Introducción a los sistemas dinámicos

[1.1] ¿Cómo estudiar este tema?

[1.2] Introducción a los sistemas dinámicos

[1.3] Clasificación de los sistemas dinámicos

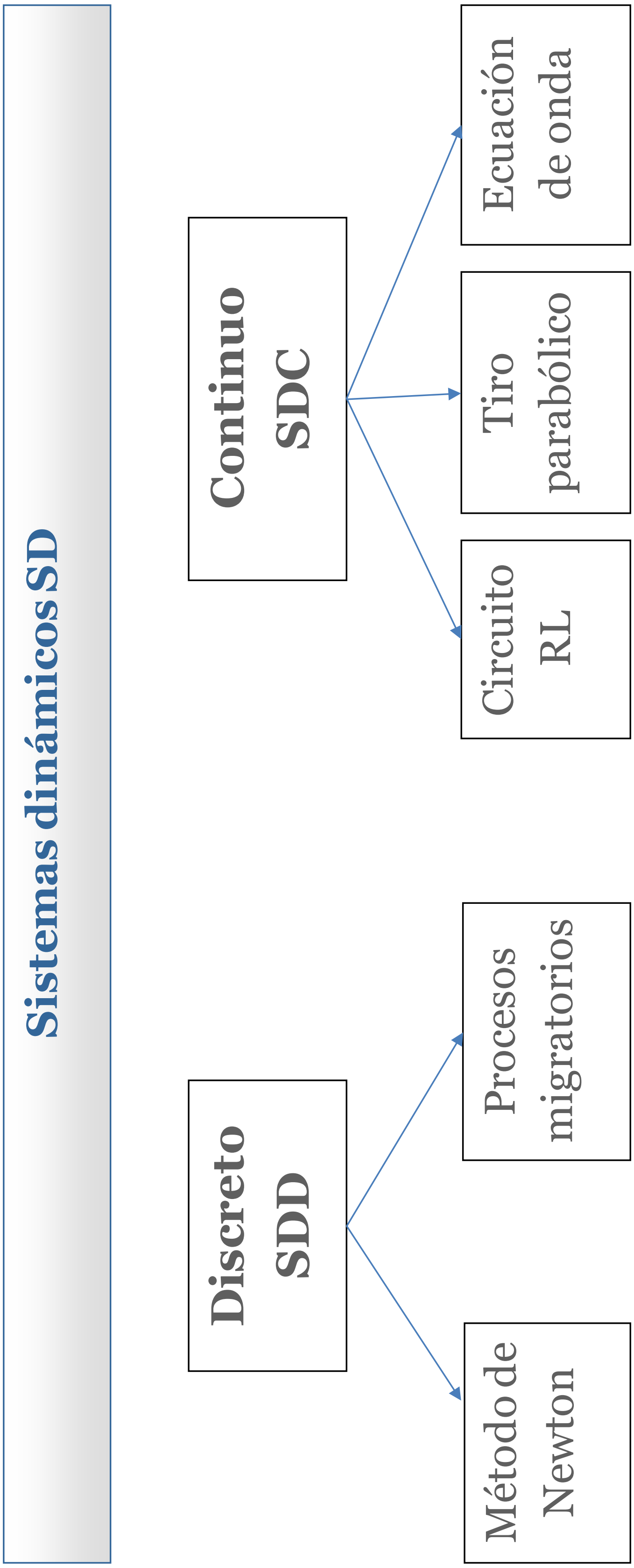
[1.4] Sistemas dinámicos continuos (SDC)

[1.5] Sistemas dinámicos discretos (SDD)

[1.6] Referencias

TEMA 1

Esquema


Sistemas dinámicos SD
Continuo SDC
Ecuación de onda
Tiro parabólico
Circuito RL
Discreto SDD
Procesos migratorios
Método de Newton

Ideas clave

1.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

En este tema vamos a presentar los conceptos sobre los que vamos a trabajar a lo largo del curso. Es por ello que será necesario que leas detenidamente cada uno de los apartados, comprendas la resolución de los ejemplos y busques en la bibliografía más información al respecto de ejemplos extra que aclaren los conceptos.

