Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería

Neus Garrido Saez

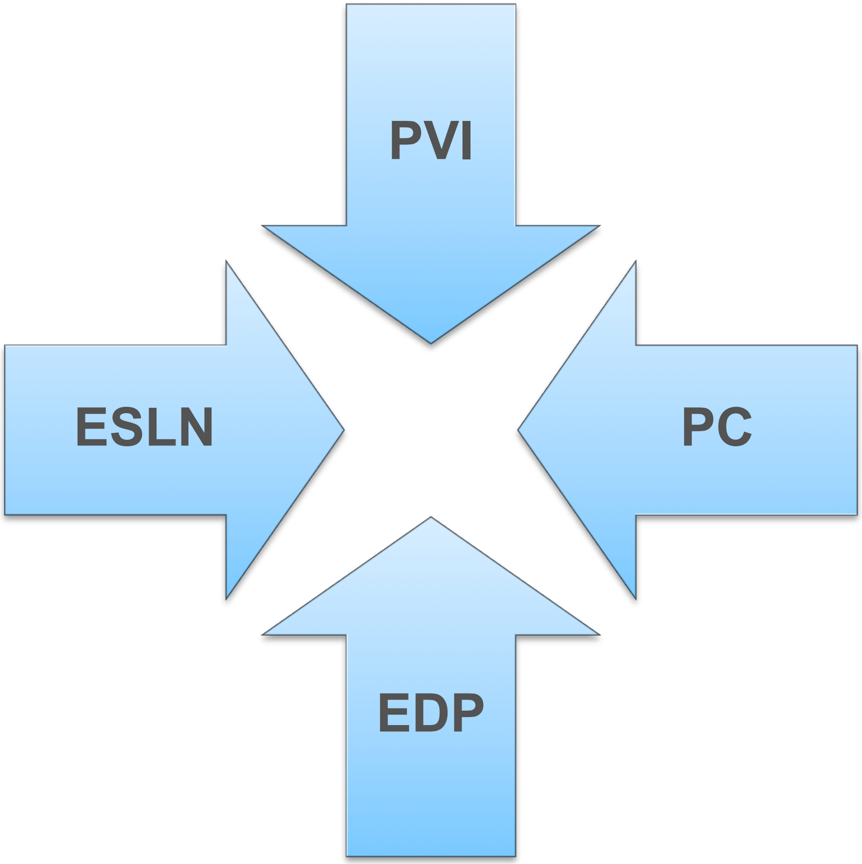
Última clase

unir
UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA
ESCUELA DE INGENIERÍA

Instrucciones del examen

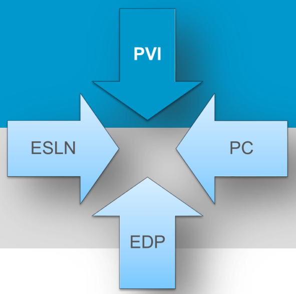
2 horas	Bolígrafo negro
DNI/PAS	Se permite ordenador, memorias, etc
No internet ni comunicación	6 cifras decimales

¿Qué llevar preparado?



¿Qué llevar preparado?

Problemas de valor inicial



Tipos de ejercicios:

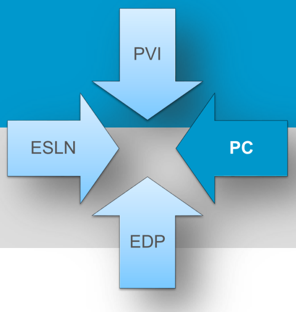
- Ecuación diferencial de primer grado
- Sistema de ecuaciones diferenciales de primer grado
- Ecuación diferencial de grado superior

Métodos:

- Euler
- Heun
- Runge-Kutta
- Adams-Bashforth (orden 2 y 4)
- Adams-Moulton (orden 2 y 4)
- Adams-Bashforth-Moulton

¿Qué llevar preparado?

Problemas de contorno



Tipos de ejercicios:

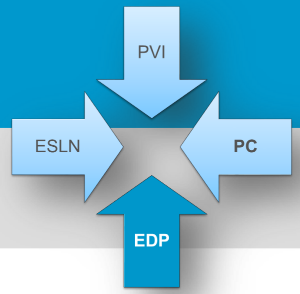
- Problema de contorno lineal y no lineal
- Problema de contorno con condiciones Dirichlet y no Dirichlet

Métodos:

- Disparo lineal
- Diferencias finitas lineal
- Disparo no lineal
  - Secante
  - Newton
- Diferencias finitas no lineal
  - Newton

¿Qué llevar preparado?

