

Práctica de SDD II

[12.1] ¿Cómo estudiar este tema?

[12.2] Introducción

[12.3] Dinámica compleja

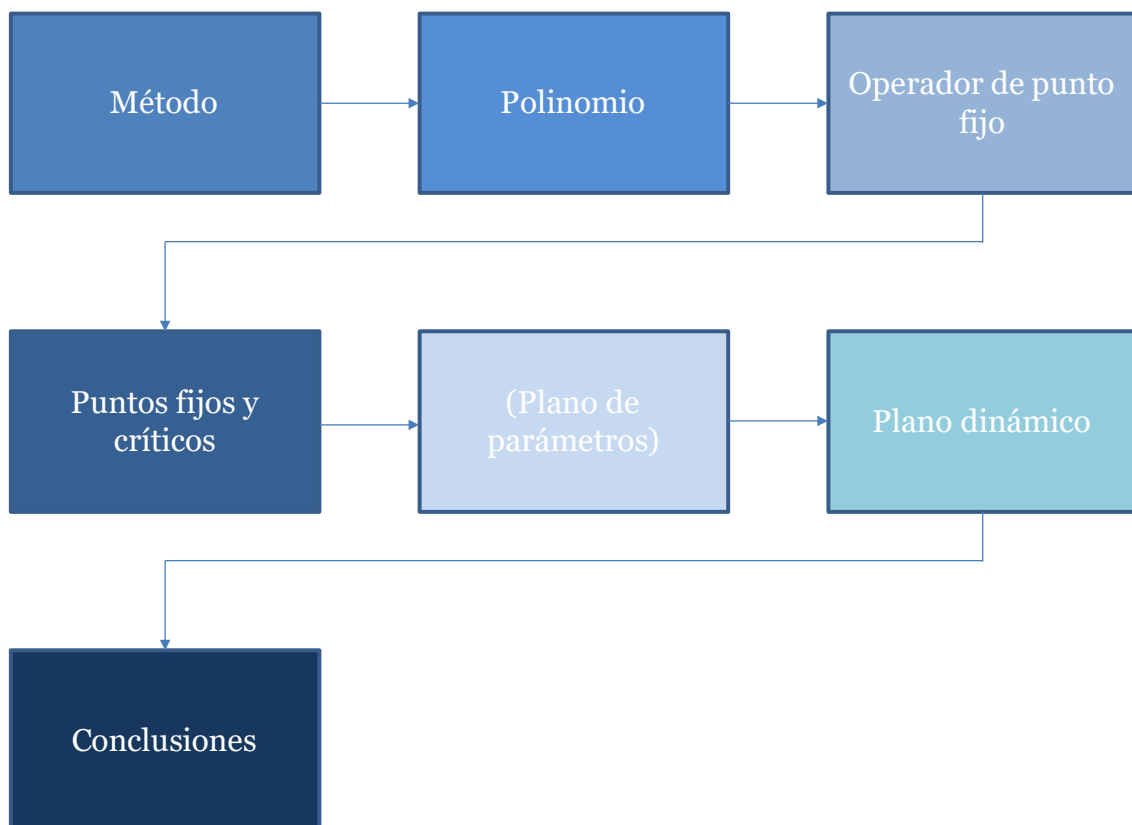
[12.4] El método CT

[12.5] Referencias bibliográficas

12

T E M A

Esquema



Ideas clave

12.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

Este tema tiene el formato de un guion de prácticas, por lo que se recomienda realizar los pasos que se van presentando de forma secuencial.

Es imprescindible que se revisen los conceptos de los temas 8, 9 y 10 con anterioridad al seguimiento del presente tema porque será la forma de que la ejecución de los programas contenidos en este tema favorezcan tu productividad.

Los sistemas complejos son los protagonistas de este tema. En él se van a desarrollar los planos dinámicos asociados a los operadores de punto fijo de los sistemas dinámicos.

Nos centraremos tan solo en los sistemas dinámicos asociados a los métodos iterativos.

Asimismo, cuando sea posible, se determinarán los planos de parámetros.

Por último, se aplicará el *software* desarrollado al método CT.

12.2. Introducción

Favorecer la comprensión de los sistemas dinámicos a partir de herramientas gráficas supone un gran avance a la hora de interpretar este tipo de sistemas. No se trata de sustituir los cálculos analíticos porque seguirán resultando necesarios, sino de complementarlos.

Resulta capital la comprensión y el análisis de los operadores de punto fijo asociados a cada una de las familias y de los miembros de las mismas. Resulta imprescindible conocer los puntos fijos de un sistema y su característica dinámica. Pero, a partir de ahí, **una imagen vale más que mil palabras**.

A lo largo de los siguientes apartados vamos a trabajar sobre diferentes métodos. El más conocido y utilizado es el método de Newton para la obtención de las raíces de una función. Asimismo, trabajaremos sobre el método iterativo de Steffensen que se presentará en ejemplos y en desarrollos de herramientas. Estos métodos se aplicarán sobre funciones polinómicas no lineales.

Para poder observar a qué punto tiende la órbita de cada semilla, diseñaremos el plano dinámico de cada método, de forma que de un vistazo seamos capaces de identificar las bondades de cada uno de ellos.

Siempre que sea posible realizaremos el estudio del plano de parámetros porque es una labor interesante que facilitará la elección del miembro de la familia iterativa sobre el que trabajar. Sin embargo, para que ese «siempre que sea posible» se cumpla es necesario que el método iterativo disponga de puntos críticos libres, es decir, puntos críticos que no coincidan con las raíces del polinomio.

12.3. Dinámica compleja

En los temas 8, 9 y 10 se trabajó sobre conceptos asociados a la dinámica de sistemas dinámicos discretos complejos. En el tema 8 se presentaron las herramientas gráficas, así como los conceptos básicos. En el tema 9 se introdujeron los métodos iterativos sobre variable compleja, y en el tema 10 se analizaron desde un punto de vista dinámico una serie de métodos iterativos libres de derivadas.

A lo largo de los siguientes apartados vamos a desarrollar las herramientas gráficas a partir de las cuales podamos representar el comportamiento de los sistemas dinámicos discretos asociados a métodos iterativos.

Órbitas

La órbita de un sistema dinámico discreto complejo queda determinada por:

$$\mathcal{O}(z) = \{z, f(z), f^2(z), \dots\}$$

$z \in \mathbb{C}$. A partir de un punto inicial, el siguiente punto se obtiene a partir del anterior. De forma análoga a lo que ocurría con la dinámica real es posible que nos alejemos o nos acerquemos a la solución del sistema o incluso que nos quedemos en una órbita periódica.

En este caso, al estar sobre un plano y no sobre la recta real será necesario establecer como criterio de parada la distancia entre dos iterados consecutivos. Afortunadamente, el comando de SciLab sigue siendo el operador `abs`, de forma que el programa de la órbita se puede reutilizar, siendo su código el que se muestra en la figura 1.

```

01 function [iter, d, z]=orbita(f, z0, t, maxiter)
02     iter=1;
03     d=1;
04     z=z0;
05     while iter<maxiter&d($)>t
06         zk=fval(z($),f);
07         d=[d abs(xk-z($))];
08         z=[z zk];
09         iter=iter+1;
10     end
11 endfunction

```

Figura 1. Código para generar la órbita de una semilla dentro de un sistema dinámico

Indicar que hemos cambiado el nombre de la variable x por la variable z por coherencia con las variables sobre las que vamos a trabajar. Asimismo, es posible que el programa genere errores por trabajar con variables complejas al acceder a la función `fval`, por lo que se recomienda su sustitución por la expresión explícita en la línea 6.

Para representar la órbita que sigue un punto, bastará con ejecutar las siguientes líneas de código:

```
plot(real(z),imag(z),'o');
plot(real(z),imag(z));
```

Para probar el código recuerda que tienes que ejecutar previamente con el botón secundario el programa en el directorio de trabajo.

Ejemplo 1 | Determinar la órbita del sistema dado por el método de Newton sobre $f(z) = z^2 - 1$ para las semillas $x_0 = \{0.5, 0.5i, 1, 1i\}$. Se considerará que el método ha convergido cuando la diferencia entre iterados sea de $1e-6$. El máximo número de iteraciones permitido es de 50.

El operador de punto fijo del método de Newton cuando se aplica sobre $f(x) = z^2 - 1$, es:

$$N(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} = z - \frac{z^2 - 1}{2z} = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

Sustituimos la línea 6 del programa `orbita.sci` por:

```
zk=(z($).^2+1)./(2*z($));
```

Y escribimos sobre la línea de comandos:

```
[iter,d,z]=orbita(0.5,1e-6,50);
```

Para el resto de ejecuciones escribiremos en la primera variable 0.5*%i, 1 y %i. La figura 2 representa la órbita de cada una de las ejecuciones.

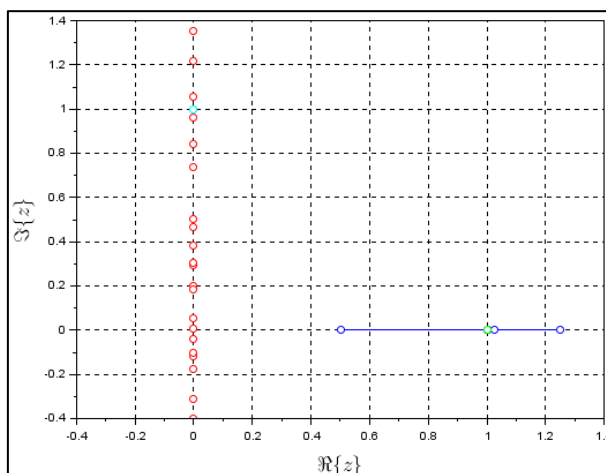


Figura 2. Órbita del método de Newton al aplicarse sobre el polinomio $f(z) = z^2 - 1$ con diferentes semillas: $z_0 = \{0.5, 0.5i, 1, i\}$ con colores azul, rojo, verde y cian, respectivamente

A primera vista la información que aporta la órbita resulta bastante confusa. Este motivo es el principal para justificar por qué se utiliza el plano dinámico.

Plano dinámico

El plano dinámico representa las cuencas de atracción de cada punto fijo. Para ello se obtiene el punto final de la órbita de cada una de las semillas. Asignando un color diferente a cada punto fijo, el plano dinámico representa con un color diferente cada una de las cuencas de atracción.

Supongamos que tenemos dos puntos fijos atractores. La figura 3 muestra el código SciLab para la generación del plano dinámico de este tipo de sistemas.

```

01 function [Z, PD]=planoDin2PF(rez, imz, zf1, zf2, t, maxiter)
02     iter=1;
03     [RZ, IZ]=meshgrid(rez, imz);
04     Z=RZ+%i*IZ;
05     while iter<maxiter
06         Z=(Z.^2+1)./(2*Z);
07         iter=iter+1;
08     end
09     PD=zeros(size(Z,1),size(Z,2));
10     PD(abs(Z-zf1)<t)=2;
11     PD(abs(Z-zf2)<t)=1;
12     grayplot(rez, imz, PD. '),
13     plot(real(zf1), imag(zf1), 'wo')
14     plot(real(zf2), imag(zf2), 'w*')
15     xlabel('$\text{Re}\{z\}$'), ylabel('$\text{Im}\{z\}$')
16 endfunction

```

Figura 3. Código del plano dinámico del método de Newton cuando se aplica sobre el polinomio $f(z) = z^2 - 1$

Cabe destacar que para la generación del plano dinámico de cualquier otro método iterativo bastará con modificar la línea 6 en la que se expresa el operador de punto fijo asociado al método bajo estudio. Al ejecutar el programa con la línea:

```
[Z, PD]=planoDin2PF(rez, imz, -1, 1, 1e-6, 50);
```


Obtenemos el plano dinámico que se muestra en la figura 4:

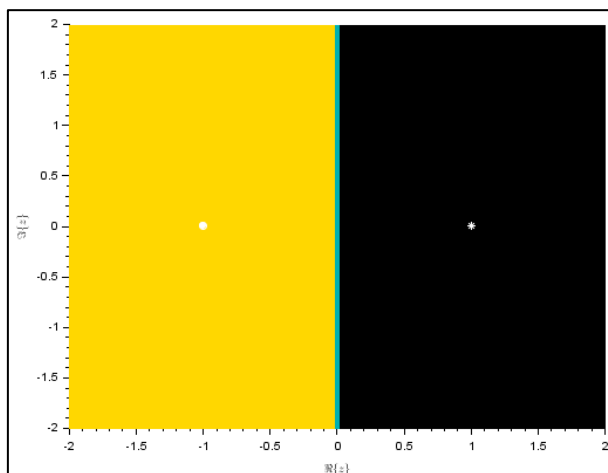


Figura 4. Plano dinámico del método de Newton cuando se aplica sobre el polinomio $f(z) = z^2 - 1$

En la figura 4 se pueden diferenciar las dos cuencas de atracción de cada uno de los puntos fijos atractores, en amarillo y negro. Asimismo, se representan con un círculo y una estrella blancos los puntos fijos.

Ejemplo 2 | Obtención del plano dinámico del método de Steffensen para el polinomio $f(z) = z^2 + i$.

El operador de punto fijo del método de Steffensen, cuando se aplica sobre un polinomio $f(z)$ es:

$$S(z) = z - \frac{f^2(z)}{f(z + f(z)) - f(z)}$$

Si incluimos la expresión de $f(z) = z^2 + i$, el operador queda como:

$$S(z) = \frac{z^3 + z^2 + iz - i}{z^2 + 2z + i}$$

Los puntos fijos del sistema satisfacen $S(z^*) = z^*$, siendo:

$$z^* = \frac{\sqrt{2}}{2} (\pm 1 \mp i)$$

Que, además, son superatractores.

Obtengamos el plano dinámico del método. Para ello, modificamos la línea 6 del código por:

```
Z=(Z.^3+Z.^2+%i*Z-%i)./(Z.^2+2*Z+%i);
```

Y ejecutamos:

```
--> rez=linspace(-3,5,200); imz=linspace(-5,5,100);  
--> [Z,PD]=planoDin2PF(rez,imz,sqrt(2)/2*(1-%i),sqrt(2)/2*(-1+%i),1e-6,50);
```

Obteniendo el plano dinámico de la figura 5:

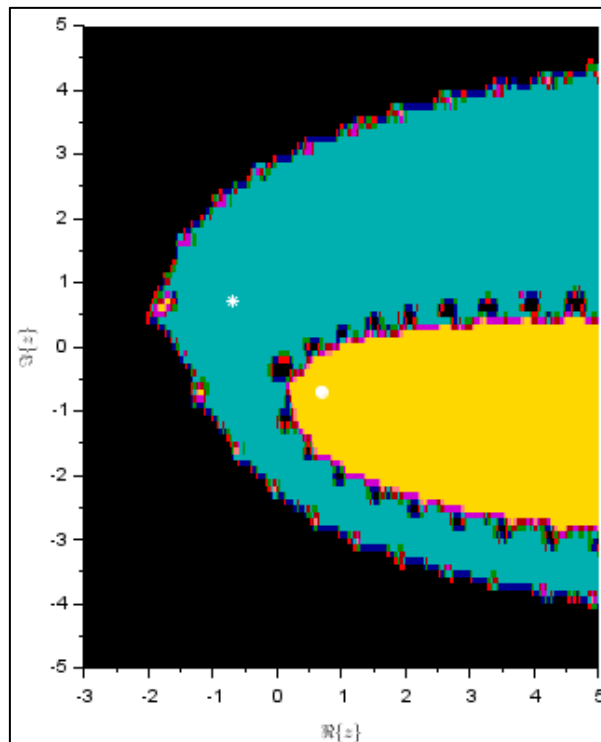


Figura 5. Plano dinámico del método de Steffensen cuando se aplica sobre el polinomio $f(z) = z^2 + i$

Como se puede observar en la figura 5, existen tres regiones diferenciables. En azul y amarillo se representan las cuencas de atracción de los dos puntos fijos atractores del sistema. Además aparece la cuenca negra que es la cuenca que corresponde a los puntos que divergen o, dicho de otra manera, convergen al infinito.

A continuación, vamos a modificar el programa correspondiente al plano dinámico para adaptarlo a la aplicación de polinomios de grado 3. La figura 6 muestra el código que incluye estos cambios.

```

01 function [Z, PD]=planoDin3PF(rez, imz, zf1, zf2, zf3, t, maxiter)
02     iter=1;
03     [RZ, IZ]=meshgrid(rez, imz);
04     Z=RZ+%i*IZ;
05     while iter<maxiter
06         N=Z.^7+3*Z.^5+2*%i*Z.^4+2*Z.^3+3*%i*Z.^2-Z-%i;
07         D=Z.^6+3*Z.^4+2*%i*Z.^3+3*Z.^2+3*%i*Z-1;
08         Z=N./D;
09         iter=iter+1;
10     end
11     PD=zeros(size(Z,1),size(Z,2));
12     PD(abs(Z-zf1)<t)=1;
13     PD(abs(Z-zf2)<t)=2;
14     PD(abs(Z-zf3)<t)=3;
15     grayplot(rez, imz, PD. '),
16     plot(real(zf1), imag(zf1), 'wo')
17     plot(real(zf2), imag(zf2), 'w*')
18     plot(real(zf3), imag(zf3), 'ws')
19     xlabel('$\text{Re}\{z\}$'), ylabel('$\text{Im}\{z\}$')
20 endfunction

```

Figura 6. Código del plano de parámetros cuando el operador de punto fijo tiene tres puntos fijos

La expresión de punto fijo incluida se corresponde con el operador de punto fijo del método de Steffensen cuando se aplica el polinomio cúbico $f(z) = z^2 + i$. Los puntos fijos del operador son:

$$z^* = \left\{ i, \frac{-i + \sqrt{3}}{2}, \frac{-i - \sqrt{3}}{2} \right\}$$

Ejecutando las líneas:

```
-->rez=linspace(-3,3,400); imz=linspace(-3,3,400);
-->[Z,PD]=planoDin3PF(rez,imz,%i,(-%i+sqrt(3))/2,(-%i-sqrt(3))/2,1e-6,50);
```

Se obtiene el plano dinámico de la figura 7.

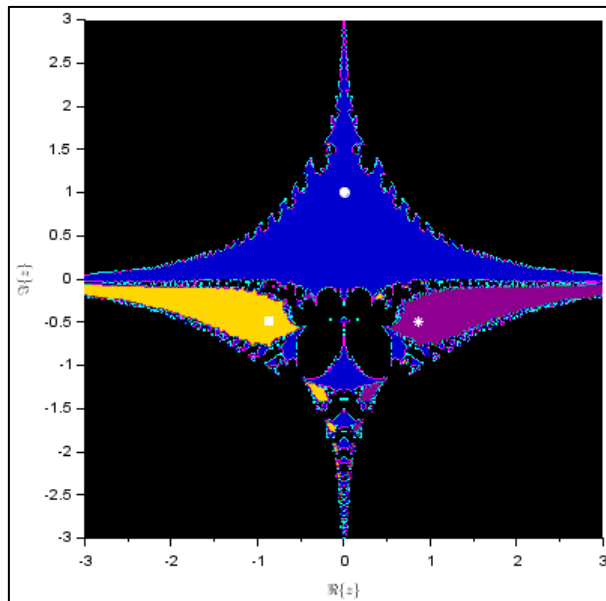


Figura 7. Plano dinámico asociado al operador de punto fijo de Steffensen cuando se aplica sobre el polinomio cúbico $f(z) = z^3 + i$

Podemos observar en la figura 7 las tres cuencas de atracción correspondientes a cada uno de los puntos fijos representados con cuadrado, estrella y círculo blancos. Asimismo, vuelve a aparecer la cuenca de atracción del infinito en negro.

Plano de parámetros

Otra de las herramientas gráficas fundamentales para el análisis de los sistemas dinámicos discretos complejos es el plano de parámetros. Esta herramienta se utiliza cuando se está estudiando una familia de métodos iterativos que dependen de un parámetro λ .

El procedimiento de obtención del plano de parámetros consiste en asociar a cada punto del plano un valor complejo del parámetro λ . Cada valor de λ que corresponde a la misma componente conexa del plano de parámetros da lugar a un conjunto de miembros con comportamientos dinámicos similares.

De este modo resulta interesante obtener un plano de parámetros tan estable como sea posible porque dará lugar a los valores de λ con mejores condiciones de estabilidad numérica.

Para ello se obtiene un punto crítico libre del sistema y se itera sobre todos los posibles valores de λ , de forma que este punto convergerá a una de las raíces del sistema.

Recordemos que los puntos críticos son aquellos que cumplen $|O'_\lambda(z^c)| = 0$ y no coinciden con las raíces del sistema.

Ejemplo 3 | Obtención de los puntos críticos del método de Steffensen cuando se aplica sobre cualquier polinomio cuadrático de la forma $p_\lambda(z) = z^2 + \lambda$.

El operador de punto fijo asociado es:

$$S_\lambda(z) = \frac{z^3 + z^2 + \lambda z - \lambda}{z^2 + 2z + \lambda}$$

Los puntos fijos son:

$$z^* = \pm i\sqrt{\lambda}$$

Mientras que los puntos críticos libres son:

$$z^c = -2 \pm \sqrt{2 - \lambda}$$

Cuando se dispone de los puntos críticos del sistema resulta fácil obtener el plano de parámetros. Para ello, la figura 8 muestra el código que incluye la rutina a ejecutar.

```

01 function [ZC, PP]=planoPar2PF(rel, iml, t, maxiter)
02     iter=1;
03     [RL,IL]=meshgrid(rel,iml);
04     L=RL+%i*IL;
05     ZC=-2+sqrt(2-L);
06     zf1=%i*sqrt(L); zf2=-%i*sqrt(L);
07     while iter<maxiter
08         ZC=(ZC.^3+ZC.^2+L.*ZC-L)./(ZC.^2+2*ZC+L);
09         iter=iter+1;
10     end
11     PP=zeros(size(L,1),size(L,2));
12     PP(abs(ZC-zf1)<t)=1;
13     PP(abs(ZC-zf2)<t)=2;
14     grayplot(rel,iml,PP.')
15     xlabel('$\text{Re}\{\lambda\}$'), ylabel('$\text{Im}\{\lambda\}$')
16 endfunction

```

Figura 8. Código para la generación del plano de parámetros

La rutina a ejecutar está basada en el código del plano dinámico. No obstante, se pueden observar profundas diferencias entre ambos. En primer lugar, es necesario definir los puntos fijos y el punto crítico a iterar en la función, como se muestra en las líneas 5 y 6.

La ejecución sobre la consola de las siguientes líneas:

```

-->rel=linspace(0,1,300); iml=linspace(-.5,.5,300);
-->[ZC,PP]=planoPar2PF(rel,iml,1e-6,100);

```

Da lugar al plano de parámetros de la figura 9.

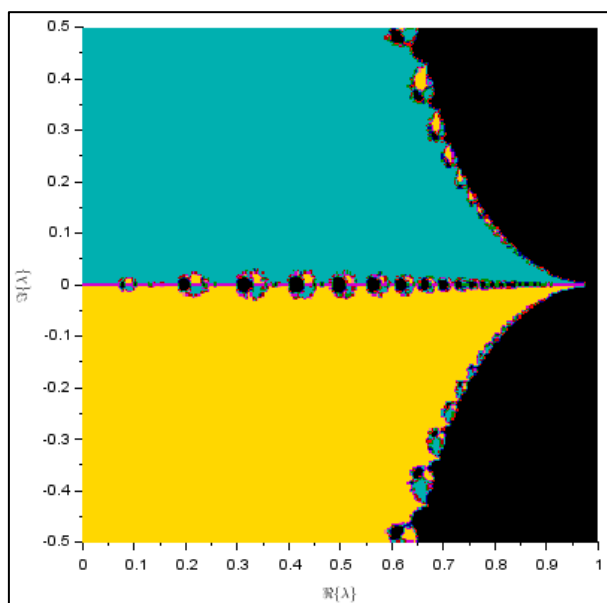


Figura 9. Plano de parámetros de la familia de funciones cuadráticas de la forma $f(z) = z^2 + \lambda$ cuando se aplican al operador de punto fijo de Steffensen

La figura 9 muestra tres regiones conexas principales. Por un lado, en azul y amarillo se representan las regiones en las que el punto crítico converge a una de ambas raíces. Por otro, la región negra indica los valores de λ para los cuales el método converge al infinito.

Como indicamos previamente, una buena familia dinámica es aquella que mayores regiones coloreadas tiene, puesto que dará lugar a métodos que converjan a una determinada raíz o, lo que es lo mismo, que obtengan la solución del sistema. A simple vista, tomar un valor de λ real puro conllevaría demasiado peligro de no convergencia.

A continuación, vamos a mostrar tres planos dinámicos correspondientes a tomar un valor de λ de cada una de las regiones. Estos planos dinámicos quedan recogidos en la figura 10.

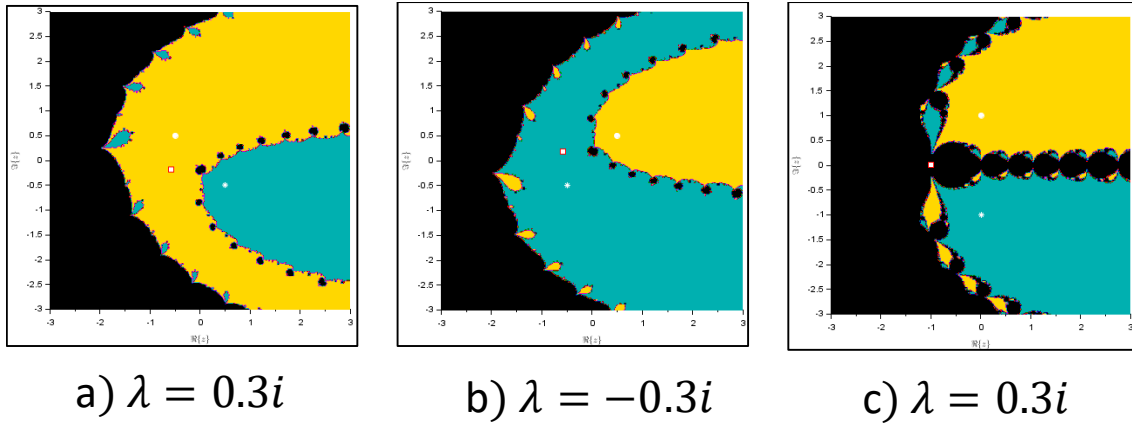


Figura 10. Planos dinámicos del método de Steffensen cuando se aplican sobre polinomios cuadráticos de la forma $f(z) = z^2 + \lambda$

Es necesario aclarar que los colores pueden confundir en la interpretación. Con círculo blanco se ha representado el punto fijo $z_1^* = i\sqrt{\lambda}$, con estrella blanca el punto fijo $z_2^* = -i\sqrt{\lambda}$ y con cuadrado rojo el punto crítico libre $z^c = -2 + \sqrt{2 - \lambda}$.

Bajo esta premisa obtenemos la interpretación del plano de parámetros. Cuando λ pertenece a la región azul del plano de parámetros, el punto crítico está en la cuenca de atracción de z_1^* . Para valores de λ en la región amarilla del plano de parámetros, el punto crítico está en la cuenca de $z_2^* = -i\sqrt{\lambda}$. Por último, para valores de λ en la región negra del plano de parámetros, el punto crítico está en la cuenca de atracción del infinito.

12.4. El método CT

El método de CT, iniciales de Cordero y Torregrosa, correspondiente al apartado 10.3.1, tiene la expresión:

$$CT(z) = \frac{z^6 + 2z^5 + (\lambda + 1)z^4 - 4\lambda z^3 - \lambda(\lambda + 6)z^2 - 6\lambda^2 z - \lambda^3 + \lambda^2}{2z^5 + 6z^4 + 4(\lambda + 1)z^3 + 4\lambda z^2 + 2\lambda(\lambda - 2)z - 2\lambda^2}$$

Las raíces $z^* = \pm i\sqrt{\lambda}$ son dos de los seis puntos fijos que tiene la función, siendo esos dos puntos fijos atractores. Los puntos críticos son $z^c = \{-2 \pm \sqrt{2 - \lambda}, -1 \pm i\sqrt{\lambda}\}$.

Obtengamos el plano de parámetros asociado al método. Para ello iteraremos el punto crítico libre $z^c = -1 + i\sqrt{\lambda}$ sobre un conjunto de valores de λ . La figura 11 ilustra el plano de parámetros del método.

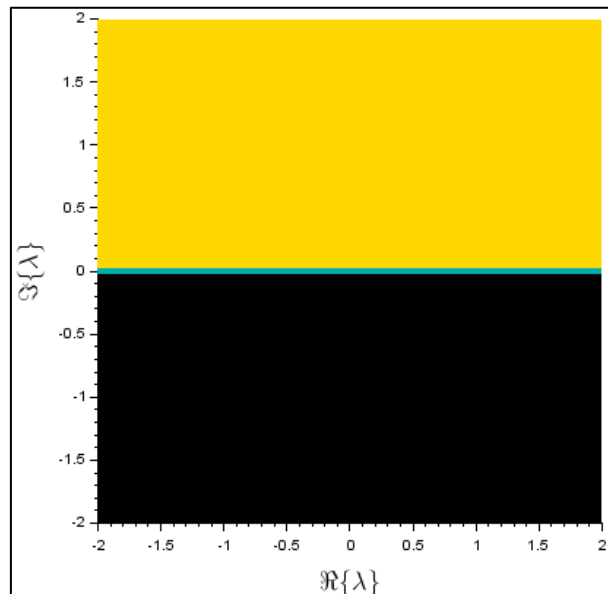


Figura 11. Plano de parámetros del método CT

En función de lo visto en los apartados anteriores, el punto crítico convergerá a un punto fijo u otro del conjunto $z^* = i\sqrt{\lambda}$ en función de si la parte imaginaria de λ es positiva o negativa.

Obtengamos los planos dinámicos para $\lambda = \pm i$ que se muestran en la figura 12:

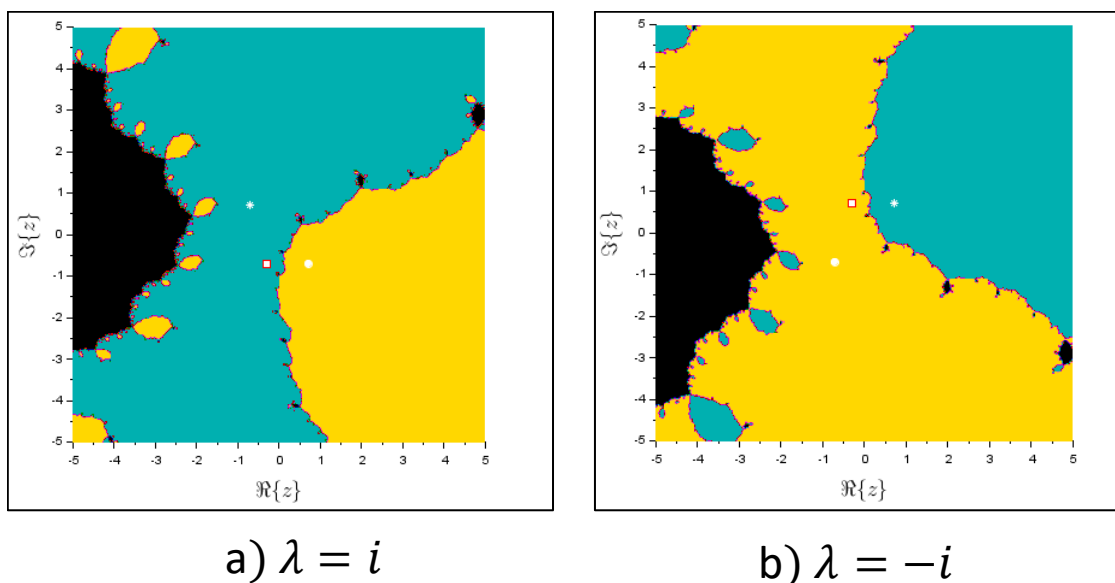


Figura 12. Planos dinámicos del método CT cuando se aplica sobre los polinomios (a) $f(z) = z^2 + i$ y (b) $f(z) = z^2 - i$

En efecto, cuando el valor de $\Im\{\lambda\} > 0$, el punto crítico está en la cuenca de atracción de la estrella blanca, mientras que para $\Im\{\lambda\} < 0$ está en la cuenca del círculo blanco correspondiéndose con los puntos fijos $-i\sqrt{\lambda}$ y $i\sqrt{\lambda}$, respectivamente.

12.5. Referencias bibliográficas

Cordero, A. y Torregrosa, J. R. (2011). *A class of Steffensen type methods with optimal order of convergence. Applied mathematics and computation*. Elsevier.

Giraldo, A. S. (2002). *Sistemas dinámicos discretos y caos. Teoría, ejemplos y algoritmos*. Universidad Politécnica de Madrid.

Varona, J. (2002). *Graphic and numerical comparison between iterative methods*. [http://folk.uib.no/ssuo29/Pdf file/Varona02.pdf](http://folk.uib.no/ssuo29/Pdf_file/Varona02.pdf)

Lo + recomendado

No dejes de leer...

Drawing dynamical and parameters planes of iterative families and methods

Este artículo resulta de una importancia extrema a la hora de facilitar la comprensión de los conceptos computacionales desarrollados en este tema. Además de presentar ejemplos, supone un recurso didáctico muy interesante puesto que explica en profundidad los detalles de los planos dinámicos y de parámetros.



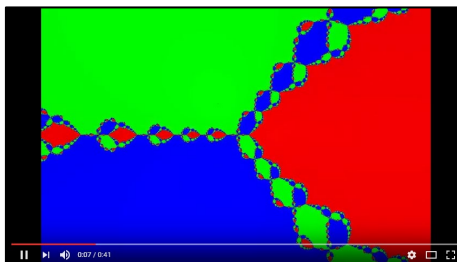
Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

<https://www.hindawi.com/journals/tswj/2013/780153/>

No dejes de ver...

Newton raphson iteration fractal

Modificando la función sobre la que se aplica el operador de punto fijo permite generar vídeos tan espectaculares como el del *link*. En él se pueden hasta identificar conjuntos de Mandelbrot.

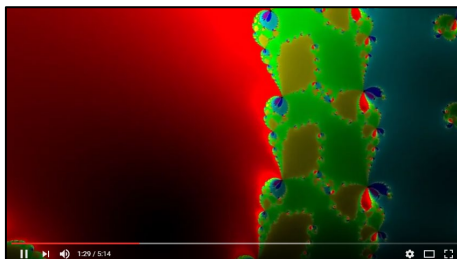


Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

https://www.youtube.com/watch?v=9s35_IG3zCc

Parametric Newton fractal

Otro de los vídeos espectaculares se puede observar cuando se aplica sobre el método de Newton un polinomio de grado 6, cuyas raíces se mueven con el tiempo a partir de funciones trigonométricas.



Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

<https://www.youtube.com/watch?v=aF8SPwzoVE>

+ Información

A fondo

Dynamical behaviour of iterative methods with memory for solving nonlinear equations

Esta presentación de acceso libre trata sobre métodos iterativos con y sin memoria. En ella se realiza un análisis pormenorizado de las características dinámicas de cada uno de los métodos presentados. Asimismo, se presentan algunos planos dinámicos y de parámetros para complementar los conceptos analíticos introducidos.

**Dynamical behaviour of iterative methods with
memory for solving nonlinear equations**

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

<http://www.imac.uji.es/TDCUJI.pdf>

Enlaces relacionados

Newtonian fractals

Existe una estrecha relación entre los fractales y los planos dinámicos asociados a métodos iterativos. En esta página se muestran algunas de sus propiedades, así como una gran cantidad de ejemplos de fractales basados en la aplicación del método de Newton sobre una serie de polinomios. Navega por sus páginas para descubrir más información al respecto.

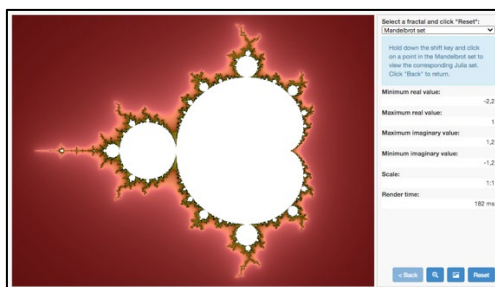
Newtonian Fractals

Accede a la página desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

http://usefuljs.net/fractals/docs/newtonian_fractals.html

Online Fractal Generator

Este generador de fractales en línea es una herramienta que permite la visualización y generación de fractales para distintos conjuntos, como el de Mandelbrot y el conjunto de Julia cuadrático. Es una herramienta dinámica que permite aproximar y alejar los puntos de las representaciones para visualizar diferentes comportamientos.



Accede a la página a través de la siguiente dirección web:

<http://usefuljs.net/fractals/>

Bibliografía

Babajee, D. K. R., Cordero, A. y Torregrosa, J. R. (2016). Study of iterative methods through the Cayley quadratic test. *Journal os computational and applied mathematics*, 244, 398-412

Behl, R., Cordero, A., Motsa, S. S. y Torregrosa, J. R. (2015). On developing fourth-order optical families of methods for multiple roots and their dynamics. *Applied mathematics and computation*.

Campos, B., Cordero, A., Torregrosa, J. R. y Vindel, P. (2015). Dynamics of the family of c-iterative methods. *International journal of computer mathematics*, 92(9), 1815-1825.

Cordero, A., Lofti, T., Mahdiani, K., Torregrosa, J. R. (2014). Two optimal general classes iterative methods with eighth-order. *Acta applicandae mathematicae*, 134(1), 61-74.

Cordero, A., Soleymani, F. y Torregrosa, J. R. (2014). Dynamical analysis of iterative methods for nonlinear systems or how to deal with the dimension? *Applied mathematics and computation*, 244, 398-412.

Cordero, A., Lofti, T., Bakhtiari, P. y Torregrosa, J. R. (2015). An efficient two-parametric family with memory for nonlinear equations. *Numerical algorithms*, 68(2), 323-335.

Cordero, A. Magreñán, A., Quemada, C. y Torregrosa, J. R. (2016). Stability study of eight-order iterative methods for solving nonlinear equations. *Journal of computational and applied mathematics*, 291, 348-357.

Test

1. El criterio de parada en sistemas dinámicos complejos respecto de los sistemas dinámicos reales:

- A. Es diferente porque en sistemas complejos se evalúa la distancia, mientras que en sistemas reales se analiza la diferencia absoluta.
- B. En ambos tipos de sistemas se utiliza el mismo comando.
- C. Implica que se deja de iterar cuando la diferencia o distancia entre iterados es superior a una determinada tolerancia.
- D. Todas las anteriores son correctas.

2. El plano dinámico:

- A. Representa las órbitas de todas las semillas del plano complejo.
- B. Representa las cuencas de atracción de los puntos fijos atractores.
- C. Representa todas las posibles semillas del sistema.
- D. Ninguna de las anteriores es correcta.

3. El plano dinámico del método de Newton cuando se aplica sobre un polinomio cuadrático del tipo $f(z) = z^2 + 1$:

- A. Tiene dos cuencas de atracción.
- B. Cualquier punto del plano complejo converge a una de las raíces del polinomio.
- C. Tiene órbitas periódicas.
- D. Ninguna de las anteriores es correcta.

4. El plano dinámico del método de Steffensen cuando se aplica sobre el polinomio $f(z) = z^2 + i$:

- A. Tiene cuatro cuencas de atracción.
- B. Presenta el comportamiento para cualquier valor del parámetro λ , con $\lambda = i$.
- C. Indica que cualquier punto del plano complejo converge a una de las raíces del polinomio.
- D. Ninguna de las anteriores es correcta.

5. Dados los planos dinámicos de los métodos de Newton y Steffensen cuando se aplican sobre los polinomios $f(z) = z^2 + 1$ y $f(z) = z^2 + i$, respectivamente, el tamaño de las cuencas de atracción indica que:
- A. El método de Newton es más estable que el de Steffensen.
 - B. El método de Steffensen es menos estable que el de Newton.
 - C. Ambos métodos tienen la misma estabilidad.
 - D. Ninguna de las anteriores es correcta.
6. Para generar un plano de parámetros es necesario dispone de:
- A. El operador de punto fijo del sistema.
 - B. Los puntos fijos del sistema.
 - C. Los puntos críticos del sistema.
 - D. El tamaño de las cuencas de atracción.
7. El plano de parámetros representa:
- A. El punto final de la órbita de un punto fijo para diferentes valores de λ .
 - B. El punto final de la órbita de un punto crítico para diferentes valores de λ .
 - C. El punto final de la órbita de un punto fijo atractor para diferentes valores de λ .
 - D. El punto final de la órbita de un punto crítico libre para diferentes valores de λ .
8. Dado un plano de parámetros, para conseguir métodos que garanticen estabilidad, tomaremos valores de λ :
- A. En regiones conexas amplias.
 - B. En regiones que se encuentren próximas a comportamientos diferentes.
 - C. En las fronteras entre las regiones.
 - D. Ninguna de las anteriores es correcta.
9. ¿Para qué se utilizan los puntos críticos libres del sistema?
- A. Para caracterizar a los puntos fijos.
 - B. Para generar el plano de parámetros.
 - C. Para generar los planos dinámicos.
 - D. Para caracterizar la convergencia del método.

10. ¿Qué información nos da el plano de parámetros?

- A. La cuenca de atracción en la que se encuentran los puntos fijos repulsores.
- B. La cuenca de atracción en la que se encuentran los puntos fijos atractores.
- C. La cuenca de atracción en la que se encuentran los puntos fijos extraños.
- D. La cuenca de atracción en la que se encuentran los puntos críticos libres.