Alicia Cordero, Neus Garrido Juan R. Torregrosa

INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

Contenido

- Introducción
- Métodos de paso fijo
  - Método de los rectángulos
  - Método de trapecios
  - Regla de Simpson
  - Método de Romberg
- Métodos de paso variable
  - Método de Monte-Carlo
- Métodos adaptativos
- Integrales impropias e infinitas

- Longitud de arco

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+\cos^2 x}\ dx$$

- Función de Bessel

$$J_n(x) = \frac{1}{x}\int_0^{\pi} \cos(x\,sen\theta - n\theta)\ d\theta$$

- Función error

$$erf\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x} e^{-t^2}\ dt$$

- Función de distribución normal en un proceso de fabricación

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\ dt$$

La fuerza total ejercida por el mástil de un velero

$$F = \int_0^{30} f(z)dz$$

z es la distancia vertical a la cubierta.

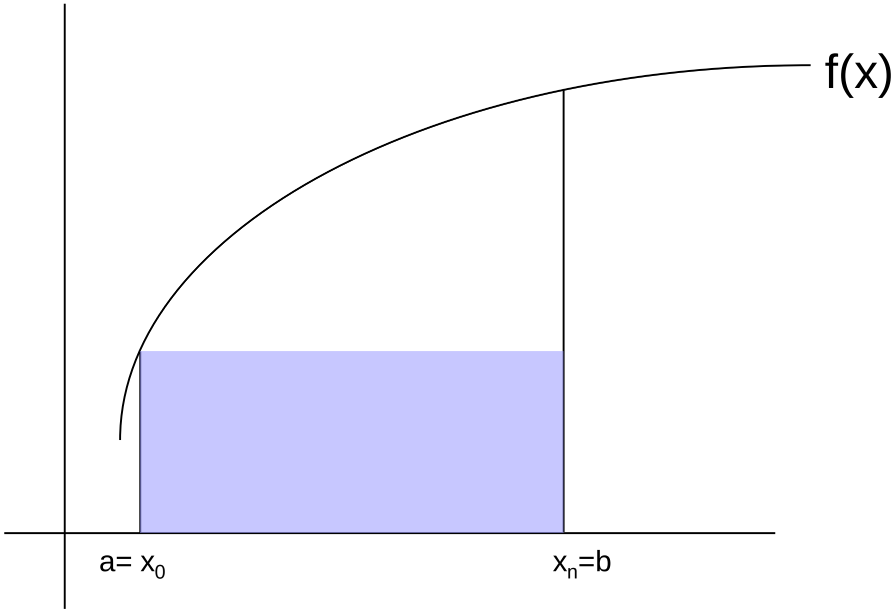
Se utiliza un modelo a escala en un túnel de viento para medir la fuerza ejercida por el mástil en diferentes puntos del mismo. En la siguiente tabla se observan dichas mediciones en función de la distancia respecto a la cubierta:

z	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
f(z)	190	141	104	77.5	57.4	42.5	31.5	23.3	17.3	12.8	9.5

El cálculo de la fuerza total, es decir, de una integral definida cuyo integrando no posee una expresión analítica, es imprescindible para un correcto diseño del mástil.

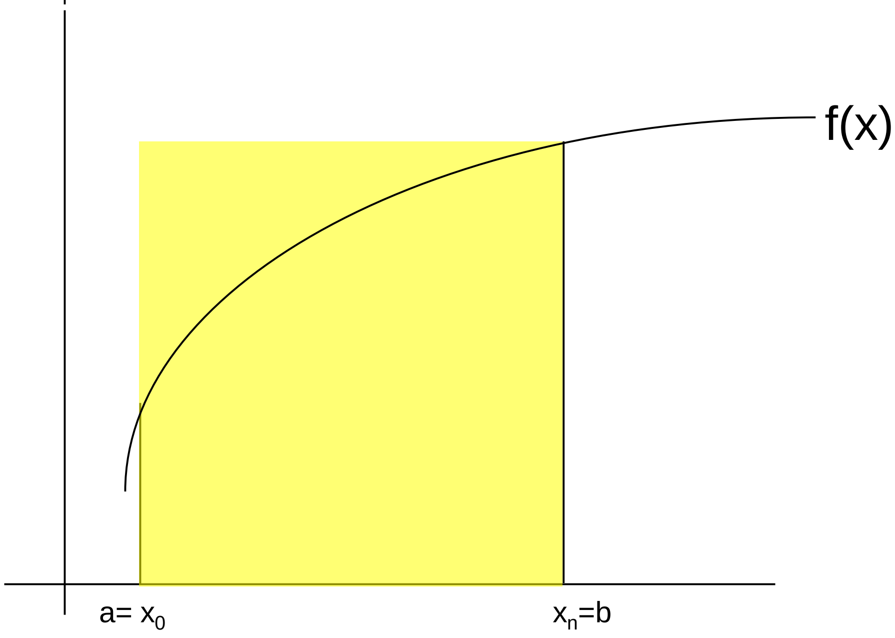
¿Cómo determinar el valor de la integral ?

Método de los rectángulos



Por defecto:

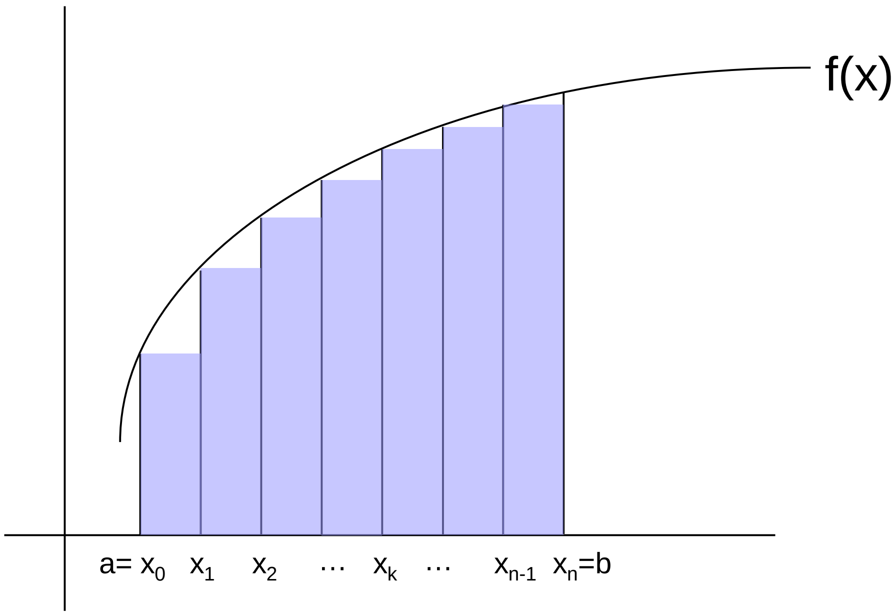
$$\int_a^b f(x)dx \approx h\, f(x_0) = (b-a)\, f(a)$$



Por exceso:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\, f(x_n) = (b-a)\, f(b)$$

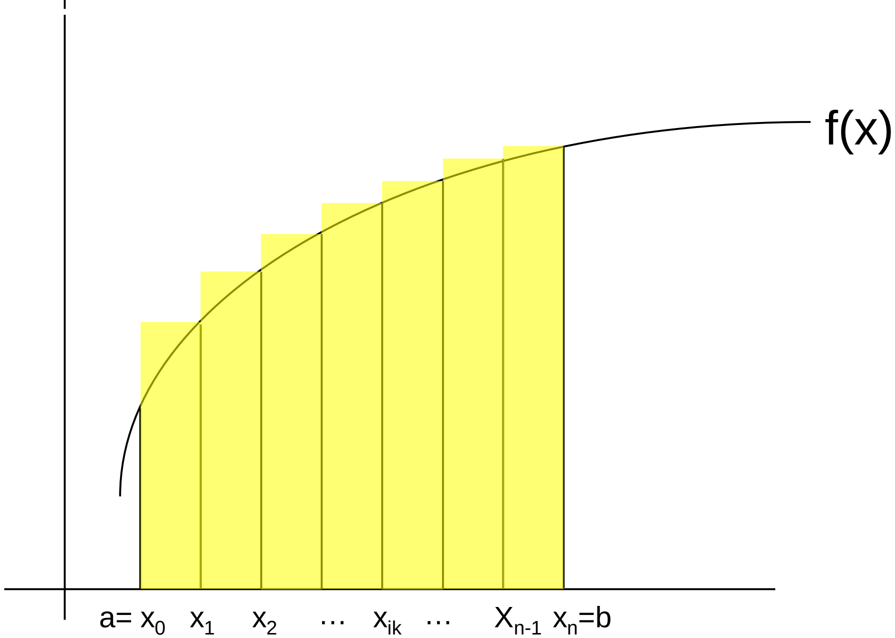
Método de los rectángulos



Por defecto:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

$$x_k = a + kh,\ k = 0,1,\ldots,n,\quad h = \frac{b-a}{n}$$



Por exceso:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

- Aplica el método de los rectángulos a la integral

$$\int_0^1 x\, arctg(x)\, dx$$

- Partición en n subintervalos:

$$h = \frac{b-a}{n}; \quad x_k = kh, \quad k = 0,1, \dots, n$$

- Rectángulos por defecto

$$R_d = h\sum_{k=0}^{n-1} x_k\, arctg(x_k)$$

- Rectángulos por exceso

$$R_e = h\sum_{k=1}^{n} x_k\, arctg(x_k)$$

- Aplica el método de los rectángulos con n =10 a la integral

$$\int_0^1 x\,atan(x)\,dx$$

- Partición en 10 subintervalos:

$$h=\frac{1}{10};\quad x_k=0,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\dots,0.9,\ 1$$

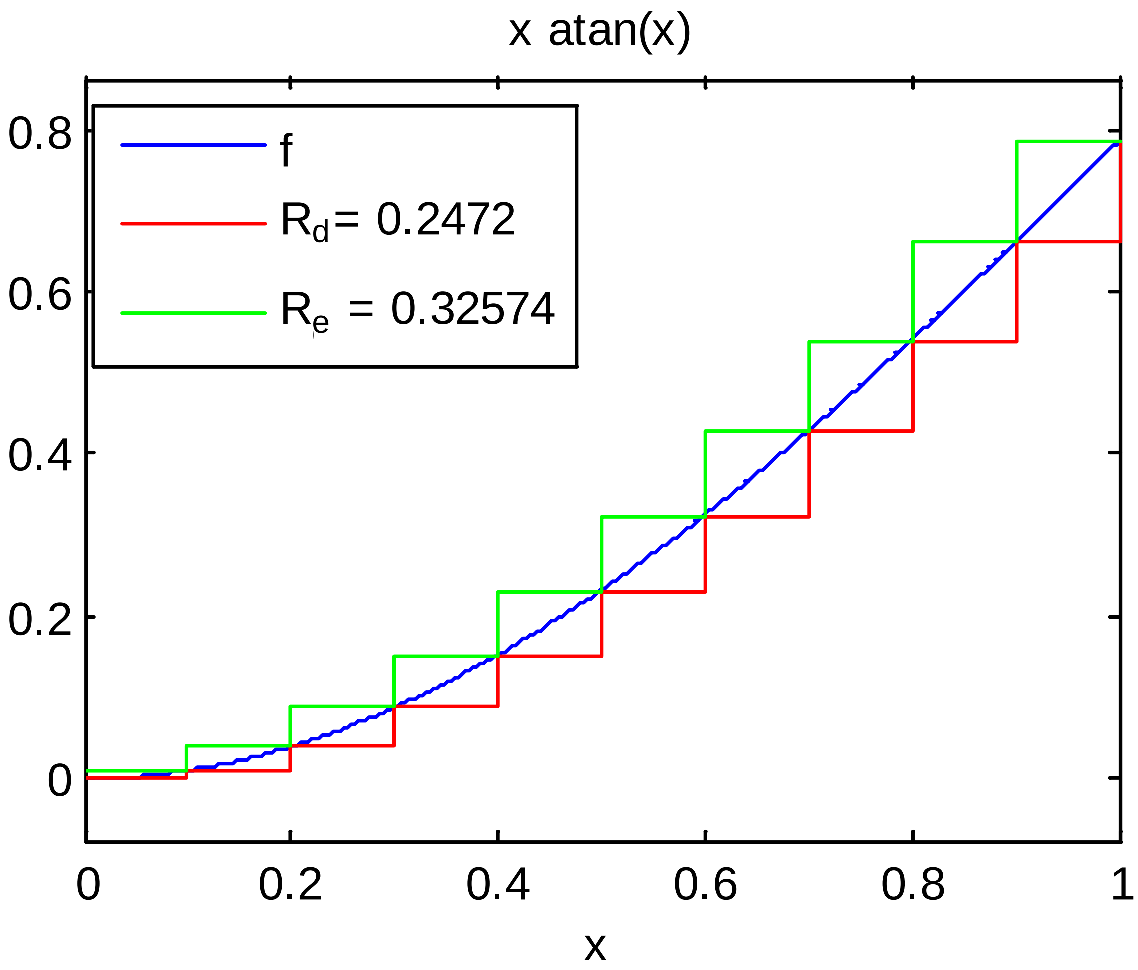
$$R_d=h\sum_{k=0}^{9}x_k\,arctg(x_k)=0.2472$$

$$R_e=h\sum_{k=1}^{10}x_k\,arctg(x_k)=0.32574$$

$$I=\int_0^1 x\,arctg(x)\,dx=\frac{x^2+1}{2}arctg(\mathrm{x})-\frac{x}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\approx 0.2854$$

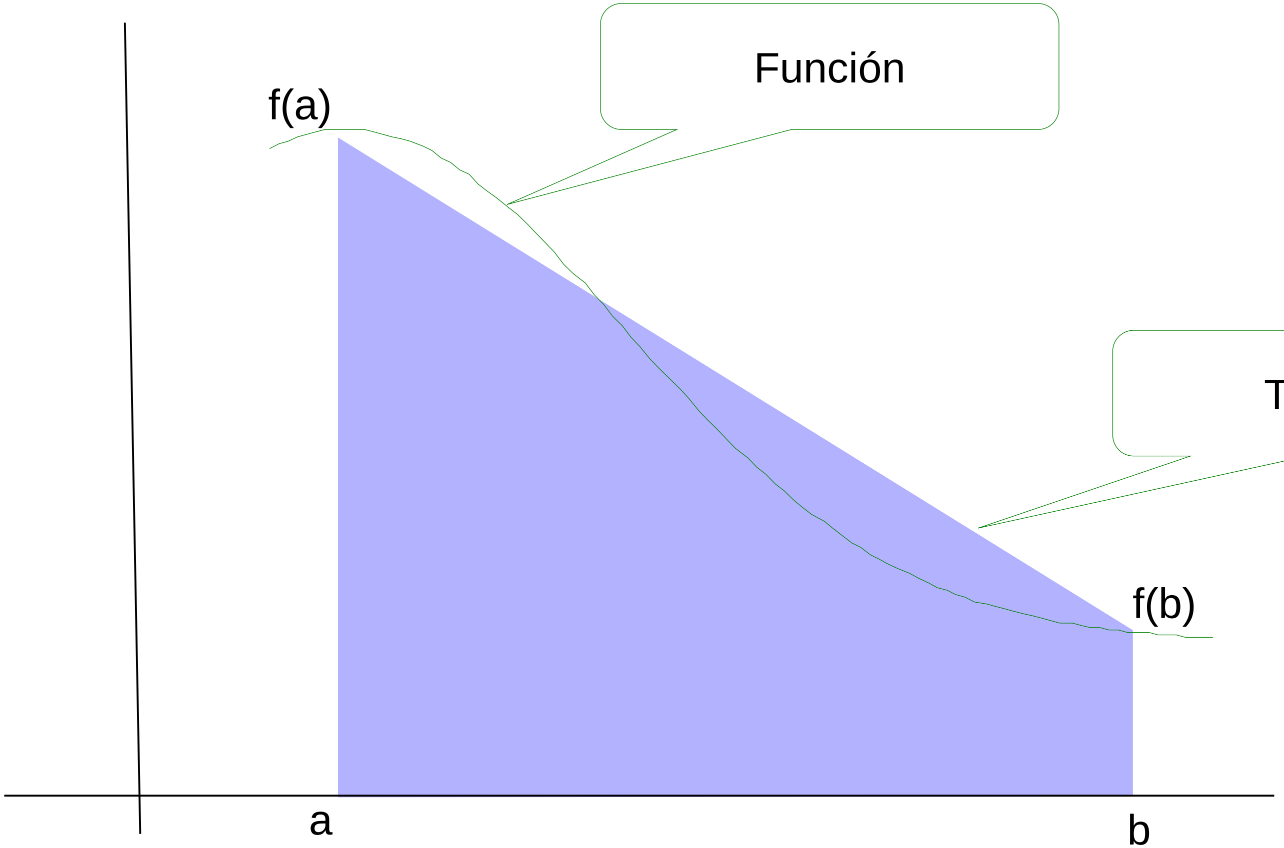
$$I-R_d\approx 0.0382$$

$$I-R_e\approx -0.0403$$


x atan(x)
f
R_d= 0.2472
R_e = 0.32574
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x

- Definimos el integrando y el intervalo de integración
  - fun = inline('x.*atan(x)');
  - a = 0, b = 1
- Dividimos el intervalo en 10 subintervalos
  - n = 10, h = (b-a)/n
  - x = a:h:b
- Evaluamos la función vectorialmente
  - y = feval(fun,x)
- Rectángulos por defecto
  - R_d = h*sum(y(1:n))
- Rectángulos por exceso
  - R_e = h*sum(y(2:n+1))

Método de trapecios



Fórmula de los Trapecios Simple

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx I_T$$

- Simple

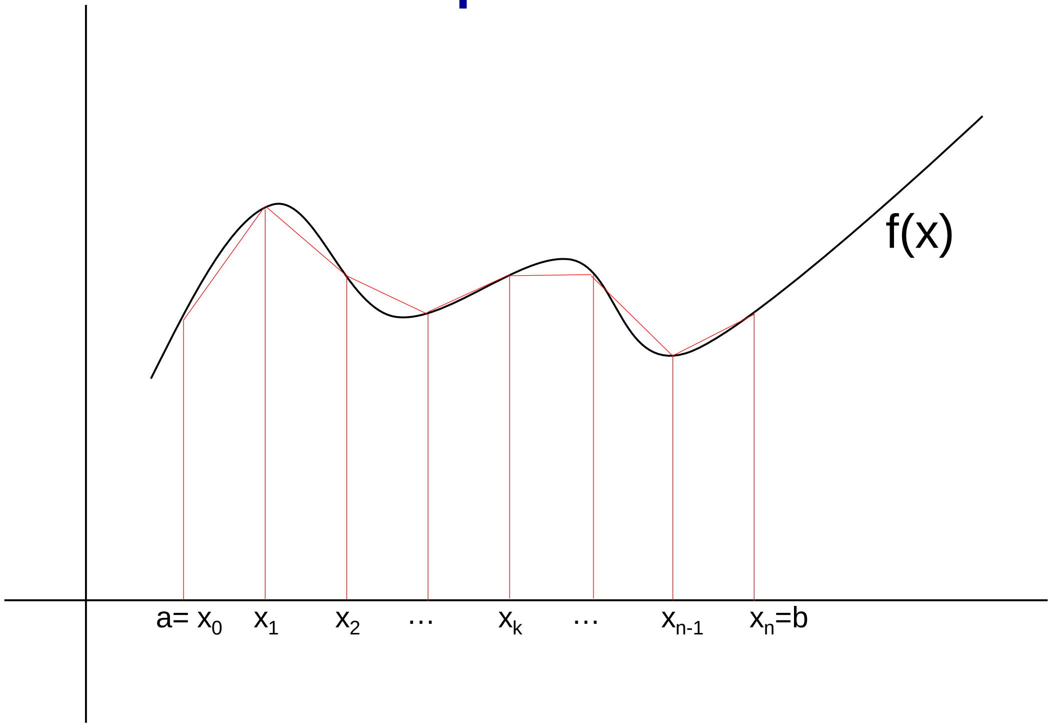
$$\mathrm{I_T} = (\mathrm{b}-\mathrm{a})\frac{\mathrm{f(a)}+\mathrm{f(b)}}{2}$$

- Error

$$\mathrm{E_T} = -\frac{(\mathrm{b}-\mathrm{a})^3}{12}\mathrm{f}''(\xi), \quad \text{para cierto } \xi \in [\mathrm{a},\mathrm{b}]$$

- Exacta para polinomios de grado 1

Método de trapecios



$$I = \int_a^b f(x)dx$$

$$x_k = a + kh,\ k = 0,1,\ldots,n,\quad h = \frac{b-a}{n}$$

Fórmula explícita

$$T_n = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

Error

$$E_T(h) = I - T_n = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(c) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(c),\quad c \in [a,b]$$

Método de trapecios

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad x_k = a + kh,\ k = 0,1,\ldots,n,\quad h = \frac{b-a}{n}$$

$$\boxed{T_n = \frac{1}{2}(R_d + R_e)}$$

Ejemplo $\quad I = \int_0^1 x\, arctg(x)\, dx$

- Trapecios con n = 10 subintervalos (h = 0.1)

$$T_n = \frac{1}{2}(R_d - R_e) = \frac{1}{2}(0.2472 + 0.3257) = 0.2865$$

- Error

$$E_T(h) = I - T_n \approx -0.0011$$

Método de trapecios

- Definimos el integrando y el intervalo de integración
  - fun = inline('expresión de la función');
  - a = , b = ,

- Dividimos el intervalo en n subintervalos
  - n = n, h = (b-a)/n
  - x = a:h:b

- Evaluamos la función vectorialmente
  - y = feval(fun,x)

- Definimos el vector de pesos
  - p = [1 2 2 … 2 1] (tantas componentes como nodos)

- Aproximación por trapecios
  - $$I \approx T_n = \frac{h}{2} sum(y * .p)$$

Cuestiones:

- ¿Podríamos decir que el error de trapecios es de la forma $E_T(h) = C\, h^2$?
- ¿Disminuye el error a medida que hacemos h mas pequeña?
- ¿Es posible obtener el valor del error que se desee?
- Diseña un método iterativo que en cada iteración calcule una aproximación de trapecios utilizando el doble de nodos que en la aproximación anterior hasta que

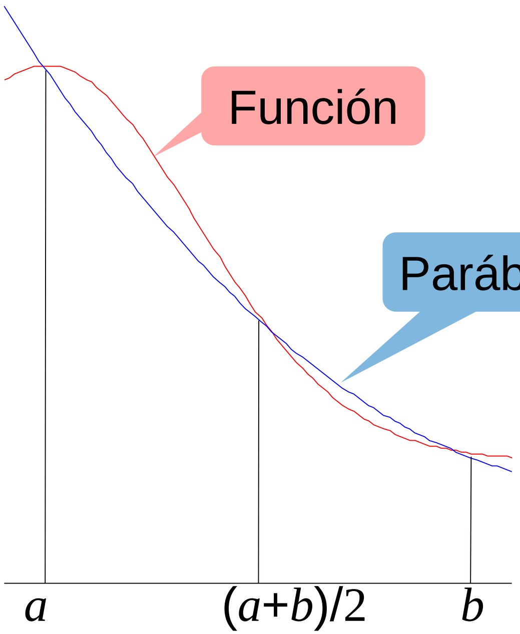
$$\left| T_{2n} - T_n \right| < tol$$

- Relación del error de trapecios con paso h/2 y con paso h

$$E_T(h/2) = \frac{1}{4} E_T(h)$$

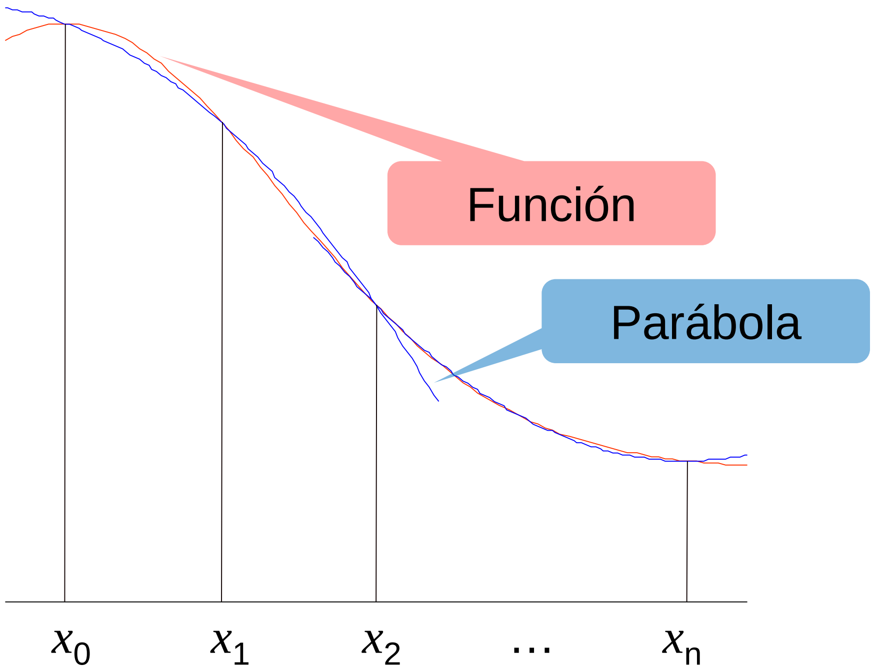
Regla de Simpson

Simpson simple, 2 subintervalos



$h = (b\text{-}a) / 2$

Simpson compuesta, n (par) subintervalos



$h = (b\text{-}a) / n$

Regla de Simpson

- Simpson simple, 2 subintervalos

$$S = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

- Simpson compuesto, n = 2m subintervalos

$$S_n = \frac{h}{3}\left[\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$S_n = \frac{h}{3}\left[\left(f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1}) + f(x_{2m}) \right)\right]$$

- Error

$$E_S(h) = -\frac{h^4}{180}(b-a) f^{(iv)}(c) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(iv)}(c), \qquad c \in [a,b]$$

Regla de Simpson

- Definimos el integrando y el intervalo de integración
  - fun = inline(‘expresión de la función’);
  - a = , b = ,
- Dividimos el intervalo en n subintervalos (n par)
  - n = 2m, h = (b-a)/2m
  - x = a:h:b
- Evaluamos la función vectorialmente
  - y = feval(fun,x)
- Definimos el vector de pesos
  - p = [1 4 2 4 2 … 2 4 1] (tantas componentes como nodos)
- Aproximación por Simpson
  - $I \approx S_{2m} = \frac{h}{3} sum(y * .p)$

Regla de Simpson

El error de Trapecios es de orden 2

$$h = \frac{b-a}{m}, \quad h/2 = \frac{b-a}{2m}$$

es posible estimar la integral con error de orden 4, a partir de dos evaluaciones con paso h y h/2.

$$\left.\begin{aligned} I &\approx T_h + Ch^2 \\ I &\approx T_{h/2} + C(h/2)^2 = T_{h/2} + \frac{1}{4}Ch^2 \end{aligned}\right\}$$

$$4I - I \approx 4T_{h/2} - T_h$$

$$\boxed{I \approx \frac{4T_{h/2} - T_h}{4-1} := S_{h/2}}$$

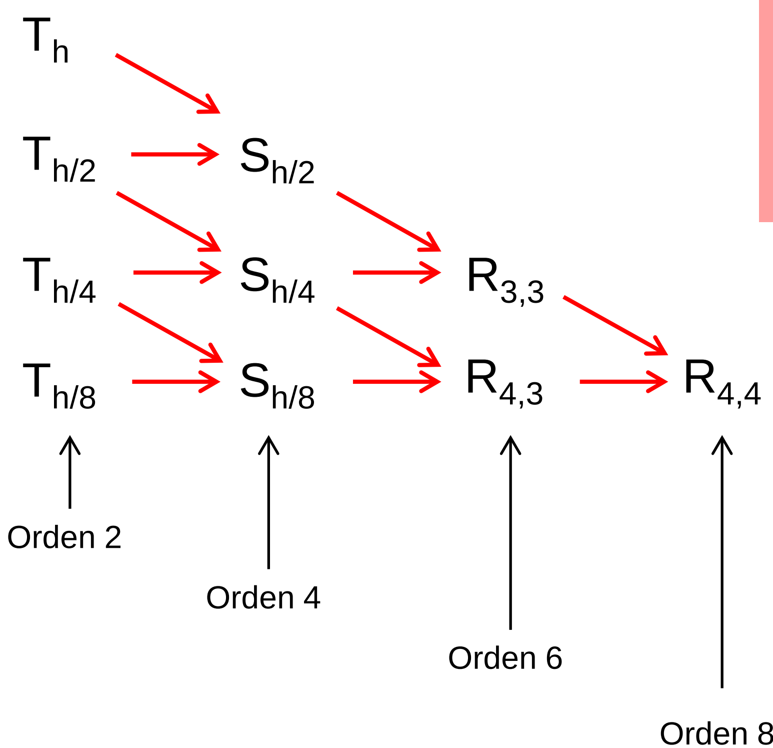
Técnica de extrapolación de Richardson

Método de Romberg → Tabla de Romberg

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

$$R_{k,j} = \frac{1}{4^{j-1}-1}\left[4^{j-1}R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}\right]$$

$$k = 3,4,\ldots; \qquad j = 3,4,\ldots$$



Diferentes aproximaciones de *I*

Ejemplo $I = \int_0^1 x\, arctg(x)\, dx \approx 0.2854$

- Trapecios paso h $h = \frac{1}{2},\ \ x_k = 0,\ 0.5,\ 1$ $\quad T_h = 0.3123$

- Trapecios paso h/2 $h = \frac{1}{4},\ \ x_k = 0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1$ $\quad T_{h/2} = 0.2921$

- Fórmula explícita

$$S_{h/2} = \frac{4T_{h/2} - T_h}{4-1} = \frac{4 \cdot 0.2921 - 0.3123}{3} = 0.285377$$

$$S_{0.25} = \frac{0.25}{3}\left(f(0) + 4f(0.25) + 2f(0.5) + 4f(0.75) + f(x_5) \right)$$

- Error

$$E = I - S_{h/2} = 0.00002085$$

Algoritmo de Romberg

ENTRADA función f, extremos a, b, número subintervalos iniciales n, tolerancia tol, número máximo de filas N

SALIDA valor aproximado de I o mensaje de fracaso

Paso 1 Tomar h = (b-a)/n; k = 1;

R(k,1) = trapecios(f,a,b,n);

Paso 2 Mientras error > tol & k < N

Paso 3 k = k+1;

h = h/2; n = 2n;

Paso 4 R(k,1) = trapecios(f,a,b,n);

Paso 5 Para j = 2,3,…,k

R(k,j) = [4^(j-1)R(k,j-1)-R(k-1,j-1)]/(4^(j-1)-1);

Paso 6 error = |R(k,k)-R(k-1,k-1)|;

Paso 7 Salida: último valor de la tabla R(k,k)

tabla de Romberg R

mensaje de fracaso

El método Monte-Carlo

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Valor promedio de f(x) en el intervalo [a, b]

$$V_{pro} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Sean x_1, x_2, … , x_n n puntos cualesquiera del intervalo [a, b]. Calculamos la media de los valores de f(x) en esos puntos

$$\overline{f_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

Si la n es muy grande, cabría esperar que $\overline{f_n} = V_{pro}$, y de aquí

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\right]$$

Cuando los nodos x_1, x_2, … , x_n son elegidos de forma aleatoria, la fórmula de cuadratura recibe el nombre de método Monte-Carlo

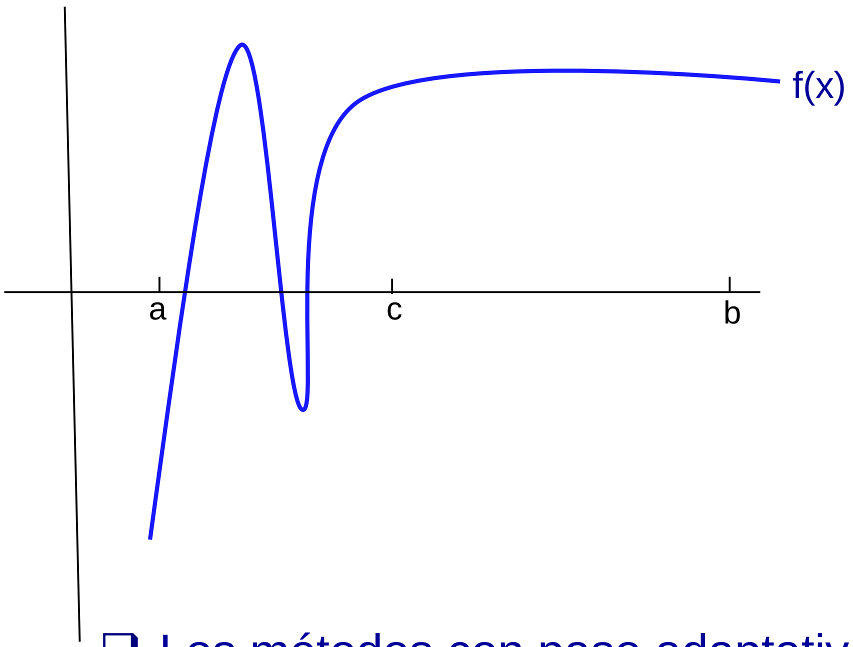
Error

$$E_{MC}(n) = \frac{b-a}{\sqrt{n}}$$

Método Monte-Carlo

- Definimos el integrando y el intervalo de integración
  - fun = inline('expresión de la función');
  - a = , b = ,
- Elegimos los nodos aleatorios
  - t = rand(1,n)
  - x = a + t*(b-a)
- Evaluamos la función vectorialmente
  - y = feval(fun,x)
- Aproximación por Monte_carlo
  - $I \approx MC_n = (b-a) * sum(y) / n$

Métodos de cuadratura adaptativos



$$I = \int_a^b f(x)dx$$

La función f(x) tiene fuertes variaciones en el intervalo [a, c] pero es muy estable en el intervalo [c, b].
Parece razonable utilizar un paso h pequeño en [a, c] y grande en [c, b].

- Los métodos con paso adaptativo utilizan diferentes valores de h en el intervalo de integración dependiendo de la forma de f(x).
- Consiguen buenas aproximaciones con un menor número de operaciones.
- Simpson con paso adaptativo:

I = quad('fun', a, b)

Comando de Matlab

Archivo .m donde se define el integrando

Integrales impropias

- $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ ➢ quadgk(@(x) 1./x, 0, 1)
- $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ➢ quadgk(@(x) 1./sqrt(x), 0, 1)
- $\int_0^1 \log x \, dx$ ➢ quadgk(@(x) log(x), 0, 1)
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$ ➢ quadgk(@(x) tan(x), 0, pi/2)

Comando de Matlab

quadgk('fun' , a, b)

Archivo .m donde se define el integrando

Integrales infinitas

- $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$
  - ➢ quadgk(@(x) 1./x, 1, Inf)
- $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$
  - ➢ quadgk(@(x) 1./x.^2, 1, Inf)
- $\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx$
  - ➢ quadgk(@(x) exp(x), -Inf, 0)
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$
  - ➢ quadgk(@(x) 1./(1+x.^2), -Inf, Inf)

Comando de Matlab

quadgk('fun' , a, b)

Archivo .m donde se define el integrando

Problemas

- Determina los coeficientes de la fórmula de cuadratura
$$\int_0^2 f(x)\,dx \cong a\,f(0) + b\,f(1) + c\,f(2)$$
para que integre exactamente polinomios de grado 2.

- Determina los coeficientes de la fórmula
$$\int_0^3 f(x)\,dx \cong a\,f(0) + b\,f(1) + c\,f(2) + d\,f(3)$$
para que integre exactamente polinomios de grado 3.

- Considera la integral $I = \int_1^4 \sqrt{x}\,dx$. Se pide.
  - (a) Aproxima I utilizando el método de trapecios y la regla de Simpson con 6 subintervalos.
  - (b) Determina el error real cometido en cada caso y una cota del error de integración.
  - (c) Repite el apartado (a) con 12 y 24 subintervalos. Establece la tabla de Romberg de tamaño 3x3.

- Considera la ecuación integral

$$u(x) = x + \int_0^1 xt\,u(t)dt, \quad x \in [0,1]$$

Aproxima la integral por el método de trapecios con 3 subintervalos. Sustituye en la ecuación aproximada la x por cada uno de los nodos de integración, obteniendo un sistema lineal de 4 ecuaciones con 4 incógnitas. Resuelve el sistema y compara el resultado con la solución exacta, que es u(x) = 3x/2.

- Consideremos la integral $I = \int_0^3 e^{-x^2}\,dx$. Determina el número de subintervalos n para que T_n aproxime el valor de I con un error menor de 10^{-4} .

- Se registra la velocidad en km/h de un avión en cada minuto de los primeros 10 de vuelo

t min	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
v km/h	0	80	100	128	144	160	152	136	128	120	136

Determina la distancia recorrida en esos primeros 10 minutos.