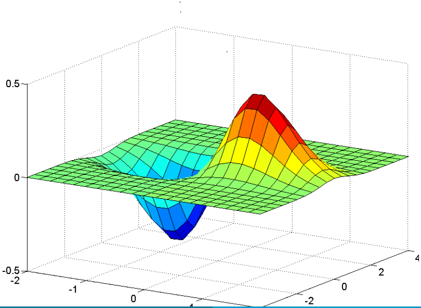
Tema 8: Problemas de contorno multidimensionales. EDPs hiperbólicas.

Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Alicia Cordero, Neus Garrido, Juan R. Torregrosa

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA



- Problema Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx} + e^{-t}, \quad x \in [0,\pi],\ t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno $u(0,t) = e^{-t}, u_x(\pi,t) = -3\cos t, \forall t$ y la condición inicial

$$u(x,0) = 3\sin x + 1, u_t(x,0) = -1,\ x \in [0,1].$$

Se pide:

  - Describe el método explícito de orden $O(k^2 + h^2)$, utilizando nx subintervalos en $[0,\pi]$ y nt subintervalos en $[0,T]$, donde T denota el instante máximo.
  - A partir del esquema anterior, determina la solución aproximada del problema en $T = 1.5$, tomando 10 subintervalos en el eje espacial y 100 en el temporal.
  - Repite los dos pasos anteriores utilizando un método implícito de orden $O(k^2 + h^2)$ y los mismos subintervalos espaciales y temporales. Compara los resultados obtenidos.

- Método explícito Consideremos los pasos espacial y temporal $h = \pi/nx$ y $k = Tmax/nt$, lo que nos proporciona los puntos

$$x_i = 0 + ih,\ i = 0, 1, 2, \dots, nx-1, nx,\quad t_j = 0 + jk,\ j = 0, 1, \dots, nt-1, nt.$$

Diferencias finitas centrales para ambas derivadas parciales:

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + e^{-t_j},$$

$i = 1, \dots, nx-1, nx$; $j = 1, \dots, nt-1$. Llamando $\lambda = \dfrac{k\alpha}{h}$ y llevando a la izquierda las incógnitas del instante mayor, resulta

$$u_{i,j+1} = 2(1-\lambda^2)u_{i,j} + \lambda^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} + k^2 e^{-t_j},$$

$i = 1, \dots, nx-1, nx$; $j = 1, \dots, nt-1$.
Modificamos expresión para $i = nx$:

$$u_{nx,j+1} = 2(1-\lambda^2)u_{nx,j} + \lambda^2(u_{nx+1,j} + u_{nx-1,j}) - u_{nx,j-1} + k^2 e^{-t_j}$$

con la segunda condición inicial

$$u_x(\pi, t_j) \approx \frac{u_{nx+1,j} - u_{nx-1,j}}{2h} = -3\cos t_j \ \rightarrow\ u_{nx+1,j} = u_{nx-1,j} - 6h\cos t_j.$$

- Método explícito

Por tanto,

$$u_{nx,j+1} = 2(1-\lambda^2)u_{nx,j} + 2\lambda^2 u_{nx-1,j} - u_{nx,j-1} - 6h\lambda^2 \cos t_j + k^2 e^{-t_j}.$$

Como en cualquier problema hiperbólico, debemos completar la solución en el instante t_1

$$\begin{aligned} u_{i,1} &= (1-\lambda^2)f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})) + kg(x_i) + e^{-t_1} \\ &= (1-\lambda^2)u_{i,0} + \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}) + kg(x_i) + e^{-t_1} \end{aligned}$$

Para $i = nx$, $u_{nx+1,0} = u_{nx-1,0} - 6h\cos t_0$ y a partir de aquí:

$$u_{nx,1} = (1-\lambda^2)u_{nx,0} + \lambda^2 u_{nx-1,0} - \frac{\lambda^2}{2}6h\cos t_0 + kg(x_{nx}) + e^{-t_1}.$$

- Método implícito

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = \frac{\lambda^2}{2}\left[(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) \right.$$
$$\left. + (u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1})\right] + k^2 e^{-t_j},$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx-1, nx,\ j = 1, 2, \ldots, nt-1,$

$$(1+\lambda^2)u_{i,j+1} - \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) =$$
$$= 2u_{i,j} + \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) - (1+\lambda^2)u_{i,j-1} + k^2 e^{-t_j},$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx-1, nx,\ j = 1, 2, \ldots, nt-1,$

- Método implícito
  Para $i = nx$:

$$(1+\lambda^2)u_{nx,j+1} - \frac{\lambda^2}{2}(u_{nx+1,j+1} + u_{nx-1,j+1}) =$$
$$= 2u_{nx,j} + \frac{\lambda^2}{2}(u_{nx+1,j-1} + u_{nx-1,j-1}) - (1+\lambda^2)u_{nx,j-1} + k^2 e^{-t_j},$$

Pero,

$$u_{nx+1,j+1} = u_{nx-1,j+1} - 6h\cos t_{j+1} \quad \text{y} \quad u_{nx+1,j-1} = u_{nx-1,j-1} - 6h\cos t_{j-1}.$$

Por tanto, la última ecuación resulta:

$$(1+\lambda^2)u_{nx,j+1} - \lambda^2 u_{nx-1,j+1} =$$
$$= 2u_{nx,j} + \lambda^2 u_{nx-1,j-1} - (1+\lambda^2)u_{nx,j-1} - 3h\lambda^2(\cos t_{j+1} + \cos t_{j-1}) + k^2 e^{-t_j}.$$

Matricialmente:

$$Au^{(j+1)} = 2u^{(j)} + Bu^{(j-1)} + b_j + c_j$$

$$A = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda^2/2 & 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2/2 & 1+\lambda^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda^2 & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ u_{3,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \\ u_{nx,j} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -(1+\lambda^2) & \lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda^2/2 & -(1+\lambda^2) & \lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2/2 & -(1+\lambda^2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(1+\lambda^2) & \lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^2 & -(1+\lambda^2) \end{pmatrix},$$

$$b_j = ke^{-t_j}[1,1,1,\ldots,1,1]^T,$$

$$c_j = \left[\frac{\lambda^2}{2}(e^{-t_{j+1}} + e^{-t_{j-1}}), 0, 0, \ldots, 0, -3h\lambda^2(\cos t_{j+1} + \cos t_{j-1})\right]^T$$