Tema 14
Dinámica simbólica
Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos

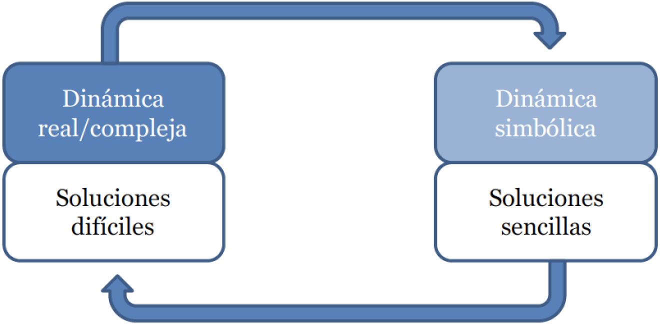
Dra. Neus Garrido Sàez

Máster en Ingeniería Matemática y Computación
Escuela Superior en Ingeniería y Tecnología

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

Contenido

Esquema



Dinámica real/compleja
Soluciones difíciles
Dinámica simbólica
Soluciones sencillas

1

Representación binaria de números decimales

Notación

- Números $\equiv$ Secuencias
- $s = (s_0 s_1 s_2 \ldots)$
- Sistema de numeración posicional

Ejemplo 1. Secuencia del número decimal 215.673

$$215.673 = 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}$$

$$s = (s_0 s_1 s_2 s_3 s_4 s_5) = (215673)$$

Secuencia en una base b

- Base: b
- Alfabeto: $s_j = \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$
- La secuencia $s = (s_0 s_1 s_2 \ldots)$ se puede interpretar como

$$x = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} s_j b^j$$

Contenidos

Base 2

- $b = 2$
- $s_j = \{0, 1\}$
- Para los números comprendidos entre 0 y 1:

$$s = (0.s_0 s_1 s_2 s_3 \ldots) \rightsquigarrow s = (s_0 s_1 s_2 s_3 \ldots)$$

Secuencia binaria s a número decimal x

$$x = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} s_j b^j$$

$$x = s_0 2^{-1} + s_1 2^{-2} + s_2 2^{-3} + \cdots = \frac{s_0}{2} + \frac{s_1}{2^2} + \frac{s_2}{2^3} + \cdots$$

Ejemplo 2.

- $s = (110101)$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{1}{2^6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = 0.828125$$

- $s = (\overline{100})$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^i = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Contenidos

Base decimal

- $b = 10$
- $s_j = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Número decimal x a secuencia binaria $s = (s_0 s_1 s_2 s_3 \ldots)$

1. Multiplicar por 2: $2x$
2. Tomar parte entera: $[2x]$
   2.1 $[2x] = 1 \Rightarrow s_j = 1$
   2.2 $[2x] = 0 \Rightarrow s_j = 0$
   2.3 $2x = 1 \Rightarrow s_j = 1$ **FIN**
3. Repetir el proceso con $y = 2x - [2x]$

Número decimal ⇒ Secuencia binaria

Ejemplo 3. Número decimal $x = 0.34375$ a secuencia binaria

Índice (j)	x	$2x$	s_j
0	0.34375	0.6875	0
1	0.6875	1.375	1
2	0.375	0.75	0
3	0.75	1.5	1
4	0.5	1	1

$\Rightarrow \quad s = (01011)$

2

Conceptos previos de dinámica simbólica

Contenidos

$$p_c(x) = x^2 + c$$

- Puntos fijos:
$$x_1^* = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4c}), \qquad x_2^* = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4c})$$
- Tomamos $c < -2$
- Trabajaremos en el intervalo $I = [-x_1^*, x_1^*]$

A partir de I se definen los conjuntos:

- $A = \{x \in I : p_c(x) \notin I\}$
- $\Lambda = \{x \in I : p_c^j(x) \in I, \forall j\} \subset I - A$
- $I - A = I_0 \cup I_1$, con I_0 y I_1 intervalos cerrados y acotados, situados simétricamente respecto del 0 (I_0 a la izquierda de I_1)

Definición

Sea $x \in \Lambda$. El itinerario de x, $S(x)$, es la secuencia infinita dada por

$$S(x) = (s_0 s_1 s_2 \ldots),$$

donde

$$s_j = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad p_c^j(x) \in I_0 \\ 1, & \text{si} \quad p_c^j(x) \in I_1 \end{cases}$$

Ejemplo 4.

- $\mathbf{x_1^*}$
  - $\mathcal{O}(x_1^*) = \{x_1^*, x_1^*, x_1^*, \ldots\}$
  - $S(x_1^*) = (111\ldots)$
- $-\mathbf{x_1^*}$
  - $\mathcal{O}(-x_1^*) = \{-x_1^*, x_1^*, x_1^*, x_1^*, \ldots\}$
  - $S(-x_1^*) = (0111\ldots)$
- $\mathbf{x_2^*}$
  - $\mathcal{O}(x_2^*) = \{x_2^*, x_2^*, x_2^*, \ldots\}$
  - $S(x_2^*) = (000\ldots)$

Contenidos

Espacio de secuencias

Definición

El espacio de secuencias de dos símbolos (0 y 1) es el conjunto:

$$\Sigma = \{(s_0 s_1 s_2 \ldots) : s_j = 0 \quad \text{o} \quad s_j = 1\}.$$

Distancia entre secuencias

La distancia entre las secuencias $s = (s_0 s_1 s_2 \ldots)$ y $t = (t_0 t_1 t_2 \ldots)$ de Σ es

$$d[s,t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

Ejemplo 5. Distancias entre $s = (0000\ldots)$, $t = (1111\ldots)$ y $u = (0101\ldots)$

$$d[s,t] = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$d[t,u] = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$d[s,u] = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots\right) = \frac{2}{3}$$

Métrica

Una función d es una métrica de un conjunto X si para cualquier $x, y, z \in X$ se verifican las propiedades:

- $d[x, y] \geq 0$
- $d[x, y] = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d[x, y] = d[y, x]$
- $d[x, z] \leq d[x, y] + d[y, z]$

La pareja (X, d) se denomina espacio métrico.

Teorema 1 (Teorema de proximidad)

Consideremos las secuencias $s, t \in \Sigma$. Entonces:

$$d[s, t] \leq \frac{1}{2^n} \quad \Leftrightarrow \quad s_i = t_i, \;\; i = 0, 1, \ldots, n.$$

3

Operador shift

Contenidos

Definición

Definición del operador *shift*

- $\sigma : [0,1] \longrightarrow [0,1]$

$$\sigma(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x-1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Ejemplo 6.

- $\sigma(0.125) = 0.25$
- $\sigma(0.25) = 0.5$

En notación binaria:

$$0.5 = (1), \quad 0.25 = (01), \quad 0.125 = (001)$$

- $\sigma(001) = (01)$
- $\sigma(01) = (1)$

Definición del operador *shift* para secuencias

- $\sigma : \Sigma \longrightarrow \Sigma$

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 s_3 \ldots) = (s_1 s_2 s_3 \ldots)$$

Contenidos

- Los únicos puntos fijos del operador *shift* son:
  - $(1111\ldots)$
  - $(0000\ldots)$
- Puntos de periodo 2:

$$(\overline{01}) \xrightarrow{\sigma} (\overline{10}) \xrightarrow{\sigma} (\overline{01})$$
$$(\overline{10}) \xrightarrow{\sigma} (\overline{01}) \xrightarrow{\sigma} (\overline{10})$$

- Puntos de periodo 3:

$$(\overline{001}) \xrightarrow{\sigma} (\overline{010}) \xrightarrow{\sigma} (\overline{100}) \xrightarrow{\sigma} (\overline{001})$$
$$(\overline{110}) \xrightarrow{\sigma} (\overline{101}) \xrightarrow{\sigma} (\overline{011}) \xrightarrow{\sigma} (\overline{110})$$

Contenidos

Función continua

Sea $F : X \longrightarrow X$ una función, donde X es un conjunto con una métrica d. Entonces F es una función continua en $x_0 \in X$ si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $d[x, x_0] < \delta$ entonces $d[F(x), F(x_0)] < \varepsilon$.
Decimos que F es una función continua si es continua para cualquier valor de $x_0 \in X$.

Teorema 2

La función $\sigma : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ es continua en todos los puntos de Σ.

Conjugación

- $p_c(x) = x^2 + c$
- Itinerario: $S : \Lambda \longrightarrow \Sigma$, $S(x) = (s_0 s_1 s_2 \ldots)$ con

$$s_j = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad p_c^j(x) \in I_0 \\ 1, & \text{si} \quad p_c^j(x) \in I_1 \end{cases}$$

- Operador *shift*: $\sigma : \Sigma \longrightarrow \Sigma$

¿Qué relación existe entre S, σ y $p_c(x)$?

Teorema 3

Si $x \in \Lambda$, entonces:

$$(S \circ p_c)(x) = (\sigma \circ S)(x).$$

Demostración.

Denotemos $I_{s_j} = \{s \in \Sigma : s = (s_j \ldots)\}$.
Si $x \in \Lambda$ tiene un itinerario $(s_0 s_1 s_2 \ldots)$, por definición de itinerario:

$$x \in I_{s_0}, \quad p_c(x) \in I_{s_1}, \quad p_c^2(x) \in I_{s_2}, \ldots$$

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "p_c"] \arrow[d, "S"'] & \Lambda \arrow[d, "S"] \\ \Sigma \arrow[r, "\sigma"] & \Sigma \end{tikzcd}$$

Entonces:

$$S(p_c(x)) = (s_1 s_2 s_3) \equiv \sigma(S(x))$$

□

De la misma forma, también se verifica:

- $(S \circ p_c^n)(x) = (\sigma^n \circ S)(x)$
- $(p_c \circ S^{-1})(x) = (S^{-1} \circ \sigma)(x)$
- $(p_c^n \circ S^{-1})(x) = (S^{-1} \circ \sigma^n)(x)$

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "p_c"'] \arrow[d, "S"'] & \Lambda \arrow[r, "p_c"'] \arrow[d, "S"] & {} & {} \arrow[r, "p_c"'] & \Lambda \arrow[d, "S"] \\
\Sigma \arrow[r, "\sigma"] & \Sigma \arrow[r, "\sigma"] & \cdots & {} \arrow[r, "\sigma"] & \Sigma
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "p_c"'] & \Lambda \arrow[r, "p_c"'] & {} & {} \arrow[r, "p_c"'] & \Lambda \\
\Sigma \arrow[r, "\sigma"] \arrow[u, "S^{-1}"] & \Sigma \arrow[r, "\sigma"] \arrow[u, "S^{-1}"'] & \cdots & {} \arrow[r, "\sigma"] & \Sigma \arrow[u, "S^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

Teorema 4 (Teorema de conjugación)

El operador shift sobre Σ está conjugado a $p_c(x)$ sobre Λ para $c < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4}$.

- Lección magistral: *Herradura de Smale* ⇒ Campus virtual

...Y por supuesto:

TEST DE APRENDIZAJE!!

unir
LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET