Actividad 1: Corrección

Geometría diferencial aplicada

28 de enero de 2021

Contenidos

El paraboloide

Un paraboloide elíptico, S, se define como el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b},$$

con a y b constantes positivas. Si tomamos $a = b$, entonces obtenemos el caso particular del paraboloide circular.
Una manera de parametrizar esta superficie es la siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi : [-U, U] \times [-V, V] &\mapsto \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \left(u, v, \frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b}\right). \end{aligned}$$

Aquí, U y V son valores positivos arbitrarios.

El paraboloide circular

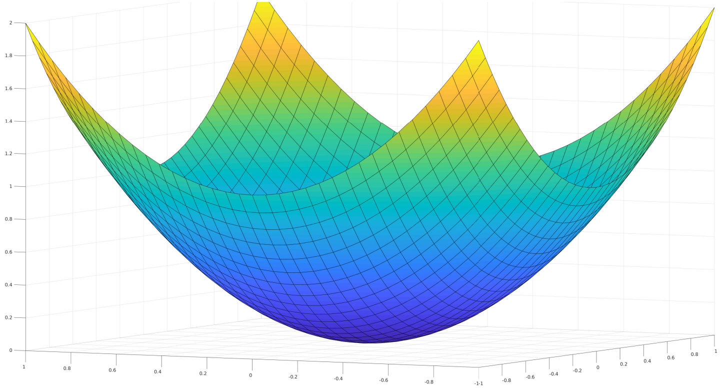

Figura: Paraboloide circular con $a = b = 1$, $u, v \in [-1, 1]$.

El paraboloide

Una alternativa es hacer la parametrización en coordenadas cilíndicas:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \\ z = z, \\ \rho^2 = x^2 + y^2. \end{cases}$$

En el caso $a = b$ (paraboloide circular), la parametrización viene dada por:

$$\tilde{\varphi}(\rho, \theta) = \left(a\rho\cos\theta, a\rho\sin\theta, a^2\rho^2\right)$$

. De hecho, podemos incluir a en las variables, i.e. $\rho^2 = a^2(x^2 + y^2)$, lo que equivale a suponer $a = 1$.

El paraboloide circular

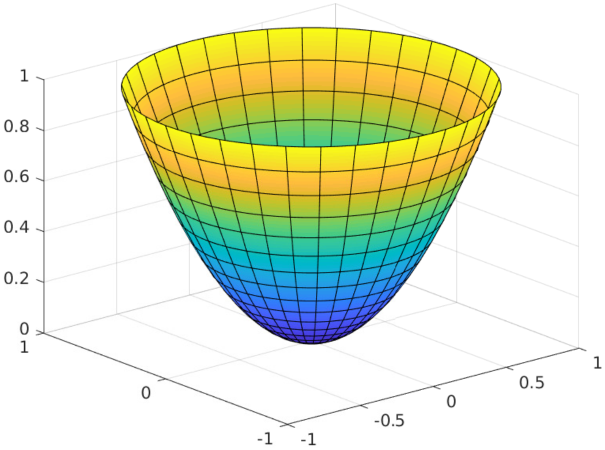

Figura: Paraboloide circular con $a = b = 1$, $\rho \in (0, 1)$, $\theta \in (0, 2\pi)$.

Es fácil ver que:

$$\varphi_u(u,v) = \left(1, 0, \frac{2u}{a}\right),$$

$$\varphi_v(u,v) = \left(0, 1, \frac{2v}{b}\right).$$

Entonces la primera forma fundamental es la aplicación bilineal expresada por la matriz

$$I_S = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}.$$

Donde:

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 1 + \frac{4u^2}{a^2}, \quad F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \frac{4uv}{ab}, \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 1 + \frac{4v^2}{b^2}.$$

$$E = \langle \varphi_\rho, \varphi_\rho \rangle = 1 + 4\rho^2, \quad F = \langle \tilde{\varphi}_\rho, \tilde{\varphi}_\theta \rangle = 0, \quad G = \langle \tilde{\varphi}_\theta, \tilde{\varphi}_\theta \rangle = \rho^2.$$

Vamos ahora con los coeficientes de la segunda forma fundamental. Ésta es la forma bilineal dada por la matriz:

$$II_S = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}.$$

Los coeficientes L, M, y N se pueden calcular utilizando siguientes expresiones:

$$L = \frac{\det\left(\varphi_{u,u}, \varphi_u, \varphi_v\right)}{\sqrt{\det(I_S)}}, \quad M = \frac{\det\left(\varphi_{u,v}, \varphi_u, \varphi_v\right)}{\sqrt{\det(I_S)}}, \quad N = \frac{\det\left(\varphi_{u,u}, \varphi_v, \varphi_v\right)}{\sqrt{\det(I_S)}}.$$

Esto es:

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{\sqrt{\det(I_S)}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{a} & \frac{2u}{a} & \frac{2v}{b} \end{vmatrix} = \frac{2}{a\sqrt{\det(I_S)}}, \\
M &= \frac{1}{\sqrt{\det(I_S)}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2u}{a} & \frac{2v}{b} \end{vmatrix} = 0, \\
N &= \frac{1}{\sqrt{\det(I_S)}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{b} & \frac{2u}{a} & \frac{2v}{b} \end{vmatrix} = \frac{2}{b\sqrt{\det(I_S)}},
\end{aligned}
$$

Donde,

$$\begin{aligned}\det(I_S) = EG - F^2 &= \left(1 + \frac{4u^2}{a^2}\right)\left(1 + \frac{4v^2}{b^2}\right) - \frac{16u^2v^2}{a^2b^2} \\ &= \left(1 + \frac{4u^2}{a^2} + \frac{4v^2}{b^2}\right).\end{aligned}$$

$$L = \frac{2}{\rho(1+4\rho^2)}, \quad M = 0, \quad N = \frac{2\rho}{1+4\rho^2}$$

Longitud de una curva

Hay varias formas de encontrar una curva contenida en la superficie. Una de las más elementales es definir una curva

$$(u(t), v(t)) : \mathbb{R} \mapsto [-U, U] \times [-V, V]$$

y componerla con la parametrización φ, esto es, $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$. Como tenemos libertad de elección, definimos $(u(t), v(t)) = (t, 0)$. Entonces, la curva contenida en la superficie con la que trabajaremos es:

$$\alpha(t) = \left(t, 0, \frac{t^2}{a}\right).$$

La longitud de la curva definida por los valores t_0 y t_1 viene dada por la fórmula:

$$\Big[\mathrm{long}(\alpha)\Big]_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\frac{du}{dt} + F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\frac{dv}{dt}}dt.$$

Donde $\frac{du}{dt} = 1$ y $\frac{dv}{dt} = 0$, luego:

$$\Big[\operatorname{long}(\alpha)\Big]_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\frac{du}{dt}}dt.$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \frac{4t^2}{a^2}}dt.$$

Para resolver esta integral hay que tener en cuenta que:

$$\int \sqrt{1+u^2} = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{1+u^2} + \log\big(\sqrt{1+u^2}+u\big)\right) + c$$

Para tratar esta cuestión, invocaremos el Teorema Egregio de Gauss. Éste clama que toda isometría local, preserva la curvatura gaussiana. Esto es, si existiera una isometría local entre el paraboloide circular y el elíptico, entonces éstos deberían tener la misma curvatura Gaussiana. La curvatura Gaussiana se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$K_{a,b} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{LN}{\det(I_S)} = \frac{4}{ab\det(I_S)^2} = \frac{4}{ab\left(1 + \frac{4u^2}{a^2} + \frac{4v^2}{b^2}\right)^2}.$$

El caso del paraboloide circular se recupera del elíptico suponiendo $b = a$. Claramente, $K_{a,a} \neq K_{a,b}$ si $a \neq b$. Esto es, la curvatura gaussiana del paraboloide circular (caso para el que podemos suponer $b = a$) es distinta de la curvatura gaussiana del paraboloide elíptico. En virtud del Teorema Egregio de Gauss, se desprende que un paraboloide circular y un paraboloide elíptico no son localmente isométricos.

unir

LA UNIVERSIDAD EN INTERNET