Tema 8. Interpolación numérica

8.1 Interpolación de Lagrange

8.2 Interpolación de Newton

8.3 Splines

Interpolación

- Mismo problema, otro punto de vista

- Dada una superficie (conocida) y una serie de puntos por los que debe pasar el móvil, ¿cómo construir la correspondiente curva regular?

- Dados una serie de puntos (finitos) que están sobre una superficie, ¿cómo construir dicha superficie?

El problema de la Interpolación

Dada una función f de la que conocemos los valores que toma en una serie de puntos $x_i, i = 1, \dots, n$, se trata de encontrar un polinomio P tal que $P(x_i) = f(x_i)$. Estos puntos no tienen por qué estar ordenados pero no puede haber ninguno repetido.

Interpolación de Lagrange

Queremos encontrar un polinomio P que pase por n puntos distintos $y_i = f(x_i)$.

Dados n puntos, hay un único polinomio de orden $n - 1$ pase por estos puntos.

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 {x_0}^2 + \cdots + a_{n-1} {x_0}^{n-1} = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 {x_1}^2 + \cdots + a_{n-1} {x_1}^{n-1} = y_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 {x_n}^2 + \cdots + a_{n-1} {x_n}^{n-1} = y_n \end{cases}$$

Interpolación de Lagrange

Forma más sencilla de cálculo:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

donde

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Interpolación de Lagrange

El polinomio de Lagrange para una curva paramétrica se calcula:

$$P(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{i=0}^{n} x_k L_i(t) \\ y(t) = \sum_{i=0}^{n} y_k L_i(t) \\ z(t) = \sum_{i=0}^{n} z_k L_i(t) \end{cases}$$

Interpolación de Lagrange

Hallar un polinomio que interpole los siguientes puntos con el método de Lagrange

x_i	0	1	3	6
$f(x_i)$	-3	0	5	7

Interpolación de Lagrange

$P_3(x) = L_0 f(x_0) + L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2) + L_3 f(x_3)$, donde

$$L_0 f(x_0) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}(-3) = \frac{(x-1)(x-3)(x-6)}{-18}(-3) = \frac{x^3-10x^2+27x-18}{6}$$

$$L_1 f(x_1) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}0 = 0$$

$$L_2 f(x_2) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}5 = \frac{x(x-1)(x-6)}{-18}5 = \frac{5x^3-35x^2+30x}{-18}$$

$$L_3 f(x_3) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}7 = \frac{x(x-1)(x-3)}{90}7 = \frac{7x^3-28x^2+21x}{90}$$

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

Interpolación de Lagrange

Por tanto,

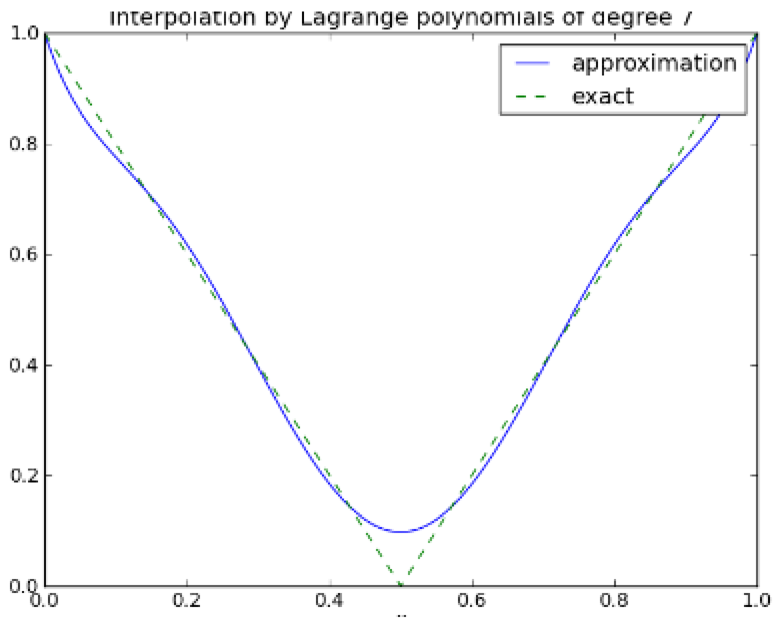
$$P_3(x) = \frac{x^3-10x^2+27x-18}{6} + \frac{x^3-10x^2+27x-18}{6} + \frac{7x^3-28x^2+21x}{90} =$$

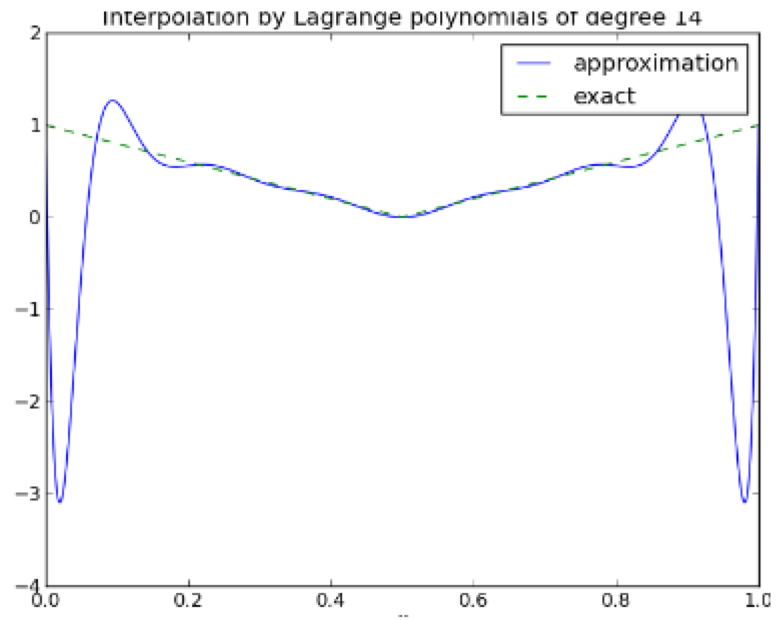
$$\frac{-3x^3 - 3x^2 + 276x - 270}{90} = -\frac{x^3}{30} - \frac{x^2}{30} + \frac{46x}{15} - 3$$

Interpolación de Lagrange

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

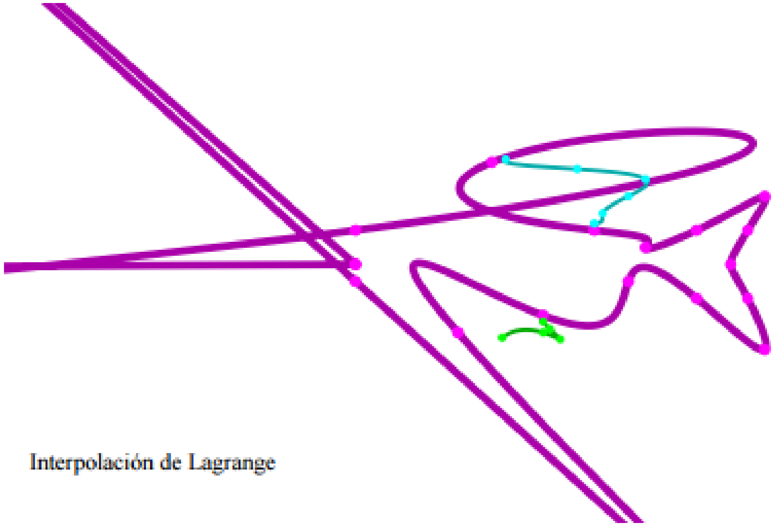
Ventajas e inconvenientes:





Fuente: http://hplgit.github.io/

Interpolación de Lagrange



Fuente: http://esfm.egormaximenko.com/

Además: dificultad añadir nuevos puntos

Interpolación de Newton

- Produce el mismo polinomio que la interpolación de Lagrange (que es único)

- **Ventajas**: procedimiento más eficiente y que permite añadir nuevos puntos sin tener que recalcularlo todo

Interpolación de Newton

La diferencia dividida de orden $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de f en el punto x_i es:

$$\begin{cases} f[x_i] = f(x_i) \\ f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}] = \dfrac{f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m-1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+m}]}{x_i - x_{i+m}} \end{cases}$$

El polinomio que pasa por n puntos dados es:

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \prod_{i-1} (x - x_i)\, f[x_0, x_1, \ldots, x_i]$$

Interpolación de Newton

La diferencia dividida de orden $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de f en el punto x_i es:

$$\begin{cases} f[x_i] = f(x_i) \\ f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m}] = \dfrac{f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+m}]}{x_i - x_{i+m}} \end{cases}$$

El polinomio que pasa por n puntos dados es:

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Interpolación de Newton

La diferencia dividida de orden $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de f en el punto x_i es:

$$\begin{cases} f[x_i] = f(x_i) \\ f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m}] = \dfrac{f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+m}]}{x_i - x_{i+m}} \end{cases}$$

Si se quiere añadir un punto nuevo, el polinomio de interpolación resulta:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \prod_{n} (x - x_i)\, f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}]$$

Interpolación de Newton

Ejemplo: calcular el polinomio que pasa por los puntos (x_i, y_i)

con el método de Newton

$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{y_i}$
4	78
-4	-210
3	28
-6	-602

Interpolación de Newton

Calculamos las diferencias divididas:

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{78+210}{4+4} = 36$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} = \frac{-210-28}{-4-3} = 34$$

$$f[x_3, x_4] = \frac{f(x_3) - f(x_4)}{x_3 - x_4} = \frac{28+602}{3+6} = 70$$

x_i	y_i
4	78
-4	-210
3	28
-6	-602

Interpolación de Newton

x_i	y_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
4	**78**			
-4	-210	**36**		
3	28	34		
-6	-602	70		

Interpolación de Newton

UNIR UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_2, x_3]}{x_1 - x_3} = \frac{36-34}{4-3} = 2$$

$$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_3, x_4]}{x_2 - x_4} = \frac{34-70}{-4+6} = -18$$

x_i	y_i	$f[x_i, x_{i+1}]$
4	**78**	
-4	-210	**36**
3	28	34
-6	-602	70

Interpolación de Newton

x_i	y_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
4	**78**			
-4	-210	**36**		
3	28	34	**2**	
-6	-602	70	-18	

Interpolación de Newton

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_2, x_3, x_4]}{x_1 - x_4} = \frac{2+18}{4+6} = 2$$

x_i	y_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
4	**78**		
-4	-210	**36**	
3	28	34	**2**
-6	-602	70	-18

Interpolación de Newton

x_i	y_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
4	**78**			
-4	-210	**36**		
3	28	34	**2**	
-6	-602	70	-18	**2**

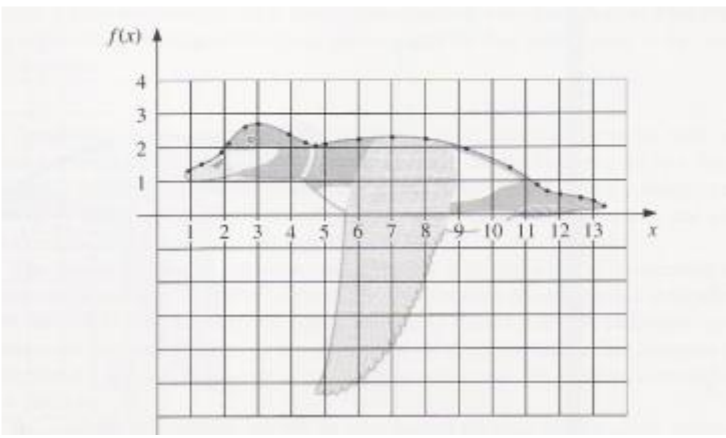
Interpolación de Newton

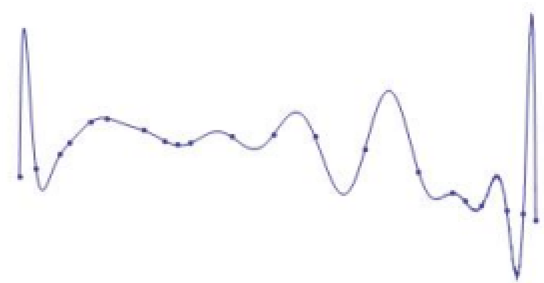
$$P_4(x) = 78 + 36(x-4) + 2(x-4)(x+4) + 2(x-4)(x+4)(x-3) =$$

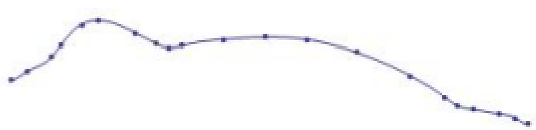
$$= 2x^3 - 4x^2 + 4x - 2$$

Splines

Un ***spline*** por varios puntos del intervalo $[a, b]$ es un conjunto de polinomios definidos en esos puntos y que satisfacen una serie de condiciones de regularidad.





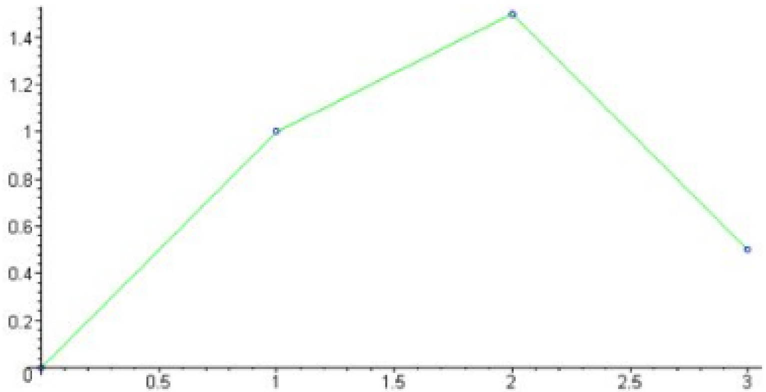


Fuente: http://www4.ujaen.es/

Splines

Sea $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, $S_\Delta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función *spline* de orden k si S_Δ es C^{k-1} y S_Δ coincide en cada intervalo con un polinomio de grado menor o igual que k.

$\boldsymbol{k = 1}$, entonces el *spline* es una **poligonal**



Fuente: http://slideplayer.es/

Cálculo de un *spline* cúbico

que pase por los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3).

En cada tramo está definido por un polinomio de grado 3 que pasará por los puntos dados:

Cada polinomio tiene 4 coeficientes que determinar y hay 3 polinomios. Necesitamos un **sistema de 12 ecuaciones**.

Splines

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

$$\left.\begin{array}{c} f_1(x_0) = y_0 \\ f_1(x_1) = y_1 \\ f_2(x_1) = y_1 \\ f_2(x_2) = y_2 \\ f_3(x_2) = y_2 \\ f_3(x_3) = y_3 \end{array}\right\} = \begin{cases} a_3x_0^3 + a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0 = y_0 \\ a_3x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = y_1 \\ b_3x_1^3 + b_2x_1^2 + b_1x_1 + b_0 = y_1 \\ b_3x_2^3 + b_2x_2^2 + b_1x_2 + b_0 = y_2 \\ c_3x_2^3 + c_2x_2^2 + c_1x_2 + c_0 = y_2 \\ c_3x_3^3 + c_2x_3^2 + c_1x_3 + c_0 = y_3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{c} f_1'(x_1) = f_2'(x_1) \\ f_2'(x_2) = f_3'(x_2) \\ f_1''(x_1) = f_2''(x_1) \\ f_2''(x_2) = f_3''(x_2) \end{array}\right\} = \begin{cases} 3a_3x_1^2 + 2a_2x_1 + a_1 = 3b_3x_1^2 + 2b_2x_1 + b_1 \\ 3b_3x_2^2 + 2b_2x_2 + b_2 = 3c_3x_2^2 + 2c_2x_2 + c_1 \\ 6a_3x_1 + 2a_2 = 6b_3x_1 + 2b_2 \\ 6b_3x_2 + 2b_2 = 6c_3x_1 + 2c_2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{c} f_1''(x_0) = 0 \\ f_3''(x_3) = 0 \end{array}\right\} = \begin{cases} 6a_3x_0 + 2a_2 = 0 \\ 6c_3x_3 + 2c_2 = 0 \end{cases}$$

Condiciones naturales