

Conceptos generales de modelado matemático y simulación

[1.1] ¿Cómo estudiar este tema?

[1.2] Modelo matemático: definición

[1.3] Principios de modelado matemático. Conceptos relacionados

[1.4] Aplicaciones del modelado matemático

[1.5] Simulación: definición

[1.6] Características y conceptos relacionados

[1.7] Aplicaciones de la simulación

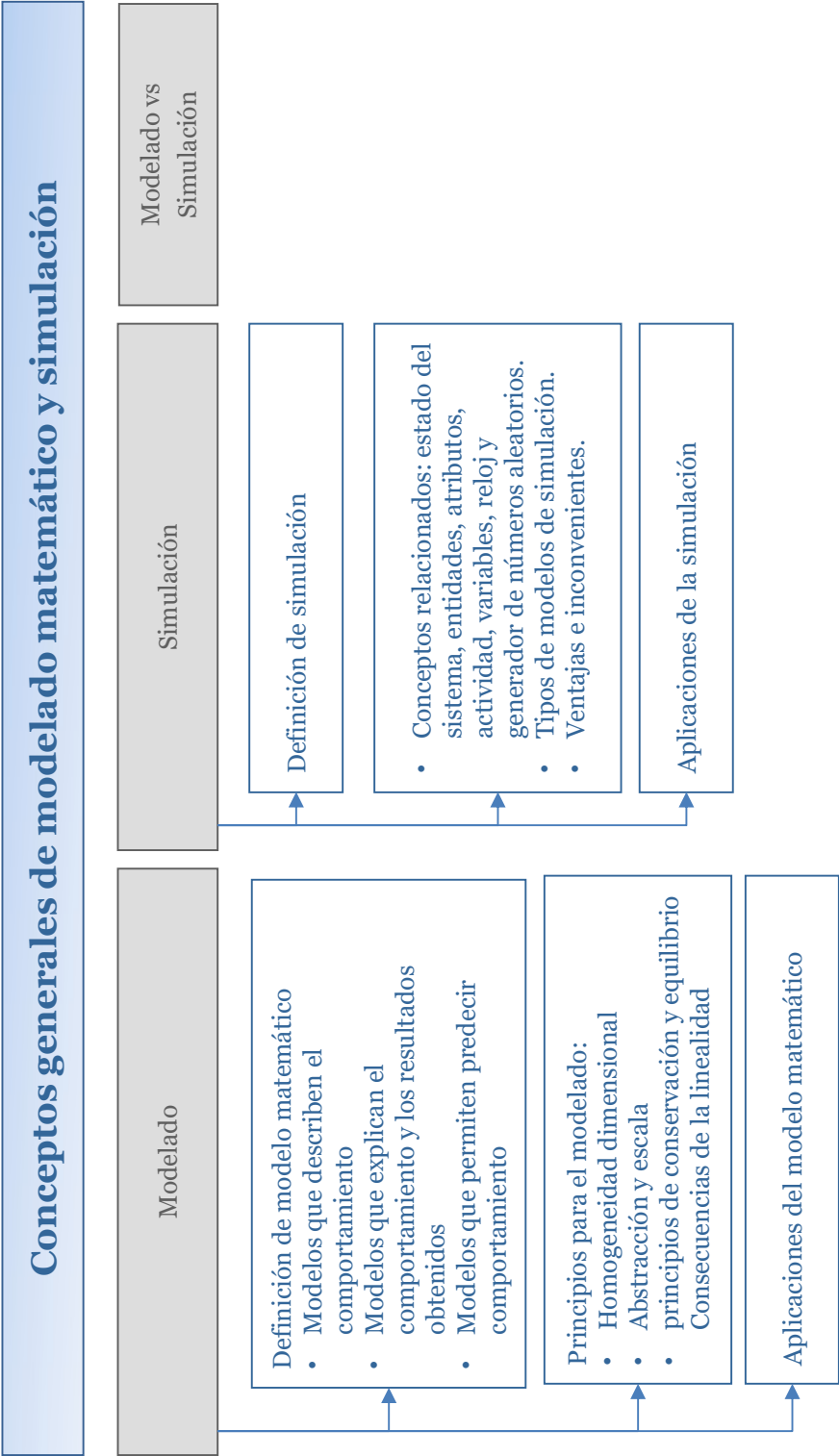
[1.8] Modelado vs. Simulación

[1.9] Referencias bibliográficas

1

T E M A

Esquema



Ideas clave

1.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación. Además, deberás leer el siguiente artículo:

» Blomhøj, M. (2008). Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica. *Revista de Educación Matemática*, 23(2).

Disponible en el aula virtual en virtud del artículo 32.4 de la Ley de Propiedad Intelectual.

El modelado matemático y la simulación son herramientas esenciales para el estudio y el análisis de sistemas físicos.

Es preciso conocer no solo lo que realmente significan y representan, sino su potencial y aplicaciones de cara a la resolución de problemas del ámbito científico y de la ingeniería.

Ambos conforman una serie de métodos y herramientas que permiten representar de manera formal sistemas físicos sobre situaciones reales, estudiar su comportamiento y verificar los diseños y analizar los distintos estados por los que pasa mediante la definición de escenarios de funcionamiento, por medio de modelos de simulación.

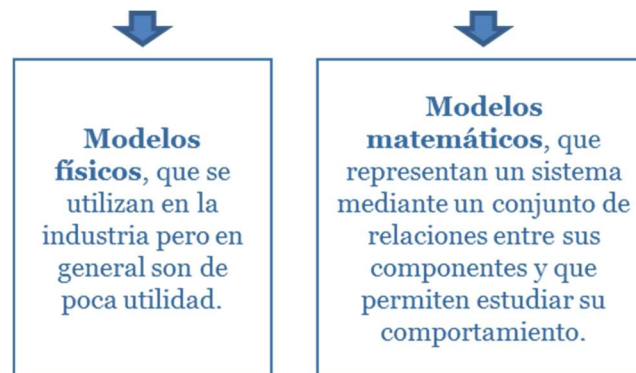
En este tema estudiaremos:

- » Concepto de modelo, sistema y estado.
- » Modelos matemáticos y su clasificación.
- » Modelos de simulación y sus características.
- » Relación entre modelo matemático y simulación.

1.2. Modelo matemático: definición

Un modelo es una representación de un sistema que se construye con el propósito de estudiarlo y un sistema es una colección de entes que actúan para conseguir un objetivo. El estado de un sistema está determinado por el conjunto de variables, conocidas como variables de estado, que se necesitan para describirlo.

Los modelos se clasifican en:



Según la Enciclopedia Matemática (Vinogradov, 1977) se entiende por modelo matemático se entiende la descripción aproximada de una clase de fenómenos del mundo exterior, expresada con ayuda de simbolismos matemáticos.

Sin embargo, de una manera formal, se puede decir que **un modelo matemático es una ecuación o conjunto de ecuaciones matemáticas que dan solución a un problema específico que en muchos casos es la idealización de un problema físico real planteado para ser resuelto.**

La modelización matemática es un método poderoso que permite conocer la esencia de los fenómenos mediante el análisis de los modelos.

Para simplificar el problema se plantean algunos supuestos para a partir de los mismos, determinar de forma progresiva las ecuaciones que conforman el modelo.

Los modelos matemáticos se pueden clasificar de acuerdo con los objetivos que se persiguen y que se enumeran a continuación:

- | | |
|---|---|
| 1 | Modelos que describen el comportamiento o los resultados obtenidos. |
| 2 | Modelos que dan una explicación al comportamiento y los resultados obtenidos. |
| 3 | Modelos que permiten predecir comportamiento futuros o resultados desconocidos. |

Los modelos matemáticos sirven no solo para estudiar el comportamiento de un sistema, sino que su potencia permite así mismo que se pueden utilizar para predecirlo.

Este método cuenta con las ventajas de los desarrollos teóricos y de la experimentación. El modelo matemático se abstrae del fenómeno en sí, pero permite, sin embargo, el estudio de las propiedades del sistema o fenómeno y su evolución, desde un punto de vista teórico.

Por otro lado, la capacidad de experimentación que proporcionan los algoritmos numéricos junto con la potencia de cálculo de los ordenadores, permite la verificación de las propiedades.

La aplicación de la modelación matemática consiste en reemplazar el objeto de estudio real por su imagen o modelo matemático. Este modelo se implementa mediante algoritmos lógico – numéricos en un ordenador lo que permite el estudio de las características del proceso original.

1.3. Principios de modelado matemático. Conceptos relacionados

Modelización matemática

Está basada en una serie de principios y usa un conjunto de métodos que permiten crear modelos de manera eficiente. Sin embargo, estos principios, no imponen restricciones lo suficientemente fuertes como para limitar los modelos en forma y cantidad.

Los modelos que se generan dependen no solo de los objetivos del que modela sino de la visión de la realidad que le interesa analizar, o lo que es lo mismo, de las asunciones que establezca sobre el sistema.

Principios matemáticos: homogeneidad dimensional, abstracción y escala, principios de conservación y equilibrio, y consecuencias de la linealidad.

Cada uno de los principios enumerados deben asegurar que:

- » Todas las ecuaciones sean dimensionalmente homogéneas y consistentes.
- » El nivel de detalle del problema y los aspectos representados son suficientes para el problema que se pretende tratar. Es necesario desarrollar una capacidad de abstracción que permite identificar las características esenciales del sistema o fenómeno que se representa.
- » La escala que se utiliza es adecuada para el modelo en relación con la realidad que se va a representar.
- » Las propiedades fundamentales del sistema y su equilibrio se conservan durante la aplicación del modelo.
- » La linealidad se aplica siempre que es posible en sistemas que son estimulados por entradas complejas y cuya respuesta se obtiene a partir de la superposición de los resultados obtenidos para cada entrada individual. Esto se denomina principio de superposición. Además para los sistemas no lineales, se pueden usar aproximaciones lineales que permitan aplicar los métodos de resolución aplicables los sistemas lineales.

Las acciones o etapas que se deben de usar para el desarrollo del modelo que cumpla los principios y de lugar a un modelo eficiente que represente el objeto real y del que se obtengan los resultados previstos, están básicamente **orientadas al procesamiento de la información con la que se cuenta y el análisis de los que se pretende obtener** y se podrían enumerar de forma breve como sigue (Carson y Cobelli, 2001):

- » Identificación del modelo que se necesita.
- » Especificación de la información o los datos que se pretenden obtener.
- » Identificación de la información o los datos disponibles.
- » Identificación del punto de partida y el entorno original.
- » Identificación de los principios físicos sobre los que se fundamenta el modelo.
- » Identificación de las ecuaciones que se van a utilizar, qué cálculos se van a llevar a cabo y que resultado se pretende obtener.
- » Identificación de las pruebas se deben de realizar para la validación del modelo, de acuerdo con las asunciones iniciales y principios en los que se fundamenta.
- » Identificación de las pruebas se deben de realizar para la verificación del modelo.
- » Identificación de las mejoras o cambios en los parámetros que se pueden realizar en el modelo.
- » Especificación de la forma en la que va a ser usado el modelo.

1.4. Aplicaciones del modelado matemático

El modelado matemático, como ya se ha mencionado, cuenta con la capacidad de análisis teórico y de experimentación, lo que hace que constituya una base fundamental de la ciencia y la ingeniería.

Es en las distintas disciplinas científicas como la mecánica y la física, entre otras, donde se aplica de forma más relevante. De hecho, se considera que estas disciplinas pueden ser vistas como un conjunto ordenado de modelos matemáticos que se acompañan de un fundamento teórico sobre el nivel de veracidad con que estos modelos reflejan la realidad (Domínguez, 2010).

No solamente es aplicable en estos contextos, sino que en la actualidad es clave en el como el medio ambiente y la industria. Su contribución para la representación de la realidad y la resolución de problemas complejos hace que su uso se extiende a distintas áreas gracias al avance de la computación científica.

Esto permite enunciar que a través de los modelos matemáticos las disciplinas científicas interactúan con la matemática. En esencia es esto lo que reflejan la opinión de Kant cuando enuncia que «el estudio de la naturaleza contendrá ciencia en sentido propio solo en la medida en que pueda aplicar las matemáticas».

1.5. Simulación: definición

La simulación es una herramienta muy potente para la resolución de problemas. La técnica se basa en el análisis de sistemas físicos probabilísticos y en la técnica estadística de selección de muestras.

Según Shannon, «La simulación es el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y llevar a término experiencias con él, con la finalidad de comprender el comportamiento del sistema o evaluar nuevas estrategias – dentro de los límites impuestos por un cierto criterio o un conjunto de ellos –para el funcionamiento del sistema». (Shannon & Johannes, 1976).

La simulación fundamentalmente **es una herramienta que permite realizar el diseño y las operaciones de sistemas de procesos complejos.** La solución que se obtiene no es exacta pero se consiguen aproximaciones bastantes buenas.

Los orígenes de la simulación están ligados al proyecto Montecarlo desarrollado en el laboratorio de Los Álamos en el año 1940 por Stan Ulam y John Von Neumann, en el que **investigaban el movimiento aleatorio de los neutrones para la generación de la bomba atómica.**

Para el desarrollo de un modelo de simulación se usan un conjunto de técnicas mediante las cuales un ordenador puede imitar el comportamiento de sistemas del mundo real y para ello se debe de partir de unas hipótesis que se formulan de manera formal.

Para el desarrollo de un modelo de simulación **se usan un conjunto de técnicas mediante las cuales un ordenador puede imitar el comportamiento de sistemas del mundo real** y para ello se debe de partir de unas hipótesis que se formulan de manera formal.

1.6. Características y conceptos relacionados

Para la simulación se **necesita contar con un modelo real del sistema sobre el que se van a generar una serie de sucesos que permiten evaluar numéricamente el modelo y analizar los datos obtenidos** para poder hacer una estimación de las características del sistema y si es posible mejorar las condiciones operativas relevantes del sistema.

Los conceptos que se deben tener en cuenta para poder llevar a cabo la simulación y poder llevar a cabo la evaluación del sistema son, entre otros (García-Dunna, 2012):

- » **Estado del sistema** en un instante de tiempo, es la descripción de cada uno de los elementos, atributos y actividades en dicho instante.
- » **Entidades** que son los elementos que hacen que cambie el estado del sistema, es decir, representan los datos o flujos de entrada. Por ejemplo, pueden ser los clientes esperando en la cola o los artículos que llegan a un inventario.
- » **Atributos** que representan las propiedades de los elementos o entidades del sistema. Sirven, entre otras cosas, para diferenciar entidades sin necesidad de crear entidades nuevas.
- » **Actividad o evento** es cualquier proceso que provoca un cambio en el sistema, como puede ser la salida de un cliente o la finalización de un trabajo.
- » **Variables** de estado que son condiciones que se establecen y modifican mediante ecuaciones matemáticas. Son útiles para determinar características del sistema o como contadores. Pueden existir variables que tomen valores continuos o valores discretos.
- » **Reloj** o valor actual del tiempo simulado. Gracias al reloj se puede conocer el tiempo de uso del modelo de simulación o establecer la duración de la simulación. Existen dos tipos de relojes:
 - Absoluto, que parte de cero y acaba en el tiempo total de la simulación
 - Relativo, que solo mide el tiempo entre dos acciones o eventos.
- » **Generador de números aleatorios.**

Por ejemplo, estado de un consultorio médico en un instante se define mediante el número de médicos presentes en ese instante, el número de pacientes que permanecen en el consultorio, el instante de llegada de cada paciente y el tipo de operación que desea realizar cada uno.

Tipos de modelos de simulación

Los modelos de simulación se pueden **clasificar según distintos criterios**:

- » Por el **tipo de ecuaciones matemáticas que los constituyen**:
 - **Continuos**, en los que las variables cambian de forma continua para lo que se utilizan ecuaciones diferenciales que permiten conocer los valores de las variables y sus cambios en un instante de tiempo.
 - **Discretos**, en los que los cambios en las variables se representan por ecuaciones que pueden evaluarse en un punto y en los que las variables cambian de instante en instante de tiempo.
- » Por los **cambios de las variables**:
 - **Estáticos**, en los que las variables de estado no cambian con respecto al tiempo, lo que hace que la representación del tiempo no sea relevante para la descripción del sistema.
 - **Dinámicos**, en los que algunas de las variables cambian con respecto al tiempo.
- » Por el **carácter aleatorio del comportamiento de sus componentes**:
 - **Deterministas**, en los que el comportamiento del sistema está determinado tras definirse las condiciones iniciales y la relación entre sus componentes.
 - **Estocásticos**, en los que algunos de sus componentes se comporta de forma aleatoria. El sistema se estudiará según las probabilidades asociadas que determinan las respuestas del sistema.

Ejemplo de modelo de simulación

Una agencia de banco que cuenta con cajas de seguridad. Los clientes esperan en una sala tras su identificación hasta que un empleado les da acceso a su caja. En el sistema hay que considerar los clientes que se encuentran en la sala de espera y los clientes que acceden a las cajas, que serán como máximo dos de forma simultánea, dado que solo se cuenta con dos salas privadas. Atiende operaciones de caja para los clientes. Un taller recibe ciertas piezas, mismas que son acumuladas en un almacén temporal en donde esperan a ser procesadas.

- » **Sistema:** en este caso, el sistema está conformado por el conjunto de elementos interrelacionados para el funcionamiento del proceso: los clientes, la sala de espera, el empleado y las salas privadas.
- » **Entidades:** en este modelo los clientes son los que representa los flujos de entradas, luego son las únicas entidades identificadas.
- » **Estado del sistema:** estará representado en cada instante por el número de clientes en la sala de espera, los clientes que se dirigen o están en las salas privadas y los que ya han pasado por ellas, es decir, ya han sido atendidos. Otros datos de interés pueden ser los tiempos de media de espera en la sala de espera, los tiempos medios de permanencia en las salas privadas, o las previsiones de llegadas o de cantidad de tiempo en el que el sistema permanece vacío.
- » **Eventos:** los eventos o actividades son la terminación del servicio en la sala privada, el tiempo de descanso del empleado o el tiempo que se tarda en el relevo y eventos futuros como la llegada de clientes.
- » **Atributos:** por ejemplo, el número de identificación del cliente, el tipo de caja de seguridad contratada que puede dar lugar a que sea dirigido a una u otra sala privada.
- » **Variables:** El número de clientes en la sala de espera y el número de clientes atendidos en las salas privadas.
- » **Reloj de la simulación:** En cada momento, se puede conocer el tiempo que lleva ejecutándose la simulación mediante el reloj de simulación. El reloj continuará avanzando hasta que se acabe el tiempo previsto de duración de la simulación o hasta que se cumpla una condición de terminación como por ejemplo, un número máximo de clientes.

Ventajas e inconvenientes de los modelos de simulación

Dentro de **las ventajas más comunes** que ofrece la simulación se pueden citar las siguientes:

- » Método directo y flexible.
- » Permite el análisis del comportamiento de un sistema bajo diferentes escenarios, lo que posibilita un mejor conocimiento del mismo.
- » Permite determinar el impacto de los cambios en un sistema antes de que sean implantados.
- » Permite probar condiciones extremas y experimentar en el sistema, sin riesgo y sin interferir con el sistema real.

- » Permite estudiar la interacción entre las variables del sistema y establecer restricciones o cambios en el tiempo de los procesos o actividades.
- » Permite resolver problemas que no tienen solución analítica y en ese caso obtener aproximaciones buenas a los resultados de esos sistemas de gran complejidad. Sirve de soporte para la toma de decisiones.
- » En la actualidad existen muchos paquetes de software para simulación y cada vez son más intuitivos lo que facilita su uso y aplicación. Además, las herramientas de visualización de muchos paquetes permiten ver de forma gráfica y explícita el comportamiento del sistema.
- » Es más económico realizar simulaciones que cambios en los procesos reales.

También existen **algunos inconvenientes** en el uso de la simulación que se deben tener en cuenta:

- » El número de variables que se necesitan para que sea complicado la realización de buenas simulaciones de sistemas complejos.
- » La simulación no es una herramienta de optimización y por tanto no genera soluciones óptimas globales. Esto a su vez, hace que la simulación de sistemas sencillos que podrían haber sido resueltos de forma analítica sea excesivamente costosa y no necesaria.
- » No proporciona las decisiones que se deben tomar sino que resuelve el problema mediante aproximación para unas determinadas condiciones.
- » En cada simulación interviene el azar por lo que dos simulaciones sucesivas no son iguales, es decir, cada simulación es única.
- » Se requiere bastante tiempo para realizar un buen modelo de simulación además de ser imprescindible que el analista conozca y sepa utilizar el paquete de software de simulación y sepa interpretar y analizar los resultados estadísticamente.

1.7. Aplicaciones de la simulación

Las aplicaciones de la simulación **son múltiples y se realizan en distintos ámbitos**. Desde las simulaciones orientadas a la verificación, validación de sistemas de vuelo, hasta las simulaciones de colas o estados de inventarios. Algunas se enumeran a continuación:

- » Encontrar cuellos de botella en procesos productivos.
- » Establecimiento de condiciones óptimas en plantas industriales.
- » Predicción de demandas energéticas.
- » Predicción de alertas climáticas.
- » Gestión de la congestión en sistemas de transporte.
- » Verificación de la selección de métodos y materiales adecuados para el diseño.
- » Gestión de colas en sistemas informáticos.
- » Gestión de inventarios.

1.8. Modelado vs. Simulación

El modelado y la simulación no son términos que representen técnicas opuestas ni tan siquiera que sean comparables. **El modelado es previo a la simulación.**

Desde un punto de vista semántico, **se pueden establecer ciertas diferencias.**

«Una simulación es un intento por imitar o aproximarse a algo; por su parte, modelar significa construir una representación de algo. La diferencia semántica reside en que un modelo es una representación de estructuras, mientras que una simulación infiere un proceso o interacción entre las estructuras del modelo para crear un patrón de comportamiento». (Steed, 1992, 39).

Según lo mencionado, **la simulación tiene que ver con la obtención de un patrón de comportamiento que evidentemente lleva a obtener una solución.** Para los sistemas, dependiendo de su complejidad, se puede obtener su solución analítica o debido al coste computacional o la imposibilidad de obtenerla, es necesario estudiar el sistema mediante aproximaciones que se obtiene en procesos de simulación.

Luego el proceso de estudio de un sistema se puede representar mediante la siguiente ilustración.

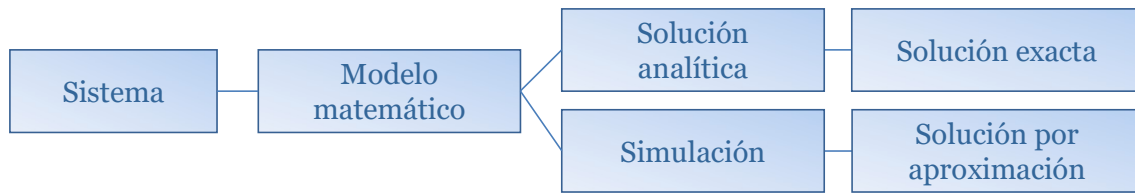


Figura 1. Formas de estudio y análisis de un sistema.

1.9. Referencias bibliográficas

Carson, E, y Cobelli, C. (2001). *Modelling Methodology for Physiology and Medicine*. San Diego: Academic Press.

Dominguez, E. (2010). *Modelación matemática. Una introducción al método*. Recuperado de <http://www.mathmodelling.org>

García-Dunna, E. (2012). *Simulación y análisis de sistemas con promodel*. Massachusetts: Addison-Wesley.

Shannon, R. y Johannes, J. D. (1976). Systems simulation: the art and science. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*. 6(10), 723-724.

Steed, M. (1992). Stella, A Simulation Construction Kit: Cognitive Process and Educational Implications. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 11(1), 39-52.

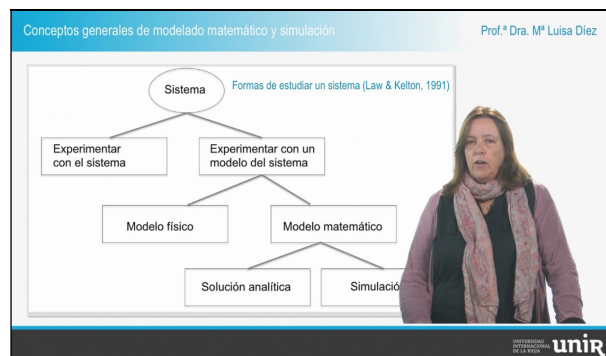
Vinogradov, I. M. (1977). *Matematicheskaya entsiklopediya*. Moscú: Sov. Entsiklopediya.

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

Conceptos generales de modelado matemático y simulación

En este tema pretendemos mostrar el contexto en el que se va a desarrollar la asignatura.



Accede a la lección magistral a través del aula virtual

No dejes de leer...

What Is Mathematical Modeling?

Dym, C. L. (2004). Principles of Mathematical Modeling. San Diego: Elsevier Academic Press.

Leer el capítulo «*What Is Mathematical Modeling*» en el que se presentan los principios del modelado matemático.

Accede al artículo a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:

<http://www.sfu.ca/~vdabbagh/Chap1-modeling.pdf>

Mathematical Modeling of Physical System

Patil, A, y More, S. (2014). Mathematical Modeling of Physical System. *Journal of Electrical and Electronics Engineering*, 9(3), 57-64.

Lee el siguiente artículo sobre el modelado de los sistemas físicos.

Accede al artículo a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:

<http://www.iosrjournals.org/iosr-jeee/Papers/Vol9-issue3/Version-2/H09325764.pdf>

+ Información

Enlaces relacionados

Modelación matemática. Una introducción al método

Página web con apunte, recursos y tutoriales para profundizar en la modelización matemática.

Modelación Matemática - Una Introducción al método

Accede a la página desde el aula virtual o desde la siguiente dirección web:

<http://www.mathmodelling.org>

Página web de Vahid Dabbaghian

Página web del profesor de Department of Mathematics, Simon Fraser University, con publicaciones interesantes.

Vahid Dabbaghian

Accede a la página desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

<http://www.sfu.ca/~vdabbagh/>

Bibliografía

Carson, E, y Cobelli, C. (2001). *Modelling Methodology for Physiology and Medicine*. San Diego: Academic Press.

Domínguez, E. (2010). *Modelación matemática. Una introducción al método*. Recuperado de <http://www.mathmodelling.org>

Dym, C. L. e Ivey, E. S. (1980). *Principles of Mathematical Modeling*, 1st Edition. Nueva York: Academic Press.

Maki, D. P. y Thompson, M. (2006). *Mathematical Modeling and Computer Simulation*. Boston: Thomson Brooks/Cole.

Velten, K. (2009). *Mathematical Modeling and Simulation: Introduction for Scientists and Engineers*. Nueva York: Wiley.

Shannon, R. y Johannes, J. D. (1976). Systems simulation: the art and science. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*. 6(10), 723-724.

Test

1. Un modelo es:
 - A. Un proceso para determinar el comportamiento de un sistema.
 - B. Una representación de estructuras.
 - C. Una forma de predecir el comportamiento de un sistema.
 - D. Todo lo anterior.

2. El principio de linealidad de un modelo matemático:
 - A. Tiene que ver con el proceso que se debe seguir en la simulación.
 - B. Define la relación entre las entidades de un sistema.
 - C. Depende de la estructura de las ecuaciones que lo representan.
 - D. Todo lo anterior.

3. Un modelo matemático:
 - A. Solo se verifica.
 - B. Solo se valida.
 - C. Se verifica y se valida.
 - D. Ninguna de las anteriores.

4. Para la simulación de un sistema se requiere siempre (señale todas las correctas):
 - A. La representación del sistema mediante un modelo matemático.
 - B. Un software que ejecute la simulación.
 - C. Prototipos de los sistemas reales.
 - D. Someter al sistema a situaciones extremas.

5. El reloj del modelo de simulación:
 - A. Solo mide el tiempo en términos absolutos.
 - B. Solo mide el tiempo de forma relativa.
 - C. Funciona siempre hasta que acaba el tiempo predeterminado.
 - D. En ocasiones deja de funcionar si se ha establecido una condición de parada.

- 6.** Las técnicas de simulación (señale todas las correctas):
- A. No soporta la simulación de sistemas complejos.
 - B. La solución de sistemas complejos, en general, se realiza por aproximación.
 - C. Puede ser más costosa de lo deseable para la simulación de sistemas sencillos.
 - D. Ninguna de las anteriores es verdadera.
- 7.** En una simulación, las variables de estado:
- A. Siempre toman valores discretos.
 - B. Al menos una tiene que ser continua.
 - C. Solo toman valores continuos.
 - D. Ninguna de las anteriores es verdadera.
- 8.** El estado del sistema simulado:
- A. Está determinado por el valor del reloj de simulación.
 - B. Está determinado por las entidades, sus atributos y las acciones.
 - C. Está determinado por el número de entidades que coexistan en el sistema.
 - D. Ninguna de las anteriores es cierta.
- 9.** Con la simulación:
- A. Siempre se obtienen soluciones exactas.
 - B. Siempre se obtienen soluciones aproximadas.
 - C. La exactitud de la solución depende de la complejidad del sistema.
 - D. Ninguna de las anteriores es verdadera.
- 10.** Para el análisis y estudio de un sistema real:
- A. Siempre se necesita un modelo matemático y un modelo de simulación.
 - B. Solo se necesita un modelo de simulación para verificar la solución analítica.
 - C. No se necesita un modelo de simulación si se obtiene una solución analítica exacta.
 - D. Ninguna de las anteriores es cierta.