La transformada de Fourier

[8.1] ¿Cómo estudiar este tema?

[8.2] Introducción

[8.3] Ecuación de análisis de la FT

[8.4] Ecuación de síntesis de la FT

[8.5] Convergencia y truncado de la FT

[8.6] FT de señales periódicas

[8.7] Ecuación de análisis de la DTFT

[8.8] Ecuación de síntesis de la DTFT

[8.9] Convergencia y truncado de la DTFT

[8.10] DTFT de señales periódicas

[8.11] Resumen

TEMA 8

Esquema

La transformada de Fourier

Tiempo	Periódica	No periódica
Continuo x(t)	FS	FT
Discreto x{n}	DTFS	DTFT

Ideas clave

8.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

En este tema estudiaremos la forma de representar en frecuencia señales aperiódicas mediante la transformada de Fourier. Primero la estudiaremos en tiempo continuo y después en tiempo discreto. También estudiaremos la correspondencia que existe entre la transformada de Fourier y las series de Fourier, tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto.

8.2. Introducción

En los temas anteriores hemos visto cómo la FS nos permite representar una señal periódica como una combinación lineal de infinitas sinusoidales complejas. También hemos visto cómo esta representación se puede usar para describir los efectos de un sistema LTI sobre una señal periódica mediante el estudio de la respuesta en frecuencia del sistema.

Fourier no solo trabajó en formalizar la idea de representar señales **periódicas** mediante una FS sino que llevó esta idea más lejos y definió un mecanismo para representar una señal **aperiódica** como una combinación lineal de exponenciales complejas mediante la llamada **transformada de Fourier** (Fourier Transform FT).

En las señales periódicas los coeficientes de las exponenciales complejas están armónicamente relacionadas y en consecuencia se pueden representar mediante una FS.

En las señales aperiódicas los coeficientes de las exponenciales complejas están infinitésimamente juntos en frecuencia y su representación, más que tener forma de sumatorio de coeficientes, tiene forma de integral. Por ello a la FT también se la conoce como la **integral de Fourier**.

En la segunda parte del tema extenderemos la idea de transformada de Fourier al tiempo discreto mediante la llamada **transformada de Fourier de tiempo discreto** (*Discrete Time Fourier Transform* DTFT).

8.3. Ecuación de análisis de la FT

La **ecuación de análisis** de la FT (también llamada **transformada de Fourier** FT) nos proporciona la representación frecuencial de una serie temporal aperiódica y es la siguiente:

$$X(jw) = FT\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt}dt \tag{1}$$

Donde $FT\{\}$ indica la señal representada en el tiempo $x(t)$ que estamos llevando al dominio de la frecuencia mediante la aplicación de la integral. La función obtenida en el dominio de la frecuencia es $X(jw)$ y que normalmente es una función compleja.

Para obtener la ecuación de análisis (1), Fourier propuso que una señal aperiódica se puede ver como una señal periódica con periodo T infinito. La figura 1 (a) muestra una señal periódica $\tilde{x}(t)$ con periodo finito y la figura 1 (b) muestra su correspondiente señal aperiódica $x(t)$ vista como una señal periódica con periodo infinito.

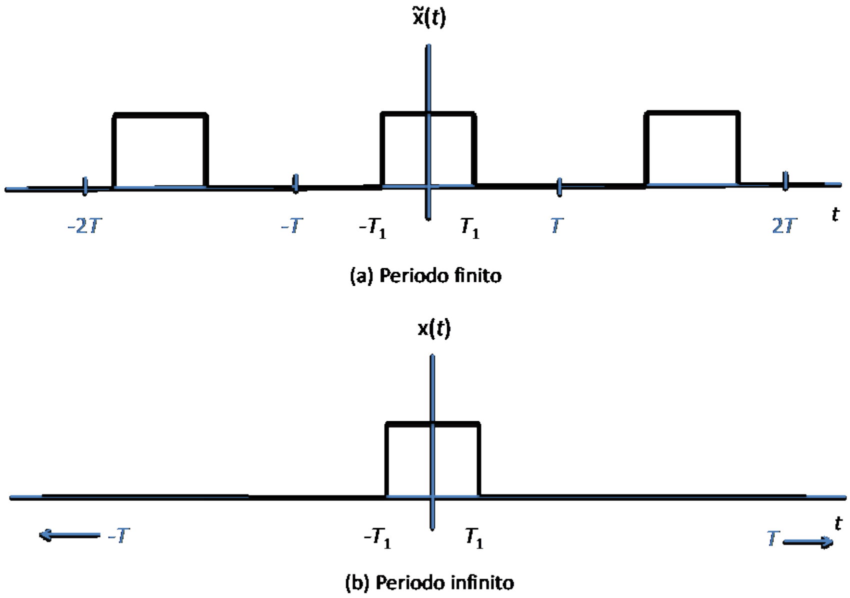
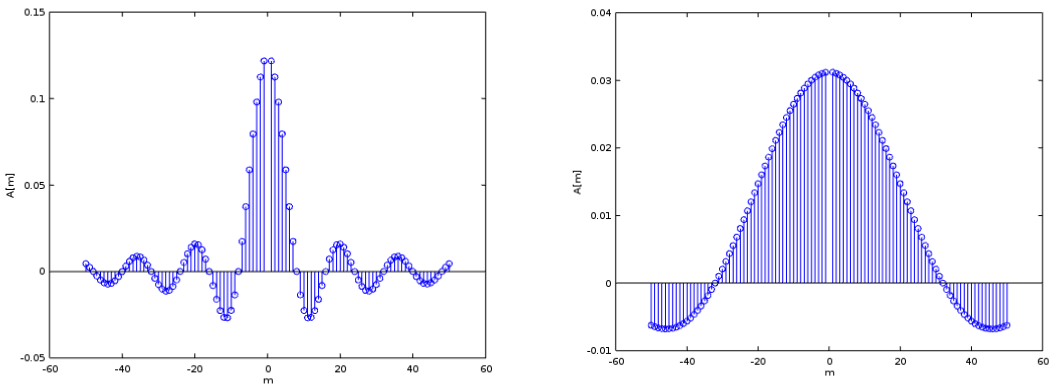


Figura 1: señal de tiempo continuo periódica con periodo infinito

La figura 2 muestra lo que ocurría en el tema 6 con los coeficientes de la FS cuando el periodo T de la señal aumenta, respecto al periodo T_1, de acuerdo a la figura 1 (b). En concreto se producen dos cambios:

- **La altura de los coeficientes disminuye**. La relación de Parseval dice que la potencia media de una señal $x(t)$ en un periodo T es igual a la energía de sus componentes armónicas c_m. Podemos ver en la figura 2 cómo disminuye la energía de los coeficientes (su altura) a medida que aumenta la diferencia entre T y T_1.
- **La distancia entre componentes armónicamente relacionadas se reduce**. Dado que la frecuencia fundamental de los armónicos viene dada por $w_0=2\pi/T$, a medida que aumenta T disminuye el primer armónico w_0.



(a) Coeficientes con T=16T_1 (b) Coeficientes con T=64T_1

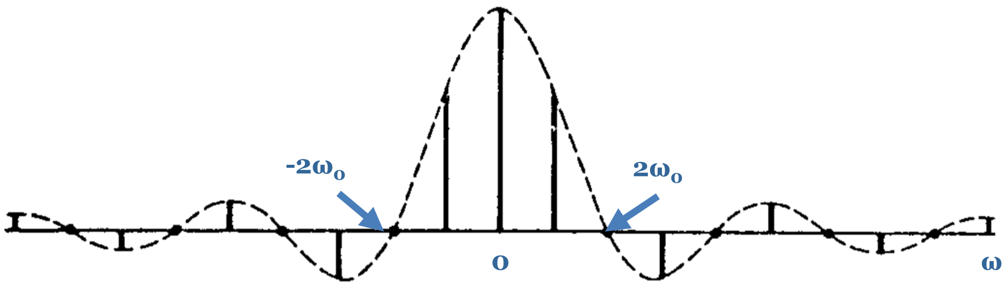
Figura 2: coeficientes de la FS de una onda cuadrada

Se llama **función envolvente** de una señal a la función que resulta de calcular Tc_m:

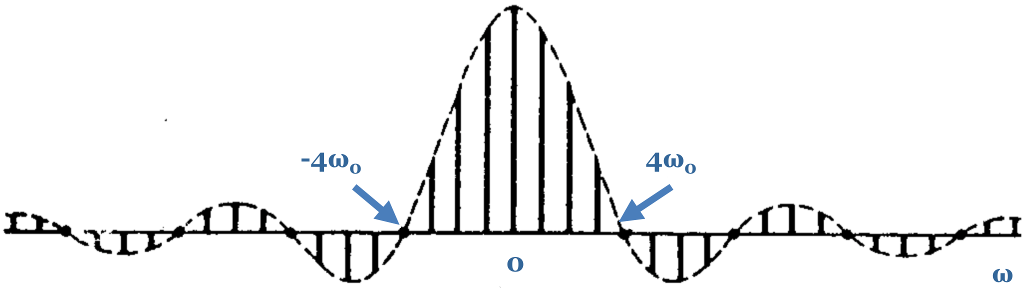
$$X(jmw_0) = Tc_m = T\left[\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jmw_0 t}dt\right] = \int_T x(t)e^{-jmw_0 t}dt \qquad (2)$$

La figura 3 muestra cómo evoluciona la función envolvente a medida que aumenta la distancia entre T y T_1.

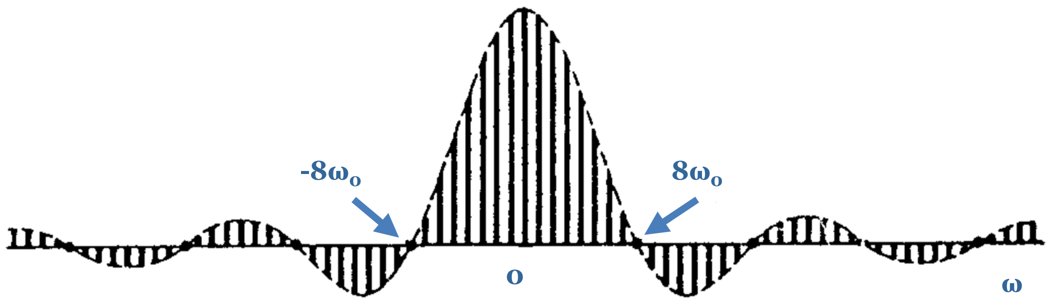
Cuando $T\rightarrow\infty$, y en consecuencia $\Delta w_0\rightarrow 0$, podemos considerar a mw_0 como una variable continua w y el periodo de la integral se expande desde $-\infty$ a ∞. Aplicando estos cambios tenemos la ecuación de análisis de la FT (1).



(a) $T{=}4T_1$



(b) $T{=}8T_1$



(c) $T{=}16T_1$

Figura 3: función envolvente

A $X(jw)$ también se la llama el **espectro** de $x(t)$ y lo que representa son exponenciales complejas infinitésimamente juntas. Para una determinada frecuencia w, $|X(jw)|$ indica la componente de magnitud y $\angle X(jw)$ indica la componente de fase de $x(t)$.

» **Ejemplo 1**: cálculo de la FT.

Calcular la FT de la señal:

$$x(t) = e^{-2|t|}$$

La señal aparece representada en el tiempo en la figura 4.

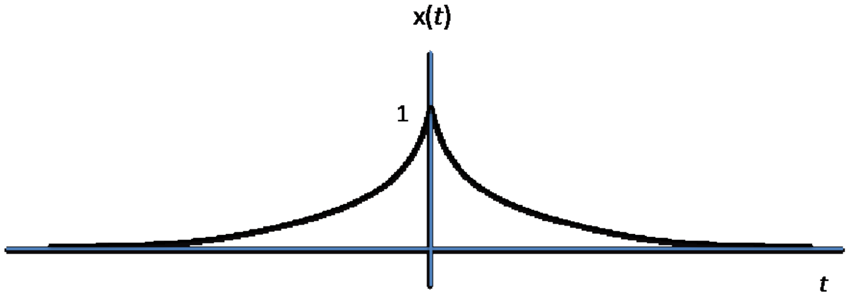


Figura 4: señal de ejemplo en el dominio del tiempo

Aplicando la ecuación de análisis de la FT (1) con $x(t)$ y teniendo en cuenta la simetría tenemos:

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t|} e^{-jwt} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t} e^{-jwt} dt + \int_{-\infty}^{0} e^{-2t} e^{-jwt} dt$$

$$= \frac{1}{2-jw} e^{t(2-jw)} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2+jw} e^{-t(2+jw)} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{2-jw} + \frac{1}{2+jw} = \frac{4}{4+w^2}$$

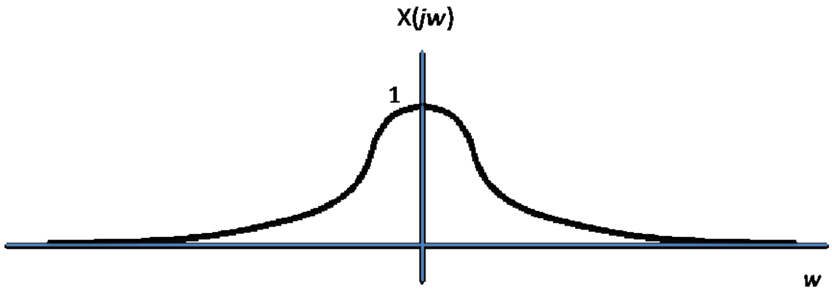


Figura 5: señal de ejemplo en el dominio de la frecuencia

Dado que ha desaparecido la j, la señal es real pura y tiene la forma de la figura 5, donde la altura máxima se alcanza en w=0 y después la señal decae simétricamente.

8.4. Ecuación de síntesis de la FT

Si tenemos el espectro de una señal $X(jw)$ podemos obtener su representación en el dominio del tiempo aplicando la **ecuación de síntesis** de la FT (también llamada **transformada inversa de Fourier** IFT):

$$x(t) = IFT\{X(jw)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)e^{jwt}dw \qquad (3)$$

En consecuencia la señal $x(t)$ y su transformada $X(jw)$ son señales emparejadas mediante la FT:

$$x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(jw)$$

Donde se acostumbra a notar con minúsculas la señal en el dominio del tiempo y con mayúsculas la señal en el dominio de la frecuencia.

La ecuación de síntesis de la FT procede de aplicar la ecuación de síntesis de la FS a los coeficientes de la función envolvente $c_m = X(jmw_0)/T$ (2):

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jmw_0)e^{jmw_0 t}$$

Y dado que $2\pi/T = w_0$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X(jmw_0)e^{jmw_0 t}w_0$$

Cuando $\Delta w_0 \to 0$ podemos aproximar mw_0 a w y reescribir el sumatorio como una integral para obtener la ecuación de síntesis de la FT (3):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)e^{jwt}dw$$

8.5. Convergencia y truncado de la FT

No todas las señales en el dominio del tiempo $x(t)$ tienen FT. Al igual que pasaba en la FS, la FT también tiene unas condiciones suficientes para poder transformar una señal aperiódica, llamadas **condiciones de Dirichlet** para la FT:

» **Integral absolutamente limitada**. $x(t)$ debe de ser absolutamente integrable, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

» **Oscilaciones limitadas**. $x(t)$ debe tener un número finito de máximos y mínimos.

» **Discontinuidades limitadas**. $x(t)$ debe tener un número finito de discontinuidades, y cada discontinuidad ser finita.

Truncado

Respecto al truncado, si truncamos la representación espectral $X(jw)$ y aplicamos la ecuación de síntesis (3) se producirá el **artefacto de Gibbs** que estudiamos en la FS.

» **Ejemplo 2**: existencia de transformada.

Encontrar la FT de la siguiente señal:

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

La señal no es absolutamente integrable cuando $a \leq 0$, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-at}| \, dt = \infty \quad \text{Si} \quad a \leq 0$$

La figura 6 muestra que cuando a>0 esta señal cumple las condiciones de Dirichlet.

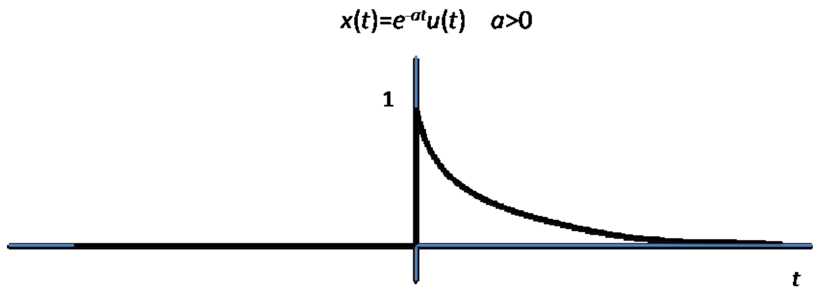


Figura 6: señal de ejemplo con FT

Luego, cuando a>0 aplicamos la integral de análisis (1) a $x(t)$ y obtenemos la FT de la señal:

$$X(jw) = \int_0^\infty e^{-at}e^{-jwt}dt = \int_0^\infty e^{-t(a+jw)}dt = \frac{-1}{a+jw}e^{-t(a+jw)}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{a+jw}$$

8.6. FT de señales periódicas

Las condiciones de Dirichlet son condiciones suficientes pero no necesarias. Es decir, existen señales que tienen FT y no cumplen las condiciones de Dirichlet. En esta sección vamos a ver que las señales periódicas tienen FT a pesar de no cumplir las condiciones de Dirichlet. De esta forma podemos englobar señales periódicas y aperiódicas en un contexto unificado. La única condición para que las señales periódicas tengan FT es permitir el impulso unitario en la transformación.

FT de la exponencial compleja

Para ver porqué las señales periódicas tienen transformada, vamos demostrar que la FT de una exponencial compleja a frecuencia w_0 es una delta desplazada a w_0 con amplitud 2π, es decir:

$$x(t) = e^{jw_0t} \overset{FT}{\leftrightarrow} X(jw) = 2\pi\delta(w - w_0)$$

Para demostrarlo aplicamos la transformada inversa (3) a $X(jw) = 2\pi\delta(w - w_0)$, y aplicamos la propiedad de criba obtenemos:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(w - w_0)e^{jwt}dw = e^{jw_0 t}$$

» **Ejemplo 3**: FT de sinusoidales.

Calcular la FT de las señales:

$$x_1(t) = \sin w_0 t$$

$$x_2(t) = \cos w_0 t$$

Aplicando la ecuación de análisis (1) y la fórmula de Euler a la primera señal tenemos:

$$X_1(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(w_0 t)\, e^{-jwt}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jw_0 t} - e^{-jw_0 t}}{2j} e^{-jwt}\, dt$$
$$= \frac{1}{2j}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{jw_0 t}\, e^{-jwt}dt\ - \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(-w_0)t}\, e^{-jwt}dt\right]$$

Donde observamos que cada uno de los términos está aplicando la ecuación de análisis a una señal exponencial compleja, es decir:

$$X_1(jw) = \frac{1}{2j}\left[FT\{e^{jw_0 t}\}\ - FT\{e^{j(-w_0)t}\}\right]$$

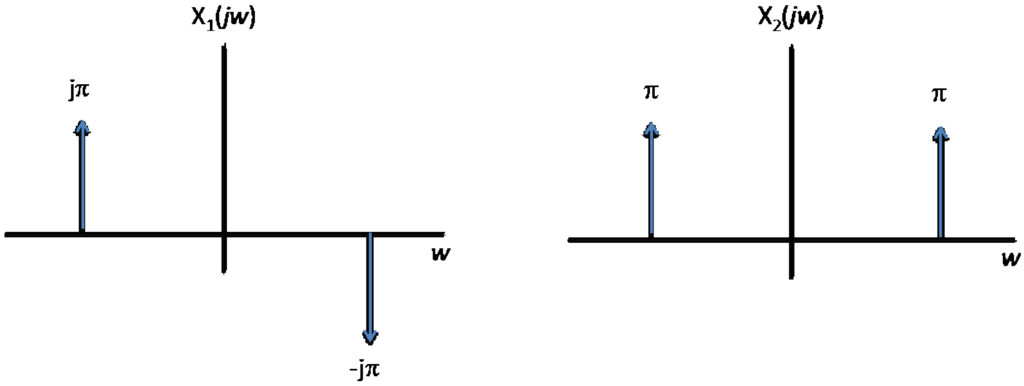
Dado que las frecuencias fundamentales de las exponenciales complejas son w_0 y $-w_0$, sabemos que sus FT son $2\pi\delta(w-w_0)$ y $2\pi\delta(w+w_0)$, respectivamente, y teniendo en cuenta que $1/j=-j$, tenemos:

$$X_1(jw) = j\pi[\delta(w + w_0)\ - \delta(w - w_0)]$$

La figura 7 (a) muestra la representación de $X_1(jw)$ usando dos pulsos desplazados y escalados.

Análogamente aplicamos la ecuación de análisis (1) y la fórmula de Euler a la segunda señal y tenemos:

$$X_2(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(w_0 t)\, e^{-jwt}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t}}{2} e^{-jwt}\, dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{jw_0 t}\, e^{-jwt} dt \; + \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(-w_0)t}\, e^{-jwt} dt\right]$$



(a) FT de sin($w_0 t$) (a) FT de cos($w_0 t$)

Figura 7: FT de las sinusoidales

Donde cada uno de los términos está aplicando la ecuación de análisis a una exponencial compleja:

$$X_2(jw) = \frac{1}{2}\left[FT\{e^{jw_0 t}\} \; + FT\{e^{j(-w_0)t}\}\right]$$

De nuevo, dado que las frecuencias fundamentales de las exponenciales complejas son w_0 y $-w_0$ y sabemos que sus FT son $2\pi\delta(w+w_0)$ y $2\pi\delta(w-w_0)$, respectivamente, tenemos:

$$X_2(jw) = \pi[\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)]$$

La figura 7 (b) muestra la representación de $X_2(jw)$ usando dos pulsos desplazados y escalados.

Correspondencia entre coeficientes de la FS y la FT

Los coeficientes de la FS de una señal periódica $x(t)$ son proporcionales a las correspondientes deltas desplazadas en la FT y su relación es:

$$X(jw)|_{w=mw_0} = 2\pi c_m \qquad (4)$$

Es decir, en $X(jw)$ obtenemos impulsos uniformemente espaciados por la frecuencia fundamental w_0 y cada impulso tiene como valor $2\pi c_m$. La figura 8 muestra esta correspondencia entre los coeficientes de la FS y las deltas desplazadas en la FT.

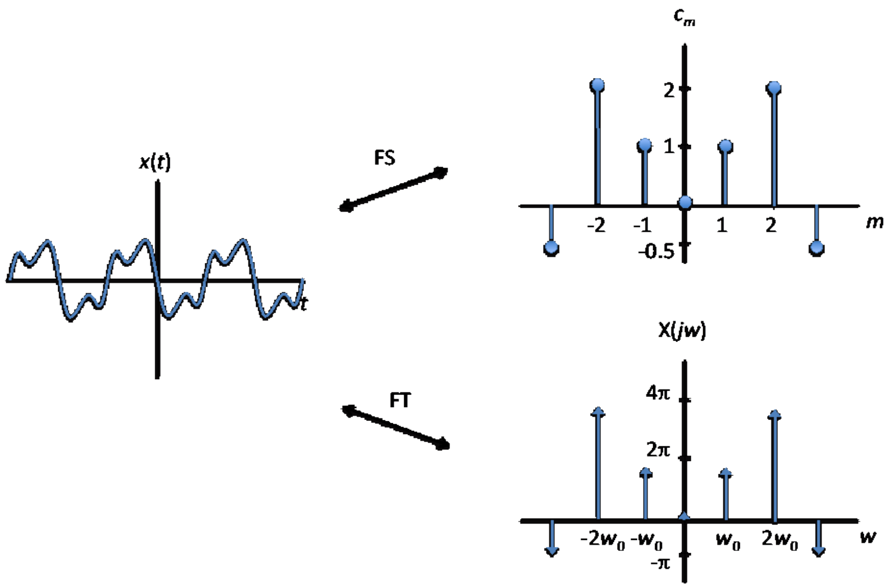


Figura 8: correspondencia entre FS y FT de una señal periódica

Para demostrar esta correspondencia partimos de la ecuación de análisis de los coeficientes de la FS de la señal periódica:

$$c_m = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jmw_0t}dt$$

Y considerando a $x(t)$ una señal periódica con periodo infinito, el rango de integración sería infinito y la integral toma la forma de la ecuación de análisis de la FT con w=mw_0:

$$c_m = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jmw_0t}dt \rightarrow c_m = \frac{1}{T}X(jw)|_{w=mw_0} \rightarrow X(jw)|_{w=mw_0} = c_m T$$

» **Ejemplo 4**: cálculo de la FT a partir de los coeficientes de la FS.

Calcular la FT de la siguiente señal a partir de los coeficientes de la FS:

$$x(t) = \cos(w_0t)$$

Aplicando la ecuación de análisis de la FS tenemos:

$$\cos(w_0 t) \overset{FS}{\leftrightarrow} c_m = \begin{cases} \frac{1}{2}, & m = \pm 1 \\ 0, & m \neq \pm 1 \end{cases}$$

Aplicando la correspondencia entre los coeficientes de la FS y la FT (4) calculamos la FT:

$$\cos(w_0 t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(jw) = \pi\delta(w - w_0) + \pi\delta(w + w_0)$$

Este resultado corresponde con la representación de la figura 7 (b).

8.7. Ecuación de análisis de la DTFT

La **ecuación de análisis** de la DTFT que nos proporciona la representación frecuencial de una serie temporal aperiódica es la siguiente:

$$X(e^{j\Omega}) = DTFT\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \qquad (5)$$

Para obtenerla se sigue un procedimiento similar al seguido para la ecuación de análisis de la FT del apartado 8.3 de este tema. Como muestra la figura 9 empezamos viendo a la señal aperiódica $x[n]$ como una señal periódica con periodo N infinito y que solo toma valores no cero desde $-N_1$ hasta N_2.

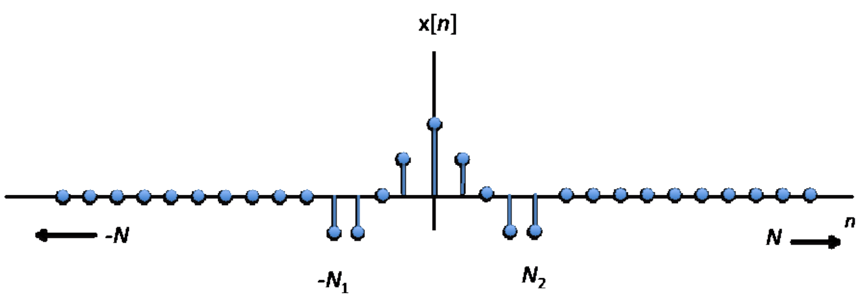


Figura 9: señal de tiempo discreto periódica con periodo infinito

Los efectos de ampliar el periodo N de la señal manteniendo fijos -N_1 y N_2 sobre los coeficientes de la DTFS, son los mismos que sobre la FS:

» **La altura de los coeficientes disminuye**. La DTFT tiene N coeficientes y la relación de Parseval nos dice que a medida que aumenta el número de coeficientes disminuye su altura.
» **La distancia entre componentes armónicamente relacionadas se reduce**. La frecuencia fundamental de los armónicos viene dada por $\Omega_0=2\pi/N$, donde a medida que aumenta N disminuye Ω_0.

Análogamente anulamos el efecto de pérdida de energía multiplicando los coeficientes por N para obtener la **función envolvente** de tiempo discreto:

$$X(e^{jm\Omega_0}) = Nc_m = N\left[\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jm\Omega_0 n}\right] = \sum_{n=<N>} x[n]e^{-jm\Omega_0 n} \qquad (6)$$

Cuando $N\rightarrow\infty$, $\Delta\Omega_0\rightarrow 0$, y podemos considerar a $m\Omega_0$ como una variable continua en Ω, donde el periodo del sumatorio se expande desde -∞ a ∞. Aplicando estos cambios tenemos:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

Que corresponde con la ecuación de análisis de la DTFT (5).

Periodicidad del espectro de DTFT

Una diferencia importante de la representación en el dominio de la frecuencia de la DTFT (respecto a la FT) es que es periódica con periodo 2π. Esto se debe a que la DTFT está representando exponenciales complejas infinitésimamente juntas y en tiempo discreto sabemos que las exponenciales complejas que difieren en múltiplos de 2π son idénticas.

Recordar que:

» Los espectros de la FS y FT son aperiódicos.

» El espectro de la DTFS es periódico con periodo N. En la DTFS los coeficientes c_m no están representando exponenciales complejas infinitésimamente juntas sino exponenciales complejas separadas por una distancia Ω_0. Luego el periodo es $N=2\pi/\Omega_0$.

Bajas y altas frecuencias

En la DTFT las bajas frecuencias se concentran en $\Omega_l=0$ y dado que la DTFT es periódica con periodo 2π, en general, se concentran en:

$$\Omega_l = \pm 2\pi r \quad \text{con} \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Las altas frecuencias se contentan en $\Omega_h=\pi$ y dada la periodicidad de la DTFT, en general se concentran en:

$$\Omega_h = \pm \pi r \quad \text{con} \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Esta propiedad nos permite construir fácilmente filtros paso bajo y paso alto, siguiendo la aproximación que muestra la figura 10.

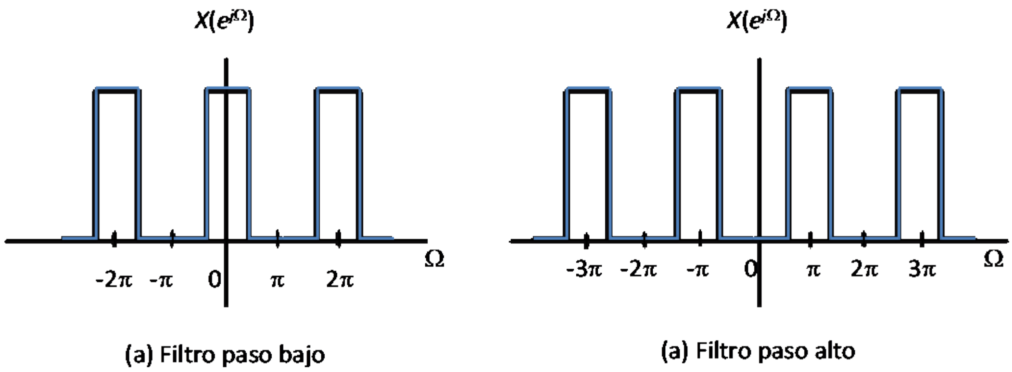


Figura 10: filtro paso alto y paso bajo ideal en la DTFT

» **Ejemplo 5**: filtro paso bajo y paso alto

Calcular la respuesta en frecuencia de un sistema con la siguiente respuesta al impulso y estudiar con qué valores de a actúa como un filtro paso bajo o como un filtro paso alto:

$$h[n] = a^n u[n] \quad \text{con} \quad |a| < 1$$

Aplicando la ecuación de análisis (5) con $h[n]$ tenemos:

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-j\Omega}\right)^n$$

Este sumatorio es una suma geométrica con ratio $\left|ae^{-j\Omega}\right| < 1$ luego podemos aplicar la siguiente relación para obtener una fórmula cerrada:

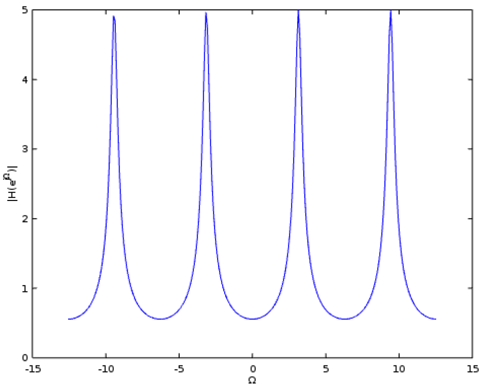
$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad \text{con} \quad |r| < 1$$

Y tenemos:

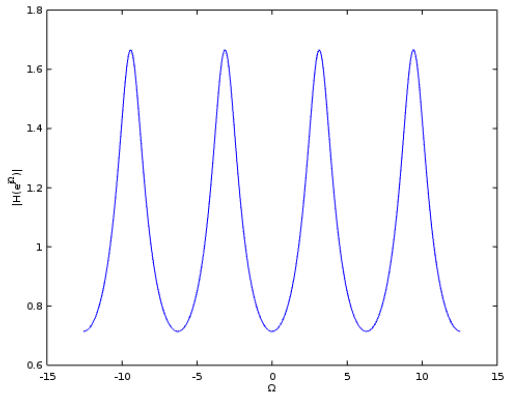
$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$$

Podemos usar los siguientes comandos Octave para obtener la representación espectral de $H(e^{j\Omega})$ para distintos valores de a:

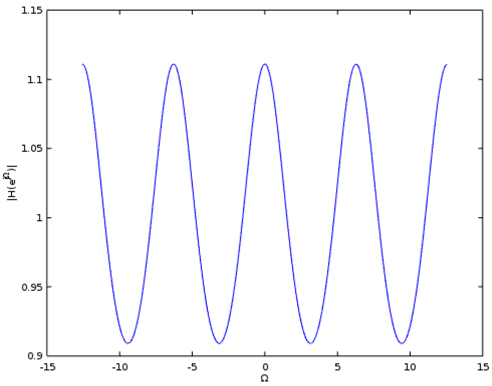
```
a = 0.9;
W = [-4*pi:0.1:4*pi];
H = 1.0./(1.0-a*exp(-j*W));
plot(W,abs(H));
xlabel('\Omega');
ylabel('|H(e^j^\Omega)|');
```



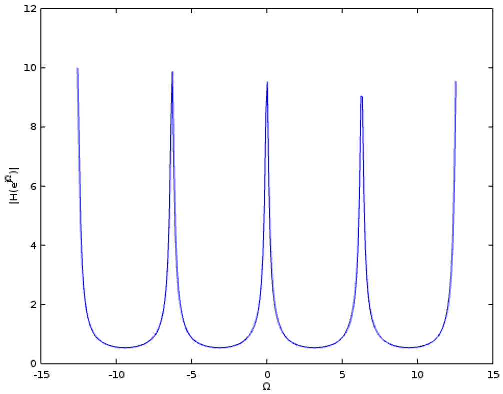
(a) a=-0.8



(b) a=-0.4



(c) a=0.1



(d) a=0.9

Figura 11: espectro de la señal de ejemplo

La figura 11 muestra los resultados obtenidos para diferentes valores de a. De estos resultamos podemos concluir que cuando a<0 estamos implementando un filtro paso bajo y cuando a>0 un filtro paso algo (es decir, deja pasar las altas frecuencias cercanas a $\pm\pi r$).

8.8. Ecuación de síntesis de la DTFT

La **ecuación de síntesis** de la DTFT nos proporciona la representación de una señal aperiódica como la integral de frecuencias continuas en un intervalo (Ω-π,Ω+π]:

$$x[n] = IDTFT\{X(e^{j\Omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega \qquad (7)$$

Demostración

Para obtener la ecuación de síntesis de la DTFT empezamos recordando que la función envolvente de tiempo discreto (6) nos dice la relación que existe entre coeficientes c_m y muestras infinitésimamente juntas en el espectro $X(e^{j\Omega})$:

$$c_m = \frac{1}{N}X(e^{jm\Omega_0})$$

Luego, si aplicamos esta relación a la DTFS tenemos:

$$x[n] = \sum_{m=<N>} c_m e^{jm\Omega_0 n} = \sum_{m=<N>} \frac{1}{N}(e^{jm\Omega_0})e^{jm\Omega_0 n}$$

Dado que $\Omega_0=2\pi/N$, o lo que es lo mismo, $1/N=\Omega_0/2\pi$, podemos reescribir la ecuación como:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=<N>} \left(e^{jm\Omega_0}\right)e^{jm\Omega_0 n}\,\Omega_0$$

Cuando $\Delta\Omega_0\rightarrow 0$, podemos reescribir el sumatorio como la integral con variable continua $\Omega=m\Omega_0$. La suma se realiza sobre N intervalos consecutivos de ancho $\Omega_0=2\pi/N$, con lo que el intervalo de integración será 2π. Es decir:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega$$

Que corresponde con la ecuación de síntesis de la DTFT (7).

Dado que en el apartado anterior concluimos que el espectro de la DTFT $X(e^{j\Omega})$ es periódico con periodo 2π, y $e^{j\Omega n}$ también es periódica con periodo 2π, su producto en la ecuación de síntesis $X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}$ también es periódico con periodo 2π. Esto quiere decir que la ecuación de síntesis se puede aplicar sobre cualquier periodo de longitud 2π en Ω.

Emparejamiento

Lo que nos dice la ecuación de análisis de la DTFT (5) es que a partir de N valores de $x[n]$ podemos obtener los N valores de la función envolvente de tiempo discreto $X(e^{jm\Omega_0}) = Nc_m$.

Análogamente, a partir de los N valores de $X(e^{jm\Omega_0})$, la ecuación de síntesis de la DTFT (7) nos da los N valores distintos de la señal periódica $x[n]$. Esto quiere decir que tanto $x[n]$ como $X(e^{j\Omega})$ describen completamente la señal. Es decir, **están emparejados** mediante la DTFT y se nota como:

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega})$$

8.9. Convergencia y truncado de la DTFT

La ecuación de análisis de la DTFT (5) realiza una suma sobre una serie infinita. La condición suficiente para que esta suma converja es que sea absolutamente sumable, es decir:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

En el ejemplo 5 la secuencia $h[n]$ converge siempre que $|a|$<1.

Truncado

La DTFT no presenta problemas de truncado al aplicar la ecuación de síntesis (7), dado que esta ecuación integra sobre un intervalo finito de longitud 2π. Esta es la misma situación que en la ecuación de síntesis de la DTFS, la cual suma un número finito N de coeficientes, con lo que tampoco presenta problemas de truncado.

8.10. DTFT de señales periódicas

La condición suficiente para que esta suma converja es que sea absolutamente sumable.

Sin embargo, esta no es una condición necesaria. Al igual que en tiempo continuo, en tiempo discreto las señales periódicas también se pueden incorporar en el *framework* de la DTFT permitiendo el impulso unitario en la representación.

DTFT de la exponencial compleja

Al igual que en la FT, la observación clave es que la DTFT inversa de un impulso unitario tiene forma de exponencial compleja.

Sin embargo, a diferencia de la FT, la DTFT es periódica con periodo 2π, con lo que la relación que empareja estas dos representaciones es:

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - r2\pi)$$

La figura 12 muestra la representación espectral de esta señal donde aparece un tren de impulsos con periodo 2π desplazados a Ω_0.

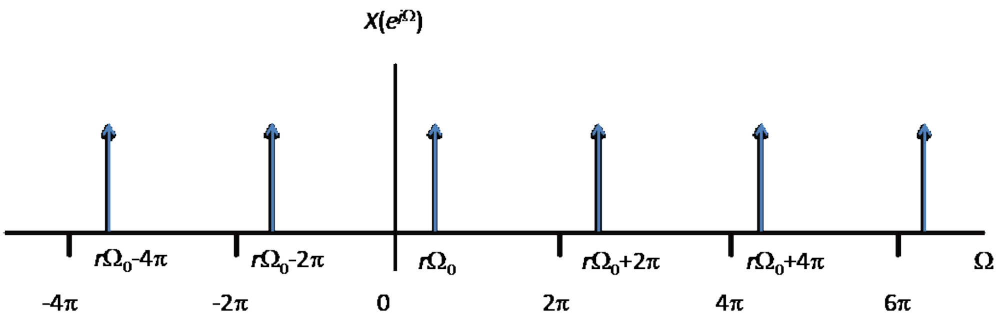


Figura 12: tren de impulsos con periodo 2π desplazados a $r\Omega_0$

Observar que al aplicar la ecuación de síntesis (7) sobre un periodo 2π del espectro se incluye exactamente un impuso a frecuencia fundamental Ω_0:

$$[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\Omega}\right) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} 2\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - r2\pi)\, e^{j\Omega n} d\Omega = e^{j(\Omega_0 + r2\pi)n} = e^{j\Omega_0 n}$$

Correspondencia entre coeficientes de la DTFS y la DTFT

Al igual que en el tiempo continuo, en el tiempo discreto los coeficientes de la DTFS dan lugar en la DTFT a impulsos desplazados por la frecuencia fundamental Ω_0, donde cada impulso tiene altura $2\pi c_m$, es decir, su relación es:

$$X(e^{j\Omega})\big|_{\Omega=m\Omega_0} = 2\pi c_m \tag{8}$$

La figura 13 muestra esta correspondencia entre los coeficientes de la DTFS y las deltas desplazadas en la DTFT.

Figura 13: correspondencia entre DTFS y DTFT de una señal periódica

De nuevo, la diferencia está en que en ahora la representación espectral es periódica, con periodo 2π. La representación espectral de la DTFS tendrá tantos coeficientes como periodo N tenga $x[n]$ y N será también el número de impulsos en cada periodo de la DTFT.

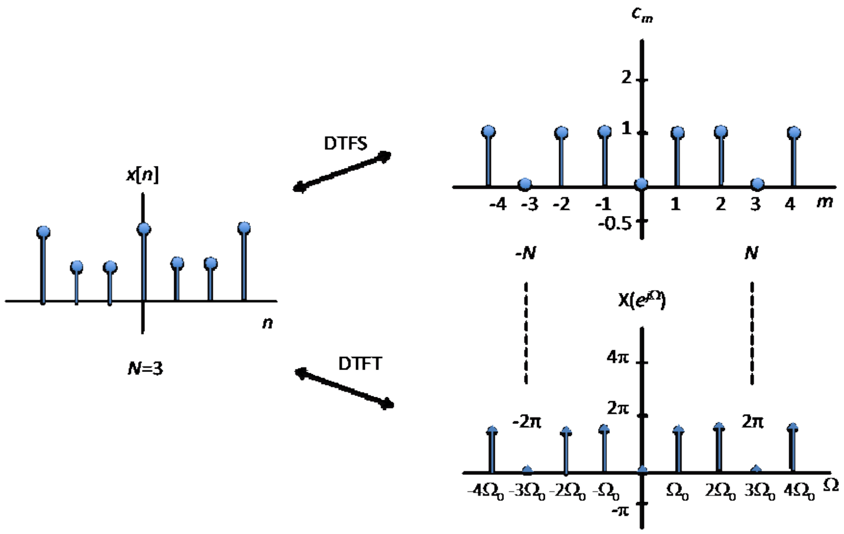


Figura 13: correspondencia entre DTFS y DTFT de una señal periódica

8.11. Resumen

En este tema hemos estudiado las cuatro transformadas de Fourier que se resumen en la tabla 1.Es importante saber reproducir las fórmulas de síntesis y análisis a la hora de comprobar si somos conscientes de las diferencias entre cada representación.

En la primera columna podemos ver que las señales en tiempo continuo tienen una representación aperiódica en frecuencia, mientras que las señales en tiempo discreto tienen una representación periódica en frecuencia.

En la segunda y tercera columna se distingue entre señales periódicas y aperiódicas. Las señales periódicas en el tiempo dan lugar a sumas de valores discretos (m) en frecuencia, mientras que las señales aperiódicas dan lugar a una integral de valores continuos en frecuencia (w,Ω).

	Periódicas **Frecuencia discreta (m)**	**Aperiódicas** **Frecuencia continua (w, Ω)**
Tiempo continuo (t)	FS	FT
Frecuencia aperiódica (m,w)	$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jmw_0 t}$	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)e^{jwt}dw$
	$c_m = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jmw_0 t}\,dt$	$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-jwt}dt$
Tiempo discreto (n)	DTFS	DTFT
Frecuencia periódica (m,Ω)	$x[n] = \sum_{m=<N>} c_m e^{jm\Omega_0 n}$	$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega$
	$c_m = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jm\Omega_0 n}$	$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$

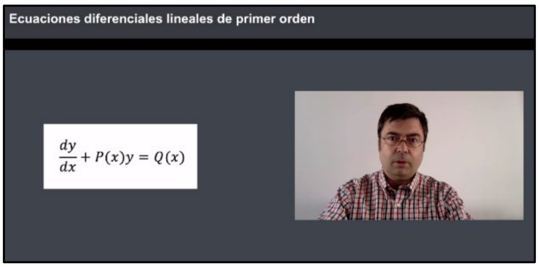
Tabla 1: resumen de las transformadas de Fourier

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

En esta lección magistral veremos qué son y cómo se resuelven las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.



Accede a la lección magistral a través del aula virtual.

No dejes de leer…

Visión práctica en el uso de la transformada de Fourier

Esta publicación incluye ejemplos de aplicación de la FT a análisis de voz.


UNA VISIÓN PRÁCTICA EN EL USO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER COMO HERRAMIENTA PARA EL ANÁLISIS ESPECTRAL DE LA VOZ

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://stel.ub.edu/labfon/sites/default/files/EFE-X-JBernal_PGomez_JBobadilla-FFT_una_vision_practica_herramienta_para_el_analisis_espectral_de_la_voz.pdf

Series de Fourier, transformadas de Fourier y aplicaciones

Esta publicación da ejemplos de aplicaciones de la FT.

Series de Fourier, Transformadas de Fourier y Aplicaciones

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://www.emis.de/journals/DM/v5/art6.pdf

No dejes de ver…

Transformada de Fourier de tiempo discreto

Este tutorial explica la DTFT.

Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://www.youtube.com/watch?v=ifZWHOOxhTE

+ Información

A fondo

Señales y sistemas

Oppenheim, A. V. (1998). *Señales y sistemas*. Méjico: Prentice Hall.

En las páginas 284-300 se describe la transformada de Fourier de tiempo continuo. Además, en las páginas 358-372 se describe la transformada de Fourier de tiempo discreto.

Accede al libro desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://books.google.es/books?id=g2750K3PxRYC&pg=PA284

Bibliografía

Oppenheim, A. V., Willsky, A. S. y Hamid, S. (1998). *Señales y sistemas*. México: Pearson.

Oppenheim, A, V. (2011). *Discrete-Time Signal Processing*. EE.UU.: Pearson.

Test

1. La gran idea de Fourier para representar señales aperiódicas fue:

A. Invertir el tiempo.

B. Extender el periodo.

C. Extender la frecuencia.

D. Ninguna de las anteriores.

2. ¿Qué ocurre cuando aumenta el número de coeficientes de la FS o DTFS?

A. Los armónicos se pierden.

B. El valor de los armónicos aumenta.

C. El valor de los armónicos disminuye.

D. Ninguna de las anteriores.

3. ¿Qué ocurre cuando aumenta el periodo de una señal?

A. Hay invariancia temporal.

B. Los armónicos se juntan.

C. Los armónicos se separan.

D. Ninguna de las anteriores.

4. La representación en frecuencia de la amplitud de una señal real utiliza:

A. Números enteros.

B. Números fraccionarios.

C. Números reales.

D. Números complejos.

5. Las condiciones de Dirichlet aplican en:

A. La FS y FT.

B. La FS y DTFS.

C. La FS, DTFS, FT y DTFT.

D. Ninguna de las anteriores.

6. ¿Qué señal podemos representar sin truncado un ordenador?

A. La FS.

B. La DTFS.

C. La FT.

D. Todas las anteriores.

7. ¿Qué señal tiene periodo 2π?

A. La FS.

B. La DTFS.

C. La DTFT.

D. Todas las anteriores.

8. ¿Cuántos impulsos tiene en el dominio de la frecuencia $cos(w_o t)$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Depende.

9. ¿Cuánto es más alto un coeficiente respecto a su impulso en el dominio transformado?

A. 2.

B. ½.

C. 2π.

D. 1/2π

10. ¿Cuál es el rango de integración/suma de la ecuación de análisis de la DTFT?

A. Desde -∞ a ∞.

B. Desde 0 a ∞.

C. Desde -∞ a ∞.

D. Desde 0 a 2π.