

SDC: Sistemas lineales de orden uno

[2.1] ¿Cómo estudiar este tema?

[2.2] Fundamentos de EDO de orden uno

[2.3] Representación gráfica de EDO

[2.4] Dinámica de las EDO autónomas

[2.5] Referencias bibliográficas

2

T E M A

Esquema

	Fundamentos de EDO	Dinámica de EDO autónomas
Conceptos	Tipos Variables separables, exactas, lineales Soluciones General, particular	Puntos Equilibrio: atractores, repulsores, nodos
Gráficos	Campo de direcciones	Línea de fase Diagrama de bifurcación

Ideas clave

2.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

La primera parte de este tema es un recordatorio de conceptos que se presumen conocidos por parte de los estudiantes, centrados en la resolución analítica de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de orden uno.

A nivel cualitativo aparecen los conceptos dinámicos asociados a este tipo de ecuaciones diferenciales, fundamentalmente los puntos de equilibrio y la clasificación de los mismos.

Existen herramientas gráficas que facilitan la comprensión de los conceptos tanto de la parte puramente analítica como de la cualitativa. Se presentarán a lo largo de este tema:

- » Campo de direcciones.
- » Línea de fase.
- » Diagrama de bifurcación.

2.2. Fundamentos de EDO de orden uno

Una **ecuación diferencial ordinaria** de orden uno relaciona la variación de una magnitud con respecto al tiempo y tiene una expresión de la forma:

$$\dot{x} = F(t, x)$$

Es ordinaria porque solo hay derivadas respecto de una variable, en este caso respecto del tiempo. Utilizaremos la notación $\dot{[]}$, que será equivalente a $\frac{d}{dt}[]$. Es de orden uno porque solo entra en juego la primera derivada de la magnitud bajo estudio.

La ecuación diferencial tiene una **solución general** que recoge un número infinito de soluciones.

Si imponemos una condición sobre la solución tendremos una **solución particular**.

En caso de que esta condición se establezca sobre el valor de la magnitud en un instante inicial del tipo $x(t_0) = x_0$, obtendremos la solución particular al **problema de valor inicial**.

Las EDO de primer orden se resuelven mediante un método determinado en función del tipo que son. A continuación, se presentan unos cuantos tipos de EDO de primer orden y su método de resolución asociado.

Variables separables

Las EDO en variables separables son aquellas del tipo:

$$\dot{x} = a(t)b(x)$$

Cuya solución se obtiene como:

$$\frac{dx}{dt} = a(t)b(x) \leftrightarrow \int \frac{dx}{b(x)} = \int a(t)dt$$

Exactas

Las EDO del tipo:

$$M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0.$$

Son exactas si cumplen:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

En ese caso, la solución a la EDO exacta es:

$$G(t, x) + \varphi(t) + C = 0$$

Donde:

$$G(t, x) = \int M(t, x) dt, \quad \varphi'(t) = N - \frac{\partial G}{\partial x}$$

Lineales

Las EDO lineales de orden uno tienen la forma:

$$\dot{x} + a(t)x = b(t)$$

Multiplicando a ambos lados por el factor integrante $\mu(t) = \exp\{\int a(t) dt\}$ la EDO se transforma en exacta.

Ejemplo 1 | $x = \frac{1}{4}\dot{x}t - 1$.

Reescribimos la ecuación diferencial para presentarla como lineal:

$$\dot{x} - \frac{4}{t}x = \frac{4}{t}$$

Obtenemos el factor integrante:

$$\mu(x) = \exp\left\{\int -\frac{4}{t} dt\right\} = \exp\{\ln(t)^{-4}\} = t^{-4}$$

Multiplicamos a ambos lados de la EDO y la transformamos en una exacta:

$$\frac{dx}{dt} \frac{1}{t^4} - 4 \frac{1}{t^5} x = 4 \frac{1}{t^5} \leftrightarrow -4 \frac{1}{t^5} (x+1) dt + \frac{1}{t^4} dx = 0 \rightarrow \begin{cases} M(t, x) = -4 \frac{1}{t^5} (x+1) \\ N(t, x) = \frac{1}{t^4} \end{cases}$$

Para obtener la solución, calculamos:

$$\left. \begin{aligned} G(t, x) &= \int -4 \frac{1}{t^5} (x+1) dt = \frac{1}{t^4} (x+1) \\ \varphi'(t) &= \frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^4} = 0 \leftrightarrow \varphi(t) = C \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{t^4} (x+1) + C = 0 \leftrightarrow x(t) = Ct^4 - 1$$

La solución al problema de valor inicial será:

$$x(t_0) = x_0 = Ct_0^4 - 1 \leftrightarrow C = \frac{x_0 + 1}{t_0^4} \Rightarrow x(t) = \frac{(x_0 + 1)t^4 - t_0^4}{t_0^4}$$

2.3. Representación gráfica de EDO

En ocasiones no es fácil o posible representar las soluciones de las EDO. Es por ello que se recurre a esbozar estas soluciones de forma gráfica. En cualquier referencia de ecuaciones diferenciales se pueden encontrar estos métodos, si bien es cierto que en Hirsch, Smale y Devaney, 2004 se hace hincapié en problemas de sistemas dinámicos.

Campo de direcciones

La derivada de una función f en un punto x_0 , $f'(x_0)$ es la pendiente de la línea tangente a la curva $g(x)$ en ese punto, cuyo punto de tangencia es x_0 : $f(x_0) = g(x_0)$.

De forma análoga aparece el campo de direcciones. Es una herramienta que representa el comportamiento de las infinitas soluciones de la EDO en cada uno de los puntos. A partir de la expresión:

$$\dot{x} = F(t, x)$$

Se representa en cada punto (t, x) con un vector de pendiente $F(t, x)$. El campo de direcciones es tangente a la solución de la ecuación diferencial. La representación manual es un trabajo tedioso, por lo que se recurre a herramientas informáticas. Veremos el código en el tema 5.

Ejemplo 2 | Obtención de la solución particular de $\dot{x} = x - t$, $x(0) = 0$ y representación del campo de direcciones y de la solución particular.

Procediendo como en el ejemplo 1, la solución particular es:

$$x(t) = -e^t + t + 1$$

La figura 1 representa con flechas el campo de direcciones y con línea gruesa continua la solución particular:

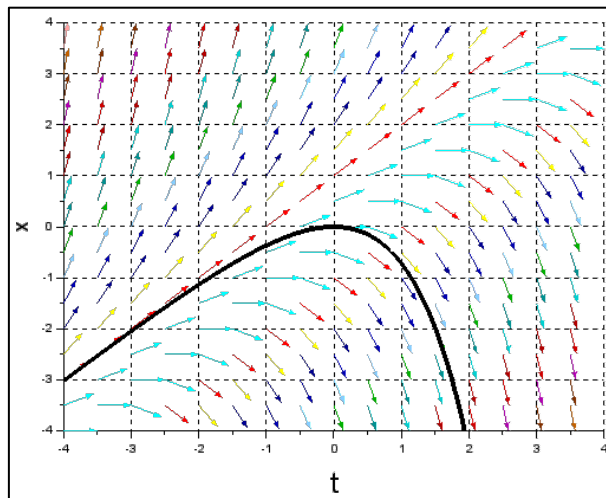


Figura 1. Campo de direcciones de $\dot{x} = x - t$ y solución $x(t)$

El campo de direcciones es tangente a la solución particular en todos los puntos. De hecho, el campo de direcciones es invariante respecto de las condiciones iniciales, de manera que será tangente a cualquier solución particular del problema.

El código para dibujar el campo de direcciones en SciLab se muestra será:

```
deff("[xdot]=ej2(t,x)",["xd1=1";"xd2=x(2)-x(1)";"xdot=[xd1;xd2]"])
tf=-4:0.5:4;
xf=-4:0.5:4;
fchamp(ej2,0,tf,xf)
```

Ejemplo 3 | Obtención de la solución particular de $\dot{x} = 3\frac{x}{t} - 2$, $x(1) = 0$ y representación del campo de direcciones y de la solución particular.

Procediendo como en los ejemplos anteriores, ponemos la ecuación diferencial en forma lineal, la transformamos en exacta y obtenemos la solución:

$$x(t) = t(1 - t^2)$$

La figura 2 representa el campo de direcciones a partir de $F(t, x) = 3\frac{x}{t} - 2$ y la solución como hicimos en el ejemplo anterior.

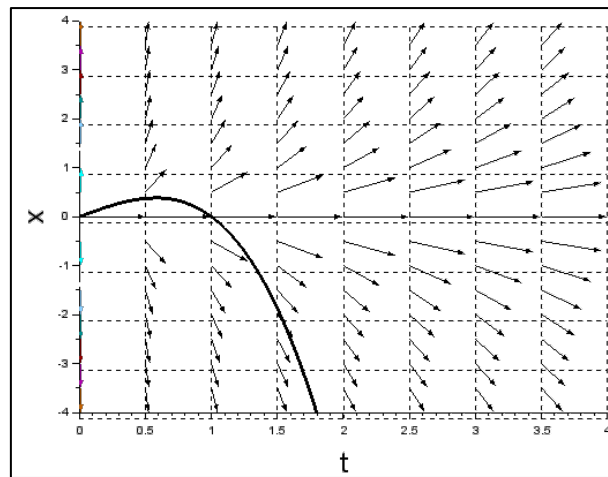


Figura 2. Campo de direcciones de $\dot{x} = 3\frac{x}{t} - 2$ y solución $x(t)$

2.4. Dinámica de las EDO autónomas

Como vimos en el tema anterior, las EDO autónomas son aquellas en las que no aparece ningún estímulo externo, de forma que se pueden expresar como:

$$\dot{x} = f(x)$$

Conceptos fundamentales

En cualquier manual de sistemas dinámicos es sencillo encontrar el glosario de definiciones básicas. Entre ellos, se recomienda Navas, 2009 o Arnold, 1973.

- » **Puntos de equilibrio:** los puntos de equilibrio de una ecuación diferencial son aquellos puntos en los que no existe variación temporal:

$$\dot{x} = f(x) = 0$$

- » **Puntos fijos:** los puntos fijos de una ecuación diferencial son aquellos puntos en los que la variación es igual a la función:

$$\dot{x} = f(x) = x$$

De modo que al aplicar la función f el punto permanece invariante.

- » **Puntos atractores, repulsores y nodos:** sea x^* un punto de equilibrio. Si:

- $f'(x^*) > 0$, el punto de equilibrio es repulsor.
- $f'(x^*) < 0$ se trata de un punto atractor.
- $f'(x^*) = 0$ nos encontramos ante un nodo.

- » **Línea de fase:** la línea de fase representa el comportamiento de los puntos de equilibrio. Consiste en una línea en la que se representan los puntos de equilibrio por puntos y a los lados se incluyen flechas que indican si el punto es atractor o repulsor.

La figura 3 representa las líneas de fase de puntos atractores, repulsores y nodos:

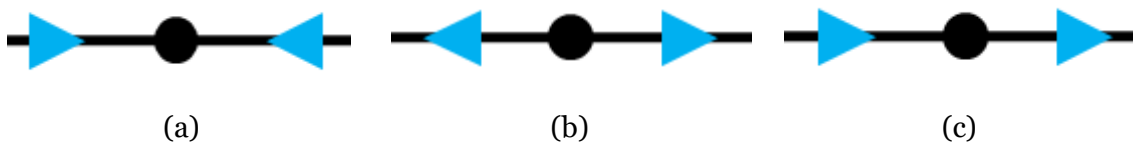


Figura 3. Líneas de fase de puntos atractores (a), repulsores (b) y nodos (c)

EDO libres de parámetros

Para mostrar los conceptos fundamentales relacionados con la dinámica planteamos dos ejemplos sencillos en los que no aparecen parámetros. De esta manera, podremos comprobar de una forma más sencilla el significado de los puntos de equilibrio y su clasificación.

Ejemplo 4 | Dada la ecuación diferencial $\dot{x} = 3 + 2x - x^2$, $x(0) = 3$, obtener los puntos de equilibrio, clasificarlos y dibujar la línea de fase.

La solución de la ecuación diferencial es:

$$x(t) = \frac{e^{-4t} + 3}{1 - e^{-4t}}$$

Los puntos de equilibrio se obtienen anulando $f(x)$, de manera que:

$$f(x) = 3 + 2x - x^2 = 0 \leftrightarrow x^* = \{-1, 3\}$$

La clasificación de los puntos de equilibrio se realiza a partir de:

$$f'(x) = -2x + 2 \rightarrow \begin{cases} f'(-1) = 4 > 0 \\ f'(3) = -4 < 0 \end{cases}$$

Los puntos de equilibrio del sistema son $x^* = -1$ (repulsor) y $x^* = 3$ (atractor). Se muestra en la figura 4 el campo de direcciones en negro, la solución $\langle t, x(t) \rangle$ en rojo y la expresión $\langle x, \dot{x} \rangle$ en azul.

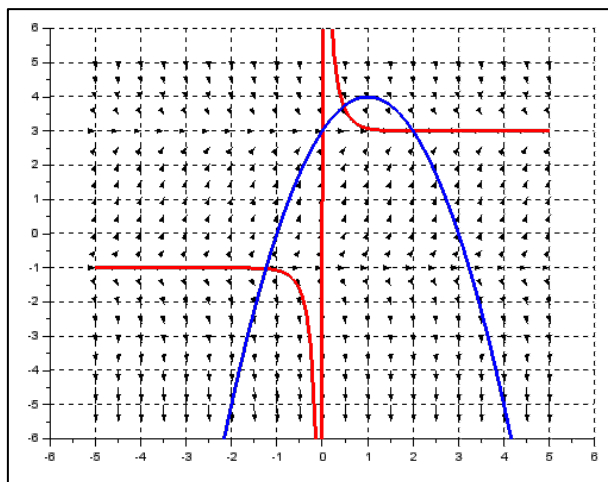


Figura 4. Campo de direcciones (flechas), solución $x(t)$ (rojo) y $x(t)$ vs $\dot{x}(t)$ (azul).

Los puntos de equilibrio son aquellos en los que la pendiente de las flechas es nula. En el punto de equilibrio $x^* = -1$ podemos observar cómo en puntos próximos de esa solución las flechas se alejan, mientras que en los puntos cercanos a $x^* = 3$ las flechas hacen que estas soluciones vuelvan a ese punto. De ahí que se nombren repulsores y atractores. Ese comportamiento es el que refleja la línea de fase de la figura 5.

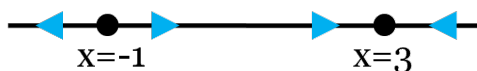


Figura 5. Línea de fase.

Las soluciones próximas a $x^* = -1$ se alejarán de ella, mientras que las soluciones cercanas a $x^* = 3$ se aproximarán.

Ejemplo 5 | Realiza el estudio dinámico de $\dot{x} = \sin(x/2)$.

A pesar de que podemos calcular la solución analítica, en este caso no lo vamos a hacer para comprender el comportamiento de la ecuación diferencial.

Los puntos de equilibrio son:

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \leftrightarrow x^* = 2k\pi, k = 0, 1, \dots$$

Clasifiquemos estos puntos de equilibrio:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow f'(x^*) = \frac{1}{2} \cos(k\pi) = \begin{cases} 1, & k = 0, 2, 4, \dots \\ -1, & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

De este modo, los puntos $x^* = 0, 4\pi, 8\pi, \dots$ serán puntos repulsores y los puntos $x^* = 2\pi, 6\pi, 10\pi, \dots$ serán puntos atractores. Este comportamiento se refleja tanto en el campo de direcciones como en la línea de fase, mostrados en la figura 6:

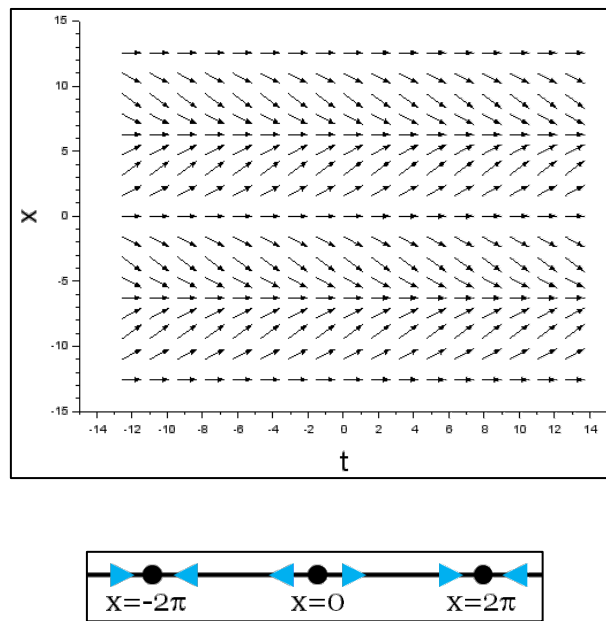


Figura 6. Campo de direcciones y línea de fase de $\dot{x} = \sin(x/2)$

EDO uniparamétricas

Vamos a complementar el estudio de las EDOs autónomas con la introducción de parámetros.

Diagrama de bifurcación

El diagrama de bifurcación representa los cambios que se producen en el comportamiento del sistema dinámico en función del valor de los parámetros. En el eje de abscisas se sitúa el parámetro y en el eje de ordenadas la magnitud. Asimismo se introducen líneas de fase verticales para establecer el comportamiento de cada punto de equilibrio.

Ejemplo 6 | El modelo logístico de población. Uno de los modelos logísticos de población está representado por la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = ax(1 - x)$$

Con condición inicial $x(t_0) = x_0$. Esta EDO tiene como solución general:

$$x(t) = \frac{x_0 e^{at}}{1 - x_0 + x_0 e^{at}}$$

Los puntos de equilibrio de este sistema dinámico son:

$$f(x) = ax(1 - x) = 0 \leftrightarrow x^* = \begin{cases} \{0,1\}, & a \neq 0 \\ \text{todo } x, & a = 0 \end{cases}$$

El comportamiento es distinto en función del valor del parámetro. A la hora de clasificar los puntos ocurre algo parecido:

$$f'(x) = a - 2ax = \begin{cases} a - 2ax, & a \neq 0 \\ 0, & a = 0 \end{cases}$$

Por tanto, si $a = 0$ todos los valores de x son nodos y no podemos asegurar nada sobre ellos. En caso de que $a \neq 0$:

$$f'(x) = a - 2ax \rightarrow \begin{cases} f'(0) = a \begin{cases} > 0, & a > 0 \\ < 0, & a < 0 \end{cases} \\ f'(1) = -a \begin{cases} < 0, & a > 0 \\ > 0, & a < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Por tanto, si $a > 0$ los puntos de equilibrio 0 y 1 son repulsor y atractor, respectivamente, mientras que si $a < 0$ ocurre lo contrario. Este comportamiento se puede observar en la figura 7:

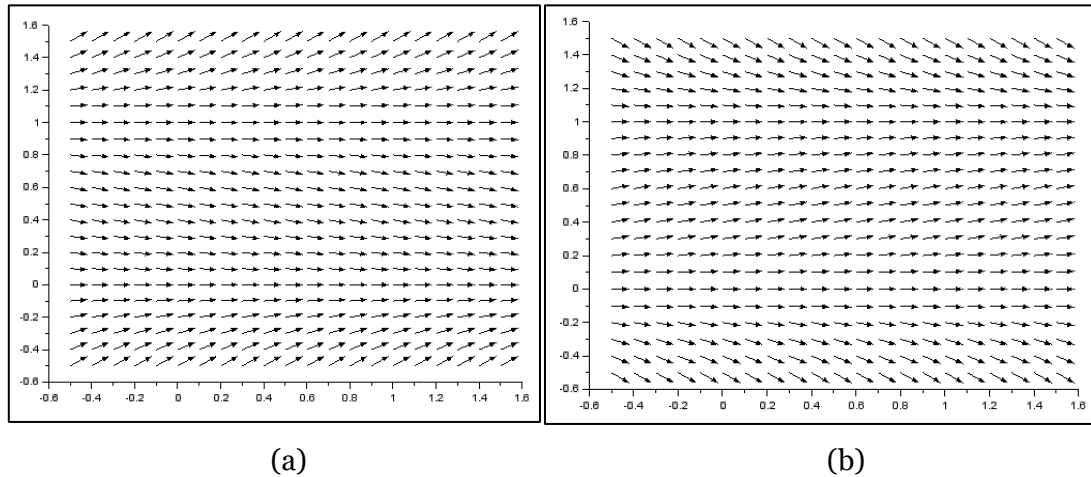


Figura 7. Campo de direcciones de $\dot{x} = ax(1 - x)$ para $a < 0$ (a) y $a > 0$ (b)

Para agrupar en una gráfica todos los casos posibles se recurre al diagrama de bifurcación, representado en la figura 8:

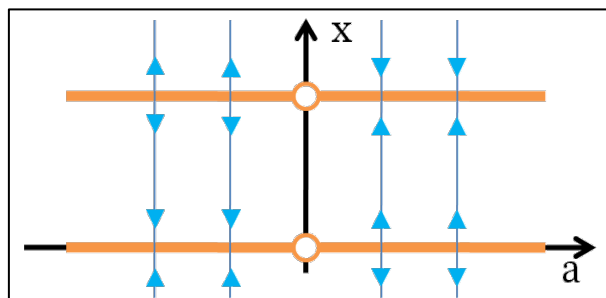


Figura 8. Diagrama de bifurcación.

Los puntos de equilibrio están marcados en naranja y las líneas de fase en azul. Cuando los valores de a son negativos, $x^* = 0$ es atractor y $x^* = 1$ es repulsor. Cuando $a = 0$ no podemos determinar nada. Cuando a es positivo, $x^* = 0$ es repulsor y $x^* = 1$ es atractor.

Ejemplo 7 | El modelo logístico de población con cosecha. Otro de los modelos logísticos de población incluye la cosecha a lo largo de la temporada introduciendo un parámetro k . Fijando el parámetro $a = 2$ del ejemplo anterior, vamos a estudiar:

$$\dot{x} = 2x(1 - x) - k$$

La solución general a esta EDO es:

$$x(t) = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{-2k-1} \tan(C_1 \sqrt{-2k-1} + \sqrt{-2k-1}t) \right]$$

Para obtener más información acerca del comportamiento del sistema vamos a obtener los puntos de equilibrio, puesto que la solución analítica es bastante tediosa.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(1-x) - k = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - \frac{k}{2} = 0 \Leftrightarrow x^* = \frac{1 \pm \sqrt{1+2k}}{2}$$

Tendremos tres posibilidades de puntos de equilibrio en función del valor del signo del discriminante y, por consecuencia, del valor k . Para $k > -1/2$ habrá dos puntos de equilibrio, para $k = -1/2$ habrá un punto de equilibrio y para $k < -1/2$ no habrá puntos de equilibrio.

Clasifiquemos los puntos fijos para cada caso:

$$f'(x) = 2 - 4x \rightarrow \begin{cases} k > -\frac{1}{2}, \begin{cases} f'\left(\frac{1+\sqrt{1+2k}}{2}\right) < 0 \\ f'\left(\frac{1-\sqrt{1+2k}}{2}\right) > 0 \end{cases} \\ k = -\frac{1}{2}, f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

El diagrama de bifurcación se muestra en la figura 9. Podemos observar cómo a partir del punto $k = -1/2$ el comportamiento del sistema cambia.

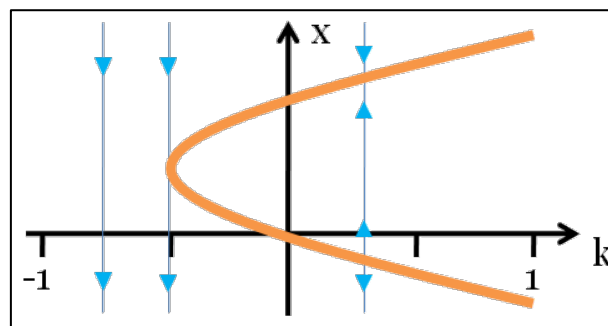


Figura 9. Diagrama de bifurcación.

2.5. Referencias bibliográficas

Arnold, V. (1973). *Ordinary differential equations*. MIT Press.

Hirsch, M. W., Smale, S. y Devaney, R. L. (2004). *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Elsevier.

Navas, J. (2009). *Modelos matemáticos en biología*.

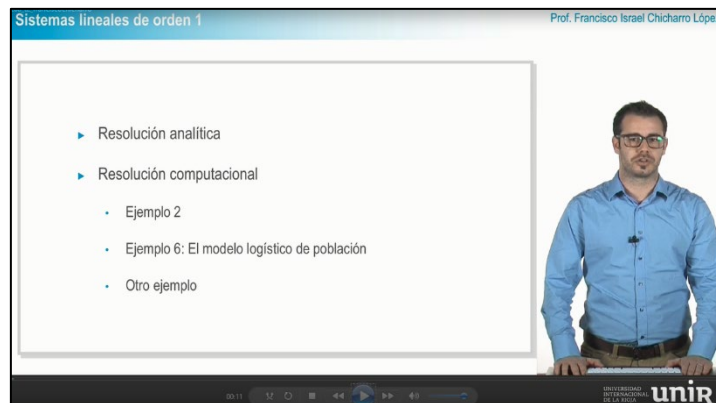
http://matema.ujaen.es/jnavas/web_modelos/

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

SciLab II

En esta lección magistral seguiremos trabajando con el entorno SciLab. Trabajaremos con el comando *ode* para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias y compararemos los resultados con las soluciones analíticas, verificando cómo se ajustan ambos tipos de solución.

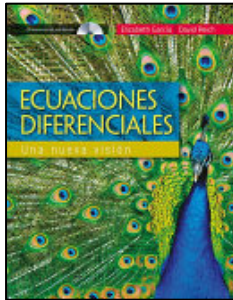


Accede al vídeo desde el aula virtual

No dejes de leer...

Solución y aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden

García, A. E., y Reich, D. (2015). *Ecuaciones diferenciales: una nueva visión*. Patria.



En esta sección del libro se presentan las ecuaciones diferenciales de primer orden y una clasificación mucho más extensa de la que se ha realizado en este tema. Asimismo, se describe el método de resolución y aparecen aplicaciones de las ecuaciones diferenciales, demostrando la viabilidad de este tipo de modelos en el mundo real.

Accede al documento a través de la Biblioteca Virtual de UNIR

Modelado matemático de los sistemas dinámicos

En este documento se hace hincapié en la necesidad de simular y modelizar matemáticamente los sistemas dinámicos para poder desarrollar la mayoría de las aplicaciones en la industria. Se proporciona una gran variedad de ejemplos de modelados dinámicos en sistemas eléctricos y electrónicos, sistemas mecánicos, sistemas electromagnéticos y sistemas térmicos.

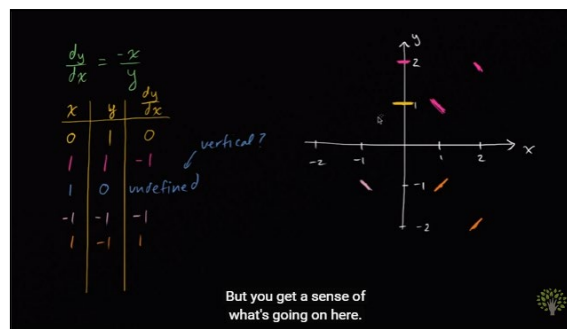
Accede al documento a través de la siguiente dirección web:

http://www.ieef.upm.es/webantigua/spain/Asignaturas/Servos/Apuntes/4_Modelado.pdf

No dejes de ver...

Creating a slope field

Se puede observar cómo se genera un campo de direcciones paso a paso. A partir de la ecuación diferencial se crea una tabla, se dan valores y se calcula la pendiente asociada a cada uno de los puntos de la malla de puntos (x, y) . El audio y los subtítulos son en inglés, pero no son necesarios para la comprensión del concepto que se quiere transmitir.



Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

<https://www.youtube.com/watch?v=8Amgakx5aII>

No dejes de practicar...

Ejercicios recomendados

A continuación, encontrarás una serie de ejercicios para practicar los conceptos estudiados en el tema.

Ejercicio 1 | Determina la solución analítica de las siguientes ecuaciones diferenciales y representa el campo de direcciones:

» $x' + x = x(te^{t^2} + 1).$

» $x' + \frac{x}{t} = 3t.$

» $x' + 4tx = t.$

» $x' = x - x^2.$

Ejercicio 2 | Realiza el estudio dinámico (campo de direcciones, puntos de equilibrio y línea de fase) de los siguientes sistemas autónomos:

» $x' = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$

» $x' = (1 - x)(2 + x)^2.$

» $x' = x(1 - x).$

» $x' = \cos(2x).$

Ejercicio 3 | Dadas las siguientes familias de sistemas, determina el diagrama de bifurcación:

» $x' = ax.$

» $x' = x + a.$

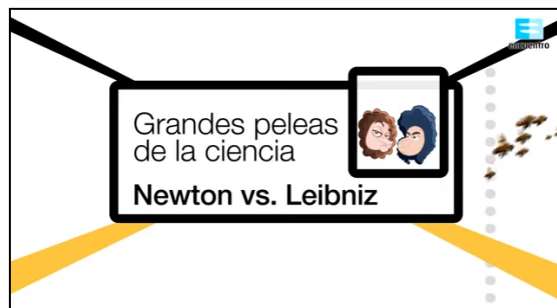
Accede a las soluciones a través del aula virtual.

+ Información

A fondo

Newton vs. Leibniz

Este vídeo describe de una manera cómica la disputa que hubo entre Leibniz y Newton por el título de padre del cálculo diferencial. Desde que ambos plantean el cálculo diferencial hasta que la Royal Society toma una decisión al respecto de dicha paternidad.



Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

<https://www.youtube.com/watch?v=fOIPCSpCNVA>

Bibliografía

Izquierdo, J., Torregrosa, J. R. (1997). *Álgebra y ecuaciones diferenciales*. Universidad Politécnica de Valencia.

Glosario

Puntos de equilibrio. Puntos del sistema $x' = f(x)$ que hacen que la magnitud permanezca constante, es decir, $f(x) = 0$.

Puntos atractores. Puntos de equilibrio del sistema $x' = f(x)$ que atraen las soluciones del problema. Se corresponden con $f'(x^*) < 0$.

Puntos repulsores. Puntos de equilibrio del sistema $x' = f(x)$ que repelen las soluciones del problema. Se corresponden con $f'(x^*) > 0$.

Puntos nodo. Puntos de equilibrio del sistema $x' = f(x)$ de los que no se sabe a priori qué comportamiento tienen. Se corresponden con $f'(x^*) = 0$.

Campo de direcciones. Es tangente a la solución de la ecuación diferencial. En cada punto (t, x) se representa el valor de la pendiente $f(t, x)$.

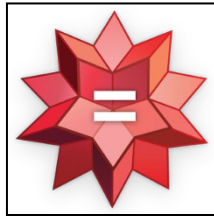
Línea de fase. Representa el carácter atractor, repulsor o indeterminado de cada punto de equilibrio.

Diagrama de bifurcación. Representa la información de la línea de fase para diferentes puntos de equilibrio establecidos por la aparición de un parámetro en la ecuación diferencial.

Recursos externos

Wolfram Alpha

Esta herramienta gratuita de Wolfram Research es básicamente un buscador avanzado. Introduciéndole una ecuación diferencial detecta de qué tipo es y presenta su solución analítica. Para los usuarios PRO permite, entre otras capacidades, ver la resolución paso a paso del problema.



Accede a la página desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

www.wolframalpha.com

Test

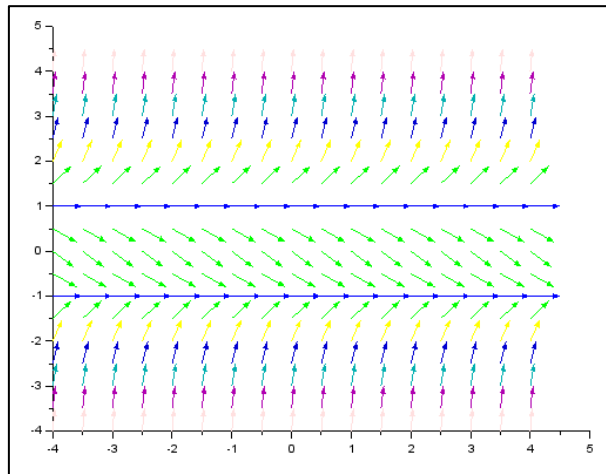
1. Dada la EDO $\dot{x} = ax + bt$, indica en qué caso se trata de una EDO exacta:
 - A. $a = 1, b = 0$.
 - B. $a = 1, b = 1$.
 - C. $a = 0, b = 1$.
 - D. $a = 0, b = 1$.

2. Dada la EDO $\dot{x} = ax + bt$, indica qué factor integrante es el adecuado para resolverla analíticamente:
 - A. $\mu(x) = e^{at}$.
 - B. $\mu(x) = e^{-at}$.
 - C. $\mu(x) = at$.
 - D. $\mu(x) = -at$.

3. ¿Cuántas soluciones tiene una EDO?
 - A. Ninguna.
 - B. Una.
 - C. Depende de los parámetros que tenga.
 - D. Infinitas.

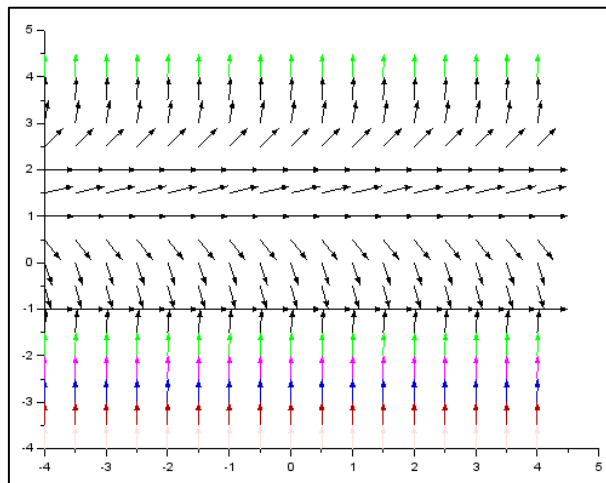
4. Los puntos de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$ son aquellos puntos:
 - A. En los que $f'(x) = 0$.
 - B. En los que $f'(x)$ tiene un máximo o un mínimo.
 - C. En los que $f'(x) = 0$.
 - D. En los que no existe variación temporal de la magnitud.

5. Dado el siguiente campo de direcciones, ¿qué se puede concluir al respecto?



- A. Los puntos $\{-1,1\}$ son puntos de equilibrio.
- B. La función $f(x)$ es de grado dos.
- C. El punto 0 es un punto repulsor.
- D. Todas las anteriores son correctas.

6. Dado el siguiente campo de direcciones, ¿qué se puede concluir al respecto?



- A. Los puntos $\{-1,1\}$ son puntos de equilibrio.
- B. La función $f(x)$ es de grado tres.
- C. El punto 2 es un nodo.
- D. Todas las anteriores son correctas.

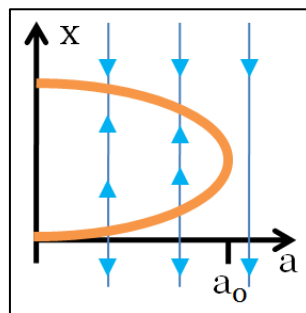
7. Relativo a los puntos atractores, x_a^* de $\dot{x} = f(x)$:

- A. Cumplen que $f'(x_a^*) < 0$.
- B. $f(x)$ tiene un máximo o un mínimo en x_a^* .
- C. Son todos los puntos en los que $f(x) = 0$.
- D. En x_a^* no existe variación temporal de la magnitud.

8. Relacionado con la línea de fase:

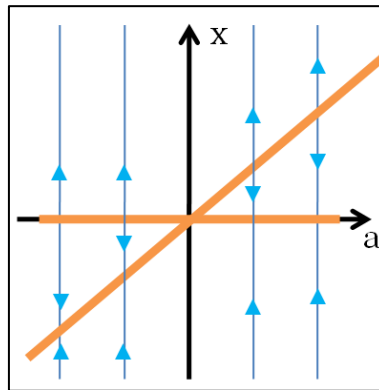
- A. Permite detectar dónde están los puntos de equilibrio.
- B. Se puede obtener a partir del campo de direcciones.
- C. Solo es útil en sistemas sin parámetros.
- D. Ninguna de las anteriores es correcta.

9. Dado el diagrama de bifurcación de la figura:



- A. El sistema tiene dos puntos fijos para cualquier valor de a .
- B. El valor $a = a_0$ determina un cambio de comportamiento en los puntos de equilibrio.
- C. No es posible que se dé este sistema dinámico.
- D. Cuando $0 < a < a_0$, todos los puntos de equilibrio son atractores.

10. Dado el diagrama de bifurcación de la figura:



- A. Para $a < 0$ el punto de equilibrio $x^* = 0$ es un punto repulsor.
- B. Para $x = a$, $f(x) = 0$.
- C. En $x = 0$ hay un nodo.
- D. Ninguna de las anteriores es correcta.