Corrección Laboratorio 1

Geometría diferencial aplicada

February 2021

Se pide:
Parametrizar y representar con Mathematica (Matlab) las siguientes superficies:

1. Dada la curva $y = \cos^2(x)$, parametrizar la superficie que resulta al girar la curva alrededor del eje x. Hacer lo mismo, pero girándola alrededor del eje y. Demostrar en cada caso que es una parametrización.

   Dada la expresión $y = \cos^2(x)$, podemos escribir una parametrización de la curva definida implícitamente en el espacio

   $$\begin{aligned} \alpha : & I \mapsto \mathbb{R}^3, \\ & u \mapsto (u, \cos^2 u, 0). \end{aligned}$$

   Donde I es un intervalo a determinar. Observamos que $g(x) = \cos^2(x)$ es una función π-periódica. El intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ es minimal, es decir, que podemos reconstruir toda la función a partir de la restricción de la misma en ese intervalo. A la hora de parametrizar la superficie, nos vamos encontrar con dos inconvenientes: En primer lugar, los puntos de la traza de α que estén contenidos en el eje de rotación, son invariantes bajo el efecto de la misma y eso generará problemas con la inyectividad de la parametrización. Por otro lado, tenemos que asegurarnos de unptener una parametrización regular de la curva. Vamos a comprovar qué puntos hay que quitar al invervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ para tener una parametrización regular:

   a) La diferenciabilidad de la curva se desprende de la derivabilidad de cada una de las funciones que la componen.

   b) La inyectividad es la parametrización es trivial: En efecto, sean u_1 y u_2 tal que $\alpha(u_1) = \alpha_2(u_2)$, esto es $(u_1, \cos^2 u_1, 0) = (u_2, \cos^2 u_2, 0)$. En particular $u_1 = u_2$.

   c) Vamos a comprobar la suprayectividad: Supongamos que $(x, y, z) \in \alpha(I)$ (necesariamente $z = 0$). Queremos encontrar u, tal que $\cos^2(u)) = y$. Despejando, obtenemos $u = \text{acos}\sqrt{y}$. Esta función está definida para $0 < y < 1$ y es problematica (no es derivable) en $y = 0$. Claramente $0 \leq y = \cos^2(x) \leq 1$ y, de hecho, el valor $y = 1$ se alcanza para $x = 0$. Esto implica que, para asegurar la supayectividad, hay que eliminar el valor $u = 0$ del intervalo de definición. Esto, además, nos elimina la intersección de la curva con el eje OY. Para asegurar la diferenciabilidad de la inversa hay que eliminar también los puntos en que $y = 0$ a que la función $\sqrt{y}$ no es derivable en el origen, pero $y > 0$ para los valores de u seleccionados. El invervalo de definición queda determinado por:

$$I = (-\pi/2, \pi/2) \setminus \{0\}.$$

Con estos valores de u, la inversa es diferenciable.

d) Vamos a ver ahora que la derivada no se anula, requerimiento esencial para obtener una parametrización regular. Tenemos:

$$\alpha'(u) = (1, -2\cos u \sin u, 0).$$

Es evidente que la derivada no se anula para ningún valor de u.

Calculamos ahora la rotación con respecto del eje OX (ver Figura 1). Vamos a aplicar la matrix de rotación canónica con respecto del eje a la curva α. Esto es:

$$S_x(\theta, u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \cos^2 u \\ 0 \end{bmatrix},$$

con $\theta \in (0, 2\pi)$ (de momento). Desarrollando la multiplicación, uno obtiene que la parametrización viene dada por la siguiente expresión:

$$S_x(\theta, u) = (u, \cos\theta\cos^2 u, \sin\theta\cos^2 u).$$

Vamos a comprobar las condiciones de parametrización y, si hace falta, modificaremos el intervalo de definición de θ.

a) **Suavidad:** La diferenciabilidad de esta parametrización viene dada por ser composición de funciones derivables.

b) **Inyectividad:** Supongamos que existen (θ_1, u_1) y (θ_2, y_2) tales que $S_x(\theta_1, u_1) = S_x(\theta_2, u_2)$. Esto implica que:

$$u_1 = u_2, \tag{1}$$

$$\cos\theta_1\cos^2 u_1 = \cos\theta_2\cos^2 u_2, \tag{2}$$

$$\sin\theta_1\cos^2 u_1 = \sin\theta_2\cos^2 u_2. \tag{3}$$

La ecuación (1) nos garantiza una de las dos condiciones que queremos comprobar. Recordemos que $\cos^2 u > 0$ para todo $u \in I$, luego podemos dividir las ecuaciones (2) y (3) por $\cos^2 u_1$. Obtenemos

$$\cos\theta_1 = \cos\theta_2,$$
$$\sin\theta_1 = \sin\theta_2.$$

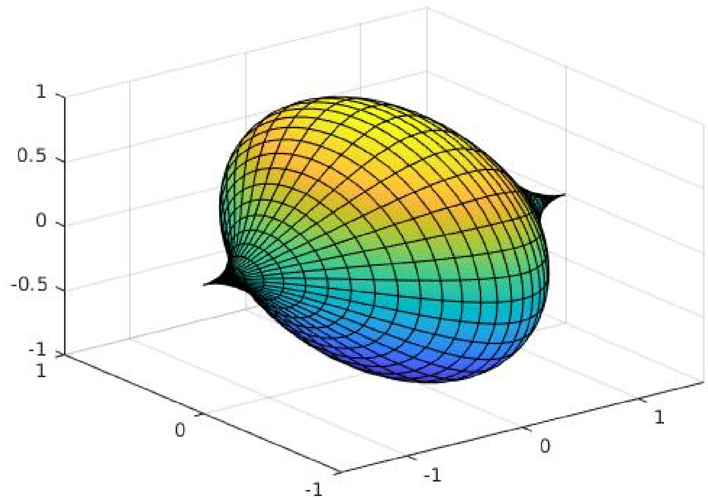

Figura 1: Superficie de revolución obtenida al rotar la curva α alrededor del eje OX.

Esto no puede suceder si $\theta_1 \neq \theta_2$ ya que si $\cos(\theta_1) = \cos(\theta_2)$ entonces necesariamente $\theta_1 < \pi < \theta_2$ (o $\theta_2 < \pi < \theta_1$). Pero si $\theta_1 < \pi$, entonces $\sin\theta_1 > 0$ y si $\theta_2 > \pi$, entonces $\sin\theta_2 < 0$. Lo cual entra en contradicción con $\sin\theta_1 = \sin\theta_2$. Se desprende $\theta_1 = \theta_2$ y la inyectividad de la parametrización.

c) **Supayectividad:** Supongamos que tenemos $(x, y, z) \in S_x$. Buscamos θ y u tales que $u = x$, $\cos\theta\cos^2 u = y$ y $\sin\theta\cos^2 u = z$. Evidentemente, a u no hace falta buscarla. Luego, utilizando otra vez que $\cos^2 u > 0$, podemos dividir la segunda ecuación por la tercera. Obtenemos

$$\theta = \operatorname{acot}\left(\frac{y}{z}\right).$$

Esta expresión será problematica para $z = 0$. Tenemos pues que eliminar del intervalo de definición de θ los valores tales que $\sin\theta = 0$. Eliminamos $\theta = \pi$. Con lo cual, tenemos que $\theta \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$. Con estos valores de θ la inversa es diferenciable.

d) **Jacobiana inyectiva:** Falta ver que la Jacobiana tiene rango 2. Ésta viene dada por:

$$DS_x(\theta, u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2\cos\theta\cos u\sin u & -\sin\theta\cos^2 u \\ -2\sin\theta\cos u\sin u & \cos\theta\cos^2 u \end{bmatrix}.$$

Para ver que esta matriz tiene rango máximo, hay que encontrar un menor distinto de cero. El menor formado por las dos primeras filas nos sirve:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2\cos\theta\cos u\sin u & \sin\theta\cos^2 u. \end{vmatrix} = \sin\theta\cos^2 u.$$

Este determinante es distinto de cero porque ya nos hemos encargado de quitar los valores de θ y u que lo anulan.

Vamos ahora con la parametrización de la rotación con respecto del eje OY (Ver Figura 2. En este caso, vamos a aplicar la matriz canónica de rotación respecto del eje OY. Esto es:

$$S_y(\theta, u) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \cos^2 u \\ 0 \end{bmatrix},$$

con $\theta \in (0, 2\pi)$ (de momento). Desarrollando la multiplicación, uno obtiene que la parametrización viene dada por la siguiente expresión:

$$S_y(\theta, u) = (u\cos\theta, \cos^2 u, -u\sin\theta).$$

Vamos a comprobar que es una parametrización.

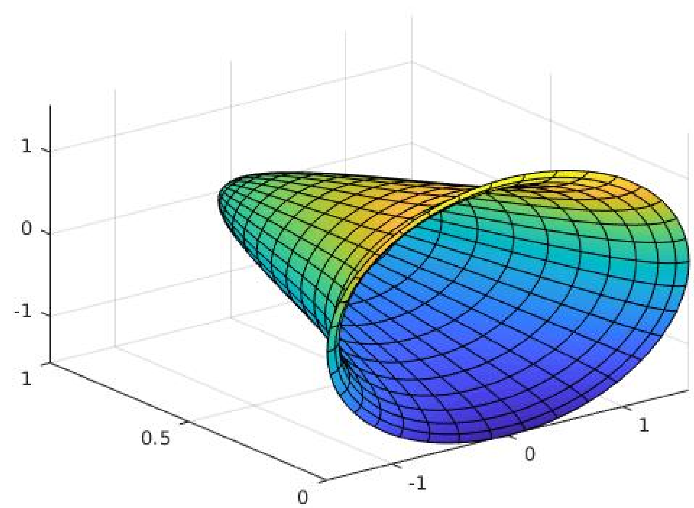

Figura 2: Superficie de revolución obtenida al rotar la curva α alrededor del eje OY.

a) **Suavidad:** La diferenciabilidad de esta parametrización viene dada por ser composición de funciones derivables.

b) **Inyectividad:** Supongamos que existen (θ_1, u_1) y (θ_2, u_2) tales que $S_y(\theta_1, u_1) = S_y(\theta_2, u_2)$. Esto implica que:

$$u_1 \cos\theta_1 = u_2 \cos\theta_2, \tag{4}$$

$$\cos^2 u_1 = \cos^2 u_2, \tag{5}$$

$$u_1 \sin\theta_1 = u_2 \sin\theta_2. \tag{6}$$

Como $\cos^2$ es una función simétrica respecto del eje $\{\pi = u\}$, entonces, de la ecuación (5) se desprende que, o bien $u_1 = u_2$, o $u_1 = \pi - \delta$ y $u_2 = \pi + \delta$ donde δ es una cierta cantidad con $|\delta| < \pi$. Vamos a elevar al cuadrado las ecuaciones (4) y (6) y a sumarlas. Para que esto sea legítimo, quitaremos del intervalo de definicón de θ los valores para los cuales $\sin\theta = 0$ y $\cos\theta = 0$ (esto es $\pi, \pi/2, 3\pi/4$). Después de sumar las nuevas ecuaciones obtenemos:

$$(\pi + \delta)^2 = (\pi - \delta)^2.$$

Para que esta ecuación se cumpla, tiene que pasar $\delta = 0$, con lo cual $u_1 = u_2$. Para concluir con la inyectividad, podemos dividir las ecuaciones (4) y (5) por u_1 (o u_2, son el mismo valor) y aplicar el argumento que hemos utilizado para demostrar la inyectividad de la rotación con respecto del eje OX, para determinar que $\theta_1 = \theta_2$.

c) **Suprayectividad:** Supongamos que tenemos $(x, y, z) \in S_y$. Podemos despejar $u = \pm \operatorname{acos}\sqrt{|y|}$. El signo positivo se elige si $x < \pi$ y el signo negativo se elige si $x > \pi$. Siguiendo un razonamiento similar al apartado anterior, despejamos $\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{z}{x}\right)$. Recalcamos que ya hemos quitado los valores de x y z que comprometen la suavidad de la inversa.

d) **Jacobiana inyectiva:** Falta ver que la Jacobiana tiene rango 2. Ésta viene dada por:

$$DS_y(\theta, u) = \begin{bmatrix} -u\sin\theta & \cos\theta \\ 0 & -2\cos u \sin u \\ -u\cos\theta\sin u & -\sin\theta \end{bmatrix}.$$

Para ver que esta matriz tiene rango máximo, hay que encontrar un menor distinto de cero. El menor formado por la primera y tercera fila nos sirve:

$$\begin{vmatrix} -u\sin\theta & \cos\theta \\ -2\cos\theta & -\sin\theta. \end{vmatrix} = u \neq 0.$$

2. ¿Es posible parametrizarla alrededor del eje z? Justifica tu respuesta.
La respuesta es negativa y hay muchas maneras de demostrarlo. Por ejemplo, si calculamos la fórmula obtenida al rotar la curva alrededor del eje

OZ, obtenemos una superficie conteinda en el plano $x-y$. Tendremos una expresión de la forma:

$$S_z(\theta, u) = (R_2(\theta)\alpha_2(u), 0),$$

donde $R_2(\theta)$ es la matriz de rotación de ángulo θ en el plano $x-y$ y α_2 son las componentes x, y de la curva α. Supongamos $u_1 < u_2$. Vamos a construir θ tal que $S_z(\theta, u_1) = S_z(\theta, u_2)$. Por el Teorema del Valor Medio de Lagrange, existe $u^* \in (u_1, u_2)$ tal que $g(u_1) - g(u_2) = g'(u^*)(u_1 - u2)$. Entonces

$$\begin{aligned} S_z(\theta, u_1) - S_z(\theta, u_2) &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ g(u_1) - g(u_2) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= (u_1 - u_2)\big(\cos\theta - g'(u^*)\sin\theta, \sin\theta + g'(u^*)\cos\theta, 0\big). \end{aligned}$$

Si seleccionamos $\theta = \operatorname{atan}\frac{1+g'(u^*)}{g'(u^*)-1}$ entonces $S_z(\theta, u_1) = S_x(\theta, u_2)$ con $u_1 \neq u_2$. Podríamos tener la mala suerte que u^* fuera uno de los puntos que hemos quitado del dominio de definición o que $g'(u^*) = 1$, en tal caso deberíamos elegir otro par $u_1 < u_2$.
Una demostración puramente geométrica, y bastante más elegante, es la que ha ofrecido Rocío Díaz en su en entrega. Ella argumenta que si rotamos la curva α alrededor del eje OZ no obtenemos una superficie de revolución. En efecto, si cortamos la superficie con un plano perpendicular al eje OZ, o bien obtenemos el conjunto vacío si el plano es distinto de $\{z = 0\}$, o bien recuperamos toda la superficie, si el plano es $\{z = 0\}$.

3. Escribe la ecuación de una curva plana (la que tu quieras) y parametriza una de las superficies de revolución que genera. Esta superficie no puede ser ninguna de las que se han visto en clase.
Éste no lo hacemos.

4. Parametrizar la superficie descita por la ecuación general:

$$z^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}.$$

Demostrar que es una parametrización. ¿Es una superficie de revolución? Justifica tu respuesta.
Vamos a ver primero que no es superficie de revolución. Como no sabemos con respecto a qué eje podría serlo, consideremos un plano general:

$$\tilde{A}x + \tilde{B}y + \tilde{C}z = 0.$$

Supongamos que $\tilde{A} \neq 0$ (en otro caso, usaríamos otra letra). Entonces

$$z^2 = \frac{(By + Cz)^2}{2} + \frac{y^2}{3},$$

donde $B = -\tilde{B}/\tilde{A}$ y $C = -\tilde{C}/\tilde{A}$. Esta última expresión se puede arreglar de la siguiente manera:

$$\left(\frac{C^2}{2} - 1\right)z^2 + \left(\frac{B^2}{2} + \frac{1}{3}\right)y^2 + BCzy = 0.$$

Lo cual no es nunca la forma implícita de un círculo, cosa que pasaría si la superfície fuera de revolución.

Vamos a parametrizarla (ver Figura 3). Para esto es conveniente utilizar coordenadas cilíndricas, esto es:

$$x = \rho\cos\theta,$$
$$y = \rho\sin\theta,$$
$$z = u,$$
$$\rho^2 = x^2 + y^2.$$

Es trivial ver que la parametrización:

$$\varphi(\theta, u) = \left(\sqrt{2}u\cos\theta, \sqrt{3}u\sin\theta, u\right),$$

verifica la ecuación general. Aquí definimos $u \neq 0$ y, de momento $\theta \in (0, 2\pi)$. Ya quitaremos los valores problemáticos del ángulo a medida que vayamos comprobando las propiedades. Vamos a ver que tenemos una parametrización.

a) **Suavidad:** La diferenciabilidad de esta parametrización viene dada por ser composición de funciones derivables.

b) **Inyectividad:** Supongamos que existen (θ_1, u_1) y (θ_2, y_2) tales que $\varphi(\theta_1, u_1) = \varphi(\theta_2, u_2)$. Esto implica que:

$$\sqrt{2}u_1\cos\theta_1 = \sqrt{2}u_2\cos\theta_2, \tag{7}$$
$$\sqrt{3}u_1\sin\theta_1 = \sqrt{3}u_2\sin\theta_2, \tag{8}$$
$$u_1 = u_2. \tag{9}$$

Here we go again. La ecuación (9) nos dice directamente que $u_1 = u_2$. Como cualquier valor de u es distinto de cero, porque lo hemos quitado del intervalo de definición, podemos dividir la ecuación (7) por $\sqrt{2}u_1$ y la ecuación (8) por $\sqrt{3}u_2$. Para concluir que $\theta_1 = \theta_2$ porque coinciden en el seno y el coseno, como en las otras demostraciones.

c) **Suprayectividad:** Supongamos $(x, y, z) \in \varphi(\theta, u)$. Entonces $u = z \neq 0$ y podemos definir.

$$\theta = \operatorname{atan}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{y}{x}}.$$

Para que esta inversa esté definida y sea suave, tenemos que quitar los ángulos que anulan el coseno del intervalo de definición. Éstos son, $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/4$.

d) **Jacobiana inyectiva:** Falta ver que la Jacobiana tiene rango 2. Ésta viene dada por:

$$D\varphi(\theta,u) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}u\sin\theta & \sqrt{2}\cos\theta \\ \sqrt{3}u\cos\theta & \sqrt{3}\sin\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El menor formado por la segunda y la tercera fila es $\sqrt{3}u\cos\theta$. Éste nunca se anula, teniendo en cuenta los valores que se han elegido para los parámetros.

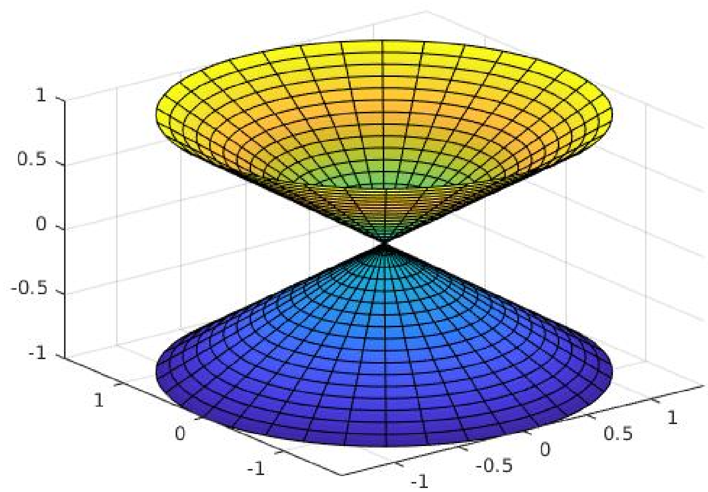

Figura 3: Cono elíptico.