Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Sistemas dinámicos discretos y contínuos.	**Apellidos:** Balsells Orellana	04/05/2021
	Nombre: Jorge Augusto	

Laboratorio 1: Sistemas dinámicos contínuos.

Uno de los sistemas dinámicos continuos caracterizado por su comportamiento caótico es el sistema de Lorenz. Este describe el fenómeno de convección de partículas en movimiento bajo la influencia de cambios en la temperatura. Consideraremos, en esta actividad, la siguiente simplificación del sistema de Lorenz:

$$l = \begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = \rho x - y - xz \\ z' = xy - \beta z \end{cases}$$

donde $x(t)$ representa la intensidad del movimiento de convección e $y(t)$, y $z(y)$, las variaciones horizontal y vertical de las temperaturas, respectivamente, en el instante t. Asimismo, σ, ρ y β y son parámetros positivos que satisfacen $\sigma > \beta + 1$.

1. Ejercicio 1:

- Para $\rho < 1$, calcula los puntos de equilibrio reales del sistema de Lorenz y determina su estabilidad.

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \sigma(y - x) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \rho x - y - xz \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= xy - \beta z \end{aligned} \tag{1}$$

Linealizamos el sistema de Lorenz a través de una matriz jacobiana y luego, le damos valores a ρ y $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ para analizar el punto de equilibrio, como se muestra en la matriz 2.

	$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial z}$
$\frac{\partial x}{\partial t} = \sigma(y-x)$	$-\sigma$	σ	0
$\frac{\partial y}{\partial t} = \rho x - y - xz$	$\rho - z$	-1	$-x$
$\frac{\partial z}{\partial t} = xy - \beta z$	y	x	$-\beta$

$$J(0,0,0) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho < 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \tag{2}$$

Los puntos de equilibrio se muestran en la ecuación 3

$$\begin{gathered} P_1 = (0,0,0) \\ P_2 = (\sqrt{\beta(\rho-1)}, \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1) \\ P_3 = (-\sqrt{\beta(\rho-1)}, -\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1) \end{gathered} \tag{3}$$

Después de operar el sistema matricial 2, obtenemos 3 ecuaciones con 3 incógnitas para los eigenvalores de la matriz. Estos se toman como $|A - \lambda I|$, quedando como la ecuación 4, obteniendo los valores propios.

$$|J_f(x) - \lambda I| = 0 \Longrightarrow \begin{bmatrix} -\sigma-\lambda & \sigma & 0 \\ \rho & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\beta-\lambda \end{bmatrix} \tag{4}$$

Obtenemos los valores del determinante que se aplica en la ecuación 4, quedando como resultado los valores de la ecuación 5.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= u + v - \tfrac{b}{3a} \\
x_2 &= \tfrac{\sqrt{3}}{2}(u - v) - \tfrac{1}{2}(u + v) - \tfrac{b}{3a} \\
x_3 &= -\tfrac{1}{2}(u + v) - \tfrac{b}{3a} - (\tfrac{\sqrt{3}}{2}(u - v))i
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Obteniendo solamente la raíz real, obtenemos la ecuación 6.

$$
\begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\beta-\lambda \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{6}
$$

A partir de este punto, se puede expresar la solución general como la ecuación 7.

$$
x = C_1 * e^{\lambda * t} * \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \lambda = 0 \longrightarrow x = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{7}
$$

```
rho=0:1:30;
beta=2;
sigma=4;

lambda1=(-(sigma+1)+sqrt((sigma+1)^2+(4*sigma*rho)))/2;
lambda2=(-(sigma+1)-sqrt((sigma+1)^2+(4*sigma*rho)))/2;
lambda3 = -beta;
plot(rho,lambda1)
hold on
plot(rho,lambda1)
plot(rho,lambda2)
plot(rho,lambda3)
```

```
        xlabel('rho')
        ylabel('lambda')
```

Listing 1: Código para generar gráfico de estabilidad.

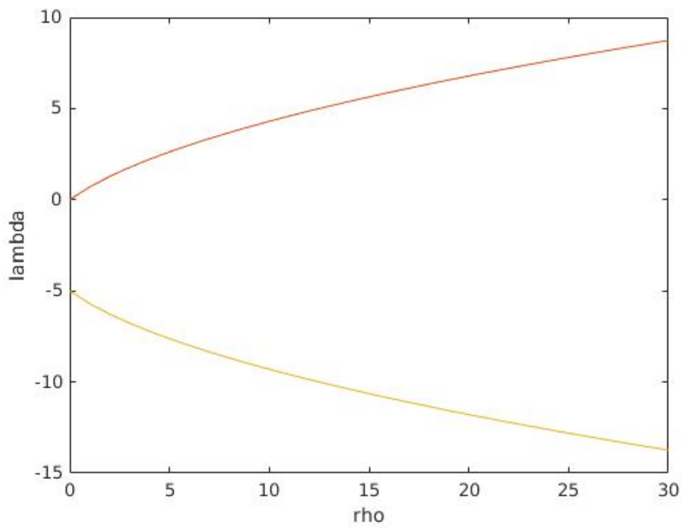

Figura 1: Representación gráfica de estabilidad.

- Consideremos, en el sistema de Lorenz, que $\rho > 1$ y $z' = z = 0$. Determina la solución del sistema lineal resultante de forma analítica y utilizando la función dsolve de MATLAB®. Comprueba que las dos soluciones generales coinciden. Representa el campo de direcciones para tres valores distintos de $\sigma > 0$. Para ello, deberás mostrar las gráficas obtenidas y comentar los resultados alcanzados.

$$\begin{gathered}\lambda_{1,2} = \frac{-(\sigma+1) \pm \sqrt{(\sigma-1)^2 + 4\sigma\rho}}{2} \\ \lambda_3 = -\beta\end{gathered} \tag{8}$$

En la ecuación 4, al ser $\rho < 1$, consideramos el valor de cero, quedando los eigenvalores como se muestran en la ecuación 9.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= -(\sigma+1) \\ \lambda_3 &= -\beta \end{aligned} \tag{9}$$

si se considera que $z' = z = 0$, significa que la última exuación se anula, y los valores de z de las otras ecuaciones también, dejando solamente 2 ecuaciones con 2 variables de la manera en que se expresa en la ecuación 10

$$\begin{aligned} x' &= \sigma(y-x) \\ y' &= x - y - 0 \\ z' &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Aplicamos jacobiano, teniendo como resultado la ecuación 11.

$$J(x) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, x^* = (0,0) \Longrightarrow J(X^*) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, x^* = (0,0) \tag{11}$$

Conociendo $\lambda = 0$, tenemos de resultado la ecuación 12.

$$(J(x^*) - \lambda I)v = 0 \Longrightarrow \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{12}$$

los valores propios de λ los obtenemos aplicando la formula general para resolución de raíces de segundo grado. De igual manera podemos hacerlo por procesos de Gauss-Jordan u otro método para resolución de ecuaciones. Los valores de λ se muestran en la ecuación 13.

$$\lambda_1 = \tfrac{-1-\sigma+1+\sigma}{2} = 0$$
$$\lambda_2 = \tfrac{-2(1+\sigma)}{2} = -1 - \sigma \tag{13}$$

Para $\lambda_1 = 0$, se muestra en la ecuación 14:

$$(J_f(x^*) - \lambda I)v = 0 \Longrightarrow \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{14}$$

Para $\lambda_1 = -1 - \sigma$, se muestra en la ecuación 15:

$$(J_f(x^*) - \lambda I)v = 0 \Longrightarrow \begin{bmatrix} -2\sigma - 1 & \sigma \\ 1 & -2 - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{15}$$

Luego de este proceso, obtenemos que la solución general es la mostrada en la ecuacion 16.

$$X = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 2 + \sigma \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$Y = C_1 + C_2(2 - \sigma)e^{-(1+\lambda)t} \tag{16}$$

La solución general queda definida como se observa en la figura 17.

$$x = C_1 - C_2 \sigma e^{-(1+\sigma)t}$$
$$y = C_1 + C_2 e^{-(1+\sigma)t} \tag{17}$$

Considerando el desarrollo de la solución con DSOLVE de Matlab, se obtiene el código a continuación:

```
syms x(t) y(t) sigma;

```

```
dx = diff(x) == sigma*(y-x);
dy = diff(y) == x-y;

solucion = dsolve([dx,dy]);
disp(solucion.x)
disp(solucion.y)
```

Listing 2: Código para generar la solución numérica en Matlab.

El resultado obtenido es el siguiente:

```
C1 - C2*sigma*exp(-t*(sigma + 1))
C1 + C2*exp(-t*(sigma + 1))
```

Listing 3: Resultado de la solución numérica en Matlab.

A contiinuación, se muestran gráficos con diferentes valores de σ... En este caso consideraremos un σ menor a cero, y 2 mayores a cero. En la figura 4 se muestra el gráfico con $\sigma = 0{,}5$, luego, en la figura **??** se muestra el gráfico con $\sigma = 5$, y por último, en la figura **??** se muestra el gráfico con $\sigma = 9$.

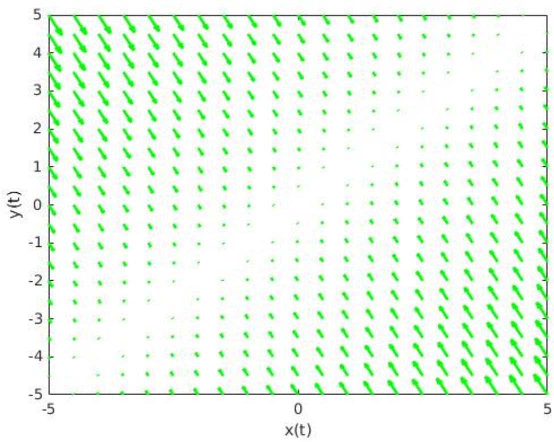

Figura 2: Representación gráfica para $\sigma = 0{,}5$

Analizando la gráfica 5, que representa la estabilidad a partir del sistema linealizado, obtenemos que:

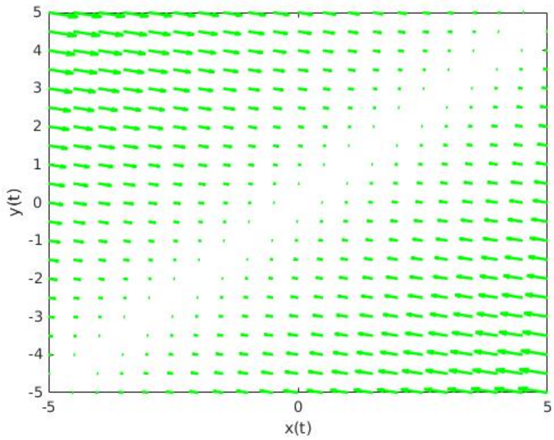

Figura 3: Representación gráfica para $\sigma = 5$

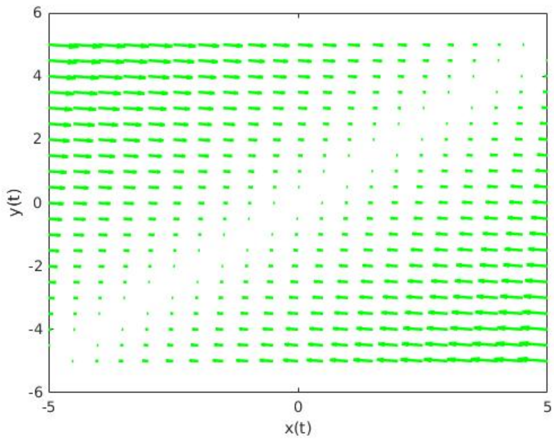

Figura 4: Representación gráfica para $\sigma = 9$

- Nodo estable $\Longrightarrow \lambda_2$ y $\lambda_3 < 0 \forall \rho_i$
- Nodo inestable $\Longrightarrow \lambda_1 > 0 \forall \rho_i$

por lo cual, el nodo es un punto de silla, dado que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

2. Ejercicio 2:

A partir de la solución general obtenida en el ejercicio 1, implementa la función LorenzCD.m que muestre las siguientes gráficas:

- Campo de direcciones del sistema lineal para cualquier valor de $\sigma > 0$ y $[x, y] \in [-5, 5] * [-5, 5]$.

Campo de direcciones con valores de $\sigma > 0$.

```
function LorenzCD(sigma)
    [x,y] = meshgrid(-5:0.5:5,-5:0.5:5);
    A = [-sigma sigma; 1 -1];
    u = A(1,1).*x + A(1,2).*y;
    v = A(2,1).*x + A(2,2).*y;

    figure,
    q = quiver(x,y,u,v,'linewidth',2)
    q.Color = 'red';
    q.MaxHeadSize = 0.8;
    xlabel('x(t)'), ylabel('y(t)')
end
```

Listing 4: Código utilizado para obtener campo de direcciones.

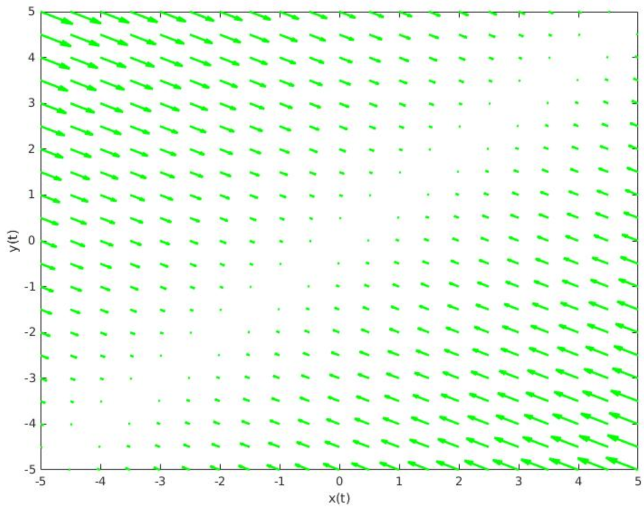

Figura 5: Representación gráfica para $\sigma = 2$

- Solución particular del sistema.

  Se obtiene una solución particular para cada valor de σ, yua que por ahora, hay infinitas soluciones.

Si queremos buscar soluciones con σ como variable, el resto de condiciones deben existir. por lo tanto, tomaremos que $x(0) = 1$ y $y(0) = -1$. De esta manera, nos quedan 2 soluciones como se muestran en la ecuación 18.

$$\begin{aligned} x(0) &: C_1 - C_2\sigma * e^{-(1+\sigma)t} = 1 \\ y(0) &: C_1 + C_2 * e^{-(1-\sigma)t} = -1 \end{aligned} \tag{18}$$

Los resultados de las ecuaciones para C_1 y C_2 son los de la ecuación 19.

$$\begin{aligned} C_1 &= -1 + \tfrac{2}{1+\sigma} \\ C_2 &= -\tfrac{2}{1+\sigma} \end{aligned} \tag{19}$$

Con los resultados de C_1 y C_2 obtenemos las ecuaciones mostradas en 20.

$$\begin{aligned} X &= -1 + \tfrac{2}{1+\sigma}[1 + \sigma e^{-(1+\sigma)t}] \\ Y &= -1 + \tfrac{2}{1+\sigma}[1 - e^{-(1+\sigma)t}] \end{aligned} \tag{20}$$

- Órbita de la solución particular.

Utilizando una condición sobre la solución en un instante t^*, $(x(t^*), y(t^*))$ el programa debe calcular una solución particular del sistema. Por tanto, la función tendrá como variables de entrada el parámetro σ, el instante temporal t^* y los valores de $x(t^*)$ e $y(t^*)$. Con base en estos parámetros, los pasos que debe seguir son los siguientes:

- Representar el campo de direcciones para el valor de σ introducido.

  Evaluando $\sigma = 0{,}3$:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= -1 + \tfrac{20}{13}[1 + 0{,}3e^{-1{,}3t}] \\ y_p(t) &= -1 + \tfrac{20}{13}[1 - e^{-1{,}3t}] \end{aligned} \tag{21}$$

  El campo de direcciones se muestra en la figura 7 con un valor de $\sigma = 3$.

- Calcular la solución particular mediante la utilización de los valores de $\sigma, t^*, x(t^*)$ e $y(t^*)$. Estos

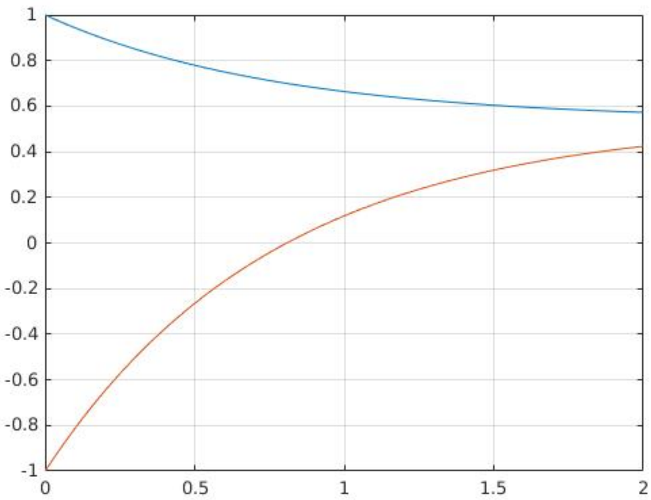

Figura 6: Representación gráfica para $\sigma = 0{,}3$

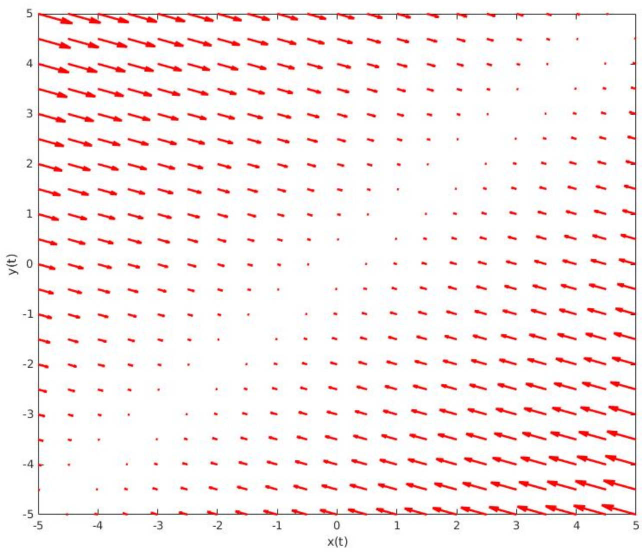

Figura 7: Representación gráfica para $\sigma = 3$

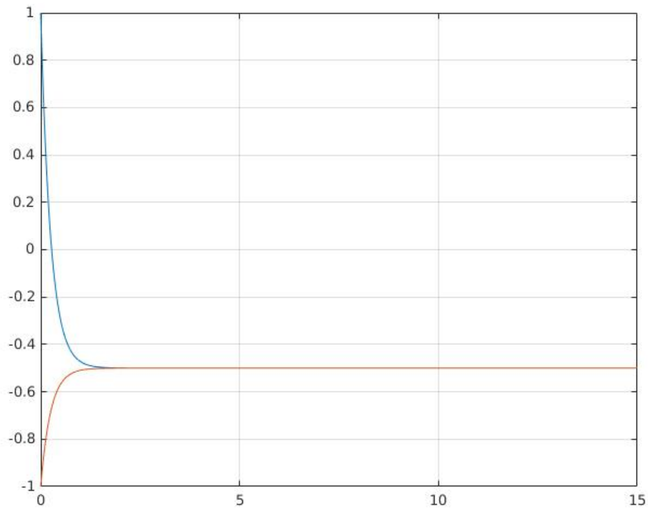

Figura 8: Representación gráfica para la solución particular con $\sigma = 3$

parámetros de entrada se utilizarán para resolver el sistema de dos ecuaciones cuyas incógnitas son las constantes de la solución general.

```
t = 0:0.01:15
X = -1 + (1/2)*(1+3*exp(-4*t));
Y = -1 + (1/2)*(1-exp(-4*t));

plot(t,X)
hold on
plot(t,Y)
grid on
```

Listing 5: Código para graficar la solución particular.

- Tras determinar los valores de las constantes de la solución general, ha de escribir la solución particular obtenida.
- Representar la solución particular.
- Representar la órbita asociada.

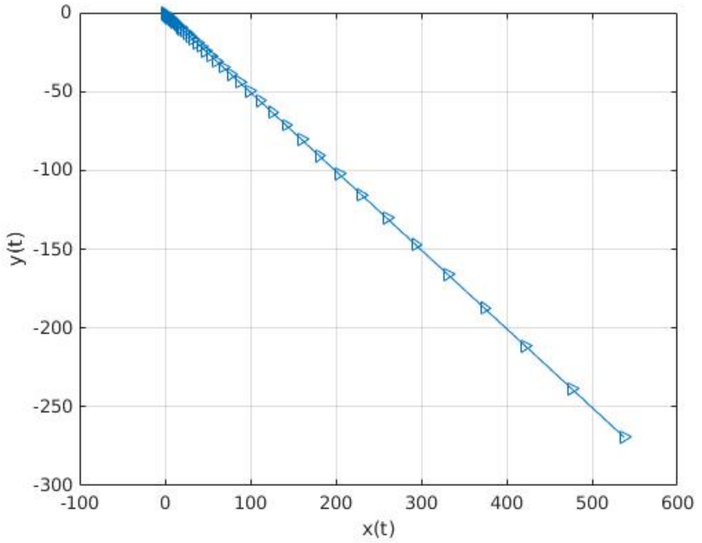

Figura 9: Representación gráfica para órbita con $\sigma = 2$

```
sigma = 20
[x,y]=meshgrid(-5:0.5:5,-5:0.5:5);
A=[-sigma sigma;1 -1];
u=A(1,1).*x+A(1,2).*y;
v=A(2,1).*x+A(2,2).*y;

t=linspace(-2,2);
x=-1+(2/(1+sigma))*(1+sigma*exp(-(1+sigma)*t));
y=-1+(2/(1+sigma))*(1-exp(-(1+sigma)*t));

plot(x,y)
plot(x,y,'->')
grid on
xlabel('x(t)'),ylabel('y(t)')
```

Listing 6: Código para graficar la solución particular y órbita asociada.

Copia el código de la función en este documento y describe brevemente su funcionamiento.

3. Ejercicio 3:

Aplica la función LorenzCD.m con $\sigma = 1$ y $\sigma = 5$. Muestra y describe los resultandos que has alcanzado para las soluciones particulares obtenidas con las siguientes condiciones sobre la solución:

- $(x(0), y(0)) = (0{,}5, 0)$ Siendo la solución general la de la ecuación 22

$$x(t) = C_1 - C_2 \sigma e^{-(1+\sigma)t}$$
$$y(t) = C_1 + C_2 e^{-(1+\sigma)t} \tag{22}$$

Operamos las fuinciones con la información obtenida en el problema, quedando las ecuaciones como se muestran en 23.

$$C_1 - C_2 \sigma e^{-(1+\sigma)*0} = 0{,}5$$
$$C_1 + C_2 e^{-(1+\sigma)*0} = 0 \tag{23}$$

De las ecuaciones 23, despejamos C_1 y C_2, obteniendo como resultado las expresiones de 24.

$$C_1 = \frac{0{,}5}{1+\sigma}$$
$$C_2 = -\frac{0{,}5}{1+\sigma} \tag{24}$$

Teniendo como resultado la solución particular de la ecuación 25.

$$x(t) = \frac{1}{2(1+\sigma)}(1 + \sigma e^{-(1+\sigma)t})$$
$$y(t) = \frac{1}{2(1+\sigma)}(1 - e^{-(1+\sigma)t}) \tag{25}$$

para $\sigma = 1$:

$$x(t) = \frac{1}{3}(1 + e^{-2t})$$
$$y(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-2t}) \tag{26}$$

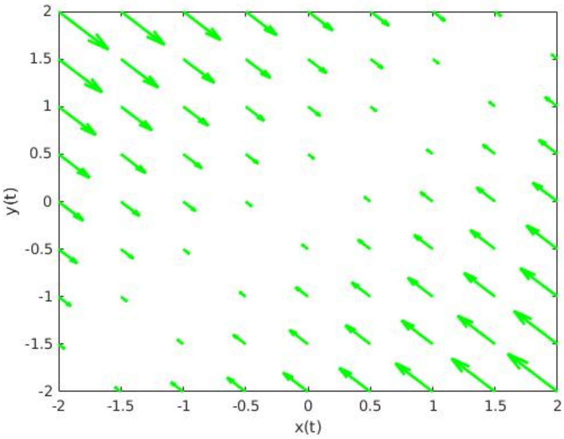

Figura 10: Representación gráfica para campo de direcciones con $\sigma = 1$ obtenido de la ecuación 26

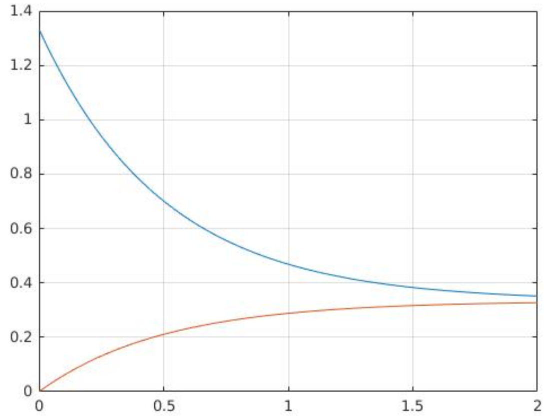

Figura 11: Representación gráfica para solución particular con $\sigma = 1$ obtenido de la ecuación 26

para $\sigma = 5$:

$$x(t) = \frac{1}{7}(1 + 5e^{-6t})$$
$$y(t) = \frac{1}{7}(1 - e^{-6t}) \tag{27}$$

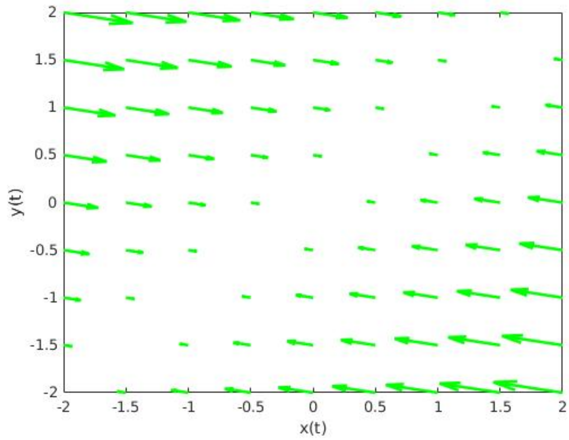

Figura 12: Representación gráfica para campo de direcciones con $\sigma = 5$ obtenido de la ecuación 27

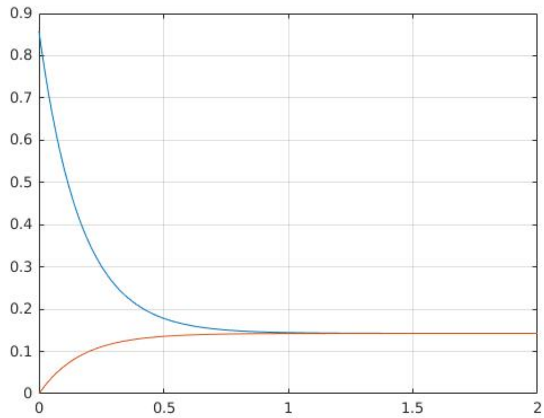

Figura 13: Representación gráfica para solución particular con $\sigma = 5$ obtenido de la ecuación 27

- $(x(1), y(1)) = (2, 1)$ Siendo la solución general la de la ecuación 28

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 - C_2\sigma e^{-(1+\sigma)t} \\ y(t) &= C_1 + C_2 e^{-(1+\sigma)t} \end{aligned} \tag{28}$$

Operamos las fuinciones con la información obtenida en el problema, quedando las ecuaciones como se muestran en 29.

$$C_1 - C_2\sigma e^{-(1+\sigma)*1} = 2$$
$$C_1 + C_2 e^{-(1+\sigma)*1} = 1 \tag{29}$$

De las ecuaciones 29, despejamos C_1 y C_2, obteniendo como resultado las expresiones de 30.

$$C_1 = 1 - \frac{1}{1+\sigma}$$
$$C_2 = \frac{e^{1+\sigma}}{1+\sigma} \tag{30}$$

Teniendo como resultado la solución particular de la ecuación 31.

$$x(t) = 1 - \frac{1}{1+\sigma}(1 - \sigma e^{(1+\sigma)(1-t)})$$
$$y(t) = 1 - \frac{1}{(1+\sigma)}(1 + e^{-(1+\sigma)(1-t)}) \tag{31}$$

para $\sigma = 1$**:**

$$x(t) = 1 - \frac{1}{2}(1 - e^{2(1-t)})$$
$$y(t) = 1 - \frac{1}{2}(1 + e^{(2(1-t))}) \tag{32}$$

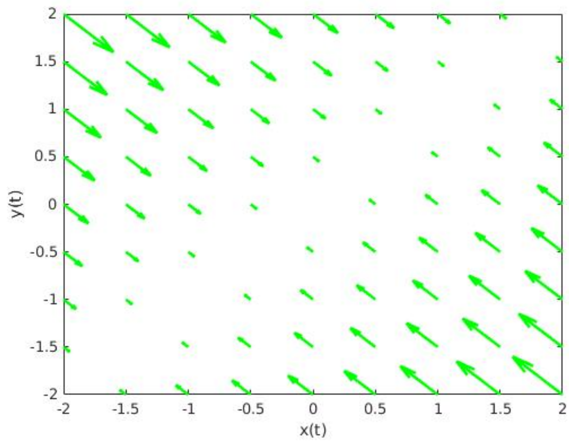

Figura 14: Representación gráfica para campo de direcciones con $\sigma = 1$ obtenido de la ecuación 32

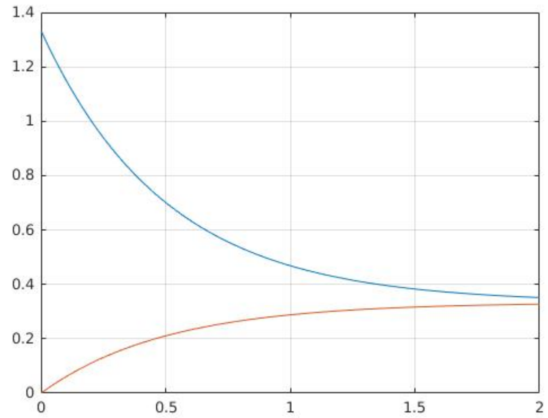

Figura 15: Representación gráfica para solución particular con $\sigma = 1$ obtenido de la ecuación 32

para $\sigma = 5$:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 - \tfrac{1}{6}(1 - 5e^{6(1-t)}) \\ y(t) &= 1 - \tfrac{1}{6}(1 + e^{6(1-t)}) \end{aligned} \tag{33}$$

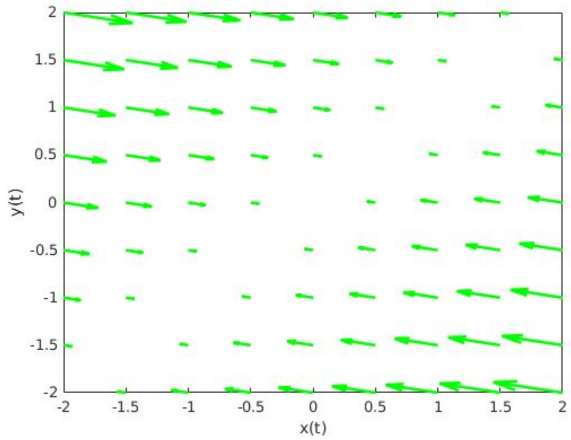

Figura 16: Representación gráfica para campo de direcciones con $\sigma = 5$ obtenido de la ecuación 33

Representa el campo de direcciones en $[x, y] \in [-2, 2] * [-2, 2]$, y la solución particular tomando $t \in [0, 2]$.

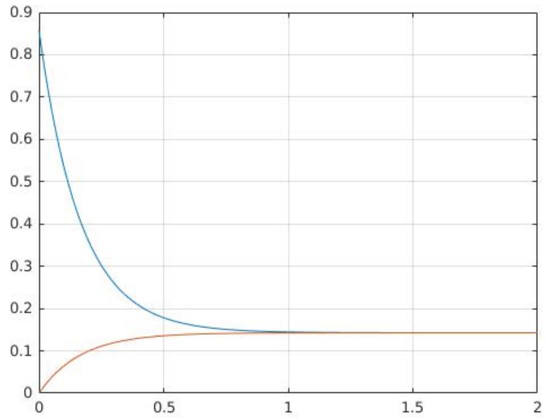

Figura 17: Representación gráfica para solución particular con $\sigma = 5$ obtenido de la ecuación 33

Referencias

[1] Dra. Neus Garrido Saez. Apuntes de clase de sistemas dinámicos discretos y contínuos., 2020.