

Kontrol Sistemleri Tasarımı

Frekans Analiz Yöntemleri I

Bode Eğrileri

Prof.Dr. Galip Cansever

Frekans cevabı analizi 1930 ve 1940 lı yıllarda Nyquist ve Bode tarafından geliştirilmiştir ve 1948 de Evans tarafından geliştirilen kök yer eğrilerinden öncedir.

Frekans metodunun zaman tanım aralığındaki metodalara göre belirgin avantajları vardır:

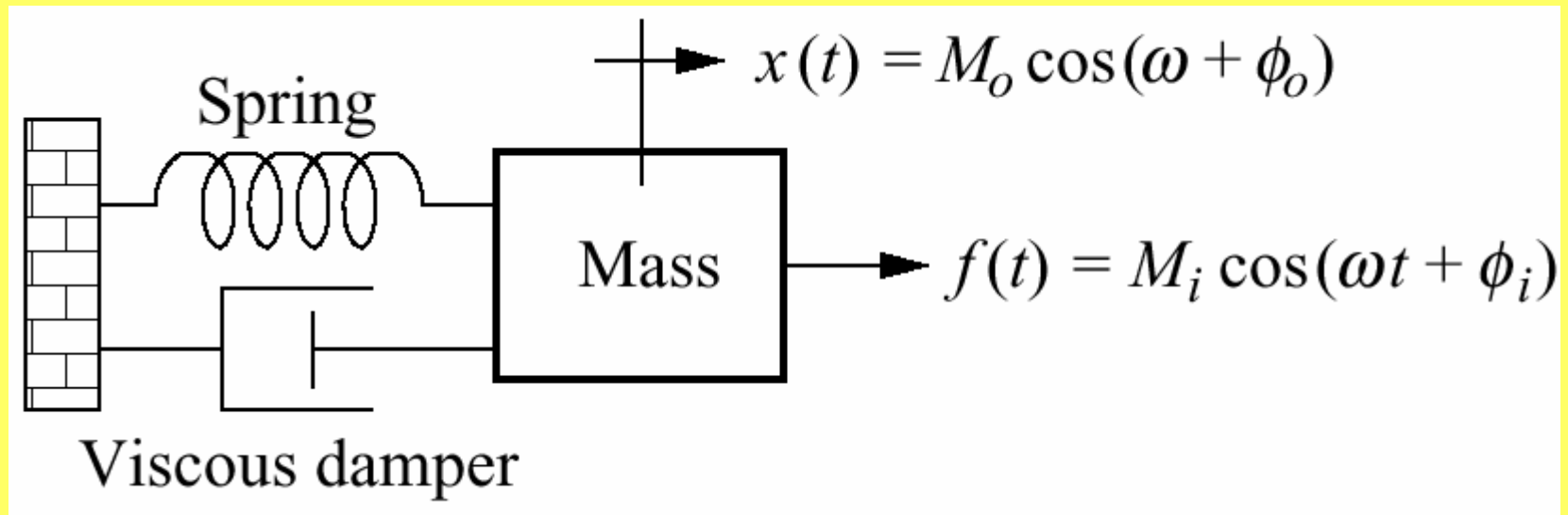
- 1) Fiziksel datalardan transfer fonksiyonunun modellenmesi
- 2) Faz ilerletici kompensatör tasarlarırken kararlı hal hatasının ve geçici cevap şartlarının karşılanması
- 3) Lineer olmayan sistemlerin kararlılığının bulunmasında
- 4) Kök yer eğrisi çizimindeki belirsizliklere karşı



HP 35670A Dinamik Sinyal Analizörü fiziksel sistemden frekans Cevabı bilgilerini toplar.Elde edilen bilgi analizde, tasarımda veya Sistemin matematiksel modelinin elde edilmesinde kullanılabilir.

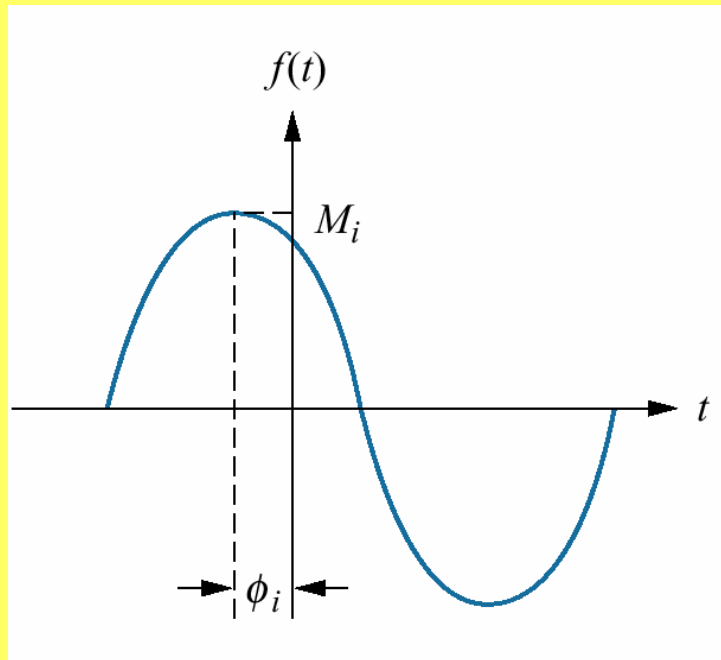
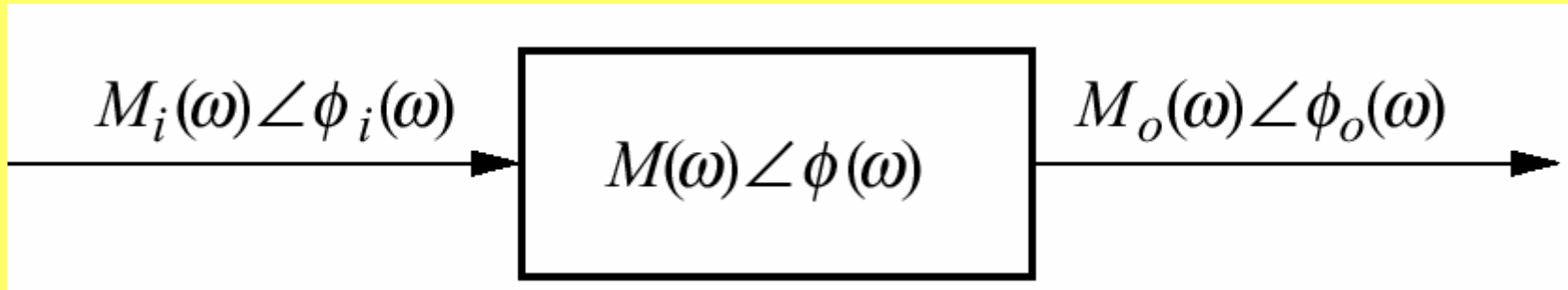
Kararlı halde, lineer bir sisteme sinüsoidal bir giriş uygulandığında sistem aynı frekansta bir sinüsoidal üretir. Bu çıkış cevabı giriş ile aynı frekansta olmasıyla beraber genlik ve faz açısı ile girişten farklılaşır. Bu farklılıklar frekansın fonksiyonudur.

$M_1 \cos(\omega t + \phi_1)$ $M_1 \angle \phi_1$ ile gösterilir.

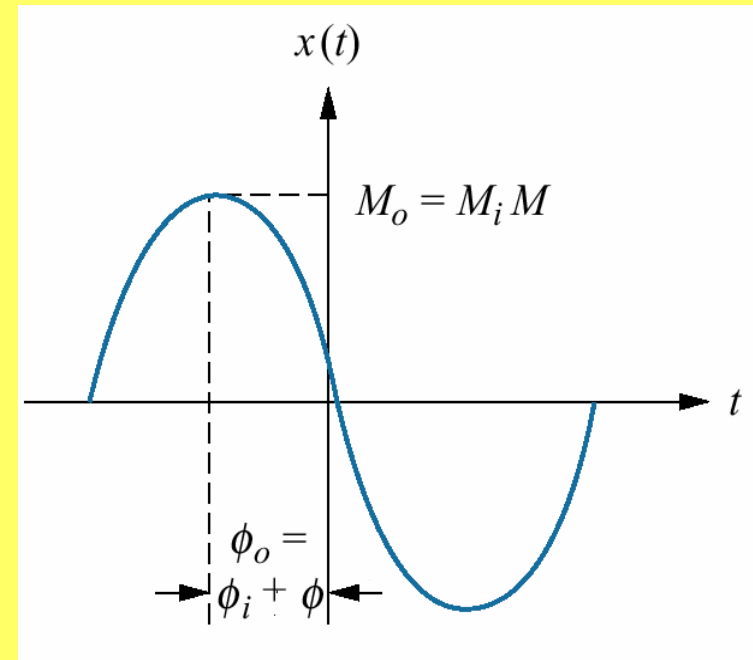


Sistemi inceleyelim

Sistemin girişi $\mathbf{f(t)}$ sinüsoidal ise kararlı hal çıkış fonksiyonu aynı frekansta olan $\mathbf{x(t)}$ dir.



Giriş



Çıkış

Kararlı hal çıkış sinüsoidalı:

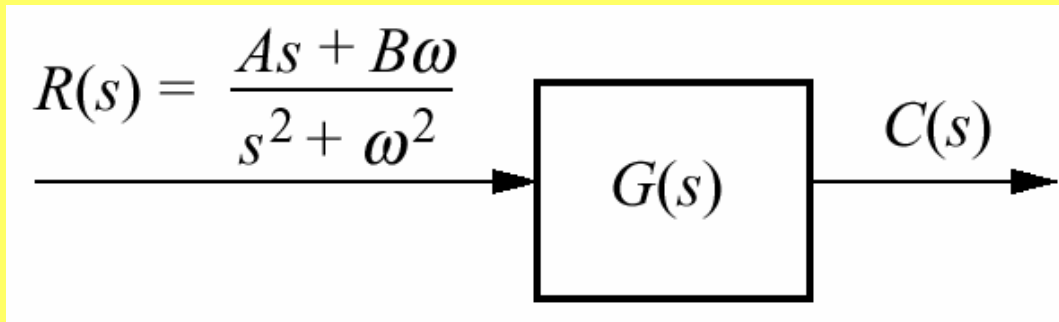
$$M_0(\omega) \angle \phi_0(\omega) = M_i(\omega) M(\omega) \angle [\phi_i(\omega) + \phi(\omega)]$$

Dolayısıyla sistemin fonksiyonu:

$$M(\omega) = \frac{M_0(\omega)}{M_i(\omega)}$$

Sistemin fazı ise:

$$\phi(\omega) = \phi_0(\omega) - \phi_i(\omega)$$



Giriş Fonksiyonu:

$$r(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$r(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t - \tan^{-1}(\frac{B}{A}))$$

$$M_i = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \phi_i = -\tan^{-1}(\frac{B}{A})$$

$$A - jB$$

$$M_i e^{j\phi_i}$$

$$C(s) = \frac{As + B\omega}{s^2 + \omega^2} G(s)$$

Zorlanmış Çözüm ile Doğal Çözümü kesirlere ayırma yöntemi ile elde edebiliriz.

$$C(s) = \frac{As + B\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)} G(s)$$

$$C(s) = \frac{K_1}{(s + j\omega)} + \frac{K_2}{(s - j\omega)}$$

$$c_{ss} = \frac{\frac{M_i M_G}{2} e^{-j(\phi_i + \phi_G)}}{(s + j\omega)} + \frac{\frac{M_i M_G}{2} e^{j(\phi_i + \phi_G)}}{(s - j\omega)}$$

Ters Laplas alındığında,

$$c(t) = M_i M_G \left(\frac{e^{-j(\omega t + \phi_i + \phi_G)} + e^{j(\omega t + \phi_i + \phi_G)}}{2} \right)$$

$$c(t) = M_i M_G \cos(\omega t + \phi_i + \phi_G)$$

$$M_0 \angle \phi_0 = M_i \angle \phi_i M_G \angle \phi_G$$

$$G(j\omega) = M_G \angle \phi_G$$

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s \rightarrow j\omega}$$

Frekans Cevabının Çizilmesi

Bir $G(s)$ sisteminin frekans yanıtı bir iki şekilde çizilebilir:

- 1) Genlik ve fazın frekansın bir fonksiyonu cinsinden ayrı ayrı çizilmesi
- 2) Kutupsal olarak genlik ve fazörün aynı eğri üzerinde çizilmesi

Örnek: $G(s) = \frac{1}{s+2}$

Sistemi analitik olarak ifade ediniz, frekans yanıtını genlik ve fazörü ayrı ayrı eğriler olarak ve aynı eğri olarak çiziniz.

$s=j\omega$ için

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}$$

$$G(j\omega) = \frac{2 - j\omega}{\omega^2 + 4}$$

Bu sistemin genliği:

$$|G(j\omega)| = M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 4}}$$

G(j ω)'nin fazı ise:

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Bode eğrilerinde genelde genlik **desibel(dB)** cinsinden ifade edilir. Bir **M** kazancının desibel değeri **20log(M)** dir.

