

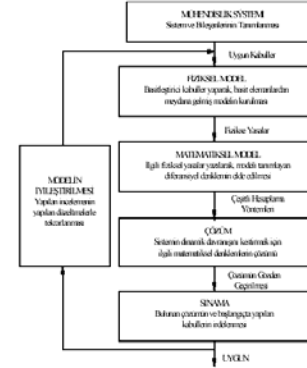
# MAK4030 ENDÜSTRİYEL KONTROL SİSTEMLERİ VE ÖLÇME

## Otomatik Kontrol Sistemleri Hakkında Özet

Kaynak: Yüksel İbrahim, Otomatik Kontrol, Sistem Dinamiği ve Denetim Sistemleri, MATLAB ile Genişletilmiş 5. Baskı, Nobel Yayınları, 2006

2007-2008 BAHAR

Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT



Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT



$TF = \frac{\text{Çıkış}}{\text{Giriş}}$  veya  $TF = \frac{\text{Çıkış fonksiyonu L.D. (sıfır başlangıç koşullarında)}}{\text{Giriş fonksiyonu L.D. (sıfır başlangıç koşullarında)}}$

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y =$$

$$b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad (n \geq m)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT



## Transfer Fonksiyonunun Temel Özellikleri

Transfer fonksiyonu sistem parametreleri cinsinden bir doğrusal sistemin çıkış ve girişini oranlayan bir ifade ve sistemin bizzat kendisine ait bir özelliktir. Sisteme uygulanan giriş veya uyarı fonksiyonundan bağımsızdır. Transfer fonksiyonu sistemin çıkışını girişine oranlamak için gerekli birimleri içerir, fakat sistemin fiziksel yapısı ile ilgili hiçbir bilgi taşımaz. Bu nedenle farklı fiziksel yapılara sahip pek çok fiziksel sistemin transfer fonksiyonları birbirlerine benzerdir.

Bir sistemin transfer fonksiyonu o sistemin ani darbe giriş fonksiyonu cevabının Laplace dönüşümüdür. Buna göre, eğer transfer fonksiyonu  $G(s)$  olan bir sisteme ani darbe giriş fonksiyonu uygulanacak olursa çıkış fonksiyonu da  $G(s)$ 'e eşit olur.

Sistem transfer fonksiyonu, tüm sıfır başlangıç koşulları altında, sisteme ait diferansiyel denklemin Laplace dönüşümünü almak suretiyle elde edilir.

Transfer fonksiyonunda 's, değişkeni yerine  $D = d/dt$  ile tanımlanan 'D, diferansiyel operatörünü koymak sureti ile sistemin diferansiyel denklemi elde edilebilir.

Doğrusal sistemin kararlılığı transfer fonksiyonun paydası olan özuyapısal (characteristics) fonksiyondan saptanabilir. Transfer fonksiyonun paydası sıfıra eşitlenerek özuyapısal denklem elde edilir ve bu denklemin kökleri de sistemin kutupları adını alır. Sonuç olarak eğer paydanın tüm kökleri negatif gerçekte kısımlara sahipse sistem kararlı olur. Aksi takdirde paydanın köklerinden (veya kutupları) bir tanesi dahi pozitif gerçekte kısıma sahip ise sistem kararsız olur.

Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT



Paydanın kökleri transfer fonksiyonun kutupları ve payın kökleri de transfer fonksiyonun sıfırları adını alır. Transfer fonksiyonun pay ve paydasını çarpanlarına ayırırsak;

$$G(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

burada,

$z_m$  = Transfer fonksiyonun sıfırları

$p_n$  = Transfer fonksiyonun kutupları



Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT

## TRANSFER FONKSİYONLARININ YAPISINA GÖRE SİSTEMLER

1. Kazanç tipi:  $G(s)=K$  ; temel parametresi kazanç K.
2. İntegral tipi:  $G(s) = \frac{1}{T_s s}$  ; temel parametresi integral zaman sabiti  $T_i$  (s)
3. Zaman sabiti tipi:  $G(s) = \frac{1}{Ts+1}$  ; temel parametresi zaman sabiti T (s)
4. Titreşim tipi:  $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$  ( $0 < \zeta < 1$ ) ; temel parametreleri doğal frekans  $\omega_n$  (rad/s) ve sönüm oranı  $\zeta$



Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT

### Titreşim Tipi veya İkinci Dereceden Gecikmeli Sistemler

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \frac{1}{s} \quad s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

a)  $0 < \zeta < 1$  ise:  $s_{1,2}$  kökleri karmaşık eşlenik olup s düzleminin sol tarafında yer alırlar. Dinamik davranışı açısından sistem sönümlü titreşimli veya az sönümlü adını alır. Bu durumda kökler

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.26b)$$

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin\omega_d t \right)$$

b)  $\zeta=1$  ise:  $s_{1,2}$  kökleri gerçek ve birbirine eşit olup kökler:  $s_1 = s_2 = -\zeta\omega_n$  dir. Sistem dinamik davranışı açısından kritik sönümlüdür. Cevap eğrisi titreşim göstermez. Bu durumda (3.25) denkleminin ters Laplace dönüşümünden sistemin zaman alanı cevabı

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad (3.28c)$$



Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT

c)  $\zeta > 1$  ise:  $s_{1,2}$  köklerinin her ikisi de (3.26a) ifadesinde olduğu gibi negatif değerli olacaktır. (burada daima  $\zeta\omega_n > \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$  olur) Bu durumda (3.25) denkleminin ters Laplace dönüşümünden sistemin zaman alanı cevabı

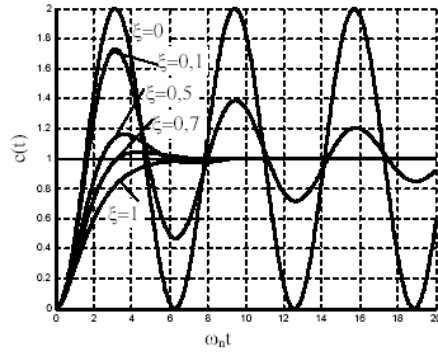
$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{e^{-p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{-p_2 t}}{p_2} \right)$$

d)  $\zeta=0$  ise:  $s_{1,2}$  kökleri eşlenik sanal olup sanal eksen üzerinde yer alırlar.  $s_{1,2} = \pm j\omega_n$  olur. Sistem sönümsüz titreşimli dinamik davranış gösterir.  $\zeta=0$  da (3.28a) nolu denklemden veya (3.28b) nolu denklemden doğrudan doğruya

$$c(t) = 1 - \sin(\omega_n t + \frac{\pi}{2}) \quad \text{veya} \quad c(t) = 1 - \cos\omega_n t$$



Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT



Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT

ELEMAN TÜRÜ	Fiziksel Eleman	Elemanın Modeli	Temel Denklemleri	Transfer Fonksiyonu	Denk. İmpedans	Elemanın Sabitinin Tanımı Ve Birimi
Enerjiyi yutan veya dağıtan elemanlar	Elektriksel direnc		$u(t) = R i(t)$	$\frac{U(s)}{I(s)} = R$	$R$	$R = \frac{u}{i} \left[ \frac{\text{V}}{\text{A}} \right]$
	Öteleme sönümleyici (mekaniksel direnc)		$F(t) = B v(t)$ $F(t) = B \frac{dx}{dt}$	$\frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{B}$ $\frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{B s}$	$\frac{1}{B}$ $\frac{1}{B s}$	$B = \frac{F}{v} \left[ \frac{\text{N}}{\text{m/s}} \right]$
	Dönme sönümleyici		$M(t) = B \omega(t)$ $M(t) = B \frac{d\theta}{dt}$	$\frac{\Omega(s)}{M(s)} = \frac{1}{B}$ $\frac{\Omega(s)}{M(s)} = \frac{1}{B s}$	$\frac{1}{B}$ $\frac{1}{B s}$	$B = \frac{M}{\omega} \left[ \frac{\text{Nm}}{\text{rad/s}} \right]$
	Akışkan direnci		$p(t) = R_q q(t)$ $h(t) = R_q q(t)$	$\frac{P(s)}{Q(s)} = R_q$ $\frac{H(s)}{Q(s)} = R_q$	$R_q$	$R_q = \frac{p}{q} \left[ \frac{\text{Pa}}{\text{m}^3/\text{s}} \right]$ $R_q = \frac{h}{Q} \left[ \frac{\text{Pa}}{\text{m}^3/\text{s}} \right]$
	Isıl direnc		$\theta(t) = R_\theta q(t)$	$\frac{\Theta(s)}{Q(s)} = R_\theta$	$R_\theta$	$R_\theta = \frac{\theta}{q} \left[ \frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$
<b>İDEAL DİRENC ELEMANLARI</b>						

Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT

Enerjiyi kapasitif etki ile depolayan elemanlar	Elektriksel kapasite		$i(t) = C \frac{du}{dt}$ $u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$	$\frac{U(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs}$	$\frac{1}{Cs}$	$C = \frac{q}{u} \left[ \frac{\text{Coul}}{\text{V}} \right]$
	Kütle (Mekaniksel kapasite)		$F(t) = m a = m \frac{dv}{dt}$ $F(t) = m \frac{dx}{dt}$	$\frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms}$ $\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2}$	$\frac{1}{ms}$ $\frac{1}{ms^2}$	$m = \frac{F}{a} \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m/s}^2} \right]$
	Eylemsizlik momenti		$M(t) = J \alpha = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$ $M(t) = J \frac{d\omega}{dt}$	$\frac{\Omega(s)}{M(s)} = \frac{1}{Js^2}$ $\frac{\Omega(s)}{M(s)} = \frac{1}{Js}$	$\frac{1}{Js^2}$ $\frac{1}{Js}$	$J = \frac{M}{\alpha} \left[ \frac{\text{kgm}^2}{\text{rad/s}^2} \right]$
	Akışkan kapasitesi		$q(t) = C_p \frac{dp}{dt}$ $q(t) = C_p \frac{dh}{dt}$	$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{C_p s}$ $\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{1}{C_p s}$	$\frac{1}{C_p s}$	$C_p = \frac{Q \Delta p}{\Delta p} \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{Pa s}} \right]$
	Isıl kapasite		$q(t) = C_\theta \frac{d\theta}{dt}$	$\frac{\Theta(s)}{Q(s)} = \frac{1}{C_\theta s}$	$\frac{1}{C_\theta s}$	$C_\theta = \frac{q \Delta \theta}{\Delta \theta} \left[ \frac{\text{J}}{\text{K s}} \right]$
<b>İDEAL KAPASİTE ELEMANLARI</b>						

Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT

Enerjiyi endüktif etki ile depolayan elemanlar	Elektriksel induktans		$u(t) = L \frac{di}{dt}$	$\frac{U(s)}{I(s)} = L s$	$L s$	$L = \frac{u}{di/dt} \left[ \frac{\text{Vs}}{\text{A}} \right]$
	Öteleme yayı		$F(t) = K x(t)$ veya $v(t) = \frac{1}{K} \frac{dF}{dt}$	$\frac{F(s)}{X(s)} = \frac{1}{K}$ $\frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{K s}$	$\frac{1}{K}$ $\frac{1}{K s}$	$k = \frac{F}{x} \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$
	Burulma yayı		$M(t) = K_\theta \theta(t)$ veya $\omega(t) = \frac{1}{K_\theta} \frac{dM}{dt}$	$\frac{\Omega(s)}{M(s)} = \frac{1}{K_\theta}$ $\frac{\Omega(s)}{M(s)} = \frac{1}{K_\theta s}$	$\frac{1}{K_\theta}$ $\frac{1}{K_\theta s}$	$k_\theta = \frac{M}{\theta} \left[ \frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \right]$
	Akışkan induktans (Akışkan eylemsizliği)		$p(t) = L_q \frac{dq}{dt}$	$\frac{P(s)}{Q(s)} = L_q s$	$L_q s$	$L_q = \frac{p}{dq/dt} \left[ \frac{\text{Pa}}{\text{m}^3/\text{s}} \right]$
	Isıl induktans		$\theta(t) = L_\theta \frac{dq}{dt}$	$\frac{\Theta(s)}{Q(s)} = L_\theta s$	$L_\theta s$	$L_\theta = \frac{\theta}{dq/dt} \left[ \frac{\text{K}}{\text{W s}} \right]$
<b>İDEAL İNDÜKTANS ELEMANLARI</b>						

Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT

İŞLEMİN TANIMI	DENKLEM	BLOK DİYAGRAMI	İNDİRGENMİŞ BLOK DİYAGRAMI
1 Ardışık bağlı blokların indirgenmesi	$C = (G_1 G_2) R$		
2 Paralel bağlı blokların indirgenmesi	$C = G_1 R \pm G_2 R$		
3 İleribesleme yolu üzerinden bir bloğun kaldırılması	$C = G_1 R + G_2 R$		
4 Geribesleme döngüsünün indirgenmesi	$C = G (R + H C)$		
5 Geribesleme yolu üzerinden bir bloğun kaldırılması	$C = G (R + H C)$		

Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT

6a	Toplama noktalarının yeniden düzenlenmesi	$Z = W \pm X \pm Y$	
7	Toplama noktasını bir bloğun önüne kaydırmak	$Z = G X \pm Y$	
8	Toplama noktasını bir bloğun arkasına kaydırmak	$Z = G (X \pm Y)$	
9	Ayrılma noktasını bir blok önüne kaydırmak	$Y = G X$	
10	Ayrılma noktasını bir blok ardına kaydırmak	$Y = G X$	

Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT

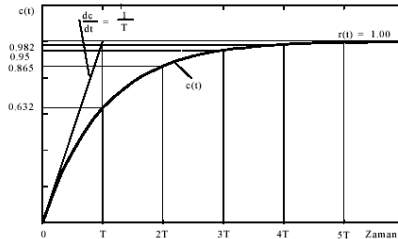
### Zaman Sabiti veya Birinci Dereceden Gecikmeli Sistemler

$$C(s) = \frac{1}{(Ts + 1)} \quad R(s) = \frac{1}{(Ts + 1)} \quad \frac{1}{s}$$

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}$$

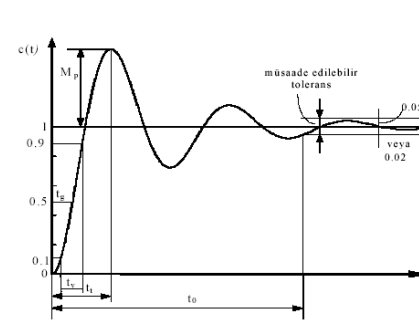
$$c(t) = 1 - e^{-1} = 0,632$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{T} e^{-t/T} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T}$$



Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT

### GEÇİCİ-DURUM DAVRANIŞI VE GEÇİCİ-DURUM DAVRANIŞI İLE İLGİLİ TANIMLAR



$$M_p = e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$t_t = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$t_o = 4T = \frac{4}{\zeta \omega_n}$$

Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT

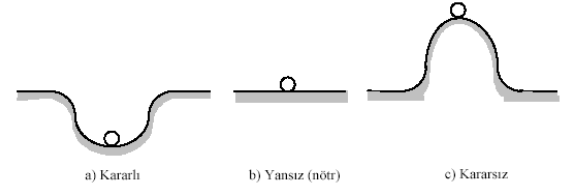
## KALICI-DURUM HATASI VE SİSTEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

	Basamak girişi $r(t)=1, R(s)=1/s$	Ramp girişi $r(t)=t, R(s)=1/s^2$	Parabolik giriş $r(t)=t^2/2, R(s)=1/s^3$
Tip 0	$\frac{1}{1+K}$	$\infty$	$\infty$
Tip 1	0	$\frac{1}{K}$	$\infty$
Tip 2	0	0	$\frac{1}{K}$
Tip 3	0	0	0



Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT

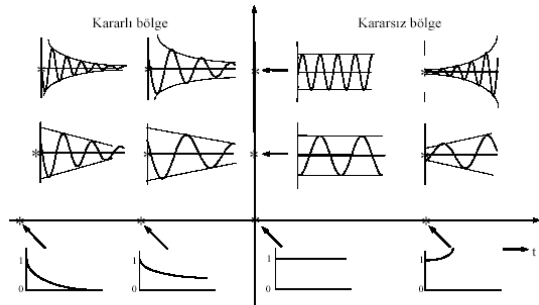
## DOĞRUSAL GERİBESLEMELİ SİSTEMLERİN KARARLILIĞI



## ROUTH-HURWITZ KARARLILIK ÖLÇÜTÜ BAĞIL KARARLILIK



Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT

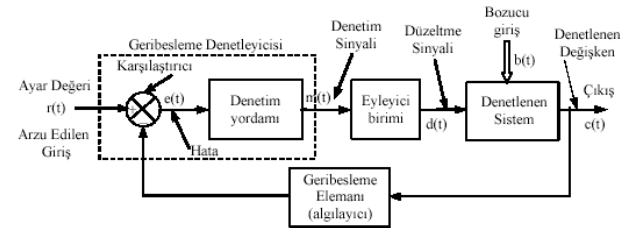


Şekil 6.2 Köklerin s-düzlemindeki yerlerine bağlı olarak değişen çeşitli anıdarbe cevap eğrileri



Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT

## TEMEL DENETİM ETKİLERİ VE ENDÜSTRİYEL DENETİM ORGANLARI

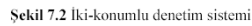


Şekil 7.1 Kapalı-döngü denetim sistemi

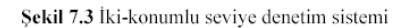


Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT

tekinde sınıflandırılabilir.

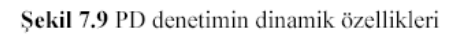


Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT



Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT

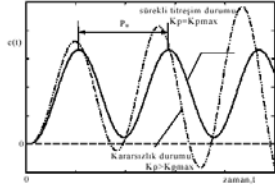
Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT



Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT

## DENETİM ORGANIN AYARI

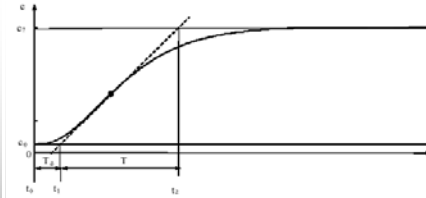
Denetim organı ayarında;  
 1. Deneyisel Ayar → i) Salınım veya Titreşim yöntemi,  
 2. Analitik Ayar → ii) Sistem cevap yöntemi  
 olmak üzere iki yol mevcuttur.



Şekil 7.12 Titreşim yöntemi

Titreşim yöntemine göre denetim organı ayar değerleri

Etki türü	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5 K_{pmax}$	-	-
PI	$0.45 K_{pmax}$	$0.825 P_s$	-
PID	$0.6 K_{pmax}$	$0.5 P_s$	$0.125 P_s$



Şekil 7.13 Cevap eğrisi yöntemi

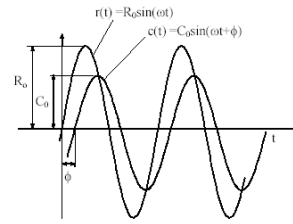
7.2 Sistem cevabı yönteminde Ziegler ve Nichols ayarları

Denetim Türü	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$\frac{T}{K_u T_u}$	-	-
PI	$0.9 \frac{T}{K_u T_u}$	$3.34 T_u$	-
PID	$1.2 \frac{T}{K_u T_u}$	$2 T_u$	$0.5 T_u$

Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT

Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT

## FREKANS CEVABI YÖNTEMLERİ



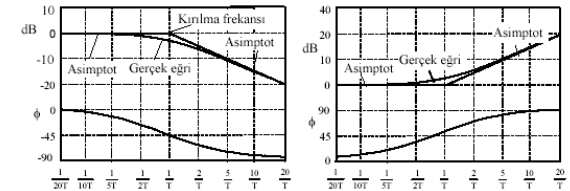
Şekil 8.1 Sinüzoidal giriş cevabı

$$|G(j\omega)| = \frac{|C(j\omega)|}{|R(j\omega)|} = \frac{\text{çıkışın sin genliği}}{\text{girişin sin genliği}}$$

$$\angle G(j\omega) = \frac{\angle C(j\omega)}{\angle R(j\omega)} = \text{çıkışın sin eğrisi} - \text{girişin sin eğrisi}$$

Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT

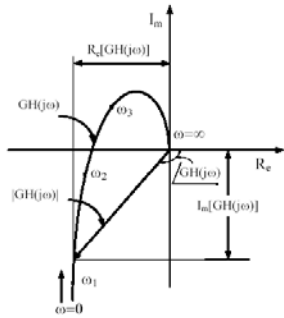
## LOGARİTMİK EĞRİLER VEYA BODE DİYAGRAMLARI



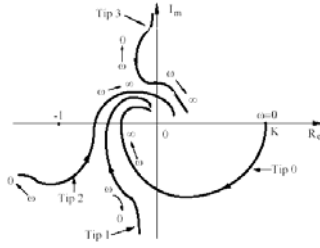
Şekil 8.3 a)  $GH(j\omega)=1/(j\omega T+1)$  b)  $GH(j\omega)=(j\omega T+1)$  logaritmik eğrileri

Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT

## KUTUPSAL EĞRİLER



Şekil 8.6 Kutupsal eğri



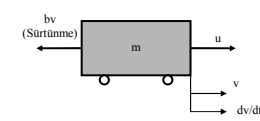
Şekil 8.10 Kutupsal eğrilerin genel biçimleri

Öğr. Gör. Dr.  
Gürsel ŞEFKAT

## SABİT HIZ KONTROL SİSTEMİNİN MODELLENMESİ

### Fiziksel Ayar ve Sistem Denklemleri;

Tekerleğin ataleti ihmal edilir ve araç hareketine zıt (araç hızı ile orantılı olan) bir sürtünme olduğu kabul edilirse, problem aşağıda gösterildiği gibi basit kütle-sönümleyici sistemine indirgenir.



Newton kanunlarından, bu sistemin model denklemleri elde edilir:

$$m\ddot{v} + b\dot{v} = u$$

$$y = v$$

Burada u motordan gelen kuvvettir. Örnek olarak şöyle kabul edebiliriz.

$$m = 1000\text{kg}$$

$$b = 50\text{Nsec/m}$$

$$u = 500\text{N}$$

### Tasarım İhtiyaçları

Sistemin modellenmesinde bir sonraki adım bazı tasarım ölçütlerini sağlamaktır. Motor 500N'luk bir kuvvet verdiğinde, araç 10 m/s'lik maksimum hızı ulaşacaktır. Otomobil bu hızı 5 s'den daha kısa bir sürede imzelenmelidir. Sadece sabit hız kontrol sistemi olduğundan, hız için %10'luk maksimum aşma çok zararlı olmayacaktır. Kalıcı durum hatası %2 olarak benzer sebeple kabul edilir. Bu problem için tasarım ölçütleri olarak aşağıdaki değerleri yukarıda anlatılanlara göre öneerebiliriz.

$$\text{Yükselme Zamanı} < 5 \text{ s}$$

$$\text{Maksimum Aşma} < 10\%$$

$$\text{Kalıcı durum hatası} < 2\%$$

## MATLAB Gösterimi

### 1. Transfer Fonksiyonu

Yukarıdaki sistemin transfer fonksiyonunu elde etmek için, model denklemlerinin Laplace dönüşümünü almamız gerekir. Transfer fonksiyonu bulunurken, sıfır başlangıç koşulları kabul edilir. İki denklemin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$msV(s) + bV(s) = U(s)$$

$$Y(s) = V(s)$$

Çıkış hız olduğundan, V(s) yerine Y(s) koyarsak;

$$msY(s) + bY(s) = U(s)$$

Sistemin transfer fonksiyonu

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms + b}$$

MATLAB kullanılarak bu problemi çözmek için yanda verilen komutları yeni bir m-dosyaya kopyalayalım.

Bu komutlar basamak giriş durumunda sistemin açık döngü cevabını bulmak için daha sonra kullanılacaktır. Fakat daha önce farklı bir gösterim olan durum uzayı gösterimini ele alalım.

MAK4030 07-08 BAHAR

```
m=1000;
b=50;
u=500;
num=[1];
den=[m b];
```

31

## 2. Durum Uzayı

Birinci dereceden model denklemlerini (1), durum uzayı modeli olarak yeniden yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b/m \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1/m \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} v$$

Bu problemi çözmek için MATLAB kullanılırken, aşağıda verilen komutları içeren yeni bir m-dosya oluşturulur.

```
m = 1000;
b = 50;
u = 500;
A = [-b/m];
B = [1/m];
C = [1];
D = 0;
```

Not: Transfer fonksiyonu gösteriminden durum uzayı gösterimine veya tersi bir dönüşüm MATLAB' ta mümkündür. Daha detaylı bilgi için dönüşüm komutlarına (ss2tf) bakılır.

MAK4030 07-08 BAHAR

32



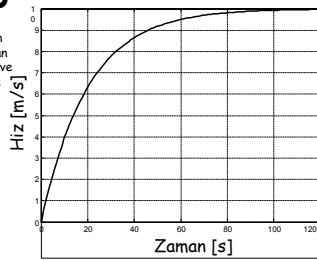
## Açık Döngü Cevap

Şimdi, sistemin basamak girişi için açık döngü cevabının nasıl olduğunu görelim. Transfer fonksiyonu için yazılan m-dosyasının sonuna aşağıdaki komutu ekleyelim (num ve den değişkenli m-dosya) ve MATLAB komut ortamında çalıştıralım.

```
step (u*num,den)
```

Yandaki grafik oluşacaktır.

Sistemin Basamak Cevabı



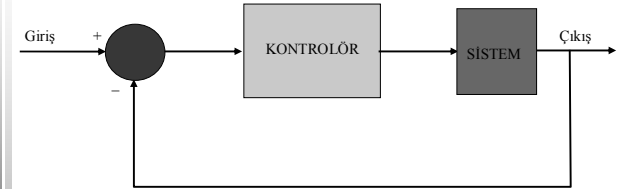
Durum uzayı modeli için yazılan m-dosyasının sonuna aşağıdaki komutu ekleyelim (A, B, C, D matrisli ve den değişkenli m-dosya) ve MATLAB komut ortamında çalıştıralım.

```
step (A,u*B,C,D)
```

Yukarıda gösterilen çözümün aynısı oluşacaktır. Çizimden görüldüğü gibi, aracın 10m/s'lik kalıcı durum hızına ulaşması için 100 s'den daha fazla bir süre geçmektedir. Bu 5s'den daha az olan yükselme zamanı ölçütümüzü sağlamamaktadır.

## Kapalı Döngü Transfer Fonksiyonu

Bu problemi çözmek ve sistem başarımını sağlamak için, birim geribeslemeli kontrolör eklenecektir. Aşağıdaki şekil, tipik birim geribeslemeli sistemin blok diyagramıdır.



Sistemin transfer fonksiyonu yukarıda tanımlanan transfer fonksiyonudur.  $(Y(s)/U(s)=1/(ms+b))$ . Kontrolör, tüm tasarım ölçütlerini sağlamak için tasarlanacaktır. Kontrolörün tasarımı için dört farklı yöntem olan PID, Kök Yer Eğrileri, Frekans Cevabı veya Durum uzayı yöntemlerinden birini kullanabiliriz.

## Sabit Hız Kontrol Probleminin PID kontrol ile Çözümü

Bu sabit hız kontrol problemi için transfer fonksiyonu şuydu:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms + b}$$

$$m = 1000$$

$$b = 50$$

$$U(s) = 10N$$

$$Y(s) = \text{Hız çıkışı}$$

Ve blok diyagram yukarıda gösterildiği gibidir. Bu problem için tasarım ölçütleri:

$$\text{Yükselme Zamanı} < 5 \text{ s}$$

$$\text{Maksimum Aşma} < 10\%$$

$$\text{Kalıcı durum hatası} < 2\%$$

PID kontrolörün transfer fonksiyonu;

$$K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

İlk olarak oransal kontrolü ele alalım.

## Oransal Kontrol

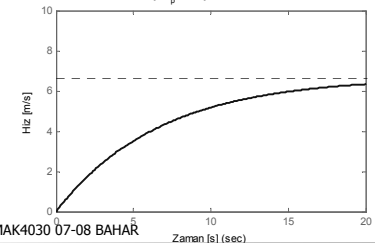
Problemi çözmek için ilk düşünce, oransal kontrol ( $K_p$ ) ileveli kapalı döngü transfer fonksiyonunu bulmaktır. Blok diyagramın indirgenmesiyle, oransal kontrollü kapalı döngü transfer fonksiyonu aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_p}{ms + (b + K_p)}$$

Oransal denetim bilgilerinden, oransal kontrolün yükselme zamanını azalttığını biliyoruz. Dolayısıyla şimdilik  $K_p$ 'yi 100'e eşitleyelim ve cevabı nasıl etkilendiğini görelim. Yeni bir m-dosyayı aşağıda verilen komutlarla oluşturalım.

MATLAB komut ortamında bu m-dosyasını çalıştırdığımızda aşağıda verilen basamak cevabını alınız.

Oransal kazanç,  $K_p=100$  için Sistemin basamak cevabı

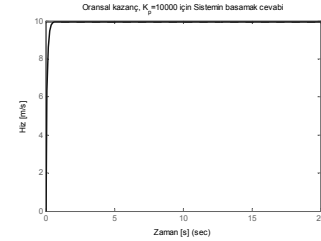


```
kp=100;m=1000;
b=50;u=10;
num=[kp];
den=[m b+kp];
t=0:0.1:20;
step (u*num,den,t)
axis([0 20 0 10])
```

**Not:** Açık döngü transfer fonksiyonundan doğrudan kapalı döngü transfer fonksiyonunu bulmak için `cloop` komutunu kullanabilirsiniz. Bu şekilde yapmayı seçerseniz m-dosyayı şu şekilde değiştirmelisiniz ve komut ortamında çalıştırıp aynı sonucu elde edersiniz.

```
kp=100;
m=1000;
b=50;
u=10;
num=[1];
den=[m b];
[numc,denc]=cloop(kp*num,den,-1);
t= 0:0.1:20;
step(u*numc,denc,t)
axis([0 20 0 10])
```

Cevap eğrisinden görüldüğü gibi, hem kalıcı durum hatası hem de yükselme zamanı tasarım ölçütlerimizi sağlamadı. Sistem çıkışını geliştirmek için oransal kazanç  $K_p$ 'i artırabilirsiniz. Mevcut m-dosyada  $K_p$ 'yi 10000'e eşitleyip MATLAB komut ortamında yeniden çalıştıralım. Alttaki cevap eğrisi görülür.



Kalıcı durum hatası neredeyse sıfıra düşmüş ve yükselme zamanı 0.5 s'den daha az bir süreye inmiştir. Ancak bu cevap, gerçek sabit hız kontrol sistemleri genellikle araç hızını 0.5 s'den daha az bir sürede 0'dan 10 m/s hıza değiştiremediği için gerçek dışıdır. Problemin çözümü mantıklı bir yükselme zamanı verebilecek orantı kazancı  $K_p$  ve buna ilave kalıcı durum hatasını yok edecek integral denetiminin seçimi ile elde edilir.

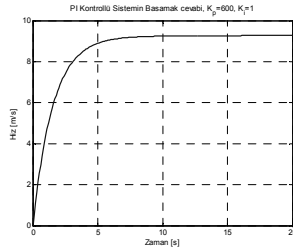
## PI Kontrol

PI kontrollü hız kontrol sisteminin kapalı döngü transfer fonksiyonu:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_p s + K_i}{ms^2 + (b + K_p)s + K_i}$$

Denetim bilgilerinden, integral etki ilavesinin kalıcı durum hatasını sıfırladığını biliyoruz. Şimdilik  $K_p$ 'yi 600'e ve  $K_i$ 'yi 1'e eşitleyelim ve cevabı nasıl etkilediğini görelim. Yeni bir m-dosyayı aşağıda verilen komutlarla oluşturalım.

```
kp = 600;
ki = 1;
m=1000;
b=50;
u=10;
num=[kp ki];
den=[m b+kp ki];
t=0:0.1:20;
step(u*num,den,t)
axis([0 20 0 10])
```

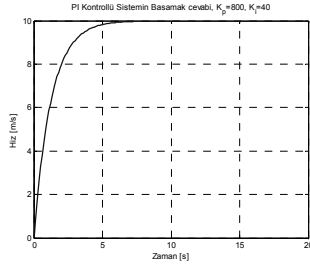


**Not:** Blok diyagramı indirmeden, sistemin açık döngü cevabı için yazılan m-dosyasını kullanarak doğrudan yazmayı seçerseniz şu şekilde m-dosyasını değiştirmelisiniz. Hangi m-dosyayı çalıştırsanız çalıştıralım aşağıda verilen aynı cevap eğrisini elde ederiz.

```
u=10;
num=[1];
den=[m b];
num1=[kp ki];
den1=[1 0];
num2=conv(num,num1);
den2=conv(den,den1);
[numc,denc]=cloop(num2,den2,-1);
t=0:0.1:20;
step(u*numc,denc,t)
axis([0 20 0 10])
```

Şimdi hem oransal kazanç ( $K_p$ ) hem de integral kazanç ( $K_i$ ) istenen cevabı elde etmek için ayarlanır. Integral kazancı ( $K_i$ ) ayarlarken çoğunlukla büyük değerleri sistemi kararsızlığa götüreceğinden küçük değerlerle başlamak önerilir.

$K_p$ 'yi 800'e ve  $K_i$ 'yi 40'a eşitlesek basamak cevabı aşağıdaki gibi olacaktır.



Görüldüğü gibi, bu basamak cevap tüm tasarım ölçütlerini sağlamaktadır.

MAK4030 07-08 BAHAR

41

## PID Kontrol

Bu özel örnek için, gerekli çıktıları elde etmek için gerekli türev etkin kullanılması gereksizdir. Ancak, ileride bahsedilmesi için PID'nin nasıl çalıştığını görmek isteyebilirsiniz. PID kontrollü sabit hız sisteminin kapalı döngü transfer fonksiyonu;

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{(m + K_d)s^2 + (b + K_p)s + K_i}$$

$K_p=K_v=K_f=1$  olarak sistemin basamak cevabını yeni bir m-dosya yazarak elde edelim. Bu m-dosyayı çalıştırılırsa PID'li sistemin basamak cevabı alınır. Sağlıklı sonuçlar alınmaya kadar  $K_p$ ,  $K_i$  ve  $K_d$  değerleri ayarlanır. Bu bölümde bundan bahsedilmeyecektir.

MAK4030 07-08 BAHAR

42

## Sabit Hız Kontrol Probleminin Kök Yer Eğrisi Yöntemi ile Çözümü

Bu problem için sistemin açık döngü transfer fonksiyonu;

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms + b}$$

Olup, burada;

$m = 1000$

$b = 50$

$U(s) = 10N$

$Y(s)$  = Hız çıktısı

dır. Tasarım ölçütleri ise;

Yükselme Zamanı  $< 5$  s

Maksimum Aşma  $< 10\%$

Kalıcı durum hatası  $< 2\%$

Orijinal problem ayarları Modelleme başlığı altında görülebilir.

MAK4030 07-08 BAHAR

43

## Oransal Kontrol

Kök yer eğrisi eğitim sayfasından biliyoruzki, kök-yer eğrisi çizimi; tek kazanç değerinin sıfırdan sonuza değişirken olası kapalı döngü kutuplarının tamamının yerlerini gösterir. Böylece, sadece oransal kontrolör bu problemin çözümü için ele alınacaktır. Dolayısıyla, oransal denetim etkili ( $K_p$ ) kapalı döngü transfer fonksiyonu şu hale gelir.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_p}{ms + (b + K_p)}$$

Ayrıca, kök-yer eğrisi eğitim sayfasından, kök-yer eğrisi çiziminden uygun bir bölge bulmak için sgrid MATLAB komutunun kullanıldığını biliyoruz. sgrid komutunu kullanmak için, ilk olarak hem sönüm oranı (zeta)'nın hem de doğal frekans ( $\omega_n$ )'in belirlenmesi gereklidir. Aşağıdaki iki ifade sönüm oranı ve doğal frekans bulmak için kullanılacaktır.

$$\omega_n \geq \frac{1.8}{Tr} \quad ; \quad \zeta \geq \sqrt{\frac{(\ln MP / \pi)^2}{1 + (\ln MP / \pi)^2}}$$

burada  $\omega_n$ : doğal frekans,  $\zeta$ : sönüm oranını,  $Tr$ : yükselme zamanını ve  $MP$ : maksimum aşmayı temsil etmektedir. Tasarım ölçütlerimizden biri yükselme zamanının 5 s'den daha az olmasıdır. İlk ifadeyi kullanarak, doğal frekansın 0.36 rad/s'den, ikinci ifadeyi kullanarak da maksimum aşmanın %10'dan küçük olması sebebiyle sönüm oranının 0.6'dan büyük olması gerektiğini görüyoruz.

Şimdi, kök-yer eğrilerini çizmek ve kök-yer eğrisinde uygun bir bölge belirlemek için sgrid komutunu kullanmaya hazırız. Aşağıda verilen komutları kullanarak kök-yer eğrisi çizimi yapılabilir.

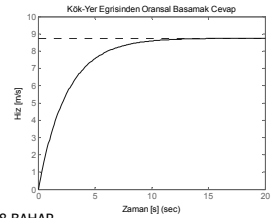
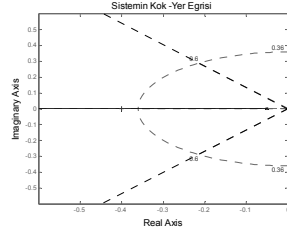
MAK4030 07-08 BAHAR

44

```
hold off;
m = 1000; b = 50; u = 10; numo=[1]; deno=[m b];
figurehold;
axis([-0.6 0 -0.6 0.6]);
rlocus(numo,deno)
sgrid(0.6, 0.36)
[Kp, poles]=rlocfind(numo,deno)
figurehold;
numc=[Kp]; denc=[m (b+Kp)];
t=0:0.1:20;
step(u*numc,denc,t)axis([0 20 0 10])
```

Anlatırında bir açılı bulunan iki kesiklik çizgi sabit sönüm oranını (zeta=0.6) işaret eder; çizgilerin arasında sönüm oranı 0.6'dan büyük ve dışında ise sönüm oranı 0.6'dan daha küçüktür. Şekildeki yarı elips sabit doğal frekansın ( $\omega_n=0.36$ ) yerini gösterir. Doğal frekans yarı elips dışında 0.36'dan büyük, içinde 0.36'dan küçüktür. MATLAB komut ortamında ilgili komut rlocfind yazıldığında kök-yer eğrisinde bir noktayı seçmeniz için imleci hazırlanır. Kesiklik çizgileri arasında (zeta=0.6) ve yarı elipsin ( $\omega_n=0.36$ ) hemen dışında gerçek eksen üzerinde (yaklaşık -0.4) bir nokta seçilirse, MATLAB komut ortamında  $K_p$ 'nin değeri ve kutup yerleri görüntülenir. Bu duruma göre, kapalı döngü basamak cevabı şöyle görülür.

Bu özel  $K_p$  kazancı için, yükselme zamanı ve maksimum aşma ölçütleri karşılanmış, ancak kalıcı durum hatası %10'dan daha fazla oluşmuştur.



MAK4030 07-08 BAHAR

45

## LAG Kontrollör

Kalıcı durum hatasını azaltmak için LAG kontrolör sisteme eklenecektir. LAG kontrolörün transfer fonksiyonu:

$$G_1(s) = \frac{s + Z_0}{s + P_0}$$

Açık döngü transfer fonksiyonu ( $K_p$  olmaksızın) şu hale gelir:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + Z_0}{ms^2 + (b + mP_0)s + bP_0}$$

Sonuçta, kapalı döngü transfer fonksiyonu:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_p s + K_p Z_0}{ms^2 + (b + mP_0 + K_p)s + (bP_0 + K_p Z_0)}$$

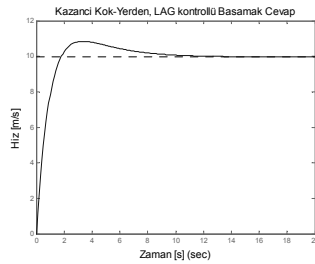
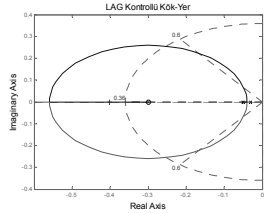
**Lead and Lag Compensator**  
sayfasında Kök-Yer kullanarak LAG veya FAZ-LAG denkleştirme bölümünü okursanız, LAG kontrolörün sıfır ve kutuplarının birbirlerine yakın yerleştirilmeleri gerekli olduğunu bilirsiniz. Ayrıca, kalıcı durum hatası bu durumda  $Z_0/P_0$  oranında azalır. Bu yüzden,  $Z_0 = -0.3$  ve  $P_0 = -0.03$  alalım. Yeni bir m-dosya oluşturulmuş ve aşağıdaki komutları girelim.

```
hold off;
m = 1000; b = 50; u = 10; Zo=0.3; Po=-0.03;
numo=[1 Zo]; deno=[m b+m*Po*b*Zo];
figurehold;
axis([-0.6 0 -0.4 0.4]);
rlocus(numo,deno)
sgrid(0.6, 0.36)
[Kp, poles]=rlocfind(numo,deno)
figure t=0:0.1:20;
numc=[Kp Kp*Zo]; denc=[m b+m*Po+Kp b*Po+Kp*Zo];
axis([0 20 0 12])step(u*numc,denc,t)
```

MAK4030 07-08 BAHAR

46

bu m-dosya çalıştırıldığında aşağıdaki kök-yer eğrisi çizimini verecektir.



MATLAB komut ortamında kök-yer eğrisi üzerinde nokta seçimi için imleci hazırlanır. Tekrar gerçek eksen üzerinde yaklaşık -0.4 civarında tıklanırsa komut ortamında  $K_p$  ve kök değerlerini verir. Bu değerlere göre sistemin kapalı döngü basamak cevabı yukarıdaki gibi olacaktır.

Görüldüğü gibi kalıcı durum hatası yaklaşık sıfırlanmıştır. Az bir aşma LAG kontrol ile ilave edilen sifirin sonucudur. Şimdi tüm tasarım ölçütleri yakalanmıştır ve daha fazla iterasyona gerek yoktur.

MAK4030 07-08 BAHAR

47

## Sabit Hız Kontrol Probleminin Frekans Cevabı Kullanarak Çözümü

Bu problem için sistemin açık döngü transfer fonksiyonu aşağıda verildiği gibidir.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms + b}$$

olup, burada:

$m = 1000$   
 $b = 50$   
 $U(s) = 10N$   
 $Y(s) = \text{Hız çıkışı}$

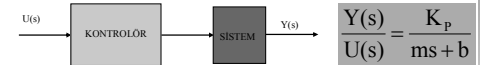
dır. Tasarım ölçütleri ise:

Yükselme Zamanı < 5 s  
Maksimum Aşma < 10%  
Kalıcı durum hatası < 2%

Orijinal problem ayarları Modelleme başlığı altında görülebilir.

Bode çizimini kullanarak için, sistemin açık döngü cevabı kararlı olmalıdır.  $K_p$ 'yi şimdi bire eşitleyelim ve açık döngü cevabın nasıl görüldüğüne bakalım. Yeni bir m-dosya oluşturup aşağıdaki komutları yazalım.

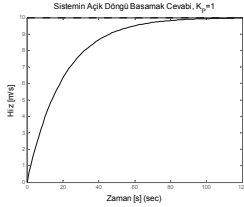
```
m = 1000;
b = 50;
u = 500;
Kp=1;
numo=[Kp];
deno=[m b];
step(u*numo,deno)
```



MAK4030 07-08 BAHAR

48

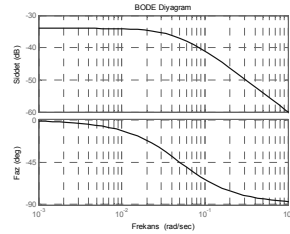
Bu m-dosya MATLAB komut ortamında çalıştırıldığında aşağıdaki cevap eğrisini verecektir.



Görüldüğü gibi, açık döngü sistem kararlıdır, böylece daha ileri gidebilir ve Bode eğrisini çizebiliriz. Yukarıda verilen m-dosya da step komutunu silip, yerine aşağıdaki komut yazılırsa;

**bode(numo,deno)**

bu m-dosya çalıştırıldığında aşağıdaki Bode eğrisini verecektir.



MAK4030 07-08 BAHAR

49

## Oransal Kontrolör

Yukarıda verilen Bode eğrilerinden sistemin karakteristiklerinin ne olacağını belirleyelim. Root-Locus Tutorial, eğitim sayfasından bantgenişlik (bandwidth) frekansı (BW) ( $M=6\text{--}7.5$  dB) kabaca doğal frekansa eşittir. Bu ifadenin kullanımından:

$$Tr = \frac{1.8}{\omega_n} = \frac{1.8}{BW}$$

Sistemimizin yükselme zamanı ( $Tr$ ), kazanç yukarıda görüldüğü gibi  $-6\text{--}7.5$  dB ulaşmadığından oldukça uzun olduğu belirlenebilir. Ayrıca, Kök-Yer Eğrisi eğitiminden, sönüm oranı kabaca derece cinsinden faz payının 100'de birine eşittir.

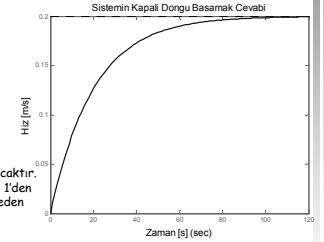
$$\zeta = \frac{\text{FazPayı(derece)}}{100}$$

Faz payımız yaklaşık 155 derece olduğundan, sönüm oranı 1.55 olacaktır. Buda sistemin aşırı sönümlü olduğunu göstergesidir (sönüm oranı 1'den büyük olduğundan). Son olarak, kalıcı durum hatası aşağıdaki ifadeden bulunur.

$$e_{KD} = \frac{1}{1+(\text{şiddet})} * 100\%$$

$$10^{(M(dB)/20)} = \text{Şiddet}$$

Sistemimiz için, alçak frekans kazancı  $M(dB)$  yaklaşık -35 dB olduğundan, kalıcı durum hatası %98 olmalı. ( $\text{Şiddet} = \text{antilog}(-35/20)$ ). Kapalı döngü basamak cevabı üreterek bunu doğrulayabiliriz.



MAK4030 07-08 BAHAR

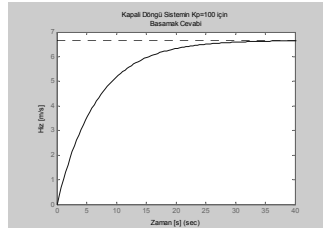
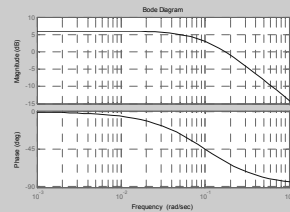
50

Bode çizimi açısından, hem bantgenişlik frekansı hem de alçak frekans kazanç artışı için kazancı yukarı doğru kaydırırsak, hem yükselme zamanı hem de kalıcı durum hatası iyileşecektir. Orantı kazancını ( $K_p$ ) artırarak bunu yapabiliriz. Orantı kazancı ( $K_p$ )'yi 100'e kadar artıralım ve olanları görelim. Bu m-dosya MATLAB komut ortamında çalıştırıldığında aşağıdaki Bode eğrilerini verir.

**m = 1000; b = 50;**  
**u = 10; Kp=100;**  
**numo=[Kp]; deno=[m b];**  
**bode(numo,deno)**

Şimdi, kalıcı durum hatasını tahminen %33 yapan alçak frekans kazancı yaklaşık 6dB'dir. Bant genişlik frekansı, yükselme zamanı yaklaşık 18 s civarında olduğundan yaklaşık 0.1 rad/s dir. Kapalı döngü basamak cevap eğrisine bakalım ve bunu doğrulayalım.

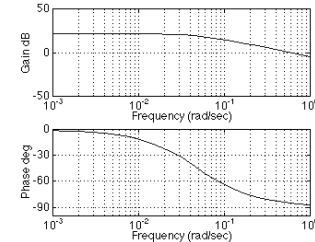
**m=1000;b=50;**  
**u=10;Kp=100;**  
**numc=[Kp];**  
**denc=[m b-Kp];**  
**step(u\*numc,denc)**



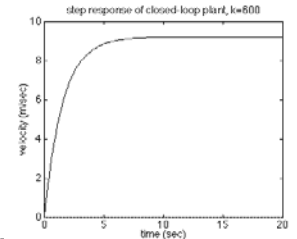
MAK4030 07-08 BAHAR

51

Tahmin edildiği gibi, hem kalıcı durum hatası hemde yükselme zamanı iyileşti. Şimdi orantı kazancını çok daha artırarak sistem cevabını izleyelim. M-dosyayı yandaki gibi değiştirerek yeniden çalıştırırsak aşağıdaki Bode eğrisini elde ederiz.



Şimdi düşük frekans kazancı yaklaşık 20 dB (şiddeti 10) ki tahmini kalıcı durum hatası %9 ve bant genişlik frekansı, 3 s'lik yükselme zamanı olduğundan 0.6 civarında kestirilebilir (istenen değerlerde). Böylece, hem kalıcı durum hatası hemde yükselme zamanı iyileştirilmiştir. Bunu doğrulamak için kapalı döngü cevap eğrisini yeniden üretelim.



MAK4030 07-08 BAHAR

52