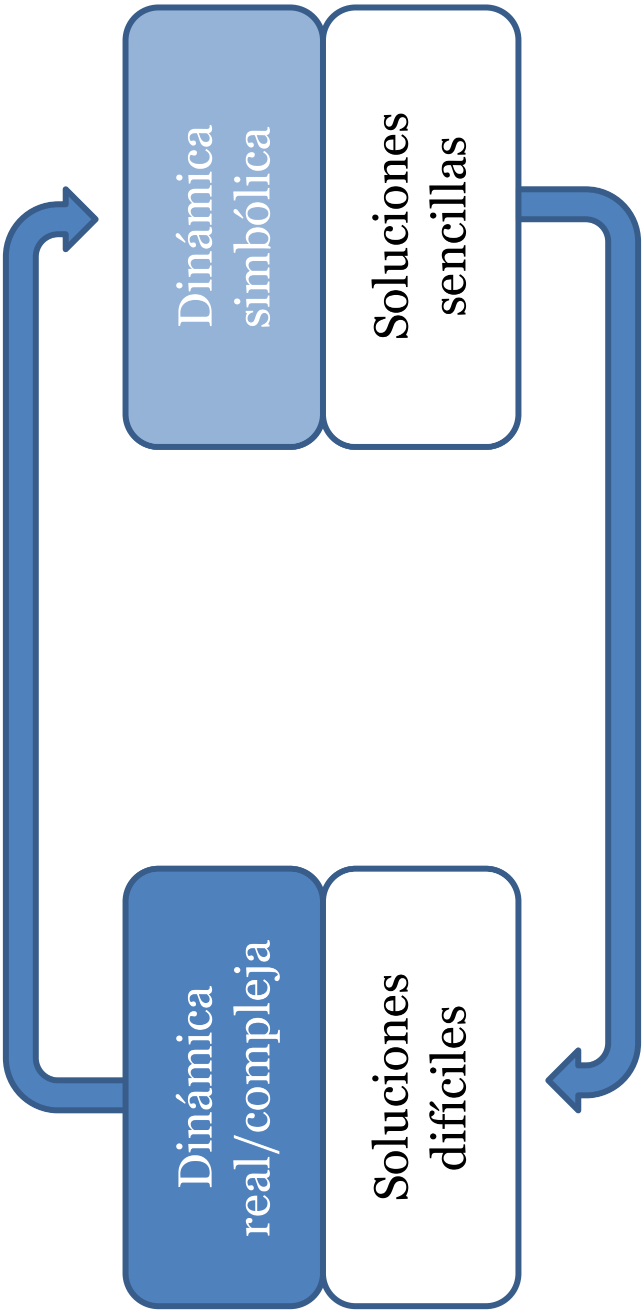
Dinámica simbólica

TEMA 14

Esquema


Dinámica simbólica
Soluciones sencillas
Dinámica real/compleja
Soluciones difíciles

Ideas clave

14.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

En este tema se va a introducir la dinámica simbólica. Se trata de un tema bastante analítico y denso, de forma que se recomienda que leas esta guía y que en una libreta vayas comprobando los conceptos que se desarrollan de forma paralela. De este modo, la comprensión de los conceptos resultará mucho más asequible. Cabe destacar que se incluyen bastantes ejemplos para que la información no resulte tan densa. Para ampliar información se recomienda hacer uso de la bibliografía recomendada y de los enlaces mostrados.

14.2. La dinámica simbólica

La dinámica simbólica permite describir la dinámica de un sistema con herramientas desconocidas hasta el momento. Su principal ventaja reside en el hecho de que esta técnica permite reducir un sistema tremendamente complicado en un conjunto de secuencias que son mucho más sencillas de analizar.

A lo largo de este tema trabajaremos sobre la función cuadrática $p_c(x) = x^2 + c$, con $c < -2$. Como vimos en temas anteriores, la dinámica interesante de esta familia sucede en el intervalo $I = [-x^*, x^*]$, donde x^* es el punto fijo de $p_c(x)$ cuya expresión es:

$$x^* = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4c}\right)$$

Para poder comprender los conceptos que vamos a desarrollar, va a ser necesario recordar las representaciones binaria y ternaria de números decimales entre 0 y 1. Es por ello que la primera parte de este tema se dedicará a tal recordatorio.

A continuación, introduciremos un par de conceptos asociados a la dinámica simbólica para pasar a describir el operador *shift*. Por último, veremos las propiedades del conjunto de Cantor.

Para completar la descripción de la dinámica simbólica en la lección magistral del tema presentaremos un caso de dinámica en dos dimensiones correspondiente a la herradura de Smale.

14.3. Representación binaria de números decimales

En los siguientes apartados vamos a trabajar con secuencias en lugar de con números.

Tanto las secuencias como los números representan el mismo concepto abstracto de cantidad.

Un número no deja de ser una secuencia que se representa en base 10. Sin embargo, nombraremos a las secuencias aquellos números que se representan en bases diferentes al 10 denotando sus símbolos entre paréntesis.

Las secuencias, al igual que los números, se rigen por un sistema de numeración posicional. Las posiciones que ocupa cada símbolo determina la potencia de la base sobre la cual se multiplica cada símbolo. La tabla 1 muestra un ejemplo de número en base 10, en el que los posibles símbolos son $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Potencia	10^2	10^1	10^0		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
Símbolo	1	2	3		5	4	3
Potencia X Símbolo	100	20	3		0.5	0.04	0.003
Suma	123.543						

Tabla 1. Desarrollo de un número en baso 10

De esta forma y a modo de generalización, sea b la base, el alfabeto está compuesto por los símbolos $s_j = \{0, \dots, b-1\}$ y la secuencia se puede interpretar en base decimal como:

$$x = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} s_j b^j$$

La representación binaria de un número consiste en su representación en base 2 con los símbolos $\{0,1\}$. El propósito es representar los números comprendidos entre el 0 y el 1, de forma que las secuencias serán de la forma $s = (0.s_0 s_1 s_2 s_3 \dots)$ para números menores que el 1, mientras que el 1 se puede representar por $s = (0.1111 \dots)$ ó por $s = (1.0000 \dots)$.

Como podemos representar todos los números en formato $s = (0.s_0 s_1 s_2 s_3 \dots)$ obviaremos el primer cero y reescribiremos la secuencia como $s = (s_0 s_1 s_2 s_3 \dots)$.

Representación de una secuencia binaria como número decimal

Basándonos en la tabla 1, podremos representar una secuencia binaria s como un número decimal x a partir de:

$$x = s_0 2^{-1} + s_1 2^{-2} + s_2 2^{-3} + \cdots = \frac{s_0}{2} + \frac{s_1}{2^2} + \frac{s_2}{2^3} + \cdots$$

Ejemplo 1 | La secuencia binaria $s = (1001001)$ se representa en decimal como:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} = 0.5703125$$

Ejemplo 2 | La secuencia binaria periódica $s = (\overline{100})$ tiene como valor decimal:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \cdots\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^i = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{4}{7}$$

Representación de un número decimal como secuencia binaria

Esta representación se basa en la parte entera del resultado de multiplicar el número decimal por la base de forma continua, restando en cada paso dicha parte entera, hasta obtener el valor 1 o un valor repetido.

Ejemplo 3 | El número decimal $x = 0.34375$ se expresa como secuencia a partir de:

Índice	Número sin parte entera	X2	Símbolo (parte entera)
0	0.34375	0.6875	0
1	0.6875	1.375	1
2	0.375	0.75	0
3	0.75	1.5	1
4	0.5	1	1

De forma que la secuencia es $s = (01011)$.

Ejemplo 4 | El número decimal $x = \frac{5}{7}$ se expresa como secuencia a partir de:

Índice	Número sin parte entera	X2	Símbolo (parte entera)
0	5/7	10/7	1
1	3/7	6/7	0
2	6/7	12/7	1
3	5/7	10/7	1
4	...	...	...

Como volvemos a tener el mismo número sin parte entera se van a volver a producir los mismos resultados, de forma que se trata de una secuencia periódica que se representa por $s = (\overline{101})$.

14.4. Conceptos previos de dinámica simbólica

Itinerarios

Los puntos $x \in I$ cuya primera iteración sobre p_c cae fuera de I componen el subconjunto A. El conjunto Λ de todos los puntos $x \in I$ cuyas órbitas nunca abandonan I pertenece a $I - A$. El conjunto $I - A$ está compuesto por dos intervalos cerrados I_0 e I_1, estando I_0 a la izquierda de I_1, además de estar situados simétricamente respecto del 0.

Los puntos $x \in \Lambda$ nunca abandonan $I = I_0 \cup I_1$, de forma que para cualquier $x \in \Lambda$, $p_c^n(x) \in I_0 \cup I_1$.

Sea $x \in \Lambda$. El itinerario de x es la secuencia infinita de 0s y 1s dada por:

$$S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$$

Donde $s_j = 0$ si $p_c^j(x) \in I_0$ y $s_j = 1$ si $p_c^j(x) \in I_1$.

Ejemplo 5 | La órbita del punto fijo x^* es $\{x^*, x^*, x^*, x^*, \dots\}$ de forma que su itinerario es $S(x^*) = (111 \dots)$.

La órbita del punto fijo eventual $-x^*$ es $\{-x^*, x^*, x^*, x^*, \dots\}$ por lo que su itinerario es $S(-x^*) = (0111 \dots)$.

El otro punto fijo del sistema es $x_2^* = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4c}\right)$, cuya primera iteración es:

$$p_c(x_2^*) = (x_2^*)^2 + c = \frac{1}{4}\left(1 + 1 - 4c - 2\sqrt{1-4c}\right) + c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4c} = x_2^*$$

De este modo, su órbita será $\{x_2^*, x_2^*, x_2^*, \dots\}$, y su itinerario $S(x_2^*) = (000 \dots)$.

Espacio de secuencias

Para establecer un modelo de sistema para la dinámica de p_c sobre Λ necesitamos un espacio en el que tenga lugar el sistema dinámico. Este sistema no se va a dar en el espacio real ni en el complejo, sino en el espacio de secuencias.

El **espacio de secuencias** de dos símbolos es el conjunto:

$$\Sigma = \{(s_0 s_1 s_2 \dots)|s_j = 0 \; o \; 1\}$$

El conjunto Σ, por tanto, es el conjunto de todas las posibles secuencias de 0s y 1s, de forma que los elementos de Σ serán secuencias y no números. De este modo será necesario establecer unas métricas, una geometría, un criterio de ordenación…

Comencemos con determinados subconjuntos. El conjunto M_0 queda definido como el conjunto de secuencias cuyo primer símbolo es 0; asimismo, el conjunto M_1 queda determinado por las secuencias que empiezan por 1. Este criterio divide a Σ en dos partes iguales.

Podemos continuar definiendo el conjunto M_{01} o M_{00}, cuyos subíndices determinan los dos primeros símbolos de la secuencia. De nuevo, estos dos conjuntos dividen al conjunto M_0 en dos partes iguales.

Sean $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ y $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$ dos secuencias de Σ. La distancia entre las secuencias s y t es:

$$d[s,t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

Ejemplo 6 | Sean $s = (000 \dots)$, $t = (111 \dots)$ y $u = (0101 \dots)$. Las distancias entre ellas son:

$$d[s,t] = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$d[t,u] = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$d[s,u] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots\right) = \frac{2}{3}$$

Una función d se denomina **métrica de un conjunto** X si para cualquier $x, y, z \in X$ se cumplen las siguientes propiedades:

» $d[x, y] \geq 0$, y $d[x, y] = 0 \leftrightarrow x = y$.
» $d[x, y] = d[y, x]$.
» $d[x, z] \leq d[x, y] + d[y, z]$.

La pareja X, d se denomina espacio métrico.

El **teorema de proximidad**. Sean $s, t \in \Sigma$ de forma que $s_i = t_i$ para $i = 0, \dots, n$. Entonces, $d[s, t] \leq \frac{1}{2^n}$. Recíprocamente, s $d[s, t] < \frac{1}{2^n}$i, entonces $s_i = t_i$ para $i \leq n$.

Este teorema viene a decir que dos secuencias son próximas si sus primeros símbolos son iguales.

Ejemplo 7 | Sean las secuencias s y t. Si ambas secuencias difieren solo del :

» Primer símbolo, $d[s, t] = 1$.
» Segundo símbolo, $d[s, t] = 1/2$.
» Tercer símbolo, $d[s, t] = 1/4$.

14.5. El operador *shift*

El operador *shift* $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$ se define como:

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3)$$

Resulta sencilla la interpretación del operador *shift*, puesto que elimina el primer símbolo y desplaza el resto.

La aplicación iterativa del operador implica la eliminación de los primeros símbolos y el desplazamiento del resto, de forma que:

» $\sigma^2(s_0s_1s_2 \dots) = (s_2s_3s_4 \dots)$.
» $\sigma^3(s_0s_1s_2 \dots) = (s_3s_4s_5 \dots)$.
» $\sigma^n(s_0s_1s_2 \dots) = (s_ns_{n+1}s_{n+2} \dots)$.

Encontrar puntos periódicos de σ es una tarea simple. Si s es una secuencia que se repite del tipo $s = (s_0s_1 \dots s_{n-1}s_0s_1 \dots s_{n-1} \dots) = (\overline{s_0s_1 \dots s_{n-1}})$, entonces $\sigma^n(s) = s$. Asimismo, cualquier punto periódico de período n para σ debe ser una secuencia que se repite.

Propiedades periódicas del operador σ

Veamos algunas propiedades del operador σ. Por ejemplo, los únicos puntos fijos del operador son $(000 \dots)$ y $(111 \dots)$. Los puntos de período 2 son $(0101 \dots)$ y $(1010 \dots)$, de forma que $\sigma(0101 \dots) = (1010 \dots)$ y $\sigma(1010 \dots) = (0101 \dots)$.

Las órbitas que siguen los puntos de período 3 son:

$$(\overline{001}) \to (\overline{010}) \to (\overline{100}) \to (\overline{001})$$
$$(\overline{110}) \to (\overline{101}) \to (\overline{011}) \to (\overline{110})$$

Nótese la facilidad con la que se encuentran órbitas periódicas para el operador σ y lo complicado que resulta hacerlo para la función cuadrática $p_c(x)$.

Continuidad del operador

Sea $F: X \to X$ una función y sea X un conjunto con una métrica d. Entonces F es continua en$x_0 \in X$ si, para cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, si $d[x, x_0] < \delta$ entonces $d[F(x), F(x_0)] < \epsilon$. Decimos que F es una función continua si F es continua para cualquier valor de $x_0 \in X$.

Hemos retrocedido en el tiempo a los primeros cursos de cálculo para definir la continuidad de una función. Solo se trata de intentar definir la continuidad del operador σ. Aunque iremos poco a poco.

Comencemos por ver que σ es continua en el punto fijo $(000\dots)$. Asumamos que existe un $\epsilon > 0$, de forma que tenemos que encontrar un $\delta > 0$ que funcione. Así pues, si s es una secuencia con $d[s,(000\dots)] < \delta$, entonces $d[\sigma(s),(000\dots)] < \epsilon$. A pesar de que no conocemos qué secuencias de Σ tienen imágenes que están dentro de unos valores arbitrarios de ϵ de $(000\dots)$, sí que sabemos cuáles están a $1/2^n$ de $(000\dots)$ para cualquier valor de n, de forma que tomemos $1/2^n < \epsilon$.

De este modo, tenemos que elegir un δ que satisfaga $d[\sigma(s_0s_1s_2\dots),(000\dots)] \leq 1/2^n$. Por el teorema de proximidad, esto solo puede cumplirse para $s_i = 0, i = 0,1,\dots,n+1$, así que tomamos $\delta = 1/2^{n+1}$.

Por tanto, si $[(s_0s_1s_2\dots),(000\dots)] < \delta = 1/2^{n+1}$, entonces:

$$d[\sigma(s_0s_1s_2\dots),(000\dots)] = d[(s_1s_2s_3\dots),(000\dots)] \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$$

Teorema. La función $\sigma: \Sigma \to \Sigma$ es continua en todos los puntos de Σ.

Conjugación

Una vez hemos determinado nuestro modelo de sistema, vamos a relacionarlo con el sistema dinámico de $p_c(x)$ en Λ. Recordemos que $S: \Lambda \to \Sigma$. De hecho, se puede demostrar que $\Lambda \equiv \Sigma$.

Teorema. Si $x \in \Lambda$, entonces $S \circ p_c(x) = \sigma \circ S(x)$.

Si $x \in \Lambda$ tiene un itinerario $(s_0s_1s_2\dots)$, entonces por definición:

$$x \in I_{s_0}, p_c(x) \in I_{s_1}, p_c^2(x) \in I_{s_2}, \dots$$

De forma que:

$$S\big(p_c(x)\big) = (s_1s_2s_3) \equiv \sigma\big(S(x)\big)$$

La figura 1 describe este resultado.

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "p_c"] \arrow[d, "S"'] & \Lambda \arrow[d, "S"] \\
\Sigma \arrow[r, "\sigma"] & \Sigma
\end{tikzcd}
$$

Figura 1. Relación entre los operadores

Asimismo, también se cumple que $p_c \circ S^{-1}(x) = S^{-1} \circ \sigma(x)$. Ambos resultados se pueden extender a las sucesivas aplicaciones de la función *shift* y del operador p_c, de forma que verifican:

» $S \circ p_c^n(x) = \sigma^n \circ S(x)$.
» $p_c^n \circ S^{-1}(x) = S^{-1} \circ \sigma^n(x)$.

El diagrama de la figura 2 ilustra esta relación.

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "p_c"] \arrow[d, "S"'] & \Lambda \arrow[r, "p_c"] \arrow[d, "S"] & {} & {} \arrow[r, "p_c"] & \Lambda \arrow[d, "S"] \\
\Sigma \arrow[r, "\sigma"] & \Sigma \arrow[r, "\sigma"] & \cdots & {} \arrow[r, "\sigma"] & \Sigma
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "p_c"] & \Lambda \arrow[r, "p_c"] & {} & {} \arrow[r, "p_c"] & \Lambda \\
\Sigma \arrow[r, "\sigma"] \arrow[u, "S^{-1}"] & \Sigma \arrow[r, "\sigma"] \arrow[u, "S^{-1}"'] & \cdots & {} \arrow[r, "\sigma"] & \Sigma \arrow[u, "S^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

Figura 2. Relación entre los operadores

Teorema de conjugación. El operador *shift* sobre Σ está conjugado a p_c sobre Λ para $c < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4}$.

14.6. El conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor parte del segmento $[0,1]$. En cada una de las iteraciones se divide en 3 trozos iguales cada segmento y se elimina la parte intermedia. La figura 3 ilustra las sucesivas iteraciones de este conjunto.

Figura 3. Estructura del conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor K está compuesto por todas las partes que permanecen de forma que tras la primera iteración $K_1 = \left\{\left(0,\frac{1}{3}\right),\left(\frac{2}{3},1\right)\right\}$, tras la segunda iteración, $K_2 = \left\{\left(0,\frac{1}{9}\right),\left(\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right),\left(\frac{8}{9},1\right)\right\}$.

Para describir simbólicamente este conjunto recurriremos a las secuencias ternarias. De forma análoga a las secuencias binarias, las secuencias ternarias se escriben en base 3, siendo los símbolos de su alfabeto $\{0,1,2\}$.

Para representar un número decimal en forma de secuencia ternaria realizaremos los productos de dicho número por 3 quedándonos con la parte entera y repitiendo este proceso hasta alcanzar un número entero o un valor repetido.

Ejemplo 7 | La representación del número decima $x = 157/729$l en forma de secuencia ternaria se obtiene a partir de:

Índice	Número sin parte entera	X2	Símbolo (parte entera)
0	157/729	471/729	0
1	471/729	1413/729	1
2	684/729	2052/729	2
3	594/729	2052/729	2
4	324/729	972/729	1
5	243/729	1	1

Por lo que la secuencia es $s = (012211)$.

Para representar una secuencia ternaria en formato de número decimal, el proceso consiste en sumar los productos de los símbolos por la potencia de la posición que ocupan.

Ejemplo 8 | La secuencia ternaria $s = (\overline{012})$ tiene como valor decimal:

$$x = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \cdots = \frac{1}{9}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{27}\right)^i + 2\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{27}\right)^i = \frac{1}{9}\frac{27}{26} + 2\frac{1}{26} = \frac{5}{26}$$

Relacionemos las expresiones de las secuencias ternarias con el conjunto de Cantor. El primer dígito de la secuencia establece el segmento en el que nos encontramos en la primera iteración, de forma que si $s_0 = \{0,1,2\}$ estaremos en el segmento $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ o $x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, respectivamente.

Lo mismo sucede con el segundo símbolo de la secuencia y así sucesivamente. De este modo, cuando aparece el símbolo 0 indica que estamos en el primer tercio del segmento, el símbolo 1 corresponde al segundo tercio y el símbolo 2 se refiere al tercer tercio.

Por tanto, la secuencia ternaria tiene una relación directa con los puntos del conjunto de Cantor. En particular, si x tiene una expresión en secuencia ternaria que incluye un $s_i = 1$, entonces x pertenece a uno de los segmentos que ha sido eliminado en la construcción del conjunto K. De este modo, podemos definir al conjunto de Cantor como el conjunto de números reales $x \in [0,1] \in \mathbb{R}$ cuya expresión en forma de secuencia ternaria no contiene ningún 1.

Ejemplo 9 | ¿Pertenecen los valores $x = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \left\{\frac{26}{729}, \frac{478}{729}, \frac{495}{729}, \frac{619}{729}, \frac{681}{729}\right\}$ al conjunto de Cantor? Este ejercicio resultaría complicado de realizar sin la ayuda de la dinámica simbólica. Representemos cada uno de los números como una secuencia ternaria. Para ello será necesario rellenar la tabla para cada uno de ellos y, en el momento encontremos un 1, pararemos.

$$x_1 = \frac{26}{729}$$

Índice	Número sin parte entera	X2	Símbolo (parte entera)
0	26/729	78/729	0
1	78/729	234/729	0
2	234/729	702/729	0
3	702/729	2106/729	2
4	648/729	1944/729	2
5	486/729	2	2

De forma que $x_1 \in K$, siendo $s_{<1>} = 000222$.

$$x_2 = \frac{478}{729}$$

Índice	Número sin parte entera	$\times$ 3	Símbolo (parte entera)
0	478/729	1434/729	1

De forma que $x_1 \in K$, siendo $s_{<1>} = 000222$:

$$x_2 = \frac{478}{729}$$

Índice	Número sin parte entera	× 3	Símbolo (parte entera)
0	495/729	1485/729	2
1	27/729	81/729	0
2	81/729	243/729	0
3	243/729	1	1

Al haber un 1, $x_3 \notin K$:

$$x_4 = \frac{619}{729}$$

Índice	Número sin parte entera	× 3	Símbolo (parte entera)
0	619/729	1857/729	2
1	399/729	1197/729	1

Así pues, $x_4 \notin K$:

$$x_5 = \frac{681}{729}$$

Índice	Número sin parte entera	× 3	Símbolo (parte entera)
0	681/729	2043/729	2
1	585/729	1755/729	2
2	297/729	891/729	1

Directamente, $x_5 \notin K$

14.7. Referencias bibliográficas

Agrawal, S. (2015). *UCB mathematics*. https://math.berkeley.edu/~sagrawal/su15_math104/lec8_cantor.pdf

Devaney, R. (1989). *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison Wesley.

Devaney, R. L. (1992). *A first course in chaotic dynamical systems*. Universidad de Boston.

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

Herradura de Smale

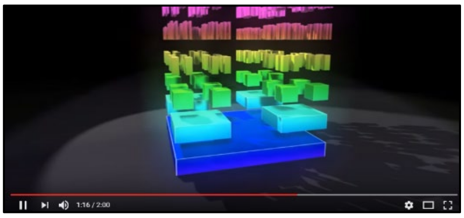
La sesión magistral correspondiente a este tema versará sobre la herradura de Smale. A lo largo del tema se ha desarrollado la dinámica simbólica para una dimensión. En el caso de la herradura de Smale aplicaremos la dinámica simbólica a dos dimensiones.

Accede al vídeo desde el aula virtual

No dejes de ver...

Cantor set 3D

En este vídeo se muestra el conjunto de Cantor en tres dimensiones.



Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://www.youtube.com/watch?v=R6lSGzL4cuI

+ Información

A fondo

Aplicación de los códigos de Gray al estudio de la teoría de la dinámica simbólica de mapas caóticos unimodales

En el mundo digital, la criptografía es una materia fundamental para la protección de la integridad y no corruptibilidad de los datos. Las matemáticas tienen mucho que ver en los algoritmos que se aplican. Asimismo, en este documento se realiza un estudio de la dinámica simbólica aplicándola sobre operadores conocidos.

Aplicación de los códigos de Gray al estudio de la teoría de la dinámica simbólica de mapas caóticos unimodales

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://digital.csic.es/bitstream/10261/16791/3/gray.pdf

Enlaces relacionados

Conjunto de Cantor

En esta página se analiza la paradoja del conjunto de Cantor, describiendo la diferencia entre la intuición inicial y el resultado final de un conjunto de dimensiones especiales.

Conjunto de Cantor

Accede a la página desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://enciclopedia.us.es/index.php/Conjunto_de_Cantor

El conjunto de Cantor y el triángulo de Sierpinski

Existe una relación entre estos dos conjuntos. Además de que su representación tiene la característica de un fractal, su generación es similar puesto que a partir de un conjunto lleno se va eliminando una parte del mismo en cada una de las iteraciones.

Juegos topológicos

Accede a la página desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web: https://topologia.wordpress.com/2008/12/19/el-conjunto-de-cantor-y-el-triangulo-de-sierpinski/

Bibliografía

Blanchard, F. Maass, A. Nogueira, A. (2000). *Topics in symbolic dynamics and applications*. Universidad de Cambridge.

Hao, B. L. y Zheng, W. M. (1998). *Applied symbolic dynamics and chaos*. World scientific publishing.

Lind, D. y Marcus, B. (2009). *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Universidad de Cambridge.

Moore, C. (1991). *Generalized shifts: unpredictability and undecidability in dynamical systems*. Nonlinearity.

Test

1. La representación binaria del número $x = 0.\overline{3}$ es:

A. $s = (10010)$.

B. $s = (\overline{01})$.

C. $s = (\overline{10})$.

D. Todas las anteriores son correctas.

2. La presentación decimal de la secuencia binaria $s = (100\overline{1101})$ es:

A. $x = 0.6875$.

B. $x = 73/120$.

C. $x = 0.608\overline{3}$.

D. $x = 0.6015625$.

3. La distancia entre las secuencias binarias $s = (\overline{100})$ y $t = (\overline{010})$ es:

A. $d[s,t] = 3/2$.

B. $d[s,t] = 3/4$.

C. $d[s,t] = 10/7$.

D. $d[s,t] = 12/7$.

4. ¿Cuál es la distancia máxima entre dos secuencias binarias?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 8.

5. ¿Cuál es la máxima distancia entre un punto de M_{01} y otro de M_{101}?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 8.

6. ¿Cuál es la mínima distancia entre un punto de M_{01} y otro de M_{101}?

A. 0.

B. ½.

C. 1.

D. $3/2$.

7. ¿Cuáles de las siguientes operaciones con el operador *shift* son correctas?

A. $\sigma(0100100) = (\overline{100})$.

B. $\sigma^3(0010101) = (010)$.

C. $\sigma^2(101010 \ldots) = (\overline{10})$.

D. $\sigma(\sigma(00000)) = (\bar{0})$.

8. La aplicación *shift* es conjugada a los polinomios cuadráticos del tipo $p_c(x) = x^2 + c$ para:

A. $c = -2$.

B. $c < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4x})$.

C. $c < -\frac{1}{4}(-5 + 2\sqrt{5})$.

D. Ningún valor de c.

9. El conjunto de Cantor está compuesto por:

A. Las secuencias binarias que no contienen ningún 1.

B. Los tercios que quedan en el exterior tras dividir el segmento [0,1] en partes iguales de forma sucesiva.

C. Números comprendidos en el conjunto $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

D. Ninguna de las anteriores es correcta.

10. Indica cuáles de las siguientes secuencias ternarias son parte del conjunto de Cantor:

A. $s = (0121012)$.

B. $s = (020022)$.

C. $s = (00002)$.

D. $s = (121122)$.