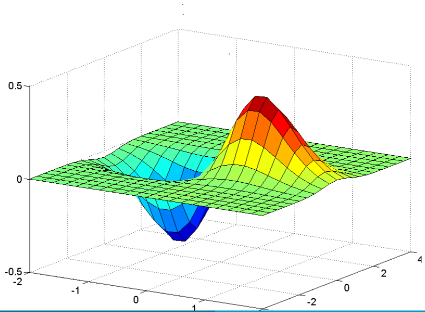
Tema 9: Problemas de contorno multidimensionales. EDPs elípticas.

Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Alicia Cordero, Neus Garrido, Juan R. Torregrosa

unir
UNIVERSIDAD
INTERNACIONAL
DE LA RIOJA



Contenido

Las ecuaciones de este tipo surgen de manera natural en el estudio de problemas físicos independientes del tiempo, como la distribución de calor en una región plana, la energía potencial de un punto en el plano bajo la acción de fuerzas gravitacionales y problemas estacionarios acerca de fluidos incompresibles.

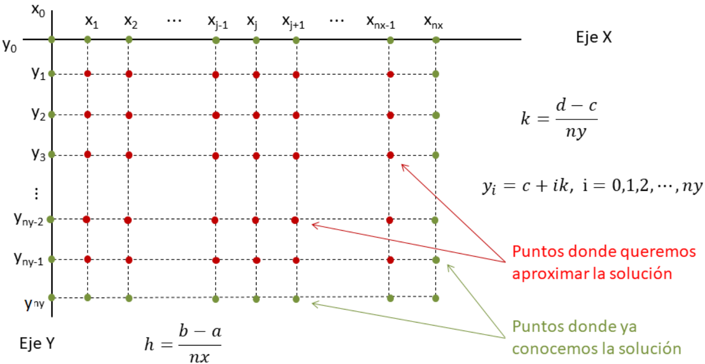
La descripción más sencilla de un problema de este tipo es

$$\nabla^2 u(x,y) \equiv u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in R,$$

$$u(x,y) = g(x,y) \text{ para } (x,y) \in S$$

donde $R = \{(x,y) : a < x < b,\ c < y < d\}$ y S es la frontera de R

Mediante diferencias finitas transformamos el problema en un sistema de ecuaciones lineales (ya que la edp es lineal) cuya solución nos dará valores aproximados del problema de contorno en los puntos elegidos.



$$k = \frac{d-c}{ny}$$

$$y_i = c + ik, \ \mathrm{i} = 0,1,2,\cdots,ny$$

$$h = \frac{b-a}{nx}$$

$$x_j = a + jh, \quad j = 0,1,2,\cdots,nx$$

$$h=\frac{b-a}{nx},\ k=\frac{d-c}{ny},\quad x_j=a+jh, j=0,1,\ldots,nx;\quad y_i=c+ik, i=0,1,\ldots,ny$$

$$u_{xx}(y_i,x_j)\approx\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{h^2},\ u_{yy}(y_i,x_j)\approx\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{k^2}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{h^2}+\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{k^2}=f(y_i,x_j)$$

y llamando $\lambda=\dfrac{h}{k}$, resulta

$$2(\lambda^2+1)u_{i,j}-(u_{i,j+1}+u_{i,j-1})-\lambda^2(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})=-h^2f(y_i,x_j),$$

con $j=1,2,\ldots,nx-1$ y $i=1,2,\ldots,ny-1$.

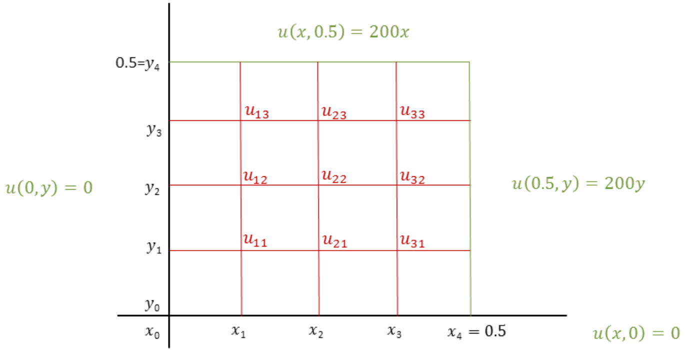
Con las condiciones de contorno

$$\begin{array}{lll} u_{j,0}=g(a,y_j), & u_{j,nx}=g(b,y_j), & j=0,1,\ldots,ny \\ u_{0,i}=g(x_i,c), & u_{ny,i}=g(x_i,d), & i=0,1,\ldots,nx \end{array}$$

Ejemplo

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in R = [0,0.5] \times [0,0.5],$$
$$u(x,0) = 0, \; u(x,0.5) = 200x \quad u(0,y) = 0, u(0.5,y) = 200y,$$

Tomamos $nx = 4$, $ny = 4$



$$4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1} = 0, \quad i,j = 1,2,3$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{2,3} \\ u_{3,1} \\ u_{3,2} \\ u_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 25 \\ 50 \\ 125 \end{pmatrix}.$$

Se puede:

- Buscar una estructura en la matriz a la hora de introducirla en el ordenador
- Redefinir las variables para que éstas sean $w_1, w_2, \ldots, w_9$
- Resolver el sistema por el método de Gauss (Matriz dispersa)
- Aplicar un método iterativo para resolver sistemas lineales.

Algoritmo para la ecuación de Poisson

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=f(x,y), \quad (x,y)\in R=]a,b[\times]c,d[,$$
$$u(x,y)=g(x,y), \text{ para } (x,y)\in S$$

- Parámetros de entrada Funciones f, g; valores a, b, c, d; enteros nx, ny; tolerancia tol; número máximo de iteraciones $maxiter$.
- Salida Aproximaciones $u_{i,j}$ de $u(x_i,y_j)$, $i=1,2,\ldots,nx.1$, $j=1,2,\ldots,ny-1$, o un mensaje de fracaso.
- Paso 1. Tomar $h=(b-a)/nx$, $k=(d-c)/ny$.
- Paso 2. Elegir los nodos del método: $x=a:h:b$, $y=c:k:d$
- Paso 3. Inicializar con ceros la matriz U de tamaño $ny+1\times nx+1$
- Paso 4. Rellenar con las condiciones de contorno las filas y columnas correspondientes de U
- Paso 5. Tomar $\lambda=h/k$, $iter=1$ y $incre=tol+1$, $U^{(0)}=zeros$
- Paso 6. Mientras $iter\leq maxiter$ y $incre>tol$
  Método iterativo para resolver el sistema lineal $\rightarrow\ U$
  $incre=max(max(U-U^{(0)}))$
  $U^{(0)}=U$, $iter=iter+1$
- Paso 7. Analizar porqué el ordenador se ha salido del bucle.

Escribimos el sistema a resolver de la forma:

$$u_{i,j} = \frac{1}{2(\lambda^2+1)}\left[\lambda^2(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}) + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - h^2 f(y_i, x_j)\right],$$

$j = 1, 2, \ldots, nx-1,\ i = 1, 2, \ldots, ny-1.$

Método de Jacobi

Para $j = 2 : nx$

Para $i = 2 : ny$

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{2(\lambda^2+1)}\left[\lambda^2(u_{i+1,j}^{(k)}+u_{i-1,j}^{(k)}) + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} - h^2 f(y_i, x_j)\right],$$

Fin para i

Fin para j

Criterio de parada

$$\max_i\left(\max_j\left(\left|u_{i,j}^{(k+1)} - u_{i,j}^{(k)}\right|\right)\right) < tol.$$

$$u_{i,j} = \frac{1}{2(\lambda^2+1)}\left[\lambda^2(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}) + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - h^2 f(y_i, x_j)\right],$$

$j = 1, 2, \ldots, nx-1$, $i = 1, 2, \ldots, ny-1$.

Método de Gauss-Seidel

Para $j = 2 : nx$

Para $i = 2 : ny$

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{2(\lambda^2+1)}\left[\lambda^2(u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k+1)}) + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k+1)} - h^2 f(y_i, x_j)\right],$$

Fin para i

Fin para j

$$u_{i,j} = \frac{1}{2(\lambda^2+1)}\left[\lambda^2(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-h^2 f(y_i,x_j)\right],$$

$j = 1, 2, \ldots, nx-1,\ i = 1, 2, \ldots, ny-1.$

Método de Sobrerelajación (SOR)

Para $j = 2 : nx$

  Para $i = 2 : ny$

$$\bar{u}_{i,j}^{(k+1)} \frac{1}{2(\lambda^2+1)}\left[\lambda^2(u_{i+1,j}^{(k)}+u_{i-1,j}^{(k+1)})+u_{i,j+1}^{(k)}+u_{i,j-1}^{(k+1)}-h^2 f(y_i,x_j)\right],$$

$$u_{i,j}^{(k+1)} = (1-w)u_{i,j}^{(k)} + w\bar{u}_{i,j}^{(k+1)}$$

  Fin para i

Fin para j

El parámetro w se llama parámetro de relajación y su valor va a determinar si el método es o no convergente.

Ejemplo

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=xe^y,\quad (x,y)\in R=]0,2[\times]0,1[,$$
$$u(x,0)=x, u(x,1)=xe,\quad u(0,y)=0, u(2,y)=2e^y$$

Solución exacta: $u(x,y)=xe^y$

Criterio de parada: $\left|u_{i,j}^{(l)}-u_{i,j}^{(l-1)}\right|\leq 10^{-10}$

i	j	x_j	y_i	$u_{i,j}$	$u(x_j,y_i)$	$\|u_{i,j}-u(x_j,y_i)\|$
1	1	0.3333	0.2	0.40726	0.40713	1.3e-4
1	2	0.3333	0.4	0.49748	0.49727	2.08e-4
1	3	0.3333	0.6	0.60760	0.60737	2.23e-4
1	4	0.3333	0.8	0.74201	0.74185	1.6e-4
2	1	0.6667	0.2	0.81452	0.81427	2.5e-4
2	2	0.6667	0.4	0.99496	0.99455	4.08e-4
2	3	0.6667	0.6	1.21520	1.21470	4.37e-4
2	4	0.6667	0.8	1.48400	1.48370	3.15e-4
3	1	1.0	0.2	1.22180	1.22140	3.64e-4
3	2	1.0	0.4	1.49240	1.49180	5.8e-4
3	3	1.0	0.6	1.82270	1.82210	6.24e-4
$\vdots$	$\vdots$					

Referencias

- S Larsson, V Thomée, *Partial differential equations with numerical methods*, Springer, Berlin, 2016.
- T. Myint-U, L. Debnath, *Partial differential equations for Scientist and engineers*, Ed. North-Holland, New York, 1987.
- R. Burden, J. Faires, *Análisis Numérico*, Ed. Thompson, 2002.
- S.C. Chapra, R.P. Canale, *Métodos numméricos para ingenieros*, Ed. McGraw-Hill, México D.F., 2006.
- L. Lapidus, G. Pinder, *Numerical solution of partial differential equations in science and engineering*, Ed. Wiley Interscience Publication, New York, 1999.
- A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, *Problemas resueltos de métodos numéricos*, Ed. Thompson, 2006.
- J. Mathews, K. Fink, *Métodos Numéricos con Matlab*, Ed. Prentice-Hall, 1999.