

# Tema 10

## Sistemas iterativos II

### Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos

Dra. Neus Garrido Sàez

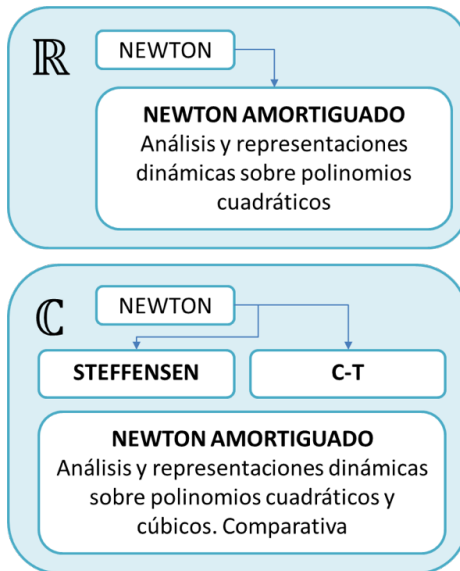
Máster en Ingeniería Matemática y Computación  
Escuela Superior en Ingeniería y Tecnología



- 1 Introducción: método de Newton amortiguado
- 2 Método de Newton amortiguado sobre polinomios cuadráticos
  - Conjugación topológica
  - Dinámica real sobre  $p_0(x) = x^2$
  - Dinámica real sobre  $p_1(x) = x^2 - 1$
  - Dinámica real sobre  $p_{-1}(x) = x^2 + 1$
- 3 Métodos libres de derivadas
  - Conceptos previos
  - Composición de métodos
  - Comparativa de métodos

1

# Introducción: método de Newton amortiguado



## Método de Newton


$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Orden de convergencia: **p=2**

## Método de Newton amortiguado

$$x_{k+1} = x_k - \mu \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \mu \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Orden de convergencia: **p=1**  
( $\mu = 1 \Rightarrow$  Método de Newton  $\Rightarrow p = 2$ )

 Magreñán, Á. (2013) *Estudio de la dinámica del método de Newton amortiguado*. Logroño: Universidad de La Rioja

2

# Método de Newton amortiguado sobre polinomios cuadráticos

- 1 Introducción: método de Newton amortiguado
- 2 Método de Newton amortiguado sobre polinomios cuadráticos
  - Conjugación topológica
  - Dinámica real sobre  $p_0(x) = x^2$
  - Dinámica real sobre  $p_1(x) = x^2 - 1$
  - Dinámica real sobre  $p_{-1}(x) = x^2 + 1$
- 3 Métodos libres de derivadas

# Conjugación topológica

## Conjugación topológica I

Los polinomios cuadráticos  $f(x) = x^2 + ax + b$  y  $p_\lambda(x) = x^2 - \lambda$  son conjugados topológicamente a partir de  $\varphi(x) = x - \frac{a}{2}$ .

## Operador de punto fijo

$N_{\mu, p_\lambda}$  denota el operador de punto fijo del método de Newton amortiguado aplicado sobre el polinomio  $p_\lambda(x) = x^2 - \lambda$ :

$$N_{\mu, p_\lambda}(x) = x - \mu \frac{p_\lambda(x)}{p'_\lambda(x)} = x - \frac{\mu(x^2 - \lambda)}{2x}$$

## Conjugación topológica II

- $\lambda > 0$ :  $N_{\mu, p_\lambda}$  es topológicamente conjugado a  $N_{\mu, p_{-\lambda}}$  por  $\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{\mu\lambda}}$
- $\lambda < 0$ :  $N_{\mu, p_\lambda}$  es topológicamente conjugado a  $N_{\mu, p_1}$  por  $\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{-\mu\lambda}}$

Basta con estudiar la dinámica del operador para  $\lambda = \{0, -1, 1\}$  para conocer el comportamiento dinámico de toda la familia cuadrática



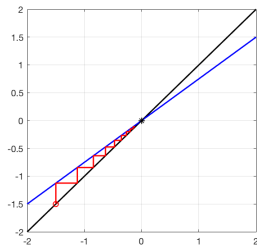
- 1 Introducción: método de Newton amortiguado
- 2 Método de Newton amortiguado sobre polinomios cuadráticos
  - Conjugación topológica
  - Dinámica real sobre  $p_0(x) = x^2$
  - Dinámica real sobre  $p_1(x) = x^2 - 1$
  - Dinámica real sobre  $p_{-1}(x) = x^2 + 1$
- 3 Métodos libres de derivadas

## Operador de punto fijo

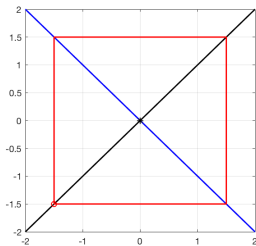
$$N_{\mu, p_0}(x) = x - \mu \frac{p_0(x)}{p_0'(x)} = \frac{(2 - \mu)x}{2}$$

- Puntos fijos:  $x^* = 0$
- Estabilidad del punto fijo  $x^*$ :
  - $\mu \in (0, 4) \Rightarrow$  Atractor
  - $\mu \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \Rightarrow$  Repulsor
  - $\mu = \{0; 4\} \Rightarrow$  Neutro
- No existen puntos críticos libres

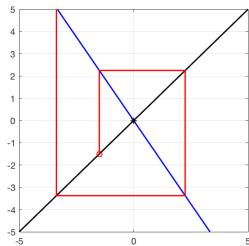
## Diagramas de Verhulst



(a)  $\mu = 0.5$



(b)  $\mu = 4$



(c)  $\mu = 5$

## 1 Introducción: método de Newton amortiguado

## 2 Método de Newton amortiguado sobre polinomios cuadráticos

- Conjugación topológica
- Dinámica real sobre  $p_0(x) = x^2$
- **Dinámica real sobre  $p_1(x) = x^2 - 1$**
- Dinámica real sobre  $p_{-1}(x) = x^2 + 1$

## 3 Métodos libres de derivadas

## Operador de punto fijo

$$N_{\mu, p_1}(x) = x - \mu \frac{p_1(x)}{p_1'(x)} = x - \frac{\mu (x^2 - 1)}{2x}$$

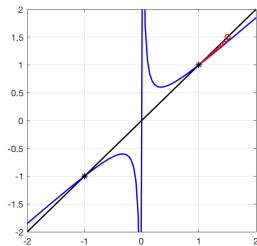
- Puntos fijos:  $x_1^* = -1$  y  $x_2^* = 1$
- Estabilidad de los puntos fijos:

$$N'_{\mu, p_1}(x_{1,2}^*) = 1 - \mu$$

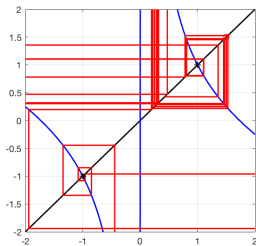
- $\mu \in (0, 2) \Rightarrow$  Atractores
- $\mu \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \Rightarrow$  Repulsivos
- $\mu = \{0, 2\} \Rightarrow$  Neutros
- Puntos críticos libres:

$$x_1^C = -\sqrt{\frac{\mu}{2 - \mu}}, \quad x_2^C = \sqrt{\frac{\mu}{2 - \mu}}$$

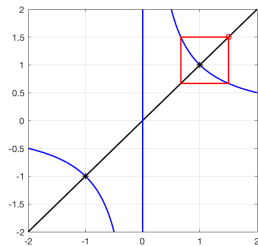
## Diagramas de Verhulst



(d)  $\mu = 0.2$



(e)  $\mu = 3$



(f)  $\mu = 2$

## 1 Introducción: método de Newton amortiguado

## 2 Método de Newton amortiguado sobre polinomios cuadráticos

- Conjugación topológica
- Dinámica real sobre  $p_0(x) = x^2$
- Dinámica real sobre  $p_1(x) = x^2 - 1$
- Dinámica real sobre  $p_{-1}(x) = x^2 + 1$

## 3 Métodos libres de derivadas

## Operador de punto fijo

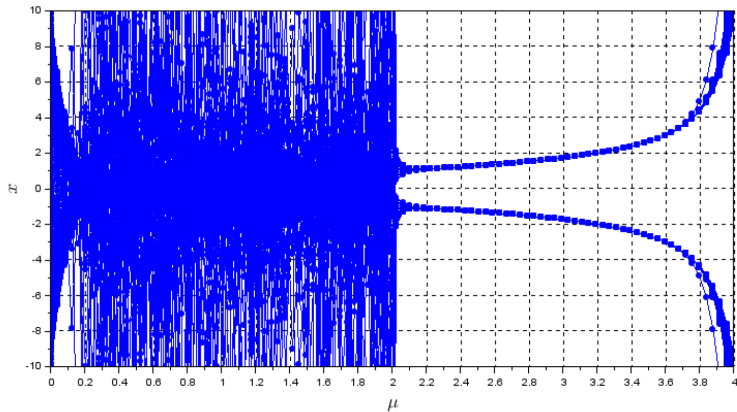
$$N_{\mu, p_{-1}}(x) = x - \mu \frac{p_{-1}(x)}{p'_{-1}(x)} = x - \frac{\mu(x^2 + 1)}{2x}$$

- No existen puntos fijos
- Puntos críticos libres:

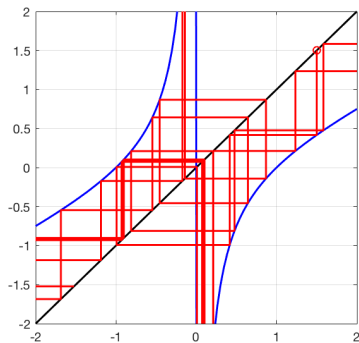
$$x_1^C = -\sqrt{\frac{\mu}{\mu - 2}}, \quad x_2^C = \sqrt{\frac{\mu}{\mu - 2}}$$



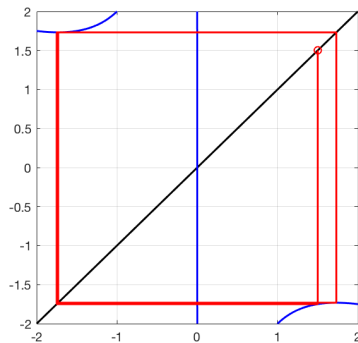
### Diagrama de bifurcación



## Diagramas de Verhulst



(g)  $\mu = 1$



(h)  $\mu = 3$

# 3

## Métodos libres de derivadas

- 1 Introducción: método de Newton amortiguado
- 2 Método de Newton amortiguado sobre polinomios cuadráticos
- 3 **Métodos libres de derivadas**
  - **Conceptos previos**
  - Composición de métodos
  - Comparativa de métodos

## Diferencias finitas

- Diferencias progresivas:

$$f'(z) \approx \frac{f(z + f(z)) - f(z)}{f(z)}$$

- Diferencias regresivas:

$$f'(z) \approx \frac{f(z) - f(z - f(z))}{f(z)}$$

- Diferencias centrales:

$$f'(z) \approx \frac{f(z + f(z)) - f(z - f(z))}{2f(z)}$$

## Diferencias divididas

- De orden uno:

$$f[x, y] = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

- De orden dos:

$$f[x, y, z] = \frac{f[y, z] - f[x, y]}{z - x}$$

## Índice de eficiencia

$$I = p^{1/d}$$

- $p \equiv$  orden de convergencia
- $d \equiv$  número de evaluaciones funcionales de  $f$  en cada iteración


## Conjetura de Kung y Traub

El orden de convergencia de un método iterativo de orden  $p$  que realiza  $d$  evaluaciones funcionales de la función en cada iteración es menor que  $2^{d-1}$ .

## Método óptimo

Los métodos iterativos óptimos satisfacen:

$$p = 2^{d-1}$$

 Kung, H.T. y Traub, J.F.(1974) *Optimal order of one-point and multi-point iteration*. Applied Mathematics and Computation. Amsterdam: Elsevier

## Ejemplo 1. Método de Steffensen

- Se obtiene aproximando la derivada del método de Newton por la diferencia finita progresiva

- $f'(z) \approx \frac{f(z+f(z)) - f(z)}{f(z)}$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{[f(x_k)]^2}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}$$

- $p = 2$
- $d = 2$
- $I = 2^{1/d} = \sqrt{2}$
- Es un método óptimo:

$$2^{d-1} = 2 = p$$

- 1 Introducción: método de Newton amortiguado
- 2 Método de Newton amortiguado sobre polinomios cuadráticos
- 3 **Métodos libres de derivadas**
  - Conceptos previos
  - **Composición de métodos**
  - Comparativa de métodos



- **Objetivo:** mejorar el orden de convergencia de los métodos iterativos

## Teorema 1

*Si dos métodos iterativos tienen órdenes de convergencia  $p_1$  y  $p_2$ , el método compuesto tiene orden de convergencia  $p = p_1 \cdot p_2$ .*

## Ejemplo 2. Método de Cordero - Torregrosa

Sean  $N_f$  y  $S_f$  los operadores de punto fijo de los métodos de Newton y Steffensen:

$$N_f(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}, \quad S_f(z) = z - \frac{[f(z)]^2}{f(z + f(z)) - f(z)}$$

Composición de los métodos de Newton y Steffensen:

$$CT_f(z) = y - \frac{f(y)f[z, v]}{f[z, y]f[y, v]},$$

donde  $v = z + f(z)$ ,  $y = z - \frac{[f(z)]^2}{f(v) - f(z)}$ .

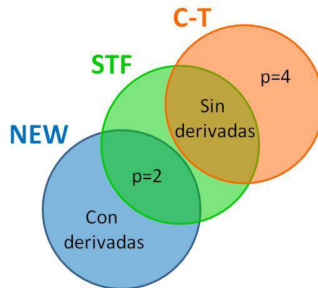
- $p = 4$ ,  $d = 3 \Rightarrow I = 3^{1/3} = 1.5874$
- Es un método óptimo:  $2^{3-1} = 4 = p$ .

- 1 Introducción: método de Newton amortiguado
- 2 Método de Newton amortiguado sobre polinomios cuadráticos
- 3 **Métodos libres de derivadas**
  - Conceptos previos
  - Composición de métodos
  - **Comparativa de métodos**

# Comparativa de métodos

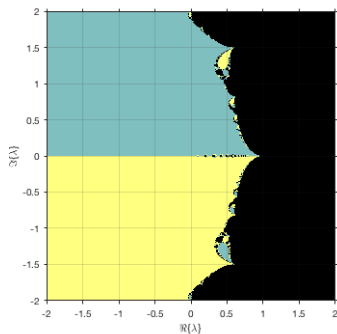
	NEW	STF	C-T
p	2	2	4
d	2	2	3
I	1.4142	1.4142	1.5874
Óptimo	Sí	Sí	Sí

- NEW: método de Newton
- STF: método de Steffensen
- C-T: método de Cordero-Torregrosa

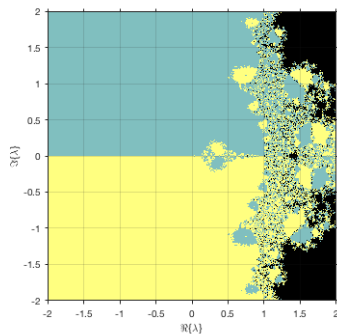


	NEW	STF	C-T
<b>Puntos fijos</b>	$z_1^* = -i\sqrt{\lambda}$ Atractor $z_2^* = i\sqrt{\lambda}$ Atractor	$z_1^* = -i\sqrt{\lambda}$ Atractor $z_2^* = i\sqrt{\lambda}$ Atractor	$z_1^* = -i\sqrt{\lambda}$ Atractor $z_2^* = i\sqrt{\lambda}$ Atractor $z_3^*, z_4^*, z_5^*, z_6^*$
<b>Puntos críticos libres</b>	No tiene	$z_1^c = -2 - \sqrt{2 - \lambda}$ $z_2^c = -2 + \sqrt{2 - \lambda}$	$z_1^c = -2 - \sqrt{2 - \lambda}$ $z_2^c = -2 + \sqrt{2 - \lambda}$ $z_3^c = -1 - i\sqrt{\lambda}$ $z_4^c = -1 + i\sqrt{\lambda}$

## Planos de parámetros

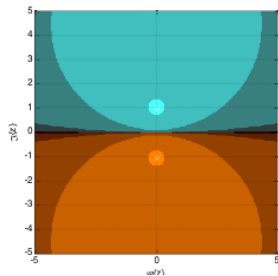


(i) STF

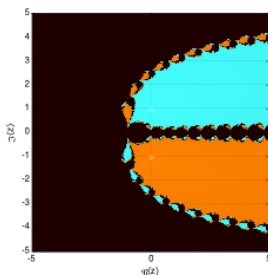


(j) C-T

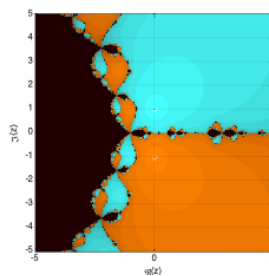
Planos dinámicos  $\lambda = 1$



(k) NEW

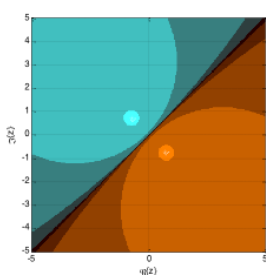


(l) STF

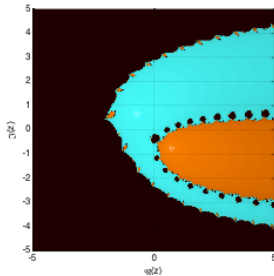


(m) C-T

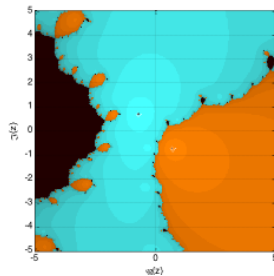
Planos dinámicos  $\lambda = i$



(n) NEW



(ñ) STF

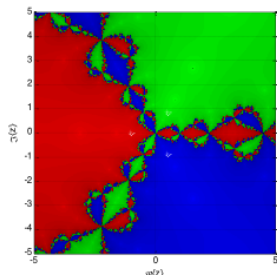


(o) C-T

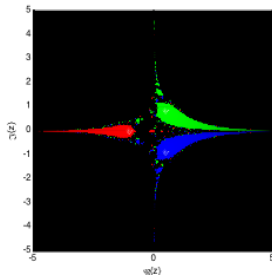
	NEW	STF	C-T
<b>Puntos fijos</b>	$z_1^* = -\lambda^{1/3} AT$ $z_2^* = (-1)^{1/3} \lambda^{1/3} AT$ $z_3^* = -(-1)^{2/3} \lambda^{1/3} AT$	$z_1^* = -\lambda^{1/3} AT$ $z_2^* = (-1)^{1/3} \lambda^{1/3} AT$ $z_3^* = -(-1)^{2/3} \lambda^{1/3} AT$	$z_1^* = -\lambda^{1/3} AT$ $z_2^* = (-1)^{1/3} \lambda^{1/3} AT$ $z_3^* = -(-1)^{2/3} \lambda^{1/3} AT$ $z_k^*, k = 4, \dots, 21$
<b>Puntos críticos libres</b>	No tiene	$z_k^C, k = 1, \dots, 9$	$z_k^C, k = 1, \dots, 25$



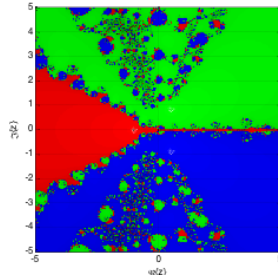
Planos dinámicos  $\lambda = 1$



(p) NEW

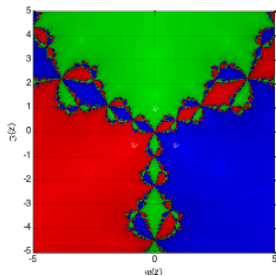


(q) STF

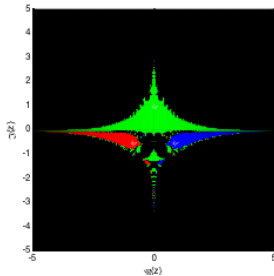


(r) C-T

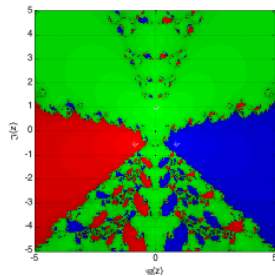
Planos dinámicos  $\lambda = i$



(s) NEW



(t) STF



(u) C-T

📺 Lección magistral: Desarrollo de una herramienta gráfica  $\Rightarrow$  Aula Virtual

👥 Grupo de investigación: **DAMRES** (UPV)

🌐 <http://www.damres.webs.upv.es/>



...Y por supuesto:

# TEST DE APRENDIZAJE!!

