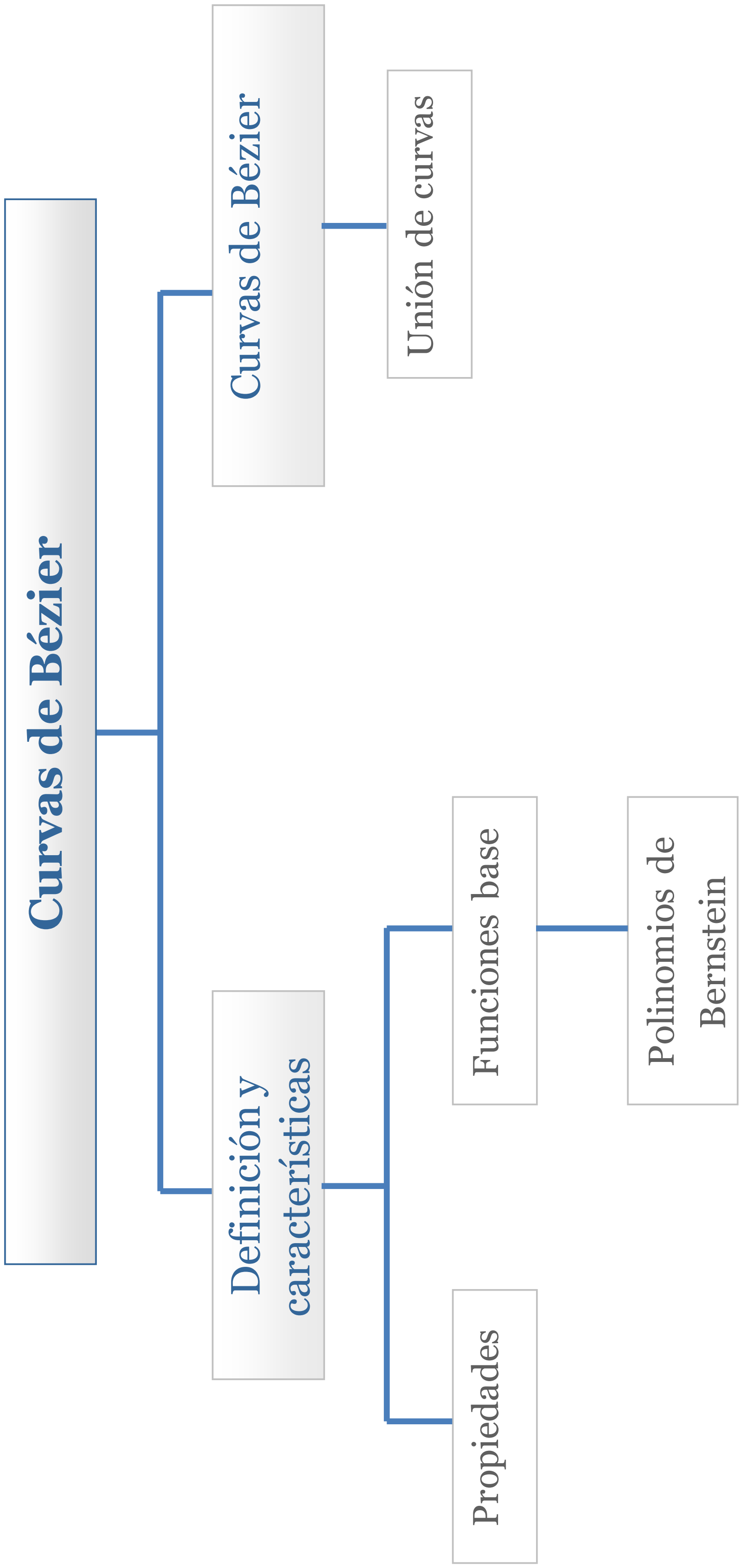
Curvas de Bézier

TEMA 10

Esquema


Curvas de Bézier
Curvas de Bézier
Unión de curvas
Definición y características
Funciones base
Polinomios de Bernstein
Propiedades

Ideas clave

10.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

En este tema se estudia una técnica muy utilizada en la generación de imágenes por ordenador, las curvas de Bézier. Para estudiarlas es necesario conocer:

» Polinomios de Bernstein.
» Curvas de Bezier.
» Interpolación de Casteljau.

10.2. Introducción

Las curvas de Bézier son una herramienta básica para la generación de curvas. La desarrolló el siglo pasado el ingeniero de Renault Pierre Bézier y se sigue utilizando desde entonces. La curva de Bézier cúbica que es la más usada se genera a partir de cuatro puntos de control (figura 10.1)

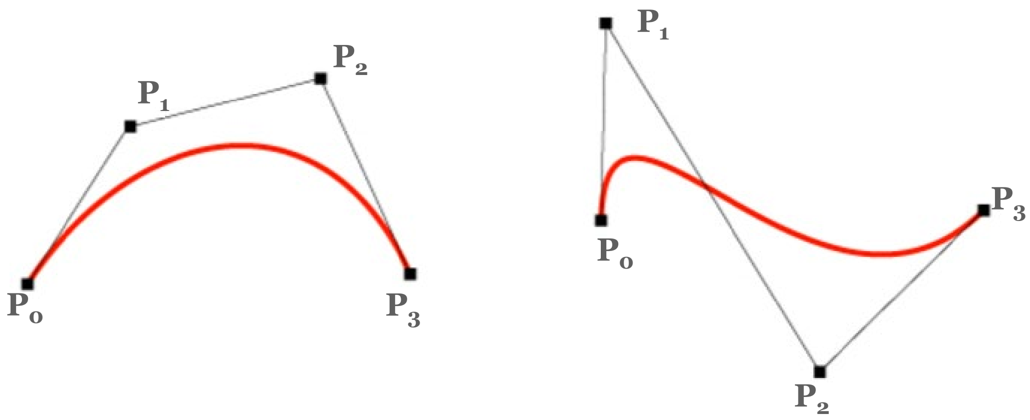


Figura 10.1. Curvas de Bézier
Fuente: http://www.e-cartouche.ch/

Es muy similar a un *b-spline* (de hecho, es un tipo específico de *spline*): está definido localmente, está formado por una suma de polinomios de grado 3 y verifica las mismas condiciones de regularidad y aproxima una serie de puntos de control dados. Pero a diferencia de un *b-spline* que aproxima todos los puntos de control, una curva de Bézier cúbica pasa por los puntos de control de los extremos y aproxima los centrales.

10.3. Polinomios de Bernstein

Los polinomios de Bernstein son de la forma:

$$B_i^p(t) = \binom{p}{i}(1-t)^{p-i}t^i$$

Donde:

$$\binom{p}{i} = \frac{p!}{(p-i)! \cdot i!}$$

Es posible que estés familiarizado con esta expresión si has estudiado estadística, ya que es muy similar a los sumandos de la función de masa de una variable aleatoria que sigue una distribución binomial.

Estos polinomios también pueden emplearse para aproximar funciones conocidas por lo que su estudio es muy útil en diversas áreas.

10.4. Curvas de Bézier

Una curva de Bézier es de la forma:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{p} P_i \, B_i^p(t)$$

Donde P_i son los puntos de control y $B_i^p(t)$ los polinomios base de Bernstein. Por esta razón son muy parecidos a un *b-spline*: son la suma de una serie de funciones base ponderadas por las coordenadas de los puntos de control.

La figura 10.2 muestra cómo son estos polinomios para una curva de Bézier cúbica.

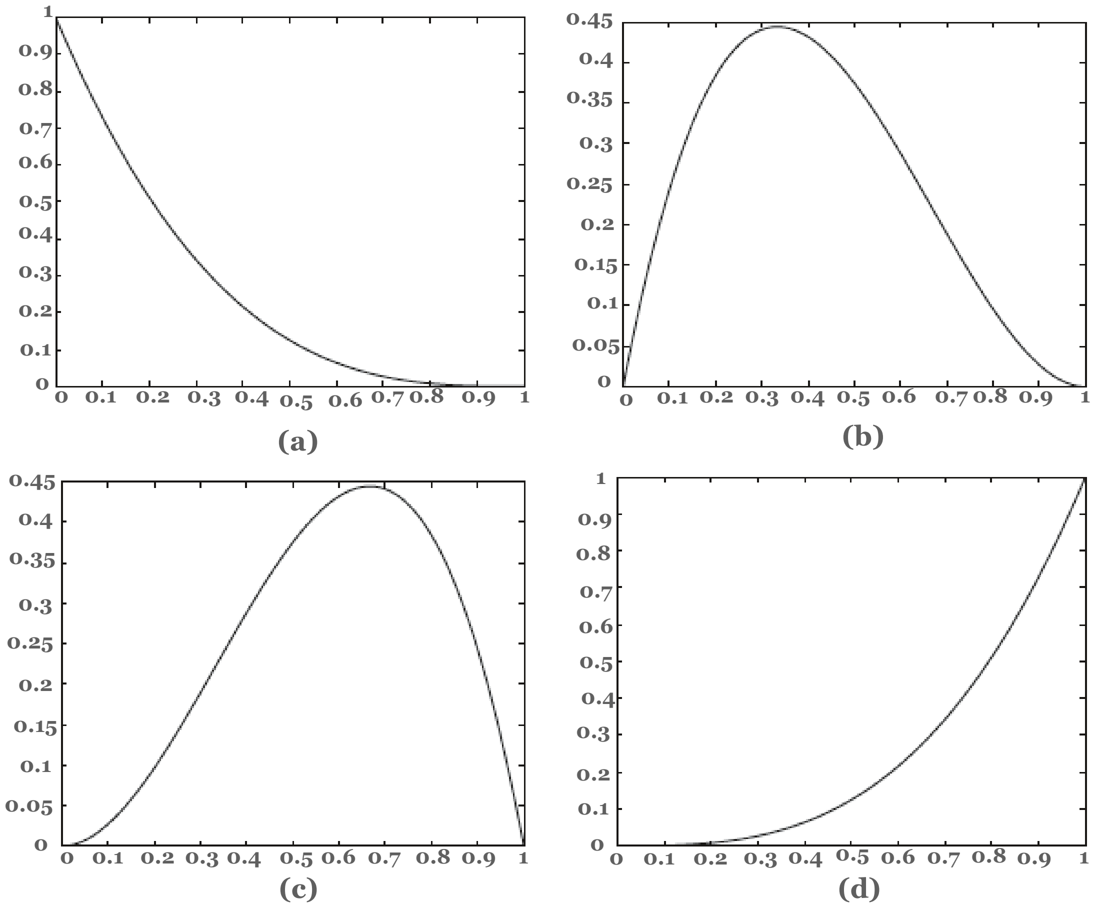


Figura 10.2. Comportamiento de las funciones base de una curva de Bézier
Fuente: Biswas, S. y Lovell, B.C (2008)

Las curvas de Bézier tienen propiedades derivadas de los polinomios de Bernstein que las hacen muy interesantes:

» Siempre interpolan a los puntos de control de los extremos. Además, la línea que une un extremo con el punto consecutivo siempre es tangente a la curva.
» Siempre están dentro de la componente convexa formada por los puntos de control.
» Son invariantes por transformaciones afines.
» Es muy sencillo determinar el orden de la curva: siempre es uno menos que el número de puntos de control.

Múltiples nodos

Un *b-spline* que contiene un nodo repetido una o más veces se puede interpretar como un spline que contine una curva de longitud cero en un intervalo. La curva en ese punto pierde continuidad. Por ejemplo, supongamos que tenemos un *b-spline* de grado 3. Si un nodo se repite una vez, la curva pasará a ser C^1 en dicho punto. Si se repite dos veces, C^0. Si se repite más veces, se producirá una discontinuidad.

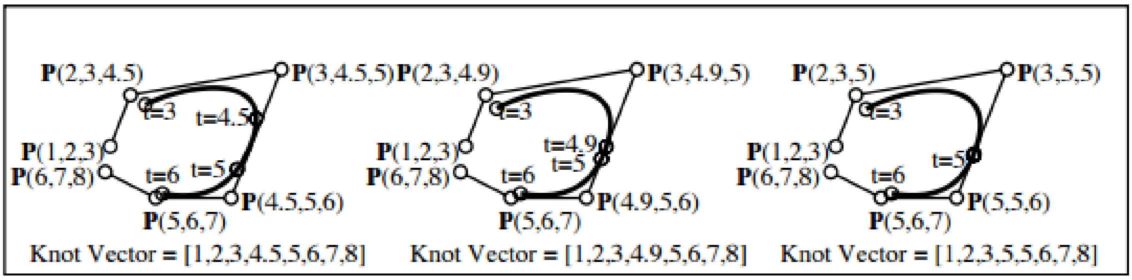


Figura 10.3. Repetición de un nodo en un b-spline.
Fuente: http://cagd.cs.byu.edu/

Una aplicación de esto es que es muy sencillo introducir discontinuidades en una curva definida por *b-splines* (Figura 10.4).

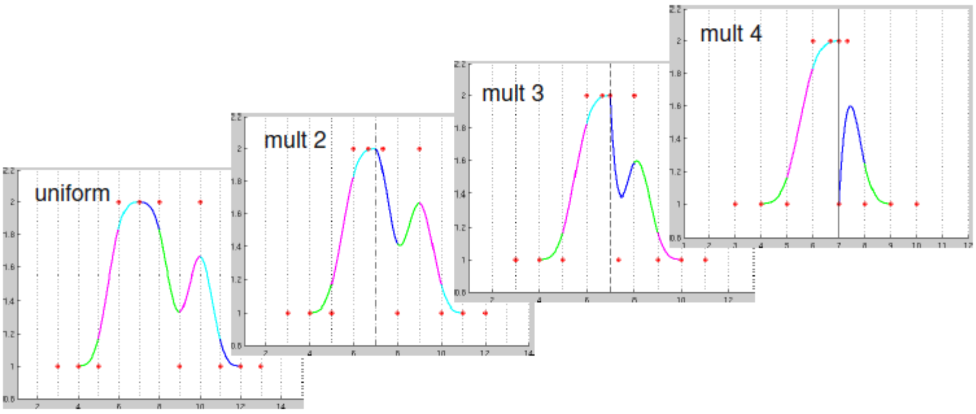


Figura 10.4. Disminución de la continuidad por nodos repetidos.

Además, vamos a utilizar esto para determinar cómo unir una curva de Bézier a un *b-spline*.

10.5. Unión de curvas

Se quieren unir un *b-spline* arbitrario y una curva de Bezier con puntos de control $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$ y $P_n = Q_0,\ Q_1, Q_2, Q_3$. El problema es estudiar la continuidad en el punto de unión y recalcular los puntos de control, en caso de que sea necesario.

Si los puntos P_{n-1}, P_n y Q_1 no están alineados, entonces la continuidad de la curva resultante en el punto de unión será C^0 (Figura 10.5)

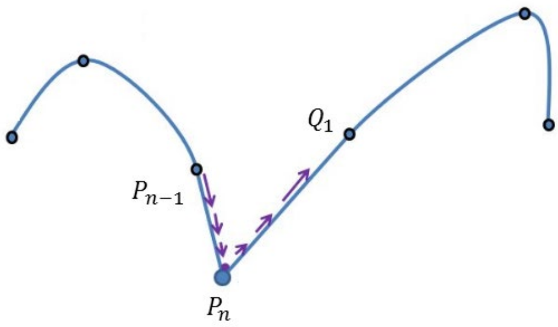


Figura 10.5. Unión de dos curvas con continuidad $\mathbf{C^0}$.

En este caso, los puntos de control son $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n, Q_1,\ Q_2, Q_3$ y hay que repetir el nodo correspondiente 2 veces para restar continuidad en dicho punto, pasando de C^2 a C^0. Por tanto, el vector de nodos resulta: $(\dots, k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, k_{i+1}, k_{i+1}, e, \dots)$.

La curva será C^1 en el punto de unión si las curvas tienen la misma tangente en P_n pero distinta curvatura (Figura 10.5). En este caso, los puntos de control son $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, Q_1$, Q_2, Q_3 y el vector de nodos $(\dots, k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, k_{i+1}, e, \dots)$, donde e es tal que se verifica la relación

$$|[P_n - P_{n-1}](k_{i+1} - k_i)| = |[Q_1 - P_n](e - k_{i+1})|$$

Si se quiere implementar, hay que tener en cuenta los errores de redondeo. Por eso, es habitual escribir esta condición como que la diferencia sea inferior a un valor de tolerancia establecido.

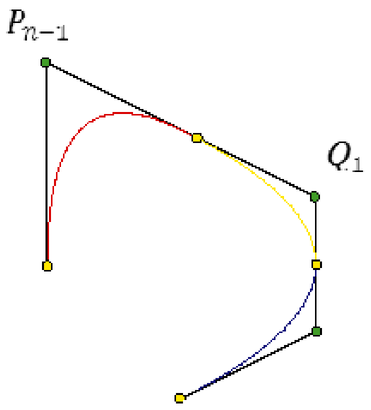


Figura 10.6. Unión de dos curvas con continuidad $\mathbf{C^1}$.

Para que sea C^2, hay que imponer la condición:

$[P_{n-2} - Q_{2-1}](k_{i+1} - k_{i-1})(k_{i+1} - e)+[P_{n-1} - P_{n-2}](e - k_{i-1})(k_{i+1} - e)+[Q_2 - Q_1](k_i - E)(k_{i+1} - k_{i-1})$=0

Así podemos calcular la expresión del punto de control:

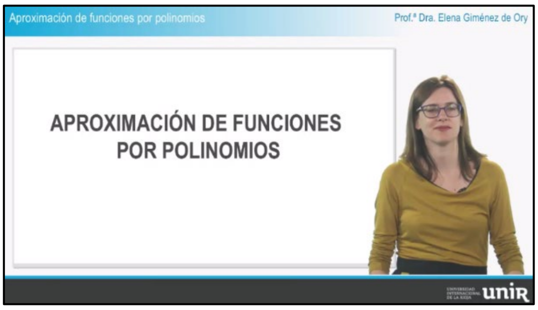
$$P_a = \frac{(k_{i+1} - e)P_{n-2} + (k_{i+1} - e)P_{n-1}}{k_{i+1} - k_{i-1}} = \frac{(k_{i+1} - k_i)Q_2 + (e - k_{i+1})Q_1}{e - k_i}$$

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

Aproximación de funciones por polinomios

En esta clase magistral vamos a ver la aproximación de funciones por polinomios. Esta es una herramienta matemática muy útil para muchas funciones.



La lección magistral está disponible en el aula virtual

No dejes de leer…

Construcción de curvas de Bézier con Geogebra

En este enlace se repasan los conceptos esenciales de las curvas de Bézier y se explica cómo construirlas con Geogebra.

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://www.geometriadinamica.cl/2010/12/curvas-de-bezier/

Algoritmo para dibujar las curvas de Bézier

En este enlace se muestra cómo dibujar una curva de Bézier con VB.net.

Dibujar curvas spline de Bézier

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://msdn.microsoft.com/es-es/library/aa735827%28v=vs.71%29.aspx

No dejes de ver…

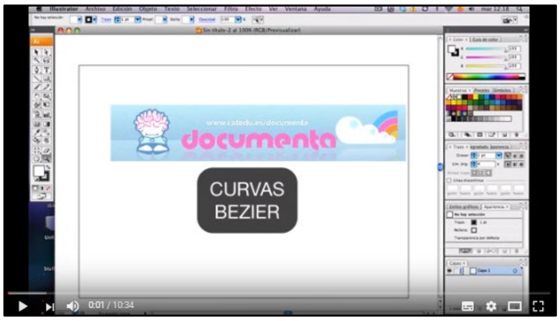
Cubic Bézier Curves

En este vídeo se muestra cómo dibujar una curva de Bézier.

Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web: https://vimeo.com/106757336

Curvas Bézier con Adobe Illustrator

En este vídeo se muestra cómo hacer curvas Bézier con Adobe Illustrator.



Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web: https://www.youtube.com/watch?v=bBm1RpoECso

+ Información

A fondo

Algoritmo de Casteljau

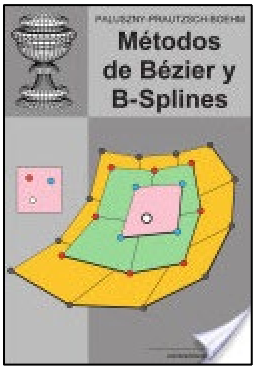
En este documento se explica cómo dibujar curvas de Bézier con el algoritmo de Casteljau.

De Casteljau's Algorithm and Bézier Curves

Accede al documento desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://www.malinc.se/m/DeCasteljauAndBezier.php

Métodos de Bézier y *b-splines*

Paluszny, M., Prautzsch, H. y Boehm, W. (2005). *Métodos de Bézier y b-splines.* Alemania: KIT Scientific Publishing.



En los capítulos 5, 6 y 7 de este libro se tratan en profundidad los contenidos de este tema.

Accede al libro desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://books.google.es/books?id=EP-mijyNnvgC&printsec=frontcover

Test

1. Una curva de Bézier:

A. Puede considerarse un *spline*.

B. Puede considerarse un *b-spline*.

C. A y B son ciertas.

2. Una curva de Bézier:

A. Aproxima algunos puntos de control.

B. Interpola algunos puntos de control.

C. A y B son ciertas.

3. Los polinomios de Bernstein:

A. Se pueden utilizar para aproximar funciones conocidas.

B. Son las funciones base de las curvas de Bézier.

C. A y B son ciertas.

4. Una curva de Bézier:

A. Es la suma de una serie de polinomios de Bézier.

B. Está ponderada por los puntos de control.

C. A y B son ciertas.

5. Las curvas de Bézier cúbicas:

A. Por lo general, presentan suficientes condiciones de regularidad.

B. Son computacionalmente muy costosas.

C. A y B

6. Las curvas de Bézier verifican:

A. Las líneas que unen puntos consecutivos son tangentes a la curva.

B. Todos los puntos, salvo los extremos, están en la componente convexa de los puntos de control.

C. A y B son falsas.

7. Las curvas de Bézier verifican:

A. Todos los puntos de la curva están dentro de la componente convexa de los puntos de control.

B. Se necesitan tres puntos de control para trazar una curva de orden dos.

C. A y B son ciertas.

8. Las curvas de Bézier verifican en sus extremos:

A. La línea que une un extremo con su punto contiguo es tangente a la curva.

B. La línea que une los extremos es tangente a la curva.

C. A y B son falsas.

9. Para obtener una curva de Bézier que pase por más de cuatro puntos:

A. Lo habitual es tomar una curva de Bézier de orden 4 o más.

B. Lo habitual es concatenar dos curvas de Bézier.

C. A y B son ciertas.

10. El algoritmo de Calteljau:

A. Está definido de forma recursiva.

B. No es muy utilizado en la práctica.

C. A y B son falsas.