Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería

Problemas de valor inicial. Métodos multipaso

Índice

Esquema

Ecuación diferencial + Condición inicial

Problema de Valor Inicial

Ecuación diferencial de primer orden

$$y'(t) = f(t, y(t)),$$
$$t \in [a, b], y(a) = y_a$$

Sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) \\ y_2'(t) = f_2(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) \\ \vdots \\ y_m'(t) = f_m(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) \end{cases}$$
$$y_1(t_a) = y_{1a}, y_2(t_a) = y_{2a}, \dots, y_m(t_a) = y_{ma}$$

Ecuación diferencial de orden superior

$$y^{(m)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)\right)$$
$$y(t_a) = y_a, y'(t_a) = y_a', \dots, y^{(m-1)}(t_a) = y_a^{(m-1)}$$

Métodos

Un paso

- Euler
- Heun
- Runge-Kutta

Multipaso

- Explícitos: Adams-Bashforth
- Implícitos: Adams-Moulton
- Predictor-Corrector

Ideas clave

4.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las Ideas clave que encontrarás a continuación.

En el tema anterior estuvimos trabajando sobre métodos de un paso. Estos métodos se denominan así porque la aproximación en el punto t_{k+1} solo implica conocer la información en los puntos anteriores t_k. Aunque estos métodos generalmente utilizan información de las evaluaciones funcionales entre los puntos t_k y t_{k+1}, no almacenan dicha información de forma directa para ser utilizada en futuras aproximaciones. De modo que **la solución en un subintervalo está basada exclusivamente en la información disponible en dicho subintervalo.**

Dado que la solución aproximada está disponible en cada uno de los nodos $t_0, t_1, \dots, t_{k,}$ antes de obtener la aproximación de la solución en el nodo t_{k+1}, parece razonable desarrollar métodos que utilicen de forma más precisa toda la información disponible hasta el nodo t_{k+1} en lugar de utilizar solo la información del subintervalo. Los métodos que **utilizan la aproximación en más de un nodo previo para determinar la solución aproximada en el siguiente nodo** se denominan **métodos multipaso.** A lo largo de este tema vamos a definir de forma precisa algunos de estos métodos, así como los tipos de métodos multipaso existentes.

Retomando la solución del PVI:

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f\big(\tau, y(\tau)\big)\, d\tau$$

para aproximar la integral se sustituye el integrando por un polinomio interpolador.

En función de los métodos, este polinomio interpolador tendrá unos puntos u otros.

Por otro lado, los métodos multipaso también se pueden extender a la resolución de sistemas de PVI aplicando las mismas modificaciones que en el caso de los métodos multipaso.

Los apartados de los que consta este tema son:

- Métodos numéricos multipaso:
  - Explícitos: Adams-Bashforth.
  - Implícitos: Adams-Moulton.
  - Predictor-corrector.

4.2. Métodos explícitos: Adams-Bashforth

Los métodos explícitos son los métodos más simples. En general, el polinomio interpolador pasa por los puntos:

$$\{\left(t_{k-n}, f(t_{k-n}, y_{k-n})\right), \left(t_{k-n+1}, f(t_{k-n+1}, y_{k-n+1}\right), \dots, \left(t_k, f(t_k, y_k)\right)\}$$

Adams-Bashforth de dos pasos: AB2

Partiendo de dos puntos $\{\left(t_{k-1}, f(t_{k-1}, y_{k-1})\right), \left(t_k, f(t_k, y_k)\right)\}$, el polinomio interpolador que pasa por estos dos puntos es:

$$\begin{aligned} p(\tau) &= f(t_k, y_k) + \frac{f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}(\tau - t_k) \\ &= \frac{\tau - t_{k-1}}{h} f(t_k, y_k) + \frac{t_k - \tau}{h} f(t_{k-1}, y_{k-1}) \end{aligned}$$

Reemplazando en la integral:

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} = y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(\tau)\ d\tau \\
&= y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{\tau - t_{k-1}}{h} f(t_k, y_k) + \frac{t_k - \tau}{h} f(t_{k-1}, y_{k-1}) \right) d\tau \\
&= y_k + \frac{1}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \big[\tau \big(f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1}) \big) + t_{k-1} f(t_k, y_k) \\
&\qquad - t_k f(t_{k-1}, y_{k-1}) \big]\ d\tau \\
&= y_k + \frac{1}{h} \left[\left(\frac{t_{k+1}^2 - t_k^2}{2} \right) \big(f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1}) \big) \right. \\
&\qquad \left. + (t_{k+1} - t_k) \big(t_{k-1} f(t_k, y_k) - t_k f(t_{k-1}, y_{k-1}) \big) \right] \\
&= y_k + \frac{1}{h} \left[\frac{h(2t_k + h)}{2} \big(f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1}) \big) \right. \\
&\qquad \left. + h \big(t_{k-1} f(t_k, y_k) - t_k f(t_{k-1}, y_{k-1}) \big) \right] \\
&= y_k + \left(\frac{(2t_k + h)}{2} + t_{k-1} \right) f(t_k, y_k) + \left(-\frac{(2t_k + h)}{2} + t_k \right) f(t_{k-1}, y_{k-1}) \\
&= y_k + \frac{3h}{2} f(t_k, y_k) - \frac{h}{2} f(t_{k-1}, y_{k-1})
\end{aligned}
$$

De este modo, el método de Adams-Bashforth de dos pasos, denotado por AB2, tiene la expresión:

$$
y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \big(3f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1}) \big)
$$

Se trata de un método de segundo orden con un error global $\mathcal{O}(h^2)$.

Si desarrollamos el método para los diferentes valores de k, nos encontramos con un problema en los primeros nodos, pues para $k = 0$:

$$
y_1 = y_0 + \frac{h}{2} \big(3f(t_0, y_0) - f(t_{-1}, y_{-1}) \big)
$$

es decir, habría que acceder a la componente (t_{-1}, y_{-1}) que no existe. La solución para este primer valor es utilizar el método de Heun en $k = 0$ y, a partir de ahí, utilizar el esquema de Adams-Bashforth.

El código en Matlab que implementa el método de Adams-Bashforth de dos pasos se muestra en el siguiente código.

```
function [t,y]=AB2PVI(fun,a,b,N,ya)
% Código en Matlab para resolver un PVI por el método de Adams-Bashforth de dos pasos
% Entrada:  fun -> función f(t,y)
%           a, b -> intervalo de la variable t
%           N -> número de subintervalos
%           ya -> condición incial en t=a
% Salida:   t -> variable t discretizada
%           y -> vector columna con la solución
h=(b-a)/N;
t=a:h:b;
y(1)=ya;
% Primer paso con el método de Heun
k1=h*feval(fun,t(1),y(1));
k2=h*feval(fun,t(2),y(1)+k1);
y(2)=y(1)+k1/2+k2/2;
% Siguientes pasos con el método AB2
for k=2:N
k1=feval(fun,t(k),y(k));
k2=feval(fun,t(k-1),y(k-1));
y(k+1)=y(k)+h/2*(3*k1-k2);
end
t=t(:); y=y(:);
```

Veamos cómo aplicar el método de Adams-Bashfort de dos pasos para resolver un PVI en el ejemplo 1.

Ejemplo 1. Obtén la solución del PVI:

$$y'(t) = (1 - 2t)y(t), y(0) = 1, t \in [0,3]$$

Utiliza el método de Euler y $N = \{2,4,8,16,32\}$ subintervalos. Obtén el error máximo sabiendo que la solución analítica es $y(t) = e^{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2}$ y una estimación del orden numérico. Representa la solución $y(t)$ para $N = 32$.

En primer lugar, definimos una *function* que implemente la función $f\big(t, y(t)\big) = (1 - 2t)y(t)$.

```
function dy=ejemplo1(t,y)
dy=(1-2*t)*y;
end
```

Apliquemos el método AB2 para los diferentes subintervalos (indicamos solo las dos primeras instrucciones):

```
>> [t2,y2]=AB2PVI('ejemplo1',0,3,2,1);
>> [t4,y4]=AB2PVI('ejemplo1',0,3,4,1);
```

Obtenemos la solución analítica para los diferentes intervalos (indicamos solo las dos primeras instrucciones):

```
>> yA2=exp(1/4-(1/2-t2).^2);
>> yA4=exp(1/4-(1/2-t4).^2);
```

Calculamos el error máximo cometido en cada número de subintervalos (indicamos solo las dos primeras instrucciones):

```
>> eM2=max(abs(y2-yA2));
>> eM4=max(abs(y4-yA4));
```

Obtenemos la sucesión de los cocientes entre los errores máximos:

```
>> eM=[eM2 eM4 eM8 eM16 eM32];
>> orden=log2(eM(1:end-1)./eM(2:end));
```

Obtenemos los siguientes resultados:

N	Error máximo	$\log_2\left(E_{\frac{N}{2}}/E_N\right)$
2	6.2475	
4	0.3894	4.0041
8	0.1088	1.8395
16	0.0218	2.3170
32	0.0052	2.0563

Tabla 1. Resultados PVI ejemplo 1.

Vemos como la columna del orden va tendiendo a 2 conforme vamos duplicando el número de subintervalos.

Representemos la solución para $N = 32$.

```
>> plot(t32,y32,'o-')
```

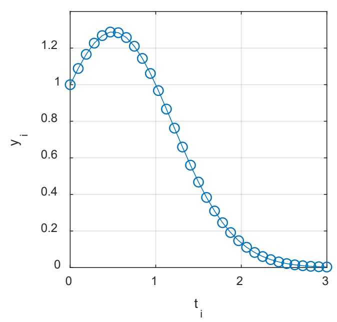


Figura 1. Representación solución *N=32.*

Adams-Bashforth de más de dos puntos

Siguiendo un procedimiento similar al caso del método de Adams-Bashforth de dos puntos, se pueden obtener polinomios interpoladores que pasen por más de dos puntos. Por ejemplo, para el caso en que el polinomio pase por tres puntos, el método AB3 tendría la expresión:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}(23f(t_k, y_k) - 16f(t_{k-1}, y_{k-1}) + 5f(t_{k-2}, y_{k-2}))$$

cuyo error global es $\mathcal{O}(h^3)$. Para obtener los valores para $k = \{0,1\}$ podemos utilizar el método de Runge-Kutta.

Si el polinomio pasara por cuatro puntos, tendríamos el método AB4, cuya expresión es:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(55f(t_k, y_k) - 59f(t_{k-1}, y_{k-1}) + 37f(t_{k-2}, y_{k-2}) - 9f(t_{k-3}, y_{k-3}))$$

con un error global $\mathcal{O}(h^4)$. Para obtener los valores para $k = \{0,1,2\}$ utilizaríamos el método de Runge-Kutta.

El siguiente algoritmo muestra los pasos para implementar el método AB4.

1. Obtención de la variable independiente discretizada
2. Inicialización del vector solución
3. Para k=1:3 aplicar el método de Runge-Kutta
    i. Valor de k1=`f(t(k),y(k))`
    ii. Valor de k2=`f(t(k)+h/2,y(k)+h/2*k1)`
    iii. Valor de k3=`f(t(k)+h/2,y(k)+h/2*k2)`
    iv. Valor de k4=`f(t(k+1),y(k)+h*k3))`
    v. Valor de `y(k+1)=y(k)+h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4)`
4. Fin para k
5. Para k=4:N
    i. Valor de k1=`f(t(k),y(k))`
    ii. Valor de k2=`f(t(k-1),y(k-1))`
    iii. Valor de k3=`f(t(k-2),y(k-2))`
    iv. Valor de k4=`f(t(k-3),y(k-3))`
    v. Valor de `y(k+1)=y(k)+h/24*(55*k1-59*k2+37*k3-9*k4)`
6. Preparar datos de salida

Veamos un caso de aplicación del método de AB4 en el ejemplo 2.

Ejemplo 2. Obtén la solución del PVI:

$$y'(t) = (1 - 2t)y(t), y(0) = 1, t \in [0,3]$$

Utiliza el método de Adams-Bashforth de 4 pasos y $N = \{8,16,32,64,128\}$ subintervalos. Obtén una estimación del orden numérico sin conocer la solución analítica.

La *function* de este PVI la implementamos en el ejemplo 1. Apliquemos el método AB4 para los diferentes subintervalos (indicamos solo las dos primeras instrucciones)

```
>> [t8,y8]=AB4PVI('ejemplo1',0,3,8,1);
>> [t16,y16]=AB4PVI('ejemplo1',0,3,16,1);
```

Obtenemos los valores de ϵ para aproximar numéricamente el orden del método sin conocer la solución analítica (indicamos solo las dos primeras instrucciones).

```
>> epsilon16=norm(y8-y16(1:2:end));
>> epsilon32=norm(y16-y32(1:2:end));
```

Obtenemos la sucesión de los cocientes entre los valores de épsilon:

```
>> epsilon=[epsilon16 epsilon32 epsilon64 epsilon128];
>> orden=log2(epsilon(1:end-1)./epsilon(2:end));
```

Obtenemos los siguientes resultados:

N	ϵ	$\log_2\left(\epsilon_{\frac{N}{2}}/\epsilon_N\right)$
8		
16	0.6966	
32	8.1727e-3	6.4134
64	7.5203e-4	3.4420

128	7.3650e-5	3.3520

Tabla 2. Resultados PVI ejemplo 2.

Vemos como la columna del orden va tendiendo a valores ligeramente inferiores al 4, por lo que el método no alcanza el orden 4.

4.3. Métodos implícitos: Adams-Moulton

Los métodos implícitos son más complejos que los métodos implícitos; sin embargo, gozan de una mayor estabilidad. Los puntos sobre los que se obtiene el polinomio interpolador son, en general, los siguientes:

$$\{(t_{k-n}, f(t_{k-n}, y_{k-n})), (t_{k-n+1}, f(t_{k-n+1}, y_{k-n+1}), \dots, (t_{k+1}, f(t_{k+1}, y_{k+1}))\}$$

Adams-Moulton de dos pasos: AM2

Partiendo de dos puntos $\{(t_k, f(t_k, y_k)), (t_{k+1}, f(t_{k+1}, y_{k+1}))\}$, el polinomio interpolador que pasa por estos dos puntos es:

$$\begin{aligned} p(\tau) &= f(t_{k+1}, y_{k+1}) + \frac{f(t_{k+1}, y_{k+1}) - f(t_k, y_k)}{t_{k+1} - t_k}(\tau - t_{k+1}) \\ &= \frac{\tau - t_k}{h} f(t_{k+1}, y_{k+1}) + \frac{t_{k+1} - \tau}{h} f(t_k, y_k) \end{aligned}$$

Reemplazando en la integral:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(\tau)\, d\tau \\ &= y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{\tau - t_k}{h} f(t_{k+1}, y_{k+1}) + \frac{t_{k+1} - \tau}{h} f(t_k, y_k) \right) d\tau \end{aligned}$$

$$= y_k + \frac{1}{h}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\tau\big(f(t_{k+1}, y_{k+1}) - f(t_k, y_k)\big) - t_k f(t_{k+1}, y_{k+1}) \right.$$

$$\left. + t_{k+1} f(t_k, y_k)\right] \, d\tau$$

$$= y_k + \frac{1}{h}\left[\left(\frac{t_{k+1}^2 - t_k^2}{2}\right)\big(f(t_{k+1}, y_{k+1}) - f(t_k, y_k)\big)\right.$$

$$\left. + (t_{k+1} - t_k)\big(t_{k+1} f(t_k, y_k) - t_k f(t_{k+1}, y_{k+1})\big)\right]$$

$$= y_k + \frac{1}{h}\left[\frac{h(2t_k + h)}{2}\big(f(t_{k+1}, y_{k+1}) - f(t_k, y_k)\big)\right.$$

$$\left. + h\big(t_{k+1} f(t_k, y_k) - t_k f(t_{k+1}, y_{k+1})\big)\right]$$

$$= y_k + \left(\frac{(2t_k + h)}{2} - t_k\right) f(t_{k+1}, y_{k+1}) + \left(-\frac{(2t_k + h)}{2} + t_{k+1}\right) f(t_k, y_k)$$

$$= y_k + \frac{h}{2} f(t_{k+1}, y_{k+1}) + \frac{h}{2} f(t_k, y_k)$$

De este modo, el método de Adams-Moulton de un paso, denotado por AM2, tiene la expresión:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\big(f(t_{k+1}, y_{k+1}) + f(t_k, y_k)\big)$$

Se trata de un método de segundo orden con un error global $\mathcal{O}(h^2)$. Al ser un método implícito, vamos a necesitar resolver la ecuación no lineal:

$$g(y_{k+1}) = 0 \leftrightarrow y_{k+1} - y_k - \frac{h}{2}\big(f(t_{k+1}, y_{k+1}) + f(t_k, y_k)\big) = 0$$

para obtener el valor de y_{k+1}. Como método de resolución, utilizaremos el método de Newton, en el que entraremos en más detalle en el tema de ecuaciones y sistemas no lineales. Sin embargo, para utilizar este método es necesario calcular la derivada de la función a resolver, de modo que:

$$g'(y_{k+1}) = \frac{dg(y_{k+1})}{dy_{k+1}} = 1 - \frac{h}{2}\frac{df(t_{k+1}, y_{k+1})}{dy_{k+1}}$$

Este hecho implica que la function $y' = f\big(t, y(t)\big)$ que introducíamos va a tener dos parámetros de salida. El primero de ellos será $f\big(t, y(t)\big)$ y el segundo será $\frac{df(t,y(t))}{dy(t)}$.

A continuación, se muestra en el código siguiente la implementación del método de Adams-Moulton de 2 pasos en Matlab.

```
function [t,y]=AM2PVI(fun,a,b,N,ya)
% Código en Matlab para resolver un PVI por el método de Adams-Moulton de dos pasos
% Entrada:  fun -> función f(t,y) que devuelve f y df/dy
%           a, b -> intervalo de la variable t
%           N -> número de subintervalos
%           ya -> condición inicial en t=a
% Salida:   t -> variable t discretizada
%           y -> vector columna con la solución
h=(b-a)/N;
t=a:h:b;
y(1)=ya;
% Primer paso con el método de Heun
k1=h*feval(fun,t(1),y(1));
k2=h*feval(fun,t(2),y(1)+k1);
y(2)=y(1)+k1/2+k2/2;
% Resto de pasos con AM2
for k=2:N
   k1=feval(fun,t(k),y(k));
   % Método de Newton
   iter=1; dif=1;
   w0=y(k);
   while and(iter<10,dif>1e-6)
      [fw0,dfw0]=feval(fun,t(k+1),w0);
```

```
        g=w0-y(k)-h/2*(fw0-k1);
        dg=1-h/2*dfw0;
        w=w0-g/dg;
        dif=abs(w-w0);
        iter=iter+1;
        w0=w;
    end
    y(k+1)=y(k)+h/2*(feval(fun,t(k+1),w0)+k1);
end
t=t(:); y=y(:);
```

Veamos cómo utilizar el método de Adams-Moulton para resolver PVI en el ejemplo 3.

Ejemplo 3. Obtén la solución del PVI:

$$y'(t) = (1 - 2t)y(t), y(0) = 1, t \in [0,3]$$

Utiliza el método de Adams-Moulton de 2 pasos y $h = 1/3$. Representa la solución $y(t)$.

La *function* de este PVI la implementamos en el ejemplo 1. Sin embargo, como el método AM2 requiere de la solución de una ecuación no lineal, tendremos que dar como salida también el valor de df/dy. Por tanto, las salidas serán:

$$f\big(t, y(t)\big) = (1 - 2t)y(t), \frac{df\big(t, y(t)\big)}{dy} = 1 - 2t$$

Definamos la *function*:

```
function [f,dfdy]=ejemplo3(t,y)
f=(1-2*t)*y;
dfdy=1-2*t;
end
```

A continuación, aplicamos el método AM2:

```
>> [t,y]=AM2PVI('ejemplo3',0,3,9,1);
```

Representamos la solución:

```
>> plot(t,y,'o-')
```

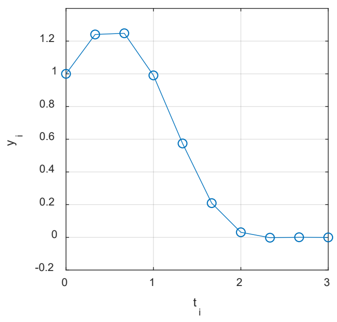


Figura 2. Representación solución PVI. Ejemplo 3.

Adams-Moulton de más de dos pasos

Procediendo de una forma análoga a como hicimos en el caso de dos puntos para el polinomio de interpolación, se pueden obtener expresiones del método de Adams-Moulton con mayor precisión utilizando más puntos en el polinomio de interpolación. Por ejemplo, para tres puntos tendríamos el método de dos pasos AM3, cuya expresión es:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}\big(-f(t_{k-1}, y_{k-1}) + 8f(t_k, y_k) + 5f(t_{k+1}, y_{k-1})\big)$$

Es un método de orden $\mathcal{O}(h^3)$, y necesitará de otro método para inicializar la solución en los primeros nodos.

La expresión del método de Adams-Moulton de tres pasos, denotado por AM4, tiene como expresión:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}\big(f(t_{k-2}, y_{k-2}) - 5f(t_{k-1}, y_{k-1}) + 19f(t_k, y_k) + 9f(t_{k+1}, y_{k+1})\big)$$

Se trata de un método de orden $\mathcal{O}(h^4)$ y, al igual que en los otros métodos de Adams-Moulton, necesitaremos inicializar la solución en los primeros nodos con métodos distintos.

Veamos en el ejemplo 4 cómo utilizar el método de Adams-Moulton de orden 4.

Ejemplo 4. Sea el PVI:

$$\begin{cases} u_1' = 2u_1 + 2u_2 \\ u_2' = 3u_1 + u_2 \end{cases}$$

con $t \in [0,2], u_1(0) = -1, u_2(0) = 4$. Obtén las soluciones $u_1(t)$ y $u_2(t)$ con el método de Adams-Moulton de orden 4 utilizando $h = 0.25$. Representa las soluciones $u_1(t)$ y $u_2(t)$.

Al tratarse de un sistema, la *function* que implementemos debe contener la función $F\big(t, U(t)\big)$ y la derivada con respecto a u. La función $F\big(t, U(t)\big)$ será una función de dos componentes:

$$F\big(t, U(t)\big) = \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_1(t) + 2u_2(t) \\ 3u_1(t) + u_2(t) \end{bmatrix}$$

mientras que la derivada será una matriz Jacobiana:

$$\frac{\partial F\big(t, U(t)\big)}{\partial U(t)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1'(t)}{\partial u_1(t)} & \dfrac{\partial u_1'(t)}{\partial u_2(t)} \\ \dfrac{\partial u_2'(t)}{\partial u_1(t)} & \dfrac{\partial u_2'(t)}{\partial u_2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Definimos la *function* como:

```
function [F,dF]=ejemplo4(t,U)
u1=U(1); u2=U(2);
F=[2*u1+2*u2;3*u1+u2];
dF=[2 2;3 1];
end
```

Ejecutamos el programa de Adams-Moulton de orden 4.

```
>>[t,U]=AM4PVIsistema('ejemplo4',0,3,9,[-
1;4]);
```

Representamos las soluciones.

```
>> plot(t,U,'o-')
```

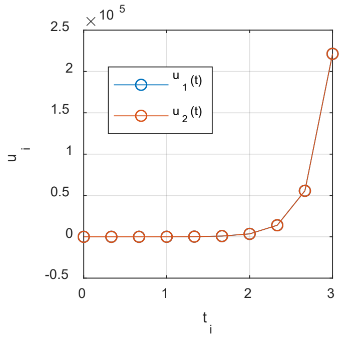


Figura 3. Representación de las soluciones.PVI. Ejemplo 4.

4.4 Métodos predictor-corrector

En general, los métodos implícitos no se utilizan de la forma que hemos visto en el apartado anterior. A partir de los resultados de un método explícito, los métodos implícitos se utilizan para mejorar las aproximaciones obtenidas. La combinación de los métodos explícito e implícito dan lugar a lo que se conoce como métodos predictor-corrector, donde la predicción es llevada a cabo por el método explícito, y la corrección por el método implícito.

Adams-Bashforth-Moulton de dos pasos

En primer lugar, obtenemos la solución por el método de Adams-Bashforth. Como es el método predictor, llamaremos p_k a sus valores.

$$p_{k+1} = p_k + \frac{h}{2}(3f(t_k, p_k) - f(t_{k-1}, p_{k-1})$$

A partir de estos valores predictores, aplicamos el método de Adams-Moulton:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\big(f(t_{k+1}, p_{k+1}) + f(t_k, y_k)\big)$$

Este código muestra la implementación del método de Adams-Bashforth-Moulton en Matlab.

```
function [t,y]=ABM2PVI(fun,a,b,N,ya)
% Código en Matlab para resolver un PVI por el método de Adams-Bashforth-Moulton de dos pasos
% Entrada:  fun -> función f(t,y)
%           a, b -> intervalo de la variable t
%           N -> número de subintervalos
%           ya -> condición incial en t=a
% Salida:   t -> variable t discretizada
%           y -> vector columna con la solución
h=(b-a)/N;
t=a:h:b;
p(1)=ya;
% PREDICTOR: AB2
% Primer paso con el método de Heun
k1=h*feval(fun,t(1),p(1));
k2=h*feval(fun,t(2),p(1)+k1);
p(2)=p(1)+k1/2+k2/2;
for k=2:N
  k1=feval(fun,t(k),p(k));
  k2=feval(fun,t(k-1),p(k-1));
  p(k+1)=p(k)+h/2*(3*k1-k2);
end
t=t(:); p=p(:);
% CORRECTOR: AM2
```

```
y(1:2)=p(1:2);
for k=2:N
  k1=feval(fun,t(k),y(k));
  y(k+1)=y(k)+h/2*(feval(fun,t(k+1),p(k+1))+k1);
end
```

Veamos un caso de aplicación en el ejemplo 5.

Ejemplo 5. Obtén la solución del PVI:

$$y'(t) = (1 - 2t)y(t), y(0) = 1, t \in [0,3]$$

Utiliza el método de Adams-Bashforth-Moulton de 2 pasos, tomando $h = 1/3$. Indica la solución $y(t)$ para $t = \{0,1,2,3\}$ y representa la solución $y(t)$.

La *function* de este PVI la implementamos en el ejemplo 1. Apliquemos el método ABM2.

```
>> [t,y]=ABM2PVI('ejemplo1',0,3,9,1);
```

Los datos de $y(t)$ para $t = \{0,1,2,3\}$ son:

```
>> table(t(1:3:10), y(1:3:10))
```

t	$y(t)$
0	1
1	1.0033
2	0.17951
3	9.8681e-5

Tabla 3. $y(t)$ para $t = \{0,1,2,3\}$.

Representamos la función:

```
>> plot(t,y,'o-')
```

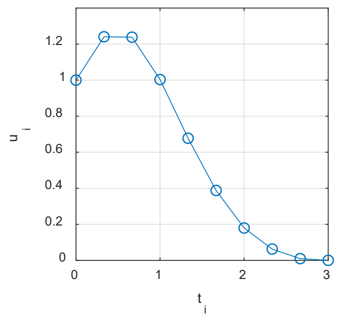


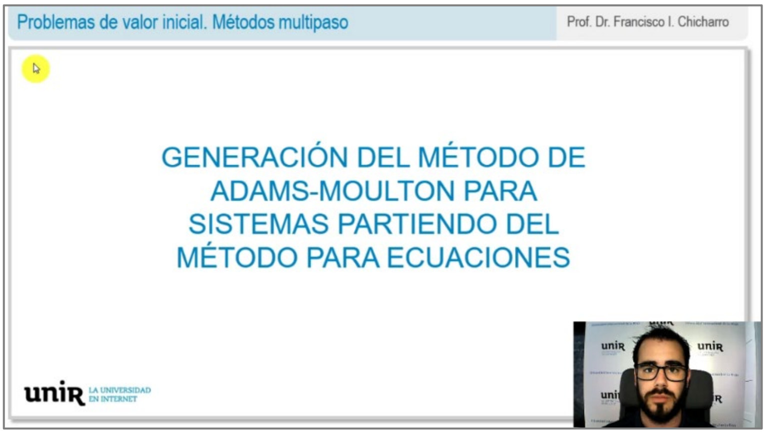
Figura 4. Representación resultados PVI. Ejemplo 5.

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

Generación del método de Adams-Moulton para sistemas partiendo del método para ecuaciones

En esta lección magistral vamos a mostrar qué cosas debemos tener en cuenta para realizar la extensión del método de Adams-Moulton de orden 2 de ecuaciones que definen PVI a PVI definidos por sistemas.

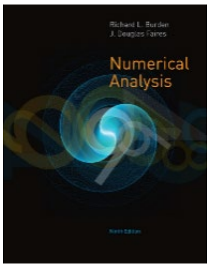


Accede a la lección magistral a través del aula virtual

No dejes de leer

Numerical analysis

Burden, R. L. y Faires, J. D. (2011). *Numerical analysis* (9ª ed). Boston: Brooks/Cole CENGAGE learning.

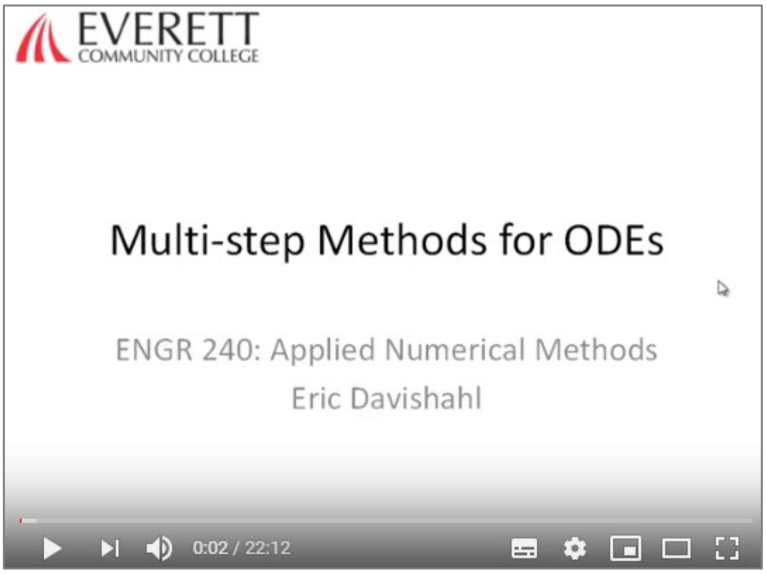


El libro *Numerical Analysis* es el libro de referencia de esta asignatura. En la segunda parte del capítulo 5 se presentan los problemas de valor inicial, con multitud de ejemplos y algoritmos para la implementación de los diferentes métodos numéricos multipaso.

No dejes de ver

Métodos multipaso para PVI

En este vídeo puedes encontrar la explicación de todos los puntos vistos a lo largo del tema desde otra perspectiva. Asimismo, el autor también y explica el código utilizado en Matlab para la implementación de los diferentes métodos.



Accede al vídeo a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:

https://www.youtube.com/watch?v=wX9L3G9TFBA

+ Información

A fondo

Métodos rígidos y de pasos múltiples

Chapra, S. C. y Canale, R. P. (2007). *Métodos numéricos para ingenieros* (5a. Ed.). Madrid: McGraw-Hill.

En el capítulo 26 de este libro se presentan los métodos rígidos y los métodos de pasos múltiples. Sobre los primeros, se trata de unos métodos para PVI rígidos, mientras que los segundos abordan más métodos numéricos de los que se han visto en este tema, complementando la información proporcionada.

Accede al libro a través de la Biblioteca Virtual de UNIR

Métodos Predictor-Corrector

En este enlace se muestra una práctica realizada por diferentes alumnos en la que se implementan diferentes métodos predictores y diferentes métodos correctores. Asimismo, se incluye el código de la unión entre métodos predictores y correctores.

Accede a la página web a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:
http://personales.upv.es/serblaza/Docencia/AeroTercero/pracMMII-5.pdf

Bibliografía

Mathews, J. H., Fink, K. D. (2000). *Métodos numéricos con MATLAB*. Madrid: Prentice-Hall.

Zill, D. G. (2016). *Advanced Engineering Mathematics*. Sudbury: Jones & Bartlett Learning.

Blanes, S., Ginestar, F., Roselló, M. D. (2014). *Introducción a los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales*. Universidad Politécnica de Valencia.

Test

1. Los métodos multipaso:

   A. Tienen en cuenta más de un nodo previo para obtener la solución.

   B. Solo tienen en cuenta los nodos en los que conocemos la solución.

   C. Ninguna de las anteriores es correcta.

2. Los métodos explícitos utilizan como puntos de interpolación:

   A. Los puntos en los que se conoce la solución.

   B. Los puntos en los que se conoce la solución y el siguiente nodo.

   C. El siguiente nodo.

3. Los métodos implícitos utilizan como puntos de interpolación:

   A. Los puntos en los que se conoce la solución.

   B. Los puntos en los que se conoce la solución y el siguiente nodo.

   C. El siguiente nodo.

4. Los métodos explícitos de n pasos tienen orden:

   A. n-1.

   B. n.

   C. n+1.

5. Los métodos implícitos de n pasos tienen orden:

   A. n-1.

   B. n.

   C. n+1.

6. Para obtener la solución en un método explícito de n pasos, es necesario aplicar un método de un paso sobre los primeros:

A. n-1 nodos.

B. n nodos.

C. n+1 nodos.

7. En los métodos predictor-corrector, el método explícito actúa como:

A. Predictor.

B. Corrector.

C. No se utiliza.

8. En los métodos predictor-corrector, el método implícito actúa como:

A. Predictor.

B. Corrector.

C. No se utiliza.

9. Sea el PVI $y'(t) = y(t) - t^2 + 1, t \in [0,2], y(0) = 0.5, h = 1$. ¿Qué método da como solución $y(t) = [0.5, 2.25, 4.875]$?

A. Adams-Bashforth de orden 2.

B. Adams-Moulton de orden 2.

C. Adams-Moulton de orden 4.

10. Sea el PVI $y' = 1 + \frac{y}{t} + \frac{y^2}{t^2}, t \in [1,3], y(1) = 0, N = 4$. ¿Qué método da como solución $y(t) = [0,0.6438,1.6606,3.2622,5.9016]$?

A. Adams-Bashforth de orden 2.

B. Adams-Bashforth de orden 4.

C. Adams-Moulton de orden 4.