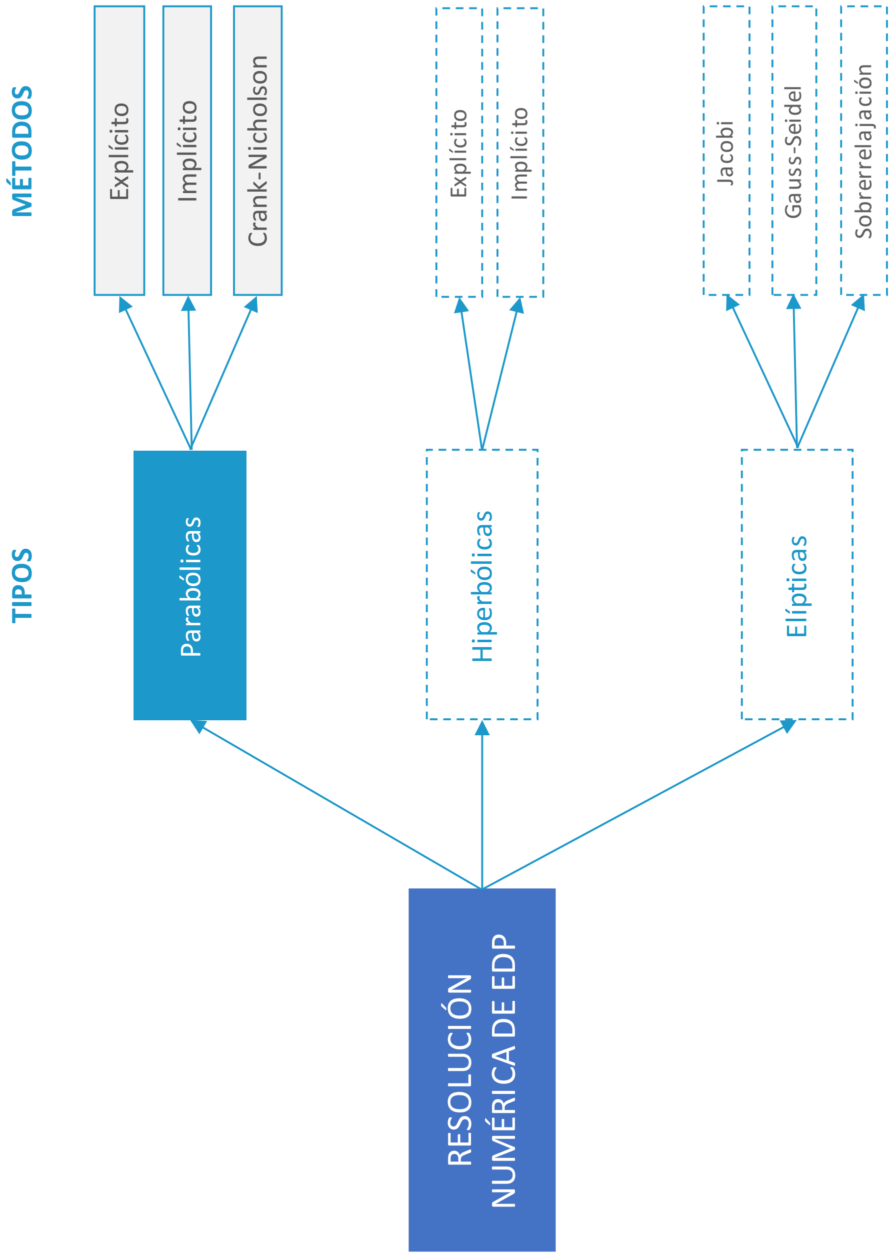
Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería

Problemas de contorno multidimensional. EDP parabólicas

Índice

Esquema


MÉTODOS
TIPOS
Explícito
Implícito
Crank-Nicholson
Explícito
Implícito
Jacobi
Gauss-Seidel
Sobrerrelajación
Parabólicas
Hiperbólicas
Elípticas
RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE EDP

7.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las Ideas Clave que encontrarás a continuación

en los temas anteriores estuvimos analizando los problemas de contorno unidimensional, es decir, aquellos problemas que tan solo tenían una variable. En los próximos temas vamos a estudiar los casos multidimensionales, y en particular los de dos dimensiones. De este modo, de ahora en adelante nuestra función incógnita será $u(x_1, x_2)$, que dependerá de las variables x_1 y x_2. Estos problemas se conocen comúnmente como «ecuaciones en derivadas parciales» (EDP), y su resolución numérica pasa por la aplicación de esquemas en diferencias finitas. Como alternativa, está el método de los elementos finitos, pero en estos temas nos centraremos en la primera de las técnicas.

El principal problema teórico del método consiste en asegurar que la solución de la ecuación discretizada se aproxima a la solución de la ecuación original cuando el número de nodos de la malla crece. En la práctica, hay que tener en cuenta además los errores de redondeo, que aumentan al refinar la malla, limitando la precisión alcanzable. Por otra parte, cuanto más fina sea la malla, más alto es el coste computacional, que en algunas aplicaciones está limitado por el tiempo disponible para obtener la solución.

Los apartados de los que consta este tema son:

- Conceptos básicos de EDP:
  - Tipos de EDP.
  - Diferencias finitas en la resolución numérica de EDP.
- Método explícito para EDP parabólicas:
  - Transformación de la EDP en una ecuación en diferencias.

- Convergencia y estabilidad del método explícito.
- Implementación del método explícito en Matlab.

- Método implícito para EDP parabólicas:
  - Transformación de la EDP en una ecuación en diferencias.
  - Convergencia y estabilidad del método implícito.
  - Implementación del método implícito en Matlab.
- Método de Crank-Nicholson para EDP parabólicas.
  - Transformación de la EDP en una ecuación en diferencias:
  - Convergencia y estabilidad del método implícito.
  - Implementación del método implícito en Matlab.
- Ejemplos resueltos de EDP parabólicas.

7.2. Conceptos básicos de EDP

Las ecuaciones en derivadas parciales son todas aquellas expresiones que relacionan una magnitud con sus derivadas respecto de alguna de las variables de las que dependen.

No obstante, a lo largo de este curso nos centraremos en el caso particular de las ecuaciones en derivadas parciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes, que adoptan la forma:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0$$

donde $u(x, y)$ es la función incógnita que depende de las variables x e y, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ y $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Tipos de EDP

Las ecuaciones en derivadas parciales se pueden clasificar en tres tipos fundamentales. Esta clasificación está basada en los coeficientes constantes a partir del valor de $\Delta = B^2 - AC$, y se recoge en la tabla 1:

Δ	EDP
> 0	Hiperbólica
$= 0$	Parabólica
< 0	Elíptica

Tabla 1. Clasificación de EDP.

Veamos en el ejemplo 1 cómo clasificar una serie de problemas:

Ejemplo 1. Clasifica los siguientes problemas de contorno multidimensional.

a) Ecuación de ondas: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

b) Ecuación del calor: $u_t - c u_{xx} = 0, c > 0$

c) Ecuación de Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = 0$

En el caso de la ecuación de ondas, identificando coeficientes:

$$A = -c^2, C = 1, B = D = E = F = G = 0 \rightarrow \Delta = B^2 - AC = c^2 > 0$$

por lo que se trata de una EDP hiperbólica.

Si identificamos coeficientes sobre la ecuación del calor:

$$A = -c, E = 1, B = C = D = F = G = 0 \rightarrow \Delta = B^2 - AC = 0$$

de modo que es una EDP parabólica.

En cuanto a la ecuación de Laplace:

$$A = C = 1, B = D = E = F = G = 0 \rightarrow \Delta = B^2 - AC = -1 < 0$$

por lo que estamos ante una EDP elíptica.

En este tema nos dedicaremos a las EDP parabólicas, en el que resolveremos a partir de diferentes métodos la distribución de temperatura en una varilla de longitud L a lo largo del tiempo. El tema siguiente estará dedicado a las EDP hiperbólicas, y nos centraremos en la ecuación de transmisión de ondas a lo largo del tiempo y del espacio. El último tema dedicado a las EDP será en el que tomarán protagonismo las EDP elípticas.

Diferencias finitas en la resolución numérica de EDP

En el tema anterior ya introdujimos por primera vez el método de diferencias finitas en una variable. En este apartado, vamos a presentar el método para dos variables. Para ello, tomaremos las variables x y t, siendo la función incógnita $u(x,t)$, y los intervalos de las variables $x \in [a,b], t \in [0, T_{máx}]$.

Por un lado, discretizamos la variable x. Definimos $h = \frac{b-a}{nx}$, donde nx es el número de nodos donde vamos a encontrar la solución menos 1, y obtenemos x_i como:

$$x_i = a + ih, i = 0,1, \dots, nx-1, nx$$

Procedemos de una forma similar con la variable t. Definimos $k = \frac{T_{máx}}{nt}$, donde nt es el número de nodos donde vamos a encontrar la solución menos 1, y obtenemos t_j como:

$$t_j = jk, j = 0,1, \dots, nt-1, nt$$

Nótese que los nodos finales para las variables son:

$$x_{nx} = a + nx \cdot h = b$$
$$t_{nt} = j \cdot nt = T_{máx}$$

La tabla 2 representa la distribución de los nodos tras aplicar la discretización del problema de diferencias finitas en dos variables. Las soluciones $u_{i,j}$ se corresponden de forma unívoca con las soluciones $u(x,t)$ de la forma: $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$.

$t: t_j \rightarrow$ $\downarrow x: x_i$		t_0	t_1	$\cdots$	t_{nt-1}	t_{nt}
		0	k		$(nt-1)k$	$T_{máx}$
x_0	a	$u_{0,0}$	$u_{0,1}$	$\cdots$	$u_{0,nt-1}$	$u_{0,nt}$
x_1	$a+h$	$u_{1,0}$	$u_{1,1}$	$\cdots$	$u_{1,nt-1}$	$u_{1,nt}$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_{nx-1}	$(nx-1)h$	$u_{nx-1,0}$	$u_{nx-1,1}$	$\cdots$	$u_{nx-1,nt-1}$	$u_{nx-1,nt}$
x_{nx}	b	$u_{nx,0}$	$u_{nx,1}$	$\cdots$	$u_{nx,nt-1}$	$u_{nx,nt}$

Tabla 2. Definición de nodos para utilizar el método de diferencias finitas.

De forma gráfica, podemos representar la discretización como se ilustra en la figura 1, donde los círculos rojos representan las incógnitas.

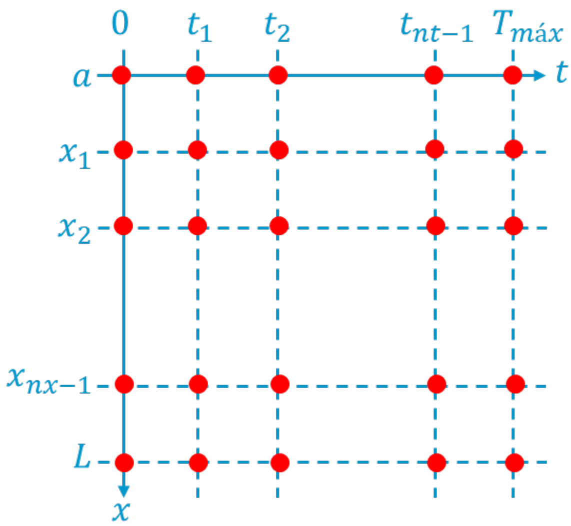


Figura 1. Distribución de nodos en los que obtener la solución por el método de diferencias finitas.

Una vez tenemos definidos los nodos, debemos discretizar la ecuación en derivadas parciales correspondientes. Para ello, presentamos una serie de definiciones de diferencias finitas que utilizaremos cuando abordemos las EDP parabólicas, hiperbólicas y elípticas.

- Diferencias de primer orden, para derivadas primeras:
  - Diferencia progresiva:

$$u_x(x,t) \approx \frac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h} \rightarrow u_x(x_i,t_j) = \frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h}$$
$$u_t(x,t) \approx \frac{u(x,t+k)-u(x,t)}{k} \rightarrow u_t(x_i,t_j) = \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k}$$

- Diferencia regresiva:

$$u_x(x,t) \approx \frac{u(x,t)-u(x-h,t)}{h} \rightarrow u_x(x_i,t_j) = \frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h}$$
$$u_t(x,t) \approx \frac{u(x,t)-u(x,t-k)}{k} \rightarrow u_t(x_i,t_j) = \frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{k}$$

- Diferencia central:

$$u_x(x,t) \approx \frac{u(x+h,t)-u(x-h,t)}{2h} \rightarrow u_x(x_i,t_j) = \frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2h}$$
$$u_t(x,t) \approx \frac{u(x,t+k)-u(x,t-k)}{2k} \rightarrow u_t(x_i,t_j) = \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{2k}$$

- Diferencias de segundo orden, para derivadas segundas:

  - Diferencia central:

$$u_x(x,t) \approx \frac{u(x+h,t)-2u(x,h)+u(x-h,t)}{h^2} \rightarrow$$
$$\rightarrow u_x(x_i,t_j) = \frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h^2}$$
$$u_t(x,t) \approx \frac{u(x,t+k)-2u(x,t)-u(x,t-k)}{k^2} \rightarrow$$
$$\rightarrow u_t(x_i,t_j) = \frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}-u_{i,j-1}}{k^2}$$

A partir de la discretización de las variables independientes, y de las expresiones en diferencias de las derivadas de la función incógnita, vamos a estudiar diferentes casos de EDP.

En función del esquema en diferencias que utilicemos, obtendremos métodos explícitos o implícitos. Los métodos explícitos son aquellos que para obtener la solución en un nodo actual solo requieren de la información de los nodos previos ya calculados. Estos métodos son sencillos de implementar, pero padecen inestabilidad y requieren de condiciones de convergencia. Los métodos implícitos son más complejos de implementar, sin embargo, tienen la estabilidad garantizada y no requieren de condiciones de convergencia.

