Modelado y Simulación Numérica

Daniel Pérez Palau

Tema 7. Medidas Estadísticas

Calendario

	Semana	Tema	Refuerzo	Laboratorio	Actividad
09/11/2020					
16/11/2020	1	S0 + T1			
23/11/2020	2	T2			
30/11/2020	3	T3		L1	
07/12/2020	4	T4			
14/12/2020	5	T5			L1
21/12/2020	--	Semana de repaso	R-L1		
28/12/2020	--	Semana de repaso			
04/01/2021	6	T6 + repaso			
11/01/2021	7	T6			
18/01/2021	8	T7			
25/01/2021	9	T7			AG
01/02/2021	10	T8			
08/02/2021	11	T9		L2	
15/02/2021	12	T10	R-AG1		
22/02/2021	13	T11			L2
01/03/2021	14	Sesión examen	R-L2		
08/03/2021	15	Repaso (sesión doble)			
15/03/2021	16	Semana			

Próximas sesiones
T7a-> (22/01 17:00CET)
T7b-> (28/01 17:00CET)
T8-> (03/02 19:00CET)

Contenidos

Objetivos

- Conocer los conceptos de medidas estadísticas.
- Saber utilizar las medidas estadísticas para validar resultados de simulación
- Saber utilizar intervalos de confianza y test de hipótesis

Introducción

- En temas anteriores:
  - definimos una **variable aleatoria (v.a.)** como una **función que asigna a cada posible resultado de un experimento un número real**.

- Es imposible conocer todas las propiedades de una v.a.
- Pero podemos realizar medidas estadísticas sobre ellas que nos proporcionen estimaciones de dichas propiedades.
  - Media
  - Varianza

- También es posible realizar comprobaciones → ***tests de hipótesis***,

Independencia de v.a.

Decimos que dos v.a. son independientes cuando no hay ninguna relación entre ellas.

Matemáticamente pedimos:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

Estudiaremos procesos IID (Independientes e Identicamente Distribuidos):

en cada instante de tiempo tenemos una v.a. que es independiente de cualquier realización del proceso en cualquier otro instante de tiempo, pero siempre tenemos la misma distribución.

La Media de una v.a.

La **media** (o esperanza) **μ** de una v.a. es una medida de posición. Proporciona un valor numérico en torno al cual se sitúan las distintas realizaciones de la variable.

- En el caso de una v.a. discreta se define como,

$$\mu = E[x] = \sum_i x_i \cdot P(x = x_i)$$

donde $P(x = x_i)$ es la probabilidad de que la v.a. tome el valor $x = x_i$.

- En el caso de una v.a. continua se define como,

$$\mu = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

donde $f(x)$ es la función de densidad de la v.a. continua x.

La Varianza de una v.a.

La varianza (σ^2) es una medida de dispersión que refleja la tendencia de la v.a. a tomar valores más o menos alejados de su media.

- Si la varianza es pequeña, existirá una alta concentración de los valores de la variable en torno a la media.
- Si la varianza es grande, habrá una alta dispersión de los valores de la v.a. respecto de la media.

- En el caso de una v.a. discreta se define como,

$$\sigma^2 = E[(x-\mu)^2] = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot P(x = x_i) = \sum_i x_i^2 \cdot P(x = x_i) - \mu^2$$
$$= E[x^2] - E[x]^2$$

- En el caso de una v.a. continua se define como,

$$\sigma^2 = E[(x-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$$
$$= E[x^2] - E[x]^2$$

Media y Varianza muestrales

Una **muestra aleatoria** es un conjunto de datos significativo que nos permite analizar estadísticamente las propiedades del p.a. o de la v.a. en estudio.

Definiremos los estimadores media muestral

$$\bar{x}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

y varianza muestral:

$$s^2(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}(n)\right)^2$$

Media y Varianza muestrales

En estimación, muchas veces se utiliza la **cuasivarianza** en lugar de la varianza, ya que es un estimador insesgado (la varianza es un estimador con sesgo).

$$S^2(n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{X}(n)\right)^2$$

Información de la media y la cuasivarianza

¿Puedo utilizar la media y la varianza para dar información sobre mi experimento?

Dada una media y una cuasivarianza, ¿qué valores puedo esperar como resultado de mi experimento?

Primera aproximación: Desiguldad de Tchebychev

La desigualdad de Tchebychev es un resultado clásico que nos permite entender qué papel tienen la media y la varianza al explicar el comportamiento aleatorio de una v.a.

- permite construir intervalos de confianza (poco precisos).

Desigualdad de Tchebychev

Dada una v.a. X de media μ y varianza σ^2, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$,

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) < \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

o equivalentemente,

$$P(|X - \mu| < \varepsilon) < 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Segunda aproximación: Ley débil grandes números

En un p.a. X_n estacionario en sentido amplio,

- la media muestral $\bar{x}$ es un estimador insesgado de la media μ $E[X_n] = \mu$.
- Además si $\mu < \infty$, la probabilidad de que la media muestral converja a la media del proceso es 1.

Ley débil de los grandes números

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ es una sucesión infinita de v.a. independientes con la misma media μ y la misma varianza σ, entonces se cumple que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} P(|\bar{x}_n - \mu| < \varepsilon) = 1$$

Mayor es la población → Mayor la precisión de los resultados

Estimación de la media de un p.a.

existen dos opciones:

1. Si v.a. independiente:

   Realizamos estimación mediante intervalos de confianza.

   definimos:

   - **nivel de signifación $\boldsymbol{\alpha}$:** medida de fallar en la estimación
   - nivel de confianza $\mathbf{1-\boldsymbol{\alpha}}$, medida de éxito en la estimación

2. Si v.a. dependientes:
   – el método de bloques
   – el algoritmo de Law-Carson
   – el método de regeneración
   – …

2ª(bis) aproximación: El teorema central del límite

Teorema central del límite
Sea $x_1, \ldots, x_n$ una muestra aleatoria simple de una v.a. $X \sim N(\mu, \sigma)$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sim N\left(n\mu, \sqrt{n\sigma^2}\right)$$

Si dividimos por n obtenemos:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

La media muestral se puede usar como estimador de la media de X.

*muestra aleatoria simple: obtenida de replicaciones iid de una v.a X.

Cantidad pivotal

Una cantidad pivotal es un estadístico que:

1. Compara el valor de un parámetro con el de un estiamdor
2. Tiene una distribución conocida, independiente del parámetro

Realizando las transformaciones oportunas obtenemos

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

2ª(bis) aproximación: El teorema central del límite

Teorema central del límite (segunda versión)
Sea $x_1, \dots, x_n$ una muestra aleatoria simple de una v.a. con $E[x_i] = \mu$ y $V[x_i] = \sigma^2, i = 1, \dots, n$. Entonces:

$$T_n = \frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} N(0,1)$$

A efectos prácticos, podemos aplicar este teorema si $n > 30$.

Intervalos de confianza para media

Despejando la varianza poblacional μ del pivote T:

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\downarrow$$

$$P\left(\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}} < \bar{x} < \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

¡Si σ es conocida!

El intervalo de confianza para la media será:

$$I_{\mu}^{1-\alpha} = \left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

¿Cómo calcular $Z_{\frac{\alpha}{2}}$?

Normal Deviate z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-4.0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
-3.9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
-3.8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
-3.7	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
-3.6	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001
-3.5	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143

Intervalos de confianza para media

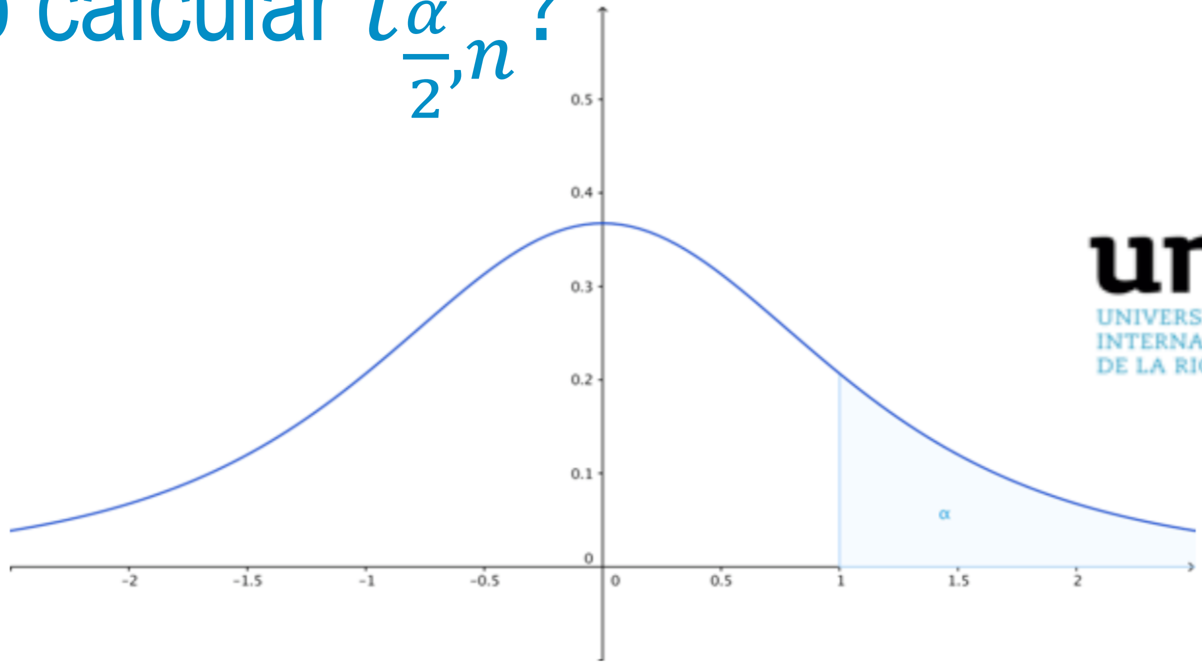
¡Si σ es desconocida!

El intervalo de confianza para la media será:

$$I_{\mu}^{1-\alpha} = \left(\mu - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2},n-1}, \mu + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right)$$

Donde $t_{\alpha,n-1}$ es una distribución *t-student* con n-1 grados de libertad y s^2 es la cuasivarianza muestral.

¿Cómo calcular $t_{\frac{\alpha}{2},n}$?



	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,215
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

Intervalo de confianza para la desviación

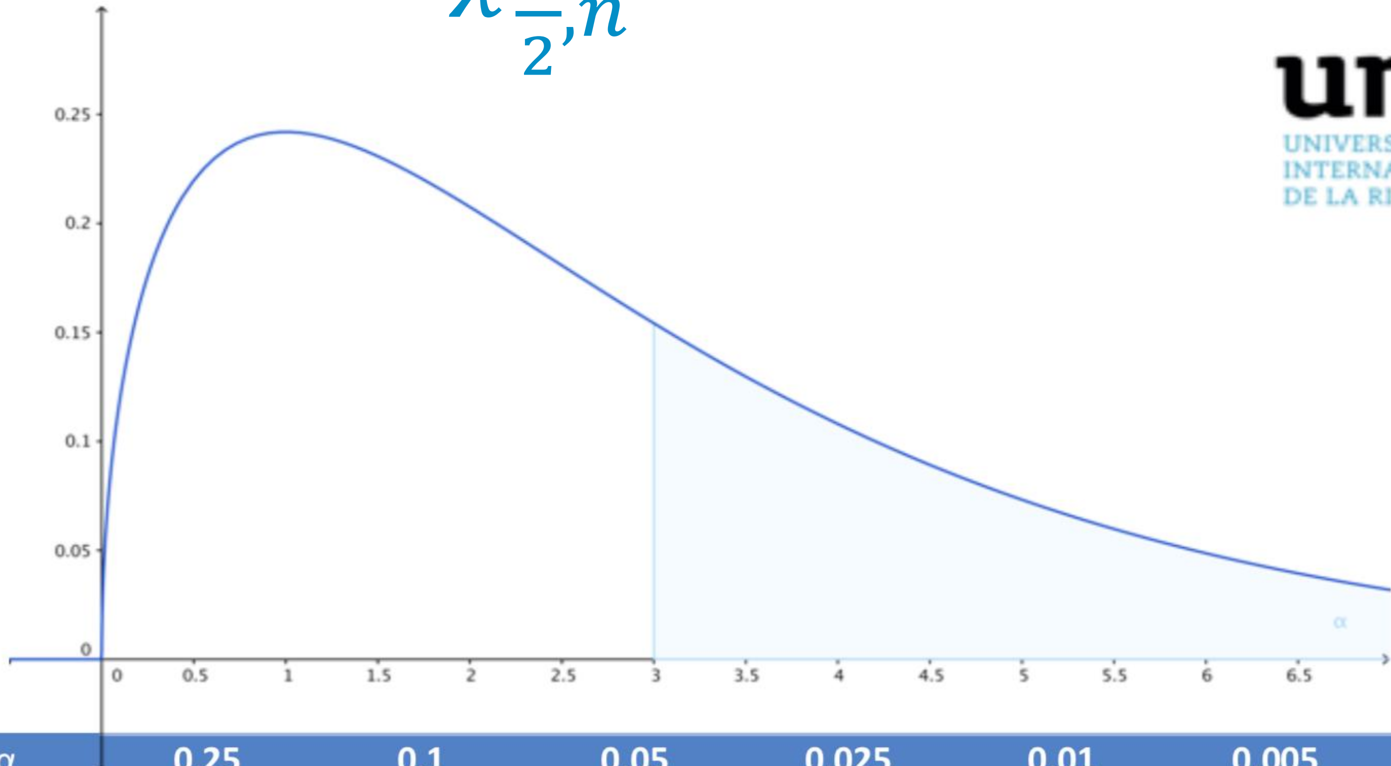
¡σ es desconocida!

El intervalo de confianza para la desviación típica σ de una Normal $N(\mu, \sigma)$ será:

$$I_{\sigma}^{1-\alpha} = \left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}}, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}} \right)$$

Donde $\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ es una distribución *Chi-Cuadrado* con n-1 grados de libertad y s es la cuasivarianza muestral.

¿Cómo calcular $\chi_{\frac{\alpha}{2},n}$?



ν\α	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
1	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	10,828
2	2,773	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597	13,816
3	4,108	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838	16,266
4	5,385	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860	18,467
5	6,626	9,236	11,070	12,833	15,086	16,750	20,515
6	7,841	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548	22,458
7	9,037	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278	24,322
8	10,219	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955	26,124

Ejemplo

Obtener el intervalo de confianza para la estimación de la media de una población normal mediante una muestra de 160 individuos, sabiendo que la media muestral es $\mu = 68.71739$ y la desviación típica es $\sigma = 3.7$ con un nivel de significación de $\alpha = 0.05$.

Aplicamos

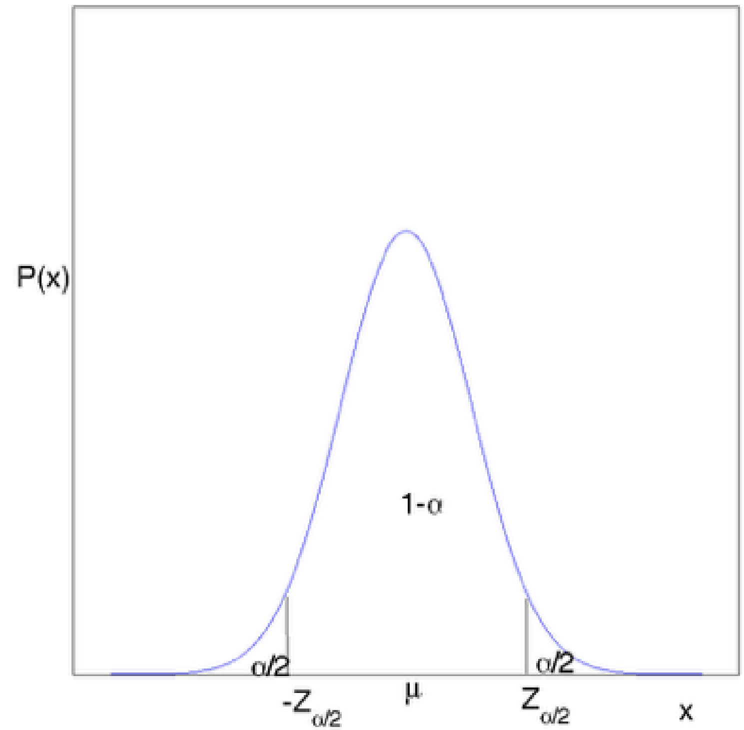
$$I_{\mu}^{1-\alpha} = \left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ (ver tabla)

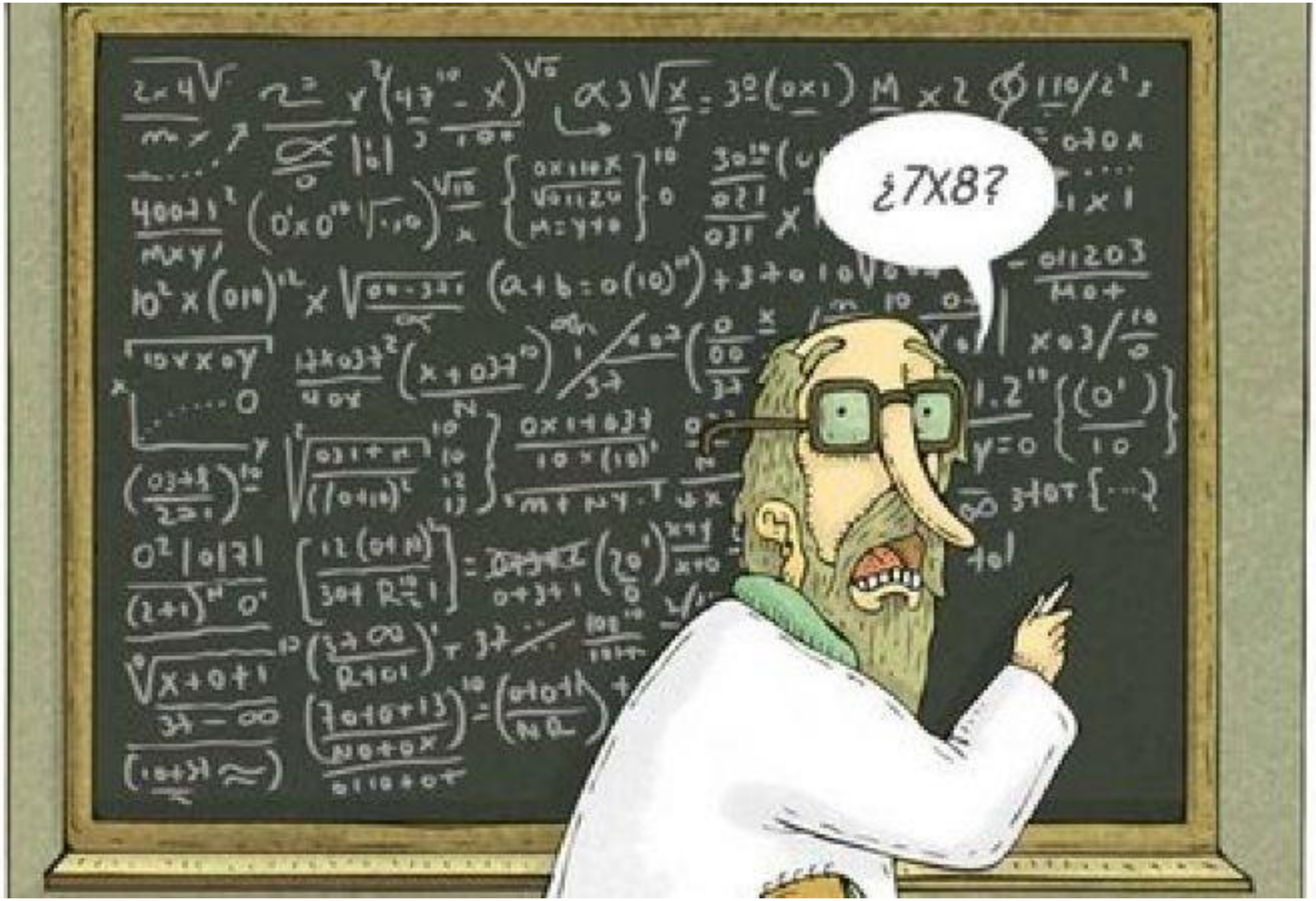
$$\left(68.72 - \frac{3.7}{\sqrt{160}} 1.96, 68.72 + \frac{3.7}{\sqrt{160}} 1.96\right) = (68.14, 69.29)$$

Ejemplo

Normal Deviate z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-4.0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000		
-3.9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000		
-3.8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000		
-3.7	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000		
-3.6	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001		
-3.5	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002		
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003		
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004		
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005		
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008		
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011		
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015		
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021		
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028		
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038		
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051		
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068		
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089		
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116		
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150		
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192		
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244		
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307		
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455



¿Dudas?



2ª(bis) aproximación: El teorema central del límite

Teorema central del límite (segunda versión)
Sea $x_1, \dots, x_n$ una muestra aleatoria simple de una v.a. con $E[x_i] = \mu$ y $V[x_i] = \sigma^2, i = 1, \dots, n$. Entonces:

$$T_n = \frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} N(0,1)$$

A efectos prácticos, podemos aplicar este teorema si $n > 30$.

Ejemplo: test de hipótesis

Se realiza una encuesta a 1500 personas para que respondan a la pregunta:

“¿Las redes sociales ayudan a mejorar el nivel de vida?”

Las respuestas se valoran en una escala del 1 al 10. La media fue de 4.28 y la desviación típica de 1.34.

Queremos realizar un contraste de hipótesis con un nivel de significación de $\alpha = 0.05$.

Ejemplo

Seguimos los pasos estipulados:

1. Queremos verificar la hipótesis:

$$H_0:\ \mu = 4$$
$$H_a:\ \mu \neq 4$$

2. El estadístico de contraste es la media.
3. La regla de decisión será que H_0 se rechaza si

$$Z < -1.96 \text{ ó } Z > 1.96$$

1. Se calcula el valor del estadístico, dado que se conoce la desviación típica será:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{4.28 - 4}{\frac{1.34}{\sqrt{1500}}} = 8.23 > 1.96$$

Rechazamos la hipótesis nula.

Test Chi Cuadrado

La prueba χ^2 (Chi cuadrado) de Pearson se utiliza para medir la discrepancia entre una distribución observada y una teórica.

Nos proporciona información sobre en qué medida las diferencias observadas entre ambas se deben al azar.

Las hipótesis son las siguientes:

- Hipótesis nula: la variable sigue la distribución considerada
- Hipótesis alterantiva: la variable no sigue la distribución considerada

Test Chi Cuadrado

Los pasos que debemos seguir son:

1. Consideramos una muestra aleatoria de tamaño n agrupada en k clases para una variable aleatoria X.

   Sea n_i la frecuencia absoluta de la i-ésima clase, $n = 1, \ldots, k$.

2. Sea p_i la probabilidad teórica asociada a la clase i,

   $n \cdot p_i$ los valores esperados asociados a cada clase i.

   Los valores esperados deben se mayores o iguales que 5, si alguno es menor debemos agrupar clases adyacentes.

3. Se calcula el estadístico chi-cuadrado mediante la siguiente ecuación:

$$\chi^2(n,k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$$

Cuanto mayor sea este valor, mayor probabilidad de rechazo de H_0.

Test Chi Cuadrado

4. Los grados de libertad de la distribución χ^2 son iguales al número de clases menos 1:
$$\nu = k - 1$$

5. Dado un nivel de significación α el valor crítico para el rechazo de la hipótesis propuesta es:
$$\chi^2(n, k) > \chi^2_{\alpha,\nu}$$

Donde $\chi^2_{\alpha,\nu}$ es el valor de la Chi-cuadrado con ν grados de libertad para el nivel de significación dado.

Test Chi Cuadrado (Ejemplo)

Con el objeto de mejorar los hábitos alimenticios de niños se ha realizado un programa de concienciación sobre le consumo de fruta entre las 420 familias de un colegio.

Antes de comenzar el programa se ha realizado una encuesta de la que se extrajo que:

- El 55% de las familias consumía fruta menos de 2 días a la semana
- El 25% consumía fruta entre 2 y 4 días a la semana
- El 20% consumía fruta más de 4 días a la semana

Test Chi Cuadrado (Ejemplo)

Al final del curso (y después del programa de concienciación) se realizó la misma encuesta con los siguientes resultados:

- 150 familias consumía fruta menos de 2 días a la semana
- 126 consumía fruta entre 2 y 4 días a la semana
- 144 consumía fruta más de 4 días a la semana

Se quiere realizar un test de bondad con un nivel de significación del 5% para saber si el programa de concienciación ha funcionado o no.

Test Chi Cuadrado (Ejemplo)

Seguimos los pasos establecidos:

1. La hipótesis nula H_0 representa que el programa no ha surtido efecto. Por lo que la distribución seguirá siendo:

$$p_1 = P(x < 2) = 0.55$$
$$p_2 = P(2 \leq x \leq 4) = 0.25$$
$$p_3 = P(x > 4) = 0.20$$

   La hipótesis alternativa es que H_0 es falsa.

2. El estadístico que elegimos es:

$$\chi^2(n,k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$$

Tenemos que comprobar que el número de clases es el adecuado. Debemos calcular $n \cdot p_i > 5$. En este caso obtenemos los valores $(231{,}105, 84)$.

Test Chi Cuadrado (Ejemplo)

3. Cada familia caen en una de las 3 posibles clases. Luego $\nu = 3 - 1 = 2$.

El nivel de significación es del 5%, luego mirando la tabla obtenemos que $\chi^2_{\alpha,\nu} = 5{,}99$

ν\α	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
1	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	10,828
2	2,773	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597	13,816
3	4,108	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838	16,266
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

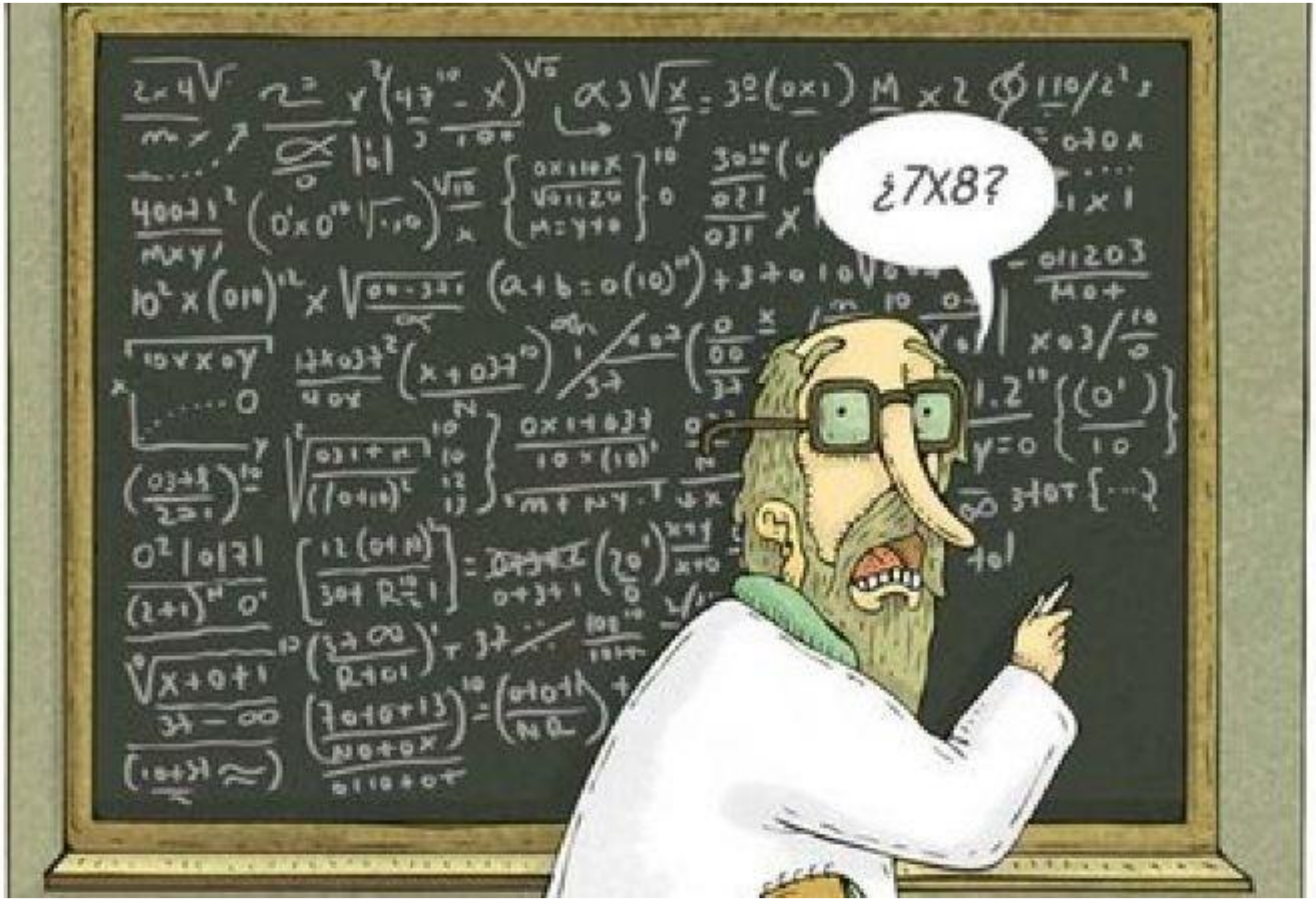
4. Calculamos el estadístico:

$$\chi^2(n,k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$$

$$= \frac{(150 - 420 \cdot 0.55)^2}{420 \cdot 0.55} + \frac{(126 - 420 \cdot 0.25)^2}{420 \cdot 0.25} + \frac{(144 - 420 \cdot 0.2)^2}{420 \cdot 0.2} = 75.5$$

Con lo que se rechaza la hipótesis nula y concluimos que el programa ha cambiado los hábitos alimenticios.

¿Dudas?



Calendario

	Semana	Tema	Refuerzo	Laboratorio	Actividad
09/11/2020					
16/11/2020	1	S0 + T1			
23/11/2020	2	T2			
30/11/2020	3	T3		L1	
07/12/2020	4	T4			
14/12/2020	5	T5			L1
21/12/2020	--	Semana de repaso	R-L1		
28/12/2020	--	Semana de repaso			
04/01/2021	6	T6 + repaso			
11/01/2021	7	T6			
18/01/2021	8	T7			
25/01/2021	9	T7			AG
01/02/2021	10	T8			
08/02/2021	11	T9		L2	
15/02/2021	12	T10	R-AG1		
22/02/2021	13	T11			L2
01/03/2021	14	Sesión examen	R-L2		
08/03/2021	15	Repaso (sesión doble)			
15/03/2021	16	Semana			

Próximas sesiones
T7b -> (28/01 17:00CET)
T8 -> (03/02 19:00CET)

Técnicas de reducción de varianza

permiten aumentar la precisión de las estimaciones

se suelen realizar varios experimentos en lugar de uno solo.

Ejemplos son:

- El método de los números aleatorios comunes.
- El método de las replicaciones independientes.
- El método de la variable de control.
- El método de la variación antitética.
- El método bootstrap.

Únicamente analizaremos en profundidad las dos primeras.

Números aleatorios comunes

El método de los números aleatorios comunes se utiliza cuando se quiere comparar la media de dos poblaciones diferentes cuando la varianza es desconocida.

Por ejemplo, podríamos querer comparar la media de las salidas de dos simulaciones diferentes cuando hemos variado algún parámetro entre ellas.

Un requisito fundamental de esta técnica es que se utilice la misma secuencia de números aleatorios para las dos simulaciones que se realicen y únicamente se varíe el parámetro de interés.

Números aleatorios comunes

Supongamos que X_{1j} y X_{2j} son observaciones de n muestras hechas de la primera y segunda configuración de nuestro modelo.

Supongamos que obtenemos m secuencias de salida para ambas configuraciones.

Queremos estimar la diferencia de medias $E\left(X_{1,j}\right) - E\left(X_{2j}\right)$.

Números aleatorios comunes

Podemos obtener el valor esperado de la diferencia $Z_j = X_{1j} - X_{2j}$ para cada secuencia,

$$E(Z) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j$$

Como tenemos m secuencias, podemos calcular la varianza de dicha expresión:

$$Var\big(E(Z)\big) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j\right) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{1j} - X_{2j}\right) = \mathrm{Var}(\bar{\mathrm{X}}_1 - \bar{X}_2)$$
$$= E[(\bar{\mathrm{X}}_1 - \bar{X}_2)^2] - E[(\bar{\mathrm{X}}_1 - \bar{X}_2)]^2$$
$$= E\left[\bar{X}_1{}^2 + \bar{X}_2^2 - 2\bar{X}_1\bar{X}_2\right] - (E[\bar{X}_1]^2 + E[\bar{X}_2]^2 - 2E[\bar{X}_1]E[\bar{X}_2])$$
$$= E[\bar{X}_1^2] - E[\bar{X}_1]^2 + E[\bar{X}_2^2] - E[\bar{X}_2]^2 - 2(E[\bar{X}_1\bar{X}_2] - E[\bar{X}_1]E[\bar{X}_2])$$
$$= Var(\bar{X}_1) + Var(\bar{X}_2) - 2Cov(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$$

Números aleatorios comunes

Si las dos muestras aleatorias están correlacionadas (provienen de la misma secuencia de números aleatorios) entonces conseguimos mejorar el resultado final puesto que $Cov(\bar{X}_1, \bar{X}_2) > 0$.

Replicaciones independientes

El método de las replicaciones independientes se utiliza cuando se quiere obtener una estimación de la media de una población.

Se replica N veces el mismo experimento. Se obtienen N secuencias de entrada de tamaño n y se obtienen las medias de dichas secuencias $\bar{x}_i$.

Ahora calculamos la media de dichas medias:

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \bar{x}_i$$

Y la cuasi-varianza de esa media es:

$$S_N^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} (\bar{x}_i - \bar{X})^2$$

Replicaciones independientes

Un intervalo de confianza para la media tendrá la expresión,

$$\bar{X} \pm \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2},N-1} S_N}{\sqrt{N}}$$

Tenemos control sobre el error al calcular la media.

Test de hipótesis

Un test de hipótesis (o contraste de hipótesis) es un procedimiento que sirve para decidir si una propiedad que se supone sobre una población es compatible con las observaciones realizadas sobre una muestra de dicha población.

Debemos seguir los siguientes pasos:

1. Determinación de la hipótesis nula H0 y la hipótesis alternativa H1.
2. Selección del estadístico del test o estadístico de contraste.
3. Elección de la región crítica o de rechazo
4. Cálculo del estadístico del test sobre la muestra.

Test de hipótesis: Determinación de la hipótesis nula

Se denomina **hipótesis nula** (H_0), a la hipótesis que se desea contrastar.

- La mantendremos a no ser que los datos indiquen que es falsa.
- Nunca se considera probada, aunque los resultados del test sean positivos.
- Puede ser rechazada por los datos.

Se denomina **hipótesis alternativa** (H_1), a la hipótesis que se adoptará en el caso de que H_0 se rechace.

Test de hipótesis: Selección del estadístico del contraste

Dicho estadístico se calculará a partir de las muestras y estará relacionado con la hipótesis nula.

Su distribución ha de ser conocida. Generalmente se escoge un valor pivote, ya que sus distribuciones son conocidas.

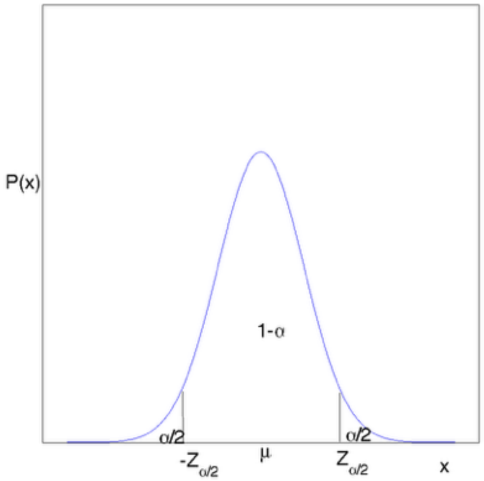
Test de hipótesis: Elección de la región crítica o de rechazo

Dicha región estará formada por el conjunto de valores del estadístico más improbables suponiendo que la hipótesis nula es cierta.

Si el valor del estadístico del test cae en esta región, se rechazará la hipótesis nula.

Si la hipótesis nula es verdadera, la probabilidad de que el estadístico del test pertenezca a dicho conjunto se establece por adelantado, se representa por α y se conoce como nivel de significación del test.

Normalmente suele tomar un valor de un 5% o 1%.



Test de hipótesis: Cálculo del estadístico

Dependiendo del valor obtenido, si está en la región crítica entonces se rechaza la hipótesis nula y se acepta la alternativa. En caso contrario, no se puede rechazar la hipótesis nula, lo que no quiere decir que ésta sea verdadera.

Test de hipótesis: tipos de Errores

Errores tipo I: cometidos al rechazar la hipótesis nula cuando ésta es verdadera (probabilidad α).

Errores tipo II: cometidos al aceptar la hipótesis nula cuando ésta es falsa (probabilidad β).

	H_0 cierta	H_1 es cierta
Escogemos H_0	Sin error	Error Tipo II
Escogemos H_1	Error Tipo I	Sin error

α: nivel de significación

β: potencia del contraste

Test de hipótesis: tipos de Errores

Idealmente, queremos que los errores tanto de tipo I como de tipo II sean lo menores posibles.

Esto es imposible con una muestra de tamaño fijo.

Error de tipo I $\downarrow \implies$ Error de tipo II $\uparrow$

Error de tipo II $\downarrow \implies$ Error de tipo I $\uparrow$

El único recurso disponible para disminuir estos errores es **aumentar el tamaño de la muestra**.

Ejemplo

Se realiza una encuesta a 1500 personas para que respondan a la pregunta:

"¿Las redes sociales ayudan a mejorar el nivel de vida?"

Las respuestas se valoran en una escala del 1 al 10. La media fue de 4.28 y la desviación típica de 1.34.

Queremos realizar un contraste de hipótesis con un nivel de significación de $\alpha = 0.05$.

Ejemplo

Seguimos los pasos estipulados:

1. Queremos verificar la hipótesis:

$$H_0:\ \mu = 4$$
$$H_a:\ \mu \neq 4$$

2. El estadístico de contraste es la media.
3. La regla de decisión será que H_0 se rechaza si

$$Z < -1.96 \text{ ó } Z > 1.96$$

1. Se calcula el valor del estadístico, dado que se conoce la desviación típica será:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{4.28 - 4}{\frac{1.34}{\sqrt{1500}}} = 8.23 > 1.96$$

Rechazamos la hipótesis nula.

Test Chi Cuadrado

La prueba χ^2 (Chi cuadrado) de Pearson se utiliza para medir la discrepancia entre una distribución observada y una teórica.

Nos proporciona información sobre en qué medida las diferencias observadas entre ambas se deben al azar.

Las hipótesis son las siguientes:

- Hipótesis nula: la variable sigue la distribución considerada
- Hipótesis alterantiva: la variable no sigue la distribución considerada

Test Chi Cuadrado

Los pasos que debemos seguir son:

1. Consideramos una muestra aleatoria de tamaño n agrupada en k clases para una variable aleatoria X.

   Sea n_i la frecuencia absoluta de la i-ésima clase, $n = 1, \ldots, k$.

2. Sea p_i la probabilidad teórica asociada a la clase i,

   $n \cdot p_i$ los valores esperados asociados a cada clase i.

   Los valores esperados deben se mayores o iguales que 5, si alguno es menor debemos agrupar clases adyacentes.

3. Se calcula el estadístico chi-cuadrado mediante la siguiente ecuación:

$$\chi^2(n,k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$$

Cuanto mayor sea este valor, mayor probabilidad de rechazo de H_0.

Test Chi Cuadrado

4. Los grados de libertad de la distribución χ^2 son iguales al número de clases menos 1:

$$\nu = k - 1$$

5. Dado un nivel de significación α el valor crítico para el rechazo de la hipótesis propuesta es:

$$\chi^2(n, k) > \chi^2_{\alpha,\nu}$$

Donde $\chi^2_{\alpha,\nu}$ es el valor de la Chi-cuadrado con ν grados de libertad para el nivel de significación dado.

Test Chi Cuadrado (Ejemplo)

Con el objeto de mejorar los hábitos alimenticios de niños se ha realizado un programa de concienciación sobre le consumo de fruta entre las 420 familias de un colegio.

Antes de comenzar el programa se ha realizado una encuesta de la que se extrajo que:

- El 55% de las familias consumía fruta menos de 2 días a la semana
- El 25% consumía fruta entre 2 y 4 días a la semana
- El 20% consumía fruta más de 4 días a la semana

Test Chi Cuadrado (Ejemplo)

Al final del curso (y después del programa de concienciación) se realizó la misma encuesta con los siguientes resultados:

- 150 familias consumía fruta menos de 2 días a la semana
- 126 consumía fruta entre 2 y 4 días a la semana
- 144 consumía fruta más de 4 días a la semana

Se quiere realizar un test de bondad con un nivel de significación del 5% para saber si el programa de concienciación ha funcionado o no.

Test Chi Cuadrado (Ejemplo)

Seguimos los pasos establecidos:

1. La hipótesis nula H_0 representa que el programa no ha surtido efecto. Por lo que la distribución seguirá siendo:

$$p_1 = P(x < 2) = 0.55$$
$$p_2 = P(2 \leq x \leq 4) = 0.25$$
$$p_3 = P(x > 4) = 0.20$$

   La hipótesis alternativa es que H_0 es falsa.

2. El estadístico que elegimos es:

$$\chi^2(n,k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$$

Tenemos que comprobar que el número de clases es el adecuado. Debemos calcular $n \cdot p_i > 5$. En este caso obtenemos los valores $(231{,}105, 84)$.

Test Chi Cuadrado (Ejemplo)

3. Cada familia caen en una de las 3 posibles clases. Luego $\nu = 3 - 1 = 2$.

El nivel de significación es del 5%, luego mirando la tabla obtenemos que $\chi^2_{\alpha,\nu} = 5{,}99$

ν\α	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
1	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	10,828
2	2,773	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597	13,816
3	4,108	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838	16,266
4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

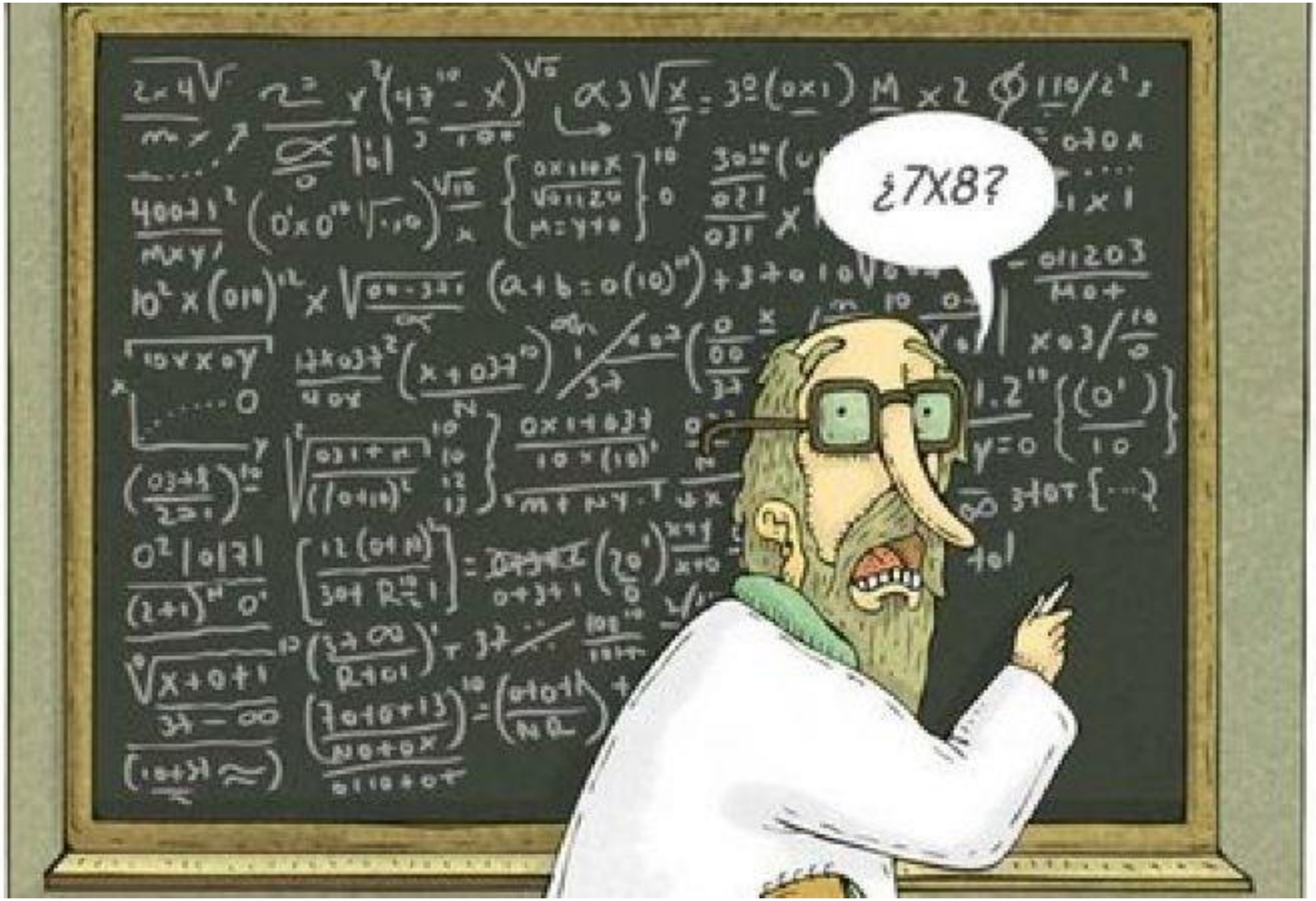
4. Calculamos el estadístico:

$$\chi^2(n,k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$$

$$= \frac{(150 - 420 \cdot 0.55)^2}{420 \cdot 0.55} + \frac{(126 - 420 \cdot 0.25)^2}{420 \cdot 0.25} + \frac{(144 - 420 \cdot 0.2)^2}{420 \cdot 0.2} = 75.5$$

Con lo que se rechaza la hipótesis nula y concluimos que el programa ha cambiado los hábitos alimenticios.

¿Dudas?



unir
LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

www.unir.net