

SDD: Sistemas complejos

[8.1] ¿Cómo estudiar este tema?

[8.2] Los sistemas complejos

[8.3] Representaciones gráficas de dinámica compleja

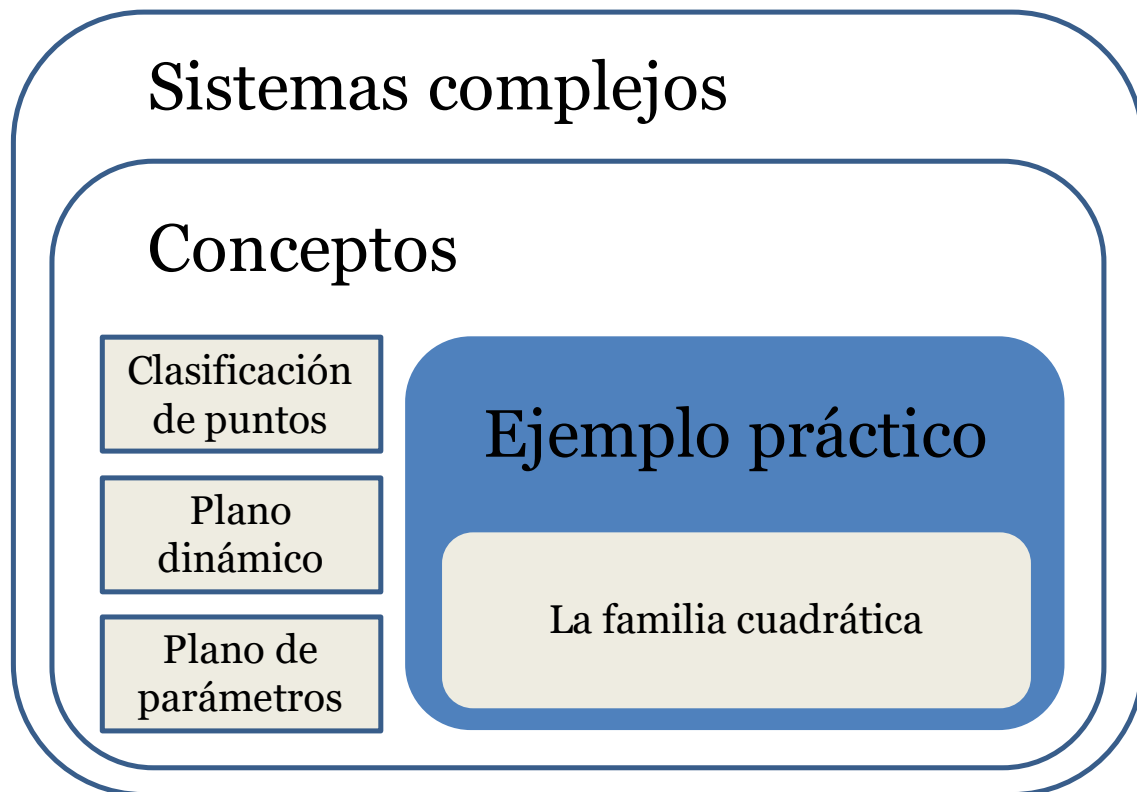
[8.4] La familia cuadrática

[8.5] Referencias bibliográficas

8

T E M A

Esquema



Ideas clave

8.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las **Ideas clave** que encontrarás a continuación.

A lo largo de este tema vamos a estudiar los sistemas dinámicos discretos complejos.

En primer lugar se presentarán este tipo de sistemas introduciendo todos los conceptos básicos asociados necesarios para el análisis y la clasificación de estos sistemas.

A continuación se introducirán una serie de ejemplos que facilitarán la comprensión de los conceptos previos.

Para el estudio de este tema resulta fundamental la asimilación de los conceptos básicos. A partir de ellos, serás capaz de interpretar los planos dinámicos y, con ello, las características de los sistemas dinámicos complejos.

8.2. Los sistemas complejos

Introducción

Los sistemas complejos son aquellos sistemas dinámicos en los que las variables que entran en juego son, precisamente, complejas.

La primera implicación que tiene es que, en lugar de trabajar sobre rectas tendremos que representar nuestros resultados sobre planos. La segunda implicación inmediata es que las ecuaciones no se van a resolver de forma tan sencilla como en el caso real, puesto que debemos tener en cuenta también la parte imaginaria de las soluciones.

Esto, en lugar de generar un problema, lo tenemos que interpretar como que los sistemas complejos atesoran una mayor riqueza dinámica desde el punto de vista de la variabilidad del comportamiento del sistema a partir de un mayor rango de valores.

Las herramientas gráficas que utilizábamos en los sistemas reales no nos van a ser de utilidad, sino que vamos a tener que generar sus equivalencias en sistemas complejos.

Conceptos básicos

Sea $R: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función racional, y sea $z_k \in \mathbb{C}$.

- » Órbita: la órbita de un punto z_0 se define como $\{z_0, R(z_0), \dots, R^n(z_0), \dots\}$.
- » Punto fijo: un punto z_0 es un punto fijo z_0^* si $R(z_0^*) = z_0^*$.
- » Dinámica del punto fijo: un punto fijo z_0^* es atractor/repulsor/neutral si $|R'(z_0^*)|$ es menor/mayor/igual a 1.
Si $|R'(z_0^*)| = 0$, el punto es superatractor.
El valor $|R'(z_0^*)|$ se denomina multiplicador de ese punto fijo.
- » Punto periódico: un punto z_0 es un punto periódico z_0^P si $R^P(z_0^P) = z_0^P$.
- » Punto crítico: un punto z_0 es un punto crítico z_0^C si $|R'(z_0^C)| = 0$ y no coincide con un punto fijo superatractor.
- » Cuenca de atracción: la cuenca de atracción \mathcal{A} de un punto fijo z_0^* es el conjunto de semillas z_0 cuya órbita tiende a z_0^* . Matemáticamente se describe como:

$$\mathcal{A}(z_0^*) = \{z_0 \in \mathbb{C}: R^n(z_0) \rightarrow z_0^*, n \rightarrow \infty\}$$

- » Conjuntos de Fatou y Julia: el conjunto de semillas cuya órbita tiende a un punto fijo se denomina conjunto de Fatou. Por el contrario, el conjunto de semillas que son repelidas conforman el conjunto de Julia y establece las fronteras de las cuencas de atracción.

Para una mejor comprensión de los conceptos, vamos a visualizarlos sobre un ejemplo de plano dinámico.

8.3. Representaciones gráficas de dinámica compleja

El plano dinámico

El plano dinámico es una herramienta gráfica que sintetiza de un vistazo todos los conceptos descritos previamente. En este plano dinámico se representan las partes real e imaginaria de cada uno de los puntos sobre los ejes de abscisas y ordenadas, respectivamente.

El plano dinámico representa el final de la órbita de cada una de las posibles semillas, de modo que tenderán a un punto fijo atractor si son atraídas o hacia el infinito si son repelidas. A cada punto fijo se le asigna un color y, generalmente, al infinito se le asigna el negro.

Cada punto del plano complejo se corresponde con una semilla y se representa con el color del punto fijo al que es atraído o en negro si tiende al infinito.

Esta representación permite, de un vistazo, detectar los puntos fijos, su dinámica, las cuencas de atracción y establecer los conjuntos de Fatou y Julia:

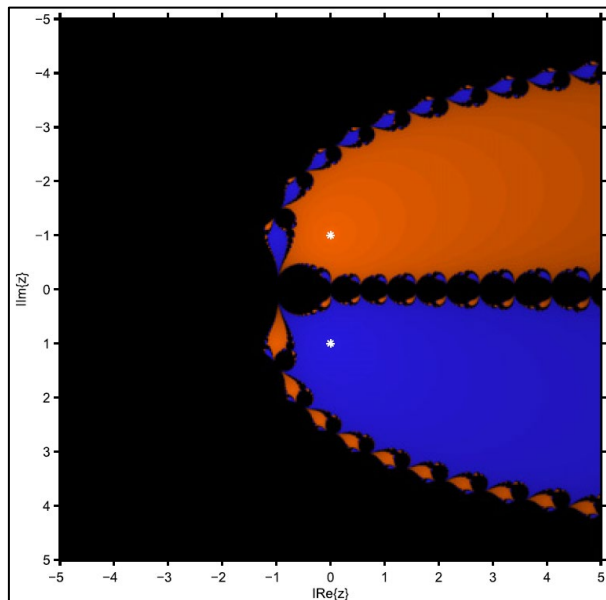


Figura 1. Plano dinámico obtenido de (Chicharro, Cordero, Gutiérrez, & Torregrosa, 2013)

La figura 1 ilustra el plano dinámico de un sistema dinámico discreto complejo. De momento no vamos a entrar en cálculos analíticos para centrarnos en la detección de los conceptos básicos a nivel gráfico, pero sí vamos a indicar que se trata de una expresión sin parámetros.

El estudio se ha realizado para $z_0 \in [-5,5] + i[-5,5]$, como se puede observar en los ejes, representando la parte real en el eje de abscisas y la parte imaginaria en el eje de ordenadas. Con estrellas blancas están representados los puntos fijos, cuyos valores son $z_1^* = i, z_2^* = -i$, siendo sus colores correspondientes el naranja y el azul, respectivamente.

La órbita de cualquier semilla que esté en la cuenca naranja tenderá al punto fijo z_1^* , mientras que las órbitas de las semillas de la cuenca azul tenderán al punto fijo z_2^* . Las órbitas de las semillas de la zona negra tenderán al infinito.

El conjunto de Fatou comprende todos aquellos puntos que no están pintados en negro, mientras que el conjunto de Julia es el complementario. En la figura 2 se ilustran ambos conjuntos, siendo representados en blanco.

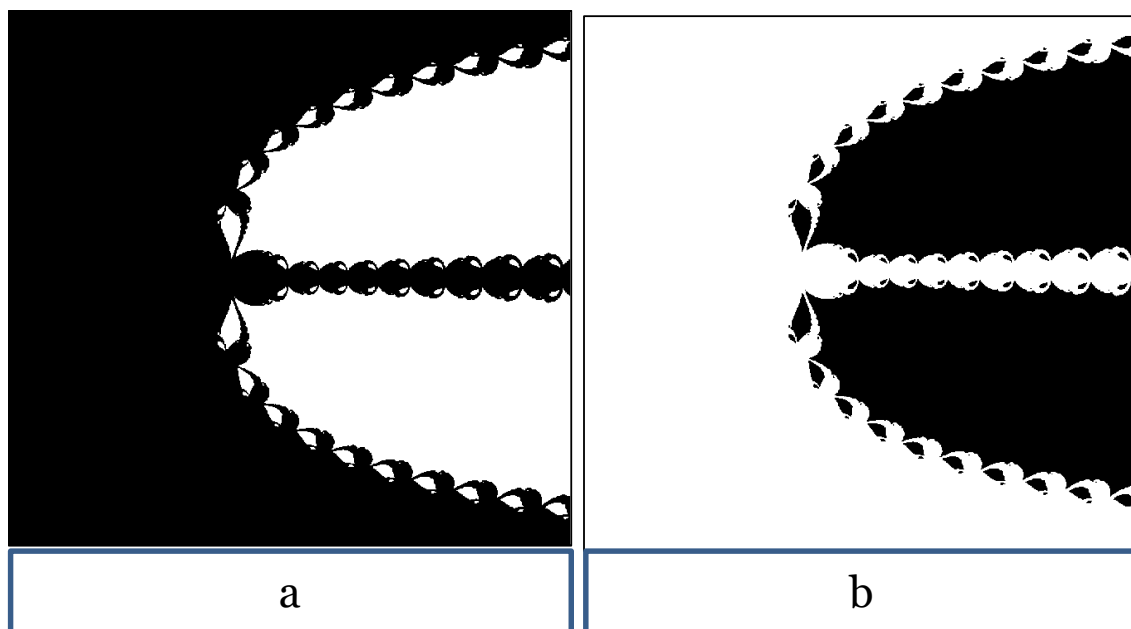


Figura 2. Conjuntos de FATou (a) y Julia (b) del plano dinámico de la figura 1 obtenido de Chicharro, Cordero, Gutiérrez y Torregrosa, 2013

El plano de parámetros

Démosle la vuelta al plano dinámico e interpretemos una nueva variable. Como vimos en el tema anterior, cuando trabajamos sobre familias de funciones entra en juego un parámetro, cuyo valor va a determinar el comportamiento dinámico del sistema.

Es posible conocer el comportamiento a priori del efecto que va a tener el tomar un valor u otro del parámetro, para lo cual se utiliza la herramienta conocida como plano de parámetros.

De forma análoga al plano dinámico, representaremos en el eje de abscisas la parte real del parámetro y en el eje de ordenadas la parte imaginaria. Para cada valor del parámetro representaremos hacia qué punto fijo atractor tiende la órbita de un punto crítico z^c .

La figura 3 representa el plano de parámetros de un sistema en el que varía el parámetro c . Al respecto de este ejemplo, denominaremos a los puntos fijos atractores z_1^* y z_2^* . Para valores de c dentro de la región amarilla, el sistema tiende al punto z_1^* , mientras que los valores de c que están en la región morada, la órbita de z^c tiende al punto z_2^* . El resto de valores, representados en la región rosa, tienden a infinito.

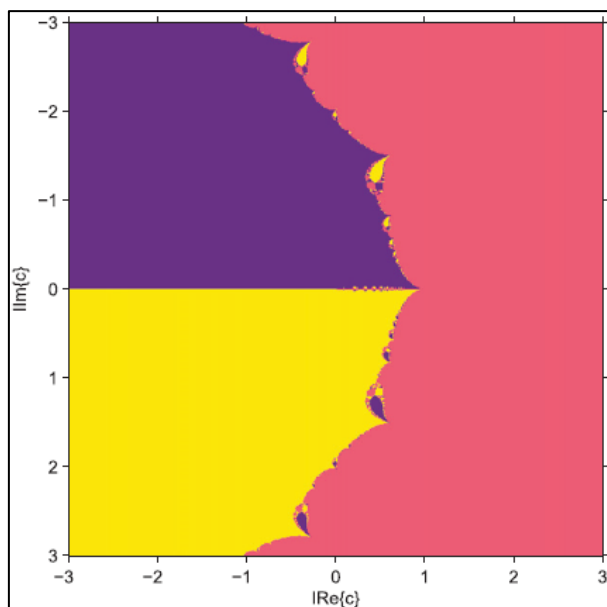


Figura 3. Plano de parámetros obtenido de (Chicharro, Cordero, Gutiérrez, & Torregrosa, 2013)

8.4. La familia cuadrática

Volvamos a trabajar sobre la familia cuadrática, pero en este caso la expresaremos como $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$. Iremos analizando qué ocurre para diferentes valores de λ .

En el caso $\lambda = 0 \rightarrow f_0(z) = z^2$. En el plano real, esta función tiene dos puntos fijos en 0 y 1; sin embargo en el plano complejo no es tan sencillo.

Lo que podemos adivinar de primera mano es que para $|z| < 1$, $f_0^n(z) \rightarrow 0$, para $|z| = 1$, $f_0^n(z) \rightarrow 1$, mientras que para $|z| > 1$, $f_0^n(z) \rightarrow \infty$.

Los puntos fijos son solución de $f_0(z) = z \leftrightarrow z^2 = z \leftrightarrow z^* = \{0, 1\}$. Como $f'_0(z) = 2z$, el punto fijo $z^* = 0$ es superatractor, mientras que el punto fijo $z^* = 1$ es repulsor.

La figura 4 ilustra el plano dinámico de este sistema:

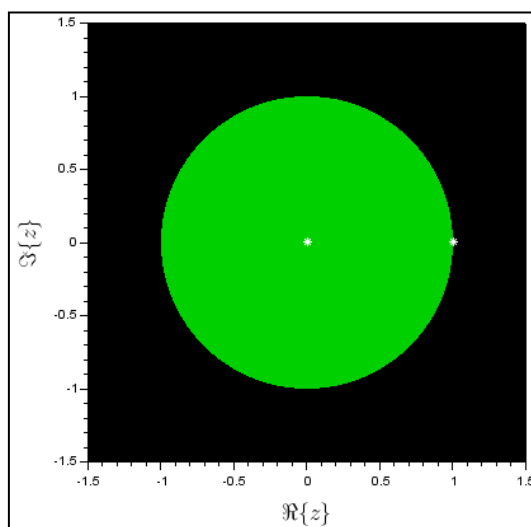


Figura 4. Plano dinámico de $f_0(z) = z^2$

Para el caso general de $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$, volvamos a obtener los puntos fijos:

$$f_\lambda(z) = z \leftrightarrow z^2 - z + \lambda = 0 \leftrightarrow z_{1,2}^* = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda}}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}$$

Se puede observar que los puntos fijos van a ser simétricos respecto del valor $1/2$. Para $\lambda > 1/4$, la simetría será respecto del eje de abscisas, puesto que el radicando es negativo y el valor resultante es imaginario.

Para $\lambda < 1/4$, la simetría será respecto del eje $x = 1/2$, puesto que el radicando es positivo y el valor resultante es real.

A continuación, comprobemos si existen órbitas periódicas de período 2:

$$f_\lambda^2(z) = [f_\lambda(z)]^2 + \lambda = [z^2 + \lambda]^2 + \lambda = z^4 + 2\lambda z^2 + \lambda^2 + \lambda$$

$$f_\lambda^2(z) = z \Leftrightarrow z^4 + 2\lambda z^2 - z + \lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow (z - z_1^*)(z - z_2^*)(z^2 + z + \lambda + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 + z + \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow z_{3,4}^p = \frac{-1 \pm \sqrt{-3 - 4\lambda}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4} - \lambda}$$

Sobre los puntos periódicos podemos hacer un comentario similar al de los puntos fijos en cuanto a la simetría. En este caso respecto a $-1/2$. Para $\lambda > -3/4$ la simetría será respecto del eje de abscisas, mientras que para $\lambda < -3/4$ esta simetría será respecto del eje $x = -1/2$.

La figura 5 representa los planos dinámicos de la función cuadrática para diferentes valores de λ .

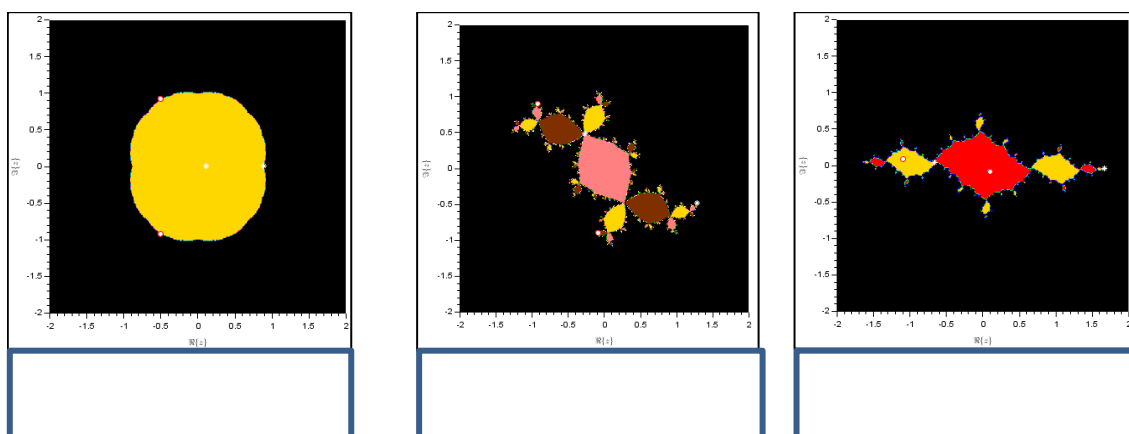


Figura 5. Planos dinámicos de la familia cuadrática para $\lambda = 0.1$ (a), $\lambda = 0.12 + i0.74$ (b) y $\lambda = -1.1 + i0.1$ (c)

Se puede observar que los planos dinámicos no tienen nada que ver entre sí en función de la elección del parámetro λ . Para estos casos, el plano dinámico nos ayudará a predecir el comportamiento.

Para la obtención del plano dinámico es necesario calcular los puntos críticos que no sean superatractores:

$$|f'_c(z)| = 0 \leftrightarrow 2|z| = 0 \leftrightarrow z^c = 0$$

La figura 6 representa el plano de parámetros, compuesto por la órbita del punto $z^c = 0$ para valores de $c \in [-2,2] + i[-2,2]$. En amarillo se representan las órbitas que han convergido, siendo el azul el color de las órbitas que tienden a infinito.

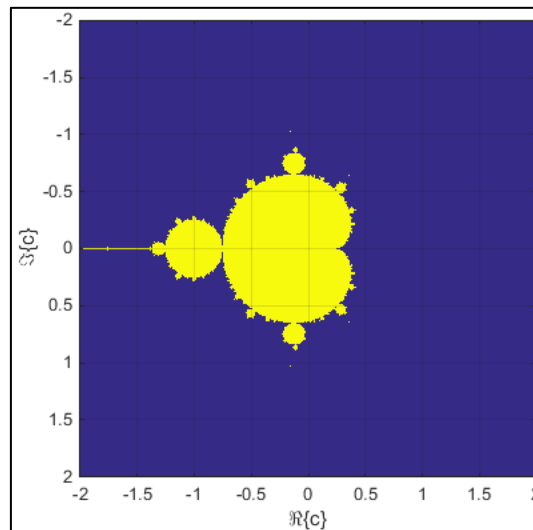


Figura 6. Plano de parámetros de la familia cuadrática

Este plano de parámetros es conocido como el conjunto de Mandelbrot. Existen numerosos estudios al respecto de este conjunto que a continuación vamos a tratar de resumir. Este conjunto se puede descomponer en diferentes partes en función de comportamientos dinámicos comunes.

Cuando nos encontramos dentro del cardiode central, representable por:

$$\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{2\pi it} - \frac{1}{4}e^{4\pi it}, t \in [0, 2\pi]$$

La órbita tiene período 1. En la figura 5a se puede observar que solo existe una componente conexa.

Para el caso en que el valor de c se encuentra en el círculo a la izquierda del cardiode, cuya expresión es:

$$|c + 1| < \frac{1}{4}$$

Nos encontramos en una región en la que las órbitas tienen período dos. La figura 5c muestra un ejemplo de parámetro situado en esta región. Se puede observar cómo en cada punto de conexión aparece una nueva región.

Por último, hablaremos de los dos círculos que se encuentran encima y debajo del cardiode. En estos puntos, la órbita tiene período 3 y comúnmente se denomina **el conejo**. Se puede observar en la figura 5b cómo en los puntos de conexión entre componentes conexas siempre hay tres.

La figura 7 agrupa tanto las tres situaciones que acabamos de describir como otros casos que no se han estudiado.

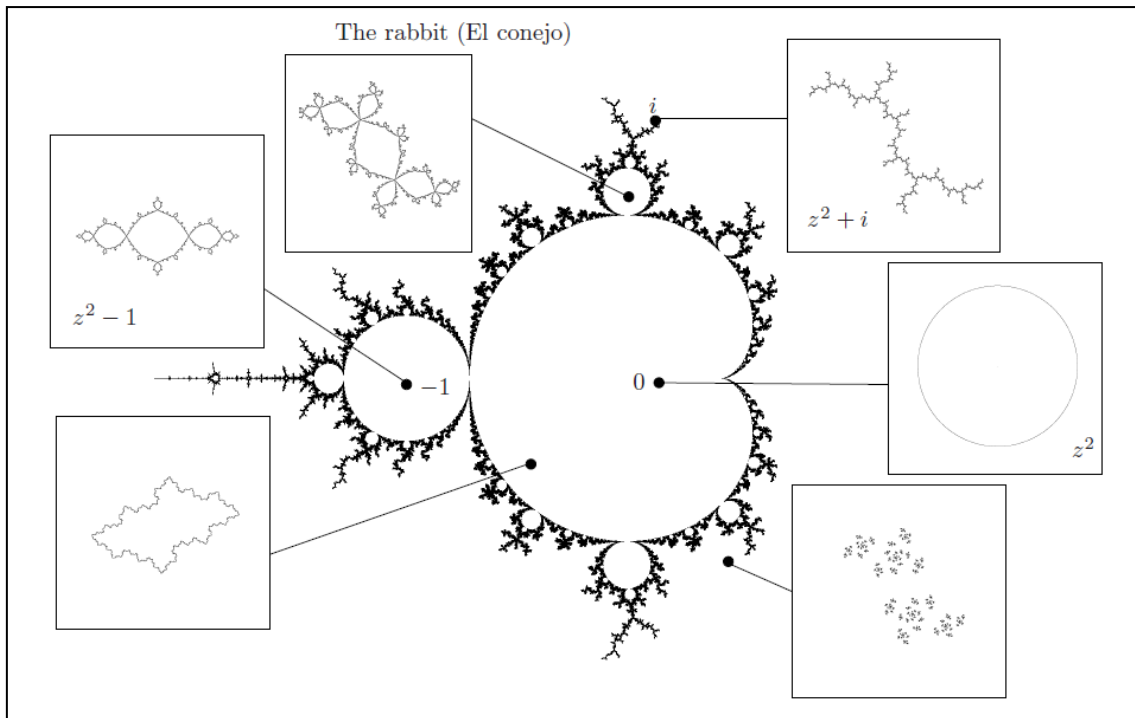


Figura 7. Planos dinámicos asociados a determinados valores de λ para el sistema $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$, obtenido de (Fagella & Jarque, 2007)

8.5. Referencias bibliográficas

Chicharro, F. I., Cordero, A., Gutiérrez, J. M. y Torregrosa, J. R. (2013). *Complex dynamics of derivate-free methods for nonlinear equations. Applied mathematics and computation*. Elsevier.

Devaney, R. L. (1992). *A first course in chaotic dynamical systems*. Universidad de Boston.

Devaney, R. L. (1989). *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley.

Fagella, N. y Jarque, X. (2007). *Iteración compleja y fractales: matemáticas y estadística*. Instituto de Ciencias de la Educación.

Giraldo, A., y Sastre, M. A. (2002). *Sistemas dinámicos discretos y caos*. Universidad Politécnica de Madrid.

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

Conjunto de Mandelbrot

Como hemos visto en el ejemplo de la familia cuadrática, el conjunto de Julia asociado es el conocido conjunto de Mandelbrot. En el tema hemos visto las situaciones correspondientes a tres regiones en particular: el cardioide, la bola izquierda y las bolas superior e inferior. Si nos aproximamos con más detalle, conseguiremos alcanzar zonas en las que se encuentran más ramificaciones, cada vez más complejas. En la lección magistral de este tema profundizaremos sobre el conjunto de Mandelbrot y los planos dinámicos asociados a cada región.

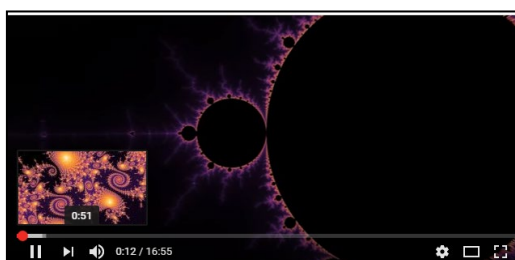


Accede al vídeo desde el aula virtual

No dejes de ver...

Mandelbrot zoom

La evolución de las herramientas de computación permite conseguir mayores definiciones en la obtención de planos dinámicos y de parámetros. La popularidad del conjunto de Mandelbrot ha ayudado a que exista una especie de competición para conseguir alcanzar el mayor zoom de sus ramificaciones. En este vídeo se puede observar un ejemplo de ello.



Accede al vídeo desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

<https://www.youtube.com/watch?v=PD2XgQOyCCk>

+ Información

A fondo

Unveiling the Mandelbrot set

El profesor Robert L. Devaney, cuya extensa bibliografía al respecto de los sistemas dinámicos complejos está presente a lo largo de este curso, tiene en esta página web un desarrollo muy intuitivo de la familia cuadrática.



Accede a la página desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

<https://plus.maths.org/content/unveiling-mandelbrot-set>

Glosario

z_0^* **atractor/repulsor/neutral** $|R'(z_0^*)|$ es menor/mayor/igual a 1.

z_0^* **superatractor** $|R'(z_0^*)| = 0$.

Punto crítico $|R'(z_0^c)| = 0$ y no coincide con un punto fijo superatractor.

Cuenca de atracción de un punto fijo. Conjunto de semillas atraídas por dicho punto fijo.

Conjunto de Fatou. Conjunto de semillas atraídas por todos los puntos fijos del sistema.

Conjunto de Julia. Conjunto de semillas repelidas (o atraídas por el infinito).

Plano dinámico. Representación gráfica en el plano de la variable de las cuencas de atracción.

Plano de parámetros. Representación gráfica en el plano del parámetro del comportamiento del sistema.

Enlaces relacionados

Benoît Mandelbrot

La investigación de la dinámica compleja estalló en el momento la computación tuvo capacidades suficientes para desarrollar los algoritmos con una precisión suficiente. Es por ello que muchos de los principales investigadores hayan desarrollado sus mejores trabajos en la segunda mitad del siglo XX, a diferencia de las ramas de la ciencia como la mecánica clásica o la electrodinámica.

Es por ello que a muchos de los autores los podemos encontrar en redes sociales, webs corporativas, etc. Sin embargo, no todos han corrido la misma suerte y algunos de ellos ya no están entre nosotros. Es el caso de Mandelbrot, un polaco asentado en EEUU que falleció el 14 de noviembre de 2010. En este artículo se habla de él.

The New York Times

Accede a la página desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

http://www.nytimes.com/2010/10/17/us/17mandelbrot.html?_r=0031

Recursos externos

Creating the Mandelbrot set with a vectorized Scilab algorithm

En esta web se encuentra la explicación de cómo generar el conjunto de Mandelbrot con SciLab (el *software* libre utilizado en las sesiones prácticas). Se señalan los elementos fundamentales, las variables a tener en cuenta y cómo representar gráficamente la matriz.



Accede a la página desde el aula virtual o a través de la siguiente dirección web:

<https://wiki.scilab.org/MandelbrotSet-NaiveVsVectorized>

Test

1. ¿Cuál de los siguientes sistemas dinámicos discretos es complejo?
 - A. $f(x) = x^3 + \lambda x, x \in \mathbb{R}$.
 - B. $f(x) = (\lambda x + i)(\lambda x - i), x \in \mathbb{C}$.
 - C. $f(x) = \cos(\lambda x), x \in \mathbb{R}$.
 - D. Ninguno de los anteriores.

2. Un punto fijo superatractor:
 - A. Es un punto fijo.
 - B. Es un punto fijo atractor.
 - C. Es un punto fijo neutro.
 - D. Todas las anteriores son correctas.

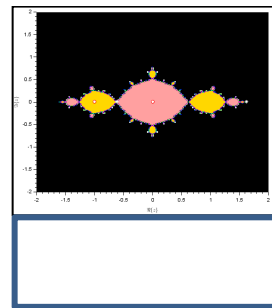
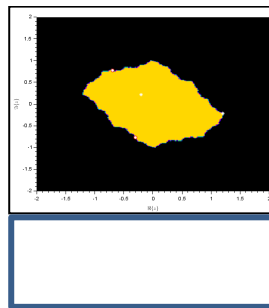
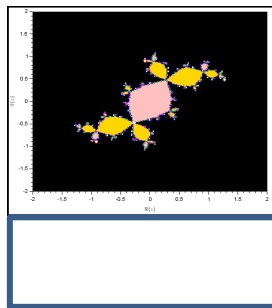
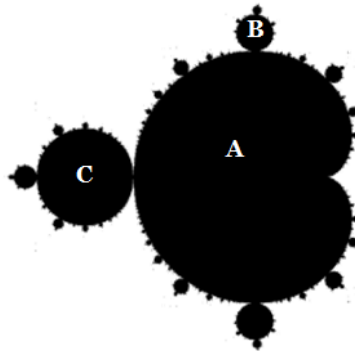
3. La cuenca de atracción de un punto fijo:
 - A. Representa todas las órbitas que pasan en un entorno de él.
 - B. Representa el conjunto de semillas cuya órbita tiende a él.
 - C. Representa los puntos que divergen.
 - D. Ninguna de las anteriores es correcta.

4. Respecto de los conjuntos de Julia J y Fatou \mathcal{F} :
 - A. $J \cup \mathcal{F} = \mathbb{C}$.
 - B. $J \cap \mathcal{F} = \mathbb{C}$.
 - C. $J \cup \mathcal{F} = \emptyset$.
 - D. $J \cap \mathcal{F} = \emptyset$.

5. En un plano de parámetros:
 - A. Se representan diferentes planos dinámicos asociados a determinados parámetros.
 - B. Se representan cómo se comporta el método para un rango determinado de valores que puede tomar el parámetro.
 - C. Se representan las cuencas de atracción de los puntos fijos del sistema.
 - D. Se obtiene a partir de la iteración de un punto crítico que no puede coincidir con un punto superatractor.

6. La familia cuadrática $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$:
- A. Tiene tres puntos fijos.
 - B. Tiene dos puntos críticos.
 - C. Tiene un punto periódico de periodo 2.
 - D. Ninguna de las anteriores es correcta.
7. Para obtener el conjunto de Mandelbrot se itera la función $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$ tomando como semilla:
- A. El valor $z = 0$ para $\lambda \neq 0$.
 - B. El valor de un punto fijo superatractor.
 - C. El valor de un punto repulsor.
 - D. El valor de un punto crítico que no coincida con el superatractor.
8. ¿En qué parte del conjunto de Mandelbrot existen órbitas periódicas del periodo 2?
- A. En el cardioide.
 - B. En la bola centrada en $z = -1$.
 - C. En el conejo.
 - D. Ninguna de las anteriores es correcta.
9. ¿En qué parte del conjunto de Mandelbrot existen órbitas periódicas de periodo 3?
- A. En el cardioide.
 - B. En la bola centrada en $z = -1$.
 - C. En el conejo.
 - D. Ninguna de las anteriores es correcta.

10. Relaciona los siguientes planos dinámicos con la región del conjunto de Mandelbrot al que pertenece el valor del parámetro:



PD2	1
PD1	2
PD3	3

A
B
C