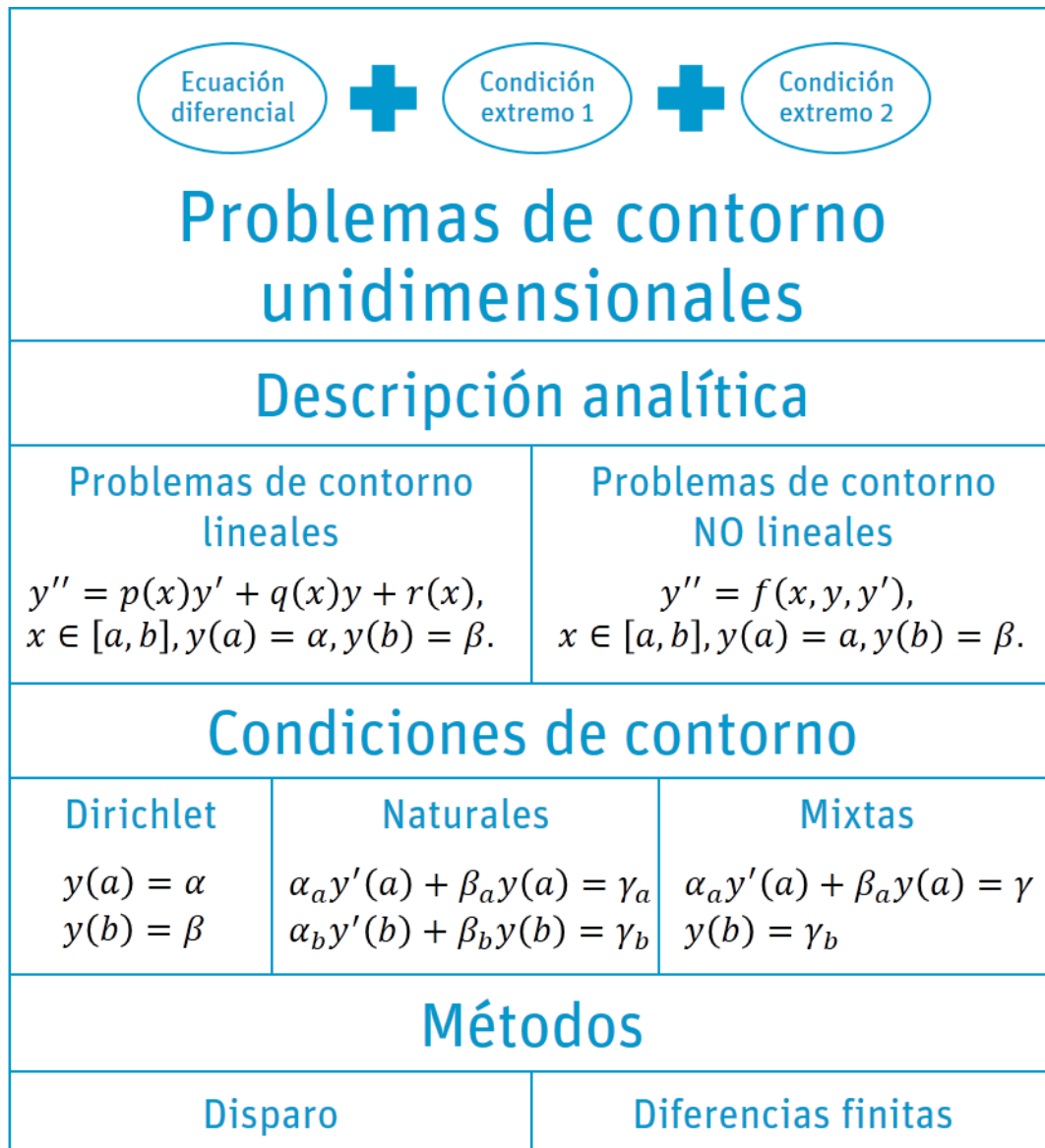


Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería

Problemas de contorno unidimensionales Método de disparo

Índice

Esquema	3
Ideas clave	4
5.1. ¿Cómo estudiar este tema?	4
5.2. Método de disparo para problemas de contorno lineales	7
5.3. Método de disparo para problemas de contorno no lineales	15
Lo + recomendado	30
+ Información	33
Test	35



5.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las Ideas clave que encontrarás a continuación.

Determinados problemas en la ciencia en general se pueden modelizar a partir de una ecuación diferencial y de la solución en algún punto estratégico. Si en los problemas de valor inicial trabajábamos con la ecuación diferencial dependiente de la variable tiempo t , en este tema la variable independiente será una variable espacial x , de forma que la solución a obtener será del tipo $y(x)$. La información de la que disponíamos en los problemas de valor inicial era, precisamente, la solución $y(t)$ en el instante inicial. En el caso de los problemas de contorno unidimensionales, también denominados problemas de frontera, esa información estratégica aparecerá en el contorno del problema que debemos resolver.

Por ejemplo, podemos modelar un caso de la física clásica como se describe a continuación y se ilustra en la Figura 1.

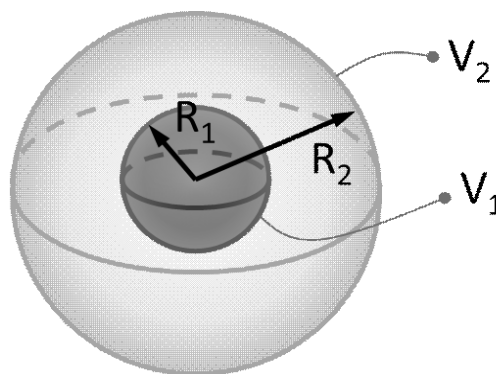


Figura 1. Dos esferas concéntricas cargadas superficialmente con tensiones constantes.

El potencial eléctrico $V(r)$ entre dos esferas conductoras concéntricas de radios R_1 y R_2 , siendo $R_1 < R_2$, viene determinado por la expresión:

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = 0, r \in [R_1, R_2]$$

Conocemos que la esfera interior está cargada a una tensión constante de V_1 V, mientras que la esfera exterior está conectada a otra tensión constante V_2 V. De este modo, las condiciones de contorno se definen como:

$$\begin{cases} V(R_1) = V_1 \\ V(R_2) = 0 \end{cases}$$

De este modo, tenemos un problema de contorno, puesto que conocemos la solución en los extremos de la variable r , ya que $r \in [R_1, R_2]$.

Planteamiento del problema

En general, vamos a resolver problemas del tipo:

$$y'(x) = f(x, y), x \in [a, b], y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

Al respecto de la expresión anterior, se pueden dar numerosas variables.

Por un lado, debemos destacar que la mayoría de los problemas no se definen a partir de la primera derivada $y'(x)$, sino a partir de ecuaciones diferenciales de orden 2 o superior. Como vimos en temas anteriores, es posible convertir una ecuación diferencial en un sistema de ecuaciones diferenciales a partir de un cambio de variables adecuado. Por ejemplo, si tenemos el problema:

$$z'' + z = 0, x \in [0, \pi], z(0) = 0, z(\pi) = 1$$

haciendo el cambio de variables:

$$\begin{cases} y_1 = z \\ y_2 = z' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1' = z' = y_2 \\ y_1'' = -z = -y_1 \end{cases}, \quad y_1(0) = 0, y_1(\pi) = 1$$

Generalizando el problema que habíamos definido previamente, podemos afirmar que el tipo de problemas de contorno que vamos a resolver son del tipo:

$$y'' = f(x, y, y'), x \in [a, b], y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

Por otro lado, para las condiciones de contorno se abren más posibilidades de las que se indican en la expresión anterior. Algunas de estas posibilidades se reflejan a continuación.

► Condiciones Dirichlet:

$$\begin{cases} y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases}$$

Si $\alpha = \beta = 0$, se denomina caso homogéneo.

► Condiciones naturales:

$$\begin{cases} \alpha_a y'(a) + \beta_a y(a) = \gamma_a \\ \alpha_b y'(b) + \beta_b y(b) = \gamma_b \end{cases}$$

► Condiciones mixtas:

$$\begin{cases} \alpha_a y'(a) + \beta_a y(a) = \gamma \\ y(b) = \gamma_b \end{cases}$$

Métodos de resolución

A lo largo de este tema vamos a entrar en detalle en dos métodos de resolución cuyo fundamento es completamente diferente.

Por un lado, veremos los **métodos de disparo**. La idea central del método de disparo es la transformación de un problema de contorno en un problema de valor inicial, cuya solución satisfaga la condición en la frontera. Para ello, es necesario disparar a una solución y comprobar si se satisface la condición de la frontera; en caso de que no se haya apuntado en el disparo con la suficiente precisión, habrá que modificar el punto al que se dispara para obtener dicha condición en el contorno.

Por otro lado, profundizaremos en la resolución de este tipo de problemas con **diferencias finitas**. Basándonos en la discretización de las ecuaciones diferenciales a partir de diferencias centrales, obtendremos una serie de sistemas de ecuaciones lineales y no lineales que deberemos resolver para encontrar la solución del problema de contorno.

Los apartados de los que consta este tema son:

- ▶ Métodos de disparo:
 - Para problemas lineales.
 - Para problemas no lineales.

5.2. Método de disparo para problemas de contorno lineales

A continuación, vamos a desarrollar el método de disparo para problemas de contorno lineales. Una vez introducidos los conceptos, veremos una posible implementación aplicada a un problema real.

Desarrollo del método

Sea el problema de contorno genérico:

$$y'' = f(x, y, y'), x \in [a, b], y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

Cuando la función f es lineal en y e y' , podemos expresar el problema como:

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), x \in [a, b], y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

Teorema 1. Sea el problema de contorno:

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), x \in [a, b], y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

Si se cumple que:

- 1) $p(x), q(x), r(x)$ son continuas en $x \in [a, b]$, y
- 2) $q(x) > 0, \forall x \in [a, b]$

entonces el problema tiene solución única.

En este caso, vamos a transformar el problema de contorno en dos problemas de valor inicial como:

$$\begin{cases} y_1'' = p(x)y_1' + q(x)y_1 + r(x), & x \in [a, b], y_1(a) = \alpha, y_1'(a) = 0 \\ y_2'' = p(x)y_2' + q(x)y_2, & x \in [a, b], y_2(a) = 0, y_2'(a) = 1 \end{cases}$$

Bajo las condiciones del **Teorema 1**, las expresiones anteriores tienen solución única, expresada como:

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x)$$

donde $y_2(b) \neq 0$.

Por tanto, para resolver este tipo de problemas, el primer paso es resolver y_1 y, a continuación, y_2 .

Resolvamos y_1 . Para ello, transformamos el primer problema de valor inicial en un sistema a partir del cambio de variable $u_1 = y_1, u_2 = y_1'$, resultando:

$$\begin{cases} u_1' = u_2, & u_1(a) = \alpha \\ u_2' = q(x)u_1 + p(x)u_2 + r(x), & u_2(a) = 0 \end{cases}$$

Resolvamos y_2 . De nuevo, aplicamos el cambio de variable $v_1 = y_2, v_2 = y_2'$, obteniendo:

$$\begin{cases} v_1' = v_2, & v_1(a) = 0 \\ v_2' = q(x)v_1 + p(x)v_2, & v_2(a) = 1 \end{cases}$$

El siguiente **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** muestra una posible implementación del método de disparo para problemas lineales:

```
1 function [y,yp]=disparoLineal(p,q,r,a,b,alpha,beta,N)
2 h=(b-a)/N;
3 ua=alpha; ub=0;
4 va=0; vb=1;
5 % u1=Resolver PVI1(p,q,r,a,ua,ub,N);
6 % v1=Resolver PVI2(p,q,a,va,vb,N);
7 y=u1+(beta-y1b)/y2b*v1;
8 end
```

El problema de las esferas concéntricas

Veamos cómo aplicaríamos el método del disparo lineal sobre el caso de las esferas concéntricas, cuya expresión es:

$$V'' = -\frac{2}{r}V', \quad r \in [R_1, R_2], V(R_1) = V_1, V(R_2) = V_2$$

Al ser una ecuación diferencial de segundo orden, la convertimos en un sistema de problemas de valor inicial. Identificamos términos y obtenemos que $p(r) = -\frac{2}{r}$ y que las funciones q y r son cero.

$$\begin{cases} W'' = -\frac{2}{r}W', r \in [R_1, R_2], W(R_1) = V_1, W'(R_1) = 0 \\ X'' = -\frac{2}{r}X', r \in [R_1, R_2], X(R_1) = 0, X'(R_1) = 1 \end{cases}$$

Transformamos cada uno de los dos problemas de valor inicial en un sistema. Comencemos por la solución $W(r)$, haciendo el cambio de variable $w_1 = W, w_2 = W'$.

$$\begin{cases} w_1' = w_2, & w_1(R_1) = V_1 \\ w_2' = -\frac{2}{r}w_2, & w_2(R_1) = 0 \end{cases}$$

De forma análoga, resolvemos $X(r)$, con el cambio $x_1 = X, x_2 = X'$

$$\begin{cases} x_1' = x_2, & x_1(R_1) = 0 \\ x_2' = -\frac{2}{r}x_2, & x_2(R_1) = 1 \end{cases}$$

La solución única se expresa como:

$$V(r) = W(r) + \frac{V_2 - W(R_2)}{X(R_2)}X(r)$$

Un código en Matlab que obtendría la solución de este problema de frontera, basado en el anterior, se muestra en el siguiente código:

```
1 function [r,V]=disparoLinealEsfera(a,b,alpha,beta,N)
2 h=(b-a)/N;
3 Wa=alpha; Wb=0;
4 Xa=0; Xb=1;
5 pvi1=@(r,w)[w(2);-2./r*w(2)];
6 pvi2=@(r,x)[x(2);-2./r*x(2)];
7 [r,W]=ode23(pvi1,a:h:b,[Wa;Wb]);
8 [r,X]=ode23(pvi2,a:h:b,[Xa;Xb]);
9 V=W+(beta-W(end,1))/X(end,1)*X;
10 end
```

Si queremos resolver el problema de contorno:

$$V'' = -\frac{2}{r}V', \quad r \in [1,2], V(1) = 10, V(2) = 0$$

ejecutamos en la consola de Matlab:

```
>> a=1; b=2; alpha=10; beta=0;
>> [r,V]=disparoLinealEsfera(a,b,alpha,beta,N);
```

La Tabla 1 presenta los resultados si nos pidieran los valores en $r = \{1,1.2,1.4,1.6,1.8,2\}$. La

Figura 2 ilustra los resultados.

r	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$V(r)$	10	6.6665	4.2852	2.449	1.1103	0

Tabla 1. Resultados de $V(r)$.

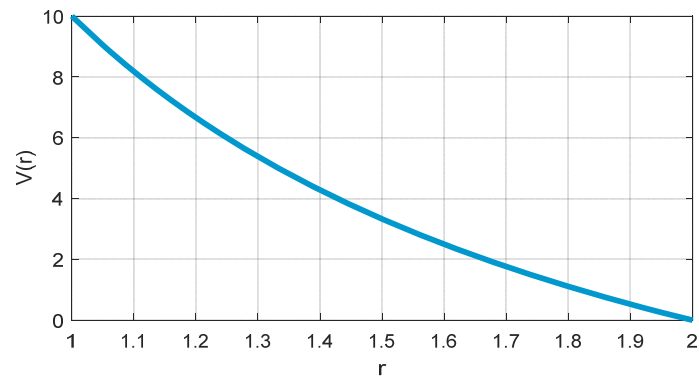


Figura 2. Resultados de $V(r)$.

Ejemplo 1. Sea el problema de frontera:

$$y'' = -\frac{1}{3}y' - 9y + \sin(3x) - \frac{31}{3}e^{-x}, x \in [0, \pi], y(0) = 0, y(\pi) = -1.0432$$

Obtén el valor de $y(x)$ utilizando 52 subintervalos. Indica en una tabla los valores de $y(x)$ para $x = \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\}$. Representa la función $y(x)$.

En primer lugar, transformamos el problema de frontera en dos problemas de valor inicial.

$$\begin{cases} Z'' = -\frac{1}{3}Z' - 9Z + \sin(3x) - \frac{31}{3}e^{-x}, & x \in [0, \pi], Z(0) = 0, Z'(\pi) = 0 \\ T'' = -\frac{1}{3}T' - 9T, & x \in [0, \pi], T(0) = 0, T'(\pi) = 1 \end{cases}$$

A continuación, transformamos cada problema de valor inicial en un sistema. Comenzando por $Z(x)$, hacemos el cambio de variable $z_1 = Z, z_2 = Z'$, de modo que:

$$\begin{cases} z_1' = z_2, & z_1(0) = 0 \\ z_2' = -\frac{1}{3}z_2 - 9z_1 + \sin(3x) - \frac{31}{3}e^{-x}, & z_2(\pi) = 0 \end{cases}$$

Continuando con $T(x)$, hacemos el cambio de variable $t_1 = T, t_2 = T'$.

$$\begin{cases} t_1' = t_2, & t_1(0) = 0 \\ t_2' = -\frac{1}{3}t_2 - 9t_1, & t_2(\pi) = 1 \end{cases}$$

La solución única es:

$$y(x) = Z(x) + \frac{-1.0432 - Z(\pi)}{T(\pi)}T(x)$$

Haciendo las siguientes modificaciones sobre el **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.:**

Línea 1.

```
function [x,y]=disparoLinealEjemplo1(a,b,alpha,beta,N)
```

Línea 5.

```
pvi1=@(x,z)[z(2);-1/3*z(2)-9*z(1)+sin(3*x)-31/3*exp(-x)];
```

Línea 6.

```
pvi2=@(x,t)[t(2); -1/3*t(2)-9*t(1)];
```

Ejecutamos en la consola de Matlab:

```
>> a=0;b=pi; alpha=0; beta=-1.0432; N=52;  
>> [x,y]=disparoLinealEjemplo1(a,b,alpha,beta,N)
```

El resultado solicitado se muestra en formato de tabla y de figura.

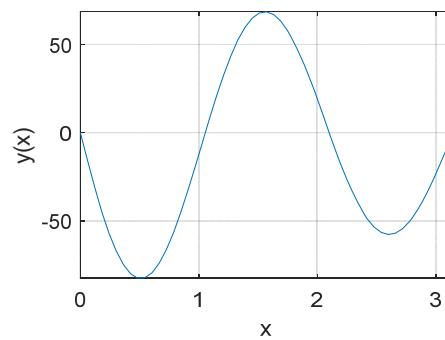


Figura 3. Resultados de problema de frontera 1.

x	$y(x)$
0	0
0.7854	-56.7971
1.5708	68.5726
2.3562	-41.9698
3.1416	-1.0432

Tabla 2. Resultados problema de frontera 1.

5.3. Método de disparo para problemas de contorno no lineales

En este apartado vamos a describir el método de disparo para problemas de contorno no lineales. Comenzaremos con una descripción del método para, a continuación, mostrar un ejemplo de aplicación e implementación.

Desarrollo del método

En el método de disparo para problemas lineales, la solución final era una combinación lineal de los dos problemas (o sistemas de problemas) de valor inicial. En el caso del disparo no lineal, vamos a obtener la solución a una sucesión de problemas de valor inicial, de forma que nos vayamos aproximando a la solución real. Por tanto, resolveremos el problema de valor inicial:

$$y'' = f(x, y, y'), x \in [a, b], y(a) = \alpha, y'(a) = t$$

donde t es un parámetro, para aproximar la solución del problema del contorno. El parámetro t tomará valores t_k de forma que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(b, t_k) = y(b) = \beta$$

Veamos en el siguiente caso cómo vamos a ir aproximándonos a la solución. El problema de contorno:

$$y'' = \frac{1}{2x}y' + \frac{4}{x}y - 16x - 8 - \frac{3}{2x}, x \in [1, 2], y(1) = 7, y(2) = 22$$

tiene como solución $y(x) = 4x^2 + 3x$. Planteamos el problema de valor inicial:

$$y'' = \frac{1}{2x}y' + \frac{4}{x}y - 16x - 8 - \frac{3}{2x}, x \in [1,2], y(1) = 7, y'(1) = t$$

siendo el objetivo ir aproximándonos a $y(2) = 22$, de forma que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(x) = y(2, t_k) = y(2) = 22$$

El primer disparo se suele dar al punto intermedio del intervalo, pero se podría dar a otro punto. Así que el primer disparo lo lanzamos a $t_1 = 14.5$. Al resolver el problema de valor inicial, obtenemos que $y_1(2) = y(2, 14.5) = 28.4637$. La figura 4 muestra la función exacta $y(x)$ y la aproximación $y_1(x)$ tras el primer disparo. Vemos que no se trata de un buen punto sobre el que disparar, puesto que la función exacta y la función aproximada todavía mantienen cierta distancia. Es por ello que es necesario establecer estrategias para la selección de los puntos de disparo y cómo ir acercándonos cada vez más a la solución final.

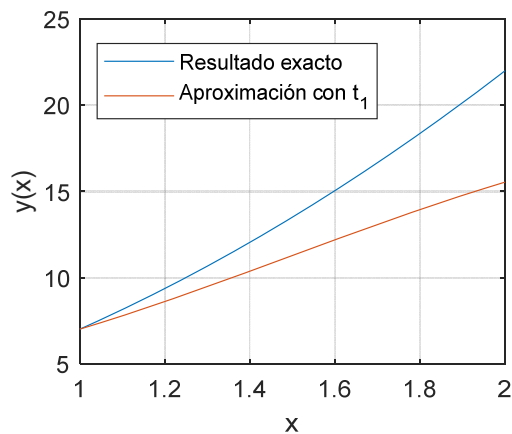


Figura 4. Resultados tras el primer disparo.

Actualización del punto de disparo

Definamos la función $F(t)$ como:

$$F(t) = y(b, t) - \beta$$

El objetivo es que la ecuación anterior se anule, de forma que la solución aproximada en el punto final y la solución real sean iguales. Como $F(t)$ es una ecuación no lineal, disponemos de diferentes métodos para obtener su solución, como veremos en el tema 9. No obstante, a continuación, describimos algunos de los métodos.

Método de la secante

Para utilizar el método de la secante necesitaremos conocer dos disparos t_1 y t_2 . A partir de ellas generaremos los siguientes disparos a los puntos:

$$t_{k+1} = t_k - \frac{t_k - t_{k-1}}{F(t_k) - F(t_{k-1})} F(t_k), \quad k = 2, 3, \dots$$

Aplicando el método de la secante sobre el caso del que conocemos la solución, tenemos que $F(t_1) = y(2, 14.5) - 22 = 6.4637$. Si tomamos como disparo $t_2 = 16$, tenemos que $y(2, 16) = 31.2345$ y, por tanto, $F(t_2) = y(2, 16) - 22 = 9.2345$. Aplicando el método de la secante, el siguiente disparo lo haríamos en:

$$t_3 = t_2 - \frac{t_2 - t_1}{F(t_2) - F(t_1)} F(t_2) = 16 - \frac{1.5}{2.7708} 9.2345 = 11.0008$$

En la Tabla se muestran los diferentes valores que va tomando t_k utilizando el método de la secante y cómo se va aproximando a la solución en la Figura . En la Tabla se muestran los resultados de la aproximación y el error que se comete en cada uno de los puntos respecto de la solución real $\epsilon = |y_{numérica}(x) - y_{real}(x)|$.

k	1	2	3	4
t_k	14.5	16	11.0008	11.0009

Tabla 3. Valores que toma t_k con el método de la secante.

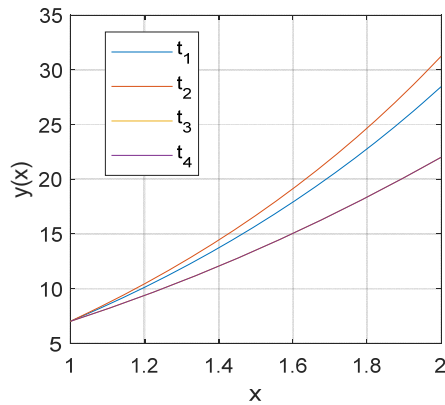


Figura 5. Evolución de la solución para los diferentes valores de t_k .

x	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$y_{numérica}(x)$	7	9.36	12.04	15.04	18.36	22
ϵ	0	$5.091 \cdot 10^{-6}$	$3.597 \cdot 10^{-5}$	$4.714 \cdot 10^{-5}$	$4.393 \cdot 10^{-5}$	$6.140 \cdot 10^{-10}$

Tabla 4. Solución numérica y error.

El siguiente código muestra una posible implementación del método de disparo no lineal para el problema sobre el que hemos estado trabajando.

```

1 function [x,Y]=disparoNoLinealSecante(a,b,alpha,beta,N,tol)
2 h=(b-a)/N;
3 pvi=@(x,y)[y(2);1/2/x*y(2)+4/x*y(1)-16*x-8-3/2/x];
4 t(1)=(beta+alpha)/2;
5 [x,y]=ode23(pvi,a:h:b,[alpha;t(1)]);
6 Y(:,1)=y(:,1);
7 F(1)=Y(end,1)-beta;
8 t(2)=t(1)+1.5;
9 [x,y]=ode23(pvi,a:h:b,[alpha;t(2)]);
10 Y(:,2)=y(:,1);
11 F(2)=Y(end,2)-beta;
12 k=2;
13 while abs(F(k))>tol
14     t(k+1)=t(k)-(t(k)-t(k-1))/(F(k)-F(k-1))*F(k);
15     [x,y]=ode23(pvi,a:h:b,[alpha;t(k+1)]);

```

```

16      Y(:,k+1)=y(:,1);
17      F(k+1)=y(end,1)-beta;
18      k=k+1;
19 end
20 end

```

Método de Newton

Otra de las opciones para actualizar el valor de t_k es el uso del método de Newton. En este caso, utilizaremos la expresión:

$$t_{k+1} = t_k - \frac{F(t_k)}{F'(t_k)}$$

Conocemos $F(t)$ pero no $F'(t) = \frac{d}{dt}[F(t)] = \frac{d}{dt}[y(b, t)]$. Si reescribimos el problema de valor inicial, explicitando las variables de las que depende, obtenemos:

$$y''(x, t) = f(x, y(x, t), y'(x, t)), \quad x \in [a, b], y(a, t) = \alpha, y'(a, t) = t$$

Derivando parcialmente respecto de t :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t}[y''(x, t)] &= \frac{\partial}{\partial t}[f(x, y(x, t), y'(x, t))] \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x}[x, y(x, t), y'(x, t)] \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}[x, y(x, t), y'(x, t)] \frac{\partial y}{\partial t} \\
 &\quad + \frac{\partial f}{\partial y'}[x, y(x, t), y'(x, t)] \frac{\partial y'}{\partial t}
 \end{aligned}$$

Las condiciones iniciales son:

$$\frac{\partial y}{\partial t}(a, t) = 0, \frac{\partial y'}{\partial t}(a, t) = 1$$

Si renombramos $z(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, t)$, nos encontramos con el siguiente problema de valor inicial.

$$z'' = \frac{\partial f}{\partial y}[x, y, y']z + \frac{\partial f}{\partial y'}[x, y, y']z', \quad x \in [a, b], z(a) = 0, z'(a) = 1$$

Por tanto, el valor buscado $\frac{d}{dt}[y(b, t)]$ será $z(b)$. Reescribiendo el problema, necesitaremos resolver los problemas de valor inicial:

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y', y'') & x \in [a, b], y(a) = \alpha, y'(a) = t \\ z''(x) = \frac{\partial f}{\partial y}[x, y, y']z + \frac{\partial f}{\partial y'}[x, y, y']z', & x \in [a, b], z(a) = 0, z'(a) = 1 \end{cases}$$

actualizando en cada paso el valor de t_k con el método de Newton a partir de:

$$t_{k+1} = t_k - \frac{F(t_k)}{F'(t_k)} = t_k - \frac{y(b, t_k)}{z(b)}$$

Nótese que esta expresión es únicamente válida para el problema que estamos resolviendo, es decir, para $F(t) = y(b, t) - \beta$. Si esta expresión a resolver cambiara, sería necesario redefinir las funciones a partir del procedimiento realizado anteriormente.

Apliquemos el método de Newton sobre el problema:

$$y'' = \frac{1}{2x}y' + \frac{4}{x}y - 16x - 8 - \frac{3}{2x}, x \in [1, 2], y(1) = 7, y(2) = 22$$

cuya solución conocemos. Como tenemos condiciones Dirichlet, la función que tenemos que resolver es $F(t) = y(b, t) - \beta = 0$. Por tanto, tendremos que resolver dos problemas de valor inicial: el de y'' y el de z'' . Para ello, necesitamos conocer $\frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial f}{\partial y'}$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4}{x}, \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{2x}$$

de forma que los problemas de valor inicial serán:

$$\begin{cases} y''(x) = \frac{1}{2x}y' + \frac{4}{x}y - 16x - 8 - \frac{3}{2x} & x \in [1,2], y(1) = 7, y'(1) = t \\ z''(x) = \frac{4}{x}z + \frac{1}{2x}z' & x \in [1,2], z(1) = 0, z'(1) = 1 \end{cases}$$

Tomemos como disparo inicial $t_1 = \frac{\beta + \alpha}{2} = 14.5$. El valor de $F(t_1) = y(b, t_1) - \beta = y(2, 14.5) - 22 = 6.4637$. En la Tabla se muestran los diferentes valores que va tomando t_k utilizando el método de la secante y cómo se va aproximando a la solución en la Figura. En la Tabla se muestran los resultados de la aproximación y el error que se comete en cada uno de los puntos respecto de la solución real $\epsilon = |y_{numérica}(x) - y_{real}(x)|$.

k	1	2	3	4
t_k	14.5	11.0010	11.0009	11.0009

Tabla 5. Valores que toma t_k con el método de la secante.

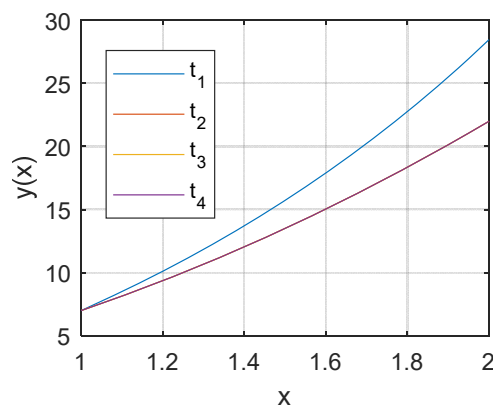


Figura 6. Evolución de la solución para los diferentes valores de t_k .

x	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$y_{numérica}(x)$	7	9.36	12.04	15.04	18.36	22

ϵ	0	$5.091 \cdot 10^{-6}$	$3.597 \cdot 10^{-5}$	$4.714 \cdot 10^{-5}$	$4.393 \cdot 10^{-5}$	$6.750 \cdot 10^{-13}$
------------	---	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	------------------------

Tabla 6. Solución numérica y error.

El function `[x,Y]=disparoNoLinealSecante(a,b,alpha,beta,N,tol)`

```

21 h=(b-a)/N;
22 pvi=@(x,y)[y(2);1/2/x*y(2)+4/x*y(1)-16*x-8-3/2/x];
23 t(1)=(beta+alpha)/2;
24 [x,y]=ode23(pvi,a:h:b,[alpha;t(1)]);
25 Y(:,1)=y(:,1);
26 F(1)=Y(end,1)-beta;
27 t(2)=t(1)+1.5;
28 [x,y]=ode23(pvi,a:h:b,[alpha;t(2)]);
29 Y(:,2)=y(:,1);
30 F(2)=Y(end,2)-beta;
31 k=2;
32 while abs(F(k))>tol
33     t(k+1)=t(k)-(t(k)-t(k-1))/(F(k)-F(k-1))*F(k);
34     [x,y]=ode23(pvi,a:h:b,[alpha;t(k+1)]);
35     Y(:,k+1)=y(:,1);
36     F(k+1)=y(end,1)-beta;
37     k=k+1;
38 end
39 end

```

muestra una posible implementación del método de disparo no lineal para este problema con el método de Newton.

```

1 function [x,Y]=disparoNoLinealNewton(a,b,alpha,beta,N,tol)
2 h=(b-a)/N;
3 pvi=@(x,y)[y(2);1/2/x*y(2)+4/x*y(1)-16*x-8-3/2/x];
4 pviz=@(x,z)[z(2);1/2/x*z(2)+4/x*z(1)];
5 t(1)=(beta+alpha)/2;
6 [x,y]=ode23(pvi,a:h:b,[alpha;t(1)]);
7 [x,z]=ode23(pviz,a:h:b,[0;1]);

```

```

8  Y(:,1)=y(:,1);
9  Z(:,1)=z(:,1);
10 F(1)=Y(end,1)-beta;
11 k=1;
12 while abs(F(k))>tol
13     t(k+1)=t(k)-F(k)/Z(end);
14     [x,y]=ode23(pvi,a:h:b,[alpha;t(k+1)]);
15     Y(:,k+1)=y(:,1);
16     F(k+1)=Y(end,k+1)-beta;
17     k=k+1;
18 end
19 end

```

Ejemplo 2. Sea el problema de contorno:

$$y'' = \frac{1}{2}y^3, x \in [1,2], y(1) = -\frac{2}{3}, y(2) = -1$$

Tomando $h = 1/20$, obtén la solución de $y(x)$ por el método de disparo no lineal con los métodos de la secante y Newton para actualizar la variable del disparo, hasta que la función $F(t) < 10^{-9}$. Indica todos los valores que toma la variable disparo, representa todas las soluciones intermedias e indica los valores de $y(x)$, $x = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2\}$. Asimismo, indica el error cometido si la solución analítica fuera $y(x) = \frac{2}{x-4}$.

Al tener condiciones Dirichlet, definimos $F(t) = y(b, t) - \beta = y(2, t) + 1$. Para ambos métodos necesitaremos un punto de disparo inicial. Tomaremos $t_1 = \frac{\beta + \alpha}{2} = -\frac{5}{6}$.

En el método de Newton, necesitamos resolver dos problemas de valor inicial. El primero es:

$$y'' = \frac{1}{2}y^3, x \in [1,2], y(1) = -\frac{2}{3}, y'(1) = t$$

y el segundo es:

$$z'' = \frac{\partial f}{\partial y} z + \frac{\partial f}{\partial y'} z' = \frac{3}{2} y^2 z,$$

$$x \in [1,2], z(1) = 0, z'(0) = 1$$

La variable de disparo se actualizará a partir de la expresión:

$$t_{k+1} = t_k - \frac{F(t_k)}{F'(t_k)} = t_k - \frac{y(b, t_k) - \beta}{z(b)} = t_k - \frac{y(2, t_k) + 1}{z(2)}$$

En el método de la secante, necesitaremos tomar un segundo punto de disparo. Tomamos, por ejemplo, $t_2 = \frac{t_1}{2} = -\frac{5}{12}$. La variable de disparo se actualizará a partir de:

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= t_k - \frac{t_k - t_{k-1}}{F(t_k) - F(t_{k-1})} F(t_k) \\ &= t_k - \frac{t_k - t_{k-1}}{y(b, t_k) - y(b, t_{k-1})} (y(b, t_k) - \beta) \\ &= t_k - \frac{t_k - t_{k-1}}{y(2, t_k) - y(2, t_{k-1})} (y(2, t_k) + 1) \end{aligned}$$

A continuación, se muestra una posible implementación del código del ejemplo.

```
function
[x,Y]=disparoEjemplo2(a,b,alpha,beta,N,tol,met)
h=(b-a)/N; t=[]; F=[];
pviNewton=@(x,w)[w(2); 1/2*w(1)^3;w(4);
3/2*w(1)^2*w(3)];
pviSecante=@(x,y)[y(2); 1/2*y(1)^3];
t(1)=(beta+alpha)/2;
if strcmp(met,'Secante')
[x,y]=ode23(pviSecante,a:h:b,[alpha;t(1)]);
Y(:,1)=y(:,1);
F(1)=Y(end,1)-beta;
t(2)=t(1)/2;
[x,y]=ode23(pviSecante,a:h:b,[alpha;t(2)]);
Y(:,2)=y(:,1);
F(2)=Y(end,2)-beta;
k=2;
while abs(F(k))>tol
t(k+1)=t(k)-(t(k)-t(k-1))/(F(k)-F(k-1))*F(k);
[x,y]=ode23(pviSecante,a:h:b,[alpha;t(k+1)]);
Y(:,k+1)=y(:,1);
```



```

F(k+1)=Y(end,k+1)-beta;
k=k+1;
end
else if strcmp(met,'Newton')
[x,w]=ode23(pviNewton,a:h:b,[alpha;t(1);0;1]);
Y(:,1)=w(:,1); Z(:,1)=w(:,3);
F(1)=Y(end,1)-beta;
k=1;
while abs(F(k))>tol
t(k+1)=t(k)-F(k)/Z(end,k);
[x,w]=ode23(pviNewton,a:h:b,[alpha;t(k+1);0;1]);
;
Y(:,k+1)=w(:,1); Z(:,k+1)=w(:,3);
F(k+1)=Y(end,k+1)-beta;
k=k+1;
end
end
end

```

Para obtener los resultados con los métodos de la secante y Newton introducimos en la consola de Matlab:

```

>> a=1; b=2; alpha=-2/3; beta=-1; N=20; tol=1e-9;
>>
[xs,Ys]=disparoEjemplo2(a,b,alpha,beta,N,tol,'Secante');
>> [xn,Yn]
=disparoEjemplo2(a,b,alpha,beta,N,tol,'Newton')
;

```

Los valores del disparo en cada iteración son:

k	1	2	3	4	5	6
t_k SEC	$-5/6$	$-5/12$	-0.2367	-0.2225	-0.2222	-0.2222
t_k NEW	$-5/6$	-0.2707	-0.2225	-0.2222	-0.2222	

Tabla 7. Valores de disparo.

Las soluciones intermedias se representan en las siguientes gráficas. Con círculos representamos la solución real.

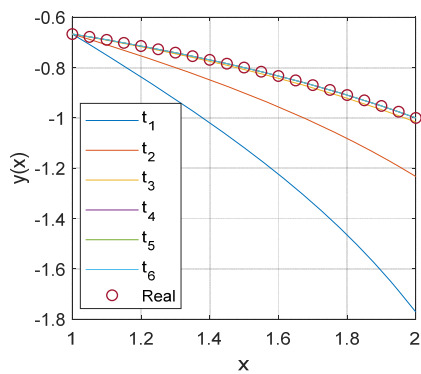


Figura 7. Método de la secante.

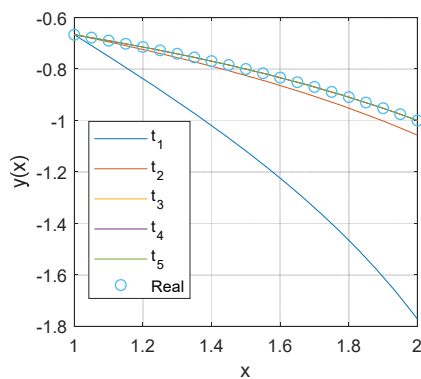


Figura 8. Método de Newton.

La solución y el error cometido se presentan en la siguiente tabla.

x	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$y(x)$ SEC	-0.6667	-0.7143	-0.7692	-0.8333	-1.9091	-1
ϵ SEC	0	$1.87e-6$	$3.04e-6$	$3.32e-6$	$2.14e-6$	$1.76e-11$
$y(x)$ NEW	-0.6667	-0.7143	-0.7692	-0.8333	-0.9091	-1
ϵ NEW	0	$1.98e-6$	$3.20e-6$	$3.54e-6$	$2.44e-6$	$4.44e-16$

Tabla 8. Solución y error cometido en diferentes métodos.

Función objetivo con condiciones no Dirichlet

En determinadas ocasiones, las condiciones de contorno no son condiciones Dirichlet. Es decir, que no siguen la estructura:

$$y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

La principal modificación sobre ese tipo de problemas hay que realizarla sobre la función objetivo $F(t)$. Veamos la idea que se persigue para el caso de condiciones Dirichlet y tratemos de extenderlo a condiciones no Dirichlet.

El objetivo es transformar un problema de contorno en un problema de valor inicial, imponiendo condiciones sobre la función objetivo relacionadas con la condición en el último punto del contorno.

$$\begin{bmatrix} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \alpha \\ y'(a) = t \\ F(t) = y(b) - \beta = 0 \end{bmatrix}$$

Si en lugar de tener condiciones Dirichlet, las condiciones son naturales:

$$\alpha_a y(a) + \beta_a y'(a) = \gamma_a, \alpha_b y(b) + \beta_b y'(b) = \gamma_b$$

entonces deberíamos modificar la transformación del problema. A continuación, presentamos una posibilidad, pero dependiendo del problema habrá otras posibilidades más sencillas.

$$\begin{bmatrix} y'' = f(x, y, y') \\ \alpha_a y(a) + \beta_a y'(a) = \gamma_a \\ \alpha_b y(b) + \beta_b y'(b) = \gamma_b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = t \\ y'(a) = \frac{\gamma_a - \alpha_a t}{\beta_a} \\ F(t) = \alpha_b y(b, t) + \beta_b y'(b, t) - \gamma_b = 0 \end{bmatrix}$$

La actualización de la variable de disparo, para el método de la secante, sería:

$$\begin{aligned}
 t_{k+1} &= t_k - \frac{(t_k - t_{k-1})F(t_k)}{F(t_k) - F(t_{k-1})} \\
 &= t_k - \frac{(t_k - t_{k-1})(\alpha_b y(b, t_k) + \beta_b y'(b, t_k) - \gamma_b)}{\alpha_b y(b, t_k) + \beta_b y'(b, t_k) - \alpha_b y(b, t_{k-1}) - \beta_b y'(b, t_{k-1})}
 \end{aligned}$$

mientras que, para el método de Newton, sería:

$$t_{k+1} = t_k - \frac{F(t_k)}{F'(t_k)} = t_k - \frac{\alpha_b y(b, t_k) + \beta_b y'(b, t_k) - \gamma_b}{\left. \frac{d}{dt} [\alpha_b y(b, t) + \beta_b y'(b, t) - \gamma_b] \right|_{t=t_k}}$$

procediendo de forma similar al desarrollo para el caso de condiciones Dirichlet, en el que obteníamos las derivadas parciales de la función y'' .

Ejemplo 3. Sea el problema de contorno:

$$\begin{aligned}
 y'' - yy' &= e^{-2x} - x + xe^{-x}, x \in [0,1], y(0) + y'(0) = 1, y(1) \\
 &= 1 + \frac{1}{e}
 \end{aligned}$$

Tomando $h = 1/10$, obtén la solución de $y(x)$ por el método de disparo no lineal con los métodos de la secante y Newton para actualizar la variable del disparo, hasta que la función $F(t) < 10^{-9}$. Indica todos los valores que toma la variable disparo, representa todas las soluciones intermedias e indica los valores de $y(x)$, $x = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$. Asimismo, indica el error cometido si la solución analítica fuera $y(x) = x + e^{-x}$.

Reescribimos el problema como:

$$y'' = f(x, y, y') = yy' + e^{-2x} - x + xe^{-x}$$

Al no tener condiciones Dirichlet, planteamos la transformación del problema de contorno en problema de valor inicial como:

$$\begin{bmatrix} y'' = f(x, y, y') \\ y(0) + y'(0) = 1 \\ y(1) = 1 + \frac{1}{e} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y'' = f(x, y, y') \\ y(0) = t \\ y'(0) = 1 - t \\ F(t) = y(1, t) - 1 - \frac{1}{e} = 0 \end{bmatrix}$$

Tomaremos como primer disparo el valor $t_1 = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{e+1}{2e}$. Para el método de la secante, tomamos $t_2 = \frac{t_1}{2} = \frac{e+1}{4e}$, y actualizaremos los valores de t_k a partir de:

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= t_k - \frac{(t_k - t_{k-1})F(t_k)}{F(t_k) - F(t_{k-1})} \\ &= t_k - \frac{(t_k - t_{k-1})\left(y(1, t_k) - 1 - \frac{1}{e}\right)}{y(1, t_k) - y(1, t_{k-1})} \end{aligned}$$

Con el método de Newton, no necesitaremos el valor de t_2 a priori, y actualizaremos los valores de t_k a partir de:

$$t_{k+1} = t_k - \frac{F(t_k)}{F'(t_k)} = t_k - \frac{y(1, t_k) - 1 - \frac{1}{e}}{z(1, t_k)}$$

donde $z(1, t_k)$ es la solución del problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} z'' &= \frac{\partial f}{\partial y} z' + \frac{\partial f}{\partial y'} z = yz' + y'z, \\ x \in [0, 1], z(0) &= \frac{\partial y(0)}{\partial t} = 1, z'(0) = \frac{\partial y'(0)}{\partial t} = -1 \end{aligned}$$

Los valores del disparo en cada iteración son:

k	1	2	3	4	5	6	7	8
t_k SEC	1.1839	0.5920	0.9276	1.0381	0.9978	1.0000	1.0001	1.0001
t_k NEW	1.1839	1.0206	1.0004	1.0001	1.0001			

Tabla 9. Valores del disparo en cada interacción.

Las soluciones intermedias se representan en las siguientes gráficas. Con círculos representamos la solución real.

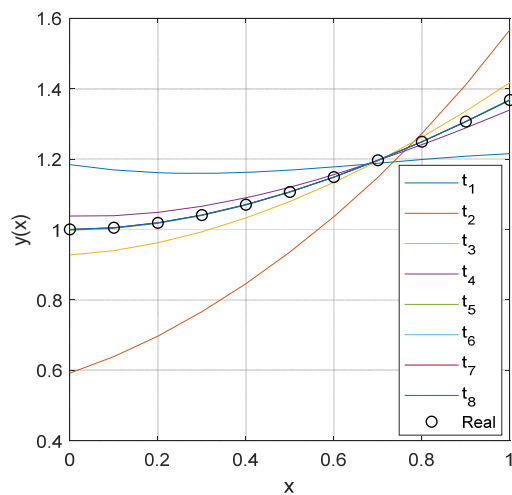


Figura 9. Método de la secante.

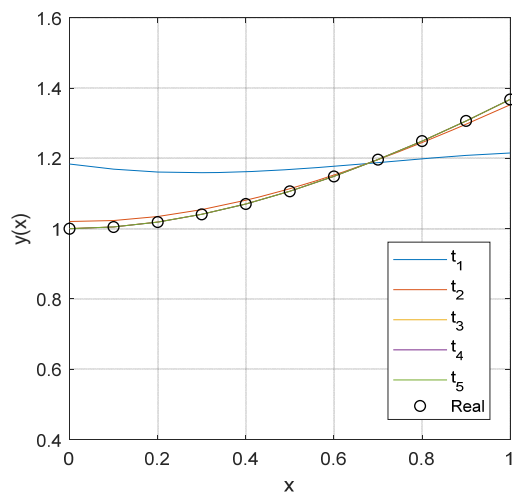


Figura 10. Método de Newton.

La solución y el error cometido se presentan en la siguiente tabla.

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$y(x)$ SEC	1.0001	1.0188	1.0704	1.1488	1.2493	1.3679
ϵ SEC	6.3846e-5	5.4445e-5	4.4895e-5	3.2989e-5	1.8438e-5	2.9832e-12
$y(x)$ NEW	1.0001	1.0188	1.0704	1.1488	1.2493	1.3679
ϵ NEW	6.2764e-5	5.3602e-5	4.4338e-5	3.2778e-5	1.8565e-5	1.0147e-13

Tabla 10. Solución y error cometido en diferentes métodos.

Lecciones magistrales

Resolución de un problema de contorno no lineal con condiciones no Dirichlet en Matlab

En esta lección magistral resolveremos un problema de contorno no lineal con condiciones no Dirichlet en Matlab, a partir de los códigos de los programas que han aparecido a lo largo de este tema.

Problemas de contorno unidimensionales. Método de disparo

Prof. Dr. Francisco I. Chicharro


Método de disparo para problemas no lineales con condiciones Dirichlet

$$y'' = \frac{1}{2}y^3, x \in [1,2], y(1) = -\frac{2}{3}, y(2) = -1$$

PVI

$$y'' = \frac{1}{2}y^3, x \in [1,2], y(1) = -\frac{2}{3}, y(1) = t$$

unir LA UNIVERSIDAD EN INTERNET



Accede a la lección magistral a través del aula virtual

No dejes de leer

Problemas de valores en la frontera

Chapra, S. C. y Canale, R. P. (2007). «Problemas de valores en la frontera». En Autores, *Métodos numéricos para ingenieros* (5a. Ed.). Madrid: McGraw-Hill.

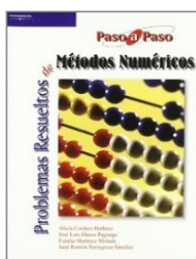


El capítulo 27 de este libro se dedica a la resolución de problemas de contorno unidimensionales, también conocidos como problemas de frontera. La resolución que se plantea está basada en el método de disparo. Puedes encontrar ejercicios resueltos en este documento.

Accede al libro a través de la Biblioteca Virtual de UNIR

Problemas de frontera

Cordero, A., Hueso, J. L., Martínez, E., Torregrosa, J. R. (2006). *Problemas resueltos de métodos numéricos*.

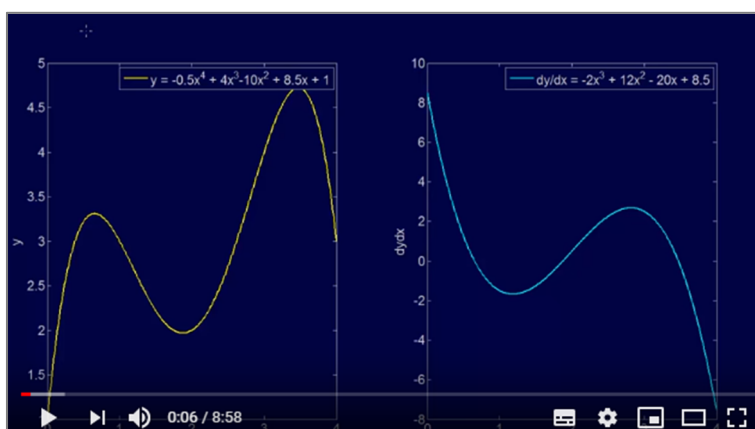


En la primera parte del capítulo 3 de este libro puedes encontrar con más detalle el desarrollo del método de disparo tanto para problemas lineales como para problemas no lineales. Además, este libro incluye un listado de ejercicios resueltos.

No dejes de ver

Transformación del problema de contorno unidimensional en un PVI

El método de disparo consiste básicamente en transformar el problema de contorno en un PVI, probando diferentes condiciones hasta que se consigue obtener la solución adecuada. En este vídeo explica de forma detallada cómo se va acercando a la solución final.



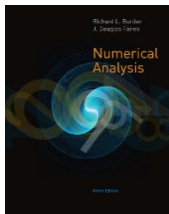
Accede al vídeo a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:

https://www.youtube.com/watch?v=-0rG5EEa_kk

A fondo

Problemas de contorno para ecuaciones diferenciales ordinarias

Burden, R. L. y Faires, J. D. (2011). *Numerical analysis* (9ª ed). Boston: Brooks/Cole CENGAGE learning.



El libro *Numerical Analysis* es el libro de referencia de esta asignatura. En la primera parte del capítulo 11 se presentan los problemas de contorno y el método de disparo para resolver problemas lineales y no lineales.

Método de disparo aplicando Secante y Newton

En este enlace de la Universidad de Dalhousie (Canadá) podemos ver un documento con ejercicios en los que se muestra la aplicación del método de disparo para problemas no lineales, utilizando tanto el método de la secante como el método de Newton.

Accede al documento a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:

<https://www.mathstat.dal.ca/~iron/math3210/bvp.pdf>

Bibliografía

Cordero, A., Hueso, J. L. y Torregrosa, J. R. (2004). *Cálculo numérico*. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.

Cordero, A., Hueso, J. L., Martínez, E. y Torregrosa, J. R. (2005). *Métodos numéricos con Matlab*. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.

Vázquez, L. y Jiménez, S. (2009). *Métodos numéricos para la física y la ingeniería*. Madrid: McGraw-Hill.

1. En el método de disparo:
 - A. Transformamos un problema de contorno en un problema de valor inicial.
 - B. Transformamos un problema de contorno en otro problema de contorno más sencillo.
 - C. Utilizamos diferencias centrales sobre las diferentes derivadas.

2. ¿Cuál de las siguientes es una condición Dirichlet?
 - A. $y(a) = \alpha, y'(a) = \beta$.
 - B. $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$.
 - C. $y(b) = \alpha, y'(b) = \beta$.

3. ¿Cuál de las siguientes es una condición natural?
 - A. $\alpha_a y'(a) + \beta_a y(a) = \gamma_a, \alpha_b y'(b) + \beta_b y(b) = \gamma_b$.
 - B. $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$.
 - C. $\alpha_a y'(a) + \beta_a y(a) = \gamma, y(b) = \gamma_b$.

4. Sea el problema de contorno $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), x \in [a, b], y(a) = \alpha, y(b) = \beta$. Si se cumple que $p(x), q(x), r(x)$ son continuas en $x \in [a, b]$, y $q(x) > 0, \forall x \in [a, b]$, entonces:
 - A. El problema no tiene solución.
 - B. El problema tiene solución única.
 - C. El problema tiene múltiples soluciones.

5. En un problema de contorno lineal con condiciones Dirichlet, al transformar el problema de contorno en un sistema de problemas de valores iniciales, las condiciones iniciales quedan como:
 - A. $y_1(a) = \alpha, y_1'(a) = 0, y_2(a) = 0, y_2'(a) = 1$.
 - B. $y_1(b) = \beta, y_1'(b) = 0, y_2(a) = 0, y_2'(a) = 1$.
 - C. $y_1(a) = \alpha, y_1'(b) = 1, y_2(a) = 0, y_2'(b) = -1$.

6. El problema de contorno $y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy')$, $x \in [1,3]$, $y(1) = 17$, $y(3) = \frac{43}{3}$:
- A. Es lineal.
 - B. Es no lineal.
 - C. Su linealidad no se puede definir.
7. El problema de contorno $y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy')$, $x \in [1,3]$, $y(1) = 17$, $y(3) = \frac{43}{3}$:
- A. Tiene condiciones Dirichlet.
 - B. Tiene condiciones normales.
 - C. Tiene condiciones mixtas.
8. Para resolver el problema de contorno no lineal por el método de la secante, necesitamos estimar:
- A. Un disparo.
 - B. Dos disparos.
 - C. No es necesario estimar ningún disparo.
9. Para resolver el problema de contorno no lineal por el método de Newton, necesitamos estimar:
- A. Un disparo.
 - B. Dos disparos.
 - C. No es necesario estimar ningún disparo.

10. Sea el problema de contorno $y''(x) = -(y')^2 - y + \ln x, x \in [1,2], y(1) = 0, y(2) = \ln 2$. La solución por el método de la secante en $x = 1.5$, tomando $h = 0.1$, una tolerancia de $10e-6$, la primera estimación del disparo $t_1 = 10 \ln 2$ y la segunda estimación del disparo $t_2 = 5 \ln 2$ es:

- A. 0.3033.
- B. 0.3994.
- C. 0.4055.