Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos	**Apellidos:** Balsells Orellana	15/06/2021
	Nombre: Jorge Augusto	

Actividad 3: Sistemas Dinámicos Discretos

1. Ejercicio 1

Consideremos la familia de funciones:

$$f(x) = x^2 - \mu x + \mu, \mu \in \mathbb{R}, \mu > 1 \tag{1}$$

- **Calcula de forma analítica los puntos fijos y su estabilidad en función de μ, y los valores del parámetro donde el sistema tiene puntos de bifurcación.**

  para calcular los puntos fijos, procedemos a igualar la función a su variable independiente con pendiente 1. Ver ecuación 2

$$\begin{gathered} f(x) = x \\ x^2 - \mu x + \mu = x \\ x^2 - (\mu+1)x + \mu = 0 \end{gathered} \tag{2}$$

  De la ecuación 2, obtenemos los valores de x con cualquier método de resolución. En este caso, aplicamos la ecuación cuadrática. Ver procedimiento 3.

$$\begin{gathered} x^* = \frac{(\mu+1)}{2} \pm \frac{\sqrt{(\mu+1)^2 - 4\mu}}{2} \\ x^* = \frac{(\mu+1)}{2} \pm \frac{\sqrt{\mu^2+2\mu+1-4\mu}}{2} \\ x^* = \frac{(\mu+1)}{2} \pm \frac{\sqrt{(\mu-1)^2}}{2} \\ x^* = \frac{\mu+1}{2} \pm \frac{\mu-1}{2} \end{gathered} \tag{3}$$

  Resolviendo el procedimiento 3, obtenemos que los puntos fijos son los valores de 4.

$$x^* = \{1, \mu\}, \forall \mu \in \mathbb{R} \wedge \mu > 1 \tag{4}$$

La estabilidad se busca en base a la derivada de la función 2. Ver ecuación 5.

$$f'(x) = 2x - \mu \tag{5}$$

Para determinar los puntos de bifurcación, partimos de los conceptos del procedimiento 6, que clasifican los puntos fijos dependiendo su comportamiento asintótico.

$$\begin{gathered} Atractor \longrightarrow |f'(x^*)| < 1 \\ Repulsor \longrightarrow |f'(x^*)| > 1 \\ Neutro \longrightarrow |f'(x^*)| = 1 \end{gathered} \tag{6}$$

En la ecuación 5, evaluamos los puntos fijos de la ecuación 4. Ver procedimiento 7 para $|f'(x_1^*)|$ y procedimiento 8 para $|f'(x_2^*)|$.

$$\begin{gathered} |f'(x_1^*)| = |2 * (1) - \mu| \\ |2 - \mu| < 1 \mapsto -1 < 2 - \mu < 1 \mapsto -3 < -\mu < -1 \\ 1 < \mu < 3 \mapsto \mathbf{x}^* \cdot \mathbf{Atractor}. \\ |2 - \mu| > 1 \mapsto 2 - \mu < -1 \cup 2 - \mu > 1 \mapsto -\mu < -3 \cup -\mu > -1 \\ \mu > 3 \cup \mu < 1 \mapsto \mathbf{x}^* \cdot \mathbf{Repulsor}. \\ |2 - \mu| = 1 \mapsto -\mu = -1 \\ \mu = 1 \mapsto \mathbf{x}^* \cdot \mathbf{Neutro}. \end{gathered} \tag{7}$$

$$
\begin{gathered}
|f'(x_2^*)| = |2*(\mu) - \mu| \\
|2\mu - \mu| < 1 \mapsto -1 < \mu < 1 \\
-1 < \mu < 1 \mapsto \mathbf{x}^* \cdot \textbf{Atractor}. \\
|2\mu - \mu| > 1 \mapsto \mu < -1 \cup \mu > 1 \\
\mu < -1 \cup \mu > 1 \mapsto \mathbf{x}^* \cdot \textbf{Repulsor}. \\
|2\mu - \mu| = \pm 1 \\
\mu = \pm 1 \mapsto \mathbf{x}^* \cdot \textbf{Neutro}.
\end{gathered} \tag{8}
$$

Para obtener los puntos de bifurcación, se deben conocer con anterioridad los valores que debería tomar μ, bajo la consideración de los términos mostrados en 9.

$$
f_\mu(x^*) = x^*, |f'_\mu(x^*)| = 1 \tag{9}
$$

Evaluamos los términos mostrados en 6 para x_1^*, como se muestra en el procedimiento 10.

$$
\begin{gathered}
f_\mu(x^*) = x^* \mapsto (1)^2 - \mu(1) + \mu = 1 \mapsto \textbf{Cumple}. \\
|f'_\mu(x^*)| = 1 \mapsto |2(1) - \mu| = 1 \mapsto 2(1) - \mu = \pm 1 \\
\mu = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}\} \mapsto \textbf{Bifurcaciones}.
\end{gathered} \tag{10}
$$

- **Representa el diagrama de bifurcación del sistema tomando 500 valores de μ en el intervalo $(1, 4)$ y de estimaciones iniciales en el intervalo $(0, 1)$. Comenta los resultados que se observan en la gráfica.**

El programa en MATLAB® de la figura 1 , genera 2 líneas que no pertenecen al gráfico. Si pertenecieran, el período en esos puntos cambiaría. También se ha utilizado el código desarrollado en python para la Actividad 2 para mostrar la diferencia, el cuál se muestra en la figura 2.

```
function X=bifurcacion(x0,mu)
    [X,U]=meshgrid(x0,mu);
    iter=1;

    while iter<500
        X=X.^2 - U.*X + U;
        iter=iter+1;
    end

    plot(mu,X,'k.');
    grid on
    title('Diagrama de bifurcacion de ecuacion 1')
    xlabel('\mu')
    ylabel('x_k')
end
```

Listing 1: Código de MATLAB® para generar diagrama de bifurcación.

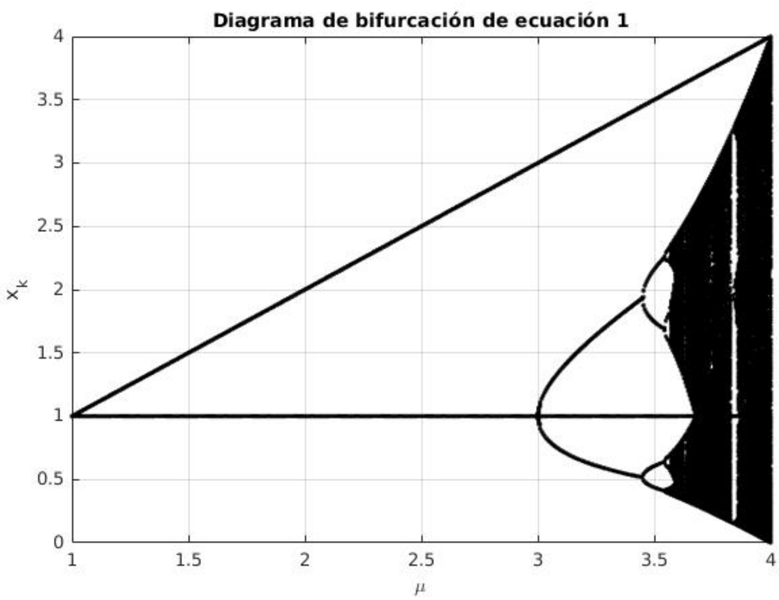


Figura 1: Diagrama de bifurcación de ejercicio 1 en MATLAB®.

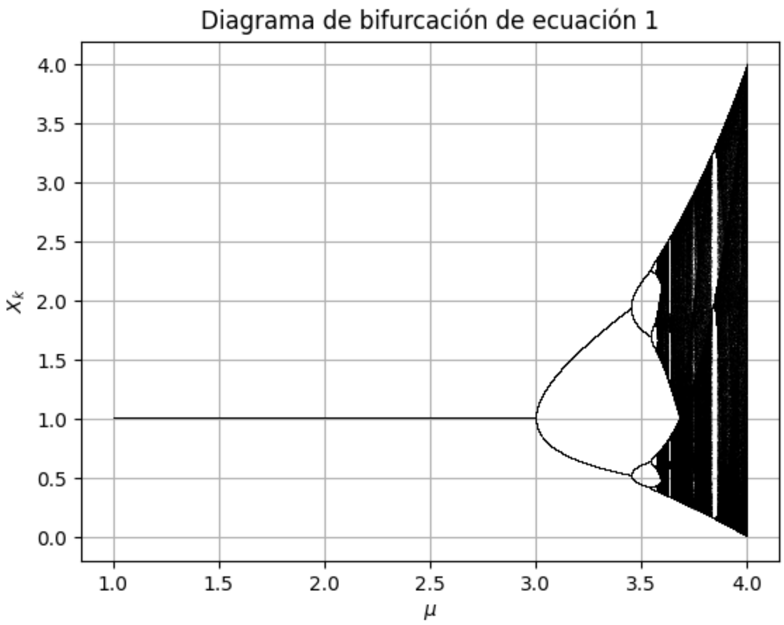


Figura 2: Diagrama de bifurcación de ejercicio 1 en Python®.

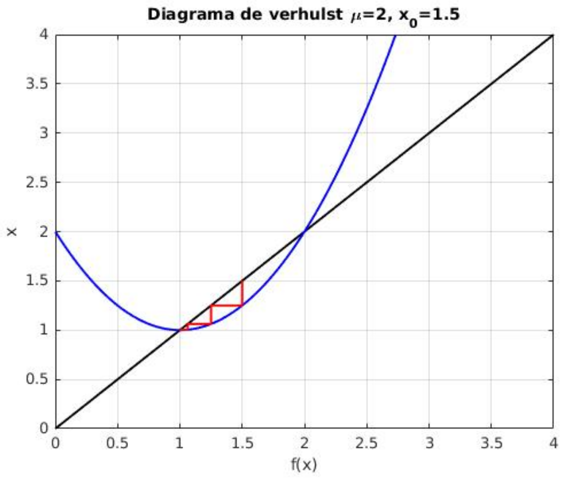
```
from tqdm import tqdm
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def LogisticMap():
    mu = np.arange(1, 4, 0.008)
    x = 0.01
    iters = 1000
    last = 100
    for i in tqdm(range(iters+last)):
        x = x**2 - x*mu + mu
        if i ≥ iters:
            plt.plot(mu, x, ',k', alpha=0.25)
    plt.xlabel("$\mu$") plt.ylabel("$X_k$")
    plt.show()
LogisticMap()
```

Listing 2: Código de Python® para generar diagrama de bifurcación.

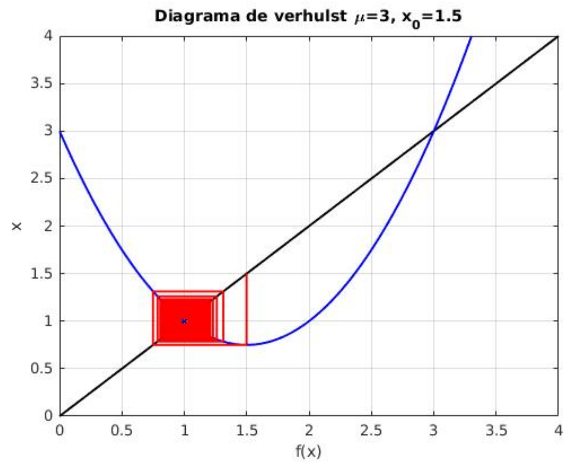
- **Representa los diagramas de Verhulst obtenidos para $\mu = (2, 3, 3{,}5, 3{,}8)$, utilizando un rango de valores de $x \in (0, 4)$ y tomando como semilla $x_0 = 1{,}5$. Justifica y compara los resultados obtenidos en cada gráfica con el diagrama de bifurcación y el estudio dinámico realizados en los apartados anteriores.**

```matlab
function [iter, d, x] = orbita(f, x0, t, maxiter)
    iter=1;
    d=1;
    x=x0;
    while iter<maxiter && d(end)>t
        xk=feval(f,x(end));
        d=[d abs(xk-x(end))];
        x=[x xk];
        iter=iter+1;
    end
end
function [iter, xk]=verhulst(f, x0, t, maxiter, rangox)
    y1=rangox; y2=feval(f,rangox);
    plot(rangox,y1,'k',rangox, y2,'b','Linewidth',1.5);
    grid on
    [iter, d, xk]=orbita(f,x0,t,maxiter);
    xplot=repmat(xk,2,1);
    xplot=xplot(:);
    yplot=xplot(2:end);
    xplot(end)=[];
    hold on; grid on
    title('Diagrama de verhulst \mu=3.8, x_0=1.5')
    xlabel('f(x)'), ylabel('x')
    plot(xplot,yplot,'r','Linewidth',1.5);
    axis([min(rangox) max(rangox) min(rangox) max(rangox)])
end
```

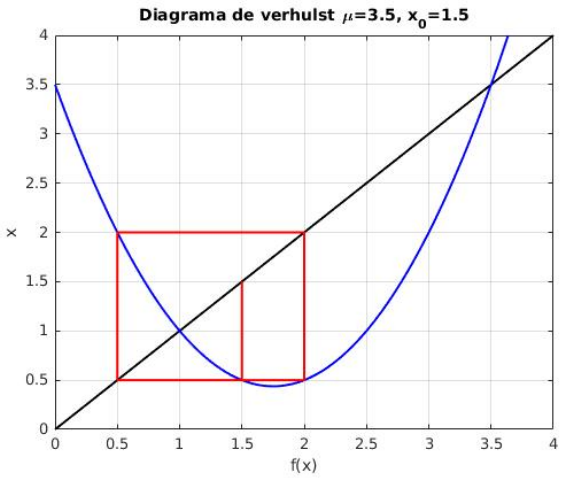
Listing 3: Código de MATLAB® para generar diagrama de verhulst.



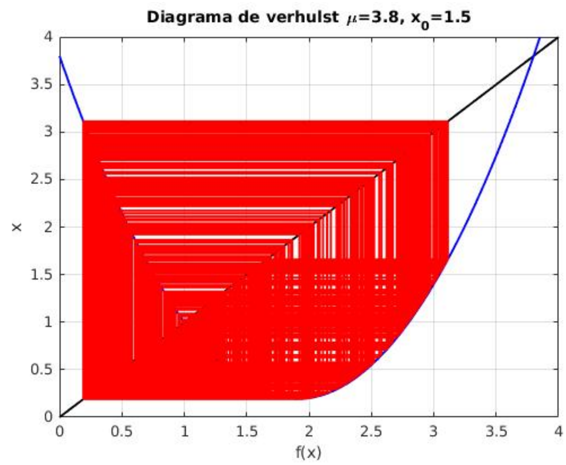
(a) $\mu = 2$



(b) $\mu = 3$



(c) $\mu = 3{,}5$



(d) $\mu = 3{,}8$

Figura 3: Diagramas de Verhulst para diferentes valores de μ.

La figura 3a, muestra una tendencia atractora en el punto $x_0 = 1{,}5$, y $\mu = 2$. En las desigualdades del procedimiento 7 y 8 se comprobó la tendencia atractora de manera analítica. En la figura 3b, dónde $x_0 = 1{,}5$ y $\mu = 3$, se observa también una tendencia atractora hácia 1, que es un punto neutro. En la figura 3c dónde $x_0 = 1{,}5$ y $\mu = 3{,}5$, se observa que la figura es tocada en 2 puntos, incluso al cambiar $x_0 = 2$, esto determina que el período es de 2, solamente que en este caso, varía entre los puntos $\{\frac{1}{2}, 2\}$. La figura 3d muestra una tendencia caótica, dado que, según el diagrama de bifurcación, $\mu = 3{,}8$, tiene un período sumamente alto.

Una conclusión consistente es que los diagramas de velhurst y diagramas de bifurcación deben ser siempre complementarios, ya que un solo diagrama puede evidenciar falta de información que puede ser complementada por el otro diagrama.

2. Ejercicio 2

- **Implementa en la función *OrbitaVerhulst.m* que, dada una familia de polinomios, represente el diagrama de bifurcación del sistema. A continuación, sobre la gráfica obtenida, el programa deberá permitir seleccionar manualmente un valor del parámetro de la familia, así como representar el diagrama de Verhulst asociado a este valor y a una determinada semilla. Las variables de entrada de la función serán: la semilla para el diagrama de Verhulst, el rango de valores de semillas y el rango de valores del parámetro para el diagrama de bifurcación, la tolerancia y el máximo de iteraciones permitido.**

```
function OrbitaVerhulst(x0,rangox0,rangoM,tol,maxiter)
   % Representamos el diagrama de bifurcacion
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    [X,M]=meshgrid(rangox0,rangoM);
    iter=1;
    while iter<500
        X=X.^2-M.*X+M;
        iter=iter+1;
    end

    plot(rangoM,X,'k.');
    grid on;
    xlabel('\mu'); ylabel('x_k');
    title('Diagrama de Bifurcacion f(x)=x^2-\mux+\mu');

% Seleccionamos el punto con el comando ginput y tomamos solo
```

```
% la primera coordenada del punto
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    [mu,¬] = ginput(1);

% Sustituimos en la familia de funciones el parametro por el
%valor seleccionado
    f=@(x) x.^2-x.*mu+mu;

% Representamos el diagrama de Verhulst asociado
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    figure('Name','Diagrama de Verhults');
    y1=rangox0;
    y2=feval(f,rangox0);
    plot(rangox0,y1,'k',rangox0,y2,'k','Linewidth',1.5);
    grid on;

    [xk, d, iter]=orbita(f,x0,tol,maxiter);

    xplot=repmat(xk,2,1);
    xplot=xplot(:);
    yplot=xplot(2:end);
    xplot(end)=[];hold on;
    plot(xplot, yplot, 'r', 'Linewidth', 1.5);
    axis([min(rangox0) max(rangox0) min(rangox0) max(rangox0)]);
    xlabel('x'); ylabel('f(x)');
    title(['Diagrama de Verhults para \mu= ',num2str(round(mu,2)),' y ...
        x_0=',num2str(x0)])
end
```

Listing 4: Código de MATLAB® para generar diagrama de bifurcación y diagrama de verhulst.

En el documento se muestra el código con fines prácticos para revisión. El código se encuentra adjunto al documento en la entrega. Se han utilizado los mismos códigos realizados en clase, modificados para no ingresar ninguna función externa.

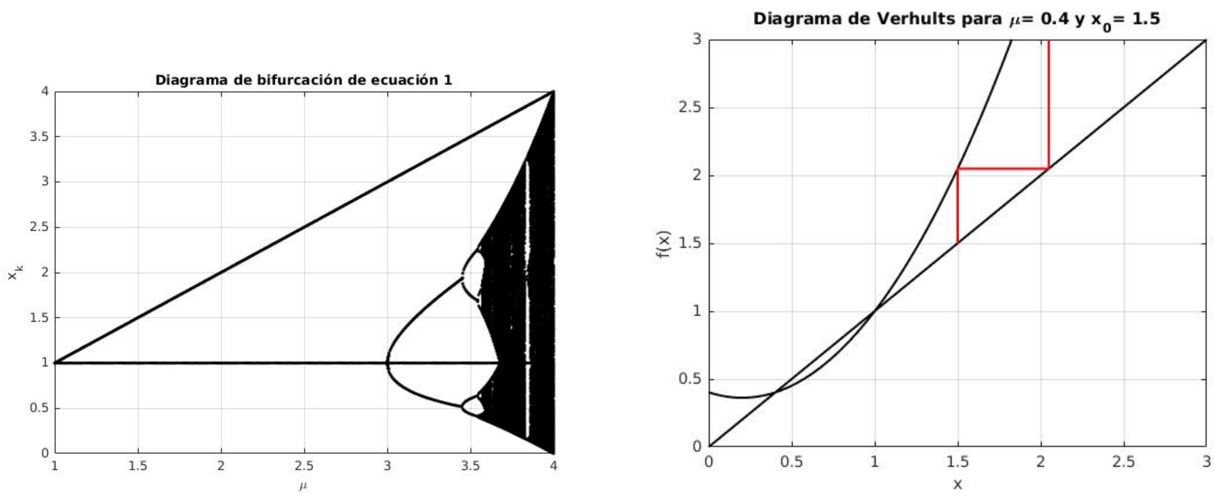
3. Ejercicio 3

- **Prueba el funcionamiento de *OrbitaVerhulst.m* a partir de la utilización de los siguientes parámetros de entrada:**
  - **Semillas para el diagrama de bifurcación: 500 puntos en** $(0, 3)$**.**
  - **Semilla para el diagrama de Verhulst:** $x_0 = 1{,}5$**.**
  - **500 valores de** $\mu \in (0, 4)$**.**
  - **Tolerancia:** 10^{-6}**.**
  - **Número máximo de iteraciones: 50.**

```
OrbitaVerhulst(1.5,linspace(0,3,500),linspace(0,4,501),1e-6,50)
```

Listing 5: Código de MATLAB® para generar diagrama de bifurcación y diagrama de verhulst.

En la lista 5, se muestra el script necesario para ejecutar la función *OrbitaVerhulst* con los parámetros requeridos en el ejercicio 3.

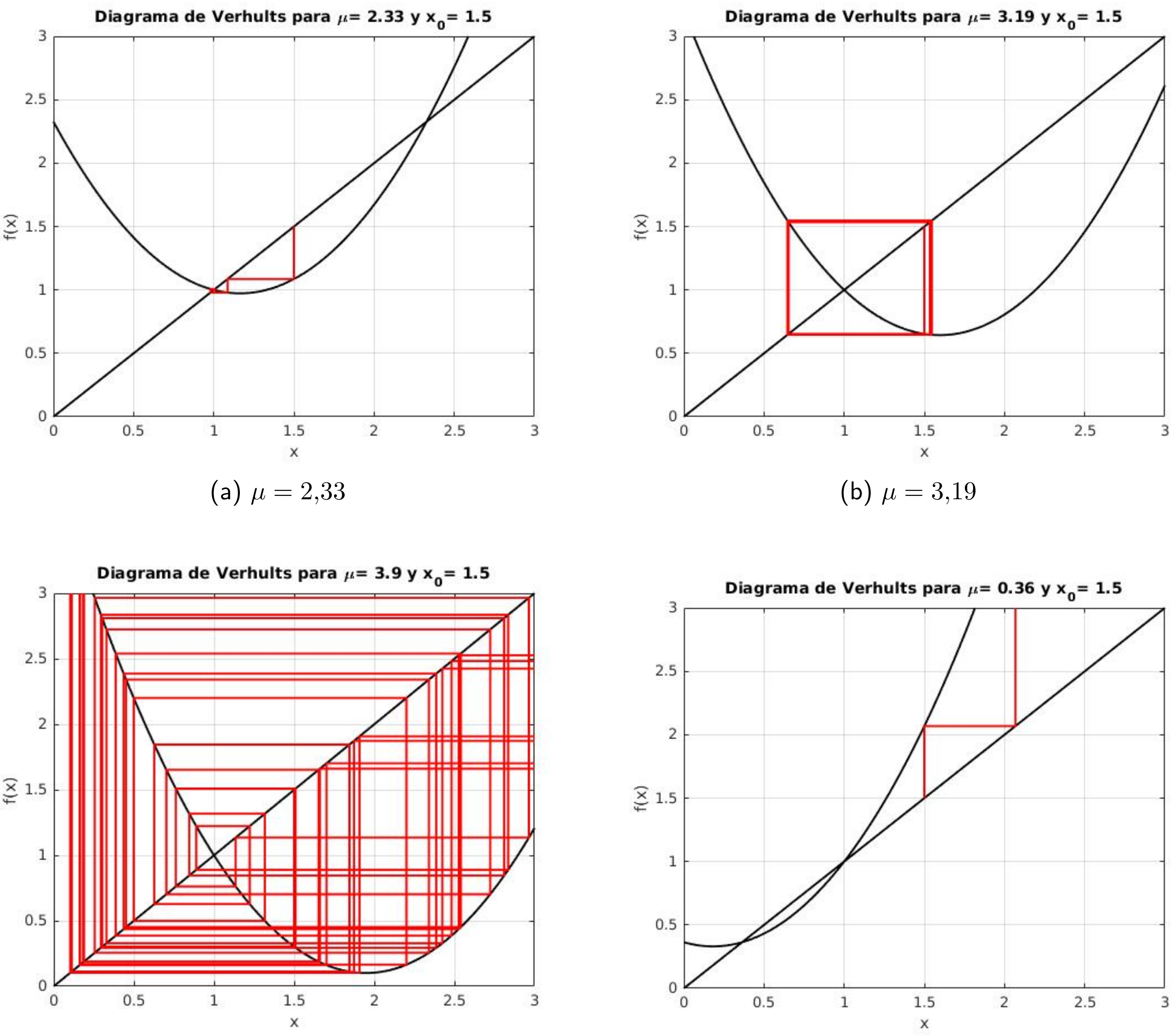


(a) Bifurcación

(b) $\mu = 0{,}4$

Figura 4: Prueba de funcionamiento de código de lista 4.

- **Muestra el diagrama de bifurcación obtenido y selecciona valores de μ de regiones del diagrama donde observes comportamientos distintos. Justifica la elección de los parámetros y muestra y explica los diagramas de Verhulst asociados.**



(a) $\mu = 2{,}33$ (b) $\mu = 3{,}19$

(c) $\mu = 3{,}9$ (d) $\mu = 0{,}36$

Figura 5: Diagramas de Verhulst para diferentes valores de μ elegidos.

Los valores de μ para las imágenes de la figura 5, fueron seleccionados por las siguientes características:

- $\mu = 2{,}33$, figura 5a: Tomando de referencia el diagrama de bifurcación de la figura 4a, determinamos que los valores de μ dentro del rango $\{1, 3\}$ son atractores hácia un punto. Se ha considerado que es importante analizar la tendencia de un punto en este rango, y determinar gráficamente que es atraído hacia 1.

- $\mu = 3{,}19$, figura 5b: Tomando de referencia el diagrama de bifurcación de la figura 4a, determinamos que el período debe ser período 2, y se puede comprobar al ver la figura 5b dónde cada punto tiene una tendencia de tocar 2 puntos de cada gráfico sin considerar el punto inicial, el cuál busca esa tendencia.
- $\mu = 3{,}9$, figura 5c:Tomando de referencia el diagrama de bifurcación de la figura 4a, vemos un comportamiento caótico, dado que seleccionamos un valor cercano a 4, dónde el período es muy alto. Se puede observar que en el gráfico, a pesar de pasar cerca del valor de 1 muchas veces, nunca toca ese valor, dado que para poder pasar por el valor de 1, debe estar considerado entre el rango $\{1, 3\}$.
- $\mu = 0{,}36$, figura 5d:Tomando de referencia el diagrama de bifurcación de la figura 4a, y los valores de las desigualdades para determinar cuando un punto es repulsor, se puede comprobar que en valores de $\mu < 1$, todo punto es repulsor y no tiene ningún período.

Referencias

[1] Dra. Neus Garrido. Apuntes de clase de sistemas dinámicos discretos y contínuos., 2021.

[2] Méndez H. King, J. *Sistemas dinámicos discretos*. Universidad Nacional Autónoma de México, 2014.

[3] Stephen Lynch. *Dynamical systems with applications using MATLAB*. Springer, 2004.

[4] John Michael Tutill Thompson and H Bruce Stewart. *Nonlinear dynamics and chaos*. John Wiley & Sons, 2002.