GD: Actividad 1

Enero 2021

1. Parametrizar y representar con Matlab un paraboloide circular.
   Un paraboloide elíptico, S, se define como el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$, con a y b constantes positivas. Si tomamos $a = b$, entonces obtenemos el caso particular del paraboloide circular. El enunciado del ejercicio pide que parametricemos un paraboloide circular, aún así, haremos los cálculos dependiendo de a y b por conveniencia, para resolver el último apartado. Una manera de parametrizar esta superficie es la siguiente:

$$\varphi : [-U, U] \times [-V, V] \mapsto \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \mapsto \left(u, v, \frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b}\right).$$

   Aquí, U y V son valores positivos arbitrarios. El hecho de que la función φ es un difeomorfismo resulta trivial, por construcción.

   A continuación mostramos unas líneas de código con las que se puede generar un paraboloide circular en Matlab. La superficie se muestra en la Figura 1.

```
a=1;
b=1;
syms u v
x = u;
y = v;
z = (u*u/a)+(v*v/b);

fsurf(x, y, z, [-1 1 -1 1])
```

   Se puede encontrar una parametrización alternativa utilizando coordenadas cilíndricas y suponiendo $a = b$. Esto es

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$$

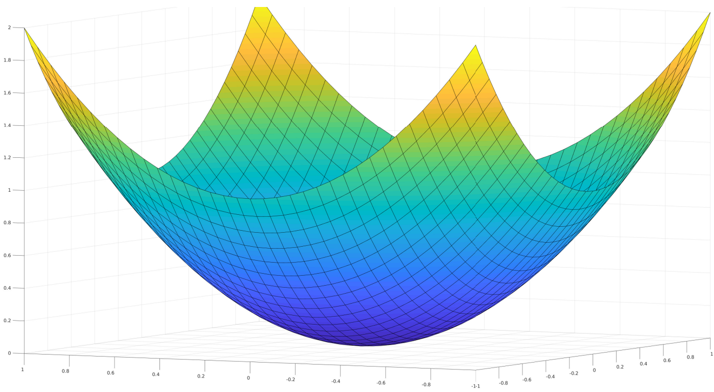

Figura 1: Paraboloide circular con $a = b = 1$, $u, v \in [-1, 1]$.

En este caso, la parametrización viene dada por:

$$\varphi(\rho, \theta) = \left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \frac{\rho^2}{a}\right)$$

2. Calcular los coeficientes de la primera forma fundamental.

   Para calcular los coeficientes de la primera forma fundamental, primero es necesario hallar las derivadas de la parametrización φ con respecto a las variables u y v. De ahora en adelante, denotaremos por φ_u la derivada parcial de φ con respecto de u y por φ_v la derivada parcial de φ con respecto de v. Mantendremos esta notación también para las derivadas de segundo orden ($\varphi_{u,u}$, $\varphi_{u,v}$ y $\varphi_{v,v}$).
   Es fácil ver que:

$$\varphi_u(u, v) = \left(1, 0, \frac{2u}{a}\right),$$

$$\varphi_v(u, v) = \left(0, 1, \frac{2v}{b}\right).$$

   Entonces la primera forma fundamental es la aplicación bilineal expresada por la matriz

$$I_S = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}.$$

   Donde:

$$E = \langle\varphi_u, \varphi_u\rangle = 1 + \frac{4u^2}{a^2}, \quad F = \langle\varphi_u, \varphi_v\rangle = \frac{4uv}{ab}, \quad G = \langle\varphi_v, \varphi_v\rangle = 1 + \frac{4v^2}{b^2}.$$

Para adelantar trabajo, calcularemos también el determinante de la matriz I, esto es:

$$\begin{aligned}\det(I_S) = EG - F^2 &= \left(1 + \frac{4u^2}{a^2}\right)\left(1 + \frac{4v^2}{b^2}\right) - \frac{16u^2v^2}{a^2b^2} \\ &= \left(1 + \frac{4u^2}{a^2} + \frac{4v^2}{b^2}\right).\end{aligned}$$

Con la parametrización alternativa, uno obtiene:

$$E = 1 + \frac{4\rho^2}{a^2}, \quad F = 0, \quad G = \rho^2.$$

3. Calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental.

   Vamos ahora con los coeficientes de la segunda forma fundamental. Ésta es la forma bilineal dada por la matriz:

$$II_S = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}.$$

   Los coeficientes L, M, y N se pueden calcular utilizando siguientes expresiones:

$$L = \frac{\det\big(\varphi_{u,u}, \varphi_u, \varphi_v\big)}{\sqrt{\det(I_S)}}, \quad M = \frac{\det\big(\varphi_{u,v}, \varphi_u, \varphi_v\big)}{\sqrt{\det(I_S)}}, \quad N = \frac{\det\big(\varphi_{u,u}, \varphi_v, \varphi_v\big)}{\sqrt{\det(I_S)}}.$$

   Esto es:

$$\begin{aligned} L =& \frac{1}{\sqrt{\det(I_S)}}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{a} & \frac{2u}{a} & \frac{2v}{b} \end{vmatrix} = \frac{2}{a\sqrt{\det(I_S)}}, \\ M =& \frac{1}{\sqrt{\det(I_S)}}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2u}{a} & \frac{2v}{b} \end{vmatrix} = 0, \\ N =& \frac{1}{\sqrt{\det(I_S)}}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{b} & \frac{2u}{a} & \frac{2v}{b} \end{vmatrix} = \frac{2}{b\sqrt{\det(I_S)}}, \end{aligned}$$

   Con la parametrización alternativa, uno obtiene:

$$L = \frac{2}{a\sqrt{1 + \frac{4\rho}{a^2}}}, \quad M = 0, \quad N == \frac{2\rho^2}{a\sqrt{1 + \frac{4\rho}{a^2}}}.$$

4. Encontrar una curva contenida en la superficie y calcular su longitud.

Hay varias formas de encontrar una curva contenida en la superficie. Una de las más elementales es definir una curva

$$(u(t), v(t)) : \mathbb{R} \mapsto [-U, U] \times [-V, V]$$

y componerla con la parametrización φ, esto es, $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$. Como tenemos libertad de elección, definimos $(u(t), v(t)) = (t, 0)$. Entonces, la curva contenida en la superficie con la que trabajaremos es:

$$\alpha(t) = \left(t, 0, \frac{t^2}{a}\right).$$

La longitud de la curva definida por los valores t_0 y t_1 viene dada por la fórmula:

$$\Big[\mathrm{long}(\alpha)\Big]_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\frac{du}{dt} + F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\frac{dv}{dt}} dt.$$

Donde $\frac{du}{dt} = 1$ y $\frac{dv}{dt} = 0$, luego:

$$\Big[\mathrm{long}(\alpha)\Big]_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\frac{du}{dt}} dt.$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \frac{4t^2}{a^2}} dt.$$

Esta integral se puede resolver a mano pero involucra expresiones muy complicadas así que la dejaremos indicada.

Una opción alternativa es calcular el círculo obtenido de cortar el paraboloide con el plano $z = 1$. Para ello, utilizaremos la parametrización alternativa.

En este caso, la curva resultante es un círculo de radio $\sqrt{a}$. Se puede parametrizar como:

$$\gamma(t) = \left(\sqrt{a}\cos t, \sqrt{a}\sin t, 1\right)$$

Notemos que $\rho = \sqrt{a}$ para todo t. Luego $d\rho/dt = 0$. Por otro lado, $\theta = t$, de lo cual se obtiene $d\theta/dt = 1$. La integral a resolver es, pues

$$\Big[\mathrm{long}(\gamma)\Big]_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\rho^2} dt = \sqrt{a}(t_1 - t_0).$$

5. ¿Esta superficie puede ser localmente isométrica a un paraboloide elíptico?

   Para tratar esta cuestión, invocaremos el Teorema Egregio de Gauss. Éste clama que toda isometría local, preserva la curvatura gaussiana. Esto es, si existiera una isometría local entre el paraboloide circular y el elíptico, entonces éstos deberían tener la misma curvatura Gaussiana. La curvatura Gaussiana se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$K_{a,b} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{LN}{\det(I_S)} = \frac{4}{ab\det(I_S)^2} = \frac{4}{ab\left(1 + \frac{4u^2}{a^2} + \frac{4v^2}{b^2}\right)^2}.$$

El caso del paraboloide circular se recupera del elíptico suponiendo $b = a$. Claramente, $K_{a,a} \neq K_{a,b}$ si $a \neq b$. Esto es, la curvatura gaussiana del paraboloide circular (caso para el que podemos suponer $b = a$) es distinta de la curvatura gaussiana del paraboloide elíptico. En virtud del Teorema Egregio de Gauss, se desprende que un paraboloide circular y un paraboloide elíptico no son localmente isométricos.