

SDD: Sistemas iterativos II

[10.1] ¿Cómo estudiar este tema?

[10.2] El método de Newton amortiguado

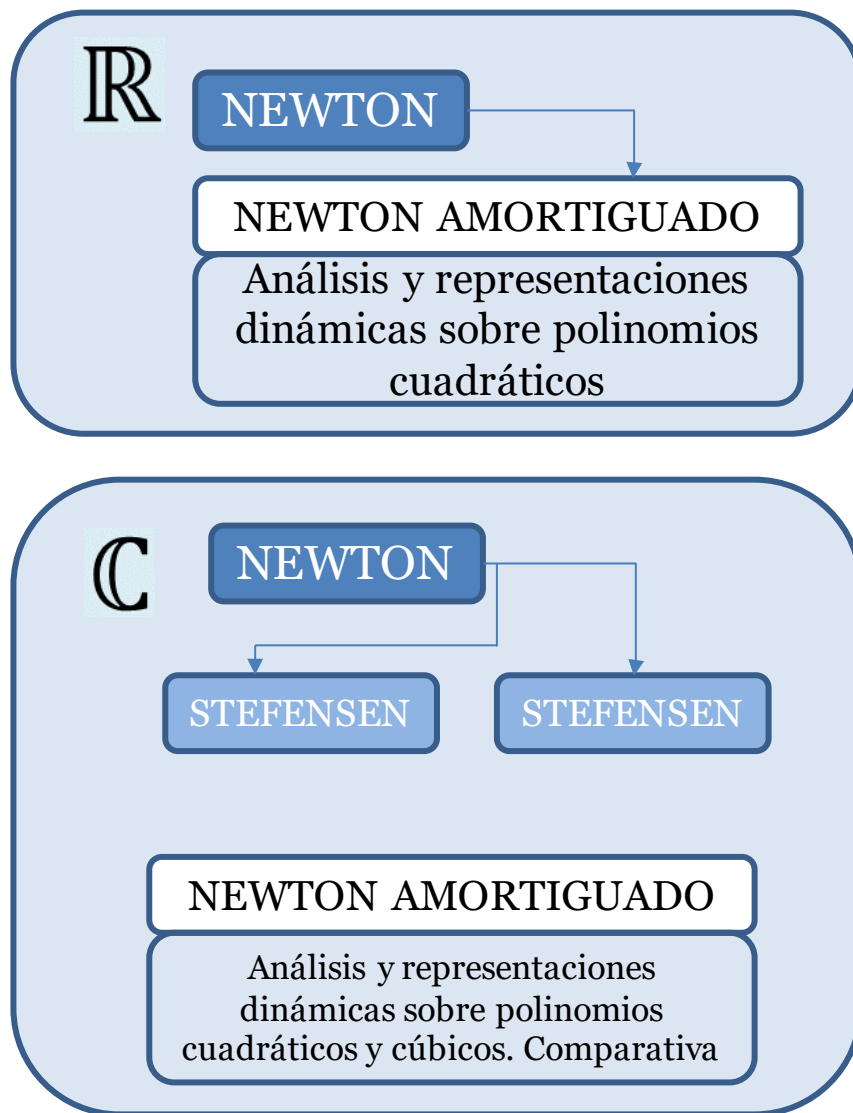
[10.3] Métodos libres de derivadas

[10.4] Referencias bibliográficas

10

T E M A

Esquema



Ideas clave

10.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

A lo largo de este tema vamos a poner en práctica los conceptos estudiados en la primera parte de los sistemas asociados a los métodos iterativos. Es por ello que resulta imprescindible estudiar este tema una vez se hayan adquirido los conceptos del anterior, así como tenerlo presente para consultar cualquier situación que resulte desconocida.

En este tema profundizaremos sobre un método de dinámica real: el método de Newton amortiguado. Supone una modificación respecto del método clásico de Newton, cuyas propiedades serán analizadas y sus diagramas serán representados. Asimismo, en la parte de dinámica compleja, introduciremos una serie de métodos libres de derivadas basados en el método de Newton, de forma que evitaremos calcular la derivada de la función. Sobre estos métodos, realizaremos el análisis de la dinámica compleja y representaremos sus planos de parámetros cuando sea posible y determinados planos dinámicos que resulten de interés.

10.2. El método de Newton amortiguado

El método de Newton amortiguado es una variante del método de Newton que consiste en la introducción de un parámetro amortiguador en el paso de Newton.

$$N_{\mu}(x) = x - \mu \frac{f(x)}{f'(x)}, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Características dinámicas e iterativas

A continuación se enumeran una serie de propiedades:

- » Los puntos fijos de este método serán $\mu f(x) = 0$, por lo que coincidirán con las raíces de f .
- » La derivada tiene la expresión:

$$N'_\mu(x) = 1 - \mu + \mu \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

Por lo que la dinámica de los puntos fijos quedará determinada por $1 - \mu$, de forma que para $\mu \in (0,2)$ los puntos fijos serán atractores.

- » Los puntos críticos son las soluciones de:

$$\frac{\mu - 1}{\mu} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

- » El método de Newton amortiguado tiene convergencia lineal; para $\mu = 1$ estamos ante en método de Newton clásico, en el que la convergencia es cuadrática.

Si bien es cierto que el método de Newton amortiguado se puede utilizar sobre variable real y compleja, a lo largo de este tema estudiaremos solo el caso real de este método dejando el estudio de la dinámica compleja para otros métodos. No obstante, para ampliar información se puede consultar (Magreñán, 2013).

Dinámica real sobre polinomios de grado dos

A continuación vamos a analizar la dinámica real del método de Newton amortiguado cuando es aplicado sobre polinomios de grados dos.

Sean $p_{B,C}(x) = x^2 + Bx + C$, $p_\lambda(x) = x^2 - \lambda$ y $N_{\mu,p}(x)$ el operador de punto fijo del método de Newton amortiguado con factor de amortiguación μ aplicado sobre el polinomio $p(z)$.

Entonces:

- » $N_{\mu, p_{B,C}}$ es topológicamente conjugado a N_{μ, p_λ} a través de $\varphi(x) = x - \frac{B}{2}$.
- » Para $\lambda = 0$, el operador de punto fijo es:

$$N_{\mu, p_0}(x) = \frac{(2 - \mu)x}{2}.$$

- » Para $\lambda > 0$, N_{μ, f_λ} es topológicamente conjugado a $N_{\mu, f_{-1}}$ a través de $\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{\mu\lambda}}$.
- » Para $\lambda < 0$, N_{μ, f_λ} es topológicamente conjugado a N_{μ, f_1} a través de $\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{-\mu\lambda}}$.

Por lo tanto, bastará con estudiar la dinámica de los métodos segundo, tercero y cuarto para conocer el comportamiento dinámico de toda la familia cuadrática.

La tabla 1 recoge las características dinámicas de cada uno de los casos:

	$\lambda = 0$	$\lambda = 1$	$\lambda = -1$
Puntos fijos	$x_1^* = 0$ Atractor para $\mu \in (0, 2)$	$x_1^* = -1$ $x_2^* = 1$ Atractores para $\mu \in (0, 2)$	No tiene
Puntos críticos libres	No tiene	$x_1^c = -\sqrt{\frac{\mu}{2 - \mu}}$ $x_2^c = \sqrt{\frac{\mu}{2 - \mu}}$	$x_1^c = -\sqrt{\frac{\mu}{\mu - 2}}$ $x_2^c = \sqrt{\frac{\mu}{\mu - 2}}$

Tabla 1. Características dinámicas del método de Newton amortiguado para polinomios cuadráticos

Para el caso de $\lambda = 0$ tenemos un punto fijo doble en el cero sin presencia de puntos críticos. En la figura 1 se muestra el gráfico del método para tres valores de amortiguación: $\mu = \{0.5, 1, 4\}$.

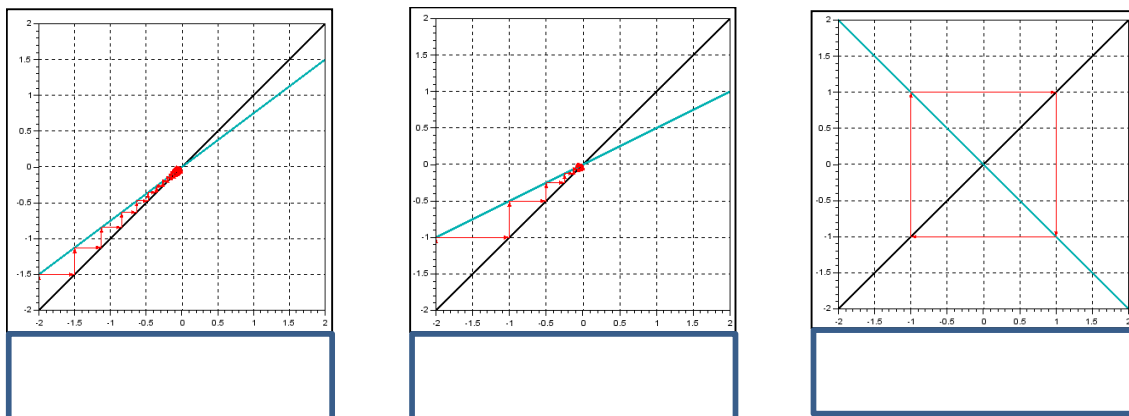


Figura 1. Método amortiguado de Newton aplicado sobre polinomios del tipo $p_0(x) = x^2$ para valores de la amortiguación 0.5 (a), 1 (b) y 4 (c)

Las figuras 1 (a) y (b) muestran cómo las sucesivas iteraciones aproximan la órbita al punto fijo, siendo el caso (b) el método de Newton clásico. La figura 1 (c) muestra un ciclo de período dos que se cumple sea cual sea la semilla, salvo para valores iguales al punto fijo.

Para el caso $\lambda = 1$ estamos ante puntos fijos en los valores $x^2 = 1$. La figura 2 muestra tres situaciones que se dan al aplicar esta clase de polinomios.

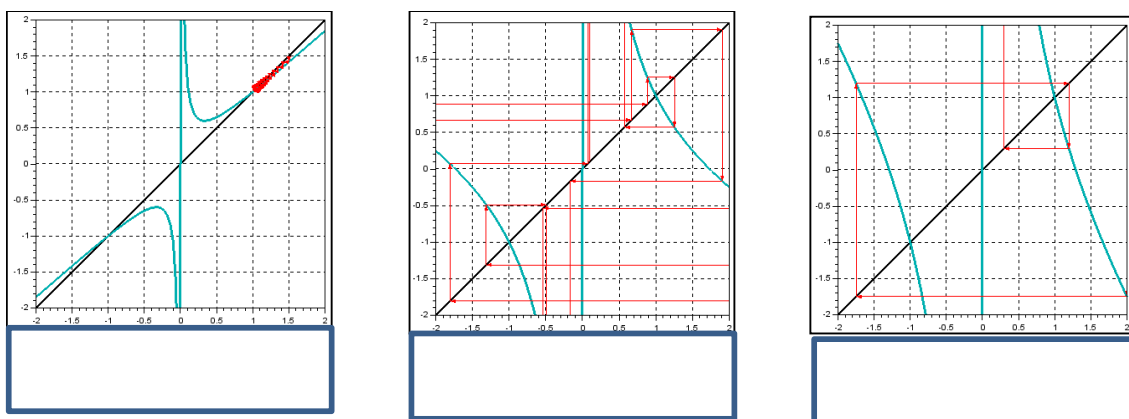


Figura 2. Método amortiguado de Newton aplicado sobre polinomios del tipo $p_1(x) = x^2 - 1$ para valores de la amortiguación 0.2 (a), 3 (b) y 5 (c)

En la figura 2(a) estamos ante la situación de $\mu \in (0,2)$, de forma que los puntos fijos son atractores. Cuando $\mu \in (2,4)$ se genera una dinámica caótica como se refleja en la figura 2(b).

Por último, para $\mu < 0$ o $\mu > 4$, los puntos fijos son repulsores, como se ilustra en la figura 2(c).

El caso $\lambda = -1$ genera un operador de punto fijo sin raíces reales. Para estudiar su dinámica veamos en primer lugar el diagrama de bifurcación en la figura 3.

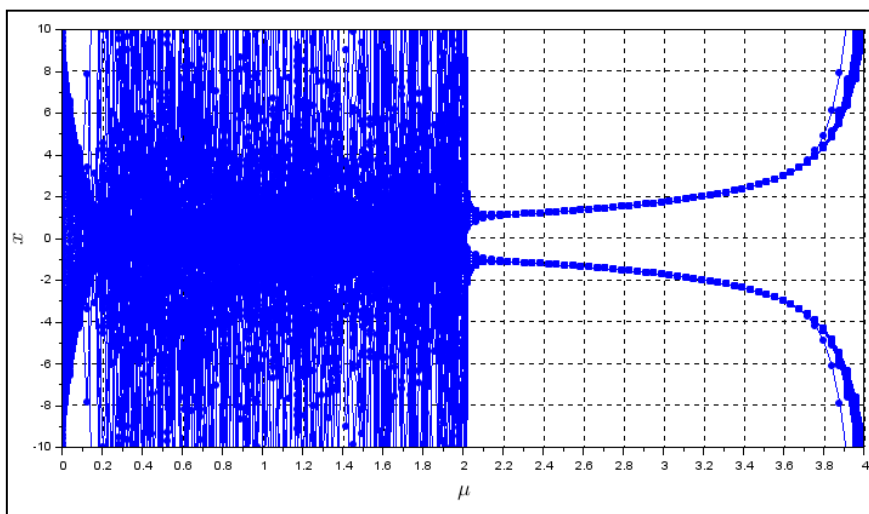


Figura 3. Diagrama de bifurcación de $N_{\mu, p-1}(x)$

Se puede concluir que para $\mu \in (0,2)$ aparece comportamiento caótico mientras que para $\mu \in (2,4)$ el operador presenta ciclos atractores de período dos. La figura 4 ilustra estas dos situaciones.

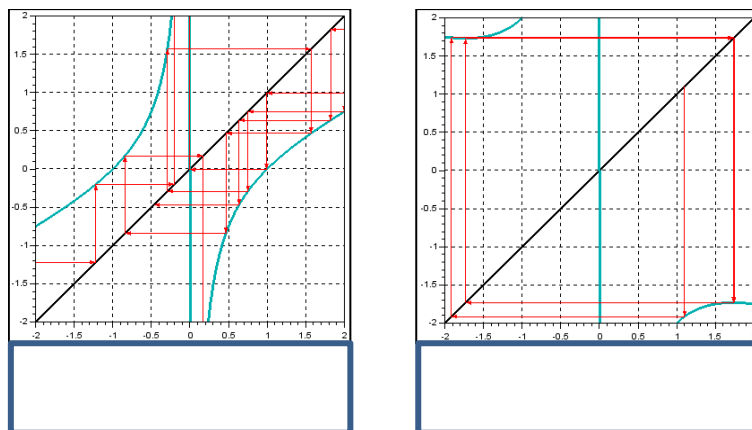


Figura 4. Método amortiguado de Newton aplicado sobre polinomios del tipo $p_{-1}(x) = x^2 + 1$ para valores de la amortiguación 1 (a) y 3 (b)

La figura 4(a) representa el comportamiento caótico que supone la elección del parámetro dentro del intervalo $(0,2)$. La figura 4(b) muestra los ciclos atractores del método de Newton amortiguado.

10.3. Métodos libres de derivadas

Antes de abordar en profundidad los métodos libres de derivadas vamos a definir el concepto de composición de métodos que nos será de utilidad más adelante.

Uso de métodos libres de derivadas

Computacionalmente, el cálculo de la derivada de una función resulta muy costoso. Es por ello que, en la medida de lo posible, las expresiones que contienen derivadas de una función tratan de evitarse.

La técnica utilizada habitualmente es el reemplazo de la derivada por una expresión en las conocidas diferencias finitas de la misma cuyas posibles expresiones se determinan a continuación.

» Diferencias progresivas:

$$f'(z) \approx \frac{f(z + f(z)) - f(z)}{f(z)}$$

» Diferencias regresivas:

$$f'(z) \approx \frac{f(z) - f(z + f(z))}{f(z)}$$

» Diferencias centrales:

$$f'(z) \approx \frac{f(z + f(z)) - f(z - f(z))}{2f(z)}$$

Además, se van a recordar las expresiones de las diferencias divididas que se utilizarán más adelante:

» Diferencias divididas de orden uno:

$$f[x, y] = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

» Diferencias divididas de orden dos:

$$f[x, y, z] = \frac{f[y, z] - f[x, y]}{z - x}$$

En los métodos iterativos y especialmente en los libres de derivadas, se utiliza el índice de eficiencia para poder realizar una comparación. Para ello, denotaremos por p al orden de convergencia y por d al número de evaluaciones de la función f en cada iteración.

» Índice de eficiencia:

$$I = p^{1/d}$$

Kung y Trub (1974) conjeturaron que el orden de convergencia siempre estaría por debajo de un valor determinado en función del número de evaluaciones de la función f .

Cuando se alcanza dicho valor, al método se le denomina óptimo.

Los métodos iterativos óptimos cumplen:

$$p = 2^{d-1}$$

Ejemplo 1 | El método de Steffensen $S_f(z)$ se obtiene de sustituir la derivada del método de Newton $N_f(z)$ por la diferencia finita progresiva. Su operador de punto fijo queda como:

$$S_f(z) = N_f(z) \Big|_{f'(z) = \frac{f(z+f(z)) - f(z)}{f(z)}} = z - \frac{f(z)}{\frac{f(z+f(z)) - f(z)}{f(z)}} = z - \frac{f^2(z)}{f(z+f(z)) - f(z)}$$

En este método, la función f se tiene que evaluar en z y en $z + f(z)$, por lo que tiene dos evaluaciones de f . Además, tiene convergencia cuadrática. De esta forma:

$$p = 2, d = 2 \rightarrow \begin{cases} I = 2^{1/d} = 2^{1/2} = \sqrt{2} \\ 2^{d-1} = 2^{2-1} = 2 = p \end{cases}$$

Por lo que se trata de un método óptimo con índice de eficiencia $\sqrt{2}$.

Composición de métodos

Una directriz para mejorar el orden de convergencia es la utilización de métodos compuestos.

Si dos métodos tienen órdenes de convergencia c_1 y c_2 , el método compuesto tendrá como orden de convergencia $c = c_1 \cdot c_2$.

Ejemplo 2 | Sean $N_p(z)$ y $S_p(z)$ los métodos de Newton y Steffensen, respectivamente, cuyos operadores de punto fijo vienen determinados por las expresiones:

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}, S_p(z) = z - \frac{f^2(z)}{f(v) - f(z)}, v = z + f(z)$$

La composición de los métodos de Newton y Steffensen (Cordero y Torregrosa, 2011) da lugar a un método iterativo de orden 4 cuyo operador de punto fijo tiene como expresión:

$$CT_p(z) = y - \frac{f(y)f[z, v]}{f[z, y]f[y, v]}, v = z + f(z), y = z - \frac{f^2(z)}{f(v) - f(z)}.$$

Se trata de un método de orden de convergencia 4. La función f se tiene que evaluar en z, v e y , por lo que se requieren tres evaluaciones de la función. Se trata de un método óptimo de orden 4 con índice de eficiencia $I = 1.5874$.

Comparativa de métodos

En este punto vamos a realizar una comparativa entre métodos iterativos libres de derivadas. Los métodos sobre los que vamos a trabajar $S_p(z)$ y $CT_p(z)$ definidos en las secciones anteriores, que renombraremos como STF y C-T, respectivamente. Estos métodos serán comparados con el método de Newton, renombrado como NEW. Lo aplicaremos sobre polinomios cuadráticos y cúbicos.

La tabla 2 muestra las características iterativas de cada uno de los métodos. En los tres casos estamos ante métodos iterativos óptimos según la conjetura de Kung-Traub.

	NEW	STF	C-T
p	2	2	4
d	2	2	3
I	1.4142	1.4142	1.5874
Óptimo	Sí	Sí	Sí

Tabla 2. Características iterativas de los métodos de Newton, Steffensen y Cordero Torregrosa

La figura 5 ilustra conceptualmente las características comunes y no comunes entre los métodos elegidos para la comparativa.

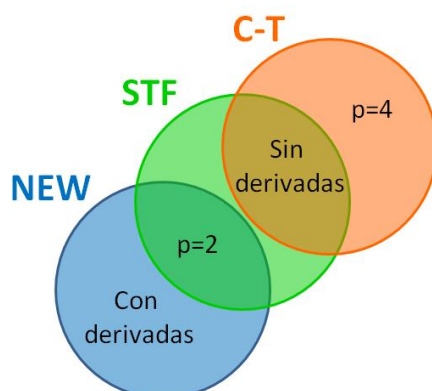


Figura 5. Diagrama conceptual de las características comunes de los métodos

Aplicación de polinomios de grado dos

La tabla 3 recoge el estudio dinámico de los puntos fijos y los puntos críticos libres de cada uno de los métodos cuando se les aplica un polinomio de grado dos del tipo $p_\lambda(z) = z^2 + \lambda$.

	NEW	STF	C-T
Puntos fijos	$z_1^* = -i\sqrt{\lambda}$ Atractor $z_2^* = i\sqrt{\lambda}$ Atractor	$z_1^* = -i\sqrt{\lambda}$ Atractor $z_2^* = i\sqrt{\lambda}$ Atractor	$z_1^* = -i\sqrt{\lambda}$ Atractor $z_2^* = i\sqrt{\lambda}$ Atractor $z_3^*, z_4^*, z_5^*, z_6^*$
Puntos críticos libres	No tiene	$z_1^C = -2 - \sqrt{2 - \lambda}$ $z_2^C = -2 + \sqrt{2 - \lambda}$	$z_1^C = -2 - \sqrt{2 - \lambda}$ $z_2^C = -2 + \sqrt{2 - \lambda}$ $z_3^C = -1 - i\sqrt{\lambda}$ $z_4^C = -1 + i\sqrt{\lambda}$

Tabla 3. Características dinámicas de los métodos de Newton, Steffensen y Cordero Torregrosa para polinomios del tipo $p_\lambda(z) = z^2 + \lambda$

En algunos casos no es posible determinar una expresión analítica general para los puntos fijos o críticos, debido a que estamos trabajando con expresiones que incluyen polinomios de alto grado.

Vamos a presentar los planos de parámetros de Steffensen y Cordero-Torregrosa en la figura 6 (a) y (b), respectivamente.

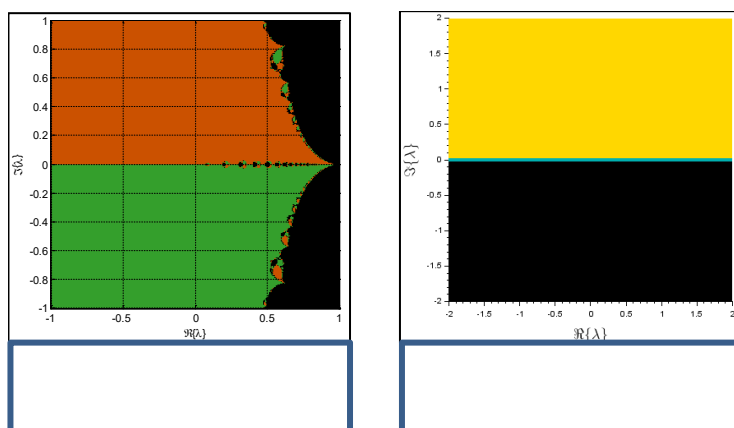


Figura 6. Plano de parámetros de los métodos de Steffensen (a) y Cordero Torregrosa (b) al aplicarles un polinomio del tipo $p(z) = z^2 + \lambda$

Podemos observar en la figura 6 cómo para el método de Steffensen existen tres regiones diferenciables mientras que para el método de Cordero-Torregrosa solo hay dos.

El método de Steffensen tiene una característica especial y es que el infinito es un punto atractor. De modo que al iterar un punto crítico libre su órbita puede converger a uno de los dos puntos fijos atractores (regiones naranja y verde) o al infinito (región negra), como se puede observar en la figura 6(a). Esta característica especial no sucede en el método de Cordero-Torregrosa, puesto que el punto crítico libre converge a uno de los dos puntos fijos representados en las regiones amarilla y negra del plano de parámetros de la figura 6(b).

Para comparar los métodos, además de los marcadores numéricos como el orden de convergencia, el índice de eficiencia u otros, también podemos utilizar los planos dinámicos.

En la figura 7 se representan los planos dinámicos de Newton, Steffensen y Cordero-Torregrosa para cuatro valores del parámetro λ .

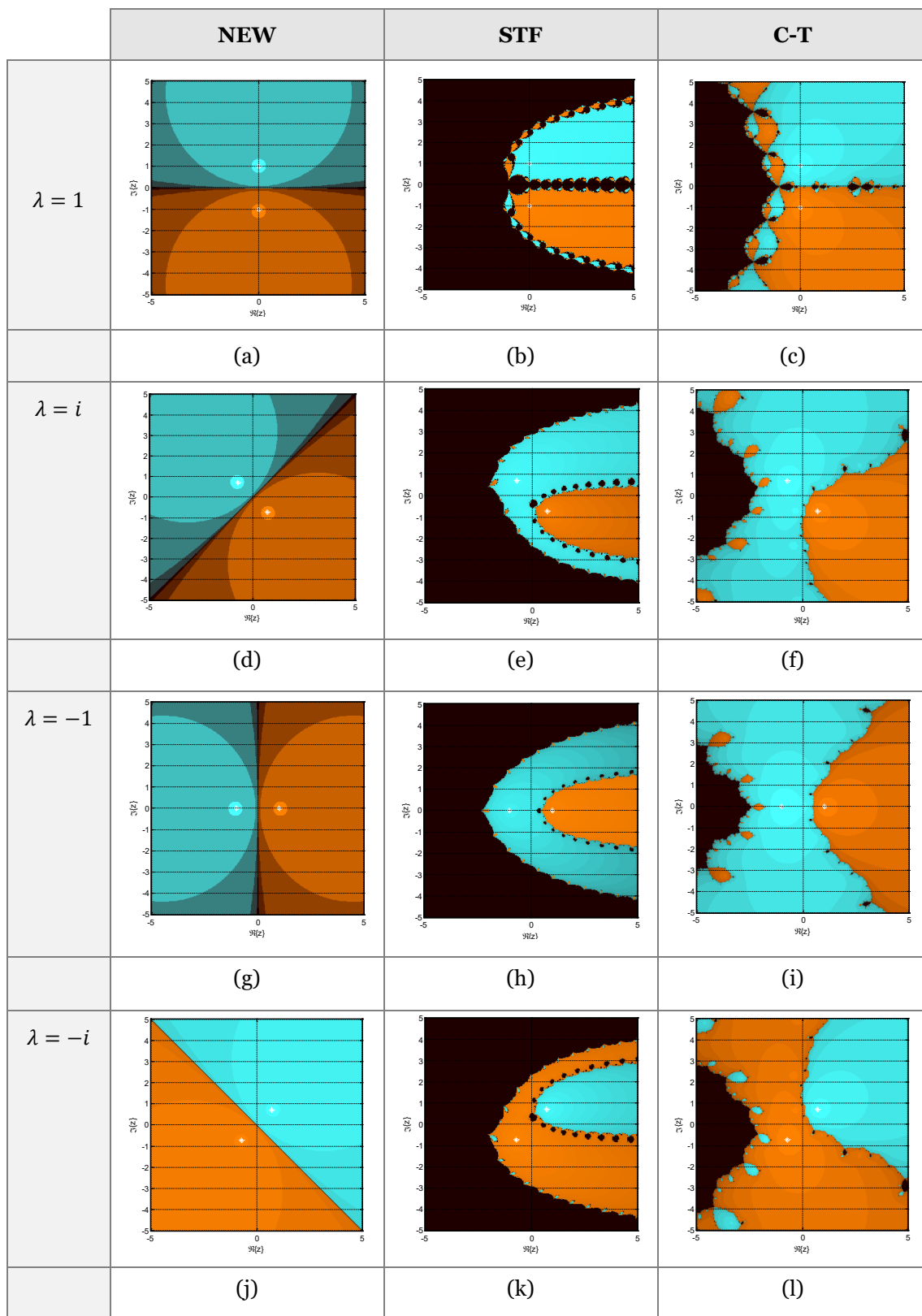


Figura 7. Planos dinámicos de los métodos de Newton (a, d, g, j), Steffensen (b, e, h, k) y Cordero Torregrosa (c, f, i, l) para polinomios $p(z) = z^2 + \lambda$ con $\lambda = 1$ (a, b, c), $\lambda = i$ (d, e, f), $\lambda = -1$ (g, h, i), $\lambda = -i$ (j, k, l)

La figura 7 evidencia las bondades del método NEW respecto de STF y C-T. Por un lado, la ausencia de zonas negras denota que todo el plano complejo converge a una de las dos raíces.

Por otro lado, al no poseer cuencas inmersas y dadas las formas de los planos dinámicos, la semilla convergerá a la raíz más cercana, lo que supone un conocimiento a priori de lo que va a ocurrir.

Una forma de medir lo intrincadas que son las cuencas inmersas consiste en determinar la dimensión fractal de los métodos mediante el algoritmo de *box-counting* que queda fuera del alcance de esta asignatura.

En Chicharro (2011) se indica la dimensión fractal \mathcal{D}_F de estos métodos aplicados sobre $p_{-1}(z)$, siendo:

$$\mathcal{D}_F\{N_{-1}\} < \mathcal{D}_F\{S_{-1}\} < \mathcal{D}_F\{CT_{-1}\}$$

Por último, y siempre según el plano dinámico, la región de convergencia del método CT parece mayor que la de STF, dando lugar a una mayor cantidad de semillas que harán que el método converja.

Aplicación a polinomios de grado 3

Procederemos de manera análoga con la aplicación de polinomios de grado 3 del tipo $p(z) = z^3 + \lambda$. La tabla 4 recoge las características dinámicas de los tres métodos bajo estudio cuando se les aplica este polinomio, donde AT significa atractor, y RP repulsor.

	NEW	STF	C-T
Puntos fijos	$z_1^* = -\lambda^{1/3} \text{AT}$ $z_2^* = (-1)^{1/3} \lambda^{1/3} \text{AT}$ $z_3^* = -(-1)^{2/3} \lambda^{1/3} \text{AT}$	$z_1^* = -\lambda^{1/3} \text{AT}$ $z_2^* = (-1)^{1/3} \lambda^{1/3} \text{AT}$ $z_3^* = -(-1)^{2/3} \lambda^{1/3} \text{AT}$	$z_1^* = -\lambda^{1/3} \text{AT}$ $z_2^* = (-1)^{1/3} \lambda^{1/3} \text{AT}$ $z_3^* = -(-1)^{2/3} \lambda^{1/3} \text{AT}$ $z_k^*, k = 4, \dots, 21$
Puntos críticos libres	No tiene	$z_k^c, k = 1, \dots, 9$	$z_k^c, k = 1, \dots, 25$

Tabla 4. Características dinámicas de los métodos de Newton, Steffensen y Cordero Torregrosa para polinomios del tipo $p_\lambda(z) = z^3 + \lambda$

Si resultaba complicado encontrar expresiones analíticas para determinados puntos fijos y críticos con la aplicación de los polinomios de grado dos debido al alto grado de las expresiones implicadas, cuando trabajamos con polinomios de grado tres el problema se ve aumentado.

Al no disponer de las expresiones de los puntos críticos libres, no podemos obtener el plano de parámetros. No obstante, algunos casos particulares de los planos dinámicos se muestran en la figura 8, para los tres métodos iterativos con cuatro valores del parámetro λ .

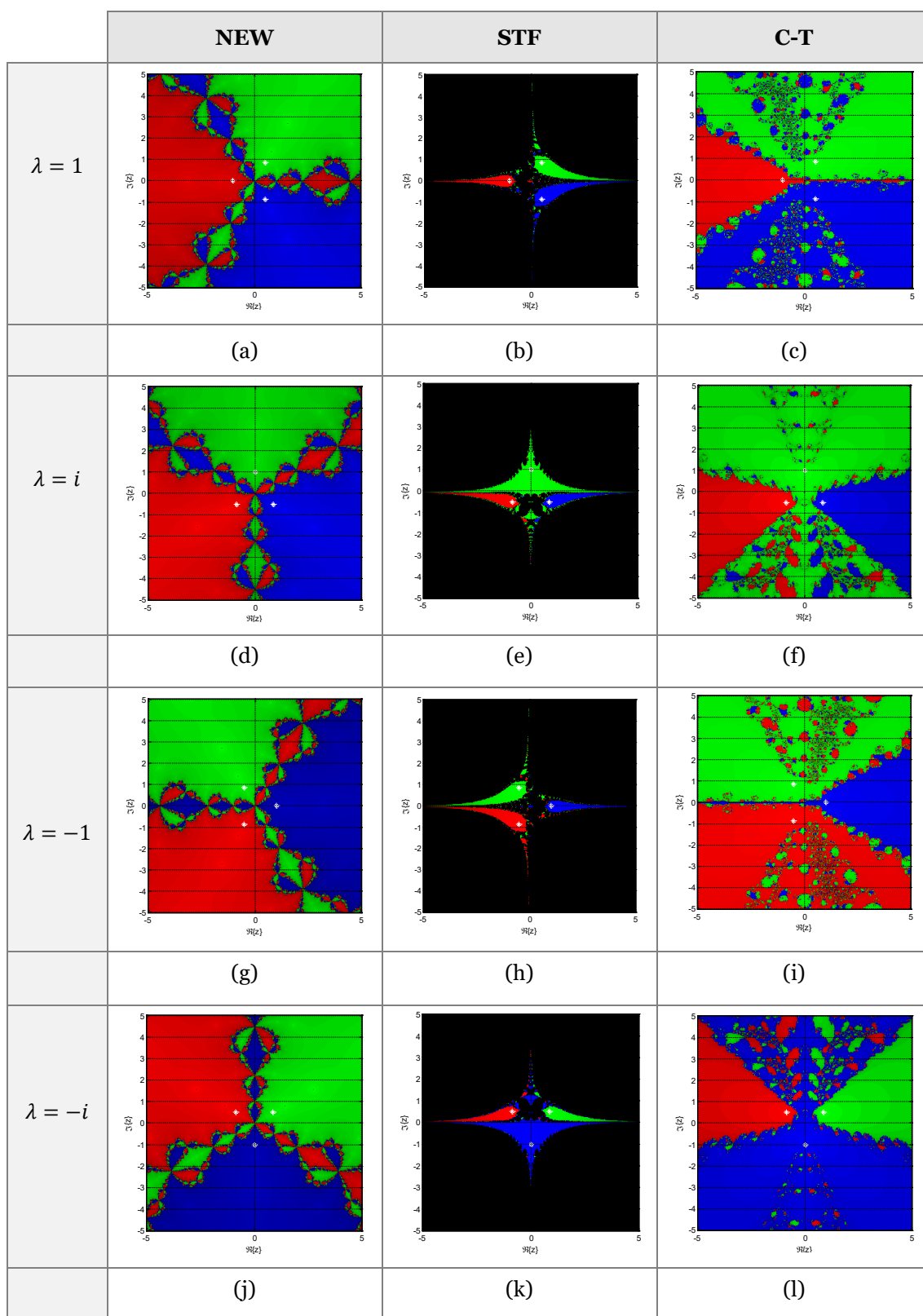


Figura 8. Planos dinámicos de los métodos de Newton (a, d, g, j), Steffensen (b, e, h, k) y Cordero Torregrosa (c, f, i, l) para polinomios $p(z) = z^3 + \lambda$ con $\lambda = 1$ (a, b, c), $\lambda = i$ (d, e, f), $\lambda = -1$ (g, h, i), $\lambda = -i$ (j, k, l)

La figura 8 evidencia las relaciones de simetría en los planos dinámicos. Vemos que para todos los planos dinámicos cuyo parámetro es real existe una simetría respecto del eje $y = 0$, fenómeno que ya ocurría en el caso de la aplicación de los métodos sobre polinomios cuadráticos.

Por otro lado, los planos con parámetros complejos tienen simetría sobre el eje $y = 0$ entre ellos (figura 8, relaciones d-j, e-k, f-l).

Para polinomios de grado tres siempre hay cuencas de atracción inmersas, de modo que no podemos concluir en ningún caso con que se converge a la raíz más cercana.

Por último, queda destacar la pobre región de convergencia que tiene el método STF, convirtiéndose en un método de escasa estabilidad.

10.4. Referencias bibliográficas

Chicharro, F. I. (2011). *Dimensión fractal de métodos iterativos de resolución de ecuaciones no lineales. Aplicación a la determinación de órbitas de satélites artificiales*. Proyecto final de carrera UPV.

Chicharro, F. I., Cordero, A. y Torregrosa, J. R. (2011). *Derivate free high order methods applied to preliminary orbit determination*. Elsevier.

Chicharro, F. I., Cordero, A., Gutiérrez, J. M. y Torregrosa, J. R. (2013). *Complex dynamics of derivate free methods for nonlinear equations. Applied mathematics and computation*. Elsevier.

Cordero, A. y Torregrosa, J. R. (2011). *A class of Steffensen type methods with optimal order of convergence. Applied mathematics and computation*. Elsevier.

Kung, H. T. y Traub, J. F. (1974). *Optimal order of one-point and multi-point iteration. Applied mathematics and computation*. Elsevier.

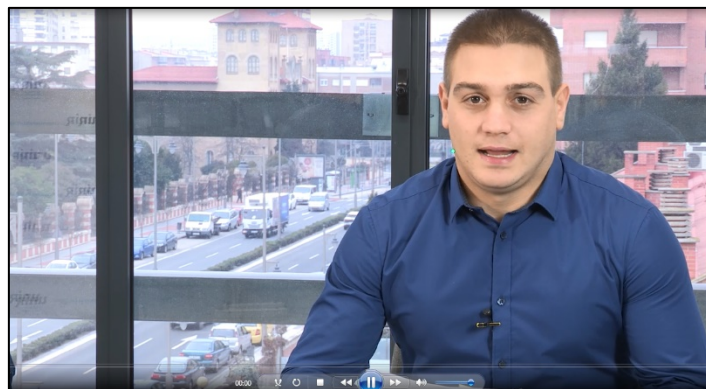
Magreñán, A. (2013). *Estudio de la dinámica del método de Newton amortiguado*. Universidad de La Rioja.

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

Desarrollo de una herramienta gráfica

En esta lección magistral entrevistamos al Dr. Chicharro, quien perfeccionó el desarrollo de una herramienta gráfica para la caracterización de los métodos iterativos: los planos dinámicos y de parámetros. Nos explicará los motivos por los cuales se inició en este ámbito de la investigación en la computación matemática, así como la transversalidad entre diferentes ramas de la ciencia que dan lugar a los planos de la dinámica compleja.

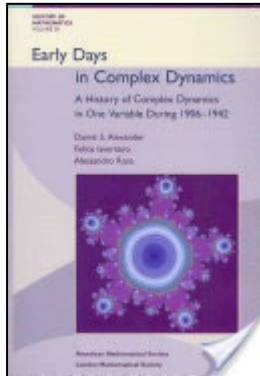


Accede al vídeo desde el aula virtual

No dejes de leer...

Early days in complex dynamic

Alexander, D., Iavernano, F. y Rosa, A. (2011). *Early days in complex dynamics. A history of complex dynamics in one variable during 1906-1942*. Ringgold IncRinggold.



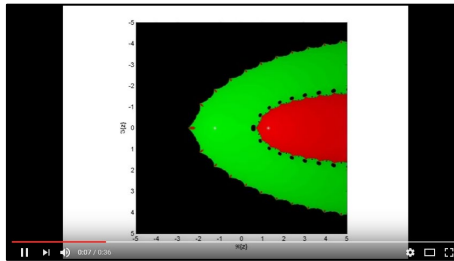
Para ampliar información y poder tener una idea global de la historia de los sistemas que se han descrito, se recomienda la lectura paciente del libro que se referencia a continuación. Parte de los orígenes de la dinámica compleja y cómo ha ido evolucionando con el paso de las décadas, además de indicar qué ha ido aportando cada uno de los protagonistas.

Accede al libro a través de la Biblioteca Virtual de UNIR

No dejes de ver...

Métodos

En estos vídeos se muestran cómo se comportan diferentes métodos a los que se les aplica un polinomio cuadrático del tipo $p(z) = z^2 + \lambda$ cuando el parámetro λ recorre una trayectoria determinada.



Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

<https://www.youtube.com/watch?v=wLxxhW2qPig>

<https://www.youtube.com/watch?v=L7QoUJspXlY>

<https://www.youtube.com/watch?v=oFmFJO74Gyw>

+ Información

Enlaces relacionados

Grupo de investigación MOMAIN

El grupo de investigación de la UNIR MOMAIN (modelación matemática aplicada a la ingeniería) tiene como objetivo el diseño de métodos y modelos de aplicación sobre problemas de ingeniería. Entre sus publicaciones se pueden encontrar métodos relacionados con el método de Newton amortiguado.

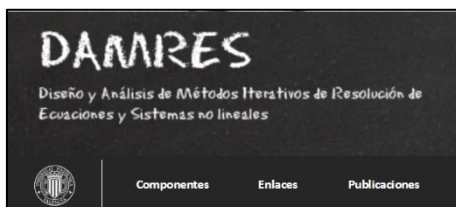


Accede a la página desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

<https://www.youtube.com/watch?v=FTwTEOz8DTg>

Grupo de investigadores DAMRES

El grupo de investigación de la UPV (Universitat Politècnica de València) DAMRES (diseño y análisis de métodos iterativos de resolución de ecuaciones y sistemas no lineales) tienen numerosas publicaciones en el campo de los sistemas dinámicos. Para ampliar información, no dudes en navegar por su página.



Accede a la página desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

<http://www.damres.webs.upv.es/>

Test

1. El método amortiguado de Newton, con $\mu \neq 1$ tiene convergencia:
 - A. Lineal.
 - B. Superlineal.
 - C. Cuadrática.
 - D. Cúbica.

2. ¿Cuántos polinomios son necesarios para el estudio de la aplicación de cualquier polinomio cuadrático al método de Newton amortiguado?:
 - A. 1.
 - B. 2.
 - C. 3.
 - D. 4.

3. El diagrama de bifurcación del método amortiguado de Newton al aplicarle polinomios del tipo $p_{-1}(x) = x^2 + 1$ indica que:
 - A. Para valores del parámetro $\mu \in (0,2)$, el método converge a la raíz del polinomio.
 - B. Para valores del parámetro $\mu \in (2,4)$, el método converge a un ciclo periódico de periodo 3.
 - C. Para valores del parámetro $\mu \in (2,4)$, existe un comportamiento caótico.
 - D. Ninguna de las anteriores es correcta.

4. Sean $A(z)$ un método de orden a , y $B(z)$ un método de orden b :
 - A. $A \circ B$ da lugar a un método de orden $a + b$.
 - B. $A \circ B$ da lugar a un método de orden ab .
 - C. $A \circ A$ da lugar al operador de punto fijo de las órbitas periódicas de periodo dos.
 - D. $A \circ A$ da lugar a un método de orden $2a$.

5. ¿Por qué se utilizan métodos libres de derivadas?
 - A. Porque la evaluación de la derivada requiere de un coste computacional grande.
 - B. Porque hay expresiones cuya derivada es difícil de obtener de forma analítica.
 - C. Porque la dimensión fractal del método disminuye cuando se aplican este tipo de expresiones.
 - D. Ninguna de las anteriores es correcta.

6. Sean los índices de eficiencia de los métodos de Newton, Steffensen y Cordero Torregrosa, señala las afirmaciones que sean correctas:

- A. Los tres métodos son óptimos a partir de la conjetura de King Traub.
- B. $I_{NEW} < I_{STF}$.
- C. $I_{STF} < I_{CT}$.
- D. $I_{CT} < I_{NEW}$.

7. ¿Por qué no se han obtenido planos de parámetros asociados al método de Newton?

- A. Porque los planos dinámicos ya reflejaban el comportamiento en función del parámetro.
- B. Porque no tenía puntos críticos libres.
- C. Porque el método de Newton incluye derivadas.
- D. Ninguna de las anteriores es correcta.

8. ¿Qué simetrías aparecen en los planos dinámicos?

- A. Simetría respecto del eje $x = 0$ para planos dinámicos que tienen parámetros reales.
- B. Simetría respecto del eje entre planos dinámicos de la misma familia con valores del parámetro conjugados.
- C. Simetría respecto del eje $x = y$ y para Newton aplicado sobre polinomios de grado dos.
- D. Ninguna de las anteriores es correcta.

9. ¿Cuál de los métodos es el que menor región de convergencia tiene?

- A. NEW.
- B. STF.
- C. CT.
- D. Los tres tienen la misma región de convergencia.

10. Evaluando los tres métodos en cuanto a región de convergencia, calidad en función de la conjetura de Kung-Traub, orden de convergencia, índice de eficiencia y esquema libre de derivadas, ¿cuál de los métodos es el que mejores prestaciones presenta?

- A. NEW.
- B. STF.
- C. CT.
- D. Los tres métodos presentan las mismas prestaciones.