Tema 2
SDC: Sistemas lineales de orden 1
Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos

Dra. Neus Garrido Sàez

Máster en Ingeniería Matemática y Computación
Escuela Superior en Ingeniería y Tecnología

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

Contenido

1

Introducción

- En función de la variable temporal
  - **Continuos:**

$$\text{EDO:} \qquad \dot{x} = F(x)$$

$$\text{EDP:} \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = F\left(\frac{\partial x}{\partial y}, x\right)$$

  - **Discretos:**

$$\text{ED:} \quad x_{n+1} = \phi(x_n), \quad x_n = x(t_n)$$

- En función del estímulo externo
  - **Autónomos:**

$$\dot{x} = F(x), \quad \frac{\partial x}{\partial t} = F\left(\frac{\partial x}{\partial y}, x\right), \quad x_{n+1} = \phi(x_n)$$

  - **Forzados:**

$$\dot{x} = F(t, x), \quad x_{n+1} = \phi(t_n, x_n)$$

Esquema

	Fundamentos de EDO	**Dinámica de EDO autónomas**
Conceptos	**Tipos** Variables separables, exactas, lineales **Soluciones** General, particular	**Puntos** Equilibrio: atractores, repulsores, nodos
Gráficos	**Campo de direcciones**	**Línea de fase** **Diagrama de bifurcación**

2

Fundamentos de EDO de orden uno

Contenidos

Soluciones de una EDO de orden uno

EDO de orden 1

$$\dot{x} = F(t, x)$$

- Ordinaria: solo hay derivadas con respecto de una variable
- Orden 1: solo la primera derivada de la magnitud

Soluciones de una EDO de orden uno

EDO de orden 1

$$\dot{x} = F(t, x)$$

- Ordinaria: solo hay derivadas con respecto de una variable
- Orden 1: solo la primera derivada de la magnitud

Soluciones

- **Solución general:** engloba un número infinito de soluciones

$$\dot{x} = -\frac{x}{t} \Rightarrow x(t) = \frac{C}{t}$$

Soluciones de una EDO de orden uno

EDO de orden 1

$$\dot{x} = F(t, x)$$

- Ordinaria: solo hay derivadas con respecto de una variable
- Orden 1: solo la primera derivada de la magnitud

Soluciones

- **Solución general:** engloba un número infinito de soluciones

$$\dot{x} = -\frac{x}{t} \Rightarrow x(t) = \frac{C}{t}$$

- **Solución particular:** se imponen condiciones sobre la solución, $x(t^*) = x^*$

$$x(t^*) = x^* = \frac{C}{t^*} \Rightarrow C = x^* t^* \Rightarrow x(t) = \frac{x^* t^*}{t}$$

- **Solución particular al PVI:** las condiciones sobre la solución se establecen sobre un instante inicial $x(t_0) = x_0$

Contenidos

EDOs de variables separables

$$\boxed{\dot{x} = a(t)b(x)}$$

EDOs de variables separables

$$\boxed{\dot{x} = a(t)b(x)}$$

Solución

$$\frac{dx}{dt} = a(t)b(x) \Leftrightarrow \int \frac{dx}{b(x)} = \int a(t)dt$$

$$\boxed{\dot{x} = a(t)b(x)}$$

Solución

$$\frac{dx}{dt} = a(t)b(x) \Leftrightarrow \int \frac{dx}{b(x)} = \int a(t)dt$$

Ejemplo 1.

$$\dot{x} = \frac{1+t}{x^2t^2}$$

$$\boxed{\dot{x} = a(t)b(x)}$$

Solución

$$\frac{dx}{dt} = a(t)b(x) \Leftrightarrow \int \frac{dx}{b(x)} = \int a(t)dt$$

Ejemplo 1.

$$\dot{x} = \frac{1+t}{x^2t^2}$$

- $a(t) = \frac{1+t}{t^2}$
- $b(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\boxed{\dot{x} = a(t)b(x)}$$

Solución

$$\frac{dx}{dt} = a(t)b(x) \Leftrightarrow \int \frac{dx}{b(x)} = \int a(t)dt$$

Ejemplo 1.

$$\dot{x} = \frac{1+t}{x^2t^2}$$

- $a(t) = \frac{1+t}{t^2}$
- $b(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1+t}{x^2t^2} \Leftrightarrow \int x^2 dx = \int \frac{1+t}{t^2} dt \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} = -\frac{1}{t} + \ln(|t|) + C$$

$$\boxed{\dot{x} = a(t)b(x)}$$

Solución

$$\frac{dx}{dt} = a(t)b(x) \Leftrightarrow \int \frac{dx}{b(x)} = \int a(t)dt$$

Ejemplo 1.

$$\dot{x} = \frac{1+t}{x^2t^2}$$

- $a(t) = \frac{1+t}{t^2}$
- $b(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1+t}{x^2t^2} \Leftrightarrow \int x^2 dx = \int \frac{1+t}{t^2} dt \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} = -\frac{1}{t} + \ln(|t|) + C$$

$$x(t) = \sqrt[3]{-\frac{3}{t} + 3\ln(|t|) + 3C}$$

Contenidos

EDOs exactas

$$\boxed{M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0, \qquad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}}$$

$$\boxed{M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0, \qquad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}}$$

Solución

Existe una función $f(t,x)$ cuyas derivadas parciales satisfacen:

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = M(t,x), \quad \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = N(t,x)$$

La solución es $f(t,x) = C$, siendo C una constante.

Ejemplo 2. $(5x + 4t)dx + (4x - 8t^3)dt = 0$

Ejemplo 2. $(5x + 4t)dx + (4x - 8t^3)dt = 0$

- $M(t, x) = 4x - 8t^3$
- $N(t, x) = 5x + 4t$

Ejemplo 2. $(5x + 4t)dx + (4x - 8t^3)dt = 0$

- $M(t, x) = 4x - 8t^3$
- $N(t, x) = 5x + 4t$

1. Comprobar que $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$:

Ejemplo 2. $(5x+4t)dx+(4x-8t^3)dt=0$

- $M(t,x)=4x-8t^3$
- $N(t,x)=5x+4t$

1. Comprobar que $\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial t}$: $\frac{\partial M}{\partial x}=4=\frac{\partial N}{\partial t}$

Ejemplo 2. $(5x + 4t)dx + (4x - 8t^3)dt = 0$

- $M(t, x) = 4x - 8t^3$
- $N(t, x) = 5x + 4t$

1. Comprobar que $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$: $\quad \frac{\partial M}{\partial x} = 4 = \frac{\partial N}{\partial t}$
2. Integrar $\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}$ con respecto a t:

Ejemplo 2. $(5x + 4t)dx + (4x - 8t^3)dt = 0$

- $M(t, x) = 4x - 8t^3$
- $N(t, x) = 5x + 4t$

1. Comprobar que $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$: $\quad \frac{\partial M}{\partial x} = 4 = \frac{\partial N}{\partial t}$
2. Integrar $\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}$ con respecto a t:

$$f(t, x) = \int M(t, x)dt = \int (4x - 8t^3)dt = 4xt - 2t^4 + g(x)$$

Ejemplo 2. $(5x+4t)dx+(4x-8t^3)dt=0$

- $M(t,x)=4x-8t^3$
- $N(t,x)=5x+4t$

1. Comprobar que $\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial t}$: $\qquad \frac{\partial M}{\partial x}=4=\frac{\partial N}{\partial t}$
2. Integrar $\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}$ con respecto a t:

$$f(t,x)=\int M(t,x)dt=\int(4x-8t^3)dt=4xt-2t^4+g(x)$$

3. Calcular $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}=N(t,x)$

Ejemplo 2. $(5x+4t)dx+(4x-8t^3)dt=0$

- $M(t,x)=4x-8t^3$
- $N(t,x)=5x+4t$

1. Comprobar que $\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial t}$: $\qquad \frac{\partial M}{\partial x}=4=\frac{\partial N}{\partial t}$
2. Integrar $\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}$ con respecto a t:

$$f(t,x)=\int M(t,x)dt=\int(4x-8t^3)dt=4xt-2t^4+g(x)$$

3. Calcular $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}=N(t,x)$

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} & = & 4t+g'(x) \\ \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} & = & 5x+4t \end{array}\right\}$$

Ejemplo 2. $(5x + 4t)dx + (4x - 8t^3)dt = 0$

- $M(t, x) = 4x - 8t^3$
- $N(t, x) = 5x + 4t$

1. Comprobar que $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$: $\quad \frac{\partial M}{\partial x} = 4 = \frac{\partial N}{\partial t}$
2. Integrar $\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}$ con respecto a t:

$$f(t, x) = \int M(t, x)dt = \int (4x - 8t^3)dt = 4xt - 2t^4 + g(x)$$

3. Calcular $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = N(t, x)$

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} & = & 4t + g'(x) \\ \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} & = & 5x + 4t \end{array}\right\} \Rightarrow g'(x) = 5x$$

Ejemplo 2. $(5x+4t)dx+(4x-8t^3)dt=0$

- $M(t,x)=4x-8t^3$
- $N(t,x)=5x+4t$

1. Comprobar que $\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial t}$: $\qquad \frac{\partial M}{\partial x}=4=\frac{\partial N}{\partial t}$
2. Integrar $\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}$ con respecto a t:

$$f(t,x)=\int M(t,x)dt=\int(4x-8t^3)dt=4xt-2t^4+g(x)$$

3. Calcular $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}=N(t,x)$

$$\left.\begin{array}{rcl}\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} & = & 4t+g'(x)\\ \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} & = & 5x+4t\end{array}\right\}\Rightarrow g'(x)=5x\Rightarrow g(x)=\frac{5}{2}x^2$$

EDOs exactas

Ejemplo 2. $(5x + 4t)dx + (4x - 8t^3)dt = 0$

- $M(t, x) = 4x - 8t^3$
- $N(t, x) = 5x + 4t$

1. Comprobar que $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$: $\quad \frac{\partial M}{\partial x} = 4 = \frac{\partial N}{\partial t}$
2. Integrar $\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}$ con respecto a t:

$$f(t, x) = \int M(t, x)dt = \int (4x - 8t^3)dt = 4xt - 2t^4 + g(x)$$

3. Calcular $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = N(t, x)$

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} & = & 4t + g'(x) \\ \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} & = & 5x + 4t \end{array}\right\} \Rightarrow g'(x) = 5x \Rightarrow g(x) = \frac{5}{2}x^2$$

4. $f(t, x) = C$:

Ejemplo 2. $(5x+4t)dx+(4x-8t^3)dt=0$

- $M(t,x)=4x-8t^3$
- $N(t,x)=5x+4t$

1. Comprobar que $\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial t}$: $\qquad \frac{\partial M}{\partial x}=4=\frac{\partial N}{\partial t}$
2. Integrar $\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}$ con respecto a t:

$$f(t,x)=\int M(t,x)dt=\int(4x-8t^3)dt=4xt-2t^4+g(x)$$

3. Calcular $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}=N(t,x)$

$$\left.\begin{array}{rcl}\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} & = & 4t+g'(x)\\ \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} & = & 5x+4t\end{array}\right\}\Rightarrow g'(x)=5x\Rightarrow g(x)=\frac{5}{2}x^2$$

4. $f(t,x)=C$:

$$4xt-2t^4+\frac{5}{2}x^2=C$$

EDOs exactas

Ejemplo 2. $(5x + 4t)dx + (4x - 8t^3)dt = 0$

- $M(t, x) = 4x - 8t^3$
- $N(t, x) = 5x + 4t$

1. Comprobar que $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$: $\qquad \frac{\partial M}{\partial x} = 4 = \frac{\partial N}{\partial t}$
2. Integrar $\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}$ con respecto a t:

$$f(t, x) = \int M(t, x)dt = \int (4x - 8t^3)dt = 4xt - 2t^4 + g(x)$$

3. Calcular $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = N(t, x)$

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} & = & 4t + g'(x) \\ \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} & = & 5x + 4t \end{array}\right\} \Rightarrow g'(x) = 5x \Rightarrow g(x) = \frac{5}{2}x^2$$

4. $f(t, x) = C$:

$$4xt - 2t^4 + \frac{5}{2}x^2 = C \quad \leftarrow \text{despejar } x(t)$$

Contenidos

EDOs lineales

$$\boxed{\dot{x} + a(t)x = b(x)}$$

EDOs lineales

$$\boxed{\dot{x} + a(t)x = b(x)}$$

Solución

Multiplicando por el factor integrante:

$$\mu(t) = exp\left\{\int a(t)dt\right\}$$

la EDO lineal se transforma en una EDO exacta.

$$\boxed{\dot{x} + a(t)x = b(x)}$$

Solución

Multiplicando por el factor integrante:

$$\mu(t) = exp\left\{\int a(t)dt\right\}$$

la EDO lineal se transforma en una EDO exacta.

Ejemplo 3. $x = \frac{1}{4}\dot{x}t - 1 \Rightarrow \dot{x} - \frac{4}{t}x = \frac{4}{t}$

$$\boxed{\dot{x} + a(t)x = b(x)}$$

Solución

Multiplicando por el factor integrante:

$$\mu(t) = exp\left\{\int a(t)dt\right\}$$

la EDO lineal se transforma en una EDO exacta.

Ejemplo 3. $x = \frac{1}{4}\dot{x}t - 1 \Rightarrow \dot{x} - \frac{4}{t}x = \frac{4}{t}$

- $a(t) = -\frac{4}{t}$
- $b(x) = \frac{4}{t}$

$$\boxed{\dot{x} + a(t)x = b(x)}$$

Solución

Multiplicando por el factor integrante:

$$\mu(t) = exp\left\{\int a(t)dt\right\}$$

la EDO lineal se transforma en una EDO exacta.

Ejemplo 3. $x = \frac{1}{4}\dot{x}t - 1 \Rightarrow \dot{x} - \frac{4}{t}x = \frac{4}{t}$

- $a(t) = -\frac{4}{t}$
- $b(x) = \frac{4}{t}$
- $\mu(t) = t^{-4}$

$$\boxed{\dot{x} + a(t)x = b(x)}$$

Solución

Multiplicando por el factor integrante:

$$\mu(t) = exp\left\{\int a(t)dt\right\}$$

la EDO lineal se transforma en una EDO exacta.

Ejemplo 3. $x = \frac{1}{4}\dot{x}t - 1 \Rightarrow \dot{x} - \frac{4}{t}x = \frac{4}{t}$

- $a(t) = -\frac{4}{t}$
- $b(x) = \frac{4}{t}$
- $\mu(t) = t^{-4}$

$$\frac{dx}{dt} - \frac{4}{t}x = \frac{4}{t} \Leftrightarrow \frac{1}{t^4}dx + \left(-\frac{4}{t^5}x - \frac{4}{t^5}\right)dt = 0$$

$$\boxed{\dot{x} + a(t)x = b(x)}$$

Solución

Multiplicando por el factor integrante:

$$\mu(t) = exp\left\{\int a(t)dt\right\}$$

la EDO lineal se transforma en una EDO exacta.

Ejemplo 3. $x = \frac{1}{4}\dot{x}t - 1 \Rightarrow \dot{x} - \frac{4}{t}x = \frac{4}{t}$

- $a(t) = -\frac{4}{t}$
- $b(x) = \frac{4}{t}$
- $\mu(t) = t^{-4}$

$$\frac{dx}{dt} - \frac{4}{t}x = \frac{4}{t} \Leftrightarrow \frac{1}{t^4}dx + \left(-\frac{4}{t^5}x - \frac{4}{t^5}\right)dt = 0 \Rightarrow \begin{cases} M(t,x) & = & \dfrac{-4}{t^5}x - \dfrac{4}{t^5} \\ N(t,x) & = & \dfrac{1}{t^4} \end{cases}$$

3

Representación gráfica de EDO

Representación gráfica de EDO: campo de direcciones

- No siempre es posible o fácil representar la solución de la EDO

- No siempre es posible o fácil representar la solución de la EDO

Campo de direcciones

Representación gráfica de EDO: campo de direcciones

- No siempre es posible o fácil representar la solución de la EDO

Campo de direcciones

- Derivada: pendiente de la recta tangente en un punto

- No siempre es posible o fácil representar la solución de la EDO

Campo de direcciones

- Derivada: pendiente de la recta tangente en un punto

Campo de direcciones

- Representa el comportamiento de las infinitas soluciones en cada punto (t, x)
- En cada punto (t, x) se representa como un vector de pendiente $F(t, x)$
- Tangente a la solución de la EDO
- Invariante respecto a las condiciones iniciales $\Rightarrow$ tangente a cualquier solución particular

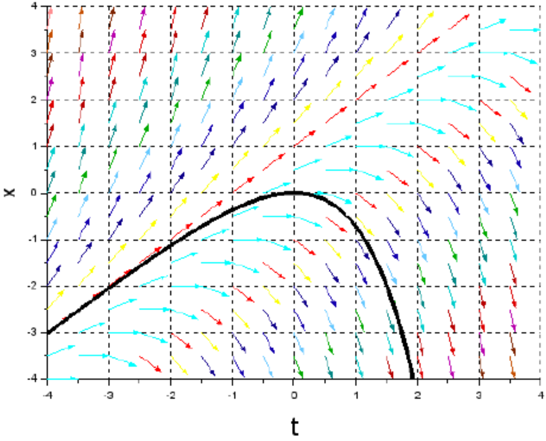
Ejemplo 4. $\dot{x} = x - t$, $x(0) = 0$

- EDO lineal
- Solución general: $x(t) = Ce^t + t + 1$
- Solución particular: $x(t) = -e^t + t + 1$

Representación gráfica de EDO: campo de direcciones

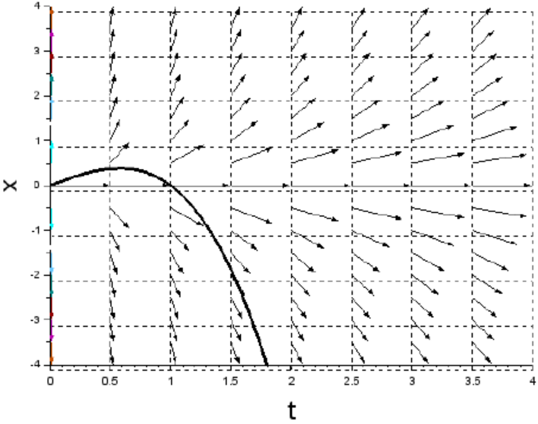
Ejemplo 4. $\dot{x} = x - t$, $x(0) = 0$

- EDO lineal
- Solución general: $x(t) = Ce^t + t + 1$
- Solución particular: $x(t) = -e^t + t + 1$



Ejemplo 5. $\dot{x} = 3\frac{x}{t} - 2$, $x(1) = 0$

- EDO lineal
- Solución general: $x(t) = t(1 + Ct^2)$
- Solución particular: $x(t) = t(1 - t^2)$



4

Dinámica de las EDO autónomas

Conceptos fundamentales

- EDO autónoma: no presenta estímulo externo

$$\dot{x} = f(x)$$

Conceptos fundamentales

- EDO autónoma: no presenta estímulo externo

$$\dot{x} = f(x)$$

- Puntos de equilibrio: no existe variación temporal

$$\dot{x} = f(x) = 0$$

Conceptos fundamentales

- EDO autónoma: no presenta estímulo externo

$$\dot{x} = f(x)$$

- Puntos de equilibrio: no existe variación temporal

$$\dot{x} = f(x) = 0$$

- Puntos fijos: el punto permanece invariante

$$\dot{x} = f(x) = x$$

Conceptos fundamentales

- EDO autónoma: no presenta estímulo externo

$$\dot{x} = f(x)$$

- Puntos de equilibrio: no existe variación temporal

$$\dot{x} = f(x) = 0$$

- Puntos fijos: el punto permanece invariante

$$\dot{x} = f(x) = x$$

- Clasificación de los puntos de equilibrio x^*:
  - $f'(x^*) > 0$ **Repulsor**
  - $f'(x^*) < 0$ **Atractor**
  - $f'(x^*) = 0$ **Nodo**

- EDO autónoma: no presenta estímulo externo

$$\dot{x} = f(x)$$

- Puntos de equilibrio: no existe variación temporal

$$\dot{x} = f(x) = 0$$

- Puntos fijos: el punto permanece invariante

$$\dot{x} = f(x) = x$$

- Clasificación de los puntos de equilibrio x^*:
  - $f'(x^*) > 0$ **Repulsor**
  - $f'(x^*) < 0$ **Atractor**
  - $f'(x^*) = 0$ **Nodo**
- Línea de fase: representa el comportamiento de los puntos de equilibrio

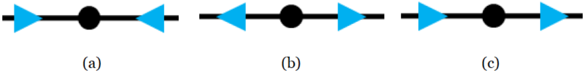


Figura: (a) atractor; (b) repulsor; (c) nodo

Contenidos

Ejemplo 6. Dada la ecuación diferencial $\dot{x} = 3 + 2x - x^2$, $x(0) = 3$, obtener los puntos de equilibrio, clasificarlos y dibujar la línea de fase

Ejemplo 6. Dada la ecuación diferencial $\dot{x} = 3 + 2x - x^2$, $x(0) = 3$, obtener los puntos de equilibrio, clasificarlos y dibujar la línea de fase

- Solución particular: $x(t) = \dfrac{e^{-4t} + 3}{1 - e^{-4t}}$

Ejemplo 6. Dada la ecuación diferencial $\dot{x} = 3 + 2x - x^2$, $x(0) = 3$, obtener los puntos de equilibrio, clasificarlos y dibujar la línea de fase

- Solución particular: $x(t) = \dfrac{e^{-4t} + 3}{1 - e^{-4t}}$
- Puntos de equilibrio:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3+2x-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^* = \{-1, 3\}$$

Ejemplo 6. Dada la ecuación diferencial $\dot{x} = 3 + 2x - x^2$, $x(0) = 3$, obtener los puntos de equilibrio, clasificarlos y dibujar la línea de fase

- Solución particular: $x(t) = \dfrac{e^{-4t} + 3}{1 - e^{-4t}}$
- Puntos de equilibrio:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3+2x-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^* = \{-1, 3\}$$

- Clasificación: $f'(x) = -2x + 2$

Ejemplo 6. Dada la ecuación diferencial $\dot{x} = 3 + 2x - x^2$, $x(0) = 3$, obtener los puntos de equilibrio, clasificarlos y dibujar la línea de fase

- Solución particular: $x(t) = \dfrac{e^{-4t} + 3}{1 - e^{-4t}}$
- Puntos de equilibrio:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3+2x-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^* = \{-1, 3\}$$

- Clasificación: $f'(x) = -2x + 2$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(-1) = 4 > 0 \\ \end{array} \right.$$

Ejemplo 6. Dada la ecuación diferencial $\dot{x} = 3 + 2x - x^2$, $x(0) = 3$, obtener los puntos de equilibrio, clasificarlos y dibujar la línea de fase

- Solución particular: $x(t) = \dfrac{e^{-4t} + 3}{1 - e^{-4t}}$
- Puntos de equilibrio:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3+2x-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^* = \{-1, 3\}$$

- Clasificación: $f'(x) = -2x + 2$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} f'(-1) = 4 > 0 & \textbf{repulsor} \\ & \end{array} \right.$$

Ejemplo 6. Dada la ecuación diferencial $\dot{x} = 3 + 2x - x^2$, $x(0) = 3$, obtener los puntos de equilibrio, clasificarlos y dibujar la línea de fase

- Solución particular: $x(t) = \dfrac{e^{-4t} + 3}{1 - e^{-4t}}$
- Puntos de equilibrio:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3+2x-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^* = \{-1, 3\}$$

- Clasificación: $f'(x) = -2x + 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(-1) = 4 > 0 & \textbf{repulsor} \\ f'(3) = -4 < 0 & \end{cases}$$

Ejemplo 6. Dada la ecuación diferencial $\dot{x} = 3 + 2x - x^2$, $x(0) = 3$, obtener los puntos de equilibrio, clasificarlos y dibujar la línea de fase

- Solución particular: $x(t) = \dfrac{e^{-4t} + 3}{1 - e^{-4t}}$
- Puntos de equilibrio:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3+2x-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^* = \{-1, 3\}$$

- Clasificación: $f'(x) = -2x + 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(-1) = 4 > 0 & \textbf{repulsor} \\ f'(3) = -4 < 0 & \textbf{atractor} \end{cases}$$

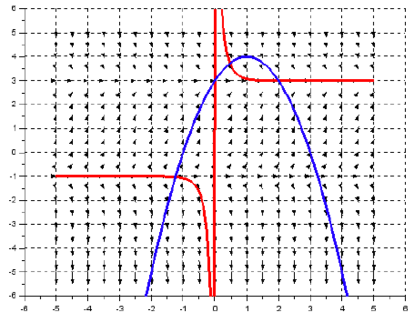
Ejemplo 6. Dada la ecuación diferencial $\dot{x} = 3 + 2x - x^2$, $x(0) = 3$, obtener los puntos de equilibrio, clasificarlos y dibujar la línea de fase

- Solución particular: $x(t) = \dfrac{e^{-4t} + 3}{1 - e^{-4t}}$
- Puntos de equilibrio:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3{+}2x{-}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^* = \{-1, 3\}$$

- Clasificación: $f'(x) = -2x + 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(-1) = 4 > 0 & \textbf{repulsor} \\ f'(3) = -4 < 0 & \textbf{atractor} \end{cases}$$



$< t, x(t) >$ (rojo)
$< x(t), \dot{x}(x) >$ azul

EDO libre de parámetros

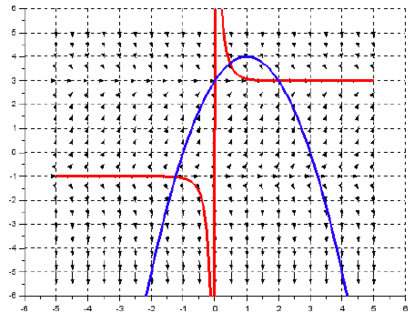
Ejemplo 6. Dada la ecuación diferencial $\dot{x} = 3 + 2x - x^2$, $x(0) = 3$, obtener los puntos de equilibrio, clasificarlos y dibujar la línea de fase

- Solución particular: $x(t) = \dfrac{e^{-4t} + 3}{1 - e^{-4t}}$
- Puntos de equilibrio:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3+2x-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^* = \{-1, 3\}$$

- Clasificación: $f'(x) = -2x + 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(-1) = 4 > 0 & \textbf{repulsor} \\ f'(3) = -4 < 0 & \textbf{atractor} \end{cases}$$



$< t, x(t) >$ (rojo)
$< x(t), \dot{x}(x) >$ azul

Ejemplo 7. Realiza el estudio dinámico de $\dot{x} = \sin(\frac{x}{2})$

Ejemplo 7. Realiza el estudio dinámico de $\dot{x} = \sin(\frac{x}{2})$

- Puntos de equilibrio:

$$\sin(\frac{x}{2}) = 0 \Leftrightarrow x^* = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Ejemplo 7. Realiza el estudio dinámico de $\dot{x} = \sin(\frac{x}{2})$

- Puntos de equilibrio:

$$\sin(\frac{x}{2}) = 0 \Leftrightarrow x^* = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

- Clasificación: $f'(x^*) = \frac{1}{2}\cos(k\pi)$

Ejemplo 7. Realiza el estudio dinámico de $\dot{x} = \sin(\frac{x}{2})$

- Puntos de equilibrio:

$$\sin(\frac{x}{2}) = 0 \Leftrightarrow x^* = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

- Clasificación: $f'(x^*) = \frac{1}{2}\cos(k\pi)$

$$\Rightarrow f'(x^*) = \begin{cases} 1/2 > 0, & k \text{ par} \\ -1/2 < 0, & k \text{ impar} \end{cases}$$

Ejemplo 7. Realiza el estudio dinámico de $\dot{x} = \sin(\frac{x}{2})$

- Puntos de equilibrio:

$$\sin(\frac{x}{2}) = 0 \Leftrightarrow x^* = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

- Clasificación: $f'(x^*) = \frac{1}{2}\cos(k\pi)$

$$\Rightarrow f'(x^*) = \begin{cases} 1/2 > 0, & k \text{ par} \\ -1/2 < 0, & k \text{ impar} \end{cases}$$

  - Repulsores:
    $x^* = 0, 4\pi, 8\pi, \ldots, -4\pi, -8\pi, \ldots$

EDO libre de parámetros

Ejemplo 7. Realiza el estudio dinámico de $\dot{x} = \sin(\frac{x}{2})$

- Puntos de equilibrio:

$$\sin(\frac{x}{2}) = 0 \Leftrightarrow x^* = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

- Clasificación: $f'(x^*) = \frac{1}{2}\cos(k\pi)$

$$\Rightarrow f'(x^*) = \begin{cases} 1/2 > 0, & k \text{ par} \\ -1/2 < 0, & k \text{ impar} \end{cases}$$

  - Repulsores:
    $x^* = 0, 4\pi, 8\pi, \ldots, -4\pi, -8\pi, \ldots$
  - Atractores:
    $x^* = 2\pi, 6\pi, 10\pi, \ldots, -2\pi, -6\pi, \ldots$

Ejemplo 7. Realiza el estudio dinámico de $\dot{x} = \sin(\frac{x}{2})$

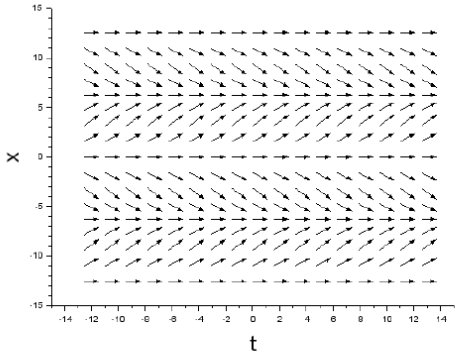
- Puntos de equilibrio:

$$\sin(\frac{x}{2}) = 0 \Leftrightarrow x^* = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

- Clasificación: $f'(x^*) = \frac{1}{2}\cos(k\pi)$

$$\Rightarrow f'(x^*) = \begin{cases} 1/2 > 0, & k \text{ par} \\ -1/2 < 0, & k \text{ impar} \end{cases}$$

  - Repulsores: $x^* = 0, 4\pi, 8\pi, \ldots, -4\pi, -8\pi, \ldots$
  - Atractores: $x^* = 2\pi, 6\pi, 10\pi, \ldots, -2\pi, -6\pi, \ldots$



Ejemplo 7. Realiza el estudio dinámico de $\dot{x} = \sin(\frac{x}{2})$

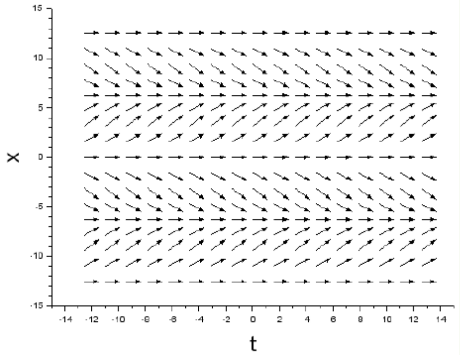
- Puntos de equilibrio:

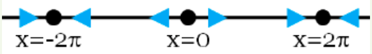
$$\sin(\frac{x}{2}) = 0 \Leftrightarrow x^* = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

- Clasificación: $f'(x^*) = \frac{1}{2}\cos(k\pi)$

$$\Rightarrow f'(x^*) = \begin{cases} 1/2 > 0, & k \text{ par} \\ -1/2 < 0, & k \text{ impar} \end{cases}$$

  - Repulsores:
    $x^* = 0, 4\pi, 8\pi, \ldots, -4\pi, -8\pi, \ldots$
  - Atractores:
    $x^* = 2\pi, 6\pi, 10\pi, \ldots, -2\pi, -6\pi, \ldots$





Contenidos

EDO uniparamétrica

Diagrama de bifurcación

- Representa los cambios que se producen en el comportamiento del SD en función del valor de los parámetros
- Eje de abscisas: parámetro
- Eje de ordenadas: magnitud
- $+$ Líneas de fase verticales (comportamiento de cada punto de equilibrio)

Diagrama de bifurcación

- Representa los cambios que se producen en el comportamiento del SD en función del valor de los parámetros
- Eje de abscisas: parámetro
- Eje de ordenadas: magnitud
- $+$ Líneas de fase verticales (comportamiento de cada punto de equilibrio)

Ejemplo 8. Modelo logístico de población: $\dot{x} = ax(1-x)$, $x(0) = x_0$

Diagrama de bifurcación

- Representa los cambios que se producen en el comportamiento del SD en función del valor de los parámetros
- Eje de abscisas: parámetro
- Eje de ordenadas: magnitud
- $+$ Líneas de fase verticales (comportamiento de cada punto de equilibrio)

Ejemplo 8. Modelo logístico de población: $\dot{x} = ax(1-x)$, $x(0) = x_0$

- Solución particular: $x(t) = \dfrac{x_0 e^{at}}{1 - x_0 + x_0 e^{at}}$

Diagrama de bifurcación

- Representa los cambios que se producen en el comportamiento del SD en función del valor de los parámetros
- Eje de abscisas: parámetro
- Eje de ordenadas: magnitud
- $+$ Líneas de fase verticales (comportamiento de cada punto de equilibrio)

Ejemplo 8. Modelo logístico de población: $\dot{x} = ax(1-x)$, $x(0) = x_0$

- Solución particular: $x(t) = \dfrac{x_0 e^{at}}{1 - x_0 + x_0 e^{at}}$
- Puntos de equilibrio:

Diagrama de bifurcación

- Representa los cambios que se producen en el comportamiento del SD en función del valor de los parámetros
- Eje de abscisas: parámetro
- Eje de ordenadas: magnitud
- $+$ Líneas de fase verticales (comportamiento de cada punto de equilibrio)

Ejemplo 8. Modelo logístico de población: $\dot{x} = ax(1-x)$, $x(0) = x_0$

- Solución particular: $x(t) = \dfrac{x_0 e^{at}}{1 - x_0 + x_0 e^{at}}$
- Puntos de equilibrio:

$\boxed{a = 0}$

$$f(x) = 0, \forall x$$
$$f'(x) = 0, \forall x$$

Diagrama de bifurcación

- Representa los cambios que se producen en el comportamiento del SD en función del valor de los parámetros
- Eje de abscisas: parámetro
- Eje de ordenadas: magnitud
- $+$ Líneas de fase verticales (comportamiento de cada punto de equilibrio)

Ejemplo 8. Modelo logístico de población: $\dot{x} = ax(1-x)$, $x(0) = x_0$

- Solución particular: $x(t) = \dfrac{x_0 e^{at}}{1 - x_0 + x_0 e^{at}}$
- Puntos de equilibrio:

$\boxed{a = 0}$

$$f(x) = 0, \forall x$$
$$f'(x) = 0, \forall x$$

$\Rightarrow$ todos los puntos son puntos de equilibrio
y son nodos

Diagrama de bifurcación

- Representa los cambios que se producen en el comportamiento del SD en función del valor de los parámetros
- Eje de abscisas: parámetro
- Eje de ordenadas: magnitud
- $+$ Líneas de fase verticales (comportamiento de cada punto de equilibrio)

Ejemplo 8. Modelo logístico de población: $\dot{x} = ax(1-x)$, $x(0) = x_0$

- Solución particular: $x(t) = \dfrac{x_0 e^{at}}{1 - x_0 + x_0 e^{at}}$
- Puntos de equilibrio:

$\boxed{a = 0}$

$$f(x) = 0, \forall x$$
$$f'(x) = 0, \forall x$$

$\Rightarrow$ todos los puntos son puntos de equilibrio y son nodos

$\boxed{a \neq 0}$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^* = \{0, 1\}$$
$$f'(x) = a - 2ax$$

Diagrama de bifurcación

- Representa los cambios que se producen en el comportamiento del SD en función del valor de los parámetros
- Eje de abscisas: parámetro
- Eje de ordenadas: magnitud
- $+$ Líneas de fase verticales (comportamiento de cada punto de equilibrio)

Ejemplo 8. Modelo logístico de población: $\dot{x} = ax(1-x)$, $x(0) = x_0$

- Solución particular: $x(t) = \dfrac{x_0 e^{at}}{1 - x_0 + x_0 e^{at}}$
- Puntos de equilibrio:

$\boxed{a = 0}$

$$f(x) = 0, \forall x$$
$$f'(x) = 0, \forall x$$

$\Rightarrow$ todos los puntos son puntos de equilibrio y son nodos

$\boxed{a \neq 0}$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^* = \{0, 1\}$$
$$f'(x) = a - 2ax$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(0) = a \\ f'(1) = -a \end{cases}$$

Ejemplo 8. (continuación)

a	$x^* = 0$	$x^* = 1$
$a < 0$	atractor	repulsor
$a > 0$	repulsor	atractor

Ejemplo 8. (continuación)

a	$x^* = 0$	$x^* = 1$
$a < 0$	atractor	repulsor
$a > 0$	repulsor	atractor

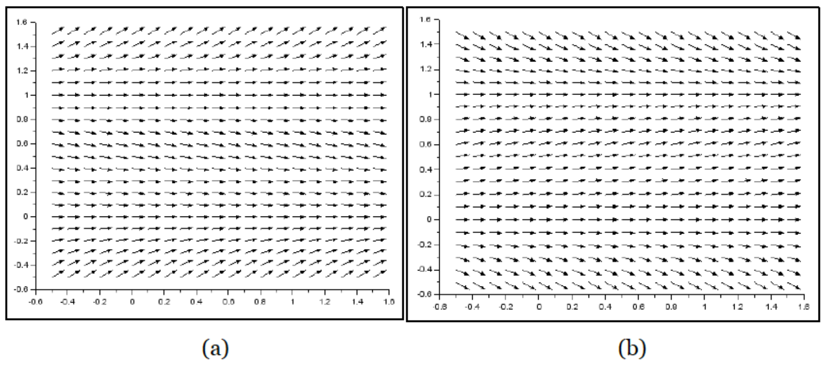


Figura: Campo de direcciones para (a) $a < 0$; (b) $a > 0$

Ejemplo 8. (continuación)

a	$x^* = 0$	$x^* = 1$
$a < 0$	atractor	repulsor
$a > 0$	repulsor	atractor

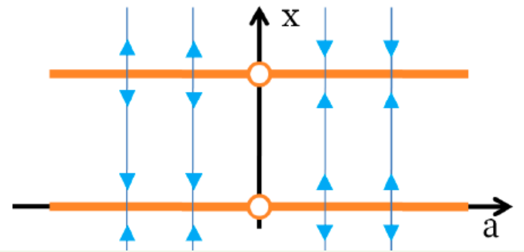


Figura: Diagrama de bifurcación

- Naranja: puntos de equilibrio
- Azul: lineas de fase

Para finalizar...

- Ejercicios recomendados del tema
- Lección magistral: SciLab II → Campus Virtual
- *Creating a slope field* → Campus Virtual
  https://www.youtube.com/watch?v=8Amgakx5aII

...Y por supuesto:

TEST DE APRENDIZAJE!!

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET