Tema 5. La convolución

Procesamiento de Señales, Sonido e Imágenes Digitales

Carlos Quemada Mayoral

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

09/12/2020

Índice

5.1. La respuesta al impulso

- Se llama respuesta al impulso h(t) a la respuesta de un sistema cuando la entrada es una delta.

$$h(t) = \mathbf{T}\{\delta(t)\}$$

- Como se verá más adelante, la respuesta al impulso permite caracterizar un sistema lineal e invariante temporal (LTI) ante cualquier entrada x(t).

- Para obtener h(t) simplemente tenemos que aplicar un impulso en la entrada del sistema x(t)=δ(t) y registrar la salida y(t)=h(t).

5.2. La suma de convolución

- Conociendo las propiedades de la función impulso, se puede escribir la entrada x[n] de un sistema como:

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m]$$

$$\Downarrow$$

$$x[n] = \cdots + x[-1]\cdot\delta[n+1] + x[0]\cdot\delta[n] + x[1]\cdot\delta[n-1] + \cdots$$

LTI $\Downarrow$ LTI $\Downarrow$ LTI $\Downarrow$

$$\boxed{x[-1]\cdot h[n+1]} \quad \boxed{x[0]\cdot h[n]} \quad \boxed{x[1]\cdot h[n-1]}$$

- Si h[n] es la respuesta al impulso δ[n], si el sistema es **LTI** x[m]·h[n-m] será la respuesta al impulso escalado y desplazado x[m]·δ[n-m].

- Usando la propiedad de superposición de los sistemas lineales:

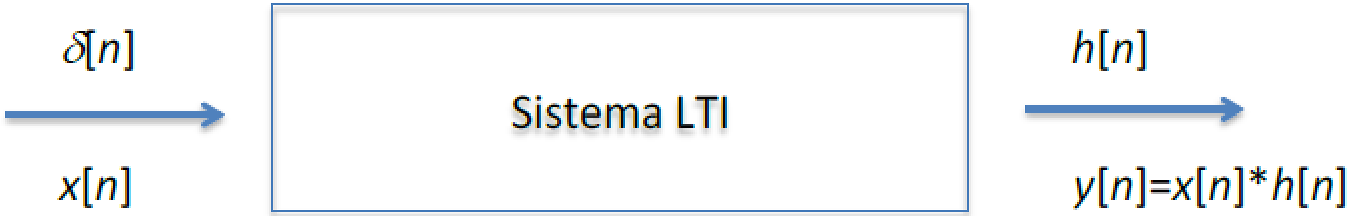
$$y[n] = \cdots + x[-1]\cdot h[n+1] + x[0]\cdot h[n] + x[1]\cdot h[n-1] + \cdots = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

- Se define la suma de convolución de dos señales x[n] y h[n]:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\cdot h[n-m]$$

5.2. La suma de convolución

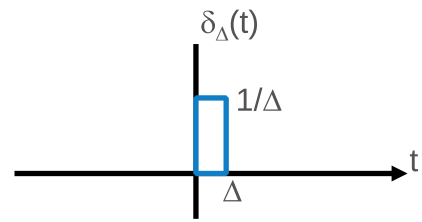
- La suma de convolución permite caracterizar un sistema LTI conociendo solamente su respuesta al impulso h[n].



5.3. La integral de convolución

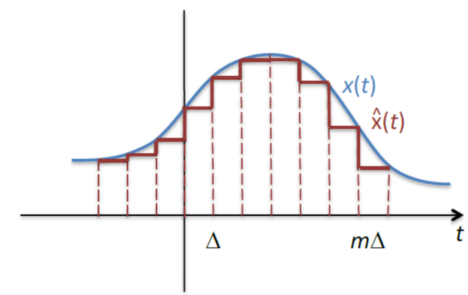
- La delta en tiempo continuo se define como $\Rightarrow \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$

- Se define la siguiente delta finita: $\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}, & 0 < t < \Delta \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$



- Usando $\delta_\Delta(t)$ se puede aproximar x(t) por $\hat{x}(t)$ como:

$$\hat{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\Delta) \cdot \delta_\Delta(t - m\Delta)\Delta \qquad \Delta \to 0 : \begin{cases} \Delta \to d\tau, \\ k\Delta \to \tau, \\ \sum \to \int, \\ \delta_\Delta(t) \to \delta(t) \end{cases}$$



- Cuando $\Delta \to 0$, $\delta_\Delta(t) \to \delta(t)$ y el sumatorio se convierte: $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau$

- Suponiendo el sistema LTI, asumiendo que $h_\Delta(t)$ es la respuesta a $\delta_\Delta(t)$ y aplicando la propiedad de superposición, la salida a $\hat{x}(t)$ es:

$$\hat{y}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\Delta) \cdot h_\Delta(t - m\Delta)\,\Delta \quad \Longrightarrow \quad y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\, d\tau$$

Cuando $\Delta \to 0$, el sumatorio se convierte en la **integral de convolución**

5.4. Técnicas de cálculo

- La suma/integral de convolución puede obtenerse por medio de tres técnicas:
  - Analíticamente
  - Gráficamente
  - Numéricamente

5.4. Técnicas de cálculo

- **Técnicas analíticas**. Ejemplo: calcular la convolución de $\begin{cases} x[n] = (0.7)^n u[u] \\ h[n] = (0.2)^n u[n] \end{cases}$

- Se aplica la definición de convolución:

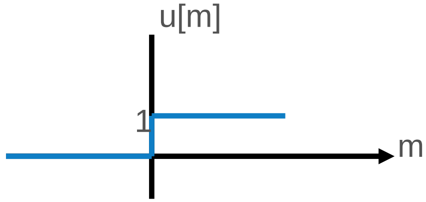
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot h[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (0.7)^m (0.2)^{n-m} u[m] u[n-m]$$

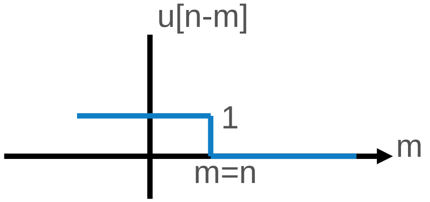
- Como u[m]·u[n-m] $\neq$ 0 solo para 0 $\leq$ m $\leq$ n $\Rightarrow$

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n} (0.7)^m (0.2)^{n-m} = (0.2)^n \sum_{m=0}^{n} \frac{(0.7)^m}{(0.2)^m} = (0.2)^n \sum_{m=0}^{n} 3.5^m$$

- Aplicando la fórmula $\sum_{m=0}^{n} (a)^m = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \Rightarrow y[n] = (0.2)^n \frac{(3.5)^{n+1}-1}{2.5} u[n]$

- Se ha incluido la función u[n] teniendo en cuenta que n ≥ 0. Si n es negativo el producto u[m]·u[n-m] sería siempre cero.



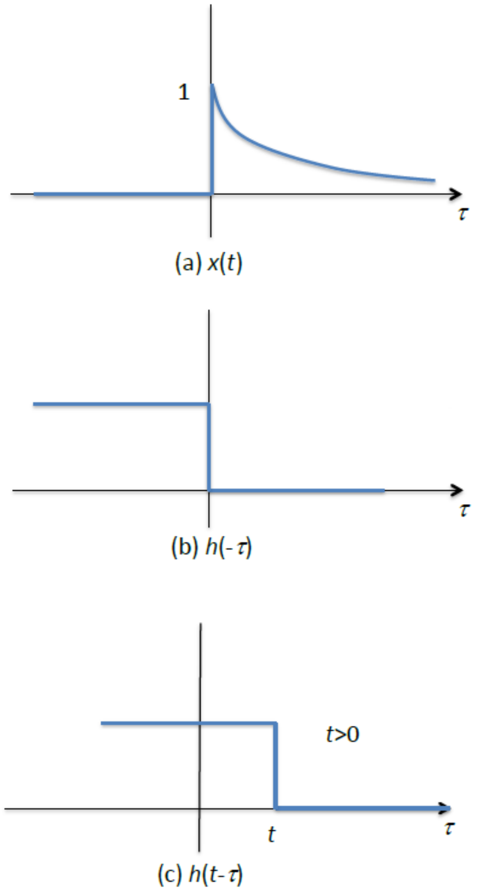


5.4. Técnicas de cálculo

- **Técnicas gráficas**. Pasos:
  - **Reflejar $h(\tau)$**: $h(\tau) \Rightarrow h(-\tau)$
  - **Desplazar $h(-\tau)$**: $h(-\tau) \Rightarrow h(t - \tau)$
  - **Multiplicar** $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$
  - **Integrar** el producto $x(\tau) \cdot h(t - \tau)$

5.4. Técnicas de cálculo

- **Técnicas gráficas**. Ejemplo: $\begin{cases} x(t) = e^{\frac{-t}{2}} u(t) \\ h(t) = u(t) \end{cases}$
- **Reflejar h(τ)**: h(τ) ⇒ h(-τ)
- **Desplazar h(-τ)**: h(-τ) ⇒ h(t - τ) = h(-(τ - t))
- **Multiplicar** x(τ) y h(t - τ)
  - Si t < 0 ⇒ No solapamiento y producto cero
  - Si t ≥ 0 ⇒ x(τ)·h(t - τ) = $\begin{cases} e^{\frac{-t}{2}}, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$
- **Integrar** el producto x(τ)·h(t - τ)

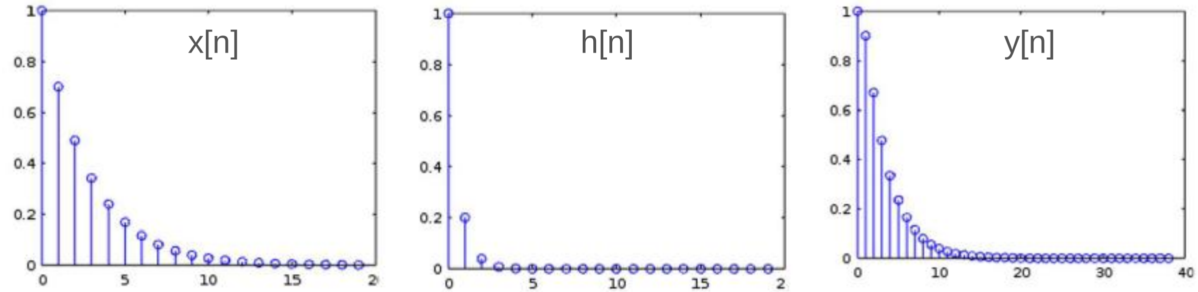


$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t e^{\frac{-\tau}{2}}\,d\tau = -2e^{\frac{-\tau}{2}}\Big|_0^t = 2\left(1 - e^{\frac{-t}{2}}\right) = 2\left(1 - e^{\frac{-t}{2}}\right)u(t)$$

t < 0 ⇒ No solapamiento y producto cero

5.4. Técnicas de cálculo

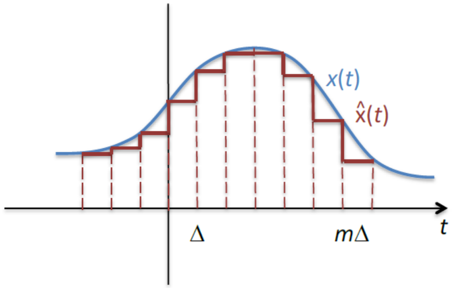
- **Técnicas numéricas**. Octave y Matlab disponen de conv(x,h) que permite calcular la convolución de dos vectores x y h. La longitud del vector resultante es length(x) + length(h) - 1. Puede usarse en tiempo continuo o discreto.
- **Tiempo discreto**.
  - Se define n = [0:19];
  - Se calculan las señales x = 0.7.^n; y h = 0.2.^n;
  - Se calcula la convolución ⇒ y = conv(x,h);
  - Se pinta x ⇒ subplot(1,3,1), stem(n,x)
  - Se pinta h ⇒ subplot(1,3,2), stem(n,h)
  - Se define la longitud del vestor de salida ⇒ ny = [0:length(y)-1];
  - Se pinta y ⇒ subplot(1,3,3), stem(ny,y)
  - subplot(m,n,i): divide la gráfica en m filas y n columnas y escoge la i-ésima para pintar en ella.
  - stem(n,x) pinta el vector x en forma discreta (con puntos discontinuos)



5.4. Técnicas de cálculo

- **Tiempo continuo**. Puesto que en Octave y Matlab se trabaja con vectores y en definitiva es tiempo discreto, se debe muestrear la integral de convolución.
- Partimos de la ecuación previa a la obtención de la integral de convolución:

$$\hat{y}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\Delta) \cdot h_{\Delta}(t - m\Delta)\, \Delta$$



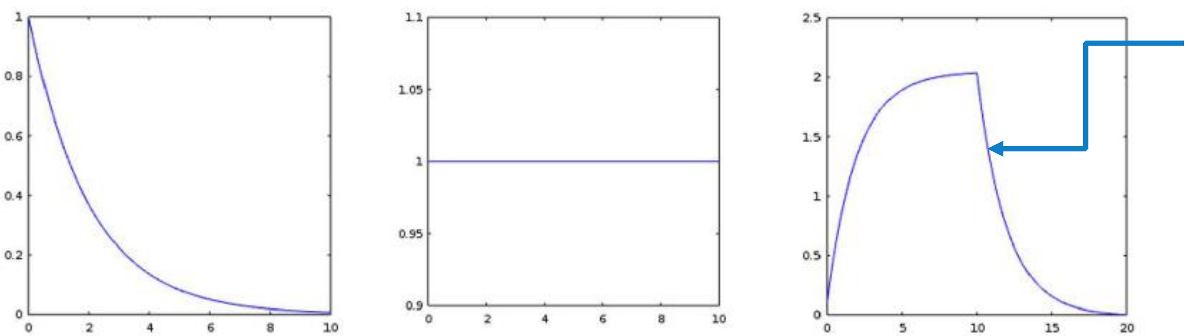
- Se coge un periodo de muestreo t_s y se sustituye t = nts, Δ = ts y h_{Δ}= h

$$y(nT_s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mt_s) \cdot h((n-m)t_s)t_s = t_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mt_s) \cdot h((n-m)t_s)$$

- Es como la convolución discreta pero multiplicada por t_s

5.4. Técnicas de cálculo

- **Tiempo continuo**. Pasos:
  - Se define $t_s \Rightarrow$ inct=0.1
  - Se define t $\Rightarrow$ t=0:inct:10; t = (0, 0.1, 0.2,…,9.9, 10)
  - Se calcula x(t) y h(t) $\Rightarrow$ x = e.^(-t/2); h = ones(size(t));
  - Se calcula la convolución y = **inct***conv(x,h); %multiplicar por t_s
  - Longitud(y) = longitud(x) + longitud(h) – 1 % 101 + 101 – 1 = 201
  - subplot(1,3,1), plot(t,x)
  - subplot(1,3,2), plot(t,h)
  - Eje de tiempos de y $\Rightarrow$ ty = (0:1:length(y)-1)*inct; (0, 0.1, 0.2,…,19.9, 20)
  - subplot(1,3,3), plot(ty,y)
  - **Nota**: en Matlab el número e $\Rightarrow$ exp(1)



(a) $x(t)$ (b) $h(t)$ (c) $y(t)$

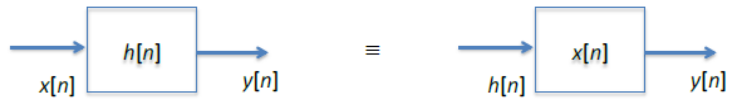
Cae abruptamente porque x y h están definidas solo hasta t = 10. Para t<0 y t>10 valen cero

5.5. Propiedades de la convolución

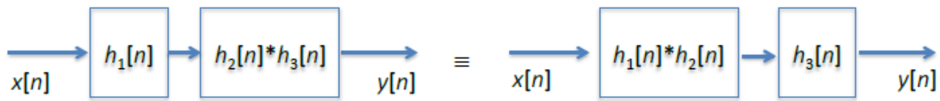
Propiedad	Tiempo continuo	Tiempo discreto
Conmutativa	$x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$	$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$
Asociativa	$[h_1(t)*h_2(t)]*h_3(t)=$ $h_1(t)*[h_2(t)*h_3(t)]$	$(h_1[n]*h_2[n])*h_3[n]=$ $h_1[n]*(h_2[n]*h_3[n])$
Distributiva	$x_1(t)*[h_1(t)+h_2(t)]= x_1(t)*h_1(t)+$ $x_1(t)*h_2(t)$	$x_1[n]*(h_1[n]+h_2[n])= x_1[n]*h_1[n]+$ $x_1[n]*h_2[n]$
Duración	Si length$(x(t))=T_1$ y length$(h(t))=T_2$ entonces length$(y(t))=T_1+T_2$	Si length$(x[n])=N_1$ y length$(h[\mathrm{n}])=N_2$ entonces length$(y[n])=N_1+N_2$-1
Identidad	$x(t)*\delta(t) = x(t)$	$x[n]*\delta[n] = x[n]$
Invertibilidad	$h(t)*h^{-1}(t) = \delta(t)$	$h[n]*h^{-1}[n] = \delta[n]$
Acumulación	$h(t)=u(t)$	$h[n]=u[u]$
Diferenciación	$h(t)=\delta'(t)$	$h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$
Causalidad	$h(t)=0$ para $t<0$	$h[n]=0$ para $n<0$
Reposo inicial	$x(t)=0$ para $t<t_0$	$x[n]=0$ para $n<n_0$

5.5. Propiedades de la convolución

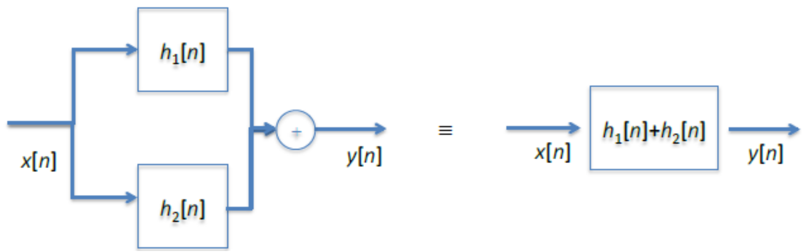
- **Conmutativa** $\Rightarrow$



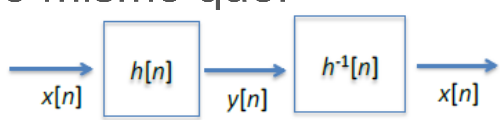
- **Asociativa** $\Rightarrow$



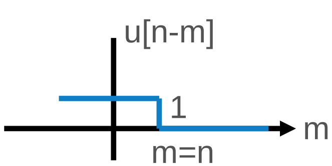
- **Distributiva** $\Rightarrow$



- **Invertibilidad** $\Rightarrow$ Dada la respuesta al impulso de un sistema h(t), se dice que dicho sistema es invertible si existe la respuesta al impulso inversa $h^{-1}(t)$ tal que $h(t)*h^{-1}(t) = \delta(t)$. Es lo mismo que:



- **Acumulación** $\Rightarrow$ Cuando h(t) = u(t) o h[n] = u[n], el sistema es un acumulador.



Aplicando la definición de convolución en t discreto $\Rightarrow y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] * u[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \Leftrightarrow$ **Operación de acumulación**

u[n-m] es cero pana m > n

5.5. Propiedades de la convolución

- **Diferenciación** $\Rightarrow$ Cuando h(t) = δ'(t) o h[n] = δ[n] - δ[n-1], el sistema es un derivador.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot h[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m](\delta[n-m] - \delta[n-m-1]) = x[n] - x[n-1]$$

Σ Solo es distinto de cero cuando m = n y m = n - 1

- **Causalidad**. Un sistema es causal si su salida solo depende de valores de entrada del presente o pasado $\Leftrightarrow$ y[n] solo depende de x[n], x[n-1], x[n-2],… $\Rightarrow$ h[n-m] = 0 para m > n $\Leftrightarrow$ h[n] = 0 para n < 0 (tabla slide nº14).

Reescribiendo la suma de convolución $\Rightarrow y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \cdot h[n-m]$

- **Reposo inicial**. Un sistema está en reposo inicial cuando x[m] = 0 para $m < m_0$. Habitualmente se elige $m_0 = 0$.

Asumiendo reposo inicial con $m_0 = 0$ y sistema causal $\Rightarrow y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=0}^{n} x[m] \cdot h[n-m]$

5.5. Propiedades de la convolución

- **Deconvolución**. Operación matemática que permite obtener cualquiera de las señales x(t) o h(t), siendo conocida la salida y una de las anteriores.

- En octave y Matlab $\Rightarrow$ z=deconv(y,h) permite calcular x(t)

- En octave y Matlab $\Rightarrow$ z=deconv(y,x) permite calcular h(t)

- En señales continuas hay que dividir la deconvolución entre ts para obtener el valor real de x(t) o h(t).

5.6. Modelización de sistemas con retroalimentación

- **Modelización de sistemas de tiempo discreto**. Un sistema **LTI** discreto con retroalimentación puede modelarse mediante una **ecuación en diferencias lineales con coeficientes contantes**. Ecuación en diferencias general:

$$\sum_{m=0}^{N} a_m y[n-m] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] \quad \Leftrightarrow \quad y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] - \sum_{m=1}^{N} a_m y[n-m]\right\}$$

- a_m y b_m son constantes

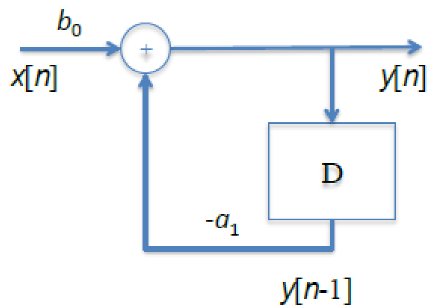
- y[n] depende solo de las **N** salidas anteriores y[n-1],...y[n-N], de la entrada actual x[n] y de las **M** entradas anteriores x[n-1],...x[n-M]

- La ecuación de la derecha se llama ecuación recursiva discreta

- El orden de la ecuación corresponde a la derivada de mayor orden de la salida

5.6. Modelización de sistemas con retroalimentación

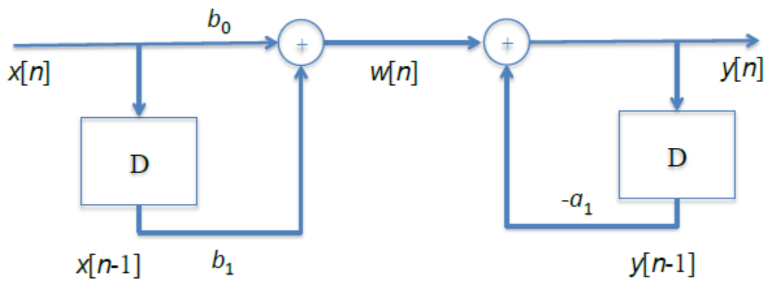
- **Modelización de sistemas de tiempo discreto**. Ejemplos:



a_0 = 1

Retroalimentación en tiempo discreto de primer orden

$$y[n] = b_0 x[n] - a_1 y[n-1] \iff y[n] + a_1 y[n-1] = b_0 x[n]$$



a_0 = 1

Sistema con retroalimentación compuesto por dos sistemas en cascada

$$w[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] \Rightarrow y[n] = -a_1 y[n-1] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$$

$$y[n] = -a_1 y[n-1] + w[n]$$

También es de primer orden

5.6. Modelización de sistemas con retroalimentación

- **Sistemas con respuesta al impulso finita e infinita**.

- Sistema con respuesta al impulso finita (**RIF**): un sistema en el que la respuesta al impulso h[n] se vuelve cero transcurrido un cierto tiempo. Son sistemas sin realimentación de la salida. La salida se calcula en función de las entradas actual y pasadas.

Haciendo N = 0 en la ecuación en diferencias $\Rightarrow y[n] = \sum_{m=0}^{M} \frac{b_m}{a_0} x[n-m]$

- Sistema con respuesta al impulso infinita (**RII**): sistema en el que la respuesta al impulso h[n] no se vuelve cero transcurrido un tiempo, sino que continúa infinitamente. Son sistemas con retroalimentación de la salida, la cual depende de las entradas actual y pasadas, y además de las salidas anteriores.

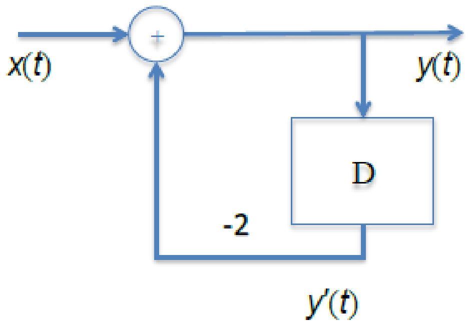
$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] - \sum_{m=1}^{N} a_m y[n-m]\right\}$$

5.6. Modelización de sistemas con retroalimentación

- **Modelización de sistemas LTI de tiempo continuo**. Siguiendo el mismo análisis realizado para tiempo discreto, se obtiene la ecuación diferencial general:

$$y(t) = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} - \sum_{m=1}^{N} a_m y \frac{d^m y(t)}{dt^m}\right\}$$

- Ejemplo:



Retroalimentación en tiempo continuo de primer orden

$$y(t) = x(t) - 2\frac{dy(t)}{dt}$$

- El orden de la ecuación corresponde a la derivada de mayor orden de la salida

Ejercicio 1 (Parte I)

- Encontrar la respuesta al impulso h[n] de un sistema causal dado por la siguiente ecuación en diferencias $\Rightarrow$ 8y[n] + 6y[n-1] = x[n].

- Cuando x[n] = δ[n] $\Rightarrow$ y[n] = h[n] (respuesta al impulso)

- Por tanto $\Rightarrow$ 8h[n] + 6h[n-1] = δ[n] $\Rightarrow$ h[n] = δ[n]/8 - 6h[n-1]/8

- Dando valores a n obtenemos la siguiente tabla.

n	**δ[n]**	**h[n-1]**	**h[n]**
0	1	0	1/8
1	0	1/8	-3/32
2	0	-3/32	9/128
3	0	9/128	-27/512
:	:	:	:

- Como el sistema es causal $\Rightarrow$ h[n] = 0 para n < 0

- Buscando una expresión que cumpla la tabla $\Rightarrow$ $h[n] = \frac{1}{8}\left(\frac{-3}{4}\right)^n u[n]$

Ejercicio 2 (Parte I)

- Encontrar la respuesta al impulso h[n] de los sistemas definidos por las siguientes ecuaciones:

Filtro de media móvil previa

1) $$y[n] = \frac{1}{M}(x[n] + x[n-1] + \cdots + x[n-M+1]) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} x[n-m]$$

Filtro de media móvil media

2) $$y[n] = \frac{1}{M}(x[n+(M-1)/2] + \cdots + x[n] + \cdots + x[n-(M-1)/2]) = \frac{1}{M}\sum_{m=-(M-1)/2}^{(M-1)/2} x[n-m]$$

Ejercicio 2 (Parte I)

- Encontrar la respuesta al impulso h[n] de los sistemas definidos por las siguientes ecuaciones:

Filtro de media móvil previa

1) $$y[n] = \frac{1}{M}(x[n] + x[n-1] + \cdots + x[n-M+1]) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} x[n-m]$$

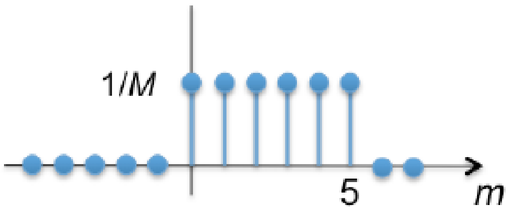
- Para sistemas LTI es posible expresar la salida en función de la entrada mediante la suma de convolución

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot h[n-m] = h[n] * x[n]$$

- Comparando ambas expresiones es fácil identificar que h[n] = 1/M para $0 \leq n \leq M-1$ y cero para el resto de valores de n.

$$h[m] = \begin{cases} \frac{1}{M}, & 0 \leq m \leq M-1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

h[*m*] para *M*=6



Ejercicio 2 (Parte I)

- Encontrar la respuesta al impulso h[n] de los sistemas definidos por las siguientes ecuaciones:

Filtro de media móvil media

2) $$y[n] = \frac{1}{M}(x[n + (M-1)/2] + \cdots + x[n] + \cdots + x[n-(M-1)/2]) = \frac{1}{M}\sum_{m=-(M-1)/2}^{(M-1)/2} x[n-m]$$

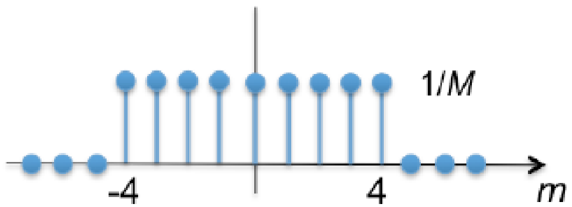
- Para sistemas LTI es posible expresar la salida en función de la entrada mediante la suma de convolución

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot h[n-m]$$

- Comparando ambas expresiones es fácil identificar que h[n] = 1/M para -(M - 1)/2 ≤ n ≤ (M - 1)/2 y cero para el resto de valores de n.

$$h[m] = \begin{cases} \frac{1}{M}, & \frac{-(M-1)}{2} \leq m \leq \frac{(M-1)}{2} \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

h[*m*] para *M*=9



Ejercicios adicionales (Parte I)

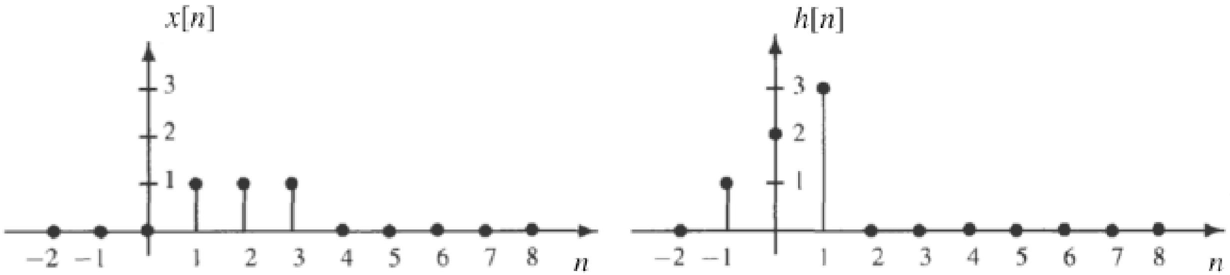
- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicios 2.14, 2.15, 2.18**

Ejercicios adicionales (Parte I)

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicio 2.18**. Considere el siguiente sistema LTI causal: $y[n] = y[n-1]/4 + x[n]$
- Determinar $y[n]$ si $x[n] = \delta[n-1] \Rightarrow y[n] = y[n-1]/4 + \delta[n-1]$
- Como el sistema es causal $y[n] = 0$ para $n<0$ (puesto que $h[n] = 0$, $n<0$)
- Damos valores a n:
- $n = 0 \Rightarrow y[0] = y[-1]/4 + \delta[-1] = 0 + 0 = 0$
- $n = 1 \Rightarrow y[1] = y[0]/4 + \delta[0] = 0 + 1 = 1$
- $n = 2 \Rightarrow y[2] = y[1]/4 + \delta[1] = 1/4 + 0 = 1/4$
- $n = 3 \Rightarrow y[3] = y[2]/4 + \delta[2] = 1/4^2 + 0 = 1/4^2$
- $n = 4 \Rightarrow y[4] = y[3]/4 + \delta[3] = 1/4^3 + 0 = 1/4^3$
- Por tanto $y[n] =(1/4)^{n-1}u[n-1]$

Ejercicio 1 (Parte II)

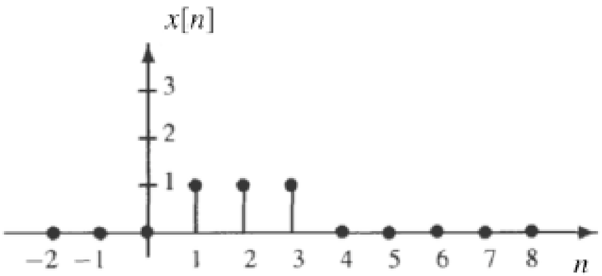
- Calcular la convolución gráfica de las siguientes señales:

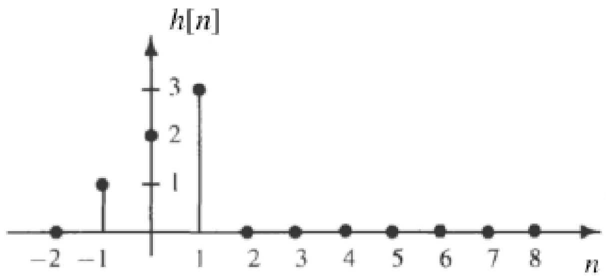


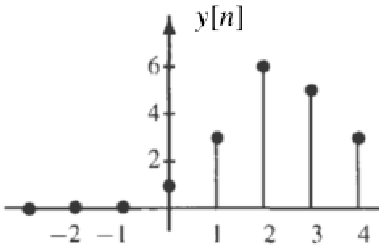
- Suma de convolución de dos señales: $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot h[n-m]$
- Primero hay que hacer el espejo de h[m] $\Rightarrow$ h1[m] = h[-m]
- Luego hay que desplazar h1 **n** unidades $\Rightarrow$ h2[m] = h1[m-n] = h[n-m]
- Si n es positivo, h1 se desplaza a la derecha y si es negativo a la izquierda.

Ejercicio 1 (Parte II)

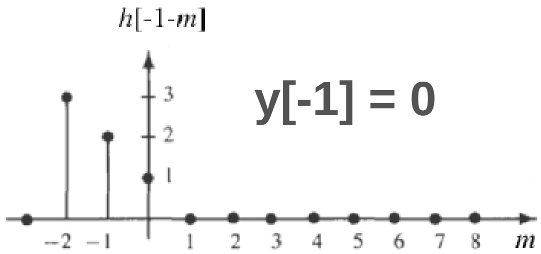
- Calcular la convolución gráfica de las siguientes señales:





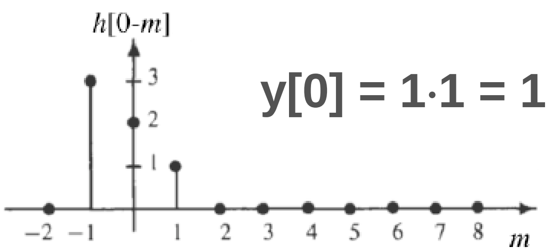


Solución



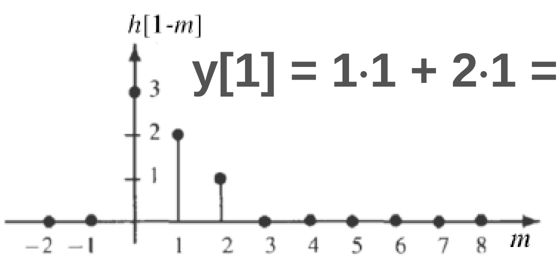
y[-1] = 0

n=-1 ⇒ no coincide ninguna muestra con x[m]



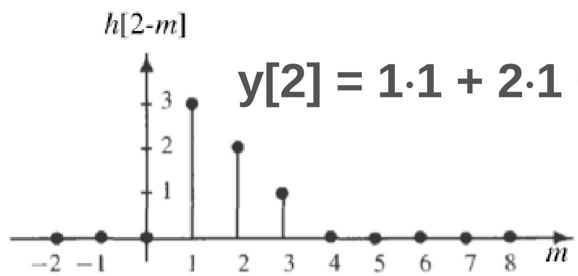
y[0] = 1·1 = 1

n=0 ⇒ coincide la muestra m=1



y[1] = 1·1 + 2·1 = 3

n=1 ⇒ coinciden las muestra m=1,2



y[2] = 1·1 + 2·1 + 3·1 = 6

n=2 ⇒ coinciden las muestra m=1,2,3

- Se repite el proceso para n = 3 (=5), 4 (=3), 5(=0)

Ejercicio 2 (Parte II)

- Demostrar que la respuesta al impulso de un sistema LTI es la derivada de la respuesta al escalón.

Ejercicio 2 (Parte II)

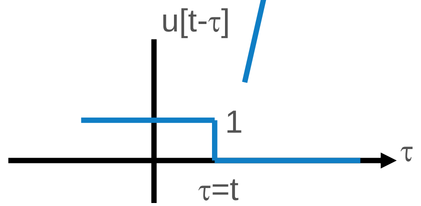
- Para sistemas LTI la salida puede escribirse como la convolución de la entrada y la respuesta al impulso.

- Aprovechando la propiedad conmutativa de la convolución, podemos escribir:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\; d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\; d\tau$$

- Si la entrada es la función escalón $\Rightarrow y_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau$

- Observando como es u(t-τ), la integral queda $\Rightarrow y_u(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$



- De la anterior expresión se deduce que $\Rightarrow h(t) = \dfrac{dy_u(t)}{dt}$

Ejercicio 3 (Parte II)

- Sea un sistema LTI cuya respuesta al escalón es: $y_u(t) = K(1-e^{-\frac{t}{T}})$
- Calcular la respuesta al impulso.

- Sabemos que $h(t) = \dfrac{dy_u(t)}{dt}$

- Por tanto, $h(t) = \dfrac{K}{T} e^{-t/T}$

Ejercicios adicionales (Parte II)

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicios 2.1, 2.8, 2.18**

Ejercicios adicionales (Parte I)

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicio 2.8**. Determine y bosqueje la convolución de las siguientes señales:

$$x(t) = \begin{cases} t+1, & 0 \le t \le 1 \\ 2-t, & 1 < t \le 2 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$$

$$h(t) = \delta(t+2) + 2\delta(t+1).$$

Ejercicios adicionales (Parte I)

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall

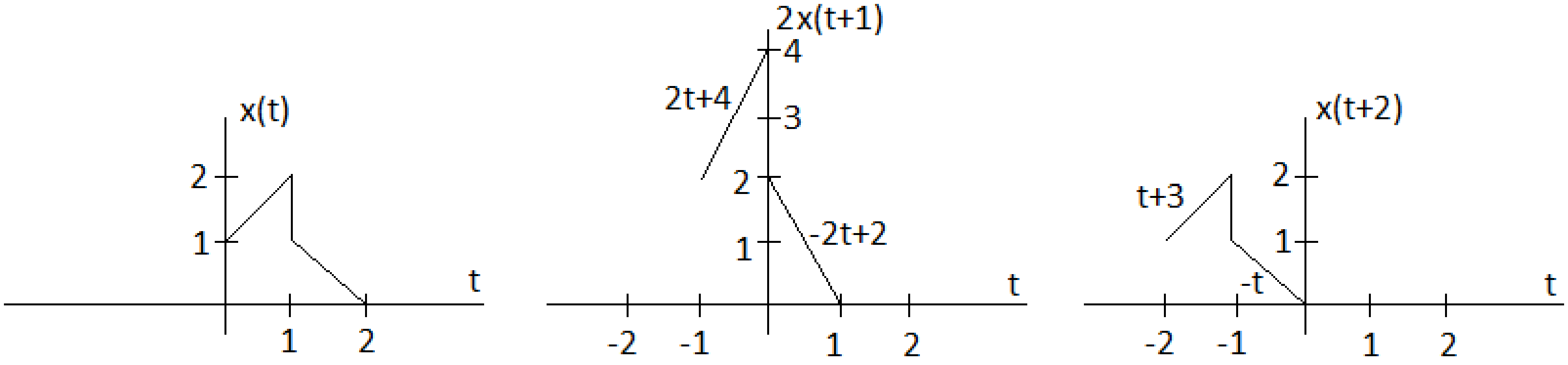
- **Ejercicio 2.8**. Solución.

- Convolucionar una señal x(t) con una delta, equivale a desplazar la señal a la posición de la delta multiplicando la señal por el área de la delta.

$$x(t) = \begin{cases} t+1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$$

$$h(t) = \delta(t+2) + 2\delta(t+1).$$

- Convolucionando ambas señales $\Rightarrow$ $x(t) * y(t) = x(t+2) + 2x(t+1)$



Ejercicios adicionales (Parte I)

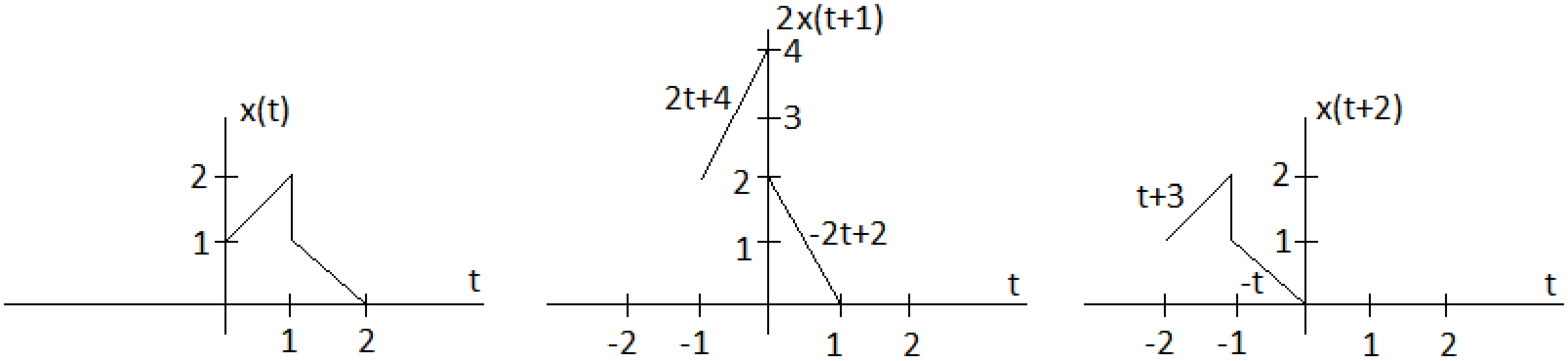
- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall

- **Ejercicio 2.8**. Solución.

$$x(t) * y(t) = x(t+2) + 2x(t+1)$$

- Sumando ambas señales x(t+2) y 2x(t+1), cuyos valores aparecen en la figura, se obtiene:

$$y(t) = \begin{cases} t+3, & -2 < t \leq -1 \\ t+4, & -1 < t \leq 0 \\ 2-2t, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

unir

www.unir.net