¡Clase final!

Geometría diferencial aplicada

12 de marzo de 2021

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

Contenidos

Ejercicio 1

Hallar la expresión del polinomio que pasa por los puntos

$$\{(0,-1),(1,2),(3,0)\}$$

Representarlo gráficamente (Matlab, Mathematica, Python) y compararlo con la función de interpolación.

Ej 1: Lagrange

Problema: Interpolar los puntos $\{(0,-1),(1,2),(3,0)\}$ con el método de Lagrange i.e.

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i\ell_i(x), \qquad \ell_i(x)=\prod_{0\le m\le n, m\ne j}\frac{x-x_m}{x_i-x_m}.$$

Sean $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=3$, entonces:

$$\ell_0(x)=\frac{(x-1)}{(0-1)}\frac{(x-3)}{(0-3)}=\frac{(x-1)(x-3)}{3},$$

$$\ell_1(x)=\frac{(x-0)}{(1-0)}\frac{(x-3)}{(1-3)}=\frac{-x(x-3)}{2},$$

$$\ell_2(x)=\frac{(x-0)}{(3-0)}\frac{(x-1)}{(3-1)}=\frac{x(x-1)}{6},$$

Nota: No hacía falta calcular ℓ_2.

Ej 1: Lagrange

$$p(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + y_2\ell_2(x).$$

Esto es:

$$p(x) = -1 + \frac{13}{3}x - \frac{4}{3}x^2.$$

Problema: Interpolar los puntos $\{(0,-1),(1,2),(3,0)\}$ con el método de Newton: Calculemos el polinomio interpolador de Newton. Para ello, debemos construir las diferencias dividas:

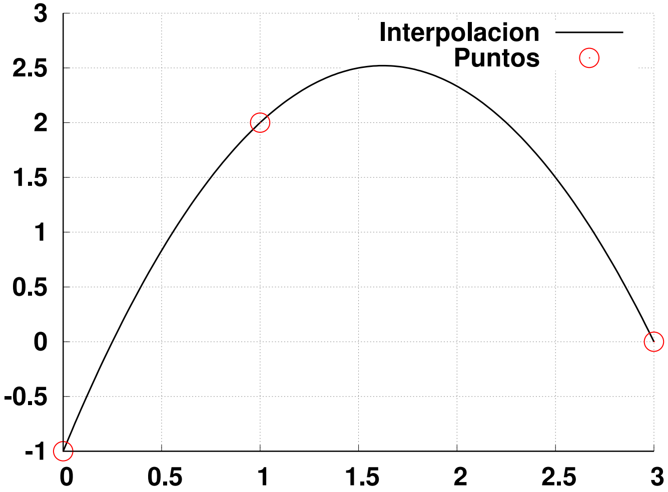
	x	y		
P_1	0	-1		
			$f[p_1, p2] = \frac{2+1}{1-0} = 3$	
P_2	1	2		$f[p_1, p_2, p_3] = \frac{-1-3}{3-0} = -\frac{-3}{4}$
			$f[p_2, p_3] = \frac{0-2}{3-1} = -1$	
P_3	3	0		

Finalmente, tenemos que el polinomio interpolador será:

$$p(x) = f[p_1] + f[p_1, p_2](x - x_1) + f[p_1, p_2, p_3](x - x_1)(x - x_2).$$

Que en nuestro caso se corresponde a:

$$p(x) = -1 + 3x - \frac{4}{3}x(x-1) = -1 + \frac{13}{3}x - \frac{4}{3}x^2.$$


Interpolacion
Puntos
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Hallar la expresión del polinomio que pasa por los puntos

$$\{(0,-1),(1,2),(3,0),(4,1)\}$$

con los métodos de Newton y Lagrange. Representarlo gráficamente (Matlab, Mathematica, Python) y compararlo con la función de interpolación.

Problema: Interpolar los puntos $\{(0,-1),(1,2),(3,0)(4,1)\}$ con el método de Lagrange i.e.

