Tema 2. Señales básicas

Carlos Quemada Mayoral

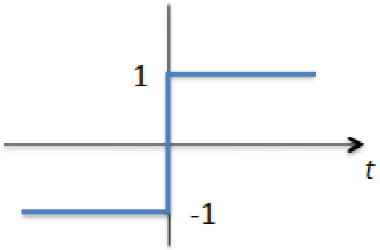
UNIVERSIDAD
INTERNACIONAL
DE LA RIOJA

Índice

2.1. Señales básicas de tiempo continuo

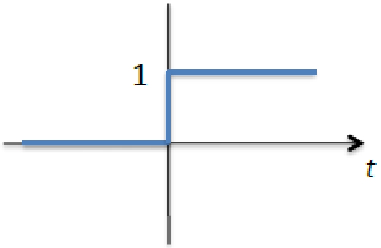
- Función **signo**. Para representar un cambio abrupto (interruptor).

$$sign(t) = \begin{cases} 1 & ,t > 0 \\ -1 & ,t < 0 \end{cases}$$



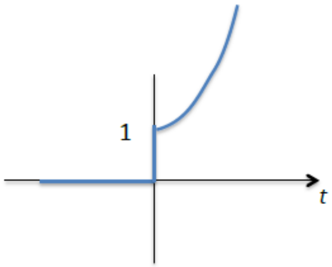
- Función **escalón unitario**. Para representar un cambio abrupto (interruptor).

$$u(t) = \begin{cases} 1 & ,t > 0 \\ 0 & ,t < 0 \end{cases}$$



- Ambas pueden usarse para representar otras funciones.

$$x(t) = u(t) \cdot e^{t}$$



2.1. Señales básicas de tiempo continuo

- Función **signo** en Octave.

```
t = -1:0.01:1;
x = sign(t);
plot(t,x);
axis([-2 2 -2 2]);
```

$$sign(t) = \begin{cases} 1 & ,t > 0 \\ 0 & ,t = 0 \\ -1 & ,t < 0 \end{cases}$$

Aunque no está definida en t = 0, Octave le da valor

- Función **escalón unitario**. Para representar un cambio abrupto (interruptor).

```
t = -1:0.01:1;
x = heaviside(t);
plot(t,x);
axis([-2 2 -1 2]);
```

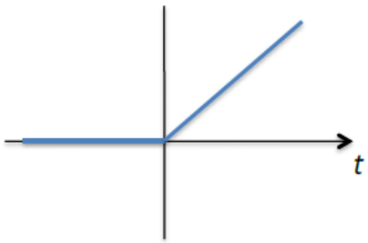
$$u(t) = \begin{cases} 1 & ,t > 0 \\ 0.5 & ,t = 0 \\ 0 & ,t < 0 \end{cases}$$

Aunque no está definida en t = 0, Octave le da valor

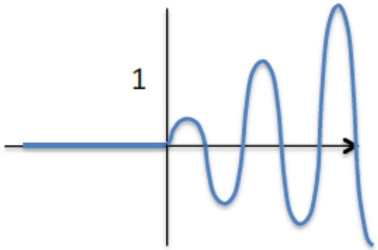
2.1. Señales básicas de tiempo continuo

- Función **rampa unitaria**.

$$r(t) = \begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$$



- También se usa la multiplicación de la rampa unitaria por la función seno para modelar crecimientos lineales.



$$x(t) = r(t)\sin(t)$$

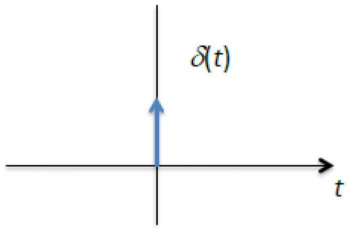
- Relación entre la rampa unitaria y la función escalón.

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau$$

2.1. Señales básicas de tiempo continuo

- Función **impulso unitario o delta de Dirac**.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

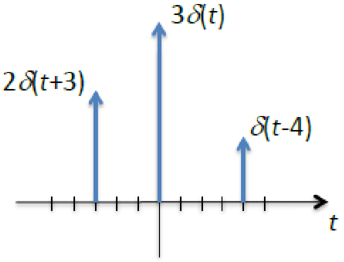


- Esta función cumple que su área vale 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1$$

- Relación entre el impulso unitario unitario y la función escalón $\Rightarrow$ $\delta(t) = u'(t)$

- Dado que su área vale 1, en ocasiones se anota el impulso unitario multiplicado por un valor correspondiente a su área.



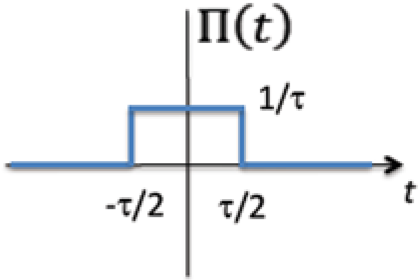
El impulso unitario tiene la propiedad de criba o muestreo:

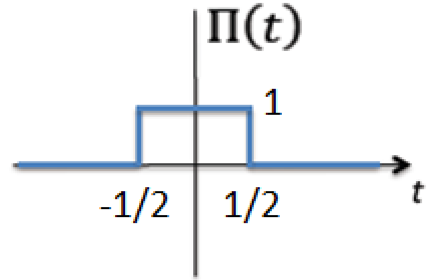
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$$

2.1. Señales básicas de tiempo continuo

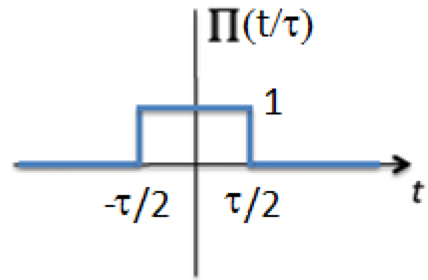
- **Rectángulo unitario Π(t)**: es una función rectangular centrada en el origen y de área unidad.

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1/\tau, & |t| < \tau/2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$





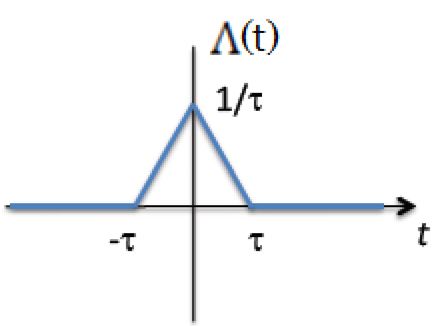
En muchos libros la definen también así

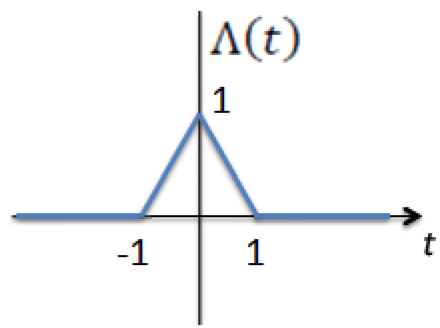


o así

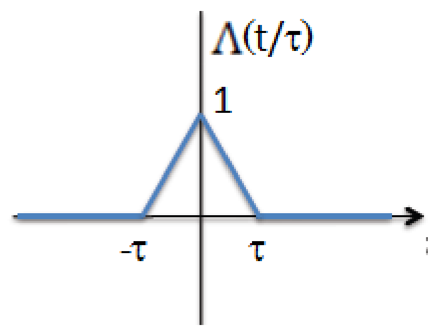
- **Triángulo unitario Λ(t)**: es una función triangular centrada en el origen y de área unidad.

$$\Lambda(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\tau} - |t|, & |t| < \tau \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$





En muchos libros la definen también así

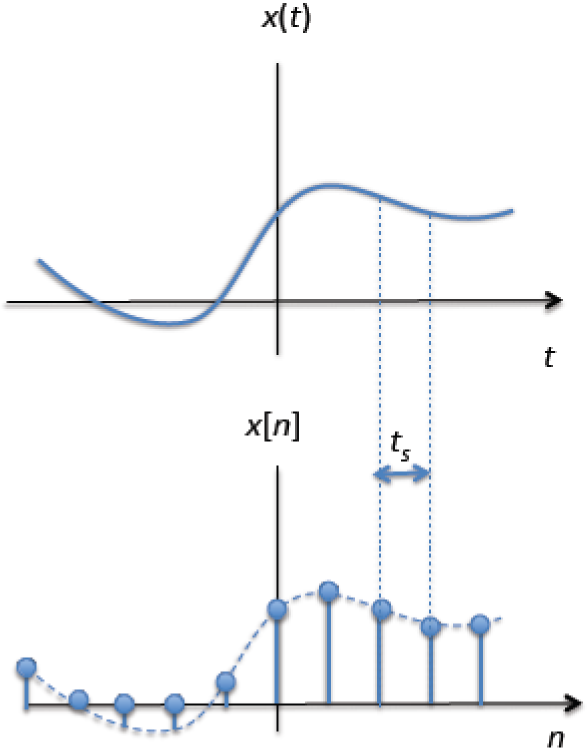


o así

2.2. Señales básicas de tiempo discreto

- Las señales de tiempo discreto más habituales se obtienen a través del muestreo de señales de tiempo continuo.

Proceso de muestreo



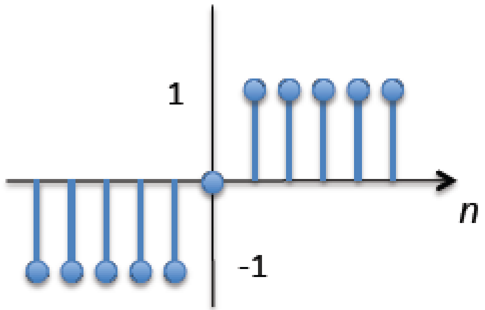
$$t_s = \frac{1}{f_s} = \frac{2\pi}{w_s} \qquad f_s = \frac{1}{t_s} \qquad w_s = \frac{2\pi}{t_s} \quad w_s = 2\pi f_s$$

ts: periodo de muestreo
fs: frecuencia cíclica de muestreo
ws: frecuencia angular de muestreo

2.2. Señales básicas de tiempo discreto

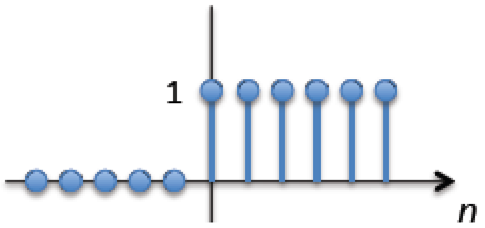
- **Función signo** sign[n].

$$sign[n] = \begin{cases} 1 & ,n > 0 \\ 0 & ,n = 0 \\ -1 & ,n < 0 \end{cases}$$



- **Función escalón unitario** u[n].

$$u[n] = \begin{cases} 1 & ,n \geq 0 \\ 0 & ,n < 0 \end{cases}$$

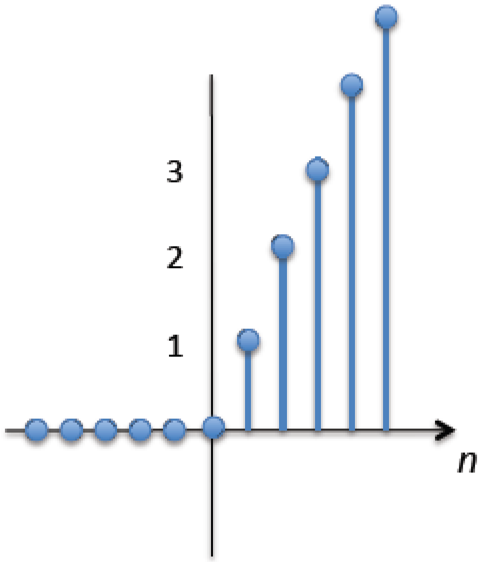


- **Función rampa unitaria**.

$$r[n] = \begin{cases} n & ,n > 0 \\ 0 & ,n \leq 0 \end{cases}$$

$$r[n] = n \cdot u[n]$$

$$u[n] = r[n+1] - r[n]$$



2.2. Señales básicas de tiempo discreto

- **Función impulso unitario** δ[n].

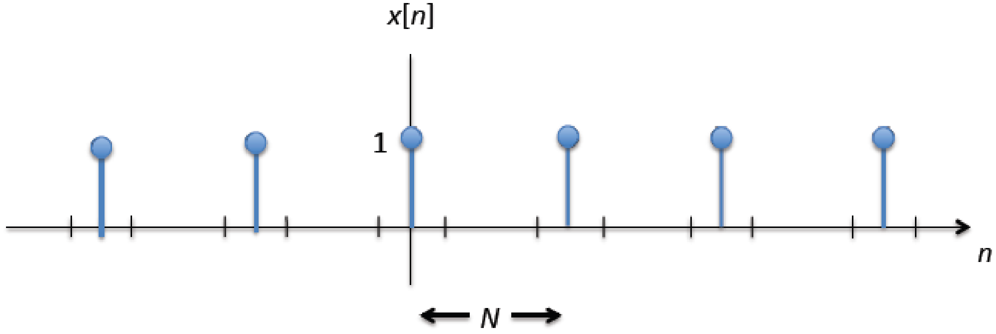
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \qquad \delta[n] = u[n] - u[n-1] \qquad u[n] = \sum_{m=0}^{\infty} \delta[n-m]$$

- La función impulso presenta la propiedad de muestreo o criba. Una función cualquiera x[n] multiplicada por una delta desplazada a la posición n_0, es decir $\delta[n- n_0]$, es igual al valor de la función x[n] en el instante $n = n_0$.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]$$

- El impulso unitario δ[n] a menudo se usa para componer un tren de impulsos unitarios $\delta_N[n]$ separados por distancia N.

$$\delta_N[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n-mN]$$



2.3. Sinusoidal y exponencial de tiempo discreto

- **Sinusoidal de tiempo continuo.**

$$x(t) = A\cos(2\pi f t + \phi) = A\cos(wt + \phi) = Re\{Ae^{j(wt+\phi)}\}$$

2·π·f·t: radianes
f: frecuencia cíclica en ciclos/s (Hz)
w: frecuencia angular en radianes/s

- **Sinusoidal de tiempo discreto.**

$$x[n] = A\cos(2\pi \mathrm{m} F n + \phi) = A\cos(\mathrm{m}\Omega n + \phi) = Re\{Ae^{j(\mathrm{m}\Omega n+\phi)}\}$$

N: periodo discreto de la señal
F: frecuencia cíclica de tiempo discreto
Ω: frecuencia angular de tiempo discreto
2·π·F·n: también radianes
F: frecuencia cíclica en ciclos/muestra
w: frecuencia angular en radianes/muestra
m: mínimo entero que hace N entero.

$$F = \frac{1}{N} \qquad \Omega = \frac{2\pi}{N}$$

2.3. Sinusoidal y exponencial de tiempo discreto

- **Muestreo de la sinusoidal de tiempo continuo.**

$$x[n] = A\cos(2\pi f_0 n t_s) = A\cos(2\pi n f_0/f_s)$$

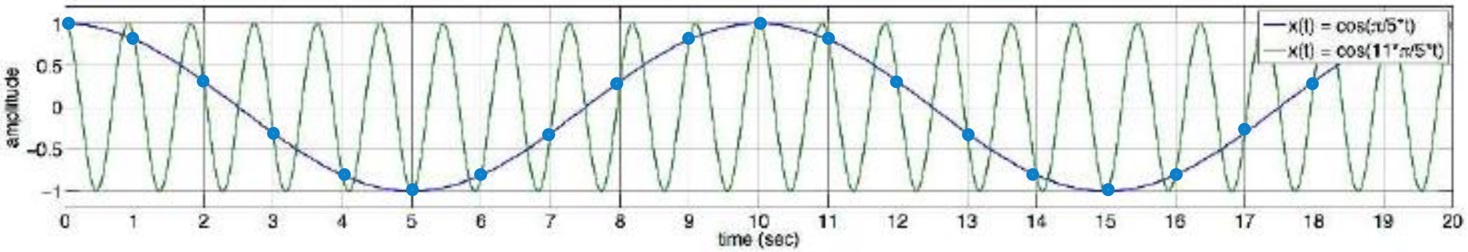
De esta relación se obtiene:

$N_0 = m \cdot \frac{f_s}{f_0}$ $\Rightarrow$ Periodo fundamental con m el mínimo entero que hace N_0 entero (muestras/ciclo)

$$F_0\,(\text{ciclos/muestra}) = \frac{f_0\,(\text{ciclos/seg})}{\text{m}f_s\,(\text{muestras/seg})}$$

$$\Omega_0(\text{radianes/muestra}) = \frac{w_0\,(\text{radianes/seg})}{\text{m}f_s\,(\text{muestras/seg})}$$

- Debido a que la señal sinusoidal se repite cada 2·π radianes, puede suceder que al muestrear señales de tiempo continuo de diferentes frecuencias se obtenga la misma señal muestreada en tiempo discreto.



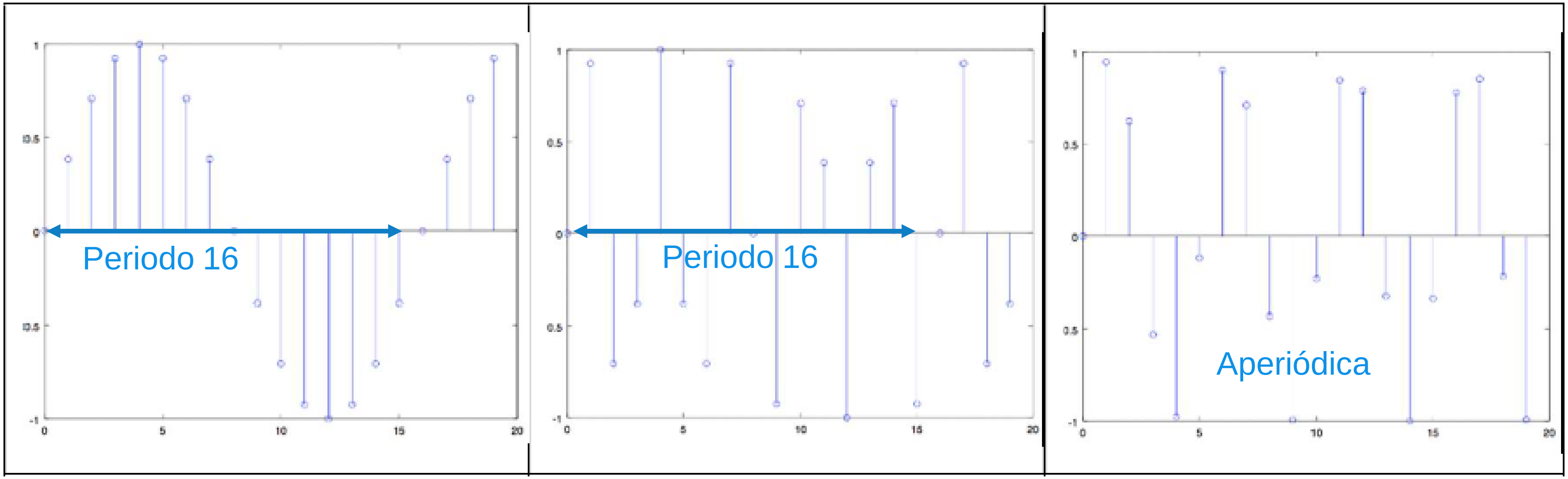
$x(t)=\cos(1/5\pi t)$ y $x(t)=\cos(11/5\pi t)$ con $t_s=1$

2.3. Sinusoidal y exponencial de tiempo discreto

- **Pérdida de periodicidad de las sinusoides discretas.** El requisito para que una sinusoidal discreta sea periódica es que exista un m entero que haga su periodo fundamental N_0 entero.

$\mathrm{sen}(2\pi f_0 n t_s) = \mathrm{sen}(2\pi m F n)$

$$N_0 = m \cdot \frac{f_s}{f_0}$$



f_0 = 1/16 Hz	f_0 = 5/16 Hz	f_0 = π/16 Hz
f_s = 1 Hz	f_s = 1 Hz	f_s = 1 Hz

2.3. Sinusoidal y exponencial de tiempo discreto

- **Exponencial compleja de tiempo continuo.**

  $x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t} = Ae^{at}$ $\Rightarrow$ A y a son constantes complejas

- **Exponencial compleja de tiempo discreto.** Muestreando la señal continua con periodo de muestreo t_s:

$$X[n] = Ae^{j2\pi\frac{f_0}{f_s}n} = Ae^{j2\pi m F_0 n} = Az^n$$

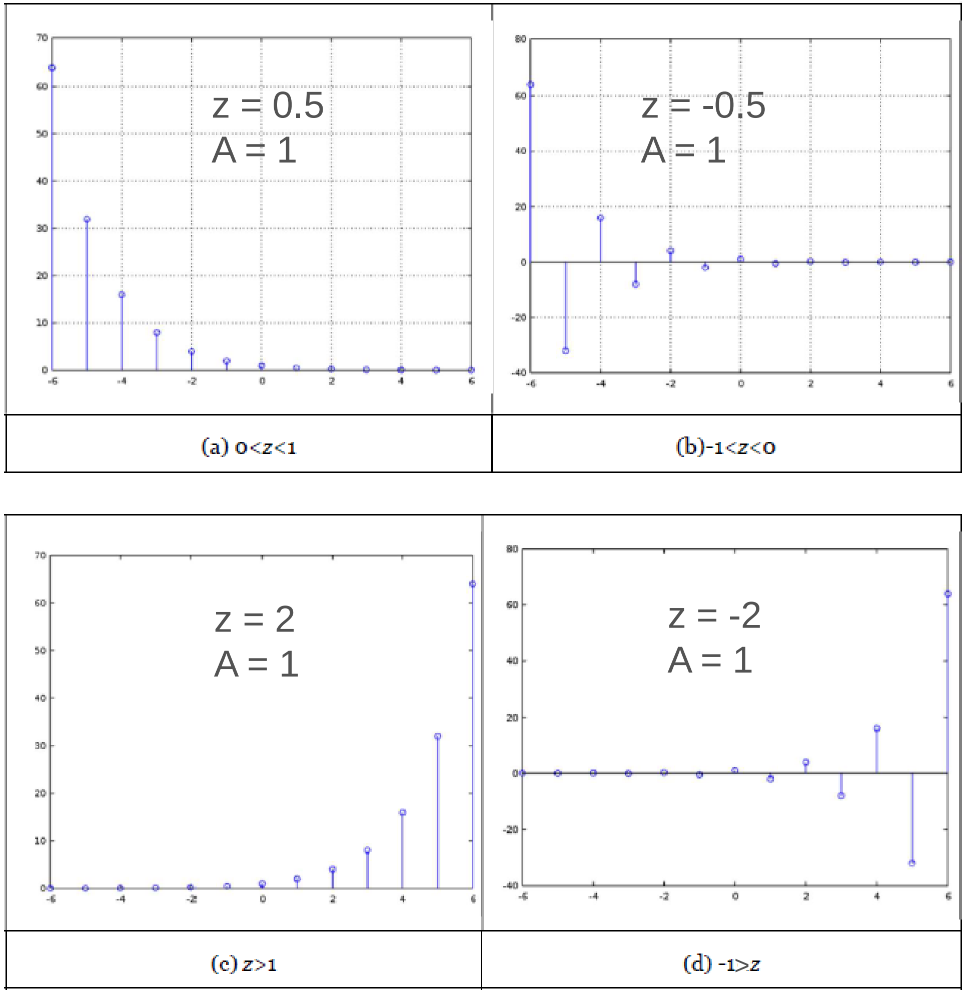
$F_0 = f_0/(mf_s)$: frecuencia cíclica fundamental de tiempo discreto

Por simplificar $\Rightarrow$ $z = e^{j2\pi F_0 m}$

2.3. Sinusoidal y exponencial de tiempo discreto

- **Exponencial compleja de tiempo discreto.** A y z reales:

$X[n] = Az^n$



(a) $0<z<1$ | (b) $-1<z<0$

(c) $z>1$ | (d) $-1>z$

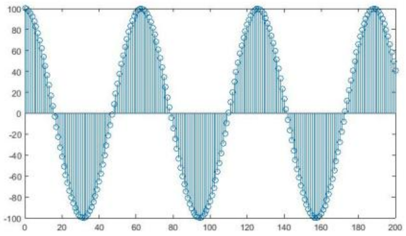
Ejercicio 1

- Dada la señal $z[n] = 100e^{j0.1n}$, representarla en Octave como parte real y parte imaginaria y, como módulo y argumento.

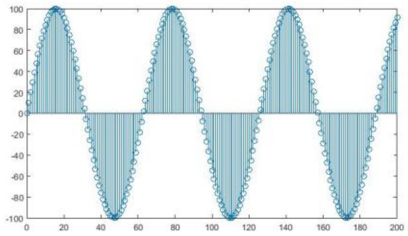
- Como parte real e imaginaria $\Rightarrow$ Usando la relación de Euler:

$$z[n] = 100e^{j0.1n} = 100\cos(0.1n) + j100\sin(0.1n)$$

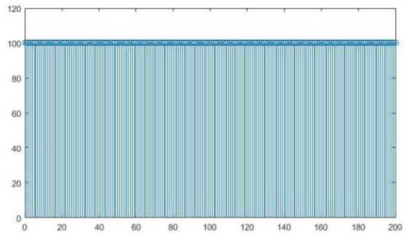
- En la forma módulo argumento $\Rightarrow$ $|z(n)| = 100$ $\quad$ $Arg(z(n)) = 0.1n$



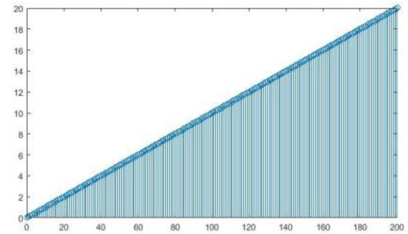
Real(z)



Imag(z)



Mod(z)

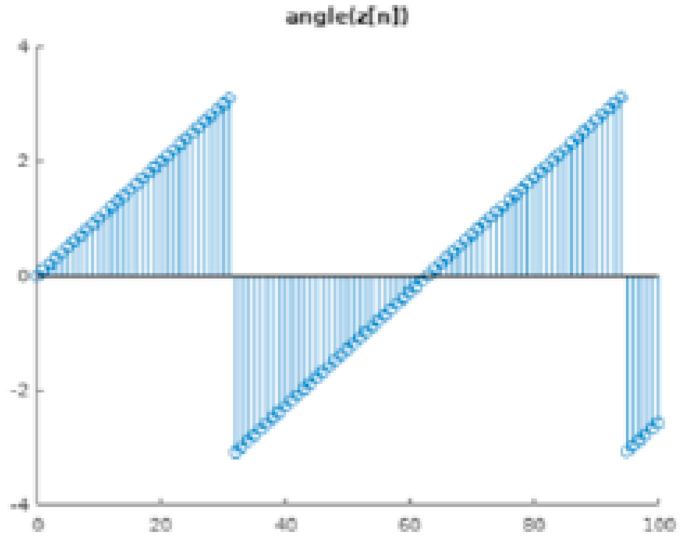


Arg(z)

```
n = [0:200];
z=100*exp(1).^(j*0.1*n);
modulo=abs(z);
argumento=angle(z);
subplot(2,2,1), stem(n,real(z))
subplot(2,2,2), stem(n,imag(z))
subplot(2,2,3), stem(n,modulo)
subplot(2,2,4), stem(n,argumento)
```

Ejercicio 1

- **El argumento a veces se representa entre -π y π, lo que conlleva saltos en la fase. Es solo una forma de representación**



Ejercicio 2

- Operaciones con fasores.

- Un número complejo puede ponerse como parte real e imaginaria o como módulo argumento. La conversión entre ambas formas se consigue con la relación de Euler.

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

- Dados dos fasores A1=2, ϕ1=-π/4, A2=4, ϕ2=π/2, calcular su suma

$$A_3 e^{j\phi_3} = 2e^{-j\pi/4} + 4e^{j\pi/2}$$

- Los convertimos a forma real-imaginaria

$$= 2\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + 2j\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

- Agrupamos y convertimos a módulo-argumento

$$= \sqrt{2} + j(4 - \sqrt{2}) = 2.94e^{j1.07}$$

Ejercicio 3

- Determinar cuales de estas señales son periódicas y, si lo son, indicar el periodo.

$$x_1(t) = 10\sin(12\pi t) + 4\cos(18\pi t) \qquad\qquad x_2(t) = e^{-j60\pi t}$$

- El periodo de sin(12πt) es 1/6. Esto es, se repite en 1/6, 2/6, 3/6,…

- El periodo de cos(18πt) es 1/9. Esto es, se repite en 1/9, 2/9, 3/9,…

- El mínimo valor de t común al seno y al coseno para el cual sus valores se repiten es 1/3. Por tanto, ese es el periodo de $x_1(t)$.

- Respecto a $x_2(t)$, si transformamos a real-imaginaria el seno y el coseno tendrán un argumento de 60πt = 2πft. Esto da un periodo de 1/30.

Ejercicios adicionales

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicios 1.6, 1.9, 1.14**
- Vamos a hacer el **1.14**. Sea la señal periódica x(t) de periodo 2. La derivada de x(t) está relacionada con el tren de impulsos g(t)

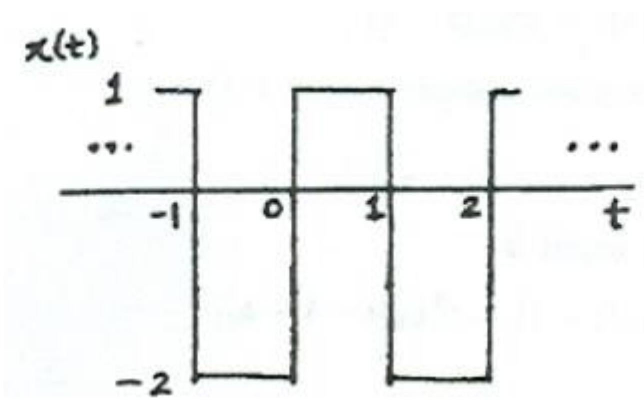
$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ -2, & 1 < t < 2 \end{cases} \qquad g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k)$$

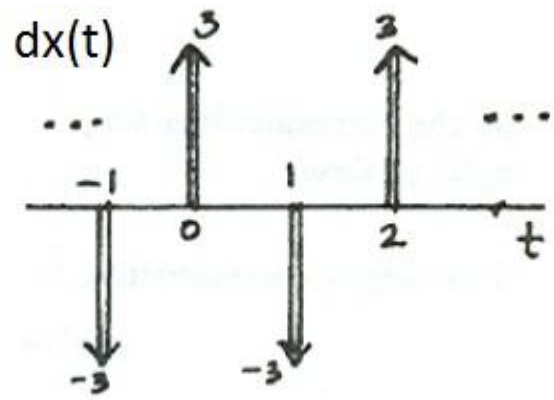
- Demostrar la siguiente relación calculando A_1, t_1, A_2 y t_2.

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_1 g(t - t_1) + A_2 g(t - t_2)$$

Ejercicios adicionales

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ -2, & 1 < t < 2 \end{cases} \qquad g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k) \qquad \frac{dx(t)}{dt} = A_1 g(t - t_1) + A_2 g(t - t_2)$$





- Por tanto, la derivada de x(t) puede ponerse de la forma

$$dx(t)/dt = \underbrace{3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k)}_{\mathbf{g(t)}} - \underbrace{3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k - 1)}_{\mathbf{g(t-1)}}$$

- Comparando con $\frac{dx(t)}{dt} = A_1 g(t - t_1) + A_2 g(t - t_2)$
- A1=3 y t1=0 (no hay que desplazar g(t))
- A2=-3 y t2=1 (hay que desplazar en uno g(t) para obtener t - 2k - 1)

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

unir

www.unir.net