Ayrıca hem kazanç hemde frekans eksenleri logaritmiktir.

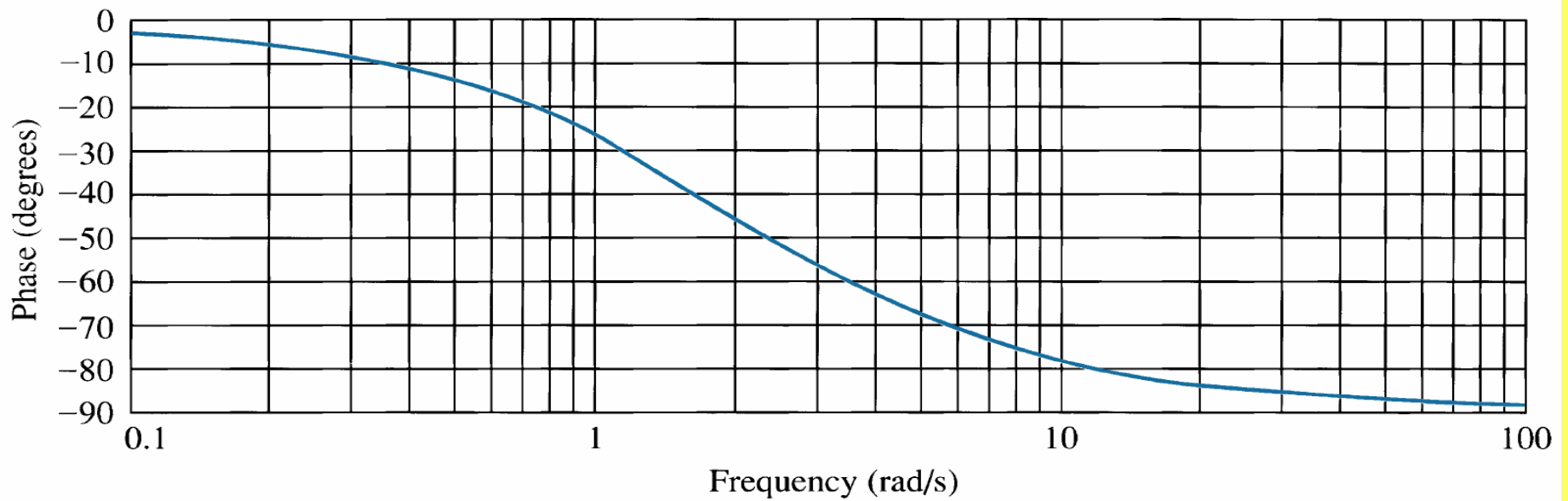
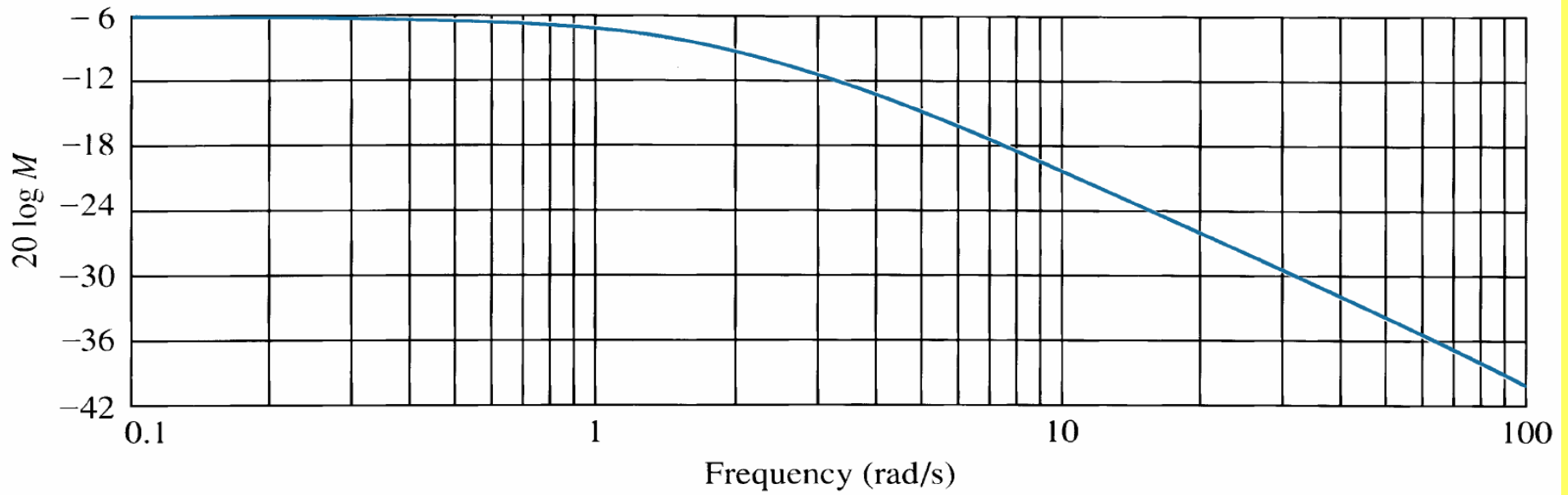
Dolayısıyla Bode eğrimizde genlik ;

$$20\log M(\omega) = 20\log \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 4}}, \quad \log \omega$$

Açı ise;

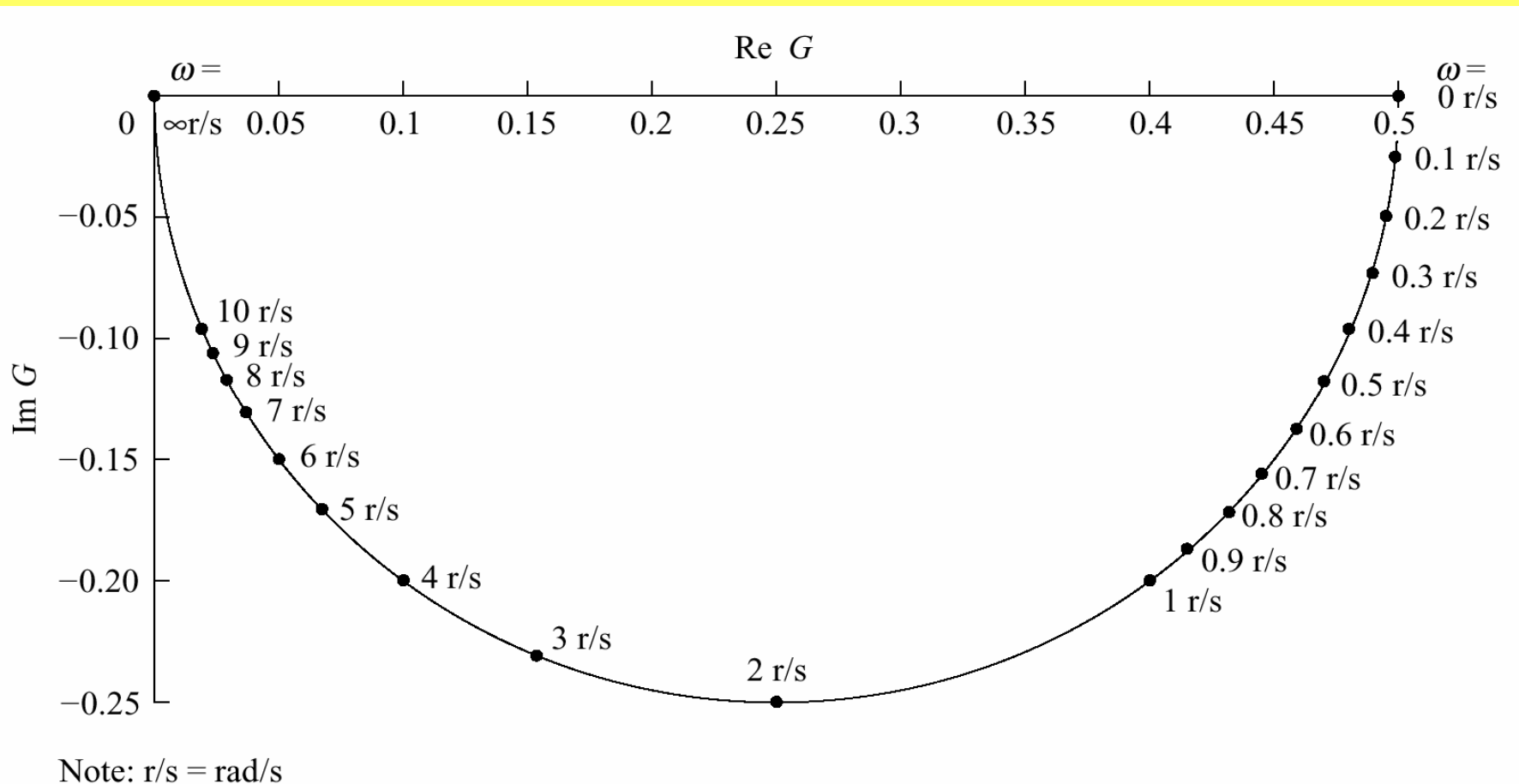
$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \log \omega$$

Eksen takımıyla çizilir.



Genlik ile açı kutupsal olarak çizildiğinde ise

$$M(\omega) \angle \phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 4}} \angle -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$



Logaritmik Çizimin Avantajları

- Elle hızlıca çizmek mümkün
- Genlik ve frekans için çok geniş sınırlar kolayca gösterilebilir
- Çok karmaşık transfer fonksiyonları kolayca çizilebilir ve çarpım veya bölüm halinde olan terimler basitçe grafiksel toplama ve çıkarma ile daha kolay anlaşılabilir.
- Rakam katlandıkça dB değeri 6dB artar.

Asimptotik Yaklaşımlar: Bode Eğrileri

Logaritimik genlik ve faz frekans eğrilerinin logaritmik açısal hıza göre çizimleri düz çizgilerin toplamı yaklaşımı ile basitleştirilebilir.

$$G(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2).....(s + z_n)}{s^m(s + p_1)(s + p_2).....(s + p_n)}$$

Sistemi dikkate alalım. Bu sistemin genlik frekans cevabı her bir terim genlik frekans cevaplarının çarpımıdır.

$$|G(j\omega)| = \frac{K|(s + z_1)||s + z_2|.....|(s + z_n)|}{|s^m|(s + p_1)|(s + p_2)|.....|(s + p_n)|} \bigg|_{s \rightarrow j\omega}$$

Eğer herbir kutup ve sıfırın genlik cevabını biliyorsak toplam genlik cevabını bulabiliriz.

Logaritmik olarak çalışırsak toplam genlik ifadesini elde etmemiz kolaylaşır. Zira paydaki(sıfırlar) çarpımlar toplanacak, paydadaki çarpımlar ise çıkartılacak. Desibel olarak yazacak olursak:

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log K + 20\log|(s + z_1)| + 20\log|(s + z_2)| + \dots - 20\log|(s^m)| - 20\log|(s + p_1)| - \dots \Big|_{s \rightarrow j\omega}$$

Eğer her bir terimi biliyorsak cebrik toplamaları ile sonucu kolayca elde edebiliriz. Ayrıca her bir terimin düz çizgi yaklaşımını biliyorsak bu düz çizgilerin toplanıp çıkartılması ile grafik kolayca çizilebilir.

$G(s) = (s+a)$ 'nın Bode Çizimi

$$G(j\omega) = (j\omega + a) = a(1 + j\frac{\omega}{a})$$

Düşük frekanslarda, $G(j\omega) \approx a$ olur.

Desibel cinsinden genlik: **$20\log M = 20\log a$**

$$M = |G(j\omega)| \text{ ve sabittir.}$$

Yüksek frekanslarda, $\omega \gg a$

$$G(j\omega) = (j\omega + a) = a(j\frac{\omega}{a})$$

$$G(j\omega) = a(\frac{\omega}{a})\angle 90^\circ = \omega\angle 90^\circ$$

Desibel cinsinden genlik: **$20\log M = 20\log a$**

$$20\log M = 20\log a + 20\log \frac{\omega}{a} = 20\log \omega$$

$$(a < \omega < \infty)$$

Eğer **dB** veya **$20\log M$** 'yi **$20\log \omega$** 'ya göre çizicek olursak, yukarıdaki denklem doğru denklemi olur:

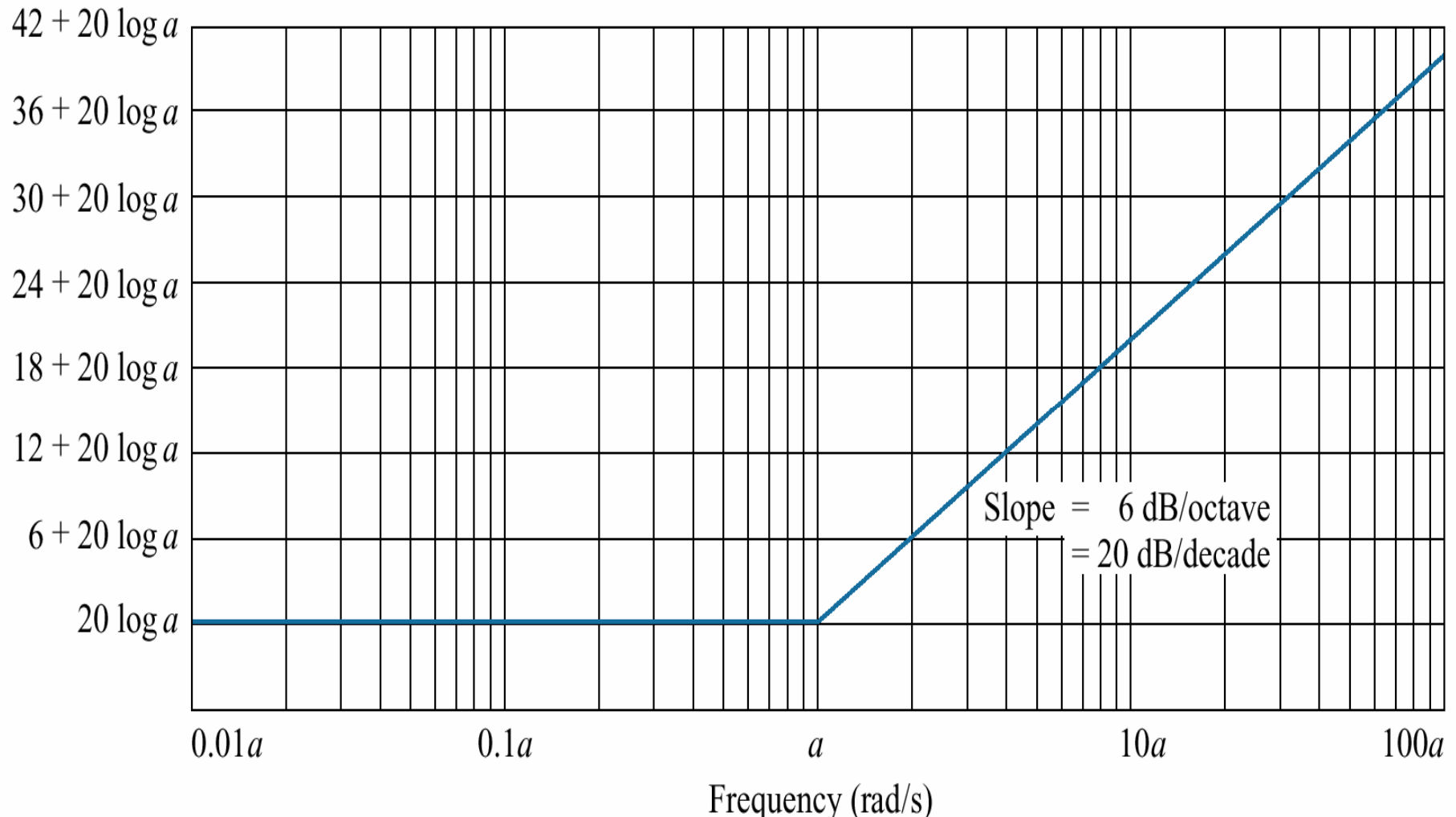
$$y = 20x$$

Eğrinin eğimi **20** dir.

Her katlayan frekans **$20\log \omega$** ve 6db artmasına sebep olur ve eğri **6dB/oktav**'lık eğim ile artar. Burada oktav frekansın katlayanıdır, 2, 4, 8, 16, 32....

Düz eğri yaklaşımına asimptot denir. Düşük frekans yaklaşımına düşük frekans asimptotu, yüksek frekans yaklaşımına yüksek frekans asimptotu denir. **a** frekansına da **köşe frekansı** denir.

$(s+a)$ 'nın Bode Genlik Eğrisi



Faz cevabını inceleyecek olursak:

$$G(j\omega) = (j\omega + a) = a(1 + j\frac{\omega}{a})$$

İfadesine göre köşe frekansında($\omega=a$) açı **45°** olmalıdır.

$$(G(j\omega) = a + aj)$$

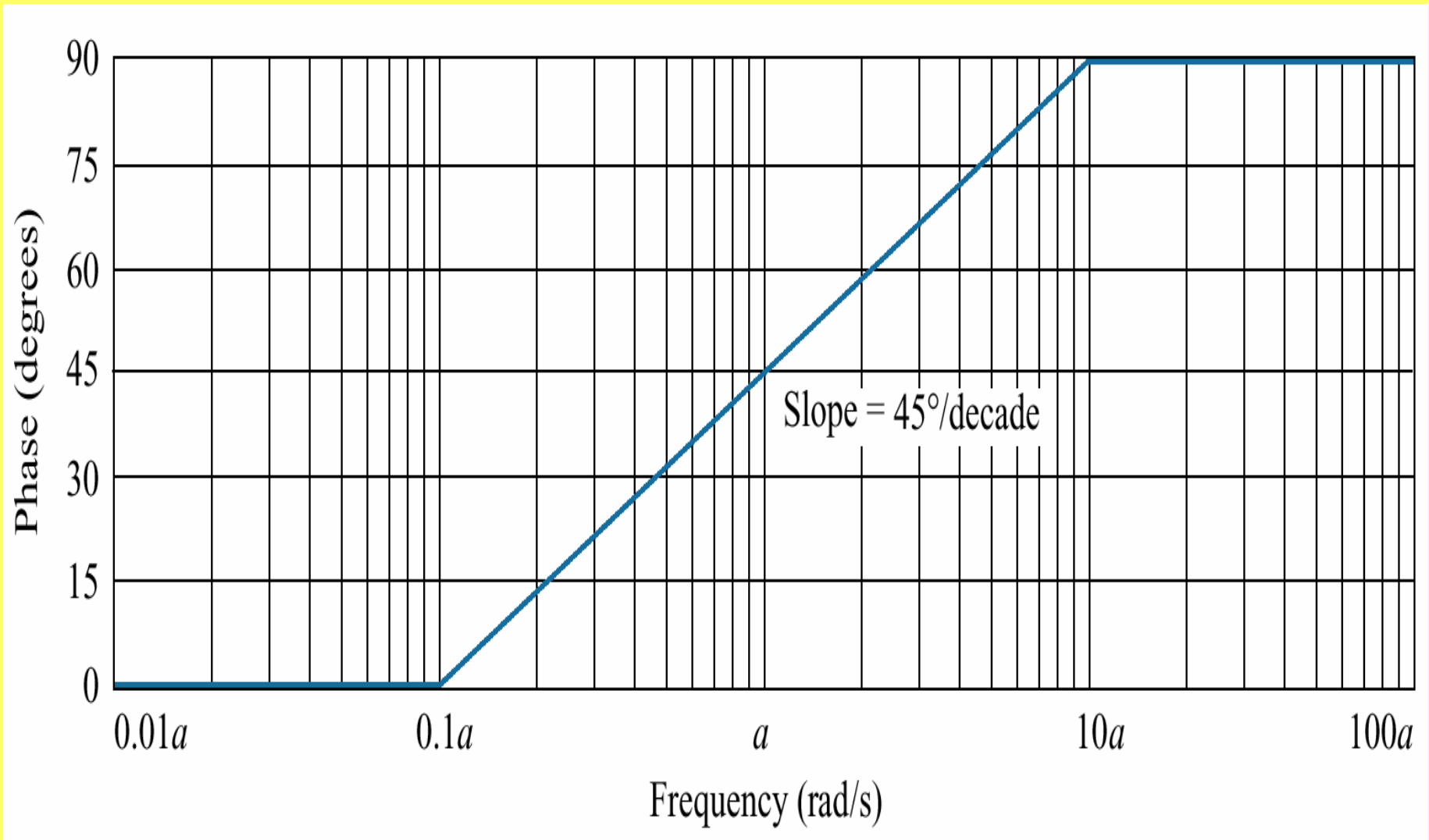
Düşük frekanslarda $G(j\omega) \approx a$

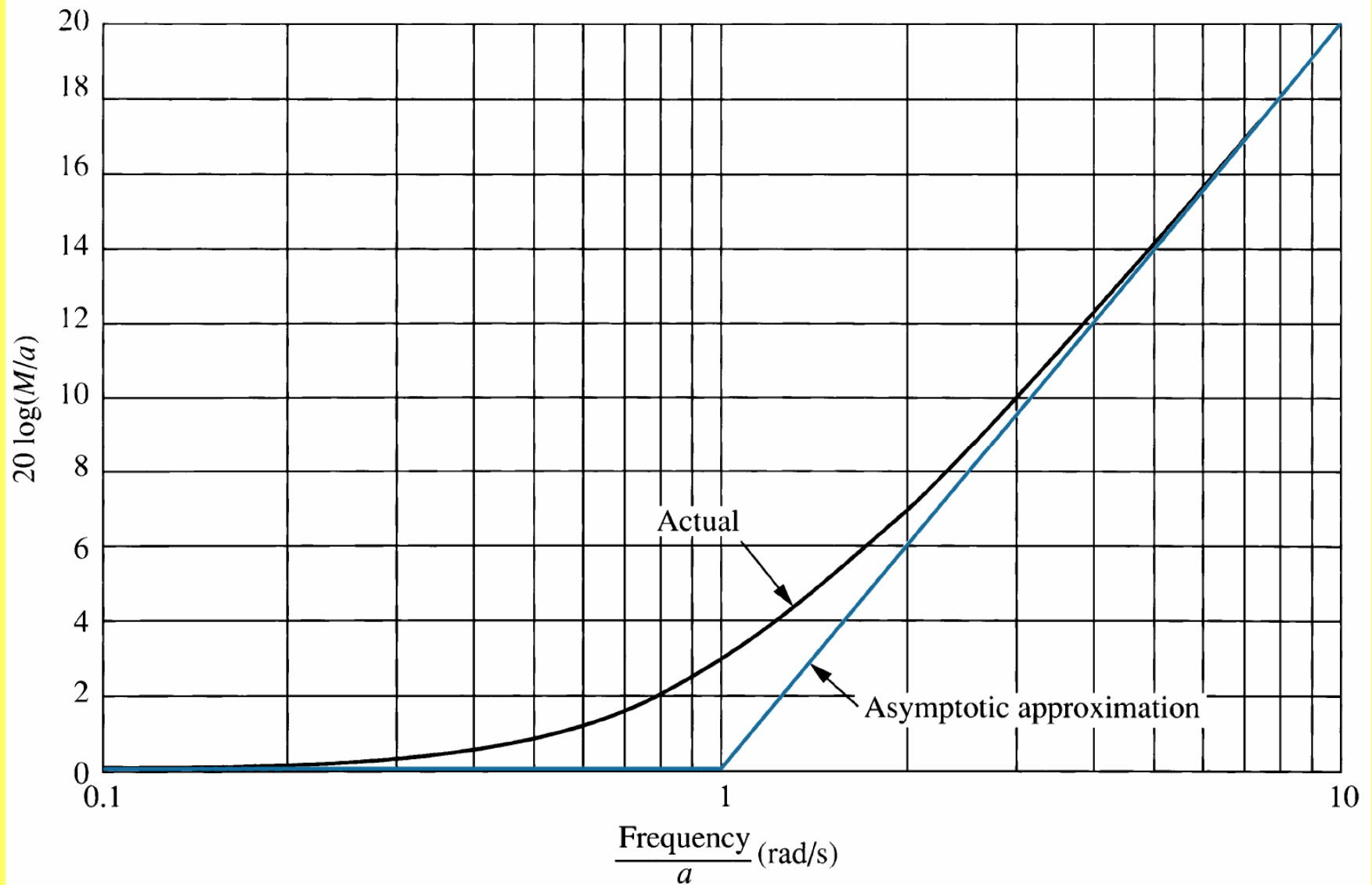
İfadesine göre açı **0°** olmalıdır.

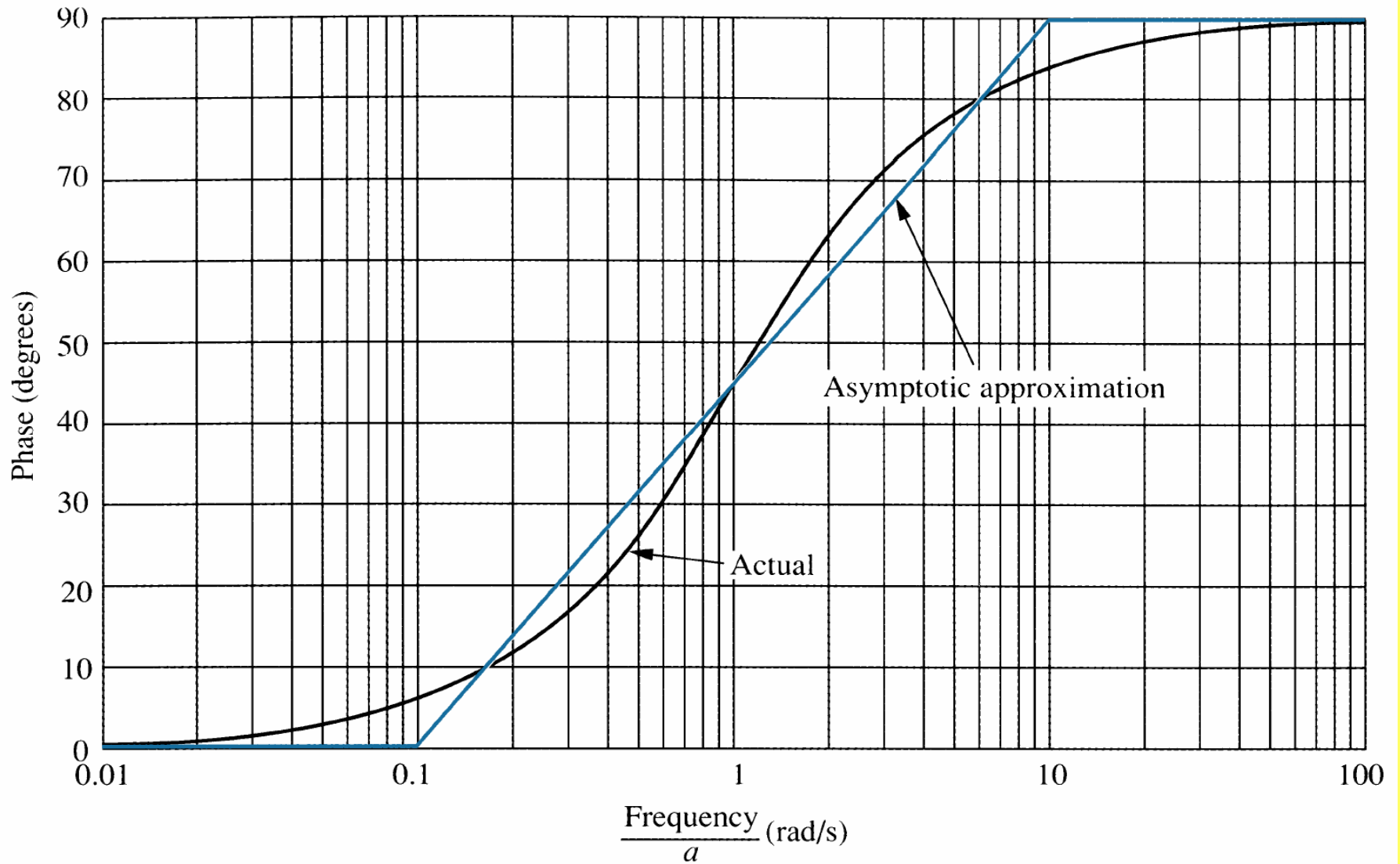
Yüksek frekanslarda $G(j\omega) = a(\frac{\omega}{a})\angle 90^0 = \omega\angle 90^0$

İfadesine göre açı **90°** olmalıdır.

$(s+a)$ 'nın Bode Faz Eğrisi







$G(s) = 1/(s+a)$ 'nın Bode Çizimi

$$G(s) = \frac{1}{(s+a)} = \frac{1}{a\left(\frac{s}{a} + 1\right)}$$

Bu transfer fonksiyonu **$20\log(1/a)$** düşük frekans asimptotuna sahiptir.

Bode eğrisi köşe frekansı, **a (rad/s)** 'ya ulaşıncaya kadar sabittir. Yüksek frekanslarda:

$$G(s) = \frac{1}{a\left(\frac{s}{a}\right)} \bigg|_{s \rightarrow j\omega} = \frac{1}{a\left(\frac{j\omega}{a}\right)} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{\omega}{a}} \angle -90^\circ = \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ$$

dB olarak,

$$20 \log M = 20 \log \frac{1}{a} - 20 \log \frac{\omega}{a} = -20 \log \omega$$

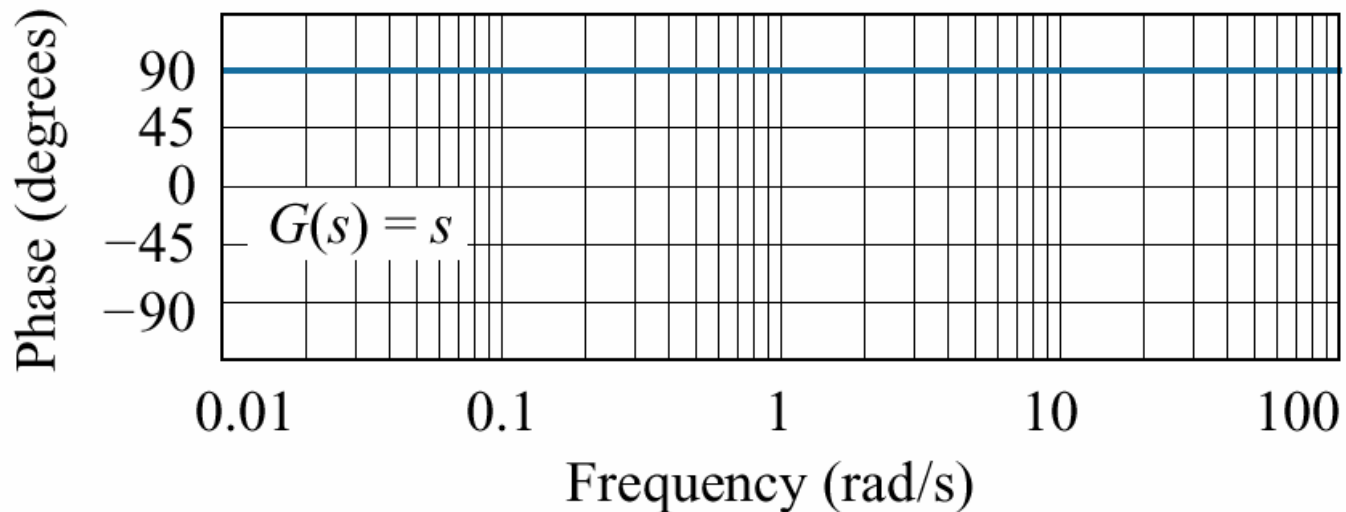
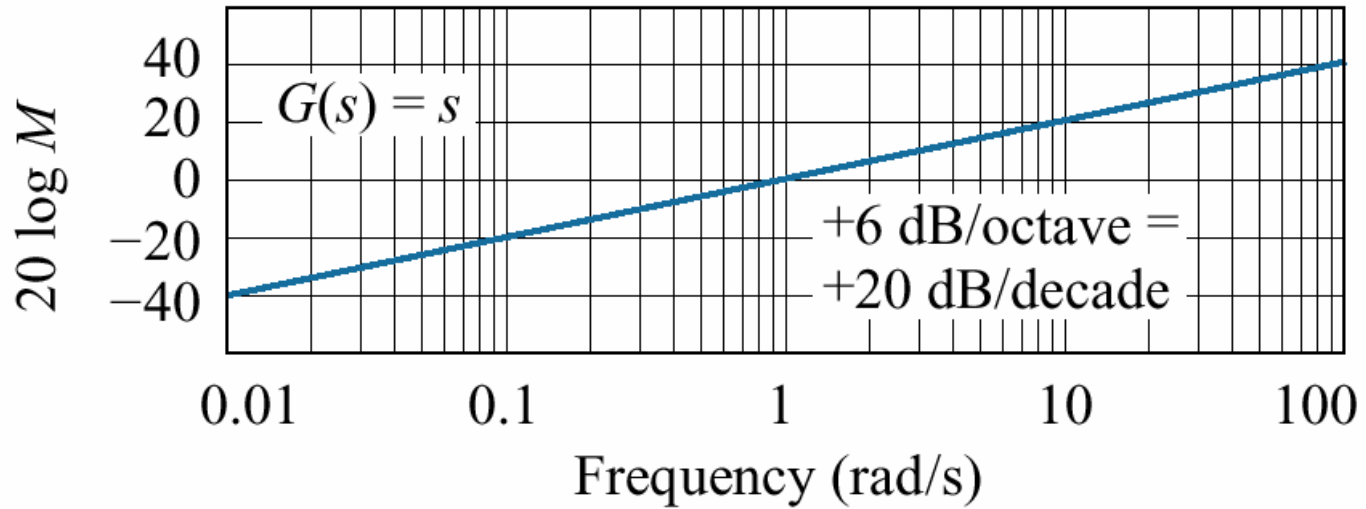
$G(s)=s$ 'in Bode Çizimi

$G(s)=s$ sadece yüksek frekans asimptotuna sahiptir. **$s=j\omega$, $20\log \omega$** genliğindedir. Böylece Bode eğrisi **+6dB/oktav(20dB/dekad)** lık eğimli ve **$\omega=1$ 'de 0dB** den geçen bir doğrudur. Fazı ise sabit **+90°** dir

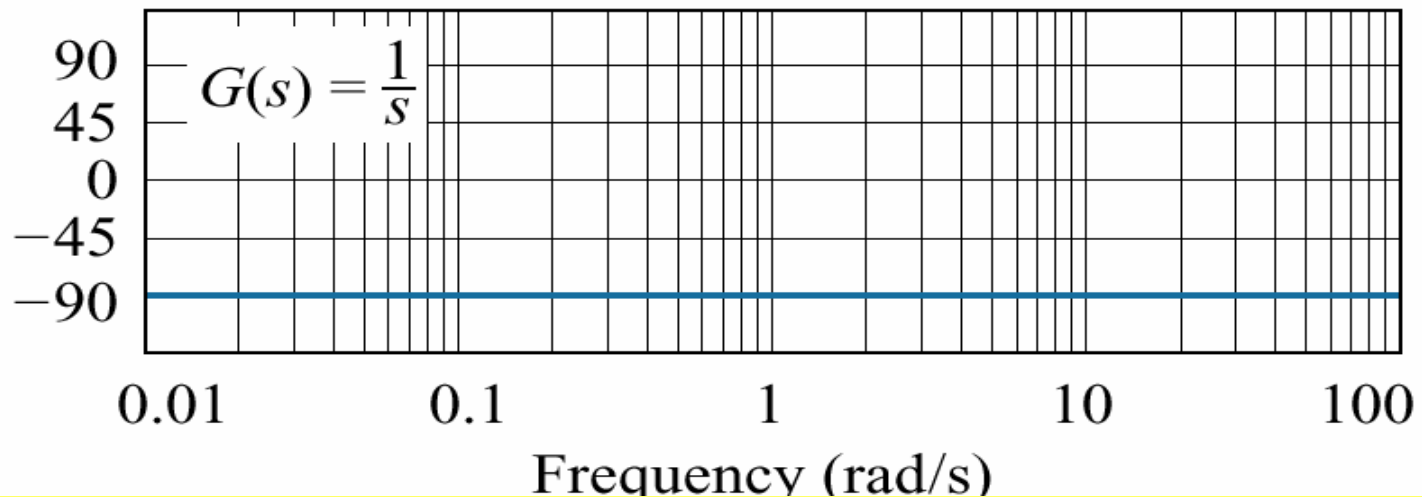
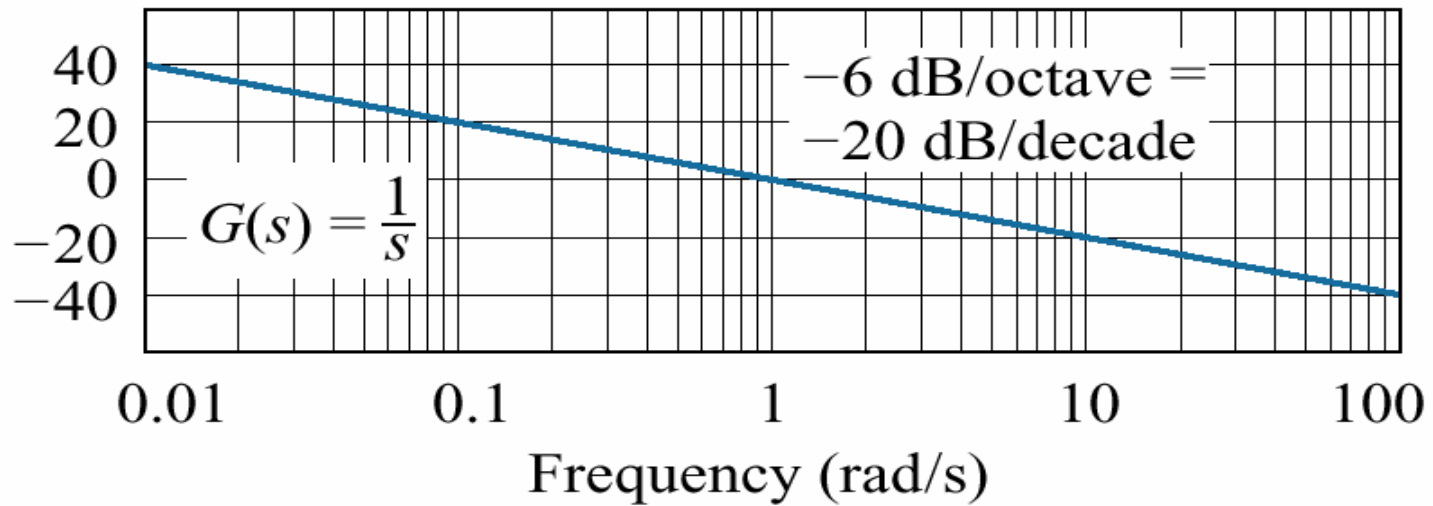
$G(s)=1/s$ 'in Bode Çizimi

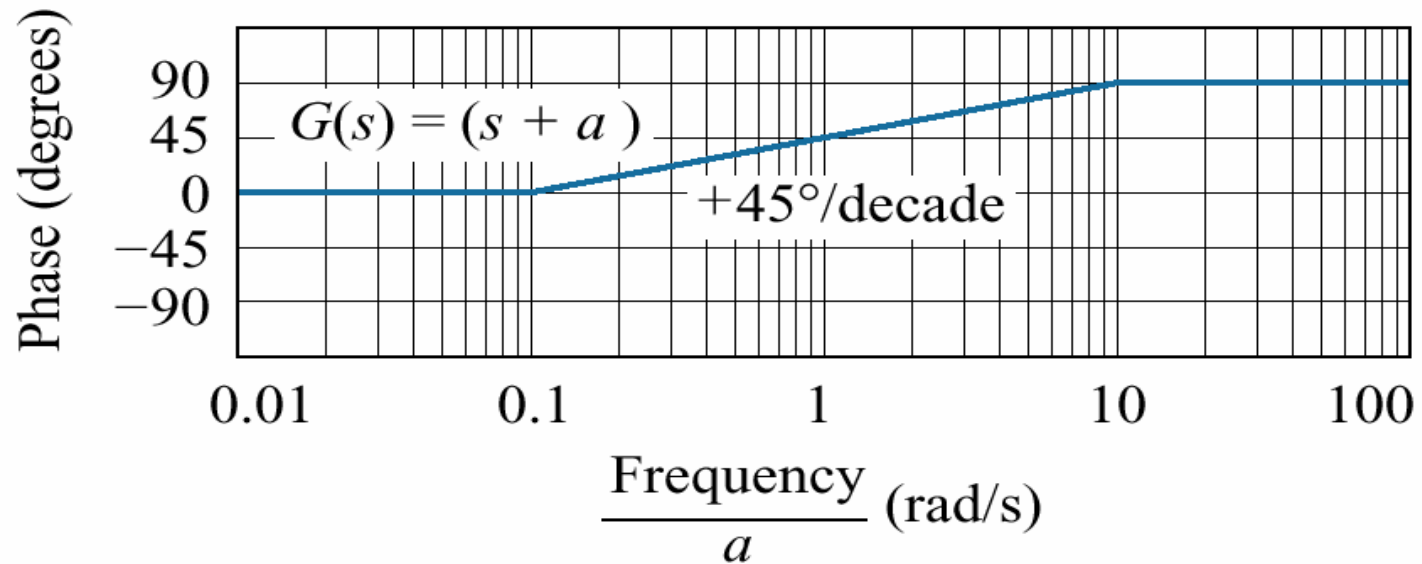
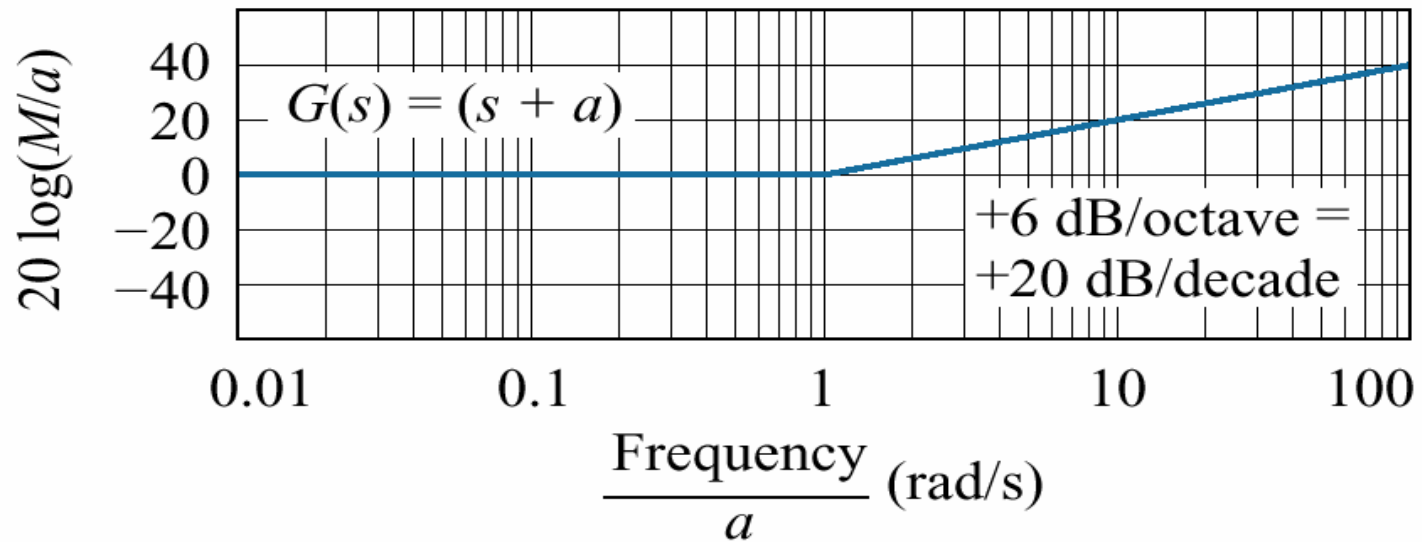
$G(s)=1/s$ Bode eğrisi **-6dB/oktav(20dB/dekad)** lık eğimli ve **$\omega=1$ 'de 0dB** den geçen bir doğrudur. Fazı ise sabit **-90°** dir

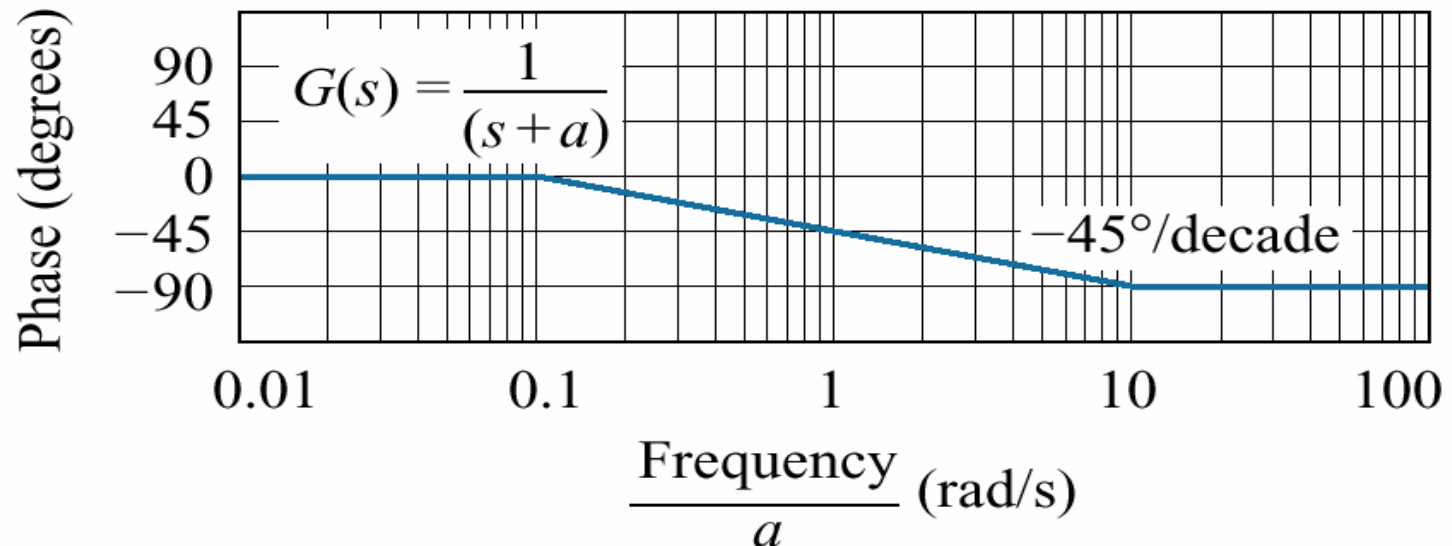
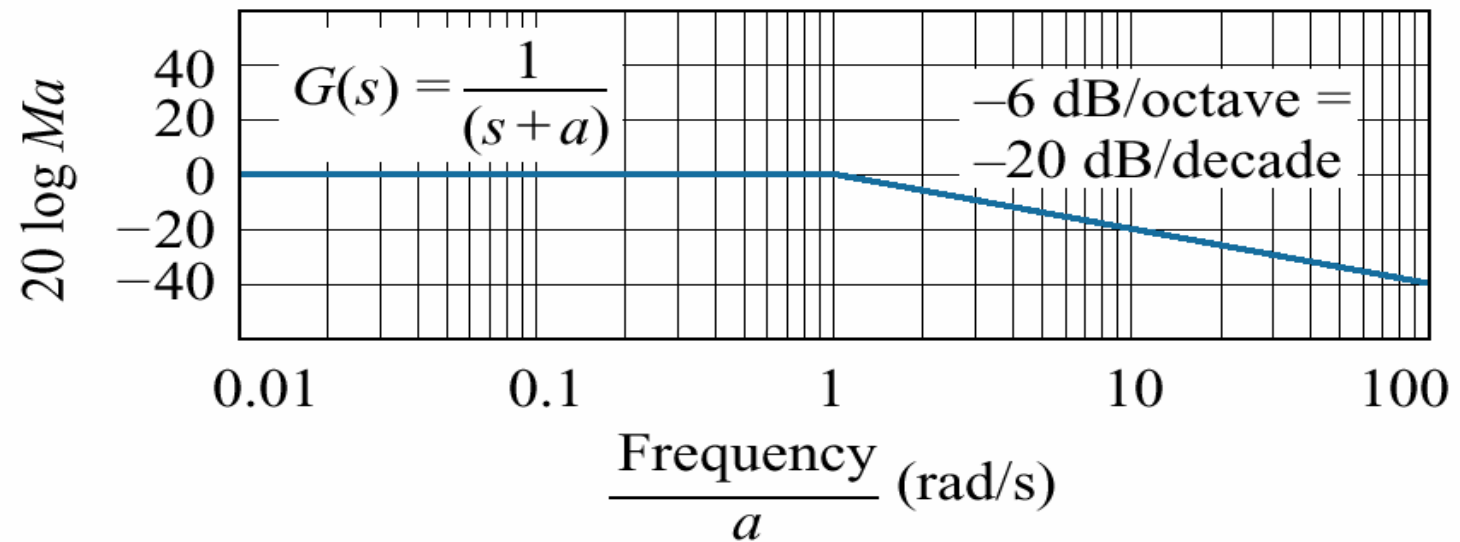
$$G(s) = s$$



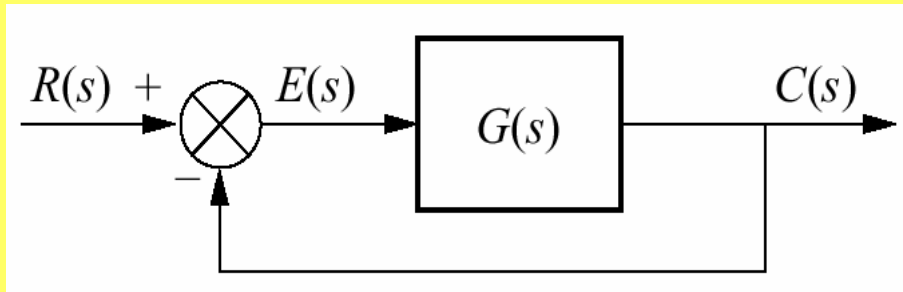
$$G(s) = 1/s$$







Örnek:



$$G(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+1)(s+2)}$$

Bode eğrisini çiziniz?

İlk olarak köşe frekansları: **-1, -2, -3.**

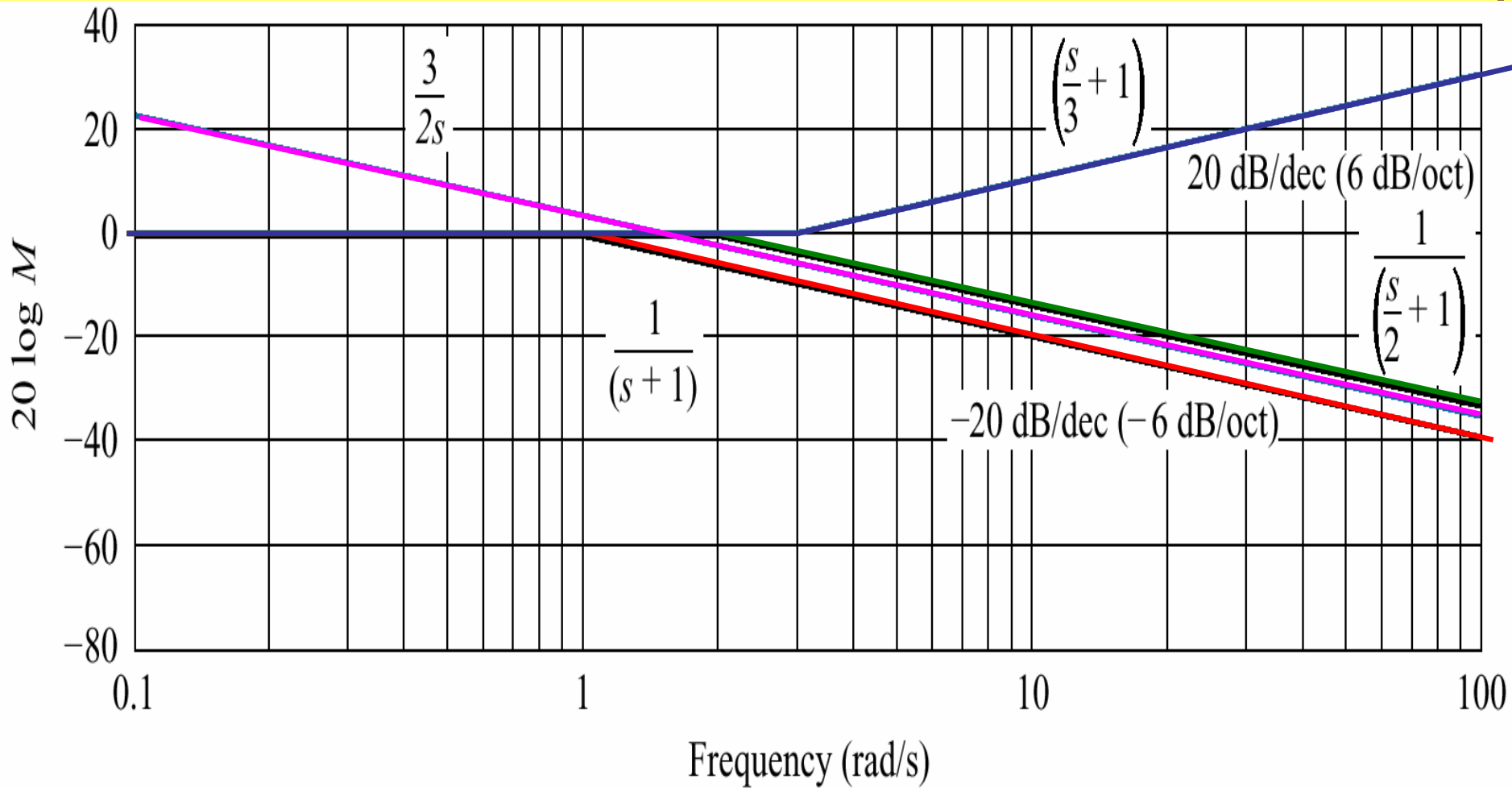
Genlik eğrisi en küçük köşe frekansından **1 dekad** önce başlamalı ve en yüksek köşe frekansından **1 dekad** sonrasına kadar devam etmelidir.

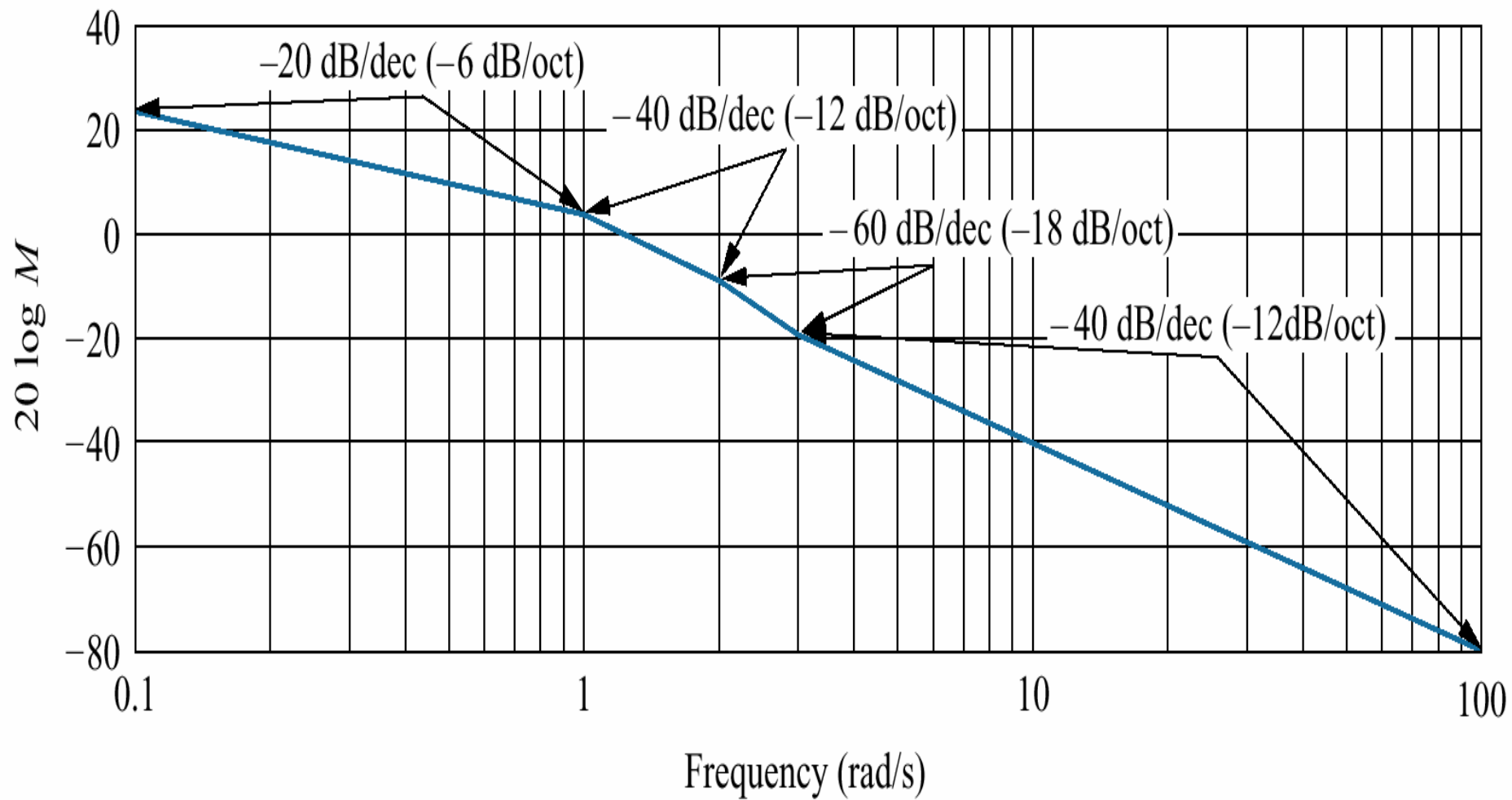
Öyleyse **0.1 rad** ile **100 rad** arası uygun bir seçimdir.

$\omega=0.1$ değeri bütün **(s+a)** ifadeleri için düşük frekanstır (**s=0**) böylece

$$G(j0.1) = \frac{3K}{(0.1)(1)(2)} = 15K$$

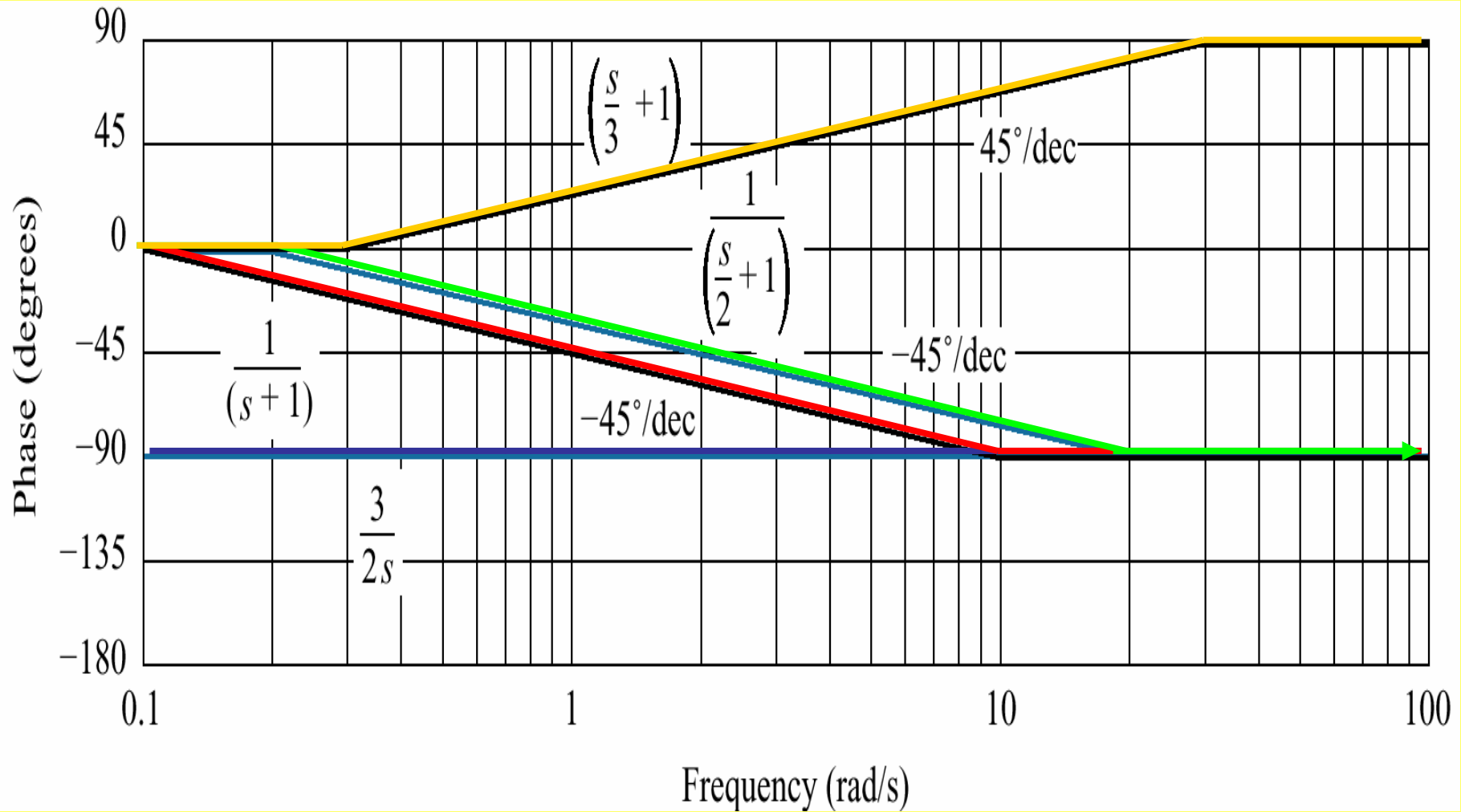
K genlik eğrisini yukarı veya aşağı kaydır

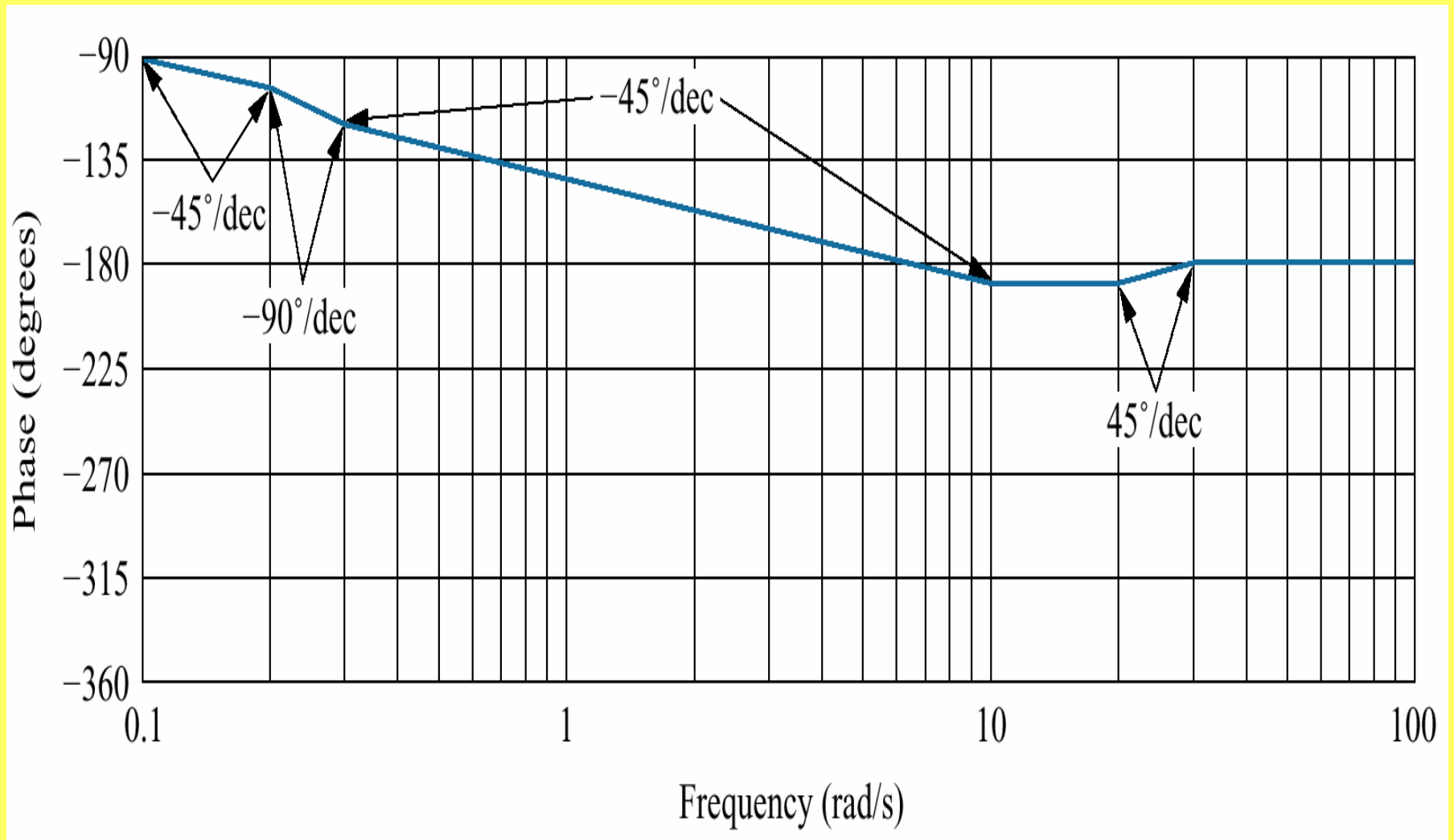




Bode eğrisi $\omega=0.1$ değerinde, **$20\log 15=23.52\text{dB}$** değeri ile başlıyor. Paydadaki **s** teriminden dolayı hemen **-6dB/oktav'lık** eğimle düşüşe geçiyor. $\omega=1$ değerinde, **$(s+1)$** terimi bir **-6dB/oktav'lık** eğim daha ekiliyor ve eğri toplam **-12dB/oktav'lık** eğim ile düşüşüne devam ediyor. Daha sonra $\omega=2$ değerinde, **$(s+2)$** terimi bir **-6dB/oktav'lık** eğim daha ekiliyor ve eğri toplam **-18dB/oktav'lık** eğime sahip oluyor. $\omega=3$ değerinde, **$(s+3)$** terimi bir **6dB/oktav'lık** pozitif eğim ekliyor ve eğrinin toplam eğimi **-12dB/oktav** oluyor ve bundan sonra başka köşe frekansı olmadığı için eğri bu eğimle devam eder.

Bode faz eğriside benzer şekilde elde edilebilir, köşe frekansının 1 dekad öncesi ve 1 dekad sonrasında kırılmaların olması biraz daha dikkat gerektirir.





$G(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ 'in Bode Çizimi

İkinci derece sistemlerin Bode eğrilerinin çizimlerini inceleyeceğiz.

$$G(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

Birinci derece sistemlerin aksine ikinci derece sistemlerde ζ 'nin bazı değerleri için gerçek frekans cevabı ile asimptotik yaklaşımdaki frekans cevabı arasındaki fark ihmal edilebilecek seviyeden büyük olabilir.

Düşük frekanslarda,

$$G(s) \approx \omega_n^2 = \omega_n^2 \angle 0^\circ$$

Düşük frekanslarda genlik ise,

$$20\log M = 20\log|G(j\omega)| = 20\log \omega_n^2$$

Yüksek frekanslarda,

$$G(s) \approx s^2$$

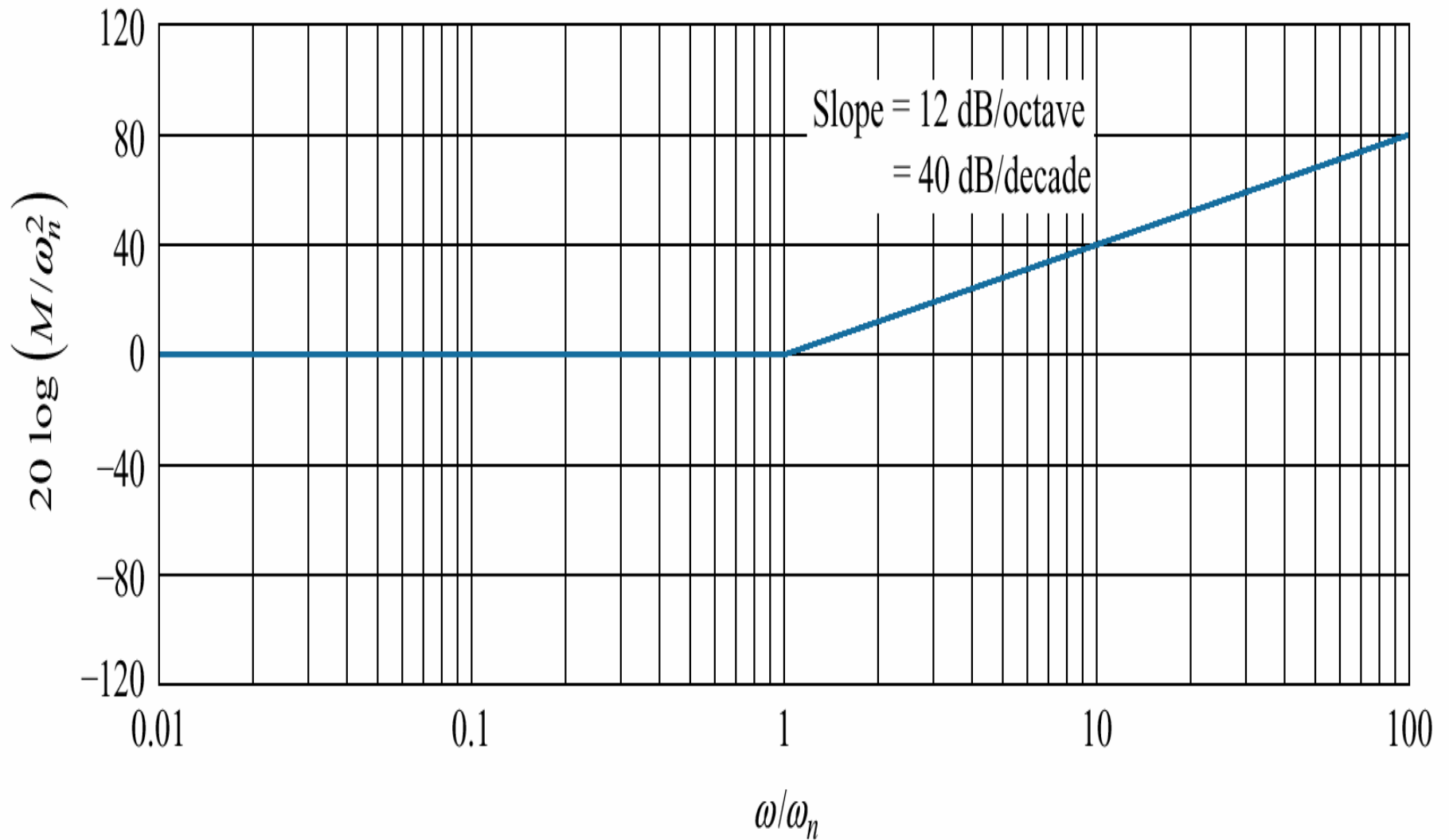
$$G(j\omega) \approx -\omega^2 = \omega^2 \angle 180^\circ$$

Yüksek frekanslarda genlik ise,

$$20\log M = 20\log|G(j\omega)| = 20\log \omega^2 = 40\log \omega$$

(Eğim 40dB/oktav yada 40dB/dekad)

Dikkat edilecek olursa $\omega = \omega_n$ iken düşük ve yüksek frekans asimptotları aynıdır. Dolayısıyla ω_n ikinci derece sistemin köşe frekansıdır.



Faz'ı ise düşük frekanslarda **0** derece, yüksek frekanslarda ise **180** derecedir. Doğal frekansta aç:

$$G(j\omega) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \Big|_{s \rightarrow j\omega} = (\omega_n^2 - \omega^2) + j2\zeta\omega_n \omega$$

$\omega = \omega_n$ için sonuç $j2\zeta\omega_n^2$ olduğundan doğal frekanstaki aç **90°**.

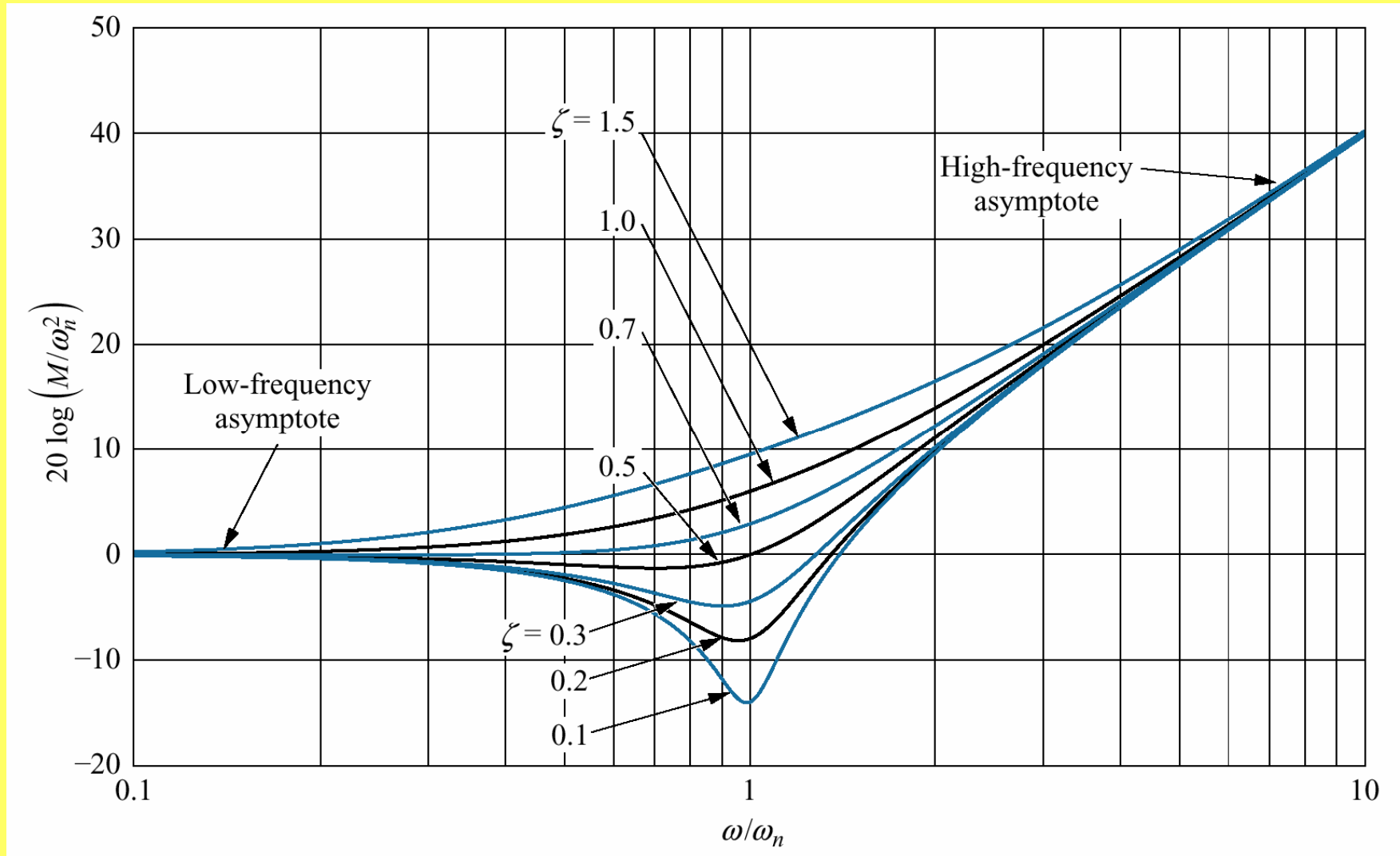
Dolayısıyla **0.1 ω_n** ile **10 ω_n** arasında aç **90°/dekad** ile yükselir.

$G(s) = \omega_n^2 / (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ 'in Bode Çizimi

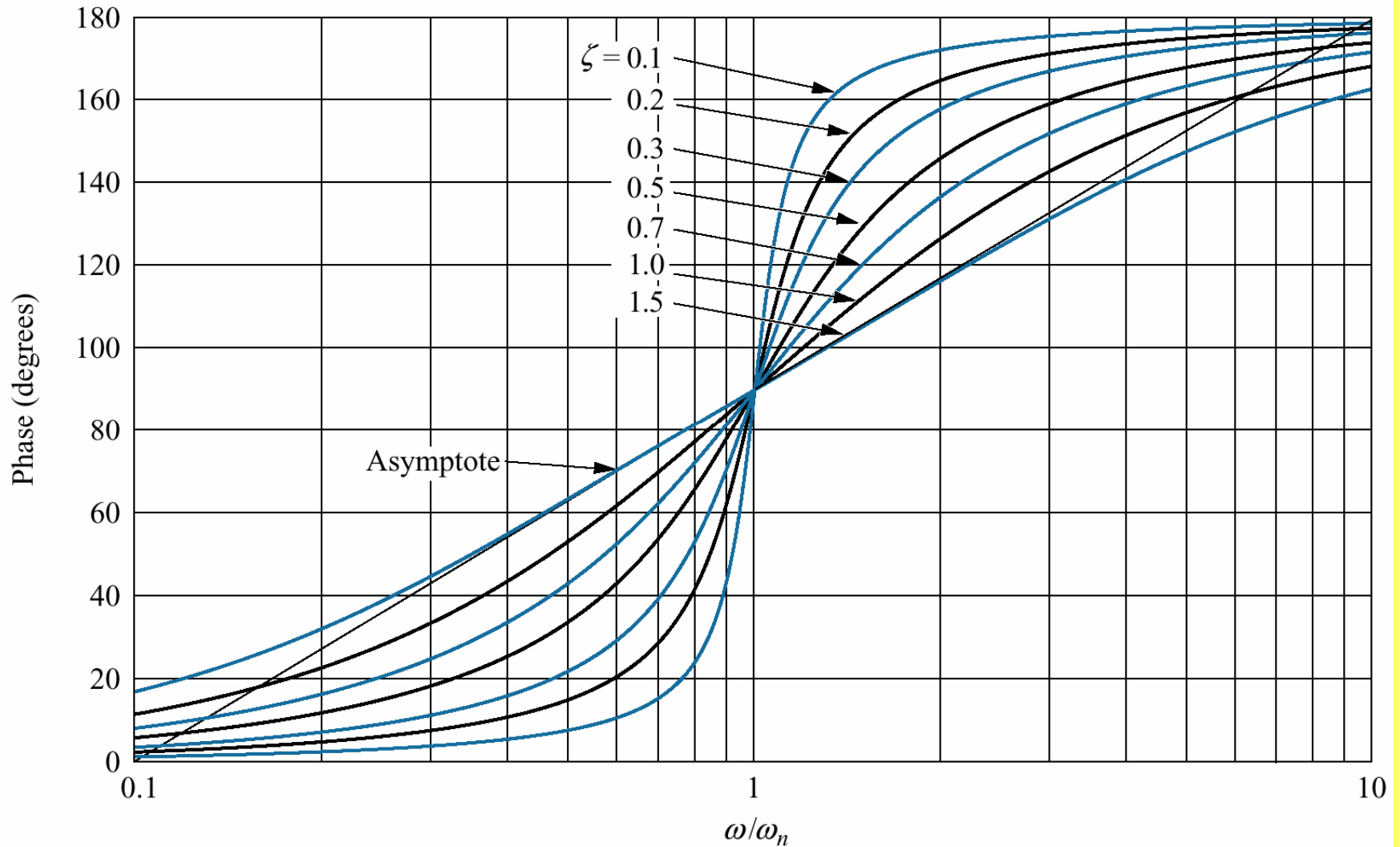
Genlik eğrisi doğal frekansta kırılır ve **-12dB/oktav (40dB/dekad)**

lık eğim ile azalır. Faz düşük frekanslarda **0** derecedir ve **0.1 ω_n** ile **10 ω_n** arasında aç **-90°/dekad** aç ile azalır ve **10 ω_n** 'den sonra **-180** decede kalır.

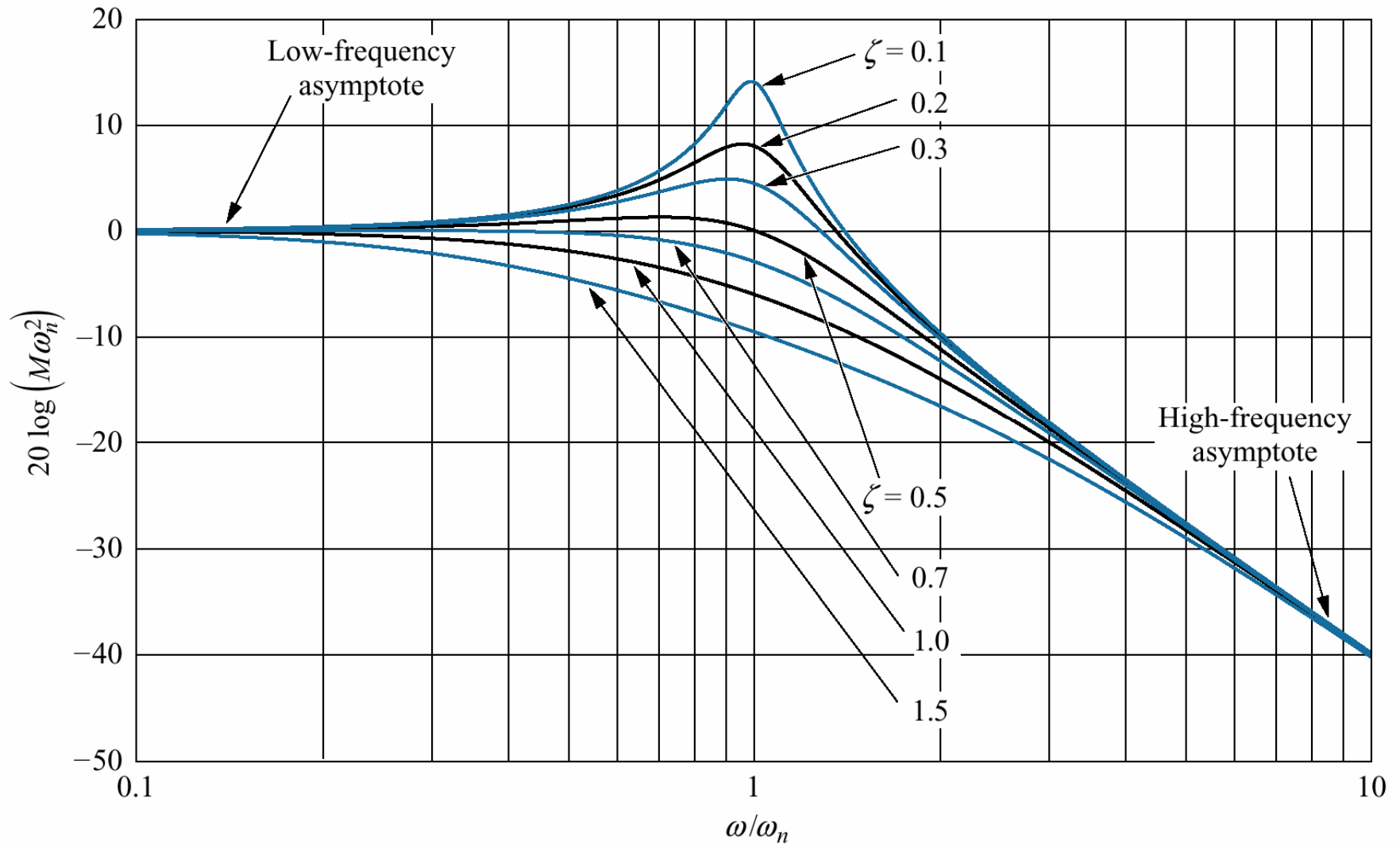
$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ 'nin değişen ζ değerleri için Bode Genlik Eğrileri



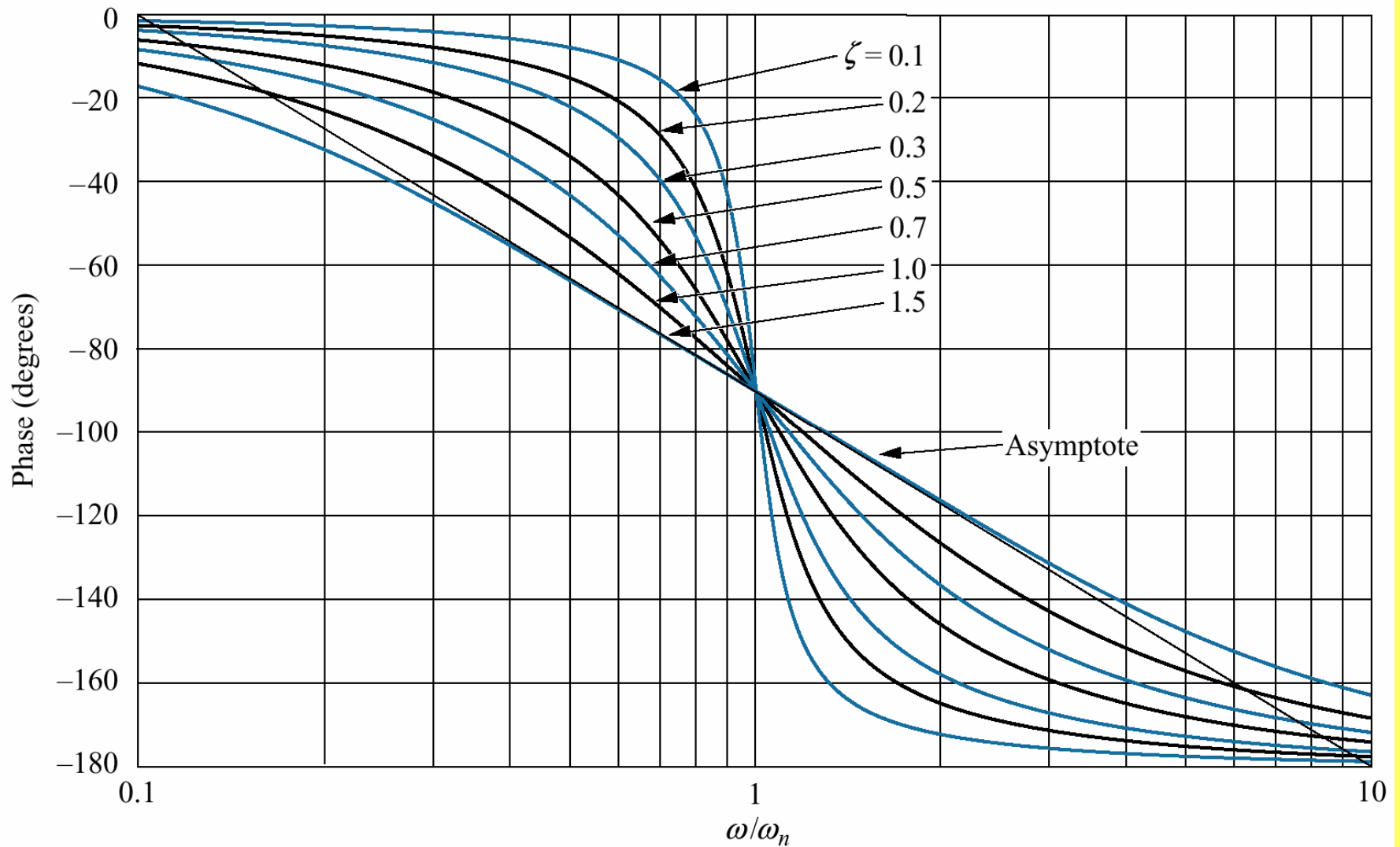
$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ 'nin değişen ζ değerleri için Bode Faz Eğrileri



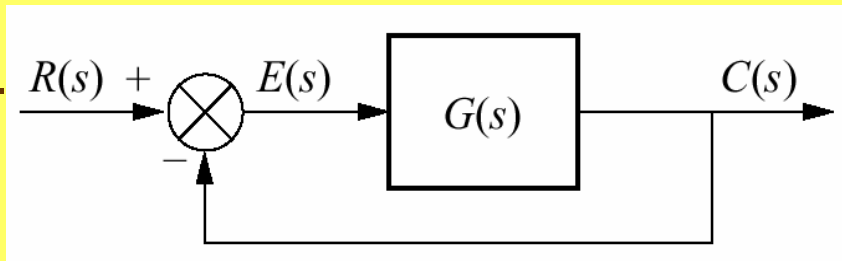
$1/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ 'nin değişen ζ değerleri için Bode Genlik Eğrileri



$1/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ 'nin değişen ζ değerleri için Bode Faz Eğrileri



Örnek:



$$G(s) = \frac{(s + 3)}{(s + 2)(s^2 + 2s + 25)}$$

Bode eğrisini çiziniz?

G(s)'nin düşük frekans değeri **s=0** alınarak **3/50** yada **24.44dB** olarak bulunur. Bode eğrisi bu değer ile başlar ve ilk köşe frekansı **-2** ye kadar bu değer ile devam eder. **-2** deki kutup **-20dB/dekad** lık bir eğimle bir sonraki köşe frekansı **-3**'e kadar devam eder. **-3** deki sıfır, **+20dB/dekad**'lık bir pozitif eğim oluşturur ki net eğim bu noktadan sonra 0 olur. 5 rad/s'de ise ikinci derece terim devreye girer ve **+40dB/dekad**'lık bir pozitif eğim oluşturarak sonsuza kadar devam eder.