Los contenidos sobre los que vamos a trabajar son:

» Definición cualitativa de un sistema dinámico.
» Diferenciación entre sistemas dinámicos discretos y continuos.
» Diferenciación entre sistemas dinámicos autónomos y forzados.
» Descripción de sistemas dinámicos discretos.
» Descripción de sistemas dinámicos continuos.

1.2. Introducción a los sistemas dinámicos

«Todo fluye. Todo está en movimiento y nada dura eternamente» (Heráclito de Éfeso).

Los sistemas dinámicos son aquellos sistemas en los que el tiempo juega un papel fundamental. Interpretaremos como sistema dinámico aquel sistema susceptible de tener variaciones en el tiempo, de modo que puedan predecir el futuro conociendo las limitaciones de las predicciones. Los sistemas dinámicos se describen matemáticamente a partir de la variación temporal del objeto bajo estudio.

La trayectoria de una partícula, el movimiento de los planetas, los procesos de nacimiento y muerte, la evolución de la población, la propagación de un rumor, la cantidad de corrupción en un país o el comportamiento de un circuito eléctrico son ejemplos de sistemas dinámicos susceptibles de ser estudiados en este curso.

A diferencia de lo que ocurre en otras disciplinas matemáticas, en los sistemas dinámicos no nos interesa tanto la solución analítica de los problemas que tratamos de resolver, sino el comportamiento que estos van a tener a largo plazo en función del punto de partida de nuestro sistema. Hasta hace unas décadas, la solución analítica era la única fuente de satisfacción de los sistemas dinámicos; no obstante, con la irrupción de las computadoras en el cálculo matemático, la tecnología se ha puesto al servicio de los sistemas dinámicos y la predicción del futuro es alcanzable.

Los programas estrella son MATLAB® de MathWorks y Mathematica® de Wolfram Research. También existen programas de código libre, como son Octave de GNU o SciLab de SciLab Enterprises, accesibles para cualquier usuario sin necesidad de abonar ninguna cuota. De hecho, será con este último programa con el que propondremos una serie de prácticas a realizar. Tienes los enlaces de descarga en el apartado + *Información* > *Recursos externos*.

1.3. Clasificación de los sistemas dinámicos

El criterio más habitual de clasificación de los sistemas dinámicos es el que concierne al elemento característico de estos: el tiempo. En función del tratamiento que se haga del mismo, hablaremos de sistemas dinámicos continuos o discretos.

En el primer caso, el tiempo se trata como una variable continua. La variación temporal del objeto bajo estudio se traduce matemáticamente en una derivada de la función respecto del tiempo, de manera que los sistemas dinámicos continuos tendrán la forma:

$$\dot{x} = F(x), \qquad (1)$$

Donde:

$$[\ \dot{}\ ] = \frac{d}{dt}, [\ \ddot{}\ ] = \frac{d^2}{dt^2}, \dots,$$

Y F se interpreta como un campo vectorial, dando lugar a una ecuación diferencial ordinaria (EDO).

En caso de que la variación temporal también conlleve una variación de alguna de las otras variables que intervienen en el sistema, estaremos ante una ecuación en derivadas parciales (EDP) del estilo de:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = F\left(\frac{\partial x}{\partial y}, x\right) \quad (2)$$

En el segundo de los casos, el tiempo es discretizado, de forma que tan solo se toman algunas muestras del mismo. Así pues, los sistemas dinámicos discretos utilizan como herramienta matemática la ecuación en diferencias (ED), de la forma:

$$x_{n+1} = \Phi(x_n), (3)$$

Donde:

$$x_n = x(t_n)$$

Y Φ se interpreta como una aplicación. Esta aplicación sirve para conocer el estado siguiente a partir del actual.

La figura 1 (basada en Silva y Young, 2000) representa un SDC y un SDD, en el que se pueden visualizar las principales diferencias entre ambos sistemas.

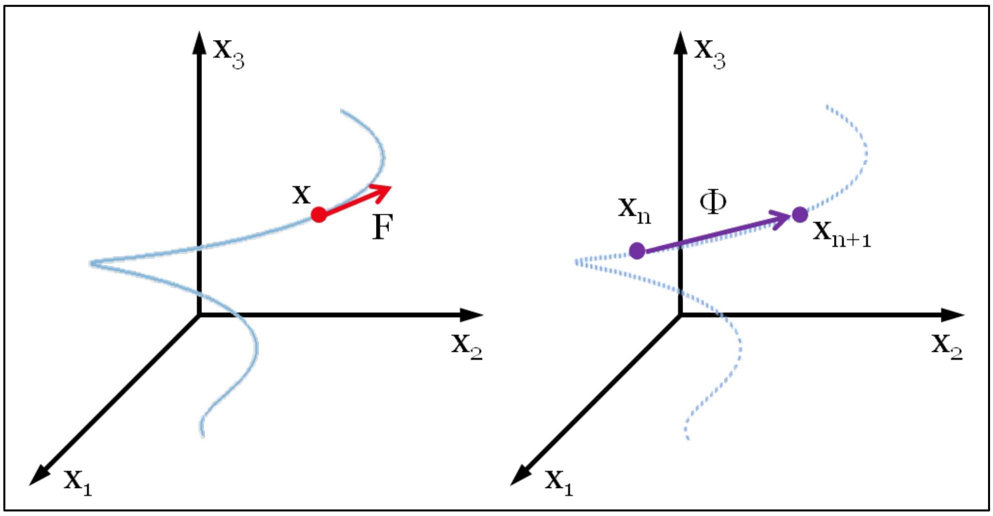


Figura 1. Representación del SDC (izquierda) y del SDD (derecha)

Otra de las clasificaciones más habituales y complementarias a las anteriores es la de sistemas autónomos y forzados.

En los sistemas autónomos, la variación no contiene ningún estímulo externo y las expresiones (1) y (3) serían ejemplos de este tipo de sistemas. En el caso de los sistemas forzados, la variable t aparece en la ecuación, indicando que existe un estímulo externo que fuerza que se modifique el comportamiento independiente del sistema. Las expresiones:

$$\dot{x} = F(x, t)$$

$$x_{n+1} = \Phi(x_n, t_n)$$

Son ejemplos de sistemas forzados continuos y discretos, respectivamente.

1.4. Sistemas dinámicos continuos (SDC)

Los sistemas dinámicos continuos son aquellos cuyas expresiones matemáticas tienen forma de EDO y EDP. A lo largo de esta sección vamos a ver tres ejemplos de sistema dinámico continuo.

En primer lugar, estudiaremos un circuito eléctrico RL. Este circuito está modelado por una EDO de primer orden. En segundo lugar, veremos un caso asociado a la dinámica de partículas en el que entrará en juego la segunda ley de Newton, siendo modelado por un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Por último, describiremos cómo se comportan las ondas a lo largo de un medio, en lo que supone la modelización de un problema a partir de una ecuación en derivadas parciales.

Ejemplo 1 | El circuito RL:

El circuito formado por un resistor y una bobina en serie (ver figura 2) es un SDC de una variable descrito por una EDO de primer orden.

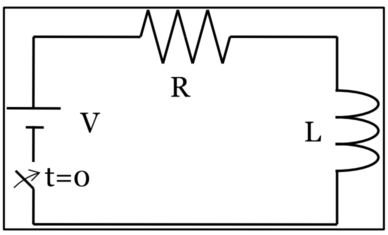


Figura 2. Esquema del circuito RL

En el instante $t=0$, el interruptor del circuito se cierra, dando lugar a una corriente $i(t)$ que atraviesa el resistor de valor de resistencia R y la bobina de valor de autoinducción L.

A partir de la segunda ley de Kirchhoff, la EDO que gobierna el circuito es:

$$V = Ri + L\frac{di}{dt}$$

Esta ecuación diferencial, para verla en la forma habitual, la reescribimos como:

$$i' = -\frac{R}{L}i + \frac{V}{L}$$

Para encontrar su solución es necesario multiplicarla por un factor integrante $e^{\frac{R}{L}t}$, dando lugar a:

$$i(t) = V\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

La figura 3 representa de la corriente en función del tiempo:

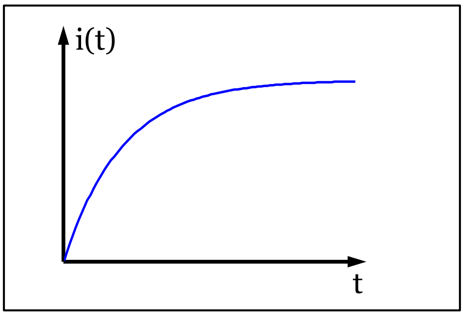


Figura 3. Corriente i(t) en función del tiempo t

Ejemplo 2 | El tiro parabólico:

El tiro parabólico es un ejemplo de un SDC descrito por una EDO. En este caso, al tratarse de una situación bidimensional, tendremos un sistema dinámico con dos funciones que queremos conocer: *x(t)* e *y(t)*.

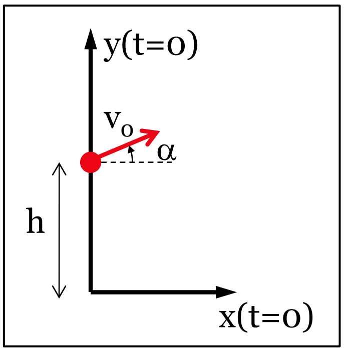


Figura 4. Esquema del tiro parabólico

Un móvil es lanzado desde una altura h con una velocidad v_o haciendo un ángulo α con la horizontal, como indica la figura 4.

Teniendo en cuenta la segunda Ley de Newton ($\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$), y que la única fuerza que actúa es la gravedad, para describir la trayectoria que sigue, tendremos que resolver:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}, \qquad s.a. \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = h \\ \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

Realizando integrales simples, podemos obtener la solución como:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = K_x \\ \dot{y}(t) = -gt + K_y \end{cases} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} \dot{x}(0) = K_x = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y}(0) = K_y = v_0 \sin\alpha \end{Bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y}(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\alpha + C_x \\ y(t) = -g\dfrac{t^2}{2} + v_0 t \sin\alpha + C_y \end{cases} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} x(0) = C_x = 0 \\ y(0) = C_y = h \end{Bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\alpha \\ y(t) = -g\dfrac{t^2}{2} + v_0 t \sin\alpha + h \end{cases}$$

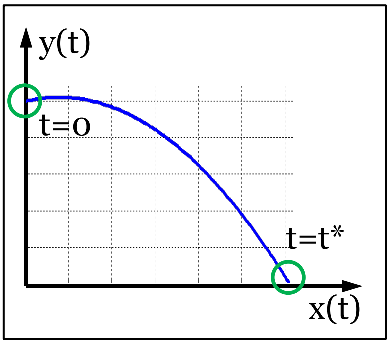


Figura 5. Evolución de la trayectoria del móvil en función del tiempo.

La solución se puede observar en la figura 5. Para t=0, el móvil está en la posición inicial (x,y)=(0,h). Para t=t*, el móvil se encuentra en el suelo, es decir, en (x,y)=(x*,0), siendo:

$$x^* = \frac{v_0 \cos\alpha}{g}\left(v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}\right)$$

$$t^* = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g}$$

Ejemplo 3 | La ecuación de onda:

La ecuación de onda es un ejemplo de SDC descrito por una EDP. Sea *u(x,t)* la expresión de una onda (acústica, electromagnética, mecánica), sea *c* la velocidad de propagación de la onda en el medio bajo estudio, y sean $f(x) = u(x,0)$ y $g(x) = \frac{\partial}{\partial t}u(x,0)$, la solución *u(x,t)* se obtiene resolviendo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$$

A partir del desarrollo que hizo d'Alembert, la solución a esta ecuación es:

$$u(x,t) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)d\tau$$

Cuyo desarrollo completo se puede obtener en Weinberger, 1992.

1.5. Sistemas dinámicos discretos (SDD)

Los SDD se describen a partir de ecuaciones en diferencias, en las que se representa el estado siguiente a partir del estado actual. Iterando la aplicación se obtiene el comportamiento dinámico del sistema.

A continuación, se muestran dos ejemplos de sistemas dinámicos. El primero de ellos trabaja solo sobre una magnitud, de modo que con una ecuación en diferencias queda completamente descrito.

En el segundo caso se utiliza un sistema de ecuaciones en diferencias, por lo que tendrá que ser representado matricialmente.

En ambos casos se trabaja sobre variable real. Los SDD que estudiaremos en el bloque correspondiente también incluyen variable compleja, de manera que las soluciones serán representadas sobre un plano en lugar de sobre una recta.

Ejemplo 4 | Método de Newton para la obtención de raíces:

Los métodos numéricos son una buena herramienta para la resolución de ecuaciones no lineales, como se desarrolla en Cordero, Torregrosa y Hueso, 2004.

Dada una función cuyas raíces no conocemos, el método de Newton es un proceso iterativo que nos permite obtener la solución de $f(x) = 0$ a partir de:

$$x_{n+1} = \Phi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Este método no garantiza la convergencia, sino que dependerá del valor inicial que tomemos. Si el método converge llegará un momento en el que por mucho que aumentemos n, el resultado de aplicar Φ va a ser invariante.

Para calcular $E = \cos E$, tendremos que $f(E) = E - \cos E\,, f'(E) = 1 + \sin(E)$ y, por tanto, la expresión de la ED será:

$$E_{n+1} = E_n - \frac{E - \cos E}{1 + \sin E}$$

Como hemos señalado, para diferentes valores del valor inicial E_0 se obtienen diferentes soluciones. La tabla 1 muestra los valores a los que tiende E conforme aumenta n para diferentes valores iniciales, siendo representado este comportamiento en la figura 6.

n=0	**n=1**	**n=2**	**n=3**	**n=4**	**n=5**	**n=6**	**n=7**	**n=8**	**n=9**
0	1	0.750	0.739	0.739	0.739	0.739	0.739	0.739	0.739
0.5	0.755	0.739	0.739	0.739	0.739	0.739	0.739	0.739	0.739
-0.5	2.146	0.683	0.740	0.739	0.739	0.739	0.739	0.739	0.739

Tabla 1. Valores de E para diferente número de iteraciones y valor inicial

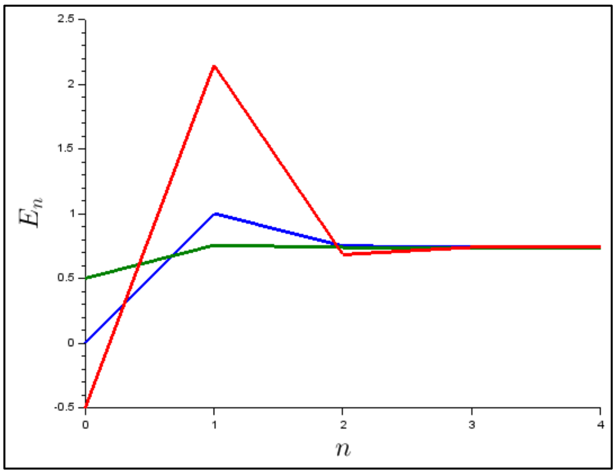


Figura 6. Convergencia al valor 0.739 para los valores iniciales -0.5 (rojo), 0 (azul) y 0.5 (verde)

La velocidad a la que se alcanza la solución varía respecto de los diferentes puntos iniciales. La solución a $E = \cos E$ es $E = 0.739$.

Ejemplo 5 | Los procesos migratorios:

Los procesos migratorios se determinan por la cantidad de elementos que migran de un lugar a otro. Basándonos en Behrend, 2008, planteamos el siguiente sistema. Sean l la población de Logroño y v la población de Valencia, en miles de personas. Cada año, la población que pasa de vivir en Valencia a Logroño es un 5%, mientras que de Logroño a Valencia van un 10%. El sistema que describe este comportamiento es:

$$l_{n+1} = 0.9l_n + 0.05v_n$$
$$v_{n+1} = 0.1l_n + 0.95v_n$$

Podemos reescribir en forma matricial el sistema como:

$$\vec{p}_{n+1} = \Phi(\vec{p}_n) = A\,\vec{p}_n$$

Donde:

$$\vec{p}_k = \begin{bmatrix} l_k \\ v_k \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 \end{bmatrix}$$

Si queremos conocer qué población habrá cuando hayan transcurrido N años, bastará con calcular:

$$\vec{p}_{n+N} = A\,\vec{p}_{n+N-1} = \cdots = A^N\,\vec{p}_n$$

Para N>>, $\vec{p}_\infty = A\,\vec{p}_\infty$, de modo que:

$$\begin{bmatrix} l \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l \\ v \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l \\ v \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0.1 & -0.05 \\ -0.1 & 0.05 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 0.1 & -0.05 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} l = l \\ v = 2l \end{cases}$$

Cuando la población de Valencia sea dos veces la de Logroño, las poblaciones se estabilizarán. Asumiendo que en 2015 las poblaciones son $[l, v] = [151{,}785]$ y que la población total no se va a modificar, se plantea el sistema:

$$\begin{cases} v - 2l = 0 \\ v + l = 936 \end{cases}$$

Cuya solución es $[l, v] = [312{,}624]$, que es la solución en la que la población se estabiliza.

A continuación, podemos ver la evolución de la población hasta alcanzar la estabilidad.

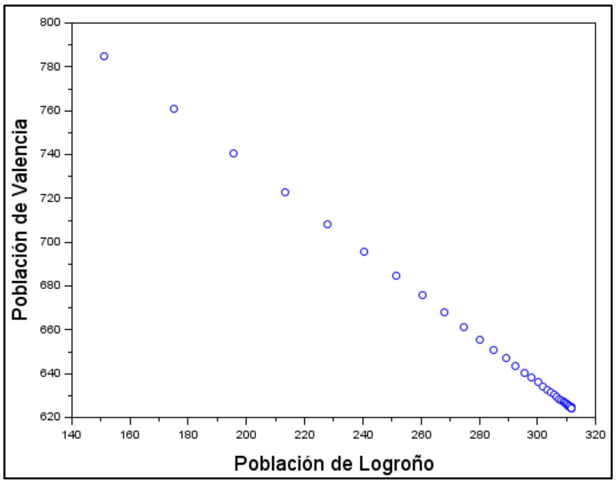


Figura 7. Relación entre la evolución de las poblaciones de Logroño y Valencia.

1.6. Referencias

Behrend, K. (2008). *Dynamical systems and matrix algebra.* http://www.math.ubc.ca/~behrend/math221/DynSys.pdf

Cordero, A., Torregrosa, J. R. y Hueso, J. L. (2004). *Cálculo numérico: teoría y aplicaciones*. UPV.

Silva, C. P. y Young, A. M. (2000). *Introduction to chaos based communications and signal processing*. *Aerospace conference proceedings*. Big Sky.

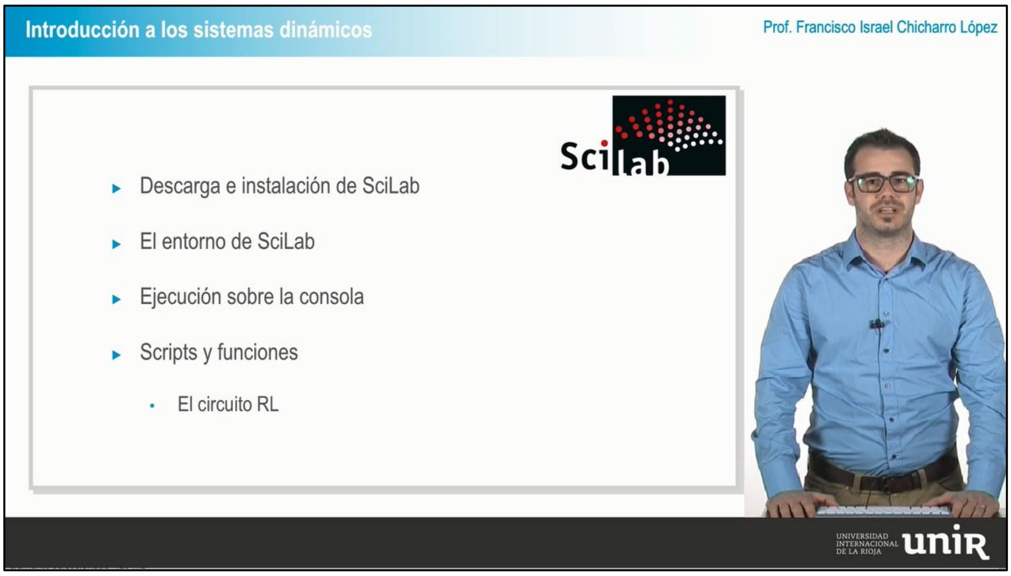
Weinberger, H. F. (1992). *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*. Reverté.

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

SciLab

En la lección magistral se va a presentar una introducción para trabajar con el programa de acceso libre SciLab. Se trata de un *software* de computación numérica que nos servirá a lo largo de la asignatura para representar diferentes comportamientos de los sistemas dinámicos.



Accede al vídeo desde el aula virtual

No dejes de leer…

An undeniable point of origin: Poincaré

En este documento se explica la historia de los sistemas dinámicos. El punto inicial se sitúa en el trabajo de Poincaré de finales del s. XIX. Es recomendable que leas las páginas 279 – 282.

Writing the History of Dynamical Systems and Chaos: *Longue Durée* and Revolution, Disciplines and Cultures[1]

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086002923517

No dejes de ver...

¿Qué es el caos?

Este vídeo nos introduce en los sistemas dinámicos para explicarnos que cuando un sistema evoluciona con el tiempo puede hacerlo en distintas formas, algunas veces predecibles y otras impredecibles o caóticas. Estos fenómenos caóticos son naturales y pueden ser estudiados matemáticamente para intentar describir comportamientos y características del caos.

Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://www.youtube.com/watch?v=r_pQxExbErQ

+ Información

A fondo

Lo que las matemáticas nos enseñan de las epidemias

En este artículo se describe a nivel cualitativo cómo ayudan las matemáticas a predecir cómo evolucionan las epidemias.

EL PAÍS

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://elpais.com/elpais/2016/08/10/ciencia/1470819795_495686.html

The beggining of system dynamics

A Jay W. Forrester se le considera uno de los padres de los sistemas dinámicos modernos. Resulta interesante el repaso que hace de las etapas de su vida, cómo va descubriendo el mundo de los sistemas dinámicos y los hitos que va consiguiendo.

The Beginning of System Dynamics

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://web.mit.edu/sysdyn/sd-intro/D-4165-1.pdf

Enlaces relacionados

Chaos: una aventura matemática

En esta página web se alojan muchos contenidos y vídeos relacionados con los sistemas dinámicos en la naturaleza. Resulta muy interesante la reproducción de los vídeos para complementar los contenidos mostrados en la asignatura. Se pueden ir viendo los capítulos conforme se avanza en el curso.

Accede a la página desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://www.chaos-math.org/es.html

Recursos externos

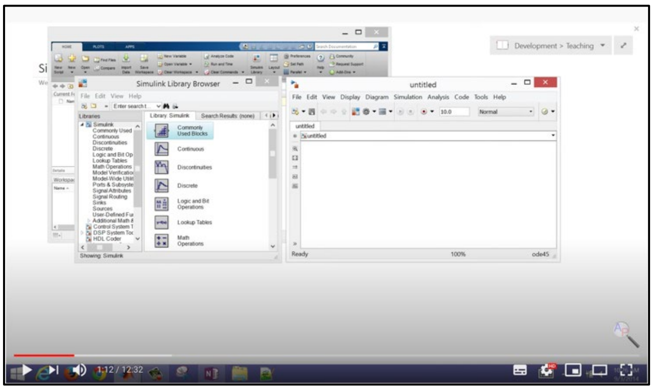
SciLab

SciLab es un *software* de computación numérica que utilizaremos para representar de manera gráfica algunos de los sistemas dinámicos bajo estudio, así como para obtener soluciones numéricas de dichos sistemas. Si has utilizado MATLAB®, su funcionamiento es muy similar.

Accede a la página desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://www.scilab.org/download/latest

Introducción a Simulink® (MATLAB®)

Simulink® es una herramienta de MATLAB® muy utilizada en simulación dinámica. En este vídeo se muestran los primeros pasos que deben seguirse para su utilización.



Accede a la página a través de la siguiente dirección web:
https://www.youtube.com/watch?v=eUvBGTjeIJY

Test

1. Un sistema dinámico:

A. Continuo se puede representar por ecuaciones en derivadas parciales.

B. Discreto se puede representar por ecuaciones diferenciales ordinarias.

C. Tiene como elemento principal el tiempo.

D. Nunca tiene solución analítica.

2. Determina cuáles de las siguientes ecuaciones representan sistemas dinámicos continuos:

A. $\ddot{x} - mx = a\cos(2\pi t + \varphi_0)$.

B. $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

C. $x_{n+1} = x_n - \frac{2}{3}\sin(2\pi t)$.

D. $(x, y)' = (y, -x^2 - 1)$.

3. Determina cuáles de las siguientes ecuaciones representan sistemas dinámicos discretos:

A. $\ddot{x} - mx = a\cos(2\pi t + \varphi_0)$.

B. $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

C. $x_{n+1} = x_n - \frac{2}{3}\sin(2\pi t)$.

D. $(x, y)' = (y, -x^2 - 1)$.

4. Determina cuáles de las siguientes ecuaciones representan sistemas dinámicos autónomos:

A. $\ddot{x} - mx = a\cos(2\pi t + \varphi_0)$.

B. $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

C. $x_{n+1} = x_n - \frac{2}{3}\sin(2\pi t)$.

D. $(x, y)' = (y, -x^2 - 1)$.

5. Determina cuáles de las siguientes ecuaciones representan sistemas dinámicos forzados:

A. $\ddot{x} - mx = a\cos(2\pi t + \varphi_0)$.

B. $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

C. $x_{n+1} = x_n - \frac{2}{3}\sin(2\pi t)$.

D. $(x, y)' = (y, -x^2 - 1)$.

6. Relaciona los ejemplos con el tipo de sistemas dinámicos que son:

La ecuación de onda	**1**		**A**	Discreto
El modelo migratorio	**2**		**B**	Continuo
El método de Newton	**3**		**C**	Continuo
El circuito RL	**4**		**D**	Discreto

7. Un sistema dinámico continuo:

A. Tiene al tiempo como elemento principal.

B. Define la variación de la magnitud con el tiempo.

C. Define el estado siguiente a partir del actual.

D. Ninguna de las anteriores es correcta.

8. Un sistema dinámico discreto:

A. Tiene al tiempo como elemento principal.

B. Define la variación de la magnitud con el tiempo.

C. Define el estado siguiente a partir del actual.

D. Ninguna de las anteriores es correcta.

9. El método de Newton:

A. Es un método numérico de resolución de ecuaciones no lineales.

B. Dado cualquier valor inicial, el método converge a una solución.

C. Solo se puede aplicar sobre variable real.

D. Todas las anteriores son correctas.

10. En el problema del modelo de población:

A. Si la migración se produjera entre tres ciudades, la matriz aplicación sería de dimensiones 3x3.

B. La solución se estabiliza pasados unos determinados años.

C. El comportamiento depende de la población inicial de Logroño y Valencia.

D. Todas las anteriores son correctas.

