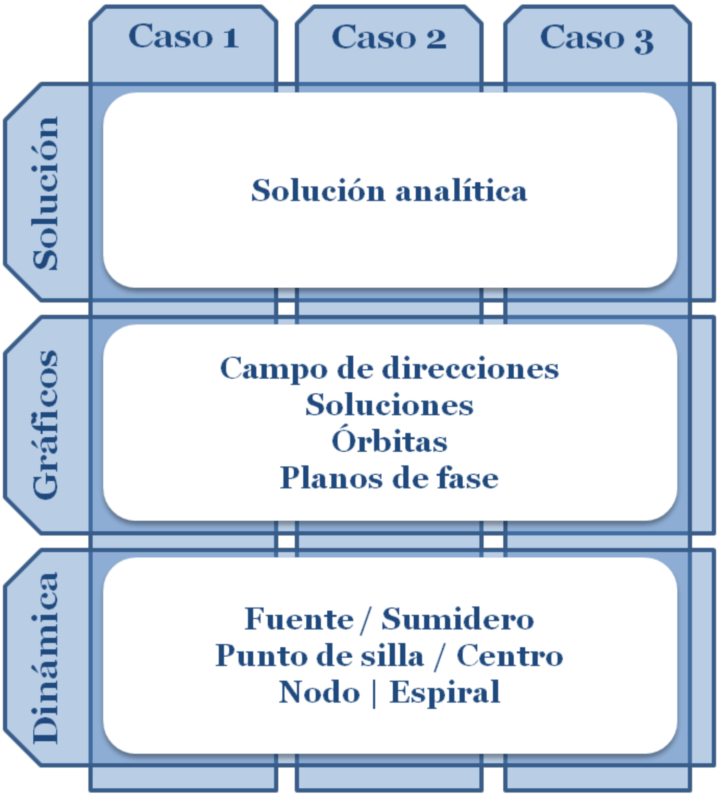
Sistemas lineales de orden superior

3

TEMA

Esquema



Caso 1
Caso 2
Caso 3
Solución
Solución analítica
Gráficos
Campo de direcciones
Soluciones
Órbitas
Planos de fase
Dinámica
Fuente / Sumidero
Punto de silla / Centro
Nodo | Espiral

Ideas clave

3.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

En este tema vamos a extender el concepto de sistema dinámico representado por una ecuación diferencial a diferentes ecuaciones diferenciales con relaciones entre ellas, dando lugar a sistemas de ecuaciones diferenciales.

Secuencialmente el tema va redescubriendo algunos conceptos que ya conoces de cursos anteriores, pero que son imprescindibles para la resolución de este tipo de sistemas dinámicos.

Se trata de un tema con una parte importante de resolución analítica, acompañada de casos diferenciados para la representación gráfica.

Sin intención de adelantarnos a los acontecimientos, son tres los casos principales que se van a estudiar y estarán en función de una característica intrínseca de la matriz asociada al sistema de ecuaciones. Al final del tema, habrás conseguido clasificar un sistema dinámico compuesto por dos ecuaciones diferenciales, evaluando sus características y analizando su comportamiento dinámico.

3.2. Nociones básicas de álgebra lineal

Para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales vamos a apoyarnos en conceptos previos relacionados con el álgebra lineal. Los más relevantes en el campo sobre el que vamos a trabajar se resumen a continuación.

Diagonalización de matrices cuadradas

La diagonalización de matrices consiste en que dada una matriz A representada en una base B obtengamos una matriz diagonal D, semejante a A, representada en una base V.

La diagonal de la matriz $\boldsymbol{D}$ está formada por los **valores propios** λ_i de la forma:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Y se obtiene a partir de resolver $|A - \lambda I| = 0$. Los **vectores propios** $\vec{v}_i$ forman la base V:

$$V = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Y se calculan a partir de $(A - \lambda_i I)\vec{v}_i = 0$.

De este modo, podemos expresar las matrices A y D en las bases B y V, respectivamente, como:

$$A = VDV^{-1} \leftrightarrow D = V^{-1}AV$$

Ejemplo 1 |Diagonalización de $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$**.**

Obtención de los valores propios:

$$|A - \lambda I| = 0 \leftrightarrow \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow (-2-\lambda)(1-\lambda) = 0 \leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Vector propio asociado a $\lambda_1 = -2$:

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = 0 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vector propio asociado a $\lambda_2 = 1$:

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v}_2 = 0 \leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El código en SciLab para la obtención de los valores y vectores propios de la matriz A es el siguiente:

```
A=[-2 1;0 1];
[V,lambda]=spec(A);
```

Ejemplo 2 | Diagonalización de $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Obtención de los valores propios:

$$|A - \lambda I| = 0 \leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -4 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2i \\ \lambda_2 = -2i \end{cases}$$

Vector propio asociado a $\lambda_1 = 2i$:

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = 0 \leftrightarrow \begin{bmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vector propio asociado a $\lambda_2 = -2i$:

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v}_2 = 0 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 2i & -4 \\ 1 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Potencia de una matriz diagonalizable

La potencia k de una matriz A se puede obtener multiplicando k veces la matriz A por sí misma o haciendo uso de su matriz diagonal, de la forma:

$$A = VDV^{-1} \leftrightarrow A^k = VD^kV^{-1}$$

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3 | Calcula A^{10}, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La solución pasa por obtener los valores y vectores propios de A. Los valores propios, a partir de obtener $|A - \lambda I| = 0$ son $\lambda = \{0,1,2\}$.

Vector propio asociado a:

$$\lambda_1 = 0 \rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ \lambda_2 = 1 \rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda_3 = 1 \rightarrow \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, V^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y:

$$A^{10} = VD^{10}V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 512 & 0 & 512 \\ 0 & 1 & 0 \\ 512 & 0 & 512 \end{bmatrix}$$

3.3. Sistemas lineales planos

Caso general

Los sistemas de n ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes tienen la forma:

$$X' = AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} X$$

Donde $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]'$. Para el caso de los sistemas planos, $n = 2$ y las expresiones quedan como:

$$X' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} X$$

El sistema plano $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ tiene:

» Un único punto de equilibrio, si $\det(A) \neq 0$
» Una línea de puntos de equilibrio, si $\det(A) = 0$ y A no es la matriz de coeficientes nulos.

El énfasis del principio del tema por recuperar conceptos de diagonalización está basado en la solución de los sistemas planares.

La solución del sistema $Y' = DY$, si D es una matriz diagonal, es muy sencilla de obtener. Basta con escribir las ecuaciones asociadas:

$$Y' = DY \leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{matrix} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{matrix} \leftrightarrow \begin{matrix} y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{matrix}$$

En caso de que nuestro sistema fuera $X' = AX$, donde A es una matriz $2x2$ genérica, obtendríamos la solución diagonalizando la matriz A. En función de los valores propios, procederemos de una u otra forma. **Valores propios reales distintos:** $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Los valores propios λ_1 y λ_2 tienen como vectores propios asociados $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. La solución del sistema$X' = AX$ es:

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\ \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\ \vec{v}_2$$

Ejemplo 4 | Obtén la solución del sistema:

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + x_2 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$$

Podemos reescribir el sistema matricialmente como:

$$X' = AX = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir de A, obtenemos los valores y vectores propios:

$$\lambda_1 = 1 \to \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \lambda_2 = -2 \to \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la solución al sistema será:

$$X(t) = C_1 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-2t} \\ x_2(t) = 3C_1 e^{t} \end{cases}$$

Valores propios reales iguales: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

La siguiente matriz tiene dos valores propios reales iguales:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Al obtener los vectores propios asociados, nos damos cuenta que cualquier vector $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ es vector propio asociado, por lo que la solución del sistema es:

$$X(t) = Ce^{\lambda t}\vec{v}$$

Siendo $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$.

Del mismo modo, la siguiente matriz también tiene dos valores propios reales iguales:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Al calcular el vector propio asociado obtenemos $\vec{v} = [1 \quad 0]'$, por lo que una de las soluciones es:

$$X_1(t) = C_1 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para obtener otras soluciones, reescribimos el sistema:

$$\begin{aligned} x_1' &= \lambda x_1 + x_2 \\ x_2' &= \lambda x_2 \end{aligned}$$

De la expresión de x_2' podemos deducir que su solución es $x_2(t) = \gamma e^{\lambda t}$. Así que reemplazando sobre la expresión de x_1' obtenemos:

$$x_1' = \lambda x_1 + \gamma e^{\lambda t}$$

Esta ecuación diferencial se resuelve a partir del método de los coeficientes indeterminados. Para ello, proponemos que la solución será:

$$x_1(t) = \nu e^{\lambda t} + \mu t e^{\lambda t} \rightarrow x_1' = \lambda \nu e^{\lambda t} + \mu e^{\lambda t} + \lambda \mu t e^{\lambda t}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores tenemos la igualdad:

$$\lambda \nu e^{\lambda t} + \mu e^{\lambda t} + \lambda \mu t e^{\lambda t} = \lambda \nu e^{\lambda t} + \lambda \mu t e^{\lambda t} + \gamma e^{\lambda t} \leftrightarrow \mu = \gamma, \nu \in \mathbb{R}$$

De este modo, $x_1(t) = \nu e^{\lambda t} + \gamma t e^{\lambda t}$ y la segunda solución del sistema es:

$$X_2(t) = \begin{bmatrix} \nu e^{\lambda t} + \gamma t e^{\lambda t} \\ \gamma e^{\lambda t} \end{bmatrix} \xrightarrow{\nu=0} \gamma e^{\lambda t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma=C_2} C_2 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Y, por tanto, la solución del sistema será:

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t) = C_1 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5 | Obtén la solución al sistema:

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 3x_2 \end{cases}$$

La matriz asociada al sistema es $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, cuyo valor propio repetido es $\lambda = 3$. El vector propio asociado es$\vec{v} = [1 \quad 0]'$, por lo que la primera solución es:

$$X_1(t) = C_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para encontrar la segunda solución de la segunda ecuación diferencial del sistema del enunciado se obtiene directamente $x_2(t) = \gamma e^{3t}$. Conjeturamos que:

$$x_1 = \nu e^{3t} + \mu t e^{3t} \rightarrow x_1' = 3\nu e^{3t} + \mu e^{3t} + 3\mu t e^{3t}$$

Sustituyendo en la primera ecuación diferencial del enunciado, obtenemos:

$$3\nu e^{3t} + \mu e^{3t} + 3\mu t e^{3t} = 3\nu e^{3t} + 3\mu t e^{3t} - 2\gamma e^{3t} \leftrightarrow \mu = -2\gamma, \nu \in \mathbb{R}$$

Por lo que $x_1 = \nu e^{3t} - 2\gamma t e^{3t}$. Si hacemos $\nu = 0$ y renombramos $\gamma = C_2$, la solución general del sistema queda como:

$$X(t) = C_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{bmatrix} -2t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Valores propios complejos: $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2^*}$. En el caso de valores propios complejos, si siguiéramos el mismo procedimiento obtendríamos para un sistema de ecuaciones reales un sistema de soluciones complejas, algo que resulta bastante incongruente.

La solución pasa por la aplicación de la fórmula de Euler:

$$e^{i\varphi t} = \cos \varphi t + i \sin \varphi t$$

Tanto los valores λ como los vectores $\vec{v}$propios aparecen en parejas de conjugados. La solución la obtendremos a partir de uno de ellos.

La solución será:

$$X(t) = C_1 X_{Re}(t) + C_2 X_{Im}(t)$$

Donde:

$$X_{Re}(t) = \mathcal{R}e\{e^{\lambda t}\vec{v}\}, X_{Im}(t) = \mathcal{I}m\{e^{\lambda t}\vec{v}\}$$

Ejemplo 6 | Obtén la solución al sistema:

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X$$

Calculemos los valores y vectores propios del sistema:

$$\lambda = \pm i \rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} \mp i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como tenemos valores propios complejos, aparecen tanto ellos como sus vectores propios en parejas conjugadas. Para obtener la solución hay que realizar las operaciones:

$$e^{\lambda t}\vec{v} = e^{it}\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = (\cos t + i \sin t)\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t - i\cos t \\ \cos t + i \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

Como la solución a un sistema de ecuaciones reales no lo vamos a dejar en función de valores complejos, aplicamos la solución:

$$X(t) = C_1 X_{Re}(t) + C_2 X_{Im}(t) = C_1 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

Ecuaciones diferenciales de orden dos

Las ecuaciones diferenciales de orden dos tienen la forma:

$$x'' = f(t, x, x')$$

Para el caso en el que la ecuación es homogénea con coeficientes constantes, podemos escribirla como:

$$x'' + ax' + bx = 0$$

Haciendo el cambio de variable $y = x'$, se reescribe la ecuación anterior como un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{matrix} x' & = & y \\ y' & = & -ay - bx \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Para resolver este sistema tenemos que proceder como se ha indicado en el apartado anterior.

Ejemplo 7 | Obtén la solución del oscilador armónico sin pérdidas descrito por la ecuación diferencial $mx'' = -kx$.

Haciendo el cambio de variable $y = x'$, tenemos que $y' = x'' = -\frac{k}{m}x$. Escrito en forma matricial, tenemos el sistema:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Calculamos en primer lugar los valores propios:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -k/m & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow \lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \leftrightarrow \lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \xleftrightarrow{\omega_0 = \sqrt{k/m}} = \pm i\omega_0$$

Para $\lambda = i\omega_0$:

$$\begin{bmatrix} -i\omega_0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -i\omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{bmatrix}$$

Desarrollamos $e^{\lambda t}\vec{v}$:

$$e^{i\omega_0 t} \begin{bmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{bmatrix} = (\cos\omega_0 t + i\sin\omega_0 t) \begin{bmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega_0 t \\ -\omega_0 \sin\omega_0 t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin\omega_0 t \\ \omega_0 \cos\omega_0 t \end{bmatrix}$$

De forma que la solución al sistema es:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t \\ -\omega_0 \sin \omega_0 t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \sin \omega_0 t \\ \omega_0 \cos \omega_0 t \end{bmatrix}$$

Y la solución de nuestro problema es:

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$$

3.4. Representaciones gráficas de sistemas planos

Campo de direcciones

En el tema anterior vimos que el campo de direcciones es tangente a la solución de la ecuación diferencial. Para sistemas de ecuaciones diferenciales, su significado es análogo. La forma de calcular la pendiente del vector en cada uno de los puntos consiste en multiplicar la matriz del sistema sobre el punto en el que se quiere calcular dicha pendiente.

Soluciones

Las soluciones de un sistema plano se tienen que entender como una curva parametrizada en el plano. Es por ello que para cada valor de t se tiene un punto $(x(t), y(t))$. Dándole diferentes valores a las constantes C_1 y C_2, se obtienen diferentes representaciones de las soluciones.

Ejemplo 8 | Representación del campo de direcciones y de dos soluciones cualesquiera del sistema:

$$\begin{cases} x' &= & y \\ y' &= & -x \end{cases}$$

En primer lugar, obtenemos la matriz del sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Las pendientes en diferentes puntos del sistema son:

Punto	$[1\quad 0]'$	$[-1\quad 0]'$	$[0\quad 1]'$	$[0\quad -1]'$	$[1\quad 1]'$	$[-1\quad 1]'$	$[-1\quad -1]$	$[1\quad -1]'$
Pendiente	$[0\quad -1]'$	$[0\quad 1]'$	$[1\quad 0]'$	$[-1\quad 0]'$	$[1\quad -1]'$	$[1\quad 1]'$	$[-1\quad 1]'$	$[-1\quad -1]$

La solución general del sistema se ha obtenido en el ejemplo 6 y es:

$$X(t) = C_1 X_{Re}(t) + C_2 X_{Im}(t) = C_1 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

Para la representación de dos soluciones cualesquiera, tomamos $C_1 = 1, C_2 = 0$ para la primera (X_1) y $C_1 = 0,\ C_2 = 2$ para la segunda (X_2). Dándole valores a t:

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$7\pi/4$
$X_1(t)$	$[0\quad 1]'$	$[r\quad r]'$	$[1\quad 0]'$	$[r\quad -r]'$	$[0\quad -1]$	$[-r\quad -r]'$	$[-1\quad 0]$	$[-r\quad r]'$
$X_2(t)$	$[-2\quad 0]$	$[-2r\quad 2r]$	$[0\quad 2]'$	$[2r\quad 2r]$	$[2\quad 0]'$	$[2r\quad -2r]$	$[0\quad -2]$	$[-2r\quad -2r]$

Siendo$r = \sqrt{2}/2$.

A continuación se representan el campo de direcciones y las dos soluciones propuestas:

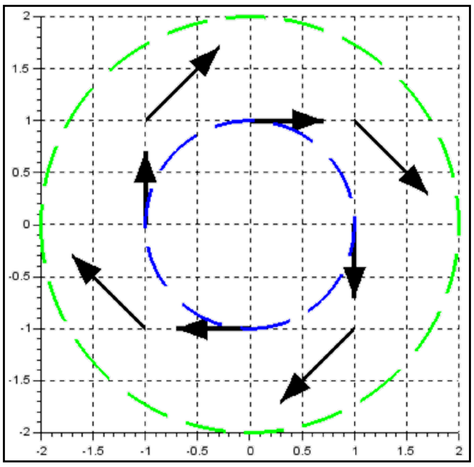


Figura 1. Campo de direcciones (flechas negras), solución 1 (azul) y solución 2 (verde) de $x' = y, y' = -x$.

Órbitas

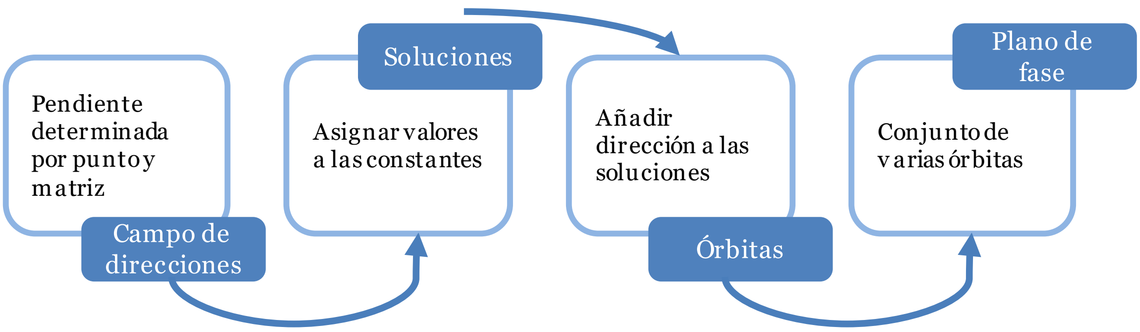
La órbita de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales representa la dirección que sigue conforme aumenta el tiempo. Es por ello que se incluyen flechas en las representaciones gráficas de las soluciones para determinar el sentido determinado por el paso del tiempo.

Si agregáramos la dirección a las soluciones de la figura 1, tendríamos que ambas soluciones tienen sentido horario.

Planos de fase

Asociado a la línea de fase del tema anterior, el plano de fase recoge diferentes órbitas.

Se utiliza para, de un vistazo, observar el comportamiento que tiene un determinado sistema para diferentes valores de las constantes.



Ejemplo 9 | Representación gráfica del campo de direcciones y del plano de fase del sistema:

$$\begin{cases} x' & = & -x \\ y' & = & y \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \to \lambda = \{-1,1\}, \vec{v} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$X(t) = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} \\ y(t) = C_2 e^{t} \end{cases}$$

A continuación, se muestran con flechas de colores el campo de direcciones y con líneas vectorizadas negras el plano de fase.

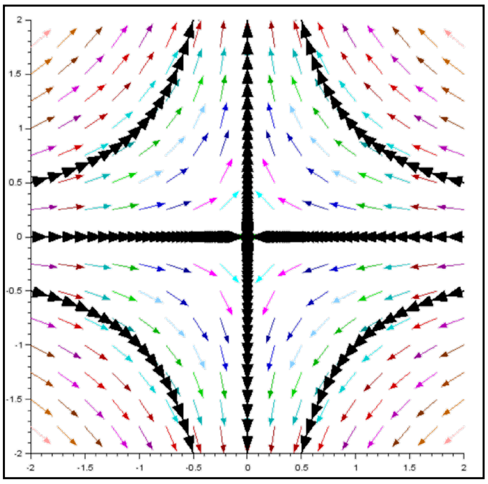


Figura 3. Campo de direcciones (color) y plano de fase (negro) del sistema $x' = -x, y' = y$.

3.5. Análisis dinámico de sistemas planos

Sistemas en forma canónica

A continuación vamos a particularizar el caso anterior para los sistemas de dos ecuaciones diferenciales autónomas. Veremos las soluciones tanto a nivel analítico como dinámico.

Sea el sistema:

$$X' = AX = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} X$$

Con λ_1 y λ_2 como valores propios. A continuación estudiaremos tres casos diferentes, correspondientes con las siguientes formas canónicas:

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \right\}$$

En todos los casos analizaremos el comportamiento del origen, viendo el campo de direcciones y el plano de fase.

Caso 1. Valores propios reales distintos:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \rightarrow X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$$

» $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Si los valores de$\lambda_1$ y λ_2 son negativos, las exponenciales son negativas y, conforme avanza el tiempo, tienden al origen. Es por ello que son soluciones estables y el origen es un sumidero.

» $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Cuando ambos valores propios son positivos, las exponenciales son positivas y tienen hacia el infinito con el tiempo. Se tratan de soluciones inestables, siendo el origen una fuente.

» $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. En este caso se combinan los dos anteriores. Las rectas de la forma $C_1 e^{\lambda_1 t}[1 \quad 0]'$ caen sobre el eje x y tienden al origen con el tiempo, en lo que se denomina la recta estable. Las rectas de la forma $C_2 e^{\lambda_2 t}[0 \quad 1]'$ caen sobre el eje y y tienden al infinito con t, dando lugar a la recta inestable. El resto de combinaciones $C_1, C_2 \neq 0$ tienden a infinito.

Se puede observar en la figura 4 el comportamiento dinámico de los casos previamente explicados.

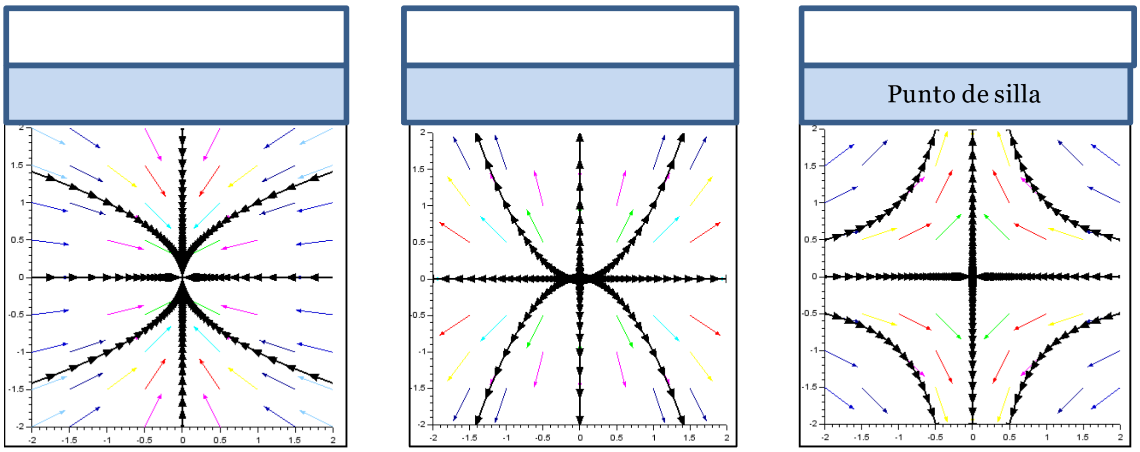


Figura 4. Campos de direcciones y planos de fase cuando existen dos valores propios reales distintos.

Caso 2. Valores propios reales iguales:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow X(t) = Ce^{\lambda t}\vec{v}$$

» $\lambda < 0$. La exponencial es negativa y todos los puntos tienden al origen conforme aumenta el tiempo. El origen es un nodo estable o sumidero.

» $\lambda > 0$. La exponencial es positiva y, por tanto, la solución tiende a infinito con el tiempo. El origen es un nodo inestable o fuente.

La figura 5 recoge los campos de direcciones y los planos de fase:

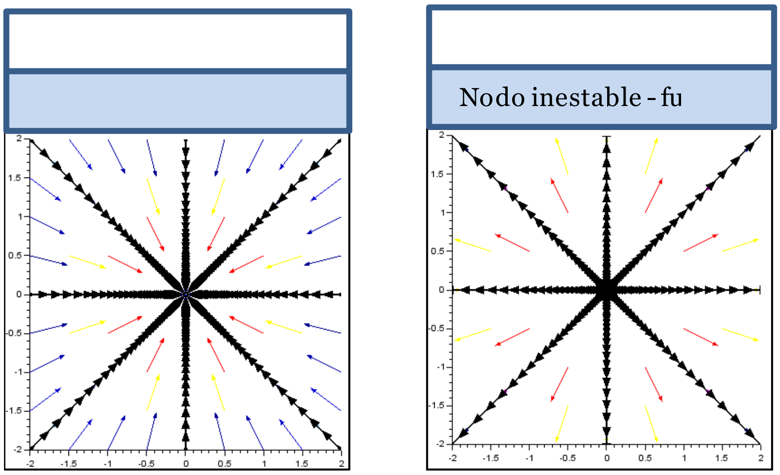


Figura 5. Campo de direcciones y planos de fase cuando existe un valor propio repetido

Caso 3. Valores propios complejos

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \rightarrow X(t) = C_1 e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{bmatrix} + C_2 e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{bmatrix}$$

En el caso de valores propios complejos $\lambda = \alpha + i\beta$, podemos ver la solución en función de las partes real e imaginaria del valor propio. Sin tener en cuenta el valor $e^{\alpha t}$, la trayectoria es una circunferencia centrada en el origen, por lo que las soluciones con $\alpha = 0$ se denominan **centros**. Al incluir el término $e^{\alpha t}$, el centro se convierte en espiral. En función del signo de α estaremos ante una espiral **sumidero** ($\alpha < 0$) o ante una espiral **fuente** ($\alpha > 0$).

La figura 6 representa los comportamientos de los tres casos anteriores:

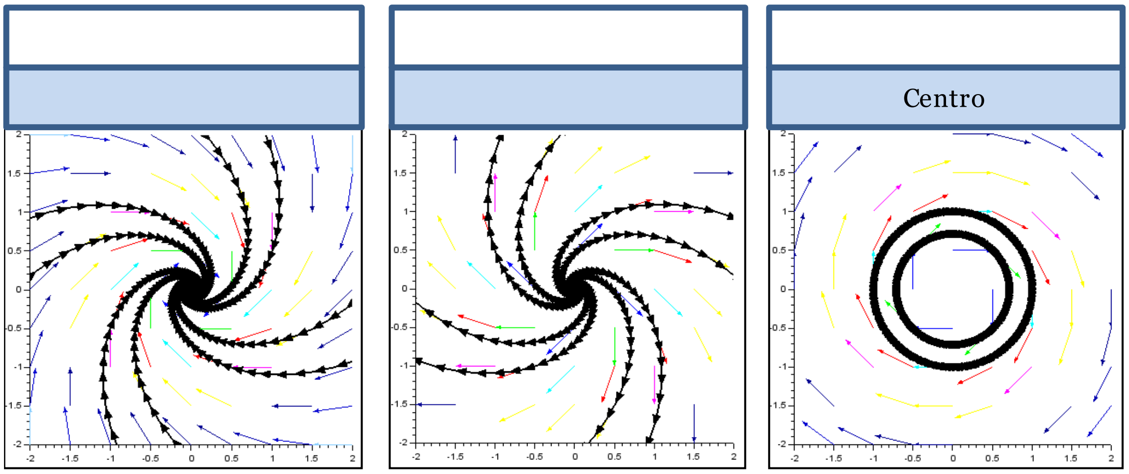


Figura 6. Campo de direcciones y planos de fase cuando existen valores propios complejos conjugados.

Cambio de coordenadas

Cuando nos encontramos ante un problema $X' = AX$ de los que no se recogen en las anteriores formas canónicas, podemos realizar una transformación a partir de una aplicación lineal T, de forma que:

$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Y nos encontremos ante un problema $Y' = BY$, donde B sí esté en forma canónica y tenga la forma$B = T^{-1}AT$. Si obtenemos la solución Y, directamente tendremos la solución $X = TY$ de nuestro sistema. El procedimiento algebraico es:

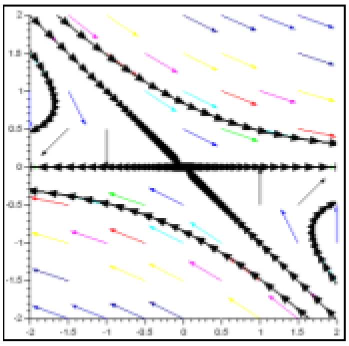
$$Y' = BY \leftrightarrow Y' = T^{-1}ATY \leftrightarrow TY' = ATY \leftrightarrow X' = AX$$

Por tanto, el objetivo es elegir la matriz T adecuada y encontraremos diferentes casos.

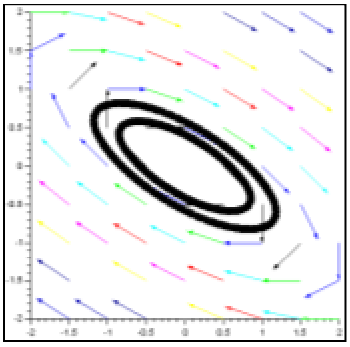
La siguiente tabla recoge los valores de T:

$\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\lambda_1 = \lambda_2^* = \alpha + i\beta$
$T = \begin{bmatrix} \mid & \mid \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \\ \mid & \mid \end{bmatrix}$	$T = \begin{bmatrix} \mid & \mid \\ \mathcal{Re}\{\vec{v}\} & \mathcal{Im}\{\vec{v}\} \\ \mid & \mid \end{bmatrix}$

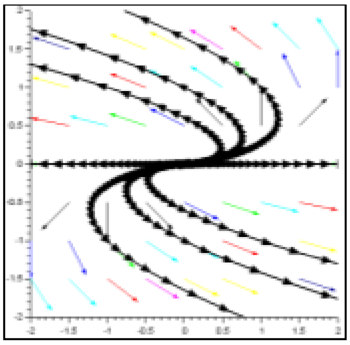
Ejemplo 10 | Dados los planos de fase de la figura y las matrices asociadas a sus sistemas de ecuaciones diferenciales, determina su correspondencia:



a



b



c

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

En primer lugar vamos a analizar los planos de fase. Se puede observar que en el plano de fase (a) hay una recta que tiende al origen y el resto de líneas tienden al infinito; este caso se corresponde con el punto de silla, en el que los valores propios son diferentes y de distinto signo.

Respecto al plano de fase (b) se trata de un centro transformado, por lo que estamos ante un caso de valores propios complejos conjugados.

Por último, en el caso (c) tenemos que todas las trayectorias tienden al infinito, dando lugar a una fuente, que se corresponde con valores propios positivos.

A continuación analizamos los valores propios de cada una de las matrices:

$$A: \lambda_A = \pm i, B: \lambda_B = 1, C: \lambda_C = \pm 1$$

En base a los valores propios y al análisis de los planos de fase, concluimos que las relaciones son (a)↔C, (b)↔A, (c)↔B

3.6. Referencias bibliográficas

Hirsch, M. W., Smale, S. y Devaney, R. L. (2004). *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Elsevier.

Muñoz, J. M. (2014). *Apuntes de análisis dinámico*. http://personal.us.es/jmiguel/Informacion/Material/Dinamica/MDE-Temas-Dic-12.pdf

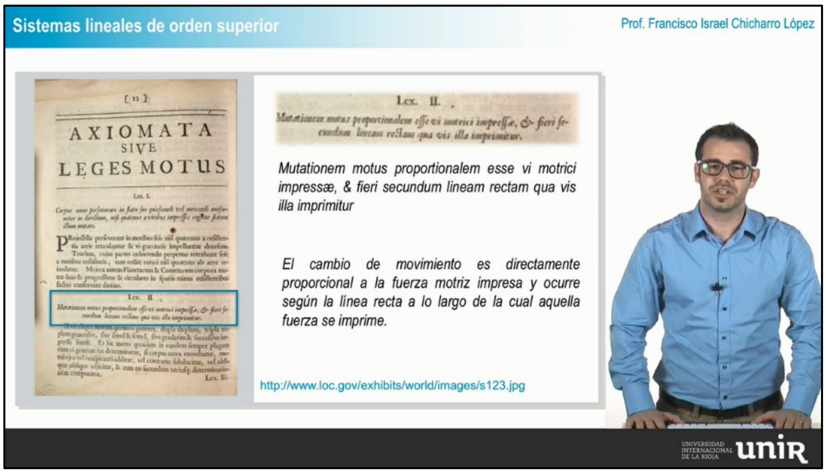
Navas, J. (2009). *Modelos matemáticos en biología*. http://matema.ujaen.es/jnavas/web_modelos/

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

Segunda ley de Newton

En esta lección magistral analizaremos en profundidad la segunda ley de Newton, relacionándola con los sistemas dinámicos vistos en este tema y los diferentes tipos de fuerzas externas aplicadas.

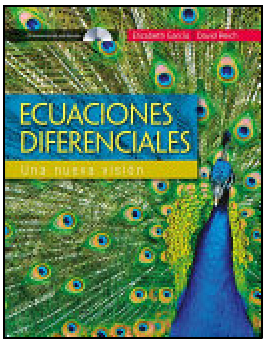


Accede al vídeo desde el aula virtual

No dejes de leer...

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

García, A. E. y Reich, D. (2015). *Ecuaciones diferenciales: una nueva visión*. Patria.

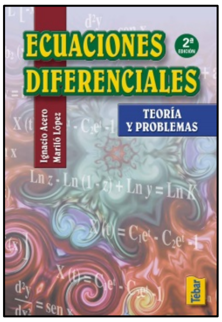


En las páginas 158-195 del libro se presentan los sistemas de ecuaciones diferenciales, reparando en más aspectos teóricos que a lo largo de este tema. También se puede encontrar al final del tema un listado de actividades para asentar los conocimientos.

Accede al libro a través de la Biblioteca Virtual de UNIR.

Sistemas lineales homogéneos

López, M. y Acero, I. (2009). *Ecuaciones diferenciales: teoría y problemas*. Ediciones Tébar Flores.



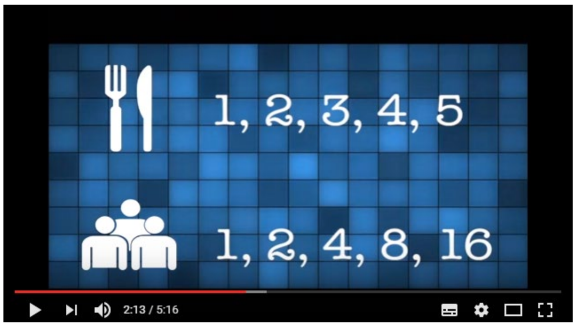
En las páginas 148-151 se explica de forma teórica los sistemas de ecuaciones diferenciales sobre los que se ha trabajado en el tema. El resto del tema trata sobre el resto de sistemas de n ecuaciones diferenciales, también interesante para ampliar conocimientos.

Accede al libro a través de la Biblioteca Virtual de UNIR.

No dejes de ver…

Cara a cara con Rosalía: teoría malthusiana

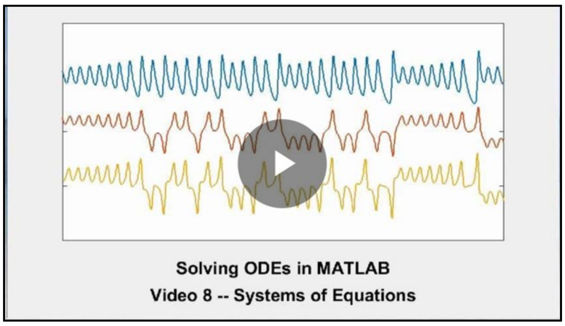
La teoría malthusiana pronosticó que la población aumentaría con más rapidez que el suministro de comida, por lo que se entraría en el fenómeno de superpoblación.



Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://www.youtube.com/watch?v=abAAG96wFqc

Sistemas de ecuaciones diferenciales de orden uno con MATLAB®

En este vídeo se muestra cómo reescribir una ecuación diferencial ordinaria con derivadas de orden mayor que uno, en un sistema de ecuaciones de primer orden. Se utiliza la función ODE de MATLAB® para resolver dicho sistema. Se muestran los resultados obtenidos para el ejemplo del oscilador armónico y el oscilador no lineal de Van der Pol.



Accede al vídeo a través de la siguiente dirección web:
https://es.mathworks.com/support/search.html/videos/solving-odes-in-matlab-8-systems-of-equations-117652.html?fq=asset_type_name:video%20category:matlab/ordinary-differential-equations&page=1

No dejes de practicar…

Ejercicios recomendados

A continuación encontrarás una serie de ejercicios para practicar los conceptos estudiados en el tema.

Ejercicio 1 | Para cada uno de los sistemas $X' = AX$, obtén los valores y los vectores propios, obtén la matriz T que pone a A en forma canónica y encuentra la solución de los sistemas $X' = AX$ e $Y' = (T^{-1}AT)Y$.

» $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
» $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
» $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
» $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 2 | Encuentra la solución general de los siguientes osciladores armónicos:

» $x'' + x' + x = 0$
» $x'' - 3x' + x = 0$

Ejercicio 3 | Determina todas las matrices 2x2 que tienen como valores propios valores que son imaginarios puros (parte real nula).

Accede a las soluciones a través del aula virtual.

+ Información

Bibliografía

Anishchenko, V. S., Vadisova, T. E. y Strelkova, G. I. (2014). *Deterministic nonlinear systems. A short course*. Springer.

Izquierdo, J. y Torregrosa, J. R. (1997). *Álgebra y ecuaciones diferenciales*. Universidad Politécnica de Valencia.

Glosario

Centro. Trayectorias concéntricas de las soluciones.

Espiral. Trayectorias de las soluciones, estables o inestables, que tienen este tipo de forma.

Fuente. Posición asociada a soluciones inestables.

Nodo. Punto en el que confluyen trayectorias de las soluciones, que pueden ser fuente o sumidero.

Punto de silla. Punto que dependiendo de la trayectoria de origen puede ser estable o inestable.

Sumidero. Posición asociada a soluciones estables.

Recursos externos

Wolfram Alpha

Esta herramienta gratuita de Wolfram Research es básicamente un buscador avanzado.

Introduciéndole un sistema de ecuaciones diferenciales, en formato $x' = f(x,y), y' = g(x,y)$, detecta de qué tipo es y presenta su solución analítica. Para los usuarios PRO permite, entre otras capacidades, ver la resolución paso a paso del problema.

Accede a la página desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
www.wolframalpha.com

Test

1. La potencia k de una matriz A, siendo D la matriz diagonal de valores propios y V la matriz de vectores propios se puede obtener como:

A. $A^k = V^{-1}D^kV$.

B. $A^k = VD^kV^{-1}$.

C. $A^k = D^kVD^{-k}$.

D. $A^k = D^{-k}VD^k$.

2. Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $X' = AX$,:

A. Si $\det(A) = 1$, existe un punto de equilibrio.

B. Si $det(A) = 0$, no existen puntos de equilibrio.

C. Si $\det(A) \neq 1$, existe más de un punto de equilibrio.

D. Si $\det(A) \neq 0$, existe un punto de equilibrio.

3. Sea el sistema de ecuaciones diferenciales: $X' = AX$. Si $\lambda_1 = -1$ son los valores propios los valores propios y $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, respectivamente, la solución puede ser:

A. $X(t) = e^t\vec{v}_1$.

B. $X(t) = 2e^{-t}\vec{v}_1$.

C. $X(t) = e^{-t}\vec{v}_1 - e^t\vec{v}_2$.

D. $X(t) = e^{-t}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$.

4. Sea el sistema de ecuaciones diferenciales: $X' = AX, A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. La solución puede ser:

A. $X(t) = e^t\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$.

B. $X(t) = 2e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2t \end{bmatrix}$.

C. $X(t) = e^t\begin{bmatrix} 1+2t \\ 2 \end{bmatrix}$.

D. Ninguna de las anteriores es correcta.

5. Sea el sistema de ecuaciones diferenciales $X' = AX$. Si $\lambda_1 = \lambda_2^* = \pm i$ y son los valores propios y $\vec{v}_1 = [1 \quad i]'$, la solución puede ser:

A. $X(t) = \begin{bmatrix} 2\cos 2t \\ 2\sin 2t \end{bmatrix}$.

B. $X(t) = \begin{bmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{bmatrix}$.

C. $X(t) = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix}$.

D. $X(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$.

6. Sea la ecuación diferencial $x'' + px' + qx = 0$. Para transformarla en un sistema de ecuaciones diferenciales, el cambio de variable que hay que realizar es:

A. $p = qx$.

B. $y' = x$.

C. $x' = y$.

D. Ninguna de las anteriores.

7. El campo de direcciones:

A. Representa la tangente a la trayectoria de una de las soluciones.

B. Se obtiene multiplicando la matriz del sistema por el punto en el que se quiere calcular la pendiente.

C. Representa las soluciones del sistema.

D. Ninguna de las anteriores es correcta.

8. El plano de fase:

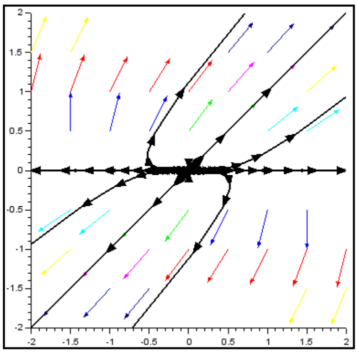
A. Representa un conjunto de soluciones.

B. Representa un conjunto de órbitas.

C. Representa un conjunto de campos de direcciones.

D. Representa un conjunto de puntos inestables.

9. El plano de fase de la figura se corresponde con la matriz:



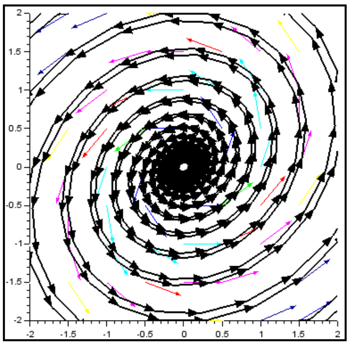
A. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

B. $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$.

C. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

D. $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$.

10. El plano de fase de la figura se corresponde con la matriz:



A. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

B. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

C. $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$.

D. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