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x), \qquad \ell_i(x)=\prod_{0\leq m\leq n, m\neq j} \frac{x-x_m}{x_i-x_m}.$$

Sean $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=3$, entonces:

$$\ell_0(x)=\frac{(x-1)}{(0-1)}\frac{(x-3)}{(0-3)}\frac{(x-4)}{(0-4)}=\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{-12},$$

$$\ell_1(x)=\frac{(x-0)}{(1-0)}\frac{(x-3)}{(1-3)}\frac{(x-4)}{(1-4)}=\frac{x(x-3)(x-4)}{6},$$

$$\ell_2=XD,$$

$$\ell_3(x)=\frac{(x-0)}{(4-0)}\frac{(x-1)}{(4-1)}\frac{(x-3)}{(4-3)}=\frac{x(x-1)(x-3)}{12},$$

Ej 2: Lagrange

$$p(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{12} - \frac{x(x-3)(x-4)}{3} + \frac{x(x-1)(x-3)}{12},$$

$$p(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{10}{3}x^2 + \frac{35}{6}x - 1.$$

Ej 2: Newton

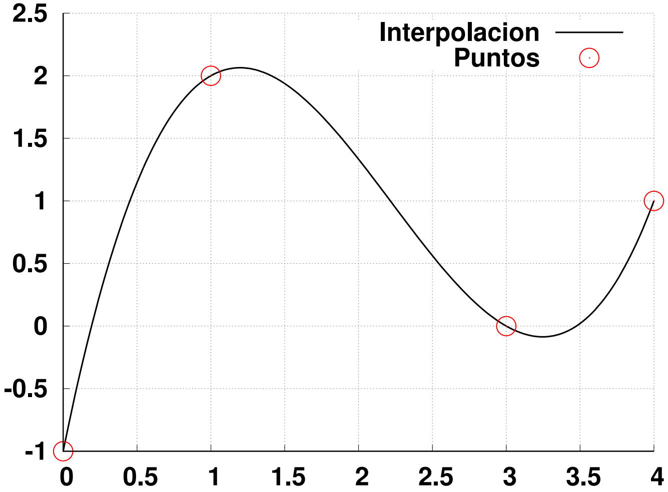
Problema: Interpolar los puntos $\{(0,-1),(1,2),(3,0),(4,1)\}$ con el método de Newton: Calculemos el polinomio interpolador de Newton. Para ello, debemos construir las diferencias divididas:

x	y			
0	-1			
		$f[p_1, p2] = \frac{2+1}{1-0} = 3$		
1	2		$f[p_1, p_2, p_3] = \frac{-1-3}{3-0} = -\frac{4}{3}$	
		$f[p_2, p_3] = \frac{0-2}{3-1} = -1$		$f[p_1, p_2, p_3, p_4] = \frac{2/3+4/3}{4-0} = \frac{1}{2}$
3	0		$f[p_2, p_3, p_4] = \frac{1+1}{4-1} = \frac{2}{3}$	
		$f[p_3, p_4] = \frac{1-0}{4-3} = 1$		
4	1			

Por lo tanto:

$$p(x) = -1 + \frac{35}{6}x - \frac{10}{3}x^2 + \frac{1}{2}x^3.$$

Ejercicio 2



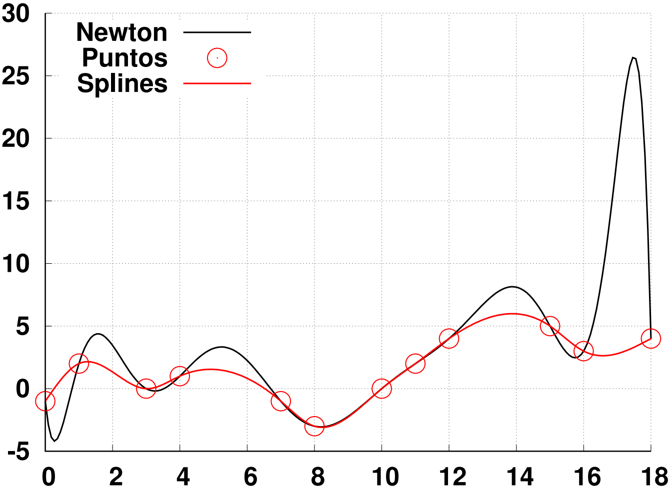
Ejercicio 3

Se quiere construir una curva que pase por los puntos

$$\{(0,-1),(1,2),(3,0),(4,1),(7,-1),(8,-3),(10,0),(11,2),(12,4),$$
$$(15,5),(16,3),(18,4)\}$$

¿Qué método escogerías y por qué? Utilizar la función correspondiente de (Matlab, Mathematica, ...) y representarlo gráficamente.

Aquí, dado que la pregunta era abierta se acepta que se puede utilizar el método de Newton por encima del método de Lagrange. Eso sí, al hacer la interpolación, dado el gran número de puntos, se puede observar que el polinomio interpolador presenta un **fenómeno de Runge** claro. Esto debía mencionarse en la memória del laboratorio. Otra respuesta válida es que era mejor utilizar splines cúbicos.


Newton
Puntos
Splines
30
25
20
15
10
5
0
-5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18

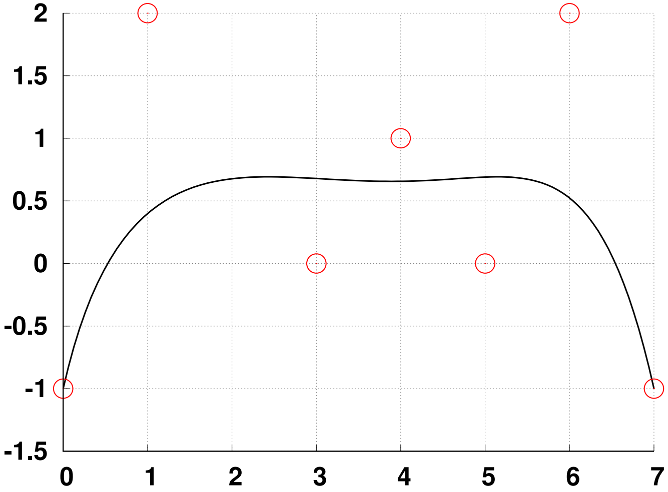
Ejercicio 4

Se quiere trazar una curva diferenciable que tenga los siguientes **puntos de control**:

$$\{(0,-1),(1,2),(3,0),(4,1),(5,0),(6,2),(7,-1)\}$$

Tip: B-splines, curvas de Bézier. Herramientas:

- **Matlab:** Curve Fitting Toolbox.
- **Mathematica:** Paquete SymbolicBsplines.
- **Python:** Paquete numpy.
- Hazlo tú.
- Geogebra.


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
1
2
3
4
5
6
7

Ejercicio 4

En general, las únicas personas que no han hecho bien este ejercicio son los que han interpolado los puntos en vez de utilizar una curva de Bézier (o un B-spline).

Supongamos que queremos interpolar, por splines cúbicos, los puntos

$$\{(2,0),(3,2),(4,0),(5,3)\}.$$

Calcular un spline cúbico implica encontrar dos polinomios de grado 3:

$$p_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,$$

$$p_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3,$$

$$p_3(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3.$$

De forma que cada polinomio conecte dos puntos contiguos y dicha conexión se realice de forma suave (primeras y segundas derivadas iguales).

Así pues tendremos:

- Condiciones de continuidad:
  $p_1(x_1) = y_1, p_1(x_2) = y_2),$
  $p_2(x_2) = y_2, p_2(x_3) = y_3),$
  $p_3(x_3) = y_3, p_3(x_4) = y_4).$
- Condiciones de regularidad:
  $p_1'(x_2) = p_2'(x_2)$, $p_2'(x_3) = p_3'(x_3)$,
  $p_1''(x_2) = p_2''(x_2)$, $p_2''(x_3) = p_3''(x_3)$.
- Condiciones normales (necesarias para completar el sistema):
  $p_1''(x_1) = p_3''(x_4) = 0.$

En total, tenemos 12 ecuaciones y 12 incógnitas. Esto permitirá resolver el sistema.

Detallemos las 12 ecuaciones en nuestro caso particular:

- Condiciones de continuidad:
  $p_1(x_1) = y_1 \to a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 0,$
  $p_1(x_2) = y_2) \to a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 2,$
  $p_2(x_2) = y_2 \to a_0 + 3b_1 + 9b_2 + 27b_3 = 2,$
  $p_2(x_3) = y_3) \to a_0 + 4b_1 + 16b_2 + 64b_3 = 0,$
  $p_3(x_3) = y_3 \to a_0 + 4c_1 + 16c_2 + 64c_3 = 0,$
  $p_3(x_4) = y_4) \to a_0 + 5c_1 + 25c_2 + 125c_3 = 3.$
- Condiciones de regularidad:
  $p_1'(x_2) = p_2'(x_2) \to a_1 + 6a_2 + 27a_3 = b_1 + 6b_2 + 27b_3,$
  $p_2'(x_3) = p_3'(x_3) \to b_1 + 8b_2 + 48b_3 = c_1 + 8c_2 + 48c_3,$
  $p_1''(x_2) = p_2''(x_2) \to 2a_2 + 18a_3 = 2b_2 + 18b_3 =,$
  $p_2''(x_3) = p_3''(x_3) \to 2b_2 + 24b_3 = 2c_2 + 24b_3.$
- Condiciones normales (necesarias para completar el sistema):
  $p_1''(x_1) = 0 \to 2a_2 + 12a_3 = 0,$
  $p_3''(x_4) = 0 \to 2c_2 + 30c_3 = 0.$

Así pues, pasando todos los términos con incógnitas al lado izquierdo y convirtiendo a modo matricial nos queda el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 & 27 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 16 & 64 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 16 & 64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 25 & 125 \\ 0 & 1 & 6 & 27 & 0 & -1 & -6 & -27 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 48 & 0 & -1 & -8 & -48 \\ 0 & 0 & 2 & 18 & 0 & 0 & -2 & -18 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 24 & 0 & 0 & -2 & -24 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dada una curva plana $\alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u))$, podemos calcular las superficies de revolución respecto a un cierto eje, multiplicando por las matrices de rotación:

$$S_x(u,\theta) = R_x(\theta)\alpha(u),$$

$$S_y(u,\theta) = R_y(\theta)\alpha(u),$$

$$S_z(u,\theta) = R_z(\theta)\alpha(u).$$

Recordad que no siempre sale una superfície de esto.

Parametrizamos un elipsoide.

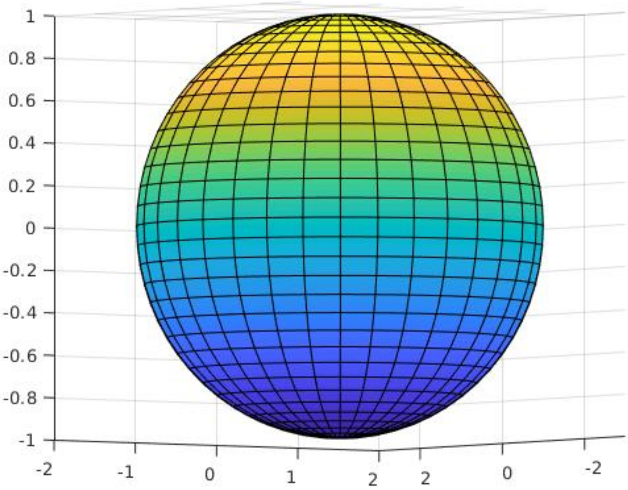
$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1\}$$

Así pues, vamos a considerar la variable $x = 2\cos u$ y la variable $y = 3\sin u$. Con este proceso conseguiríamos resolver que $x^2/4 + y^2/9 = 1$. Sin embargo, tenemos la variable z^2 por parametrizar. Así pues, deberemos encadenar dos veces el teorema fundamental de la trigonometría[1]. Para ello, vamos a incluir un término $\cos v$ en las dos variables que ya tenemos construidas y el término $\sin v$ en la variable z. Con esto, nos quedará la parametrización:

$$\varphi_1(u, v) = (2\cos u \cos v, 3\sin u \cos v, \sin v).$$

[1] $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

Parametrización de un elipsoide



¿Es una parametrización?

Hay que verificar:

1. $\varphi_1(u, v)$ verifica la ecuación de restricción de la superficie.
2. $\varphi_1(u, v) : U_1 \to \mathbb{R}^3$ con $U_1 = (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ es una inyectiva puesto que cubre toda la superficie menos el arco que une los dos polos.
3. Se puede construir inversa.
4. Es regular (es de clase $\mathcal{C}^1$ por ser producto de funcione trigonométricas y su diferencial tiene rango máximo en todos los puntos excepto en los polos que no están incluidos).

Para completar el atlas deberíamos usar la parametrización

$$\varphi_2(u, v) = (2\cos(v), 3\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v)),$$

en la región elemental $U_2 = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ que cubre la parte que no cubría la parametrización φ_1 y sigue el mismo patrón.

Calculamos los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$I_S = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}.$$

donde,

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 9\cos^2(u)\cos^2(v) + 4\sin^2(u)\cos^2(v),$$
$$F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = -5\sin(u)\cos(u)\sin(v)\cos(v),$$
$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 9\sin^2(u)\sin^2(v) + 4\cos^2(u)\sin^2(v) + \cos^2(v).$$

Vamos ahora con los coeficientes de la segunda forma fundamental. Ésta es la forma bilineal dada por la matriz:

$$II_S = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}.$$

Los coeficientes L, M, y N se pueden calcular utilizando siguientes expresiones:

$$L = \frac{\det\big(\varphi_{u,u}, \varphi_u, \varphi_v\big)}{\sqrt{\det(I_S)}}, \quad M = \frac{\det\big(\varphi_{u,v}, \varphi_u, \varphi_v\big)}{\sqrt{\det(I_S)}}, \quad N = \frac{\det\big(\varphi_{u,u}, \varphi_v, \varphi_v\big)}{\sqrt{\det(I_S)}}.$$

o, alternativamente, ...

Y los de la segunda:

$$L = \langle \varphi_{uu}, \mathcal{N} \rangle \,,$$
$$M = \langle \varphi_{uv}, \mathcal{N} \rangle \,,$$
$$N = \langle \varphi_{vv}, \mathcal{N} \rangle \,.$$

Con $\mathcal{N} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$.
Tenemos que

$$\varphi_u \times \varphi_v = \big(3\cos(u)\cos^2(v), 2\sin(u)\cos^2(v), 6\cos^2(u)\sin(v)\cos(v) + 6\sin^2(u)\sin(v)\cos(v$$

Que tiene por norma $n = \sqrt{9\cos^2(u)\cos^4(v)^2 + 4\cos^4(v)\sin^2(u)^2 + 9\sin^2(2v)}$.
Con lo que los coeficientes de la segunda forma fundamental quedarán:

$$L = \langle \varphi_{uu}, \mathcal{N} \rangle = \frac{6\cos^3 v}{n},$$
$$M = \langle \varphi_{uv}, \mathcal{N} \rangle = 0,$$
$$N = \langle \varphi_{vv}, \mathcal{N} \rangle = \frac{6\cos v}{n}.$$

La curvatura Gaussiana se puede obtener a partir de los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

En nuestro caso:

$$K = \frac{36\cos^2(v)}{\left(\left(9\cos^2(u) + 4\sin^2(u)\right)\left(9\sin^2(u)\sin^2(v) + 4\cos^2(u)\sin^2(v) + \cos^2(v)\right) - 25\sin^2(u)\cos^2(u)\sin^2(v)\right)n^2}.$$

Dadas dos superficies, S_1 y S_2, una función diferenciable $F : S_1 \mapsto S_2$ es una isometría local si conserva el producto escalar en los espacios tangentes, esto es, para $u, v \in T_pS_1$, entonces:

$$\langle D_pFu, D_pFv \rangle = \langle u, v \rangle.$$

El teorema egregio de gauss dice que si S_1 y S_2 son superficies arbitrarias y F es una isometría local entonces, dado $p \in S_1$:

$$K_{S_2}(F(p)) = K_{S_1}(p).$$

Aplicación: Descartar que dos superficies sean localmente isométricas.

unir
LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET