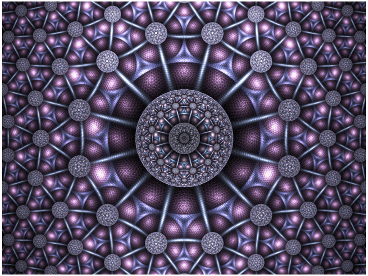
Tema 10: Problemas de métodos iterativos para resolver sistemas lineales

Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Alicia Cordero, Neus Garrido, Juan R. Torregrosa

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA



Contenido

PROBLEMA 1

Considera el sistema $Ax = c$ de tamaño $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Comprueba que las iteraciones de Jacobi para este sistema convergen si $|a| - 2|b| \geq 0$ y divergen en caso contrario.

b) Analiza la relación entre el número de iteraciones necesarias para satisfacer determinada tolerancia y el valor de b, fijados los restantes parámetros.

c) Considera el sistema $Ax = c$ con $a = 3$ y $b = 1$, para valores de $n = 100, 200, \ldots, 1000$. Compara los tiempos de ejecución al resolver el sistema mediante el comando \ y utilizando el método de Jacobi, considerando las matrices como llenas y como dispersas.

Solución PROBLEMA 1

a) La matriz A del sistema se construye por diagonales, en función de a, b y n mediante

```
v = ones(1,n-1); A = a*eye(n) + b*diag(v,1) + b*diag(v,-1);
```

Iterando el sistema por Jacobi para distintos valores de a y b, se comprueba que la convergencia depende de la condición expresada en el enunciado.

b) Tomamos $n = 100$, $a = 2$ y variamos b de 0 a 1. Aplicamos Jacobi a partir de la estimación inicial nula, iterando hasta que la diferencia en norma supremo sea menor que 10^{-3}. La tabla siguiente muestra las iteraciones necesarias para cada valor de b. Se observa que el número de pasos crece rápidamente conforme b tiende a 1.

b	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$iter$	2	4	5	5	6	8	9	12	17	28	485

c) Para utilizar matrices dispersas y calcular tiempos:

```
B = sparse(A);
tic, A\c, toc
tic, B\c, toc
```

Solución PROBLEMA 1

```
function [sol, incre, iter] = Jacobi(A,b,X0,tol,maxiter)
iter = 1;
d = diag(A);
iD = diag(1./d);
L = tril(A,-1);
U = triu(A,1);
incre = tol+1;
while iter < maxiter & & incre > tol
    x = -iD*((L+U)*X0)+iD*b;
    incre=norm(x-X0,inf);
    iter=iter+1;
    X0=x;
end
```

Solución PROBLEMA 1

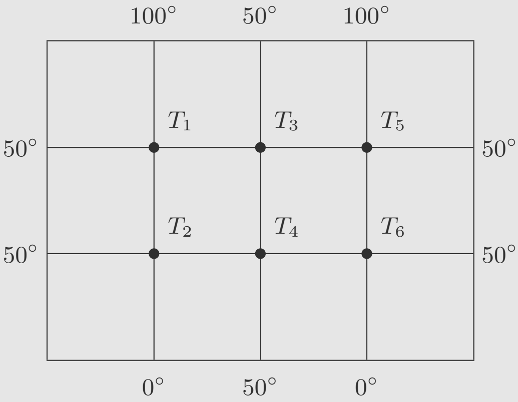
La tabla muestra los tiempos de ejecución medidos al resolver por distintos métodos sistemas de tamaño cada vez mayor.

n	\-llena	\-dispersa	Jacobi-llena	Jacobi-dispersa
100	0.0075	0.0002	0.0081	0.0007
200	0.0008	0.0002	0.0286	0.0110
300	0.0937	0.0002	0.0191	0.0118
400	0.0109	0.0002	0.0235	0.0197
500	0.0125	0.0002	0.0292	0.0220
600	0.0174	0.0002	0.0361	0.0265
700	0.0182	0.0002	0.0492	0.0316
800	0.0130	0.0002	0.0543	0.0363
900	0.0177	0.0002	0.0708	0.0479
1000	0.0197	0.0002	0.0841	0.0488

- La mayor eficiencia se consigue utilizando matrices dispersas, aunque la diferencia es mayor en el método directo.

PROBLEMA 2

El diagrama adjunto representa la discretización del problema del calor en una placa. Se trata de determinar la temperatura en los nodos interiores de la malla $T_j, \quad j = 1, 2, \ldots, 6$, conocidas las temperaturas en el borde y suponiendo que hay equilibrio térmico, es decir que las temperaturas no varían.



PROBLEMA 2

En el modelo discreto se supone que, en el equilibrio, la temperatura en cada nodo es la media de las temperaturas en los nodos vecinos.

a) Obtén el sistema lineal correspondiente a los datos de la figura, formulando las condiciones que han de verificar las temperaturas de los nodos interiores.
b) Resuelve el sistema por un método directo.
c) Itera por el método de Jacobi hasta que la variación máxima de la temperatura en un nodo sea inferior a 0.01. ¿Cuál es la máxima desviación con respecto a la solución obtenida en el primer apartado?
d) Itera por el método de Gauss-Seidel y compara los resultados con los del método de Jacobi.
e) Elige un factor ω adecuado para que el método de sobrerrelajación obtenga el resultado con menos iteraciones que los anteriores.

a) La condición de equilibrio en cada nodo, proporciona el sistema ya preparado para aplicar un método iterativo.

$$\left.\begin{array}{ccccccccc}
T_1 & = & \frac{1}{4}(50 & + & 100 & + & T_2 & + & T_3) \\
T_2 & = & \frac{1}{4}(50 & + & T_1 & + & 0 & + & T_4) \\
T_3 & = & \frac{1}{4}(T_1 & + & 50 & + & T_4 & + & T_5) \\
T_4 & = & \frac{1}{4}(T_2 & + & T_3 & + & 50 & + & T_6) \\
T_5 & = & \frac{1}{4}(T_3 & + & 100 & + & T_6 & + & 50) \\
T_6 & = & \frac{1}{4}(T_4 & + & T_5 & + & 0 & + & 50)
\end{array}\right\} \tag{1}$$

b) Escribimos el sistema en forma normal y lo resolvemos con MATLAB.

$$\left.\begin{array}{rrrrrrcr}
4T_1 & -T_2 & -T_3 & & & & = & 150 \\
-T_1 & +\ 4T_2 & & -T_4 & & & = & 50 \\
-T_1 & & +\ 4T_3 & -T_4 & -T_5 & & = & 50 \\
& -T_2 & -T_3 & +\ 4T_4 & & -T_6 & = & 50 \\
& & -T_3 & & +\ 4T_5 & -T_6 & = & 150 \\
& & & -T_4 & -T_5 & +\ 4T_6 & = & 50
\end{array}\right\}$$

Solución PROBLEMA 2

Construimos la matriz del sistema por bloques, poniendo de manifiesto su estructura:

```
m4 = [4 -1; -1 4];
m1 = [-1 0; 0 -1];
m0 = [0 0; 0 0];
A = [m4 m1 m0; m1 m4 m1; m0 m1 m4];
```

Editamos la columna de términos independientes y resolvemos el sistema.

```
b = [150 50 50 50 150 50]';
T = A\b

T =
    60.869565
    39.130435
    54.347826
    45.652174
    60.869565
    39.130435
```

- c) Partiendo de una estimación inicial, por ejemplo $T^{(0)} = (50, 50, 50, 50, 50, 50)$, la sustituimos a la derecha de (1) y el resultado nos da la primera iteración de Jacobi.

$$\begin{array}{rcllllllllll}
T_1^{(1)} & = & \frac{1}{4}(50 & + & 100 & + & 50 & + & 50) & = & 62.5 \\
T_2^{(1)} & = & \frac{1}{4}(50 & + & 50 & + & 0 & + & 50) & = & 37.5 \\
T_3^{(1)} & = & \frac{1}{4}(50 & + & 50 & + & 50 & + & 50) & = & 50 \\
T_4^{(1)} & = & \frac{1}{4}(50 & + & 50 & + & 50 & + & 50) & = & 50 \\
T_5^{(1)} & = & \frac{1}{4}(50 & + & 100 & + & 50 & + & 50) & = & 62.5 \\
T_6^{(1)} & = & \frac{1}{4}(50 & + & 50 & + & 0 & + & 50) & = & 37.5
\end{array}$$

En la iteración 16, la máxima diferencia (norma infinito) es 0.0075, menor que 0.01. La aproximación obtenida es

$$\begin{array}{rcl}
T_1^{(15)} & = & 60.871568 \\
T_2^{(15)} & = & 39.128432 \\
T_3^{(15)} & = & 54.344994 \\
T_4^{(15)} & = & 45.655006 \\
T_5^{(15)} & = & 60.871568 \\
T_6^{(15)} & = & 39.128432
\end{array}$$

La máxima diferencia con la solución exacta es de 0.0028.

- d) El paso genérico de Gauss-Seidel para este problema es

$$
\begin{array}{rcl}
T_1^{(k)} & = & \frac{1}{4}(50 + 100 + T_2^{(k-1)} + T_3^{(k-1)}) \\
T_2^{(k)} & = & \frac{1}{4}(50 + T_1^{(k)} + 0 + T_4^{(k-1)}) \\
T_3^{(k)} & = & \frac{1}{4}(T_1^{(k)} + 50 + T_4^{(k-1)} + T_5^{(k-1)}) \\
T_4^{(k)} & = & \frac{1}{4}(T_2^{(k)} + T_3^{(k)} + 50 + T_6^{(k-1)}) \\
T_5^{(k)} & = & \frac{1}{4}(T_3^{(k)} + 100 + T_6^{(k-1)} + 50) \\
T_6^{(k)} & = & \frac{1}{4}(T_4^{(k)} + T_5^{(k)} + 0 + 50)
\end{array}
$$

El método de Gauss-Seidel converge en 9 iteraciones, obteniendo el resultado

$$
\begin{array}{rcl}
T_1^{(8)} & = & 60.873315 \\
T_2^{(8)} & = & 39.132698 \\
T_3^{(8)} & = & 54.351026 \\
T_4^{(8)} & = & 45.654106 \\
T_5^{(8)} & = & 60.870931 \\
T_6^{(8)} & = & 39.131259
\end{array}
$$

que difiere del exacto en menos de 0.0037 en todas las componentes.

- e) Para el presente sistema la iteración de sobrerrelajación es

$$
\begin{aligned}
T_1^{(k)} &= (1-\omega)T_1^{(k-1)} + \tfrac{\omega}{4}(50 + 100 + T_2^{(k-1)} + T_3^{(k-1)}) \\
T_2^{(k)} &= (1-\omega)T_2^{(k-1)} + \tfrac{\omega}{4}(50 + T_1^{(k)} + 0 + T_4^{(k-1)}) \\
T_3^{(k)} &= (1-\omega)T_3^{(k-1)} + \tfrac{\omega}{4}(T_1^{(k)} + 50 + T_4^{(k-1)} + T_5^{(k-1)}) \\
T_4^{(k)} &= (1-\omega)T_4^{(k-1)} + \tfrac{\omega}{4}(T_2^{(k)} + T_3^{(k)} + 50 + T_6^{(k-1)}) \\
T_5^{(k)} &= (1-\omega)T_5^{(k-1)} + \tfrac{\omega}{4}(T_3^{(k)} + 100 + T_6^{(k-1)} + 50) \\
T_6^{(k)} &= (1-\omega)T_6^{(k-1)} + \tfrac{\omega}{4}(T_4^{(k)} + T_5^{(k)} + 0 + 50)
\end{aligned}
$$

El factor de relajación ω ha de estar entre 0 y 2 para que haya convergencia. Si elegimos $\omega = 1.15$, en 7 iteraciones se obtiene

$$
\begin{aligned}
T_1^{(6)} &= 60.868984 \\
T_2^{(6)} &= 39.129821 \\
T_3^{(6)} &= 54.347263 \\
T_4^{(6)} &= 45.651856 \\
T_5^{(6)} &= 60.869724 \\
T_6^{(6)} &= 39.130460
\end{aligned}
$$

que difiere del exacto en menos de 0.0006 en todas las componentes.

PROBLEMA 3

Considera la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

donde $u(x, y)$ es la función incógnita (u es la temperatura o el potencial en un punto (x, y) del plano). en el rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$ con condiciones de frontera

$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0 \quad u(0, y) = u(1, y) = y(1 - y)$$

a) Halla el sistema lineal resultante al discretizar la ecuación de Laplace mediante diferencias simétricas, con paso $h = 0.1$ en ambas variables.
b) Resuelve de forma directa este sistema y representa gráficamente la solución.
c) Estudia la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para dicho sistema.
d) Halla un factor ω que acelere la convergencia por el método de sobrerrelajación.

a) Consideremos la ecuación de Laplace en el rectángulo $[0, a] \times [0, b]$, siendo $a = (n+1)h$ y $b = (m+1)h$ con n y m naturales. Superponemos al dominio $[0, a] \times [0, b]$ una malla formada por cuadrados de lado h.
Denotemos por $u_{i,j}$ el valor de u en el punto $(x_i, y_j) = (ih, jh)$, $i = 0, 1, \dots, n+1$, $j = 0, 1, \dots, m+1$. Aproximamos las derivadas parciales segundas por diferencias finitas siétricas:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_i - h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i + h, y_j)}{h^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2}$$

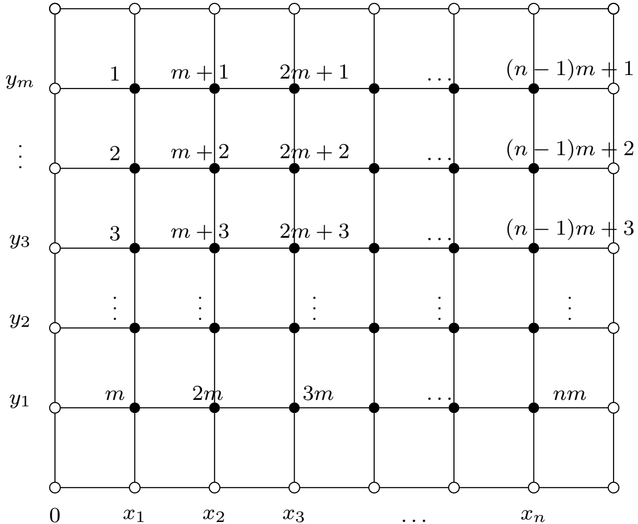
$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} \approx \frac{u(x_i, y_j - h) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j + h)}{h^2} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2}$$

Substituyéndolas en la ecuación de Laplace para cada nodo del interior de la malla, (x_i, y_j), se obtiene un sistema de ecuaciones lineales con nm incógnitas.

$$\left.\begin{array}{r} u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i+1,j} = 0 \\ i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, m \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Los términos independientes de este sistema se obtienen pasando al segundo miembro los valores de u en los nodos situados sobre los lados del rectángulo $[0, a] \times [0, b]$, que vienen dados por las *condiciones de frontera*.

Reordenamos las incógnitas $u_{i,j}$ según su disposición en la malla, $k = (m - j + 1) + m(i - 1)$.



Solución PROBLEMA 3

Para el caso $m = 4$, $n = 3$, la matriz está formada por 3×3 bloques de tamaño 4×4. Los bloques diagonales corresponden a las relaciones entre nodos de la misma columna y los bloques contiguos a la diagonal a las relaciones entre los nodos de una columna y los de la anterior o posterior.

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
-4 & 1 & & & 1 & & & & & & & \\
1 & -4 & 1 & & & 1 & & & & & & \\
& 1 & -4 & 1 & & & 1 & & & & & \\
& & 1 & -4 & & & & 1 & & & & \\
\hline
1 & & & & -4 & 1 & & & 1 & & & \\
& 1 & & & 1 & -4 & 1 & & & 1 & & \\
& & 1 & & & 1 & -4 & 1 & & & 1 & \\
& & & 1 & & & 1 & -4 & & & & 1 \\
\hline
& & & & 1 & & & & -4 & 1 & & \\
& & & & & 1 & & & 1 & -4 & 1 & \\
& & & & & & 1 & & & 1 & -4 & 1 \\
& & & & & & & 1 & & & 1 & -4
\end{array}\right)
$$

Solución PROBLEMA 3

La función de MATLAB siguiente construye por diagonales la matriz correspondiente a una malla $m \times n$.

```
function A = calor2D(m,n)
p = m*n;
v = ones(1,p-1); % Diagonales 1 y -1
v(m:m:p-m) = 0;
w = ones(1,p-m); % Diagonales m y -m
A = -4*eye(p) + diag(v,1) + diag(v,-1) + diag(w,m) + diag(w,-m);
```

Al discretizar la ecuación de Laplace en el rectángulo $[0,1] \times [0,1]$ con $h = 0.1$ se obtiene una malla de 11×11 nodos, de los cuales 9×9 son interiores. El sistema correspondiente se obtiene con

```
m = 9; n = 9; A = calor2D(m,n);
```

Las condiciones de frontera $u(x,0) = u(x,1) = 0 \quad u(0,y) = u(1,y) = y(1-y)$ afectan sólo a las columnas externas, porque en las filas las condiciones valen 0.

```
% Términos independientes p = m*n; b = zeros(p,1);
% Condiciones de contorno
h = 1/(n+1); y = h:h:1-h;
uy = y.*(1-y); uy = flipud(uy');
b(1:m) = b(1:m) - uy; % Lado izquierdo
b(p-m+1:p) = b(p-m+1:p) - uy; % Lado derecho
```

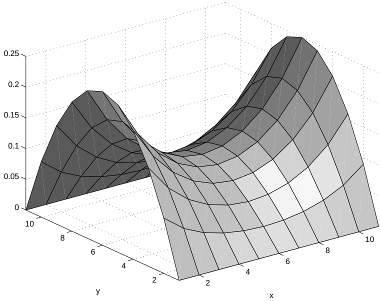
Solución PROBLEMA 3

Resolvemos el sistema y disponemos las soluciones en una matriz:

```
sol = A\ b;
Tsol = reshape(sol,m,n)
Tsol =
0.064 0.049 0.039 0.034 0.032 0.034 0.039 0.049 0.064
0.119 0.091 0.074 0.064 0.061 0.064 0.074 0.091 0.119
0.159 0.124 0.101 0.088 0.084 0.088 0.101 0.124 0.159
0.184 0.144 0.118 0.104 0.099 0.104 0.118 0.144 0.184
0.192 0.151 0.124 0.109 0.104 0.109 0.124 0.151 0.192
0.184 0.144 0.118 0.104 0.099 0.104 0.118 0.144 0.184
0.159 0.124 0.101 0.088 0.084 0.088 0.101 0.124 0.159
0.119 0.091 0.074 0.064 0.061 0.064 0.074 0.091 0.119
0.064 0.049 0.039 0.034 0.032 0.034 0.039 0.049 0.064
```

Representación gráfica:

```
M = zeros(m+2,n+2);
M(2:m+1,1) = uy;
M(2:m+1,n+2) = uy;
M(2:m+1,2:n+1) = Tsol;
surf(M)
```



Problema 1

La distribución de potencial a lo largo de una linea de transmisión formada por dos tubos de longitud L, alimentada por una fuente de voltaje, siendo r la resistividad de los tubos transmisores y g la conductancia del terreno, verifica el siguiente problema de frontera:

$$v''(x) = rgv(x), \quad x \in [0, L]$$

$$v(L) = v_L, \quad v'(0) = 0.$$

Vamos a resolver el problema para $r = 2$, $g = 0.5$, $L = 2$ y $v_L = 1$.

