Presentación
+
Tema 1. Introducción

Carlos Quemada Mayoral

18/11/2020

¿Qué es procesar señales?

- Engloba dos conceptos:
  - Fundamentos matemáticos usados en el procesamiento de las señales.
  - Predicción del comportamiento de las señales en el futuro.
- Aplicaciones del procesamiento de señales:
  - **Procesamiento de audio digital** (Tema 10). Se usa para eliminar ruido, cambiar el tono de la voz, etc.
  - **Procesamiento de imágenes digitales** (Tema 11). Consiste en aplicar filtros a imágenes para realizar determinadas funciones: mezclar iluminación, mejorar nitidez, detectar objetos. Utiliza los mismos principios matemáticos que el procesado de audio.
  - **Procesamiento de vídeo digital** (Tema 12).
  - **Geoposicionamiento**. Basado en receptores de GPS que estiman el posicionamiento y velocidad del usuario mediante varios satélites geoestacionarios.
  - **Sonar**. Ondas acústicas. Usado por ejemplo por submarinos para detectar barcos.
  - **Radar**. Está basado en la misma idea pero con ondas electromagnéticas.

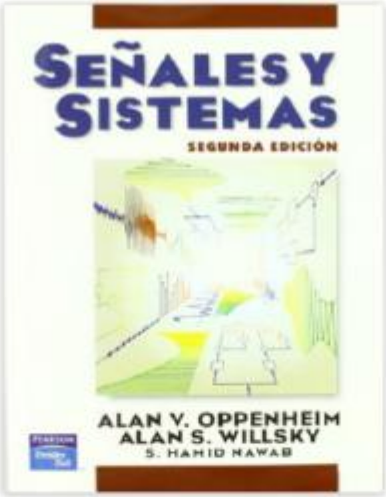
¿Cómo estudiar esta asignatura?

- Método ***flipped learning***: leer los temas en pdf antes de asistir a clase.
- Imprimir las *slides* antes de la clase para poder tomar notas en ellas.
- Escuchar cada clase un par de veces. Una sin paradas y otra con paradas apuntando notas en cada *slide* (comentarios del profesor e información que podéis completar consultando libros, internet, etc.).
- Pasar a limpio las *slides* para tener unos apuntes completos.
- Podéis preguntar dudas usando el chat.
- Fecha examen: está puesta en el calendario de la asignatura: al final del sitio *web* ⟹ https://www.unir.net/ingenieria/master-ingenieria-matematica-computacion/

¿Cómo estudiar esta asignatura?

- **Libro recomendado**: didáctico, fácil de encontrar, con muchos ejercicios y ejemplos. La mejor edición es la segunda que es más completa (más ejemplos).

Oppenheim
Señales y sistemas
2ª edicion
Prentice Hall



- Es muy extenso: como para dos cuatrimestres
- No está en la biblioteca UNIR

- En la asimilación del temario lo más importante es:
  - Estudio de los temas en pdf leyendo primero las ideas clave al comienzo del tema.
  - Clase presencial apuntando los comentarios del profesor.
  - Lección magistral: clase pregrabada sobre conceptos matemáticos básicos (números complejos) asociados a la asignatura. Está en el aula virtual o en los pdf.

- En cada tema hay otros apartados menos importantes como, "lo más recomendado", "más información", etc. No perdáis mucho tiempo con esto.

¿Cómo evaluar esta asignatura?

- **Examen (60%)**.
  - Es la parte más importante (60%). Hay que sacar un 5/10 para mediar con la evaluación continua.
  - Constará solo de problemas. No habrá ni test, ni preguntas de teoría.
  - Para cumplir con las horas dedicadas a la asignatura, solo habrá problemas tipo. Como los que hagamos en clase, cambiando los datos del planteamiento.
  - No saltar la teoría. Necesaria para entender los problemas. No memorizar solo entender. En el examen se puede llevar una hoja a doble cara con las fórmulas. Se permiten calculadoras programables. No móviles.
  - Los exámenes se diseñan para que sean distintos entre personas sentadas de forma contigua.
- **Evaluación continua (40%)**.
  - La constituyen: test de cada tema (0.1 puntos Sakai), asistencia a dos clases presenciales virtuales (0.4 puntos Sakai por clase), actividades laboratorio (5 puntos Sakai por actividad), actividades trabajo individual (5 puntos Sakai por trabajo) y actividades trabajo grupal (3 puntos Sakai por trabajo). Solo cuentan las actividades aprobadas.
  - Como mucho podréis sacar 10 puntos Sakai que equivalen a un 4/10. Si se hace el máximo en todo se obtienen 15 puntos Sakai pero solo se conceden 10.

Actividades

- Sirven para aprender haciendo. Laboratorio, trabajo individual y trabajo grupal

- La mayoría consisten en implementar scripts en Octave (versión *open source* Matlab)

- Puede usarse Matlab si se quiere. Comandos muy similares.

- Hay que entregar una hoja de respuestas rellena en formato *Word*. No entregar las actividades en pdf o con una simple foto de unos cálculos a mano.

- Los laboratorios son actividades tutorizadas y en grupo. Se usará Octave y mediante la herramienta compartir pantalla, podréis enseñarme los diferentes errores que os salgan e intentaré corregirlos.

Tutorias

- Clase presentación,
- 3 clases de resolución de las actividades.
- Clase preparación de examen.

Foro (no puntuable)

- En el foro se deben hacer preguntas concisas. No sirve preguntar que nos expliquen un tema al completo por ejemplo.

- No se debe poner código en el foro para evitar copias que puedan degenerar en un suspenso masivo cuando varios alumnos tienen exactamente el mismo error.

- No pasar las actividades entre amigos.

- Los problemas de código se gestionan a través del tutor. Es el tutor él que me lo reenvía a mi.

Temario

- Parecido al temario de sistemas lineales de 2º de Ingeniería de Telecomunicación o Ingeniería Electrónica.
- Nueve temas están dedicados a teoría de señal y tres temas a aplicaciones.
- Tres primeros temas son sobre señales. Que es una señal y como se modela matemáticamente.
- Tema 4. Sobre sistemas, que son procesos que transforman la señal. Por ejemplo una pared, un condensador eléctrico, etc.
- Tema 5. Sobre convolución, que te permite calcular matemáticamente la interacción de la entrada con el sistema.

Temario

- Tema 6. Sobre series de Fourier. Nos permite analizar en tiempo y frecuencia señales periódicas en tiempo continuo. El tema 7 es igual pero en discreto.

- Tema 8. Se extiende el mismo análisis a señales aperiódicas. Tema 9 en discreto.

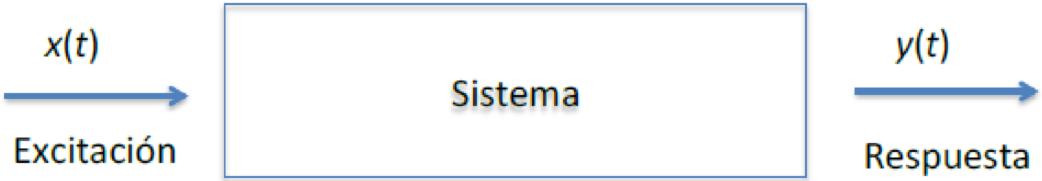
- Tema 10. Como procesar audio usando teoría de señal. Se verán ejemplos de procesamiento de audio, por ejemplo espectrogramas.

- Tema 11 y 12. Se aplicará la transformada de Fourier a imágenes y vídeo.

Índice

1.1. Definiciones básicas

- Señal **x(t):** representación de un fenómeno físico, p. ej. propagación de ondas acústicas, el voltaje en un cable o las variaciones en los campos electromagnéticos que se propagan en el espacio.
- **Sistema**: dispositivo que modifica una señal de entrada x(t) para producir una señal de salida y(t).



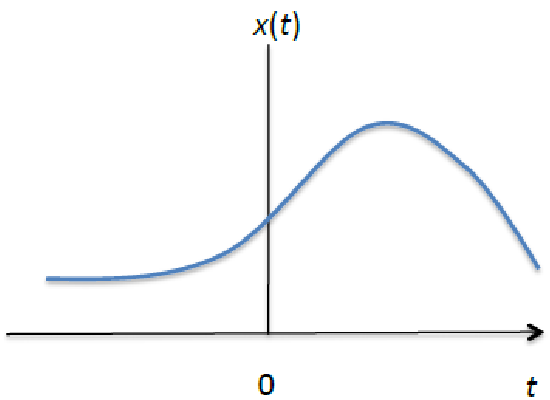
- Ruido **n(t)**: fenómeno físico variable en el tiempo que no transporta información útil (indeseable) pero que se suma a ella (información).
- Información **i(t)**: datos que queremos transmitir mediante la señal s(t).

$$s(t) = i(t) + n(t)$$

En el resto de la asignatura n(t) = 0 $\Rightarrow$ s(t) = i(t)

1.2. Tipos de señales

- De **tiempo continuo** x(t)**:** definida en todo instante de tiempo t**.**
- De **tiempo discreto** x[n]**:** definida solo en determinados instantes de tiempo n.

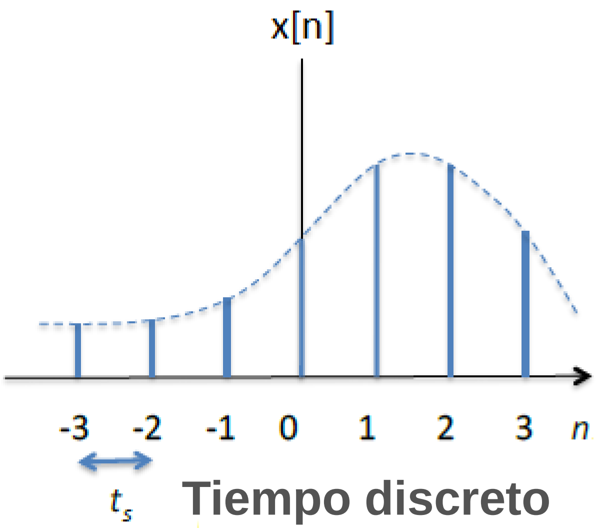


Tiempo continuo

Muestreo

t_s: periodo de muestreo

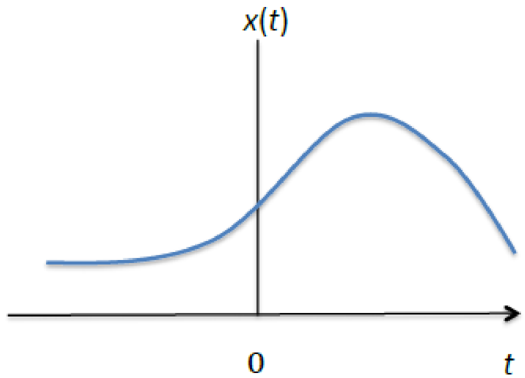
$x(nt_s) = x[n]$



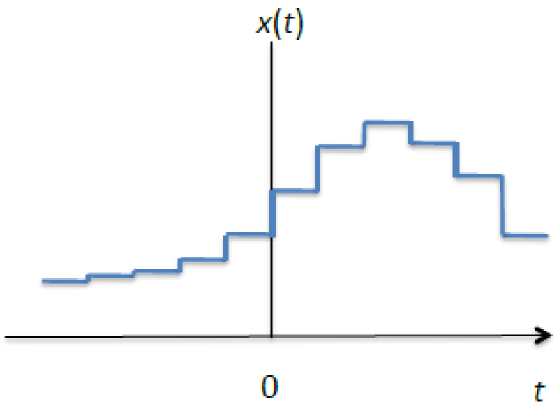
Tiempo discreto

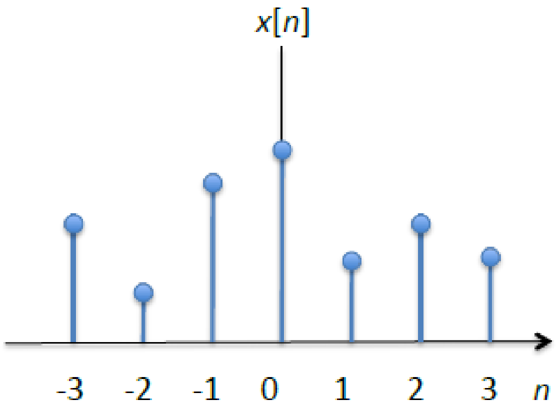
1.2. Tipos de señales

- De **valor continuo:** puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo**.**



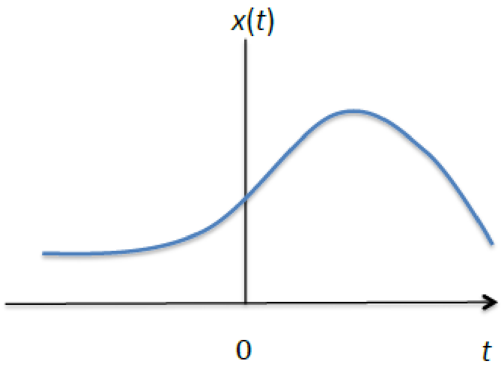
- De **valor discreto:** solo puede tomar un conjunto discreto de valores.



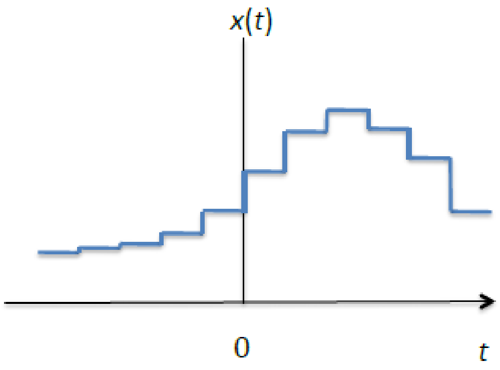


1.2. Tipos de señales

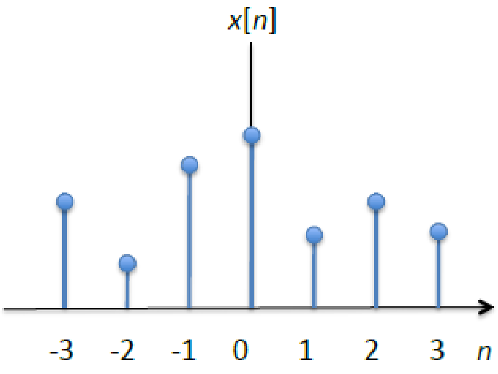
Analógica: es una señal de tiempo y valor continuo que no presenta discontinuidades (representa un fenómeno físico)**.**



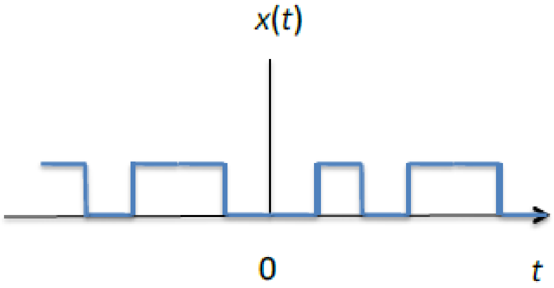
- **Digital:** es una señal que toma un conjunto discreto de valores. Puede ser de tiempo continuo o discreto. Si solo toma dos valores: binaria.



Tiempo continuo



Tiempo discreto



Binaria

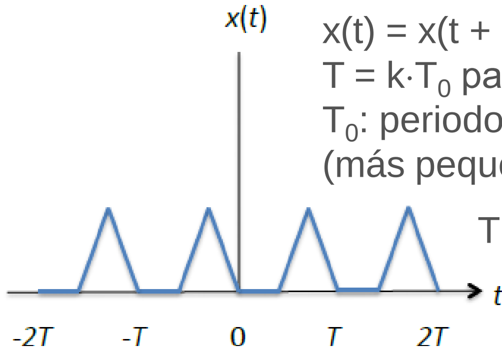
1.2. Tipos de señales

- **Aleatoria:** sus valores no se pueden predecir y en consecuencia no se pueden representar con una función matemática. Por ejemplo, una señal de ruido.

- **Determinista:** sus valores se pueden describir mediante una función matemática. Por ejemplo, una señal periódica.

1.2. Tipos de señales

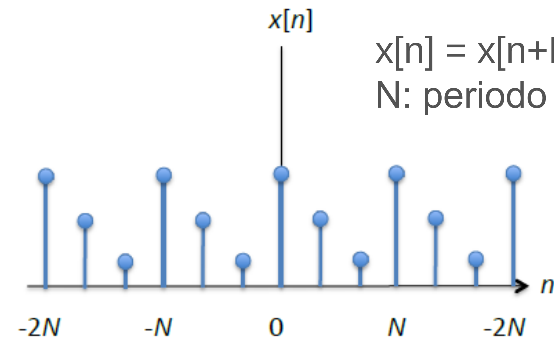
- **Periódica:** señal cuyos valores se repiten periódicamente en el tiempo.



x(t) = x(t + n·T)
$T = k \cdot T_0$ para k≥1
T_0: periodo fundamental
(más pequeño)

$T = T_0$

Tiempo continuo



x[n] = x[n+N]
N: periodo discreto, N≥1

Tiempo discreto

Una señal periódica popular en procesamiento es:

$$x(t) = A \cdot \sin(2\pi f_0 t + \phi) = A \cdot \sin(w_0 t + \phi)$$

A: amplitud
f_0: frecuencia cíclica fundamental
w_0: frecuencia angular fundamental
ϕ: fase en radianes
$w_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_0$
$T_0 = 1/ f_0$
Por convención $\Rightarrow T_0 = T$, $f_0 = f$ y $w_0 = w$

- **No periódica:** señal que no cumple la propiedad anterior.

1.3. Energía y potencia de la señal

- **Energía de una señal:** área bajo el cuadrado de la magnitud de la señal. No se corresponde con la energía del fenómeno físico asociado pero es proporcional a él.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

Tiempo continuo

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Tiempo discreto

- **Potencia de una señal:** concepto creado para señales ilimitadas en tiempo. Es la energía media de la señal.

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt$$

Tiempo continuo

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

Tiempo discreto

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{T} \int_{T} |x(t)|^2 \, dt$$

Señales periódicas tiempo continuo

$$P = \frac{1}{N} \sum_{0}^{N-1} |x[n]|^2$$

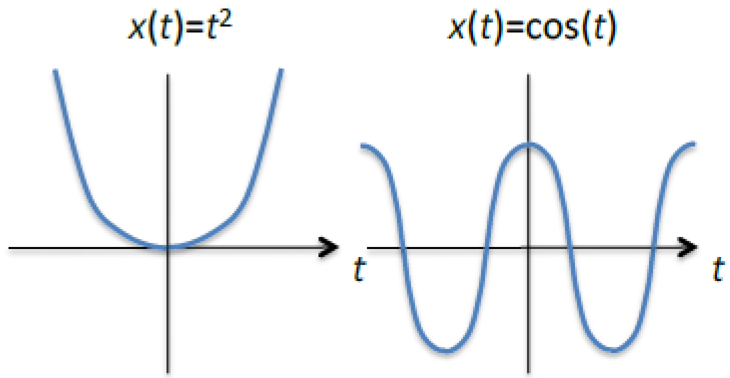
Señales periódicas tiempo discreto

1.3. Energía y potencia de la señal

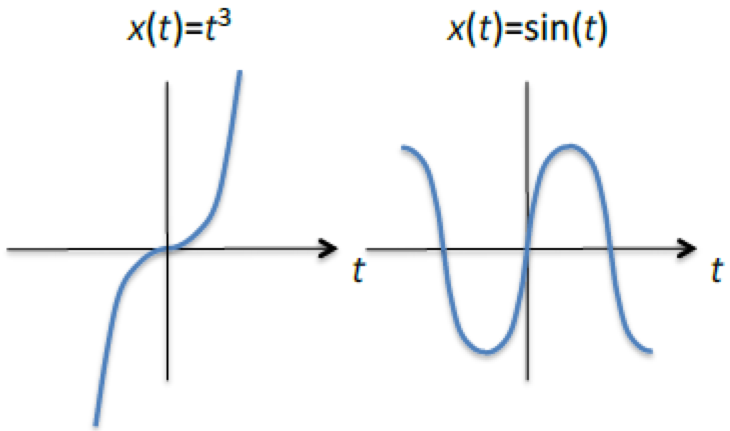
- **Señal de energía:** señal de energía finita y en consecuencia $P = 0$.
- **Señal de potencia:** señal de potencia finita y en consecuencia $E = \infty$.

1.4. Propiedades de simetría de la señal

- **Simetría par:** si x(t) = x(-t).



- **Simetría impar:** si x(t) = -x(-t).



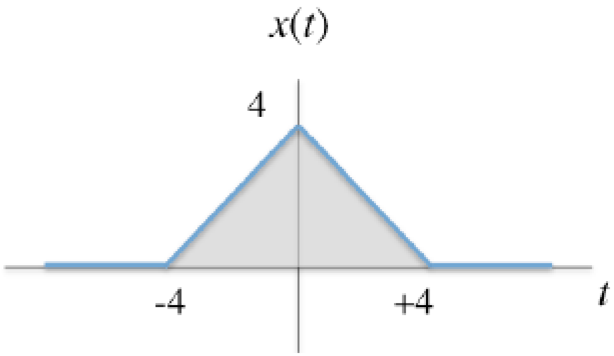
1.4. Propiedades de simetría de la señal

- Toda función puede escribirse como la suma de una función par y una impar.
- La suma o resta de funciones pares da una función par.
- La suma o resta de funciones impares da una función impar.
- La suma o resta de una función par y una función impar no es ni par ni impar, excepto en el caso trivial de que una de ellas sea cero.
- El producto de dos funciones pares es una función par.
- El producto de dos funciones impares da una función par.
- El producto de una función par y una impar es impar.

Ejercicio 1

- Calcular la energía y potencia de la siguiente señal e indicar si se trata de una señal de energía o de potencia.

$$x(t) = \begin{cases} 4(1 - |t/4|), & \text{si } |t| < 4 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$



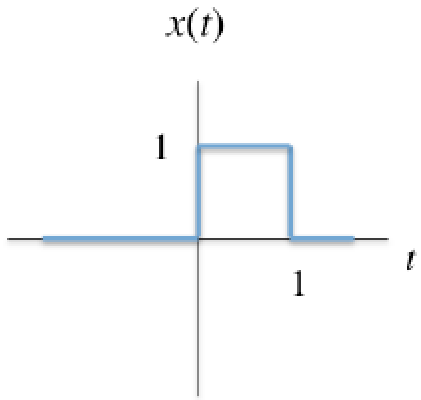
- Calculamos la energía $\Rightarrow$ $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$
- Al existir simetría respecto al eje y podemos integrar entre t = 0 y t = +4
- Entre 0 y 4 x(t) es positiva, con lo que el valor absoluto |x(t)| = 4(1 - t/4)

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = 2\int_0^4 t^2 - 8t + 16\, dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - 4t^2 + 16t\right)\Bigg|_0^4 = 2\left[\frac{64}{3}\right] = \frac{128}{3}$$

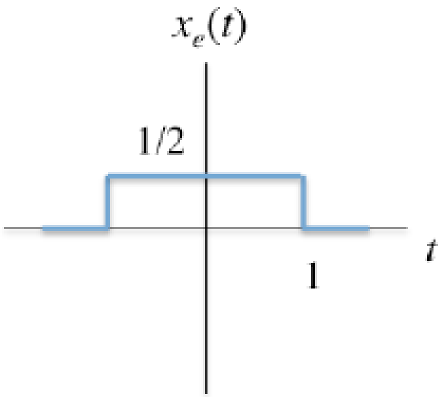
- Puesto que la energía es finita, **la señal es de energía** $\Rightarrow$ P = 0.

Ejercicio 2

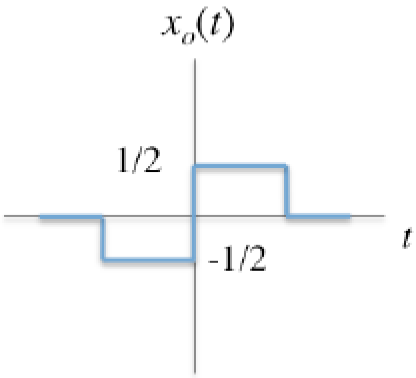
- Dada la siguiente señal, dibujar su parte par e impar.



$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$



$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$



Ejercicios adicionales

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicios 1.1, 1.3, 1.7, 1.10**
- Vamos a hacer el **1.10**
- Determinar el periodo fundamental de $x(t) = 2\cos(10t + 1) – \text{sen}(4t - 1)$
- El coseno tiene un periodo de $\pi/5$ y el seno de $\pi/2$
- El coseno repetirá sus valores en $t = \pi/5, 2\pi/5, 3\pi/5, 4\pi/5, 5\pi/5,\ldots$
- El seno repetirá sus valores en $t = \pi/2, 2\pi/2, 3\pi/2, 4\pi/2, 5\pi/2,\ldots$
- El valor de t más pequeño en el que se repiten los valores del seno y del coseno sería π ($5\pi/5$ para el coseno y $2\pi/2$ para el seno).
- Por tanto, el periodo fundamental de x(t) es $\boldsymbol{\pi}$.

Ejercicios adicionales

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicios 1.1, 1.3, 1.7, 1.10**
- Vamos a hacer el **1.3**
- Determinar los valores de potencia y energía de las siguientes señales:
- a) $x1(t) = u(t)e^{-2t}$ b) $x2(t) = e^{j(2t + \pi/4)}$ c) $x3(t) = \cos(t)$
- d) $x1[n] = u[n](1/2)^{n}$ e) $x2[n] = e^{j(\pi n/2 + \pi/8)}$ f) $x3[n] = \cos(\pi n/4)$

Ejercicios adicionales

- a) x1(t) = u(t)e^{-2t}
- Calculamos primero la energía como $\Rightarrow$ $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$

Tiempo continuo

$$E = \int_0^{\infty} e^{-4t} dt = \frac{1}{4} < \infty, \text{por tanto } P = 0$$

- Como la energía es finita, diremos que es una señal de energía y por tanto su potencia es cero. Se puede demostrar.

Ejercicios adicionales

- b) $x2(t) = e^{j(2t + \pi/4)}$
- Calculamos primero la energía como $\Rightarrow$ $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$

  Tiempo continuo

- Como el módulo de x2 es uno, la integral de uno entre -∞ y ∞ dará infinito.
- Por tanto, es una señal de potencia.
- Su potencia será $P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x_2(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt = \lim_{T\to\infty} 1 = 1$

Ejercicios adicionales

- c) x3(t) = cos(t)
- Las señales periódicas son señales de potencia excepto el caso trivial x(t) = 0
- Por tanto, calcularemos la potencia como $P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{T}\int_{T} |x(t)|^2\, dt$
- Realizando la integral del coseno al cuadrado entre -π y π y dividiendo entre 2π, da una potencia igual a ½.
- Puesto que es una señal de potencia, su energía es infinita.

Ejercicios adicionales

- d) x1[n] = u[n](1/2)^n
- Calculamos la energía para señales discretas $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x1[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-1/4} = \frac{4}{3}$$

Serie geométrica con |r| < 1

- Puesto que es una señal de energía, la potencia es igual a cero.

Ejercicios adicionales

- e) x2[n] = $e^{j(\pi n/2 + \pi/8)}$
- Calculamos la energía para señales discretas $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$
- Como el módulo al cuadrado de x2 vale 1, el sumatorio $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x2[n]|^2 = \infty$
- Por tanto, es una señal de potencia $\Rightarrow$ $P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$
- Por tanto, $P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} 1 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}(2N+1) = 1$

Ejercicios adicionales

- f) x3[n] = cos(πn/4)

- Calculamos directamente la potencia

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x3[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \left(\cos\frac{\pi n}{4}\right)^2$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1+\left(\cos\frac{\pi n}{2}\right)}{2} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \cdot \frac{1}{2}\left(\sum_{n=-N}^{N} 1 + \sum_{n=-N}^{N} \cos\frac{\pi n}{2}\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \cdot \frac{1}{2}(2N+1\pm 1) = \frac{1}{2}$$

- Como es señal de potencia ⇒ E = ∞

$$\sum_{n=-N}^{N} \cos\frac{\pi n}{2} = 1\ , N = 0,1,4,5,8,9,\ldots$$

$$\sum_{n=-N}^{N} \cos\frac{\pi n}{2} = -1\ , N = 2,3,6,7,10,11,\ldots$$

Ejercicios adicionales

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicios 1.1, 1.3, 1.7, 1.10**
- Vamos a hacer el **1.7**
- Para cada una de las siguientes señales, determine todos los valores de la variable independiente para los cuales se garantice que la parte **par** de la señal es cero:
- a) $x1[n] = u[n] – u[n-4]$ b) $x2(t) = sen(t/2)$ c) $x3[n] = (1/2)^n u[n-3]$
- d) $x4(t) = e^{-5t} u(t+2)$

Ejercicios adicionales

- Para cada una de las siguientes señales, determine todos los valores de la variable independiente para los cuales se garantice que la parte par de la señal es cero:

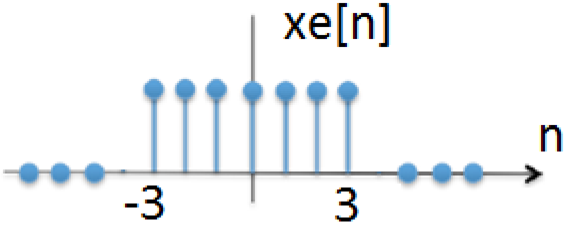
- a) x1[n] = u[n] – u[n-4]

t = n

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} = \frac{1}{2}(x_1[n] + x_1[-n]) = \frac{1}{2}(u[n] - u[n-4] + u[-n] - u[-n-4])$$

- Haciendo las restas de las funciones escalón se obtiene una función pi entre n = -3 y n = 3.

- Por tanto, la parte par de x1[n] valdrá cero para n ≥ 4 y n ≤ -4



Ejercicios adicionales

- Para cada una de las siguientes señales, determine todos los valores de la variable independiente para los cuales se garantice que la parte par de la señal es cero:

- b) x2(t) = sen(t/2)

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

- $x_e(t)$ vale cero para cualquier valor de t

Ejercicios adicionales

- Para cada una de las siguientes señales, determine todos los valores de la variable independiente para los cuales se garantice que la parte par de la señal es cero:

- c) $x3[n] = (1/2)^n u[n-3]$

t = n

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-3] + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n-3]\right]$$

- Representando $x_e(t)$, se observa que es cero para $-2 \leq n \leq 2$ y cuando n tiende a $\pm\infty$

Ejercicios adicionales

- Para cada una de las siguientes señales, determine todos los valores de la variable independiente para los cuales se garantice que la parte par de la señal es cero:

- d) x4(t) = e^{-5t} u(t+2)

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} = \frac{1}{2}(x_4(t) + x_4(-t)) = \frac{1}{2}[e^{-5t}u(t+2) + e^{5t}u(-t+2)]$$

- Representando $x_e(t)$, se observa que es cero solamente cuando t tiende a $\pm\infty$

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

unir

www.unir.net