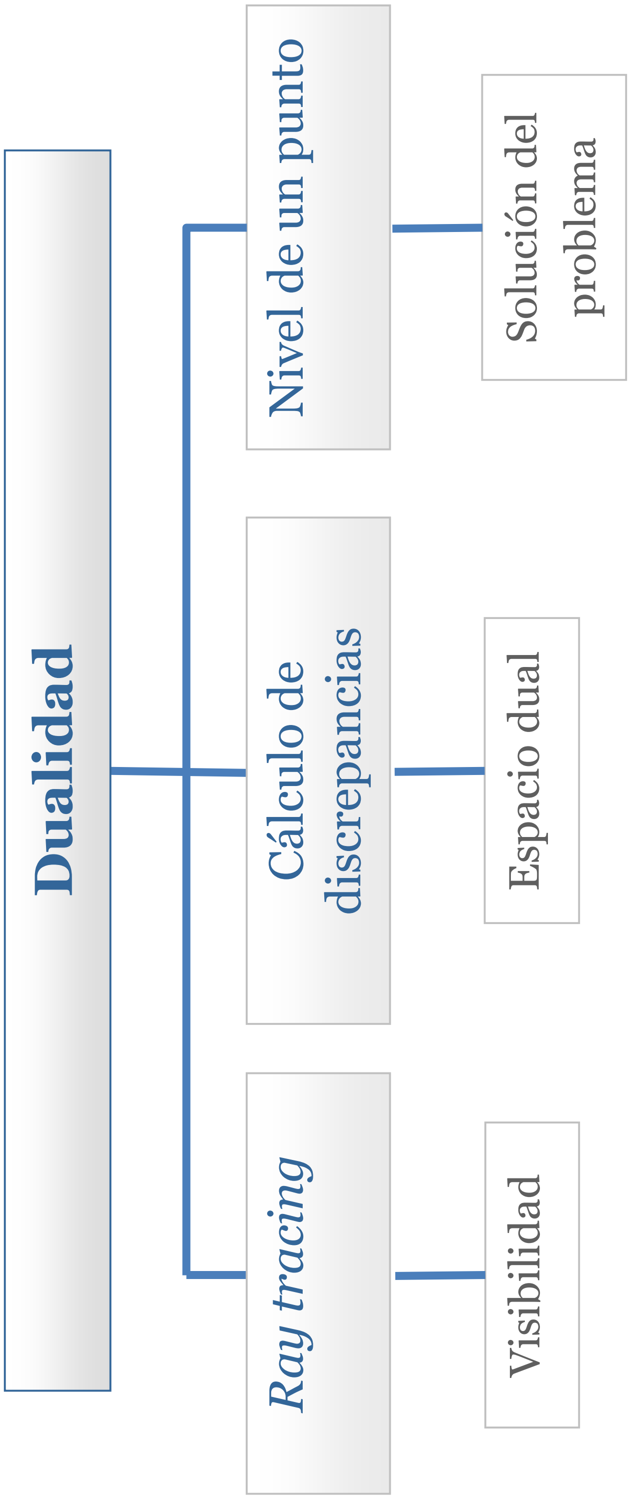
Dualidad

TEMA 12

Esquema


Dualidad
Nivel de un punto
Solución del problema
Cálculo de discrepancias
Espacio dual
Ray tracing
Visibilidad

Ideas clave

12.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

En este capítulo se explica una de las técnicas básicas del *ray tracing* para la generación de gráficos por ordenador: el cálculo de discrepancias. Esto se va a hacer introduciendo una técnica geométrica con muchas aplicaciones en la ingeniería: el principio de dualidad.

Las ideas principales de este tema son:

» Dentado en imágenes 3D.
» Estimación de la discrepancia de la muestra.
» Planteamiento del problema para encontrar la máxima discrepancia.
» Espacio dual.

12.2. Introducción al *ray tracing*

Las imágenes 3D generadas por ordenador cada vez son más realistas. De hecho, en ocasiones es imposible distinguirlas de fotografías. Una técnica muy usada para conseguir el efecto realista es el *ray tracing* aunque es computacionalmente costosa y no está aconsejada para generar imágenes en tiempo real. En este tema se explica esta técnica: el planteamiento del problema y el uso de herramientas geométricas (dualidad) para resolverlo.

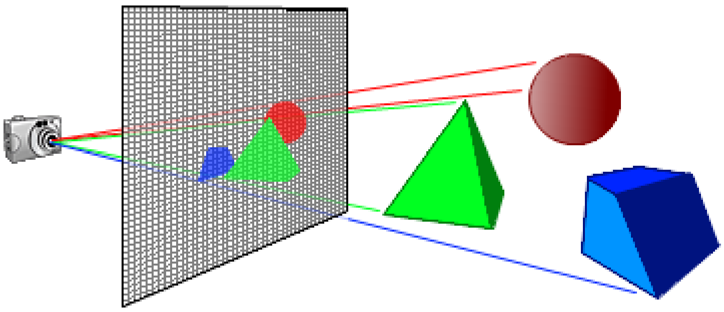


Figura 12.1. Determinación de objetos visibles
Fuente: http://www.yac.com.pl/

Una imagen generada por un ordenador está compuesta de muchas celdas de tamaño lo bastante pequeño como para dar sensación de continuidad. Cada una de estas celdas recibe el nombre de píxel. Para representar objetos en el espacio tridimensional es necesario establecer, en primer lugar, qué objeto debe representarse en cada píxel, es decir, qué objeto es visible desde cada píxel (figura 12.1). También es necesario determinar la intensidad de la luz que emite el objeto pero en este tema nos ocuparemos solo de la visibilidad.

Para establecer si un objeto es visible desde un píxel determinado, en primer lugar se superponen la malla de píxeles y la figura en cuestión. El problema es que un píxel no es un punto sino un cuadrado muy pequeño pero con una superficie determinada. Por tanto, en los extremos de los objetos suele haber algunos píxeles que están cubiertos parcialmente (figura 12.2)

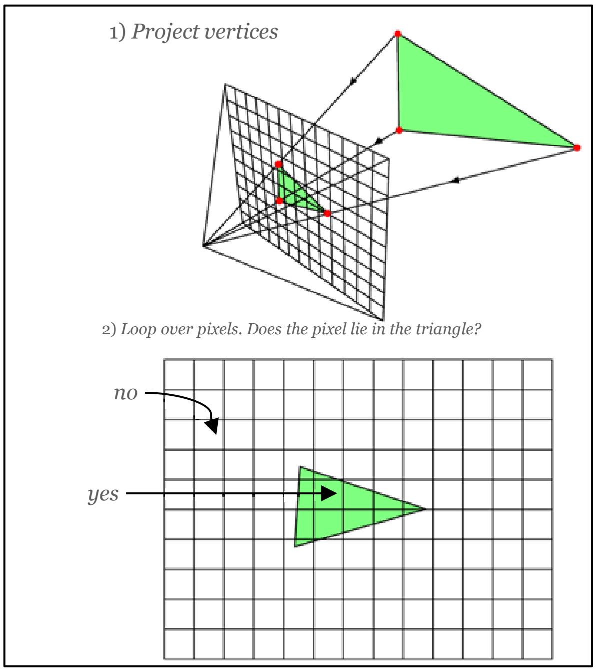


Figura 12.2. Cobertura
Fuente: http://www.yac.com.pl/

Por tanto, si disparamos un rayo por cada píxel los bordes del objeto no quedarán bien representados ya que se producirá un efecto de dentado en la imagen (figura 12.3). La solución que se da en el *ray tracing* consiste en hacer pasar un haz de rayos por cada píxel. De esta forma si la superficie del píxel está cubierta, por ejemplo un 43%, se vea el 43% de su área.

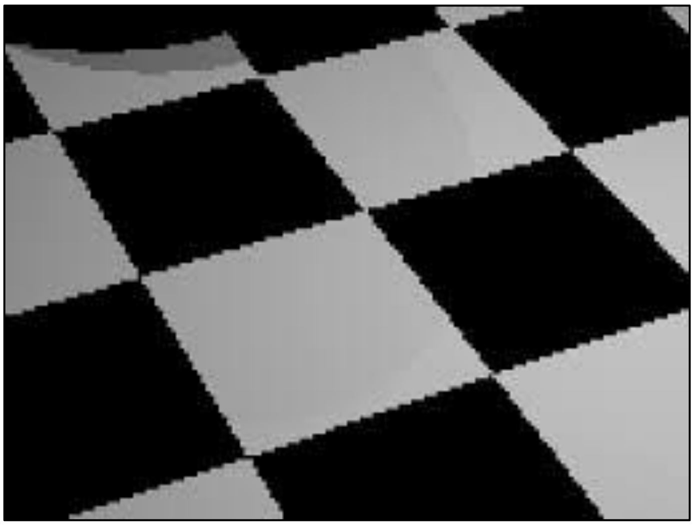


Figura 12.3. Efecto dentado de una imagen
Fuente: http://nathanieltroutman.net/

Falta por determinar cómo deben distribuirse los rayos en el píxel. La primera aproximación podría ser distribuirlos de manera uniforme: para 100 rayos se dividiría el píxel en una malla de 10 x 10. Pero este método no se utiliza nunca en la práctica porque aunque reduce mucho el error en cada píxel da lugar a un patrón regular que produce efectos indeseados en la imagen (figura 12.4).

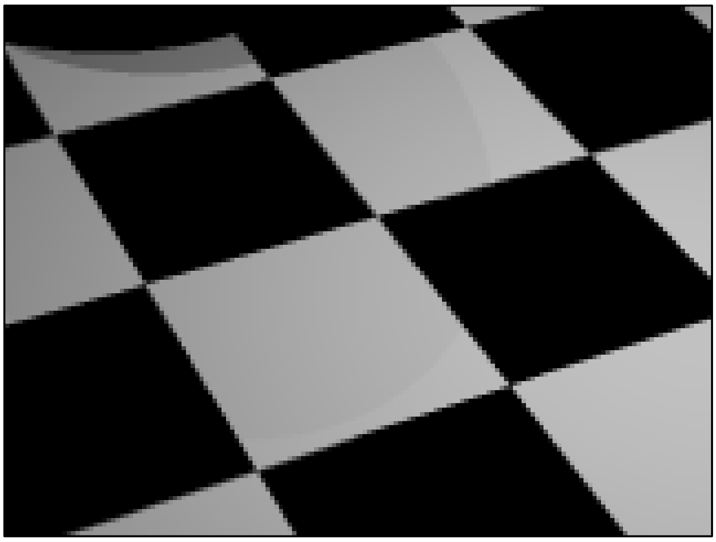


Figura 12.4. Patrones regulares en la imagen
Fuente: http://nathanieltroutman.net/

Por tanto es mejor utilizar una muestra que de algún modo sea aleatoria. Obviamente, no sirve cualquier muestra ya que es necesario que el píxel esté cubierto de forma que el porcentaje de impactos con el objeto sea próximo al porcentaje real de área que está cubierto.

El objetivo es establecer un criterio que permita determinar si una muestra dada es válida o no, es decir, si el porcentaje de rayos que impactan es similar al porcentaje de área cubierta. Esta diferencia recibe el nombre de **discrepancia de la muestra con respecto al objeto**.

Como a priori no se sabe la forma en que va a estar cubierto el píxel debemos ponernos en el peor de los casos: el objetivo es que la máxima discrepancia con cualquier posible disposición del objeto sea pequeña. Esta diferencia se llama **discrepancia de la muestra**. Por tanto, dado un conjunto de haces aleatorio queremos calcular esta discrepancia. Si la discrepancia es pequeña podemos quedarnos con esa muestra y si no lo es debemos tomar una nueva muestra y comprobar si la discrepancia es pequeña.

12.3. Cálculo de la discrepancia

Vamos a considerar que cada píxel está intersecado por un solo polígono. Aunque la escena represente objetos curvos, en realidad se trata de aproximaciones poligonales.

También es muy poco frecuente que haya más de un polígono en un píxel: esto solo ocurriría si fueran extremadamente delgados o pequeños.

Sea $U = [0,1]\times[0,1]$ el cuadrado unidad que representa un píxel y sea S una muestra de n puntos en U. Sea $\mathcal{H}$ el conjunto que contiene todos los semiplanos cerrados. Se define la **medida continua del semiplano**, $\mu(h)$, $h \in \mathcal{H}$ como el área de la intersecciöon $h \cap U$. En realidad esta medida representa la proporción de área cubierta: si el píxel está cubierto por completo, $\mu(h) = 1$.

Por otra parte se define la **medida discreta del semiplano**, $\mu_S(h)$, como el cociente entre los puntos de la muestra que están en h y el total de puntos de la muestra, es decir, $\mu_S(h) = \frac{card(S\cap h)}{card(S)}$.

Para saber si una muestra dada distribuye sus puntos de forma aceptable para un semiplano también dado se calcula la discrepancia:

$$\Delta_S(h) = |\mu(h) - \mu_S(h)|$$

En el ejemplo de figura 12.5 puede verse que:

$$\mu(h) = 1/4$$
$$\mu_S(h) = 3/10$$

Por tanto, $\Delta_S(h) = |\mu(h) - \mu_S(h)| = |0.25 - 0.3| = 0.05$

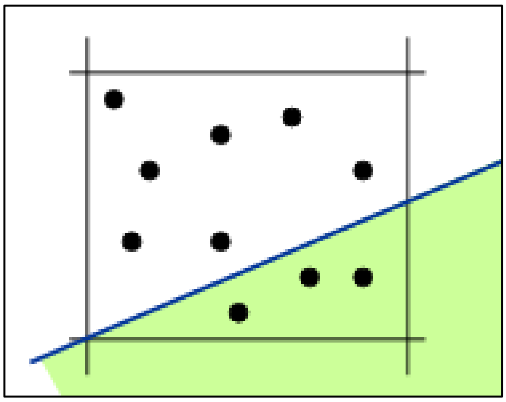


Figura 12.5. Ejemplo de intersección de semiplano con el píxel
Fuente: http://slideplayer.com/

Pero como no sabemos a priori cómo va a ser el semiplano que interseque al píxel es necesario calcular cuál sería el peor de los casos, es decir, la mayor de las discrepancias posibles entre esa muestra y cualquier semiplano.

$$\Delta_{\mathcal{H}}(h) = sup\ \Delta_S(h)$$

El supremo, considerando semiplanos cerrados, es igual al máximo considerando semiplanos abiertos y cerrados. En principio el problema parece inabordable, ya que habría que considerar un conjunto infinito de semiplanos y tomar el máximo.

La idea para resolver este problema pasa por sustituir esa cantidad infinita de planos por una cantidad finita de planos, entre los cuales está el que buscamos, el que presenta la máxima discrepancia.

El procedimiento pasa por seleccionar aquellos semiplanos que localmente tengan la máxima discrepancia. La máxima discrepancia local implica que cualquier ligera variación de los planos (pequeñas rotaciones o traslaciones) disminuye la discrepancia.

Justamente el plano que buscamos se encuentra entre los que tienen máxima discrepancia local.

Estos planos se caracterizan por contener puntos de la muestra en su frontera: si un plano no contiene ningún punto en su frontera es posible girarlo o trasladarlo ligeramente sin que la discrepancia cambie.

Puede probarse que si buscamos planos con un único punto en su frontera es posible encontrar los candidatos en un tiempo $O(n)$. Si el semiplano contiene dos o más puntos el tiempo necesario para encontrar los candidatos es $O(n^2)$. Tanto el algoritmo de búsqueda como la demostración de que la complejidad del algoritmo es cuadrática se hace utilizando el espacio dual.

12.4. Principio de dualidad

Una recta en el plano tiene como ecuación $y = mx + b$, donde m es la pendiente y b es el punto de corte con el eje y. En el caso de rectas verticales de ecuación $x = x_0$, no se puede hablar de pendiente ni de corte con el eje y, por lo que en este apartado vamos a considerar rectas no verticales.

Por otra parte, un punto en el plano se puede definir con dos coordenadas. Por tanto podemos establecer una correspondencia entre las rectas (definidas por dos parámetros) y los puntos del plano, de forma que:

» A un punto de coordenadas (u, v) le corresponde la recta $y = ux - v$.
» A una recta $y = mx + b$ le corresponde el punto $(m, -b)$.

Estas **transformaciones** se llaman **duales**. Las transformaciones duales son simétricas: el dual del dual de un punto es el punto de partida.

Estas transformaciones mantienen las relaciones de incidencia de forma que:

» Si un punto p está en una recta l, entonces la recta dual p^* contiene al punto dual l^* (figura 12.6).

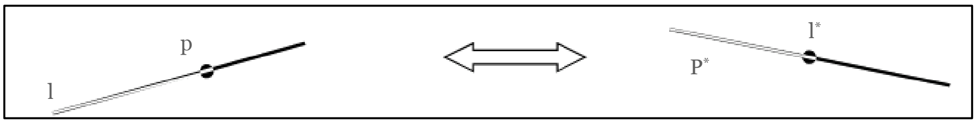


Figura 12.6. Transformación dual de un punto contenido en una recta
Fuente: http://slidegur.com/

» Si un punto p está sobre una recta l, entonces la recta dual p^* está debajo del punto dual l^* (figura 12.7).

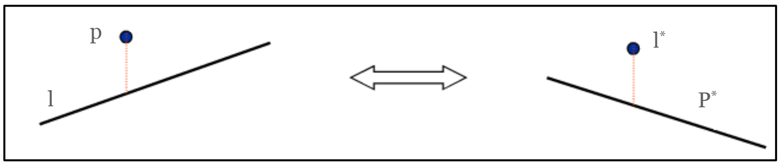


Figura 12.7. Transformación dual de un punto sobre una recta
Fuente: http://slidegur.com/

» Si una línea l pasa por los punto p y q, entonces las rectas duales p^* y q^* contienen al punto dual l^* (figura 12.8)

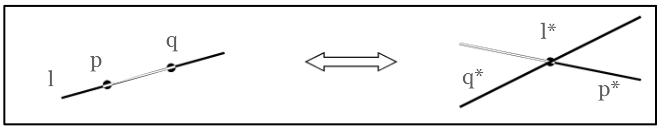


Figura 12.8. Transformación dual de dos puntos sobre la recta que los contiene
Fuente: http://slidegur.com/

» Si tres puntos p, q y r están alineados, entonces las rectas duales p^*, q^* y r^* son coincidentes (figura 12.9).

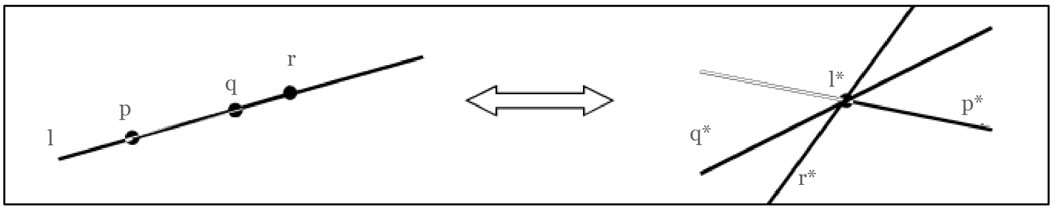


Figura 12.9. Transformación dual de tres puntos alineados
Fuente: http://slidegur.com/

El espacio dual puede ser una herramienta muy útil para resolver problemas geométricos, ya que permite tener una perspectiva diferente del problema. Además, una vez resuelto cualquier problema en el espacio dual, luego no hay más que pasar la solución al espacio primal.

En este caso tenemos que calcular la medida discreta de cada semiplano limitado por al menos dos puntos de S (figura 12.10)

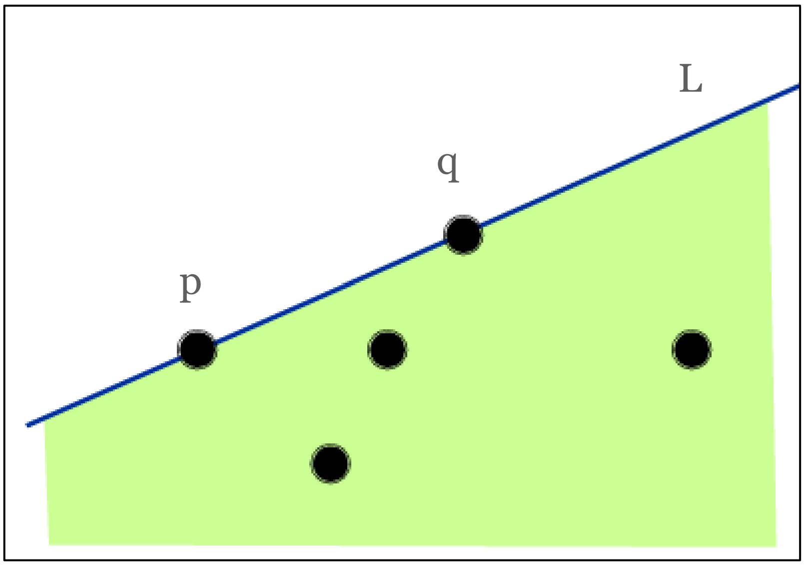


Figura 12.10. Representación geométrica del problema
Fuente: http://slidegur.com/

Para calcular la medida discreta del semiplano hay que contar cuántos puntos están por debajo de L. La dualización del problema se muestra en la figura 12.11.

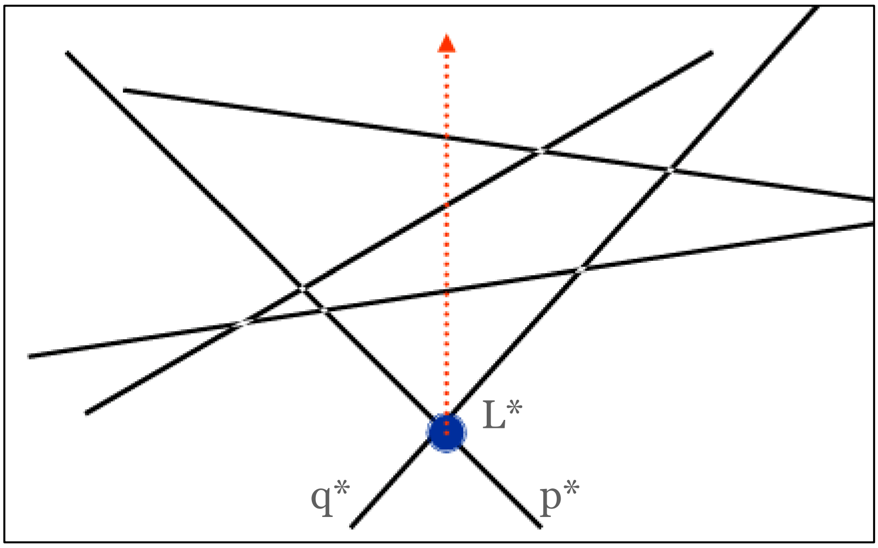


Figura 12.11. Representación geométrica del dual del problema
Fuente: http://slidegur.com/

Por tanto, en este caso habría que calcular cuántas rectas están por encima del punto L^*, que es la intersección de las rectas p^* y q^*.

12.5. Solución del problema

En primer lugar, debemos saber cómo es la disposición de rectas en el píxel: determinación de lados y vértices resultantes. Esto puede hacerse mediante un algoritmo DCEL (*Doubly Connected Edge List*).

Este algoritmo proporciona una doble lista de lados en la que a cada elemento se le asigna un registro que contiene información como los vértices inicial y final, las caras adyacentes a cada lado, un puntero hacia el lado siguiente y otro hacia el anterior.

A continuación debe determinarse para cada recta del plano dual cuántas rectas están encima del vértice, cuántas por debajo y cuántas pasan por él.

El número de rectas por un vértice dado viene dado por el algoritmo DCEL, por tanto, basta con calcular o el número de rectas que están por encima o por debajo ya que la suma de estas tres cantidades es n, el tamaño muestral.

Se define el **nivel de un punto** como el número de rectas que están estrictamente sobre él (figura 12.12).

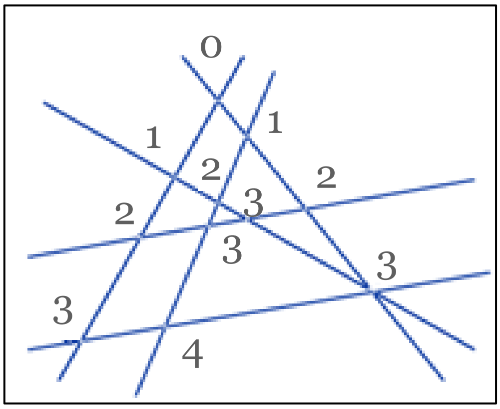


Figura 12.12**.** Niveles en los puntos de una disposición de rectas
Fuente: http://slidegur.com/

Para calcular los niveles de los vértices de una disposición de rectas dada, en primer lugar se calcula el nivel del vértice situado más a la izquierda. Esto puede hacerse en un tiempo $O(n)$. A continuación se avanza hasta el siguiente vértice utilizando la doble lista proporcionada por el algoritmo DCEL.

De esta forma resulta sencillo calcular el nivel del resto de puntos: para calcular el nivel del siguiente vértice simplemente hay que inspeccionar los lados correspondientes al vértice que se está estudiando. La figura 12.13 indica cómo. Como hay que hacerlo para todas las rectas, esta inspección puede hacerse en un tiempo $O(n^2)$.

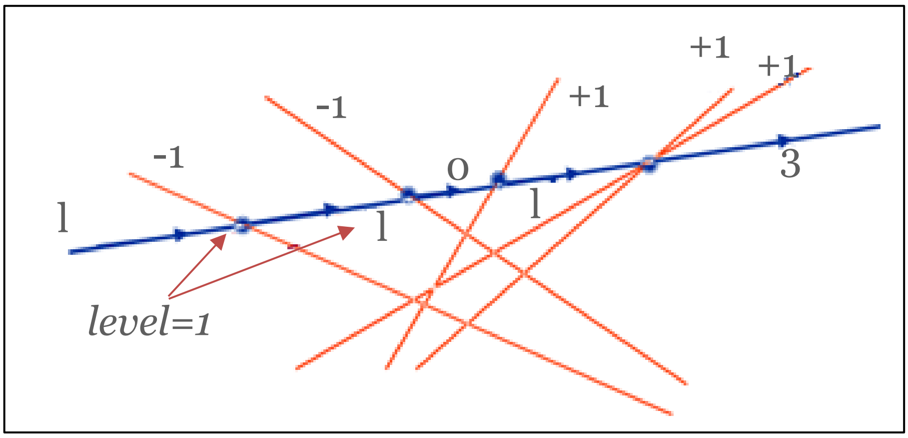


Figura 12.13. Cálculo de niveles de los vértices a lo largo de una recta

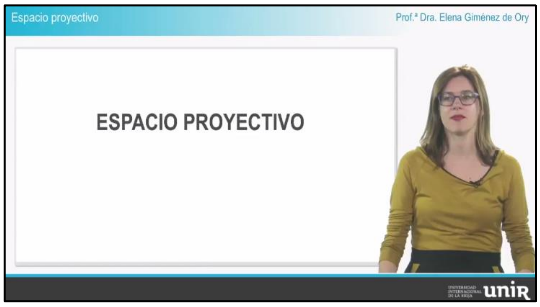
Fuente: http://slidegur.com/

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

Espacio proyectivo

En esta clase magistral vamos a explicar un poco más en profundidad algunas características y la construcción del espacio proyectivo.



La lección magistral está disponible en el aula virtual

No dejes de leer…

Algoritmo DCEL

En este enlace se explica en detalle el algoritmo DCEL.

Plane Graphs and the DCEL

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://www.ti.inf.ethz.ch/ew/lehre/CG12/lecture/Chapter%205.pdf

Ray tracing

En este enlace se explican los fundamentos del *ray tracing*.

Ray Tracing: Graphics for the Masses

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://www.cs.unc.edu/~rademach/xroads-RT/RTarticle.html

Iluminación en *ray tracing*

En este enlace se habla de los aspectos esenciales del *ray tracing*.

Ray Tracing

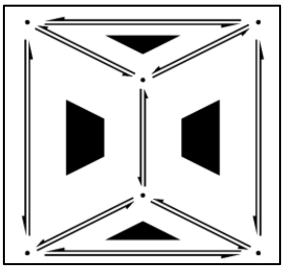
Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
https://www.siggraph.org/education/materials/HyperGraph/raytrace/rtrace0.htm

+ Información

A fondo

DCEL en gráficos

En este enlace se explican la utilidad de DCEL en la representación de objetos 2D y 3D.



Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://www.holmes3d.net/graphics/dcel/

Dualidad

En este enlace puede verse el principio de dualidad definido de forma más general.

Accede al artículo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:
http://forum.lawebdefisica.com/entries/542-El-Principio-de-Dualidad

Test

1. Para representar un objeto de forma realista es necesario tener en cuenta:

A. La iluminación.

B. La visibilidad.

C. A y B son correctas.

2. Las imágenes aparecen dentadas como consecuencia de:

A. Píxeles que no están cubiertos totalmente.

B. El uso del *ray tracing*.

C. A y B son correctas.

3. En el *ray tracing* se toma una muestra de aspecto aleatorio porque:

A. Se quieren evitar patrones que reconozca el ojo humano.

B. Es más sencillo calcular las discrepancias.

C. Es más sencillo computacionalmente.

4. El cálculo de las discrepancias:

A. Hay que realizarlo para cada muestra y una ocupación del píxel en concreto.

B. Hay que hacerlo para cada muestra y cada píxel de la imagen.

C. Hay que hacerlo para cada muestra en el peor de los escenarios posibles.

5. Para calcular la discrepancia:

A. Hay que estimarla porque no es posible hacer el cálculo con un número infinito de ocupaciones.

B. Puede reducirse a un cálculo finito.

C. A y B son falsas.

6. El orden del algoritmo que calcula la discrepancia máxima es:

A. $O(n)$.

B. $O(n^2)$.

C. $O(n^3)$.

7. El principio de dualidad:

A. Permite enfocar un problema geométrico de otra forma.

B. Disminuye el orden de complejidad del problema.

C. A y B son correctas.

8. La transformación dual de tres puntos alineados es:

A. Un triángulo.

B. Otros tres puntos alineados.

C. Tres rectas coincidentes.

9. El nivel de un punto es:

A. El número de rectas que están sobre él.

B. El número de rectas que pasan por él.

C. A y B son falsas.

10. La transformación dual de un triángulo es:

A. Un triángulo.

B. Tres rectas coincidentes.

C. Tres puntos alineados.