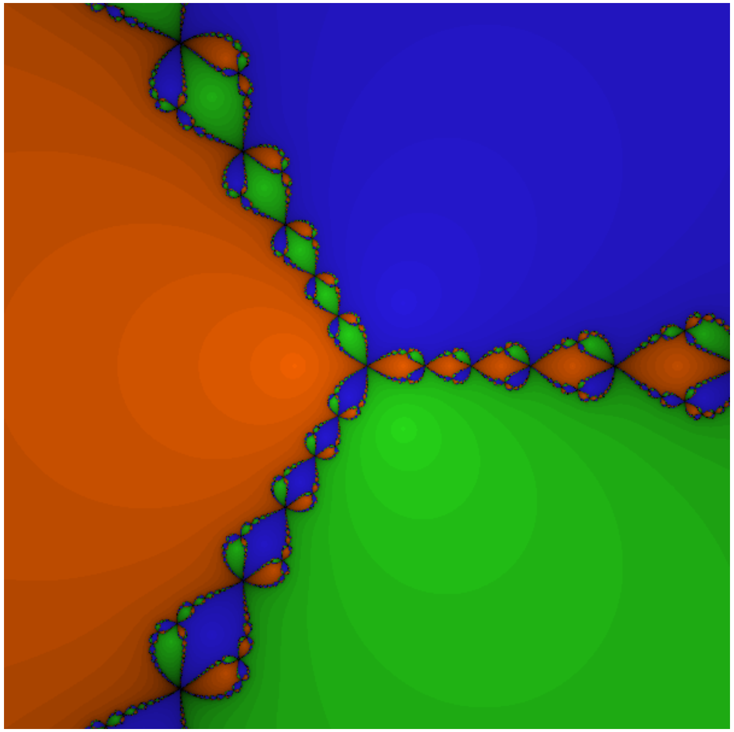
Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería

Alicia Cordero

Neus Garrido

Juan R. Torregrosa



Temas 3 y 4: Métodos numéricos para resolver PVIs

Problemas resueltos

Problema 1

Consideremos el problema de valor inicial

$$y' = \cos(2t) + \sin(3t)\,, \qquad t \in [0,1], \qquad y(0) = 1,$$

cuya solución exacta es

$$y(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) - \frac{1}{3}\cos(3t) + \frac{4}{3}$$

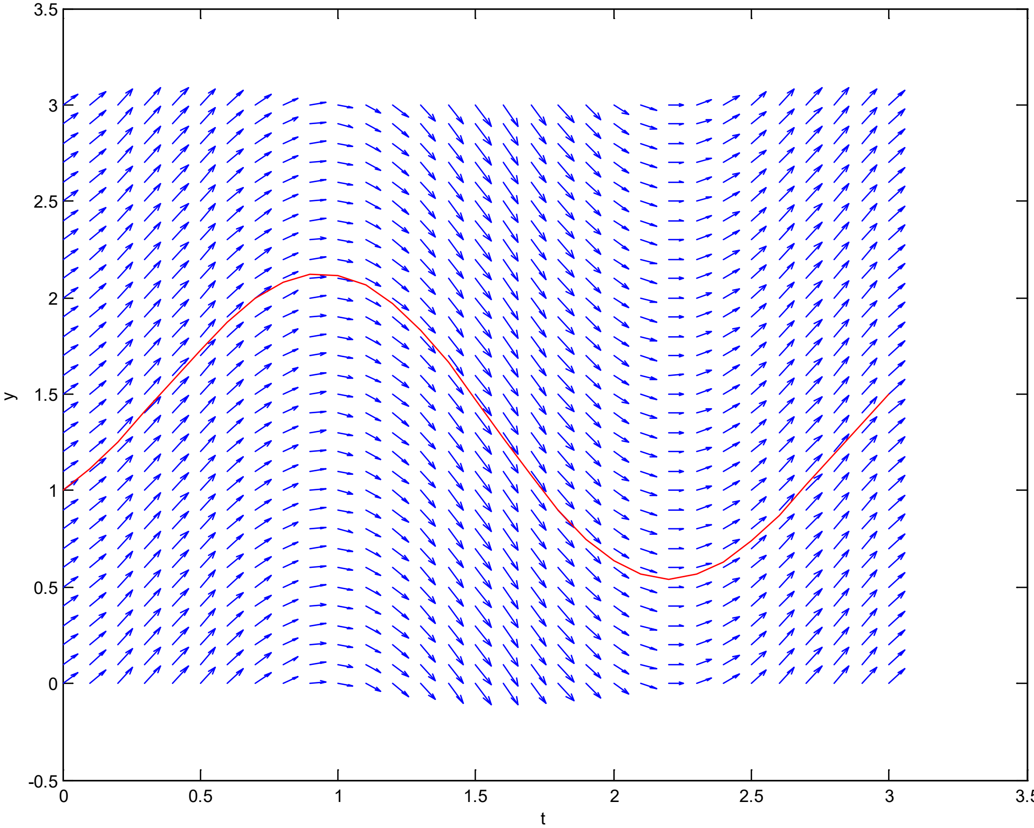
a) Representa gráficamente el campo de direcciones y la solución exacta.

b) Utiliza los métodos de Runge-Kutta de órdenes 2 y 4 para aproximar la solución exacta con paso $h = 0{,}1$. Calcula y representa gráficamente los errores exactos cometidos en cada nodo.

c) Verifica el orden de los métodos numéricamente.

Problema 1

a) Representación gráfica del campo de direcciones y la solución exacta.



- mallado (t,y)
- flechas (t’,y’)=(1,f(t,y))

```
>> t=0:.1:3;
>> y=t;
>> [T,Y]=meshgrid(t,y);
>> yp=cos(2*T)+sin(3*T);
>> quiver(T,Y,ones(size(T)),yp)
>> hold on
>> solex=1/2*sin(2*t)-1/3*cos(3*t)+4/3;
>> plot(t,solex,'r')
```

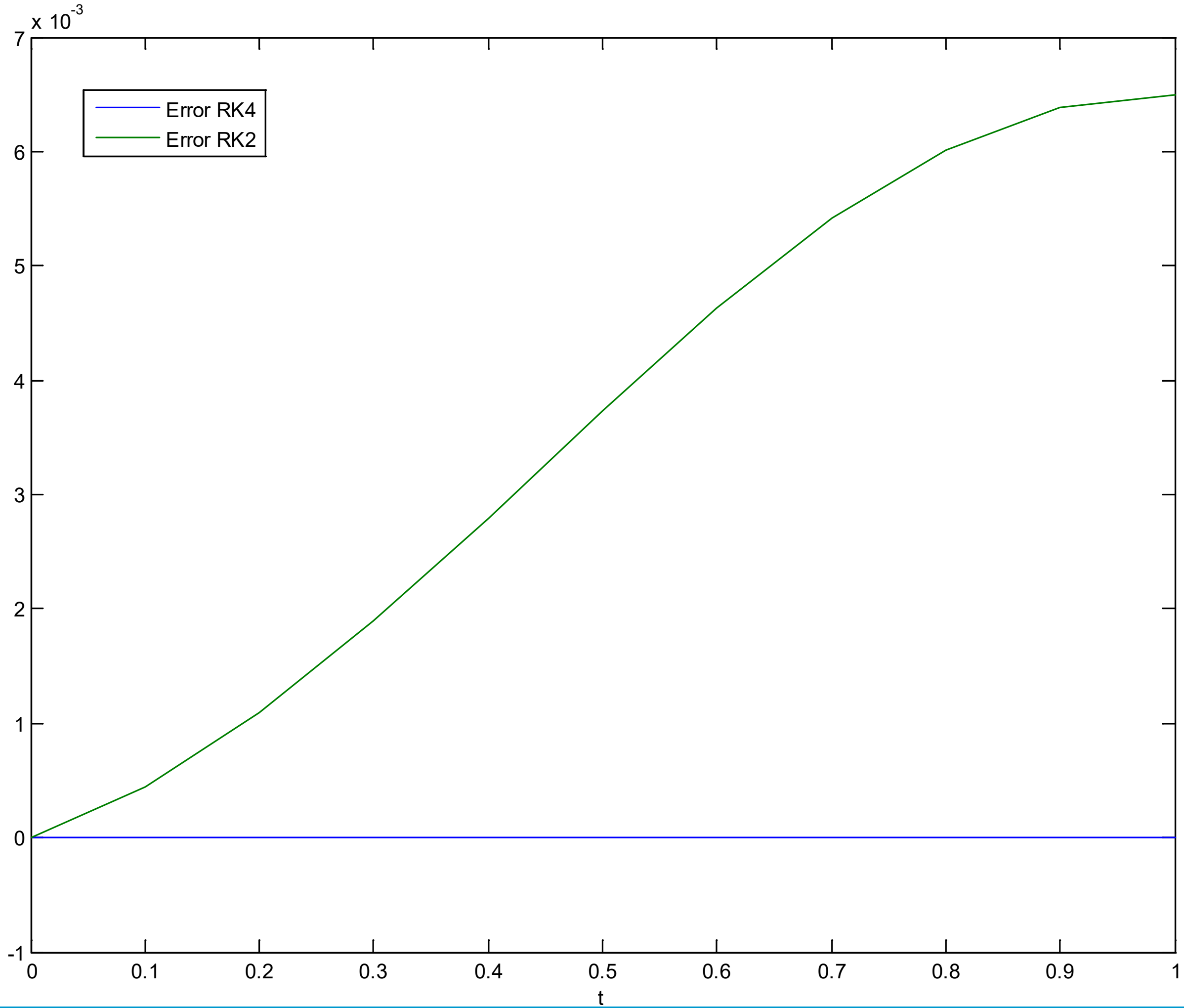
Problema 1

b) Aplicar RK2 (Heun) y RK4: cálculo de errores

x_i	y_i	$RK2_i$	$\lvert y_i - RK2_i \rvert$	$RK4_i$	$\lvert y_i - RK4_i \rvert$
0	1.0000	1.0000	0	1.0000	0
0.1	1.1142	1.1138	0.0004	1.1142	0.0097e-5
0.2	1.2529	1.2518	0.0011	1.2529	0.0272e-5
0.3	1.4085	1.4066	0.0019	1.4085	0.0513e-5
0.4	1.5712	1.5684	0.0028	1.5712	0.0799e-5
0.5	1.7305	1.7268	0.0037	1.7305	0.1108e-5
0.6	1.8751	1.8705	0.0046	1.8751	0.1413e-5
0.7	1.9943	1.9889	0.0054	1.9943	0.1689e-5
0.8	2.0789	2.0729	0.0060	2.0789	0.1911e-5
0.9	2.1216	2.1152	0.0064	2.1216	0.2061e-5
1	2.1180	2.1115	0.0065	2.1180	0.2124e-5

Problema 1

b) Aplicar RK2 (Heun) y RK4: cálculo de errores



Problema 1

c) Verifica el orden de los métodos numéricamente.

```
>> [ax,ay2] = heun(@(t,y) cos(2*t) + sin(3*t),0,1,10,1);
>> [bx,by2] = heun(@(t,y) cos(2*t) + sin(3*t),0,1,20,1);
>> asolex = 1/2*sin(2*ax) - 1/3*cos(3*ax) + 4/3;
>> bsolex = 1/2*sin(2*bx) - 1/3*cos(3*bx) + 4/3;
>> ae2 = max(abs(ay2 - asolex)');
>> be2 = max(abs(by2 - bsolex)');
>> ae2/be2
ans =    4.0039
```

$\approx 2^2$ ⇨ orden 2

>>log2(ae2/be2) nos da una aprox. del orden

Heun (RK2)

```
>> [ax,ay4] = RK4(@(t,y) cos(2*t) + sin(3*t),0,1,10,1 );
>> [bx,by4] = RK4(@(t,y) cos(2*t) + sin(3*t),0,1,20,1 );
>> ae4 = max(abs(ay4' - asolex)');
>> be4 = max(abs(by4' - bsolex)');
>> ae4/be4
ans =   16.0301
```

$\approx 2^4$ ⇨ orden 4

RK4

Problema 2

- Consideremos el problema de valor inicial,

$$y'(x) = \lambda(-y + \sin(x)), \quad y(0) = 0, \qquad 0 < x < 2\pi,$$

cuya solución exacta es

$$y(x) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2} e^{-\lambda x} + \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \sin(x) - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \cos(x).$$

a) Representa el campo de direcciones asociado al problema para $\lambda = 2, \ \lambda = 50 \ \ y \ \ \lambda = 10000$, superponiendo en cada caso la solución exacta.

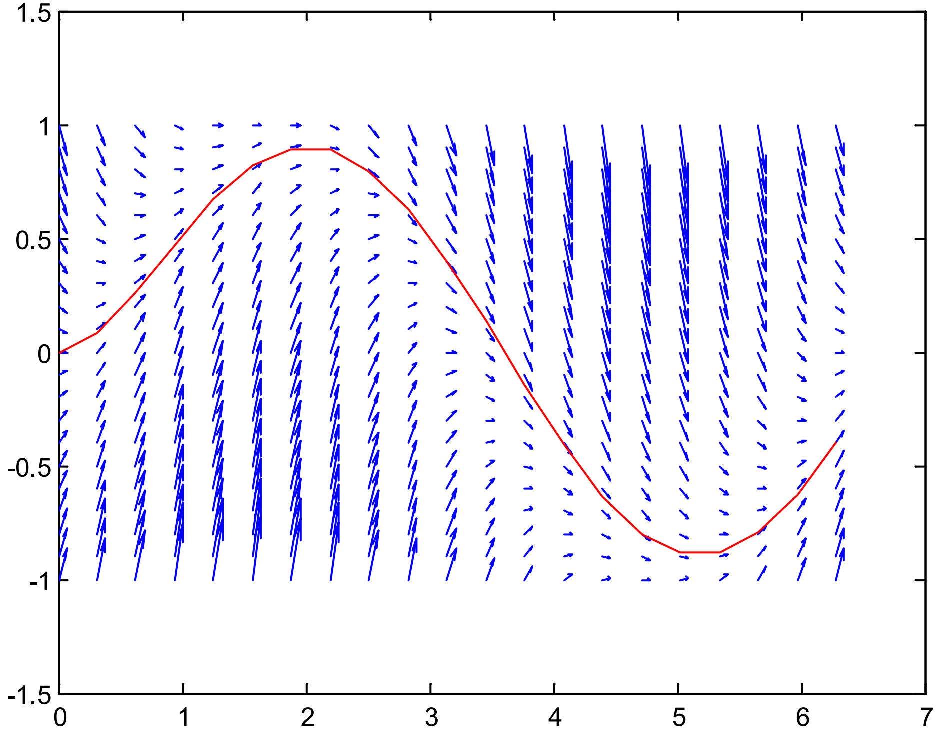
b) Resuelve el problema utilizando Euler hacia atrás para $\lambda = 50$ y refina los resultados obtenidos con la técnica de extrapolación de Richardson.

c) ¿Cuántos subintervalos son necesarios para poder asegurar que Euler proporcione una aproximación del problema para $\lambda = 50$?

Problema 2

a) Representa el campo de direcciones asociado al problema para $\lambda = 2,\ \lambda = 50\ \ y\ \lambda = 10000$, superponiendo en cada caso la solución exacta.

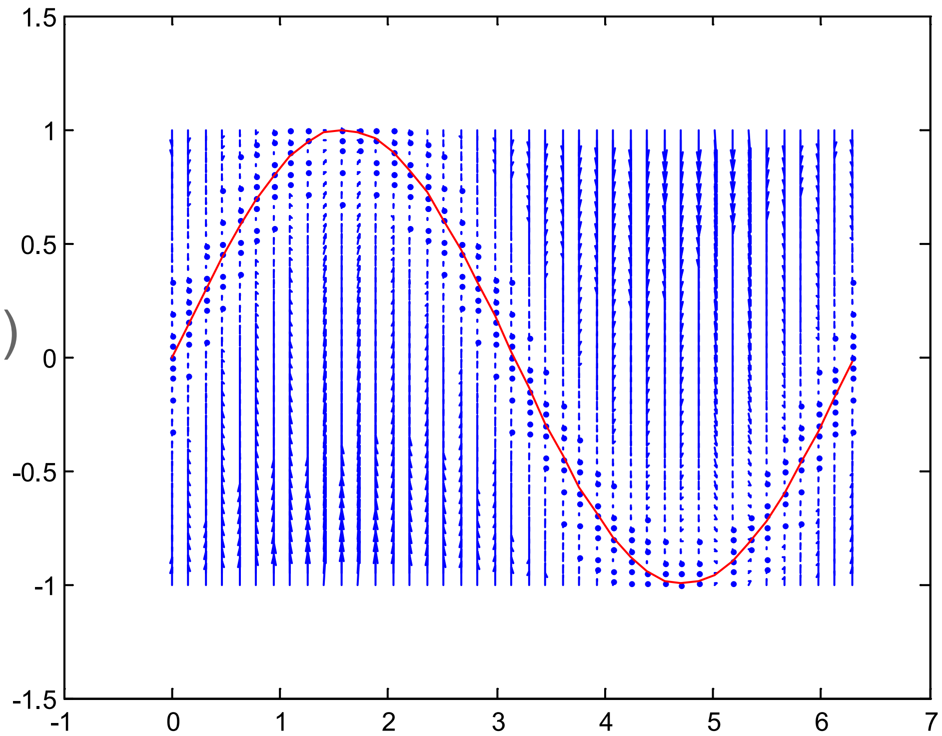
```
>> x = 0:2*pi/20:2*pi;
>> y = -1:.1:1; l = 2;
>> [X,Y] = meshgrid(x,y);
>> yp = l*(-Y+sin(X));
>> quiver(X,Y,ones(size(X)),yp)
>> hold on
```




```
>> solex = l/(1+l^2)*exp(-l*x)+ l^2/(1+l^2)*sin(x)- l/(1+l^2)*cos(x);
>> plot(x,solex,'r')
```

Problema 2

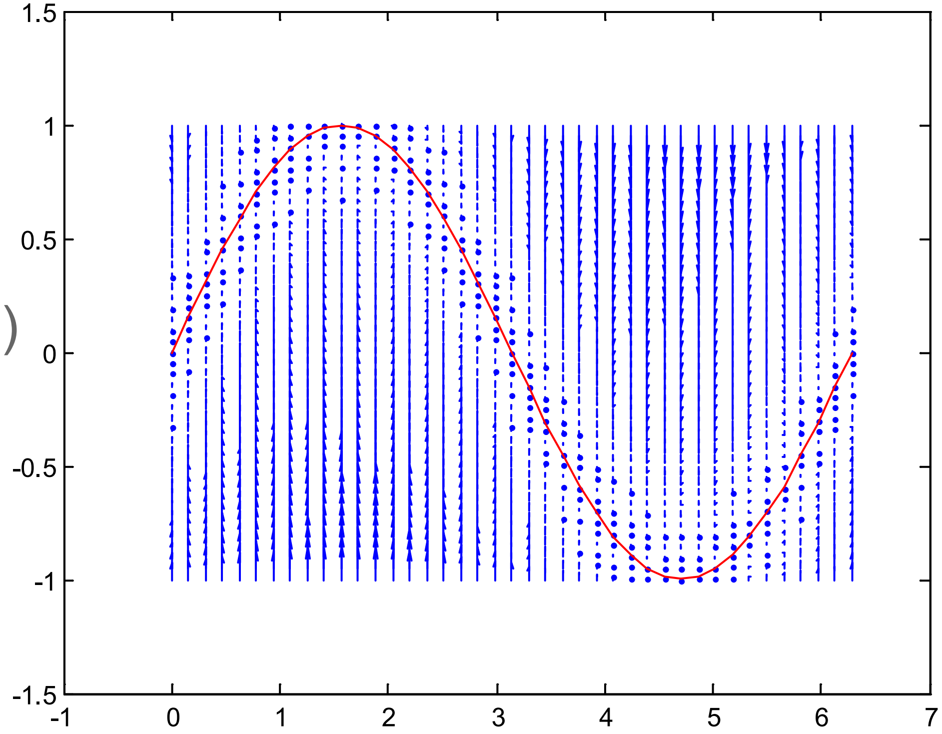
```
>> x = 0:2*pi/40:2*pi;
>> y = -1:2/40:1; l = 50;
>> [X,Y] = meshgrid(x,y);
>> yp = l*(-Y+sin(X));
>> quiver(X,Y,ones(size(X)),yp)
>> hold on
```




```
>> solex = l/(1+l^2)*exp(-l*x)+ l^2/(1+l^2)*sin(x)- l/(1+l^2)*cos(x);
>> plot(x,solex,'r')
```

Problema 2

```
>> x = 0:2*pi/40:2*pi;
>> y = -1:2/40:1; l = 10000;
>> [X,Y] = meshgrid(x,y);
>> yp = l*(-Y+sin(X));
>> quiver(X,Y,ones(size(X)),yp)
>> hold on
```




```
>> solex = l/(1+l^2)*exp(-l*x)+ l^2/(1+l^2)*sin(x)- l/(1+l^2)*cos(x);
>> plot(x,solex,'r')
```

Problema 2

b) Resuelve el problema utilizando Euler hacia atrás para $\lambda = 50$ y refina los resultados obtenidos con la técnica de extrapolación de Richardson.

```
>> l = 50;  [ x4,y4 ] = euler_hacia_atras('f',0,2*pi,0,4,1e-6,20 );
>> norm(y4-solex4)  =  0.0204
>> [ x8,y8 ] = euler_hacia_atras('f',0,2*pi,0,8,1e-6,20 );
>> norm(y8(1:2:end)-solex4)  =     0.0152
>> R8 = (2*y8(1:2:end)-y4)/(2-1);
>> norm(R8-solex4)  =     0.0055
>> [ x16,y16 ] = euler_hacia_atras('f',0,2*pi,0,16,1e-6,20 );
>> R16 = (4*y16(1:4:end)-y8(1:2:end))/3;
>> norm(R16-solex4)  =   0.0038
>> RR16 = (16*R16-R8)/15;
>> norm(RR16-solex4)  =   0.0038
```

Extrapolación de Richardson

Problema 2

c) ¿Cuántos subintervalos son necesarios para poder asegurar que Euler proporcione una aproximación del problema para $\lambda = 50$?

Para que Euler sea estable con $\lambda = 50$, necesitamos que se cumpla la desigualdad

$$|1 - \lambda h| < 1$$

Por lo que

$$h = \frac{2\pi}{N} < \frac{1}{50}$$

de donde

$$\boxed{N > 100\pi \approx 314.16}$$

```
>> [ x,y ] = euler('f',0,2*pi,315,0 );
>> solex = l/(1+l^2)*exp(-l*x)+ l^2/(1+l^2)*sin(x)- l/(1+l^2)*cos(x);
>> norm(y-solex)
```

ans = 0.0083

Problema 3

- Método trapezoidal (Heun) implícito:

Integrandо directamente la ecuación diferencial

$$y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(\mathrm{t}, y(\mathrm{t}))\, dt \approx y(x_0) + \frac{x_1 - x_0}{2}\big(f(x_0, y(x_0)) + f(x_1, y(x_1))\big)$$

aproximando la integral por trapecios.

Así, obtenemos $y(x_1) \approx y(x_0) + \frac{h}{2}\big(f(x_0, y(x_0)) + f(x_1, y(x_1))\big)$,

siendo h el paso de la integración.

Podemos diseñar un método implícito,

$$\boxed{y_{k+1} = y_k - \frac{h}{2}\big(f(x_k, y(x_k)) + f(x_{k+1}, y(x_{k+1}))\big),}$$

en el que hay que resolver una ecuación no lineal para obtener y_{k+1} a partir de y_k,

$$y_{k+1} - y_k - \frac{h}{2}\big(f(x_k, y(x_k)) + f(x_{k+1}, y(x_{k+1}))\big) = g(y_{k+1}) = 0$$

Problema 3

a) Implementa el método trapezoidal implícito en Matlab.

b) Consideremos ahora el problema del coseno:

$$y'(x) = -2\pi\sin(2\pi x) - \frac{1}{\epsilon}(y - \cos(2\pi x)) \qquad x \in [0,10], \qquad y(0) = 1$$

El problema se hace rígido cuando $\epsilon \to 0$. Su solución exacta es $y(t) = \cos(2\pi t)$.

Aplica los métodos de Euler hacia atrás y Heun implícito para resolver este problema. Utiliza $\epsilon = 10^{-6}$ y un número de subintervalos suficientemente grande como para que el error máximo cometido sea menor o igual que $\underline{10^{-9}}$.

Problema 3

```
function [x,y] = heun_impl(f,a,b,y0,N,tol,maxiter )
% método de Heun implicito
h=(b-a)/N;              x=a:h:b;
x=x(:);
y=zeros(N+1,1);         y(1)=y0;

for k=1:N
    yn0=y(k);            [fk,dfk]=feval(f,x(k),y(k));
    incre=tol+1;         iter=0;
    while incre>tol && iter<maxiter
        [fun,dfun]=feval(f,x(k+1),yn0);
        yn=yn0-(yn0-y(k)-h/2*(fk+fun))/(1-dfun*h/2);
incre=abs(yn-yn0);
       yn0=yn;           iter=iter+1;
    end
   y(k+1)=yn;
end
```

Problema 3

```
function [fun,dfun]=f(x,y)
eps=1.e-6;
fun=-2*pi*sin(2*pi*x)-1/eps*(y-cos(2*pi*x));
dfun=-1/eps;
end
```

```
n=2;e=1;
while e>1e-9,
[x,y] = euler_hacia_atras('f',0,1,vpa(1),n,1e-12,20);
solex=cos(2*pi*x);
n=n+1;
e=vpa(max(abs(solex-y)),3)
end,n
```

```
>> e = 1e-9
n =  19741
```

Problema 3

```
function [fun,dfun]=f(x,y)
eps=0.001;
fun=-2*pi*sin(2*pi*x)-1/eps*(y-cos(2*pi*x));
dfun=-1/eps;
end
```

```
n=2;e=1;
while e>1e-9,
[x,y] = heun_impl ('f',0,1,vpa(1),n,1e-12,20);
solex=cos(2*pi*x);
n=n+1;
e=vpa(max(abs(solex-y)),3)
end,n
```

```
>> e =  9.97e-10
n =  145
```

Problema 4

La velocidad de desintegración del radio es proporcional a la cantidad del mismo, siendo esta constante de proporcionalidad $k = 4.1 \cdot 10^{-4}$.

a) Plantea el problema de valor inicial de manera que podamos estudiar la variación de la cantidad de radio existente en una muestra de $10gr$.

b) Resuelve utilizando los métodos RK4, AB4, AM4 y ABM4 la cantidad de radio que quedaría en la muestra al cabo de 1500 años.

c) Se llama periodo de semidescomposición o vida media al tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de una sustancia radiactiva. ¿Cuál es la vida media del radio?

d) ¿Qué porcentaje de radio se habrá desintegrado al cabo de 100 años?

Problema 4

La velocidad de desintegración del radio es proporcional a la cantidad del mismo, siendo esta constante de proporcionalidad $k = 4.1 \cdot 10^{-4}$.

a) Plantea el problema de valor inicial de manera que podamos estudiar la variación de la cantidad de radio existente en una muestra de $10gr$.

$$y'(t) = -k\,y(t), \qquad y(0) = 10$$

de manera inmediata se puede encontrar la solución exacta:

$$y(t) = 10e^{-kt}$$

que podríamos comparar con las soluciones aproximadas.

Problema 4

b) Resuelve utilizando los métodos RK4, AB4, AM4 y ABM4 la cantidad de radio que quedaría en la muestra al cabo de 1500 años.

Utilizamos n=10 (para AM4, $\mathrm{tol} = 10^{-4}, maxiter = 10$),

Método	y_{11}	$E=\lvert y(1500)-y_{11}\rvert$
RK4	5.406409370324652	4.17e-7
AB4	5.406421864975466	1.29e-5
AM4	5.406407981323503	9.72e-7
ABM4	5.406407831218571	1.12e-6

Problema 4

c) Se llama periodo de semidescomposición o vida media al tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de una sustancia radiactiva. ¿Cuál es la vida media del radio?

t , n	RK4
10000 , 10	0.165952431688995
15000 , 10	0.021598351466724
20000 , 10	0.002920425870120
30000 , 10	8.650052798875917e-05

15000 años

d) ¿Qué porcentaje de radio se habrá desintegrado al cabo de 100 años?

Utilizando RK4 (n=10), $y(100) \approx 9.598291299478918 \rightarrow 4.017\%$

Problema 5

Modelo de propagación de una llama

(Larry Shampine, Matlab, Stiff Differential Equations)

Al encender una cerilla, la llama crece rápidamente hasta alcanzar un tamaño crítico. Luego permanece en este tamaño ya que la cantidad de oxígeno consumida en el interior se equilibra con la cantidad de oxígeno disponible en la superficie.

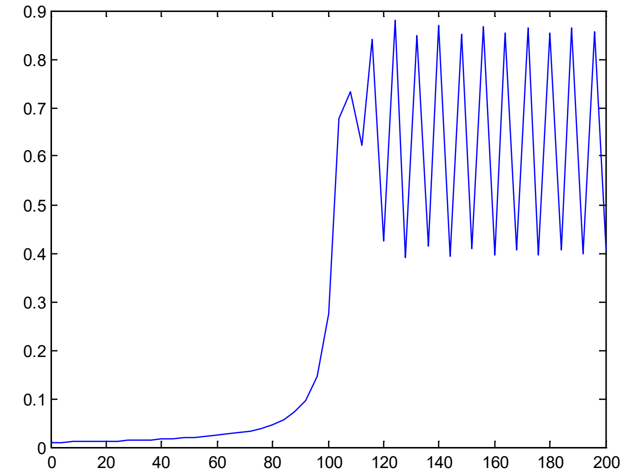
Denotamos por $y(t)$ el radio de la bola que modeliza la llama,

$$y'(t) = y^2 - y^3, \qquad y(0) = \delta, \qquad 0 < t < \frac{2}{\delta}$$

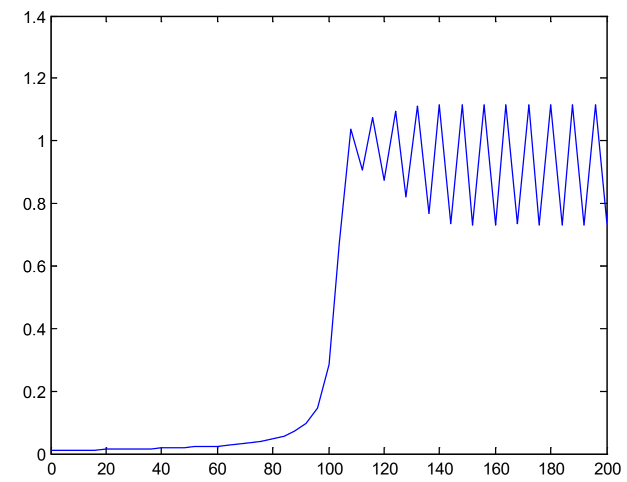
a) Compara el comportamiento de los métodos RK4 y AM4 sobre este problema para $\delta = 0.01$ y $\delta = 0.0001$.

Problema 5

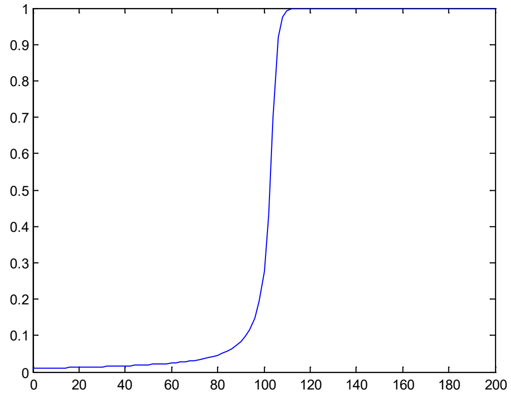
d=0.01;
[x,y] = RK4('f',0,2/d,50,d);
plot(x,y)



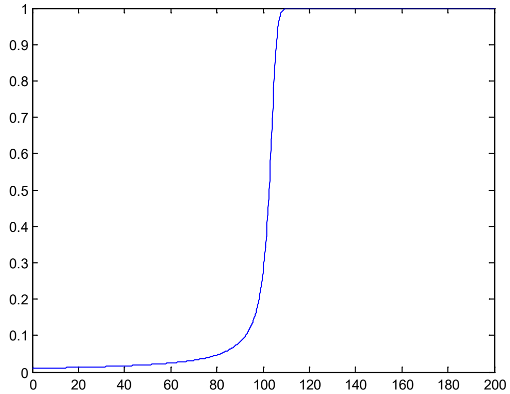
d=0.01;
[x,y] = AM4('f',0,2/d,50,d);
plot(x,y)



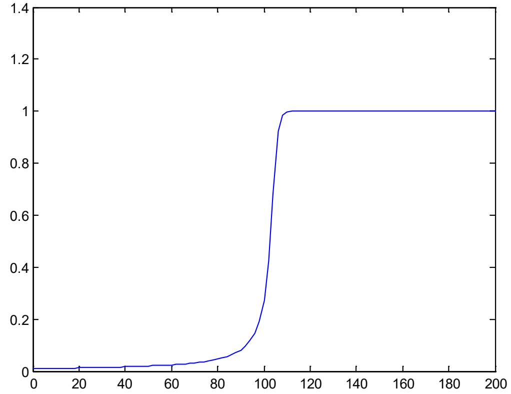
Problema 5



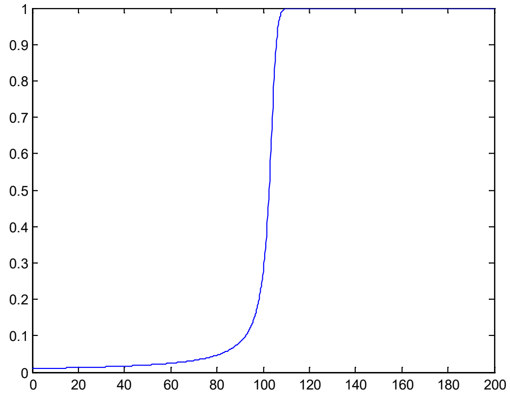
d=0.01; RK4; n = 100;



d=0.01; RK4; n=1000;

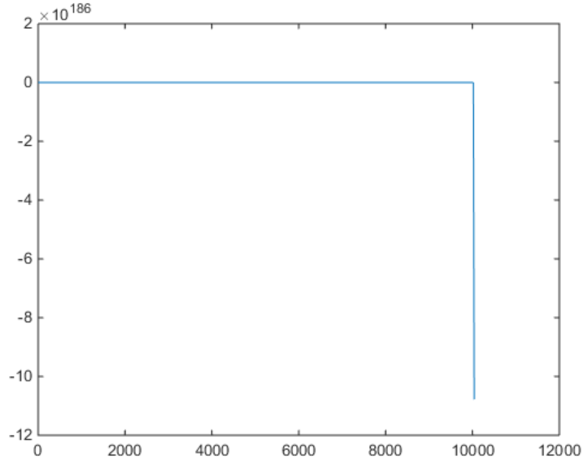


d=0.01; AM4; n = 100;

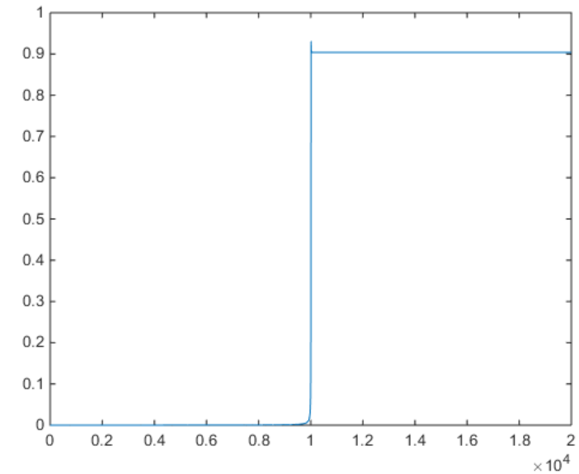


d=0.01; AM4; n=1000;

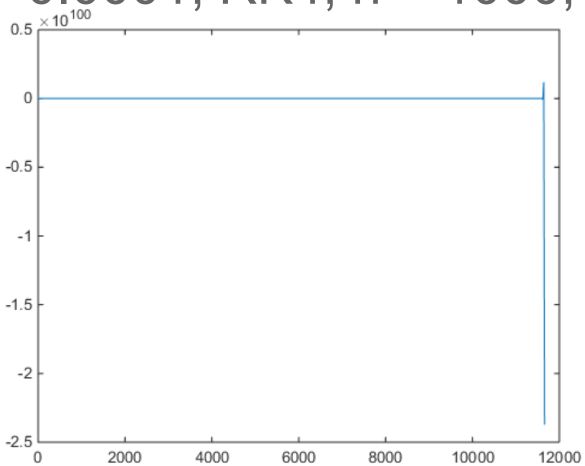
Problema 5



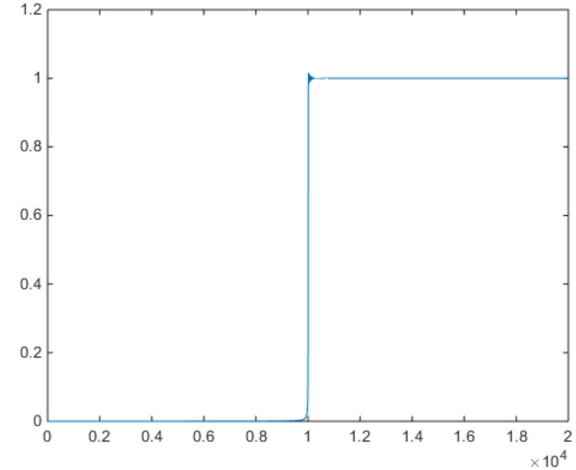
d=0.0001; RK4; n = 1000;



d=0.0001;RK4; n=7000;



d=0.0001; AM4; n = 1000;



d=0.0001; AM4; n=7000;

Problema 6: Método del punto medio

Dado el problema de valor inicial:

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = y_a$$

a) Diseña un método numérico para aproximar la solución de este problema de valor inicial utilizando la fórmula de cuadratura de punto medio

$$\int_a^b \mathrm{g}(\mathrm{t})\, dt \approx (b-a) g(x_m)$$

siendo x_m el punto medio del intervalo de integración. En caso de necesitar un método predictor, utiliza el esquema de Euler.

b) Implementa dicho método de punto medio en Matlab.

c) Consideremos ahora el problema del coseno:

$$y'(t) = -2\pi \sin(2\pi t) - \frac{1}{\epsilon}(y - \cos(2\pi t)), \qquad y(0) = 1$$

El problema se hace rígido cuando $\epsilon \to 0$. Su solución exacta es $y(t) = \cos(2\pi t)$. Aplica los métodos de Euler, punto medio y Heun (RK2) para resolver este problema. Utiliza $\epsilon = 0.001$ y un número de subintervalos suficientemente grande como para que el error máximo cometido sea menor o igual que 0.01.

Problema 6: Método del punto medio

a) Integrando directamente la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = y_a$$

$$y(x) = y_a + \int_a^x f(\mathrm{t}, y(\mathrm{t}))\, dt$$

En particular, dada una partición de $[a, b]$ en $n + 1$ nodos equiespaciados $x_i = a + i\,h, i = 0,1, \dots, n$, con paso h, calculamos

$$y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(\mathrm{t}, y(\mathrm{t}))\, dt$$

y aproximando la integral con el método de punto medio

$$\int_{x_0}^{x_1} f(\mathrm{t}, y(\mathrm{t}))\, dt \approx (x_1 - x_0) f\left(x_{1/2}, y(x_{1/2})\right)$$

Obtenemos $y(x_1) \approx y(x_0) + hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right)$, donde h es el paso. Para estimar $y\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$ utilizamos Euler:

$$y\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \approx y(x_0) + \frac{h}{2} f(x_0, y_0)$$

Y el método resulta:

$$\boxed{y(x_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)\right)}$$

Problema 6: código Matlab

```
function [x,y] = pmedio(f,a,b,n,y0)
% Método de punto medio
%
h=(b-a)/n;
x=a:h:b;

y=zeros(n+1,1);
y(1)=y0;
for k=1:n
    k1=feval(f,x(k),y(k));
    ym=y(k)+h/2*k1;
    k2=feval(f,x(k)+h/2,ym);
    y(k+1)=y(k)+h*k2;
end
end
```

Problema 6: aplicación

a) Consideremos ahora el problema del coseno:

$$y'(t) = -2\pi \sin(2\pi t) - \frac{1}{\epsilon}(y - \cos(2\pi t)), \qquad y(0) = 1$$

El problema se hace rígido cuando $\epsilon \to 0$. Su solución exacta es $y(t) = \cos(2\pi t)$. Aplica los métodos de Euler, punto medio y Heun (RK2) para resolver este problema. Utiliza un número de subintervalos suficientemente grande como para que el error máximo cometido sea menor o igual que 0.01.

```
function [fun,dfun]=f(x,y)
eps=0.001;
fun=-2*pi*sin(2*pi*x)-1/eps*(y-cos(2*pi*x));
dfun=-1/eps;
end
```

Problema 6: aplicación

```
function [fun,dfun]=f(x,y)
eps=0.001;
fun=-2*pi*sin(2*pi*x)-1/eps*(y-cos(2*pi*x));
dfun=-1/eps;
end
```

```
n=100;e=1;
while e>0.01,
[x,y] = euler('f',0,10,n,1);
solex=cos(2*pi*x);
n=n+10;
e=max(abs(solex-y'))
end,n
```

```
>> e =  7.8958e-05
n =  5010
```

Problema 6: aplicación

```
n=100;e=1;
while e>0.01,
[x,y] = heun('f',0,10,n,1);
solex=cos(2*pi*x);
n=n+10;
e=max(abs(solex-y))
end,n

>> e =     0.0063
n =     5010
```

Problema 6: aplicación

```
n=100;e=1;
while e>0.01,
[x,y] = pmedio('f',0,10,n,1);
solex=cos(2*pi*x);
n=n+10;
e=max(abs(solex-y))
end,n

>> e =     0.0032
n =          5010
```

Problema 6: estimación del orden

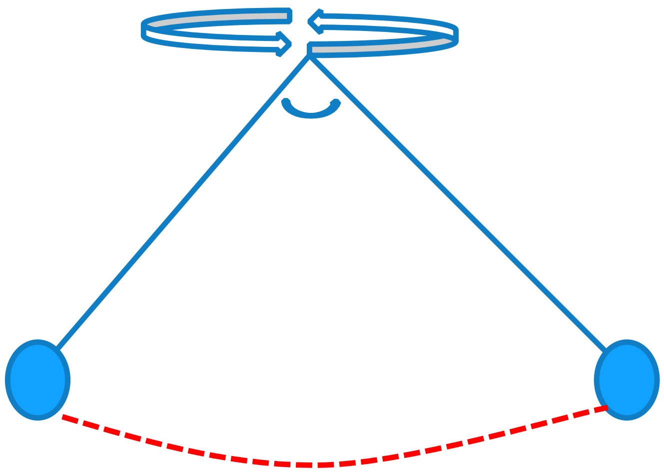
```
>>n=5010;
[x1,y1] = pmedio('f',0,10,n,1);
solex1=cos(2*pi*x1);
e1=max(abs(y1-solex1));n=2*n;
>> [x2,y2] = pmedio('f',0,10,n,1);
solex2=cos(2*pi*x2);
e2=max(abs(y2-solex2));n=2*n;        e1/e2
ans =   326.8662

>> [x3,y3] = pmedio('f',0,10,n,1);
solex3=cos(2*pi*x3);
e3=max(abs(y3-solex3));n=2*n;        e2/e3
ans =     5.9919
```

Problema 6: estimación del orden

```
>> [x4,y4] = pmedio('f',0,10,n,1);
solex4=cos(2*pi*x4);
e4=max(abs(y4-solex4));n=2*n;         e3/e4

ans =     4.6649

>> [x5,y5] = pmedio('f',0,10,n,1);
solex5=cos(2*pi*x5);
e5=max(abs(y5-solex5));n=2*n;          e4/e5

ans =     4.2851  ⇒  orden 2
```

Problema 7

Un péndulo de Foucault proporciona la demostración empírica de la rotación terrestre: el plano de oscilación del péndulo gira con el tiempo de manera que tras un cierto periodo que depende de la latitud del observador, vuelve a su posición original.



Problema 7

Las ecuaciones de movimiento son:

$$x'' - 2\omega \sin(\phi) y' + k^2 x = 0$$
$$y'' + 2\omega \sin(\phi) x' + k^2 y = 0$$

donde ω es la velocidad angular de la rotación terrestre, $\phi = 40°$ es la latitud del observador y la constante k depende de la aceleración de la gravedad g y la longitud del péndulo $l = 10$ de manera que $k^2 = \frac{g}{l}$.

Para iniciar el movimiento se sitúa el péndulo en la posición $x = -6$, $y = 1$ y se deja en movimiento libre, sin impulso inicial.

a) Calcula, utilizando RK4, la posición del péndulo en el instante t = 3600s con un paso temporal de 0.5 segundos. ¿Se observa el giro del plano de oscilación?

b) ¿Qué ocurre si el paso temporal es de un segundo?¿y si es de 0.1s?

c) Estima el orden de convergencia de los métodos numéricos empleados.

Problema 7

$$x'' - 2\omega \sin(\phi) y' + k^2 x = 0$$
$$y'' + 2\omega \sin(\phi) x' + k^2 y = 0$$

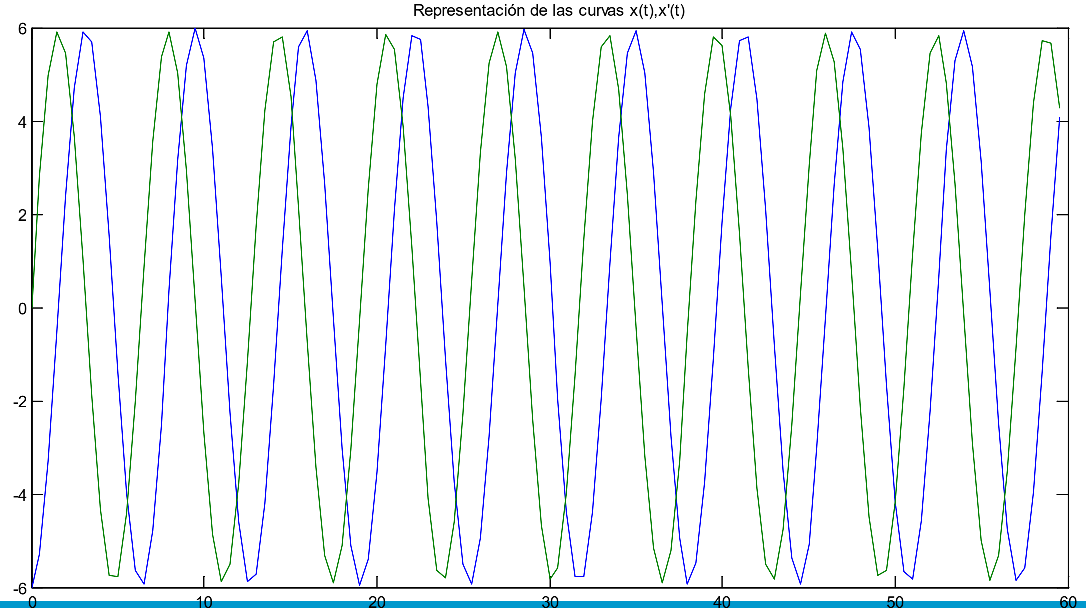
Calcula, utilizando Euler y RK4, la posición del péndulo en el instante t = 3600s con un paso temporal de 0.5 segundos. ¿Se observa el giro del plano de oscilación?

$$z_1 = x, z_2 = x', z_3 = y, z_4 = y'$$
$$z_1' = z_2 \qquad z_2' = 2\omega \sin(\phi) z_4 - k^2 z_1$$
$$z_3' = z_4 \qquad z_4' = -2\omega \sin(\phi) z_2 + k^2 z_3$$

```
function w=foucault(t,z)
fi=40*pi/180; %latitud en radianes
om=7.29e-5; %velocidad angular terrestre (2*pi)/(24*3600)
k2=9.8/10;

w=[z(2) ; 2*om*sin(fi)*z(4)-k2*z(1) ;...
```

Problema 7

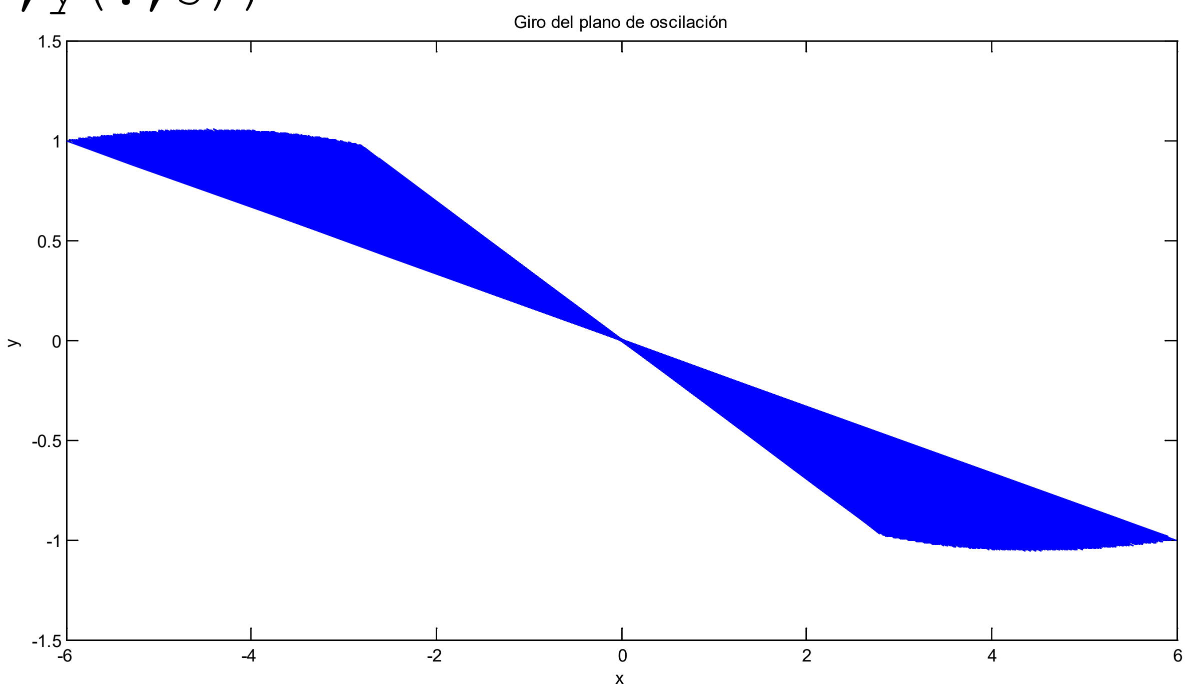
```
>>[t,y]=RK4('foucault',0,3600,7200,[-6 0 1 0]);
>> sol1=y(end,:)
sol1 =
  -2.61959015330103 6 -1.02752461077933 4
0.907732701358041   0.355359980288323
>> plot(t(1:120),y(1:120,1:2)),
title('Representación de las curvas x(t),x’(t)')
```



Problema 7

Para que se vea el giro del plano de oscilación representamos la evolución del péndulo en el plano XY

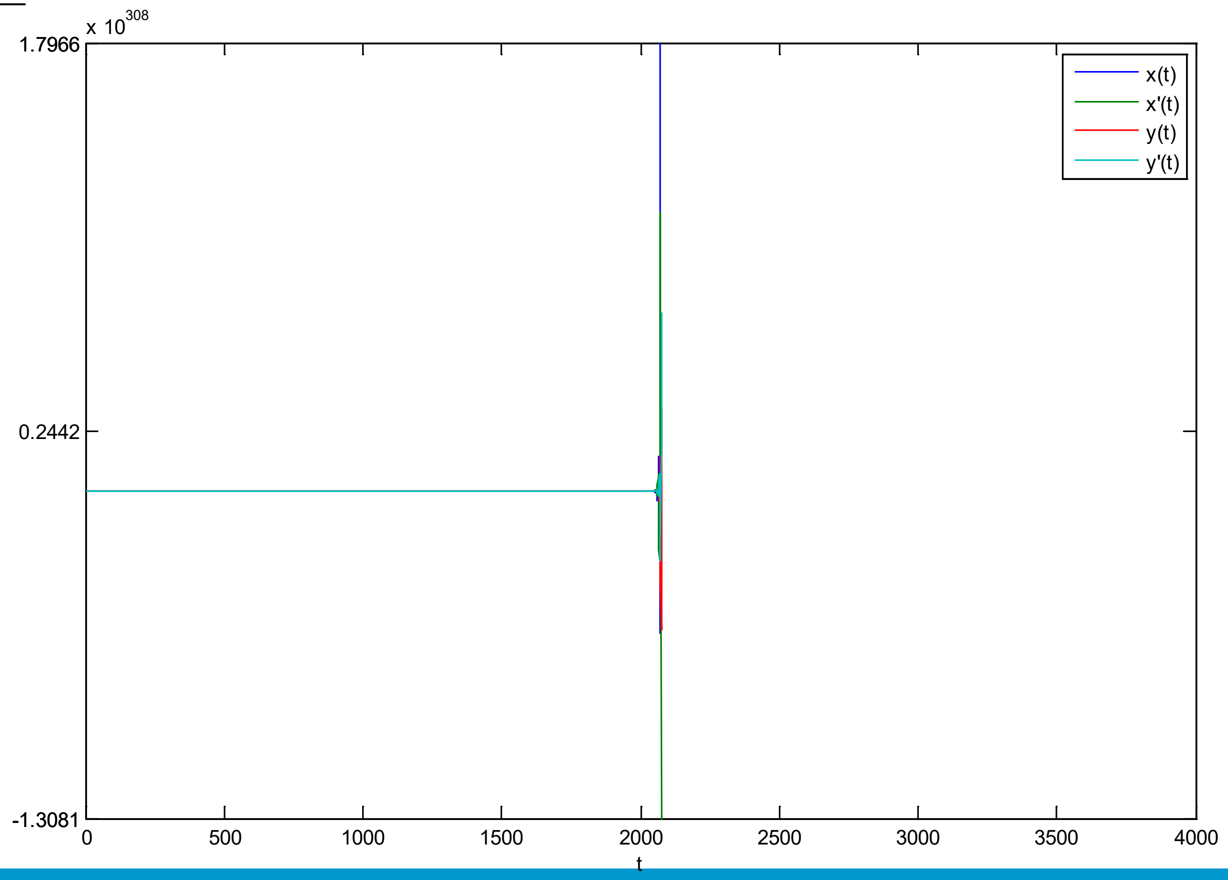
```
>> plot(y(:,1),y(:,3))
```



Problema 7

¿Qué ocurre si el paso temporal es de un segundo?¿y si es de 0.1s?

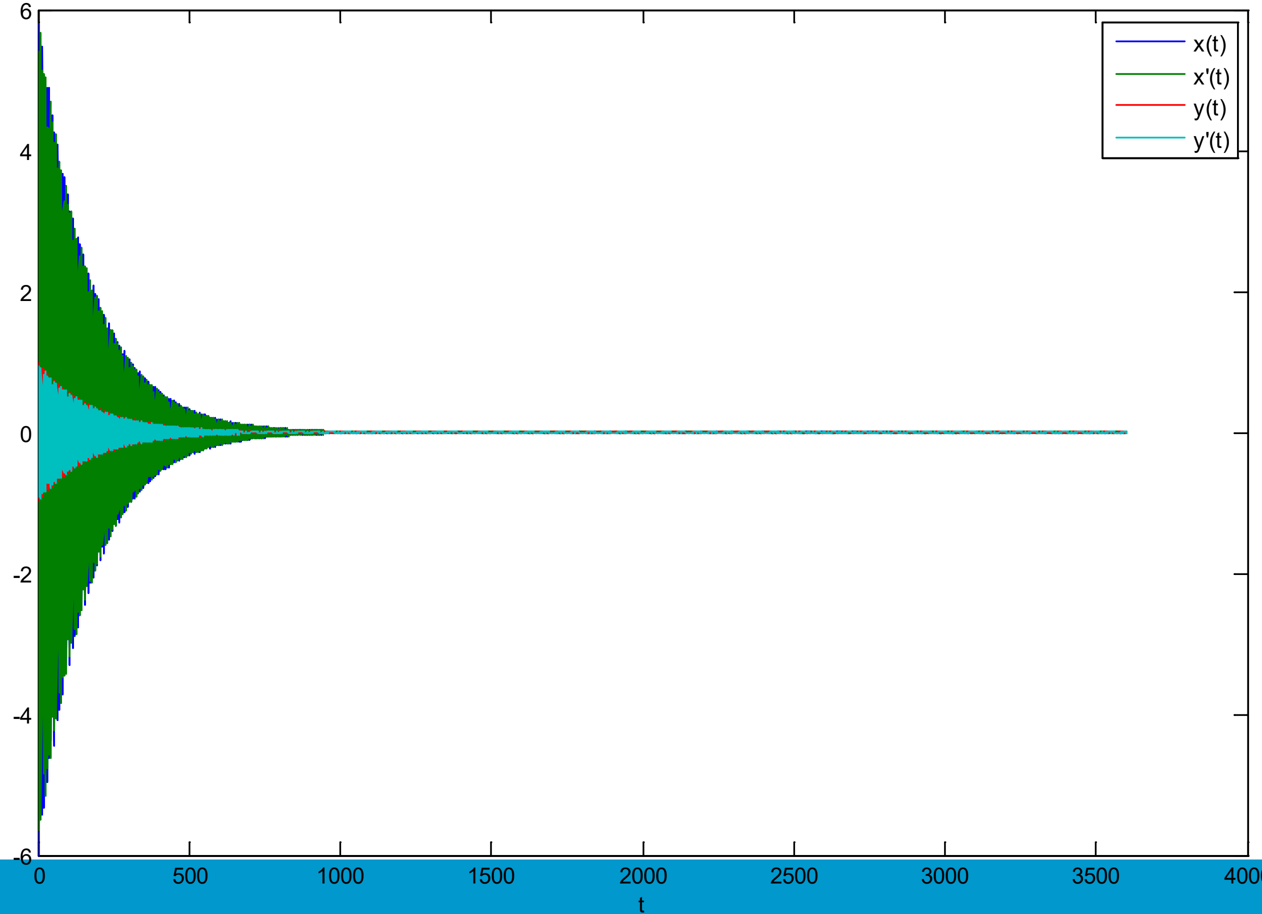
```
>> [t,y]=euler_sis('foucault',0,3600,3600,[-6 0 1 0]);
>> plot(t,y)
```



Problema 7

¿Qué ocurre si el paso temporal es de un segundo?

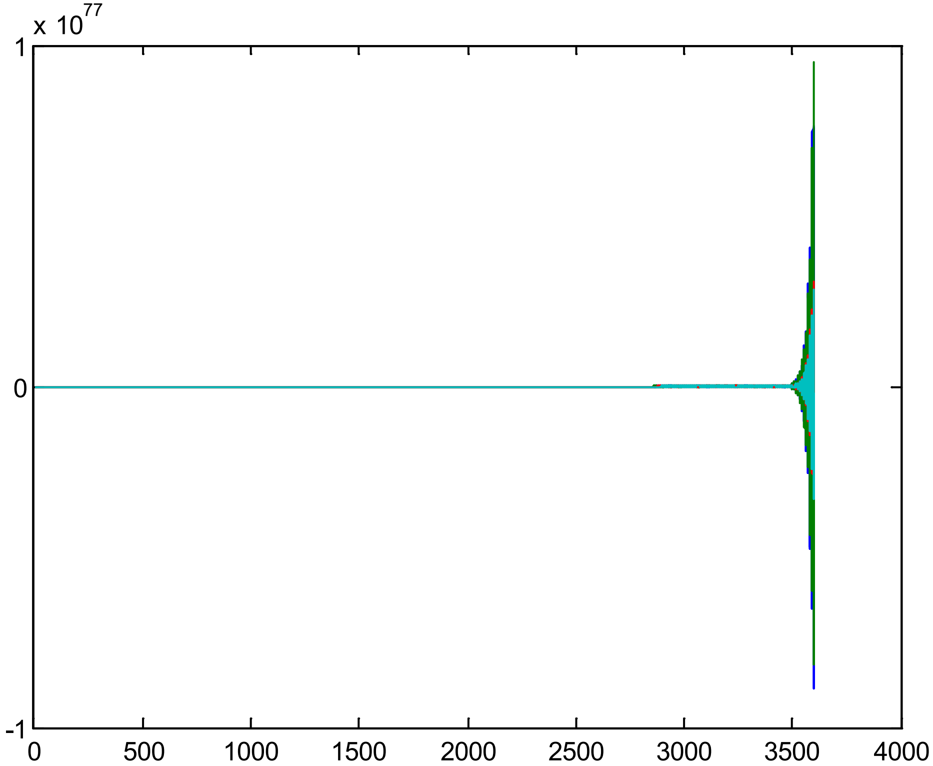
```
>> [t,y]=RK4('foucault',0,3600,3600,[-6 0 1 0]);
>> plot(t,y)
```



Problema 7

¿Qué ocurre si el paso temporal es de un segundo?¿y si es de 0.1s?

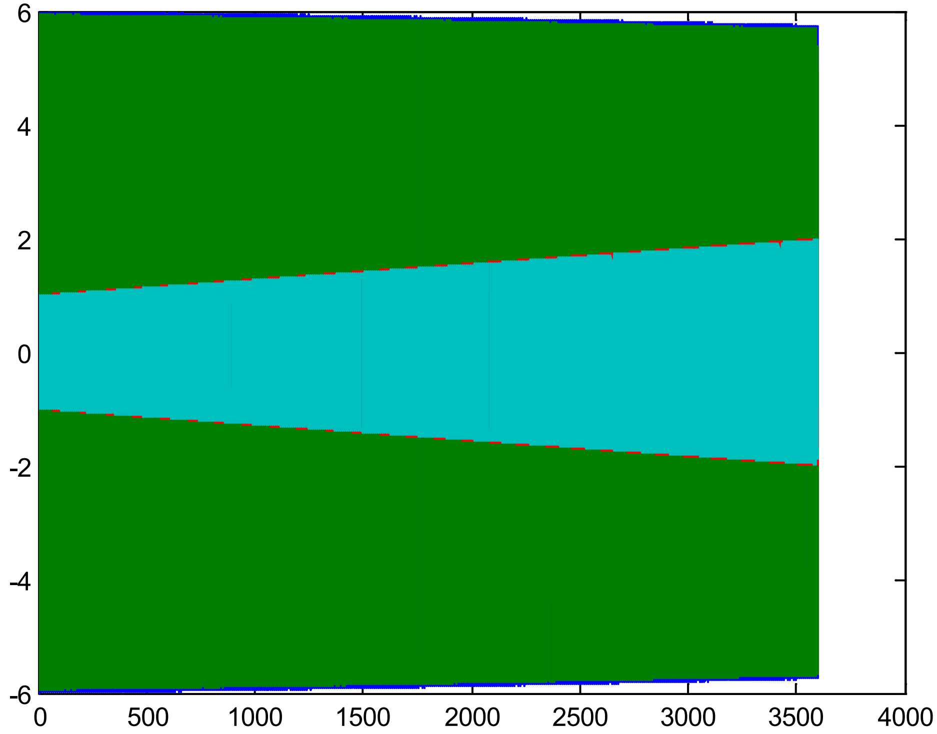
```
>> [t,y]=euler_sis('foucault',0,3600,36000,[-6 0 1 0]);
>> plot(t,y)
```



Problema 7

¿Qué ocurre si el paso temporal es de un segundo?

```
>> [t,y]=RK4('foucault',0,3600,36000,[-6 0 1 0]);
>> plot(t,y)
```



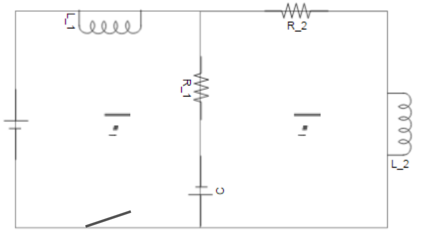
Problema 7

Estimación del orden de convergencia (sin conocer la solución exacta)

```
>>n=7200;
>> [t,y1]=RK4('foucault',0,3600,n,[-6 0 1 0]);sol1=y1(:,1);n=2*n;
>> [t,y2]=RK4('foucault',0,3600,n,[-6 0 1 0]);sol2=y2(:,1);n=2*n;
>> [t,y3]=RK4('foucault',0,3600,n,[-6 0 1 0]);sol3=y3(:,1); n=2*n;
>> [t,y4]=RK4('foucault',0,3600,n,[-6 0 1 0]);sol4=y4(:,1); n=2*n;
>> [t,y5]=RK4('foucault',0,3600,n,[-6 0 1 0]);sol5=y5(:,1); n=2*n;
>> [t,y6]=RK4('foucault',0,3600,n,[-6 0 1 0]);sol6=y6(:,1);

>> e1=norm(sol1-sol2(1:2:end)); e2=norm(sol2-sol3(1:2:end));
>> e3=norm(sol3-sol4(1:2:end)); e4=norm(sol4-sol5(1:2:end));
>> e5=norm(sol5-sol6(1:2:end));

>> e1/e2, e2/e3, e3/e4, e4/e5
8.3588 ,   11.2131,   11.3102,  11.3135
```

no alcanza orden 4

Problema 8



El circuito de la figura se rige por las ecuaciones

$$L_1\, i_1' + R_1\,(i_1 - i_2) + \frac{1}{C}\int_0^t (i_1(\tau) - i_2(\tau))\,d\tau = E(t)$$

$$-\frac{1}{C}\int_0^t (i_1(\tau) - i_2(\tau))\,d\tau - R_1(i_1 - i_2) + R_2 i_2 + L_2 i_2' = 0$$

donde $L_1 = L_2 = 200$ Henry, $R_1 = R_2 = 300$ Ohm y C = 0.001 Faraday.

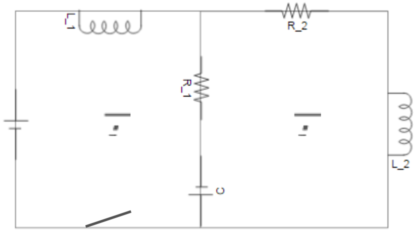
La integral $q_1(t) = \int_0^t i_1(\tau)\,d\tau$ se interpreta como la carga almacenada en el condensador por la corriente i_1 desde el instante inicial hasta el instante t. Obviamente, $q_1'(t) = i_1(t)$ Análogamente con $q_2(t)$.

a) Escribe un sistema de 4 ecuaciones diferenciales explícitas que describen el circuito, con condiciones iniciales nulas.

b) Suponiendo una fuente de tensión constante E(t) = 1V, resuelve el sistema con RK4 utilizando 10 subintervalos y representa la intensidad en cada malla en función de t en [0, 10].

c) Supón ahora que se aplica al circuito una corriente sinusoidal $E(t) = \sin(4t)$. Utiliza 50 subintervalos temporales con Euler y RK4. Representa las intensidades para t en [0, 5].

Problema 8



a) Escribe un sistema de 4 ecuaciones diferenciales explícitas que describen el circuito, con condiciones iniciales nulas.

$$200\, i_1' + 300\,(i_1 - i_2) + 1000 \int_0^t (i_1(\tau) - i_2(\tau))\, d\tau = E(t) \qquad \frac{d}{dt}$$

$$\boxed{200\, i_1'' + 300\,(i_1' - i_2') + 1000(i_1(t) - i_2(t)) = E'(t)}$$

$$-1000 \int_0^t (i_1(\tau) - i_2(\tau))\, d\tau - R_1(i_1 - i_2) + 300 i_2 + 200 i_2' = 0 \qquad \frac{d}{dt}$$

$$\boxed{-1000(i_1(t) - i_2(t)) - 300(i_1' - i_2') + 300 i_2' + 200 i_2'' = 0}$$

Las condiciones iniciales son:

$$i_1(0) = i_2(0) = 0,\ i_1'(0) = i_2'(0) = 0.$$

Problema 8

$$200\, i_1'' + 300\,(i_1' - i_2') + 1000(i_1(t) - i_2(t)) = E'(t),$$

$$-1000(i_1(t) - i_2(t)) - R_1(i_1' - i_2') + 300 i_2' + 200 i_2'' = 0,$$

$$i_1(0) = i_2(0) = 0,\ i_1'(0) = i_2'(0) = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = i_1 \\ v_2 = i_1' \\ v_3 = i_2 \\ v_4 = i_2' \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} v_1' = v_2 \\ v_2' = i_1'' = \dfrac{1}{200}(E'(t) - 300(v_2 - v_4) - 1000(v_1 - v_3)) \\ v_3' = v_4 \\ v_4' = i_2'' = \dfrac{1}{200}(1000(v_1 - v_3) + 300(v_2 - v_4) - 300 v_4) \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{l} v_1(0) = 0 \\ v_2(0) = 0 \\ v_3(0) = 0 \\ v_4(0) = 0 \end{array}\right\}$$

variables — sistema de 4 EDOs de primer orden — cond. iniciales

Problema 8

b) Suponiendo una fuente de tensión constante E(t) = 1V, resuelve el sistema con RK4 y representa la intensidad en cada malla en función de t en [0, 10].

Si $E(t) = 1 \rightarrow E'(t) = 0$ y

$$\left.\begin{array}{c} v_1' = v_2 \\ v_2' = i_1'' = \dfrac{-1}{200}\left(300(v_2 - v_4) + 1000(v_1 - v_3)\right) \\ v_3' = v_4 \\ v_4' = i_2'' = \dfrac{1}{200}\left(1000(v_1 - v_3) + 300(v_2 - v_4) - 300v_4\right) \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{c} v_1(0) = 0 \\ v_2(0) = 0 \\ v_3(0) = 0 \\ v_4(0) = 0 \end{array}\right\}$$

```
function [vp] = RLC(t,v)

vp=[v(2);-1/200(300*(v(2)-v(4))+1000*(v(1)-v(3)));...
    v(4);1/200*(1000*(v(1)-v(3))+ 300*(v(2)-v(4))-300*v(4))];
end
```

Problema 8

```
[x,y] = RK4('RLC',0,10,10,[0,0,0,0])
x =
  Columns 1 through 11
   0     1     2     3     4     5     6     7     8     9    10
y =
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
```

intensidades i_1 e i_2 nulas para E(t) = 1V

Problema 8

c) Supón ahora que se aplica al circuito una corriente sinusoidal $E(t) = \sin(4t)$. Utiliza 50 subintervalos temporales con Euler y RK4. Representa las intensidades para t en [0, 5].

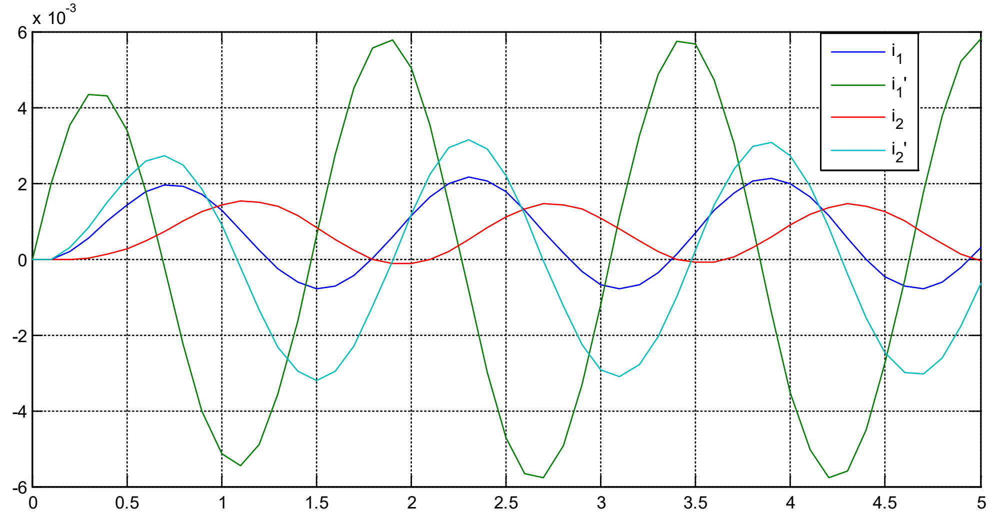
Si $E(t) = \sin(4t) \rightarrow E'(t) = 4\cos(4\text{t})$ y

$$\left.\begin{array}{c} v_1' = v_2 \\ v_2' = i_1'' = \dfrac{-1}{200}\left(-4\cos(4t) + 300(v_2 - v_4) + 1000(v_1 - v_3)\right) \\ v_3' = v_4 \\ v_4' = i_2'' = \dfrac{1}{200}\left(1000(v_1 - v_3) + 300(v_2 - v_4) - 300v_4\right) \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{c} v_1(0) = 0 \\ v_2(0) = 0 \\ v_3(0) = 0 \\ v_4(0) = 0 \end{array}\right\}$$

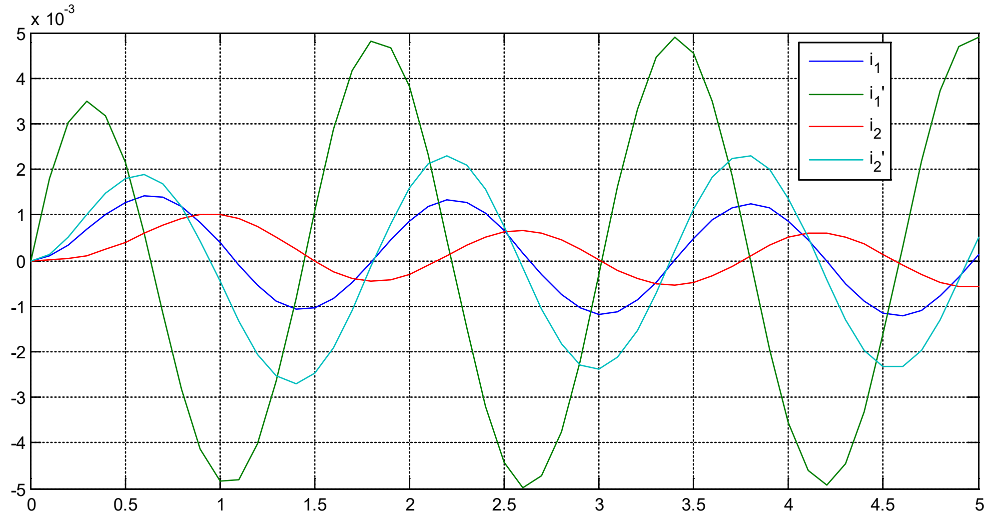
```
function [vp] = RLC(t,v)
%
vp=[v(2);-1/200*(-4*cos(4*t)+300*(v(2)-v(4))+1000*(v(1)-
v(3)));...
    v(4);1/200*(1000*(v(1)-v(3))+ 300*(v(2)-v(4))-300*v(4))];
end
```

Problema 8

```
>> [x,y] = euler_sis('RLC',0,5,50,[0,0,0,0]);
>> plot(x,y)
>> grid on
```




```
>> [x,y] = RK4('RLC',0,5,50,[0,0,0,0]);
>> plot(x,y)
>> grid on
```



Problemas propuestos

Problema propuesto 1

Dada la ecuación diferencial

$$y(x) = -200000y + 200000e^{-x} - e^{-x}$$

a) Determina el mínimo tamaño de paso requerido para mantener la estabilidad con el uso del método de Euler explícito. Resuelve el problema con el número de subintervalos resultante y representa la solución aproximada.

b) Si $y(0) = 0$, utiliza el método de Euler implícito para obtener la solución aproximada en el intervalo $\mathrm{x} \in [0,2]$, con un tamaño de paso de 0.1. Representa la solución aproximada.

c) Compara gráficamente los resultados proporcionados por el comando de matlab ode15s con los obtenidos en los apartados anteriores, comparando también el número de nodos utilizados.

Problema propuesto 2

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = 9x + 24y + 5\cos(t) - \frac{1}{3}sen(t),$$

$$y' = -24x - 51y - 9\cos(t) + \frac{1}{3}sen(t),$$

Con las condiciones iniciales $x(0) = \frac{4}{3}, y(0) = \frac{2}{3},\ \ t \in [0,1]$. La $h = 005$ única solución del problema es

$$x(t) = 2e^{-3t} - e^{-39t} + \frac{1}{3}cos(t),$$

$$y(t) = -e^{-3t} + 2e^{-39t} - \frac{1}{3}cos(t).$$

Utiliza los algoritmos RK4 y AM4 para resolver este problema con $h = 0.05$ y $h = 0.1$,comparando los resultados con la solución exacta.

Problema propuesto 3

Sea el problema de valor inicial rígido

$$y' = 5e^{5t}(y-t)^2 + 1, \qquad t \in [0,1], \qquad y(0) = -1,$$

cuya única solución es $y(t) = t - e^{-5t}$.

Utiliza los algoritmos

- RK4,
- ode45, ode15s
- Euler hacia atrás, Trapezoidal implícito y AM4

para resolver este problema con 4 y 5 subintervalos en cada caso, comparando los resultados con la solución exacta.

Para los métodos implícitos, utiliza un número máximo de iteraciones de 10 y una tolerancia de 10^{-6}.

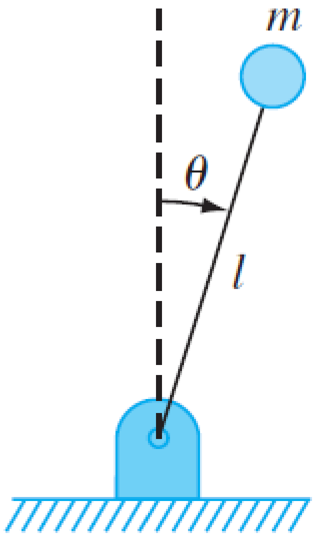
Problema propuesto 4

Considere la barra delgada de longitud l que se mueve en
el plano x-y, como se ilustra en la figura. La barra se fija en uno de sus extremos con un alfiler y con una masa en el otro. Observe que $g = 9.81\frac{m}{s^2}$ y $l = 0.5\,m$.

Este sistema se modeliza mediante

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{l}\theta = 0, \qquad \theta(0) = 0, \qquad \dot{\theta}(0) = 0.25\frac{rad}{s}$$

Resuelve este problema con cualquiera de los métodos estudiados en este capítulo y representa gráficamente el ángulo θ
respecto al tiempo, y la velocidad angular respecto al tiempo.



Problema propuesto 5

Dada la EDO de primero orden y su condición inicial asociada:

$$x'(t) = -700x - 1000e^{-t}, \qquad x(0) = 4,$$

resuelve este problema de valor inicial rígido con diferentes métodos numéricos explícitos e implícitos, en el periodo de tiempo $0 \leq t \leq 5$.

Representa gráficamente las distintas aproximaciones, tanto para la fase de transición rápida como lenta de la escala temporal.

Problema propuesto 6

Emplea los métodos de Euler, Heun, Runge-Kutta, AB4, AM4 y ABM4 para aproximar las soluciones a los siguientes problemas de valor inicial.

Compara en cada caso, numérica y gráficamente, el resultado obtenido en cada caso con la solución exacta.

$$a)\ x' = 3x + 2y - (2t^2+1)e^{2t}, \qquad x(0) = 1, \qquad t \in [0,1]$$

$$y' = 4x + y + (t^2 + 2t - 4)e^{2t}, \quad y(0) = 1$$

Solución exacta: $x(t) = \dfrac{e^{5t}}{3} - \dfrac{e^{-t}}{3} + e^{2t},$

$$y(t) = \frac{e^{5t}}{3} + 2\frac{e^{-t}}{3} + t^2e^{2t}$$

Problema propuesto 6 (cont.)

$$b)\ x' = y, \qquad x(0) = 1, \qquad t \in [0,2]$$

$$y' = -x - 2e^t + 1, \quad y(0) = 0$$

$$z' = -x - e^t + 1, \quad z(0) = 1$$

Solución exacta:

$$x(t) = \cos(t) + \sin(t) - e^t + 1,$$

$$y(t) = -\sin(t) + \cos(t) - e^t,$$

$$z(t) = \cos(t) - \sin(t)\,.$$

Problema propuesto 7

Las ecuaciones del movimiento de un satélite puesto en órbita desde la Estación Espacial Internacional son

$$x''(t) = -\mu \frac{x(t)}{r^3}, x(0) = x_0, x'(0) = v_{x_0}$$

$$y''(t) = -\mu \frac{y(t)}{r^3}, y(0) = y_0, y'(0) = v_{y_0}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia a la Tierra, situada en el origen de coordenadas y $\mu = G(M_T + M_s) \approx 398598.309\, km^3/seg^2$ es el llamado parámetro gravitacional, en el que se considera nula la masa de satélite, M_s, respecto a la de la Tierra, M_T.

Consideramos que la estación espacial está situada en el punto x_0 del eje de abscisas y v_{x0}, v_{y0} son las componentes de la velocidad inicial.

Problema propuesto 7 (cont.)

a) Convierte el sistema de orden 2 en uno de primer orden.

b) Considerando las condiciones iniciales:

$$x(0) = 42167.911\,km,\ x'(0) = -1.07168\,\frac{km}{seg}$$

$$y(0) = 0\,km, \qquad y'(0) = 2.8827\,\frac{km}{seg}$$

Resuelve el problema de valor inicial empleando el método ABM4, encontrando la posición del satélite respecto a la Tierra transcurridas 24 horas desde su lanzamiento. Representa gráficamente la trayectoria del satélite en ese tiempo.

Problema propuesto 8

Utiliza los algoritmos de Runge-Kutta (de órdenes 2 y 4) para aproximar la solución del problema de valor inicial:

$$y''' = -6y^4, \ \ t \in [1,1.9]$$
$$y(1) = -1, y'(1) = -1, y''(1) = -2$$

a) Emplea el paso $h = 0.05$ y compara los resultados, numérica y gráficamente, con la solución exacta $y(t) = \frac{1}{t-2}$.

b) Si utilizamos una variante del método de Adams-Moulton en el que el problema del valor implícito lo resolvemos utilizando el método de Heun como predictor, ¿cuál sería el orden del método resultante? compruébalo numéricamente resolviendo el mismo problema de valor inicial que en el apartado (a) con 20, 40 y 80 subintervalos.

Problema propuesto 9

Emplea el método de Adams-Bashforth de dos pasos para resolver el problema:

$$y'' + 2y' = t^2 y, \quad t \in [0,1]$$
$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = -1$$

trabajando con paso h = 0.05. ¿Cuál es el valor de y(0.8)? Representa gráficamente la curva solución del problema.

a) Resuelve el problema anterior con el método de Heun, bajo las mismas condiciones. Calcula el orden del error del método.

b) Comprueba que $y(t) = e^{(t-2)t/2}$ es la solución exacta del problema de valor inicial. Compara los resultados obtenidos en los apartados anteriores con dicha solución exacta.

Problema propuesto 10

La temperatura $u(r)$ en un anillo circular de radio interior 1 y radio exterior 3 se define por:

$$r\,u'' + u' = 0,\ r \in [1,3], u(1) = 1,\ \ u'(1) = \frac{1}{2\ln(1/3)}$$

a) Calcula la solución del problema de valor inicial empleando el método de Heun con 20 subintervalos. ¿Cuál es la temperatura en r = 2.4? Representa gráficamente la temperatura en función de la distancia al origen.

b) Emplea el método de Adams-Moulton con dos pasos (orden 3) para aproximar la solución del problema de valor inicial en r = 2.4 con idéntico número de subintervalos que en el apartado anterior.

c) Comprueba que $u(r) = \frac{\ln\left(\frac{r}{3}\right) - \frac{1}{2}\ln(r)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$ es la solución exacta del problema de valor inicial. Compara dicha solución con las aproximaciones obtenidas en los apartados anteriores.

Problema propuesto 11

Supongamos dos masas $m_1 = 1$ y $m_2 = 1$ sujetas a resortes de masa insignificante, con constantes $k_1 = 6$ y $k_2 = 4$. A su vez, los resortes están conectados de manera que, siendo $y_1(t)$ e $y_2(t)$ los desplazamientos verticales de las masas con respecto a sus posiciones de equilibrio, se describe el movimiento del sistema mediante las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$m_1 y_1'' = -k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1)$$
$$m_1 y_2'' = -k_2 (y_2 - y_1)$$

Si las masas parten de sus posiciones de equilibrio con velocidades unitarias de dirección opuesta, tenemos condiciones iniciales $y_1(0) = y_2(0) = 0,\ \ y_1'(0) = 1,\ \ y_2'(0) = -1.$

a) Expresa el sistema de orden dos como un sistema de 4 ecuaciones diferenciales ordinarias.

b) Utiliza los métodos RK4 y ABM4 para obtener la solución aproximada en un intervalo de tiempo [0,100] tomando 200 subintervalos. Representa gráficamente la solución obtenida.

Problema propuesto 12

El método de Milne es una técnica explícita para resolver PVI cuya ecuación en diferencias viene dada por:

$$y_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}\left[2f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1}) + 2f(t_{k-2}, y_{k-2})\right]$$

a) Crea una función en MATLAB que resuelva un PVI por el método explícito de Milne.

b) Aplica la función definida en el apartado anterior para resolver el siguiente PVI, con $h = 0.1$:

$$y''' = -\frac{36}{y''} - \frac{60}{(x-1)^6} + 3(x-1)^5, x \in [0,1/2],$$

$$y(0) = -1, \qquad y'(0) = -3, \qquad y''(0) = -12$$

c) Compara los resultados obtenidos con la solución exacta, $y = \frac{1}{(x-1)^3}$ y utiliza ésta para resolver el problema con el doble de subintervalos y determinar el orden del método de Milne.

Problema propuesto 13

En ocasiones el método de Milne se usa como predictor de un método explícito de Simpson:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}\left[f(t_{k+1}, y_{k+1}) + 4f(t_k, y_k) + f(t_{k-1}, y_{k-1})\right]$$

Diseña un método predictor-corrector de tipo Milne-Simpson.

a) Utiliza este método predictor-corrector para resolver el PVI

$$y''' = -\frac{36}{y''} - \frac{60}{(x-1)^6} + 3(x-1)^5, x \in [0,1/2],$$

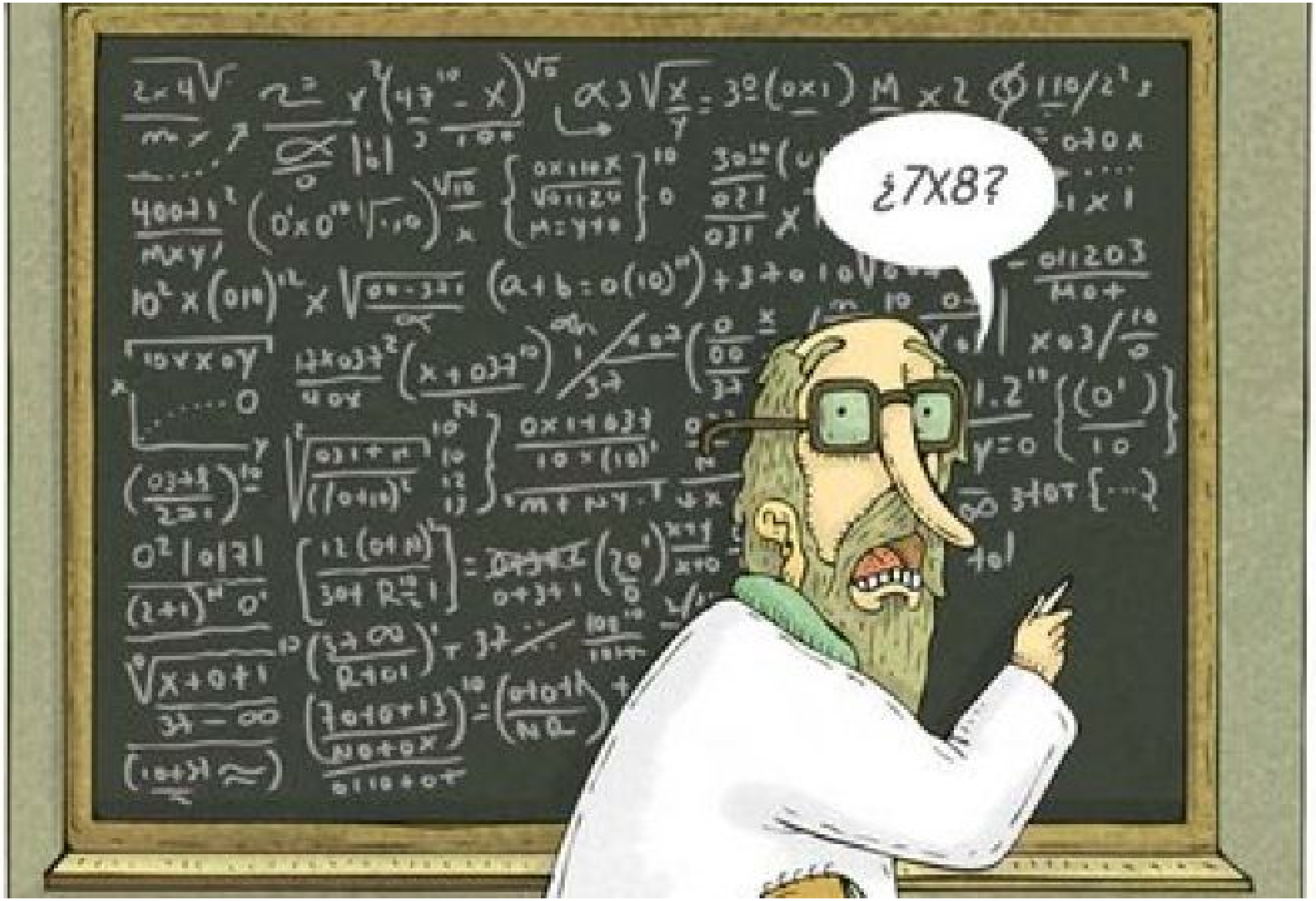
$$y(0) = -1, \qquad y'(0) = -3, \qquad y''(0) = -12$$

b) Compara los resultados con los obtenidos por el método explicito AB4 y analiza los errores.

Para profundizar…

- J.H. Mathews, K. D. Fink, Métodos numéricos con Matlab, Ed. Prectice Hall, Madrid, 2000.
- R.L. Burden, J.D. Faires, Análisis numérico, Ed. Thomson Learning, México DF, 2002.
- http://ecuaciondiferencialejerciciosresueltos.com/tag/metodo-numerico
- A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, Problemas resueltos de métodos numéricos, Ed. Paraninfo, 2006.

¿Dudas?



unir

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

www.unir.net