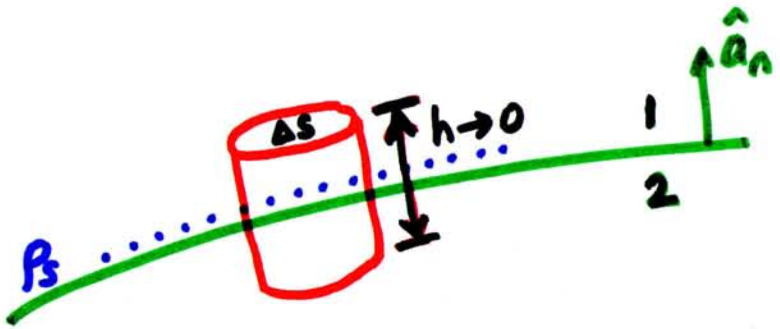
Elektromanyetik Sınır Koşulları

1) Normal Bileşenler



$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho_v$$

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = \int_V \rho_v \, dv$$

Gauss yasasını kullanarak,

$$(D_{1n} - D_{2n}) \Delta s = \rho_s \Delta s$$

$$\Rightarrow D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$$

Eğer $\hat{a}_n$ şekildeki gibi 2'den 1'e doğru birim vektör olarak tanımlı ise

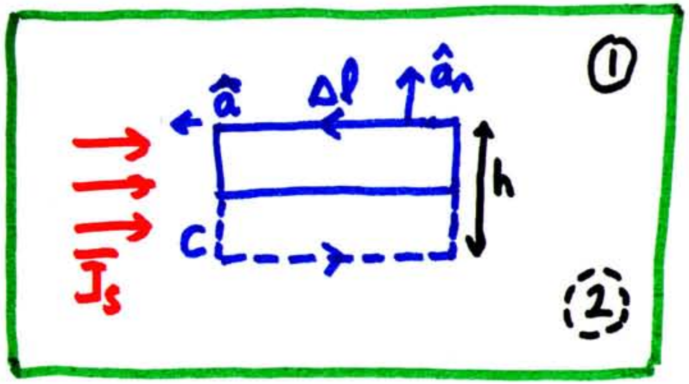
$$\boxed{(\bar{D}_1 - \bar{D}_2) \cdot \hat{a}_n = \rho_s}$$

bulunur. Benzer şekilde, manyetik alan için skaler kaynak olmadığından,

$$B_{1n} - B_{2n} = 0 \Rightarrow \boxed{(\bar{B}_1 - \bar{B}_2) \cdot \hat{a}_n = 0}$$

elde edilir.

2) Teğet Bileşenler



$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s}$$

C'yi şekildeki gibi alalım.

$\hat{a}_n \times \hat{a}$'nın C'nin sınırladığı yüzeyin normali olduğuna dikkat ediniz.

$$\bar{E}_1 \cdot \hat{a} \Delta l - E_2 \cdot \hat{a} \Delta l = -\frac{\partial \bar{B}_1}{\partial t} \cdot (\hat{a}_n \times \hat{a}) \Delta l \frac{h}{2} - \frac{\partial \bar{B}_2}{\partial t} (\hat{a}_n \times \hat{a}) \Delta l \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) \cdot \hat{a} \Delta l = -\Delta l \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \bar{B}_1}{\partial t} + \frac{\partial \bar{B}_2}{\partial t} \right) \cdot (\hat{a}_n \times \hat{a})$$

$$\Rightarrow (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) \cdot \hat{a} = -\frac{h}{2} \hat{a} \cdot \left(\frac{\partial \bar{B}_1}{\partial t} + \frac{\partial \bar{B}_2}{\partial t} \right) \times \hat{a}_n$$

Burada $\boxed{\bar{A} \cdot (\bar{B} \times \bar{C}) = \bar{B} \cdot (\bar{C} \times \bar{A}) = \bar{C} \cdot (\bar{A} \times \bar{B})}$ özdeşliğinin kullanıldığına dikkat ediniz. Sonuçta

$$\boxed{\bar{E}_1 - \bar{E}_2 = -\frac{h}{2} \left(\frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{\partial B_2}{\partial t} \right) \times \hat{a}_n}$$

bulunur.

$$\Rightarrow \quad \hat{a}_n \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = (\ \ ) h \to 0 \quad \text{çünkü} \quad h \to 0 \text{'dır.}$$

Sonuç olarak zamanla değişen alanlar için

$$\boxed{\hat{a}_n \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{1t} = E_{2t}}$$

geçerlidir.

Manyetik alanlar için de benzer inceleme yapılırsa

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_S \left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) \cdot d\bar{s}$$

[önceki çıkarıma benzetilebilir. $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \leftrightarrow \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$]

ve

$$\Delta l \, \hat{a} \cdot (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = (\hat{a}_n \times \hat{a}) \cdot \bar{J} \, \Delta s + \bar{A} \cdot \hat{a} \, h \, \Delta l$$

$$\Rightarrow \bar{H}_1 - \bar{H}_2 = \bar{J}_s \times \hat{a}_n \qquad \boxed{\bar{J}_s = \lim_{h \to 0} \bar{J} h}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{a}_n \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \bar{J}_s}$$

elde edilir. Teğet manyetik alan, yüzey akımına eşit bir süreksizlik içerir. Teğet elektrik alan ise süreklidir.

Maxwell Denklemleri

$$\nabla \times \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \quad \text{(Faraday yasası)}$$

$$\nabla \times \overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \quad \text{(Ampere yasası)}$$

$$\nabla \cdot \overline{B} = 0 \quad \text{(Manyetik yük yoktur)}$$

$$\nabla \cdot \overline{D} = \rho_v \quad \text{(Gauss yasası)}$$

ve bunlarla birlikte

$$\overline{D} = \epsilon \overline{E}$$

$$\overline{B} = \mu \overline{H}$$

$$\overline{J} = \sigma \overline{E}$$

ortam bağıntıları da verilmelidir. Şimdi değişik durumlarda bu denklemlerin alacağı biçimleri inceleyelim.

i) Boş uzay, kaynaksız bölge

Bu durumda

$$\epsilon=\epsilon_0 \quad , \quad \mu=\mu_0 \quad , \quad \sigma=0$$
$$\bar{J}=0 \quad \text{ve} \quad \rho_v=0$$

alınmalıdır.

O halde Maxwell denklemleri

$$\nabla\times\bar{E}=-\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}=-\mu_0\frac{\partial\bar{H}}{\partial t} \quad , \quad \nabla\cdot\bar{D}=0 \Rightarrow \nabla\cdot\bar{E}=0$$
$$\nabla\times\bar{H}=\frac{\partial\bar{D}}{\partial t}=\epsilon_0\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} \quad , \quad \nabla\cdot\bar{B}=0 \Rightarrow \nabla\cdot\bar{H}=0$$

haline gelir.

ii) Kaynaksız ancak boş uzay olmayan ortam

Boş uzay yerine malzeme ortam olduğunda

$$\bar{D}=\epsilon_0\bar{E}+\bar{P}$$
$$\bar{B}=\mu_0(\bar{H}+\bar{M})$$

geçerlidir. Maxwell denklemleri ise

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial \bar{M}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \bar{P}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \left[\mu_0 (\bar{H} + \bar{M})\right] = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \bar{H} = -\nabla \cdot \bar{M}$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \bar{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \bar{P}$$

Bu denklemlerin, ortamın basit bir ortam olmadığı durumda geçerli olduğuna yani genel olduklarına dikkat ediniz.

iii) Lineer iletken ($\bar{J} = \sigma \bar{E}$)

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \sigma \bar{E} + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \left(\sigma + \epsilon \frac{\partial}{\partial t}\right) \bar{E}$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = 0$$

KAYNAKSIZ ORTAMDA DALGA DENKLEMİ

Boş uzay kabul edelim.

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla\times\bar{E} &= -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} = -\mu_0\frac{\partial\bar{H}}{\partial t}, & \nabla\cdot\bar{E} &= 0 \\ \nabla\times\bar{H} &= \frac{\partial\bar{D}}{\partial t} = \epsilon_0\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}, & \nabla\cdot\bar{H} &= 0 \end{aligned}}$$

$\nabla\times\nabla\times\bar{A} = \nabla(\nabla\cdot\bar{A}) - \nabla^2\bar{A}$ vektör özdeşliğini hatırlarsak ve bunu $\bar{E}$ alanı için kullanırsak

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla\times\nabla\times\bar{E} &= \nabla(\underbrace{\cancel{\nabla\cdot\bar{E}}}_{0}) - \nabla^2\bar{E} = \nabla\times\left(-\mu_0\frac{\partial\bar{H}}{\partial t}\right) \\ '' \quad &= -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\bar{H}) = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_0\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}\right) \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2\bar{E} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2} = 0}$$

veya $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 3\times10^8\ m/s$ tanımı kullanılırsa,

$$\boxed{\nabla^2\bar{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2} = 0}$$

denklemi elde edilir.

Bu denklem elektrik alanı için dalga denklemidir. Benzer şekilde $\nabla \times \bar{H}$ denkleminin döneli alınır ve sadeleştirme yapılırsa,

$$\nabla \times \nabla \times \bar{H} = \epsilon_0 \nabla \times \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \bar{E})$$

$$'' = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \right) = \nabla (\cancelto{0}{\nabla \cdot \bar{H}}) - \nabla^2 \bar{H}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \bar{H} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0}$$

elde edilir. Bu iki denklemde de uzaya ve zamana göre 2. mertebeden türevler vardır. Bu özellik dalga denklemine aittir.

Bu denklemlerin yapısını daha yakından inceleyebilmek için $\bar{E}$ ve $\bar{H}$'nin herbir Kartezyen bileşeninin aynı skaler denklemi sağladığına ve bu denklemin, örneğin E_x için

$$\boxed{\nabla^2 E_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0}$$

olduğuna dikkat edelim. Bu denklemin açık hali

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=0}$$

yazılabilir. Şimdi olayı biraz basitleştirelim ve E_x'i sadece z ve t'nin fonksiyonu kabul edelim, yani

$$\boxed{E_x = E_x(z,t)}$$

olsun. O halde denklem,

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=0}$$

haline gelir. Her $f(u)=f(z-ct)$ fonksiyonu bu denklemin bir çözümüdür.

ispat:

$$\frac{\partial f(z-ct)}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}=f'$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 f(z-ct)}{\partial z^2}=f''}$$

$$\frac{\partial f(z-ct)}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}=-cf'$$

