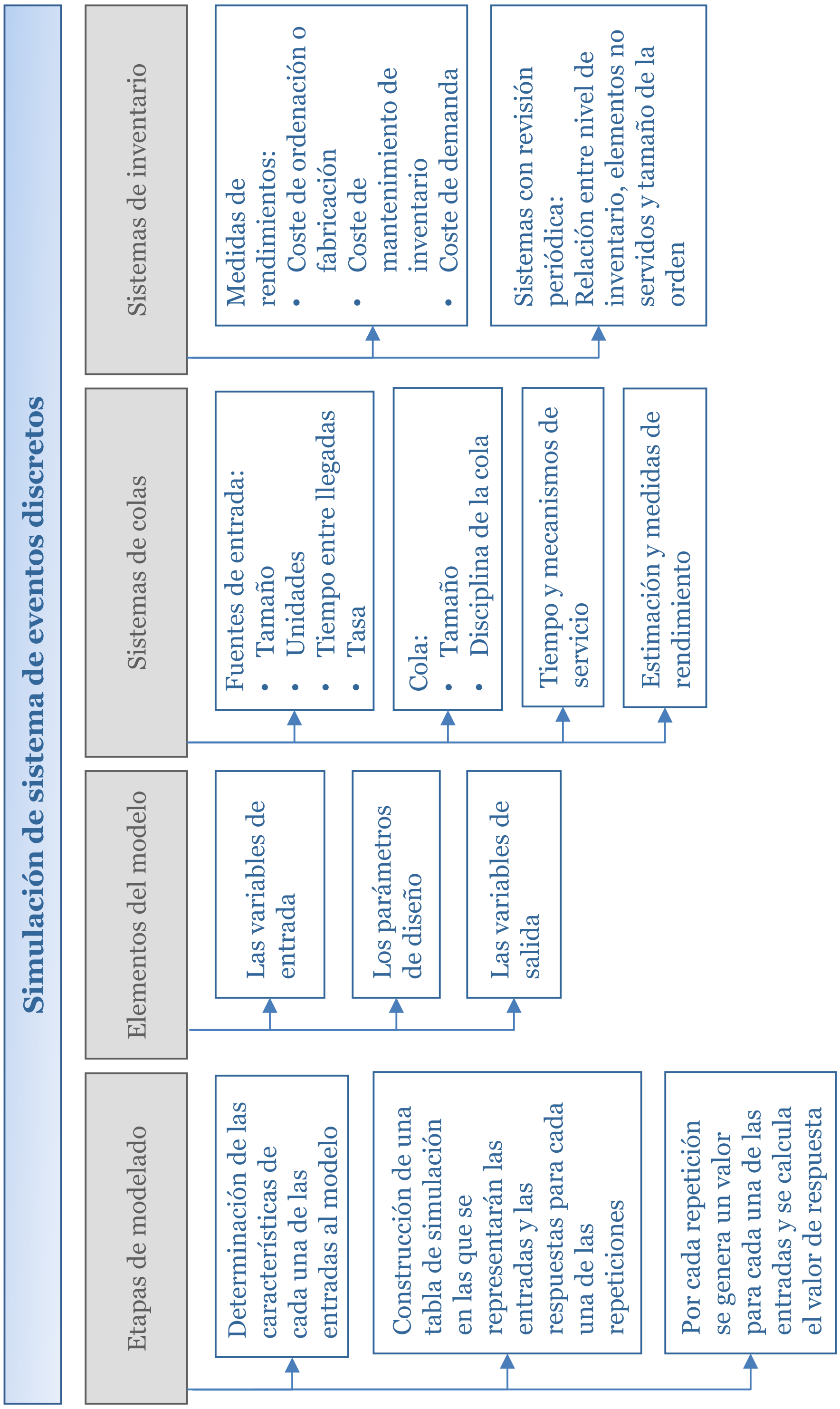
Modelado y simulación de sistemas de eventos discretos

TEMA 10

Esquema


Simulación de sistema de eventos discretos
Sistemas de inventario
Medidas de rendimientos:
• Coste de ordenación o fabricación
• Coste de mantenimiento de inventario
• Coste de demanda
Sistemas con revisión periódica:
Relación entre nivel de inventario, elementos no servidos y tamaño de la orden
Sistemas de colas
Fuentes de entrada:
• Tamaño
• Unidades
• Tiempo entre llegadas
• Tasa
Cola:
• Tamaño
• Disciplina de la cola
Tiempo y mecanismos de servicio
Estimación y medidas de rendimiento
Elementos del modelo
Las variables de entrada
Los parámetros de diseño
Las variables de salida
Etapas de modelado
Determinación de las características de cada una de las entradas al modelo
Construcción de una tabla de simulación en las que se representarán las entradas y las respuestas para cada una de las repeticiones
Por cada repetición se genera un valor para cada una de las entradas y se calcula el valor de respuesta

Ideas clave

10.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

Además, lee las **páginas 141-172** del siguiente documento.

» Cao, R. (2002). Introducción a la simulación y a la teoría de colas. La Coruña: Universidad de Coruña.
Disponible en el aula virtual en virtud del artículo 32.4 de la Ley de Propiedad Intelectual.

Las ideas claves de este tema son:

» Modelado de sistemas de eventos discretos, elementos principales.
» Tablas de simulación y medidas de rendimiento.
» Sistemas de colas, medidas de rendimiento y elementos del sistema.
» Sistema de inventario, elementos y revisión periódica.

10.2. Introducción

Los sistemas de eventos discretos se caracterizan por los cambios de estado del sistema que se producen en instantes de tiempo determinados y de forma no continua. Los modelos de simulación de este tipo de sistemas se caracterizan por presentar una estructura basada en un cola de eventos ordenados con respecto al momento de ocurrencia y que son generados y administrados por el sistema.

Estos modelos se analizan mediante métodos numéricos que usan procesos computables para resolver los modelos matemáticos y para este tipo de sistemas dan mejores resultados.

En realidad, los métodos numéricos que se usan en la simulación **más que resolver ejecutan el modelo y guardan la información necesaria para analizarlo y estimar las verdaderas medidas que caracterizan el modelo.**

Es un modelo de simulación que tiene múltiples aplicaciones dado que la mayoría de los procesos en los que intervengan servicios y clientes, las líneas de producción, la plantas de procesamiento y en general modelos de simulación de agentes, se pueden modelar mediante este tipo de sistemas.

Todos los conceptos trabajados en los temas anteriores son aplicables para la creación de estos modelos de simulación, aunque se hará hincapié sobre sus características especiales.

Los modelos que se van a estudiar en este tema se modelarán en tres etapas (Banks, Carson y Nelson, 1996):

Etapa 1	Determinación de las características de cada una de las entradas al modelo que, la mayoría de las veces, se modelarán mediante distribuciones de probabilidad ya sean continuas o discretas.
Etapa 2	Construcción de una tabla de simulación en las que se representarán las entradas y las respuestas para cada una de las repeticiones.
Etapa 3	Por cada repetición se genera un valor para cada una de las entradas y se calcula el valor de respuesta, que generalmente depende de las entradas y de las respuestas previas.

Los elementos que se identifican en estos modelos, aunque ya han sido mencionados en temas anteriores, se enumeran a continuación (García-Sánchez y Ortega-Mier, 2006):

Las variables de entrada

Que se corresponden con los fenómenos reales y sobre las que no se puede establecer ningún tipo de control como por ejemplo, las llegadas de clientes y las demandas de productos.

Los parámetros de diseño

Que determinan la configuración del sistema y sobre las que se puede ejercer el control como por ejemplo, el número de operarios que atienden al cliente.

Las variables de salida

Que se obtienen mediante las relaciones que se establecen entre las variables de entrada y los parámetros, así como con otros elementos. Un ejemplo de estas puede ser el tiempo total de espera en un sistema de atención al cliente.

10.3. Simulación de sistemas de colas

Mediante los modelos de colas se describen sistemas con líneas de espera particulares. El objetivo de su modelado y análisis es encontrar el estado estable del sistema y determinar una capacidad de servicio apropiada. Un sistema de colas puede ser analizado en función de sus tasas de llegada y de servicio, variables cuyo comportamiento puede ser aleatorio.

La caracterización de los sistemas de colas está determinada por su población de entrada, por la naturaleza de las llegadas, el mecanismo de servicio, la capacidad del sistema y la disciplina de la cola.

La siguiente figura representa un **esquema básico de un sistema de colas**

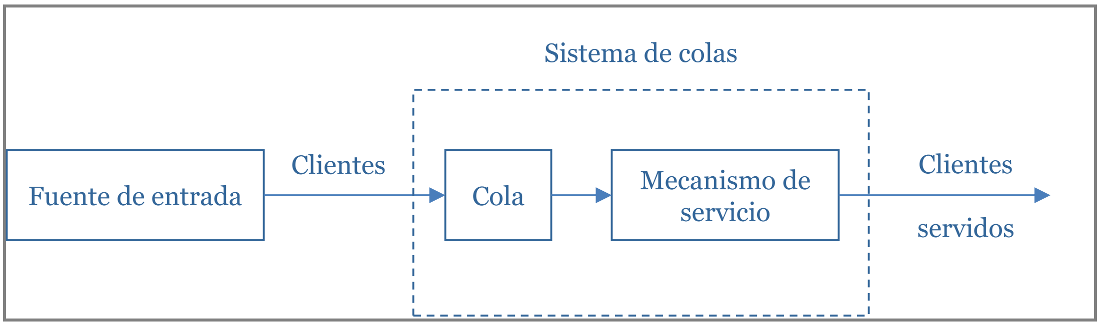


Figura 1. Esquema básico de un sistema de colas Fuente: Basado en Hillier y Lieberman, 2010.

Procesos de llegada, mecanismos de servicio y disciplina de la cola

En un sistema de colas, **la fuente de entrada al sistema** se nutre de individuos o clientes que pertenecen a la población de entrada y que está constituida los potenciales clientes de un sistema de colas, en un modelo de simulación, se identifican como la serie de procesos o eventos que llegan al sistema. Es importante considerar las características de esta población con respecto a la cantidad de clientes que pueden acceder al sistema. Se tratarán sistemas en el que la población de entrada se considera finita y otros más grandes en los que se suele considerar que la población es infinita para simplificar el modelo.

La tasa de llegadas al sistema, es decir, el número de llegadas que se producen por unidad de tiempo es lo que diferenciará a los modelos con poblaciones finitas o infinitas. En el caso de poblaciones infinitas, la tasa no se verá afectada por el número de entidades que se unen a la cola o que la abandonan y se consideran que se producen llegadas de forma constante, sin embargo en el caso de las finitas la tasa si dependerá del estado de la cola.

Otra de las cuestiones que se deben tener en cuenta, es la **capacidad del sistema de colas**, que se entiende como el número de clientes que pueden esperar en la cola. Existen sistemas con capacidad ilimitada como por ejemplo, las colas de un cine y otros con capacidad limitada como por ejemplo un sistema de lavado de coches que puede limitar el número de coches que se encuentren en la cola para no producir problemas en la calle, en este caso, si un cliente llega a un sistema lleno no entre en el mismo y pasa a formar parte, nuevamente, de la población de entrada.

En el modelado de un sistema de colas, **los clientes que llegan al sistema son considerados procesos de llegada.**

En los modelos de poblaciones infinitas, las llegadas pueden tener lugar de forma programada o de forma aleatoria, y en este último caso son representadas mediante distribuciones de probabilidad.

La distribución que se usa más habitualmente para simular las llegadas infinitas de forma aleatoria es la distribución de *Poisson* «Ecuación 1», en las que los procesos se distribuye exponencialmente con media $1/\lambda$ unidades de tiempo. En este caso, la tasa de llegada es λ, que se interpreta como el número de procesos llegan por unidad de tiempo. En consecuencia, se dice que el número de llegadas que se producen en un intervalo de tiempo t siguen una distribución de *Poisson* de media λ_t procesos.

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}\ con\ x = 0,1,2,3 \ldots$$

$$P(x)\ =\ Probabilidad\ de\ x\ llegadas$$

$$x = número\ de\ llegadas\ por\ unidad\ de\ tiempo$$

$$\lambda =\ tasa\ media\ de\ llegada$$

Ecuación 1 Distribución de Poisson y su interpretación en un sistema de colas

En el caso de llegadas programadas el tiempo entre llegadas su puede representar mediante una constante o un dato aleatorio pequeño.

Para poblaciones finitas, las llegadas se caracterizan de forma distintas y se consideran que los clientes fuera del sistema están en estado pendiente y deja de estarlo cuando el sistema se abre para él. En este caso, el sistema de llegadas se representan mediante la superposición de los tiempos de llegada de cada uno de los clientes, y sus llegadas se representan de forma independiente.

Fuente de entrada

» Tamaño de la fuente de entrada:
  - Número total de clientes potenciales (población de entrada)
    - Finito (fuente limitada). Sistema cerrado.
    - Infinito (fuente ilimitada). Sistema abierto.
  - **Suposición habitual:** tamaño infinito (número de clientes en cola no afecta al número potencial de clientes fuera de ella).

» Unidades de la fuente:
  - Unitaria.
  - Por bloques.

» Tiempo entre llegadas:
  - Determinista o programada.
  - Distribución de *Poisson* (distribución de probabilidad exponencial).

» Tasa media de llegada λ
  - Número medio de entrada de clientes por unidad de tiempo.
  - Llegadas de clientes son independientes e idénticamente distribuidas (IID).

Características de la cola. Disciplina

La cola representa el lugar en el que los clientes esperan a ser atendidos. Para la cola hay que considerar varias cuestiones., como el tamaño de la cola, el comportamiento de los clientes en la cola y la disciplina de la cola o gestión de los clientes que esperan.

En cuanto al tamaño se puede considerar colas infinitas que son las más habituales en la mayoría de los sistemas modelados o bien colas finitas en la que el número de clientes que puede permanecer en ella es finito.

El comportamiento de los clientes en la cola puede presentar distintas situaciones, como clientes que al llegar al sistema se van si la cola es muy larga y luego reintentan, clientes que se van si la salida de la cola se alarga o clientes que pasan de unas líneas a otros buscando la cola con menor tiempo de espera.

La disciplina de la cola se refiere al orden lógico de los clientes que se encuentran en la cola y que determina cuál de los clientes sale cuando un servidor se ha quedado libre. Las disciplinas que se consideran son:

» Primero en entrar, primero en salir (FIFO- *first in, first out*).
» Ultimo en entrar, primero en salir (LIFO- *last in, last out*).
» Primero en salir se selecciona de forma aleatoria (SIRO- *service in random order*).
» Primero en salir, el de mayor prioridad (PR- *priority*).
» Primero en salir, el de menor tiempo de procesamiento (SPT- *short processing time*).

La que se implementa más habitualmente es la disciplina FIFO, que implica que el primer cliente que llega es el primero en salir de la cola pero no por eso tiene que ser el primero en salir del sistema ya que depende de su tiempo de servicio.

Colas

» Tamaño. Número máximo de clientes admisible:
  - Finito
  - Infinito
    - **Suposición habitual:** colas de longitud infinita
    - **Consideraciones:** pérdida del cliente o reintento, cola con varios canales e interacción entre ellos.

» Disciplina de la cola. Orden de selección de clientes para ser atendidos:
  - FIFO
  - LIFO
  - SIRO
  - PR
  - SPT

Tiempo y mecanismo de servicio

El mecanismo de servicio está representado por un número de centros de servicio y colas interconectadas. Cada centro de servicio contará con un número de servidores que trabajan en paralelo. El servicio, por tanto, contará con un servidor, un número finito de servidores y un número infinito de servidores (se suele usar para representar un autoservicio).

El tiempo de servicio es el tiempo que transcurre desde que se inicia el servicio al cliente hasta que termina. Dentro de un servicio, lo habitual es asumir que la distribución de probabilidad de los tiempos de servicio de cada servidor es la misma. La distribución que se considera más habitualmente es la distribución exponencial especialmente si la distribución de las llegadas es una distribución de *Poisson*, pero también la distribución *Weibull*, *gamma* y *longnormal* entre otras, aunque también se puede considerar un tiempo de servicio determinista.

La tasa media de servicio, que es el número de clientes servidos por unidad de tiempo es un parámetro del sistema que se representa mediante μ.

$$P(x) = e^{-\mu x}, x \geq 0$$
$$P(x)\text{: } probabilidad\ de\ x\ servicios$$
$$\mu\text{: } tasa\ media\ de\ llegadas$$

Ecuación 2 Distribución exponencial y su interpretación en el servicio de un sistema de colas.

Notación

Kendal (1953) propuso adoptar una notación que se usaba para los sistemas con servidores paralelos para denotar a un sistema de colas. La estructura de la notación es A/B/c/N/K/Z.

» A representa al tipo de distribución que sigue el tiempo entre llegadas.
» B representa al tipo de distribución que siguen los tiempos de servicio.
» c representa el número de servidores paralelos.
» N representa la capacidad del sistema, es decir, el número de clientes que pueden permanecer en el sistema de forma simultánea.
» K representa el tamaño de la población de llamada.
» Z disciplina de la cola.

Las distribuciones de probabilidad de A y B también son representadas mediante una notación específica de la que se muestra las más habituales:

» M: distribución exponencial (incluida la de *Poisson*).
» D: distribución degenerada ◦.
» E_k: distribución *Erlang*.

Estados y medidas de rendimiento de un sistema de colas

Un sistema de colas pasa por distintos estados. El estado inicial que se considera que es un estado especial en el que se asume que se producen unas condiciones especiales que no permanecen durante toda la ejecución o actividad del sistema, el estado estable en el que se produce un nivel de operación normal y que es el que realmente interesa y se analiza para medir el rendimiento del sistema y estados anormales en ele que pueden producirse picos de afluencia y otras cuestiones que desestabilizan el sistema. Se debe de tener en cuenta que un sistema de colas cumple las propiedades de las cadenas de *Markov (Hillier y Lieberman, 2010)*, según las que el sistema tendrá:

Un número finito de estados.

Probabilidades de transición estacionarias, que significa que la probabilidad de que se produzca cualquier evento futuro dado cualquier evento pasado y el estado actual, sólo depende del estado actual del proceso (cuando el sistema se encuentra en estado estable).

Se supone además que se conocen las probabilidades iniciales.

Luego según lo expuesto, interesa medir el rendimiento del sistema cuando se encuentra en estado estable. Para evaluar el rendimiento se calculan una serie de medidas que se enumeran a continuación basadas en procesos de nacimiento y muerte (Hillier y Lieberman, 2010):

» $\mathbf{L_s}$ es el número esperado de clientes en el sistema.
» $\mathbf{L_q}$ es la longitud esperada de la cola, de la que quedan excluidos los clientes que están siendo servidos.
» $\mathbf{W_s}$ es el tiempo de espera en el sistema, incluyendo el tiempo de servicio para cada cliente.
» $\mathbf{W_q}$ es el tiempo de espera en la cola, excluyendo el tiempo de servicio para cada cliente.

» **P_n** es la probabilidad de que exactamente n clientes estén dentro del sistema en un determinado momento.
» **ρ** es la tasa de utilización del sistema, es decir, la proporción de tiempo que los servidores del sistema están ocupados. Un sistema está en condición de estado estable si $\rho < 1. \rho = \frac{\lambda}{s\mu}$, donde s es el número de servidores paralelos y λ y μ, las tasas media de llegada y de servicio, respectivamente.

Para los modelos M/M/s se cumplen unas relaciones entre ellas que se definen mediante las fórmulas de *Little*

$$L_s = \lambda W_s$$
$$L_q = \lambda W_q$$

Ecuación 3. Fórmula de Little para sistemas M/M/s.

También se cumple otra relación importante

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Ecuación 4. Relación entre el tiempo en el sistema y el tiempo en la cola.

Las medidas de rendimiento, se calculan de forma distinta dependiendo de las características del sistema. Para profundizar en el tema, consulta:

» Cao, R. (2002). Introducción a la simulación y a la teoría de colas. La Coruña: Universidad de Coruña.
Disponible en el aula virtual en virtud del artículo 32.4 de la Ley de Propiedad Intelectual.

Algunos ejemplos de simulación de sistemas de colas

Existen diferentes métodos y herramientas para poder realizar simulación de sistema de colas. Habitualmente se puede realizar una simulación manual por medio de tablas y mediante hojas de cálculo. La tabla de simulación proporciona un método sistemático para el seguimiento del estado del sistema con el tiempo.

Estos ejemplos sirven para ilustrar la metodología de la simulación del sistema discreto y las estadísticas descriptivas utilizadas para predecir el rendimiento del sistema.

La simulación manual, que puede servir de base para la realización de simulaciones mediante hojas o aplicaciones de software apropiadas, se realizan tres etapas(Banks et al., 1996):

» Determinación de las características de cada una de las entradas de la simulación, que a menudo se modelan mediante distribuciones de probabilidad, continuas o discretas. Si es necesario se crean las tablas de las distribuciones y se asignan los rangos de números aleatorios que corresponden a cada entrada, a partir de las probabilidades acumuladas.
» Construcción de una tabla de simulación, que es la esencia de la simulación manual.
» Para cada iteración i, generación de valores para las variables de entrada, cálculo de las respuestas. Las variables aleatorias se pueden generar por cualquiera de los procedimientos vistos en tema 6 a partir de los números aleatorios generados por la herramienta de simulación o por medio de los métodos vistos en el «Tema 5».

Se debe tener en cuenta que el estado de un sistema de colas en un determinado instante, está determinado por número de clientes que permanecen en el sistema en ese instante. Un evento, la llegada de un cliente o la finalización de un servicio, será el causante de un cambio en el estado del sistema. El reloj de simulará para medir el tiempo simulado.

Ejemplo Banks, J. et al., 1996, páginas 25-32.

El sistema simula el comportamiento de la cola de una tienda de comestibles con una única caja. Los intervalos de llegada de los clientes son entre 1 y 8 minutos con la misma probabilidad. Lo que da lugar a la distribución de probabilidad que se muestra en la «Tabla 1».

Tiempo entre llegadas (minutos)	Probabilidad	Probabilidad acumulada	Asignación de dígitos aleatorios
1	0.125	0.125	001-125
2	0.125	0.250	126-250
3	0.125	0.375	251-375
4	0.125	0.500	376-500
5	0.125	0.625	501-625
6	0.125	0.750	626-750
7	0.125	0.875	751-875
8	0.125	1.000	876-000

Tabla 1. Distribución del tiempo entre llegadas. Fuente: Banks, J. et al., 1996.

El tiempo de servicio varía entre 1 y 6 minutos con las probabilidades que se muestran en la «Tabla 2».

Tiempo de servicio (minutos)	Probabilidad	Probabilidad acumulada	Asignación de dígitos aleatorios
1	0.10	0.10	01-10
2	0.20	0.30	11-30
3	0.30	0.60	31-60
4	0.25	0.85	61-85
5	0.10	0.95	86-95
6	0.05	1.00	96-00

Tabla 2.Distribución del tiempo de servicio. Fuente: Banks, J. et al., 1996.

Se va a realizar una simulación para 100 clientes con el objeto de poder presentar fácilmente los resultados, aunque se conseguirían unos más fiables si se incrementa el tamaño.

Ya en la etapa 2, y con el objeto de pasar a construir la tabla de simulación se deberán hacer unos c**álculos previos para determinar el tiempo entre llegadas y los tiempos de servicio de los clientes de la simulación**. Para ello se necesitará **generar números aleatorios con las siguientes propiedades:**

1. El conjunto de números aleatorios está uniformemente distribuido en entre 0 y 1.
2. Los números aleatorios sucesivos son independientes.

La generación de números aleatorios se puede realizar mediante el uso de tablas de números aleatorios o mediante generadores, en todos los casos desplazando el punto decimal de forma apropiada, dependiendo de los dígitos significativos que se toman de la distribución de probabilidad.

Según esto se han obtenido las siguientes tablas que determinan el tiempo entre llegadas y el tiempo de servicio de cada cliente.

Cliente	Dígitos aleatorios	Tiempo entre llegadas(minutos)	Cliente	Dígitos aleatorios	Tiempo entre llegadas(minutos)
1	---	---	7	583	5
2	064	1	8	139	2
3	112	1	9	423	4
4	678	6	10	039	1
5	289	3	. . .	. . .	. . .
6	871	7	100	538	5

Tabla 3. Determinación del tiempo entre llegadas. Fuente: Banks, J. et al., 1996.

Cliente	Dígitos aleatorios	Tiempo de servicio (minutos)	Cliente	Dígitos aleatorios	Tiempo de servicio (minutos)
1	84	4	7	79	4
2	18	2	8	09	2
3	87	5	9	64	4
4	81	4	10	38	3
5	06	1	. . .	. . .	. . .
6	91	5	100	26	2

Tabla 4. Determinación del tiempo de servicio. Fuente: Banks, J. et al., 1996.

Ahora se debe realizar el segundo paso, en que se construye la tabla de simulación añadiendo aquellas columnas que se necesiten para el análisis y el cálculo de las medidas de rendimiento. Se considerarán, para este caso los siguientes valores: el instante en el que comienza y termina el servicio del cliente, el tiempo que ha esperado en la cola, el tiempo que ha pasado en sistema y el tiempo de inactividad del servidor

Inicialmente se rellenan las celdas correspondientes al primer cliente asumiendo que llega en el instante 0 y posteriormente se calculan los valores de los demás clientes

Cliente	Tiempo entre llegadas (min)	Instante llegada	Tiempo de servicio (min)	Instante comienzo servicio	Tiempo espera en la cola (min)	Instante fin servicio	Tiempo en el sistema	Tiempo inactividad servidor
1	---	0	4	0	0	4	4	0
2	1	1	2	4	3	6	5	0
3	1	2	5	6	4	11	9	0
4	6	8	4	11	3	15	7	0
5	3	11	1	15	4	16	5	0
6	7	18	5	18	0	23	5	2
7	5	23	4	23	0	27	4	0
8	2	25	2	27	2	29	4	0
9	4	29	4	29	0	33	4	0
10	1	30	3	33	3	36	6	0
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
100	5	415	2	416	1	418	3	0
Total	**415**		**317**		**174**		**491**	**101**

Tabla 5. Tabla de simulación de un sistema de una cola de espera .Fuente: Banks, J. et al., 1996.

Las columnas de la tabla se han calculado a partir de los datos de las tablas anteriores.

» El instante de llegada para un cliente n se calcula sumando al instante de llegada del cliente anterior $(n-1)$ el tiempo entre llegadas calculado para el cliente n.

» El instante de comienzo de servicio para el cliente n será el máximo entre el instante de llegada del cliente n y el instante de fin de servicio del cliente anterior $n-1$.

» El tiempo de espera en la cola para el cliente n es la diferencia entre el instante de comienzo de servicio para el cliente n y el instante de llegada del cliente n.

» El instante de fin de servicio para el cliente n se calcula sumando al instante de inicio de servicio para el cliente n, el tiempo de servicio de ese cliente.

» El tiempo de permanencia en el sistema para el cliente n se calcula restando el instante de fin de servicio para el cliente n y el instante de llegada para ese cliente.

» El tiempo de inactividad del servidor en la línea de un cliente n se calcula mediante la diferencia entre el instante de llegada del cliente n y el instante de fin de servicio de la fila del cliente n -1. En el caso que el valor sea negativo el tiempo de inactividad es 0.

A partir de la tabla anterior se pueden calcular las medidas de rendimiento y otros valores que permitan determinar si las estimaciones son adecuadas o no.

Las medidas que se obtiene son:

» Medidas con respecto a la cola de espera

$$Tiempo\ medio\ de\ espera\ en\ la\ cola(W_q) = \frac{Total\ de\ tiempo\ de\ espera\ en\ la\ cola}{Total\ de\ clientes} = \frac{174}{100}$$
$$= 1.74\ minutos$$

También se podría calcular el tiempo medio de espera de los clientes que de verdad esperan en la cola, según la simulación (en el experimento evaluado hay 54 clientes que esperan en la cola).

$$\boxed{\frac{Total\ de\ tiempo\ de\ espera\ en\ la\ cola}{Total\ de\ clientes\ que\ esperan} = \frac{174}{54} = 3.22\ minutos}$$

Por otro lado, la probabilidad de que haya clientes en que esperen en la cola es:

$$probabilidad(espera) = \frac{Numero\ de\ clientes\ que\ esperan}{Numero\ de\ clientes} = \frac{54}{100}$$
$$= 0{,}54, es\ decir, un\ 54\%\ de\ probabilidad$$

» Medidas con respecto a la permanencia en el sistema

$$Tiempo\ medio\ de\ permanencia\ en\ el\ sistema(W_s)$$
$$= \frac{Total\ de\ tiempo\ de\ permanencia\ en\ el\ sistema}{Total\ de\ clientes} = \frac{491}{100} = 4.91\ minutos$$

» Media de tiempo de servicio

$$Tiempo\ medio\ de\ servicio = \frac{Tiempo\ total\ de\ servicio}{Número\ total\ de\ clientes} = \frac{317}{100} = 3.17\ minutos$$

Este resultado se puede comparar con la media de tiempo de servicio obtenida a partir de la distribución

$$E(S) = \sum_{s=0}^{\infty} sp(s) = 1(0.10) + 2(0.20) + 3(0.30) + 4(0.25) + 5(0.10) + 6(0.05) = 3.2$$

Este valor es un poco mayor que el obtenido en la simulación pero cabe esperar que cuanto más dure la simulación más se acerca al valor estimado en E(s).

» Media de tiempo entre llegadas

$$Media\ de\ tiempo\ entre\ llegadas = \frac{Suma\ de\ todos\ los\ tiempos\ entre\ llegadas}{Número\ de\ llegadas - 1} = \frac{415}{99}$$
$$= 4.19\ minutos$$

Este resultado se puede comparar con la media de la distribución uniforme con a=1 y b=8.

$$E(A) = \frac{a+b}{2} = \frac{1+8}{2} = 4.5\ minutos$$

Este valor también es mayor que el obtenido en la simulación pero cabe esperar que cuanto más dure la simulación más se acerca al valor estimado en E(s).

» Porcentaje de tiempo que el servidor está inactivo

$$Porcentaje\ de\ inactividad\ del\ servidor = \frac{Tiempo\ total\ de\ inactividad\ del\ servidor}{Tiempo\ total\ de\ ejecución\ de\ la\ simulación}$$
$$= \frac{101}{418} = 0.24$$

De este último cálculo se deduce que el porcentaje de utilización del servidor es del 76%.
Otros datos de interés que se pueden obtener son los diagramas de frecuencias de los tiempos de espera o de los tiempos de servicio.

Las hojas de Excel utilizadas para este y otros ejemplos se pueden descargar de http://www.bcnn.net.
Selecciona del menú *adittionals materials*, en el enlace *Spreadsheet examples from Chapter 2*.

10.4. Simulación de sistemas de inventario

El coste de almacenamiento y gestión del inventario es una de las partidas que debe afrontar una empresa y que puede poner en peligro su competitividad. Por esto es importante aplicar políticas de inventario que permitan reducir los costes sin por ellos dejar de dar servicio a las demandas que se reciban.

Los modelo matemáticos de inventarios pueden ser deterministas o de demanda conocida, en los que se puede prever casi con exactitud las demandas que se van a recibir y modelos estocásticos en lao que al no conocerse la demanda de forma exacta, esta pasa a ser una variable aleatoria del modelo.

Los elementos que deben tenerse en cuenta en un modelo de inventario son (Hillier y Lieberman, 2010):

1. Coste de emisión de órdenes o fabricación de una determinada cantidad, donde la función que lo representa es directamente proporcional a la cantidad que se produce u ordena más una constante.
2. Coste de mantenimiento del inventario, que puede ser una función d la cantidad máxima de almacenamiento en un periodo, de la media que se almacena o de la cantidad al final de un periodo.
3. Coste de demanda no satisfecha.

Otros costes, como costes de retraso de ingreso, pueden incluirse en el coste de mantenimiento o considerarse una variable independiente. **El coste total se considera una medida de rendimiento del sistema.**

Uno de los modelos de inventario que más se analizan son aquellos considerados de revisión continua en los que los niveles de inventario se reducen pero son reabastecidos.

Este tipo de sistemas cuentan con una revisión periódica de longitud N, en la que se comprueba el nivel del inventario. Para que el nivel de inventario es mayor que una cantidad M, se realizan ordenes de una cantidad Q_i a final de cada período i.

La política de este inventario sigue la siguiente relación:

$$\begin{aligned}
&Cantidad_ordenada \\
&\qquad = Nivel_de_orden_mínimo - nivel_final_inventario \\
&\qquad + \; cantidad_faltante(según\; demandas)
\end{aligned}$$

Ecuación 5 Relación entre orden, nivel y demandas de inventario

Para analizar la simulación de un sistema de inventario se considerará un problema de un sistema que se conoce como sistema de inventario en.

Ejemplo simulación de inventario de una compañía de refrigeradores(Banks et al., 1996). En este sistema se realiza una revisión después de un número fijo de días y se necesita tomar la decisión de cuando realizarla. Los ciclos de revisión son de 5 días, el número mínimo de refrigeradores que se piden en la orden es de 11.
El número de refrigeradores que se piden cada día siguen una distribución aleatoria, según la siguiente tabla.

Demanda	Probabilidad	Probabilidad acumulada	Asignación de dígitos aleatorios
0	0.10	0.10	01-10
1	0.25	0.35	11-35
2	0.35	0.70	36-70
3	0.21	0.91	71-91
4	0.09	1.00	92-00

Tabla 6. Asignación de dígitos aleatorios para las demandas diaria. Fuente: Banks et al., 1996.

Otro elemento que se debe considerar es la cantidad de días que pasan desde que se realiza la orden y se recibe la mercancía del proveedor o lo que se conoce como tiempo de espera, teniendo en cuenta que si esta cantidad es 0, se va recibir la mercancía la mañana siguiente a la orden y si es 1, se recibirá la segunda mañana posterior al día de la petición y así sucesivamente.

Tiempo de espera (días)	Probabilidad	Probabilidad acumulada	Asignación de dígitos aleatorios
1	0.6	0.6	1-6
2	0.3	0.9	7-9
3	0.1	0.1	0

Tabla 7. Asignación de dígitos aleatorios para el tiempo de espera. Fuente: Banks et al., 1996.

Inicialización

En la inicialización de los sistemas de inventario se debe considerar, el nivel de inventario inicial, si hay alguna orden pendiente de llegar y el instante en el que llegará.

En el ejemplo se considerará que el nivel de inventario es de 3 refrigeradores y que existe una orden de 8 refrigeradores que se recibirá dentro de 2 días.

Proceso

Para la simulación de este tipo de sistemas también se realizará una tabla de simulación en la que se indica cómo opera el sistema.

Para cada uno de los días considerados en la simulación, será necesario conocer el nivel inicial del inventario, las demandas recibidas, la reducción que se produce en el inventario y la orden que se debe llevar a cabo para que se cumpla la relación de la «Ecuación 5».

Accede al aula virtual para consultar la tabla de simulación de un sistema de inventario (Banks et al., 1966).

A partir de la tabla, se pueden realizar los siguientes cálculos:

- La media de refrigeradores en el inventario final tras cinco ciclos es:

$$\frac{68}{25} = 2.72\, refrigeradores$$

- Durante la simulación se observa que de los 25 días que dura, en 5 de ellos no ha habido refrigeradores suficientes para cubrir las demandas.

- La demanda media diaria es de $\frac{51}{25} = 2.04\, refrigeradores$

Según esto se puede observar que **la demanda media es inferior al nivel medio de inventario.**

10.5. Referencias bibliográficas

Banks, J., Carson, J. S., y Nelson, B. L. (1996). D*iscrete-Event System Simulation*. (2a ed.). New Jersey: Prentice Hall.

Cao, R. (2002). *Introducción a la simulación y a la teoría de colas*. La Coruña: Netbiblo, S.L.

García-Sánchez, A. y Ortega-Mier, M.. (2006). *Simulación de eventos discretos*. Recuperado de http://www.iol.etsii.upm.es/arch/simulacion.pdf

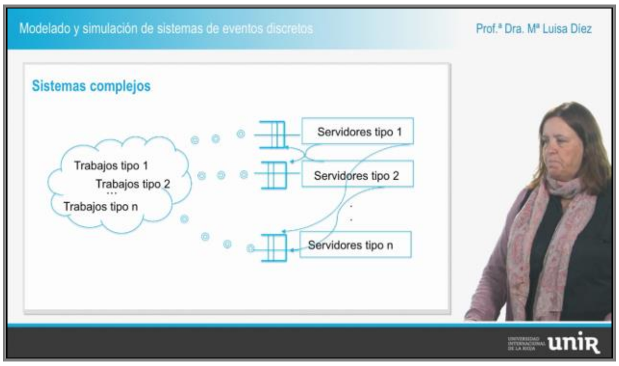
Hillier, F. S., y Lieberman, G. J. (2010). *Introducción a la investigación de operaciones* (9th ed.). Nueva York: McGraw-Hill. Recuperado de https://books.google.es/books?id=wh0oAQAAMAAJ

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

Modelado y simulación de sistemas de eventos discretos

En la siguiente lección magistral veremos un ejemplo de la simulación de un sistema de eventos discretos, pero con una cierta complejidad.



Accede a la lección magistral a través del aula virtual

No dejes de leer…

Simulador de sistemas de colas

Gadeo, M. A., Fernández, J. A., Muñoz, J.E., López, L. R y Torres, F. J. (2000). Simulador de sistemas de colas. En *Congreso de Tecnologías Aplicadas a la Enseñanza de la Electrónica*. Barcelona, España.

Artículo sobre simulador de sistemas de colas.

Accede al artículo a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:
http://taee.euitt.upm.es/actas/2000/papers/2000S2B07.pdf

Análisis de líneas de espera a través de teoría de colas y simulación

Portilla, L. M., Arias, L., Fernández, S. (2010). Análisis de líneas de espera a través de teoría de colas y simulación. *Scientia Et Technica, 17*(46).

Artículo sobre la aplicación de las teoría de colas y la simulación ala análisis de las líneas de espera.

Accede al artículo a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=84920977012

+ Información

A fondo

Introducción a la Simulación y a la Teoría de Colas

Cao, R. (2002). Introducción a la Simulación y a la Teoría de Colas. La Coruña: Universidad da Coruña.

Libro sobre simulación de sistemas discretos y que trata en profundidad la simulación de sistemas de colas.

Accede al libro a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:
http://ruc.udc.es/dspace/bitstream/handle/2183/11918/8497450175.pdf?sequence=2

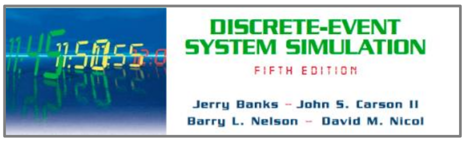
Simulación de eventos discretos

Apuntes sobre simulación de eventos discretos.

Accede al artículo a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:
http://www.iol.etsii.upm.es/arch/simulacion.pdf

Enlaces relacionados

Discrete event system simulation



Página web con complementos del libro de los autores recomendado en la bibliografía y con ejemplos resueltos.

Accede a la página web a través del aula virtual o desde la siguiente dirección:
http://www.bcnn.net

Bibliografía

Banks, J., Carson, J. S. y Nelson, B. L. (1996). *Discrete-Event System Simulation*. (2a ed.). New Jersey: Prentice Hall.

Basmadjian, D. (2003). *Mathematical Modeling of Physical Systems: An Introduction*. Oxford: Oxford University Press. Recuperado de https://books.google.es/books?id=p2MdsfQ2teUC

Cao, R. (2002). I*ntroducción a la simulación y a la teoría de colas*. La Coruña: Universidad da Coruña.

Fishman, G. S. (1973). *Concepts and Methods in Discrete Event Digital Simulation*. Nueva York: John Wiley & Sons Inc.

Fishman, G. S. (1978). *Conceptos y métodos en la simulación digital de eventos discretos*. México: Limusa.

Fishman, G. S. (2001). *Discrete-Event Simulation*. New York: Springer.Recuperado de http://link.springer.com/10.1007/978-1-4757-3552-9

Fritzson, P. (2011). I*ntroduction to Modeling and Simulation of Technical and Physical Systems with Modelica*. Nueva York: John Wiley & Sons.

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2010). Introducción a la investigación de operaciones (9th ed.). McGraw-Hill. Recuperado de: https://books.google.es/books?id=wh0oAQAAMAAJ

Maki, D. P. y Thompson, M. (2006). *Mathematical Modeling and Computer Simulation*. Massachusetts: Thomson Brooks/Cole.

Pritsker, A. A. B. (1998). Principles of Simulation Modeling. En J. Banks, *Handbook of Simulation* (pp. 31–51). Nueva York: John Wiley & Sons, Inc. Recuperado de: http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/9780470172445.ch2/summary

Test

1. En un sistema de eventos discretos:

A. Los cambios de estado se producen de forma continuada.

B. No se producen cambios de estados.

C. Los cambios de estado se producen en instantes de tiempo determinados.

D. Ninguna es verdadera.

2. Los modelos de simulación:

A. Resuelven el modelo simulado y analizan la información.

B. Únicamente ejecutan el modelo simulado.

C. Ejecutan el modelo y guardan la información para el análisis.

D. Ninguna de las anteriores es verdadera.

3. En un modelo de simulación (elegir todas las respuestas correctas):

A. Las entradas se pueden caracterizar mediante distribuciones de probabilidad discretas.

B. Las entradas se pueden caracterizar mediante distribuciones de probabilidad continuas.

C. No existen entradas que afecten al modelo.

D. Ninguna de las anteriores es verdadera.

4. La tabla de simulación es:

A. La tabla de asignación de rengo de números aleatorios.

B. La tabla de las distribuciones de probabilidad de los eventos que se producen en el sistema simulado.

C. La tabla que recoge los valores de entrada y resultado de la simulación.

D. La tabla de medidas de rendimiento del sistema simulado.

5. En un sistema de colas, la disciplina de la cola se refiere a:

A. La forma en la que entran los clientes.

B. El tiempo de espera de los clientes en la cola.

C. La forma de salida de los clientes en la cola.

D. Ninguna de las anteriores es verdadera.

6. En la simulación de un sistema de colas, el tiempo de inicio del servicio para un cliente:

A. Se determina a partir del tiempo de inicio de servicio del cliente anterior sumando un intervalo constante.

B. Es el tiempo de llegada del cliente.

C. Siempre, es el tiempo de fin de servicio del cliente anterior.

D. Es el tiempo de fin de servicio del cliente anterior si es mayor o igual que el tiempo de llegada del cliente.

7. En la simulación de un sistema de colas, el tiempo de inactividad del servidor en la fila de un cliente:

A. Se calcula a partir de la diferencia entre el tiempo de llegada y el tiempo de inicio de servicio del cliente correspondiente.

B. Se calcula a partir de la diferencia entre el tiempo de fin de servicio del cliente anterior y el tiempo de llegada del cliente correspondiente.

C. Se calcula a partir de la diferencia del tiempo de inicio de servicio del cliente anterior y el tiempo de llegada del cliente correspondiente.

D. Ninguna de las anteriores es verdadera.

8. El instante de llegada de un cliente en la simulación de un sistema de colas:

A. Es una variable aleatoria que se obtiene a partir de un número aleatorio generado según la distribución de probabilidad.

B. Es una constante que se suma al instante de llegada del cliente anterior.

C. Es una constante que se suma al instante de fin de servicio del cliente anterior.

D. Ninguna de las anteriores es verdadera.

9. En la simulación de un sistema de inventario con revisión periódica:

A. El número de unidades pedidas en una orden siempre es constante.

B. El número de unidades pedidas en una orden se calcula de forma aleatoria e independiente.

C. El número de unidades pedidas en una orden se calcula a partir de un número de unidades mínimo, el estado final del inventario en el instante anterior y las peticiones que no se han podido satisfacer.

D. Ninguna de las anteriores es verdadera.

10. En la simulación de un sistema de inventario con revisión periódica:

A. El estado del inventario al final de un día siempre tiene que ser mayor que cero para lo que se generan ordenes de servicio inmediato.

B. El estado del inventario al final de cada día es siempre el mismo.

C. El estado del inventario al final de un día se calcula a partir de la las demandas satisfechas y pendientes o no satisfechas.

D. Ninguna de las anteriores es cierta.

