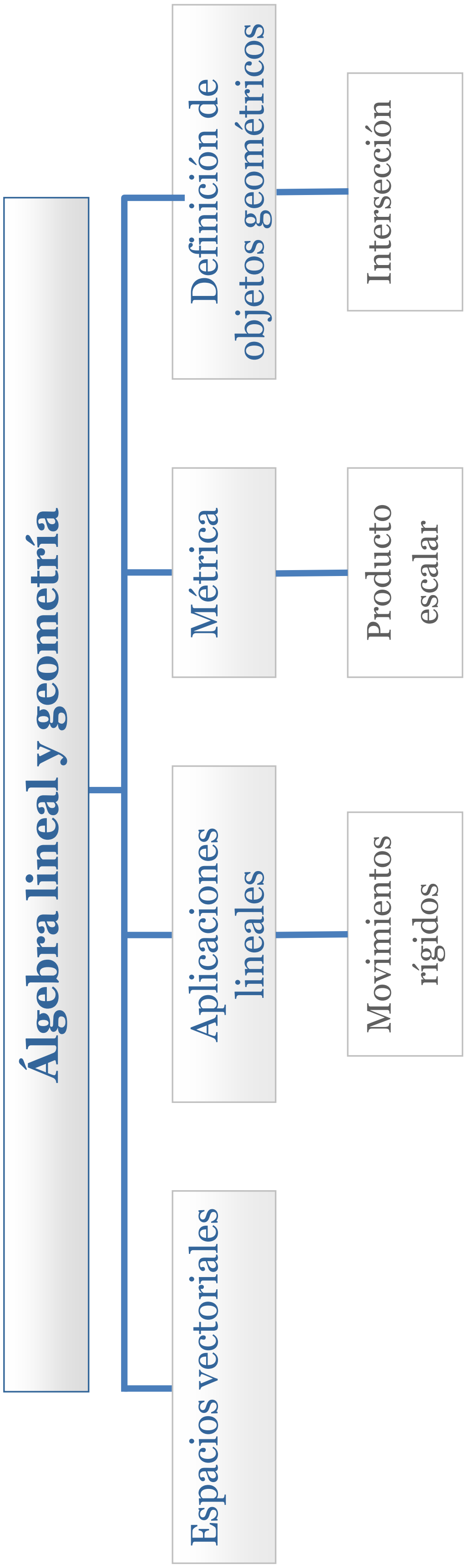
Introducción: álgebra lineal y geometría

TEMA 1

Esquema


Álgebra lineal y geometría
Espacios vectoriales
Aplicaciones lineales
Movimientos rígidos
Métrica
Producto escalar
Definición de objetos geométricos
Intersección

Ideas clave

1.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

En este tema se da un repaso a conceptos de álgebra y geometría básicos. Los aspectos más importantes de este tema son:

» Espacios vectoriales.
» Aplicaciones lineales.
» Movimientos rígidos.
» Métrica. Producto escalar.
» Definición e intersección de objetos geométricos.

El único concepto de repaso que no se ve en este tema es el espacio dual que se verá en el tema 12 de forma completamente aplicada.

1.2. Espacios y subespacios vectoriales

La definición formal de espacio vectorial no la vamos a ver, nos vamos a quedar con su versión más intuitiva. Un **espacio vectorial** E es un conjunto de elementos en el que siempre que se sumen dos elementos de E entre sí el resultado permanece dentro de E y siempre que se multipliquen por un número (que se llama escalar) el resultado también se queda dentro de E. Los elementos de un espacio vectorial se llaman **vectores**.

La definición formal de espacio vectorial simplemente detalla las propiedades de estas operaciones de suma y producto por escalar. Un **subespacio vectorial** es un espacio vectorial que está contenido en otro.

Ejemplos:

» $\mathbb{R}^2$ **(plano)**: puede verse que la suma de dos vectores (en azul) da como resultado un tercer vector que está dentro del plano (figura 1.1).

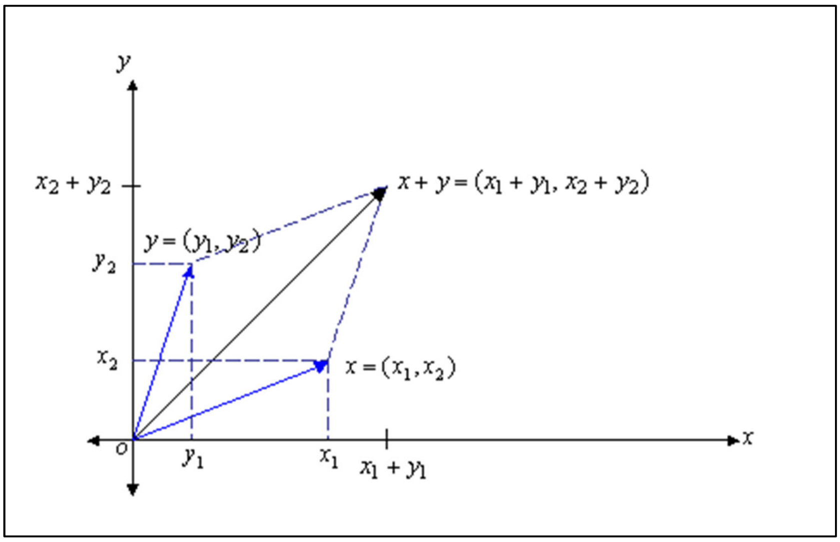


Figura 1.1**.** Espacio vectorial de dimensión 2.
Fuente: http://docencia.udea.edu.co/

» **Espacio trivial** $\{\vec{0}\}$: lógicamente, si sumamos el único elemento, el resultado pertenece al conjunto y si multiplicamos por cualquier escalar también. Su dimensión es cero.

