Tema 1
Introducción a los sistemas dinámicos
Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos

Dra. Neus Garrido Sàez

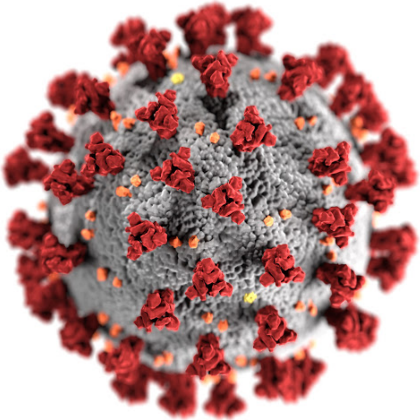
Máster en Ingeniería Matemática y Computación
Escuela Superior en Ingeniería y Tecnología

Contenido

1

Introducción

Ejemplo introductorio: Modelización epidemiológica del COVID-19



Ejemplo introductorio: Modelización epidemiológica del COVID-19

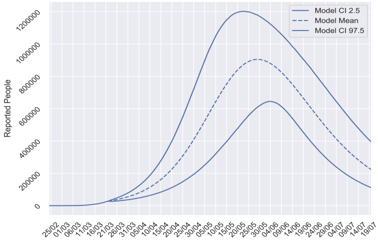
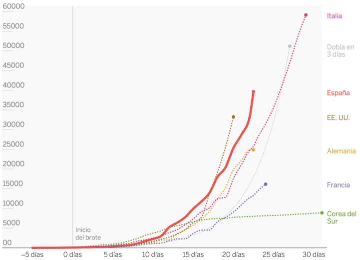
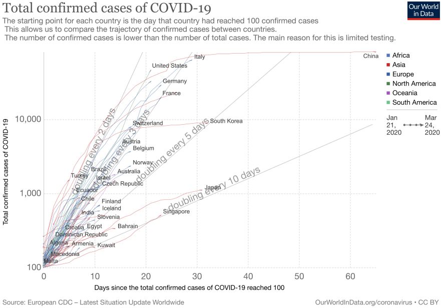


Figura 6: Predicción para conocer cuando aparecerá el pico de los casos reportados activos.





Ejemplo introductorio: Modelización epidemiológica del COVID-19

Modelo SIR

$$\left.\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= -\beta S(t)I(t)\\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)\\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t)\end{aligned}\right\}$$

$S(t)$ ➔ Población susceptible

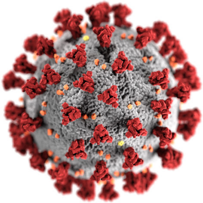
$I(t)$ ➔ Población infectada

$R(t)$ ➔ Población recuperada

N ➔ Población total, $N = S + R + T$

β ➔ Tasa de transmisión

γ ➔ Tasa de recuperación



Objetivos

- Definir cualitativamente los sistemas dinámicos
- Describir y clasificar los sistemas dinámicos
- Discreto vs. Continuo
- Autónomo vs. Forzado
- Comportamiento vs. Solución analítica

Introducción a los sistemas dinámicos

- ¿Qué son los sistemas dinámicos?

- ¿Cómo se describen matemáticamente?

- ¿Ejemplos?

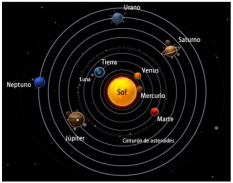
- ¿Qué son los sistemas dinámicos?
  - El tiempo juega un papel fundamental
  - Susceptibles de tener variaciones en el tiempo
- ¿Cómo se describen matemáticamente?
- ¿Ejemplos?

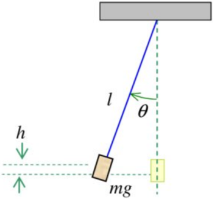
Introducción a los sistemas dinámicos

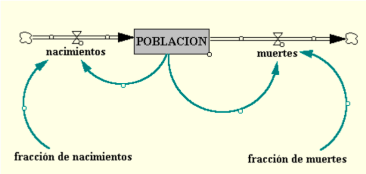
- ¿Qué son los sistemas dinámicos?
  - El tiempo juega un papel fundamental
  - Susceptibles de tener variaciones en el tiempo
- ¿Cómo se describen matemáticamente?
  - Variación temporal
  - Estudio del comportamiento que van a tener a largo plazo
- ¿Ejemplos?

Introducción a los sistemas dinámicos

- ¿Qué son los sistemas dinámicos?
  - El tiempo juega un papel fundamental
  - Susceptibles de tener variaciones en el tiempo
- ¿Cómo se describen matemáticamente?
  - Variación temporal
  - Estudio del comportamiento que van a tener a largo plazo
- ¿Ejemplos?
  - Trayectoria de una partícula
  - Procesos de nacimiento y muerte
  - Evolución de la población







- ¿Qué programas podemos utilizar?

Contenidos

Clasificación de los sistemas dinámicos

- En función del tiempo
- En función del estímulo externo

Clasificación de los sistemas dinámicos

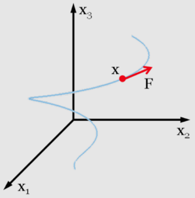
- En función del tiempo
- En función del estímulo externo

Clasificación de los SD en función del tiempo

- Continuos:

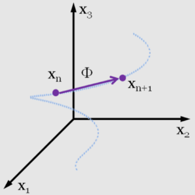
EDO: $\dot{x} = F(x)$

EDP: $\dfrac{\partial x}{\partial t} = F\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}, x\right)$



- Discretos:

ED: $x_{n+1} = \phi(x_n), \quad x_n = x(t_n)$



Clasificación de los sistemas dinámicos

- En función del tiempo
- En función del estímulo externo

Clasificación de los SD en función del estímulo externo

- Autónomos: no contienen estímulo externo

$$\dot{x} = F(x), \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = F\left(\frac{\partial x}{\partial y}, x\right), \qquad x_{n+1} = \phi(x_n)$$

- Forzados: la variable t aparece en la ecuación, indicando ese estímulo externo

$$\dot{x} = F(x, t), \qquad x_{n+1} = \phi(x_n, t_n)$$

2

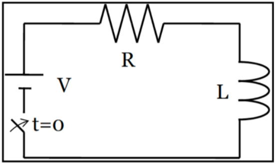
Sistemas dinámicos continuos (SDC)

Contenidos

El circuito RL

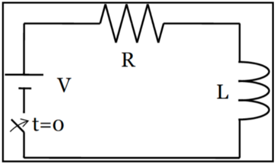
- Formado por un resistor y una bobina en serie

$i(t)$	➔	intensidad de la corriente
L	➔	autoinducción de la bobina
R	➔	resistencia del resistor
V	➔	potencial



El circuito RL

- Formado por un resistor y una bobina en serie



$i(t)$	➔	intensidad de la corriente
L	➔	autoinducción de la bobina
R	➔	resistencia del resistor
V	➔	potencial

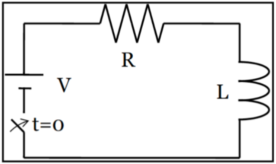
- Aplicando la segunda Ley de Kirchhoff:

$$V = Ri + L\frac{di}{dt} \quad \rightarrow \quad i' = -\frac{R}{L}i + \frac{V}{L}$$

El circuito RL

- Formado por un resistor y una bobina en serie

$i(t)$ ➔ intensidad de la corriente
L ➔ autoinducción de la bobina
R ➔ resistencia del resistor
V ➔ potencial

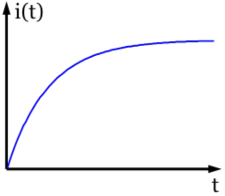


- Aplicando la segunda Ley de Kirchhoff:

$$V = Ri + L\frac{di}{dt} \quad \rightarrow \quad i' = -\frac{R}{L}i + \frac{V}{L}$$

- Solución:

$$\boxed{i(t) = V\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$

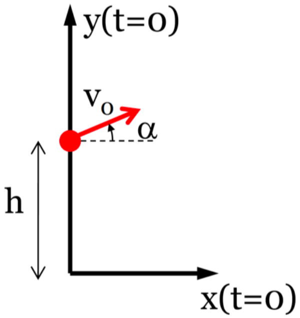


Contenidos

El tiro parabólico

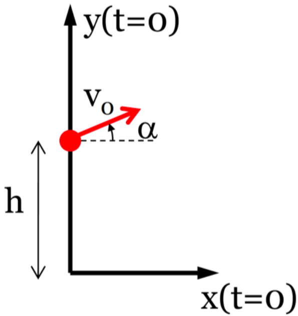
- Dos dimensiones: $x(t)$, $y(t)$

h	➔	altura del lanzamiento
v_0	➔	velocidad
α	➔	ángulo con la horizontal



- Dos dimensiones: $x(t)$, $y(t)$

$$\begin{array}{rcl} h & \rightarrow & \text{altura del lanzamiento} \\ v_0 & \rightarrow & \text{velocidad} \\ \alpha & \rightarrow & \text{ángulo con la horizontal} \end{array}$$



- A partir de la segunda Ley de Newton ($\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$) y que la única fuerza que actúa es la gravedad:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \ddot{x} & = & 0 \\ \ddot{y} & = & -g \end{array} \right. \qquad \text{s.a.} \left\{ \begin{array}{rcl} x(0) & = & 0 \\ y(0) & = & h \\ \dot{x}(0) & = & v_0 \cos(\alpha) \\ \dot{y}(0) & = & v_0 \sin(\alpha) \end{array} \right.$$

Contenidos

La ecuación de onda

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

- $u(x,t)$ ➔ expresión de la onda
- c ➔ velocidad de propagación
- $f(x) = u(x,0)$
- $g(x) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,0)$

La ecuación de onda

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

- $u(x,t)$ ➔ expresión de la onda
- c ➔ velocidad de propagación
- $f(x) = u(x,0)$
- $g(x) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,0)$

- Solución (desarrollo de d'Alembert):

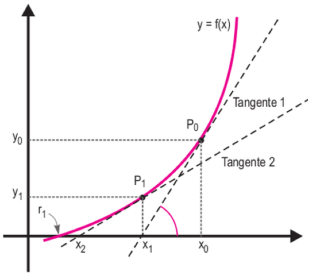
$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau}$$

3

Sistemas dinámicos discretos (SDD)

Contenidos

- Proceso iterativo
- Obtención de la solución de $f(x) = 0$
- Depende del valor inicial tomado



Método de Newton

$$x_{n+1} = \phi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Método de Newton para la obtención de raíces

Ejemplo 1. Utiliza el método de Newton para calcular una aproximación a la solución de la ecuación $\sin(x) = 1 - x^2$

Método de Newton para la obtención de raíces

Ejemplo 1. Utiliza el método de Newton para calcular una aproximación a la solución de la ecuación $\sin(x) = 1 - x^2$

- $f(x) = \sin(x) + x^2 - 1$
- $f'(x) = \cos(x) + 2x$
- Método de Newton: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

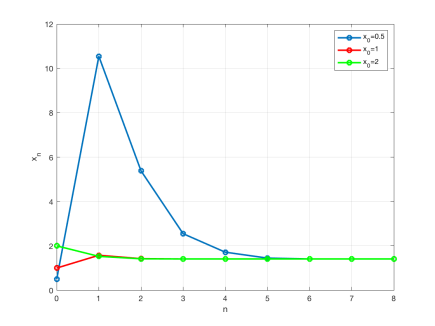
$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sin(x_n) + x_n^2 - 1}{\cos(x_n) + 2x_n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Tomamos $x_0 = \{0.5, 1, 2\}$ y $n = 0, 1, \ldots, 9$

Ejemplo 1. Utiliza el método de Newton para calcular una aproximación a la solución de la ecuación $\sin(x) = 1 - x^2$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sin(x_n) + x_n^2 - 1}{\cos(x_n) + 2x_n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

x_0	0.5	1	2
$n=1$	10.5429	1.0000	2.0000
$n=2$	5.3832	1.5765	1.5266
$n=3$	2.5480	1.4228	1.4164
$n=4$	1.7154	1.4097	1.4096
$n=5$	1.4488	1.4096	1.4096
$n=6$	1.4105	1.4096	1.4096
$n=7$	1.4096	1.4096	1.4096
$n=8$	1.4096	1.4096	1.4096



Contenidos

Procesos migratorios

- Elementos que migran de un lugar a otro

- l ➔ población en Logroño (miles)
- v ➔ población en Valencia (miles)

- Valencia → Logroño: $5\,\%$
- Logroño → Valencia: $10\,\%$

Procesos migratorios

- Elementos que migran de un lugar a otro

- l ➔ población en Logroño (miles)
- v ➔ población en Valencia (miles)

- Valencia → Logroño: $5\,\%$
- Logroño → Valencia: $10\,\%$

$$\left.\begin{array}{rcl} l_{n+1} & = & 0.9l_n + 0.05v_n \\ v_{n+1} & = & 0.1l_n + 0.95v_n \end{array}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} l_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_n \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \vec{p}_{n+1} = A\vec{p}_n$$

Procesos migratorios

$$\boxed{\begin{bmatrix} l_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_n \\ v_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{n+1} = A\vec{p}_n}$$

Procesos migratorios

$$\boxed{\begin{bmatrix} l_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_n \\ v_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{n+1} = A\vec{p}_n}$$

- Población cuando hayan transcurrido N años:

$$\vec{p}_{n+N} = A\vec{p}_{n+N-1} = \cdots = A^N \vec{p}_n$$

Procesos migratorios

$$\boxed{\begin{bmatrix} l_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_n \\ v_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{n+1} = A\vec{p}_n}$$

- Población cuando hayan transcurrido N años:

$$\vec{p}_{n+N} = A\vec{p}_{n+N-1} = \cdots = A^N\vec{p}_n$$

- Para $N >>$ tendremos $\vec{p}_\infty = A\vec{p}_\infty$:

Procesos migratorios

$$\boxed{\begin{bmatrix} l_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_n \\ v_n \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{p}_{n+1} = A\vec{p}_n}$$

- Población cuando hayan transcurrido N años:

$$\vec{p}_{n+N} = A\vec{p}_{n+N-1} = \cdots = A^N \vec{p}_n$$

- Para $N >>$ tendremos $\vec{p}_\infty = A\vec{p}_\infty$:

$$\begin{bmatrix} l \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ v \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0.1 & -0.05 \\ -0.1 & 0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} l &= l \\ v &= 2l \end{aligned}\right\}$$

Procesos migratorios

$$\boxed{\begin{bmatrix} l_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_n \\ v_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{n+1} = A\vec{p}_n}$$

- Población cuando hayan transcurrido N años:

$$\vec{p}_{n+N} = A\vec{p}_{n+N-1} = \cdots = A^N \vec{p}_n$$

- Para $N >>$ tendremos $\vec{p}_\infty = A\vec{p}_\infty$:

$$\begin{bmatrix} l \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ v \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0.1 & -0.05 \\ -0.1 & 0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{r} l = l \\ v = 2l \end{array}\right\}$$

➔ La población se estabiliza cuando la población de Valencia es el doble que la de Logroño

Procesos migratorios

$$\boxed{\begin{bmatrix} l_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_n \\ v_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{n+1} = A\vec{p}_n}$$

- Población cuando hayan transcurrido N años:

$$\vec{p}_{n+N} = A\vec{p}_{n+N-1} = \cdots = A^N \vec{p}_n$$

- Para $N >>$ tendremos $\vec{p}_\infty = A\vec{p}_\infty$:

$$\begin{bmatrix} l \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ v \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0.1 & -0.05 \\ -0.1 & 0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{r} l = l \\ v = 2l \end{array}\right\}$$

➔ La población se estabiliza cuando la población de Valencia es el doble que la de Logroño

- Población en 2015: $\begin{bmatrix} l \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 151 \\ 785 \end{bmatrix}$
- Solución en que la población se estabiliza:

$$\left.\begin{array}{rcl} v - 2l & = & 0 \\ v + l & = & 936 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} l \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 312 \\ 624 \end{bmatrix}$$

Procesos migratorios

$$\begin{bmatrix} l_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_n \\ v_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{n+1} = A\vec{p}_n$$

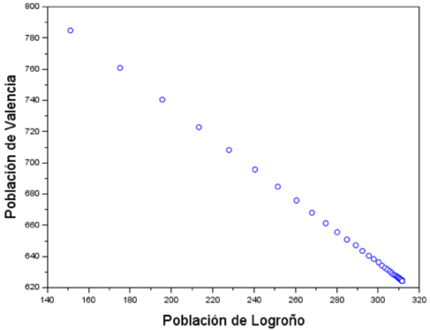
$$\begin{bmatrix} l_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 151 \\ 785 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 151 \\ 785 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 171.15 \\ 760.85 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 195.68 \\ 740.32 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} l_n \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 312 \\ 624 \end{bmatrix}$$



Para finalizar...

- Lección magistral de SciLab ➔ Campus Virtual
- *¿Qué es el caos?* ➔ Campus Virtual
  https://www.youtube.com/watch?v=r_pQxExbErQ
- Artículo EL PAÍS: "*Así evoluciona la curva del coronavirus en España y en cada autonomía*"
  https://elpais.com/sociedad/2020/03/17/actualidad/1584436648_230452.html
  #click=https://t.co/7Xbyaydqt6
- https://covid-19-risk.github.io/map/spain/es/
- http://covid19.webs.upv.es/
- https://ourworldindata.org/coronavirus

...Y por supuesto:

TEST DE APRENDIZAJE!!

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET