Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Métodos numéricos avanzados en ingeniería.	**Apellidos:** Balsells Orellana	16/02/2021
	Nombre: Jorge A.	

Considerando la ecuación 1 en derivadas parciales parabólica, con las condiciones de contorno de la ecuación 2 y condicion inicial mostrada en la ecuación 3, solucione los siguientes problemas:

$$u_t = u_{xx} - u_x + u \quad 0 < x < 1 \quad t > 0 \tag{1}$$

$$u_x(0,t) = 2t \quad u(1,t) = \frac{t^2}{2} \quad t > 0 \tag{2}$$

$$u(x,0) = \sin x + \cos x \quad 0 < x < 1 \tag{3}$$

1. Problema 1

Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden $O(k + h^2)$. Aplica este esquema para determinar la solución en el instante $t = 0{,}5$, tomando $h = 0{,}1$ y $k = 0{,}0005$.

1.1. Resultado:

Al aplicar el método explícito, se debe considerar que las componentes referidas al tiempo deben ser discretizadas por diferencias progresivas, mientras que aquellas relacionadas con el espacio, deben trabajarse con diferencias centrales. Considerando lo anterior, se obtiene el siguiente desarrollo:

$$\frac{u_{(x,t+k)} - u_{(x,t)}}{k} = \frac{u_{(x+h,t)} - 2u_{(x,t)} + u_{(x-h,t)}}{h^2} - \frac{u_{(x+h,t)} - u_{(x-h,t)}}{2h} + u_{(x,t)} \tag{4}$$

$$u_{(i,j+1)} = u_{(i,j)} + ku_{(i,j)} + \frac{k}{h2}[u_{(i+1,j)} - 2u_{(i,j)} + u_{(i-1,j)}] - \frac{k}{2h}[u_{(i+1,j)} - u_{(i-1,j)}] \tag{5}$$

$$u_{(i,j+1)} = u_{(i,j)}[1 + k - \frac{2k}{h^2}] + u_{(i+1,j)}[\frac{k}{h^2} - \frac{k}{2h}] + u_{(i-1,j)}[\frac{k}{h^2} + \frac{k}{2h}] \tag{6}$$

$$u_{(i,j+1)} = u_{(i,j)}[1 + k - \frac{2\lambda}{h}] + u_{(i+1,j)}[\frac{\lambda}{h} - \frac{\lambda}{2}] + u_{(i-1,j)}[\frac{\lambda}{h} + \frac{\lambda}{2}] \quad \lambda = \frac{k}{h} \tag{7}$$

considerando valores para i, donde $i = 1$ y $\lambda = k/h^2$:

$$u_{(1,j+1)} = u_{(1,j)}[1 - 2\lambda + k] + [u_{(2,j)} + u_{(0,j)}]\lambda - [u_{(2,j)} - u_{(0,j)}]\frac{h\lambda}{2} \tag{8}$$

se presenta el problema que no conocemos a la condición de contorno $u = (0,t)$, sin embargo, conocemos el valor de la derivada en dicho punto: $u_x(0,t) = 2t$. A partir de esta información, y aplicando diferencias finitas, podemos saber cuál es el valor esperando en $x = 0$. Para obtener dicho parámetro, aplicaremos diferencias finitas centrales:

$$\begin{gathered} u_x(0,t) = 2t \\ \frac{u_{(i+1,j)} - u_{(i-1,j)}}{2h} = 2t \longrightarrow con i+1 : \frac{u_{(2,j)} - u_{(0,j)}}{2h} = 2t \longrightarrow u_{(0,j)} = u_{(2,j)} - 2t(2h) \end{gathered} \tag{9}$$

Esta nueva expresión, la podemos reemplazar en la ecuación 8, resultando:

$$u_{(1,j+1)} = [1 - 2\lambda + k]u_{(1,j)} + [2\lambda]u_{(2,j)} - [2 + h][2th\lambda] \tag{10}$$

Esta expresión es relevante, debido a que nos aportará los datos de la primera fila, a partir de las condiciones de contorno. Nótese que 2t, corresponde a la función asociada a la derivada en dicho punto. A partir de este análisis, podemos implementar el código en Matlab, para obtener los resultados solicitados.

x	$u_{(x,0,5)}$
0	0,338062
0,1	0,426238
0,2	0,489581
0,3	0,527307
0,4	0,539094
0,5	0,525152
0,6	0,486303
0,7	0,424071
0,8	0,340780
0,9	0,239667
1,0	0,125000

El código implementado del problema 1 se encuentra descrito a continuación:

```
function [U] = act_explicita(cc1,cc2,f,L,nx,T,nt)
h=L/nx; x=0:h:L; % espacios espacial
k=T/nt; t=0:k:T; % espacios temporal
U=zeros(nx+1,nt+1);
c=feval(cc1,t); % Condici n de contorno en x=a, para el vector tiempo, ...
    primera fila
U(nx+1,:)=feval(cc2,t); % Condici n de contorno en x=b, para el vector ...
    tiempo,  ltima  fila
U(:,1)=feval(f,x); % Condici n inicial, primera columna
lambda=k/h^2;
for j=1:nt
```

```
    U(1,j+1)=(1-2*lambda+k)*U(1,j)+2*lambda*U(2,j)-(2+h)*lambda*h*c(j);
    for i=2:nx
        U(i,j+1)=(1-2*lambda+k)*U(i,j)+lambda*(U(i+1,j)+U(i-1,j))-h/2*...
        ...lambda*(U(i+1,j)-U(i-1,j));
    end
end
end
```

Listing 1: Código el MATLAB de implementación de problema 1.

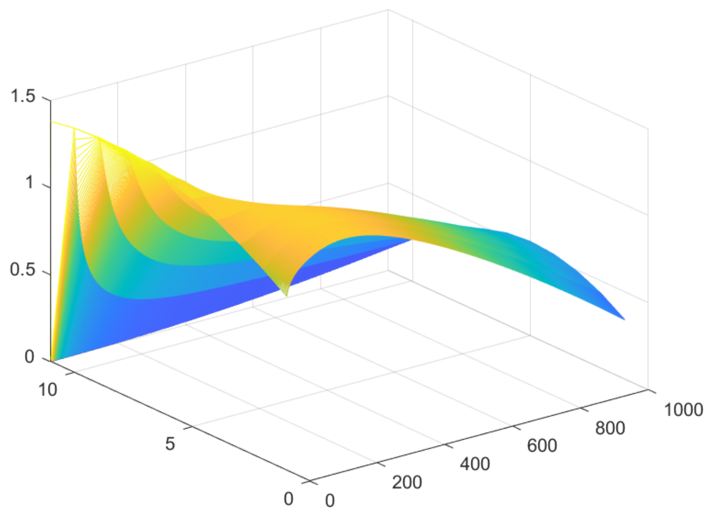

Figura 1: Representación gráfica de problema 1

Tema 7, Métodos numéricos.[1]. Cap. 12. [2].

2. Problema 2

Transforma el problema en un esquema en diferencias implícito de orden $O(k + h^2)$. Aplica este esquema para determinar la solución en el instante $t = 0{,}5$, tomando $h = 0{,}1$ y $k = 0{,}0005$.

2.1. Resultado:

Al aplicar el método implícito, se debe considerar que las componentes referidas al tiempo deben ser discretizadas por diferencias regresivas, mientras que aquellas relacionadas con el espacio, deben trabajarse con diferencias centrales. Considerando lo anterior, se obtiene el siguiente desarrollo:

$$\frac{u_{(x,t)}-u_{(x,t-k)}}{k} = \frac{u_{(x+h,t)}-2u_{(x,t)}+u_{(x-h,t)}}{h^2} - \frac{u_{(x+h,t)}-u_{(x-h,t)}}{2h} + u_{(x,t)} \tag{11}$$

$$u_{(i,j-1)} = u_{(i,j)} - ku_{(i,j)} - \frac{k}{h2}[u_{(i+1,j)} - 2u_{(i,j)} + u_{(i-1,j)}] + \frac{k}{2h}[u_{(i+1,j)} - u_{(i-1,j)}] \tag{12}$$

$$u_{(i,j-1)} = \frac{k}{2h}u_{(i+1,j)} - \frac{k}{2h}u_{(i-1,j)} - \frac{k}{h^2}u_{(i+1,j)} + \frac{2k}{h^2}u_{(i,j)} - \frac{k}{h^2}u_{(i-1,j)} + u_{(i,j)} - ku_{(i,j)} \tag{13}$$

$$u_{(i,j-1)} = u_{(i,j)}[1-k+\frac{2k}{h^2}] + u_{(i+1,j)}[\frac{k}{2h}-\frac{k}{h^2}] - u_{(i-1,j)}[\frac{k}{2h}+\frac{k}{h^2}] \tag{14}$$

$$u_{(i,j-1)} = u_{(i,j)}[1-k+\frac{2\lambda}{h}] + u_{(i+1,j)}[\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{h}] - u_{(i-1,j)}[\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{h}] \quad \lambda = \frac{k}{h} \tag{15}$$

Sea $\alpha_1 = \frac{-k}{h^2} - \frac{k}{2h}$, $\alpha_2 + 1 + \frac{2k}{h^2} - k$, $\alpha_3 = \frac{-k}{h^2} + \frac{k}{2h}$, reemplazando en la ecuación 14 se obtiene lo siguiente:

$$u_{(i-1,j)}\alpha_1 + u_{(i,j)}\alpha_2 + u_{(i+1,j)}\alpha_3 = u_{(i,j-1)} \tag{16}$$

Considerando algunos valores para i:

$$\begin{aligned} u_{(-1,j)}\alpha_1 + u_{(0,j)}\alpha_2 + u_{(1,j)}\alpha_3 &= u_{(0,j-1)} \qquad\qquad i=0 \\ u_{(nx-2,j)}\alpha_1 + u_{(nx-1,j)}\alpha_2 + u_{(nx,j)}\alpha_3 &= u_{(nx-1,j-1)} \quad i = nx-1 \end{aligned} \tag{17}$$

A partir de este análisis, podemos implementar el código en Matlab, para obtener los resultados solicitados.

x	$u_{(x,0,5)}$
0	0,336386
0,1	0,424576
0,2	0,487964
0,3	0,525768
0,4	0,537668
0,5	0,523875
0,6	0,485211
0,7	0,423200
0,8	0,340167
0,9	0,239344
1,0	0,125000

El código implementado del problema 2 se encuentra descrito a continuación:

```
function [U]=ImplicitoGrupal1(nx,cc1,cc2,nt,T,fun)
  h=(1-0)/nx;
  x=0:h:1;
  k=T/nt; t=0:k:T;
  ct = feval(fun,x);
  U=zeros(nx+1,nt+1);
  U(:,1)=ct;

  Ux(1,:)=feval(cc1,t);
  U(nx+1,:)=feval(cc2,t);

```

```
    coef1 = -k/h^2-k/2/h;
    coef2 = 1-k+2*k/h^2;
    coef3 = -k/h^2+k/2/h;

    dp=coef2*ones(nx,1);
    ds=coef3*ones(nx-1,1);
    ds(1)=ds(1)+coef1;
    di=coef1*ones(nx-1,1);

    for j=2:nt+1
      d=U(1:nx,j-1);
      d(1)=d(1)+Ux(1,j)*2*h*coef1;
      d(end)=d(end)-coef3*U(nx+1,j);
      z=Crout(dp,ds,di,d);
      U(1:nx,j)=z;
    end
end
```

Listing 2: Código el MATLAB de implementación de problema 2.

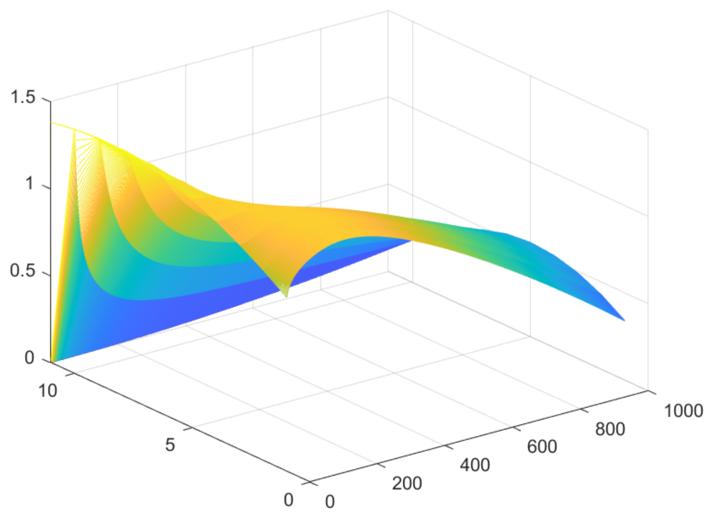

Figura 2: Representación gráfica de problema 2

Tema 7, Métodos numéricos.[1] Cap. 12. [2].

3. Problema 3

Describe el esquema en diferencias finitas que resulta de aplicar la idea de Crank-Nicholson a esta ecuación en derivadas parciales. Escribe la expresión matricial del sistema resultante, identificando cada una de las matrices del sistema y resuelve la EDP. Representa gráficamente e indica en una tabla la solución obtenida en el instante $T = 1$.

3.1. Resultado:

Lado izquierdo de la igualdad:

$$u_{(i,j+1)} - [\tfrac{\lambda}{2}]u_{(i+1,j+1)} + [\lambda]u_{(i,j+1)} - [\tfrac{\lambda}{2}]u_{(i-1,j+1)} + [\tfrac{h\lambda}{4}]u_{(i+1,j)} \tag{18}$$

$$[1 + \lambda - \tfrac{k}{2}]u_{(i,j+1)} + \tfrac{\lambda}{2}[\tfrac{h}{2} - 1]u_{(i+1,j+1)} + \tfrac{\lambda}{2}[\tfrac{h}{2} - 1]u_{(i-1,j+1)} \tag{19}$$

Lado derecho de la igualdad:

$$u_{(i,j)} + [\tfrac{\lambda}{2}]u_{(i+1,j)} - [\lambda]u_{(i,j)} + [\tfrac{\lambda}{2}]u_{(i-1,j)} - [\tfrac{h\lambda}{4}]u_{(i+1,j)} + [\tfrac{k}{2}]u_{(i,j)} \tag{20}$$

$$[1 - \lambda + \tfrac{k}{2}]u_{(i,j)} + \tfrac{\lambda}{2}[1 - \tfrac{h}{2}]u_{(i+1,j)} + \tfrac{\lambda}{2}[1 - \tfrac{h}{2}]u_{(i-1,j)} \tag{21}$$

$$Au^{j+1} = Bu^{j} \tag{22}$$

$$\begin{gathered}[A] \longrightarrow dp = 1 + \lambda - \tfrac{k}{2} \longrightarrow ds = \tfrac{\lambda}{2}[\tfrac{h}{2} - 1] \longrightarrow di = ds \\ [B] \longrightarrow dp = 1 - \lambda + \tfrac{k}{2} \longrightarrow ds = \tfrac{\lambda}{2}[1 - \tfrac{h}{2}] \longrightarrow di = ds\end{gathered} \tag{23}$$

dp: diagonal superior, ds: diagonal superior, di: diagonal inferior.

$$[A]u^{(j+1)} = [B]u^{(j)} + \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{2}(\frac{h}{2}-1)u_{(0,j+1)} + \frac{\lambda}{2}(1-\frac{h}{2})u_{(0,j)} \\ \vdots \\ \frac{\lambda}{2}(\frac{h}{2}-1)u_{(nx,j+1)} + \frac{\lambda}{2}(1-\frac{h}{2})u_{(nx,j)} \end{bmatrix} \tag{24}$$

x	$u_{(x,0,5)}$
0	0,372242
0,1	0,425407
0,2	0,488772
0,3	0,526538
0,4	0,538381
0,5	0,524513
0,6	0,485757
0,7	0,423636
0,8	0,340473
0,9	0,239506
1,0	0,125000

Tema 7, Métodos numéricos.[1]

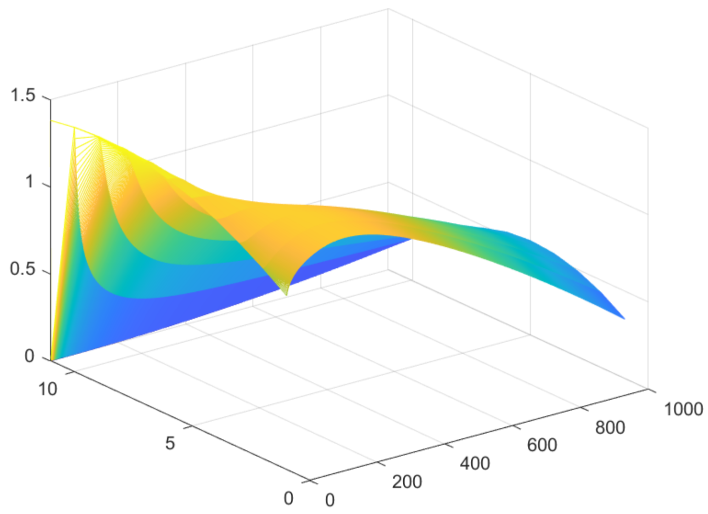

Figura 3: Representación gráfica de problema 3

Referencias

[1] Neus. Torregrosa Juan R. Cordero, Alicia. Garrido. Apuntes de clase de métodos numéricos avanzados en ingeniería., 2020.

[2] Annette M. Burden. Richard L. Burden, Douglas J. Faires. Análisis numérico. 10a edición., 2017.