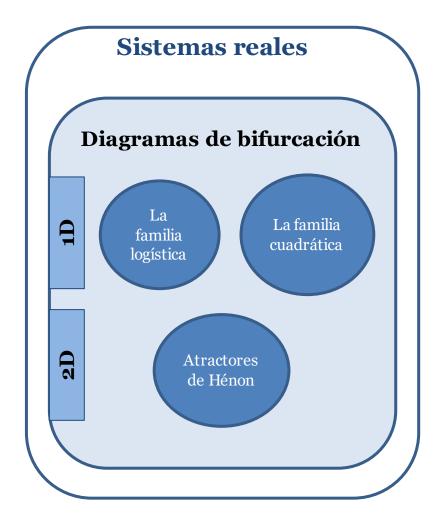
# Sistemas reales

- [7.1] ¿Cómo estudiar este tema?
- [7.2] Los sistemas reales
- [7.3] Diagrama de bifurcación
- [7.4] Dinámica real 1D
- [7.5] Dinámica real 2D
- [7.6] Referencias bibliográficas

## **Esquema**



## Ideas clave

## 7.1. ¿Cómo estudiar este tema?

#### Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

En este tema vamos a trabajar sobre sistemas dinámicos reales. Determinados conceptos del tema anterior serán de aplicación, dando lugar a un tema puramente práctico, en el que se analizarán algunos ejemplos y se propondrán otros para su estudio de una forma análoga a la que se ha hecho en estos apuntes.

Es por ello que para estudiar este tema se aconseja seguir los procedimientos que se indican en los ejemplos prácticos y trabajar sobre ellos para su posterior aplicación sobre otros ejemplos de la misma clase

#### 7.2. Los sistemas reales

Los sistemas dinámicos discretos reales son aquellos sistemas dinámicos en los que solo entra en juego la variable real. Estos sistemas se representan por  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ .

Para el caso n=1 vimos en el tema anterior una serie de definiciones asociadas: órbita, punto fijo, punto periódico... Estos conceptos tienen su equivalente para n dimensiones; en este tema se particularizará para n=2.

La complejidad que se introduce en este tema se basa en el concepto de familia. Se conoce como familia a un conjunto de funciones sujetos a parámetros. Podríamos hablar de familia lineal al conjunto de funciones  $f_{m,n}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  tales que  $f_{m,n}(x) = mx + n$ 

En función de los valores de los parámetros, el comportamiento dinámico de los sistemas puede variar, de forma que algunos puntos atractores pasen a ser repulsores, algunas órbitas periódicas dupliquen su período...

Los valores del parámetro en los que se modifica el comportamiento se denominan puntos de bifurcación, dando lugar a los diagramas de bifurcación que se verán en la siguiente sección.

La aplicación de estos conceptos se ilustrará con tres ejemplos al final del tema. En los dos primeros ejemplos solo habrá un parámetro que varíe y la función será unidimensional.

En el último de los ejemplos entrarán en juego dos parámetros y, además, estaremos ante una función bidimensional, en la que fijaremos uno de los dos parámetros y variaremos el otro para averiguar el comportamiento dinámico de dicho sistema.

## 7.3. Diagrama de bifurcación

Los diagramas de bifurcación representan cambios cualitativos en el comportamiento de un sistema dinámico que viene determinado por un parámetro. Estos diagramas sirven para ilustrar estos cambios tanto en sistemas dinámicos continuos como discretos.

Dado un sistema dinámico  $x_{n+1} = f(x_n, \lambda) = f_{\lambda}(x_n)$ , el sistema tiene diferentes comportamientos en función del parámetro  $\lambda$ . El diagrama de bifurcación representa el comportamiento a largo plazo del sistema en función del parámetro  $\lambda$ .

Los puntos de bifurcación cambian el comportamiento del sistema. De esta manera, una pareja de puntos que son atractor y repulsor, respectivamente, pueden intercambiar su comportamiento conforme se varía el parámetro $\lambda$ .

Los puntos en los que se producen las bifurcaciones cumplen:

- $f_{\lambda}(x^*) = x^*.$
- $|f_{\lambda}'(x^*)| = 1.$

En las siguientes secciones del tema vamos a ver ejemplos de sistemas dinámicos discretos reales en los que aparecen estos cambios de comportamiento. Analizaremos en cada caso su diagrama de bifurcación y las particularidades de cada región.

## 7.4. Dinámica real 1D

#### La familia logística

En los primeros temas presentamos como ejemplo de sistema dinámico continuo el modelo logístico de crecimiento de la población, a través de la ecuación diferencial:

$$x' = ax(1-x)$$

Sin embargo, debemos tener en cuenta que las poblaciones no son continuas en el tiempo, por lo que es necesario abordar este problema desde el punto de vista discreto.

Asumamos que los datos del modelo de población se actualizan cada año, siendo  $x_n$  la población al final del año n. En caso que no pueda haber superpoblación, el modelo de crecimiento es exponencial, determinado por:

$$x_{n+1} = kx_n \to \mathcal{O}(x) = \{x, kx, k^2x, k^3x, \dots\}$$

Para k > 0. Como el término general es  $x_n = k^n x_0$ , podemos concluir que para k = 1 la población permanece constante, para k > 1 la población crece de forma imparable y para 0 < k < 1 la población se extingue.

Una situación más realista en el modelo de población es la asunción de que si se alcanza un valor M de población, todos los recursos se agotan y el conjunto completo de la población muere al año siguiente. Esta propiedad queda recogida por el modelo:

$$x_{n+1} = kx_n \left( 1 - \frac{x_n}{M} \right)$$

Donde k, M > 0. Nótese que si  $x_n > M$ , entonces  $x_{n+1} \le 0$ , y la población muere en la siguiente iteración.

Para simplificar los cálculos, en lugar de trabajar con valores absolutos de población, lo haremos con valores relativos, de forma que  $x_n$  represente la proporción de población respecto del máximo para que  $0 \le x_n \le 1$ .

De esta manera, la familia logística queda como:

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$$

Donde  $\lambda > 0$ . Para conocer el comportamiento a largo plazo de esta familia, basta con iterar la función  $f_{\lambda}(x) = \lambda x(1-x)$ . Realizemos el análisis dinámico.

Los puntos fijos se obtienen a partir de:

$$f_{\lambda}(x) - x = 0 \leftrightarrow x[-\lambda x + (\lambda - 1)] = 0 \to \begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \end{cases}$$

La característica de cada uno de los puntos fijos será:

$$f'_{\lambda}(x) = \lambda(1 - 2x) \to \begin{cases} f'_{\lambda}(x_1^*) = \lambda \\ f'_{\lambda}(x_2^*) = 2 - \lambda \end{cases}$$

Por lo que  $x_1^*$  será atractor para  $0 < \lambda < 1$ , repulsor cuando  $\lambda > 1$  e indiferente cuando  $\lambda = 1$ . Del mismo modo,  $x_2^*$  será atractor para  $1 < \lambda < 2$ , indiferente para  $\lambda = 1$  y repulsor para el resto de valores.

El punto  $x_1^*$  no puede ser un punto de bifurcación, puesto que  $f_{\lambda}'(x_1^*) = \lambda > 0$ . Sin embargo, el punto  $x_2^*$  sí lo puede ser, ya que  $f_{\lambda}'(x_2^*) = 2 - \lambda = -1 \leftrightarrow \lambda = 3$ .

En cuanto a los puntos fijos de las órbitas periódicas de período dos, será necesario obtener:

$$f^{2}(x) - x = 0 \leftrightarrow -\lambda^{3} x^{4} + 2\lambda^{3} x^{3} - (\lambda^{2} + \lambda^{3}) x^{2} + (\lambda^{2} - 1) x = 0 \leftrightarrow 0$$

$$\leftrightarrow (x - x_{1}^{*})(x - x_{2}^{*})[-\lambda^{3} x^{2} + \lambda^{2} (\lambda + 1) x - \lambda(\lambda + 1)] = 0 \leftrightarrow x$$

$$= \begin{cases} x_{1}^{*} = 0 \\ x_{2}^{*} = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x_{1}^{P} = \frac{\lambda + 1 + \lambda^{2} \sqrt{(\lambda + 1)(\lambda - 3)}}{2\lambda} \\ x_{2}^{P} = \frac{\lambda + 1 - \lambda^{2} \sqrt{(\lambda + 1)(\lambda - 3)}}{2\lambda} \end{cases}$$

Demasiados valores, demasiados puntos, demasiados comportamientos. Vamos a las representaciones gráficas para poner en orden todos estos cálculos.

Representemos en primer lugar el diagrama de bifurcaciones. Los valores de  $x_n$  estarán comprendidos entre el 0 y el 1, por la definición que de los mismos se aporta en el enunciado del problema. Asimismo, los valores de  $\lambda$  serán positivos.

En los cálculos previos hemos determinado que los valores 1 y 3 son clave, de forma que en la representación de  $\lambda$  los valores que tome vayan entre 0 y 4. El diagrama resultante se representa en la figura 1.

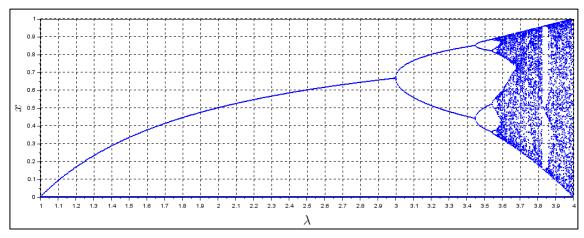


Figura 1. Diagrama de bifurcación de  $f_{\lambda}(x) = \lambda x(1-x)$ 

Cuando  $1 < \lambda < 3$ , las órbitas tienden a los puntos fijos  $x_1^* = 0$  y  $x_2^* = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$ . Se puede observar cómo existe una bifurcación en  $\lambda = 3$  como habíamos predicho. Además, aparecen nuevas bifurcaciones.

El diagrama de bifurcaciones nos permite prever la cantidad de órbitas periódicas existentes que habrá para un determinado valor de  $\lambda$ . A partir de  $\lambda=3$  habrá una órbita de período dos hasta  $\lambda\approx3.45$ , en la que el período será de valor cuatro; hasta  $\lambda\approx3.54$ , en la que el período será de valor ocho, y así sucesivamente.

La figura 2 representa gráficamente el comportamiento de la familia logística para $x_0 = 0.5$  y diferentes valores de  $\lambda$ , que evidencian el comportamiento con diferentes períodos de órbitas.

#### La familia cuadrática

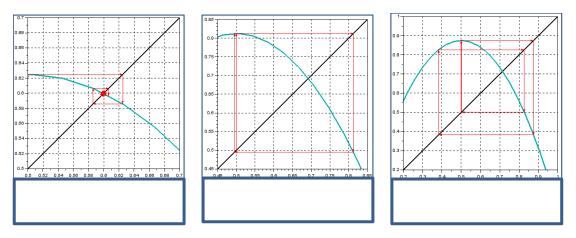


Figura 2. Comportamiento dinámico de  $f(x) = \lambda x(1-x)$  para  $\lambda = 2.5$  (a),  $\lambda = 3.25$  (b) y  $\lambda = 3.5$  (c)

Sea el sistema dinámico discreto  $x_{n+1} = x^2 + \lambda$ tiene como puntos fijos:

$$x^* = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda}}{2}$$

Analicemos en qué puntos se pueden producir las bifurcaciones. Para ello, evaluaremos la derivada en los puntos fijos.

$$f_{\lambda}'(x^*) = 2x^* = 1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda}$$

Para los valores  $\lambda = \left\{-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right\}$ , la derivada de la función tiene como valores  $\{-1,1\}$ , respectivamente, de forma que en estos puntos existirá una bifurcación. La figura 3 representa el diagrama de bifurcación.

El análisis se ha realizado para  $-\frac{3}{2} < \lambda < \frac{1}{2}$ ,  $0 < x_0 < 1$ . Yendo de derecha a izquierda se puede observar cómo para  $\lambda = \frac{1}{4}$  aparece un punto de bifurcación a partir del cual todas las órbitas tienden a la raíz  $x^* = \frac{1-\sqrt{1-4\lambda}}{2}$ . A partir del valor  $\lambda = -\frac{3}{4}$ , existe una nueva bifurcación.

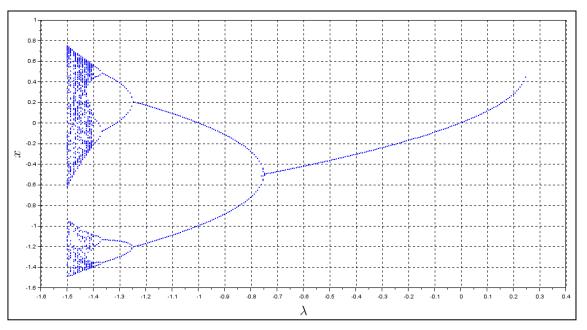


Figura 3. Diagrama de bifurcación de  $f_{\lambda}(x) = x^2 + \lambda$ 

La figura 4 representa el comportamiento de la familia cuadrática para órbitas de período uno, dos y cuatro.

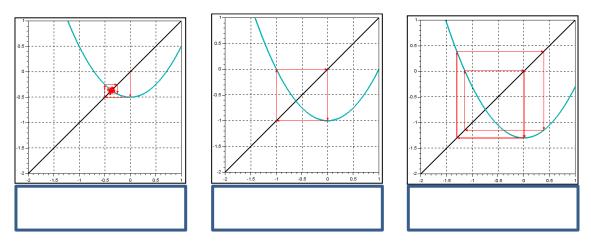


Figura 4. Comportamiento dinámico de  $f(x) = x^2 + \lambda$  para  $\lambda = -0.5$  (a),  $\lambda = -1$  (b) y  $\lambda = -1.3$  (c)

### 7.5. Dinámica real 2D

Antes de abordar el ejemplo de los atractores de Hénon, es necesario renombrar algunos conceptos para expresar su definición en sistemas 2D. Para ello, trabajaremos sobre funciones  $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ .

$$(x,y)^*$$
 es punto fijo de  $F$  si  $F(x,y)^* = (x,y)^*$ 

Para conocer las características dinámicas de los puntos fijos, es necesario conocer la matriz jacobiana de F, es decir,  $J_F(x,y)$ . A partir de sus valores propios  $\lambda_1, \lambda_2$  se establecen dichas características.

$$\begin{array}{c|c} & atractor & |\lambda_1|, |\lambda_2| < 1 \\ (x,y)^* \text{ es } & repulsor & \text{si} & |\lambda_1|, |\lambda_2| > 1 \\ & punto \ de \ silla & |\lambda_1| < 1, |\lambda_2| > 1 \end{array}$$

#### **Atractores de Hénon**

Michel Hénon introdujo un sistema dinámico en  $\mathbb{R}^2$  en el que intervienen dos parámetros a,b, dado por:

$$H_{a,b} = (1 + y - ax^2, bx)$$

Realicemos el estudio de los puntos fijos. Para el caso  $\mathbb{R}^2$ , la definición se mantiene:

$$\begin{bmatrix} 1 + y - ax^2 \\ bx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_1^* = \frac{b - 1 + \sqrt{(b - 1)^2 + 4a}}{2a} \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_2^* = \frac{b - 1 - \sqrt{(b - 1)^2 + 4a}}{2a} \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}$$

Para estudiar la característica dinámica de los puntos fijos recurriremos a la versión en  $\mathbb{R}^2$  de la derivada, es decir, el Jacobiano.

$$J_H(x,y) = \begin{bmatrix} -2ax & 1\\ b & 0 \end{bmatrix}$$

Cuyos valores propios son:

$$\lambda_1 = -ax + \sqrt{ax^2 + b}, \lambda_2 = -ax - \sqrt{ax^2 + b}$$

El punto  $(x, y)_1^*$  es un punto de silla mientras que el punto  $(x, y)_2^*$  es atractor hasta un determinado valor.

En la figura 5 se representan los diagramas de bifurcación de  $H_{a,0.2}, H_{a,0.3}$  y  $H_{a,0.4}$  de la primera coordenada.

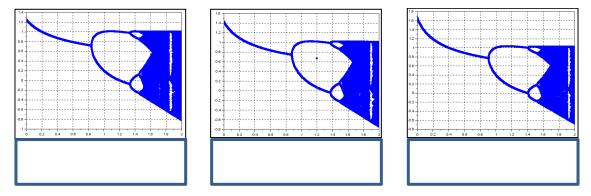


Figura 5. Diagrama de bifurcación de  $H_{a,0.2}$  (a),  $H_{a,0.3}$  (b) y  $H_{a,0.4}$  (c)

## 7.6. Referencias bibliográficas

Devaney, R. L. (1992). A first course in chaotic dynamical systems. Universidad de Boston.

Devaney, R. L. (1989). An introduction to chaotic dynamical systems. Addison Wesley.

Giraldo, A. y Sastre, M. A. (2002). Sistemas dinámicos discretos y caos. Universidad Politécnica de Madrid.

## Lo + recomendado

## Lecciones magistrales

#### Función logística

En la lección magistral asociada a este tema se profundizará en la función logística. A partir de distintos valores del parámetro veremos los comportamientos dinámicos en cada uno de los casos.



Accede al vídeo desde el aula virtual

No dejes de leer...

#### **Bifurcationdiagrams**

En este laboratorio se ilustran diferentes ejemplos de diagramas de bifurcación. Además, se encuentra el código para generar dichos diagramas. Lo realmente interesante es el juego que hace con los parámetros, para ver cómo afecta la variación de cada uno de ellos.

Lab 3: Bifurcation diagrams

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web: <a href="http://www.math.le.ac.uk/people/rld8/ma1251/lab3.html">http://www.math.le.ac.uk/people/rld8/ma1251/lab3.html</a>

## + Información

#### A fondo

#### Sistemas dinámicos cuadráticos

En este documento podrás estudiar con mayor profundidad los casos de las familias cuadrática y logística. Se analizan con mucho detalle las herramientas gráficas vistas en el tema: diagrama de bifurcación y diagrama de Verhulst.



Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web: http://www-

old.dma.fi.upm.es/docencia/segundociclo/sistdin/sdcuadraticos.html#feigenbaum

#### **Bifurcations**

En esta página web se trabaja sobre un sistema dinámico continuo, aunque los conceptos de bifurcación son extensibles a los sistemas dinámicos discretos. A partir de una ecuación diferencial con un parámetro se desarrolla el diagrama de bifurcación. Se trata de un ejemplo sencillo que puede aclarar este concepto.



Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web: http://www.sosmath.com/diffeg/first/bifurcation/bifurcation.html

#### Henonsystem

En la siguiente página se encuentra una guía detallada de los atractores de Hénon. Asimismo incluye un *applet* para ir variando los parámetros de forma que se ilustra inmediatamente la forma de los atractores.

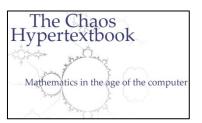


Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web: http://www.robert-doerner.de/en/Henon\_system/henon\_system.html

#### Enlaces relacionados

#### The chaos hypertextbook: mathematics in the age of the computer

Esta es una página de visita obligatoria. En el capítulo 1 se trabaja sobre los conceptos del tema anterior y del actual. Explica con todo lujo de detalle cada uno de los pasos que hemos dado en cuanto a iteraciones y bifurcaciones con diferentes ejemplos.



Accede a la página desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web: <u>http://hypertextbook.com/chaos/</u>

## **Test**

- 1. ¿Cuál de los siguientes sistemas dinámicos discretos es real?
  - A.  $f(x) = x^3 + \lambda x$ .
  - B.  $f(x) = (\lambda x + i)(\lambda x i)$ .
  - $C. f(x) = cos(\lambda x).$
  - D. Ninguno de los anteriores.
- 2. Una familia de funciones:
  - A. Es un conjunto de funciones que contienen un parámetro que se hace variar.
  - B. Es el conjunto de posibles valores que puede tomar la variable independiente.
  - C. Es el conjunto de funciones resultantes de iterar la función original sobre sí misma.
  - D. Todas las anteriores son correctas.
- 3. Respecto de los puntos de bifurcación:
  - A. En el punto de bifurcación, el punto crítico mantiene su carácter dinámico.
  - B. Solo los puntos fijos pueden dar lugar a un punto de bifurcación.
  - C. En un sistema sin parámetros no tiene sentido hablar del concepto punto de bifurcación.
  - D. Ninguna de las anteriores es correcta.
- 4. Los diagramas de bifurcación:
  - A. Solo se utilizan en sistemas dinámicos discretos.
  - B. Solo se utilizan en sistemas dinámicos continuos.
  - C. Representan cambios en el comportamiento dinámico de los puntos fijos.
  - D. Ninguna de las anteriores es correcta.
- 5. ¿Cuál de los siguientes es un punto de bifurcación?

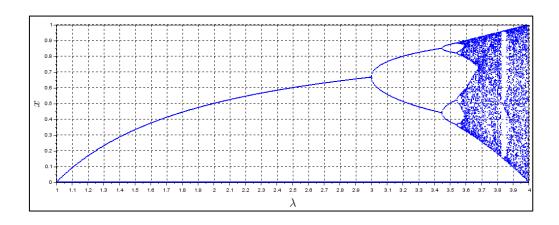
A. 
$$f_{\lambda}(x_1) = x_1$$
,  $f'_{\lambda}(x_1) = 0$ .

B. 
$$f_{\lambda}(x_1) = x_2$$
,  $f'_{\lambda}(x_1) = x_2$ .

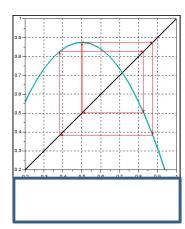
C. 
$$f_{\lambda}(x_1) = x_1, f'_{\lambda}(x_1) = -1.$$

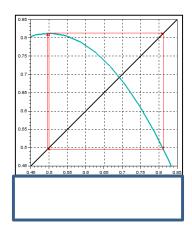
D. 
$$f_{\lambda}(x_1) = x_1, f'_{\lambda}(x_1) = 1$$
.

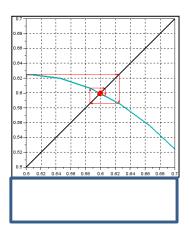
## 6. Dado el siguiente diagrama de bifurcación:



### Relaciona el valor de $\lambda$ con su correspondiente órbita:



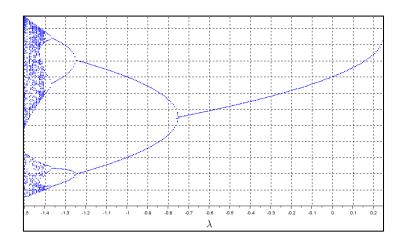




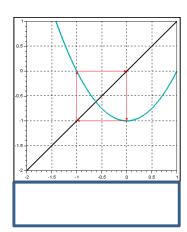
$\lambda = 2.5$	1
$\lambda = 2$	2
$\lambda = 3$	3

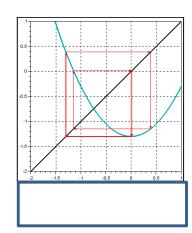
A
B
C

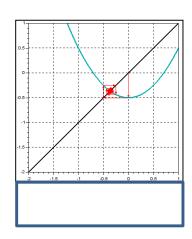
## 7. Dado el siguiente diagrama de bifurcación:



## Relaciona el valor de $\lambda$ con su correspondiente órbita:



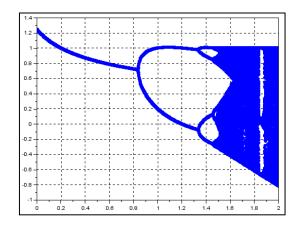




$\lambda = 1.35$	1
$\lambda = 0.5$	2
$\lambda = 1$	3



- **8.** Sea el sistema  $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ , tal que  $F_{\mu}(x, y) = (x^2 + \mu, y)$ :
  - A. El punto  $(x, y) = \frac{1 \pm \sqrt{1 4\mu}}{2}$  es un punto fijo.
  - B.  $\lambda = 1$  es un valor propio de  $J_{F_u}$ .
  - C. El punto fijo es atractor.
  - D. Ninguna de las anteriores es correcta.
- **9.** Sea el sistema  $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$  tal que  $F_u(x, y, z) = (\mu xy, yz, 1)$ :
  - A. El punto  $(x, y, z) = (10, \frac{1}{\mu}, 1)$  es un punto fijo.
  - B.  $\lambda = 0$  es un valor propio de  $J_{F_u}$ .
  - C. El punto fijo es atractor.
  - D. Todas las anteriores son correctas.
- **10.** La figura representa el diagrama de bifurcación del mapa de Hénon para  $H_{a,0.2}$ :



- A. El parámetro *a* está representado en el eje de abscisas.
- B. En a = 1 existe una órbita periódica de periodo 4.
- C. Sobre b = 0.4 no se puede determinar nada a partir del gráfico.
- D. Ninguna de las anteriores es correcta.