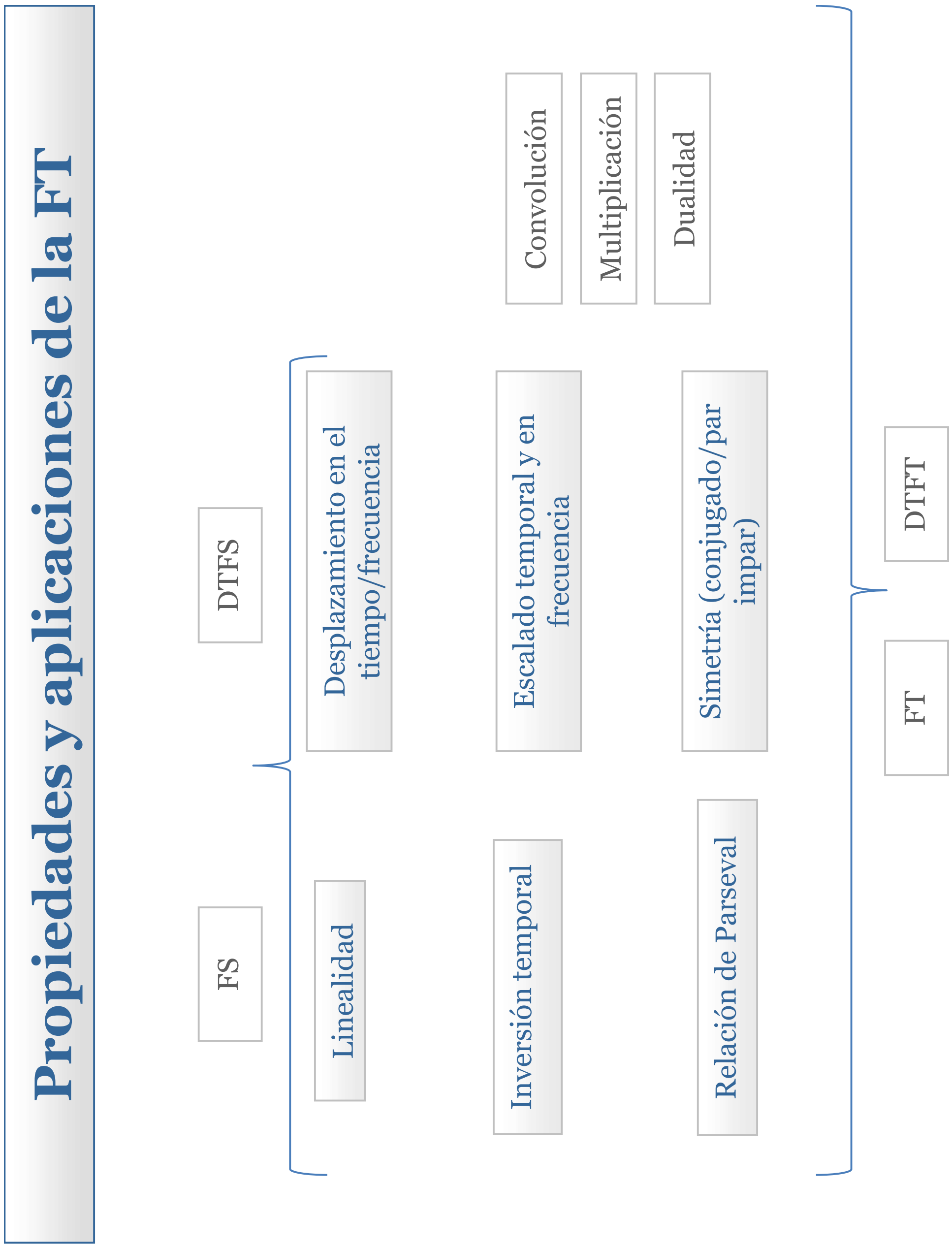
Propiedades y aplicaciones de la FT

9

TEMA

Esquema


Propiedades y aplicaciones de la FT
FS
DTFS
Linealidad
Desplazamiento en el tiempo/frecuencia
Inversión temporal
Escalado temporal y en frecuencia
Relación de Parseval
Simetría (conjugado/par impar)
Convolución
Multiplicación
Dualidad
FT
DTFT

Ideas clave

9.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

En este tema estudiaremos algunas propiedades importantes de la transformada de Fourier, sus implicaciones y aplicaciones. También estudiaremos una transformada especialmente útil para calcular transformadas con un computador: la DFT. Después veremos cómo usar la DFT para calcular numéricamente otros tipos de transformadas.

9.2. Propiedades básicas

En este apartado vamos a estudiar las propiedades de la FT y DTFT, lo cual nos ayudará a entender mejor la relación entre la representación en el dominio del tiempo y de la frecuencia de una señal, así como a evaluar o simplificar las fórmulas de análisis y síntesis. Cuando la propiedad sea similar en la FT y FTFT se explica solo en un caso. Cuando existan diferencias lo indicaremos.

En este apartado se recogen propiedades similares a las propiedades de la FS y DTFS que estudiamos en el tema 7 y se discuten sus diferencias. En los siguientes apartados se describen propiedades más avanzadas.

Linealidad

Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos señales con FT conocidas:

$$x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(jw)$$

$$y(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} Y(jw)$$

Entonces:

$$ax(t) + by(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} aX(jw) + bY(jw)$$

Esta propiedad es similar a las FS, excepto que son señales aperiódicas y no hay necesidad de que coincidan en el periodo T.

Desplazamiento en el tiempo

Sea $x(t)$ una señal con FT conocida, es decir:

$$x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(jw)$$

Entonces:

$$x(t-t_0) \overset{FT}{\leftrightarrow} e^{-jwt_0}X(jw)$$

Una consecuencia del desplazamiento en el tiempo es que no afecta a la magnitud del espectro, solo a la fase. Es decir, si escribimos $X(jw)$ en forma polar:

$$FT\{x(t)\} = X(jw) = |X(jw)|e^{j\sphericalangle X(jw)}$$

$$FT\{x(t-t_0)\} = e^{-jwt_0}X(jw) = |X(jw)|e^{j\sphericalangle[X(j(w-wt_0)]}$$

Luego un desplazamiento en el tiempo t_0 da lugar en el espectro a un desplazamiento en el ángulo de $-wt_0$.

