Tema 13
Introducción al caos
Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos

Dra. Neus Garrido Sàez

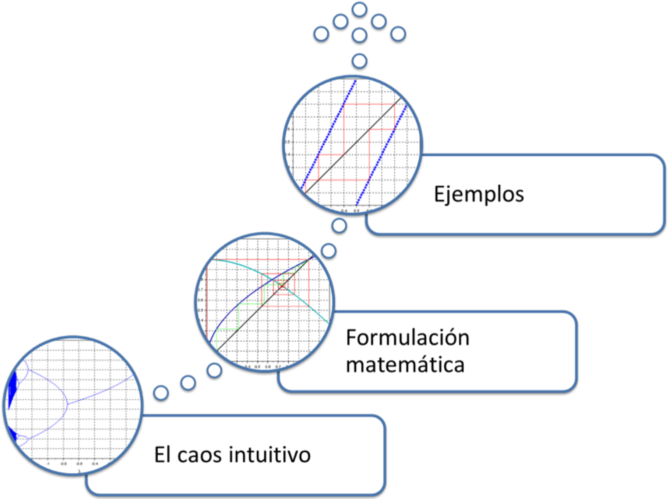
Máster en Ingeniería Matemática y Computación
Escuela Superior en Ingeniería y Tecnología

unir
LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

Contenido

1

Introducción


Ejemplos
Formulación matemática
El caos intuitivo

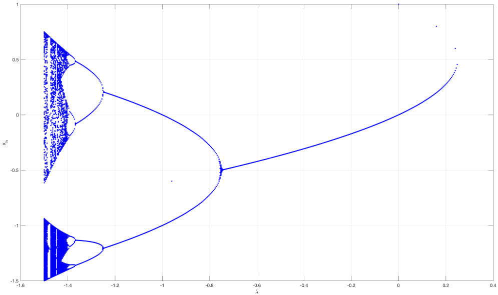
Sistemas caóticos

- Pueden ser tanto discretos como continuos
- "Impredecible o desordenado"

Objetivos

- Identificar las características de un sistema caótico
- Describir comportamientos anómalos o no esperados
- Relación entre el diagrama orbital y los sistemas caóticos

- Diagramas de bifurcación



- Los puntos críticos x^C de un sistema dinámico $x_{n+1} = f(x_n)$ son los puntos que satisfacen $f'(x^C) = 0$
  - x^C es un punto crítico degenerado cuando $f''(x^C) = 0$
  - x^C es un punto crítico no degenerado cuando $f''(x^C) \neq 0$

2

Análisis gráfico de sistemas caóticos

Contenidos

Diagrama orbital

Diagrama de bifurcación en el cual la semilla es uno de los puntos críticos del sistema

- Eje de abscisas: rango de valores del parámetro
- Eje de ordenadas: últimas iteraciones de la órbita del punto crítico para cada valor del parámetro (de la 501 a la 700)

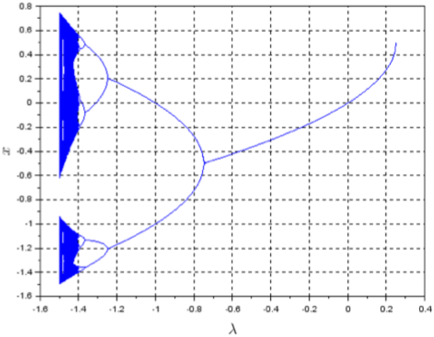
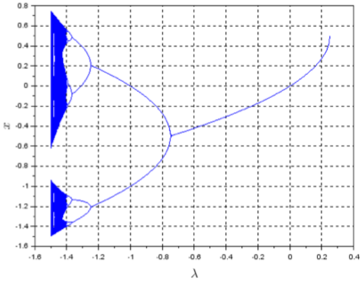
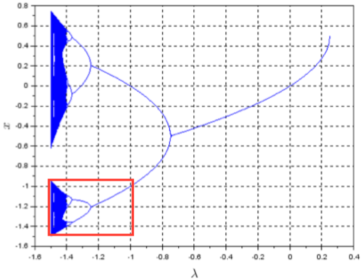


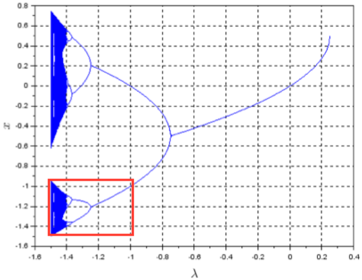
Figura: Diagrama orbital de $f_\lambda(x) = x^2 + \lambda$

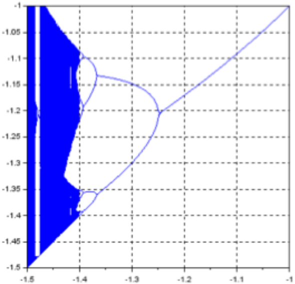
Contenidos

Análisis gráfico de sistemas caóticos >> $x_{n+1} = x_n^2 + \lambda$

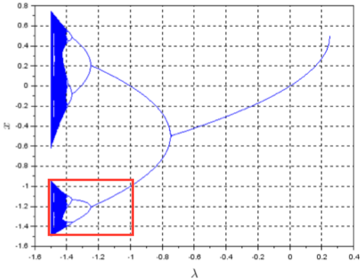


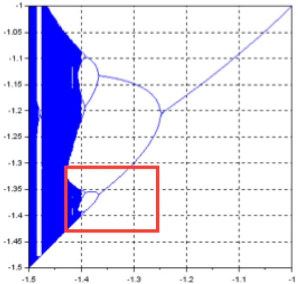

0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.2
-1.4
-1.6
x
-1.6
-1.4
-1.2
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
λ



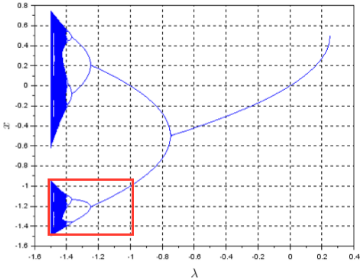


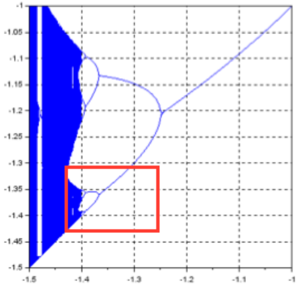
(c) $\lambda \in (-1.5, -1)$



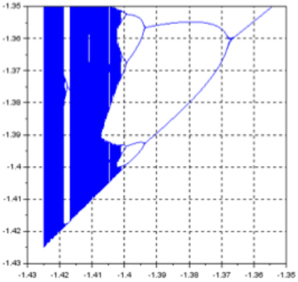


(e) $\lambda \in (-1.5, -1)$

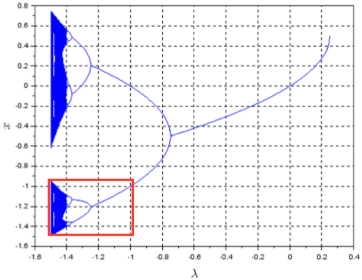


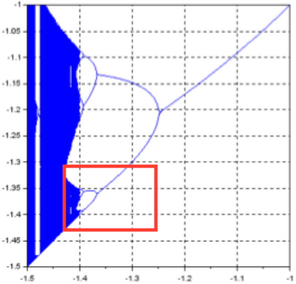


(g) $\lambda \in (-1.5, -1)$

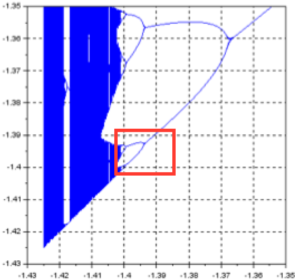


(h) $\lambda \in (-1.425, -1.35)$

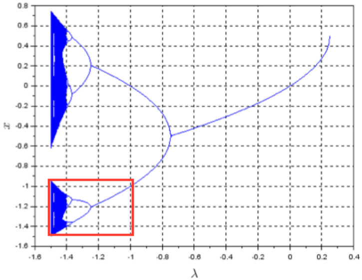


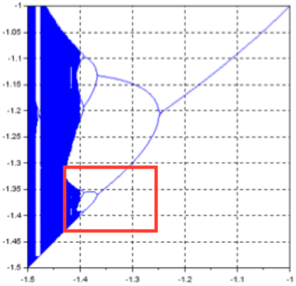


(j) $\lambda \in (-1.5, -1)$

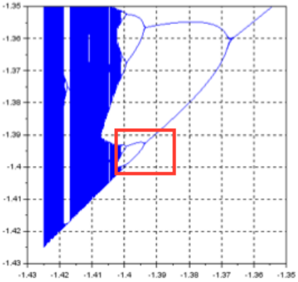


(k) $\lambda \in (-1.425, -1.35)$

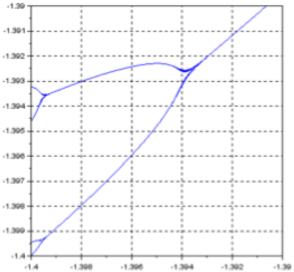




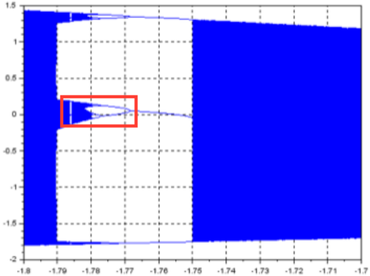
(m) $\lambda \in (-1.5, -1)$



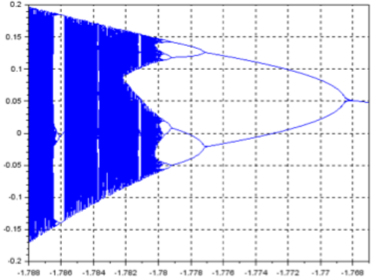
(n) $\lambda \in (-1.425, -1.35)$



(ñ) $\lambda \in (-1.4, -1.39)$

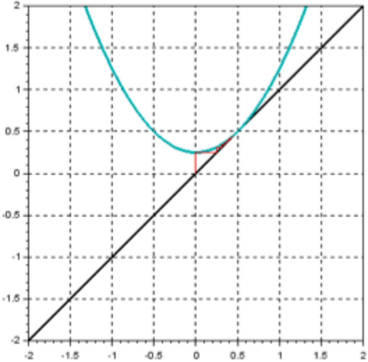


(o) $\lambda \in (-1.8, -1.7)$

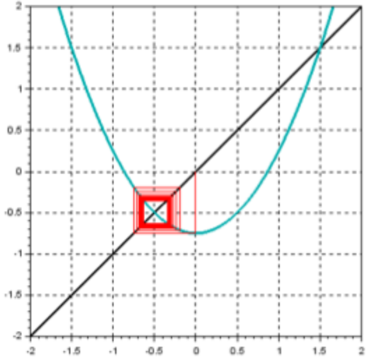


(p) $\lambda \in (-1.788, -1.767)$

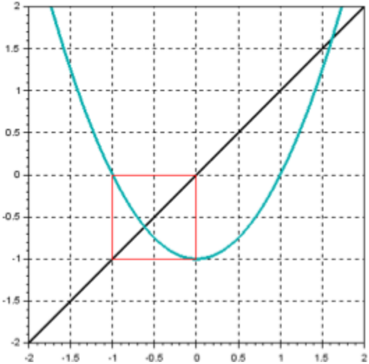
- Ventanas de periodo 3 (marcas azules en las regiones verticales blancas)
- A partir de estas ventanas, hay bifurcaciones en las que el periodo se duplica
- La estructura inicial se va repitiendo $\Rightarrow$ autosemejanza



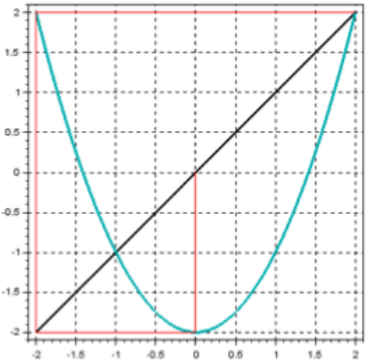
- $x_0 = x^C = 0$
- $\lambda = \frac{1}{4}$
- Punto de silla
- Gráfica tangente a $y = x$



- $x_0 = x^C = 0$
- $\lambda = -\frac{3}{4}$
- Punto de bifurcación
- El periodo se duplica



- $x_0 = x^C = 0$
- $\lambda = -1$
- El punto crítico tiene periodo 2



- $x_0 = x^C = 0$
- $\lambda = -2$
- Comportamiento caótico

3

Formulación matemática de sistemas caóticos

Contenidos

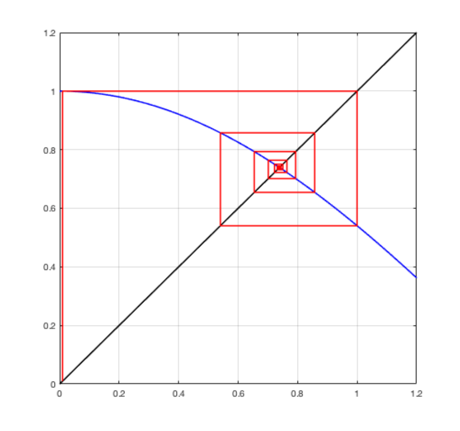
Sensible a las condiciones iniciales

Un sistema dinámico F es sensible a las condiciones iniciales si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in F$ y todo $\varepsilon > 0$, existe un $y \in F$ tal que la distancia entre x e y es menor que ε, y para $n \in \mathbb{N}$, la distancia entre $F^n(x)$ y $F^n(y)$ es menor que δ.

Para cada x existen puntos próximos cuyas órbitas se alejan eventualmente al menos una cantidad δ. No importa ni la semilla ni la región entorno a x.

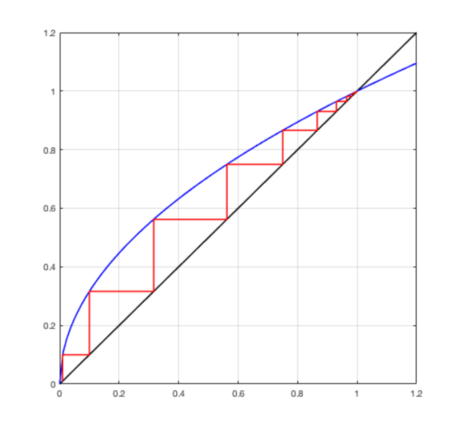
Ejemplo 1. La función $f(x) = \cos(x)$ no es sensible a las condiciones iniciales

- Semilla: $x_0 = 0.01$
- La órbita de $f(x) = \cos(x)$ siempre tiende al valor 0.739 independientemente de las condiciones iniciales



Ejemplo 2. La función $f(x) = \sqrt{x}$ es sensible a las condiciones iniciales en $x = 0$

- Semilla: $x_0 = 0.01$
- Partiendo de un punto muy próximo al punto fijo $x^* = 0$, la órbita tiende al otro punto fijo $x^* = 1$.



Definiciones previas

Transitividad

Un sistema dinámico F es transitivo si para dos subconjuntos $U, V \in F$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $F^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Dados dos puntos, se puede encontrar una órbita que arbitrariamente permanece cerca de ambos puntos

Densidad

Sea X un conjunto e Y un subconjunto de X. Decimos que Y es denso en X si para cada $x \in X$ existe un punto $y \in Y$ arbitrariamente próximo a x.

Ejemplo 3.

- $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$
- $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{Z}$ no es denso en $\mathbb{R}$

Contenidos

Definición

Un sistema dinámico F es caótico si:

1. Es sensible a las condiciones iniciales
2. Es topológicamente transitivo
3. Sus puntos periódicos son densos en F

$$\Downarrow$$

Definición (v2)

Un sistema dinámico caótico es:

1. Parcialmente impredecible
2. Parcialmente irreducible
3. Regular

Sistemas caóticos

Un sistema es caótico si y solo si para cualesqueira U, V abiertos existe una órbita periódica que visita ambos.

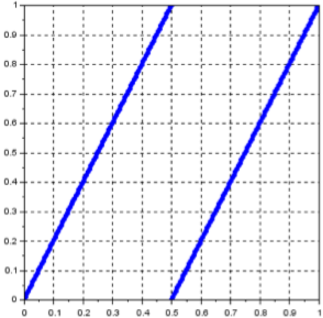
Contenidos

Operador *shift*

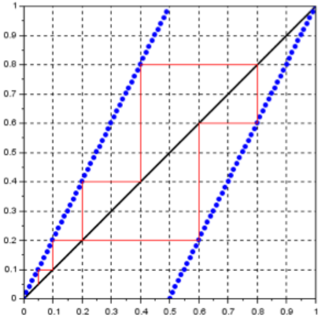
- $S : [0,1] \longrightarrow [0,1]$

$$S(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- Función *shift*



- Órbitas periódicas de la función *shift*

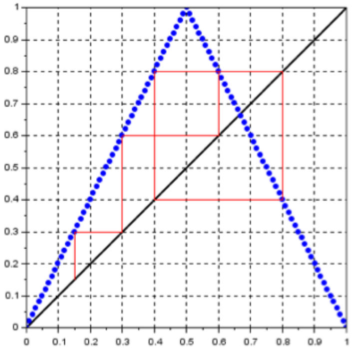


Dada cualquier semilla, la órbita va a tener un comportamiento caótico

Función tienda de campaña

- $T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$

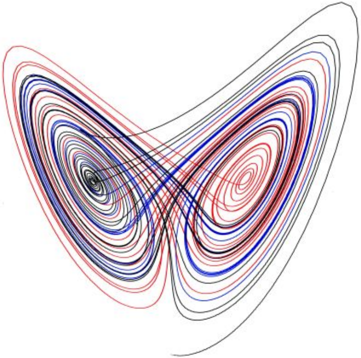
$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$



Al iterar sobre diferentes semillas siempre se obtienen órbitas periódicas

Efecto mariposa

https://www.youtube.com/watch?v=XZ7Ly7dDCzo



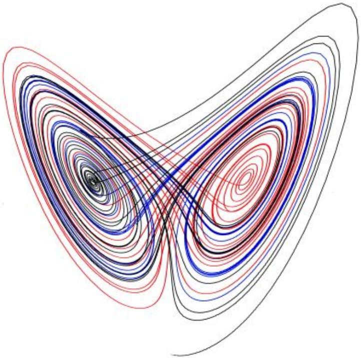
”*El aleteo de una mariposa en Brasil puede producir un tornado en Texas*”

Edward Norton Lorenz (1917-2008)

Modeliza el fenómeno de convección en forma de circulación circular:

- $x \Rightarrow$ intensidad del movimiento de convección
- $y \Rightarrow$ variación horizontal de temperaturas
- $z \Rightarrow$ variación vertical de temperaturas

- $\sigma \equiv$ número de Prandtl
- $\rho \equiv$ número de Rayleigh
- $\beta \equiv$ tamaño del sistema $(\sigma > \beta + 1)$



El sistema de Lorenz

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & \sigma(y-x) \\ y' & = & \rho x - y - xz \\ z' & = & xy - \beta z \end{array} \right.$$

- Lección magistral: *Sistema logístico* $\Rightarrow$ Campus virtual

...Y por supuesto:

TEST DE APRENDIZAJE!!

unir
LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET