Tema 6. Series de Fourier

Procesamiento de Señales, Sonido e Imágenes Digitales

Carlos Quemada Mayoral

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

La Universidad en Internet

13/01/2021

Índice

6.1. La respuesta en frecuencia

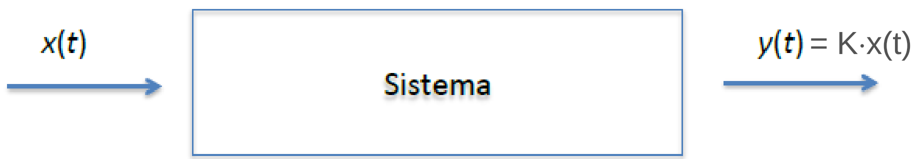
- **Transformada de Fourier en t continuo X(w)**. Operación matemática que permite conocer la información frecuencial de una señal dada en el dominio del tiempo.

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \qquad X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(w)e^{j\omega t}dw \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi f t}df$$

6.1. La respuesta en frecuencia

- **Autofunción de un sistema LTI**: señal para la cuál, ante dicha señal como entrada, la respuesta del sistema es la misma señal multiplicada por una constante K, denominada autovalor.



- Para sistemas LTI de tiempo continuo las exponenciales complejas $x(t) = e^{jwt}$ son autofunciones del sistema.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{jw(t-\tau)}d\tau = e^{jwt}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-jw\tau}d\tau = \underbrace{H(jw)}e^{jwt}$$

Sistemas LTI **$x(t) = e^{jwt}$** **Cte compleja que solo depende de w y no de t**

- **Respuesta en frecuencia H(jw)**: transformada de Fourier de la respuesta al impulso h(t) evaluada en la frecuencia de la sinusoide w. Es una función que nos dice cómo cambia la magnitud y la fase de la señal sinusoidal con frecuencia angular w cuando pasa por un sistema LTI. Al tratarse de un sistema LTI H(jw) no cambia de frecuencia de entrada ni genera nuevas.

6.1. La respuesta en frecuencia

- **Ventaja de usar H(jw) en lugar de h(t)**: a la hora de calcular y(t), las convoluciones se transforman en productos. Ejemplo:

$$x(t) = c_1 e^{jw_1 t} + c_2 e^{jw_2 t} + c_3 e^{jw_3 t} \xrightarrow{\text{LTI}} y(t) = \left[c_1 e^{jw_1 t} + c_2 e^{jw_2 t} + c_3 e^{jw_3 t}\right] * h(t)$$

$$= c_1 e^{jw_1 t} * h(t) + c_2 e^{jw_2 t} * h(t) + c_3 e^{jw_3 t} * h(t)$$

- Pero si conocemos la respuesta en frecuencia de cada sinusoide:

$$c_1 e^{jw_1 t} \rightarrow c_1 H(jw_1) e^{jw_1 t}$$

$$c_2 e^{jw_2 t} \rightarrow c_2 H(jw_2) e^{jw_2 t}$$

$$c_3 e^{jw_3 t} \rightarrow c_3 H(jw_3) e^{jw_3 t}$$

- Aplicando la propiedad de superposición:

$$y(t) = c_1 H(jw_1) e^{jw_1 t} + c_2 H(jw_2) e^{jw_2 t} + c_3 H(jw_3) e^{jw_3 t}$$

¡Simplificación!

6.2. Series de Fourier de señales periódicas

- Fourier descubrió que cualquier señal periódica x(t) se puede escribir como una combinación lineal de sinusoidales armónicamente relacionadas. Las condiciones **suficientes** para que una función periódica x(t) pueda escribirse como una serie de Fourier se conocen como **condiciones de Dirichlet**:
  - **Integral absolutamente limitada** ⇔ x(t) debe de ser integrable sobre un periodo T.

$$\int_T |x(t)|dt < \infty$$

  - **Oscilación limitada.** x(t) debe tener un número finito de máximos y mínimos en su periodo T.
  - **Discontinuidades limitadas.** x(t) debe tener un número finito de discontinuidades en su periodo T.
- Si se cumplen las condiciones de Dirichlet, x(t) de periodo T puede ponerse de la forma:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jmw_0 t}$$

cm: coeficientes complejos de la FS
w_0 = 2π/T: frecuencia angular de la señal periódica
f_0 = 1/T : frecuencia cíclica de la señal periódica
m = 0: componente de continua (DC)
Resto: componentes armónicas (AC)
T: periodo de la señal periódica

6.3. Serie de Fourier exponencial

- El cálculo de los coeficientes de la serie se lleva a cabo por medio de la ecuación de análisis:

$$c_m = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jmw_0 t}dt$$

- Una vez calculados los coeficientes se calcula x(t) usando la ecuación:

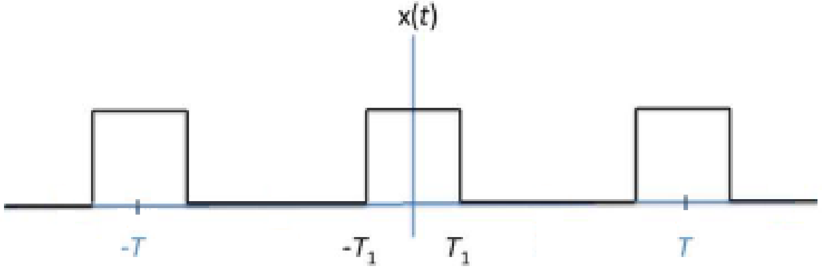
$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jmw_0 t}$$

- Las condiciones de Dirichlet son condiciones suficientes pero no necesarias. Es decir, pueden existir señales que tienen FS y no cumplen las condiciones de Dirichlet.

6.3. Serie de Fourier exponencial

- **Ejemplo**. Cálculo de los coeficientes de la onda cuadrada.

$$c_m = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jmw_0 t}\,dt$$



$$c_m = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jmw_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jmw_0 t}\,dt = \frac{-1}{jmTw_0}\,e^{-jmw_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{sen(mw_0T_1)}{m\pi} \qquad m \neq 0$$

$W_0 = 2\pi/T$

- Si m = 0, indeterminación ⇒ se calcula haciendo m = 0 en la definición de c_m

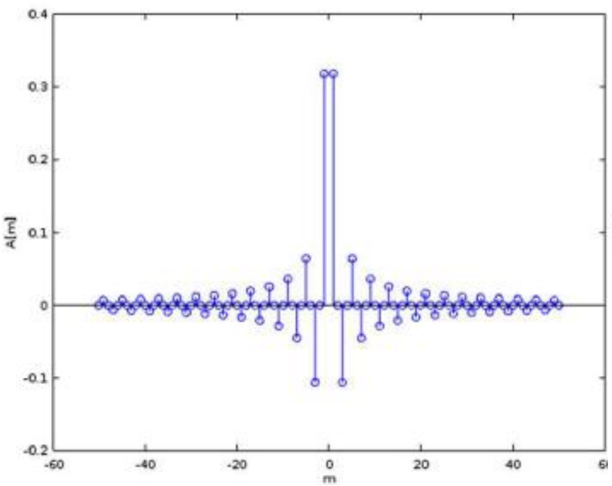
$$c_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} 1\,dt = \frac{2T_1}{T}$$

- A la función sen(πu)/πu se le conoce como sinc(u) ⇒ $c_m = \frac{2T_1}{T}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{2mT_1}{T}\right)$

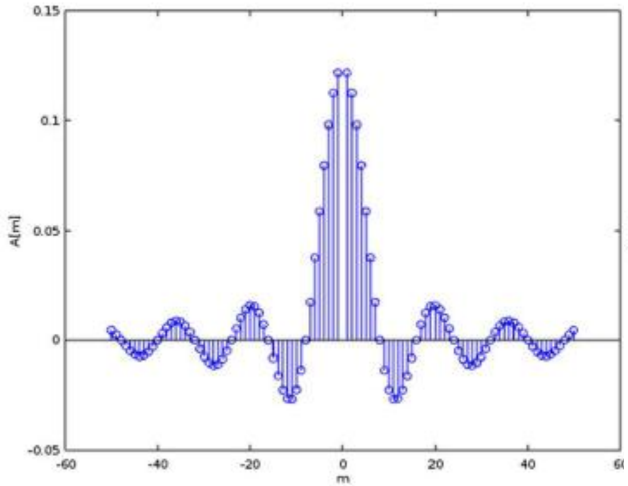
$W_0 = 2\pi/T$ $\qquad m \neq 0$

6.3. Serie de Fourier exponencial

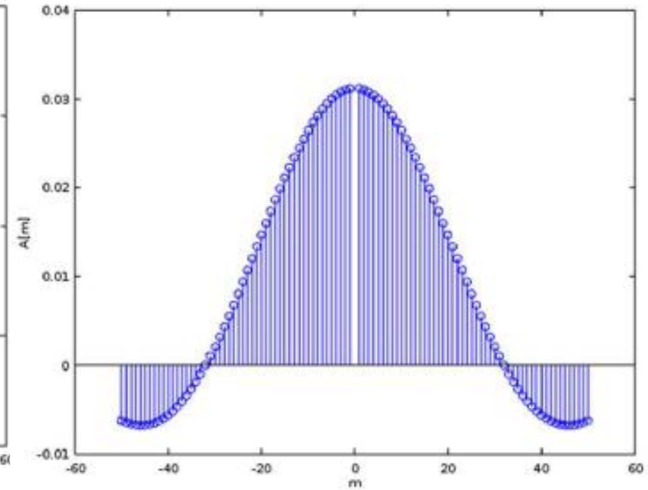
- **Coeficientes para distintas relaciones entre T y T_1.**



Coeficientes con $T=4T_1$



Coeficientes con $T=16T_1$



Coeficientes con $T=64T_1$

Pasos por cero ⇒ cuando m = (nT)/(2T_1)   n = 1, 2, 3, …

6.4. Cálculo de los coeficientes con Octave/Matlab

- Se define m $\Rightarrow$ m = [-50:50];
- Se define el periodo de la señal periódica $\Rightarrow$ T=2*pi;
- Se define la frecuencia angular $\Rightarrow$ w0=2*pi/T;
- Se define T_1 $\Rightarrow$ T1=T/4;
- Se calculan los coeficientes $\Rightarrow$ C = sin(m*w0*T1)./(m*pi);
- Se dibujan en forma discreta los coeficientes $\Rightarrow$ stem(m,C);
- Se etiquetan los ejes $\Rightarrow$ xlabel('m'); ylabel('C[m]');

6.5. Series de Fourier trigonométricas

- **Formas de representación de las series de Fourier**. Exponencial compleja (ya vista), seno-coseno y amplitud-fase. Se va a presentar las dos últimas.
- **Representación seno-coseno**. cualquier señal periódica **real** x(t) se puede escribir como una combinación lineal de senos y cosenos si obviamente se cumplen las condiciones de Dirichlet.

$$x(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(mw_0 t) + b_m \sin(mw_0 t)$$

Ecuación de síntesis seno-coseno

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_T x(t)\,dt \\ a_m = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_T x(t)\cos mw_0 t\,dt \\ b_m = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_T x(t)\sin mw_0 t\,dt \end{cases}$$

Ecuaciones de análisis seno-coseno

- Relación entre coeficientes de la representación exponencial y seno-coseno

$$\begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_m = \dfrac{(a_m - jb_m)}{2} \\ c_{-m} = c^* = \dfrac{(a_m + jb_m)}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_m = c_m + c_{-m} \\ b_m = j(c_m - c_{-m}) \end{cases}$$

6.5. Series de Fourier trigonométricas

- **Ejemplo**. Coeficientes seno-coseno del ejemplo anterior. Aplicando las relaciones entre coeficientes de la diapositiva anterior:

$$a_0 = c_0 = \frac{2T_1}{T}$$

$$a_m = c_m + c_{-m} = \frac{\sin m w_0 T_1}{m\pi} + \frac{\sin m w_0 T_1}{m\pi} = \frac{2 \sin m w_0 T_1}{m\pi} \qquad m \neq 0$$

$$b_m = j(c_m - c_{-m}) = j\left(\frac{\sin m w_0 T_1}{m\pi} - \frac{\sin m w_0 T_1}{m\pi}\right) = 0 \qquad m \neq 0$$

- b_m es cero porque x(t) es par. Ahora x(t) puede escribirse:

$$x(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m w_0 t$$

6.5. Series de Fourier trigonométricas

- **Representación amplitud-fase (x(t) real)**.

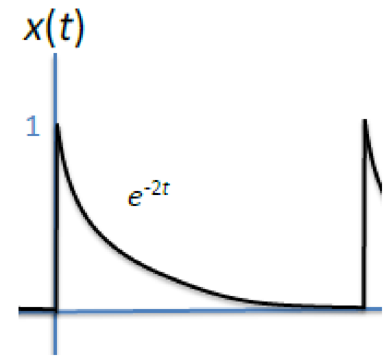
$$x(t) = c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(m w_0 t + \phi_m)$$

Ecuación de síntesis seno-coseno

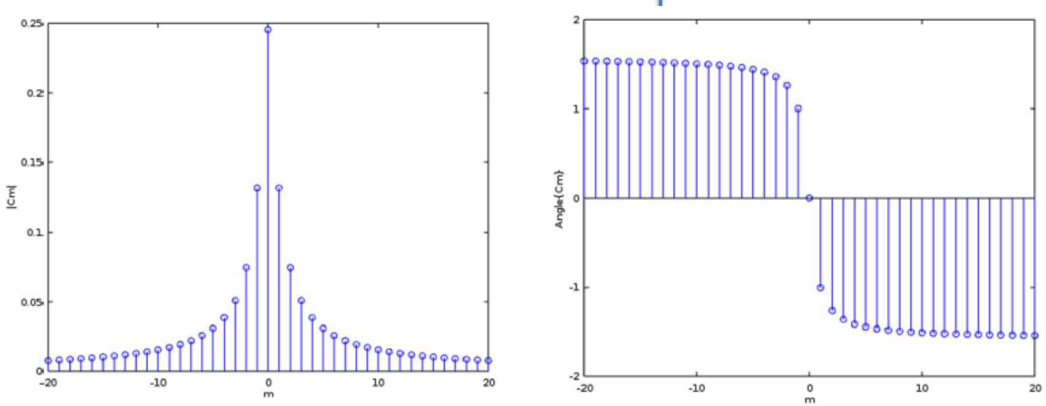
$$\begin{cases} A_m = 2\,|c_m| = \sqrt{a_m^2 + b_m^2} \\ \phi_m = \angle c_m = -\arctan\left(\dfrac{b_m}{a_m}\right) \end{cases}$$

Ecuaciones de análisis seno-coseno

- **Ejemplo**. Calcular los coeficientes amplitud-fase de $\Rightarrow$



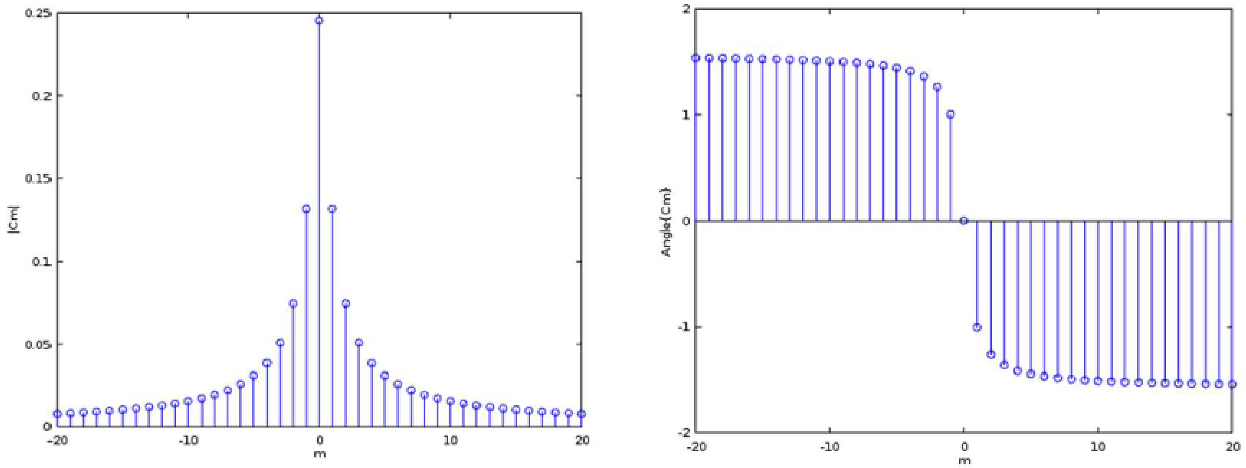
- Se calcula primero $c_m \Rightarrow$ $c_m = \dfrac{1 - e^{-4}}{4 + jm2\pi}$ **m = 0, 1, 2, 3,…**
- $A_m \Rightarrow$ $A_m = \dfrac{(1 - e^{-4})}{\sqrt{4 + (m\pi)^2}}$
- $\phi_m \Rightarrow$ $\phi_m = -arctan\dfrac{m\pi}{2}$



(a) $|c_m|$ (b) $\angle c_m$

6.5. Series de Fourier trigonométricas

- **Representación amplitud-fase con Octave/Matlab**.
- m = [-20:20];
- Cm = (1-exp(-4))./(4.+j*2*pi.*m);
- Se pinta la amplitud ⇒ subplot(1,2,1), stem(m,abs(Cm));
- xlabel('m');
- ylabel('|Cm|');
- Se pinta la fase ⇒ subplot(1,2,2), stem(m,angle(Cm));
- xlabel('m');
- ylabel('Angle\{Cm\}');



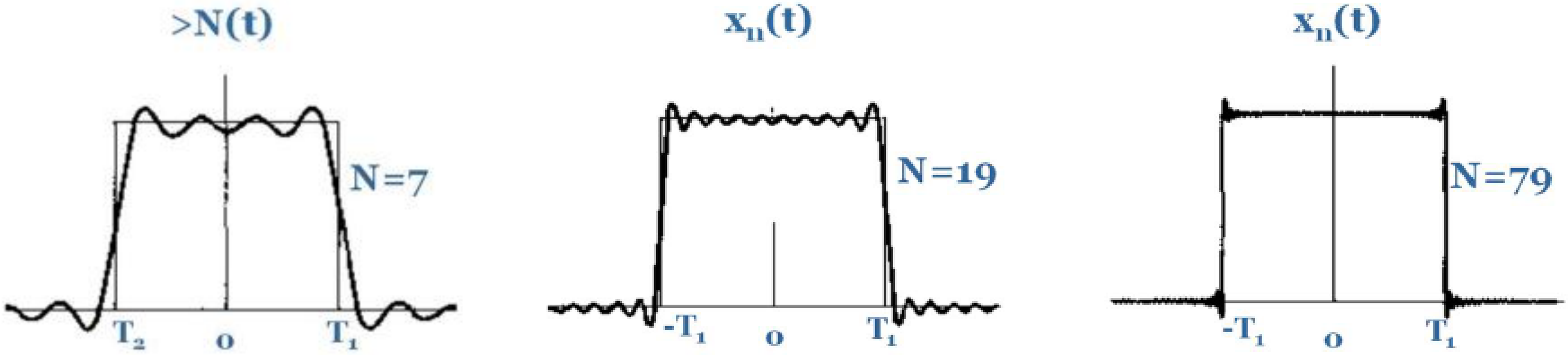
(a) $|c_m|$ (b) $\angle c_m$

6.6. Fenómeno de Gibbs

- Cuando la función que se está desarrollando en serie de Fourier tiene discontinuidades, no es posible que haya una buena convergencia en los entornos de las mismas.

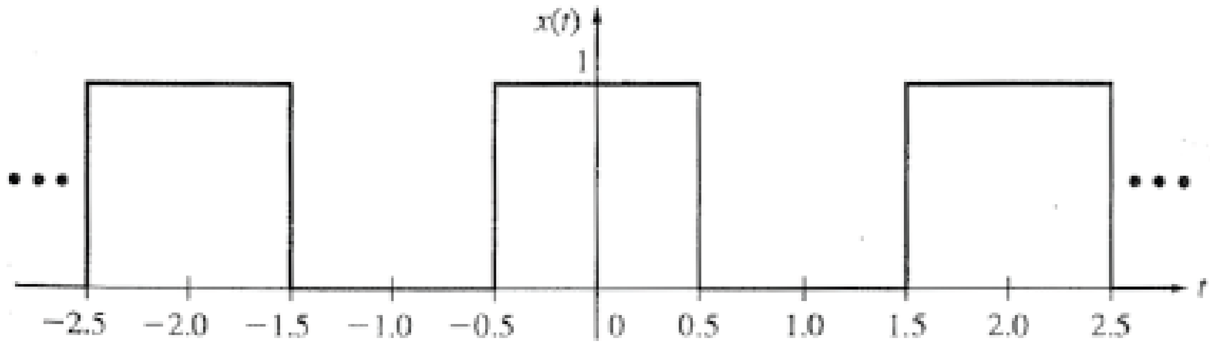
- En tales entornos, la serie muestra sobrevalores y subvalores alrededor del valor real de la función.

- A medida que se adhieren más términos a la serie, ésta se va aproximando mejor a la señal original, pero los picos no disminuyen. Estos picos nunca desaparecen y son llamados fenómeno de Gibbs por el físico estadounidense Josiah Willard Gibbs.



Ejercicio 1

- Calcular la serie de Fourier trigonométrica de la siguiente señal:



Ejercicio 1

- Calcular la serie de Fourier trigonométrica de la siguiente señal:

- Calculamos primero $\mathbf{a_0}$.

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-0.5}^{0.5} 1\,dt = 0.5$$

- Calculamos $\mathbf{a_m}$.

$$a_m = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos(mw_0t)\,dt = \int_{-0.5}^{0.5}\cos(m\pi t)\,dt = \frac{1}{m\pi}\sin(m\pi t)\Big|_{-0.5}^{0.5}$$
$$= \frac{1}{m\pi}\left[\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{-m\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{m\pi}\left[2\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right]$$

- Calculamos $\mathbf{b_m}$.

$$b_m = \frac{2}{T}\int_T x(t)\sin(mw_0t)\,dt = \int_{-0.5}^{0.5}\sin(m\pi t)\,dt = \frac{-1}{m\pi}\cos(m\pi t)\Big|_{-0.5}^{0.5}$$
$$= \frac{-1}{m\pi}\left[\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{-m\pi}{2}\right)\right] = \frac{-1}{m\pi}\left[\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right] = 0$$

Ecuaciones de análisis seno-coseno

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt$$

$$a_m = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos(mw_0t)\,dt$$

$$b_m = \frac{2}{T}\int_T x(t)\sin(mw_0t)\,dt$$

cualquier señal periódica real

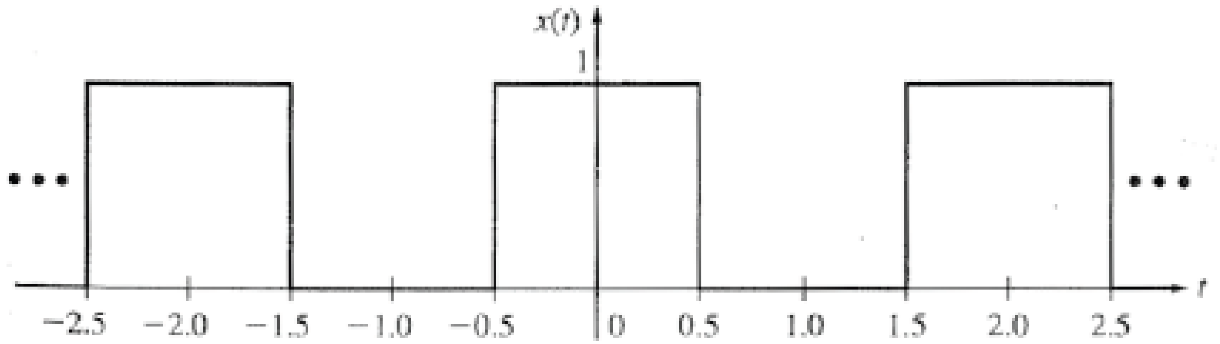
Ejercicio 1

- Calcular la serie de Fourier trigonométrica de la siguiente señal:
- Ya podemos expresar x(t) de la forma

$$x(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(mw_0 t) + b_m \sin(mw_0 t) \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right] \cos(mw_0 t)$$

Ejercicio 2

- Usar las propiedades de simetría para calcular los coeficientes de la señal:



Ejercicio 2

- Usar las propiedades de simetría para calcular los coeficientes de la señal:

- Al ser una señal real, puede ponerse como suma de senos y cosenos tal y como hemos visto en el ejercicio anterior (en vez de exponenciales complejas).

- Al ser par, los coeficientes b_m son cero.

- Y los a_m se calculan como:

$$a_m = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x(t)\cos(mw_0 t)\,dt = \frac{4}{2}\int_0^{1} x(t)\cos(m\pi t)\,dt = 2\int_0^{0.5} \cos(m\pi t)\,dt$$

$$= \frac{2}{m\pi}\sin(m\pi t)\Big|_0^{0.5} = \frac{2}{m\pi}\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)$$

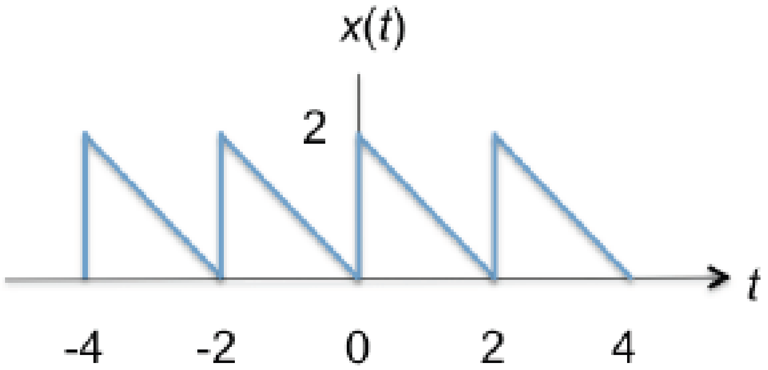
$$a_m = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos(mw_0 t)\,dt$$

- Como x(t) es par y el coseno también, su producto dará otra señal par y por tanto será suficiente con integrar entre cero y T/2 multiplicando todo por 2.

- Con a_0 pasa lo mismo.

Ejercicio 3

- Calcular la representación amplitud-fase de la siguiente señal:



$$x(t) = 2 - t \quad \text{para} \quad 0 \leq t < 2$$

Ejercicio 3

- Calcular la representación amplitud-fase de la siguiente señal:

Ecuación de síntesis amplitud-fase

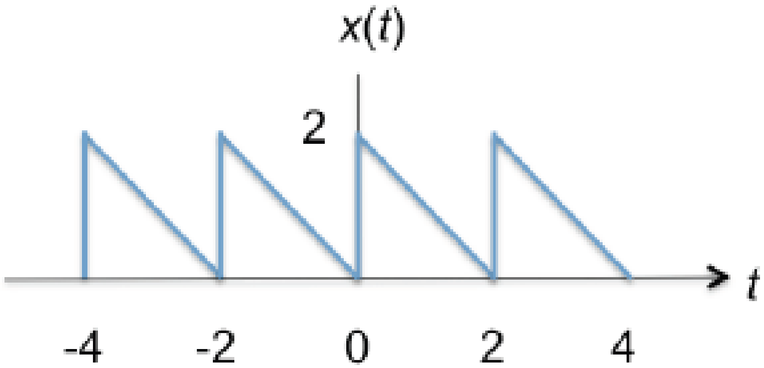
$$x(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(m w_0 t + \phi_m)$$

$$\begin{cases} A_m = 2\,|c_m| = \sqrt{a_m^2 + b_m^2} \\ \phi_m = \angle c_m = \text{-}\arctan\left(\dfrac{b_m}{a_m}\right) \end{cases}$$

Ejercicio 3

- Calcular la representación amplitud-fase de la siguiente señal:
- Calculamos a_0:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^2 (2-t)\,dt = t - \frac{t^2}{4}\Big|_0^2 = (2-1) - (0-0) = 1$$



$$x(t) = 2 - t \quad \text{para} \quad 0 \leq t < 2$$

Ejercicio 3

- Calcular la representación amplitud-fase de la siguiente señal:

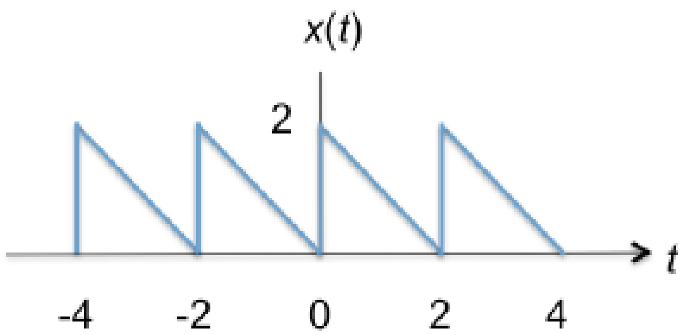
- Calculamos a_m:

$$a_m = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos(mw_0 t)\,dt = \int_0^2 (2-t)\cos(m\pi t)\,dt = 2\int_0^2 \cos(m\pi t)\,dt - \int_0^2 t\cos(m\pi t)\,dt$$

$$\text{(a)}\quad \int_0^2 \cos(m\pi t)\,dt = \left.\frac{\sin(\pi m t)}{\pi m}\right|_0^2 = \frac{\sin(2\pi m)}{\pi m} - \frac{\sin(0)}{\pi m} = 0 - 0 = 0$$

$$\text{(b)}\quad \int_0^2 t\cos(m\pi t)\,dt = \left.\frac{\cos(m\pi t) + m\pi t\sin(m\pi t)}{m^2\pi^2}\right|_0^2 = \frac{\cos(2\pi m) + 2\pi m\sin(2\pi m)}{m^2\pi^2} - \frac{\cos(0) + 0\sin(0)}{m^2\pi^2}$$

$$= \frac{1}{m^2\pi^2} - \frac{1}{m^2\pi^2} = 0$$



$$x(t) = 2 - t \quad \text{para} \quad 0 \le t < 2$$

Ejercicio 3

- Calcular la representación amplitud-fase de la siguiente señal:

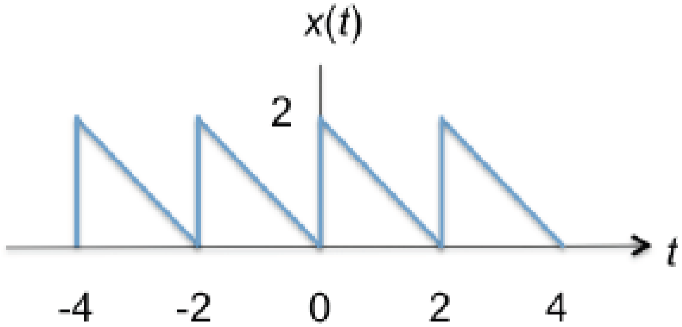
- Calculamos b_m:

$$b_m = \frac{2}{T}\int_T x(t)\sin(mw_0 t)\,dt = \int_0^2 (2-t)\sin(m\pi t)\,dt = 2\int_0^2 \sin(m\pi t)\,dt - \int_0^2 t\sin(m\pi t)\,dt$$

$$\text{(a)} \int_0^2 \sin(m\pi t)\,dt = \left.\frac{-\cos(\pi m t)}{\pi m}\right|_0^2 = \frac{-\cos(2\pi m)}{\pi m} - \frac{-\cos(0)}{\pi m} = \frac{-1}{\pi m} + \frac{1}{\pi m} = 0$$

$$\text{(b)} \int_0^2 t\sin(m\pi t)\,dt = \left.\frac{\sin(m\pi t) - m\pi t\cos(m\pi t)}{m^2\pi^2}\right|_0^2 = \frac{\sin(2\pi m) - 2\pi m\cos(2\pi m)}{m^2\pi^2} - \frac{\sin(0) - 0\cos(0)}{m^2\pi^2}$$

$$= \frac{-2\pi m}{m^2\pi^2} = \frac{-2}{m\pi} \Rightarrow b_m = 0 - \frac{-2}{m\pi} = \frac{2}{m\pi}$$



$$x(t) = 2 - t \quad \text{para} \quad 0 \le t < 2$$

Ejercicio 3

- Calcular la representación amplitud-fase de la siguiente señal:
- Expresamos x(t) en representación amplitud-fase:

$$x(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [a_m \cos(m w_0 t) + b_m \sin(m w_0 t)] = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2}{m\pi} \sin(m\pi t)\right]$$

$W_0 = \pi$

Ejercicio 4

- Calcular la amplitud y fase de los coeficientes de la FS exponencial de la siguiente señal:

$$x(t) = 3\cos(t) + \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(8t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Ejercicio 4

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jmw_0 t}$$

- Calcular la amplitud y fase de los coeficientes de la FS exponencial de la siguiente señal:
- En vez de usar la ecuación de análisis de c_m, usamos la relación de Euler para expresar los cosenos como exponenciales.
- Analizando los tres cosenos, se calcula que el periodo de x(t) es 2π.
- Por tanto $e^{jm2\pi ft} = e^{jmt}$

$$x(t) = 3\cos(t) + \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(8t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x(t) = \frac{3}{2}\left(e^{jt} + e^{-jt}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{j(4t+\pi/3)} + e^{-j(4t+\pi/3)}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{j(8t+\pi/2)} + e^{-j(8t+\pi/2)}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(e^{jt} + e^{-jt}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{j4t}e^{j\pi/3} + e^{-j4t}e^{-j\pi/3}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{j8t}e^{j\pi/2} + e^{-j8t}e^{-j\pi/2}\right)$$

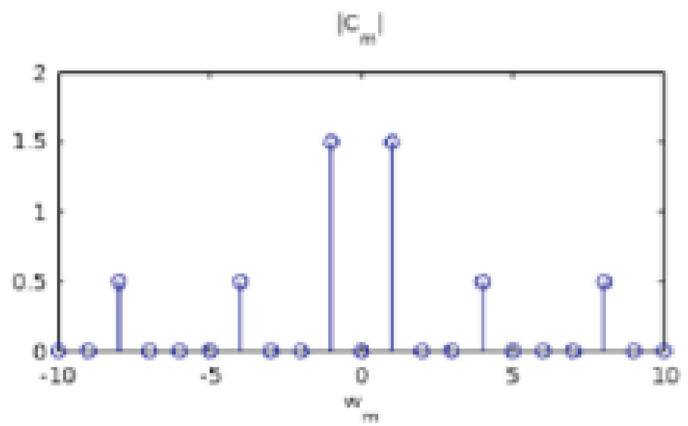
- $c_1 = 3/2$, $c_{-1} = 3/2$, $c_4 = 1/2\ e^{j\pi/3}$, $c_{-4} = 1/2\ e^{-j\pi/3}$, $c_8 = 1/2\ e^{j\pi/2}$, $c_{-8} = 1/2\ e^{-j\pi/2}$

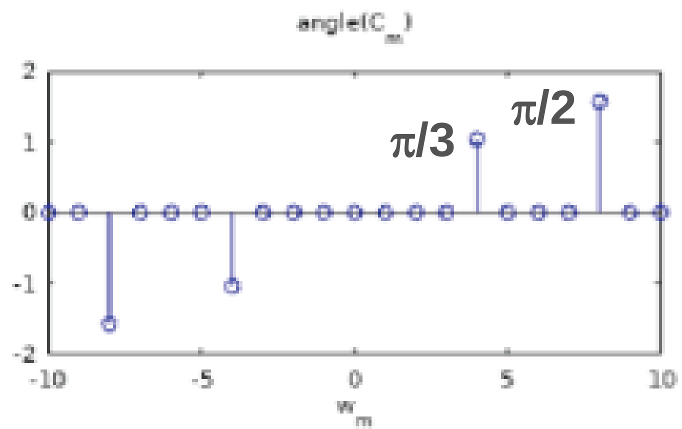
Ejercicio 4

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jmw_0 t}$$

- Calcular la amplitud y fase de los coeficientes de la FS exponencial de la siguiente señal:

- $c_1 = 3/2$, $c_{-1} = 3/2$, $c_4 = 1/2\ e^{j\pi/3}$, $c_{-4} = 1/2\ e^{-j\pi/3}$, $c_8 = 1/2\ e^{j\pi/2}$, $c_{-8} = 1/2\ e^{-j\pi/2}$





Ejercicios adicionales

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicios 3.1, 3.3, 3.4**

Ejercicios adicionales

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicio 3.3.** Para la señal periódica continua, calcular el periodo y los coeficientes de la serie compleja.

$$x(t) = 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{3}t\right) \qquad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Ejercicios adicionales

- **Ejercicio 3.3.**

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

- El periodo del coseno es 3, se repite en 3, 6, 9,…
- El periodo del seno es 6/5, se repite en 6/5, 12/5, 18/5, 24/5, 30/5,…
- Por tanto, el periodo de x(t) es 6
- Desarrollando x(t) mediante Euler:

$$x(t) = 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{3}t\right)$$

$$x(t) = 2 + \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{3}t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{3}t} - 2je^{j\frac{5\pi}{3}t} + 2je^{-j\frac{5\pi}{3}t}$$

- $e^{jm2\pi ft} = e^{jm2\pi t/6} = e^{jm\pi t/3}$
- $c_0 = 2$, $c_2 = 1/2$, $c_{-2} = 1/2$, $c_5 = -2j$, $c_{-5} = 2j$

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

unir

www.unir.net