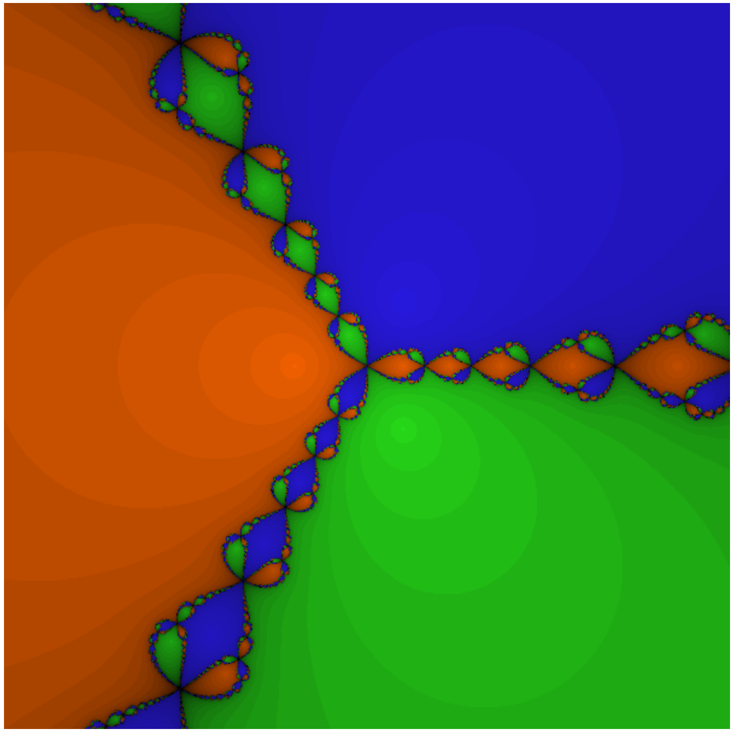
Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería

Alicia Cordero

Neus Garrido

Juan R. Torregrosa

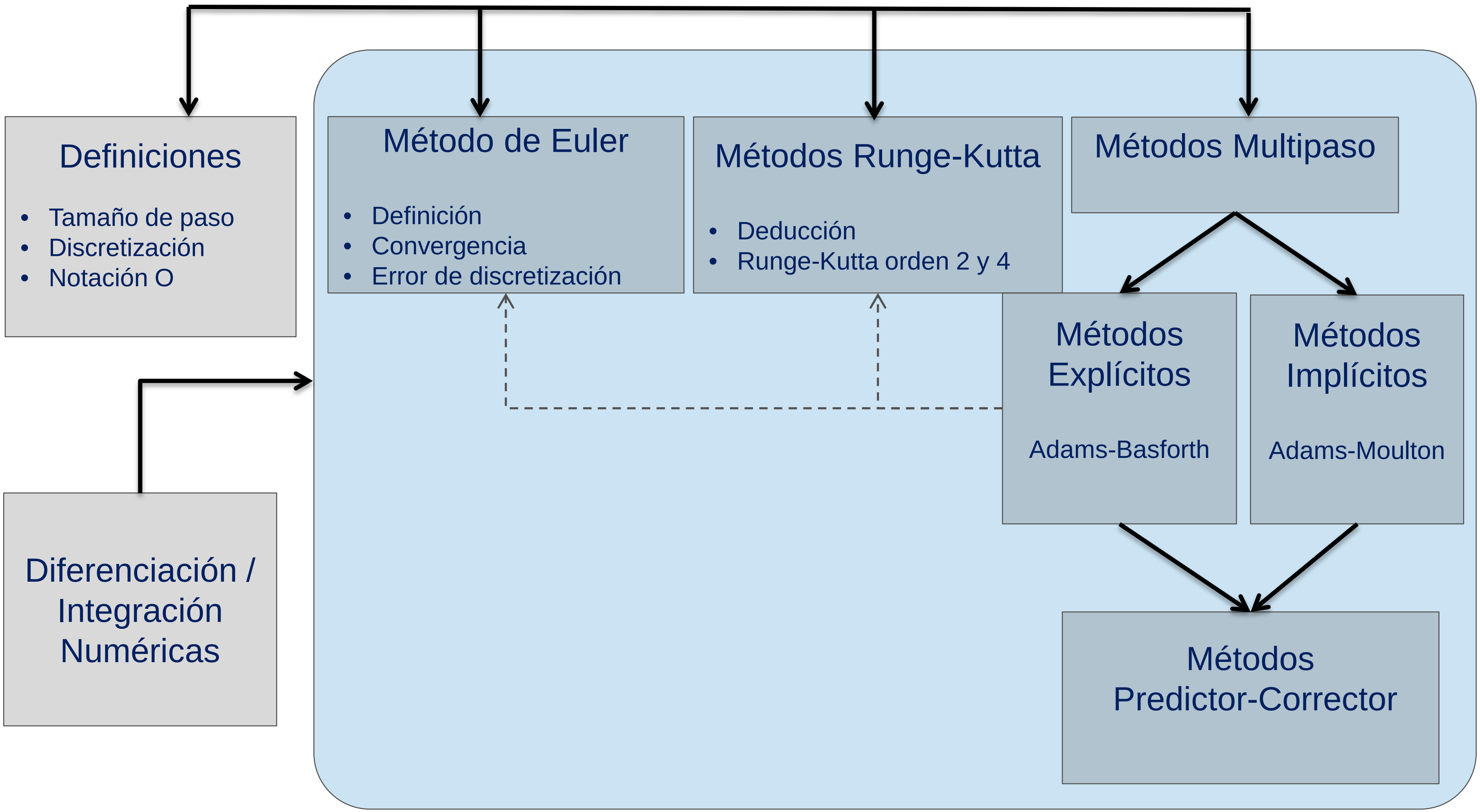


Tema 3: Problemas de valor inicial. Métodos de un paso

Ecuaciones diferenciales de primer orden

- Introducción
- Métodos de un paso
  - Método de Euler
  - Método de Heun
  - Métodos de Runge-Kutta
- Sistemas de ecuaciones diferenciales

Métodos numéricos para problemas de valor inicial



Introducción

Problemas de valor inicial

Consideremos el modelo de crecimiento económico de un país

$$X(t) = \sigma K(t),$$
$$\dot{K}(t) = \alpha X(t) + H(t),$$
$$N(t) = N_0 e^{\rho t},$$

donde $X(t)$ es la producción total anual, $K(t)$ el stock de capital, $H(t)$ el flujo anual de ayudas del exterior y $N(t)$ el tamaño de la población, medido en el instante t.

El modelo se resume en la ecuación diferencial

$$\dot{K}(t) = \alpha\sigma K(t) + H(t),$$

con la condición inicial $K(0) = K_0$.

Problemas de valor inicial

En un modelo macroeconómico $C(t)$, $I(t)$ e $Y(t)$ designan respectivamente consumo, inversión y renta nacional de un país en un instante t. Teniendo en cuenta que

$$
\begin{aligned}
C(t) + I(t) &= Y(t), \\
I(t) &= k\dot{C}(t), \\
C(t) &= aY(t) + b,
\end{aligned}
$$

con a, b, k constantes positivas y $a < 1$.

Se puede deducir la ecuación diferencial

$$\dot{Y}(t) = \frac{1-a}{ka} Y(t) - \frac{b}{ka} ,$$

con la condición inicial $Y(0) = Y_0 > \frac{b}{1-a}$.

Problemas de valor inicial

Teoría de propagación de enfermedades contagiosas:

$$y'(t) = k\big(m - y(t)\big)y(t),$$

donde y(t) denota el número de infectados, m es la cantidad total de población y k una constante positiva.

Introducimos la variable z(t) como el número de personas que se separan de la población infectada por recuperación o fallecimiento. Así

$$x(t) = x(0)e^{-\left(\frac{k1}{k2}\right)z(t)}, \qquad y(t) = m - x(t) - z(t)$$

donde *k1* es la rapidez de la infección, *k2* es la rapidez del aislamiento y

$$z'(t) = k2(m - z(t) - x(0)e^{-\left(\frac{k1}{k2}\right)z(t)}),$$

ecuación diferencial sin solución analítica.

Problemas de valor inicial

Teorema: Supongamos que $D = \{(x, y) : \ x \in [a, b], y \in \mathbb{R}\}$ y que $f(x, y)$ es continua en D. Si, dados $(x, y_1), (x, y_2) \in \mathrm{D}$, existe una constante $L > 0$ tal que f satisface

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

(condición de Lipschitz), entonces el problema de valor inicial (PVI)

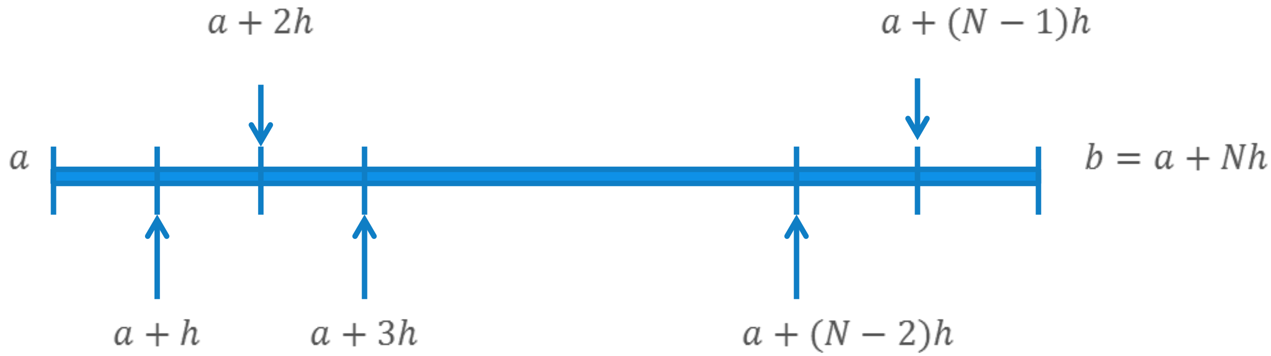
$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = y_a$$

tiene una solución única $y(x)$, $x \in [a, b]$.

- Técnicas analíticas: solución continua $y(x)$.
- Técnicas numéricas: solución discreta $y_i \approx y(x_i)$, $i = 0,1,2, \dots, n$, donde x_i, $i = 0,1,2, \dots, n$ son los nodos de la discretización.

Discretización del problema

- Dividimos el intervalo $[a, b]$ en N subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$, cuyos extremos son los *nodos* equiespaciados $x_i = a + i\,h,\ i = 0,1,2,\dots,N$, siendo $h = \frac{b-a}{N}$ el *paso* de la partición.



- Solución aproximada en los nodos: $y_i \approx y(x_i),\ i = 1,2,\dots,N$ (incógnitas), $y(x_0) = y_a$ (condición inicial).

Métodos numéricos para PVIs

- Diseño del método
  - Mediante cuadraturas

$$y' = f(x,y), \quad x \in [a,b], \quad y(a) = y_a$$
$$y(x) = y_a + \int_a^x f(\mathrm{t}, y(\mathrm{t}))\, dt$$

  - Diferenciación numérica

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + L(h)$$

donde $L(h)$ es el error de truncamiento.

  - Desarrollos de Taylor

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + y''(\xi)\frac{h}{2}, \qquad \xi \in \,]x, x+h[$$

Errores

- Error de discretización local ($L_k(h)$, en cada nodo) o global ($L(h) = \frac{1}{h} \max_{1 \le k \le N} |L_k(h)|$, su acumulación): es el error que se comete en un solo paso cuando reemplazamos un proceso infinito por uno finito,
  - inherente a cualquier algoritmo que podamos escoger,
  - en gran medida es independiente del error de redondeo.

- Error de redondeo local (en cada nodo) o global (su acumulación)
  - Provocado por la limitada precisión de los ordenadores
  - su magnitud depende del número de dígitos en la mantisa usando aritmética de coma flotante.

- Error total: suma de los errores de truncamiento global y redondeo global.
  - Error exacto local: $e_k = y(x_k) - y_k, \quad k = 0,1, \dots N$

Consistencia, convergencia y estabilidad

Se dice que un *método numérico converge* a la solución $y(x)$ de un problema de valor inicial en $x = \bar{x}$, si el error $e_k = y(x_k) - y_k$ en $x_k = \bar{x}$ satisface que

$$|e_k| \to 0$$

cuando $h \to 0$.

Un *método numérico* es *consistente* con un problema de valor inicial si verifica

$$\lim_{h \to 0} \max_{0 \le k \le N} |L_k(h)| = 0,$$

donde $L_k(h)$ es el error de truncamiento local.

Una condición necesaria y suficiente para la estabilidad de un método iterativo es que la función *f*(*x*,*y*) sea de Lipschitz.

Consistencia, convergencia y estabilidad

Un *esquema numérico* es *estable punto a punto* si pequeñas perturbaciones del esquema o de las condiciones iniciales afectan poco a la solución.

Teorema de Lax: Dado un método numérico asociado a un PVI, si el esquema es consistente entonces

es estable punto a punto $\Leftrightarrow$ es convergente

Todos los métodos de un solo paso (Euler y Runge-Kutta) son estables punto a punto.

Métodos de un paso

Método de Euler I

Puesto que por definición, $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$, el enfoque más simple para resolver la ecuación diferencial

$$y' = f(x,y), \quad x \in [a,b]$$

es aproximarla por

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h} \approx f(x,y),$$

$$y(x+h) \approx y(x) + hf(x,y)$$

Diferenciación numérica

donde h es próximo a cero.

Así, conocida la condición inicial $y(x_0) = y_a$,

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$
$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$
$$\dots$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \qquad k = 0,1, \dots, N-1}$$

Método de Euler II

Integrando directamente la ecuación diferencial

$$y' = f(x,y), \quad x \in [a,b], \quad y(a) = y_a$$

$$y(x) = y_a + \int_a^x f(\mathrm{t}, y(\mathrm{t}))\,dt$$

En particular,

$$y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(\mathrm{t}, y(\mathrm{t}))\,dt$$

Integración numérica

y aproximando la integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(\mathrm{t}, y(\mathrm{t}))\,dt \approx (x_1 - x_0) f(x_0, y(x_0))$$

obtenemos

$$\boxed{y(x_1) \approx y(x_0) + hf(x_0, y(x_0))}$$

donde h es el paso de la integración.

Método de Euler III

Consideremos la función $y(x)$ solución de la ecuación diferencial

$$y' = f(x,y), \qquad x \in [a,b]$$

Dado el paso h ,

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + O(h^2)$$

Desarrollos de Taylor

Sustituyendo $y' = f(x,y)$,

$$y(x+h) = y(x) + hf(x,y) + O(h^2)$$

Así, conocida la condición inicial $y(x_0) = y_a$,

$$y(x_1) \approx y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$
$$y(x_2) \approx y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$
$$\dots$$

$$\boxed{y(x_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \qquad k = 0,1,\dots,N-1}$$

Método de Euler: error y orden

Al deducir la fórmula de Euler se descartó en la expresión el error (error local de truncamiento), dado por

$$e_{k+1} = y(x_{k+1}) - \big(y(x_k) + hy'(x_k)\big) = \boxed{\frac{h^2}{2} y''(\xi_k) = O(h^2),} \qquad \xi_k \in]x_k, x_{k+1}[$$

Teniendo en cuenta que, por ser y'' continua,

$$\sum_{k=0}^{N-1} y''(\xi_k) = N y''(\xi), \qquad \xi \in [x_0, x_N]$$

y también que h = $(x_N - x_0)$/N, se tiene que después de N pasos, el error global acumulado es:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{h^2}{2} y''(\xi_k) = \frac{h^2}{2} N y''(\xi) = \boxed{\frac{1}{2}(x_N - x_0) y''(\xi) h = O(h),} \qquad \xi \in [x_0, x_N]$$

El orden del error global resulta siempre uno menos que el orden del error local de truncamiento (el error del cálculo de y_{k+1} para un paso).

Análisis de convergencia

Lema 1

Para cualquier $x \geq -1$ y para cualquier entero positivo m, se cumple

$$0 \leq (1+x)^m \leq e^{mx}$$

Demostración: El desarrollo de Taylor de $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$ y n=1, nos da

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 e^{\xi},$$

donde ξ está entre 0 y x. Por tanto,

$$0 \leq 1 + x \leq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 e^{\xi} = e^x,$$

y como $1 + x \geq 0$, se tiene

$$0 \leq (1+x)^m \leq (e^x)^m = e^{mx} \quad \blacksquare$$

Análisis de convergencia

Lema 2

Si s y t son reales positivos, $\{a_i, i = 0, \dots, k\}$ números reales que satisfacen las relaciones:

$$a_0 \geq -\frac{t}{s},$$
$$a_{i+1} \leq (1+s)a_i + t,\ i = 0,1,\ \dots, k$$

entonces

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)s}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}$$

Demostración: Para i fijo,

$$\begin{aligned} a_{i+1} &\leq (1+s)a_i + t \\ &\leq (1+s)[(1+s)a_{i-1} + t] + t \\ &\vdots \\ &\leq (1+s)^{i+1}a_0 + \left[1 + (1+s) + (1+s)^2 + \cdots (1+s)^i\right]t \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula de la suma de una progresión geométrica de razón 1+s

$$\frac{1-(1+s)^{i+1}}{1-(1+s)} = \frac{1}{s}\left[(1+s)^{i+1} - 1\right]$$

Por tanto,

$$a_{i+1} \leq (1+s)^{i+1}a_0 + \frac{(1+s)^{i+1}-1}{s}t = (1+s)^{i+1}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}.$$

y aplicando el Lema 1 con $x = 1 + s$ resulta

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)s}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}\,. \qquad \blacksquare$$

Teorema:

Sea f continua en $D = \{(t, y) : t \in [a, b], y \in \mathbb{R}\}$ y consideremos el problema de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(a) = y_0$. Si

$$|f(t, y_2) - f(t, y_1)| \leq L, \qquad \forall t \epsilon [a, b]$$

e

$$|y''(t)| \leq M, \qquad \forall t \epsilon [a, b].$$

Entonces las aproximaciones de Euler $y_0, y_1, \dots, y_N$ convergen a la solución exacta $y(t)$ cuando $h \to 0$, y para cada $k = 0,1, \dots, N$, se tiene

$$|e_k| = |y(t_k) - y_k| \leq \frac{hM}{2L}\left(e^{L(t_k - t_0)} - 1\right)$$

satisface $E(h) = O(h)$.

Demostración: De la deducción de la fórmula de Euler por Taylor

$$y(t_{\mathrm{k}+1}) = y(t_{\mathrm{k}}) + hf\left(t_{\mathrm{k}}, y(t_{\mathrm{k}})\right) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_{\mathrm{k}}),$$

y

$$y_{\mathrm{k}+1} = y_{\mathrm{k}} + hf(t_{\mathrm{k}}, y_{\mathrm{k}}).$$

Por tanto,

$$y(t_{\mathrm{k}+1}) - y_{\mathrm{k}+1} = y(t_{\mathrm{k}}) - y_{\mathrm{k}} + h\left[f\left(t_{\mathrm{k}}, y(t_{\mathrm{k}})\right) - f(t_{\mathrm{k}}, y_{\mathrm{k}})\right] + \frac{h^2}{2} y''(\xi_{\mathrm{k}})$$

$$|y(t_{\mathrm{k}+1}) - y_{\mathrm{k}+1}| \leq |y(t_{\mathrm{k}}) - y_{\mathrm{k}}| + h\left|f\left(t_{\mathrm{k}}, y(t_{\mathrm{k}})\right) - f(t_{\mathrm{k}}, y_{\mathrm{k}})\right| + \frac{h^2}{2} |y''(\xi_{\mathrm{k}})|$$

Con la condición de Lipschitz y la cota de la segunda derivada

$$|y(t_{k+1}) - y_{k+1}| \leq (1 + hL)|y(t_k) - y_k| + \frac{h^2}{2} M$$

Llamamos $a_i = |y(t_k) - y_k|,\ k = 0,1,\dots,N, s = hL, t = h^2 M/2$ y aplicamos Lema 2

$$|y(t_{\mathrm{k}+1}) - y_{\mathrm{k}+1}| \leq e^{(\mathrm{k}+1)hL}\left(|y(t_0) - y_0| + \frac{h^2 M}{2hL}\right) - \frac{h^2 M}{2hL}$$

Como $|y(t_0) - y_0| = 0,\ (\mathrm{k}+1)h = t_{\mathrm{k}+1} - t_0 = t_{\mathrm{k}+1} - a,$ resulta

$$|y(t_{\mathrm{k}+1}) - y_{\mathrm{k}+1}| \leq \frac{hM}{2L}\left(e^{(t_{k+1}-a)L} - 1\right), \qquad k = 0,1,\dots,N-1 \qquad \blacksquare$$

- ✓ Punto débil del teorema anterior: cota de la segunda derivada de la solución

$$y''(t) = \frac{dy'}{dt}(t) = \frac{df}{dt}\big(t, y(t)\big) = \frac{\partial f}{\partial t}\big(t, y(t)\big) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(t, y(t)\big) f\big(t, y(t)\big)$$

lo que nos permite obtener una cota del error sin conocer la solución.

- ✓ No estamos teniendo en cuenta el error de redondeo. En ese caso

$$|y(t_{\mathrm{k+1}}) - y_{\mathrm{k+1}}| \leq \frac{1}{L}\left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h}\right)\left(e^{(t_{k+1}-a)L} - 1\right), \qquad k = 0,1, \dots, N-1$$

siendo δ una cota de los errores de redondeo δ_k generados en cada paso

$$|\delta_k| \leq \delta, k = 0,1, \dots, N.$$

Observemos que $\lim_{h\to 0}\left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h}\right) = +\infty$.

Algoritmo de Euler

- Entrada:
  - a, b, extremos del intervalo
  - y_1, condición inicial
  - N, número de subintervalos
- Proceso:
  - Cálculo del paso de integración, h
  - Obtención del vector de nodos, x
  - Inicialización del vector solución y en a
  - Para k desde 1 hasta N

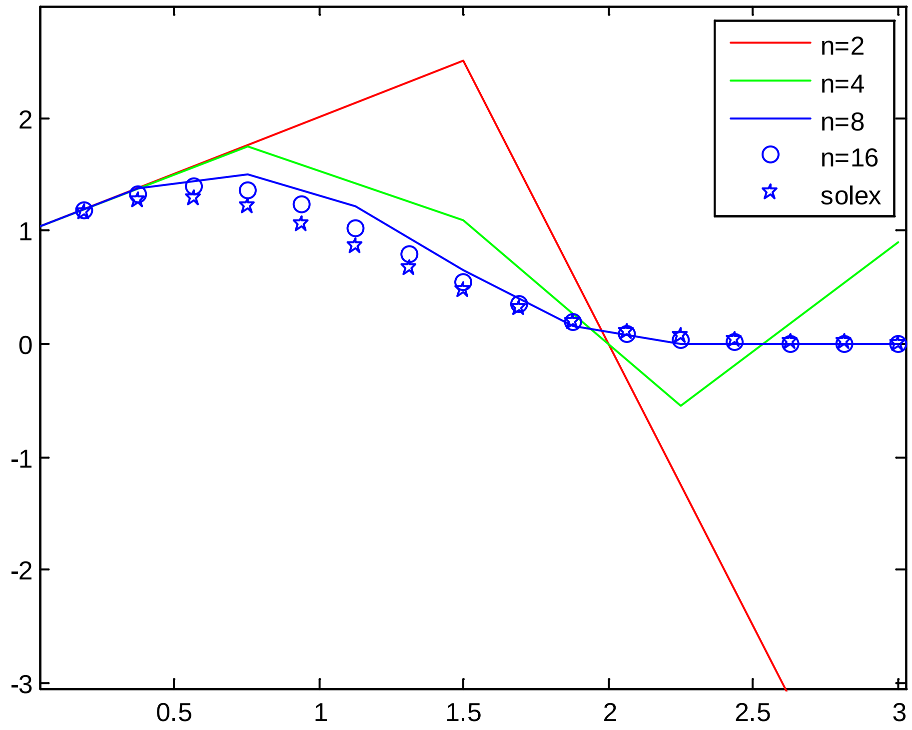
$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

  - Fin para k
- Salida: x, y

Ejemplo

- $y'(t) = (1 - 2t)\, y(t)$
  $y(0) = 1$

n	Error máximo	$E_{\frac{n}{2}}/E_n$
2	5.0025	
4	0.8862	5.6449
8	0.3531	2.5097
16	0.1688	2.0919
32	0.0819	2.0605
64	0.0403	2.0316



Solución exacta (solex) $y(t) = e^{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t\right)^2}$

Algoritmo de Euler Implícito

- Euler es un método explícito, ya que podemos obtener directamente y_{k+1} a partir de y_k,

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$

- El método de Euler hacia atrás se construye aproximando la derivada,

$$\frac{dy}{dt}(t_{k+1}) \approx \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h}$$

con error de truncamiento $E_k(h) = O(h)$, obteniendo

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1}) \qquad k = 0,1, \dots, N-1}$$

- Euler hacia atrás es un método implícito, ya que hay que resolver una ecuación no lineal para obtener y_{k+1} a partir de y_k,

$$y_{k+1} - y_k - hf(t_{k+1}, y_{k+1}) = g(y_{k+1}) = 0$$

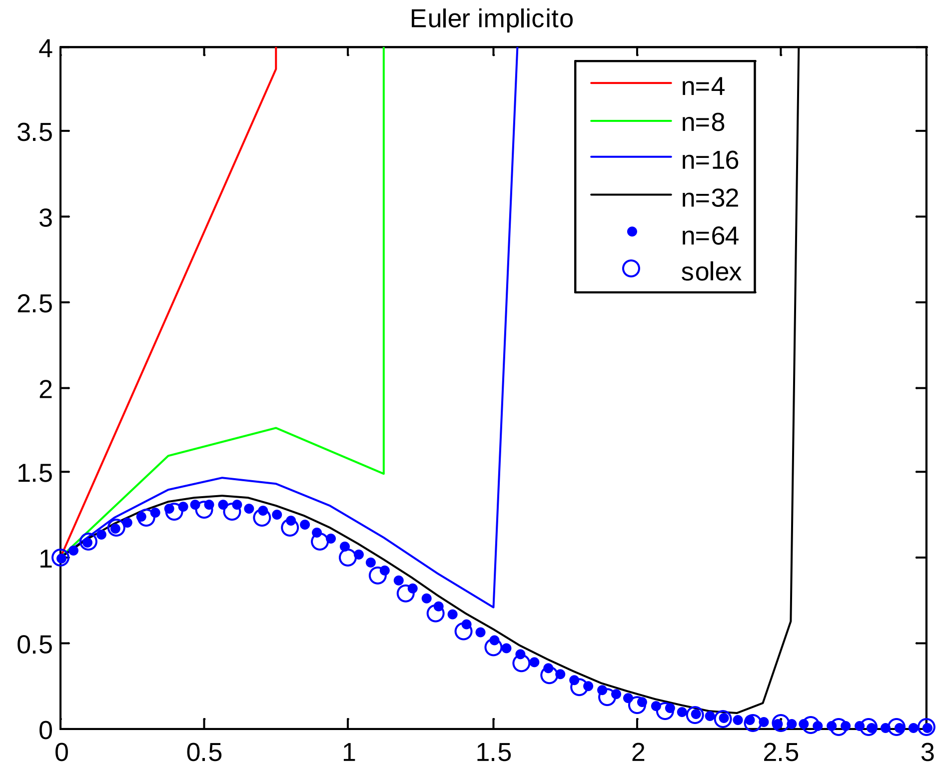
Algoritmo de Euler Implícito

- Entrada:
  - *a, b, f,* y_1*, N, tol, maxiter*
- Proceso:
  - Cálculo del paso de integración, *h y o*btención del vector *t*
  - Inicialización del vector solución *y* en *a*
  - Para *k* desde 1 hasta *N*
    - *Resolución por un método de punto fijo de la ecuación* $yn = g(yn)$
    - $y_{k+1} = yn$
  - Fin para k
- Salida: *t*, *y*

Ejemplo

- $y'(t) = (1 - 2t)\, y(t)$
  $y(0) = 1$

n	Error máximo
4	1.1158e+35
8	5.9835e+100
16	1.7069e+113
32	7.7501e+16
64	0.0036



Solución exacta (solex) $y(t) = e^{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t\right)^2}$

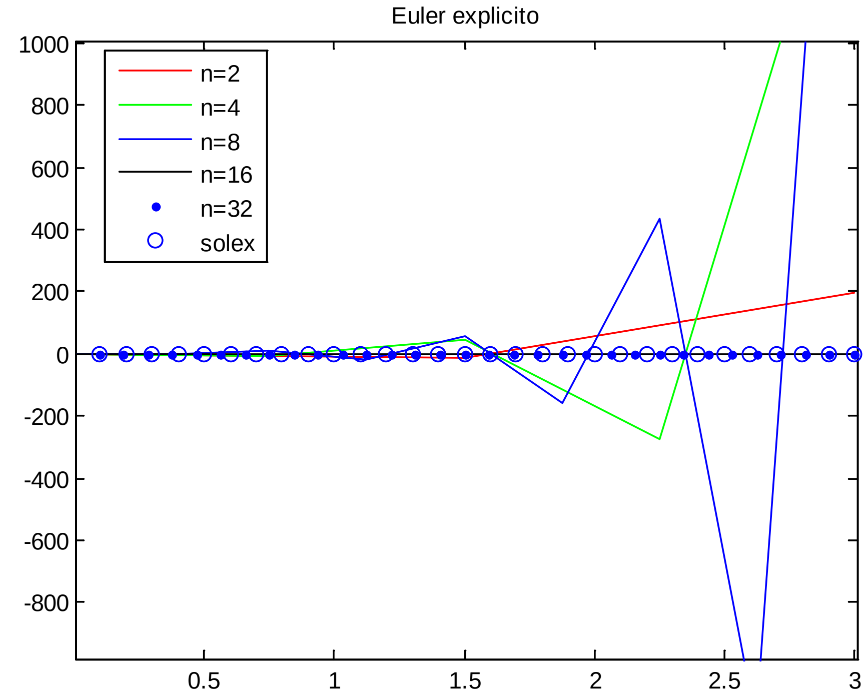
Ejemplo

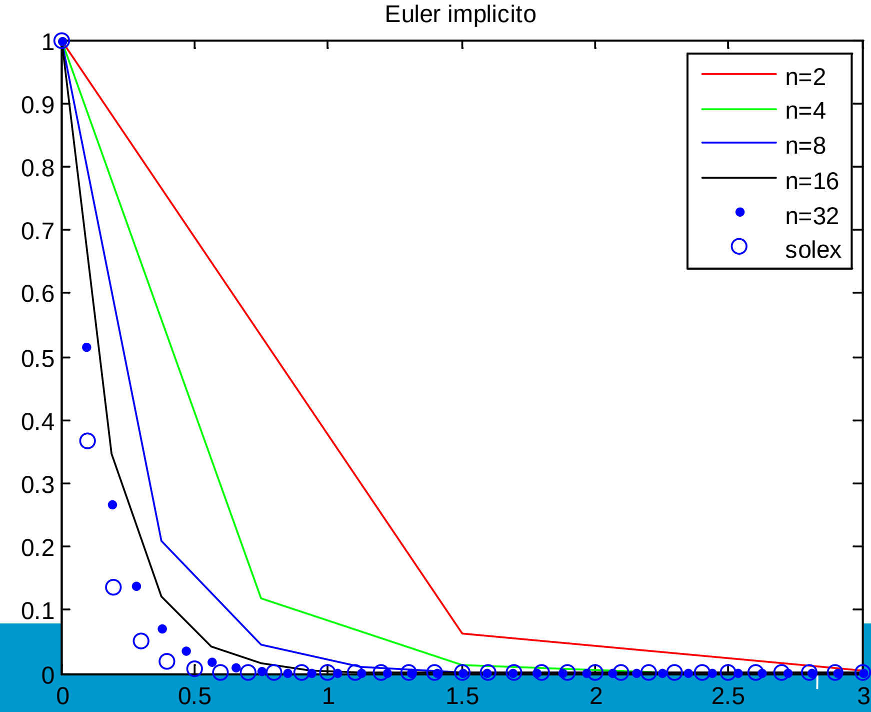
- $y'(t) = -10y(t)$
  $y(0) = 1$

n	Error explicito	Error implícito
2	196.0	0.0625
4	1785.1	0.1171
8	3270.9	0.1870
16	0.7421	0.1945
32	0	0.1245

Solución exacta (solex)

$y(t) = e^{-10t}$





PROGRAMA EN MATLAB

```
function [t,y] = euler_hacia_atras(f,a,b,y0,N,tol,maxiter )
h=(b-a)/N;             t=a:h:b;
t=t(:);
y=zeros(N+1,1);     y(1)=y0;

for k=1:N
    yn0=y(k);
    incre=tol+1;
    iter=0;
    while incre>tol && iter<maxiter
        % para y'(t)=-10y(t)
         yn=yn0-(yn0-y(k)-h*(-10*yn0))/(1+10*h);
         incre=abs(yn-yn0);
        yn0=yn;
         iter=iter+1;
    end
   y(k+1)=yn;
end
```

Método trapezoidal o de Heun I

Integración numérica

Integrando directamente la ecuación diferencial

$$y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(\mathrm{t}, y(\mathrm{t}))\, dt$$

y aproximando la integral por trapecios

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_1} f(\mathrm{t}, y(\mathrm{t}))\, dt \approx \frac{x_1 - x_0}{2}\big(f(x_0, y(x_0)) + f(x_1, y(x_1))\big)}$$

obtenemos $y(x_1) \approx y(x_0) + \frac{h}{2}\big(f(x_0, y(x_0)) + f(x_1, y(x_1))\big)$

siendo h el paso de la integración. Sin embargo, ¡necesitamos conocer $y(x_1)$!

- predecimos primero un valor por Euler,

$$\bar{y}_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

- lo ajustamos después por trapecios,

$$y(x_1) \approx y_0 + \frac{h}{2}\big(f(x_0, y_0) + f(x_1, \bar{y}_1)\big) = \boxed{y_0 + \frac{k_1 + k_2}{2} = y_1}$$

donde $k_1 = hf(x_0, y_0)$, $k_2 = hf(x_1, y_0 + k_1)$.

Heun II

En primer lugar, desarrollamos por Taylor (orden 2)

$$\boxed{y(x+h) = y(x) + y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2} + O(h^3)} \quad (*)$$

Desarrollos de Taylor

Teniendo en cuenta que $y' = f(x,y)$ e $y'' = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} y'$,

$$y(x+h) = y + hf(x,y) + \frac{1}{2}h^2\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} f(x,y)\right) + O(h^3) =$$

$$= y + \frac{1}{2}hf(x,y)$$

$$+ \frac{1}{2}h\left(f(x,y) + h\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + hf(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) + O(h^3)$$

Consideremos ahora el desarrollo de Taylor para dos variables:

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + h\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + k\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$+hk\frac{\partial^2 f(x,y)}{\delta x \partial y} + \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial t^2} + k^2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right) + \cdots$$

Método de Heun II

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + h\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + k\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$+hk\frac{\partial^2 f(x,y)}{\delta x \partial y} + \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial t^2} + k^2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right) + \cdots$$

Sustituyendo k por $hf(x,y)$:

$$f\big(x+h, y+hf(x,y)\big) = \boxed{f(x,y) + h\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + k\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}} + O(h^2)\ (**)$$

Como

$$y(x+h) = y + \frac{1}{2}hf(x,y)$$

$$+\frac{1}{2}h\boxed{\left(f(x,y) + h\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + hf(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)} + O(h^3)$$

resulta:

$$y(x+h) = y + \frac{1}{2}hf(x,y) + \frac{1}{2}hf\big(x+h, y+hf(x,y)\big) + O(h^3)$$

Método de Heun II

$$y(t+h) = y + \frac{1}{2}hf(t,y) + \frac{1}{2}hf\big(t+h, y+hf(t,y)\big) + O(h^3)$$

En particular, si $t = t_k$ y teniendo en cuenta que $y(t_k + h) = y(t_{k+1})$, se puede escribir una aproximación:

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \frac{1}{2}hf\big(t_k, y(t_k)\big) + \frac{1}{2}hf\Big(t_{k+1}, y(t_k) + hf\big(t_k, y(t_k)\big)\Big) + O(h^3)$$

Y llamando y_k a las aproximaciones de $y(t_k)$:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}hf(t_k, y_k) + \frac{1}{2}hf\big(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k)\big)$$

o equivalentemente,

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= hf(t_k, y_k) \\ k_2 &= hf(t_{k+1}, y_k + k_1) \\ y_{k+1} &= y_k + \tfrac{k_1 + k_2}{2} \end{aligned}}$$

conocido como método de Heun o Runge-Kutta de segundo orden (2 etapas).

Análisis del error

Teorema: Sea f tal que $y'(x) = f(x, y(x))$ con condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$. Si $y(x) \in C^3[a,b]$ y $\{(x_k, y_k)\}_{k\geq 0}$ es la sucesión de aproximaciones dadas por el método de Heun, entonces

$$\begin{aligned} |e_k| &\leq |y(x_k) - y_k| \\ &= \left| y(x_k) - y_{k-1} - \frac{1}{2} hf(x_{k-1}, y_{k-1}) - \frac{1}{2} hf(x_k, y + hf(x_{k-1}, y_{k-1})) \right| \\ &= O(h^3), \end{aligned}$$

y

$$E(h) = \frac{1}{h} \max_{1\leq k\leq N} |e_k| = O(h^2).$$

Algoritmo de Heun

- Entrada:
  - *a*, *b*, extremos del intervalo
  - y_1, condición inicial
  - *N*, número de subintervalos
- Proceso:
  - Cálculo del paso de integración, *h* y obtención de *x*
  - Inicialización del vector solución *y* en *a*
  - Para *k* desde 1 hasta *N*

$$k_1 = hf(x_k, y_k)$$

$$k_2 = hf(x_{k+1}, y_k + k_1)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{k_1 + k_2}{2}$$

  - Fin para *k*
- Salida: *x*, *y*

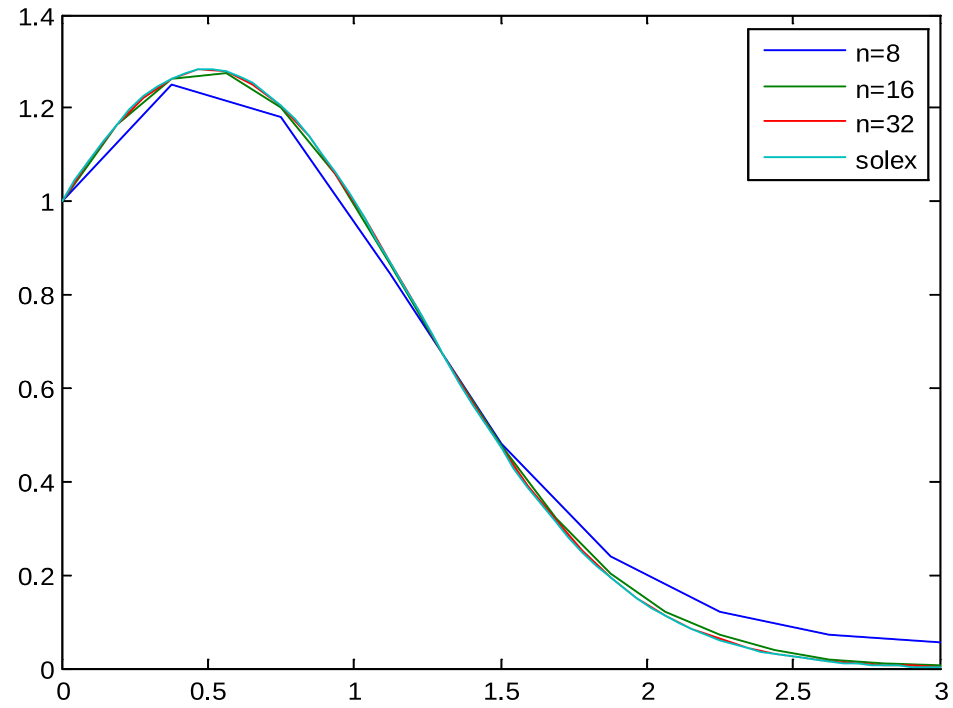
Ejemplo

- $y'(t) = (1-2t)\, y(t)$
  $y(0) = 1$

n	Error máximo	$E_{\frac{n}{2}}/E_n$
2	14.0025	
4	0.8893	15.7480
8	0.0600	14.8148
16	0.0104	5.7937
32	0.0022	4.6189
64	5.2813e-04	4.2463

$E_n = \max_{1\le k\le n} |e_k|$

Estimación numérica del orden teórico



Solución exacta $y(t) = e^{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2}$

Método de Runge-Kutta explícito: orden 4

Integrando directamente la ecuación diferencial

$$y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s))\, ds$$

Integración numérica

y aproximando la integral por Simpson

$$\boxed{\int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s))\, ds \approx \frac{t_1 - t_0}{6}\left(f\big(t_0, y(t_0)\big) + 4f\left(t_{\frac{1}{2}}, y\left(t_{\frac{1}{2}}\right)\right) + f\big(t_1, y(t_1)\big)\right)}$$

obtenemos

$$y(t_1) \approx y(t_0) + \frac{h}{6}\left(f(t_0, y(t_0)) + 4f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y\left(t_0 + \frac{h}{2}\right)\right) + f(t_1, y(t_1))\right)$$

siendo h el paso de la integración. Sin embargo,

¡necesitamos conocer tanto $y\left(t_0 + \frac{h}{2}\right)$ como $y(t_1)$!

$$f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y\left(t_0 + \frac{h}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(f_2 + f_3)$$

Método de Runge-Kutta explícito: orden 4

$$f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y\left(t_0 + \frac{h}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(f_2 + f_3)$$

donde

$$f_1 = f(t_0, y(t_0))$$

$$f_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f_1\right)$$

$$f_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f_2\right)$$

$$y(t_1) \approx y(t_0) + \frac{h}{6}\left(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f(t_1, y_0 + hf_3)\right)$$

Método de Runge-Kutta explícito: orden 4

En general,

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

donde

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_k, y_k) \\
k_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right) \\
k_3 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_2\right) \\
k_4 &= f(t_{k+1}, y_k + hk_3)
\end{aligned}$$

Denotaremos este método por RK-4 (4 etapas).

Método de Runge-Kutta explícito: orden 4

Teorema: Sea f tal que $y'(t) = f(t, y(x))$ con condiciones iniciales $y(t_0) = y_0$. Si $y(t) \in C^5[a, b]$ y $\{(t_k, y_k)\}_{k\geq 0}$ es la sucesión de aproximaciones dadas por el método de RK-4, entonces

$$|e_k| \leq |y(t_k) - y_k| = O(h^5),$$

y

$$E(h) = \frac{1}{h} \max_{1\leq k\leq N} |e_k| = O(h^4).$$

Algoritmo de RK-4

- Entrada:
  - a, b, y_1, N
- Proceso:
  - Cálculo del paso de integración, h y obtención de x
  - Inicialización del vector solución y en a
  - Para k desde 1 hasta N

$$k_1 = f(x_k, y_k) \qquad k_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} k_2\right) \qquad k_4 = f(x_{k+1}, y_k + h k_3)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

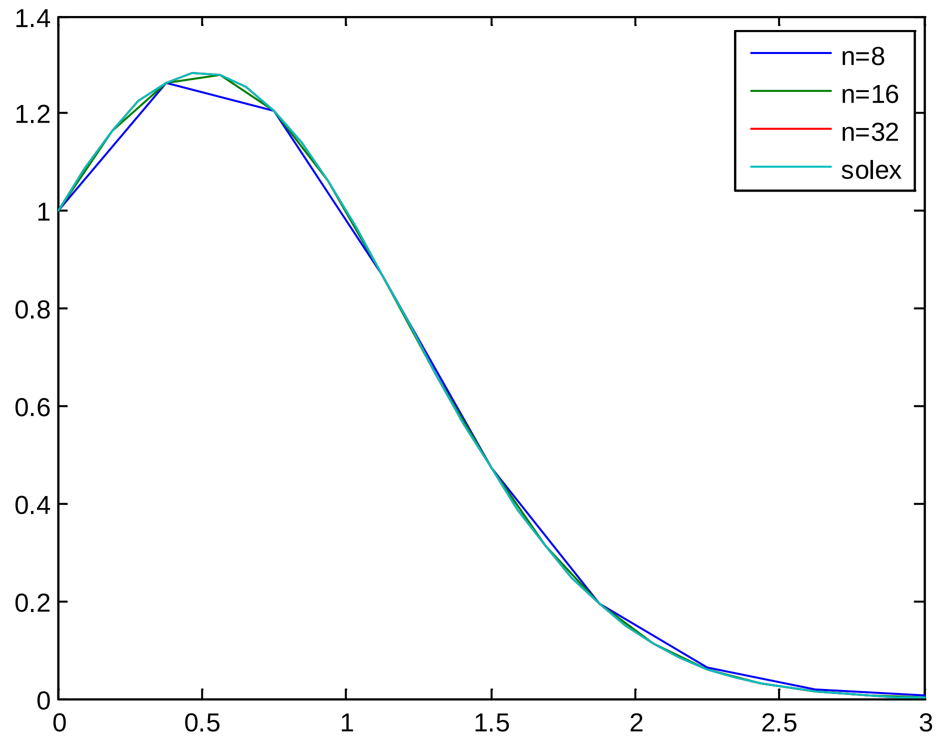
  - Fin para k

- Salida: x, y

Ejemplo

- $y'(t) = (1-2t)\, y(t)$
  $y(0) = 1$

n	Error máximo	$E_{\frac{n}{2}}/E_n$
2	3.9979	
4	0.2292	17.4422
8	0.0034	67.4035
16	1.4281e-04	23.8114
32	7.2959e-06	19.5745
64	4.1104e-07	17.7497



Solución exacta (solex) $$y(t) = e^{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2}$$

Métodos de Runge-Kutta: m etapas

En general,

$$y_{k+1} = y_k + h\sum_{j=1}^{m} b_j f_{kj}, \qquad k \geq 0$$

donde

$$f_{k1} = f(x_k, y_k)$$
$$f_{k2} = f(x_k + c_2 h, y_k + h a_{21} f_{k1})$$
$$f_{k3} = f(x_k + c_3 h, y_k + h(a_{31} f_{k1} + a_{32} f_{k2}))$$
$$\vdots$$
$$f_{km} = f(x_k + c_m h, y_k + h(a_{m1} f_{k1} + a_{m2} f_{k2} + \cdots + a_{mm-1} f_{km-1}))$$

siendo a_{ji}, b_j, c_j dependientes del método pero independientes del PVI, y tales que

$$c_j = \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji}$$

Métodos de Runge-Kutta explícitos

- Notación:

$$\begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 \\ c_2 & a_{21} \\ c_3 & a_{31} & a_{32} \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ c_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm-1} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & b_m \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} c & \mathcal{A} \\ \hline & b \end{array}$$

RKm explícito en la forma matricial de Butcher.

- Condición necesaria de consistencia: $\sum_{j=1}^{m} b_j = 1$

m	2	3	4	5	6	7	8	9	m>9
Orden max	2	3	4	4	5	6	6	7	m-2

Orden p	2	3	4
Condiciones	$b^T c = 1/2$	$b^T c^2 = \frac{1}{3}$ $b^T Ac = 1/6$	$b^T c^3 = \frac{1}{4}$ $b^T (cAc) = 1/8$ $b^T Ac^2 = 1/12$ $b^T A^2 c = 1/24$

Métodos RK explícitos: m = 2

- m = 2:

$$k_1 = hf(x_k, y_k)$$

$$k_2 = hf(x_{k+1}, y_k + k_1)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Hay más de una posibilidad para el mismo orden de convergencia

- m = 4

$$k_1 = f(x_k, y_k)$$

$$k_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_{k+1}, y_k + hk_3)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array}$$

Sistemas de ecuaciones diferenciales: Problemas de valor inicial

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= f_1(x, y_1,\ y_2, \dots, y_n) \\ y'_2 &= f_2(x, y_1,\ y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y'_n &= f_n(x, y_1,\ y_2, \dots, y_n) \end{aligned}\right\} \quad x \in [a, b]$$

n funciones incógnitas $y_1, y_2, \dots, y_n$

una variable independiente, x

$$y_1(a) = y_{10},\ y_2(a) = y_{20}, \dots .\ y_n(a) = y_{n0},$$

$\longleftarrow$ Condición inicial

Ejemplos

(1)

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= y_1 + 2y_2 + \cos 2x \\ y'_2 &= 3y_1 + 2y_2 + 5 \end{aligned}\right\} \quad x \in [0,1]$$

$$y_1(0) = 0$$
$$y_2(0) = 3$$

(2)

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= {y_1}^2 + 2y_2 \\ y'_2 &= {y_1}^2 + \sin y_2 \end{aligned}\right\} \quad x \in [\pi, 2\pi]$$

$$y_1(\pi) = 0$$
$$y_2(\pi) = 1$$

Ecuaciones diferenciales de orden superior: Problemas de valor inicial

$$y'' = 4y' + \cos y + 3x - 7, \; x \in [0,2] \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 3$$

$$\Big\Updownarrow \quad \begin{matrix} y_1 = y \\ y_2 = y' \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = \cos y_1 + 4\,y_2 + 3x + 7 \end{matrix}\right\} \quad x \in [0,2] \quad y_1(0) = 1, \qquad y_2(0) = 3$$

Ecuaciones diferenciales de orden superior: Problemas de valor inicial

$$y''' = 4y'' + y'^2 - \tan y - e^{-x}, \; x \in [0,2] \quad y(0) = 1, y'(0) = 3, y''(0) = -1$$

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \\ y_3 &= y'' \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= y_3 \\ y'_3 &= 4y_3 + {y_2}^2 - \tan y_1 - e^{-x} \end{aligned}\right\} x \in [0,2] \qquad \begin{aligned} &y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 3 \\ &y_3(0) = -1 \end{aligned}$$

Método de Euler para sistemas

$$\left.\begin{array}{c} y'_1 = f_1(x, y_1,\ y_2, \dots, y_n) \\ y'_2 = f_2(x, y_1,\ y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y'_n = f_n(x, y_1,\ y_2, \dots, y_n) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x \in [a, b] \\ \\ y_1(a) = y_{10},\ y_2(a) = y_{20}, \dots . y_n(a) = y_{n0}, \end{array}$$

$$h = \frac{b-a}{N} \qquad x_k = a + kh, \qquad k = 0,1, \dots, N$$

$$\boldsymbol{y0} = (y_{10}\ , y_{20}, \dots . y_{n0})$$

$$\boldsymbol{y_{k+1}} = (y_{1k+1}, y_{2k+1},\ \dots,\ y_{nk+1}), \qquad k = 0,1,2, \dots, N-1$$

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{y_{k+1}} = \boldsymbol{y_k} + h\, K_1 \\ K_1 = \boldsymbol{F}(x_k\ , y_{1k}, y_{2k},\ \dots,\ y_{nk}) \end{array} \qquad k = 0,1,2, \dots, N-1$$

Método de Euler para sistemas

Utiliza el método de Euler para estimar la solución de problema de valor inicial

$$x' = 3x + 2y - (2t^2 + 1)e^{2t}, \qquad x(0) = 1, \qquad t \in [0,1]$$

$$y' = 4x + y + (t^2 + 2t - 4)e^{2t}, \quad y(0) = 1$$

a) Obtén la aproximación de la solución utilizando un paso $h = \frac{1}{10}$ y representa su evolución respecto a la variable independiente.

b) Sabiendo que la solución exacta es

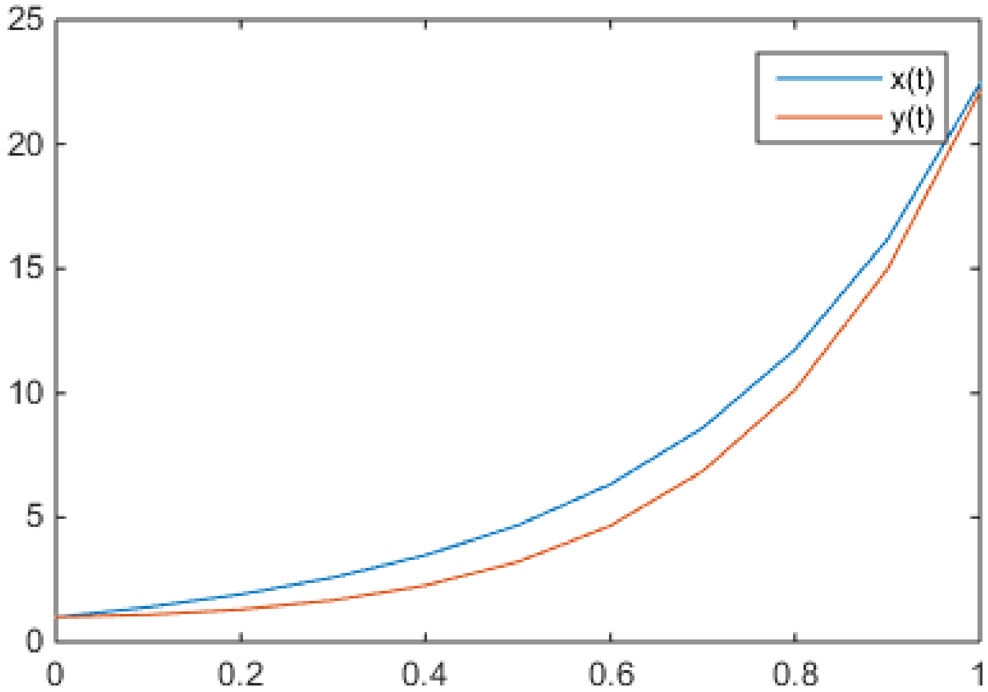
$$x(t) = \frac{e^{5t}}{3} - \frac{e^{-t}}{3} + e^{2t}, \quad y(t) = \frac{e^{5t}}{3} + 2\frac{e^{-t}}{3} + t^2 e^{2t},$$

obtén una aproximación numérica del orden de convergencia del método de Euler

```
function f = fun2(t,z)
x=z(1); y=z(2);
f=[3*x+2*y-(2*t^2+1)*exp(2*t); 4*x+y+(t^2+2*t-4)*exp(2*t)];
end
```

Método de Euler para sistemas

```
>> [t,Y] = Euler_sis('fun2',0,1,10,[1,1]);
>> plot(t,Y(:,1)),hold on
>> plot(t,Y(:,2))
```

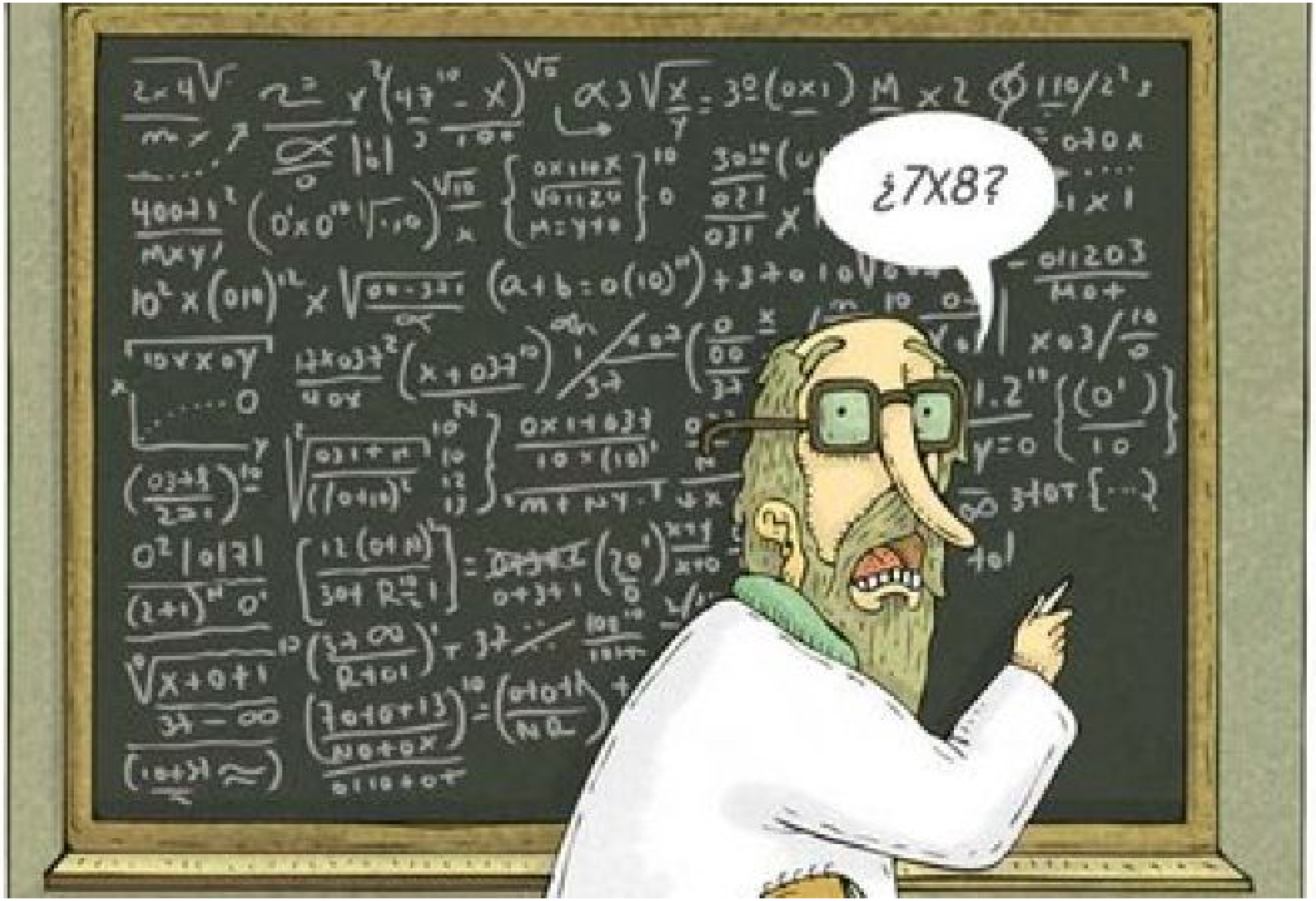


t_k	x_k	y_k
0	1.0000	1.0000
0.1	1.4000	1.1000
0.2	1.9154	1.3071
0.3	2.5903	1.6729
0.4	3.4870	2.2732
0.5	4.6940	3.2187
0.6	6.3382	4.6707
0.7	8.6027	6.8629
0.8	11.7532	10.1346
0.9	16.1767	14.9776
1	22.4403	22.1052

Para profundizar…

- J.H. Mathews, K. D. Fink, Métodos numéricos con Matlab, Ed. Prectice Hall, Madrid, 2000.
- R.L. Burden, J.D. Faires, Análisis numérico, Ed. Thomson Learning, México DF, 2002.
- http://ecuaciondiferencialejerciciosresueltos.com/tag/metodo-numerico
- A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, Problemas resueltos de métodos numéricos, Ed. Paraninfo, 2006.
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). *Métodos numéricos para ingenieros (5a. ed.)*. McGraw-Hill. ISBN 9781456250324.

¿Dudas?



unir

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

www.unir.net