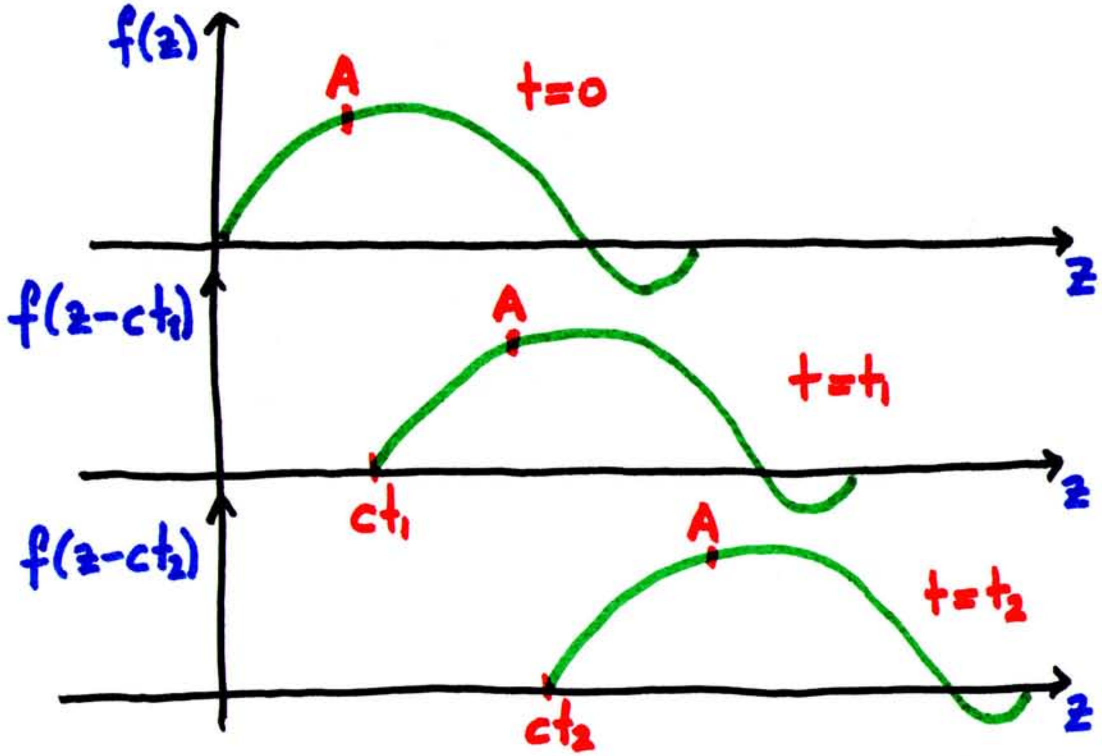
$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 f(z-ct)}{\partial t^2} = c^2 f''}$$

Bunlar denklemde yerine konursa

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = f'' - \frac{c^2}{c^2} f'' = 0}$$

O halde her $f(z-ct)$ fonksiyonu gerçekten bir çözümdür.

$f(z-ct)$ gibi bir fonksiyon, z ekseni boyunca ilerleyen bir hareketi gösterir. Bunu anlamak için değişik zamanlarda bu fonksiyonu çizelim.



Görüldüğü gibi ilerleyen zamanlar için dalga $+z$ ekseni yönünde ilerlemiştir. Dalganın hızını belirlemek için, z ve t değişirken $z-ct$'yi sabit kabul edelim. (A gibi bir noktayı ele alıyoruz)

$$\boxed{z-ct=\text{sabit} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial t}=c}$$

Dolayısıyla z, c hızıyla artmakta veya azalmaktadır. Bu şekilde $z-ct$ sabit kalmakta ve f'nin değeri de sabit kalmaktadır.

Bir başka deyişle, f'nin belirlenen bir değerini alan belirli bir nokta c hızıyla ilerlemektedir.

Bu gerçeği değişik bir yolla şöyle de görebiliriz.

t anında	z'de	$f(z-ct)$	değerine sahibiz.
$t+\Delta t$ anında	$z+\Delta z$'de	$f(z+\Delta z-c(t+\Delta t))$	değeri vardır.

Fonksiyon değeri aynı kaldığından,

$$\boxed{(z-ct)+\Delta z-c\,\Delta t=z-ct}$$ olmalıdır. O halde

$$\boxed{\Delta z=c\,\Delta t} \quad \text{ve} \quad \boxed{\frac{\Delta z}{\Delta t}=c}$$ bulunur.

Argümanın sabit kalması için z noktası c hızıyla ilerlemektedir.

Aynı denklemin bir başka çözümü de, herhangi bir g fonksiyonu için $g(z+ct)$ fonksiyonlarıdır. Bu çözüm diğer çözüme çok benzer olmakla birlikte tek farkı $(-z)$ yönünde ilerleyen bir hareketi temsil etmesidir.

Özetlersek,

$f(z-ct)$	$+z$ yönünde	c	hızıyla	ilerleyen	bir	dalgayı
$g(z+ct)$ ise	$-z$ yönünde	c	"	"	"	"

göstermektedir.

Şimdi kayıplı bir ortamdaki dalga denklemini inceleyelim.

KAYIPLI (İLETKEN) ORTAMDA DALGA DENKLEMİ

Kaynaksız ancak kayıplı bir ortamı düşünelim. Ortam lineer olsun.

$$\boxed{\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \sigma \bar{E} + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}}$$

Burada $\bar{J}$'nin kaynak akımı olmayıp, $\bar{E}$'nin varlığından dolayı

oluşan iletkenlik akımı olduğuna dikkat edilmelidir.
Yükler sıfır olduğundan,

$$\boxed{\nabla \cdot \overline{E} = 0}$$ 'dır.

Diğer Maxwell denklemi ise,

$$\boxed{\nabla \times \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}}$$

ile verilir. Bunun her iki tarafının dönelini alalım.

$$\nabla \times \nabla \times \overline{E} = \nabla(\nabla \cdot \overline{E}) - \nabla^2 \overline{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \overline{H}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left[\sigma \overline{E} + \epsilon \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \overline{E} = \mu \sigma \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2}}$$

ve sonuç olarak

$$\boxed{\nabla^2 \overline{E} - \mu \sigma \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2} = 0}$$

bulunur. Burada ikinci terim üstel zayıflamaya neden olacaktır. Son olarak kaynakların bulunduğu ($\overline{J} \neq 0$, $\rho_v \neq 0$) genel durumu ele alalım.

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho_v \qquad \nabla \cdot \bar{B} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \times \nabla \times \bar{E} = \nabla(\nabla \cdot \bar{E}) - \nabla^2 \bar{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \bar{H})}$$

Şimdi

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon} \qquad \nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

yukarıdaki denklemde yerine konursa, elektrik alanı için dalga denklemi elde edilir.

Benzer çıkarım, $\nabla \times \bar{H}$ denkleminden başlayarak $\bar{H}$ için denklemin elde edilmesini sağlar. Sonuçta

$$\nabla^2 \bar{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} + \frac{\nabla \rho_v}{\epsilon}$$

$$\nabla^2 \bar{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \bar{J}$$

formülleri bulunur.

Yani daha önce belirttiğimiz gibi, dalga denklemlerinin temel özelliği bu denklemlerde de mevcuttur: Uzay değişkenlerine ve zamana göre ikinci mertebeden türevler bu denklemlerde vardır.

Sinüzoidal Değişimli EM Alanlar

Şimdiye kadar gördüğümüz Maxwell denklemleri ve onlardan elde ettiğimiz tüm denklemler her olası zaman bağımlılığı için geçerlidir. Alan fonksiyonlarının sahip olacağı gerçek zaman bağımlılığı tipi, kaynak fonksiyonları ρ_v ve $\bar{J}$ tarafından belirlenir. Mühendislikte sinüzoidal zaman fonksiyonlarının çok özel bir yeri vardır. Bunların üretilmesi yani oluşturulması kolaydır. Gelişigüzel periyodik fonksiyonlar Fourier serileri kullanılarak harmonik bileşenlerine ayrılabilir.

Periyodik olmayan geçici fonksiyonlar ise Fourier dönüşümü yardımıyla Fourier integrali olarak ifade edilebilir.

Maxwell denklemleri lineer diferansiyel denklemler olduğundan, kaynak fonksiyonlarının belirli bir frekansta sinüzoidal değişimi, $\bar{E}$ ve $\bar{H}$ alanlarının da aynı frekansta sinüzoidal değişimine neden olacaktır.

Gelişigüzel zaman bağımlılığına sahip kaynak fonksiyonları durumunda ise EM alanlar harmonik analizle, yani ya Fourier serileri veya Fourier integralleri kullanılarak çeşitli frekans bileşenlerinin toplam etkisi olarak ifade edilebilir. Bunu yapabilmemize olanak sağlayan ilke üst üste bindirme ilkesidir.

Fazörler - Tekrar

$$\boxed{e(t) = E_0 \cos(wt+\phi) \quad \text{veya} \quad e(t) = E_0 \sin(wt+\alpha)}$$

fonksiyonlarını düşünelim. Burada,

$e(t) \longrightarrow$ anlık (zaman bağımlı) alan

$E_0 \longrightarrow$ genlik

$w \longrightarrow$ açısal frekans ($w = 2\pi f$, $f \equiv$ frekans)

$\phi \longrightarrow$ faz

olarak tanımlanır.

Genel olarak bir vektör alanı için,

$$\underbrace{\overline{E}(x,y,z,t)}_{zaman} = \overline{E}_o(x,y,z)\,Cos(wt) = Re\{\underbrace{\overline{E}_o(x,y,z)}_{fazör}\,e^{jwt}\}$$

yazabiliriz.

Eğer

$$V(t) = V_o\,Cos(wt+\phi)$$

ise, ilgili fazör

$$\tilde{V} = V_o\,e^{j\phi} \quad \text{veya} \quad V_o \angle \phi$$

olacaktır. O zaman

$$V(t) = Re[\tilde{V}\,e^{jwt}] = Re[V_o\,e^{j\phi}\,e^{jwt}] = V_o\,Cos(wt+\phi)$$

olur. Burada V_o reel kabul edilmiştir.

Elektromanyetik uygulamalar için genel olarak

$$\overline{E}(x,y,z,t) = \hat{a}_x\,E_x(x,y,z)\,Cos(wt+\phi_x) + \hat{a}_y\,E_y(x,y,z)\,Cos(wt+\phi_y) + \hat{a}_z\,E_z(x,y,z)\,Cos(wt+\phi_z)$$

yazılabilir. Bu genel elektrik alan vektörü için kompleks fazör

$$\boxed{\tilde{\bar{E}}(x,y,z) = \hat{a}_x E_x(x,y,z)\, e^{j\phi_x} + \hat{a}_y E_y(x,y,z)\, e^{j\phi_y} + \hat{a}_z E_z(x,y,z)\, e^{j\phi_z}}$$

yazılabilir. $\tilde{\bar{E}}(x,y,z)$ kompleks fazör vektörüdür ve

$$\boxed{\bar{E}(x,y,z,t) = \mathcal{Re}\left\{ \tilde{\bar{E}}(x,y,z)\, e^{jwt} \right\}}$$

geçerlidir. Şimdi sinüzoidal zaman bağımlılığının olduğu durumda Maxwell denklemlerini inceleyelim.

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \times \bar{E}(\bar{r},t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \bar{B}(\bar{r},t) \\ \bar{E}(\bar{r},t) &= \mathcal{Re}\left[\tilde{\bar{E}}(\bar{r})\, e^{jwt} \right] \\ \nabla \times \mathcal{Re}[\;\;] &= \mathcal{Re}\left[\nabla \times (\;\;)\, e^{jwt} \right] \end{aligned}}$$

ve ayrıca

yazılabildiğine dikkat ediniz. Benzer şekilde,

$$\bar{B}(\bar{r},t) = \mathcal{Re}\left[\tilde{\bar{B}}(\bar{r})\, e^{jwt} \right]$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \bar{B}(\bar{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{Re}\left[\tilde{\bar{B}}(\bar{r})\, e^{jwt} \right] = \mathcal{Re}\left[-\tilde{\bar{B}}(\bar{r}) \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{jwt} \right) \right]}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left[\nabla\times\tilde{\bar{E}}(\bar{r})e^{jwt}\right] = \mathrm{Re}\left[-jw\tilde{\bar{B}}(\bar{r})e^{jwt}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\times\tilde{\bar{E}}(\bar{r}) = -jw\tilde{\bar{B}}(\bar{r})}$$

bulunur. Dolayısıyla sinüzoidal değişimli alanlar için

$$\boxed{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial}{\partial t} & \text{yerine} & jw \\[2em] \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} & \text{yerine} & (jw)^2 = -w^2 \end{array}}$$

koymamız gerektiğini bulduk. Diğer denklemlerde de benzer değişimler yapılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

Zaman Bölgesi	Frekans Bölgesi
$\nabla\times\bar{E} = -\dfrac{\partial\bar{B}}{\partial t}$	$\nabla\times\tilde{\bar{E}} = -jw\tilde{\bar{B}}$
$\nabla\times\bar{H} = \bar{J} + \dfrac{\partial\bar{D}}{\partial t}$	$\nabla\times\tilde{\bar{H}} = \tilde{\bar{J}} + jw\tilde{\bar{D}}$
$\nabla\cdot\bar{D} = \rho_v$	$\nabla\cdot\tilde{\bar{D}} = \tilde{\rho}_v$
$\nabla\cdot\bar{B} = 0$	$\nabla\cdot\tilde{\bar{B}} = 0$

Frekans Bölgesinde Dalga Denklemi

Zaman bölgesindeki denklemler,

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2 \bar{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} + \frac{\nabla \rho_v}{\epsilon} \\ &\nabla^2 \bar{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \bar{J} \end{aligned}}$$

ve

idi. İlgili yerine koymalar yapıldığında frekans bölgesindeki denklemler

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2 \tilde{\bar{E}} + w^2 \epsilon\mu \tilde{\bar{E}} = jw\mu \tilde{\bar{J}} + \nabla\left(\frac{\tilde{\rho}_v}{\epsilon}\right) \\ &\nabla^2 \tilde{\bar{H}} + w^2 \epsilon\mu \tilde{\bar{H}} = -\nabla \times \tilde{\bar{J}} \end{aligned}}$$

ve

bulunur. Kaynaksız bir ortamda bu denklemler

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2 \tilde{\bar{E}} + w^2 \epsilon\mu \tilde{\bar{E}} = 0 \\ &\nabla^2 \tilde{\bar{H}} + w^2 \epsilon\mu \tilde{\bar{H}} = 0 \end{aligned}}$$

haline gelir. Bu denklemler vektör Helmholtz denklemleridir.

Dalga sabiti k'yi

$$\boxed{k \equiv w\sqrt{\epsilon\mu}}$$

olarak tanımlayalım. O halde boş uzaydaki dalga sabiti

$$\boxed{k_0 = w\sqrt{\epsilon\mu} = \frac{w}{c}}$$

olur. Boş uzayda dalga denklemlerini ele alalım.

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{\bar{E}}(\bar{r}) + k_0^2\, \tilde{\bar{E}}(\bar{r}) = 0 \\ \nabla^2 \tilde{\bar{H}}(\bar{r}) + k_0^2\, \tilde{\bar{H}}(\bar{r}) = 0 \end{aligned}}$$

Yine basitleştirilmiş bir durumu inceleyelim ve

$$\boxed{\tilde{\bar{E}}(\bar{r}) = \tilde{E}_x(z)\, \hat{a}_x}$$

kabul edelim. Daha önce E_x'i z ve t'nin fonksiyonu olarak almıştık. Şimdiki durum o durumla benzerdir ve sinüzoidal zaman bağımlılığını incelemektedir. Bu basit durum için dalga denklemi

$$\boxed{\frac{\partial^2 \tilde{E}_x}{\partial z^2} + k_0^2 \tilde{E}_x}$$

haline gelir. Bunun genel çözümü

$$\boxed{\tilde{E}_x(z) = A_1 e^{-jk_0 z} + A_2 e^{jk_0 z} = \tilde{E}_x^+ + \tilde{E}_x^-}$$

olur. Burada A_1 ve A_2 genlik katsayılarıdır ve genel durumda kompleks sabitlerdir. Eğer çözümün ilk terimini incelersek,

$$\begin{aligned} E_x^+(z,t) &= Re\{\tilde{E}_x^+ e^{j\omega t}\} \\ '' \quad &= Re\{A_1 e^{-jk_0 z} e^{j\omega t}\} = A_1 \cos(\omega t - k_0 z) \end{aligned}$$

buluruz. Eğer A_1 kompleks bir sayı olsaydı,

$$\boxed{A_1 = |A_1| e^{j\alpha}}$$

yazabilirdik. Böylece

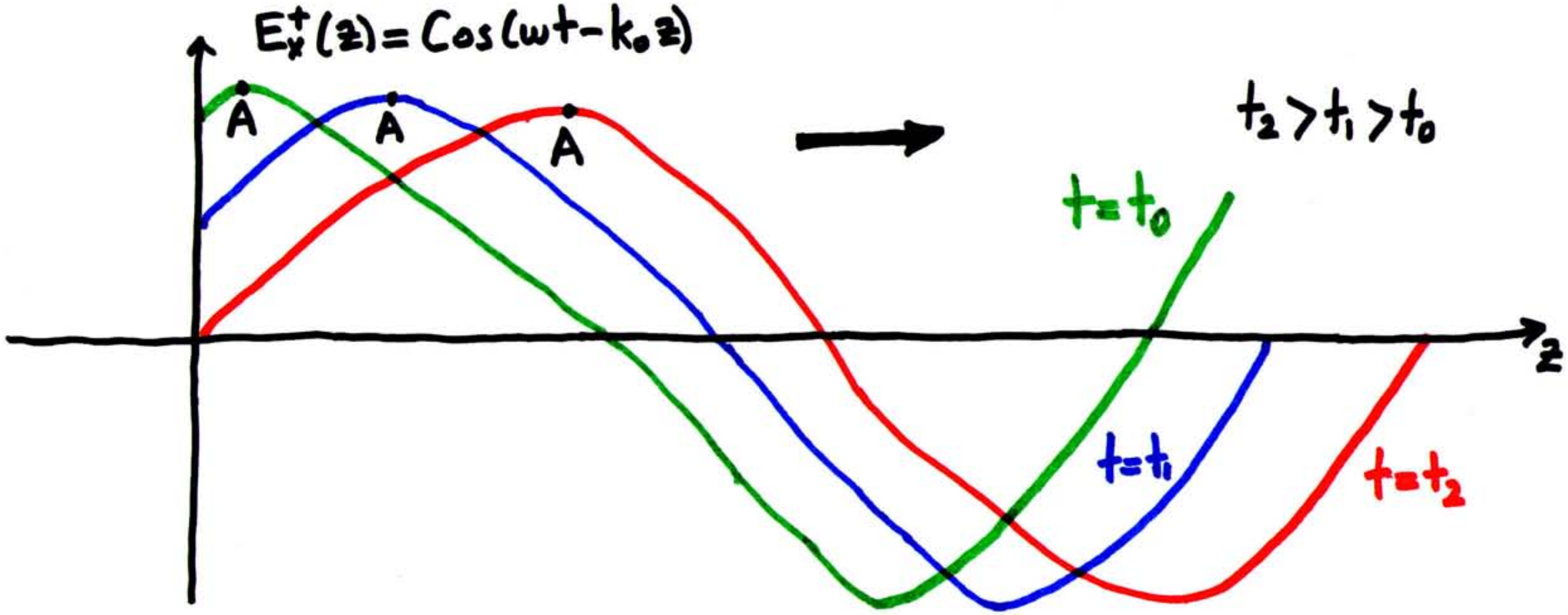
$$\boxed{E_x^+(z,t) = |A_1| \cos(\omega t - k_0 z + \alpha)}$$

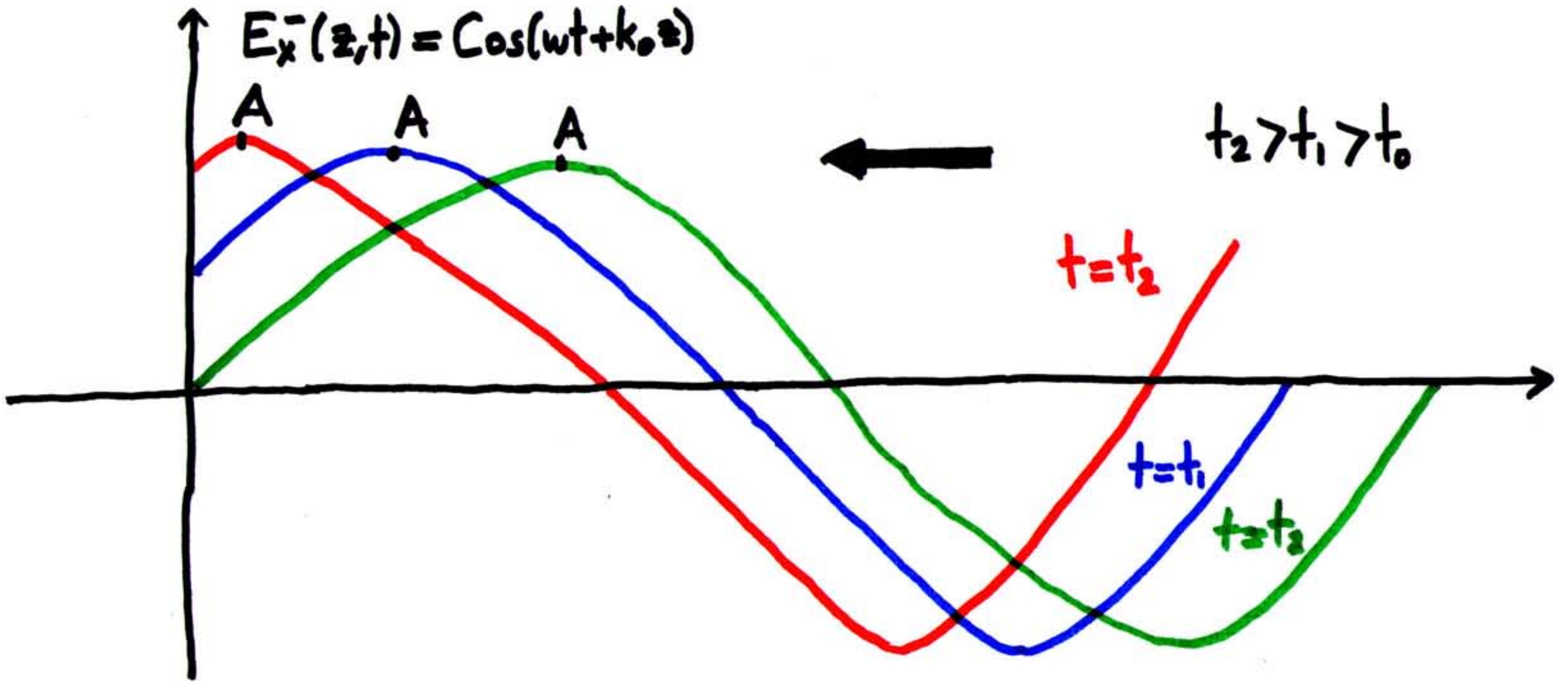
olurdu. Yukarıda biz genelliği kaybetmeden $\alpha=0$ aldık.
Benzer şekilde,

$$E_x^-(z,t) = Re\{A_2\, e^{jk_0 z} e^{j\omega t}\} = A_2 \cos(\omega t + k_0 z)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_x(z,t) = A_1 \cos(\omega t - k_0 z) + A_2 \cos(\omega t + k_0 z)}$$

bulunur. İlk terim $+z$ yönünde, ikinci terim ise $-z$ yönünde ilerleyen sinüzoidal dalgaları temsil etmektedir.





Yukarıdaki şekillerdeki dalgalar $+z$ ve $-z$ yönünde ilerlemektedir. O halde ilerleyen dalgalarla karşı karşıyayız.

$$\boxed{Cos(wt - k_0 z) = sabit}$$

dalga üzerinde sabit bir noktayı gösterir. Argümanın sabit kalması için $wt - k_0 z$ sabit olmalıdır.

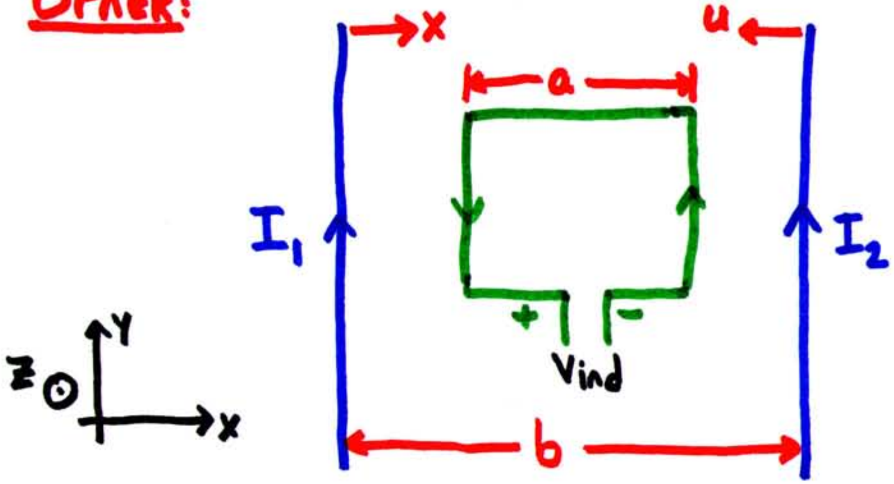
$$\Rightarrow \boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{w}{k_0} = \frac{w}{w\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c}$$

bulunur. O halde boş uzayda dalganın ilerleme hızı ışığın boşluktaki hızına eşittir. Genel durumda,

$$\boxed{v = \frac{w}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}}$$

olur.

Örnek:



Şekildeki kare sarım paralel tellere eşit uzaklıktadır. $t=0$ anından sonra

(a) $I_1 = I_0 e^{-t}$ ve $I_2 = I_0$'dır. $V_{ind}(t)$'yi bulunuz.

(b) $I_1 = I_0 \sin(wt)$ için (a)'yı tekrar çözünüz.

Çözüm: $\boxed{V_{ind} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}}$ ve $\boxed{\phi = \int_S (\bar{B}_1 + \bar{B}_2) \cdot d\bar{s}}$ olduğunu biliyoruz.

(a) $\bar{B}_1 = \mu_0 \dfrac{I_1}{2\pi\left(\frac{b-a}{2} + x\right)} (-\hat{a}_z)$, $\bar{B}_2 = \mu_0 \dfrac{I_2}{2\pi\left(\frac{b-a}{2} + u\right)} \hat{a}_z$

burada $x: 0 \to a$ ve $u: 0 \to a$'dır.

$$\phi = \left\{ -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln\left(\frac{b-a}{2} + x\right)\Big|_0^a + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{b-a}{2} + u\right)\Big|_0^a \right\} a$$

$$\phi = a \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{b-a}\right) \left\{ -e^{-t} + 1 \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi = \frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{b-a}\right) (1 - e^{-t})}$$

$$\boxed{V_{ind}(t) = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{b-a}\right) e^{-t}} \quad \text{volt}$$

(b) Bu kez $\boxed{\phi = \frac{a \mu_0 I_0}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{b-a}\right) (-\sin wt + 1)}$ olacaktır.

$$\Rightarrow \boxed{V_{ind} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{a \mu_0 I_0 w}{2\pi} \ln\left(\frac{b+a}{b-a}\right) \cos wt}$$

Boş uzaydaki $c = w/k_0$ denkleminden,

$$\boxed{k_0 = \frac{w}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}}$$

bulunur çünkü

$$\boxed{\frac{f}{c} = \frac{1}{\lambda_0}}$$

verir. Dolayısıyla $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ (boş uzay) ve $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ geçerlidir. λ_0 dalgaboyudur ve ardışık iki maksimum veya ardışık iki minimum arasındaki fiziksel uzaklığa eşittir.

Şimdi sadece $\tilde{E}_x^+$ için manyetik alanı bulmaya çalışalım.

$$\boxed{\nabla \times \tilde{\vec{E}} = -jw\mu_0 \tilde{\vec{H}}}$$

geçerlidir.

$$\boxed{\tilde{\vec{E}} = \tilde{E}_x^+(z)\,\hat{a}_x}$$

olduğundan ve $\nabla \times \tilde{\vec{E}}$

$$\begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \tilde{E}_x^+ & 0 & 0 \end{vmatrix} = \nabla \times \tilde{\vec{E}}$$

ile verildiğinden

$$\boxed{\nabla \times \tilde{\bar{E}} = \hat{a}_y \left(\frac{\partial \tilde{E}_x^+}{\partial z} \right) = -j\omega\mu_0 \tilde{H}_y^+(z) \ \hat{a}_y}$$

bulunur. Buradan,

$$\tilde{H}_y^+ = \frac{-1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial \tilde{E}_x^+}{\partial z} = \frac{-1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(E_0^+ e^{-jk_0 z} \right) = \frac{-jk_0 \tilde{E}_x^+(z)}{-j\omega\mu_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{H}_y^+(z) = \frac{k_0}{\omega\mu_0} \tilde{E}_x^+(z) = \frac{1}{\eta_0} \tilde{E}_x^+(z)}$$

Burada,

$$\boxed{\eta_0 = \frac{\omega\mu_0}{k_0} = \frac{\omega\mu_0}{\omega\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi = 377 \ \Omega}$$

boş uzayın ortam empedansıdır.

O halde zaman bölgesinde manyetik alan,

$$\bar{H}(z,t) = \hat{a}_y H_y^+(z,t) = \hat{a}_y \, \mathrm{Re}\left[H_y^+(z) e^{j\omega t} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{H}(z,t) = \hat{a}_y \frac{E_0^+}{\eta_0} \cos(\omega t - k_0 z) \quad (\mathrm{Amp/m})}$$

bulunur.

E_x^+ ve H_y^+ dalgaları düzgün düzlem dalga olarak adlandırılır. Düzlem dalga olmalarının nedeni $\bar{E}$ ve $\bar{H}$'nin, dalganın ilerleme yönüne dik bir düzlemde yer almasıdır.

ilerleme yönü +z
$\bar{E}$ x yönünde
$\bar{H}$ y yönünde

Bu düzlem dalga düzgündür çünkü E_x ve H_y, ilerleme yönüne dik olan x ve y koordinatları ile değişmez.

Dalganın sabit faz yüzeyleri hem $\bar{E}$, hem de $\bar{H}$ için düzlemlerdir (z=sabit düzlemleri) ve dalgaların genliği sabit faz yüzeyleri (bu durumda düzlemler) üzerinde sabittir; yani alanlar bu yüzeylerde düzgündür. Bu nedenle bu tip dalgalar düzgün düzlem dalga olarak adlandırılır.

$$\boxed{(wt \pm kz) = \text{sabit}}$$ olması için

$$\boxed{z = \text{sabit}}$$

olmalıdır. Bu sonuç sabit faz yüzeylerinin matematiksel ifadesidir.

Bir düzgün düzlem dalga Maxwell denklemlerinin ilerleme yönüne dik olan düzlemlerde sabit yön, sabit genlik ve sabit faza sahip olan bir özel çözümüdür.

Örnek: Bir düzlem dalganın manyetik alanının zaman bölgesi ifadesi

$$\boxed{\bar{H} = 0.1\, \cos(\omega t + \pi z + 20^\circ)\, \hat{a}_x \quad (A/m)}$$

veriliyor. z, metre cinsinden ölçülmektedir. Bu dalganın frekansını (f) ve dalgaboyunu (λ) bulunuz.

Çözüm: Genelde

$$\boxed{\bar{H} = H_0 \cos(\omega t + kz + \phi)\, \hat{a}_x}$$

olduğundan $k = \omega\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \pi$ olduğu biliniyor. O halde,

$$\omega = \frac{\pi}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \pi c = 3\pi \times 10^8 = 300\pi \times 10^6 \text{ rad/s}$$

$$\boxed{\Rightarrow f = 150 \text{ MHz.}}$$

$$\lambda = \frac{c}{f} \left(= \frac{v}{f} \text{ genelde}\right) = \frac{3\times 10^8}{1.5\times 10^8} = 2\,m \quad \text{veya} \quad \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ m.}}$$

Örnek: Bir ortamda ilerleyen dalganın manyetik alanı

$$\boxed{\overline{H} = \hat{a}_z (0.03) \cos(10^9 t - 4x)}$$

olarak veriliyor. **(a)** Dalganın ilerleme yönünü, **(b)** dalganın hızını, **(c)** dalgaboyunu, **(d)** elektrik alan ifadesini bulunuz.

Çözüm: **(a)** $+x$ yönü

(b) $wt - kx = 10^9 t - 4x \Rightarrow k = 4 = \frac{w}{v} \Rightarrow v = \frac{w}{4} = \frac{10^9}{4} = 2.5 \times 10^8$ m/s

(c) $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ m.

(d) $\tilde{\overline{H}} = \hat{a}_z (0.03) e^{-j4x} \Rightarrow \boxed{\nabla \times \tilde{\overline{H}} = jw\epsilon \tilde{\overline{E}}}$

$$\nabla \times \tilde{\overline{H}} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0.03 e^{-j4x} \end{vmatrix} = \hat{a}_y (0.03)(4j) e^{-j4x} = jw\epsilon \tilde{\overline{E}}$$

$$\Rightarrow \tilde{\overline{E}} = \hat{a}_y \frac{0.12}{w\epsilon} e^{-j4x} = \hat{a}_y (0.03) \eta e^{-j4x} \qquad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{E} = \hat{a}_y (0.03) \eta \cos(10^9 t - 4x)}$$