

# SDD: Sistemas iterativos I

[9.1] ¿Cómo estudiar este tema?

[9.2] Los sistemas basados en métodos iterativos

[9.3] Preliminares de dinámica compleja

[9.4] El método de Newton

[9.5] Métodos basados en Newton

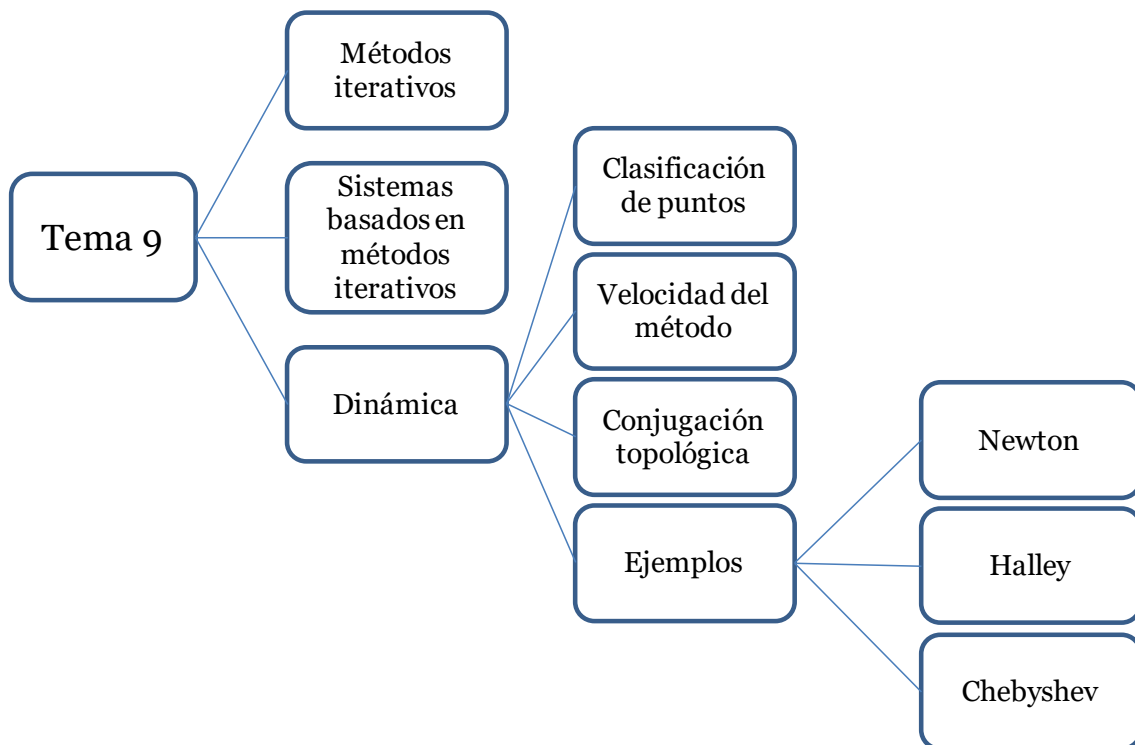
[9.6] Referencias bibliográficas

9

T E M A

## Esquema

| Sistemas dinámicos discretos |          |           |           |
|------------------------------|----------|-----------|-----------|
| Variable                     |          | Expresión |           |
| Real                         | Compleja | Real      | Compleja  |
| Tema 7                       | Tema 8   | Tema 7-8  | Tema 9-10 |



## Ideas clave

---

### 9.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

A lo largo de este tema se introducen nuevos conceptos asociados a los métodos iterativos y la dinámica asociada. Este tema se va a centrar fundamentalmente en métodos de variable compleja.

La guía de estudio de este tema se basa en el trabajo de los conceptos analíticos a través de la obtención de resultados para los casos que se presentan tanto en los ejemplos como en las actividades voluntarias.

Hay una gran parte gráfica cuyo desarrollo se trabajará en las sesiones prácticas asociadas. De manera que se aconseja al alumno que preste atención en las características de las representaciones gráficas y sus significados.

### 9.2. Los sistemas basados en métodos iterativos

Los sistemas dinámicos discretos consisten en procesos iterativos en los que, a partir de una semilla, se itera una función hasta alcanzar un punto fijo atractor sobre el que la órbita permanece o divergir hacia el infinito.

La novedad que introduce este tema es sobre el concepto de función. Hasta ahora, la función  $f$  era una expresión algebraica, generalmente una función de segundo grado. A partir de ahora el estudio dinámico se va a realizar sobre una función de iteración  $F$  que tratará de obtener la solución de la función  $f$ . La función de iteración  $F$  es lo que denominamos el método iterativo.

Los métodos iterativos son métodos numéricos que sirven para resolver ecuaciones. La aplicación más importante de los métodos iterativos de resolución de ecuaciones reside en aquellas funciones que son no lineales o aquellas en las que no se puede obtener la solución a partir de una expresión analítica.

Una vez presentados los elementos del tema vamos a reubicarlo en el contexto de la asignatura. Vamos a tratar de obtener la solución de ecuaciones no lineales a partir de métodos iterativos. Si solo nos interesan las soluciones en el dominio de los números reales estaremos ante  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , mientras que si lo extendemos a los números complejos tendremos  $f(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

La ecuación **no lineal** se expresa a partir de  $f$ , mientras que el método numérico aplicado a la **ecuación diferencial** será  $F(f)$ . El método numérico es un método iterativo sobre valores discretos, de forma que se trata de un sistema dinámico por su variación temporal que se puede describir por la expresión general  $x_{k+1} = F(x_k, f(x_k))$ .

La figura 1 ilustra conceptualmente los elementos de estos sistemas:

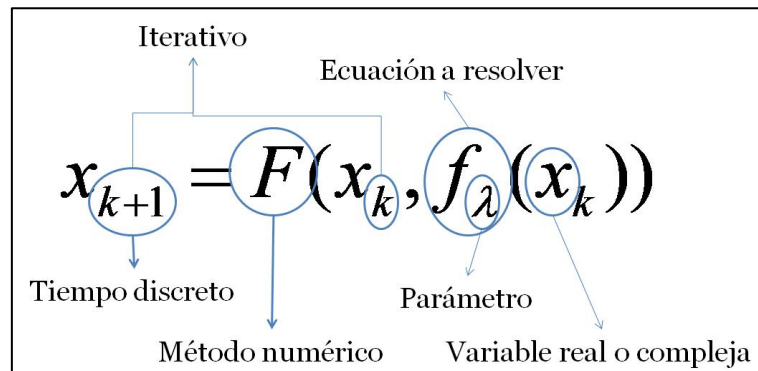


Figura 1. Diagrama conceptual de los sistemas dinámicos discretos basados en métodos iterativos

### 9.3. Preliminares de dinámica compleja

Asociado a los métodos iterativos existen una serie de conceptos que son de interés para poder comparar las prestaciones que aportan cada uno de ellos.

Por otro lado, resulta de interés el concepto de conjugación topológica que nos servirá para generalizar resultados para una serie de funciones sobre las que obtener sus soluciones.

## Operador de punto fijo y dinámica de puntos

Los métodos iterativos tienen una expresión general a partir de la cual se obtienen los siguientes iterados y, por tanto, la órbita. Esta expresión general tiene la forma  $x_{k+1} = F(x_k, f(x_k))$ .

El operador de punto fijo mantiene la estructura de la expresión general, pero sus variables están en el dominio continuo, por lo que tienen la forma  $O_f(x) = F(x, f(x))$ . A partir de este operador se definen las características dinámicas del método, de forma análoga a como se han venido realizando en los temas anteriores.

Los **puntos fijos** verifican  $O_f(z^*) = z^*$ , mientras que los **puntos críticos** cumplen  $O'_f(z^c) = z^c$ . Serán puntos críticos libres aquellos que no coincidan con los puntos fijos.

Los puntos fijos serán **atractores/repulsores/neutrales** si  $|O'_f(z^*)|$  es menor/mayor/igual a la unidad; en caso de que sea de valor nulo, el punto es **superatractor**.

## Orden de convergencia

Sea  $\{x_k\}$  una sucesión convergente a un límite  $\alpha$ . Si existe una constante  $C \in (0,1)$  tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - x_{k+1}|}{|\alpha - x_k|^p} = C,$$

Si  $p = 1$  se dice que el orden de convergencia es lineal, si  $p = 2$  la convergencia es cuadrática y si  $p = 3$  la convergencia es cúbica. Para otros casos, la convergencia es de orden  $p$ , salvo para  $1 < p < 2$ , que la convergencia es superlineal.

En el tema 6 se introdujo el concepto de convergencia computacional que retomaremos en este tema. El orden de convergencia computacional aproximado, abreviado por ACOC y representado por  $\rho$  se define como:

$$\rho = \frac{\log \left| \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k - x_{k-1}} \right|}{\log \left| \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}} \right|}.$$

## Conjugación topológica

El objetivo de la conjugación topológica es el conocimiento de comportamiento dinámico de una familia de funciones a partir del estudio de tan solo unos casos, de forma que se puedan extender los resultados de los casos individuales al caso general.

Para ello se presentan los siguientes resultados sobre conjugación topológica.

Sean  $f: D \rightarrow D$  y  $g: E \rightarrow E$ .  $f$  y  $g$  son **topológicamente conjugadas** si existe un homeomorfismo (aplicación continua con inversa continua  $\varphi: D \rightarrow E$ ), tal que:

$$\varphi \circ f = g \circ \varphi.$$

Bajo estas condiciones:

- »  $\varphi^{-1}: E \rightarrow D$  también es topológicamente conjugado entre  $g$  y  $f$ .
- »  $\varphi \circ f^k = g^k \circ \varphi, \forall k \in \mathbb{N}$ .
- »  $x^P$  es punto periódico de  $f$  si y solo si  $\varphi(x^P)$  es punto periódico de  $g$ ; además,  $x^P$  y  $\varphi(x^P)$  tienen periodos iguales.
- » Si  $x^P$  es punto periódico de  $f$  y  $\varphi'$  no se anula en la órbita de  $x^P$ , entonces  $x^P$  y  $\varphi(x^P)$  tienen el mismo carácter atractor, repulsor o neutral.
- » Si  $x^P$  es punto periódico de  $f$  y su cuenca de atracción es  $\mathcal{A}(x^P)$ , entonces  $\mathcal{A}(\varphi(x^P)) = \varphi(\mathcal{A}(x^P))$ .

**Ejemplo 1** | ¿Son  $f(x) = 3x$  y  $g(x) = 9x$  conjugadas topológicamente por  $\varphi(x) = x^2$ ?

Para comprobar si son topológicamente conjugadas recurriremos a la definición, de forma que  $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ :

$$\begin{aligned}\varphi(f(x)) &= \varphi(3x) = 9x^2 \\ g(\varphi(x)) &= g(x^2) = 9x^2\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f$  y  $g$  son conjugadas topológicamente a partir de  $\varphi$ .

**Ejemplo 2** | Determina los parámetros  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  para que  $f$  y  $g$  sean topológicamente conjugadas a partir de  $\varphi$ , siendo  $f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$  la familia logística,  $g_\mu(x) = x^2 + \mu$  la familia cuadrática, y  $\varphi(x) = \alpha x + \beta$ .

Por la definición, sabemos que  $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ . Por otro lado,  $\varphi^{-1}(x) = \frac{x-\beta}{\alpha}$ .

$$\begin{aligned}\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi &= \varphi^{-1}(f(\alpha x + \beta)) = \varphi^{-1}(\lambda(\alpha x + \beta)(1 - \lambda(\alpha x + \beta))) \\ &= \frac{\lambda(\alpha x + \beta)(1 - \lambda(\alpha x + \beta)) - \beta}{\alpha} \\ &= -\lambda^2 \alpha x^2 + \lambda(1 - 2\lambda\beta)x + \frac{\lambda\beta - \lambda^2\beta^2 - \beta}{\alpha}\end{aligned}$$

Como este valor tiene que ser igual a  $g(x) = x^2 + \mu$ , igualamos coeficientes por potencias de  $x$ :

$$\left. \begin{array}{l} x^2: \quad -\lambda^2 \alpha = 1 \\ x^1: \quad \lambda(1 - 2\lambda\beta) = 0 \\ x^0: \quad \frac{\lambda\beta - \lambda^2\beta^2 - \beta}{\alpha} = \mu \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -\frac{1}{\lambda^2} \\ \beta = \frac{1}{2\lambda} \\ \mu = \frac{2\lambda - \lambda^2}{4} \end{array} \right.$$

Por tanto,  $f(x) = \lambda x(1 - x)$  es topológicamente conjugado a  $g(x) = x^2 + \mu = x^2 + \frac{2\lambda - \lambda^2}{4}$  a través de  $\varphi(x) = -\frac{x}{\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda}$ .

## 9.4. El método de Newton

Uno de los métodos más conocidos para encontrar las soluciones de ecuaciones no lineales es el método de Newton.

### Descripción del método de Newton

Dado un punto inicial, nos vamos aproximando a la raíz de la ecuación a través de la tangente a la curva en cada punto. La figura 2 representa gráficamente cómo nos vamos acercando a dicho punto.

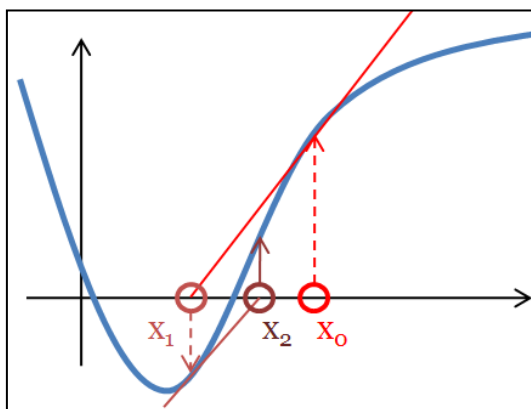


Figura 2. Ilustración del método de Newton. A partir de un valor inicial, el siguiente punto viene determinado por la tangente a la función en dicho punto.

La expresión general del método de Newton viene determinada por:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

El operador de punto fijo asociado es:

$$N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Los puntos fijos del método iterativo se obtienen a partir de:

$$N_f(x) = x \leftrightarrow f(x) = 0,$$



Es decir, los puntos fijos del método serán las raíces de  $f(x)$ . La derivada del operador de punto fijo es:

$$N'_f(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

De forma que los puntos fijos serán superatractores y los puntos críticos quedarán determinados por las raíces de  $f(x)f''(x)$ .

La expresión de la órbita periódica de periodo dos:

$$N_f^2(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f'\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}$$

Nos da una idea de lo intrincadas que pueden ser las expresiones analíticas, por lo que recurriremos generalmente a los cálculos numéricos.

El método de Newton tiene convergencia cuadrática. El problema del método de Newton que trataremos de paliar en el tema siguiente es que en su expresión iterativa incluye la evaluación de la derivada de la función  $f$ . No todas las funciones tienen como derivada una expresión sencilla; es por ello que la evaluación de la derivada requiere de un coste computacional extra.

A continuación, vamos a trabajar sobre la aplicación del método de Newton sobre polinomios cuadráticos y cúbicos para estudiar sus características dinámicas.

### **Método de Newton sobre polinomios cuadráticos**

En primer lugar, vamos a tratar de simplificar al máximo el problema. Los polinomios cuadráticos tienen la forma  $p(z) = z^2 + az + b$ . El estudio dinámico del método de Newton sobre el polinomio  $p(z)$  requeriría el uso de dos parámetros  $a$  y  $b$ . A partir de la conjugación topológica vamos a comprobar si podemos reducir la cantidad de parámetros.

Sean  $f(z) = z^2 + az + b$  y  $g(z) = z^2 + \lambda$ , vamos a comprobar si son topológicamente conjugadas a través de una aplicación  $\varphi(z) = \alpha z + \beta$ . Para dicha comprobación, procedemos como en el ejemplo 2:

$$\begin{aligned}\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi &= \varphi^{-1}(f(\alpha z + \beta)) = \varphi^{-1}((\alpha z + \beta)^2 + a(\alpha z + \beta) + b) \\ &= \frac{(\alpha z + \beta)^2 + a(\alpha z + \beta) + b - \beta}{\alpha} = \alpha z^2 + (2\beta + a)z + \frac{\beta^2 - \beta + ab + b}{\alpha}\end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2: \quad \alpha = 1 \\ x^1: \quad 2\beta + a = 0 \\ x^0: \quad \frac{\beta^2 - \beta + ab + b}{\alpha} = \lambda \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = -\frac{1}{2} \\ \lambda = \frac{3}{4} + ab + b \end{array} \right.$$

Por tanto,  $f(z) = z^2 + az + b$  y  $g(z) = z^2 + \lambda = z^2 + \frac{3}{4} + ab + b$  son topológicamente conjugadas a través de  $\varphi(x) = x - \frac{1}{2}$ . Lo más importante es que todos los comportamientos dinámicos asociados a  $g(x) = x^2 + \lambda$  son generalizables para cualquier polinomio cuadrático.

El operador de punto fijo del método de Newton asociado a polinomios cuadráticos  $q_\lambda(z) = z^2 + \lambda$  es:

$$N_\lambda(z) = z - \frac{f_\lambda(z)}{f'_\lambda(z)} = \frac{z^2 - \lambda}{2z}$$

Denotando la dependencia con el parámetro en el subíndice de  $N$ , siendo  $N_{-1}(z) = z^2 - 1$ ,  $N_i(z) = z^2 + i$  y así sucesivamente.

Los puntos fijos cumplen  $N_\lambda(z^*) = z^*$ , es decir:

$$\frac{z^2 - \lambda}{2z} = z \leftrightarrow z^2 + \lambda = 0 \leftrightarrow z^* = \pm i\sqrt{\lambda},$$

Coincidiendo con las raíces del polinomio  $q_\lambda(z)$ . El carácter dinámico de los puntos fijos viene determinado por el valor de  $N'_\lambda(z^*)$ :

$$N'_\lambda(z) = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2z^2} \rightarrow N'_\lambda(z^*) = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2\lambda} = 0$$

Por lo que los puntos fijos serán superatractores.

Bajo el valor  $N'_\lambda(z) = 0$  se pueden obtener los puntos críticos que son los puntos que cumplen la ecuación y no son puntos fijos, obteniendo:

$$N'_\lambda(z) = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2z^2} = \frac{z^2 + \lambda}{2z^2} = 0 \leftrightarrow z^2 + \lambda = 0.$$

Los puntos que anulan la derivada del operador son los puntos fijos, por lo que no cabe hablar de puntos críticos libres ni, por tanto, de plano de parámetros.

La figura 3 presenta los planos dinámicos del método de Newton sobre los polinomios cuadráticos para  $\lambda = \{1, i, -1, -i\}$ . En los cuatro casos se representan  $\mathcal{A}(z_1^*)$  en rojo y  $\mathcal{A}(z_2^*)$  en verde, siendo  $z_1^* = i\sqrt{\lambda}$  y  $z_2^* = -i\sqrt{\lambda}$ .

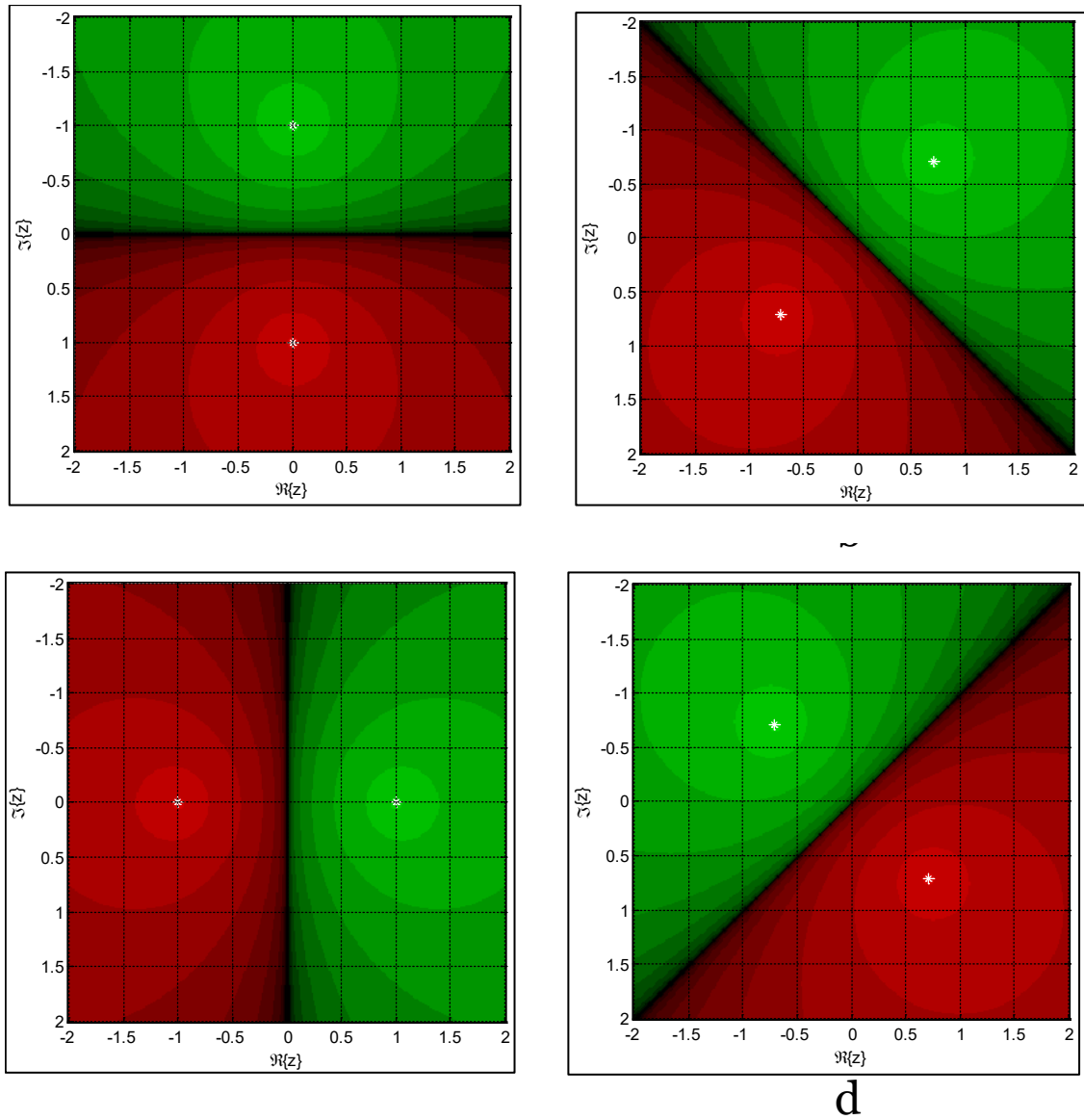


Figura 3. Planos dinámicos del método de Newton asociado a polinomios cuadráticos: (a)  $N_1(z)$ , (b)  $N_i(z)$ , (c)  $N_{-1}(z)$ , (d)  $N_{-i}(z)$

En los cuatro casos de la figura 3 se pueden observar en las dos cuencas de atracción cómo para semillas cercanas a los puntos fijos, la órbita los alcanza con mayor velocidad.

Asimismo, se puede observar una frontera formada por las semillas que equidistan de los dos puntos fijos que conforman los puntos que más tardan en converger a los puntos atractores.

### Método de Newton sobre polinomios cúbicos

Se puede demostrar que  $p(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$  es topológicamente conjugado a  $q(z) = z(z-1)(z-\lambda) := q_\lambda(z)$ , de forma que el estudio de  $q_\lambda(z)$  se puede generalizar a cualquier función cuadrática.

El operador de punto fijo de Newton asociado a los polinomios cúbicos es:

$$N_\lambda(z) = z - \frac{q_\lambda(z)}{q'_\lambda(z)} = \frac{2z^3 - (\lambda+1)z^2}{3z^2 - 2(\lambda+1)z + \lambda}.$$

Los puntos fijos son:

$$N_\lambda(z) = z \leftrightarrow \frac{z(z-1)(z-\lambda)}{3z^2 - 2(\lambda+1)z + \lambda} = z \leftrightarrow z^* = \{z_1^*, z_2^*, z_3^*\} = \{0, 1, \lambda\},$$

Como era de esperar, coinciden con las raíces del polinomio  $q_\lambda(z)$ . La característica dinámica de estos puntos es:

$$N'_\lambda(z) = \frac{q_\lambda(z)q''_\lambda(z)}{[q'_\lambda(z)]^2} = \frac{2z^2(z-1)(z-\lambda)(3z-\lambda-1)}{(3z^2 - 2z(\lambda+1) + \lambda)^2} \rightarrow \begin{cases} N'_\lambda(z_1^*) = 0 \\ N'_\lambda(z_2^*) = 0 \\ N'_\lambda(z_3^*) = 0 \end{cases}$$

Los puntos críticos libres quedan determinados por  $N'_\lambda(z) = 0$  que no sean puntos fijos.

Para ello:

$$N'_\lambda(z) = 0 \leftrightarrow \frac{q_\lambda(z)q''_\lambda(z)}{[q'_\lambda(z)]^2} = 0 \leftrightarrow q''_\lambda(z) = 0 \leftrightarrow 3z - \lambda - 1 = 0 \leftrightarrow z^c = \frac{\lambda+1}{3}.$$

Con este resultado podemos generar el plano de parámetros, de forma que podemos ver dónde van las órbitas que no son atraídas por ninguno de los tres puntos fijos. La figura 4 representa el plano de parámetros:

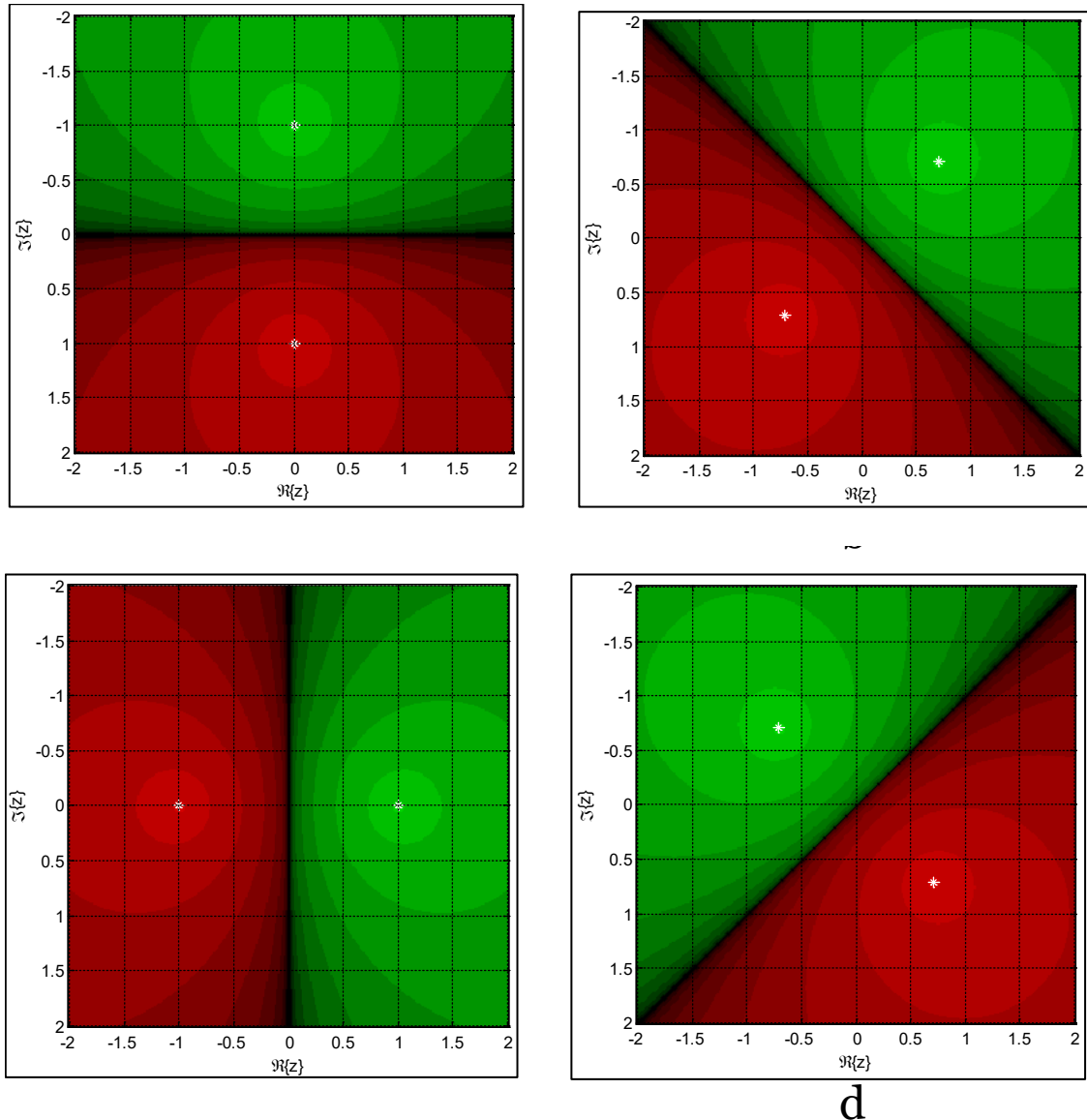


Figura 4. Plano de parámetros de  $N_\lambda(z)$  para polinomios cúbicos en (a)  $\lambda \in [-1,2] + i[0,4]$  y en (b) una ampliación para  $\lambda \in [0.4,0.6] + i[2.15,2.35]$

Podemos averiguar varias zonas en este plano de parámetros, cada una con su particular interpretación. Cuando el parámetro  $\lambda$  está en la zona naranja el punto crítico del sistema estará inmerso en la cuenca de atracción de  $z_1^*$ .

Para valores de  $\lambda$  de la zona verde,  $z^C \in \mathcal{A}(z_2^*)$ , mientras que para valores de  $\lambda$  en la región azul, la órbita del punto crítico acabará en  $z_3^*$ . La región en negro representa aquellas órbitas que han quedado atrapadas en un ciclo atractor.

Para cada una de las regiones obtendremos el plano dinámico asociado. La figura 5 representa los planos dinámicos para los casos  $\lambda = \{0.5, 2i, 1 + 2i, 0.5 + 2.25i\}$  correspondientes con las zonas azul, naranja, verde y negra, respectivamente. Con un cuadrado blanco se representa el punto crítico.

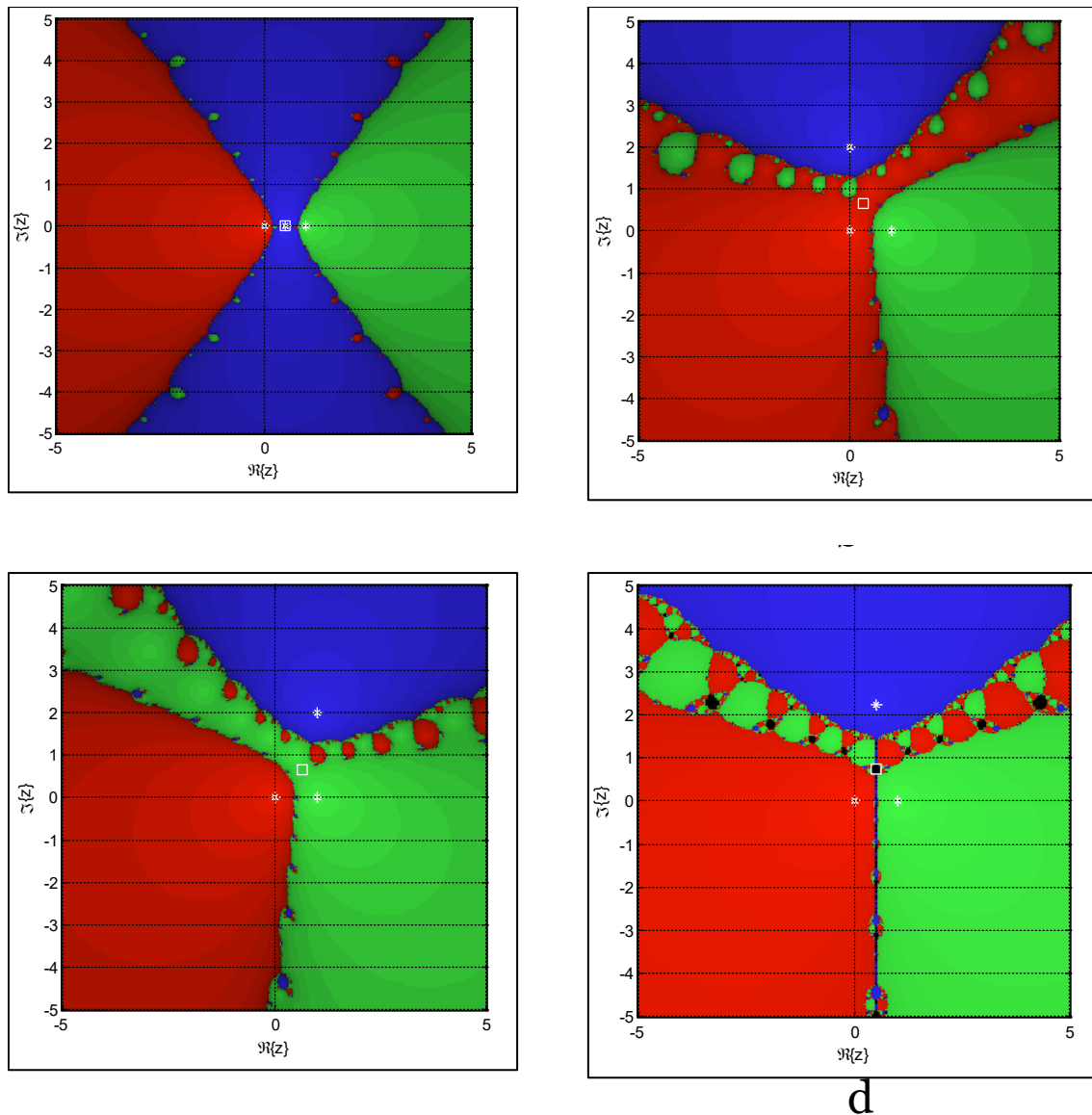


Figura 5. Planos dinámicos de (a)  $N_{0.5}(z)$ , (b)  $N_{2i}(z)$ , (c)  $N_{1+2i}(z)$ , (d)  $N_{0.5+2.25i}(z)$  para polinomios cúbicos.

Como se puede observar en la figura 5, en los casos (a), (b) y (c) aparecen tres cuencas de atracción. A diferencia de lo que ocurriría con los polinomios de grado dos, en este caso aparecen partes de la cuenca de atracción de una raíz inmersas dentro de otras cuencas de atracción. Respecto de la figura 5 (d) se observa cómo también aparecen las zonas negras, constituidas por las semillas que caen en órbitas periódicas.

## 9.5. Métodos basados en Newton

En esta última sección del capítulo veremos algunos resultados correspondientes a métodos basados en el método de Newton.

Ambos métodos tienen la forma:

$$O_{\lambda}(z) = z - k \frac{f(z)}{f'(z)},$$

Siendo  $k$  una función que depende de  $f(z)$  y sus derivadas. Las ventajas de estos métodos es que ambos tienen convergencia cúbica. Sin embargo, si bien Newton tiene como inconveniente la evaluación de la derivada primera, estos métodos van a incluir también la evaluación de la derivada segunda, con lo que computacionalmente se va a sobrecargar el sistema de cálculo.

### Método de Halley

El operador de punto fijo del método de Halley es:

$$H_{\lambda}(z) = z - \frac{2f(z)f'(z)}{2[f'(z)]^2 - f(z)f''(z)},$$

Cuyos puntos fijos coinciden con las raíces de  $f(z)$  y de  $f'(z)$ . Al aplicarlo sobre un polinomio cuadrático de tipo  $f(z) = z^2 + \lambda$ , la expresión queda como:

$$H_{\lambda}(z) = \frac{z(z^2 - 3\lambda)}{3z^2 - \lambda},$$

Cuyos puntos fijos se obtienen de  $H_{\lambda}(z) = z$ , siendo  $z^* = \{z_1^*, z_2^*, z_3^*\} = \{-i\sqrt{\lambda}, 0, i\sqrt{\lambda}\}$ .



La característica dinámica de estos puntos fijos será:

$$H'_\lambda(z) = \frac{3(z^2 + \lambda)^2}{(-3z^2 + \lambda)^2} \rightarrow \begin{cases} H'_\lambda(z_1^*) = 0 \\ H'_\lambda(z_2^*) = 3 \\ H'_\lambda(z_3^*) = 0 \end{cases}$$

Los puntos críticos libres del sistema quedan determinados por los valores de  $z$  que cumplen  $H'_\lambda(z) = 0$  sin coincidir con los puntos fijos. En este caso, estos valores coinciden con los puntos fijos, por lo que no hablaremos de plano de parámetros.

A partir de este estudio inicial vamos a ver en la figura 6 el plano dinámico del método de Halley para polinomios cuadráticos:

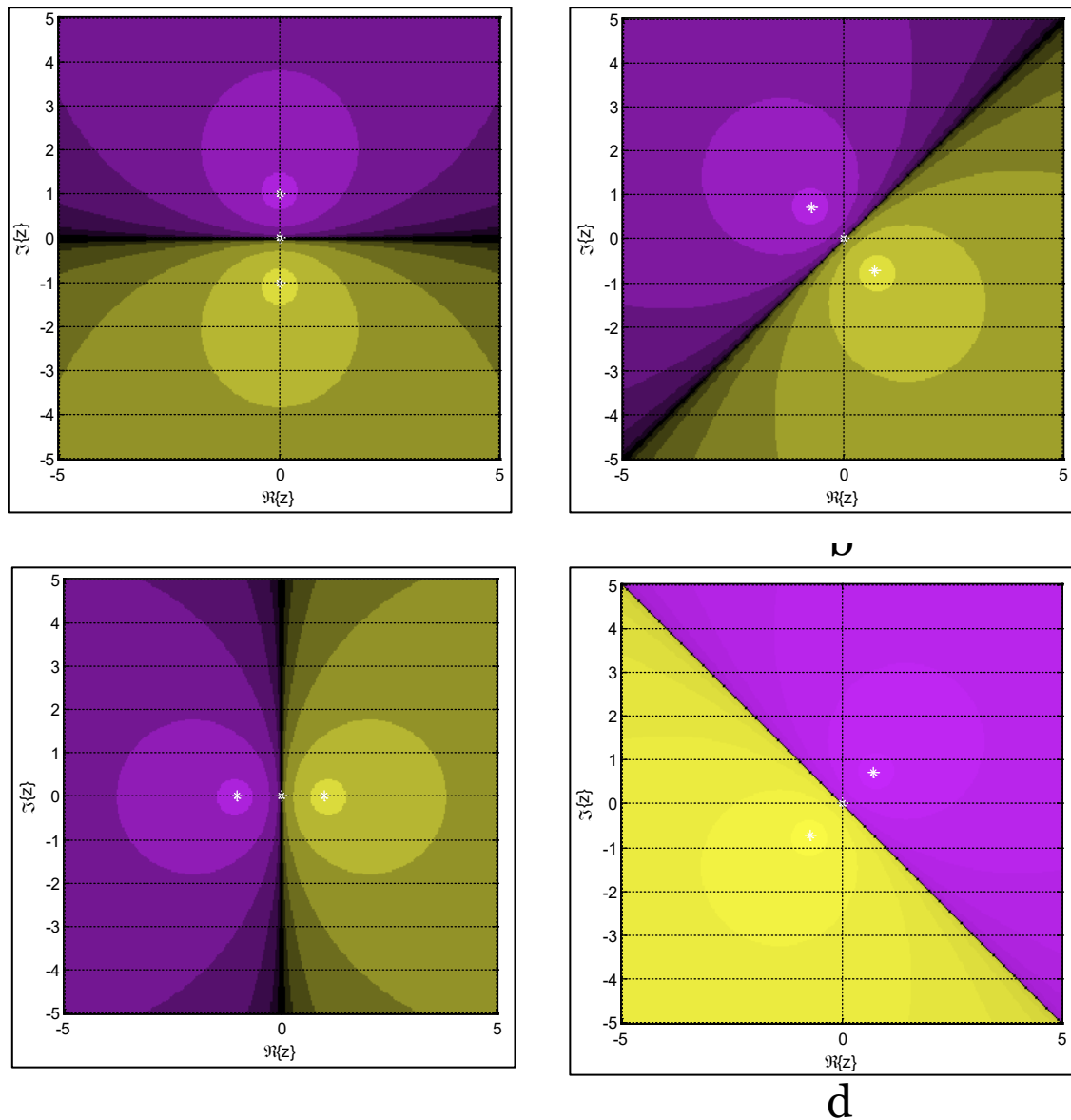


Figura 6. Planos dinámicos del método de Halley (a)  $H_1(z)$ , (b)  $H_i(z)$ , (c)  $H_{-1}(z)$ , (d)  $H_{-i}(z)$  para polinomios cuadráticos

Podemos observar en la figura 6 que los planos dinámicos son similares a los de la figura 3, que se corresponden con los planos del método de Newton para polinomios de grado dos.

### Método de Chebyshev

De manera análoga al caso anterior, procederemos con el método de Chebyshev. El operador de punto fijo del método de Chebyshev es:

$$C_{\lambda}(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} \left\{ 1 + \frac{f(z)f''(z)}{2[f'(z)]^2} \right\},$$

Cuyos puntos fijos coinciden con las raíces de  $f(z)$  y de  $f'(z)$ . Al aplicarlo sobre un polinomio cuadrático de tipo  $f(z) = z^2 + \lambda$ , el operador de punto fijo queda como:

$$C_{\lambda}(z) = \frac{3z^4 - 6\lambda z^2 - \lambda^2}{8z^3},$$

Siendo sus puntos fijos  $z^* = \{z_1^*, z_2^*, z_3^*\} = \left\{ -i\sqrt{\lambda}, i\sqrt{\lambda}, -i\sqrt{\frac{\lambda}{5}}, i\sqrt{\frac{\lambda}{5}} \right\}$ .

La característica dinámica de estos puntos fijos será:

$$C'_{\lambda}(z) = \frac{3(z^2 + \lambda)^2}{8z^4} \rightarrow \begin{cases} H'_{\lambda}(z_1^*) = 0 \\ H'_{\lambda}(z_2^*) = 0 \\ H'_{\lambda}(z_3^*) = 6 \\ H'_{\lambda}(z_3^*) = 6 \end{cases}$$

En este caso no hay puntos críticos libres, por lo que hablar de plano de parámetros no resulta efectivo. La figura 7 representa los planos complejos más representativos de este método.

En la figura 7 se puede observar un efecto que todavía no había ocurrido para polinomios de grado dos y es la inmersión de partes de una cuenca de atracción sobre otra.

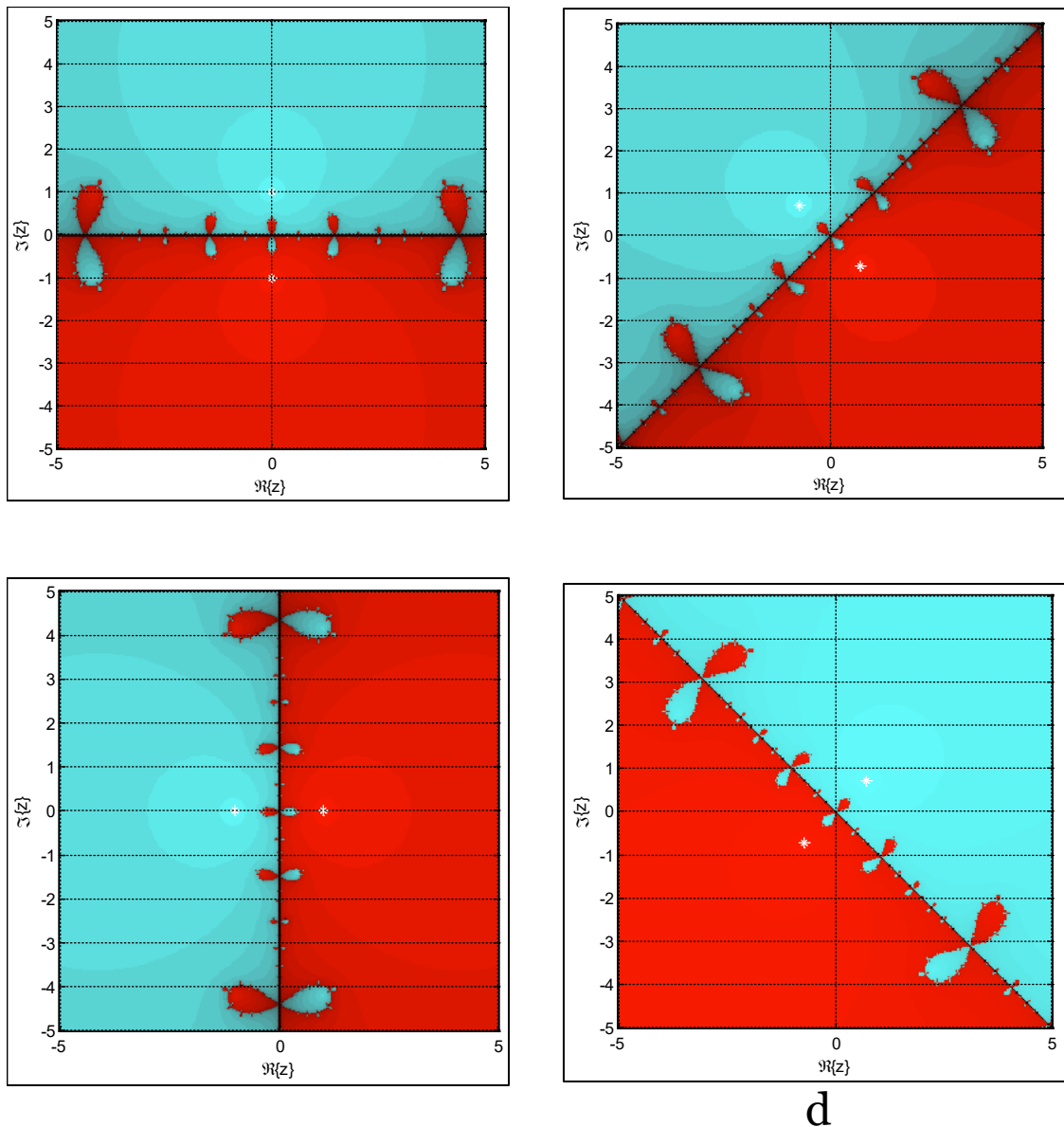


Figura 7. Planos dinámicos del método de Chebyshev (a)  $C_1(z)$  (b)  $C_i(z)$  (c)  $C_{-1}(z)$  (d)  $C_{-i}(z)$  para polinomios cuadráticos

## 9.6. Referencias bibliográficas

Chapra, S. C. y Canale, R. P. (2006). *Numerical methods for engineers*. MacGraw Hill.

Chicharro, F. I., Cordero, A., Gutiérrez, J. M. y Torregrosa, J. R. (2013). *Complex dynamics of derivative-free methods for nonlinear equations*. Elsevier.

Fagella, N. y Jarque, X. (2007). *Iteración compleja y fractales: matemáticas y estadística*. Instituto de Ciencias de la Educación.

Gutiérrez, J. M. y Plaza, S. (2013). *Dinámica del método de Newton*. Servicio de publicaciones de la Universidad de La Rioja.

Kung, H. T. y Traub, J. F. (1974). *Optimal order of one-point and multi-point iteration*. Elsevier.

Ostrowski, A. M. (1966). *Solutions of equations and systems of equations*. Academic Press.

## Lo + recomendado

---

### Lecciones magistrales

#### **Entrevista sobre la dinámica de una variante del método de Newton**

En la lección magistral de este tema entrevistaremos a un investigador que ha dedicado muchas horas de trabajo al estudio de la dinámica de una variante del método de Newton, conocido como el método de Newton amortiguado. La entrevista al Dr. Magreñán nos desvelará alguna de las particularidades del método, parte fundamental de su Tesis en Matemáticas.



Accede al vídeo desde el aula virtual

No dejes de leer...

### **Preliminares de dinámica compleja**

Este documento ofrece una extensa introducción a los conceptos asociados a la dinámica compleja, con especial hincapié en aquellos en los que intervienen los métodos iterativos.

#### **Estudio de la dinámica del método de Newton amortiguado**

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

<https://dialnet.unirioja.es/descarga/tesis/38821.pdf>

### ***A new tool to study real dynamics: The convergence plane***

Magreñán, Á. A. (2014). A new tool to study real dynamics: The convergence plane. *Applied Mathematics and Computation*, 248, 215-224.

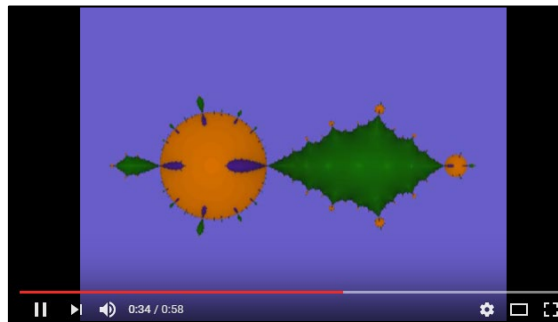
En este artículo, el autor presenta el plano de convergencia, una herramienta gráfica que permite estudiar, de manera fácil y compacta, la dinámica real de los métodos iterativos cuyas iteraciones dependen de un parámetro. Esta herramienta proporciona, para cada punto inicial, información equivalente a herramientas previas como los diagramas de Feigenbaum y los exponentes de Lyapunov. Para mostrar la empleabilidad de la herramienta, se presenta en este trabajo un ejemplo de la dinámica del método de Newton amortiguado aplicado a un polinomio cúbico.

Accede al artículo a través de la Biblioteca Virtual de UNIR

No dejes de ver...

***Cheby-Halley family, parameter from -1 to 6***

Existe un método iterativo llamado Cheby-Halley, que incluye un parámetro  $\alpha$ . Para  $\alpha = 0$  estamos ante el método de Chebyshev, mientras que para  $\alpha = \frac{1}{2}$  nos encontramos ante el método de Halley. Una forma de ver el comportamiento de un método en función de la variación de su parámetro es observar cómo cambian los planos dinámicos con esa variación, para lo que se recurre a los vídeos. En el enlace se puede observar cómo varía el método de Cheby-Halley conforme el valor de  $\alpha$  recorre la recta real desde -1 hasta 6.



Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

<https://www.youtube.com/watch?v=FTwTEOz8DTg>



No dejes de practicar...

### Ejercicios recomendados

A continuación, encontrarás una serie de ejercicios para practicar los conceptos estudiados en el tema.

**Ejercicio 1** | Sean  $N_p(z)$  el operador de punto fijo asociado al método de Newton aplicado sobre un polinomio. Sean  $g(z) = (z - a)(z - b)$  y  $\varphi(z) = \frac{z-a}{z-b}$ . Demuestra que  $N_g(z)$  y la función  $z^2$  son topológicamente conjugadas por  $\varphi(z)$ .

**Ejercicio 2** | El método de SuperHalley tiene como operador de punto fijo:

$$SH(z) = z - \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{f(z)f''(z)}{[f'(z)]^2 - f(z)f''(z)} \right\} \frac{f(z)}{f'(z)}.$$

Obtén sus puntos fijos y su dinámica cuando se le aplica un polinomio de grado dos del tipo  $p(z) = z^2 + \lambda$ .

**Ejercicio 3** | Sea  $SH(z)$  el operador de punto fijo del método de SuperHalley, definido en el ejercicio anterior. Obtén el operador de punto fijo topológicamente conjugado a  $SH(z)$  para polinomios de grado dos del tipo  $p(z) = z^2 + \lambda$ , siendo  $\varphi(z) = \frac{z-i\sqrt{\lambda}}{z+i\sqrt{\lambda}}$ . Sobre este operador, obtén los puntos fijos, su característica dinámica y los puntos críticos libres.

Accede a las soluciones a través del aula virtual.

## + Información

A fondo

### El truco matemático del siglo XIX que puede optimizar las simulaciones

En el documento se recoge la noticia de cómo unos estudiantes de postgrado han conseguido darle vida a un método iterativo histórico mejorando su velocidad de convergencia con la modificación de un par de líneas de código.



Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

<https://www.fayerwayer.com/2014/07/el-truco-matematico-del-siglo-xix-que-puede-optimizar-las-simulaciones>

## Matemáticos predicen que el ganador de la Eurocopa será...

Un estudio de la Universidad de Economía de Innsbruck determinó que el ganador de la Eurocopa de fútbol del año 2016 sería España. Para ello se utilizó un método iterativo de los que hemos visto a lo largo del tema. Al parecer, o no tomaron unas buenas condiciones iniciales o no fueron capaces de evaluar que en octavos de final el rival sería Italia.



Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

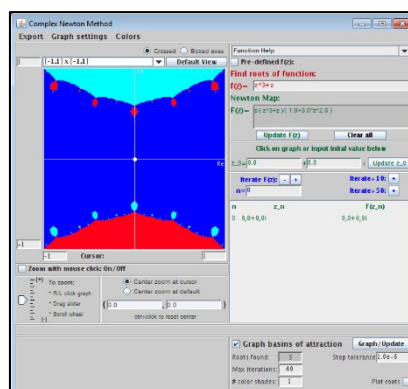
<http://www.elmundo.es/deportes/2016/06/02/574ff63a268e3e65508b461f.html>

## Recursos externos

### ***Complex Newton Method***

Aquí podrás visualizar los planos dinámicos del método de Newton aplicado sobre un polinomio por definir. Permite determinar una serie de parámetros, como el rango de valores de  $z$  que se representan, la inclusión de las raíces en la representación, o la visualización de las cuencas de atracción (parte inferior derecha de la ventana). A pesar de que los planos dinámicos presentados en el tema no han sido desarrollados con esta herramienta, resulta de enorme utilidad para visualizar el comportamiento del método de Newton para diferentes polinomios.

Para obtener este *applet* accede a la página que se indica y descarga el archivo.



Accede a la página desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

<http://www.jimrolf.com/java/complexNewtTool/complexNewtTool.html>

## Test

---

1. Indica cuáles de las siguientes expresiones se corresponden con un sistema dinámico discreto basado en métodos iterativos:

A.  $x_{k+1} = x_k - \frac{f^2(x_k)}{f(x_k) - f'(x_k)}.$

B.  $x_{k+1} = (\lambda x_k + i)(\lambda x_k - i), x \in \mathbb{C}.$

C.  $z_{k+1} = z_k^2 + \lambda, \lambda \in \mathbb{C}.$

D.  $z_{k+1} = z_k - f(z_k + z_{k-1}).$

2. Los puntos críticos libres de un método:

A. Coinciden con los puntos fijos superatractores.

B. Son los puntos críticos que no coinciden con los puntos fijos.

C. Cumplen que la derivada del operador de punto fijo en dicho punto se anula.

D. Pueden no existir para un método determinado.

3. Sean  $f$  y  $g$  dos operadores topológicamente conjugados a partir de  $\varphi$ . Entonces se cumple que:

A.  $\varphi \circ f = \varphi \circ g.$

B.  $\varphi^2 \circ f^2 \varphi^{-2} = g^2.$

C. A partir de  $\varphi^{-1}$ ,  $f$  y  $g$  también son topológicamente conjugados.

D.  $\mathcal{A}(\varphi(x^P)) = \varphi(\mathcal{A}(x^P)).$

4. Sean  $n, h$  y  $c$  los órdenes de convergencia de los métodos de Newton, Halley y Chebyshev, respectivamente. Relacionado con estos órdenes, cumple:

A.  $1 < n < 2.$

B.  $1 < n < h.$

C.  $n < h < c.$

D.  $1 < n < c.$

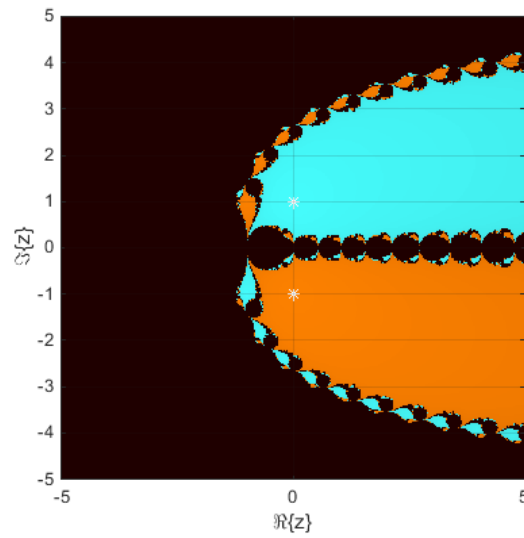
5. A lo largo del tema se han descrito algunas ventajas e inconvenientes de los métodos de Newton, Halley y Chebyshev. Determina cuáles de las siguientes cualidades son ciertas:

- A. A nivel computacional, Newton se comporta mejor que Halley debido a que en Newton solo se calcula la primera derivada, mientras que en Halley también hay que calcular la segunda derivada.
- B. A nivel de orden de convergencia, los métodos de Halley y Chebyshev tienen las mismas características.
- C. A nivel computacional, el uso del método de Newton mejora las prestaciones que ofrecen los métodos libres de derivadas.
- D. Ninguna de las anteriores es correcta.

6. En relación con los planos de parámetros:

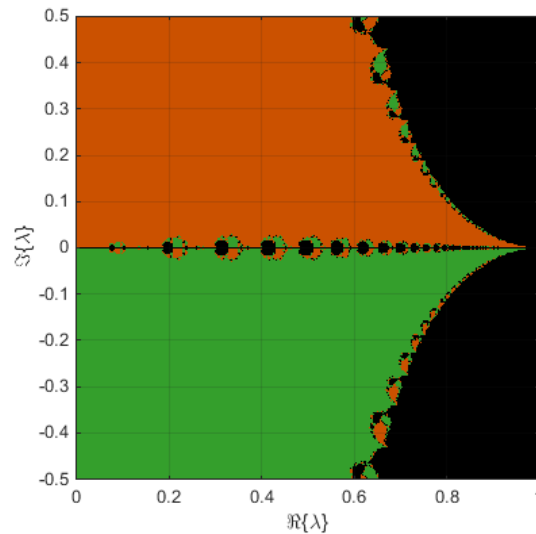
- A. Se puede dibujar siempre que existan puntos críticos.
- B. Las regiones determinan el rango de valores para el que el punto crítico libre pertenece a la cuenca de atracción de uno de los puntos fijos.
- C. Para el método de Newton aplicado sobre polinomios cuadráticos no es posible su obtención.
- D. Ninguna de las anteriores es correcta.

7. Dado el siguiente plano dinámico, determina cuáles de las siguientes frases son correctas:



- A. El método tiene cuatro puntos fijos atractores.
- B. El valor del parámetro es  $\lambda = \pm i$ .
- C. La órbita de las semillas que se encuentran en la cuenca de atracción naranja tiende al punto  $-i$ .
- D. Ninguna de las anteriores es correcta.

**8.** Dado el siguiente plano de parámetros, determina cuáles de las siguientes frases son correctas:



- A. El plano de parámetros se ha obtenido porque el método tiene algún punto críticos libre.
- B. Para  $\lambda = 0.4 - 0.2i$ , la órbita tiende a un punto fijo atractor.
- C. Para  $\lambda_1 = 0.4 - 0.2i$  y  $\lambda_2 = 0.4 + 0.2i$ , la órbita tiende al mismo punto.
- D. Ninguna de las anteriores es correcta.

**9.** Respecto de los planos dinámicos del método de Newton asociado a polinomios de grado dos:

- A. Las semillas tienden al punto fijo atractor que más cerca tienen.
- B. Existen dos puntos fijos atractores que dependen del valor de parámetro  $\lambda$  que se tome.
- C. Tiene cuencas de atracción inmersas en otra cuenca de atracción.
- D. Ninguna de las anteriores es correcta.

**10.** Respecto de los planos dinámicos del método de Newton asociado a polinomios de grado tres:

- A. Las semillas tienden al punto fijo atractor que más cerca tienen.
- B. Existen dos puntos fijos atractores que dependen del valor del parámetro  $\lambda$  que se tome.
- C. Tiene cuencas de atracción inmersas en otra cuenca de atracción.
- D. Ninguna de las anteriores es correcta.