Tema 7. Series de Fourier de tiempo discreto

Procesamiento de Señales, Sonido e Imágenes Digitales

Carlos Quemada Mayoral

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

21/01/2021

Índice

7.1. Introducción

- En este tema se estudiará el análisis y síntesis de la serie de Fourier en tiempo discreto, mediante la representación DTFS (Discrete Time Fourier Series).

- **Muestreo de la sinusoidal de tiempo continuo.**

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) \Longrightarrow x[n] = A\cos(2\pi f_0 n t_s) = A\cos(2\pi n f_0/f_s)$$

De esta relación se obtiene:

$N_0 = m\dfrac{f_s}{f_0}$ $\Rightarrow$ Periodo fundamental con m el mínimo entero que hace N_0 entero (muestras/ciclo)

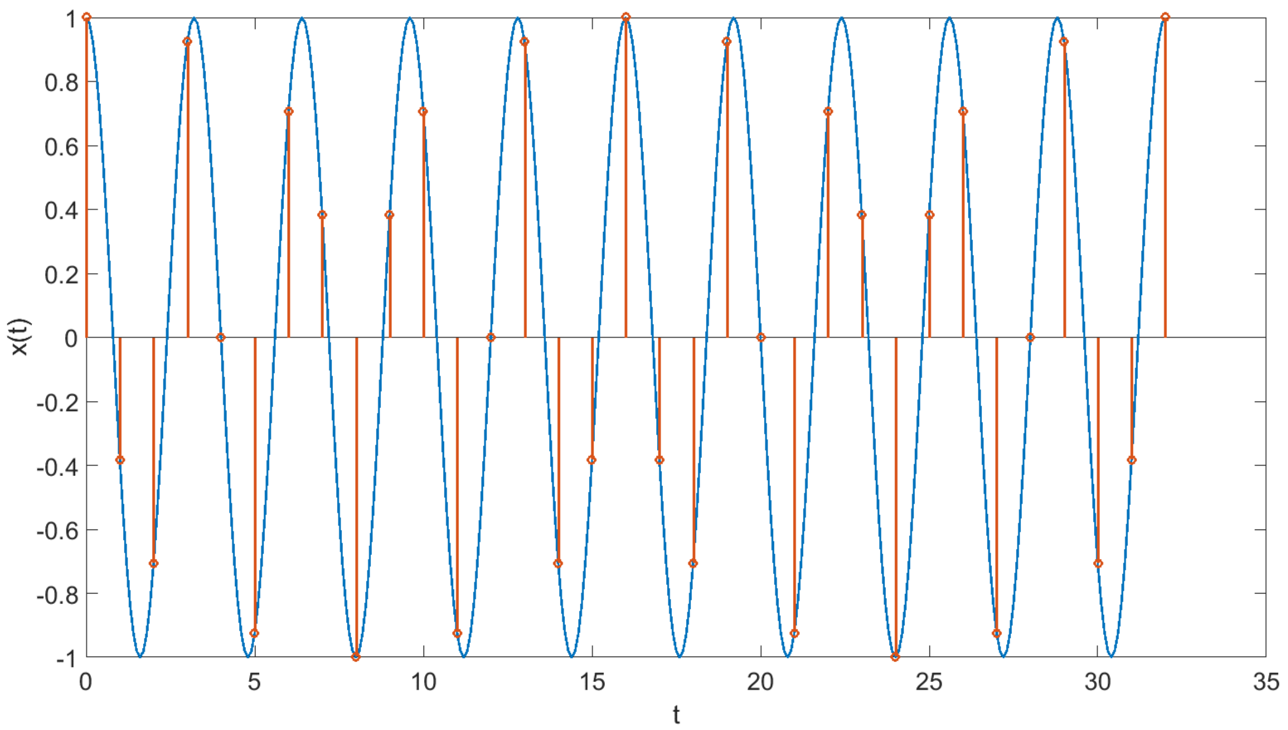
$m \neq n$

$$F_0\ (\text{ciclos/muestra}) = \frac{f_0\ (\text{ciclos/seg})}{\text{m} f_s\ (\text{muestras/seg})}$$ **Frecuencia cíclica fundamental**

$$\Omega_0(\text{radianes/muestra}) = \frac{w_0\ (\text{radianes/seg})}{\text{m} f_s\ (\text{muestras/seg})}$$ **Frecuencia angular fundamental**

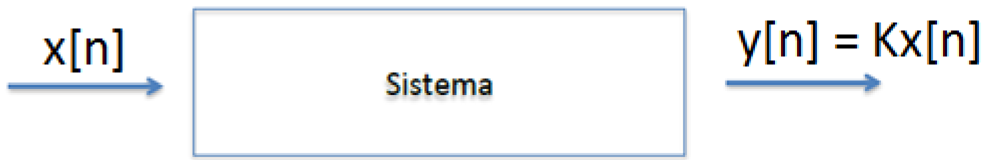
7.1. Introducción

- **Ejemplo**. Muestreo de la señal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ con $f_0 = 5/16$ Hz $\Rightarrow$ T = 16/5 s
- fs = 1 Hz $\Rightarrow$ Ts = 1 s $\Rightarrow$ $x[n] = \cos(2\pi f_0 n)$
- $N_0 = mf_s/f_0$ el mínimo m entero que hace N_0 entero es m = 5 $\Rightarrow$ $N_0 = 16$
- Puede observarse como hacen falta 5 periodos de la señal continua para alcanzar un perido fundamental de la señal discreta



7.2. La respuesta en frecuencia en tiempo discreto

- **Autofunción de un sistema LTI**: señal para la cuál, ante dicha señal como entrada, la respuesta del sistema es la misma señal multiplicada por una constante K, denominada autovalor.



- Para sistemas LTI de tiempo discreto las exponenciales complejas $x[n] = e^{j\Omega n}$ son autofunciones del sistema.

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\, e^{j\Omega(n-m)} = e^{j\Omega n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]e^{-j\Omega m} = H(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}$$

Sistemas LTI **$X[n] = e^{j\Omega n}$** **Cte compleja que solo depende de Ω y no de n**

- **Respuesta en frecuencia H(jΩ)**: transformada de Fourier discreta (para señales de energía ⇔ limitadas en t) de la respuesta al impulso h[n] evaluada en la frecuencia de la sinusoide Ω. Es una función que nos dice cómo cambia la magnitud y la fase de la señal sinusoidal con frecuencia angular Ω cuando pasa por un sistema LTI. Al tratarse de un sistema LTI H(jΩ) no cambia de frecuencia de entrada ni genera nuevas.

7.3. Ecuación de síntesis de la DTFS

- Al igual que en tiempo continuo, una señal x[n] periódica de tiempo discreto de periodo N se puede representar mediante una combinación lineal de sinusoides armónicamente relacionadas.

$$x[n] = \sum_{m=0}^{N-1} c_m e^{jm\Omega_0 n}$$

cm: coeficientes complejos de la DTFS (Discrete Time FS)
Ω_0 = 2π/N: frecuencia angular de la señal periódica
N: periodo de la señal periódica discreta

- A diferencia del tiempo continuo, la ecuación de síntesis solo incluye N sinusoidales y no infinitas.

- El sumatorio, en lugar de m = 0 a N-1, puede escogerse de forma arbitraria para facilitar el cálculo. Por ejemplo, si la señal es impar se puede escoger desde m = -(N-1)/2 hasta m = +(N-1)/2.

- Una consecuencia útil de que la ecuación de síntesis use una serie finita de armónicos es que no hay problemas de convergencia como ocurría en el tiempo continuo con señales periódicas.

7.4. Ecuación de análisis de la DTFS

- El análisis de la DTFS consiste en obtener los coeficientes de la DTFS que representan una señal de tiempo discreto.

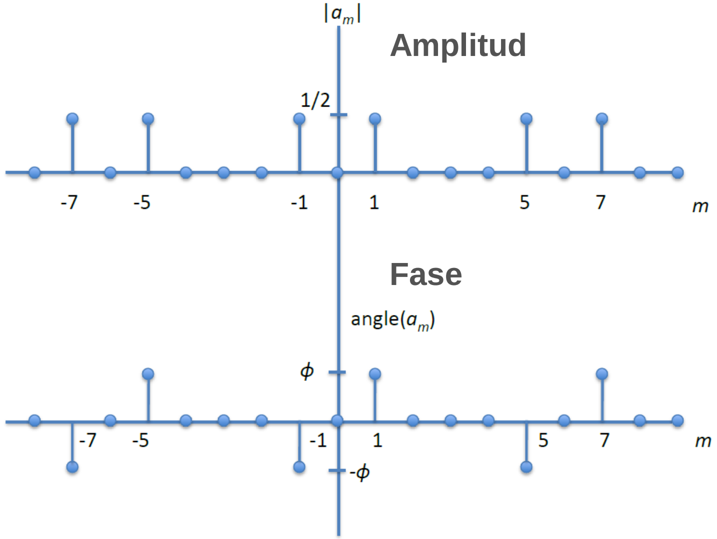
$$c_m = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n]\, e^{-jm\Omega_0 n}$$

- Los N valores a sumar pueden elegirse arbitrariamente dependiendo del problema.

- Los coeficientes son también periódicos de periodo N. El coeficiente n = N coincide con el n = 0.

7.4. Ecuación de análisis de la DTFS

- **Ejemplo**. Calcular los coeficientes de la serie de Fourier de tiempo discreto de la función $x[n] = \cos(\pi n/3 + \phi)$
- Comparando la función con la genérica $x[n] = A\cos(2\pi n f_0/f_s)$, se sabe que $f_0/f_s = 1/6$.
- Por tanto el periodo N_0 es $\mathbf{N_0 = mf_s/f_0 = 6}$ tomando m = 1 (mínimo entero)
- Los coeficientes se pueden calcular aplicando la ecuación de análisis o por inspección transformando el coseno en exponenciales complejas. En este caso es más sencillo la segunda forma.
- $x[n] = \cos(\pi n/3 + \phi) = (e^{j(\pi n/3 + \phi)}+e^{-j(\pi n/3 + \phi)})/2 = (1/2)e^{j\phi}e^{j2\pi n/6} + (1/2)e^{-j\phi}e^{-j2\pi n/6}$
- De esta expresión se deduce que $C_1 = (1/2)e^{j\phi}$, $C_{-1} = (1/2)e^{-j\phi}$ y cero el resto.



$$c_m = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]\, e^{-jm\Omega_0 n}$$

$$x[n] = \sum_{m=0}^{N-1} c_m e^{jm\Omega_0 n}$$

7.5. Propiedades de la FS y DTFS

- **Linealidad.** Sean x(t) e y(t) dos señales periódicas con un mismo periodo T representadas como FS del modo:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{jmw_0 t} \qquad y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m e^{jmw_0 t}$$

$$x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_m \qquad y(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} b_m$$

- Sea z(t) = Ax(t) + By(t) una combinación lineal de x(t) e y(t).
- z(t) tendrá el mismo periodo T y sus coeficientes serán una combinación lineal de los coeficientes de de x(t) e y(t).

$$z(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} c_m = Aa_m + Bb_m$$

- Válido para FS y DTFS

7.5. Propiedades de la FS y DTFS

- **Desplazamiento en el tiempo**. Sea x(t) una señal periódica con periodo T y coeficientes c_m.

$$x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} c_m$$

- Si se desplaza la señal ⇒ $x(t-t_0)$, el periodo T se conserva y los coeficientes preservan la magnitud y varían su fase.

$$x(t-t_0) \overset{FS}{\leftrightarrow} d_m = c_m e^{-jmw_0t_0}$$

- Válido para FS y DTFS

7.5. Propiedades de la FS y DTFS

- **Desplazamiento en frecuencia**. Sea x(t) una señal periódica con periodo T y coeficientes c_m.

$$x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} c_m$$

- Su desplazamiento en los coeficientes varía la fase pero no la amplitud de la señal en el tiempo.

$$e^{jm_0 w_0 t} x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} c_{m-m_0}$$

- Válido para FS y DTFS

7.5. Propiedades de la FS y DTFS

- **Inversión temporal**. Sea x(t) una señal periódica con periodo T y coeficientes c_m.

$$x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} c_m$$

- La señal resultante de la inversión temporal x(-t) tiene el mismo periodo T y los coeficientes se invierten.

$$x(-t) \overset{FS}{\leftrightarrow} c_{-m}$$

- Válido para FS y DTFS

7.5. Propiedades de la FS y DTFS

- **Escalado temporal**. Sea x(t) una señal periódica con periodo T, frecuencia angular w_0 y coeficientes c_m.

$$x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} c_m$$

- La señal resultante del escalado temporal x(at) tiene periodo T/a, frecuencia aw_0 y los coeficientes permanecen invariantes.

$$x(at) \overset{FS}{\leftrightarrow} c_m$$

- Válido para FS y DTFS

7.5. Propiedades de la FS y DTFS

- **Simetría del conjugado**. Sea x(t) una señal periódica con periodo T y coeficientes c_m.

$$x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} c_m$$

- Los coeficientes de su señal conjugada están conjugados e invertidos.

$$x^*(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} c^*_{-m}$$

- Si x(t) es real $\Rightarrow x^*(t) = x(t) \Rightarrow c_m = c^*_{-m}$
- Si x(t) es real $Re(c_m) = Re(c^*_{-m}) = Re(c_{-m}) \Rightarrow Re(c_m)$ es una función par

Si conjugas un número complejo, su parte real no cambia

- Si x(t) es real $Im(c_m) = Im(c^*_{-m}) = -Im(c_{-m}) \Rightarrow Im(c_m)$ es una función impar

Si conjugas un número complejo, su parte imaginaria cambia de signo

- Válido para FS y DTFS

7.5. Propiedades de la FS y DTFS

- **Simetría par e impar**. Sea x(t) una señal periódica **real** con periodo T. Al ser real puede representarse como una FS en senos y cosenos.

$$x(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(mw_0 t) + b_m \sin(mw_0 t)$$

- Cuando x(t) es par, todos los coeficientes b_m desaparecen.

$$x(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(mw_0 t)$$

- Cuando x(t) es impar, todos los coeficientes a_m desaparecen.

$$x(t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(mw_0 t)$$

- Si x(t) es real y par $\Rightarrow$ cada uno de sus coeficientes c_m será real y par.
- Si x(t) es real e impar $\Rightarrow$ cada uno de sus coeficientes c_m será Im e impar.
- Válido para FS y DTFS

7.5. Propiedades de la FS y DTFS

- **Relación de Parseval**. Sea x(t) una señal periódica de periodo T. La relación de Parseval dice que la energía media de x(t) en un periodo T es igual a la suma de las potencias de sus coeficientes c_m o componentes armónicas.

Como x(t) puede ser compleja, se debe calcular el módulo

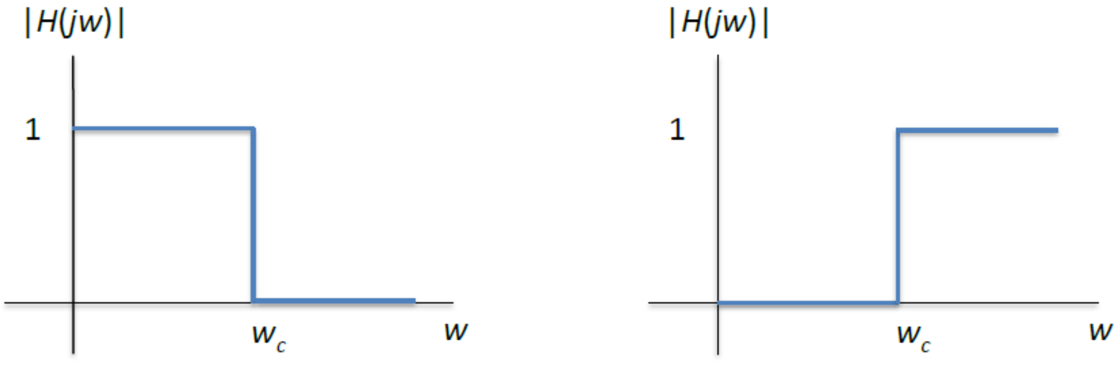
$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\,dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2$$

- Para la DTFS:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} |x[n]|^2 = \sum_{m=<N>} |c_m|^2$$

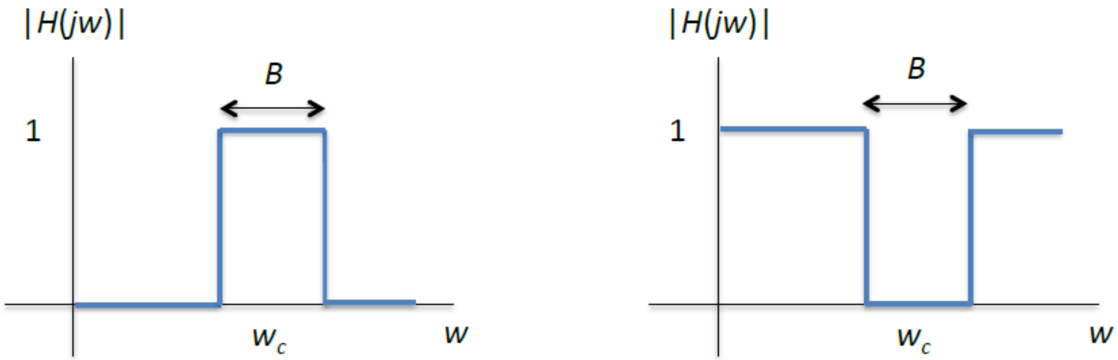
7.6. Filtros en frecuencia

- Son sistemas que permiten pasar ciertas frecuencias o componentes frecuencias y atenúan o impiden el paso de otras. Tipos:



(a) Filtro paso bajo

(b) Filtro paso alto



(c) Filtro paso banda

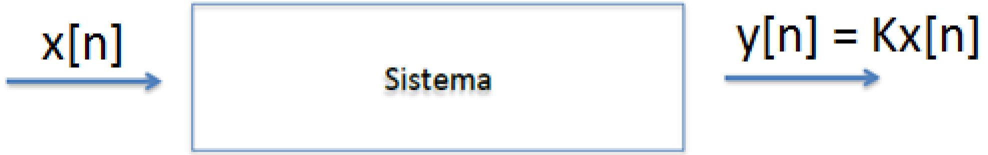
(d) Filtro de rechazo de banda

Ejercicio 1

- Determinar si la siguiente señal es una autofunción del sistema h[n].

$$x_1[n] = \sin\left(\frac{1}{2}n\right) \qquad\qquad h[n] = u[n] - u[n-2]$$

- **Autofunción de un sistema LTI**: señal para la cuál, ante dicha señal como entrada, la respuesta del sistema es la misma señal multiplicada por una constante K, denominada autovalor.

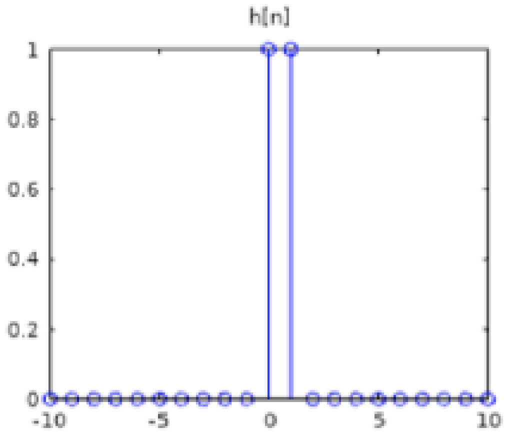


- Para sistemas LTI de tiempo discreto las exponenciales complejas $x[n] = e^{j\Omega n}$ son autofunciones del sistema.

Ejercicio 1

- Determinar si la siguientes señal es una autofunción del sistema h[n].

$$x_1[n] = \sin\left(\frac{1}{2}n\right) \qquad\qquad h[n] = u[n] - u[n-2]$$



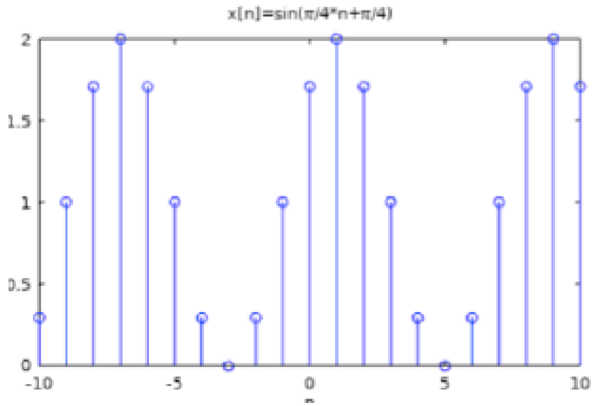
- Para sistemas LTI $\Rightarrow$ $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]$
- Siendo h[n] la de la figura $\Rightarrow$ $y[n] = x[n] + x[n\text{-}1] = \sin(n/2) + \sin(n/2\text{-}1/2)$
- Obviamente, $\sin(n/2) + \sin(n/2\text{-}1/2) \neq K\sin(n/2)$
- Por tanto, *x*[n] **no es una autofunción del sistema**.
- Si $x[n] = Ae^{jn/2} \Rightarrow y[n] = Ae^{jn/2}(1+e^{-j/2}) = KAe^{jn/2} = Kx[n] \Rightarrow$ **Si es autofunción**.

Ejercicio 2

- Determinar los coeficientes de la siguiente señal $\Rightarrow$ $x[n] = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{4}\right)$
- La ecuación de síntesis de la DTFS es $\Rightarrow$ $x[n] = \sum_{m=<N>} c_m e^{jm\Omega_0 n}$
- Sustituyendo el seno por exponenciales usando la relación de Euler se tiene:

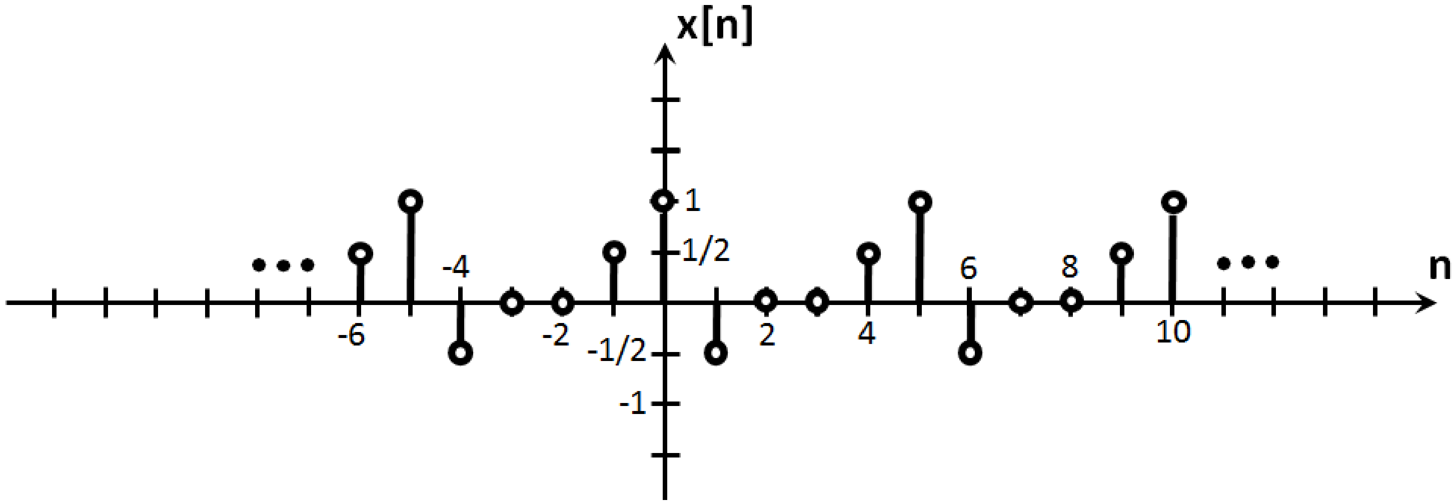
$$x[n] = 1 + \frac{1}{2j} e^{j\left(\frac{\pi}{4}n+\frac{\pi}{4}\right)} - \frac{1}{2j} e^{-j\left(\frac{\pi}{4}n+\frac{\pi}{4}\right)} = 1 + \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2j} e^{j\frac{\pi}{4}n} - \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2j} e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

- Si se pinta el sin((πn)/4 + π/4), se observa que el periodo de x[n] es N=8.
- Por tanto, jm2πn/N = jmπn/4
- Por tanto, $c_0 = 1$ $c_1 = 1/2j\, e^{j\pi/4}$, $c_{-1} = -1/2j\, e^{-j\pi/4}$
- $c_{-3} = c_{-2} = c_2 = c_3 = c_4 = 0$
- Estamos cogiendo un periodo entre m = [-3,4]



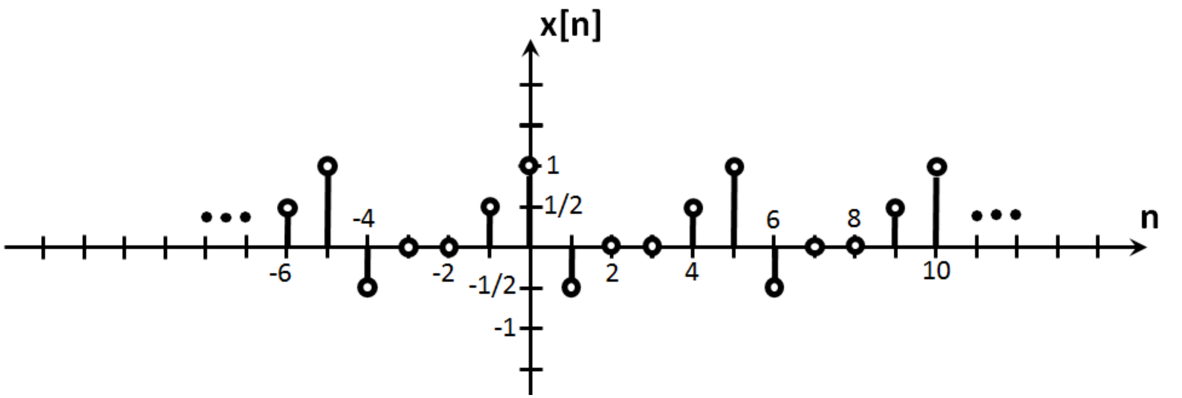
Ejercicio 3

- Encontrar los coeficientes DTFS de la señal de la figura:



Ejercicio 3

- Encontrar los coeficientes DTFS de la señal de la figura:



- La ecuación de análisis es: $c_m = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jm\Omega_0 n} = \frac{1}{5}\sum_{n=-2}^{2} x[n]e^{-jm\frac{2\pi}{5}n}$

- Vemos que el periodo N es 5

- Desarrollando C_m, se tiene:

$$= \frac{1}{5}\left[x[-2]e^{-jm\frac{2\pi}{5}(-2)} + x[-1]e^{-jm\frac{2\pi}{5}(-1)} + x[0]e^{-j0} + x[1]e^{-jm\frac{2\pi}{5}(1)} + x[2]e^{-jm\frac{2\pi}{5}(2)}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[1 + \frac{1}{2}e^{jm\frac{2\pi}{5}} - \frac{1}{2}e^{-jm\frac{2\pi}{5}}\right] = \frac{1}{5}\left[1 + j\sin\left(\frac{2\pi}{5}m\right)\right]$$

Ejercicios adicionales

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicios 3.9, 3.13, 3.14**

Ejercicios adicionales

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicio 3.9.** Encontrar los coeficientes DTFS de la señal:

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{4\delta[n-4m] + 8\delta[n-1-4m]\}$$

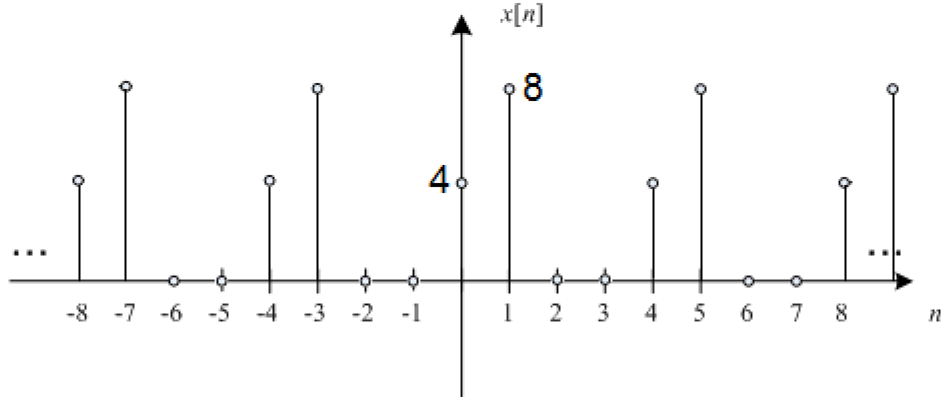
Ejercicios adicionales

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall

- **Ejercicio 3.9.** Encontrar los coeficientes DTFS de la señal:

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{4\delta[n-4m] + 8\delta[n-1-4m]\}$$

- Dibujamos x[n]:



- Aplicamos la ecuación de análisis: $c_m = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n]\, e^{-jm\Omega_0 n}$

- Como N=4, el sumatorio va [-2,1] $\Rightarrow$ $c_m = (4e^0 + 8e^{-jm\pi/2})/4 = (1 + 2e^{-jm\pi/2})$

- $c_{-2} = -1$, $c_{-1} = 1 + 2j$, $c_0 = 3$, $c_1 = 1 - 2j$

Ejercicios adicionales

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicio 3.13.** Considere un sistema LTI cuya respuesta en frecuencia es:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,dt = \frac{\operatorname{sen}(4\omega)}{\omega}$$

Si la entrada al sistema es la siguiente señal periódica con periodo 8, determinar la salida del sistema.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 4 \\ -1, & 4 \le t < 8 \end{cases}$$

Ejercicios adicionales

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicio 3.13.** Calculamos los coeficientes de la señal periódica.

$$c_m = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jm2\pi f_0 t}dt = \frac{1}{8}\int_0^8 x(t)e^{-jm\frac{2\pi}{8}t}dt = \frac{1}{8}\int_0^4 e^{-jm\frac{2\pi}{8}t}dt - \frac{1}{8}\int_4^8 e^{-jm\frac{2\pi}{8}t}dt$$

$$= \frac{1}{jm\pi}\left[1 - e^{-jm\pi}\right]$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 4 \\ -1, & 4 \le t < 8 \end{cases}$$

- $c_m = 0$ para $m = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6$
- $c_m = 2/(jm\pi)$ para $m = \pm 1, \pm 3, \pm 5$

- Ahora ya podemos expresar x(t) como: $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jmw_0 t}$

Ejercicios adicionales

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall

- **Ejercicio 3.13.** Puesto que el sistema es LTI y la convolución es una operación conmutativa, se tiene:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\left[\ldots + c_{-1} e^{-j2\pi f_0 t} e^{j2\pi f_0 \tau} + c_0 + c_1 e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f_0 \tau}\right] d\tau$$

$$= \ldots + c_{-1}\, e^{-j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j2\pi f_0 \tau} d\tau + c_0 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau + c_1 e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau + \cdots$$

$$= \ldots + c_{-1}\, e^{-j2\pi f_0 t} H\big(j2\pi(-f_0)\big) + c_0 H\big(j2\pi(0)\big) + c_1\, e^{j2\pi f_0 t} H\big(j2\pi(f_0)\big) + \cdots$$

- $f_0 = 1/8 \Rightarrow$ $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t}\, dt = \frac{\operatorname{sen}(4\omega)}{\omega}$

- Sustitutendo w por $2\pi m f_0 = 2\pi m/8 = \pi m/4 \Rightarrow$ sen(4w) = sen(mπ) $\Rightarrow$ H(jw) = 4sen(mπ)/(πm) $\Rightarrow$ para valores impares de m, H(jw) = 0.

- Por lo tanto, y(t) = 0.

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

unir

www.unir.net