» **Las rectas de la figura 1.2 son subespacios vectoriales de** $\mathbb{R}^2$. Es fácil ver que las rectas no tienen ningún subespacio vectorial propio, es decir, que no contienen a ningún subespacio vectorial que no sea la propia recta o el espacio trivial.

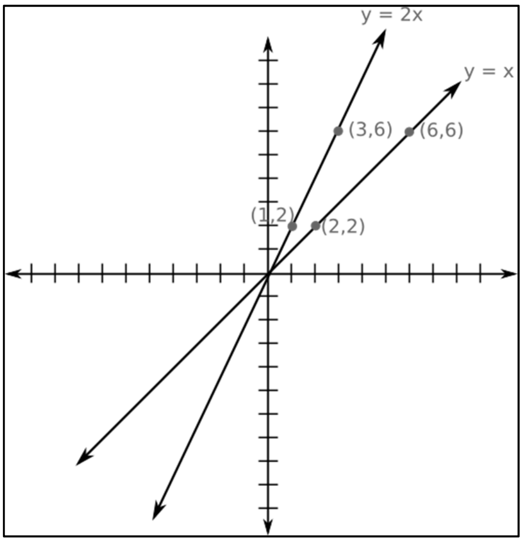


Figura 1.2. Subespacios vectoriales en el plano.
Fuente: http://eltamiz.com/

» En cambio, **la recta de la figura 1.3 no es un espacio vectorial**, ya que el vector suma de dos vectores de la recta no está en dicha recta. Este tipo de subespacios, que son espacios vectoriales desplazados del origen, se llaman **espacios afines**.

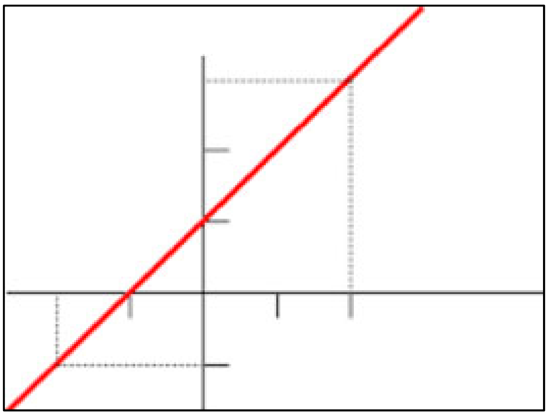


Figura 1.3. Espacio vectorial de dimensión 2.
Fuente: http://www.alcaste.com/

» **Un semiplano no es espacio vectorial**. Por ejemplo, si consideramos el semiplano sombreado en amarillo (figura 1.4), el vector $(-1,0)$ está en él pero el vector $-1 \cdot (-1,0)$ está en el otro semiplano.

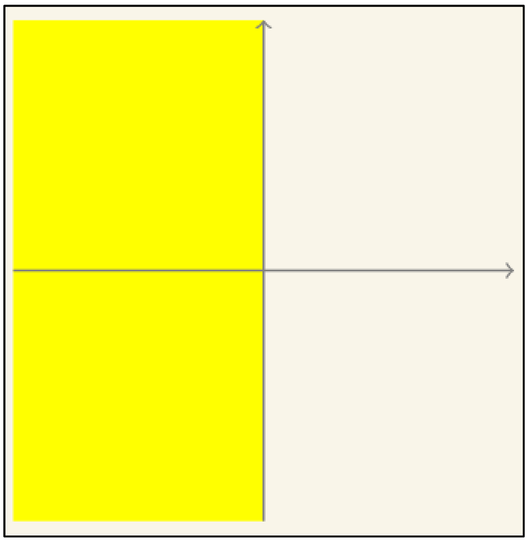


Figura 1.4. Semiplano.
Fuente: http://tex.stackexchange.com/

» **Matrices**. No todos los espacios vectoriales tienen una interpretación geométrica evidente. Por ejemplo, las matrices de orden 2×3 son espacio vectorial, ya que la suma de matrices de un mismo orden está definida y da como resultado otra matriz del mismo orden y lo mismo pasa con el producto de una matriz por un escalar.

Pero sabemos que el producto de matrices no es conmutativo (de hecho, ni siquiera tiene por qué estar definido, como en este caso) pero esto no supone ningún problema, ya que el producto que nos interesa en un espacio vectorial es el de un elemento del espacio por un escalar, no el de dos elementos entre sí.

Base de un espacio vectorial

La **base de un espacio vectorial** E es el número mínimo de vectores que pueden generar E. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ una base es $\{(1,0),(0,1)\}$ ya que cualquier vector del plano puede escribirse como $(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$. Es decir, puedo expresar cualquier vector del plano como una combinación lineal de elementos de la base.

Esta base es la más habitual pero hay infinitas. Por ejemplo, puede probarse que $\{(1,1),(2,3)\}$ también es una base de $\mathbb{R}^2$. En general, siempre que tengamos 2 vectores linealmente independientes tendremos una base del plano (necesitaremos 3 para el espacio y 6 para las matrices de orden 2×3).

La base que utilizamos habitualmente, $\{(1,0),(0,1)\}$ se llama base canónica o natural. Se utiliza tanto porque sus vectores tienen dos propiedades que hacen que los cálculos hechos en ella sean muy sencillos:

» Son ortogonales, es decir, forman un ángulo de 90º.
» Son normales, es decir, su longitud es 1.

Las bases que verifican estas condiciones se llaman **ortonormales**. Se deja como ejercicio describir alguna otra base ortonormal del plano. Si necesitas repasar el concepto de norma puedes ir al apartado 1.4 de este tema.

1.3. Aplicaciones lineales. Movimientos rígidos

Nos puede interesar definir funciones entre espacios vectoriales, veremos varios ejemplos a lo largo del curso. Si esas funciones mantienen la estructura lineal de los espacios se llaman **aplicaciones lineales**, es decir:

Dados E y E' espacios vectoriales, $f: E \longrightarrow E'$ es una **aplicación lineal** si para todo $x, y \in E$ y para todo escalar λ se cumple:
i. $f(x+y) = f(x) + f(y)$
ii. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Ejemplos:

» Supongamos que queremos llevar la base canónica de $\mathbb{R}^3$ a $\{(0,1,2),(-1,-1,-1),(1,2,3)\}$. Esta función puede expresarse de varias formas:

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos por la derecha por el vector columna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ se obtiene la expresión analítica:

$$f(x,y,z) = (-y+z, x-y+2z, 2x-y+3z)$$

Es muy sencillo comprobar que es aplicación lineal, se deja como ejercicio.

» **Cambio de escala**: supongamos que queremos hacer un cambio de escala en la aplicación anterior, de forma que se duplique la longitud de los vectores. Entonces la aplicación resulta:

$$2\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

» **Giro**: si queremos rotar un ángulo θ alrededor del eje X la matriz de la transformación queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

Movimientos rígidos

Los **movimientos rígidos** son aquellos que preservan la forma de todo lo que mueve sin distorsionarlo. Pueden ser aplicaciones lineales o afines (desplazamiento del origen).

En general, los movimientos rígidos en el espacio van a ser de la forma:

$Ax + b$, donde: A es una aplicación lineal que preserva las distancias y los ángulos (**isometría**) y b es un vector de $\mathbb{R}^3$.

La composición de movimientos rígidos también es un movimiento rígido.

Ejemplos:

» La función identidad que deja los puntos en el mismo sitio en que están es obviamente una isometría:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

» La aplicación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es una traslación: traslada el origen al punto $(1, 0, 1)$.

» Giro: los giros también son movimientos rígidos. Por variar el ejemplo anterior vamos a mostrar un giro alrededor del eje Y:

$$\begin{pmatrix} cos\theta & 0 & -sen\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ sen\theta & 0 & cos\theta \end{pmatrix}$$

1.4. Métrica y producto escalar

Cuando en un espacio vectorial o afín se introduce una distancia se obtiene un espacio métrico. Una **distancia** en un espacio E es una aplicación $d: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ en la que para todo x, y, z se verifica:

» (Positiva) $d(x, y) \geq 0, \forall\, x, y$. Además: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
» (Simétrica) $d(x, y) = d(y, x)$.
» (Desigualdad triangular) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Ejemplos:

» La distancia euclídea que para los puntos $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ se define como:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

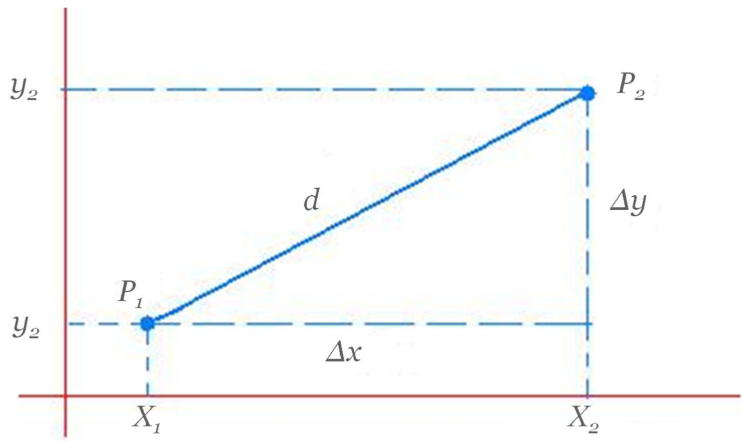


Figura 1.5. Semiplano.
Fuente: http://datateca.unad.edu.co/

Es sencillo comprobar que realmente es una distancia, es decir, que verifica las tres condiciones de la definición. La prueba se deja como ejercicio.

» Distancia discreta: es la distancia más sencilla que se puede definir:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, si\ x = y \\ 1, si\ x \neq y \end{cases}$$

La definición de distancia generaliza la distancia euclídea y son posibles muchas otras distancias. De la misma forma se define la **norma** como la generalización del módulo de un vector. Así, una norma es una aplicación $d: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ en la que para todo $x \in E$ y un escalar λ se verifica:

» (Positiva) $||x|| \geq 0$. Además, $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
» (Proporcional) $||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.
» (Desigualdad triangular) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

A partir de una norma es posible definir una distancia: $d(x, y) = ||x - y||$.

Ojo, el recíproco no es cierto.

Ejemplos:

» La norma que corresponde a la distancia euclídea se define como:

$$||x|| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}$$

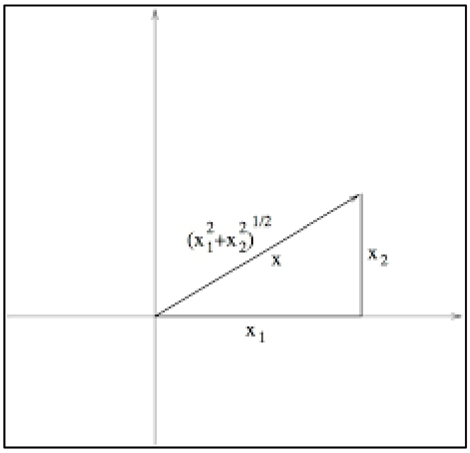


Figura 1.6. Norma euclídea.
Fuente: https://mathsimulationtechnology.wordpress.com/

» La distancia discreta no puede definir una norma. Sean x e y dos puntos de E, supongamos que puede definirse:

$$d(x,y) = ||x-y|| = ||z|| = \begin{cases} 1, si\ x \neq y \Leftrightarrow z \neq 0 \\ 0, si\ x = y \Leftrightarrow z = 0 \end{cases}$$

No se verifica la condición de proporcionalidad, por tanto no es una norma.

» Norma l_1 o norma del taxista:

$$||x||_1 = |x_1| + |x_2|$$

La figura 1.7 muestra la norma del vector que empieza y termina en uno de los puntos.

Esta norma se adecúa mejor que la euclídea a espacios que tienen una cuadrícula (por ejemplo, algunas ciudades).

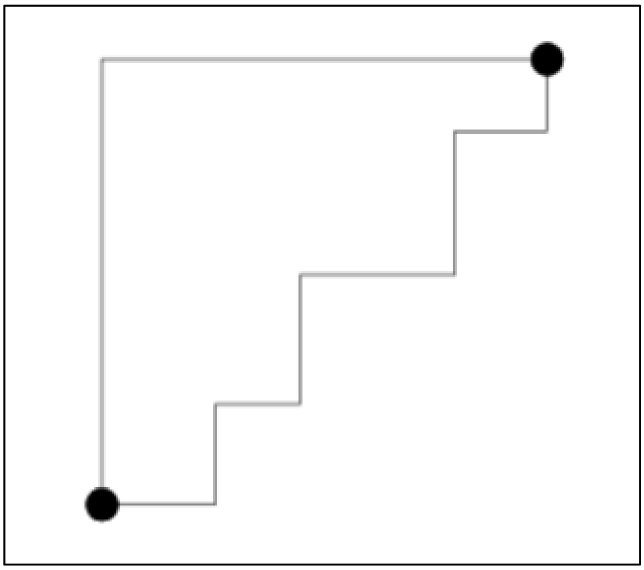


Figura 1.7. Norma l_1.

Fuente: http://inspirehep.net/

» Norma l_∞:

$$||x||_\infty = max\{x_1, x_2\}$$

La comprobación de que los dos últimos ejemplos son normas lo dejamos como ejercicio.

Por último, vamos a ver otro concepto relacionado con la métrica de un espacio: el **producto escalar**. Se va a utilizar muchísimo a lo largo del curso, por lo que conviene conocer bien su definición, propiedades e interpretación geométrica.

Un **producto escalar** o **producto interno** sobre un espacio E es una aplicación $<,>$ $: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ en la que para todo $x, y, z \in E$ y para todo escalar λ se verifica:

» $< x + y, z >=< x, z > +< y, z >$.
» $< \lambda x, y >= \lambda < x, y >$.
» $< x, y >=< y, x >$.
» $< x, x >\geq 0$. Además, $< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Nótese que el producto escalar, a diferencia de la distancia y la norma, puede ser menor que cero.

A partir de un producto escalar puede definirse una norma mediante la relación:

$$< x, x >= ||x||^2$$

Y puede probarse que:

$$< x, y >= \frac{1}{4}||x + y||^2 - \frac{1}{4}||x - y||^2$$

Ojo, el recíproco no es cierto.

Ejemplos:

» El producto escalar $< x, y >= x_1 y_1 + x_2 y_1$ también define la norma y la distancia euclídeas:

$$< x, x >= ||x||^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2$$

» La norma infinito no proceden de ningún producto escalar. Basta tomar como contraejemplo $x = (0,0)$, $y = (-1,-1)$, $z = (2,0)$.

Interpretación geométrica del producto escalar

Ya hemos visto que el producto escalar de un vector consigo mismo, $< x, x >= ||x||^2$ es su módulo al cuadrado.

El producto escalar de dos vectores distintos también tiene una interpretación geométrica clara, ya que puede probarse que:

$$< u, v >= ||u|| \cdot ||v|| \cdot cos\theta$$

Donde θ es el ángulo que forman (figura 1.8):

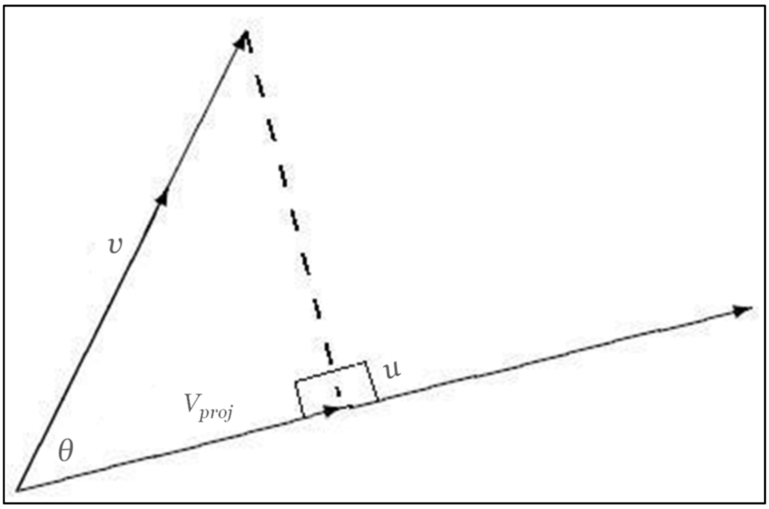


Figura 1.8. Interpretación geométrica del producto escalar.
Fuente: http://www.mathamazement.com/

Por tanto puede interpretarse como la proyección ortogonal de v sobre u.

Si u y v son perpendiculares entonces $cos\theta = 0 \Longrightarrow < u, v >= 0$.

Si u y v son paralelos entonces $cos\theta = 1 \Longrightarrow < u, v >= ||u|| \cdot ||v||$.

Producto vectorial

El producto vectorial de dos vectores u y v es un tercer vector perpendicular al plano que forman u y v:

$$u \times v = ||u|| \cdot ||v|| \cdot sin\theta \cdot n$$

Donde n es un vector normal unitario al plano que forman u y v y θ es el ángulo que forman u y v.

Hay dos vectores unitarios perpendiculares a un plano dado. Para saber cuáles se sigue la regla de la mano derecha.

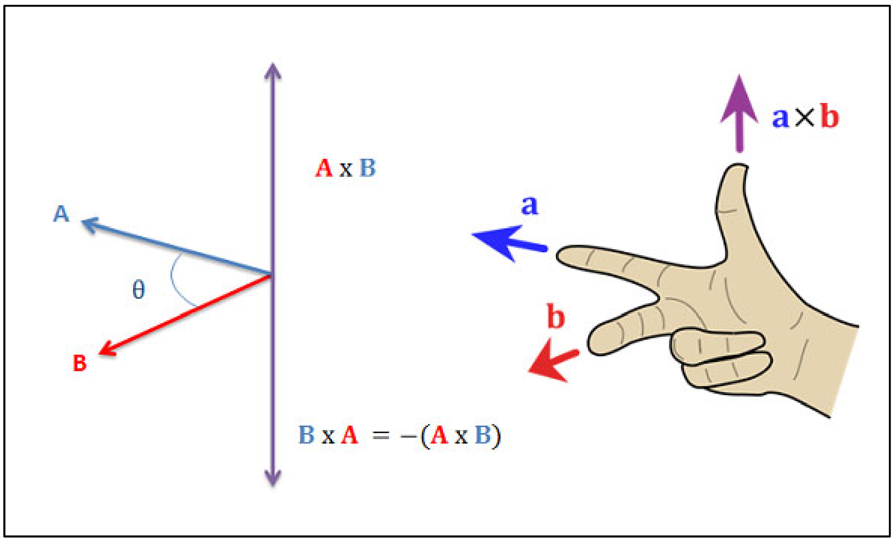


Figura 1.9. Representación del producto vectorial.
Fuente: http://adaptivemap.ma.psu.edu/

El producto vectorial no es conmutativo: si en vez de $u \times v$ consideramos $v \times u$ obtenemos un vector en la misma dirección y con el mismo módulo pero con sentido contrario.

Hay otra forma de calcularlo:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

Sean $u = (0,1,2)$ y $v = (1,1,0)$, calcular $u \times v$:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2i + 2j - k = (-2,2,-1)$$

1.5. Definición de objetos geométricos

Los objetos geométricos de esta sección pueden ser tanto lineales (pasan por el origen) como afines (están desplazados con respecto al origen). En esta sección vamos a ver las ecuaciones de algunos objetos sencillos que aparecerán más adelante. También nos servirá como repaso e introducción a la asignatura.

Planos en el espacio

» **Ecuación vectorial**: un plano puede determinarse a partir de dos vectores directores $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$ y un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ por el que pasa (figura 1.10):

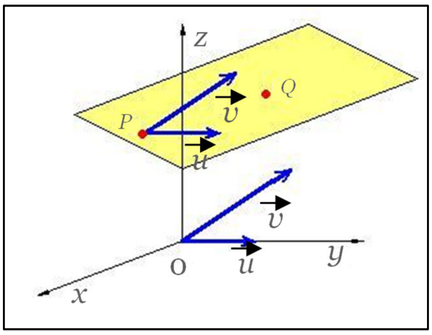


Figura 1.10. Vectores directores y punto de un plano.
Fuente: http://www.aulafacil.com/

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (u_1, u_2, u_3) + s \cdot (v_1, v_2, v_3)$$

» **Ecuaciones paramétricas**: la ecuación anterior puede expresarse como:

$$\begin{matrix} x = x_0 + tu_1 + tv_1 \\ y = y_0 + tu_2 + tv_2 \\ z = z_0 + tu_3 + tv_3 \end{matrix}$$

» **Ecuación implícita**:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow Ax + By + Cz + D = 0$$

Rectas en el espacio

Vamos a ver las distintas formas que hay de expresar la ecuación de una recta en el plano.

» **Ecuación vectorial**: un punto y un vector director determinan una recta en el espacio (figura 1.11). Por tanto, una expresión de la recta que pasa por un punto $A = (x_1, y_1, z_1)$ y tiene un vector director $u = (a, b, c)$ es:

$$r(t) = A + t \cdot u$$

con $t \in (-\infty, \infty)$

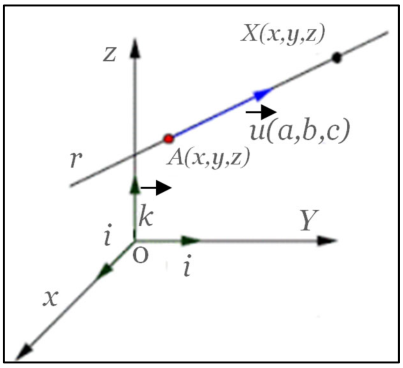


Figura 1.11. Punto de una recta y vector director.
Fuente: http://rafparedes.blogspot.com.es/

» **Ecuaciones paramétricas:** el sistema de ecuaciones asociado a la expresión anterior es:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t \cdot a \\ y &= y_1 + t \cdot b \\ z &= z_1 + t \cdot c \end{aligned}$$

» **Ecuaciones continuas**: despejando t en las ecuaciones paramétricas y despejando, resulta:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

» **Ecuaciones implícitas**: otra forma de definir una recta es como intersección de dos planos en el espacio, por:

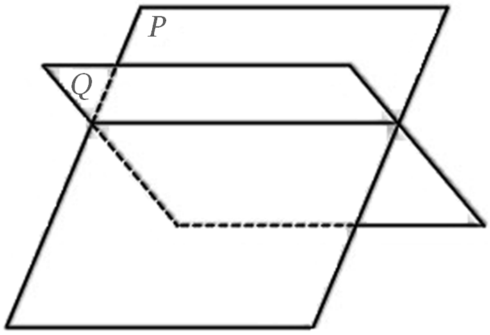


Figura 1.12. Recta como intersección de dos planos.
Fuente: http://www.lanubeartistica.es/

$$P: Ax + By + Cz + D = 0$$
$$Q: A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

Tomando las igualdades de la ecuación implícita dos a dos se obtienen dos planos que intersecan en la recta.

Esfera (S^2)

Una esfera de radio $r > 0$ es el conjunto de puntos del espacio que están a una distancia r del centro (x_0, y_0, z_0). Por tanto:

$$S^2 = \{(x, y, z): (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\}$$

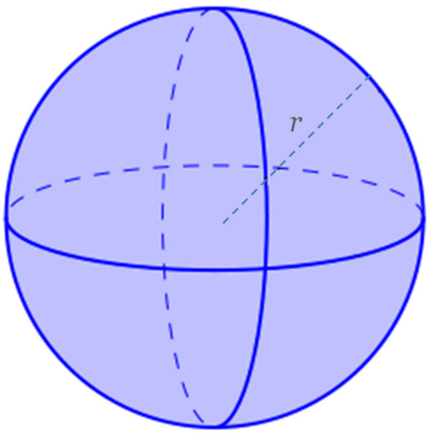


Figura 1.13. Circunferencia de radio r.
Fuente: http://www.lanubeartistica.es/

Cilindro

Un cilindro puede verse como una circunferencia sobre el plano XY que se desplaza verticalmente. Por eso:

$$C = \{(x, y, z): (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$$

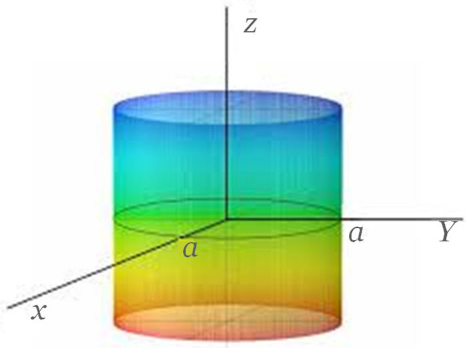


Figura 1.14. Recta como intersección de dos planos.
Fuente: http://personales.upv.es/

1.6. Intersección de objetos geométricos

A continuación vamos a ver algunos ejemplos de intersección de distintos objetos entre sí. En general, calcular la intersección entre dos objetos geométricos para calcular el conjunto de puntos que verifica las ecuaciones de las dos superficies al tiempo.

Recta-plano

La intersección de una recta con un plano puede ser un punto, la propia recta (si está contenida en el plano) o ningún punto, si la recta y el plano son paralelos.

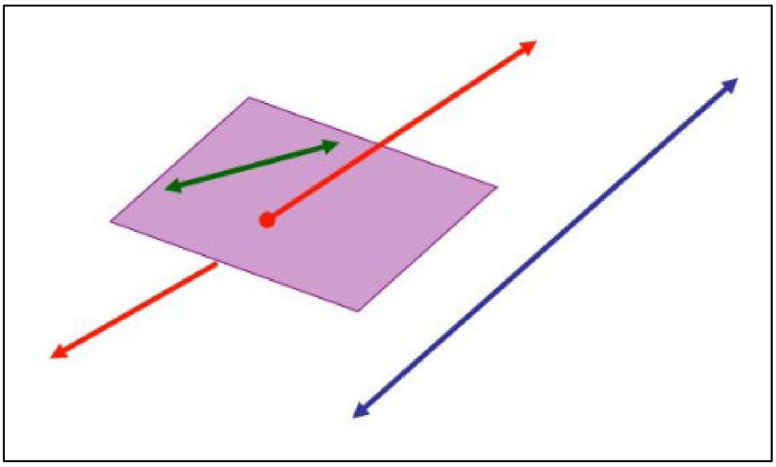


Figura 1.15. Intersección recta-plano.
Fuente: http://slideplayer.com/

Una forma sencilla de calcular la intersección es sustituir la expresión de cada variable en la ecuación paramétrica de la recta en la ecuación vectorial del plano.

Ejemplo:

Calcular la intersección entre la recta $(x, y, z) = (2, 0,1) + t \cdot (1, 1, 1)$ y el plano $x + 2y - z = 0$.

La ecuación paramétrica queda:

$$\begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= \quad\ \ t \\ z &= 1 + t \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación del plano:

$$2 + t + 2t - 1 - t \ = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, intersecan en un punto de ecuación $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Esfera-plano

La intersección de una esfera y un plano puede ser vacía, puede ser un único punto (si el plano es tangente a la esfera) o puede ser una circunferencia (figura 1.16). La circunferencia resultante tendrá un radio r, $0 < r \leq R$, donde R es el radio de la esfera.

En el caso en que $r = R$ se denomina círculo máximo y son curvas con propiedades muy interesantes, como veremos más adelante (figura 1.16).

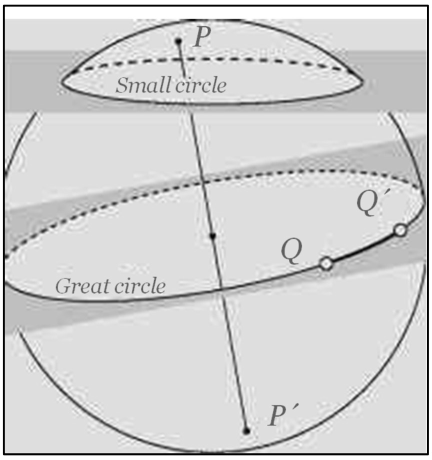


Figura 1.16. Intersección circunferencia-plano.
Fuente: http://www.astronomyclub.xyz/

Por ejemplo, la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con el plano $z = 1$ da como resultado la circunferencia $x^2 + y^2 = 3$

Esfera-esfera

La intersección de dos esferas también da lugar a una circunferencia. El posicionamiento GPS se calcula, en una primera aproximación calculando la intersección de varias circunferencias (figuras 1.17 y 1.18). Los centros de las esferas son los satélites observados y el observador de la Tierra está en la intersección.

En realidad la intersección de tres esferas son dos puntos pero uno de ellos se puede descartar porque está fuera de la Tierra. En realidad se necesitan como mínimo 4 satélites pero es para eliminar los errores relativos al reloj, no porque geométricamente hagan falta 4. En la práctica es muy habitual observar 8-12 satélites.

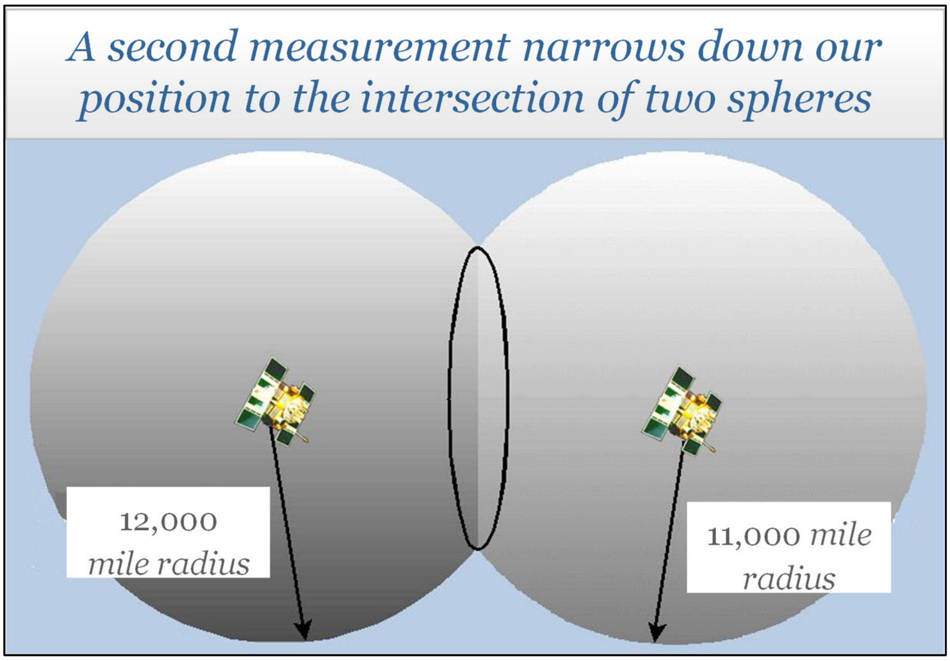


Figura 1.17. Intersección de dos esferas.
Fuente: http://www.montana.edu/

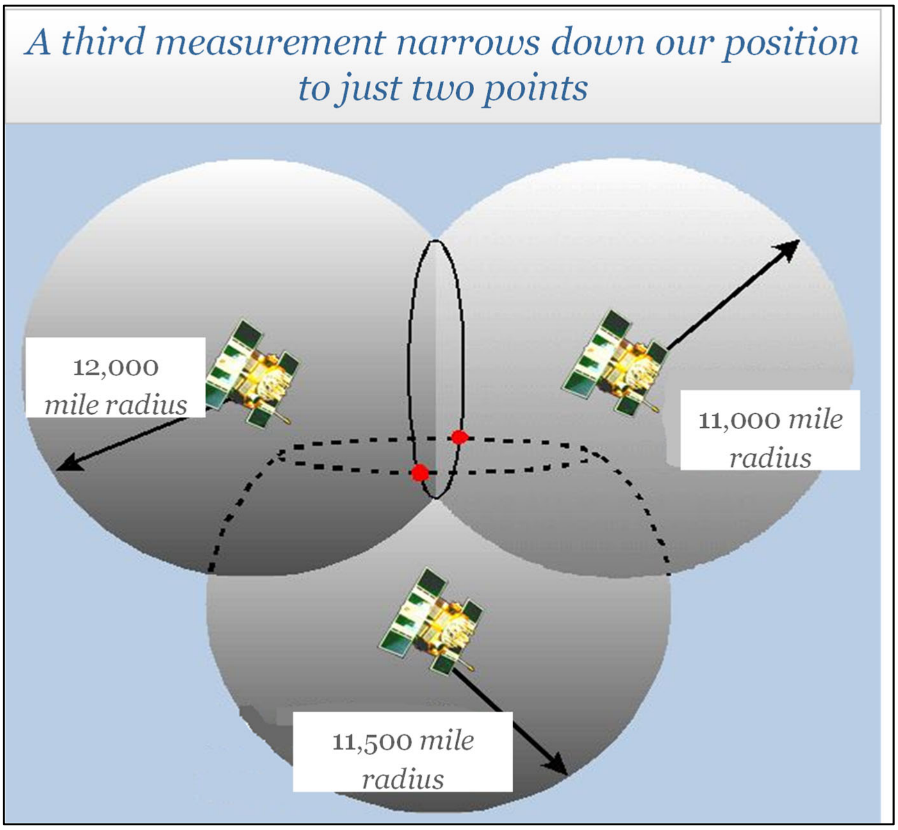


Figura 1.18. Intersección de tres esferas.

Fuente: http://www.montana.edu/

Cilindro-plano

La intersección entre un cilindro y un plano puede ser:

» Vacía.
» Una recta (generatriz), si el plano es tangente al cilindro.
» Dos rectas (generatrices).
» Una circunferencia, si la sección es perpendicular.
» Una elipse, si la sección es oblicua.

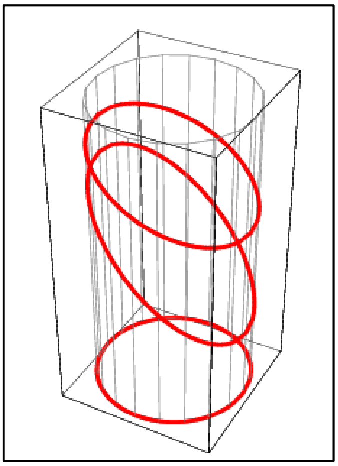


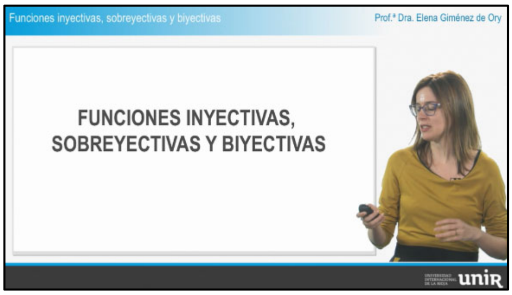
Figura 1.19. Secciones del cilindro.
Fuente: http://mathworld.wolfram.com/

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

En esta clase magistral vamos a repasar las funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas porque se van a utilizar a lo largo de todo el temario y tienen aplicaciones que a priori pueden parecer insospechadas.



La lección magistral está disponible en el aula virtual

No dejes de leer

Movimiento rígido

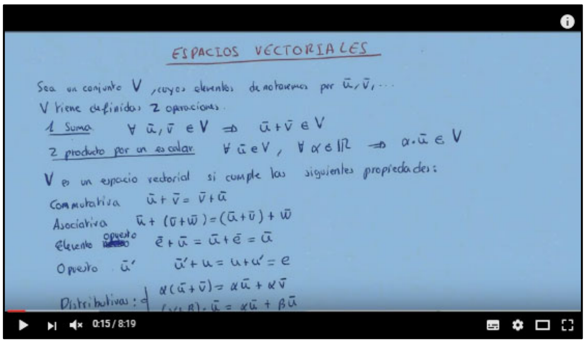
En este enlace se explican en detalle los movimientos rígidos en el espacio.

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://laplace.us.es/wiki/index.php/Tipos_de_movimientos_r%C3%ADgidos

No dejes de ver…

Espacio vectorial

En este tutorial se da la definición formal de espacio vectorial y se ponen algunos ejemplos.



Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://www.youtube.com/watch?v=q6IQJA8qvok

+ Información

A fondo

Espacios vectoriales

En este apartado podrás ver ejemplos de espacios y subespacios vectoriales, dependencia, lineal, etc.

ESPACIOS VECTORIALES

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://personales.unican.es/camposn/espacios_vectoriales1.pdf

Bases y dimensión

En este apartado podrás ver ejemplos de cambios de base, dimensión de espacios vectoriales, etc.

BASES Y DIMENSIÓN

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://personales.unican.es/camposn/espacios_vectoriales2.pdf

Spheres, equations and teminology

En este apartado podrás ver ecuaciones y algoritmos para el trabajo con esferas.

Circles and spheres

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://paulbourke.net/geometry/circlesphere/

Test

1. ¿Cuál de los siguientes conjuntos es un espacio vectorial?

A. $\{(x,y): y = 2x + 3, x > 0\}$.

B. $\{(x,y): y = -x - 1\}$.

C. $\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}: A\ es\ una\ matriz\ simétrica\}$.

2. De los siguientes conjuntos, ¿cuál es una base de $\mathbb{R}^2$?

A. $\{(1,1),(3,0),(1,2)\}$.

B. $\{(1,1),(1,1)\}$.

C. $\{(1,1),(1,0),\}$.

3. De las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$, ¿cuál no es ortogonal?

A. $\{(1,-1),(1,1),\}$.

B. $\{(0,-2),(2,0),\}$.

C. $\{(1,1),(0,1),\}$.

4. De los siguientes vectores de $\mathbb{R}^2$, ¿cuál tiene norma uno? (se considera la norma euclídea).

A. (1,0).

B. (1,1).

C. (1/2, 1/2).

5. De las siguientes aplicaciones, ¿cuál no es lineal?

A. $f(x,y,z) = (x,y,z)$.

B. $f(x,y,z) = (-y + z^2, x - y + 2z, 2x - y^3 + 3z)$.

C. $f(x,y,z) = x + y + z$.

6. De las siguientes aplicaciones, ¿cuál no es un movimiento rígido?

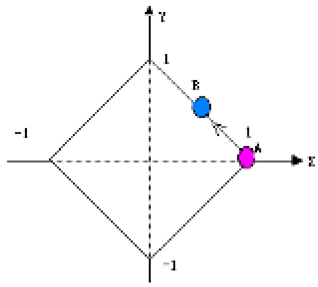
A. $4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

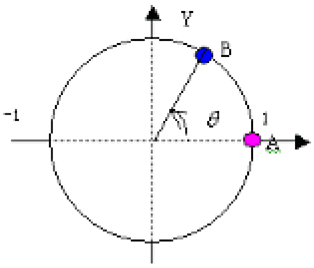
C. $\begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$

7. ¿Cuál de las siguientes figuras se corresponde con los puntos equidistantes al centro en la norma infinito?

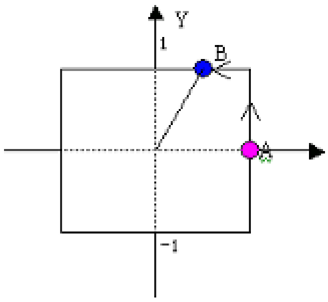
A.



B.



C.



8. Si el producto vectorial de dos vectores u, v es cero:

A. u, v están alineados.

B. u, v son linealmente independientes.

C. u, v son ortogonales.

9. La ecuación de una esfera de centro (3,2, 1) y radio ½ es:

A. $(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=\frac{1}{4}$.

B. $x-3+y-2+z-1=\frac{1}{4}$.

C. $x-3+y-2+z-1=\frac{1}{2}$.

10. La intersección entre una esfera de radio R y un plano puede ser:

A. Una recta.

B. Una circunferencia de radio r arbitrario.

C. Una circunferencia de radio $r \leq R$.