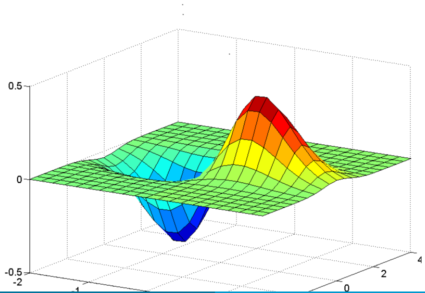
Temas 5 y 6: Problemas resueltos sobre Problemas de Contorno unidimensionales

Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Alicia Cordero, Neus Garrido, Juan R. Torregrosa



Contenido

PROBLEMA EDO1

Consideremos el siguiente problema de frontera

$$\begin{array}{ll} ru'' + u' = -4r, & r \in [1,3] \\ u(1) = \ln(1/3) - 1, & u(3) - u'(3) = 0{,}5(\ln 3 - 7) \end{array} \tag{1}$$

a) Aproxima la solución del problema mediante el método de disparo con secante, tomando 10 subintervalos y una tolerancia de 10^{-7}.

b) Plantea y resuelve el sistema lineal de tamaño 10×10 que resulta al aplicar el método de diferencias finitas con aproximaciones de orden 2.

c) Teniendo en cuenta que la solución exacta es $u(r) = \ln\frac{r}{3} + \frac{1}{2}\ln r - r^2$, determina el error cometido en las aproximaciones de los apartados anteriores.

a) El problema que nos ocupa es un problema lineal, sin embargo, al tener condiciones de contorno no Dirichlet optamos por aplicar el método de disparo no lineal.
Los diferentes problemas de valor inicial que debemos resolver para ir acercándonos a la solución del problema de frontera (1) son

$$u'' = -\frac{1}{r}u' - 4, \qquad r \in [1,3],\ u(1) = \ln(1/3) - 1,\ u'(1) = t, \tag{2}$$

donde el parámetro t va variando hasta conseguir un valor tal que la solución del problema (1), para ese valor de t, $u(r,t)$, satisfaga

$$|u(3,t) - u'(3,t) - 0{,}5(\ln 3 - 7)| \leq 10^{-7}$$

Transformamos el problema (2) en un problema de valor inicial de primer orden, equivalente, mediante el cambio de variable $u_1 = u$, $u_2 = u'$ y lo definimos en el archivo `F1.m`.

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= -\frac{1}{r}u_2 - 4 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} u_1(1) &= \ln(1/3) - 1 \\ u_2(1) &= t \end{aligned}$$

Solución PROBLEMA EDO1

Para elegir los distintos valores del parámetro t, hasta alcanzar el valor deseado, vamos a utilizar el método de la secante. En este caso, la ecuación que debe verificar el parámetro t es $u(3,t) - u'(3,t) - 0{,}5(\ln 3 - 7) = 0$. Por tanto, la fórmula iterativa del método de la secante será

$$t_{k+1} = t_k - \frac{(t_k - t_{k-1})(u(3,t_k) - u'(3,t_k) - 0{,}5(\ln 3 - 7))}{u(3,t_k) - u'(3,t_k) - u(3,t_{k-1}) + u'(3,t_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

a partir de dos aproximaciones iniciales t_0 y t_1.

Vamos a adaptar el programa de disparo con secante a las características de este problema.

Construimos el siguiente fichero .m al que llamamos disecantP1.

$function \ \ [r, U, t, iter, incr] = disecantP1(f, a, b, alfa, beta, n, maxiter, tol)$
$h = (b - a)/n;$
$t0 = 1;$ % primer disparo
$[r, U] = ode45(f, a : h : b, [alfa, t0]);$
$ub0 = U(N + 1, 1);$
$upb0 = U(N + 1, 2);$
$t1 = 2;$ % segundo disparo
$[r, U] = ode45(f, a : h : b, [alfa, t1]);$
$ub1 = U(N + 1, 1); \ \ upb1 = U(N + 1, 2);$
$incr = abs(ub1 - upb1 - beta); \ iter = 0;$
$while \ incr > tol \ \& \ iter < maxiter$
  $t = t1 - ((t1 - t0) * (ub1 - upb1 - beta))./(ub1 - upb1 - ub0 + upb0);$
  $[r, U] = ode45(f, a : h : b, [alfa, t]');$
  $t0 = t1; \ \ t1 = t;$
  $ub0 = ub1; \ \ upb0 = upb1;$
  $ub1 = U(N + 1, 1); \ \ upb1 = U(N + 1, 2);$
  $incr = abs(ub1 - upb1 - beta);$
  $iter = iter + 1;$
end
$if \ incre > tol$
  disp('Se necesitan más iteraciones');
end

Solución PROBLEMA EDO1

Llamamos a la función `disecantP1` con los parámetros de entrada indicados en el problema:

$$alfa = log(1/3) - 1;$$
$$beta = 0{,}5 * (log(3) - 7);$$
$$[r, U, t, iter, incr] = disecantP1('F1', 1, 3, alfa, beta, 20, 100, 1e-7)$$

Los resultados obtenidos, tanto para la solución $u(r)$ como para su derivada aparecen en la Tabla. Estos resultados se han obtenido después de 2 iteraciones, con $t = -0{,}5$, e $incr = 6{,}217249 \times 10^{-15}$.

r	Sol. aprox. $u(r)$	Sol. aprox. $u'(r)$
1	-2.098612	$-0{,}5$
1.2	-2.265130	$-1{,}150001$
1.4	-2.553904	$-1{,}728572$
1.6	-2.953607	$-2{,}262500$
1.8	-3.456932	$-2{,}766667$
2	-4.058892	$-3{,}25$
2.2	-4.755926	$-3{,}718182$
2.4	-5.545409	$-4{,}175$
2.6	-6.425345	$-4{,}623077$
2.8	-7.394183	$-5{,}064286$
3	-8.450694	$-5{,}5$

b) Si aplicamos diferencias finitas de orden 2 al problema de contorno, resulta

$$\left(1-\frac{h}{2r}\right)u(r-h)-2u(r)+\left(1+\frac{h}{2r}\right)u(r+h)=-4h^2.$$

Tomamos los nodos $r_i=1+ih$, con $h=2/10$ e $i=0,1,2,\dots,10$, reemplazamos en la ecuación anterior r por cada r_i, y utilizamos la notación $u_i=u(r_i)$,

$$\left(1-\frac{h}{2r_i}\right)u_{i-1}-2u_i+\left(1+\frac{h}{2r_i}\right)u_{i+1}=-4h^2,\ i=1,2,\dots,10 \tag{3}$$

Hemos transformado el problema de frontera en un sistema de ecuaciones lineales de tamaño 10×10, con incógnitas $u_1,u_2,\dots,u_{10}$. La solución de este sistema nos proporciona valores aproximados de la solución $u(r)$ en los puntos r_i,
$i=1,2,\dots,10$.

Para encontrar la expresión matricial del sistema, debemos tener especial cuidado en la primera y última ecuación ya que en ellas van a intervenir las condiciones de frontera. Para la primera ecuación,

$$\left(1-\frac{h}{2r_1}\right)u_0-2u_1+\left(1+\frac{h}{2r_1}\right)u_2=-4h^2,$$

y como u_0 en este caso es un valor conocido $u_0=u(r_0)=u(1)=\ln(1/3)-1=\alpha$, la ecuación resulta

$$-2u_1 + \left(1 + \frac{h}{2r_1}\right) u_2 = -4h^2 - \left(1 - \frac{h}{2r_1}\right) \alpha.$$

En cuanto a la última ecuación

$$\left(1 - \frac{h}{2r_{10}}\right) u_9 - 2u_{10} + \left(1 + \frac{h}{2r_{10}}\right) u_{11} = -4h^2$$

Debemos deshacernos de u_{11} para seguir teniendo un sistema cuadrado, lo que conseguiremos con la segunda condición de contorno.
Utilizando diferencias de orden 2, esta condición se convierte en

$$u_{10} - \frac{u_{11} - u_9}{2h} = 0{,}5(\ln 3 - 7) = \beta$$

es decir,

$$u_{11} = 2hu_{10} + u_9 - 2h\beta$$

y llevando este valor a la última ecuación del sistema, ésta resulta

$$2u_9 + 2\left(h\left(1 + \frac{h}{2r_{10}}\right) - 1\right) u_{10} = -4h^2 + 2h\beta\left(1 + \frac{h}{2r_{10}}\right)$$

Así pues, podemos expresar el sistema (3) en forma matricial $Au = d$, donde

Solución PROBLEMA EDO1

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1+\frac{h}{2r_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1-\frac{h}{2r_2} & -2 & 1+\frac{h}{2r_2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{h}{2r_3} & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{h}{2r_4} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-\frac{h}{2r_9} & -2 & 1+\frac{h}{2r_9} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 2h+\frac{h^2}{r_{10}}-2 \end{pmatrix}$$

y

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_9 \\ u_{10} \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} -4h^2 - \left(1-\frac{h}{2r_1}\right)\alpha \\ -4h^2 \\ -4h^2 \\ -4h^2 \\ \vdots \\ -4h^2 \\ -4h^2 + 2h\beta\left(1+\frac{h}{2r_{10}}\right) \end{pmatrix}$$

Al tratarse de un sistema tridiagonal, vamos a resolverlo utilizando la función Crout.

Para llamar a este fichero sólo necesitamos introducir la diagonal principal, la superdiagonal y la subdiagonal de la matriz A y los términos independientes d. Así pues,

$alfa = log(1/3) - 1; \quad beta = 0{,}5 * (log(3) - 7);$
$r = 1 : 0{,}2 : 3;$
$b = 1 + h./(2 * r(2 : 10));$ % superdiagonal de A
$c = 1 - h./(2 * r(3 : 11)); \quad c(9) = 2;$ % subdiagonal de A
$a = -2 * ones(10, 1);$ % diagonal principal de A
$a(10) = 2 * (h * (1 + h/(2 * r(end))) - 1);$
$d = -4 * h^2 * ones(10, 1);$ % términos independientes
$d(1) = d(1) - (1 - h/(2 * r(2))) * alfa;$
$d(10) = d(10) + 2 * h * beta * (1 + h/(2 * r(end)));$
$u = Crout(a, b, c, d)$

nos proporciona la solución del sistema lineal anterior

$$u = \begin{array}{r} -2{,}265227 \\ -2{,}553902 \\ -2{,}953419 \\ -3{,}456523 \\ -4{,}058248 \\ -4{,}755046 \\ -5{,}544297 \\ -6{,}424007 \\ -7{,}392628 \\ -8{,}448931 \end{array}$$

c) En la Tabla mostramos la solución exacta en los nodos que hemos utilizado en todo el problema, y los errores cometidos por la aproximación del método de disparo y la del método de diferencias finitas. Estos errores no son más que el resultado de restar, en valor absoluto, la solución exacta de las aproximaciones obtenidas en a) y b).

r	Sol. exacta. $u(r)$	Error disparo	Error dif. finitas
1	-2.098612	0	0
1.2	-2.265130	$0{,}203678 \times 10^{-6}$	0.000097
1.4	-2.553904	$0{,}079426 \times 10^{-6}$	0.000002
1.6	-2.953607	$0{,}033518 \times 10^{-6}$	0.000187
1.8	-3.456932	$0{,}017264 \times 10^{-6}$	0.000409
2	-4.058892	$0{,}013381 \times 10^{-6}$	0.000644
2.2	-4.755926	$0{,}014986 \times 10^{-6}$	0.000880
2.4	-5.545409	$0{,}019088 \times 10^{-6}$	0.001112
2.6	-6.425345	$0{,}024302 \times 10^{-6}$	0.001338
2.8	-7.394183	$0{,}029957 \times 10^{-6}$	0.001555
3	-8.450694	$0{,}033425 \times 10^{-6}$	0.001763

Cuadro: Solución exacta y errores

PROBLEMA EDO2

La temperatura $u(r)$ en un anillo circular de radio interior 1 y radio exterior 3 viene descrita por el problema de frontera

$$\begin{aligned} & ru'' + u' = 0 && r \in [1,3] \\ & u(1) + u'(1) = 1 - \frac{1}{2\ln 3}, && u(3) + u'(3) = 0{,}5 - \frac{1}{6\ln 3} \end{aligned} \tag{4}$$

a) Aproxima la solución del problema mediante el método de disparo con Newton, tomando 10 subintervalos y una tolerancia de 10^{-7}.

b) Plantea y resuelve el sistema lineal de tamaño 11×11 que resulta al aplicar el método de diferencias finitas con aproximaciones de orden 2.

c) Sabiendo que la función $u(r) = \dfrac{1}{\ln(1/3)}(\ln(r/3) - 0{,}5 \ln r)$ es la solución exacta del problema, determina el error cometido en las aproximaciones de a) y b).

a) Las condiciones de contorno del problema (4) son condiciones mixtas, lo que nos sugiere utilizar el método de disparo no lineal. Por comodidad, llamamos $\alpha = 1 - \dfrac{1}{2\ln 3}$ y $\beta = 0{,}5 - \dfrac{1}{6\ln 3}$.
Los diferentes problemas de valor inicial que debemos resolver para ir acercándonos a la solución del problema de frontera (4) son

$$u'' = -\frac{1}{r}u', \qquad r \in [1,3],\ u(1) = t,\ u'(1) = \alpha - t, \tag{5}$$

donde el parámetro t va variando hasta conseguir un valor tal que la solución del problema (5), para ese valor de t, $u(r,t)$, satisfaga

$$|u(3,t) + u'(3,t) - \beta| \leq 10^{-7}$$

Transformamos el problema (5) en un problema de valor inicial de primer orden, equivalente, mediante el cambio de variable $u_1 = u$, $u_2 = u'$.

$$\left.\begin{array}{l} u_1' = u_2 \\ u_2' = -\frac{1}{r}u_2 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} u_1(1) = t \\ u_2(1) = \alpha - t \end{array} \tag{6}$$

Para elegir los distintos valores del parámetro t, hasta alcanzar el valor deseado, vamos a utilizar el método de Newton. En este caso, la ecuación que debe verificar el parámetro t es $u(3,t)+u'(3,t)-\beta=0$. Por tanto, la fórmula iterativa del método de Newton será

$$t_{k+1}=t_k-\frac{u(3,t_k)+u'(3,t_k)-\beta}{z(3,t_k)+z'(3,t_k)},$$

donde $z(r,t)$ es la solución del problema de valor inicial

$$z''(r,t)=-\frac{1}{r}z', \quad r\in[1,3],\ z(1,t)=1,\ z'(1,t)=-1 \tag{7}$$

Transformamos el problema de valor inicial (7) en uno equivalente de primer orden, mediante el cambio de variable $u_3=z$, $u_4=z'$

$$\left.\begin{array}{l} u_3'=u_4 \\ u_4'=-\frac{1}{r}u_4 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} u_3(1)=1 \\ u_4(1)=-1 \end{array} \tag{8}$$

Como en cada iteración del método de disparo necesitamos resolver los problemas (6) y (8), vamos a unirlos en un único problema de valor inicial y definimos la función que describe este problema en un archivo .m

Solución PROBLEMA EDO2

$function \quad F = F2(r,u)$
$F = [u(2); -1./r * u(2); u(4); -1./r * u(4)];$

Vamos a modificar el archivo .m con el método de disparo con Newton estandar, para adaptarlo al problema que nos ocupa. Ponemos como parámetros de salida la aproximación de la solución y de su derivada.

```
function [u,ud] = disparoNewtonP2(f,a,b,alfa,beta,n,maxiter,tol)
h = (b-a)/n;
t = (beta-alfa)/(b-a);                    % valor inicial del parámetro
incr = tol+1; iter = 0;
while incr > tol & iter < maxiter
        [r,U] = ode45(f,[a:h:b],[t,alfa-t,1,-1]');
        t = t-(U(n+1,1)+U(n+1,2)-beta)/(U(n+1,3)+U(n+1,4));
        incr = abs(U(n+1,1)+U(n+1,2)-beta);
        iter = iter+1;
end
if incr > tol
        disp('Se necesitan más iteraciones');
end
u = U(:,1);
ud = U(:,2);
```

Solución PROBLEMA EDO2

Si llamamos a la función disparoNewtonP2 con los parámetros de entrada que proporciona el problema obtenemos los valores que aparecen en la Tabla. Estos valores se han conseguido después de 2 iteraciones, para un valor del parámetro $t = 1{,}0000001049206$ y un valor de la cota de error $incr = 2{,}141352 \times 10^{-8}$.

r	Aprox. de $u(r)$	Aprox. de $u'(r)$
1	1.000000	-0.455120
1.2	0.917022	-0.379266
1.4	0.846865	-0.325085
1.6	0.786092	-0.284450
1.8	0.732487	-0.252844
2	0.684535	-0.227560
2.2	0.641158	-0.206873
2.4	0.601557	-0.189633
2.6	0.565128	-0.175046
2.8	0.531400	-0.162543
3	0.500000	-0.151707

Cuadro: Aproximaciones por el método de disparo - Newton

b) Si aplicamos diferencias finitas de orden 2 al problema de contorno (4), resulta

$$\left(r-\frac{h}{2}\right)u(r-h)-2ru(r)+\left(r+\frac{h}{2}\right)u(r+h)=0$$

Tomamos los nodos $r_i=1+ih$, con $h=2/10$ e $i=0,1,2,\ldots,10$ y reemplazamos en la ecuación anterior r por cada r_i. Si utilizamos la notación $u_i=u(r_i)$, resulta

$$\left(r_i-\frac{h}{2}\right)u_{i-1}-2r_iu_i+\left(r_i+\frac{h}{2}\right)u_{i+1}=0,\ \ i=0,1,\ldots,10 \qquad (9)$$

La expresión anterior describe un sistema lineal de tamaño 11×11, con incógnitas $u_0,u_1,\ldots,u_{10}$. La solución de este sistema nos proporciona valores aproximados de la solución $u(r)$ en los puntos r_i, $i=0,1,\ldots,10$.

Para determinar la expresión matricial del sistema, vamos a analizar con cuidado las ecuaciones primera y última, correspondientes a $i=0$ e $i=10$ respectivamente, ya que en ellas intervienen las condiciones de contorno. Para la primera ecuación,

$$\left(r_0-\frac{h}{2}\right)u_{-1}-2r_0u_0+\left(r_0+\frac{h}{2}\right)u_1=0,$$

y vamos a obtener una expresión para u_{-1} a partir de la primera condición de contorno $u(1)+u'(1)=\alpha$.

Solución PROBLEMA EDO2

Aplicando diferencias finitas de orden 2 resulta

$$u_0 + \frac{u_1 - u_{-1}}{2h} = \alpha$$

y de aquí, $u_{-1} = 2hu_0 + u_1 - 2h\alpha$.
Llevando esta expresión a la primera ecuación del sistema, tenemos

$$(2hr_0 - h^2 - 2r_0)u_0 + 2r_0 u_1 = 2h\alpha\left(r_0 - \frac{h}{2}\right).$$

En cuanto a la última ecuación,

$$\left(r_{10} - \frac{h}{2}\right)u_9 - 2r_{10}u_{10} + \left(r_{10} + \frac{h}{2}\right)u_{11} = 0.$$

Para deshacernos de u_{11} utilizamos la segunda condición de contorno $u(3) + u'(3) = \beta$.
Utilizando diferencias de orden 2, esta condición se convierte en

$$u_{10} + \frac{u_{11} - u_9}{2h} = \beta,$$

es decir, $u_{11} = u_9 - 2hu_{10} + 2h\beta$, por lo que la última ecuación del sistema tendrá la expresión

$$2r_{10}u_9 - (2r_{10} + 2hr_{10} + h^2)u_{10} = -2h\beta\left(r_{10} + \frac{h}{2}\right).$$

Con todo ello, el sistema (9) se puede expresar en forma matricial $Au = d$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2hr_0 - h^2 - 2r_0 & 2r_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ r_1 - \frac{h}{2} & -2r_1 & r_1 + \frac{h}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 - \frac{h}{2} & -2r_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 - \frac{h}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_9 - \frac{h}{2} & -2r_9 & r_9 + \frac{h}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2r_{10} & -h^2 - 2hr_{10} - 2r_{10} \end{pmatrix}$$

y

$$u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_9 \\ u_{10} \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 2h\alpha\left(r_0 - \frac{h}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -2h\beta\left(r_{10} + \frac{h}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Solución PROBLEMA EDO2

Vamos a resolver el sistema aplicando el algoritmo de Crout.

$alfa = 1 - 1/(2 * log(3));$
$beta = 0{,}5 - 1/(6 * log(3));$
$h = 2/10;$
$r = 1 : h : 3;$
$b = r(1 : 10) + h/2;\ b(1) = 2 * r(1);$ % superdiagonal de A
$c = r(2 : 11) - h/2;\ c(10) = 2 * r(11);$ % subdiagonal de A
$a = -2 * r(1 : 11);$ % diagonal principal de A
$a(1) = 2 * h * r(1) - h^2 - 2 * r(1);$
$a(11) = -h^2 - 2 * h * r(11) - 2 * r(11);$
$d = zeros(11, 1);$ % términos independientes
$d(1) = 2 * h * alfa * (r(1) - h/2);$
$d(11) = -2 * h * beta * (r(11) + h/2);$
$u = Crout(a, b, c, d)$

Los resultados obtenidos son

$$u = [1{,}016835; 0{,}931883; 0{,}860001; 0{,}797703; 0{,}742734; 0{,}693551; 0{,}649053; 0{,}608424; 0{,}571045; 0{,}536435; 0{,}504212]$$

c) En la Tabla mostramos el valor de la solución exacta en los nodos utilizados a lo largo del problema, así como el error de la aproximación de disparo y de diferencias finitas.

r	Sol. exacta. $u(r)$	Error disparo	Error dif. finitas
1	1.000000	$0{,}553460 \times 10^{-7}$	0.016835
1.2	0.917022	$0{,}730251 \times 10^{-7}$	0.014861
1.4	0.846865	$0{,}742076 \times 10^{-7}$	0.01314
1.6	0.786092	$0{,}707912 \times 10^{-7}$	0.011611
1.8	0.732487	$0{,}660979 \times 10^{-7}$	0.010247
2	0.684535	$0{,}611835 \times 10^{-7}$	0.009016
2.2	0.641158	$0{,}564028 \times 10^{-7}$	0.007895
2.4	0.601557	$0{,}518695 \times 10^{-7}$	0.006867
2.6	0.565128	$0{,}476086 \times 10^{-7}$	0.005917
2.8	0.531400	$0{,}436125 \times 10^{-7}$	0.005035
3	0.500000	$0{,}398622 \times 10^{-7}$	0.004212

Cuadro: Solución exacta y errores

Solución PROBLEMA EDO2

Como era de esperar, la aproximación obtenida por el método de disparo es considerablemente más precisa que la obtenida por diferencias finitas. Esto mismo se pone de manifiesto en la Figura en la que hemos representado la solución exacta y las aproximaciones obtenidas por disparo (se confunde con la exacta) y por diferencias finitas.

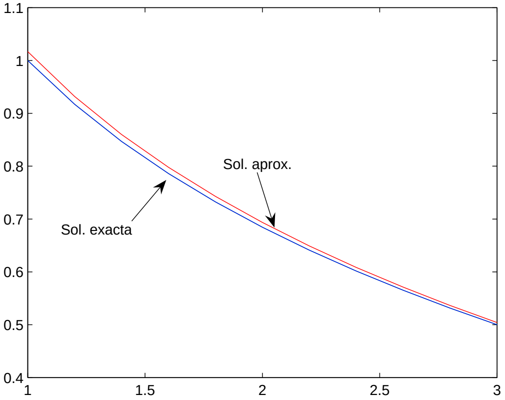


Figura: Solución exacta y aproximada

Problema 1

Aproxima por el método de disparo los siguientes problemas de frontera, utilizando en cada caso 20 subintervalos. Compara los resultados obtenidos con la solución exacta. Repite el problema utilizando diferencias finitas con el mismo número de subintervalos. Compara las dos soluciones aproximadas obtenidas entre sí y con la solución exacta.

a) $y'' = -y'^2 - y + \ln x$, $1 \leq x \leq 2$
   $y(1) = 0$, $y(2) = \ln 2$
   Solución exacta: $y(x) = \ln x$

b) $y'' = y^3 - yy'$, $1 \leq x \leq 2$
   $y(1) = 1/2$, $y(2) = 1/3$
   Solución exacta: $y(x) = \dfrac{1}{x+1}$

c) $y'' = 2y^3 - 6y - 2x^3$, $1 \leq x \leq 2$
   $y(1) = 2$, $y(2) = 5/2$
   Solución exacta: $y(x) = x + \dfrac{1}{x}$

Problema 2

Consideremos el siguiente problema de frontera

$$\begin{array}{ll} y'' - xyy' + x\cos(x)y + \sin x = 0, & x \in [0,\pi] \\ y(0) + y'(0) = 1 & \\ y(\pi) - 2y'(\pi) = 2 & \end{array}$$

a) Describe el método de disparo para este problema, utilizando el esquema de Newton para determinar los valores del parámetro t.

b) Aproxima la solución del problema mediante el método anterior, tomando 10 subintervalos, una tolerancia de 10^{-8} y un valor inicial del parámetro $t = 0$. Indica el número de iteraciones y el último valor de t.

c) Comprueba que la solución exacta del problema es $y(x) = \sin x$. Determina el error cometido en cada uno de los puntos del apartado anterior. Representa la solución exacta y la aproximada

Problema 3

Consideremos el siguiente problema de frontera

$$\begin{array}{ll} y''' = f(x, y, y', y''), & x \in [a,b] \\ y(a) = \alpha,\ \ y'(a) - 2y''(a) = \beta & \\ y'(b) - y''(b) = \gamma & \end{array}$$

Describe, con todo detalle, el método de disparo para este problema, utilizando el método de la secante para determinar los diferentes valores del parámetro.

Problema 4 Consideremos el siguiente problema de frontera

$$
\begin{aligned}
&y'' = -(x+1)y' + 2y + (1-x^2)e^{-x}, \qquad x \in [0,1] \\
&2y(0) + y'(0) + y(1) + y'(1) = 1/e \\
&y(0) + y'(0) = 1
\end{aligned}
$$

a) Determina la solución aproximada del problema de frontera mediante el método de disparo. Utiliza 10 subintervalos, una tolerancia de 10^{-8} y el método de la secante para la obtención de los distintos valores del parámetro t.

b) Transforma el problema en un sistema lineal de tamaño 11×11, aproximando las derivadas por diferencias finitas de orden 2. Resuelve el sistema planteado.

c) Representa las aproximaciones obtenidas en los apartados a) y b).

Problema 5 Consideremos el siguiente problema de frontera:

$$\begin{array}{ll} y''' = -6y'^2 - y'' + 2y^3, & x \in [-1, 0] \\ y(-1) = 1/2,\ y(0) = 1/3,\ y'(0) = -1/9 & \end{array}$$

a) Determina la solución aproximada del problema de frontera mediante el método de disparo. Utiliza 10 subintervalos, una tolerancia de 10^{-8} y el método de Newton para la obtención de los distintos valores del parámetro t.

b) Mejora los resultados obtenidos en el apartado anterior empleando la técnica de extrapolación de Richardson, para $h = 0{,}1$, $h = 0{,}05$ y $h = 0{,}025$.

c) Comprueba que $y(x) = \dfrac{1}{x+3}$ es la solución exacta del problema. Calcula el error cometido con las aproximaciones obtenidas en a) y b).

Problema 6

La deformación de una viga, $w(x)$, de longitud L, que soporta una carga $p(x)$ y que está apoyada en los extremos, viene descrita por la ecuación

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} = p(x) - kw$$

con las condiciones

$$\begin{array}{ll} w(0) = 0, & w''(0) = 0 \\ w(L) = 0, & w''(L) = 0 \end{array}$$

donde E es el módulo de Young, I es el momento de inercia de la sección transversal y k es la rigidez por unidad de longitud. Utilizando los siguientes datos: $L = 10m$, $E = 30 \times 10^6$, $k = 1000kg/m^2$, $I = 2$ y $p(x) = 100\left(1 - \dfrac{x}{36}\right) kg/m^2$, se pide:

a) Determina $w(x)$ en el centro de la viga, mediante el método de disparo con 40 subintervalos y una tolerancia de 10^{-8}.

b) Determina la deformación en el centro de la viga, mediante diferencias finitas con $h = 0{,}25$. Compara los resultados con los obtenidos en a).