymbol{F}$ **y** $\boldsymbol{G}$ no solo **dependen de la superficie**, también **de la parametrización**: si la base que no fuera ortonormal, F no sería cero (base no ortogonal) y E, G no serían uno (base no normal).

Primera forma fundamental

Ejemplos: Cilindro



$$\varphi(u,v) = (cosu, senu, v)$$

$$\varphi_u = (-senu, cosu, 0)$$

$$\varphi_v = (0,0,1)$$

$$E =< (-senu, cosu, 0), (-senu, cosu, 0) >= 1$$

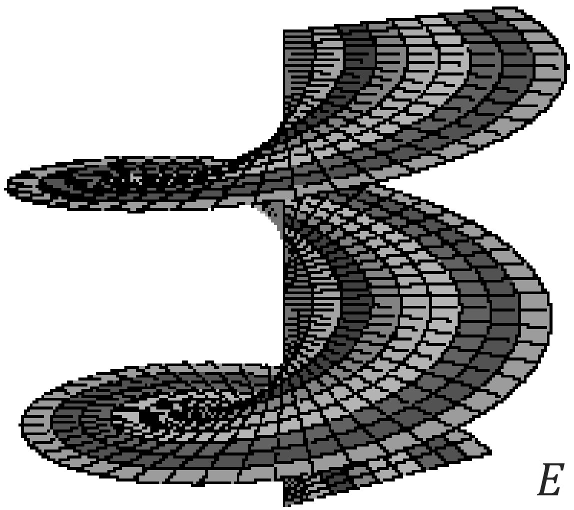
$$F =< (-senu, cosu, 0), (0,0,1) >= 0$$

$$G =< (0,0,1), (0,0,1) >= 1$$

Fuente: http://es.slideshare.net/rotcehvelasquez

Primera forma fundamental

Ejemplos: Helicoide



$$\varphi(u,v) = (v \cdot cosu, v \cdot senu, u)$$

$$\varphi_u = (-v \cdot senu, v \cdot cosu, 1)$$

$$\varphi_v = (cosu, senu, 0)$$

$$E =< (-v \cdot senu, v \cdot cosu, 1), (-v \cdot senu, v \cdot cosu, 1) >= 1 + v^2$$

$$F =< (-v \cdot senu, v \cdot cosu, 1), (cosu, senu, 0) >= 0$$

$$G =< (cosu, senu, 0), (cosu, senu, 0) >= 1$$

Fuente: https://www.encyclopediaofmath.org/

Primera forma fundamental

Longitud de una curva

$\alpha(t) = (u(t), v(t))$

$$L(\alpha) = \int_a^b ||\alpha'(t)||dt = \int_a^b < \alpha'(t), \alpha'(t) >^{1/2} dt = \int_a^b I_\alpha(\alpha'(t))^{1/2} dt =$$

$$\int_a^b (E(u,v)(u')^2 + 2F(u,v)u'v' + G(u,v)(v')^2)^{1/2} dt$$

Primera forma fundamental

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

- **Ángulo entre curvas**: sean dos curvas $\alpha(t) = (u_1(t), v_1(t))$ y $\beta(t) = (u_2(t), v_2(t))$ definidas sobre la misma superficie, el ángulo que forman, θ, puede calcularse:

$$cos\theta = \frac{< \alpha'(t_0), \beta'(t_0) >}{||\alpha'(t_0)|| \cdot ||\beta'(t_0)||} = \frac{(u_1, v_1)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}}{||\alpha'(t_0)|| \cdot ||\beta'(t_0)||}$$

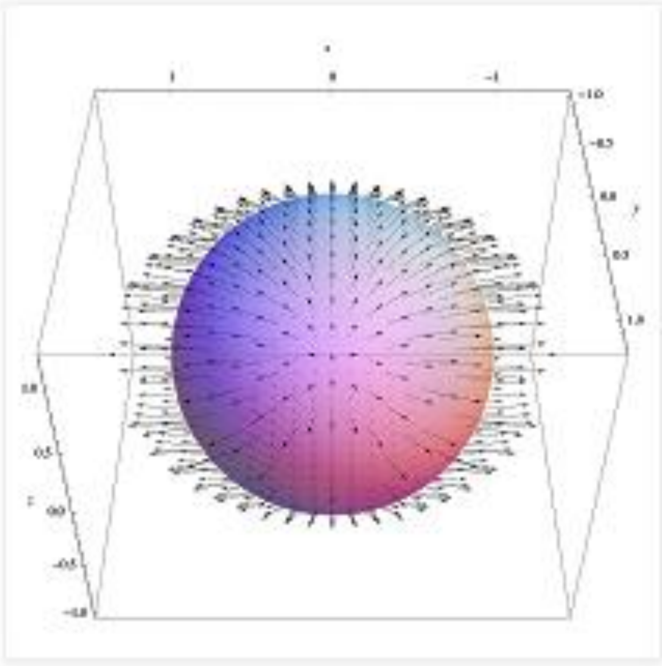
Ángulo entre dos curvas coordenadas

$$cos\theta = \frac{< \varphi_u, \varphi_v >}{||\varphi_u|| \cdot ||\varphi_v||} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Orientabilidad

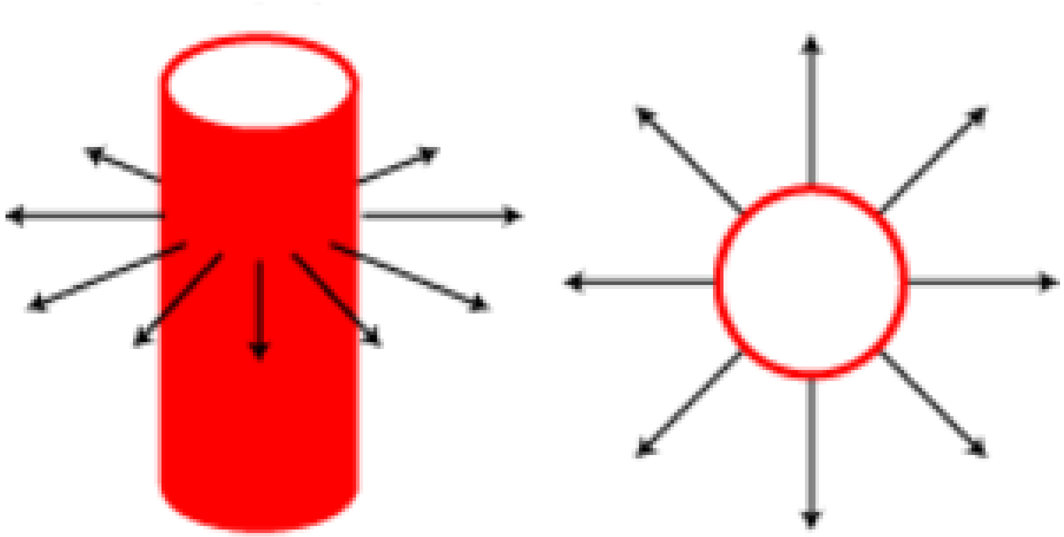
- Una superficie es **orientable** si podemos definir **dos caras**
- Si una superficie es orientable podremos definir, para cada punto de la superficie, un campo de vectores normales.
- Una de las caras estará hacia donde apunten estos vectores y la otra en dirección contraria.

Orientabilidad



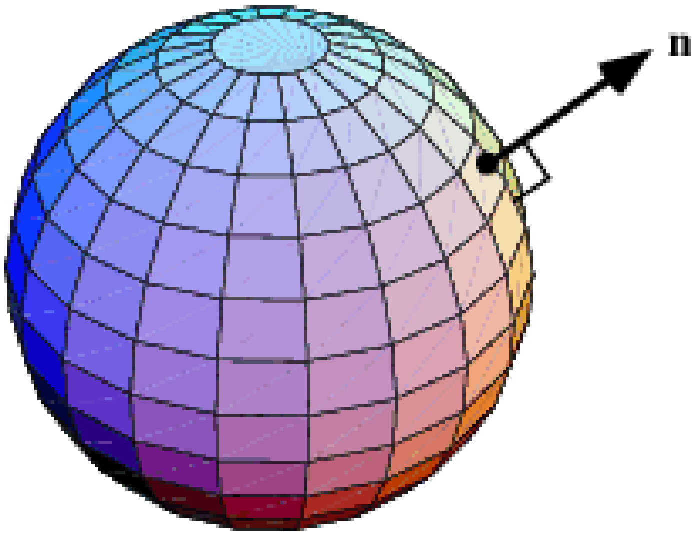
Fuente: https://www.encyclopediaofmath.org/

Orientabilidad



Fuente: http://www.c-jump.com/

Orientabilidad



Fuente: http://mathworld.wolfram.com/

Segunda forma fundamental

- La segunda forma fundamental está relacionada con el concepto de curvatura.
- Idea análoga a la de curvas
- Las superficies se pueden curvar de forma distinta si se recorre en sentidos distintos
- Distintas definiciones de curvatura

Segunda forma fundamental

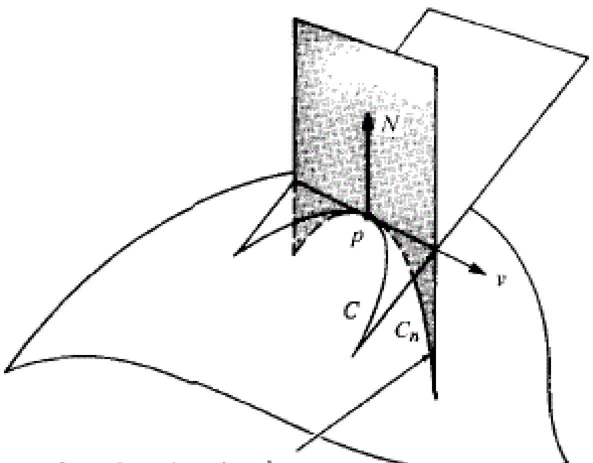
Se llama segunda forma fundamental a la forma cuadrática $II_p(w) = -< dN_p(w), w >$. Aquí, $N_p(w)$, viene dado por el producto vectorial normalizado entre φ_u y φ_v.

Sea α una curva regular en S que pasa por $p \in S$. Sea k_α la curvatura de α en $\alpha(0) = p$ y n_α el vector normal a α en p. Entonces, $k_n = k_\alpha < dN_p(w), w >$, donde $w = \alpha'(0)$ se llama **curvatura normal** de α en p.

Segunda forma fundamental

- La curvatura normal no depende de la curva escogida (Teorema de Meusnier)

- Para calcular k_n podemos tomar la sección normal de S en p a lo largo de u.



En este caso,

$$k_n = k_\alpha < n_\alpha, N(p) >= \pm k_\alpha \Longrightarrow |k_n|$$

Fuente: Geometría diferencial de curvas y superfices, M. Do Carmo, Ed. Alianza

Segunda forma fundamental

Ejemplo:

i) Plano

La segunda forma fundamental es cero, porque la curvatura de una recta es cero

ii) Esfera

Como la intersección del plano normal con una esfera es un círculo máximo, $\left|II_p(u)\right| = |k_n| = cte$

Segunda forma fundamental

Ejemplo:

iii) Cilindro

La intersección de la sección normal con el cilindro puede ser:

- Recta, si u está en una generatriz. En este caso la curvatura es cero

- Circunferencia, si u es perpendicular a una generatriz. En este caso la curvatura es constante

- Una elipse en cualquier otro caso. La curvatura depende de la excentricidad de la elipse