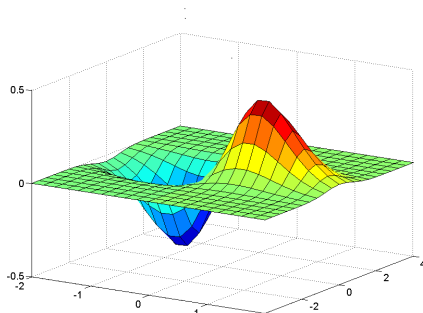


Tema 7: Problemas de contorno multidimensionales. EDPs parabólicas.

Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Alicia Cordero, Neus Garrido, Juan R. Torregrosa



- 1 Conceptos básicos
- 2 Problemas de contorno parabólicos
 - Métodos explícito e implícito
 - Método de Crank-Nicholson
- 3 Casos especiales
 - Ecuación parabólica multidimensional
 - Ecuación parabólica en coordenadas polares
 - Ecuaciones de convección-difusión
- 4 Ejercicios propuestos
- 5 Referencias

¿Qué es un problema de contorno?

¡Debemos distinguir entre el contexto de una y varias variables independientes!

El tema anterior estuvo dedicado a problemas de frontera en una variable (**ecuaciones diferenciales**), mientras que en este abordaremos los problemas de contorno en varias variables (**ecuaciones en derivadas parciales**).

Distribución de temperatura en una varilla de longitud L

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq L, t \geq 0,$$

Condiciones de contorno $u(0, t) = u(L, t) = 0, t > 0,$

Condición inicial $u(x, 0) = f(x), x \in [0, L].$

- | | | |
|-----|---------------------------------------|-------------------------------------|
| (a) | $u_{xx}(x, t) = (1/c^2)u_{tt}(x, t),$ | Ecuación de ondas unidimensional |
| (b) | $u_t(x, t) = k u_{xx}(x, t),$ | Ecuación de difusión unidimensional |
| (c) | $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0,$ | Ecuación de Laplace |

Las EDPs descritas mediante la expresión

$$A(x, y)u_{xx}(x, y) + 2B(x, y)u_{xy}(x, y) + C(x, y)u_{yy}(x, y) + a(x, y)u_x(x, y) + b(x, y)u_y(x, y) + c(x, y)u(x, y) = \phi(x, y),$$

definidas en una región $D \subseteq \mathbb{R}^2$, se pueden clasificar en:

- **Hiperbólicas** en D si $\Delta = B^2 - AC > 0$ en D .
- **Parabólicas** en D si $\Delta = B^2 - AC = 0$ en D .
- **Elípticas** en D si $\Delta = B^2 - AC < 0$ en D .

Ejemplos:

- | | | |
|-----|---------------------------------------|-------------------------------------|
| (a) | $u_{xx}(x, t) = (1/c^2)u_{tt}(x, t),$ | Ecuación de ondas unidimensional |
| (b) | $u_t(x, t) = ku_{xx}(x, t),$ | Ecuación de difusión unidimensional |
| (c) | $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0,$ | Ecuación de Laplace |

- Condiciones de Dirichlet

- Homogéneas: $u(a, t) = u(b, t) = 0, t > 0,$
- No homogéneas: $u(a, t) = \alpha, \quad u(b, t) = \beta,$

- Condiciones naturales

$$\begin{aligned}\alpha_a u_x(a, t) + \beta_a u(a, t) &= \gamma_a, \\ \alpha_b u_x(b, t) + \beta_b u(b, t) &= \gamma_b,\end{aligned}$$

con todos los parámetros reales y $\alpha_a, \alpha_b \neq 0$.

- Condiciones mixtas

$$\begin{aligned}\alpha_a u_x(a, t) + \beta_a u(a, t) &= \gamma_a, \\ u(b, t) &= \beta,\end{aligned}$$

con todos los parámetros reales y $\alpha_a \neq 0$.

Distribución de temperatura en un cuerpo isotrópico, es decir, en el que la conductividad térmica en cada punto es independiente de la dirección del flujo de calor, $u = u(x, y, z, t)$. Problema modelizado por la ecuación parabólica

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h \frac{\partial u}{\partial z} \right) = cg \frac{\partial u}{\partial t},$$

donde f , g y c son funciones de x , y y z .

- $h(x, y, z)$ denota la conductividad térmica en (x, y, z) ,
- $g(x, y, z)$ es la densidad del cuerpo en (x, y, z) ,
- $c(x, y, z)$ calor específico

Una ecuación parabólica con condiciones iniciales ($t = 0$) y de contorno recibe el nombre de **Problema Parabólico**.

El problema concreto en el que vamos a iniciar el estudio numérico es

Distribución de temperatura en una varilla de longitud L

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq L, t \geq 0,$$

Condiciones de contorno $u(0, t) = u(L, t) = 0$, $t > 0$,

Condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, $x \in [0, L]$.

Discretización

Proceso por el que cualquier **ecuación en derivadas parciales** se convierte en una **ecuación en diferencias**. Éstas suelen ser sistemas lineales o no lineales.

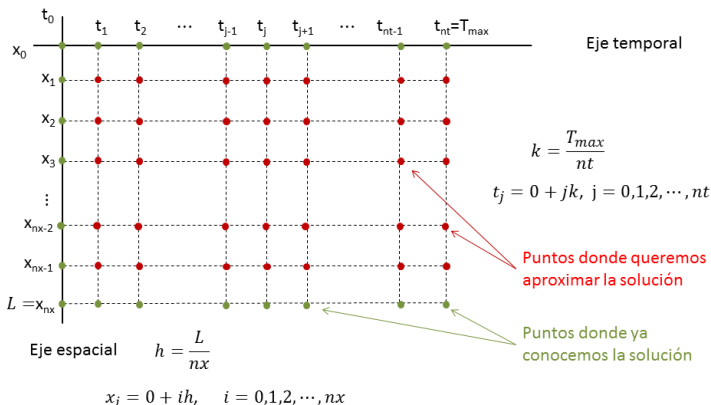
Los métodos en diferencias finitas suelen ser de dos tipos:

- ☐ Métodos explícitos
 - Sencillos y fáciles de implementar
 - Inestables
 - Requieren condiciones de convergencia
- ☐ Métodos implícitos
 - Más complejos
 - Estables
 - Sin condiciones de convergencia

Cuando trabajamos en un dominio regular (en general, rectángulo, cubo, ...) los resultados proporcionados por los métodos en diferencias finitas son satisfactorios.

Problemas parabólicos

La solución numérica de estos problemas consiste en transformarlos, mediante **diferencias finitas**, en **sistemas de ecuaciones** lineales o no lineales, cuyas incógnitas son valores aproximados de la solución en los puntos elegidos en el dominio espacial y temporal.



Es sencillo extender las diferencias finitas de una variable a varias variables.

- **Diferencia progresiva** $u_x(x, t) \approx \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h}$, $u_t(x, t) \approx \frac{u(x, t+k) - u(x, t)}{k}$
- **Diferencia regresiva** $u_x(x, t) \approx \frac{u(x, t) - u(x-h, t)}{h}$, $u_t(x, t) \approx \frac{u(x, t) - u(x, t-k)}{k}$
- **Diferencia central** $u_x(x, t) \approx \frac{u(x+h, t) - u(x-h, t)}{2h}$
- **Diferencia central** $u_{xx}(x, t) \approx \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2}$

Si denotamos por $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$, $i = 0, 1, 2, \dots, nx$, $j = 0, 1, 2, \dots, nt$, entonces

- **Diferencia progresiva** $u_x(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}$, $u_t(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$
- **Diferencia regresiva** $u_x(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}$, $u_t(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k}$
- **Diferencia central** $u_x(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}$
- **Diferencia central** $u_{xx}(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, t \geq 0,$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, t > 0; \quad u(x, 0) = f(x), x \in [0, L]$$

Diferencias progresivas en u_t y centrales en u_{xx}

- Transformación del problema

$$\frac{u(x, t+k) - u(x, t)}{k} = \alpha^2 \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2},$$

- Discretización del problema** Evaluando la expresión anterior en los puntos (x_i, t_j) , $i = 1, 2, \dots, nx-1$, $j = 0, 1, \dots, nt-1$, $u(x_i, t_j) = u_{i,j}$

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad i = 1, 2, \dots, nx-1, j = 0, 1, \dots, nt-1.$$

Llamando $\lambda = \frac{k\alpha^2}{h^2}$ y despejando las incógnitas del instante mayor

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), \quad i = 1, 2, \dots, nx-1, j = 0, 1, \dots, nt-1.$$

Para $j = 0$

$$u_{i,1} = (1 - 2\lambda)u_{i,0} + \lambda(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}), \quad i = 1, 2, \dots, nx - 1,$$

$$\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \lambda & 1 - 2\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 - 2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{nx-1,0} \end{pmatrix}$$

Para $j = 1$

$$u_{i,2} = (1 - 2\lambda)u_{i,1} + \lambda(u_{i+1,1} + u_{i-1,1}), \quad i = 1, 2, \dots, nx - 1,$$

$$\begin{pmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ \vdots \\ u_{nx-1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \lambda & 1 - 2\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 - 2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} \end{pmatrix}$$

En general:

$$u^{(j+1)} = Au^{(j)}, \quad j = 0, 1, \dots, nt - 1,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \lambda & 1 - 2\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 - 2\lambda \end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix}, \quad u^{(0)} = \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{nx-1,0} \end{pmatrix}$$

Método explícito ya que calculamos la solución en el instante t_{j+1} a partir de la solución en el instante t_j , directamente, sin resolver ningún sistema

CARACTERÍSTICAS: El orden de convergencia es $O(k + h^2)$,

A priori, no sabemos si la estabilidad está garantizada.

Recordemos que hay tres conceptos clave en los métodos de diferencias finitas:

- **Convergencia**

$$\tilde{u}_{h,k}(x_i, y_j) \rightarrow u(x_i, y_j), \text{ cuando } h, k \rightarrow 0$$

- **Consistencia:** El error de truncamiento local tiende a cero cuando h y k tienden a cero
- **Estabilidad:** Control del error de redondeo

CONSISTENCIA + ESTABILIDAD \Rightarrow CONVERGENCIA

En el método explícito para las EDPs parabólicas el esquema es consistente y

- es estable cuando $\lambda \leq \frac{1}{2}$, los errores no crecen, pero oscilan;
- si $\lambda \leq \frac{1}{4}$, la solución no oscilará;
- si $\lambda = \frac{1}{6}$, se tiende a minimizar los errores de truncamiento, pero el coste computacional puede no ser asumible.

Ejemplo

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, t > 0; \quad u(x, 0) = \sin \pi x, x \in [0, 1]$$

Solución exacta: $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$

Buscamos la solución aproximada en $T_{max} = 0.5$ mediante el método explícito con:

(a) $h = 0.1, k = 0.0005$

(b) $h = 0.1, k = 0.01$.

x_i	$u_{i,1000}$	$ u(x_i, 0.5) - u_{i,1000} $	$u_{i,50}$	$ u(x_i, 0.5) - u_{i,50} $
0.0	0	-	-	-
0.1	0.002287	6.41e-5	8.20e+7	8.20e+7
0.2	0.004349	1.22e-4	-1.56e+8	1.56e+8
0.3	0.005986	1.68e-4	2.14e+8	2.14e+8
0.4	0.007037	1.97e-4	-2.51e+8	2.51e+8
0.5	0.007399	2.08e-4	2.63e+8	2.63e+8
0.6	0.007037	1.97e-4	-2.49e+8	2.49e+8
0.7	0.005986	1.68e-4	2.11e+8	2.11e+8
0.8	0.004349	1.22e-4	-1.53e+8	1.53e+8
0.9	0.002287	6.51e-5	8.04e+7	8.04e+7
1.0	0	-	0	-

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, t > 0; \quad u(x, 0) = f(x), x \in [0, L]$$

Diferencias regresivas en u_t y centrales en u_{xx}

- Transformación del problema

$$\frac{u(x, t) - u(x, t - k)}{k} = \alpha^2 \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2},$$

- Discretización del problema Evaluando la expresión anterior en los puntos (x_i, t_j) , $i = 1, 2, \dots, nx - 1$, $j = 1, \dots, nt$,

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} = \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad i = 1, 2, \dots, nx - 1, j = 1, 2, \dots, nt.$$

Llamando $\lambda = \frac{k\alpha^2}{h^2}$ y llevando a la izquierda las incógnitas del instante mayor

$$(1 + 2\lambda)u_{i,j} - \lambda u_{i+1,j} - \lambda u_{i-1,j} = u_{i,j-1}, \quad i = 1, 2, \dots, nx - 1, j = 1, 2, \dots, nt.$$

Para encontrar la solución en el instante t_j debemos resolver un sistema lineal

$$Au^{(j)} = u^{(j-1)}, \quad j = 1, 2, \dots, nt,$$

donde los términos independientes son la solución en el instante anterior y la matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1+2\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1+2\lambda \end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix}.$$

CARACTERÍSTICAS: El proceso no necesita condiciones de convergencia,
El orden de convergencia es $O(k + h^2)$.

- **ENTRADA** función f ; extremo L ; constante α ; números enteros nx , nt ; tiempo máximo T .
- **SALIDA** aproximaciones $U_{i,j}$ de $u(x_i, t_j)$ para $i = 1, 2, \dots, nx - 1$, $j = 1, 2, \dots, nt$.
- **Paso 1** Tomamos, $h = \frac{L}{nx}$; $k = \frac{T}{nt}$; $\lambda = \frac{\alpha^2 k}{h^2}$.
- **Paso 2** Para $i = 1, 2, \dots, nx - 1$ tomar $U_{i,0} = f(ih)$ (Condición inicial).
- **Paso 3** Para $j = 1, 2, \dots, nt$ hacer los pasos 4 - 6:
 - **Paso 4** Tomar $t = jk$.
 - **Paso 5** Resolver el sistema tridiagonal $Az = u^{j-1}$.
 - **Paso 6** Para $i = 1, 2, \dots, nx - 1$ tomar $U_{i,j} = z_i$.
- **Paso 8** Parar. SALIDA x, t, U

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t), \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0, \\ u(a, t) = C1(t), u(b, t) = C2(t), t > 0; \quad u(x, 0) = f(x), x \in [a, b]$$

```
function U = impcalor1(funcionCC1, funcionCC2, funcionCI, x0, xf, nx, Tmax, nt, alfa)
h = (xf - x0)/nx;
x = x0 : h : xf;
k = Tmax/nt;
t = 0 : k : Tmax;
U = zeros(nx + 1, nt + 1);
U(1, :) = feval(funcionCC1, t);
U(end, :) = feval(funcionCC2, t);
U(:, 1) = feval(funcionCI, x);
lambda = alfa^2 * k/h^2;
dp = (1 + 2 * lambda) * ones(nx - 1, 1);
ds = -lambda * ones(nx - 2, 1);
di = ds;
for j = 2 : nt + 1
    d = U(2 : nx, j - 1);
    d(1) = d(1) + lambda * U(1, j - 1);
    d(end) = d(end) + lambda * U(nx + 1, j - 1);
    z = Crout(dp, ds, di, d);
    U(2 : nx, j) = z;
end
```

Ejemplo

$$\begin{aligned}u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \\u(0, t) = u(1, t) &= 0, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = \sin \pi x, \quad x \in [0, 1]\end{aligned}$$

Solución exacta: $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$

Buscamos la solución aproximada en $T_{max} = 0.5$ mediante el método implícito con:

(a) $h = 0.1$, $k = 0.01$.

x_i	$u_{i,50}$	$u(x_i, 0.5)$	$ u(x_i, 0.5) - u_{i,50} $
0.0	0	0	-
0.1	0.002898	0.002222	6.76e-4
0.2	0.005512	0.004227	1.29e-3
0.3	0.007587	0.005818	1.77e-3
0.4	0.008919	0.006840	2.10e-3
0.5	0.009378	0.007192	2.19e-3
0.6	0.008919	0.006840	2.10e-3
0.7	0.007587	0.005818	1.77e-3
0.8	0.005512	0.004227	1.29e-3
0.9	0.002898	0.002222	6.76e-4
1.0	0	0	-

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, t > 0; \quad u(x, 0) = f(x), x \in [0, L]$$

¿Cómo aumentar el orden de convergencia?

u_t → Diferencia central

u_{xx} → Diferencia central

Se obtiene

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} - \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = 0,$$

Orden $O(k^2 + h^2)$, pero:

- El instante t_{j+1} está en función de t_j y de t_{j-1}
- Importantes problemas de estabilidad

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, t > 0; \quad u(x, 0) = f(x), x \in [0, L]$$

El **método de Crank-Nicholson** es un método en diferencias implícito que se obtiene al hacer la **media aritmética** entre el método de diferencia progresiva en el instante t_j

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

y el método de diferencia regresiva en el instante t_{j+1}

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} = 0$$

obteniendo la expresión en diferencias

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \frac{\alpha^2}{2} \left[\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} \right] = 0$$

para $i = 1, 2, \dots, nx - 1$ y $j = 0, 1, \dots, nt - 1$

Llamando $\lambda = \frac{k\alpha^2}{h^2}$ y llevando las variables correspondientes a instantes más altos a la izquierda, obtenemos el método implícito

$$(1 + \lambda)u_{i,j+1} - \frac{\lambda}{2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = (1 - \lambda)u_{i,j} + \frac{\lambda}{2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j})$$

para $i = 1, 2, \dots, nx - 1$ y $j = 0, 1, \dots, nt - 1$

Fijando el índice j y escribiendo todas las ecuaciones para $i = 1, 2, \dots, nx - 1$ obtenemos la expresión matricial del método

$$Au^{(j+1)} = Bu^{(j)}, \quad j = 0, 1, \dots, nt - 1,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & -\lambda/2 & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda/2 & 1 + \lambda & -\lambda/2 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda/2 & 1 + \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 + \lambda \end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix}, \quad u^{(0)} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{nx-1}) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda/2 & 1-\lambda & \lambda/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda/2 & 1-\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda & \lambda/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda/2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

siendo tanto la matriz A como B tridiagonales.

Para encontrar la solución en el instante t_{j+1} resuelvo el sistema lineal en el que A es la matriz de coeficientes y $Bu^{(j)}$ los términos independientes.

Las características del método son:

- No necesita condiciones de convergencia
- El orden de convergencia es $O(k^2 + h^2)$

Algoritmo del método de Crank-Nicholson

- Definir los elementos $h = \frac{L}{nx}$, $k = \frac{T}{nt}$, $\lambda = \frac{\alpha^2 k}{h^2}$
- Construimos la matriz B de tamaño $nx - 1$:
$$dp = (1 - \lambda)ones(nx - 1, 1)$$
$$dps = (\lambda/2)ones(nx - 2, 1)$$
$$B = diag(dp) + diag(dps, 1) + diag(dps, -1)$$
- Solución en el instante inicial t_0
$$u^{(0)} = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{nx-1}))^T$$
- Construcción de los vectores de la matriz A :
$$a = (1 + \lambda)ones(nx - 1, 1)$$
$$b = (-\lambda/2)ones(nx - 2, 1)$$
$$c = b$$
- Para $j = 0, 1, 2, \dots, nt - 1$
$$d = Bu^{(j)}$$
$$u^{(j+1)} = Crout(a, b, c, d)$$

↑
aproximación de la solución $u(x, t)$ en los puntos
 $(x_1, t_{j+1}), (x_2, t_{j+1}), \dots, (x_{nx-1}, t_{j+1})$

Ejemplo

$$\begin{aligned}u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \\u(0, t) = u(1, t) &= 0, t > 0; \quad u(x, 0) = \sin \pi x, x \in [0, 1]\end{aligned}$$

Solución exacta: $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$

Buscamos la solución aproximada en $T_{max} = 0.5$ mediante el método de Crank-Nicholson con:

(a) $h = 0.1$, $k = 0.01$.

x_i	$u_{i,50}$	$u(x_i, 0.5)$	$ u(x_i, 0.5) - u_{i,50} $
0.0	0	0	-
0.1	0.002305	0.002222	8.27e-5
0.2	0.004385	0.004227	1.57e-4
0.3	0.006035	0.005818	2.17e-4
0.4	0.007094	0.006840	2.55e-4
0.5	0.007495	0.007192	2.68e-4
0.6	0.007094	0.006840	2.55e-4
0.7	0.006035	0.005818	2.17e-4
0.8	0.004385	0.004227	1.57e-4
0.9	0.002305	0.002222	8.27e-5
1.0	0	0	-

- Llamamos **términos de difusión** de la EDP a los de segundo orden.
 - Un caso especial de ecuación de difusión es cuando todos los coeficientes de los términos de difusión son iguales a 1. Así llegamos a la ecuación del calor en forma multidimensional,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

que analizaremos tanto en coordenadas cartesianas como en polares.

- Si los términos de difusión son nulos obtenemos una ecuación hiperbólica de primer orden de convección.
- Llamamos **términos de convección** de la EDP a los de primer orden.
 - Si los términos de convección son nulos llegamos a una ecuación de difusión.
- Un caso especial de ecuaciones es el llamado de **convección-difusión**. Un ejemplo típico unidimensional es

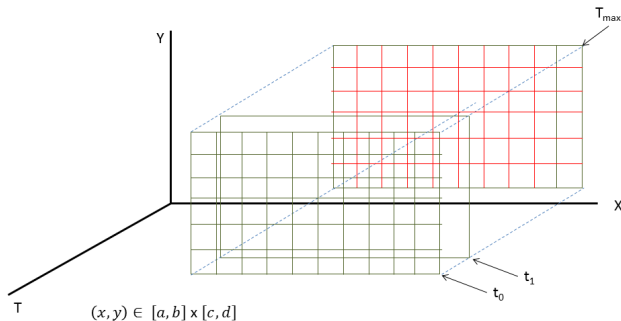
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, t)u.$$

Ejemplo

$$u_t(x, y, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, y, t) + \beta^2 u_{yy}(x, y, t), \quad (x, y) \in R = [a, b] \times [c, d], \quad t \geq 0$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y),$$

$$u(a, y, t) = h1(y, t), \quad u(b, y, t) = h2(y, t), \quad u(x, c, t) = h3(x, t), \quad u(x, d, t) = h4(x, t).$$



$$h = \frac{b-a}{nx} \quad k = \frac{d-c}{ny} \quad p = \frac{Tmax}{nt}$$

$$u_t(x, y, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, y, t) + \beta^2 u_{yy}(x, y, t), \quad (x, y) \in R = [a, b] \times [c, d], \quad t \geq 0$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y),$$

$$u(a, y, t) = h1(y, t) \quad u(b, y, t) = h2(y, t), u(x, c, t) = h3(x, t), u(x, d, t) = h4(x, t).$$

Diferencias progresivas en u_t y centrales en u_{xx} y u_{yy}

- Transformación del problema

$$\begin{aligned} \frac{u(x, y, t + p) - u(x, y, t)}{p} &= \alpha^2 \frac{u(x + h, y, t) - 2u(x, y, t) + u(x - h, y, t)}{h^2} \\ &\quad + \beta^2 \frac{u(x, y + k, t) - 2u(x, y, t) + u(x, y - k, t)}{k^2}, \end{aligned}$$

- Discretización del problema Evaluando la expresión anterior en los puntos (x_i, y_j, t_l) , $i = 1, 2, \dots, nx - 1$, $j = 1, 2, \dots, ny - 1$, $l = 0, 1, \dots, nt - 1$, $u(x_i, y_j, t_l) = u_{i,j,l}$

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j,l+1} - u_{i,j,l}}{p} &= \alpha^2 \frac{u_{i+1,j,l} - 2u_{i,j,l} + u_{i-1,j,l}}{h^2} + \beta^2 \frac{u_{i,j+1,l} - 2u_{i,j,l} + u_{i,j-1,l}}{k^2}, \\ i &= 1, 2, \dots, nx - 1, j = 1, 2, \dots, ny - 1, l = 0, 1, \dots, nt - 1. \end{aligned}$$

Llamando $\lambda = \frac{\alpha^2 p}{h^2}$, $\mu = \frac{\beta^2 p}{k^2}$ y despejando las incógnitas del instante mayor

$$u_{i,j,l+1} = (1 - 2\lambda - 2\mu)u_{i,j,l} + \lambda(u_{i+1,j,l} + u_{i-1,j,l}) + \mu(u_{i,j+1,l} + u_{i,j-1,l}),$$
$$i = 1, 2, \dots, nx - 1, j = 1, 2, \dots, ny - 1, l = 0, 1, \dots, nt - 1.$$

Implementación: Matrices tridimensionales en Matlab

```
U=zeros(nx+1,ny+1,nt+1);
```

```
function [U]=expcalor3D(CC1x,CC2x,CC1y,CC2y,CI1,a,b,nx,c,d,ny,Tmax,nt,alfa,beta)

hx=(b-a)/nx;    x=a:hx:b;
hy=(b-a)/ny;    y=c:hy:d;
k=Tmax/nt;      t=0:k:Tmax;

U=zeros(nx+1,ny+1,nt+1);

for j=1:ny+1
    for l=1:nt+1
        U(1,j,l)=feval(funcionCC1x,y(j),t(l));
        U(nx+1,j,l)=feval(funcionCC2x,y(j),t(l));
    end
end

for j=1:nx+1
    for l=1:nt+1
        U(j,1,l)=feval(funcionCC1y,x(j),t(l));
        U(j,ny+1,l)=feval(funcionCC2y,x(j),t(l));
    end
end
```

```
for i=1:nx+1
    for j=1:ny+1
        U(i,j,1)=feval(funcionCI1,x(i),y(j));
    end
end

lambda=k*alfa/hx^2;

mu=k*beta/hy^2;

for l=1:nt

    U(2:nx,2:ny,l+1)=(1-2*lambda-2*mu)*U(2:nx,2:ny,l)...
        +lambda*(U(3:nx+1,2:ny,l)+U(1:nx-1,2:ny,l))+...
        mu*(U(2:nx,3:ny+1,l)+U(2:nx,1:ny-1,l));

end
```

Ejemplo

$$u_t(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t), \quad (x, y) \in R = [0, 1] \times [0, 1], \quad t \geq 0$$

$$u(x, y, 0) = \sin(\pi(x + y)),$$

$$u(a, y, t) = \exp(-2\pi^2 t) \sin(\pi y), \quad u(b, y, t) = \exp(-2\pi^2 t) \sin(\pi(1 + y)),$$

$$u(x, c, t) = \exp(-2\pi^2 t) \sin(\pi x), \quad u(x, d, t) = \exp(-2\pi^2 t) \sin(\pi(1 + x)).$$

Resolvemos el problema para $nx = ny = 5$, $nt = 100$, $Tmax = 1$ con el método explícito:

```
>> [U] = expcalor3D(@(y,t) exp(-2*pi^2*t).*sin(pi*y),...  
  @(y,t) exp(-2*pi^2*t).*sin(pi*(1+y)),...  
  @(x,t) exp(-2*pi^2*t).*sin(pi*x),...  
  @(x,t) exp(-2*pi^2*t).*sin(pi*(1+x)),...  
  @(x,y) sin(pi*(x+y)),0,1,5,0,1,5,1,100,1,1);
```


Solución en el último instante:

1.0e-08 *

0	0.1572	0.2544	0.2544	0.1572	0.0000
0.1572	0.2437	0.2429	0.1515	0	-0.1572
0.2544	0.2429	0.1480	-0.0000	-0.1515	-0.2544
0.2544	0.1515	-0.0000	-0.1480	-0.2429	-0.2544
0.1572	0.0000	-0.1515	-0.2429	-0.2437	-0.1572
0.0000	-0.1572	-0.2544	-0.2544	-0.1572	-0.0000

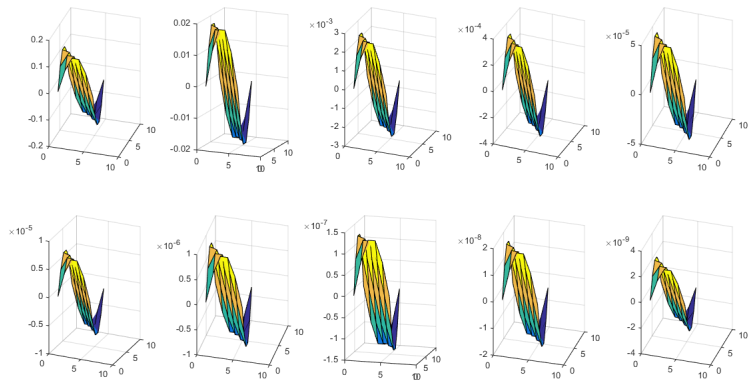
```
for i=1:nx+1
    for j=1:ny+1
        solex(i,j)=exp(-2*pi^2*Tmax)*sin(pi*(x(i)+y(j)));
    end
end
error = abs(solex-U(:, :, end))
```

Error exacto en el último instante:

```
error =
    1.0e-09 *
```

0	0	0	0	0	0
0	0.1069	0.1152	0.0578	0.0000	0
0	0.1152	0.0928	0.0000	0.0578	0
0	0.0578	0.0000	0.0928	0.1152	0
0	0.0000	0.0578	0.1152	0.1069	0
0	0	0	0	0	0

Ecuación parabólica bidimensional



Supongamos $\alpha^2 = 1$ y $\beta^2 = 1$,

$$u_t(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t),$$

y un recinto circular, por ejemplo $x^2 + y^2 = \rho^2$. Lo mejor es transformar la EDP a coordenadas polares $r \in [0, \rho]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, teniendo en cuenta la relación entre sendos sistemas de coordenadas:

$$x = r \cos(\theta),$$

$$y = r \sin(\theta).$$

Aplicando la regla de la cadena,

$$u_r = u_x x_r + u_y y_r = u_x \cos(\theta) + u_y \sin(\theta),$$

$$u_\theta = u_x x_\theta + u_y y_\theta = u_x r \sin(\theta) + u_y r \cos(\theta).$$

Partiendo de la relación

$$\begin{aligned}u_r &= u_x x_r + u_y y_r = u_x \cos(\theta) + u_y \sin(\theta), \\u_\theta &= u_x x_\theta + u_y y_\theta = -u_x r \sin(\theta) + u_y r \cos(\theta).\end{aligned}$$

se deduce por reducción,

$$\begin{aligned}u_x &= u_r \cos(\theta) - \frac{1}{r} u_\theta \sin(\theta), \\u_y &= u_r \sin(\theta) + \frac{1}{r} u_\theta \cos(\theta).\end{aligned}$$

Derivando una segunda vez y reduciendo:

$$\begin{aligned}u_{xx} &= \cos(\theta) \frac{\partial u_x}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin(\theta) \frac{\partial u_x}{\partial \theta}, \\u_{yy} &= \sin(\theta) \frac{\partial u_y}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos(\theta) \frac{\partial u_y}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

Partimos de la relación:

$$\begin{aligned}u_{xx} &= \cos(\theta) \frac{\partial u_x}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin(\theta) \frac{\partial u_x}{\partial \theta}, \\u_{yy} &= \sin(\theta) \frac{\partial u_y}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos(\theta) \frac{\partial u_y}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

calculamos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_x}{\partial r} &= \cos(\theta) u_{rr} + \frac{1}{r^2} \sin(\theta) u_{\theta}, \\ \frac{\partial u_x}{\partial \theta} &= -\sin(\theta) u_r - \frac{1}{r} \cos(\theta) u_{\theta} - \frac{1}{r} \sin(\theta) u_{\theta\theta}, \\ \frac{\partial u_y}{\partial r} &= \sin(\theta) u_{rr} - \frac{1}{r^2} \cos(\theta) u_{\theta}, \\ \frac{\partial u_y}{\partial \theta} &= \cos(\theta) u_r - \frac{1}{r} \sin(\theta) u_{\theta} + \frac{1}{r} \cos(\theta) u_{\theta\theta}\end{aligned}$$

y de este modo

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}, \quad r \in [0, \rho], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Veamos cómo aplicamos el método explícito de diferencias finitas a la ecuación de convección-difusión:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, t)u, \quad x \in [a, b], \quad t > 0.$$

Diferencias progresivas en u_t y centrales en u_x y u_{xx}

- **Transformación y discretización del problema** Evaluando la expresión anterior en los puntos (x_i, t_j) , $i = 1, 2, \dots, nx - 1$, $j = 0, 1, \dots, nt - 1$, $u(x_i, t_j) = u_{i,j}$

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} &= \sigma(x_i, t_j) \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \mu(x_i, t_j) \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \\ &\quad + b(x_i, t_j)u_{i,j}, \quad i = 1, 2, \dots, nx - 1, j = 0, 1, \dots, nt - 1. \end{aligned}$$

- Agrupando términos y despejando las incógnitas del instante mayor:

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= \left(\sigma(x_i, t_j) \frac{k}{h^2} + \mu(x_i, t_j) \frac{k}{2h} \right) u_{i+1,j} + \left(\sigma(x_i, t_j) \frac{k}{h^2} - \mu(x_i, t_j) \frac{k}{2h} \right) u_{i-1,j} \\ &\quad + \left(1 + kb(x_i, t_j) - 2\sigma(x_i, t_j) \frac{k}{h^2} \right) u_{i,j}, \\ &\quad i = 1, 2, \dots, nx - 1, j = 0, 1, \dots, nt - 1. \end{aligned}$$

- **Problema 1** Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 2, \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno e iniciales

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \forall t, \quad u(x, 0) = \sin \pi x + x(1 - x), \quad x \in [0, 1].$$

Sabiendo que la solución exacta es

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x + x(1 - x),$$

se pide:

- Aproxima, mediante el método explícito, la solución del problema en el instante $T = 1$, tomando (a) $h = 0.1$, $k = 0.05$; (b) $nx = 10$ $nt = 10000$. Determina el error exacto y representa dicho error.
- Aproxima, mediante el método de Crank-Nicholson, la solución del problema en el instante $T = 1$, tomando $h = 0.1$, $k = 0.05$. Escribe en una tabla los resultados, y el error en cada caso, para los instantes $t = 0.4$, $t = 0.8$ y $T = 1$. Representa la solución en los tres instantes

- **Problema 2** Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) - t^2 u(x, t) = x \cos xt, \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno e iniciales

$$u_x(0, t) = t, \quad u(1, t) = \sin t, \quad \forall t, \quad u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1].$$

- Describe los métodos explícito e implícito de orden $O(k + h^2)$, utilizando nx subintervalos en $[0, 1]$ y nt subintervalos en $[0, T]$, siendo T el instante máximo en el que pretendemos aproximar la solución.
- A partir de los esquemas anteriores, determina la solución aproximada del problema en el instante $T = 1$, tomando 10 subintervalos en el eje espacial y 100 en el eje temporal. Representa, para cada método, la solución en los instantes $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$.
- Sabiendo que la solución exacta es $u(x, t) = \sin xt$, calcula el error máximo cometido en cada uno de los instantes anteriores.
- ¿Es posible aplicar el método de Crank-Nicholson a este problema? En caso afirmativo, describe el esquema en diferencias que obtendríamos.



S LARSSON, V THOMÉE, *Partial differential equations with numerical methods*, Springer, Berlin, 2016.



T. MYINT-U, L. DEBNATH, *Partial differential equations for Scientist and engineers*, Ed. North-Holland, New York, 1987.



R. BURDEN, J. FAIRES, *Análisis Numérico*, Ed. Thompson, 2002.



S.C. CHAPRA, R.P. CANALE, *Métodos numméricos para ingenieros*, Ed. McGraw-Hill, México D.F., 2006.



L. LAPIDUS, G. PINDER, *Numerical solution of partial differential equations in science and engineering*, Ed. Wiley Interscience Publication, New York, 1999.



A. CORDERO, J.L. HUESO, E. MARTÍNEZ, J.R. TORREGROSA, *Problemas resueltos de métodos numéricos*, Ed. Thompson, 2006.



J. MATHEWS, K. FINK, *Métodos Numéricos con Matlab*, Ed. Prentice-Hall, 1999.