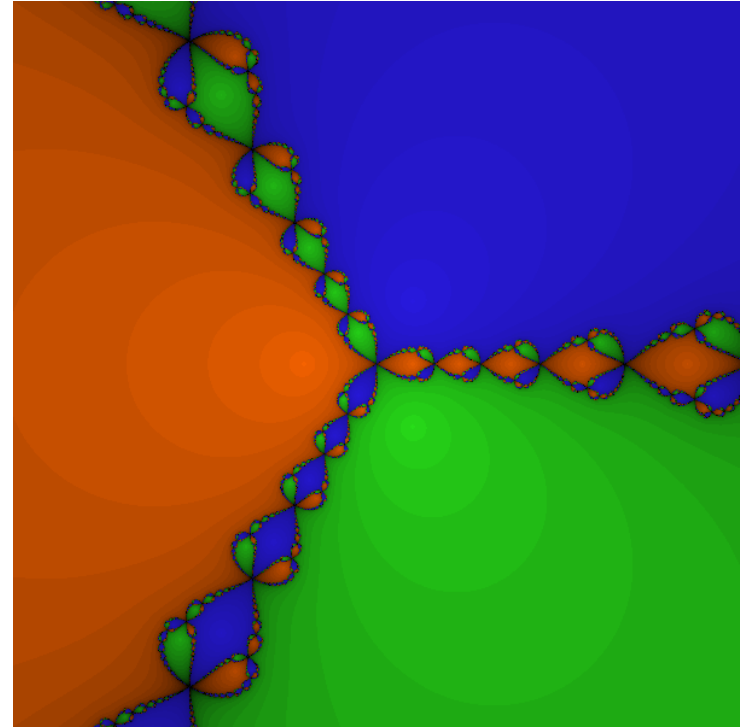


Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería

Alicia Cordero

Neus Garrido

Juan R. Torregrosa

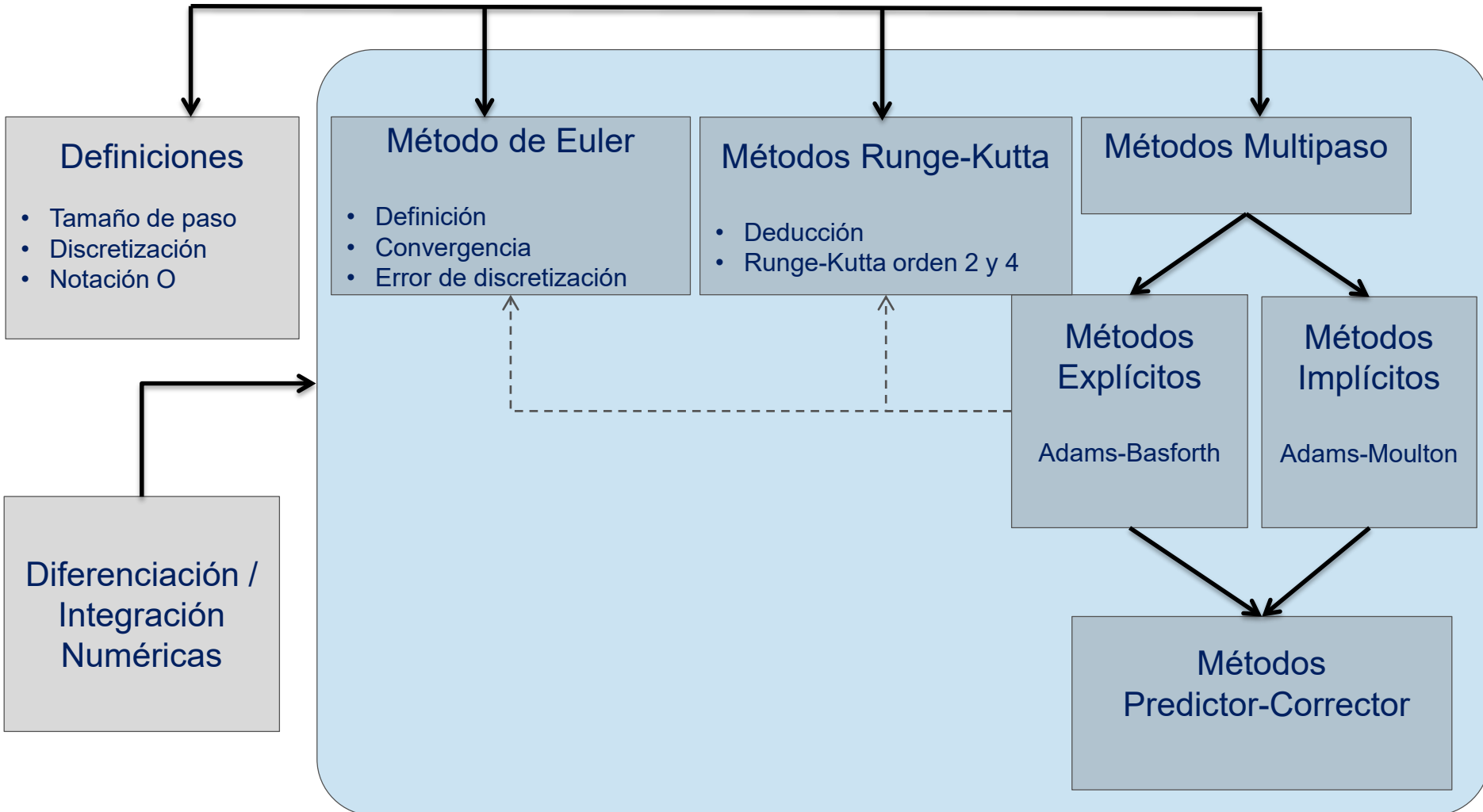


Tema 3: Problemas de valor inicial. Métodos de un paso

Ecuaciones diferenciales de primer orden

- ▶ Introducción
- ▶ Métodos de un paso
 - ▶ Método de Euler
 - ▶ Método de Heun
 - ▶ Métodos de Runge-Kutta
- ▶ Sistemas de ecuaciones diferenciales

Métodos numéricos para problemas de valor inicial



Introducción

Problemas de valor inicial

Consideremos el modelo de crecimiento económico de un país

$$\begin{aligned}X(t) &= \sigma K(t), \\ \dot{K}(t) &= \alpha X(t) + H(t), \\ N(t) &= N_0 e^{\rho t},\end{aligned}$$

donde $X(t)$ es la producción total anual, $K(t)$ el stock de capital, $H(t)$ el flujo anual de ayudas del exterior y $N(t)$ el tamaño de la población, medido en el instante t .

El modelo se resume en la ecuación diferencial

$$\dot{K}(t) = \alpha \sigma K(t) + H(t),$$

con la condición inicial $K(0) = K_0$.

Problemas de valor inicial

En un modelo macroeconómico $C(t)$, $I(t)$ e $Y(t)$ designan respectivamente consumo, inversión y renta nacional de un país en un instante t . Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}C(t) + I(t) &= Y(t), \\I(t) &= k\dot{C}(t), \\C(t) &= aY(t) + b,\end{aligned}$$

con a, b, k constantes positivas y $a < 1$.

Se puede deducir la ecuación diferencial

$$\dot{Y}(t) = \frac{1-a}{ka}Y(t) - \frac{b}{ka},$$

con la condición inicial $Y(0) = Y_0 > \frac{b}{1-a}$.

Problemas de valor inicial

Teoría de propagación de enfermedades contagiosas:

$$y'(t) = k(m - y(t))y(t),$$

donde $y(t)$ denota el número de infectados, m es la cantidad total de población y k una constante positiva.

Introducimos la variable $z(t)$ como el número de personas que se separan de la población infectada por recuperación o fallecimiento. Así

$$x(t) = x(0)e^{-\left(\frac{k_1}{k_2}\right)z(t)}, \quad y(t) = m - x(t) - z(t)$$

donde k_1 es la rapidez de la infección, k_2 es la rapidez del aislamiento y

$$z'(t) = k_2(m - z(t) - x(0)e^{-\left(\frac{k_1}{k_2}\right)z(t)}),$$

ecuación diferencial sin solución analítica.

Problemas de valor inicial

Teorema: Supongamos que $D = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in \mathbb{R}\}$ y que $f(x, y)$ es continua en D . Si, dados $(x, y_1), (x, y_2) \in D$, existe una constante $L > 0$ tal que f satisface

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

(condición de Lipschitz), entonces el problema de valor inicial (PVI)

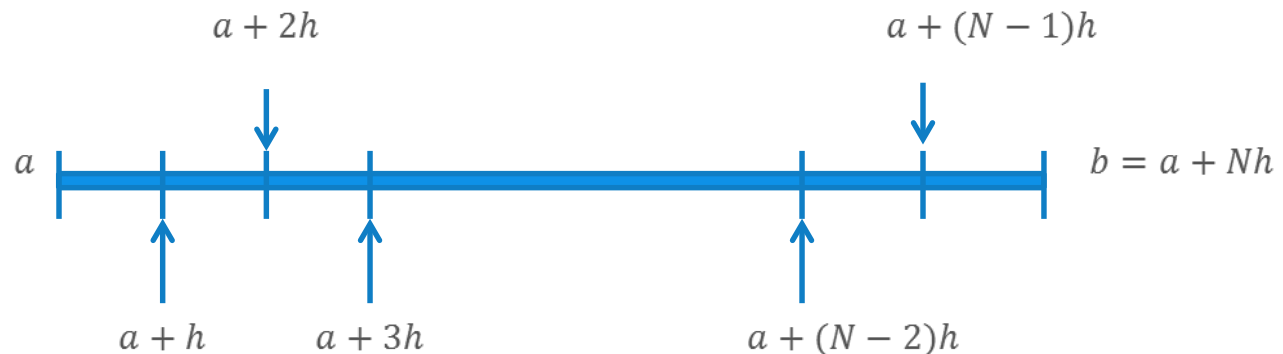
$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = y_a$$

tiene una solución única $y(x)$, $x \in [a, b]$.

- Técnicas analíticas: solución continua $y(x)$.
- Técnicas numéricas: solución discreta $y_i \approx y(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, donde x_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ son los nodos de la discretización.

Discretización del problema

- Dividimos el intervalo $[a, b]$ en N subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$, cuyos extremos son los nodos equiespaciados $x_i = a + i h$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$, siendo $h = \frac{b-a}{N}$ el paso de la partición.



- Solución aproximada en los nodos: $y_i \approx y(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ (incógnitas), $y(x_0) = y_a$ (condición inicial).

Métodos numéricos para PVIs

- Diseño del método

- Mediante cuadraturas

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = y_a$$
$$y(x) = y_a + \int_a^x f(t, y(t)) dt$$



- Diferenciación numérica

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + L(h)$$

donde $L(h)$ es el error de truncamiento.

- Desarrollos de Taylor

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + y''(\xi)\frac{h^2}{2}, \quad \xi \in]x, x+h[$$

Errores

- **Error de discretización local** ($L_k(h)$, en cada nodo) o **global** ($L(h) = \frac{1}{h} \max_{1 \leq k \leq N} |L_k(h)|$, su acumulación): es el error que se comete en un solo paso cuando reemplazamos un proceso infinito por uno finito,
 - inherente a cualquier algoritmo que podamos escoger,
 - en gran medida es independiente del error de redondeo.
- **Error de redondeo local** (en cada nodo) o **global** (su acumulación)
 - Provocado por la limitada precisión de los ordenadores
 - su magnitud depende del número de dígitos en la mantisa usando aritmética de coma flotante.
- **Error total**: suma de los errores de truncamiento global y redondeo global.
 - **Error exacto local**: $e_k = y(x_k) - y_k, \quad k = 0, 1, \dots, N$

Consistencia, convergencia y estabilidad

Se dice que un método numérico converge a la solución $y(x)$ de un problema de valor inicial en $x = \bar{x}$, si el error $e_k = y(x_k) - y_k$ en $x_k = \bar{x}$ satisface que

$$|e_k| \rightarrow 0$$

cuando $h \rightarrow 0$.

Un método numérico es consistente con un problema de valor inicial si verifica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq k \leq N} |L_k(h)| = 0,$$

donde $L_k(h)$ es el error de truncamiento local.

Una condición necesaria y suficiente para la estabilidad de un método iterativo es que la función $f(x,y)$ sea de Lipschitz.

Consistencia, convergencia y estabilidad

Un esquema numérico es estable punto a punto si pequeñas perturbaciones del esquema o de las condiciones iniciales afectan poco a la solución.

Teorema de Lax: Dado un método numérico asociado a un PVI, si el esquema es consistente entonces

es estable punto a punto \Leftrightarrow es convergente

Todos los métodos de un solo paso (Euler y Runge-Kutta) son estables punto a punto.

Métodos de un paso

Método de Euler I

Puesto que por definición, $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$, el enfoque más simple para resolver la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b]$$

es aproximarla por

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \approx f(x, y),$$

$$y(x+h) \approx y(x) + hf(x, y)$$

donde h es próximo a cero.

Así, conocida la condición inicial $y(x_0) = y_a$,

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

...

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Diferenciación
numérica

Método de Euler II

Integrando directamente la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = y_a$$
$$y(x) = y_a + \int_a^x f(t, y(t)) dt$$

En particular,

$$y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(t, y(t)) dt$$

y aproximando la integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(t, y(t)) dt \approx (x_1 - x_0) f(x_0, y(x_0))$$

obtenemos

$$y(x_1) \approx y(x_0) + hf(x_0, y(x_0))$$

donde h es el paso de la integración.

Integración
numérica

Método de Euler III

Consideremos la función $y(x)$ solución de la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b]$$

Dado el paso h ,

$$y(x + h) = y(x) + y'(x)h + O(h^2)$$

Sustituyendo $y' = f(x, y)$,

$$y(x + h) = y(x) + hf(x, y) + O(h^2)$$

Así, conocida la condición inicial $y(x_0) = y_a$,

$$y(x_1) \approx y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$y(x_2) \approx y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

...

$$y(x_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

Desarrollos
de Taylor

Método de Euler: error y orden

Al deducir la fórmula de Euler se descartó en la expresión el error (**error local de truncamiento**), dado por

$$e_{k+1} = y(x_{k+1}) - (y(x_k) + hy'(x_k)) = \frac{h^2}{2} y''(\xi_k) = O(h^2), \quad \xi_k \in]x_k, x_{k+1}[$$

Teniendo en cuenta que, por ser y'' continua,

$$\sum_{k=0}^{N-1} y''(\xi_k) = Ny''(\xi), \quad \xi \in [x_0, x_N]$$

y también que $h = (x_N - x_0)/N$, se tiene que después de N pasos, el **error global acumulado** es:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{h^2}{2} y''(\xi_k) = \frac{h^2}{2} Ny''(\xi) = \frac{1}{2} (x_N - x_0) y''(\xi) h = O(h), \quad \xi \in [x_0, x_N]$$

El orden del error global resulta siempre uno menos que el orden del error local de truncamiento (el error del cálculo de y_{k+1} para un paso).

Algoritmo de Euler

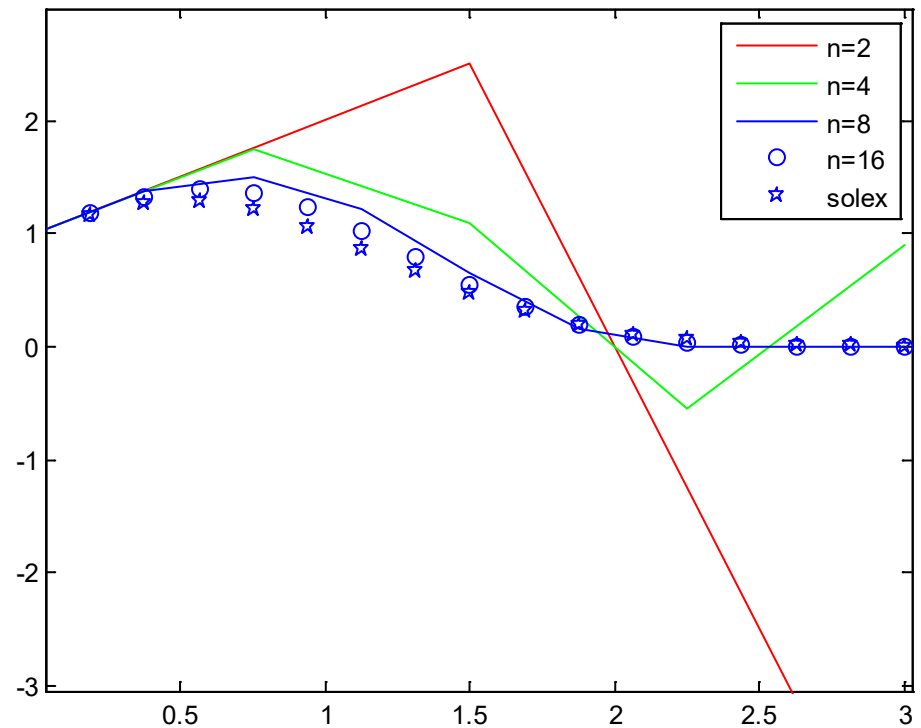
- **Entrada:**
 - a, b , extremos del intervalo
 - y_1 , condición inicial
 - N , número de subintervalos
- **Proceso:**
 - Cálculo del paso de integración, h
 - Obtención del vector de nodos, x
 - Inicialización del vector solución y en a
 - Para k desde 1 hasta N

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$
 - Fin para k
- **Salida:** x, y

Ejemplo

- $y'(t) = (1 - 2t) y(t)$
 $y(0) = 1$

n	Error máximo	$\frac{E_{n/2}}{E_n}$
2	5.0025	
4	0.8862	5.6449
8	0.3531	2.5097
16	0.1688	2.0919
32	0.0819	2.0605
64	0.0403	2.0316



Solución exacta (solex)

$$y(t) = e^{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t\right)^2}$$

Algoritmo de Euler Implícito

- Euler es un **método explícito**, ya que podemos obtener directamente y_{k+1} a partir de y_k ,

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$

- El método de Euler hacia atrás se construye aproximando la derivada,

$$\frac{dy}{dt}(t_{k+1}) \approx \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h}$$

con error de truncamiento $E_k(h) = O(h)$, obteniendo

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1}) \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

- Euler hacia atrás es un **método implícito**, ya que hay que resolver una ecuación no lineal para obtener y_{k+1} a partir de y_k ,

$$y_{k+1} - y_k - hf(t_{k+1}, y_{k+1}) = g(y_{k+1}) = 0$$

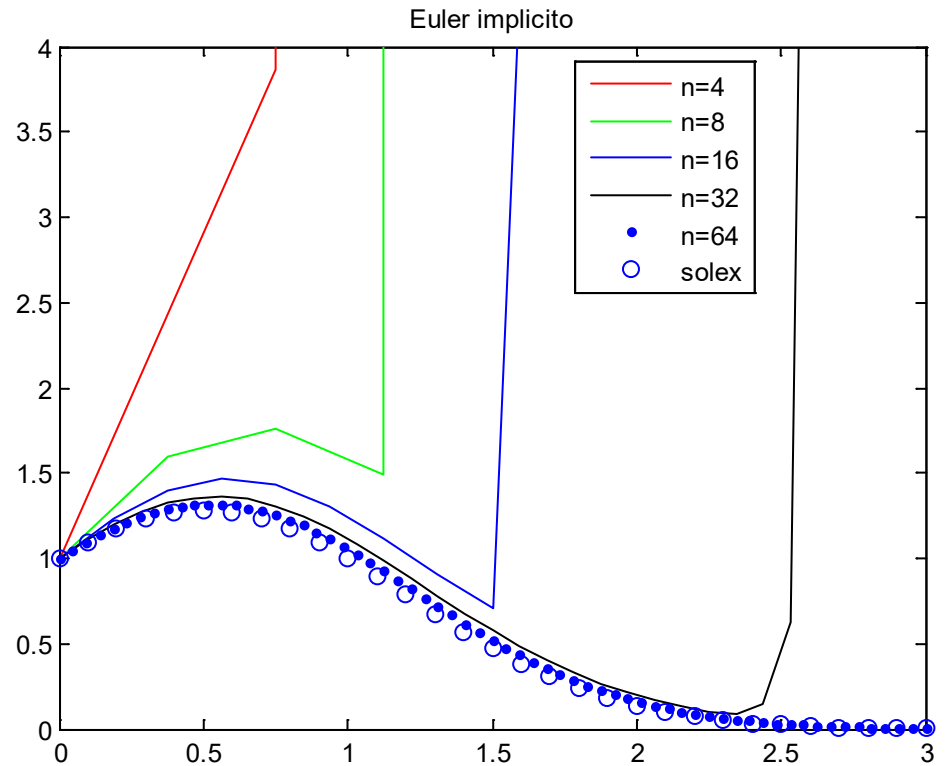
Algoritmo de Euler Implícito

- Entrada:
 - $a, b, f, y_1, N, tol, maxiter$
- Proceso:
 - Cálculo del paso de integración, h y obtención del vector t
 - Inicialización del vector solución y en a
 - Para k desde 1 hasta N
 - Resolución por un método de punto fijo de la ecuación $y_n = g(y_n)$
 - $y_{k+1} = y_n$
 - Fin para k
- Salida: t, y

Ejemplo

- $y'(t) = (1 - 2t) y(t)$
 $y(0) = 1$

n	Error máximo
4	1.1158e+35
8	5.9835e+100
16	1.7069e+113
32	7.7501e+16
64	0.0036



$$1 - (1 - 2t)^2$$

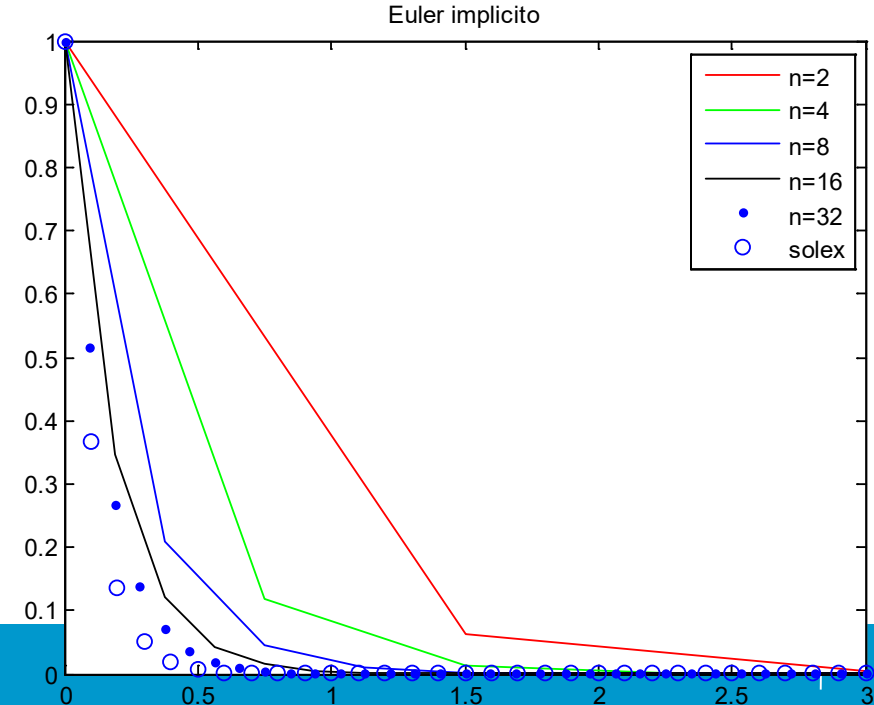
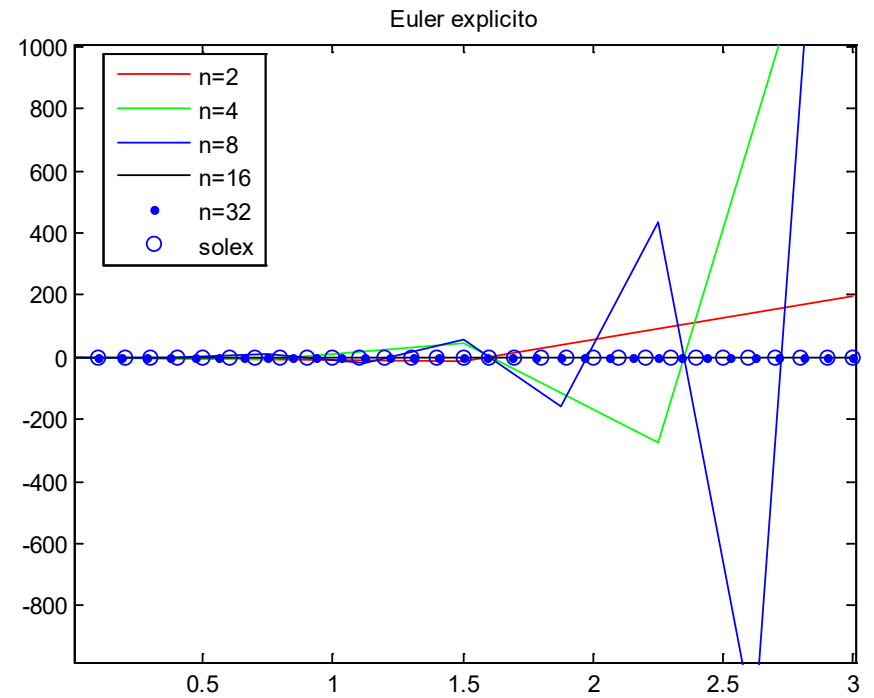
Ejemplo

- $y'(t) = -10y(t)$
 $y(0) = 1$

n	Error explicito	Error implícito
2	196.0	0.0625
4	1785.1	0.1171
8	3270.9	0.1870
16	0.7421	0.1945
32	0	0.1245

Solución exacta (solex)

$$y(t) = e^{-10t}$$



PROGRAMA EN MATLAB

```
function [t,y] = euler_hacia_atras(a,b,y0,N,tol,maxiter )
h=(b-a)/N;          t=a:h:b;
t=t(:);
y=zeros(N+1,1);     y(1)=y0;

for k=1:N
    yn0=y(k);
    incre=tol+1;
    iter=0;
    while incre>tol && iter<maxiter
        % para  $y'(t)=-10y(t)$ 
        yn=yn0-(yn0-y(k)-h*(-10*yn0))/(1+10*h);
        incre=abs(yn-yn0);
        yn0=yn;
        iter=iter+1;
    end
    y(k+1)=yn;
end
```

Método trapezoidal o de Heun I

Integrando directamente la ecuación diferencial

$$y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(t, y(t)) dt$$

Integración
numérica

y aproximando la integral por trapecios

$$\int_{x_0}^{x_1} f(t, y(t)) dt \approx \frac{x_1 - x_0}{2} (f(x_0, y(x_0)) + f(x_1, y(x_1)))$$

obtenemos $y(x_1) \approx y(x_0) + \frac{h}{2} (f(x_0, y(x_0)) + f(x_1, y(x_1)))$

siendo h el paso de la integración. Sin embargo, ¡necesitamos conocer $y(x_1)$!

- predecimos primero un valor por Euler,

$$\bar{y}_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

- lo ajustamos después por trapecios,

$$y(x_1) \approx y_0 + \frac{h}{2} (f(x_0, y_0) + f(x_1, \bar{y}_1)) = y_0 + \frac{k_1 + k_2}{2} = y_1$$

donde $k_1 = hf(x_0, y_0)$, $k_2 = hf(x_1, y_0 + k_1)$.

Heun II

En primer lugar, desarrollamos por Taylor (orden 2)

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2} + O(h^3) \quad (*)$$

Desarrollos
de Taylor

Teniendo en cuenta que $y' = f(x, y)$ e $y'' = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} y'$,

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y + hf(x, y) + \frac{1}{2}h^2 \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} f(x, y) \right) + O(h^3) = \\ &= y + \frac{1}{2}hf(x, y) \\ &\quad + \frac{1}{2}h \left(f(x, y) + h \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + hf(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) + O(h^3) \end{aligned}$$

Consideremos ahora el desarrollo de Taylor para dos variables:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x, y) + h \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + k \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ &\quad + hk \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + k^2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right) + \dots \end{aligned}$$

Método de Heun II

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + h \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + k \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + hk \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + k^2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right) + \dots$$

Sustituyendo k por $hf(x, y)$:

$$f(x+h, y+hf(x, y)) = f(x, y) + h \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + hf(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + O(h^2) (**)$$

Como

$$y(x+h) = y + \frac{1}{2} hf(x, y) + \frac{1}{2} h \left(f(x, y) + h \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + hf(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) + O(h^3)$$

resulta:

$$y(x+h) = y + \frac{1}{2} hf(x, y) + \frac{1}{2} hf(x+h, y+hf(x, y)) + O(h^3)$$

Método de Heun II

$$y(t+h) = y + \frac{1}{2}hf(t, y) + \frac{1}{2}hf(t+h, y+hf(t, y)) + O(h^3)$$

En particular, si $t = t_k$ y teniendo en cuenta que $y(t_k + h) = y(t_{k+1})$, se puede escribir una aproximación:

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) \\ = y(t_k) + \frac{1}{2}hf(t_k, y(t_k)) + \frac{1}{2}hf(t_{k+1}, y(t_k) + hf(t_k, y(t_k))) + O(h^3) \end{aligned}$$

Y llamando y_k a las aproximaciones de $y(t_k)$:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}hf(t_k, y_k) + \frac{1}{2}hf(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_k, y_k) \\ k_2 &= hf(t_{k+1}, y_k + k_1) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{k_1 + k_2}{2} \end{aligned}$$

conocido como **método de Heun o Runge-Kutta de segundo orden** (2 etapas).

Análisis del error

Teorema: Sea f tal que $y'(x) = f(x, y(x))$ con condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$. Si $y(x) \in C^3[a, b]$ y $\{(x_k, y_k)\}_{k \geq 0}$ es la sucesión de aproximaciones dadas por el método de Heun, entonces

$$\begin{aligned} |e_k| &\leq |y(x_k) - y_k| \\ &= \left| y(x_k) - y_{k-1} - \frac{1}{2}hf(x_{k-1}, y_{k-1}) - \frac{1}{2}hf(x_k, y + hf(x_{k-1}, y_{k-1})) \right| \\ &= O(h^3), \end{aligned}$$

y

$$E(h) = \frac{1}{h} \max_{1 \leq k \leq N} |e_k| = O(h^2).$$

Algoritmo de Heun

- **Entrada:**
 - a, b , extremos del intervalo
 - y_1 , condición inicial
 - N , número de subintervalos
- **Proceso:**
 - Cálculo del paso de integración, h y obtención de x
 - Inicialización del vector solución y en a
 - Para k desde 1 hasta N
$$k_1 = hf(x_k, y_k)$$
$$k_2 = hf(x_{k+1}, y_k + k_1)$$
$$y_{k+1} = y_k + \frac{k_1 + k_2}{2}$$
 - Fin para k
- **Salida:** x, y

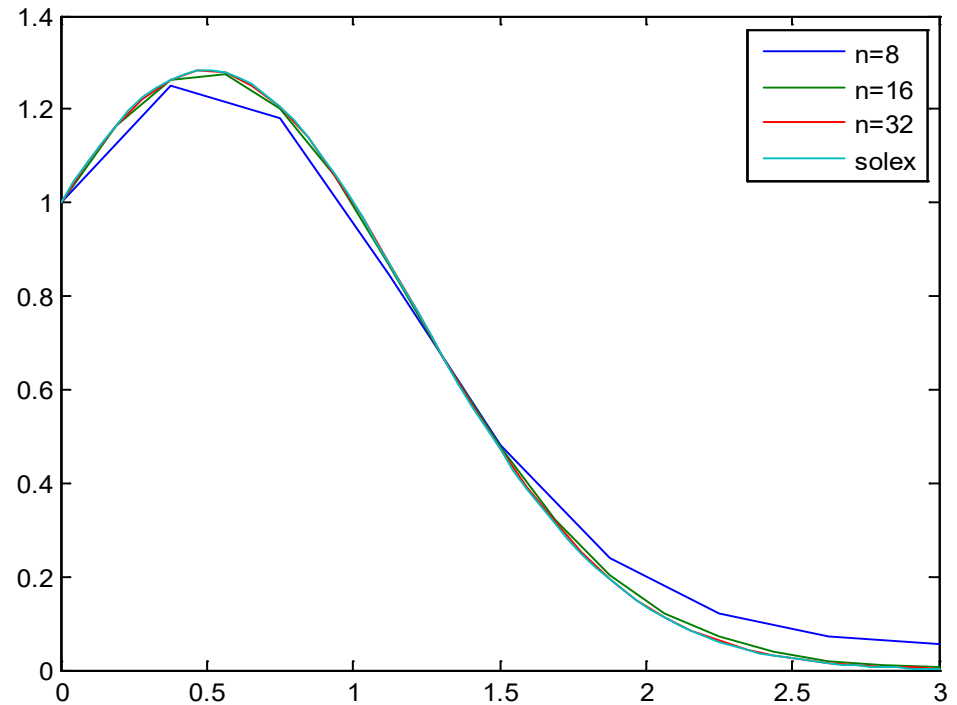
Ejemplo

- $y'(t) = (1 - 2t) y(t)$
 $y(0) = 1$

n	Error máximo	$E_{n/2}/E_n$
2	14.0025	
4	0.8893	15.7480
8	0.0600	14.8148
16	0.0104	5.7937
32	0.0022	4.6189
64	5.2813e-04	4.2463

$E_n = \max_{1 \leq k \leq n} |e_k|$

Estimación numérica del orden teórico



Método de Runge-Kutta explícito: orden 4

Integrando directamente la ecuación diferencial

$$y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s)) ds$$

Integración
numérica

y aproximando la integral por Simpson

$$\int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s)) ds \approx \frac{t_1 - t_0}{6} \left(f(t_0, y(t_0)) + 4f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y\left(t_0 + \frac{h}{2}\right)\right) + f(t_1, y(t_1)) \right)$$

obtenemos

$$y(t_1) \approx y(t_0) + \frac{h}{6} \left(f(t_0, y(t_0)) + 4f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y\left(t_0 + \frac{h}{2}\right)\right) + f(t_1, y(t_1)) \right)$$

siendo h el paso de la integración. Sin embargo,

¡necesitamos conocer tanto $y\left(t_0 + \frac{h}{2}\right)$ como $y(t_1)$!

$$f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y\left(t_0 + \frac{h}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(f_2 + f_3)$$

Método de Runge-Kutta explícito: orden 4

$$f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y\left(t_0 + \frac{h}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(f_2 + f_3)$$

donde

$$f_1 = f(t_0, y(t_0))$$

$$f_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}f_1\right)$$

$$f_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}f_2\right)$$

$$y(t_1) \approx y(t_0) + \frac{h}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f(t_1, y_0 + hf_3))$$

Método de Runge-Kutta explícito: orden 4

En general,

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

donde

$$k_1 = f(t_k, y_k)$$

$$k_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_{k+1}, y_k + hk_3)$$

Método de Runge-Kutta explícito: orden 4

Teorema: Sea f tal que $y'(t) = f(t, y(x))$ con condiciones iniciales $y(t_0) = y_0$. Si $y(t) \in C^5[a, b]$ y $\{(t_k, y_k)\}_{k \geq 0}$ es la sucesión de aproximaciones dadas por el método de RK-4, entonces

$$|e_k| \leq |y(t_k) - y_k| = O(h^5),$$

y

$$E(h) = \frac{1}{h} \max_{1 \leq k \leq N} |e_k| = O(h^4).$$

Algoritmo de RK-4

- Entrada:
 - a, b, y_1, N
- Proceso:
 - Cálculo del paso de integración, h y obtención de x
 - Inicialización del vector solución y en a
 - Para k desde 1 hasta N

$$k_1 = f(x_k, y_k) \qquad k_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_2\right) \qquad k_4 = f(x_{k+1}, y_k + hk_3)$$

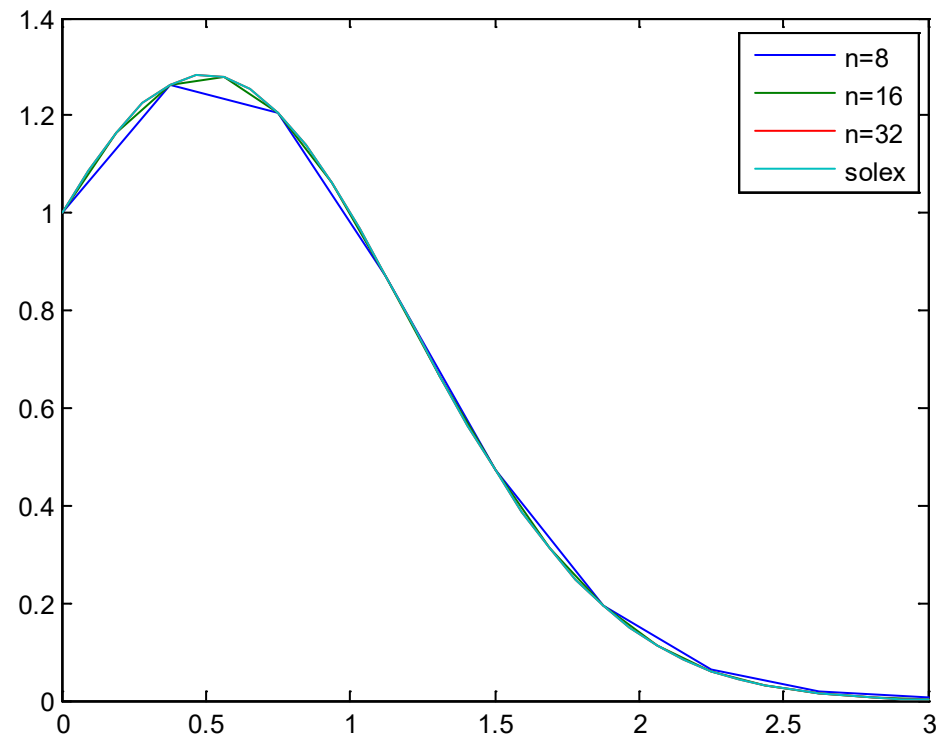
$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

- Fin para k
- Salida: x, y

Ejemplo

- $y'(t) = (1 - 2t) y(t)$
 $y(0) = 1$

n	Error máximo	$\frac{E_n}{E_n}$
2	3.9979	
4	0.2292	17.4422
8	0.0034	67.4035
16	1.4281e-04	23.8114
32	7.2959e-06	19.5745
64	4.1104e-07	17.7497



Solución exacta (solex)

$$y(t) = e^{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t\right)^2}$$

Métodos de Runge-Kutta: m etapas

En general,

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{j=1}^m b_j f_{kj}, \quad k \geq 0$$

donde

$$f_{k1} = f(x_k, y_k)$$

$$f_{k2} = f(x_k + c_2 h, y_k + h a_{21} f_{k1})$$

$$f_{k3} = f(x_k + c_3 h, y_k + h(a_{31} f_{k1} + a_{32} f_{k2}))$$

$$\vdots$$

$$f_{km} = f(x_k + c_m h, y_k + h(a_{m1} f_{k1} + a_{m2} f_{k2} + \cdots + a_{mm-1} f_{km-1}))$$

siendo a_{ji}, b_j, c_j dependientes del método pero independientes del PVI, y tales que

$$c_j = \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji}$$

Métodos de Runge-Kutta explícitos

- Notación:

$$\begin{array}{c|cccc}
 0 & 0 & & & \\
 c_2 & a_{21} & & & \\
 c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\
 \vdots & \vdots & & \ddots & \\
 c_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm-1} \\
 \hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & b_m
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c}
 c & A \\
 \hline
 & b
 \end{array}$$

RKm explícito en la forma matricial de Butcher.

- Condición necesaria de consistencia: $\sum_{j=1}^m b_j = 1$

m	2	3	4	5	6	7	8	9	m>9
Orden max	2	3	4	4	5	6	6	7	m-2

Orden p	2	3	4	
Condiciones	$b^T c = 1/2$	$b^T c^2 = \frac{1}{3}$ $b^T A c = 1/6$	$b^T c^3 = \frac{1}{4}$ $b^T A c^2 = 1/12$	$b^T (c A c) = 1/8$ $b^T A^2 c = 1/24$

Métodos RK explícitos: m = 2

- m = 2:

$$k_1 = hf(x_k, y_k)$$

$$k_2 = hf(x_{k+1}, y_k + k_1)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{k_1 + k_2}{2}$$

- m = 4

$$k_1 = f(x_k, y_k)$$

$$k_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_{k+1}, y_k + hk_3)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

0	0
1	1
<hr/>	
	$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$

Hay más de una posibilidad para el mismo orden de convergencia

0	0		
1/2	1/2		
1/2	0	1/2	
1	0	0	1
<hr/>			
	1/6	2/6	2/6
			1/6

Sistemas de ecuaciones diferenciales: Problemas de valor inicial

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y'_2 &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y'_n &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \right\} x \in [a, b]$$

n funciones incógnitas y_1, y_2, \dots, y_n
una variable independiente, x

$$y_1(a) = y_{10}, y_2(a) = y_{20}, \dots, y_n(a) = y_{n0}, \quad \longleftarrow \text{Condición inicial}$$

Ejemplos

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} y'_1 &= y_1 + 2y_2 + \cos 2x \\ y'_2 &= 3y_1 + 2y_2 + 5 \end{aligned} \right\} x \in [0, 1]$$

$$y_1(0) = 0$$

$$y_2(0) = 3$$

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} y'_1 &= y_1^2 + 2y_2 \\ y'_2 &= y_1^2 + \sin y_2 \end{aligned} \right\} x \in [\pi, 2\pi]$$

$$y_1(\pi) = 0$$

$$y_2(\pi) = 1$$

Ecuaciones diferenciales de orden superior: Problemas de valor inicial

$$y'' = 4y' + \cos y + 3x - 7, \quad x \in [0,2] \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$



$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= \cos y_1 + 4y_2 + 3x + 7 \end{aligned} \right\} \quad x \in [0,2] \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 3$$

Ecuaciones diferenciales de orden superior: Problemas de valor inicial

$$y''' = 4y'' + y'^2 - \tan y - e^{-x}, \quad x \in [0,2] \quad y(0) = 1, y'(0) = 3, y''(0) = -1$$



$$y_1 = y$$

$$y_2 = y'$$

$$y_3 = y''$$

$$\left. \begin{array}{l} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ y'_3 = 4y_3 + y_2^2 - \tan y_1 - e^{-x} \end{array} \right\} x \in [0,2] \quad \begin{array}{l} y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 3 \\ y_3(0) = -1 \end{array}$$

Método de Euler para sistemas

$$\left. \begin{array}{l} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} x \in [a, b] \\ y_1(a) = y_{10}, y_2(a) = y_{20}, \dots, y_n(a) = y_{n0} \end{array}$$

$$h = \frac{b - a}{N} \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \dots, N$$

$$\mathbf{y}_0 = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = (y_{1k+1}, y_{2k+1}, \dots, y_{nk+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{y}_k + h \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{K}_1 &= \mathbf{F}(x_k, y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{nk}) \end{aligned} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

Método de Euler para sistemas

Utiliza el método de Euler para estimar la solución de problema de valor inicial

$$x' = 3x + 2y - (2t^2 + 1)e^{2t}, \quad x(0) = 1, \quad t \in [0,1]$$

$$y' = 4x + y + (t^2 + 2t - 4)e^{2t}, \quad y(0) = 1$$

- a) Obtén la aproximación de la solución utilizando un paso $h = \frac{1}{10}$ y representa su evolución respecto a la variable independiente.
- b) Sabiendo que la solución exacta es

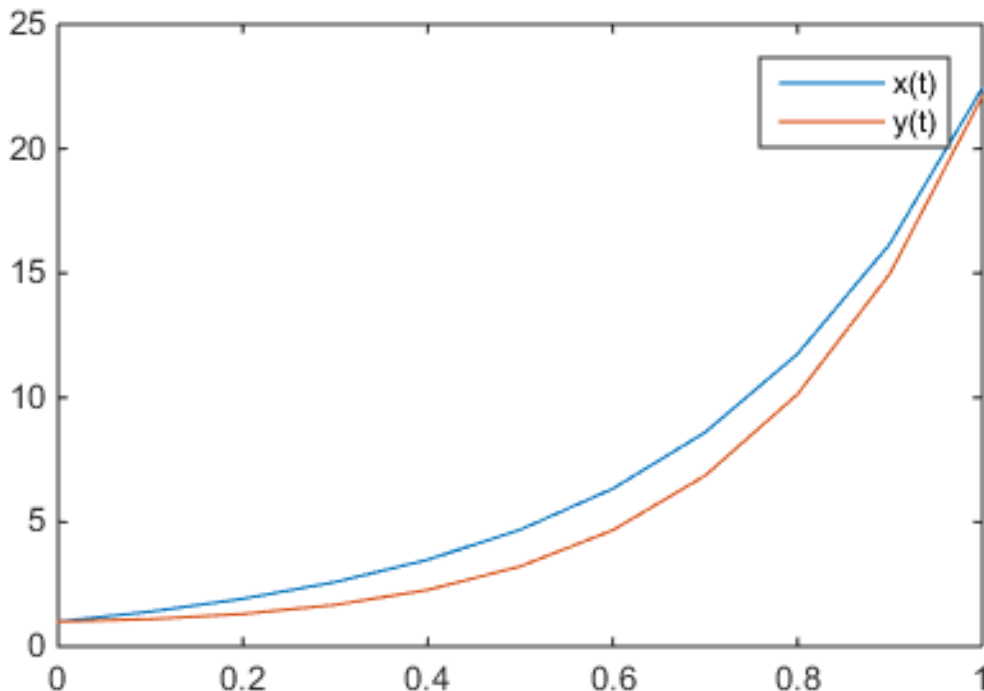
$$x(t) = \frac{e^{5t}}{3} - \frac{e^{-t}}{3} + e^{2t}, \quad y(t) = \frac{e^{5t}}{3} + 2\frac{e^{-t}}{3} + t^2 e^{2t},$$

obtén una aproximación numérica del orden de convergencia del método de Euler

```
function f = fun2(t,z)
x=z(1); y=z(2);
f=[3*x+2*y-(2*t^2+1)*exp(2*t); 4*x+y+(t^2+2*t-4)*exp(2*t)];
end
```

Método de Euler para sistemas

```
>> [t,Y] = Euler_sis('fun2',0,1,10,[1,1]);  
>> plot(t,Y(:,1)),hold on  
>> plot(t,Y(:,2))
```

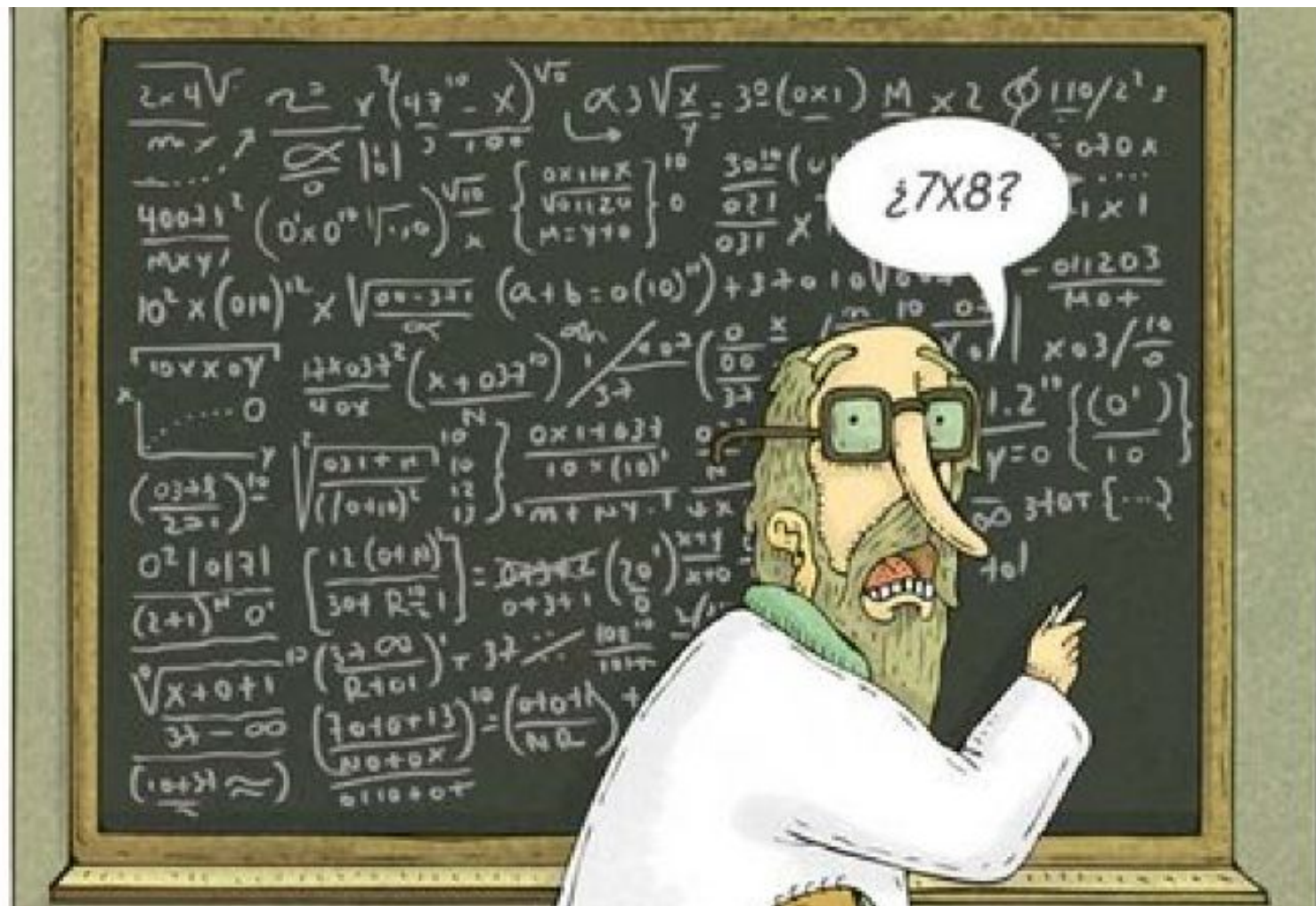


t_k	x_k	y_k
0	1.0000	1.0000
0.1	1.4000	1.1000
0.2	1.9154	1.3071
0.3	2.5903	1.6729
0.4	3.4870	2.2732
0.5	4.6940	3.2187
0.6	6.3382	4.6707
0.7	8.6027	6.8629
0.8	11.7532	10.1346
0.9	16.1767	14.9776
1	22.4403	22.1052

Para profundizar...

- J.H. Mathews, K. D. Fink, Métodos numéricos con Matlab, Ed. Prectice Hall, Madrid, 2000.
- R.L. Burden, J.D. Faires, Análisis numérico, Ed. Thomson Learning, México DF, 2002.
- <http://ecuaciondiferencial Ejercicios resueltos.com/tag/metodo-numerico>
- A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, Problemas resueltos de métodos numéricos, Ed. Paraninfo, 2006.
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). *Métodos numéricos para ingenieros (5a. ed.)*. McGraw-Hill. ISBN 9781456250324.

¿Dudas?





www.unir.net