

# Modelado y Simulación Numérica

Daniel Pérez Palau

## Introducción

# Objetivos

- Adquirir conocimientos para:
  - la creación
  - verificación
  - análisis de modelos matemáticos de sistemas físicos y sistemas de control
- Representar modelos desarrollados por modelos de simulación

# Contenidos

- Tema 1. Conceptos generales de modelado matemático y simulación
- Tema 2. Modelado matemático de sistemas físicos
- Tema 3. Sistemas físicos y sus modelos
- Tema 4. Simulación
- Tema 5. Generación de números aleatorios
- Tema 6. Generación de variables aleatorias
- Tema 7. Medidas estadísticas
- Tema 8. Simulación de Monte Carlo
- Tema 9. Conceptos y elementos de simulación con eventos
- Tema 10. Modelado y simulación de sistemas de eventos discretos
- Tema 11. *Software* para modelado matemático y simulación

# Evaluación

- Evaluación continua (40%)
    - 2 Laboratorios (10 puntos)
    - Extras (5 puntos):
      - Test (1.1 puntos)
      - Asistencia (0.45 puntos/clase – 2 clases)
      - Actividad grupal (3 puntos)
    - En total 15 puntos, máximo 10 puntos
- Ejemplo:**      Alumno A obtiene 11/15      -> 4 puntos  
                         Alumno B obtiene 7.5/15      -> 3 puntos
- Examen final (60 %)

# Evaluación Continua

- Trabajos
  - 14/12 Modelado de un sistema físico (5 puntos)
  - 11/01 Laboratorio: Simulación de un sistema de atención telefónica (5 puntos)
- Grupal:
  - 08/02 Simulación de sistemas físicos (3 puntos)
- Test (un test por tema) (0.1 puntos por tema)  
Fecha de entrega: antes de la fecha de examen final
- Asistencia a clase presencial (0.45/clase – max 2 clases)

# Evaluación Continua

- Trabajos
  - 14/12 Modelado de un sistema físico (5 puntos)
  - 25/01 Laboratorio: Simulación de un sistema de atención telefónica (5 puntos)
- Grupal:
  - 22/02 Simulación de sistemas físicos (3 puntos)
- Test (un test por tema) (0.1 puntos por tema)  
Fecha de entrega: antes de la fecha de examen final
- Asistencia a clase presencial (0.45/clase – max 2 clases)

# Actividad grupal: formación equipos

- Valora la capacidad de organización y trabajo en equipo
- Semana 1-3: Creación de equipos por alumnos
- Semana 3-5: Periodo de confirmación
- Semana 5: Grupos definitivos

# Actividad grupal: entrega

Entrega: obligatoria e igual para todos los miembros del equipo

**Importante:** Cada alumno presenta evaluación de los compañeros

HOJA DE CONTROL ACTIVIDAD GRUPAL 1			
Nombre y apellidos del primer miembro del equipo: Estudiante A			
Asistencia a reuniones de equipo por cada integrante (se incluirá una línea por cada miembro del equipo recogiendo su nombre)	Marcar con una X lo que proceda		
	Asistencia a 1 sesión o ninguna	Asistencia a dos sesiones	Asistencia a las 3 sesiones
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Tareas o entregas a realizadas por cada integrante (se incluirá una línea por cada miembro del equipo recogiendo su nombre)	Ninguna o solo una tarea	Dos tareas	Tres tareas
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



# Actividad grupal: calificación

Todos los integrantes del equipo tienen la misma calificación con un factor de corrección:

		Asistencia a reuniones		
Tareas realizadas	Factor	0 ó 1	2	3
	0 ó 1	0,4	0,55	0,7
	2	0,55	0,7	0,85
	3	0,7	0,85	1

# Examen Final



Parte 1: Teoría

4 preguntas teóricas



Parte 2: Preguntas de desarrollo

3 preguntas prácticas sobre diferentes partes de la asignatura



Se permiten formularios y apuntes



Permitido el uso de calculadora no programable

# Calendario

	Semana	Tema	Refuerzo	Laboratorio	Actividad
09/11/2020					
16/11/2020	1	S0 + T1			
23/11/2020	2	T2			
30/11/2020	3	T3		L1	
07/12/2020	4	T4			
14/12/2020	5	T5			L1
21/12/2020	--	Semana de repaso	R-L1		
28/12/2020	--	Semana de repaso			
04/01/2021	6	T6			
11/01/2021	7	T6			
18/01/2021	8	T7			
25/01/2021	9	T7			AG
01/02/2021	10	T8			
08/02/2021	11	T9		L2	
15/02/2021	12	T10	R-AG1		
22/02/2021	13	T11			L2
01/03/2021	14	Sesión examen	R-L2		
08/03/2021	15	Repaso (sesión doble)			
15/03/2021	16	Semana de exámenes			

# Modelado y Simulación Numérica

Daniel Pérez Palau

## Tema 1: Conceptos generales de modelado matemático y simulación

# Ideas que debemos recordar

- Concepto de modelo, sistema y estado.
- Modelos matemáticos y su clasificación.
- Modelos de simulación y sus características.
- Relación entre modelo matemático y simulación.

# Modelo matemático: definición

Un **sistema** es una colección de entes que actúan para conseguir un objetivo.

El **estado** de un sistema está determinado por el conjunto de variables, conocidas como variables de estado, que se necesitan para describirlo.

Un **modelo** es una representación de un sistema que se construye con el propósito de estudiarlo

Un **modelo físico** es un conjunto de leyes que actúan en un sistema y lo describen. Suelen ser complejos y de baja utilidad.

Un **modelo matemático** es una ecuación o conjunto de ecuaciones matemáticas que dan solución a un problema específico. En muchos casos es la idealización de un problema físico.

# El modelado de enfermedades infecciosas

## El caso del COVID-19



**Atención:** No soy epidemiólogo, ni especialista en la materia. El contenido que veremos a continuación parte de modelos de uso habitual pero con datos **no realistas** sobre el COVID-19.

# El modelado de enfermedades infecciosas

## El modelo SIR

Queremos estudiar la evolución de una enfermedad (COVID-19) a lo largo del tiempo en una población de tamaño  $n$ .

Dividimos  $n$  en 3 grupos:

- $S = S(t) \rightarrow$  Susceptible (puede infectarse)
- $I = I(t) \rightarrow$  Infectada/Enferma (es contagiosa)
- $R = R(t) \rightarrow$  Recuperada/Muerta (no puede infectarse ni contagiar)








# El modelado de enfermedades infecciosas

## El modelo SIR

Queremos estudiar la evolución de una enfermedad (COVID-19) a lo largo del tiempo en una población de tamaño  $n$ .

Para facilitar los cálculos consideramos sus números relativos:

- $s(t) = S(t)/n$  
- $i(t) = I(t)/n$  
- $r(t) = R(t)/n$  

# El modelado de enfermedades infecciosas

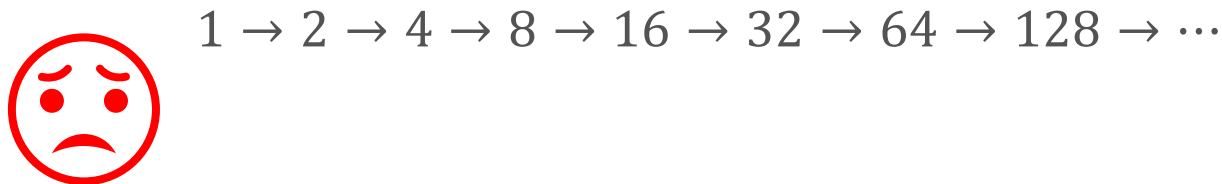
## El modelo SIR

$R_0$  número de infecciones por paciente:

$$R_0 = 2.28 \sim 2^*$$



Crecimiento exponencial:



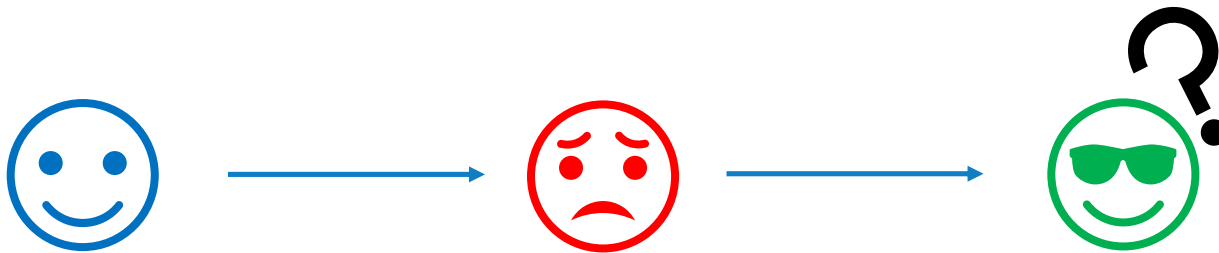
[\\*Int J Infect Dis.](#) 2020 Feb 22;93:201-204. doi: 10.1016/j.ijid.2020.02.033.

# El modelado de enfermedades infecciosas

## El modelo SIR

$R_0$  número de infecciones por paciente:

$$R_0 = 2.28 \sim 2$$



Crecimiento exponencial:

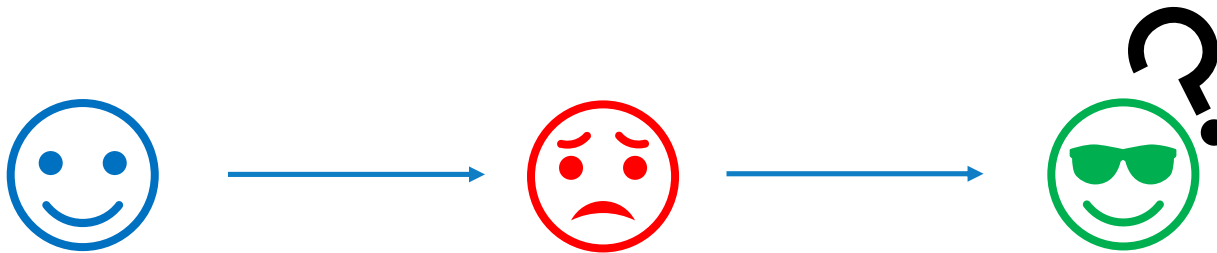
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 64 \rightarrow 128 \rightarrow \dots$

# El modelado de enfermedades infecciosas

## El modelo SIR

$R_0$  número de infecciones por paciente:

$$R_0 = 2.28 \sim 2$$



$$S(t + 1) = S(t) - 2 \cdot I(t)$$

$$I(t + 1) = 2I(t)$$

$$R(t + 1) = R(t) + I(t)$$

Crecimiento exponencial:

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 64 \rightarrow 128 \rightarrow \dots$

# Acciones para crear y validar un modelo

## 1/2

- Identificación del modelo que se necesita.
- Especificación de la información o los datos que se pretenden obtener.
- Identificación de la información o los datos disponibles.
- Identificación del punto de partida y el entorno original.
- Identificación de los principios físicos sobre los que se fundamenta el modelo.
- Identificación de las ecuaciones que se van a utilizar, qué cálculos se van a llevar a cabo y que resultado se pretende obtener.

Carson y Cobelli, 2001

# Acciones para crear y validar un modelo

## 2/2

- Identificación de las pruebas se deben de realizar para la validación del modelo, de acuerdo con las asunciones iniciales y principios en los que se fundamenta.
- Identificación de las pruebas se deben de realizar para la verificación del modelo.
- Identificación de las mejoras o cambios en los parámetros que se pueden realizar en el modelo.
- Especificación de la forma en la que va a ser usado el modelo.

Carson y Cobelli, 2001

# Verificar vs validar

- ▶ **Verificación:** consiste en comprobar que el modelo/simulación cumple con los requisitos de diseño para los que se elaboró.
- ▶ **Validación:** A través de esta etapa se valoran las diferencias entre el funcionamiento del modelo/simulación y el sistema real que se está tratando de simular. Las formas más comunes de validar un modelo son:
  - ▶ La opinión de expertos sobre los resultados de la simulación.
  - ▶ La exactitud con que se predicen datos históricos.
  - ▶ La exactitud en la predicción del futuro.
  - ▶ La comprobación de fallos del modelo de simulación al utilizar datos que hacen fallar al sistema real...

# El modelado de enfermedades infecciosas

## El modelo SIR

$R_0$  número de infecciones por paciente:

$$R_0 = 2.28 \sim 2$$



[Int J Infect Dis.](#) 2020 Feb 22;93:201-204. doi: 10.1016/j.ijid.2020.02.033.

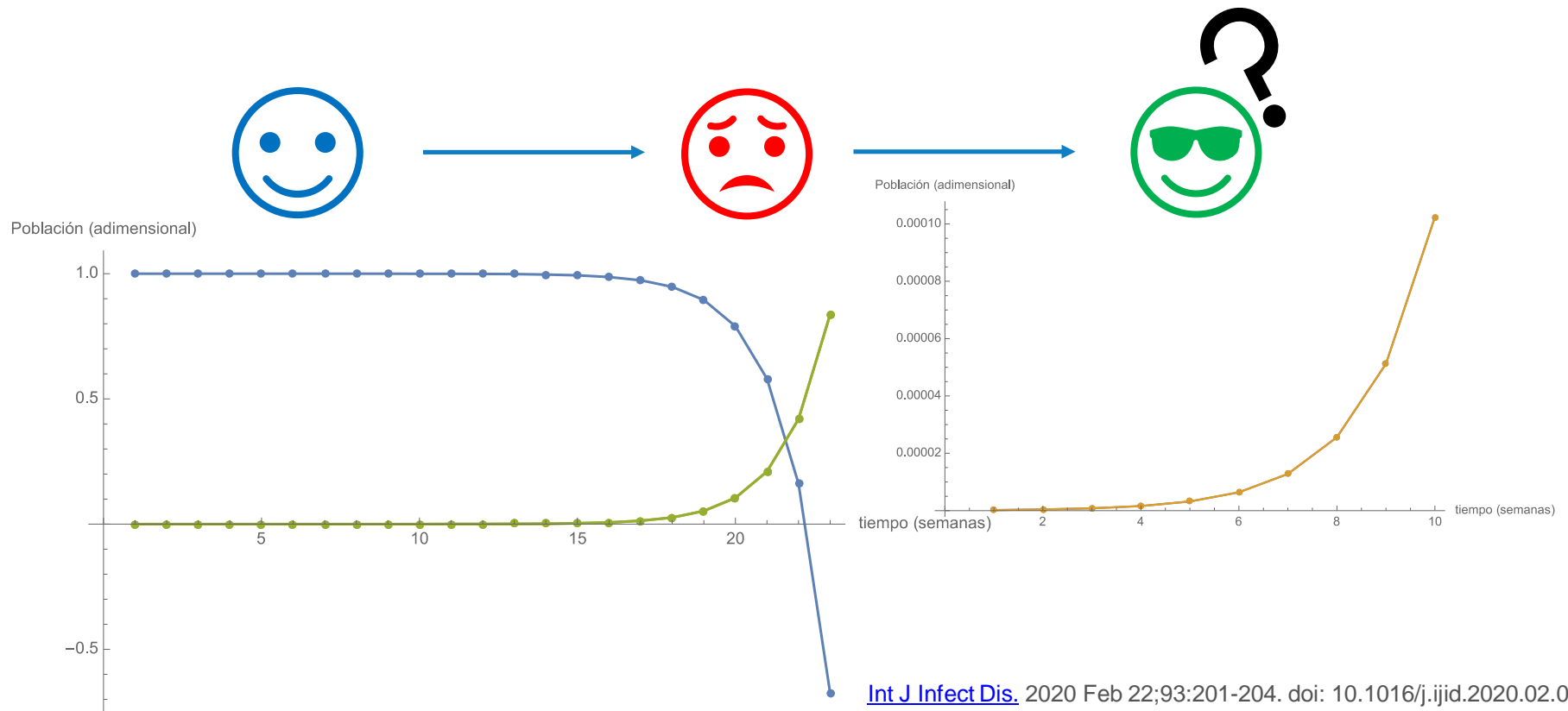


# El modelado de enfermedades infecciosas

## El modelo SIR

$R_0$  número de infecciones por paciente:

$$R_0 = 2.28 \sim 2$$



[Int J Infect Dis.](#) 2020 Feb 22;93:201-204. doi: 10.1016/j.ijid.2020.02.033.

# El modelado de enfermedades infecciosas

## El modelo SIR



$$\dot{s} = -b s(t) i(t)$$

$b$ : número de contactos que pueden causar contagio.

# El modelado de enfermedades infecciosas

## El modelo SIR



$$\dot{r} = k i(t)$$

$k$ : proporción de infectados recuperados.

# El modelado de enfermedades infecciosas

## El modelo SIR



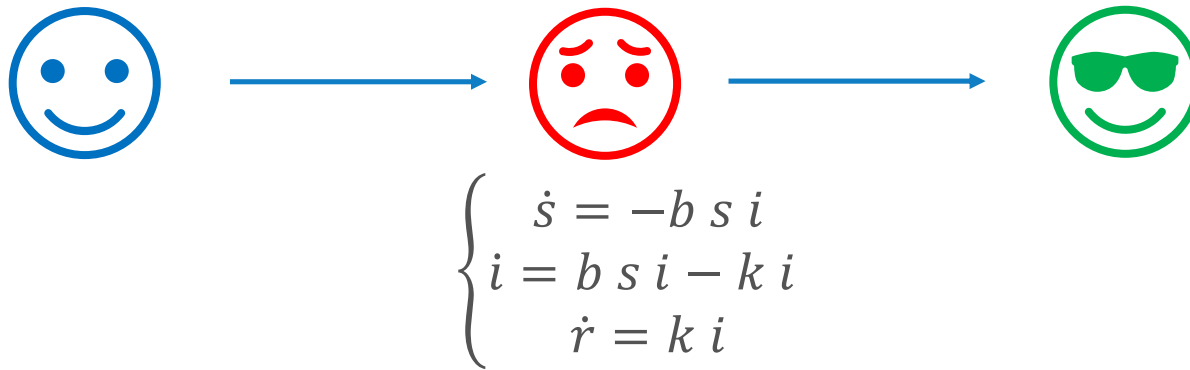
$$\dot{s} + \dot{i} + \dot{r} = 0$$

Por lo tanto:

$$\dot{i} = b s(t)i(t) - k i(t)$$

# El modelado de enfermedades infecciosas

## El modelo SIR

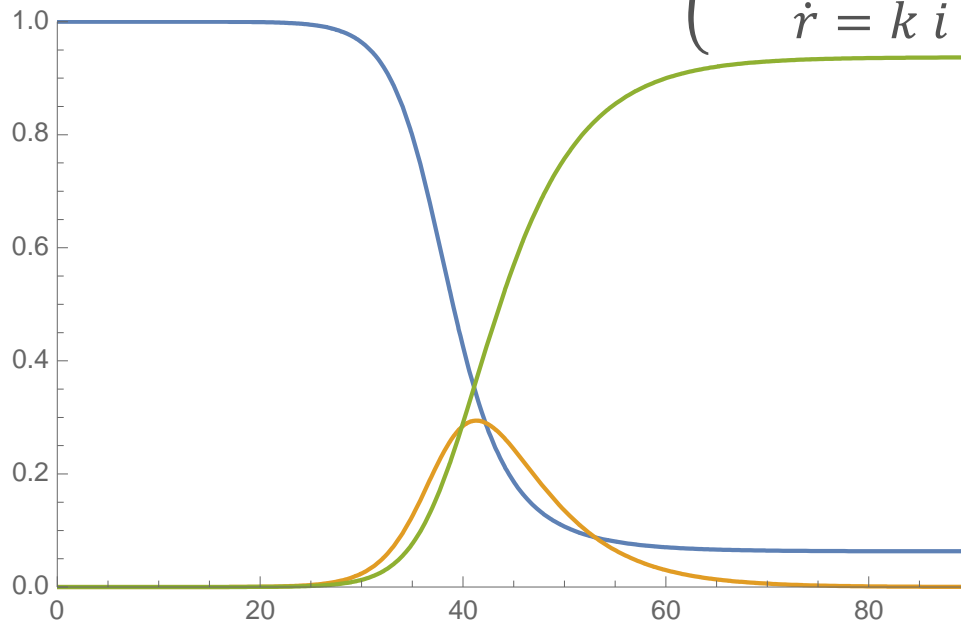


# El modelado de enfermedades infecciosas

## El modelo SIR

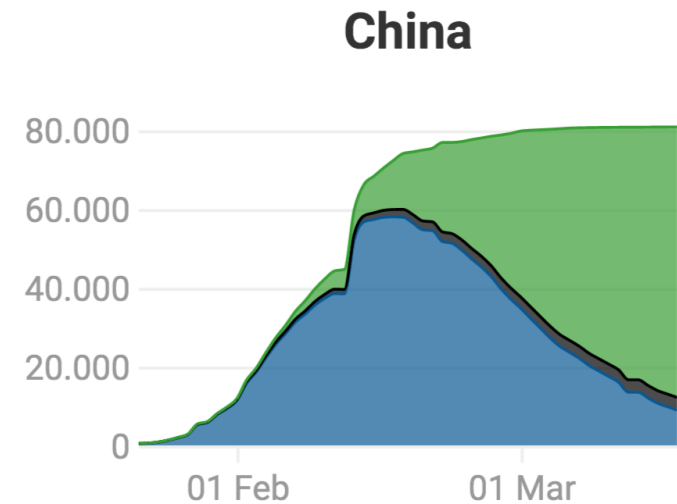
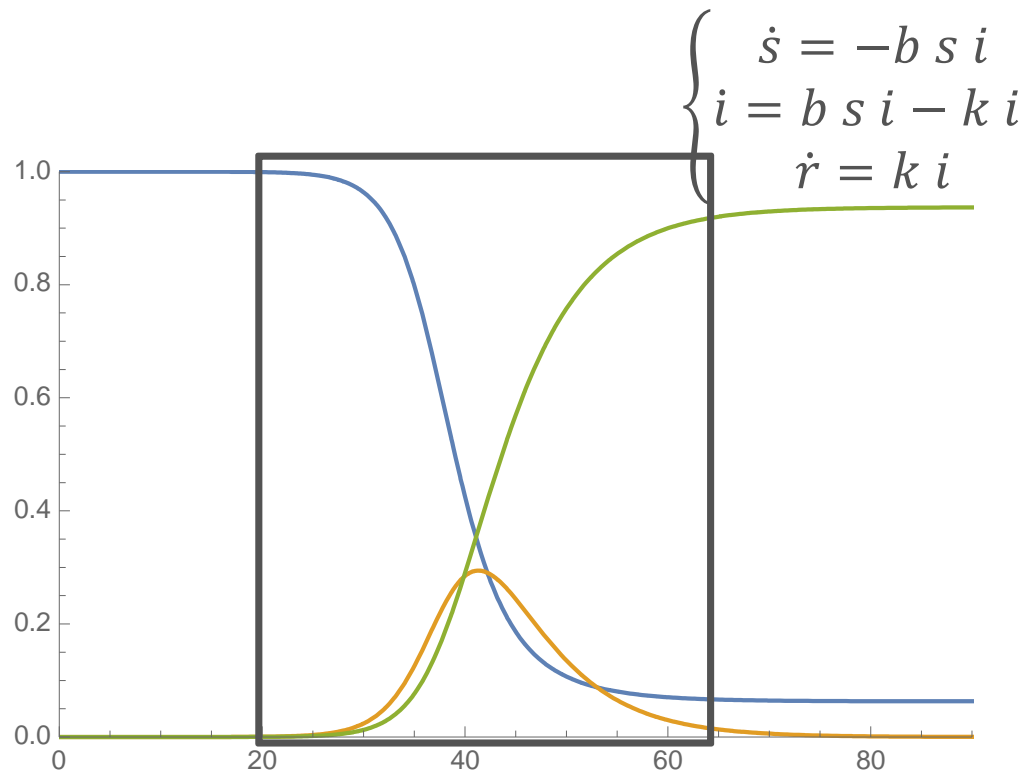


$$\begin{cases} \dot{s} = -b s i \\ \dot{i} = b s i - k i \\ \dot{r} = k i \end{cases}$$



# El modelado de enfermedades infecciosas

## El modelo SIR



eldiario.es  
11/03/20

# El modelado de enfermedades infecciosas

## El modelo SIR





# Simulación: definición

La **simulación** es el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y llevar a término experiencias con él, con la finalidad de:

- comprender el comportamiento del sistema o
- evaluar nuevas estrategias para el funcionamiento del sistema

(Shannon & Johannes, 1976)

Por lo tanto, la simulación es una herramienta a través de la cual podemos crear un modelo que sustituya al sistema físico real que estamos modelizando, independientemente de lo complejo que sea. La solución que se obtiene es siempre una aproximación. La bondad de los resultados depende de la bondad y exactitud del modelo.

# Simulación: orígenes y objetivos

Los orígenes de la simulación están ligados al proyecto Montecarlo desarrollado en el laboratorio de Los Álamos en el año 1940 por Stan Ulam y John Von Neumann, en el que investigaban el movimiento aleatorio de los neutrones para el diseño de la bomba atómica.

El objetivo final de la simulación es reproducir a través de un computador el comportamiento físico de un fenómeno determinado, con el fin de poder estudiarlo sin necesidad de que esté presente físicamente.

# Características y conceptos relacionados

Los conceptos que se deben tener en cuenta para poder llevar a cabo la simulación y poder llevar a cabo la evaluación del sistema son, entre otros (García-Dunna, 2012):

- ▶ **Estado del sistema** en un instante de tiempo.
- ▶ **Entidades** que son los elementos que hacen que cambie el estado del sistema: representan los datos o flujos de entrada.
- ▶ **Atributos**, que representan las propiedades de los elementos o entidades del sistema.
- ▶ **Actividad o evento** es cualquier proceso que provoca un cambio en el sistema.
- ▶ **Variables de estado**, sirven para determinar de forma unívoca el estado del sistema.

# Características y conceptos relacionados

- ▶ **Reloj.** Gracias a él podemos conocer el tiempo de simulación o establecer la duración máxima de la misma. Existen dos tipos de relojes:
  - Absoluto: parte de cero y acaba en el instante final de la simulación.
  - Relativo: sólo mide el tiempo entre dos acciones o eventos.
- ▶ **Generador de números aleatorios.** Generalmente se utilizan para introducir incertidumbre en el modelo.

# Tipos de modelos de simulación

Generalmente podemos clasificar los modelos según distintos criterios:

## ► **Por el tipo de ecuaciones:**

- Continuos: Las variables utilizadas son continuas.
- Discretos: Las variables utilizadas son discretas.
- Mixtos: Algunas variables son discretas y otras continuas.

## ► **Por los cambios en las variables:**

- Estáticos: las variables de estado no cambian en el tiempo.
- Dinámicos: algunas de las variables cambian en el tiempo.

# Tipos de modelos de simulación

## ► Por el carácter aleatorio de su comportamiento:

- Deterministas: el comportamiento del sistema queda determinado al definir las condiciones iniciales.
- Estocásticos: algunos de los componentes del sistema se comportan de forma aleatoria. El sistema se estudiará estadísticamente.

# Ventajas de la simulación

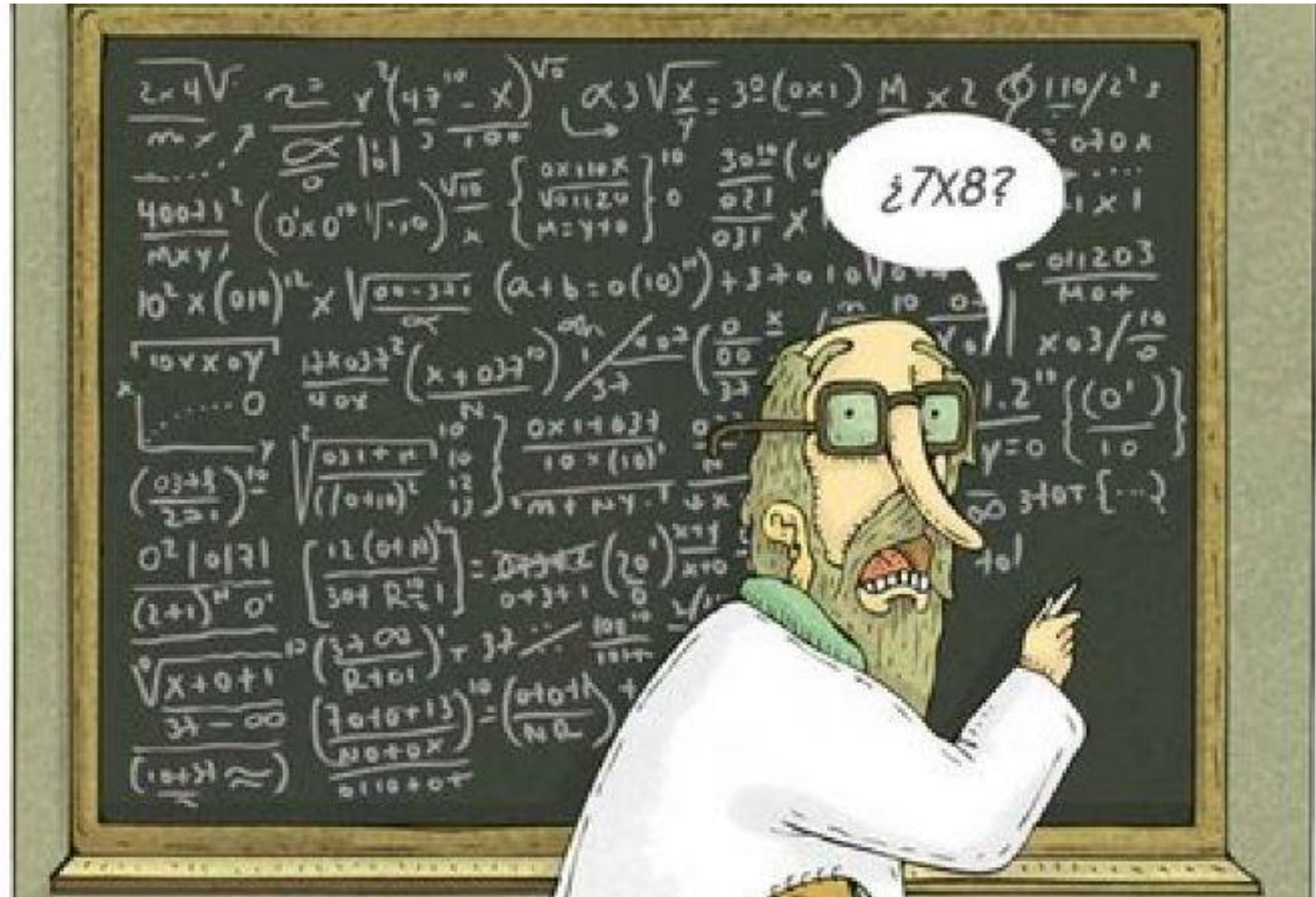
- Método directo y flexible.
- Permite el análisis del comportamiento de un sistema bajo diferentes escenarios sin necesidad de tenerlo físicamente.
- Permite determinar el impacto de los cambios en un sistema antes de que sean implantados.
- Permite probar condiciones extremas y experimentar en el sistema, sin riesgo y sin interferir con el sistema real.
- Permite resolver aproximadamente problemas que no tienen solución analítica.
- Sirve de soporte para la toma de decisiones.
- Existe software comercial para simulación.
- Es más económico realizar simulaciones que cambios en el sistema real.

# Inconvenientes de la simulación

- El número de variables para simular sistemas complejos a veces es muy alto.
- La simulación no es una herramienta de optimización y por tanto no genera soluciones óptimas globales: la simulación de sistemas sencillos que pueden resolverse de forma analítica es a veces excesivamente costosa y no necesaria.
- No proporciona la solución real, si no una aproximación para unas determinadas condiciones iniciales y de contorno.
- Si en la simulación interviene el azar, dos simulaciones sucesivas no son iguales.
- Modelizar un sistema correctamente requiere tiempo para construir el modelo y para realizar la validación.



