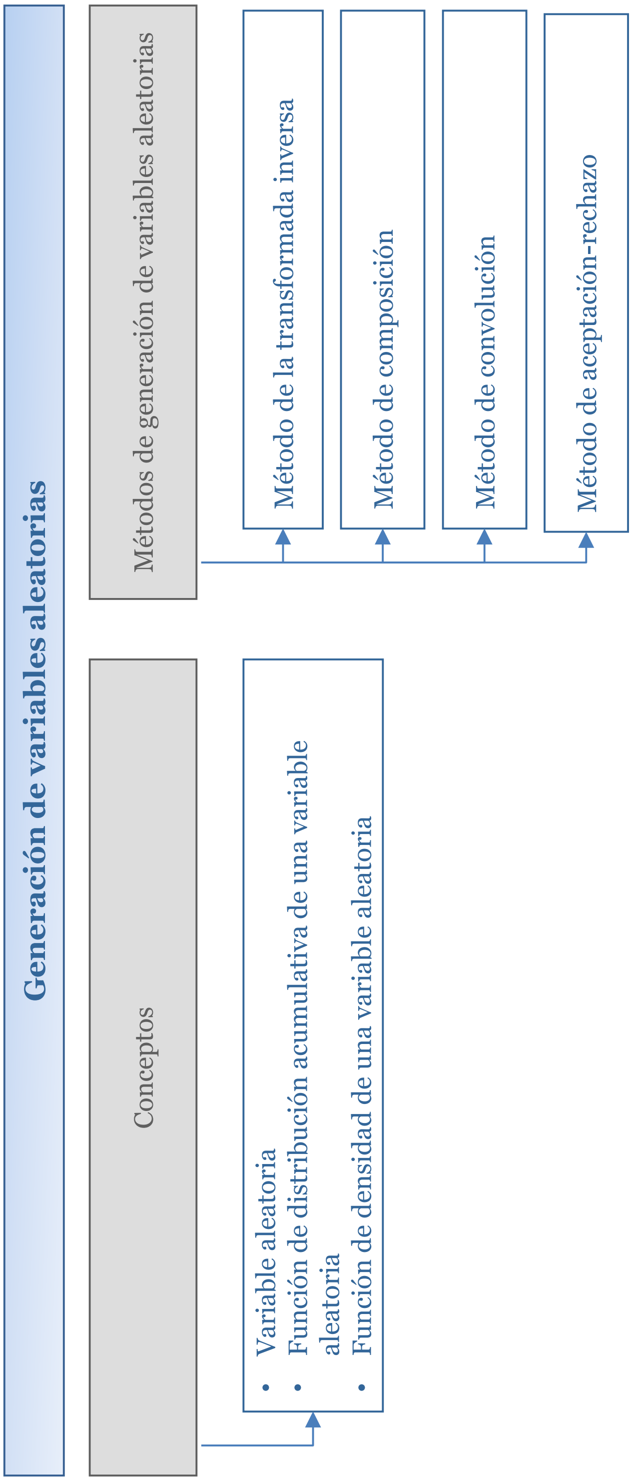
Generación de variables aleatorias

TEMA 6

Esquema


Generación de variables aleatorias
Métodos de generación de variables aleatorias
Método de la transformada inversa
Método de composición
Método de convolución
Método de aceptación-rechazo
Conceptos
• Variable aleatoria
• Función de distribución acumulativa de una variable aleatoria
• Función de densidad de una variable aleatoria

Ideas clave

6.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

Además lee el capítulo 5 «**páginas 181-202**» del siguiente libro:

» Lladser, M. (2011). *Variables aleatorias y simulación estocástica*. Santiago de Chile: J. C. Sáez Editor.
Disponible en la Biblioteca Virtual de UNIR.

Las ideas claves de este tema son:

» Concepto de variable aleatoria, función de distribución y función de densidad.
» Métodos de generación de variables aleatorias.
» Método de la transformada inversa.
» Método de composición.
» Método de convolución.
» Método de aceptación-rechazo.

6.2. Introducción

Las variables aleatorias se utilizan para modelar las entradas de un modelo de simulación. Estas variables generalmente presentan una distribución estadística específica, por lo que se pueden usar procedimientos estadísticos estándar para la estimación de los parámetros de la distribución correspondiente y para probar la validez del modelo estadístico asumido. Se debe de tener en cuenta que una función de distribución $F(x)$, de una variable aleatoria X, se define mediante la siguiente fórmula:

$$F(x) = P(X \leq x),$$
$$donde\ x \in (-\infty, \infty) y\ P(X \leq x)\ es\ la\ probabilidad\ asociada\ al\ suceso\ \{X \leq x\}$$

Ecuación 1 Función de distribución acumulada.

Es decir, $F(x)$representa la probabilidad de que dado un experimento, X tome un valor menor o igual que x. Es una función que no es decreciente y que toma valores entre 0 y 1.

De lo anterior se extrae que la generación de una variable aleatoria, consiste en obtener valores que sigan la distribución correspondiente; y para ello se pueden usar distintos algoritmos o métodos.

Otro concepto que se debe considerar para la aplicación de algunos de los métodos es la **función de densidad de la variable aleatoria** X que se denota por $f(x)$ y se define como una función no negativa, de forma que para cualquier intervalo $[a, b]$ cumple que:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Ecuación 2. Función de densidad de una variable aleatoria

La selección del método se basa en los **siguientes factores**:

Exactitud, es decir, precisión.

Eficiencia en el cálculo.

Complejidad del método.

Robustez.

Facilidad de implementación.

De los métodos que existen a**lgunos son específicos para funciones continuas, otros para funciones discretas, aunque también existen métodos generales.**

Si bien en la mayoría de los modelos se usan rutinas que están disponibles en bibliotecas o que se construye mediante el uso de lenguajes para la simulación, **no siempre es posible contar con ellas en algunas aplicaciones o lenguajes y por tanto, se debe hacer uso de estos métodos e implementar la rutina correspondiente.**

Los métodos se van a estudiar para la generación de variables continuas.

6.3. Método de la transformada inversa

El método de la transformada inversa que se analizará a continuación, se usa para la generación de variables absolutamente continuas. Dada una variable aleatoria X, con una función de distribución $F(x)$, se pretende generar un número aleatorio uniforme r entre 0 y 1, para obtener la x que cumpla que $F(x) = r$.

Este método es aplicable a la distribución uniforme, la distribución exponencial, la distribución *Weibull* y otras.

Los pasos que se deben llevar a cabo en este método para una variable aleatoria X con función de distribución $F(x)$ (Banks., Carson y Nelson, 1996):

» Calcular $F(x)$.
» Establecer que $F(x) = r$ siendo una r variable aleatoria definida en el rango de X.
» Resolver la ecuación del paso 2. para X en términos de R. De forma que $X = F^{-1}(R)$
» Generar los números aleatorios uniformes que se necesiten de acuerdo con $X_i = F^{-1}(R_i), i = 1,2,3 \ldots.$

Distribución exponencial

Dada una variable aleatoria X con función de distribución exponencial, se deben realizar las siguientes acciones:

» $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0$
» $1 - e^{-\lambda X} = r$, con que $X \geq 0$
» $-\lambda X = \ln(1-r) => X = -\frac{\ln(1-r)}{\lambda}\ de\ forma\ equivalente\ se\ usa\ X = -\frac{\ln(r)}{\lambda}\ dado\ que\ r\ y\ 1-r\ son\ uniformemente\ distribuidas.$

Distribución uniforme

Sea X con distribución uniforme $F(x)$ en un intervalo $[a, b]$.

» $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > a \end{cases}$

» $\frac{X-a}{b-a} = r$

» $X = a + (b-a)r$

Distribución *Weibull*

Se usa para representar el tiempo o tasa de fallos en máquinas o componentes electrónicos.

» $F(x) = 1 - e^{-(x/\alpha)^{\beta}}$

» $1 - e^{-(X/\alpha)^{\beta}} = r$

» $X = \alpha[-\ln(1-r)]^{1/\beta}$

6.4. Método de composición

Este método para la generación de variables continuas se caracteriza porque la función de distribución se puede definir como suma de otras funciones de distribución de la siguiente manera:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x), donde\ p_i \geq 0\ y \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Este método **solo se puede aplicar** si la función de densidad se puede expresar como suma ponderada de otras funciones de densidad como se muestra a continuación

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(x), donde\ p_i \geq 0\ y \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Los pasos seguir son los siguientes:

» Generar un índice I tal que $P(I = i) = p_i$.
» Generar una variable aleatoria X con función de distribución F_I

Ejemplo: La función de distribución de una variable aleatoria está definida como suma de funciones de distribución continuas, de la siguiente forma:

$$F(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + \frac{e^x - 1}{2(e-1)}, 0 \le x \le 1$$

Las funciones de las que está compuesta esta función son:

$$F_1(x) = x^2 \; con \; probabilidad \; p_1 = \frac{1}{4}$$

$$F_2(x) = x^3 \; con \; probabilidad \; p_2 = \frac{1}{4}$$

$$F_3(x) = \frac{e^x - 1}{(e-1)} \; con \; probabilidad \; p_3 = \frac{1}{2}$$

Se genera $U_1, U_2 \sim U(0,1)$;

Si $U_1 < \frac{1}{4}$, se invierte $F_1(x) = U_2$ y $X = \sqrt{U_2}$

Si no, si $U_1 < \frac{1}{2}$, se invierte $F_2(x) = U_2$ y $X = \sqrt[3]{U_2}$

Y si no se invierte $F_3(x) = U_2$ y $X = \ln(1 + (e-1)\, U_2)$

6.5. Método de convolución

Este método también genera variables aleatorias continuas y en este caso X se obtiene a partir de la suma de variables aleatorias independientes que son más fáciles de calcular. Sean $Y y\ Z$ variables aleatorias independientes continuas con función de densida $f_Y\,(y)$ y $f_Z(z)$. Entonces se calcula X, como suma de ellas con función de densidad:

$$f_X\,(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Z\,(x-y)\,f_Y\,(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y\,(x-z)\,f_Z(z)dz$$

Ecuación 3. Función de distribución

Ejemplo: Sean $Y y\ Z$ variables independientes exponencialmente distribuidas con función de densidad $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, con $\alpha > 0$, entonces la función de densidad de $X = Y + Z$ es

$$f_X\,(x) = \int_0^x f_Z\,(x-y)\,f_Y\,(y)dy = \int_0^x \alpha e^{-\alpha(x-y)}\alpha e^{-\alpha y}dy = \int_0^x \alpha^2 e^{-\alpha x} = \alpha^2 z e^{-\alpha x}$$

6.6. Método de aceptación-rechazo

E**s un método que se puede usar para la generación de variables absolutamente continuas uniformemente distribuidas en un intervalo.** Cuenta con dos formas una más sencilla que la otra y que será la que se tratará en este tema por su uso más generalizado.

El método de aceptación-rechazo se usará si existe otra función de densidad $g(x)$ tal que $cg(x)$ supere a la función de densidad $f(x)$ para todos los valores de x. Los pasos a seguir serán:

» Generar x con la densidad $g(x)$.
» Generar y uniforme en $[0, cg(x)]$
» Si $y\ \leq f(x)$, se devuelve x y termina. Si no, se repite desde el paso 1.

Ejemplo

Sea $f(x) = 1 + 2x - 2x^2$, si $0 \leq x \leq 1$ y $f(x) = 0$ en otro caso.

Para generar los valores aleatorios por aceptación y rechazo, se debe calcular primero la función que supera a la función de densidad.

* Para ello se calcula el máximo de $f(x)$

$f'(x) = 2 - 4x = 0 => x = 1/2 \; f''(1/2) = -4, luego\ es\ un\ máximo$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3/2 => c = 3/2$

Para generar los valores del paso 1 se puede usar en este caso la transformada inversa para una distribución uniforme donde $a = 0, b = 1$.

Se calculan los valores $r_0 = 0{,}25$ y $r_1 = 0{,}1$ y se realizan las etapas correspondientes con $c = 3/2$.

Paso 1. $x_0 = a + r_0(b - a) = 0{,}25$

Paso 2. Se genera $y = cr_1 = \frac{3}{2}0{,}1 = 0{,}15$

Paso 3. $f(x_0) = f(0{,}25) = 1{,}375$

Paso 4. $0{,}15 \leq 1{,}375$ Así que se acepta $0{,}25$ como valor de la variable aleatoria. Si la y no hubiese sido menor o igual que $f(x_0)$, se habría rechazado x_0 y se tendría que repetir el proceso

Este método se puede aplicar para generar variables aleatorias para la distribución de *Poisson* o distribuciones gamma.

6.7. Referencias bibliográficas

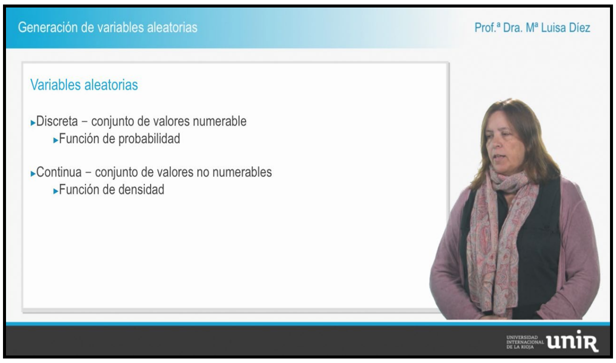
Banks, J., Carson, J. S., y Nelson, B. L. (1996). *Discrete-Event System Simulation*. (2a ed.). New Jersey: Prentice Hall.

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

Generación de variables aleatorias

En la siguiente lección magistral trataremos la generación de variables aleatorias considerando aspectos como, por ejemplo, las funciones de distribución.



Accede a la lección magistral a través del aula virtual

No dejes de leer…

Generation Random Variates

Capítulo en el que se presentan distintos métodos de generación de variables aleatorias con ejemplos ilustrativos.

Accede al capítulo a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:
http://web.ics.purdue.edu/~hwan/IE680/Lectures/Chap08Slides.pdf

Ejemplos resueltos de generadores de variables continuas

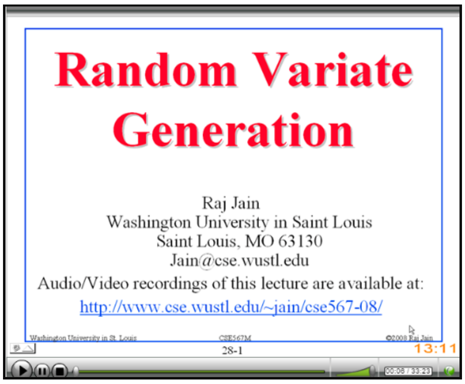
Lista de ejemplos resueltos en los que se aplican distintos métodos de generación de variables aleatorias continuas.

Accede al artículo a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:
http://148.204.211.134/polilibros/Portal/Polilibros/P_terminados/SimSist/doc/SIMULACI-N-142.htm

No dejes de ver…

Random Variate Generation

Vídeo sobre métodos de generación de variables aleatorias.



Accede al vídeo a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:
http://www.cse.wustl.edu/~jain/cse567-08/ftp/k_28rvg/k_28rvg.html

+ Información

A fondo

Ampliación de modelos de investigación operativa

Página de modelos de investigación operativa con un tema de métodos generales de generación de variables aleatorias.

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web: https://webs.um.es/mpulido/miwiki/doku.php?id=amio

Generación de variables aleatorias

Presentación de métodos de generación de variables aleatorias para la simulación.

Accede a la presentación desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web: https://prezi.com/zpblkifkvgp8/generacion-de-variables-aleatorias/

Bibliografía

Banks, J., Carson, J.S. y Nelson, BL. (1996). *Discrete-Event System Simulation*. (2a ed.). New Jersey: Prentice Hall.

Barceló, J. (1996). *Simulación de sistemas discretos*. Madrid: Isdefe.

Fishman, G. S. (1973). *Concepts and Methods in Discrete Event Digital Simulation*. Nueva York: John Wiley & Sons Inc.

Fishman, G. S. (2001). *Discrete-Event Simulation*. Nueva York: Springer. Recuperado de http://link.springer.com/10.1007/978-1-4757-3552-9

García-Dunna, E. (2012). *Simulación y análisis de sistemas con promodel*. Massachusetts: Addison-Wesley.

Test

1. En el método de la transformada inversa:

A. Se generan los valores de la función de distribución de forma uniforme entre 0 y 1.

B. Se generan los valores de la función de densidad de forma uniforme entre 0 y 1.

C. Se generan los valores de la función de distribución mediante una distribución exponencial.

D. Ninguna es verdadera.

2. Para aplicar el método de la transforma inversa:

A. La función de distribución no puede tomar valores iguales a 0.

B. La función de distribución debe tomar valores negativos.

C. La función de distribución debe tener inversa.

D. Ninguna de las anteriores es verdadera.

3. El método de composición:

A. Solo se puede aplicar si la función de distribución es suma ponderada de funciones de densidad.

B. Solo se puede aplicar si la función de densidad es suma ponderada de funciones de densidad.

C. Solo se puede aplicar si la función de distribución es suma ponderada de funciones de distribución.

D. Ninguna de las anteriores es verdadera.

4. Para aplicar el método de aceptación-rechazo:

A. La función de densidad tiene que ser creciente.

B. La función densidad debe tener un máximo.

C. La función de densidad no puede tomar valores menores que 1.

D. Ninguna de las anteriores es verdadera.

5. El método de aceptación-rechazo:

A. Acepta los valores para los que la función de densidad es menor o igual que el valor aleatorio generado en el intervalo $[0, cg(x)]$.

B. Acepta los valores para los que la función de densidad es menor que el valor aleatorio generado en el intervalo $[0, cg(x)]$.

C. Acepta los valores para los que la función de densidad es mayor o igual que el valor aleatorio generado en el intervalo $[0, cg(x)]$.

D. Acepta los valores para los que la función de densidad es mayor que el valor aleatorio generado en el intervalo $[0, cg(x)]$.