Ecuaciones en derivadas parciales



Tipos de ejercicios:

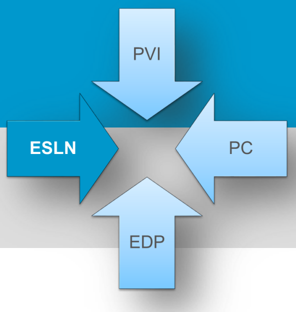
- EDP
  - Parabólica
  - Hiperbólica
  - Elíptica
- Condiciones Dirichlet y no Dirichlet

Métodos:

- Parabólico implícito, explícito y CN
- Hiperbólico explícito, implícito, obtención de $u^{(1)}$ por diferencias y por Taylor
- Elíptico Jacobi, GS, SOR

¿Qué llevar preparado?

Ecuaciones y sistemas lineales y no lineales



Tipos de ejercicios:

- Sistema de ecuaciones lineales
- Ecuación no lineal
- Sistema de ecuaciones no lineales

Métodos:

- SEL: Jacobi, GS, SOR
- ENL: Newton, Steffensen, Halley, Chebyshev, Super-Halley, Trapecios, Punto Medio, Simpson, GL, Traub, ...
- SENL: Newton, Trapecios, composiciones, GR, NA,

Examen Julio 2018

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Examen Julio 2018

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 1

Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y''(x) + y(x) + 2\sin(x) = 0, x \in [0,2\pi],$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

a) Transforma el PVI en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Escribe una función PVI.m que describa la ecuación diferencial de segundo orden como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y copia el código en la hoja de respuestas del examen.

b) Resuelve el PVI para el intervalo $x \in [0,2\pi]$ con $h = \pi/8$ mediante el método de Runge-Kutta de orden 4. Representa $y(x)$. Indica los valores de $y(x)$ para $x \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$.

c) Resuelve el PVI para el intervalo $x \in [0,2\pi]$ con $h = \pi/8$ mediante el método de Adams-Bashforth de orden 4. Representa $y(x)$. Indica los valores de $y(x)$ para $x \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$.

d) Indica una estimación del orden de convergencia de ambos métodos.

Problema 1

Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y''(x) + y(x) + 2\sin(x) = 0, x \in [0,2\pi],$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

a) Transforma el PVI en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Escribe una función PVI.m que describa la ecuación diferencial de segundo orden como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y copia el código en la hoja de respuestas del examen.

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = y \\ y_2 = y' \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 + 2\sin(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{array}$$

PVI.m

Problema 1

Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y''(x) + y(x) + 2\sin(x) = 0, x \in [0,2\pi],$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

b) Resuelve el PVI para el intervalo $x \in [0,2\pi]$ con $h = \pi/8$ mediante el método de Runge-Kutta de orden 4. Representa $y(x)$. Indica los valores de $y(x)$ para $x \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$.

```
>> a=0; b=2*pi; h=pi/8;
>> n=(b-a)/h;
>> y0=[0 1]';
>> [x,y] = RK4('PVI',a,b,n,y0)
>> plot(x,y)
>> [x(1) x(5) x(9) x(13) x(17);...
 y(1) y(5) y(9) y(13) y(17)]
```

Problema 1

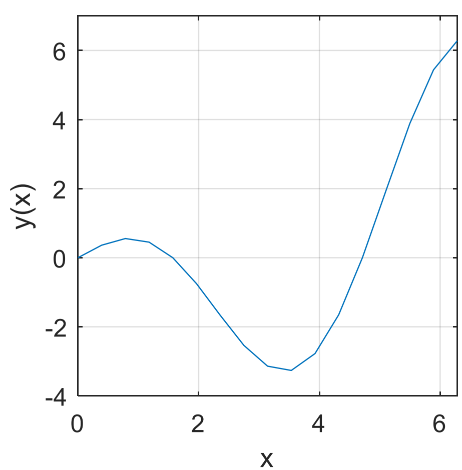
Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y''(x) + y(x) + 2\sin(x) = 0, x \in [0,2\pi],$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

b) Resuelve el PVI para el intervalo $x \in [0,2\pi]$ con $h = \pi/8$ mediante el método de Runge-Kutta de orden 4. Representa $y(x)$. Indica los valores de $y(x)$ para $x \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$.



x	$y(x)$
0	0
$\pi/2$	$-0{,}000236$
π	$-3{,}139908$
$3\pi/2$	$-0{,}001066$
2π	$6{,}279187$

Problema 1

Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y''(x) + y(x) + 2\sin(x) = 0, x \in [0,2\pi],$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

c) Resuelve el PVI para el intervalo $x \in [0,2\pi]$ con $h = \pi/8$ mediante el método de Adams-Bashforth de orden 4. Representa $y(x)$. Indica los valores de $y(x)$ para $x \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$.

```
>> a=0; b=2*pi; h=pi/8;
>> n=(b-a)/h;
>> y0=[0 1]';
>> [x,y] = AB4('PVI',a,b,n,y0)
>> plot(x,y)
>> [x(1) x(5) x(9) x(13) x(17);...
 y(1) y(5) y(9) y(13) y(17)]
```

Problema 1

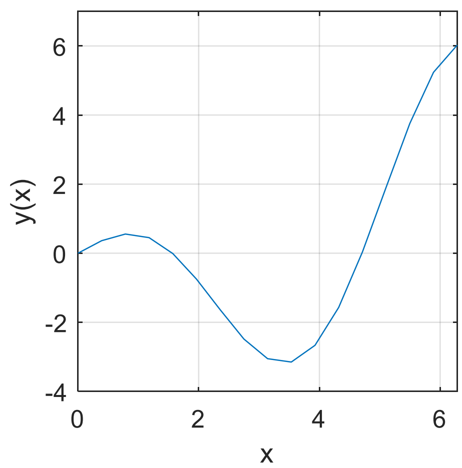
Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y''(x) + y(x) + 2\sin(x) = 0, x \in [0,2\pi],$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

c) Resuelve el PVI para el intervalo $x \in [0,2\pi]$ con $h = \pi/8$ mediante el método de Adams-Bashforth de orden 4. Representa $y(x)$. Indica los valores de $y(x)$ para $x \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$.



x	$y(x)$
0	0
$\pi/2$	$-0{,}009901$
π	$-3{,}053501$
$3\pi/2$	$0{,}033012$
2π	$6{,}024980$

Problema 1

Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y''(x) + y(x) + 2\sin(x) = 0, x \in [0,2\pi],$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

d) Indica una estimación del orden de convergencia de ambos métodos.

```
>> [x,yR1] = RK4('PVI',a,b,n,y0);
>> [x,yR2] = RK4('PVI',a,b,2*n,y0);
>> yR2=yR2(1:2:end);
>> [x,yR3] = RK4('PVI',a,b,4*n,y0);
>> yR3=yR3(1:4:end);
>> [x,yR4] = RK4('PVI',a,b,8*n,y0);
>> yR4=yR4(1:8:end);
>> [x,yR5] = RK4('PVI',a,b,16*n,y0);
>> yR5=yR5(1:16:end);
>> [x,yR6] = RK4('PVI',a,b,32*n,y0)
>> yR6=yR6(1:32:end);
```

```
>> eR1=norm(yR2-yR1);
>> eR2=norm(yR3-yR2);
>> eR3=norm(yR4-yR3);
>> eR4=norm(yR5-yR4);
>> eR5=norm(yR6-yR5);
>> eRi=[eR1 eR2 eR3 eR4 eR5 eR6];
>> eR=log2(eRi(1:end-1)./...
eRi(2:end));
```

Problema 1

Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y''(x) + y(x) + 2\sin(x) = 0, x \in [0,2\pi],$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

d) Indica una estimación del orden de convergencia de ambos métodos.

eR=[3,544460 3,523554 3,512077 3,506113]

No alcanza el orden 4

eAB=[3,217690 3,393531 3,453519 3,478143]

No alcanza el orden 4

Examen Julio 2018

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 2

El sistema no lineal definido por las ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + \cos(yz) = 1/2 \\ x^2 - 81(y + 0{,}1)^2 + \sin(z) = -1{,}06 \\ e^{-xy} + 20z = \dfrac{3 - 10\pi}{3} \end{cases}$$

tiene una solución que queremos obtener. Para ello, vamos a utilizar dos métodos de resolución de ecuaciones no lineales: Newton y Jarratt.

El método de Jarratt tiene la expresión

$$y^{(k)} = x^{(k)} - \frac{2}{3}\left[F'\left(x^{(k)}\right)\right]^{-1} F\left(x^{(k)}\right),$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{1}{2}\left[3F'\left(y^{(k)}\right) - F'\left(x^{(k)}\right)\right]^{-1}\left[3F'\left(y^{(k)}\right) + F'\left(x^{(k)}\right)\right]\left[F\left(x^{(k)}\right)\right]^{-1} F\left(x^{(k)}\right).$$

Para ambos métodos utilizaremos como criterio de parada

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| + \left\|F\left(x^{(k)}\right)\right\| < 10^{-12}.$$

Para resolver el sistema no lineal, sigue los siguientes pasos. Recuerda dar todos los resultados con 6 decimales.

Problema 2

a) Obtén la solución a partir del método de Newton, tomando como punto inicial $[x_0, y_0, z_0] = [0.1, 0.1\ , -0.1]$. Deberás reflejar la solución obtenida, el número de iteraciones y el ACOC
b) Escribe una función Jarratt.m que implemente el método de Jarratt, dando como parámetros de salida la solución del sistema, el número de iteraciones y el ACOC. No se debe calcular directamente la inversa de ninguna matriz Jacobiana.
c) Obtén la solución a partir del método de Jarratt, tomando como punto inicial $[x_0, y_0, z_0] = [0.1, 0.1\ , -0.1]$. Deberás reflejar la solución obtenida, el número de iteraciones y el ACOC.
d) Establece una comparativa entre los métodos de Jarratt y Newton a partir de los resultados obtenidos.

Problema 2

$$\begin{cases} 3x + \cos(yz) = 1/2 \\ x^2 - 81(y + 0{,}1)^2 + \sin(z) = -1{,}06 \\ e^{-xy} + 20z = \dfrac{3 - 10\pi}{3} \end{cases}$$

`SENL.m`

Problema 2

a) Obtén la solución a partir del método de Newton, tomando como punto inicial $[x_0, y_0, z_0] = [0.1, 0.1\ , -0.1]$. Deberás reflejar la solución obtenida, el número de iteraciones y el ACOC.

```
>> sol0=[.1 .1 -.1]';
>> [solN1,iterN1,~,~,ACOCN1] = Newton('SENL',vpa(sol0),1e-12,40)


solN1 =
 -0.166656
 -0.014807
 -0.523475
iterN1 =
     6
ACOCN1 =
[ 0.647499, 1.975826, 1.999733, 2.000000]
```

Problema 2

b) Escribe una función Jarratt.m que implemente el método de Jarratt, dando como parámetros de salida la solución del sistema, el número de iteraciones y el ACOC. No se debe calcular directamente la inversa de ninguna matriz Jacobiana.

```
function [sol,iter,i1,i2,ACOC] = Newton(fun,x0,tol,maxiter)
iter=0; incr1=tol+1;
[fx0,dfx0]=feval(fun,x0);
incr2=norm(fx0);
I=[]; x0=x0(:);
while iter<maxiter && (incr1+incr2)>tol
    x=x0-dfx0\fx0;
    [fx,dfx]=feval(fun,x);
    incr1=norm(x-x0);
    I=[I,incr1];
    incr2=norm(fx);
    iter=iter+1;
    x0=x; fx0=fx; dfx0=dfx;
    end
sol=x;
i1=vpa(incr1,4);
i2=vpa(incr2,4);
ACOC=vpa(log(I(3:end)./I(2:end-1))./log(I(2:end-1)./I(1:end-2)));
end
```


```
x=x0-dfx0\fx0;
[fx,dfx]=feval(fun,x);
incr1=norm(x-x0);
I=[I,incr1];
incr2=norm(fx);
iter=iter+1;
x0=x; fx0=fx; dfx0=dfx;
```

Problema 2

b) Escribe una función Jarratt.m que implemente el método de Jarratt, dando como parámetros de salida la solución del sistema, el número de iteraciones y el ACOC. No se debe calcular directamente la inversa de ninguna matriz Jacobiana.

$$y^k = x^k - \frac{2}{3}\underbrace{\left[F'(x^k)\right]^{-1}F(x^k)}_{v},$$

$$x^{k+1} = x^k - \frac{1}{2}\underbrace{\left[3F'(y^k) - F'(x^k)\right]^{-1}\left[3F'(y^k) + F'(x^k)\right]}_{z}\underbrace{\left[F(x^k)\right]^{-1}F(x^k)}_{v}.$$

```
x=x0-dfx0\fx0;
[fx,dfx]=feval(fun,x);
incr1=norm(x-x0);
I=[I,incr1];
incr2=norm(fx);
iter=iter+1;
x0=x; fx0=fx; dfx0=dfx;
```

```
v=dfx0\fx0;
y=x0-2/3*v;
[fy,dfy]=feval(fun,y);
z=(3*dfy-dfx)\(3*dfy+dfx);
x=x0-1/2*z*v;
[fx,dfx]=feval(fun,x);
incr1=norm(x-x0); I=[I,incr1];
incr2=norm(fx);iter=iter+1;
x0=x; fx0=fx; dfx0=dfx;
```

Problema 2

c) Obtén la solución a partir del método de Jarratt, tomando como punto inicial $[x_0, y_0, z_0] = [0.1, 0.1\ , -0.1]$. Deberás reflejar la solución obtenida, el número de iteraciones y el ACOC.

```
>> sol0=[.1 .1 -.1]';
>> [solJ1,iterJ1,~,~,ACOCJ1] = Jarratt('SENL',vpa(sol0),1e-12,40)


solJ1 =
 -0.166656
 -0.014807
 -0.523475
iterJ1 =
    4
ACOCJ1 =
[ 2.340865, 3.991914]
```

Problema 2

d) Establece una comparativa entre los métodos de Jarratt y Newton a partir de los resultados obtenidos.

Parámetro	Newton		Jarratt
Solución	x=-0.166656 y=-0.014807 z=-0.523475	=	x=-0.166656 y=-0.014807 z=-0.523475
Número de iteraciones	6	⇒	4
ACOC	2.000000	⇒	3.991914

Examen Julio 2018

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 3

Sea el siguiente problema de contorno,

$$y''(x) = xy'(x) + y(x) + 2 + xe^{-x} - 3x^2,$$

con $x \in [0,2]$, siendo las condiciones de contorno $y(0) = \alpha, y'(2) = \beta$.

La resolución de este problema se va a hacer con el método de disparo no lineal o con el método de diferencias finitas. Para obtener la solución numérica de $y(x)$, sigue los pasos correspondientes al método que hayas elegido.

Problema 3

$$y''(x) = xy'(x) + y(x) + 2 + xe^{-x} - 3x^2, \text{con } x \in [0,2],\ y(0) = \alpha,\ y'(2) = \beta.$$

A pesar de que se trate de un problema de contorno lineal, vamos a resolverlo por el método de disparo no lineal, aplicando el método de la secante como criterio para la elección de los diferentes valores de t_k. Para ello, responde a las siguientes preguntas.

a) Plantea el problema de valor inicial, en el que alguna de las condiciones iniciales depende de t.

b) Determina cuál es la ecuación $F(t)$ cuya solución se quiere obtener. Asimismo, para dicha función $F(t)$, aplica el método de la secante y determina la expresión a partir de la cual se actualiza el valor de t_k.

c) Resuelve el problema de contorno con $\alpha = 1$, $\beta = 3.8647$, tomando 40 intervalos y una tolerancia de 1e-6. Como estimación inicial de t utiliza $t = 0.5$ y como segunda estimación utiliza $t = (\beta - \alpha)/(b - a)$. Representa la solución $y(x)$. Indica en una tabla los valores de $y(x)$ para $x \in \{0, 0.5, 1, 1.5, 2\}$.

Problema 3 – Opción disparo

$$y''(x) = xy'(x) + y(x) + 2 + xe^{-x} - 3x^2, \text{con } x \in [0,2], \, y(0) = \alpha, y'(2) = \beta.$$

a) Plantea el problema de valor inicial, en el que alguna de las condiciones iniciales depende de t.

$$y''(x) = xy'(x) + y(x) + 2 + xe^{-x} - 3x^2, x \in [0,2], y(0) = \alpha, y'(0) = t.$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = y \\ y_2 = y' \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} y_1' = y_2 \\ y_2' = xy_2 + y_1 + 2 + xe^{-x} - 3x^2 \end{array}\right\}, \begin{array}{l} y_1(0) = \alpha \\ y_2(0) = t \end{array}$$

P3Disparo.m

Problema 3 – Opción disparo

$y''(x) = xy'(x) + y(x) + 2 + xe^{-x} - 3x^2$,con $x \in [0,2]$, $y(0) = \alpha, y'(2) = \beta$.

b) Determina cuál es la ecuación $F(t)$ cuya solución se quiere obtener. Asimismo, para dicha función $F(t)$, aplica el método de la secante y determina la expresión a partir de la cual se actualiza el valor de t_k.

$$F(t, b) = y'(t, 2) - \beta = 0$$

$$t_{k+1} = t_k - \frac{(t_k - t_{k-1})F(t_k)}{F(t_k) - F(t_{k-1})} \quad = t_k - \frac{(t_k - t_{k-1})(y'(t_k, 2) - \beta)}{y'(t_k, 2) - y'(t_{k-1}, 2)}$$

Problema 3 – Opción disparo

$$y''(x) = xy'(x) + y(x) + 2 + xe^{-x} - 3x^2, \text{con } x \in [0,2], y(0) = \alpha, y'(2) = \beta.$$

c) Resuelve el problema de contorno con $\alpha = 1$, $\beta = 3.8647$, tomando 40 intervalos y una tolerancia de 1e-6. Como estimación inicial de t utiliza $t = 0.5$ y como segunda estimación utiliza $t = (\beta - \alpha)/(b - a)$. Representa la solución $y(x)$. Indica en una tabla los valores de $y(x)$ para $x \in \{0,0.5,1,1.5,2\}$.

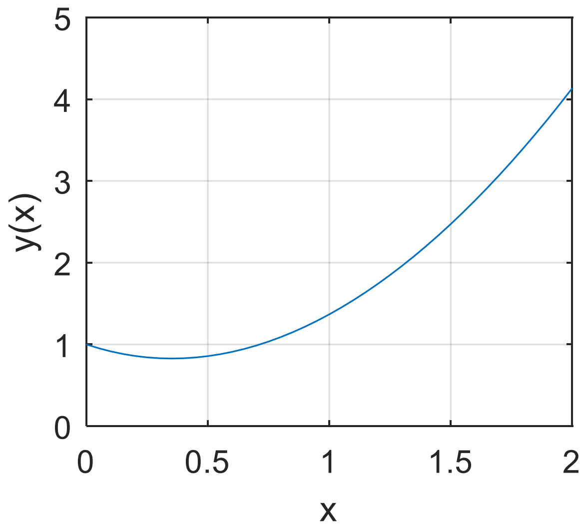
```
function [x,sol,iter,t,incre]=disparoNOlineal(funcion,a,b,alfa,beta,n,tol,maxiter)

h=(b-a)/(n+1);
t0=0;
x=a:h:b;
[x,Y0]=ode45(funcion,[a:h:b],[alfa t0]');
t1=1;
[x,Y1]=ode45(funcion,[a:h:b],[alfa t1]');
incre=abs(Y1(end,1)-beta);
iter=1;
```

```
while incre>tol & iter<maxiter
    t=t1-(Y1(end,1)-beta)*(t1-t0)/...
      (Y1(end,1)-Y0(end,1));
    [x,Y]=ode45(funcion,[a:h:b],[alfa t]');
    incre=abs(Y(end,1)-beta); iter=iter+1;
    t0=t1;
    t1=t;
    Y0(end,1)=Y1(end,1);
    Y1(end,1)=Y(end,1);
end
puntos=x;
    sol=Y(:,1);
end
```

Problema 3 – Opción disparo

$$y''(x) = xy'(x) + y(x) + 2 + xe^{-x} - 3x^2, \text{con } x \in [0,2],\ y(0) = \alpha,\ y'(2) = \beta.$$

c) Resuelve el problema de contorno con $\alpha = 1$, $\beta = 3.8647$, tomando 40 intervalos y una tolerancia de 1e-6. Como estimación inicial de t utiliza $t = 0.5$ y como segunda estimación utiliza $t = (\beta - \alpha)/(b - a)$. Representa la solución $y(x)$. Indica en una tabla los valores de $y(x)$ para $x \in \{0, 0.5, 1, 1.5, 2\}$.



x	$y(x)$
0	1
0,5	0,856532
1	1,367882
1,5	2,473137
2	4,135352

Problema 3 – Opción diferencias finitas

$$y''(x) = xy'(x) + y(x) + 2 + xe^{-x} - 3x^2, \text{con } x \in [0,2],\ y(0) = \alpha, y'(2) = \beta.$$

a) Plantea la expresión general del esquema en diferencias finitas.

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + y_i + 2 + x_i e^{-x_i} - 3x_i^2 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = \frac{h}{2} x_i (y_{i+1} - y_{i-1}) + h^2 y_i + 2h^2 + h^2 x_i e^{-x_i} - 3h^2 x_i^2 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow y_{i+1}\left(1 - \frac{h}{2} x_i\right) - (2 + h^2) y_i + y_{i-1}\left(1 + \frac{h}{2} x_i\right) - h^2\left(2 + x_i e^{-x_i} - 3x_i^2\right) = 0$$

Problema 3 – Opción diferencias finitas

$$y''(x) = xy'(x) + y(x) + 2 + xe^{-x} - 3x^2, \text{con } x \in [0,2],\ y(0) = \alpha,\ y'(2) = \beta.$$

b) Plantea las expresiones para $i = 1$ y para $i = N + 1$, en términos de los nodos $x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1}$, de los valores $y_1, y_2, \dots, y_N, y_{N+1}$, de las condiciones α y β y del paso h.

$$y_{i+1}\left(1 - \frac{h}{2}x_i\right) - (2 + h^2)y_i + y_{i-1}\left(1 + \frac{h}{2}x_i\right) - h^2\left(2 + x_i e^{-x_i} - 3x_i^2\right) = 0$$

i=1

$$y_2\left(1 - \frac{h}{2}x_1\right) - (2 + h^2)y_1 + y_0\left(1 + \frac{h}{2}x_1\right) - h^2(2 + x_1 e^{-x_1} - 3x_1^2) = 0$$

$$y_2\left(1 - \frac{h}{2}x_1\right) - (2 + h^2)y_1 + \alpha\left(1 + \frac{h}{2}x_1\right) - h^2(2 + x_1 e^{-x_1} - 3x_1^2) = 0$$

Problema 3 – Opción diferencias finitas

$$\boxed{y''(x) = xy'(x) + y(x) + 2 + xe^{-x} - 3x^2, \text{con } x \in [0,2],\ y(0) = \alpha,\ y'(2) = \beta.}$$

b) Plantea las expresiones para $i = 1$ y para $i = N + 1$, en términos de los nodos $x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1}$, de los valores $y_1, y_2, \dots, y_N, y_{N+1}$, de las condiciones α y β y del paso h.

$$y_{i+1}\left(1 - \frac{h}{2}x_i\right) - (2 + h^2)y_i + y_{i-1}\left(1 + \frac{h}{2}x_i\right) - h^2\left(2 + x_i e^{-x_i} - 3x_i^2\right) = 0$$

i=N+1

$$y_{N+2}\left(1 - \frac{h}{2}x_{N+1}\right) - (2 + h^2)y_{N+1} + y_N\left(1 + \frac{h}{2}x_{N+1}\right) - h^2(2 + x_{N+1}e^{-x_{N+1}} - 3x_{N+1}^2) = 0$$

$$\boxed{y'(2) = \beta \leftrightarrow y'(x_{N+1}) = \beta \leftrightarrow \frac{y_{N+2} - y_N}{2h} = \beta \leftrightarrow y_{N+2} = 2h\beta + y_N}$$

$$(2h\beta + y_N)\left(1 - \frac{h}{2}x_{N+1}\right) - (2 + h^2)y_{N+1} + y_N\left(1 + \frac{h}{2}x_{N+1}\right)$$
$$- h^2(2 + x_{N+1}e^{-x_{N+1}} - 3x_{N+1}^2) = 0$$

Problema 3 – Opción diferencias finitas

$y''(x) = xy'(x) + y(x) + 2 + xe^{-x} - 3x^2$, con $x \in [0,2]$, $y(0) = \alpha, y'(2) = \beta$.

b) Plantea las expresiones para $i = 1$ y para $i = N + 1$, en términos de los nodos $x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1}$, de los valores $y_1, y_2, \dots, y_N, y_{N+1}$, de las condiciones α y β y del paso h.

$$(2h\beta + y_N)\left(1 - \frac{h}{2}x_{N+1}\right) - (2 + h^2)y_{N+1} + y_N\left(1 + \frac{h}{2}x_{N+1}\right)$$
$$- h^2(2 + x_{N+1}e^{-x_{N+1}} - 3x_{N+1}^2) = 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow 2y_N - (2 + h^2)y_{N+1} - h^2(2 + x_{N+1}e^{-x_{N+1}} - 3x_{N+1}^2) + 2h\beta - h^2x_{N+1} = 0$$

Problema 3 – Opción diferencias finitas

$y''(x) = xy'(x) + y(x) + 2 + xe^{-x} - 3x^2$, con $x \in [0,2]$, $y(0) = \alpha, y'(2) = \beta$.

c) Resuelve el problema de contorno con $\alpha = 1, \beta = 3.8647$, tomando 40 intervalos. Representa la solución $y(x)$. Indica en una tabla los valores de $y(x)$ para $x \in \{0,0.5,1,1.5,2\}$.

$$y_2\left(1 - \frac{h}{2}x_1\right) - (2 + h^2)y_1 + \alpha\left(1 + \frac{h}{2}x_1\right) - h^2(2 + x_1e^{-x_1} - 3x_1^2) = 0$$

$$y_{i+1}\left(1 - \frac{h}{2}x_i\right) - (2 + h^2)y_i + y_{i-1}\left(1 + \frac{h}{2}x_i\right) - h^2\left(2 + x_ie^{-x_i} - 3x_i^2\right) = 0$$

$$2y_N - (2 + h^2)y_{N+1} - h^2(2 + x_{N+1}e^{-x_{N+1}} - 3x_{N+1}^2) + 2h\beta - h^2x_{N+1} = 0$$

Crout

$$A\vec{y} + b = 0$$

Problema 3 – Opción diferencias finitas

$$y''(x) = xy'(x) + y(x) + 2 + xe^{-x} - 3x^2, \text{con } x \in [0,2],\ y(0) = \alpha, y'(2) = \beta.$$

c) Resuelve el problema de contorno con $\alpha = 1, \beta = 3.8647$, tomando 40 intervalos. Representa la solución $y(x)$. Indica en una tabla los valores de $y(x)$ para $x \in \{0, 0.5, 1, 1.5, 2\}$.

$$A = \begin{bmatrix} -(2+h^2) & 1-\frac{h}{2}x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1+\frac{h}{2}x_2 & -(2+h^2) & 1-\frac{h}{2}x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{h}{2}x_3 & -(2+h^2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(2+h^2) & 1-\frac{h}{2}x_N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -(2+h^2) \end{bmatrix}$$

Problema 3 – Opción diferencias finitas

$y''(x) = xy'(x) + y(x) + 2 + xe^{-x} - 3x^2$,con $x \in [0,2]$, $y(0) = \alpha, y'(2) = \beta$.

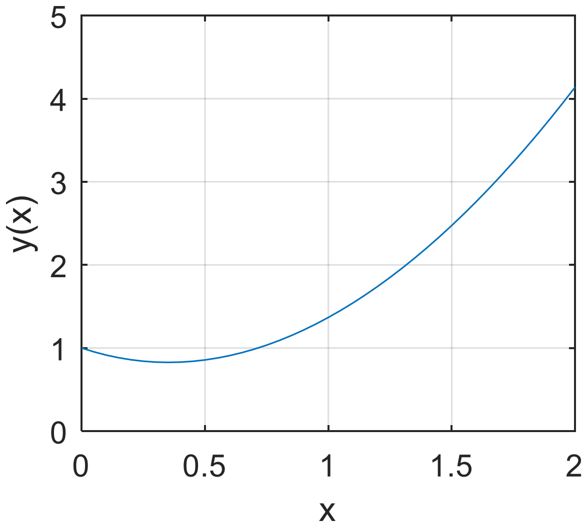
c) Resuelve el problema de contorno con $\alpha = 1, \beta = 3.8647$, tomando 40 intervalos. Representa la solución $y(x)$. Indica en una tabla los valores de $y(x)$ para $x \in \{0,0.5,1,1.5,2\}$.

$$b = \begin{bmatrix} \alpha\left(1 + \frac{h}{2}x_1\right) - h^2(2 + x_1e^{-x_1} - 3x_1^2) \\ -h^2(2 + x_2e^{-x_2} - 3x_2^2) \\ -h^2(2 + x_3e^{-x_3} - 3x_3^2) \\ \vdots \\ -h^2(2 + x_Ne^{-x_N} - 3x_N^2) \\ -h^2(2 + x_{N+1}e^{-x_{N+1}} - 3x_{N+1}^2) + 2h\beta - h^2x_{N+1} \end{bmatrix}$$

Problema 3 – Opción diferencias finitas

$$y''(x) = xy'(x) + y(x) + 2 + xe^{-x} - 3x^2, \text{con } x \in [0,2], y(0) = \alpha, y'(2) = \beta.$$

c) Resuelve el problema de contorno con $\alpha = 1, \beta = 3.8647$, tomando 40 intervalos. Representa la solución $y(x)$. Indica en una tabla los valores de $y(x)$ para $x \in \{0{,}0.5{,}1{,}1.5{,}2\}$.



x	$y(x)$
0	1
0,5	0,856750
1	1,368373
1,5	2,474173
2	4,137899

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

unir

www.unir.net