Tema 11
Práctica de SDD I
Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos

Dra. Neus Garrido Sàez

Máster en Ingeniería Matemática y Computación
Escuela Superior en Ingeniería y Tecnología

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

Contenido

1

Introducción

Introducción

Sistemas dinámicos discretos reales

- $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
- $x_{k+1} = f(x_k)$, con $x_k = x(t_k)$

Dinámica de SDD reales

- Órbitas
- Puntos fijos
- Dinámica de los puntos fijos: atractores, repulsores, neutros
- Puntos periódicos
- Diagrama de Verhulst
- Familias de funciones:
  - Puntos de bifurcación
  - Diagrama de bifurcación

Introducción

Sistemas dinámicos discretos reales

- $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
- $x_{k+1} = f(x_k)$, con $x_k = x(t_k)$

Dinámica de SDD reales

- Órbitas
- Puntos fijos
- Dinámica de los puntos fijos: atractores, repulsores, neutros
- Puntos periódicos
- Diagrama de Verhulst
- Familias de funciones:
  - Puntos de bifurcación
  - Diagrama de bifurcación

2

Representaciones gráficas de dinámica real

Contenidos

Órbita de una semilla x_0

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^n(x_0), \ldots\}$$

¿Cuándo parar de calcular nuevos puntos?

Criterios de parada

- $d_{k+1} = |x_{k+1} - x_k|$
- Tolerancia (t)
- Máximo número de iteraciones $(maxiter)$

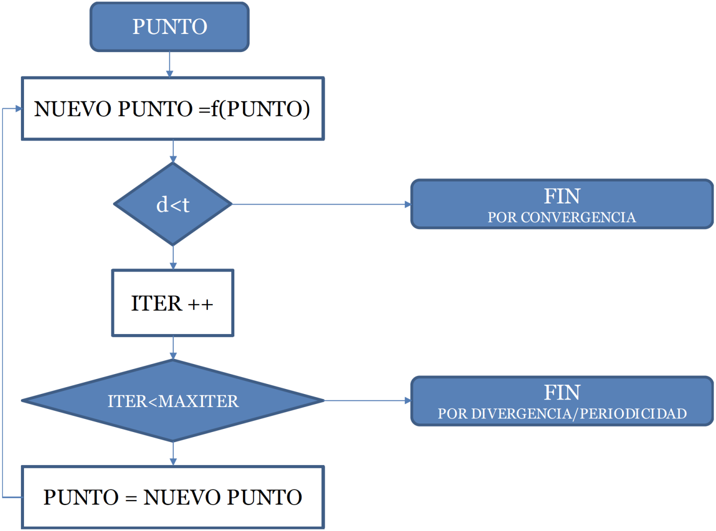


Figura: Diagrama de flujo de generación de órbitas

Código de la función

```
function y=f(x)
  y=x.^2;
end
```

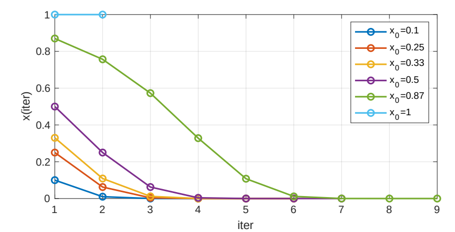
Órbitas

```
function [iter, d, x] = orbita(f, x0, t, maxiter)
    iter=1;
    d=1;
    x=x0;

    while iter<maxiter && d(end)>t
      xk=feval(f,x(end));
      d=[d abs(xk-x(end))];
      x=[x xk];
      iter=iter+1;

    end
    plot(1:iter,x,'o-','Linewidth',1.5), grid on
end
```

Ejemplo 1. Determinar la órbita del sistema dado por $f(x) = x^2$ para las semillas $x_0 = \{0.1, 0.25, 0.33, 0.5, 0.87, 1, 2\}$. Se considerará que el método ha convergido cuando la diferencia entre iterados sea de 10^{-6}. El máximo número de iteraciones permitido es de 50. Representar, en cada caso, el número de iteración en el eje de abscisas y el valor del sistema en el de ordenadas.

- `t=1e-6`
- `maxiter=50`
- Para $x_0 = 0.1$:

```
[iter,d,x]=orbita(f,.1,1e-6,50);
plot(1:iter,x);
```



x_0	0.1	0.25	0.33	0.5	0.87	1	2
x_n	0	0	0	0	0	1	∞
n	5	6	6	7	9	2	12

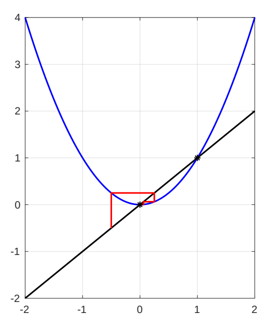
Contenidos

Diagramas de Verhulst

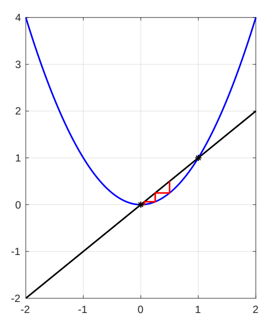
```
function [iter, xk]=Verhulst(f, x0, t, maxiter, rangox)

    % Representación y1=x, y2=f(x)

    y1=rangox; y2=feval(f,rangox);
    plot(rangox,y1,'k',rangox, y2,'b','Linewidth',1.5);
    grid on

    % Generación órbita
    [iter,d,xk]=orbita(f,x0,t,maxiter);

    % Representación órbita

    xplot=repmat(xk,2,1); xplot=xplot(:);
    yplot=xplot(2:end); xplot(end)=[];
    hold on, plot(xplot,yplot,'r','Linewidth',1.5);
    axis([min(rangox) max(rangox) min(rangox) max(rangox)])

end
```

Ejemplo 2. Representación del diagrama de Verhulst para el sistema determinado por $f(x) = x^2$ con semillas $x_0 = \{-0.5, 0.5, 1.5\}$. Se considerará que el método ha convergido cuando la diferencia entre iterados sea de 10^{-6}. El máximo número de iteraciones permitido es de 50.

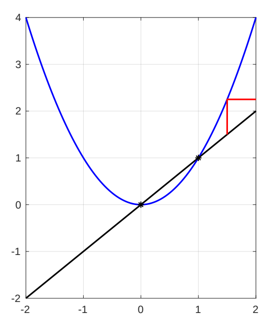
- `t=1e-6`, `maxiter=50`
- Para $x_0 = -0.5$: `[iter,xk]=Verhulst(f,-.5,1e-6,50,linspace(-2,2));`



(a) $x_0 = -0.5$



(b) $x_0 = 0.5$



(c) $x_0 = 1.5$

Contenidos

Familia logística

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1-x), \qquad 0 < x < 1, \quad \lambda > 0$$

- Puntos fijos: $x_1^* = 0$, $x_2^* = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}$
- Puntos 2-periódicos:

$$x_1^*, \quad x_2^*, \quad x_1^P = \frac{\lambda + 1 + \lambda^2\sqrt{(\lambda+1)(\lambda+3)}}{2\lambda}, \quad x_2^P = \frac{\lambda + 1 - \lambda^2\sqrt{(\lambda+1)(\lambda+3)}}{2\lambda}$$

- Estabilidad de los puntos fijos:

$$f_\lambda'(x) = \lambda(1-2x) \Rightarrow \begin{cases} f_\lambda'(x_1^*) & = & \lambda \\ f_\lambda'(x_2^*) & = & 2-\lambda \end{cases}$$

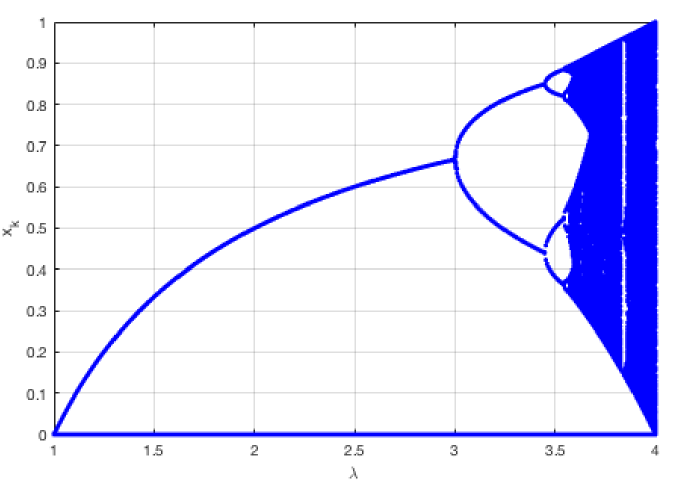
  - x_1^* es atractor si $\lambda \in (-1, 1)$ y repulsor si $\lambda \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
  - x_2^* es atractor si $\lambda \in (1, 3)$ y repulsor si $\lambda \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
- Puntos de bifurcación:
  - x_1^* cuando $\lambda = 1$
  - x_2^* cuando $\lambda = \{1, 3\}$

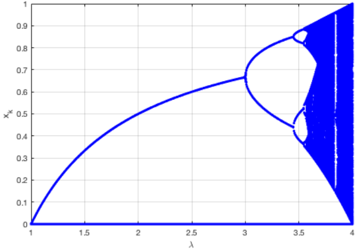
Diagrama de bifurcación de la familia logística

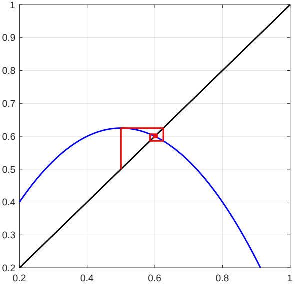
```
function X=bifurcacion(x0, lambda)

    [X,L]=meshgrid(x0,lambda);
    iter=1;

    while iter<500
      X=L.*X.*(1-X);
      iter=iter+1;
    end

    plot(lambda,X,'b.');
    grid on
    xlabel('\lambda')
    ylabel('x_k')

end
```

Diagrama de bifurcación de la familia logística

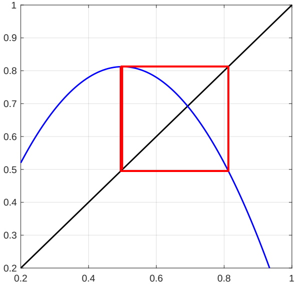
- `X=bifurcacion(linspace(0,1,501),linspace(1,4,501));`



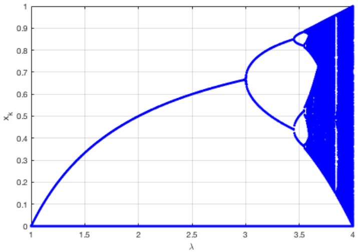


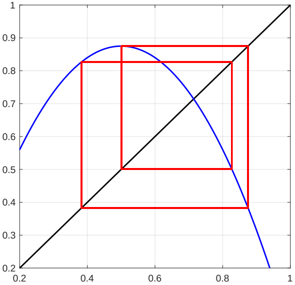


(d) $\lambda = 2.5$

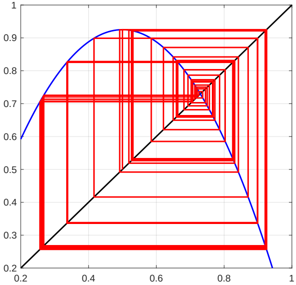


(e) $\lambda = 3.25$





(f) $\lambda = 3.5$



(g) $\lambda = 3.7$

- A fondo: *Web diagram:* http://mathworld.wolfram.com/

- **Actividades:** Laboratorio 2: Sistemas Dinámicos Discretos
  - Sesión de laboratorio: jueves 3, 16:00-18:00 (hora ESP)
  - Fecha de entrega: 15/06/2021

...Y por supuesto:

TEST DE APRENDIZAJE!!

unir
LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET