Tema 12. Dualidad

12.1 Introducción al *ray tracing*

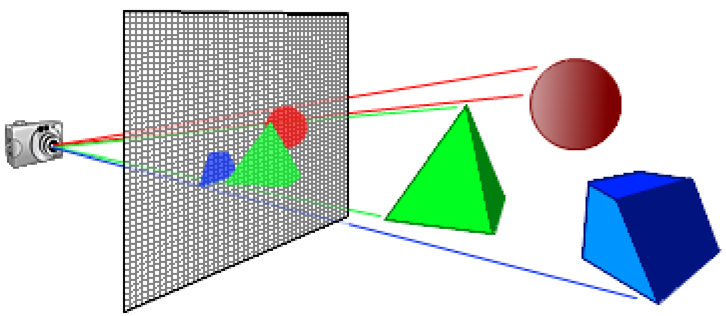
12.2 Cálculo de la discrepancia

12.3 Principio de dualidad

12.4 Solución del problema

Introducción al *ray tracing*

- Importancia de realismo en imágenes 3D.
- *Ray tracing*: muy eficaz pero computacionalmente costosa y desaconsejada en tiempo real.
- Una está imagen generada por una serie de pixeles.
- Es necesario establecer qué objeto debe representarse en cada píxel

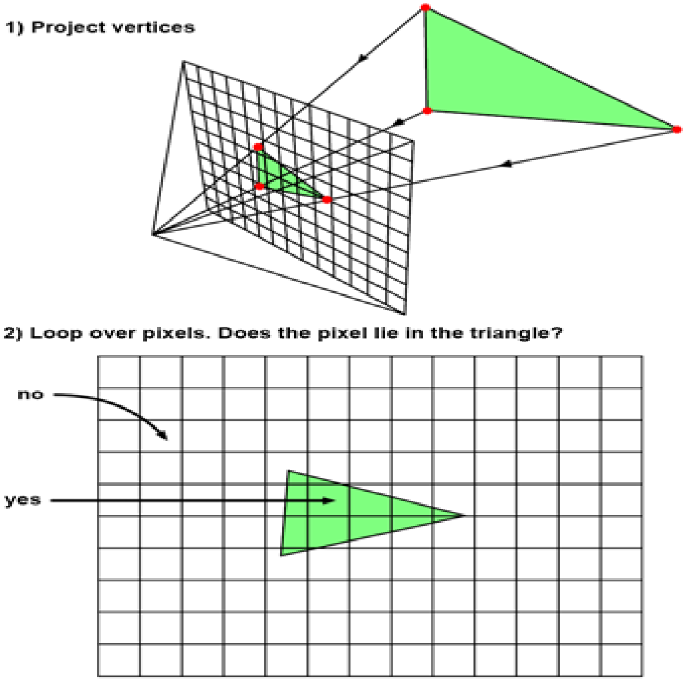


Fuente: http://www.yac.com.pl/

Introducción al *ray tracing*

- Para establecer si un objeto es visible desde un píxel determinado se superponen la malla de píxeles y el objeto

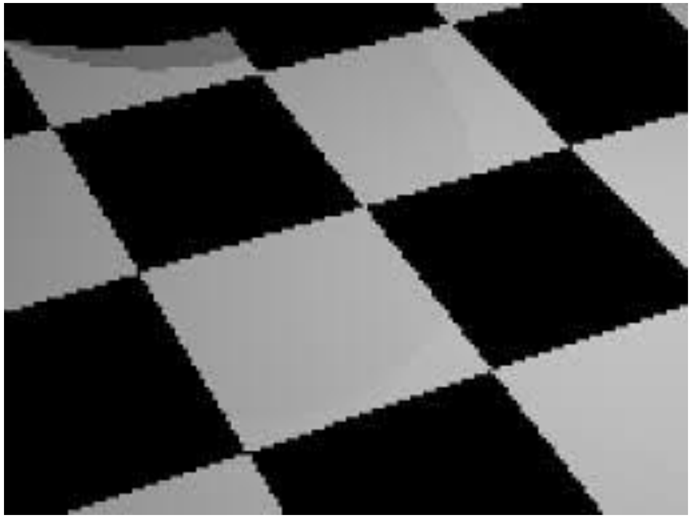
- En los extremos de los objetos suele haber algunos píxeles que están cubiertos parcialmente



Fuente: http://www.yac.com.pl/

Introducción al *ray tracing*

Si disparamos un rayo por cada píxel, los bordes del objeto no quedarán bien representados: efecto de dentado en la imagen.



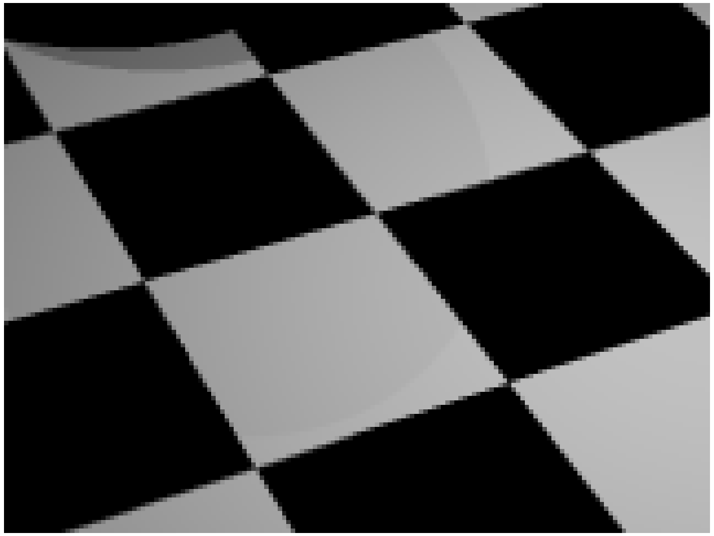
Fuente: http://nathanieltroutman.net/

Introducción al *ray tracing*

- Solución en *ray tracing*: hacer pasar un haz de rayos por cada píxel.
- Si la superficie del píxel está cubierta, por ejemplo un 43%, que se vea el 43% de su área.
- Distribución de los rayos en el píxel: si se hace de manera uniforme: para 100 rayos, se dividiría el píxel en una malla de 10 x 10.
- Problema: produce un patrón regular indeseado.

Introducción al *ray tracing*

- Se utiliza una muestra que de algún modo sea aleatoria.
- No sirve cualquier muestra: es necesario que el píxel esté cubierto de forma que el porcentaje de impactos con el objeto sea próximo al porcentaje real de área que está cubierto.



Fuente: http://nathanieltroutman.net/

Introducción al *ray tracing*

- Establecer un criterio que permita determinar si una muestra dada es válida o no

- Muestra válida: cuando el porcentaje de rayos que impactan sea similar al porcentaje de área cubierta.

- Esta diferencia es la **discrepancia de la muestra con respecto al objeto**.

Introducción al *ray tracing*

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

- A priori no se sabe la forma en que va a estar cubierto el píxel

- Debemos ponernos en el peor de los casos: el objetivo es que la máxima discrepancia con cualquier posible disposición del objeto sea pequeña.

- Esta diferencia se llama **discrepancia de la muestra**.

- Dado un conjunto de haces aleatorio, si la discrepancia es pequeña, podemos quedarnos con esa muestra y si no lo es, debemos tomar una nueva muestra y comprobar si la discrepancia es pequeña.

Introducción al *ray tracing*

- Vamos a considerar que cada píxel está intersecado por un solo polígono.

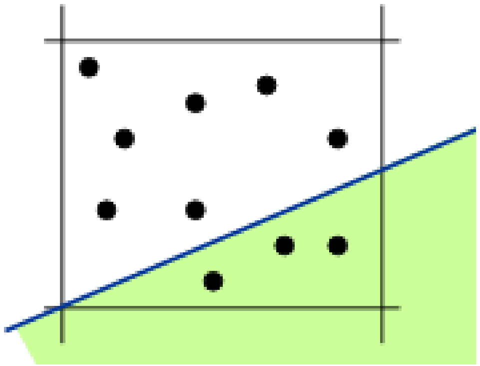
- Aunque la escena represente objetos curvos, en realidad se trata de aproximaciones poligonales.

- Es muy poco frecuente que haya más de un polígono en un píxel

Introducción al *ray tracing*

- Sea $U = [0,1] \times [0,1]$ el cuadrado unidad que representa un píxel y sea S una muestra de n puntos en U.
- Sea $\mathcal{H}$ el conjunto que contiene todos los semiplanos cerrados. Se define la **medida continua del semiplano**, $\mu(h)$, $h \in \mathcal{H}$ como el área de la intersecciόon $h \cap U$.
- En realidad esta medida representa la proporción de área cubierta: si el píxel está cubierto por completo, $\mu(h) = 1$.
- En la figura, $\mu(h) = 1/4$

Fuente: http://slideplayer.com/



Introducción al *ray tracing*

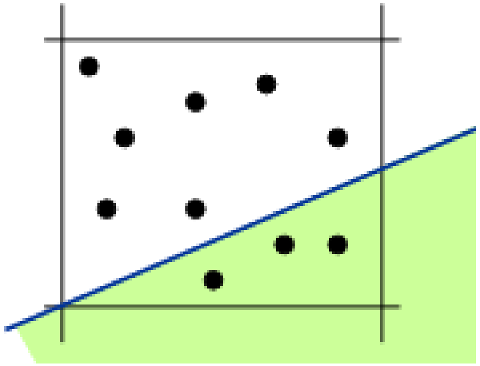
- Se define la **medida discreta del semiplano**, $\mu_S(h)$, como el cociente entre los puntos de la muestra que están en h y el total de puntos de la muestra

$$\mu_S(h) = \frac{card(S \cap h)}{card(S)}$$

- Para saber si una muestra es aceptable para un semiplano dado, se calcula la discrepancia

$$\Delta_S(h) = |\mu(h) - \mu_S(h)|$$

- En la figura, $\mu_S(h) = 3/10$



Fuente: http://slideplayer.com/

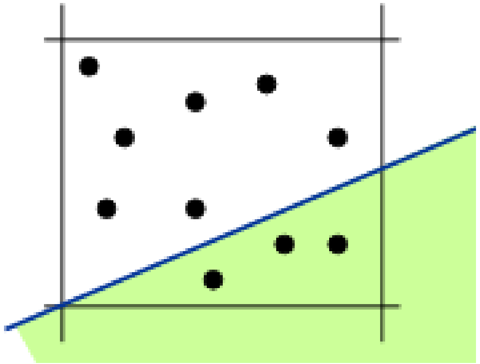
Introducción al *ray tracing*

Por tanto, como

$$\mu(h) = 1/4$$

$$\mu_S(h) = 3/10$$

Por tanto, $\Delta_S(h) = |\mu(h) - \mu_S(h)| = |0.25 - 0.3| = 0.05$



Fuente: http://slideplayer.com/

Como no sabemos a priori cómo va a ser el semiplano que interseque al píxel, calculamos cuál sería el peor de los casos, es decir la mayor de las discrepancias posibles entre esa muestra y cualquier semiplano.

$$\Delta_{\mathcal{H}}(h) = sup\ \Delta_S(h)$$

Problema inabordable: habría que considerar un conjunto infinito de semiplanos y tomar el máximo de semiplanos abiertos y cerrados.

Introducción al *ray tracing*

- Hay que sustituir esa cantidad infinita de planos por una cantidad finita que contenga el plano que buscamos.

- Se seleccionan aquellos semiplanos que localmente tengan la máxima discrepancia.

- La máxima discrepancia local implica que cualquier ligera variación de los planos disminuye la discrepancia.

- El plano que buscamos se encuentra entre los que tienen máxima discrepancia local.

Introducción al *ray tracing*

- Estos planos contienen puntos de la muestra en su frontera: si un plano no contiene ningún punto en su frontera, es posible girarlo o trasladarlo ligeramente sin que la discrepancia cambie.

- Si buscamos planos con un único punto en su frontera, es posible encontrar los candidatos en un tiempo $O(n)$.

- Si el semiplano contiene dos o más puntos, el tiempo necesario para encontrar los candidatos es $O(n^2)$.

- El algoritmo de búsqueda y la demostración de que la complejidad del algoritmo es cuadrática se hace utilizando el espacio dual.

Principio de dualidad

- Ecuación de una recta en el plano: $y = mx + b$
- m → pendiente, b → punto de corte con el eje y
- En las rectas verticales, $x = x_0$, no se puede hablar de pendiente ni de corte con el eje y por lo que no se consideran.

- Un punto en el plano se puede definir con dos coordenadas
- Establecemos la correspondencia (**transformación dual**) entre las rectas y los puntos del plano:

$$(u, v) \longrightarrow y = ux - v$$

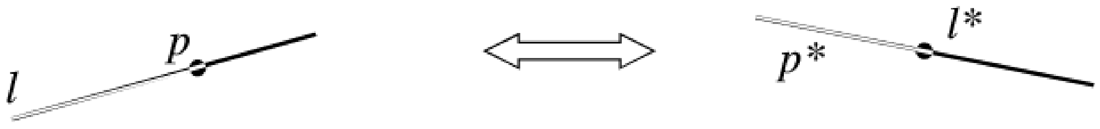
$$y = mx + b \longrightarrow (m, -b)$$

Principio de dualidad

- Las transformaciones duales son simétricas: el dual del dual de un punto es el punto de partida.

- Mantienen las relaciones de incidencia, de forma que:

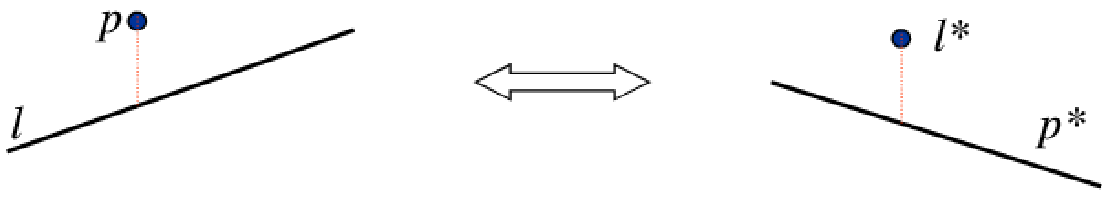
- Si un punto p está en una recta l, entonces la recta dual p^* contiene al punto dual l^*



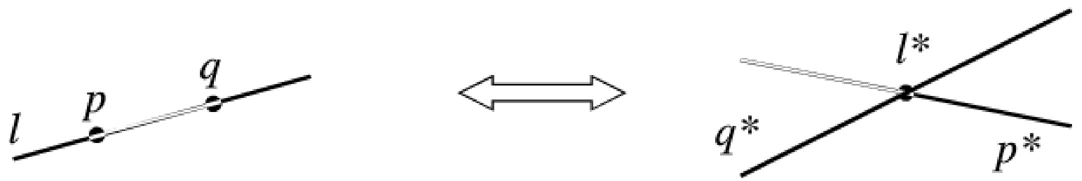
Fuente: http://slidegur.com/

Principio de dualidad

- Si un punto p está sobre una recta l, entonces la recta dual p^* está debajo del punto dual l^*



Fuente: http://slidegur.com/

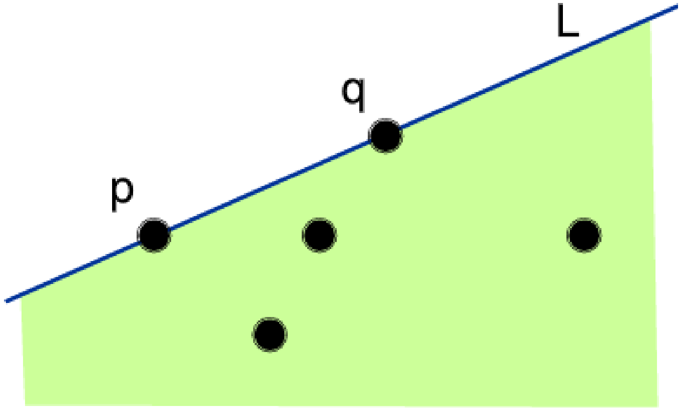


- Si una línea l pasa por los punto p y q, entonces las rectas duales p^* y q^* contienen al punto dual l^*

Principio de dualidad

- El espacio dual permite tener una perspectiva diferente del problema.
- Una vez resuelto cualquier problema en el espacio dual, luego no hay más que pasar la solución al espacio primal.

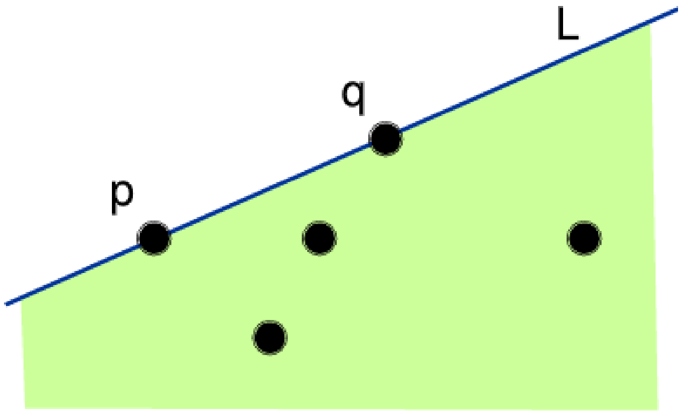
En este caso, tenemos que calcular la medida discreta de cada semiplano limitado por al menos dos puntos de S



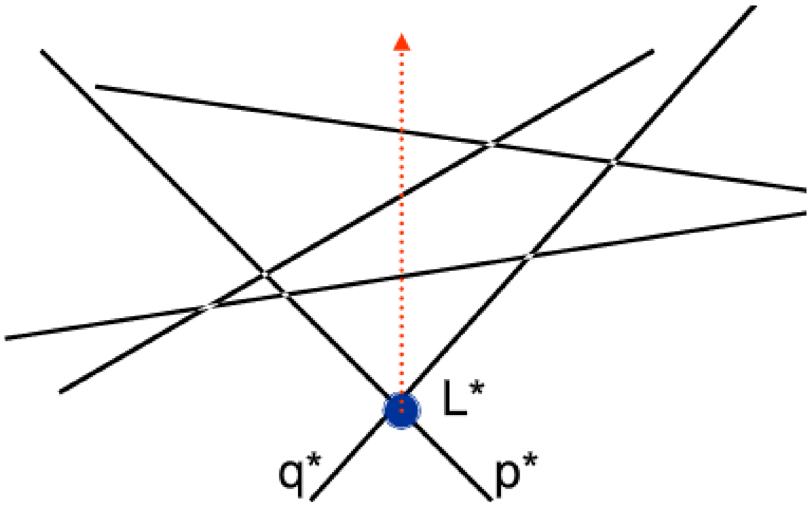
Fuente: http://slidegur.com/

Resolución del problema

Para calcular la medida discreta del semiplano hay que contar cuántos puntos están por debajo de L.



Fuente: http://slidegur.com/



Problema dual: calcular cuántas rectas están sobre el punto L.

Resolución del problema

- En general, cuando hay que trabajar sobre un conjunto de puntos, es muy frecuente considerar el problema dual

- Por ejemplo, la línea que une dos puntos dados pasa a ser un vértice, que puede definirse de forma más precisa

- Se sabe que una disposición de rectas en el espacio tiene, a los sumo:

$\frac{n(n-1)}{2}$ vértices

n^2 aristas

$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 1$ caras

Resolución del problema