Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Geometría Diferencial Aplicada	**Apellidos:** Balsells Orellana	21/01/2021
	Nombre: Jorge Augusto	

Laboratorio: Parametización de superficies

1. Problema 1

Dada la ecuación 1 parametrizar la superficie que resulta al girar la curva alrededor del eje x. Hacer lo mismo, pero girándola alrededor del eje y. Demostrar en cada caso que es una parametrización.

$$y = \cos(x)^2 \tag{1}$$

1.1. Parametrización de superficie

En la figura 1, en el gráfico izquierdo se muestra la función en $\mathbb{R}^2$ en $0 < x < 2\pi$ y $0 < y < 1$ que rotará en cada uno de sus ejes, en el gráfico al medio se muestra la rotación en el eje x y en el gráfico derecho se muestra la rotación en el eje y. Las rotaciones están en $\mathbb{R}^3$ en $0 < v < 2\pi$ y $0 < u < 2\pi$.

$$f(t) * Rot(X, \theta) = \phi = \begin{bmatrix} v & \cos(v)^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$f(t) * Rot(Y, \theta) = \phi = \begin{bmatrix} v & \cos(v)^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} f(t) * Rot(X, \theta) = \phi = \begin{bmatrix} v & \cos(v)^2\cos(u) & -\cos(v)^2\sin(u) \end{bmatrix} \\ f(t) * Rot(Y, \theta) = \phi = \begin{bmatrix} v\cos(u) & \cos(v)^2 & v\sin(u) \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{4}$$

La ecuacion 2 muestra la multiplicación de la función paramétrica en t multiplicado por una matriz de rotación en X. La ecuacion 3 muestra la multiplicación de la función paramétrica en t multiplicado por una matriz de rotación en Y. Los resultados de ambas ecuaciones se muestran en el conjunto de ecuaciones con numeral 4.

- ϕ es diferenciable: Es diferenciable ya que es contínua y el plano tangente en toda la función $f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$, esto se puede determinar en toda la gráfica dado que es una ecuación periódica o determinando que es una composición de ecuaciones diferenciables.
- ϕ es un homeomorfismo: Dado que no es una función inyectiva en todo su intervalo, y de no ser inyectiva en todo su intervalo $[-\infty, \infty]$, se puede partir que la función es inyectiva en $[0, \pi]$ e igualmente suprayectiva, por lo cual es un Homeomorfismo solamente en intervalos iguales al mencionado.
- $d\phi_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva $\forall p \in S$: Dado que es una ecuación periódica, para ser inyectiva, se debe tener un único valor de la variable independiente para cada valor de la variable dependiente, y esto se obtiene en un rango $[0, \pi]$ o intervalos iguales siguientes.

La matriz jacobiana de ϕ_x está dada por la matriz 5 y ϕ_y por la matriz 6, cuyas columnas son linealmente independientes al ser el producto vectorial 0, esto define que no es ϕ_x no es inyectiva, y ϕ_y si es inyectiva.

$$\partial\phi_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin(u)\cos^2(v) & -2\cos(u)\cos(v)\sin(v) \\ -\cos(u)\cos^2(v) & 2\sin(u)\sin(v)\cos(v) \end{vmatrix} \tag{5}$$

$$\partial\phi_y = \begin{vmatrix} -v\sin(u) & \cos(u) \\ 0 & -2\cos(v)\sin(v) \\ v\cos(u) & \sin(u) \end{vmatrix} \tag{6}$$

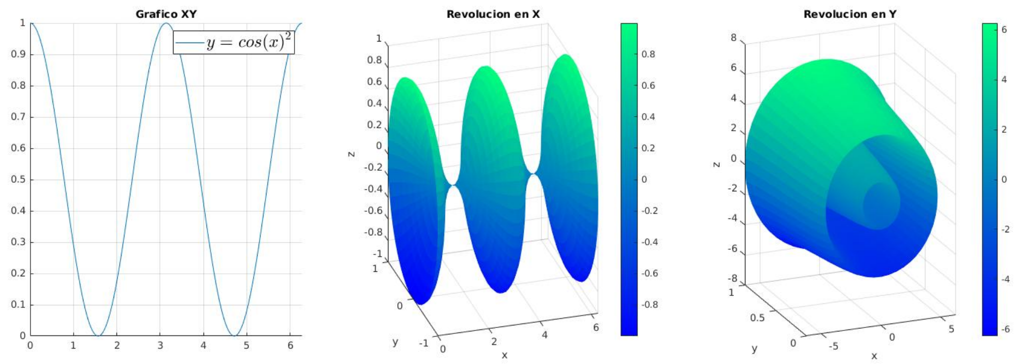

Figura 1: Representación gráfica de superficie en revolución de ecuacion 1
.

2. Problema 2

2.1. ¿Es popsible parametrizar la curva del problema 1 alrededor del eje z?

No es posible, ya que la ecuación al estar en términos de x x y y y z=0 como se muestra en la ecuacion 7, se considera que el plano z es constante. El valor del plano z se encuentra en 0.

$$f(t) * Rot(Z, \theta) = \begin{bmatrix} v & \cos(v)^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

La ecuación 8 muestra el resultado de la ecuación 7, dónde se observa que $z = 0$, por lo cual no se puede rotar el gráfico en este eje.

$$f(t) * Rot(Z, \theta) = \begin{bmatrix} \sin(u)\cos(v)^2 + v\cos(u) & \cos(u)\cos(v)^2 - v\sin(u) & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

3. Problema 3

La parametrización de la curva generada por la ecuación 9 se observa en el conjunto de ecuaciones 10 ya que se realiza con las matrices de rotación de la misma manera que el Problema 1. El resultado del vector que multiplica las matrices de rotación se muestra en el gráfico 2.

$$y = 5x^3 + 1000 \tag{9}$$

$$\begin{gathered} f(t) * Rot(X,\theta) = \begin{bmatrix} v & (5v^3+1000)\cos(u) & -(5v^3+1000)\sin(u) \end{bmatrix} \\ f(t) * Rot(Y,\theta) = \begin{bmatrix} v\cos(u) & 5v^3+1000 & v\sin(u) \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{10}$$

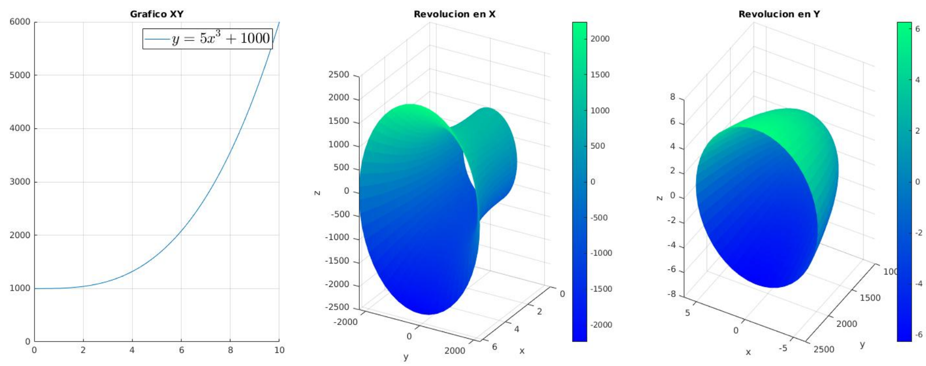

Figura 2: Representación gráfica de superficie en revolución de ecuación 9

.

4. Problema 4

4.1. Parametrización de superficie

$$z^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \tag{11}$$

Al graficar la fuinción cartesiana, solamente se desarrollo el plano imaginario, ya que al ser cuadrática genera numeros complejos.

- ϕ es diferenciable: Si es diferenciable, se observa en la figura 3 que la ecuación mantiene ma misma trayectoria contínua y derivable, mientras que el 0 es un valor regular de f. Es una composición de ecuaciones diferenciables.
- ϕ es un homeomorfismo: Dado que la función no es inyectiva en $[-\infty, \infty]$, por lo tanto tampoco es biyectiva en todo su intervalo. Puede ser inyectiva en los números positivos o negativos considerando un dominio de $[0, \infty]$ o $[-\infty, 0]$, y de este modo tambien será suprayectiva en este rango.
- $d\phi_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva $\forall p \in S$: Es inyectiva solamente en el dominio positivo o negativo, dado que, si ejemplificamos la ecuación en un plano XY, XZ o YZ, siempre nos quedará una ecuación cuadrática y puede tomar 2 valores en y. En la ecuación 12 se muestra el Jacobiano de la función paramétrica de la curva. El producto vectorial de las columnas, consideradas como vectores no es igual a 0, lo cual define la inyectividad.

$$\partial\phi_x = \begin{vmatrix} -2v\sin(u) & 2\cos(u) \\ 3v\cos(u) & 3\sin(u) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{12}$$

4.2. ¿Es superficie de revolución?

No es superficie en revolución. En la figura 3 a la izquierda se muestra el volumen generado por la parametrización, a simple vista parece una superficie en revolución. Sin embargo, al ver el plano XY cortado en una Z constante a la derecha de la figura 11, no se observa una superficie circular que se espera de una revolución. Al analizar la ecuación 11, x y y tienen 2 factores distintos dados por $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$. Estos factores deben ser iguales para considerar esta superficie como revolución.

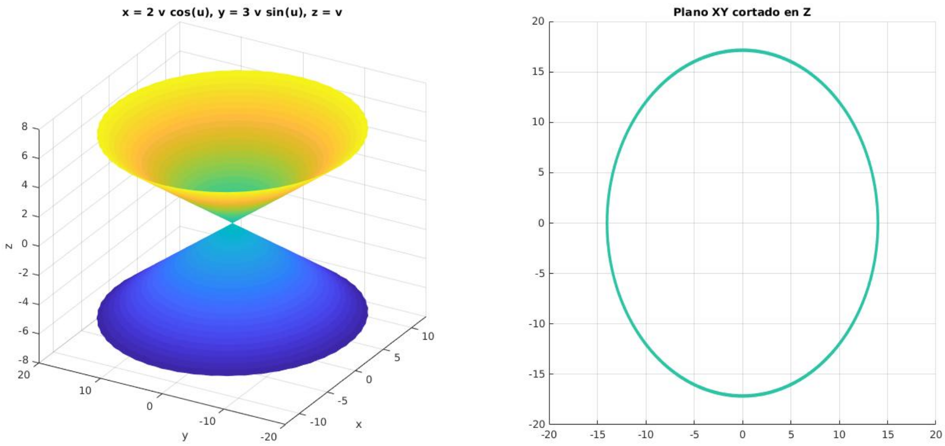

Figura 3: Representación gráfica de superficie en revolución de ecuación paramétrica, y plano cortado de ecuación 11

.

Referencias

[1] Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of curves surfaces., 2016.

[2] Mark. Jorbá Cusco. Apuntes de clase de geometría diferencial aplicada, 2020.