Desplazamiento en frecuencia

Sea $x(t)$ una señal con FT conocida, es decir:

$$x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(jw)$$

Entonces su desplazamiento en frecuencia $X(j(w-w_0))$ varía la fase pero no la amplitud de la señal en el tiempo, es decir:

$$e^{jw_0t}x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(j(w-w_0))$$

Inversión temporal

Sea $x(t)$ una señal con FT conocida:

$$x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(jw)$$

Su inversión temporal $x(-t)$ da lugar en frecuencia a una señal invertida, es decir:

$$x(-t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(-jw)$$

Escalado temporal y en frecuencia

Sea la señal $x(t)$ con FT conocida:

$$x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(jw)$$

La señal escalada $x(at)$, donde a es indica el factor de compresión, da lugar a una señal expandida en frecuencia $X(jw/a)$ y multiplicada por un factor de compresión $1/a$:

$$x(at) \overset{FT}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|} X(\frac{jw}{a})$$

Un ejemplo ilustrativo es una señal de audio grabada que se reproduce a mayor velocidad (p.e. a=2), lo cual da lugar a una señal expandida en frecuencia la cual se escucha más aguda y con menos volumen.

Recodar que en la FS la compresión temporal no cambia los coeficientes c_m, solo cambia la frecuencia fundamental de los armónicos a aw_0.

Simetría del conjugado

La propiedad de simetría del conjugado dice que si:

$$x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(jw)$$

Entonces el espectro de su conjugada está conjugado e invertido:

$$x^*(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X^*(-jw)$$

Si $x(t)$ es real, es decir $x(t)$=$x^*(t)$, entonces:

$$X(jw) = X^*(-jw)$$

Luego si $x(t)$ es real se puede concluir que:

» Re{$X(jw)$} es una función par. Es decir, cumple la propiedad de paridad porque Re{$X(jw)$}=Re{$X^*(-jw)$} con lo Re{$X(jw)$}=Re{$X(-jw)$}.
» Im$X(jw)$} es una función impar. Es decir, cumple la propiedad de imparidad porque Im{$X(jw)$}=Im{$X^*(-jw)$} con lo Im{$X(jw)$}=-Im{$X(-jw)$}.
» $|X(jw)|$ es una función par.
» $\angle X(jw)$ es una función impar.

Simetría par e impar

Estas propiedades nos dicen que si descomponemos $x(t)$ real en suma de sus partes par e impar:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

Entonces:

$$x_e(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \mathrm{Re}\{X(jw)\}$$

$$x_o(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} j\mathrm{Im}\{X(jw)\}$$

Un corolario es que:

» Si $x(t)$ es real y par pura, entonces su transformada $X(jw)$ es real y par pura.
» Si $x(t)$ es real e impar pura, entonces transformada $X(jw)$ es imaginaria e impar pura.

Relación de Parseval

La relación de Parseval en señales aperiódicas dice que la energía de una señal $x(t)$ en el dominio del tiempo es igual a la energía de su representación en frecuencia. En la FT y DTFT además existe un factor de escalado $1/2\pi$ para la energía en el dominio de la frecuencia. En consecuencia, la relación de Parseval en la FT dice que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(jw)|^2 dw$$

Y en el caso de la DTFT dice que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\Omega})| \, d\Omega$$

9.3. Propiedad de convolución

La propiedad de convolución relaciona la convolución de dos señales en el dominio del tiempo con la multiplicación de señales en el dominio de la frecuencia mediante la relación:

$$y(t) = x(t) * h(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} Y(jw) = X(jw)H(jw)$$

La propiedad de convolución permite resolver problemas muy difíciles en el dominio del tiempo pero que son fáciles de resolver en el dominio de la frecuencia.

» **Ejemplo 1**: convolución en el dominio de la frecuencia.

Dadas las señales $x(t)$ y $h(t)$, calcular su convolución $y(t)$=$x(t)$*$y(t)$.

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \overset{FT}{\leftrightarrow} X(jw) = \begin{cases} 1, & |w| < \pi \\ 0, & |w| > \pi \end{cases}$$

$$h(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} \overset{FT}{\leftrightarrow} H(jw) = \begin{cases} 1, & |w| < 2\pi \\ 0, & |w| > 2\pi \end{cases}$$

En vez de aplicar la integral de convolución $x(t)$*$h(t)$ es mucho más sencillo multiplicar las señales en el dominio de la frecuencia $X(jw)H(jw)$ para obtener:

$$Y(jw) = \begin{cases} 1, & |w| < \pi \\ 0, & |w| > \pi \end{cases}$$

Y concluimos que:

$$y(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

La función de transferencia

La propiedad de convolución nos permite obtener la respuesta en frecuencia de un sistema como el ratio entre la representación en frecuencia de la salida y la entrada. Se llama **función de transferencia** a la respuesta en frecuencia obtenida como el ratio entre la salida y la entrada en frecuencia del sistema:

$$H(jw) = \frac{Y(jw)}{X(jw)}$$

La propiedad de convolución nos permite simplificar diagramas de sistemas operando en frecuencia. La figura 1 resume esta idea.

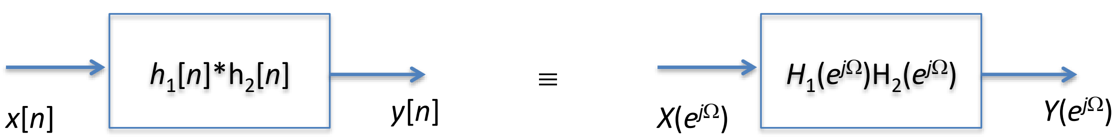


Figura 1: convolución en el tiempo vs. multiplicación en frecuencia

» **Ejemplo 2**: identificación de la función de transferencia.

Dado un sistema con la siguiente entrada y salida, identificar la función de transferencia:

$$X(jw) = \frac{2}{jw + 4} \qquad Y(jw) = \frac{1}{jw + 1}$$

La función de transferencia es el ratio entre la entrada y la salida en frecuencia:

$$H(jw) = \frac{Y(jw)}{X(jw)} = \frac{jw + 4}{2(jw + 1)}$$

Convolución de señales periódicas

La convolución de señales con sistemas de respuesta al impulso periódica no ocurre en la naturaleza, ya que el sistema sería con respuesta al impulso periódico es inestable. Sin embargo, sí se puede utilizar para evaluar la relación entre entrada-salida de un sistema.

Se define la **convolución periódica** de dos señales como:

$$z(t) = x(t) \circledast y(t) = \int_T x(\tau)y(t-\tau)\,d\tau$$

Donde el símbolo $\circledast$ indica que la convolución se realiza sobre un único periodo. Por contra, la convolución habitual oscila de -∞ a ∞ y para distinguirla a veces se la llama **convolución aperiódica**.

Dadas dos señales periódicas y sus coeficientes de la FS:

$$x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_m$$

$$y(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} b_m$$

La propiedad de convolución en la FS dice que:

$$x(t) \circledast y(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} c_m = Ta_m b_m$$

9.4. Propiedad de multiplicación

La propiedad de multiplicación nos dice que el producto de señales aperiódicas en el tiempo es equivalente a su convolución en frecuencia, con un factor de escalado $1/2\pi$, es decir:

$$x(t)y(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X(jw) * Y(jw)$$

Para convolucionar se usa la integral de convolución:

$$X(jw) * Y(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} X(jv)Y(j(w-v))\, dv$$

Esta propiedad también existe en la FS pero en este caso no existe factor de escalado y se convoluciona con la suma de convolución:

$$x(t)y(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_m * b_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{m-k}$$

Observar que la multiplicación de dos señales periódicas (de tiempo continuo o discreto) siempre da una señal con el mismo periodo que las señales multiplicadas.

Multiplicación con espectros periódicos

Cuando los espectros son periódicos la propiedad de multiplicación también existe pero en este caso se hace una convolución periódica sobre un único periodo. En concreto, en la DTFT tenemos la relación con un factor de escalado $1/2\pi$:

$$x[n]y[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X(e^{j\Omega}) \circledast Y(e^{j\Omega})$$

Y se convoluciona usando la integral de convolución periódica en un periodo 2π:

$$X(e^{j\Omega}) \circledast Y(e^{j\Omega}) = \int_{2\pi} X(e^{j\Theta})Y(e^{j\Omega-\Theta})\, d\Theta$$

En el caso de la DTFS no existe factor de escalado:

$$x[n]y[n] \overset{DTFS}{\longleftrightarrow} h_m = a_m \circledast b_m$$

La convolución se hace con la suma de convolución periódica que está restringida a N muestras consecutivas:

$$a_m \circledast b_m = \sum_{k=<N>} a_k b_{m-k}$$

9.5. Modulación en amplitud

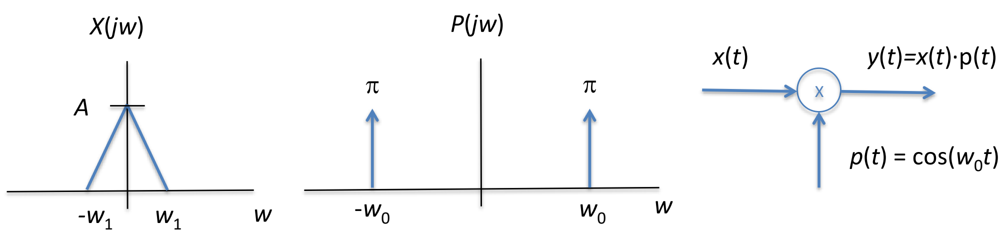
Una aplicación de la propiedad de multiplicación es la modulación AM (*Amplitude Modulation*). Esta modulación nos permite transmitir señales de voz de baja frecuencia (150 a 20000 Hz) usando una señal **portadora** de alta frecuencia.

Sea $x(t)$ una señal de voz a transmitir cuya representación en frecuencia se muestra en la figura 2 (a) y donde w_1 representa la frecuencia máxima de la señal a transmitir (p.e. 20000 Hz en la voz).

La portadora $p(t)=\cos(w_0 t)$ se representa en la figura 2 (b), cuya FT es:

$$P(jw) = \pi\delta(w - w_0) + \pi\delta(w + w_0)$$

Para modular usaremos un multiplicador como el de la figura 2 (c):



(a) Espectro de la señal (a) Espectro de la señal (c) Multiplicador

Figura 2: instrumentos de modulación AM

Dado que la multiplicación en el dominio del tiempo da lugar a una convolución en frecuencia aplicando la propiedad de multiplicación tenemos:

$$Y(jw) = \frac{1}{2\pi} X(jw) * \pi[\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)] = \frac{1}{2}[X(j(w - w_0) + X(j(w + w_0))]$$

Con lo que la modulación da lugar a un desplazamiento en el espectro de la señal tal como ilustra la figura 3.

En recepción debemos demodular la señal para lo cual volvemos a multiplicar la señal modulada por la portadora:

$$z(t) = y(t)\cos(w_0 t)$$

Volviendo a aplicar la propiedad de multiplicación tenemos:

$$Z(jw) = \frac{1}{2}[Y(j(w - w_0)) + Y(j(w + w_0))]$$

Esto significa que cada espectro de $Y(jw)$ centrado en w_0 se desplaza $\pm w_0$, haciendo que mitad del espectro se vaya a 0 y la otra mitad se vaya a $\pm 2w_0$. Luego podemos escribir esta transformación en función de $X(jw)$ como:

$$Z(jw) = \frac{1}{2} X(jw) + \frac{1}{4} X(j(w - 2w_0)) + \frac{1}{4} X(j(w + 2w_0))$$

La figura 3 muestra este efecto gráficamente:

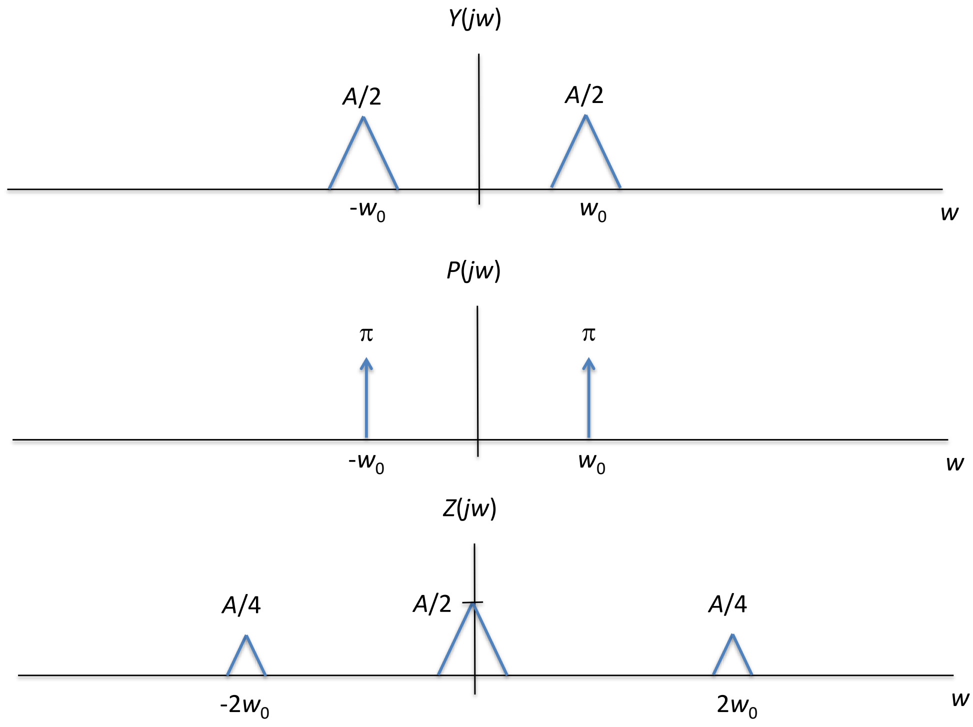


Figura 3: señal modulada y demodulada

Ahora, para reconstruir la señal solo nos quedaría pasar la señal $Z(jw)$ por un filtro paso bajo y con factor de amplificación 2.

9.6. Propiedad de dualidad

La propiedad de dualidad nos dice que si intercambiamos los roles entre dominio del tiempo y de la frecuencia las propiedades se mantienen. Por ejemplo, la propiedad de convolución nos dice que la convolución en el dominio del tiempo corresponde con la multiplicación en el dominio de la frecuencia. Si intercambiamos los roles, la propiedad de multiplicación nos dice que la multiplicación en el dominio del tiempo corresponde con la convolución en el dominio de la frecuencia. Otro ejemplo son las propiedades de desplazamiento: cuando nos desplazamos en el tiempo modificamos el ángulo en la frecuencia y cuando nos desplazamos en la frecuencia modificamos el ángulo en el tiempo.

Simetría en los ejes

En general, cuando una señal se concentra en un dominio se expande en el otro. El siguiente ejemplo ilustra esta simetría.

» **Ejemplo 3**: FT del impulso unitario.

Calcular la FT de:

$$x(t) = \delta(t)$$

Aplicando la ecuación de análisis de la FT con x(t) tenemos:

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-jwt} dt = 1$$

Es decir:

$$\delta(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} 1$$

Luego la señal $x(t)$ que está comprimida en el tiempo en t=0 se expande en frecuencia desde w=-∞ hasta w=∞.

Si ahora calculamos la FT^{-1} de:

$$X(jw) = \delta(w)$$

Aplicando la ecuación de síntesis de la FT con $X(jw)$ tenemos:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(w) e^{jwt} dw = \frac{1}{2\pi}$$

Es decir:

$$\frac{1}{2\pi} \overset{FT}{\leftrightarrow} \delta(w)$$

Luego, aparte del factor de escalado 1/2π, vemos que si la señal se concentra en frecuencia en w=0, la señal se expande en el tiempo desde t=-∞ hasta t=∞.

Simetría en la transformada

Las ecuaciones de análisis y síntesis de la FT son similares, aparte del factor de escalado y del signo de la exponencial. Si tenemos esto en cuenta podemos intercambiar tiempo y frecuencia.

Un ejemplo que ilustra esta dualidad son las señales:

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \overset{FT}{\longleftrightarrow} X_1(jw) = \frac{2\sin wT_1}{w}$$

$$x_2(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t} \overset{FT}{\longleftrightarrow} X_2(jw) = \begin{cases} 1, & w < W \\ 0, & w > W \end{cases}$$

La figura 4 muestra la simetría entre la representación en el dominio del tiempo y de la frecuencia de ambas señales.

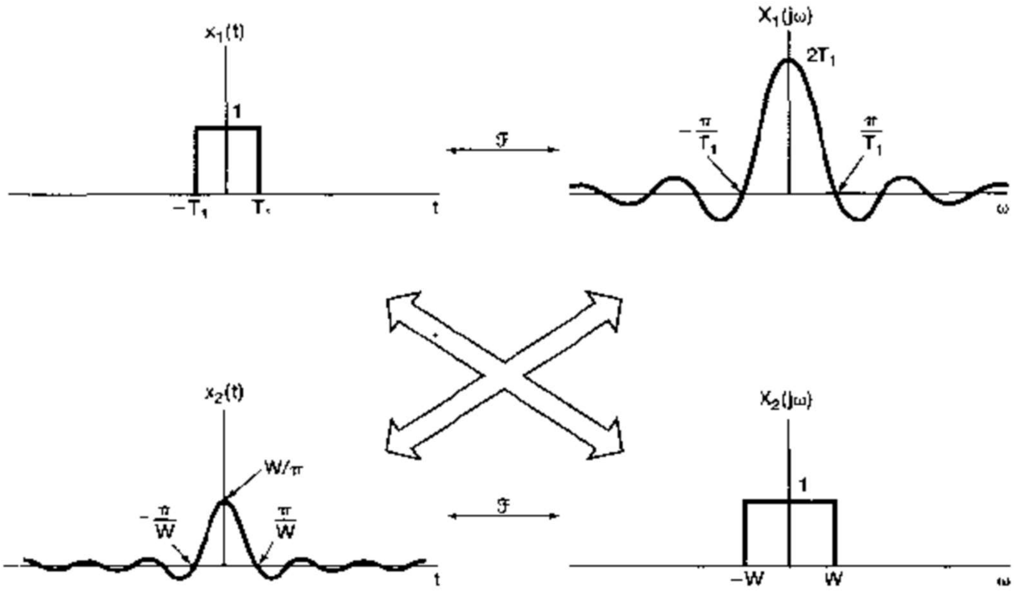


Figura 4: propiedad de dualidad

9.7. La DFT

La DFT (*Discrete Fourier Transform*) es una herramienta para calcular transformadas de Fourier en un ordenador. La razón por la que es útil es porque la representación de la DFT no incluye una función que dependa de una variable continua. La DFT se representa con una secuencia de longitud *N*, tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. Como veremos, estas secuencias se pueden hacer corresponder a variables continuas muestreadas en otras transformadas.

La FFT (*Fast Fourier Transform*) es un algoritmo eficiente para calcular la DFT en un ordenador. También es posible calcular eficientemente la inversa de la DFT mediante otro algoritmo llamado IFFT (*Inverse Fast Fourier Transform*).

Ecuación de análisis y síntesis

Dada una señal de tiempo discreto $x[n]$ con exactamente *N* muestras ($x[0]$ a $x[N\text{-}1]$), esta secuencia se puede representar en el dominio de la frecuencia mediante una secuencia con *N* **coeficientes de la DFT**, los cuales se obtienen mediante la **ecuación de análisis** de la DFT:

$$X[m] = DFT\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} \quad \text{con} \quad m = 0, 1, .., N-1 \qquad (1)$$

Donde la frecuencia fundamental es $\Omega_0 = 2\pi/N.$ y cada elemento de $X[m]$ es una sinusoidal compleja con frecuencia múltiplo de Ω_0, es decir $\Omega_0\, mn$:

$$\phi_m[n] = e^{j\Omega_0 mn} \quad \text{con} \quad m, n = 0, 1, .., N-1$$

La DFT inversa (IDFT) recibe los *N* coeficientes de la DFT y devuelve los *N* valores de la señal $x[n]$, los cuales se obtienen mediante la **ecuación de síntesis** de la DFT:

$$x[n] = IDFT\{X[m]\} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X[m]e^{j\frac{2\pi}{N}mn} \quad \text{con} \quad n = 0, 1, .., N-1 \qquad (2)$$

Esto quiere decir que la DFT es reversible y tanto $x[n]$ como $X[m]$ representan completamente la señal, es decir, están emparejados:

$$x[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X[m]$$

En general $X[m]$ es compleja con lo que en ocasiones resulta conveniente expresarla en función de su parte real $R[m]$ y parte imaginaria $I[m]$ como:

$$X[m] = R[m] + jI[m]$$

Donde:

$$R[m] = x[0] + \sum_{n=1}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{2\pi}{N} mn\right) \qquad I[m] = \sum_{n=1}^{N-1} x[n] \sin\left(\frac{2\pi}{N} mn\right)$$

» **Ejemplo 4**: coeficientes de la DFT

Encontrar los coeficientes de la DFT de la siguiente señal:

$$x[n] = \{1, -2, 1, 3\}$$

Aplicando la ecuación de análisis de la DFT (1) tenemos:

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = 1 - 2e^{-j\frac{\pi}{2}m} + e^{-j\pi} \quad + 3^{-j\frac{3\pi}{2}m}$$

$$= 1 - 2\cos\left(\frac{-\pi}{2} m\right) - j2\sin\left(\frac{-\pi}{2} m\right) + \cos(-\pi m) + j\sin(-\pi m)$$

$$+ 3\cos\left(\frac{-3\pi}{2} m\right) + j3\sin\left(\frac{-3\pi}{2} m\right)$$

Y evaluando en m=0, ..., m=N-1 tenemos:

$$X[m] = \begin{cases} 3, & m = 0 \\ 0 + 5j, & m = 1 \\ 1, & m = 2 \\ 0 - 5j, & m = 3 \end{cases}$$

Relación con la DTFS

Recordar que las ecuaciones de análisis y síntesis de la DTFS eran, respectivamente:

$$c_m = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n]\, e^{-jm\Omega_0 n} \quad \text{con} \quad m =< N > \tag{3}$$

$$x[n] = \sum_{m=<N>} c_m e^{jm\Omega_0 n} \quad con \quad n =< N > \tag{4}$$

El cálculo de los coeficientes de la DTFS a partir de los coeficientes de la DFT es sencillo si tenemos en cuenta tres diferencias:

» **Periodicidad**. La DTFS representa una señal periódica de longitud infinita y periodo *N,* mientras que la DFT representa una señal aperiódica de longitud *N*.

» **Periodo**. La DTFS recorre cualquier secuencia de longitud N (es decir sumamos sobre <*N*>) mientras que la DFT recorre una secuencia que por convenio está situada en las posiciones 0, ... , *N*-1.

» **Escalado**. En la DTFS el escalado $1/N$ se suele aplicar en la ecuación de análisis, mientras que en la DTF se acostumbra a aplicarlo en la ecuación de síntesis.

Luego, para obtener los coeficientes de la DTFS podemos calcular la DFT de un periodo y después aplicamos la relación:

$$c_m = \frac{1}{N} X[m] \tag{5}$$

Relación con la DTFT

Tanto la DTFT como la DFT se aplican a una secuencia $x[n]$ aperiódica. Recordar que la ecuación de análisis de la DTFT es:

$$X(e^{j\Omega}) = DTFT\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

Es decir, se aplica a una secuencia aperiódica de cualquier longitud, mientras que la ecuación de análisis de la DFT (1) se aplica a una secuencia de longitud N. Siempre es posible extender la DFT a la DTFT haciendo:

$$x[n] = 0 \quad \forall n < 0 \text{ y } n \geq N$$

En el dominio frecuencial la DTFT produce una señal continua con periodo 2π, mientras que la DFT produce una señal discreta con periodo N. Como muestra la figura 5, la DFT se puede ver como un muestreo equiespaciado en frecuencia de $X(e^{j\Omega})$ donde $\Delta\Omega = 2\pi/N$, y el periodo pasa de 2π a N, es decir:

$$X[m] = X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{N}m} = X(e^{j\frac{2\pi}{N}m}) \tag{6}$$

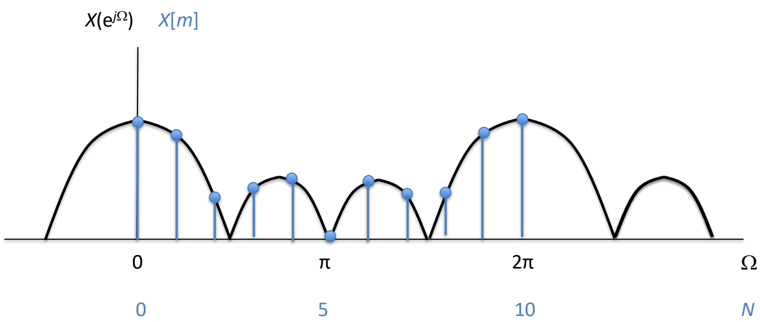


Figura 5: relación entre la DTFT y DFT

Una restricción de calcular la DTFT usando la DFT es que la señal $x[n]$ no puede ser periódica. Las señales discretas dan lugar a pulsos en frecuencia y estos no se pueden representar en los valores del vector con un computador.

Cálculo con Octave

Para calcular la DFT de una señal x con Octave tenemos el comando:

```
X = fft(x);
```

Por ejemplo, podemos calcular los coeficientes de la DFT del «Ejemplo 4» o haciendo:

```
x = [1 -2 1 3];
```



```
X = fft(x)
  X = 3 + 0i   0 + 5i   1 + 0i   0 - 5i
```

Para calcular la IDFT usamos la operación:

```
x = ifft(X)
  x =    1  -2   1   3
```

Teniendo en cuenta la relación entre los coeficientes de la DTFS y de la DFT (5) podemos usar la operación fft para calcular la DTFS:

```
c = (1/N)fft(x)
```

Donde N es el periodo de la señal y x es un vector con exactamente un periodo de la señal.

La IDTFS se calcularía como:

```
x = N*ifft(c);
```

Desplazamiento y *padding*

A la hora de representar coeficientes es habitual representar el cero de abscisas en el centro para que aparezcan a ambos lados las frecuencias negativas y positivas. Esta representación facilita el identificar simetrías.

Octave proporciona el comando fftshift para hacer este desplazamiento en la representación de la señal.

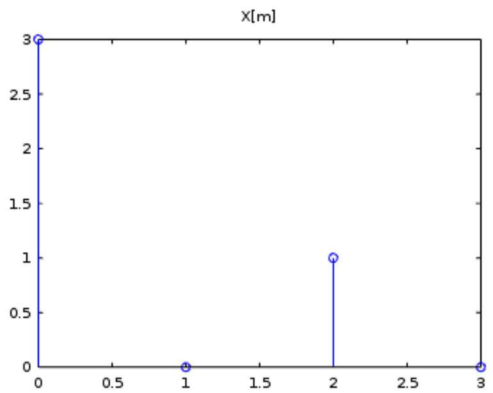
La Figura 6 (a) muestra la representación de los coeficientes de la DFT del «Ejemplo 4» y la Figura 6 (b) muestra estos coeficientes después de haberles aplicado fftshift. Es decir:

```
x = [1 -2 1 3];
X = fft(x);
Xs = fftshift(X);
subplot(2,2,1), stem([0:3],X), title('X[m]');
subplot(2,2,2), stem([-2:1],Xs), title('Xs[m]');
```

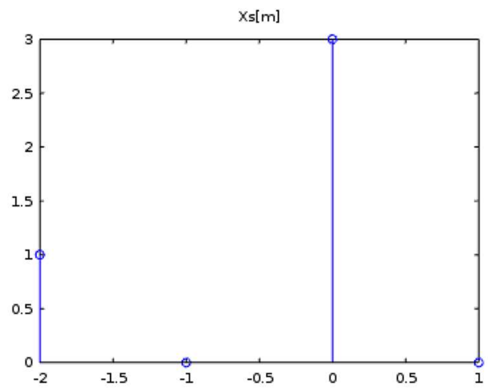

Podemos ver en la Figura 6 (b) que el eje no se ha quedado centrado debido a que tenemos un número par de muestras (N=4). En estos casos es habitual aplicar ***padding***, es decir, añadir una muestra al final para que N sea impar y así tener una representación centrada en el eje, es decir:

```
x2 = [1 -2 1 3 0];
X2 = fft(x2);
X2s = fftshift(X2);
subplot(2,2,3), stem([0:4],X2), title('X2[m]');
subplot(2,2,4), stem([-2:2],X2s), title('X2s[m]');
```

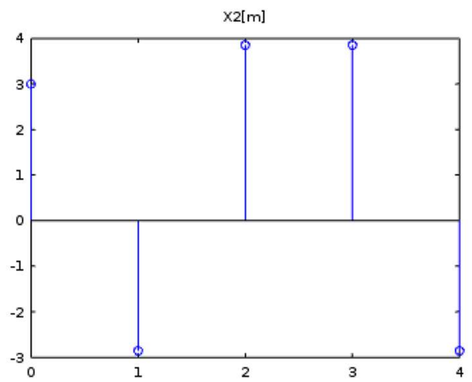
La Figura 6 (c) muestra estos nuevos coeficientes y la Figura 6 (d) muestra el resultado de centrarlos en el eje.



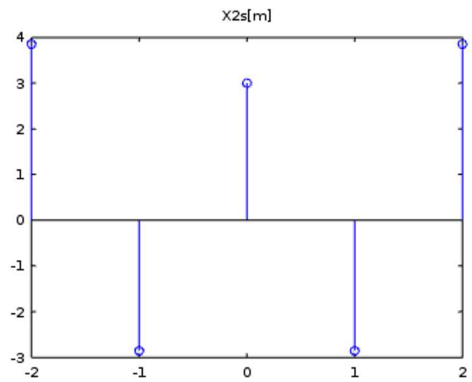
(a) $X[m]$ con N=4



(b) fftshift($X[m]$) con N=4



(c) $X[m]$ con N=5



(b) fftshift($X[m]$) con N=5

Figura 6: representación de coeficientes

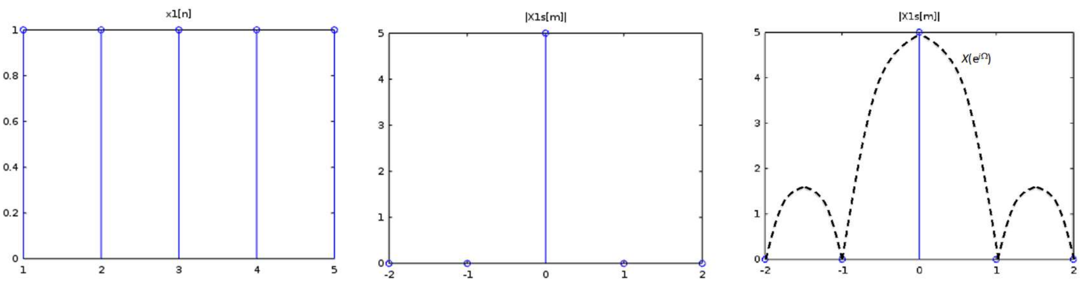
El *padding* no solo se utiliza para centrar los coeficientes, sino que también se utiliza para aumentar el número de valores N que se pasa a fft, y así mejorar la **resolución frecuencial** de una señal.

Para ver este efecto, la Figura 7 (a) muestra una onda rectangular con N=5 y la Figura 7 (b) muestra sus coeficientes.

Para obtener estas representaciones hemos usado:

```
x1 = [ones(1,5)];
X1 = fft(x1);
X1s = fftshift(X1);
subplot(2,2,1), stem(x1), title('x1[n]');
subplot(2,2,2), stem([-2:2], abs(X1s)), title('|X1s[m]|');
```

Podemos ver que la representación de la figura 7 (b) no nos da una visión clara de la forma de la DTFT correspondiente que es la que se muestra en la figura 7 (c).



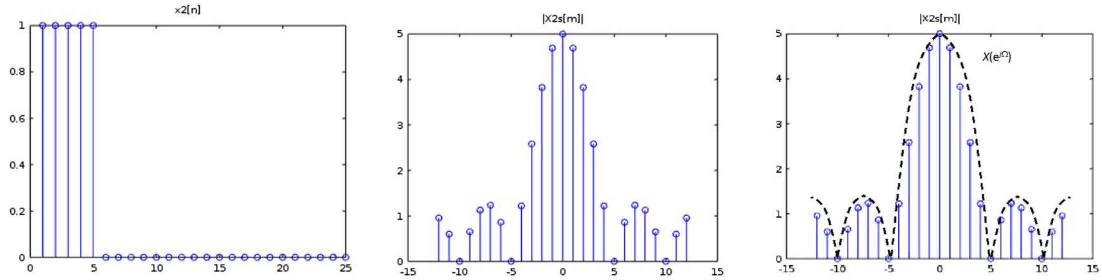
(a) Onda cuadrada N=5 (b) DFT (c) DTFT correspondiente

Figura 7: DFT de una onda cuadrada

Para mejorar la resolución frecuencial podemos aumentar el número de coeficientes haciendo *padding* a la señal en su representación temporal. Es decir:

```
x2 = [ones(1,5) zeros(1,20)];
X2 = fft(x2);
X2s = fftshift(X2);
subplot(2,2,3), stem(x2), title('x2[n]');
subplot(2,2,4), stem([-12:12], abs(X2s)), title('|X2s[m]|');
```


En la figura 8 se muestra la DFT y DTFT correspondientes, donde podemos ver que ahora los coeficientes de la figura 8 (b) son suficientes para intuir la forma de la figura 8 (c).



(a) Onda cuadrada N=25 (b) DFT (c) DTFT correspondiente

Figura 8: DFT de una onda cuadrada con mayor resolución frecuencial

Muestreo y relación con la FT

Dado que la que FT es una señal continua, para calcularla con un computador usaremos una aproximación numérica aplicando la DFT a muestras de la señal.

Siempre que el periodo de muestreo $\Delta t = t_s$ sea lo suficientemente pequeño es posible aproximar la ecuación de análisis de la FT a un sumatorio:

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jwt} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nt_s) e^{-jw(nt_s)} \cdot t_s$$

Donde $x(nt_s)$ son los valores muestreados de la señal de tiempo continuo cuya representación en tiempo discreto es $x[n]$. Si asumimos que $x(t)$ es nula fuera del intervalo $0 \leq t < T$ y que las N muestras están equiespaciadas de la forma $T = N \cdot t_s$, el sumatorio se extiende desde t=0 hasta $t = T - t_s$:

$$X(jw) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jw(nt_s)} \cdot t_s$$

Del estudio de la relación con la DTFT (6) sabemos que la DFT expresa una señal de tiempo discreto con frecuencias equiespaciadas en $\Omega = [0, 2\pi)$ donde:

$$\Omega_m = m\frac{2\pi}{N} \quad \text{con} \quad m = 0,\dots,N-1 \tag{7}$$

Observando que las N muestras en frecuencia estarán equiespaciadas con separación $\Delta w = \frac{w_s}{N} = \frac{2\pi}{N}f_s$, podemos relacionar las frecuencias de tiempo discreto de la DTFT Ω_m con las **frecuencias de tiempo continuo** w_m mediante la relación:

$$w_m = m\frac{2\pi}{N}f_s \quad \text{con} \quad m = 0,\dots,N-1 \tag{8}$$

Donde w_m son las frecuencias de muestreo de la FT. Y dado que $f_s t_s$=1 tenemos:

$$X(jw_m) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(m\frac{2\pi}{N}f_s)(nt_s)} \cdot t_s = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} \cdot t_s$$

Luego concluimos que la FT de la señal muestreada $X(jw_m)$ es igual a la ecuación de análisis de la DFT $X[m]$ multiplicada por el periodo de muestreo t_s:

$$X(jw_m) = X[m] \cdot t_s$$

Debemos tener en cuenta que (8) nos permite conocer las frecuencias angulares de tiempo continuo w_m que corresponden a cada coeficiente de la DFT. Si queremos conocer las **frecuencias cíclicas de tiempo continuo** f_m que corresponden a cada coeficiente de la DFT debemos hacerlo con la relación:

$$f_m = \frac{w_m}{2\pi} = m\frac{f_s}{N} \quad \text{con} \quad m = 0,\dots,N-1 \tag{9}$$

» **Ejemplo 5**: cálculo de las frecuencias de tiempo continuo.

¿Cuáles son las frecuencias de tiempo continuo correspondientes a cada coeficiente de la DFT de una señal $x[n]$ resultante de muestrear $x(t)$ con N=10 muestras y periodo de muestreo t_s=1/5000 seg/muestras?

Dado que f_s=5000 muestras/seg, y aplicando (9) las frecuencias de tiempo continuo son:

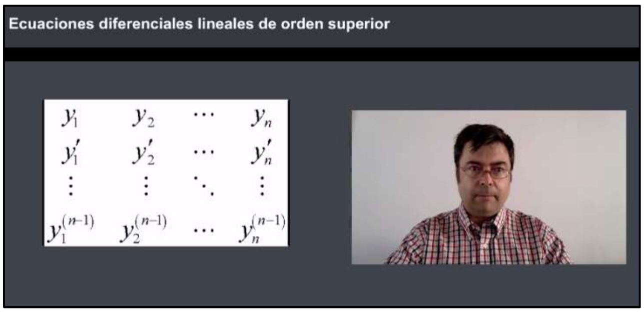
0, 500, 1000, 1500, 2000, 2500, 3000, 3500, 4000, 4500

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

En esta lección magistral se explican los conceptos vistos en la lección magistral anterior a las ecuaciones lineales de orden superior.



Accede a la lección magistral a través del aula virtual.

No dejes de leer…

Amplitude modularion fundamentals

Este artículo describe la modulación en amplitud incluyendo otros efectos como la sobremodulación.

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://www.pa2old.nl/files/am_fundamentals.pdf

Enlaces y diferencias entre el FS, FT, DFS, DTFT y DFT

Esta publicación describe la diferencia entre los distintos tipos de transformadas.

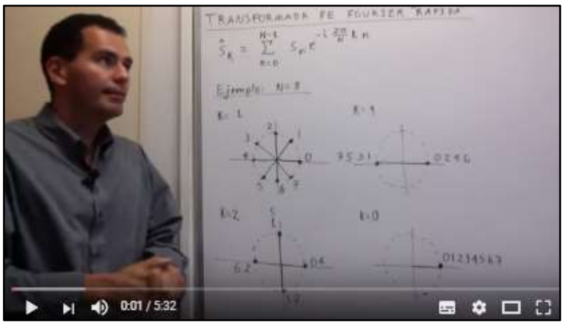
Enlaces y diferencias entre el FS FT DFS DTFT DFT

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://www.descargardocumento.com/download/16661245547/enlaces-y-diferencias-entre-el-fs-ft-dfs-dtft-dft/

No dejes de ver…

Transformada rápida de Fourier (FFT)

Este tutorial describe cómo se calcula la FFT que implementa la DFT.



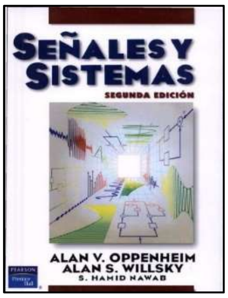
Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://www.youtube.com/watch?v=C4uDhkGgsGY

+ Información

A fondo

Señales y sistemas

Oppenheim, A. V., Willsky, A. S. y Hamid, S. (1998). *Señales y sistemas*. México: Pearson.

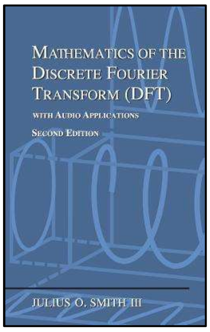


En las páginas 300-325 se describen las propiedades que hemos estudiado en este tema.

Accede al libro desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://books.google.es/books?id=g275oK3PxRYC&pg=PA300

Mathematics of the discrete Fourier transform (DFT)

Smith, J. O. (2007). *Mathematics of discrete Fourier transform(DFT)*. USA: BookSurge Publishing.



Este libro describe a fondo la DFT e incluye aplicaciones en el audio.

Accede al libro desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://books.google.es/books?id=fTOxS9huzHoC

Bibliografía

Oppenheim, A. V., Willsky, A. S. y Hamid, S. (1998). *Señales y sistemas*. México: Pearson.

Oppenheim, A, V. (2011). *Discrete-Time Signal Processing*. EE.UU.: Pearson.

Test

1. ¿Qué diferencia hay en la propiedad de linealidad entre la DTFS y la DTFT?

A. Los coeficientes.

B. El factor de escalado.

C. La necesidad de coincidencia en el periodo.

D. Ninguna de las anteriores.

2. ¿Dónde no se aprecia la propiedad de dualidad?

A. En la propiedad de linealidad.

B. En la propiedad de inversión temporal.

C. En la propiedad de escalado temporal.

D. En todas se aprecia.

3. Si $x(t)$ es una función real, entonces:

A. $\mathrm{Re}\{X(jw)\}$ es par y $\mathrm{Im}\{X(jw)\}$ es par.

B. $\mathrm{Re}\{X(jw)\}$ es par y $\mathrm{Im}\{X(jw)\}$ es impar.

C. $\mathrm{Re}\{X(jw)\}$ es impar y $\mathrm{Im}\{X(jw)\}$ es par.

D. $\mathrm{Re}\{X(jw)\}$ es impar y $\mathrm{Im}\{X(jw)\}$ es impar.

4. Si $x(t)$ es real e impar, entonces:

A. $X(jw) = \mathrm{Re}\{X(jw)\}$.

B. $X(jw) = j\mathrm{Im}\{X(jw)\}$.

C. $X(jw) = \mathrm{Re}\{X(jw)\} - j\mathrm{Im}\, X(jw)$.

D. $X(jw) = 0$.

5. ¿Qué diferencia hay en la relación de Parseval entre la DTFS y la DTFT?

A. Ninguna.

B. Una es periódica y la otra no.

C. Una es par y la otra impar.

D. El factor de escalado.

6. La función de transferencia es:

A. El ratio entre la salida y la entrada en el tiempo.

B. El ratio entre la salida y la entrada en frecuencia.

C. El ratio entre la respuesta al impulso y la entrada en el tiempo.

D. El ratio entre la respuesta al impulso y la entrada en frecuencia.

7. ¿Dónde se usa la convolución periódica?

A. En la FT.

B. En la DTFT.

C. En la FS.

D. Se puede usar en todas.

8. Para reconstruir una señal en AM debemos:

A. Multiplicar los espectros y pasar un filtro paso bajo.

B. Multiplicar los espectros y pasar un filtro paso alto.

C. Convolucionar los espectros y pasar un filtro paso bajo.

D. Convolucionar los espectros y pasar un filtro paso alto.

9. ¿Qué diferencia a la DTFS y de DFT?

A. La periodicidad.

B. El periodo.

C. El escalado.

D. Todas las anteriores.

10. ¿Cómo calculamos los coeficientes de la DTFS usando la DFT?

A. (1/N)·fft(x).

B. N·fft(x).

C. 2π·fft(x).

D. 1/2π·fft(x).

