¿Qué vimos la última semana?

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

- Parametrización de curvas en el plano. Distintas parametrizaciones para la misma traza.

- Reparametrizaciones. Agrupación de distintas parametrizaciones para la misma traza.

- Parametrización privilegiada: curva PPA.

- Diedro de Frenet: Vector tangente y vector normal.

- Curvatura: mide la “aceleración” de la curva.

- Parametrizaciones equivalentes tienen curvaturas equivalentes.

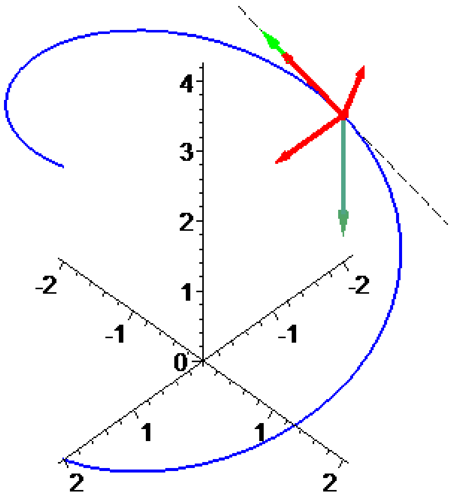
Tema 3. Parametrización de curvas en el espacio

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

Triedro de Frenet

Sea $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, diferenciable y PPA

Para cada punto, vamos a construir una base



Fuente: http://marcogalarraga.blogspot.com.es/

Triedro de Frenet

Primer vector: $T(t) = \alpha'(t)$

Segundo vector: $N(t) = \frac{T'(t)}{||T'(t)||}$

De aquí se tiene que: $k(t) = \left||T'(t)|\right|$ es la **curvatura**.

Ojo, $k(t)$ tiene que ser $> \ 0$ (α birregular).

Tercer vector: $B(t) = T(t) \times N(t)$ **binormal**

$\{T(t), N(t), B(t)\}$ es el **Triedro de Frenet**

Triedro de Frenet

- Plano osculador afín: $\{T(t), N(t)\}$
- Plano binormal afín: $\{N(t), B(t)\}$
- Plano rectificante afín: $\{T(t), B(t)\}$

Curvatura y torsión

Derivando los productos escalares resulta:

$$T'(s) = k(s)N(s)$$

$$N'(s) = k(s)T(s) - \tau(s)B(s)$$

$$B'(s) = \tau(s)N(s)$$

$\tau(s) =< B'(s), N(s) >$ es la **torsión**

Curvatura y torsión

La torsión mide cuánto se aleja una curva del plano osculador.

$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\tau(t) = 0 \Leftrightarrow \alpha$ es una curva plana.

Dem:

$\tau(t) = 0 \Longrightarrow \alpha$ es una curva plana.

$\tau = 0 \Longrightarrow B' = \tau N = 0 \Longrightarrow B(t) = B_0 \in \mathbb{R}^3$ (cte).

Así, $0 =< T, B >=< T, B_0 >=< \alpha', B_0 >$.

$< \alpha, B_0' >= 0$, entonces, $0 =< \alpha', B_0 >+< \alpha, B_0' >=< \alpha, B_0 >'$.

Por tanto, $< \alpha, B_0 >= d, d \in \mathbb{R}$.

$B_0 = (a, b, c) =< \big(x(t), y(t), z(t)\big), (a, b, c) >= d$

$\Longrightarrow ax(t) + by(t) + cz(t) - d = 0$, qed

Curvatura y torsión

Dem:

Si α es una curva plana $\Longrightarrow \tau(t) = 0$

Si $\alpha(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ es una curva plana, entonces

$ax(t) + by(t) + cz(t) - d = 0$. Spdg, $\big||a, b, c|\big| = 1$.

Derivando, $ax' + by' + cz' = 0$, luego, $< T, (a, b, c) >= 0$.

Derivando de nuevo, $ax'' + by'' + cz'' = 0$, luego, $k < N, (a, b, c) >= 0$.

Como α birregular, $k \neq 0$, por tanto

$$\left.\begin{array}{l} < T, (a, b, c) >= 0 \\ < N, (a, b, c) >= 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow B = \pm(a, b, c) \Longrightarrow B' = 0 \Longrightarrow \tau = 0$$

Curvatura y torsión

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

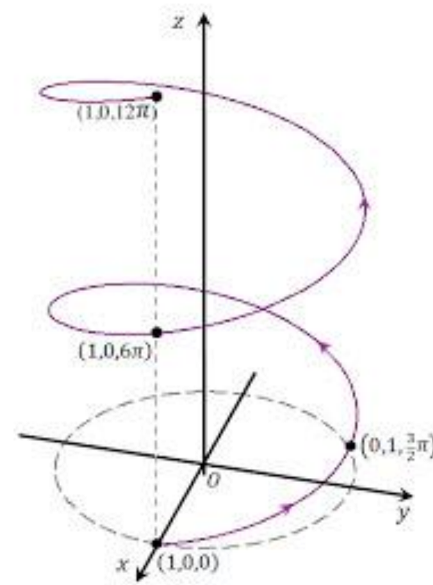
Ejemplo:

$$\alpha(s) = (a\cos\frac{s}{c}, a\,\text{sen}\frac{s}{c}, \frac{b}{c}s), \text{ donde } c^2 = a^2 + b^2$$

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right) = T(s)$$

$$k_\alpha = \left||T'|\right| = \sqrt{\frac{a^2}{c^4}} = \frac{a}{c^2}$$

$$N = (-\cos\frac{s}{c}, -\text{sen}\frac{s}{c}, 0)$$



Fuente: http://www.mate.unlp.edu.ar

Curvatura y torsión

$$N = \left(-\cos\frac{s}{c}, -\operatorname{sen}\frac{s}{c}, 0\right)$$

$$B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{a}{c}sin\frac{s}{c} & \frac{a}{c}cos\frac{s}{c} & \frac{b}{c} \\ -cos\frac{s}{c} & -sin\frac{s}{c} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\right)$$

$$B' = \left(\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\right)$$

$$\tau =< B', N >= -\frac{b}{c^2}$$

Curvatura y torsión

Cálculo de curvatura y torsión

$$\begin{cases} \alpha' = T \\ \alpha'' = \qquad\qquad\qquad kN \\ \alpha''' = -k^2T + k'N - \tau kB \end{cases}$$

$$k = ||\alpha''||; \tau = \frac{-\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{||\alpha''||^2}$$

Curvatura y torsión

Sean $k_0, \tau_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}$, C^∞, $k_0 > 0$. Entonces,

(i) Existencia: existe una curva parametrizada por arco, $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $k_\alpha = k_0$, $\tau_\alpha = \tau_0$

(i) Unicidad: si $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es otra curva C^∞ y parametrizada por arco, con $k_\alpha = k_0$, $\tau_\beta = \tau_0$, existe un movimiento directo de $\mathbb{R}^3$, $M : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\beta(s) = M \circ \alpha(s), \forall\, s \in I$.