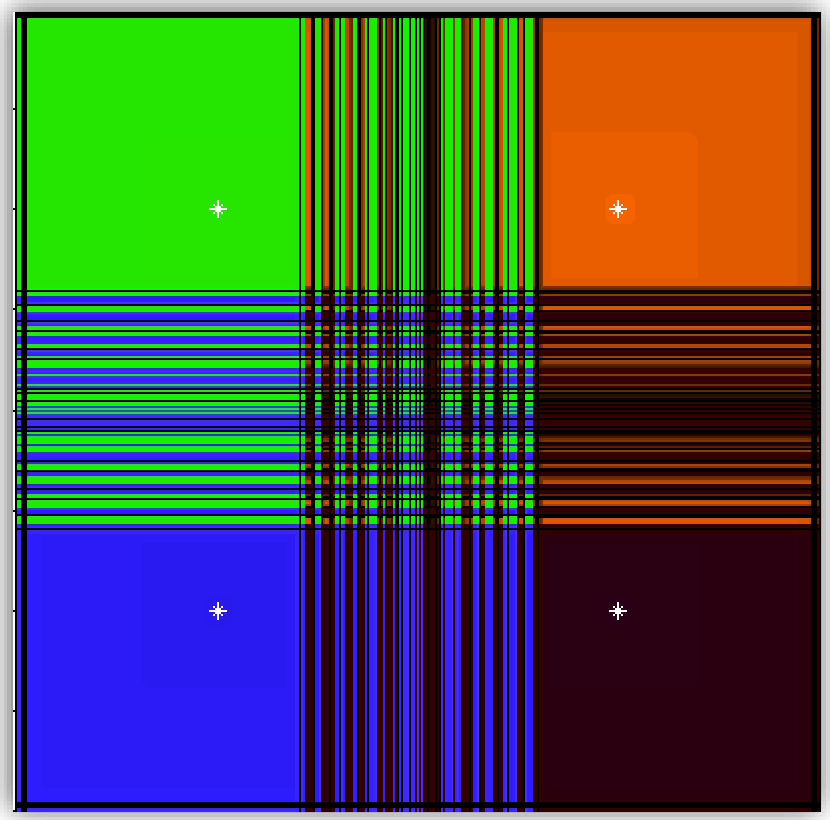
Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería

Alicia Cordero

Neus Garrido

Juan R. Torregrosa



Tema 11: Ecuaciones no lineales

Ecuaciones no lineales

- ¿Qué problema queremos resolver?
- Métodos clásicos: Newton y Steffensen
- Conceptos previos y resultados
- ¿Cómo probamos el orden de convergencia?
- Métodos de un punto o punto a punto
- Limitaciones de los métodos de un punto
- Métodos multipunto

$\mathrm{f}(x) = \mathbf{0}$ Métodos iterativos // Raíces simples

Métodos sin memoria

Punto a punto
$$x_{k+1} = \phi(x_k)$$

- Con derivadas
- Libres de derivadas

Multipunto
$$y_k = \psi(x_k)$$
$$x_{k+1} = \phi(x_k, y_k)$$

- Optimo
- No óptimo

Métodos con memoria

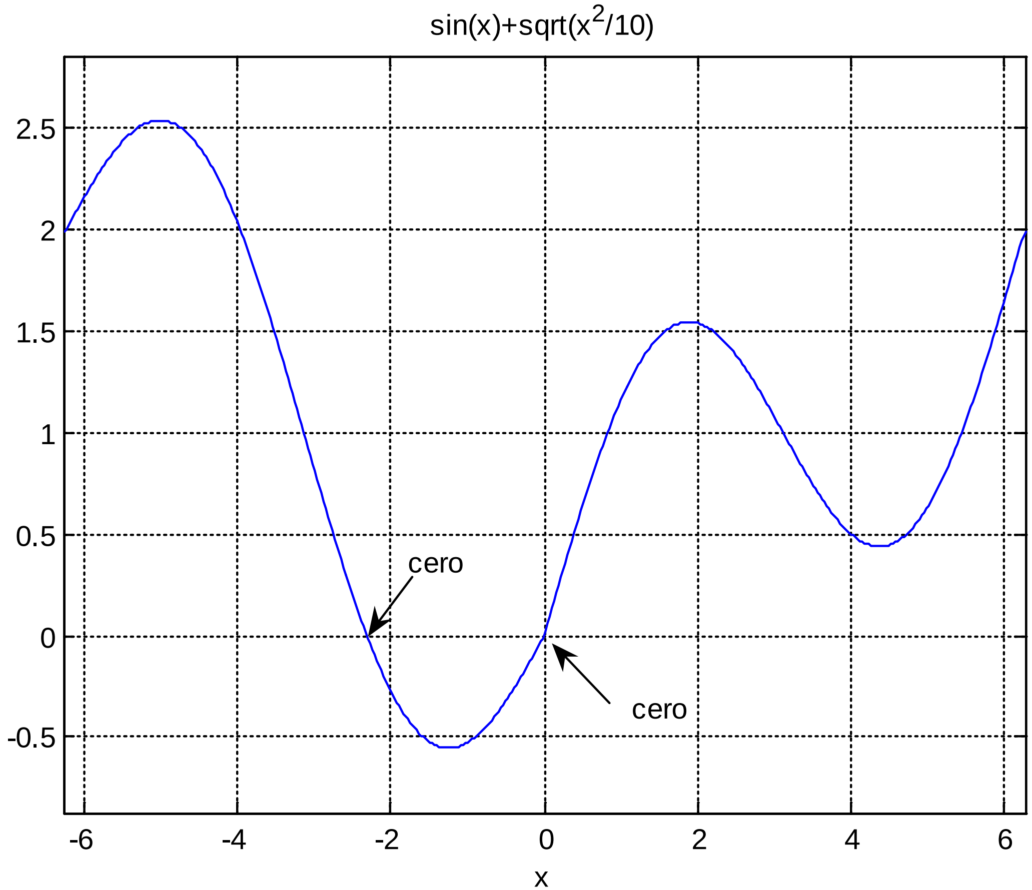
Punto a punto
$$x_{k+1} = \phi(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-i}),$$
$$i \leq k$$

Multipunto
$$y_k = \psi(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-i}),$$
$$x_{k+1} = \phi(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-i}, y_k)$$
$$i \leq k$$

- Con derivadas
- Libres de derivadas

Objetivo

Encontrar una raíz simple *α* de la función *f*, es decir, una solución de la ecuación $f(x) = 0,$ donde $f: I \subset R \to R$



Estimación visual: x_0 ⟸ PASO 0

Objetivo

Encontrar una raíz simple *α* de la función *f*, es decir, una solución de la ecuación $f(x)=0,$ donde $f: I \subset R \to R$

- *α* es una raíz simple de la función *f* si *f(α)* = 0 y *f'(α)* ≠ 0
- *α* es una raíz de la función *f* con multiplicidad *m* si

$$f(\alpha)=0,\ \ f'(\alpha)=f''(\alpha)=\cdots f^{(m-1)}(\alpha)=0, \quad f^{(m)}(\alpha)\neq 0$$

- ✓ Escasez de métodos analíticos para encontrar la solución.
- ✓ Aproximación de la solución mediante **métodos iterativos**.
- ✓ Métodos iterativos de **punto fijo**

$$x_{k+1}=g(x_k),\ \ k=0,1,2,\ldots, \qquad g: R \to R,$$

- ✓ Generación de una sucesión $\{x_k\}_{k\geq 0}$ que, bajo ciertas condiciones de *f* y de la aproximación inicial x_0, converge a la solución *α*

El esquema iterativo mas conocido es el método de Newton, cuya expresión iterativa es

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0,1,2,\ldots}$$

¿Cómo se diseña?

$$f(x) = f(x_0) + \boxed{\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt} \approx f(x_0) + \boxed{f'(x_0)(x - x_0)}$$

$$x = \alpha$$

$$0 \approx f(x_0) + f'(x_0)(\alpha - x_0)$$

$$\alpha \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Se trata de un método de punto fijo

$$x_{k+1} = g(x_k), \qquad \text{donde} \qquad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

Paso a paso

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

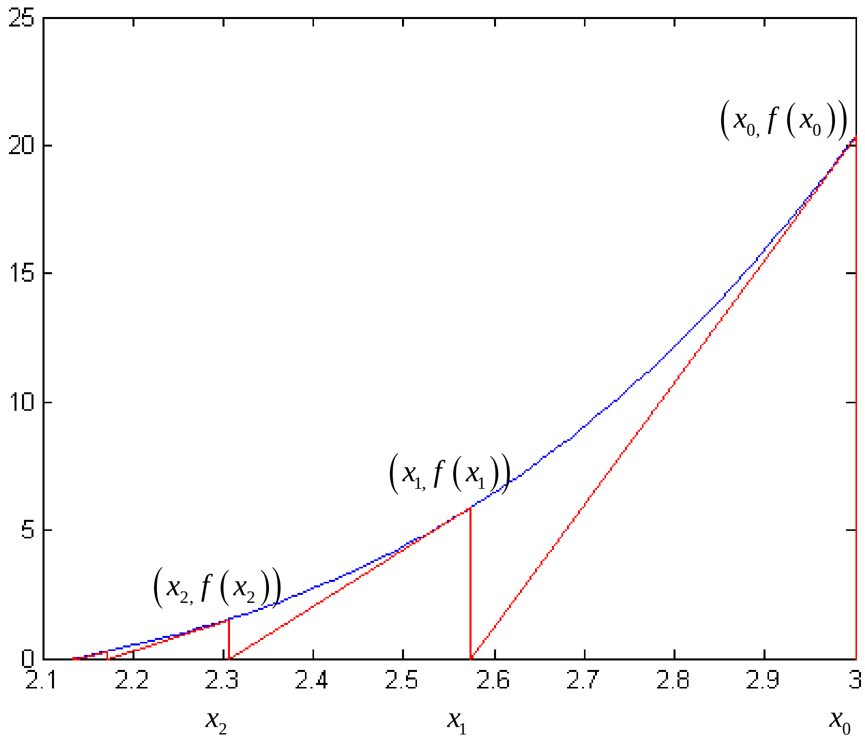
Método de Newton

Ecuación de la recta tangente a f(x) en x0:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Condiciones para la convergencia:

- f suficientemente continua y derivable
- x_0 próximo al cero buscado
- $f'(\alpha) \neq 0$



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Newton

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}{f(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)^2}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Steffensen

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, x_{k-1}]}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Secante

Conceptos básicos

- **Orden de convergencia.** La sucesión $\{x_k\}_{k\geq 0}$, generada por un método iterativo, tiene orden de convergencia local *p,* si encontramos constantes *C* y *p* tales que

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^p}=C$$

  - *p* =1 y 0<*C*<1: convergencia lineal
  - *p* >1 y *C*>0: convergencia de orden p (cuadrática, cúbica,…)

- **Índice de eficiencia** $\boxed{I = p^{1/d}}$

- **Índice de eficiencia computacional** $\boxed{IC = p^{1/(d+op)}}$

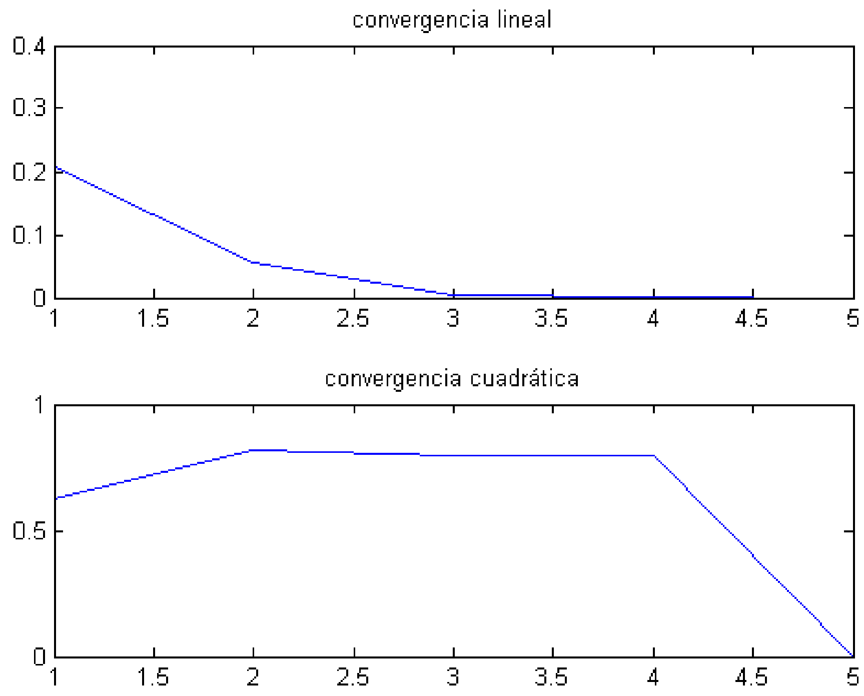
d número de evaluaciones funcionales por iteración

op número de (productos/cocientes) por iteración

Conceptos básicos

✓ **Tasa de convergencia.**

$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_k - x_{k-1}|^p} \approx cte, \quad \forall\ k \geq k_0$$



Conceptos básicos

- ✓ **Método de un punto ó Método multipunto**

$$x_{k+1} = \phi(x_k)$$

$$\begin{cases} y_k = \psi(x_k) \\ x_{k+1} = \phi(x_k, y_k) \end{cases}$$

Predictor-corrector

- ✓ **Método con derivadas ó Método libre de derivadas**

Newton

Steffensen

Secante

- ✓ **Método sin memoria ó Método con memoria**

$$x_{k+1} = \phi(x_k) \qquad\qquad x_{k+1} = \phi(x_k, x_{k-1}, \ldots)$$

- ✓ **Orden de convergencia computacional aproximado**

$$\boxed{p \approx ACOC = \frac{\ln\left(\left|x_{k+1} - x_k\right| / \left|x_k - x_{k-1}\right|\right)}{\ln\left(\left|x_k - x_{k-1}\right| / \left|x_{k-1} - x_{k-2}\right|\right)}}$$

✓ Conjetura de Kung y Traub

El orden de convergencia de un método iterativo sin memoria, con d evaluaciones funcionales por iteración, no puede superar la cota de 2^{d-1} . Cuando esta cota es alcanzada, al método se le llama óptimo

Método óptimo

- ¿Existe una cota de este tipo para métodos iterativos con memoria?
- ¿Cómo podemos definir una cota similar para métodos iterativos para sistemas?
- ¿Los métodos libres de derivadas son mejores que los métodos con derivadas? ¿En qué contexto?

¿Cómo se demuestra la convergencia de un método?

✓ **Teorema**

Sea *g* una función de punto fijo tal que $g^{(p)}$ es continua en un entorno de la solución *α*. El método iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ es de orden *p* si y solo si

$$g(\alpha) = \alpha, g^{(k)}(\alpha) = 0, \qquad k = 1,2,\cdots,p-1, \qquad y \quad g^{(k)}(\alpha) \neq 0$$

✓ **Desarrollo de Taylor y manipulaciones algebraicas ….**

Denotando $e_k = x_k - \alpha$, el método iterativo tiene orden *p* si y solo si se cumple la relación

$$\boxed{e_{k+1} = C\, e_k^p + O(e_k^{p+1})}$$

Ecuación del error

✓ Teorema

Sea α un cero simple de una función suficientemente diferenciable $f: D \in R \to R$ en un conjunto convexo D. Si la estimación inicial x_0 es suficientemente próxima a α, *el método de Newton alcanza orden de convergencia cuadrático, siendo su ecuación del error*

$$e_{k+1} = c_2 e_k^2 + O\left(e_k^3\right),$$

donde $c_k = \frac{1}{k!}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{f'(\alpha)}, k = 2,3,\ldots$ y $e_k = x_k - \alpha.$

Prueba: Desarrollando en serie de Taylor en torno a α, *tenemos*

$$f(x_k) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_k - \alpha) + \frac{1}{2} f''(\alpha)(x_k - \alpha)^2 + O((x_k - \alpha)^3) = f'(\alpha)\left[e_k + c_2 e_k^2\right] + O\left(e_k^3\right)$$

$$f'(x_k) = f'(\alpha) + f''(\alpha)(x_k - \alpha) + O((x_k - \alpha)^2) = f'(\alpha)[1 + 2c_2 e_k] + O\left(e_k^2\right)$$

Así,

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = e_k - c_2 e_k^2 + O\left(e_k^3\right)$$

Y la ecuación del error es:

$$e_{k+1} = x_{k+1} - \alpha = x_k - \alpha - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = c_2 e_k^2 + O\left(e_k^3\right).$$

Métodos de un punto

Método de Halley

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\left[1 + \frac{L_f(x_k)}{2 - L_f(x_k)}\right], \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$L_f(x_k) = \frac{f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)^2}$$

Grado de convexidad logarítmica

- Orden 3
- Índice de eficiencia: $3^{1/3}$
- Índice de eficiencia comp.: $3^{1/(3+6)}$
- Método sin memoria
- No libre de derivadas
- No óptimo

Métodos de un punto

Método de Chebyshev

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\left[1 + \frac{L_f(x_k)}{2}\right], \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$L_f(x_k) = \frac{f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)^2}$$

- Orden 3
- Índice de eficiencia: $3^{1/3}$
- Índice de eficiencia comp.: $3^{1/(3+5)}$
- Método sin memoria
- No libre de derivadas
- No óptimo

Métodos de un punto

Método Super-Halley

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\left[\frac{L_f(x_k)-2}{2(L_f(x_k)-1)}\right], \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$L_f(x_k) = \frac{f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)^2}$$

- Orden 3
- Índice de eficiencia: $3^{1/3}$
- Índice de eficiencia comp.: $3^{1/(3+6)}$
- Método sin memoria
- No libre de derivadas
- No óptimo

Métodos de un punto

Familia de métodos Chebyshev-Halley

$$x_{k+1} = x_k - \left[1 + \frac{1}{2}\frac{L_f(x_k)}{1-\beta L_f(x_k)}\right]\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$L_f(x_k) = \frac{f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)^2}$$

Métodos de orden 3 para cualquier valor de β →

- $\beta = 0$, método de Chebyshev
- $\beta = 1/2$, método de Halley
- $\beta = 1$, método super-Halley
- $\beta \to \infty$, método de Newton

✓ ¿Para qué valores de β se obtienen los métodos más estables?

✓ ¿Para qué valores de β *se consiguen métodos con amplias regiones de puntos iniciales convergentes?*

Limitaciones de los métodos de un punto

- ✓ **Teorema**

Sea $x_{k+1} = g(x_k)$ un método iterativo de un punto, que utiliza *p* evaluaciones funcionales por iteración. Entonces, su orden de convergencia es como máximo *p*.

- ✓ **Teorema**

Para diseñar un método iterativo de un punto de orden *p*, su expresión iterativa debe contener derivadas al menos hasta orden *p-1*

Los métodos de un punto no son una buena alternativa para incrementar el orden de convergencia y el índice de eficiencia.

¿Cómo podemos incrementar el orden de convergencia manteniendo la optimalidad del método?

Métodos multipunto

- ✓ Utilizando diferentes fórmulas de cuadratura para aproximar la integral

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt$$

  - Nodos equiespaciados,
  - Cuadratura de Gauss, …

- ✓ Teorema

Sean $g_1(x),\ g_2(x)$ dos funciones de punto fijo para $f(x)=0.$

Consideremos los esquemas iterativos $x_{k+1} = g_1(x_{k+1})$ y $x_{k+1} = g_2(x_{k+1})$

de órdenes p_1 y p_2, respectivamente. Entonces, el orden de

convergencia del método iterativo asociado a la función de punto fijo

$$g(x) = g_2(g_1(x))$$

es $p_1 p_2$.

Métodos multipunto mediante fórmulas de cuadratura

$$f(x) = f(x_0) + \boxed{\int_{x_0}^{x} f'(t)dt} \approx f(x_0) + \boxed{\frac{(x-x_0)}{2}\left(f'(x) + f'(x_0)\right)}$$

Regla trapecios

$x = \alpha$

$$0 \approx f(x_0) + \left(f'(\alpha) + f'(x_0)\right)\frac{(\alpha - x_0)}{2}$$

$$\alpha \approx x_0 - \frac{2f(x_0)}{f'(\alpha) + f'(x_0)} \quad \Rightarrow \quad y_0 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

predictor

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{f'(y_k) + f'(x_k)}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Orden 3
No óptimo

Método de trapecios

Métodos multipunto mediante fórmulas de cuadratura

$$f(x) = f(x_0) + \boxed{\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt} \approx f(x_0) + \boxed{(x - x_0) f'\left(\frac{x + x_0}{2}\right)}$$

Regla punto medio

Orden 3
No óptimo

$$\boxed{\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right)}, \qquad k = 0,1,2,\ldots \end{aligned}}$$

Método de
punto medio

Métodos multipunto mediante fórmulas de cuadratura

$$f(x) = f(x_0) + \boxed{\int_{x_0}^{x} f'(t)dt} \approx f(x_0) + \boxed{\frac{(x-x_0)}{6}\left(f'(x) + 4f'\left(\frac{x+x_0}{2}\right) + f'(x_0)\right)}$$

Regla de Simpson

$$\boxed{\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{6f(x_k)}{f'(x_k) + 4f'\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right) + f'(y_k)}, \quad k = 0,1,2,\ldots \end{aligned}}$$

Método de Simpson

Orden 3
No óptimo

Métodos multipunto mediante fórmulas de cuadratura

$$f(x) = f(x_0) + \boxed{\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt} \approx f(x_0) + \boxed{\frac{(x - x_0)}{2} \sum_{i=1}^{n} A_i f'(t_i)}$$

Cuadratura de Gauss

A_i pesos

t_i nodos

Orden 3
No óptimo

Método de Gauss-Legendre

$$\boxed{\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0,1,2,\ldots \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{2f(x_k)}{f'\left(\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)x_k + \left(3-\sqrt{3}\right)y_k}{6}\right) + f'\left(\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)x_k + \left(3+\sqrt{3}\right)y_k}{6}\right)} \end{aligned}}$$

Métodos multipunto mediante fórmulas de cuadratura

Los métodos iterativos diseñados utilizando fórmulas de cuadratura tienen las siguientes características:

- ✓ El orden de convergencia no depende del número de nodos utilizados en la fórmula de cuadratura.
- ✓ Cuando se utiliza el método de Newton como predictor, el orden de convergencia es siempre tres.
- ✓ Ninguno de estos métodos es óptimo.
- ✓ Muchos métodos pueden ser diseñados utilizando otros esquemas como predictores.

Métodos multipunto por composición

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(y_k)}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Newton+Newton

Orden 4, No óptimo

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
$$z_k = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(y_k)}$$
$$x_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Orden 8, No óptimo

¡ Este procedimiento no es eficiente puesto que utiliza demasiadas evaluaciones funcionales por iteración !

Composición eficiente

✓ **Derivada “congelada”**

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(y_k)},$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0,1,2,\ldots \end{aligned}}$$

Método de Traub

ó

Potra-Pták

El índice de eficiencia del método de Traub es mayor que el del esquema Newton+Newton, pero todavía no es óptimo

Procedimiento de funciones peso

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
$$x_{k+1} = y_k - H(\mu_k)\frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0,1,2,\ldots \qquad (2)$$

$H(\mu)$ es una función peso real, donde $\mu = \dfrac{f(y)}{f(x)}$

Teorema

Sea $\alpha \in I$ un cero simple de una función suficientemente diferenciable *f(x)*, y x_0 una estimación inicial próxima a α. Si elegimos una función *H* tal que $H(0)=1$, $H'(0) = 2$ y $|H''(0)| < \infty$, entonces (2) tiene orden de convergencia 4 y su ecuación del error es

$$e_{k+1} = \left[\left(5 - \frac{H''(0)}{2}\right)c_2^3 - c_2 c_3\right]e_k^4 + O(e_k^5),$$

donde $c_k = \dfrac{1}{k!}\dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{f'(\alpha)}, \; k = 2,3,\ldots; \qquad e_k = x_k - \alpha$

Procedimiento de funciones peso

Caso especial: $H(\mu)=\dfrac{1+\beta\mu}{1+(\beta-2)\mu}$

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k)+\beta f(y_k)}{f(x_k)+(\beta-2)f(y_k)}\frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \qquad k=0,1,2,\ldots$$

Familia de King

Métodos óptimos de orden 4 para cualquier valor del parámetro

$\beta=0$

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k)-2f(y_k)}\frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \qquad k=0,1,2,\ldots$$

Método de Ostrowski

Procedimiento de funciones peso

$$y_k = x_k - \gamma \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$
$$x_{k+1} = x_k - H(\mu_k)\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

$$\mu_k = \mu(x_k) = \frac{f'(y_k)}{f'(x_k)}$$

$$\mu_k = \mu(x_k) = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}$$

Orden 4
Óptimo

$$y_k = x_k - \frac{2}{3}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$
$$x_{k+1} = x_k - \frac{3f'(y_k) + f'(x_k)}{6f'(y_k) - 2f'(x_k)}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Método de Jarratt

Estas ideas pueden extenderse para diseñar métodos óptimos de orden 8, 16, 24, …

Resultados numéricos

- Métodos implementados en Matlab.
- Aritmética de precisión variable con 200 dígitos
- Criterio de parada

$$\left|x_{k+1} - x_k\right| < 10^{-100} \qquad \text{ó} \qquad \left|f(x_{k+1})\right| < 10^{-100}$$

- Orden de convergencia computacional (ACOC) ([CT])

$$\rho \approx \frac{\ln\left(\left|x_{k+1} - x_k\right| / \left|x_k - x_{k-1}\right|\right)}{\ln\left(\left|x_k - x_{k-1}\right| / \left|x_{k-1} - x_{k-2}\right|\right)}$$

Funciones test

(a) $f(x) = sen^2(x) - x^2 + 1, \quad \alpha \approx 1.404492$

(b) $f(x) = x^2 - e^x - 3x + 2, \quad \alpha \approx 0.257530$

(c) $f(x) = \cos(x) - x, \quad \alpha \approx 0.739085$

(d) $f(x) = (x-1)^3 - 1, \quad \alpha = 2$

Resultados numéricos

		Newton	Halley	Ostrowski	Traub	Punto Medio	Newton+Newton
(a) $x_0 = 1$	Iter ρ $\lvert x_{k+1}-x_k \rvert$ $\lvert f(x_{k+1}) \rvert$	8 2.0000 4.2076e-051 3.4438e-101	5 3.0000 1.0180e-038 1.3785e-114	4 3.9951 5.6401e-028 1.0359e-109	18 3.0001 1.0553e-61 3.5827e-183	6 3.0000 2.7029e-097 0	4 3.9915 7.3279e-026 3.4438e-101
(b) $x_0 = 0.7$	Iter ρ $\lvert x_{k+1}-x_k \rvert$ $\lvert f(x_{k+1}) \rvert$	6 2.0000 9.1363e-051 2.9477e-101	5 3.0000 1.1648e-075 7.7869e-208	4 4.0000 9.0394e-077 0	4 3.0001 3.0475e-39 1.8682e-117	4 3.0000 2.3767e-035 2.8063e-106	3 3.8301 3.1267e-025 2.9477e-101
(c) $x_0 = 1$	Iter ρ $\lvert x_{k+1}-x_k \rvert$ $\lvert f(x_{k+1}) \rvert$	7 2.0000 1.7955e-083 1.1913e-166	5 3.0000 4.4217e-087 1.9467e-208	4 4.0000 3.5827e-074 0	5 3.0000 7.6007e-95 0	5 3.0000 5.8956e-099 0	4 4.0000 1.7955e-083 0
(d) $x_0 = 1.5$	Iter ρ $\lvert x_{k+1}-x_k \rvert$ $\lvert f(x_{k+1}) \rvert$	10 2.0000 1.7506e-090 9.1937e-180	6 3.0000 6.4453e-072 0	5 4.0000 3.2401e-060 0	57 3.0000 1.4402e-44 1.7925e-131	6 3.0000 4.6610e-045 2.7847e-133	5 4.0000 1.3231e-045 9.1937e-180

Referencias

- [AB] S. Amat, S. Busquier, *On a Steffensen's type method and its behavior for semismooth equations*, AMC, 177 (2006) 819-823.
- [BRW] W. Bi, H. Ren, Q. Wu, *Three-step iterative methods with eighth-order convergence for solving nonlinear equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 255 (2009) 105--112.
- [CHMT] A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, *"Modified Newton-Jarrat's composition",* Numerical Algorithms, 55 (2010) 87-99.
- [CHMT2] A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, *"New modifications of Potra-Pták's method with optimal fourth and eighth order of convergence",* Journal of Computational an Applied Mathematics, 234 (2010) 2969-2976.
- [CT] *A. Cordero, J.R. Torregrosa, Variants of Newton's Method using fifth-order quadrature formulas" , Applied Mathematics and Computation, 190 (2007) 686-698.*
- [CT2] A. Cordero, J.R. Torregrosa, *"A class of Steffensen type methods with optimal order of convergence",* enviado a Applied Mathematics and Computation.
- [CTV] A. Cordero, J.R. Torregrosa, M.P. Vassileva, *"Three-step iterative methods with optimal eighth-order convergence",* Journal of Computational an Applied Mathematics, Doi: 10.1016/j.cam.2011.01.004.

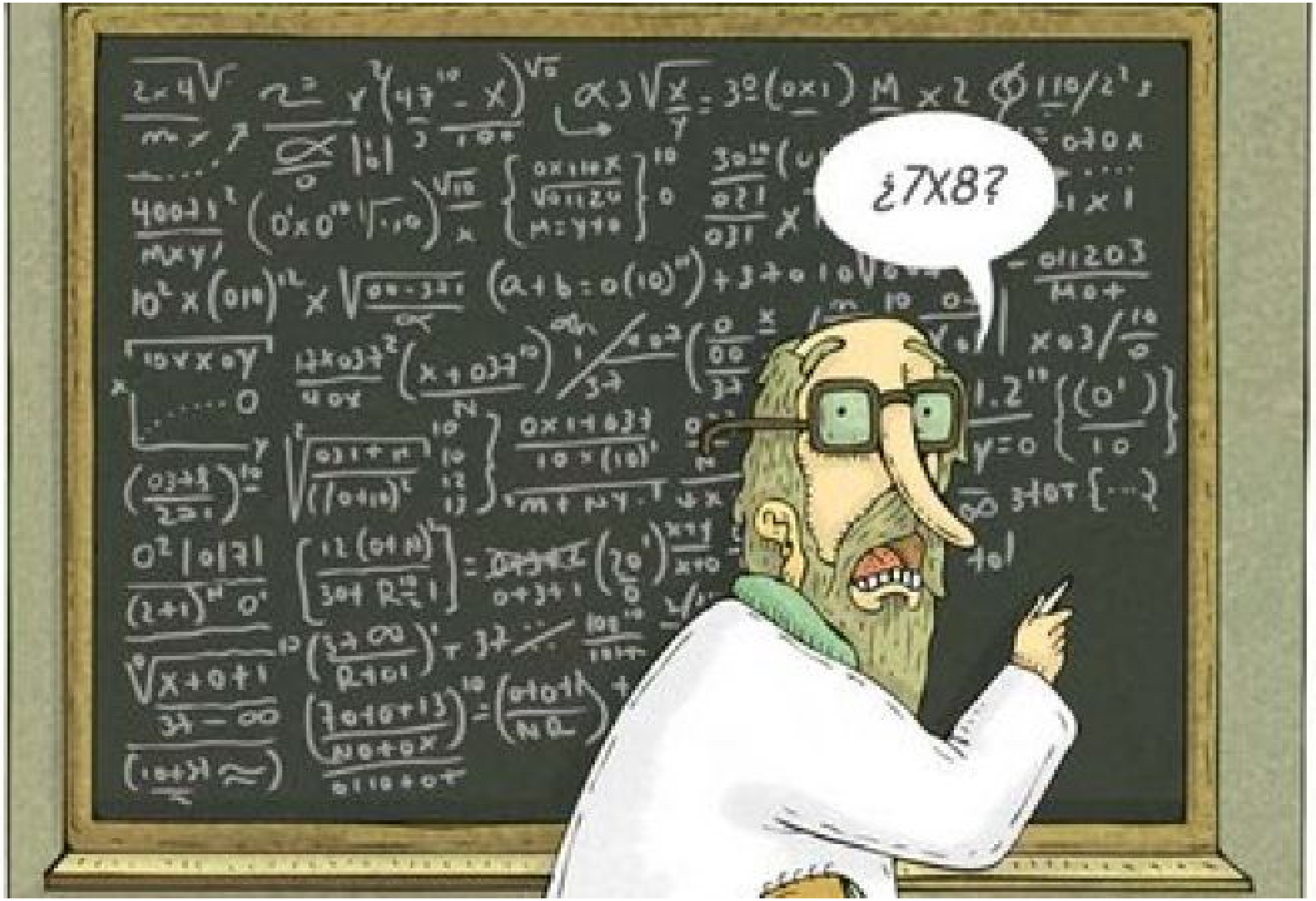
Referencias

- [DH] M. Dehghan, M. Hajarian, *An some derivative free quadratic and cubic convergence iterative formulas for solving nonlinear equations*, Journal of Computational an Applied Mathematics, 29 (2010) 19-30.
- [EGHS] J. A. Ezquerro, J. M. Gutiérrez, M. A. Hernández y M. A. Salanova, *El método de Halley: posiblemente, el método más redescubierto del mundo,* Margarita Mathematica en honor de José Javier Guadalupe, Chicho. Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Rioja, pp. 205-220.
- [Ja] P. Jain, *Steffensen type methods for solving nonlinear equations*, Applied Mathematics and Computation, 194 (2007) 527-533.
- [Ki] R. King, *A family of fourth order methods for nonlinear equations", SIAM Journal Numerical Analysis, 10 (1973) 876-879.*
- [KT] H.T. Kung, J.F. Traub, *Optimal order of one-point and multi-point iteration*, Applied Mathematics and Computation, 21 (1974) 643-651.
- [LW] L. Liu, X. Wang, *Eighth-order methods with high efficiency index for solving nonlinear equations*, Applied Mathematics and Computation, 215 (2010) 3449-–3454.

Referencias

- [LZZ] Z. Liu, Q. Zheng, P. Zhao, *A variant of Steffensen's method of fourth-order convergence and its applications,* Applied Mathematics and Computation*, 216 (2010) 1978-1983*.
- [Os] A.M. Ostrowski*, Solutions of equations and systems of equations, Academic Press, New York-London, 1966.*
- [Oz] A.Y. Ozban, *Some new variants of Newton's Method,* Applied Mathematics Letters, 17 (2004) 677–682.
- [PT] F.A. Potra, V. Pták, *Nondiscrete introduction and iterative processes*, Research Notes in Mathematics, Vol. 103, Pitman, Boston, 1984.,
- [Tr] J.F. Traub, *Iterative methods for the solution of equations*, Chelsea Publishing Company, New York, 1982.
- *[VCT] M. Vassilev, A. Cordero, J.R. Torregrosa, Métodos iterativos usando cuadratura de Gauss. Enviado a International Journal Revista de Matemática: Teoría y aplicaciones, número especial XVII International Symposium on Mathematical Methods Applied to the Sciences (SIMMAC).*
- [WF] S. Weerakoon, T.G.I. Fernando, *A variant of Newton's method with accelerated third- order convergence, Applied Mathematics Letters, 13 (8) (2000) 87–93.*

¿Dudas?



unir

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET