

Curvaturas

[6.1] ¿Cómo estudiar este tema?

[6.2] Curvaturas principales

[6.3] Curvaturas de Gauss y media

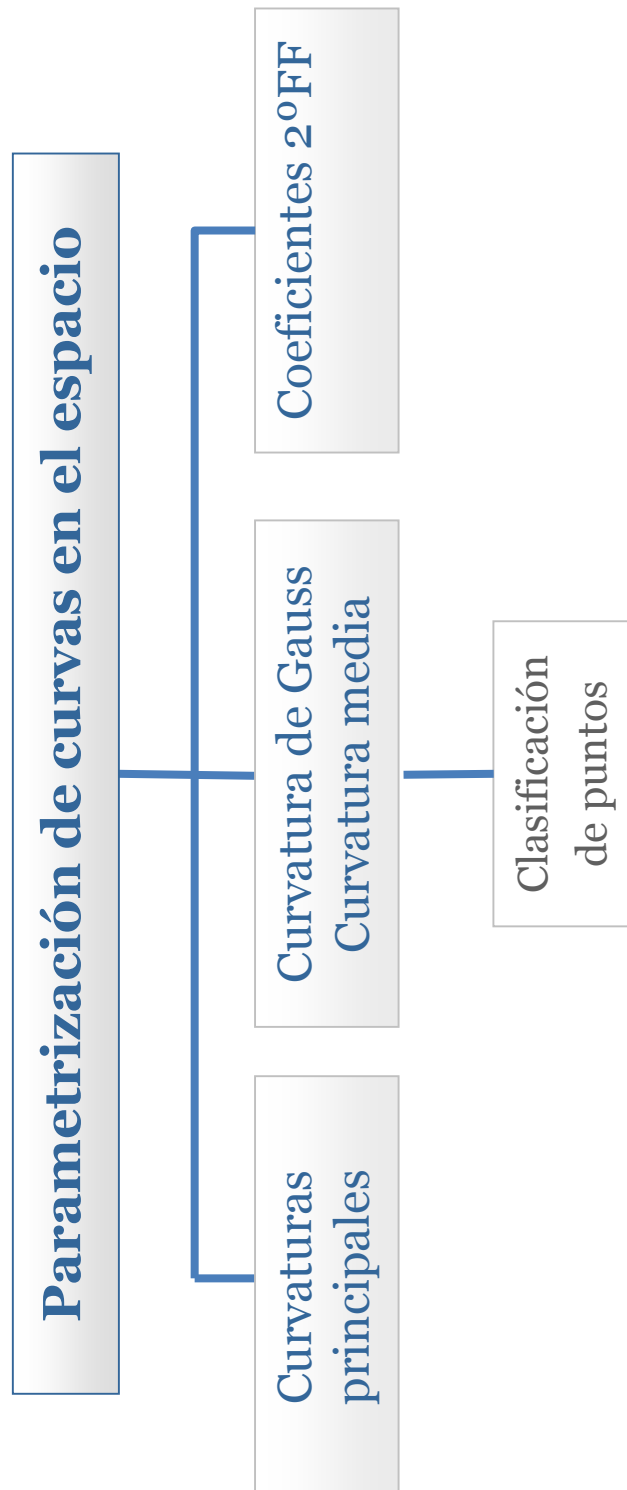
[6.4] Clasificación de los puntos de una superficie

[6.5] Coeficientes de la segunda forma fundamental

6

T E M A

Esquema



Ideas clave

6.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

En este tema vamos a seguir sacando partido a las posibilidades de la segunda forma fundamental. Así, se van a definir más tipos de curvatura y se va a estudiar su interpretación geométrica. También vamos a ver una clasificación de los puntos de una superficie en función de su curvatura que es muy útil. Por tanto hay que conocer los conceptos de:

- » Curvaturas principales.
- » Curvaturas de Gauss y media.
- » Clasificación de los puntos de una superficie.

6.2. Curvaturas principales

Como vimos en el tema anterior, el cálculo de la segunda forma fundamental está basado en la diferencial de la aplicación de Gauss, dN_p . Puede demostrarse que dN_p es autoadjunta, por lo que en particular es simétrica y, por tanto, diagonaliza en una base ortonormal del plano tangente, $T_p S$. Es decir, existe una base ortonormal del plano tangente, $\{e_1, e_2\} \in T_p S$ tales que:

$$\begin{aligned} dN_p(e_1) &= -k_1 e_1 \\ dN_p(e_2) &= -k_2 e_2 \end{aligned}$$

Donde $k_1 \geq k_2$.

k_1 y k_2 se llaman **curvaturas principales** de S en p .

Las curvaturas principales son muy útiles porque se verifica que:

$$k_n = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$$

Donde k_n es la curvatura normal a lo largo de un vector cualquiera v dado. Esto permite acotar la segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned} II_p(v) &\leq k_1(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = k_1 \\ k_2 &= k_2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \leq II_p(v) \end{aligned}$$

Por tanto, $k_1 \leq II_p(v) \leq k_2$, es decir, las curvaturas normales están comprendidas entre k_1 y k_2 , que son los valores máximo y mínimo, respectivamente.

Ejemplos:

- » **Plano:** como todas las curvaturas normales son cero, las curvaturas principales (valores máximo y mínimo) también son cero.
- » **Esfera:** como la curvatura normal es constante en todos los puntos de la esfera, las curvaturas principales son iguales entre sí. A diferencia del caso anterior las curvaturas son constantes positivas. La idea intuitiva es que una esfera se curva de forma constante en todas las direcciones.
- » **Cilindro:** puede parametrizarse un cilindro para que la curvatura mínima sea cero (generatriz) y la máxima uno (circunferencia). El resto de valores dependerán de la excentricidad de la elipse resultante: cuanto más próximo esté u a una generatriz más excéntrica será la elipse y más se acercará la curvatura a cero. Cuanto más próximo esté u a la perpendicular de una generatriz menos excéntrica será la elipse y más se parecerá la curvatura a 1, en valor absoluto (figura 6.1).

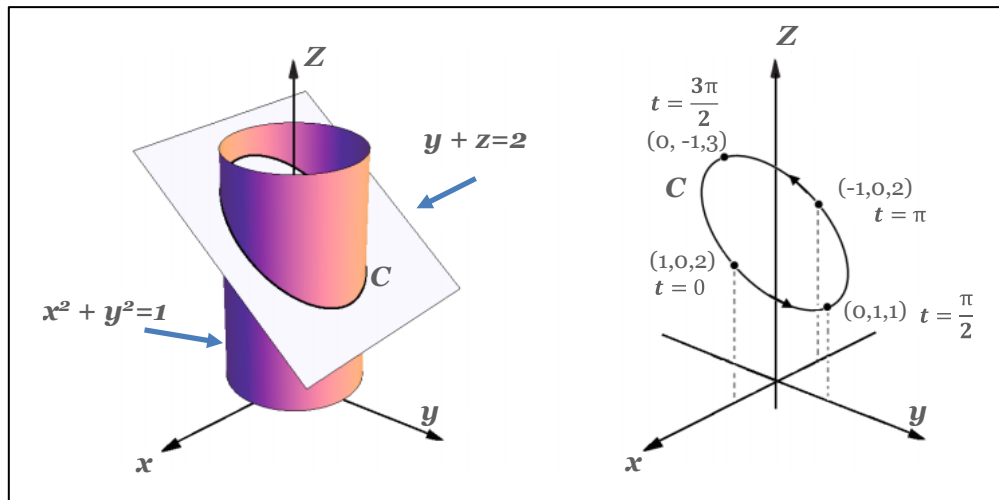


Figura 6.1. Sección transversal de un cilindro

Fuente: <http://www.mate.unlp.edu.ar/>

6.3. Curvaturas de Gauss y media

Ahora vamos a ver dos definiciones de curvatura a partir de dN_p .

$K(p) = \det(dN_p) = k_1 \cdot k_2$ es la **curvatura gaussiana** S en p .

$H(p) = -\frac{\text{traza}(dN_p)}{2}$ es la **curvatura media** de S en p .

Para una misma parametrización los valores de las curvaturas son los mismos, con independencia de la base en que se exprese dN_p , ya que tanto el determinante como la traza son invariantes.

Ojo, esto no significa que sean constantes asociadas a una superficie: pueden variar si se cambia la parametrización. No obstante, veremos más adelante en qué sentido la curvatura gaussiana es invariante.

Ejemplo:

La curvatura gaussiana es el producto de las curvaturas principales que son el máximo y el mínimo de las secciones normales.

En una esfera, $k_1 = k_2 = k$, por tanto, la curvatura gaussiana $K(p) = k^2 \geq 0$. Del hecho de que sea constante y positiva podremos sacar más información.

6.4. Clasificación de los puntos de una superficie

La clasificación de los puntos en función del signo de su curvatura de Gauss va a permitir que sepamos cómo es la curva localmente, es decir, alrededor del punto.

Sea $p \in S$, p se llama:

- i) **Elíptico**, si $\det(dN_p) > 0$
- ii) **Hiperbólico**, si $\det(dN_p) < 0$
- iii) **Parabólico**, si $\det(dN_p) = 0$, pero $dN_p \neq 0$
- iv) **Plano**, si $dN_p = 0$

De momento, sabemos que todos los puntos de una esfera son esféricos y que todos los puntos de un plano son planos.

Cuando las curvaturas principales de una superficie en un punto p coinciden se dice que p es un **punto umbílico**. Es decir, todos los puntos de la esfera y el plano son puntos umbílicos. Además puede probarse que si una superficie tiene todos sus puntos umbílicos está contenida en una esfera o en un plano.

Otro resultado interesante dice que dado un punto p en una superficie S :

- » Si p es elíptico, entonces existe un entorno de p en S cuyos puntos (salvo p) se hallan contenidos en uno de los subespacios determinados por el plano afín $T_p S$ (figura 6.2).

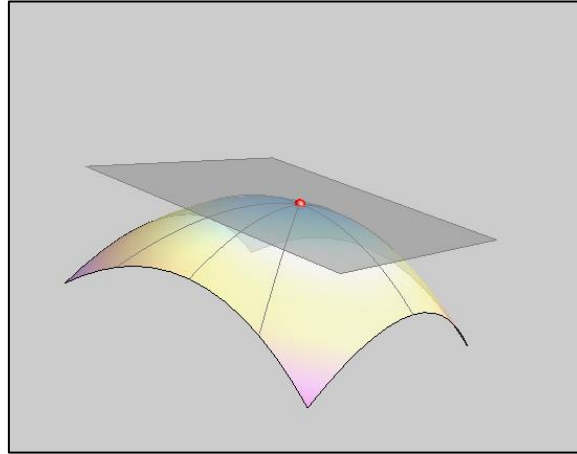


Figura 6.2. Representación de un punto elíptico

Fuente: <http://www.grad.hr/>

- » Si p es hiperbólico todo entorno de p contiene puntos a ambos lados de $T_p S$.

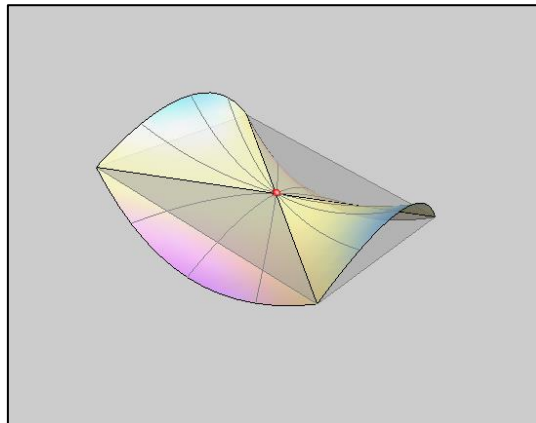


Figura 6.3. Representación de un punto hiperbólico

Fuente: <http://www.grad.hr/>

6.5. Coeficientes de la segunda forma fundamental

En el tema 5 vimos cómo se podía expresar la primera forma fundamental en función de la base del plano tangente. Vamos a hacer algo análogo con la segunda forma fundamental.

Sea $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrización y sea $p = \varphi(a)$, $a \in U$. Sabemos que $N = \pm \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$, por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $N = + \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$.

Sea α una curva en S tal que $\alpha'(0) \in T_p S$, $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t)) \Rightarrow \alpha' = u' \varphi_u + v' \varphi_v$.

Por tanto: $dN_p(\alpha') = dN_p(u' \varphi_u + v' \varphi_v) = u' N_u + v' N_v$.

Así, $II_p(\alpha') = -\langle dN_p(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle u' N_u + v' N_v, u' \varphi_u + v' \varphi_v \rangle =$
 $(u')^2 (-\langle N_u, \varphi_u \rangle) + u' v' (-\langle N_u, \varphi_v \rangle - \langle N_v, \varphi_u \rangle) + (v')^2 (-\langle N_v, \varphi_v \rangle)$

Llamando:

$$\begin{aligned} L &= -\langle N_u, \varphi_u \rangle \\ 2M &= -\langle N_u, \varphi_v \rangle - \langle N_v, \varphi_u \rangle \\ N &= -\langle N_v, \varphi_v \rangle \end{aligned}$$

Resulta:

$$II_p(\alpha') = (u')^2 L + 2u'v' M + (v')^2 N$$

Como:

$$L = -\langle dN_p(\varphi_u), \varphi_u' \rangle = -\langle N_u, \varphi_u \rangle = \langle N, \varphi_{uu} \rangle \text{ ya que}$$

$$0 = \langle N, \varphi_u \rangle \Rightarrow 0 = \langle N, \varphi_u \rangle_u = \langle N_u, \varphi_u \rangle + \langle N, \varphi_{uu} \rangle$$

Análogamente puede probarse que:

$$N = -\langle dN_p(\varphi_v), \varphi_v' \rangle = -\langle N_v, \varphi_v \rangle = \langle N, \varphi_{vv} \rangle$$

$$M = \langle N, \varphi_{uv} \rangle$$

Por último, si consideramos el caso general de $w \in T_p S$ $w = a\varphi_u + b\varphi_v$, resulta:

$$II_p(\alpha') = -\langle dN_p(w), w \rangle = -\langle dN_p(a\varphi_u + b\varphi_v), a\varphi_u + b\varphi_v \rangle =$$

$$a^2 \langle -dN_p(\varphi_u), \varphi_u \rangle + ab \langle -dN_p(\varphi_u), \varphi_v \rangle + ab \langle -dN_p(\varphi_v), \varphi_u \rangle + b^2$$

$$\langle -dN_p(\varphi_v), \varphi_v \rangle$$

Por tanto:

$$II_p(a\varphi_u + b\varphi_v) = La^2 + 2Mab + Nb^2$$

L, M y N se llaman **coeficientes de la segunda forma fundamental** en la parametrización φ .

Puede demostrarse que las curvaturas media y gaussiana pueden expresarse como:

$$H(p) = \frac{1}{2} \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}$$

$$K(p) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

Es decir, pueden expresarse en función de la primera y la segunda forma fundamental.

Por tanto las curvaturas principales k_1, k_2 se pueden hallar directamente (calculando los autovalores de dN_p) o usando:

$$\left. \begin{array}{l} k_1 + k_2 = 2H \\ k_1 k_2 = K \end{array} \right\} \Rightarrow k_i = H \pm \sqrt{H^2 - K}, i = 1, 2$$

Ejemplo: curvaturas del toro.

El toro es una superficie de revolución en la que se hace girar una circunferencia de radio r que está a una distancia R del origen, $R > r$.

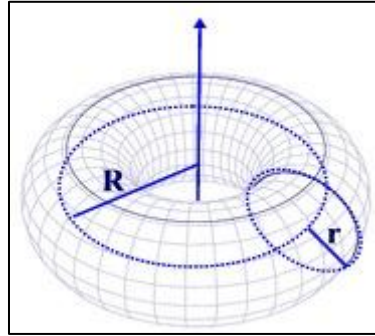


Figura 6.4. Representación de un toro

Fuente: <http://mathbitsnotebook.com/>

Una parametrización del toro es:

$$\varphi(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

Vamos a calcular K :

$$\begin{aligned}\varphi_u &= (-r \cdot \sin u \cdot \cos v, -r \cdot \sin u \cdot \sin v, r \cdot \cos u) \\ \varphi_v &= (-(R + r \cos u) \sin v, (R + r \cos u) \cos v, 0) \\ \varphi_{uu} &= (-r \cdot \cos u \cdot \cos v, -r \cdot \cos u \cdot \sin v, -r \cdot \sin u) \\ \varphi_{uv} &= (r \cdot \sin u \cdot \sin v, -r \cdot \sin u \cdot \cos v, 0) \\ \varphi_{vv} &= (-(R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, 0)\end{aligned}$$

Por tanto, los coeficientes de la primera forma fundamental son:

$$\begin{aligned}E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle &= r^2 \cdot \sin^2 u \cdot \cos^2 v + r^2 \cdot \sin^2 u \cdot \sin^2 v + r^2 \cdot \cos^2 u = \\ &= r^2 \cdot \sin^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + r^2 \cdot \cos^2 u = r^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle &= r \cdot \sin u \cdot \sin v \cdot \cos v (R + r \cos u) - r \cdot \sin u \cdot \sin v \cdot \cos v (R + r \cos u) \\ &+ r \cdot \cos u \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = (R + r \cos u)^2 \sin^2 v + (R + r \cos u)^2 \cos^2 v = (R + r \cos u)^2$$

Y los de la segunda forma fundamental:

» Primero calculamos $\sqrt{EG - F^2} = r(R + r \cos u)$

$$L = \langle \varphi_{uu}, N \rangle = \langle \varphi_{uu}, \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \rangle = \frac{\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \times \varphi_v \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\det(\varphi_{uu}, \varphi_u, \varphi_v)}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$\det(\varphi_{uu}, \varphi_u, \varphi_v) = \begin{vmatrix} -(R + r \cos u) \sin v & (R + r \cos u) \cos v & 0 \\ -r \cdot \cos u \cdot \cos v & -r \cdot \cos u \cdot \sin v & -r \cdot \cos u \\ -r \cdot \sin u \cdot \cos v & -r \cdot \sin u \cdot \sin v & r \cdot \cos u \end{vmatrix} = r$$

» Análogamente:

$$M = \frac{\det(\varphi_{uv}, \varphi_u, \varphi_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = 0$$

$$N = \frac{\det(\varphi_{vv}, \varphi_u, \varphi_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = \cos u (R + r \cdot \cos u)$$

» Por tanto:

$$K(p) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{r \cdot \cos u (R + r \cdot \cos u)}{r^2 \cdot (R + r \cdot \cos u)^2} = \frac{\cos u}{r \cdot (R + r \cdot \cos u)}$$

¿Qué podemos decir sobre los puntos de la superficie a partir de K ?

Como $r \cdot (R + r \cdot \cos u) > 0$ siempre ($R > r$), la curvatura será positiva cuando lo sea $\cos u \Rightarrow u \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$. Estos son los puntos del exterior de toro.

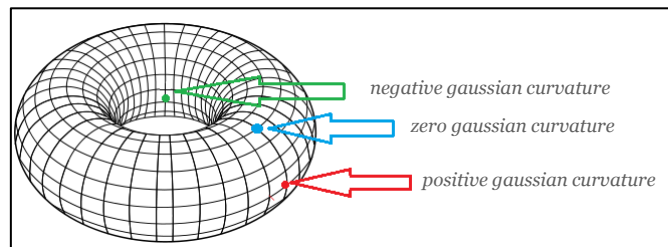


Figura 6.5. Representación de la curvatura gaussiana en un toro

Fuente: <http://math.stackexchange.com/>

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

Diagonalización de matrices

En esta lección magistral vamos a ver algunos principios de la diagonalización de matrices que es una herramienta matemática fundamental, sobre todo si trabajamos con espacios de matrices.



La lección magistral está disponible en el aula virtual

No dejes de leer...

Clasificación de puntos de una superficie

En este enlace se repasan los conceptos de curvatura y segunda forma fundamental y se dan ejemplos de los distintos puntos de una superficie.

Second fundamental form

Accede al documento desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

<http://web.mit.edu/hyperbook/Patrikalakis-Maekawa-Cho/node29.html>

Curvatura

En este documento se explican las distintas curvaturas que hemos ido definiendo a lo largo del curso.

Una introducción a la curvatura

Accede al documento desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

<http://www.mat.ucm.es/~jlafuent/Docencia/cys/Garcia%20Rio.pdf>

Curvatura de un toro

En este documento se explican en detalle la curvatura en un toro.

The Curvature of the Torus

Accede al documento desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

<http://www.win.tue.nl/~rvhassel/Onderwijs/Tensor-ConTeX-Bib/Examples-diff-geom/Torus-diff-geom/torus-together.pdf>

+ Información

A fondo

Gauss curvature

Definición e interpretación geométrica de la curvatura de Gauss.



Accede al documento desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

<http://www.ams.org/publications/journals/notices/201602/rnoti-p144.pdf>

Diagonalización de matrices

En este documento se explica cómo diagonalizar de forma eficiente algunas matrices.

Facultad de Ciencias

Accede al documento desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

http://www.ugr.es/~eaznar/matgeo/apuntes/simetricas_y_ortogonales.pdf

Curvatura media

En este documento se profundiza en superficies con curvatura media constante.



Accede al documento desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://www.um.es/documents/118351/1884002/TFG_GONZALEZ+VIDAL.pdf/d8e3c942-f132-46ea-8aca-314d1c510a66

Test

1. Las curvaturas principales:
 - A. Acotan la segunda forma fundamental.
 - B. Son los autovalores de una base del plano principal.
 - C. A y B son correctas.

2. Las curvaturas principales son iguales en:
 - A. Un cilindro.
 - B. Una esfera.
 - C. Nunca pueden ser iguales.

3. La curvatura media:
 - A. Depende solo de la primera forma fundamental.
 - B. Depende de la base del plano tangente.
 - C. Depende de la parametrización de la superficie.

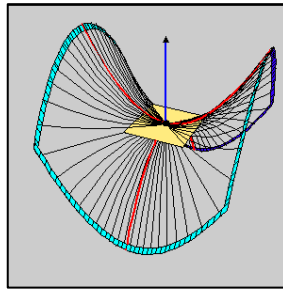
4. En una esfera:
 - A. Todos sus puntos son elípticos.
 - B. Algunos de sus puntos son elípticos.
 - C. A y B son falsas.

5. Si existe un entorno de $p \in S$ en el que todos los puntos están en el mismo lado de $T_p S$ entonces:
 - A. p es plano.
 - B. p es hiperbólico.
 - C. p es elíptico.

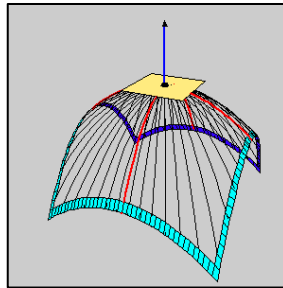
6. En una superficie:
 - A. $\det(dN_p)$ tiene siempre el mismo signo para todo p .
 - B. $\det(dN_p)$ es constante.
 - C. A y B son falsas.

7. ¿Cuál de los puntos señalados en las siguientes figuras es hiperbólico?

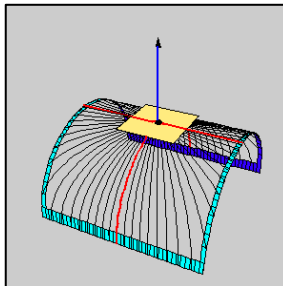
A.



B.



C.



8. Las curvaturas normales de un cilindro:

- A. Son cero y uno.
- B. Siempre son mayores que cero.
- C. Pueden ser iguales en función de la parametrización.

9. Sean k_1 y k_2 las curvaturas principales de S en p , $k_1 \cdot k_2$:

- A. Es la curvatura normal.
- B. Es la curvatura media.
- C. Es la curvatura gaussiana.

10. Sean E, F, G los coeficientes de la primera forma fundamental y H, I, J los coeficientes de la segunda, $\frac{1}{2} \frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}$ es la expresión de:

- A. Es la curvatura normal.
- B. Es la curvatura media.
- C. Es la curvatura gaussiana.