Árvores Rubro- Negras

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Bacharelado de Sistemas de Informação
Estruturas de Dados 2
Professora: Vânia Félix

Introdução

- Inventada em 1972, 10 anos depois da AVL por Rudolf Bayer, sob o nome B-árvores binárias simétricas
- Adquirindo em 1978 seu atual nome, por Leo J. Guibas and Robert Sedgewick
- Árvore rubro-negra (do inglês *Red-Black trees*)
- A árvore rubro-negra tem esse nome devido a “coloração” de seus nós
- Uma árvore rubro negra (ARN) é uma árvore binária de busca com um campo adicional que armazena se o nó é rubro ou negro
- O fato de um nó ser rubro ou negro é usado como fator de balanceamento da ARN

Introdução

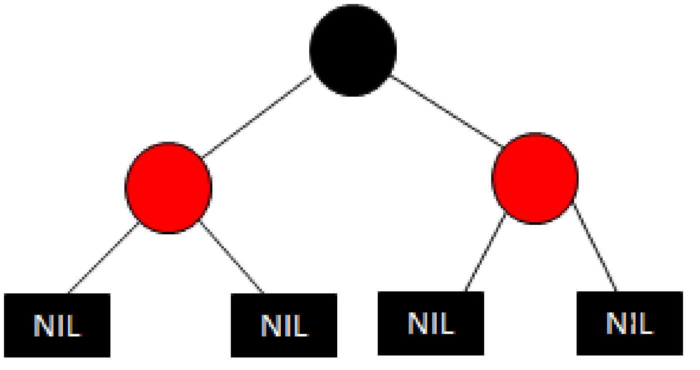
- **Objetivo:** garantir que operações básicas demorem O(log n) no pior caso.

- **Altura máxima:** 2 log(n + 1) onde n é o número de nós;

- **Inserção e remoção**: executadas em O(log n).

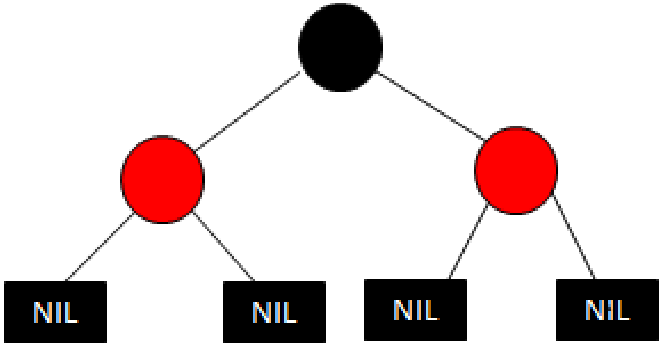
Propriedades

- 1) Todo nó é VERMELHO ou NEGRO



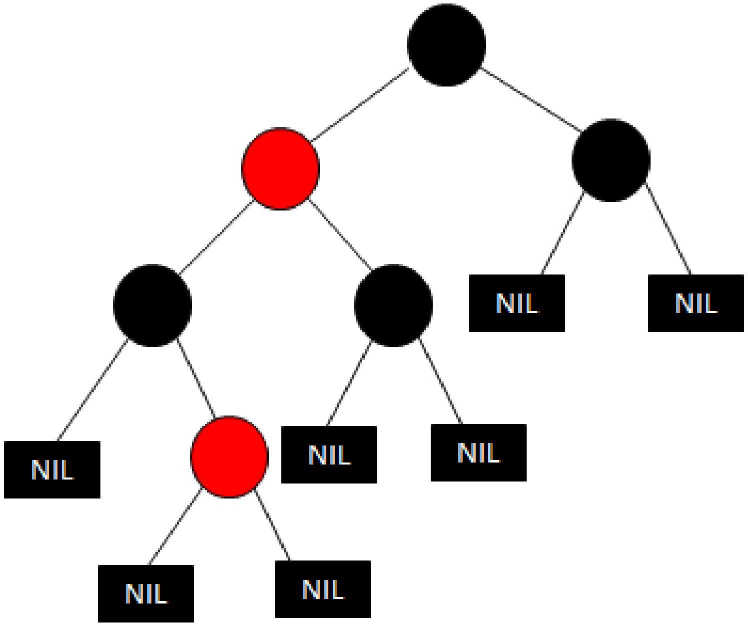
Propriedades

- 2) A raiz é negra



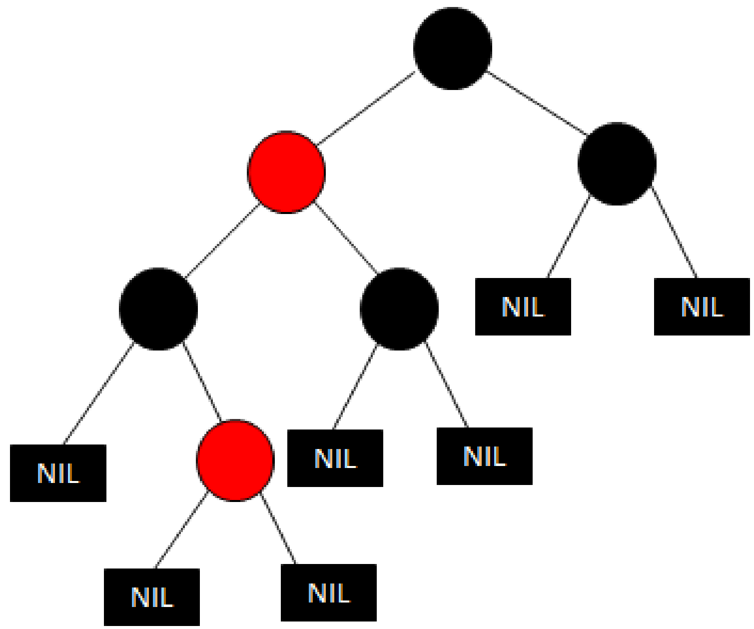
Propriedades

- 3) Para cada nó, todos os caminhos do nó para folhas descendentes contém o mesmo número de nós NEGROS (altura negra)



Propriedades

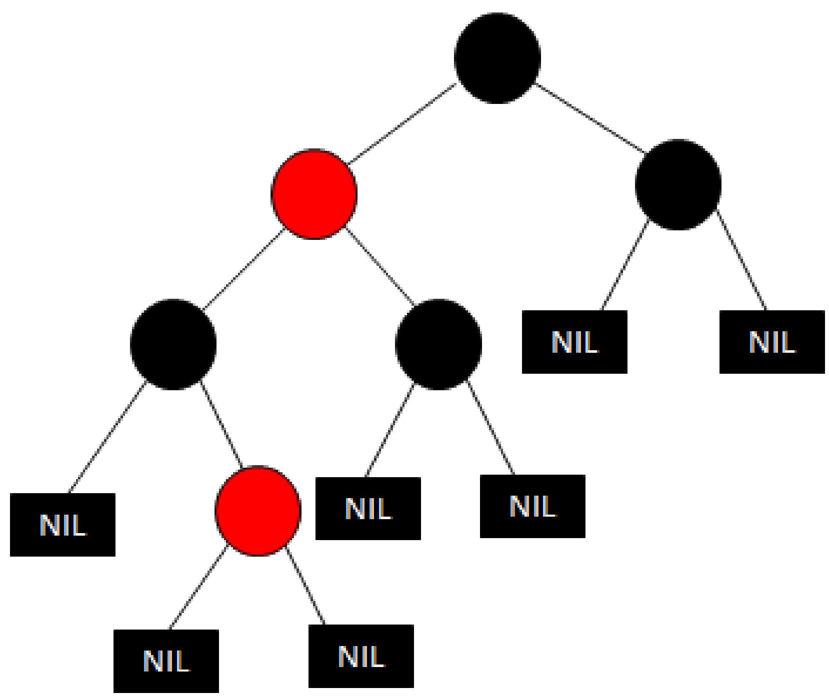
- 4) Se um nó é VERMELHO, então ambos os seus filhos são NEGROS



-> Propriedade óbvia resultando da quarta condição é que num caminho da raiz até uma subárvore vazia não pode haver dois nós rubros consecutivos

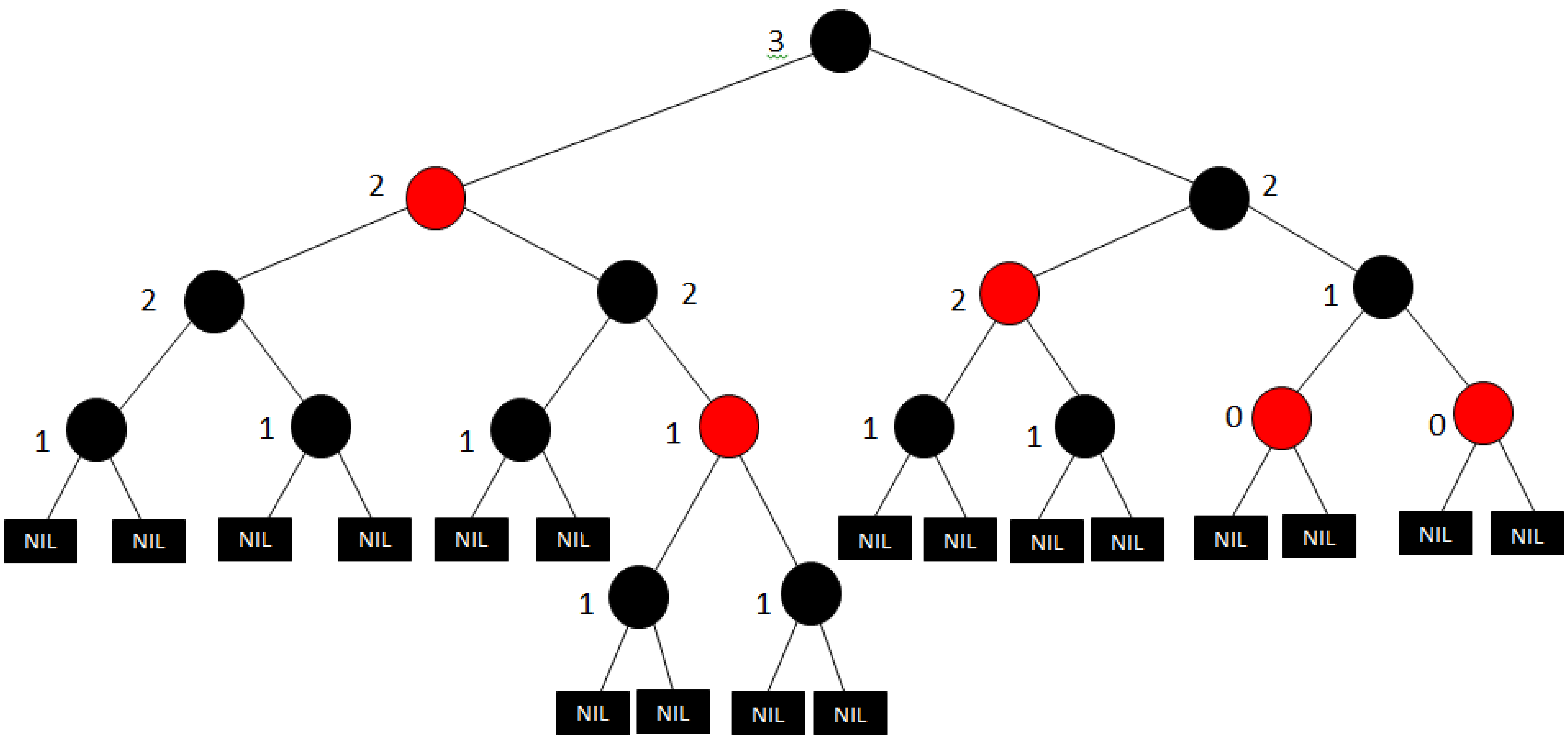
Propriedades

- Observe que as propriedades de uma ARN asseguram que o maior caminho desde a raiz até uma folha é no máximo duas vezes maior que o qualquer outro caminho até outra folha.



Altura negra

- Altura negra de um nó: número de nós negros encontrados até qualquer nó folha



Quantidade mínima de nós internos

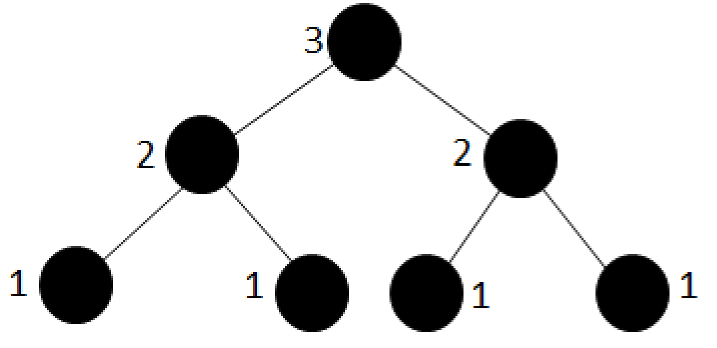
- Um nó x de uma árvore rubro negra tem no mínimo $2^{an(x)} - 1$ nós internos, onde an(*x*) é a altura negra de x

- **Prova por indução:**
- <u>Caso base:</u> Um nó de altura 0 (i.e., nó-folha) tem $0 = 2^0 - 1$ nós internos
- <u>Caso genérico:</u> Um nó *x* de altura *h* > 0 tem 2 filhos com altura negra an(*x*) ou an(*x*) – 1, conforme *x* seja vermelho ou negro. No pior caso, *x* é negro e as subárvores enraizadas em seus 2 filhos têm $2^{an(x)-1} - 1$ nós internos cada e *x* tem

  $2(2^{an(x)-1} - 1) + 1 = 2^{an(x)} - 1$ nós internos

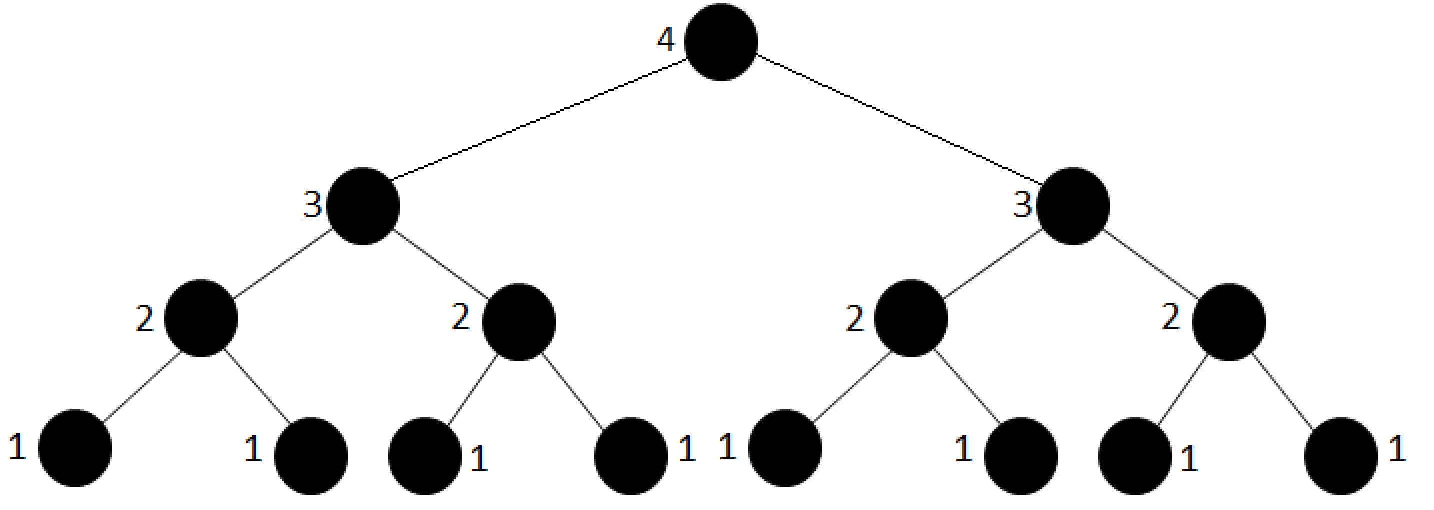
Quantidade mínima de nós internos

- <u>Exemplo:</u> para um nó com altura negra 3, ele terá uma quantidade mínima de nós equivalente à $2^3 - 1 = 7$.



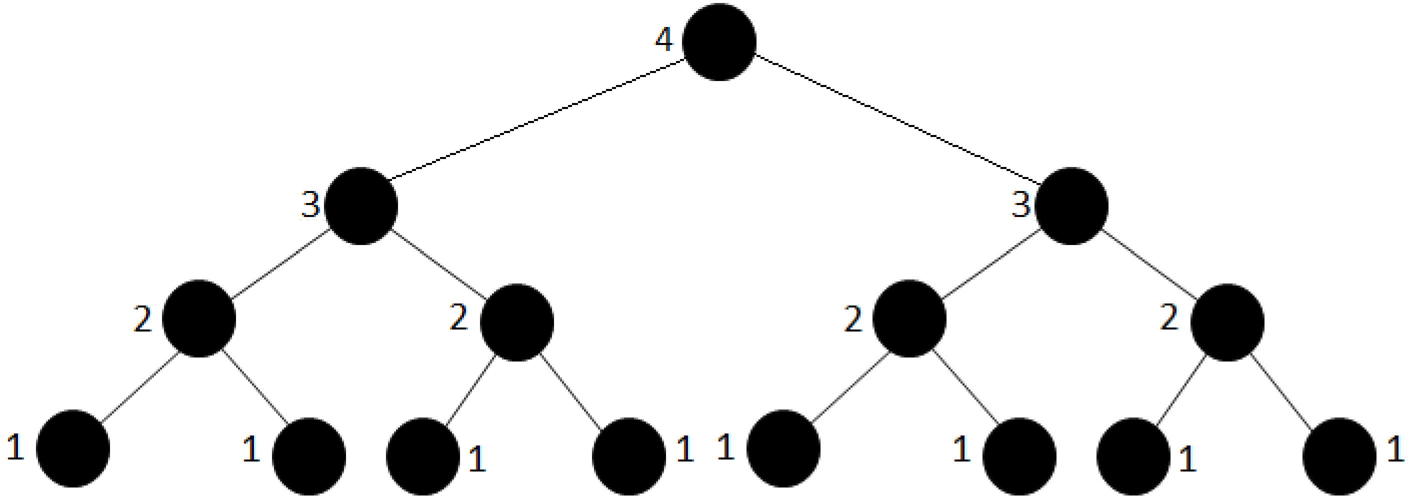
Quantidade mínima de nós internos

- <u>Exemplo:</u> para uma altura negra 4, o nó terá $2^4 - 1 = 15$



Quantidade mínima de nós internos

- Perceba que a quantidade mínima de nós para uma determinada altura negra é sempre uma árvore rubro negra formada apenas por nós negros.



Altura máxima

- Uma árvore rubro-negra com n nós tem no máximo altura $2 \log (n+1)$

- **Prova:** Se uma árvore tem altura h , a altura negra de sua raiz será no mínimo $h/2$ (pelo critério 3 de construção) e a árvore terá $n \geq 2^{h/2} - 1$ nós internos (Lema 1)
- Como consequência, a árvore tem altura $O(\log n)$ e as operações de busca, inserção e remoção podem ser feitas em $O(\log n)$

Inserção

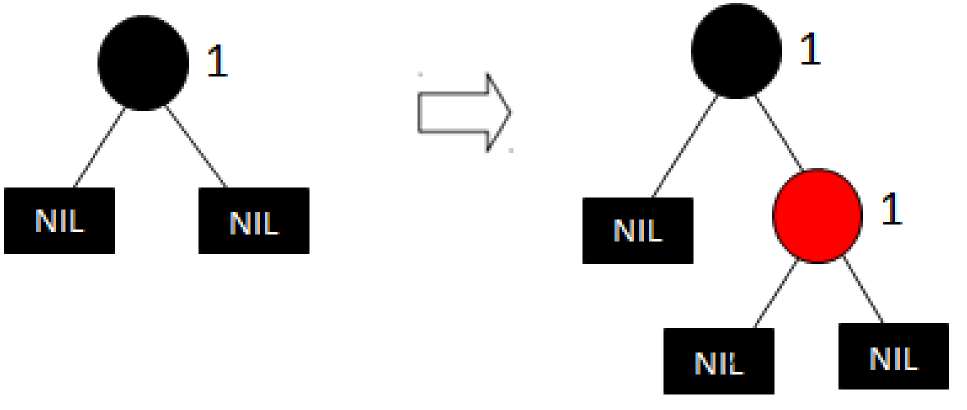
- Se inserir um nó x numa posição vazia da árvore, isto é, no lugar de um nó nulo/externo, o novo nó deverá ser pintado de rubro

- Se o novo nó é raiz, então pintar de negro

- Por que pintar de rubro ao inserir?

Inserção

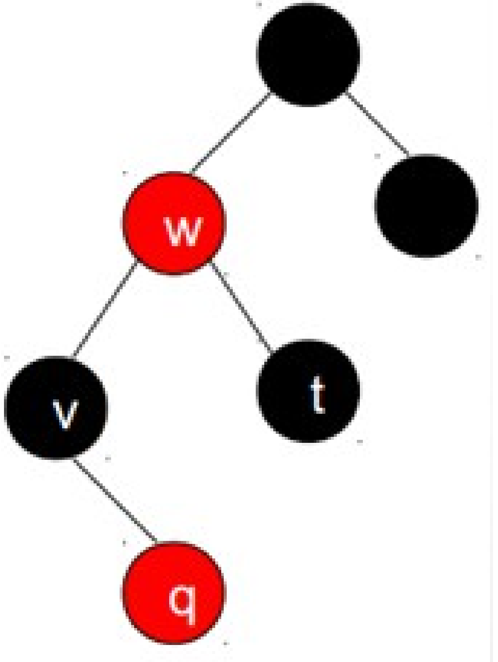
- Ao inserir um nó *x* numa posição vazia da árvore este é pintado de rubro.
- Isto garante a manutenção do critério (3), já que um nó rubro não contribui para a altura negra.



Inserção

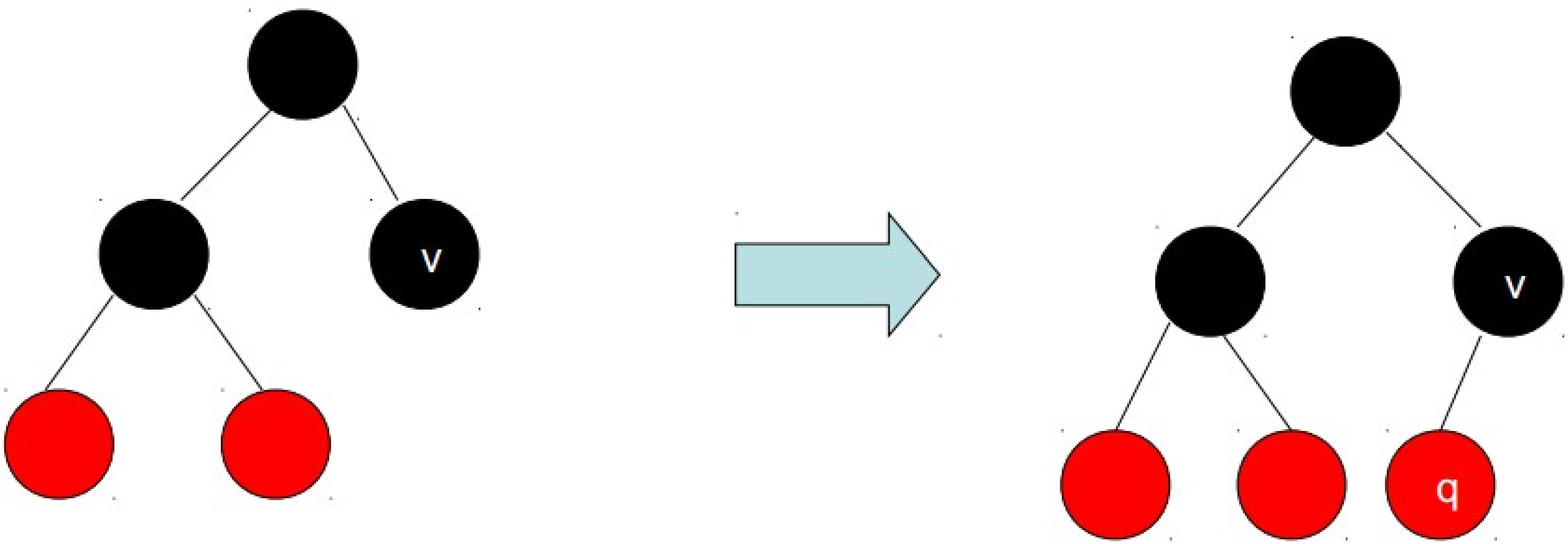
- Precisamos identificar alguns nós para verificar se as propriedades de árvore rubro negra foram mantidas depois da inserção.
- Vamos assumir que q é o nó inserido e q é rubro.

  - *v* é o pai de *q*
  - *w* é o pai de *v*
  - *t* é o irmão de *v*



Inserção

- **Caso 1 :** v é negro

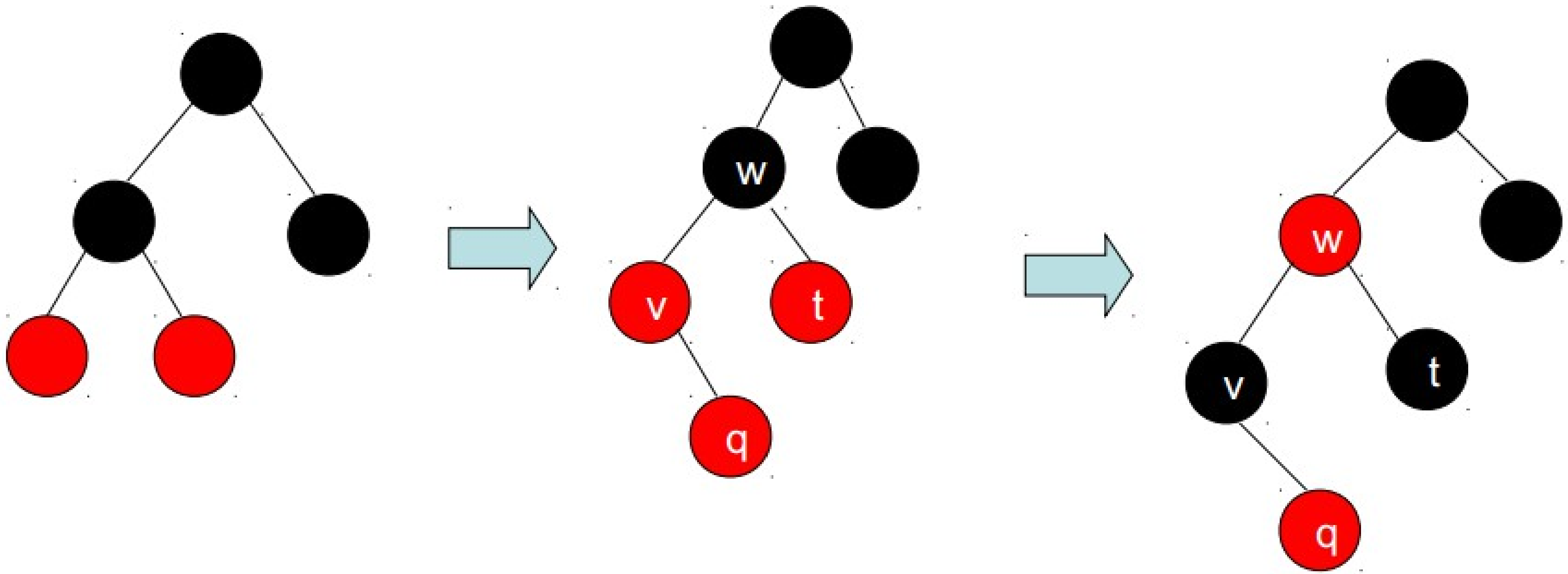


- Todas as propriedades foram mantidas. Inserção finalizada.
- Observe que se *q* não tem avô, então *v* é a raiz da árvore.

Inserção

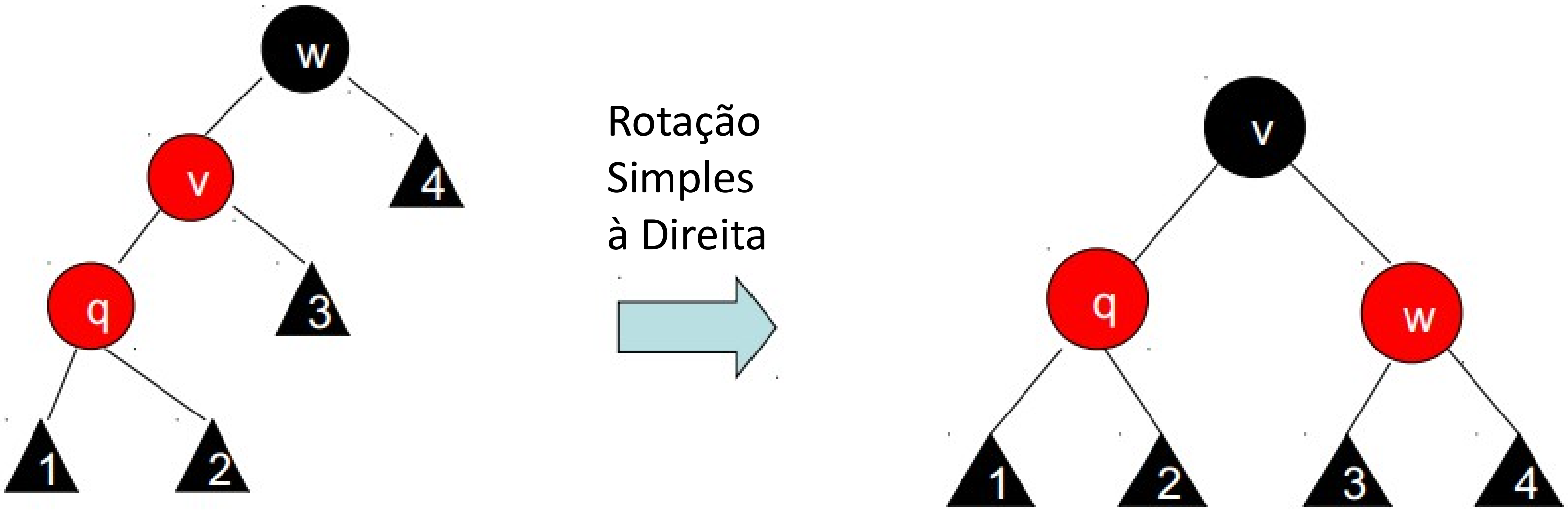
- **Caso 2 :** *v* é rubro, *w* é negro e *t* é rubro

- Para manter as propriedades de árvore rubro negras, precisamos alter a cor de *v, t* e *w* .



Inserção

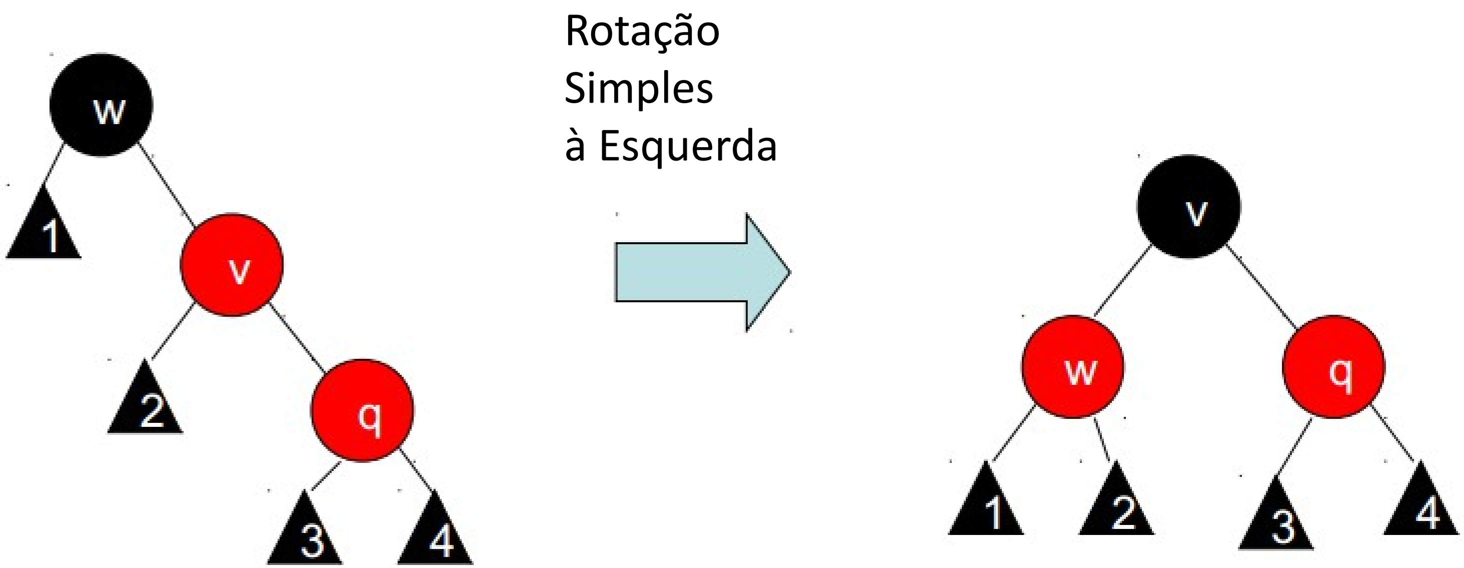
- Caso 3 : *v* é rubro, *w* é negro e *t* é negro
  - 3.1: *q* é filho esquerdo de *v*
  - *v* é filho esquerdo de *w*
  - Alteraremos a cor de *v* e *w*



  - Não há propagação.

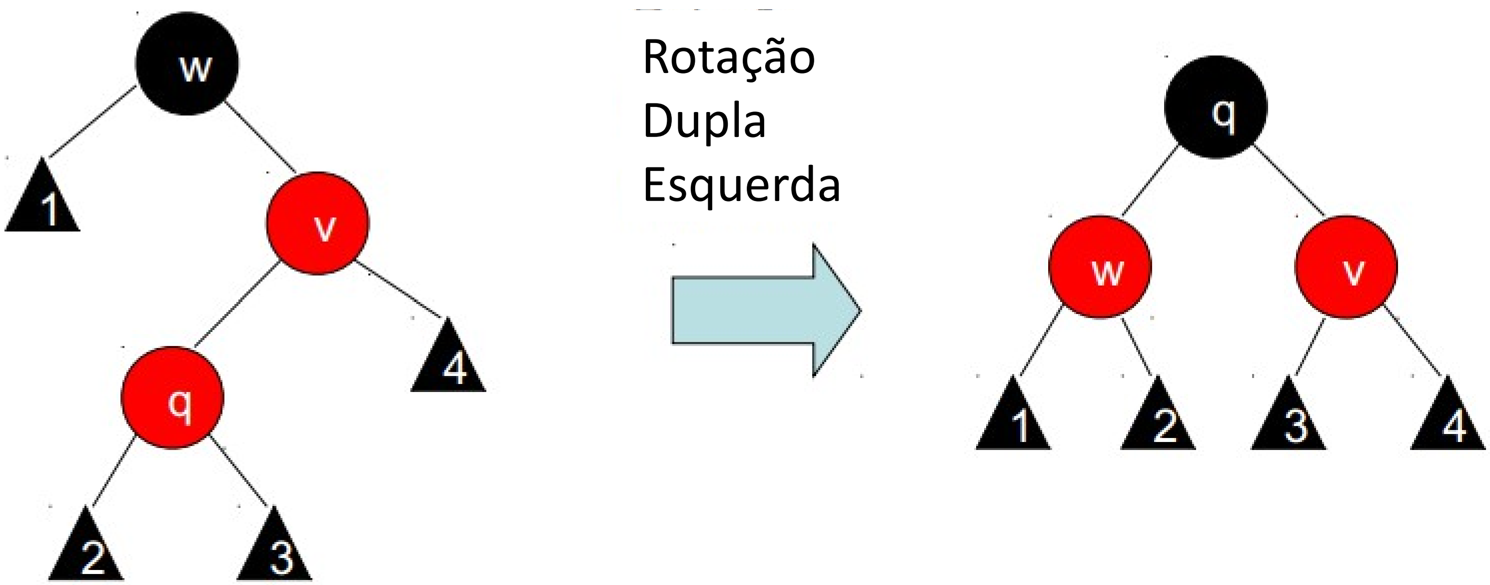
Inserção

- Caso 3 : *v* é rubro, *w* é negro e *t* é negro
  - 3.2 : *q* é filho direito de *v*
  - *v* é filho direito de *w*
  - Alteraremos a cor de *v* e *w* .



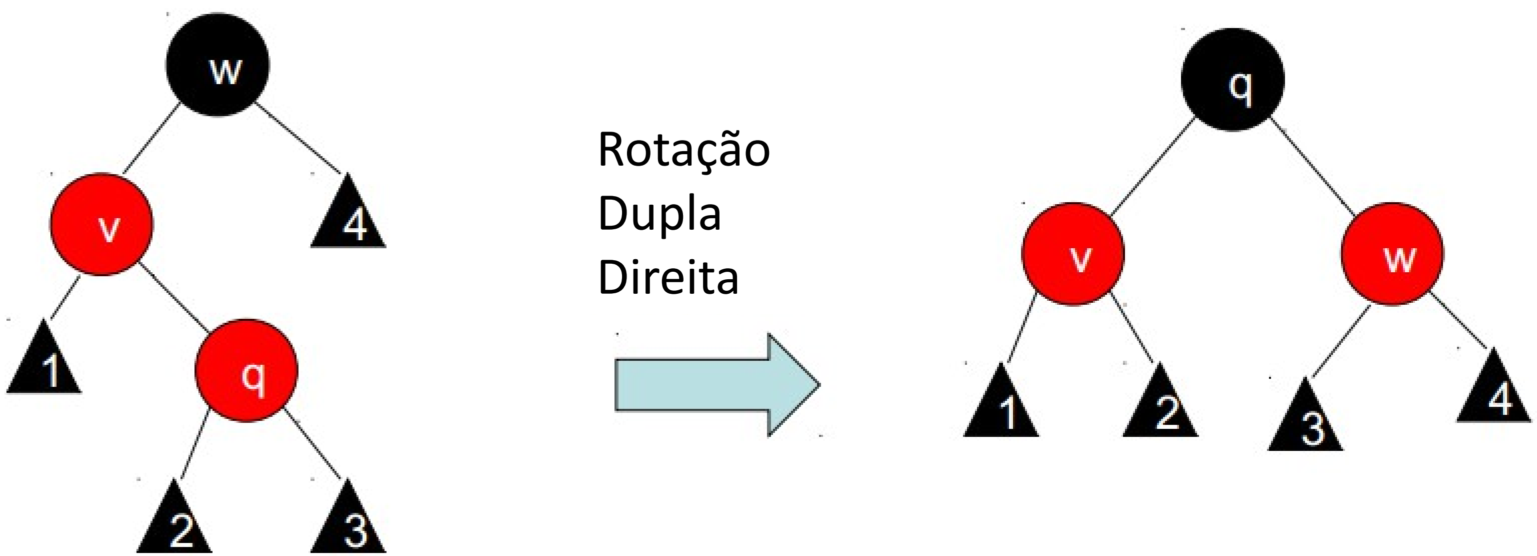
Inserção

- Caso 3 : *v* é rubro, *w* é negro e *t* é negro
  - 3.3: *q* é filho esquerdo de *v*
  - *v* é filho direito de *w* .
  - Alteraremos a cor de *q* e *w* .



Inserção

- Caso 3 : *v* é rubro, *w* é negro e *t* é negro
  - 3.4: *q* é filho direito de *v*
  - *v* é filho esquerdo de *w* .
  - Alteraremos a cor de *q* e *w* .



Complexidade da inserção

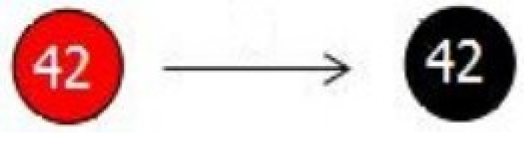
- Recolorir tem custo O(1)
- Rotação XXX têm custo O(1)
- Inserir tem custo O(log n)

Exemplo 1

- Inserir os nós: 42, 57,11 e 7 em uma árvore vazia:
  - 1. Inserção do nó 42

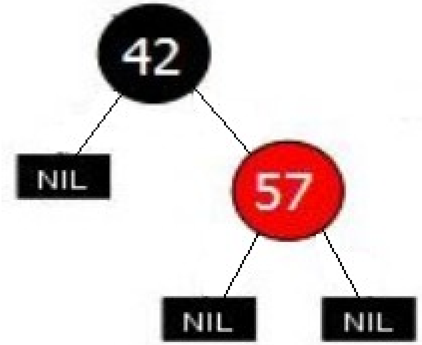
Exemplo 1

- Inserir os nós: 42, 57,11 e 7 em uma árvore vazia:
  - 2. Toda a raiz de uma árvore rubro-negra deve ser negra, então devemos recolorir o nó 42.



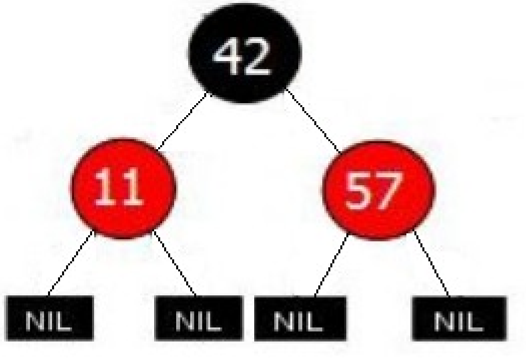
Exemplo 1

- Inserir os nós: 42, 57,11 e 7 em uma árvore vazia:
  - 3. Inserção do nó 57. Uma vez que o pai do nó inserido é negro, nenhuma propriedade foi violada.



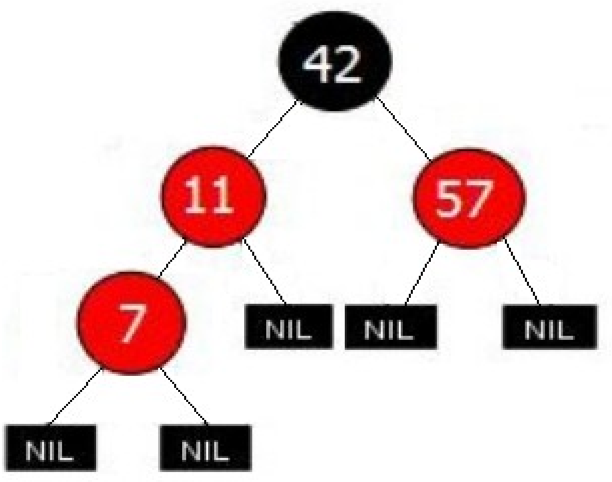
Exemplo 1

- Inserir os nós: 42, 57,11 e 7 em uma árvore vazia:
  - 4. Inserção do nó 11. Uma vez que o pai do nó inserido é negro, nenhuma propriedade foi violada.



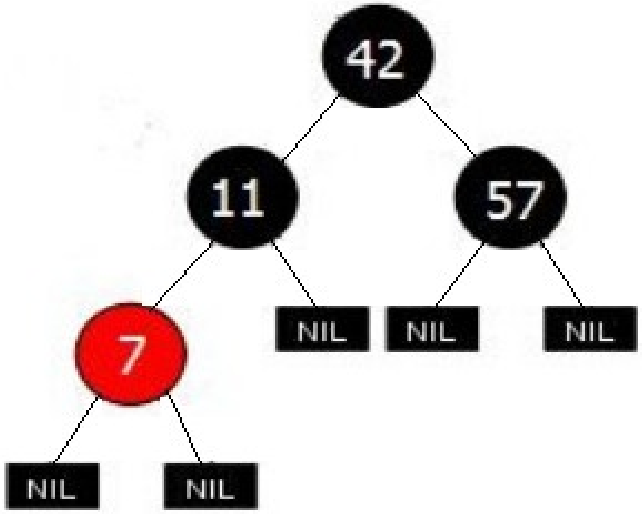
Exemplo 1

- Inserir os nós: 42, 57,11 e 7 em uma árvore vazia:
  - 5. Inserção do nó 7. A propriedade de árvore rubro-negras que dita que todos os nós rubros devem possuir filhos negros foi violada.



Exemplo 1

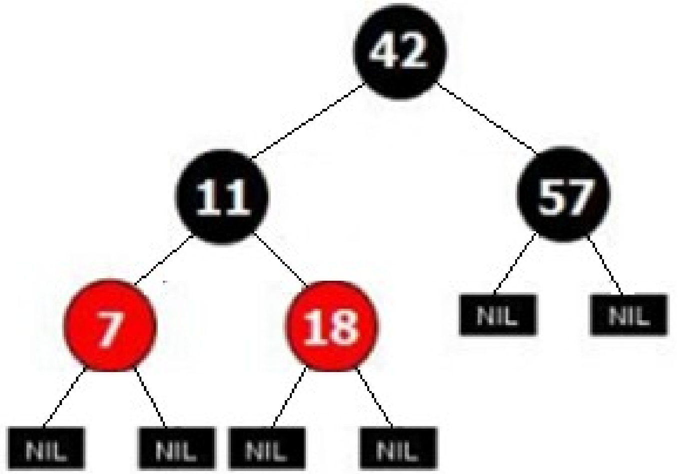
- Inserir os nós: 42, 57,11 e 7 em uma árvore vazia:
  - 6. Como o tio (57) e o pai (11) do nó inserido são rubros, a árvore é recolorida.



  - Obs: A raiz ficou vermelha na recoloração inicial (caso 1) , então ela é novamente pintada de negro.

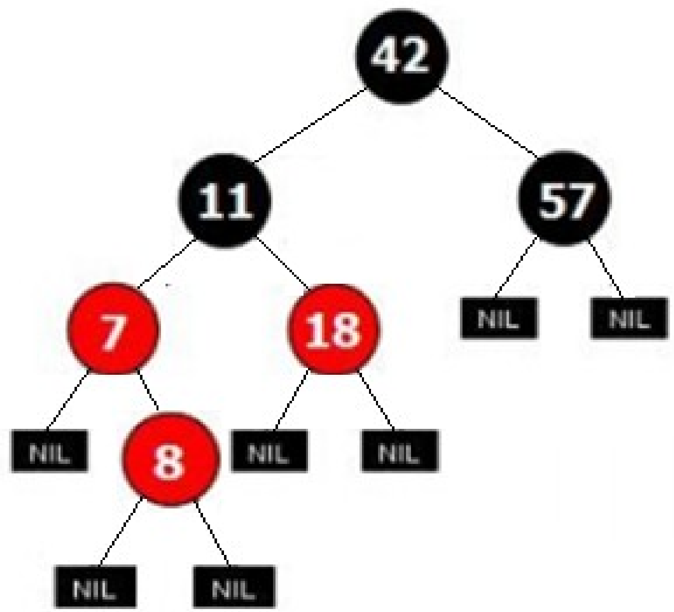
Exemplo 2

- Inserção do nó 8:
  - 1. Árvore Inicial



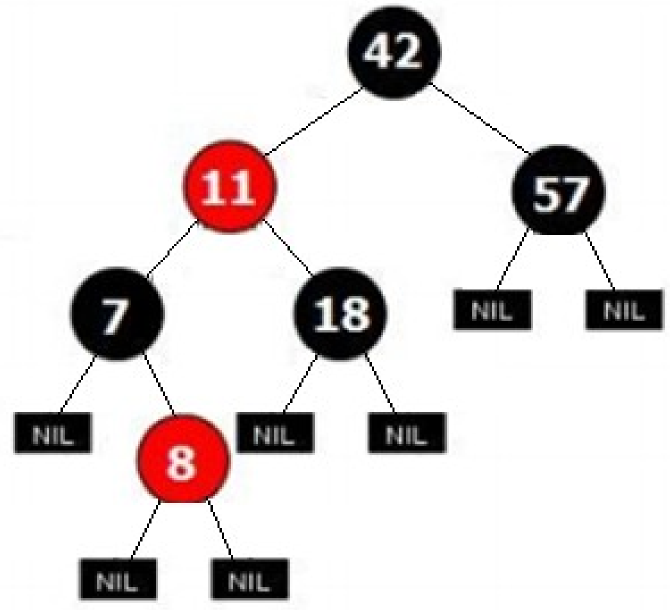
Exemplo 2

- Inserção do nó 8:
  - 2. Inserção do nó. A propriedade de árvore rubro-negras que dita que todos os nós rubros devem possuir filhos negros foi violada.



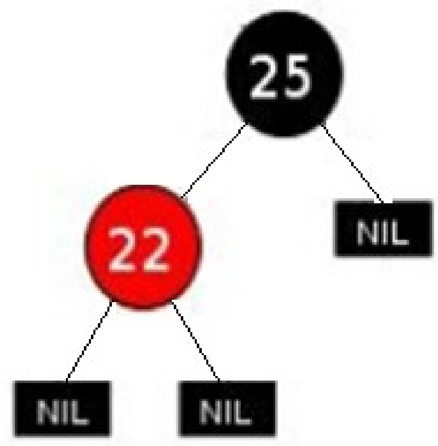
Exemplo 2

- Inserção do nó 8:
  - 3. Como o tio (18) e o pai (7) do nó inserido são rubros, a árvore é recolorida.



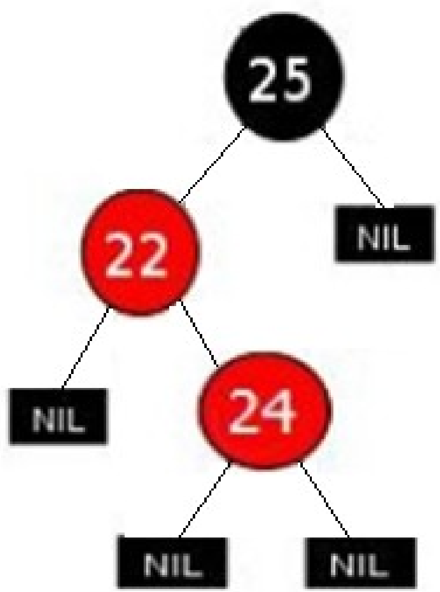
Exemplo 3

- Inserção do nó 24:
  - 1. Árvore inicial



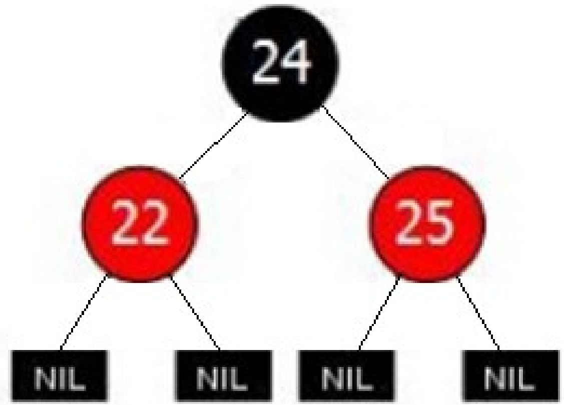
Exemplo 3

- Inserção do nó 24:
  - 2. Inserção do nó. A propriedade de árvore rubro-negras que dita que todos os nós rubros devem possuir filhos negros foi violada.



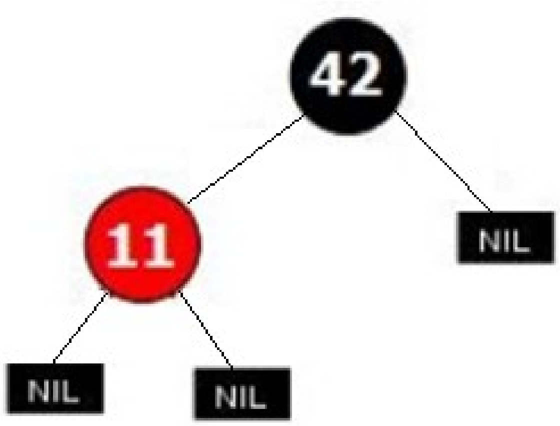
Exemplo 3

- Inserção do nó 24:
  - 3. Uma vez que o tio (null) do nó inserido é negro e o nó inserido é filho direito, fazemos uma rotação dupla direita.



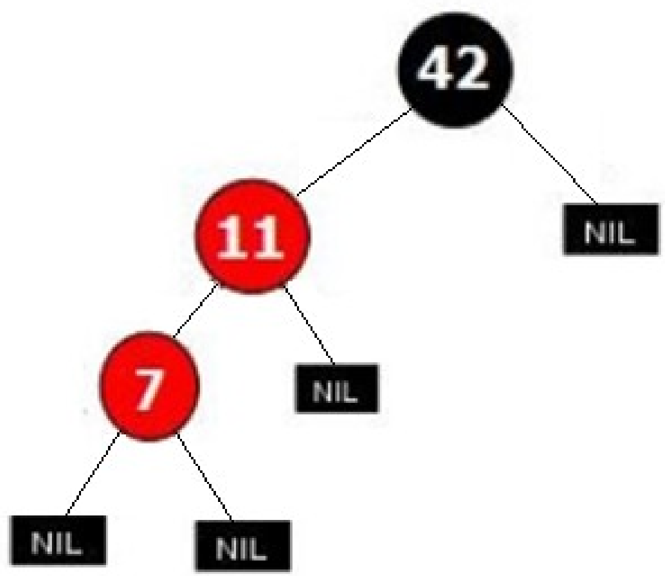
Exemplo 4

- Inserção do nó 7:
  - 1. Árvore inicial



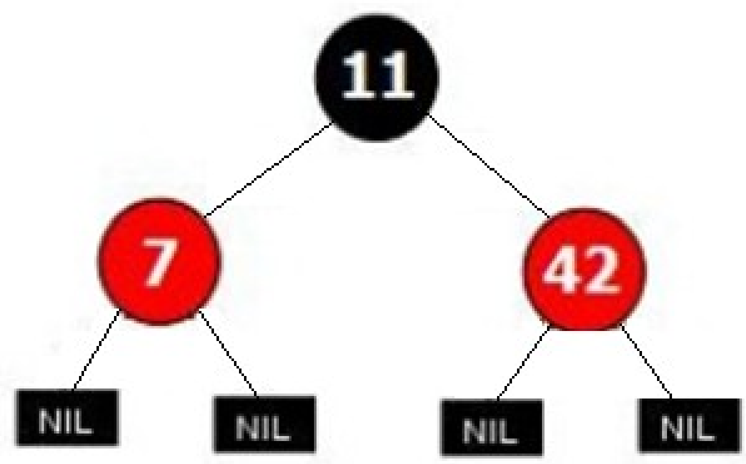
Exemplo 4

- Inserção do nó 7:
  - 2. Inserção do nó. A propriedade de árvore rubro-negras que dita que todos os nós rubros devem possuir filhos negros foi violada.



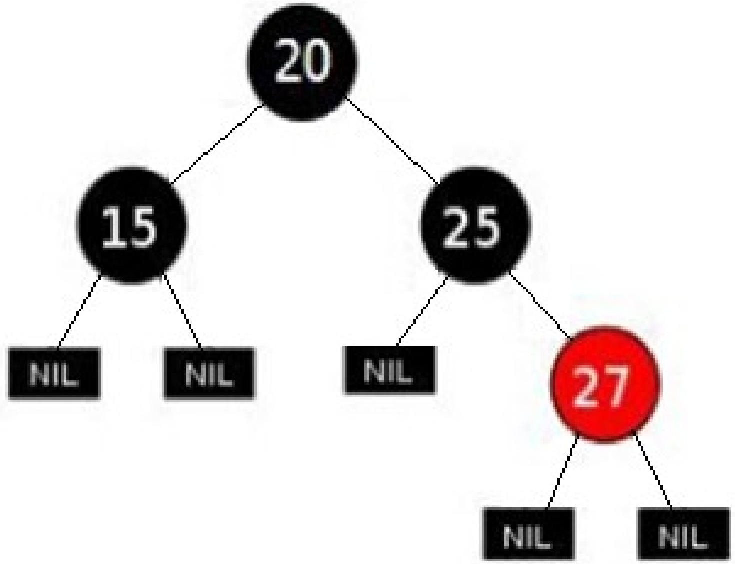
Exemplo 4

- Inserção do nó 7:
  - 3. Uma vez que o tio (null) do nó inserido é negro e o nó inserido é filho esquerdo, fazemos uma rotação direita.



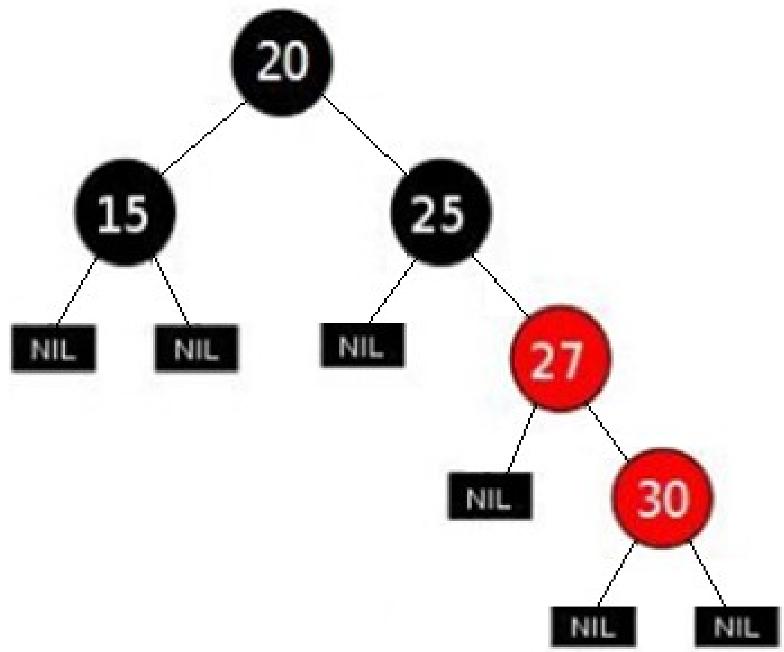
Exemplo 5

- Inserção do nó 30:
  - 1. Árvore inicial



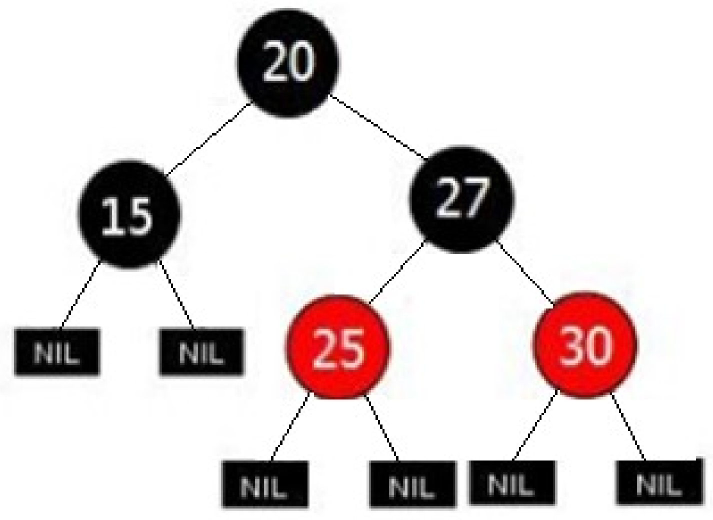
Exemplo 5

- Inserção do nó 30:
  - 2. Inserção do nó. A propriedade de árvore rubro-negras que dita que todos os nós rubros devem possuir filhos negros foi violada.



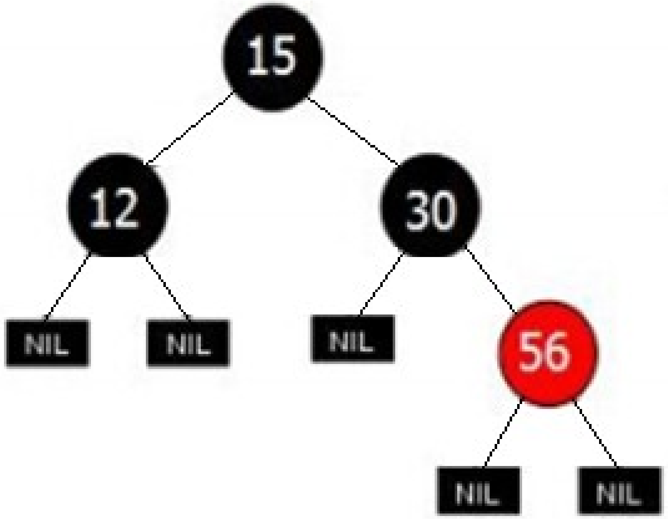
Exemplo 5

- Inserção do nó 30:
  - 3. Uma vez que o tio (null) do nó inserido é negro e o nó inserido é filho direito, fazemos uma rotação esquerda.



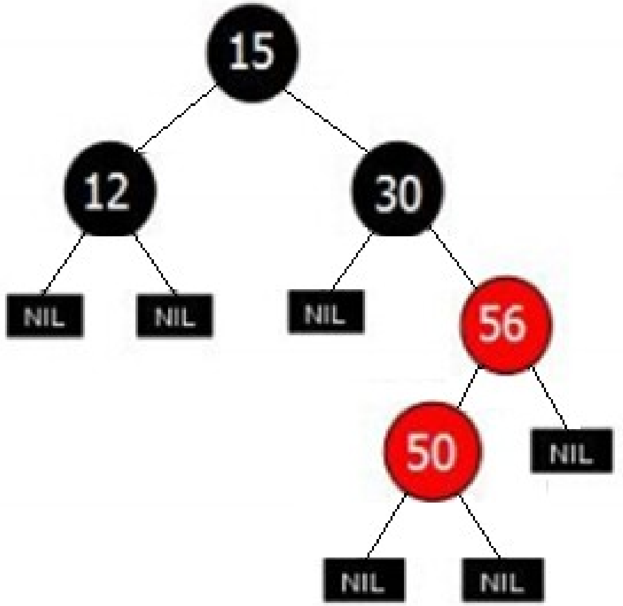
Exemplo 6

- Inserção do nó 50:
  - 1. Árvore Inicial



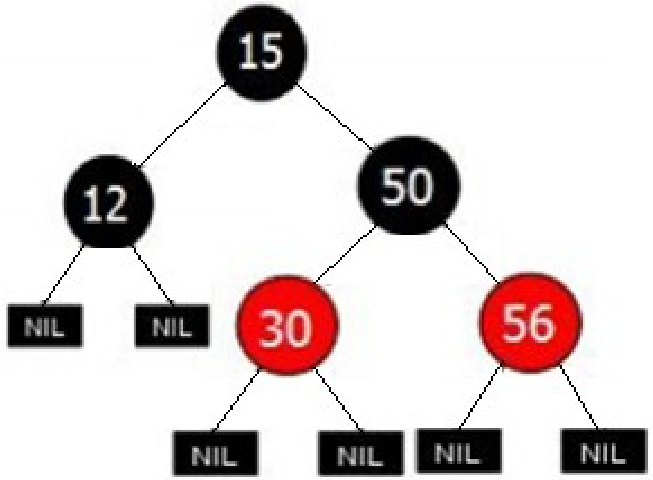
Exemplo 6

- Inserção do nó 50:
  - 2. Inserção do nó. A propriedade de árvore rubro-negras que dita que todos os nós rubros devem possuir filhos negros foi violada.



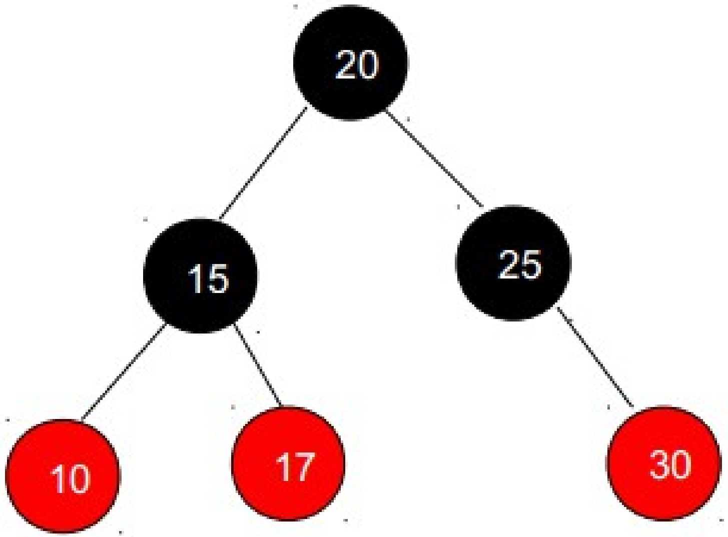
Exemplo 6

- Inserção do nó 50:
  - 3. Uma vez que o tio (null) do nó inserido é negro e o nó inserido é filho esquerdo, fazemos uma rotação dupla esquerda.



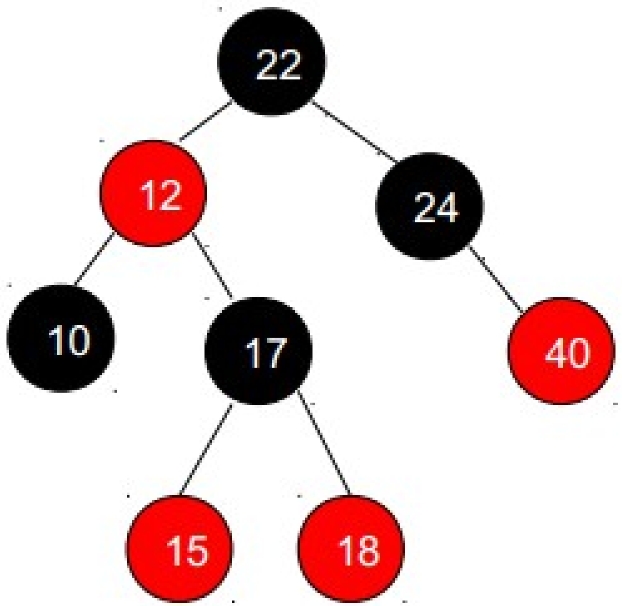
Exercício 1

- Inserir 19



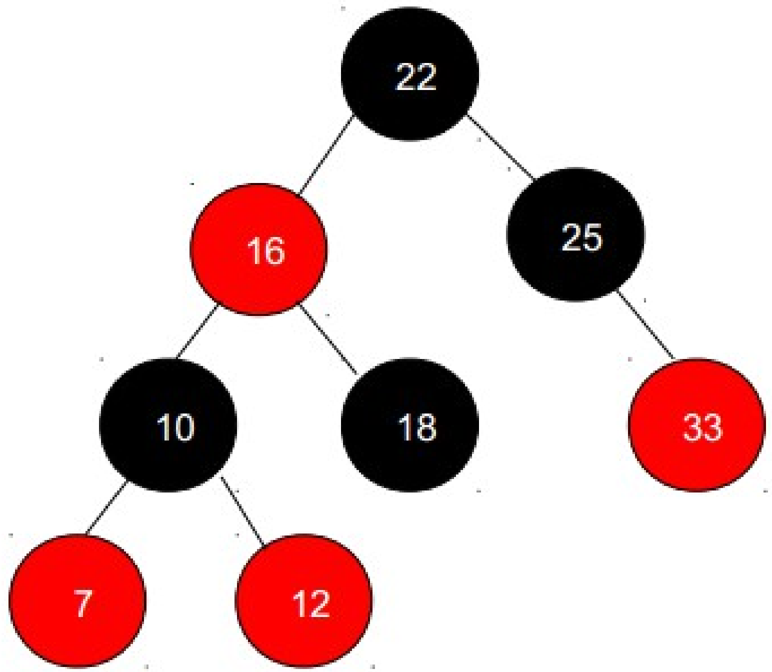
Exercício 2

- Inserir 14



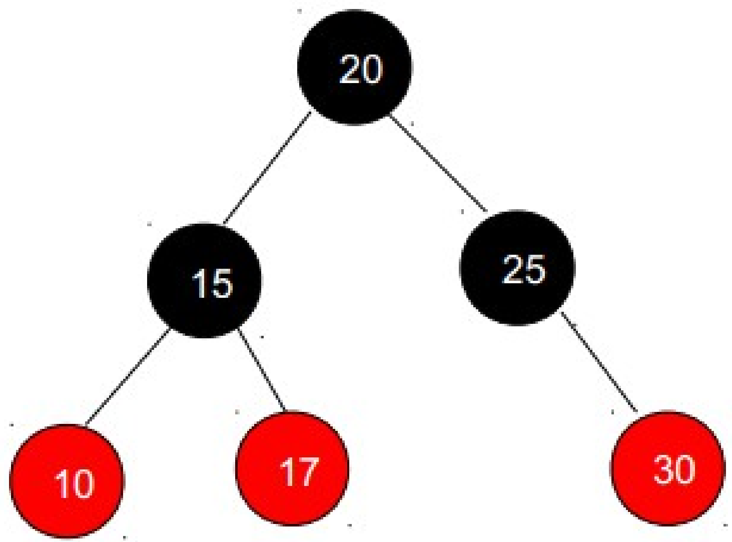
Exercício 3

- Inserir 11



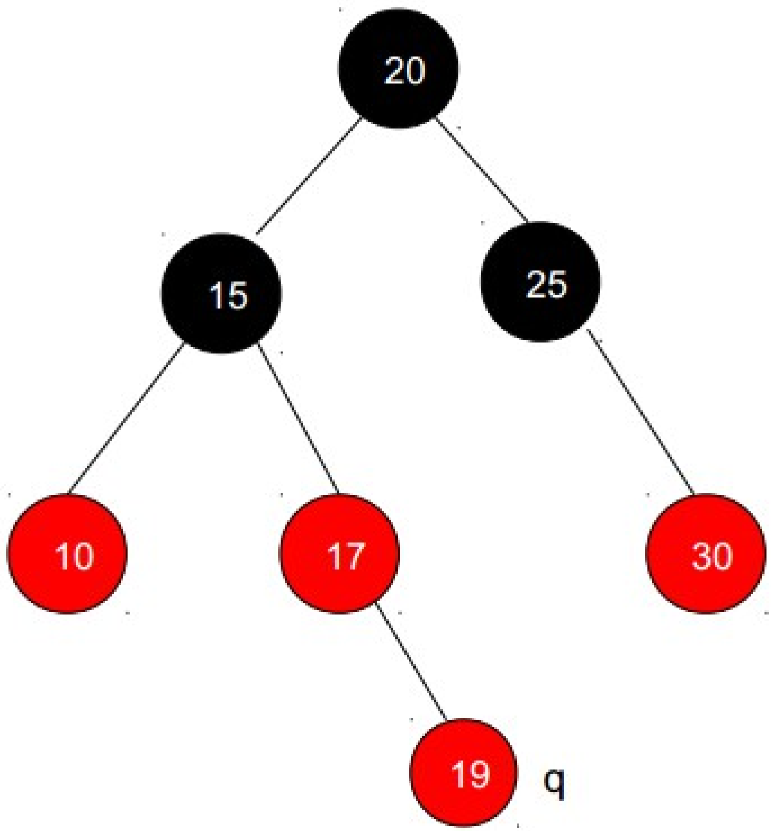
Exercício 1

- Inserir 19



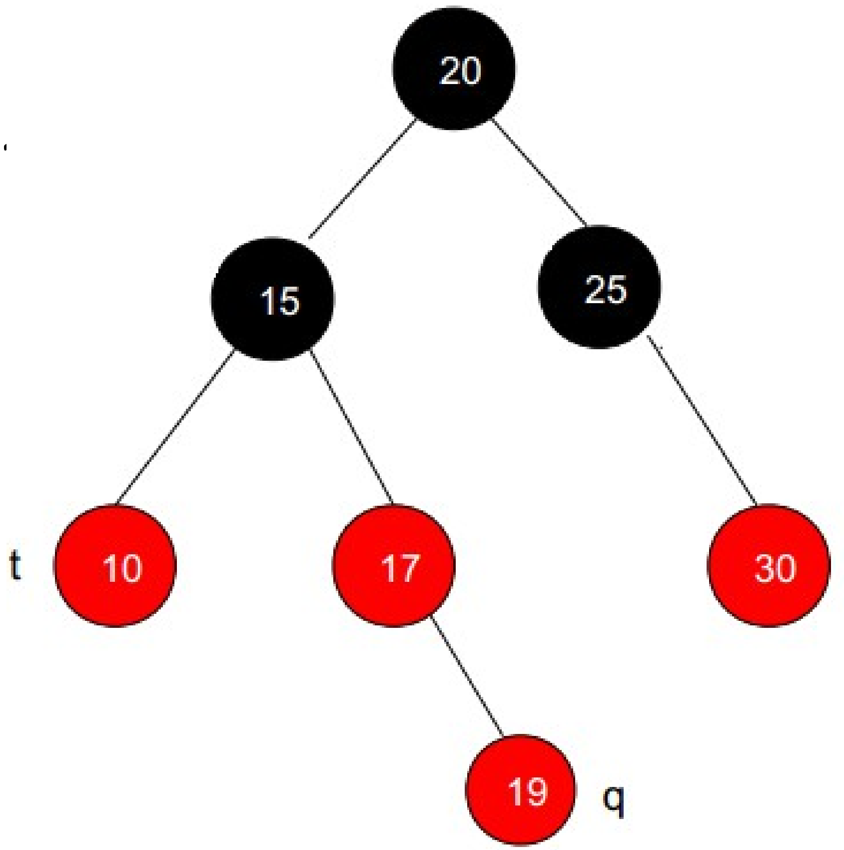
Exercício 1

- Caso ?



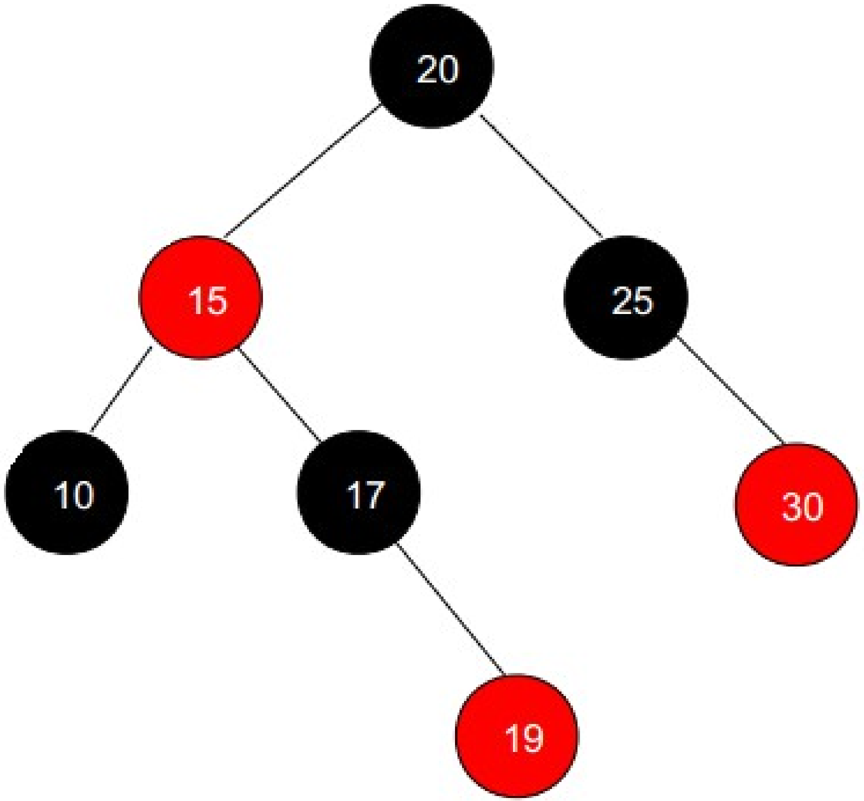
Exercício 1

- Caso 2.
- Solução



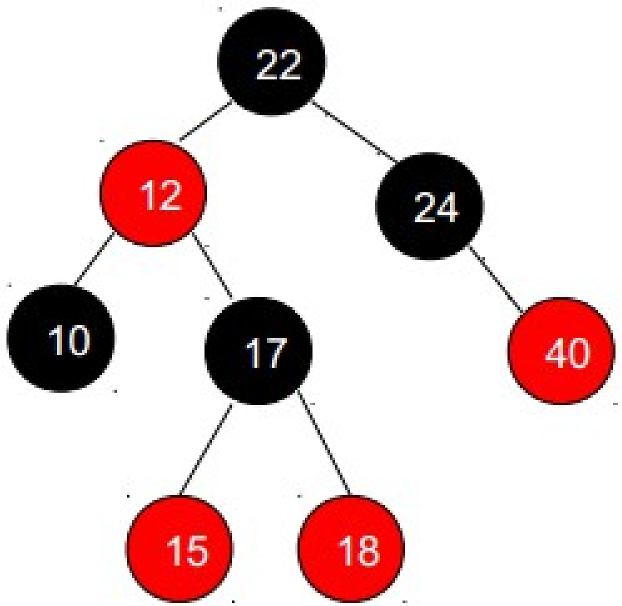
Exercício 1

- Caso 2.
- Recoloração



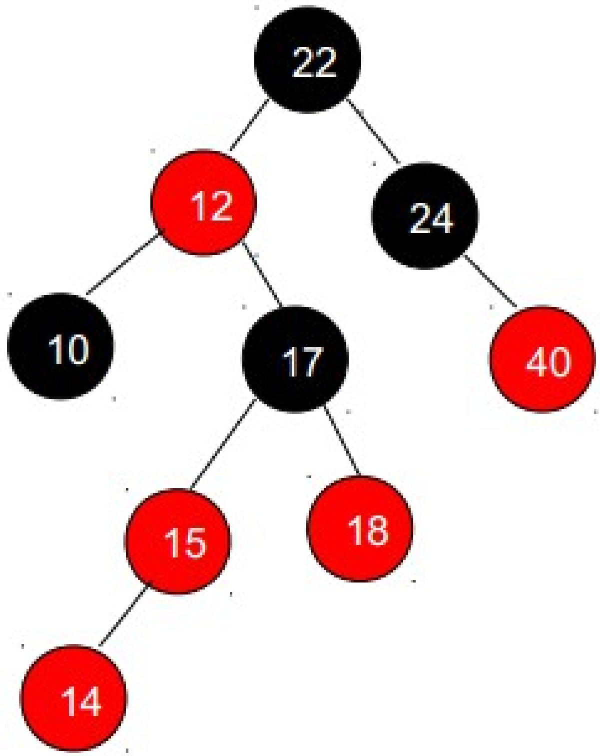
Exercício 2

- Inserir 14



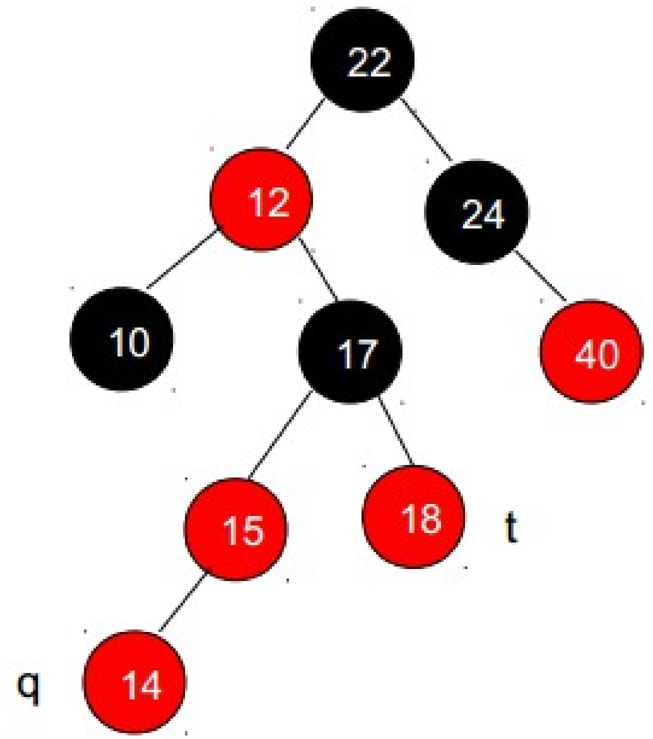
Exercício 2

- Caso ?



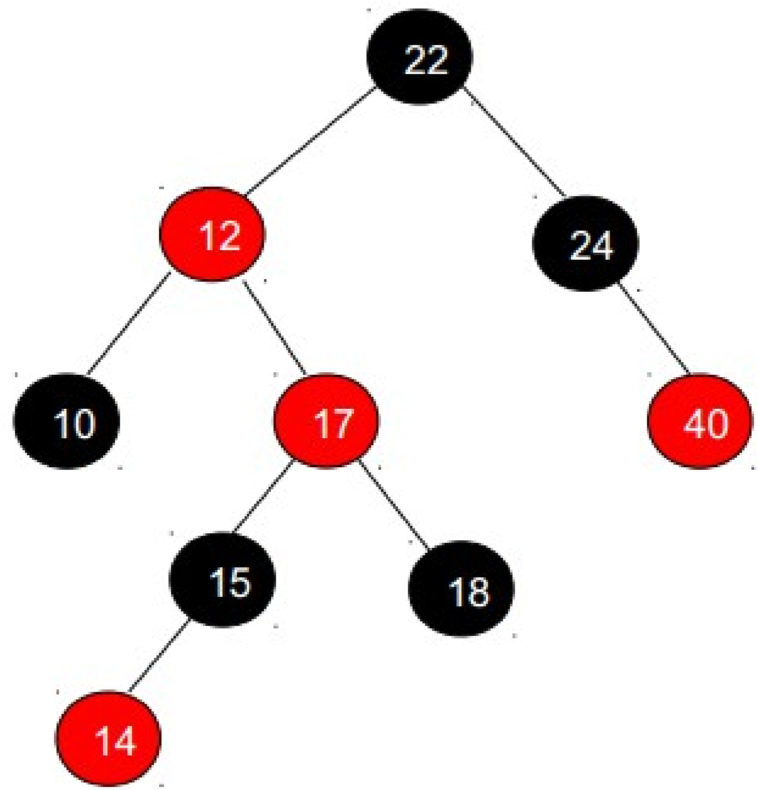
Exercício 2

- Caso 2
- Solução ?



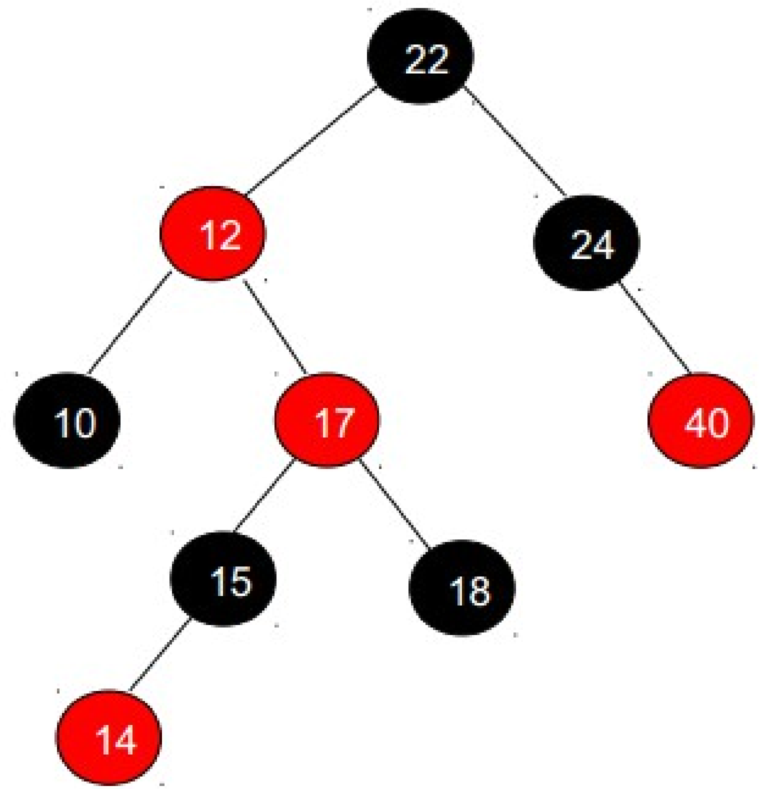
Exercício 2

- Caso 2
- Recoloração



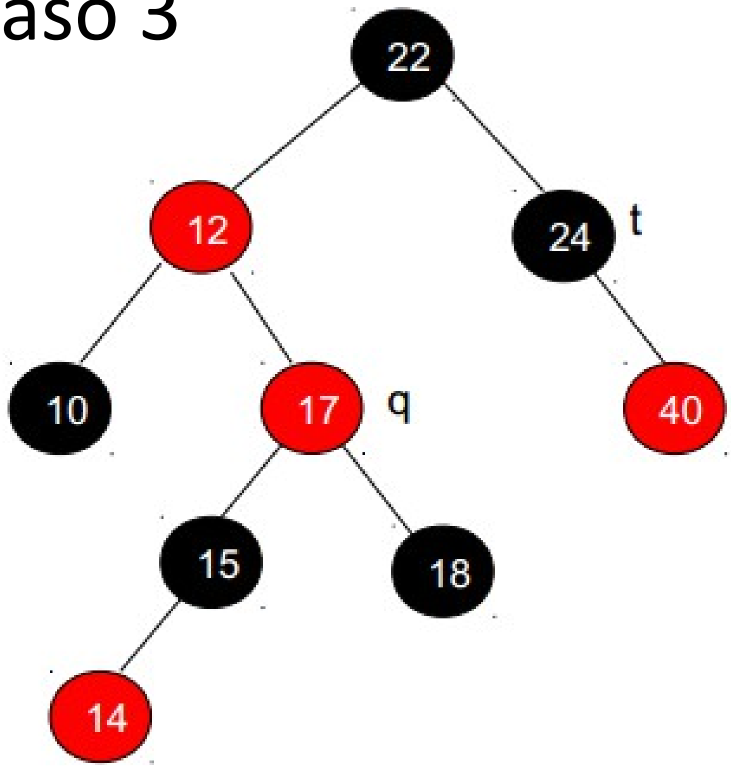
Exercício 2

- Propagação
- Novo caso. Qual?
- Identificar novo q



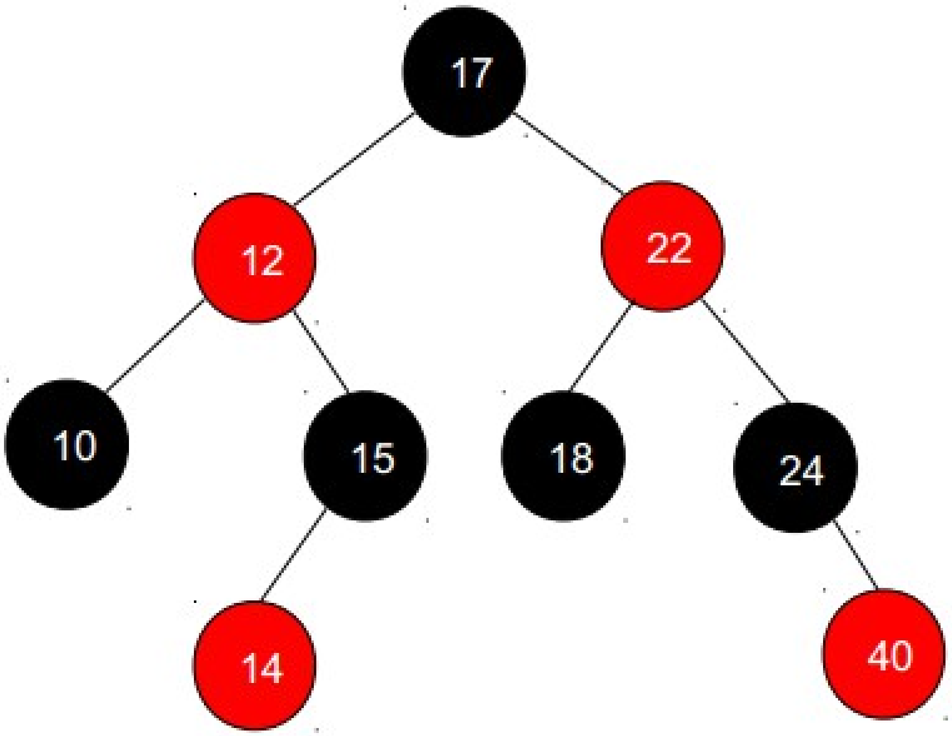
Exercício 2

- Caso 2 → caso 3
- Solução ?



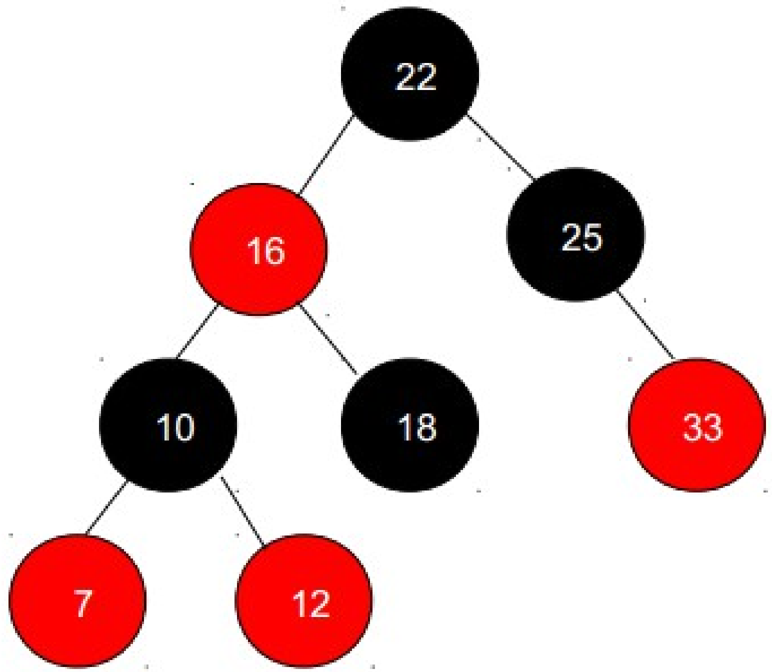
Exercício 2

- Rotação Dupla Direita



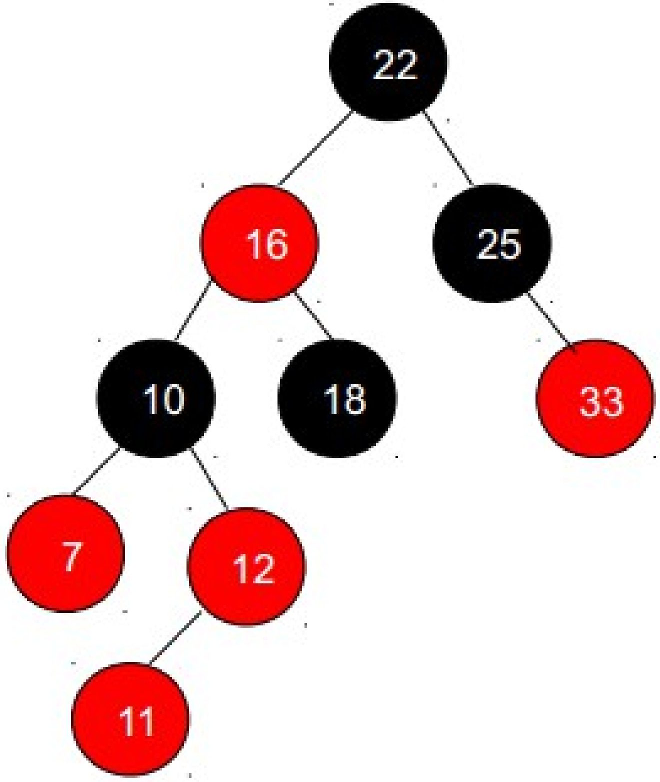
Exercício 3

- Inserir 11



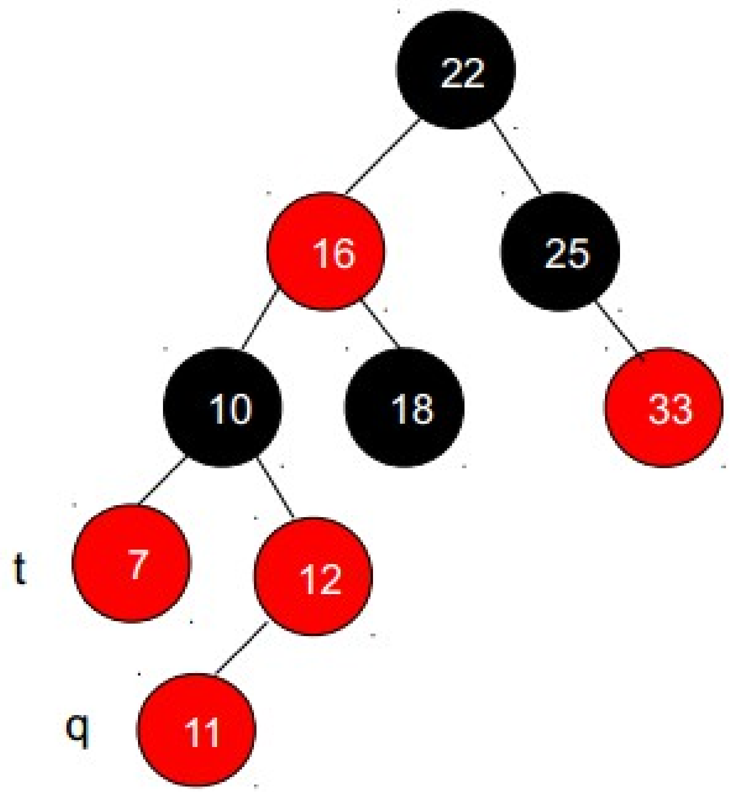
Exercício 3

- Caso ?



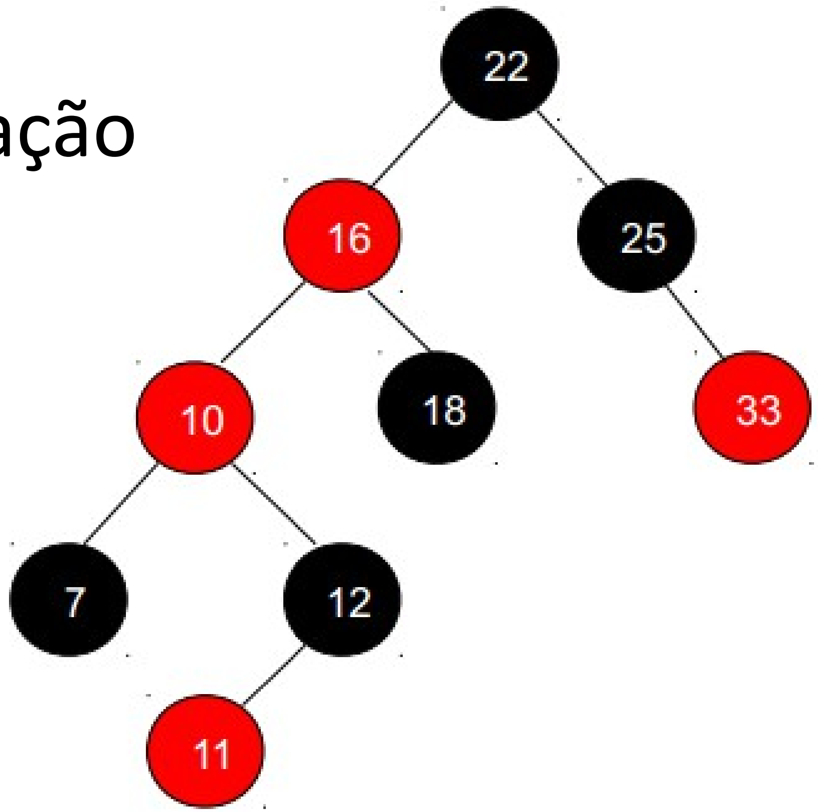
Exercício 3

- Caso 2
- Solução ?



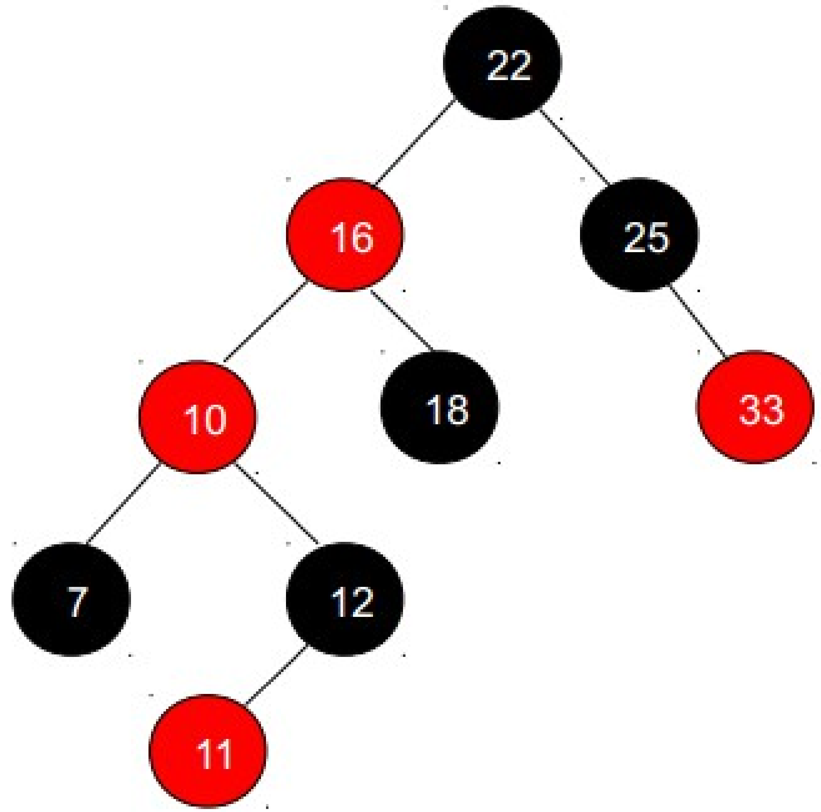
Exercício 3

- Caso 2
- Recoloração



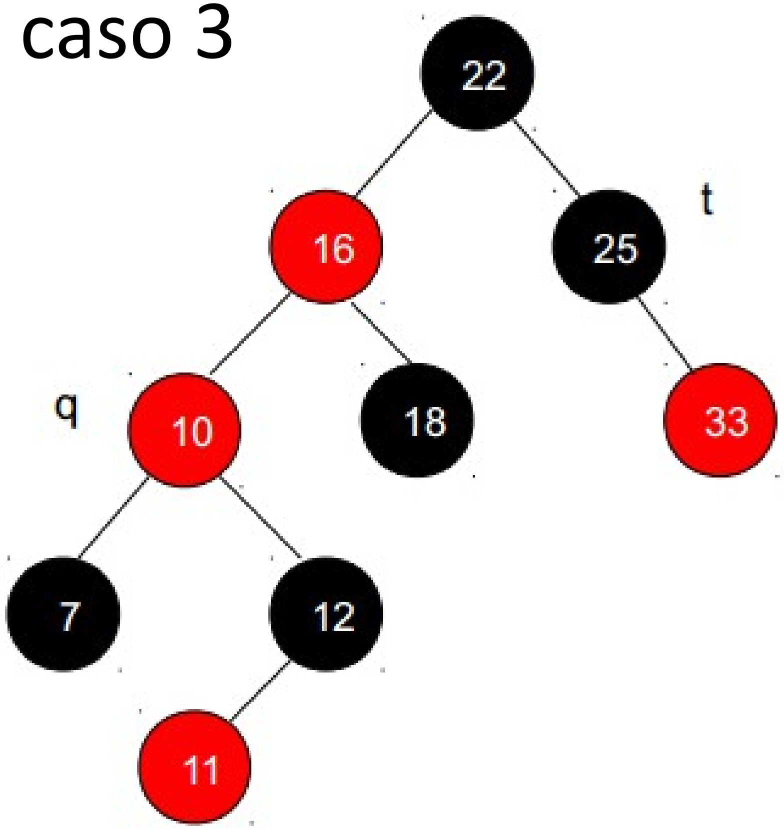
Exercício 3

- Propagação
- Novo caso. Qual?
- Identificar novo q



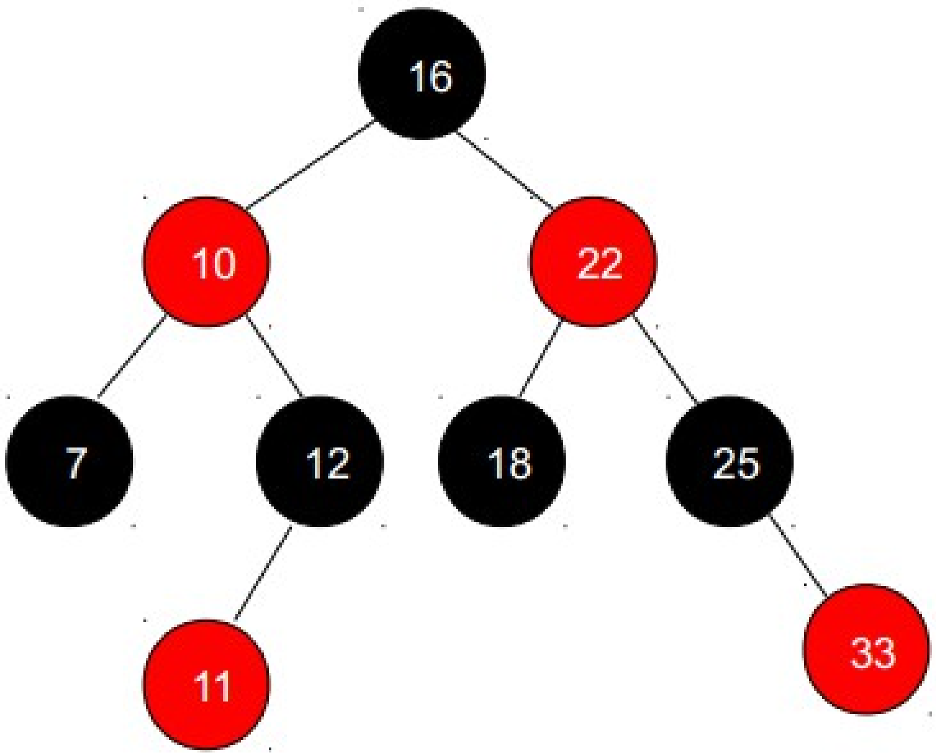
Exercício 3

- Caso 2 → caso 3
- Solução?



Exercício 3

- Rotação Simples Direita



Comparação

Árvore	AVL	Rubro Negra
Fator de balanceamento	Cada nó possui um campo bal, que pode ser 0 (balanceada), 1 (desbalanceada a direita) e -1 (desbalanceada a esquerda).	Cada nó possui um campo cor que pode ser rubro ou negro.
Método de balanceamento	Se uma subárvore de um nó estiver 2 níveis maior que a outra subárvore (bal = 1 ou -1) ocorre uma rotação.	Caso haja dois nós rubros consecutivos ou a quantidade de nós negros até qualquer folha não sejam iguais ocorre uma rotação e, se preciso troca de cores.
Tolerância de desbalanceamento	Uma subárvore pode estar 1 nível maior que a outra subárvore de um nó	Uma subárvore não pode estar 2 vezes maior que a outra subárvore de um nó.
Crescimento	De cima pra baixo (raiz → folhas)	De cima pra baixo (raiz → folhas)

Ferramenta de animação

- http://gauss.ececs.uc.edu/RedBlack/redblack.html