Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería

Problemas de contorno unidimensionales. Método de diferencias finitas

Índice

Esquema

Ecuación diferencial + Condición extremo 1 + Condición extremo 2

Problemas de contorno unidimensionales

Descripción analítica

Problemas de contorno lineales	Problemas de contorno NO lineales
$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x),$ $x \in [a,b], y(a) = \alpha, y(b) = \beta.$	$y'' = f(x,y,y'),$ $x \in [a,b], y(a) = a, y(b) = \beta.$

Condiciones de contorno

Dirichlet	Naturales	Mixtas
$y(a) = \alpha$ $y(b) = \beta$	$\alpha_a y'(a) + \beta_a y(a) = \gamma_a$ $\alpha_b y'(b) + \beta_b y(b) = \gamma_b$	$\alpha_a y'(a) + \beta_a y(a) = \gamma$ $y(b) = \gamma_b$

Métodos

Disparo	Diferencias finitas

Ideas clave

6.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las Ideas clave que encontrarás a continuación

Continuando con la resolución numérica de problemas de contorno unidimensional, una alternativa a los métodos de disparo del tema anterior es la técnica de las diferencias finitas. Esta técnica se aplica sobre numerosos problemas, como veremos en los temas siguientes, en los que abordaremos los problemas de contorno multidimensionales.

Las diferencias finitas consiguen reemplazar las expresiones de las derivadas por esquemas basados en el desarrollo en serie de Taylor de una determinada función.

Para ello, será necesario discretizar el problema y establecer las ecuaciones en torno a un nodo, a partir de la información de los nodos anterior y siguiente.

Este tipo de esquemas presenta una gran ventaja respecto de los procedimientos basados en la técnica del disparo, y es su alta estabilidad. No obstante, alcanzar las expresiones finales requiere de un proceso matemático más costoso.

Los apartados de los que consta este tema son:

- Métodos de diferencias finitas:
  - Para problemas lineales.
  - Para problemas no lineales.

6.2. Método de diferencias finitas para problemas de contorno lineales

El método de diferencias finitas cambia por completo la perspectiva del problema respecto del método de disparo. En este caso, **la ecuación diferencial se va a discretizar.** Los métodos resultantes tienen mejores características de estabilidad, pero requieren de un **proceso más sofisticado** para alcanzar la solución.

Planteamiento del problema

Haciendo el desarrollo en serie de Taylor de $y(x)$ alrededor de x_i, evaluado en x_{i+1} y x_{i-1} obtenemos:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_i^+)$$
$$y(x_{i+1}) = y(x_i - h) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_i^+)$$

Sumando ambas expresiones y tras algunas manipulaciones algebraicas obtenemos la fórmula de las diferencias centrales para la segunda derivada:

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})]$$

Las diferencias centrales para la primera derivada se obtienen siguiendo un procedimiento similar, cuya expresión final es:

$$y'(x_i) = \frac{1}{2h}[y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})]$$

En este apartado trabajaremos sobre el caso lineal, de forma que podemos expresar el problema de contorno como:

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

Reemplazando las expresiones de las derivadas primera y segunda por sus fórmulas en diferencias centrales, obtenemos:

$$-\left(1 + \frac{h}{2}p(x_i)\right)y_{i-1} + \left(2 + h^2 q(x_i)\right)y_i - \left(1 - \frac{h}{2}p(x_i)\right)y_{i+1} = -h^2 r(x_i)$$

para $i = 0,1,2,\dots,N-1,N,N+1$, de donde obtendremos las soluciones:

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{N-1}, y_N, y_{N+1}$$

donde $y_i = y(x_i)$. Como las condiciones de contorno son del tipo Dirichlet, conocemos las soluciones en los extremos:

$$y_0 = y(a) = \alpha, y_{N+1} = y(b) = \beta$$

de forma que solo sería necesario calcular las soluciones para $i = 1,2,\dots,N-1,N$. La discretización que hemos realizado y las soluciones a obtener y conocidas se resumen en la Tabla 1.

$\boldsymbol{i}$	0	1	2	$\cdots$	$N-1$	N
$\boldsymbol{x_i}$	a	$a+h$	$a+2h$	$\cdots$	$a+(N-1)h$	b
$\boldsymbol{y_i}$	$y_0 = \alpha$	y_1	y_2	$\cdots$	y_{N-1}	$y_N = \beta$

Tabla 1. Discretización para el problema de contorno con condiciones Dirichlet.

Podemos ilustrar este concepto con la Figura 1, en la que nos nodos marcados en verde son aquellos que conocemos y los nodos marcados en rojo representan las soluciones que debemos obtener.

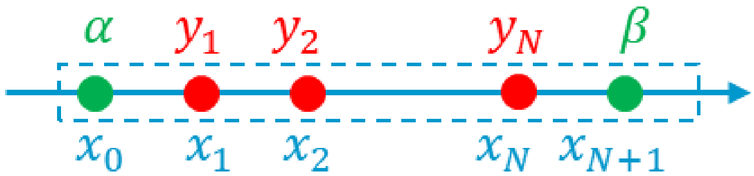


Figura 1. Nodos (rojo) en los que debemos obtener la solución y nodos (verde) en los que ya conocemos la solución, para un problema de contorno con condiciones Dirichlet.

Podemos representar la expresión anterior de forma matricial como $Ay = b$, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 2+h^2q(x_1) & -1+\frac{h}{2}p(x_1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1-\frac{h}{2}p(x_2) & 2+h^2q(x_2) & -1+\frac{h}{2}p(x_2) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{h}{2}p(x_3) & 2+h^2q(x_3) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 2+h^2q(x_{N-1}) & -1+\frac{h}{2}p(x_{N-1}) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-\frac{h}{2}p(x_N) & 2+h^2q(x_N) \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -h^2r(x_1) + \left(1+\frac{h}{2}p(x_1)\right)y_0 \\ -h^2r(x_2) \\ \vdots \\ -h^2r(x_{N-1}) \\ -h^2r(x_N) + \left(1-\frac{h}{2}p(x_N)\right)y_{N+1} \end{bmatrix}$$

El Teorema 1 proporciona condiciones suficientes para que el sistema anterior tenga solución única.

Teorema 1. Supongamos que $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son funciones continuas en $[a,b]$. Si $q(x) \geq 0$ en $[a,b]$, entonces el sistema lineal tridiagonal tiene solución única siempre que $h < 2/L$, donde $L = \max_{a\leq x\leq b} |p(x)|$.

El algoritmo de Crout

El algoritmo de Crout resuelve el sistema de ecuaciones lineal tridiagonal $Ay = b$ de una manera muy eficiente. Descomponiendo la matriz A en una matriz triangular inferior L y una matriz triangular superior U, se obtiene la solución siguiendo los siguientes pasos:

1. Obtención de L y U a partir de A.
2. Solución de $Lz = b$.
3. Solución de $Uy = z$.

En el **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se muestra la implementación del algoritmo de Crout en Matlab.

```
function sol=Crout(a,b,c,d)
n=length(a);
% Paso 1. Obtención de L y U a partir de A
l(1)=a(1);
u(1)=b(1)/l(1);
for i=2:n-1
l(i)=a(i)-c(i-1)*u(i-1);
u(i)=b(i)/l(i);
end
l(n)=a(n)-c(n-1)*u(n-1);
% Paso 2. Solución del sistema Lz = b
z(1)=d(1)/l(1);
for i=2:n
z(i)=(1/l(i))*(d(i)-c(i-1)*z(i-1));
end
% Paso 3. Solución del sistema Uy = z
x(n)=z(n);
for i=n-1:-1:1
```

```
x(i)=z(i)-u(i)*x(i+1);
end
sol=x(:);
```

Solución de problemas de contorno lineales por el método de diferencias finitas

Para poder resolver un problema de contorno lineal por el método de diferencias finitas con condiciones Dirichlet, el algoritmo es siempre el mismo. Lo único que cambia son las funciones $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$, así como las condiciones de contorno.

La Figura 12 indica que tenemos que obtener la solución a un sistema de ecuaciones lineal de tamaño $N \times N$, puesto que los valores para el nodo 0 y el nodo $N+1$ son conocidos cuando trabajamos con condiciones Dirichlet.

Planteamos en el siguiente código el método de diferencias finitas para problemas de contorno lineales, en el caso de que las condiciones sean del tipo Dirichlet. Nótese que las funciones $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ se introducen como parámetros de entrada, siendo este un código bastante general para los problemas lineales.

```
function [x,y] = difFinLineal(p,q,r,a,b,alpha,beta,N)
h=(b-a)/(N+1);
x=a:h:b;
X=x(2:N+1);
% Evaluación de las funciones en los nodos
px=feval(p,X);
qx=feval(q,X);
rx=feval(r,X);
% Generación de las diagonales
dp=2+h^2*qx;
ds=-1+h/2*px(1:N-1);
di=-1-h/2*px(2:N);
```

```
d=-h^2*rx;
d(1)=d(1)+(1+h/2*px(1))*alpha;
d(N)=d(N)+(1-h/2*px(N))*beta;
% Solución del sistema Ay=b por el algoritmo de Crout
y=Crout(dp,ds,di,d);
% Solución del problema de contorno
y=[alpha; y ;beta];
end
```

Resolvamos el problema de las esferas concéntricas con el método de diferencias finitas. El problema es:

$$V'' = -\frac{2}{r}V', \qquad r \in [1,2], V(1) = 10, V(2) = 0$$

Identificamos $p(r) = -\frac{2}{r}, q(r) = 0, r(r) = 0$. Ejecutamos en Matlab:

```
>> pfun=@(r) -2./r; qfun=@(r) 0*r; rfun=@(r) 0*r;
>> a=1; b=2; alpha=10; beta=0; N=19;
>> [r,V] = difFinLineal(pfun,qfun,rfun,a,b,alpha,beta,N)
```

La Tabla 2 muestra los resultados si nos pidieran los valores en $r = \{1,1.2,1.4,1.6,1.8,2\}$. En la Figura 2 se ilustran los resultados:

r	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$V(r)$	10	6.6667	4.2857	.25	1.1111	0

Tabla 2. Resultados de V(r) con el método de diferencias finitas lineal.

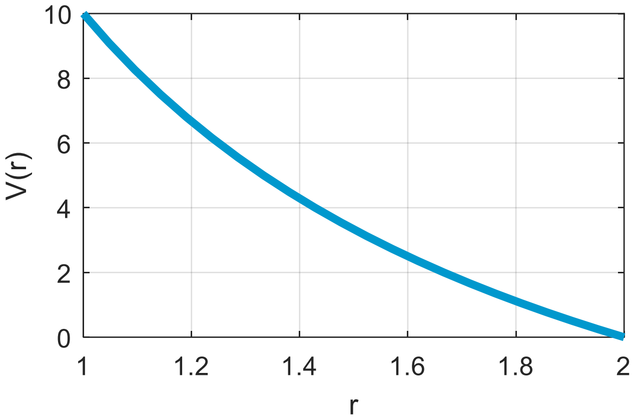


Figura 2. Representación de V(r) tras aplicar el método de diferencias finitas lineal.

Ejemplo 1. Sea el problema de frontera:

$$y'' = -\frac{1}{3}y' - 9y + \sin(3x) - \frac{31}{3}e^{-x}, x \in [0, \pi], y(0) = 0, y(\pi) = -1.0432$$

Obtén el valor de $y(x)$ utilizando 52 subintervalos. Indica en una tabla los valores de $y(x)$ para $x = \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\}$. Representa la función $y(x)$.

En primer lugar, identificamos $p(x) = -\frac{1}{3}, q(x) = -9, r(x) = \sin(3x) - \frac{31}{3}e^{-x}$.

Ejecutamos en Matlab:

```
>> pfun=@(x) -1/3; qfun=@(x) -9;
>> rfun=@(x) sin(3*x)-31/3*exp(-x);
>> a=0; b=pi; alpha=0; beta=-1.0432; N=51;
>> [x,y] = 
diffFinLineal(pfun,qfun,rfun,a,b,alpha,beta,N)
```

El resultado solicitado se muestra en formato de tabla y de figura.

x	$y(x)$
0	0
0.7854	-568.2341

1.570 8	703.207 2
2.356 2	- 435.721 2
3.141 6	-1.0432

Tabla 3. Resultados de problema de frontera.

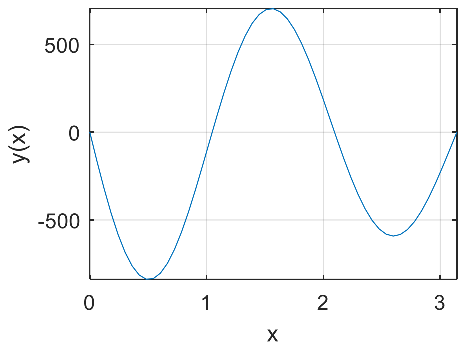


Figura 3. Resultado de problema en la frontera.

6.3. Método de diferencias finitas para problemas de contorno no lineales

La diferencia entre el método de diferencias finitas para problemas lineales respecto a los problemas no lineales está basada en que el sistema que se resuelve será no lineal, de modo que el método de Crout no será aplicable en este caso. Habrá que recurrir a **métodos de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales.** El método por excelencia, como veremos en temas posteriores, es el **método de Newton.** Este método ya lo hemos utilizado en el caso no lineal del método de disparo. Ahora, lo utilizaremos de una **manera diferente.**

Planteamiento del problema

Supongamos una serie de condiciones para la función f que garanticen la existencia y unicidad de la solución, y la convergencia del método de Newton para sistemas no lineales.

a) Las funciones $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial f}{\partial y'}$ son continuas en el dominio $D = [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

b) $\frac{\partial f}{\partial y} \geq \delta > 0$ en D, para algún $\delta > 0$

c) Existen constantes K y L tales que $K = \max\limits_{D} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|, L = \max\limits_{D} \left|\frac{\partial f}{\partial y'}\right|$

Discretizamos el problema de contorno utilizando las diferencias centrales del caso lineal.

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-i} = h^2 f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right)$$
$$x \in [a, b], y_0 = y(a) = \alpha, y_{N+1} = y(b) = \beta$$

Solución de problemas de contorno lineales por el método de diferencias finitas

Al trabajar con condiciones Dirichlet, obtenemos la discretización anterior en los nodos $x_i, i = 1,2, \dots, N-1, N$. El sistema no lineal que se obtiene es:

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + h^2 f\left(x_1, y_1, \frac{y_2 - \alpha}{2h}\right) - \alpha = 0 \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 + h^2 f\left(x_2, y_2, \frac{y_3 - y_1}{2h}\right) = 0 \\ \vdots \\ -y_{N-2} + 2y_{N-1} - y_N + h^2 f\left(x_{N-1}, y_{N-1}, \frac{y_N - y_{N-2}}{2h}\right) = 0 \\ -y_{N-1} + 2y_N + h^2 f\left(x_N, y_N, \frac{\beta - y_{N-1}}{2h}\right) - \beta = 0 \end{cases}$$

que tendrá solución única siempre que $h < \frac{2}{L}$. Para resolver el sistema no lineal utilizaremos el método de Newton, de modo que obtendremos una secuencia de iterados $y^{(k)}$ que se va a ir aproximando en cada iteración a la solución a partir de la expresión:

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - \left[J_F\left(y^{(k)}\right)\right]^{-1} F\left(y^{(k)}\right)$$

donde $F\left(y^{(k)}\right)$ es el sistema anterior y $J_F\left(y^{(k)}\right)$ es la matriz Jacobiana asociada, cuya expresión es:

$$J_F(y) = \begin{bmatrix} -2 - h^2 f_y(x_1, y_1, z_1) & 1 - \frac{h}{2} f_{y'}(x_1, y_1, z_1) & \cdots & 0 \\ 1 + \frac{h}{2} f_{y'}(x_2, y_2, z_2) & -2 - h^2 f_y(x_2, y_2, z_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -2 - h^2 f_y(x_N, y_N, z_N) \end{bmatrix}$$

donde $z_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$.

Al ser $J_F(y)$ una matriz tridiagonal, podemos resolver el sistema por el método de Crout. Por tanto, modificaremos el esquema iterativo de Newton como:

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + v^{(k)},$$

siendo $v^{(k)}$ la solución de:

$$J_F\left(y^{(k)}\right) v^{(k)} = -F\left(y^{(k)}\right)$$

A continuación, mostramos en el algoritmo los pasos para desarrollar un método de resolución de problemas de contorno con el procedimiento de diferencias finitas a partir del método de Newton.

Aproximación de la solución del problema de contorno no lineal:

$$y'' = f(x, y, y'), x \in [a, b], y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

A partir del método de diferencias finitas, resolviendo el sistema no lineal con el método de Newton.

ENTRADA Puntos: a, b. Condiciones de contorno: α, β. Número de nodos: $N \geq 2$.
Tolerancia: TOL. Número máximo de iteraciones: M.

SALIDA Aproximaciones $y_i, i = 0,1, N + 1$.

1. Establecer el paso $h = (b - a)/(N + 1)$.

   Soluciones en la frontera: $y_0 = \alpha, y_{N+1} = \beta$.
2. Estimación inicial de la solución en los nodos intermedios:

   $$y_i = \alpha + i\left(\frac{\beta - \alpha}{b - a}\right)h$$
3. $k = 1$
4. Mientras que $k \leq M$, realizar los pasos 5 a 13. Cuando $k > M$ ir al paso 14.
5. Cálculo del primer elemento:
   - $x = a + h$
   - $z = \frac{w_2 - \alpha}{2h}$
   - $a_1 = 2 + h^2 f_y(x, y_1, z)$
   - $b_1 = -1 + \frac{h}{2} f_{y'}(x, y_1, z)$
   - $d_1 = -(2y_1 - y_2 - \alpha + h^2 f(x, y_1, z)$

6. Cálculo de los elementos intermedios. Para $i = 2, \dots, N - 1$
   - $x = a + ih$
   - $z = (y_{i+1} - y_{i-1})/2h$
   - $a_i = 2 + h^2 f_y(x, y_i, z)$
   - $b_i = -1 + \frac{h}{2} f_{y'}(x, y_i, z)$
   - $c_i = -1 - \frac{h}{2} f_{y'}(x, y_i, z)$
   - $d_i = -(2y_i - y_{i+1} - y_{i-1} + h^2 f(x, y_i, z)$

7. Cálculo del último elemento:
   - $x = b - h$
   - $z = (\beta - y_{N-1})/2h$
   - $a_N = 2 + h^2 f_y(x, y_N, z)$
   - $b_i = -1 + \frac{h}{2} f_{y'}(x, y_N, z)$
   - $c_i = -1 - \frac{h}{2} f_{y'}(x, y_N, z)$
   - $d_i = -\left(2y_N - y_{N-1} - \beta + h^2 f(x, y_N, z)\right)$

8. Algoritmo de Crout para obtener v
9. Aplicar método de Newton: $y^{(k+1)} = y^{(k)} + v$
10. Si $\|v\| \le TOL$, ir a los pasos 11 y 12. Si no, ir al paso 13
11. Preparar los datos de salida: $x = a + ih, i = 0, \dots, N-1, y$.
12. Fin
13. Aumentar contador de iteraciones $k = k + 1$

Sacar por pantalla mensaje de que se han alcanzado el número máximo de iteraciones sin haber convergido.

Retomemos el caso del problema de contorno no lineal que hemos utilizado en secciones previas para ilustrar los conceptos. Sea el problema de contorno no lineal:

$$y'' = \frac{1}{2x}y' + \frac{4}{x}y - 16x - 8 - \frac{3}{2x}, x \in [1,2], y(1) = 7, y(2) = 22$$

vamos a realizar la discretización a partir de las diferencias finitas centrales:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right), i = 1, \dots, N,$$
$$y_0 = y(1) = 7, y_{N+1} = y(2) = 22,$$

donde $f(x, y, z) = \frac{1}{2x}z + \frac{4}{x}y - 16x - 8 - \frac{3}{2x}$

Para $i = 1$:

$$y_2 - 2y_1 + y_0 = h^2 f\left(x_1, y_1, \frac{y_2 - y_0}{2h}\right)$$

Para $i = 2$:

$$y_3 - 2y_1 + y_1 = h^2 f\left(x_2, y_2, \frac{y_3 - y_1}{2h}\right)$$

Procediendo de forma análoga hasta $i = N$, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} y_2 - 2y_1 + 7 - h^2 f\left(x_1, y_1, \frac{y_2 - 7}{2h}\right) = 0 \\ y_3 - 2y_2 + y_1 - h^2 f\left(x_2, y_2, \frac{y_3 - y_1}{2h}\right) = 0 \\ \vdots \\ y_N - 2y_{N-1} + y_{N-2} = h^2 f\left(x_{N-1}, y_{N-1}, \frac{y_N - y_{N-2}}{2h}\right) = 0 \\ 22 - 2y_N + y_{N-1} = h^2 f\left(x_N, y_N, \frac{22 - y_{N-1}}{2h}\right) = 0 \end{cases}$$

Ya tenemos la función no lineal $F(y)$. El siguiente paso consiste en obtener la matriz Jacobiana $J_F(y)$, cuya expresión general es:

$$J_F(y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{N-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_N} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_{N-1}} & \frac{\partial F_2}{\partial y_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{N-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial F_{N-1}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_{N-1}}{\partial y_{N-1}} & \frac{\partial F_{N-1}}{\partial y_N} \\ \frac{\partial F_N}{\partial y_1} & \frac{\partial F_N}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_N}{\partial y_{N-1}} & \frac{\partial F_N}{\partial y_N} \end{bmatrix}.$$

Tomemos la primera fila de la matriz $J_F(y)$ y calculemos sus elementos:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1} = -2 - h^2 \frac{\partial f}{\partial y_1}\left(x_1, y_1, \frac{y_2 - 7}{2h}\right)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_2} = 1 - h^2 \frac{\partial f}{\partial y_2}\left(x_1, y_1, \frac{y_2 - 7}{2h}\right)\frac{1}{2h} = 1 - \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y_2}\left(x_1, y_1, \frac{y_2 - 7}{2h}\right)$$

El resto de términos serán cero, porque F_1 solo contiene a y_1 e y_2. Tomemos ahora la segunda fila:

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_1} = 1 - h^2 \frac{\partial f}{\partial y_1}\left(x_2, y_2, \frac{y_3 - y_1}{2h}\right)\left(-\frac{1}{2h}\right) = 1 + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y_1}\left(x_2, y_2, \frac{y_3 - y_1}{2h}\right)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_2} = -2 - h^2 \frac{\partial f}{\partial y_2}\left(x_2, y_2, \frac{y_3 - y_1}{2h}\right)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_3} = 1 - h^2 \frac{\partial f}{\partial y_3}\left(x_2, y_2, \frac{y_3 - y_1}{2h}\right)\frac{1}{2h} = 1 - \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y_3}\left(x_2, y_2, \frac{y_3 - y_1}{2h}\right)$$

Esta matriz será tridiagonal, y en función de las condiciones de contorno, habría que hacer determinadas modificaciones para ajustar los valores.

Si nombramos:

$$f_y(x, y, y') = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') = \frac{4}{x}, f_{y'}(x, y, y') = \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y') = \frac{1}{2x}$$

podemos escribir la matriz Jacobiana como:

$$J_F(y) = \begin{bmatrix} -2-h^2 f_y\left(x_1,y_1,\frac{y_2-7}{2h}\right) & 1-\frac{h}{2}f'_y\left(x_1,y_1,\frac{y_2-7}{2h}\right) & \cdots & 0 \\ 1+\frac{h}{2}f'_y\left(x_2,y_2,\frac{y_3-y_1}{2h}\right) & -2-h^2 f_y\left(x_2,y_2,\frac{y_3-y_1}{2h}\right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -2-h^2 f_y\left(x_N,y_N,\frac{\beta-y_{N-1}}{2h}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2-\frac{4h^2}{x_1} & 1-\frac{h}{4x_1} & \cdots & 0 \\ 1+\frac{h}{4x_2} & -2-\frac{4h^2}{x_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -2-\frac{4h^2}{x_N} \end{bmatrix}.$$

Los resultados de aplicar el método de Newton para resolver el problema de contorno se pueden observar en la Tabla . Asimismo, la solución gráfica se ilustra en la Figura 4. Representación gráfica del problema de contorno de ejemplo..

x	$y(x)$
1	7.00
1.1	8.14
1.2	9.36
1.3	10.66
1.4	12.04
1.5	13.50
1.6	15.04
1.7	16.66
1.8	18.36
1.9	20.14
2	22.00

Tabla 4. Resultados numéricos del problema de contorno de ejemplo.

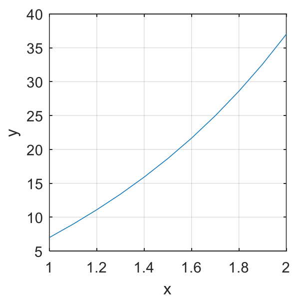


Figura 4. Representación gráfica del problema de contorno de ejemplo.

En el **Ejemplo 2** veremos un caso de problema de contorno no lineal y un script para implementarlo.

Ejemplo 2. Sea el problema de contorno no lineal:

$$y''(x) = -\cos(\pi x)\,[(y'-1)^2 + \pi^2(y-x)^2], x \in [0,1], y(0) = 1, y(1) = 0$$

Obtén la solución aplicando el método de diferencias finitas con 11 nodos a partir del método de Newton, donde el criterio de parada es que la diferencia entre los vectores en cada iterado sea menor de 10^{-5}, tomando como estimación inicial $y^{(0)} = [1, 0.9, 0.8, \dots, 0.1, 0]$.

Comencemos por definir en Matlab las variables que vamos a necesitar:

```
N=9;
h=(1-0)/10;
X=0:h:1; x=X(2:N+1); x=x(:);
Y=fliplr(x); y=Y(2:N+1);
tol=1e-5;
iter=1; dif=1;
```

A continuación, vamos a generar el bucle que nos va a permitir obtener la solución a partir del método de Newton.

```
while and(iter<maxiter,dif>tol)
   % Generar F
   % Generar dF
   % Obtener v por el método de Crout
   y=y+v;
   dif=norm(abs(v));
   iter=iter+1;
end
Y=[1;y;0];
```

Veamos cómo generar F (línea 8 del código). Como tenemos condiciones Dirichlet, podemos utilizar el desarrollo del ejemplo anterior.

$$F(y) = \begin{bmatrix} y_2 - 2y_1 + 1 - h^2 f\left(x_1, y_1, \frac{y_2 - 1}{2h}\right) \\ y_3 - 2y_2 + y_1 - h^2 f\left(x_2, y_2, \frac{y_3 - y_2}{2h}\right) \\ \vdots \\ y_N - 2y_{N-1} + y_{N-2} - h^2 f\left(x_{N-1}, y_{N-1}, \frac{y_N - y_{N-2}}{2h}\right) \\ -2y_N + y_{N-1} - h^2 f\left(x_N, y_N, \frac{-y_{N-1}}{2h}\right) \end{bmatrix}$$

Podemos implementar la matriz F en Matlab como sigue:

```
>> fun=@(x,y,z) -cos(pi*x).*((z-1).^2+pi^2*(y-x).^2);
>> F=diff(Y,2)-h^2*fun(x,y,(Y(3:N+2)-Y(1:N))/2/h);
```

Veamos cómo generar dF (línea 9 del código). Como se trata de una matriz tridiagonal, y serán precisamente esas diagonales las que utilicemos para aplicar el método de Crout, vamos a definir las diagonales. En este caso, la diagonal central será:

$$dC = \begin{bmatrix} -2 - h^2 + f_y\left(x_1, y_1, \frac{y_2 - 1}{2h}\right) \\ -2 - h^2 + f_y\left(x_2, y_2, \frac{y_3 - y_1}{2h}\right) \\ \vdots \\ -2 - h^2 + f_y\left(x_{N-1}, y_{N-1}, \frac{y_N - y_{N-2}}{2h}\right) \\ -2 - h^2 + f_y\left(x_N, y_N, \frac{-y_{N-1}}{2h}\right) \end{bmatrix}$$

La diagonal superior será:

$$dS = \begin{bmatrix} 1 - \frac{h}{2} f_{y'}\left(x_1, y_1, \frac{y_2 - 1}{2h}\right) \\ 1 - \frac{h}{2} f_{y'}\left(x_2, y_2, \frac{y_3 - y_1}{2h}\right) \\ \vdots \\ 1 - \frac{h}{2} f_{y'}\left(x_{N-1}, y_{N-1}, \frac{y_N - y_{N-2}}{2h}\right) \end{bmatrix}$$

y la diagonal inferior será:

$$dI = \begin{bmatrix} 1 - \frac{h}{2} f_{y'}\left(x_2, y_2, \frac{y_3 - y_1}{2h}\right) \\ \vdots \\ 1 - \frac{h}{2} f_{y'}\left(x_{N-1}, y_{N-1}, \frac{y_N - y_{N-2}}{2h}\right) \\ 1 - \frac{h}{2} f_{y'}\left(x_N, y_N, \frac{-y_{N-1}}{2h}\right) \end{bmatrix}$$

Las derivadas respecto de y y de y' son:

$$f_y(x, y, y') = -2\pi^2 \cos(\pi x)\,(y - x), f_{y'}(x, y, y') \\ = -2\cos(\pi x)\,(y' - 1)$$

Su implementación en Matlab podría ser de la siguiente manera:

```
>> fy=@(x,y,z) -2*pi^2*cos(pi*x).*(y-x);
>> fz=@(x,y,z) -2*cos(pi*x).*(z-1);
>> fye=fy(x,y,(Y(3:N+2)-Y(1:N))/(2*h));
>> fze=fz(x,y,(Y(3:N+2)-Y(1:N))/(2*h));
>> dC=-2-h^2*fye;
>> dS=1+h/2*fze(1:N);
>> dI=1-h/2*fze(2:N+1);
```

Faltaría la generación de v por el método de Crout (línea 10 del código), que sería tan sencillo como ejecutar:

```
>> v=Crout(dC,dS,dI,F);
```

A continuación, se muestran los resultados. Se marca con círculos en la representación gráfica la solución analítica del problema de contorno, que es $y(x) = x + \cos(\pi x)$.

x	$y(x)$
1	1.0000
1.1	1.0509
1.2	1.0082
1.3	0.8864
1.4	0.7079
1.5	0.5000
1.6	0.2921
1.7	0.1136
1.8	-0.0082
1.9	-0.0509
2	0

Tabla 5. Valores de $y(x) = x + \cos(\pi x)$.

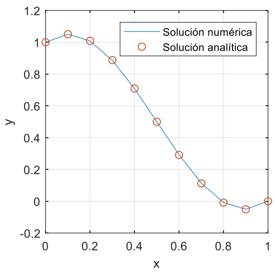


Figura 5. Resultado $y(x) = x + cos(\pi x)$.

Diferencias finitas con condiciones no Dirichlet sobre problemas de contorno unidimensionales no lineales

Hasta ahora hemos visto problemas de contorno no lineales con condiciones Dirichlet en los que aplicábamos el método de diferencias finitas. Pero, ¿qué ocurre cuando las condiciones son no Dirichlet? A continuación, vamos a dar unas breves pinceladas acerca de cómo proceder en ese tipo de situaciones.

En primer lugar, procederemos como habíamos hecho hasta el momento, es decir, discretizando el problema para averiguar la expresión en cada uno de los nodos.

Como estamos en problemas de frontera, las condiciones de contorno nos aparecerán precisamente en la frontera, es decir, en el nodo 0 y/o en el nodo $N + 1$.

Sobre estas condiciones, aplicaremos de nuevo diferencias divididas, despejando aquellos valores que no vayamos a calcular.

- Si la condición no Dirichlet está al principio del intervalo:

$$y(a) + y'(a) = \alpha \leftrightarrow y_0 + \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = \alpha \leftrightarrow y_{-1} = y_1 - 2h(\alpha - y_0)$$

En este caso habrá que plantear una ecuación adicional en el nodo 0, de forma que podamos despejar y_{-1} de la discretización:

$$y_1 - 2y_0 + y_{-1} - h^2 f\left(x_0, y_0, \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}\right) = 0 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow y_1 - 2y_0 + y_1 - 2h(\alpha - y_0) - h^2 f\left(x_0, y_0, \frac{y_1 - \left(y_1 - 2h(\alpha - y_0)\right)}{2h}\right) = 0 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow y_0(-2 + 2h) + 2y_1 - 2h\alpha - h^2 f(x_0, y_0, \alpha - y_0) = 0$$

Esta situación se ilustra en la Figura .

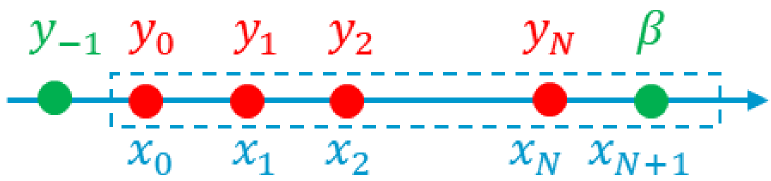


Figura 6. Esquema de nodos cuando la condición no Dirichlet está al principio del intervalo.

- Si la condición no Dirichlet está al final del intervalo:

$$y(b) + y'(b) = \beta \leftrightarrow y_{N+1} + \frac{y_{N+2} - y_N}{2h} = \beta \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow y_{N+2} = y_N + 2h(\beta - y_{N+1})$$

En este caso habrá que plantear una ecuación adicional en el nodo N, de forma que podamos despejar y_{N+2} de la discretización:

$$y_{N+2} - 2y_{N+1} + y_N - h^2 f\left(x_{N+1}, y_{N+1}, \frac{y_{N+2} - y_N}{2h}\right) = 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow y_N + 2h(\beta - y_{N+1}) - 2y_{N+1} + y_N$$

$$- h^2 f\left(x_{N+1}, y_{N+1}, \frac{y_N + 2h(\beta - y_{N+1}) - y_N}{2h}\right) = 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow 2y_N + y_{N+1}(-2 - 2h) + 2h\beta - h^2 f(x_{N+1}, y_{N+1}, \beta - y_{N+1}) = 0$$

Esta situación se ilustra en la Figura.

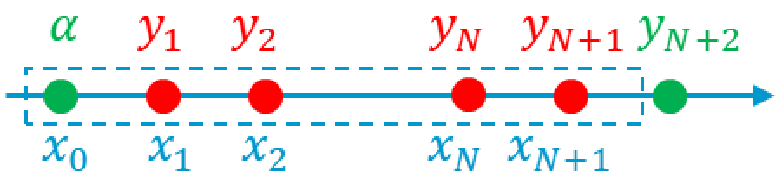


Figura 7. Esquema de nodos cuando la condición no Dirichlet está al final del intervalo.

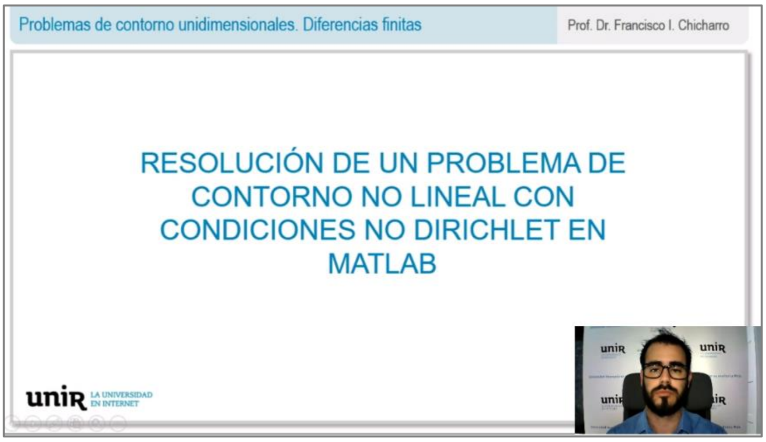
Estas modificaciones afectarán directamente al cálculo de la matriz Jacobiana, de forma que será necesario recalcular en los nodos que aparecen las condiciones no Dirichlet las entradas de la matriz Jacobiana.

En cualquier caso, será posible utilizar el método de Crout para resolver el sistema, puesto que seguirá tratándose de la solución a partir de una matriz jacobiana tridiagonal.

Lecciones magistrales

Resolución de un problema de contorno no lineal con condiciones no Dirichlet en Matlab

En esta lección magistral resolveremos un problema de contorno no lineal con condiciones no Dirichlet en Matlab, a partir de los códigos de los programas que han aparecido a lo largo de este tema. En este caso, utilizaremos el método de diferencias finitas.



Accede a la lección magistral a través del aula virtual

No dejes de leer

Problemas de valores en la frontera

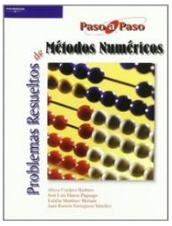
Chapra, S. C. y Canale, R. P. (2007). «Problemas de valores en la frontera». En Autores, *Métodos numéricos para ingenieros (5a. Ed.)*. Madrid: McGraw-Hill.

El capítulo 27 de este libro se dedica a la resolución de problemas de contorno unidimensionales, también conocidos como problemas de frontera. Hay un apartado dentro del capítulo dedicado al método de las diferencias finitas para problemas de contorno lineales.

Accede al libro a través de la Biblioteca Virtual de UNIR

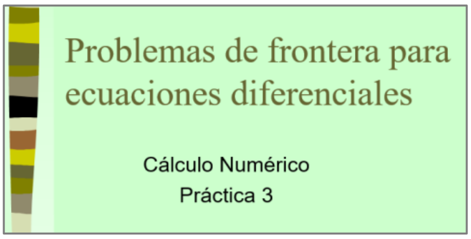
Problemas de frontera

Cordero, A., Hueso, J. L., Martínez, E. y Torregrosa, J. R. (2006). «Problemas de frontera». En Autores, *Problemas resueltos de métodos numéricos*. Madrid: Thomson.



En la segunda parte del capítulo 9 de este libro puedes encontrar con más detalle el desarrollo del método de diferencias finitas tanto para problemas lineales como para problemas no lineales. Además, este libro incluye un listado de ejercicios resueltos.

Problemas de frontera para ecuaciones diferenciales



En esta presentación se ilustran algunos conceptos relacionados con los problemas de frontera. Estos conceptos son el método de disparo, el método de diferencias finitas, y otros métodos que no hemos visto a lo largo de este tema.

Accede al enlace a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:

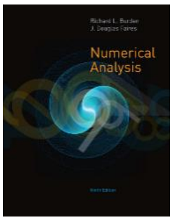
http://www.upv.es/mattel/asig/numerico2/frontera/prfront.ppt

+ Información

A fondo

Problemas de contorno para ecuaciones diferenciales ordinarias

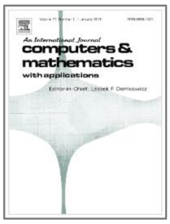
Burden, R. L. y Faires, J. D. (2011). *Numerical analysis (9ª Ed)*. Boston: Brooks/Cole CENGAGE learning.



El libro *Numerical Analysis* es el libro de referencia de esta asignatura. En la segunda parte del Capítulo 11 se presentan los problemas de contorno y el método de diferencias finitas para resolver problemas lineales y no lineales. Asimismo, se muestran diferentes implementaciones y algoritmos para resolver los problemas.

Métodos de diferencias finitas para problemas de contorno con argumentos que se desvían

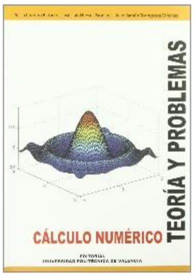
Agarwal, R. P. y Chow, Y. M. (1986). Finite-difference methods for boundary-value problems of differential equations with deviating arguments. *Computers and Mathematics with Applications*, 12, 1143—1153.



En este trabajo de investigación realizado por dos referentes en el campo de los métodos numéricos se analiza en profundidad una variedad del método de las diferencias finitas para resolver problemas de contorno.

Introducción a los elementos finitos: método de Rayleigh-Ritz

Cordero, A., Hueso, J. L. y Torregrosa, J. R. (2004). *Cálculo numérico*. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.



Uno de los métodos más aplicados a nivel empresarial para la resolución de los problemas de contorno es el método de elementos finitos. Como introducción a dicho método, se estudia el método de Rayleigh-Ritz. En el capítulo 3.6 de este libro puedes encontrar más información acerca del método y su implementación.

Test

1. En el método de diferencias finitas, para discretizar utilizamos diferencias

A. Centrales.

B.Pprogresivas.

C. Regresivas.

2. Para resolver un sistema Ax=b en el que A es una matriz tridiagonal y b es un vector podemos utilizar el método de:

A. Fish.

B. Crout.

C. Sheep.

3. Sea el problema de contorno lineal $y''(x) = y(x) + y'(x)$. Identificando términos, ¿quién es $r(x)$?

A. $y(x)$.

B. 1.

C. 0.

4. En el método de Crout para resolver sistemas lineales del tipo Ax=b, primero se factoriza la matriz A en las matrices L y U. El siguiente paso es obtener la solución de obtención de L y U a partir de A

A. Ax=b.

B. Lz=b.

C. Uy=z.

5. El problema de contorno lineal $y'' + \pi y' + 2\pi^2 \sin(\pi x) = 0, y(0) = 1, y(1) = -1$, al resolverlo con N=10, tiene como solución en x=1/2:

A. y(x=1/2)=1.2825.

B. y(x=1/2)=1.4174.

C. y(x=1/2)=1.0220.

6. En el método de diferencias finitas para problemas de contorno no lineales, tras la discretización obtenemos un sistema de ecuaciones:

   A. Lineal.

   B. No lineal.

   C. Hiperlineal.

7. En el método de diferencias finitas para problemas de contorno no lineales, una vez tenemos el sistema F(y)=0, ¿qué necesitamos para obtener la solución?

   A. Una matriz dispersa.

   B. Una matriz Jacobiana.

   C. Una matriz diagonal.

8. Sea Y un vector de N+1 componentes. Queremos obtener $y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}, i = 3, \dots, N$. ¿Cuál de las siguientes instrucciones en Matlab nos dará el resultado deseado?

   A. diff(Y,2).

   B. Y(3:N+1)-Y(1:N-1).

   C. Todas las anteriores son correctas.

9. En un problema de contorno no lineal con la condición de contorno $y'(a) = \alpha$, ¿por qué valor reemplazamos y_{-1} cuando evaluamos la discretización en el nodo 0?

   A. $y_{-1} = y_1 - 2h\alpha$.

   B. $y_{-1} = 2y_0 - y_1 + h^2\alpha$.

   C. Ninguna de las anteriores es correcta.

10. En un problema de contorno no lineal con la condición de contorno $y'(b) = \beta$, ¿por qué valor reemplazamos y_{N+2} cuando evaluamos la discretización en el nodo $N + 1$?

   A. $y_{N+2} = 2h\beta + y_N$.

   B. $y_{N+2} = 2y_{N+1} - y_N + h^2\beta$.

   C. Ninguna de las anteriores es correcta.