Primera y segunda forma fundamental

Geometría diferencial aplicada

Este documento es una ampliación de la sesión 5 de la asignatura *Geometria diferencial aplicada*. Para encontrar más información y ejemplos, se recomienda consultar el libro [1] así como las otras referencias señaladas en la bibliografía del curso.

Motivación

En el tema 4 de este curso hemos introducido la noción de superficie regular embedida en el espacio euclideo. La interpretación intuitiva de una superficie regular es la de un trozo de plano doblado de una cierta forma. Por ello, es natural plantear situaciones que tengan que ver con superfícies y que sean análogas a otras situaciones a la que estamos acostumbrados cuando trabajamos con planos. Por ejemplo, podemos preguntarnos por la longitud de una curva definida en cierta superfície o, también, por el ángulo que forman dos vectores tangentes a la superfície. Para hacer tal cosa, necesitamos una norma o, mejor aún, un producto escalar (ya que éste induce una norma) definido en el plano tangente a un punto de la superfície. La *Primera forma fundamental* es el producto escalar que se obtiene al restringir el producto escalar ordinario de $\mathbb{R}^3$ en el espacio tangente asociado a un punto de la superfície y nos permitirá calcular longitudes y ángulos en la superfície.

Por otro lado, también podemos tener interés en las propiedades de la superficie en sí y no solamente en las de los objectos geométricos que están contenidos en ella. Por ejemplo, medir, dado un punto, cómo se "aleja" la superfície de su plano tangente. La *Segunda forma fundamental* sirve precisamente ese propósito y se puede pensar (informalmente) como una generalización de la noción de curvatura estudiada para curvas planas.

Preliminares

En esta sección recordaremos diversos conceptos necesarios para entender las dos formas fundamentales.

Definición 1 *Dada una matriz B de medidas $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$, una forma bilineal de $\mathbb{R}^n$ es una aplicación:*

$$
\begin{aligned}
f_B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\mapsto \mathbb{R} \\
(x, y) &\mapsto x^T B y.
\end{aligned}
$$

Notemos que el producto escalar ordinario de $\mathbb{R}^n$ es la forma bilineal obtenida tomando $B = I_n$, donde I_n representa la matriz identidad $n \times n$. Es fácil ver que, si una matriz B cumple:

1. $x^T B x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (definida positiva),
2. $B^T = B$ (simétrica),

entonces f_B es un producto escalar (esto es, f_B verifica la definición de producto escalar del tema 1).
Otro concepto fundamental, ya definido con anterioridad, es el de espacio tangente. Vamos a suponer una parametrización $\varphi : U \mapsto S \subset \mathbb{R}^3$ de una superfície regular. Aquí, U es un abierto de $\mathbb{R}^2$, luego la parametrización φ depende de dos valores de entrada (s_1, s_2). Para simplificar la notación, utilizaremos la equivalencia $s = (s_1, s_2)$. Dado un punto $p \in S$, dado por $\varphi(s) = p$, intuitivamente está claro que existe un plano de $\mathbb{R}^3$ tangente a la superficie en el punto p. Así, aún de manera intuitiva, el plano tangente debería ser la unión de todos los vectores tangentes a la superficie en el punto (de estos últimos hay infinitos). Dada una curva regular $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto S$ tal que $\alpha(0) = p$, ésta se puede escribir como una composición $\alpha(t) = \varphi(\gamma(t))$, donde $\gamma(t)$ es una curva del plano: $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto U$ y $\gamma(0) = s$. El vector tangente a la curva en p $\frac{d}{dt}\alpha(0)$ es también un vector tangente de la superfície. Esto es:

$$
\left(\frac{d\alpha(t)}{dt}\right)_{t=0} = \left(\frac{\varphi(\gamma(t))}{dt}\right)_{t=0}.
$$

Para calcularlo utilizando la composición es necesario aplicar la regla de la cadena:

$$
\left(\frac{\varphi(\gamma(t))}{dt}\right)_{t=0} = \frac{\partial\varphi(s)}{\partial s_1}\frac{d\gamma^1(0)}{dt} + \frac{\partial\varphi(s)}{\partial s_2}\frac{d\gamma^2(0)}{dt}. \tag{1}
$$

Cualquier curva inscrita en la superficie que pase por un punto dado nos va a dar un vector tangente. Ahora estamos en disposición de definir el *plano tangente como el conjunto de vectores tangentes dados por una curva inscrita en la superficie*. Esta definición es un poco abstracta y arroja muchas dudas sobre cómo calcular el plano tangente. Ahora bien, las curvas $\varphi(s_1 + t, s_2)$ y $\varphi(s1, s_2 + t)$ tienen vectores tangentes dados por $(\partial\varphi/\partial s_1)(s)$ y $(\partial\varphi/\partial s_2)(s)$ respectivamente y, además, generan el plano tangente, esto es, cualquier vector tangente a la superfice en p se puede escribir como combinación lineal tal y como muestra la identidad (1). Resumiendo, *calcular el plano tangente en un punto es tan sencillo como calcular las derivadas parciales de la parametrización de la superficie y evaluarlas en la preimagen de dicho punto.*

Primera forma fundamental

Dada una superficie parametrizada por $\varphi : U \mapsto S \subset \mathbb{R}^3$ y un punto $p = \varphi(s)$, definimos **la primera forma fundamental** como la restricción del producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$ al plano tangente de la superficie en p que denotaremos por $T_p(S)$. Es fácil ver que la primera forma fundamental I_p define una forma bilineal del plano tangente $T_p(S)$. Así pues, ésta quedará determinada por su matriz asociada. Ésta se obtiene del valor de la forma bilineal en una base del espacio tangente. Ya hemos visto que las derivadas parciales de la parametrización, $\{\partial\varphi(s)/\partial s_1, \partial\varphi(s)/\partial s_2\}$, forman una base del espacio tangente, luego, la primera forma fundamental vendrá dada por la matriz:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} E &= \langle \partial\varphi(s)/\partial s_1, \partial\varphi(s)/\partial s_1 \rangle, \\ F &= \langle \partial\varphi(s)/\partial s_1, \partial\varphi(s)/\partial s_2 \rangle, \\ G &= \langle \partial\varphi(s)/\partial s_2, \partial\varphi(s)/\partial s_2 \rangle, \end{aligned}$$

y $\langle , \rangle$ denota el producto escalar usual. Así pues, para calcular la primera forma fundamental solamente es necesario calcular las primeras derivadas de la parametrización y, luego, calcular sus productos escalares.

Como ya hemos dicho, la primera forma fundamental nos puede servir para calcular longitudes. Si una curva, contenida en la superficie S, viene dada por $\alpha(t) = \varphi(\gamma(t))$, la longitud del arco delimitado por los parámetros t_1 y t_2 vendrá dada por

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\alpha}(t)\|_I dt.$$

Donde $\|\dot{\alpha}(t)\|_I = \sqrt{I(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})}$, denota la norma inducida por la primera forma fundamental. Desarrollando un poco más, obtenemos que la longitud del arco vendrá dada por

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\left(\frac{d\gamma^1}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{d\gamma^1}{dt}\frac{d\gamma^2}{dt}\right) + G\left(\frac{d\gamma^2}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Ejemplo 1 (Primera forma fundamental de la esfera) *Vamos a calcular la primera forma fundamental de la esfera de radio r. Para eso, utilizaremos la siguiente parametrización: $\varphi(\delta, \theta) = (r\cos\theta\cos\delta, r\cos\theta\sin\delta, r\sin\theta)$. Las derivadas parciales vienen dadas por:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial\delta} &= (-r\cos\theta\sin\delta, r\cos\theta\cos\delta, 0), \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} &= (-r\sin\theta\cos\delta, -r\sin\theta\sin\delta, r\cos\theta). \end{aligned}$$

Recordemos que estos vectores conforman una base del plano tangente en el punto $p = \varphi(\delta, \theta)$. Ahora es necesario calcular los coeficientes E, F y G. Esto es:

$$
\begin{aligned}
E &= \langle \partial\varphi/\partial\delta, \partial\varphi/\partial\delta \rangle = r^2 \cos^2\theta(\sin^2\delta + \cos^2\delta) = r^2\cos^2\theta, \\
F &= \langle \partial\varphi/\partial\delta, \partial\varphi/\partial\theta \rangle = 0, \\
G &= \langle \partial\varphi/\partial\theta, \partial\varphi/\partial\theta \rangle = r^2 \sin^2\theta(\cos^2\delta + \sin^2\delta) + r^2\cos^2\theta = r^2
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2 (Primera forma fundamental del toro) *Ahora vamos a calcular la primera forma fundamental del toro de revolución, para este fin, utilizaremos la parametrización:*

$$\varphi(\delta, \theta) = ((r_0 + a\cos\delta)\cos\theta, (r_0 + a\cos\delta)\sin\theta, a\sin\delta)$$

. Las derivadas parciales vienen dadas por:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial\delta} &= (-a\sin\delta\cos\theta, -a\sin\delta\sin\theta, a\cos\delta), \\
\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} &= (-(r_0 + a\cos\delta)\sin\theta, (r_0 + a\cos\delta)\cos\theta, 0).
\end{aligned}
$$

Los coeficientes de la primera forma fundamental vienen dados por:

$$
\begin{aligned}
E &= \langle \partial\varphi/\partial\delta, \partial\varphi/\partial\delta \rangle = a^2, \\
F &= \langle \partial\varphi/\partial\delta, \partial\varphi/\partial\theta \rangle = 0, \\
G &= \langle \partial\varphi/\partial\theta, \partial\varphi/\partial\theta \rangle = (r_0 + a\cos\delta)^2
\end{aligned}
$$

Segunda forma fundamental

La idea intuitiva detrás de la segunda forma fundamental es medir como, en el espacio $\mathbb{R}^3$, la superficie S se curva con respecto del plano tangente en un punto dado.

Supongamos que tenemos una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto S$. Recordemos que un campo de vectores normales unitarios es una aplicación $N : S \mapsto \mathbb{R}^3$ tal que, para todo $p \in S$, $N(p)$ tiene norma 1 y es ortogonal a $T_p(S)$. Dado un punto $p = \varphi(s) \in S$, podemos calcular un vector normal unitario utilizando el producto vectorial de dos vectores de una base del plano tangente:

$$N(p) = \frac{\partial\varphi(s)/\partial s_1 \times \partial\varphi(s)/\partial s_2}{\|\partial\varphi(s)/\partial s_1 \times \partial\varphi(s)/\partial s_2\|}$$

. Dado $w \in T_pS$, La segunda forma fundamental se define como

$$II_p(w) = -\langle dN(p)(w), w \rangle.$$

Como la primera forma fundamental, II_p define una forma bilineal del plano tangente. Para determinarla, otra vez, tenemos que ver cómo actúa sobre los vectores de la base $\{\partial\varphi(s)/\partial s_1, \partial\varphi(s)/\partial s_2\}$. LLamamos a tales coeficientes:

$$L = II_p(\partial\varphi(s)/\partial s_1, \partial\varphi(s)/\partial s_1),$$

$$M = II_p(\partial\varphi(s)/\partial s_1, \partial\varphi(s)/\partial s_2),$$
$$M' = II_p(\partial\varphi(s)/\partial s_2, \partial\varphi(s)/\partial s_3),$$
$$N = II_p(\partial\varphi(s)/\partial s_2, \partial\varphi(s)/\partial s_2).$$

Hacer estos cálculos en abstracto, esto es, sin utilizar ninguna parametrización completa es tedioso. A continuación damos los resultados:

$$L = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det\left(\frac{\partial^2\varphi(s)}{\partial s_1^2}, \frac{\partial\varphi(s)}{\partial s_1}, \frac{\partial\varphi(s)}{\partial s_2}\right),$$

$$M' = M = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det\left(\frac{\partial^2\varphi(s)}{\partial s_1 \partial s_2}, \frac{\partial\varphi(s)}{\partial s_1}, \frac{\partial\varphi(s)}{\partial s_2}\right),$$
$$N = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det\left(\frac{\partial^2\varphi(s)}{\partial s_2^2}, \frac{\partial\varphi(s)}{\partial s_1}, \frac{\partial\varphi(s)}{\partial s_2}\right).$$

Referencias

[1] M.P. do Carmo. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Textos Universitarios: Ciencias médicas. Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.