

## Tema 2. Modelado matemático de sistemas físicos

# Contenidos

- Tema 1. Conceptos generales de modelado matemático y simulación
- Tema 2. Modelado matemático de sistemas físicos
- Tema 3. Sistemas físicos y sus modelos
- Tema 4. Simulación
- Tema 5. Generación de números aleatorios
- Tema 6. Generación de variables aleatorias
- Tema 7. Medidas estadísticas
- Tema 8. Simulación de Monte Carlo
- Tema 9. Conceptos y elementos de simulación con eventos
- Tema 10. Modelado y simulación de sistemas de eventos discretos
- Tema 11. *Software* para modelado matemático y simulación

# Calendario

	Semana	Tema	Refuerzo	Laboratorio	Actividad
09/11/2020					
16/11/2020	1	S0 + T1			
23/11/2020	2	T2			
30/11/2020	3	T3		L1	
07/12/2020	4	T4			
14/12/2020	5	T5			L1
21/12/2020	--	Semana de repaso	R-L1		
28/12/2020	--		Semana de repaso		
04/01/2021	6	T6			
11/01/2021	7	T6			
18/01/2021	8	T7			
25/01/2021	9	T7			AG
01/02/2021	10	T8			
08/02/2021	11	T9		L2	
15/02/2021	12	T10	R-AG1		
22/02/2021	13	T11			L2
01/03/2021	14	Sesión examen	R-L2		
08/03/2021	15	Repaso (sesión doble)			
15/03/2021	16		Seman		

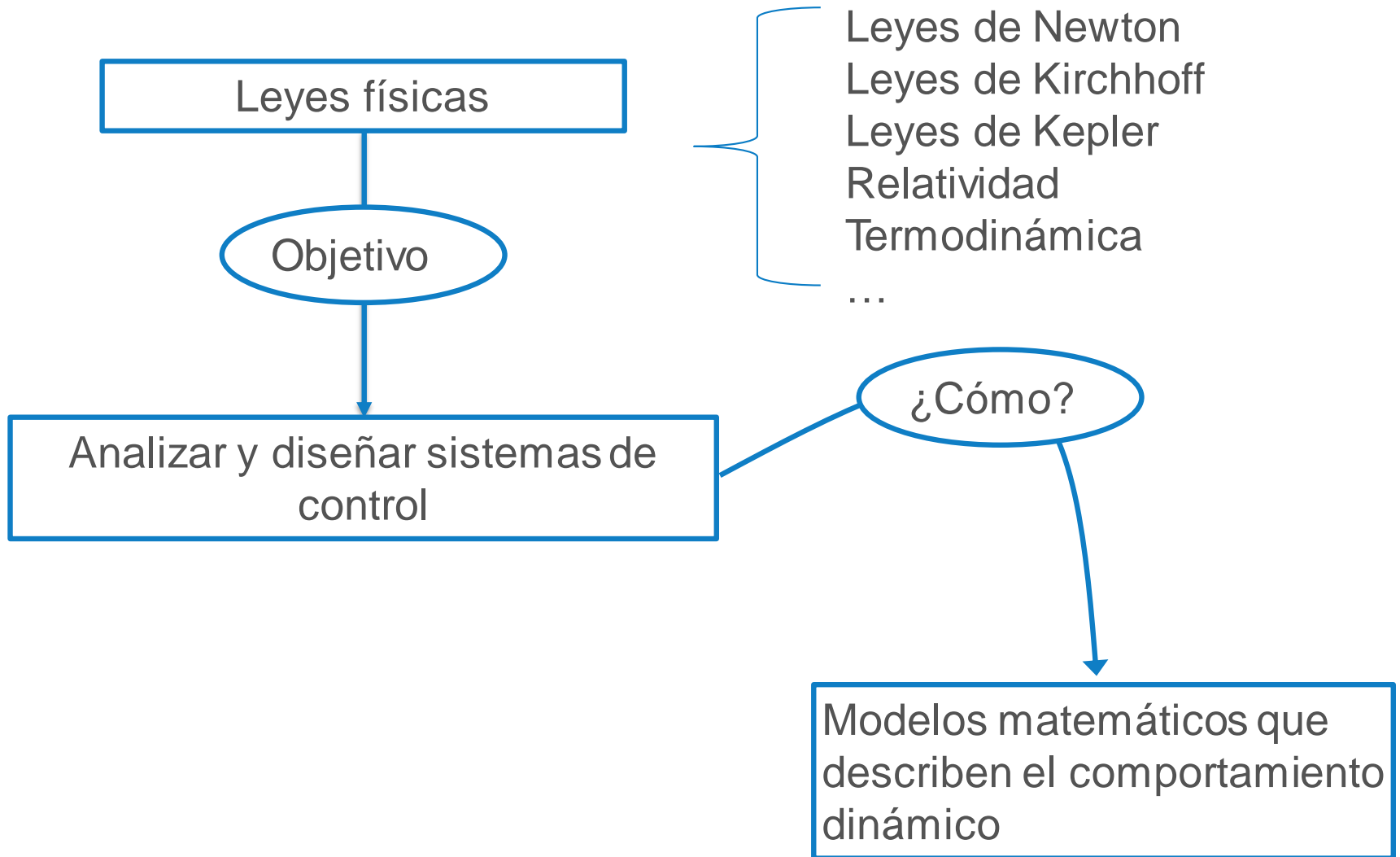
Próximas sesiones  
T2-> (27/11 17:00CET)  
T3-> (02/12 17:00CET)  
L1-> (03/12 17-19CET)

