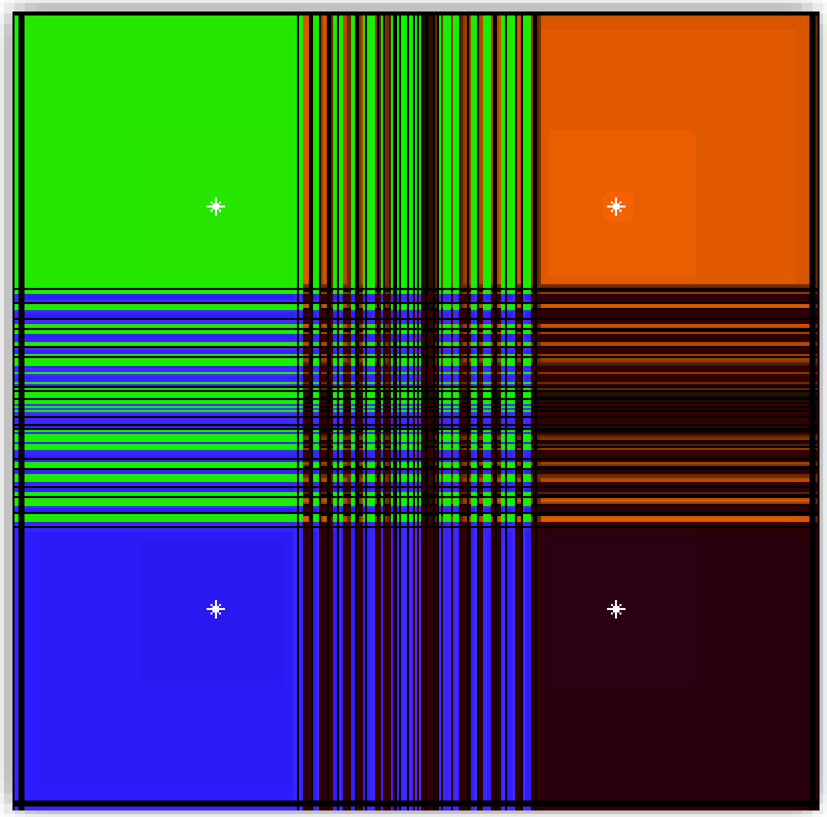
Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería

Alicia Cordero

Neus Garrido

Juan R. Torregrosa



Tema 12: Sistemas de ecuaciones no lineales

Sistemas de ecuaciones no lineales

- Planteamiento del problema
- Conceptos básicos
- Diferentes formas para demostrar el orden de convergencia
- ¿Qué métodos escalares pueden ser utilizados para sistemas?
- Procedimientos para diseñar métodos iterativos

$f(x) = 0$ Métodos iterativos // Raíces simples

Métodos sin memoria

- **Punto a punto** $x_{k+1} = \phi(x_k)$
  - Con derivadas
  - Libres de derivadas
- **Multipunto** $y_k = \psi(x_k)$, $x_{k+1} = \phi(x_k, y_k)$
  - Optimo
  - No óptimo

Métodos con memoria

- **Punto a punto** $x_{k+1} = \phi(x_k, x_{k-1}, \ldots, x_{k-i}),\ i \leq k$
- **Multipunto** $y_k = \psi(x_k, x_{k-1}, \ldots, x_{k-i}),\ x_{k+1} = \phi(x_k, x_{k-1}, \ldots, x_{k-i}, y_k)\ i \leq k$
  - Con derivadas
  - Libres de derivadas

El problema a resolver

Encontrar una solución real α del sistema de ecuaciones no lineales

$$\left.\begin{array}{c} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{array}\right\} \qquad F(x) = 0, \qquad F : D \subseteq R^n \to R^n$$

donde $f_i : R^n \to R, \quad i = 1,2,\ldots,n,$ son las funciones coordenadas.

Para aproximar la solución, en general se utilizan métodos iterativos de punto fijo, descritos por una función $G : R^n \to R^n$

$$x^{(k+1)} = G(x^{(k)}), \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

- ¿Cuántas soluciones tiene un sistema de ecuaciones no lineales?
- ¿Cómo elegimos una aproximación inicial cerca de la solución buscada?

Conceptos básicos

- ✓ **Orden de convergencia p**

$$\exists\ \mathrm{M} > 0,\ \exists\ k_0 \quad \text{tal que} \quad \left\| x^{(k+1)} - \alpha \right\| \leq M \left\| x^{(k)} - \alpha \right\|^p, \quad \forall\ k \geq k_0$$

- ✓ **Índice de eficiencia** $I = p^{1/d}$

- ✓ **Índice de eficiencia computacional** $I_c = p^{1/(d+op)}$

d número de evaluaciones funcionales por iteración

op número de productos/cocientes por iteración

Número de productos/cocientes (por iteración) en la solución directa de un sistema lineal:

$n^3/3 + n^2 - n/3$

Número de productos/cocientes (por iteración) en la solución directa de m sistemas lineales con la misma matriz de coeficientes:

$n^3/3 + m\, n^2 - n/3$

Conceptos básicos

✓ **Optimalidad**

Conjetura. *Dado un método iterativo para resolver sistemas de ecuaciones no lineales, que requiere* $d = k_1 + k_2$ evaluaciones funcionales por iteración tal que k_1 corresponden a evaluaciones funcionales de la matriz Jacobiana y k_2 a evaluaciones de la función *F. Conjeturamos que el orden de este método será, como máximo,*

$2^{k_1+k_2-1}$ si $k_1 \leq k_2$.

✓ **De los métodos conocidos, sólo el método de Newton es óptimo**

[ACT] V. Arroyo, A. Cordero, and J. R. Torregrosa, "Approximation of artificial satellites' preliminary orbits: the efficiency challenge," Mathematical and Computer Modelling, vol. 54, no. 7-8, pp. 1802–1807, 2011.

Diferentes formas para demostrar el orden de convergencia local

✓ Mediante derivadas parciales en la solución

[Tr] J.F. Traub, Iterative methods for the solution of equations, Chelsea Publishing Company, New York, 1982.

Teorema

Sea $G(x)$ una función de punto fijo con derivadas parciales continuas hasta orden p. El esquema iterativo $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$ tiene orden de convergencia p, si

$$G(\alpha) = \alpha;$$

$$\frac{\partial^k g_i(\alpha)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}} = 0, \ \forall\ 1 \le k \le p-1, \ 1 \le i, j_1, j_2, \dots, j_k \le n;$$

$$\frac{\partial^p g_i(\alpha)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_p}} \ne 0, \ \text{para algún} \ \ i, j_1, j_2, \dots, j_p$$

Diferentes formas para demostrar el orden de convergencia local

✓ Desarrollos de Taylor

[CHMT1] A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, A modified Newton-Jarratt's composition, Numer. Algor. 55, 87-99 (2010).

$F: R^n \to R^n$ ⟵ Función no lineal que describe el sistema

$F'(u): R^n \to R^n$ ⟵ Función lineal (Matriz Jacobiana)

$F^{(q)}(u)\colon\ R^n \times R^n \times \cdots \times R^n, q = 2,3,\cdots$ ⟵ Función q-lineal

Propiedades

- $F^{(q)}(u)(v_1, v_2, \ldots, v_{q-1}, \cdot) \in L(R^n)$
- $F^{(q)}(u)(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(q)}) = F^{(q)}(u)(v_1, v_2, \ldots, v_q), \ \forall \sigma$ perm.

Notación

- $F^{(q)}(u)(v_1, v_2, \ldots, v_q) = F^{(q)}(u) v_1 v_2 \ldots v_q$
- $F^{(q)}(u) v^{q-1} F^{(k)}(u) v^k = F^{(q)}(u) F^{(k)}(u) v^{q+k-1}$

$$\boxed{\begin{aligned} F(\alpha+h) &= F'(\alpha)\left[h + \sum_{q=2}^{p-1} C_q h^q\right] + O(h^p), \\ F'(\alpha+h) &= F'(\alpha)\left[I + \sum_{q=2}^{p-1} qC_q h^{q-1}\right] + O(h^p), \end{aligned}}$$

$$C_q = \frac{1}{q!}[F'(\alpha)]^{-1} F^{(q)}(\alpha), \qquad q \geq 2$$

$$C_3C_2h^3 = C_3h^2 \; C_2h$$

$$R^n \to R^n$$

$$R^n \to R^n$$

$$\boxed{C_3C_2h^3 \neq C_2C_3h^3}$$

$$[F'(\alpha+h)]^{-1} = [I + X_2h + X_3h^2 + X_4h^3 + \cdots][F'(\alpha)]^{-1} + O(h^p)$$

$$[F'(\alpha+h)]^{-1} F'(\alpha+h) = I$$

$$\begin{aligned} X_2 &= -2C_2, \\ X_3 &= 4C_2^2 - 3C_3, \\ X_4 &= -8C_2^3 + 6C_2C_3 + 6C_3C_2 - 4C_4, \\ X_5 &= 16C_2^4 - 12C_3C_2^2 - 12C_2C_3C_2 + 8C_4C_2 - 12C_2^2C_3 + 9C_3^2 + 8C_2C_4 - 5C_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

¿Qué métodos de una variable pueden ser usados?

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)}), \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Método de Newton

Número de evaluaciones funcionales (por iteración): $n^2 + n$

Número de productos/cocientes (por iteración): $n^3/3 + n^2 - n/3$

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{f'(y_k) + f'(x_k)}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

$$y^{(k)} = x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)}),$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - 2\left(F'\left(x^{(k)}\right) + F'\left(y^{(k)}\right)\right)^{-1} F\left(x^{(k)}\right), \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Método de trapecios

¿Qué métodos de una variable pueden ser usados?

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0,1,2,\dots$$

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)}), \qquad k = 0,1,2,\dots}$$

Método de Newton

Número de evaluaciones funcionales (por iteración): $n^2 + n$

Número de productos/cocientes (por iteración): $n^3/3 + n^2 - n/3$

$$F'(x^{(k)})u = F(x^{(k)}),$$

Sistema lineal

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - u, \qquad k = 0,1,2,\dots$$

¿Qué métodos de una variable pueden ser usados?

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)}), \qquad k = 0,1,2,\ldots}$$

Método de Newton

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2 f(x_k)}{f'(y_k) + f'(x_k)}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$\boxed{\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= x^{(k)} - 2\left(F'\left(x^{(k)}\right) + F'\left(y^{(k)}\right)\right)^{-1} F\left(x^{(k)}\right), \qquad k = 0,1,2,\ldots \end{aligned}}$$

Método de Trapecios

Número de evaluaciones funcionales (por iteración): $2n^2 + n$

Número de productos/cocientes (por iteración): $2n^3/3 + 2n^2 - 2n/3$

¿Qué métodos de una variable pueden ser usados?

[Ki] R.F. King, “A family of fourth-order methods for nonlinear equations”, SIAM J. Numer. Anal. 10 (5) (1973) 876–879

Familia de King

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \frac{f(x_k) + \beta f(y_k)}{f(x_k) + (\beta - 2) f(y_k)}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

(at the moment …)

Diseño de métodos iterativos

Técnicas mas utilizadas

I. Fórmulas de cuadratura (transformación directa desde ecuaciones)

II. Composición de métodos iterativos (con reducción)

III. Polinomios de Adomian

IV. Pseudocomposición

V. Funciones peso matriciales

VI. Diferencias divididas multidimensionales (métodos libres de derivadas y extensión a sistemas de métodos escalares, aparentemente no extensibles)

Diseño de métodos iterativos

- Composición con el esquema de Newton

$$\boxed{z^{(k)} = \Phi(x^{(k)}, y^{(k)})}$$ Orden p

$$x^{(k+1)} = z^{(k)} - \boxed{F'(z^{(k)})}^{-1} F(z^{(k)})$$ Orden 2p

Estimación de la matriz Jacobiana

- Composición con el esquema de Newton, “congelando la derivada”

$$x^{(k+1)} = z^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1} F(z^{(k)})$$ Orden p+1

- Composición modificada con el esquema de Newton

$$x^{(k+1)} = z^{(k)} - F'(y^{(k)})^{-1} F(z^{(k)})$$ Orden p+2

- Generalización del esquema original

Composición con el esquema de Newton

$$z^{(k)} = \Phi(x^{(k)}, y^{(k)})$$

$$x^{(k+1)} = z^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1} F(z^{(k)})$$

Orden p

[CT3] A. Cordero, J.R.Torregrosa, "On interpolation variants of Newton's method for functions of several variables", Journal of Computational and Applied Mathematics, 234 (2010) 34-43

Teorema

Sea $F : D \subseteq R^n \to R^n$ una función suficientemente diferenciable en un entorno abierto *D* de la solución α del sistema no lineal $F(x) = 0$. Supongamos también que $F'(x)$ es continua y no singular en α. Entonces la sucesión de iterados obtenida en el esquema anterior converge a α, con orden de convergencia p+1.

Composición con el esquema de Newton

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1}\left(\sum_{j=1}^{m} A_j F(\eta_j(x^{(k)}))\right)$$

$$\eta_j(x^{(k)}) = x^{(k)} - \tau_j F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)}), \quad A_j, \tau_j \in R$$

Caso particular:

Método Golden Ratio (0rden 3)

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - aF'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)}), \\ z^{(k)} &= x^{(k)} - bF'(x^{(k)})^{-1} F(y^{(k)}) \end{aligned} \qquad a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad b = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x^{(k+1)} = z^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1} F(z^{(k)})$$

Método NA, Orden 4

¡Sólo una evaluación de la matriz Jacobiana !

N. evaluaciones func. por iter.: n^2 +2 n (Golden Ratio), n^2 +3 n (NA)

N. prod./coc. por iter.: $n^3/3 + 2n^2 - n/3$ (Golden Ratio), $n^3/3 + 3n^2 - n/3$ (NA)

Índices de eficiencia del método NA

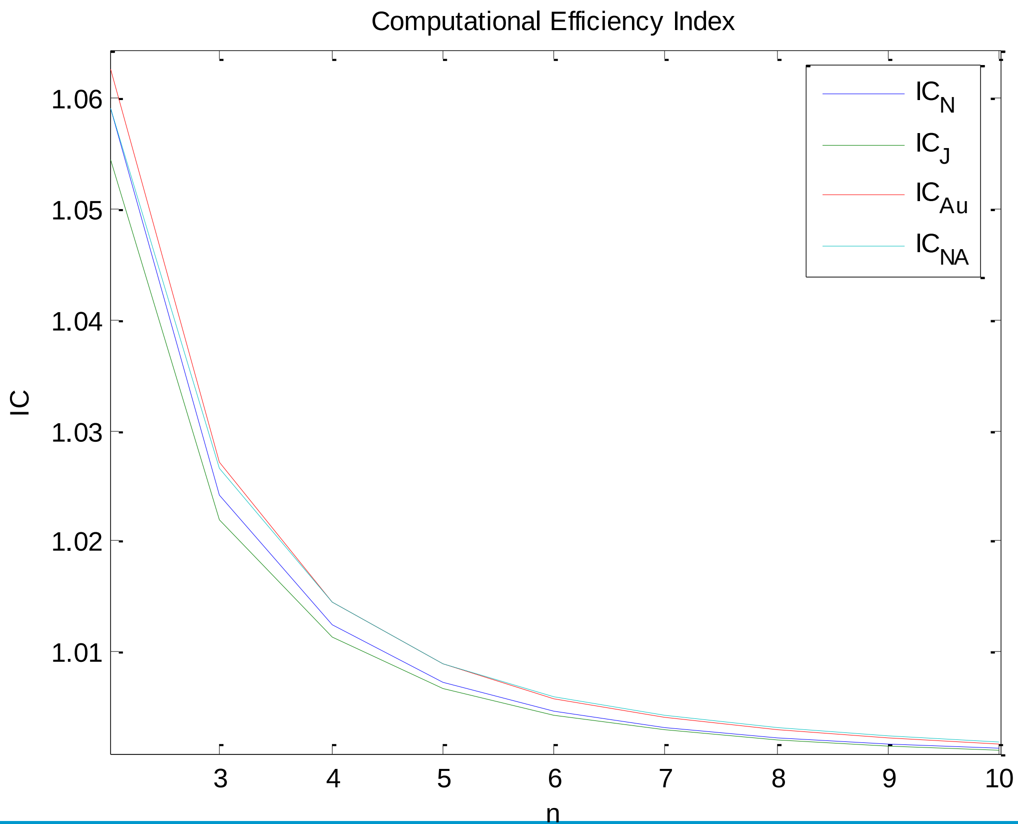
Índice de eficiencia clásico → $I_{NA} > I_{GR} > I_{Newton}, \quad \forall n > 1$

Índice eficiencia computacional

$$IC_{NA} = 4^{\frac{1}{(1/3)n^3+4n^2+(8/3)n}}$$

$$IC_{GR} = 3^{\frac{1}{(1/3)n^3+3n^2+(5/3)n}}$$

$$IC_{Newton} = 2^{\frac{1}{(1/3)n^3+2n^2+(2/3)n}}$$



Método NA recursivo

[CHMT2] A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, *Efficient high-order methods based on golden ratio for nonlinear systems*, Applied Mathematics and Computation, 217 (2011) 4548-4556

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - aF'(x^{(k)})^{-1}F(x^{(k)}), \\ z^{(k)} &= x^{(k)} - bF'(x^{(k)})^{-1}F(y^{(k)}) \end{aligned} \qquad a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad b = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$w^{(k)} = z^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1}F(z^{(k)})$$

$$u^{(k+1)} = w^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1}F(w^{(k)})$$

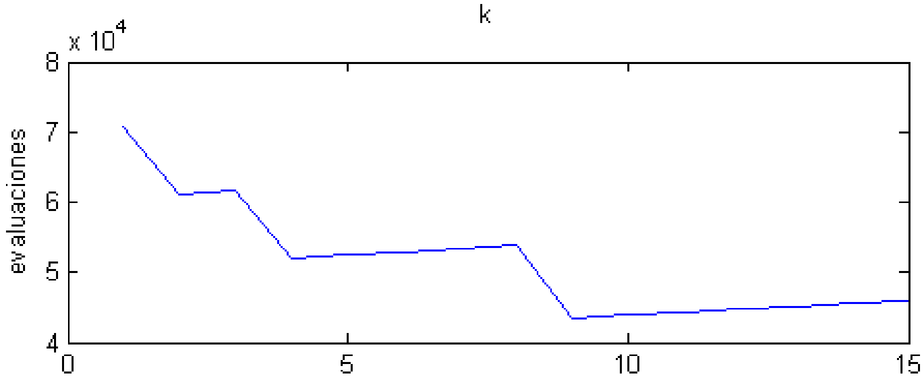
$$\vdots$$

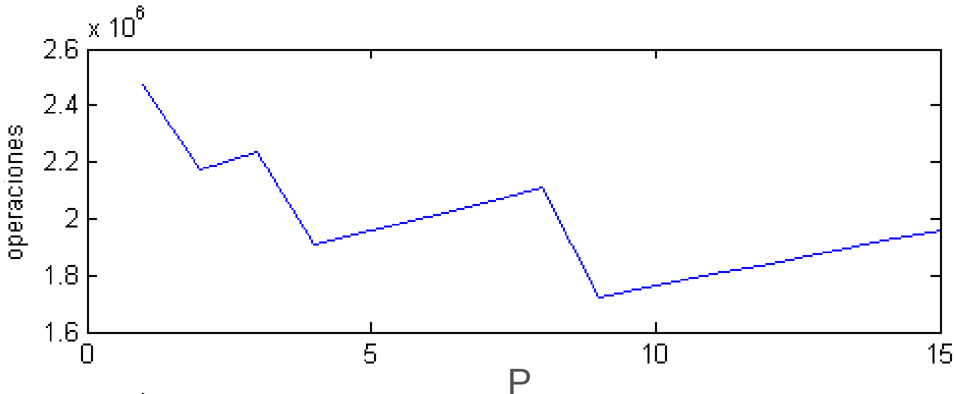
¿Qué número de composiciones nos dará una relación óptima entre el orden de convergencia y el índice de eficiencia?

¡ Va a depender del tamaño del sistema!

Método NPA recursivo

$$n = 99$$





$$I = p^{\frac{1}{n^2+(p-1)n}}$$

$$IC = p^{\frac{1}{n^2+(p-1)n+(1/3)n^3+(p-1)n^2-(1/3)n}}$$

n	$p\ /\ I$	$p\ /\ IC$
3	p=4	p=3
10	p=8	p=5
20	p=12	p=7
⋮	⋮	⋮
99	p=37	p=18

Composición con el esquema de Newton

✓ **Primer paso:** Extensión a sistemas del esquema de Jarratt

[Ja] P. Jarratt, Some fourth order multipoint iterative methods for solving equations. Math. Comp., 20 (1966) 434-437

Jarratt

$$y^{(k)} = x^{(k)} - \frac{2}{3} F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)})$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{1}{2}\left(3F'(y^{(k)}) - F'(x^{(k)})\right)^{-1}\left(3F'(y^{(k)}) + F'(x^{(k)})\right) F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)})$$

Método de cuarto orden de convergencia

Número de evaluaciones funcionales (por iteración): $2n^2 + n$

Número de productos/cocientes (por iteración): $2n^3/3 + 3n^2 - 2n/3$

Composición con el esquema de Newton

✓ **Segundo paso:** composición y reducción

[CHMT1] A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, A modified Newton-Jarratt's composition, Numer. Algor. 55, 87-99 (2010).

Newton + Jarratt ⟶ **Método NJ**: 8th orden, ¿Eficiencia?

$$z^{(k)} = x^{(k)} - \frac{2}{3} F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)})$$

$$y^{(k)} = x^{(k)} - \frac{1}{2} \left(3F'(z^{(k)}) - F'(x^{(k)})\right)^{-1} \left(3F'(z^{(k)}) + F'(x^{(k)})\right) F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)})$$

$$x^{(k+1)} = y^{(k)} - \boxed{F'\left(y^{(k)}\right)} F\left(y^{(k)}\right)$$

$$a\, F'(x^{(k)}) + b\, F'(z^{(k)})$$

⟶ **RN method**

¿Cuál es el orden de convergencia?¿Va a depender del valor de los parámetros *a* y *b*?

Análisis de la convergencia

Teorema

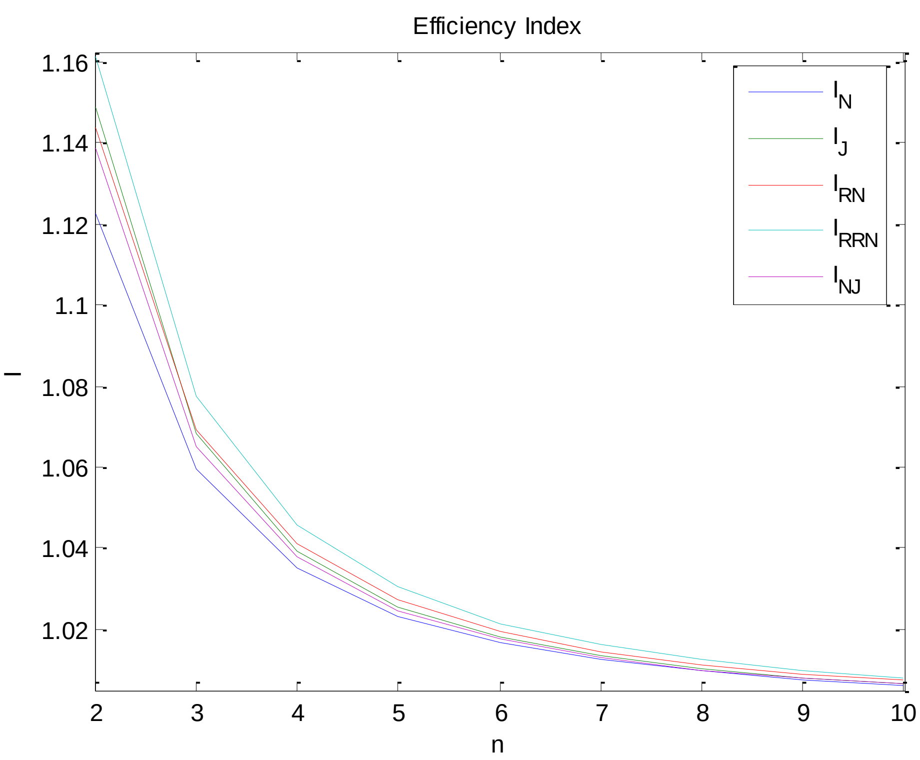
Sea $F: D \subseteq R^n \rightarrow R^n$ una función suficientemente diferenciable en un entorno abierto D de una solución α del sistema no lineal $F(x)=0$. Supongamos también que $F'(x)$ es continua y no singular en α. Entonces la sucesión de iterados obtenida por el método **RN** converge a α, con orden de convergencia 5 en los esquemas que verifican $a + b = 1$. Además, el método con $a = -1/2$ y $b = 3/2$, denotado por **RRN**, tiene orden de convergencia 6.

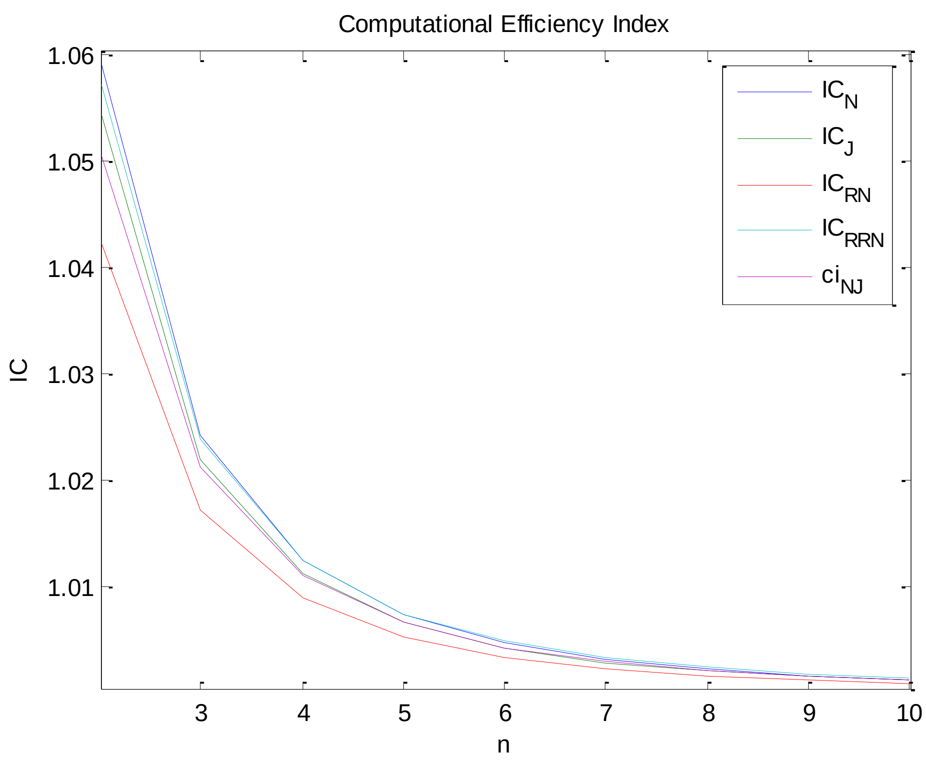
$$\boxed{x^{(k+1)} = y^{(k)} - 2\left(3F'(z^{(k)}) - F'(x^{(k)})\right)^{-1} F(y^{(k)})}$$

Número de evaluaciones funcionales: $2n^2 + 2n$

Número de productos/cocientes: $2n^3/3 + 6n^2 + 4n/3$

Índices de eficiencia





Resultados numéricos

- Métodos implementados en Matlab.
- Aritmética de precisión variable con 200 dígitos
- Criterio de parada

$$\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|+\left\|F(x^{(k)})\right\|<10^{-100}$$

- Orden de convergencia computacional ACOC

$$p \approx ACOC = \frac{\ln\left(\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\| / \left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|\right)}{\ln\left(\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\| / \left\|x^{(k-1)}-x^{(k-2)}\right\|\right)}$$

- Sistemas resueltos mediante Gauss con pivotación parcial

Funciones test

(a)

$$F(x_1, x_2) = (\exp(x_1)\exp(x_2) + x_1\cos(x_2),\ x_1 + x_2 - 1),$$

$$\alpha = (3.47063096, -2.47063096)$$

(b)

$$F(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2 - 1,\ x_1^2 - x_2^2 + 0.5), \quad \alpha = (0.5, \sqrt{3}/2)$$

(c)

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)), \quad \alpha = \left(\frac{\pm 1}{\sqrt{3}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}, \frac{\mp 1}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$f_1(x) = x_2x_3 + x_4(x_2 + x_3) \quad f_3(x) = x_1x_2 + x_4(x_1 + x_2)$$

$$f_2(x) = x_1x_3 + x_4(x_1 + x_3) \quad f_4(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - 1$$

(d)

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)), \quad \alpha_1 = (1,1,\ldots,1),\ \alpha_2 = (-1,-1,\ldots,-1)$$

$$f_i(x) = x_i x_{i+1} - 1,\ i = 1,2,\ldots,n-1$$

$$f_n(x) = x_n x_1 - 1$$

Resultados numéricos

F(x)	$x^{(0)}$	Iteraciones					ACOC				
		N	J	NA	MHMT	NA_8	N	J	NA	MHMT	NA_8
(a)	(2 ,-1)	9	7	6	6	5	2.0	4.0	4.0	5.0	9.3
	(4, -2)	9	5	5	5	3	2.0	4.0	4.0	5.0	---
(b)	(2, 1)	9	5	6	5	3	2.0	4.0	4.0	5.0	9.0
	(0.8, 0.8)	9	5	5	5	3	2.0	4.0	4.0	5.0	---
(c)	(2, 1, 1, 2)	11	6	7	6	4	2.0	4.0	4.0	5.0	---
	0.7(1, 1, 1, 0.5)	8	5	5	4	3	2.0	4.0	4.0	5.0	---
(d)	(2, 2, ...,2)	7	4	7	4	4	2.0	3.6	---	4.2	7.8
	0.5(1, 1, ...,1)	7	4	7	5	5	2.0	4.3	---	5.3	---

Conclusiones

- Es relativamente sencillo generar métodos iterativos de cualquier orden de convergencia para resolver sistemas de ecuaciones no lineales.
- El índice de eficiencia clásico no es suficiente para clasificar los métodos, ya que en este caso el numero de operaciones involucradas en el proceso juega un papel clave. Diferentes índices que constaten este hecho deben ser usados.
- ¿Qué problemas de estabilidad presenta una matriz Jacobiana mal condicionada?
- ¿Qué ocurre si la matriz Jacobiana es singular (raíces múltiples en el caso escalar)? ¿Cuál será el orden de convergencia?
- ¿Podemos generalizar los resultados obtenidos en R^n a un espacio de Banach? ¿Cómo estimamos el radio de convergencia?

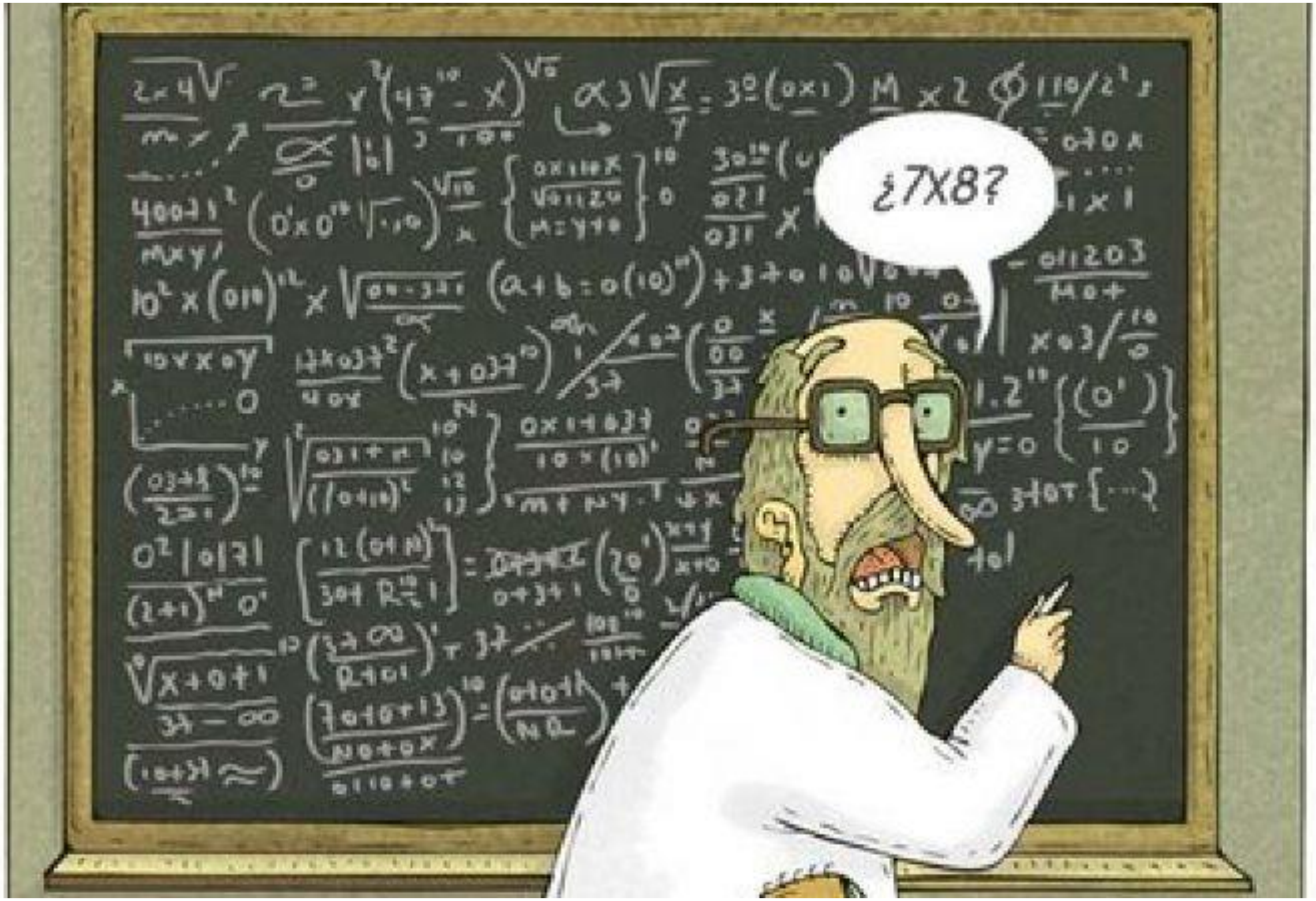
Referencias

- [ACT] M. Abad, A. Cordero, J.R. Torregrosa, “A family of seventh-order schemes for solving nonlinear systems”, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, 2014.
- [ACCT] C. Andreu, N. Cambil, A. Cordero, J.R. Torregrosa, “Preliminary orbit determination of artificial satellites: a vectorial sixth-order approach”, Abstract and Applied Analysis, Volume 2013, Article ID 960582, 10 pages.
- [ACT] V. Arroyo, A. Cordero, J.R. Torregrosa, Approximation of artificial satellites’ preliminary orbits: The efficiency challenge , Mathematical and Computer Modelling, vol. 54, no. 7-8, pp. 1802–1807, 2011.
- [CHMT1] A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, A modified Newton-Jarratt’s composition, Numer. Algor. 55, 87-99 (2010).
- [CHMT2] A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, Efficient high-order methods based on golden ratio for nonlinear systems, Applied Mathematics and Computation, 217 (2011) 4548-4556.
- [CMT] A. Cordero, E. Martínez, J.R. Torregrosa, Iterative methods of order four and five for systems of nonlinear equations, Journal of Computational and Applied Mathematics, 231 (2009) 541-551.
- [CT] A. Cordero, J.R. Torregrosa, Variants of Newton’s method for functions of several variables, Applied Mathematics and Computation 183 (2006) 199–208
- [CT3] A. Cordero, J.R. Torregrosa, On interpolation variants of Newton's method for functions of several variables, Journal of Computational and Applied Mathematics, 234 (2010) 34-43.

Referencias

- [Ki] R.F. King, “A family of fourth-order methods for nonlinear equations”, SIAM J. Numer. Anal. 10 (5) (1973) 876–879.
- [HMT] J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, Third and fourth order iterative methods free from second derivative for nonlinear systems, Applied Mathematics and Computation, 211 (2009) 190-197.
- [OR] Ortega, Rheinboldt, Iterative solutions of nonlinear equations in several variables, Academic Press, New York, 1970
- A. M. Ostrowski, Solutions of equations and systems of equations, Academic-Press, New York-London, 1966.
- [Ja] P. Jarratt, Some fourth order multipoint iterative methods for solving equations. Math. Comp., 20 (1966) 434-437.
- [SM] F. Soleymani, Mousavi, “On Novel Classes of Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations”, Computational Mathematics and Mathematical Physics 52 (2012), 203–210.
- [Tr] J.F. Traub, Iterative methods for the solution of equations, Chelsea Publishing Company, New York, 1982.
- [WL] X. Wang, L. Liu, Two new families of sixth-order methods for solving non-linear equations, Applied Mathematics and Computation, 213 (2009) 73-78.

¿Dudas?



unir

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

www.unir.net