Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Geometría Diferencial Aplicada.	**Apellidos:** Balsells Orellana	14/01/2021
	Nombre: Jorge A.	

Laboratorio: Primera y segunda forma fundamental. Curvatura Gaussiana y teorema de Gauss.

1. Parametrizar y representar con Matlab un paraboloide circular.

Si analizamos la ecuación de un paraboloide elíptico podemos ver que, la elipse depende de 3 constantes: a, b y c. Las constantes a y b, son las que crean una proporcion diferente de los ejes x y y respectivamente, asi que si igualamos ambas, tengremos un paraboloide circular.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)}{c^2}=1 \tag{1}$$

La ecuacion No. 1 muestra la ecuación general de un paraboloide elíptico, dónde *a*, *b* y *c* son constantes, x_0, y_0 y z_0 son desplazamientos lineales en $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} x &= x_0 + au\cos(v) \\ y &= y_0 + au\sin(v) \\ z &= z_0 + bu^2 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\phi(u,v) = (x_0 + au\cos(v), y_0 + au\sin(v).z_0 + bu^2) \tag{3}$$

El sistema de ecuaciones 2 hace referencia a las ecuaciones paraméticas del paraboloide elíptico, las cuales se encuentran ejemplificadas en coordenadas *(x, y, z)* en la ecuación 3. Referencia [2].

La figura 1 muestra un paraboloide circular graficado a partir de ecuaciones paramétricas, donde $a = b = 50$ y $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

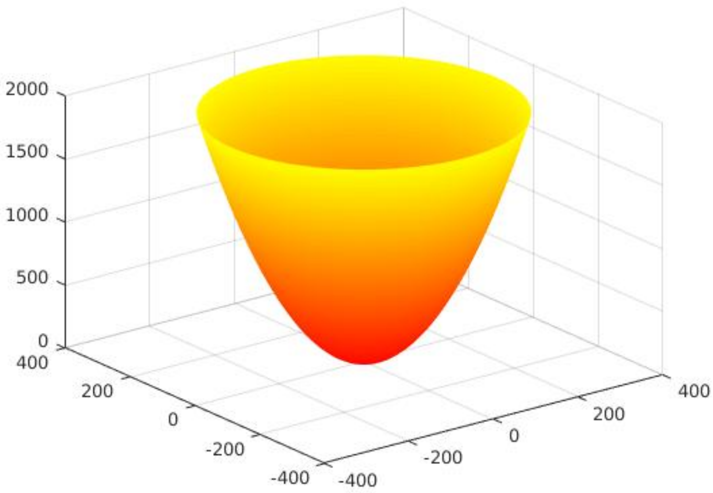

Figura 1: Paraboloide circular.

2. Calcular los coeficientes de la primera forma fundamental.

$$\begin{gathered}
\phi(u) = (a\cos(v), a\sin(v), 2bu) \\
\phi(v) = (-au\sin(v), au\cos(v), 0) \\
\phi(u,u) = (0, 0, 2b) \\
\phi(v,v) = (-au\cos(v), -au\sin(v), 0) \\
\phi(u,v) = (-a\sin(v), a\cos(v), 0)
\end{gathered} \tag{4}$$

Las ecuaciones mostradas en el numeral 4 muestran las derivadas necesarias a partir de la ecuación 3. siendo $\phi(u)$ la primera derivada respecto a *u*, $\phi(v)$ la primera derivada respecto a *v*, $\phi(u,u)$ la segunda derivada respecto a *u*, $\phi(v,v)$ la segunda derivada respecto a *v* y $\phi(u,v)$ la derivada respecto a *u*, y luego respecto a *v*.

2.1. Coeficientes de la primera forma fundamental

Los coeficientes *E*, *F* y *G* son funciones diferenciables en U cuando $E > 0, G > 0, EG - F^2 > 0$.

$$
\begin{aligned}
E = <\phi(u), \phi(u)> \to a^2\cos^2(v) + a^2\sin^2(v) + 4b^2u^2 \to \mathbf{a^2 + 4b^2u^2} \\
F = <\phi(u), \phi(v)> \to -a^2u\sin(v)\cos(v) + a^2u\sin(v)\cos(v) + 0 * 2bu \to \mathbf{0} \\
G = <\phi(v), \phi(v)> \to a^2u^2\sin^2(v) + a^2u^2\cos^2(v) + 0 \to \mathbf{a^2u^2}
\end{aligned} \tag{5}
$$

Las ecuaciones mostradas en el numeral 5 muestran los resultados obtenidos de los coeficientes de la primera forma fundamental, los cuales se reducen con la identidad trigonométrica pitagórica $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$. Las ecuaciones del numeral 6 están igualadas a η y ι con tal de simplificar las ecuaciones de la segunda forma fundamental.

$$
\begin{aligned}
\eta = EG - F^2 \to (a^2 + 4B^2u^2)(a^2u^2) - 0 \to a^2u^2(a^2 + 4b^2u^2) \to \mathbf{a^4u^2(1 + 4u^2)} \\
\iota = \sqrt{\eta} \to \sqrt{a^4u^2(1 + 4u^2)} \to \mathbf{a^2u(1 + 4u^2)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned} \tag{6}
$$

3. Calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental.

$$
L = \frac{Det(\phi(u,u), \phi(u), \phi(v))}{\sqrt{EG - F^2}} \to \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2b \\ a\cos(v) & a\sin(v) & 2bu \\ -au\sin(v) & au\cos(v) & 0 \end{vmatrix} \to \frac{\mathbf{2b}}{\mathbf{(1 + 4u^2)^{\frac{1}{2}}}} \tag{7}
$$

$$
M = \frac{Det(\phi(u,v), \phi(u), \phi(v))}{\sqrt{EG - F^2}} \to \begin{vmatrix} -a\sin(v) & a\cos(v) & 0 \\ a\cos(v) & a\sin(v) & 2bu \\ -au\sin(v) & au\cos(v) & 0 \end{vmatrix} \to \mathbf{0} \tag{8}
$$

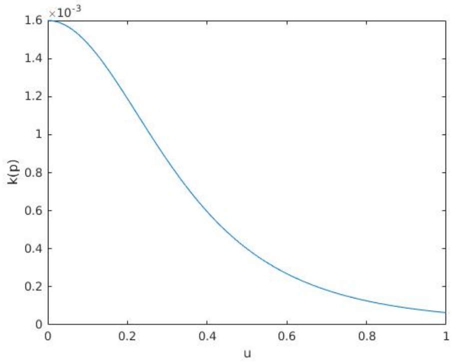

Figura 2: Grafico K(p) Vs u.

$$N = \frac{Det(\phi(v,v), \phi(u), \phi(v))}{\sqrt{EG - F^2}} \rightarrow \begin{vmatrix} -au\cos(v) & -au\sin(v) & 0 \\ a\cos(v) & a\sin(v) & 2bu \\ -au\sin(v) & au\cos(v) & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \frac{\mathbf{2bu^2}}{(\mathbf{1+4u^2})^{\frac{1}{2}}} \tag{9}$$

Las ecuaciones 7, 8 y 9 muestran los coeficientes de la segudna forma fundamental que pretenden determinar los puntos de la superficie S respecto a su plano tangente. Estos coeficientes junto a los de la primera forma fundamental servirán para obtener la curvatura Gaussiana $K(p)$.

4. Encontrar una curva contenida en la superficie y calcular su longitud.

4.1. Curvatura Gaussiana

$$\kappa(p) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \rightarrow \frac{\frac{2b}{(1+4u^2)^{\frac{1}{2}}} * \frac{2bu^2}{(1+4u^2)^{\frac{1}{2}}} - 0}{\iota} \rightarrow \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{a^2(1+4u^2)^2}} \tag{10}$$

En la ecuación 10 se muestra $\kappa(p)$, que contiene la curvatura Gaussiana. En este caso, dado que es un paraboloide circular, se delimita que $a = b$ para simplificar la ecuacion.

El gráfico 2 muestra la relación entre $\kappa(p)$ y u, ya que la función $\kappa(p)$ está solamente entérminos de *u*.

4.2. Longitud de la curva

$$L = \int_a^b \sqrt{E\frac{\partial u}{\partial t}^2 + 2F\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + G\frac{\partial v}{\partial t}^2}\, dt \tag{11}$$

La ecuacion 11 muestra la longitud de una curva. Para simplificar el desarrollo hacemos $x = 0$ como punto inicial. De igual manera $z = 50u^2 = t^2$ y $x = 0 = 50u\cos(v)$, donde, al derivar se tiene como resultado las ecuaciones del numeral 12. Referencia [1].

$$\begin{gathered} u = \tfrac{t}{\sqrt{50}} \rightarrow u' = \tfrac{1}{\sqrt{50}} \\ v = \cos^{-1}(0) = \pi/2 \rightarrow v' = 0 \end{gathered} \tag{12}$$

Se evalúan los valores de las ecuaciones 12 en 11, y queda como resultado la ecuacion 13

$$\begin{gathered} L = \textstyle\int_0^t \sqrt{E\frac{1}{\sqrt{50}}^2 + 2F\frac{1}{\sqrt{50}} * 0 + G * 0}\, dt \rightarrow \sqrt{50}\textstyle\int_0^t (1 + \frac{2}{25}t^2)^{\frac{1}{2}}\, dt \\ L = \tfrac{2*\sqrt{50}}{3} * (t + \tfrac{2}{75}t^3) * (1 + \tfrac{2}{25}t^2)^{\frac{3}{2}} \\ L = \tfrac{25*log(t+(2^{\frac{1}{2}}*(2*t^2+25)^{\frac{1}{2}})/2))/2+(5*2^{\frac{1}{2}}*t*((2*t^2)/25+1)^{\frac{1}{2}}}{2} \end{gathered} \tag{13}$$

La ecuación 13 está definida para encontrar la longitud de una curva desde cero hasta la posición t. La resolución de la integral fué desarrollada con Matlab, el código esá adjunto en el .zip

5. ¿Esta superficie puede ser localmente isométrica a un paraboloide elíptico?

Localmente isométrico se refiere a que 2 curvaturas pueden ser contínuamente deformadas una en la otra a partir del teorema de Egregium, donde la curvatura gaussiana en los puntos correspondientes a las 2 curvas debe ser la misma.

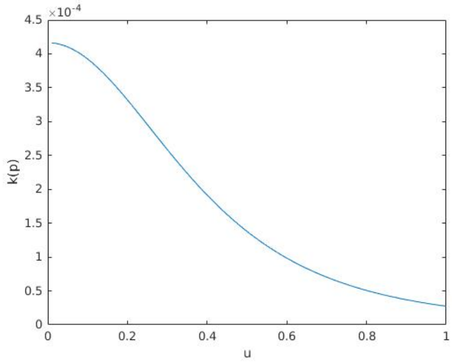

Figura 3: Grafico K(p) Vs u.

$$\kappa(p) = \frac{4b^2u^2}{(1+4u^2)*(a^2u^2)*(a^2+4b^2u^2)} \tag{14}$$

La ecuación que utilizamos para este ejemplo es la ecuación 1 de un paraboloide elíptico, simplemente para que sea circular, igualamos las constantes *a* y *b*. En caso de ser paraboloide $a<>b$ como se muestra en la ecuacion 14. Dado lo anterior, la superficie no es localmente isométrica para un paraboloide elíptico. Se muestra un gráfico de K(p) Vs. u de la misma manera que se hizo con el paraboloide circular. Los gráficos son muy similares en diferente escala.

Referencias

[1] Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of curves surfaces., 2016.

[2] Mark. Jorbá Cusco. Apuntes de clase de geometría diferencial aplicada, 2020.