Tema 9
Sistemas iterativos I
Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos

Dra. Neus Garrido Sàez

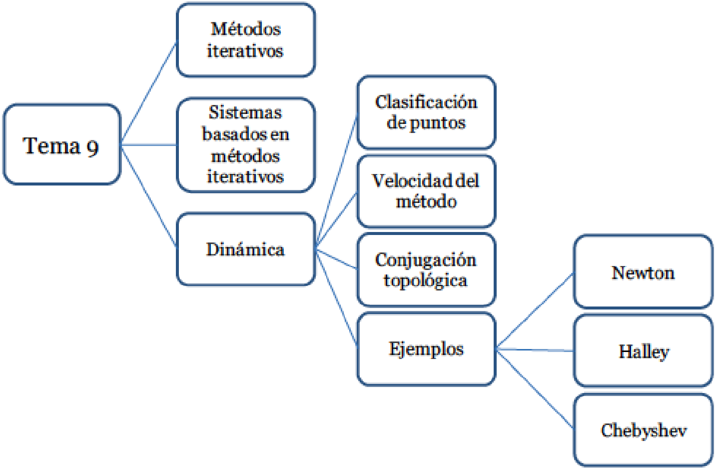
Máster en Ingeniería Matemática y Computación
Escuela Superior en Ingeniería y Tecnología

Contenido

1

Introducción: sistemas basados en métodos iterativos

Esquema



Tema 9
Métodos iterativos
Sistemas basados en métodos iterativos
Dinámica
Clasificación de puntos
Velocidad del método
Conjugación topológica
Ejemplos
Newton
Halley
Chebyshev

Sistemas dinámicos discretos

Procesos iterativos en los que, partiendo de una semilla x_0, se itera la función hasta que la órbita alcanza un punto fijo atractor o diverge

- Expresión general: $x_{k+1} = f(x_k)$

Sistemas dinámicos discretos

Procesos iterativos en los que, partiendo de una semilla x_0, se itera la función hasta que la órbita alcanza un punto fijo atractor o diverge

- Expresión general: $x_{k+1} = f(x_k)$

Método iterativo

Métodos numéricos que sirven para resolver ecuaciones, generalmente no lineales o cuya solución no se puede obtener a partir de una expresión analítica.

Sistemas basados en métodos iterativos

Sistemas dinámicos discretos

Procesos iterativos en los que, partiendo de una semilla x_0, se itera la función hasta que la órbita alcanza un punto fijo atractor o diverge

- Expresión general: $x_{k+1} = f(x_k)$

Método iterativo

Métodos numéricos que sirven para resolver ecuaciones, generalmente no lineales o cuya solución no se puede obtener a partir de una expresión analítica.

...Hasta ahora

- $f \Rightarrow$ expresión algebraica
- Estudio dinámico sobre f

Novedades...

- $F \Rightarrow$ función de iteración (método iterativo)
- Estudio dinámico sobre F

La función de iteración F trata de obtener la solución de la función f

Notación

- Ecuación no lineal: f
- Método iterativo aplicado a la ecuación no lineal: $F(f)$
- Expresión general: $x_{x+1} = F(x_k, f(x_k))$

- Soluciones en el dominio de los números reales: $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$
- Soluciones en el dominio de los números complejos: $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$

Iterativo

Ecuación a resolver

$$x_{k+1} = F(x_k, f_\lambda(x_k))$$

Tiempo discreto

Parámetro

Método numérico

Variable real o compleja

2

Preliminares de dinámica compleja

Operador de punto fijo

Dado un método iterativo con expresión general

$$x_{k+1} = F(x_k, f(x_k)),$$

el operador de punto fijo asociado, O_f, mantiene la estructura de la expresión general, pero sus variables están en el dominio continuo:

$$O_f(x) = F(x, f(x)).$$

Las características dinámicas del método iterativo se definen a partir de O_f.

Operador de punto fijo

Dado un método iterativo con expresión general

$$x_{k+1} = F(x_k, f(x_k)),$$

el operador de punto fijo asociado, O_f, mantiene la estructura de la expresión general, pero sus variables están en el dominio continuo:

$$O_f(x) = F(x, f(x)).$$

Las características dinámicas del método iterativo se definen a partir de O_f.

- Puntos fijos: $O_f(x^*) = x^*$

Operador de punto fijo y dinámica de puntos

Operador de punto fijo

Dado un método iterativo con expresión general

$$x_{k+1} = F(x_k, f(x_k)),$$

el operador de punto fijo asociado, O_f, mantiene la estructura de la expresión general, pero sus variables están en el dominio continuo:

$$O_f(x) = F(x, f(x)).$$

Las características dinámicas del método iterativo se definen a partir de O_f.

- Puntos fijos: $O_f(x^*) = x^*$
- Dinámica de los puntos fijos:
  - $|O_f'(x^*)| < 1 \Rightarrow$ Atractor
  - $|O_f'(x^*)| > 1 \Rightarrow$ Repulsor
  - $|O_f'(x^*)| = 1 \Rightarrow$ Neutral
  - $|O_f'(x^*)| = 0 \Rightarrow$ Superatractor

Operador de punto fijo y dinámica de puntos

Operador de punto fijo

Dado un método iterativo con expresión general

$$x_{k+1} = F(x_k, f(x_k)),$$

el operador de punto fijo asociado, O_f, mantiene la estructura de la expresión general, pero sus variables están en el dominio continuo:

$$O_f(x) = F(x, f(x)).$$

Las características dinámicas del método iterativo se definen a partir de O_f.

- Puntos fijos: $O_f(x^*) = x^*$
- Dinámica de los puntos fijos:
  - $|O'_f(x^*)| < 1 \Rightarrow$ Atractor
  - $|O'_f(x^*)| > 1 \Rightarrow$ Repulsor
  - $|O'_f(x^*)| = 1 \Rightarrow$ Neutral
  - $|O'_f(x^*)| = 0 \Rightarrow$ Superatractor
- Puntos críticos: $O'_f(x^C) = 0$

Operador de punto fijo

Dado un método iterativo con expresión general

$$x_{k+1} = F(x_k, f(x_k)),$$

el operador de punto fijo asociado, O_f, mantiene la estructura de la expresión general, pero sus variables están en el dominio continuo:

$$O_f(x) = F(x, f(x)).$$

Las características dinámicas del método iterativo se definen a partir de O_f.

- Puntos fijos: $O_f(x^*) = x^*$
- Dinámica de los puntos fijos:
  - $|O'_f(x^*)| < 1 \Rightarrow$ Atractor
  - $|O'_f(x^*)| > 1 \Rightarrow$ Repulsor
  - $|O'_f(x^*)| = 1 \Rightarrow$ Neutral
  - $|O'_f(x^*)| = 0 \Rightarrow$ Superatractor
- Puntos críticos: $O'_f(x^C) = 0$
- Puntos críticos libres: puntos críticos de O_f que no coinciden con los puntos fijos.

Definición

Sea $\{x_k\}$ una sucesión convergente a un límite α. Si existe una constante $C \in]0,1[$ tal que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|\alpha - x_{k+1}|}{|\alpha - x_k|^p} = C,$$

entonces la sucesión converge a α con orden de convergencia p.

- $p = 1$: convergencia lineal
- $p = 2$: convergencia cuadrática
- $1 < p < 2$: convergencia superlineal

Definición

Sea $\{x_k\}$ una sucesión convergente a un límite α. Si existe una constante $C \in]0,1[$ tal que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|\alpha - x_{k+1}|}{|\alpha - x_k|^p} = C,$$

entonces la sucesión converge a α con orden de convergencia p.

- $p = 1$: convergencia lineal
- $p = 2$: convergencia cuadrática
- $1 < p < 2$: convergencia superlineal

Orden de convergencia computacional aproximado (ACOC)

$$\rho = \frac{\log\left|\frac{x_{k+1}-x_k}{x_k-x_{k-1}}\right|}{\log\left|\frac{x_k-x_{k-1}}{x_{k-1}-x_{k-2}}\right|}$$

Objetivo

Conocer el comportamiento dinámico de una familia de funciones a partir del estudio de casos particulares:

Caso particular $\Rightarrow$ Caso general

Definición

Dos funciones $f : D \longrightarrow D$ y $g : E \longrightarrow E$ son topológicamente conjugadas si existe un homeomorfismo (aplicación continua con inversa continua) $\varphi : D \longrightarrow E$ tal que

$$\varphi \circ f = g \circ \varphi$$

Objetivo

Conocer el comportamiento dinámico de una familia de funciones a partir del estudio de casos particulares:

Caso particular $\Rightarrow$ Caso general

Definición

Dos funciones $f : D \longrightarrow D$ y $g : E \longrightarrow E$ son topológicamente conjugadas si existe un homeomorfismo (aplicación continua con inversa continua) $\varphi : D \longrightarrow E$ tal que

$$\varphi \circ f = g \circ \varphi$$

Propiedades

Sean f y g topológicamente conjugadas por φ, entonces:

- f y g también son topológicamente conjugadas por φ^{-1}
- $\varphi \circ f^k = g^k \circ \varphi$, $\forall k \in \mathbb{N}$
- x^P es punto periódico de $f \Leftrightarrow \varphi(x^P)$ es punto periódico de g. Además:
  - x^P y $\varphi(x^P)$ tienen el mismo periodo
  - Si φ' no se anula en la órbita de x^P, entonces x^P y $\varphi(x^P)$ tienen el mismo carácter
  - $\mathcal{A}(\varphi(x^P)) = \varphi(\mathcal{A}(x^P))$

Ejemplo 1. Calcula los parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ y $g_\mu(x) = x^2 + \mu$ sean topológicamente conjugadas a partir de $\varphi = \alpha x + \beta$:

Por definición, f_λ y g_μ son topológicamente conjugadas si

$$g_\mu = \varphi^{-1} \circ f_\lambda \circ \varphi$$

Como $\varphi^{-1}(x) = \frac{x-\beta}{\alpha}$, entonces:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(f_\lambda(\varphi(x))) &= \varphi^{-1}(f_\lambda(\alpha x + \beta)) = \varphi^{-1}\left(\lambda(\alpha x + \beta)(1 - \alpha x - \beta)\right) \\ &= \frac{\lambda(\alpha x + \beta)(1 - \alpha x - \beta) - \beta}{\alpha} \\ &= -\lambda \alpha x^2 + (\lambda - 2\lambda\beta)x + \frac{\lambda\beta - \lambda\beta^2 - \beta}{\alpha} \end{aligned}$$

$$g_\mu(x) = \varphi^{-1}(f_\lambda(\varphi(x))) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\alpha &= 1 \\ \lambda - 2\lambda\beta &= 0 \\ \frac{\lambda\beta - \lambda\beta^2 - \beta}{\alpha} &= \mu \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{\lambda}, \;\; \beta = \frac{1}{2}, \;\; \mu = \frac{\lambda(2-\lambda)}{4}$$

$$\boxed{\varphi(x) = -\frac{1}{\lambda}x + \frac{1}{2}}$$

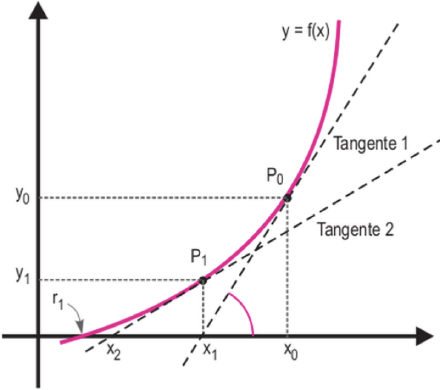
3

Método de Newton

Contenidos

Método de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$



Orden de convergencia:
$p = 2$

Método de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- Operador de punto fijo:

$$N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Descripción del método de Newton

Método de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- Operador de punto fijo:

$$N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

- Puntos fijos:

$$N_f(x) = x \Leftrightarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$\Rightarrow$ Los puntos fijos de N_f son las raíces de $f(x)$

Descripción del método de Newton

Método de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- Operador de punto fijo:

$$N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

- Puntos fijos:

$$N_f(x) = x \Leftrightarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$\Rightarrow$ Los puntos fijos de N_f son las raíces de $f(x)$

- Estabilidad de los puntos fijos:

$$N_f'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Si $f(x) = 0 \Rightarrow N_f'(x) = 0 \Rightarrow$ Los puntos fijos son superatractores

Método de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- Operador de punto fijo:

$$N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

- Puntos fijos:

$$N_f(x) = x \Leftrightarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x \Leftrightarrow f(x) = 0$$

  $\Rightarrow$ Los puntos fijos de N_f son las raíces de $f(x)$

- Estabilidad de los puntos fijos:

$$N_f'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

  Si $f(x) = 0 \Rightarrow N_f'(x) = 0 \Rightarrow$ Los puntos fijos son superatractores

- Puntos críticos: $N_f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)f''(x) = 0$

  $\Rightarrow$ Los puntos críticos son las raíces de $f(x)f''(x)$

Contenidos

- Expresión general de los polinomios cuadráticos:

$$f(z) = z^2 + az + b$$

- Operador del método de Newton sobre $f(z)$:

$$N_f(z) = \frac{z^2 - b}{2z - a}$$

$\Rightarrow$ Depende de 2 parámetros: a y b

- Objetivo: reducir la cantidad de parámetros por medio de una conjugación topológica

Reducción del operador del método de Newton sobre polinomios cuadráticos

$f(z) = z^2 + az + b$ y $g(z) = z^2 + \lambda$ son topológicamente conjugadas a partir de

$$\varphi(z) = \alpha z + \beta \qquad \Rightarrow \alpha ? \;\; \beta ?$$

- Calcular α y β de modo que $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi = g$:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(f(\varphi(z))) &= \varphi^{-1}(f(\alpha z + \beta)) = \varphi^{-1}((\alpha z + \beta)^2 + (\alpha z + \beta)z + b) \\ &= \alpha z^2 + (2\beta + a)z + \frac{\beta^2 - \beta + a\beta + b}{\alpha} \end{aligned}$$

$$\varphi^{-1}(f(\varphi(z))) = g(z) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & 1 \\ 2\beta + a & = & 0 \\ \dfrac{\beta^2 - \beta + a\beta + b}{\alpha} & = & \lambda \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & 1 \\ \beta & = & -\dfrac{a}{2} \\ \lambda & = & b - \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a}{2} \end{array} \right.$$

$$\boxed{\varphi(z) = z - \frac{a}{2}}$$

Todos los comportamientos dinámicos asociados a $g(z) = z^2 + \lambda$ son generalizables para cualquier polinomio cuadrático

- Operador de punto fijo del método de Newton asociado a polinomios cuadráticos:

$$N_\lambda(z) = z - \frac{f_\lambda(z)}{f'_\lambda(z)} = \frac{z^2 - \lambda}{2z}$$

- Operador de punto fijo del método de Newton asociado a polinomios cuadráticos:

$$N_\lambda(z) = z - \frac{f_\lambda(z)}{f'_\lambda(z)} = \frac{z^2 - \lambda}{2z}$$

- Puntos fijos:

$$N_\lambda(z) = z \Leftrightarrow \frac{z^2 - \lambda}{2z} = z \Leftrightarrow z^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow z^* = \pm i\sqrt{\lambda}$$

- Operador de punto fijo del método de Newton asociado a polinomios cuadráticos:

$$N_\lambda(z) = z - \frac{f_\lambda(z)}{f'_\lambda(z)} = \frac{z^2 - \lambda}{2z}$$

- Puntos fijos:

$$N_\lambda(z) = z \Leftrightarrow \frac{z^2 - \lambda}{2z} = z \Leftrightarrow z^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow z^* = \pm i\sqrt{\lambda}$$

- Comportamiento dinámico de los puntos fijos:

$$N'_\lambda(z) = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2z^2} \quad \Rightarrow \quad N'_\lambda(z^*) = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2(\pm\sqrt{\lambda})^2} = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2\lambda} = 0$$

$\Rightarrow z^* = \pm i\sqrt{\lambda}$ son puntos fijos superatractores

- Operador de punto fijo del método de Newton asociado a polinomios cuadráticos:

$$N_\lambda(z) = z - \frac{f_\lambda(z)}{f'_\lambda(z)} = \frac{z^2 - \lambda}{2z}$$

- Puntos fijos:

$$N_\lambda(z) = z \Leftrightarrow \frac{z^2 - \lambda}{2z} = z \Leftrightarrow z^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow z^* = \pm i\sqrt{\lambda}$$

- Comportamiento dinámico de los puntos fijos:

$$N'_\lambda(z) = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2z^2} \quad \Rightarrow \quad N'_\lambda(z^*) = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2(\pm\sqrt{\lambda})^2} = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2\lambda} = 0$$

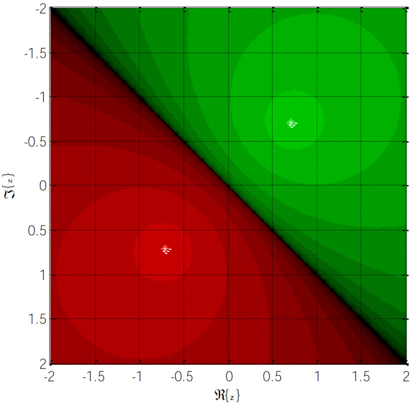
$\Rightarrow z^* = \pm i\sqrt{\lambda}$ son puntos fijos superatractores

- Puntos críticos:

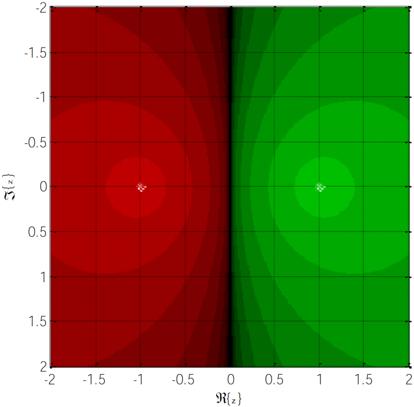
$$N'_\lambda(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2z^2} = 0 \Leftrightarrow z^2 + \lambda = 0$$

$\Rightarrow \nexists$ puntos críticos libres $\Rightarrow \nexists$ plano de parámetros

- $z_1^* = i\sqrt{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}(z_1^*)$
- $z_2^* = -i\sqrt{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}(z_2^*)$



(a) $\lambda = i$



(b) $\lambda = -1$

Contenidos

Método de Newton sobre polinomios cúbicos

- Expresión general de los polinomios cúbicos:

$$f(z) = z^3 + az^2 + bz + c$$

- Operador del método de Newton sobre $f(z)$:

$$N_f(z) = \frac{2z^3 + az^2 - c}{3z^2 + 2az + b}$$

$\Rightarrow$ Depende de 3 parámetros: a, b y c

Reducción del operador del método de Newton sobre polinomios cúbicos

La función $f(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ es topológicamente conjugada a

$$q_\lambda(z) = z(z-1)(z-\lambda)$$

El estudio dinámico sobre $q_\lambda(z)$ se puede generalizar a cualquier polinomio cúbico

- Operador de punto fijo del método de Newton asociado a polinomios cúbicos:

$$N_\lambda(z) = z - \frac{q_\lambda(z)}{q'_\lambda(z)} = \frac{2z^3 - (\lambda+1)z^2}{3z^2 - 2(\lambda+1)z + \lambda}$$

- Operador de punto fijo del método de Newton asociado a polinomios cúbicos:

$$N_\lambda(z) = z - \frac{q_\lambda(z)}{q'_\lambda(z)} = \frac{2z^3 - (\lambda+1)z^2}{3z^2 - 2(\lambda+1)z + \lambda}$$

- Puntos fijos:

$$N_\lambda(z) = z \Leftrightarrow z^* = \{z_1^*, z_2^*, z_3^*\} = \{0, 1, \lambda\}$$

Método de Newton sobre polinomios cúbicos >> $q_\lambda(z) = z(z-1)(z-\lambda)$

- Operador de punto fijo del método de Newton asociado a polinomios cúbicos:

$$N_\lambda(z) = z - \frac{q_\lambda(z)}{q'_\lambda(z)} = \frac{2z^3 - (\lambda+1)z^2}{3z^2 - 2(\lambda+1)z + \lambda}$$

- Puntos fijos:

$$N_\lambda(z) = z \Leftrightarrow z^* = \{z_1^*, z_2^*, z_3^*\} = \{0, 1, \lambda\}$$

- Comportamiento dinámico de los puntos fijos:

$$N'_\lambda(z) = \frac{q_\lambda(z) q''_\lambda(z)}{[q'_\lambda(z)]^2} = \frac{2z(z-1)(z-\lambda)(3z-\lambda-1)}{(3z^2 - 2(\lambda+1)z+\lambda)^2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} N'_\lambda(z_1^*) & = & 0 \\ N'_\lambda(z_2^*) & = & 0 \\ N'_\lambda(z_3^*) & = & 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ Todos los puntos fijos son superatractores

- Operador de punto fijo del método de Newton asociado a polinomios cúbicos:

$$N_\lambda(z) = z - \frac{q_\lambda(z)}{q'_\lambda(z)} = \frac{2z^3 - (\lambda+1)z^2}{3z^2 - 2(\lambda+1)z + \lambda}$$

- Puntos fijos:

$$N_\lambda(z) = z \Leftrightarrow z^* = \{z_1^*, z_2^*, z_3^*\} = \{0, 1, \lambda\}$$

- Comportamiento dinámico de los puntos fijos:

$$N'_\lambda(z) = \frac{q_\lambda(z)q''_\lambda(z)}{[q'_\lambda(z)]^2} = \frac{2z(z-1)(z-\lambda)(3z-\lambda-1)}{(3z^2-2(\lambda+1)z+\lambda)^2} \Rightarrow \begin{cases} N'_\lambda(z_1^*) & = & 0 \\ N'_\lambda(z_2^*) & = & 0 \\ N'_\lambda(z_3^*) & = & 0 \end{cases}$$

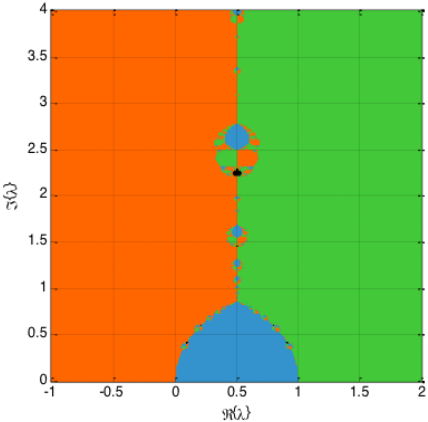
$\Rightarrow$ Todos los puntos fijos son superatractores

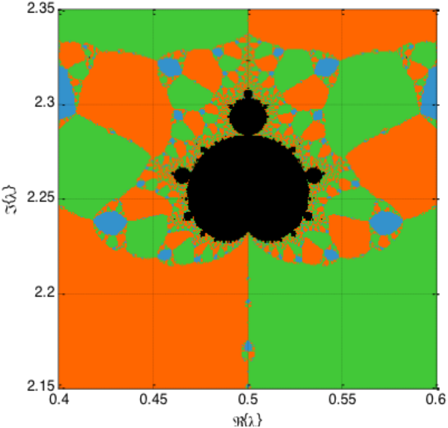
- Puntos críticos libres:

$$N'_\lambda(z) = 0 \Leftrightarrow q''_\lambda(z) = 0 \Leftrightarrow z^C = \frac{\lambda+1}{3}$$

Plano de parámetros

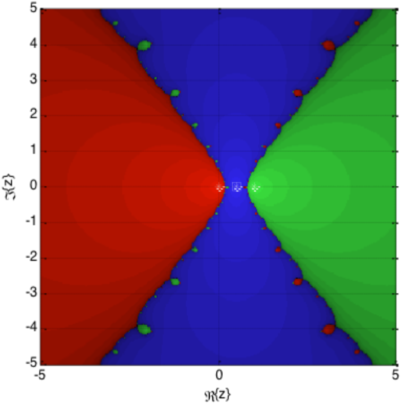
$\mathcal{A}(z_1^*)$ $\mathcal{A}(z_2^*)$ $\mathcal{A}(z_3^*)$



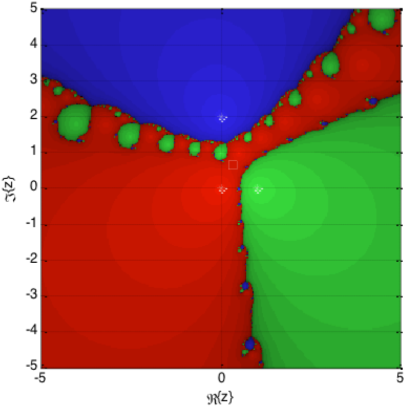


Planos dinámicos

$\mathcal{A}(z_1^*)$ $\mathcal{A}(z_2^*)$ $\mathcal{A}(z_3^*)$



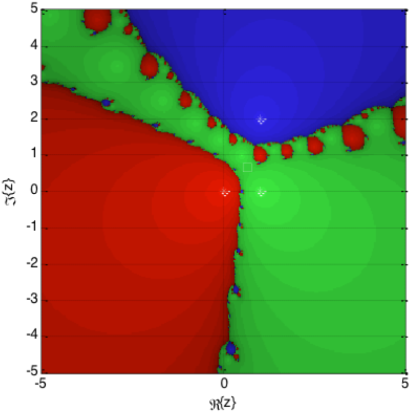
(c) $\lambda = 0.5$



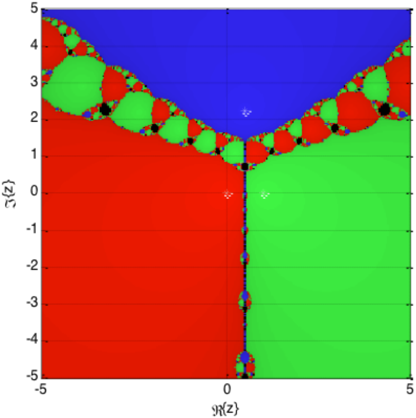
(d) $\lambda = 2i$

Planos dinámicos

$\mathcal{A}(z_1^*)$ $\mathcal{A}(z_2^*)$ $\mathcal{A}(z_3^*)$



(e) $\lambda = 1 + 2i$



(f) $\lambda = 0.5 + 2.25i$

4

Métodos basados en el método de Newton

Contenidos

Método de Halley

Expresión iterativa del método de Halley

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)f'(x_k)}{2[f'(x_k)]^2 - f(x_k)f''(x_k)}$$

- Operador del método de Halley asociado al polinomio cuadrático $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$:

$$H_\lambda(z) = z - \frac{2f_\lambda(z)f_\lambda'(z)}{2[f_\lambda'(z)]^2 - f_\lambda(z)f_\lambda''(z)} = \frac{z(z^2 - 3\lambda)}{3z^2 - \lambda}$$

Expresión iterativa del método de Halley

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)f'(x_k)}{2[f'(x_k)]^2 - f(x_k)f''(x_k)}$$

- Operador del método de Halley asociado al polinomio cuadrático $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$:

$$H_\lambda(z) = z - \frac{2f_\lambda(z)f'_\lambda(z)}{2[f'_\lambda(z)]^2 - f_\lambda(z)f''_\lambda(z)} = \frac{z(z^2 - 3\lambda)}{3z^2 - \lambda}$$

- Puntos fijos:

$$H_\lambda(z) = z \Leftrightarrow z^* = \{z_1^*, z_2^*, z_3^*\} = \{-i\sqrt{\lambda}, 0, i\sqrt{\lambda}\}$$

Método de Halley

Expresión iterativa del método de Halley

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)f'(x_k)}{2[f'(x_k)]^2 - f(x_k)f''(x_k)}$$

- Operador del método de Halley asociado al polinomio cuadrático $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$:

$$H_\lambda(z) = z - \frac{2f_\lambda(z)f'_\lambda(z)}{2[f'_\lambda(z)]^2 - f_\lambda(z)f''_\lambda(z)} = \frac{z(z^2 - 3\lambda)}{3z^2 - \lambda}$$

- Puntos fijos:

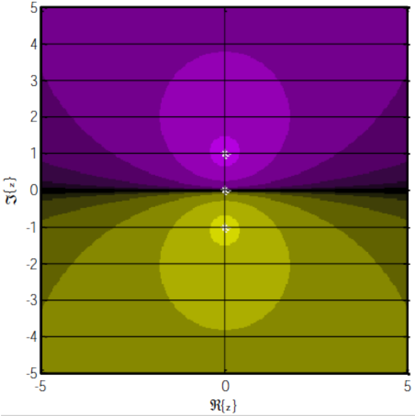
$$H_\lambda(z) = z \Leftrightarrow z^* = \{z_1^*, z_2^*, z_3^*\} = \{-i\sqrt{\lambda}, 0, i\sqrt{\lambda}\}$$

- Comportamiento dinámico de los puntos fijos:

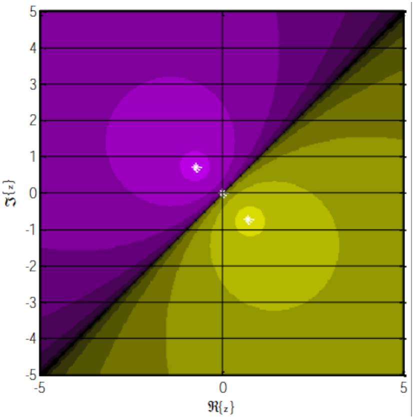
$$H'_\lambda(z) = \frac{3(z^2+\lambda)^2}{(-3z^2+\lambda)^2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} H'_\lambda(z_1^*) & = & 0 \\ H'_\lambda(z_2^*) & = & 3 \\ H'_\lambda(z_3^*) & = & 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ z_1^* y z_3^* son superatractores y z_2^* es repulsor

- $\nexists$ puntos críticos libres $\Rightarrow$ $\nexists$ plano de parámetros



(g) $\lambda = 1$



(h) $\lambda = i$

Contenidos

Expresión iterativa del método de Chebyshev

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\left(1 + \frac{f(x_k)f''(x_k)}{2[f'(x_k)]^2}\right)$$

- Operador del método de Chebyshev asociado al polinomio cuadrático $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$:

$$C_\lambda(z) = z - \frac{f_\lambda(z)}{f'_\lambda(z)}\left(1 + \frac{f_\lambda(z)f''_\lambda(z)}{2[f'_\lambda(z)]^2}\right) = \frac{3z^4 - 6\lambda z^2 - \lambda^2}{8z^3}$$

Expresión iterativa del método de Chebyshev

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\left(1 + \frac{f(x_k)f''(x_k)}{2[f'(x_k)]^2}\right)$$

- Operador del método de Chebyshev asociado al polinomio cuadrático $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$:

$$C_\lambda(z) = z - \frac{f_\lambda(z)}{f'_\lambda(z)}\left(1 + \frac{f_\lambda(z)f''_\lambda(z)}{2[f'_\lambda(z)]^2}\right) = \frac{3z^4 - 6\lambda z^2 - \lambda^2}{8z^3}$$

- Puntos fijos:

$$C_\lambda(z) = z \Leftrightarrow z^* = \{z_1^*, z_2^*, z_3^*, z_4^*\} = \left\{-i\sqrt{\lambda}, i\sqrt{\lambda}, -i\sqrt{\frac{\lambda}{5}}, i\sqrt{\frac{\lambda}{5}}\right\}$$

Expresión iterativa del método de Chebyshev

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\left(1 + \frac{f(x_k)f''(x_k)}{2[f'(x_k)]^2}\right)$$

- Operador del método de Chebyshev asociado al polinomio cuadrático $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$:

$$C_\lambda(z) = z - \frac{f_\lambda(z)}{f'_\lambda(z)}\left(1 + \frac{f_\lambda(z)f''_\lambda(z)}{2[f'_\lambda(z)]^2}\right) = \frac{3z^4 - 6\lambda z^2 - \lambda^2}{8z^3}$$

- Puntos fijos:

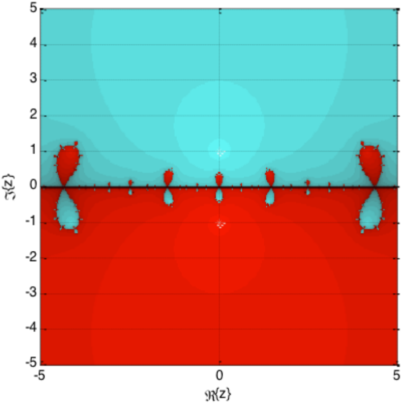
$$C_\lambda(z) = z \Leftrightarrow z^* = \{z_1^*, z_2^*, z_3^*, z_4^*\} = \left\{-i\sqrt{\lambda}, i\sqrt{\lambda}, -i\sqrt{\frac{\lambda}{5}}, i\sqrt{\frac{\lambda}{5}}\right\}$$

- Comportamiento dinámico de los puntos fijos:

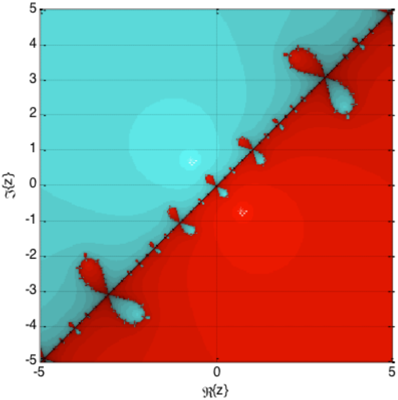
$$C'_\lambda(z) = \frac{3(z^2+\lambda)^2}{8z^4} \Rightarrow \begin{cases} C'_\lambda(z_1^*) = C'_\lambda(z_2^*) = 0 \\ C'_\lambda(z_3^*) = C'_\lambda(z_4^*) = 6 \end{cases}$$

$\Rightarrow z_1^*$ y z_2^* son superatractores, z_3^* y z_4^* son repulsores

- $\nexists$ puntos críticos libres $\Rightarrow \nexists$ plano de parámetros



(i) $\lambda = 1$



(j) $\lambda = i$

- Ejercicios recomendados del tema
- Lección magistral: Entrevista sobre la dinámica de una variante del método de Newton $\Rightarrow$ Aula Virtual
- *Estudio de la dinámica del método de Newton amortiguado*
  - https://dialnet.unirioja.es/descarga/tesis/38821.pdf

...Y por supuesto:

TEST DE APRENDIZAJE!!

unir

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET