Tema 4. Sistemas

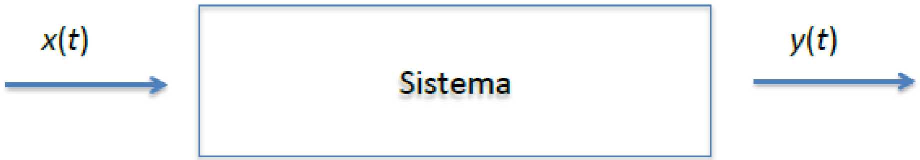
Procesamiento de Señales, Sonido e Imágenes Digitales

Carlos Quemada Mayoral

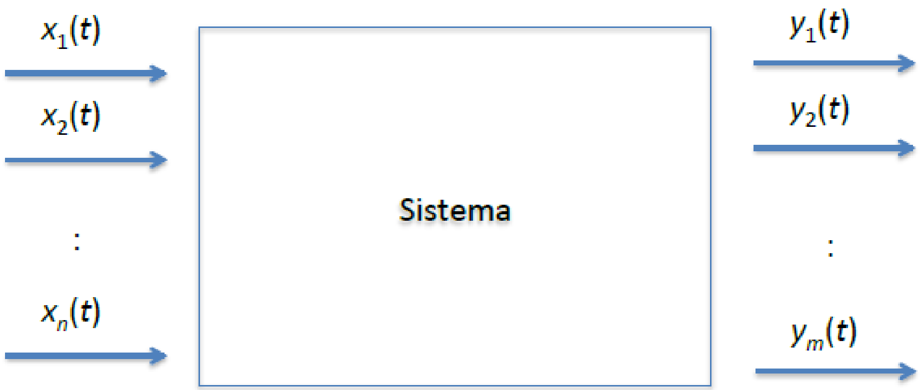
Índice

4.1. Definición

- Un sistema es una **representación matemática de un proceso físico**. Puede tener una entrada y una salida o múltiples entradas y salidas. En esta asignatura nos centraremos en sistemas de una entrada y una salida.
- Un sistema puede ser de tiempo continuo x(y) $\Rightarrow$ y(t) o discreto x[n] $\Rightarrow$ y[n]



(a) Una entrada y una salida



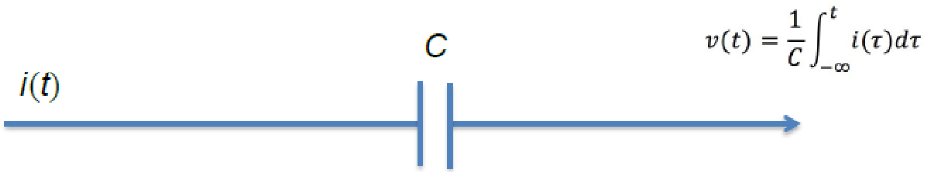
(b) Múltiples entradas y salidas

4.2. Modelización

- Habitualmente los sistemas se modelan mediante **polinomios, integrales, ecuaciones diferenciales (caso continuo) o ecuaciones en diferencias (caso discreto)**. Ejemplos:

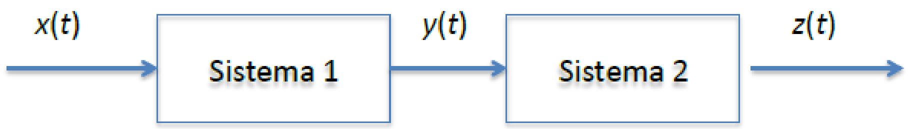
- **Polinomios**. Ley de Ohm ⇒ V(t) = I(t)·R ⇒ y(t) = x(t)·R

- **Integrales**. Tensión de carga de un condensador eléctrico ⇒ $y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

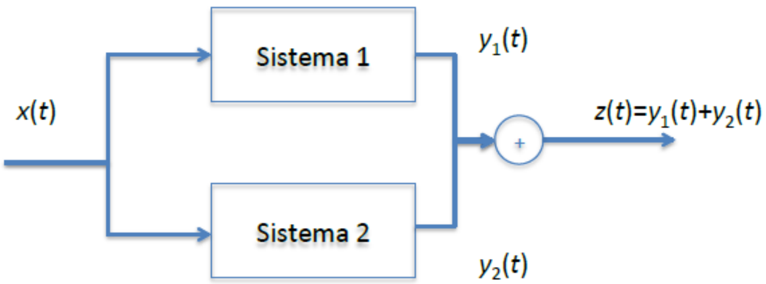


4.3. Diagramas de bloques

- **Forma de representación** de un sistema, varios sistemas o componentes de un sistema que facilita su análisis y visualización.
- **Tipos de conexión entre sistemas**: serie o paralelo.

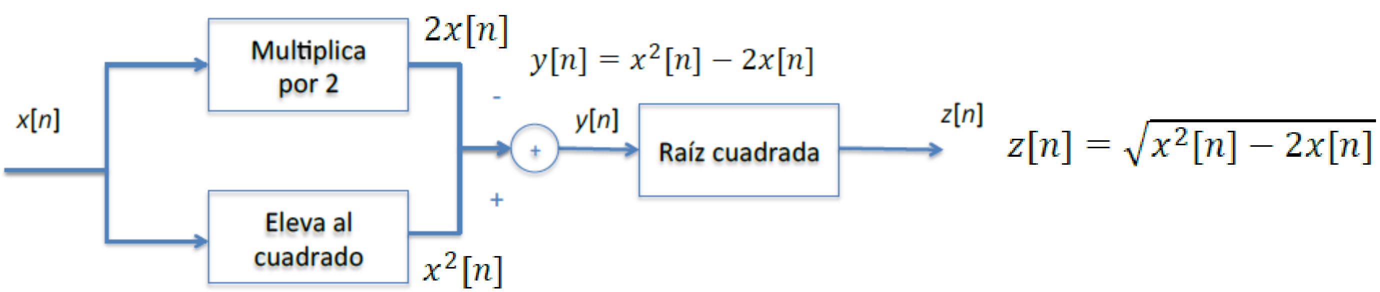


(a) Interconexión en serie



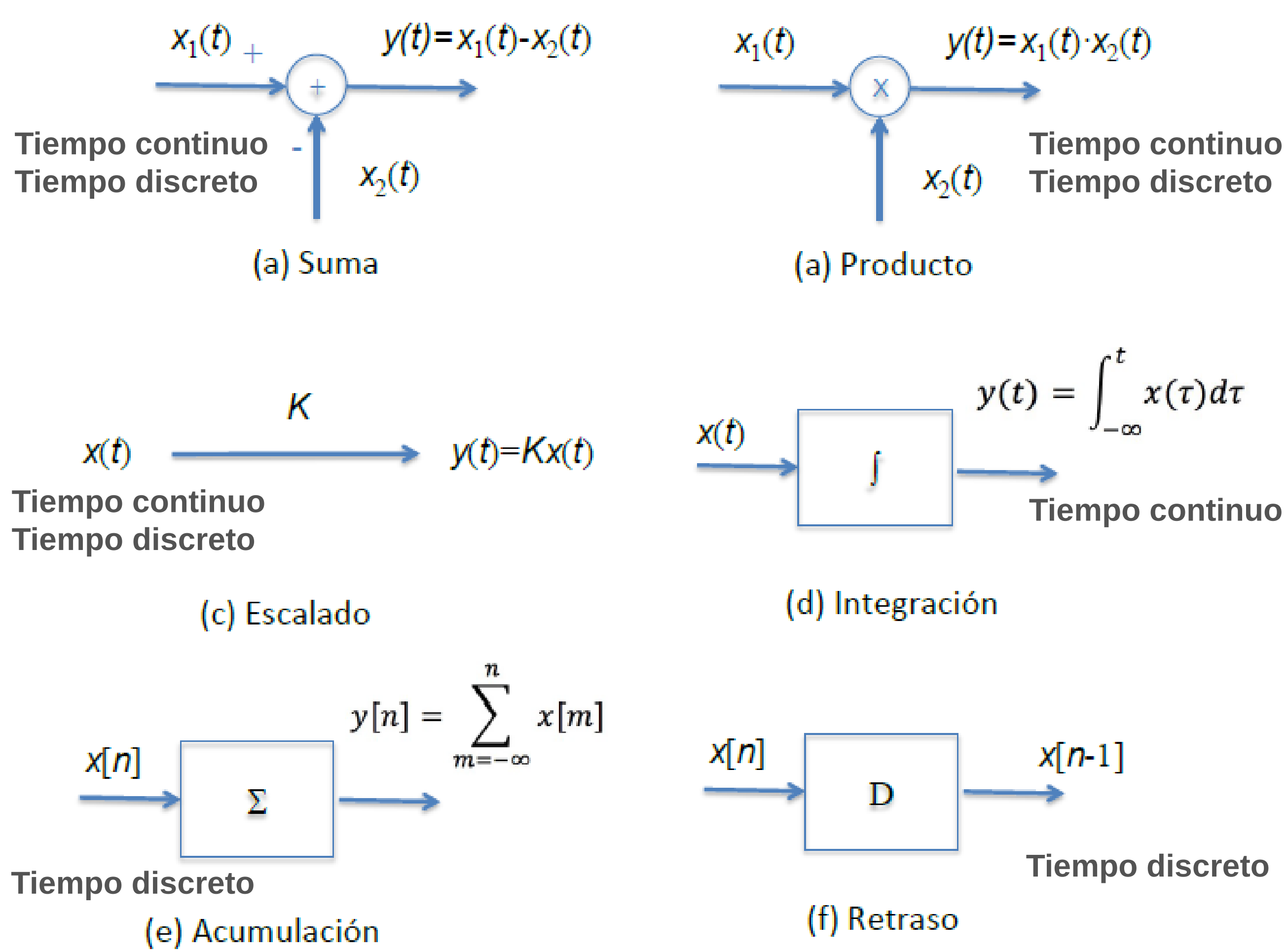
(b) Interconexión en paralelo

- **Ecuación analítica de un sistema**. Ecuación matemática que modeliza al sistema. Ejemplo:



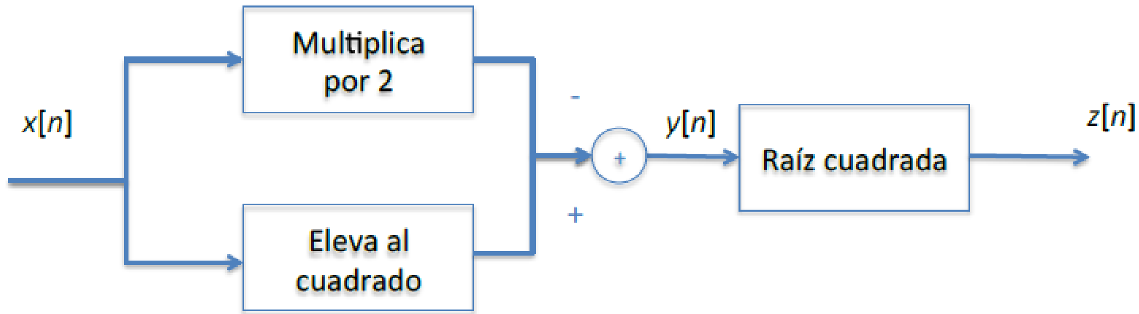
4.3. Diagramas de bloques

- **Bloques estándar**. Bloques que realizan operaciones habituales.

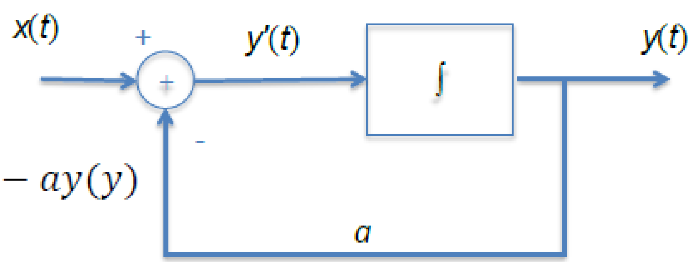


4.3. Diagramas de bloques

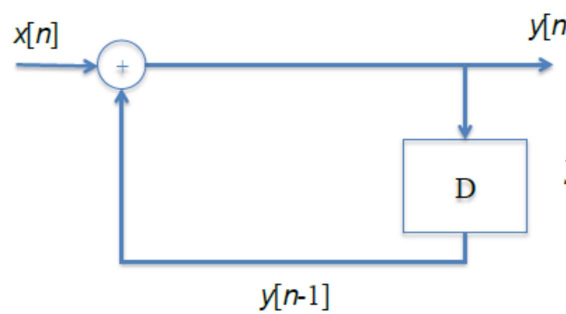
- **Realimentación de sistemas**. Sistemas con y sin realimentación (feedback).
- **Sistemas sin realimentación**. Su salida solo depende de la entrada.



- **Sistemas con realimentación**. Cuando la salida se retroalimenta a un punto anterior del sistema, dependiendo al final del estado del mismo.



$$y'(t) = x(t) - ay(y)$$



$$y[n] = x[n] + y[n-1]$$

Tiempo continuo

Tiempo discreto ⇒ Se debe incluir un retraso

4.4. Propiedades de los sistemas

- **Causalidad**. Un sistema es causal si su salida en cualquier instante de tiempo depende solo de los valores de la entrada en el presente o en el pasado. Ejemplo: $y(t) = x(t-1)$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$$

- A los sistemas no causales también se les llama anticipatorios. Ejemplo:

$$y(t) = x(t+2)$$

- Los sistemas físicos son causales porque no pueden predecir el futuro.

- Ejemplos de sistemas no causales:
  - Sistemas donde la variable independiente no es el tiempo
  - Simuladores que reproducen procesos físicos ya gravados.

4.4. Propiedades de los sistemas

- **Memoria**. Un sistema tiene memoria cuando la salida del sistema depende de valores pasado o futuros de la entrada. Ejemplo:

$$y(t) = x(t-1)$$

$$y[n] = x[n] + x[n+2]$$

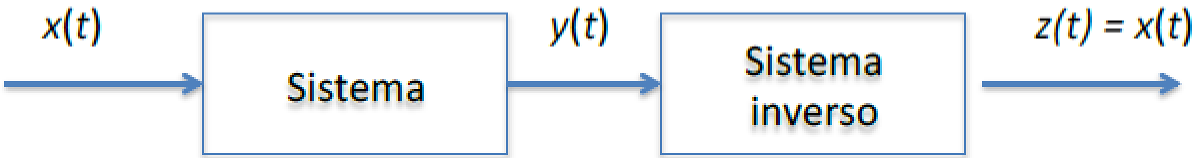
- En un sistema sin memoria la salida solo depende de la entrada actual.

4.4. Propiedades de los sistemas

- **Estabilidad**. Un sistema es estable cuando, si la entrada x(t) está limitada, la salida y(t) está limitada $\Leftrightarrow$ $\text{Si } |x(t)| < A \text{ entonces } \exists B \,/\, |y(t)| < B$
- Ejemplo: $y[n] = \dfrac{1}{2M+1} \displaystyle\sum_{m=-M}^{M} x[n-m]$
- Suponiendo que para cualquier n la entrada x[n] está limitada en magnitud por un valor A, como y[n] es la media de un conjunto finito de 2M+1 valores finitos de la función x[n] $\Rightarrow$ y[n] será igualmente finita.

4.4. Propiedades de los sistemas

- **Invertibilidad**. Un sistema $x(t) \Rightarrow y(t)$ es invertible si existe otro $y(t) \Rightarrow z(t)$ capaz de reproducir a su salida $z(t)$ la entrada del primer sistema $x(t)$.



- El sistema $y(t) = 2x(t)$ es invertible y su sistema inverso es $z(t) = y(t)/2$

4.4. Propiedades de los sistemas

- **Linealidad**. Un sistema es lineal cuando es **escalable** y **aditivo**.
- **Escalable**. Cuando al multiplicar la entrada por una constante a, la salida se multiplica por la misma constante a·x(t) ⇒ a·y(t).
- **Aditivo**. Sabiendo que x1(t) ⇒ y1(t) y que x2(t) ⇒ y2(t), un sistema es aditivo si se cumple x1(t)+x2(t) ⇒ y1(t)+y2(t).
- Por tanto, en un sistema lineal se cumple: a·x1(t)+b·x2(t) ⇒ a·y1(t)+ b·y2(t) con a y b complejos.
- Propiedades de los sistemas lineales:
  - **Superposición**. permite descomponer una señal en combinación lineal de otras señales y analizar su resultado por separado. Es más fácil calcular las salidas de las entradas individuales y luego sumarlas que calcular la salida total debida a todas las entradas individuales juntas.

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + \cdots \Rightarrow y[n] = \sum_k a_k y_k[n] = a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n] + \cdots$$

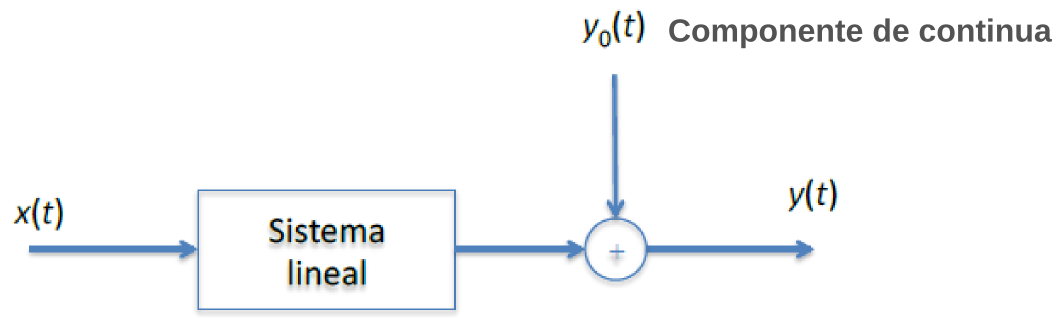
  - **Propiedad de respuesta cero**. Siempre que la excitación sea cero, la respuesta debe de ser cero. Ejemplo:

$$y(t) = 2x(t) + 3 \Rightarrow$$

No es lineal porque cuando la entrada vale cero la salida vale 3. Otra Comprobación: a·x(t) no ⇒ a·y(t). Por tanto, no todos los sistemas representados por ecuaciones lineales son lineales.

4.4. Propiedades de los sistemas

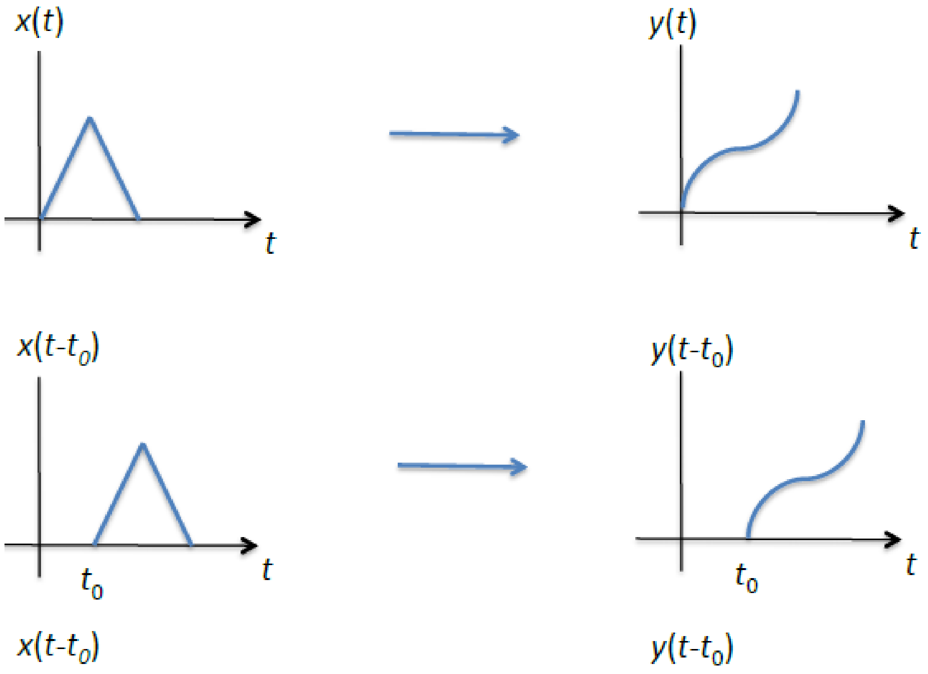
- **Sistema afín.** Cuando puede modelizarse como la suma de un sistema lineal y un valor constante o componente de continua $\Rightarrow$ y(t) = a·x(t) + b



Modelización de un sistema afín con diagramas de bloques

4.4. Propiedades de los sistemas

- **Invarianza temporal**. Un sistema es invariante en el tiempo si un desplazamiento en la señal de entrada causa el mismo desplazamiento en la señal de salida.
- Si $x(t) \Rightarrow y(t)$ entonces $x(t-t_0) \Rightarrow y(t-t_0)$. En tiempo discreto igual.



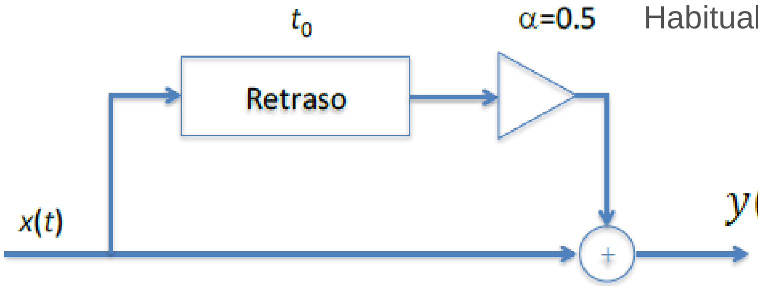
Sistema invariante en el tiempo

4.5. Resonancia

- **Definición**. Conjunto de fenómenos relacionados con movimientos periódicos o casi periódicos en los que se produce un reforzamiento de la oscilación.

- Dicho fenómeno está patente en diferentes campos de la física: acústica, electrónica, campos electromagnéticos, mecánica de fluidos, mecánica de máquinas y mecánica cuántica.

Habitualmente $\alpha < 1$



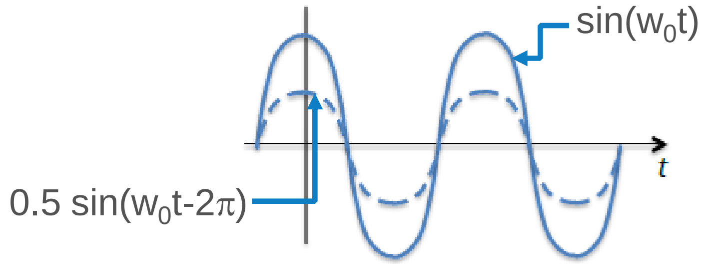
$$y(t) = x(t) + \alpha x(t - t_0)$$

Modelización de un sistema de resonancia

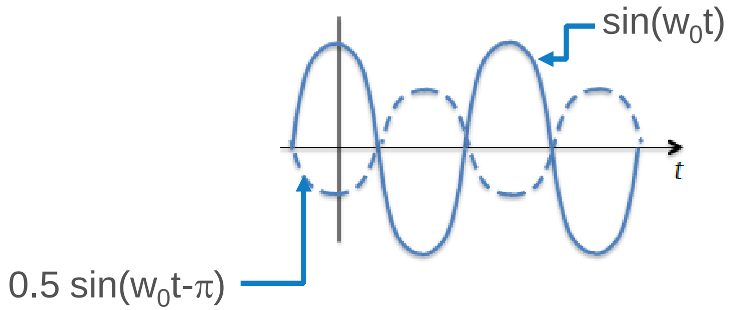
- Dependiendo del valor de t_0, la interferencia entre x(t) y x(t-t_0) será constructiva (aumenta el valor de x(t)) o destructiva (disminuye el valor de x(t))

4.5. Resonancia

- **Ejemplo**. Si $x(t) = \sin(w_0 t) \Rightarrow y(t) = \sin(w_0 t) + 0.5 \sin(w_0 t - w_0 t_0)$
- $w_0 t_0 \equiv$ desfase entre las dos sinusoidales.
- Si $t_0 = 2\pi/w_0$, las sinusoidales están en fase y la interferencia es constructiva



- Si $t_0 = \pi/w_0$, están en contrafase y la interferencia es destructiva



Ejercicio 1

- Determinar si los siguientes sistemas tienen memoria, son estables e invertibles.

$$y(t) = (t-1)x(t)$$

$$y(t) = e^{x(t)}$$

Ejercicio 1

- Determinar si los siguientes sistemas tienen memoria, son estables e invertibles. $y(t) = (t-1)x(t)$

- **Memoria**. Un sistema tiene memoria cuando la salida depende de valores **pasado** o **futuros** de la entrada. $y(t) = x(t-1)$ $\quad y[n] = x[n] + x[n+2]$

- En este caso y(t) depende solo de x(t) y por tanto no tiene memoria.

- **Estabilidad**. Un sistema es estable cuando, si la entrada x(t) está limitada, la salida y(t) está limitada $\Leftrightarrow$ $\text{Si } |x(t)| < A \text{ entonces } \exists B \,/\, |y(t)| < B$

- En este caso, aunque x(t) sea finito, por ejemplo 1, y(t) = t – 1 tenderá a infinito cuando t $\rightarrow \infty$.

- **Invertibilidad**. Un sistema x(t) $\Rightarrow$ y(t) es invertible si existe otro y(t) $\Rightarrow$ z(t) capaz de reproducir a su salida z(t) la entrada del primer sistema x(t).

- Es invertible. Si z(t) = y(t)/(t - 1), se recupera la señal de entrada x(t) del sistema original.

Ejercicio 1

- Determinar si los siguientes sistemas tienen memoria, son estables e invertibles.

$$y(t) = e^{x(t)}$$

- **Memoria**. No tiene memoria.

- En este caso y(t) depende solo de x(t) y por tanto no tiene memoria.

- **Estabilidad**. Es estable.

- Si $|x(t)| < A$ $(-A < x(t) < A)$, entonces $e^{-A} < y(t) < e^{A}$, que es un rango finito.

- **Invertibilidad**. Es invertible.

- $z(t) = \ln(y(t)) = \ln(e^{x(t)}) = x(t)$

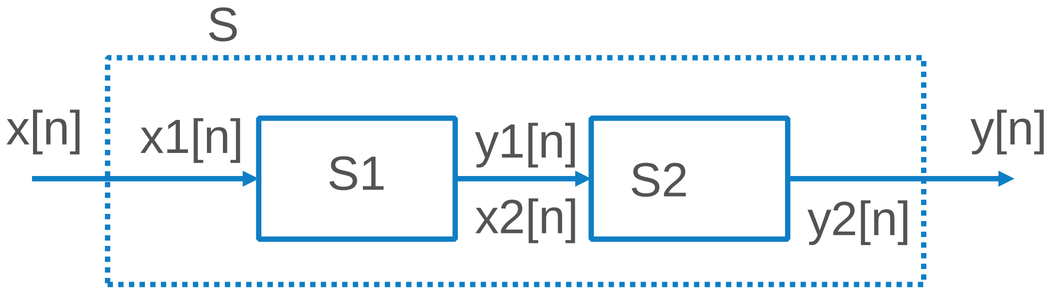
Ejercicios adicionales

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicios 1.15, 1.16**

Ejercicios adicionales

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall

- **Ejercicio 1.15**. Considere el sistema S de la figura formado por dos en cascada S1 y S2.



- Las ecuaciones características de los sistemas S1 y S2 son:

$$S_1: \qquad y_1[n] = 2x_1[n] + 4x_1[n-1],$$

$$S_2: \qquad y_2[n] = x_2[n-2] + \frac{1}{2}x_2[n-3],$$

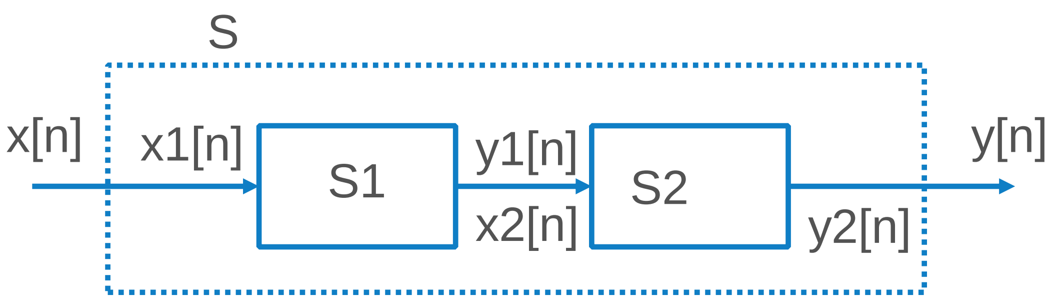
- Determinar la entrada-salida del sistema S.
- ¿Cambia la relación entrada-salida si se invierte el orden de S1 y S2?

Ejercicios adicionales

$$S_1: \quad y_1[n] = 2x_1[n] + 4x_1[n-1],$$

$$S_2: \quad y_2[n] = x_2[n-2] + \frac{1}{2}x_2[n-3],$$

- **Ejercicio 1.15**.



- Debemos apreciar que x[n] = x1[n], y1[n] = x2[n], y2[n] = y[n]

- Usando la ecuación de S2 $\Rightarrow$
- y2[n] = x2[n - 2] + (1/2)x2[n - 3] = y1[n - 2] + (1/2)y1[n - 3]

- Calculando y1[n - 2] y y1[n - 3] en la ecuación de S1 y sustituyendo en S2 $\Rightarrow$
- y2[n] = 2x1[n - 2] + 4x1[n - 3] + x1[n - 3] + 2x1[n - 4] = 2x1[n - 2] + 5x1[n - 3] + 2x1[n - 4]
- Como x(t) = x1(t) y y2(t) = y(t) $\Rightarrow$ y[n] = 2x[n - 2] + 5x[n - 3] + 2x[n - 4]

- Puede demostrarse de la misma forma que intercambiando S1 y S2 de orden el resultado es el mismo. Podéis intentarlo.

Ejercicios adicionales

- **Ejercicio 1.16**. Considere un sistema discreto con entrada x[n] y salida y[n]. La relación entre la entrada y la salida es y[n] = x[n]x[n-2].
- a) ¿El sistema es sin memoria?
- b) Determinar la salida cuando la entrada es Aδ[n], donde A es un número real o complejo.

Ejercicios adicionales

- **Ejercicio 1.16**. $y[n] = x[n]x[n-2]$

- **Memoria**. Un sistema tiene memoria cuando la salida depende de valores **pasado** o **futuros** de la entrada. En este caso depende de valores pasados ($x[n-2]$), luego tiene memoria.

- $y[n] = x[n]x[n-2] = A\delta[n]A\delta[n-2] = 0$, ya que las deltas están desplazadas a posiciones distintas.

Ejercicio 1 (Segunda parte Tema 4)

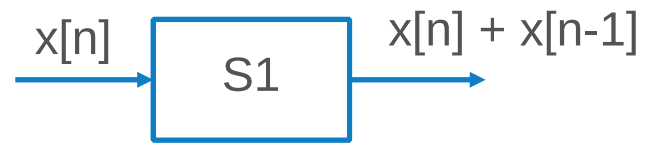
- Estudiar las propiedades de aditividad y escalabilidad (homogeneidad) de los siguientes sistemas.

$$y[n] = x[n] + x[n-1]$$

$$y(t) = \frac{x^2(t)}{x(t-1)}$$

Ejercicio 1 (Segunda parte Tema 4)

$$y[n] = x[n] + x[n-1]$$



- **Escalable**. Cuando al multiplicar la entrada por una constante a, la salida se multiplica por la misma constante $a \cdot x(t) \Rightarrow a \cdot y(t)$.
- **Aditivo**. Sabiendo que $x1(t) \Rightarrow y1(t)$ y que $x2(t) \Rightarrow y2(t)$, un sistema es aditivo si se cumple $x1(t)+x2(t) \Rightarrow y1(t)+y2(t)$.
- **Linealidad**. Un sistema es lineal cuando es **escalable** y **aditivo**.

- Si la entrada es $x_e[n] = c \cdot x[n]$, la salida sería $x_e[n] + x_e[n-1] = c \cdot x[n] + c \cdot x[n-1]$
- Por tanto, $y_e[n] = x_e[n] + x_e[n-1] = c \cdot x[n] + c \cdot x[n-1] = c \cdot (x[n] + x[n-1]) = c \cdot y[n]$
- Por tanto, **es escalable u homogéneo**.

- Si la entrada es $x_a[n] = x1[n] + x2[n]$, la salida sería $x_a[n] + x_a[n-1] = x1[n] + x2[n] + x1[n-1] + x2[n-1] = x1[n] + x1[n-1] + x2[n] + x2[n-1] = y1[n] + y2[n]$
- Por tanto, el sistema **es aditivo**.

- Como es aditivo y escalable, el sistema **es lineal**.

Ejercicio 1 (Segunda parte Tema 4)

$$y(t) = \frac{x^2(t)}{x(t-1)}$$

- **Escalable**. Cuando al multiplicar la entrada por una constante a, la salida se multiplica por la misma constante $a \cdot x(t) \Rightarrow a \cdot y(t)$.
- **Aditivo**. Sabiendo que $x1(t) \Rightarrow y1(t)$ y que $x2(t) \Rightarrow y2(t)$, un sistema es aditivo si se cumple $x1(t)+x2(t) \Rightarrow y1(t)+y2(t)$.
- **Linealidad**. Un sistema es lineal cuando es **escalable** y **aditivo**.

- Si la entrada es $x_e(t) = c \cdot x(t)$, la salida sería $x_e^2(t)/x_e(t-1) = c^2 \cdot x^2(t)/c \cdot x(t-1) = c \cdot x^2(t)/x(t-1) = c \cdot y(t)$
- Por tanto, **es escalable u homogéneo**.

- Si la entrada es $x_a(t) = x1(t) + x2(t)$, la salida sería $x_a^2(t)/x_a(t-1) = (x1(t) + x2(t))^2/(x1(t-1) + x2(t-1)) \neq x1^2(t)/x1(t-1) + x2^2(t)/x2(t-1)$
- Por tanto, el sistema **no es aditivo**.

Ejercicio 2 (Segunda parte Tema 4)

- Determinar si los siguientes sistemas son variantes o invariantes en el tiempo

$$y(t) = x(t)\cos(w_0 t)$$

$$y[n] = \frac{1}{M}(x[n] + x[n-1] + \cdots + x[n-M+1]) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} x[n-m]$$

Ejercicio 2 (Segunda parte Tema 4)

- **Invarianza temporal**. Un sistema es invariante en el tiempo si un desplazamiento en la señal de entrada causa el mismo desplazamiento en la señal de salida.
- Si $x(t) \Rightarrow y(t)$ entonces $x(t-t_0) \Rightarrow y(t-t_0)$. En tiempo discreto igual.

$$y(t) = x(t)\cos(w_0 t)$$

- Si la entrada es $x(t-t_0)$, la salida sería $x(t-t_0)\cos(w_0 t) \neq x(t-t_0)\cos(w_0(t-t_0)) = y(t-t_0)$
- Por tanto, es **variante temporal**.

Ejercicio 2 (Segunda parte Tema 4)

- **Invarianza temporal**. Un sistema es invariante en el tiempo si un desplazamiento en la señal de entrada causa el mismo desplazamiento en la señal de salida.
- Si x(t) $\Rightarrow$ y(t) entonces $x(t-t_0) \Rightarrow y(t-t_0)$. En tiempo discreto igual.

$$y[n] = \frac{1}{M}(x[n] + x[n-1] + \cdots + x[n-M+1]) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} x[n-m]$$

- Si la entrada es $x_0[n]=x[n-n_0]$, cada término de la salida se desplaza n_0 unidades

$$y_0[n] = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} x[(n-m)-n_0]$$

- Que es lo mismo que desplazar la salida n_0 unidades $\Rightarrow$ **Sistema invariante**

$$y[n-n_0] = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} x[(n-n_0)-m]$$

Ejercicios adicionales (Segunda parte Tema 4)

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall
- **Ejercicios 1.17, 1.18 y 1.19**

Ejercicios adicionales (Segunda parte Tema 4)

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall

- **Ejercicio 1.17**. Considere el sistema $y(t) = x(\text{sen}(t))$.
- ¿El sistema es causal?
- ¿El sistema es lineal?

- **Causalidad**. Un sistema es causal si su salida en cualquier instante de tiempo depende solo de los valores de la entrada en el presente o en el pasado.
- En este caso, el sistema es **no causal**. Por ejemplo, $y(-\pi) = x(0)$. Para conocer la salida en el instante $t = -\pi$ necesitamos conocer la entrada en $t = 0$, que es un instante futuro.

- **Linealidad**. Sean x1(t) y x2(t) dos entradas cuyas salidas $\Rightarrow$ y1(t) = x1(sen(t)), y2(t) = x2(sen(t))
- Ahora introducimos una combinación lineal de ambas $\Rightarrow$ x3(t) = ax1(t) + bx2(t)
- La salida y3(t) será y3(t) = x3(sen(t)), que consiste en sustituir la t en x3(t) por sen(t).
- Como x3(t) = ax1(t)+bx2(t) $\Rightarrow$ y3(t) = ax1(sen(t))+bx2(sen(t)) = ay1(t) + by2(t)
- Por tanto, es **lineal**.

Ejercicios adicionales (Segunda parte Tema 4)

- Oppenheim, Willsky, Nawab, Señales y sistemas 2ª edición. Prentice Hall

- **Ejercicio 1.19**. Determina si los siguientes sistemas son lineales, invariantes temporales o las dos cosas.
- $y(t) = t^2 x(t-1)$
- $y[n] = x^2[n-2]$
- $y[n] = x[n+1] - x[n-1]$
- $y(t)$ = función impar$\{x(t)\} = Od\{x(t)\} = (x(t) - x(-t))/2$

Ejercicios adicionales (Segunda parte Tema 4)

- $y(t) = t^2 x(t-1)$ **Linealidad**

- Sean x1 y x2 dos entradas arbitrarias que producen sendas salidas y1 e y2.

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = t^2 x_1(t-1)$$
$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = t^2 x_2(t-1)$$

- Consideramos ahora una entrada combinación lineal de x1 y x2.

$$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$$

- La salida será $\Rightarrow$ $y_3(t) = t^2 x_3(t-1) = t^2 (a x_1(t-1) + b x_2(t-1)) = a y_1(t) + b y_2(t)$

- Por tanto, el sistema **es lineal**.

Ejercicios adicionales (Segunda parte Tema 4)

- $y(t) = t^2x(t-1)$ **Invarianza temporal**
- Considerar una entrada arbitraria x1 cuya salida será $\Rightarrow$ $y_1(t) = t^2 x_1(t-1)$
- Considerar una segunda entrada x2 desplazada t_0 $\Rightarrow$ $x_2(t) = x_1(t - t_0)$
- La correspondiente salida a x2 será $\Rightarrow$ $y_2(t) = t^2 x_2(t-1) = t^2 x_1(t - 1 - t_0)$
- Que debería coincidir con la salida y1(t) desplazada t_0 $\Rightarrow$

$$y_1(t - t_0) = (t - t_0)^2 x_1(t - 1 - t_0) \neq y_2(t)$$

- Como son distintas, el sistema **no es invariante en el tiempo**.

Ejercicios adicionales (Segunda parte Tema 4)

- $y[n] = x^2[n-2]$ **Linealidad**

- Sean x1 y x2 dos entradas arbitrarias que producen sendas salidas y1 e y2.

$$x_1[n] \longrightarrow y_1[n] = x_1^2[n-2]$$
$$x_2[n] \longrightarrow y_2[n] = x_2^2[n-2]$$

- Consideramos ahora una entrada combinación lineal de x1 y x2.

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

- La salida será $\Rightarrow$ $y_3[n] = x_3^2[n-2] = (ax_1[n-2] + bx_2[n-2])^2 \neq ay_1[n] + by_2[n]$

- Por tanto, el sistema **no es lineal**.

Ejercicios adicionales (Segunda parte Tema 4)

- $y[n] = x^2[n-2]$ **Invarianza temporal**
- Considerar una entrada arbitraria x1 cuya salida será $\Rightarrow y_1[n] = x_1^2[n-2]$
- Considerar una segunda entrada x2 desplazada $n_0 \Rightarrow x_2[n] = x_1[n-n_0]$
- La correspondiente salida a x2 será $\Rightarrow y_2[n] = x_2^2[n-2] = x_1^2[n-2-n_0]$
- Que debería coincidir con la salida y1(t) desplazada $n_0 \Rightarrow$

$$y_1[n-n_0] = x_1^2[n-2-n_0]$$

- Como son iguales, el sistema **es invariante en el tiempo**.

Ejercicios adicionales (Segunda parte Tema 4)

- y[n] = x[n+1] - x[n-1] **Linealidad**

- Sean x1 y x2 dos entradas arbitrarias que producen sendas salidas y1 e y2.

$$x_1[n] \longrightarrow y_1[n] = x_1[n+1] - x_1[n-1]$$

$$x_2[n] \longrightarrow y_2[n] = x_2[n+1] - x_2[n-1]$$

- Consideramos ahora una entrada combinación lineal de x1 y x2.

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

- La salida será $\Rightarrow$ $y_3[n] = x_3[n+1] - x_3[n-1] =$

$$= ax_1[n+1] + bx_1[n+1] - ax_1[n-1] - bx_2[n-1] = a(x_1[n+1] - x_1[n-1]) + b(x_2[n+1] - x_2[n-1])$$

$$= ay_1[n] + by_2[n]$$

- Por tanto, el sistema **es lineal**.

Ejercicios adicionales (Segunda parte Tema 4)

- y[n] = x[n+1] - x[n-1] **Invarianza temporal**
- Considerar una entrada x1 cuya salida será ⇒ $y_1[n] = x_1[n+1] - x_1[n-1]$
- Considerar una segunda entrada x2 desplazada n_0 ⇒ $x_2[n] = x_1[n - n_0]$
- La correspondiente salida a x2 será ⇒

$$y_2[n] = x_2[n+1] - x_2[n-1] = x_1[n+1-n_0] - x_1[n-1-n_0]$$

- Que debería coincidir con la salida y1(t) desplazada n_0 ⇒

$$y_1[n-n_0] = x_1[n+1-n_0] - x_1[n-1-n_0]$$

- Como son iguales, el sistema **es invariante en el tiempo**.

Ejercicios adicionales (Segunda parte Tema 4)

- y(t) = función impar{x(t)} = Od{x(t)} = (x(t) - x(-t))/2 **Linealidad**

- Sean x1 y x2 dos entradas arbitrarias que producen sendas salidas y1 e y2.

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = \mathcal{O}d\{x_1(t)\}$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = \mathcal{O}d\{x_2(t)\}$$

- Consideramos ahora una entrada combinación lineal de x1 y x2.

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

- La salida será $\Rightarrow$ $y_3(t) = \mathcal{O}d\{x_3(t)\} = \mathcal{O}d\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = a\mathcal{O}d\{x_1(t)\} + b\mathcal{O}d\{x_2(t)\}$

$= ay_1(t) + by_2(t)$

Es fácil de demostrar

- Por tanto, el sistema **es lineal**.

Ejercicios adicionales (Segunda parte Tema 4)

- y(t) = función impar{x(t)} = Od{x(t)} = (x(t) - x(-t))/2 **Invarianza temporal**
- Considerar una entrada x1 cuya salida será $\Rightarrow$ $y_1(t) = \mathcal{O}d\{x_1(t)\} = \dfrac{x_1(t) - x_1(-t)}{2}$
- Considerar una segunda entrada x2 desplazada n_0 $\Rightarrow$ $x_2(t) = x_1(t - t_0)$
- La correspondiente salida a x2 será $\Rightarrow$

$$y_2(t) = \mathcal{O}d\{x_2(t)\} = \frac{x_2(t) - x_2(-t)}{2} = \frac{x_1(t - t_0) - x_1(-t - t_0)}{2}$$

- Que debería coincidir con la salida y1(t) desplazada t_0 $\Rightarrow$

$$y_1(t - t_0) = \frac{x_1(t - t_0) - x_1(-t + t_0)}{2} \neq y_2(t)$$

- Como no son iguales, el sistema **no es invariante en el tiempo**.

UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

unir

www.unir.net