# ¿Dudas?



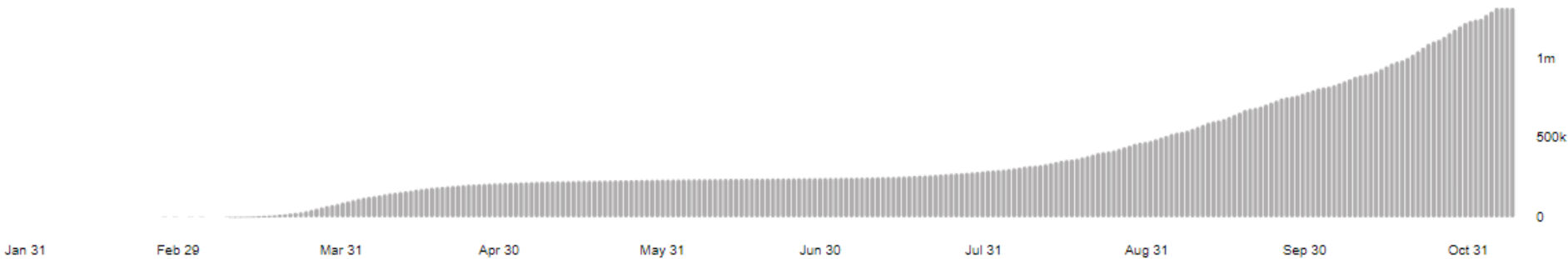
# El modelado de enfermedades infecciosas

El modelo SIR



$$\begin{cases} \dot{s} = -b s i \\ \dot{i} = b s i - k i \\ \dot{r} = k i \end{cases}$$

Casos detectados en España (acumulados)



OMS  
11/11/20

# El modelado de enfermedades infecciosas

## El modelo SIR

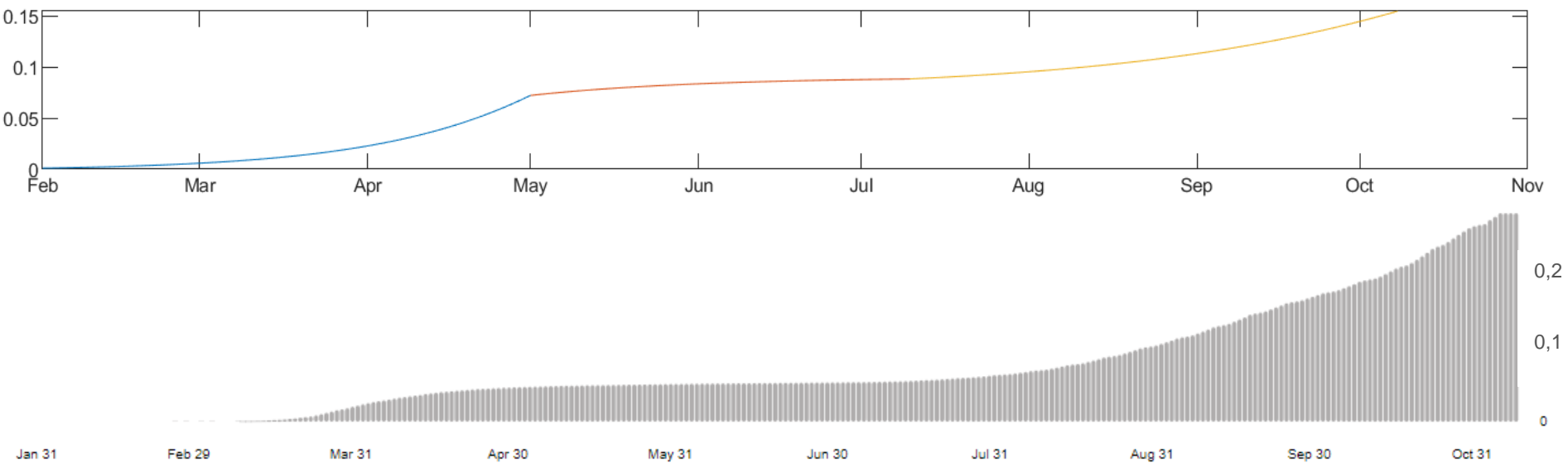


$$\begin{cases} \dot{s} = -b s i \\ \dot{i} = b s i - k i \\ \dot{r} = k i \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b &= 0,09 \\ k &= 0,05 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 0,09 \\ k &= 0,05 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 0,08 \\ k &= 0,05 \end{aligned}$$



OMS  
11/11/20



[www.unir.net](http://www.unir.net)