Aunque hasta ahora no se habían tratado de las condiciones de contorno, nos vamos a encontrar con casos similares a los problemas de contorno unidimensional. La tabla 3 recoge los principales tipos de condiciones de contorno.

Tipo		Descripción	Observaciones
Dirichlet	Homogéneas	$u(a,t) = u(b,t) = 0, t > 0$	
	No homogéneas	$u(a,t) = \alpha, u(b,t) = \beta$	
Naturales		$\alpha_a u_x(a,t) + \beta_a u(a,t) = \gamma_a$ $\alpha_b u_x(b,t) + \beta_b u(b,t) = \gamma_b$	$\beta_a, \beta_b, \gamma_a, \gamma_b \in \mathbb{R}$ $\alpha_a, \alpha_b \neq 0$
Mixtas		$\alpha_a u_x(a,t) + \beta_a u(a,t) = \gamma_a$ $u(b,t) = \beta$	$\beta_a, \gamma_a \in \mathbb{R}$ $\alpha_a \neq 0$

Tabla 3. Tipos de condiciones de contorno.

7.3. Método explícito para EDP parabólicas

Para abordar las EDP parabólicas, es decir, aquellas que cumplen $\Delta = 0$, vamos a trabajar con una expresión sencilla y general, que es:

$$u_t(x,t) - \alpha^2 u_{xx}(x,t) = 0, x \in [0,L], t \geq 0$$

A las condiciones sobre la variable x las denominaremos condiciones de contorno, por tratarse de una variable espacial. Estas condiciones son:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0$$

A la condición sobre la variable t la denominaremos condición inicial por tratarse de una variable temporal. Esta condición tendrá la forma:

$$u(x,0) = f(x), x \in [0, L]$$

La figura 2 recoge con nodos en verde la información de la que disponemos y con nodos en rojo la información que debemos obtener:

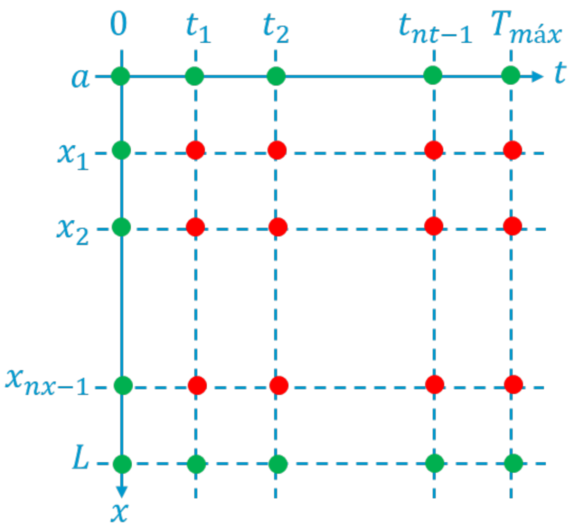


Figura 2. Información disponible en la EDP parabólica.

Transformación de la EDP en una ecuación en diferencias

Para realizar la transformación en una ecuación en diferencias que dé como resultado un método explícito, tenemos que aplicar diferencias progresivas sobre u_t y diferencias centrales sobre u_{xx}.

$$\frac{u(x,t+k) - u(x,t)}{k} - \alpha^2 \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} = 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow u_{i,j+1} - u_{i,j} - \frac{k\alpha^2}{h^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) = 0$$

Si llamamos $\lambda = \frac{k\alpha^2}{h^2}$,

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = \lambda\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow u_{i,j+1} = (1-2\lambda)u_{i,j} + \lambda\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right).$$

Prestemos atención a los índices. Para obtener el elemento $u_{i,j+1}$ necesitamos conocer los elementos $u_{i+1,j}$, $u_{i,j}$ y $u_{i-1,j}$. Esta relación se ilustra en la figura 3.

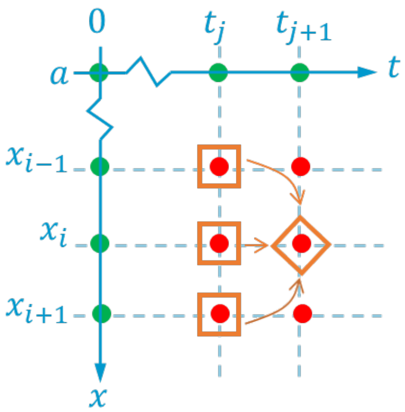


Figura 3. Relación de elementos en el esquema explícito.

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno $u(0,t) = u_{0,j}$ y $u(L,t) = u_{nx,j}$ y la condición inicial $u(x,0) = u_{i,0}$, planteamos la ecuación en diferencias en los nodos $i = 1,2,\dots,nx-2, nx-1, j = 0,1,\dots,nt-1$. Marcaremos en verde aquellos valores que son conocidos por las condiciones de contorno o por las condiciones iniciales.

Para $j = 0$:

$$u_{i,1} = (1-2\lambda)u_{i,0} + \lambda\left(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} u_{1,1} = (1-2\lambda)u_{1,0} + \lambda\left(u_{2,0} + u_{0,0}\right) \\ u_{2,1} = (1-2\lambda)u_{2,0} + \lambda\left(u_{3,0} + u_{1,0}\right) \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} = (1-2\lambda)u_{nx-1,0} + \lambda\left(u_{nx,0} + u_{nx-2,0}\right) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1-2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{nx-1,0} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} u_{0,0} \\ 0 \\ \vdots \\ u_{nx,0} \end{bmatrix}$$

Para $j = 1$:

$$u_{i,2} = (1-2\lambda)u_{i,1} + \lambda\left(u_{i+1,1} - u_{i-1,1}\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} u_{1,2} = (1-2\lambda)u_{1,1} + \lambda\left(u_{2,1} + u_{0,1}\right) \\ u_{2,2} = (1-2\lambda)u_{2,1} + \lambda\left(u_{3,1} + u_{1,1}\right) \\ \vdots \\ u_{nx-1,2} = (1-2\lambda)u_{nx-1,1} + \lambda\left(u_{nx,1} + u_{nx-2,1}\right) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ \vdots \\ u_{nx-1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1-2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} u_{0,1} \\ 0 \\ \vdots \\ u_{nx,1} \end{bmatrix}$$

Si denotamos $u^{(j)} = u_{i,j}, i = 1,2, \dots, nx - 1$, podemos expresar las ecuaciones en diferencias de forma matricial como:

$$u^{(j+1)} = Au^{(j)} + B^{(j)} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1-2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} u_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ u_{nx,j} \end{bmatrix}$$

Como se puede observar, se trata de un método explícito, puesto que obtenemos la solución en el instante t_{j+1} a partir de la información del instante t_j.

Convergencia y estabilidad del método explícito

El orden de convergencia del método explícito es $\mathcal{O}(k + h^2)$. Se trata de un esquema consistente, es decir, la solución numérica tiende a la solución analítica cuando $h, k \rightarrow 0$. Acerca de la estabilidad, se presentan los siguientes resultados:

- Para $\lambda \leq \frac{1}{2}$, el método es estable; los errores no crecen, pero oscilan.
- Para $\lambda \leq \frac{1}{4}$, el método es estable y los errores no oscilan.
- Para $\lambda = \frac{1}{6}$, se minimizan los errores de truncamiento, pero el coste computacional no es asumible.

Implementación del método explícito en Matlab

A la vista de la EDP a resolver, debemos plantear cómo obtener la solución en Matlab. En primer lugar, nos plantearemos los parámetros de salida. Será interesante obtener la solución $u(x,t)$ y los valores de los nodos de las variables x y t.

Los parámetros de entrada serán aquellos que nos permitan utilizar la implementación para cualquier EDP con la estructura:

$$u_t(x,t) - \alpha^2 u_{xx}(x,t) = 0$$

en el que podemos generalizar el rango de la variable $x \in [a,b]$, y las condiciones de contorno como $u(a,t) = p(t), u(b,t) = q(t)$. La condición inicial ya se encontraba generalizada, de forma que mantendremos $u(x,0) = f(x)$.

Además, deberemos indicar el paso espacial h y el paso temporal k o, sus equivalentes en número de puntos, nx y nt, respectivamente.

Por tanto, la primera línea de nuestro código sería:

```
function [x,t,U]=parabolicoExplicito(nx,a,b,p,q,nt,T,f,alpha)
```

En las siguientes líneas del código definiremos las variables con las que vamos a trabajar, e inicializaremos la matriz de salida.

```
h=(b-a)/nx; x=a:h:b;
k=T/nt; t=0:k:T;
lambda=k*alpha^2/h^2;
```

El siguiente paso consiste en inicializar la matriz U de la solución e introducir la información de las condiciones iniciales y de contorno.

```
U=zeros(nx+1,nt+1);
U(:,1)=f(x); % Condición inicial
U(1,:)=p(t); % Condición de contorno en x=a
U(nx+1,:)=q(t); % Condición de contorno en x=b
```

Generemos la matriz A. Al ser una matriz tridiagonal, podemos definir los vectores de su diagonal.

```
dPA=(1-2*lambda)*ones(nx-1,1);
dSA=lambda*ones(nx-2,1);
A=diag(dPA)+diag(dSA,1)+diag(dSA,-1);
```

Como la expresión reducida es $u^{(j+1)} = Au^{(j)} + B^{(j)}$, solo nos quedará obtener las soluciones en cada instante j generando el vector $B^{(j)}$ en cada paso.

```
for j=1:nt-1
   B=lambda*[U(1,j); zeros(nx-3,1); U(nx+1,j)];
   U(2:nx,j+1)=A*U(2:nx,j)+B;
end
```

Si queremos representar gráficamente el resultado, podemos incluir los siguientes comandos:

```
[X,T]=meshgrid(x,t);
surf(X,T,U’), shading interp
```

Veamos cómo aplicar el código que acabamos de desgranar a la solución de la EDP sobre la que estábamos trabajando en el ejemplo 2.

Ejemplo 2. Sea la EDP:

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, x \in [0,1], t \geq 0.$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0, \qquad u(x,0) = \sin(\pi x)\,, x \in [0,1]$$

Tomando $h = 0.1, k = 0.0005,$ indica la solución en el instante $T = 0.5$ para todos los nodos y representa dicha solución, utilizando el método explícito.

En primer lugar, tenemos que definir los parámetros de entrada con los que vamos a resolver el problema:

```
>> a=0; b=1; T=0.5; nx=1/0.1; nt=0.5/0.0005;
alpha=1;
```

Por otro lado, utilizaremos funciones anónimas para introducir las condiciones de contorno e iniciales:

```
>> p=@(t) 0*t;
>> q=@(t) 0*t;
>> f=@(x) sin(pi*x);
```

Solo queda ejecutar el programa:

```
>>
[x,t,U]=parabolicoExplicito(nx,a,b,p,q,nt,T,f,
alpha);
```

Para obtener la solución en el instante final, ejecutamos:

```
>> U(:,nt+1)
```

Para representar la solución en el instante final, ejecutamos:

```
>> plot(x,U(:,nt+1))
```

Los resultados se presentan a continuación:

x	$u(x, 0.5)$
0	0
0.1	2.2865e-3
0.2	4.3492e-3
0.3	5.9862e-3
0.4	7.0372e-3
0.5	7.3993e-3
0.6	7.0372e-3
0.7	5.9862e-3
0.8	4.3492e-3
0.9	2.2865e-3
1	0

Tabla 4. Resultado de EDP. Ejemplo 2.

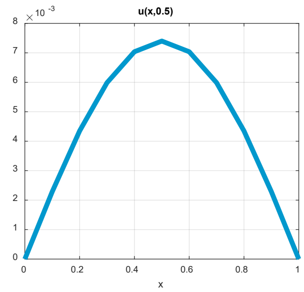


Figura 5. Representación del resultado de EDP ejemplo 2.

En la situación del ejemplo 2 hemos obtenido un resultado satisfactorio, puesto que $\lambda = \frac{k\alpha^2}{h^2} = \frac{0.0005 \cdot 1^2}{0.1^2} = \frac{1}{20}$, valor para el que la estabilidad está garantizada. Veamos en el Ejemplo 3 qué ocurre cuando no se cumplen las condiciones de estabilidad.

Ejemplo 3. Sea la EDP:

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, x \in [0,1], t \geq 0$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0, \qquad u(x,0) = \sin(\pi x), x \in [0,1]$$

Tomando $h = 0.1, k = 0.01$, indica la solución en el instante $T = 0.5$ para todos los nodos y representa dicha solución, utilizando el método explícito.

El enunciado es el mismo que en el ejemplo 2, salvo el valor de $k = 0.01$. Ejecutemos el programa siguiendo las mismas pautas que en el ejemplo anterior, pero ahora con el nuevo valor de k. Los resultados se muestran a continuación.

x	$u(x, 0.5)$
0	0
0.1	-475.217e3
0.2	907.597e3
0.3	-1.257e6
0.4	1.490e6
0.5	-1.580e6
0.6	1.515e6
0.7	-1.299e6
0.8	949.526e3
0.9	-501.131e3
1	0

Tabla 5. Resultados EDP ejemplo 3.

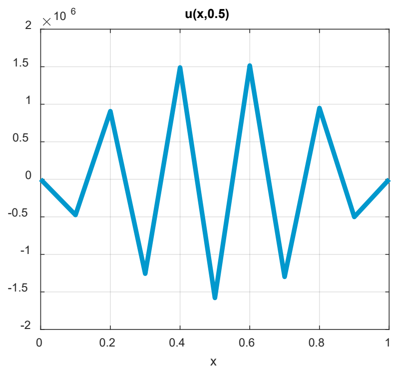


Figura 5. Representación solución EDP 3.

En el caso del ejemplo 3, observamos que $\lambda = \frac{k\alpha^2}{h^2} = \frac{0.01 \cdot 1^2}{0.1^2} = 1$, valor que sobrepasa el límite marcado para la estabilidad del método.

7.4. Método implícito para EDP parabólicas

Consideremos de nuevo la EDP:

$$u_t(x,t) - \alpha^2 u_{xx}(x,t) = 0, x \in [0, L], t \geq 0$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0, \qquad u(x,0) = f(x), x \in [0, L]$$

Transformación de la EDP en una ecuación en diferencias

Para realizar la transformación en una ecuación en diferencias que dé como resultado un método implícito, aplicamos diferencias regresivas sobre u_t y diferencias centrales sobre u_{xx}.

$$\frac{u(x,t) - u(x,t-k)}{k} - \alpha^2 \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} = 0 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow u_{i,j} - u_{i,j-1} - \lambda\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) = 0$$

Llevando a la izquierda las incógnitas del instante mayor:

$$(1+2\lambda)u_{i,j} - \lambda\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right) = u_{i,j-1}, i = 1, \dots, nx-1, j = 1, nt.$$

Para $j = 1$:

$$(1+2\lambda)u_{i,1} - \lambda\left(u_{i+1,1} + u_{i-1,1}\right) = u_{i,0}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (1+2\lambda)u_{1,1} - \lambda\left(u_{2,1} + u_{0,1}\right) = u_{1,0} \\ (1+2\lambda)u_{2,1} - \lambda\left(u_{3,1} + u_{1,1}\right) = u_{2,0} \\ \vdots \\ (1+2\lambda)u_{nx-1,1} - \lambda\left(u_{nx,1} + u_{nx-2,1}\right) = u_{nx-1,0} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1+2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} u_{0,1} \\ 0 \\ \vdots \\ u_{nx,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{nx-1,0} \end{bmatrix}$$

De forma general:

$$Au^{(j)} - B^{(j)} = u^{(j-1)} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1+2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} u_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ u_{nx,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,j-1} \\ u_{2,j-1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j-1} \end{bmatrix}.$$

Se trata de un método implícito, puesto que para obtener la solución en el instante t_j se tiene que resolver un sistema lineal.

Convergencia y estabilidad del método implícito

El orden de convergencia del método implícito es $\mathcal{O}(k+h^2)$. En este caso, la estabilidad del esquema está garantizada para cualquier valor del parámetro λ.

Implementación del método implícito en Matlab

Los parámetros de entrada y salida seguirán teniendo la misma estructura que en el caso explícito. La inicialización de las variables y de la matriz solución $u(x,t)$ tampoco se modifican. De este modo, las líneas 1 a 8 del método explícito se pueden reutilizar. La matriz A vuelve a ser una matriz tridiagonal, de forma que la definimos como:

```
9  dPA=(1+2*lambda)*ones(nx-1,1);
10 dSA=-lambda*ones(nx-2,1);
```

Como la expresión reducida es $Au^{(j)} - B^{(j)} = u^{(j-1)} \leftrightarrow Au^{(j)} = u^{(j-1)} + B^{(j)}$, y el vector $B^{(j)}$ contiene condiciones de contorno conocidas, en cada instante j tendremos que resolver un sistema lineal. Al ser la matriz A una matriz tridiagonal, podemos utilizar el método de Crout:

```
11 for j=2:nt+1
12     B=lambda*[U(1,j); zeros(nx-3,1); U(nx+1,j)];
13     z=U(2:nx,j-1)+B;
14     U(2:nx,j)=Crout(dPA,dSA,dSA,z);
15 end
```

Veamos cómo aplicar el método implícito al problema que estamos analizando en el ejemplo 4.

Ejemplo 4. Sea la EDP:

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, x \in [0,1], t \geq 0$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0, \qquad u(x,0) = \sin(\pi x), x \in [0,1]$$

Tomando $h = 0.1, k = 0.01,$ indica la solución en el instante $T = 0.5$ para todos los nodos y representa dicha solución, utilizando el método implícito.

Se trata del mismo problema del ejemplo 3. La única modificación es la aplicación del método implícito. Para ello, ejecutamos el programa:

```
>>
[x,t,U]=parabolicoImplicito(nx,a,b,p,q,nt,T,f,
alpha);
```

Los resultados se presentan a continuación:

x	$u(x, 0.5)$
0	0
0.1	2.8980e-3
0.2	5.5124e-3
0.3	7.5871e-3
0.4	8.9192e-3
0.5	9.3782e-3
0.6	8.9192e-3
0.7	7.5871e-3
0.8	5.5124e-3
0.9	2.8980e-3
1	0

Tabla 6. Resultados EDP método implícito.

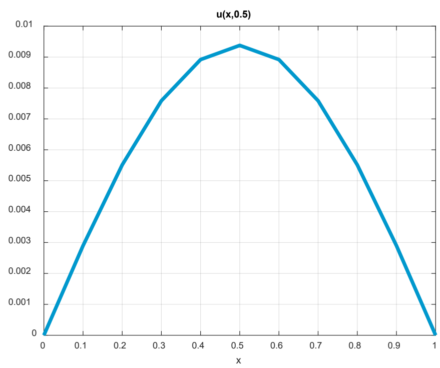


Figura 6. Representación solución EDP 4.

En el ejemplo 4 hemos utilizado un valor de $\lambda = 1$. Sin embargo, como estamos utilizando el método implícito, no hemos observado problemas de estabilidad.

7.5. Método de Crank-Nicholson para EDP parabólicas

Continuemos con la EDP:

$$u_t(x,t) - \alpha^2 u_{xx}(x,t) = 0, x \in [0,L], t \geq 0$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0, \qquad u(x,0) = f(x), x \in [0,L]$$

Los métodos utilizados previamente tenían orden de convergencia $\mathcal{O}(k + h^2)$. Para mejorar el orden de convergencia deberemos seguir una estrategia diferente. En eso se basa el método de Crank-Nicholson, que también es un método implícito.

Transformación de la EDP en una ecuación en diferencias

Para la diferenciación de segundo orden de la variable x, es decir, u_{xx}, se siguen utilizando diferencias centrales. Sin embargo, para la primera derivada de u con respecto de la variable t se utiliza una media aritmética entre la expresión de diferencias progresivas en el instante t_j:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

y la expresión de diferencias regresivas en el instante t_{j+1}:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} = 0$$

obteniendo la expresión:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \frac{\alpha^2}{2h^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}\right) = 0$$

sobre los nodos $i = 1, \dots, nx - 1, j = 0,1, \dots, nt - 1$

Llevando a la izquierda las incógnitas del instante mayor:

$$(1+\lambda)u_{i,j+1} - \frac{\lambda}{2}\left(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}\right) = (1-\lambda)u_{i,j} + \frac{\lambda}{2}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right)$$

Para $j = 0$:

$$(1+\lambda)u_{i,1} - \frac{\lambda}{2}\left(u_{i+1,1} + u_{i-1,1}\right) = (1-\lambda)u_{i,0} + \frac{\lambda}{2}\left(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}\right)$$

$$\to \begin{cases} (1+\lambda)u_{1,1} - \frac{\lambda}{2}\left(u_{2,1} + u_{0,1}\right) = (1-\lambda)u_{1,0} + \frac{\lambda}{2}\left(u_{2,0} + u_{0,0}\right) \\ (1+\lambda)u_{2,1} - \frac{\lambda}{2}\left(u_{3,1} + u_{1,1}\right) = (1-\lambda)u_{2,0} + \frac{\lambda}{2}\left(u_{3,0} + u_{1,0}\right) \\ \vdots \\ (1+\lambda)u_{nx-1,1} - \frac{\lambda}{2}\left(u_{nx,1} + u_{nx-2,1}\right) = (1-\lambda)u_{nx-1,0} + \frac{\lambda}{2}\left(u_{nx,0} + u_{nx-2,0}\right) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} \end{bmatrix} - \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} u_{0,1} \\ 0 \\ \vdots \\ u_{nx,1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda/2 & 1-\lambda & \lambda/2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda & \lambda/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda/2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{nx-1,0} \end{bmatrix} + \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} u_{0,0} \\ 0 \\ \vdots \\ u_{nx,0} \end{bmatrix}$$

De forma general:

$$Au^{(j+1)} - B^{(j+1)} = Cu^{(j)} + D^{(j)} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1+\lambda & -\lambda/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda/2 & 1+\lambda & -\lambda/2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\lambda & -\lambda/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda/2 & 1+\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j+1} \end{bmatrix} - \lambda/2 \begin{bmatrix} u_{0,j+1} \\ 0 \\ \vdots \\ u_{nx,j+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda/2 & 1-\lambda & \lambda/2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda & \lambda/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda/2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{bmatrix} + \lambda/2 \begin{bmatrix} u_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ u_{nx,j} \end{bmatrix}.$$

Se trata de un método implícito, puesto que para obtener la solución en el instante t_j se tiene que resolver un sistema lineal.

Convergencia y estabilidad del método de Crank-Nicholson

El método de Crank-Nicholson no requiere de condiciones para garantizar su convergencia. Como apuntábamos anteriormente, se trata de un método de orden $\mathcal{O}(k^2 + h^2)$.

Implementación del método de Crank-Nicholson en Matlab

Los parámetros de entrada y salida seguirán teniendo la misma estructura que en el caso explícito e implícito, así como la inicialización de las variables y de la matriz solución $u(x,t)$. De este modo, las líneas 1 a 8 de los métodos explícito e implícito se mantienen sin variaciones.

La matriz A es una matriz tridiagonal que permanece invariante para cualquier valor de t_j. La definimos como:

```
9  dPA=(1+lambda)*ones(nx-1,1);
10 dSA=-lambda/2*ones(nx-2,1);
```

La matriz C en este caso también es tridiagonal, así que procedemos como con la matriz A.

```
dPC=(1-lambda)*ones(nx-1,1);
dSC=lambda/2*ones(nx-2,1);
C=diag(dPC)+diag(dSC,1)+diag(dSC,-1);
```

Como la expresión reducida es $Au^{(j+1)} - B^{(j+1)} = Cu^{(j)} + D^{(j)} \leftrightarrow Au^{(j+1)} = Cu^{(j)} + D^{(j)} + B^{(j+1)}$, y tanto el vector $B^{(j+1)}$ como el vector $D^{(j)}$ contienen condiciones de contorno conocidas, en cada instante j tendremos que resolver un sistema lineal. Al ser la matriz A una matriz tridiagonal, podemos utilizar el método de Crout.

```
for j=1:nt
    B=lambda/2*[U(1,j+1); zeros(nx-3,1); U(nx+1,j+1)];
    D=lambda/2*[U(1,j); zeros(nx-3,1); U(nx+1,j)];
    z=C*U(2:nx,j)+B+D;
    U(2:nx,j)=Crout(dPA,dSA,dSA,z);
end
```

Veamos cómo aplicar el método de Crank-Nicholson al problema que estamos analizando en el ejemplo 5.

Ejemplo 5. Sea la EDP:

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, x \in [0,1], t \geq 0$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0, \qquad u(x,0) = \sin(\pi x)\,, x \in [0,1]$$

Tomando $h = 0.1, k = 0.01$, indica la solución en el instante $T = 0.5$ para todos los nodos y representa dicha solución, utilizando el método de Crank-Nicholson.

Se trata del mismo problema del ejemplo 3. La única modificación es la aplicación del método de Crank-Nicholson. Para ello, ejecutamos el programa:

```
>>
[x,t,U]=parabolicoCN(nx,a,b,p,q,nt,T,f,alpha);
```

Los resultados se presentan a continuación:

x	$u(x, 0.5)$
0	0
0.1	2.3051e-3
0.2	4.3846e-3
0.3	6.0349e-3
0.4	7.0944e-3
0.5	7.4595e-3
0.6	7.0944e-3
0.7	6.0349e-3
0.8	4.3846e-3
0.9	2.3051e-3
1	0

Tabla 7. Resultados EDP 5. Crank-Nicholson.

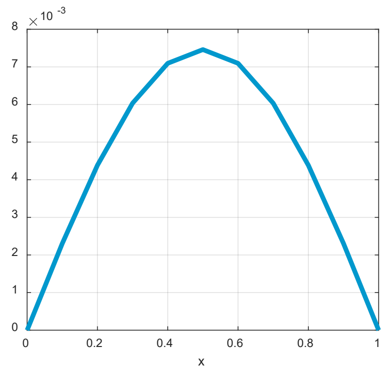


Figura 7. Representación solución EDP 5.

7.6. Ejemplos resueltos de EDP parabólicas

En esta sección vamos a plantear una serie de EDP parabólicas y sus resultados numéricos. En el ejemplo 6 veremos cómo obtener la ecuación en diferencias a partir de una EDP parecida a la que hemos desarrollado a lo largo del tema.

Ejemplo 6. Sea la EDP:

$$u_t = u_{xx} - x^2 u_x - u, x \in [0,1], t \geq 0$$

$$u(0,t)=2t, u(1,t)=\frac{t^2}{2}, t>0, u(x,0)=\sin(\pi x)$$

a) Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas implícito de orden $\mathcal{O}(k+h^2)$ y describe su expresión matricial.
b) Aplica el esquema anterior para determinar la solución en el instante $T=0.5$, tomando $h=0.1$ y $k=0.005$.

a) El método implícito de orden $\mathcal{O}(k+h^2)$ requiere el uso de la diferencia regresiva en t y la diferencia central en x:

$$\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{k}=\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}-x_i^2\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2h}-u_{i,j}$$

Manipulando algebraicamente la expresión anterior, y llevando los términos de mayor índice temporal a la izquierda, obtenemos:

$$\left(\lambda-\frac{kx_i^2}{2h}\right)u_{i+1,j}+(-2\lambda-k-1)u_{i,j}+\left(\lambda+\frac{kx_i^2}{2h}\right)u_{i-1,j}=-u_{i,j-1}$$

donde $\lambda=k/h^2$ y los índices tienen los valores $i=1,\dots,nx-1, j=1,\dots,nt$.

Para $j=1$:

$$\left(\lambda-\frac{kx_i^2}{2h}\right)u_{i+1,1}+(-2\lambda-k-1)u_{i,1}+\left(\lambda+\frac{kx_i^2}{2h}\right)u_{i-1,1}=-u_{i,0}$$

$$\rightarrow\begin{cases}\left(\lambda-\frac{kx_1^2}{2h}\right)u_{2,1}+(-2\lambda-k-1)u_{1,1}+\left(\lambda+\frac{kx_i^2}{2h}\right)u_{0,1}=-u_{1,}\\ \left(\lambda-\frac{kx_2^2}{2h}\right)u_{3,1}+(-2\lambda-k-1)u_{2,1}+\left(\lambda+\frac{kx_2^2}{2h}\right)u_{1,1}=-u_{2,}\\ \vdots\\ \left(\lambda-\frac{kx_{nx-1}^2}{2h}\right)u_{nx,1}+(-2\lambda-k-1)u_{nx-1,1}+\left(\lambda+\frac{kx_{nx-1}^2}{2h}\right)u_{nx-2,1}\end{cases}$$

$$\leftrightarrow u^{(1)}+=-u^{(0)}$$

Desarrollando el sistema, se obtiene la expresión reducida como:

$$Au^{(j)}+B^{(j)}=-u^{(j-1)}$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} (-2\lambda - k - 1) & \left(\lambda - \frac{kx_1^2}{2h}\right) & \cdots & 0 \\ \left(\lambda + \frac{kx_2^2}{2h}\right) & (-2\lambda - k - 1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (-2\lambda - k - 1) \end{bmatrix}$$

$$B^{(j)} = \begin{bmatrix} \left(\lambda + \frac{kx_1^2}{2h}\right) u_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ \left(\lambda - \frac{kx_{nx-1}^2}{2h}\right) u_{nx,j} \end{bmatrix}$$

b) Ajustando el programa `parabolicaImplicito.m` a los datos del problema, se obtienen las soluciones:

x	$u(x, 0.5)$
0	0
0.1	0.838085
0.2	0.705282
0.3	0.592765
0.4	0.496890
0.5	0.414584
0.6	0.343226
0.7	0.280552
0.8	0.224570
0.9	0.173478
1	0.125

Tabla 8. Resultados EDP 6.

En el ejemplo 7 veremos cómo trabajar cuando alguna de las condiciones es no Dirichlet.

Ejemplo 7. Sea la EDP:

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, x \in [0,1], t \geq 0$$
$$u_x(0,t) = \pi e^{-\pi^2 t}, u(L,t) = 0, t > 0, \qquad u(x,0) = \sin(\pi x), x \in [0,1]$$

a) Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden $\mathcal{O}(k + h^2)$ y describe su expresión matricial.

b) Aplica el esquema anterior para determinar la solución en el instante $T = 0.5$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.005$.

a) Se trata de la misma EDP que hemos trabajado a lo largo del tema, pero en esta ocasión hay una condición de contorno determinada por la función derivada. Como en el método explícito hemos utilizado diferencias centrales para la variable x, aplicaremos diferencias centrales sobre dicha derivada.

$$u_x(x,t) = \frac{u(x+h,t) - u(x-h,t)}{2h} \to$$
$$\to u_x(0,t) = \frac{u(h,t) - u(-h,t)}{2h} \equiv \frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2h}$$

Asignando el valor que nos indica el enunciado, obtenemos $u_{-1,j}$ como.

$$\frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2h} = \pi e^{-\pi^2 t_j} \leftrightarrow u_{-1,j} = u_{1,j} - 2h\pi e^{-\pi^2 t_j}$$

Al discretizar la ecuación diferencial con el método implícito, obtenemos:

$$u_{i,j+1} = (1-2\lambda)u_{i,j} + \lambda\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right)$$

Debemos realizar una modificación en los nodos sobre los que calculamos la solución, puesto que no conocemos la información en $u_{0,j}$, por lo que $i = 0,1,\dots,nx-1, j = 0,1,\dots,nt-1$.

Planteamos la ecuación para $j = 0$:

$$u_{i,1} = (1-2\lambda)u_{i,0} + \lambda\left(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}\right)$$
$$\to \begin{cases} u_{0,1} = (1-2\lambda)u_{0,0} + \lambda\left(u_{1,0} + u_{-1,0}\right) \\ u_{1,1} = (1-2\lambda)u_{1,0} + \lambda\left(u_{2,0} + u_{0,0}\right) \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} = (1-2\lambda)u_{nx-1,0} + \lambda\left(u_{nx,0} + u_{nx-2,0}\right) \end{cases}$$

El valor marcado en rojo lo sustituimos por la expresión que hemos obtenido previamente, de modo que:

$$\begin{aligned} u_{0,1} &= (1-2\lambda)u_{0,0} + \lambda\left(u_{1,0} + u_{1,0} - 2h\pi e^{-\pi^2 t_0}\right) \\ &= (1-2\lambda)u_{0,0} + 2\lambda u_{1,0} - 2\lambda h\pi e^{-\pi^2 t_0} \end{aligned}$$

En general, para cualquier valor de j se puede expresar matricialmente el sistema de ecuaciones en diferencias como:

$$u^{(j+1)} = Au^{(j)} + B^{(j)}$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1-2\lambda & 2\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-2\lambda \end{bmatrix}$$

$$B^{(j)} = \lambda \begin{bmatrix} -2h\pi e^{-\pi^2 t_j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{nx,j} \end{bmatrix}, u^{(j)} = \begin{bmatrix} u_{0,j} \\ u_{1,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{bmatrix}$$

b) Realizando las modificaciones pertinentes sobre el programa `parabolicoExplicito.m`, los resultados son:

x	$u(x, 0.5)$
0	-0.008449
0.1	0.183267
0.2	0.356023
0.3	0.493008
0.4	0.580995
0.5	0.611581
0.6	0.581960
0.7	0.495172
0.8	0.359808
0.9	0.189172
1	0

Tabla 9. Resultados EDP 7.

Lecciones magistrales

EDP parabólica multidimensional

En esta lección magistral vamos a plantear la resolución del problema de convección-difusión, cuya expresión es:

$$u_t(x,y,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,y,t) + \beta^2 u_{yy}(x,y,t), (x,y) \in R = [a,b] \times [c,d], t \geq 0$$

con la condición inicial: $u(x,y,0) = f(x,y)$

y las condiciones de contorno:

$$u(a,y,t) = h_1(y,t), u(b,y,t) = h_2(y,t), u(x,c,t) = h_3(x,t), u(x,d,t) = h_4(x,t).$$

Accede a la lección magistral a través del aula virtual

No dejes de leer

Diferencias finitas para problemas parabólicos

Blanes, S., Ginestar, D. y Roselló, M. D. (2014). «Diferencias finitas para problemas parabólicos». En Autores, *Introducción a los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales* (2ª. Ed.). Valencia: Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia.

En el capítulo 5.2 de este libro se plantean las EDP parabólicas. Para ello, se desarrolla la solución aplicando diferencias finitas sobre la EDP con los métodos explícito, implícito y de Crank-Nicholson.

Accede al libro a través de la Biblioteca Virtual de UNIR

Diferencias finitas: ecuaciones parabólicas

Chapra, S. C. y Canale, R. P. (2007). «Diferencias finitas: ecuaciones parabólicas». En Autores, *Métodos numéricos para ingenieros* (5ª. Ed.). Madrid: McGraw-Hill.

En el capítulo 30 de este libro se plantea el método de diferencias finitas para resolver EDP parabólicas. Se hace hincapié en los métodos que hemos desarrollado a lo largo de este tema. Asimismo, se resuelve para un caso particular el hecho de que las condiciones de contorno no sean de tipo Dirichlet.

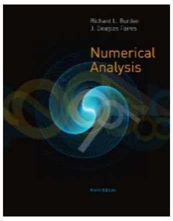
Accede al libro a través de la Biblioteca Virtual de UNIR

+ Información

A fondo

Ecuaciones en derivadas parciales parabólicas

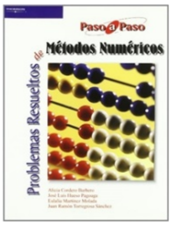
Burden, R. L., y Faires, J. D. (2011). «Ecuaciones en derivadas parciales parabólicas». En Autores, *Numerical analysis* (9ª ed). Boston: Brooks/Cole CENGAGE learning.



En el capítulo 12.2 de *Numerical Analysis* se desarrolla el problema de las EDP parabólicas, presentando con un gran rigor matemático el desarrollo de los métodos, las características de la convergencia y la comparativa con las soluciones analíticas, de modo que se pueden analizar los errores.

Ecuaciones parabólicas

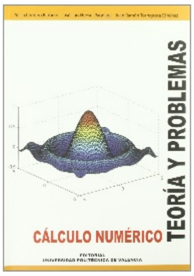
Cordero, A., Hueso, J. L., Martínez, E. y Torregrosa, J. R. (2006). «Ecuaciones parabólicas». En Autores, *Problemas resueltos de métodos numéricos*. Madrid: Thomson.



En el capítulo 10.3 de este libro puedes encontrar las ideas clave para el desarrollo de los métodos explícito, implícito y de Crank-Nicholson, así como propuestas de implementación en Matlab. Además, al final del Capítulo hay una serie de ejercicios resueltos para clarificar los conceptos trabajados.

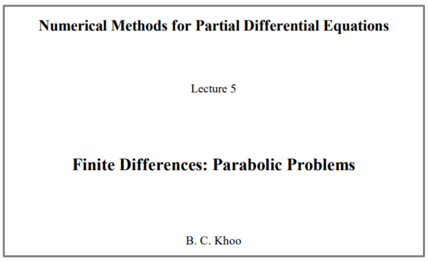
Ecuaciones parabólicas

Cordero, A. Hueso, J. L., y Torregrosa, J. R. (2004). «Ecuaciones parabólicas». En Autores, *Cálculo numérico*. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.



El capítulo 4.4 de este libro desarrolla los métodos explícitos, implícito y de Crank-Nicholson para resolver las EDP parabólicas. Además, contiene implementaciones del código para resolver los problemas en Matlab. Al final del capítulo, se encuentran una serie de ejercicios resueltos.

Diferencias finitas: problemas parabólicos


Numerical Methods for Partial Differential Equations

Lecture 5

Finite Differences: Parabolic Problems

B. C. Khoo

En este enlace al curso del MIT sobre métodos numéricos para ecuaciones en derivadas parciales, puedes encontrar los desarrollos realizados a lo largo del tema. Además, se pone especial énfasis en el análisis de la estabilidad de los métodos.

Accede al documento a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web: https://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-920j-numerical-methods-for-partial-differential-equations-sma-5212-spring-2003/lecture-notes/lec5_notes.pdf

Test

1. La EDP $u_{xx} - u_{xy} + 3u_x = 0$ es:

A. Parabólica.

B. Hiperbólica.

C. Elíptica.

2. La EDP $u_{xx} - 4u_{tt} + u_{xt} - 3u_t = 0$ es:

A. Parabólica.

B. Hiperbólica.

C. Elíptica.

3. La expresión $\frac{u_{i.j} - u_{i,j-1}}{k}$ es la diferencia:

A. Progresiva en t.

B. Central en t.

C. Regresiva en t.

4. En el método explícito se utilizan diferencias centrales en la variable x y diferencias:

A. Progresivas en t.

B. Regresivas en t.

C. Ninguna de las anteriores es correcta.

5. En el método de Crank-Nicholson se utilizan diferencias centrales en la variable x y diferencias:

A. Progresivas en t.

B. Regresivas en t.

C. Ninguna de las anteriores es correcta.

6. Para resolver el sistema $u^{(j+1)} = Au^{(j)} + B^{(j)}$ se requiere un método:

A. Explícito.

B. Implícito.

C. Pseudoplícito.

7. Para resolver el sistema $Au^{(j+1)} + B^{(j+1)} = Cu^{(j)} + Du^{(j)}$ se requiere un método:

A. Explícito.

B. Implícito.

C. Pseudoplícito.

8. Sea la EDP parabólica:

$$u_t - u_{xx} = 0, x \in [0, \pi], t \geq 0$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, t > 0, u(x,0) = \sin(x), 0 \leq x \leq \pi$$

La solución $u(x,t)$ en el punto $x = \pi/2$ y el instante $t = 1/2$ por el método explícito, tomando nx=8,nt=50, es:

A. 0.6089.

B. 0.6090.

C. 0.6091.

9. Sea la EDP parabólica:

$$u_t - u_{xx} = 0, x \in [0, \pi], t \geq 0$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, t > 0, u(x,0) = \sin(x), 0 \leq x \leq \pi$$

La solución $u(x,t)$ en el punto $x = \pi/2$ y el instante $t = 1/2$ por el método de Crank-Nicholson, tomando nx=nt=10, es:

A. 0.6089.

B. 0.6090.

C. 0.6091.

10. Al plantear una EDP en la que la condición de contorno en el punto inicial es no Dirichlet, es necesario:

A. Disminuir el número de nodos donde calculamos la solución, respecto del caso de condiciones Dirichlet.

B. Aumentar el número de nodos donde calculamos la solución, respecto del caso de condiciones Dirichlet.

C. Mantener el número de nodos donde calculamos la solución, respecto del caso de condiciones Dirichlet.