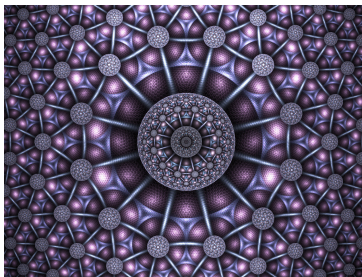


# Tema 10: Métodos iterativos para resolver sistemas lineales

## Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería

### Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Alicia Cordero, Neus Garrido, Juan R. Torregrosa



- 1 Introducción
- 2 Métodos iterativos estacionarios
- 3 Método de Jacobi
- 4 Método de Gauss-Seidel
- 5 Resultados de convergencia
- 6 Métodos de sobre-relajación

El objetivo del tema es la resolución de un sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b,$$

donde  $A$  es una matriz real  $n \times n$  y  $b$  un vector de  $\mathbb{R}^n$ .

## Métodos de resolución

- **Métodos directos**

- Si  $A$  es invertible,  $x = A^{-1}b$
- Método de Cramer
- Método de eliminación de Gauss: pivotación parcial, factorización  $LU$ , ...

- **Métodos iterativos**  $x = Hx + d$ ,  $H$  matriz  $n \times n$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$

- Métodos iterativos estacionarios: Jacobi, Gauss-Seidel, ...
- Métodos de direcciones alternadas
- Métodos de gradiente conjugado

- **Precondicionadores**

En numerosos problemas modelizados mediante sistemas lineales  $Ax = b$ , la matriz  $A$  tiene al menos dos características esenciales:

- Tamaño grande,  $n \gg \gg$
- Matriz dispersa, es decir, un número de elementos no nulos,  $nnz(A)$ , del orden  $nnz(A) = cn$ , con  $c$  independiente de  $n$ .

Estas características desaconsejan el uso de métodos directos, ya que

- El orden de magnitud del número de operaciones para calcular  $A^{-1}$  es  $O(n^3)$ , lo que en tiempo de ejecución pueden ser incluso años.
- Tanto el cálculo de  $A^{-1}$  como el método de eliminación de Gauss hace perder el carácter disperso de la matriz  $A$ , lo que se traduce en un mayor número de operaciones y en el incremento del error de redondeo.

Debemos recurrir a los **MÉTODOS ITERATIVOS**

- Un **método iterativo** obtiene una solución aproximada del sistema  $Ax = b$  construyendo una sucesión de vectores

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots \text{ en } \mathbb{R}^n$$

a partir de un vector arbitrario  $x^{(0)}$  que se llama **aproximación inicial**.

- Un método iterativo se dice **convergente** si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \bar{x}.$$

- El **vector error**, en cada iteración, se define como

$$e_k = \bar{x} - x^{(k)}$$

- El **vector residuo**, en cada iteración, se define como

$$r_k = b - Ax^{(k)}.$$

Se cumple el siguiente resultado

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \bar{x} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|r_k\| = 0$$

- Los métodos directos teóricamente dan la solución exacta; pero en un ordenador se generan errores de redondeo.
- Un método iterativo nunca da la solución exacta incluso en precisión infinita.
- Hay que establecer un criterio de parada. Se da a priori una precisión para nuestra solución. Sea  $Tol$  el error máximo permitido.

$$\|e_k\| < Tol \text{ (error absoluto)} \quad \text{ó} \quad \frac{\|e_k\|}{\|\bar{x}\|} < Tol \text{ (error relativo)}$$

- Pero  $\bar{x}$  y  $e_k$  no son conocidos, el criterio de parada no es útil.
- Debemos utilizar el criterio del residuo

$$\|r_k\| < Tol \text{ (error absoluto)} \quad \text{ó} \quad \frac{\|r_k\|}{\|b\|} < Tol \text{ (error relativo)}$$

$$\|b - Ax^{(k)}\| < Tol \text{ (error absoluto)} \quad \text{ó} \quad \frac{\|b - Ax^{(k)}\|}{\|b\|} < Tol \text{ (error relativo)}$$

- La relación entre el error y el residuo es

$$r_k = b - Ax^{(k)} = A\bar{x} - Ax^{(k)} = Ae_k.$$

- Usando normas matriciales:

$$\|r_k\| \leq \|A\|\|e_k\|; \quad \|e_k\| \leq \|A^{-1}\|\|r_k\|$$

- Además,

$$\|\bar{x}\| \leq \|A^{-1}\|\|b\|; \quad \|b\| \leq \|A\|\|A^{-1}b\| = \|A\|\|\bar{x}\|$$

- Combinando estas desigualdades

$$\frac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|} \frac{\|r_k\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e_k\|}{\|\bar{x}\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\| \frac{\|r_k\|}{\|b\|}$$

Teniendo en cuenta que  $\mathcal{K}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$  es el número de condición de la matriz  $A$ , podemos concluir:

El test del residuo es fiable si  $\mathcal{K}(A)$  no es muy grande, es decir,  $A$  es una matriz estable.

Sea  $A$  la matriz del sistema  $Ax = b$ . Podemos considerar la partición (también llamada splitting)

$$A = M - N,$$

donde  $M \neq A$  es una matriz invertible.

Construimos el proceso iterativo

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b = Hx^{(k)} + q, \quad k = 0, 1, \dots$$

donde  $H$  es la **matriz de iteración** y  $x^{(0)}$  la **aproximación inicial**. Esto es equivalente a

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + M^{-1}(b - Ax^{(k)}) = x^{(k)} + M^{-1}r_k$$

## Método estacionario

Se dice que un método iterativo es **estacionario** si la matriz de iteración  $H$  es constante en todo el proceso.



Sea  $A = (a_{ij})$  la matriz del sistema lineal tal que  $a_{ii} \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , y consideremos la partición de  $A$  de la forma

$$A = L + D + U,$$

donde

- $L$  es la parte estrictamente triangular inferior de  $A$
- $D$  es la diagonal principal de  $A$
- $U$  es la parte estrictamente triangular superior de  $A$

El **Método de Jacobi** es un método estacionario en el que  $M = D$  y  $N = -(L + U)$ , por lo que su expresión iterativa es

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, \dots$$

## Método de Jacobi

El sistema  $Ax = b$

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right\}$$

se transforma en uno equivalente despejando  $x_1$  de la primera ecuación,  $x_2$  de la segunda, y así sucesivamente. De esta forma, resulta

[illegible]

que coincide con la expresión

$$x = -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b,$$

siendo la expresión iterativa

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b.$$

Expresión escalar del proceso iterativo:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)} - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)} - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(k)} + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} &= -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k)} - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k)} - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(k)} + \frac{b_2}{a_{22}} \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(k)} - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(k)} - \dots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1}^{(k)} + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{aligned} \right\}$$

## Ejemplo

Consideremos el sistema de tamaño  $4 \times 4$

$$\left. \begin{array}{rrcr} 10x_1 & -x_2 & +2x_3 & & = & 6 \\ -x_1 & +11x_2 & -x_3 & +3x_4 & = & 25 \\ 2x_1 & -x_2 & +10x_3 & -x_4 & = & -11 \\ & 3x_2 & -x_3 & +8x_4 & = & 15 \end{array} \right\}$$

Aplicando el método de Jacobi y el criterio de parada

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_{\infty}}{\|x^{(k+1)}\|_{\infty}} < 10^{-3}$$

se obtienen los resultados

$k$	0	1	2	3	4	5	...	9	10
$x_1^{(k)}$	0.0000	0.0600	1.0473	0.9326	1.0152	0.9890		0.9997	1.0001
$x_2^{(k)}$	0.0000	2.2727	1.7159	2.0533	1.9537	2.0114		2.0004	1.9998
$x_3^{(k)}$	0.0000	-1.1000	-0.8052	-1.0493	-0.9681	-1.0103		-1.0004	-0.9999
$x_4^{(k)}$	0.0000	1.8750	0.8852	1.1309	0.9739	1.0214		1.0006	0.9999

Teniendo en cuenta que la solución exacta es  $\bar{x} = (1, 2, -1, 1)^T$ , obtenemos

$$\|x^{(10)} - \bar{x}\|_{\infty} = 0.0002.$$

**Entrada** Tamaño  $n$ , matriz  $A$ , términos independientes  $b$ , aproximación inicial  $X_0$ , tolerancia  $Tol$ , número máximo de iteraciones  $maxiter$

**Salida** Solución aproximada o mensaje de fracaso

**Paso 1** Tomar  $iter = 1$

**Paso 2** Mientras  $iter \leq maxiter$

**Paso 3** Tomar  $x = -D^{-1}(L + U)X_0 + D^{-1}b$

**Paso 4** Si  $\|x - X_0\| < Tol$  entonces **Salida**  $x$ . Parar.

**Paso 5** Tomar  $iter = iter + 1$

**Paso 6**  $X_0 = x$

**Paso 7** Salida ('Se necesitan más iteraciones'). Parar

Volviendo a utilizar la partición de la matriz del sistema

$$A = L + D + U$$

y tomando  $M = D + L$  y  $N = -U$ , obtenemos el **método de Gauss-Seidel** cuya expresión iterativa es

$$x^{(k+1)} = -(D + L)^{-1}Ux^{(k)} + (D + L)^{-1}b, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)} - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)} - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(k)} + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} &= -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k+1)} - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k)} - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(k)} + \frac{b_2}{a_{22}} \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(k+1)} - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(k+1)} - \dots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1}^{(k+1)} + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{aligned} \right\}$$

- En cada iteración debemos resolver el sistema  $(D + L)x^{(k+1)} = b - Ux^{(k)}$
- En el método de Gauss-Seidel las componentes de  $x^{(k+1)}$  que ya conocemos se utilizan en la propia iteración  $k + 1$

$$\left. \begin{array}{rrcr} 10x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 6 \\ -x_1 & +11x_2 & -x_3 & +3x_4 & = & 25 \\ 2x_1 & -x_2 & +10x_3 & -x_4 & = & -11 \\ & 3x_2 & -x_3 & +8x_4 & = & 15 \end{array} \right\}$$

Aplicando el método de Gauss-Seidel y el criterio de parada

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_{\infty}}{\|x^{(k+1)}\|_{\infty}} < 10^{-3}$$

se obtienen los resultados

$k$	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(k)}$	0.0000	0.0600	1.0300	1.0065	1.0009	1.0001
$x_2^{(k)}$	0.0000	2.3272	2.0370	2.0036	2.0003	2.0000
$x_3^{(k)}$	0.0000	-0.9873	-1.0140	-1.0025	-1.0003	-1.0000
$x_4^{(k)}$	0.0000	0.8789	0.9844	0.9983	0.9999	1.0000

Teniendo en cuenta que la solución exacta es  $\bar{x} = (1, 2, -1, 1)^T$ , obtenemos

$$\|x^{(5)} - \bar{x}\|_{\infty} = 0.00002.$$

**Entrada** Tamaño  $n$ , matriz  $A$ , términos independientes  $b$ , aproximación inicial  $X_0$ , tolerancia  $Tol$ , número máximo de iteraciones  $maxiter$

**Salida** Solución aproximada o mensaje de fracaso

**Paso 1** Tomar  $iter = 1$

**Paso 2** Mientras  $iter \leq maxiter$

**Paso 3** Tomar  $x$  solución del sistema  $(D + L)x = b - UX_0$

**Paso 4** Si  $\|x - X_0\| < Tol$  entonces **Salida**  $x$ . Parar.

**Paso 5** Tomar  $iter = iter + 1$

**Paso 6**  $X_0 = x$

**Paso 7** Salida ('Se necesitan más iteraciones'). Parar



## Teorema

Sea  $A$  una matriz invertible. Un método iterativo estacionario converge, para cualquier aproximación inicial  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ , a la solución exacta del sistema lineal, si y sólo si,

$$\rho(H) < 1,$$

es decir, el mayor valor propio en valor absoluto de la matriz de iteración es menor que la unidad.

## Teorema

Si la matriz  $A$  es estrictamente diagonal dominante, entonces los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel son convergentes.

Una matriz  $A = (a_{ij})$ , de tamaño  $n \times n$  se dice que es **estrictamente diagonal dominante** si

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad \text{para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

## Teorema

Si  $\|H\| < 1$  para cualquier norma matricial, entonces la sucesión  $\{x^{(k)}\}$  obtenida por un método iterativo estacionario converge a la solución del sistema, para cualquier  $x^{(0)}$  inicial, y se satisfacen las cotas de error:

$$\|\bar{x} - x^{(k)}\| \leq \|H\|^k \|\bar{x} - x^{(0)}\|,$$

$$\|\bar{x} - x^{(k)}\| \leq \frac{\|H\|^k}{1 - \|H\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

En los métodos de relajación interviene un parámetro  $w$  del que depende, en gran medida, la convergencia del método

- Método de Jacobi relajado, **JSOR**, tiene como expresión iterativa

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + wD^{-1}r^{(k)},$$

donde  $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$  es **Vector residual de Jacobi**

Se cumple que si el método de Jacobi converge, entonces el método JSOR converge si  $0 \leq w \leq 1$ .

- Método **SOR1** (successive over relaxation )

$$(D + wL)x^{(k+1)} = (-wU + (1 - w)D)x^{(k)} + wb$$

- Método **SOR2**

$$(D + wU)x^{(k+1)} = (-wL + (1 - w)D)x^{(k)} + wb$$

$$\begin{aligned}
 x_1^{(k+1)} &= (1-w)x_1^{(k)} + w \left( -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)} - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)} - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(k)} + \frac{b_1}{a_{11}} \right) \\
 x_2^{(k+1)} &= (1-w)x_2^{(k)} + w \left( -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k+1)} - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k)} - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(k)} + \frac{b_2}{a_{22}} \right) \\
 &\vdots \\
 x_n^{(k+1)} &= (1-w)x_n^{(k)} + w \left( -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(k+1)} - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(k+1)} - \dots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1}^{(k+1)} + \frac{b_n}{a_{nn}} \right)
 \end{aligned}$$

Si  $\bar{x}^{(k+1)}$  denota el iterado  $k+1$  del método de Gauss-Seidel, la expresión iterativa vectorial del método SOR1 se puede escribir de la forma:

## Expresión vectorial

$$x^{(k+1)} = (1-w)x^{(k)} + w\bar{x}^{(k+1)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

## Teorema

Si  $A$  es una matriz definida positiva y  $0 < w < 2$ , entonces el método SOR1 converge para cualquier elección de la aproximación inicial  $x^{(0)}$

## Teorema

Si  $A$  es definida positiva y tridiagonal, entonces  $\rho(H_{GS}) = (\rho(H_J))^2 < 1$ . Además, la elección óptima de  $w$  para el método SOR1 es:

$$w = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - (\rho(H_J))^2}}.$$

Consideremos el sistema

$$\left. \begin{array}{rrcr} 4x_1 & +3x_2 & & = & 24 \\ 3x_1 & +4x_2 & -x_3 & = & 30 \\ & -x_2 & +4x_3 & = & -24 \end{array} \right\}$$

que tiene como solución exacta  $\bar{x} = (3, 4, -5)^T$ . Aplicando el método de Gauss-Seidel y el criterio de parada

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_{\infty} < 10^{-7},$$

se obtienen los resultados

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1^{(k)}$	1.0000	5.2500	3.1406	3.0878	3.0549	3.0343	3.0214	3.0134
$x_2^{(k)}$	1.0000	3.8125	3.8828	3.9267	3.9542	3.9713	3.9821	3.9888
$x_3^{(k)}$	1.0000	-5.0468	-5.0292	-5.0183	-5.0114	-5.0071	-5.0044	-5.0027

Para que se cumpla el criterio de parada necesitamos 34 iteraciones.

Aplicamos el método SOR1 con  $w = 1.25$  y el criterio de parada

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_{\infty} < 10^{-7}.$$

Los resultados obtenidos son:

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1^{(k)}$	1.0000	6.3125	2.6223	3.1330	2.9570	3.0037	2.9963	3.0000
$x_2^{(k)}$	1.0000	3.5195	3.9585	4.0102	4.0074	4.0029	4.0009	4.0002
$x_3^{(k)}$	1.0000	-6.6501	-4.6004	-5.0966	-4.9734	-5.0037	-4.9982	-5.0003

Para que se cumpla el criterio de parada necesitamos 14 iteraciones.