## 2.2 El modelado y la naturaleza de los sistemas

### **Definición:** Modelado

El modelado es el proceso de escribir un conjunto de fórmulas (usualmente ecuaciones diferenciales) para describir una situación física.

# Modelado y Naturaleza de los sistemas: ideas clave



## 2.3 Conceptos fundamentales

Variables del Sistema	
Variables directas (o generales) <ul style="list-style-type: none"><li>▶ Variables de esfuerzo</li><li>▶ Variables de flujo</li></ul>	Variables dinámicas (o energéticas) <ul style="list-style-type: none"><li>▶ Almacenamiento de esfuerzo (momento)</li><li>▶ Almacenamiento de flujo (desplazamiento)</li></ul>

- ▶ Energía: capacidad para realizar un trabajo.
- ▶ La potencia: transferencia de energía por unidad de tiempo.

## 2.3 Conceptos fundamentales: potencia instantánea

- ▶ En muchos sistemas **la potencia instantánea puede expresarse a través del producto de una variable de flujo  $f(t)$  y una variable de esfuerzo  $e(t)$ .**

$$\text{Potencia instantánea} = e(t) \cdot f(t)$$

- ▶  $e(t)$  -> variable extensiva (depende del tamaño del sistema).
- ▶  $f(t)$  -> variable intensiva (permanece constante, no depende del tamaño).

## 2.3 Conceptos fundamentales: Variables flujo y esfuerzo

- Algunas variables across y through que podemos encontrar habitualmente al modelar un sistema son:

Sistemas		Variables <i>across</i> (variables relacionadas con el esfuerzo)		Variables <i>through</i> (variables relacionadas con el flujo)	
		Esfuerzo	almacenamiento esfuerzo	Flujo	almacenamiento de flujo
Mecánicas	Traslación				
	Rotación				
Eléctricos			Desplazamiento (x, m) Velocidad (v, m/s) Momento lineal (p, Ns) Fuerza (F,N)		
De fluidos					
Térmicos					



## 2.3 Conceptos fundamentales: Variables flujo y esfuerzo

- Algunas variables across y through que podemos encontrar habitualmente al modelar un sistema son:

Sistemas		Variables <i>across</i> (variables relacionadas con el esfuerzo)		Variables <i>through</i> (variables relacionadas con el flujo)	
		Esfuerzo	Momento (almacenamiento esfuerzo)	Flujo	Desplazamiento (almacenamiento de flujo)
Mecánicos	Traslación	Fuerza (F) (N)	Momento lineal (p) (N.s)	Velocidad (v) (m/s)	Desplazamiento (x) (m)
	Rotación	Par o esfuerzo de torsión ( $\tau$ ) (N.m) Par o esfuerzo de	Momento angular (L) (N.m.s)	Velocidad angular ( $\omega$ ) (rad/s)	Desplazamiento angular ( $\phi$ ) (rad)
Eléctricos		potencial eléctrico (v)	-	Corriente (I) (A)	Carga (Q) (C)
De fluidos		Presión (P) (N/m <sup>2</sup> )	Momento o impulso del fluido ( $\Gamma$ ) (N·s/m <sup>2</sup> )	Caudal (Q) (m <sup>3</sup> /s)	Volumen (V) (m <sup>3</sup> )
Térmicos		Temperatura (T) (K)	-	Flujo de entropía (dξ/dt) (J/(K·s))	Entropía (S) (J/K)

## 2.3 Conceptos fundamentales: Energía transmitida

- ▶ Además:
  - ▶ La energía transmitida en un intervalo de tiempo  $(0,t)$ , desde un punto a otro se calcula mediante la integral de la potencia en el tiempo.

$$E(t) = \int_0^t e(t)f(t)dt$$

## 2.3 Conceptos fundamentales: energía

almacenamiento de información → almacenamiento de energía.

Variables energéticas (dinámicas):

- ▶ **Variable de momento**  $e_a(t)$  ó  $p$ :

almacenamiento del esfuerzo acumulado:

$$e_a(t) = \int_0^t e(t)dt \text{ o bien } e(t) = \frac{de_a}{dt}$$

- ▶ **Variable de desplazamiento**  $f_a(t)$  ó  $q$ :

almacenamiento del flujo acumulado:

$$f_a(t) = \int_0^t f(t)dt \text{ o bien } f(t) = \frac{df_a}{dt}$$

## 2.3 Conceptos fundamentales: elementos del sistema

**Fuentes de energía.** Proporcionan energía al sistema.  
fuentes de variables de esfuerzo (variables across)  
fuentes de flujo (variables through).



[Esta foto](#) de Autor desconocido está bajo licencia [CC BY-SA](#)

## 2.3 Conceptos fundamentales: elementos del sistema

### Almacenadores de energía.

Almacenan y ceden energía.

Definen el comportamiento dinámico del sistema.

Pueden ser almacenadores de esfuerzo o de flujo.

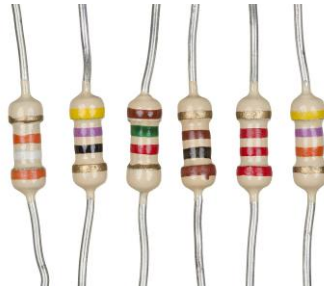


## 2.3 Conceptos fundamentales: elementos del sistema

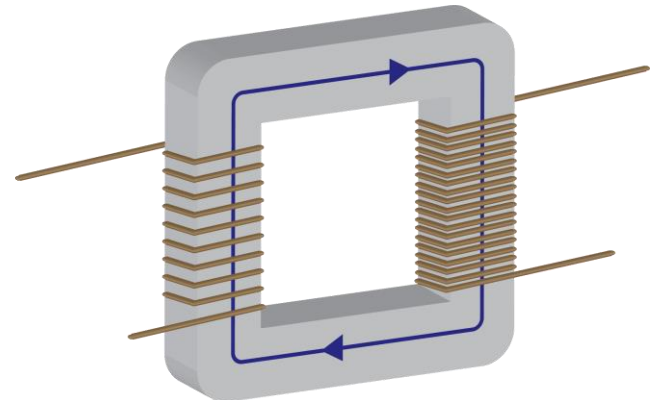
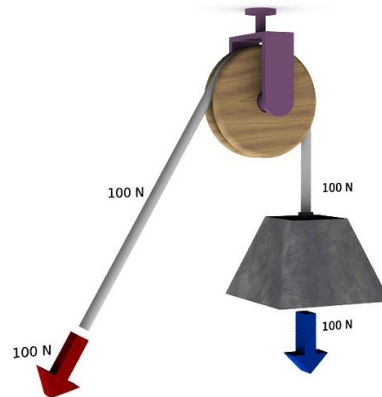
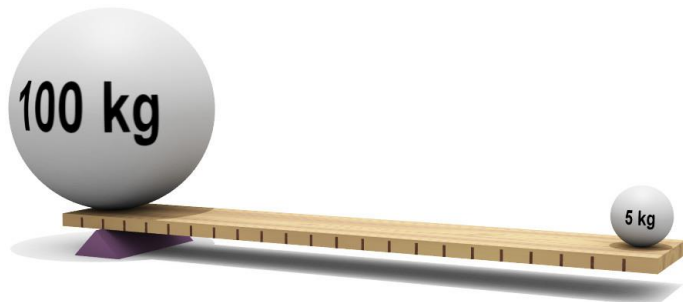
### Disipadores de energía.

Transforman la energía o generan pérdidas

Si provocan pérdidas, **resistencias**.



Si transforman la energía, **transformadores**.



## 2.3 Conceptos fundamentales: conexiones

### Serie

$$f_i = f_T \quad \forall i$$
$$\sum e_i = e_T$$

### Paralelo

$$\sum f_i = f_T$$
$$e_i = e_T \quad \forall i$$

Estas normas sobre las variables esfuerzo y flujo se conocen como **restricciones de compatibilidad y continuidad**.

## 2.4 Etapas para el modelado de los sistemas físicos dinámicos

1. Formulación del modelo matemático:
  - a. Determinar características relevantes:
    - ▶ Dominios físicos
  - b. Identificar variables y componentes
  - c. Identificar leyes empíricas
  - d. Plantear ecuaciones
2. Verificación del modelo.
3. Validación del modelo.
4. Análisis de las soluciones.
5. Si es necesario, rediseño del modelo.



## 2.5 Métodos de modelado: Enfoque hacia el modelado de sistemas físicos

Para obtener el modelo matemático de un sistema físico se deberían realizar los siguientes pasos:

1. Identificación de los elementos que conforman el sistema.
2. Obtención del conjunto de ecuaciones diferenciales.
3. Obtención de una forma de representación del modelo:
  - a) funciones de transferencia,
  - b) diagramas de bloques,
  - c) **grafos mediante la técnica de Bond-Graph.**

## 2.5 Métodos de modelado: Técnica del Bond-Graph

- ▶ **Técnica del Bond-Graph:**
  - ▶ representa flujos mediante enlaces
  - ▶ Los componentes del sistema se representan mediante un conjunto de elementos básicos idealizados:
    - ▶ Resistencias
    - ▶ Condensadores
    - ▶ ...
- ▶ Un diagrama puede corresponder a múltiples dominios del sistema (eléctrico, mecánico, etc).

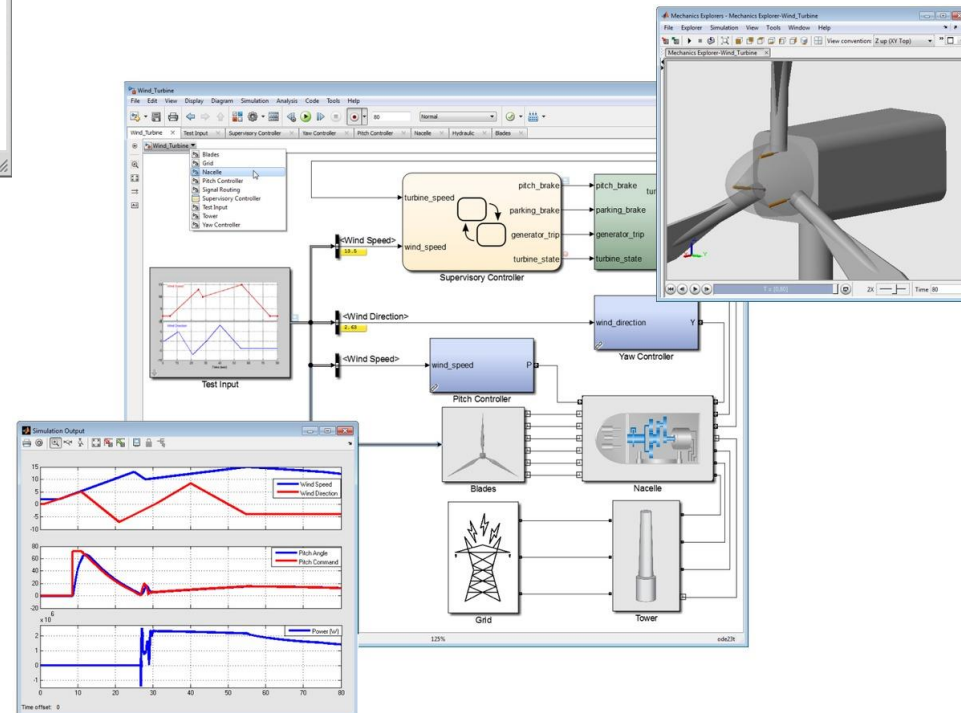
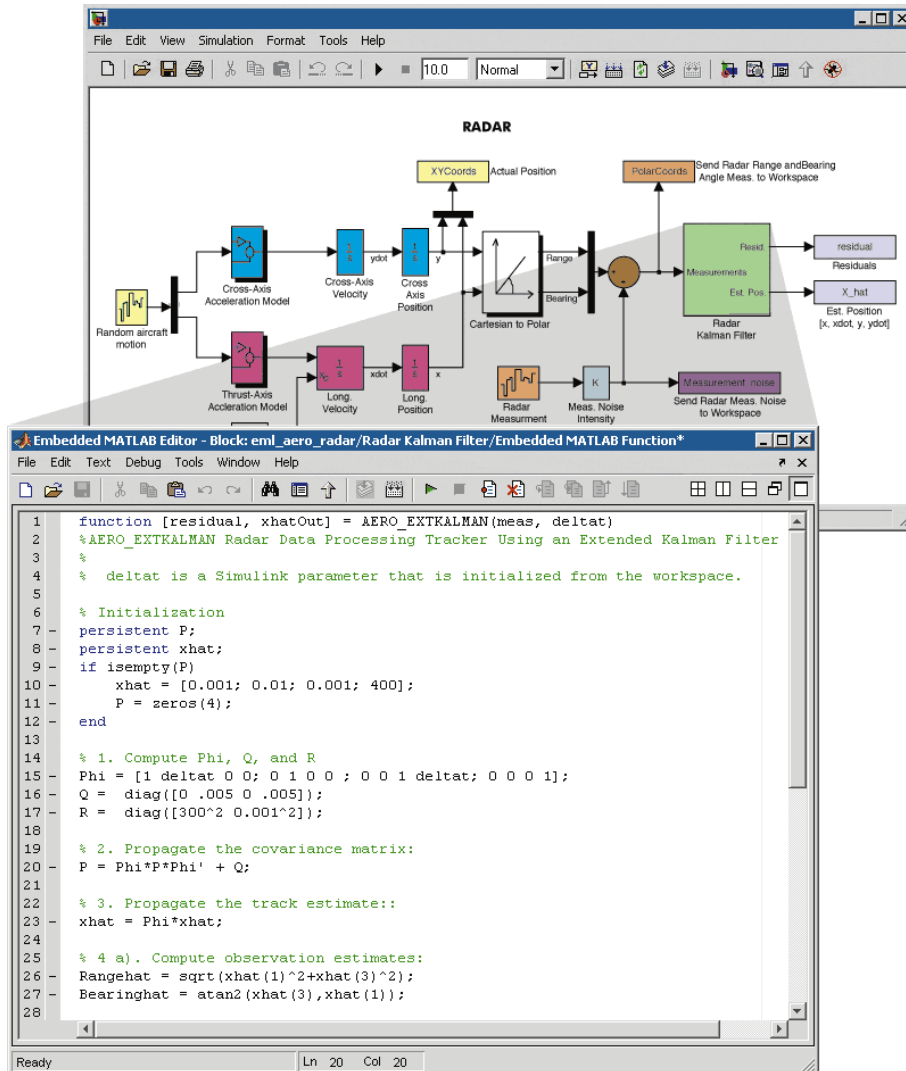
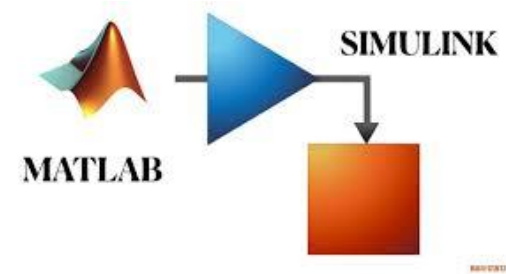
## 2.5 Métodos de modelado: Bond-Graph II

- ▶ **Grafos de enlaces:** permiten la representación de las interacciones energéticas.
- ▶ En esta forma de modelado cada enlace representa dos señales esfuerzo y flujo, cuyo producto es la potencia. Estas señales fluyen en dirección opuesta.
- ▶ Los diferentes elementos se caracterizan por las letras:
  - ▶ **R** – Resistencias.
  - ▶ **C** – Capacitadores.
  - ▶ **I** – Inercias.
  - ▶ **TF** – Transformadores.
  - ▶ **GY** – Giradores.
  - ▶ **Sf** – Fuente de flujo.
  - ▶ **Se** – Fuente de esfuerzo.

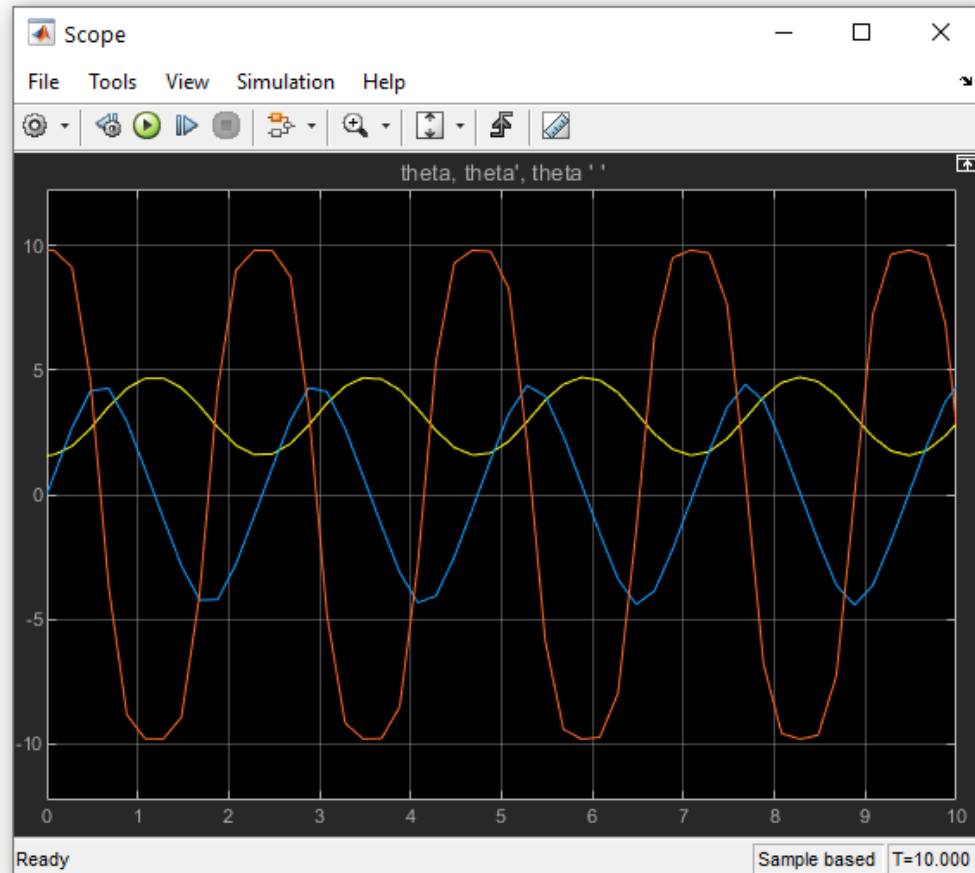
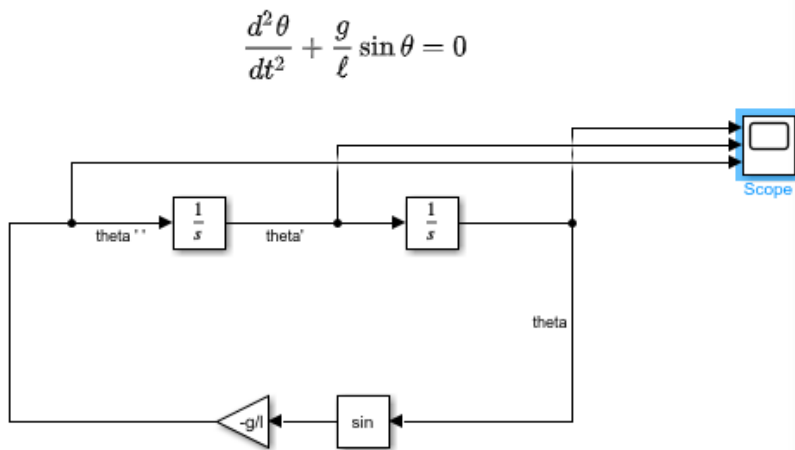
## 2.5 Métodos de modelado: Bond-Graph III

- ▶ Representamos las conexiones en serie y paralelo mediante nodos tipo 0 y 1.
- ▶ En el diagrama de enlaces debe estar representada la causalidad entre las dos variables que están asociadas al grafo.

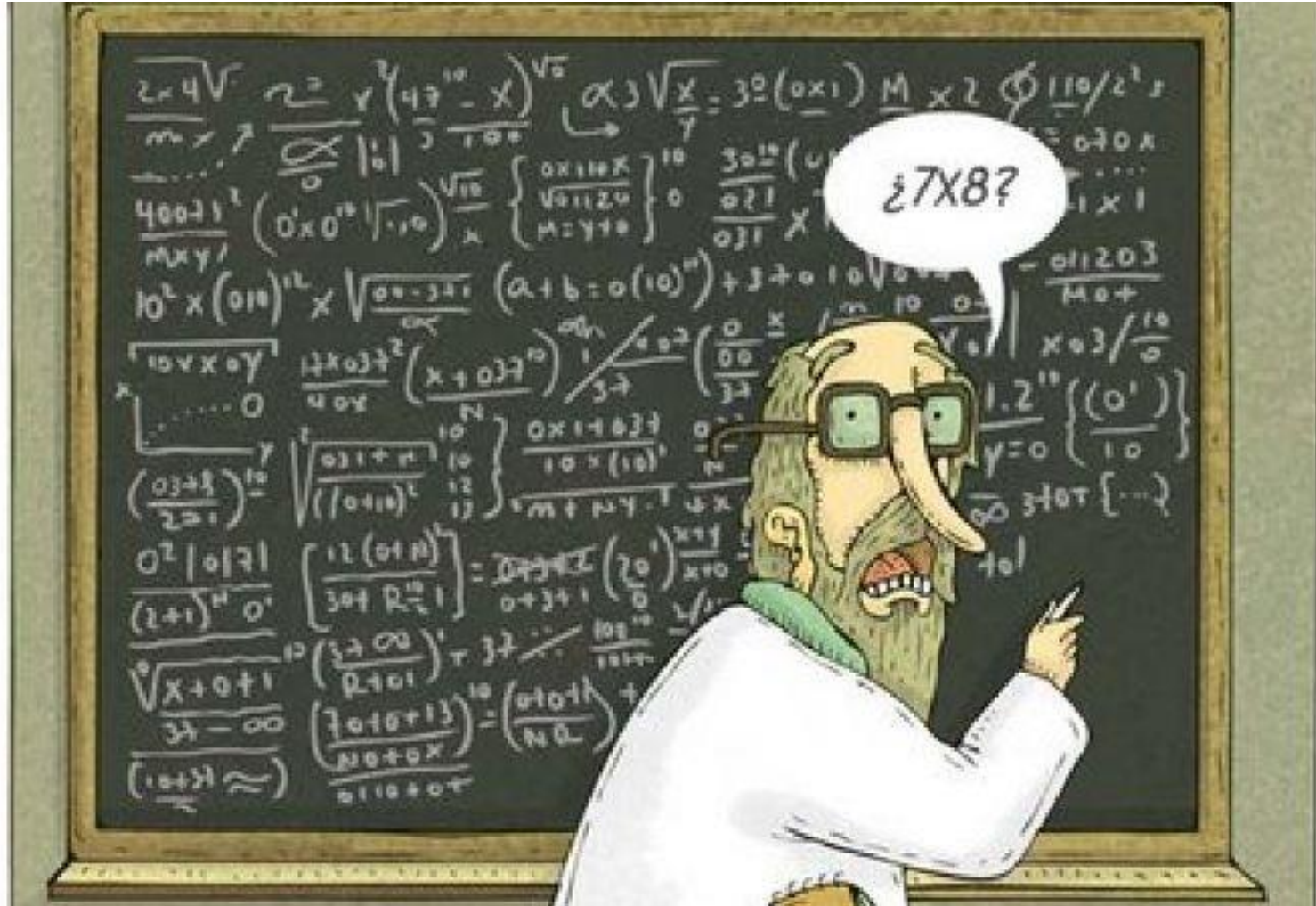
# Matlab - Simulink



# Matlab - Simulink



## ¿Dudas?





[www.unir.net](http://www.unir.net)