Tema 1. Introducción: álgebra lineal y geometría

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

1.1 Espacios y subespacios vectoriales

1.2 Aplicaciones lineales. Movimientos rígidos

1.3 Métrica y producto escalar

Espacios y subespacios vectoriales

Un **espacio vectorial** E sobre un cuerpo K es un conjunto de elementos que cumple $\forall\, u, v \ \in E, \forall\, a \ \in K$:

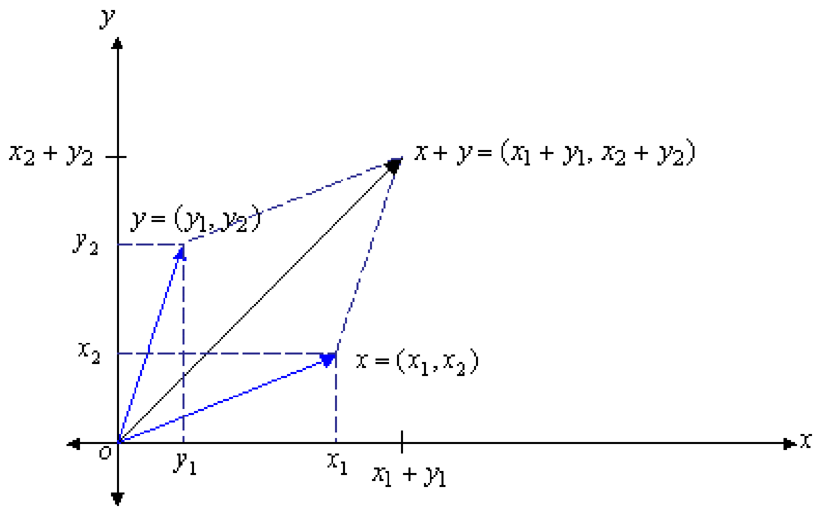
- $u + \ v \ \in E$
- $a \cdot v \ \in E$

Los elementos de un espacio vectorial se llaman **vectores**.

Un **subespacio vectorial** es un espacio vectorial que está contenido en otro.

Espacios y subespacios vectoriales

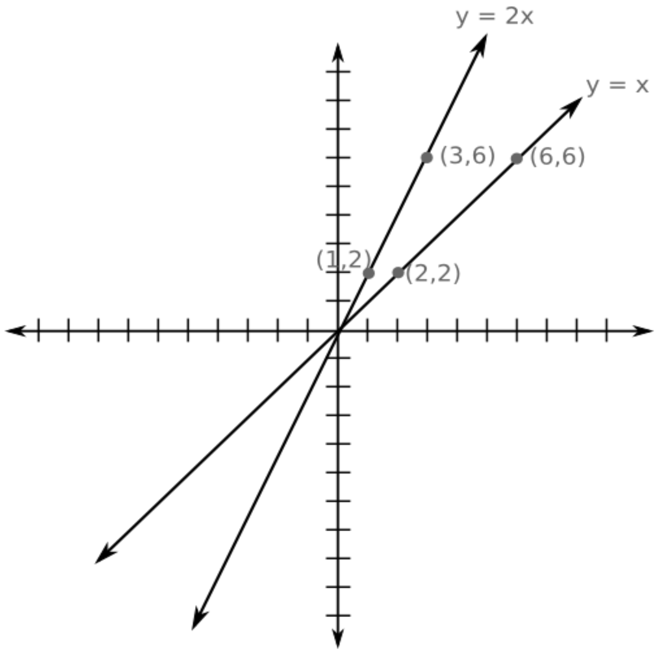
Ejemplo 1: $\mathbb{R}^2$



Fuente: http://docencia.udea.edu.co/

Espacios y subespacios vectoriales

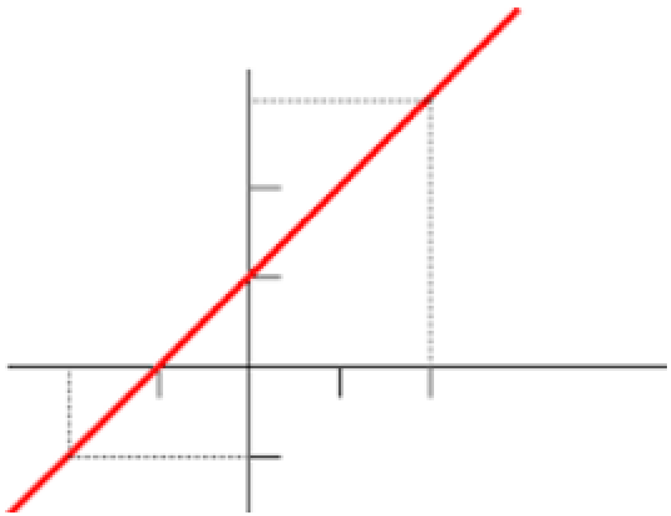
Ejemplo 2: Subespacios vectoriales



Fuente: http://eltamiz.com/

Espacios y subespacios vectoriales

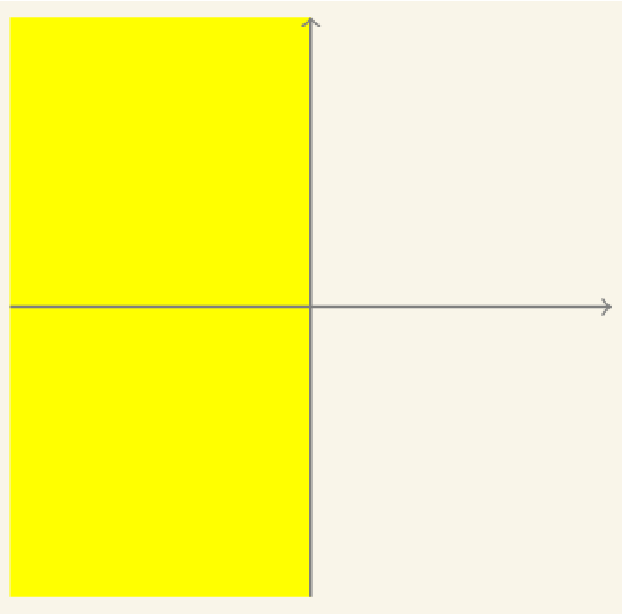
Ejemplo 3: Espacio afín



Fuente: http://www.alcaste.com/

Espacios y subespacios vectoriales

Ejemplo 4: Semiplano



Fuente: http://tex.stackexchange.com/

Espacios y subespacios vectoriales

Una base de un **espacio vectorial** E es un conjunto de vectores que genera E y que tiene la cantidad mínima de elementos.

Ejemplo: $\mathbb{R}^2$

La base estará formada por 2 vectores **linealmente independientes**

$\{(1,1),(2,3)\}$ es base: cualquier vector (x,y) del plano puede escribirse como combinación lineal de sus elementos

$$\alpha(1,1)+\beta(2,3)=(x,y)$$

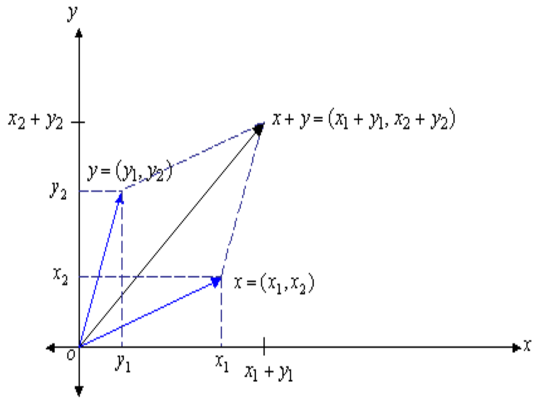
$$\begin{cases} \alpha = 3x-2y \\ \beta = y-x \end{cases}$$

$$(5,8)=-(1,1)+3(2,3)$$

Espacios y subespacios vectoriales

$\{(\mathbf{1},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{1})\}$ es la **base canónica o natural**. Propiedades:

- Los vectores son ortogonales, es decir, forman un ángulo de 90º
- Los vectores son normales, es decir, su longitud es 1



Fuente: http://docencia.udea.edu.co/

Aplicaciones lineales

Dados E y E' espacios vectoriales, $f: E \longrightarrow E'$ es una **aplicación lineal** si para todo $x, y \in E$ y para todo escalar λ se cumple:

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Ejemplo:
La función que lleva la base canónica de $\mathbb{R}^3$ a $\{(0,1,2), (-1,-1,-1), (1,2,3)\}$.
Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Expresión analítica:

$$f(x,y,z) = (-y+z, x-y+2z, 2x-y+3z)$$

Aplicaciones lineales

Ejemplo: cambio de escala

Queremos duplicar la longitud de los vectores del ejemplo anterior.

$$2\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: giro

Si queremos rotar un ángulo θ alrededor del eje X

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

Movimientos rígidos

Los **movimientos rígidos** preservan la forma de todo lo que mueven sin distorsionarlo.

Pueden ser aplicaciones lineales o afines

En general, los movimientos rígidos en el espacio van a ser de la forma

$Ax + b$, donde

A es una aplicación lineal que preserva las distancias y los ángulos (**isometría**)

b es un vector de $\mathbb{R}^3$

La composición de movimientos rígidos también es un movimiento rígido.

Movimientos rígidos

Ejemplo 1: función identidad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2: traslación

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

traslada el origen al punto $(1, 0, 1)$

Movimientos rígidos

Ejemplo 3: giro

Giro alrededor del eje Y

$$\begin{pmatrix} cos\theta & 0 & -sen\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ sen\theta & 0 & cos\theta \end{pmatrix}$$

Métrica y producto escalar

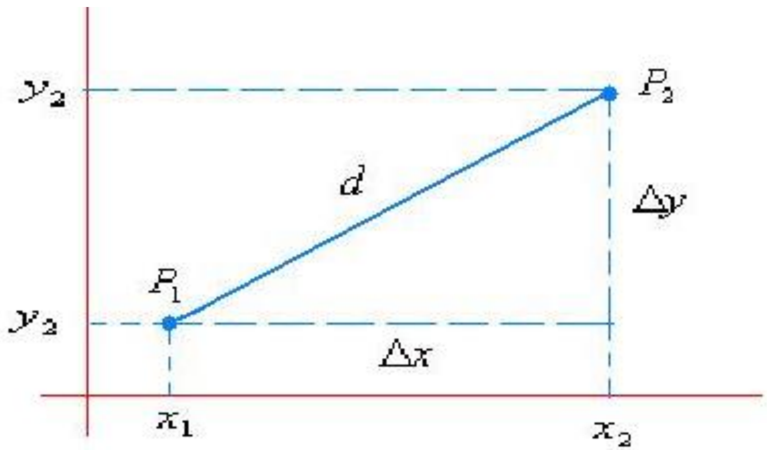
Una **distancia** en un espacio E es una aplicación $d: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ en la que para todo x, y, z se verifica:

- (Positiva) $d(x, y) \geq 0, \forall\, x, y$. Además, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (Simétrica) $d(x, y) = d(y, x)$
- (Desigualdad triangular) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Métrica y producto escalar

Ejemplo 1: distancia euclídea,

$$d(x, y) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



http:// datateca.unad.edu.co/

Métrica y producto escalar

Ejemplo 2: distancia discreta

Es la distancia más sencilla que se puede definir:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, si\ x = y \\ 1, si\ x \neq y \end{cases}$$

La definición de distancia generaliza la distancia euclídea, son posibles muchas otras distancias.

Métrica y producto escalar

La **norma** generaliza el módulo de un vector.

Una norma es una aplicación $d: E \longrightarrow \mathbb{R}$ en la que para todo $x \in E$ y un escalar λ se verifica:

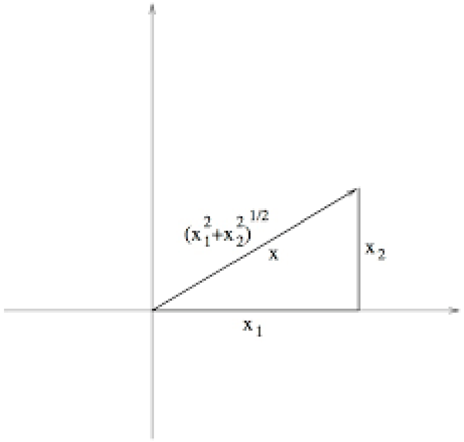
- (Positiva) $||x|| \geq 0$. Además, $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (Proporcional) $\left||\lambda \cdot x|\right| = |\lambda| \cdot ||x||$
- (Desigualdad triangular) $\left||x + y|\right| \leq \left||x|\right| + ||y||$

A partir de una norma es posible definir una distancia:
$d(x, y) = \left||x - y|\right|$

Métrica y producto escalar

Ejemplo 1: norma euclídea

$$||x|| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}$$

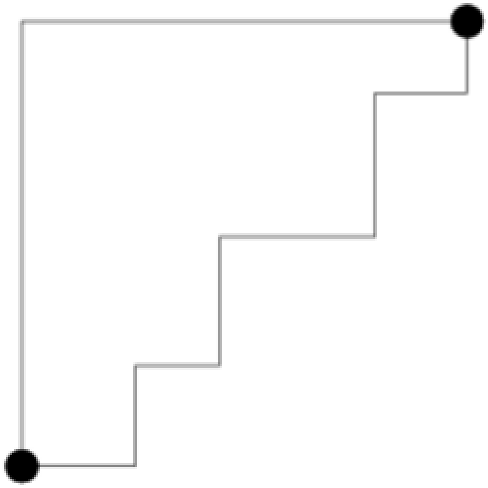


Fuente: https://mathsimulationtechnology.wordpress.com/

Métrica y producto escalar

Ejemplo 2: norma l_1 o norma del taxista

$$||x||_1 = |x_1| + |x_2|$$

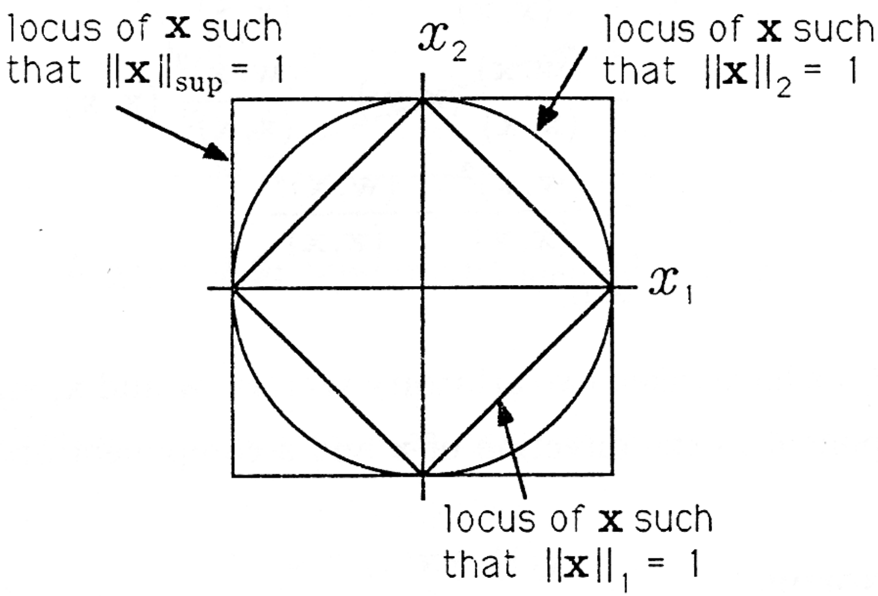


Fuente: http://inspirehep.net/

Métrica y producto escalar

Ejemplo 3: norma l_∞

$$||x||_\infty = max\{x_1, x_2\}$$



Fuente: http://archive.cnx.org/

Métrica y producto escalar

Un **producto escalar** o **producto interno** sobre un espacio E es una aplicación $<,>: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ en la que para todo $x, y, z \in E$ y para todo escalar λ se verifica:

- $< x + y, z >=< x, z >+< y, z >$
- $< \lambda x, y >= \lambda < x, y >$
- $< x, y >=< y, x >$
- $< x, x >\geq 0$. Además, $< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ejemplo:

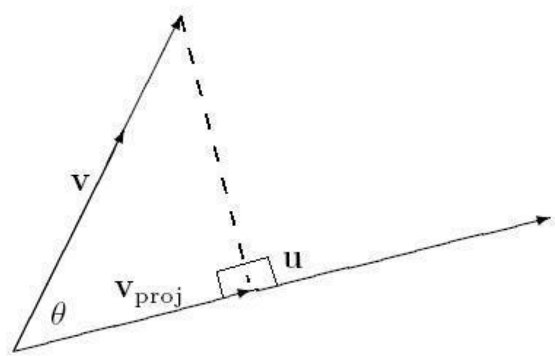
$$< x, y >= x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$< x, x >= ||x||^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2$$

Métrica y producto escalar

Puede probarse que

$$< u, v >= ||u|| \cdot ||v|| \cdot cos\theta$$



Fuente: http://www.mathamazement.com/

Si u y v son **perpendiculares** entonces $cos\theta = 0 \Longrightarrow < \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >= \mathbf{0}$

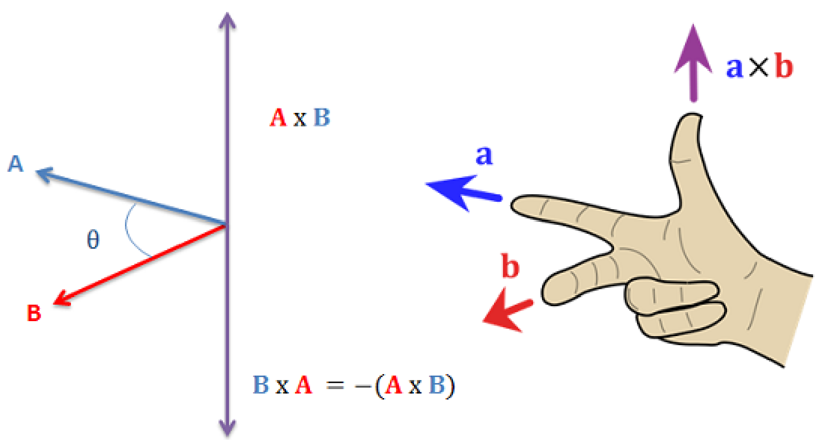
Si u y v son **paralelos** entonces $cos\theta = 1 \Longrightarrow < \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >= ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}||$

Métrica y producto escalar

El **producto vectorial** de dos vectores u y v es un tercer vector perpendicular al plano que forman u y v

$$u \times v = ||u|| \cdot ||v|| \cdot sin\theta \cdot n$$

donde n es un vector normal unitario al plano que forman u y v y θ es el ángulo que forman u y v.



Fuente: http://adaptivemap.ma.psu.edu/

Métrica y producto escalar

El producto vectorial también puede calcularse como:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

Sean $u = (0,1,2)$ y $v = (1,1,0)$, calcular $u \times v$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2i + 2j - k$$

$$= (-2,2,-1)$$

Próximamente…

- **1.4 Definición de objetos geométricos**
- **1.5 Intersección de objetos geométricos**

- **2.1 Curvas diferenciables en $\mathbb{R}^n$**
- **2.2 Teoría local de curvas planas**