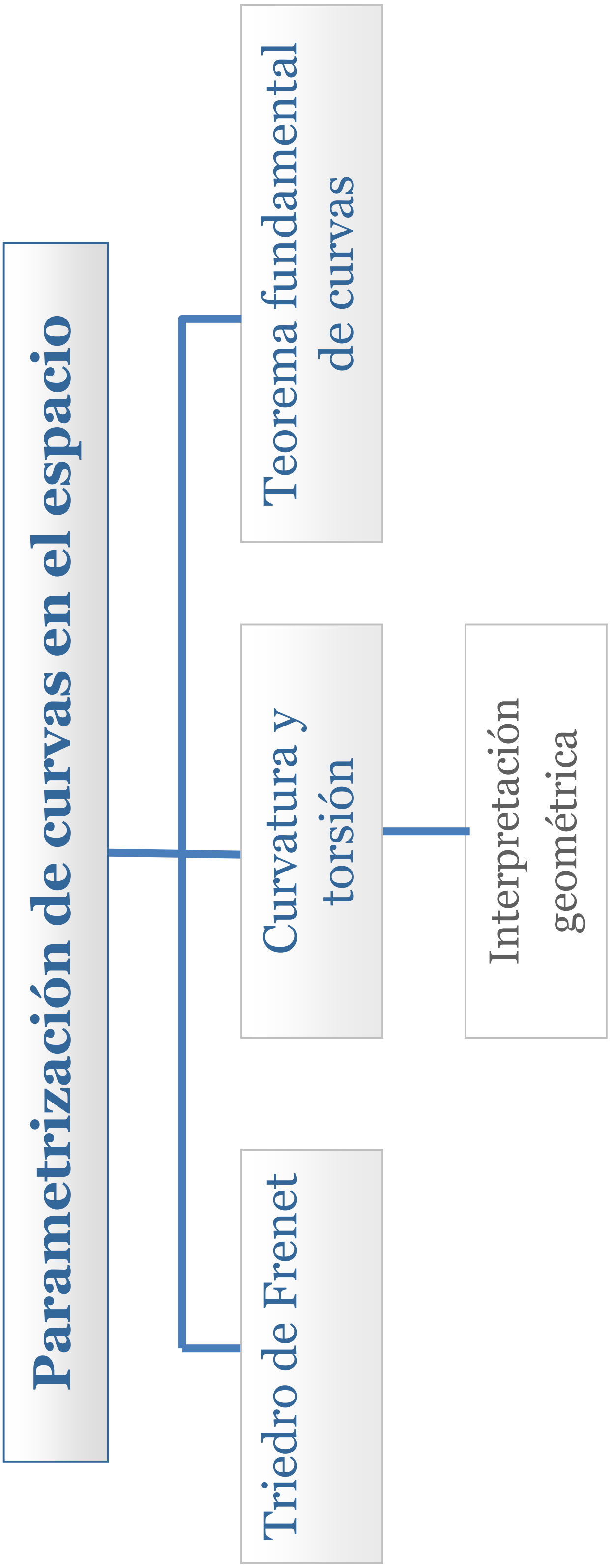
Parametrización de curvas en el espacio

TEMA 3

Esquema


Parametrización de curvas en el espacio
Teorema fundamental de curvas
Curvatura y torsión
Interpretación geométrica
Triedro de Frenet

Ideas clave

3.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

En este tema se estudian las curvas en el espacio que son un caso más general que el de curvas planas del tema anterior. Los aspectos más importantes de este tema son:

- Triedro de Frenet.
- Planos osculador, binomial y rectificante afín.
- Torsión.
- Teorema fundamental de curvas.

3.2. Triedro de Frenet

En este tema vamos a ver curvas del tipo $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que van a ser continuamente diferenciables y parametrizadas por arco. Como en el caso plano, vamos a construir una base ortonormal para cada punto de la curva, cuya variación refleje el comportamiento geométrico de la curva. Como estamos en el espacio, esta base tendrá 3 vectores en lugar de 2.

Como en el caso plano, empezamos tomando $T(t) = \alpha'(t)$, (que es unitario ya que la curva está parametrizada por arco). Luego $T(t)$ nos vale como primer vector de la base.

Para hallar el segundo vector derivamos el producto escalar $< T, T >' = 2 < T', T >= 0 \Rightarrow T \perp T' \Rightarrow \frac{T'}{||T'||}$ es un vector unitario y perpendicular a T, por tanto, podemos utilizarlo como segundo vector de la base.

Ojo, que tenemos $||T'||$ en el denominador, así que debemos asegurarnos de que no se hace cero nunca.

Sea $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por arco. Se dice que:
(i) $t_0 \in I$ es un **punto singular de segundo orden** si $\alpha''(t_0) = 0$.
(ii) α es **birregular en t_0** si $\alpha''(t_0) \neq 0$.
(iii) α es **birregular** si todos sus puntos son birregulares.

Como en el caso plano se define la curvatura.

La función $k: I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $k(t) = ||T'(t)||$ se llama **función de curvatura** de α

Es obvio que la función de curvatura es no negativa. Teniendo esto en cuenta es muy sencillo demostrar que son equivalentes (la demostración se deja como ejercicio):

» α es birregular en t_0.
» $\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$ son linealmente independientes.
» $k(t) > 0$.

Por tanto, si consideramos una curva $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por arco y birregular tenemos los dos primeros vectores de la base:

» $T(t) = \alpha'(t)$.
» $N(t) = \frac{T'(t)}{||T'(t)||}$.

El tercer vector, unitario y perpendicular a los dos anteriores se define como el producto escalar:

» $B(t) = T(t) \times N(t)$

Se denomina vector **binormal**.

Esta base ortonormal, $\{T(t), N(t), B(t)\}$, se denomina **triedro de Frenet**.

A partir de esta base pueden definirse los siguientes planos:

» **Plano osculador afín** que está generado por $\{T(t), N(t)\}$ y que pasa por $\alpha(t)$.
» **Plano binormal afín** que está generado por $\{N(t), B(t)\}$ y que pasa por $\alpha(t)$.
» **Plano rectificante afín** que está generado por $\{T(t), B(t)\}$ y que pasa por $\alpha(t)$.

3.3. Curvatura y torsión

Vamos a derivar los vectores de la base que acabamos de construir:

» $T'(t)$

$T'(t) = k(t)N(t)$. Esto es así porque sabemos que $||T'(t)|| = k(t)$

» $N'(t)$

$< N, N >= 1 \Longrightarrow < N, N' >= 0$. Por tanto, N' está en el plano rectificante afín, es decir, en el plano formado por los otros dos vectores de la base, $\{T(t), B(t)\}$. Así podemos escribir $N' = aT + bB$

» $B'(t)$

$$\begin{aligned} B' &= (T \times N)' = T' \times N + T \times N' = (kN \times N) + \big(T \times (aT + bB)\big) \\ &= k(N \times N) + a(T \times T) + b(T \times B) = bT \times B = -bN \end{aligned}$$

Se define la **torsión** de α en $s \in I$ como $\tau(s) =< B'(s), N >$, es decir, es la cantidad que hace que $B'(s) = \tau(s)\, N(s)$.

Por tanto, tenemos que:

» $T'(t) = k(t)N(t)$.
» $N' = aT + bB$.
» $B'(s) = \tau(s)\, N(s)$.

Falta por determinar los coeficientes a y b.

Como $< T, N >' = 0 \Longrightarrow < T', N > = -< T, N' > = -k$. Análogamente: $< B', N > = -< B, N' > = -\tau$.

Por tanto: $N' = -kT - \tau B$.

Finalmente:

» $T'(t) = k(t)N(t)$.
» $N'(t) = -k(t)T(t) - \tau(t)B(t)$.
» $B'(s) = \tau(s)\, N(s)$.

Por tanto, hemos expresado las derivadas (variaciones) del triedro de Frenet como combinaciones lineales del propio triedro de Frenet en las que los coeficientes son la curvatura y la torsión.

La expresión es bastante más sencilla de lo que podría ser (podría tener hasta 6 coeficientes distintos). Uno de ellos, la curvatura, ya lo conocemos del tema anterior: mide cómo se curva una trayectoria, de modo que una recta tiene curvatura cero y la curvatura tendrá sentido positivo o negativo en función del sentido de giro de la curva.

Interpretación geométrica de la torsión

La torsión mide cuánto se aleja una curva de un plano dado (el plano osculador), es decir, una curva con torsión igual a cero es una curva plana y una torsión distinta de cero da la velocidad de oscilación del plano osculador.

Por tanto, si $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada por arco y es birregular, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\tau(t) = 0 \Longleftrightarrow\ \alpha$ es una curva plana.

» Vamos a probar que si $\tau(t) = 0 \Longrightarrow \alpha$ es una curva plana.

$\tau = 0 \Longrightarrow B' = \tau N = 0 \Longrightarrow B(t) = B_0 \in \mathbb{R}^3$ (constante).

Así: $0 =< T, B >=< T, B_0 >=< \alpha', B_0 >$.

Como $< \alpha, B_0' >= 0$, podemos escribir $0 =< \alpha', B_0 > +< \alpha, B_0' >=< \alpha, B_0 >'$.

Por tanto: $< \alpha, B_0 >= d, d \in \mathbb{R}$.

Sea $B_0 = (a, b, c) =< \big(x(t), y(t), z(t)\big), (a, b, c) >= d \Longrightarrow ax(t) + by(t) + cz(t) - d = 0$, luego α está contenida en un plano.

» Vamos a probar que si α es una curva plana $\Longrightarrow \tau(t) = 0$.

Si $\alpha(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ es una curva plana, entonces se verifica que $ax(t) + by(t) + cz(t) - d = 0$.

Sin pérdida de generalidad, consideramos $\big||a, b, c|\big| = 1$.

Derivando la ecuación del plano, obtenemos $ax' + by' + cz' = 0$, por lo que $< T, (a, b, c) >= 0$.

Derivando de nuevo, resulta $ax'' + by'' + cz'' = 0$, por tanto: $k < N, (a, b, c) >= 0$.

Si la curva es birregular, $k \neq 0$, por tanto:

$$\left.\begin{array}{r} < T, (a, b, c) >= 0 \\ < N, (a, b, c) >= 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow B = \pm(a, b, c) \Longrightarrow B' = 0 \Longrightarrow \tau = 0$$

Ejemplo:

Recordemos del tema anterior que una hélice puede parametrizarse como:

$$\begin{aligned} \alpha &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longrightarrow \alpha(t) = (\cos(t)\,, sen(t), bt) \end{aligned}$$

Para trabajar con la curva parametrizada por arco vamos a considerar la parametrización:

$$\alpha(s) = (a\cos\frac{s}{c}, a\,\mathrm{sen}\frac{s}{c}, \frac{b}{c}s)\ \text{, con } a > 0 \text{ y } c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Se deja como ejercicio comprobar que realmente es parametrizada por arco.

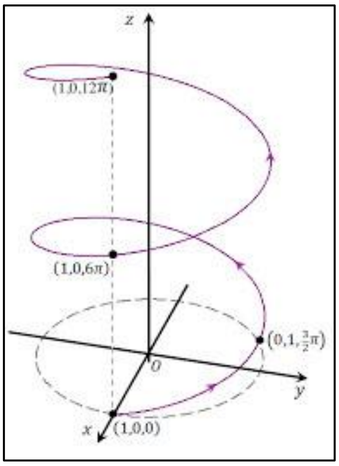


Figura 3.1. Parametrización de una hélice
Fuente: http://www.mate.unlp.edu.ar

Calculamos el triedro de Frenet y los valores de curvatura y torsión:

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right) = T(s)$$

$$k_\alpha = \left||T'|\right| = \sqrt{\frac{a^2}{c^4}} = \frac{a}{c^2}$$

$$N = (-\cos\frac{s}{c}, -\operatorname{sen}\frac{s}{c}, 0)$$

$$B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{a}{c}sin\frac{s}{c} & -\frac{a}{c}cos\frac{s}{c} & \frac{b}{c} \\ -cos\frac{s}{c} & -sin\frac{s}{c} & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\right)$$

$$B' = \left(-\frac{b}{c^2}\sin\frac{s}{c}, -\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c^2}\right)$$

$$\tau = < B', N > = -\frac{b}{c^2}$$

» Si $b = 0 \Longrightarrow \tau = 0$. En este caso la curva es una circunferencia.
» Si $b > 0 \Longrightarrow \tau < 0$. En este caso la hélice se recorre en sentido ascendente.
» Si $b < 0 \Longrightarrow \tau > 0$. En este caso la hélice se recorre en sentido desscendente.

Es fácil ver el efecto de la curvatura y la torsión (las dos constantes en esta curva): la curvatura hace que vayamos trazando circunferencias y la torsión de que conforme vamos trazando la circunferencia la vayamos levantando, es decir, la que hace que dibujemos una hélice y no una circunferencia plana.

Algoritmo para el cálculo de curvatura y torsión

Sea $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva birregular y parametrizada por arco. Entonces:

$$\begin{cases} \alpha' = T \\ \alpha'' = \qquad kN \\ \alpha''' = -k^2T + k'N - \tau kB \end{cases}$$

Por tanto:

$$k = |\alpha''|; \tau = \frac{-\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha''|^2}$$

3.4. Teorema fundamental de curvas

Este resultado es análogo al que hemos visto para curvas planas. La idea es que como la curvatura y la torsión (antiguamente llamada curvatura segunda) indican cómo se curva la trayectoria en el espacio (la curvatura indica cómo se curva dentro de un plano dado y la torsión las oscilaciones de dicho plano en el espacio). Esas dos funciones bastan para determinar su forma de manera unívoca.

La única posibilidad de que dos curvas distintas α y β tengan la misma curvatura y torsión es que exista un movimiento directo entre ellas. La idea intuitiva sería que si trasladamos α a otro punto del espacio sin deformarla en absoluto y sin cambiar el sentido en que se recorre obtendríamos β. El enunciado formal sería:

Sean $k_0, \tau_0: I \longrightarrow \mathbb{R}$, C^∞, $k_0 > 0$. Entonces:

- **Existencia**: existe una curva parametrizada por arco, $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $k_\alpha = k_0, \tau_\alpha = \tau_0$.
- **Unicidad**: si $\beta: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es otra curva C^∞ y parametrizada por arco, con $k_\alpha = k_0, \tau_\beta = \tau_0$, existe un movimiento directo de $\mathbb{R}^3$, $M: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\beta(s) = M \circ \alpha(s), \forall\, s \in I$.

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

Producto vectorial

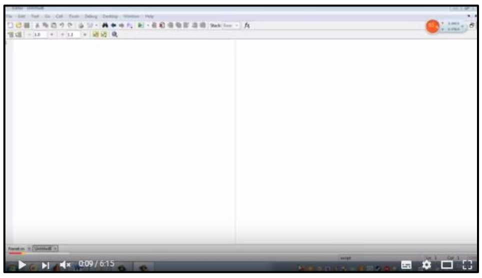
En esta clase magistral vamos a repasar el concepto de producto vectorial porque también lo usamos en la asignatura para definir otros elementos.

La lección magistral está disponible en el aula virtual

No dejes de ver...

Hélice y triedro de Frenet

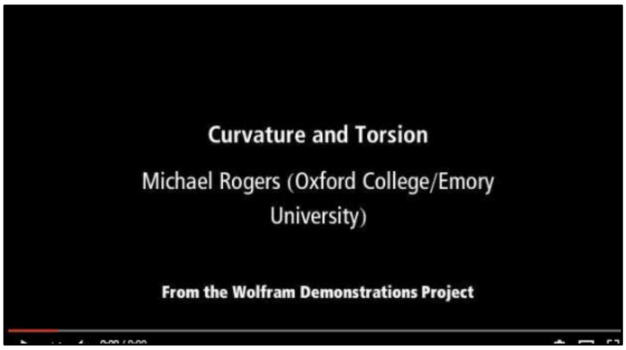
En este tutorial se muestra cómo representar una hélice y el triedro de Frenet en cada punto utilizando Matlab.



Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://www.youtube.com/watch?v=6p7-pmpwnj8

Variación de la curvatura

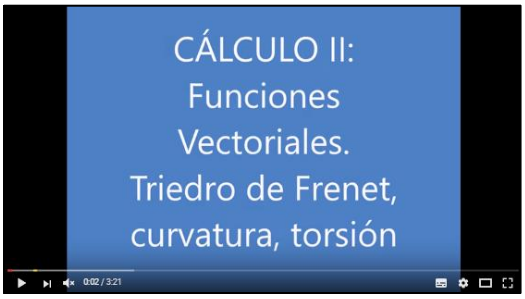
En este vídeo se muestran la variación de la curvatura y la torsión de una curva.



Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://www.youtube.com/watch?v=nXGGxwdOnP4

Cálculo de curvatura, torsión y triedro de Frenet

En este tutorial se muestra un ejemplo de cálculo de curvatura, torsión y triedro de Frenet de una curva.



Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://www.youtube.com/watch?v=d4ynLuChTpw

+ Información

A fondo

Geometry of curves

En este apartado verás *scripts* para el cálculo de curvatura y torsión.

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?SID=3576&view=html

Test

1. Una curva birregular α verifica:

A. α' es unitario para todos los puntos.

B. $\alpha'' \neq 0$ para todos los puntos.

C. α'' es unitario para todos los puntos.

2. Sea α una curva parametrizada por arco se verifica:

A. $\|T'(t)\| = \|T(t)\|$.

B. $T'(t)$ es perpendicular a T.

C. $\|T'(t)\| = 1$.

3. El triedro de Frenet está formado por:

A. Vectores proporcionales a $\{\alpha', \alpha'', \alpha'''\}$.

B. $\{\alpha', \alpha'', \alpha'''\}$.

C. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

4. Si α y β son dos curvas distintas:

A. α y β siempre tienen distinta curvatura y torsión.

B. α y β siempre tienen distinta traza.

C. α y β pueden tener la misma curvatura y torsión.

5. Una curva plana verifica:

A. $\tau(t) = 0, \forall\, t$.

B. $\tau(t) \neq 0, \forall\, t$.

C. Que no está parametrizada por arco.

6. El plano osculador está generado por:

A. $\{T(t), N(t)\}$.

B. $\{T(s), B(s)\}$.

C. $\{N(s), B(s)\}$.

7. Dadas unas funciones de curvatura y torsión:

A. No es posible encontrar una curva parametrizada por arco con esa curvatura y esa torsión.

B. Puede existir una curva parametrizada por arco con esa curvatura y esa torsión.

C. Siempre existe una curva parametrizada por arco con esa curvatura y esa torsión.

8. Sea parametrización de la curva: $\alpha(s) = (a\cos\frac{s}{c}, a\,\mathrm{sen}\frac{s}{c}, \frac{b}{c}s)$ si $b = 0$:

A. La torsión es cero.

B. La traza es una circunferencia.

C. A y B son correctas.

9. El plano binormal está generado por:

A. $\{T(t), N(t)\}$.

B. $\{T(s), B(s)\}$.

C. $\{N(s), B(s)\}$.

10. El $\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')$:

A. Puede utilizarse para calcular la curvatura.

B. Puede utilizarse para calcular la torsión.

C. A y B son correctas.