Conclusiones Laboratorio 1: Sistemas dinámicos continuos

Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos

Dra. Neus Garrido Sàez

Máster en Ingeniería Matemática y Computación
Escuela Superior en Ingeniería y Tecnología

Laboratorio 1: Sistemas dinámicos continuos

Objetivos

- Consolidar los conocimientos adquiridos sobre sistemas dinámicos continuos.
- Implementar las representaciones de sistemas dinámicos continuos fundamentales.
- Estudiar las conclusiones obtenidas a partir de las gráficas generadas.

Entrega

- Documento Word con los comentarios y soluciones (.doc, .docx)
- Código fuente de Matlab o Scilab implementado (.m, .sce)
- (Si lo hacemos con la plantilla de LaTeX: entregamos el PDF)

Indicaciones

- Entrega individual
- Plazo máximo: 04/05/2021

Descripción del laboratorio

Uno de los sistemas dinámicos continuos caracterizado por su comportamiento caótico es el sistema de Lorenz. Este describe el fenómeno de convección de partículas en movimiento bajo la influencia de cambios en la temperatura. Consideraremos la siguiente simplificación del sistema de Lorenz:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \sigma(y-x), \\ y' & = & \rho x - y - xz, \\ z' & = & xy - \beta z, \end{array}\right. \qquad \sigma, \beta, \rho > 0, \quad \sigma > \beta + 1,$$

- $x(t)$: intensidad del movimiento
- $y(t)$: variación horizontal de la temperatura
- $z(t)$: variación vertical de la temperatura

1

Ejercicio 1

Ejercicio 1

Enunciado

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & \sigma(y-x), \\ y' & = & \rho x - y - xz, \\ z' & = & xy - \beta z, \end{array} \right. \qquad \sigma, \beta, \rho > 0, \quad \sigma > \beta + 1,$$

(a) Para $\rho < 1$, calcula los puntos de equilibrio reales del sistema de Lorenz y determina su estabilidad.

(b) Consideremos $\rho = 1$ y $z' = z = 0$. Determina la solución del sistema lineal resultante de forma analítica y utilizando la función `dsolve` de MATLAB. Comprueba que las dos soluciones generales coinciden.
Representa el campo de direcciones para tres valores distintos de $\sigma > 0$. Muestra las gráficas obtenidas y comenta los resultados alcanzados.

Solución

(a) $\rho < 1$, **puntos fijos reales y estabilidad:**

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & 0 \\ y' & = & 0 \\ z' & = & 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} \sigma(y-x) & = & 0 \\ \rho x - y - xz & = & 0 \\ xy - \beta z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$X_1^* = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right], \qquad X_2^* = \left[\begin{array}{c} \sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \rho - 1 \end{array}\right], \qquad X_3^* = \left[\begin{array}{c} -\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ -\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \rho - 1 \end{array}\right]$$

Si $\rho < 1$:

$$X_1^* \in \mathbb{R}^3, \qquad X_2^*, X_3^* \notin \mathbb{R}^3$$

Para determinar la estabilidad, linealizamos el sistema:

$$J(X) = \left[\begin{array}{ccc} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad J(X_1^*) = A = \left[\begin{array}{ccc} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{array}\right]$$

Solución

(a) El sistema linealizado $X' = AX$ tiene valores propios:

$$\lambda_1 = -\beta < 0, \qquad \lambda_{2,3} = \frac{-(\sigma+1) \pm \sqrt{(\sigma+1)^2 - 4\sigma(1-\rho)}}{2}.$$

Con $\rho \in (0,1)$, se cumple:

$$\sqrt{(\sigma+1)^2 - 4\sigma(1-\rho)} < (\sigma+1) \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_2 < 0, \quad \lambda_3 < 0$$

X_1^* es un sumidero

Ejercicio 1

Solución

(b) $\rho = 1$, $z' = z = 0$, **solución general y campo de direcciones:**

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & \sigma(y-x), \\ y' & = & x-y, \end{array} \right. \qquad \sigma > 0,$$

Solución general de forma analítica:

Matricialmente, $X' = AX$ con

$$A = \left[\begin{array}{cc} -\sigma & \sigma \\ 1 & -1 \end{array} \right].$$

Valores y vectores propios de A:

$$\lambda_1 = 0, \quad \vec{v}_1 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right], \qquad \lambda_2 = -\sigma - 1, \quad \vec{v}_2 = \left[\begin{array}{c} -\sigma \\ 1 \end{array} \right]$$

Solución general:

$$\Rightarrow \quad X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = C_1 - \sigma C_2 e^{(-\sigma-1)t} \\ y(t) = C_1 + C_2 e^{(-\sigma-1)t} \end{array} \right.$$

Solución

(b) $\rho = 1$, $z' = z = 0$, **solución general y campo de direcciones:**

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & \sigma(y-x), \\ y' & = & x-y, \end{array} \right. \qquad \sigma > 0,$$

Solución general con `dsolve`:

```
>> syms x(t) y(t)
>> syms s
>> eqns=[diff(x,t)==s*(y-x), diff(y,t)==x-y];

>> [solx, soly]=dsolve(eqns)

solx =
C2 - C1*s*exp(-t*(s + 1))
soly =
C2 + C1*exp(-t*(s + 1))
```

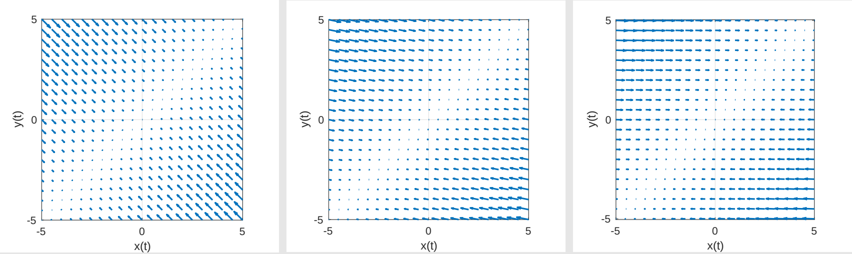
Solución

(b) $\rho = 1$, $z' = z = 0$, **solución general y campo de direcciones:**

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x), \\ y' = x - y, \end{cases} \qquad \sigma > 0,$$

Campo de direcciones:

```
>> A=[-s s; 1 -1];
>> campo_direcciones2D(A)
```



(a) $\sigma = 1$ (b) $\sigma = 5$ (c) $\sigma = 30$

2

Ejercicio 2

Ejercicio 2

Enunciado

A partir de la solución general obtenida en el Ejercicio 1, implementa la función `LorenzCD.m` que muestre las siguientes gráficas:

- Campo de direcciones del sistema lineal para cualquier valor de $\sigma > 0$ y $[x, y] \in [-5, 5] \times [-5, 5]$.
- Solución particular del sistema.
- Órbita de la solución particular.

Copia el código de la función en este documento y describe brevemente su funcionamiento.

```
function LorenzCD(s, t0, x0, y0)
    ...
    ...
    ...
end
```

3

Ejercicio 3

Ejercicio 3

Enunciado

Aplica la función `LorenzCD.m` con $\sigma = 1$ y $\sigma = 5$. Muestra y describe los resultados que has alcanzado para las soluciones particulares obtenidas con las siguientes condiciones sobre la solución:

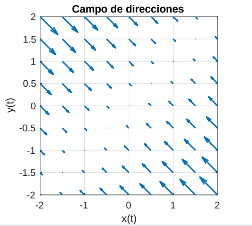
- $(x(0), y(0)) = (0.5, 0)$
- $(x(1), y(1) = (2, 1)$

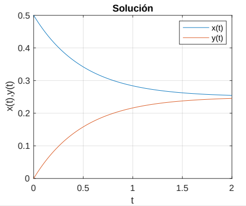
Representa el campo de direcciones en $[x, y] \in [-2, 2] \times [-2, 2]$, y la solución particular tomando $t \in [0, 2]$.

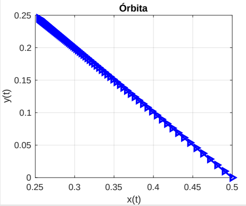
Solución

- $(x(0), y(0)) = (0.5, 0)$:

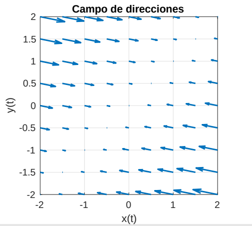
```
>> LorenzCD(1,0,0.5,0)
```

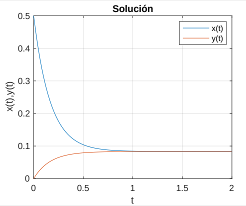


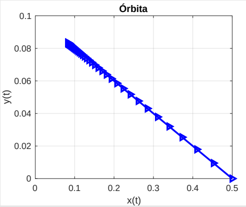





```
>> LorenzCD(5,0,0.5,0)
```





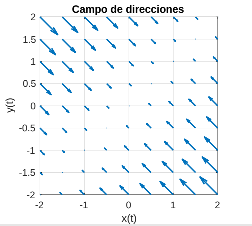


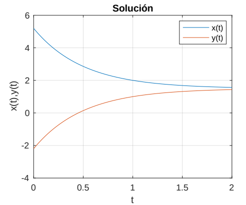
Ejercicio 3

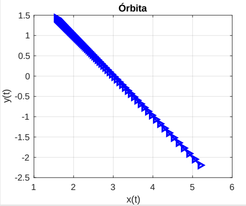
Solución

- $(x(1), y(1)) = (2, 1)$:

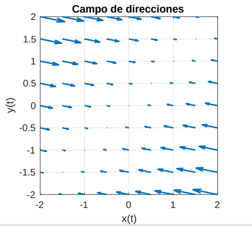
```
>> LorenzCD(1,1,2,1)
```

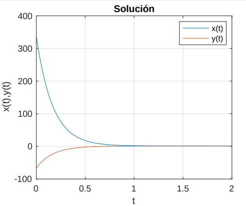


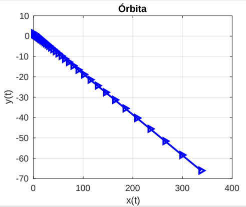





```
>> LorenzCD(5,1,2,1)
```







unir

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET