Kuazi-Statik Alanlar

Hatırlayacağımız gibi elektrostatik, sabit yüklerin etkisini inceler. Elektrostatiğin ana kuralları Coulomb kuvvet yasasından çıkarılabilir ve

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \nabla \times \overline{E} = 0 & \longrightarrow & \oint_C \overline{E} \cdot d\overline{l} = 0 \\ \\ \nabla \cdot \overline{D} = \rho & \longrightarrow & \oint_S \overline{D} \cdot d\overline{s} = \int_V \rho \, dV = Q \end{array}}$$

olarak özetlenebilir. Elektromanyetik konularında gözlemlediğimiz ilk gerçek, elektrik yüklerinin birbirlerini, aralarındaki uzaklığın karesi ile ters orantılı bir kuvvetle çektiği veya ittiği idi.

İkinci gözlenen gerçek, akım taşıyan tellerin manyetik alan oluşturduğu ve birbirlerine kuvvet uyguladığıdır (Ampere veya Biot-Savart yasası).

İkinci gözlemden yola çıkarak, hareketli yüklerin etkilerini statik manyetik alanlar konularında inceledik.

Statik manyetik alanları yöneten ana kurallar,

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \times \bar{H} = \bar{J} \quad &\longrightarrow \quad \oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{S} \\ \nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad &\longrightarrow \quad \oint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0 \end{aligned}}$$

olarak verilebilir.

Bu iki denklem kümesinde, lineer, homojen, izotropik ve zamandan bağımsız ortamlar için

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{D} &= \epsilon \bar{E} \\ B &= \mu \bar{H} \end{aligned}}$$

ve

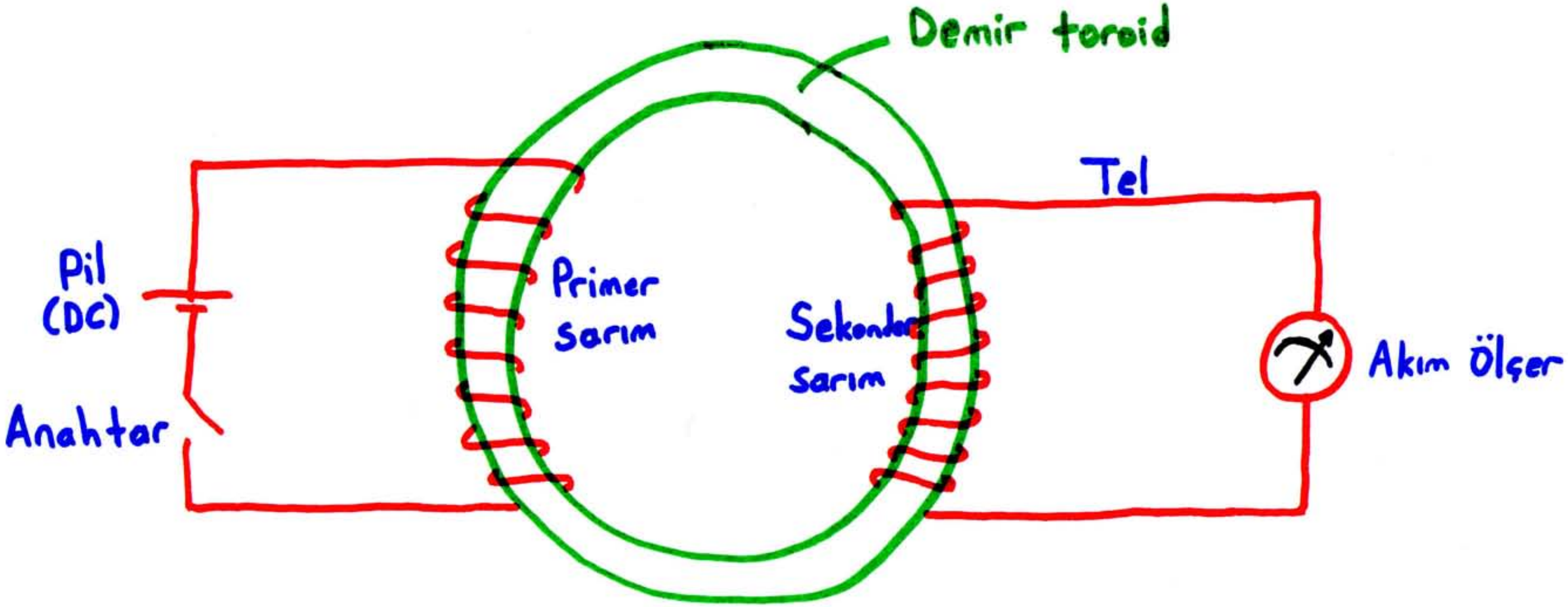
yazılabilir.

1820 yılında Oersted tarafından doğru akımın yani hareketli elektrik yük-yüklerinin statik manyetik alan oluşturduğu, yanin onun kaynağı olduğu gözlendi.

Oersted'in bu gözleminden sonra Faraday ve diğer araştırmacılar manyetik alanların da elektrik alanı oluşturduğuna inanıp bunu göstermeye çalıştılar.

Bu konuda Faraday 1831'de başarılı oldu ve gerçekten $\overline{E}$ ile $\overline{B}$'nin bağıntılı olduğunu gösterdi. Faraday yasası, zamanla değişen manyetik alanların bir elektromotiv kuvvet (emf) yani potansiyel farkı oluşturduğunu söyler.

Faradayın deneyi temelde, aşağıdaki şekilde gösterildiği gibidir:



Anahtar kapatıldığında birincil (primer) sarımda akım akmakta ve ikincil (sekonder) sarımdan geçen bir manyetik alan oluşmaktadır. Anahtarın kapatılmasını takip eden kısa bir süre içinde akım ölçerin ibresi sapmakta daha sonra sıfıra inmektedir.

Anahtar kapalı iken açıldığında ise bu kez akım ölçerde ters yönde sapma olmaktadır. Buradan Faraday, elektrik akımının zamanla değişen manyetik alan tarafından üretildiği sonucuna varmıştır.

Daha sonra Faraday, değişik sayıda pil kullanarak yani kaynağın büyüklüğünü değiştirerek, değişim ne kadar büyükse sapmanın da büyüdüğünü gözlemlemiştir.

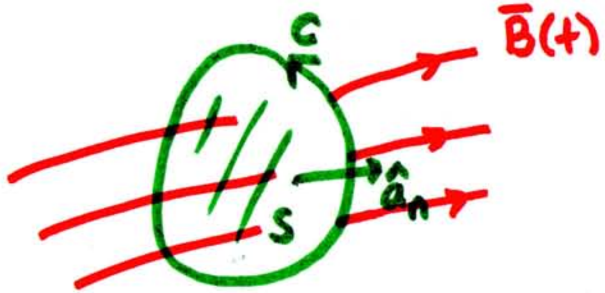
Akım oluşturmak için bir gerilim gerektiğinden Faraday yasası matematiksel olarak

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} \qquad (1)}$$

halinde verilebilir. Burada $\mathcal{E}$, C döngüsünün terminal uçları arasındaki gerilim, ϕ ise C'den geçen toplam manyetik akıdır. Yani

$$\Phi = \int_S \bar{B} \cdot d\bar{s}$$

ve S ise C'nin sınırladığı yüzeydir.



$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \bar{B} \cdot d\bar{s} \qquad (2)}$$

FARADAY YASASI

Buradan, C kapalı döngüsü üzerinde elektrik alanının integralinin sıfır olmadığı bulunur. Çünkü sonuçta elektrik akımının nedeni elektrik alanıdır. Ancak, bu anılan nedenden dolayı bu alan elektrostatik alan değildir. Sonuç olarak

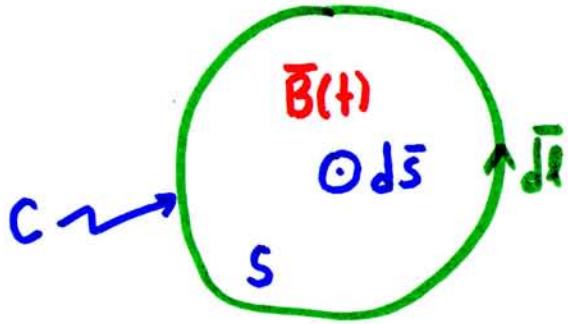
$$\boxed{\mathcal{E} = \oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \bar{B} \cdot d\bar{s} \qquad (3)}$$

yazabiliriz. (3)'teki eksi işareti indüklenen emf'nin manyetik akıdaki değişime karşı koyacak yönde olduğunu gösterir. Bu gerçek Lenz tarafından gözlenmiştir ve o yüzden Lenz yasası olarak bilinir.

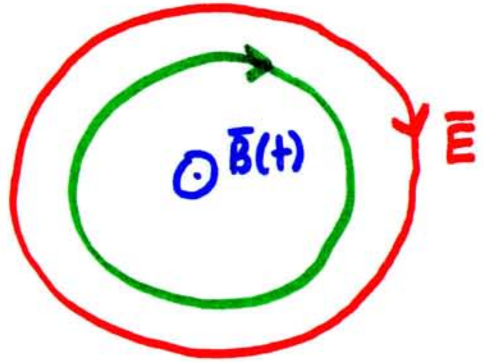
Lenz Yasası: Bir kapalı döngüde indüklenen emf'nin (potansiyel farkının) yönü daima manyetik akıdaki değişime karşı koyacak biçimdedir. Eğer $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ pozitif ise (ϕ artıyorsa) döngüdeki akım ters yönde manyetik alan oluşturacak şekilde akacaktır. Eğer $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ negatif ise (ϕ azalıyorsa) o zaman döngüdeki akım manyetik akıyı artıracak yönde akar, yani yine değişime direnir.

Emf'nin oluşması için iletken bir sarım olması gerekmez. Sarım varsa akım akar, aksi durumda emf yine vardır ama akım akmaz.

Şimdi emf'nin yönü için bir kural bulmak amacıyla bir örnek inceleyeceğiz.



(a)

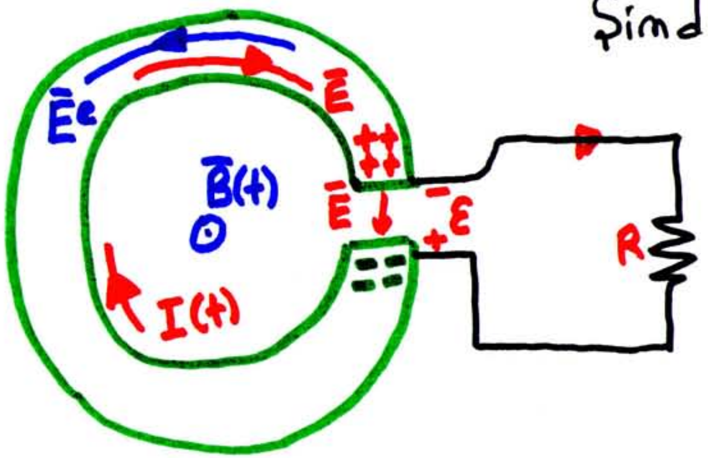


(b)

Eğer (a)'da $\partial B/\partial t > 0$ ise $\bar{E}$ alanı (b)'deki gibi olur. Çünkü

$$\oint_{C} \bar{E}\cdot \underbrace{d\bar{l}}_{\text{SYT}} = \underbrace{-\frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\text{Negatif}}$$

SY olmalı



Şimdi aynı problemde boşluğu olan bir iletken tel düşünelim. $\bar{E}$ alanı $-$ ve $+$ yükleri telin iki ucuna şekildeki gibi iter ve sonunda $\bar{E}_e$ ile dengelenir. Eğer R direnci bağlanırsa I(t) akımı gösterilen yönde akarak akıyı azaltmaya çalışır.

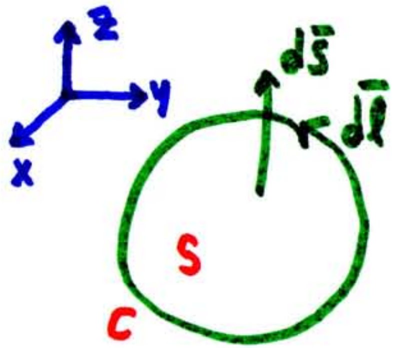
$$\Phi_{12} = \Phi_2 - \Phi_1 = -\int_1^2 \bar{E}\cdot d\bar{l} \quad \text{(pozitif)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E} \text{ negatif olmalı}} \text{ çünkü } \quad \mathcal{E} = \oint_C \bar{E}\cdot d\bar{l} \quad \left(\begin{array}{l}\text{katkı sadece}\\ \text{boşlukta olur.}\end{array}\right)$$

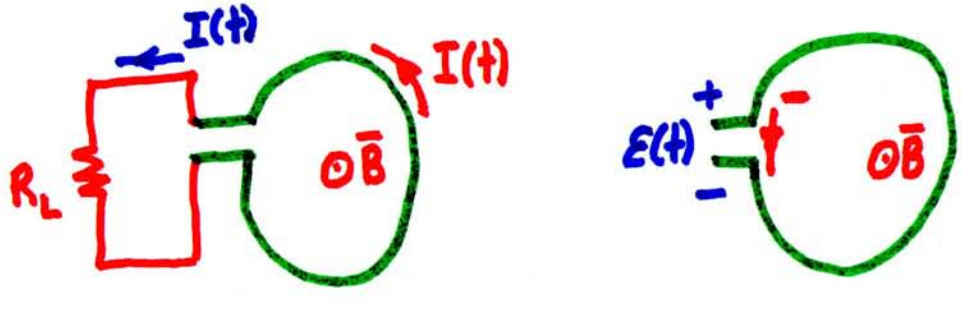
$d\bar{l}$ ve $d\bar{S}$'nin sağ el kuralına uyduğu durumda $\mathcal{E}$ için kutupluk (polarite) şöyle belirlenir.

$d\bar{l}$'nin terkettiği terminal pozitif seçilir.

Örnek: Şekildeki gibi tek sarımlı ve a yarıçaplı bir döngü düşünelim. Döngünün olduğu bölgede $\bar{B}(t) = \hat{a}_z B_z(t) = \hat{a}_z B_0 \sin(wt)$ alanı vardır. Döngünün iki açık terminali arasında indüklenen gerilimi bulunuz.



(a)



(b)

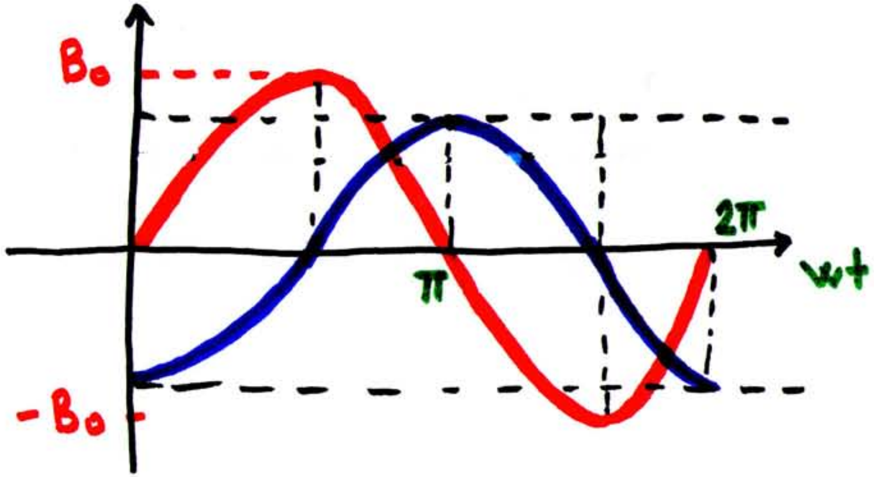
+ ucun tanıma uygun olarak seçildiğine dikkat ediniz.

Çözüm: İndüklenen gerilim,

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= -\frac{d}{dt}\int_S \bar{B}\cdot d\bar{S} = -\frac{d}{dt}\int_S \left[\hat{a}_z B_o \sin wt\right]\cdot(\hat{a}_z dS) \\ \text{''} &= -\frac{d}{dt}\left[B_o \sin wt\right](\pi a^2) = -w\pi a^2 B_o \cos wt \end{aligned}}$$

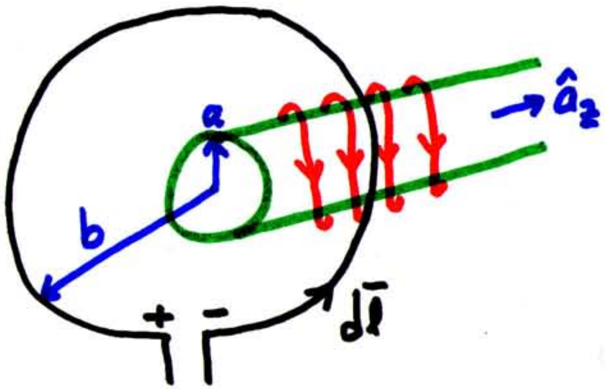
bulunur.

Eğer $\bar{B}$ ile $\bar{E}$'yi aynı grafikte çizersek, değişim aşağıda şekilde gösterildiği gibi olacaktır.

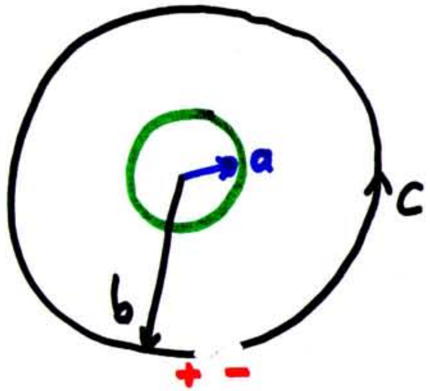


Şekilden de görüldüğü gibi $\mathcal{E}(t)$ manyetik alandaki değişime karşı koymaktadır.

Örnek: N sarım/metre olan bir uzun solenoid i akımını taşımaktadır. Solenoidi çevreleyen döngüde ise tek bir sarım vardır. Devrede indüklenen $\mathcal{E}$ gerilimini bulunuz.



Kesit:



Çözüm: Solenoidin oluşturduğu manyetik alan

$$\boxed{\bar{B} = \begin{cases} \mu_0 N i \, \hat{a}_z & \text{Wb/m}^2 , \quad r<a \\ 0 & , \quad r>a \end{cases}}$$

olarak 224'te bulunmuştu. Ayrıca

$$d\bar{s} = r\,dr\,d\phi\,(-\hat{a}_z) \qquad d\bar{l} = b\,d\phi\,(-\hat{a}_\phi)$$

ve

$$\boxed{\mathcal{E} = \oint_C \bar{E}\cdot d\bar{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \bar{B}\cdot d\bar{s}}$$

yazılabilir.

$\bar{E}$'nin pozitif doğrultusu C'ninki ile aynıdır:

$$\boxed{\bar{E} = E_\phi \, \hat{a}_\phi}$$

$$\int_0^{2\pi} E_\phi \, b \, d\phi = 2\pi b E_\phi = -\frac{d}{dt}\int_0^b\int_0^{2\pi} \bar{B}\cdot d\bar{s} = -\frac{d}{dt}\int_0^a\int_0^{2\pi} \bar{B}\cdot d\bar{s}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{2\pi b E_\phi = -\frac{d}{dt}\int_0^a\int_0^{2\pi} \mu_0 N i \; \hat{a}_z \cdot (r\,dr\,d\phi)(-\hat{a}_z)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{2\pi b E_\phi = \mu_0 N \, 2\pi \frac{a^2}{2} \frac{di}{dt} = \mathcal{E} \quad (\text{volt})}$$

Bu $\mathcal{E}$ (gerilim) da manyetik akıdaki değişimin tersine çalışacak bir akım oluşturacaktır.

Şimdiye kadar gördüğümüz örneklerde olduğu gibi eğer devre hareket etmiyorsa, zamana göre alınan türev integral işaretinin içine alınabilir. Yani S sabit ise

$$\oint_C \overline{E}\cdot d\overline{l} = \mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\oint_S \overline{B}\cdot d\overline{s} = -\int_S \frac{\partial \overline{B}}{\partial t}\cdot d\overline{s}$$

yazılabilir. Sol tarafta Stokes teoremini kullanırsak,

$$\int_S \nabla\times\overline{E}\cdot d\overline{s} = -\int_S \frac{\partial \overline{B}}{\partial t}\cdot d\overline{s}$$

buluruz. Bu iki integral her C ve S için eşit olduğundan, çekirdekleri de eşit olmalıdır, yani

$$\nabla\times\overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \qquad (4)$$

elde edilir. Bu denklem $\nabla\times\overline{E}=0$ denklemi yerine zaman bağımlı durumda geçerlidir ve statik durumda da bu denkleme indirgenir. Bu yeni Maxwell denklemine ulaşırken sabit (durağan) devre aldık çünkü öncelikle devre gelişigüzel bir kavramdır ve fiziksel olarak var olması gerekmez. Ayrıca EM olaylardaki gözlemci hareket etmez ve bu nedenle sabit devre kullanılması mantığa uygundur.

Denklemden görüldüğü gibi $\nabla \times \bar{E} = 0$ artık geçerli değildir ve bu edenle $\bar{E}$ artık korunumlu değildir.

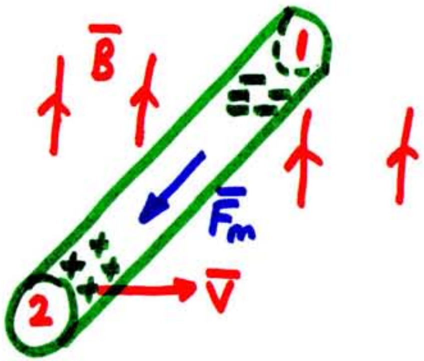
Sonuç olarak zamanla değişen durumda $\bar{E}$ bir skaler alanın gradyantı olarak tümüyle ifade edilemez.

Harekete Bağlı EM indüklenme

Eğer iletkenler, manyetik alanın varlığında hareket ederse, manyetik alanın değişiminden oluşan gerilime ek olarak bir başka gerilim daha indüklenir. Bu tip indüklenme endüstriyel toplumun çoğu makinasının temelini oluşturur. Bu makinalara, jeneratörleri ve motorları örnek verebiliriz.

Sabit Manyetik Alanda Hareket

Sabit manyetik alanda hareket eden bir iletken durumunda oluşan gerilim Lorentz yasası ile bulunabilir. Hatırlayacağımız gibi



$$\boxed{\bar{F}_m = q\, \bar{V} \times \bar{B}}$$

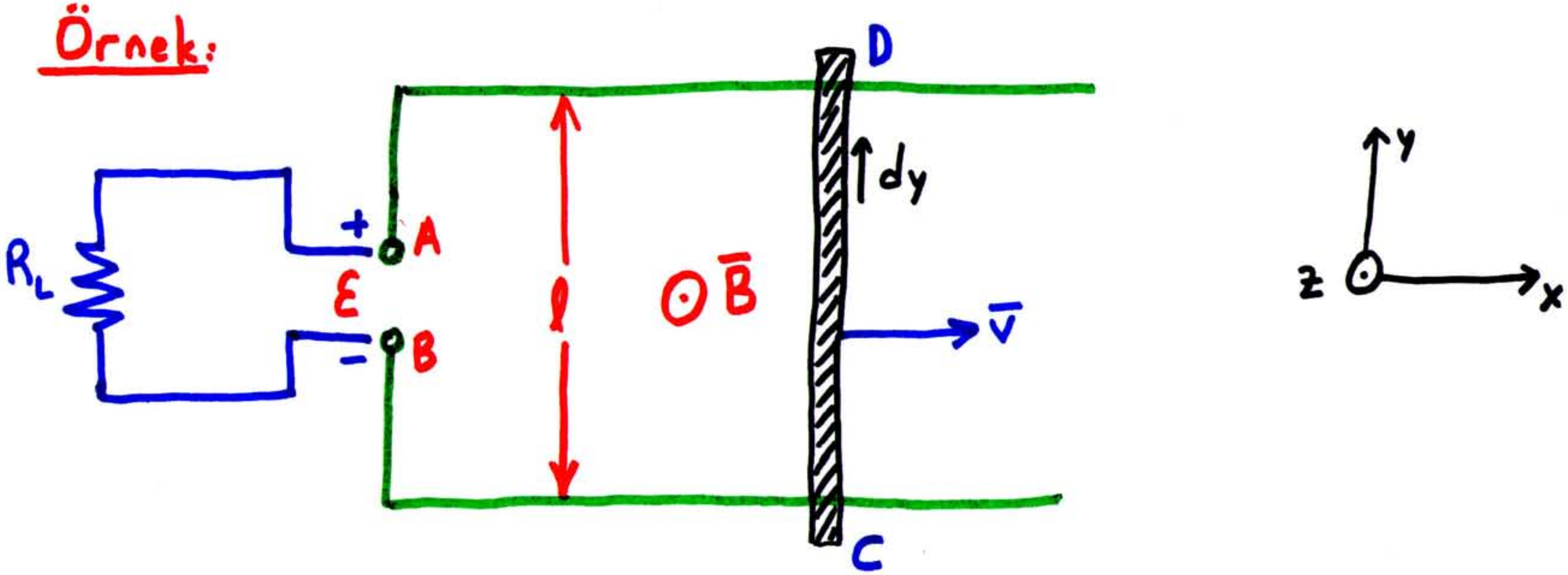
veya $\boxed{\bar{F}_m = I\, d\bar{l} \times \bar{B}}$ (çünkü $q\bar{v}$ akım elemanıdır) idi.

Emf'yi bir devrede birim yük başına teğet kuvvetin tel boyunca integrali olarak tanımlamıştık. O halde şimdiki durumda,

$$\boxed{V_1 - V_2 = \mathcal{E} = \int_2^1 (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} \qquad (5)}$$

yazılabilir.

Örnek:



Şekilde gösterilen $\bar{B}$ alanı sabittir yani zamanla değişmemektedir. CD metal parçası ise x yönünde v hızıyla hareket etmektedir.

$\bar{B} = \hat{a}_z B_0$ ve $\bar{v} = \hat{a}_x v_0$ veriliyor. Devredeki toplam emf'yi bulunuz.

Çözüm: Manyetik alan zamanla değişmediğinden, A ve B terminalleri arasındaki emf'yi (5) denklemi ile bulabiliriz.

$$\mathcal{E} = \oint_C (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} \qquad C, \text{ BCDA eğrisidir.}$$

Ancak sadece CD parçası hareketli olduğundan diğer kısımların katkısı yoktur ve

$$\mathcal{E} = \int_{CD} (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} = \int_{CD} (\hat{a}_x v_0 \times \hat{a}_z B_0) \cdot (dy\, \hat{a}_y) = -v_0 B_0 l$$

$\mathcal{E} = V_A - V_B = -v_0 B_0 l$ olduğundan B terminali A'ya göre pozitiftir. Bu iki terminal arasına bir direnç bağlanırsa devrede saat yönünde bir akım dolaşır. Bu akımın oluşturduğu akı $-\hat{a}_z$ yönündedir ve artan manyetik akıya karşı direnmektedir. Bu devrede dirençte harcanan güç

$$P_{elek} = I^2 R_L = \frac{(v_0 B_0 l)^2}{R_L}$$

bulunur. Bu gücün, CD parçasını sağa doğru hareket ettirmek için gereken mekanik güce eşit olduğu gösterilebilir. Böylece mekanik enerji elektrik enerjisine çevrilmiş ve kullanılmıştır. Bu problemdeki devre basit bir elektrik jeneratörüdür.

Zamanla Değişen Alanda Hareket Eden Devre

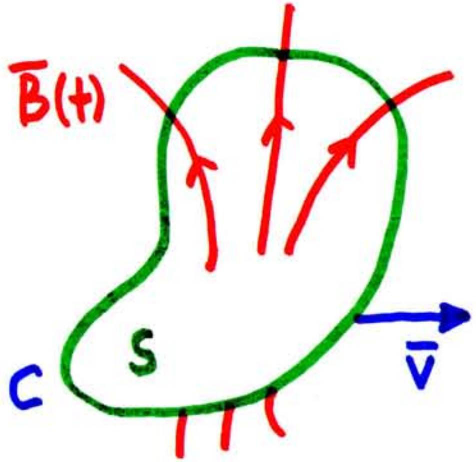
Bu genel durumda indüklenen akımın iki nedeni vardır: Manyetik alanın zamanla değişimi ve devrenin zamanla değişimi. Bu iki etki üstüste bindirme ilkesi kullanılarak ayrı ayrı incelenebilir.

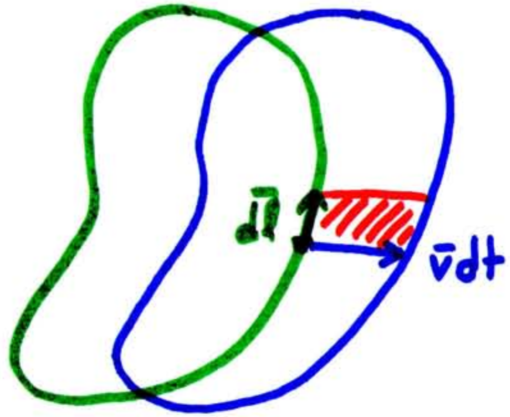
1. Devre sabit, akı zamanla değişiyor.
2. Manyetik alan sabit, devre zamanla değişiyor.

Böylelikle,

$$\mathcal{E} = -\int_S \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \cdot d\overline{s} + \int_C (\overline{v} \times \overline{B}) \cdot d\overline{l}$$

yazabiliriz. Hareketten kaynaklanan ikinci terim de akı değişimi ile ilişkilendirilebilir. Bunu görmek için aşağıdaki şekli inceleyelim.





dt zaman aralığında C'nin $d\bar{l}$ elemanı $d\bar{s} = (\bar{v} \times d\bar{l})dt$ alanını tarar. Bu $d\bar{l}$ elemanının hareketinden dolayı oluşan manyetik akı değişikliği $d\Psi_1$ bu taranan alan üzerinde $\bar{B}$'nin integraline eşittir veya

$$\boxed{d\Psi_1 = \bar{B} \cdot d\bar{s} = \bar{B} \cdot (\bar{v} \times d\bar{l})\, dt}$$

olarak bulunur. Devrenin hareketinden oluşan toplam akı değişikliğini bulmak için tüm C eğrisi boyunca integral almak gerekir.

$$\boxed{d\Psi = \oint_C d\Psi_1 = \oint_C \bar{B} \cdot (\bar{v} \times d\bar{l})\, dt}$$

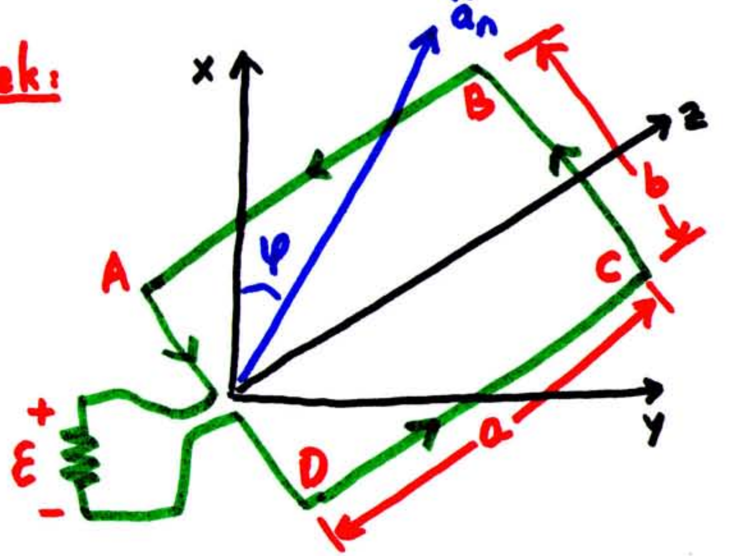
$$\Rightarrow \quad \boxed{-\frac{d\psi}{dt} = -\oint_C \overline{B}\cdot(\overline{v}\times d\overline{l}) = \oint_C (\overline{v}\times\overline{B})\cdot d\overline{l}}$$

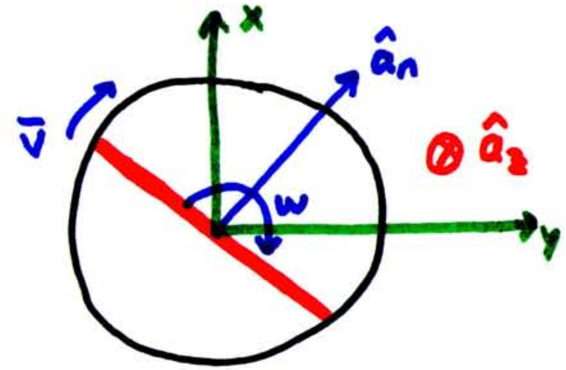
yazılır. Dolayısıyla hareketten oluşan emf de akı değişimi ile ilgilidir ve genel durumda

$$\boxed{\mathcal{E} = \oint_C \overline{E}\cdot d\overline{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \overline{B}\cdot d\overline{S}}$$

yazabiliriz. Bu ifade hem S'nin hem de $\overline{B}$'nin zamanla değişimini hesaba kattığından genel durumda geçerlidir. Böylelikle bir devre belirleyebildiğimiz durumda akının hesaplanması ve zamana göre türevinin negatifinin alınması yeterli olacaktır.

Örnek:





Basit jeneratör devresi.

Şekildeki basit jeneratör devresi w açısal hızıyla dönmektedir. Emf'yi hesaplayınız.

Çözüm:

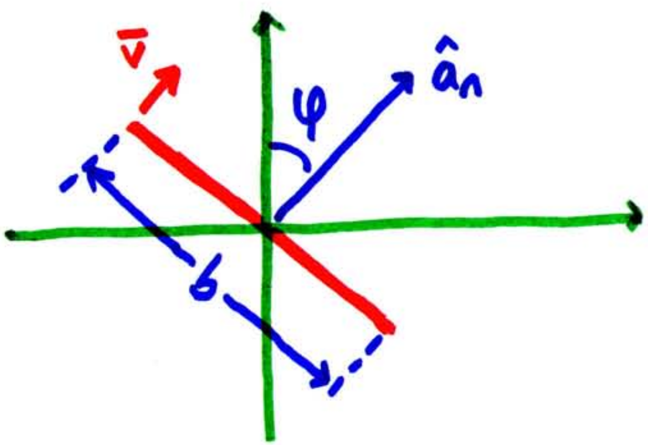
$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \phi = \int_S \overline{B} \cdot d\overline{s}}$$

Manyetik alan $\overline{B} = B_o \hat{a}_x$ olsun.

$\Rightarrow \quad \phi = B_o \int \hat{a}_x \cdot \hat{a}_n \, dS = B_o S \cos\varphi$ ve $\varphi = wt$ olduğundan

$$\phi = B_o ab \cos wt \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = B_o w ab \sin wt}$$

İkinci Yol:



$$\overline{v} = \frac{b}{2} w \, \hat{a}_\phi$$

$$\overline{E} = \overline{v} \times \overline{B}, \quad \overline{B} = B_o \hat{a}_x$$

AB boyunca:

$$\boxed{\overline{E} = \frac{b}{2} w B_o \, \hat{a}_\phi \times \hat{a}_x = -\frac{b}{2} w B_o \sin\phi \, \hat{a}_z}$$

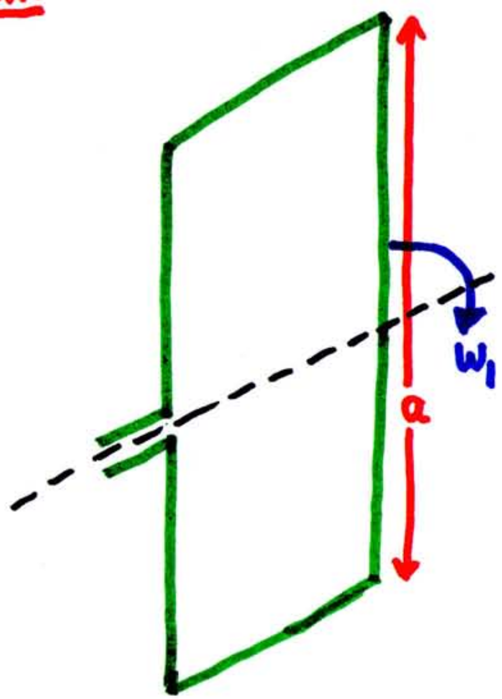
CD Boyunca: $\boxed{\bar{E} = \frac{b}{2} w B_0 \sin\phi \, \hat{a}_z}$

DA ve BC kenarlarında $\bar{dl}$ x-y düzleminde ve $\bar{E}$ z yönünde olduğundan $\bar{E}\cdot\bar{dl} = 0$'dır. Böylece

$$\mathcal{E} = \oint_C \bar{E}\cdot\bar{dl} = \int_{D(0)}^{C(a)} \frac{b}{2} w B_0 \sin\phi \, dz + \int_C^B \bar{E}\cdot\bar{dl} + \int_{B(a)}^{A(0)} -\frac{b}{2} w B_0 \sin\phi \, dz + \int_A^{D} \bar{E}\cdot\bar{dl}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = 2\,\frac{b}{2}\, a w B_0 \sin wt = a b w B_0 \sin wt}$$ bulunur.

Örnek:



$\bar{B}$ düzgün ve zamanla değişen olsun:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{B} &= B_0(t)\,\hat{a}_x \\ B_0(t) &= B_0 \sin w_2 t \end{aligned}}$$

Devre de w_1 açısal hızıyla dönüyorsa oluşan emf'yi hesaplayınız.

Çözüm: Bir önceki örnekte olduğu gibi

$$\boxed{\phi = \overline{B}\cdot\overline{S} = B_0 \, Sin\, w_2 t \, ab \, Cos\theta \Big|_{\theta = w_1 t}}$$

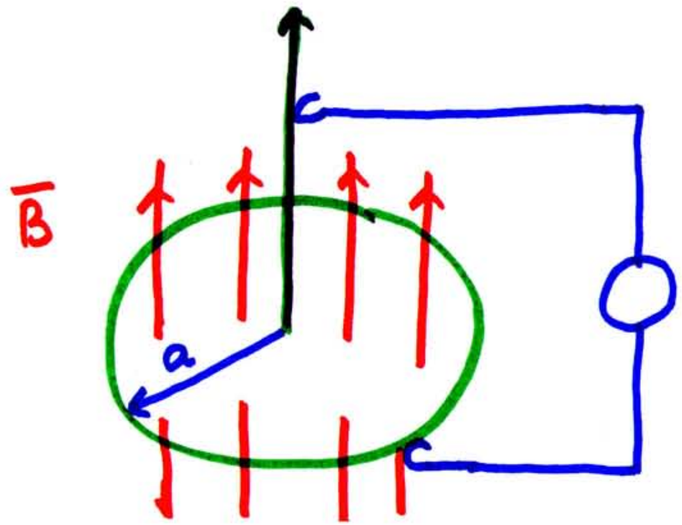
bulunur. θ yerine konur ve türev alınırsa,

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = -B_0 ab \frac{d}{dt}\left[Sin w_2 t \, Cos w_1 t\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = -B_0 ab \left[w_2 Cos w_2 t \, Cos w_1 t - w_1 Sin w_1 t \, Sin w_2 t\right]}$$

elde edilir.

Örnek: Sabit w açısal hızıyla dönen iletken disk için emf'yi bulunuz.



Bu devre Faraday jeneratörü olarak da adlandırılır.

i) $\overline{V} = wr\,\hat{a}_\phi$ $\qquad$ $\overline{E} = \overline{V} \times \overline{B}$

$\overline{B} = B_0 \, \hat{a}_z \Rightarrow \boxed{\overline{E} = wr B_0 \, \hat{a}_\phi \times \hat{a}_z}$

$$\Rightarrow \quad \bar{E} = w r B_0 \, \hat{a}_r$$

ve

$$\boxed{V = \int_0^a \bar{E} \cdot \bar{dl} = \int_0^a w B_0 r \, dr = w B_0 \frac{a^2}{2}}$$

ii) Akı yöntemi:

$$\phi = \int_S \bar{B} \cdot \bar{ds} = B_0 \int_0^a \int_0^{wt} r \, d\phi \, dr = B_0 \, (wt) \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = -w B_0 \frac{a^2}{2} = -V \Rightarrow \quad V = w B_0 \frac{a^2}{2}}$$

Zamanla Değişen EM Alanlar

Matematik Tekrarı

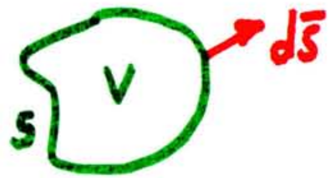
Helmholtz Teoremi: Bir vektör alanının hem ıraksaması hem de döneli biliniyorsa o vektör alanı toplamsal bir sabit dışında belirlenebilir. Hatırlayacağımız gibi

$\nabla \times \bar{A}$	$\bar{A}$'nın	vektör kaynaklarını
$\nabla \cdot \bar{A}$	ise	skaler kaynaklarını

temsil etmektedir.

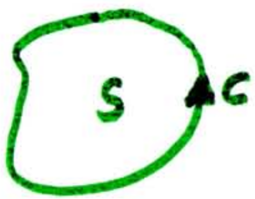
Iraksama Teoremi

$$\int_V \nabla \cdot \bar{A} \, dv = \oint_S \bar{A} \cdot d\bar{s}$$



Stokes Teoremi

$$\int_S \nabla \times \bar{A} \cdot d\bar{s} = \oint_C \bar{A} \cdot d\bar{l}$$



İki Temel Özdeslik

1) $\nabla \times \nabla \phi = 0$ (gradyantın döneli sıfırdır)

2) $\nabla \cdot \nabla \times \bar{A} = 0$ (dönelin ıraksaması sıfırdır)

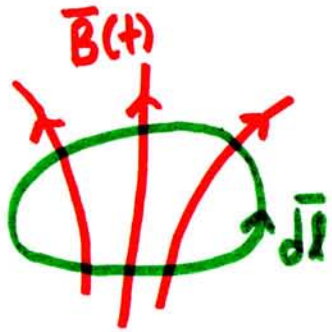
Statik Elektrik ve Manyetik Alan Denklemleri

Diferansiyel Biçim	İntegral Biçim
$\nabla \times \bar{E} = 0$	$\oint_C \bar{E} \cdot \overline{dl} = 0$ (irrotasyonel)
$\nabla \cdot \bar{D} = \rho_v$	$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = \int_V \rho_v \, dv = Q$ (Gauss Yasası)
$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$	$\oint_C \bar{H} \cdot \overline{dl} = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{s} = I$ (Ampere Yasası)
$\nabla \cdot \bar{B} = 0$	$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0$ (manyetik akının korunumu)

Statik elektrik ve manyetik alanlar birbirine bağlı değildir, yani birbirinden bağımsız olarak var olabilirler.

Maxwell Denklemleri

A) Faraday Yasası: Zamanla değişen bir manyetik alan, elektrik alanı oluşturur.



$\bar{B} = \bar{B}(x, y, z, t)$ manyetik akı yoğunluğu

$$\boxed{\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \bar{B} \cdot d\bar{s}}$$

Eğer C eğrisi ve S yüzeyi zamanla değişmiyorsa yani sabit ise türev sağdaki integralin içine alınabilir. Ayrıca sol tarafta Stokes teoremini tersten kullanırsak,

$$\boxed{\int_S \nabla \times \bar{E} \cdot d\bar{s} = -\int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s}}$$

ve integrandların birbirine eşit olması gerektiğinden,

$$\boxed{\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \qquad (1)}$$

buluruz. Bu denklem, Maxwell'in 1. denklemidir.

B) Gauss yasası zamanla değişen durumda da geçerlidir.

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = Q_T \Rightarrow \int_V \nabla \cdot \bar{D} \, dv = \int_V \rho_v \, dv$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \bar{D} = \rho_v \qquad (2)}$$

Bu denklem, Maxwell'in 3. denklemidir.

c) Manyetik akının korunumu

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0 \Rightarrow \oint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = \int_V \nabla \cdot \bar{B} \, dv = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \bar{B} = 0 \qquad (3)}$$ (Maxwell'in 4. denklemi)

D) Maxwell'in 2. denklemi

Elektrostatikte geçerli olan $\nabla \times \bar{E} = 0$ denklemi, zamanla değişen durumda $\nabla \times \bar{E} = -\partial \bar{B}/\partial t$ haline gelmiştir. Bunun anlamı, zamanla değişen manyetik alanların elektrik alan oluşturduğudur. Buradan yola çıkarak doğrudan $\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$ denkleminin de değiştirilmesi gerektiğine ve bu denklemin sağ tarafında elektrik alanının zamana göre türevinin bulunması gerektiği sonucuna ulaşabiliriz. Yükün korunumunu ifade eden süreklilik denklemini hatırlayalım.

$$\boxed{\nabla \cdot \bar{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}}$$

Şimdi $\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$ denkleminde her iki tarafın ıraksamasını alırsak,

$$\boxed{\nabla \cdot (\nabla \times \bar{H}) = \nabla \cdot \bar{J} \Rightarrow \nabla \cdot \bar{J} \equiv 0}$$

buluruz ki bu, zamanla değişen durumda geçerli değildir. Bu durumun düzeltilmesi gerekir. Şimdi denklemi, $\bar{G}$ bir düzeltme terimi olmak üzere,

$$\boxed{\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \bar{G}}$$

olarak yazalım ve yine ıraksama alalım.

$$\nabla\cdot(\nabla\times\overline{H})=\nabla\cdot(\overline{J}+\overline{G})\equiv 0$$
$$\Rightarrow \nabla\cdot\overline{J}=-\nabla\cdot\overline{G}=-\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$
$$\Rightarrow \nabla\cdot\overline{G}=\frac{\partial \rho_v}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\overline{D})=\nabla\cdot\left(\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}\right)$$

ve iki ıraksamanın eşitliğinden,

$$\boxed{\overline{G}=\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}}$$

buluruz. Aslında bu terime, ıraksaması sıfır olan vektörler eklenirse sonuç değişmez ama sadece bu terimin yeterli olduğu deneysel olarak sağlanmıştır.

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\times\overline{H}=\overline{J}+\frac{\partial\overline{D}}{\partial t} \qquad (4)}$$ (Maxwell'in 2. denklemi)

(4) denklemi $\overline{H}$'nin vektör kaynaklarının iletim akımı $\overline{J}$ ve yerdeğiştirme (deplasman) akımı

$$\boxed{\overline{J}_d=\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}}$$

olduğunu göstermektedir.

Böylece $\bar{J}=0$ olduğu durumda dahi eğer zamanla değişen bir $\bar{D}$ alanı varsa $\bar{H}$ sıfır olmaz.

Faraday yasası ile birlikte (4) denklemi elektromanyetik dalga yayılımını açıklar.

Yerdeğiştirme akımı

$\bar{J} \equiv$ akım yoğunluğu (Amp/m^2)

İletim akım yoğunluğu:
metallerde oluşur.

$$\bar{J} = \sigma \bar{E}$$

Taşınım (konveksiyon) akım yoğunluğu:
Yüklerin hareket etmesi ile oluşan akımdır.

$$\bar{J} = \rho \bar{V}$$

Şimdi $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ terimini inceleyelim. $\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = Q$ (coul) olduğundan $\bar{D}$'nin birimi Coul/m^2'dir. O halde,

$$\boxed{\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \frac{Coul/m^2}{sec} = \frac{Amp}{m^2}}$$

yani akım yoğunluğu birimine sahiptir. Bu nedenle bu terim yerdeğiştirme akımı olarak adlandırılır.

$$\boxed{\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \bar{J}_d}$$

$\bar{J}_d$ dalga yayılımını açıklamakta önemlidir.

Şimdi $\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \dfrac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ denkleminde her iki tarafın integralini alalım.

$$\boxed{\int_S \nabla \times \bar{H} \cdot d\bar{s} = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{s} + \int_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{s}}$$

Stokes teoremini birinci terimde kullanırsak,

$$\boxed{\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{s} + \int_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{s} = I + I_d}$$

buluruz. Burada I gerçek (iletim) akım, I_d ise yerdeğiştirme akımıdır. $\bar{E}$'nin ve dolayısıyla $\bar{D}$'nin zamanla değişiminin akım gibi davranması şaşırtıcı değildir.

İletkenlerde $\bar{E}$'nin artışı veya azalışı yüklerin artış veya azalışı anlamına gelir ki bunun için akımın akması gerekir.

Maxwell Denklemlerini özetlersek,

Diferansiyel Biçim	İntegral Biçim
$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$	$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_S -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s}$
$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$	$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = I + \int_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{s}$
$\nabla \cdot \bar{D} = \rho_v$	$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = Q_T$
$\nabla \cdot \bar{B} = 0$	$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0$

$$\nabla \cdot \bar{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$ (süreklilik denklemi)

Süreklilik denklemi iki Maxwell denkleminden elde edilebilir.

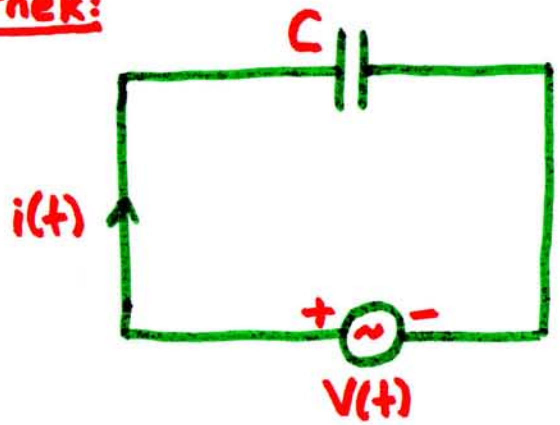
Ortam Bağıntıları

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \quad , \qquad \bar{D} = \epsilon \bar{E} \quad \text{(lineer ortam)}$$

$$\bar{B} = \mu_0 (\bar{H} + \bar{M}) \quad , \qquad \bar{B} = \mu \bar{H} \quad \text{(lineer ortam)}$$

$$\underbrace{\bar{J} = \sigma \bar{E}}_{\text{iletim akımı}} \quad \text{ve/veya} \quad \underbrace{\bar{J} = \rho_v \bar{v}}_{\text{Konveksiyon akımı}}$$

Örnek:



$\boxed{V(t) = V_0 \sin wt}$ veriliyor.

i) $i_c = i_d$ olduğunu gösteriniz.

ii) Telden r uzaklıkta H'yi bulunuz.

Çözüm: i) Tellerdeki iletim akımı

$$\boxed{i_c = C \frac{dV_c}{dt} = C V_0 w \cos wt}$$

bulunur.

Plaka alanı A, plakalar arası uzaklığı d, aradaki malzemenin geçirgenliği ϵ olan bir kapasitör için kapasitans,

$$\boxed{C = \epsilon \frac{A}{d}}$$

idi. O halde

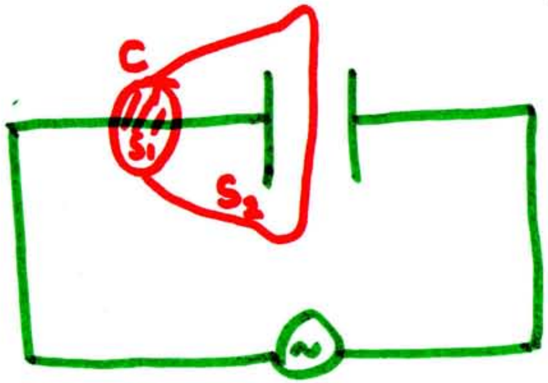
$$\bar{E} = \frac{V_c(t)}{d} \Rightarrow \bar{D} = \epsilon \bar{E} = \epsilon \frac{V_c(t)}{d} = \epsilon \frac{V_0}{d} \sin wt$$

ve

$$\boxed{i_d = \int_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{s} = \left(\epsilon \frac{A}{d}\right) V_0 w \cos wt = C V_0 w \cos wt}$$

ve bu da i_c'ye eşit olduğundan $i_c = i_d$ elde edilmiş olur.

Yerdeğiştirme akımının gerekli olduğunu örneklemek için kapasite örneğinde



C eğrisini ve bunun sınırladığı S_1 ve S_2 yüzeylerini düşünelim.

C eğrisi için,

$$\oint_C \bar{H} \cdot \bar{dl} = H_\phi (2\pi r) \quad \text{yazılabilir.}$$

S_1 için:

$$\oint_C \overline{H}\cdot d\overline{l} = \int_{S_1} \overline{J}\cdot d\overline{s} + \underbrace{\cancel{\int_{S_1} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}\cdot d\overline{s}}}_{0} = i_c = C V_0 w \cos wt$$

S_2 için:

$$\oint_C \overline{H}\cdot d\overline{l} = \int_{S_2} \overline{J}\cdot d\overline{s} + \int_{S_2} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}\cdot d\overline{s} = i_d \ (= i_c)$$

Görüldüğü gibi eğer yerdeğiştirme akım terimi olmasaydı, aynı eğrinin sınırladığı iki yüzey için $\oint_C \overline{H}\cdot d\overline{l}$'nin iki ayrı sonucu olurdu yani tutarsızlık olurdu.

Kutuplanmış (polarize) dielektriklerde yerdeğiştirme akımı, kutuplanma (polarizasyon) yüklerinin zamanla değişimi ile ilişkilendirilebilir. Ancak boşlukta bile $\partial\overline{D}/\partial t$ terimi gereklidir ve dalgaların ilerlemesi bu yolla mümkündür. Sonuç olarak boşlukta dahi yerdeğiştirme akımı vardır.

Potansiyel Fonksiyonları

$$\boxed{\nabla\cdot\bar{B}=0 \Rightarrow \bar{B}=\nabla\times\bar{A}}$$

zamanla değişen durum için de kullanılır. $\bar{A}$ vektör potansiyeldir ve

$$\boxed{\nabla\cdot\nabla\times\bar{A}=0}$$

geçerlidir.

Elektrik alanı için,

$$\boxed{\nabla\times\bar{E}=-\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla\times\bar{E}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\bar{A})}$$

yazılabilir. Zaman türevi ile uzay türevleri yer değiştirilirse,

$$\boxed{\nabla\times\left(\bar{E}+\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}\right)=0}$$

bulunur. Şimdi, herhangi bir vektör alanının döneli özdeş olarak sıfır ise o vektör alanı bir skaler alanın gradyantı olarak ifade edilebilir. Bu durumda

$$\boxed{\bar{E}+\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}=-\nabla V}$$

yazılabilir.

Burada V skaler potansiyeldir. O halde,

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{E} &= -\nabla V - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\\ \bar{B} &= \nabla \times \bar{A}\end{aligned}}$$

bulduk. $-\nabla V$ terimi yüklerden oluşan alan, $\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$ terimi ise akımlardan oluşan alan gibi düşünülebilir.

Elektrostatik durumunda $\boxed{\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \bar{E} = -\nabla V}$ durumuna indirgendiğine dikkat edilmelidir.

Şimdi $\boxed{\bar{D} = \epsilon \bar{E}\ ,\ \bar{B} = \mu \bar{H}}$ alalım.

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla \cdot \bar{D} = \rho \ &\Rightarrow\ \nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon}\\ &\Rightarrow \nabla \cdot \left(-\nabla V - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\epsilon}\\ &\Rightarrow \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \bar{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon} \qquad (*)\end{aligned}}$$

buluruz. Öte yandan,

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$ ile başlayarak

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{B} = \bar{J} + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$ ve $\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$ olduğundan,

$$\boxed{\nabla \times \nabla \times \bar{A} = \mu \bar{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \mu \bar{J} + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right)}$$

bulunur. Şimdi

$$\boxed{\nabla \times \nabla \times \bar{A} = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A}}$$

özdeşliğini kullanırsak

$$\boxed{\nabla^2 \bar{A} - \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) = -\mu \bar{J} + \mu \epsilon \nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} \qquad (**)}$$

elde ederiz. Şimdiye kadar sadece $\bar{A}$'nın dönelini tanımladık. Helmholtz teoremine göre $\bar{A}$'nın ıraksamasını istediğimiz gibi tanımlayabiliriz. Bu tanımı $\bar{A}$ ile V'nin denklemlerini birbirinden ayıracak şekilde yapacağız. Statik durumda $\nabla \cdot \bar{A} = 0$ seçtiğimizi hatırlayınız.

$$\boxed{\nabla\cdot\bar{A} = -\mu\epsilon\frac{\partial V}{\partial t}}$$

seçelim. Bu seçime Lorentz Koşulu denir. Bu seçimle (**) denklemi

$$\boxed{\nabla^2\bar{A} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2} = -\mu\bar{J} \qquad (1)}$$

haline gelir. Bu denklem $\bar{A}$ vektör potansiyeli için bulunan, homojen olmayan dalga denklemidir. Çözümleri, $\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ hızı ile ilerleyen dalgalardır. Lorentz koşulu ile,

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu\epsilon\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon} \qquad \text{ve}$$

$$\boxed{\nabla^2 V - \mu\epsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \qquad (2)}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi (1) ve (2) denklemleri (*) ve (**)'ın aksine $\bar{A}$ ve V için iki ayrı denklemdir; yani $\bar{A}$ ve V denklemleri ayrılmıştır. Ayrıca zamanla değişmeyen durumda $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ olduğundan

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2 \bar{A} &= -\mu \bar{J} \\ \nabla^2 V &= -\frac{\rho_v}{\epsilon}\end{aligned}}$$

statik denklemlerinin elde edildiğine dikkat ediniz.

(1) ve (2) denklemlerinin çözümü

$$V(\bar{r},t) = \int_V \frac{\rho(\bar{r}', t - \frac{R}{v})}{4\pi\epsilon R}\, dv' \qquad (3)$$

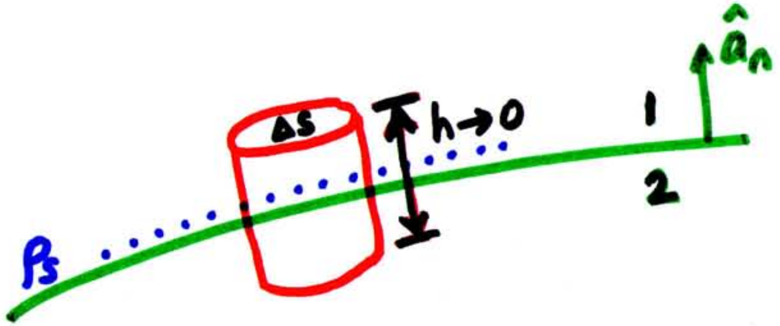
$$\bar{A}(\bar{r},t) = \int_V \frac{\mu \bar{J}(\bar{r}', t - \frac{R}{v})}{4\pi R}\, dv' \qquad (4)$$

olarak bulunabilir. Burada $\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}}$ hızdır. R ise $R = |\bar{r} - \bar{r}'|$ ile verilir. (3) ve (4) ile verilen çözümler gecikmiş potansiyeller olarak adlandırılır.

(3) ve (4)'e göre, $\bar{r}'$ noktasındaki kaynakta gerçekleşen bir değişimin $\bar{r}$ noktasındaki etkisi $|\bar{r} - \bar{r}'|/v$ zaman kadar sonra hissedilecek veya o kadar gecikecektir. Verilen ismin anlamı budur.

Elektromanyetik Sınır Koşulları

1) Normal Bileşenler



$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho_v$$

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = \int_V \rho_v \, dv$$

Gauss yasasını kullanarak,

$$(D_{1n} - D_{2n}) \Delta s = \rho_s \Delta s$$

$$\Rightarrow D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$$

Eğer $\hat{a}_n$ şekildeki gibi 2'den 1'e doğru birim vektör olarak tanımlı ise

$$\boxed{(\bar{D}_1 - \bar{D}_2) \cdot \hat{a}_n = \rho_s}$$

bulunur. Benzer şekilde, manyetik alan için skaler kaynak olmadığından,

$$B_{1n} - B_{2n} = 0 \Rightarrow \boxed{(\bar{B}_1 - \bar{B}_2) \cdot \hat{a}_n = 0}$$

elde edilir.