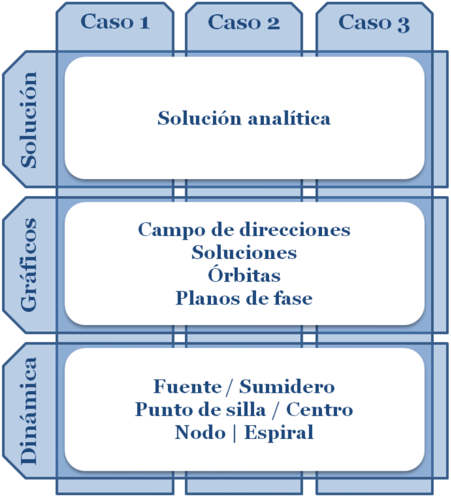
Tema 3
Sistemas lineales de orden superior
Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos

Dra. Neus Garrido Sàez

Máster en Ingeniería Matemática y Computación
Escuela Superior en Ingeniería y Tecnología

Contenido

Esquema


Caso 1
Caso 2
Caso 3
Solución
Solución analítica
Gráficos
Campo de direcciones
Soluciones
Órbitas
Planos de fase
Dinámica
Fuente / Sumidero
Punto de silla / Centro
Nodo | Espiral

1

Nociones básicas del álgebra lineal

Contenidos

- Dada una matriz A representada en una base B, obtener una matriz diagonal D representada en una base V, y que es semejante a A:

$$A = VDV^{-1} \Leftrightarrow D = V^{-1}AV,$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad V = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v_1} & \vec{v_2} & \cdots & \vec{v_n} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

- λ_i son los valores propios

$$|A - \lambda I| = 0$$

- $\vec{v_i}$ son los vectores propios asociados a cada valor propio y forman la base V

$$(A - \lambda_i I)\vec{v_i} = 0$$

Ejemplo 1. Diagonalización de $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

- Valores propios:

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -4 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = & 2i \\ \lambda_2 & = & -2i \end{cases}$$

- Vector propio asociado a $\lambda_1 = 2i$:

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v_1} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{v_1}$$

- Vector propio asociado a $\lambda_2 = -2i$:

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v_2} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2i & -4 \\ 1 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2i \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{v_2}$$

- $A = VDV^{-1} \Leftrightarrow D = V^{-1}AV$

$$D = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix}, \qquad V = \begin{bmatrix} 2i & -2i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Contenidos

Potencia de una matriz diagonalizable

Si A es una matriz diagonalizable:

- $A = VDV^{-1}$

Potencia de una matriz diagonalizable

Si A es una matriz diagonalizable:

- $A = VDV^{-1}$
- $A^k = VD^kV^{-1}$

Potencia de una matriz diagonalizable

Si A es una matriz diagonalizable:

- $A = VDV^{-1}$
- $A^k = VD^kV^{-1}$

$$\begin{aligned} A^k &= A \cdot A \cdots A \\ &= (VDV^{-1})(VDV^{-1}) \cdots (VDV^{-1}) \end{aligned}$$

Potencia de una matriz diagonalizable

Si A es una matriz diagonalizable:

- $A = VDV^{-1}$
- $A^k = VD^kV^{-1}$

$$\begin{aligned} A^k &= A \cdot A \cdots A \\ &= (VDV^{-1})(VDV^{-1}) \cdots (VDV^{-1}) \\ &= VD\underbrace{(V^{-1}V)}_{I}D\underbrace{(V^{-1}V)}_{I}D \cdots \underbrace{(V^{-1}V)}_{I}DV^{-1} \end{aligned}$$

Potencia de una matriz diagonalizable

Si A es una matriz diagonalizable:

- $A = VDV^{-1}$
- $A^k = VD^kV^{-1}$

$$
\begin{aligned}
A^k &= A \cdot A \cdots A \\
&= (VDV^{-1})(VDV^{-1}) \cdots (VDV^{-1}) \\
&= VD\underbrace{(V^{-1}V)}_{I}D\underbrace{(V^{-1}V)}_{I}D \cdots \underbrace{(V^{-1}V)}_{I}DV^{-1} \\
&= VD^kV^{-1}
\end{aligned}
$$

Si A es una matriz diagonalizable:

- $A = VDV^{-1}$
- $A^k = VD^kV^{-1}$

$$\begin{aligned} A^k &= A \cdot A \cdots A \\ &= (VDV^{-1})(VDV^{-1}) \cdots (VDV^{-1}) \\ &= VD\underbrace{(V^{-1}V)}_{I}D\underbrace{(V^{-1}V)}_{I}D \cdots \underbrace{(V^{-1}V)}_{I}DV^{-1} \\ &= VD^kV^{-1} \end{aligned}$$

- Con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ valores propios de A:

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

2

Sistemas lineales planos

Sistema de n ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1' & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\ x_2' & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\ \vdots & & \\ x_n' & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n \end{array}\right\}$$

Sistema de n ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1' & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\ x_2' & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\ \vdots & & \\ x_n' & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad X' = AX$$

Sistema de n ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

$$\left.\begin{array}{ccl} x_1' & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\ x_2' & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\ \vdots & & \\ x_n' & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad X' = AX$$

Sistemas lineales planos $(n = 2)$

$$X' = AX, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- $det(A) \neq 0 \Rightarrow$ un único punto de equilibrio
- $det(A) = 0$, con $A \neq 0I \Rightarrow$ una línea de puntos de equilibrio

Cálculo de la solución

$$\boxed{X' = AX}$$

Cálculo de la solución

$$\boxed{X' = AX}$$

- A no es una matriz diagonal:

- A es una matriz diagonal:

Cálculo de la solución

$$\boxed{X' = AX}$$

- A no es una matriz diagonal:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1' & = & ax_1 + bx_2 \\ x_2' & = & cx_1 + dx_2 \end{array} \right.$$

- A es una matriz diagonal:

Cálculo de la solución

$$\boxed{X' = AX}$$

- A no es una matriz diagonal:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1' & = & ax_1 + bx_2 \\ x_2' & = & cx_1 + dx_2 \end{array} \right.$$

- A es una matriz diagonal:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1' & = & ax_1 \\ x_2' & = & dx_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1(t) & = & C_1 e^{at} \\ x_2(t) & = & C_2 e^{dt} \end{array} \right.$$

Contenidos

Caso 1: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Solución de $X' = AX$

- Valores propios de A: λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$
- Vectores propios asociados: $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$
- Solución general:

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v_2}$$

Caso 1: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Solución de $X' = AX$

- Valores propios de A: λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$
- Vectores propios asociados: $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$
- Solución general:

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v_2}$$

Ejemplo 2. Obtén la solución del sistema: $\left\{ \begin{array}{lcl} x_1' & = & -2x_1 + x_2 \\ x_2' & = & x_2 \end{array} \right.$

Solución de $X' = AX$

- Valores propios de A: λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$
- Vectores propios asociados: $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$
- Solución general:

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v_2}$$

Ejemplo 2. Obtén la solución del sistema: $\left\{\begin{array}{lcl} x_1' & = & -2x_1 + x_2 \\ x_2' & = & x_2 \end{array}\right.$

- Matricialmente:

$$X' = AX = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X$$

Solución de $X' = AX$

- Valores propios de A: λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$
- Vectores propios asociados: $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$
- Solución general:

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v_2}$$

Ejemplo 2. Obtén la solución del sistema: $\begin{cases} x_1' &= -2x_1 + x_2 \\ x_2' &= x_2 \end{cases}$

- Matricialmente:

$$X' = AX = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X$$

- Valores y vectores propios:

$$\lambda_1 = 1, \quad \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = -2, \quad \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Caso 1: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Solución de $X' = AX$

- Valores propios de A: λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$
- Vectores propios asociados: $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$
- Solución general:

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v_2}$$

Ejemplo 2. Obtén la solución del sistema: $\left\{\begin{array}{lcl} x_1' & = & -2x_1 + x_2 \\ x_2' & = & x_2 \end{array}\right.$

- Matricialmente:

$$X' = AX = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X$$

- Valores y vectores propios:

$$\lambda_1 = 1, \quad \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = -2, \quad \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X(t) = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1(t) & = & C_1 e^t + C_2 e^{-2t} \\ x_2(t) & = & 3C_1 e^t \end{array}\right.$$

Contenidos

Caso 2: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Caso 2.1: $A = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right]$

Caso 2.2: $A = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right]$

Caso 2: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Caso 2.1: $A = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right]$

- Cualquier $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ es vector propio asociado de $\lambda \in \mathbb{R}$
- Solución general de $X' = AX$:

$$X(t) = Ce^{\lambda t}\vec{v}$$

Caso 2.2: $A = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right]$

Caso 2: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Caso 2.1: $A = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right]$

- Cualquier $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ es vector propio asociado de $\lambda \in \mathbb{R}$
- Solución general de $X' = AX$:

$$X(t) = Ce^{\lambda t}\vec{v}$$

Caso 2.2: $A = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right]$

- Vector propio asociado: $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- Solución general de $X' = AX$:

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t),$$

Caso 2: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Caso 2.1: $A = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right]$

- Cualquier $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ es vector propio asociado de $\lambda \in \mathbb{R}$
- Solución general de $X' = AX$:

$$X(t) = Ce^{\lambda t}\vec{v}$$

Caso 2.2: $A = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right]$

- Vector propio asociado: $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- Solución general de $X' = AX$:

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t), \qquad X_1(t) = C_1 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Caso 2: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Caso 2.1: $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

- Cualquier $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ es vector propio asociado de $\lambda \in \mathbb{R}$
- Solución general de $X' = AX$:

$$X(t) = Ce^{\lambda t}\vec{v}$$

Caso 2.2: $A = \begin{bmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

- Vector propio asociado: $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- Solución general de $X' = AX$:

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t), \qquad X_1(t) = C_1 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_2(t)?$$

Caso 2: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Caso 2.2: $A = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right]$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1' & = & \lambda x_1 + \alpha x_2 \\ x_2' & = & \lambda x_2 \end{array} \right. \Rightarrow x_2(t) = \gamma e^{\lambda t}$$

Caso 2: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Caso 2.2: $A = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right]$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x_1' & = & \lambda x_1 + \alpha x_2 \\ x_2' & = & \lambda x_2 \end{array} \right. \Rightarrow x_2(t) = \gamma e^{\lambda t}$$

- Método de los coeficientes indeterminados:

$$x_1(t) = \nu e^{\lambda t} + \mu t e^{\lambda t} \Rightarrow x_1'(t) = \lambda \nu e^{\lambda t} + \mu e^{\lambda t} + \lambda \mu t e^{\lambda t} \tag{1}$$

Caso 2: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Caso 2.2: $A = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right]$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x_1' & = & \lambda x_1 + \alpha x_2 \\ x_2' & = & \lambda x_2 \end{array} \right. \Rightarrow x_2(t) = \gamma e^{\lambda t}$$

- Método de los coeficientes indeterminados:

$$x_1(t) = \nu e^{\lambda t} + \mu t e^{\lambda t} \Rightarrow x_1'(t) = \lambda \nu e^{\lambda t} + \mu e^{\lambda t} + \lambda \mu t e^{\lambda t} \tag{1}$$

Entonces,

$$x_1'(t) = \lambda x_1 + \alpha x_2 = \lambda(\nu e^{\lambda t} + \mu t e^{\lambda t}) + \alpha(\gamma e^{\lambda t}) \tag{2}$$

Caso 2.2: $A = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right]$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x_1' & = & \lambda x_1 + \alpha x_2 \\ x_2' & = & \lambda x_2 \end{array} \right. \Rightarrow x_2(t) = \gamma e^{\lambda t}$$

- Método de los coeficientes indeterminados:

$$x_1(t) = \nu e^{\lambda t} + \mu t e^{\lambda t} \Rightarrow x_1'(t) = \lambda \nu e^{\lambda t} + \mu e^{\lambda t} + \lambda \mu t e^{\lambda t} \tag{1}$$

Entonces,

$$x_1'(t) = \lambda x_1 + \alpha x_2 = \lambda(\nu e^{\lambda t} + \mu t e^{\lambda t}) + \alpha(\gamma e^{\lambda t}) \tag{2}$$

Igualando (1) y (2) $\Rightarrow \alpha\gamma = \mu$, $\nu \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1(t) = \nu e^{\lambda t} + \alpha\gamma t e^{\lambda t}$.

Caso 2.2: $A = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right]$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1' & = & \lambda x_1 + \alpha x_2 \\ x_2' & = & \lambda x_2 \end{array} \right. \Rightarrow x_2(t) = \gamma e^{\lambda t}$$

- Método de los coeficientes indeterminados:

$$x_1(t) = \nu e^{\lambda t} + \mu t e^{\lambda t} \Rightarrow x_1'(t) = \lambda \nu e^{\lambda t} + \mu e^{\lambda t} + \lambda \mu t e^{\lambda t} \tag{1}$$

Entonces,

$$x_1'(t) = \lambda x_1 + \alpha x_2 = \lambda(\nu e^{\lambda t} + \mu t e^{\lambda t}) + \alpha(\gamma e^{\lambda t}) \tag{2}$$

Igualando (1) y (2) $\Rightarrow \alpha\gamma = \mu$, $\nu \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1(t) = \nu e^{\lambda t} + \alpha\gamma t e^{\lambda t}$.
Por tanto,

$$X_2(t) = \begin{bmatrix} \nu e^{\lambda t} + \alpha\gamma t e^{\lambda t} \\ \gamma e^{\lambda t} \end{bmatrix} \underset{(\nu=0)}{=} \begin{bmatrix} \alpha\gamma t e^{\lambda t} \\ \gamma e^{\lambda t} \end{bmatrix} \underset{(\gamma=C_2)}{=} C_2 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} \alpha t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Caso 2.2: $A = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right]$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1' & = & \lambda x_1 + \alpha x_2 \\ x_2' & = & \lambda x_2 \end{array} \right. \Rightarrow x_2(t) = \gamma e^{\lambda t}$$

- Método de los coeficientes indeterminados:

$$x_1(t) = \nu e^{\lambda t} + \mu t e^{\lambda t} \Rightarrow x_1'(t) = \lambda \nu e^{\lambda t} + \mu e^{\lambda t} + \lambda \mu t e^{\lambda t} \tag{1}$$

Entonces,

$$x_1'(t) = \lambda x_1 + \alpha x_2 = \lambda(\nu e^{\lambda t} + \mu t e^{\lambda t}) + \alpha(\gamma e^{\lambda t}) \tag{2}$$

Igualando (1) y (2) $\Rightarrow \alpha\gamma = \mu$, $\nu \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1(t) = \nu e^{\lambda t} + \alpha\gamma t e^{\lambda t}$.
Por tanto,

$$X_2(t) = \begin{bmatrix} \nu e^{\lambda t} + \alpha\gamma t e^{\lambda t} \\ \gamma e^{\lambda t} \end{bmatrix} \underset{(\nu=0)}{=} \begin{bmatrix} \alpha\gamma t e^{\lambda t} \\ \gamma e^{\lambda t} \end{bmatrix} \underset{(\gamma=C_2)}{=} C_2 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} \alpha t \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Solución general de $X' = AX$:

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t) = C_1 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} \alpha t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3. Obtén la solución del sistema: $\begin{cases} x_1' &= 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' &= 3x_2 \end{cases}$

- Matricialmente:

$$X' = AX = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} X$$

- Valor y vector propio: $\lambda = 3$; $\vec{v} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$

Ejemplo 3. Obtén la solución del sistema: $\begin{cases} x_1' &= 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' &= 3x_2 \end{cases}$

- Matricialmente:
$$X' = AX = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} X$$
- Valor y vector propio: $\lambda = 3$; $\vec{v} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$
- $X_1(t) = C_1 e^{3t} \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$

Ejemplo 3. Obtén la solución del sistema: $\left\{ \begin{array}{lcl} x_1' & = & 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' & = & 3x_2 \end{array} \right.$

- Matricialmente:

$$X' = AX = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} X$$

- Valor y vector propio: $\lambda = 3$; $\vec{v} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$
- $X_1(t) = C_1 e^{3t} \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$
- De $x_2' = 3x_2 \Rightarrow x_2(t) = \gamma e^{3t}$

Caso 2: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Ejemplo 3. Obtén la solución del sistema: $\begin{cases} x_1' & = & 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' & = & 3x_2 \end{cases}$

- Matricialmente:

$$X' = AX = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} X$$

- Valor y vector propio: $\lambda = 3$; $\vec{v} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$
- $X_1(t) = C_1 e^{3t} \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$
- De $x_2' = 3x_2 \Rightarrow x_2(t) = \gamma e^{3t}$
- Conjeturamos que $x_1 = \nu e^{3t} + \mu t e^{3t}$:

$$x_1' = 3\nu e^{3t} + \mu e^{3t} + 3\mu t e^{3t} \tag{3}$$

- De $x_1' = 3x_1 - 2x_2$:

$$x_1' = 3\nu e^{3t} + 3\mu t e^{3t} - 2\gamma e^{3t} \tag{4}$$

- De (3) y (4) $\Rightarrow \mu = -2\gamma$, $\nu \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = \nu e^{3t} - 2\gamma t e^{3t} \Rightarrow X_2(t) = e^{3t} \left[\begin{smallmatrix} \nu - 2\gamma t \\ \gamma \end{smallmatrix}\right]$

Ejemplo 3. Obtén la solución del sistema: $\left\{ \begin{array}{lcl} x_1' & = & 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' & = & 3x_2 \end{array} \right.$

- Matricialmente:

$$X' = AX = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} X$$

- Valor y vector propio: $\lambda = 3$; $\vec{v} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]$
- $X_1(t) = C_1 e^{3t} \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]$
- De $x_2' = 3x_2 \Rightarrow x_2(t) = \gamma e^{3t}$
- Conjeturamos que $x_1 = \nu e^{3t} + \mu t e^{3t}$:

$$x_1' = 3\nu e^{3t} + \mu e^{3t} + 3\mu t e^{3t} \tag{3}$$

- De $x_1' = 3x_1 - 2x_2$:

$$x_1' = 3\nu e^{3t} + 3\mu t e^{3t} - 2\gamma e^{3t} \tag{4}$$

- De (3) y (4) $\Rightarrow \mu = -2\gamma$, $\nu \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = \nu e^{3t} - 2\gamma t e^{3t} \Rightarrow X_2(t) = e^{3t} \left[\begin{smallmatrix} \nu - 2\gamma t \\ \gamma \end{smallmatrix} \right]$
- Con $\nu = 0$ y $\gamma = C_2$:

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t) = C_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{bmatrix} -2t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Contenidos

Caso 3: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \lambda_2^*$

Solución de $X' = AX$

- Valores propios de A: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \lambda_2^*$
- Vectores propios asociados: $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{C}^2$, $\vec{v_1} = \vec{v_2}^*$
- Solución general (a partir de uno de los valores propios):

$$X(t) = C_1 X_{Re}(t) + C_2 X_{Im}(t)$$

con

$$X_{Re}(t) = Re\{e^{\lambda_1 t}\vec{v_1}\}, \qquad X_{Im}(t) = Im\{e^{\lambda_1 t}\vec{v_1}\}$$

Caso 3: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \lambda_2^*$

Solución de $X' = AX$

- Valores propios de A: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \lambda_2^*$
- Vectores propios asociados: $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{C}^2$, $\vec{v_1} = \vec{v_2}^*$
- Solución general (a partir de uno de los valores propios):

$$X(t) = C_1 X_{Re}(t) + C_2 X_{Im}(t)$$

con

$$X_{Re}(t) = Re\{e^{\lambda_1 t}\vec{v_1}\}, \qquad X_{Im}(t) = Im\{e^{\lambda_1 t}\vec{v_1}\}$$

Ejemplo 4. Obtén la solución al sistema: $X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X$

- Valores y vectores propios: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$; $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$

Solución de $X' = AX$

- Valores propios de A: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \lambda_2^*$
- Vectores propios asociados: $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{C}^2$, $\vec{v_1} = \vec{v_2}^*$
- Solución general (a partir de uno de los valores propios):

$$X(t) = C_1 X_{Re}(t) + C_2 X_{Im}(t)$$

con

$$X_{Re}(t) = Re\{e^{\lambda_1 t}\vec{v_1}\}, \qquad X_{Im}(t) = Im\{e^{\lambda_1 t}\vec{v_1}\}$$

Ejemplo 4. Obtén la solución al sistema: $X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X$

- Valores y vectores propios: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$; $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$
- Aplicando la fórmula de Euler $e^{i\varphi t} = \cos(\varphi t) + i\sin(\varphi t)$:

$$e^{\lambda_1 t}\vec{v_1} = e^{it}\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = (\cos(t) + i\sin(t))\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

Solución de $X' = AX$

- Valores propios de A: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \lambda_2^*$
- Vectores propios asociados: $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{C}^2$, $\vec{v_1} = \vec{v_2}^*$
- Solución general (a partir de uno de los valores propios):

$$X(t) = C_1 X_{Re}(t) + C_2 X_{Im}(t)$$

con

$$X_{Re}(t) = Re\{e^{\lambda_1 t}\vec{v_1}\}, \qquad X_{Im}(t) = Im\{e^{\lambda_1 t}\vec{v_1}\}$$

Ejemplo 4. Obtén la solución al sistema: $X' = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right] X$

- Valores y vectores propios: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$; $\vec{v_1} = \left[\begin{smallmatrix} -i \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, $\vec{v_2} = \left[\begin{smallmatrix} i \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$
- Aplicando la fórmula de Euler $e^{i\varphi t} = \cos(\varphi t) + i\sin(\varphi t)$:

$$e^{\lambda_1 t}\vec{v_1} = e^{it}\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = (\cos(t) + i\sin(t))\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

- Solución general: $X(t) = C_1 X_{Re}(t) + C_2 X_{Im}(t) = C_1 \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$

Contenidos

Ecuaciones diferenciales de orden dos

$$\boxed{x'' = f(t, x, x')}$$

$$\boxed{x'' = f(t, x, x')}$$

Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

$$x'' + ax' + bx = 0$$

$$\boxed{x'' = f(t, x, x')}$$

Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

$$x'' + ax' + bx = 0$$

Con el cambio de variable $y = x'$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & y \\ y' & = & -ay - bx \end{array}\right. \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow X' = AX$$

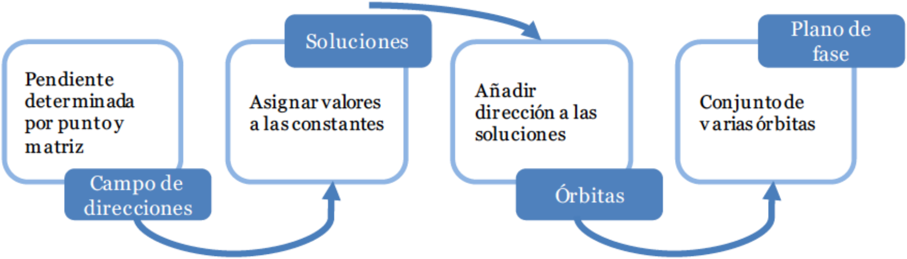
$\Rightarrow$ sistema lineal plano

3

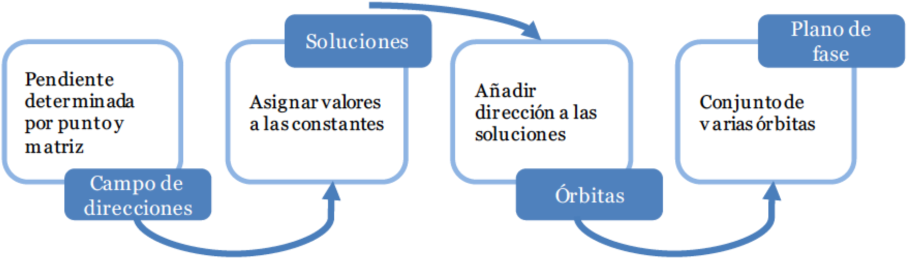
Representaciones gráficas de sistemas planos

- Campo de direcciones
- Soluciones

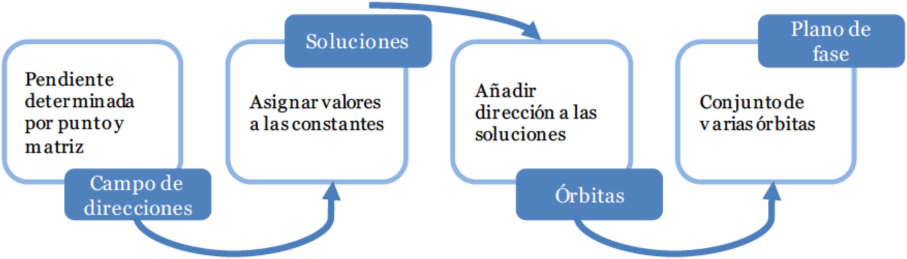
- Órbitas
- Planos de fase



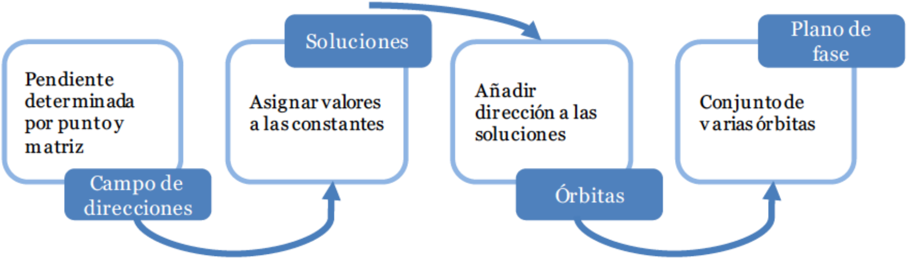
- Campo de direcciones
- Soluciones $\Rightarrow$ Curva parametrizada en el plano: para cada t se tiene un punto $(x(t), y(t))$
- Órbitas
- Planos de fase



- Campo de direcciones
- Soluciones ⇒ Curva parametrizada en el plano: para cada t se tiene un punto $(x(t), y(t))$
- Órbitas ⇒ representan la dirección que sigue la solución cuando aumenta el tiempo
- Planos de fase



- Campo de direcciones
- Soluciones $\Rightarrow$ Curva parametrizada en el plano: para cada t se tiene un punto $(x(t), y(t))$
- Órbitas $\Rightarrow$ representan la dirección que sigue la solución cuando aumenta el tiempo
- Planos de fase $\Rightarrow$ para observar el comportamiento de un sistema para diferentes valores de las constantes



4

Análisis dinámico de sistemas planos

Sistemas en forma canónica

$$\boxed{X' = AX}$$

Formas canónicas: $A = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \right\}$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

- Caso 1: valores propios reales distintos
- Caso 2: valores propios reales iguales

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

- Caso 3: valores propios complejos

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v_2}$$

- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$
- $0 < \lambda_1 < \lambda_2$
- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

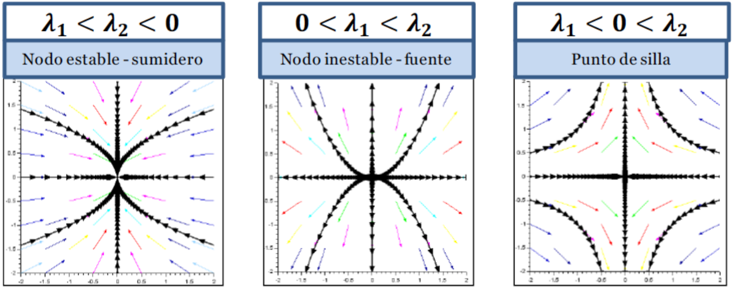


Figura: Campos de direcciones y planos de fase

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v_2}$$

- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ $\Rightarrow$ soluciones **estables** y el origen es un **sumidero**
- $0 < \lambda_1 < \lambda_2$
- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

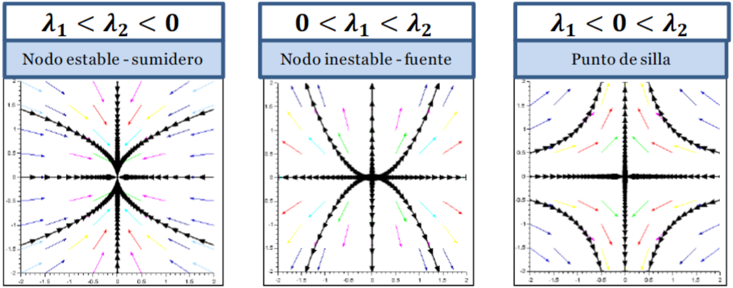


Figura: Campos de direcciones y planos de fase

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v_2}$$

- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ $\Rightarrow$ soluciones **estables** y el origen es un **sumidero**
- $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ $\Rightarrow$ soluciones **inestables** y el origen es una **fuente**
- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

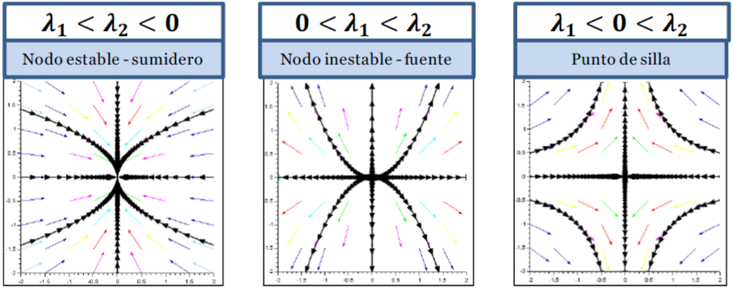


Figura: Campos de direcciones y planos de fase

Caso 1: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v_2}$$

- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ $\Rightarrow$ soluciones **estables** y el origen es un **sumidero**
- $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ $\Rightarrow$ soluciones **inestables** y el origen es una **fuente**
- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
  - Eje X: $C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^t$ **recta estable**
  - Eje Y: $C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^t$ **recta inestable**
  - Las demás combinaciones $C_1, C_2 \neq 0$ tienden a infinito

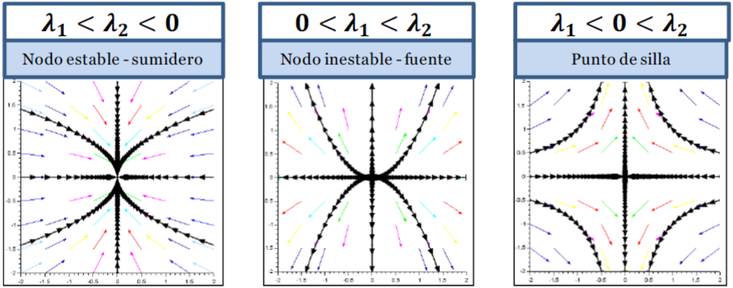


Figura: Campos de direcciones y planos de fase

Contenidos

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow X(t) = Ce^{\lambda t}\vec{v}$$

- $\lambda < 0$
- $\lambda > 0$

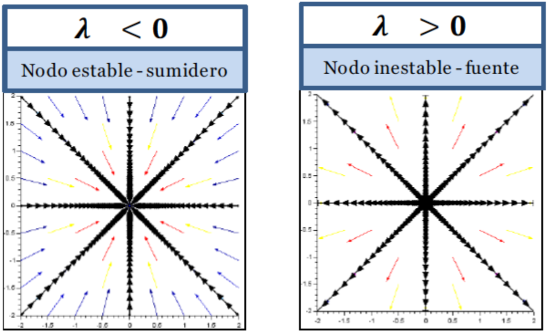


Figura: Campos de direcciones y planos de fase

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow X(t) = Ce^{\lambda t}\vec{v}$$

- $\lambda < 0$ $\quad \Rightarrow$ el origen es un **nodo estable** o **sumidero**
- $\lambda > 0$

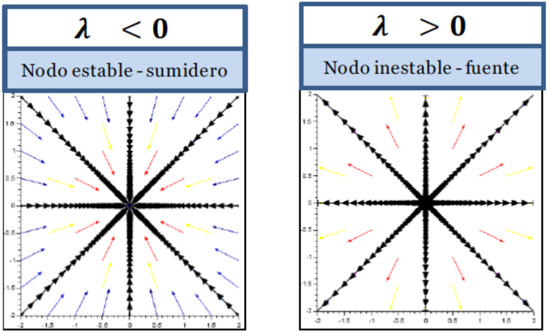


Figura: Campos de direcciones y planos de fase

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow X(t) = Ce^{\lambda t}\vec{v}$$

- $\lambda < 0 \quad \Rightarrow$ el origen es un **nodo estable** o **sumidero**
- $\lambda > 0 \quad \Rightarrow$ el origen es un **nodo inestable** o **fuente**

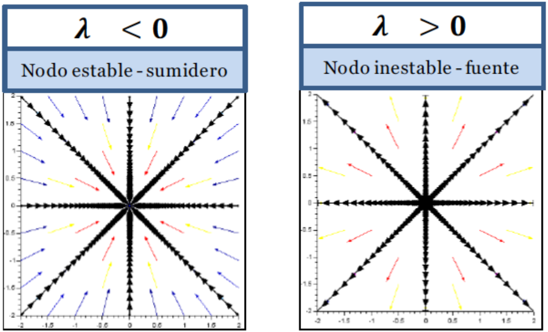


Figura: Campos de direcciones y planos de fase

Contenidos

Caso 3: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \lambda_2^*$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow X(t) = C_1 e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{bmatrix} + C_2 e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{bmatrix}$$

- $\alpha = 0$
- $\alpha < 0$
- $\alpha > 0$

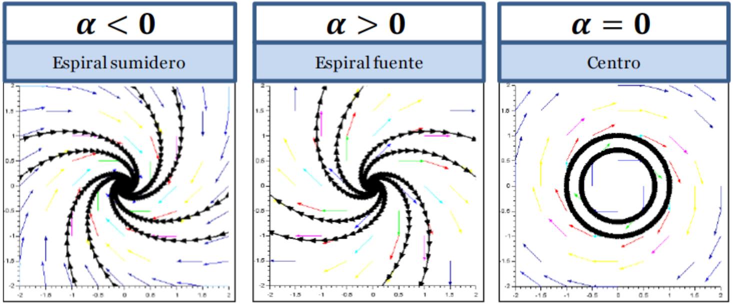


Figura: Campos de direcciones y planos de fase

Caso 3: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \lambda_2^*$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow X(t) = C_1 e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{bmatrix} + C_2 e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{bmatrix}$$

- $\alpha = 0$ $\Rightarrow$ circunferencia centrada en el origen: las soluciones se denominan **centros**
- $\alpha < 0$
- $\alpha > 0$

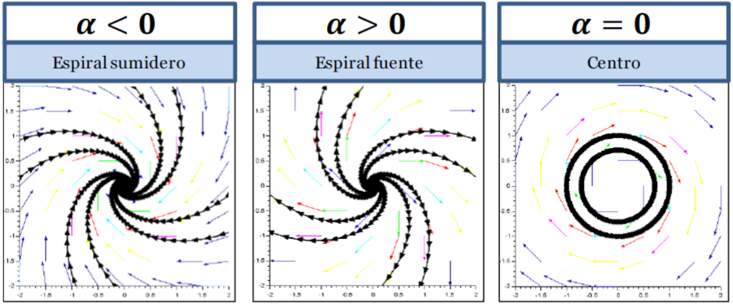


Figura: Campos de direcciones y planos de fase

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow X(t) = C_1 e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{bmatrix} + C_2 e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{bmatrix}$$

- $\alpha = 0$ $\Rightarrow$ circunferencia centrada en el origen: las soluciones se denominan **centros**
- $\alpha < 0$ $\Rightarrow$ el centro se convierte en **espiral sumidero**
- $\alpha > 0$

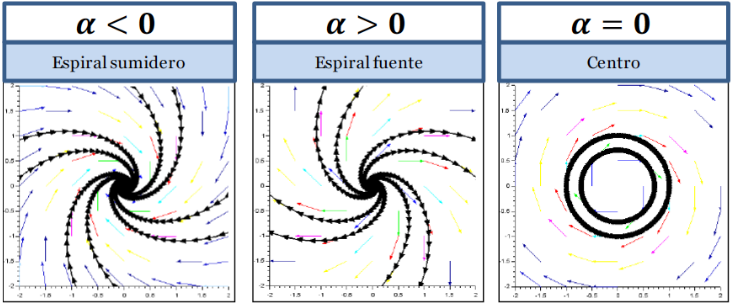


Figura: Campos de direcciones y planos de fase

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow X(t) = C_1 e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{bmatrix} + C_2 e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{bmatrix}$$

- $\alpha = 0$ $\Rightarrow$ circunferencia centrada en el origen: las soluciones se denominan **centros**
- $\alpha < 0$ $\Rightarrow$ el centro se convierte en **espiral sumidero**
- $\alpha > 0$ $\Rightarrow$ el centro se convierte en **espiral fuente**

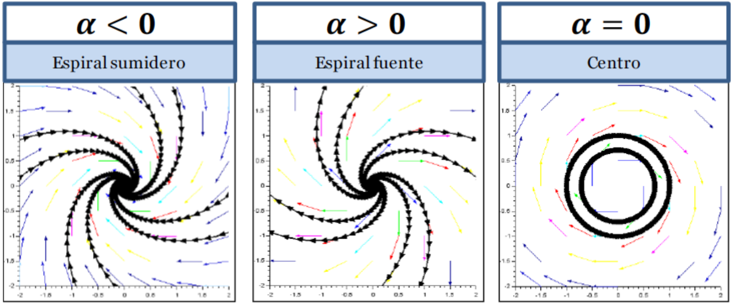


Figura: Campos de direcciones y planos de fase

Contenidos

Cambio de coordenadas

- A no está en forma canónica $\Rightarrow$ cambio de coordenadas

- A no está en forma canónica $\Rightarrow$ cambio de coordenadas

$$\Downarrow$$

realizar transformación a partir de una aplicación lineal $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

- A no está en forma canónica $\Rightarrow$ cambio de coordenadas

$$\Downarrow$$

realizar transformación a partir de una aplicación lineal $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Solución del sistema $X' = AX$

1. Escoger la matriz T adecuada:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow T = \begin{bmatrix} | & | \\ \vec{v_1} & \vec{v_2} \\ | & | \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = \lambda_2^* = \alpha + \beta i \Rightarrow T = \begin{bmatrix} | & | \\ Re\{\vec{v}\} & Im\{\vec{v}\} \\ | & | \end{bmatrix}$$

- A no está en forma canónica $\Rightarrow$ cambio de coordenadas

$$\Downarrow$$

realizar transformación a partir de una aplicación lineal $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Solución del sistema $X' = AX$

1. Escoger la matriz T adecuada:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow T = \begin{bmatrix} | & | \\ \vec{v_1} & \vec{v_2} \\ | & | \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = \lambda_2^* = \alpha + \beta i \Rightarrow T = \begin{bmatrix} | & | \\ Re\{\vec{v}\} & Im\{\vec{v}\} \\ | & | \end{bmatrix}$$

2. B matriz en forma canónica: $B = T^{-1}AT$

- A no está en forma canónica $\Rightarrow$ cambio de coordenadas

$$\Downarrow$$

realizar transformación a partir de una aplicación lineal $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Solución del sistema $X' = AX$

1. Escoger la matriz T adecuada:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow T = \begin{bmatrix} | & | \\ \vec{v_1} & \vec{v_2} \\ | & | \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = \lambda_2^* = \alpha + \beta i \Rightarrow T = \begin{bmatrix} | & | \\ Re\{\vec{v}\} & Im\{\vec{v}\} \\ | & | \end{bmatrix}$$

2. B matriz en forma canónica: $B = T^{-1}AT$
3. Resolver $Y' = BY$

- A no está en forma canónica $\Rightarrow$ cambio de coordenadas

$$\Downarrow$$

realizar transformación a partir de una aplicación lineal $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

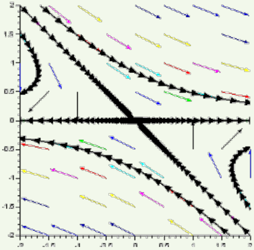
Solución del sistema $X' = AX$

1. Escoger la matriz T adecuada:

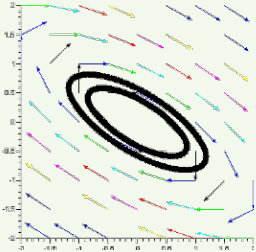
$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow T = \begin{bmatrix} | & | \\ \vec{v_1} & \vec{v_2} \\ | & | \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = \lambda_2^* = \alpha + \beta i \Rightarrow T = \begin{bmatrix} | & | \\ Re\{\vec{v}\} & Im\{\vec{v}\} \\ | & | \end{bmatrix}$$

2. B matriz en forma canónica: $B = T^{-1}AT$
3. Resolver $Y' = BY$
4. Solución del sistema: $X = TY$

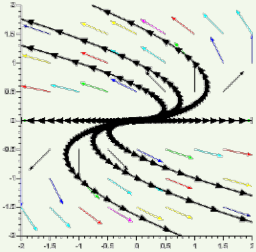
Ejemplo 5. Determina la correspondencia entre los planos de fase y las matrices asociadas a sus sistemas de ecuaciones diferenciales $X' = AX$



- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- $\lambda = \pm 1$
- Punto de silla



- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$
- $\lambda = \pm i$
- Centro transf.



- $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\lambda = 1$
- Fuente

- Ejercicios recomendados del tema
- Lección magistral: Segunda ley de Newton → Campus Virtual

...Y por supuesto:

TEST DE APRENDIZAJE!!

unir
LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET