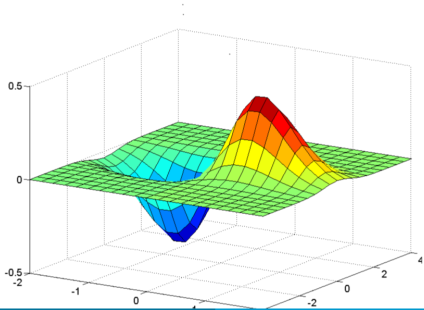
Tema 7: Problemas de contorno multidimensionales. EDPs parabólicas.

Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Alicia Cordero, Neus Garrido, Juan R. Torregrosa

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA



- Problema 1 Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 2, \quad x \in [0,1],\ t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno e iniciales

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad \forall t, \quad u(x,0) = \sin \pi x + x(1-x), \quad x \in [0,1].$$

Sabiendo que la solución exacta es

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x + x(1-x),$$

se pide:

  - Aproxima, mediante el método explícito, la solución del problema en el instante $T = 1$, tomando (a) $h = 0.1$, $k = 0.05$; (b) $nx = 10$ $nt = 10000$. Determina el error exacto y representa dicho error.
  - Aproxima, mediante el método de Crank-Nicholson, la solución del problema en el instante $T = 1$, tomando $h = 0.1$, $k = 0.05$. Escribe en una tabla los resultados, y el error en cada caso, para los instantes $t = 0.4$, $t = 0.8$ y $T = 1$. Representa la solución en los tres instantes

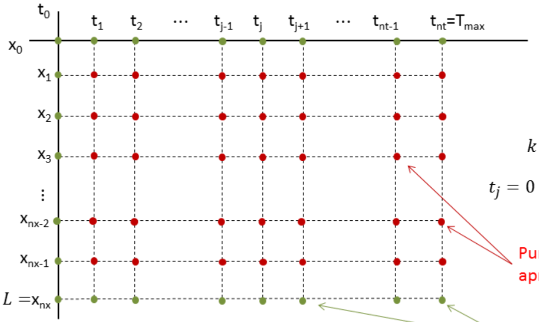
- Problema 2 Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) - t^2u(x,t) = x\cos xt, \quad x \in [0,1],\ t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno e iniciales

$$u_x(0,t) = t, \quad u(1,t) = \sin t, \forall t, \quad u(x,0) = 0, \quad x \in [0,1].$$

  - Describe los método explícito e implícito de orden $O(k+h^2)$, utilizando nx subintervalos en $[0,1]$ y nt subintervalos en $[0,T]$, siendo T el instante máximo en el que pretendemos aproximar la solución.
  - A partir de los esquemas anteriores, determina la solución aproximada del problema en el instante $T=1$, tomando 10 subintervalos en el eje espacial y 100 en el eje temporal. Representa, para cada método, la solución en los instantes $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$.
  - Sabiendo que la solución exacta es $u(x,t) = \sin xt$, calcula el error máximo cometido en cada uno de los instantes anteriores.
  - ¿Es posible aplicar el método de Crank-Nicholson a este problema? En caso afirmativo, describe el esquema en diferencias que obtendríamos.



$$k = \frac{T_{max}}{nt}$$

$$t_j = 0 + jk, \; j = 0,1,2,\cdots,nt$$

$$h = \frac{L}{nx}$$

$$x_i = 0 + ih, \quad i = 0,1,2,\cdots,nx$$

- METODO EXPLICITO

$$h = \frac{1}{nx}, \quad x_i = 0 + ih, \; i = 0, 1, \ldots, nx-1, nx,$$
$$k = \frac{1}{nt}, \quad t_j = 0 + jk, \; j = 0, 1, \ldots, nt-1, nt$$

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - t_j^2 u_{i,j} = x_i \cos x_i t_j,$$
$$i = 0, 1, \ldots, nx-1, \quad j = 0, 1, \ldots, nt$$

$$u_{i,j+1} = (1 + kt_j^2 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i+1,j} + \lambda u_{i-1,j} + kx_i \cos x_i t_j,$$
$$i = 0, 1, \ldots, nx-1, \quad j = 0, 1, \ldots, nt$$

Para $i = 0$

$$u_{0,j+1} = (1 + kt_j^2 - 2\lambda)u_{0,j} + \lambda u_{1,j} + \lambda u_{-1,j} + kx_0 \cos x_0 t_j,$$
$$u_x(0, t_j) = t_j \;\Leftrightarrow\; \frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2h} = t_j \;\Leftrightarrow\; u_{-1,j} = u_{1,j} - 2ht_j.$$

Por tanto la primera ecuación resulta:

$$u_{0,j+1} = (1 + kt_j^2 - 2\lambda)u_{0,j} + 2\lambda u_{1,j} - 2\lambda h t_j + kx_0 \cos x_0 t_j$$

- METODO IMPLICITO

$$\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{k}-\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}-t_j^2u_{i,j}=x_i\cos x_it_j,$$
$$i=0,1,\ldots,nx-1,\quad j=0,1,\ldots,nt$$

$$(1-kt_j^2+2\lambda)u_{i,j}-\lambda u_{i+1,j}-\lambda u_{i-1,j}=u_{i,j-1}+kx_i\cos x_it_j,$$
$$i=0,1,\ldots,nx-1,\quad j=0,1,\ldots,nt$$

Para $i=0$

$$(1-kt_j^2+2\lambda)u_{0,j}-\lambda u_{1,j}-\lambda u_{-1,j}=u_{0,j-1}+kx_0\cos x_0t_j,$$

Sustituyendo el valor de $u_{-1,j}$ obtenido anteriormente,

$$(1-kt_j^2+2\lambda)u_{0,j}-2\lambda u_{1,j}=u_{0,j-1}-2\lambda ht_j+kx_0\cos x_0t_j,$$

Por tanto, el sistema a resolver es:

$$\begin{array}{rcl}
(1-kt_j^2+2\lambda)u_{0,j}-2\lambda u_{1,j} & = & u_{0,j-1}-2\lambda ht_j+kx_0\cos x_0t_j,\\
(1-kt_j^2+2\lambda)u_{1,j}-\lambda u_{2,j}-\lambda u_{0,j} & = & u_{1,j-1}+kx_1\cos x_1t_j,\\
 & \vdots & \\
(1-kt_j^2+2\lambda)u_{nx-2,j}-\lambda u_{nx-1,j}-\lambda u_{nx-3,j} & = & u_{nx-2,j-1}+kx_{nx-2}\cos x_{nx-2}t_j,\\
(1-kt_j^2+2\lambda)u_{nx-1,j}-\lambda u_{nx,j}-\lambda u_{nx-2,j} & = & u_{nx-1,j-1}+kx_{nx-1}\cos x_{nx-1}t_j,
\end{array}$$

- METODO IMPLICITO Expresado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1+2\lambda-kt_j^2 & -2\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda-kt_j^2 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+2\lambda-kt_j^2 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1+2\lambda-kt_j^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{0,j} \\ u_{1,j} \\ \vdots \\ u_{nx-2,j} \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{0,j-1} \\ u_{1,j-1} \\ \vdots \\ u_{nx-2,j-1} \\ u_{nx-1,j-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kx_0 \cos x_0 t_j \\ kx_1 \cos x_1 t_j \\ \vdots \\ kx_{nx-2} \cos x_{nx-2} t_j \\ kx_{nx-1} \cos x_{nx-1} t_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\lambda h t_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\lambda \sin t_j \end{pmatrix}.$$

- METODO CRANK-NICHOLSON

Debemos establecer la media entre las expresiones: diferencia progresiva en el instante t_j y diferencia regresiva en el instante t_{j+1}

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k}-\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}-t_j^2u_{i,j}=x_i\cos x_it_j,$$

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k}-\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{h^2}-t_{j+1}^2u_{i,j+1}=x_i\cos x_it_{j+1},$$

La expresión resultante:

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k}-\frac{1}{2}\left(\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}+\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{h^2}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(t_j^2u_{i,j}+t_{j+1}^2u_{i,j+1}\right)=\frac{1}{2}\left(x_i\cos x_it_j+x_i\cos x_it_{j+1}\right)$$

$i=0,1,\ldots,nx-1,\quad j=0,1,\ldots,nt$