Actividad 2

1. Sistemas dinámicos discretos complejos.

1.1. Objetivos

Llevar a cabo diferentes ejercicios en los que se ponga de manifiesto que se han adquirido las competencias correspondientes y los conceptos vistos en clase relacionados con sistemas dinámicos discretos complejos. Asimismo, comprender las representaciones gráficas fundamentales asociadas a este tipo de sistemas.

1.2. Descripción

En esta actividad, efectuaremos el estudio dinámico de una familia de funciones que depende de un parámetro, para lo cual emplearemos herramientas de dinámica compleja. Se recomienda realizar los ejercicios de forma secuencial, a fin de utilizar la información obtenida en cada ejercicio para completar el siguiente.

Para realizar la actividad, consideraremos en C la familia de polinomios cuadrática de la ecuación 1.

$$\begin{gathered} f_\gamma(z) = z^2 - 2\gamma + 1 \\ \gamma \in C \end{gathered} \tag{1}$$

2. Ejercicio 1.

- **Calcula los puntos fijos del sistema dinámico:** Para calcular los puntos fijos, debemos igualar la ecuación 1 a su variable independiente, siendo en este caso z, como se desglosa y se muestra en la ecuación 2.

$$
\begin{gathered}
z = z^2 - 2\gamma + 1 \\
z^2 - z + (1 - 2\gamma) = 0
\end{gathered} \tag{2}
$$

Obtenemos los puntos fijos del sistema a través de la ecuación cuadrática, siendo los que se representan en la ecuación 3.

$$
\begin{gathered}
z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{8\gamma - 3}}{2} \\
\mathbf{z}^* = \{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\sqrt{\mathbf{8}\gamma - \mathbf{3}}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \frac{\sqrt{\mathbf{8}\gamma - \mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\}
\end{gathered} \tag{3}
$$

Dado que en los puntos fijos tenemos un número que, a pesar de la variación de γ, podemos decir que serán simétricos hacia ese valor. En este caso, ese valor corresponde a $\frac{1}{2}$.

- **Determina la estabilidad de los puntos fijos dependiendo del valor de γ y resuelve las desigualdades considerando únicamente la parte real del parámetro:** Para calcular la estabilidad, debemos derivar la función. Determinamos la estabilidad de los puntos fijos dependiendo del valor de γ, ya que los puntos fijos y el estudio de estabilidad también dependen de γ. La dinámica según los puntos fijos se muestra en la ecuación 4, y de forma ordenada se muestra en la ecuación 5.

$$
\begin{gathered}
f'_\gamma(z) = 2z \\
f_{\gamma 1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{8\gamma - 3}}{2} \longrightarrow \gamma_1 = 1 + \sqrt{8\gamma - 3} \\
f_{\gamma 2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{8\gamma - 3}}{2} \longrightarrow \gamma_2 = 1 - \sqrt{8\gamma - 3}
\end{gathered} \tag{4}
$$

$$
f'_\gamma(z) = 2z \longrightarrow \begin{cases} |\mathbf{f}'_\gamma(\mathbf{z_1^*})| = |\mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{8}\gamma - \mathbf{3}}| \\ |\mathbf{f}'_\gamma(\mathbf{z_2^*})| = |\mathbf{1} - \sqrt{\mathbf{8}\gamma - \mathbf{3}}| \end{cases} \tag{5}
$$

Para determinar las desigualdades, partimos de los conceptos del procedimiento 6, que clasifican los puntos fijos dependiendo su comportamiento asintótico.

$$\begin{gathered} Atractor \longrightarrow |f'(z^*)| < 1 \\ Repulsor \longrightarrow |f'(z^*)| > 1 \\ Neutro \longrightarrow |f'(z^*)| = 1 \end{gathered} \tag{6}$$

Para poder determinar si la dinámica de los puntos fijos es atractor, repulsor o neutro tal y como se muestra en la ecuación 6, debemos operar 2 desigualdades y una igualdad por cada punto fijo. Tomamos el valor de la derivada de la función en cada uno de los puntos fijos, y la igualamos al valor de γ buscado. Dado que en $z_{1,2}$.
Para determinar si $z^*_{\gamma 1}$ es neutro, vemos el procedimiento 7.

$$\begin{gathered} |1+\sqrt{8\gamma-3}| = 1 \longrightarrow 1+\sqrt{8\gamma-3} = \pm 1 \\ 1+\sqrt{8\gamma-3} = 1 \longrightarrow \sqrt{8\gamma-3} = 0 \longrightarrow \gamma = \tfrac{3}{8} \\ 1+\sqrt{8\gamma-3} = -1 \longrightarrow \sqrt{8\gamma-3} = -2 \longrightarrow \gamma = \tfrac{7}{8} \\ \gamma = \{\boldsymbol{\tfrac{3}{8}}, \boldsymbol{\tfrac{7}{8}}\} \end{gathered} \tag{7}$$

Para determinar si $z^*_{\gamma 1}$ es repulsor, vemos el procedimiento 8.

$$\begin{gathered} |1+\sqrt{8\gamma-3}| > 1 \\ 1+\sqrt{8\gamma-3} < -1 \cup 1+\sqrt{8\gamma-3} > 1 \\ \begin{cases} \sqrt{8\gamma-3} < -2 \rightarrow 8\gamma-3 < 4 \rightarrow 8\gamma < 7 \rightarrow \gamma < \tfrac{7}{8} \\ \sqrt{8\gamma-3} > 0 \rightarrow 8\gamma-3 > 0 \rightarrow 8\gamma > 3 \rightarrow \gamma > \tfrac{3}{8} \end{cases} \\ \boldsymbol{\tfrac{7}{8}} < \gamma < \boldsymbol{\tfrac{3}{8}} \end{gathered} \tag{8}$$

Para determinar si $z^*_{\gamma 1}$ es atractor, vemos el procedimiento 9.

$$
\begin{gathered}
|1+\sqrt{8\gamma-3}|<1 \\
-1<1+\sqrt{8\gamma-3}<1 \\
\begin{cases}
\sqrt{8\gamma-3}>-2 \rightarrow 8\gamma-3>4 \rightarrow 8\gamma>7 \rightarrow \gamma>\frac{7}{8} \\
\sqrt{8\gamma-3}<0 \rightarrow 8\gamma-3<0 \rightarrow 8\gamma<3 \rightarrow \gamma<\frac{3}{8}
\end{cases} \\
\mathbf{\frac{3}{8}<\gamma<\frac{7}{8}}
\end{gathered} \tag{9}
$$

La dinámica de los puntos fijos para el punto z^*_1 se muestra en la ecuación 10. Esos son los valores de γ para que la función Z sea repulsora, atractora o neutra.

$$
\begin{gathered}
ZAtractor \longrightarrow \gamma<\frac{7}{8} \cap \gamma>\frac{3}{8} \\
ZRepulsor \longrightarrow \gamma>\frac{7}{8} \cap \gamma<\frac{3}{8} \\
ZNeutro \longrightarrow \gamma=\{\frac{3}{8},\frac{7}{8}\}
\end{gathered} \tag{10}
$$

Para valores menores a $\gamma<\frac{3}{8}$, tenemos como resultado una raíz negativa, dando apertura a valores complejos. Si consideramos solamente los valores reales como lo determina el ejercicio, en este caso no hay puntos fijos. Para $\gamma=\frac{3}{8}$, hay un punto neutro, teniendo como resultado en $f'_\gamma(z_{1,2})=1$. Para $\gamma>\frac{3}{8}$, tenemos 2 puntos fijos, ya que la raíz es positiva no tenemos números complejos, pero si tenemos 2 raíces.

Utilizando el mismo procedimiento con z^*_2, la dinámica de los puntos fijos para el punto z^*_2 se muestra en la ecuación 11.

$$
\begin{gathered}
ZAtractor \longrightarrow \gamma<\frac{7}{8} \cap \gamma>\frac{3}{8} \\
ZRepulsor \longrightarrow \gamma>\frac{7}{8} \cap \gamma<\frac{3}{8} \\
ZNeutro \longrightarrow \gamma=\{\frac{3}{8},\frac{7}{8}\}
\end{gathered} \tag{11}
$$

De los valores de γ para punto fijo, el valor de $\frac{3}{8}$ determina que, un número menos a $\frac{3}{8}$ para γ, no tendrá ningun punto de bifurcación, por lo cual las 2 gráficas nunca se interceptarán. con $\gamma = \frac{3}{8}$, tenemos un punto neutro en dónde se interceptan los gráficos una sola vez. A partir de ese valor, tenemos 2 puntos de bifurcación.

- **Calcula los puntos críticos de f_γ:** Para calcular los puntos críticos de f_γ, igualamos el valor absoluto de la derivada a cero, dado que en esos puntos, la función no es diferenciable, o bien, su derivada es cero tal y como se muestra en la ecuación 12. En otras palabras, es un punto crítico si $|f'_\gamma(z_{1,2})| = 0$ y no coincide con ningún punto fijo superatractor.

$$|f'_\gamma(z)| = 0 \rightarrow |2z| = 0 \tag{12}$$

Evaluando la ecuación 12 en los puntos fijos de la función, tenemos como resultado el procedimiento 13 para el primer punto fijo, y el procedimiento 14 para el segundo punto fijo. Se dice que el valor de la función evaluada en un punto crítico también es un valor crítico.

$$\begin{gathered} f'_\gamma(z_1) = 1 + \sqrt{8\gamma - 3} \\ 1 + \sqrt{8\gamma - 3} = 0 \rightarrow \sqrt{8\gamma - 3} = -1 \rightarrow 1 = 8\gamma - 3 \\ \gamma = \mathbf{\tfrac{1}{2}} \end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered} f'_\gamma(z_2) = 1 - \sqrt{8\gamma - 3} \\ 1 - \sqrt{8\gamma - 3} = 0 \rightarrow \sqrt{8\gamma - 3} = 1 \rightarrow 1 = 8\gamma - 3 \\ \gamma = \mathbf{\tfrac{1}{2}} \end{gathered} \tag{14}$$

En dinámica, un diagrama de bifurcación es una "estratificación" de su espacio de parámetros, se encarga del análisis topológico y estructural de un sistema de ecuaciones diferenciales. En la figura 1 se muestra el diagrama de bifurcación correspondiente a la función logística 1, de la cual, se han hecho anteriormente los cálculos correspondientes para el período 1, que corresponde a los valores mostrados en el procedimiento 7. En función del valor de γ, encontramos diferentes tipos de puntos de equilibrio. En el gráfico se observa claramente que no existen valores para $\gamma < \frac{3}{8}$.

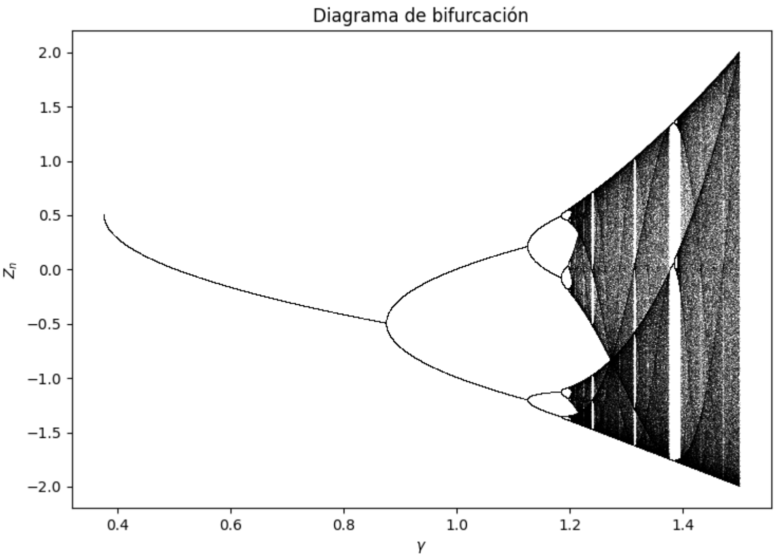

Figura 1: Diagrama de bifurcación de ejercicio 1.

La figura 1 se generó a través de python dado que es de código libre; en este caso se requiere como dependencias matplotlib, numpy y tqdm. El código se describe a continuación en el cuadro de código de la lista 1.

```
from tqdm import tqdm
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def LogisticMap():
    mu = np.arange(0, 2, 0.0001)
    x = 0.01  # Valor inicial
    iters = 1000    #N mero de iteraciones sin salida
    last = 100      #Finalmente dibuje el n mero de iteraciones del ...
        resultado
    for i in tqdm(range(iters+last)):
        x = x**2 - 2*mu + 1
```

```
            if i ≥ iters:
                plt.plot(mu, x, ',k', alpha=0.25)  # alphaSet transparencia
        plt.title("Diagrama de bifurcaci n")
        plt.xlabel("gamma")
        plt.ylabel("Zn")
        plt.show()
LogisticMap()
```

Listing 1: Código para generar diagrama de bifurcación.

Si probamos valores específicos de γ según el diagrama de bifurcación, vemos que para γ mayor a $\frac{3}{8}$ y γ menor a $\frac{7}{8}$, tendremos valores de $z_{1,2}$ que tienden a ir a un punto fijo, sin embargo, si queremos tener comportamientos de período 2, debemos optar por valores de γ mayores a $\frac{7}{8}$. En este caso haremos 3 pruebas con 3 valores de γ, una con período 1, una con período 2 y una con período 4, se tomaron como referencia los valores de $\gamma = \{0{,}5, 1, 1{,}15\}$, que son los que dividen las 3 lineas en azul de la figura 2. Para cada valor tomado, se debe considerar que se debe tomar una semilla de la cuenca de atracción. En el caso del primer punto, la cuenca de atracción es de -0.5 a 0.5.

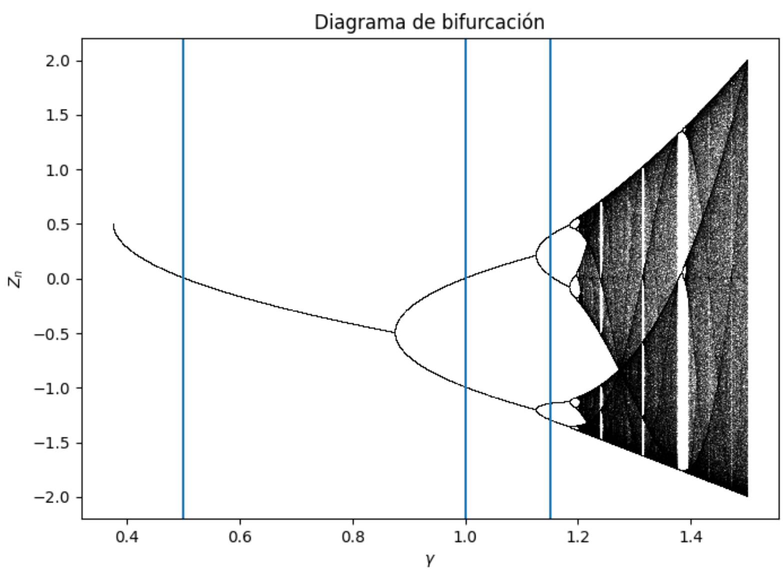

Figura 2: Diagrama de bifurcación de ejercicio 1.

Para el primer valor obtenido de $\gamma = 0{,}5$, el período debe ser uno, o en otras palabras tender a un punto fijo. En este caso, tiende a cero, como se muestra en la figura 3.

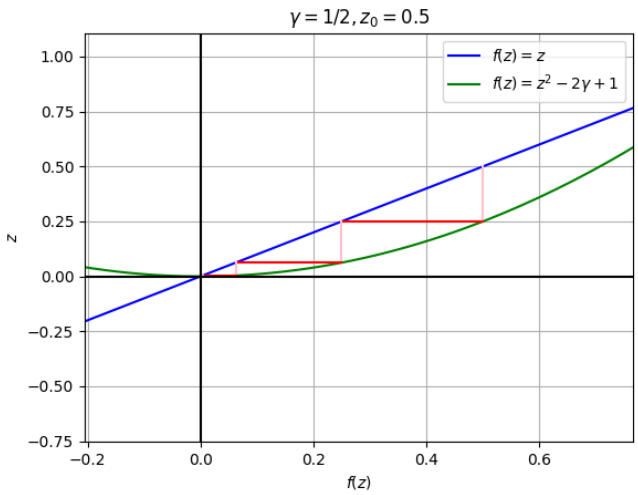

Figura 3: Órbita de período 1.

Para el segundo valor obtenido de $\gamma = 1$, el período debe ser dos, o en otras palabras tocar a 2 puntos en el gráfico de manera repetitiva como se muestra en la figura 4.

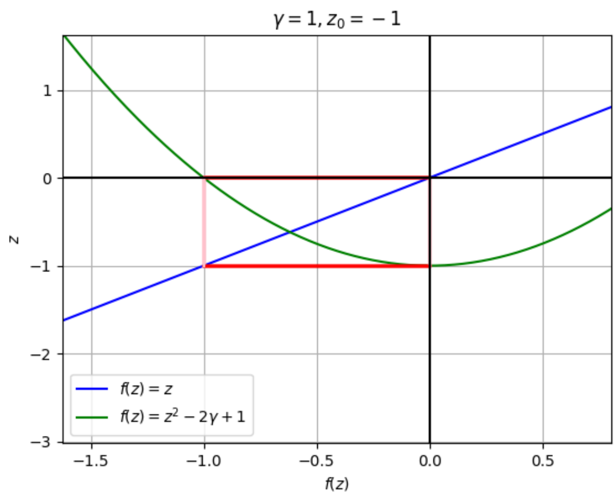

Figura 4: Órbita de período 2.

Para el tercer valor obtenido de $\gamma = 1{,}19$, el período debe ser cuatro, o en otras palabras tocar a 4 puntos en el gráfico de manera repetitiva como se muestra en la figura 5.

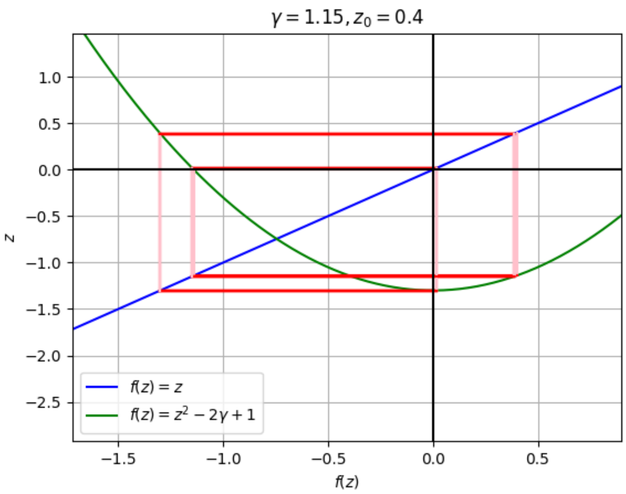

Figura 5: Órbita de período 4.

Para generar las órbitas realizamos un código en python dado que es open source, en el cual las dependencias son de numpy y matplotlib. el código se muestra a continuación en la lista 2.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

xdi = -3
xdf = 3
paso = 0.01

c = 1.19
x = np.arange(xdi, xdf, paso)
funcion = lambda t: t**2 - 2*c + 1
y = funcion(x)

plt.plot(x, x, color="blue", label="$f(z) = z$")
plt.plot(x, y, color="green", label="$f(z) = z^2 - 2\gamma + 1$")
x0 = 0.5
itera = 1
limiteItera = 50
```

```python

plt.plot([x0, x0], [x0, funcion(x0)], color = 'pink')
while funcion(x0) > xdi and funcion(x0) < xdf and itera < limiteItera:
    plt.plot([x0, funcion(x0)], [funcion(x0), funcion(x0)], color = 'r')
    x0 = funcion(x0)
    plt.plot([x0, x0], [x0, funcion(x0)], color = 'pink')
    itera += 1
#Ejes
plt.axhline(y=0, color='k')
plt.axvline(x=0, color='k')
plt.title("$\gamma = 1.15, z_0 = 0.4$")
plt.xlabel("$f(z)$")
plt.ylabel("$z$")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

Listing 2: Código para generar órbitas.

3. Ejercicio 2.

La Figura 6 representa el plano de parámetros asociado a un punto crítico libre de la familia de polinomios f_γ.

- **Describe en qué consiste un plano de parámetros, qué representa y cómo se genera.**

  Un plano de parámetros es una herramienta gráfica que permite conocer el comportamiento a priori del efecto que va a tener uno u otro parámetro sobre la función del sistema, nos da una representación de cuáles parámetros son mejores y cuales no son tan buenos. Se obtiene a partir de la iteración de un punto crítico luego de anular la derivada de la función 13, quedando $\gamma = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$, donde este punto no coincide con los puntos fijos $\gamma = \{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}, \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}\}$. Un plano de parámetros no existirá siempre que se tenga variable compleja, más bien depende de una familia de funciones y de puntos críticos.

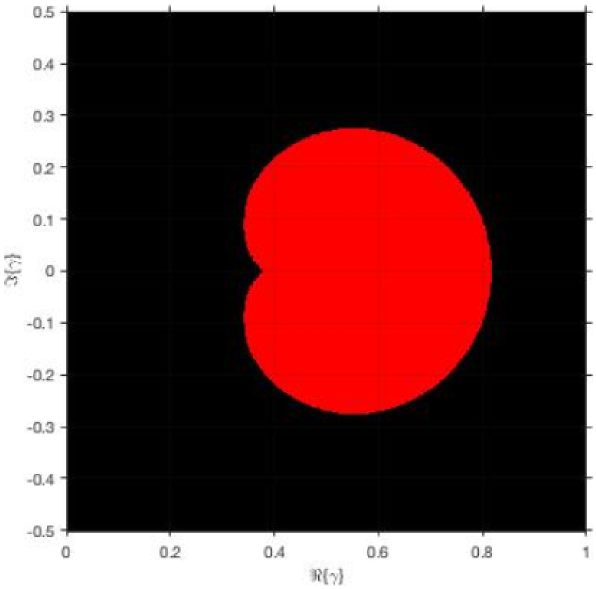

Figura 6: Plano de parámetros.

- **Describe las características que observas en el plano de la Figura 6, y relaciónalo con el estudio de la estabilidad de los puntos fijos realizado en el ejercicio 1.**

La figura 6. presenta las componentes hiperbólicas relacionadas con el área definida como el cardiode principal de la función cuadrática estudiada. Esta área tiene órbitas de periodo 1 donde la estabilidad del sistema se determina en la derivada de la ecuación 15.

$$f'_\gamma(z) = 2z = e^{-i2\pi t} \tag{15}$$

Sustituyendo en la ecuación 2 y despejando γ se tendría la ecuación 16.

$$\gamma = \frac{1}{8}e^{-i4\pi t} - \frac{1}{4}e^{-i2\pi t}, t \in [0, 2\pi] \tag{16}$$

Con lo cual de forma analítica se puede representar como en la figura 6. Finalmente, en este cardiode se encuentran las soluciones correspondientes con los valores entre los valores de $\gamma = \{\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\}$. Si seleccionamos un punto en el plano que se encuentre dentro del cardioide, estamos seleccionando un parámetro para una función que converge a un punto fijo atractor que, en este caso cuadrático, son los valores menores a uno que convergen a cero. Si seleccionamos un punto fuera del cardioide, estamos seleccionando valores que al ser cuadráticos, son mayores a 1, por lo tanto divergen.

En el caso de la figura 6, tenemos un punto fijo en $\{Re(z) = \frac{1}{2}, Im(z) = 0\}$ que es el punto crítico encontrado.

En el cardioide mostrado en la figura 6, no se muestra el punto fijo, sin embargo está en la posición antes mencionada, tal y como se muestra en la figura 7 por medio del diagrama de Mandelbrot generado en Matlab a través del código de la lista 3

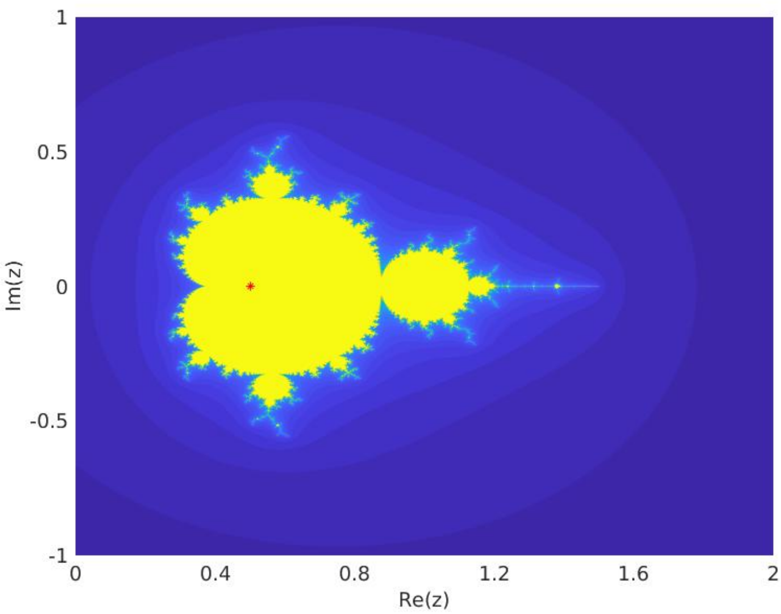

Figura 7: Diagrama de Mandelbrot.

```
Nmax = 50; scale = 0.0005;
xmin = 0; xmax = 2;
ymin = -1; ymax = 1;

[x,y]=meshgrid(xmin:scale:xmax, ymin:scale:ymax);
z = x+1i*y;

```

```
w = zeros(size(z));
k = zeros(size(z));
N = 0;

while N<Nmax && ¬all(k(:))
w = w.^2 -2*z + 1;
N = N+1;
k(¬k & abs(w)>4) = N;
end

k(k==0) = Nmax;
figure
s=pcolor(x,y,k);
set(s,'edgecolor','none')
axis([xmin xmax -ymax ymax])
fontsize=15;
set(gca,'XTick',xmin:0.4:xmax,'FontSize',fontsize)
set(gca,'YTick',-ymax:0.5:ymax,'FontSize',fontsize)
xlabel('Re(z)','FontSize',fontsize)
ylabel('Im(z)','FontSize',fontsize)
hold on
plot(1/2,0,'r*')
```

Listing 3: Código para generar diagrama de Mandelbrot.

4. Ejercicio 3.

La familia de polinomios tiene dos puntos fijos cuyas cuencas de atracción representamos en los planos dinámicos para valores concretos del parámetro. En la Figura 8 se muestran tres planos dinámicos de la familia obtenidos para valores distintos de γ. En estos planos observamos las cuencas de atracción de los dos puntos fijos (en naranja o azul), la divergencia (en negro) y los dos puntos fijos. Utiliza el estudio dinámico realizado en el ejercicio 1 y el plano de parámetros de la Figura 6 para determinar qué valor de γ de los valores mostrados en los parámetros 17 se corresponde con la gráfica. Justifica tu respuesta.

$$\gamma = \tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{8}, 0{,}6 + 0{,}2i \tag{17}$$

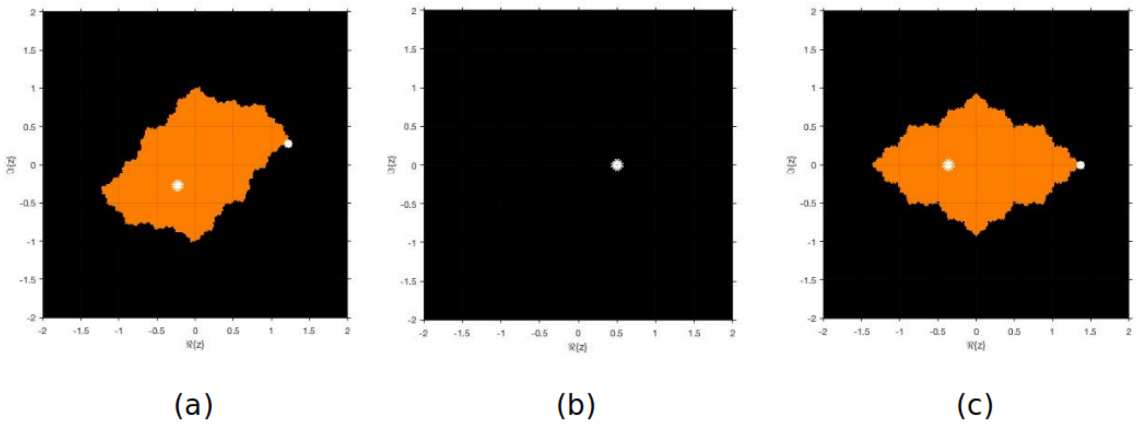

Figura 8: Planos dinámicos de f_γ para distintos valores de γ.

Los planos dinámicos dan una representación gráfica de las cuencas correspondientes a cada punto fijo para poder establecer luego los conjuntos de Fatou y de Julia. En este caso, tenemos 3 valores de gamma.

- $\gamma = \mathbf{\frac{3}{4}}$: Evaluamos el valor de γ en la ecuación 3 dado que estamos buscando los puntos fijos a través de γ, tal y como se observa en el procedimiento 18.

$$\begin{gathered}
z^* = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{8(\frac{3}{4})-3}}{2} \\
z^* = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{\frac{24}{4}-3}}{2} \\
z^* = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{6-3}}{2} \\
z^* = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2} \\
z^* = \{0{,}0670, 0{,}9330\}
\end{gathered} \tag{18}$$

Si observamos el comportamiento del procedimiento 18, vemos que los valores de los puntos fijos para $\gamma = \frac{3}{4}$ son 2 raíces en dónde no tenemos números complejos, lo cuál indica que la parte $Im(z) = 0$ en dónde un valor tiende a un número cercano a 0, y el otro valor tiende a un número superior a 1. De la misma manera, si graficamos el plano dinámico para $\gamma = \frac{3}{4}$, tendremos una representación como se muestra en la figura 9.

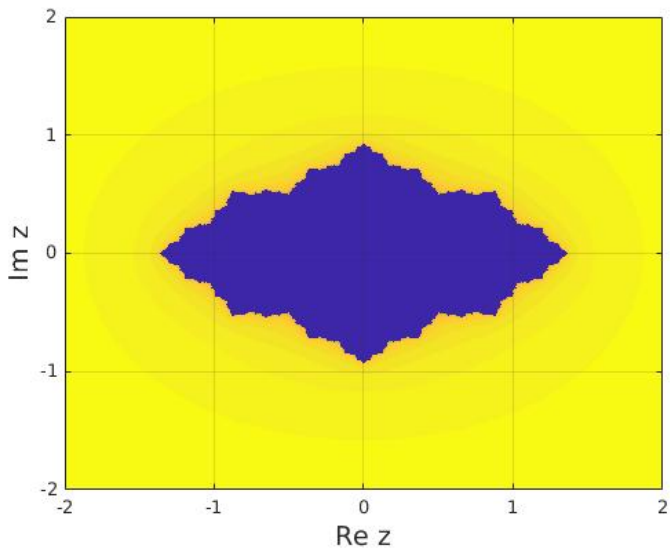

Figura 9: Plano dinámico para $\gamma = \frac{3}{4}$.

Dada la conclusión anterior, para el valor de $\gamma = \frac{3}{4}$ el plano dinámico correspondiente de la figura 8 es el **c**.

- $\gamma = \frac{3}{8}$: Evaluamos el valor de γ en la ecuación 3 dado que estamos buscando los puntos fijos a través de γ, tal y como se observa en el procedimiento 19.

$$
\begin{gathered}
z^* = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{8\frac{3}{8} - 3}}{2} \\
z^* = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{0}}{2} \\
z^* = \frac{1}{2}
\end{gathered}
\tag{19}
$$

$\gamma = \frac{3}{8}$ es un punto neutro, por lo cual, como se observa en la figura 11, solamente se tocan en un punto, y ese punto es $z = \frac{1}{2}$. De la misma manera, no tenemos parte imaginaria, por lo que $Im(z) = 0$.

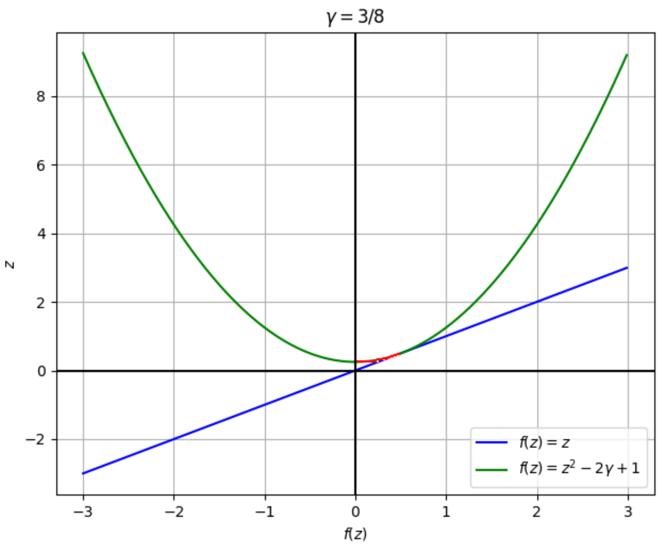

Figura 10: $\gamma = \frac{3}{8}$.

Dada la conclusión anterior, para el valor de $\gamma = \frac{3}{8}$ el plano dinámico correspondiente de la figura 8 es el **b** en la cual no existe una cuenca de atracción.

- $\boldsymbol{\gamma = 0{,}6 + 0{,}2i}$: Evaluamos el valor de γ en la ecuación 3 dado que estamos buscando los puntos fijos a través de γ, tal y como se observa en el procedimiento 20.

$$
\begin{gathered}
z^* = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{8(0{,}6+0{,}2i)-3}}{2} \\
z^* = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{4{,}8+1{,}6i-3}}{2} \\
z^* = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1{,}8+1{,}6i}}{2}
\end{gathered}
\tag{20}
$$

Si observamos el comportamiento del procedimiento 20, vemos que los valores de los puntos fijos para $\gamma = 0{,}6 + 0{,}2i$ son 2 raíces en dónde si tenemos números complejos y números reales. por lo cuál los puntos fijos estarán distribuídos tanto en el eje de $Re(z)$ como en el eje de $Im(z)$. De la misma manera, si graficamos el plano dinámico para $\gamma = \frac{3}{4}$, tendremos una representación como se muestra en la figura 11.

Dada la conclusión anterior, para el valor de $\gamma = 0{,}6 + 0{,}2i$ el plano dinámico correspondiente de la figura 8 es el **a**.

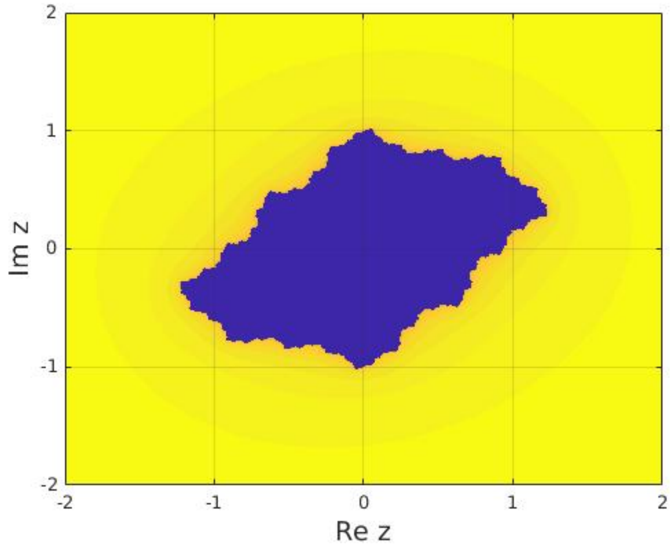

Figura 11: Plano dinámico para $\gamma = 0{,}6 + 0{,}2i$.

En la lista 4, se muestra el código para generar los planos dinámicos con Matlab.

```
n=1500;iter=50;
xa = -2;    xb = 2;
ya = -2; yb = 2;
v=linspace(xa, xb, n);
w=linspace(ya, yb, n);
[x,y] = meshgrid(v, w);
f = x + 1i * y;
m = zeros(size(f));
c=3/4; % valor de gamma
k=max(abs(c),3);
for p = 1:1:iter
    f = f.^2-2*c+1 ; % Funcion evaluando
    m(abs(f)> k & m == 0) = iter - p;
end

figure, imagesc(m)
grid on, hold on
```

```
xticks([1 375 750 1125 1500])
yticks([1 375 750 1125 1500])
xticklabels({'-2','-1','0','1','2'})
yticklabels({'2','1','0','-1','-2'})
xlabel('Re z','FontSize',fontsize)
ylabel('Im z','FontSize',fontsize)
```

Listing 4: Código para generar planos dinámicos.

Referencias

[1] Dra. Neus Garrido. Apuntes de clase de sistemas dinámicos discretos y contínuos., 2021.

[2] Méndez H. King, J. *Sistemas dinámicos discretos*. Universidad Nacional Autónoma de México, 2014.

[3] Stephen Lynch. *Dynamical systems with applications using MATLAB*. Springer, 2004.

[4] Stephen Lynch. *Dynamical Systems with Applications using Python*. Springer, 2018.

[5] John Michael Tutill Thompson and H Bruce Stewart. *Nonlinear dynamics and chaos*. John Wiley & Sons, 2002.