Tema 1

Curvas y Superficies

1.1 Curvas

1.1.1 Ejercicios

1. Identifica las trayectorias diferenciables y regulares.

(a) $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} :\to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\gamma}(u) = (3u - 1, 4u + 5)^T$.

(b) $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} :\to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\gamma}(u) = (2u^2 + 4, 4u^3 - 2u^2 + 1)^T$.

(c) $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} :\to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\gamma}(u) = (u, u^{2/3})^T$.

(d) $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} :\to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\gamma}(u) = (u^3, u^2)^T$.

2. Sean $a = 1, b = 2$. Se consideran las cuatro parametrizaciones de la elipse

$$C = \left\{ (x, y)^T / \left(\frac{x-1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{b}\right)^2 = 1 \right\},$$

siguientes:

(a) $\boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\gamma}(u) = (1 + a\cos u, 1 + b\sin u)^T$.

(b) $\boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi/3] \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\gamma}_1(u) = (1 + a\cos 3u, 1 + b\sin 3u)^T$.

(c) $\boldsymbol{\gamma} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\gamma}_2(u) = (1 + a\cos 2u, 1 - b\sin 2u)^T$.

(d) $\boldsymbol{\gamma} : [-3\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\gamma}_3(u) = (1 + a\sin u, 1 + b\cos u)^T$.

Se pide

- Determina la orientación dada por $\boldsymbol{\gamma}$ y comprueba que $\boldsymbol{\gamma}_i$, $i = 1, 2, 3$ es una reparametrización de $\boldsymbol{\gamma}$, indicando el cambio de parámetro y si la orientación es la misma o contraria.
- Utilizando la representación implícita de C, calcula la recta tangente a la curva en el punto $(1 + a/\sqrt{2}, 1 + b/\sqrt{2})^T$.
  Usando la parametrización $\boldsymbol{\gamma}$, calcula la representación paramétrica de la misma recta tangente.

3. Sea $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ una trayectoria en $\mathbb{R}^N$ de clase C^1. Se define la longitud de arco de $\boldsymbol{\gamma}$ entre a y b como

$$L(\boldsymbol{\gamma}) = \int_a^b ||\boldsymbol{\gamma}'(t)|| \, \mathrm{d}t.$$

Calcula la longitud de arco de las siguientes curvas en los límites que se indican:

(a) Cicloide $\boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$:

$$\boldsymbol{\gamma}(u) = (u - \sin u, u - \cos u),$$

(b) Hélice $\boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{\gamma}(u) = (\cos u, \sin u, u),$$

(c) $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \Rightarrow \mathbb{R}^2, \boldsymbol{\gamma}(u) = (u, f(u))$, con $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de clase C^1.

4. Para los siguientes casos, determina una parametrización de la curva indicada:

(a) El eje x, recorrido de izquierda a derecha.

(b) El eje Y, recorrido de arriba hacia abajo.

(c) La recta $y = 2x$, recorrida del tercero al primer cuadrante.

(d) La cuarta parte de la circunferencia $x^2 + y^2 = 3$ que está en el segundo cuadrante, recorrido en sentido contrario al de las agujas del reloj (antihorario).

(e) El cuadrado $|x| + |y| = 1$, recorrido en sentido antihorario.

(f) La parte de la recta $y = 2x = 3z$, que se encuentra en el primer octante, comenzando en el origen.

(g) La circunferencia intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con el plano $z = 4$, comenzando en el punto $(0, 2, 4)$ y con el sentido $(0, 2, 4) \to (-2, 0, 4) \to (0, -2, 4) \to (2, 0, 4) \to (0, 2, 4)$

1.1.2 Soluciones

1. La respuesta a los ejercicios anteriores es:

(a) Las dos componentes de $\boldsymbol{\gamma}$ son diferenciables: $\gamma_1(u) = 3u - 1, \gamma_2(u) = 4u + 5$, pues son polinomios. Por tanto, $\boldsymbol{\gamma}$ es diferenciable. Además

$$\boldsymbol{\gamma}'(u) = (3, 4)^T \neq (0, 0)^T,$$

luego $\boldsymbol{\gamma}$ es regular en todos los puntos.

(b) $\boldsymbol{\gamma}$ es diferenciable por la misma razón que en (a). Ahora

$$\boldsymbol{\gamma}'(u) = (4u, 12u^2 - 4u)^T = (0, 0)^T \Leftrightarrow u = 0.$$

Entonces, $\boldsymbol{\gamma}$ es regular en todos los puntos salvo en el correspondiente a $u = 0$, es decir $\boldsymbol{\gamma}(0) = (4, 1)^T$.

(c) $\boldsymbol{\gamma}$ es diferenciable en todos los puntos salvo en el origen, pues $g(u) = u^{2/3}$ no es derivable en $u = 0$. En aquellos puntos en los que es diferenciable, la derivada

$$\boldsymbol{\gamma}'(u) = (1, \frac{2}{3}u^{-1/3})^T,$$

no se anula, por lo que es regular en ellos.

(d) $\boldsymbol{\gamma}$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}$. Ahora

$$\boldsymbol{\gamma}'(u) = (3u^2, 2u)^T,$$

y, por tanto, es regular salvo en el origen $\boldsymbol{\gamma}(0) = (0, 0)^T$.

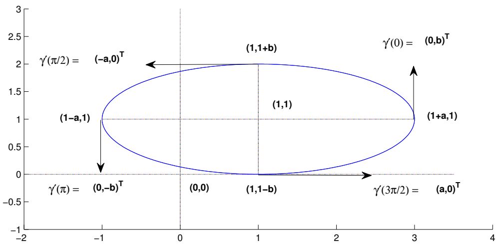

Fig. 1.1: Parametrización (a)

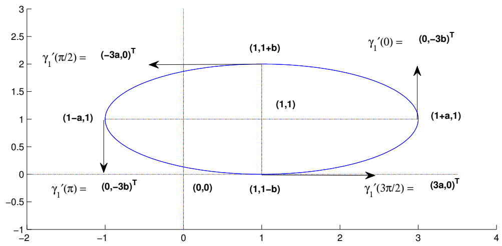

Fig. 1.2: Parametrización (b)

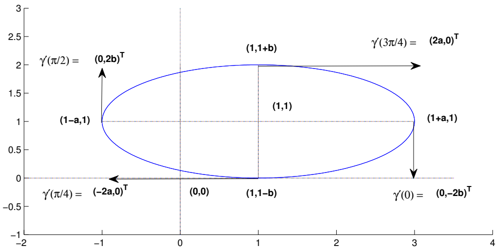

Fig. 1.3: Parametrización (c)

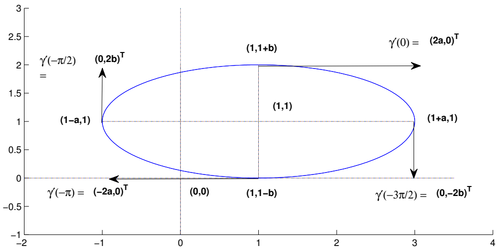

Fig. 1.4: Parametrización (d)

2. Recuerda que la orientación representa el sentido con el que un objeto viaja por la curva siguiendo la trayectoria dada por la parametrización. Puesto que su velocidad está dada en cada instante por la derivada, el sentido de ésta es el que determina la orientación. Así, para $\boldsymbol{\gamma}(t)$ dado en (a), se tiene

$$\boldsymbol{\gamma}'(u) = (-a \sin u, b \cos u)^T.$$

En la figura 1.1 se representa la elipse, junto con el vector $\boldsymbol{\gamma}'$ en varios instantes de t. El sentido de dicho vector identifica la orientación con la que el objeto recorre la elipse, siendo, en este caso, antihoraria.

Por otro lado, $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2$, Y $\boldsymbol{\gamma}_3$ son reparametrizaciones de $\boldsymbol{\gamma}$, pues se relacionan con ésta a partir de un cambio de parámetro. Concretamente:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}_1(u) &= \boldsymbol{\gamma}(\theta_1(u)), \quad \theta_1 : [0, 2\pi/3] \to [0, 2\pi], \quad \theta_1(s) = 3s, \\
\boldsymbol{\gamma}_2(u) &= \boldsymbol{\gamma}(\theta_2(u)), \quad \theta_2 : [0, \pi] \to [0, 2\pi], \quad \theta_2(s) = -2s, \\
\boldsymbol{\gamma}_3(u) &= \boldsymbol{\gamma}(\theta_3(u)), \quad \theta_3 : [-3\pi/2, \pi/2] \to [0, 2\pi], \quad \theta_3(s) = \pi/2 - s.
\end{aligned}$$

Como $\theta_1'(u) > 0, \theta_2'(u) < 0, \theta_3'(u) < 0$, entonces $\boldsymbol{\gamma}_1$ mantiene la orientación de $\boldsymbol{\gamma}$, mientras que $\boldsymbol{\gamma}_2$ y $\boldsymbol{\gamma}_3$ la cambian y tienen orientación horaria. Esto puede verificarse directamente usando, de nuevo, el vector velocidad. En este caso

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}_1'(u) &= (-3a \sin 3u, 3b \cos 3u)^T, \\
\boldsymbol{\gamma}_1'(u) &= (-2a \sin 2u, -2b \cos 2u)^T, \\
\boldsymbol{\gamma}_1'(u) &= (a \cos u, -b \sin u)^T,
\end{aligned}$$

véanse las gráficas 1.2, 1.3, y 1.4.

Lo que diferencia $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\gamma}_1$, ambas con la misma orientación, es la rapidez del recorrido, es decir, el tamaño del vector velocidad ($\boldsymbol{\gamma}_1$ recorre la elipse tres veces más rápido). Lo mismo ocurre con $\boldsymbol{\gamma}_2$ y $\boldsymbol{\gamma}_3$.

(b) Con la representación implícita

$$C = \left\{ (x, y)^T / g(x, y) = \left(\frac{x-1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{b}\right)^2 - 1 = 0 \right\},$$

la recta tangente a C en $(1+a/\sqrt{2}, 1+b/\sqrt{2})^T$ será,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1+a/\sqrt{2}, 1+b/\sqrt{2})(x-1-a/\sqrt{2}) + \frac{\partial g}{\partial y}(1+a/\sqrt{2}, 1+b/\sqrt{2})(y-1-b/\sqrt{2}) = 0$$

$$\frac{2}{a\sqrt{2}}(x-1-a/\sqrt{2}) + \frac{2}{b\sqrt{2}}(y-1-b/\sqrt{2}) = 0.$$

Utilizando la parametrización $\boldsymbol{\gamma}$, la recta tangente a C en $(1+a/\sqrt{2}, 1+b/\sqrt{2})^T = \boldsymbol{\gamma}(\pi/4)$ pasará por dicho punto y tendrá dirección dada por $\boldsymbol{\gamma}'(\pi/4) = (-a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})^T$, y en coordenadas paramétricas se puede escribir

$$\begin{aligned} x &= 1 + \frac{a}{\sqrt{2}} + s\left(\frac{-a}{\sqrt{2}}\right) \\ y &= 1 + \frac{b}{\sqrt{2}} + s\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

3. En primer lugar, hay que observar que el significado de la reparametrización, asociado a la idea de recorrer la curva de distintas maneras, debe conservar la longitud del arco recorrido, independientemente de la forma en que se haga. Por eso, para poder definir la longitud de un arco de curva, hay que comprobar que la definición anterior no depende de la parametrización elegida. Sea $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \circ \psi : [c,d] \to \mathbb{R}^N$ una reparametrización de $\boldsymbol{\gamma}$. Entonces, por el teorema del cambio de variable con $v = \psi(u)$, se tiene

$$\begin{aligned} L(\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}) &= \int_c^d \|\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}'(u)\|\,\mathrm{d}u = \int_c^d \|\boldsymbol{\gamma}'(\psi(u))\psi'(u)\|\,\mathrm{d}u \\ &= \int_c^d |\psi'(s)| \cdot \|\boldsymbol{\gamma}'(\psi(u))\|\,\mathrm{d}u = \int_a^b \|\boldsymbol{\gamma}'(v)\|\,\mathrm{d}v = L(\boldsymbol{\gamma}). \end{aligned}$$

De este modo, se puede definir la longitud de una curva como la longitud dada por una cualquiera de sus parametrizaciones C^1.

(a) La longitud de un arco de la cicloide $\boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{\gamma}(u) = (u - \sin u, t - \cos u),$$

entre 0 y 2π es

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\gamma}) &= \int_0^{2\pi} \|\boldsymbol{\gamma}'(u)\|\,\mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sqrt{1-\cos u}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}\,\mathrm{d}u \\ &= 2\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{u}{2}\right)\mathrm{d}u = 8. \end{aligned}$$

(b) La longitud de un arco de la hélice $\boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{\gamma}(u) = (\cos u, \sin u, u),$$

entre 0 y 2π es

$$L(\boldsymbol{\gamma}) = \int_0^{2\pi} \|\boldsymbol{\gamma}'(u)\|\,\mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,\mathrm{d}u = 2\pi\sqrt{2}.$$

(c) Se tiene la longitud de la gráfica de f:

$$L(\boldsymbol{\gamma}) = \int_a^b \|\boldsymbol{\gamma}'(u)\|\,\mathrm{d}u = \int_a^b \sqrt{1+f'(u)^2}\,\mathrm{d}u.$$

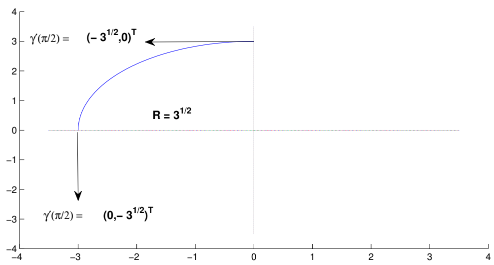

Fig. 1.5: $\gamma(t) = (\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t)^T$.

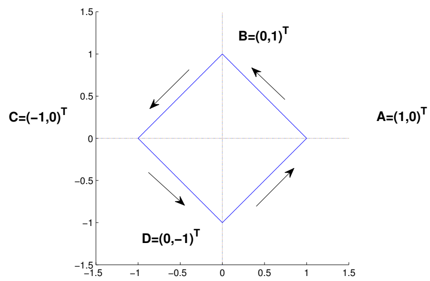

Fig. 1.6: Cuadrado $|x| + |y| = 1$, recorrido en sentido antihorario.

4. (a) Atención a la orientación.

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(u) = (u, 0)^T, \quad \gamma'(u) = (1, 0)^T.$$

(b) Atención a la orientación.

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(u) = (0, u)^T, \quad \gamma'(u) = (0, 1)^T.$$

(c) Atención a la orientación.

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(u) = (u, 2u)^T, \quad \gamma'(u) = (1, 2)^T.$$

(d) Véase la figura 1.5

$$\gamma : [\frac{\pi}{2}, \pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(u) = (\sqrt{3}\cos u, \sqrt{3}\sin u)^T, \quad \gamma'(u) = (-\sqrt{3}\sin u, \sqrt{3}\cos u)^T.$$

(e) Veamos primero que la curva

$$C = \{(x, y)^T / |x| + |y| = 1\}$$

limita un rombo centrado en el origen (figura 1.6). Sea $(x, y)^T \in C$, es decir, tal que $|x| + |y| = 1$. Hay entonces cuatro posibilidades, según el signo de x e y.

i. $x, y > 0$. Entonces la condición $|x|+|y| = 1$ se lee $x+y = 1$ o, equivalentemente $y = 1 - x$, por lo que en el primer cuadrante, la curva se trata de la recta que pasa por $(1, 0)^T$ y de pendiente -1. Para que x e y se mantengan en el primer cuadrante, han de estar entre cero y uno.

ii. $x < 0, y > 0$. Entonces la condición $|x| + |y| = 1$ se lee $-x + y = 1$ o, equivalentemente $y = 1 + x$, por lo que en el segundo cuadrante, la curva se trata de la recta que pasa por $(-1, 0)^T$ y de pendiente 1. Para que x e y se mantengan en el segundo cuadrante, x ha de estar entre -1 y 0, e y entre 0 y 1.

iii. $x, y < 0$. Entonces la condición $|x|+|y| = 1$ se lee $-x-y = 1$ o, equivalentemente $y = -1 - x$, por lo que en el tercer cuadrante, la curva se trata de la recta que pasa por $(-1, 0)^T$ y de pendiente -1. Para que x e y se mantengan en el tercer cuadrante, han de estar entre -1 y 0.

iv. $x > 0, y < 0$. Entonces la condición $|x| + |y| = 1$ se lee $x - y = 1$ o, equivalentemente $y = -1 + x$, por lo que en el cuarto cuadrante, la curva se trata de la recta que pasa por $(1, 0)^T$ y de pendiente 1. Para que x e y se mantengan en el último cuadrante, y ha de estar entre -1 y 0, y x entre 0 y 1.

Para una parametrización con la orientación antihoraria pedida, la construcción es similar a la realizada en clase para un rectángulo genérico, véase la figura 1.6. Por ejemplo, podemos tomar la yuxtaposición $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_1 \vee \boldsymbol{\gamma}_2 \vee \boldsymbol{\gamma}_3 \vee \boldsymbol{\gamma}_4$ con

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}_1 &: [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\gamma}_1(u) = (1-u, u)^T, \\
\boldsymbol{\gamma}_2 &: [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\gamma}_2(u) = (-u, 1-u)^T, \\
\boldsymbol{\gamma}_3 &: [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\gamma}_3(u) = (-1+u, -u)^T, \\
\boldsymbol{\gamma}_4 &: [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\gamma}_4(u) = (u, -1+u)^T
\end{aligned}$$

(f) El primer octante corresponde a los valores $x, y, z \geq 0$ y el mismo enunciado da ya una parametrización de la curva, sólo hay que hacerla partir del origen:

$$\boldsymbol{\gamma} : [0, +\infty] \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\gamma}(u) = (3u, 3u/2, u)^T.$$

(g) La curva

$$C = \{(x,y)^T / z = x^2 + y^2, z = 4\},$$

es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, pero en $\mathbb{R}^3$. La orientación pedida viene dada, por ejemplo, por la parametrización

$$\boldsymbol{\gamma} : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\gamma}(u) = (2\cos u, 2\sin u, 4)^T,$$

con $\boldsymbol{\gamma}'(u) = (-2\sin u, 2\cos u, 0)^T$. Alternativamente,

$$\boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\gamma}(u) = (2\cos(u + \pi/2), 2\sin(u + \pi/2), 4)^T,$$

da la misma orientación (¿por qué?).

Puedes repetir el ejercicio buscando parametrizaciones de las curvas que den orientaciones opuestas.

1.2 Superficies

1.2.1 Ejercicios

1. Se considera la superficie $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\varphi}(D)$, donde $D = (-\pi/2, \pi/2) \times (-1, 1)$, y

$$\boldsymbol{\varphi} : D \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{definida por} \qquad \boldsymbol{\varphi}(u,v) = (-\sin u, \cos u, v).$$

Comprueba que $\boldsymbol{\Phi}$ es una superficie regular y descríbela geométricamente.

2. Determina el plano tangente a la superficie simple en el punto indicado en cada uno de los casos siguientes:

(a) $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\varphi}(D), D = \{(u,v)/u^2 + v^2 < 4\}$, y

$$\boldsymbol{\varphi} : D \to \mathbb{R}^3, \qquad \text{definida por} \qquad \boldsymbol{\varphi}(u,v) = (3uv + v^2, v, 4u), \quad s_0 = \boldsymbol{\varphi}(-1,-1).$$

(b) $\boldsymbol{\Phi} = \{(x,y,z)/z = 3x^2 + 5y^2, x^2 + y^2 \leq 4\}, \quad s_0 = (1,0,3).$

3. Para la superficie orientable

$$S = \{(x,y,z)/x^2 + y^2 = 1, -1 < z < 1\},$$

calcula una parametrización con sus vectores normales apuntando hacia dentro.

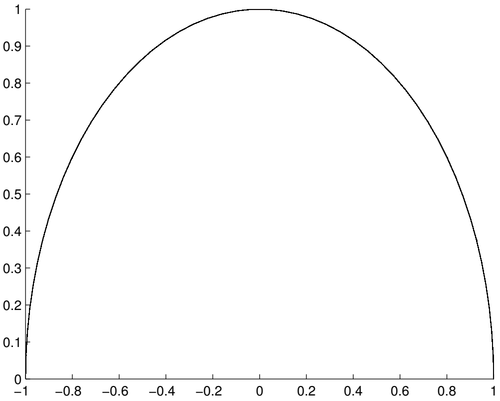

Fig. 1.7: $\boldsymbol{\gamma}(u) = (-\sin u, \cos u)^T$.

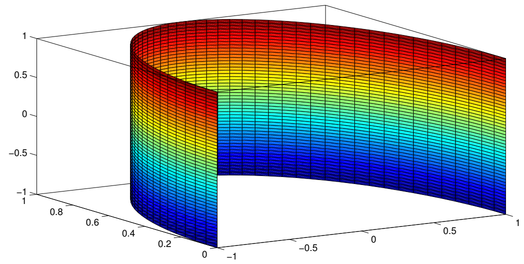

Fig. 1.8: $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\varphi}(D)$.

1.2.2 Soluciones

1. Se tiene:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v) = (-\cos u, -\sin u, 0)^T, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v) = (0,0,1)^T,$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\cos u & -\sin u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-\sin u, \cos u, 0)^T.$$

Como seno y coseno no pueden anularse simultáneamente, el vector normal nunca se anula y la superficie es regular. Las dos primeras componentes de la parametrización se mueven siempre en la semicircunferencia centrada en el origen y radio uno, desde $(1,0)$ a $(-1,0)$. Por su parte, la tercera componente varía entre -1 y 1 con independencia de las dos primeras. El resultado es la superficie que limita la porción de cilindro de la figura 1.7.

2. (a) Se tiene, en este caso

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v) = (3v, 0, 4)^T, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v) = (3u+2v, 1, 0)^T,$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3v & 0 & 4 \\ 3u+2v & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-4, 12u+8v, 3v)^T$$
$$= (n_1(u,v), n_2(u,v), n_3(u,v))^T.$$

El plano tangente a $\boldsymbol{\Phi}$ en $\boldsymbol{s}_0 = \boldsymbol{\varphi}(-1,-1) = (4,-1,-4)^T = (x_0, y_0, z_0)^T$ es entonces ($\boldsymbol{s}_0$ corresponde a los valores $u_0 = v_0 = -1$),

$$n_1(u_0,v_0)(x-x_0) + n_2(u_0,v_0)(y-y_0) + n_3(u_0,v_0)(z-z_0) = 0$$
$$-4(x-4) - 20(y+1) - 3(z+4) = 0.$$

(b) Utilizando la representación explícita $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\varphi}(D), D = \{(x,y)^T / x^2 + y^2 < 4\}$, con

$$\boldsymbol{\varphi} : D \to \mathbb{R}^3, \qquad \text{definida por} \qquad \boldsymbol{\varphi}(u,v) = (u, v, 3u^2 + 5v^2),$$

se tiene

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v) = (1,0,6u)^T, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v) = (0,1,10v)^T,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 6u \\ 0 & 1 & 10v \end{vmatrix} = (-6u, -10v, 1)^T$$
$$= (n_1(u,v), n_2(u,v), n_3(u,v))^T.$$

El plano tangente a $\mathbf{\Phi}$ en $\boldsymbol{s}_0 = \boldsymbol{\varphi}(1,0) = (1,0,3)^T = (x_0, y_0, z_0)^T$ es entonces ($\boldsymbol{s}_0$ corresponde a los valores $u_0 = 1, v_0 = 0$),

$$n_1(u_0,v_0)(x-x_0) + n_2(u_0,v_0)(y-y_0) + n_3(u_0,v_0)(z-z_0) = 0$$
$$-6(x-1) + 0(y-0) + (z-3) = -6(x-1) + z - 3 = 0.$$

Alternativamente, uno puede utilizar la parametrización $\mathbf{\Phi} = \boldsymbol{\varphi}(D), D = (0,2\pi) \times (0,2)$, con

$$\boldsymbol{\varphi} : D \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{definida por} \qquad \boldsymbol{\varphi}(u,v) = (v\cos u, v\sin u, v^2(3\cos^2 u + 5\sin^2 u).$$

Entonces

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v) = (-v\sin u, v\cos u, 4v^2 \sin u \cos u)^T,$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v) = (\cos u, \sin u, 2v(3\cos^2 u + 5\sin^2 u))^T.$$

$\boldsymbol{s}_0$ corresponde ahora a los valores $u_0 = 0, v_0 = 1$, es decir, $\boldsymbol{s}_0 = \boldsymbol{\varphi}(0,1) = (1,0,3)^T = (x_0, y_0, z_0)^T$. Entonces,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u_0,v_0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (6,0,-1)^T = (n_1(u_0,v_0), n_2(u_0,v_0), n_3(u_0,v_0))^T.$$

El plano tangente a $\mathbf{\Phi}$ en $\boldsymbol{s}_0$ queda ahora

$$n_1(u_0,v_0)(x-x_0) + n_2(u_0,v_0)(y-y_0) + n_3(u_0,v_0)(z-z_0) = 0$$

esto es,

$$-6(x-1) + 0(y-0) + (z-3) = -6(x-1) + z - 3 = 0,$$

es decir, el mismo.

3. Tomemos, en primer lugar $\mathbf{\Phi} = \boldsymbol{\varphi}(D), D = (0,2\pi) \times (-1,1)$, donde

$$\boldsymbol{\varphi} : D \to \mathbb{R}^3, \qquad \text{defindida por} \qquad \boldsymbol{\varphi}(u,v) = (\cos u, \sin u, v)^T.$$

Observemos que se tiene

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v) = (-\sin u, \cos u, 0)^T, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v) = (0,0,1)^T,$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v) = (\cos u, \sin u, 0)^T = (n_1(u_0,v_0), n_2(u_0,v_0), n_3(u_0,v_0))^T.$$

Esta parametrización tiene sus vectorres normales apuntando hacia fuera, obsérvese la figura 1.9. Por ejemplo, en el punto $(0,1,0)^T$, el vector normal es $(0,1,0)^T$. Podemos generar una reparametrización cambiando la orientación del disco, por ejemplo con $\mathbf{\Phi} = \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(D), D = (0,2\pi) \times (-1,1)$, donde

$$\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} : D \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{definida por} \qquad \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(\widetilde{u}, \widetilde{v}) = (\cos \widetilde{u}, -\sin \widetilde{u}, v)^T.$$

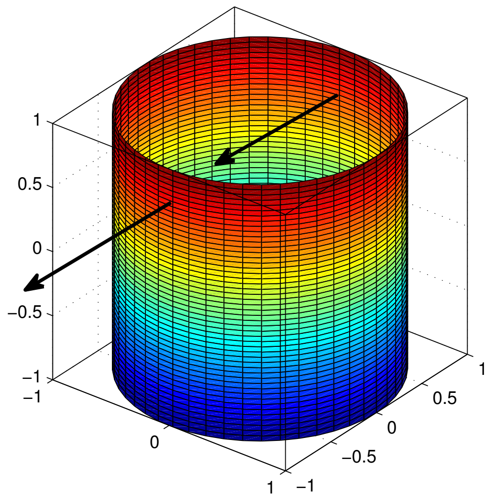

Fig. 1.9: $\boldsymbol{\gamma}(u) = (-\sin u, \cos u)^T$.

Ahora se tiene

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial\widetilde{u}}(\widetilde{u},\widetilde{v}) = (-\sin\widetilde{u}, -\cos\widetilde{u}, 0)^T, \quad \frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial\widetilde{v}}(\widetilde{u},\widetilde{v}) = (0,0,1)^T,\\
&\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial\widetilde{u}} \times \frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial\widetilde{v}}(\widetilde{u},\widetilde{v}) = (-\cos\widetilde{u}, \sin\widetilde{u}, 0)^T.
\end{aligned}$$

con el vector normal en cada punto apuntando hacia dentro. (Por ejemplo, en el punto $(0,1,0)^T$, el vector normal es ahora $(0,-1,0)^T$). Se tiene que $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\varphi} \circ \theta$ con $\theta(\widetilde{u},\widetilde{v}) = (-\widetilde{u},\widetilde{v})$. Como

$$\det\left(\theta'(\widetilde{u},\widetilde{v})\right) = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1,$$

entonces las parametrizaciones tienen orientaciones opuestas.

Tema 2

Campos escalares y vectoriales

Este ejercicio debe considerarse ilustrativo; no hay que aprenderse los ejemplos, sólo tenerlos presentes. Intenta mostrar la aparición de campos escalares y vectoriales en diferentes contextos, algunos, quizá, familiares para el alumno. Varios dibujos han sido tomados de los libros:

- J. E. Marsden, A. J. Tromba: Cálculo Vectorial, Ed. Addison-Wesley, 1991.
- R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley, 1964.

2.1 Ejemplos de campos escalares y vectoriales

1. **Campo vectorial de flujo de calor y campo escalar de temperaturas**. Como primer ejemplo de campo escalar, se puede considerar el campo de temperaturas de un cuerpo. Cada punto (x, y, z) del mismo lleva asociado su temperatura $T(x, y, z)$.

   Una forma de concebir campo escalares como el de temperaturas consiste en imaginar contornos, o superficies trazadas a través de todos los puntos para los que el campo vale lo mismo. Para el campo de temperaturas, estos conjuntos de nivel se llaman isotermas o superficies isotérmicas.

   En este mismo ejemplo se puede introducir el campo vectorial de flujo de calor

   $$J(x, y, z) = -k\nabla T(x, y, z),$$

   donde K es una constante del material (que suponemos homogéneo) llamada conductividad y

   $$\nabla T(x, y, z) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial T}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, z)\right),$$

   es el llamado vector gradiente de T (operador que luego trataremos). El flujo queda representado en la Figura 2.1 mediante las flechas entre isotermas. El sentido de las mismas tiene presente que, como $-\nabla T$ apunta en la dirección donde T decrece, el calor fluye de las zonas más calientes a las más frías.

2. **Campo de velocidades de un fluido**. Si un fluido se mueve dentro de un objeto, en un momento dado, cada partícula del mismo posee una cierta velocidad en la dirección del flujo, y que viene representada por un campo vectorial $(x, y, z) \mapsto F(x, y, z)$ (Figura 2.2).

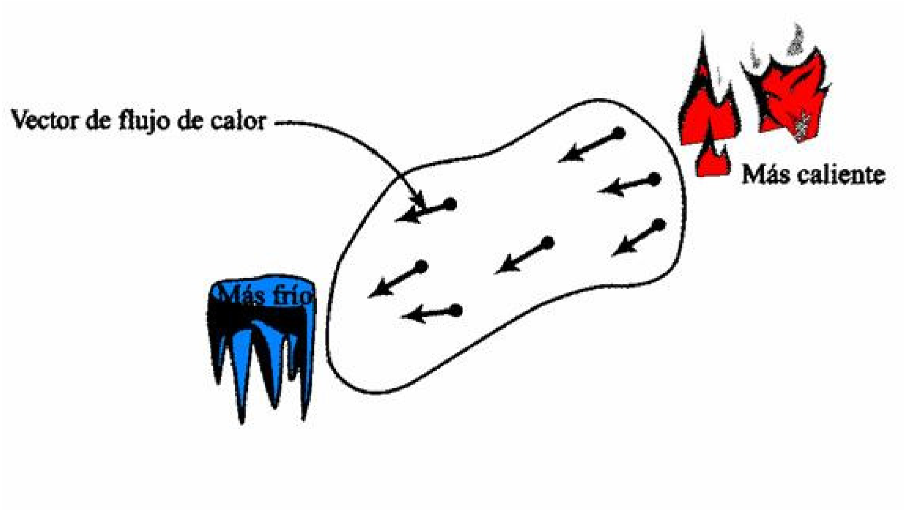

Fig. 2.1: La temperatura T es un ejemplo de campo escalar. Representación de curvas de nivel (en el plano $z = 0$ de la temperatura. Las flechas corresponden al flujo de calor en el punto correspondiente.

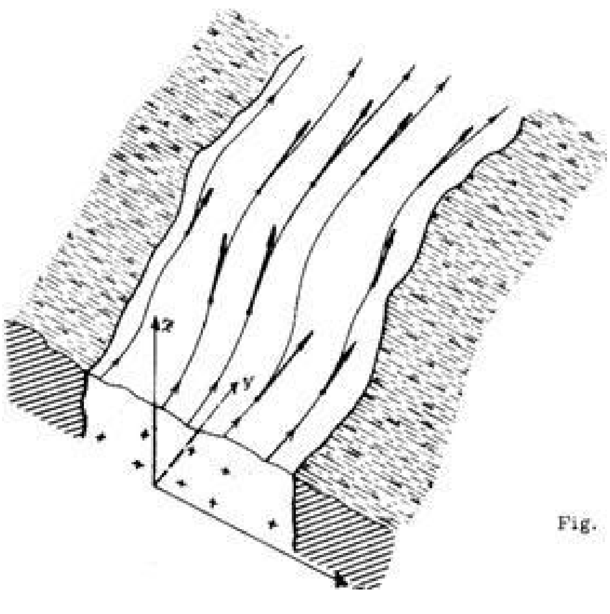

Fig. 2.2: Campo de velocidades de un fluido.

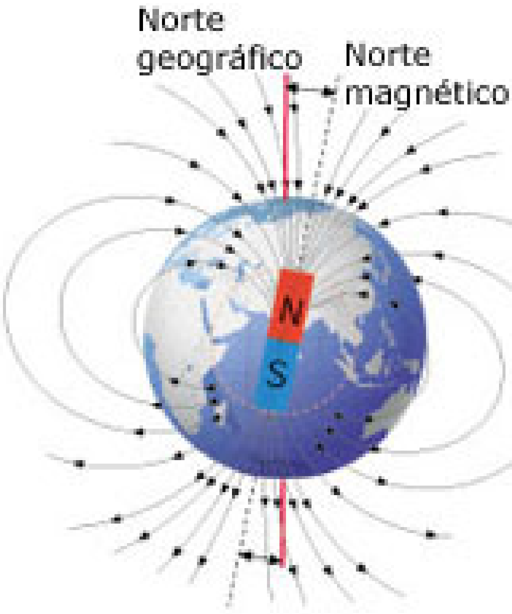

Fig. 2.3: Campo gravitacional producido por la Tierra.

3. **Campos de fuerza gravitacional**. Los campos de fuerzas en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$se representan también matemáticamente como campos vectoriales. En cada punto $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, se ejerce una determinada fuerza $F(\mathbf{x})$, que es una magnitud vectorial (Figura 2.3). Un primer ejemplo viene dado por la fuerza de atracción que la Tierra ejerce sobre una masa m. Según la ley de Newton de gravitación universal, esta fuerza viene dada en cada punto $\mathbf{r} = (x, y, z)$ del cuerpo por

$$F = -\frac{mMG}{r^3}\mathbf{r}(x, y, z), \quad r = ||\mathbf{r}||,$$

donde M es la masa de la Tierra y G es la constante de gravitación universal.

4. **Campo eléctrico**. Un segundo ejemplo de campos de fuerzas es el campo electrostático producido por una carga eléctrica q_2 (situada en el punto $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$) sobre una carga q_1 (situada en el punto $\mathbf{r}_1 = (x, y, z)$), ambas en reposo. Esta fuerza, según la ley de Coulomb, viene dada por

$$F(x, y, z) = \epsilon\frac{q_1 q_2}{||\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2||^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1),$$

con ϵ una constante. Su magnitud es entonces directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. Para cargas del mismo signo $q_1 q_2 > 0$, la fuerza es repulsiva y para cargas de signo opuesto $q_1 q_2 < 0$, la fuerza es atractiva (Figura 2.4).

Asociado a la ley de Coulomb se encuentra el campo eléctrico o electrostático por unidad de carga sobre q_1 (debida a la carga q_2)

$$E(x, y, z) = \frac{1}{q_1}F(x, y, z),$$

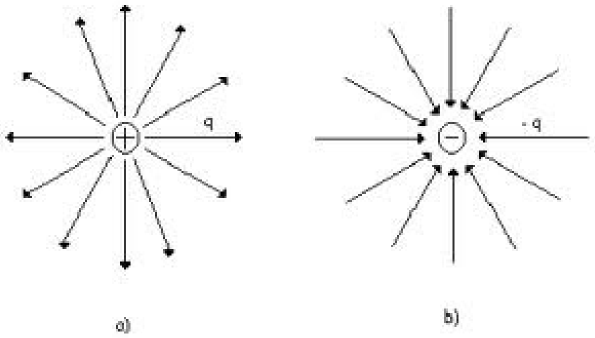

Fig. 2.4: Campo eléctrico. Cargas del mismo signo y de signo opuesto.

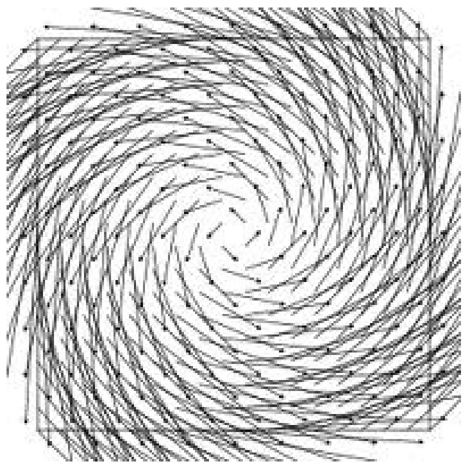

Fig. 2.5: Campo $F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$.

que depende del punto (x, y, z) donde se coloca la carga q_1, del valor de q_2, pero no del valor de la carga q_1 colocada en el punto. Si hay más cargas presentes, $E(x, y, z)$ se obtiene como suma de las contribuciones de las fuerzas de atracción de cada carga.

Asociado a su vez al campo electrostático se encuentra el potencial electrostático o trabajo realizado para trasladar una carga

$$V(x,y,z) = \epsilon \frac{q_1 q_2}{||\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2||},$$

que es otro ejemplo de campo escalar, o el potencial electrostático por unidad de carga

$$W(x,y,z) = \frac{1}{q_1} V(x,y,z).$$

Al igual que en el caso del flujo de calor, tiene sentido representar superficies equipotenciales de nivel de V y el campo electrostático como el gradiente del potencial.

5. El campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right),$$

representa una aproximación al campo de velocidades de un fluido en movimiento giratorio (Figura 2.5).

2.2 Ejercicios

1. Esboza los campos siguientes, así como sus curvas integrales.

(a) $F(x,y) = (x, x^2)^T$.

(b) $F(x,y) = (x, -y)^T$.

2. Estudia si los siguientes campos son conservativos y cuando lo sean, calcula un potencial.

(a) $F(x,y) = (x + y^2, 2xy)^T$.

(b) $F(x,y) = (x + y, y)^T$.

(c) $F(x,y,z) = (yze^{xy}, xze^{xy}, e^{xy})^T$.

3. Estudia para qué valores de a, b, c el campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))^T = (x+2y+az, bx-3y-z, 4x+cy+2z)^T$$

es conservativo y cuando lo sea, calcula todos sus potenciales.

4. Calcula la divergencia de los campos siguientes.

(a) $F(x,y) = (x + y^2, 2xy)^T$.

(b) $F(x,y) = (xy, x + y)^T$.

(c) $F(\mathbf{x}) = g(||\mathbf{x}||^2)\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ de clase C^1.

5. Calcula el rotacional de los campos siguientes:

(a) $F(x,y,z) = (x, y, z)^T$.

(b) $F(x,y,z) = (yz, xz, xy)^T$.

(c) $F(x,y,z) = \left(\dfrac{yz}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{xz}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{xy}{x^2+y^2+z^2}\right)^T$.

6. Estudia si los campos siguientes son solenoidales y cuando lo sean encuentra un potencial vectorial.

(a) $F(x,y,z) = (y - z, z - x, x - y)^T$.

(b) $F(x,y,z) = e^{ax+by+cz}(1, 1, 1)^T$.

2.3 Soluciones

1. (a) En este caso, el sistema diferencial para las curvas integrales $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$ es

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) \\ y'(t) &= x(t)^2. \end{aligned}$$

Podemos resolver la primera ecuación, cuyas soluciones serán de la forma $x(t) = C_1 e^t$, con C_1 constante (ecuación lineal de primer orden, estudiado en álgebra Lineal). Entonces, podemos sustituir en la segunda ecuación, integrar y obtener $y(t) = \dfrac{C_1^2}{2}e^{2t}$. Algunas curvas exponenciales, junto con el campo de vectores, se esbozan en la Figura 2.6.

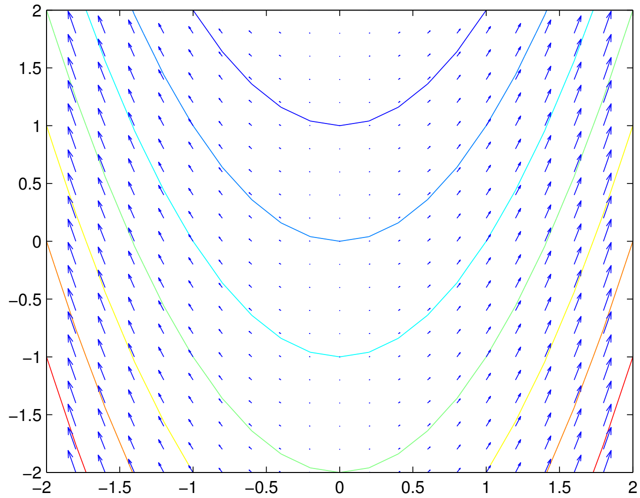

Fig. 2.6: Curvas integrales del campo $F(x,y) = (x, x^2)$.

(b) El sistema diferencial para las curvas integrales $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$ es ahora

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) \\ y'(t) &= -y(t). \end{cases}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Las curvas se obtienen resolviendo el sistema diferencial lineal. Son de la forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{-t} \end{pmatrix},$$

con c_1, c_2 constantes. Observemos también que, en este caso, se verifica

$$\frac{d}{dt}(x(t)y(t)) = x'(t)y(t) + x(t)y'(t) = x(t)y(t)x(t)y(t) = 0.$$

Luego las curvas integrales satisfacen $x(t)y(t) = C$, con C constante (es decir, son curvas de nivel del campo $V(x,y) = xy$). Algunas curvas, junto con el campo de vectores, se esbozan en la Figura 2.7.

2. (a) Como

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = 2y,$$

entonces, F no es conservativo. Si planteamos

$$F(x,y) = -\nabla V(x,y) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}(x,y), \frac{\partial V}{\partial y}(x,y)\right),$$

entonces V debe satisfacer

$$-\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = x + y^2, \quad -\frac{\partial V}{\partial} y(x,y) = 2xy.$$

Tomando, por ejemplo, la segunda igualdad, se tiene

$$V(x,y) = -xy^2 + C(x),$$

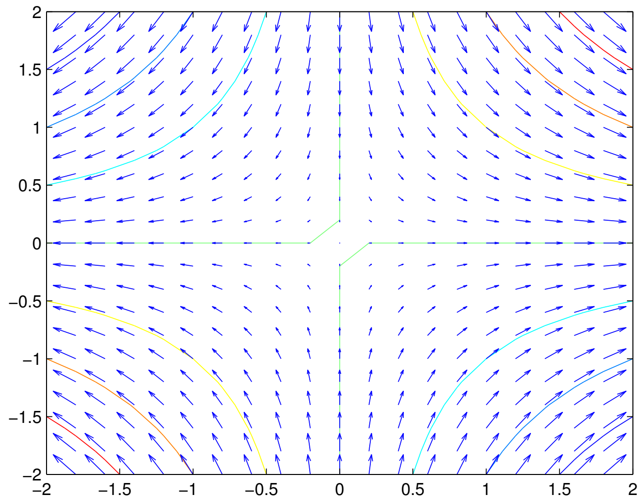

Fig. 2.7: Curvas integrales del campo $F(x,y) = (x,-y)$.

para cierta función C dependiente exclusivamente de x. La comparación con la primera igualdad nos lleva a

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = -x - y^2 = -y^2 + C'(x).$$

De modo que $C'(x) = -x \Rightarrow C(x) = -x^2/2 + C$, con C constante. Entonces, todos los campos escalares de la forma

$$V(x,y) = -xy^2 - \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

son potenciales de F.

(b) $F_1(x,y) = x + y, \quad F_2(x,y) = y$. Como

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 1, \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = 0,$$

entonces, F no es conservativo.

(c) $F(x,y,z) = (3y^2z + ye^x, 6xyz + e^x, 3xy^2)^T$. Se verifica:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) = 6yz + e^x = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z)$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) = 3y^2 = \frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y,z)$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) = 6xy = \frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y,z)$$

Luego F es conservativo. Puede comprobarse que la familia

$$f(x,y,z) = 3xy^2z + ye^x + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

describe todas sus funciones potenciales.

3. Se tiene

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) = 2, \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z) = b$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) = a, \frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y,z) = 4$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) = -1, \frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y,z) = c$$

Luego F es conservativo si y sólo si $a = 4, b = 2, c = -1$.

Buscamos ahora un campo escalar $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $F = -\nabla V$. El planteamiento, componente a componente, lleva a las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x}(x,y,z) &= -(x + 2y + 4z), \\
\frac{\partial V}{\partial y}(x,y,z) &= -(2x - 3y - z), \\
\frac{\partial V}{\partial z}(x,y,z) &= -(4x - y + 2z).
\end{aligned}$$

De la última ecuación,

$$V(x,y,z) = -(4x - y)z - z^2 + C(x,y),$$

con $C(x,y)$ independiente de z. De las dos primeras ecuaciones se deduce que

$$\begin{aligned}
-(x + 2y + 4z) = -4z + \frac{\partial C}{\partial x}(x,y) &\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial x}(x,y) = -(x + 2y), \\
-(2x - 3y - z) = z + \frac{\partial C}{\partial y}(x,y) &\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial y}(x,y) = -(2x - 3y).
\end{aligned}$$

De, por ejemplo, la segunda ecuación, se obtiene

$$C(x,y) = -(2xy - \frac{3}{2}y^2) + C(x),$$

con $C(x)$ independiente de y. Sustituyendo en la primera ecuación, se tiene

$$-(x + 2y) = -2y + C'(x) \Rightarrow C'(x) = -x.$$

Luego todos los campos f tales que $F = \nabla f$ son de la forma

$$f(x,y,z) = -(4x - y)z - z^2 - 2xy + \frac{3}{2}y^2 - \frac{x^2}{2} + C$$

con C constante.

4. (a) $\mathrm{div}F(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) = 1 + 2x$.

(b) $\mathrm{div}F(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) = y + 1$.

(c) En este caso, si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$, $||\mathbf{x}||^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2$; luego los campos escalares componentes de F son de la forma $F_j(\mathbf{x}) = g(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2)x_j$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}F(x_1, \ldots, x_N) &= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_N) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left(g(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2) + 2x_j^2 g'(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2) \right) \\
&= Ng(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2) + 2g'(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2) \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \\
&= Ng(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2) + 2g'(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2) \, \|\mathbf{x}\|^2.
\end{aligned}$$

5. (a) Se tiene:

$$\text{rot}F(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0,0,0)^T.$$

(b) Se tiene:

$$\text{rot}F(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = (0,0,0)^T.$$

(c) Se tiene:

$$\begin{aligned} \text{rot}F(x,y,z) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{yz}{x^2+y^2+z^2} & \dfrac{-xz}{x^2+y^2+z^2} & \dfrac{xy}{x^2+y^2+z^2} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{2x(z^2-y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{2y(x^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{2z(y^2-x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} \right)^T. \end{aligned}$$

6. (a) El campo es solenoidal, pues

$$\text{div}F(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0.$$

Buscamos un potencial vectorial de F, es decir, un campo $G = (G_1, G_2, G_3)$ tal que $\text{rot}G = F$. El planteamiento de la igualdad por componentes nos lleva a

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} &= F_1 = y - z, \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} &= F_2 = z - x, \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} &= F_3 = x - y. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Por regla general, sistemas de la forma (2.1) no pueden resolverse en términos explícitos. En ocasiones, sin embargo, hay alguna estrategia para simplificar los cálculos que puede utilizarse. Una es, por ejemplo, buscar G con alguna componente nula. Si, por ejemplo, en (2.1) suponemos que $G_3 \equiv 0$, el sistema se reduce a

$$\begin{aligned} -\frac{\partial G_2}{\partial z} &= y - z, \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} &= z - x, \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} &= x - y. \end{aligned}$$

De las dos primeras ecuaciones,

$$G_2(x,y,z) = \frac{z^2}{2} - yz + C_2(x,y), \quad G_1(x,y,z) = \frac{z^2}{2} - xz + C_1(x,y),$$

con C_1, C_2 dependientes de x e y, pero no de z. La tercera ecuación permite elegir $C_1 = y^2/2, C_2 = x^2/2$, de modo que $G = (G_1, G_2, G_3)$ con

$$G_1(x,y,z) = \frac{z^2}{2} - xz + \frac{y^2}{2}, \quad G_2(x,y,z) = \frac{z^2}{2} - yz + \frac{x^2}{2}, \quad G_3(x,y,z) = 0,$$

es un potencial vectorial de F. Todos los demás pueden obtenerse de G sumando gradientes de campos escalares.

(b) Se verifica

$$\mathrm{div} F(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = (a+b+c)e^{ax+by+cz}.$$

Luego el campo es solenoidal sólo cuando $a+b+c=0$. Buscamos un potencial vectorial de F en ese caso, es decir, un campo $G = (G_1, G_2, G_3)$ tal que $rotG = F$. El planteamiento de la igualdad por componentes nos lleva a

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} &= F_1 = e^{ax+by+cz}, \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} &= F_2 = e^{ax+by+cz}, \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} &= F_3 = e^{ax+by+cz}. \end{aligned} \qquad \langle 2.2 \rangle$$

Si ahora, por ejemplo, en (2.2) suponemos que $G_2 \equiv 0$, el sistema se reduce a

$$\begin{aligned} -\frac{\partial G_3}{\partial y} &= e^{ax+by+cz}, \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} &= e^{ax+by+cz}, \\ -\frac{\partial G_1}{\partial y} &= e^{ax+by+cz}. \end{aligned}$$

De las ecuaciones primera y tercera,

$$G_3(x,y,z) = \frac{1}{b}e^{ax+by+cz} + C_3(x,z), \quad G_1(x,y,z) = -\frac{1}{b}e^{ax+by+cz} + C_1(x,z),$$

con C_1, C_3 dependientes de x e z, pero no de y. La segunda ecuación, teniendo en cuenta que $a+b+c=0$, es $C_1 = y^2/2, C_2 = x^2/2$, de modo que $G = (G_1, G_2, G_3)$ con

$$e^{ax+by+cz} = \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} = -\frac{c}{b}e^{ax+by+cz} - \frac{a}{b}e^{ax+by+cz} + \frac{\partial C_1}{\partial z} - \frac{\partial C_3}{\partial x}.$$

Luego

$$\frac{\partial C_1}{\partial z} - \frac{\partial C_3}{\partial x} = 0.$$

Ello permite elegir, por ejemplo, $C_1 = C_3 = 0$ (las funciones más sencillas verificando la ecuación anterior) y, por tanto $G = (G_1, G_2, G_3)$ con

$$G_1(x,y,z) = -\frac{1}{b}e^{ax+by+cz}, \quad G_2(x,y,z) = 0, \quad G_3(x,y,z) = \frac{1}{b}e^{ax+by+cz},$$

es un potencial vectorial de F.

Tema 3

Integrales curvilíneas

3.1 Ejemplo

1. **Una aplicación de la integral de campos escalares sobre trayectorias**. Supongamos que el soporte $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{R}^3$ de una trayectoria $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ representa un alambre de material homogéneo. Si ρ es la función de densidad del alambre, entonces

$$\int_{\Gamma} \rho = \int_a^b \rho(\boldsymbol{\gamma}(t))||\boldsymbol{\gamma}'(t)||\,\mathrm{d}t,$$

representa la masa total del alambre.

Por ejemplo, para la semicircunferencia $\boldsymbol{\gamma} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{\gamma}(t) = (0, a\sin t, a\cos t), a > 0$, si el alambre tiene una densidad uniforme de 2 gramos por unidad de longitud, la masa total del alambre es

$$\int_{\mathbf{\Gamma}} \rho = \int_0^{\pi} 2||\boldsymbol{\gamma}'(t)||\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} 2a\,\mathrm{d}t = 2\pi a.$$

Imaginemos que el alambre está formado por la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 0$ y que la densidad en el punto (x, y, z) es $\rho(x, y, z) = x^2$ gramos por unidad de longitud del alambre. Una parametrización del alambre puede venir dada por $\boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ con

$$\gamma_1(t) = \cos t - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin t, \quad \gamma_2(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin t, \quad \gamma_3(t) = -\cos t - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin t.$$

Entonces, la masa total del alambre es

$$\int_{\mathbf{\Gamma}} \rho = \int_0^{2\pi} \left(\cos t - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin t\right)^2 ||\boldsymbol{\gamma}'(t)||\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left(\cos t - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin t\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{4\pi}{3}.$$

3.2 Ejercicios

1. Calcula las integrales de línea de los campos escalares siguientes sobre las curvas indicadas.

   (a) $f(x, y) = x^2 - 2xy, \quad \boldsymbol{\gamma} : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t)^T$.

   (b) $f(x, y) = 3z + x^2 + y^2, \quad \boldsymbol{\gamma} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3, \boldsymbol{\gamma}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)^T$.

2. Calcula las integrales de línea de los campos vectoriales siguientes sobre las curvas indicadas.

(a) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (xy, xz, -yz)^T, \quad \boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (t, t^2, t^3)^T.$

(b) $\boldsymbol{F}(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1, -x_2, x_3, -x_4)^T, \quad \boldsymbol{\gamma} : [0,2] \to \mathbb{R}^4, \gamma(t) = (t, 2t, 3t, 4t)^T.$

3. Sea $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{F}(x,y) = (6xy, 3x^2 + 2y)^T$. Calcula la integral de línea de $\boldsymbol{F}$ sobre la curva $\boldsymbol{\Gamma}$ en cada uno de los casos siguientes:

(a) $\boldsymbol{\Gamma} = \{(x,y)/x^2 + y^2 = r^2\}$ en sentido antihorario.

(b) $\boldsymbol{\Gamma} = \{(x,y)/|x| + |y| = 1\}$ en sentido horario.

4. Para cada uno de los campos $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ siguientes:

- Demuestra que es conservativo.
- Determina una función potencial.
- Calcula la integral de línea de $\boldsymbol{F}$ sobre cualquier curva que una el origen de coordenadas con el punto $(1,1)$.

(a) $\boldsymbol{F}(x,y) = (2xy^2 + y + 5, 2x^2y + x + 2)^T.$

(b) $\boldsymbol{F}(x,y) = (4x + \sin^2 y, x\sin(2y) + 1)^T.$

5. Comprueba que cada uno de los campos $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ siguientes no es conservativo:

(a) $\boldsymbol{F}(x,y) = (x + 4y, x - 5y)^T.$

(b) $\boldsymbol{F}(x,y) = (x^2 + y^2, xy)^T.$

6. Calcula las siguientes áreas, utilizando el teorema de Green:

(a) El área de un disco de radio R.

(b) El área acotada por un arco de la cicloide $x(\theta) = a(\theta - \sin\theta)$, $y(\theta) = a(1 - \cos\theta)$, $a > 0$, $0 \le \theta \le 2\pi$ y el eje X.

(c) El área encerrada por la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

3.3 Soluciones

1. (a)

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f\,\mathrm{d}s &= \int_0^{\pi/2} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t + 2\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t = 9\int_0^{\pi/2} (\frac{1 - \cos(2t)}{2} + \sin(2t))\,\mathrm{d}t \\
&= \left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}\cos(2t)\right)\Big|_0^{\pi/2} = 1 + \tfrac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f\,\mathrm{d}s &= \int_0^{\pi} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} (3t + t^2)\sqrt{2t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^{\pi} (3t^2 + t^3)dt \\
&= \sqrt{2}\left(t^3 + \tfrac{t^4}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = \sqrt{2}\left(\pi^3 + \tfrac{\pi^4}{4}\right).
\end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned}\int_\gamma F\cdot \mathrm{d}s &= \int_0^1 F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 (t^3,t^4,-t^5)\begin{pmatrix}1\\2t\\3t^2\end{pmatrix}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (t^3+2t^5-3t^7)\,\mathrm{d}t = \frac{5}{24}.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_\gamma F\cdot \mathrm{d}s &= \int_0^2 F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^2 (t,-2t,3t,-4t)\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (-10t)\,\mathrm{d}t = -20.\end{aligned}$$

3. Podemos utilizar, en ambos casos, el teorema de Green o el cálculo directo. Como ilustración, manejamos el primero.

(a) Tomando la parametrización $\boldsymbol{\gamma}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2, \gamma(t)=(r\cos t, r\sin t)$, que mantiene la orientación natural (antihoraria), entonces, para $\boldsymbol{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))^T=(6xy,3x^2+2y)^T$, el teorema de Green asegura que

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}s = \int_{D(0,r)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\int_{D(0,r)} (2-6x)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Siendo $D(0,r)$ el disco centrado en el origen y de radio r. Utilizando coordenadas polares $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, \rho\in(0,r), \theta\in(0,2\pi)$, podemos calcular la última integral como

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\Gamma}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}s &= \int\int_{D(0,r)}(2-6x)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^r (2-6\rho\cos\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\\ &= 2\pi\int_0^r\rho\,\mathrm{d}\rho - 6\left(\int_0^r\rho^2\,\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right) = \pi r^2.\end{aligned}$$

(b) Para una parametrización con la orientación antihoraria, podemos tomar la yuxtaposición $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_1\vee\boldsymbol{\gamma}_2\vee\boldsymbol{\gamma}_3\vee\boldsymbol{\gamma}_4$ con

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}_1:[0,1]\to\mathbb{R}^2, &\quad \boldsymbol{\gamma}_1(t)=(1-t,t)^T,\\ \boldsymbol{\gamma}_2:[0,1]\to\mathbb{R}^2, &\quad \boldsymbol{\gamma}_2(t)=(-t,1-t)^T,\\ \boldsymbol{\gamma}_3:[0,1]\to\mathbb{R}^2, &\quad \boldsymbol{\gamma}_3(t)=(-1+t,-t)^T,\\ \boldsymbol{\gamma}_4:[0,1]\to\mathbb{R}^2, &\quad \boldsymbol{\gamma}_4(t)=(t,-1+t)^T\end{aligned}$$

(Véase el ejercicio 4(e) de la hoja de ejercicios resueltos del tema 1). Entonces, si R denota el rombo interior cuya frontera es $\boldsymbol{\Gamma}$,

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}s &= \int\int_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\int_R (2-6x)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{-1}^0\int_{-1-x}^{1+x}(2-6x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{-0}^1\int_{-1+x}^{1-x}(2-6x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^0 2(2-6x)(1+x)\,\mathrm{d}x + \int_{-0}^1 2(2-6x)(1-x)\,\mathrm{d}y = 8.\end{aligned}$$

Como la orientación es opuesta, debemos cambiar de signo la integral; se tiene entonces

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{F} \cdot ds = -\int_{\gamma} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}s = 8.$$

4. (a) $\boldsymbol{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))^T = (2xy^2 + y + 5, 2x^2y + x + 2)$. Entonces, se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 4xy + 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Si planteamos

$$\boldsymbol{F}(x,y) = -\nabla V(x,y) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}(x,y), \frac{\partial V}{\partial y}(x,y)\right)^T,$$

entonces V debe satisfacer

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = -2xy^2 - y - 5, \quad \frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = -2x^2y - x - 2.$$

Tomando, por ejemplo, la segunda igualdad, se tiene

$$V(x,y) = -x^2y^2 - xy - 2y + C(x),$$

para cierta función C dependiente exclusivamente de x. La comparación con la primera igualdad nos lleva a

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = -2xy^2 - y - 5 = -2xy^2 - y + C'(x).$$

De modo que $C'(x) = -5 \Rightarrow C(x) = -5x + C$, con C constante. Entonces, todos los campos escalares de la forma

$$f(x,y) = -x^2y^2 - xy - 2y - 5x + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

son potenciales de $\boldsymbol{F}$. Así, si γ es una curva C^1 que une el origen de coordenadas con el punto $(1,1)$ y V es cualquiera de los potenciales anteriores

$$\int_{\gamma} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}s = (-V(1,1) - (-V(0,0))) = 9.$$

(b) $\boldsymbol{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))^T = (4x + \sin^2 y, x\sin(2y) + 1)^T$. Entonces, se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2\sin y \cos y = \sin(2y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Si planteamos

$$\boldsymbol{F}(x,y) = -\nabla V(x,y) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}(x,y), \frac{\partial V}{\partial y}(x,y)\right)^T,$$

entonces V debe satisfacer

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = -4x - \sin^2 y, \quad \frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = -1 - x\sin(2y).$$

Tomando, por ejemplo, la segunda igualdad, se tiene

$$V(x,y) = -y + \frac{x}{2}\cos(2y) + C(x),$$

para cierta función C dependiente de x. La comparación con la primera igualdad nos lleva a

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = -4x - \sin^2 y = -4x - \frac{(1-\cos(2y)}{2} = \frac{\cos(2y)}{2} + C'(x).$$

De modo que $C'(x) = -\frac{1}{2} - 4x \Rightarrow C(x) = -\frac{x}{2} - 2x^2 + C$, con C constante. Entonces, todos los campos escalares de la forma

$$f(x,y) = -y + \frac{x}{2}\cos(2y) - \frac{x}{2} - 2x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

son potenciales de $\boldsymbol{F}$. Si γ es una curva C^1 que une el origen de coordenadas con el punto $(1,1)$ y V es cualquiera de los potenciales anteriores

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}s = (-V(1,1) - (-V(0,0))) = \frac{7}{2} - \frac{\cos 2}{2}.$$

5. (a) $\boldsymbol{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))^T = (x+4y, x-5y)^T$. Entonces, se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 4 \neq 1 \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Luego $\boldsymbol{F}$ no es conservativo.

(b) $\boldsymbol{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))^T = (x^2+y^2, xy)^T$. Entonces, se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2y \neq y \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Luego $\boldsymbol{F}$ no es conservativo.

6. Para aplicar el teorema de Green en cada caso, debemos elegir un campo $\boldsymbol{F} = (P,Q)^T$ tal que

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1.$$

(a) Tomando la parametrización $\boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{\gamma}(t) = (R\cos t, R\sin t)^T$, que mantiene la orientación natural (antihoraria), entonces, para $\boldsymbol{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))^T = (0,x)^T$, el teorema de Green asegura que

$$A(D(0,R)) = \int\int_{D(0,R)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\int_{D(0,r)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}s.$$

Siendo $D(0,r)$ el disco centrado en el origen y de radio rR. Podemos calcular la integral de línea del modo habitual, utilizando la definición.

$$\begin{aligned} A(D(0,R)) &= \int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(t))^T \boldsymbol{\gamma}'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (0, R\cos t) \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} R^2 \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} R^2 \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = R^2\pi + R^2 \frac{\sin(2t)}{4}\bigg|_0^{2\pi} = \pi R^2. \end{aligned}$$

(b) Tomando la parametrización $\boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\gamma}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)^T$, indicada en el enunciado, la orientación es opuesta a la natural; entonces, para $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))^T = (-y, 0)^T$, el teorema de Green asegura que

$$A(D) = \int\int_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}s.$$

Siendo D la región encerrada por la cicloide entre los puntos $\boldsymbol{\gamma}(0) = (0, 0)^T$ y $\boldsymbol{\gamma}(2\pi) = (2\pi a, 0)^T$ (véase la figura **??**). Podemos calcular la integral de línea del modo habitual, utilizando la definición. Así:

$$\begin{aligned} A(D) &= -\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}s = -\int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(t))^T \boldsymbol{\gamma}'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{2\pi} (-a(1 - \cos t), 0) \begin{pmatrix} a(1 - \cos t) \\ a \sin t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\,\mathrm{d}t \\ &= 3a^2\pi. \end{aligned}$$

(c) Tomando la parametrización de la elipse $\boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\gamma}(t) = (a \cos t, b \sin t)^T$, que mantiene la orientación natural (antihoraria), entonces, para $\boldsymbol{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))^T = (0, x)^T$, el teorema de Green asegura que

$$A(E(a, b)) = \int\int_{D(0,R)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\int_{E(a,b)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}s.$$

Siendo $E(a, b)$ la región encerrada por la elipse de parámetros a, y b. Podemos calcular la integral de línea utilizando la definición.

$$\begin{aligned} A(E(a, b)) &= \int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(t))^T \boldsymbol{\gamma}'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (0, a \cos t) \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} ab \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} ab \frac{1 + \cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = ab\pi + ab \frac{\sin(2t)}{4}\Big|_0^{2\pi} = ab\pi. \end{aligned}$$

Tema 4

Integral de Superficie

4.1 Ejercicios

1. Calcula las integrales de los campos escalares siguientes, sobre las superficies indicadas.

(a) $\mathbf{\Phi} = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, y $V(x, y, z) = x^2 + y^2$.

(b) $\mathbf{\Phi} = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 1, x, y, z > 0\}$, y $V(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

(c) $\mathbf{\Phi}$ la frontera del cubo $V = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, y $V(x, y, z) = x$.

2. Calcula la masa de una superficie esférica $\mathbf{\Phi}$ de radio $R > 0$ tal que en cada punto $(x, y, z)^T \in \mathbf{\Phi}$ la densidad de masa es igual a la distancia euclídea de $(x, y, z)^T$ al origen.

3. Calcula las integrales de los campos vectoriales siguientes, sobre las superficies indicadas, orientadas según la normal apuntando hacia fuera.

(a) $\mathbf{\Phi} = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 / z = 1, x^2 + y^2 < 25\}$, y $F(x, y, z) = (x, y, z)^T$. $\mathbf{\Phi}$ está orientada según la normal apuntando hacia arriba.

(b) $\mathbf{\Phi} = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1, -1 < z < 1\}$, y $F(x, y, z) = (2xy, z, y)^T$. $\mathbf{\Phi}$ está orientada según la normal apuntando hacia fuera.

4. Calcula la integral del rotacional de los campos siguientes, sobre las superficies indicadas. En todos los casos, $\mathbf{\Phi}$ está orientada según la normal apuntando hacia fuera.

(a) $\mathbf{\Phi} = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$, y $F(x, y, z) = (x^3, -y^3, 0)^T$.

(b) $\mathbf{\Phi} = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + 2z^2 = 10, \}$, y $F(x, y, z) = (\sin(xy), e^x, -yz)^T$.

(c) $\mathbf{\Phi} = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 2z, z < 2\}$, y $F(x, y, z) = (3y, -xz, -yz^2)^T$.

5. Sea $\mathbf{\Phi}$ la superficie unión de

$$\mathbf{\Phi}_1 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1, 0 < z < 1\}, \quad \mathbf{\Phi}_2 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, z > 1\},$$

con $\mathbf{\Phi}_1$ y $\mathbf{\Phi}_2$ orientadas según la normal que, en cada caso, apunta hacia fuera. Sea $F(x, y, z) = (zx + z^2 y + x, z^3 yx + y, z^4 x^2)^T$. Calcula $\int_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{rot}\, F \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Phi}$.

6. Verifica el teorema de Stokes para los campos y las superficies indicadas, orientadas en todos los casos según la normal que apunta hacia dentro.

(a) $\mathbf{\Phi} = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$, $F(x, y, z) = (2x, 3xy, z)^T$.

(b) $\mathbf{\Phi} = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 4, -1 < z < 1\}$, $F(x, y, z) = (x + 2y, 3x + z, x + y + z)^T$.

(c) $\mathbf{\Phi} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1, x, y, z > 0\}$, $F(x, y, z) = (z^2 + 1, 2z, 2xz + 2y)^T$.

7. Se considera el campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, F(x, y, z) = (x^2, xy, z^2)^T$. Sea $\mathbf{\Gamma}$ la intersección del cilindro $\{x^2 + y^2 = 1\}$ con el plano $\{x + y + z = 1\}$.

(a) Comprueba que $\boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \boldsymbol{\gamma}(u) = (\cos u, \sin u, 1 - \cos u - \sin u)^T$ es una parametrización de $\mathbf{\Gamma}$.

(b) Calcula la integral de línea de F a lo largo de $\mathbf{\Gamma}$.

(c) Sea $\mathbf{\Phi}$ la superficie formada por la porción del plano $x + y + z = 1$ dentro de $\mathbf{\Gamma}$. Calcula la integral de superficie de $\mathbf{rot}\, F$ sobre $\mathbf{\Phi}$ y comprueba que se cumple el teorema de Stokes.

8. Calcula las integrales $\int\int\int_{\mathbf{\Phi}} \operatorname{div} F \,\mathrm{d}V$ en los casos siguientes:

(a) $\mathbf{\Phi} = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$, $F(x, y, z) = (y, x, z)^T$, con la frontera de $\mathbf{\Phi}$ orientada positivamente (según la normal exterior).

(b) $\mathbf{\Phi} = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 / x^2 + 2y^2 + 3z^2 < 6\}$, $F(x, y, z) = (xyz, 1, 1)^T$, con la frontera de $\mathbf{\Phi}$ orientada positivamente (según la normal exterior).

9. Calcula las integrales $\int\int_{\partial\mathbf{\Phi}} F \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Phi}$ en los casos siguientes:

(a) $\mathbf{\Phi}$ es el cubo unitario $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, $F(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)^T$.

(b) $\mathbf{\Phi}$ es el tetraedro formado por los planos coordenados y la porción del plano $x + y + z = 1$ en el primer octante (con frontera orientada positivamente), $F(x, y, z) = (xy, xz, yz)^T$.

10. Se considera un campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ y tal que para todo $\mathbf{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \cdot F(\mathbf{x}) = 0$. Comprueba que el flujo de F a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, con $R > 0$ es nulo.

4.2 Soluciones

1. (a) Utilizando coordenadas esféricas (figura 4.1)

$$\boldsymbol{\varphi} : \Omega \to \mathbb{R}^3, \quad \Omega = (0, \pi) \times (0, 2\pi),$$
$$\boldsymbol{\varphi}(\phi, \theta) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi),$$

Podemos calcular la integral a través del soporte $\boldsymbol{\varphi}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{\Phi}} V \,\mathrm{d}\mathbf{\Phi} &= \int_{\boldsymbol{\varphi}(\Omega)} V \,\mathrm{d}\mathbf{\Phi} = \int\int_{\Omega} V(\boldsymbol{\varphi}(\phi, \theta)) \left\| \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \theta} \right)(\phi, \theta) \right\| \mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^2\phi |\sin\phi| \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}\theta = 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3\phi \,\mathrm{d}\phi \\
&= 2\pi \left(-\frac{\sin^2\phi \cos\phi}{3}\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{3} \int_0^{\pi} \sin\phi \,\mathrm{d}\phi \right) = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

(b) Una parametrización de $\mathbf{\Phi}$ viene dada por

$$\boldsymbol{\varphi} : \Omega \to \mathbb{R}^3, \Omega = \{(u, v)/0 < u < 1, 0 < v < 1 - u\},$$
$$\boldsymbol{\varphi}(u, v) = (u, v, 1 - u - v).$$

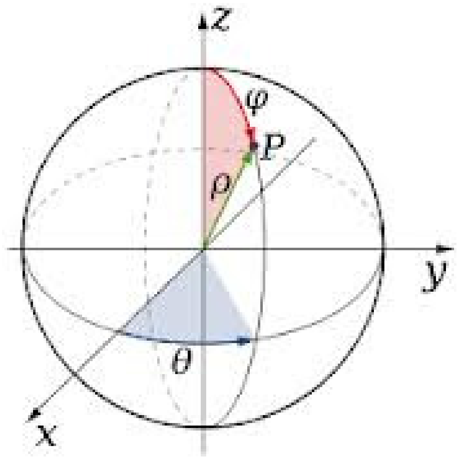

Fig. 4.1: Coordenadas esféricas: $P = (x, y, z)$, $x = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi)$, $y = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi)$, $z = \rho\cos(\varphi)$, con $\rho \geq 0$, y $(\varphi, \theta) \in [0, \pi) \times [0, 2\pi)$.

Se tiene entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{\Phi}} V \, \mathrm{d}\mathbf{\Phi} &= \int\int_{\Omega} V(\boldsymbol{\varphi}(u,v)) \left\| \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v} \right)(u,v) \right\| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &= \int\int_{\Omega} (u^2 + v^2 + (1-u-v)^2) \|(1,1,1)\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-u} (u^2 + v^2 + (1-u-v)^2) \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{3}}{4}.\end{aligned}$$

(c) El cubo puede considerarse unión de superficies. Cada cara del cubo es una superficie simple. Parametrizaciones para ellas pueden ser las siguientes:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= (0,1) \times (0,1), \quad \boldsymbol{\varphi}_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{\varphi}_1(u,v) = (u, v, 0)^T. \\ \Omega_2 &= (1,2) \times (0,1), \quad \boldsymbol{\varphi}_2 : \Omega_2 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{\varphi}_2(u,v) = (1, u-1, v)^T. \\ \Omega_3 &= (-1,0) \times (0,1), \quad \boldsymbol{\varphi}_3 : \Omega_3 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{\varphi}_3(u,v) = (0, u+1, v)^T. \\ \Omega_4 &= (0,1) \times (-1,0), \quad \boldsymbol{\varphi}_4 : \Omega_4 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{\varphi}_4(u,v) = (u, 0, v+1)^T. \\ \Omega_5 &= (0,1) \times (1,2), \quad \boldsymbol{\varphi}_5 : \Omega_5 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{\varphi}_5(u,v) = (u, 1, v-1)^T. \\ \Omega_6 &= (0,1) \times (2,3), \quad \boldsymbol{\varphi}_6 : \Omega_6 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{\varphi}_6(u,v) = (u, v-2, 1)^T.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{\Phi}} V \, \mathrm{d}\mathbf{\Phi} &= \sum_{j=1}^{6} \int\int_{\Omega_j} V(\boldsymbol{\varphi}_j(u,v)) \left\| \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j}{\partial v} \right)(u,v) \right\| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &= \int\int_{\Omega_1} u \, \|(0,0,1)^T\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v + \int\int_{\Omega_2} 1 \, \|(1,0,0)^T\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \int\int_{\Omega_3} 0 \, \|(1,0,0)^T\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &\quad + \int\int_{\Omega_4} u \, \|(0,-1,0)^T\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v + \int\int_{\Omega_5} u \, \|(0,-1,0)^T\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &\quad + \int\int_{\Omega_6} u \|(0,0,1)^T\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &= \int_0^1 \int_0^1 u \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v + \int_0^1 \int_1^2 \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &\quad + \int_{-1}^0 \int_0^1 u \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v + \int_1^2 \int_0^1 u \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v + \int_2^3 \int_0^1 u \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3.\end{aligned}$$

2. Una alternativa a la descripción para $\mathbf{\Phi}$ dada en el ejercicio 1 consiste en tomar una parametrización de los dos hemisferios

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}_1 &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x^2+y^2+z^2=R^2, z>0\}\\
&= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}, (x,y)\in D(0,R)\}\\
\mathbf{\Phi}_2 &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x^2+y^2+z^2=R^2, z<0\}\\
&= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}, (x,y)\in D(0,R)\},
\end{aligned}$$

siendo $D(0,R)$ el disco en $\mathbb{R}^2$ centrado en el origen y de radio $R>0$. Se tiene que $\mathbf{\Phi}$ es $\mathbf{\Phi}_1\bigcup\mathbf{\Phi}_2$ salvo la curva

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x^2+y^2=R^2, z=0\}.$$

Parametrizaciones explícitas de los hemisferios pueden ser las siguientes:

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= D(0,R), \quad \boldsymbol{\varphi}_1:\Omega_1\to\mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{\varphi}_1(u,v)=(u,v,f_1(u,v))^T,\\
\Omega_2 &= D(0,R), \quad \boldsymbol{\varphi}_2:\Omega_2\to\mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{\varphi}_2(u,v)=(u,v,-f_1(u,v))^T,\\
& \quad f_1(u,v)=\sqrt{R^2-u^2-v^2}.
\end{aligned}$$

Se tiene entonces

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_1}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_1}{\partial v}\right)(u,v)\right\| &= \left\|(-\frac{\partial f_1(u,v)}{\partial u},-\frac{\partial f_1(u,v)}{\partial v},1)^T\right\|\\
\left\|\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_2}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_2}{\partial v}\right)(u,v)\right\| &= \left\|(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_1(u,v)}{\partial u},\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_1(u,v)}{\partial v},1)^T\right\|
\end{aligned}$$

Por otro lado, si la densidad de masa en $(x,y,z)^T$ es igual a la distancia euclídea de $(x,y,z)^T$ al origen, entonces es de la forma $V(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. La masa total de $\mathbf{\Phi}$ es por tanto

$$\begin{aligned}
M(\mathbf{\Phi}) &= \int_{\mathbf{\Phi}}V\,\mathrm{d}\mathbf{\Phi}=\int_{\mathbf{\Phi}_1}V\,\mathrm{d}\mathbf{\Phi}+\int_{\mathbf{\Phi}_2}V\,\mathrm{d}\mathbf{\Phi}=\int\int_{\Omega_1}V(\boldsymbol{\varphi}_1(u,v))\left\|\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_1}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_1}{\partial v}\right)(u,v)\right\|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
&\quad+\int\int_{\Omega_2}V(\boldsymbol{\varphi}_2(u,v))\left\|\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_2}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_2}{\partial v}\right)(u,v)\right\|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
&= 2\int\int_{D(0,R)}R^2\sqrt{1+\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_1(u,v)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_1(u,v)}{\partial v}\right)^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
&= 2\int\int_{D(0,R)}R^2\sqrt{1+\left(\frac{-u}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}\right)^2+\left(\frac{-u}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
&= 2R^2\int\int_{D(0,R)}\sqrt{1+\left(\frac{u^2+v^2}{R^2-u^2-v^2}\right)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
&= 62R^2\int\int_{D(0,R)}\sqrt{\left(\frac{R^2}{R^2-u^2-v^2}\right)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

Utilizando el cambio de variable a coordenadas polares $u=\rho\cos\theta$, y $v=\rho\sin\theta$, con $\rho\in(0,R)$, y $\theta\in(0,2\pi)$, tenemos

$$M(\mathbf{\Phi})=2R^4\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=-4\pi R^4\sqrt{R^2-\rho^2}\Big|_0^R=4\pi R^3.$$

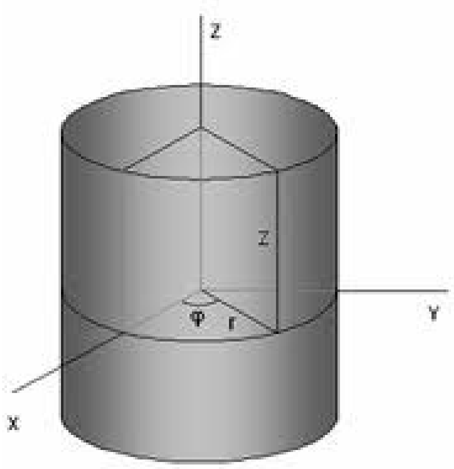

Fig. 4.2: Coordenadas cilíndricas: $P = (x, y, z)$, $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$, $z = z$, con $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, y $z \in (R)$.

3. (a) La superficie queda parametrizada por $\boldsymbol{\varphi} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\varphi}(x, y) = (x, y, 1)^T, \Omega = \{(x, y)^T / x^2 + y^2 < 25\}$. Si $F(x, y, z) = (x, y, z)^T$ y $\boldsymbol{n}(x, y) = \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y}(x, y)$, entonces se tiene que $\boldsymbol{\varphi}$ es coherente con la orientación y

$$\int_{\boldsymbol{\Phi}} F \, \mathrm{d}\boldsymbol{\Phi} = \int\int_{\Omega} F(x, y, 1) \cdot \boldsymbol{n}(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int\int_{\Omega} (x, y, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = A(D) = 25\pi.$$

(La última integral es el área de Ω, que es el interior del círculo centrado en el origen y de radio cinco).

(b) La superficie cilíndrica queda parametrizada por (véase figura 4.2): $\boldsymbol{\varphi} : \Omega \to \mathbb{R}^3, \Omega = (0, 2\pi) \times (0, 1), \boldsymbol{\varphi}(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$.

Si $F(x, y, z) = (2xy, z, y)^T$ y $\boldsymbol{n}(\theta, z) = \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \theta} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial z}(\theta, z)$, entonces $\boldsymbol{\varphi}$ es coherente con la orientación y

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{\Phi}} F \, \mathrm{d}\boldsymbol{\Phi} &= \int\int_{\Omega} F(\cos\theta, \sin\theta, z) \cdot \boldsymbol{n}(\theta, z) \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}z \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} (2\cos\theta\sin\theta, z, \sin\theta) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} (2\cos^2\theta\sin\theta + z\sin\theta) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\theta = 0. \end{aligned}$$

4. Utilizamos el teorema de Stokes en todos los casos.

(a) Se tiene

$$\partial\boldsymbol{\Phi} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1, z = 0\}.$$

Si S está orientada según la normal exterior, entonces la orientación inducida por S es antihoraria. Una parametrización de ∂S puede venir dada por

$$\boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T.$$

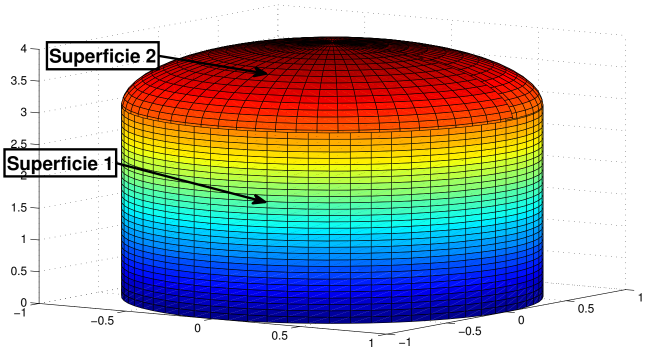

Fig. 4.3: Superficie del ejercicio 5.

Por el teorema de Stokes

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{rot}\, F \,\mathrm{d}\mathbf{\Phi} &= \int_{\partial \mathbf{\Phi}} F \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Phi} = \int_0^{2\pi} F(\boldsymbol{\gamma}(t))^T \boldsymbol{\gamma}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (\cos^3 t, \sin^3 t, 0) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t \cos^3 t - \cos t \sin^3 t)\,\mathrm{d}t = \frac{\cos^4 t}{4} - \frac{\sin^4 t}{4}\Big|_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

(b) La superficie S es una elipse; es por tanto una superficie cerrada ($\partial \mathbf{\Phi} = \emptyset$), luego

$$\int_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{rot}\, F \,\mathrm{d}\mathbf{\Phi} = 0.$$

(c) Se tiene

$$\partial \mathbf{\Phi} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 4, z = 2\}.$$

Si $\mathbf{\Phi}$ está orientada según la normal exterior, entonces la orientación inducida por $\mathbf{\Phi}$ es horaria (¿por qué?). Una parametrización de $\partial \mathbf{\Phi}$ puede venir dada por

$$\boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \boldsymbol{\gamma}(t) = (2 \sin t, 2 \cos t, 2)^T.$$

Por el teorema de Stokes

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{rot}\, F \,\mathrm{d}\mathbf{\Phi} &= \int_{\partial \mathbf{\Phi}} F \cdot \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} F(\boldsymbol{\gamma}(t))^T \boldsymbol{\gamma}'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (6 \cos t, -4 \sin t, -8 \cos t) \begin{pmatrix} 2\cos t \\ -2 \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (12 \cos^2 t + 8 \sin^2 t)\,\mathrm{d}t = 20\pi.\end{aligned}$$

5. Se tiene que $\mathbf{\Phi}_1 \cap \mathbf{\Phi}_2 = \emptyset$ y

$\partial \mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{\Gamma}_0 \cup \mathbf{\Gamma}_1, \quad \partial \mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{\Gamma}_1$
$\mathbf{\Gamma}_0 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1, z = 0\}, \quad \mathbf{\Gamma}_1 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1, z = 1\}.$

Luego $\mathbf{\Gamma}_1 = \partial\mathbf{\Phi}_1 \cap \partial\mathbf{\Phi}_2$ y $\partial\mathbf{\Phi}_1 \cup \partial\mathbf{\Phi}_2 \setminus (\partial\mathbf{\Phi}_1 \cap \partial\mathbf{\Phi}_2) = \mathbf{\Gamma}_0$. Si $\mathbf{\Phi}_1$ se orienta según la normal unitaria exterior

$$\boldsymbol{n}_1(x,y,z) = (x,y,0)^T, \quad (x,y,z)^T \in S_1,$$

y $\mathbf{\Phi}_2$ según el vector normal exterior, entonces la orientación que induce $\mathbf{\Phi}_1$ en $\mathbf{\Gamma}_1 = \partial\mathbf{\Phi}_1 \cap \partial\mathbf{\Phi}_2$ corresponde a recorrer $\mathbf{\Gamma}_1$ en sentido horario y la que induce $\mathbf{\Phi}_2$ es la opuesta, por lo que $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_1 + \mathbf{\Phi}_2$ es orientable y la orientación inducida en su borde $\partial\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Gamma}_0$ se obtiene recorriendo $\mathbf{\Gamma}_0$ en sentido antihorario (véase la figura 4.3). Una parametrización de $\partial\mathbf{\Phi}$ puede venir entonces dada por

$$\boldsymbol{\gamma} : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T.$$

Por el teorema de Stokes

$$\int_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{rot}\, F \,\mathrm{d}\mathbf{\Phi} = \int_{\partial\mathbf{\Phi}} F \cdot \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} F(\boldsymbol{\gamma}(t))^T \boldsymbol{\gamma}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (\cos t, \sin t, 0) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = 0.$$

6. Como ejercicio.

7. Como ejercicio.

8. Utilizamos, en ambos casos, el teorema de la divergencia.

(a) Se tiene $\mathbf{\Phi} = \partial V = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Podemos usar coordenadas esféricas (véase el ejercicio 1) para calcular la integral.

$$\begin{aligned}
\int\int\int_V \mathrm{div}\, F \,\mathrm{d}V &= \int_S F \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Phi} = \int\int_\Omega F(\boldsymbol{\varphi}(\phi,\theta))^T \left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\phi} \times \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\theta}\right)(\phi,\theta)\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\sin\theta\sin\phi, \cos\theta\sin\phi, \cos\phi) \begin{pmatrix} \cos\theta\sin^2\phi \\ \sin\theta\sin^2\phi \\ \sin\phi\cos\phi \end{pmatrix} \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (2\sin\theta\cos\theta\sin^3\phi + \sin\phi\cos^2\phi)\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} \sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{\pi} \sin^3\phi\,\mathrm{d}\phi\right) + 2\pi\int_0^{\pi} \sin\phi\cos^2\phi)\,\mathrm{d}\phi \\
&= -2\pi\frac{\cos^3\phi}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

(b) Se tiene $\mathbf{\Phi} = \partial V = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 / \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{2} = 1\}$. Podemos calcular la integral a través del soporte de $\boldsymbol{\varphi}$, donde

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\varphi} : \Omega \to \mathbb{R}^3, \Omega = (0,\pi) \times (0,2\pi), \\
&\boldsymbol{\varphi}(\phi,\theta) = (\sqrt{6}\cos\theta\sin\phi, \sqrt{3}\sin\theta\sin\phi, \sqrt{2}\cos\phi),
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&\int\int\int_V \mathrm{div}\, F \,\mathrm{d}V \\
&= \int_{\mathbf{\Phi}} F \cdot \mathrm{d}S = \int\int_\Omega F(\boldsymbol{\varphi}(\phi,\theta))^T \left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\phi} \times \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\theta}\right)(\phi,\theta)\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (6\sin\theta\sin\phi\cos\theta\cos\phi, 1, 1)\begin{pmatrix}\sqrt{6}\cos\theta\sin^2\phi\\ \sqrt{12}\sin\theta\sin^2\phi\\ \sqrt{18}\sin\phi\cos\phi\end{pmatrix}\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (6\sqrt{6}\sin\theta\cos^2\theta\cos\phi\sin^3\phi + \sqrt{12}\sin\theta\sin^2\phi + \sqrt{18}\sin\phi\cos\phi)\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\\
&= 6\sqrt{6}\left(\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\cos\phi\sin^3\phi\,\mathrm{d}\phi\right)\\
&\quad +\sqrt{12}\left(\int_0^{2\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi\right) + 2\pi\sqrt{18}\left(\int_0^{\pi}\sin\phi\cos\phi\,\mathrm{d}\phi\right)\\
&= \pi\sqrt{18}\left(\int_0^{\pi}\sin 2\phi\,\mathrm{d}\phi\right) = 0.
\end{aligned}
$$

9. Utilizamos, en ambos casos, el teorema de la divergencia.

(a) En este caso, se tiene

$$
\int_{\partial V} F\cdot \mathrm{d}\mathbf{\Phi} \quad = \quad \int\int\int_V \operatorname{div} F\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}S = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 3\mathrm{vol}(V) = 3.
$$

(b) En este caso, se tiene

$$
\int_{\partial V} F\cdot \mathrm{d}\mathbf{\Phi} \quad = \quad \int\int\int_V \operatorname{div} F\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}S = \int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^{1-x-z} 2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{1}{12}.
$$

10. El vector normal exterior unitario en cada punto $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ de la esfera es $\boldsymbol{n}_e(x, y, z) = \frac{1}{R}(x, y, z)^T$. Luego la componente normal del campo en dicho punto vale $F_N(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\cdot F(\mathbf{x}) = 0$. Por tanto, la integral de F sobre la esfera (es decir, el flujo de F a través de la esfera) es nulo.

Tema 5

Plano Complejo

5.1 Ejercicios

1. Calcula el dominio de definición de las funciones siguientes, así como sus partes real e imaginaria.

$$(a)\ f(z) = \overline{z}^2, \quad (b)\ f(z) = \frac{1}{1+z^2},$$
$$(c)\ f(z) = \mathrm{Arg}_{-\pi}\left(\frac{1}{z}\right), \quad (d)\ f(z) = \frac{z}{z+\overline{z}}.$$

2. Realiza los siguientes cálculos:

(a) Expresa los ocho números $\pm 1 \pm \mathbf{i}, \pm\sqrt{3} \pm \mathbf{i}$ en forma trigonométrica.

(b) Calcula $\ln(3\mathbf{i}), \ln(-1+\mathbf{i}\sqrt{3}), \ln(3+\mathbf{i}(-1+\mathbf{i}\sqrt{3}))$.

(c) Calcula $(-4)^{\mathbf{i}}, i^{-3\mathbf{i}}, \mathbf{i}^{2/\pi}, 1^{2\mathbf{i}}, (1+\mathbf{i})^{1+\mathbf{i}}$.

(d) Calcula $\sin(1+\mathbf{i}), \cos(1-\mathbf{i}), \tan(1+2\mathbf{i})$.

(e) Calcula $\arcsin(\mathbf{i}), \arccos(\mathbf{i})$.

3. Realiza los siguientes cálculos:

(a) Resuelve la ecuación cuadrática $az^2 + bz + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$. Calcula las soluciones de $z^2 + \mathbf{i}\sqrt{32}z - 6\mathbf{i} = 0$

(b) Calcula las soluciones de $z^3 = 1 + \mathbf{i}$, y $z^8 = 1$.

4. Determina en qué puntos satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann las funciones siguientes:

$$(a)\ f(z) = \overline{z}; \quad (b)\ f(z) = |z|^2; \quad (c)\ f(z) = z\,\mathrm{Re}\,(z).$$

5.2 Soluciones

1. (a) El dominio es todo el plano $\mathbb{C}$. $f(z) = u + \mathbf{i}v$ donde si $z = x + \mathbf{i}y$, $u(x,y) = x^2 - y^2, v(x,y) = -2xy$.

(b) El dominio es todo el plano $\mathbb{C}$ menos los puntos z tales que $1+z^2=0$. éstos son los siguientes: si $z=x+\mathbf{i}y$, entonces $1+z^2=1+x^2-y^2+2xy\mathbf{i}$. Por tanto, $1+z^2=0 \Leftrightarrow z=\pm\mathbf{i}$. Por tanto, el dominio es todo $\mathbb{C}$ excepto los puntos $(0,1),(0,-1)$, es decir, $\pm\mathbf{i}$.

Por otra parte, operando se tiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1+z^2}=\frac{1+\overline{z}^2}{|1+z^2|^2}=\frac{1+x^2-y^2-2xy\mathbf{i}}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}=u+\mathbf{i}v \\ u(x,y) &= \frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}, \quad v(x,y)=\frac{-2xy}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}. \end{aligned}$$

(c) Si $z=r(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta),\theta=\operatorname{Arg}_{-\pi}(z)$ entonces $1/z=(1/r)(\cos(-\theta)+\mathbf{i}\sin(-\theta))$, luego $f(z)=u(r,\theta)+\mathbf{i}v(r,\theta)$ con $u(r,\theta)=-\theta, v=0$. El dominio es todo el plano $\mathbb{C}$ salvo el origen $z=0$.

(d) El dominio es todo el plano $\mathbb{C}$ salvo los z tales que $z+\overline{z}=0$, es decir $2\operatorname{Re}(z)=z+\overline{z}=0$. Por tanto, f está definida en todo $\mathbb{C}$ salvo el eje vertical $\operatorname{Re}(z)=0$. Por otro lado, si $z=x+\mathbf{i}y, x\neq 0$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{z+\overline{z}}=\frac{x+\mathbf{i}y}{2x}=u\mathbf{i}v \\ u(x,y) &= \frac{1}{2}, \quad v(x,y)=\frac{y}{2x}. \end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned} 1+\mathbf{i} &= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4}), & 1-\mathbf{i} &= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}-\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4}), \\ -1+\mathbf{i} &= \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\frac{3\pi}{4}), & -1-\mathbf{i} &= \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}-\mathbf{i}\sin\frac{3\pi}{4}), \\ \sqrt{3}+\mathbf{i} &= 2(\cos\frac{\pi}{6}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{6}), & \sqrt{3}-\mathbf{i} &= 2(\cos\frac{\pi}{6}+-\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{6}), \\ -\sqrt{3}+\mathbf{i} &= 2(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathbf{i}\sin\frac{5\pi}{6}), & -\sqrt{3}-\mathbf{i} &= 2(\cos\frac{5\pi}{6}+-\mathbf{i}\sin\frac{5\pi}{6}). \end{aligned}$$

(b) Para $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$,

$$\begin{aligned} \ln(3\mathbf{i}) &= \ln(3)+\mathbf{i}\operatorname{Arg}(3\mathbf{i})=\ln(3)+\mathbf{i}(\frac{\pi}{2}+2k\pi), \\ \ln(-1+\mathbf{i}\sqrt{3}) &= \ln(|-1+\mathbf{i}\sqrt{3}|)+\mathbf{i}\operatorname{Arg}(-1+\mathbf{i}\sqrt{3})=\ln(2)+\mathbf{i}(\frac{2\pi}{3}+2k\pi), \\ \ln(3\mathbf{i}(-1+\mathbf{i}\sqrt{3})) &= \ln(3\mathbf{i})+\ln(-1+\mathbf{i}\sqrt{3})=\ln(3)+\mathbf{i}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)+\ln(2)+\mathbf{i}(\frac{2\pi}{3}+2k\pi) \\ &= \ln(6)+\mathbf{i}(\frac{7\pi}{6}+2k\pi). \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} (-4)^{\mathbf{i}} &= e^{\mathbf{i}\ln(-4)}=e^{\mathbf{i}(\ln(4)+\mathbf{i}(-\pi+2k\pi))}=e^{-(2k-1)\pi}e^{\mathbf{i}\ln(4)} \\ &= e^{-(2k-1)\pi}(\cos(\ln(4))+\mathbf{i}\sin(\ln(4))), \quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots \\ \mathbf{i}^{-3\mathbf{i}} &= e^{-3\mathbf{i}\ln(\mathbf{i})}=e^{-3\mathbf{i}(\ln(1)+\mathbf{i}(\frac{\pi}{2}+2k\pi))}=e^{3(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}, \quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots \\ \mathbf{i}^{2/\pi} &= e^{\frac{2}{\pi}\ln(\mathbf{i})}=e^{\frac{2}{\pi}(\ln(1)+\mathbf{i}(\frac{\pi}{2}+2k\pi))}=e^{\frac{2\mathbf{i}}{\pi}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} \\ &= \cos(\frac{2\mathbf{i}}{\pi}(\frac{\pi}{2}+2k\pi))+\mathbf{i}\sin(\frac{2\mathbf{i}}{\pi}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)), \quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
1^{2\mathbf{i}} &= e^{2\mathbf{i}\ln(1)} = 1. \\
(1+\mathbf{i})^{1+\mathbf{i}} &= e^{(1+\mathbf{i})\ln(1+\mathbf{i})} = e^{(1+\mathbf{i})(\ln(\sqrt{2})+\mathbf{i}(\frac{\pi}{4}+2k\pi))} = e^{\frac{\ln(2)}{2}-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}e^{\mathbf{i}(\frac{\ln(2)}{2}+(\frac{\pi}{4}+2k\pi))} \\
&= e^{\frac{\ln(2)}{2}-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}(\cos(\frac{\ln(2)}{2}+(\frac{\pi}{4}+2k\pi))+\mathbf{i}\sin(\frac{\ln(2)}{2}+(\frac{\pi}{4}+2k\pi))), \\
& \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\sin(1+\mathbf{i}) = \frac{e^{1+\mathbf{i}} - e^{-1-\mathbf{i}}}{2\mathbf{i}}, \quad \cos(1-\mathbf{i}) = \frac{e^{1-\mathbf{i}} - e^{-1+\mathbf{i}}}{2},
$$

$$
\tan(1+2\mathbf{i}) = \frac{\sin(1+2\mathbf{i})}{\cos(1+2\mathbf{i})} = \frac{e^{1+2\mathbf{i}} - e^{-1-2\mathbf{i}}}{e^{1+2\mathbf{i}} - e^{-1-2\mathbf{i}}}.
$$

(e) Utilizamos la fórmula

$$
w = \arcsin(z) = -\mathbf{i}\ln(\mathbf{i}z + (1-z^2)^{1/2})
$$

Si buscamos $w/\sin w = z = \mathbf{i}$, entonces los valores de la función bivaluada $(1-z^2)^{1/2}$ para $z = 1+\mathbf{i}$ son $\pm\sqrt{2}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\ln(\mathbf{i}z + (1-z^2)^{1/2}) &= \ln(-1+\sqrt{2}) = \ln\frac{(-1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})} = -\ln(1+\sqrt{2}) + \mathbf{i}2n\pi, \\
\ln(\mathbf{i}z + (1-z^2)^{1/2}) &= \ln(-1-\sqrt{2}) = \ln(1+\sqrt{2}) + \mathbf{i}(-1+2n)\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
w &= \arcsin(\mathbf{i}) = -\mathbf{i}\log((\mathbf{i})\mathbf{i} + (1+1)^{1/2}) = -\mathbf{i}\log(-1\pm\sqrt{2}) \\
&= (-1)^{k+1} \pm \mathbf{i}\ln(1+\sqrt{2})\mathbf{i}k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots
\end{aligned}
$$

Queda como ejercicio calcular $\arccos(i)$ utilizando la fórmula

$$
w = \arccos(z) = -\mathbf{i}\log(z + \mathbf{i}(1-z^2)^{1/2}).
$$

3. (a) Completando el cuadrado del lado izquierdo, se tiene

$$
a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0.
$$

Entonces z ha de ser tal que $(z+\frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Por tanto

$$
z = \frac{-b + (b^2-4ac)^{1/2}}{2a},
$$

donde se consideran las dos raíces de b^2-4ac. Quedan, por tanto, dos raíces para la ecuación, como en el caso real. Para el ejemplo, con $a = 1, b = \mathbf{i}\sqrt{32}, c = -6\mathbf{i}$, se tiene que $b^2 - 4ac = 32 + 24\mathbf{i}$. las raíces de este complejo son

$$
\begin{aligned}
k = 0, &\quad w_0 = \sqrt{40}\cos(\alpha/2) + \mathbf{i}\sin(\alpha/2) \\
k = 1, &\quad w_1 = \sqrt{40}\cos(\alpha/2 + 2\pi) + \mathbf{i}\sin(\alpha/2 + 2\pi),
\end{aligned}
$$

donde $\cos(\alpha) = 4/5, \sin(\alpha = 3/5), -\pi \leq \alpha < \pi$. Entonces, las soluciones son

$$
z_k = \frac{-b + (b^2-4ac)^{1/2}}{2a} = \frac{-\mathbf{i}\sqrt{32} + w_k}{2}, \quad k = 0, 1.
$$

(b) Calculamos las raíces cúbicas de $z = 1 + \mathbf{i}$. En primer lugar hallamos el módulo de z y, por ejemplo, su argumento principal. Tenemos $|z| = \sqrt{2}$, $\mathrm{Arg}_{-\pi}(z) = \pi/4$. Entonces, si $w = \sqrt[3]{z}$ se tiene que $w^3 = z$. De aquí obtenemos que $|w|^3 = |z| = \sqrt{2}$ y $3\mathrm{Arg}(w) = \mathrm{Arg}_{-\pi}(z) + 2k\pi$ con k entero. Las tres raíces cúbicas de z quedan determinadas por $|w| = \sqrt[6]{2}, \mathrm{Arg}(w) = \dfrac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2$. Es decir,

$$\begin{aligned}
k &= 0, \qquad w_0 = \sqrt[6]{2}(\cos(\pi/12) + \mathbf{i}\sin(\pi/12))\\
k &= 1, \qquad w_1 = \sqrt[6]{2}(\cos(3\pi/4) \ + \mathbf{i}\sin(3\pi/4))\\
k &= 2, \qquad w_2 = \sqrt[6]{2}(\cos(17\pi/12) + \mathbf{i}\sin(17\pi/12)).
\end{aligned}$$

Calculamos ahora las raíces octavas de $z = 1$. Si $w^8 = 1$, se tiene que $|w|^8 = |z| = 1$ y $8\mathrm{Arg}(w) = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi$ con k entero. Las ocho raíces quedan determinadas por $|w| = 1, \mathrm{Arg}(w) = \dfrac{2k\pi}{8}, k = 0, 1, \ldots, 8$. Es decir,

$$\begin{aligned}
k &= 0, \qquad w_0 = 1\\
k &= 1, \qquad w_1 = \cos(\pi/4) + \mathbf{i}\sin(\pi/4) = \frac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\\
k &= 2, \qquad w_2 = \cos(\pi/2) + \mathbf{i}\sin(\pi/2) = \mathbf{i}\\
k &= 3, \qquad w_3 = \cos(3\pi/4) + \mathbf{i}\sin(3\pi/4) = \frac{-1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\\
k &= 4, \qquad w_4 = \cos(\pi) + \mathbf{i}\sin(\pi) = -1\\
k &= 5, \qquad w_5 = \cos(5\pi/4) + \mathbf{i}\sin(5\pi/4) = \frac{-1-\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\\
k &= 6, \qquad w_6 = \cos(3\pi/2) + \mathbf{i}\sin(3\pi/2) = -\mathbf{i}\\
k &= 7, \qquad w_7 = \cos(7\pi/4) + \mathbf{i}\sin(7\pi/4) = \frac{1-\mathbf{i}}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

4. (a) $f(z) = \overline{z} = x - \mathbf{i}y, z = x + \mathbf{i}y$, tiene por componentes $u(x, y) = x, v(x, y) = -y$, que no satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann en ningún punto pues

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Por lo que f no es derivable en ningún punto de $\mathbb{C}$.

(b) $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2, z = x + \mathbf{i}y$, tiene por componentes $u(x, y) = x^2 + y^2, v(x, y) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Por tanto, se satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann sólo en el origen $z = 0$.

(c) $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,(z) = x^2 + \mathbf{i}xy, z = x + \mathbf{i}y$, tiene por componentes $u(x, y) = x^2, v(x, y) = xy$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = x, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Por tanto, se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann sólo en el origen $z = 0$.

5. Ilustramos ahora con algunos ejemplos la acción de funciones elementales como transformaciones en algunos dominios.

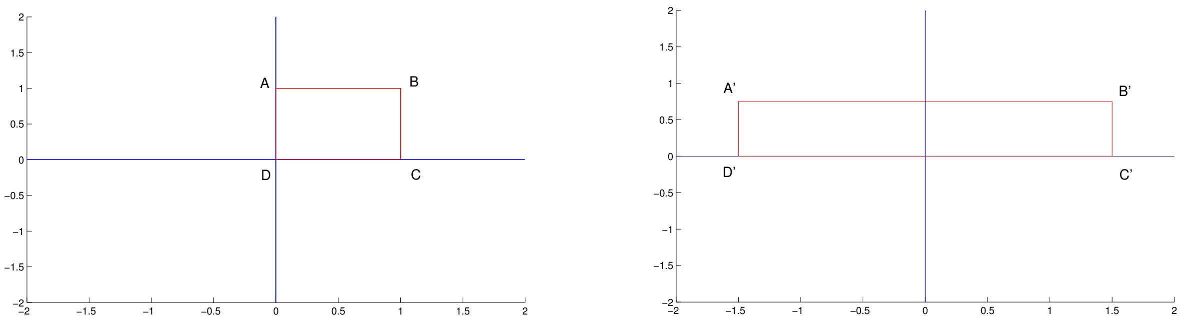

Fig. 5.1: Transformación $w = \mathbf{i}z + 1$.

Transformaciones afines

$$w = f(z) = az + b, \qquad a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0. \tag{5.1}$$

Si $a = |a|e^{\mathbf{i}\alpha}$, $z = |z|e^{\mathbf{i}\theta}$, entonces la transformación $w = az = |a||z|e^{\mathbf{i}(\alpha+\theta)}$ dilata (o contrae) el vector z por un factor $|a|$ y lo gira un ángulo α en torno al origen. Por su parte, la transformación $w = z + b$ representa una traslación del complejo mediante el vector $b = b_1 + \mathbf{i}b_2$. Por tanto, la composición (5.1) consta de una dilatación/ contracción (homotecia), un giro y una traslación. Por ejemplo, $w = f(z) = \mathbf{i}z + 1$ transforma el rectángulo R en el rectángulo $f(R)$ según se observa en la Figura 5.1.

Transformación $w = 1/z$

$$w = f(z) = \frac{1}{z}, \quad z \neq 0. \tag{5.2}$$

La transformación (5.2) es biyectiva entre puntos no nulos de los planos z y w. Es la composición de dos transformaciones:

- Una inversión con respecto a la circunferencia unitaria $S_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

  $$z \mapsto Z = \frac{1}{|z|^2}z, \quad z \neq 0.$$

  Así, los puntos exteriores a $S_1(0)$ se aplican sobre puntos interiores (excluido el cero) y recíprocamente. Cualquier punto de $S_1(0)$ se transforma en sí mismo.
- Una reflexión en el eje real

  $$Z \mapsto w = \overline{Z}.$$

Algunas propiedades de esta transformación, que pueden verificarse, son las siguientes:

(a) La aplicación (5.2) transforma circunferencias y rectas en circunferencias o rectas.

(b) La aplicación (5.2) transforma semiplanos superiores en discos.

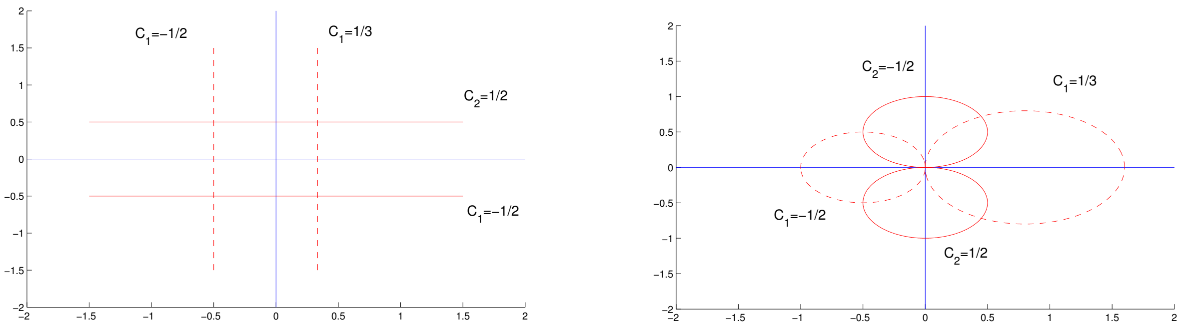

Fig. 5.2: Transformación $w = 1/z$.

Homografías

$$w_A = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad det(A) = det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0. \qquad \langle 5.3 \rangle$$

Las transformaciones (5.3), llamadas homografías o transformaciones de Möbius, pueden escribirse como composición de

- Homotecias $z \mapsto az, a \neq 0$.
- Traslaciones $z \mapsto z + c$.
- Inversiones $z \mapsto 1/z$.

Sus propiedades fundamentales son:

(a) La composición de homografías es una homografía. Explícitamente, $w_A \circ w_B = w_{AB}$.

(b) Una homografía (5.3) transforma circunferencias y rectas en circunferencias o rectas.

(c) Una homografía (5.3) w_A es invertible y su inversa es $w_{A^{-1}}$.

(d) Todas las homografías (5.3) que llevan el semiplano superior $\mathrm{Im}\,(z) > 0$ sobre el disco abierto $|w| < 1$ y el contorno $\mathrm{Im}\,(z) = 0$ en la circunferencia $|w| = 1$ son necesariamente de la forma

$$w = e^{\mathbf{i}\alpha} \frac{z-b}{z-\overline{b}},$$

con α real, $b \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\,(b) > 0$.

La figura 5.3 muestra la llamada transformación de Cayley $w = (z+1)/(z-1)$. Convierte el eje real y sus paralelos en circunferencias como en la figura, y viceversa.

Transformación exponencial

$$w = f(z) = e^z. \qquad \langle 5.4 \rangle$$

La aplicación (5.4) se puede escribir como una transformación del plano (x, y) en el plano w descrito en polares (ρ, θ) como

$$\rho e^{\mathbf{i}\theta} = e^x e^{\mathbf{i}y} \Rightarrow \rho = e^x, \theta = y + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

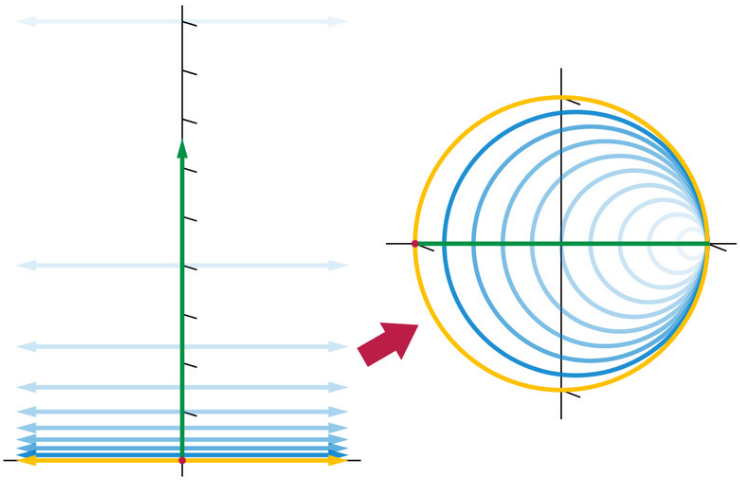

Fig. 5.3: .

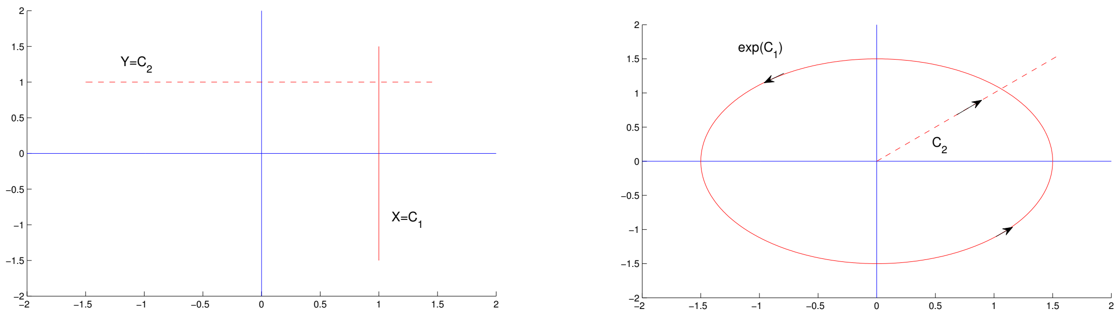

Fig. 5.4: Transformación $w = e^z$.

Sobre una recta vertical $x = c$, un punto (c, y) se transforma en el punto (e^c, y) en polares en el plano w. Cuando y crece, el punto (e^c, y) se mueve en sentido positivo (antihorario) en la circunferencia de radio e^c. Por su parte, una recta horizontal $y = c$ transforma sus puntos (x, c) en los puntos (en polares) (e^x, c). Al moverse x de izquierda a derecha, el punto imagen se mueve por el rayo $\theta = c$ en sentido ascendente. Entonces, los segmentos de rectas verticales y horizontales se aplican, respectivamente, sobre arcos de circunferencia y porciones de rayos (figura 5.4).

Así, por ejemplo, se puede ver que (5.4) aplica la región $C = [a, b] \times [c, d]$ sobre el sector circular $f(C) = \{(\rho, \theta)/e^a \leq \rho \leq e^b, c \leq \theta \leq d\}$ (figura 5.5). La aplicación es biyectiva si $d - c < 2\pi$. En particular, si $c = 0, d = \pi$, entonces $0 \leq \theta \leq \pi$ y la región rectangular se aplica sobre la mitad superior de un anillo circular. Por otro lado, la imagen de la banda infinita $\{(x, y) : 0 < y < \pi, x \in \mathbb{R}\}$ es el semiplano superior $\{(\rho, \theta) : \rho > 0, 0 < \theta < \pi\}$.

Transformación $w = z^2$

$$w = f(z) = z^2. \tag{5.5}$$

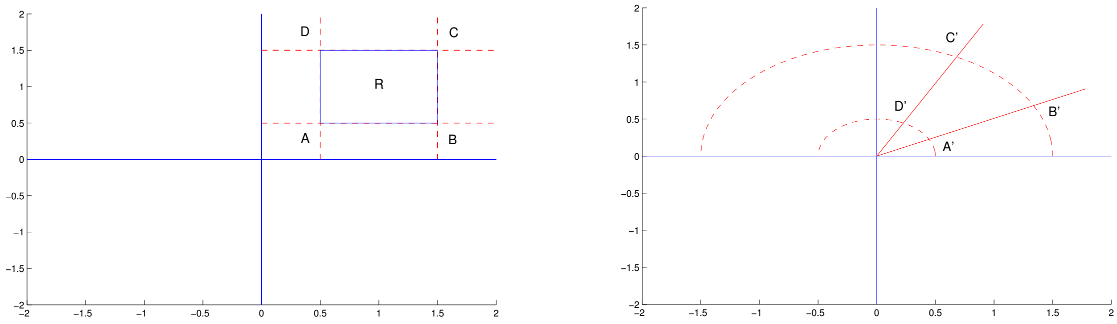

Fig. 5.5: Transformación $w = e^z$.

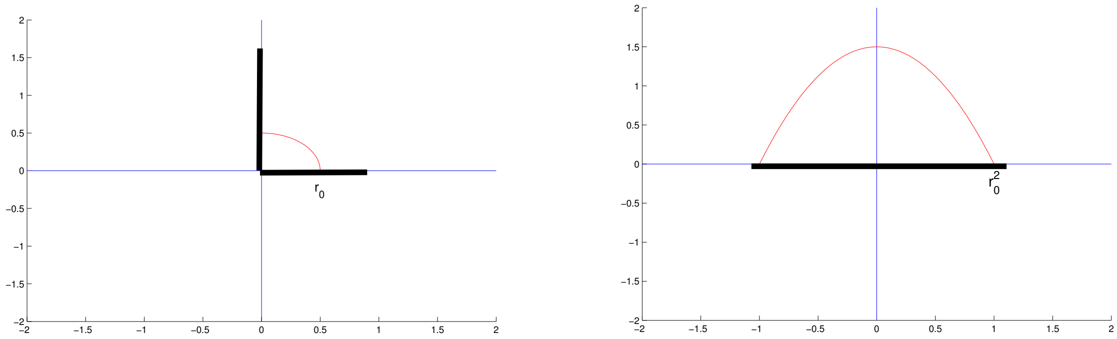

Fig. 5.6: Transformación $w = e^z$.

La transformación (5.5) se puede describir mejor en polares (ρ, θ): si $z = re^{\mathbf{i}\theta}, w = \rho e^{\mathbf{i}\phi}$, entonces

$$\rho e^{\mathbf{i}\phi} = r^2 e^{2\mathbf{i}\theta}.$$

Luego la imagen de $z \neq 0$ es un punto w cuyo módulo es el cuadrado del de z y uno de sus argumentos se obtiene doblando un argumento de z. Así, por ejemplo, los puntos de la circunferencia centrada en el origen y de radio r_0, $z = r_0 e^{\mathbf{i}\theta}, \theta \in [0, 2\pi)$, se tranforman en puntos $w = r_0^2 e^{2\mathbf{i}\theta}, \theta \in [0, 2\pi)$, que recorren la circunferencia de centro el origen y radio r_0^2. Si z se mueve en sentido antihorario, del eje real positivo al eje imaginario positivo, su imagen se mueve en sentido antihorario del eje real positivo al eje real negativo, al doblarse el argumento (figura 5.6). La transformación (5.5) es entonces biyectiva del primer cuadrante $r \geq 0, \theta \in [0, \pi/2]$ sobre el semiplano superior $\rho \geq 0, \phi \in [0, \pi]$. Aplica también el semiplano superior $r \geq 0, \theta \in [0, \pi]$ sobre todo el plano, aunque en este caso no de forma uno a uno, pues tanto el eje real positivo como el negativo se aplican sobre el eje real positivo. En coordenadas cartesianas (5.5) es $w = f(z) = u + \mathbf{i}v = x^2 - y^2 \mathbf{i} 2xy$ y con esta representación pueden también describirse algunas transformaciones (citadas en clase). Así, lleva franjas verticales en regiones limitadas por parábolas. Esto se debe al hecho de que los puntos (c, y) de una recta vertical $x = c$ se transforman en los puntos (u, v) con $u = c^2 - y^2, v = 2cy$, es decir $v^2 = 4c^2y^2 = 4c^2(c^2 - u)$, que son los puntos de una parábola.

Tema 6

Funciones holomorfas y series de potencias

6.1 Ejercicios

1. **Ejercicio 1**. Calcula los radios de convergencia de las series de potencias siguientes:
(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$; (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$; (c) $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}(z+1)^n$; (d) $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n(z-\mathbf{i})^n$;
(e) $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+a^n)z^n$; $\quad (f)$ $\sum_{n=0}^{+\infty} (2^n-1)(z+2)^n$.

2. Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R \in (0,+\infty)$. Determina el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, en los siguientes casos:

   (a) $a_n = P(n)c_n$ (P polinomio no nulo).
   (b) $a_n = c_n/n!$.
   (c) $a_n = n^n c_n$.

3. Suma en el disco de convergencia las series siguientes:
(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} nz^n$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$; (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$; (d) $\sum_{n=2}^{+\infty} \binom{n}{2} z^n$; (e) $\sum_{n=0}^{+\infty} (2^n-1)z^n$.

4. Desarrolla las siguientes funciones en serie de potencias centrada en $z_0 = 0$ y determina el dominio de validez.
(a) $f(z) = \sin^2 z$; (b) $f(z) = \cosh^2 z$; (c) $f(z) = \frac{z}{z^2-4z+13}$; (d) $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$;
(e) $f(z) = z\cosh(z^2)$; (f) $f(z) = \frac{z}{z^4+9}$.

5. Desarrolla las siguientes funciones en serie de potencias centrada en el punto indicado z_0 y determina el dominio de validez.
(a) $f(z) = \frac{1}{1-z}$, con $z_0 = \mathbf{i}$; (b) $f(z) = \cos z$, con $z_0 = \pi/2$; (c) $f(z) = \sinh z$, con $z_0 = \pi\mathbf{i}$; (d) $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$, con $z_0 = 1$;

6.2 Soluciones

1. (a) $z_0 = 0, a_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$. El radio de convergencia se obtiene a partir de

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(2n+1)(2n)!}{((n+1)n!)^2}}{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2} = 0.$$

Luego $\rho = +\infty$, y la serie converge en todo el plano complejo.

(b) $z_0 = 0, a_n = \dfrac{n!}{n^n}$. El radio de convergencia se obtiene a partir de

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}.$$

Luego $\rho = \mathrm{e}$ y la serie converge absolutamente en $B(0, \mathrm{e})$.

(c) $z_0 = -1, a_n = 2^{-n}$. El radio de convergencia se obtiene a partir de

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^{-n}} = \frac{1}{2}.$$

Luego $\rho = 2$, y la serie converge absolutamente en $B(2, -1)$.

(d) $z_0 = \mathbf{i}, a_n = 2^n$. El radio de convergencia se obtiene a partir de

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2.$$

Luego $\rho = 1/2$, y la serie converge absolutamente en $B(\mathbf{i}, 1/2)$.

(e) $z_0 = 0, a_n = n + a^n$. El radio de convergencia se obtiene a partir de

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|n+1+a^{n+1}|}{|n+a^n|} = \begin{cases} |a|, & |a| > 1 \\ 1, & |a| \le 1 \end{cases}$$

Luego $\rho = 1/|a|$, si $|a| > 1$, y $\rho = 1$, si $|a| \le 1$.

(f) $z_0 = -2, a_n = 2^n - 1$. El radio de convergencia se obtiene a partir de

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2.$$

Luego $\rho = 1/2$, y la serie converge absolutamente en $B(-2, 1/2)$.

2. (a)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|P(n+1)|}{|P(n)|} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{1}{R}.$$

Luego $\rho = R$.

(b)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = 0.$$

Luego $\rho = +\infty$.

(c)

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} n\sqrt[n]{|c_n|} = +\infty.$$

Luego $\rho = 0$.

3. (a) Derivando la serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nz^n = z\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = z\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) = z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) = -\frac{z}{(1-z)^2},$$

desarrollo válido en el disco de convergencia de la serie geométrica y de su serie derivada, es decir $B(0,1)$.

(b) Integrando término a término, la función

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n},$$

es una primitiva de la suma de la serie geométrica

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad z \in B(0,1).$$

Entonces, por ejemplo, $f(z) = -\mathrm{Ln}(1-z), z \in B(0,1)$.

(c) Análogamente, integrando término a término, la función

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1},$$

es una primitiva de la suma de la serie geométrica

$$\frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n}, \quad z \in B(0,1).$$

Entonces, por ejemplo,

$$f(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \quad z \in B(0,1).$$

(d) Podemos escribir

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty} \binom{n}{2} z^n &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2} z^n = \frac{z^2}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)z^{n-2} = \frac{z^2}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) \\ &= \frac{z^2}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{z^2}{(1-z)^3}.\end{aligned}$$

Desarrollo válido en el disco de convergencia de la serie geométrica y sus series derivadas, es decir $B(0,1)$.

(e) En este caso

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(2^n-1)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(2z)^n-\sum_{n=0}^{+\infty}z^n=\frac{1}{1-2z}-\frac{1}{1-z}=\frac{z}{(1-z)(1-2z)}.$$

Desarrollo válido en el dominio de convergencia común de las dos series geométricas. La primera converge para $z\in B(0,1/2)$ y la segunda para $z\in B(0,1)$. Luego, la suma es válida en $B(0,1/2)$.

4. (a) Podemos usar el producto de Cauchy de la serie de $f(z)=\sin z$, o desarrollar utilizando la serie de la exponencial.

$$\begin{aligned}\sin^2 z &= \left(\frac{e^{\mathbf{i}z}-e^{-\mathbf{i}z}}{2\mathbf{i}}\right)^2=-\frac{1}{4}\left(e^{2\mathbf{i}z}+e^{-2\mathbf{i}z}-2\right)=-\frac{1}{4}\left(-2+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\mathbf{i}z)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2\mathbf{i}z)^n}{n!}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2\mathbf{i})^n}{n!}(1+(-1)^n)z^n\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}2^{2k-1}}{(2k)!}z^{2k}.\end{aligned}$$

Desarrollo válido para todo $z\in\mathbb{C}$.

(b) Podemos usar de nuevo la serie de la exponencial.

$$\begin{aligned}\cosh^2 z &= \left(\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(e^{2z}+e^{-2z}+2\right)=\frac{1}{4}\left(2+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2z)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2z)^n}{n!}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(2+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}(1+(-1)^n)z^n\right)=\frac{1}{2}+\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4^{k-1}}{(2k)!}z^{2k}\right).\end{aligned}$$

Desarrollo válido para todo $z\in\mathbb{C}$.

(c) Podemos escribir

$$\begin{aligned}\frac{z}{z^2-4z+13} &= \frac{A}{z-(2-3\mathbf{i})}+\frac{B}{z-(2+3\mathbf{i})}=\frac{3+2\mathbf{i}}{6}\,\frac{1}{z-(2-3\mathbf{i})}+\frac{3-2\mathbf{i}}{6}\,\frac{1}{z-(2+3\mathbf{i})}\\ &= -\frac{3+2\mathbf{i}}{6(2-3\mathbf{i})}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2-3\mathbf{i}}}-\frac{3-2\mathbf{i}}{6(2+3\mathbf{i})}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2+3\mathbf{i}}}.\end{aligned}$$

Desarrollando ahora las dos funciones

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\dfrac{z}{2-3\mathbf{i}}} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{(2-3\mathbf{i})^n}, \quad z\in B(0,r), r=|2-3\mathbf{i}|=\sqrt{13}\\ \frac{1}{1-\dfrac{z}{2+3\mathbf{i}}} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{(2+3\mathbf{i})^n}, \quad z\in B(0,r), r=|2+3\mathbf{i}|=\sqrt{13}.\end{aligned}$$

Tenemos entonces el desarrollo válido para $z\in B(0,r), r=\sqrt{13}$,

$$\frac{z}{z^2-4z+13}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3+2\mathbf{i}}{6(-2+3\mathbf{i})}\,\frac{z^n}{(2-3\mathbf{i})^n}+\frac{3-2\mathbf{i}}{6(-2-3\mathbf{i})}\,\frac{z^n}{(2+3\mathbf{i})^n}\right)z^n.$$

(d) La función es el producto de $g(z)=z/(1+z)$ consigo misma, por lo que su desarrollo en serie de potencias es el producto de Cauchy de la serie de g consigo misma. El desarrollo de g, válido para $z\in B(0,1)$ es

$$\frac{z}{1+z}=z\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}z^n.$$

Si $b_0 = 0, b_n = (-1)^{n-1}, n \geq 1$, entonces la serie producto de Cauchy tiene el desarrollo

$$\frac{z^2}{(1+z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

donde $a_0 = b_0 b_0 = 0$ y si $n \geq 1$,

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1}(-1)^{n-k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-2} = (n-1)(-1)^{n-2} = (n-1)(-1)^n.$$

Luego

$$\frac{z^2}{(1+z)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(-1)^n z^n,$$

desarrollo válido para $z \in B(0,1)$.

(e) Utilizando el desarrollo del coseno hiperbólico,

$$\cosh(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

pero en z^2, se tiene

$$z\cosh(z^2) = z\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{4n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{4n+1}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

(f) Podemos escribir

$$\frac{z}{9+z^4} = \frac{z}{9}\frac{1}{1+\dfrac{z^4}{9}} = \frac{z}{9}\frac{1}{1+\left(\dfrac{z}{\sqrt{3}}\right)^4} = \frac{z}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^{4n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{4n+1}}{3^{2n+1}}.$$

El desarrollo es válido donde lo es el de la serie

$$\frac{1}{1+\left(\dfrac{z}{\sqrt{3}}\right)^4} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^{4n},$$

es decir, para $z \in B(0, \sqrt{3})$.

5. (a) Reescribimos la función y desarrollamos:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-\mathbf{i}-(z-\mathbf{i})} = \frac{1}{1-\mathbf{i}}\frac{1}{1-\left(\dfrac{z-\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}\right)} = \frac{1}{1-\mathbf{i}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-\mathbf{i})^n}{(1-\mathbf{i})^{n+1}}.$$

La sucesión de coeficientes es $a_n = \dfrac{1}{(1-\mathbf{i})^n}$. Puedes comprobar como ejercicio que el radio de convergencia es

$$\rho = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = \sqrt{2},$$

y, por tanto, la serie converge para $z \in B(ui, \sqrt{2})$.

(b) Teniendo en cuenta que $\cos(z) = -\sin(z - \pi/2)$, el desarrollo de la función seno nos lleva a

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{2n+1},$$

desarrollo válido para todo $z \in \mathbb{C}$.

(c) Teniendo en cuenta que $\sinh(z - \pi\mathbf{i}) = -\sinh(z)$, el desarrollo de la función seno hiperbólico nos lleva a

$$\sinh(z) = -\sinh(z - \pi\mathbf{i}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{(2n+1)!} (z - \pi\mathbf{i})^{2n+1},$$

desarrollo válido para todo $z \in \mathbb{C}$.

(d) Consideramos la función como el producto de $f(z) = 1/(1+z)$ consigo misma y desarrollamos f escribiendo:

$$\begin{aligned}
\frac{z}{1+z} &= \frac{z}{2+(z-1)} = \frac{z}{2} \frac{1}{1+\left(\dfrac{z-1}{2}\right)} \\
&= \frac{z}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n = \left(\frac{z-1}{2} + \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-1)^n}{2^n} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-1)^{n+1}}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z-1)^n}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)(z-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-1)^n,
\end{aligned}$$

donde $b_0 = 1/2, b_n = 3/2^{n+1}, n \geq 1$. Entonces, el desarrollo de $f(z)^2$ es el producto de Cauchy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-1)^n,$$

donde

$$\begin{aligned}
a_0 &= b_0 b_0 = \frac{1}{4}, \\
a_n &= \sum_{k=0}^{n} b_k b_{n-k} = 2b_0 b_n + \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k} = \frac{3}{2^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3}{2^{k+1}} \frac{3}{2^{n-k+1}} \\
&= \frac{3}{2^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{9}{2^{n+2}} = \frac{3}{2^{n+1}} + \frac{9(n-1)}{2^{n+2}} = \frac{9n-3}{2^{n+2}}, \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Puedes comprobar como ejercicio que el radio de convergencia es

$$\rho = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = 2,$$

y, por tanto, la serie converge para $z \in B(1,2)$.

6.3 Funciones elementales. Propiedades

Presentamos ahora varias funciones elementales de variable compleja. Hay que prestar especial atención a aquéllas que son multivaluadas.

Polinomios y funciones racionales

Dados un número natural n y los $n+1$ números complejos $a_0, a_1, \ldots, a_n$, los llamados coeficientes, se define el polinomio p en la variable compleja z como la función que hace corresponder al valor que tome z el valor

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Se dice que el grado del polinomio p es n cuando $a_n \neq 0$.

Dos polinomios $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, q(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_m z^m$ son iguales $p = q$ si tienen el mismo grado $n = m$ y son idénticos los coeficientes de potencias iguales de la indeterminada: $a_j = b_j, \quad j = 0, \ldots, n$.

La función $z \mapsto p(z)$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y

$$p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}.$$

El teorema fundamental del álgebra afirma que todo polinomio p de grado n tiene al menos un cero, esto es, la ecuación $p(z) = 0$ admite al menos una solución, real o compleja.

Sean p y q son polinomios con coeficientes complejos, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ las raíces de q. La función racional $r(z) = p(z)/q(z)$ está definida en $A = \mathbb{C} \backslash \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y es holomorfa en él. su derivada es

$$r'(z) = \frac{p'(z)q(z) - p(z)q'(z)}{q(z)^2}, \quad z \in A.$$

Función exponencial

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z = x + \mathbf{i}y,$$
$$f(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \cos y + \mathbf{i}\mathrm{e}^x \sin y.$$

A las propiedades de la exponencial compleja mencionadas ya en la primera sección de este tema, debe añadirse que la función es holomorfa en $\mathbb{C}$ y $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z, z \in \mathbb{C}$.

Función logaritmo complejo

Sea $w = \rho \mathrm{e}^{\phi} \neq 0$. Buscamos números complejos $z = x + \mathbf{i}y$ tales que $\mathrm{e}^z = w$. Igualando las representaciones, se tiene

$$w = \rho \mathrm{e}^{\phi} = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathbf{i}y} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{e}^x = \rho \\ y = \phi + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Por tanto, todos los complejos de la forma $z = \ln \rho + \mathbf{i}(\phi + 2n\pi), n \in \mathbb{Z}$ verifican $\mathrm{e}^z = w$. Se puede así definir la función multivaluada logaritmo complejo

$$\ln(w) = \ln |w| + \mathbf{i}\mathrm{arg}(w), \quad w \neq 0, \qquad \langle 6.1 \rangle$$

donde $\mathrm{arg}(w)$ recorre todos los argumentos del complejo w. La expresión (6.1) determina una función univaluada cuando se fija un argumento concreto. A cada una de las funciones univaluadas se les llama ramas del logaritmo. Explícitamente, si $\alpha \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C}, w \neq 0$, existe un único argumento de w en el intervalo $[\alpha, \alpha + 2\pi)$. Considerando la banda (figura 6.1)

$$B(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} / \alpha \leq \mathrm{Im}\,(z) < \alpha + 2\pi\},$$

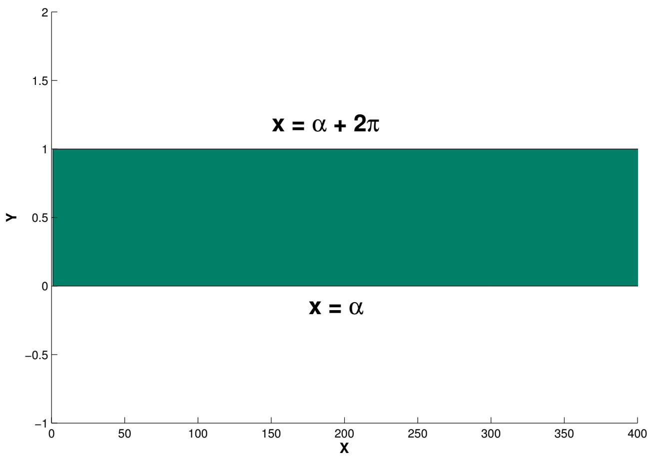

Fig. 6.1: Banda $B(\alpha)$.

resulta que la exponencial, que no es una función inyectiva en $\mathbb{C}$, sí define una biyección al restringirse a cada banda $f_\alpha : B(\alpha) \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Tiene sentido entonces definir su inversa como la rama del logaritmo (6.1) donde $\arg(w)$ es el único argumento de w que está en el intervalo $[\alpha, \alpha + 2\pi)$.

$$\begin{aligned} &f_\alpha^{-1} : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to B(\alpha), \\ &f_\alpha^{-1}(w) = \ln_\alpha(w) = \ln|w| + \mathbf{i}\arg(w), \quad \alpha \leq \arg(w) < \alpha + 2\pi. \end{aligned}$$

En particular, tomando el argumento principal de w ($\alpha = -\pi$), se tiene la función

$$\mathrm{Ln}(w) = \ln|w| + \mathbf{i}\mathrm{Arg}(w),$$

llamada rama principal del logaritmo complejo.

Para poder aplicar el teorema de la función inversa, es necesario restringir f a la banda abierta

$$A(\alpha) = \{z \in \mathbb{C}/\alpha < \mathrm{Im}(z) < \alpha + 2\pi\},$$

en cuyo caso, la biyección f_α se establece entre $A(\alpha)$ y

$$S(\alpha) = \mathbb{C}\backslash\{re^{\mathbf{i}\alpha} : r \geq 0\},$$

La figura muestra las dos regiones. La inversa de $f_\alpha : A(\alpha) \to S(\alpha)$ sigue siendo la correspondiente rama del logaritmo $\ln_\alpha$.

Ejemplo 1.- Se puede comprobar como ejercicio que se tienen los siguientes logaritmos:

$$\ln(e) = 1 + 2n\pi\mathbf{i}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(-1 + \mathbf{i}\sqrt{3}) = \ln 2 + 2(n + \frac{1}{3})\pi\mathbf{i}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Algunas propiedades del logaritmo complejo son las siguientes:

1. $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$

2. $\ln(z_1/z_2) = \ln z_1 - \ln z_2 \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_2 \neq 0.$

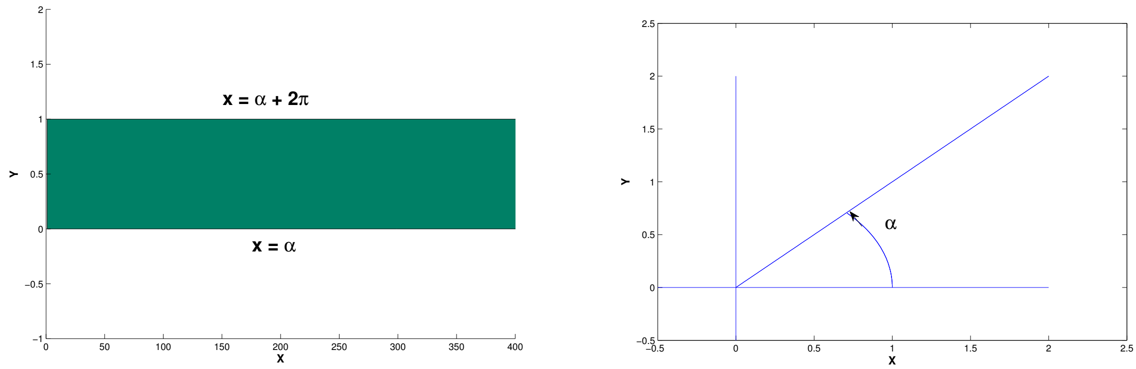

Fig. 6.2: (a) Banda $A(\alpha)$. (b) Región $S(\alpha)$.

3. El teorema de la función inversa asegura que $\ln_\alpha$ es holomorfa en $S(\alpha)$ y su derivada es

$$(\ln_\alpha)'(w) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln_\alpha(w)}} = \frac{1}{w}, \quad w \in S(\alpha).$$

Las propiedades (1) y (2) deben entenderse como funciones multivaluadas: Así, si $z_1 = z_2 = -1$, entonces

$$\ln(z_1) = \ln(z_2) = (2n+1)\pi\mathbf{i}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(z_1 z_2) = 2n\pi\mathbf{i}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

cumpliéndose que ambos conjuntos $\ln(z_1 z_2)$ y $\ln(z_1) + \ln(z_2)$ son el mismo. Por ejemplo, si $\ln z_1 = \pi\mathbf{i}, \ln z_2 = -\pi\mathbf{i}$, entonces se cumple (1) al tomar $\ln(z_1 z_2) = 0$. Pero

$$\mathrm{Ln}(z_1) + \mathrm{Ln}(z_2) = 2\pi\mathbf{i}, \quad \mathrm{Ln}(z_1 z_2) = 0.$$

Función potencia compleja

Sea $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$. Elegimos un argumento para z en algún intervalo $[\alpha, \alpha + 2\pi), \alpha \in \mathbb{R}$ y una banda $B(\alpha)$ para fijar la correspondiente rama del logaritmo. Para $w \in \mathbb{C}$ se define la potencia de base z y exponente w como

$$f(z) = z^w = \mathrm{e}^{w \ln_\alpha(z)}. \tag{6.2}$$

La expresión (6.2) es la correspondiente rama de la función multivaluada potencia compleja

$$z^w = \mathrm{e}^{w \ln(z)}.$$

La rama principal corresponde a tomar el logaritmo principal Ln en (6.2).

Ejemplo 2.- Se puede comprobar como ejercicio que se tienen los siguientes logaritmos:

$$(1+\mathbf{i})^{\mathbf{i}} = \mathrm{e}^{\frac{\mathbf{i}}{2}\ln 2}\mathrm{e}^{-(\frac{1}{4}+2n)\pi}, \quad n \in \mathbb{Z},$$
$$(1-\mathbf{i})^{4i} = \mathrm{e}^{2\mathbf{i}\ln 2}\mathrm{e}^{-4(-\frac{1}{4}+2n)\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La rama principal del último es $\mathrm{e}^{2\mathbf{i}\ln 2}\mathrm{e}^{\pi}$.

Algunas propiedades de la potencia compleja son las siguientes:

1. $1/z^w = z^{-w} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

2. La función (6.2) es holomorfa en $S(\alpha)$ y su derivada es

$$\frac{d}{dz} z^w = w z^{w-1}, \quad z \in S(\alpha).$$

Funciones trigonométricas e inversas

A partir de la fórmula de Euler se pueden definir las funciones seno y coseno con argumento complejo:

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathbf{i}z}}{2\mathbf{i}}, \quad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathbf{i}z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Algunas propiedades de estas funciones son las siguientes:

1. Las funciones $\sin z, \cos z$ son holomorfas en $\mathbb{C}$ con

$$\frac{d}{dz}\sin z = \cos z, \quad \frac{d}{dz}\cos z = -\sin z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

2. Las funciones $\sin z, \cos z$ son extensiones de las funciones seno y coseno de argumento real, respectivamente.

3. $\sin(z + 2\,k\,\pi) = \sin(z)$, $\cos(z + 2\,k\,\pi) = \cos(z)$, $k \in \mathbb{Z}$. Es decir, las funciones coseno y seno son periódicas de periodo 2π.

4. $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin(z_1)\,\cos(z_2) \pm \cos(z_1)\,\sin(z_2)$

$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos(z_1)\,\cos(z_2) \mp \sin(z_1)\,\sin(z_2)$

5. $\sin(-z) = -\sin(z)$, $\cos(-z) = \cos(z)$.

6. $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$.

7. $\sin(2\,z) = 2\,\sin(z)\,\cos(z)$

$\cos(2\,z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$

$2\,\sin(z_1)\,\sin(z_2) = \cos(z_1 - z_2) - \cos(z_1 + z_2)$

$2\,\sin(z_1)\,\cos(z_2) = \sin(z_1 - z_2) + \sin(z_1 + z_2)$

$2\,\cos(z_1)\,\cos(z_2) = \cos(z_1 - z_2) + \cos(z_1 + z_2)$

$\sin(z_1) + \sin(z_2) = 2\,\sin\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\,\cos\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)$

$\cos(z_1) + \cos(z_2) = 2\,\cos\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\,\cos\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)$

$\sin^2(z_1) - \sin^2(z_2) = \sin(z_1 + z_2)\,\sin(z_1 - z_2)$

$\cos^2(z_1) - \sin^2(z_2) = \cos(z_1 + z_2)\,\cos(z_1 - z_2)$

8. Si $z = x + \mathbf{i}y$,

$\sin z = \sin x \cosh y + \mathbf{i}\cos x \sinh y, \quad \cos z = \cos x \cosh y - \mathbf{i}\sin x \sinh y.$

9. $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi, n \in \mathbb{Z}, \quad \cos z = 0 \Leftrightarrow z = (n + 1/2)\pi, n \in \mathbb{Z}.$

La última propiedad permite definir las correspondientes funciones tangente y cotangente con argumento complejo:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \neq (n + \frac{1}{2})\pi, n \in \mathbb{Z},$$
$$\mathrm{cotan} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \neq n\pi, n \in \mathbb{Z},$$

que son holomorfas en sus correspondientes abiertos $A = \{z \in \mathbb{C}/z \neq (n+\frac{1}{2})\pi, n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{z \in \mathbb{C}/z \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$ y con

$$\frac{d}{dz}\tan z = \frac{1}{\cos^2 z}, \quad z \neq (n+\frac{1}{2})\pi, n \in \mathbb{Z},$$
$$\frac{d}{dz}\text{cotan}z = \frac{1}{\sin^2 z}, \quad z \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Las correspondientes funciones inversas pueden definirse en términos de logaritmos. Así, si $z \in \mathbb{C}$ y buscamos $w \in \mathbb{C}$ tales que $z = \sin w$, la igualdad se da si, y sólo si,

$$z = \frac{e^{\mathbf{i}w} - e^{-\mathbf{i}w}}{2\mathbf{i}} \Leftrightarrow (e^{\mathbf{i}w})^2 - 2\mathbf{i}z(e^{\mathbf{i}w}) - 1 = 0,$$

que es una ecuación de segundo grado para $e^{\mathbf{i}w}$. Despejando, se tiene

$$e^{\mathbf{i}w} = \mathbf{i}z + (1-z^2)^{1/2},$$

donde la función potencia 1/2 o raíz cuadrada $(1-z^2)^{1/2}$ es una función bivaluada. Tomando logaritmos, obtenemos la función multivaluada

$$w = \arcsin(z) = -\mathbf{i}\ln(\mathbf{i}z + (1-z^2)^{1/2})$$

Ejemplo 3.- Si buscamos $w/\sin w = 2$, entonces los valores de la función bivaluada $(1-z^2)^{1/2}$ son $\pm\mathbf{i}\sqrt{3}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\ln((2+\sqrt{3})\mathbf{i}) &= \ln(2+\sqrt{3}) + \mathbf{i}(\frac{1}{2}+2n)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \\
\ln((2-\sqrt{3})\mathbf{i}) &= \ln(\sqrt{3}-2) + \mathbf{i}(\frac{-1}{2}+2n)\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \\
&= \ln\frac{1}{\sqrt{3}-2} + \mathbf{i}(\frac{-1}{2}+2n)\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \\
&= -\ln(2+\sqrt{3}) + \mathbf{i}(\frac{1}{2}+2n)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
w &= \arcsin(2) = -\mathbf{i}\ln(2\mathbf{i} + (1-4)^{1/2}) = -\mathbf{i}\ln((2\pm\sqrt{3})\mathbf{i}) \\
&= \pm\mathbf{i}\ln(2+\sqrt{3}) + \mathbf{i}(\frac{1}{2}+2n)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Con razonamientos análogos, se pueden definir:

$$w = \arccos(z) = -\mathbf{i}\ln(z + \mathbf{i}(1-z^2)^{1/2})$$
$$w = \text{arctg}(z) = \frac{\mathbf{i}}{2}\ln\left(\frac{\mathbf{i}+z}{\mathbf{i}-z}\right),$$

también multivaluadas. Especificando ramas para la raíz cuadrada y el logaritmo, las funciones inversas son univaluadas y holomorfas en los dominios correspondientes, con

$$\frac{d}{dz}\arcsin(z) = \frac{1}{(1-z^2)^{1/2}}$$
$$\frac{d}{dz}\arccos(z) = -\frac{1}{(1-z^2)^{1/2}}$$
$$\frac{d}{dz}\text{arctg}(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

Funciones hiperbólicas e inversas

Usando también la definición dada para el caso real, se tienen las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico con argumento complejo:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Algunas propiedades de estas funciones son las siguientes:

1. Las funciones $\sinh z, \cosh z$ son holomorfas en $\mathbb{C}$ con

$$\frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z, \quad \frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

2. Las funciones $\sinh z, \cosh z$ son extensiones de las funciones seno y coseno hiperbólicos, respectivamente, de argumento real, .

3. $\sinh(z + 2\,k\,\pi\mathbf{i}) = \sinh(z)$, $\cosh(z + 2\,k\,\pi\mathbf{i}) = \cosh(z)$, $\quad k \in \mathbb{Z}$. Es decir, las funciones coseno y seno hiperbólicos son periódicas de periodo $2\pi\mathbf{i}$.

4. $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh(z_1)\,\cosh(z_2) \pm \cosh(z_1)\,\sinh(z_2)$

$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh(z_1)\,\cosh(z_2) \pm \sinh(z_1)\,\sinh(z_2)$

5. $\sinh(-z) = -\sinh(z)$, $\cosh(-z) = \cosh(z)$.

6. $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$.

7. Si $z = x + \mathbf{i}y$,

$\sinh z = \sinh x \cos y + \mathbf{i}\cosh x \sin y, \quad \cosh z = \cosh x \cos y + \mathbf{i}\sinh x \sin y.$

8. $\sinh z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi\mathbf{i}, n \in \mathbb{Z}, \quad \cosh z = 0 \Leftrightarrow z = (n + 1/2)\pi\mathbf{i}, n \in \mathbb{Z}.$

La última propiedad permite definir las correspondientes funciones tangente y cotangente hiperbólicas con argumento complejo:

$$\begin{aligned} \tanh z &= \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad z \neq (n + \frac{1}{2})\pi\mathbf{i}, n \in \mathbb{Z}, \\ \text{cotah} z &= \frac{\cosh z}{\sinh z}, \quad z \neq n\pi\mathbf{i}, n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

que son holomorfas en sus correspondientes abiertos $A = \{z \in \mathbb{C}/z \neq (n + \frac{1}{2})\pi\mathbf{i}, n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{z \in \mathbb{C}/z \neq n\pi\mathbf{i}, n \in \mathbb{Z}\}$ y con

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\tanh z &= \frac{1}{\cosh^2 z}, \quad z \neq (n + \frac{1}{2})\pi\mathbf{i}, n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{d}{dz}\text{cotah} z &= \frac{1}{\sinh^2 z}, \quad z \neq n\pi\mathbf{i}, n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

De forma análoga a la de las funciones trigonométricas, pueden deducirse las funciones hiperbólicas inversas (multivaluadas):

$$\begin{aligned} w &= \text{arcsinh}(z) = \ln(z + (1 + z^2)^{1/2}) \\ w &= \text{arccosh}(z) = \ln(z + \mathbf{i}(z^2 - 1)^{1/2}) \\ w &= \text{arctgh}(z) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right). \end{aligned}$$

6.4 Desarrollo en serie de potencias de funciones elementales

Se presentan ahora desarrollos en serie de potencias de algunas funciones elementales. Están todas centradas en $z_0 = 0$, aunque el desarrollo puede hacerse en cualquier otro punto. Ello no afecta al radio de convergencia, pues las series

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

tienen el mismo radio de convergencia. La región de convergencia, por su parte, se traslada por el centro z_0 que se considere.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}, \\
\sin z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad z \in \mathbb{C}, \\
\cos z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}, \\
\sinh z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad z \in \mathbb{C}, \\
\cosh z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}, \\
\frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n, \quad z \in B(0,1), \\
\mathrm{Ln}(1+z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n, \quad z \in B(0,1).
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.- Utilizando el desarrollo en serie de e^z podemos desarrollar en $z_0 = 0$ la función

$$f(z) = z^2 \mathrm{e}^{3z} = z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} z^{n+2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^{n-2}}{(n-2)!} z^n.$$

Ejemplo 5.- Utilizando el desarrollo en serie de $\sin z$ en $z_0 = 0$, podemos deducir la de $\sinh z$ en ese punto:

$$\sinh z = -\mathbf{i} \sin(\mathbf{i} z) = -\mathbf{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \mathbf{i}^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Ejemplo 6.- Utilizando el desarrollo en serie de $1/(1-z)$ en $z_0 = 0$, podemos deducir la de $1/(1+z)$ en ese punto, cambiando $z \mapsto -z$ (por ello, el radio de convergencia es el mismo). Por otro lado, también podemos deducir el desarrollo de $f(z) = 1/z$ en $z_0 = 1$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^n.$$

El desarrollo es válido en el disco $B(1,1)$.

Ejemplo 7.- Utilizando el desarrollo en serie de $1/(1+z)$ en $z_0 = 0$, podemos deducir la de

$$f(z) = \frac{z}{z^4+9} = \frac{z}{9}\left(\frac{1}{1+\frac{z^4}{9}}\right) = \frac{z}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z^4}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^{2n+2}}z^{4n+1}$$

El desarrollo es válido cuando $|z^4/9| < 1$ (al utilizar el de $1/\left(1+\dfrac{z^4}{9}\right)$), es decir, cuando $|z| < \sqrt{3}$ (el disco $B(0,\sqrt{3})$).

Tema 7

Integración compleja. Fórmula de Cauchy

7.1 Ejercicios

1. Calcula las siguientes integrales, donde el camino es un contorno arbitrario entre los límites de integración.
(a) $\displaystyle\int_{\mathbf{i}}^{\mathbf{i}/2} \mathrm{e}^{\pi z}\,\mathrm{d}z$; (b) $\displaystyle\int_0^{2+2\pi\mathbf{i}} \cos\left(\frac{z}{2}\right)\mathrm{d}z$; (c) $\displaystyle\int_1^3 (z-2)^3\,\mathrm{d}z$.

2. Sea Γ el contorno del dominio entre la circunferencia $|z|=4$ y el cuadrado limitado por las rectas $x=\pm 1, y=\pm 1$. Suponiendo que Γ esté orientado de modo que los puntos del dominio queden a la izquierda de Γ (orientación natural o inducida por el dominio), calcula $\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ para

$$f(z)=\frac{1}{3z^2+1};\quad f(z)=\frac{z+2}{\sin(z/2)};\quad f(z)=\frac{z}{1-\mathrm{e}^z}.$$

3. Calcula $\displaystyle\int_\Gamma \overline{z}^2\,\mathrm{d}z$ siendo (a) $\Gamma=\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\}$; (b) $\Gamma=\{z\in\mathbb{C}/|z-1|=1\}$, orientadas en sentido positivo.

4. Sea Γ el arco de circunferencia centrada en el origen que une los puntos 2 y $2\mathbf{i}$ y recorrido en sentido positivo. Comprueba que

$$\left|\int_\Gamma \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z\right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

5. Calcula $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$, siendo

(a) $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{zt}}{z^2+1}$, $C=\{z\in\mathbb{C}/|z|=3\}$, $t\in\mathbb{R}$ orientado positivamente.

(b) $f(z)=\dfrac{z\mathrm{e}^z}{(z+1)^3}$, $C=\{z\in\mathbb{C}/|z+1|=r\}$, $r>0$, orientado positivamente.

(c) $f(z)=\dfrac{\cosh z}{z^4}$; C es el contorno del cuadrado limitado por las rectas $x=\pm 2$, $y=\pm 2$, orientado en sentido positivo.

(d) $f(z)=\dfrac{z}{2z+1}$; C contorno del cuadrado limitado por las rectas $x=\pm 2$, $y=\pm 2$, orientado en sentido negativo.

6. Calcula $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$, con C la circunferencia de radio 2 centrada en $z_0 = \mathbf{i}$ orientada positivamente y

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$; (b) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2}$.

7. Sea C la circunferencia de radio 3 centrada en $z_0 = 0$ orientada positivamente. Comprueba que si $g(w) = \int_C \dfrac{2z^2 - z - 2}{z - w}\,\mathrm{d}z \quad (|w| \neq 3)$, entonces $g(2) = 8\pi\mathbf{i}$. ¿Cuál es el valor de $g(w)$ cuando $|w| > 3$?

8. (a) Sean $a, b > 0$ y Γ la elipse centrada en $z_0 = 0$ y de semiejes a y b. Calcula

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

(b) Utilizando el apartado anterior, calcula la integral real

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a^2 \cos^t + b^2 \sin^2 t}.$$

9. (a) Sea Γ la circunferencia centrada en $z_0 = 0$ y de radio uno. Calcula

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{e}^{az}}{z}\,\mathrm{d}z,$$

donde a es una constante real cualquiera.

(b) Utilizando el apartado anterior, calcula la integral real

$$I = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{a\cos t} \cos(a \sin t)\,\mathrm{d}t.$$

7.2 Soluciones

1. Calculamos las integrales a través de primitivas.

(a) Una primitiva de $f(z) = \mathrm{e}^{\pi z}$ es $F(z) = \mathrm{e}^{\pi z}/\pi$, que es holomorfa en todo $\mathbb{C}$, luego

$$\int_{\mathbf{i}}^{i/2} \mathrm{e}^{\pi z}\,\mathrm{d}z = F(\mathbf{i}) - F(\mathbf{i}/2) = \frac{\mathrm{e}^{\pi\mathbf{i}} - \mathrm{e}^{\pi\mathbf{i}/2}}{\pi} = \frac{-1-\mathbf{i}}{\pi}.$$

(b) Una primitiva de $f(z) = \cos\left(\frac{z}{2}\right)$ es $F(z) = 2\sin\left(\frac{z}{2}\right)$, que es holomorfa en todo $\mathbb{C}$. Entonces

$$\int_0^{2+2\pi\mathbf{i}} \cos\left(\frac{z}{2}\right)\mathrm{d}z = F(2+2\pi\mathbf{i}) - F(0) = 2\sin(1+\pi\mathbf{i}) = 2\frac{\mathrm{e}^{1+\pi\mathbf{i}} - \mathrm{e}^{-1-\pi\mathbf{i}}}{2\mathbf{i}}.$$

(c) Una primitiva de $f(z) = (z-2)^3$ es $F(z) = (z-2)^4/4$, que es holomorfa en todo $\mathbb{C}$; luego

$$\int_1^3 (z-2)^3\,\mathrm{d}z = F(3) - F(1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

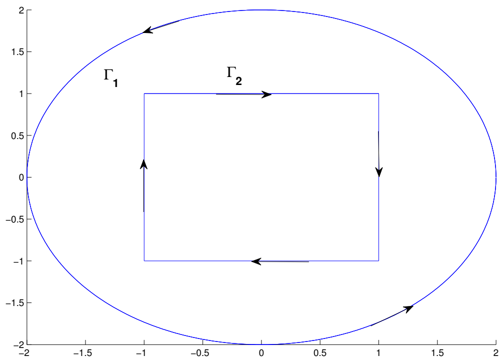

Fig. 7.1: Contorno del ejercicio 2.

2. El contorno se muestra en la figura 7.1. Denotamos $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ siendo Γ_1 la circunferencia $|z| = 4$ y Γ_2 la frontera del cuadrado. La función $f(z) = \dfrac{1}{3z^2+1}$ es holomorfa en todo los puntos del disco limitado por Γ_1 excepto en los ceros del denominador $z = \pm\mathbf{i}/\sqrt{3}$, que son puntos interiores a Γ_2. Luego

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Con las demás funciones se razona de la misma manera. La función $f(z) = \dfrac{z+2}{\sin(z/2)}$ es holomorfa en todo los puntos del disco limitado por Γ_1 excepto en los ceros del denominador; el único que está en ese disco es $z = 0$, que es interior a Γ_2. Luego

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Por último, $f(z) = \dfrac{z}{1-\mathrm{e}^z}$ es holomorfa en todo los puntos del disco limitado por Γ_1 excepto en los ceros del denominador; el único que está en ese disco es $z = 0$, que es interior a Γ_2. Luego

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

3. En este caso la función no es holomorfa, por lo que hay que aplicar la definición de la integral.

(a) Sea $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\quad \gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{i}t}$ una parametrización de Γ. Entonces:

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-2\mathbf{i}t} i\mathrm{e}^{\mathbf{i}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathbf{i}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

(b) Sea $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\quad \gamma(t) = 1 + \mathrm{e}^{\mathbf{i}t}$ una parametrización de Γ. Entonces:

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (1+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}t})^2 \mathbf{i}\mathrm{e}^{\mathbf{i}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (1+2\mathrm{e}^{-\mathbf{i}t}+\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}t})\mathbf{i}\mathrm{e}^{\mathbf{i}t}\,\mathrm{d}t = 4\pi\mathbf{i}.$$

4. Para la función $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, se tiene

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \operatorname{long}(\Gamma) \sup_{z\in\Gamma} |f(z)|.$$

Calculamos cada factor por separado. Por un lado, una parametrización del arco coherente con la orientación viene dada por $\gamma(t) = 2\mathrm{e}^{\mathbf{i}t}, t \in [0, \pi/2]$. Entonces

$$\operatorname{long}(\Gamma) = \int_0^{\pi/2} ||\gamma'(t)||\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 2\,\mathrm{d}t = \pi.$$

Por otra parte, si $z \in \Gamma$, entonces es de la forma $z = 2\mathrm{e}^{\mathbf{i}t}$ para $t \in [0, \pi/2]$. Luego

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \frac{1}{|1+4\mathrm{e}^{2\mathbf{i}t}|} = \frac{1}{|1+4\cos(2t)+4\mathbf{i}\sin(2t)|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1+4\cos(2t))^2+(4\sin(2t))^2}} = \frac{1}{\sqrt{17+8\cos(2t)}}. \end{aligned}$$

Como

$$\min_{t\in[0,\pi/2]} \sqrt{17+8\cos(2t)} = \sqrt{17-8} = 3,$$

entonces

$$\sup_{z\in\Gamma} |f(z)| = \frac{1}{\min_{t\in[0,\pi/2]} \sqrt{17+8\cos(2t)}} = \frac{1}{3}.$$

Por tanto

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \operatorname{long}(\Gamma) \sup_{z\in\Gamma} |f(z)| = \frac{\pi}{3}.$$

5. Se trata de aplicar la fórmula integral de Cauchy a la función conveniente

(a) Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-\mathbf{i})(z+\mathbf{i})} = \frac{A}{z-\mathbf{i}} + \frac{B}{z+\mathbf{i}} = -\frac{\mathbf{i}}{2}\frac{1}{z-\mathbf{i}} + \frac{\mathbf{i}}{2}\frac{1}{z+\mathbf{i}},$$

y aplicamos la fórmula integral de Cauchy a la función $g(z) = \mathrm{e}^{zt}$, con los puntos del interior de C dados por $z_0 = \pm\mathbf{i}$, respectivamente:

$$\begin{aligned} \int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= -\frac{\mathbf{i}}{2}\int_C \frac{\mathrm{e}^{zt}}{z-\mathbf{i}}\,\mathrm{d}z + \frac{\mathbf{i}}{2}\int_C \frac{\mathrm{e}^{zt}}{z+\mathbf{i}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}\left(-\frac{\mathbf{i}}{2}g(\mathbf{i})\operatorname{ind}(C,\mathbf{i}) + \frac{\mathbf{i}}{2}g(-\mathbf{i})\operatorname{ind}(C,-\mathbf{i})\right) \\ &= 2\pi\mathbf{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}t}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}t}}{2\mathbf{i}} = 2\pi\mathbf{i}\sin t. \end{aligned}$$

(b) Aplicamos la fórmula de Cauchy para la derivada segunda de $g(z) = z\mathrm{e}^z$, $g''(z) = (2+z)\mathrm{e}^z$ en $z_0 = -1$, interior al contorno C:

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C \frac{g(z)}{(z+1)^3}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathbf{i}}{2!}g''(-1) = \frac{\pi\mathbf{i}}{e}.$$

(c) Aplicamos la fórmula de Cauchy para la derivada tercera de $g(z) = \cosh z$, $g'''(z) = \sinh z$, en $z_0 = 0$, interior al contorno C:

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C \frac{g(z)}{z^4}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathbf{i}}{3!}g'''(0) = 0.$$

(d) Escribimos $f(z)$ en la forma

$$f(z) = \frac{z/2}{z+1/2},$$

y aplicamos la fórmula integral de Cauchy a la función $g(z) = z/2$, en $z_0 = 0$, interior al contorno C y teniendo en cuenta que $\operatorname{ind}(C, -1/2) = -1$, pues C está orientado en sentido negativo:

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}\operatorname{ind}(C, -1/2)g(-1/2) = \frac{\pi\mathbf{i}}{2}.$$

6. (a) Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{(z-2\mathbf{i})(z+2\mathbf{i})} = \frac{A}{z-2\mathbf{i}} + \frac{B}{z+2\mathbf{i}} = -\frac{\mathbf{i}}{4}\frac{1}{z-2\mathbf{i}} + \frac{\mathbf{i}}{4}\frac{1}{z+2\mathbf{i}},$$

y aplicamos la fórmula integral de Cauchy a la función $g(z) = 1$, pues los puntos $w = \pm 2\mathbf{i}$ están en el interior del contorno C:

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\frac{\mathbf{i}}{4}\int_C \frac{g(z)}{z-2\mathbf{i}}\,\mathrm{d}z + \frac{\mathbf{i}}{4}\int_C \frac{g(z)}{z+2\mathbf{i}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}\left(-\frac{\mathbf{i}}{4}g(2\mathbf{i}) + \frac{\mathbf{i}}{4}g(-2\mathbf{i})\right) = 0.$$

(b) Descomponemos en fracciones simples

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z^2+4)^2} &= \frac{1}{(z-2\mathbf{i})^2(z+2\mathbf{i})^2} = \frac{A}{z-2\mathbf{i}} + \frac{B}{z+2\mathbf{i}} \\ &+\frac{C}{(z-2\mathbf{i})^2} + \frac{D}{(z+2\mathbf{i})^2} = -\frac{\mathbf{i}}{32}\frac{1}{z-2\mathbf{i}} + \frac{\mathbf{i}}{32}\frac{1}{z+2\mathbf{i}} \\ &-\frac{1}{16}\frac{1}{(z-2\mathbf{i})^2} + \frac{1}{16}\frac{1}{(z+2\mathbf{i})^2},\end{aligned}$$

y aplicamos la fórmula integral de Cauchy a la función $g(z) = 1$ en los dos primeros sumandos y la fórmula integral de Cauchy a su derivada $g'(z) = 0$ en los dos siguientes sumandos, en los puntos $w = \pm 2\mathbf{i}$, que están en el interior del contorno C:

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= -\frac{\mathbf{i}}{32}\int_C \frac{1}{z-2\mathbf{i}}\,\mathrm{d}z + \frac{\mathbf{i}}{32}\int_C \frac{1}{z+2\mathbf{i}}\,\mathrm{d}z \\ &-\frac{1}{16}\int_C \frac{1}{(z-2\mathbf{i})^2}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{16}\int_C \frac{1}{(z+2\mathbf{i})^2}\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi i\left(-\frac{\mathbf{i}}{32}g(2\mathbf{i}) + \frac{\mathbf{i}}{32}g(-2\mathbf{i})\right) + 2\pi\mathbf{i}\left(-\frac{1}{16}g'(2\mathbf{i}) + \frac{1}{16}g'(-2\mathbf{i})\right) = 0.\end{aligned}$$

7. El punto $w = 2$ se encuentra en el interior del contorno C. Aplicando la fórmula integral de Cauchy a $f(z) = 2z^2 - z - 2$, que es holomorfa en C y en su interior, se tiene

$$g(2) = \int_C \frac{2z^2 - z - 2}{z-2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}f(2) = 8\pi\mathbf{i}.$$

Por otro lado, si $|w| > 3$, el integrando que define g, $\dfrac{2z^2-z-2}{z-w}$, es una función holomorfa en C y en su interior, por lo que, por el teorema de Cauchy–Goursat (o aplicando que $\operatorname{ind}(C, \omega) = 0$ al estar ω en el exterior del contorno),

$$g(w) = \int_C \frac{2z^2 - z - 2}{z-w}\,\mathrm{d}z = 0 \quad (|w| > 3).$$

8. (a) Por la fórmula integral de Cauchy

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi\mathbf{i}\,\mathrm{ind}(\Gamma,0) = 2\pi\mathbf{i}.$$

(b) Una parametrización de Γ viene dada por $\gamma(t) = a\cos t + \mathbf{i}b\sin t$, $t \in [0,2\pi]$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} &= \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{-a\sin t + \mathbf{i}b\cos t}{a\cos t + \mathbf{i}b\sin t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(-a\sin t + \mathbf{i}b\cos t)(a\cos t - \mathbf{i}b\sin t)}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{(-a^2+b^2)\sin t\cos t + \mathbf{i}ab}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{-2a^2\sin t\cos t + 2b^2\sin t\cos t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t + \mathbf{i}ab\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} \\
&= \frac{1}{2}\ln(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t)\Big|_0^{2\pi} + \mathbf{i}ab\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = \mathbf{i}abI.
\end{aligned}$$

Utilizando ahora el apartado (i), se tiene

$$\mathbf{i}abI = \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi\mathbf{i} \Rightarrow I = \frac{2\pi}{ab}.$$

9. (a) Por la fórmula integral de Cauchy, aplicada a $f(z) = \mathrm{e}^{az}$,

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{e}^{az}}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}f(0)\,\mathrm{ind}(\Gamma,0) = 2\pi\mathbf{i}.$$

(b) Una parametrización de Γ viene dada por $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{i}t}$, $t \in [-\pi,\pi]$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \frac{\mathrm{e}^{az}}{z}\,\mathrm{d}z &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{a\gamma(t)}}{\gamma(t)}\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{a\cos t + \mathbf{i}a\sin t}\mathbf{i}\mathrm{e}^{\mathbf{i}t}}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}t}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{i}\mathrm{e}^{a\cos t}(\cos(a\sin t) + \mathbf{i}\sin(a\sin t))\,\mathrm{d}t \\
&= \mathbf{i}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{a\cos t}\cos(a\sin t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{a\cos t}\sin(a\sin t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Por un lado, como el integrando es una función impar

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{a\cos t}\sin(a\sin t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Por otro lado, como el integrando es una función par

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{a\cos t}\cos(a\sin t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{a\cos t}\cos(a\sin t)\,\mathrm{d}t.$$

Utilizando ahora el apartado (i), se tiene finalmente

$$2\pi\mathbf{i} = \int_\Gamma \frac{\mathrm{e}^{az}}{z}\,\mathrm{d}z = 2\mathbf{i}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{a\cos t}\cos(a\sin t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow I = \pi.$$

Tema 8

Teorema de los Residuos. Aplicaciones

8.1 Ejercicios

1. Estudia y clasifica los puntos singulares de las funciones:

(a) $f(z) = \dfrac{z^4}{z^4+1}$; (b) $f(z) = \dfrac{z^2+z+1}{z^2(z-1)}$; (c) $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{z(1-\mathrm{e}^{-z})}$; (d) $f(z) = z^4 \sin\dfrac{1}{z}$;

(e) $f(z) = \dfrac{z-\sin z}{z^3}$; (f) $f(z) = \dfrac{\sin(2z)}{(z+1)^3}$; (g) $f(z) = \dfrac{1-\mathrm{e}^z}{1+\mathrm{e}^z}$; (h) $f(z) = \mathrm{e}^{\dfrac{z}{z-2}}$.

2. Desarrolla las siguientes funciones en serie de Laurent en los puntos que se indican y determina la región de convergencia.

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$, $\quad z = 0$; (b) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)}$, $\quad z = \mathbf{i}$; (c) $f(z) = \mathrm{e}^{\dfrac{1}{1-z}}$, $\quad z = 1$;

(d) $f(z) = z^2\mathrm{e}^{\dfrac{1}{z}}$ $\quad z = 0$; (e) $f(z) = z^2 \sin\dfrac{1}{z-1}$, $\quad z = 1$; (f) $f(z) = \cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $\quad z = 2$.

3. Desarrolla las siguientes funciones en serie de Laurent en las regiones que se indican.

(a) $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$, $\quad C(2,0,1)$, y $C(1,1,+\infty)$.

(b) $f(z) = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z+2} + \dfrac{1}{(z-1)^2}$, $\quad C(0,0,1)$, y $C(0,1,+\infty)$.

(c) $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^2}$, $\quad C(0,0,2)$, y $C(0,2,+\infty)$.

(d) $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$, $\quad C(0,0,1)$, y $C(0,1,+\infty)$.

4. Estudia la naturaleza de las singularidades de las funciones siguientes y calcula el valor del residuo correspondiente.

(a) $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{1+z^2}$; (b) $f(z) = \dfrac{z-\sin z}{z^3}$; (c) $f(z) = (z-3)\sin\dfrac{1}{z+2}$; (d) $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^3}$.

5. (a) Sea

$$f(z) = \frac{1}{q(z)^2},$$

con q holomorfa en un entorno de z_0, $q(z_0) = 0, q'(z_0) \neq 0$. Comprueba que entonces z_0 es un polo de orden dos de f con

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = -\frac{q''(z_0)}{q'(z_0)^2}.$$

(b) Estudia la naturaleza de las singularidades de

$$f(z)=\frac{1}{(z+z^2)^2},$$

y calcula el valor del residuo correspondiente.

6. Calcula las siguientes integrales (la orientación en todas las curvas es positiva):

(a) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1+z}{1-\cos z}\,\mathrm{d}z, \quad \Gamma=\{z\in\mathbb{C}/|z|=7.$

(b) $\displaystyle\int_\Gamma z^n \mathrm{e}^{1/z}\,\mathrm{d}z, \quad \Gamma$ circunferencia centrada en el origen y de radio $R>0$.

(c) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}, \quad \Gamma$ curva formada por el segmento $[-2,2]$ y la semicircunferencia superior centrada en el origen y de radio 2.

(d) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}, \quad \Gamma$ cuadrado de vértices $0,1,1+\mathbf{i},\mathbf{i}$.

7. Calcula las siguientes integrales, integrando convenientemente en regiones de la forma

$$\Pi_R^+=\{z\in\mathbb{C}/|z|\le R,\ \mathrm{Im}\,(z)\ge 0\},$$

o de la forma

$$\Pi_R^-=\{z\in\mathbb{C}/|z|\le R,\ \mathrm{Im}\,(z)\le 0\}.$$

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x^4+1)}\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$; (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}\,\mathrm{d}x$;

Aplicando la misma estrategia, comprueba que

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x^2+1)}=\pi/2$; (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x=2\pi/\sqrt{3}$;

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+1)(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x=5\pi/288.$

8. Tomando t como argumento de un complejo z sobre un arco de circunferencia conveniente, centrado en el origen, y utilizando las fórmulas

$$\sin\theta=\frac{1}{2\mathbf{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right),\quad \cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\quad z=\mathrm{e}^{\mathbf{i}t},$$

calcula las siguientes integrales: (a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2+\cos t}\,\mathrm{d}t$; (b) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{5+4\cos t}$;

Comprueba también que

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos^3 t}{\cos^3 t-2}\,\mathrm{d}t=0.$

9. Considerando rectángulos

$$\Pi_R^+=[-R,R]\times[0,R],$$

o de la forma

$$\Pi_R^-=[-R,R]\times[-R,0],$$

con $R>0$, calcula las integrales:
(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$;

y comprueba que

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi\mathrm{e}^{-b}}{b},\quad b>0.$

8.2 Soluciones

1. (a) $f(z)=\dfrac{z^4}{z^4+1}$ es holomorfa en todo z salvo en los ceros del denominador $z^4+1=0$, es decir, las raíces cuartas de -1: $z_k=\mathrm{e}^{\frac{(2k+1)\mathbf{i}\pi}{4}}, k=0,1,2,3$, es decir $z=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\pm\dfrac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}$. En cada punto z_k, f tiene un polo simple, pues el numerador no tiene a z_k como cero y cada z_k es un cero simple del denominador.

(b) $f(z)=\dfrac{z^2+z+1}{z^2(z-1)}$. El denominador tiene ceros en $z_0=0$ (orden $q=2$) y $z_1=1$ (orden $q=1$). Como ninguno de ellos son ceros del numerador, entonces z_0,z_1 son polos de f, de orden dos y uno Respectivamente.

(c) $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{z(1-\mathrm{e}^{-z})}$. Las singularidades de f son los ceros del denominador: $z_0=0$ y los z tales que $\mathrm{e}^{-z}=1$, es decir, $z_k=2k\pi\mathbf{i}, k=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Como para cada $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

$$1-\mathrm{e}^{-z}=1-\mathrm{e}^{-(z-z_k)}\mathrm{e}^{-z_k}=1-\mathrm{e}^{-(z-z_k)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(z-z_k)^n}{n!}.$$

Entonces, si $k=0$

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^2f(z)=\lim_{z\to0}z^2f(z)=\lim_{z\to0}\frac{z^2\mathrm{e}^z}{z^2h(z)},$$

con

$$h(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}=1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots$$

Luego

$$\lim_{z\to0}z^2f(z)=\lim_{z\to0}\frac{z^2\mathrm{e}^z}{z^2h(z)}=\lim_{z\to0}\frac{\mathrm{e}^z}{h(z)}=\frac{1}{h(0)}=1,$$

por lo que $z_0=0$ es un polo de orden dos. Para los otros casos, si $k\neq0$,

$$\lim_{z\to z_k}(z-z_k)f(z)=\lim_{z\to z_k}\frac{(z-z_k)\mathrm{e}^z}{(z-z_k)h(z)},$$

con

$$h(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(z-z_k)^{n-1}}{n!}=1+\frac{(z-z_k)}{2!}+\frac{(z-z_k)^2}{3!}+\cdots$$

Luego

$$\lim_{z\to z_k}(z-z_k)f(z)=\lim_{z\to z_k}\frac{(z-z_k)\mathrm{e}^z}{(z-z_k)h(z)}=\frac{\mathrm{e}^{z_k}}{h(z_k)}=1,$$

por lo que z_k es un polo de orden uno.

(d) $f(z) = z^4 \sin\dfrac{1}{z}$ tiene una sola singularidad en $z_0 = 0$, que es esencial, porque si desarrollamos en serie de Taylor la función seno, obtenemos la serie de Laurent de f

$$f(z) = z^4 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{2k-3}},$$

con infinitos términos con potencias negativas de z.

(e) $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z^3}$. Desarrollando en serie de Taylor en $z = 0$ la función seno, se tiene

$$z - \sin z = z - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z^3 h(z),$$

con

$$h(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} z^{2k-2}$$

Entonces $z = 0$ es una singularidad evitable de f pues

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} h(z) = h(0) = \frac{1}{3!}.$$

(f) $f(z) = \dfrac{\sin(2z)}{(z+1)^3}$. Polo de orden tres en $z = -1$ (como ejercicio).

(g) $f(z) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^z}{1 + \mathrm{e}^z}$. Polos simples en los ceros del denominador $z_k = (2k+1)\pi\mathbf{i}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (como ejercicio).

(h) $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{z}{z-2}}$. Como

$$\mathrm{e}^{\frac{z}{z-2}} = \mathrm{e}^{\frac{z-2+2}{z-2}} = \mathrm{e}^{1 + \frac{2}{z-2}} = \mathrm{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \frac{1}{(z-2)^n},$$

entonces f tiene en $z = 2$ una singularidad esencial.

2. (a) $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$ tiene un punto singular $z_0 = 2$, luego es holomorfa en los dominios $B(0,2)$ y $C(0,2,+\infty)$. En cada uno de ellos, f tiene los correspondientes desarrollos de Laurent. Así, si $z \in B(0,2)$, escribimos

$$f(z) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Se trata de un desarrollo de Taylor, pues f es holomorfa en $B(0,2)$. Finalmente, si $z \in C(0,2,+\infty) = \{z \in \mathbb{C}/2 < |z|\}$, escribimos y desarrollamos

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}.$$

(b) Descomponemos en fracciones simples

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)} = -\frac{\mathbf{i}}{2}\frac{1}{(z-\mathbf{i})} + \frac{\mathbf{i}}{2}\frac{1}{(z+\mathbf{i})}$$

f tiene dos puntos singulares $z_0 = \pm\mathbf{i}$ (polos de orden uno). Escribimos, para $|z-\mathbf{i}| < 2$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z^2+1)} = -\frac{\mathbf{i}}{2}\frac{1}{(z-\mathbf{i})} + \frac{\mathbf{i}}{2}\frac{1}{2\mathbf{i}(1+\frac{z-\mathbf{i}}{2\mathbf{i}})} \\ &= -\frac{\mathbf{i}}{2}\frac{1}{(z-\mathbf{i})} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z-\mathbf{i})^n}{(2\mathbf{i})^n}, \end{aligned}$$

que es el desarrollo de Laurent de f en $B^*(i,2)$. Por otro lado, si $|z-\mathbf{i}| > 2$, escribimos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z^2+1)} = -\frac{\mathbf{i}}{2}\frac{1}{(z-\mathbf{i})} + \frac{\mathbf{i}}{2}\frac{1}{(z-\mathbf{i})(1+\frac{2\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}})} \\ &= -\frac{\mathbf{i}}{2}\frac{1}{(z-\mathbf{i})} + \frac{\mathbf{i}}{(z-\mathbf{i})}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2\mathbf{i})^n}{(z-\mathbf{i})^n} = -\frac{\mathbf{i}}{2}\frac{1}{(z-\mathbf{i})} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n \mathbf{i}^{n+1}}{(z-\mathbf{i})^{n+1}} \end{aligned}$$

que es el desarrollo de Laurent de f en $C(\mathbf{i}, 2, +\infty)$.

(c) Utilizando el desarrollo de Taylor de la exponencial, se tiene

$$f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{(-1)^n}{(z-1)^n},$$

desarrollo válido para $0 < |1-z| < +\infty$.

(d) Utilizando el desarrollo de Taylor de la exponencial, se tiene

$$f(z) = z^2\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!z^{n-2}} = z^2 + z + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!z^{n-2}},$$

desarrollo válido para $0 < |z| < \infty$.

(e) Utilizando el desarrollo de Taylor de $\sin z$, se tiene

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2\sin\frac{1}{z-1} = (z-1+1)^2\sin\frac{1}{z-1} = (1+2(z-1)+(z-1)^2)\sin\frac{1}{z-1} \\ &= (1+2(z-1)+(z-1)^2)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}} \\ &= 1+2(z-1)+(z-1)^2 - \frac{1}{3!(z-1)} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(4n^2+10n+5)}{(2n+3)!(z-1)^{2n+1}} \\ &\quad +2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-1)^{2n}} \end{aligned}$$

desarrollo válido para $0 < |z-1| < \infty$. (La última igualdad se obtiene operando un poco.)

(f) Utilizando el desarrollo de Taylor de $\sin z$ y $\cos z$, se tiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2} = \cos\frac{z^2-4z+4-4}{(z-2)^2}\cos\frac{(z-2)^2-4}{(z-2)^2} \\ &= \cos\left(1-\frac{4}{(z-2)^2}\right) = \cos 1\cos\left(\frac{4}{(z-2)^2}\right) - \sin 1 sin\left(\frac{4}{(z-2)^2}\right) \\ &= \cos 1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!(z-2)^{4n}} - \sin 1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{(2n+1)!(z-2)^{4n+2}}, \end{aligned}$$

desarrollo válido para $0<|z-2|<\infty$.

3. (a) Comprueba los desarrollos:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-1}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{(z-1)^n}; \quad |z-1|>1 \\ f(z) &= \frac{2}{z-2}+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n; \quad 0<|z-2|<1. \end{aligned}$$

(b) Comprueba los desarrollos:

$$f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}})z^n; \quad 0<|z|<1. \qquad f(z)=\frac{2}{z}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+(-1)^n2^n)}{z^{n+1}}; \quad |z|>1.$$

(c) Comprueba los desarrollos:

$$f(z)=(-1/2)^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{2^n}z^n; \quad |z|<2. \qquad f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)2^n}{z^{n+2}}; \quad |z|>2.$$

(d) Comprueba los desarrollos:

$$f(z)\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{+\infty}z^n; \quad 0<|z|<1. \qquad f(z)=-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{z^n}; \quad |z|>1.$$

4. (a) Como existen y son no nulos los límites

$$\begin{aligned} \lim_{z\to\mathbf{i}}(z-\mathbf{i})f(z) &= \lim_{z\to i}\frac{\mathrm{e}^z}{z+\mathbf{i}} = -\frac{\mathbf{i}\mathrm{e}^{\mathbf{i}}}{2}\neq 0 \\ \lim_{z\to-\mathbf{i}}(z+\mathbf{i})f(z) &= \lim_{z\to-\mathbf{i}}\frac{\mathrm{e}^z}{z-\mathbf{i}} = -\frac{\mathrm{e}^{-\mathbf{i}}}{2\mathbf{i}}\neq 0, \end{aligned}$$

entonces f tiene en $z_0=i$ y $z_1=-\mathbf{i}$ dos polos simples con residuos $-\frac{\mathbf{i}\mathrm{e}^{\mathbf{i}}}{2}, -\frac{\mathrm{e}^{-\mathbf{i}}}{2\mathbf{i}}$ Res pectivamente. También puede calcularse el residuo con la descomposición

$$f(z)=\frac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathbf{i})(z+\mathbf{i})} = -\frac{\mathbf{i}}{2}\frac{\mathrm{e}^z}{z-\mathbf{i}}+\frac{\mathbf{i}}{2}\frac{\mathrm{e}^z}{z+\mathbf{i}} = \frac{g_1(z)}{z-\mathbf{i}}+\frac{g_2(z)}{z+\mathbf{i}},$$

con $g_1(z)=-\frac{\mathbf{i}}{2}\mathrm{e}^z$ holomorfa en $z_0=\mathbf{i}$ y $g_2(z)=\frac{\mathbf{i}}{2}\mathrm{e}^z$ holomorfa en $z_0=-\mathbf{i}$. Entonces $\mathrm{Res}(f,i)=g_1(i)=-\frac{i\mathrm{e}^{\mathbf{i}}}{2}, \mathrm{Res}(f,-\mathbf{i})=g_2(-\mathbf{i})=\frac{i\mathrm{e}^{-\mathbf{i}}}{2}=-\frac{\mathrm{e}^{-\mathbf{i}}}{2\mathbf{i}}$.

(b) Utilizando el desarrollo de Taylor de $\sin z$ en cero,

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\left(z - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}\right) = \frac{1}{z^3}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} z^{2n-2}.$$

Entonces $z_0 = 0$ es una singularidad evitable de f, por lo que $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$.

(c) Si $0 < |z+2| < \infty$, entonces escribimos

$$\begin{aligned} f(z) &= (z+2)\sin\frac{1}{z+2} - 5\sin\frac{1}{z+2} \\ &= (z+2)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z+2)^{2n+1}} - 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z+2)^{2n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z+2)^{2n}} - 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z+2)^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Entonces, f tiene en $z_0 = -2$ una singularidad esencial con $\mathrm{Res}(f, z_0) = -5$.

(d) Se puede escribir

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-1)^3}, g(z) = \mathrm{e}^{2z},$$

con g holomorfa en todo $\mathbb{C}$. Entonces, f tiene un polo de orden tres en $z_0 = 1$. Su residuo se calcula como

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{g''(z_0)}{2!} = 2\mathrm{e}^2.$$

5. (a) En un entorno de z_0, q puede escribirse

$$q(z) = (z - z_0) r(z),$$

con $r(z)$ holomorfa en dicho entorno, $r(z_0) \neq 0$. Entonces

$$f(z) = \frac{1}{q(z)^2} = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^2},$$

con $\varphi(z) = 1/r(z)^2$. La función $\varphi(z)$ es holomorfa en z_0 y $\varphi(z_0) \neq 0$. Aplicando el resultado comentado en clase con $m = 2$, entonces f tiene un polo doble en z_0 y

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \varphi'(z_0) = -2\frac{r'(z_0)}{r(z_0)^3}.$$

Como $q(z) = (z - z_0) r(z)$, entonces

$$q'(z) = r(z) + (z - z_0) r'(z), \quad q''(z) = 2r'(z) + (z - z_0) r''(z).$$

Luego $q'(z_0) = r(z_0), q''(z_0) = 2r'(z_0)$ y podemos, por tanto, escribir

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = -2\frac{r'(z_0)}{r(z_0)^3} = -\frac{q''(z_0)}{q'(z_0)^2}.$$

(b) Tomando $q(z) = z + z^2$, $z_0 = 0$ es un polo de orden dos de f y en este caso

$$\mathrm{Res}(f, z_n) = -\frac{q''(z_0)}{q'(z_0)^2} = -2.$$

6. (a) Las singularidades de f son los ceros del denominador, y $1 - \cos z = 0 \Leftrightarrow z_k = 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Las únicas que son interiores a la curva de integración son $z_0 = -2\pi, z_1 = 0, z_2 = 2\pi$. Entonces

$$\int_\Gamma \frac{1+z}{1-\cos z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}\left(\mathrm{Res}(f, z_0) + \mathrm{Res}(f, z_1) + \mathrm{Res}(f, z_2)\right).$$

Como

$$1-\cos z = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} z^{2n} = z^2 h(z), \quad h(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} z^{2n-2},$$

entonces $z_0 = 0$ es un cero doble del denominador y $f(z) = g(z)/z^2, g(z) = (1+z)/h(z)$. Por tanto, es un polo doble de f y

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, z_0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(g(z))\Big|_{z=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z^2(1+z)}{1-\cos z}\right)\Big|_{z=0} \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{(1-\cos z)(3z^2+2z) - (z^3+z^2)\sin z}{(1-\cos z)^2} \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{(3z^2+2z)z^2/2 - (z^3+z^2)z}{z^4/4} = 2.
\end{aligned}$$

Por otro lado, como

$$\begin{aligned}
1-\cos z &= 1-\cos(z-2\pi) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-2\pi)^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(z-2\pi)^{2n} \\
&= (z-2\pi)^2 h(z), \quad h(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(z-2\pi)^{2n-2},
\end{aligned}$$

entonces $z_1 = 2\pi$ es un cero doble del denominador y $f(z) = g(z)/z^2, g(z) = (1+z)/h(z)$. Por tanto, es un polo doble de f y

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, z_1) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(g(z))\Big|_{z=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{(z-2\pi)^2(1+z)}{1-\cos z}\right)\Big|_{z=0} \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{(1-\cos z)((z-2\pi)^2 + 2(z-2\pi)(1+z)) - (z-2\pi)^2(1+z)\sin z}{(1-\cos z)^2} = 2.
\end{aligned}$$

Análogamente $\mathrm{Res}(f, z_2) = 2$ (compruébalo) y, por tanto

$$\int_\Gamma \frac{1+z}{1-\cos z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}\left(\mathrm{Res}(f, z_0) + \mathrm{Res}(f, z_1) + \mathrm{Res}(f, z_2)\right) = 12\pi\mathbf{i}.$$

(b) Como

$$z^n \mathrm{e}^{1/z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\frac{1}{z^{k-n}}, \quad 0 < |z| < \infty,$$

entonces, $z_0 = 0$ es la única singularidad esencial de f y por el Teorema de los Residuos

$$\int_\Gamma z^n \mathrm{e}^{1/z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}(z^n \mathrm{e}^{1/z}, z_0) = \frac{2\pi\mathbf{i}}{(n+1)!}.$$

(c) Las singularidades son los ceros del denominador $z^4 + 1 = 0$, es decir, las raíces cuartas de -1: $z_k = \mathrm{e}^{\frac{(2k+1)\mathbf{i}\pi}{4}}, k = 0, 1, 2, 3$, es decir $z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}$ (ejercicio 1(a)). En cada punto z_k, f tiene un polo simple, pues el numerador no tiene a z_k como cero y cada z_k es un cero simple del denominador. Los que están en el interior de la curva son $z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}$, $z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} &= 2\pi\mathbf{i}\left(\mathrm{Res}\,(f, z_0) + \mathrm{Res}\,(f, z_1)\right) \\ &= 2\pi\mathbf{i}\left(\frac{1}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)(z_0 - z_3)} + \frac{1}{(z_1 - z_0)(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}\right) \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{2(1+\mathbf{i})} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2(1-\mathbf{i})}.\end{aligned}$$

(d) En este caso, la única singularidad que está en el interior de la curva es $z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}$. Entonces

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} = 2\pi\mathbf{i}\left(\mathrm{Res}\,(f, z_0)\right) = 2\pi\mathbf{i}\left(\frac{1}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)(z_0 - z_3)}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2(1+\mathbf{i})}.$$

7. Las integrales (d), (e) y (f) quedan propuestas como ejercicios.

(a) La función

$$f(z) = \frac{1}{z^4+1},$$

tiene singularidades aisladas en los ceros del denominador, es decir, las raíces cuartas de -1: $z_k = \mathrm{e}^{\frac{(2k+1)\mathbf{i}\pi}{4}}, k = 0, 1, 2, 3$, o equivalentemente $z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}$, $z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}$, $z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}$, $z_3 = +\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}$. (ejercicio 5(c)) y es holomorfa en el resto del plano complejo. Cuando $R > 1$, las singularidades de f en el semiplano superior quedan contenidas en la región Π_R^+, limitada por el segmento real $[-R, R]$ y la semicircunferencia superior de radio R. Según el Teorema de los Residuos, si la frontera Γ_R^+ de Π_R^+ está orientada positivamente,

$$\int_{\Gamma_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}\left(\mathrm{Res}(f, z_0) + \mathrm{Res}(f, z_1)\right),$$

pues las singularidades z_2, z_3 se encuentran en el exterior de Γ_R^+.

Nota: si se hubiera tomado Π_R^-, el papel de las singularidades se invierte: entonces z_0, z_1 quedarían en el exterior y z_2, z_3 en el interior. Bajo orientación natural, el Teorema de los Residuos diría entonces que

$$\int_{\Gamma_R^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}\left(\mathrm{Res}(f, z_2) + \mathrm{Res}(f, z_3)\right).$$

Calculamos ahora los correspondientes Residuos de f que necesitamos. utilizando el ejercicio 5(c), En cada punto z_k, f tiene un polo simple, pues el numerador no tiene a z_k como cero y cada z_k es un cero simple del denominador. Además

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f, z_0) &= \frac{1}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)(z_0 - z_3)} = \frac{\sqrt{2}}{4\mathbf{i}(1+\mathbf{i})}, \\ \mathrm{Res}(f, z_1) &= \frac{1}{(z_1 - z_0)(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} = \frac{\sqrt{2}}{4\mathbf{i}(1-\mathbf{i})}.\end{aligned}$$

Luego

$$\int_{\Gamma_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\left(\mathrm{Res}(f,z_0)+\mathrm{Res}(f,z_1)\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2(1+\mathbf{i})}+\frac{\pi\sqrt{2}}{2(1-\mathbf{i})}. \qquad \langle 8.1\rangle$$

Por otro lado, la integral puede descomponerse según cada arco distinguido en Γ_R^+: el segmento en el eje real y la semicircunferencia. Tomamos parametrizaciones de cada una de ellas (recuérdese la orientación):

$$\gamma_1 : [-R,R] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_1(x) = (x,0),$$
$$\gamma_2 : [0,\pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t) = R\mathrm{e}^{\mathbf{i}t} = (R\cos t, R\sin t)^T.$$

Entonces

$$\int_{\Gamma_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z, \qquad \langle 8.2\rangle$$

con $C_R = \gamma_2([0,\pi]) = \{z\in\mathbb{C}/|z| = R, \mathbf{i}m(z)\geq 0\}$. Observemos que si $z\in C_R \Rightarrow |z| = R$ y

$$|z^4+1| \geq ||z|^4-1| = (R^4-1).$$

(Recordemos que hemos tomado $R>1$). Entonces, si $z\in C_R$,

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{z^4+1}\right| \leq \frac{1}{R^4-1}.$$

Por tanto

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \frac{1}{R^4-1}\mathrm{long}(C_R) = \frac{\pi R}{R^4-1}.$$

Luego si tomamos límite cuando $R\to+\infty$, se tiene que

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to+\infty}\frac{\pi R}{R^4-1} = 0.$$

Teniendo en cuenta entonces (8.1) y (8.2), lo anterior implica que si $R\to+\infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2(1+\mathbf{i})}+\frac{\pi\sqrt{2}}{2(1-\mathbf{i})}.$$

Nota: Aprovechando el hecho de que el integrando es impar, se tiene

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4(1+\mathbf{i})}+\frac{\pi\sqrt{2}}{4(1-\mathbf{i})}.$$

(b) Por variar, podemos razonar ahora con Π_R^-. La función

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+1)(z^2+4)},$$

tiene singularidades aisladas en los ceros del denominador, es decir, $z=\pm\mathbf{i},\pm2\mathbf{i}$ y es holomorfa en el Res to del plano complejo. Cuando $R>2$, las singularidades de f en el semiplano inferior quedan contenidas en la región Π_R^-, limitada por el segmento real $[-R,R]$ y la semicircunferencia **i**nferior de radio R. Según el Teorema de los Residuos, si la frontera Γ_R^- de Π_R^- está orientada positivamente,

$$\int_{\Gamma_R^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}\left(\mathrm{Res}(f,-\mathbf{i})+\mathrm{Res}(f,-2\mathbf{i})\right),$$

pues las singularidades $i, 2\mathbf{i}$ se encuentran en el exterior de Γ_R^-. Calculamos ahora los correspondientes Residuos de f que necesitamos. Escribiendo

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z+\mathbf{i}}, \quad \varphi(z) = \frac{z}{(z-\mathbf{i})(z^2+4)},$$

se tiene que $z_0 = -\mathbf{i}$ es un polo simple de f y

$$\mathrm{Res}(f, -\mathbf{i}) = \varphi(-\mathbf{i}) = \frac{1}{6}.$$

Análogamente, si escribimos

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z+2\mathbf{i}}, \quad \varphi(z) = \frac{z}{(z-2\mathbf{i})(z^2+1)},$$

se tiene que $z_0 = -2\mathbf{i}$ es un polo simple de f y

$$\mathrm{Res}(f, -2\mathbf{i}) = \varphi(-2\mathbf{i}) = -\frac{1}{6}.$$

Luego

$$\int_{\Gamma_R^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\left(\mathrm{Res}(f, -\mathbf{i}) + \mathrm{Res}(f, -2\mathbf{i})\right) = 0. \tag{8.3}$$

Por otro lado, la integral puede descomponerse según cada arco distinguido en Γ_R^-: el segmento en el eje real y la semicircunferencia. Tomamos parametrizaciones de cada una de ellas (recuérdese la orientación):

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 : [-R, R] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_1(x) = (x, 0),\\
&\gamma_2 : [\pi, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t) = R\mathrm{e}^{\mathbf{i}t} = (R\cos t, R\sin t)^T.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\int_{\Gamma_R^-} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z, \tag{8.4}$$

con $C_R = \gamma_2([\pi, 2\pi]) = \{z \in \mathbb{C} / |z| = R, \mathrm{Im}\,(z) \leq 0\}$. Observemos que si $z \in C_R \Rightarrow |z| = R$ y entonces

$$|(z^2+1)(z^2+4)| \geq ||z|^2 - 1||\,|z|^2 - 4| = (R^2-1)(R^2-4).$$

(Recordemos que hemos tomado $R > 2$). Entonces, si $z \in C_R$,

$$|f(z)| \leq \frac{R}{(R^2-1)(R^2-4)}.$$

Por tanto

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \frac{R}{(R^2-1)(R^2-4)}\mathrm{long}(C_R) = \frac{\pi R^2}{(R^2-1)(R^2-4)}.$$

Luego si tomamos límite cuando $R \to +\infty$, se tiene que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to+\infty} \frac{\pi R^2}{(R^2-1)(R^2-4)} = 0.$$

Teniendo en cuenta entonces (8.3) y (8.4), lo anterior implica que si $R \to +\infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x = 0.$$

(c) La función

$$f(z) = \frac{z+1}{(z^2+4z+5)^2},$$

tiene singularidades aisladas en los ceros del denominador, es decir, $z = -2+\mathbf{i}, -2-\mathbf{i}$, ambos con orden dos, y es holomorfa en el resto del plano complejo. Cuando $R > \sqrt{5}$, las singularidades de f en el semiplano superior quedan contenidas en la región Π_R^+, limitada por el segmento real $[-R, R]$ y la semicircunferencia superior de radio R. Según el Teorema de los Residuos, si la frontera Γ_R^+ de Π_R^+ está orientada positivamente,

$$\int_{\Gamma_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}(f, -2+\mathbf{i}),$$

pues la singularidad $-2-\mathbf{i}$ se encuentra en el exterior de Γ_R^+. Calculamos ahora el residuo de f que necesitamos. Escribiendo

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-(-2+\mathbf{i}))^2}, \quad \varphi(z) = \frac{1+z}{(z-(-2-\mathbf{i}))^2},$$

se tiene que $z_0 = -2+\mathbf{i}$ es un polo de f de orden dos y

$$\mathrm{Res}(f, -\mathbf{i}) = \varphi'(-2+\mathbf{i}) = -\frac{1}{4\mathbf{i}}.$$

Luego

$$\int_{\Gamma_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}(f, -2+\mathbf{i}) = -\frac{\pi}{2}.$$

Por otro lado, la integral puede descomponerse según cada arco distinguido en Γ_R^+: el segmento en el eje real y la semicircunferencia. Tomamos parametrizaciones de cada una de ellas (recuérdese la orientación):

$$\gamma_1 : [-R, R] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_1(x) = (x, 0),$$
$$\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t) = R\mathrm{e}^{\mathbf{i}t} = (R\cos t, R\sin t)^T.$$

Entonces

$$\int_{\Gamma_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z, \qquad \langle 8.5\rangle$$

con $C_R = \gamma_2([\pi, 2\pi]) = \{z \in \mathbb{C}/|z| = R, \mathbf{i}m(z) \geq 0\}$. Observemos que si $z \in C_R \Rightarrow |z| = R$ se tiene

$$|1+z| \leq 1+R$$
$$|(z^2+4z+5)^2| = |(z-z_0)^2(z-z_1)^2| \geq ||z|^2 - |z_0|^2||z|^2 - |z_1|^2| = (R^2-5)^2,$$

donde $z_0 = -2+\mathbf{i}, z_1 = -2-\mathbf{i}$. (Recordemos que hemos tomado $R > \sqrt{5}$.) Entonces, si $z \in C_R$,

$$|f(z)| \leq \frac{1+R}{(R^2-5)^2}.$$

Por tanto

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \frac{1+R}{(R^2-5)^2}\mathrm{long}(C_R) = \frac{\pi R(1+R)}{(R^2-5)^2}.$$

Luego si tomamos límite cuando $R \to +\infty$, se tiene que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to+\infty} \frac{\pi R(1+R)}{(R^2-5)^2} = 0.$$

Teniendo en cuenta entonces (7c) y (8.5), lo anterior implica que si $R \to +\infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2} = -\frac{\pi}{2}.$$

8. La integrales (c) queda propuesta como ejercicio.

(a) Observemos que si $z = \mathrm{e}^{\mathbf{i}t}$ y teniendo en cuenta que $1 - \cos(2t) = 2\sin^2 t$, se tiene

$$\frac{1-\cos(2t)}{2+\cos t} = \frac{2\sin^2 t}{2+\cos t} = \frac{2\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}t}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}t}}{2\mathbf{i}}\right)^2}{2+\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}t}}{2}\right)}.$$

Entonces, como $\mathrm{d}z = \mathbf{i}z\,\mathrm{d}t$, la integral se convierte en la integral de contorno

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2+\cos t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathbf{i}t}) i\mathrm{e}^{\mathbf{i}t}\,\mathrm{d}t = \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z, \\
f(z) &= \frac{1}{\mathbf{i}z}\frac{2\left(\frac{z-1/z}{2\mathbf{i}}\right)^2}{2+\left(\frac{z+1/z}{2}\right)} = -\frac{(z^2-1)^2}{2\mathbf{i}z^2(z^2+4z+1)}
\end{aligned}$$

con Γ la circunferencia unidad con orientación positiva. Podemos ahora hacer uso del Teorema de los Residuos. El denominador del integrando tiene los ceros

$$z_0 = 0, z_1 = -2+\sqrt{3}, z_2 = -2-\sqrt{3},$$

por lo que no existen puntos singulares sobre Γ y el único punto singular interior es $z_0 = 0$. Podemos calcular su residuo escribiendo

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^2}, \quad \varphi(z) = -\frac{(z^2-1)^2}{2\mathbf{i}(z^2+4z+1)},$$

con φ holomorfa en el disco $B(0,1)$. Se tiene que $z_0 = 0$ es un polo doble de f y

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \varphi'(z_0) = -2\mathbf{i}.$$

Por tanto, del Teorema de los Residuos

$$\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2+\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}(f, z_0) = 4\pi.$$

(b) Observemos en primer lugar que como el integrando es una función par

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{5+4\cos t} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{5+4\cos t}.$$

Por otra parte, si $z = \mathrm{e}^{\mathbf{i}t}$, se tiene

$$\frac{1}{5+4\cos t} = \frac{1}{5+4\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}t}}{2}\right)}.$$

Entonces, teniendo en cuenta que $\mathrm{d}z = \mathbf{i}z\,\mathrm{d}t$, la integral se convierte en la integral de contorno

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{5+4\cos t} &= \int_0^{\pi} f(\mathrm{e}^{\mathbf{i}t}) i\mathrm{e}^{\mathbf{i}t}\,\mathrm{d}t = \int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z,\\ f(z) &= \frac{1}{\mathbf{i}z}\frac{1}{5+4\left(\frac{z+1/z}{2}\right)} = \frac{1}{2\mathbf{i}(z^2+(5/2)z+1)}\end{aligned}$$

con Γ la semicircunferencia unidad $z = \mathrm{e}^{\mathbf{i}t}, t \in [-\pi, \pi]$ con orientación positiva. Podemos ahora hacer uso del Teorema de los Residuos. El denominador del integrando tiene los ceros

$$z_0 = -1/2, z_1 = -2,$$

por lo que no existen puntos singulares sobre Γ y y el único punto singular interior es $z_0 = -1/2$. Podemos calcular su residuo escribiendo

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z+1/2)}, \quad \varphi(z) = \frac{1}{2\mathbf{i}(z+2)},$$

con φ holomorfa en el disco $B(0,1)$. Se tiene que $z_0 = -1/2$ es un polo simple de f y

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \varphi(z_0) = \frac{1}{3i}.$$

Por tanto, del Teorema de los Residuos

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{5+4\cos t} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{5+4\cos t} = \int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \pi\mathbf{i}\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{\pi}{3}.$$

9. La integral (c) queda propuesta como ejercicio.

(a) Escribimos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix}}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\right)$$

Se considera ahora $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathbf{i}z}}{(z^2+1)^2}, z \in \mathbb{C}$, así como el rectángulo Π_R^+, en el semiplano superior, de vértices $-R, -R+\mathbf{i}R, R+\mathbf{i}R, R$. El contorno Γ_R^+, orientado positivamente, consta de cuatro segmentos $\Gamma_j, j = 1(1)4$, parametrizados por

$$\begin{aligned}\gamma_1 &: [-R, R] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) = (t, 0),\\ \gamma_2 &: [0, R] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t) = (R, t),\\ \gamma_3 &: [-R, R] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_3(t) = (t, R),\\ \gamma_4 &: [0, R] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_4(t) = (-R, t).\end{aligned}$$

De manera que

$$\int_{\Gamma_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

$f(t)$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$, salvo en los ceros del denominador $z_0 = i, z_1 = -\mathbf{i}$, ambos de orden dos. Usando el Teorema de los Residuos, se tiene que si $R > 1$,

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}\mathrm{Res}(f, z_0),$$

pues z_1 cae en el exterior de Γ_R.

Calculamos por un lado el residuo de f que necesitamos. Escribiendo

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-\mathbf{i})^2}, \quad \varphi(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}z}}{(z+\mathbf{i})^2},$$

se tiene que $z_0 = i$ es un polo de f de orden dos y

$$\operatorname{Res}(f,\mathbf{i}) = \varphi'(i) = \frac{1}{2\mathbf{i}e}.$$

Calculamos, por otro lado, la integral sobre cada uno de los segmentos y tomamos límites en R.

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^R \mathbf{i}f(R+\mathbf{i}t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(t+\mathbf{i}R)\,\mathrm{d}t, \quad \int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^R \mathbf{i}f(-R+\mathbf{i}t)\,\mathrm{d}t.$$

Observemos que si z está en el soporte de γ_2, γ_3 o γ_4

$$|(z^2+1)^2| \geq |(|z|^2-1)^2| = |(t^2+R^2-1)^2| \geq (R^2-1)^2.$$

Entonces si $R \to +\infty$,

$$\left|\int_{\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_0^R \frac{|\mathrm{e}^{\mathbf{i}(R+\mathbf{i}t)}|}{(R^2-1)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^R \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(R^2-1)^2}\,\mathrm{d}t \leq \frac{R}{(R^2-1)^2} \to 0$$

$$\left|\int_{\Gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_{-R}^R \frac{|\mathrm{e}^{\mathbf{i}(t+\mathbf{i}R)}|}{(R^2-1)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-R}^R \frac{\mathrm{e}^{-R}}{(R^2-1)^2}\,\mathrm{d}t \leq \frac{2R\mathrm{e}^{-R}}{(R^2-1)^2} \to 0$$

$$\left|\int_{\Gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_0^R \frac{|\mathrm{e}^{\mathbf{i}(-R+\mathbf{i}t)}|}{(R^2-1)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^R \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(R^2-1)^2}\,\mathrm{d}t \leq \frac{R}{(R^2-1)^2} \to 0.$$

Por tanto, en el límite $R \to +\infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix}}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\right) = \operatorname{Re}\left(2\pi\mathbf{i}\operatorname{Res}(f,z_0)\right) = \frac{\pi}{\mathrm{e}}.$$

(b) Escribimos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x\right)$$

Se considera ahora $f(z) = \dfrac{z\mathrm{e}^{-\mathbf{i}z}}{(z^2+1)(z^2+4)}$, $z \in \mathbb{C}$, así como el rectángulo Π_R^+, en el semiplano superior, de vértices $-R, -R+\mathbf{i}R, R+\mathbf{i}R, R$. El contorno Γ_R^+, orientado positivamente, consta de cuatro segmentos Γ_j, $j = 1(1)4$, parametrizados por

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: [-R,R] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) = (t,0),\\
\gamma_2 &: [0,R] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t) = (R,t),\\
\gamma_3 &: [-R,R] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_3(t) = (t,R),\\
\gamma_4 &: [0,R] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_4(t) = (-R,t).
\end{aligned}$$

De manera que

$$\int_{\Gamma_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Esta función es holomorfa en todo $\mathbb{C}$, salvo en los ceros del denominador $z_0 = \mathbf{i}, z_1 = -\mathbf{i}, z_2 = 2\mathbf{i}, z_3 = -2\mathbf{i}$, todos de orden uno. Usando el Teorema de los Residuos, se tiene que si $R > 2$,

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}(\mathrm{Res}(f, z_0) + \mathrm{Res}(f, z_2)),$$

pues z_1, z_3 caen en el exterior de Γ_R^+ (están en el semiplano **i**nferior).
Calculamos por un lado los Residuos de f que necesitamos. Escribiendo

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-\mathbf{i})}, \quad \varphi(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}z}}{(z+\mathbf{i})(z^2+4)},$$

se tiene que $z_0 = i$ es un polo de f de orden uno y

$$\mathrm{Res}(f, i) = \varphi(\mathbf{i}) = \frac{1}{6\mathbf{i}e}.$$

Por otra parte, escribiendo

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-2\mathbf{i})}, \quad \varphi(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}z}}{(z+2\mathbf{i})(z^2+1)},$$

se tiene que $z_0 = 2\mathbf{i}$ es un polo de f de orden uno y

$$\mathrm{Res}(f, 2\mathbf{i}) = \varphi(2\mathbf{i}) = -\frac{1}{12\mathbf{i}\mathrm{e}^2}.$$

Calculamos, por otro lado, la integral sobre cada uno de los segmentos y tomamos límites en R.

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^R \mathbf{i}f(R+\mathbf{i}t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(t+\mathbf{i}R)\,\mathrm{d}t, \quad \int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^R \mathbf{i}f(-R+\mathbf{i}t)\,\mathrm{d}t.$$

Observemos que si z está en el soporte de γ_2, γ_3 o γ_4

$$|(z^2+1)(z^2+4)| \geq |(|z|^2-1)(|z|^2-4)| = |(t^2+R^2-1)(t^2+R^2-4)| \geq (R^2-1)(R^2-4).$$

(Recordemos que $R > 2$.) Entonces si $R \to +\infty$,

$$\left|\int_{\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_0^R \frac{|R+\mathbf{i}t||\mathrm{e}^{\mathbf{i}(R+\mathbf{i}t)}|}{(R^2-1)(R^2-4)}\,\mathrm{d}t = \int_0^R \frac{|R+\mathbf{i}t|\mathrm{e}^{-t}}{(R^2-1)(R^2-4)}\,\mathrm{d}t \leq \frac{2R^2}{(R^2-1)(R^2-4)} \to 0$$

$$\left|\int_{\Gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_{-R}^R \frac{|t+\mathbf{i}R||\mathrm{e}^{\mathbf{i}(t+\mathbf{i}R)}|}{(R^2-1)(R^2-4)}\,\mathrm{d}t = \int_{-R}^R \frac{|t+\mathbf{i}R|\mathrm{e}^{-R}}{(R^2-1)(R^2-4)}\,\mathrm{d}t \leq \frac{4R^2\mathrm{e}^{-R}}{(R^2-1)(R^2-4)} \to 0$$

$$\left|\int_{\Gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_0^R \frac{|-R+\mathbf{i}t||\mathrm{e}^{\mathbf{i}(-R+\mathbf{i}t)}|}{(R^2-1)(R^2-4)}\,\mathrm{d}t = \int_0^R \frac{|-R+\mathbf{i}t|\mathrm{e}^{-t}}{(R^2-1)(R^2-4)}\,\mathrm{d}t \leq \frac{2R^2}{(R^2-1)(R^2-4)} \to 0.$$

Luego, en el límite $R \to +\infty$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(2\pi\mathbf{i}(\mathrm{Res}(f, z_0) + \mathrm{Res}(f, z_2))\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(2\pi\mathbf{i}\left(\frac{1}{6\mathbf{i}e} - \frac{1}{12\mathbf{i}\mathrm{e}^2}\right)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Tema 9

Sistemas ortogonales y completos

9.1 Ejercicios

1. Dado $L > 0$, encuentra para cada uno de los problemas siguientes los autovalores, las autofunciones y un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo correspondiente.

(a) $X''(x) = \lambda X(x), \quad a < x < b, \quad X'(a) = 0,\ X(b) = 0.$

(b) $X''(x) = \lambda X(x), \quad a < x < b, \quad X(a) = 0,\ X'(b) = 0.$

2. Calcula los siguientes desarrollos en serie:

(a) Desarrollo en serie de senos de $f(x) = 1$, $x \in [1, 5]$.

(b) Desarrollo en serie de cosenos de $f(x) = x$, $x \in [a, b]$.

(c) Desarrollo en serie de senos de $f(x) = x^2$, $x \in [a, b]$.

3. Desarrolla en serie de senos la función $\cos(x)$ en $0 \leq x \leq \pi$. Calcula la serie de cosenos de la función $\sin(x)$ en el mismo intervalo.

4. Halla la serie de Fourier en senos y cosenos en el intervalo $[-l, l]$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -l \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Demuestra que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

5. Calcula la serie de Fourier de senos y cosenos de $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ x, & si \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

6. (a) Demuestra que, si $-\pi \leq x < \pi$,

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}.$$

(b) Suma la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

9.2 Soluciones

1. (a) De las propiedades de los problemas de autovalores mencionados en clase, los posibles autovalores de este problema son negativos, por lo que vamos a escribir

$$\lambda = -\omega^2, \qquad \omega > 0.$$

Entonces la ecuación se convierte en

$$X''(x) + \omega^2 X(x) = 0, \qquad a < x < b, \tag{9.1}$$

cuya solución general es

$$X(x) = E \sin \omega(x-a) + F \cos \omega(x-a), \qquad E,\, F \in \mathbb{C}. \tag{9.2}$$

Para uso futuro, notemos que

$$X'(x) = E\omega \cos \omega(x-a) - F\omega \sin \omega(x-a).$$

Denotamos $L = b - a$. Al imponer las condiciones de contorno, $X'(a) = X(b) = 0$, encontramos

$$\begin{aligned} X'(a) &= E\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0, \\ X(b) &= F \cos \omega L = 0. \end{aligned}$$

Para que λ sea autovalor es necesario que el sistema anterior tenga solución no trivial, luego

$$\cos \omega L = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = (2k+1)\pi/2L, \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots.$$

Por lo tanto, hemos encontrado una sucesión de autovalores

$$\lambda_k = -\omega_k^2 = -\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}\right)^2,$$

con autofunciones generadas por

$$X_k(x) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi(x-a)}{2L}\right),$$

donde $k \geq 1$ es entero. Recordemos que 0 no era autovalor.

El correspondiente desarrollo ortogonal es

$$u(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \cdot \cos\left(\frac{(2k+1)\pi(x-a)}{2L}\right),$$

con

$$\alpha_k = \frac{\langle u, X_k\rangle}{\|X_k\|^2} = \frac{2}{L}\int_a^b u(x) \cos\left(\frac{(2k+1)\pi(x-a)}{2L}\right)\, \mathrm{d}x, \qquad k \geq 1.$$

(b) Como antes, escribimos $\lambda = -\omega^2$,, $\omega > 0$. ($\lambda = 0$ no es autovalor.) Entonces, al imponer las condiciones de contorno en este caso, $X(a) = X'(b) = 0$, a la solución general de la ecuación (9.1) dada por (9.2) encontramos

$$\begin{aligned} X(a) &= F = 0, \\ X'(b) &= E\omega \cos \omega L = 0. \end{aligned}$$

Para que λ sea autovalor es necesario que el sistema anterior tenga solución no trivial, luego

$$\cos \omega L = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{(2k+1)\pi}{2L}, \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots .$$

Por lo tanto, tenemos la sucesión de autovalores

$$\lambda_k = -\omega_k^2 = -\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}\right)^2,$$

con autofunciones generadas por

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{(2k+1)\pi(x-a)}{2L}\right),$$

donde $k \geq 1$ es entero. Recordemos que 0 no era autovalor.
El correspondiente desarrollo ortogonal es

$$u(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \cdot \sin\left(\frac{(2k+1)\pi(x-a)}{2L}\right),$$

con

$$\alpha_k = \frac{\langle u, X_k\rangle}{\|X_k\|^2} = \frac{2}{L}\int_a^b u(x)\sin\left(\frac{(2k+1)\pi(x-a)}{2L}\right)\,\mathrm{d}x, \qquad k \geq 1.$$

2. (a) El sistema ortogonal que se maneja, teniendo en cuenta el intervalo, es

$$S_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi(x-1)}{4}\right), k = 1, 2, \ldots$$

y $L = 4$. Entonces

$$f = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(f) S_k$$

$$\alpha_k(f) = \frac{\langle u, S_k\rangle}{\|S_k\|^2} = \frac{2}{4}\int_1^5 f(x)\sin\left(\frac{k\pi(x-1)}{4}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^5 \sin\left(\frac{k\pi(x-1)}{4}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Hacemos el cambio de variable $y = x - 1$ y utilizamos la tabla de integrales

$$\begin{aligned} \alpha_k(f) &= = \frac{1}{2}\int_0^4 \sin\left(\frac{k\pi y}{4}\right)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(1-(-1)^n)\frac{L}{k\pi} = \frac{2}{k\pi}(1-(-1)^n) \\ &= \begin{cases} 0 & n \ \text{par} \\ \dfrac{4}{k\pi} & n \ \text{impar.} \end{cases} \end{aligned}$$

Se tiene que $\alpha_k(f) = 0$ si k es par, por lo que

$$1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi(x-1)}{4}\right).$$

(b) El sistema ortogonal que se maneja es

$$C_k(x) = \cos\left(\frac{k\pi(x-a)}{L}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

y $L = b - a$. Entonces

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k(f) C_k,$$

$$\alpha_0(f) \quad = \quad \frac{\langle f, C_0\rangle}{\|C_0\|^2} = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{b^2-a^2}{2L}.$$

Si $k \geq 1$,

$$\alpha_k(f) = \frac{\langle f, C_k\rangle}{\|C_k\|^2} = \frac{2}{L}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{k\pi(x-a)}{L}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{L}\int_a^b x\cos\left(\frac{k\pi(x-a)}{L}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Hacemos el cambio de variable $y = x - a$ y utilizamos la tabla de integrales

$$\alpha_k(f) \quad = \quad = \frac{2}{L}\int_0^L (y+a)\cos\left(\frac{k\pi y}{L}\right)\,\mathrm{d}y = \frac{2}{L}((-1)^n - 1)\left(\frac{L}{k\pi}\right)^2 = \frac{2L}{k^2\pi^2}((-1)^n - 1).$$

Se tiene que $\alpha_k(f) = 0$ si k es par, por lo que

$$x = \frac{b^2-a^2}{L} - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos\left(\frac{(2m-1)\pi(x-a)}{L}\right).$$

(c) El sistema ortogonal que se maneja es

$$S_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi(x-a)}{L}\right), k = 1, 2, \ldots$$

y $L = b - a$. Entonces

$$f = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(f) S_k$$

Si $k \geq 1$,

$$\alpha_k(f) = \frac{\langle f, S_k\rangle}{\|S_k\|^2} = \frac{2}{L}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{k\pi(x-a)}{L}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{L}\int_a^b x^2\sin\left(\frac{k\pi(x-a)}{L}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Hacemos el cambio de variable $y = x - a$ y utilizamos la tabla de integrales

$$\begin{aligned}
\alpha_k(f) \quad &= \quad = \frac{2}{L}\int_0^L (y+a)^2\sin\left(\frac{k\pi y}{L}\right)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{L}\int_0^L y^2\sin\left(\frac{k\pi y}{L}\right)\,\mathrm{d}y + \frac{2}{L}\int_0^L 2ay\sin\left(\frac{k\pi y}{L}\right)\,\mathrm{d}y + \frac{2}{L}\int_0^L a^2\sin\left(\frac{k\pi y}{L}\right)\,\mathrm{d}y \\
&= (-1)^{k+1}L^2\left(\frac{L}{k\pi}\right) + ((-1)^n - 1)\left(\frac{L}{k\pi}\right)^3 + 2a(-1)^{k+1}L\,\frac{L}{k\pi} + a^2(1-(-1)^k)\,\frac{L}{k\pi}.
\end{aligned}$$

3. Con $a = 0, b = \pi, L = \pi$ el desarrollo es de la forma

$$\cos(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(f) S_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(f) \sin(kx).$$

Para los coeficientes, utilizamos las fórmulas trigonométricas

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta), & \langle 9.3\rangle \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta), & \langle 9.4\rangle \end{aligned}$$

, de manera que tomando $\alpha = kx, \beta = x$ y sumando las dos igualdades, despejamos

$$\sin(kx)\cos(x) = \frac{1}{2}(\sin((k+1)x) + \sin((k-1)x)).$$

Por tanto, usando las tablas, si $k > 1$

$$\begin{aligned} \alpha_k(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^L \cos(x)\sin(kx)\ \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^L \frac{1}{2}(\sin((k+1)x) + \sin((k-1)x))\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left((1-(-1)^{k+1})\frac{1}{(k+1)} + (1-(-1)^{k-1})\frac{1}{(k-1)}\right) \\ &= \frac{1-(-1)^{k+1}}{\pi}\frac{2k}{k^2-1} = \begin{cases} 0 & k \quad \text{impar}, \\ \dfrac{4k}{\pi(k^2-1)} & k \quad \text{par}. \end{cases} \end{aligned}$$

Si $k = 1$,

$$\alpha_1(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(x)\sin(x)\ \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left(\cos(2x)\right)\Big|_0^\pi = 0.$$

Se tiene así que $\alpha_k(f) = 0$ si k es impar, por lo que

$$\cos(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2k}{(2k)^2-1}\sin(2kx) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{4k^2-1}\sin(2kx).$$

La serie de cosenos de la función $\sin(x)$ en el mismo intervalo es de la forma

$$\sin(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_k(f)C_k(x) = \alpha_0(f) + \sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k(f)\cos(kx).$$

Para los coeficientes, utilizamos las fórmulas trigonométricas (9.3), (9.4), tomando $\alpha = kx, \beta = x$ y restando las dos igualdades, despejamos

$$\sin(x)\cos(kx) = \frac{1}{2}(\sin((k+1)x) + \sin((k-1)x)).$$

Por tanto,

$$\alpha_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi},$$

y, usando las tablas, si $k > 1$,

$$\begin{aligned} \alpha_k(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(kx)\ \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}(\sin((k+1)x) - \sin((k-1)x))\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left((1-(-1)^{k+1})\frac{1}{(k+1)} - (1-(-1)^{k-1})\frac{1}{(k-1)}\right) \\ &= -\frac{1-(-1)^{k+1}}{\pi}\frac{2}{k^2-1} = \begin{cases} 0, & k \quad \text{impar}, \\ \dfrac{-4}{\pi(k^2-1)}, & k \quad \text{par}. \end{cases} \end{aligned}$$

Si $k=1$,

$$\alpha_1(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\left(\cos(2x)\right)\Big|_0^{\pi}=0.$$

Así, $\alpha_k(f)=0$ si k es impar, por lo que

$$\sin(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2-1}\cos\left(2kx\right),\quad x\in[0,\pi].$$

4. La serie de senos y cosenos de f es de la forma

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_0(f)+\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k(f)C_k(x)+\beta_k(f)S_k(x)\\ &= \alpha_0(f)+\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k(f)\cos\left(\frac{2\pi k(x+l)}{2l}\right)+\beta_k(f)\sin\left(\frac{2\pi k(x+l)}{2l}\right). \end{aligned}$$

Para los coeficientes, tenemos

$$\alpha_0(f)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{0}1\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

Por otro lado, usando las tablas y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi k(x+l)}{2l}\right) &= \cos\left(\frac{\pi k(x+l)}{l}\right)=\cos\left(\frac{\pi kx}{l}+\pi k\right)=(-1)^k\cos\left(\frac{\pi kx}{l}\right),\\ \sin\left(\frac{2\pi k(x+l)}{2l}\right) &= \sin\left(\frac{\pi k(x+l)}{l}\right)=\sin\left(\frac{\pi kx}{l}+\pi k\right)=(-1)^k\sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right), \end{aligned}$$

entonces, si $k\geq 1$

$$\begin{aligned} \alpha_k(f) &= \frac{2}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)C_k(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\left(\frac{\pi k(x+l)}{l}\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)(-1)^k\cos\left(\frac{\pi kx}{l}\right)\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^k}{l}\int_{-l}^{0}\cos\left(\frac{\pi kx}{l}\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{(-1)^k}{l}\int_{0}^{l}\cos\left(\frac{\pi kx}{l}\right)\,\mathrm{d}x=0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_k(f) &= \frac{2}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)S_k(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\left(\frac{\pi k(x+l)}{l}\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)(-1)^k\sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right)\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^k}{l}\int_{-l}^{0}\sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{l}\int_{0}^{l}\sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right)\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{k+1}}{l}(1-(-1)^k)\frac{l}{\pi k}=\frac{1+(-1)^{k+1}}{\pi k}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\beta_k(f)=0$ si k es par, y $\alpha_k(f)=0, k\geq 1$, luego

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_0(f)+\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k(f)\cos\left(\frac{2\pi k(x+l)}{2l}\right)+\beta_k(f)\sin\left(\frac{2\pi k(x+l)}{2l}\right)\\ &= \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^{k+1}}{\pi k}\sin\left(\frac{2\pi k(x+l)}{2l}\right)=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{l}\right). \end{aligned}$$

Para sumar la serie utilizamos la identidad de Parseval, que en este caso diría que

$$||f||^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 ||1||^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(\pi(2n-1))^2} ||S_{2n-1}||^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 2l + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(\pi(2n-1))^2} \frac{2l}{2},$$

donde

$$||f||^2 = \int_{-l}^{l} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-l}^{0} \mathrm{d}x = l.$$

Por tanto, se tiene

$$l = \frac{l}{2} + \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2},$$

de donde se obtiene la suma pedida.

5. En este caso, los coeficientes son

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}, \\
\alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(k(x+\pi)) \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi k^2}((-1)^k - 1), \\
\beta_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(k(x+\pi)) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

De modo que

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)(x+\pi)) + \frac{1}{k} \sin(k(x+\pi)).$$

6. Buscamos la serie de cosenos de la función x^2 en $[-\pi, \pi]$:

$$x^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k(f) C_k = \alpha_0(f) + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(f) \cos\left(\frac{k\pi(x+\pi)}{2\pi}\right).$$

Para los coeficientes, tenemos

$$\alpha_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3}.$$

Por otro lado, si utilizamos el cambio de variable $y = x + \pi$ y las tablas, para $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\alpha_k(f) &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos\left(\frac{k\pi(x+\pi)}{2\pi}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} (y-\pi)^2 \cos\left(\frac{ky}{2}\right) \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} y^2 \cos\left(\frac{ky}{2}\right) \mathrm{d}y - \frac{1}{\pi} \int_{0}^{L} 2\pi y \cos\left(\frac{ky}{2}\right) \mathrm{d}y + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{L} \pi^2 \cos\left(\frac{ky}{2}\right) \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\pi} \left(2(-1)^k 2\pi \frac{(2\pi)^2}{k^2\pi^2} - 2\pi((-1)^k - 1) \frac{(2\pi)^2}{\pi^2 k^2} \right) \\
&= \frac{8}{k^2} \left(2(-1)^k - ((-1)^k - 1) \right) = \frac{8}{k^2}((-1)^k + 1).
\end{aligned}$$

Se tiene que $\alpha_k(f) = 0$ si k es impar, por lo que utilizando la fórmula del coseno de la suma

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8}{k^2}((-1)^k + 1)\cos\left(\frac{k\pi(x+\pi)}{2\pi}\right) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8\cdot 2}{(2n)^2}\cos\left(\frac{2n\pi(x+\pi)}{2\pi}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)\,. \end{aligned}$$

Para sumar la serie utilizamos de nuevo la identidad de Parseval, que en este caso diría que

$$||f||^2 = \frac{\pi^4}{9}2\pi + 16\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}\frac{2\pi}{2},$$

donde

$$||f||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} x^4\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi^5}{5}.$$

Por tanto, se tiene

$$\frac{2\pi^5}{5} = \frac{\pi^4}{9}2\pi + 16\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}\frac{2\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{n^4},$$

de donde

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$