Tema 1. Parametrización de rectas

- **Ecuación vectorial**: un punto y un vector director determinan una recta en el espacio. Por tanto, una expresión de la recta que pasa por un punto $A = (x_1, y_1, z_1)$ y tiene un vector director $u = (a, b, c)$ es:

$$r(t) = A + t \cdot u$$

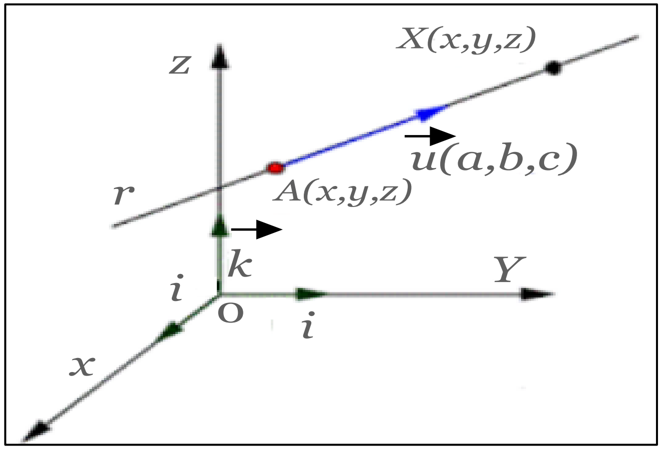


Figura 1.11. Punto de una recta y vector director.
Fuente: http://rafparedes.blogspot.com.es/

Ecuaciones paramétricas:

$$x = x_1 + t \cdot a$$
$$y = y_1 + t \cdot b$$
$$z = z_1 + t \cdot c$$

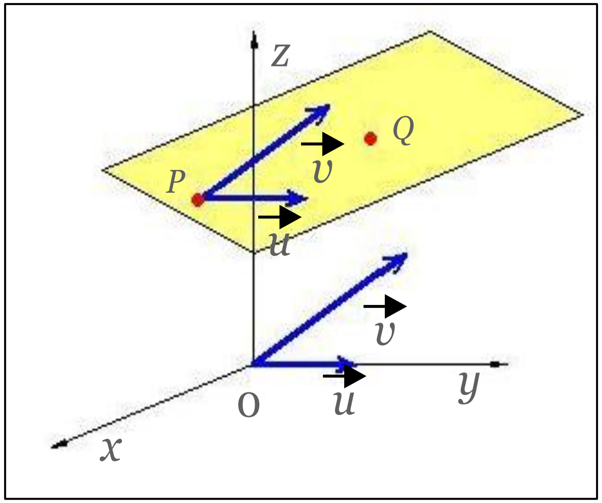
con $t \in (-\infty, \infty)$

Tema 1. Parametrización de rectas

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

- **Ecuación vectorial**: un plano puede determinarse a partir de dos vectores directores $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$ y un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ por el que pasa.

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (u_1, u_2, u_3) + s \cdot (v_1, v_2, v_3)$$



Fuente: http://www.aulafacil.com/

Ecuaciones paramétricas:

$$x = x_0 + tu_1 + sv_1$$
$$y = y_0 + tu_2 + sv_2$$
$$z = z_0 + tu_3 + sv_3$$

Tema 2. Parametrización de curvas en el plano

2.1 Curvas diferenciables en $\mathbb{R}^n$

2.2 Teoría local de curvas planas

Curvas diferenciables en $\mathbb{R}^n$

Una **curva diferenciable parametrizada (curva)** en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación diferenciable $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, donde I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.

Las curvas son de la forma:

$$\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)),$$

con $x_i: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall\ i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Curvas diferenciables en $\mathbb{R}^n$

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

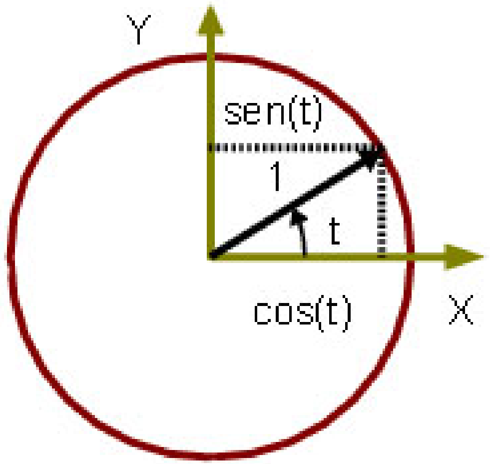
- La **traza** de α es el conjunto $\alpha(I)$.

- El **parámetro** $\alpha(t)$, es t

- Representar la trayectoria de un móvil en el plano o en el espacio en función de un parámetro t (tiempo) unir UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

Ejemplo 1:

$$\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longrightarrow \alpha(t) = (r\cos(t)\,, r\, sen(t))$$



$$\beta: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longrightarrow \beta(t) = (r\cos 2t\,, r\, sen\; 2t)$$

Fuente: http://laplace.us.es/

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$$

Curvas diferenciables en $\mathbb{R}^n$

Sean I, J dos intervalos en $\mathbb{R}$. Decimos que $\Phi: J \longrightarrow I$ es un **difeomorfismo** si cumple:

(i) Φ es inyectiva

(ii) Φ es sobreyectiva, i.e., $\Phi(\mathrm{J}) = \mathrm{I}$

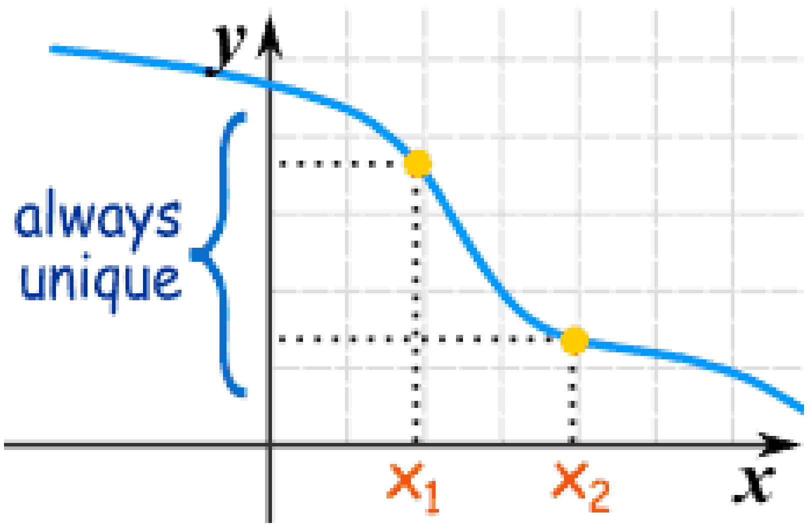
(iii) Φ es diferenciable

(iv) Φ^{-1} es diferenciable (sabemos que existe por (i) y (ii))

Curvas diferenciables en $\mathbb{R}^n$

Sabemos que:

$$(\Phi^{-1})'(t_0) = \frac{1}{\Phi'(\Phi^{-1}(t_0))}, \text{ si } \Phi'(\Phi^{-1}(t_0)) \neq 0$$



Fuente: https://www.mathsisfun.com/

Curvas diferenciables en $\mathbb{R}^n$

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

Sea una curva $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y sea $\Phi: J \longrightarrow I$ un difeomorfismo, se dice que $\beta: J \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\beta = \alpha \circ \Phi$, es una **reparametrización** de α.

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{c} t \in I \\ t = t(s) \end{array} \arrow[rr, "\alpha"] & & \mathbb{R}^n \\
& & \\
s \in J \arrow[uu, "\Phi"] \arrow[uurr, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}
$$

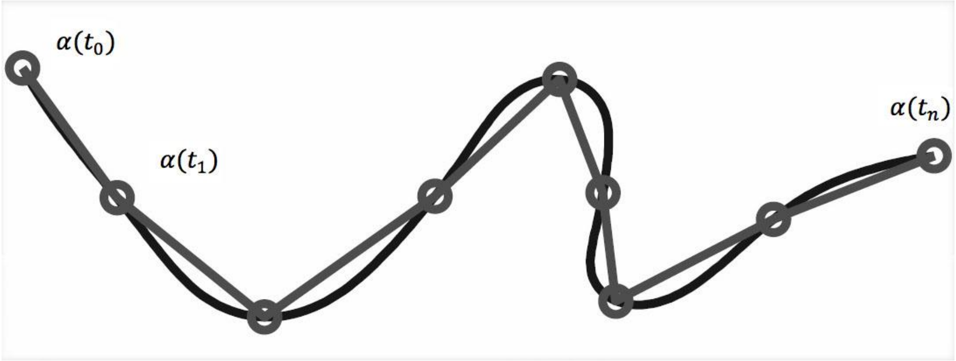
β es es una reparametrización de α, entonces sus trazas coinciden

Curvas diferenciables en $\mathbb{R}^n$

Llamamos **longitud** de una curva $\alpha: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $L(\alpha)_{a,b} = \int_a^b ||\alpha'(\tau)||d\tau$

Longitud aproximada: $\sum_{i=0}^{n} \left|\left|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\right|\right|$. Se toman límites

La longitud no varía por reparametrizaciones



Fuente: http://popista.com/

Curvas diferenciables en $\mathbb{R}^n$

- Llamamos **vector tangente** a $\alpha(t)$ en t_0 a $\alpha'(t_0)$.

- Llamamos **recta tangente** a $\alpha(t)$ en t_0 a la recta que pasa por $\alpha(t_0)$ y tiene a $\alpha'(t_0)$ como vector director ($\alpha'(t_0) \neq 0$)

Curvas diferenciables en $\mathbb{R}^n$

Sea una curva $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$:

- Decimos que t_0 es un **punto singular** α si $\alpha'(t_0) = 0$
- α es **regular** si $\alpha'(t_0) \neq 0 \forall\, t \in I$
- Decimos que α está **parametrizada por arco** si $||\alpha'(t)|| = 1, \forall\, t \in I$

Curvas diferenciables en $\mathbb{R}^n$

Si α está PPA entonces:

$$L(\alpha)_{0,t} = \int_0^t ||\alpha'(\tau)||d\tau = \int_0^t 1 \cdot d\tau = t$$

Si α es una curva diferenciable y regular, siempre vamos a poder definir una reparametrización β

Teoría local de curvas planas

Sin pérdida de generalidad, trabajaremos con curvas PPA

Estudio de cómo se curva α

Llamamos $T(s)$ al vector $T(s) = \alpha'(s)$, que es el **vector tangente**

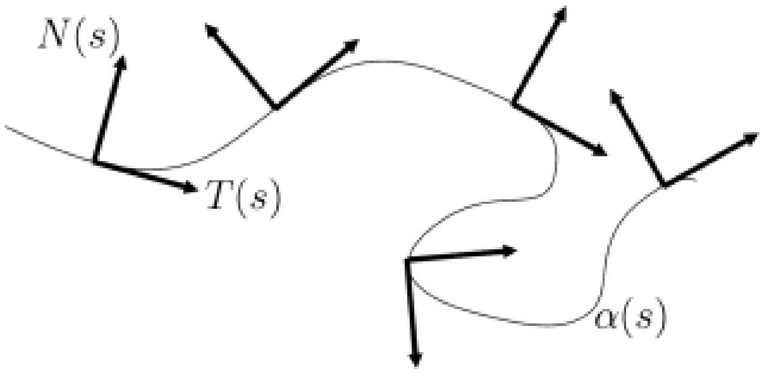
Llamamos $N(s)$ al vector $T(s)$ rotado $\frac{\pi}{2}$, que es el **vector normal**

Teoría local de curvas planas

La base ortonormal $\{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{s}), \boldsymbol{N}(\boldsymbol{s})\}$ se llama **diedro de Frenet** de α en s

Si $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, entonces

$$T(s) = (x'(s), y'(s))$$
$$N(s) = \left(-y'(s), x'(s)\right)$$



Fuente: http://wdb.ugr.es/

Teoría local de curvas planas

Derivando las expresiones

$$\begin{cases} 1. < T, T >= 1 \\ 2. < T, N >= 0 \\ 3. < N, N >= 1 \end{cases}$$

Se llega a

$$T' = kN$$
$$N' = -kT$$

Diedro de Frenet

k tal que $T'(s) = k(s)N(s)$ es la **curvatura** de α

Teoría local de curvas planas

Ejemplo 1: α es una recta, $\alpha(s) = p_0 + sv$

$$\alpha'(s) = T(s) = v$$

$$T'(s) = 0 = 0 \cdot N(s) \Rightarrow \boldsymbol{k = 0}$$

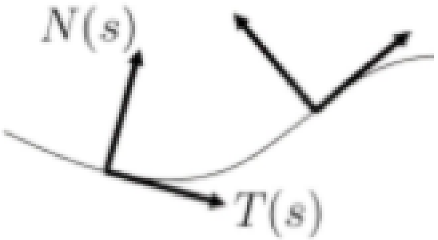
Ejemplo 2: α es una circunferencia,

$$\alpha(s) = \left(r\,cos\left(\frac{s}{r}\right), r\,sen\left(\frac{s}{r}\right)\right) \Longrightarrow T(s) = \left(-\,sen\left(\frac{s}{r}\right), cos\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} T'(s) = \left(-\frac{1}{r}cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r}\,sen\left(\frac{s}{r}\right)\right) \\ N(s) = \left(-cos\left(\frac{s}{r}\right), -sen\left(\frac{s}{r}\right)\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{k(s) = \frac{1}{r}}$$

Teoría local de curvas planas

Si , $k(s) > 0 \Rightarrow < T'(s), N(s) >> 0$, la curva se curva en la dirección de la normal



Fuente: http://wdb.ugr.es/

Si , $k(s) < 0 \Rightarrow < T'(s), N(s) >< 0$, la curva se curva en la dirección opuesta a la normal

Teoría local de curvas planas

Si α es PPA, el extremo del vector $T(s) = (x'(s), y'(s))$ está en la circunferencia unidad.

Así, $T(s) = (cos\theta(s),\ sin\theta(s))$. Derivando,

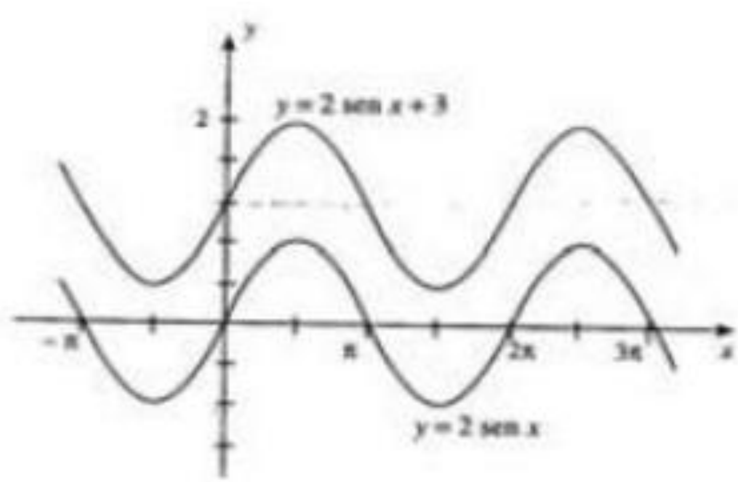
$$\left.\begin{array}{l} T' = \left(-\theta' sin\theta(s), \theta' cos\theta(s)\right) \\ N = \left(-sin\theta(s), cos\theta(s)\right) \end{array}\right\} \Rightarrow k(s) =< T', N >= \theta'$$

Es decir, para cada s, k se puede interpretar como la variación del ángulo que forma $T(s)$ con una dirección fija.

Teoría local de curvas planas

- La curvatura sirve para definir cómo y cuánto se curva α.

- Es posible caracterizar una curva plana conociendo únicamente la función de curvatura, salvo movimientos rígidos



Fuente: http://www.scielo.org.mx/

Teoría local de curvas planas

Sea $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular y sea $\beta: J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ su reparametrización por arco. $\alpha = \alpha(t)$ y $\beta = \beta(s)$.

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c} t \in I \\ t = t(s) \end{array} \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{R}^n \\
s \in J \arrow[u, "\Phi"] \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces, $k_\alpha = k_\beta(s(t))$

Para calcular la curvatura de una curva que no esté parametrizada por arco, en primer lugar hay que calcular su reparametrización y luego asignar a cada punto la curvatura que corresponda según la reparametrización.