¿Qué vimos la última semana* ?

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

Primera forma fundamental: Producto escalar definido en el espacio tangente de una superficie. Longitudes y ángulos.

Orientabilidad: Posibilidad de definir un vector normal a lo largo de la superficie.

Segunda forma fundamental: Curvatura de una superficie. Curvatura normal.

*La última semana del año pasado.

Tema 6. Curvaturas

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

6.1 Curvaturas principales

6.2 Curvaturas de Gauss y media

6.3 Clasificación de los puntos de una superficie

6.4 Coeficientes de la segunda forma fundamental

6.5 Isometrías y Teorema Egregio de Gauss

Curvaturas principales

- Se llama segunda forma fundamental a la forma cuadrática

$$II_p(w) = -< dN_p(w), w >.$$

- El cálculo de la segunda forma fundamental está basado en dN_p.
- dN_p es autoadjunta, por tanto, diagonaliza en una base ortonormal de T_pS.
- Existe una base ortonormal, $\{e_1, e_2\} \in T_pS$ tal que:

$$\begin{aligned} dN_p(e_1) &= -k_1 e_1 \\ dN_p(e_2) &= -k_2 e_2 \end{aligned} \qquad (k_1 \geq k_2)$$

- k_1 y k_2 se llaman **curvaturas principales** de S en p.

Curvaturas principales

Si k_n es la curvatura normal a lo largo de un vector cualquiera v dado, se verifica que

$$k_n = k_1 cos^2\theta + k_2 sen^2\theta$$

Por tanto,

$$II_p(v) \leq k_1(cos^2\theta + sen^2\theta) = k_1$$

$$k_2 = k_2(cos^2\theta + sen^2\theta) \leq \ II_p(v)$$

Curvaturas principales

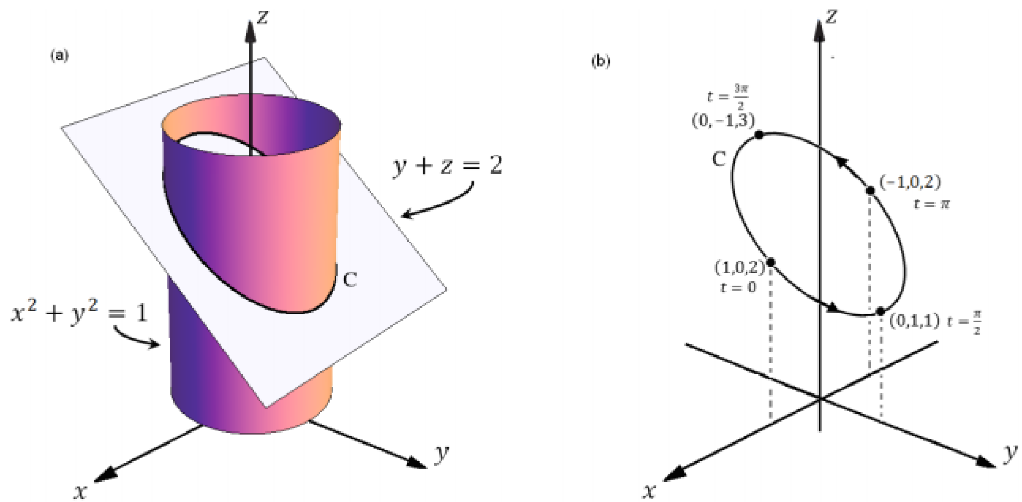
Ejemplos:

1. **Plano**. Como todas las curvaturas normales son cero, las curvaturas principales (valores máximo y mínimo) también son cero.

2. **Esfera**. Como la curvatura normal es constante en todos los puntos de la esfera, las curvaturas principales son iguales entre sí, constantes positivas. Una esfera se curva de forma constante en todas las direcciones.

Curvaturas principales

3. **Cilindro**. Puede parametrizarse un cilindro para que la curvatura mínima sea cero (generatriz) y la máxima uno (circunferencia).



Fuente: http://www.mate.unlp.edu.ar/

Curvaturas de Gauss y media

1. $K(p) = det\left(dN_p\right) = k_1 \cdot k_2$ es la **curvatura gaussiana** S en p.
2. $H(p) = -\frac{traza(dN_p)}{2}$ es la **curvatura media** de S en p.

Estos valores no dependen de la base en que se exprese dN_p.

Ojo, esto no significa que sean constantes asociadas a una superficie: pueden variar si se cambia la parametrización.

Coeficientes de la 2ª FF

Sea $N = +\frac{\varphi_u \times \varphi_v}{||\varphi_u \times \varphi_v||}$. Sea α una curva en S tal que $\alpha'(0) \in T_pS$,

$$\alpha(t) = \varphi\big(u(t), v(t)\big) \Longrightarrow \alpha' = u'\varphi_u + v'\varphi_v$$

$$dN_p(\alpha') = dN_p(u'\varphi_u + v'\varphi_v) = u'N_u + v'N_v$$

$$II_p(\alpha') = -< dN_p(\alpha'), \alpha' > = -< u'N_u + v'N_v, u'\varphi_u + v'\varphi_v > =$$

$$(u')^2(-< N_u, \varphi_u >) + u'v'(-< N_u, \varphi_v > - < N_v, \varphi_u >) + (v')^2(-< N_v, \varphi_v >)$$

Coeficientes de la 2ª FF

Llamando

$$L = -< N_u, \varphi_u >$$

$$2M = -< N_u, \varphi_v > - < N_v, \varphi_u >$$

$$N = -< N_v, \varphi_v >$$

Resulta

$$II_p(\alpha') = (u')^2 L + 2u'v'M + (v')^2 N$$

Coeficientes de la 2ª FF

$L =-< dN_p(\varphi_u), \varphi_u' >=-< N_u, \varphi_u >=< N, \varphi_{uu} >$ ya que

$0 =< N, \varphi_u > \Longrightarrow 0 =< N, \varphi_u >_u =< N_u, \varphi_u > + < N, \varphi_{uu} >$

Análogamente, puede probarse que

$N =-< dN_p(\varphi_v), \varphi_v' >=-< N_v, \varphi_v >=< N, \varphi_{vv} >$

$M =< N, \varphi_{uv} >$

L, M y N se llaman **coeficientes de la segunda forma fundamental** en la parametrización φ.

Coeficientes de la 2ª FF

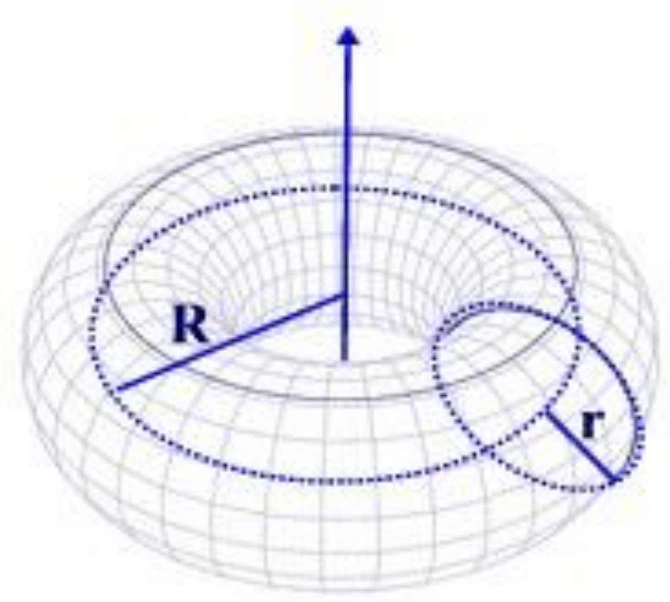
$$H(p) = \frac{1}{2}\frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}$$

$$K(p) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

$$\left.\begin{array}{c} k_1 + k_2 = 2H \\ k_1 k_2 = K \end{array}\right\} \Longrightarrow k_i = H \pm \sqrt{H^2 - K}, i = 1{,}2$$

Curvatura gaussiana

Ejemplo:



$$\varphi(u, v) =$$

$$\big((R + rcosu)cosv, (R + rcosu)senv, rsenu\big)$$

Fuente: http://mathbitsnotebook.com/

Curvatura gaussiana

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

$$\varphi_u = (-r \cdot senu \cdot cosv, -r \cdot senu \cdot senv, r \cdot cosu)$$

$$\varphi_v = (-(R + rcosu)senv, (R + rcosu)cosv, 0)$$

$$\varphi_{uu} = (-r \cdot cosu \cdot cosv, -r \cdot cosu \cdot senv, -r \cdot senu)$$

$$\varphi_{uv} = (r \cdot senu \cdot senv, -r \cdot senu \cdot cosv, 0)$$

$$\varphi_{vv} = (-(R + rcosu)cosv, (R + rcosu)senv, 0)$$

Curvatura gaussiana

Los **coeficientes de la primera forma fundamental**:

$$E =< \varphi_u, \varphi_u >= r^2 \cdot sen^2u \cdot cos^2v + r^2 \cdot sen^2u \cdot sen^2v + r^2 \cdot cos^2u =$$

$$r^2 \cdot sen^2u(cos^2v + sen^2v) + r^2 \cdot cos^2u = r^2$$

$$F =< \varphi_u, \varphi_v >= r \cdot senu \cdot senv \cdot cosv(R + rcosu) - r \cdot senu \cdot senv \cdot cosv(R + rcosu)$$

$$+r \cdot cosu \cdot 0 = 0$$

$$G =< \varphi_v, \varphi_v >= (R + rcosu)^2 senv^2 + (R + rcosu)^2 cosv^2 = (R + rcosu)^2$$

Curvatura gaussiana

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

Segunda forma fundamental:

$$\sqrt{EG - F^2} = r(R + rcosu)$$

$$L = < \varphi_{uu}, N > = < \varphi_{uu}, \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{||\varphi_u \times \varphi_v||} > = \frac{< \varphi_{uu}, \varphi_u \times \varphi_v >}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\det(\varphi_{uu}, \varphi_u, \varphi_v)}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$\det(\varphi_{uu}, \varphi_u, \varphi_v) = \begin{vmatrix} -(R + rcosu)senv & (R + rcosu)cosv & 0 \\ -r \cdot cosu \cdot cosv & -r \cdot cosu \cdot senv & -r \cdot cosu \\ -r \cdot senu \cdot cosv & -r \cdot senu \cdot senv & r \cdot cosu \end{vmatrix} = r$$

Curvatura gaussiana

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

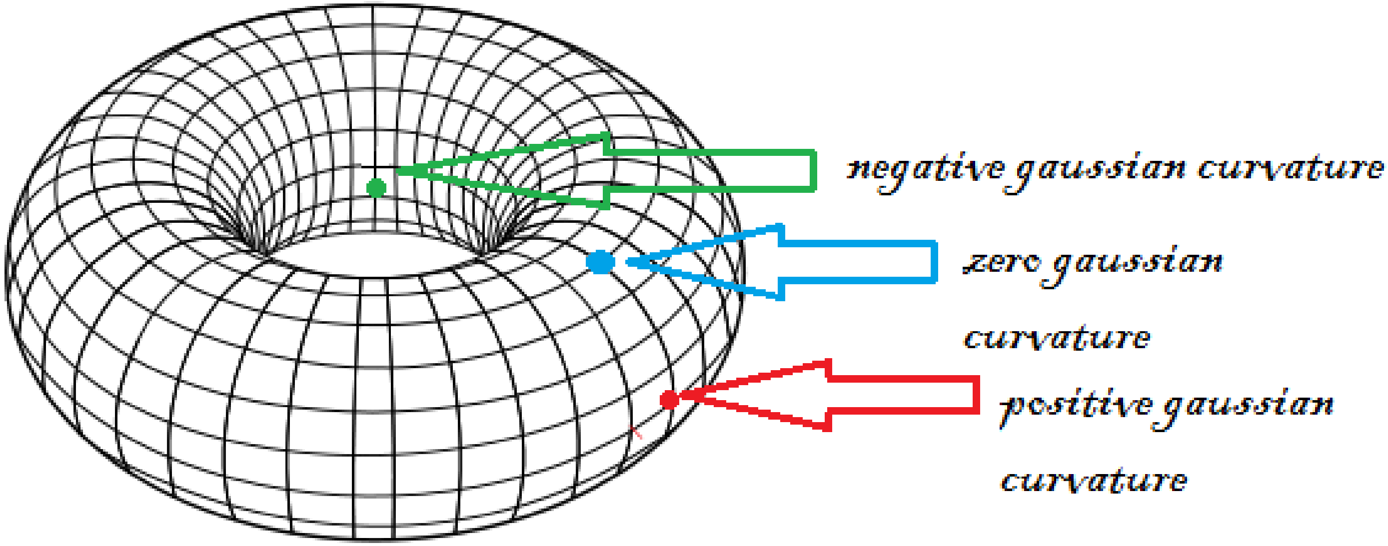
$$M = \frac{\det(\varphi_{uv}, \varphi_u, \varphi_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = 0$$

$$N = \frac{\det(\varphi_{vv}, \varphi_u, \varphi_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = cosu(R + r \cdot cosu)$$

Por tanto,

$$K(p) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{r \cdot cosu(R + r \cdot cosu)}{r^2 \cdot (R + r \cdot cosu)^2} = \frac{cosu}{r \cdot (R + r \cdot cosu)}$$

Curvatura gaussiana



Fuente: http://math.stackexchange.com/

Isometrías

- Isometría: si puede llevarse una superficie a otra sin sufrir ninguna deformación.

- **Ejemplo,** ¿puede construirse un mapa perfecto de la Tierra? equivaldría a ¿ existe alguna isometría entre el plano y la esfera o el elipsoide?

- Dificultad: demostrar que no lo son

- Teorema Egregio de Gauss

Isometrías

La aplicación entre superficies $F: S_1 \longrightarrow S_2$ es una **isometría** si

- Es un difeomorfismo
- $\forall\, p \in S_1, \forall\, w_1, w_2 \in T_pS, < dF_p(w_1), dF_p(w_2) >_{F(p)} = < w_1, w_2 >_p$

Ejemplo: Movimiento rígido

$$M(p) = Ap + b, A \in O(3) \Longrightarrow < Au, Av > = < u, v >, \forall\, u, v \in \mathbb{R}^3$$

Observación: no todas las isometrías entre superficies proceden de movimientos rígidos.

Isometrías

La aplicación entre superficies $F\colon S_1 \longrightarrow S_2$ es una **isometría local** si $\forall\, p \in S_1$ existe un entorno V de p y un entorno W de $F(p)$ tal que $F|_v\colon V \longrightarrow W$ es isometría.

Para que se pudiera hacer un mapa perfecto de la Tierra bastaría con que existiera una isometría local de la esfera (o del elipsoide) al plano.

Isometrías

Teorema Egregio de Gauss

Si $F: S_1 \longrightarrow S_2$ es una **isometría local**, entonces $K(F(p)) = K(p)$, $\forall\, p \ \in S$

Idea: la curvatura gaussiana, $K = \frac{1}{E}$. Por tanto, se conserva por isometrías locales.

Aplicación del teorema: contrarrecíproco