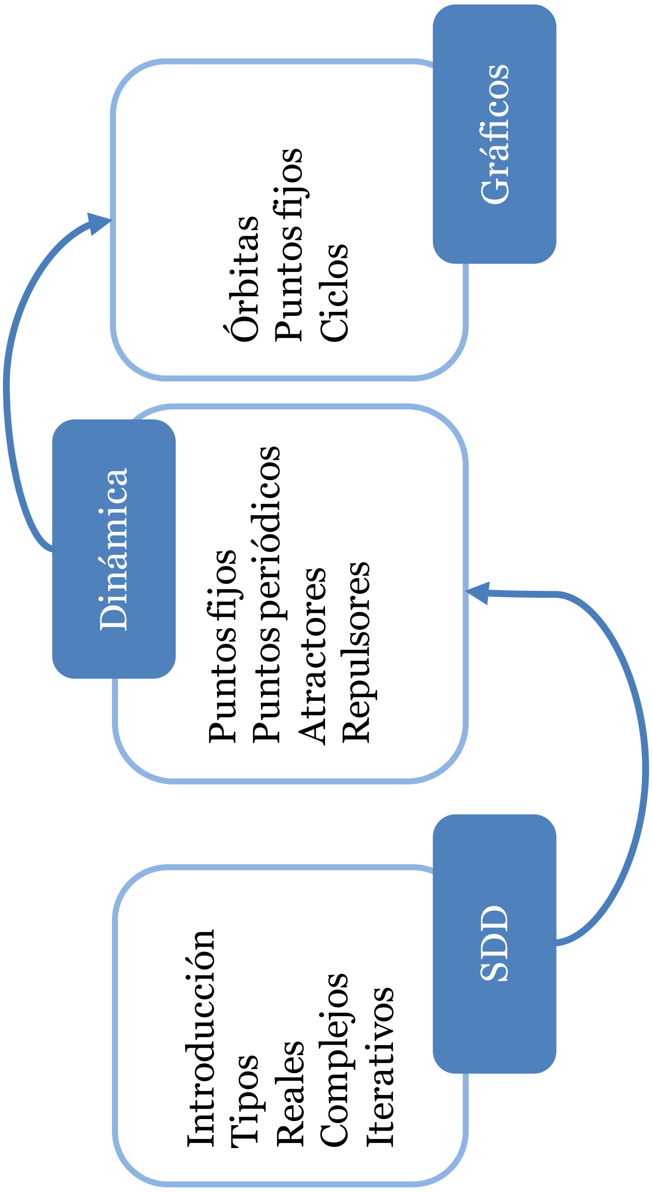
SDD: introducción a los sistemas dinámicos discretos

TEMA 6

Esquema


SDD
Introducción
Tipos
Reales
Complejos
Iterativos
Dinámica
Puntos fijos
Puntos periódicos
Atractores
Repulsores
Gráficos
Órbitas
Puntos fijos
Ciclos

Ideas clave

6.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

A lo largo de este tema se presentan los conceptos fundamentales asociados a los sistemas dinámicos discretos. Partiendo de la definición de este tipo de sistemas y comparándola con la de los sistemas dinámicos continuos, se pasa a la introducción de sus características dinámicas.

Los sistemas dinámicos se caracterizan por el comportamiento de los puntos fijos y la existencia de puntos periódicos. Se presentarán sus definiciones analíticas y se visualizarán desde la perspectiva gráfica, mostrando un procedimiento muy útil e intuitivo.

6.2. Los sistemas dinámicos discretos

Como enunciamos en los primeros temas, los sistemas dinámicos son aquellos sistemas en los que el tiempo es una de las variables. El objetivo del estudio de estos sistemas es predecir su comportamiento a largo plazo.

El caso continuo describía la trayectoria que seguía la magnitud a través de ecuaciones diferenciales. No siempre era posible encontrar las soluciones a dichas ecuaciones, pero sí se podía estudiar el comportamiento dinámico a partir de las técnicas utilizadas en los temas anteriores.

El caso discreto persigue el mismo objetivo; no obstante, las técnicas aplicadas se asemejan poco a las aplicadas en el caso continuo. Determinados puntos serán analizados y los comportamientos serán de nuevo fuentes, sumideros… Sin embargo, para alcanzar dichas conclusiones habrá que seguir un camino diferente.

Los sistemas dinámicos discretos se escriben a partir de ecuaciones en diferencias. Es posible reescribir un sistema continuo en su formato discreto aplicando diferencias finitas progresivas.

Ejemplo 1 | La ecuación diferencial $y' = y - t$ se puede reescribir en su forma discreta. La variable continua $t \in \mathbb{R}$ pasa a ser la variable discreta $k \in \mathbb{N}$. La función $y(t) \in \mathbb{R}$ pasa a ser $y[k] \coloneqq y_k$. La derivada de y se obtiene, aplicando diferencias finitas progresivas:

$$y'(t) = \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \rightarrow y'_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{1}$$

De esta forma, la ecuación diferencial queda como:

$$y_{k+1} - y_k = y_k - k \leftrightarrow y_{k+1} = 2y_k - k$$

La representación gráfica de la solución discreta y continua nos indica que a pesar que pueda existir una equivalencia entre las transcripciones discreta y continua, los resultados no son los mismos.

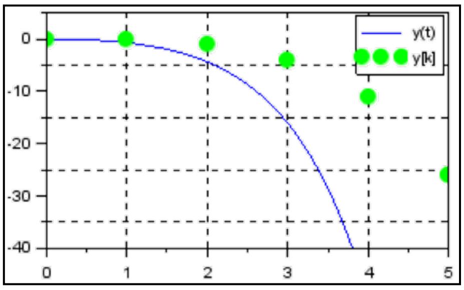


Figura 1. Solución continua y discreta.

La descripción de los sistemas dinámicos hace que los procesos iterativos tengan un gran protagonismo. De ahí que dado un punto inicial, el resto de puntos se obtengan a partir de los anteriores.

Ejemplo 2 | El comportamiento del sistema dinámico discreto $\cos(x)$, $x_0 = 1$, se obtiene a partir de las sucesivas iteraciones de la función $\cos(x)$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} x_0 & = & 1 \\ x_1 & = & \cos(x_0) = 0.54 \\ x_2 & = & \cos(x_1) = \cos(\cos x_0) = 0.86 \\ x_3 & = & \cos(x_2) = \cos(\cos(\cos(x_0))) = 0.65 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & \cos(x_{n-1}) = \cdots = 0.74 \end{array}$$

La figura 2 ilustra cómo conforme realizamos iteraciones nos vamos acercando a un punto:

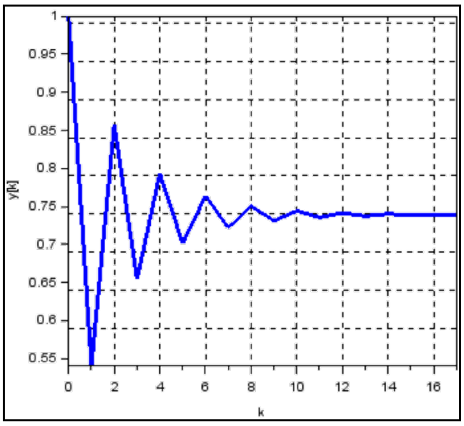


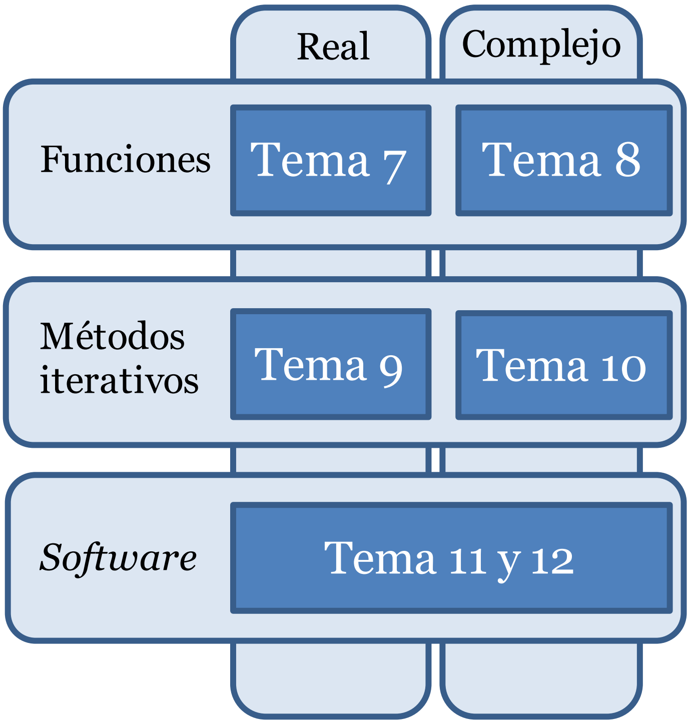
Figura 2. Sucesivas iteraciones de la función $\cos(x)$

La función del ejemplo 2 converge a un determinado punto tras una cantidad determinada de iteraciones. En ocasiones esto no sucede. Y en otras ocasiones suceden cosas mucho menos predecibles.

Los sistemas dinámicos pueden estar representados por diferentes tipos de funciones, como refleja la figura 3. Por un lado, están los **sistemas reales**, en los que las funciones están en el dominio real, es decir, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; a estos sistemas irá dedicado el tema 7.

Por otro lado, encontramos los **sistemas complejos** en las que sus funciones son del tipo $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (contenido principal del tema 8). Los temas 9 y 10 abarcan los **sistemas basados en métodos iterativos** que no debemos confundir con el proceso iterativo con el que se obtiene el camino que siguen los puntos en una ecuación en diferencias.

Existe un profundo trabajo de investigación sobre los sistemas basados en métodos iterativos, en alguno de los cuales profundizaremos, desarrollando tareas asociadas en los temas 11 y 12, dedicados a poner en práctica los conceptos más importantes de los sistemas dinámicos discretos.



6.3. Dinámica de sistemas discretos

En esta parte del tema vamos a presentar una serie de conceptos que nos servirán para identificar las características de cualquiera de los sistemas dinámicos discretos. El objetivo es conocer el comportamiento de los puntos conforme vamos iterando. Así que, ¿dónde van los puntos? ¿qué hacen cuando llegan?

La órbita es el camino que siguen los puntos, y se expresa como:

$$\mathcal{O}(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$$

Dond$f^k(x)$e representa la aplicación de la función f a lo largo de k veces. El punto x_0 es denominado semilla.

La órbita se puede interpretar como una sucesión de puntos, en el que el primer punto es la semilla y el resto de puntos se calculan a partir del anterior. De hecho, la expresión general sería $x_{k+1} = f(x_k)$, $k = 0,1, \dots$

Ejemplo 3 | La órbita que siguen los puntos de $f(x) = x^3$, con $x_0 = 0.5$, es:

k	0	1	2	3	4
x_k	0,5	0,125	$1{,}9 \cdot 10^{-3}$	$7{,}45 \cdot 10^{-9}$	0

Un punto x^* es un punto fijo si $f(x^*) = x^*$

Los puntos fijos en los sistemas dinámicos se denominaban puntos de equilibrio. De hecho, si realizamos la equivalencia entre sistemas continuos y discretos, obtenemos:

$$\frac{dA}{dx} = 0 \leftrightarrow A_{k+1} - A_k = 0 \leftrightarrow A_{k+1} = A_k \equiv x_{k+1} = x_k$$

Un punto fijo x^* es:

» Atractor, si $|f'(x^*)| < 1$.
» Repulsor, si $|f'(x^*)| > 1$.
» No se puede decir nada al respecto, si $|f'(x^*)| = 1$.

Utilizaremos la notación atractor y repulsor, aunque en la literatura también se puede encontrar sumidero y fuente, respectivamente. Reservaremos estos dos últimos términos para los sistemas continuos y utilizaremos los dos primeros para los sistemas discretos.

Ejemplo 4 | La función $f(x) = x^3$ tiene como puntos fijos $x^* = \{-1{,}0{,}1\}$, ya que:

$$f(x) = x \leftrightarrow x^3 = x \leftrightarrow x^3 - x = 0 \leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \leftrightarrow x^* = \{-1{,}0{,}1\}$$

Calculemos la característica dinámica de cada punto crítico. Para ello: $f'(x) = 3x^2$:

» $f'(-1) = f'(1) = 3 > 1$, repulsores.
» $f'(0) = 0 < 1$, atractor.

Un punto x^P es periódico de período n si $f^n(x^P) = x^P$.

Un punto que tras n iteraciones de la función f vuelve al mismo sitio es un punto periódico. Si denominamos $g \coloneqq f^n$, el comportamiento de x^P como punto periódico sobre f es el comportamiento de un punto fijo sobre g. Sobre esta denominación, definimos los puntos periódicos atractores y repulsores.

Sea $g \coloneqq f^n$. Un punto x^P periódico de período n es:

- Atractor, si $|g'(x^P)| = |(f^n)'(x^P)| < 1$.
- Repulsor, si $|g'(x^P)| = |(f^n)'(x^P)| > 1$.
- No se puede decir nada al respecto, si $|g'(x^P)| = |(f^n)'(x^P)| = 1$.

Ejemplo 5 | La función $f(x) = x^2 - 1$ tiene como puntos fijos $x^* = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, puesto que:

$$f(x) = x \leftrightarrow x^2 - 1 = x \leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \leftrightarrow x^* = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Además, dicha función tiene como puntos periódicos de período 2 a $x^P = \{-1,0\}$, ya que:

$$g = f^2 = f\big(f(x)\big) = f(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$$
$$g(x) = x \leftrightarrow x^4 - 2x^2 = x \leftrightarrow x(x^3 - 2x - 1) = 0 \leftrightarrow x^P = \left\{-1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 0, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$$

Obviamente, los puntos fijos aparecen dentro de los puntos periódicos, puesto que se puede interpretar que tienen período 1. Comprobemos su comportamiento dinámico. Teniendo en cuenta que $|f'(x)| = 2|x|$, y $|g'(x)| = |4x^3 - 4x|$:

- $\left|f'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right| = 1.24 > 1$, repulsor. $\left|f'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right| = 3.23 > 1$, repulsor.
- $|g'(-1)| = 0 < 1$, atractor.$|g'(0)| = 0 < 1$, atractor.

6.4. Representaciones gráficas

Dentro de las representaciones gráficas, vamos a definir cómo representar las iteraciones y cuándo parar, puesto que podríamos alcanzar el infinito. Asimismo, veremos una herramienta gráfica para detectar puntos fijos y periódicos, además de caracterizarlos dinámicamente.

Representación de una órbita

La definición de órbita nos indica que cada punto se obtiene a partir de la aplicación de la función sobre el punto anterior, a partir de la expresión $x_{k+1} = f(x_k), k = 0,1, \ldots$

La representación de una órbita genera un gráfico que en el eje de abscisas representa el valor de k y en el de ordenadas el valor dex_k.

Ejemplo 6 | Representación de $f(x_k) = \cos(x_k)\,, x_0 = 0.5$.

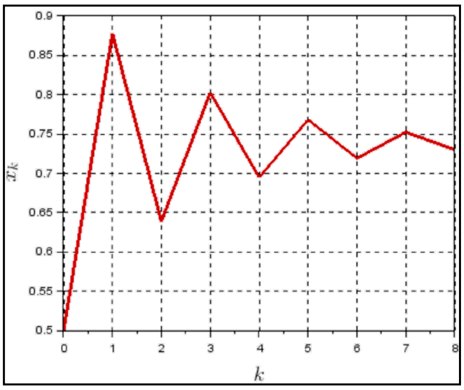


Figura 4. Órbita de $f(x_k) = cos(x_k), x_0 = 0{,}5$

En la figura 4, el último punto que se ha representado es el correspondiente a $k = 8$ pero, según parece, si continuáramos aumentando k, el valor de x_k no se mantendría estable sino que seguiría variando. Observemos de más cerca qué ocurre a partir de $k = 8$ con los valores obtenidos.

k	8	9	10	11	12	13
x_k	0.7300811	0.7451203	0.7350063	0.7418265	0.7372657	0.7403297

Con cada iteración, la diferencia entre el valor anterior y el actual se va reduciendo.

Desde el punto de vista analítico podríamos decir que $\lim_{k\to\infty} \cos(x_k) = 0.7390851$; sin embargo, a nivel computacional no podemos alcanzar el infinito, puesto que tendríamos una máquina bloqueada haciendo cálculos. Es por ello que se define el concepto de tolerancia.

La diferencia entre iterados se define como $d_{k+1} = |x_{k+1} - x_k|$, y representa la distancia entre dos iterados consecutivos. La tolerancia t es el valor máximo que debe tener d para el cual se considera que el método ha convergido.

Sobre el ejemplo anterior, si $t = 5 \cdot 10^{-3}$, $d_{11} = 6.62 \cdot 10^{-3}, d_{12} = 4.50 \cdot 10^{-3}$, con lo que en la iteración $k = 12$ consideraríamos que el método ha convergido.

Del mismo modo, a nivel computacional se puede evaluar la velocidad a la que converge una determinada función. Para ello, definimos el **orden de convergencia computacional aproximado(ACOC)**, que representaremos por ρ.

El orden de convergencia computacional aproximado se define como:

$$\rho = \frac{\log\left|\frac{x_{k+1} - x_k}{x_k - x_{k-1}}\right|}{\log\left|\frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}\right|} = \frac{\log\left|\frac{d_{k+1}}{d_k}\right|}{\log\left|\frac{d_k}{d_{k-1}}\right|}$$

En el caso del ejemplo, $\rho = 1.0045787$, por lo que la convergencia es aproximadamente lineal.

Otro de los elementos que debemos tener en cuenta es que existen funciones que se escapan hacia el infinito. En estas funciones la diferencia entre iterados cada vez es mayor, por lo que el criterio de tolerancia no nos serviría para establecer un límite a partir del cual parar de iterar. Para ello, se introduce como parámetro de parada el **número máximo de iteraciones (maxiter)**, de forma que cuando se alcance dicho valor se considere que el método ha divergido.

Ejemplo 7 | Representación de la función $f(x_k) = x_k^{\frac{10}{9}}, x_0 = 2$, con $t = 10^{-9}$ y $maxiter = 14$.

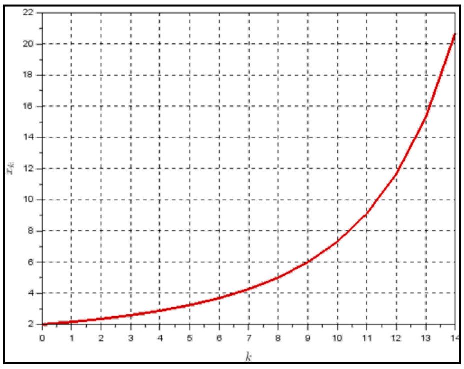


Figura 5. Representación de $f(x_k) = x_k^{\frac{10}{9}}, x_0 = 2$

Caracterización gráfica de puntos fijos y periódicos

Existe una herramienta gráfica que detecta los puntos fijos y los puntos periódicos. La definición de los puntos fijos es $f(x) = x$, por lo que representando sobre el plano XY las funciones $y_1 = x$ e $y_2 = f(x)$ podemos ver dónde se cortan. Esos puntos de corte serán los puntos fijos.

Ejemplo 8 | Determinación de los puntos fijos de $f(x) = x^3 - 1$.

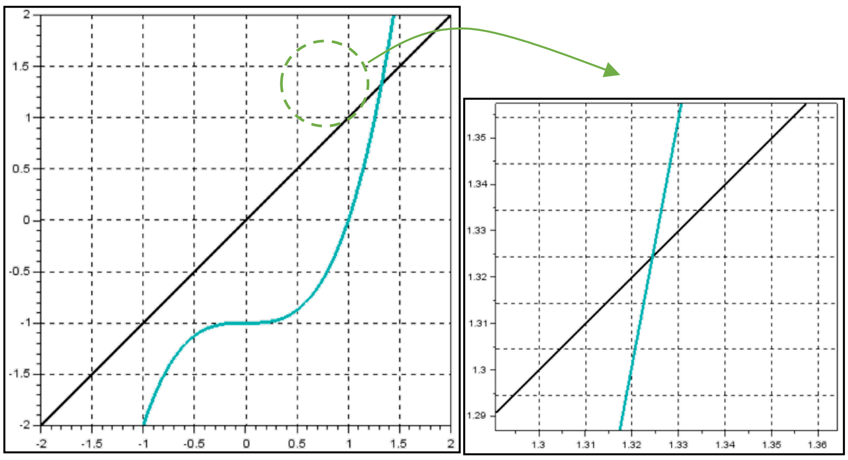


Figura 6. Obtención gráfica de los puntos fijos de $x^3 - 1$.
En negro, $y_1 = x$; en azul, $y_2 = x^3 - 1$.

Alrededor del punto x = 1.325 hay un punto fijo.

Con esta misma herramienta se puede conocer si un punto fijo es atractor o repulsor.

En primer lugar, representamos $y = \{x, f(x)\}$. Tomamos el valor de la semilla y lo representamos en $y_1 = x$. Trazamos una vertical hasta que coincida con $y_2 = f(x)$. De ahí, trazamos una horizontal hasta que coincida co$y_1 = x$ n y así, sucesivamente hasta converger a un punto (punto fijo atractor) o hasta divergir saliéndonos del gráfico (punto fijo repulsor). El ejemplo 9 evidencia estos dos comportamientos.

Ejemplo 9 | Caracterización gráfica de los puntos fijos de $f(x) = x^3$. Como vimos en el ejemplo 4, los puntos fijos de esta función son $x^* = \{-1,0,1\}$, siendo repulsores los puntos ± 1 y atractor el punto 0.

En primer lugar vamos a comprobar que gráficamente se pueden determinar estos puntos fijos, representando las funciones $y_1 = x$ e $y_2 = x^3$.

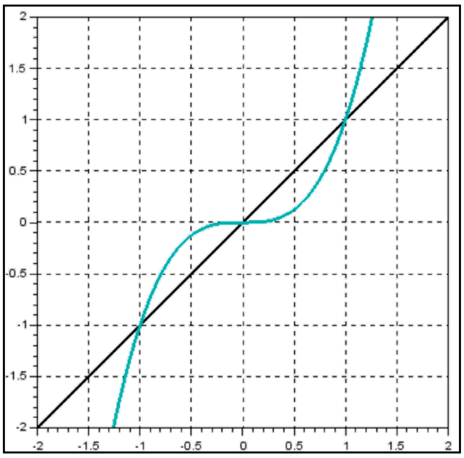


Figura 7. Puntos fijos de x^3

Efectivamente, los puntos $x^* = \{-1,0,1\}$ son puntos fijos. Comprobemos ahora la característica dinámica de cada uno. Para ello partimos de una posición próxima y vamos trazando líneas ortogonales como se ha explicado previamente. La figura 8 ilustra el procedimiento, mientras que la figura 9 muestra la característica de cada uno de los puntos fijos.

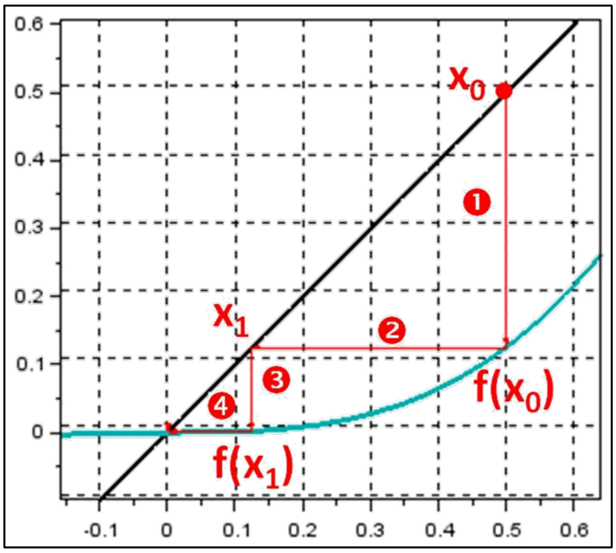


Figura 8. Procedimiento para encontrar la característica atractora/repulsora de un punto fijo.

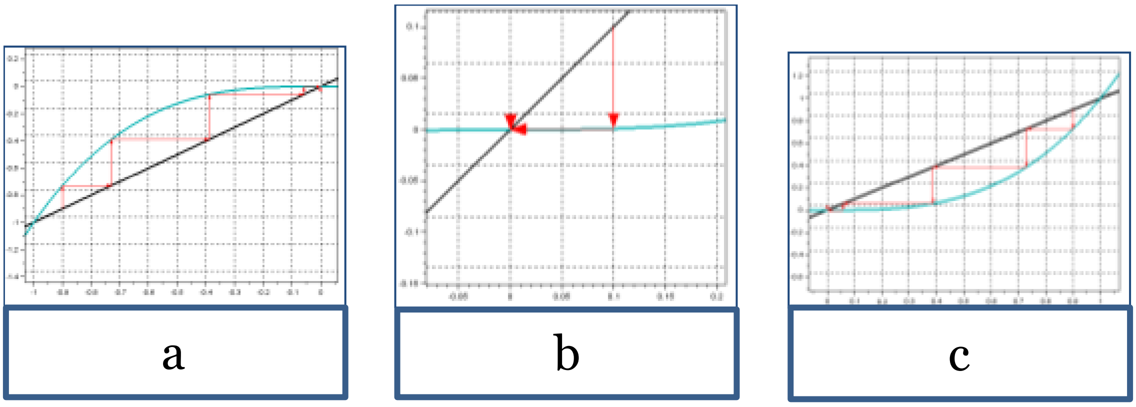


Figura 9. Característica de los puntos fijos: (a) $x^* = -1$, (b) $x^* = 0$, (c) $x^* = -1$

Por lo que gráficamente se corrobora lo comprobado analíticamente y es que el único punto fijo atractor es el $x^* = 0$.

La obtención analítica de los puntos periódicos resulta demasiado tediosa. En el caso de polinomios, al componer funciones el grado del polinomio compuesto es el cuadrado del polinomio inicial. Es por ello que para la obtención de los puntos periódicos se suele recurrir más frecuentemente a la herramienta gráfica.

Los puntos periódicos de período n definen un ciclo de n puntos. De esta forma, cuando en algún punto de la iteración se cae sobre uno de los puntos periódicos, la órbita permanece dentro del ciclo que forman estos puntos. Los ejemplos 10 y 11 ilustran dos funciones cuyos puntos periódicos tienen como período 2 y 3, respectivamente.

Ejemplo 10 | Retomemos el ejemplo 5 con la función $f(x) = x^2 - 1$. Recordemos que esta función tenía como puntos fijos $x^* = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, ambos repulsores, y como puntos periódicos de período 2 $x^P = \{-1,0\}$, siendo ambos atractores. La figura 10 ilustra estos comportamientos.

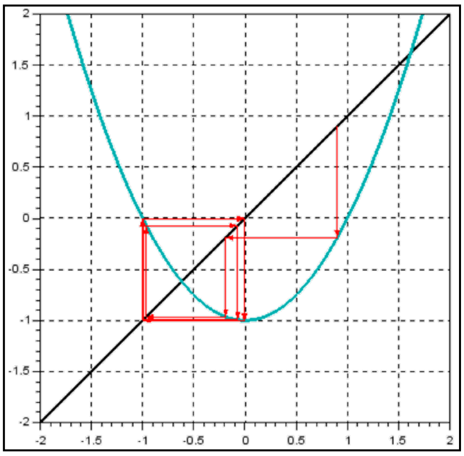


Figura 10. Comportamiento de los puntos fijos y periódicos de $x^2 - 1$.

Los puntos fijos de nuevo son los puntos de corte de las dos gráficas. Los puntos periódicos se quedan indefinidamente dentro de su ciclo; en este caso, el ciclo lo forman los puntos $\{-1,0\}$.

Ejemplo 11 |La función$f(x) = \frac{(2-x)(3x+1)}{2}$tiene la siguiente gráfica a partir de sucesivas iteraciones.

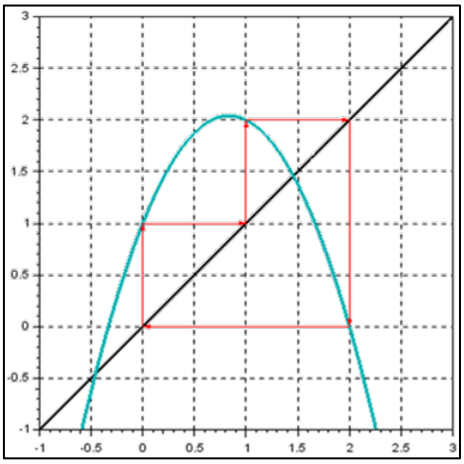


Figura 11. Comportamiento de los puntos

Podemos concluir al respecto que la función f tiene puntos periódicos de período 3, ubicados en el 0, 1 y 2.

6.5. Referencias bibliográficas

Cordero, A., Torregrosa, J. R. y Hueso, J. L. (2004). *Cálculo numérico: teoría y aplicaciones*. UPV.

Devaney, R. L. (1992). *A first course in chaotic dynamical systems*. Universidad de Boston.

Devaney, R. L. (1989). *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison Wesley.

Giraldo, A. y Sastre, M. A. (2002). *Sistemas dinámicos discretos y caos*. Universidad Politécnica de Madrid.

Hirsch, M. W., Smale, S. y Devaney, R. L. (2004). *Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos*. Elsevier.

Navas, J. (2009). *Modelos matemáticos en biología*.
http://matema.ujaen.es/jnavas/web_modelos/

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

Sistemas dinámicos concretos

En esta lección magistral se ilustrarán varios ejemplos de órbitas, deteniéndonos en la importancia que tiene la semilla en cada uno de ellos y comprobando hacia donde tiende la órbita en función de dicha semilla. Analizaremos el caso de dos funciones especiales: la aplicación doble y la tienda de campaña.

Accede al vídeo desde el aula virtual

No dejes de leer…

Una visión de la teoría del caos

En este artículo se describe desde un punto de vista físico la hipótesis que permite explicar la estructura del cosmos. Dentro del artículo aparecen conceptos que han sido introducidos a lo largo de este tema, como son los puntos fijos atractores.

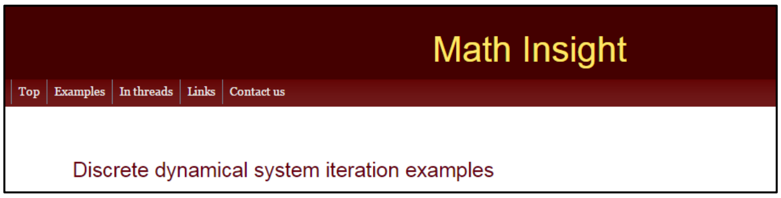
TENDENCIAS21

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://www.tendencias21.net/biofilosofia/Una-vision-de-la-Teoria-del-caos-1_a18.html

No dejes de ver…

Discrete dynamical system iteration examples

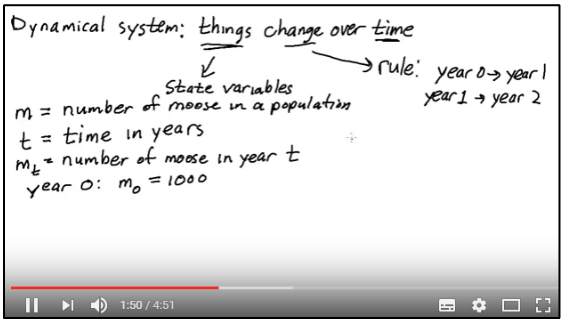
En esta página se ponen algunos ejemplos simples de sistemas discretos generados a partir de iteraciones. Constituye una herramienta básica útil para identificar este tipo de sistemas.



Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://mathinsight.org/discrete_dynamical_system_iteration_examples

Discrete dynamical system introduction

En este vídeo se explica de forma gráfica en que consiste un sistema dinámico discreto, así como las variables que entran en juego en estos sistemas. Permite identificar sistemas dinámicos discretos de los que no lo son.



Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://www.youtube.com/watch?v=RB966-3kx-0&feature=youtu.be

No dejes de practicar...

Ejercicios recomendados

A continuación encontrarás una serie de ejercicios para practicar los conceptos estudiados en el tema.

Ejercicio 1

Encuentra los puntos fijos de los siguientes sistemas dinámicos discretos y determina si son atractores, repulsores o no se puede decir nada al respecto.

$$f(x) = x^2 - x - 1$$

$$f(x) = -x^3 - 2$$

$$f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

Ejercicio 2

Considera las funciones $f_a(x) = x^2 + a, a > 0$.

» Determina la cantidad de puntos fijos de $\boldsymbol{f}$ para los distintos valores de $\boldsymbol{a}$ y sus valores. Descarta los puntos complejos.
» Determina si son atractores, repulsores o no se puede decir nada al respecto.

Ejercicio 3

Determina los puntos fijos y periódicos de las siguientes funciones:

$$f(x) = -x$$
$$f(x) = 4x(1 - x)$$

Accede a las soluciones a través del aula virtual.

+ Información

A fondo

Introducción a los sistemas dinámicos discretos

En el siguiente enlace se aportan unas definiciones más completas de los conceptos asociados a los sistemas dinámicos discretos que hemos proporcionado en el tema. Para una mayor profundización, utilizar este archivo.

Introducción a los Sistemas Dinámicos Discretos

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://www.dynamics.unam.edu/NotasVarias/intro-sistemas.pdf

Glosario

Órbita. Secuencia de valores que determina la trayectoria que describe un sistema dinámico a lo largo del tiempo.

Semilla. Primer valor del sistema dinámico o valor en tiempo inicial.

Punto fijo. Punto a partir del cual, a pesar de seguir iterando, la trayectoria permanece inmóvil. Se corresponde con $f(x) = x$. Gráficamente se identifican con los cortes entre las gráficas de $y = x$ e $y = f(x)$.

Punto periódico. Punto de la trayectoria por el cual se pasa cada n iteraciones. Si $g(x) = f^n(x)$, se corresponde con $g(x) = x$. Gráficamente se identifican porque se generan ciclos de n puntos.

Atractor. Punto fijo en el que al caer en las proximidades del mismo, las trayectorias son atraídas. Se corresponde con $|\varphi'(x^+)| < 1$, siendo $\varphi = f, x^+ = x^*$ para puntos fijos, y $\varphi = g, x^+ = x^P$ para puntos periódicos.

Repulsor. Punto fijo en el que al caer en las proximidades del mismo, las trayectorias son repelidas. Se corresponde con $|\varphi'(x^+)| > 1$, siendo $\varphi = f, x^+ = x^*$ para puntos fijos, y $\varphi = g, x^+ = x^P$ para puntos periódicos.

Diferencia entre iterados. Diferencia entre los valores de la secuencia determinada por la órbita.

Tolerancia. Valor superior de la diferencia entre iterados a partir del cual se considera que una función ha convergido a un valor determinado.

Orden de convergencia aproximado. Valor aproximado, basado en las últimas diferencias entre iterados que aporta una idea de la velocidad con la que se ha convergido a un valor determinado.

Máximo número de iteraciones. Límite superior establecido para determinar que un método no ha convergido.

Bibliografía

Blanchard, P., Devaney, R. L. y Hall, G. R. (1999). *Differential equations*. Universidad de Boston.

Test

1. Sean $x' = \varphi(x)$ $x_{k+1} = f(x_k)$ las versiones continua y discreta de un sistema dinámico:

A. La derivada siempre se expresa como una diferencia finita regresiva.

B. La solución continua y discreta se relacionan por $x_k = x(k)$.

C. Las soluciones continua y discreta no tienen por qué dar los mismos valores.

D. Ninguna de las anteriores es correcta.

2. En un sistema dinámico discreto:

A. La variable puede ser real o compleja.

B. Al iterar siempre se converge a una solución.

C. La convergencia depende de la semilla.

D. Todas las anteriores son correctas.

3. Una órbita es una sucesión de valores reales o complejos que se expresa como:

A. $\mathcal{O}(x) = \left\{x_0, f(x_0), f\big(f(x_0)\big), f\left(f\big(f(x_0)\big)\right), \dots\right\}$.

B. $\mathcal{O}(x) = \left\{x_0, f(x_1), f\big(f(x_2)\big), f\left(f\big(f(x_3)\big)\right), \dots\right\}$.

C. $\mathcal{O}(x) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\}$.

D. Ninguna de las anteriores es correcta.

4. Cuando una órbita cae en un punto fijo:

A. No se mueve de él.

B. El siguiente iterado va a otro punto fijo.

C. Si se mueve podemos afirmar que se trata de un punto fijo repulsor.

D. Ninguna de las anteriores es correcta.

5. Un punto periódico x^P de periodo n cumple:

A. $f(x^P) = x_0^n$.

B. $f^n(x^P) = x^P$.

C. $nf(x^P) = x_0$.

D. $f(x^P) = nx^P$.

6. El valor de tolerancia:

A. Tiene relación con la diferencia entre iterados.

B. Se establece para que la máquina no quede bloqueada por realizar excesivos cálculos.

C. Determina la velocidad de convergencia.

D. Ninguna de las anteriores.

7. El orden de convergencia computacional aproximado:

A. Tiene en cuenta el valor de la tolerancia.

B. Sirve para estimar la velocidad de convergencia del método.

C. Depende básicamente del parámetro maxiter.

D. Ninguna de las anteriores es correcta.

8. Los puntos fijos de una función $f(x_k)$ se obtienen a partir del corte de f con:

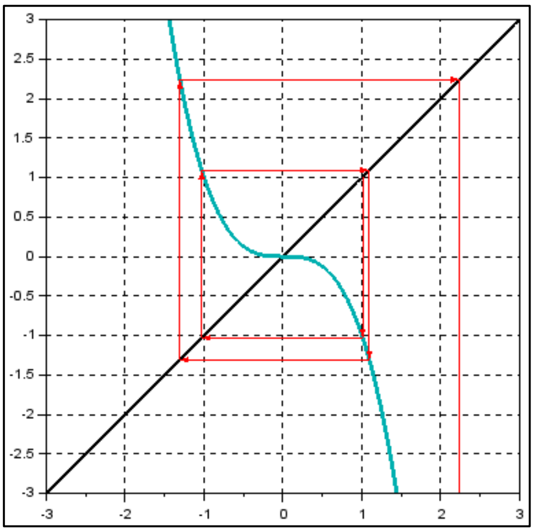
A. El eje de abscisas.

B. El eje de ordenadas.

C. El eje y=x.

D. Ninguna de las anteriores es correcta.

9. La figura representa la función $x_{k+1} = f(x_k)$ ¿Qué se puede afirmar al respecto?



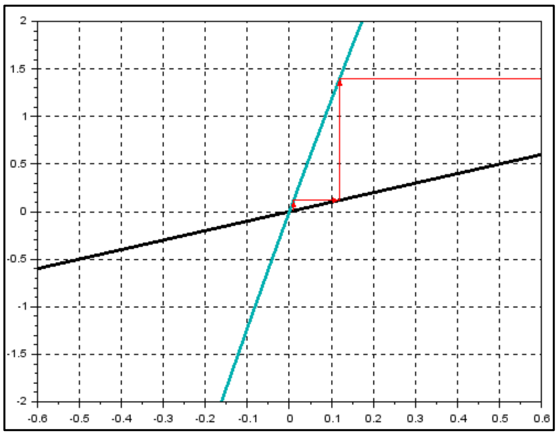
A. El punto x=0 es un punto fijo.

B. Los puntos $x = \pm 1$ son puntos fijos.

C. La órbita describe un ciclo de periodo 2.

D. La órbita tiende a infinito.

10. La figura representa la función $x_{k+1} = f(x_k)$ ¿Qué se puede afirmar al respecto?



A. El punto $x = 0$ es un punto fijo.

B. El punto $x = 0$ es un punto atractor.

C. El punto $x = 0$ es un punto repulsor.

D. Ninguna de las anteriores es correcta.