Sesión de examen: instrucciones y preparación

Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos

Dra. Neus Garrido Sàez

Máster en Ingeniería Matemática y Computación
Escuela Superior en Ingeniería y Tecnología

Contenido

1

Evaluación e instrucciones

Evaluación

- Evaluación continua: $40\,\%$
  - Actividades, laboratorios, asistencia a sesiones virtuales, tests.
  - Máximo 15 puntos (satura en 10).
  - Nota mínima: 5.
- Examen: $60\,\%$
  - Online.
  - Obligatorio.
  - Nota mínima: 5.

Instrucciones

1. La duración del examen es de **2 horas**.
2. Escribe únicamente con **bolígrafo/esfero azul o negro**.
3. No está permitido utilizar más hojas de las que te facilita la UNIR (puedes utilizar folios para hacerte esquemas u organizarte pero **se entregarán junto al examen**).
4. **El examen** PRESENCIAL **supone el 60%** de la calificación final de la asignatura. Es necesario aprobar el examen, para tener en cuenta la evaluación continua, aunque esta última sí se guardará para la siguiente convocatoria en caso de no aprobar.
5. No olvides **rellenar EN TODAS LAS HOJAS los datos del cuadro** que hay en la parte superior con tus datos personales.
6. El **DNI/NIE/PASAPORTE debe estar sobre la mesa** y disponible para su posible verificación.
7. **Únicamente se permiten los teléfonos móviles si tienen activado el modo avión.**
8. **Retirar del alcance y visibilidad el smartwatch**.
9. Las preguntas se contestarán en **CASTELLANO**.
10. El profesor tendrá muy en cuenta las **faltas de ortografía** en la calificación final.
11. Se permite el uso de **calculadora científica no programable**.
12. Todas las respuestas deberán estar **debidamente justificadas**.
13. **No se podrán utilizar recursos externos**, tales como apuntes, acceso a internet o similares. El **acceso a internet** queda permitido **únicamente para la descarga y carga del examen en la plataforma de la asignatura**. Si en alguna de las respuestas se detecta un caso de copia de los materiales de la asignatura, de cualquier otra fuente (por ejemplo, internet) o de otros compañeros, el examen tendrá una calificación de 0 puntos, y también la pérdida total de la nota de la evaluación continua.

Instrucciones

1. La duración del examen es de **2 horas**.
2. Escribe únicamente con **bolígrafo/esfero azul o negro**.
3. No está permitido utilizar más hojas de las que te facilita la UNIR (puedes utilizar folios para hacerte esquemas u organizarte pero **se entregarán junto al examen**).
4. **El examen** PRESENCIAL **supone el 60%** de la calificación final de la asignatura. Es necesario aprobar el examen, para tener en cuenta la evaluación continua, aunque esta última sí se guardará para la siguiente convocatoria en caso de no aprobar.
5. No olvides **rellenar EN TODAS LAS HOJAS los datos del cuadro** que hay en la parte superior con tus datos personales.
6. El **DNI/NIE/PASAPORTE debe estar sobre la mesa** y disponible para su posible verificación.
7. **Únicamente se permiten los teléfonos móviles si tienen activado el modo avión.**
8. **Retirar del alcance y visibilidad el smartwatch**.
9. Las preguntas se contestarán en **CASTELLANO**.
10. El profesor tendrá muy en cuenta las **faltas de ortografía** en la calificación final.
11. Se permite el uso de **calculadora científica no programable**.
12. Todas las respuestas deberán estar **debidamente justificadas**.
13. **No se podrán utilizar recursos externos**, tales como apuntes, acceso a internet o similares. El **acceso a internet** queda permitido **únicamente para la descarga y carga del examen en la plataforma de la asignatura**. Si en alguna de las respuestas se detecta un caso de copia de los materiales de la asignatura, de cualquier otra fuente (por ejemplo, internet) o de otros compañeros, el examen tendrá una calificación de 0 puntos, y también la pérdida total de la nota de la evaluación continua.

2

Estructura del examen

Estructura del examen

5 preguntas

- Bloque SDC: $40\,\%$
- Bloque SDD: $60\,\%$

Bloque SDC

- Pregunta 1: cuestión teórico/práctica
- Pregunta 2: estudio SDC

Bloque SDD

- Pregunta 3: estudio SDD
- Pregunta 4: dinámica de un método iterativo
- Pregunta 5: cuestión teórico/práctica

3

Cuestiones de repaso

Los puntos de equilibrio del sistema dinámico continuo $\dot{x} = f(x)$ son aquellos en los cuales

1. $f'(x) = 0$
2. $f''(x) = 0$
3. no existe variación temporal de la magnitud.
4. la variación temporal de la magnitud es continua.

Los puntos de equilibrio del sistema dinámico continuo $\dot{x} = f(x)$ son aquellos en los cuales

1. $f'(x) = 0$
2. $f''(x) = 0$
3. no existe variación temporal de la magnitud.
4. la variación temporal de la magnitud es continua.

Los puntos de equilibrio del sistema dinámico continuo $\dot{x} = f(x)$ son aquellos en los cuales

1. $f'(x) = 0$
2. $f''(x) = 0$
3. no existe variación temporal de la magnitud.
4. la variación temporal de la magnitud es continua.

El plano de fase

1. Representa la estabilidad de los puntos fijos del sistema.
2. Representa un conjunto de órbitas del sistema.
3. Representa un conjunto de soluciones del sistema.
4. Se obtiene multiplicando la matriz Jacobiana del sistema por el punto en el que se quiere calcular la pendiente.

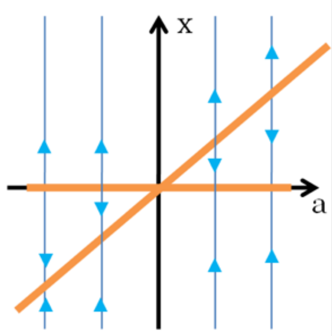
Los puntos de equilibrio del sistema dinámico continuo $\dot{x} = f(x)$ son aquellos en los cuales

1. $f'(x) = 0$
2. $f''(x) = 0$
3. no existe variación temporal de la magnitud.
4. la variación temporal de la magnitud es continua.

El plano de fase

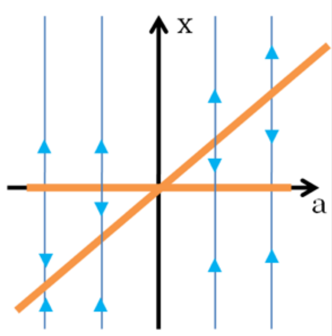
1. Representa la estabilidad de los puntos fijos del sistema.
2. Representa un conjunto de órbitas del sistema.
3. Representa un conjunto de soluciones del sistema.
4. Se obtiene multiplicando la matriz Jacobiana del sistema por el punto en el que se quiere calcular la pendiente.

Dado el diagrama de bifurcación



1. Para $x = a$, $f(x) = 0$.
2. Cuando $a > 0$, los puntos $x = a$ son puntos de equilibrio repulsores.
3. Cuando $a < 0$ el punto de equilibrio $x^* = 0$ es un punto repulsor.
4. Todas las respuestas son correctas.

Dado el diagrama de bifurcación



1. Para $x = a$, $f(x) = 0$.
2. Cuando $a > 0$, los puntos $x = a$ son puntos de equilibrio repulsores.
3. Cuando $a < 0$ el punto de equilibrio $x^* = 0$ es un punto repulsor.
4. Todas las respuestas son correctas.

Si en un sistema no lineal existe un punto de equilibrio **no hiperbólico con valores propios $\lambda_1 = 2i$ y $\lambda_2 = -2i$**

1. El sistema tiene una fuente en un entorno del punto de equilibrio.
2. El sistema tiene un sumidero en un entorno del punto de equilibrio.
3. El sistema tiene un punto de silla en un entorno del punto de equilibrio.
4. No se puede decir nada al respecto del comportamiento del sistema en un entorno del punto de equilibrio.

Si en un sistema no lineal existe un punto de equilibrio **no** hiperbólico con valores propios $\lambda_1 = 2i$ y $\lambda_2 = -2i$

1. El sistema tiene una fuente en un entorno del punto de equilibrio.
2. El sistema tiene un sumidero en un entorno del punto de equilibrio.
3. El sistema tiene un punto de silla en un entorno del punto de equilibrio.
4. No se puede decir nada al respecto del comportamiento del sistema en un entorno del punto de equilibrio.

Si en un sistema no lineal existe un punto de equilibrio no hiperbólico con valores propios $\lambda_1 = 2i$ y $\lambda_2 = -2i$

1. El sistema tiene una fuente en un entorno del punto de equilibrio.
2. El sistema tiene un sumidero en un entorno del punto de equilibrio.
3. El sistema tiene un punto de silla en un entorno del punto de equilibrio.
4. No se puede decir nada al respecto del comportamiento del sistema en un entorno del punto de equilibrio.

Si en un sistema no lineal existe un punto de equilibrio hiperbólico con valores propios $\lambda_1 = 2i$ y $\lambda_2 = -2i$

1. El sistema tiene una fuente en un entorno del punto de equilibrio.
2. El sistema tiene un sumidero en un entorno del punto de equilibrio.
3. El sistema tiene un punto de silla en un entorno del punto de equilibrio.
4. No se puede decir nada al respecto del comportamiento del sistema en un entorno del punto de equilibrio.

Si en un sistema no lineal existe un punto de equilibrio **no hiperbólico con valores propios $\lambda_1 = 2i$ y $\lambda_2 = -2i$**

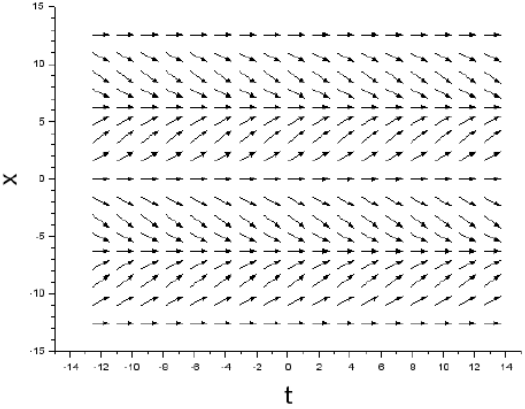
1. El sistema tiene una fuente en un entorno del punto de equilibrio.
2. El sistema tiene un sumidero en un entorno del punto de equilibrio.
3. El sistema tiene un punto de silla en un entorno del punto de equilibrio.
4. No se puede decir nada al respecto del comportamiento del sistema en un entorno del punto de equilibrio.

Si en un sistema no lineal existe un punto de equilibrio hiperbólico con valores propios $\lambda_1 = 2i$ y $\lambda_2 = -2i$

1. El sistema tiene una fuente en un entorno del punto de equilibrio.
2. El sistema tiene un sumidero en un entorno del punto de equilibrio.
3. El sistema tiene un punto de silla en un entorno del punto de equilibrio.
4. No se puede decir nada al respecto del comportamiento del sistema en un entorno del punto de equilibrio.

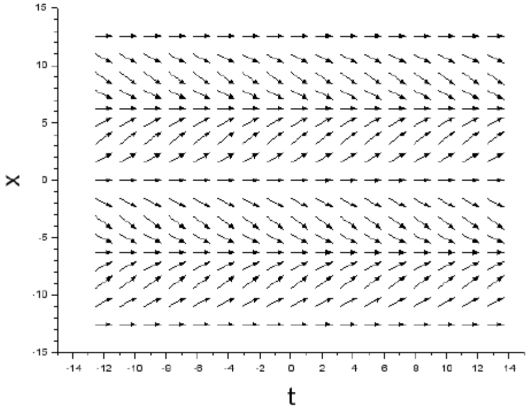
En el campo de direcciones:

1. $x = 0$ es un punto fijo.
2. El único punto de equilibrio se encuentra en $x = 0$.
3. $x = 0$ es un punto de equilibrio atractor.
4. Ninguna respuesta es correcta.

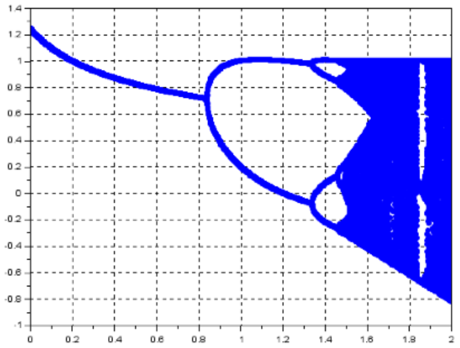


En el campo de direcciones:

1. $x = 0$ es un punto fijo.
2. El único punto de equilibrio se encuentra en $x = 0$.
3. $x = 0$ es un punto de equilibrio atractor.
4. Ninguna respuesta es correcta.

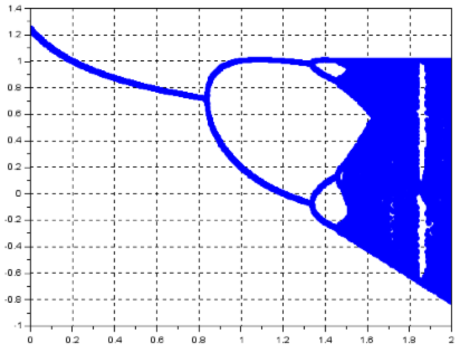


Dado el diagrama de bifurcación



1. En $\lambda = 1$ existe una órbita periódica de periodo 4.
2. En $\lambda = 1.4$ existe una órbita periódica de periodo 4.
3. En $\lambda = 1.2$ no existen órbitas periódicas.
4. En $\lambda = 0.4$ existe un punto fijo repulsor.

Dado el diagrama de bifurcación



1. En $\lambda = 1$ existe una órbita periódica de periodo 4.
2. En $\lambda = 1.4$ existe una órbita periódica de periodo 4.
3. En $\lambda = 1.2$ no existen órbitas periódicas.
4. En $\lambda = 0.4$ existe un punto fijo repulsor.

El plano dinámico

1. Representa la parte real e imaginaria del parámetro de la familia en los ejes de abscisas y ordenadas.
2. Representa el final de la órbita de cada una de las posibles semillas.
3. Representa la convergencia de una familia de métodos iterativos.
4. Todas las afirmaciones son correctas.

El plano dinámico

1. Representa la parte real e imaginaria del parámetro de la familia en los ejes de abscisas y ordenadas.
2. Representa el final de la órbita de cada una de las posibles semillas.
3. Representa la convergencia de una familia de métodos iterativos.
4. Todas las afirmaciones son correctas.

El plano dinámico

1. Representa la parte real e imaginaria del parámetro de la familia en los ejes de abscisas y ordenadas.
2. Representa el final de la órbita de cada una de las posibles semillas.
3. Representa la convergencia de una familia de métodos iterativos.
4. Todas las afirmaciones son correctas.

