

Sistemas físicos y sus modelos

[3.1] ¿Cómo estudiar este tema?

[3.2] Sistemas mecánicos

[3.3] Sistemas eléctricos

[3.4] Sistemas de fluidos

[3.5] Sistemas térmicos

[3.6] Procedimiento sistemático para derivar un modelo con diagramas de enlaces

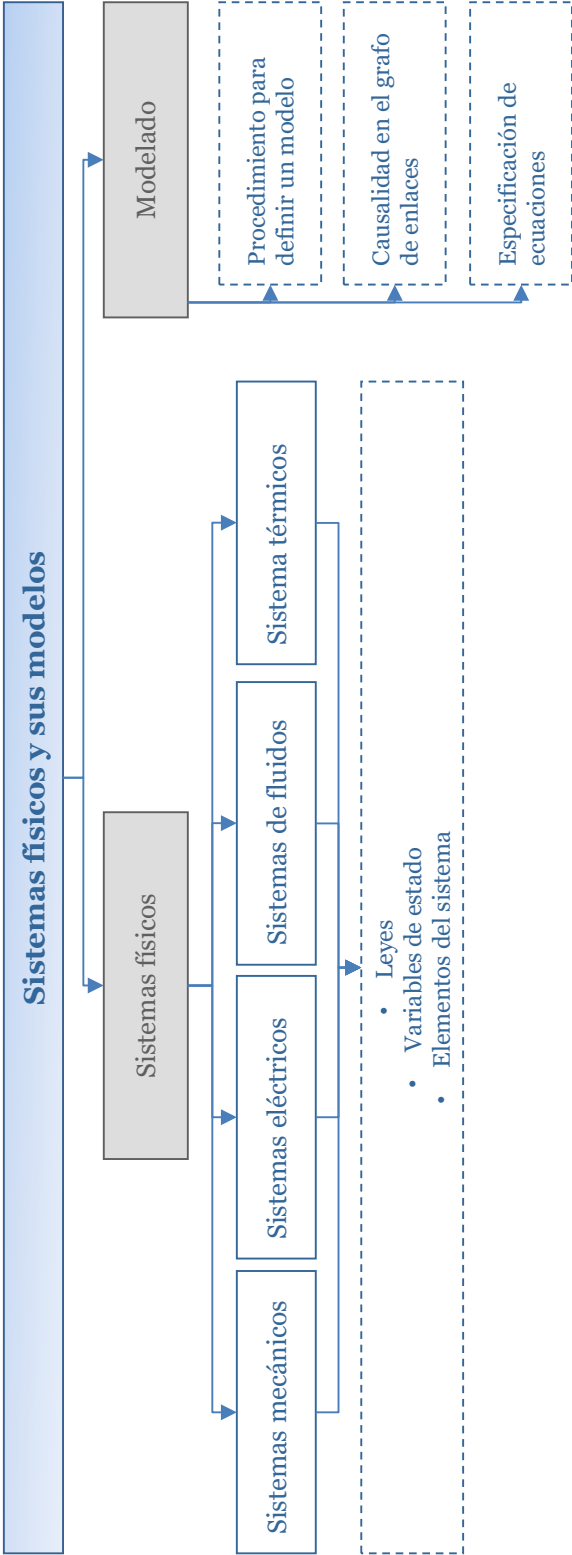
[3.7] Causalidad

[3.8] Referencias bibliográficas

3

T E M A

Esquema



Ideas clave

3.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

En este tema se tratarán cuatro tipos de sistemas físicos describiendo de manera específica los variables y elementos que los definen. Para su modelado es además imprescindible tratar y analizar las leyes físicas asociadas a cada tipo de sistema.

Las ideas claves de este tema son:

- » Sistemas mecánicos, leyes, variables y elementos.
- » Sistemas eléctricos, leyes, variables y elementos.
- » Sistemas de fluidos, leyes, variables y elementos.
- » Sistemas térmicos, leyes, variables y elementos.

Además se especificará un procedimiento sobre el modelado del sistema y la creación de diagramas de enlaces para la deducción de las ecuaciones

3.2. Sistemas mecánicos

Los sistemas mecánicos actúan sobre los cuerpos de forma que les imprimen movimiento. El movimiento puede ser un movimiento de traslación o un movimiento de rotación.

Para el modelado de este tipo de sistemas será necesario determinar las leyes de la física que les puede aplicar y de esta forma, extraer las ecuaciones del sistema.

Leyes fundamentales

En la mecánica clásica y para el modelado de sistemas, la ley que se aplica fundamentalmente es la segunda ley de Newton según la que se puede asegurar que la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él

e inversamente proporcional a su masa. Aunque son aplicables todas las leyes de Newton y el principio de D'Alembert.

- » **La segunda ley de Newton en un movimiento de traslación.** La segunda ley de Newton en este caso implica que la fuerza que actúa sobre la masa debe pasar por el centro de la masa para que no imprima a su vez un movimiento rotacional y la aceleración resultante se imprime en la misma dirección de la fuerza. La ley se enuncia como

$$\sum F = m \cdot a$$

Ecuación 1. Segunda ley de Newton de la mecánica de traslación

- » **Segunda ley de Newton en el movimiento de rotación.** En este caso, el par o fuerza de torsión para un cuerpo en rotación alrededor de un eje es igual al producto del momento de inercia alrededor del eje por la aceleración angular. Se denota según la siguiente ecuación

$$\sum \tau = J \cdot \alpha$$

Ecuación 2. Segunda ley de Newton de la mecánica rotacional.

- » **Sistema en equilibrio.** Según el principio de D'Alembert, un sistema en equilibrio está formado por las fuerzas aplicadas al sistema y las fuerzas de inercia

Variables del sistema para especificar el comportamiento

Las variables de estados de estos sistemas serán aquellas que permitirán conocer la energía almacenada por el sistema.

- » **En los sistemas de traslación, las variables de estado son la velocidad y la fuerza,** a partir de las que se conocerán la energía cinética y potencial, almacenadas. Como se verá posteriormente, el desplazamiento también puede ser considerado como una variable de estado porque está relacionado con la fuerza.
- » **En los sistemas de rotación, las variables de estado son la velocidad angular y el torque (par) o esfuerzo de torsión** y de forma equivalente a los anteriores, el desplazamiento angular debido a su relación con el esfuerzo de torsión.

Elementos mecánicos para traslación y rotación.

Para el modelado matemático de los sistemas mecánico, es necesario describir los elementos que los conforman y se tratarán de forma distinta para los sistemas mecánicos de traslación y los sistemas mecánicos rotacionales.

» **Elementos de los sistemas mecánicos de traslación.** De acuerdo con la clasificación de los sistemas vista en el tema anterior, se puede identificar los siguientes elementos:

- Fuentes de energías que establecen la manera en la que el sistema interactúa con el medio externo y existen dos formas: las que aplican una fuerza sobre el sistema y las que imprimen velocidad sobre el sistema.
- En los sistemas mecánicos de traslación la energía se almacena de dos formas distintas:
 - Energía potencial, para lo que se utiliza un resorte lineal para el que la deformación que se produce sobre el por efecto de una fuerza externa es directamente proporcional a ella. La constante de deformación se representa por k . Su representación gráfica es la siguiente

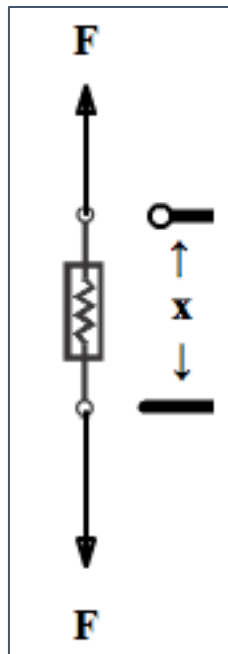


Figura 1 Resorte lineal y fuerza.

Las ecuaciones que representan el comportamiento del elemento y su dinámica se muestran a continuación

$$F = kx$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}(kx)$$

Ecuación 3. Ecuaciones de fuerza y energía potencial.

Los resortes se clasifican como *capacitores* o condensadores.

- Energía cinética. En este caso se tendrá que considerar una masa en movimiento. Su representación y ecuaciones del comportamiento y su dinámica se muestran a continuación.

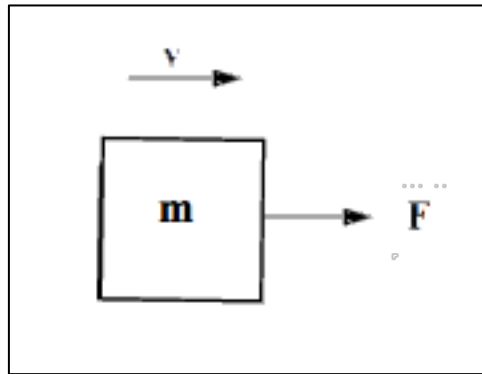


Figura 2. Masa en movimiento.

$$p = mv$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = F$$

Ecuación 4. Ecuaciones de energía cinética (momento) y fuerza.

Este elemento representa a un elemento pasivo de inercia.

- En estos sistemas existen elementos que provocan pérdidas de energía o que la transforman. Entre otros son:
 - Las resistencias que ocasionan pérdidas de energía en los sistemas mecánicos de translación debido a la fricción. Se debe definir la relación entre la fuerza de roce opuesta al movimiento y la velocidad relativa de los cuerpos que forman parte del movimiento.

En este tipo de sistemas también se consideran como resistencias, los amortiguadores que también provocan pérdidas. La fuerza que actúa sobre el amortiguador es proporcional a la velocidad a la que se mueve. En este caso, existirá un parámetro característico, el factor de amortiguación que se representa mediante una b .

$$F = bv = b \frac{dx}{dt}$$

Ecuación 5. Fuerza aplicada a un amortiguador.

- Existen también transformadores de energía, como puede ser una barra que transforma la energía en la misma que recibe o bien una polea

» **Elementos de los sistemas mecánicos de rotación.** De acuerdo con la clasificación de los sistemas vista en el tema 2, se puede identificar los siguientes elementos:

- Las fuentes de energías son dos la que proporciona un par o torque y las que imprimen una velocidad angular al sistema
- En los sistemas mecánicos de rotación, como en los anteriores, la energía se almacena en forma de energía cinética (elemento inercia) y energía potencial (elemento capacitor):
- Energía cinética puede ser almacenada mediante una masa que se encuentra rotando y se considera que existe el torque aplicado sobre la masa (τ), la velocidad angular a la que gira (ω) y el valor de inercia (J). La ecuación del momento angular (L) y la ecuación de la dinámica del elemento se muestran a continuación:

$$L = J\omega$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(J\omega) = \tau$$

Ecuación 6. Ecuaciones de cantidad de energía cinética almacenada y torque del sistema.

- La energía potencial para este tipo de sistemas puede ser almacenada por un resorte torsional, donde el desplazamiento relativo entre los extremos es representado por (ϕ) y la constante de elasticidad es (k_r).

Las ecuaciones que representan el comportamiento del elemento y su dinámica se muestran a continuación

$$\tau = k_T \varphi$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{dt}(k_T \varphi) = k_T \omega$$

Ecuación 7. Ecuaciones de fuerza y energía potencial.

Los resortes se clasifican como *capacitores* o condensadores.

- En estos sistemas, al igual que en los anteriores, se puede producir pérdidas de energía o que la transforman. Entre otros son:
 - Las resistencias, que representan las pérdidas de energía por fricción debidas al roce entre superficies o la resistencia del viento, establecen la relación entre la fuerza o par de rozamiento y la velocidad angular de los elementos involucrados. En este caso, existen igualmente los amortiguadores rotacionales y el par aplicado al amortiguador es proporcionar a la velocidad angular con la que se mueve.

$$\tau = b\omega$$

Ecuación 7. Par o esfuerzo de torsión aplicado a un sistema rotacional.

- Los transformadores de energía generalmente están representados por engranajes formados por varias ruedas cutas fuerzas y velocidades están asociadas.

» **Algunos ejemplos de modelado.** Ejemplo 1. Sistema mecánico de traslación.

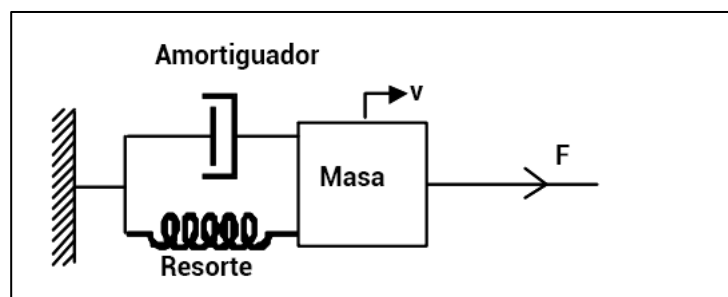


Figura 3. Sistema de resorte con masa amortiguada.

En el sistema que se presenta en la «Figura 3» se distinguen como fuentes de energía sobre la masa, la velocidad y la fuerza. La potencia intercambiada en el sistema será $P=Fv$

Se debe considerar el siguiente sistema de fuerzas fuerza de un amortiguador F_a con coeficiente de amortiguación b , las correspondiente al resorte F_r con coeficiente k , la fuerza sobre la masa F_m y la fuerza aplicada F

$$F_a = bv$$

$$F_r = kx$$

$$F_m = m \frac{dv}{dt}$$

En la siguiente figura se muestra el diagrama de enlaces con la representación de los elementos de formas distintas, en los que además se muestran las analogías con los sistemas eléctricos

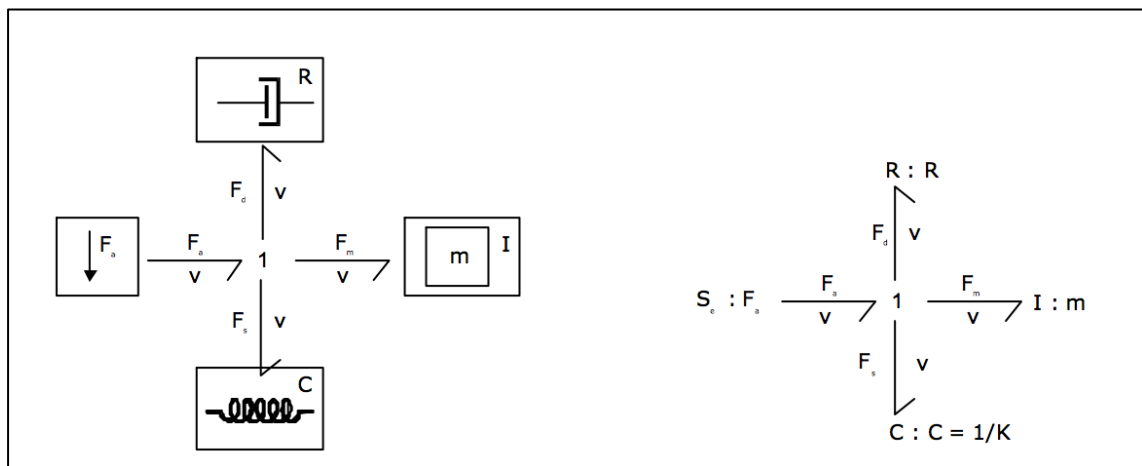


Figura 4. Diagramas de enlaces con símbolos mecánicos y símbolos estándar (fuente: (Broenink, 1999).

Se ha creado un nudo de unión 1, porque las velocidades que entran y salen de la unión se mantienen constantes.

Los sistemas mecánicos se dividen en sistemas mecánicos de traslación y sistemas mecánicos de rotación. Las variables de estado son la fuerza y la velocidad para los sistemas de traslación y el par o esfuerzo de torsión y velocidad angular para el sistema de rotación. La energía se almacena en forma de energía potencial y energía cinética

3.3. Sistemas eléctricos

En los sistemas eléctricos y para su modelado y resolución es importante tener en cuenta las **leyes de Kirchoff** que se definen de la siguiente forma.

La suma algebraica de todas las corrientes que entran y salen de un nodo es cero, es decir, la suma de las corrientes que entran en un nodo es igual a la suma de las corrientes que salen de él.

La suma algebraica de los voltajes en los extremos de un circuito eléctrico es cero, lo que es equivalente a decir que la suma de las caídas de voltaje es igual a la suma de las subidas de voltaje.

Variables del sistema

Las variables de estado de los sistemas eléctricos son la corriente (***I***) y la caída de potencial o voltaje representado por ***V***.

Elementos de almacenamiento de energía y disipadores

- » **Fuentes de energía:** en este tipo de sistemas las fuentes de energía son de dos tipos: las que da lugar a un flujo de corriente y las que producen una diferencia de voltaje.
- » **Almacenadores de energía:** al igual que en los sistemas anteriores, en estos sistemas se identificarán almacenadores de inercia y capacitores.
 - Un inductor es un elemento de inercia que almacena la energía, la ecuación que representa la dinámica del elemento se expresa en función de la variable de estado ***I*** que representa la corriente que circula por el elemento y ***V*** es la caída de potencial entre sus extremos. ***L*** es el parámetro fijo conocido como inductancia.

$$\phi = LI$$

$$L \frac{dI}{dt} = V$$

Ecuación 8. Cantidad de movimiento electro-cinético o flujo y voltaje.

- Un condensador o capacitor, cuenta con un parámetro característico ***C*** conocido como capacitancia, y tendrá como ecuación representativa de su dinámica la que

se muestra a continuación, en la que I y V_C , representa la corriente y la caída potencial entre extremos, respectivamente.

$$Q = CV_C$$

$$C \frac{dV_C}{dt} = I$$

Ecuación 9. Cantidad de carga y corriente.

Disipadores:

- Las resistencias en los sistemas eléctricos son los causantes de las caídas de voltajes. La ecuación siguiente representa el comportamiento del elemento:

$$V = RI$$

Ecuación 10. Ley de Ohm.

Donde la I representa la corriente circulante, V representa la caída de potencial y la R es la resistencia del elemento.

- Los transformadores eléctricos modifican tanto la corriente como la caída de potencial y sus ecuaciones representan la relación de transformación

$$I_1 = nI_2$$

$$V_1 = \frac{1}{n} V_2$$

Ecuaciones 11. Transformadores eléctricos.

3.4. Sistemas de fluidos

Las leyes que se deben de considerar para este tipo de sistemas son entre otras, la ley de conservación de la masa, la ley de Pascal y leyes equivalentes a las de Kirchoff como son la ley de la continuidad y la ley de la compatibilidad.

1	La ley de conservación de la masa establece que para un fluido con densidad constante, el volumen permanece constante.
2	La ley de Pascal establece que la presión ejercida sobre un fluido que no se puede comprimir y en equilibrio dentro de un recipiente de paredes indeformables se transmite con igual intensidad en todas las direcciones y en todos los puntos del fluido.
3	Las leyes de continuidad y compatibilidad establecen la conservación de la masa y la conservación de la energía, respectivamente.

Variables del sistema

Las variables de estado en este tipo de sistemas son el caudal representado por Q y la presión que se denota mediante P .

Elementos de almacenamiento y de transformación de la energía

Al igual que en los otros sistemas ya analizados, es necesario identificar los elementos que son fuente de energía, los almacenadores y los disipadores de la energía.

Elementos fuente de energía: entre las fuentes de energía se deben considerar los que ejercen presión sobre algún punto del sistema y los que proporcionan caudal.

Elementos almacenadores de energía: los elementos capaces de almacenar energía como ya se ha visto en los otros sistemas serán de tipo inercia y de tipo capacitor.

- El propio fluido que se desplace por una tubería será considerado como un elemento inercia y se pueden establecer relaciones entre el caudal representado por Q , las expresiones que se producen en los extremos de la tubería y la densidad del fluido representado por ρ .

La ecuación de la energía almacenada y la correspondiente a la presión se muestran a continuación, donde v es la velocidad lineal del fluido, A representa el área transversal de la tubería y l su longitud

$$\Gamma = (\rho Al)v$$

$$P = \frac{1}{A} \frac{d}{dt}(\rho l Q)$$

Ecuación 12. Momento del fluido y presión.

- El elemento de almacenamiento de la energía potencial o capacitor. Para deducir las ecuaciones es necesario considerar su área transversal denotada por **A**, la altura del fluido contenido en él y que será representada por **h**, la presión en el fondo (**P**), la presión atmosférica que será representada por **P_o** y los caudales de entrada y salida, **Q_E** y **Q_S**, respectivamente.

$$P = \rho gh$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho g}{A} V \right) \text{ si la densidad y el area son ctes. se obtiene}$$

$$\left(\frac{A}{\rho g} \right) \frac{dP}{dt} = \frac{dV}{dt} = Q_E - Q_S$$

Ecuación 13. Energía potencial y variación del caudal.

Elementos disipadores de energía. Entre los elementos disipadores de energía se considerarán:

- Las resistencias en estos sistemas pueden ser accesorios que provocan pérdidas de presión o rugosidades en las tuberías que provocarían el mismo efecto.
- Los transformadores de energía pueden ser pistones que transforman la presión y el caudal en fuerza y velocidad o transformadores de fluidos combinados.

3.5. Sistemas térmicos

Estos sistemas están regidos por las leyes de la termodinámica.

Variables del sistema

Las variables de estado de estos sistemas son la temperatura y el flujo de calor.

Elementos de almacenamiento y transformación de la energía

La única clase de energía que es almacenada por los sistemas térmicos es el calor, que está relacionada con el flujo de calor y por tanto para este sistema no se definen inercias, únicamente *capacitores*.

A su vez los disipadores representarán mecanismos de transferencia de calor y siempre que la transferencia se produzca entre dos elementos del mismo sistema no se considera una pérdida de energía.

- » **Elementos fuente de energía.** Estos elementos son de dos tipos, los que imprimen temperatura en algunos puntos del sistema y los que proporcionan al sistema un flujo de calor.
- » **Elementos almacenadores de energía.** Como ya se ha mencionado, la única forma de almacenamiento es el almacenamiento de calor y los *capacitor* que lo almacenan pueden ser representados por masas que se encuentra a una temperatura y con un calor específico y que están sometidos a un flujo de calor o bien pueden ceder calor al ambiente externo.

El calor almacenado y la dinámica de este elemento se determinan mediante las siguientes ecuaciones

$$mC_pT = Q$$

$$\frac{d}{dt}(mC_pT) = \dot{Q} = q$$

Ecuación 14. Calor y flujo de calor.

En estas ecuaciones se usan los parámetros m de la masa, C_p del calor específico y las variables temperatura T y la cantidad de calor almacenado Q . El flujo de calor q está determinado por la derivada de la cantidad de calor almacenado.

» **Elementos disipadores.** Existen diferentes tipos de transferencia de calor, por conducción, por convección y por radiación. Las diferencias entre ellos estriba en los cuerpos implicados en la transferencia.

- En la transferencia por conducción están implicados dos cuerpos sólidos y la ecuación correspondiente es la siguiente donde Δx y ΔT representan la distancia que separa los centros térmicos y la diferencia de temperatura entre los elementos y A es el área de transferencia y k la constante de conductividad térmica del material de los cuerpos implicados.

$$\dot{Q}_{cond} = \frac{kA}{\Delta x}(\Delta T)$$

Ecuación 15. Transferencia por conducción.

- En la transferencia por convección están implicados un cuerpo sólido y un fluido o dos fluidos. En la ecuación se utilizan algunas de las magnitudes de la ecuación anterior y h que es el coeficiente de convección.

$$\dot{Q}_{conv} = hA(\Delta T)$$

Ecuación 16. Transferencia por convección.

- La transferencia por radiación se produce entre un sólido y un objeto luminoso, donde $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ es la constante de *Stefan-Boltzmann*.

$$\dot{Q}_{rad} = \sigma A T^4$$

Ecuación 17. Transferencia por radiación.

3.6. Procedimiento sistemático para derivar un modelo con diagramas de enlaces

Broenink (1999) propone la realización de una serie de pasos hasta obtener el diagrama de enlaces que representa un sistema, que básicamente consiste en la identificación del dominio y los elementos presentes en el sistema y posteriormente la construcción de la estructura que lo representa. Las etapas son:

Paso 1	Determinar los dominios físicos que existen en el sistema y todos los elementos básicos. Asignar a cada elemento un nombre único para distinguirlos de los demás.
Paso 2	Incorporar al modelo físico ideal las variables del sistema (sólo en los sistemas mecánicos, la velocidad tiene dirección y en este caso referenciar la velocidad con dirección positiva).
Paso 3	Identificar el resto de variables y asignarles un nombre único.
Paso 4	Dibujar los distintos flujos por uniones 0 y en los sistemas mecánicos por uniones 1.
Paso 5	Identificar todas las diferencias que se necesitan para conectar los puertos de los todos los elementos enumerados en la etapa 1 a la estructura de unión. Nombrarlas de forma que el nombre muestre la diferencia de naturaleza.
Paso 6	Construir las diferencias usando un nudo de unión 1 (en los sistemas mecánicos, nudos de unión 0).
Paso 7	Conectar los puertos de todos los elementos con las uniones 0.
Paso 8	<p>Simplificar el grafo resultante aplicando las siguientes reglas: se puede omitir una unión entre dos enlaces si uno es un enlace entrante y el otro saliente.</p> <ul style="list-style-type: none"> • A. Se pueden omitir un enlace entre dos uniones que son la misma y todas las uniones se pueden unificar en una sola. • B. Dos estructuras idénticas que representen esfuerzos o flujos se pueden unir en un único esfuerzo o flujo.

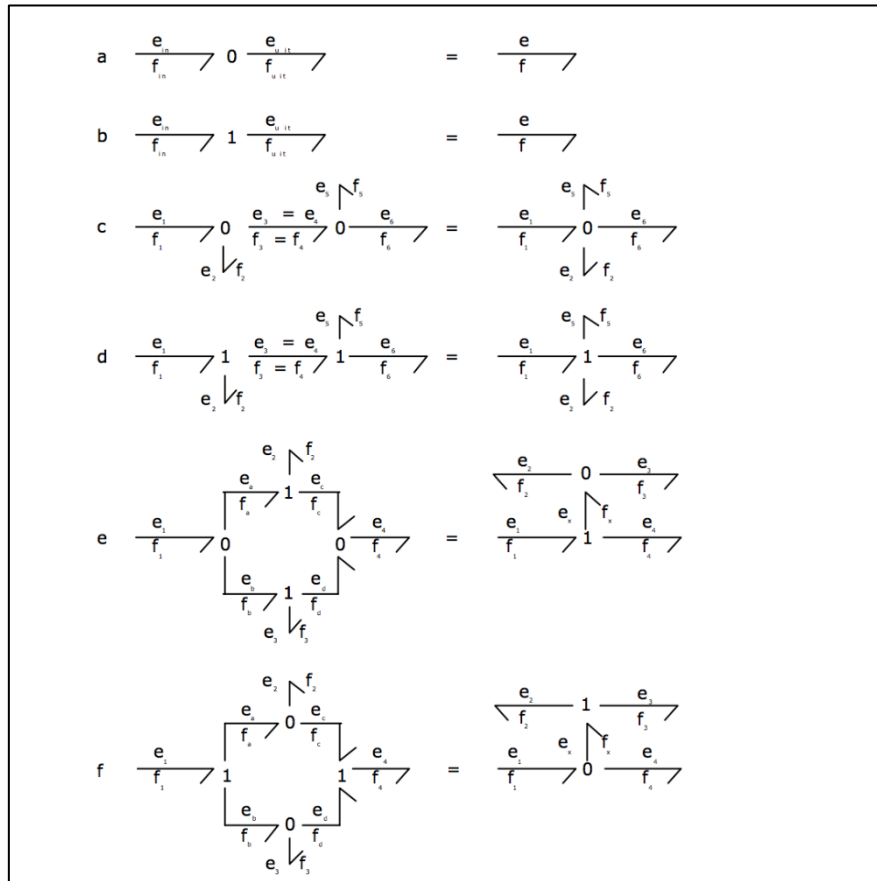


Figura 5. Reglas de simplificación. (a,b) eliminación A. (c,d) eliminación B. (e,f) eliminación C.
Fuente: Broenink, 1999.

El ejemplo de modelado de un sistema complejo (Broenink, 1999) que se va a desarrollar representa un sistema que consta de un motor eléctrico alimentado mediante la red eléctrica, un tambor de cable y una carga.

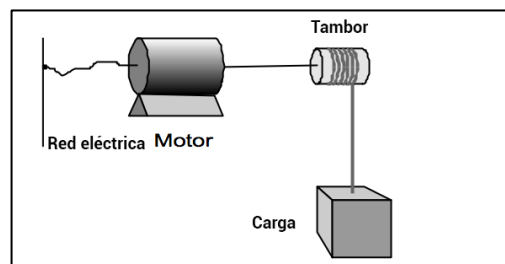


Figura 6. Esquema del sistema.

En la construcción del modelo físico ideal se puede considerar la red eléctrica como una fuente de voltaje. En el electromotor, se tienen en cuenta la inductancia, la resistencia eléctrica de las bobinas, que tienen un cojinete de fricción e inercia de rotación. El tambor de cable es la transformación de la rotación a la translación y la carga consta de una masa y de la fuerza de la gravedad.

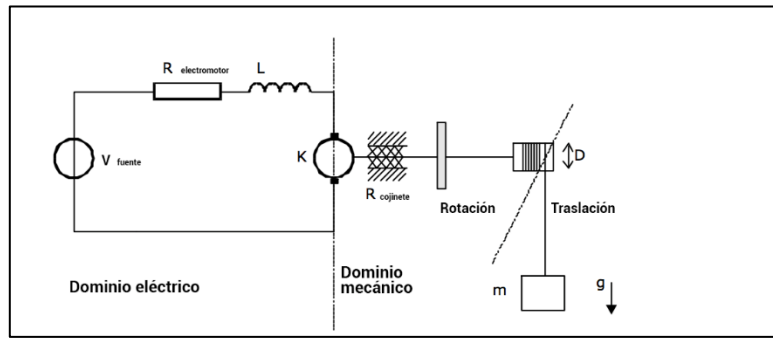


Figura 7. Modelo físico ideal con información de dominios.

» **Paso 1.** El sistema consta:

- Una parte de dominio eléctrico con una fuente de voltaje (Se), una resistencia (R), un inductor (i) y un puerto eléctrico del electromotor (GY).
- Un dominio mecánico de rotación con un puerto de rotación del electromotor (GY), un cojinete de fricción (R), inercia (I) y el eje del tambor (TF).
- Una parte de dominio mecánico de traslación con el cable del tambor (TF), la masa de la carga (I) y la fuerza de gravedad actuando sobre la masa (Se).

» **Paso 2.** Se incorporan las variables de estado al modelo físico ideal.

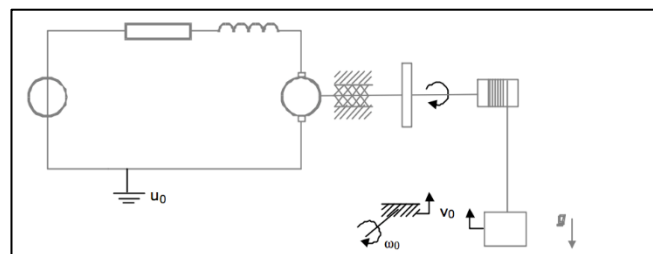


Figura 8. Modelo físico ideal con variables.

u_0 representa el voltaje, ω_0 la velocidad angular y v_0 la velocidad lineal.

» **Paso 3.** El resto de variables significativas será:

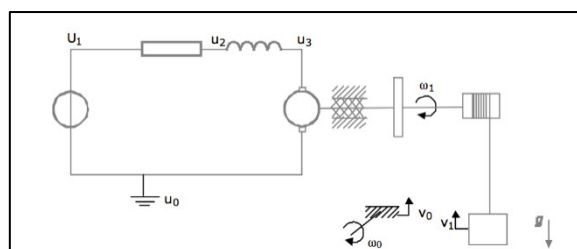


Figura9. Modelo físico ideal aumentado.

- » **Paso 4.** Los voltajes se muestran como uniones 0 y las velocidades como uniones 1. No se muestran aquellas que no contribuyen al comportamiento dinámico.

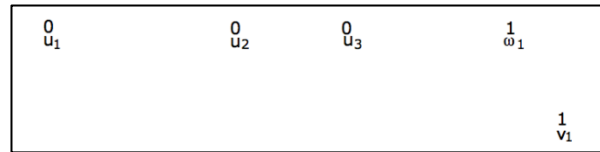


Figura 10. Esbozo inicial del gráfico de enlaces.

- » **Paso 5.** Solo se identifican diferencias en los voltajes, de forma que se ha identificado u_{12} y u_{23} .
- » **Paso 6.** Se dibuja el gráfico de enlaces con las variables diferencias identificadas.

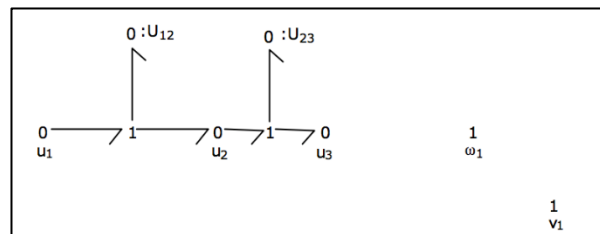


Figura 11. Diagrama de enlaces con las diferencias.

- » **Paso 7.** Se conectan todos los elementos mediante las uniones apropiadas. Los elementos del dominio no mecánico se conectan siempre con nudos de unión 0 y los elementos del dominio mecánico se conectan siempre con nudos de unión 1.

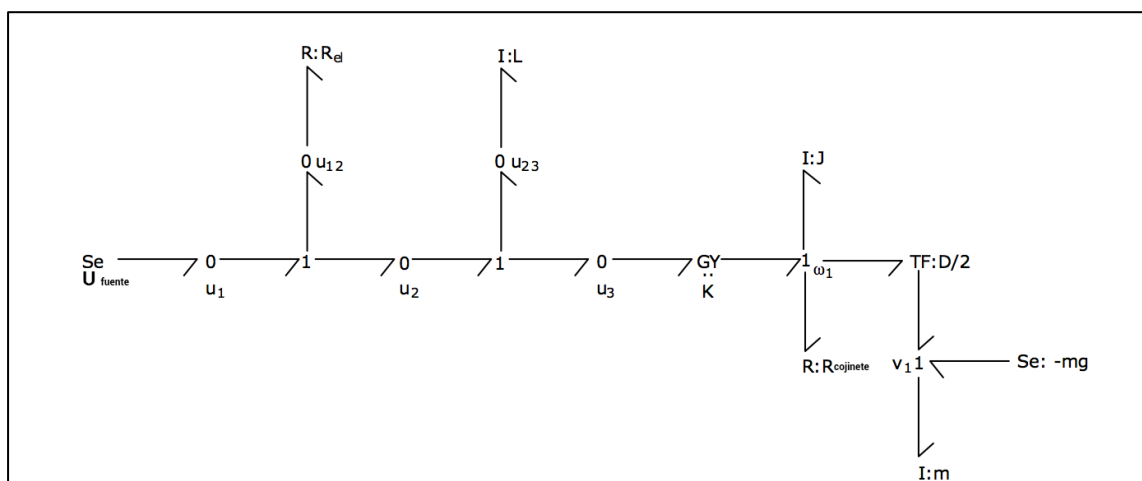


Figura 11. Diagrama de enlaces completo.

» **Paso 8.** Simplificación del diagrama:

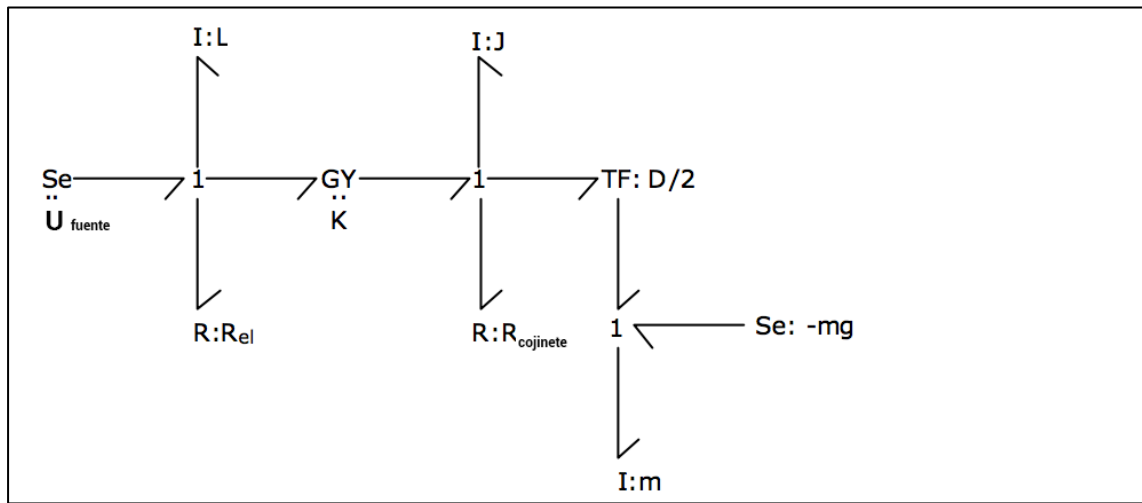


Figura 12. Diagrama de enlaces simplificado.

3.7. Causalidad

La causalidad consiste en determinar las dependencias entre las variables. Cuando la causa proviene del flujo, se colocará una barra perpendicular al grafo en el origen o parte posterior del mismo. Sin embargo, si la causa es el esfuerzo la barra perpendicular se sitúa en la punta del grafo. Se puede seguir una serie de reglas para determinar la causa en los distintos elementos de un grafo:

- » En las fuentes, la causa siempre es la fuente, es decir, si es una fuente de flujo la causa es el flujo y si no, será el esfuerzo.
- » Los transformadores no modifican la causalidad.
- » Los giradores cambian la causalidad en el grafo de salida con respecto al grafo de la entrada
- » En las uniones, si el grafo de entrada tiene causa flujo o causa esfuerzo, los demás grafos tendrán causa flujo o esfuerzo, respectivamente.

Según lo enumerado, el grafo de causalidad del ejemplo desarrollado queda como:

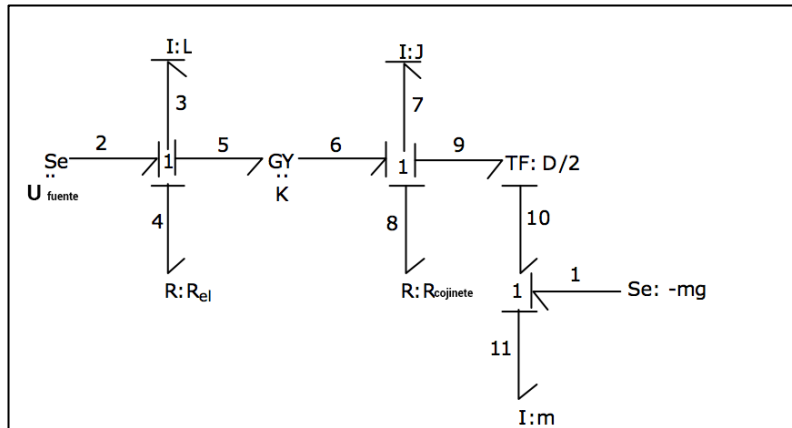


Figura 13. Grafo de enlaces de causalidad. Fuente: Broenink, 1999.

A partir de este grafo se pueden escribir las ecuaciones del modelo.

Dado que hay 11 enlaces se generan 11 ecuaciones que calculan el flujo y 11 ecuaciones que calculan el esfuerzo. Las ecuaciones se escribirán como ecuaciones diferenciales.

Ecuaciones

$$e_2 = U_{fuente} (fuente)$$

$$\frac{df_3}{dt} = \frac{1}{L} e_3 (inductor)$$

$$e_4 = R_{el} f_4 (resistencia)$$

$$\begin{cases} f_2 = f_3 \\ f_4 = f_3 \\ f_5 = f_3 \end{cases} \text{ (nudo de union 1)}$$

$$e_3 = e_2 - e_4 - e_5 \text{ (conservación de la energía)}$$

$$e_5 = K f_6 (girador)$$

$$e_6 = K f_5 (girador)$$

$$\frac{df_7}{dt} = \frac{1}{J} e_7 (inductor)$$

$$e_8 = R_{cojinete} f_8 (resistencia)$$

$$\begin{cases} f_6 = f_7 \\ f_8 = f_7 \\ f_9 = f_7 \end{cases} \text{ (nudo de union 1)}$$

$$e_7 = e_6 - e_8 - e_9 \text{ (conservación de la energía)}$$

$$\begin{aligned}
e_9 &= -\frac{D}{2} e_{10}(\text{transformador}) \\
f_{10} &= -\frac{D}{2} f_9(\text{transformador}) \\
\begin{cases} f_1 = f_{10} \\ f_{11} = f_{10} \end{cases} &(\text{nudo de union 1}) \\
e_{10} &= e_{11} - e_1(\text{conservación de la energía}) \\
e_1 &= -mg(\text{fuente}) \\
e_{11} &= m \frac{df_{11}}{dt}(\text{inductor})
\end{aligned}$$

Tras eliminación de identidades, sustitución de multiplicaciones y sumas se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{df_3}{dt} &= \frac{1}{L} U_{fuente} - \frac{R_{el}}{L} f_3 - \frac{K}{L} f_7 \\
\frac{df_7}{dt} &= \frac{K}{J} f_3 - \frac{R_{cojinete}}{J} f_7 + \frac{D}{2} m \frac{df_{11}}{dt} + \frac{D}{2} mg \\
f_{11} &= -\frac{D}{2} f_7
\end{aligned}$$

A partir del grado de enlaces de causalidad se pueden obtener las ecuaciones del sistema aplicando las leyes del sistema. Las ecuaciones obtenidas generalmente son ecuaciones diferenciales

3.8. Referencias bibliográficas

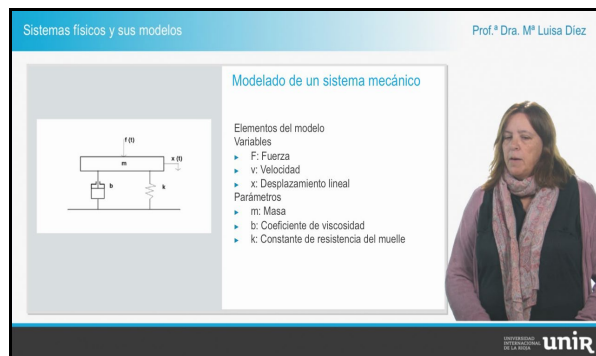
Broenink, J. F. (1999). Introduction to Physical Systems Modelling with Bond Graphs. *SiE Whitebook on Simulation Methodologies*, 1-31. Recuperado de <https://www.ram.ewi.utwente.nl/bnk/papers/BondGraphsV2.pdf>

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

Sistemas físicos y sus modelos

En la siguiente lección magistral presentaremos la forma de modelado de un sistema mecánico y de un sistema eléctrico para ver las funciones y analogías de ambos.



Accede a la lección magistral a través del aula virtual

No dejes de leer...

Introduction to Physical Systems Modelling with Bond Graphs

Broenink, J. F. (1999). Introduction to Physical Systems Modelling with Bond Graphs. *SiE Whitebook on Simulation Methodologies*, 1-31.

Artículo sobre el modelado de sistemas físicos mediante diagramas de enlaces.

Accede al artículo a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:

<https://www.ram.ewi.utwente.nl/bnk/papers/BondGraphsV2.pdf>

Tesis doctoral. Procedimientos optimizados utilizando métodos simbólicos para la simulación de sistemas dinámicos mediante Bond-Graph

Romero, G. (2005). Procedimientos optimizados utilizando métodos simbólicos para la simulación de sistemas dinámicos mediante Bond-Graph (Tesis Doctoral). Universidad Politécnica de Madrid, Madrid.

Tesis sobre la aplicación del método de Bond- Graph para la simulación de sistemas dinámicos

Accede al documento a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:

<http://oa.upm.es/89/1/05200512.pdf>

Curso modelado

Curso de técnicas de modelado en ingeniería mecánica

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

https://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-141-modeling-and-simulation-of-dynamic-systems-fall-2006/lecture-notes/block_diagrams_b.pdf

+ Información

A fondo

About Bond Graph

Documento sobre la construcción y análisis de los diagramas de enlaces.

Accede al documento a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:

http://groups.csail.mit.edu/drl/journal_club/papers/Samantaray_2001_www.bondgraphs.com_about.pdf

Representación de sistemas físicos

Documento con apuntes y ejercicios resueltos.

Accede al documento a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:

[http://prof.usb.ve/montbrun/Representacion de Sistemas%20\(junio%2007\).pdf](http://prof.usb.ve/montbrun/Representacion_de_Sistemas%20(junio%2007).pdf)

Causalidad Física versus Causalidad Computacional en Bond Graphs

Artículo sobre la aplicación de la causalidad computacional en la obtención del conjunto de ecuaciones matemáticas que componen el modelo de simulación.

Accede al artículo a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:

http://intranet.ceautomatica.es/old/actividades/jornadas/XXII/documentos/E_02_S.pdf

Bond-Graph modeling

Broenink, J. F. (1997). Bond-Graph modeling in modélica. European Simulation Symposium, Passau Germany.

Artículo sobre la librería de modelos de diagramas de enlaces implementada con el lenguaje Modelica.

Accede al artículo a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:

<https://www.modelica.org/publications/papers/ESS97w.pdf>

Bibliografía

Basmadjian, D. (2003). *Mathematical Modeling of Physical Systems: An Introduction*. Oxford: Oxford University Press. Recuperado de: <https://books.google.es/books?id=p2MdsfQ2teUC>

Montbrun. J. (2007). *Representación de Sistemas Físicos*. Recuperado de [http://prof.usb.ve/montbrun/Representacion de Sistemas%20\(junio%2007\).pdf](http://prof.usb.ve/montbrun/Representacion%20de%20Sistemas%20(junio%2007).pdf)

Ogata, K. (1987). *Dinámica de sistemas*. New Jersey: Prentice Hall & IBD.

Pérez, C. y Gracia, J. (2005). *Modelado de sistemas dinámicos. Aplicaciones*. Alicante: Editorial Club Universitario.

Wellstead, P. E. (2000). *Introduction to the Physical System Modelling*. Recuperado de: <http://bsiswoyo.lecture.ub.ac.id/files/2012/01/Introduction-to-physical-system-modelling.pdf>

Test

1. Dado un sistema físico:
 - A. Si es mecánico no se calcula el momento o almacenamiento de esfuerzo.
 - B. Si es eléctrico no se calcula el momento o almacenamiento de esfuerzo.
 - C. Si es de fluidos no se calcula el momento o almacenamiento de esfuerzo.
 - D. Ninguna es verdadera.

2. Las fuentes de energía de los sistemas mecánicos son:
 - A. La fuerza y el desplazamiento.
 - B. La velocidad y el desplazamiento.
 - C. La fuerza y la velocidad.
 - D. Todo lo anterior.

3. La transferencia de calor por convección tiene lugar entre (señale todas las correctas):
 - A. Dos cuerpos sólidos.
 - B. Un sólido y un fluido.
 - C. Dos fluidos.
 - D. Ninguna de las anteriores.

4. La presión y el caudal en un fluido representan:
 - A. El almacenamiento de esfuerzo y de flujo en un sistema eléctrico.
 - B. El almacenamiento de esfuerzo y de flujo en un sistema de fluidos.
 - C. La variable de esfuerzo y el almacenamiento de flujo en un sistema de fluidos.
 - D. Ninguna es verdadera.

5. En la unión 1 si un enlace o grafo de entrada en la unión tiene causa flujo:
 - A. Reflejan un esfuerzo constante en los enlaces de entrada y salida del nudo.
 - B. Reflejan un esfuerzo constante en los enlaces de entrada del nudo.
 - C. Reflejan un esfuerzo constante en los enlaces de salida del nudo.
 - D. Reflejan un flujo constante en los enlaces de entrada y salida del nudo.

- 6.** Para simplificar un diagrama de enlaces, una unión entre dos enlaces si uno es un enlace entrante y el otro saliente:
- A. Se puede omitir en todos los casos.
 - B. Se puede omitir solo si el flujo es constante.
 - C. Se puede omitir solo si el esfuerzo es constante.
 - D. Ninguna de las anteriores es verdadera.
- 7.** Un disipador en un sistema mecánico (señale todas las correctas):
- A. Es un elemento que transforma la energía como una polea.
 - B. Es un amortiguador que provoca pérdida de energía.
 - C. Almacena energía potencial.
 - D. Ninguna de las anteriores es verdadera.
- 8.** El momento lineal representa:
- A. La variación de la energía potencial.
 - B. La variación de la energía cinética.
 - C. La variación del volumen de un fluido.
 - D. Ninguna de las anteriores es cierta.
- 9.** Al derivar el momento se obtiene:
- A. La variable de esfuerzo.
 - B. La variable de flujo.
 - C. La cantidad energía almacenada.
 - D. Ninguna de las anteriores es verdadera.
- 10.** Para un sistema complejo:
- A. Se debe de crear un diagrama de enlace para cada dominio.
 - B. El diagrama de enlaces puede representar elementos de distintos dominios de forma conjunta.
 - C. No sirve para la representación de sistemas de fluidos.
 - D. Ninguna de las anteriores es cierta.