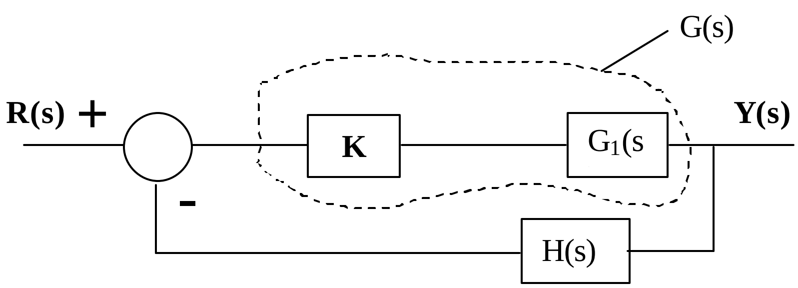
ROOT-LOCUS METODU

Degisken kazançli bir kontrol sistemi tasarlarken dikkat edilecek temel nokta kullandigimiz kazanç degerlerinin sistemi stabil bölgede tutmasidir.

Root locus çizimi instabil bölgeleri (kompleks düzlemde köklerin düsey eksenin sag tarafi), asiri sönümlü sistemleri, ve titresimli sistemleri belirlemede oldukça kullanislidir.

Root locus yöntemi bir miktar zaman alicidir fakat elde edilen sonuçlar bir kontrol sistemini tasarlarken oldukça önemlidir.



$$G_1(s) = \frac{1}{s}$$

$$H(s) = 1$$

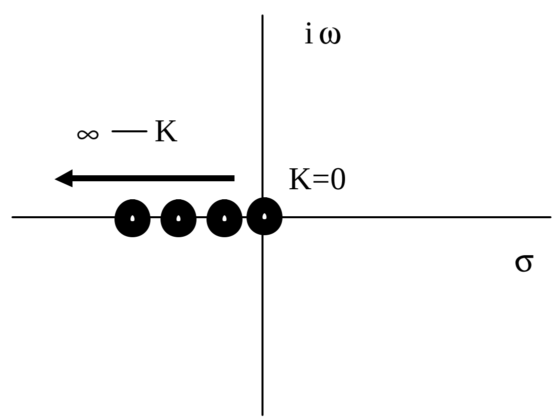
Kontrol sistemi için transfer fonksionu Mason formülü ile

$$G_s(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)\,H(s)} = \frac{\frac{K}{s}}{1 + \frac{K}{s}1} = \frac{K}{s + K}$$

Degisen K degerleri için sistem transfer fonksiyonunun paydasinin kökleri bulunur ve elde edilen kökler kompleks düzlemde gösterilir. (K kazanci normal olarak 0 ila +8 arasinda degerler alir).

D(s)=s+K, s+K=0

K	Kök
0	0
1	-1
2	-2
3	-3



Bir sistemin stabilitesinin arastirilmasi için transfer fonksiyonunun paydasina bakilmasi yeterlidir.

Negatif ve birim geri beslemeli bir kontrol sistemi için genel ifade asagidaki sekildedir,

$$G_s(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Sistem cevabi paydanin bir fonksiyonudur ve paydanin kökleri tarafindan belirlenir.

1+G(s)H(s)=0

Transfer fonksiyonu ifadesindeki G(s)H(s) kismi asagidaki sekilde de sifirlar (zeros) ve kutuplar (poles) olarak da gösterilebilir.

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+z_0)(s+z_1)...(s+z_m)}{(s+p_0)(s+p_1)...(s+p_n)}$$

Örnek:

$G(s) = \dfrac{K}{s^2 + 3s + 2}$, H(s)=1 ve sistem negatif geri beslemeli

Karakteristik denklem;

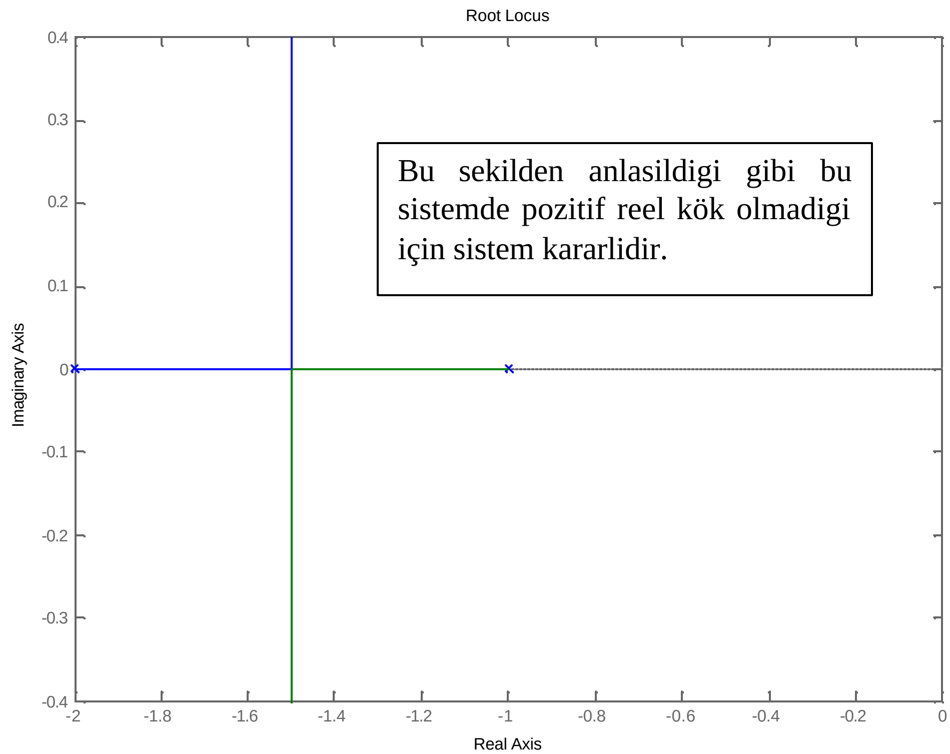
$$1 + \left(\frac{K}{s^2 + 3s + 2)}\right)(1) = 0$$

$$s^2 + 3s + 2 + K = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-3 + \sqrt{9 - 4(2+K)}}{2} = -1.5 \pm \frac{\sqrt{1-4K}}{2}$$

K	Kökler
0	-1,-2
1	-1.5000 ± 0.8660i
.	
100	-1.5000 ± 9.9875i

```
clc;clear;
pay=[1];
payda=[1,3,2];
rlocus(pay,payda)
```



ROOT LOCUS ÇIZIMI TEMEL KURALLARI

1. Kontrol sistemine ait karakteristik denklem yazilir.

$$1+G(s)H(s)=1+K\frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_n)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}=0$$

2. Kutuplar (Kökler) ve sifirlar sayilir. (n-m) farki kadar sonsuza giden root locus çizgisi mevcut olacaktir.

3. Reel eksen üzerindeki kökler isaretlenir.

4. Asagidaki ilk formül yardimi ile sonsuza giden kökler için asimtotlar belirlenir. Daha sonra ikinci formül kullanilarak asimtotlarin reel ekseni kestigi yer belirlenir ve asimtotlar çizilir.

$$\beta(k) = \frac{\pm 180^{o}(2k+1)}{n-m} \qquad k=[0,1,...(n-m-1)]$$

$$\sigma = \frac{(p_1 + p_2 + ... + p_n)(z_1 + z_2 + ... z_m)}{n-m}$$

5. Breakaway ve Breakin noktalari bulunur. Breakaway noktalari reel eksen üzerindeki iki kök (pole) arasinda bulunur. Breakin noktalari sifirlar (zeros) arasinda bulunur. Bu noktalari tesbit edebilmek için asagidaki polinomun çözülmesi gereklidir.

$A=(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_n)$ $B=(s+z_1)(s+z_2)...(s+z_m)$

$$\left(\frac{d}{ds}A\right)B - A\left(\frac{d}{ds}B\right) = 0$$

6. Kök egrilerinin imajiner ekseni kestigi yerler bulunur. Bunun için laplace degiskeni olan s yerine $i\omega$ degeri konulur ve elde edilen ifade frekanslari bulmak için çözülür. Imajiner ekseni kesen asimtotlar çizilir.

$$1 + K\frac{(i\omega + z_1)(i\omega + z_2)...(i\omega + z_m)}{(i\omega + p_1)(i\omega + p_2)...(i\omega + p_n)} = 0$$

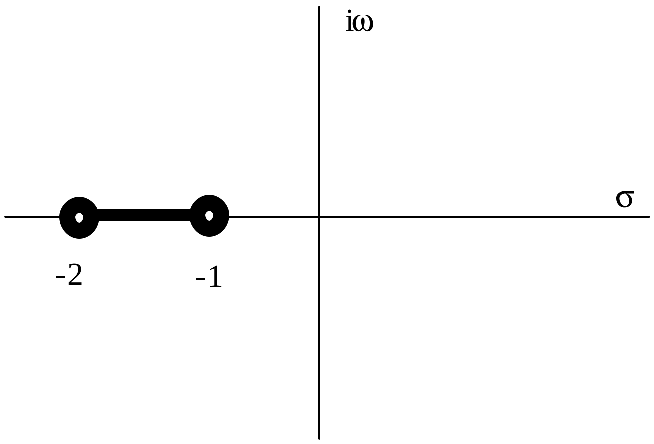
Örnek:

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 3s + 2}, \ H(s)=1$$

Adim 1: $D(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K}{s^2 + 3s + 2}1 = 1 + K\frac{1}{(s+1)(s+2)}$

Adim 2: Sonsuza giden yer egrisi adedi bulunur.
m=0, n=2 n-m=2 adet egri sonsuza gidiyor.

Adim 3: Kökler kompleks düzlemde gösterilir.



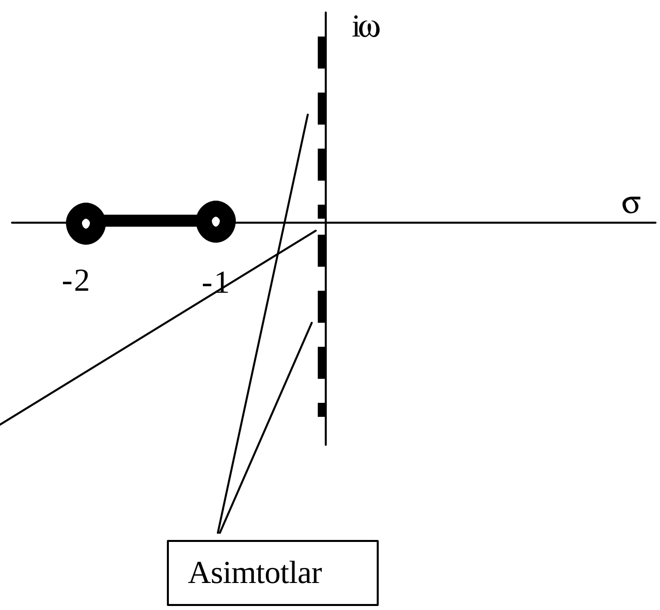
Adim 4: Asimtot açilari ve asimtotlarin reel ekseni kesim noktasi bulunur.

$$\beta(k) = \frac{180^{o}(2k+1)}{2} \qquad k = [0,1]$$

$$\beta(0) = \frac{180^{o}(2*0+1)}{2} = 90^{o}$$

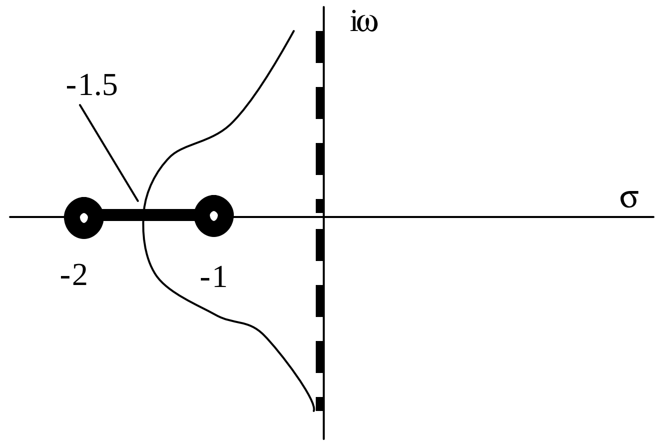
$$\beta(1) = \frac{180^{o}(2*1+1)}{2} = 270^{o}$$

$$\sigma = \frac{(-1-2)(0)}{2} = 0$$



Adim 5: Kökler için breakout noktalari bulunur.

A=1, B=s^2+3s+2



$$\frac{d}{ds}A = 0, \quad \frac{d}{ds}B = 2s + 3$$

$$A\left(\frac{d}{ds}B\right) - B\left(\frac{d}{ds}A\right) = 0$$

1(2s+3)-(s^2+3s+2)(0)=0
2s+3=0
s=-1.5

Adim 6: Kök yer egrileri imajiner ekseni kesmedigi için sistemin stabil oldugu sonucuna varilabilir, fakat uygulama amaci ile imajiner eksen kesim noktasi hesabi da asagida verilmistir.

1+G(s)H(s)=0

$$1 + K\frac{1}{s^2 + 3s + 2} = 0$$

s^2+3s+2+K=0

$(i\omega)^2+3(i\omega)+2+K=0$

$-\omega^2+3i\omega+2+K=0$

$\omega^2-3i\omega-2-K=0$

$$\omega = \frac{3i \pm \sqrt{(-3i)^2 - 4(-2-K)}}{2} = \frac{3i \pm \sqrt{-9+8+4K}}{2} = \frac{3i \pm \sqrt{4K-1}}{2}$$

Bu sonuç frekansin imjiner degere sahip oldugunu göstermektedir. Bu durum imajiner ekseni kesen bir frekans olmadigini gösterir.