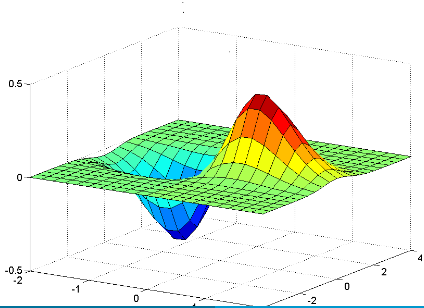
Tema 8: Problemas de contorno multidimensionales. EDPs hiperbólicas.

Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Alicia Cordero, Neus Garrido, Juan R. Torregrosa



Contenido

La ecuación de ondas

El ejemplo característico de un problema de contorno hiperbólico es la ecuación de ondas con numerosas aplicaciones en Física e Ingeniería. Una de las descripciones más simples es la dada por

$$u_{tt}(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0; \quad u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), x \in [0,L]$$

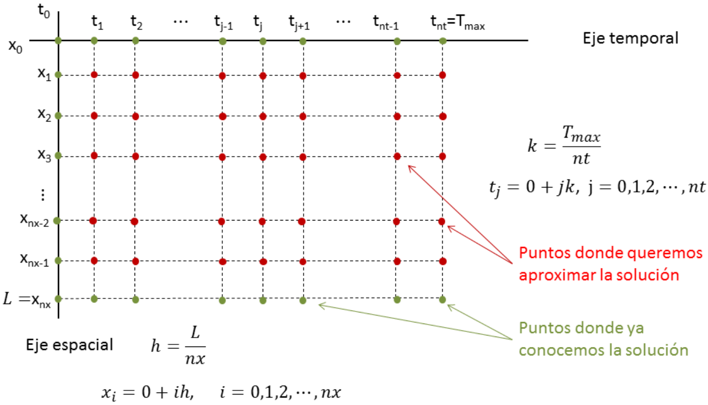
donde α es un número real en el que intervienen constantes físicas, $f(x)$ y $g(x)$ son funciones reales.

Dependiendo del tipo de diferencias finitas que utilicemos para aproximar las parciales segundas de la ecuación, obtendremos dos tipos de métodos numéricos:

- Métodos explícitos
- Métodos implícitos

Problemas hiperbólicos

La solución numérica de estos problemas consiste en transformarlos, mediante diferencias finitas, en sistemas de ecuaciones lineales o no lineales, cuyas incógnitas son valores aproximados de la solución en los puntos elegidos en el dominio espacial y temporal.



$$u_{tt}(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0; \quad u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), x \in [0,L]$$

Diferencias centrales en u_{tt} y u_{xx}

- Transformación del problema

$$\frac{u(x,t+k) - 2u(x,t) + (x,t-k)}{k^2} = \alpha^2 \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2},$$

- Discretización del problema Evaluando la expresión anterior en los puntos (x_i, t_j), $i = 1, 2, \ldots, nx-1$, $j = 1, \ldots, nt-1$,

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad i = 1, \ldots, nx-1, j = 1, \ldots, nt-1.$$

Llamando $\lambda = \dfrac{k\alpha}{h}$ y llevando a la izquierda las incógnitas del instante mayor, resulta

$$u_{i,j+1} = 2(1-\lambda^2)u_{i,j} + \lambda^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}, \quad i = 1, \ldots, nx-1, j = 1, \ldots, nt-1.$$

$$u_{tt}(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0; \quad u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), x \in [0,L]$$

Fijando el índice j y variando el índice i, $i = 1, \ldots, nx-1$, obtenemos la expresión matricial del método

$$u^{(j+1)} = Au^{(j)} - u^{(j-1)}, \quad j = 1, \ldots, nt-1,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & \cdots & 0 \\ \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2(1-\lambda^2) \end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix},$$

$$u^{(0)} = \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{nx-1,0} \end{pmatrix}, \; u^{(1)} = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} \end{pmatrix}$$

¿Cómo calculamos $u^{(1)}$, es decir, $u_{i,1}$, $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$?

- Utilizando la diferencia progresiva en la condición inicial $u_t(x,0) = g(x)$

$$\frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{k} = g(x_i) \quad \Rightarrow \quad u_{i,1} = f(x_i) + kg(x_i), i = 1, 2, \ldots, nx - 1$$

aproximación de orden 1, $O(k)$.

- Utilizando el desarrollo de Taylor hasta orden 2

$$\begin{aligned} u(x, 0 + k) \quad &\approx \quad u(x,0) + u_t(x,0)k + u_{tt}(x,0)\frac{k^2}{2} = f(x) + kg(x) + \frac{k^2}{2}\alpha^2 u_{xx}(x,0) = \\ & f(x) + kg(x) + \frac{k^2}{2}\alpha^2 f''(x), \end{aligned}$$

o bien, si $f''(x) \approx \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$, evaluando en x_i, resulta

$$u_{i,1} = (1 - \lambda^2) f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}\left(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})\right) + kg(x_i), \;\; i = 1, 2, \ldots, nx - 1$$

aproximación de orden 2, $O(k^2 + h^2)$.

Método explícito ya que calculamos la solución en el instante t_{j+1} a partir de las soluciones en los instantes t_j y t_{j-1}, directamente, sin resolver ningún sistema

Las características principales de este método son:

- El proceso es convergente si $\lambda \leq 1$,
- El orden de convergencia es $O(k + h^2)$ ó $O(k^2 + h^2)$, dependiendo de cómo calculemos $u^{(1)}$.

$$
\begin{aligned}
&u_{tt}(x,t)=\alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad 0\le x\le L, \quad t\ge 0,\\
&u(0,t)=u(L,t)=0, t>0; \quad u(x,0)=f(x), u_t(x,0)=g(x), x\in[0,L]
\end{aligned}
$$

- Definir los elementos $h=\dfrac{L}{nx}$, $k=\dfrac{T}{nt}$, $\lambda=\dfrac{k\alpha}{h}$.
- Introducimos la matriz tridiagonal

$$
M=\begin{pmatrix}
1 & -1/2 & \cdots & 0 & 0\\
-1/2 & 1 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & -1/2\\
0 & 0 & \cdots & -1/2 & 1
\end{pmatrix}
$$

- Construimos la matriz $A=2(I-\lambda^2 M)$
- Introducimos las soluciones para t_0, $u^{(0)}$ y para t_1, $u^{(1)}$
- Para $j=1,2,\ldots,nt-1$
  $$u^{(j+1)}=Au^{(j)}+u^{(j-1)}$$

Ejemplo

$$u_{tt}(x,t) - 4u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,\ t \geq 0,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, t > 0; \quad u(x,0) = \sin \pi x, u_t(x,0) = 0\ x \in [0,1]$$

Solución exacta: $u(x,t) = \sin \pi x \cos 2\pi t$

Buscamos la solución aproximada en $T_{max} = 1$ mediante el método explícito con:
(a) $h = 0.1,\ k = 0.05$
(b) $h = 0.1,\ k = 0.1$.

x_i	$u_{i,20}$	$\lvert u(x_i,1) - u_{i,20} \rvert$	$u_{i,10}$	$\lvert u(x_i,1) - u_{i,10} \rvert$
0.0	0			
0.1	0.309017			
0.2	0.587785			
0.3	0.809017			
0.4	0.951057			
0.5	1.000000			
0.6	0.951057			
0.7	0.809017			
0.8	0.587785			
0.9	0.309017			
1.0	0			

Método implícito para la ecuación de ondas

$$u_{tt}(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0; \quad u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), x \in [0,L]$$

Aproximamos u_{tt} mediante una diferencia central

$$u_{tt}(x_i,t_j) \;\rightarrow\; \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}.$$

Aproximamos u_{xx} mediante la media entre la diferencia central en t_{j+1}

$$\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2}$$

y la diferencia central en t_{j-1}

$$\frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{h^2}.$$

El esquema en diferencias que se obtiene es el siguiente:

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = \frac{\lambda^2}{2}\left[(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) \right.$$
$$\left. +(u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1})\right],$$

para $i = 1, 2, \dots, nx - 1$, $j = 1, 2, \dots, nt - 1$,
o bien, llamando $\lambda = \dfrac{\alpha k}{h}$ y llevando a la izquierda las variables correspondientes al instante más alto

$$(1+\lambda^2)u_{i,j+1} - \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) =$$
$$= 2u_{i,j} + \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) - (1+\lambda^2)u_{i,j-1},$$

para $i = 1, 2, \dots, nx - 1$, $j = 1, 2, \dots, nt - 1$,
Fijando j y escribiendo todas las ecuaciones para $i = 1, 2, \dots, nx - 1$, obtenemos la expresión matricial del método

$$Au^{(j+1)} = 2u^{(j)} + Bu^{(j-1)}, \quad j = 1, 2, \dots, nt - 1,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda^2/2 & 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2/2 & 1+\lambda^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda^2/2 & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix},$$

$$u^{(0)} = \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{nx-1,0} \end{pmatrix}, \; u^{(1)} = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -(1+\lambda^2) & \lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda^2/2 & -(1+\lambda^2) & \lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2/2 & -(1+\lambda^2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(1+\lambda^2) & \lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^2/2 & -(1+\lambda^2) \end{pmatrix}$$

Método implícito para la ecuación de ondas

Método implícito con el que calculamos la solución en el instante t_{j+1} resolviendo un sistema lineal que tiene como matriz de coeficientes A y cuyo término independiente es $2u^{(j)} + Bu^{(j-1)}$, que depende de la solución en los instantes t_j y t_{j-1}

Las características principales de este método son:

- El proceso es convergente sin necesidad de condiciones,
- El orden de convergencia es $O(k + h^2)$ ó $O(k^2 + h^2)$, dependiendo de cómo calculemos $u^{(1)}$.

Algoritmo del método implícito para la ecuación de ondas

$$u_{tt}(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 \le x \le L, \quad t \ge 0,$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0; \quad u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), x \in [0,L]$$

- Definir los elementos $h = \dfrac{L}{nx}$, $k = \dfrac{T}{nt}$, $\lambda = \dfrac{k\alpha}{h}$.
- Introducimos la matriz tridiagonal

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & \cdots & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Construimos la matriz $B = -I - \lambda^2 M$
- Introducimos las soluciones para t_0, $u^{(0)}$ y para t_1, $u^{(1)}$
- Construimos los vectores

$$a = (1+\lambda^2) ones(nx-1,1)$$
$$b = -\frac{\lambda^2}{2} ones(nx-2,1)$$
$$c = b$$

- Para $j = 1, 2, \ldots, nt-1$

$$d = 2u^{(j)} + Bu^{(j-1)}$$
$$u^{(j+1)} = Crout(a,b,c,d)$$

Ejemplo

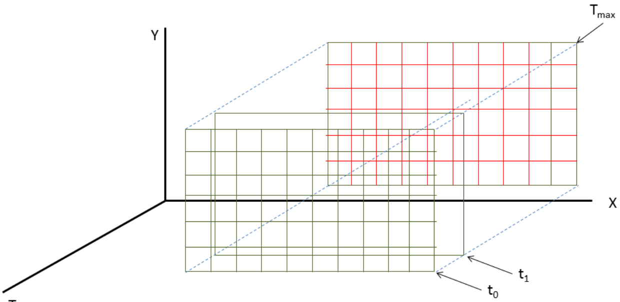
$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 4, \;\; t \geq 0,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, t > 0; \quad u(x,0) = 2 - |x-2|, u_t(x,0) = 0 \; x \in [0,4]$$

Buscamos la solución aproximada en $T_{max} = 4$ mediante el método implícito con $h = 1$ y $k = 0.5$.

	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$
t=0	0.0	1.0000	2.0000	1.0000	0.0
t=0.5	0.0	1.0000	1.7500	1.0000	0.0
t=1	0.0	0.9184	1.1837	0.9184	0.0
t=1.5	0.0	0.6926	0.4824	0.6926	0.0
t=2	0.0	0.2912	-0.1699	0.2912	0.0
t=2.5	0.0	-0.2449	-0.6647	-0.2449	0.0
t=3	0.0	-0.7996	-0.9953	-0.7996	0.0
t=3.5	0.0	-1.2231	-1.2214	-1.2231	0.0
t=4	0.0	-1.3966	-1.3981	-1.3966	0.0

$$u_{tt}(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,y,t) + \beta^2 u_{yy}(x,y,t), \quad (x,y) \in R = [a,b] \times [c,d], \ t \geq 0$$

$$u(a,y,t) = h1(y,t), \ u(b,y,t) = h2(y,t), \ u(x,c,t)) = h3(x,t), \ u(x,d,t)) = h4(x,t) \quad , t$$
$$u(x,y,0) = f(x,y), u_t(x,y,0) = g(x,y), (x,y) \in R = [a,b] \times [c,d], \qquad t \geq 0$$



$(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$

$h = \dfrac{b-a}{nx} \qquad k = \dfrac{d-c}{ny} \qquad p = \dfrac{Tmax}{nt}$

$$u_{tt}(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,y,t) + \beta^2 u_{yy}(x,y,t), \quad (x,y) \in R = [a,b] \times [c,d],\ t \geq 0$$

$$u(a,y,t) = h1(y,t),\ u(b,y,t) = h2(y,t),\ u(x,c,t)) = h3(x,t),\ u(x,d,t)) = h4(x,t)$$
$$u(x,y,0) = f(x,y), u_t(x,y,0) = g(x,y), (x,y) \in R = [a,b] \times [c,d], \quad t \geq 0$$

Diferencias centrales en u_{tt}, u_{xx} y u_{yy}

$$\begin{aligned}\frac{u(x,y,t+p) - 2u(x,y,t) + u(x,y,t-p)}{p^2} \quad &= \quad \alpha^2 \frac{u(x+h,y,t) - 2u(x,y,t) + u(x-h,y,t)}{h^2} \\ &+\beta^2 \frac{u(x,y+k,t) - 2u(x,y,t) + u(x,y-k,t)}{k^2},\end{aligned}$$

Discretización del problema Evaluando la expresión anterior en los puntos (x_i, y_j, t_l), $i = 1, 2, \ldots, nx-1,\ j = 1, 2, \ldots, ny-1,\ l = 0, 1, \ldots, nt-1,$ $u(x_i, y_j, t_l) = u_{i,j,l}$

$$\begin{aligned}\frac{u_{i,j,l+1} - 2u_{i,j,l} + u_{i,j,l-1}}{p^2} \quad &= \quad \alpha^2 \frac{u_{i+1,j,l} - 2u_{i,j,l} + u_{i-1,j,l}}{h^2} \\ &+\beta^2 \frac{u_{i,j+1,l} - 2u_{i,j,l} + u_{i,j-1,l}}{k^2},\end{aligned}$$

$i = 1, 2, \ldots, nx-1, j = 1, 2, \ldots, ny-1, l = 0, 1, \ldots, nt-1.$

Método explícito

Llamando $\lambda = \dfrac{\alpha p}{h}$, $\mu = \dfrac{\beta p}{k}$ y despejando las incógnitas del instante mayor

$$u_{i,j,l+1} = 2(1-\lambda^2-\mu^2)u_{i,j,l} + \lambda^2(u_{i+1,j,l}+u_{i-1,j,l}) + \mu^2(u_{i,j+1,l}+u_{i,j-1,l}) - u_{i,j,l-1},$$
$$i = 1,2,\ldots,nx-1, j = 1,2,\ldots,ny-1, l = 0,1,\ldots,nt-1.$$

Para calcular cada matriz utilizamos las dos anteriores (en la variable temporal)

¿Cómo calculamos $U^{(1)}$, es decir, $u_{i,j,1}$, $i = 1,2,\ldots,nx-1$, $j = 1,2,\ldots,ny-1$?

- Utilizando la diferencia progresiva en la condición inicial $u_t(x,y,0) = g(x,y)$

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j,1}-u_{i,j,0}}{p} &= g(x_i,y_j) \\ &\curvearrowright \\ u_{i,j,1} &= f(x_i,y_j) + pg(x_i,y_j), i = 1,2,\ldots,nx-1,\ j = 1,2,\ldots,ny-1 \end{aligned}$$

aproximación de orden 1 en la variable temporal, $O(h^2+k^2+p)$.

¿Cómo calculamos $U^{(1)}$, es decir, $u_{i,j,1}$, $i = 1, 2, \ldots, nx-1$, $j = 1, 2, \ldots, ny-1$?

- Utilizando el desarrollo de Taylor hasta orden 2

$$\begin{aligned} u(x,y,0+p) &\approx u(x,y,0) + u_t(x,y,0)p + u_{tt}(x,y,0)\frac{p^2}{2} \\ &= f(x,y) + pg(x,y) + \frac{p^2}{2}\left(\alpha^2 u_{xx}(x,y,0) + \beta^2 u_{yy}(x,y,0)\right) \\ &= f(x,y) + pg(x,y) + \frac{p^2}{2}\left(\alpha^2 f_{xx}(x,y) + \beta^2 f_{yy}(x,y)\right), \end{aligned}$$

si $f_{xx}(x,y) \approx \dfrac{f(x+h,y) - 2f(x,y) + f(x-h,y)}{h^2}$ y

$f_{yy}(x,y) \approx \dfrac{f(x,y+k) - 2f(x,y) + f(x,y-k)}{k^2}$ evaluando en (x_i, y_j), resulta

$$\begin{aligned} u_{i,j,1} &= (1-\lambda^2-\mu^2)f(x_i,y_j) + pg(x_i,y_j) \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{2}\left(f(x_{i+1},y_j) + f(x_{i-1},y_j)\right) + \frac{\mu^2}{2}\left(f(x_i,y_{j+1}) + g(x_i,y_{j-1})\right), \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \ldots, nx-1$, aproximación de orden 2, $O(k^2 + h^2 + p^2)$.

Método explícito

```
function [U]=exponda3D(CC1x,CC2x,CC1y,CC2y,CI1,CI2,a,b,nx,c,d,ny,Tmax,nt,alfa,beta)

hx=(b-a)/nx;    x=a:hx:b;
hy=(b-a)/ny;    y=c:hy:d;
k=Tmax/nt;      t=0:k:Tmax;

U=zeros(nx+1,ny+1,nt+1);

for j=1:ny+1
    for l=1:nt+1
        U(1,j,l)=feval(CC1x,y(j),t(l));
        U(nx+1,j,l)=feval(CC2x,y(j),t(l));
    end
end
for j=1:nx+1
    for l=1:nt+1
        U(j,1,l)=feval(CC1y,x(j),t(l));
        U(j,ny+1,l)=feval(CC2y,x(j),t(l));
    end
end
for i=1:nx+1
    for j=1:ny+1
        U(i,j,1)=feval(CI1,x(i),y(j));
        M(i,j) = feval(CI2,x(i),y(j));
    end
end
```

```
lambda=k*alfa/hx;

mu=k*beta/hy;

for i=2:nx
        for j=2:ny
   U(i,j,2) = (1-lambda^2-mu^2)*U(i,j,1) + p * M(i,j)...
             +(lambda^2/2)*(U(i+1,j,1)+U(i-1,j,1))+...
             +(mu^2/2)*(U(i,j+1,1)+U(i,j-1,1));
       end
end

for l=2:nt

       U(2:nx,2:ny,l+1) = 2*(1-lambda^2-mu^2)*U(2:nx,2:ny,l)...
                          +lambda^2*(U(3:nx+1,2:ny,l)+U(1:nx-1,2:ny,l))+...
                          mu^2*(U(2:nx,3:ny+1,l)+U(2:nx,1:ny-1,l))-U(2:nx,2:ny,l-1);

end
end
```

Ejemplo

$$
\begin{array}{l}
u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - u_{yy}(x,t) = 0, (x,y) \in [0,2] \times [0,2],\ \ t \geq 0, \\
u(0,y,t) = u(4,y,t) = u(x,0,t) = u(x,4,t) = 1+t; \\
\quad u(x,0) = \sin\left(\pi(x+y)\right), u_t(x,y,0) = 0
\end{array}
$$

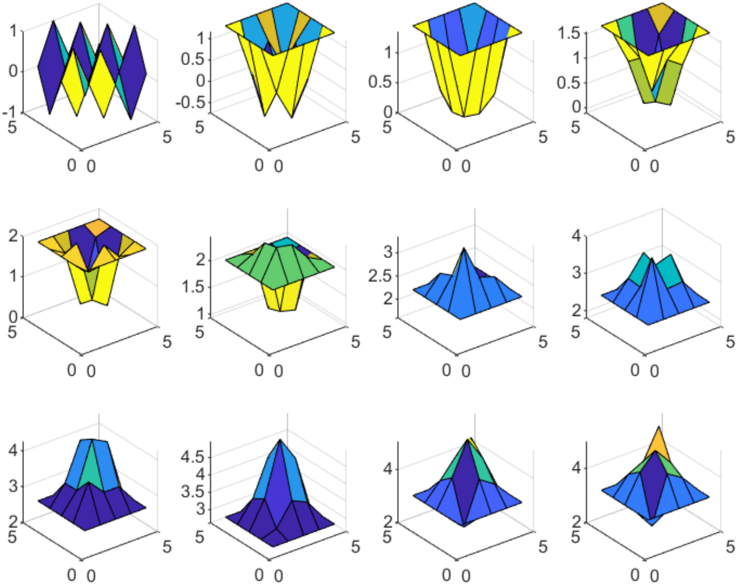
Resolvemos el problema para $nx = ny = 4$, $nt = 11$, $Tmax = 2$ con el método explícito:

```
>> U = exponda3D(@(y,t) 1+0*y+t, @(y,t) 1+0*y+t, @(x,t) 1+0*x+t,...
@(x,t) 1+0*x+t, @(x,y) sin(pi*(x+y)), @(x,y) 0*x+0*y,...
0,2,4,0,2,4,2,11,1,1)
```

Solución en el último instante:

```
U(:,:,12) =

    3.0000    3.0000    3.0000    3.0000    3.0000
    3.0000    2.2882    4.0185    3.6566    3.0000
    3.0000    4.0185    4.6079    3.9430    3.0000
    3.0000    3.6566    3.9430    5.0250    3.0000
    3.0000    3.0000    3.0000    3.0000    3.0000
```


1 0 -1 5 5 0 0
1 0.5 0 -0.5 5 5 0 0
1 0.5 0 5 5 0 0
1.5 1 0.5 0 5 5 0 0
2 1 0 5 5 0 0
2 1.5 1 5 5 0 0
3 2.5 2 5 5 0 0
4 3 2 5 5 0 0
4 3 2 5 5 0 0
4.5 4 3.5 3 5 5 0 0
4 2 5 5 0 0
4 2 5 5 0 0

- Problema 1 Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad x \in [0,\pi],\ t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno e iniciales '

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \forall t, \quad u(x,0) = 3\sin x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,\pi].$$

El instante máximo que nos interesa es $T = 2$ y la solución exacta es $u(x,t) = 3\cos t \sin x$. Se pide:

  - Aproxima, mediante el método explícito, la solución del problema en el instante T, tomando $h = \pi/10$ y $k = 2/5$. Determina el error exacto y representa dicho error.
  - Aproxima, mediante el método implícito, la solución del problema en el instante T, tomando $h = \pi/10$ y $k = 2/5$. Determina el error exacto y representa dicho error.

- Problema 2 Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + xu_t(x,t) - u(x,t) = 0, \quad x \in [0,1],\ t \geq 0,$$

con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas y condiciones iniciales $u(x,0) = \sin \pi x$, $u_t(x,0) = 0$, $x \in [0,1]$.

  - Describe el método explícito de orden $O(k^2 + h^2)$, utilizando nx subintervalos en $[0,1]$ y nt subintervalos en $[0,T]$, donde T denota el instante máximo.
  - A partir del esquema anterior, determina la solución aproximada del problema en $T = 1.5$, tomando 10 subintervalos en el eje espacial y 1000 en el temporal.
  - Repite los dos pasos anteriores utilizando un método implícito de orden $O(k^2 + h^2)$ y los mismos subintervalos espaciales y temporales. Compara los resultados obtenidos.

- Problema 3 Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_{xx}(x,t) + 2u_{xt} - 3u_{tt}(x,t) = \cos \pi x 0, \quad x \in [0,1],\ t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno $u(0,t) = 0, u_x(1,t) = 2t, \forall t$ y la condición inicial

$$u(x,0) = \sin x, u_t(x,0) = x - 2x^2,\ x \in [0,1].$$

Se pide:

  - Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden $O(k+h^2)$. Describe la expresión matricial del mismo.
  - Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas implícito de orden $O(k+h^2)$. Describe la expresión matricial de dicho esquema.
  - Aplica el esquema del apartado anterior para determinar la solución aproximada en el instante $T = 1$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.005$.
  - Representa la solución en los instantes $t = 0.25$, $t = 0.5$, $t = 0.75$ y $t = 1$.

- Problema 4 Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx} + e^{-t}, \quad x \in [0,\pi],\ t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno $u(0,t) = e^{-t}, u_x(\pi,t) = -3\cos t, \forall t$ y la condición inicial

$$u(x,0) = 3\sin x + 1, u_t(x,0) = -1,\ x \in [0,1].$$

Se pide:

  - Describe el método explícito de orden $O(k^2 + h^2)$, utilizando nx subintervalos en $[0,\pi]$ y nt subintervalos en $[0,T]$, donde T denota el instante máximo.
  - A partir del esquema anterior, determina la solución aproximada del problema en $T = 1.5$, tomando 10 subintervalos en el eje espacial y 100 en el temporal.
  - Repite los dos pasos anteriores utilizando un método implícito de orden $O(k^2 + h^2)$ y los mismos subintervalos espaciales y temporales. Compara los resultados obtenidos.

Solución Problema 4

- Método explícito Consideremos los pasos espacial y temporal $h = \pi/nx$ y $k = Tmax/nt$, lo que nos proporciona los puntos

$$x_i = 0 + ih,\ i = 0, 1, 2, \ldots, nx - 1, nx,\quad t_j = 0 + jk,\ j = 0, 1, \ldots, nt - 1, nt.$$

Diferencias finitas centrales para ambas derivadas parciales:

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + e^{-t_j},$$

$i = 1, \ldots, nx - 1, nx$; $j = 1, \ldots, nt - 1$. Llamando $\lambda = \dfrac{k\alpha}{h}$ y llevando a la izquierda las incógnitas del instante mayor, resulta

$$u_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)u_{i,j} + \lambda^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} + k^2 e^{-t_j},$$

$i = 1, \ldots, nx - 1, nx$; $j = 1, \ldots, nt - 1$.
Modificamos expresión para $i = nx$:

$$u_{nx,j+1} = 2(1 - \lambda^2)u_{nx,j} + \lambda^2(u_{nx+1,j} + u_{nx-1,j}) - u_{nx,j-1} + k^2 e^{-t_j}$$

con la segunda condición inicial

$$u_x(\pi, t_j) \approx \frac{u_{nx+1,j} - u_{nx-1,j}}{2h} = -3\cos t_j \ \rightarrow\ u_{nx+1,j} = u_{nx-1,j} - 6h\cos t_j.$$

- Método explícito

Por tanto,

$$u_{nx,j+1} = 2(1-\lambda^2)u_{nx,j} + 2\lambda^2 u_{nx-1,j} - u_{nx,j-1} - 6h\lambda^2 \cos t_j + k^2 e^{-t_j}.$$

Como en cualquier problema hiperbólico, debemos completar la solución en el instante t_1

$$\begin{aligned} u_{i,1} &= (1-\lambda^2)f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})) + kg(x_i) + e^{-t_1} \\ &= (1-\lambda^2)u_{i,0} + \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}) + kg(x_i) + e^{-t_1} \end{aligned}$$

Para $i = nx$, $u_{nx+1,0} = u_{nx-1,0} - 6h\cos t_0$ y a partir de aquí:

$$u_{nx,1} = (1-\lambda^2)u_{nx,0} + \lambda^2 u_{nx-1,0} - \frac{\lambda^2}{2} 6h\cos t_0 + kg(x_{nx}) + e^{-t_1}.$$

- Método implícito

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = \frac{\lambda^2}{2}\left[(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) + (u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1})\right] + k^2 e^{-t_j},$$

para $i = 1, 2, \dots, nx-1, nx$, $j = 1, 2, \dots, nt-1$,

$$(1+\lambda^2)u_{i,j+1} - \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = 2u_{i,j} + \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) - (1+\lambda^2)u_{i,j-1} + k^2 e^{-t_j},$$

para $i = 1, 2, \dots, nx-1, nx$, $j = 1, 2, \dots, nt-1$,

- Método implícito
  Para $i = nx$:

$$(1+\lambda^2)u_{nx,j+1} - \frac{\lambda^2}{2}(u_{nx+1,j+1} + u_{nx-1,j+1}) =$$
$$= 2u_{nx,j} + \frac{\lambda^2}{2}(u_{nx+1,j-1} + u_{nx-1,j-1}) - (1+\lambda^2)u_{nx,j-1} + k^2 e^{-t_j},$$

Pero,

$$u_{nx+1,j+1} = u_{nx-1,j+1} - 6h\cos t_{j+1} \quad \text{y} \quad u_{nx+1,j-1} = u_{nx-1,j-1} - 6h\cos t_{j-1}.$$

Por tanto, la última ecuación resulta:

$$(1+\lambda^2)u_{nx,j+1} - \lambda^2 u_{nx-1,j+1} =$$
$$= 2u_{nx,j} + \lambda^2 u_{nx-1,j-1} - (1+\lambda^2)u_{nx,j-1} - 3h\lambda^2(\cos t_{j+1} + \cos t_{j-1}) + k^2 e^{-t_j}.$$

Matricialmente:

$$Au^{(j+1)} = 2u^{(j)} + Bu^{(j-1)} + b_j + c_j$$

$$A=\begin{pmatrix} 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -\lambda^2/2 & 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -\lambda^2/2 & 1+\lambda^2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda^2 & 1+\lambda^2 \end{pmatrix},\quad u^{(j)}=\begin{pmatrix} u_{1,j}\\ u_{2,j}\\ u_{3,j}\\ \vdots\\ u_{nx-1,j}\\ u_{nx,j}\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} -(1+\lambda^2) & \lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \lambda^2/2 & -(1+\lambda^2) & \lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2/2 & -(1+\lambda^2) & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(1+\lambda^2) & \lambda^2/2\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^2 & -(1+\lambda^2) \end{pmatrix},$$

$$b_j = ke^{-t_j}[1,1,1,\ldots,1,1]^T,$$

$$c_j=\left[\frac{\lambda^2}{2}(e^{-t_{j+1}}+e^{-t_{j-1}}),0,0,\ldots,0,-3h\lambda^2(\cos t_{j+1}+\cos t_{j-1})\right]^T$$

Referencias

- S Larsson, V Thomée, *Partial differential equations with numerical methods*, Springer, Berlin, 2016.
- T. Myint-U, L. Debnath, *Partial differential equations for Scientist and engineers*, Ed. North-Holland, New York, 1987.
- R. Burden, J. Faires, *Análisis Numérico*, Ed. Thompson, 2002.
- S.C. Chapra, R.P. Canale, *Métodos nummércos para ingenieros*, Ed. McGraw-Hill, México D.F., 2006.
- L. Lapidus, G. Pinder, *Numerical solution of partial differential equations in science and engineering*, Ed. Wiley Interscience Publication, New York, 1999.
- A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, *Problemas resueltos de métodos numéricos*, Ed. Thompson, 2006.
- J. Mathews, K. Fink, *Métodos Numéricos con Matlab*, Ed. Prentice-Hall, 1999.