Ejercicios tipo examen
Sesión de refuerzo
Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos

Dra. Neus Garrido Sàez

Máster en Ingeniería Matemática y Computación
Escuela Superior en Ingeniería y Tecnología

Contenido

1

Ejercicio 1

Enunciado

Cuando un objeto absorbe calor del medio que lo rodea sigue la Ley de Newton, que expresa la rapidez con la que se enfría un objeto a partir de su temperatura T y la temperatura ambiente T_a con la expresión:

$$T' = K(T - T_a).$$

(a) Obtén la solución analítica, teniendo en cuenta que $T(t_0) = T_0$.

(b) Para $K = -0.5$ y temperatura ambiente la que haya en tu sala, representa el campo de direcciones en la malla $t = 0 + n$, $T = T_a - 1 + n$ $(n = 0, 1, 2)$.

(c) Determina el valor de K si una barra de metal a $20°C$ se introduce en un recipiente con agua hirviendo y su temperatura aumenta $2°C/s$.

(d) Obtén los puntos de equilibrio y determina si son atractores, repulsores o nodos.

(e) Representa el diagrama de bifurcación del sistema.

Ejercicio 1

Enunciado

Cuando un objeto absorbe calor del medio que lo rodea sigue la Ley de Newton, que expresa la rapidez con la que se enfría un objeto a partir de su temperatura T y la temperatura ambiente T_a con la expresión:

$$T' = K(T - T_a).$$

(a) Obtén la solución analítica, teniendo en cuenta que $T(t_0) = T_0$.
Solución.
EDO de variables separables:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = K(T - T_a) \quad &\rightarrow \quad \int \frac{1}{T - T_a} dT = \int K dt \\ &\rightarrow \quad \ln(T - T_a) = Kt + C \\ &\rightarrow \quad T - T_a = Ce^{Kt} \end{aligned}$$

- Solución general: $\boxed{T(t) = T_a + Ce^{Kt}}$
- Solución particular:

$$T(t_0) = T_0 \quad \rightarrow \quad T_0 = T_a + Ce^{Kt_0} \quad \rightarrow \quad C = (T_0 - T_a)e^{-Kt_0}$$

$$\boxed{T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{K(t - t_0)}}$$

Ejercicio 1

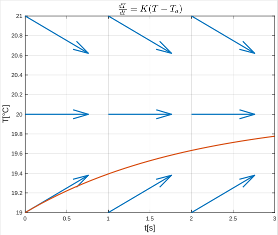
Enunciado

Cuando un objeto absorbe calor del medio que lo rodea sigue la Ley de Newton, que expresa la rapidez con la que se enfría un objeto a partir de su temperatura T y la temperatura ambiente T_a con la expresión:

$$T' = K(T - T_a).$$

(b) Para $K = -0.5$ y temperatura ambiente la que haya en tu sala, representa el campo de direcciones en la malla $t = 0 + n$, $T = T_a - 1 + n$ $(n = 0, 1, 2)$.
Solución. Tomamos $T_a = 20°C$.

$t = 0 + n$	0	0	0	1	1	1	2	2	2
$T = T_a - 1 + n$	19	20	21	19	20	21	19	20	21
$T' = -0.5(T - T_a)$	0.5	0	-0.5	0.5	0	-0.5	0.5	0	-0.5



Enunciado

Cuando un objeto absorbe calor del medio que lo rodea sigue la Ley de Newton, que expresa la rapidez con la que se enfría un objeto a partir de su temperatura T y la temperatura ambiente T_a con la expresión:

$$T' = K(T - T_a).$$

(c) Determina el valor de K si una barra de metal a $20°C$ se introduce en un recipiente con agua hirviendo y su temperatura aumenta $2°C/s$.

Solución.

$$T_0 = 20°C, \qquad T' = 2°C/s, \qquad T_a = 100°C$$

$$T' = K(T - T_a) \quad \rightarrow \quad K = \frac{T'}{T - T_a} = \frac{2}{20 - 100} = -0.025.$$

Ejercicio 1

Enunciado

Cuando un objeto absorbe calor del medio que lo rodea sigue la Ley de Newton, que expresa la rapidez con la que se enfría un objeto a partir de su temperatura T y la temperatura ambiente T_a con la expresión:

$$T' = K(T - T_a).$$

(d) Obtén los puntos de equilibrio y determina si son atractores, repulsores o nodos.
Solución.

- Puntos de equilibrio:

$$f(T) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K(T - T_a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T^* = T_a$$

- Dinámica de los puntos de equilibrio:

$$f'(T) = K \quad \rightarrow \quad f'(T^*) = K$$

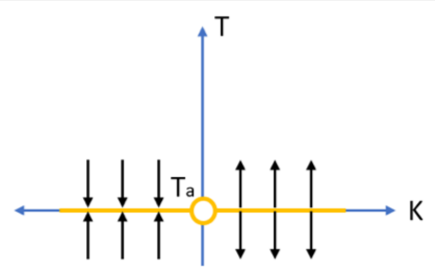
➔ $K < 0$: T^* atractor
➔ $K > 0$: T^* repulsor
➔ $K = 0$: todos los puntos son de equilibrio y son nodos

Enunciado

Cuando un objeto absorbe calor del medio que lo rodea sigue la Ley de Newton, que expresa la rapidez con la que se enfría un objeto a partir de su temperatura T y la temperatura ambiente T_a con la expresión:

$$T' = K(T - T_a).$$

(e) Representa el diagrama de bifurcación del sistema.
Solución.



2

Ejercicio 2

Ejercicio 2

Enunciado

Considera el siguiente sistema dinámico: $\begin{cases} x' &= & x - y^2 \\ y' &= & -y \end{cases}$

(1) Calcula los puntos fijos y de equilibrio.

(2) Linealiza el sistema y calcula los valores propios y di de qué tipo son los puntos de equilibrio. Esboza un dibujo.

(3) Vuelve al sistema no lineal y resuélvelo hasta donde sepas.

Ejercicio 2

Enunciado

Considera el siguiente sistema dinámico: $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x - y^2 \\ y' & = & -y \end{array} \right.$

(1) Calcula los puntos fijos y de equilibrio.

(2) Linealiza el sistema y calcula los valores propios y di de qué tipo son los puntos de equilibrio. Esboza un dibujo.

(3) Vuelve al sistema no lineal y resuélvelo hasta donde sepas.

(1) Puntos fijos:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y^2 & = & x \\ -y & = & y \end{array} \right. \Rightarrow \quad X^F = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \text{ (eje de abscisas)}$$

Puntos de equilibrio:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y^2 & = & 0 \\ -y & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \quad X^* = (0,0)$$

Enunciado

Considera el siguiente sistema dinámico: $\begin{cases} x' &= & x - y^2 \\ y' &= & -y \end{cases}$

(1) Calcula los puntos fijos y de equilibrio.

(2) Linealiza el sistema y calcula los valores propios y di de qué tipo son los puntos de equilibrio. Esboza un dibujo.

(3) Vuelve al sistema no lineal y resuélvelo hasta donde sepas.

(2) Sistema linealizado: $X' = AX$

$$J_F(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & -2y \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = J_F(X^*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Valores y vectores propios:

$$\lambda_1 = 1, \quad \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = -1, \quad \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_2 < 0 < \lambda_1 \Rightarrow X^*$ punto de silla

Enunciado

Considera el siguiente sistema dinámico: $\begin{cases} x' &= x - y^2 \\ y' &= -y \end{cases}$

(1) Calcula los puntos fijos y de equilibrio.

(2) Linealiza el sistema y calcula los valores propios y di de qué tipo son los puntos de equilibrio. Esboza un dibujo.

(3) Vuelve al sistema no lineal y resuélvelo hasta donde sepas.

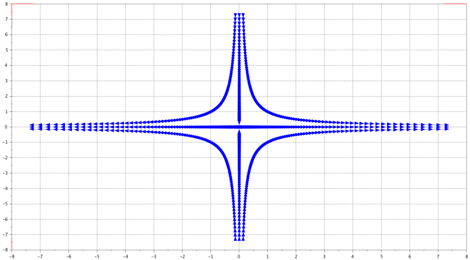
(2) Plano de fases:

Solución general:

$$X(t) = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = & C_1 e^t \\ y(t) = & C_2 e^{-t} \end{cases}$$

- Eje X: recta inestable
- Eje Y: recta estable



Enunciado

Considera el siguiente sistema dinámico: $\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x - y^2 \\ y' & = & -y \end{array} \right.$

(1) Calcula los puntos fijos y de equilibrio.

(2) Linealiza el sistema y calcula los valores propios y di de qué tipo son los puntos de equilibrio. Esboza un dibujo.

(3) Vuelve al sistema no lineal y resuélvelo hasta donde sepas.

(3)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x - y^2 \\ y' & = & -y \end{array} \right. \Rightarrow y(t) = K_1 e^{-t}$$

Entonces,

$$x' = x - y^2 = x - K_1^2 e^{-2t}$$

Solución general:

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t)$$

Ecuación homogénea: $x' = x \Rightarrow \boxed{x_H(t) = K_2 e^t}$

Conjetura: $x_P(t) = K_3 e^{-2t} \Rightarrow x'(t) = -2K_3 e^{-2t}$

Enunciado

Considera el siguiente sistema dinámico: $\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x - y^2 \\ y' & = & -y \end{array} \right.$

(1) Calcula los puntos fijos y de equilibrio.

(2) Linealiza el sistema y calcula los valores propios y di de qué tipo son los puntos de equilibrio. Esboza un dibujo.

(3) Vuelve al sistema no lineal y resuélvelo hasta donde sepas.

(3) Igualando las expresiones:

$$\left. \begin{array}{l} x'(t) = -\,2K_3e^{-2t} \\ x'(t) = x(t) + K_1^2e^{-2t} = K_3e^{-2t} + K_1^2e^{-2t} \end{array} \right\} \Rightarrow K_3 = -\frac{1}{3}K_1^2$$

$$\boxed{x_P(t) = -\frac{1}{3}K_1^2e^{-2t}}$$

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t) = K_2e^t - \frac{1}{3}K_1^2e^{-2t}$$

Solución general del sistema no lineal: $\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & K_2e^t - \frac{1}{3}K_1^2e^{-2t} \\ y(t) & = & K_1e^{-t} \end{array} \right.$

3

Ejercicio 3

Ejercicio 3

Enunciado

Realiza un estudio dinámico complejo de la siguiente familia de funciones:

$$g_\theta(z) = \frac{z(1+\theta z)}{2+\theta z}$$

Ejercicio 3

Enunciado

Realiza un estudio dinámico complejo de la siguiente familia de funciones:

$$g_\theta(z) = \frac{z(1+\theta z)}{2+\theta z}$$

- Puntos fijos:

$$g_\theta(z) = z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-z}{2+\theta z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^* = 0$$

Ejercicio 3

Enunciado

Realiza un estudio dinámico complejo de la siguiente familia de funciones:

$$g_\theta(z) = \frac{z(1+\theta z)}{2+\theta z}$$

- Puntos fijos:

$$g_\theta(z) = z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-z}{2+\theta z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^* = 0$$

- Estabilidad del punto fijo:

$$g'_\theta(z) = \frac{\theta^2 z^2 + 4\theta z + 2}{(\theta z + 2)^2} \quad \Rightarrow \quad |g'_\theta(z^*)| = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow z^* = 0$ es atractor

Enunciado

Realiza un estudio dinámico complejo de la siguiente familia de funciones:

$$g_\theta(z) = \frac{z(1+\theta z)}{2+\theta z}$$

- Puntos fijos:

$$g_\theta(z) = z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-z}{2+\theta z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^* = 0$$

- Estabilidad del punto fijo:

$$g'_\theta(z) = \frac{\theta^2 z^2 + 4\theta z + 2}{(\theta z + 2)^2} \quad \Rightarrow \quad |g'_\theta(z^*)| = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow z^* = 0$ es atractor

- Puntos críticos:

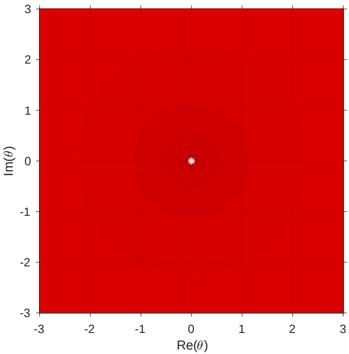
$$g'_\theta(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z_1^C(\theta) = \dfrac{-2-\sqrt{2}}{\theta} \\ z_2^C(\theta) = \dfrac{-2+\sqrt{2}}{\theta} \end{cases}$$

Enunciado

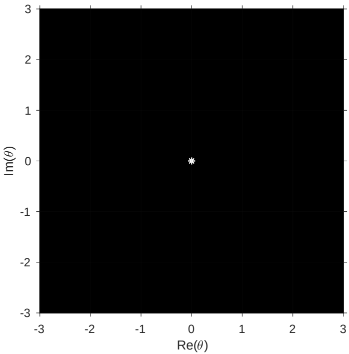
Realiza un estudio dinámico complejo de la siguiente familia de funciones:

$$g_\theta(z) = \frac{z(1+\theta z)}{2+\theta z}$$

Planos de parámetros



(a) $z_1^C(\theta)$



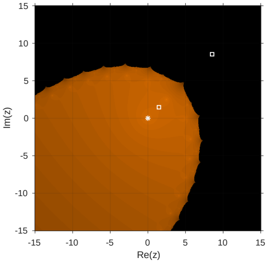
(b) $z_2^C(\theta)$

Enunciado

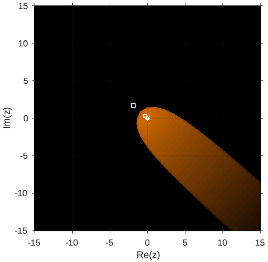
Realiza un estudio dinámico complejo de la siguiente familia de funciones:

$$g_\theta(z) = \frac{z(1+\theta z)}{2+\theta z}$$

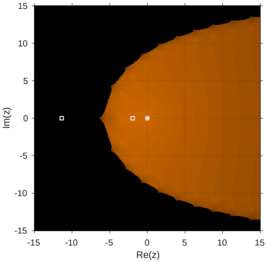
Planos dinámicos



(c) $\theta = -0.2 + 0.2i$



(d) $\theta = 1 + 0.9i$



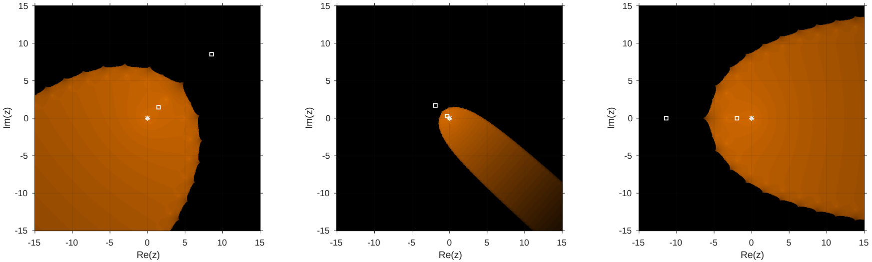
(e) $\theta = 0.3$

Enunciado

Realiza un estudio dinámico complejo de la siguiente familia de funciones:

$$g_\theta(z) = \frac{z(1+\theta z)}{2+\theta z}$$

Planos dinámicos



(f) $\theta = -0.2 + 0.2i$ (g) $\theta = 1 + 0.9i$ (h) $\theta = 0.3$

¿Conclusiones?

4

Ejercicio 4

Enunciado

Realiza un estudio dinámico complejo completo del método iterativo

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - 7f(y_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

aplicado sobre el polinomio $p_\lambda(z) = z^2 + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 4

- Operador de punto fijo:

Ejercicio 4

- Operador de punto fijo:

$$y = \frac{z^2 - \lambda}{2z}, \qquad R_\lambda(z) = y - \frac{p(z)}{p(z) - 7p(y)} = \frac{2z^4 + 3\lambda z^2 - 3\lambda^2}{3z^3 + 7\lambda z}$$

Ejercicio 4

- Operador de punto fijo:

$$y = \frac{z^2 - \lambda}{2z}, \qquad R_\lambda(z) = y - \frac{p(z)}{p(z) - 7p(y)} = \frac{2z^4 + 3\lambda z^2 - 3\lambda^2}{3z^3 + 7\lambda z}$$

- Puntos fijos:

$$R_\lambda(z^F) = z^F$$

Ejercicio 4

- Operador de punto fijo:

$$y = \frac{z^2 - \lambda}{2z}, \qquad R_\lambda(z) = y - \frac{p(z)}{p(z) - 7p(y)} = \frac{2z^4 + 3\lambda z^2 - 3\lambda^2}{3z^3 + 7\lambda z}$$

- Puntos fijos:

$$R_\lambda(z^F) = z^F \quad \Leftrightarrow \quad z^F = \begin{cases} z_1^F = -i\sqrt{\lambda}, \\ z_2^F = i\sqrt{\lambda}, \\ z_3^F = -i\sqrt{3\lambda} \\ z_4^F = i\sqrt{3\lambda} \end{cases}$$

Ejercicio 4

- Operador de punto fijo:

$$y = \frac{z^2 - \lambda}{2z}, \qquad R_\lambda(z) = y - \frac{p(z)}{p(z) - 7p(y)} = \frac{2z^4 + 3\lambda z^2 - 3\lambda^2}{3z^3 + 7\lambda z}$$

- Puntos fijos:

$$R_\lambda(z^F) = z^F \quad \Leftrightarrow \quad z^F = \begin{cases} z_1^F = -i\sqrt{\lambda}, \\ z_2^F = i\sqrt{\lambda}, \\ z_3^F = -i\sqrt{3\lambda} \\ z_4^F = i\sqrt{3\lambda} \end{cases}$$

- Estabilidad:

$$R'_\lambda(z) = \frac{3(z^2 + \lambda)^2(2z^2 + 7\lambda)}{(3z^3 + 7\lambda z)^2}$$

Ejercicio 4

- Operador de punto fijo:

$$y = \frac{z^2 - \lambda}{2z}, \qquad R_\lambda(z) = y - \frac{p(z)}{p(z) - 7p(y)} = \frac{2z^4 + 3\lambda z^2 - 3\lambda^2}{3z^3 + 7\lambda z}$$

- Puntos fijos:

$$R_\lambda(z^F) = z^F \quad \Leftrightarrow \quad z^F = \begin{cases} z_1^F = -i\sqrt{\lambda}, \\ z_2^F = i\sqrt{\lambda}, \\ z_3^F = -i\sqrt{3\lambda} \\ z_4^F = i\sqrt{3\lambda} \end{cases}$$

- Estabilidad:

$$R'_\lambda(z) = \frac{3(z^2+\lambda)^2(2z^2+7\lambda)}{(3z^3+7\lambda z)^2} \Rightarrow \begin{cases} |R_\lambda(z_{1,2}^F)| = 0 < 1 & \Rightarrow z_1^F \text{ y } z_2^F \text{ superatractores} \\ |R_\lambda(z_{3,4}^F)| = 1 & \Rightarrow z_3^F \text{ y } z_4^F \text{ neutros} \end{cases}$$

Ejercicio 4

- Operador de punto fijo:

$$y = \frac{z^2 - \lambda}{2z}, \qquad R_\lambda(z) = y - \frac{p(z)}{p(z) - 7p(y)} = \frac{2z^4 + 3\lambda z^2 - 3\lambda^2}{3z^3 + 7\lambda z}$$

- Puntos fijos:

$$R_\lambda(z^F) = z^F \quad \Leftrightarrow \quad z^F = \begin{cases} z_1^F = -i\sqrt{\lambda}, \\ z_2^F = i\sqrt{\lambda}, \\ z_3^F = -i\sqrt{3\lambda} \\ z_4^F = i\sqrt{3\lambda} \end{cases}$$

- Estabilidad:

$$R'_\lambda(z) = \frac{3(z^2+\lambda)^2(2z^2+7\lambda)}{(3z^3+7\lambda z)^2} \Rightarrow \begin{cases} |R_\lambda(z_{1,2}^F)| = 0 < 1 & \Rightarrow z_1^F \text{ y } z_2^F \text{ superatractores} \\ |R_\lambda(z_{3,4}^F)| = 1 & \Rightarrow z_3^F \text{ y } z_4^F \text{ neutros} \end{cases}$$

- Puntos críticos libres:

$$R'_\lambda(z) = 0$$

Ejercicio 4

- Operador de punto fijo:

$$y = \frac{z^2 - \lambda}{2z}, \qquad R_\lambda(z) = y - \frac{p(z)}{p(z) - 7p(y)} = \frac{2z^4 + 3\lambda z^2 - 3\lambda^2}{3z^3 + 7\lambda z}$$

- Puntos fijos:

$$R_\lambda(z^F) = z^F \quad \Leftrightarrow \quad z^F = \begin{cases} z_1^F = -i\sqrt{\lambda}, \\ z_2^F = i\sqrt{\lambda}, \\ z_3^F = -i\sqrt{3\lambda} \\ z_4^F = i\sqrt{3\lambda} \end{cases}$$

- Estabilidad:

$$R'_\lambda(z) = \frac{3(z^2+\lambda)^2(2z^2+7\lambda)}{(3z^3+7\lambda z)^2} \Rightarrow \begin{cases} |R_\lambda(z_{1,2}^F)| = 0 < 1 & \Rightarrow z_1^F \text{ y } z_2^F \text{ superatractores} \\ |R_\lambda(z_{3,4}^F)| = 1 & \Rightarrow z_3^F \text{ y } z_4^F \text{ neutros} \end{cases}$$

- Puntos críticos libres:

$$R'_\lambda(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^C = \left\{ -i\sqrt{\lambda}, i\sqrt{\lambda}, -i\sqrt{\frac{7\lambda}{2}}, i\sqrt{\frac{7\lambda}{2}} \right\}$$

Ejercicio 4

- Operador de punto fijo:

$$y = \frac{z^2 - \lambda}{2z}, \qquad R_\lambda(z) = y - \frac{p(z)}{p(z) - 7p(y)} = \frac{2z^4 + 3\lambda z^2 - 3\lambda^2}{3z^3 + 7\lambda z}$$

- Puntos fijos:

$$R_\lambda(z^F) = z^F \quad \Leftrightarrow \quad z^F = \begin{cases} z_1^F = -i\sqrt{\lambda}, \\ z_2^F = i\sqrt{\lambda}, \\ z_3^F = -i\sqrt{3\lambda} \\ z_4^F = i\sqrt{3\lambda} \end{cases}$$

- Estabilidad:

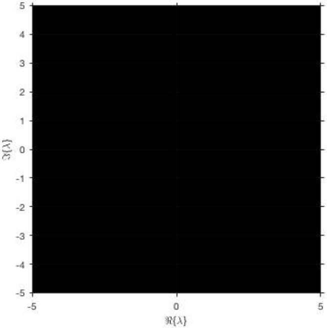
$$R'_\lambda(z) = \frac{3(z^2+\lambda)^2(2z^2+7\lambda)}{(3z^3+7\lambda z)^2} \Rightarrow \begin{cases} |R_\lambda(z_{1,2}^F)| = 0 < 1 \quad \Rightarrow z_1^F \text{ y } z_2^F \text{ superatractores} \\ |R_\lambda(z_{3,4}^F)| = 1 \quad \Rightarrow z_3^F \text{ y } z_4^F \text{ neutros} \end{cases}$$

- Puntos críticos libres:

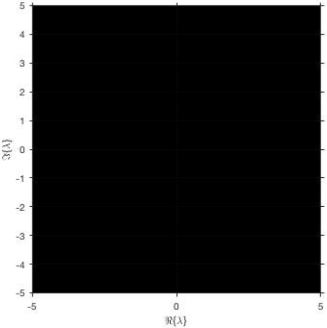
$$R'_\lambda(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^C = \left\{-i\sqrt{\lambda}, i\sqrt{\lambda}, -i\sqrt{\frac{7\lambda}{2}}, i\sqrt{\frac{7\lambda}{2}}\right\}$$

$$cr_1 = -i\sqrt{\frac{7\lambda}{2}}, \qquad cr_2 = i\sqrt{\frac{7\lambda}{2}}$$

Planos de parámetros

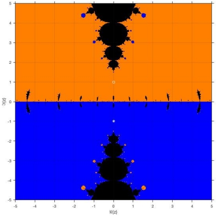


(i) cr_1

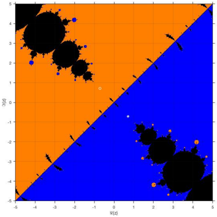


(j) cr_2

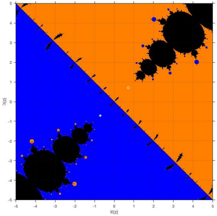
Planos dinámicos $z_1^F = -i\sqrt{\lambda}$ $z_2^F = i\sqrt{\lambda}$



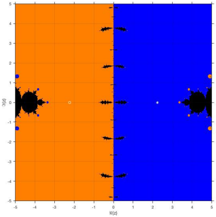
(k) $\lambda = 1$



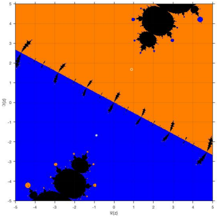
(l) $\lambda = i$



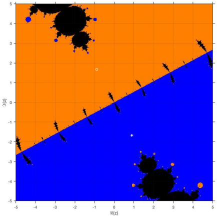
(m) $\lambda = -i$



(n) $\lambda = -5$



(ñ) $\lambda = 2 - 3i$



(o) $\lambda = 2 + 3i$

unir
LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET