¿Qué vimos la última semana?

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

- <u>Triedro de Frenet</u>: Base del espacio que sigue la curva.

- <u>Curvatura y torsión</u>: Generalización de la curvatura y una medida de cómo se aleja una curva de ser plana.

- <u>Teorema fundamental de curvas</u>: La curvatura y la torsión caracterizan una curva salvo movimientos rígidos.

Tema 4. Superficies regulares

4.1 Definición de superficie. Parametrizaciones

4.2 Cambios de coordenadas

4.3 Superficies de revolución

4.4 Plano tangente

Superficie. Parametrizaciones

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una **superficie regular** si $\forall\, p \in S, \exists$ un conjunto abierto V en $\mathbb{R}^3$ y una aplicación $\varphi\colon U \longrightarrow V \cap S$, donde U es un abierto de $\mathbb{R}^2$ tal que:

i) φ es diferenciable

ii) φ es un homeomorfismo

iii) $d\varphi_a\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva $\forall\, p \in S$

Superficie. Parametrizaciones

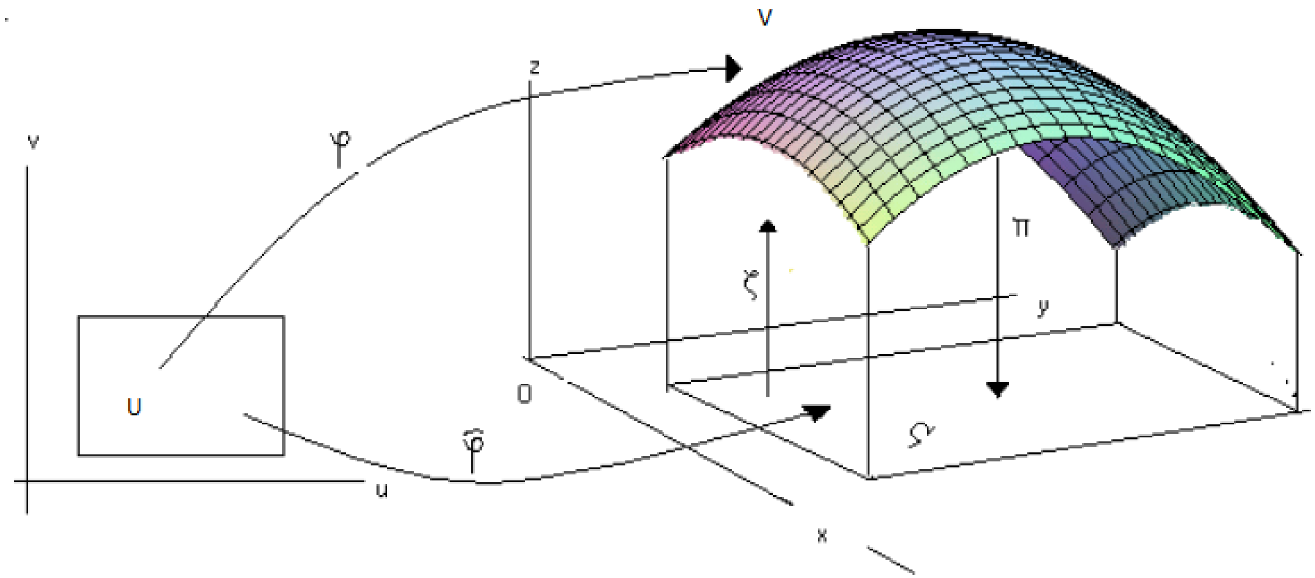
(i) Garantiza que la matriz jacobiana de la condición (iii) existe

(ii) Cada punto del conjunto tridimensional se corresponde con un único punto del abierto del plano y que esto se hace sin saltos. Es decir, que localmente, se comporta como un abierto en $\mathbb{R}^2$

(iii) La superficie no tiene picos

Superficie. Parametrizaciones

φ es la **parametrización** de S en p



Fuente: http://www.mat.ucm.es/

Superficie. Parametrizaciones

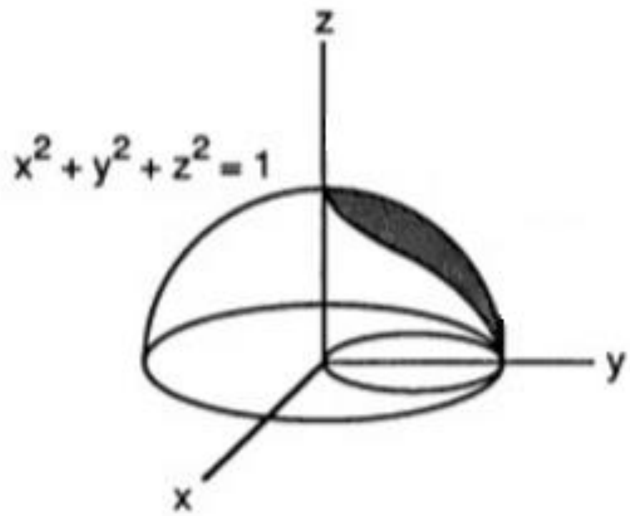
Ejemplos: un disco abierto en el espacio es una superficie regular, pero el disco cerrado no. La figuras con picos y cortes no son superficies regulares.

En este curso, vamos a trabajar con funciones no ya diferenciables, sino C^{∞}.

Sea $q \epsilon S$ superficie regular, sabemos que existe una parametrización φ tal que $q = \varphi(u_0, v_0)$. El par (u_0, v_0) son las **coordenadas** de q en φ.

Superficie. Parametrizaciones

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$



Fuente: http://www.mat.ucm.es/

Superficie. Parametrizaciones

Caso 1: $z > 0$

$\varphi(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$, donde $\varphi: \{(u, v): u^2 + v^2 < 1\} \longrightarrow S^2 \cap \{z > 0\}$

(1)φ es diferenciable. u y v lo son de forma trivial. Como $1 - u^2 - v^2$ no se anula, también es diferenciable

(2)φ es un homeomorfismo.

φ es inyectiva y sobre: trivial

φ^{-1} es continua porque es proyección

(3)$d\varphi$ es inyectiva porque el jacobiano tiene rango máximo

Superficie. Parametrizaciones

Caso 2: $z < 0$, $\varphi(u,v) = (u, v, -\sqrt{1-u^2-v^2})$. Así, se deja todo cubierto salvo la circunferencia $\{x^2 + y^2 = 1\}$

Caso 3: $y > 0$, $\varphi(u,v) = (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v)$

Caso 4: $y < 0$, $\varphi(u,v) = (u, -\sqrt{1-u^2-v^2}, v)$

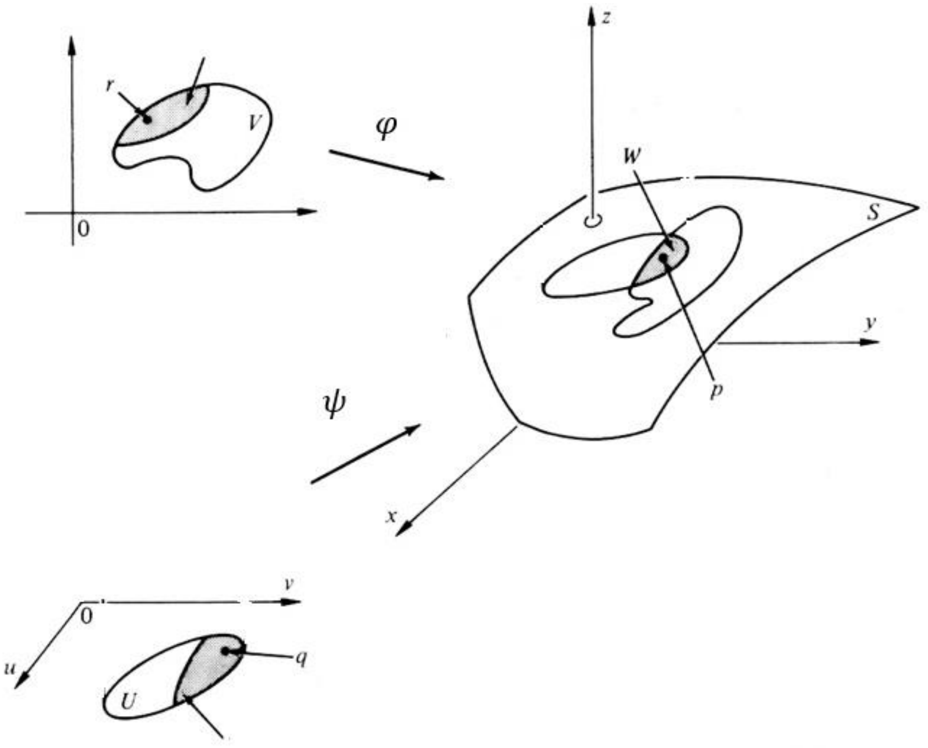
Caso 5: $x > 0$, $\varphi(u,v) = (\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v)$

Caso 6: $x < 0$, $\varphi(u,v) = (-\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v)$

Superficie. Parametrizaciones

Sea una superficie S con dos parametrizaciones, φ y ψ, $\varphi\colon V \longrightarrow S$, $\psi\colon U \longrightarrow S$.

$\psi^{-1}\circ\varphi$ es un **cambio de coordenadas**



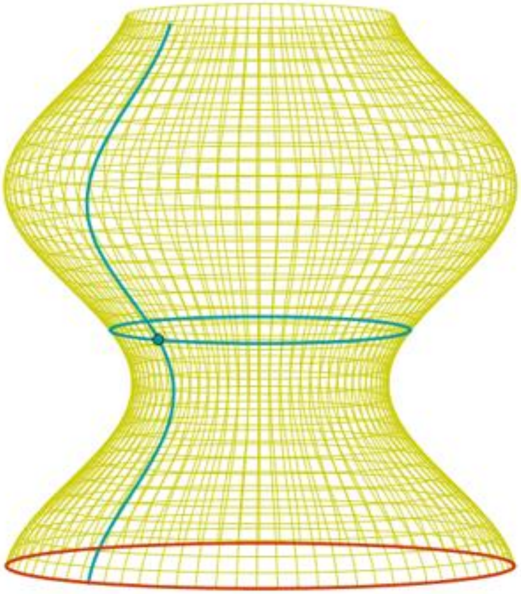
Fuente: https://www.math.hmc.edu/

Superficie. Parametrizaciones

Sea $F\colon S_1 \longrightarrow S_2$ una aplicación entre superficies. Decimos que F es **diferenciable** en $p \in S_1$ si $\exists\, \bar{F}$ diferenciable en $\varphi^{-1}(p)$ tal que $\bar{F}$ restringida a U es igual a F.

$$
\begin{array}{ccc}
F\colon \varphi(U) \subseteq S_1 & \rightarrow & \psi(V) \subseteq S_2 \\
\varphi \uparrow & & \uparrow \psi \\
\bar{F}\colon U & \rightarrow & V
\end{array}
$$

Superficies de revolución



$$\alpha(t) = (f(t), 0, g(t)), \text{ con } f > 0$$

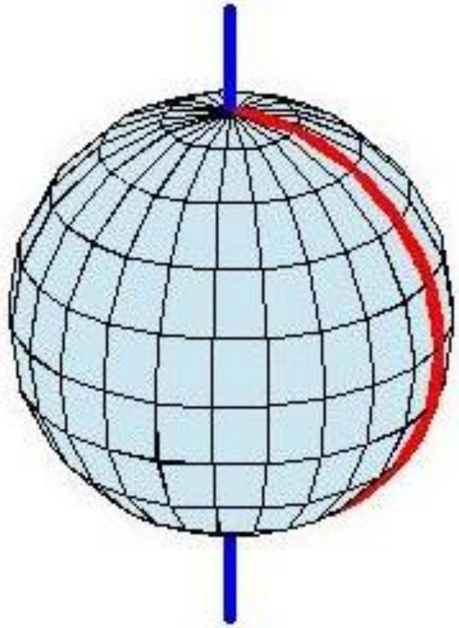
$$\varphi: \quad (0, 2\pi) \times I \to \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \to (f(v)cosu, f(v)senu, g(v))$$

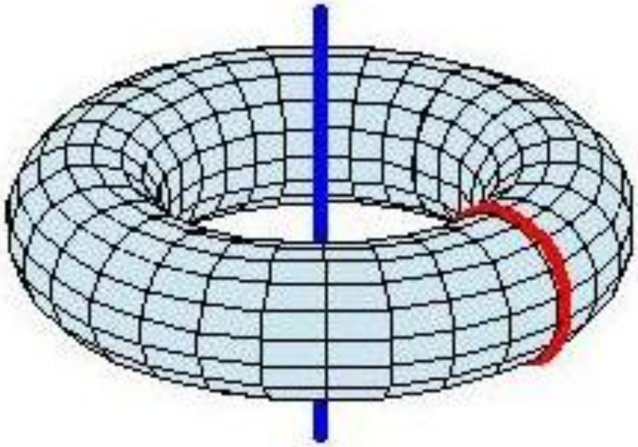
Fuente: http://geogebra.es/

Superficies de revolución

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

Ejemplos:





Fuente: http://www.lemat.unican.es/

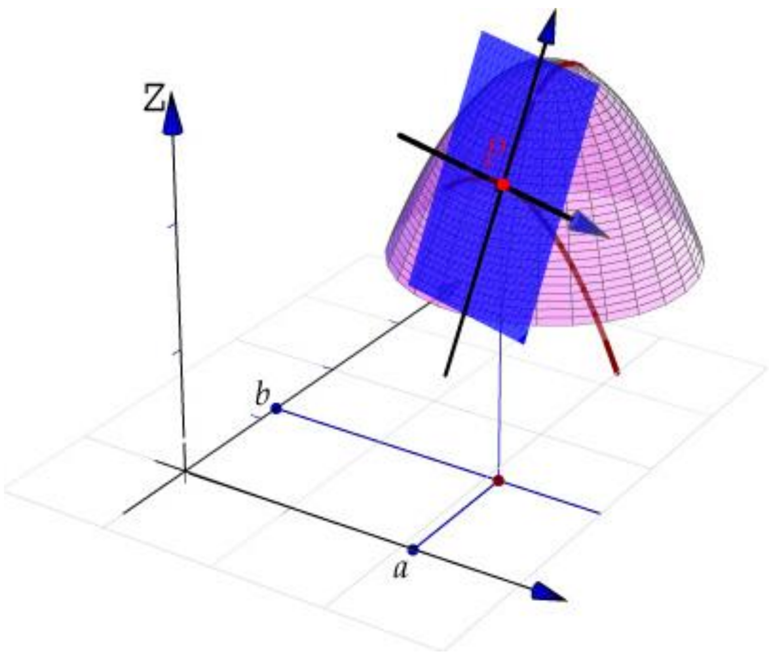
Plano tangente

Un **vector tangente** a S en $p \in S$ es un vector de la forma $\alpha'(0)$, donde $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una curva regular y $\alpha(0) = p$.

Si $\varphi: \theta \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ es una **parametrización** de S en p, con $a = \varphi^{-1}(p)$, el conjunto de vectores tangentes a S en p es generado por $d\varphi_a(\mathbb{R}^2)$.

Este conjunto recibe el nombre de plano tangente a S en $p \in S$. Este plano se denota por T_pS.

Plano tangente



Fuente: http://www.lemat.unican.es/

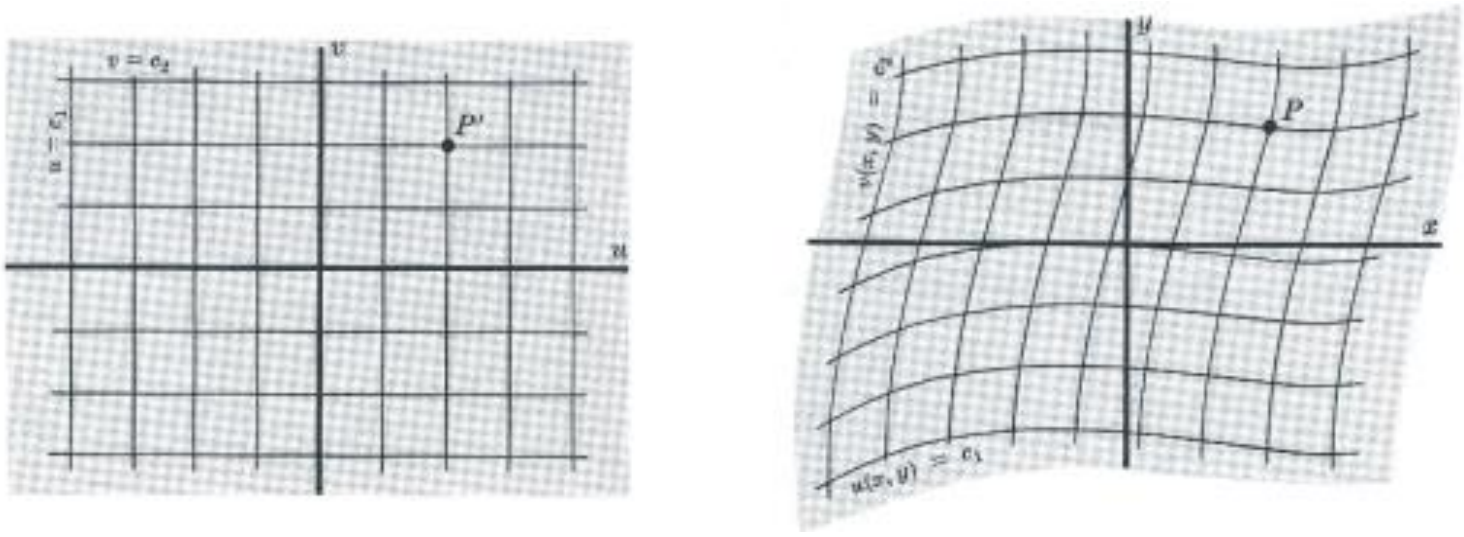
Plano tangente

Curvas coordenadas:

$$d\varphi_a(1,0) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \\ \frac{dz}{du} & \frac{dz}{dv} \end{pmatrix}(1,0) = \left(\frac{dx}{du}(a), \frac{dy}{du}(a), \frac{dz}{du}(a)\right) = \varphi_u(a)$$

$$d\varphi_a(0,1) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \\ \frac{dz}{du} & \frac{dz}{dv} \end{pmatrix}(0,1) = \left(\frac{dx}{dv}(a), \frac{dy}{dv}(a), \frac{dz}{dv}(a)\right) = \varphi_v(a)$$

Plano tangente



Fuente: http://www.solitaryroad.com/