Tema 6
SDD: introducción a los sistemas dinámicos discretos
Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos

Dra. Neus Garrido Sàez

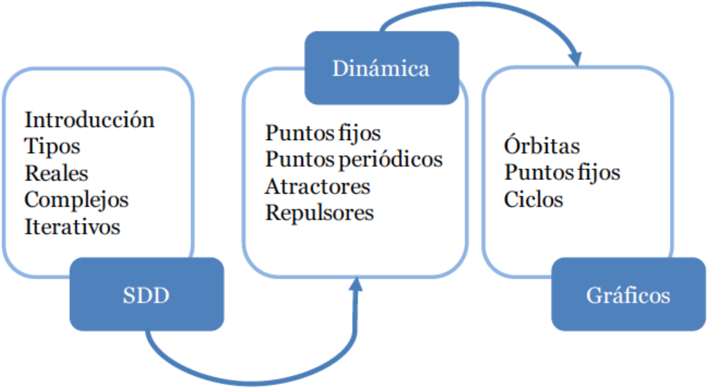
Máster en Ingeniería Matemática y Computación
Escuela Superior en Ingeniería y Tecnología

Contenido

1

Introducción

Introducción



Sistemas dinámicos discretos

- El tiempo es discretizado
- Ecuaciones en diferencias: $x_{k+1} = f(x_k)$, con $x_k = x(t_k)$

Sistemas dinámicos discretos

- El tiempo es discretizado
- Ecuaciones en diferencias: $x_{k+1} = f(x_k)$, con $x_k = x(t_k)$

Se puede reescribir un sistema continuo en su formato discreto:

- Variable continua $t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Variable discreta $k \in \mathbb{N}$
- La función $x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow x[k] := x_k$

Introducción

Sistemas dinámicos discretos

- El tiempo es discretizado
- Ecuaciones en diferencias: $x_{k+1} = f(x_k)$, con $x_k = x(t_k)$

Se puede reescribir un sistema continuo en su formato discreto:

- Variable continua $t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Variable discreta $k \in \mathbb{N}$
- La función $x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow x[k] := x_k$

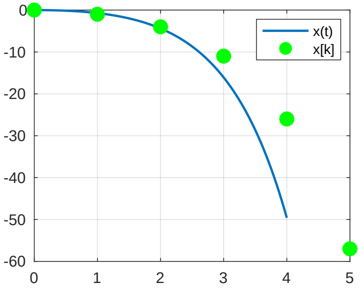
Ejemplo 1. Forma discreta de $x' = x - t$

- Se aplican diferencias finitas progresivas para la derivada de x:

$$x'(t) \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \Rightarrow x'_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{1}$$

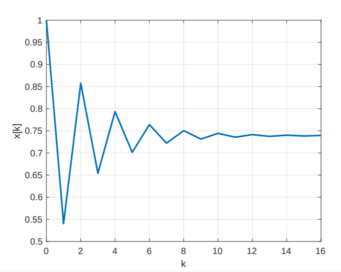
- Substituyendo en $x' = x - t$:

$$x_{k+1} - x_k = x_k - k \Leftrightarrow x_{k+1} = 2x_k - k$$



Ejemplo 2. Comportamiento del sistema dinámico discreto $cos(x)$ con $x_0 = 1$

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= cos(x_0) = 0.54 \\
x_2 &= cos(x_1) = cos(cos(x_0)) = 0.86 \\
\vdots & \quad \vdots \\
x_k &= cos(x_{k-1}) = \cdots = 0.74
\end{aligned}
$$



- Las iteraciones se van acercando a un punto
- Tras un número determinado de iteraciones, la función converge a un punto

¿Sucede siempre lo mismo?

Los sistemas dinámicos pueden estar representados por diferentes tipos de funciones:

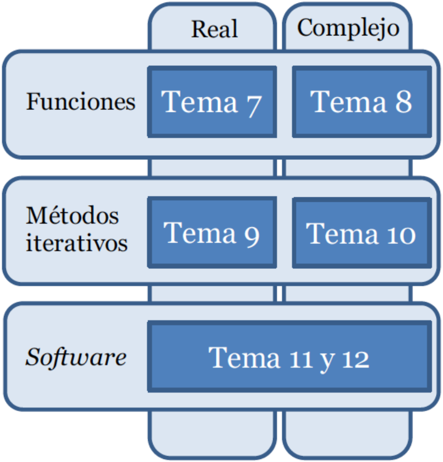
- Sistemas reales

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

- Sistemas complejos

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

- Sistemas basados en métodos iterativos



2

Dinámica de sistemas discretos

Objetivo

Conocer el comportamiento de los puntos a medida que se va iterando

¿Dónde van los puntos?
¿Qué hacen cuando llegan?

Objetivo

Conocer el comportamiento de los puntos a medida que se va iterando

¿Dónde van los puntos?
¿Qué hacen cuando llegan?

Órbita

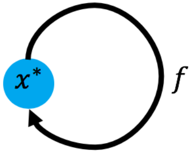
La órbita es el camino que siguen los puntos. El primer punto x_0 se denomina semilla, y el resto de puntos se calculan a partir del anterior. Se expresa como el conjunto:

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^k(x_0), \ldots\},$$

donde $f^k(x)$ representa la k-ésima aplicación de la función f sobre el punto x.

- Expresión general de la órbita:

$$x_{k+1} = f(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$



Punto fijo

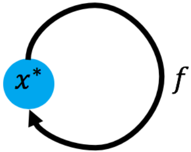
Un punto x^* es un punto fijo si $f(x^*) = x^*$

Los puntos fijos se clasifican dependiendo de su comportamiento asintótico en:

- Atractor: si $|f'(x^*)| < 1$
- Repulsor: si $|f'(x^*)| > 1$
- Neutro: si $|f'(x^*)| = 1$, por lo que no se puede decir nada al respecto

Punto fijo

Un punto x^* es un punto fijo si $f(x^*) = x^*$



Los puntos fijos se clasifican dependiendo de su comportamiento asintótico en:

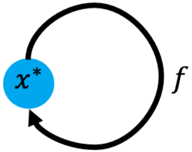
- Atractor: si $|f'(x^*)| < 1$
- Repulsor: si $|f'(x^*)| > 1$
- Neutro: si $|f'(x^*)| = 1$, por lo que no se puede decir nada al respecto

Sistemas continuos		Sistemas discretos
Puntos de equilibrio		Puntos fijos
Sumidero	$\equiv$	Atractor
Fuente		Repulsor

$$\frac{dF}{dx} = 0 \Leftrightarrow F_{k+1} - F_k = 0 \Leftrightarrow F_{k+1} = F_k \Leftrightarrow x_{k+1} = x_k$$

Punto fijo

Un punto x^* es un punto fijo si $f(x^*) = x^*$



Los puntos fijos se clasifican dependiendo de su comportamiento asintótico en:

- Atractor: si $|f'(x^*)| < 1$
- Repulsor: si $|f'(x^*)| > 1$
- Neutro: si $|f'(x^*)| = 1$, por lo que no se puede decir nada al respecto

Ejemplo 3. Estudia la dinámica de los puntos fijos de $f(x) = x^3$

- Puntos fijos:

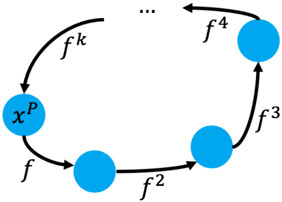
$$f(x) = x \Leftrightarrow x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^* = \{-1, 0, 1\}$$

- Clasificación:

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} f'(-1) & = & 3 > 1 & \text{Repulsor} \\ f'(0) & = & 0 < 1 & \text{Atractor} \\ f'(1) & = & 3 > 1 & \text{Repulsor} \end{array} \right.$$

Punto periódico

Un punto x^P es un punto k-periódico si $f^k(x^P) = x^P$, pero $f^n(x^P) \neq x^P$ si $n < k$



El comportamiento de x^P como punto k-periódico sobre f es el mismo que el de un punto fijo sobre $g := f^k$:

- Atractor: si $|g'(x^P)| = |(f^k)'(x^P)| < 1$
- Repulsor: si $|g'(x^P)| = |(f^k)'(x^P)| > 1$
- Neutro: si $|g'(x^P)| = |(f^k)'(x^P)| = 1$, por lo que no se puede decir nada al respecto

Punto crítico

Un punto x^C es un punto crítico si $f'(x^C) = 0$.

Ejemplo 4. Estudia la dinámica de los puntos fijos y periódicos de $f(x) = x^2 - 1$

- Puntos fijos: $x^* = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 1 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

- Puntos periódicos de periodo 2: $x^P = \{-1, 0\}$

$$g = f^2 = f(f(x)) = f(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$$

$$g(x) = x \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 = x \Leftrightarrow x(x^3 - 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x^P = \left\{-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

- Comportamiento dinámico:

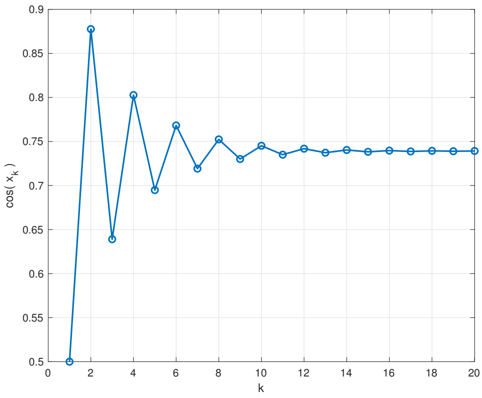
$$|f'(x)| = 2|x| \Rightarrow \begin{cases} \left|f'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right| & = & 1.24 > 1 \Rightarrow & \text{Repulsor} \\ \left|f'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right| & = & 3.23 > 1 \Rightarrow & \text{Repulsor} \end{cases}$$

$$|g'(x)| = |4x^3 - 4x| \Rightarrow \begin{cases} |g'(-1)| & = & 0 < 1 \Rightarrow & \text{Atractor} \\ |g'(0)| & = & 0 < 1 \Rightarrow & \text{Atractor} \end{cases}$$

3

Representaciones gráficas

Ejemplo 5. Órbita de $f(x_k) = cos(x_k)$, $x_0 = 0.5$



- $x_0 = 0.5$

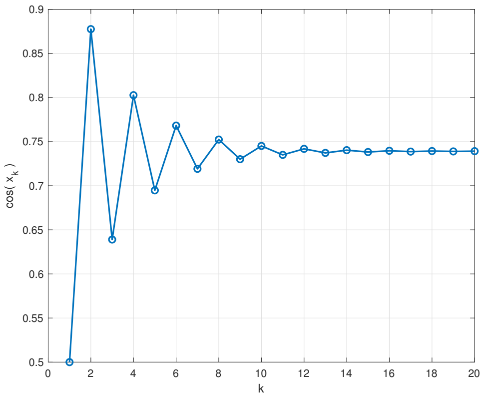
- Diferencia (d) entre dos iterados consecutivos:

$$d = |x_{k+1} - x_k|$$

- Tolerancia (tol): valor máximo que debe tener d para el cual se considera que la función ha convergido
- Número máximo de iteraciones $(maxiter)$: número de iteraciones alcanzadas para considerar que la función ha divergido
- Orden de convergencia computacional aproximado, ACOC (ρ):

$$\rho = \frac{\log\left|\frac{x_{k+1}-x_k}{x_k-x_{k-1}}\right|}{\log\left|\frac{x_k-x_{k-1}}{x_{k-1}-x_{k-2}}\right|} = \frac{\log\left|\frac{d_{k+1}}{d_k}\right|}{\log\left|\frac{d_k}{d_{k-1}}\right|}$$

Ejemplo 5. Órbita de $f(x_k) = cos(x_k)$, $x_0 = 0.5$

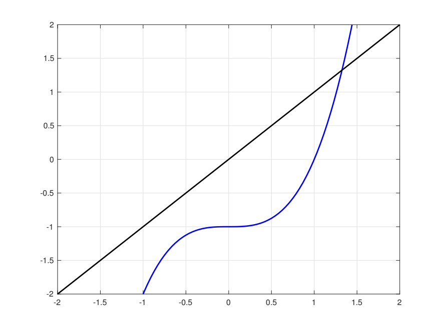


- $x_0 = 0.5$
- $tol = 10^{-6}$
- $maxiter = 20$
- $\rho = 0.997 \Rightarrow$ convergencia aproximadamente lineal

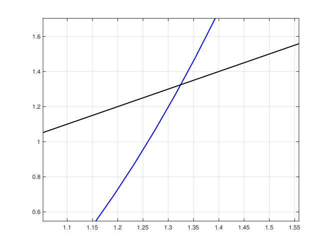
- Los puntos de corte de las funciones $y_1 = x$ y $y_2 = f(x)$ son los puntos fijos de f

Ejemplo 6. Obtención gráfica de los puntos fijos de $f(x) = x^3 - 1$

- En negro: $y_1 = x$
- En azul: $y_2 = x^3 - 1$

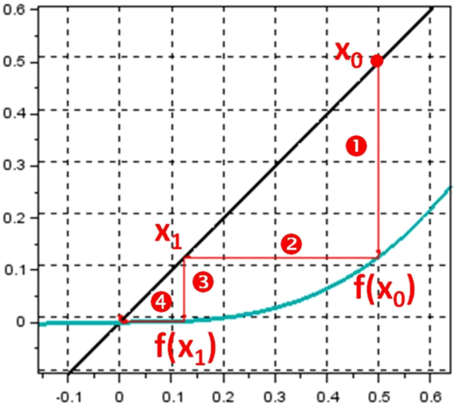


$\Rightarrow$ Ampliación:



- Alrededor de $x = 1.325$ hay un punto fijo

1. Representar $y_1 = x$ y $y_2 = f(x)$
2. Representar x_0 sobre la recta y_1
3. Trazar vertical hasta $y_2 \Rightarrow f(x_0)$
4. Trazar horizontal hasta $y_1 \Rightarrow x_1$
5. $f(x_1)$
6. $\cdots$



Dos opciones:

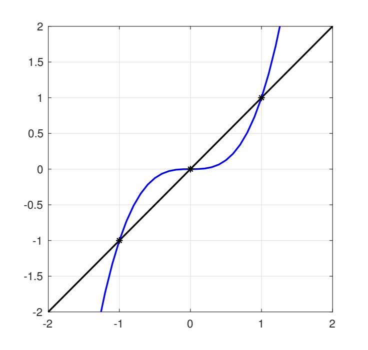
- Convergencia a un punto $\Rightarrow$ el punto sería atractor
- Divergencia $\Rightarrow$ el punto sería repulsor

Ejemplo 7. Puntos fijos de $f(x) = x^3$

- Analíticamente: $x^* = \{-1, 0, 1\}$
- Gráficamente:

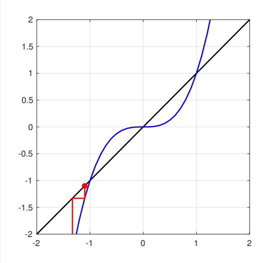
Ejemplo 7. Puntos fijos de $f(x) = x^3$

- Analíticamente: $x^* = \{-1, 0, 1\}$
- Gráficamente:

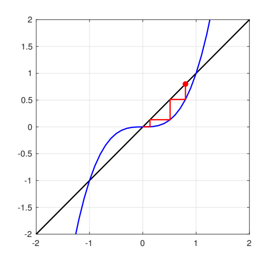


Ejemplo 7. Puntos fijos de $f(x) = x^3$

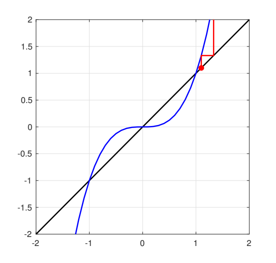
- Analíticamente: $x^* = \{-1, 0, 1\}$
- Gráficamente:



(a) $x^* = -1$ repulsor



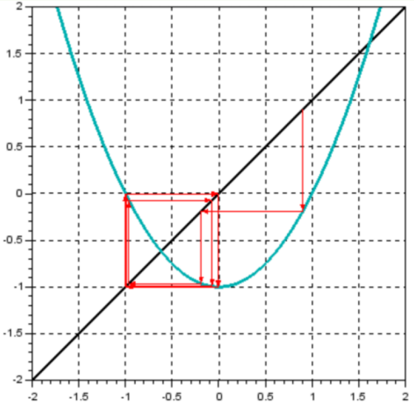
(b) $x^* = 0$ atractor



(c) $x^* = 1$ repulsor

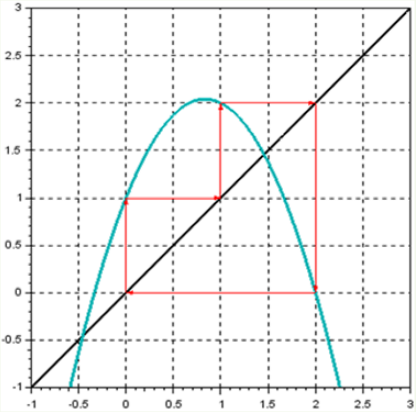
Ejemplo 8. Puntos fijos y periódicos de $f(x) = x^2 - 1$

- $x^* = \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$
- $x^P = \{-1, 0\}$



Ejemplo 9. Puntos fijos y periódicos de $f(x) = \frac{(2-x)(3x+1)}{2}$

- $x^* = \left\{\frac{1}{6}(3-\sqrt{33}), \frac{1}{6}(3+\sqrt{33})\right\}$
- $x^P = \{0, 1, 2\}$



- Ejercicios recomendados del tema
- **Actividades:** Laboratorio 1: Sistemas dinámicos continuos 04/05/2021

...Y por supuesto:

TEST DE APRENDIZAJE!!

unir
LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET