Transformación de señales

TEMA 3

Esquema

Transformación de señales

	Tiempo continuo	Tiempo discreto
Variable independiente	$x(at+b) = x\left(a\left(t+\frac{b}{a}\right)\right)$	diezmado interpolación
Variable dependiente	$y(t) = Ax(t) + B$	
	integración derivación	diferenciación acumulación

Ideas clave

3.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

En este tema vamos a estudiar un conjunto de transformaciones básicas sobre señales. Para ello aprenderemos a describir analítica y gráficamente la transformación que experimenta una señal al aplicarle una operación matemática. También aprenderemos a relacionar la transformación analítica con su correspondiente transformación gráfica.

3.2. Transformación de señales de tiempo continuo

En esta sección estudiaremos cuál es el resultado de aplicar transformaciones sobre la variable independiente t y sobre la variable dependiente $x(t)$, es decir, sobre la función de modela la señal. La combinación de estas transformaciones permite obtener transformaciones más complejas.

Desplazamiento en el tiempo

El desplazamiento en el tiempo se lleva a cabo mediante un cambio en la variable independiente. Aunque habitualmente la variable independiente es el tiempo t, la variable independiente puede representar otra magnitud, como por ejemplo, el espacio.

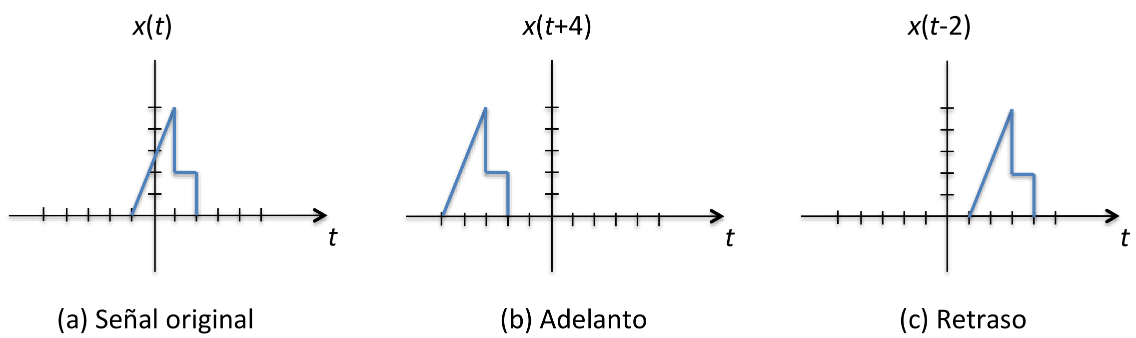


Figura 1: desplazamiento en el tiempo

Dada una señal $x(t)$, su desplazamiento en el tiempo viene dado por la función $x(t+t_0)$, donde t_0 es una constante que indica el **adelanto** a aplicar a la señal. Como muestra la figura 1 (b), cuando $t_0>0$ estamos adelantando la señal, es decir, desplazándola hacía la izquierda. La figura 1(c) muestra que cuando $t_0<0$ estamos retrasando la señal.

El retraso es una transformación habitual que sufren las señales dependiendo de dónde se miden. Por ejemplo, si la señal de la figura 1 (a) es una señal de audio y teniendo en cuenta que el audio se propaga a 330m/s a una distancia de 1300 metros el retraso en la propagación hará que la señal tenga la forma de la Figura 1 (c).

» **Ejemplo 1**:

Si la señal de la figura 1 (a) viene dada por la siguiente formulación analítica:

$$x(t) = \begin{cases} 2.5(t+1), & -1 < t < 1 \\ 2, & 1 < t < 2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Calcular la formulación de la señal tras un adelanto de t_0=4. Para ello reemplazamos en $x(t)$ cada ocurrencia de t por t+4 y simplificamos. Es decir:

$$x(t+4) = \begin{cases} 2.5(t+5), & -5 < t < -3 \\ 2, & -3 < t < -2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Escalado en el tiempo

Dada una señal $x(t)$, su forma escala en el tiempo es $x(at)$, donde a es una constante que indica el **factor de compresión**. Como muestra la figura 2 (b), cuando $|a|>1$ la señal se comprime.

La figura 2 (c) muestra que cuando $|a|<1$ la señal se expande. Un valor negativo de a invierte la señal en el tiempo, es decir, la refleja respecto al eje de coordenadas. Como muestra la figura 2 (d), si a=-1 la señal únicamente se invierte; si $a\neq 1$ la señal además se escala.

De nuevo, para obtener la formulación analítica de $x(at)$ reemplazamos en $x(t)$ cada ocurrencia de t por at.

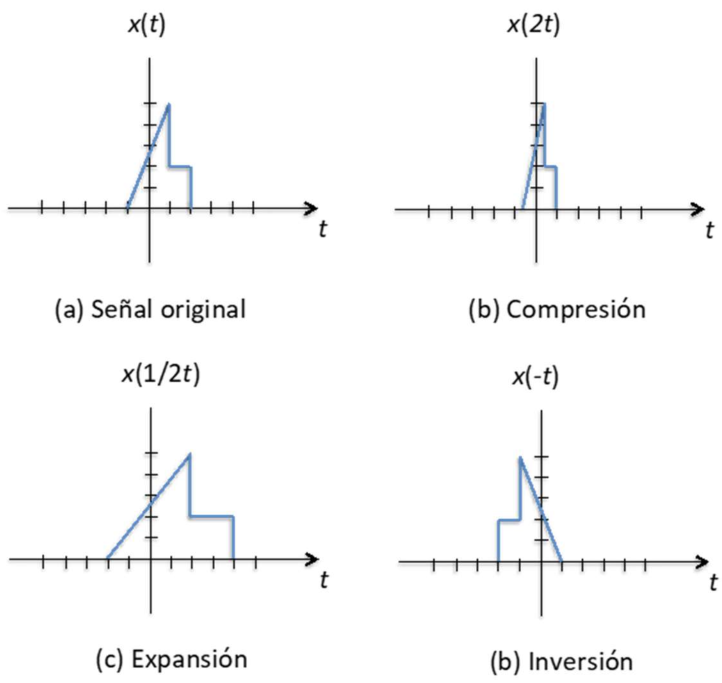


Figura 2: escalado en el tiempo

Transformación lineal de la variable independiente

Dada una señal $x(t)$, la transformación lineal $at+b$ de su variable independiente se puede factorizar como:

$$x(at+b) = x\left(a\left(t+\frac{b}{a}\right)\right)$$

Donde:

» a es el factor de escalado; si a es negativo se produce una inversión temporal.
» $t_0=b/a$ es el adelanto temporal de la señal. Si t_0 es positivo la señal se adelanta y si no se retrasa.

Esta observación da lugar a un segundo método para obtener una interpretación gráfica de los cambios que experimenta una señal a partir de su variable independiente factorizada.

» **Ejemplo 2**:

Dada la señal de la figura 3 (a), obtener $x(2t\text{-}6)$.

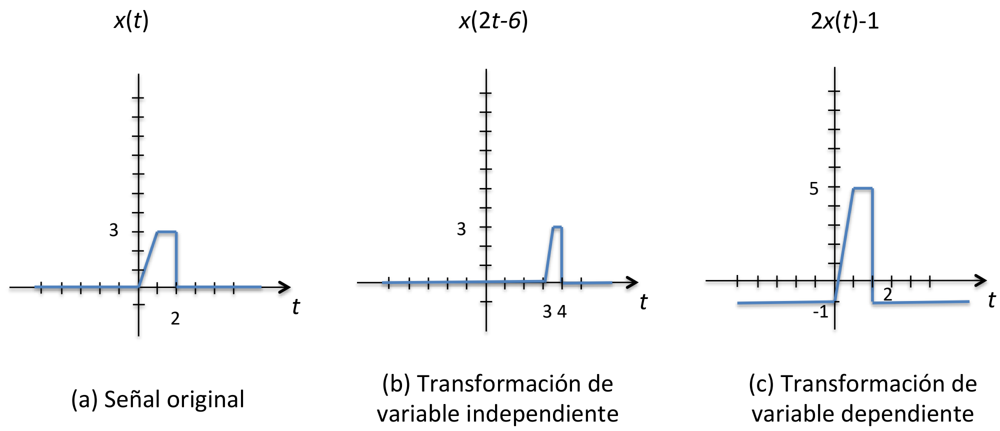


Figura 3: ejemplo de transformación

La señal $x(t)$ está definida como:

$$x(t) = \begin{cases} 3t, & 0 < t < 1 \\ 3, & 1 < t < 2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \qquad (1)$$

» **Método 1: reemplazo**. Reemplazando en $x(t)$ cada ocurrencia de t por $2t$-6 y simplificando tenemos:

$$x(2t-6) = \begin{cases} 6t - 18, & 3 < t < 3.5 \\ 3, & 3.5 < t < 4 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

» **Método 2: factorización**. Factorizando la transformación lineal como $x(2(t\text{-}3))$, el factor de compresión es a=2 y el adelanto es b=3.

La figura 3 (b) muestra el resultado de aplicar ambos métodos.

Observar que la transformación de variable independiente no modifica la amplitud solo desplaza y escala la función en el eje de la variable independiente.

Escalado en amplitud

Mientras que las transformaciones de la variable independiente t modifica la señal en el tiempo, la modificación de la variable dependiente $x(t)$ modifica la señal en amplitud.

Podemos modificar la amplitud de una señal $x(t)$ multiplicándola por un factor de escalado A de la forma:

$$y(t) = Ax(t)$$

Cuando $A>1$ estamos ampliando los valores de la señal en el eje de coordenadas, cuando $1>A>0$ estamos reduciendo la señal, y cuando A es negativo estamos reflejando la señal respecto al eje horizontal.

Transformación lineal de la variable dependiente

De forma general, podemos escribir una transformación lineal de la variable dependiente de la señal como:

$$y(t) = Ax(t) + B$$

Donde A es el factor de escalado del valor de la señal en el eje de coordenadas y B es el desplazamiento de la señal en el eje de coordenadas.

Observar que en la variable dependiente los coeficientes de escalado y escalado se comportan al revés que con la variable independiente. Un $B>0$ desplaza la señal en el sentido positivo (mientras que un $b>0$ desplaza la señal en el sentido negativo). Un $A>1$ expande la señal (mientras que un $a>1$ comprime la señal).

» **Ejemplo 3**:

Dada la señal de la figura 3 (a), obtener $2x(t)$-1.

- **Método 1: factorización**. Dado que el factor de escalado es A=2 y el desplazamiento en el eje de coordenadas es B=-1, obtenemos la señal de la figura 3 (c).

- **Método 2: reemplazo**. Reemplazando en $y(t)$ cada ocurrencia de $x(t)$ por su valor de acuerdo a (1), y simplificando tenemos:

$$y(t) = 2x(t) - 1 = \begin{cases} 2(3t) - 1, & 0 < t < 1 \\ 2(3) - 1, & 1 < t < 2 \\ 2(0) - 1, & \text{resto} \end{cases} = \begin{cases} 6t - 1, & 0 < t < 1 \\ 5, & 1 < t < 2 \\ -1, & \text{resto} \end{cases}$$

Orden de transformaciones

El orden en que aplicamos las transformaciones afectan al resultado obtenido. En concreto tenemos 2 reglas para combinar transformaciones:

» **Regla 1**. Podemos ejecutar primero las transformaciones en la variable dependiente o independiente sin que el resultado final se vea afectado. Esto se debe a que los cambios en la variable dependiente afectan solo al eje de coordenadas y los cambios en la variable independiente afectan solo al eje de abscisas.

» **Regla 2**. Si tenemos un cambio sobre una coordenada que implique escalar y desplazar en una misma dimensión, primero debemos de ejecutar el escalado y luego el desplazamiento.

La regla 1 lo que nos dice es que hacer una transformación de variable dependiente y luego una de variable independiente, p.e.:

$$x(t) \xrightarrow{\text{escalar } A} Ax(t) \xrightarrow{\text{desplazar } t_0} Ax(t - t_0)$$

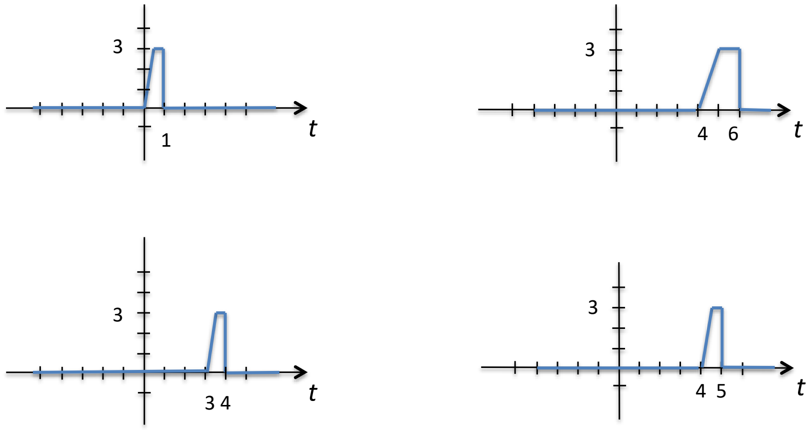
Produce el mismo resultado que si primero transformamos la variable independiente y luego la dependiente:

$$x(t) \xrightarrow{\text{desplazar } t_0} x(t - t_0) \xrightarrow{\text{escalar } A} Ax(t - t_0)$$

Respecto a la regla 2, en el 0 el cambio que realizamos es:

$$x(2t - 6) = x(2(t - 3))$$

Lo cual significa que primero debemos comprimir con factor a=2 y después retrasamos la señal en t_0=-3, tal como muestra la figura 4 (a). Si primero desplazáramos t_0=-3 y luego escaláramos a=2, obtendríamos el resultado de la figura 4 (b), el cual es incorrecto.



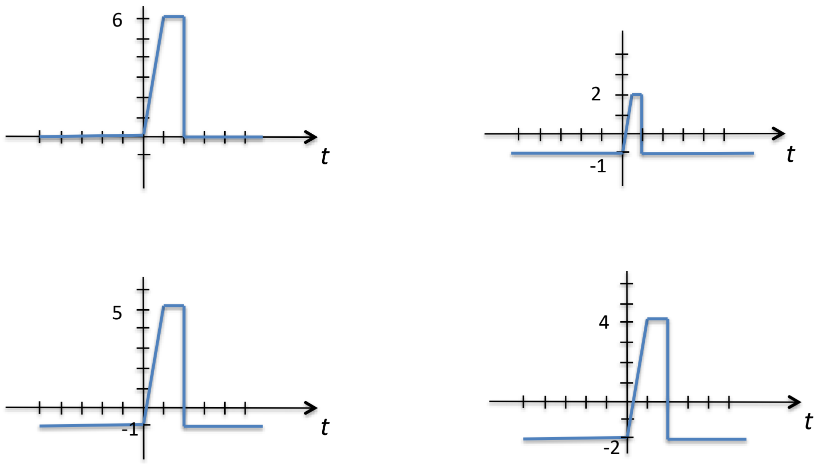
(a) Orden correcto (b) Orden incorrecto

Figura 4: orden de las transformaciones en variable independiente

En el ejemplo 2 el cambio que realizamos es:

$$y(t) = 2x(t) - 1$$

Lo cual significa que primero escalamos con factor A=2 y después desplazamos B=-1, tal como muestra la figura 5 (a). Si primero desplazáramos a B=-1 y luego escaláramos A=2, obtendríamos el resultado incorrecto de la figura 5 (b).



(a) Orden correcto (b) Orden incorrecto

Figura 5: orden de las transformaciones en variable dependiente

3.3. Transformación de señales de tiempo discreto

Los principios generales de transformación de señales de tiempo continuo aplican en el caso de la señales de tiempo discreto. En esta sección veremos que también existen algunas diferencias.

En concreto:

» Las transformaciones de escalado y desplazamiento de la variable dependiente son exactamente iguales en el caso discreto que en el continuo.
» La transformación de desplazamiento en tiempo discreto de la variable independiente es similar al caso continuo con la excepción de que el desplazamiento tiene que ser entero. Es decir, dada una señal $x[n]$ su desplazamiento en el tiempo viene dado por la función $x[n+n_0]$, donde n_0 es un entero. Si n_0 no fuese entero, el valor de $x[n+n_0]$ está indefinido.
» La transformación de escalado en el tiempo discreto de la variable independiente sigue los principios del caso continuo pero con dificultades añadidas en la compresión y expansión de la señal.

A continuación se detallan las dificultades del escalado en el caso discreto.

Comprensión en el tiempo

La compresión de tiempo discreto de la variable independiente de $x[n]$ viene dada por $x[kn]$ donde $|k|>1$ y k es un entero. Al igual que en el caso continuo la señal se comprime en el tiempo pero con un efecto añadido de **diezmado**, consistente en que se reduce el número de muestras de la señal.

La figura 6 (b) muestra la señal $x[2n]$ que comprime la señal $x[n]$ de la figura 6 (a), en la que asumimos que $x[n]$=0 fuera del intervalo [-2,3]. En este caso, al ser el factor de escalado k=2, elegimos solo las muestras pares y descartamos las impares.

Expansión en el tiempo

Dada la señal de tiempo discreto $x[n]$, su expansión en el tiempo viene dada por $x[n/k]$ donde $|k|>1$ y k es un entero. En este caso, el valor de la señal expandida $x[n/k]$ está indefinido cuando n/k no es entero. El valor de los valores indefinidos deben rellenarse con interpolación, de las cuales las más habituales son:

» **Interpolación de orden cero**. Como muestra la figura 6 (c), en este caso simplemente asignamos cero a las muestras indefinidas.
» **Interpolación de orden uno**. Como muestra la figura 6 (d), en este caso el valor de las muestras indefinidas se calcula como la media entre el anterior y el siguiente.

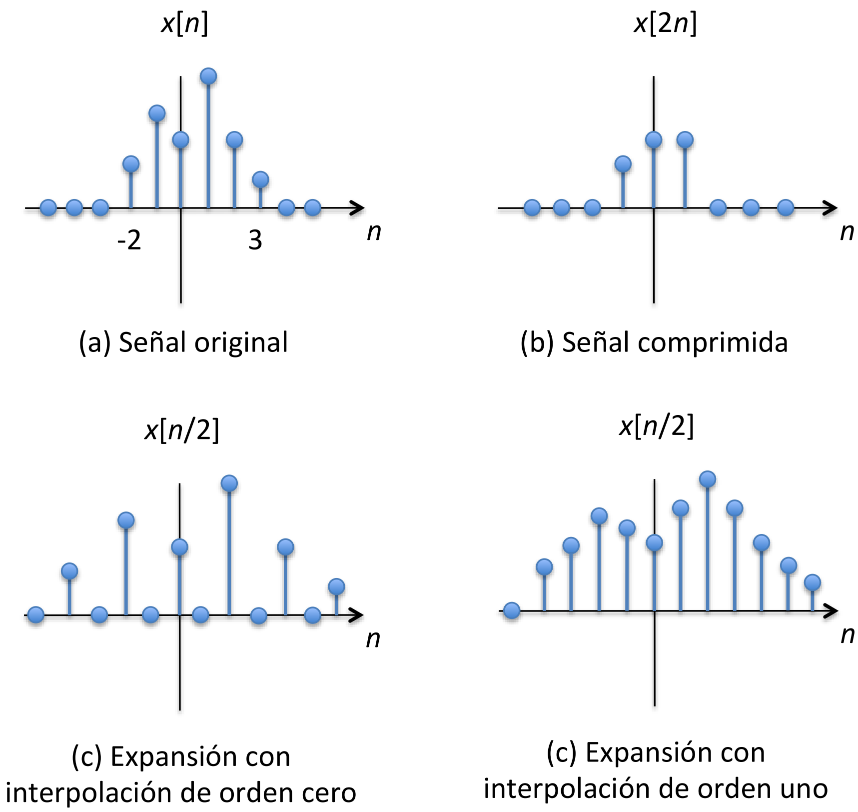


Figura 6: compresión y expansión de señales de tiempo discreto

3.4. Derivación e integración

Dos transformaciones habituales sobre una señal son su derivación y su integración. En el **tema 2** hemos visto relaciones entre señales de tiempo continuo como $\delta(t) = u'(t)$, o $r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau$.

La derivada de una función respecto al tiempo t indica su pendiente (es decir, su tasa de cambio) en ese instante de tiempo.

La integral es más complicada porque puede usarse con distintas finalidades. En concreto tiene al menos estas cuatro aplicaciones:

» **Antiderivada**. La integral es la operación inversa a la derivación. En este caso la integral se representa sin límites de integración. Por ejemplo:

$$\cos t = \int \sin t \ dt$$

» **Integral indefinida**. Es la antiderivada más una constante C. Se debe a que $x(t)$+C tiene cmo derivada $x'(t)$, independientemente del valor de la constante C. Por ello escribimos:

$$x(t) = \int x'(t)\, dt + C$$

» **Integral definida**. Es una integral tomada entre dos límites a, b. Es decir:

$$A = \int_a^b x(t)\, dt$$

Cuando a, b son constantes, también es constante A, que corresponde al área debajo de la función $x(t)$.

» **Integral de acumulación**. Corresponde al área acumulada debajo de la función $x(t)$ hasta el instante t. Es decir:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

Donde la variable de integración es τ. La variable t actúa como una constante que indica hasta donde integrar $x(\tau)$.

Derivación e integración simbólica en MatLab

Octave no tiene esta funcionalidad todavía implementada pero su versión comercial MatLab nos permite realizar derivación e integración simbólica de funciones. Vamos a ver cómo se hace.

Para ello, primero definimos una **variable simbólica**:

```
> t = sym('t');
```

Después una **función simbólica**:

```
> x = sin(t^2);
```

Y para derivar la función simbólica usamos diff:

```
> diff(x)
2*t*cos(t^2)
```

Análogamente, para integrar la función simbólica usamos int:

```
> int(x)
 (2^(1/2)*pi^(1/2)*fresnelS((2^(1/2)*t)/pi^(1/2)))/2
```

Donde fresnelS corresponde a la integral del seno de Fresnel:

$$fresnelS(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{\pi\tau^2}{2}\right) d\tau$$

3.5. Diferenciación y acumulación

En señales en tiempo discreto la operación que es análoga a la derivación es la **diferenciación** y la operación análoga a la integración es la **acumulación**. En esta sección vamos a ver la diferenciación y acumulación de señales de tiempo discreto.

Diferenciación de tiempo discreto

La **diferencia hacía adelante** de una señal de tiempo discreto $x[n]$ se define como:

$$\Delta[n] = x[n+1] - x[n]$$

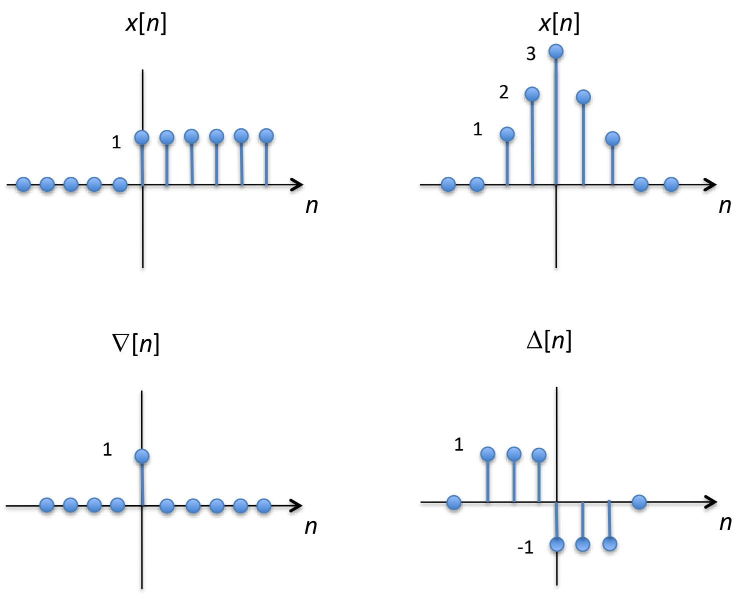
Análogamente, la **diferencia hacia atrás** se define como:

$$\nabla[n] = x[n] - x[n-1]$$

Observar que $\nabla[n]$ es una versión retrasada de $\Delta[n]$ en 1 unidad:

$$\nabla[n] = x[n] - x[n-1] = \Delta[n-1]$$

La figura 7 muestra dos señales de tiempo discreto y su diferenciación hacía adelante y hacía atrás. Podemos ver que la forma de las muestras de $\nabla[n]$ es similar al de la derivación en el caso continuo, ya que nos indica la pendiente de la señal. En el caso de la diferenciación hacía adelante $\Delta[n]$ la señal se retrasa en una unidad.



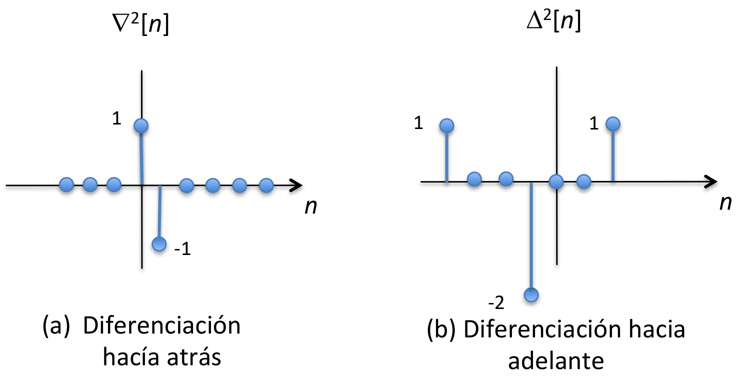


Figura 7: relación entre una señal de tiempo discreto y su diferenciación

El concepto de primera diferencia se puede extender fácilmente al de segunda diferencia como:

$$\Delta^2[n] = \Delta[n+1] - \Delta[n]$$
$$\nabla^2[n] = \nabla[n] - \nabla[n-1]$$

Observar en la figura 7 que la segunda diferenciación lo que nos dice son los lugares donde se producen cambios de pendiente. En el caso de la diferenciación hacía adelante se produce un pequeño adelanto debido a la forma en que se implementa la diferenciación.

Acumulación de tiempo discreto

La **acumulación** en señales de tiempo discreto es el equivalente a la integración en señales de tiempo continuo. La acumulación se define como:

$$h[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \qquad (2)$$

Acumulación y la primera diferencia hacia atrás son operaciones inversas. La figura 8 (b) muestra el resultado de diferenciar hacia atrás la señal $x[n]$ de la figura 8 (a). La figura 8 (c) muestra el resultado de aplicar (2) a $\nabla[n]$.

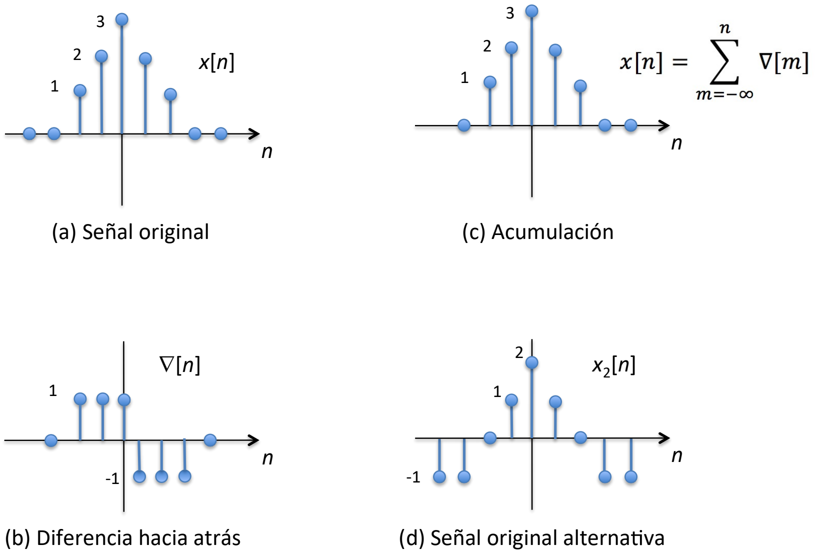


Figura 8: relación entre diferenciación y acumulación

Al igual que ocurría en la integral indefinida, la acumulación de una función no es única: múltiples funciones que difieren en una constante C tienen la misma diferencia hacía atrás, es decir:

$$x[n] = C + \sum_{m=-\infty}^{n} \nabla[m]$$

Por ejemplo, la señal $x_2[n]$ de la figura 8 (d) tiene la misma diferenciación y acumulación que la señal $x[n]$.

En el caso continuo la integral y la derivada relacionan el escalón y el impulso unitario.

En el caso discreto el escalón unitario es la acumulación del impulso unitario:

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[n]$$

Y el impulso unitario es la diferencia *hacía atrás* del escalón unitario:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

Análogamente, la rampa unitaria de tiempo discreto se define como la acumulación del escalón de tiempo discreto **retrasado en una unidad**:

$$r[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} u[m-1]$$

Y el impulso unitario se obtiene a partir de la primera diferencia **hacía adelante** de la rampa unitaria:

$$u[n] = r[n+1] - r[n]$$

Diferenciación y acumulación en Octave

En Octave podemos calcular la diferencia de una señal de tiempo discreto proporcionando a diff un vector.

Por ejemplo, podemos representar la secuencia de la figura 8 (a) como:

```
> x1= [0 0 1 2 3 2 1 0 0];
```

Y después calcular su diferencia como:

```
> delta = diff(x1)
delta =  0   1   1   1  -1  -1  -1   0
```

Observar que la función diff no dice nada respecto a la posición de las muestras en el eje de abscisas. Es decir, se puede interpretar como una diferencia hacía atrás (como en la figura 8 (a)), o bien como una diferencia hacía adelante (como en la figura 7 (b)) retrasando todas las muestras una unidad.

Análogamente podemos calcular la acumulación de esta señal usando cumsum:

```
> x2 = cumsum(delta)
x2 =    0   1   2   3   2   1   0   0
```

También podemos calcular la segunda diferencia de una señal usando diff(n,2). Esta operación es equivalente a ejecutar diff(diff(n)).

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

La exponencial compleja

En esta lección magistral vamos a interpretar la exponencial compleja.

Accede a la lección magistral a través del aula virtual.

No dejes de leer…

Escalado en el tiempo

Este artículo describe el escalado en el tiempo con ejercicios.

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://www.unet.edu.ve/aula10c/Asenales/Unid01/cuarto04.htm

No dejes de ver…

Decimación e interpolación

Este tutorial describe el problema del diezmado, expansión de señales discretas y su solución por interpolación.

Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://www.youtube.com/watch?v=HmDKRsQlarc

Operaciones básicas con señales: escalado temporal

En esta lección se describen las operaciones de escalado y desplazamiento sobre una variable dependiente.

Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://www.youtube.com/watch?v=hIWHRqrh1-4

+ Información

A fondo

Tratamiento digital de la señal: una introducción experimental

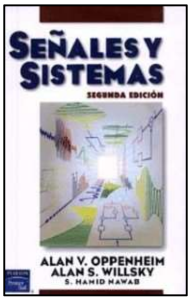
Mariño, J. B., Vallverdú, F., Rodríguez, J.A. y Moreno, A. (1999). *Tratamiento digital de la señal: una introducción experimental*. Barcelona: UPC.

En las páginas 17-26 se describen las transformaciones de variable independiente en el caso de tiempo discreto. Además, en las páginas 111-119 se describen el diezmado y la interpolación de secuencias.

Accede al libro desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://books.google.es/books?id=GOByyZIWjJYC&pg=PT20

Señales y sistemas

Oppenheim, A. V. (1998). *Señales y sistemas*. Méjico: Prentice Hall.



En las páginas 8-11 se dan ejemplos de transformación de la variable independiente.

Accede al libro desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://books.google.es/books?id=g2750K3PxRYC&pg=PA8

Bibliografía

Mariño, J. B. Rodríguez, J. A. y Vallverdú, F. (1999). *Tratamiento digital de la señal: una introducción experimental*. Barcelona: Universidad Politécnica de Cataluña.

Oppenheim, A. V., Willsky, A. S. y Hamid, S. (1998). *Señales y sistemas*. México: Pearson.

Test

1. ¿Qué hace la operación $x(t\text{-}2)$?

A. Desplaza la señal en la variable independiente.

B. Desplaza y escala la señal en la variable independiente.

C. Desplaza la señal en amplitud.

D. Desplaza y escala la señal en amplitud.

2. ¿Qué hace la operación $x[-n+2]$?

A. Desplaza la señal en la variable independiente.

B. Desplaza y escala la señal la variable independiente.

C. Desplaza la señal en amplitud.

D. Desplaza y escala la señal en amplitud.

3. ¿Qué hace la operación $2x[n]+1$?

A. Desplaza la señal en la variable independiente.

B. Desplaza y escala la señal la variable independiente.

C. Desplaza la señal en amplitud.

D. Desplaza y escala la señal en amplitud.

4. ¿Qué ocurre si hacemos $2\pi x[n]$?

A. Que obtenemos una señal periódica.

B. Que la señal se diezma.

C. Que la señal se amplía.

D. Que la señal queda indefinida.

5. ¿Qué ocurre si hacemos $x[2\pi n]$?

A. Que obtenemos una señal periódica.

B. Que la señal se diezma.

C. Que la señal se amplía.

D. Que la señal queda indefinida.

6. Dada la señal $x(t)$ definida en $-1<t<1$. ¿En qué intervalo está definida $x(t+3)$?

A. $-4<t<2$.

B. $-1<t<1$.

C. $2<t<4$.

D. Ninguno de las anteriores.

7. Si la función $\Pi(t)$ tiene altura $1/\tau$ y anchura τ, ¿qué altura y anchura tiene $\Pi(at)$?

A. a/τ y $a\tau$.

B. $1/\tau$ y τ.

C. τ/a y τ.

D. τ/a y $a\,\tau$.

8. Si la función $\Pi(t)$ tiene altura $1/\tau$ y anchura τ, ¿qué altura y anchura tiene $A\Pi(t)$?

A. A/τ y $A\,\tau$.

B. A/τ y τ.

C. $1/\tau$ y A/τ.

D. $A\tau$ y $1/\tau$.

9. ¿Cuál es el factor de escalado y desplazamiento de $x(3t+6)$?

A. Escalado 3, desplazamiento 6.

B. Escalado 3, desplazamiento 2.

C. Escalado 1, desplazamiento 2.

D. Escalado 1, desplazamiento 6.

10. Dado $x(t)=sin(t)$, ¿qué función alcanza un valor mayor en el eje de coordenadas «$2x(t)+1$» o «$x(4t)+1$»?

A. La primera.

B. La segunda.

C. Alcanzan la misma altura.

D. Depende de t.

