Tema 7
Sistemas reales
Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos

Dra. Neus Garrido Sàez

Máster en Ingeniería Matemática y Computación
Escuela Superior en Ingeniería y Tecnología

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

Contenido

1

Introducción

Sistemas dinámicos discretos reales

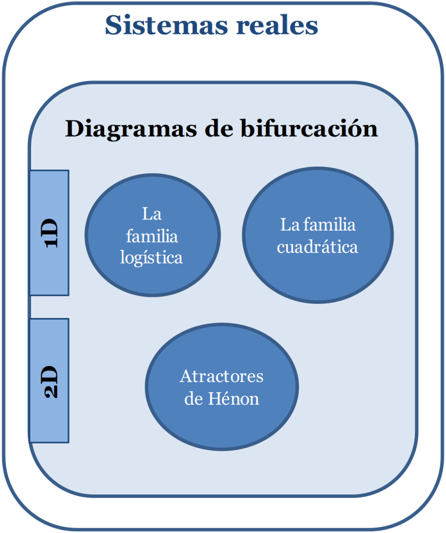
- La variable es real
- Se representan por $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
  - $n = 1 \Rightarrow$ **Tema 6** (órbitas, puntos fijos, puntos periódicos,...)
  - $n = 2 \Rightarrow$ **Tema 7**

Familias de funciones

- Conjunto de funciones sujetos a parámetros
- Los valores de los parámetros determinan distintos comportamientos dinámicos
- Puntos de bifurcación: valores del parámetro en los que se modifica el comportamiento dinámico de la función

$$\Downarrow$$

Diagramas de bifurcación


Sistemas reales
Diagramas de bifurcación
1D
2D
La familia logística
La familia cuadrática
Atractores de Hénon

2

Diagramas de bifurcación

Ejemplo 1. Estudia la dinámica de los puntos fijos de $f(x) = x^3$

- Puntos fijos:

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^* = \{-1, 0, 1\}$$

- Clasificación: $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow \begin{cases} f'(-1) = f'(1) = 3 > 1 & \text{Repulsores} \\ f'(0) = 0 < 1 & \text{Atractor} \end{cases}$

Ejemplo 1. Estudia la dinámica de los puntos fijos de $f(x) = x^3$

- Puntos fijos:

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^* = \{-1, 0, 1\}$$

- Clasificación: $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow \begin{cases} f'(-1) = f'(1) = 3 > 1 & \text{Repulsores} \\ f'(0) = 0 < 1 & \text{Atractor} \end{cases}$

Ejemplo 2. Capital e interés simple

Supongamos que ingresamos una cantidad de dinero x_0 en un depósito a plazo fijo que nos ofrece un tipo de interés anual λ. Siendo x_n el capital disponible al inicio del año n, entonces:

$$x_{n+1} = x_n + \lambda x_n = (1 + \lambda)x_n \quad \Rightarrow \quad f(x) = (1 + \lambda)x$$

- Puntos fijos: $f(x) = x \Leftrightarrow (1 + \lambda)x = x \Leftrightarrow x^* = 0$
- Clasificación: $f'(x) = 1 + \lambda \Rightarrow f'(0) = 1 + \lambda$

$$\begin{aligned} |f'(0)| < 1 \text{ si } \lambda \in (-2, 0) \quad &\Rightarrow \quad x^* = 0 \text{ atractor} \\ |f'(0)| > 1 \text{ si } \lambda \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \quad &\Rightarrow \quad x^* = 0 \text{ repulsor} \\ |f'(0)| = 1 \text{ si } \lambda = \{0, -2\} \quad &\Rightarrow \quad x^* = 0 \text{ neutro} \end{aligned}$$

Diagramas de bifurcación

- Familia de sistemas dinámicos:

$$x_{n+1} = f(x_n, \lambda) = f_\lambda(x_n)$$

Puntos de bifurcación

- Valores de λ en los que se producen cambios en el comportamiento dinámico del sistema
- Los puntos en los que se producen las bifurcaciones satisfacen:
  (i) $f_\lambda(x^*) = x^*$
  (ii) $|f'_\lambda(x^*)| = 1$

Diagramas de bifurcación

Representan el comportamiento a largo plazo del sistema $x_{n+1} = f_\lambda(x_n)$ en función de λ.

3

Dinámica real 1D

Contenidos

Modelo de crecimiento de la población: función logística

$$x_{n+1} = kx_n\left(1 - \frac{x_n}{M}\right)$$

- $x_n \Rightarrow$ población al final del año n
- $M > 0 \Rightarrow$ población máxima
- $k > 0 \Rightarrow$ constante de crecimiento exponencial de la población

Por simplicidad trabajaremos con valores relativos: $0 \leq x_n \leq 1$. Entonces:

$$x_{n+1} = \lambda x_n\left(1 - x_n\right), \qquad \lambda > 0$$

Familia logística

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x), \qquad \lambda > 0$$

Modelo de crecimiento de la población: familia logística

Familia logística

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1-x), \qquad \lambda > 0$$

- Puntos fijos:

$$f_\lambda(x) = x \Leftrightarrow \lambda x(1-x) = x \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x_1^* & = & 0 \\ x_2^* & = & \frac{\lambda-1}{\lambda} \end{array} \right.$$

Familia logística

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1-x), \qquad \lambda > 0$$

- Puntos fijos:

$$f_\lambda(x) = x \Leftrightarrow \lambda x(1-x) = x \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x_1^* & = & 0 \\ x_2^* & = & \frac{\lambda-1}{\lambda} \end{array} \right.$$

- Dinámica de los puntos fijos:

$$f'_\lambda(x) = \lambda(1-2x) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} |f'_\lambda(x_1^*)| & = & \lambda \\ |f'_\lambda(x_2^*)| & = & |2-\lambda| \end{array} \right.$$

Familia logística

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1-x), \qquad \lambda > 0$$

- Puntos fijos:

$$f_\lambda(x) = x \Leftrightarrow \lambda x(1-x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* &= 0 \\ x_2^* &= \frac{\lambda-1}{\lambda} \end{cases}$$

- Dinámica de los puntos fijos:

$$f'_\lambda(x) = \lambda(1-2x) \Rightarrow \begin{cases} |f'_\lambda(x_1^*)| &= \lambda \\ |f'_\lambda(x_2^*)| &= |2-\lambda| \end{cases}$$

$\boxed{x_1^*}$

  - Atractor si $\lambda \in (0,1)$
  - Repulsor si $\lambda > 1$
  - Neutro si $\lambda = 1$

Familia logística

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1-x), \qquad \lambda > 0$$

- Puntos fijos:

$$f_\lambda(x) = x \Leftrightarrow \lambda x(1-x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* &= 0 \\ x_2^* &= \frac{\lambda-1}{\lambda} \end{cases}$$

- Dinámica de los puntos fijos:

$$f'_\lambda(x) = \lambda(1-2x) \Rightarrow \begin{cases} |f'_\lambda(x_1^*)| &= \lambda \\ |f'_\lambda(x_2^*)| &= |2-\lambda| \end{cases}$$

$\boxed{x_1^*}$

- Atractor si $\lambda \in (0,1)$
- Repulsor si $\lambda > 1$
- Neutro si $\lambda = 1$

$\boxed{x_2^*}$

- Atractor si $\lambda \in (1,3)$
- Repulsor si $\lambda \in (0,1) \cup (3,+\infty)$
- Neutro si $\lambda = \{1,3\}$

Familia logística

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1-x), \qquad \lambda > 0$$

- Puntos 2-periódicos:

$$f_\lambda^2(x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* &= 0 \\ x_2^* &= \dfrac{\lambda - 1}{\lambda} \\ x_1^P &= \dfrac{\lambda + 1 + \lambda^2\sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2\lambda} \\ x_2^P &= \dfrac{\lambda + 1 - \lambda^2\sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2\lambda} \end{cases}$$

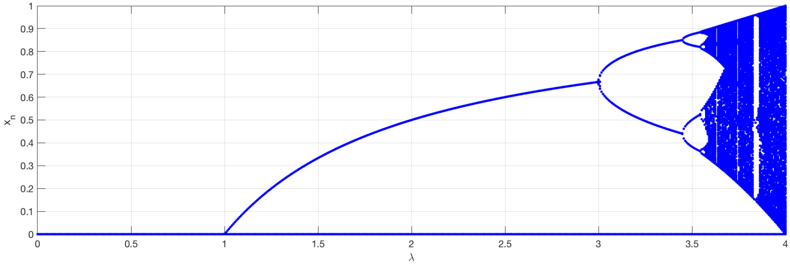


Figura: Diagrama de bifurcación de la función logística

$\boxed{x_1^*}$

- Atractor si $\lambda \in (0, 1)$
- Repulsor si $\lambda > 1$
- Neutro si $\lambda = 1$

$\boxed{x_2^*}$

- Atractor si $\lambda \in (1, 3)$
- Repulsor si $\lambda \in (0, 1) \cup (3, +\infty)$
- Neutro si $\lambda = \{1, 3\}$

Modelo de crecimiento de la población: función logística

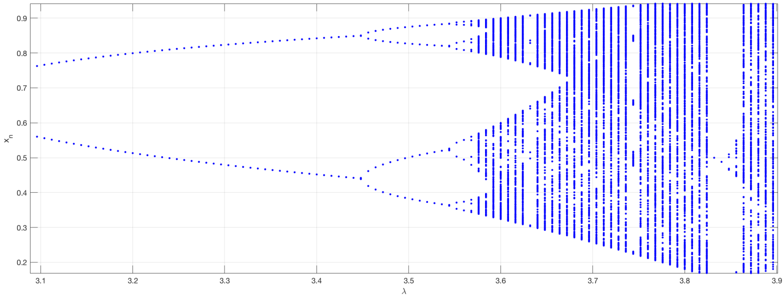
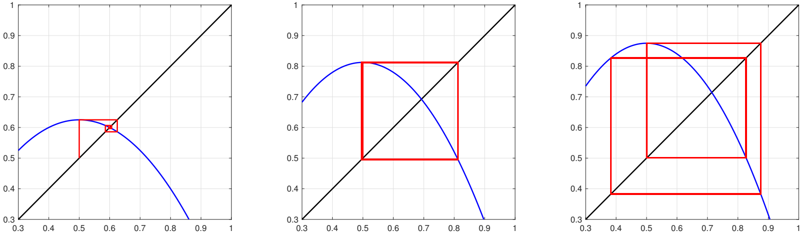


Figura: Diagrama de bifurcación de la función logística (ampliación)

- $\lambda = 3 \Rightarrow$ órbita de periodo 2
- $\lambda \approx 3.45 \Rightarrow$ órbita de periodo 4
- $\lambda \approx 3.54 \Rightarrow$ órbita de periodo 8
- $\cdots$



(a) $\lambda = 2.5$ (b) $\lambda = 3.25$ (c) $\lambda = 3.5$

Figura: Órbitas de $x_0 = 0.5$. Función logística $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ para distintos valores de λ

Contenidos

Familia cuadrática

$$f_\lambda(x) = x^2 + \lambda$$

Familia cuadrática

$$f_\lambda(x) = x^2 + \lambda$$

- Puntos fijos:

$$x^* = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda}}{2}$$

Familia cuadrática

$$f_\lambda(x) = x^2 + \lambda$$

- Puntos fijos:

$$x^* = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\lambda}}{2}$$

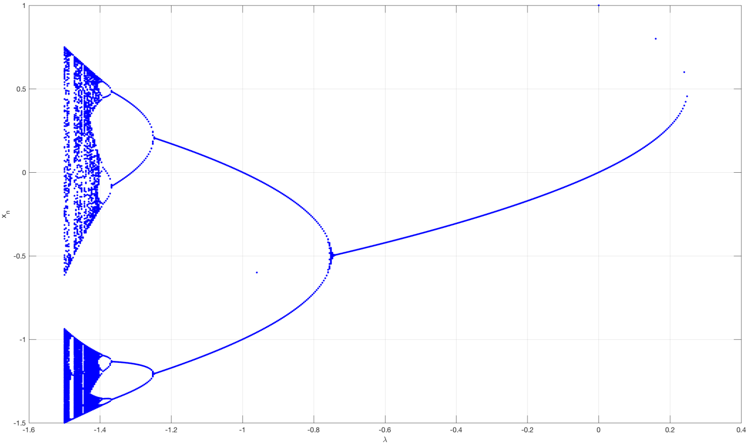
- Puntos de bifurcación:

$$f'_\lambda(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad f'_\lambda(x^*) = 1 \pm \sqrt{1-4\lambda}$$

$$|f'_\lambda(x^*)| = 1 \Leftrightarrow \lambda = \left\{-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right\}$$

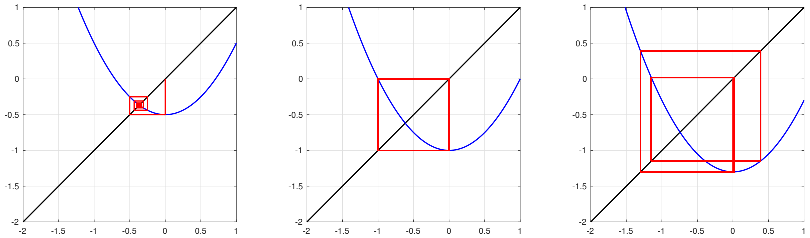
Familia cuadrática

$$f_\lambda(x) = x^2 + \lambda$$



Familia cuadrática

$$f_\lambda(x) = x^2 + \lambda$$



(a) $\lambda = -0.5$ (b) $\lambda = -1$ (c) $\lambda = -1.3$

Figura: Órbitas de $x_0 = 0$. Familia cuadrática para distintos valores de λ

4

Dinámica real 2D

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

- Punto fijo de F: $(x, y)^* \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(x, y)^* = (x, y)^*$
- Dinámica de los puntos fijos:

$$J_F(x, y)^* \quad \Rightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2$$

  - $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1 \Rightarrow (x, y)^*$ atractor
  - $|\lambda_1|, |\lambda_2| > 1 \Rightarrow (x, y)^*$ repulsor
  - $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| > 1 \Rightarrow (x, y)^*$ punto de silla

Contenidos

Atractores de Hénon

$$\boxed{H_{a,b}(x,y) = (1 + y - ax^2, bx)}$$

$$\boxed{H_{a,b}(x,y) = (1+y-ax^2, bx)}$$

- Puntos fijos: $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1+y-ax^2 \\ y & = & bx \end{array} \right.$

$$\boxed{H_{a,b}(x,y) = (1 + y - ax^2, bx)}$$

- Puntos fijos: $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 + y - ax^2 \\ y & = & bx \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \qquad (x,y)_1^* = \left(\frac{b - 1 + \sqrt{4a + (b-1)^2}}{2a}, \quad \frac{b\left(b - 1 + \sqrt{4a + (b-1)^2}\right)}{2a} \right)$$

$$(x,y)_2^* = \left(\frac{b - 1 - \sqrt{4a + (b-1)^2}}{2a}, \quad \frac{b\left(b - 1 - \sqrt{4a + (b-1)^2}\right)}{2a} \right)$$

$$\boxed{H_{a,b}(x,y) = (1 + y - ax^2, bx)}$$

- Puntos fijos: $\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 1 + y - ax^2 \\ y &=& bx \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \qquad (x,y)_1^* = \left(\frac{b - 1 + \sqrt{4a + (b-1)^2}}{2a}, \quad \frac{b\left(b - 1 + \sqrt{4a + (b-1)^2}\right)}{2a} \right)$$

$$(x,y)_2^* = \left(\frac{b - 1 - \sqrt{4a + (b-1)^2}}{2a}, \quad \frac{b\left(b - 1 - \sqrt{4a + (b-1)^2}\right)}{2a} \right)$$

- Dinámica de los puntos fijos:

$$J_H(x,y) = \begin{bmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -ax + \sqrt{ax^2 + b}, \quad \lambda_2 = -ax - \sqrt{ax^2 + b}$$

$$\boxed{H_{a,b}(x,y) = (1 + y - ax^2, bx)}$$

- Puntos fijos: $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 + y - ax^2 \\ y & = & bx \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \qquad (x,y)_1^* = \left(\frac{b - 1 + \sqrt{4a + (b-1)^2}}{2a}, \quad \frac{b\left(b - 1 + \sqrt{4a + (b-1)^2}\right)}{2a} \right)$$

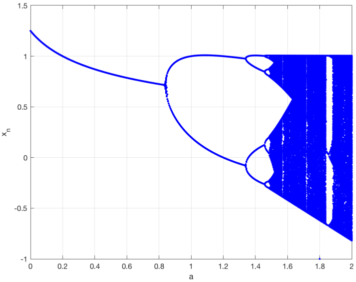
$$(x,y)_2^* = \left(\frac{b - 1 - \sqrt{4a + (b-1)^2}}{2a}, \quad \frac{b\left(b - 1 - \sqrt{4a + (b-1)^2}\right)}{2a} \right)$$

- Dinámica de los puntos fijos:

$$J_H(x,y) = \begin{bmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -ax + \sqrt{ax^2 + b}, \quad \lambda_2 = -ax - \sqrt{ax^2 + b}$$

  - $(x,y)_1^*$ punto de silla
  - $(x,y)_2^*$ atractor hasta un determinado valor

$$\boxed{H_{a,b}(x,y) = (1 + y - ax^2, bx)}$$



(a) $H_{a,0.2}$ (b) $H_{a,0.4}$

Figura: Diagramas de bifurcación de la primera coordenada del sistema discreto

- Lección magistral: Función logística $\Rightarrow$ Aula Virtual

...Y por supuesto:

TEST DE APRENDIZAJE!!

unir

LA UNIVERSIDAD EN INTERNET