¿Qué vimos la última semana?

- Interpolación.
- Métodos de Lagrange y Newton.
- Splines: Solucionando problemas en los bordes.

Splines

Ejemplo: calcular el *spline* cúbico que pasa por los puntos (x_i, y_i)

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{3} a_n (x - x_1)^n \qquad f_2(x) = \sum_{n=0}^{3} a_n (x - x_2)^n \qquad f_3(x) = \sum_{n=0}^{3} a_n (x - x_3)^n$$

x_i	$f(x_i)$
3	2.5
4.5	1
7	2.5
9	0.5

Splines

$$\left.\begin{array}{r} f_1(x_0) = y_0 \\ f_1(x_1) = y_1 \\ f_2(x_1) = y_1 \\ f_2(x_2) = y_2 \\ f_3(x_2) = y_2 \\ f_3(x_3) = y_3 \end{array}\right\} = \begin{cases} a_3x_0^3 + a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0 = y_0 \\ a_3x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = y_1 \\ b_3x_1^3 + b_2x_1^2 + b_1x_1 + b_0 = y_1 \\ b_3x_2^3 + b_2x_2^2 + b_1x_2 + b_0 = y_2 \\ c_3x_2^3 + c_2x_2^2 + c_1x_2 + c_0 = y_2 \\ c_3x_3^3 + c_2x_3^2 + c_1x_3 + c_0 = y_3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} f_1'(x_1) = f_2'(x_1) \\ f_2'(x_2) = f_3'(x_2) \\ f_1''(x_1) = f_2''(x_1) \\ f_2''(x_2) = f_3''(x_2) \end{array}\right\} = \begin{cases} 3a_3x_1^2 + 2a_2x_1 + a_1 = 3b_3x_1^2 + 2b_2x_1 + b_1 \\ 3b_3x_2^2 + 2b_2x_2 + b_2 = 3c_3x_2^2 + 2c_2x_2 + c_1 \\ 6a_3x_1 + 2a_2 = 6b_3x_1 + 2b_2 \\ 6b_3x_2 + 2b_2 = 6c_3x_1 + 2c_2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} f_1''(x_0) = 0 \\ f_3''(x_3) = 0 \end{array}\right\} = \begin{cases} 6a_3x_0 + 2a_2 = 0 \\ 6c_3x_3 + 2c_2 = 0 \end{cases}$$

Condiciones naturales

Splines

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

Fórmula 1 (F1)

$$f_i(x) = \frac{f_i''(x_{i-1})}{6(x_i-x_{i-1})}(x_i - x)^3 + \frac{f_i''(x_i)}{6(x_i-x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3 + \left[\frac{f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} - \frac{f_i''(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})}{6}\right](x_i - x) + \left[\frac{f(x_i)}{x_i-x_{i-1}} - \frac{f_i''(x_i)(x_i-x_{i-1})}{6}\right](x - x_{i-1})$$

Fórmula 2 (F2)

$$(x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f''(x_{i+1}) = \frac{6}{(x_{i+1}-x_i)}[f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \frac{6}{(x_i-x_{i-1})}[f(x_{i-1}) - f(x_i)]$$

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

Cálculo de $f_1(x)$:

Sustituyendo en F2 los puntos $(3, 2.5), (4.5, 1), (7, 2.5)$:

$$(4.5-3)f''(3) + 2(7-3)f''(4.5) + (7-4.5)f''(7) = \frac{6}{(7-4.5)}[2.5-1] + \frac{6}{(4.5-3)}[2.5-1]$$

Como $f''(3) = 0$:

$$8f''(4.5) + 2.5f''(7) = 9.6$$

Sustituyendo en F2 los puntos $(4.5, 1), (7, 2.5), (9, 0.5)$:

$$2.5f''(4.5) + 9f''(7) = -9.6$$

Splines

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

Por tanto, resolviendo el sistema:

$$8f''(4.5) + 2.5f''(7) = 9.6$$

$$2.5f''(4.5) + 9f''(7) = -9.6$$

Resulta:

$$f''(4.5) = 1.67909$$

$$f''(7) = -1.53308$$

Splines

Sustituyendo en F1:

$$f_1(x) = \frac{1.67909}{6(4.5-3)}(x-3)^3 + \frac{2.5}{4.5-3}(4.5-x) \quad + \left[\frac{1}{4.5-3} - \frac{1.97909(4.5-3)}{6}\right](x-3)$$

Por tanto:

$$f_1(x) = 0.186566(x-3)^3 + (4.5-x) + 0.246894(x-3)$$

Análogamente se obtienen $f_2(x)$ y $f_3(x)$

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

9.1 Definición y construcción de b-splines

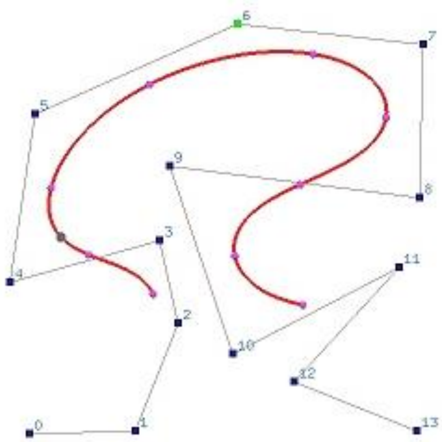
9.2 Algoritmo de Boor

B-splines

B-splines: tipo de splines definidos de forma aún más local.

Idea de puntos de control: curva poligonal que aproxima una serie de puntos

Si pasa por los puntos de control de los extremos → **Curva de Bezier**



Fuente: http://www.cs.mtu.edu/

B-splines

Dada una serie de nodos $a_1, \dots, a_n$, se definen los b-splines de forma recursiva como:

$$N_i^0(u) = \begin{cases} 1, si\ u \in [a_i, a_{i+1}) \\ 0, eoc \end{cases}$$

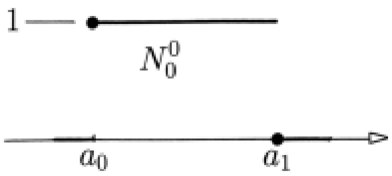
$N_i^n(u) = \alpha_i^{n-1} N_i^{n-1}(u) + \left(1 - \alpha_{i+1}^{n-1}\right) N_{i+1}^{n-1}(u)$, donde

$$\alpha_i^{n-1} = \frac{u - a_i}{a_{i+n} - a_i}$$

B-splines

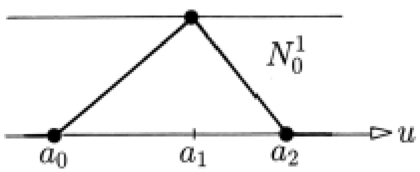
Ejemplo: sean $a_0 = 0, a_1 = 1, \ldots, a_n = n$ el b-spline asociado se define:

$$N_0^0(u) = \begin{cases} 1, si\ u \in [0,1) \\ 0, eoc \end{cases}$$



$$N_0^1(u) = \alpha_0^0 N_0^0(u) + (1 - \alpha_1^0) N_1^0(u) = \begin{cases} u & , si\ u \in [0,1) \\ \frac{-u+3}{2} + 1, si\ u \in [1,2) \\ 0, \quad eoc \end{cases}$$

$$\alpha_0^0 = \frac{u - a_0}{a_1 - a_0} = \frac{u - 0}{1 - 0}$$



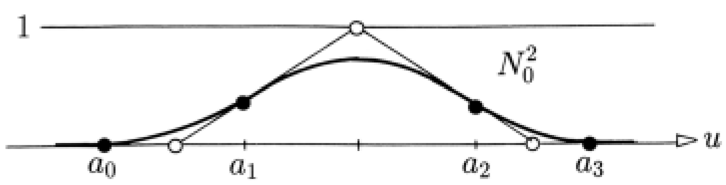
$$\alpha_1^0 = \frac{u - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{u - 1}{3 - 1}$$

B-splines

$$N_0^2(u) = \alpha_0^1 N_0^1(u) + (1 - \alpha_1^1) N_1^1(u)$$

$$\alpha_1^0 = \frac{u - a_0}{a_2 - a_0} = \frac{u - 0}{2 - 0} \qquad \alpha_1^1 = \frac{u - a_0}{a_2 - a_0} = \frac{u - 0}{2 - 0}$$

$$N_1^1(u) = \alpha_1^0 N_1^0(u) + (1 - \alpha_2^0) N_2^0(u)$$



Ejercicio: continuar iterando hasta calcular el b-spline de grado 3

Algoritmo de Boor

Un B-Spline es una curva paramétrica compuesta de una combinación lineal de B-splines de base N_i^n, esto es:

$$p(t) = \sum_{i=0}^{m} P_i \, N_i^n(t)$$

Dónde P_i son los puntos de control y la discretización es $t_0 < \ldots < t_{n+m}$

Algoritmo de Boor

Coordenadas polares:

Etiquetan los puntos de control

Cada punto de un b-spline de grado n necesita n coordenadas

Fórmula general para calcular las coordenadas polares:

Si el b-spline está definido sobre un intervalo $[a, b]$, las coordenadas polares $P(u_1, u_2, \dots, u_n)$ se definen de forma que:

$u_j = a$, si $j \leq n - i$
$u_j = b$, en otro caso

Algoritmo de Boor

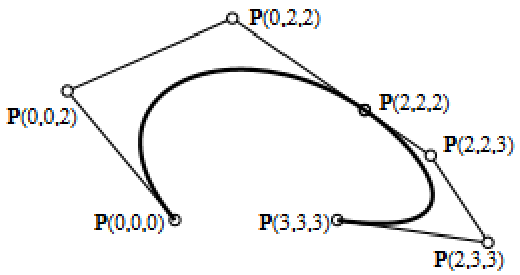
Ejemplo:

Si P es un b-spline de grado 3, en el intervalo $[0,2]$ podemos considerar las coordenadas polares:

$$P(0,0,0), P(0,0,2), P(0,2,2), P(2,2,2)$$

Y en el intervalo $[2,3]$:

$$P(2,2,2), P(2,2,3), P(2,3,3), P(3,3,3)$$

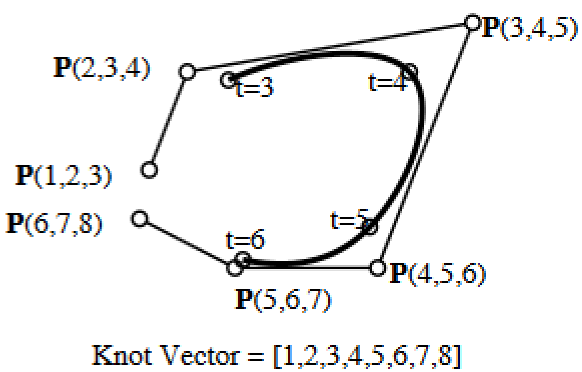


Fuente: http://cagd.cs.byu.edu/

Algoritmo de Boor

Sudivisión de un b-spline

Sea un b-spline con un vector de nodos $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, las coordenadas polares de los puntos de control son n nodos consecutivos



Fuente: http://cagd.cs.byu.edu/

Algoritmo de Boor

Sea P es un b-spline de grado 3 definido en el intervalo $[0,1]$. Queremos dividir el intervalo en dos: $[0, a]$ y $[a, 1]$.

Las coordenadas polares que tenemos son:

$$P(0,0,0), P(0,0,1), P(0,1,1), P(1,1,1)$$

Al añadir el punto a, resulta

$$P(0,0,0), P(0,0,a), P(0,a,a), P(a,a,a)$$

y

$$P(a,a,a), P(a,a,1), P(a,1,1), P(1,1,1)$$

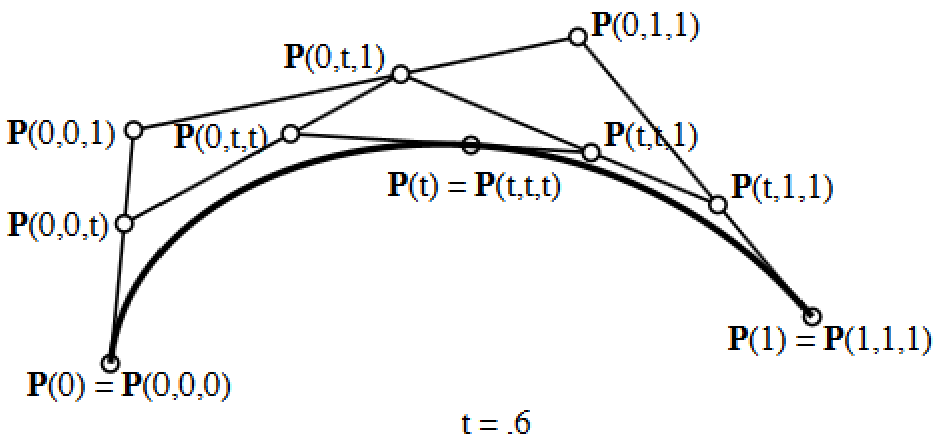
Algoritmo de Boor

Paso 1:

$$P(0,0,a) = (1 - a_{10}) \cdot P(0,0,0) + a_{10} \cdot P(0,0,1)$$

$$P(0,a,1) = (1 - a_{11}) \cdot P(0,0,1) + a_{11} \cdot P(0,1,1)$$

$$P(a,1,1) = (1 - a_{12}) \cdot P(0,1,1) + a_{12} \cdot P(1,1,1)$$



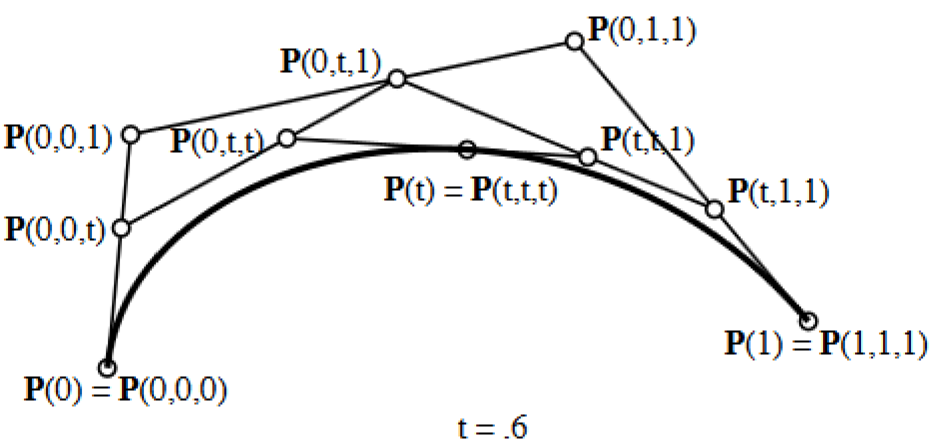
Fuente: *http://cagd.cs.byu.edu/*

Algoritmo de Boor

Paso 2:

$$P(0, a, a) = (1 - a_{21}) \cdot P(0,0, a) + a_{21} \cdot P(0, a, 1)$$

$$P(a, a, 1) = (1 - a_{22}) \cdot P(0, a, 1) + a_{22} \cdot P(a, 1,1)$$

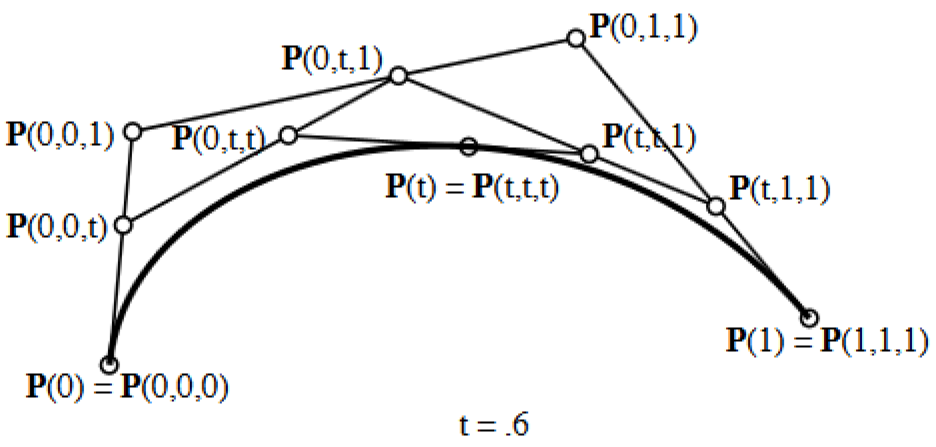


Fuente: http://cagd.cs.byu.edu/

Algoritmo de Boor

Paso 3:

$$P(a,a,a) = (1 - a_{32}) \cdot P(0,a,a) + a_{32} \cdot P(a,a,1)$$



Fuente: http://cagd.cs.byu.edu/

Inicialización: el vector de nodos por los intervalos $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 5]$ para un b-spline cúbico puede ser $[1, 1, 1, 2, 3, 5, 5, 5]$

Algoritmo de Boor

En nuestro ejemplo, partimos del vector de nodos:

$$[0,0,0,1,1,1]$$

Al insertar a

$$[0,0,0, a, 1,1,1]$$

Por tanto, las coordenadas polares de los puntos de control son:

$$[0,0,0],\ [0,0, a],\ [0, a, 1],\ [a, 1, 1],\ [1,1,1]$$

a aparece 3 veces, es decir, **hay 3 inserciones**.

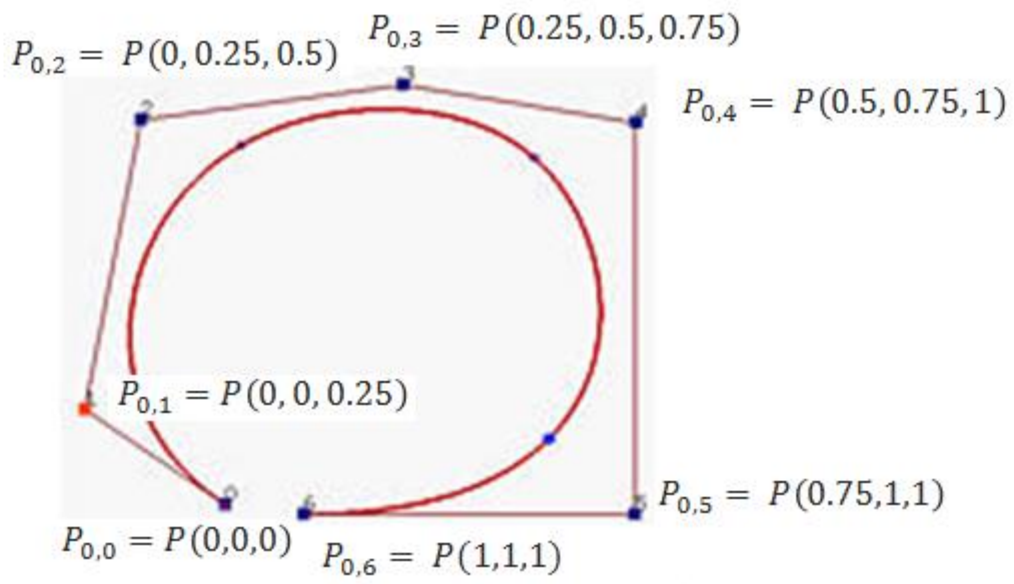
Algoritmo de Boor

Cálculo de los coeficientes a_{pi}

Ejemplo: dado un b-spline con vector de nodos $[0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1]$, calcular el valor del polinomio para $u = 0.4$

Puntos de control:

$P_{0,0} = P(0,0,0)$
$P_{0,1} = P(0, 0, 0.25)$
$P_{0,2} = P(0, 0.25, 0.5)$
$P_{0,3} = P(0.25, 0.5, 0.75)$
$P_{0,4} = P(0.5, 0.75, 1)$
$P_{0,5} = P(0.75,1,1)$
$P_{0,6} = P(1,1,1)$



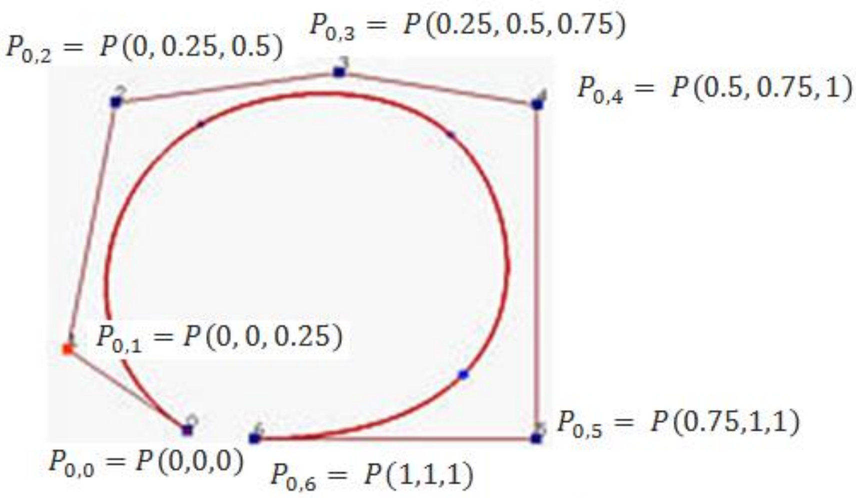
Algoritmo de Boor

$0.4 \in [0.25, 0.5) = [a_3, a_4) \Longrightarrow i = 3$

Paso 1: $P(0{,}0.25{,}0.4) = (1 - a_{1i-1}) \cdot P(0{,}0.25{,}0.5) + a_{1i-1} \cdot P(0.25{,}0.5{,}0.75)$

$$P(0{,}0.4{,}0.5) = (1 - a_{1i}) \cdot P(0.25{,}0.5{,}0.75) + a_{1i} \cdot P(0.5{,}0.75{,}1)$$

$$P(0.4, 0.5, 0.75) = (1 - a_{12}) \cdot P(0.5{,}0.75{,}1) + a_{12} \cdot P(0.75{,}1{,}1)$$



Con la nueva notación:

$$P_{1,2} = (1 - a_{12}) \cdot P_{0,1} + a_{12} \cdot P_{0,2}$$

$$P_{1,3} = (1 - a_{13}) \cdot P_{0,2} + a_{13} \cdot P_{0,3}$$

$$P_{1,4} = (1 - a_{14}) \cdot P_{0,3} + a_{14} \cdot P_{0,4}$$

Algoritmo de Boor

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

$$\boldsymbol{a_{pi}} = \frac{\boldsymbol{u - u_{i-1}}}{\boldsymbol{u_{i+g-p} - u_{i-1}}}$$

donde

p es el paso
i es índice del punto de control
g es el índice del polinomio

$$a_{1,2} = \frac{u - u_1}{u_4 - u_1} = \frac{0.4 - 0}{0.5 - 0} = 0.8$$

$$a_{1,3} = \frac{u - u_2}{u_5 - u_2} = \frac{0.4 - 0}{0.75 - 0} = 0.53$$

$$a_{1,4} = \frac{u - u_3}{u_6 - u_3} = \frac{0.4 - 0.25}{1 - 0.25} = 0.2$$

Por tanto:

$$\boldsymbol{P_{1,2} = 0.2 \cdot P_{0,1} + 0.8 \cdot P_{0,2}}$$

$$\boldsymbol{P_{1,3} = 0.47 \cdot P_{0,2} + 0.53 \cdot P_{0,3}}$$

$$\boldsymbol{P_{1,4} = 0.8 \cdot P_{0,3} + 0.2 \cdot P_{0,4}}$$

$[0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0{,}75, 1, 1, 1]$

Algoritmo de Boor

Paso 2:

$$P_{2,3} = (1 - a_{23}) \cdot P_{1,2} + a_{13} \cdot P_{1,3}$$

$$a_{2,3} = \frac{u - u_2}{u_4 - u_2} = \frac{0.4 - 0}{0.5 - 0} = 0.8$$

$$P_{2,4} = (1 - a_{24}) \cdot P_{1,3} + a_{14} \cdot P_{1,4}$$

$$a_{2,4} = \frac{u - u_3}{u_5 - u_3} = \frac{0.4 - 0.25}{0.75 - 0.25} = 0.3$$

$$\boldsymbol{P_{2,3} = 0.2 \cdot P_{1,2} + 0.8 \cdot P_{1,3}}$$

$$\boldsymbol{P_{2,4} = 0.7 \cdot P_{1,3} + 0.3 \cdot P_{1,4}}$$

$$a_{pi} = \frac{u - u_{i-1}}{u_{i+g-p} - u_{i-1}}$$

$$[0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0{,}75, 1, 1, 1]$$

Algoritmo de Boor

Paso 3:

$$P_{3,4} = \left(1 - a_{3,4}\right) \cdot P_{2,3} + a_{3,4} \cdot P_{2,4}$$

$$a_{3,4} = \frac{u - u_3}{u_4 - u_3} = \frac{0.4 - 0.25}{0.5 - 0.25} = 0.6$$

Por tanto, $P_{3,4} = 0.4 \cdot P_{2,3} + 0.6 \cdot P_{2,4}$

$$a_{pi} = \frac{u - u_{i-1}}{u_{i+g-p} - u_{i-1}}$$

$[0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0{,}75, 1, 1, 1]$