a) Utiliza la aproximación de la segunda derivada y realiza una partición del intervalo $[0, L]$ para obtener una discretización del problema reduciendolo a un sistema lineal de tamaño 9×9, a partir del cual obtendremos una aproximación a la solución del problema de frontera dado. Nótese que la condición de contorno $v'(0) = 0$ implica $v(0) = v(x_1)$.

b) Resuelve el problema por un método directo. Compara la solución con la exacta $v(x) = 0.133e^{x} + 0.133e^{-x}$.

c) Estudia la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel.

d) Halla un factor ω que acelere la convergencia por el método de sobrerrelajación.

Problema 2

Una persona espera impacientemente a otra que llega con retraso, de manera que camina nerviosa a lo largo de una calle, se mueve hacia la izquierda con frecuencia triple que a la derecha. Supongamos posiciones numeradas en la calle de 0 a 20, de manera que partiendo de $x_1 = 1$ y $x_{20} = 0$ las posiciones a lo largo del tiempo se obtendrán resolviendo el siguiente sistema tridiagonal:

$$x_k = \frac{3}{4}x_{k-1} + \frac{1}{4}x_{k+1}$$

a) Utiliza el método de Crout para resolver el sistema dado.

b) Aplica el método iterativo de Gauss-Seidel para obtener la solución.

c) Experimenta con distintos valores de w en el método de sobrerrelajación para acelerar la convergencia.

d) El problema descrito es un problema de frontera para una ecuación en diferencias, cuya solución exacta es:

$$x_k = 1 - \frac{3^k - 1}{3^{20} - 1}$$

Calcula estos valores para $k = 0, 1, 2, \ldots, 20$ y compara los resultados con los obtenidos en los apartados anteriores.

Problema 3

Mediante un estudio estadístico se ha observado que durante los últimos años el número de visitas a una determinada web es tal que sumando a la cantidad que accedió un año la tercera parte de la que lo hizo el año anterior resulta la que entró al año siguiente.

a) Supongamos que inicialmente han visitado la web 10.000 usuarios, plantea y resuelve un sistema de ecuaciones lineales para hallar los usuarios de los tres años siguientes sabiendo que sólo en el último año el número de visitas se ha multiplicado por 5. (El sistema será de 3×3 puesto que x_1 y x_5 ya se conocen).

b) Vamos a generalizar la situación anterior para calcular el número de usuarioss de n años consecutivos, suponiendo también que partimos de una situación de 10.000 inicialmente y que en el último año el número se multiplica por n. Expresa matricialmente el sistema de tamaño $(n-2) \times (n-2)$.

c) Edita una función .m que construya la matriz del sistema, los términos independientes y resuelva el sistema, mediante el método de Gauss-Seidel, para cualquier valor de n que demos como parámetro de entrada.

d) Prueba la función .m anterior para el caso del apartado a) y comprueba que obtienes el mismo resultado.

e) Obtén ahora el vector que da el número de usuarios para $n = 20$; Utiliza la instrucción reshape para mostrar el vector solución como una matriz de $\frac{n}{5} \times 5$.

f) Modifica la función .m anterior de modo que se considere la matriz del sistema como dispersa para la resolución del sistema. Con ayuda de los comandos `tic` y `toc` comprueba si ahorramos tiempo al trabajar con matrices dispersas, resolviendo el sistema para valores de n grandes.

Problema 4

Consideremos la matriz de tamaño $n \times n$, $A = (a_{ij})$, donde

$$a_{ij} = \begin{cases} i(n-j+1) & \text{si} \quad i \leq j \\ a_{ji} & \text{si} \quad i > j \end{cases}$$

y los términos independientes $b = (1, 2, \ldots, n)^T$. Resuelve el sistema $Ax = b$, con $n = 50$, mediente

a) El operador \ de Matlab.

b) El método de Jacobi.

c) El método de Gauss-Seidel.

d) El método de sobrerelajación.