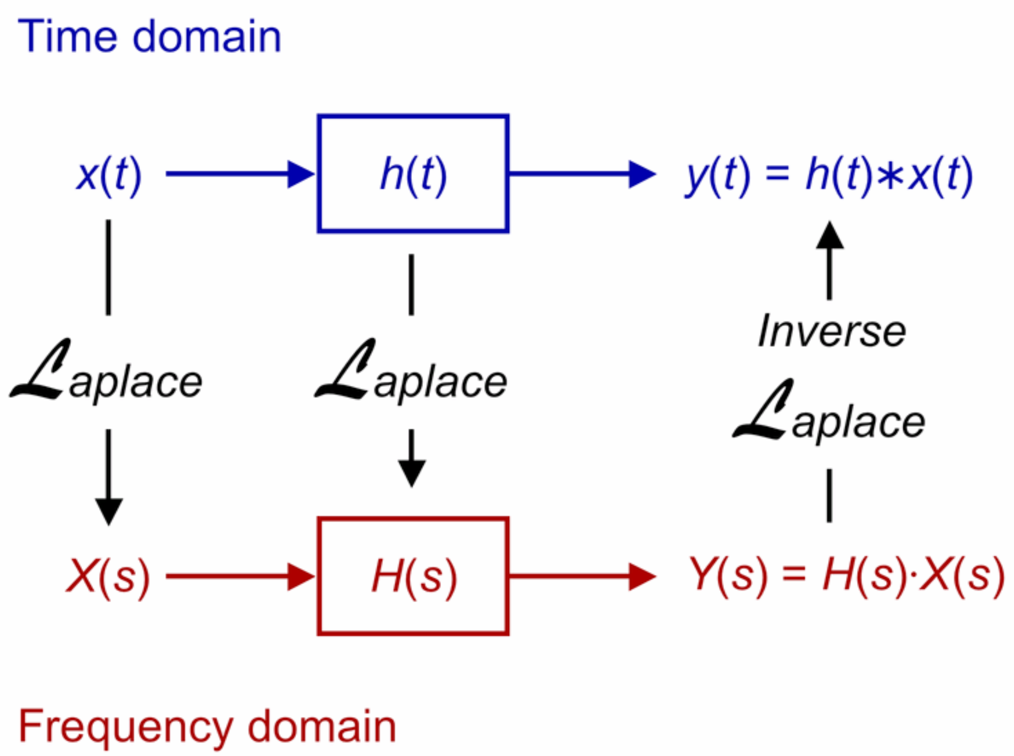
MAK312
Sistem Dinamiği ve Kontrol

2007-2008 GÜZ DÖNEMİ

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ (LAPLACE TRANSFORM)

- Lineer sistemlerin modellenmesi ve analizi için kullanılan en önemli araçlardan birisi Laplace Transform'udur (Laplace Dönüşümü).
- Laplace transformunun gücü lineer diferansiyel denklemleri cebirsel denklemlere dönüştürmesinde yatar.
- Bu transform sistem dinamiği dersinde çok kullanıldığı için en başlarda çalışılması gereken bir konudur.



LAPLACE TRANSFORM

- Bir zaman fonksiyonu *f(t)*'nin Laplace trasformu, *f(t)* fonksiyonunu e^{-st} ile çarparak elde edilen terimin *t=0*'dan *t=∞* a kadar integralini alarak bulunur.
- Sonuç komplex bir sayı olan Laplace değişkeni s'nin fonksiyonu olup kısaca *F(s)*=**L**[f(t)] şeklinde gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F(s) = \mathbf{L}\,[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Doğrusallık özelliği

$$L\left[af(t)+bg(t)\right]=\int_0^\infty \left[af(t)+bg(t)\right]e^{-st}dt$$

$$= a\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt + b\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt$$
$$= aF(s)+bG(s)$$

Bazı temel fonksiyonların Laplace transformu: Exponensiyel Fonksiyon

$$f(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ Ae^{-\alpha t} & t>0 \end{cases}$$

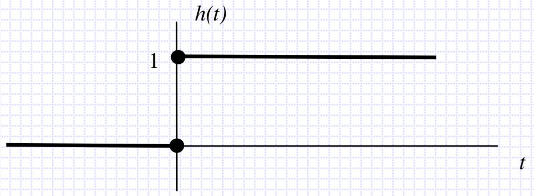
$$L[f(t)] = \int_0^\infty Ae^{-\alpha t}e^{-st}dt = A\int_0^\infty e^{-(s+\alpha)t}dt = \frac{A}{s+\alpha}$$

Assumption: $s > -\alpha$

Birim Basamak Fonksiyonu

- Birim basamak fonksiyonu aşağıdaki şekildedir:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

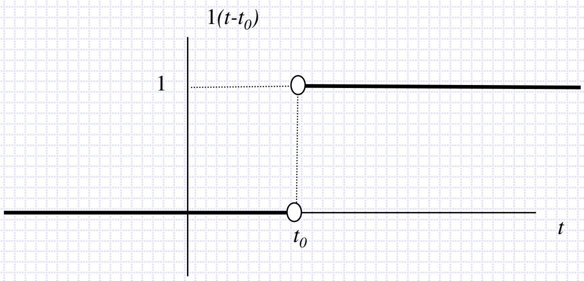


- Bu fonksiyonun Laplace transformu:

$$\mathbf{L}\,[\,h(t)\,] = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Birim Basamak Fonksiyonu

- Birim basamak fonksiyon *1(t)* olarak da ifade edilebilir. $t=t_0$ anında oluşan birim basamak fonksiyon için $1(t-t_0)$ kullanılır.

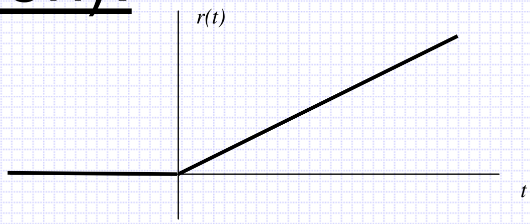


$$L[\,1(t-t_0)\,] = \int_0^{\infty} 1(t-t_0)e^{-st}dt$$

$$= \int_{t_0}^{\infty} e^{-st}dt$$

$$= -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{t_0}^{\infty} = \frac{1}{s}e^{-st_o}$$

Rampa Fonksiyonu (Ramp Function):



$$r(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ at & t\geq 0\end{cases}$$

$$L[r(t)]=\int_0^\infty r(t)e^{-st}dt=a\int_0^\infty te^{-st}dt$$

Bu integrali çözebilmek için parçalı integralleme yöntemi (Integration by Parts) uygulanmalıdır.

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du$$

u=t ve *dv=e*

$u=t$ ve $dv=e^{-st}dt$ *alırsak:*

$$v=-\frac{e^{-st}}{s}$$

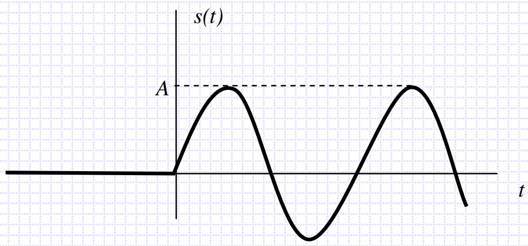
$$\mathbf{L}[r(t)]=a\int_0^\infty te^{-st}dt=a\left[\underbrace{t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Bigg|_0^\infty}_{0}-\int_0^\infty\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)dt\right]$$

$$=\frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt$$

$$=\frac{a}{s^2}$$

Sinüs Fonksiyonu (Sinusoidal Function):

$$s(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ A\sin(\omega t) & t\geq 0\end{cases}$$



$$\mathbf{L}[s(t)]=\int_0^\infty s(t)e^{-st}dt$$

$$=A\int_0^\infty \sin(\omega t)e^{-st}dt$$

Bu integrali çözebilmek için sinüs fonksiyonunu $\sin(\omega t)=\frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}\right)$ şeklinde yazabiliriz

$$\mathbf{L}[s(t)]=A\int_0^\infty \sin(\omega t)e^{-st}dt$$

$$=\frac{A}{2i}\int_0^\infty\left(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}\right)e^{-st}dt$$

$$=\frac{A}{2i}\frac{1}{s-i\omega}-\frac{A}{2i}\frac{1}{s+i\omega}$$

$$\boxed{L[a\sin(\omega t)]=\frac{a\omega}{s^2+\omega^2}}$$

Benzer şekilde cosinüs fonsiyonununda Laplace transformunu bulabiliriz

$$\boxed{L[A\cos(\omega t)]=\frac{As}{s^2+\omega^2}}$$

LAPLACE TABLOLARI

- Bu örneklerde olduğu gibi verilen fonksiyonları e^{-st} ile çarparak 0 dan ∞ a integralini aldığımızda Laplace transformunu bulabiliriz ancak bu her zaman pratik bir yöntem değildir.
- Bunun yerine hazırlanan Laplace Transform tablolarını kullanarak birçok fonksiyonun transformu hesaplanabilir.

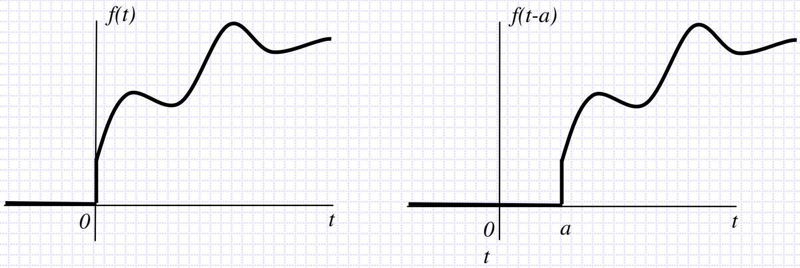
Laplace Transform Pairs

Time Domain Function		Laplace Domain Function
Name	Definition*	
Unit Impulse	$\delta(t)$	1
Unit Step	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
Unit Ramp	t	$\frac{1}{s^2}$
Exponential	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Asymptotic Exponential	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
Dual Exponential	$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
Asymptotic Dual Exponential	$\frac{1}{ab}\left[1+\frac{1}{a-b}\left(be^{-at}-ae^{-bt}\right)\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
Time multiplied Exponential	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
Sine	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Cosine	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
Decaying Sine	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
Decaying Cosine	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
Generic Oscillatory Decay	$e^{-at}\left[B\cos(\omega_n t)+\frac{C-aB}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right]$	$\frac{Bs+C}{(s+a)^2+\omega_n^2}$
Prototype Second Order Lowpass, underdamped	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
Prototype Second Order Lowpass, underdamped - Step Response	$1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi\right)$ $\phi=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$

Laplace Transform Properties

Name	Illustration
Definition of Transform	$f(t)\xleftrightarrow{L}F(s)$ $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
Linearity	$Af_1(t)+Bf_2(t)\xleftrightarrow{L}AF_1(s)+BF_2(s)$
First Derivative	$\frac{df(t)}{dt}\xleftrightarrow{L}sF(s)-f(0^-)$
Second Derivative	$\frac{d^2f(t)}{dt^2}\xleftrightarrow{L}s^2F(s)-sf(0^-)-\dot{f}(0^-)$
n^{th} Derivative	$\frac{d^nf(t)}{dt^n}\xleftrightarrow{L}s^nF(s)-\sum_{i=1}^{n}s^{n-i}f^{(i-1)}(0^-)$
Integral	$\int_0^t f(\lambda)d\lambda\xleftrightarrow{L}\frac{1}{s}F(s)$
Time Multiplication	$tf(t)\xleftrightarrow{L}-\frac{dF(s)}{ds}$
Time Delay	$f(t-a)u(t-a)\xleftrightarrow{L}e^{-as}F(s)$
Complex Shift	$f(t)e^{-at}\xleftrightarrow{L}F(s+a)$
Scaling	$f\left(\frac{t}{a}\right)\xleftrightarrow{L}aF(as)$
Convolution Property	$f_1(t)*f_2(t)\xleftrightarrow{L}F_1(s)F_2(s)$
Initial Value	$\lim_{t\to 0^+}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$
Final Value	$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$

t Ekseninin kaydırılması:



- Eğer *F(s)*=**L***[f(t)]* ise, *f(t)* ‘yi zaman ekseni boyunca *a* kadar (*a*>0) kaydırarak elde edilen *f(t-a)*’nın transformu için aşağıdaki ifade geçerlidir:

$$\mathbf{L}\left[f(t-a)\right]=e^{-as}F(s)$$

t Ekseninin kaydırılması:

- İspat: $\mathbf{L}\left[f(t-a)\right]=e^{-as}F(s)$

$$\mathbf{L}\left[f(t-a)\right]=\int_0^\infty f(t-a)e^{-st}dt$$

integralinde değişken değiştirirsek:
τ=t-a ise *dτ=dt* ve *t=0* ise *τ=-a* ve *t=∞* ise *τ=∞* olur.
Buna göre

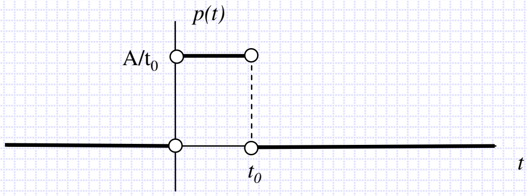
$$\mathbf{L}\left[f(t-a)\right]=\int_{-a}^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+a)}d\tau$$

Burada *f(τ)* fonksiyonunun *τ<0* da sıfır olduğuna dikkat edersek. (Zamana bağımlı fonksiyonların zamanın eksi olduğu yerde sıfır olduğu kabul edilir.)

$$L\left[f(t-a)\right]=\int_0^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+a)}d\tau=e^{-as}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau=e^{-as}F(s)$$

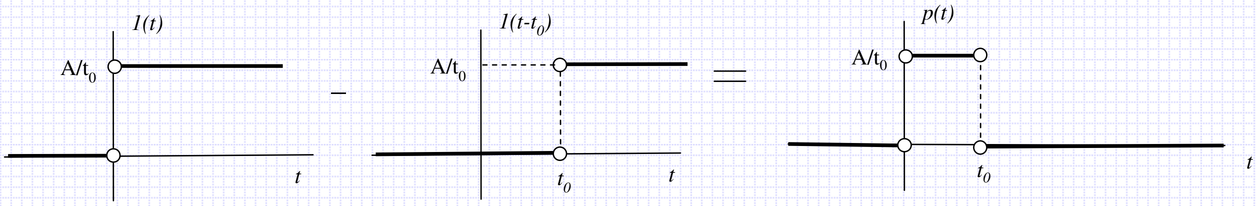
Vurum (Puls) Fonksiyonu (Pulse function):

$$p(t)=\begin{cases}\dfrac{A}{t_0} & 0<t<t_0\\[4pt] 0 & t<0 \text{ ve } t>t_0\end{cases}$$



$$\mathbf{L}\,[\,p(t)\,]=\int_0^{\infty} p(t)e^{-st}dt$$

Burada vurum fonksiyonunu iki birim basamak fonksiyonun farkı olarak düşünebiliriz.



Vurum (Puls) Fonksiyonu (Pulse function):

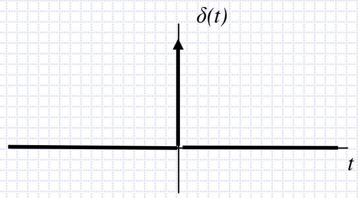
$$p(t)=\frac{A}{t_0}\left[1(t)-1(t-t_0)\right]$$

Şimdi integralde bunu kullanırsak

$$\begin{aligned}\mathbf{L}\,[p(t)]&=\mathbf{L}\left[\frac{A}{t_0}\left[1(t)-1(t-t_0)\right]\right]\\&=\frac{A}{t_0}\left(\mathbf{L}\,[1(t)]-\mathbf{L}\,[1(t-t_0)]\right)\\&=\frac{A}{t_0}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-st_0}\right)\\&=\frac{A}{st_0}\left(1-e^{-st_0}\right)\end{aligned}$$

AniVurum (İmpuls) Fonksiyonu (Impulse function):

$$\delta(t) = \begin{cases} \lim\limits_{t_0 \to 0} \dfrac{A}{t_0} & 0 < t < t_0 \\ 0 & t < 0 \text{ ve } t > t_0 \end{cases}$$



Bu fonksiyonun Laplace transformunu hesaplarken vurum fonksiyonu transformundan faydalanabiliriz:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\,[\delta(t)] &= \lim_{t_0 \to 0}\left(\mathbf{L}\,[\delta(t)]\right) \\ &= \lim_{t_0 \to 0}\left(\frac{A}{s t_0}\left(1 - e^{-s t_0}\right)\right) \\ &= \frac{0}{0} \\ &\overset{LH}{=} \lim_{t_0 \to 0}\left(\frac{\frac{d}{dt_0} A\left(1 - e^{-s t_0}\right)}{\frac{d}{dt_0}\left(s t_0\right)}\right) \\ &= \frac{A s}{s} \\ &= A \end{aligned}$$

AniVurum (İmpuls) Fonksiyonu (Impulse function):

- Altında kalan alan birim alan ise impuls fonksiyonuna birim-impuls fonksiyonu (unit-impuls or Dirac delta function) denir.
- $t=t_0$ anında ortaya çıkan birim-impuls fonksiyonu $\delta(t-t_0)$ ile gösterilir.

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t \neq t_0 \\ \infty & t = t_0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, dt = 1$$

Birim-impuls fonksiyon birim-basamak fonksiyonun türevidir.
(ya da tersi birim-basamak fonksiyon birim-impuls fonksiyonunun integralidir.)

$$\boxed{\begin{aligned} \delta(t - t_0) &= \frac{d}{dt} 1(t - t_0) \\ 1(t - t_0) &= \int \delta(t - t_0)\, dt \end{aligned}}$$

Bir fonksiyonun $e^{-\alpha t}$ ile çarpımı

$F(s) = L[f(t)]$ ise

$$L[f(t)e^{-\alpha t}] = \int_0^\infty e^{-\alpha t} f(t) e^{-st} dt$$
$$= \int_0^\infty f(t) e^{-(s+\alpha)t} dt$$
$$= F(s+\alpha)$$

Örnek:

$$L[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \Rightarrow L[e^{-\alpha t}\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

Bir fonksiyonun türevleri

$F(s) = L[f(t)]$ ise

Birinci Türev: $L[\frac{d}{dt} f(t)] = sF(s) - f(0)$

İkinci Türev: $L[\frac{d^2}{dt^2} f(t)] = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$

Benzer Şekilde n. Türev:

$$L[\frac{d^n}{dt^n} f(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\dot{f}(0) \ldots - \overset{(n-1)}{f}(0)$$

İspatı kitaptan okuyun

$$\overset{(n-1)}{f}(0) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(t)\Big|_{t=0}$$

Örnek:

$$g(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ sin(\omega t) & t\geq 0\end{cases}$$

What is the laplace transform $L[\,\dot{g}(t)\,] = ?$

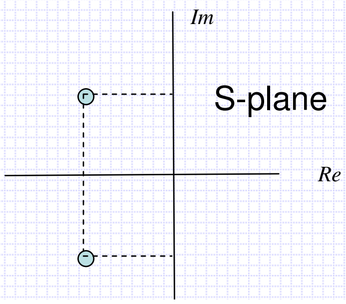
I. YOL: $$\dot{g}(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \omega cos(\omega t) & t\geq 0\end{cases} \qquad L[\,\dot{g}(t)\,]=\int_0^\infty \omega cos(\omega t)e^{-st}dt=\frac{s\omega}{s^2+\omega^2}$$

2. YOL: $$L[\,\dot{g}(t)\,]=sL[\,g(t)\,]-g(0)$$
$$=s\frac{\omega}{s^2+\omega^2}-0$$
$$=\frac{s\omega}{s^2+\omega^2}$$

Son Değer Teoremi (Final Value Theorem)

- Son değer teoremi bir fonksiyonun durağan-durum (steady-state) davranışını belirler.
- Bu teorem $\lim_{t\to\infty} f(t)$ nin var olduğu durumlarda geçerlidir.
- Eğer sF(s) in bütün kutupları (poles) s düzleminin solundaysa (left-half s-plane)

$\lim_{t\to\infty} f(t)$ sınırlı bir değere sahiptir

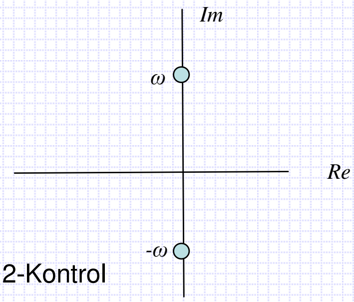


Son Değer Teoremi (Final Value Theorem)

- Fakat, eğer sF(s) in kutupları sanal eksende ise veya s-düzleminin sağ tarafındaysa f(t) dalgalanan veya exponentli şekilde artan bir fonksiyondur ve $\lim_{t\to\infty} f(t)$ limiti yoktur.
- Bu limitin olmadığı durumlarda son-değer teoremini uygulayamayız.
- Örneğin:

$$f(t) = \sin(\omega t) \qquad L[f(t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$s_{1,2} = \mp j\omega$$



$$\lim_{t\to\infty} f(t)$$ Yoktur.
Son-değer teoremi uygulanamaz.

Son Değer Teoremi (Final Value Theorem)

- Teorem: Eğer f(t) ve df(t)/dt nin Laplace Dönüşümleri ve $\lim_{t\to\infty} f(t)$ varsa:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

- İspat:

f(t) nin Laplace Dönüşümünün s sıfıra giderkenki limiti

$$\lim_{s\to 0} \int_0^\infty \left[\frac{d}{dt} f(t)\right] e^{-st} dt = \lim_{s\to 0} \left[sF(s) - f(0) \right]$$

$\lim_{s\to 0} e^{-st} = 1$ olduğunu düşünürsek $\int_0^\infty \left[\frac{d}{dt} f(t)\right] dt = f(t)\Big|_0^\infty = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0)$

Bu iki eşitlikten: $\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)}$

Örnek:

$$L[f(t)] = F(s) = \frac{1}{s(s+1)} \qquad \lim_{t\to\infty} f(t) = ?$$

$$sF(s) = \frac{\cancel{s}}{\cancel{s}(s+1)} = \frac{1}{s+1} \qquad s+1=0 \Rightarrow s=-1$$

Pole at left-hand plane

$\lim_{t\to\infty} f(t)$ exists

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \qquad \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+1} = 1$$

İlk Değer Teoremi (initial value theorem)

- Teorem: Eğer f(t) ve df(t)/dt nin Laplace Dönüşümleri ve $\lim_{s\to 0}F(s)$ varsa:

$$f(0+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Ödev: İspatı okuyun.

Bir fonksiyonun integrali

- Eğer bir fonksiyon için f(0-)=f(0+)=f(0) ise

$L\left[\int f(t)dt\right]$ vardır ve değeri

$$L[\int f(t)dt] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$$

$$f^{-1}(0) = \left(\int f(t)dt\right)\Big|_{t=0}$$

Bir fonksiyonun integrali

- İspat:

$$L\left[\int f(t)dt\right] = \int_0^{\infty}\left[\int f(t)dt\right]e^{-st}dt$$

Parçalı integral kullanırsak:

$$u = \int f(t)dt \Rightarrow du = f(t)dt$$

$$dv = e^{-st}dt \Rightarrow v = \frac{e^{-st}}{-s}$$

$$\int_0^{\infty}\left[\int f(t)dt\right]e^{-st}dt = \left(f(t)dt\right)\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^{\infty} f(t)\frac{e^{-st}}{-s}dt$$

$$= \frac{1}{s}\underbrace{\left(f(t)dt\right)\Big|_{t=0}}_{f^{-1}(0)} + \frac{1}{s}\underbrace{\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt}_{F(s)} = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$$

Bir fonksiyonun integrali

- Eğer sınırlı integralin Laplace dönüşümü söz konusuysa

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

$$\int_0^t f(t)dt = \int f(t)dt - \left(\int f(t)dt\right)\Big|_{t=0}$$

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = L\left[\int f(t)dt\right] - L\left[\left(\int f(t)dt\right)\Big|_{t=0}\right]$$

$$= \cancel{\frac{f^{-1}(0)}{s}} + \frac{F(s)}{s} - \cancel{\frac{f^{-1}(s)}{s}}$$

$$= \frac{F(s)}{s}$$

Karmaşık Türevlendirme Teoremi (Complex Differentiation Theorem)

$$L[tf(t)] = -\frac{d}{dt}F(s)$$

$$L\left[t^2 f(t)\right] = \frac{d^2}{dt^2}F(s)$$

$$\vdots$$

$$L\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}F(s)$$

Convolution İntegrali

- Convolution tanımı:

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t f_2(t-\tau)f_1(\tau)d\tau=f_2(t)*f_1(t)$$

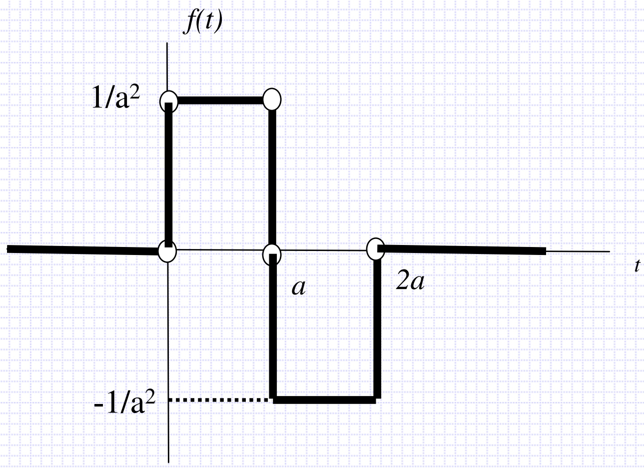
$$L\left[f_1(t)*f_2(t)\right]=L\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right]$$

$$=F_1(s)F_2(s)$$

İki fonksiyonun çarpımının Laplace Transformu

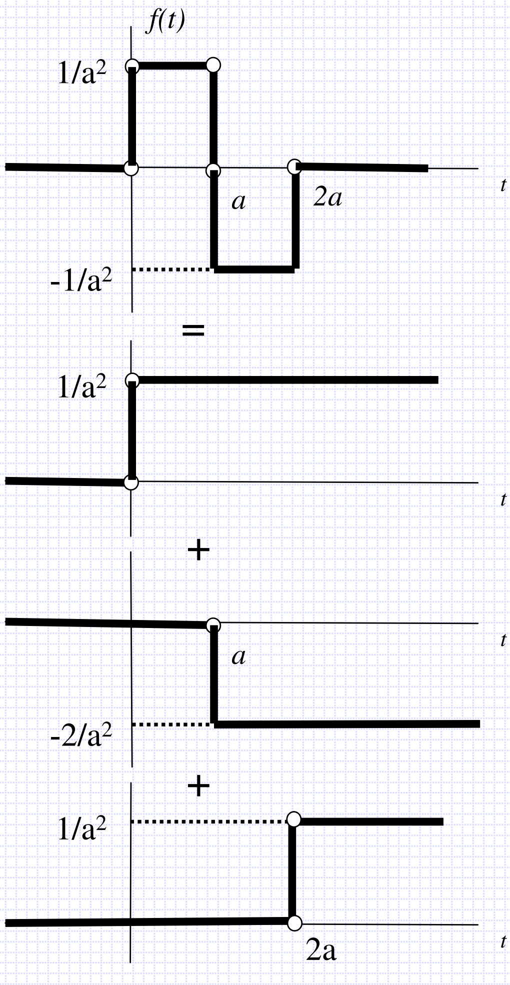
$$L\left[f(t).g(t)\right]=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(\rho)G(s-\rho)d\rho$$

Örnek:



$$L\left[f(t)\right] = ?$$

$$\lim_{a \to 0} F(s) = ?$$



$$f(t) = \frac{1}{a^2}1(t) + \left(-\frac{2}{a^2}1(t-a)\right) + \frac{1}{a^2}1(t-2a)$$

$$L\left[f(t)\right] = \frac{1}{a^2}L\left[1(t)\right] = \frac{1}{a^2}\frac{1}{s} + \left(-\frac{2}{a^2}L\left[1(t-a)\right] = -\frac{2}{a^2}\frac{1}{s}e^{-as}\right) + \frac{1}{a^2}L\left[1(t-2a)\right] = \frac{1}{a^2}\frac{1}{s}e^{-2as}$$

$$L\left[f(t)\right]=\frac{1}{a^2}\frac{1}{s}-\frac{2}{a^2}\frac{1}{s}e^{-as}+\frac{1}{a^2}\frac{1}{s}e^{-2as}$$

$$\boxed{F(s)=\frac{1}{a^2 s}\left(1-2e^{-as}+e^{-2as}\right)}$$

$$\lim_{a\to 0}F(s)=?\qquad \lim_{a\to 0}F(s)=\lim_{a\to 0}\frac{1}{a^2 s}\left(1-2e^{-as}+e^{-2as}\right)=\frac{0}{0}$$

$$\overset{L.H.}{=}\lim_{a\to 0}\frac{\cancel{2}\cancel{s}e^{-as}-\cancel{2}\cancel{s}e^{-2as}}{\cancel{2}a\cancel{s}}$$

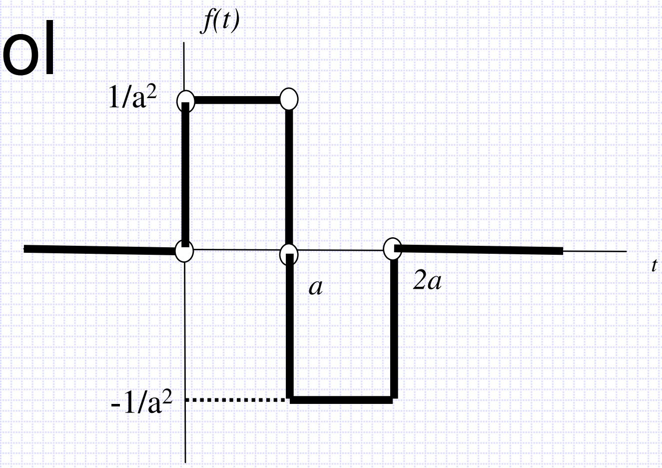
$$=\lim_{a\to 0}\frac{e^{-as}-e^{-2as}}{a}=\frac{0}{0}$$

$$\overset{L.H.}{=}\lim_{a\to 0}\frac{-se^{-as}+2se^{-2as}}{1}$$

$$=-s+2s$$

$$=\boxed{s}$$

2. yol



$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \dfrac{1}{a^2} & 0\le t<a\\ -\dfrac{1}{a^2} & a\le t<2a\\ 0 & 2a\le t\end{cases}$$

$$L\left[f(t)\right]=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^a\frac{1}{a^2}e^{-st}dt+\int_a^{2a}-\frac{1}{a^2}e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^a\right]-\frac{1}{a^2}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_a^{2a}\right]$$

$$=-\frac{1}{sa^2}\left[e^{-sa}-1\right]+\frac{1}{sa^2}\left[e^{-2as}-e^{-as}\right]$$

$$=\frac{1}{sa^2}\left[-e^{-sa}+1+e^{-2as}-e^{-as}\right]$$

$$=\boxed{\frac{1}{sa^2}\left[1+e^{-2as}-2e^{-as}\right]}$$

Periyodik fonksiyonların Laplace Transformu

- Periyodik bir f(t) fonksiyonu için

$$L\left[f(t)\right]=\frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt$$

- İspat:

$$L\left[f(t)\right]=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-st}dt$$

Değişken değiştirme yaparsak: $\tau=t-nT$

$$L\left[f(t)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nTs}\int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}d\tau=\int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}d\tau\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nTs}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nTs}=1+e^{-Ts}+e^{-2Ts}+\dots$$

$$=1+e^{-Ts}(1+e^{-Ts}+e^{-2Ts}+\dots)$$

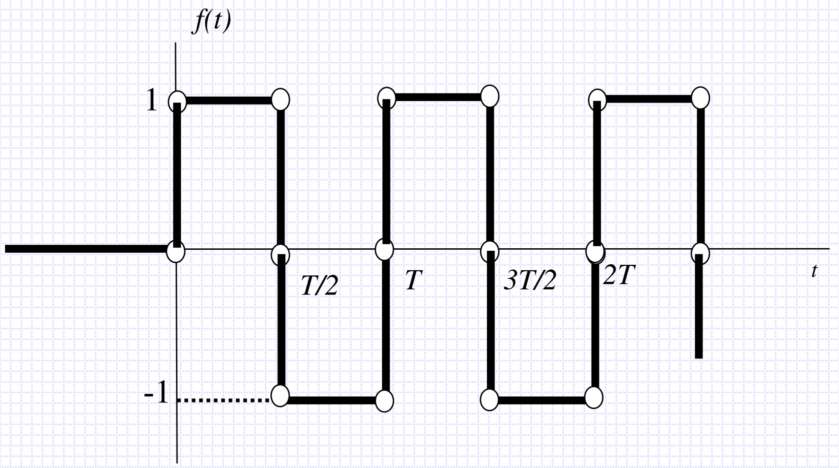
$$=1+e^{-Ts}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nTs}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nTs}=1+e^{-Ts}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nTs} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}e^{-nTs}=\frac{1}{1-e^{-Ts}}$$

$$L\left[f(t)\right]=\int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}d\tau\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nTs}=\frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

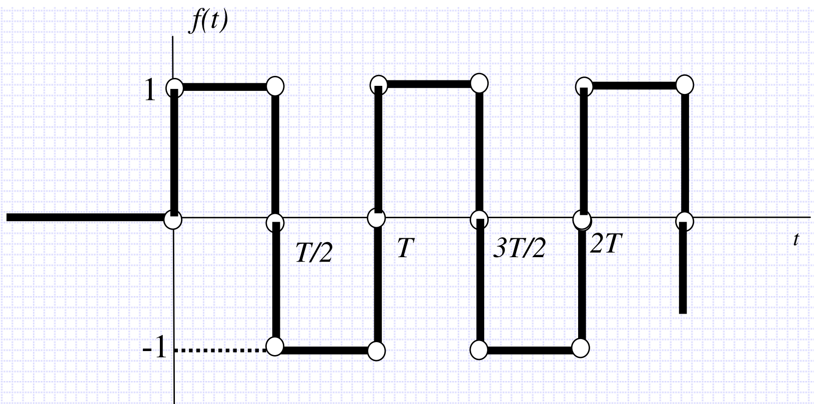
Örnek:

- Şekildeki fonksiyonun Laplace Transformunu bulun.



$$L\left[f(t)\right] = ?$$

$$L\left[f(t)\right] = \frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$



$$L\left[f(t)\right] = \frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \frac{1}{1-e^{-Ts}}\left[\int_0^{T/2} e^{-s\tau}d\tau + \int_{T/2}^{T}(-1)e^{-s\tau}d\tau\right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-Ts}}\left[\left.\frac{e^{-s\tau}}{-s}\right|_0^{T/2} - \left.\frac{e^{-s\tau}}{-s}\right|_{T/2}^{T}\right] = \frac{1}{1-e^{-Ts}}\left[\frac{e^{-sT/2}}{-s} - \frac{1}{-s} - \frac{e^{-sT}}{-s} + \frac{e^{-sT/2}}{-s}\right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-Ts}}\frac{1}{s}\left[e^{-sT} - 2e^{-sT/2} + 1\right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-Ts}}\frac{1}{s}\left[\left(e^{-sT/2}\right)^2 - 2\left(e^{-sT/2}\right) + 1\right] = \frac{1}{1-e^{-Ts}}\frac{1}{s}\left[1-e^{-sT/2}\right]^2$$

$$= \frac{1}{\left(1-e^{-sT/2}\right)\left(1+e^{-sT/2}\right)}\frac{1}{s}\left[1-e^{-sT/2}\right]^2$$

$$= \boxed{\frac{1}{s}\frac{1-e^{-sT/2}}{1+e^{-sT/2}}}$$

Ters Laplace Dönüşümü (Inverse Laplace Transform)

$$L^{-1}\left[F(s)\right] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{-s\tau}ds$$

- Buradaki c sabiti F(s) in kutuplarının hepsinden büyük seçilir.
- Bu interal çok nadiren kullanılır. f(t) yi bulmak için daha basit yöntemler vardır.
- Verilen F(s) fonksiyonu bilinen f(t) fonksiyonlarının laplace dönüşümlerinin bileşenleri olarak düşünülür. Birçok laplace fonksiyonu bu bileşenlerin tersi alınarak bulunur.

Parçalı Kesire Genişletme Yöntemi (Partial fraction expansion method)

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

- Bu kesirlerin basit kesirler olması gerekir.
- deg[A(s)]> deg[B(s)]
- Eğer değilse (bileşik kesir) basit kesire çevirmek gerekir.

$$F(s) = \frac{s+1}{s} \qquad deg\left[A(s)\right] \not> deg\left[B(s)\right]$$

$$F(s) = 1 + \frac{1}{s} \qquad deg\left[A(s)\right] > deg\left[B(s)\right]$$

Parçalı Kesire Genişletme Yöntemi (Partial fraction expansion method)

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}$$

- Eğer F(s) birden fazla parçaya ayrılabiliyorsa ayrılmalı ve bu parçalara denk düşen zaman uzayındaki fonksiyonların toplamı olarak yazılmalıdır.

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s)+\ldots+F_n(s)$$

$$L[F(s)]=L[F_1(s)]+L[F_2(s)]+\ldots+L[F_n(s)]$$

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)+\ldots+f_n(t)$$

Parçalı Kesire Genişletme Yöntemi (i) Farklı Kutuplar (Distinct Poles)

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)} \qquad m<n$$

$$=\frac{a_1}{s+p_1}+\frac{a_2}{s+p_2}+\ldots+\frac{a_2}{s+p_n}$$

- Burada a_k (k=1... n) sabit sayılardır.
- a_k kalan (redidue olarak isimlendirilir.)

Parçalı Kesire Genişletme Yöntemi
(i) Farklı Kutuplar (Distinct Poles)

$$F(s) = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \ldots + \frac{a_2}{s+p_n}$$

- Bu denklemde eşitliğin her iki tarafını (s+p_k) ile çarparsak ve sonuçta s=-p_k koyarsak a_k katsayılarını bulabiliriz.

$$\left[(s+p_k)F(s)\right]_{s=-p_k} =$$

$$\left[(s+p_k)\frac{a_1}{s+p_1} + (s+p_k)\frac{a_2}{s+p_2} + \ldots + \cancel{(s+p_k)}\frac{a_k}{\cancel{s+p_k}} + \ldots + (s+p_k)\frac{a_2}{s+p_n}\right]_{s=-p_k}$$

$$= a_k$$

Parçalı Kesire Genişletme Yöntemi
(i) Farklı Kutuplar (Distinct Poles)

- a_k katsayıları bulunduktan sonra

$$L^{-1}\left[\frac{a_k}{s+p_k}\right] = ? \qquad L^{-1}\left[\frac{a_k}{s+p_k}\right] = a_k e^{-p_k t}$$

kullanılarak

$$L^{-1}\left[F(s)\right] = f(t) = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \ldots + a_k e^{-p_k t} + \ldots + a_n e^{-p_n t}$$

elde edilir .

Örnek 1:

$$F(s) = \frac{4(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2)} \qquad L^{-1}\left[F(s)\right] = ?$$

Örnek 2:

$$F(s) = \frac{s^4 + 3s^2 + 5s + 1}{s(s+1)(s+2)} \qquad L^{-1}\left[F(s)\right] = ?$$

Örnek 3:

$$F(s) = \frac{s+4}{s^2+s+1} \qquad L^{-1}[F(s)] = ?$$

Laplace Transform Pairs

Time Domain Function		Laplace Domain Function
Name	Definition*	
Unit Impulse	$\delta(t)$	1
Unit Step	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
Unit Ramp	t	$\frac{1}{s^2}$
Exponential	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Asymptotic Exponential	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
Dual Exponential	$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
Asymptotic Dual Exponential	$\frac{1}{ab}\left[1+\frac{1}{a-b}\left(be^{-at}-ae^{-bt}\right)\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
Time multiplied Exponential	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
Sine	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Cosine	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
Decaying Sine	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
Decaying Cosine	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
Generic Oscillatory Decay	$e^{-at}\left[B\cos(\omega_n t)+\frac{C-aB}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right]$	$\frac{Bs+C}{(s+a)^2+\omega_n^2}$
Prototype Second Order Lowpass, underdamped	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
Prototype Second Order Lowpass, underdamped - Step Response	$1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi\right)$ $\phi=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$

Laplace Transform Properties

Name	Illustration
Definition of Transform	$f(t) \xleftrightarrow{L} F(s)$ $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
Linearity	$Af_1(t)+Bf_2(t) \xleftrightarrow{L} AF_1(s)+BF_2(s)$
First Derivative	$\frac{df(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} sF(s)-f(0^-)$
Second Derivative	$\frac{d^2f(t)}{dt^2} \xleftrightarrow{L} s^2F(s)-sf(0^-)-\dot{f}(0^-)$
n^{th} Derivative	$\frac{d^nf(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{L} s^nF(s)-\sum_{i=1}^{n}s^{n-i}f^{(i-1)}(0^-)$
Integral	$\int_0^t f(\lambda)d\lambda \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s}F(s)$
Time Multiplication	$tf(t) \xleftrightarrow{L} -\frac{dF(s)}{ds}$
Time Delay	$f(t-a)u(t-a) \xleftrightarrow{L} e^{-as}F(s)$
Complex Shift	$f(t)e^{-at} \xleftrightarrow{L} F(s+a)$
Scaling	$f\left(\frac{t}{a}\right) \xleftrightarrow{L} aF(as)$
Convolution Property	$f_1(t)*f_2(t) \xleftrightarrow{L} F_1(s)F_2(s)$
Initial Value	$\lim_{t\to 0^+} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$
Final Value	$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$

Parçalı Kesire Genişletme Yöntemi
(ii) Tekrarlanan Kutuplar (Multiple Poles)

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3} \qquad F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_1}{s+1} + \frac{b_2}{(s+1)^2} + \frac{b_3}{(s+1)^3}$$

Eşitliğin her iki tarafını $(s+1)^3$ ile çarparsak

$$(s+1)^3 F(s) = (s+1)^2 b_1 + (s+1) b_2 + b_3$$

Bu eşitlikte s=-1 koyarsak

$$\left[(s+1)^3 F(s)\right]_{s=-1} = b_3$$

$$\left[s^2 + 2s + 3\right]_{s=-1} = b_3 = 2$$

Parçalı Kesire Genişletme Yöntemi
(ii) Tekrarlanan Kutuplar (Multiple Poles)

Eşitliğin birinci türevinde s=-1 koyarsak

$$\left[\frac{d}{ds}(s+1)^3 F(s)\right]_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left[(s+1)^2 b_1 + (s+1) b_2 + b_3\right]_{s=-1} = \left[2(s+1) b_1 + b_2\right]_{s=-1} = b_2$$

$$\left[\frac{d}{ds}\left(s^2 + 2s + 3\right)\right]_{s=-1} = \left[2s + 2\right]_{s=-1} = 0 = b_2$$

Eşitliğin ikinci türevinde s=-1 koyarsak

$$\left[\frac{d^2}{ds^2}(s+1)^3 F(s)\right]_{s=-1} = \frac{d^2}{ds^2}\left[2(s+1)^2 b_1 + (s+1) b_2 + b_3\right]_{s=-1} = \left[2b_1\right]_{s=-1} = 2b_1$$

$$\left[\frac{d^2}{ds^2}\left(s^2 + 2s + 3\right)\right]_{s=-1} = \left[2\right]_{s=-1} = 2 = 2b_1 \Rightarrow b_1 = 1$$

Parçalı Kesire Genişletme Yöntemi
(ii) Tekrarlanan Kutuplar (Multiple Poles)

$$F(s)=\frac{b_1}{s+1}+\frac{b_2}{(s+1)^2}+\frac{b_3}{(s+1)^3}$$
$$=\frac{1}{s+1}+\frac{0}{(s+1)^2}+\frac{2}{(s+1)^3}$$
$$=\frac{1}{s+1}+\frac{2}{(s+1)^3}$$

$$\boxed{L^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)^n}\right]=\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}}$$

$$L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]+L^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^3}\right]=e^{-t}+2\frac{1}{(3-1)!}t^{3-1}e^{-t}=e^{-t}\left[1+t^2\right]$$

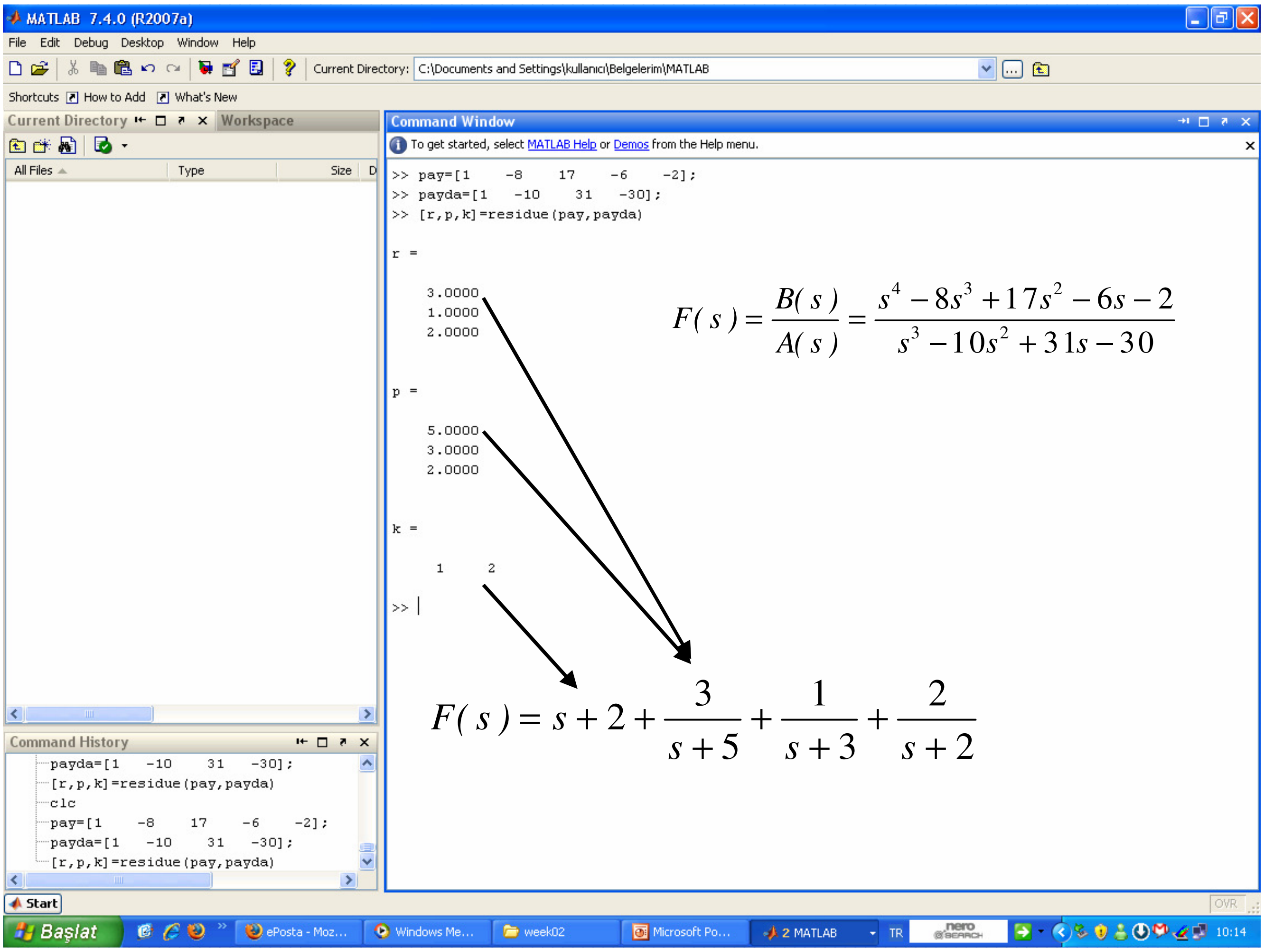
Matlab kullanarak parçalı kesirlere ayırma yöntemi

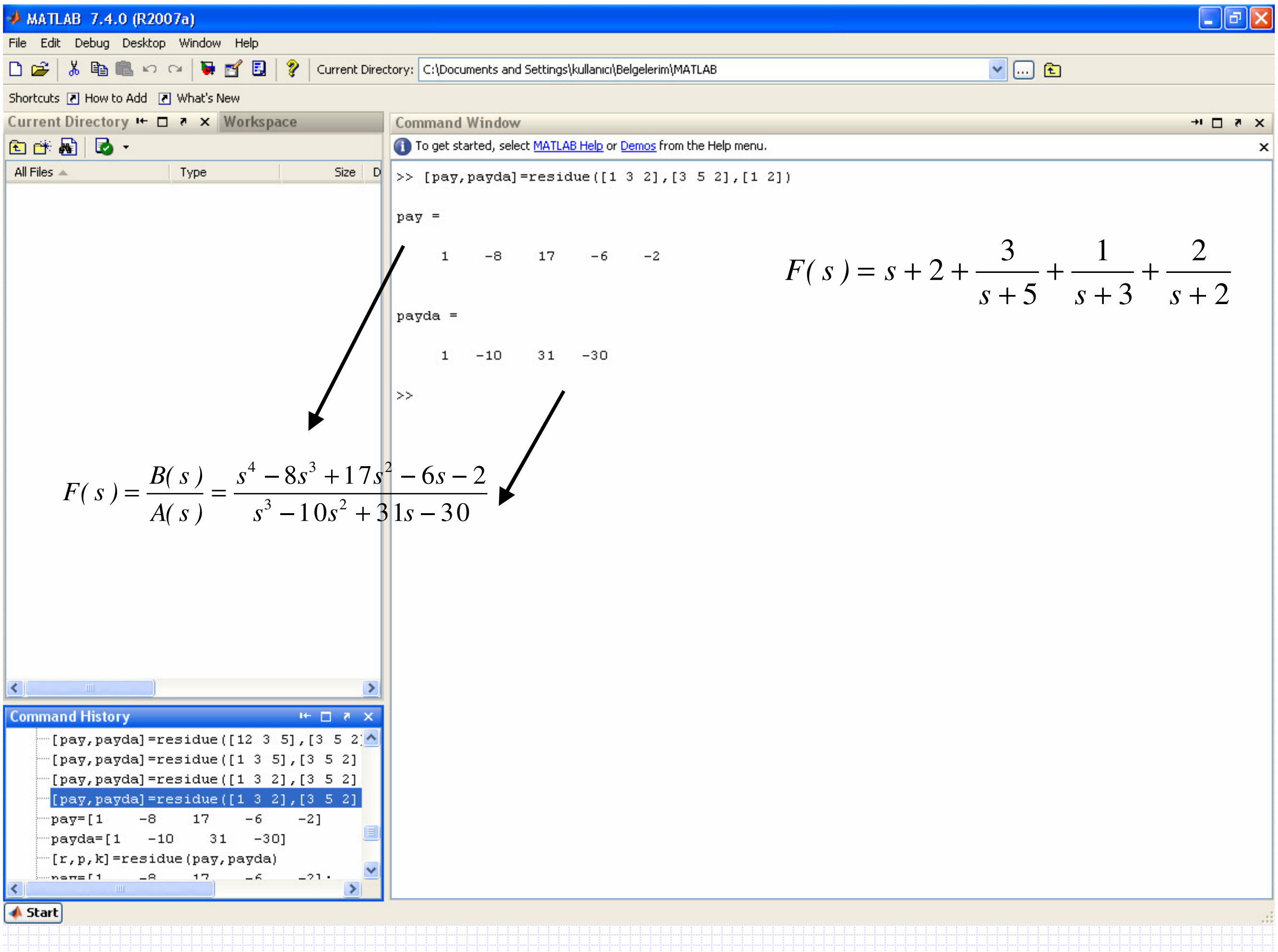
$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b(1)s^m+b(2)s^{m-1}+\ldots+b(m)}{a(1)s^n+a(2)s^{n-1}+\ldots+a(n)}$$

$$num=[b(1)\quad b(2)\quad \ldots\quad b(m)]$$
$$den=[a(1)\quad a(2)\quad \ldots\quad a(m)]$$

$$[r\quad p\quad k]=residue(num,den)$$

kalan   kutuplar   Tam kısım


MATLAB 7.4.0 (R2007a)
File Edit Debug Desktop Window Help
Current Directory: C:\Documents and Settings\kullanıcı\Belgelerim\MATLAB
Shortcuts How to Add What's New
Current Directory Workspace
All Files Type Size
Command Window
To get started, select MATLAB Help or Demos from the Help menu.
>> pay=[1 -8 17 -6 -2];
>> payda=[1 -10 31 -30];
>> [r,p,k]=residue(pay,payda)
r =
3.0000
1.0000
2.0000
p =
5.0000
3.0000
2.0000
k =
1 2
>>
$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{s^4-8s^3+17s^2-6s-2}{s^3-10s^2+31s-30}$
$F(s)=s+2+\frac{3}{s+5}+\frac{1}{s+3}+\frac{2}{s+2}$
Command History
payda=[1 -10 31 -30];
[r,p,k]=residue(pay,payda)
clc
pay=[1 -8 17 -6 -2];
payda=[1 -10 31 -30];
[r,p,k]=residue(pay,payda)
Start
Başlat
ePosta - Moz...
Windows Me...
week02
Microsoft Po...
2 MATLAB
TR
10:14


MATLAB 7.4.0 (R2007a)
File Edit Debug Desktop Window Help
Current Directory: C:\Documents and Settings\kullanıcı\Belgelerim\MATLAB
Shortcuts How to Add What's New
Current Directory Workspace
All Files Type Size
Command Window
To get started, select MATLAB Help or Demos from the Help menu.
>> [pay,payda]=residue([1 3 2],[3 5 2],[1 2])
pay =
1 -8 17 -6 -2
payda =
1 -10 31 -30
>>
$F(s)=s+2+\frac{3}{s+5}+\frac{1}{s+3}+\frac{2}{s+2}$
$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{s^4-8s^3+17s^2-6s-2}{s^3-10s^2+31s-30}$
Command History
[pay,payda]=residue([12 3 5],[3 5 2
[pay,payda]=residue([1 3 5],[3 5 2]
[pay,payda]=residue([1 3 2],[3 5 2]
[pay,payda]=residue([1 3 2],[3 5 2]
pay=[1 -8 17 -6 -2]
payda=[1 -10 31 -30]
[r,p,k]=residue(pay,payda)
Start

Lineer Zamandan Bağımsız Differansiyel Denlem Çözümü
(Solving linear, time-invariant differential equations)

- Elimizdeki lineer zamandan bağımsız denklemleri çözmek için şu iki basamak takip edilir:
  - Verilen differensiyel denklemdeki her terimin laplace transfoemu alını. Ortaya s'ye bağımlı bir cebirsel denklem çıkar. Bu denklemde bağımlı değişken X(s) yalnız bırakılır.
  - X(s)'e ters laplace dönüşümü uygulanarak zamana bağımlı fonksiyon elde edilir.

Dikkat

$x(t)$ Zamana bağımlı sistem değişkeni olsun

Diferansiyel deklem sistemlerinde bu değikenin zamana göre türevlerini kullanmamız gerekebilir

$$\dot{x}(t) \qquad \ddot{x}(t) \qquad \dots \qquad \overset{(n)}{x}(t)$$

Bu değişkenlerin Laplace dönüşümleri:

$$L\left[x(t)\right] = X(s)$$

$$L\left[\dot{x}(t)\right] = sX(s) - x(0)$$

$$L\left[\ddot{x}(t)\right] = s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\vdots$$

$$L\left[\overset{(n)}{x}(t)\right] = s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}\dot{x}(0) - \dots - s^{n-k}\overset{k-1}{x}(0) - \dots - \overset{n-1}{x}(0)$$

$$\boxed{L\left[\overset{(n)}{x}(t)\right] = s^nX(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}\overset{k-1}{x}(0)}$$

Laplace Transform Pairs

Time Domain Function: Name	Time Domain Function: Definition*	Laplace Domain Function
Unit Impulse	$\delta(t)$	1
Unit Step	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
Unit Ramp	t	$\frac{1}{s^2}$
Exponential	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Asymptotic Exponential	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
Dual Exponential	$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
Asymptotic Dual Exponential	$\frac{1}{ab}\left[1+\frac{1}{a-b}\left(be^{-at}-ae^{-bt}\right)\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
Time multiplied Exponential	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
Sine	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Cosine	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
Decaying Sine	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
Decaying Cosine	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
Generic Oscillatory Decay	$e^{-at}\left[B\cos(\omega_n t)+\frac{C-aB}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right]$	$\frac{Bs+C}{(s+a)^2+\omega_n^2}$
Prototype Second Order Lowpass, underdamped	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
Prototype Second Order Lowpass, underdamped - Step Response	$1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi\right)$ $\phi=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$

Laplace Transform Properties

Name	Illustration
Definition of Transform	$f(t)\xleftrightarrow{L}F(s)$ $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
Linearity	$Af_1(t)+Bf_2(t)\xleftrightarrow{L}AF_1(s)+BF_2(s)$
First Derivative	$\frac{df(t)}{dt}\xleftrightarrow{L}sF(s)-f(0^-)$
Second Derivative	$\frac{d^2f(t)}{dt^2}\xleftrightarrow{L}s^2F(s)-sf(0^-)-\dot{f}(0^-)$
n^{th} Derivative	$\boxed{\frac{d^nf(t)}{dt^n}\xleftrightarrow{L}s^nF(s)-\sum_{i=1}^{n}s^{n-i}f^{(i-1)}(0^-)}$
Integral	$\int_0^t f(\lambda)d\lambda\xleftrightarrow{L}\frac{1}{s}F(s)$
Time Multiplication	$tf(t)\xleftrightarrow{L}-\frac{dF(s)}{ds}$
Time Delay	$f(t-a)u(t-a)\xleftrightarrow{L}e^{-as}F(s)$
Complex Shift	$f(t)e^{-at}\xleftrightarrow{L}F(s+a)$
Scaling	$f\left(\frac{t}{a}\right)\xleftrightarrow{L}aF(as)$
Convolution Property	$f_1(t)*f_2(t)\xleftrightarrow{L}F_1(s)F_2(s)$
Initial Value	$\lim_{t\to0^+}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$
Final Value	$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to0}sF(s)$

Örnek 4:

$$\dddot{y}(t)+6\ddot{y}+11\dot{y}+6y=2t \qquad y(0)=\dot{y}(0)=\ddot{y}(0)=0$$

Örnek 5:

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x} + 5x = 1 \qquad x(0) = 0, \dot{x}(0) = 2$$

SON