Tema 8
Sistemas complejos
Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos

Dra. Neus Garrido Sàez

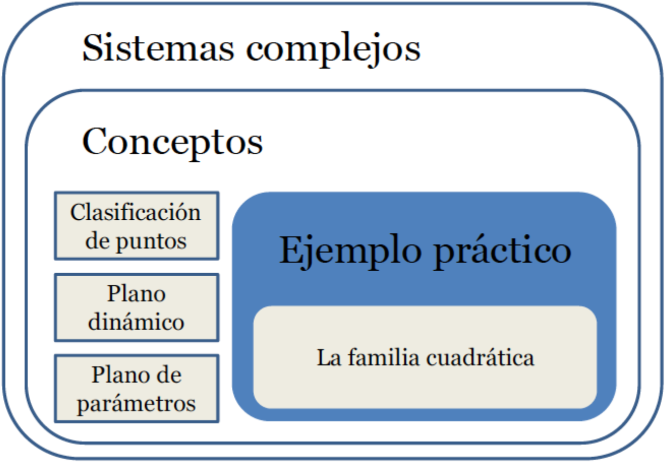
Máster en Ingeniería Matemática y Computación
Escuela Superior en Ingeniería y Tecnología

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

Contenido

1

Introducción


Sistemas complejos
Conceptos
Clasificación de puntos
Plano dinámico
Plano de parámetros
Ejemplo práctico
La familia cuadrática

Sistemas dinámicos discretos complejos

- La variable es compleja
- Se representan por $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

Introducción

Sistemas dinámicos discretos complejos

- La variable es compleja
- Se representan por $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

Implicaciones

- Las soluciones tienen parte real y parte imaginaria
- Los resultados se representan sobre planos en lugar de sobre rectas
- Nuevas herramientas gráficas

Sistemas dinámicos discretos complejos

- La variable es compleja
- Se representan por $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

Implicaciones

- Las soluciones tienen parte real y parte imaginaria
- Los resultados se representan sobre planos en lugar de sobre rectas
- Nuevas herramientas gráficas

$\Downarrow$

Mayor riqueza dinámica

$$R : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{función racional}$$

- Órbita de $z_0 \in \mathbb{C}$: $\mathcal{O}(z_0) = \{z_0, R(z_0), R^2(z_0), \ldots, R^n(z_0), \ldots\}$
- Punto fijo: $z^* \in \mathbb{C}$ es un punto fijo si $R(z^*) = z^*$
    - Atractor: si $|R'(z^*)| < 1$
    - Repulsor: si $|R'(z^*)| > 1$
    - Neutro: si $|R'(z^*)| = 1$
    - **Superatractor:** si $|R'(z^*)| = 0$

  $|R'(z^*)| \Rightarrow$ multiplicador del punto fijo z^*
- Punto k-periódico: $z^P \in \mathbb{C}$ es un punto k-periódico si $R^k(z^P) = z^P$ pero $R^n(z^P) \neq z^P$ para $n < k$.

$$R : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{función racional}$$

- Órbita de $z_0 \in \mathbb{C}$: $\mathcal{O}(z_0) = \{z_0, R(z_0), R^2(z_0), \ldots, R^n(z_0), \ldots\}$
- Punto fijo: $z^* \in \mathbb{C}$ es un punto fijo si $R(z^*) = z^*$
  - Atractor: si $|R'(z^*)| < 1$
  - Repulsor: si $|R'(z^*)| > 1$
  - Neutro: si $|R'(z^*)| = 1$
  - **Superatractor:** si $|R'(z^*)| = 0$

  $|R'(z^*)| \Rightarrow$ multiplicador del punto fijo z^*
- Punto k-periódico: $z^P \in \mathbb{C}$ es un punto k-periódico si $R^k(z^P) = z^P$ pero $R^n(z^P) \neq z^P$ para $n < k$.
- Punto crítico: $z^C \in \mathbb{C}$ es un punto crítico si $|R'(z^C)| = 0$ y no coincide con ningún punto fijo superatractor.

$$R : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{función racional}$$

- Órbita de $z_0 \in \mathbb{C}$: $\mathcal{O}(z_0) = \{z_0, R(z_0), R^2(z_0), \ldots, R^n(z_0), \ldots\}$
- Punto fijo: $z^* \in \mathbb{C}$ es un punto fijo si $R(z^*) = z^*$
  - Atractor: si $|R'(z^*)| < 1$
  - Repulsor: si $|R'(z^*)| > 1$
  - Neutro: si $|R'(z^*)| = 1$
  - **Superatractor:** si $|R'(z^*)| = 0$

  $|R'(z^*)| \Rightarrow$ multiplicador del punto fijo z^*
- Punto k-periódico: $z^P \in \mathbb{C}$ es un punto k-periódico si $R^k(z^P) = z^P$ pero $R^n(z^P) \neq z^P$ para $n < k$.
- Punto crítico: $z^C \in \mathbb{C}$ es un punto crítico si $|R'(z^C)| = 0$ y no coincide con ningún punto fijo superatractor.

Cuenca de atracción

La cuenca de atracción de un punto fijo z^*, $\mathcal{A}(z^*)$, es el conjunto de semillas z_0 cuya órbita tiende a z^*:

$$\mathcal{A}(z^*) = \{z_0 \in \mathbb{C} : R^n(z_0) \longrightarrow z^*, n \to +\infty\}.$$

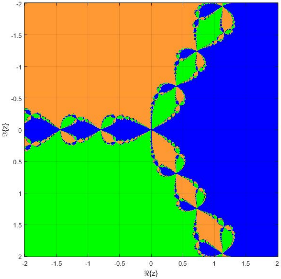
Introducción - Conceptos básicos

Conjunto de Fatou

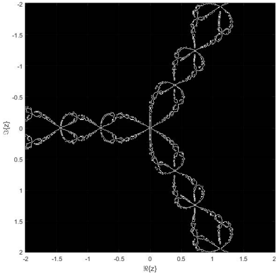
El conjunto de Fatou, $\mathcal{F}(R)$, es el conjunto de semillas cuya órbita tiende a un punto fijo.

Conjunto de Julia

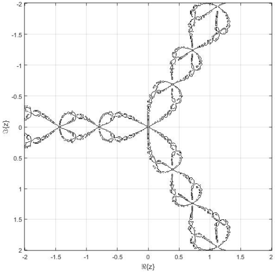
El conjunto de Julia, $\mathcal{J}(R)$, es el conjunto de semillas que son repelidas. Establece las fronteras entre las cuencas de atracción.



(a) Cuencas de atracción



(b) $\mathcal{F}(R)$



(c) $\mathcal{J}(R)$

2

Representaciones gráficas de dinámica compleja

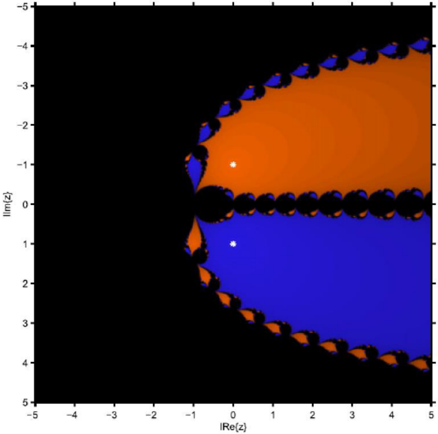
Contenidos

El plano dinámico

- Representa el final de la órbita de cada una de las posibles semillas
- Permite detectar a simple vista los puntos fijos, su dinámica, las cuencas de atracción y establecer los conjuntos de Fatou y de Julia

El plano dinámico

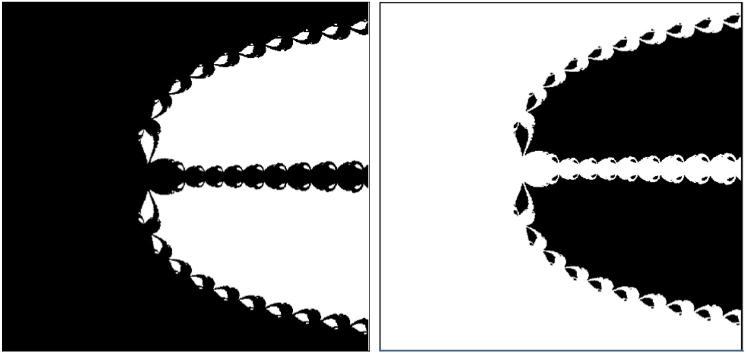
- Representa el final de la órbita de cada una de las posibles semillas
- Permite detectar a simple vista los puntos fijos, su dinámica, las cuencas de atracción y establecer los conjuntos de Fatou y de Julia



- $z_0 \in [-5, 5] + i[-5, 5]$
- Eje de abscisas: $Re(z_0)$
- Eje de ordenadas: $Im(z_0)$
- Puntos fijos:
  - $z_1^* = -i \Rightarrow$ Naranja
  - $z_2^* = i \Rightarrow$ Azul
- Divergencia $(\infty) \Rightarrow$ **Negro**

El plano dinámico

- Representa el final de la órbita de cada una de las posibles semillas
- Permite detectar a simple vista los puntos fijos, su dinámica, las cuencas de atracción y establecer los conjuntos de Fatou y de Julia



(d) $\mathcal{F}(R)$ (e) $\mathcal{J}(R)$

Figura: En blanco: (a) Conjunto de Fatou; (b) Conjunto de Julia

Contenidos

El plano de parámetros

Familias de funciones

- Conjunto de funciones sujetos a parámetros
- Los valores de los parámetros determinan distintos comportamientos dinámicos

Dinámica real	**Dinámica compleja**
$\Downarrow$	$\Downarrow$
Diagramas de bifurcación	Planos de parámetros

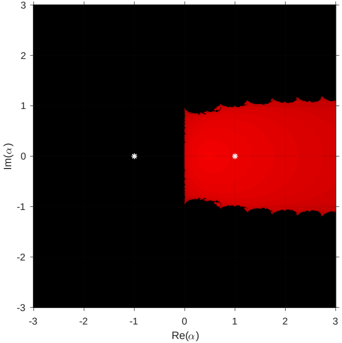
El plano de parámetros

Familias de funciones

- Conjunto de funciones sujetos a parámetros
- Los valores de los parámetros determinan distintos comportamientos dinámicos

Dinámica real → Diagramas de bifurcación

Dinámica compleja → Planos de parámetros



- α parámetro
- Eje de abscisas: $Re(\alpha)$
- Eje de ordenadas: $Im(\alpha)$
- Representa la órbita de z^C
- Puntos fijos atractores: z_1^*, z_2^*
- Convergencia a z_1^*, z_2^* $\Rightarrow$ Rojo
- Divergencia (∞) $\Rightarrow$ **Negro**

3

La familia cuadrática

La familia cuadrática: $f_c(z) = z^2 + c$

- Consideremos $c = 0$:

$$f_0(z) = z^2$$

- Cuando $n \to +\infty$
  - $|z| < 1 \quad \Rightarrow \quad f_0^n(z) \longrightarrow 0$
  - $|z| = 1 \quad \Rightarrow \quad f_0^n(z) \longrightarrow 1$
  - $|z| > 1 \quad \Rightarrow \quad f_0^n(z) \longrightarrow \infty$

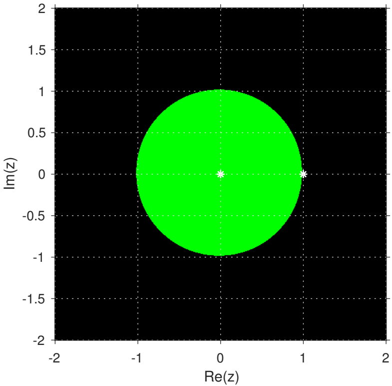
- Puntos fijos:

$$f_0(z) = z \Leftrightarrow z^2 - z = 0 \Leftrightarrow z^*_{1,2} = \{0, 1\}$$

- Dinámica de los puntos fijos:

$$|f_0'(z)| = 2|z|$$

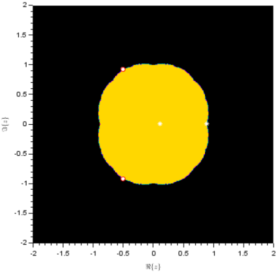
  - $f_0'(0) = 0 \Rightarrow z_1^* = 0$ **superatractor**
  - $f_0'(1) = 2 \Rightarrow z_2^* = 1$ **repulsor**



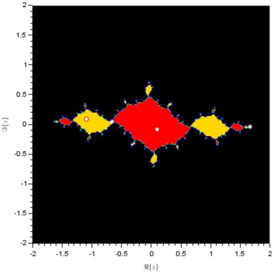
- Caso general: $f_c(z) = z^2 + c$
- Puntos fijos:

$$f_c(z) = z \Leftrightarrow z^2 - z + c = 0 \Leftrightarrow z^*_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - c}$$

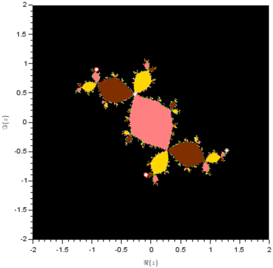
- Planos dinámicos:



(a) $c = 0.1$



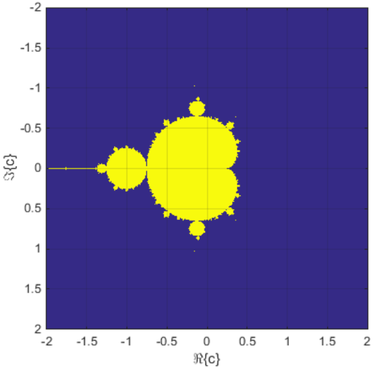
(b) $c = -1.1 + 0.1i$



(c) $c = 0.12 + 0.74i$

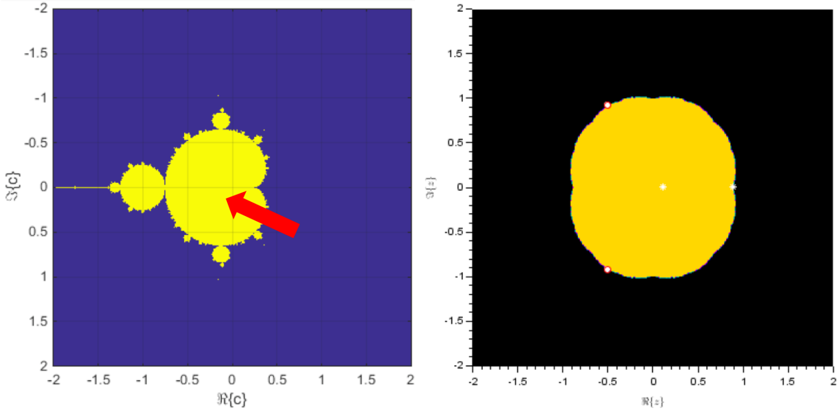
La familia cuadrática: $f_c(z) = z^2 + c$

- Puntos críticos:
$$|f_c'(z)| = 0 \Leftrightarrow 2|z| = 0 \Leftrightarrow z^C = 0$$
- Plano de parámetros $\Rightarrow$ Conjunto de Mandelbrot



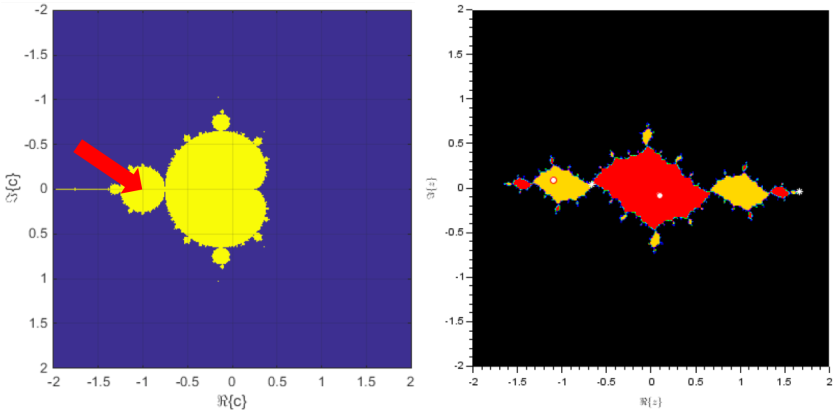
- Órbitas que han convergido $\Rightarrow$ Amarillo
- Órbitas que tienden a $\infty \Rightarrow$ Azul

La familia cuadrática: $f_c(z) = z^2 + c$

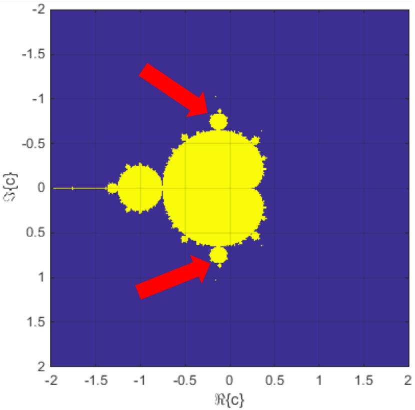


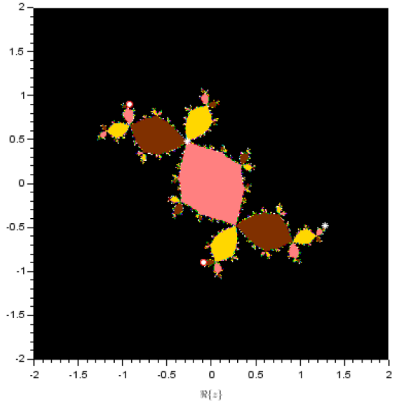
- Cardioide central: $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{2\pi i t} - \frac{1}{4}e^{4\pi i t}$, $t \in [0, 2\pi]$
- La órbita tiene periodo 1
- En el plano dinámico solo existe una componente conexa

La familia cuadrática: $f_c(z) = z^2 + c$



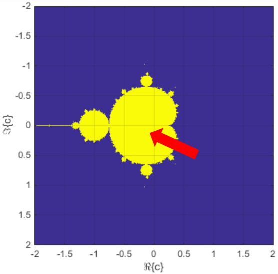
- $|c+1| < \frac{1}{4}$
- Las órbitas tienen periodo 2
- En el plano dinámico, en cada punto de conexión aparece una nueva región

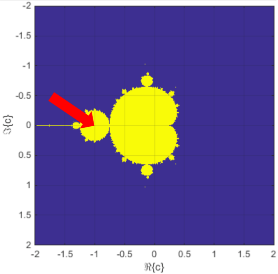


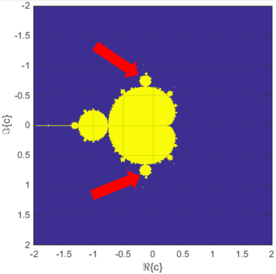


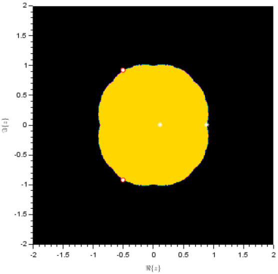
- "El conejo"
- Las órbitas tienen periodo 3
- En el plano dinámico, en los puntos de conexión entre componentes conexas siempre hay tres

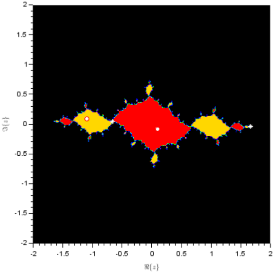
La familia cuadrática: $f_c(z) = z^2 + c$

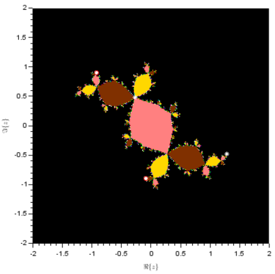












La familia cuadrática: $f_c(z) = z^2 + c$

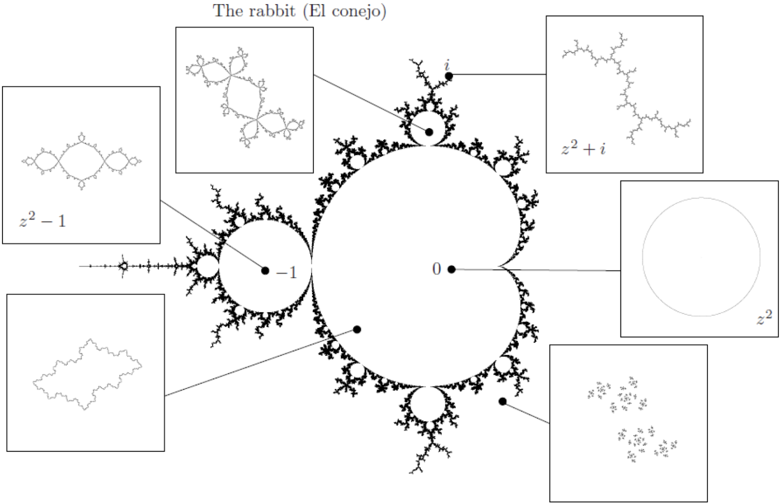


Figura: Planos dinámicos de $f_c(z) = z^2 + c$ asociados a diferentes valores de c

4

Actividad grupal: Sistemas dinámicos discretos complejos

Actividad grupal

Procedimiento

- Consulta a qué equipo de trabajo perteneces
  Creación y asignación de trabajos grupales: Equipos de trabajo definitivos

¿Qué tenenoms que entregar?

- Documento Word o PDF (LaTeX) con las soluciones:

  `APELLIDO1_APELLIDO2_NOMBRE_GRUPO.doc`

- Tabla de evaluación individual
- Fecha de entrega: 25/05/2021

Evaluación

- 3 puntos de la evalución continua
- $10\,\%$ presentación $+$ $90\,\%$ resolución 3 ejercicios
- Plagios, retrasos $\rightarrow$ 0
- Solo puntúan actividades con nota mayor o igual a 5 entregadas dentro de plazo

Actividad grupal

Indicaciones

- No se entregan capturas de pantalla
- No se puede realizar el trabajo individualmente.
- Todos los miembros de cada equipo entregan el mismo documento

IMPORTANTE

Aquellos **estudiantes que no comiencen su trabajo dentro de los 7 primeros días**, contados a partir del día de inicio de la actividad, **quedarán excluidos de la actividad**, no pudiendo tomar parte en ella. Se trata de una **actividad colaborativa**, por lo que unos estudiantes no pueden beneficiarse del trabajo que hayan realizado sus compañeros.

Ejercicio 1 (3 puntos)

Consideremos en $\mathbb{C}$ la siguiente familia de polinomios cuadrática

$$f_\gamma(z) = z^2 - 2\gamma + 1$$

donde $\gamma \in \mathbb{C}$.

(a) Calcula los puntos fijos del sistema dinámico.

(b) Determina la estabilidad de los puntos fijos dependiendo del valor de γ. Resuelve las desigualdades considerando únicamente la parte real del parámetro.

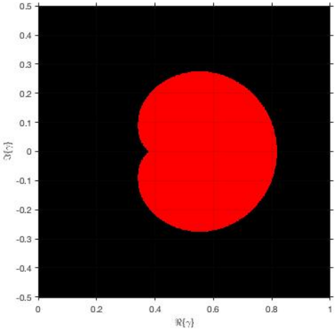
(c) Calcula los puntos críticos de $f_\gamma(z)$.

Ejercicio 2 (3 puntos)

La figura representa el plano de parámetros asociado a un punto crítico libre de la familia de polinomios $f_\gamma(z) = z^2 - 2\gamma + 1$.

(a) Describe en qué consiste un plano de parámetros, qué representa y cómo se genera.

(b) Describe las características que observas en el plano de la figura, y relaciónalo con el estudio de la estabilidad de los puntos fijos realizado en el ejercicio 1.



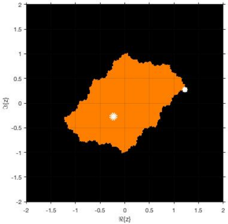
Actividad grupal

Ejercicio 3 (3 puntos)

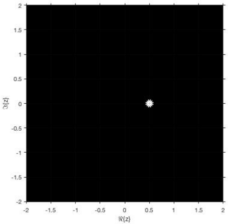
La familia de polinomios $f_\gamma(z) = z^2 - 2\gamma + 1$ tiene dos puntos fijos cuyas cuencas de atracción representamos en los planos dinámicos para valores concretos del parámetro. En las figuras se muestran tres planos dinámicos de la familia obtenidos para valores distintos de $\gamma \in \mathbb{C}$:

- Naranja y azul: cuencas de atracción de los dos puntos fijos
- Negro: divergencia

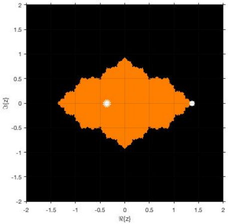
Utiliza el estudio dinámico realizado en el Ejercicio 1 y el plano de parámetros del Ejercicio 2 para determinar qué valor de $\gamma = \{3/4, 3/8, 0.6 + 0.2i\}$ se corresponde con cada gráfica. Justifica tu respuesta.



(a)



(b)



(c)

- Lección magistral: Conjunto de Mandelbrot ⇒ Aula Virtual
- Recursos externos: *Creating the Mandelbrot set with a vectorized Scilab algorithm*
  https://wiki.scilab.org/MandelbrotSet-NaiveVsVectorized

...Y por supuesto:

TEST DE APRENDIZAJE!!