El plano de parámetros

1. Representa la parte real e imaginaria de cada semilla en los ejes de abscisas y ordenadas.
2. Se obtiene tomando como estimación inicial de cada valor del parámetro un punto crítico del sistema.
3. Representa las cuencas de atracción de los puntos fijos del sistema.
4. Ninguna respuesta es correcta.

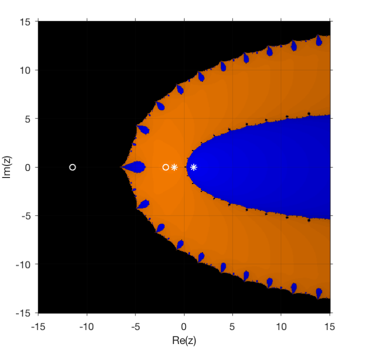
El plano dinámico

1. Representa la parte real e imaginaria del parámetro de la familia en los ejes de abscisas y ordenadas.
2. Representa el final de la órbita de cada una de las posibles semillas.
3. Representa la convergencia de una familia de métodos iterativos.
4. Todas las afirmaciones son correctas.

El plano de parámetros

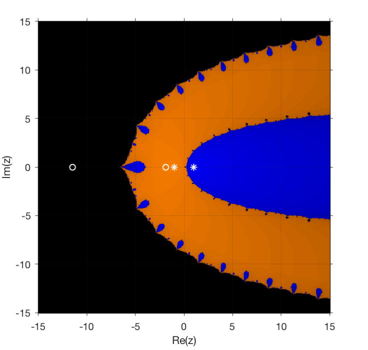
1. Representa la parte real e imaginaria de cada semilla en los ejes de abscisas y ordenadas.
2. Se obtiene tomando como estimación inicial de cada valor del parámetro un punto crítico del sistema.
3. Representa las cuencas de atracción de los puntos fijos del sistema.
4. Ninguna respuesta es correcta.

Dado el plano dinámico



1. El sistema tiene cuatro puntos fijos.
2. Existen dos cuencas de atracción distintas.
3. Existen tres cuencas de atracción distintas.
4. Ninguna respuesta es correcta.

Dado el plano dinámico



1. El sistema tiene cuatro puntos fijos.
2. Existen dos cuencas de atracción distintas.
3. Existen tres cuencas de atracción distintas.
4. Ninguna respuesta es correcta.

4

Ejercicios tipo examen

Contenidos

Ejercicio 1

Enunciado

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 2x - y \\ y' & = & x + 2y \end{array} \right.$$

Calcula:

1. Valores y vectores propios de la matriz del sistema.
2. Solución general del sistema.
3. Puntos fijos.
4. Puntos de equilibrio y estudio dinámico.

Ejercicio 1

1. Valores y vectores propios de la matriz del sistema.

1. Valores y vectores propios de la matriz del sistema.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 2x - y \\ y' & = & x + 2y \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad X' = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1

1. Valores y vectores propios de la matriz del sistema.

$$\left\{\begin{array}{ccc} x' & = & 2x-y \\ y' & = & x+2y \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad X' = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Valores propios: solución de $|A - \lambda I| = 0$

1. Valores y vectores propios de la matriz del sistema.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 2x - y \\ y' & = & x + 2y \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad X' = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Valores propios: solución de $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

Ejercicio 1

1. Valores y vectores propios de la matriz del sistema.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x' & = & 2x - y \\ y' & = & x + 2y \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad X' = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Valores propios: solución de $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm i \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2 - i, \quad \lambda_2 = 2 + i$$

Ejercicio 1

1. Valores y vectores propios de la matriz del sistema.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 2x - y \\ y' & = & x + 2y \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad X' = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Valores propios: solución de $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm i \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2 - i, \quad \lambda_2 = 2 + i$$

Vectores propios: solución de $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$

1. Valores y vectores propios de la matriz del sistema.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 2x - y \\ y' & = & x + 2y \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad X' = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Valores propios: solución de $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm i \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2 - i, \quad \lambda_2 = 2 + i$$

Vectores propios: solución de $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v_1} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1

1. Valores y vectores propios de la matriz del sistema.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 2x - y \\ y' & = & x + 2y \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad X' = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Valores propios: solución de $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm i \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2 - i, \quad \lambda_2 = 2 + i$$

Vectores propios: solución de $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v_1} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Solución general del sistema.

2. Solución general del sistema.

$$X(t) = C_1 X_{Re}(t) + C_2 X_{Im}(t),$$

$$X_{Re}(t) = Re\{e^{\lambda_1 t}\vec{v_1}\}, \quad X_{Im}(t) = Im\{e^{\lambda_1 t}\vec{v_1}\}$$

2. Solución general del sistema.

$$X(t) = C_1 X_{Re}(t) + C_2 X_{Im}(t),$$

$$X_{Re}(t) = Re\{e^{\lambda_1 t}\vec{v_1}\}, \quad X_{Im}(t) = Im\{e^{\lambda_1 t}\vec{v_1}\}$$

Del apartado 1: $\lambda_1 = 2 - i$ y $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Solución general del sistema.

$$X(t) = C_1 X_{Re}(t) + C_2 X_{Im}(t),$$

$$X_{Re}(t) = Re\{e^{\lambda_1 t}\vec{v_1}\}, \quad X_{Im}(t) = Im\{e^{\lambda_1 t}\vec{v_1}\}$$

Del apartado 1: $\lambda_1 = 2 - i$ y $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t}\vec{v_1} &= e^{2t}e^{-it}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t}(\cos(-t) + i\sin(-t))\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t}\begin{pmatrix} -\sin(-t) \\ \cos(-t) \end{pmatrix} + ie^{2t}\begin{pmatrix} -\cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Solución general del sistema.

$$X(t) = C_1 X_{Re}(t) + C_2 X_{Im}(t),$$

$$X_{Re}(t) = Re\{e^{\lambda_1 t}\vec{v_1}\}, \quad X_{Im}(t) = Im\{e^{\lambda_1 t}\vec{v_1}\}$$

Del apartado 1: $\lambda_1 = 2 - i$ y $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t}\vec{v_1} &= e^{2t}e^{-it}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t}(\cos(-t) + i\sin(-t))\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t}\begin{pmatrix} -\sin(-t) \\ \cos(-t) \end{pmatrix} + ie^{2t}\begin{pmatrix} -\cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces,

$$X_{Re}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} -\sin(-t) \\ \cos(-t) \end{pmatrix}, \qquad X_{Im}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} -\cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix}$$

2. Solución general del sistema.

$$X(t) = C_1 X_{Re}(t) + C_2 X_{Im}(t),$$

$$X_{Re}(t) = Re\{e^{\lambda_1 t}\vec{v_1}\}, \quad X_{Im}(t) = Im\{e^{\lambda_1 t}\vec{v_1}\}$$

Del apartado 1: $\lambda_1 = 2 - i$ y $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t}\vec{v_1} &= e^{2t}e^{-it}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t}(\cos(-t) + i\sin(-t))\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t}\begin{pmatrix} -\sin(-t) \\ \cos(-t) \end{pmatrix} + ie^{2t}\begin{pmatrix} -\cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces,

$$X_{Re}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} -\sin(-t) \\ \cos(-t) \end{pmatrix}, \qquad X_{Im}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} -\cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X(t) = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} -\sin(-t) \\ \cos(-t) \end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix} -\cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix}$$

3. Puntos fijos.

3. Puntos fijos.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y & = & x \\ x+2y & = & y \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x=0, y=0 \qquad \boxed{X^F=(0,0)}$$

3. Puntos fijos.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y & = & x \\ x + 2y & = & y \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, y = 0 \qquad \boxed{X^F = (0,0)}$$

4. Puntos de equilibrio y estudio dinámico.

3. Puntos fijos.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y & = & x \\ x + 2y & = & y \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, y = 0 \qquad \boxed{X^F = (0,0)}$$

4. Puntos de equilibrio y estudio dinámico.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y & = & 0 \\ x + 2y & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, y = 0 \qquad \boxed{X^* = (0,0)}$$

Ejercicio 1

3. Puntos fijos.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y & = & x \\ x + 2y & = & y \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, y = 0 \qquad \boxed{X^F = (0,0)}$$

4. Puntos de equilibrio y estudio dinámico.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y & = & 0 \\ x + 2y & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, y = 0 \qquad \boxed{X^* = (0,0)}$$

Del apartado 1: $\lambda_1 = 2 - i$ y $\lambda_2 = 2 + i$

$$Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = 2 > 0$$

3. Puntos fijos.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y & = & x \\ x+2y & = & y \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x=0, y=0 \qquad \boxed{X^F=(0,0)}$$

4. Puntos de equilibrio y estudio dinámico.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y & = & 0 \\ x+2y & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x=0, y=0 \qquad \boxed{X^*=(0,0)}$$

Del apartado 1: $\lambda_1 = 2-i$ y $\lambda_2 = 2+i$

$$Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = 2 > 0$$

$\Rightarrow X^*$ es una espiral fuente

Contenidos

Enunciado

Realiza un estudio dinámico real de la siguiente familia de funciones:

$$f(x) = \frac{-x(x(\delta - 3) + (\delta - 2)\gamma)}{3x + 2\gamma}, \qquad \delta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 2

- Puntos fijos:

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x(x(\delta-3)+(\delta-2)\gamma)}{3x+2\gamma} = x \quad \Leftrightarrow \quad x_1^F = 0, \quad x_2^F = -\gamma$$

Ejercicio 2

- Puntos fijos:

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x(x(\delta-3)+(\delta-2)\gamma)}{3x+2\gamma} = x \quad \Leftrightarrow \quad x_1^F = 0, \quad x_2^F = -\gamma$$

- Estabilidad de los puntos fijos:

$$f'(x) = -\frac{2\gamma^2(\delta-2)+3(\delta-3)x^2+4\gamma(\delta-3)x}{(2\gamma+3x)^2}$$

Ejercicio 2

- Puntos fijos:

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x(x(\delta-3)+(\delta-2)\gamma)}{3x+2\gamma} = x \quad \Leftrightarrow \quad x_1^F = 0, \quad x_2^F = -\gamma$$

- Estabilidad de los puntos fijos:

$$f'(x) = -\frac{2\gamma^2(\delta-2)+3(\delta-3)x^2+4\gamma(\delta-3)x}{(2\gamma+3x)^2} \Rightarrow |f'(x)| \begin{cases} <1 & \Rightarrow \quad \text{atractor} \\ >1 & \Rightarrow \quad \text{repulsor} \\ =1 & \Rightarrow \quad \text{neutro} \end{cases}$$

Ejercicio 2

- Puntos fijos:

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x(x(\delta-3)+(\delta-2)\gamma)}{3x+2\gamma} = x \quad \Leftrightarrow \quad x_1^F = 0, \quad x_2^F = -\gamma$$

- Estabilidad de los puntos fijos:

$$f'(x) = -\frac{2\gamma^2(\delta-2)+3(\delta-3)x^2+4\gamma(\delta-3)x}{(2\gamma+3x)^2} \Rightarrow |f'(x)| \begin{cases} <1 & \Rightarrow \quad \text{atractor} \\ >1 & \Rightarrow \quad \text{repulsor} \\ =1 & \Rightarrow \quad \text{neutro} \end{cases}$$

  - x_1^F:

$$|f'(x_1^F)| = \left|\frac{2-\delta}{2}\right|$$

Ejercicio 2

- Puntos fijos:

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x(x(\delta-3)+(\delta-2)\gamma)}{3x+2\gamma} = x \quad \Leftrightarrow \quad x_1^F = 0, \quad x_2^F = -\gamma$$

- Estabilidad de los puntos fijos:

$$f'(x) = -\frac{2\gamma^2(\delta-2)+3(\delta-3)x^2+4\gamma(\delta-3)x}{(2\gamma+3x)^2} \Rightarrow |f'(x)| \begin{cases} <1 & \Rightarrow \quad \text{atractor} \\ >1 & \Rightarrow \quad \text{repulsor} \\ =1 & \Rightarrow \quad \text{neutro} \end{cases}$$

  - x_1^F:

$$|f'(x_1^F)| = \left|\frac{2-\delta}{2}\right| \Rightarrow \begin{cases} \delta \in (0,4) & \Rightarrow \quad \text{atractor} \\ \delta \in (-\infty,0)\cup(4,+\infty) & \Rightarrow \quad \text{repulsor} \\ \delta = \{\ 0,4\} & \Rightarrow \quad \text{neutro} \end{cases}$$

Ejercicio 2

- Puntos fijos:

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x(x(\delta-3)+(\delta-2)\gamma)}{3x+2\gamma} = x \quad \Leftrightarrow \quad x_1^F = 0, \quad x_2^F = -\gamma$$

- Estabilidad de los puntos fijos:

$$f'(x) = -\frac{2\gamma^2(\delta-2)+3(\delta-3)x^2+4\gamma(\delta-3)x}{(2\gamma+3x)^2} \Rightarrow |f'(x)| \begin{cases} <1 & \Rightarrow \text{atractor} \\ >1 & \Rightarrow \text{repulsor} \\ =1 & \Rightarrow \text{neutro} \end{cases}$$

  - x_1^F:

$$|f'(x_1^F)| = \left|\frac{2-\delta}{2}\right| \Rightarrow \begin{cases} \delta \in (0,4) & \Rightarrow \text{atractor} \\ \delta \in (-\infty,0) \cup (4,+\infty) & \Rightarrow \text{repulsor} \\ \delta = \{\ 0,4\} & \Rightarrow \text{neutro} \end{cases}$$

  - x_2^F:

$$|f'(x_2^F)| = |1-\delta|$$

Ejercicio 2

- Puntos fijos:

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x(x(\delta-3)+(\delta-2)\gamma)}{3x+2\gamma} = x \quad \Leftrightarrow \quad x_1^F = 0, \quad x_2^F = -\gamma$$

- Estabilidad de los puntos fijos:

$$f'(x) = -\frac{2\gamma^2(\delta-2)+3(\delta-3)x^2+4\gamma(\delta-3)x}{(2\gamma+3x)^2} \Rightarrow |f'(x)| \begin{cases} <1 & \Rightarrow & \text{atractor} \\ >1 & \Rightarrow & \text{repulsor} \\ =1 & \Rightarrow & \text{neutro} \end{cases}$$

  - x_1^F:

$$|f'(x_1^F)| = \left|\frac{2-\delta}{2}\right| \Rightarrow \begin{cases} \delta \in (0,4) & \Rightarrow & \text{atractor} \\ \delta \in (-\infty,0)\cup(4,+\infty) & \Rightarrow & \text{repulsor} \\ \delta = \{\ 0,4\} & \Rightarrow & \text{neutro} \end{cases}$$

  - x_2^F:

$$|f'(x_2^F)| = |1-\delta| \Rightarrow \begin{cases} \delta \in (0,2) & \Rightarrow & \text{atractor} \\ \delta \in (-\infty,0)\cup(2,+\infty) & \Rightarrow & \text{repulsor} \\ \delta = \{\ 0,2\} & \Rightarrow & \text{neutro} \end{cases}$$

- Puntos de bifurcación:

$$|f'(x^F)| = 1 \Leftrightarrow \lambda = \{0, 2, 4\}$$

Ejercicio 2

- Puntos de bifurcación:

$$|f'(x^F)| = 1 \Leftrightarrow \lambda = \{0, 2, 4\}$$

- Puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1^C &= -\frac{\sqrt{2}\sqrt{-\gamma^2(\delta-3)\delta} + 2\gamma(\delta-3)}{3(\delta-3)} \\ x_2^C &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{-\gamma^2(\delta-3)\delta} - 2\gamma(\delta-3)}{3(\delta-3)} \end{aligned}$$

Contenidos

Enunciado

Estudia la dinámica compleja del método iterativo NR, obtenido reemplazando la derivada del método de Newton por una diferencia finita regresiva:

1. Obtén el operador de punto fijo tras aplicar el método iterativo sobre la familia cuadrática $p_\lambda(z) = z^2 + 2\lambda z$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Calcula los puntos fijos del operador.
3. Determina la estabilidad de los puntos fijos.
4. Calcula los puntos críticos del operador.

1. Obtén el operador de punto fijo tras aplicar el método iterativo sobre la familia cuadrática $p_\lambda(z) = z^2 + 2\lambda z$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - Método de Newton:
   $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Ejercicio 3

1. Obtén el operador de punto fijo tras aplicar el método iterativo sobre la familia cuadrática $p_\lambda(z) = z^2 + 2\lambda z$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - Método de Newton:
   $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
   - Diferencia finita regresiva:
   $$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x - f(x))}{f(x)}$$

Ejercicio 3

1. Obtén el operador de punto fijo tras aplicar el método iterativo sobre la familia cuadrática $p_\lambda(z) = z^2 + 2\lambda z$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - Método de Newton:
   $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
   - Diferencia finita regresiva:
   $$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x - f(x))}{f(x)}$$
   - Método NR:
   $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)^2}{f(x_k) - f(x_k - f(x_k))}$$

1. Obtén el operador de punto fijo tras aplicar el método iterativo sobre la familia cuadrática $p_\lambda(z) = z^2 + 2\lambda z$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - Método de Newton:
     $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
   - Diferencia finita regresiva:
     $$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x - f(x))}{f(x)}$$
   - Método NR:
     $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)^2}{f(x_k) - f(x_k - f(x_k))}$$
   - Operador de punto fijo:
     $$R_\lambda(z) = z - \frac{p_\lambda(z)^2}{p_\lambda(z) - p_\lambda(z - p_\lambda(z))} = \frac{(z-2)z(z+2\lambda-1)}{z^2 + 2z(\lambda-1) - 2\lambda + 2}$$

2. Calcula los puntos fijos del operador.

2. Calcula los puntos fijos del operador.

$$R_\lambda(z) = z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(z-2)z(z+2\lambda-1)}{z^2+2z(\lambda-1)-2\lambda+2} = z$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1^* = 0, \quad z_2^* = -2\lambda$$

Ejercicio 3

3. Determina la estabilidad de los puntos fijos.

3. Determina la estabilidad de los puntos fijos.

$$R'_\lambda(z) = \frac{z^4 + 4z^3(\lambda - 1) + 2z^2(2\lambda^2 - 6\lambda + 5) - 4z(2\lambda^2 - 5\lambda + 3) + 8\lambda^2 - 12\lambda + 4}{(z^2 + 2z(\lambda - 1) - 2\lambda + 2)^2}$$

Ejercicio 3

3. Determina la estabilidad de los puntos fijos.

$$R'_\lambda(z) = \frac{z^4 + 4z^3(\lambda - 1) + 2z^2(2\lambda^2 - 6\lambda + 5) - 4z(2\lambda^2 - 5\lambda + 3) + 8\lambda^2 - 12\lambda + 4}{(z^2 + 2z(\lambda - 1) - 2\lambda + 2)^2}$$

- $z_1^* = 0$:

3. Determina la estabilidad de los puntos fijos.

$$R'_\lambda(z) = \frac{z^4 + 4z^3(\lambda - 1) + 2z^2(2\lambda^2 - 6\lambda + 5) - 4z(2\lambda^2 - 5\lambda + 3) + 8\lambda^2 - 12\lambda + 4}{(z^2 + 2z(\lambda - 1) - 2\lambda + 2)^2}$$

- $z_1^* = 0$:

$$|R'_\lambda(z_1^*)| = \left| \frac{-1 + 2\lambda}{-1 + \lambda} \right|$$

3. Determina la estabilidad de los puntos fijos.

$$R'_\lambda(z) = \frac{z^4 + 4z^3(\lambda - 1) + 2z^2(2\lambda^2 - 6\lambda + 5) - 4z(2\lambda^2 - 5\lambda + 3) + 8\lambda^2 - 12\lambda + 4}{(z^2 + 2z(\lambda - 1) - 2\lambda + 2)^2}$$

- $z_1^* = 0$:

$$|R'_\lambda(z_1^*)| = \left|\frac{-1 + 2\lambda}{-1 + \lambda}\right| \quad \Rightarrow \begin{cases} \text{atractor si} & \lambda \in \left(0, \frac{2}{3}\right) \\ \text{repulsor si} & \lambda \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right) \\ \text{neutro si} & \lambda = \left\{0, \frac{2}{3}\right\} \end{cases}$$

Ejercicio 3

3. Determina la estabilidad de los puntos fijos.

$$R'_\lambda(z) = \frac{z^4 + 4z^3(\lambda - 1) + 2z^2(2\lambda^2 - 6\lambda + 5) - 4z(2\lambda^2 - 5\lambda + 3) + 8\lambda^2 - 12\lambda + 4}{(z^2 + 2z(\lambda - 1) - 2\lambda + 2)^2}$$

- $z_1^* = 0$:

$$|R'_\lambda(z_1^*)| = \left|\frac{-1 + 2\lambda}{-1 + \lambda}\right| \quad \Rightarrow \begin{cases} \text{atractor si} & \lambda \in \left(0, \frac{2}{3}\right) \\ \text{repulsor si} & \lambda \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right) \\ \text{neutro si} & \lambda = \left\{0, \frac{2}{3}\right\} \end{cases}$$

- $z_2^* = -2\lambda$:

3. Determina la estabilidad de los puntos fijos.

$$R'_\lambda(z) = \frac{z^4 + 4z^3(\lambda-1) + 2z^2(2\lambda^2 - 6\lambda + 5) - 4z(2\lambda^2 - 5\lambda + 3) + 8\lambda^2 - 12\lambda + 4}{(z^2 + 2z(\lambda-1) - 2\lambda + 2)^2}$$

- $z_1^* = 0$:

$$|R'_\lambda(z_1^*)| = \left|\frac{-1+2\lambda}{-1+\lambda}\right| \quad \Rightarrow \begin{cases} \text{atractor si} & \lambda \in \left(0, \frac{2}{3}\right) \\ \text{repulsor si} & \lambda \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right) \\ \text{neutro si} & \lambda = \left\{0, \frac{2}{3}\right\} \end{cases}$$

- $z_2^* = -2\lambda$:

$$|R'_\lambda(z_2^*)| = \left|\frac{1+2\lambda}{1+\lambda}\right|$$

Ejercicio 3

3. Determina la estabilidad de los puntos fijos.

$$R'_\lambda(z) = \frac{z^4 + 4z^3(\lambda - 1) + 2z^2(2\lambda^2 - 6\lambda + 5) - 4z(2\lambda^2 - 5\lambda + 3) + 8\lambda^2 - 12\lambda + 4}{(z^2 + 2z(\lambda - 1) - 2\lambda + 2)^2}$$

- $z_1^* = 0$:

$$|R'_\lambda(z_1^*)| = \left|\frac{-1+2\lambda}{-1+\lambda}\right| \quad \Rightarrow \begin{cases} \text{atractor si} & \lambda \in \left(0, \frac{2}{3}\right) \\ \text{repulsor si} & \lambda \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right) \\ \text{neutro si} & \lambda = \left\{0, \frac{2}{3}\right\} \end{cases}$$

- $z_2^* = -2\lambda$:

$$|R'_\lambda(z_2^*)| = \left|\frac{1+2\lambda}{1+\lambda}\right| \quad \Rightarrow \begin{cases} \text{atractor si} & \lambda \in \left(-\frac{2}{3}, 0\right) \\ \text{repulsor si} & \lambda \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (0, +\infty) \\ \text{neutro si} & \lambda = \left\{-\frac{2}{3}, 0\right\} \end{cases}$$

Ejercicio 3

4. Calcula los puntos críticos del operador.

Ejercicio 3

4. Calcula los puntos críticos del operador.
   Resolviendo $R'_\lambda(z) = 0$:

4. Calcula los puntos críticos del operador.
   Resolviendo $R'_\lambda(z) = 0$:

$$
\begin{aligned}
z_1^C(\lambda) &= 1 - \lambda - \sqrt{-2 + \lambda^2 - \sqrt{5 - 4\lambda^2}},\\
z_2^C(\lambda) &= 1 - \lambda - \sqrt{-2 + \lambda^2 + \sqrt{5 - 4\lambda^2}},\\
z_3^C(\lambda) &= 1 - \lambda + \sqrt{-2 + \lambda^2 - \sqrt{5 - 4\lambda^2}},\\
z_4^C(\lambda) &= 1 - \lambda + \sqrt{-2 + \lambda^2 + \sqrt{5 - 4\lambda^2}},
\end{aligned}
$$

unir

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET