Parametrización de curvas en el plano

TEMA 2

Esquema

- **Parametrización de curvas en el plano**
  - Curvas diferenciables en $\mathbb{R}^n$
    - Curvas diferenciables
    - Parametrización y reparametrización
  - Teoría local de curvas planas
    - Diedro de Frenet
    - Curvatura

Ideas clave

2.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

En este tema se estudian las curvas planas que van a describir la trayectoria de los objetos que queramos modelizar. Los aspectos más importantes de este tema son:

- Curvas diferenciables.
- Parametrización de curvas.
- Vectores tangente y normal.
- Función de curvatura.
- Diedro y fórmulas de Frenet.

2.2. Curvas diferenciables en $\mathbb{R}^n$

Una **curva diferenciable parametrizada** en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación diferenciable $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, donde I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.

En este curso trabajaremos con funciones C^∞ y abreviaremos la notación: en vez de curva diferenciable parametrizada diremos **curva**.

Por tanto, las curvas son de la forma $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, con $x_i: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

La **traza** de α es el conjunto $\alpha(I)$.
Para una curva $\alpha(t)$, t es el **parámetro**.

De esta forma vamos a poder representar la trayectoria de un móvil en el plano o en el espacio (o en más dimensiones si lo necesitáramos) en función de un parámetro t, que generalmente va a ser el tiempo.

Ejemplo 1:

$$\begin{aligned} &\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ &\quad t \longrightarrow \alpha(t) = (\cos(t), sen(t)) \end{aligned}$$

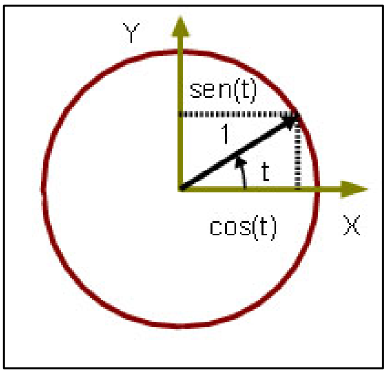


Figura 2.1. Parametrización de la circunferencia unidad.
Fuente: http://laplace.us.es/

En esta parametrización t es el ángulo medido desde el eje x.

La curva es la circunferencia unidad recorrida un número infinito de veces y la traza es la circunferencia $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Si solo consideramos la traza perdemos información, como el sentido de giro o el número de vueltas que se dan.

Una curva de radio $r > 0$ puede parametrizarse como:

$$\begin{aligned} &\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ &\quad t \longrightarrow \alpha(t) = (r\cos(t), r\,sen(t)) \end{aligned}$$

Ejemplo 2:

Si conforme gira la curva anterior la vamos levantado una cantidad proporcional al ángulo, resulta una hélice que se puede parametrizar como:

$$\begin{aligned} &\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ &\quad t \longrightarrow \alpha(t) = (\cos(t), sen(t), bt) \end{aligned}$$

En la figura 2.2 se representa una hélice con $r = 3$. Si se quiere representar en sentido descendente hay que tomar $b < 0$.

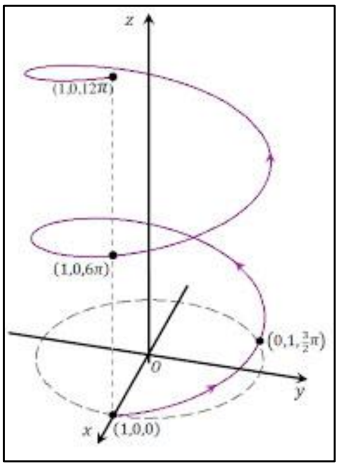


Figura 2.2. Parametrización de una hélice.
Fuente: http://www.mate.unlp.edu.ar

Hemos visto en la definición de curva que solo está definida si el dominio es un abierto pero se puede extender la definición a un dominio cerrado:

$\alpha: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una **curva diferenciable parametrizada** si existe un $\varepsilon > 0$ y una curva diferenciable parametrizada $\tilde{\alpha}: (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\tilde{\alpha}$ coincide con α en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 3:

La traza de dos curvas diferentes puede coincidir.

$$\alpha_1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longrightarrow \alpha(t) = (r \cos t\,, r\, sen\ t)$$

$$\alpha_2: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longrightarrow \alpha(t) = (r \cos 2t\,, r\, sen\ 2t)$$

Sean I, J dos intervalos en $\mathbb{R}$. Decimos que $\Phi: J \longrightarrow I$ es un **difeomorfismo** si cumple:

(i) Φ es inyectiva.

(ii) Φ es sobreyectiva, i.e., $\Phi(\mathrm{J}) = \mathrm{I}$.

(iii) Φ es diferenciable.

(iv) Φ^{-1} es diferenciable (sabemos que existe por (i) y (ii)).

Por tanto, sabemos que $(\Phi^{-1})'(t_0) = \frac{1}{\Phi'(\Phi^{-1}(t_0))}$, donde $t_0 \in J$, siempre que $\Phi'(\Phi^{-1}(t_0)) \neq 0$.

Por tanto, un difeomorfismo Φ tiene que verificar siempre que $\Phi' \neq 0$, por lo que o bien $\Phi' > 0$ (Φ creciente) o bien $\Phi' < 0$ (Φ decreciente).

La figura 3.3 representa un difeomorfismo decreciente entre los intervalos $J = (x_1, x_2)$ y $I = (\Phi(x_1), \Phi(x_2))$.

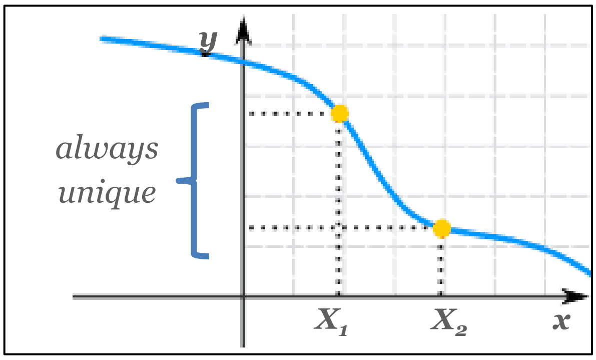


Figura 2.3. Representación de un difeomorfismo decreciente.
Fuente: https://www.mathsisfun.com/

Sea una curva $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y sea $\Phi: J \longrightarrow I$ un difeomorfismo, se dice que $\beta: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\beta = \alpha \circ \Phi$, es una **reparametrización** de α.

$$\begin{tikzcd} \begin{array}{c} t \in I \\ t = t(s) \end{array} \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{R}^n \\ s \in J \arrow[u, "\Phi"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Observación: $\Phi(s)$ se suele denotar $t(s)$.

Si β es es una **reparametrización** de α, entonces **sus trazas coinciden**. Por tanto, las reparametrizaciones son muy útiles cuando queramos estudiar las propiedades de la traza, ya que puede ser interesante reparametrizar una curva con un parámetro que nos venga mejor para el estudio. Al final de este apartado se verá un tipo de parametrización muy útil.

Llamamos **longitud de una curva** $\alpha: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $L(\alpha)_{a,b} = \int_a^b ||\alpha'(\tau)||d\tau$.

Para tener una idea intuitiva de por qué se define así la longitud de la curva vamos a pensar en que la aproximamos por poligonales (figura 2.4).

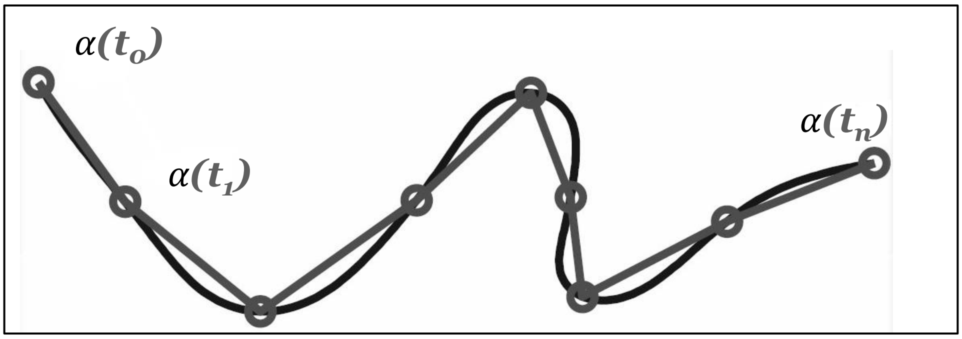


Figura 2.4. Aproximación de una curva por poligonales.
Fuente: http://popista.com/

De esta forma obtenemos la aproximación de longitud $\sum_{i=0}^{n}\left|\left|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\right|\right|$, con $t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{n}$. Si n es muy grande, $\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i) = \alpha'(\xi_i)\Delta t$ y tomando límites resulta:

$$\sum_{i=0}^{n} ||\alpha'(\xi_i)||\Delta t \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \int_a^b ||\alpha'(\tau)||d\tau$$

Si β es es una reparametrización de α, entonces $L(\alpha) = L(\beta)$, es decir, **la longitud de curva no varía cuando se reparametriza una curva**.

Veamos a continuación una serie de definiciones básicas para el estudio de curvas:

(i) Llamamos **vector tangente** a $\alpha(t)$ en t_0 a $\alpha'(t_0)$.

(ii) Llamamos **recta tangente** a $\alpha(t)$ en t_0 a la recta que pasa por $\alpha(t_0)$ y tiene a $\alpha'(t_0)$ como vector director. Esta definición tiene sentido siempre que $\alpha'(t_0) \neq 0$

Sea una curva $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$:

(iii) decimos que t_0 es un **punto singular** α si $\alpha'(t_0) = 0$.

(iv) α es **regular** si $\alpha'(t_0) \neq 0 \forall\ t\ \in I$.

(v) decimos que α está **parametrizada por arco** si $||\alpha'(t)|| = 1, \forall\ t \in I$

Si una curva está parametrizada por arco, entonces es regular. Además, en estas curvas el parámetro es la longitud ya que:

$$L(\alpha)_{0,t} = \int_0^t ||\alpha'(\tau)||d\tau = \int_0^t 1 \cdot d\tau = t$$

Si $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva diferenciable y regular siempre vamos a poder definir una reparametrización β de tal forma que $\beta(s) = \alpha(t(s))$ esté parametrizada por arco. De hecho, esta reparametrización puede calcularse considerando que $t(s)$ es la función inversa de:

$$\begin{aligned} s: I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow s(t) = \int_t^{t_0} ||\alpha'(\tau)||d\tau \end{aligned}$$

Por último, si α y β son dos curvas definidas en el mismo dominio que verifican que $\alpha(t) = \beta(-t)$, se dice que difieren por un **cambio de orientación**.

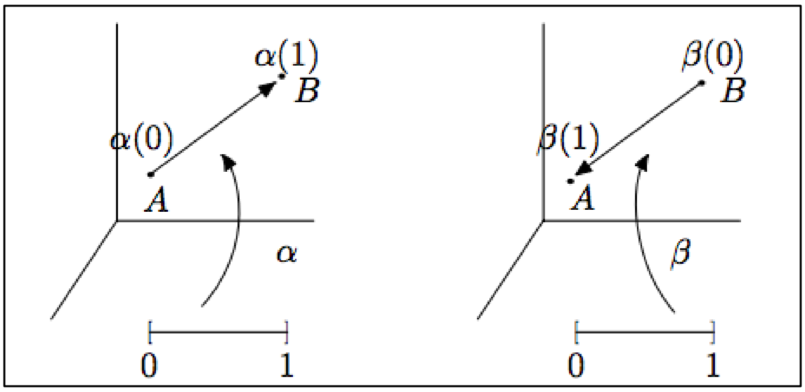


Figura 2.5. Representación de un cambio de orientación.
Fuente: http://ocw.unican.es/

2.3. Teoría local de curvas planas

En este tema solo vamos a trabajar con curvas regulares por lo que, sin pérdida de generalidad, asumiremos que están parametrizadas por arco.

Para estudiar cómo varía una curva en el plano vamos a estudiar cómo se curva, es decir, cómo varía $\alpha'(t)$. Para esto, en primer lugar vamos a definir varios conceptos muy importantes y vamos ver cómo se pueden interpretar geométricamente.

» Llamamos $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{s})$ al vector $T(s) = \alpha'(s)$, que es el **vector tangente.**
» Llamamos $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{s})$ al vector $T(s)$ rotado $\frac{\pi}{2}$, que es el **vector normal.**

La base ortonormal $\{T(s), N(s)\}$ se llama **diedro de Frenet** de α en s.

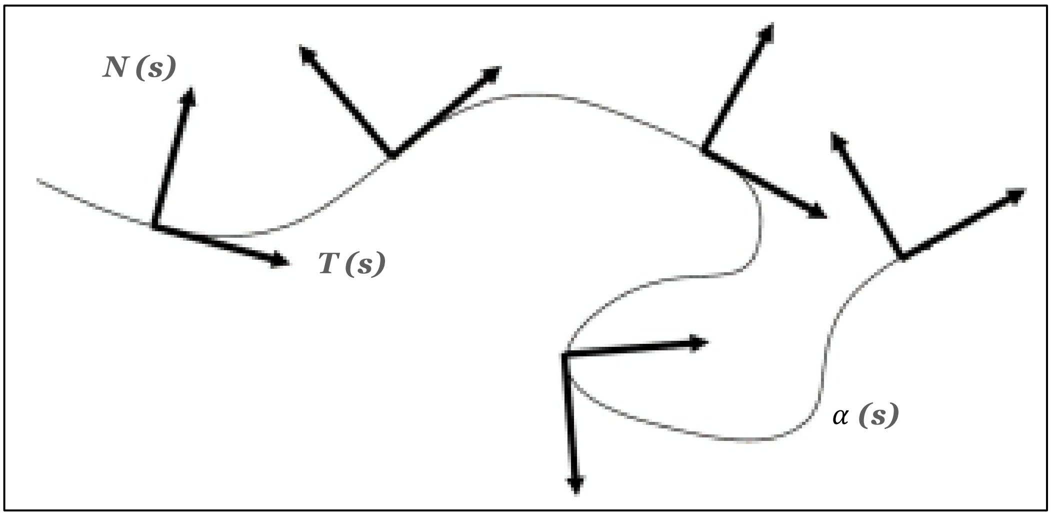


Figura 2.6. Diedro de Frenet.
Fuente: http://wdb.ugr.es/

Si $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, entonces $T(s) = (x'(s), y'(s))$ y $N(s) = (-y'(s), x'(s))$.

Como sabemos que $\begin{cases} 1. < T,T >= 1 \\ 2. < T,N >= 0 \\ 3. < N,N >= 1 \end{cases}$ derivamos estas expresiones y obtenemos:

$1. < T,T >' = 2 < T',T >= 0 \Rightarrow T \perp T' \Rightarrow T'(s) = k(s)N(s)$

$2. < T,N >' =< T,N' > + < T',N >= 0$

$3. < N,N >' = 2 < N',N >= 0 \Rightarrow N \perp N' \Rightarrow N'(s) = \lambda(s)T(s)$

La función $k: I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $T'(s) = k(s)N(s)$ se llama **función de curvatura** de α. $k(s)$ es la **curvatura** de α en s.

Sabemos que $< T,N' > + < T',N >= 0$. Sustituyendo en esta expresión T' por kN y N' por λT resulta $< T,\lambda T > + < kN,N >= \lambda + k = 0$. Por tanto, tenemos que:

$$T' = kN$$
$$N' = -kT$$

Estas expresiones son las **fórmulas de Frenet**.

Ejemplos (cálculo e interpretación de la curvatura):

» Si α es una recta es lógico pensar que no se va a curvar, es decir, que su curvatura es cero.

Sea la recta que pasa por p_0 con vector director v unitario (para que esté parametrizada por arco), $\alpha(s) = p_0 + sv$
$\alpha'(s) = T(s) = v$
$T'(s) = 0 = 0 \cdot N(s) \Rightarrow \boldsymbol{k = 0}$

» Si α es una circunferencia, ¿cómo se comporta su curvatura?

Sea la circunferencia de radio r recorrida en sentido positivo (contrario a las agujas del reloj), $\alpha(s) = \left(r\, cos\left(\frac{s}{r}\right), r\, sen\left(\frac{s}{r}\right)\right)$. Tomamos $\left(\frac{s}{r}\right)$ y no s para que la curva esté parametrizada por arco.

$$T(s) = \left(-\, sen\left(\frac{s}{r}\right), cos\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} T'(s) = \left(-\frac{1}{r} cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r}\, sen\left(\frac{s}{r}\right)\right) \\ N(s) = \left(-cos\left(\frac{s}{r}\right), -sen\left(\frac{s}{r}\right)\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{k(s)} = \boldsymbol{\frac{1}{r}}$$

Por tanto, en una circunferencia la curvatura es constante.

» Si α es una circunferencia recorrida en sentido negativo, ¿cómo se comporta su curvatura?

En este caso, tomamos $\alpha(s) = \left(r\, cos\left(\frac{s}{r}\right), -r\, sen\left(\frac{s}{r}\right)\right)$:

$$T(s) = \left(-\, sen\left(\frac{s}{r}\right), -cos\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} T'(s) = \left(-\frac{1}{r} cos\left(\frac{s}{r}\right), \frac{1}{r}\, sen\left(\frac{s}{r}\right)\right) \\ N(s) = \left(cos\left(\frac{s}{r}\right), -sen\left(\frac{s}{r}\right)\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{k(s)} = -\boldsymbol{\frac{1}{r}} < 0$$

Es decir, la curvatura no solo da la idea de cuánto se curva α sino en qué sentido lo hace.

Interpretación geométrica de la curvatura

» Sea $s \epsilon I, k(s) > 0 \Rightarrow < T'(s), N(s) > 0$. En este caso la curva se curva en la dirección de la normal (figura 2.7).

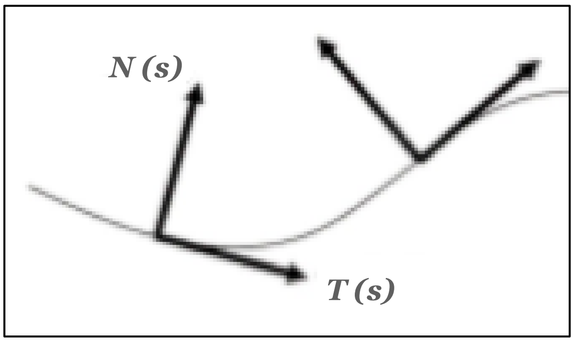


Figura 2.7. Fragmento de curva con curvatura positiva.
Fuente: http://wdb.ugr.es/

Pero si $k(s) < 0$, la curva se gira en sentido contrario a la normal. En el ejemplo anterior hay un ejemplo de esto con las dos parametrizaciones de una circunferencia.

» Sea $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por arco. Entonces, como $||\alpha'(t)|| = 1, \forall\, t \in I$, podemos considerar que el extremo del vector $T(s) = (x'(s), y'(s))$ está en la circunferencia unidad. Así podemos escribir el vector tangente $T(s) = (cos\theta(s)$, $sin\theta(s))$. Derivando, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} T' = \left(-\theta' sin\theta(s), \theta' cos\theta(s)\right) \\ N = \left(-sin\theta(s), cos\theta(s)\right) \end{array}\right\} \Rightarrow k(s) =< T', N >= \theta'$$

Es decir, para cada s, k se puede interpretar como la variación del ángulo que forma $T(s)$ con una dirección fija.

Por tanto, podemos ver que la curvatura sirve para definir cómo y cuánto se curva α.

Entonces, ¿es posible caracterizar una curva plana conociendo únicamente la función de curvatura? La respuesta es que sí, salvo movimientos rígidos, es decir, las características de la curva estarán definidas de forma unívoca, aunque podemos colocar esa curva en cualquier punto del plano (figura 2.8).

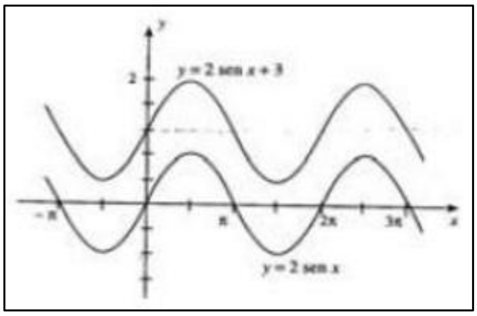


Figura 2.8. Ejemplo de una sinusoidal trasladada.
Fuente: http://www.scielo.org.mx/

Por último, vamos a ver cómo extender la definición de curvatura a curvas regulares en general, es decir, que no estén necesariamente parametrizadas por arco.

Sea $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular y sea $\beta: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ su reparametrización por arco.

$\alpha = \alpha(t)$ y $\beta = \beta(s)$, donde $t = t(s)$ y $s = s(t)$.

$$\begin{tikzcd} \begin{matrix} t \in I \\ t = t(s) \end{matrix} \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{R}^n \\ s \in J \arrow[u, "\Phi"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Se define $k_\alpha = k_\beta(s(t))$.

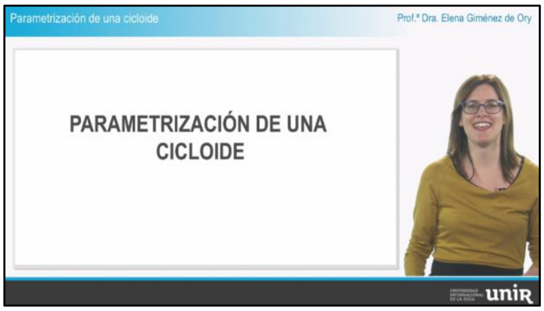
Es decir, para calcular la curvatura de una curva que no esté parametrizada por arco, en primer lugar hay que calcular su reparametrización y luego asignar a cada punto la curvatura que corresponda según la reparametrización.

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

Parametrización de una cicloide

En esta clase magistral vamos a ver cómo se puede parametrizar una curva muy famosa llamada la curva Cicloide.



La lección magistral está disponible en el aula virtual

No dejes de leer…

Famous curvex index

En este enlace se muestran las ecuaciones y gráficas de muchas curvas famosas.

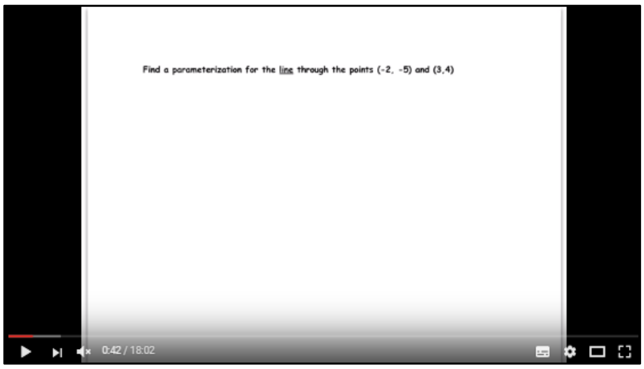
Famous Curves Index

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html

No dejes de ver…

Curvas parametrizadas

En este tutorial se muestran distintos ejemplos de cálculo con curvas parametrizadas.



Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://www.youtube.com/watch?v=cVxPohU7tf4

+ Información

A fondo

Parametrized curves

En este apartado se da una definición intuitiva de curva parametrizada y se ponen algunos ejemplos.

Parametrized curves

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://www.math.harvard.edu/~knill/teaching/summer2011/handouts/23-curves.pdf

Problemas de curvas parametrizadas

En este apartado podrás ver una colección de problemas resueltos de curvas parametrizadas.

Problemas de curvas parametrizadas

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://www.ma3.upc.edu/users/carmona/teaching/problemas/curvas-soluciones.pdf

Curvas planas

Aquí podrás ver una colección de problemas resueltos de curvas parametrizadas.

Curvas planas. Solución de los ejercicios propuestos.

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://www3.uah.es/albertolastra/arquitectura_arch/ejertema1.pdf

Test

1. Dos parametrizaciones distintas de la misma curva:

A. Dan lugar a trazas distintas.

B. Tienen la misma traza.

C. A y B son falsas.

2. La traza de una curva:

A. Cambia con la orientación.

B. Define a la curva perfectamente.

C. Es el conjunto $\alpha(I)$.

3. La parametrización:

$$\begin{aligned} \alpha &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longrightarrow \alpha(t) = (4\cos(t), 4sen(t), 2t) \end{aligned}$$

A. Define una hélice de radio 4 en sentido ascendente.

B. Define una hélice de radio 4 en sentido descendente.

C. Define una hélice de radio 2 en sentido descendente.

4. La reparametrización de una curva:

A. Cambia su traza.

B. Cambia su longitud.

C. A y B son falsas.

5. Una curva parametrizada por arco:

A. No tiene puntos singulares.

B. Es regular.

C. A y B son ciertas.

6. El diedro de Frenet está formado por:

A. $\{T(s), N(s)\}$.

B. $\{T(s), T'(s)\}$

C. $\{T(s), k(s)\}$

7. La curvatura mide:

A. La variación de la dirección de la velocidad.

B. La variación de la dirección del vector de posición.

C. La variación de la dirección del vector normal.

8. Los vectores T' y N.

A. Forman un ángulo que depende de la curvatura.

B. Tienen la misma dirección.

C. Son perpendiculares.

9. La curvatura de una circunferencia:

A. Es constante.

B. Tiene signo positivo o negativo en función del sentido en que se recorre.

C. A y B son correctas.

10. Selecciona la afirmación correcta:

A. Dos curvas pueden tener la misma curvatura y no parecerse en nada.

B. Al aplicar un movimiento directo a una curva varía su curvatura.

C. La curvatura permanece invariante por movimientos rígidos.