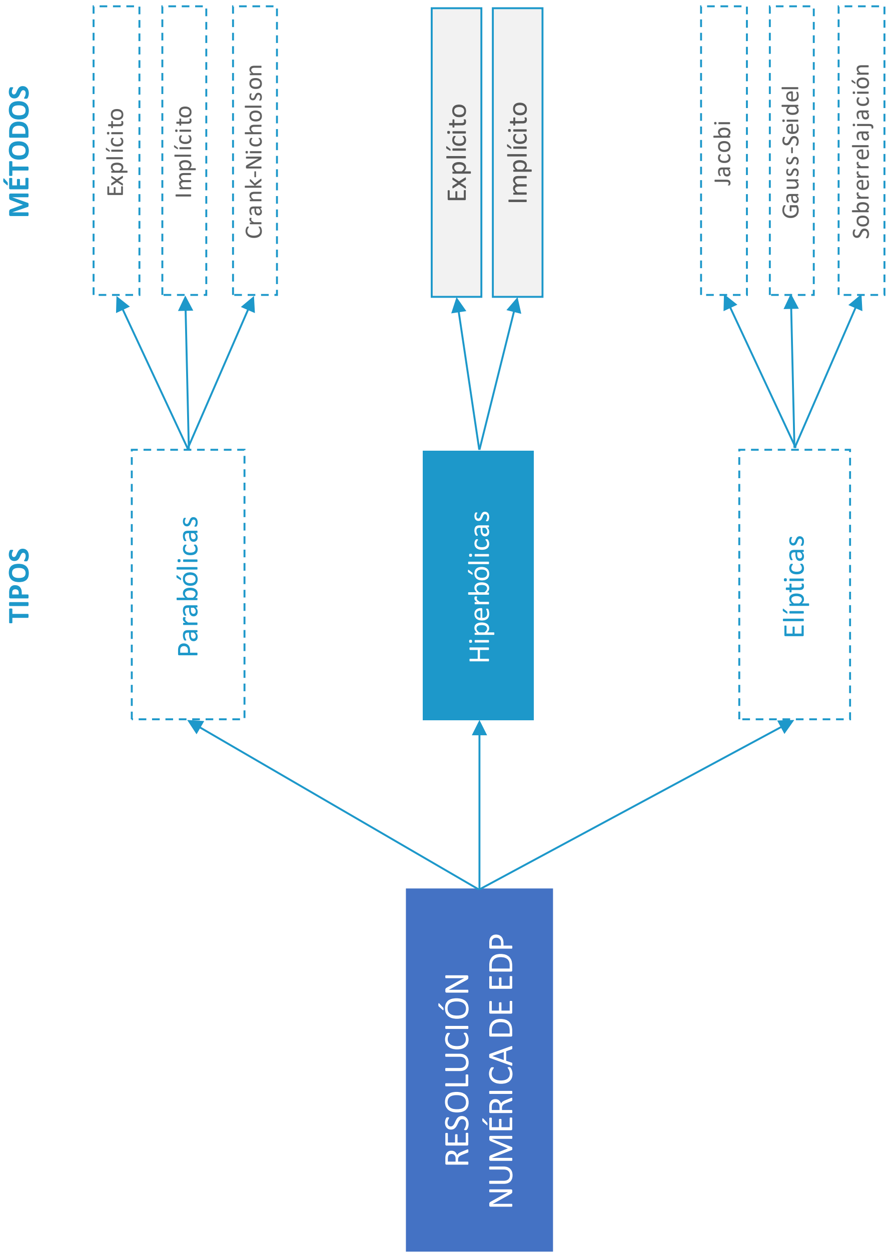
Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería

Problemas de contorno multidimensional. EDP hiperbólicas

Índice

Esquema


MÉTODOS
TIPOS
RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE EDP
Parabólicas
Hiperbólicas
Elípticas
Explícito
Implícito
Crank-Nicholson
Explícito
Implícito
Jacobi
Gauss-Seidel
Sobrerrelajación

8.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema lee las Ideas clave que encontrarás a continuación

Las ecuaciones en derivadas parciales hiperbólicas son aquellas que, dada la expresión general:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0$$

cumplen $\Delta = B^2 - AC > 0$. Al igual que hicimos en el tema anterior con las EDP parabólicas, aplicaremos el método de diferencias finitas para transformar la EDP en una ecuación en diferencias. De este modo, podremos obtener las soluciones numéricas en los nodos que hayamos definido.

Para estudiar este tema será necesario que sigas el desarrollo de los procedimientos de diferencias finitas para los diferentes métodos, y comprendas a la perfección en qué nodos conocemos la información y en qué nodos tenemos que calcular las soluciones numéricas.

El problema que vamos a desarrollar a lo largo del tema es la conocida ecuación de ondas. Describe la propagación de una variedad de ondas, como las ondas sonoras, las ondas de luz y las ondas en el agua. Es importante en varios campos como la acústica, el electromagnetismo, la mecánica cuántica y la dinámica de fluidos. Su expresión general es:

$$u_{tt}(x,t) - \alpha^2 u_{xx}(x,t) = 0, x \in [0, L], t \geq 0$$

Tomaremos como condiciones de contorno:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0$$

y como condiciones iniciales:

$$u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), x \in [0,L]$$

Partiremos de la discretización que se recoge en la figura 1 y particularizaremos para cada caso la expresión en diferencias finitas.

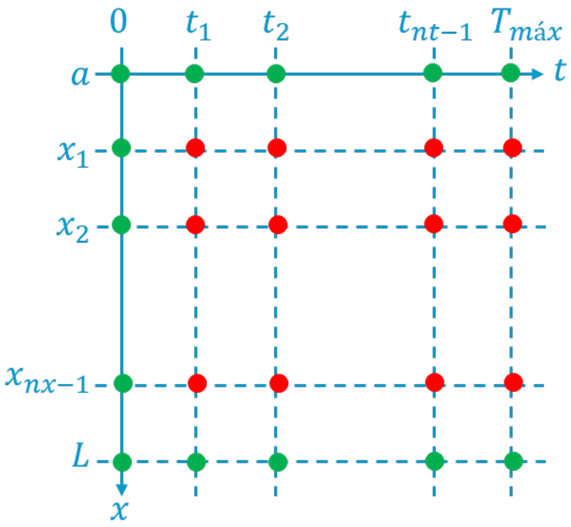


Figura 1. Información disponible en la EDP hiperbólica.

Los métodos que vamos a utilizar en este tema son un método explícito y un método implícito.

Los apartados de los que consta este tema son:

- Método explícito para EDP hiperbólicas:
  - Transformación de la EDP en una ecuación en diferencias.
  - Cálculo de $u^{(1)}$.
  - Convergencia y estabilidad del método explícito.
  - Implementación del método explícito en Matlab.

- Método implícito para EDP hiperbólicas:
  - Transformación de la EDP en una ecuación en diferencias.
  - Cálculo de $u^{(1)}$.
  - Convergencia y estabilidad del método implícito.
  - Implementación del método implícito en Matlab.

- Ejemplos resueltos de EDP hiperbólicas.

8.2. Método explícito para EDP hiperbólicas

El primer aspecto diferenciador acerca de la EDP hiperbólica respecto de la EDP parabólica es la presencia de una segunda condición dentro de las condiciones iniciales, que se contempla a través de la función derivada respecto del tiempo en el instante inicial $u_t(x,0) = g(x)$. Sobre este aspecto trataremos más adelante.

Transformación de la EDP en una ecuación en diferencias

Para realizar la transformación en una ecuación en diferencias que dé como resultado un método explícito, tenemos que aplicar diferencias centrales sobre u_{tt} y u_{xx}.

$$\frac{u(x,t+k) - 2u(x,t) + u(x,t-k)}{k^2} - \alpha^2 \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} = 0$$

$$\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} - \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} - \frac{k^2\alpha^2}{h^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) = 0$$

Si llamamos $\lambda = \frac{k\alpha}{h}$, y llevamos los términos del instante temporal superior a la izquierda:

$$u_{i,j+1} = (2 - 2\lambda^2)u_{i,j} + \lambda^2\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right) - u_{i,j-1}$$

Prestemos atención a los índices. Para obtener el elemento $u_{i,j+1}$ necesitamos conocer los elementos $u_{i+1,j}$, $u_{i,j}$, $u_{i-1,j}$ y $u_{i,j-1}$. Esta relación se ilustra en la figura 2.

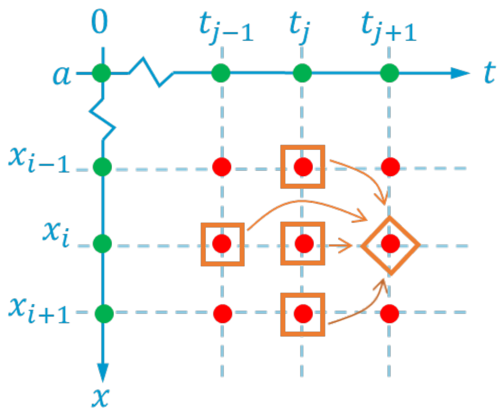


Figura 2. Relación de elementos en el esquema explícito.

Por tanto, para calcular el elemento $u_{i,2}$ necesitaremos conocer los elementos $u_{i+1,1}$, $u_{i,1}$, $u_{i-1,1}$ y $u_{i,0}$. La información de la que disponemos es $u_{i,0} = u(x,0)$ pero, ¿cómo obtenemos $u_{i,1}$? Lo veremos en el apartado 8.2.2.

De este modo, la información conocida será $u_{i,0}$, $u_{i,1}$, $u_{0,j}$ y $u_{nx,j}$. Este esquema se ilustra en la figura 3.

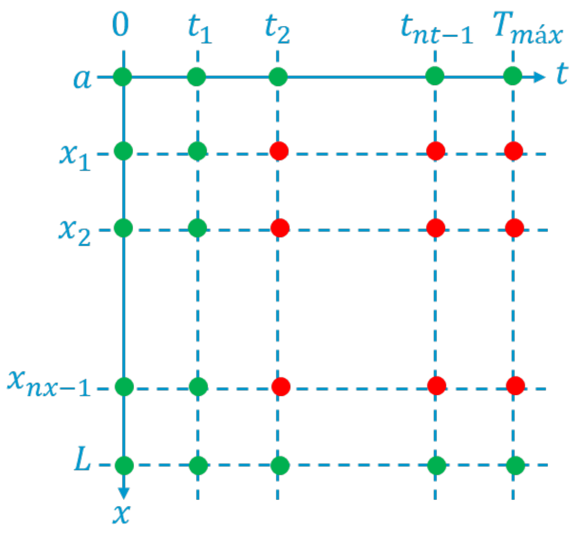


Figura 3. Nodos (rojo) en los que debemos obtener la solución numérica.

Planteamos la resolución de la ecuación en diferencias:

$$u_{i,j+1} = (2-2\lambda^2)u_{i,j} + \lambda^2\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right) - u_{i,j-1}$$

en los nodos $i = 1,2,\dots,nx-1, j = 1,2,\dots,nt-1$. Para $j = 1$:

$$u_{i,2} = (2-2\lambda^2)u_{i,1} + \lambda^2\left(u_{i+1,1} + u_{i-1,1}\right) - u_{i,0}$$
$$\rightarrow \begin{cases} u_{1,2} = (2-2\lambda^2)u_{1,1} + \lambda^2\left(u_{2,1} + u_{0,1}\right) - u_{1,0} \\ u_{2,2} = (2-2\lambda^2)u_{2,1} + \lambda^2\left(u_{3,1} + u_{1,1}\right) - u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{nx-1,2} = (2-2\lambda^2)u_{nx-1,1} + \lambda^2\left(u_{nx,1} + u_{nx-2,1}\right) - u_{nx-1,0} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ \vdots \\ u_{nx-1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2\lambda^2 & \lambda^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 2-2\lambda^2 & \lambda^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2-2\lambda^2 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^2 & 2-2\lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} \end{bmatrix} + \lambda^2 \begin{bmatrix} u_{0,1} \\ 0 \\ \vdots \\ u_{nx,1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{nx-1,0} \end{bmatrix}$$

Para $j = 2$:

$$u_{i,3} = (2-2\lambda^2)u_{i,2} + \lambda^2\left(u_{i+1,2} + u_{i-1,2}\right) - u_{i,1}$$
$$\rightarrow \begin{cases} u_{1,3} = (2-2\lambda^2)u_{1,2} + \lambda^2\left(u_{2,2} + u_{0,2}\right) - u_{1,1} \\ u_{2,3} = (2-2\lambda^2)u_{2,2} + \lambda^2\left(u_{3,2} + u_{1,2}\right) - u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,3} = (2-2\lambda^2)u_{nx-1,2} + \lambda^2\left(u_{nx,2} + u_{nx-2,2}\right) - u_{nx-1,1} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u_{1,3} \\ u_{2,3} \\ \vdots \\ u_{nx-1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2\lambda^2 & \lambda^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 2-2\lambda^2 & \lambda^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2-2\lambda^2 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^2 & 2-2\lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ \vdots \\ u_{nx-1,2} \end{bmatrix} + \lambda^2 \begin{bmatrix} u_{0,2} \\ 0 \\ \vdots \\ u_{nx,2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} \end{bmatrix}$$

En general, podemos expresar las ecuaciones en diferencias de forma matricial como:

$$u^{(j+1)} = Au^{(j)} + B^{(j)} - u^{(j-1)} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2\lambda^2 & \lambda^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 2-2\lambda^2 & \lambda^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2-2\lambda^2 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^2 & 2-2\lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{bmatrix} + \lambda^2 \begin{bmatrix} u_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ u_{nx,j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{1,j-1} \\ u_{2,j-1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j-1} \end{bmatrix}$$

Como se puede observar, se trata de un método explícito, puesto que obtenemos la solución en el instante t_{j+1} a partir de la información de los instantes previos t_j y t_{j-1}.

Cálculo de $u^{(1)} = u_{i,1}$

Hay dos alternativas para el cálculo de este elemento, y ambas se basan en el conocimiento de la condición inicial expresado con la derivada $u_t(x,0)$. En función de cuál de ellas utilicemos, el método tendrá un orden de convergencia u otro.

Diferencia progresiva

Utilizando la diferencia progresiva sobre $u_t(x,t)$:

$$u_t(x,t) \approx \frac{u(x,t+k)-u(x,t)}{k} \rightarrow u_t(x,0) \approx \frac{u(x,k)-u(x,0)}{k}$$

Como $u_t(x,0) = g(x)$ y $u(x,0) = f(x)$, entonces:

$$\frac{u(x,k)-u(x,0)}{k} = g(x) \leftrightarrow u(x,k) = kg(x) + f(x) \rightarrow u_{i,1} = kg(x_i) + f(x_i)$$

dando lugar a una aproximación de orden 1, $\mathcal{O}(k)$.

Desarrollo de Taylor

Desarrollando por Taylor la función $u(x,0+k)$:

$$u(x,0+k) \approx u(x,0) + ku_t(x,0) + \frac{k^2}{2}u_{tt}(x,0)$$

Del enunciado de la EDP, $u_{tt}(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t)$, y como $u(x,0) = f(x)$ y $u_t(x,0) = g(x)$, entonces:

$$u(x,0+k) \approx f(x) + kg(x) + \frac{\alpha^2 k^2}{2}u_{xx}(x,0)$$

Como $u_{xx}(x,0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{t=0} = f''(x)$, entonces:

$$u(x,0+k) \approx f(x) + kg(x) + \frac{\alpha^2 k^2}{2}f''(x)$$

Esta segunda derivada se puede expresar como:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

por tanto:

$$\begin{aligned} u(x, 0+k) &\approx f(x) + kg(x) + \frac{\alpha^2 k^2}{2} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \\ &= f(x) + kg(x) + \frac{\lambda^2}{2}\big(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\big) \\ &= (1-\lambda^2)f(x) + \frac{\lambda^2}{2}\big(f(x+h) + f(x-h)\big) + kg(x) \rightarrow \end{aligned}$$

$$\rightarrow u_{i,1} = (1-\lambda^2)f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}\big(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})\big) + kg(x_i)$$

dando lugar a una aproximación de orden 2, $\mathcal{O}(k^2 + h^2)$.

Convergencia y estabilidad del método explícito

Las características principales de este método son:

- El proceso es convergente si $\lambda \leq 1$.
- El orden de convergencia es $\mathcal{O}(k + h^2)$ u $\mathcal{O}(k^2 + h^2)$, dependiendo de cómo calculemos $u^{(1)}$.

Implementación del método explícito en Matlab

De forma análoga a cómo procedimos en el tema anterior, debemos plantear la solución de la EDP hiperbólica en Matlab. Los parámetros de salida serán la solución $u(x,t)$ y los valores de los nodos de las variables x y t.

Los parámetros de entrada serán aquellos que nos permitan utilizar la implementación para cualquier EDP con la estructura:

$$u_t(x,t) - \alpha^2 u_{xx}(x,t) = 0$$

en el que podemos generalizar el rango de la variable $x \in [a,b]$, y las condiciones de contorno como $u(a,t) = p(t), u(b,t) = q(t)$. Las condiciones iniciales ya se encontraban generalizadas, de forma que mantendremos $u(x,0) = f(x)$ y $u_t(x,0) = g(x)$.

Además, deberemos indicar el paso espacial h y el paso temporal k o, sus equivalentes en número de puntos, nx y nt, respectivamente.

Por tanto, la primera línea de nuestro código sería:

```
function [x,t,U]=hiperbolicoExplicito(nx,a,b,p,q,nt,T,f,g,alpha)
```

En las siguientes líneas del código definiremos las variables con las que vamos a trabajar, e inicializaremos la matriz de salida.

```
h=(b-a)/nx; x=a:h:b;
k=T/nt; t=0:k:T;
lambda=k*alpha/h;
```

El siguiente paso consiste en inicializar la matriz U de la solución e introducir la información de las condiciones iniciales y de contorno.

```
U=zeros(nx+1,nt+1);
U(1,:)=p(t); % Condición de contorno en x=a
U(nx+1,:)=q(t); % Condición de contorno en x=b
U(2:nx,1)=f(x(2:nx)); % Condición inicial en t=0
% U(2:nx,2): Condición inicial en t=k (ver apartado 8.2.2)
```

Generemos la matriz A. Al ser una matriz tridiagonal, podemos definir los vectores de su diagonal.

```
dPA=(2-2*lambda^2)*ones(nx-1,1);
dSA=lambda^2*ones(nx-2,1);
A=diag(dPA)+diag(dSA,1)+diag(dSA,-1);
```

Como la expresión reducida es $u^{(j+1)} = Au^{(j)} + B^{(j)} - u^{(j-1)}$, solo nos quedará obtener las soluciones en cada instante j generando el vector $B^{(j)}$ en cada paso.

```
for j=2:nt-1
    B=lambda^2*[U(1,j); zeros(nx-3,1); U(nx+1,j)];
    U(2:nx,j+1)=A*U(2:nx,j)+B-U(2:nx,j-1);
end
```

Veamos cómo aplicar el código que acabamos de desgranar a la solución un caso particular de la ecuación de ondas en el ejemplo 1.

Ejemplo 1. Sea la EDP:

$$u_{tt}(x,t) - 4u_{xx}(x,t) = 0, x \in [0,1], t \geq 0$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0, \qquad u(x,0) = \sin(\pi x)\,, u_t(x,0) = 0, x \in [0,1]$$

Tomando $h = 0.1, k = 0.05$, indica la solución en el instante $T = 1$ para todos los nodos y representa dicha solución, utilizando el método explícito. Para estimar $u^{(1)}$ utiliza la diferencia progresiva y el desarrollo de Taylor.

En primer lugar, tenemos que definir los parámetros de entrada con los que vamos a resolver el problema:

```
>> a=0; b=1; T=1; nx=1/0.1; nt=1/0.05; alpha=2;
```

Por otro lado, utilizaremos funciones anónimas para introducir las condiciones de contorno e iniciales:

```
>> p=@(t) 0*t; q=@(t) 0*t;
>> f=@(x) sin(pi*x); g=@(x) 0*x;
```

Solo queda ejecutar el programa. Generaremos la variante 1 con las diferencias progresivas para $u^{(1)}$ y la variante 2 con el desarrollo de Taylor:

```
>>
[x,t,U1]=hiperbolicoExplicito1(nx,a,b,p,q,nt,T,f,g,
alpha);
```

```
>>
[x,t,U2]=hiperbolicoExplicito2(nx,a,b,p,q,nt,T,f,g,
alpha);
```

Para obtener la solución en el instante final, ejecutamos:

```
>> [U1(:,nt+1) U2(:,nt+1)]
```

Para representar la solución en el instante final, ejecutamos:

```
>> plot(x,[U1(:,nt+1) U2(:,nt+1)])
```

Los resultados se presentan a continuación:

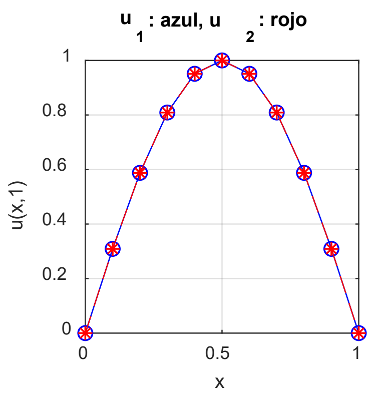


Figura 4. Representación EDP 1.

x	$u_1(x,1)$	$u_2(x,1)$
0	0	0
0.1	0.309017	0.309017
0.2	0.587785	0.587785
0.3	0.809017	0.809017
0.4	0.951057	0.951057
0.5	1	1
0.6	0.951057	0.951057
0.7	0.809017	0.809017
0.8	0.587785	0.587785
0.9	0.309017	0.309017
1	0	0

Tabla 1. Resultados EDP 1.

En la situación del ejemplo 1 hemos obtenido un resultado satisfactorio, puesto que $\lambda = \frac{k\alpha}{h} = \frac{0.05\cdot 2}{0.1} = 1$, valor para el que la estabilidad está garantizada. Veamos en el ejemplo 2 qué ocurre cuando no se cumplen las condiciones de estabilidad.

Ejemplo 2. Sea la EDP:

$$u_{tt}(x,t) - 4u_{xx}(x,t) = 0, x \in [0,1], t \geq 0$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0, \qquad u(x,0) = \sin(\pi x)\,, u_t(x,0) = 0, x \in [0,1]$$

Tomando $h = 0.1, k = 0.1$, indica la solución en el instante $T = 1$ para todos los nodos y representa dicha solución, utilizando el método explícito. Para estimar $u^{(1)}$ utiliza la diferencia progresiva.

El enunciado es el mismo que en el ejemplo 1, salvo el valor de $k = 0.1$. Ejecutemos el programa siguiendo las mismas pautas que en el ejemplo anterior, pero ahora con el nuevo valor de k. Los resultados se muestran a continuación.

x	$u_1(x,1)$
0	0
0.1	1.0936e6
0.2	-7.1691e6
0.3	3.0195e7
0.4	-9.1079e7
0.5	2.0735e8
0.6	-3.6472e8
0.7	4.9539e8
0.8	-5.0011e8
0.9	3.1962e8
1	0

Tabla 2. Resultados EDP 2.

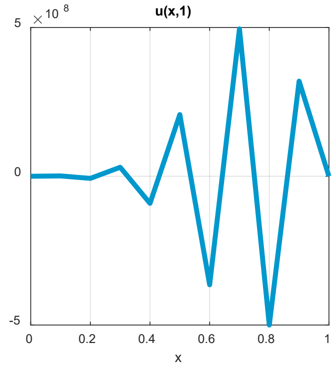


Figura 5. Representación EDP 2.

En el caso del ejemplo 2, observamos que $\lambda = \frac{k\alpha}{h} = \frac{0.1\cdot 2}{0.1} = 2$, valor que sobrepasa el límite marcado para la estabilidad del método.

8.3. Método implícito para EDP hiperbólicas

Consideremos de nuevo la EDP:

$$u_{tt}(x,t) - \alpha^2 u_{xx}(x,t) = 0, x \in [0,L], t \geq 0.$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0, \quad u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), x \in [0,L].$$

Transformación de la EDP en una ecuación en diferencias

Para realizar la transformación en una ecuación en diferencias que dé como resultado un método implícito, aplicamos diferencias centrales sobre u_{tt}. Sobre u_{xx} seguimos un procedimiento similar al de Crank-Nicholson: obtenemos la aproximación a partir de la media entre la diferencia central en t_{j+1}:

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} - \alpha^2 \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} = 0$$

y la diferencia central en t_{j-1}:

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} - \alpha^2 \frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{h^2} = 0$$

El esquema resultante es:

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = \frac{\alpha^2}{2h^2}\left(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\ u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = \frac{\lambda^2}{2}\left(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}\right)$$

Llevando a la izquierda las incógnitas del instante mayor:

$$(1+\lambda^2)u_{i,j+1} - \frac{\lambda^2}{2}\left(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}\right) = 2u_{i,j} - (1+\lambda^2)u_{i,j-1} + \frac{\lambda^2}{2}\left(u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}\right)$$

$$i = 1, \dots, nx-1, j = 1, \dots, nt$$

Para $j = 1$:

$$(1+\lambda^2)u_{i,2} - \frac{\lambda^2}{2}\left(u_{i+1,2} + u_{i-1,2}\right) = 2u_{i,1} - (1+\lambda^2)u_{i,0} + \frac{\lambda^2}{2}\left(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} (1+\lambda^2)u_{1,2} - \frac{\lambda^2}{2}\left(u_{2,2} + u_{0,2}\right) = 2u_{1,1} - (1+\lambda^2)u_{1,0} + \frac{\lambda^2}{2}\left(u_{2,0} + u_{0,0}\right) \\ (1+\lambda^2)u_{2,2} - \frac{\lambda^2}{2}\left(u_{3,2} + u_{1,2}\right) = 2u_{2,1} - (1+\lambda^2)u_{2,0} + \frac{\lambda^2}{2}\left(u_{3,0} + u_{1,0}\right) \\ \vdots \\ (1+\lambda^2)u_{nx-1,2} - \frac{\lambda^2}{2}\left(u_{nx,2} + u_{nx-2,2}\right) = 2u_{nx-1,1} - (1+\lambda^2)u_{nx-1,0} + \frac{\lambda^2}{2}\left(u_{nx,0} + u_{nx-1,0}\right) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda^2/2 & 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda^2/2 & 1+\lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ \vdots \\ u_{nx-1,2} \end{bmatrix} - \frac{\lambda^2}{2} \begin{bmatrix} u_{0,2} \\ 0 \\ \vdots \\ u_{nx,2} \end{bmatrix}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -(1+\lambda^2) & \lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda^2/2 & -(1+\lambda^2) & \lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(1+\lambda^2) & \lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^2/2 & (1+\lambda^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{nx-1,0} \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2} \begin{bmatrix} u_{0,0} \\ 0 \\ \vdots \\ u_{nx,0} \end{bmatrix}$$

De forma general:

$$Au^{(j+1)} - B^{(j+1)} = 2u^{(j)} + Cu^{(j-1)} + D^{(j-1)}$$

Donde:

$$A=\begin{bmatrix} 1+\lambda^2 & -\frac{\lambda^2}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda^2}{2} & 1+\lambda^2 & -\frac{\lambda^2}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\lambda^2 & -\frac{\lambda^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{\lambda^2}{2} & 1+\lambda^2 \end{bmatrix}, B^{(j+1)}=\frac{\lambda^2}{2}\begin{bmatrix} u_{0,j+1} \\ 0 \\ \vdots \\ u_{nx,j+1} \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} -(1+\lambda^2) & \frac{\lambda^2}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\lambda^2}{2} & -(1+\lambda^2) & \frac{\lambda^2}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(1+\lambda^2) & \frac{\lambda^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\lambda^2}{2} & (1+\lambda^2) \end{bmatrix}$$

$$D^{(j-1)}=\frac{\lambda^2}{2}\begin{bmatrix} u_{0,j-1} \\ 0 \\ \vdots \\ u_{nx,j-1} \end{bmatrix}, u^{(j)}=\begin{bmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{bmatrix}$$

Se trata de un método implícito puesto que para obtener la solución en el instante t_{j+1} necesitamos resolver un sistema lineal con la información de los instantes anteriores t_j y t_{j-1}.

Cálculo de $u^{(1)} = u_{i,1}$

El procedimiento para la obtención de $u^{(1)}$ es el mismo que en el caso explícito, desarrollado en el apartado 8.2.2. Por tanto, las alternativas son:

- El uso de la diferencia progresiva:

$$u_{i,1} = kg(x_i) + f(x_i)$$

- El uso del desarrollo de Taylor hasta orden 2:

$$u_{i,1} = (1-\lambda^2)f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}\big(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})\big) + kg(x_i),$$

Convergencia y estabilidad del método implícito

Las características principales de este método son:

- El proceso es convergente sin necesidad de condiciones.
- El orden de convergencia es $\mathcal{O}(k+h^2)$ u $\mathcal{O}(k^2+h^2)$, dependiendo de cómo calculemos $u^{(1)}$.

Implementación del método implícito en Matlab

A diferencia de en el caso explícito, en este apartado vamos a describir el algoritmo para la obtención del método implícito en Matlab. Se encuentra recogido en el método implícito para la EDP hiperbólica.

$$u_{tt}(x,t) - \alpha^2 u_{xx}(x,t) = 0, x \in [a,b], t \geq 0.$$
$$u(a,t) = p(t), u(b,t) = q(t), t > 0,$$
$$u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), x \in [a,b].$$

ENTRADA: $a, b, nx, T, nt, p, q, f, g, \alpha$

SALIDA: $x, t, u(x,t)$

1. Definición de los espaciados h, t y del parámetro λ
2. Inicialización de la matriz $u(x,t)$ con ceros
3. Actualización de $u(x,t)$ con las condiciones de contorno $p(t)$ y $q(t)$
4. Actualización de $u(x_i,0)$ con la condición inicial $f(x_i), i = 1, \dots, nx-1$
5. Obtención de $u(x_i,1)$ con la condición inicial $g(x_i), i = 1, \dots, nx-1$ a partir de la expresión aproximada que se considere (diferencia progresiva o Taylor)
6. Generación de la matriz C a partir de sus diagonales
7. Generación de las diagonales de A: dPA, dSA.

8. Para cada instante de tiempo, desde $j = 2$ hasta $j = nt - 1$

9. $\quad z = 2u^{(j)} + Cu^{(j-1)} + D^{(j-1)} + B^{(j+1)}$,

10. $\quad u(x_i, t_j) = Crout(dPA, dSA, dSA, z), i = 1, \ldots, nx - 1$

11. FIN

Veamos algunos resultados numéricos a través de la realización del ejemplo 3.

Ejemplo 3. Sea la EDP:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, x \in [0,4], t \geq 0$$
$$u(0,t) = u(4,t) = 0, t > 0, \qquad u(x,0) = 2 - |x-2|, u_t(x,0) = 0, x \in [0,4]$$

Tomando $h = 1, k = 0.5$, indica la solución en todos los nodos hasta el instante $T = 4$ para todos los nodos, utilizando los métodos implícitos de órdenes $\mathcal{O}(k + h^2)$ y $\mathcal{O}(k^2 + h^2)$.

Introduzcamos los valores de entrada:

```
>> a=0; b=4; nx=4/1; T=4; nt=4/.5; alpha=1;
```

y las condiciones de contorno e iniciales:

```
>> p=@(t) 0*t; q=@(t) 0*t;
>> f=@(x) 2-abs(x-2); g=@(x) 0*x;
```

Por último, ejecutemos las dos versiones del programa, es decir, la versión con $\mathcal{O}(k + h^2)$ y la versión con $\mathcal{O}(k^2 + h^2)$.
Como nos piden la solución en todos los nodos, utilizamos una tabla para cada una de las soluciones.

$u_1(x,t)$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$
$t = 0$	0	1	2	1	0
$t = 0.5$	0	1	2	0	0
$t = 1$	0	0.9429	1.4286	-0.6571	0
$t = 1.5$	0	0.7465	0.3790	-0.8135	0
$t = 2$	0	0.3123	-0.8207	-0.5837	0
$t = 2.5$	0	-0.3852	-1.7633	-0.2588	0
$t = 3$	0	-1.2271	-2.1633	-0.1288	0
$t = 3.5$	0	-1.9534	-1.9900	-0.3226	0
$t = 4$	0	-2.2604	-1.4572	-0.7494	0

Tabla 3. Resultados EDP 3. Versión con $\mathcal{O}(k + h^2)$.

$u_2(x,t)$	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$
$t=0$	0	1	2	1	0
$t=0.5$	0	1	1.7500	1	0
$t=1$	0	0.9184	1.1837	0.9184	0
$t=1.5$	0	0.6926	0.4824	0.6926	0
$t=2$	0	0.2912	-0.1699	0.2912	0
$t=2.5$	0	-0.2449	-0.6647	-0.2449	0
$t=3$	0	-0.7996	-0.9953	-0.7996	0
$t=3.5$	0	-1.2231	-1.2214	-1.2231	0
$t=4$	0	-1.3966	-1.3981	-1.3966	0

Tabla 4. Resultados EDP 3. Versión con $\mathcal{O}(k^2+h^2)$

8.4. Ejemplos resueltos de EDP hiperbólicas

En esta sección vamos a plantear una serie de EDP parabólicas y sus resultados numéricos. En el ejemplo 4 veremos cómo obtener la ecuación en diferencias a partir de una EDP parecida a la que hemos desarrollado a lo largo del tema.

Ejemplo 4. Sea la EDP:

$$u_{tt}+u_t+2u=u_{xx}, x\in[0,1], t\geq 0,$$
$$u(0,t)= u(1,t)=0, t>0, u(x,0)=\sin(\pi x), u_t(x,0)=0$$

a) Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden $\mathcal{O}(k^2+h^2)$ y describe su expresión matricial.
b) Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas implícito de orden $\mathcal{O}(k^2+h^2)$ y describe su expresión matricial.
c) Aplica los esquemas anteriores para determinar la solución en el instante $T=0.5$, tomando $h=0.1$ y $k=0.005$.

a) El método explícito de orden $\mathcal{O}(k^2+h^2)$ requiere el uso de diferencias centrales sobre las dos variables:

$$\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{k^2}+\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{2k}+2u_{i,j}$$
$$=\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}$$

Manipulando algebraicamente la expresión anterior, y llevando los términos de mayor índice temporal a la izquierda, obtenemos:

$$\left(1+\frac{k}{2}\right)u_{i,j+1} = 2(1-\lambda^2-k^2)u_{i,j} + \lambda^2\left(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}\right) - \left(1+\frac{k}{2}\right)u_{i,j-1}$$

donde $\lambda = k/h$.

Calcularemos el término $u^{(1)}$ a partir del desarrollo de Taylor para que el método tenga orden $\mathcal{O}(k^2+h^2)$.

$$\begin{aligned}
u(x,0+k) &\approx \overbrace{u(x,0)}^{\sin(\pi x)} + k\,\overbrace{u_t(x,0)}^{0} + \frac{k^2}{2}u_{tt}(x,0)\\
&= \sin(\pi x) + \frac{k^2}{2}\left(\overbrace{u_{xx}(x,0)}^{\frac{d^2[\sin(\pi x)]}{dx^2}} - \overbrace{u_t(x,0)}^{0} - \overbrace{u(x,0)}^{\sin(\pi x)}\right)\\
&= \left(1-\frac{k^2}{2}\right)\sin(\pi x)\\
&\quad + \frac{k^2}{2}\frac{\sin\big(\pi(x+h)\big) - 2\sin(\pi x) + \sin\big(\pi(x-h)\big)}{h^2}\\
&= \left(1-\frac{k^2}{2}-\lambda^2\right)\sin(\pi x)\\
&\quad + \frac{\lambda^2}{2}\left(\sin\big(\pi(x+h)\big) + \sin\big(\pi(x-h)\big)\right)
\end{aligned}$$

$$u_{i,1} = \left(1-\frac{k^2}{2}-\lambda^2\right)\sin(\pi x_i) + \frac{\lambda^2}{2}\left(\sin(\pi x_{i+1}) + \sin(\pi x_{i-1})\right)$$

Como conocemos $u_{i,0}$, $u_{i,1}$, $u_{0,j}$ y $u_{nx,j}$, tenemos que obtener la expresión general en los nodos $i = 1, \dots, nx-1, j = 1, \dots, nt-1$.

Para $j = 1$:

$$\left(1+\frac{k}{2}\right)u_{i,2}=2(1-\lambda^2-k^2)u_{i,1}+\lambda^2\left(u_{i+1,1}+u_{i-1,1}\right)-\left(1+\frac{k}{2}\right)u_{i,0}$$

$$\rightarrow\begin{cases}\left(1+\frac{k}{2}\right)u_{1,2}=2(1-\lambda^2-k^2)u_{1,1}+\lambda^2\left(u_{2,1}+u_{0,1}\right)-\left(1+\frac{k}{2}\right)u_{1,0}\\ \left(1+\frac{k}{2}\right)u_{2,2}=2(1-\lambda^2-k^2)u_{2,1}+\lambda^2\left(u_{3,1}+u_{1,1}\right)-\left(1+\frac{k}{2}\right)u_{2,0}\\ \vdots\\ \left(1+\frac{k}{2}\right)u_{nx-1,2}=2(1-\lambda^2-k^2)u_{nx-1,1}+\lambda^2\left(u_{nx,1}+u_{nx-2,1}\right)-\left(1+\frac{k}{2}\right)u_{nx-1,0}\end{cases}$$

Para $j=2$:

$$\left(1+\frac{k}{2}\right)u_{i,3}=2(1-\lambda^2-k^2)u_{i,2}+\lambda^2\left(u_{i+1,2}+u_{i-1,2}\right)-\left(1+\frac{k}{2}\right)u_{i,1}$$

Para $j=nt-1$:

$$\left(1+\frac{k}{2}\right)u_{i,nt}=2(1-\lambda^2-k^2)u_{i,nt-1}+\lambda^2\left(u_{i+1,nt-1}+u_{i-1,nt-1}\right)-\left(1+\frac{k}{2}\right)u_{i,nt-2}$$

Desarrollando el sistema, se obtiene la expresión reducida como:

$$u^{(j+1)}=\frac{1}{1+\frac{k}{2}}\left[Au^{(j)}+B^{(j)}\right]-u^{(j-1)}$$

Donde:

$$A=\begin{bmatrix}2(1-\lambda^2-k^2) & \lambda^2 & \cdots & 0\\ \lambda^2 & 2(1-\lambda^2-k^2) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 2(1-\lambda^2-k^2)\end{bmatrix}$$

$$B^{(j)}=\begin{bmatrix}\lambda^2u_{0,j}\\ 0\\ \vdots\\ \lambda^2u_{nx,j}\end{bmatrix}$$

b) El método implícito de orden $\mathcal{O}(k^2+h^2)$ requiere el uso de diferencias centrales en la variable t y el promedio de las diferencias centrales sobre la variable x en los instantes t_{j+1} y t_{j-1} sobre las dos variables.

$$
\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{k^2}+\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{2k}+2u_{i,j} = \frac{1}{2h^2}(u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}+u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1}+u_{i-1,j-1})
$$

Manipulando algebraicamente la expresión anterior, y llevando los términos de mayor índice temporal a la izquierda, obtenemos:

$$
\left(1+\frac{k}{2}+\lambda^2\right)u_{i,j+1}-\frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j+1}-u_{i-1,j+1}) = 2(1-k^2)u_{i,j}+\left(-1+\frac{k}{2}-\lambda^2\right)u_{i,j-1} + \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j-1}+u_{i-1,j-1})
$$

donde $\lambda = k/h$. Si nombramos $\gamma = \left(1+\frac{k}{2}+\lambda^2\right)$, $\xi = 2(1-k^2)$ y $\eta = \left(-1+\frac{k}{2}-\lambda^2\right)$, obtenemos la expresión general:

$$
\gamma u_{i,j+1}-\frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j+1}-u_{i-1,j+1}) = \xi u_{i,j}+\eta u_{i,j-1}+\frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j-1}+u_{i-1,j-1})
$$

El término $u^{(1)}$ a partir del desarrollo de Taylor es el mismo que hemos desarrollado en el apartado anterior. Por tanto:

$$
u_{i,1} = \left(1-\frac{k^2}{2}-\lambda^2\right)\sin(\pi x_i)+\frac{\lambda^2}{2}(\sin(\pi x_{i+1})+\sin(\pi x_{i-1}))
$$

Como conocemos $u_{i,0}$, $u_{i,1}$, $u_{0,j}$ y $u_{nx,j}$, tenemos que obtener la expresión general en los nodos $i = 1, \dots, nx-1, j = 1, \dots, nt-1$.

Para $j = 1$:

$$
\gamma u_{i,2}-\frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,2}-u_{i-1,2}) = \xi u_{i,1}+\eta u_{i,0}+\frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,0}+u_{i-1,0})
$$

$$
\rightarrow \begin{cases} \gamma u_{1,2}-\frac{\lambda^2}{2}(u_{2,2}-u_{0,2}) = \xi u_{1,1}+\eta u_{1,0}+\frac{\lambda^2}{2}(u_{2,0}+u_{2,0}) \\ \gamma u_{2,2}-\frac{\lambda^2}{2}(u_{3,2}-u_{1,2}) = \xi u_{2,1}+\eta u_{2,0}+\frac{\lambda^2}{2}(u_{3,0}+u_{1,0}) \\ \vdots \\ \gamma u_{nx-1,2}-\frac{\lambda^2}{2}(u_{nx,2}-u_{nx-2,2}) = \xi u_{nx-1,1}+\eta u_{nx-1,0}+\frac{\lambda^2}{2}(u_{nx,0}+u_{nx-2,0}) \end{cases}
$$

Para $j = 2$:

$$\gamma u_{i,3} - \frac{\lambda^2}{2}\left(u_{i+1,3} - u_{i-1,3}\right) = \xi u_{i,2} + \eta u_{i,1} + \frac{\lambda^2}{2}\left(u_{i+1,1} + u_{i-1,1}\right)$$

Para $j = nt - 1$:

$$\gamma u_{i,nt} - \frac{\lambda^2}{2}\left(u_{i+1,nt} - u_{i-1,nt}\right)$$
$$= \xi u_{i,nt-1} + \eta u_{i,nt-2} + \frac{\lambda^2}{2}\left(u_{i+1,nt-2} + u_{i-1,nt-2}\right)$$

Desarrollando el sistema, se obtiene la expresión reducida como:

$$Au^{(j+1)} + B^{(j+1)} = \xi u^{(j)} + Cu^{(j-1)} + D^{(j-1)}$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & -\lambda^2/2 & \cdots & 0 \\ -\lambda^2/2 & \gamma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma \end{bmatrix},\ B^{(j+1)} = -\frac{\lambda^2}{2}\begin{bmatrix} u_{0,j+1} \\ 0 \\ \vdots \\ u_{nx,j+1} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \eta & \lambda^2/2 & \cdots & 0 \\ \lambda^2/2 & \eta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \eta \end{bmatrix}, D^{(j-1)} = \frac{\lambda^2}{2}\begin{bmatrix} u_{0,j-11} \\ 0 \\ \vdots \\ u_{nx,j-1} \end{bmatrix}$$

c) Ajustando los programas `hiperbolicoExplicito2.m` e `hiperbolicoImplicito2.m` a los datos del problema, se obtienen las soluciones:

x	Explícito	Implícito
	$u(x, 0.5)$	
0	0	0
0.1	0.004493	0.004515
0.2	0.008545	0.008588
0.3	0.011762	0.011820
0.4	0.013827	0.013896
0.5	0.014538	0.014611
0.6	0.013827	0.013896
0.7	0.011762	0.011820
0.8	0.008545	0.008588
0.9	0.004493	0.004515
1	0	0

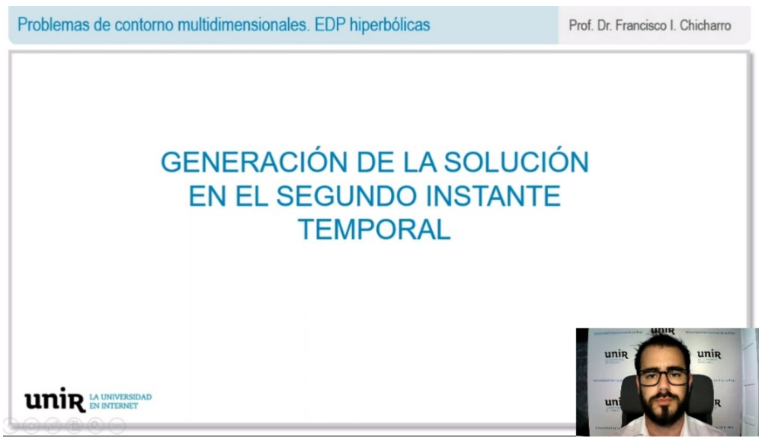
Tabla 5. Resultados EDP 4.

Lo + recomendado

Lecciones magistrales

Generación de la solución en el segundo intervalo temporal

Para las EDP hiperbólicas, es necesario el conocimiento de la solución $u^{(1)}$. En este tema hemos visto que había dos procedimientos para obtener dicha solución. En esta lección magistral vamos a plantear la implementación en Matlab de los dos métodos.



Accede a la lección magistral a través del aula virtual

No dejes de leer

Diferencias finitas para problemas parabólicos

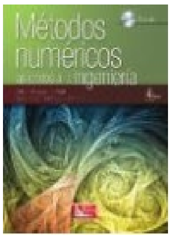
Blanes, S., Ginestar, D. y Roselló, M. D. (2014). «Diferencias finitas para problemas parabólicos». En Autores, *Introducción a los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales* (2ª Ed.). Valencia: Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia.

En el capítulo 5.3 de este libro se plantean las EDP hiperbólicas. Para ello, se desarrolla la solución aplicando diferencias finitas sobre la EDP con los métodos explícito e implícito. Además, se proponen alternativas para el cálculo de $u^{(1)}$ diferentes a las que hemos utilizado en el tema.

Accede al libro a través de la Biblioteca Virtual de UNIR

Solución de la ecuación de onda unidimensional

Nieves, A. (2014). «Solución de la ecuación de onda unidimensional». En Autor, *Métodos numéricos: Aplicados a la ingeniería.* México D.F.: Grupo Editorial Patria.



Otra forma de ver el planteamiento del problema de la ecuación de onda unidimensional, es decir, la obtención de la solución de $u_{tt} - \alpha u_{xx} = 0$, se puede observar en el capítulo 8.7. de este libro.

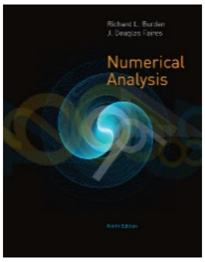
Accede al libro a través de la Biblioteca Virtual de UNIR

+ Información

A fondo

Ecuaciones en derivadas parciales hiperbólicas

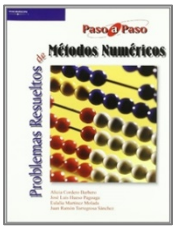
Burden, R. L. y Faires, J. D. (2011). «Ecuaciones derivadas parciales hiperbólicas». En Autores, *Numerical analysis* (9ª Ed.). Boston: Brooks/Cole CENGAGE learning.



En el Capítulo 12.3 de *Numerical Analysis* se desarrolla el problema de las EDP hiperbólicas, presentando con un gran rigor matemático el desarrollo de los métodos, las características de la convergencia y la comparativa con las soluciones analíticas, de modo que se pueden analizar los errores.

Ecuaciones hiperbólicas

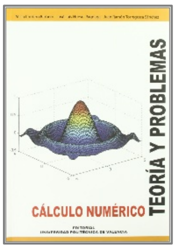
Cordero, A., Hueso, J. L., Martínez, E. y Torregrosa, J. R. (2006). «Ecuaciones hiperbólicas». En Autores, *Problemas resueltos de métodos numéricos*. Madrid: Thomson.



En el capítulo 10.2 de este libro puedes encontrar las ideas clave para el desarrollo de los métodos explícito e implícito, así como propuestas de implementación en Matlab. Además, al final del capítulo hay una serie de ejercicios resueltos para clarificar los conceptos trabajados.

Ecuaciones hiperbólicas

Cordero, A., Hueso, J. L., y Torregrosa, J. R. (2004). «Ecuaciones hiperbólicas». En Autores, *Cálculo numérico*. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.



El capítulo 4.3 de este libro desarrolla los métodos explícito e implícito para resolver las EDP hiperbólicas. Además, contiene implementaciones del código para resolver los problemas en Matlab. Al final del capítulo, se encuentran una serie de ejercicios resueltos.

Test

1. La discretización de una EDP hiperbólica con un método explícito aplica diferencias centrales sobre t y:

A. Diferencias progresivas sobre x.

B. Diferencias centrales sobre x.

C. Ninguna de las anteriores.

2. La discretización de una EDP hiperbólica con un método implícito aplica diferencias centrales sobre t y:

A. Diferencias progresivas sobre x.

B. Diferencias centrales sobre x.

C. Ninguna de las anteriores.

3. ¿En qué nodos tenemos que obtener la solución para las EDP hiperbólicas? En $i = 1,2, \dots, nx - 1$ y en:

A. $j = 0,1, \dots, nt - 1$

B. $j = 1,2, \dots, nt - 1$

C. $j = 2,3, \dots, nt$

4. Dada una EDP hiperbólica, ¿qué debemos hacer para que el orden de convergencia del método sea $\mathcal{O}(k^2 + h^2)$?

A. Usar el método explícito y la aproximación de $u^{(1)}$ por Taylor.

B. Usar el método implícito y la aproximación de $u^{(1)}$ por diferencias progresivas.

C. Ninguna de las anteriores es correcta.

5. Dada una EDP hiperbólica, ¿en cuál de los siguientes casos va a converger el método explícito?

A. $\alpha = 2, h = 0.2, k = 0.5$

B. $\alpha = 1, h = 0.1, k = 0.1$

C. Convergerá siempre, independientemente de los valores de α, h, k.

6. Dada una EDP hiperbólica, ¿en cuál de los siguientes casos va a converger el método implícito?

A. $\alpha = 2, h = 0.2, k = 0.5$

B. $\alpha = 1, h = 0.1, k = 0.1$

C. Convergerá siempre, independientemente de los valores de α, h, k.

7. ¿Cuál es la expresión general de la EDP hiperbólica $u_{xx} - u = u_{tt}$, a partir del método explícito?

A. $u_{i,j+1} = (2 - 2\lambda^2)u_{i,j} + \lambda^2\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right) - u_{i,j-1}$

B. $u_{i,j+1} = (2 - 2\lambda^2 - k^2)u_{i,j} + \lambda^2\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right) - u_{i,j-1}$

C. Ninguna de las anteriores es correcta.

8. Sea la EDP hiperbólica:

$$u_{tt} - \frac{1}{16\pi^2}u_{xx} = 0, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], t \geq 0$$

$$u(0,t) = u(1/2,t) = 0, t > 0, u(x,0) = 0, u_t(x,0) = \sin(4\pi x)\ \ 0 \leq x \leq 1/2$$

La solución $u(x,t)$ en el punto $x = 1/4$ y el instante $t = 1/2$ por el método explícito de orden $\mathcal{O}(k + h^2)$, tomando $h = k = 0.05$ es:

A. 2.2168e-7

B. 5.7680e-17

C. 9.0601e-8

9. Sea la EDP hiperbólica:

$$u_{tt} - \frac{1}{16\pi^2} u_{xx} = 0, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], t \geq 0$$

$$u(0,t) = u\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0, t > 0, u(x,0) = 0, u_t(x,0) = \sin(4\pi x) \;\; 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

La solución $u(x,t)$ en el punto $x = 1/4$ y el instante $t = 1/2$ por el método implícito de orden $\mathcal{O}(k + h^2)$, tomando $h = \; k = 0.05$ es:

A. 2.2168e-7

B. 5.7680e-17

C. 9.0601e-8

10. Sea la EDP hiperbólica:

$$u_{tt} - \frac{1}{16\pi^2} u_{xx} = 0, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], t \geq 0$$

$$u(0,t) = u\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0, t > 0, u(x,0) = 0, u_t(x,0) = \sin(4\pi x) \;\; 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

La solución $u(x,t)$ en el punto $x = 1/4$ y el instante $t = 1/2$ por el método implícito de orden $\mathcal{O}(k^2 + h^2)$, tomando $h = k = 0.05$ es:

A. 2.2168e-7

B. 5.7680e-17

C. 9.0601e-8