Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos	Apellidos: Rojas Carrasco	03/05/2021
	Nombre: Patricio Alejandro	

Laboratorio 1: Sistemas dinámicos continuos

Objetivos

El objetivo de este laboratorio es consolidar, a través de un ejemplo de sistema no lineal y su posterior linealización, los conocimientos adquiridos en sistemas dinámicos continuos. Así, se debe implementar la actividad mediante el *software* MATLAB® (o Scilab).

Descripción y pautas de elaboración

Uno de los sistemas dinámicos continuos caracterizado por su comportamiento caótico es el sistema de Lorenz. Este describe el fenómeno de convección de partículas en movimiento bajo la influencia de cambios en la temperatura. Consideraremos, en esta actividad, la siguiente simplificación del sistema de Lorenz:

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = \rho x - y - xz \\ z' = xy - \beta z \end{cases}$$

donde $x(t)$ representa la intensidad del movimiento de convección e $y(t)$, y $z(t)$, las variaciones horizontal y vertical de las temperaturas, respectivamente, en el instante t. Asimismo, σ,ρ y β son parámetros positivos que satisfacen $\sigma > \beta + 1$.

A continuación, se proponen diversos ejercicios, en los cuales todos los cálculos analíticos se pueden realizar con la ayuda de MATLAB®. Del mismo modo, para generar las gráficas requeridas, podrás utilizar los programas implementados en clase.

Ejercicio 1

④ Para $\rho < 1$, calcula los puntos de equilibrio reales del sistema de Lorenz y determina su estabilidad.

Respuesta:

Los puntos de equilibro se consiguen cuando $\dot{x} = f(x) = 0$, aplicando la definición al sistema de ecuaciones propuesto, se obtiene que el punto de equilibrio es (0, 0, 0).

Para determinar la estabilidad del sistema, debemos obtener su matriz Jacobiana, para poder linealizar y aplicar criterios para evaluar la estabilidad.

Reescribimos el sistema en su forma matricial:

$$\begin{cases} x' = -\sigma x + \sigma y \\ y' = \rho x - y - xz \\ z' = xy - \beta z \end{cases} \Leftrightarrow J_F(X) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{bmatrix}$$

Evaluamos en el punto de equilibrio:

$$J_F(X) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix}$$

Procedemos a obtener los valores propios:

$$|J_F(X) - \lambda I| = 0 \quad \rightarrow \begin{vmatrix} -\sigma-\lambda & \sigma & 0 \\ \rho & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\beta-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Operando para obtener el determinante:

$$(-\sigma - \lambda)[(-1-\lambda)(-\beta-\lambda)] - \sigma[\rho(-\beta-\lambda)] = 0$$

Agrupando convenientemente:

$$\lambda^3 + \lambda^2(\sigma + 1 + \beta) + \lambda(\sigma + \sigma\beta - \beta + \sigma\rho) + \sigma\beta(1+\rho) = 0$$

Considerando la estrategia de resolución de ecuaciones de tercer grado, se tiene:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Por comparación tenemos:

$$a = 1, \qquad b = \sigma + 1 + \beta, \qquad c = \sigma + \sigma\beta - \beta + \sigma\rho$$

Aplicamos la fórmula de resolución:

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad ; \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} \ ; v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

Las raíces se pueden escribir como:

$$x_1 = u + v - \frac{b}{3a} \ ; \quad x_2 = \left[-\frac{1}{2}(u+v) - \frac{b}{3a}\right] + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)\right]i \ ;$$

$$x_3 = \left[-\frac{1}{2}(u+v) - \frac{b}{3a}\right] - \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)\right]i$$

Por restricción del problema, sólo consideramos la raíz real, la cual es igual a cero. Esta deducción se obtiene al analizar el discriminante y comprobar que es mayor a cero, lo que dará dos raíces complejas conjugadas y una raíz real.

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

Sabiendo que $\lambda = 0$, se puede determinar el vector propio asociado:

$$\begin{bmatrix} -\sigma & -\sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se pueden obtener los siguientes vectores propios:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solución general se puede expresar como:

$$x = C_1 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}; \text{con } \lambda = 0 \ \rightarrow x = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por inspección de la solución general, se aprecia que la intensidad del movimiento (amplitud) tiene un comportamiento que tiene a cero, manifestando la existencia de un NODO.

④ Consideremos, en el sistema de Lorenz, que $\rho = 1$ y $z' = z = 0$. Determina la solución del sistema lineal resultante de forma analítica y utilizando la función `dsolve` de MATLAB®. Comprueba que las dos soluciones generales coinciden. Representa el campo de direcciones para tres valores distintos de $\sigma > 0$. Para ello, deberás mostrar las gráficas obtenidas y comentar los resultados alcanzados.

Respuesta:

Considerando las restricciones indicadas, el sistema queda expresado de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x' = -\sigma x + \sigma y \\ y' = x - y \end{cases}$$

Al aplicar el Jacobiano tenemos:

$$J_F(x) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, x^* = (0{,}0)$$

$$J_F(x^*) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Para determinar la solución general, necesitamos conocer sus valores propios:

$$|J_F(x^*) - \lambda I| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (-\sigma - \lambda)(-1 - \lambda) - \sigma = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda(1 + \sigma) = 0$$

Al aplicar la fórmula de resolución de ecuaciones de segundo grado, se tiene:

$$a = 1, b = 1 + \sigma, c = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1 + \sigma; \sigma > 0$$

Al obtener que el discriminante es mayor que cero, se sabe que obtendremos dos raíces reales diferentes:

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sigma + 1 + \sigma}{2} = 0$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2e} = \frac{-1 - \sigma - 1 - \sigma}{2^-} = \frac{-2(1 + \sigma)}{2} = -1 - \sigma$$

Con los valores conocidos de $\lambda = 0$:

$$(J_F(x^*) - \lambda I)\vec{v} = 0 => \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -\sigma v_1 + \sigma v_2 & = & 0 \\ v_1 - v_2 & = & 0 \end{cases} \quad ,\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con los valores conocidos de $\lambda = -1 - \sigma$:

$$(J_F(x^*) - \lambda I)\vec{v} = 0 => \begin{bmatrix} -2\sigma - 1 & \sigma \\ 1 & -2 - \sigma \end{bmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -(2\sigma + 1)v_1 + \sigma v_2 & = & 0 \\ v_1 - (2 + \sigma)v_2 & = & 0 \end{cases} \quad ,\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 2 + \sigma \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para este caso, se tiene que la solución general es:

$$X = C_1 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 2 + \sigma \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = C_1 + C_2(2 + \sigma)e^{-(1+\sigma)\cdot t}$$

Podemos extraer el número 2 de la expresión, puesto que pasa a ser parte de la constante C2, obteniendo las siguientes expresiones para las soluciones generales:

$$x = C_1 - C_2 \sigma e^{-(1+\sigma)\cdot t}$$

$$y = C_1 + C_2 e^{-(1+\sigma)\cdot t}$$

Al utilizar Matlab, se obtiene:

```
syms x(t) y(t) sigma
ode1 = diff(x) == sigma*(y-x);
ode2 = diff(y) == x-y;
odes = [ode1;ode2];
S = dsolve(odes);
xSol(t) = S.x;
ySol(t) = S.y;
disp(xSol(t));
disp(ySol(t));
```

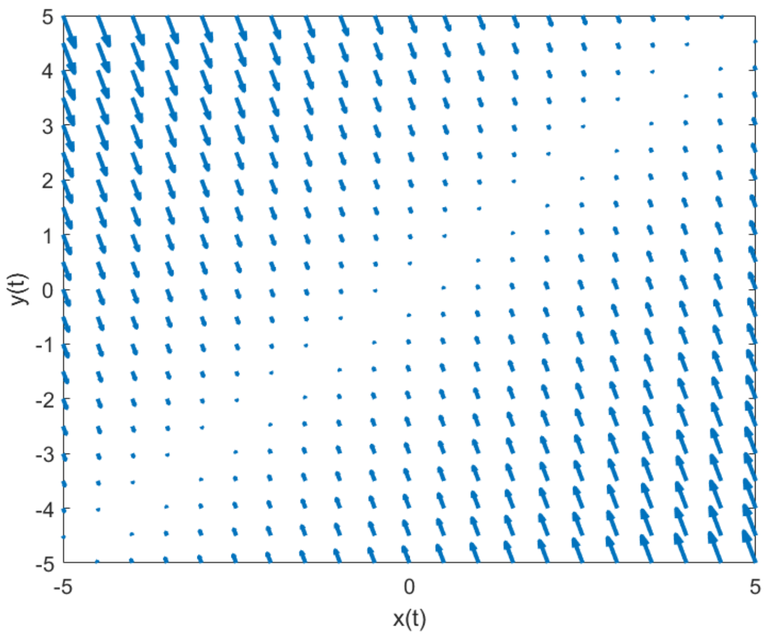
```
C1 - C2*sigma*exp(-t*(sigma + 1))

C1 + C2*exp(-t*(sigma + 1))
```

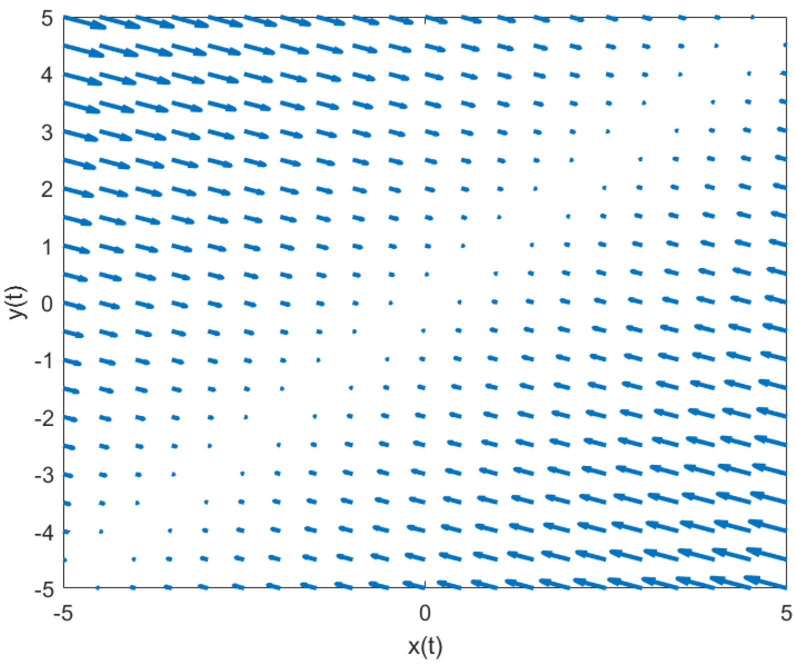
Se comprueba que las soluciones obtenidas por el método analítico y Matlab son iguales.

Para obtener las gráficas, consideramos σ = 0.3, σ = 3 y σ = 10.

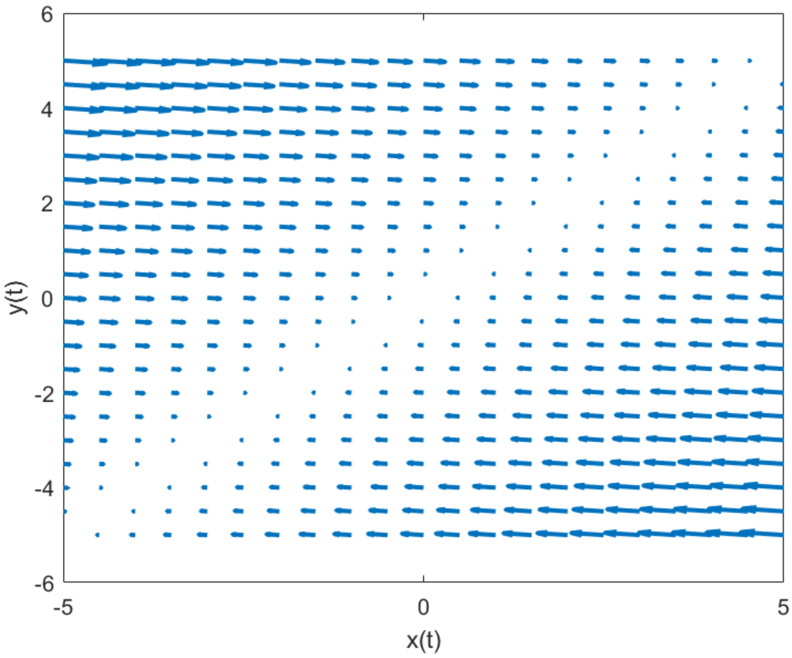
σ = 0.3



σ = 3



σ = 10



Para realizar el análisis, se consideran los planos de fase para los valores de σ asignados. Teniendo presente que el significado de los planos de fase corresponde a la representación gráfica de las soluciones, entorno al punto de equilibrio, podemos señalar que en el caso del sistema propuesto, las soluciones se pueden representar por líneas de fase de puntos atractores. Además, las pendientes de las soluciones dependen del valor de σ, el cuál mientras tiende a valores positivos mayores a uno, se obtienen soluciones con pendiente nula. Además, se puede identificar una asíntota que se ubica de forma oblicua sobre la gráfica.

Ejercicio 2

A partir de la solución general obtenida en el ejercicio 1, implementa la función `LorenzCD.m` que muestre las siguientes gráficas:

- Campo de direcciones del sistema lineal para cualquier valor de $\sigma > 0$ y $[x,y] \in [-5,5] \times [-5,5]$.

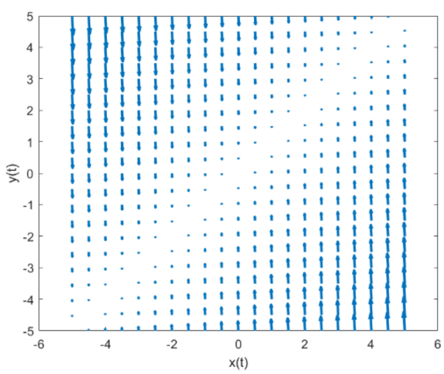
Respuesta:

Código utilizado para obtener el campo de direcciones considerando valores de $\sigma > 0$

```
function LorenzCD(sigma)
% campo de direccciones para
% x' = -sigmax + sigmay ; y' = x - y
[x,y]=meshgrid(-5:0.5:5,-5:0.5:5);
A=[-sigma sigma;1 -1];
u=A(1,1).*x+A(1,2).*y;
v=A(2,1).*x+A(2,2).*y;
figure,
quiver(x,y,u,v,'Linewidth',2)
xlabel('x(t)'), ylabel('y(t)')
end
```

Ejemplo para $\sigma = 0.05$

```
>> LorenzCD(0.05)
```



- Solución particular del sistema.

Respuesta:

Obtendremos una solución particular para cada valor de σ que utilizamos anteriormente, es decir 0.3, 3 y 10.

Consideremos que $x(0) = 1$ e $y(0) = -1$, a partir de esta información podemos obtener una solución particular en términos de σ:

$$x(0){:}C_1 - C_2\sigma e^{-(1+\sigma)\cdot t} = 1$$
$$y(0){:}\ C_1 + C_2 e^{-(1+\sigma)\cdot t} = -1$$

Se obtienen las expresiones para C_1 y C_2:

$$C_1 = -1 + \frac{2}{1+\sigma}\ ;\ C_2 = -\frac{2}{1+\sigma}$$

Desde donde se obtiene:

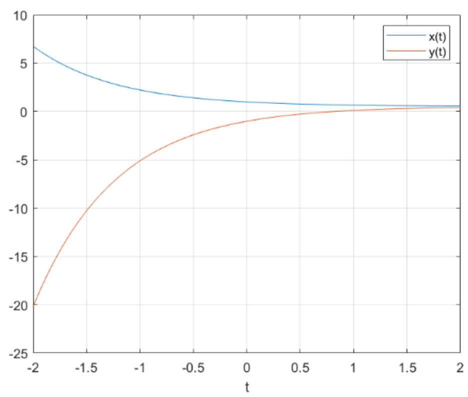
$$x_p(t) = -1 + \frac{2}{1+\sigma} \ + \frac{2}{1+\sigma}\sigma e^{-(1+\sigma)\cdot t}$$
$$y_p(t) = \ -1 + \frac{2}{1+\sigma} - \frac{2}{1+\sigma}e^{-(1+\sigma)\cdot t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_g(t) &= -1 + \frac{2}{1+\sigma}\left[1 + \sigma e^{-(1+\sigma)\cdot t}\right] \\ y_g(t) &= -1 + \frac{2}{1+\sigma}\left[1 - e^{-(1+\sigma)\cdot t}\right] \end{aligned}}$$

A continuación, evaluamos para cada de σ.

$\underline{\sigma = 0{,}3:}$

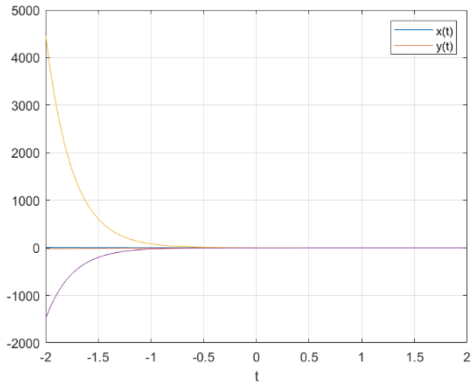
$$x_p(t) = -1 + \frac{20}{13}\left[1 + 0{,}3 \cdot e^{-1{,}3\cdot t}\right]$$
$$y_p(t) = -1 + \frac{20}{13}\left[1 - e^{-1{,}3\cdot t}\right]$$



$\underline{\sigma = 3:}$

$$x_p(t) = -1 + \frac{1}{2}[1 + 3 \cdot e^{-4 \cdot t}]$$

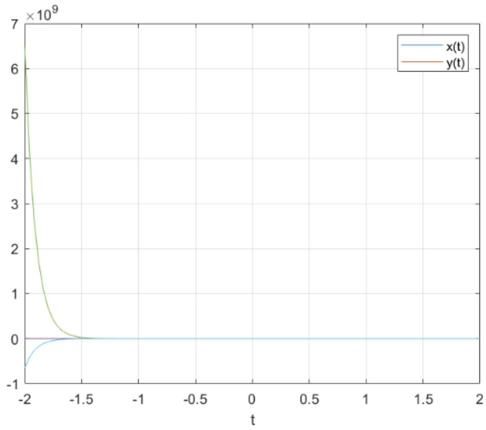
$$y_p(t) = -1 + \frac{1}{2}[1 - e^{-4 \cdot t}]$$



$\underline{\sigma = 10:}$

$$x_p(t) = -1 + \frac{2}{11}[1 + 10 \cdot e^{-11 \cdot t}]$$

$$y_p(t) = -1 + \frac{2}{11}[1 - e^{-11 \cdot t}]$$



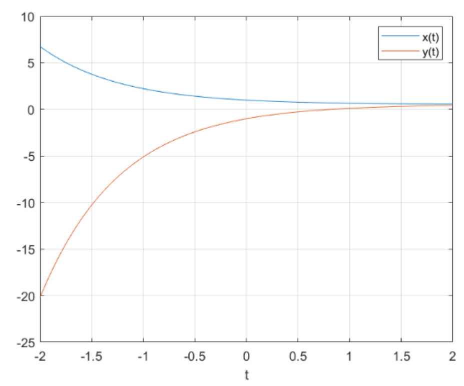
Código utilizado para obtener las soluciones particulares.

```
function LorentzCD(sigma)
% campo de direccciones para
% x' = -sigmax + sigmay ; y' = x - y
[x,y]=meshgrid(-5:0.5:5,-5:0.5:5);
A=[-sigma sigma;1 -1];
u=A(1,1).*x+A(1,2).*y;
v=A(2,1).*x+A(2,2).*y;
%figure,
%quiver(x,y,u,v,'Linewidth',2)
%xlabel('x(t)'), ylabel('y(t)')

% gráficas de soluciones particulares
t=linspace(-2,2);
x=-1+(2/(1+sigma))*(1+sigma*exp(-(1+sigma)*t));
y=-1+(2/(1+sigma))*(1-exp(-(1+sigma)*t));
plot(t,x)
hold on
plot(t,y)
grid on
legend('x(t)','y(t)');
xlabel('t');
end
```

Ejemplo para $\sigma = 0.3$

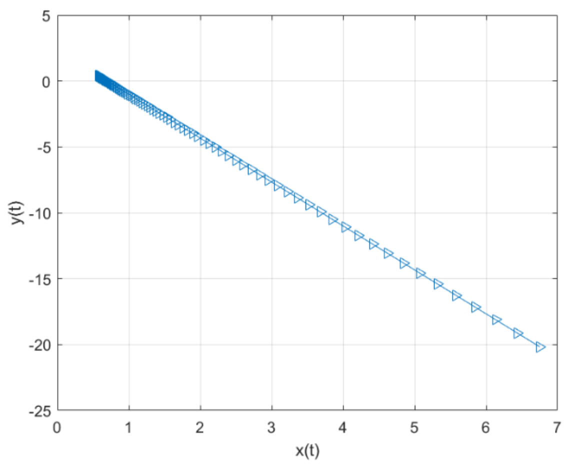
```
>> clear;
>> LorentzCD(0.3)
```



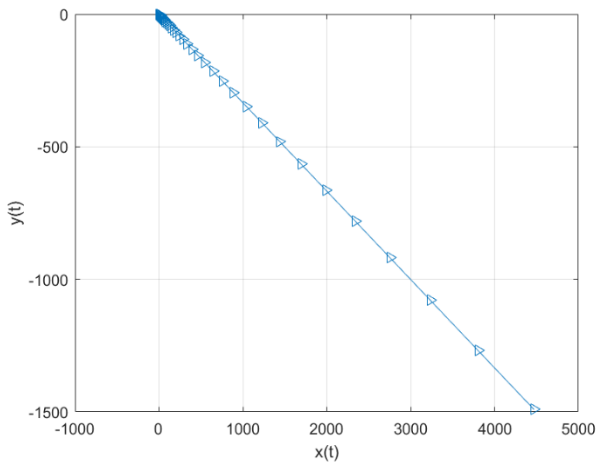
④ Órbita de la solución particular.

Se presentan las gráficas para cada valor de σ, considerando su correspondiente solución particular:

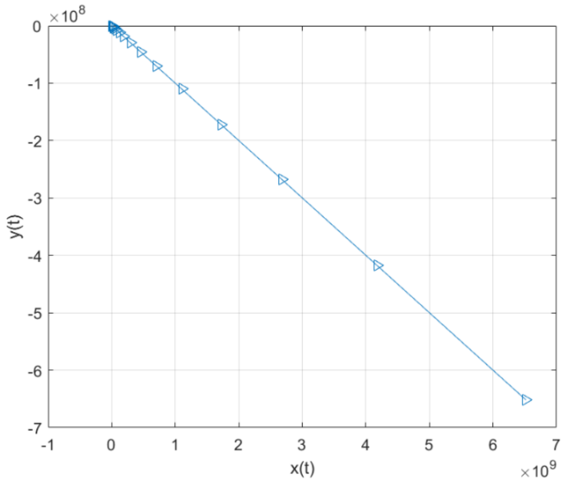
$\underline{\sigma = 0{,}3:}$



$\underline{\sigma = 3:}$



$\underline{\sigma = 10:}$



Utilizando una condición sobre la solución en un instante t^*, $(x(t^*), y(t^*))$, el programa debe calcular una solución particular del sistema. Por tanto, la función tendrá como variables de entrada el parámetro σ, el instante temporal t^* y los valores de $x(t^*)$ e $y(t^*)$. Con base en estos parámetros, los pasos que debe seguir son los siguientes:

1. Representar el campo de direcciones para el valor de σ introducido.

2. Calcular la solución particular mediante la utilización de los valores de σ, t^*, $x(t^*)$ e $y(t^*)$. Estos parámetros de entrada se utilizarán para resolver el sistema de dos ecuaciones cuyas incógnitas son las constantes de la solución general.
3. Tras determinar los valores de las constantes de la solución general, ha de escribir la solución particular obtenida.
4. Representar la solución particular.
5. Representar la órbita asociada.

Copia el código de la función en este documento y describe brevemente su funcionamiento.

```
function LorentzCD(sigma)
% campo de direccciones para
% x' = -sigmax + sigmay ; y' = x - y
[x,y]=meshgrid(-5:0.5:5,-5:0.5:5);
A=[-sigma sigma;1 -1];
u=A(1,1).*x+A(1,2).*y;
v=A(2,1).*x+A(2,2).*y;
%figure,
%quiver(x,y,u,v,'Linewidth',2)
%xlabel('x(t)'), ylabel('y(t)')

% gráficas de soluciones particulares
t=linspace(-2,2);
x=-1+(2/(1+sigma))*(1+sigma*exp(-(1+sigma)*t));
y=-1+(2/(1+sigma))*(1-exp(-(1+sigma)*t));
%plot(t,x)
%hold on
%plot(t,y)
%grid on
%legend('x(t)','y(t)');
%xlabel('t');

% gráfica de órbitas
plot(x,y)
plot(x,y,'->')
grid on
xlabel('x(t)'),ylabel('y(t)')
end
```

Explicación: En este código podemos identificar tres áreas. La primera permite obtener los campos de direcciones, la segunda las soluciones particulares y la tercera las órbitas. Para cualquiera de los tres gráficos requeridos siempre se debe dar un valor de σ. Debe tener la precaución de comentar aquellas líneas que no sean necesarias, por ejemplo, en el caso de la imagen está condicionado para la gráfica de órbitas.

Ejercicio 3

Aplica la función `LorenzCD.m` con $\sigma = 1$ y $\sigma = 5$. Muestra y describe los resultandos que has alcanzado para las soluciones particulares obtenidas con las siguientes condiciones sobre la solución:

- $(x(0), y(0)) = (0.5, 0)$.
- $(x(1), y(1)) = (2, 1)$

Representa el campo de direcciones en $[x,y] \in [-2,2] \times [-2,2]$, y la solución particular tomando $t \in [0,2]$.

Respuesta:

- Para $(x(0), y(0)) = (0.5, 0)$.

  Siendo la solución general:

$$x(t) = C_1 - C_2 \sigma e^{-(1+\sigma)\cdot t}$$
$$y(t) = C_1 + C_2 e^{-(1+\sigma)\cdot t}$$

  Para obtener la solución particular consideramos la información entregada:

$$C_1 - C_2 \sigma e^{-(1+\sigma)\cdot 0} = 0.5$$
$$C_1 + C_2 e^{-(1+\sigma)\cdot 0} = 0$$

  Despejando, obtenemos:

$$C_1 = \frac{0.5}{1+\sigma}; C_2 = -\frac{0.5}{1+\sigma}$$

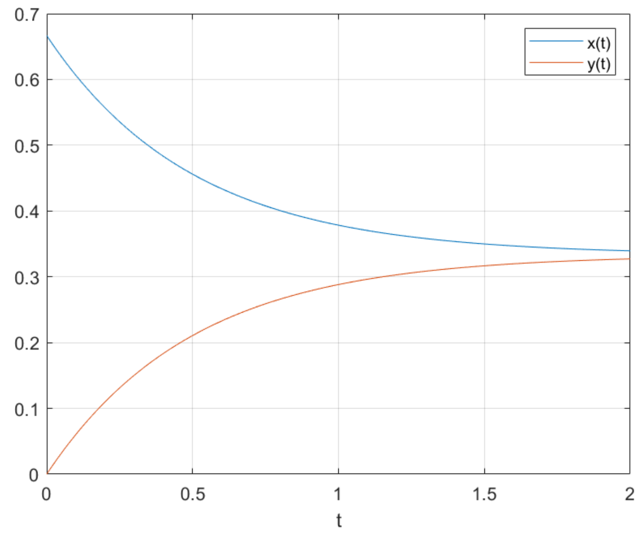
  Y la solución particular es:

$$x(t) = \frac{1}{2+\sigma}\left(1 + \sigma \cdot e^{-(1+\sigma)t}\right)$$
$$y(t) = \frac{1}{2(1+\sigma)}\left(1 - e^{-(1+\sigma)t}\right)$$

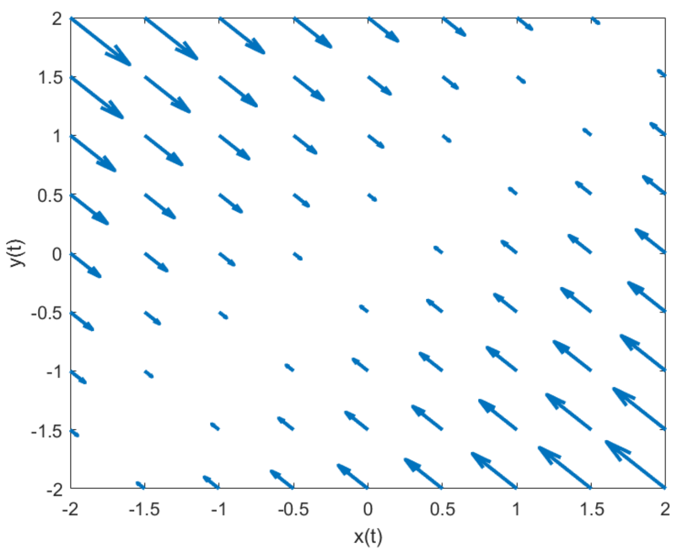
$\underline{\sigma = 1}$

$$x(t) = \frac{1}{3}(1 + e^{-(2)t})$$

$$y(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-(2)t})$$



Solución particular para σ = 1

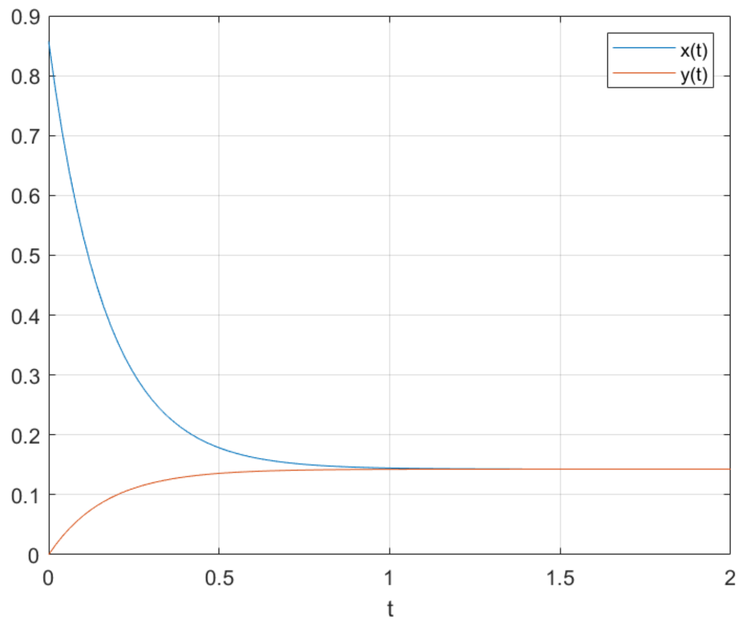


Campos de direcciones para $\sigma = 1$

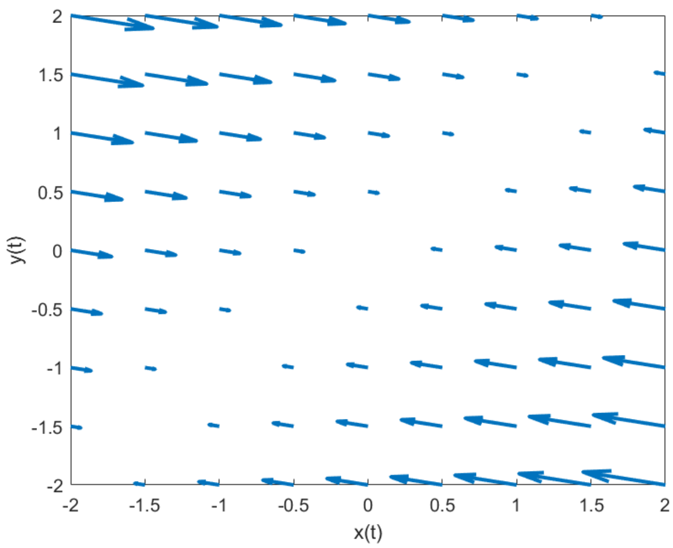
$\underline{\sigma = 5}$

$$x(t) = \frac{1}{7}(1 + 5 \cdot e^{-(6)t})$$

$$y(t) = \frac{1}{7}(1 - e^{-(6)t})$$



Solución particular para σ = 5



Campos de direcciones para $\sigma = 5$

④ Para $(x(1), y(1)) = (2, 1)$.

Siendo la solución general:

$$x(t) = C_1 - C_2\sigma e^{-(1+\sigma)\cdot t}$$

$$y(t) = C_1 + C_2 e^{-(1+\sigma)\cdot t}$$

Para obtener la solución particular consideramos la información entregada:

$$C_1 - C_2\sigma e^{-(1+\sigma)\cdot 1} = 2$$

$$C_1 + C_2 e^{-(1+\sigma)\cdot 1} = 1$$

Despejando, obtenemos:

$$C_1 = 1 - \frac{1}{1+\sigma}\,;\, C_2 = \frac{e^{1+\sigma}}{1+\sigma}$$

Y la solución particular es:

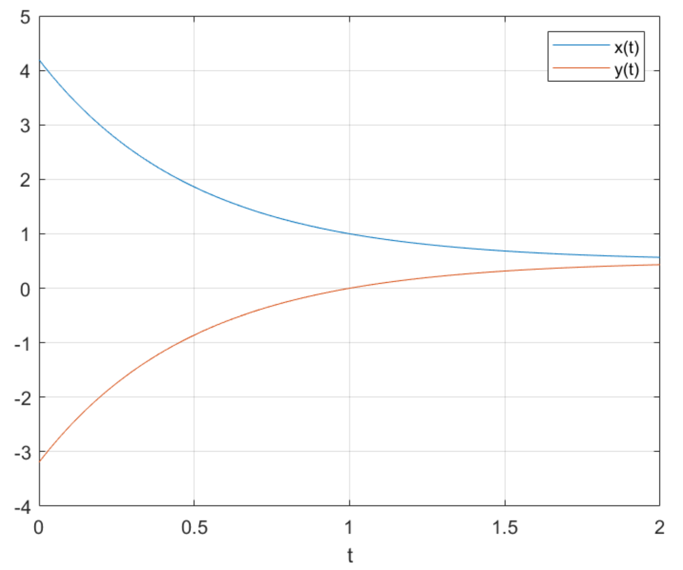
$$x(t) = 1 - \frac{1}{1+\sigma}(1 - \sigma \cdot e^{(1+\sigma)(1-t)})$$

$$y(t) = 1 - \frac{1}{1+\sigma}(1 + e^{(1+\sigma)(1-t)})$$

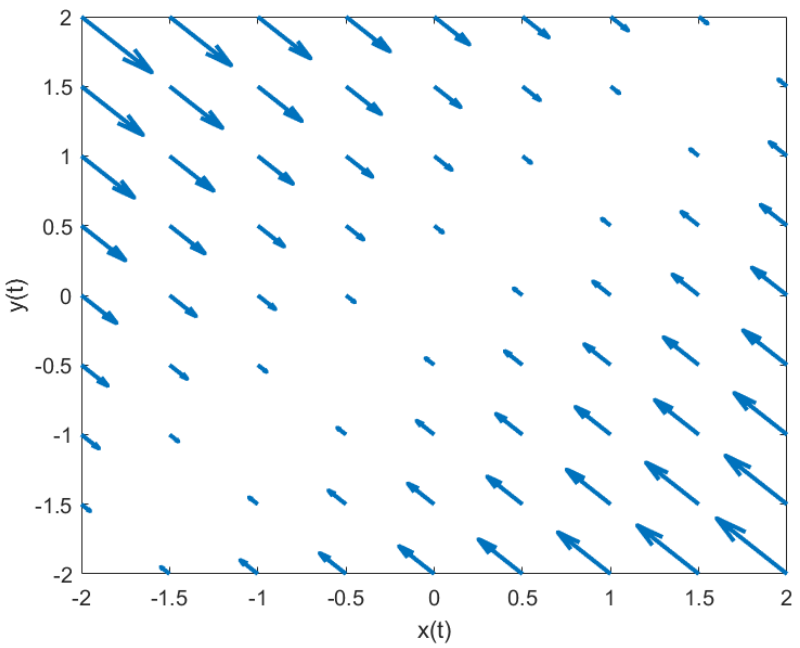
$\underline{\sigma = 1}$

$$x(t) = 1 - \frac{1}{2}(1 - e^{2(1-t)})$$

$$y(t) = 1 - \frac{1}{2}(1 + e^{2(1-t)})$$



Solución particular para σ = 1

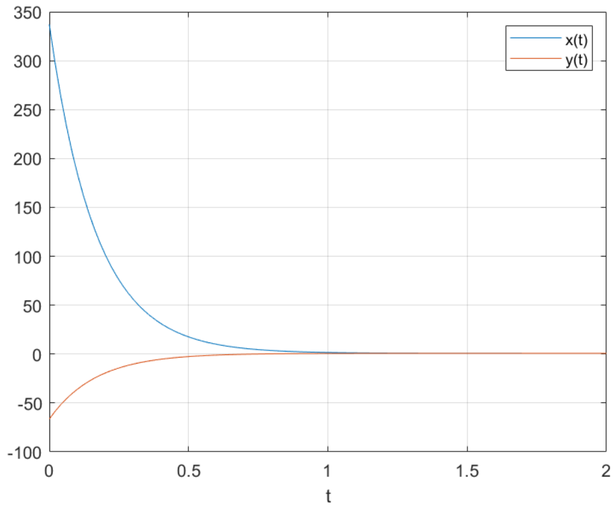


Campos de direcciones para $\sigma = 1$

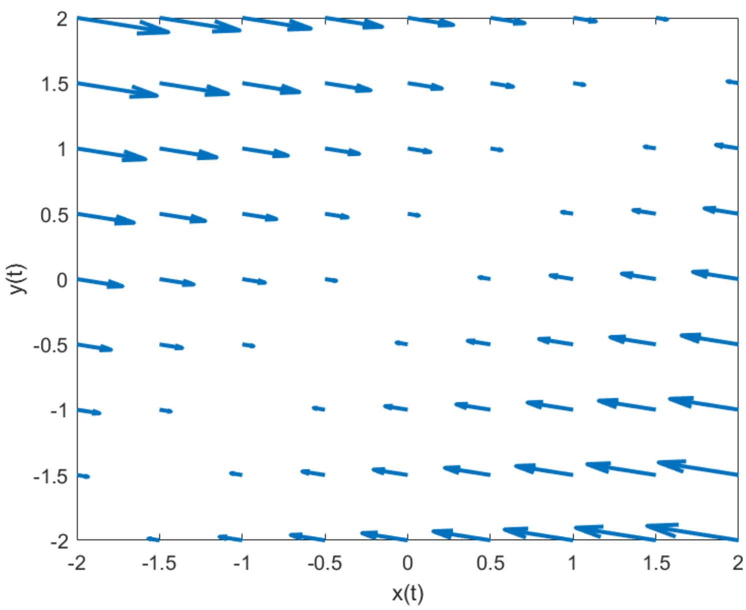
$\underline{\sigma = 5}$

$$x(t) = 1 - \frac{1}{6}\left(1 - 5 \cdot e^{6(1-t)}\right)$$

$$y(t) = 1 - \frac{1}{6}\left(1 + e^{6(1-t)}\right)$$



Solución particular para σ = 5



Campos de direcciones para $\sigma = 1$

Extensión máxima: las páginas necesarias para responder a todos los ejercicios, con fuente Calibri 12 e interlineado 1,5.

- Adjunta el programa a la entrega de estas actividades. En el encabezado del código del programa, pon tu nombre y apellidos, y tu dirección de correo electrónico.
- Responde a las preguntas de forma razonada en este documento Word.

Rúbrica

Sistemas continuos (valor real: 5 puntos)	Descripción	Puntuación máxima (puntos)	Peso %
Ejercicio 1. Apartado 1	Los puntos de equilibrio son correctos.	0.5	5 %
Ejercicio 1. Apartado 1	El sistema está bien linealizado.	0.5	5 %
Ejercicio 1. Apartado 1	El estudio de la estabilidad es correcto.	1	10 %
Ejercicio 1. Apartado 2	La solución calculada analíticamente es correcta.	1	10 %
Ejercicio 1. Apartado 2	Se utiliza correctamente la función dsolve.	0.5	5 %
Ejercicio 1. Apartado 2	Los campos de direcciones son correctos y están bien descritos.	0.5	5 %
Ejercicio 2	El proceso de cálculo de la solución particular es adecuado.	1	10 %
Ejercicio 2	El programa es óptimo.	1	10 %
Ejercicio 2	El código funciona, y los resultados que devuelve son correctos.	2	20 %
Ejercicio 3	Los resultados son correctos.	1	10 %
Ejercicio 3	Se describen adecuadamente los resultados.	1	10 %
		10	**100 %**