

**EEM 323
ELECTROMAGNETIC WAVE THEORY II**

**DALGA FİZİĞİ
(TUR)**

2013 – 2014 FALL SEMESTER

Prof. S. Gökhun Tanyer

DEPARTMENT OF ELECTRICAL-ELECTRONICS ENGINEERING
FACULTY OF ENGINEERING, BASKENT UNIVERSITY

SU, SES VE ELEKTROMANYETİK DALGALAR

Enerjinin Korunumu Yasası:

Su dalgası gibi, ses ve ışık oluşur oluşmaz sonrasındaki ilerleyişi kendisi ve ortam arasında bir sihirli ilişkidir. Başlayan bir dalga durmadan ilerler, zayıflayabilir, yön değiştirebilir ancak bu zincirleme reaksiyon hiç bir şekilde durdurulamaz olduğu hissini verir.

James Prescott Joule (1818–1889 tarafından önerilen *Enerjinin korunumu yasası*

Ses dalgası yayılmak için bir ortama –maddeye- ihtiyaç duyar.

Havanın yanı sıra su ve metaller gibi tüm katı ve sıvı maddelerde ses yayılabilir. Boşlukta – uzayda – ses yayılamaz, çünkü maddenin olmadığı yerde titreşen bir şey de olamaz.

Bu özelliği ile elektromanyetik dalgadan (ışık, radyo yayınları vb.) ciddi bir şekilde ayrılır. Matematiksel olarak birbirine bu kadar benzeyen iki dalga türü arasındaki bu temel ayrimı insanoğlu bir türlü kabullenmek istememiş ve yakın tarihimize kadar uzayda ‘esir’ denilen elektromanyetik (EM) dalga yayılımına imkan veren madde benzeri bir ortamın varlığına inanmıştır.*

Ses dalgasını EM dalgadan ayıran diğer bir fark ise, ses dalgasının sıkışıp genişleme hareketinin (salınımının) kendi hareket yönü ile aynı yönde olmasıdır.
Bunu polarizasyon ifadesi ile tanımlayacağız.

Entropinin Artması:

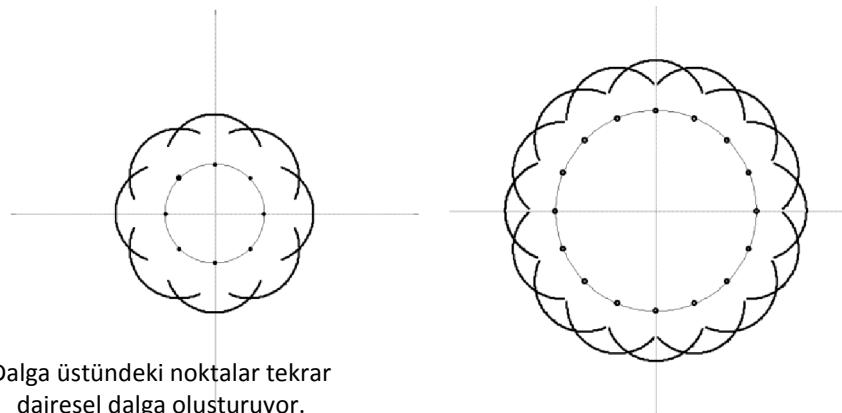
Bir taş düştüğünde ses dalgaları, yıldırım düşdüğünde ışık dalgaları tetiklenir. Her ikisinde de çok kısa süreler içerisinde farklı tür enerjiler arasında (potansiyel, elektrik, ısı ve mekanik) hızlı dönüşümler yaşanır. Her iki dalga türü de, fizikte “evrenin düzensiz hale ulaşma isteği” olarak bilinen *entropinin artması* kuramı doğrultusunda davranışır; yayılarak genliğini azaltır.

Ses Dalgalarının Yayılımı

Mekanik enerjinin ortaya çıkması, esnek bağlarla birbirlerine bağlı olan maddedeki taneciklerin titreşmesine neden olur.

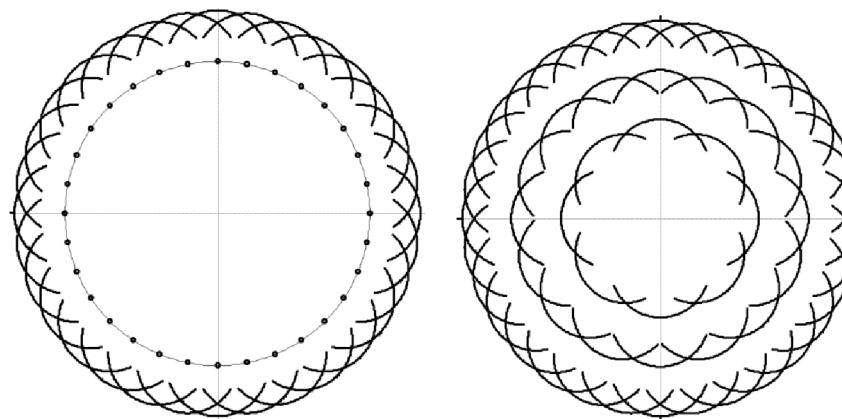
Mekanik enerjiye (titreşime) sahip taneciklerin (hava, sıvı veya katı madde molekülleri) yakındaki düşük enerjili tanecikler ile yakın etkileşiminden dolayı enerjilerini aktarmaları ile sesin ilerleyışı başlar. Zircirleme çarpışmalar ile entropinin artması kuramına uygun şekilde mekanik enerjinin ses dalgaları halinde yayılması sağlanır. Tanecik etkileşimli dalga hareket modeli Şekil HUYGENS'te gösterilmiştir.

Noktalardan yayılan dalgalar
birleşerek dairesel dalgayı
oluşturuyor.



(a)

(b)



Dalga üzerindeki noktalardan tekrar tekrar dairesel dalgalar oluşturuyor.

(c)

(d)

Şekil: Huygens prensibine göre noktalı kaynakçılardan oluşan dalga hareketi (a)'dan (c)'ye kadar aşamalar halinde gösterilmiştir. Kaynağın sürekli olması halinde (d)'de gösterildiği gibi dalga hareketi de sürekli olmaktadır.

Christiaan **Huygens** ve Augustin-Jean **Fresnel** tarafından farkındığı şekilde ilerleyen dalga hareketi, dalga yüzeylerindeki küçük noktalı kaynakçılardan tekrar tekrar oluşturuluyor gibi davranışmaktadır.

Dalganın ilerleme hızı enerji aktarımını başlatan güçe hiç bir şekilde bağlı değildir! Su üzerindeki bir kayığın arkadan ittilmesine hiç benzemez. Dalgalanma zincirini başlatan olay ne kadar büyük veya küçük olsun, dalga hızı sadece ve sadece ortamın kendi özelliğine bağlıdır. Huygens etkileşimini ortam belirler.

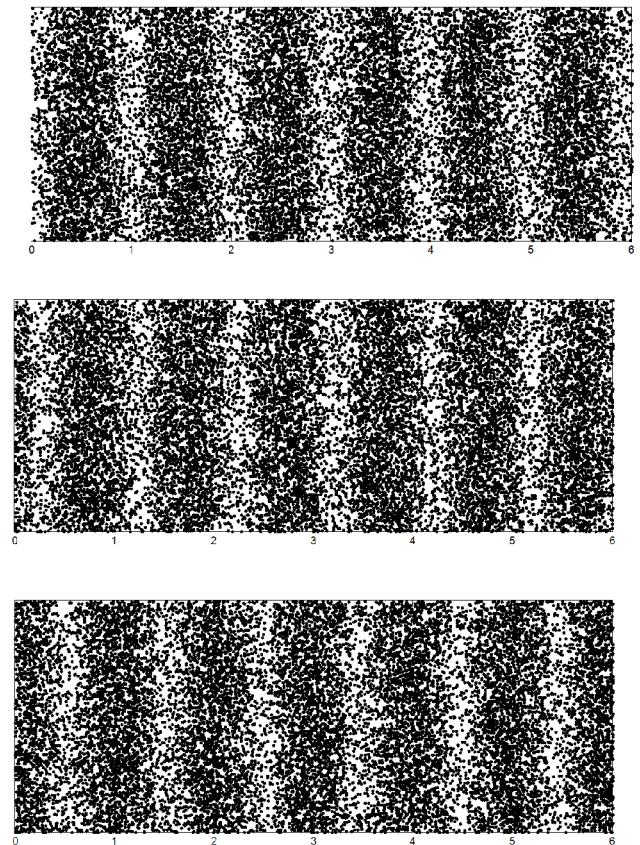
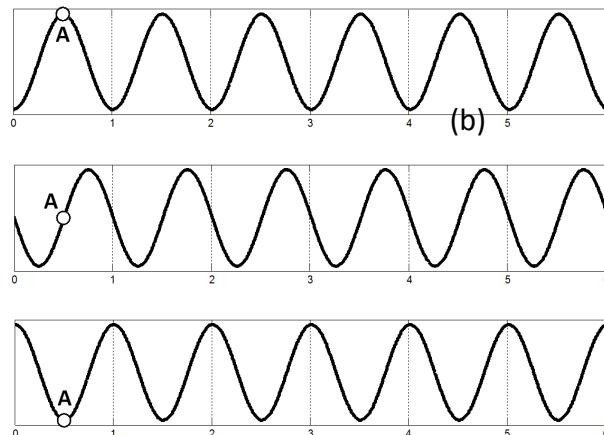
Dalganın hızı ortama göre belirlenir.

Dalga salınımı (polarizasyon):

Her dalga yayılımının ilerlemesini sağlayan motor, salınımlardır; yukarı-aşağı, sağ-sol, ileri-geri^{*} yönü ne olursa olsun bir salınım hareketini görmekteyiz.

(*) veya dairesel, eliptik gibi daha karmaşık salınımlar olabilir. Bu salınımlara dalganın diğer belirleyici bir özelliği olan polarizasyon denmektedir; güneş ışıklarında da olduğu gibi. Gökyüzünden doğrudan gelen ışığın polarizasyonu farklı polarizasyonlar içerebilir, ancak yerden yansyan ışığın polarizasyonu büyük ölçüde diktir.

Elektromanyetik dalga da su dalgası gibi hareket yönüne dik salınımlar göstermektedir.



Şekil. Hava içerisinde soldan sağa doğru ilerleyen düzlemsel ses dalgası.

Dalga boyu, Hız, Frekans:

Dalganın tek bir salınım turunun tamamladığı süre boyunca katettiği yol *dalga boyu* olarak adlandırılır. Şu ana kadar bahsettiğimiz; hız, frekans ve dalga boyu arasındaki ilişki aşağıda özetlenmektedir.

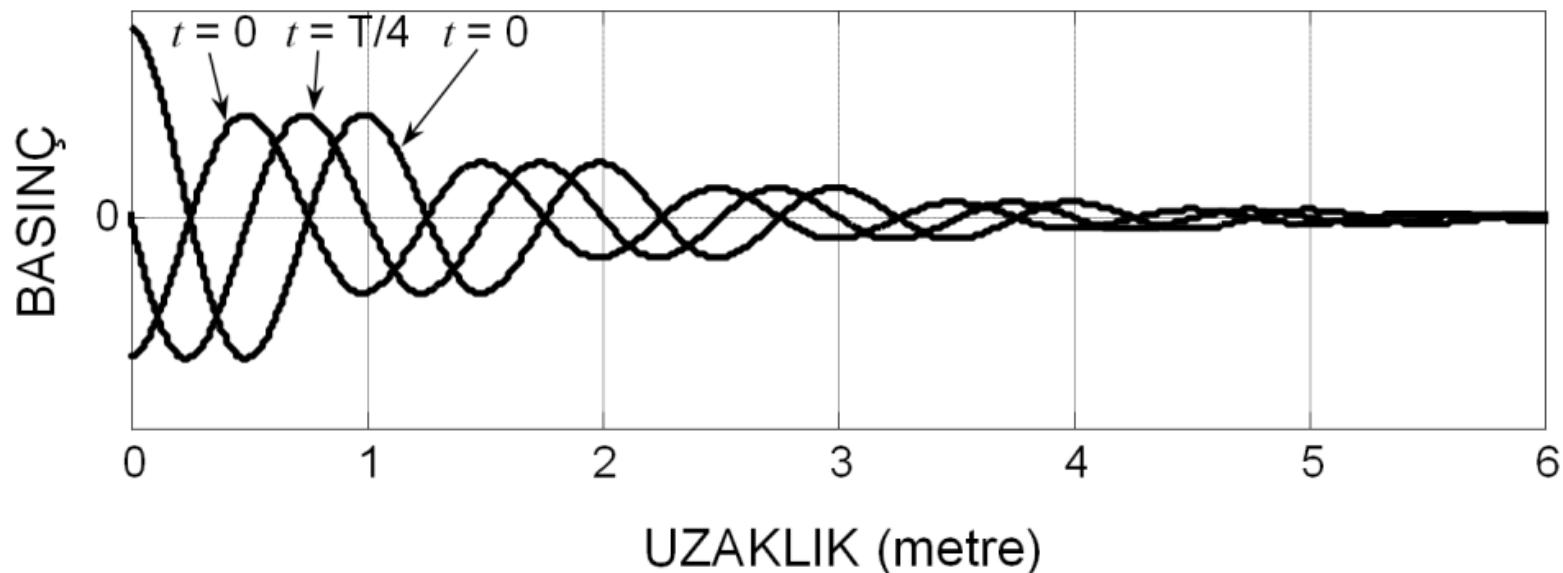
$$\text{Hız} = \text{Dalga boyu} \times \text{Frekans} \quad (1)$$

$$\text{Dalga boyu} = \text{Hız} / \text{Frekans} \quad (2)$$

$$\text{Frekans} = \text{Hız} / \text{Dalga boyu}. \quad (3)$$

Dalgaının zayıflaması:

Açık alana yayılan sesin genliği uzaklık arttıkça azalır.



Şekil. Aynı ortamda ilerleyen ses dalgasının ilerleme boyunca zayıflamaya uğraması.

Dalga Yayılımında Doğamızın Tercihi:

‘Fark alma’ konusunda matematik araçlarımızdan faydalananacağımız aracımız ‘türev’dir. Doğa ses dalgalarının ilerlemesinde ‘türev’ alır. Doğanın neredeyse tüm mekanizmaları türevi içerir.

Huygens'in de belirttiği gibi dalga etkileşimi yerel etkileşimler sayesinde oluşur. İşık dalgaları için bakarsak, **İşık dalgalarını yaratan tahterevalli sarkacının bir tarafında elektrik diğer tarafında ise manyetik alan bulunmaktadır.**

Farklı olduğu kabul edilen iki alanın arasındaki ilişki, ilk defa 1821 yılında **Danimarkalı fizikçi Hans Christian Ørsted** (1777–1851) tarafından yapılan bir deney ile kanıtlanmıştır. **Ørsted deneyinde, elektrik akımının değişmesi (basit bir aç-kapa hareketi) mıknatısın iğnesini hareket ettirmektedir.** Arada hiç bir temasın olmadığı bu etkileşimin mutlaka alanlar ile açıklanabileceğini göstermiştir.

Dalga Denkleminin Tarihçesi:

1827 yılında **Fransız fizikçi ve matematikçisi André-Marie Ampère** (1775–1836) değişen elektrik alanının manyetik alan yaratabileceğini matematiksel olarak açıklamıştır.

Ørsted ve Ampère'in çalışmalarından yararlanan **İngiliz bilim insanı Michael Faraday** (1791–1867)^{*}, 1925 yılı sonlarında değişen manyetik alanın (mıknatısın ileri-geri hareket ettirilmesi gibi), elektrik alan yaratabileceğini göstermiştir.

Daha sonra Ampère ile Faraday'ın bu keşifleri, **James Clerk Maxwell** (1831–1879) tarafından sade bir matematik ile birleştirilmiş ve **elektromanyetik dalga denklemi** halinde ifade edilmiştir^{**}.

Ses dalgası örneği:

Tel üstündeki titreşim dalgaları için **Jean-Baptiste D'Alembert** (1717–1783) tarafından 1752 yılında açıklanmıştır. **Ses dalgasının tahterevallisinin bir ucunda ses basıncı diğer yanında ise ortamdaki yoğunluk farkı^{***} bulunuyordu.**

Ses dalgalarının ilerleyisi ile ilgili çalışmalar ise, 1969 yılında Amerikalı teorik fizikçi Richard Feynman (1918–1988)'ın^{****} çalışmaları ile [K:x Feynman (1969)] olgunluğa kavuşmuştur.

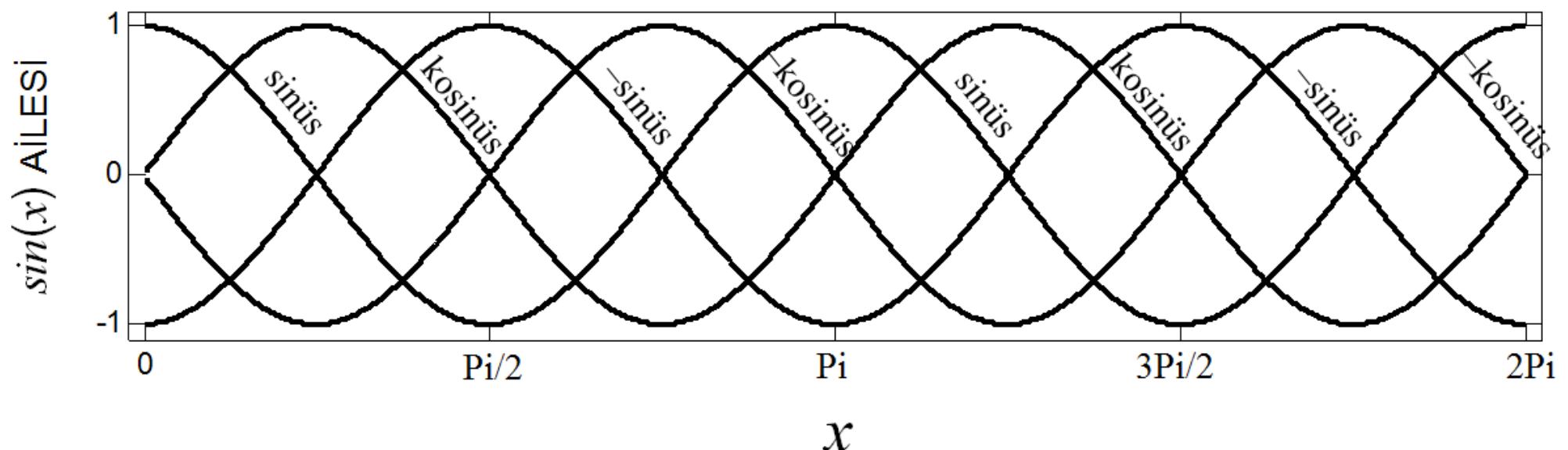
Dalga denklemlerimiz kısaca; **“Küçük bir noktasal hacimde enerji değişikliği yaratırsanız bu mutlaka çevrenizde farklılıklar yaratır”** diyor.

Ses olsun elektromanyetik olsun bu ifade matematiksel türev (farkın bir ölçüsü) ilişkisi ile tanımlanabiliyor.

Gözlemlerimiz:

- 1. Dalga denklemi sürekli olarak türev alıyor.**
- 2. Salınımlar sonsuza kadar ilerleyebiliyor.**

Soru: Dalganın değişim fonksiyonuna örnek verebilir misiniz?



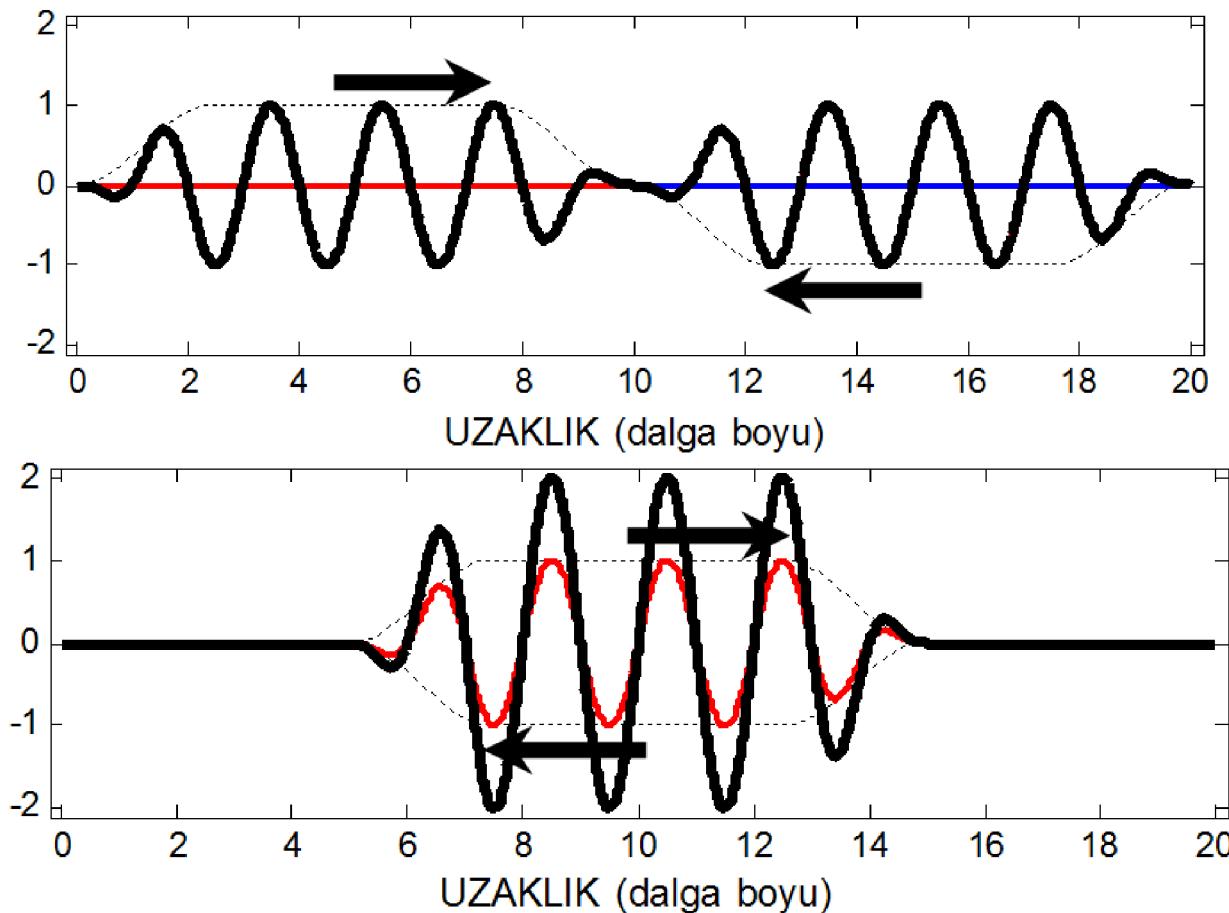
Şekil. Sinüs fonksiyonu ve türevlerinden oluşan sinuzoidal fonksiyon ailesi;

$$\sin(x), \cos(x), -\sin(x), -\cos(x).$$

Dalga'nın Yansıma ve Girişim Özellikleri (ses örneği üzerinden):

- Dalga geniş bir hacme yayıldığı durumda, taşıdığı mekanik titreşim enerjisinin yoğunluğu ilerledikçe azalır ve yeteri kadar ileride tümden ısı enerjisine dönüşerek yokolur.
- Eğer sesin ilerlediği ortam farklı maddeleri içeriyor ise; dalga'nın yansıma, kırılma, saçınma gibi diğer özellikleri bir anda ortaya çıkar. Kısaca ortam ses dalgalarına 'müdahale eder'.
- Geri dönen yani yansıyan dalgayı **Yankı** olarak adlandırıyoruz.
- Dalga ortamındaki değişimler karşısında başka tepkiler de verir; farklı bir ortama girer girmez yön değiştirmesi **kırılma**, ulaşamadığı karanlık bölgelere (köşe ve kenar arkalarına) dönüş atarak ulaşmasına, hatta eğik yüzeylerin üstünü yalıyarak ilerlemesi ise **saçınma** özelliğini göstermektedir.

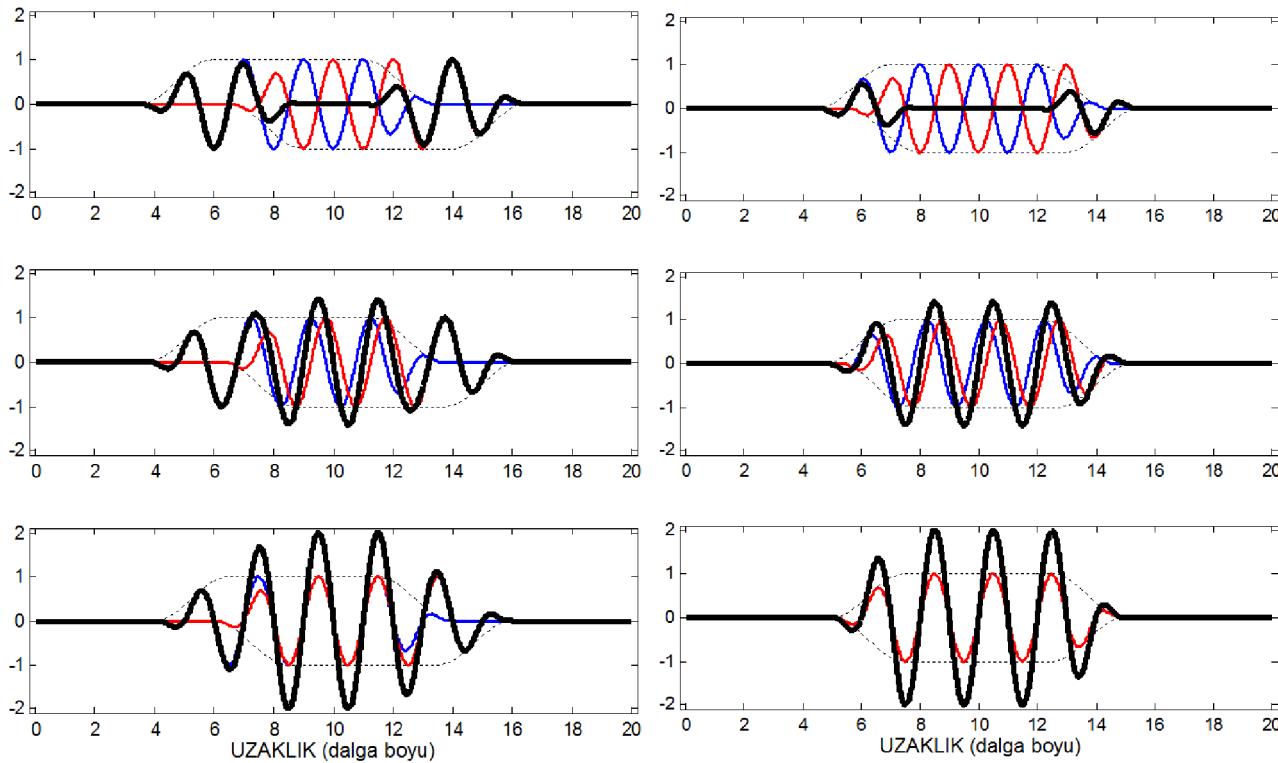
Örnek: Bir dalga paketinin ilerleyişi sırasında yansımıası durumunu inceleyelim.



Şekil. Birbirlerine göre ters yönlerde ilerleyen eşit genliğe sahip iki ses dalga paketi, paketlerin ilerleme uzaklıkları; (a) 0, (b) 5 dalga boyu. Eğer $dalgaboyu = 10 \text{ cm}$ ve $\text{hız} = 343 \text{ metre/saniye}$ ise, $\text{frekans} 3,430 \text{ Hertz}$ olarak hesaplanabilir.

Bu da piyanoda 85. tuş olan La (A7) (3,520 Hertz)'ten biraz pest sesi vermektedir.

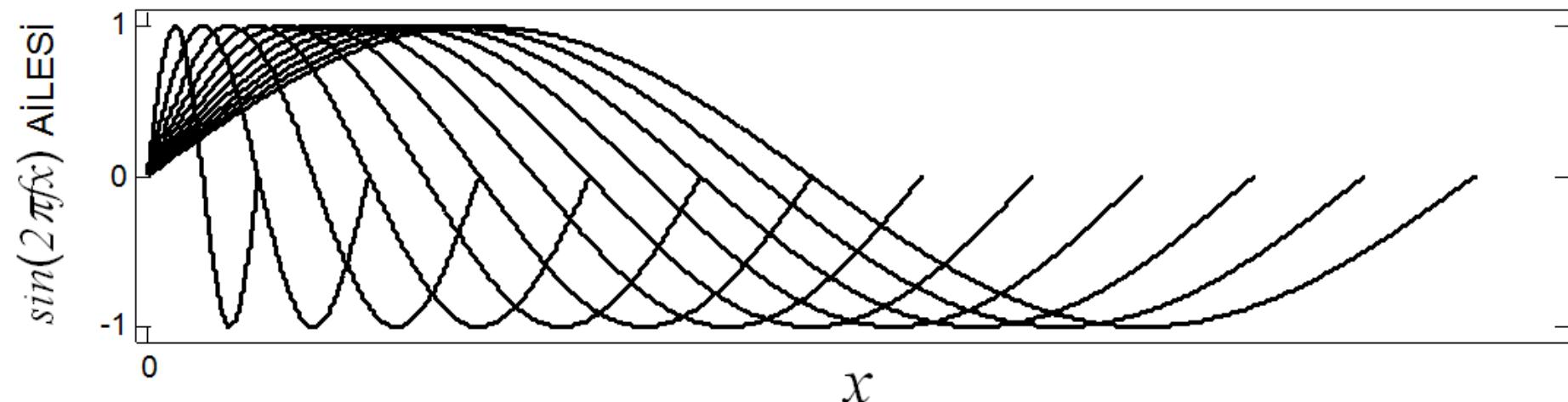
Farklı yönde ilerleyen iki dalga paketinin karşılaşması ve ***girişim*** etkileşimi.



Şekil. Birbirlerine göre ters yönlerde ilerleyen eşit genlige sahip iki ses dalga paketinin iki farklı konumdayken incelenmesi, paketlerin ilerleme uzaklıklarını sol üstten aşağı doğru sırasıyla; (a) $3\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$ ve 4 dalga boyu, ve (b) $4\frac{1}{2}$, $4\frac{3}{4}$ ve 5 dalga boyu.

Türeve dayanıklı, dalga denkleminde kullanacağımız fonksiyon sinüstür dedik.

Soru: Hangi sinüs?



Şekil. Sinüs fonksiyonuna uygun farklı salınımılar, $\sin(2\pi f x)$ ailesinin tek salınımıları gösterilmiştir.

Yine ses dalgasıörneğini kullanalım.

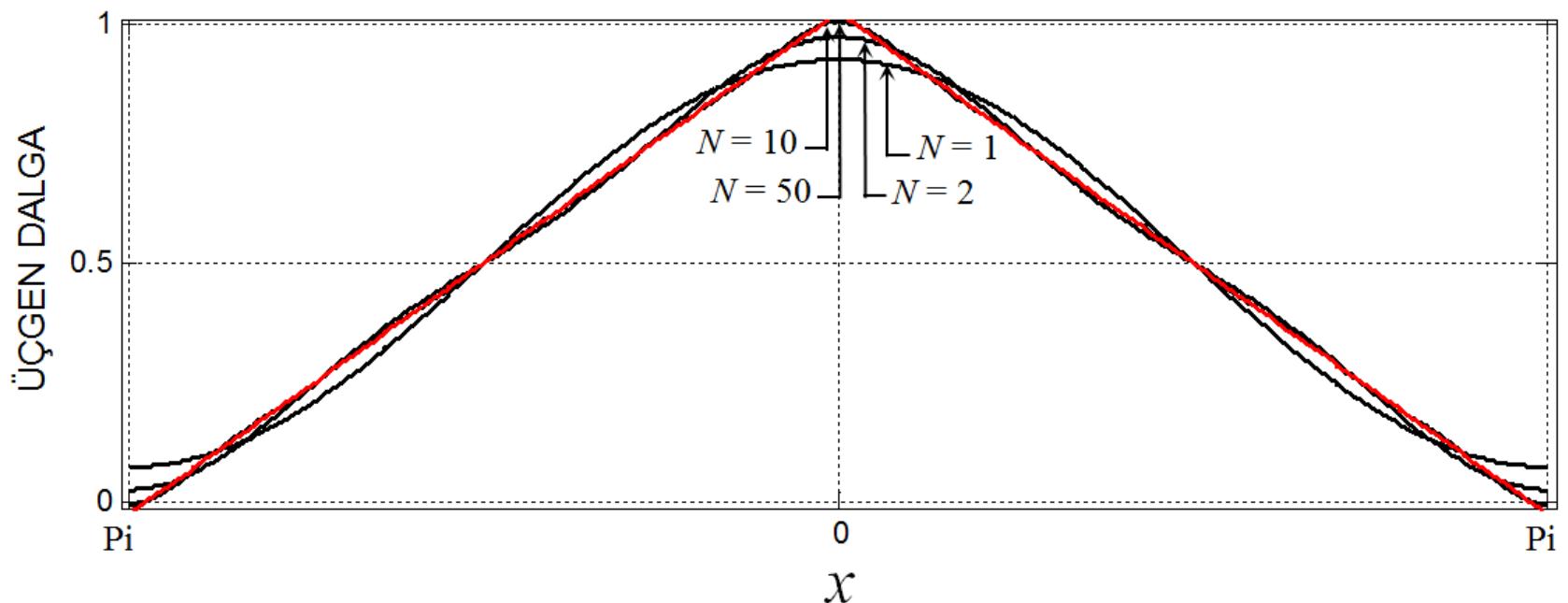
Euler'in sorusu

D'Alembert

Daniel Bernoulli

Fourier (sonradan dahil olmuştur).

**Bir müzik çalgısının herhangi bir telin orta yerinden çekilip bırakılmış olsun.
İlk başlangıçta üçgen şeklindedir ve nasıl olur da üçgen titreşim şekli
sinüsler haline dönüşür?**



Şekil. Üçgen fonksiyonun farklı sayıda sinüslerin toplamıyla oluşturulması.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{4}{\pi} \cos(x) + \frac{4}{9\pi} \cos(3x) + \frac{4}{25\pi} \cos(5x) + \dots \\
 &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[(2k+1)x]}{(2k+1)^2}
 \end{aligned}$$

Fourier'in 1807 tarihindeki ifadesini özetleyerek konumuzu tamamlayalım;

"Ses dalgaları ile oluşturulabilecek tüm fiziksel basınç dağılımları sadece ve sadece sinüsler kullanılarak oluşturulabilir".

FOURIER SERIES / TRANSFORMS

Fourier's question:

Can other waveforms be decomposed into sinusoids?

Fourier's contributions:

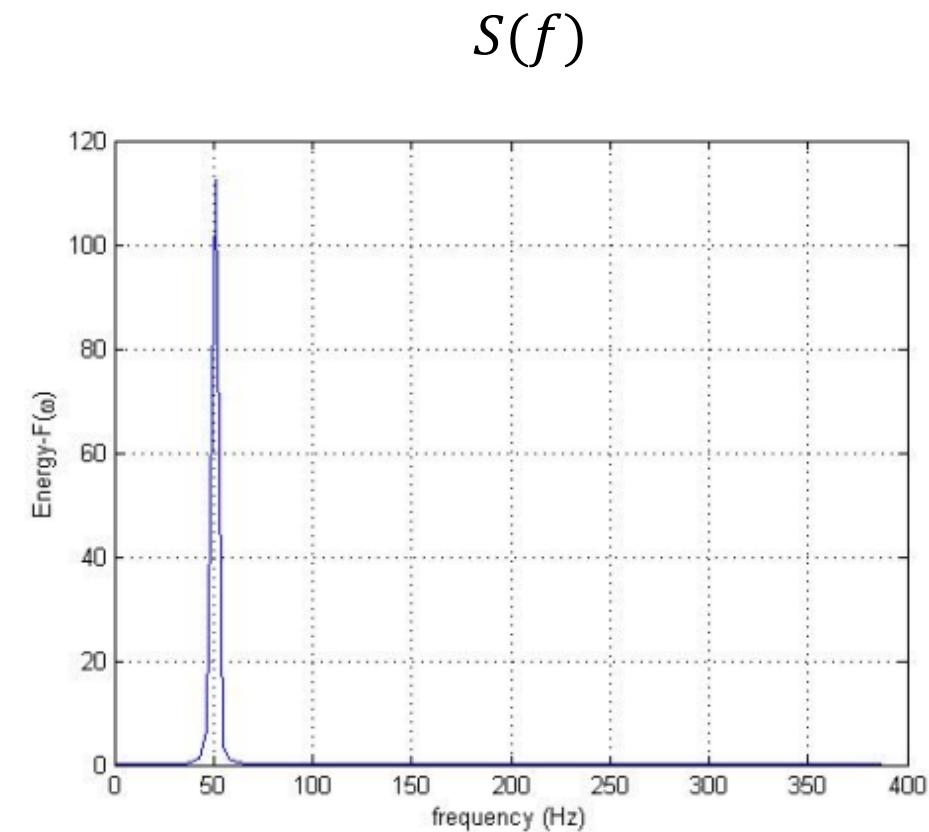
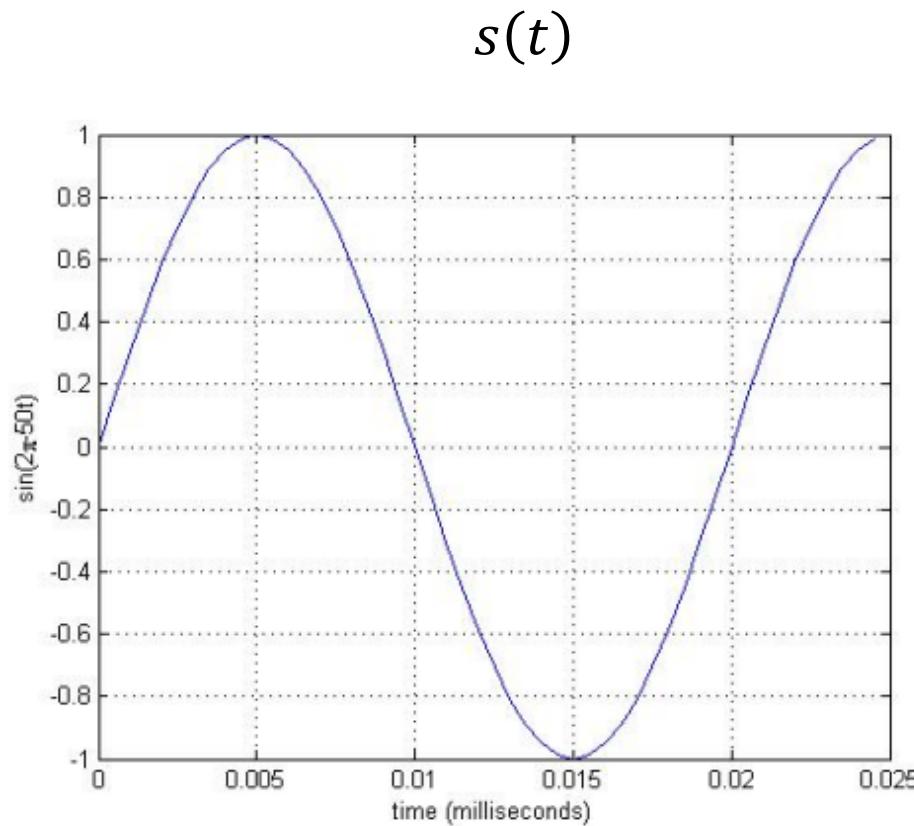
SERIES DECOMPOSITION OF PERIODIC SIGNALS:

- If $s(t)$ is periodic with a period T seconds (frequency $f_o = 1 / T$ Hertz),
- then $s(t)$ can be decomposed of summation of sinusoids with frequencies of $n f_o$ where $n = 1, 2, 3, \dots$
- Note that this is also true for $s(x)$, $s(y)$ and $s(z)$ where x , y and z are the spatial values in space.

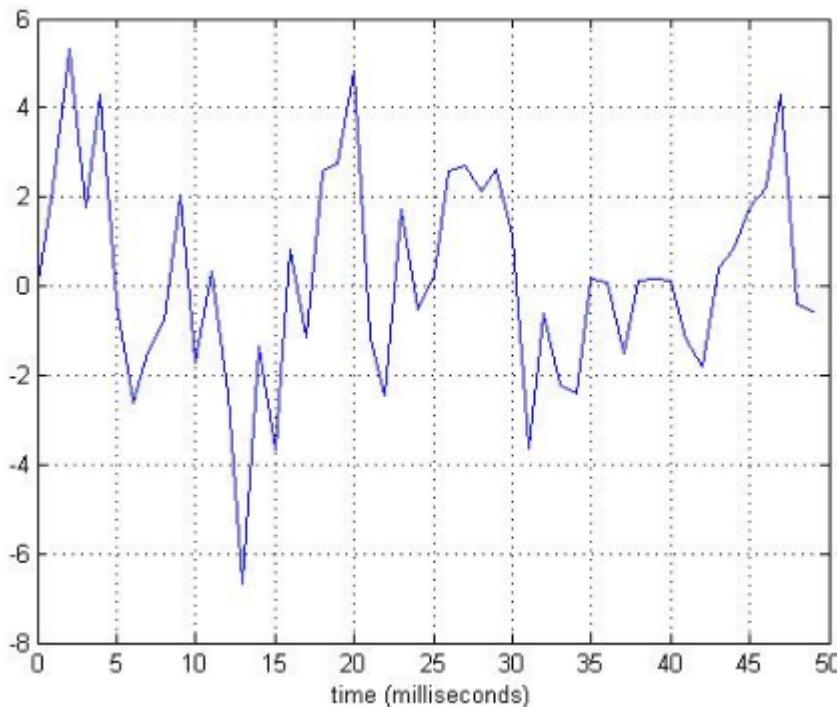
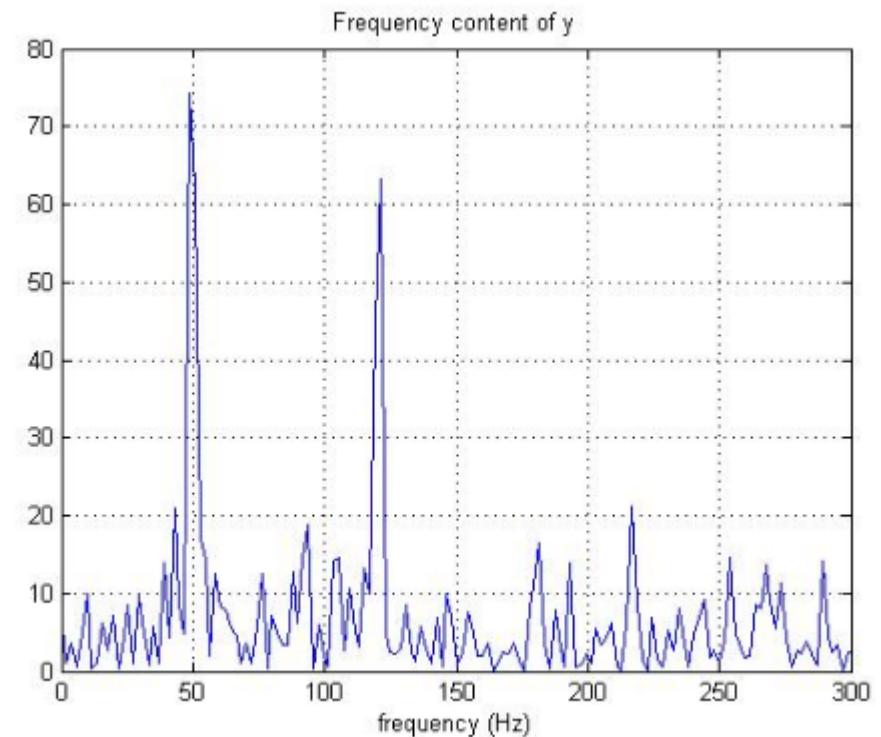
Let us review this on simple examples.

EXAMPLE 1:

$$s(t) = \sin(2\pi 50 t)$$



[Internet: www.engr.uconn.edu/lanbo/G377FFTYC.pdf]

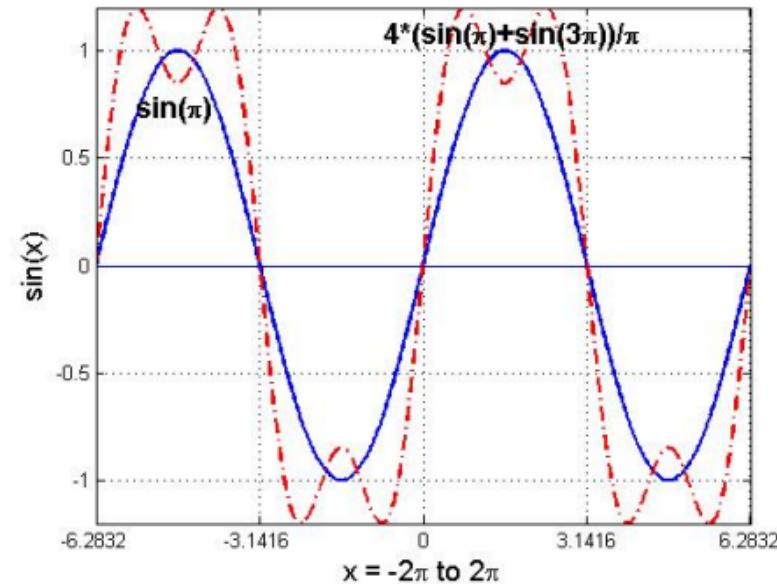
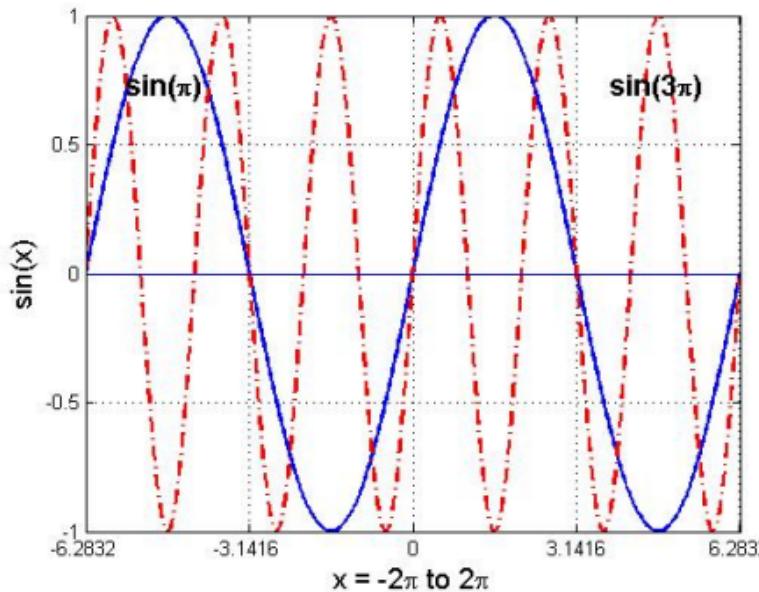
EXAMPLE 2: $s(t) = \text{Assume periodic, not simple as Ex.(1)}$  $s(t)$  $S(f)$

The left picture is the recorded sound signal given in time. We see the oscillations but cannot visualize the dominant spectral components. Using the Fourier transform, we can easily detect the two sinusoidal components at 50 Hz and 120 Hz.

Fourier's Important Question:

How can we decompose $s(t)$ into its sinusoidal components?

- Trigonometric functions, $\sin(x)$ and $\cos(x)$ has the period of 2π .
- Similarly, $\sin(nx)$ and $\cos(nx)$ has the period of $2\pi/n$.
- The linear combination of these functions will still has a period of 2π .



Result: Fourier's Series for the decomposition of periodic signals

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

EXAMPLES:

- Period function

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

- The parameters are

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \cos x dx$$

$$= -\frac{1}{\pi} \sin x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \sin x \Big|_{-\pi}^0$$

$$= 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) dx = 0$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx$$

$$b_n = \frac{4}{n\pi}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos mx dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \cos mx dx$$

$$b_k = 0, \quad k = 2, 4, 6, \dots$$

$$= -\frac{1}{m\pi} \sin mx \Big|_0^{m\pi} + \frac{1}{m\pi} \sin mx \Big|_{-m\pi}^0$$

$$= 0$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

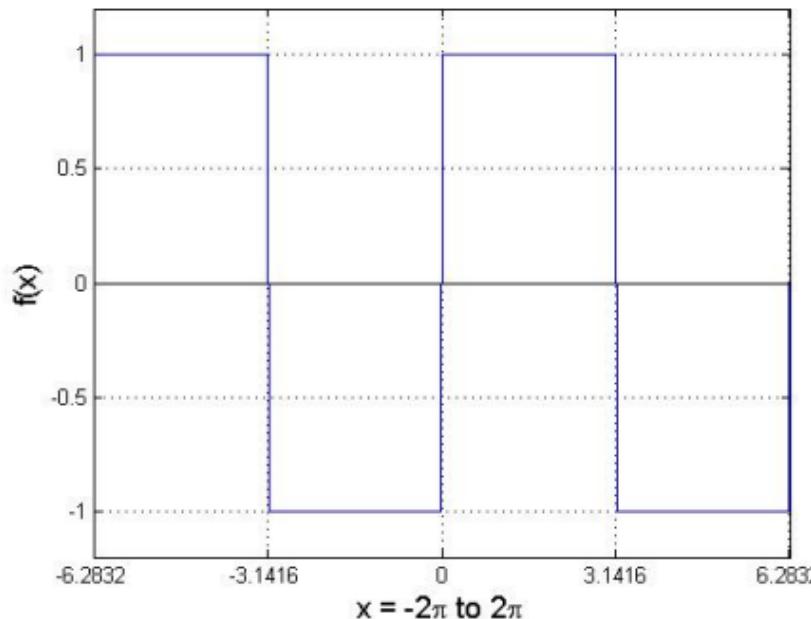
EXAMPLES:

- Period function

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

- The Fourier series is:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

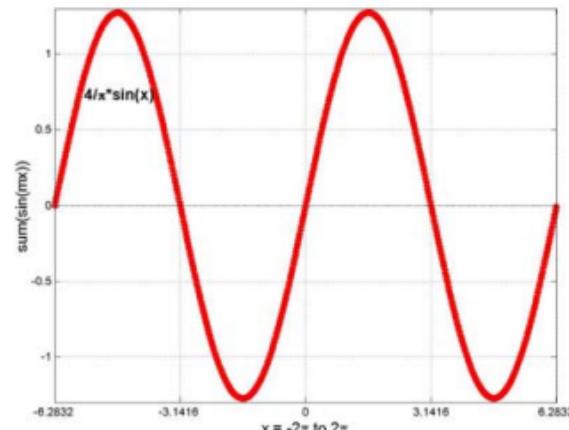




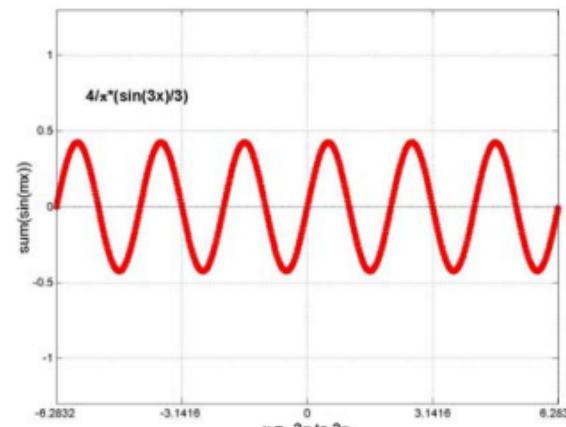
- Period function $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases}$

- The Fourier series is:

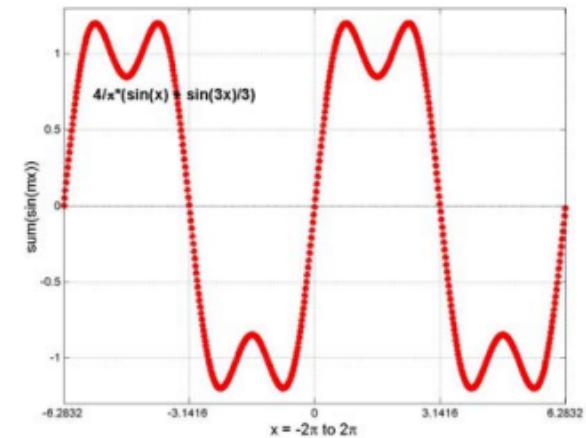
$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$



+



=

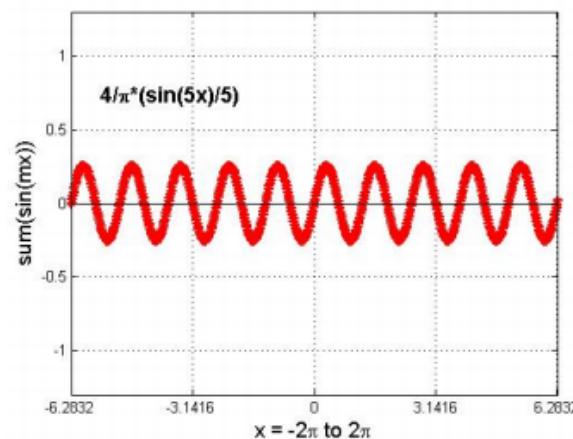




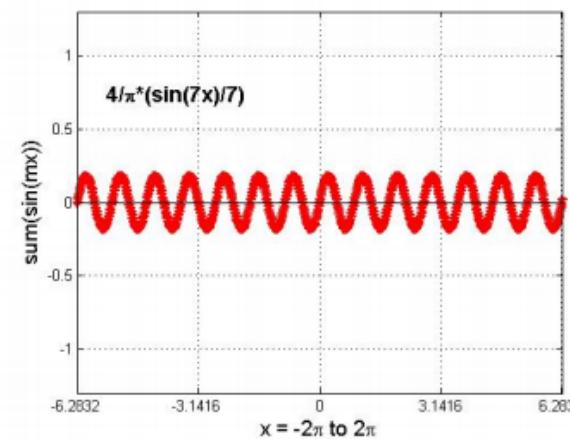
→ Period function $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases}$

→ The Fourier series is:

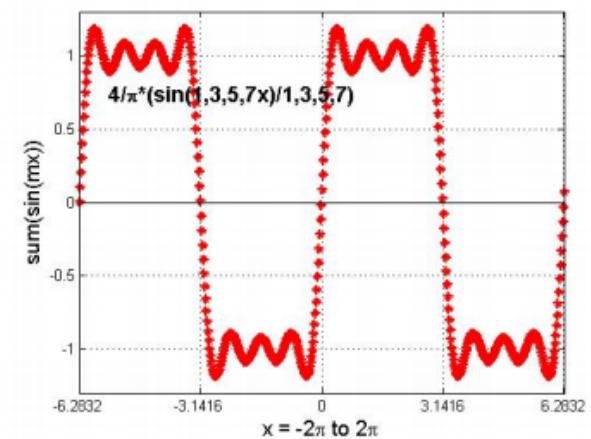
$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$



+



=



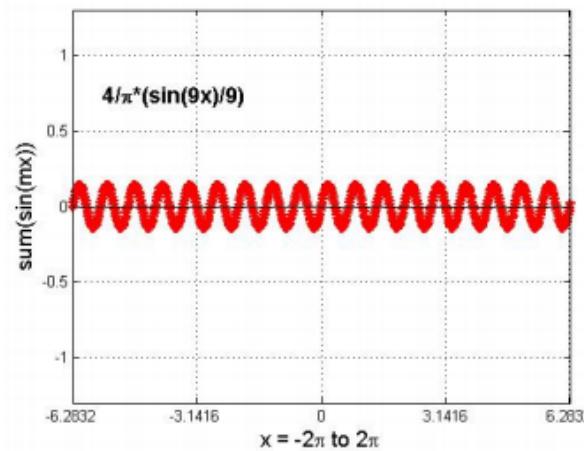


- Period function

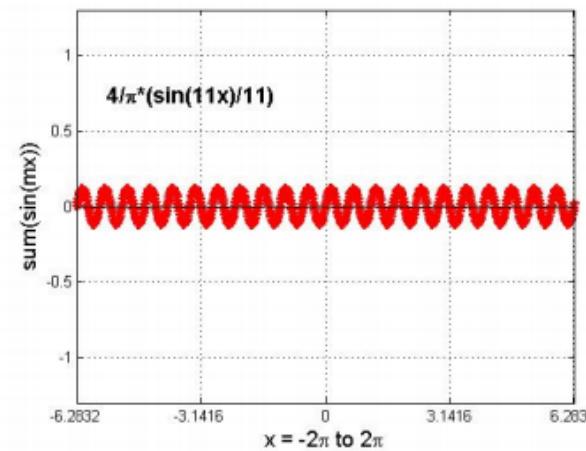
$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

- The Fourier series is:

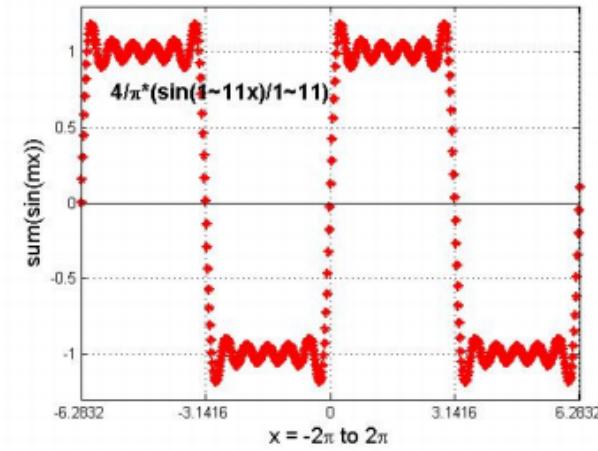
$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$



+



=

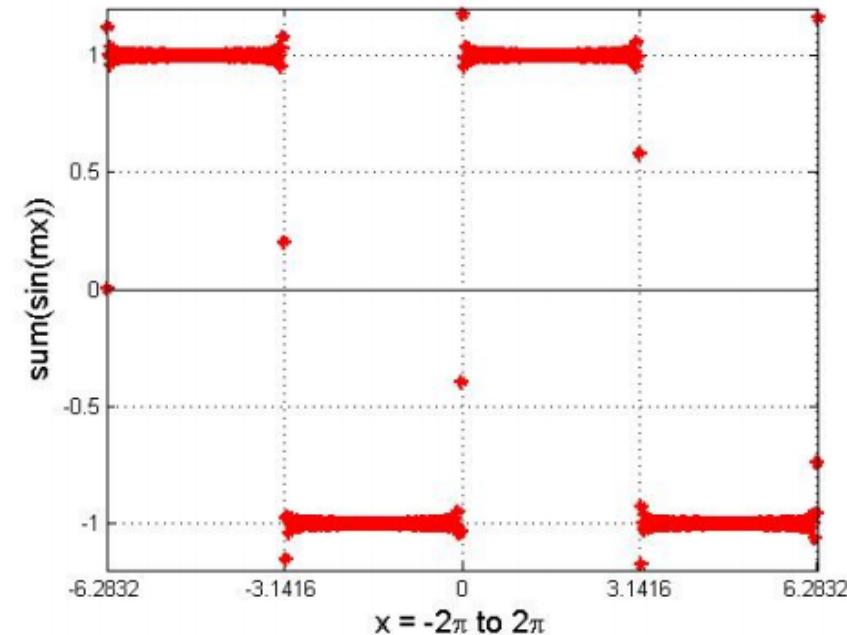
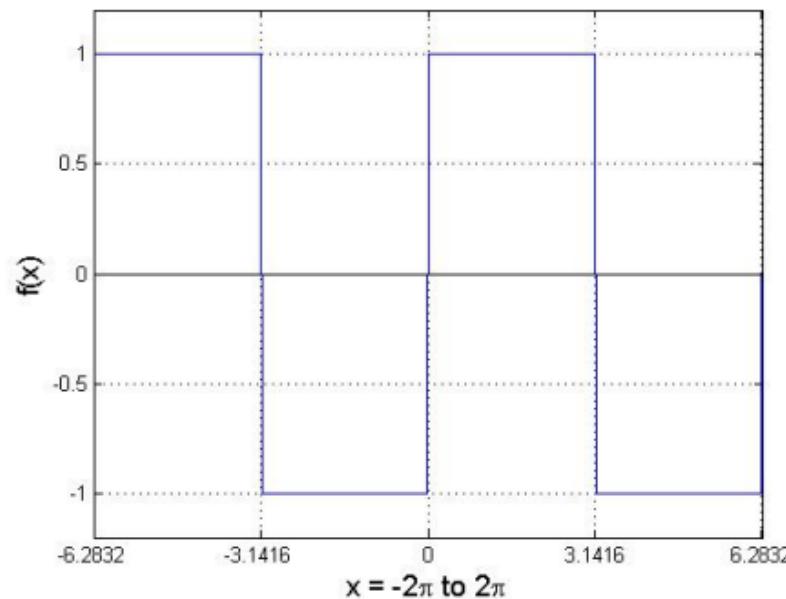


- Period function

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

- The Fourier series is:

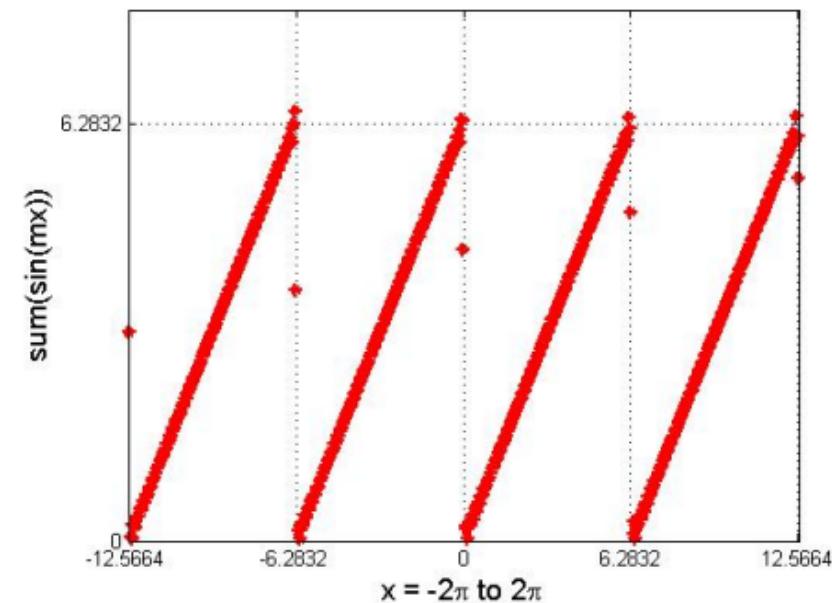
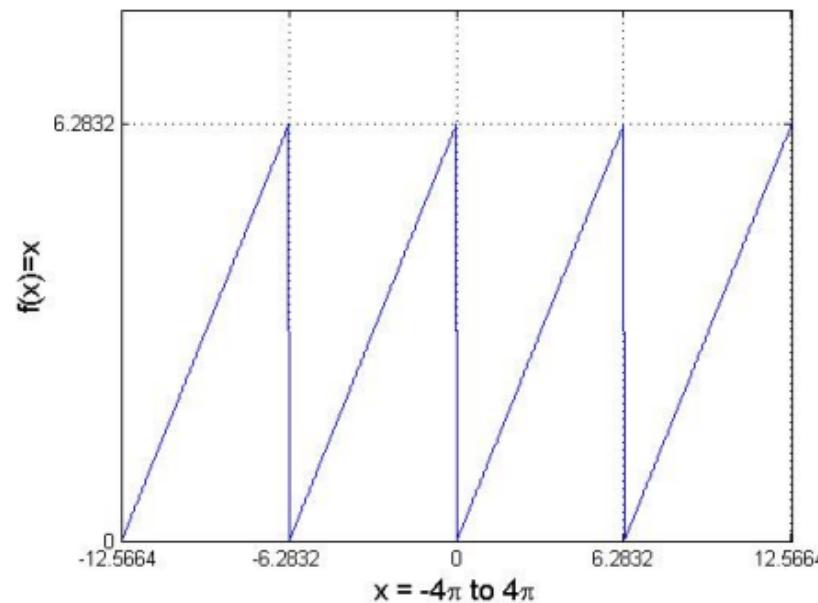
$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$



EXAMPLE:

- Period function $f(x) = x \quad 0 < x < 2\pi$
- The parameters are

$$f(x) = \pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots\right)$$



2D Fourier transform:

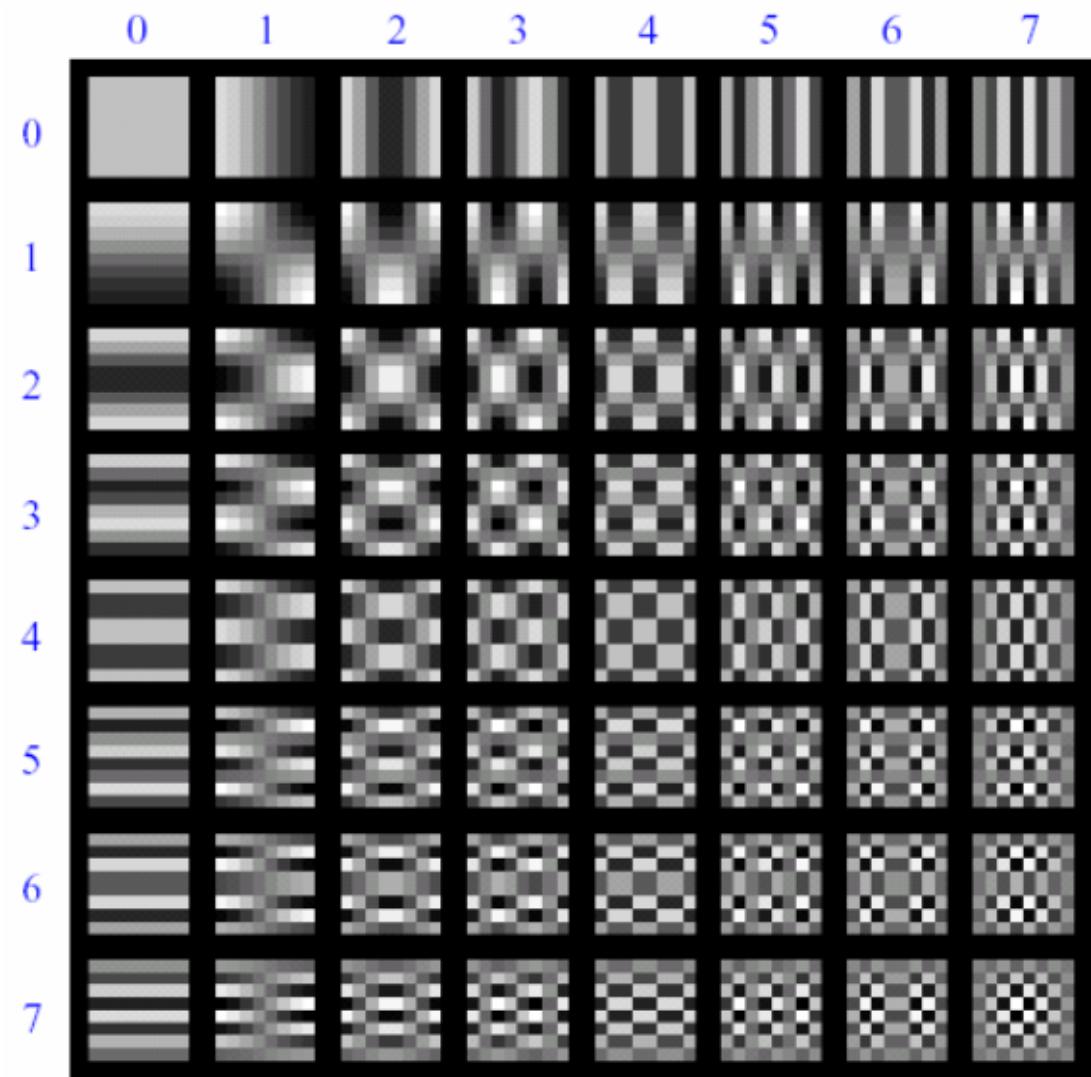
- 2D integral Fourier transform is

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy,$$

- Inverse 2D Fourier transform is

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{i(ux+vy)} du dv$$

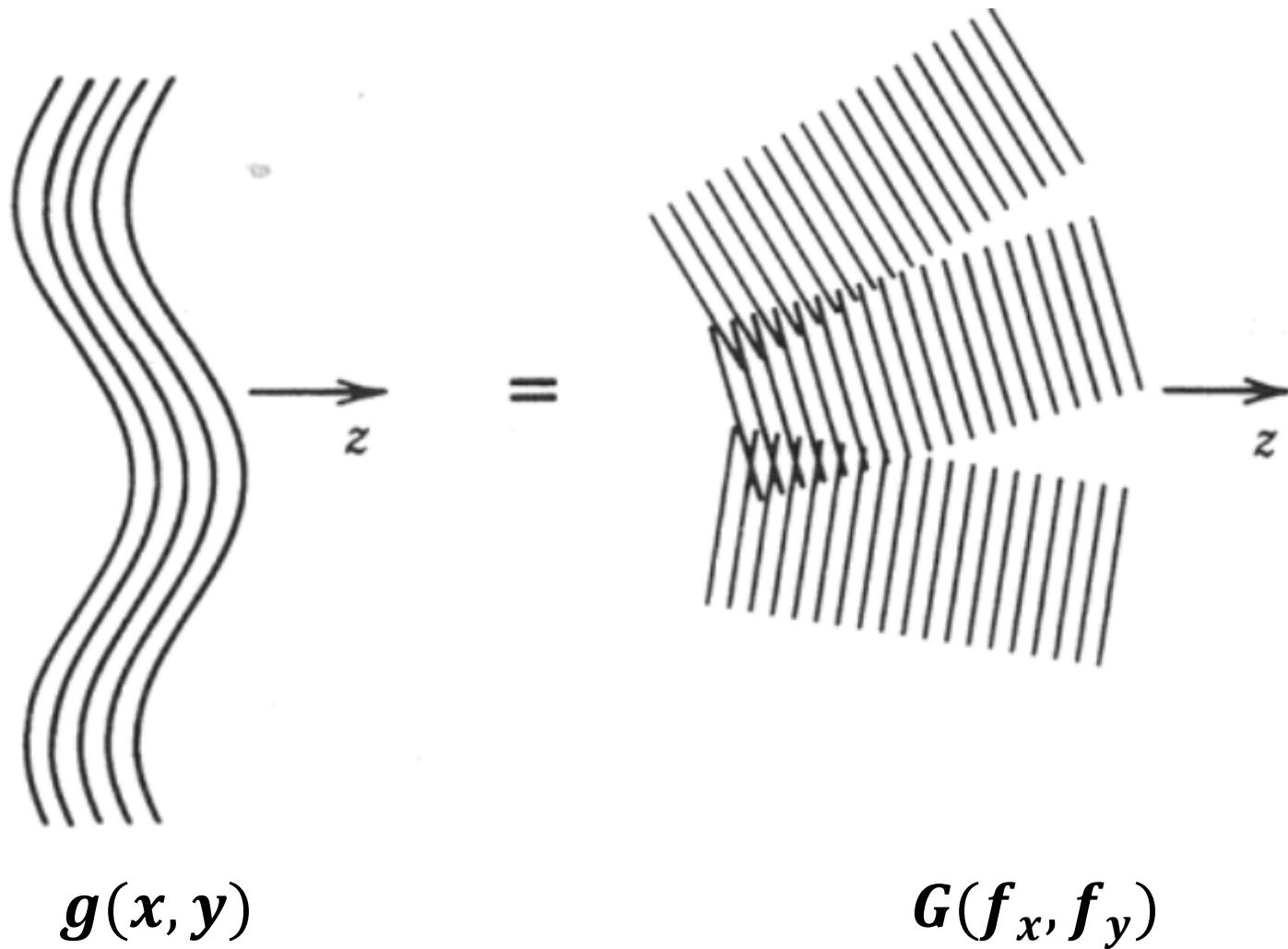
APPLICATIONS: Image Compression (JPEG)



**FLASH FORWARD
TO THE COURSE IN
FOURIER OPTICS**

(WHY SO MUCH OF FOURIER ?)

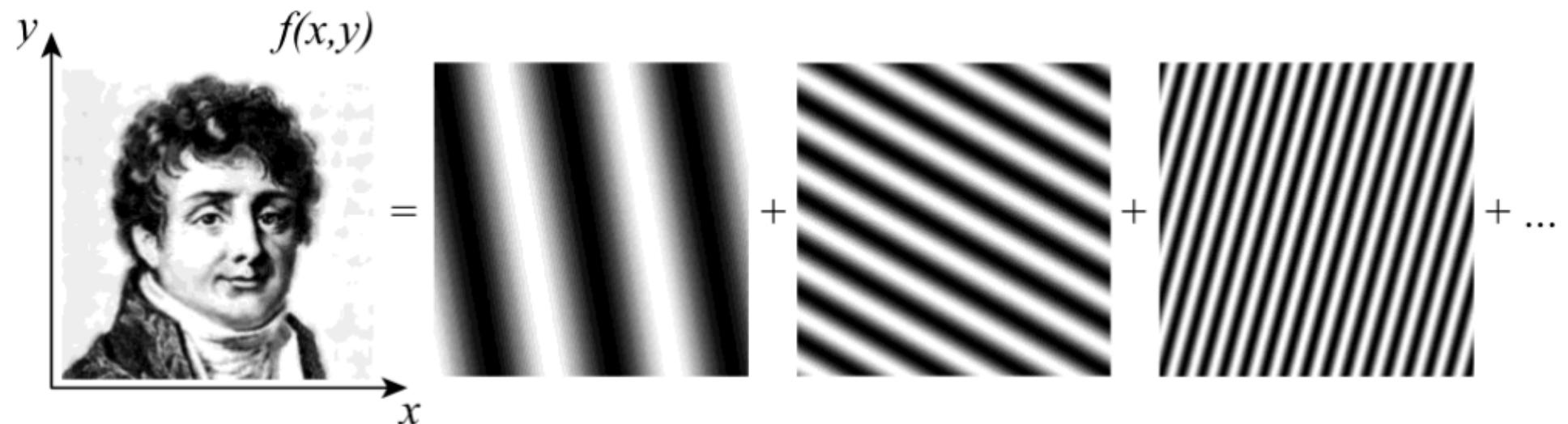
Interpretation of 2-D Fourier transform in the field of optics:



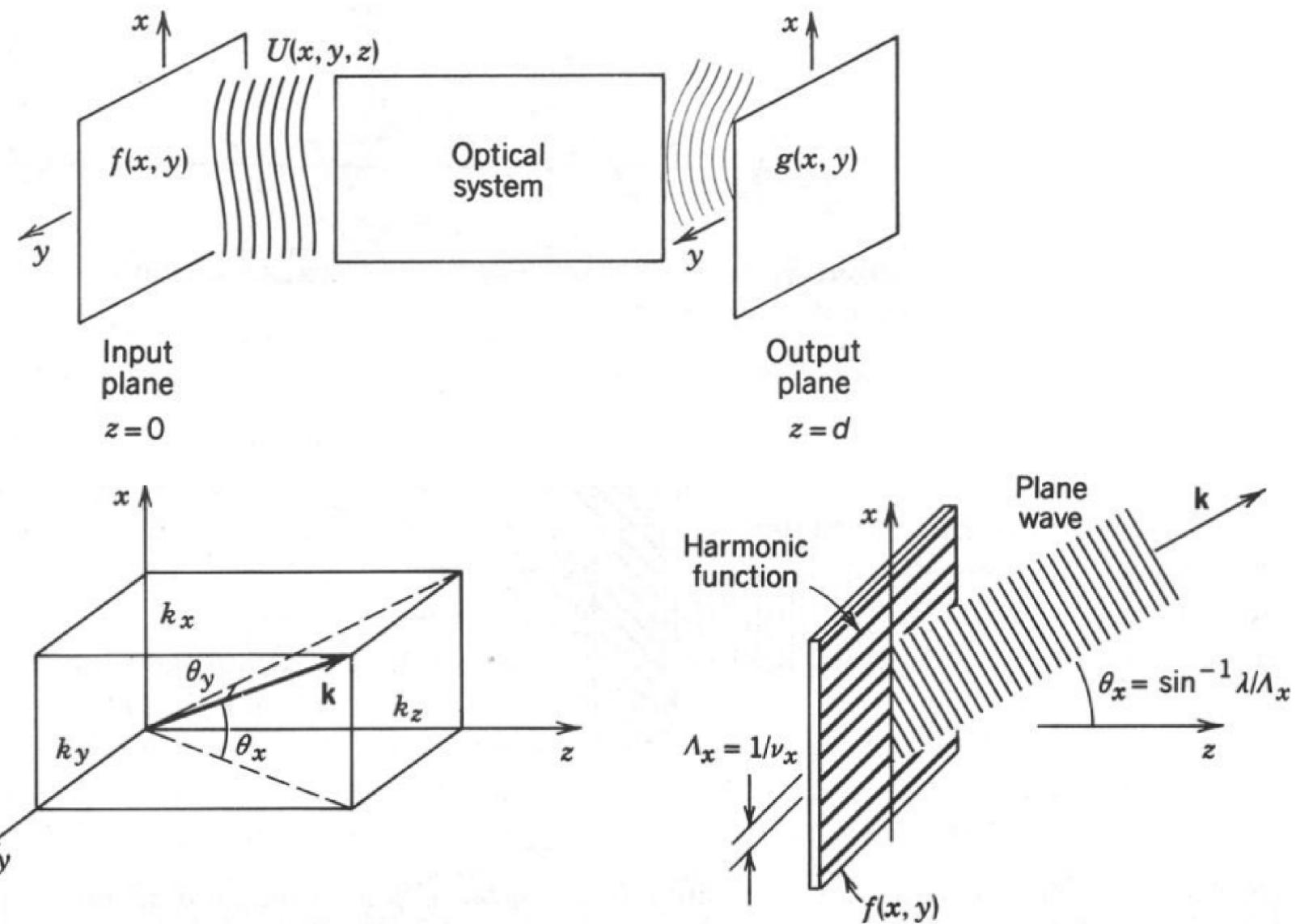
[Internet; Dubois]

two-dimensional Fourier transform

$$\tilde{f}(\nu_x, \nu_y) = \iint f(x, y) \exp[j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)] dx dy$$

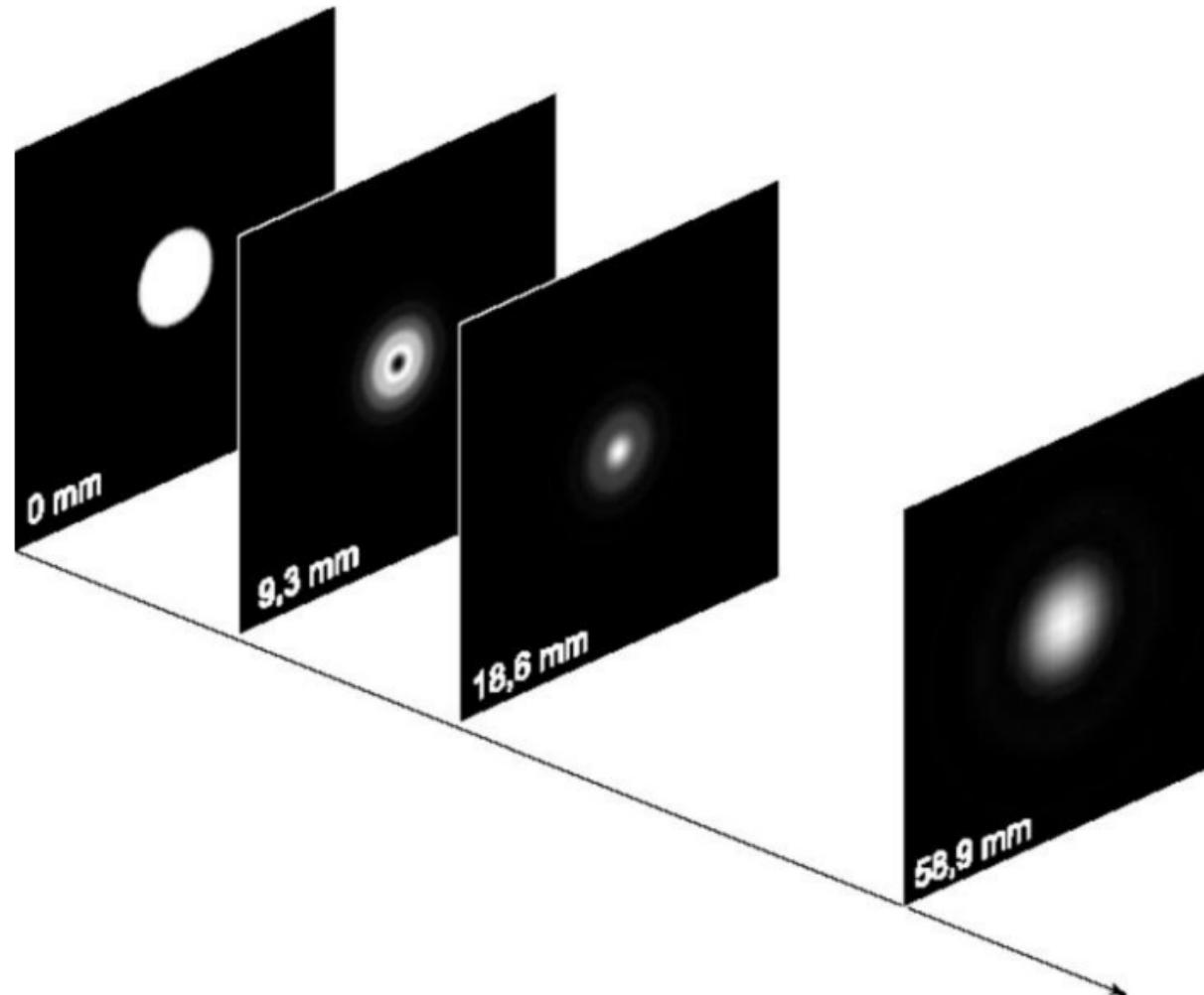


[Internet; Dubois]



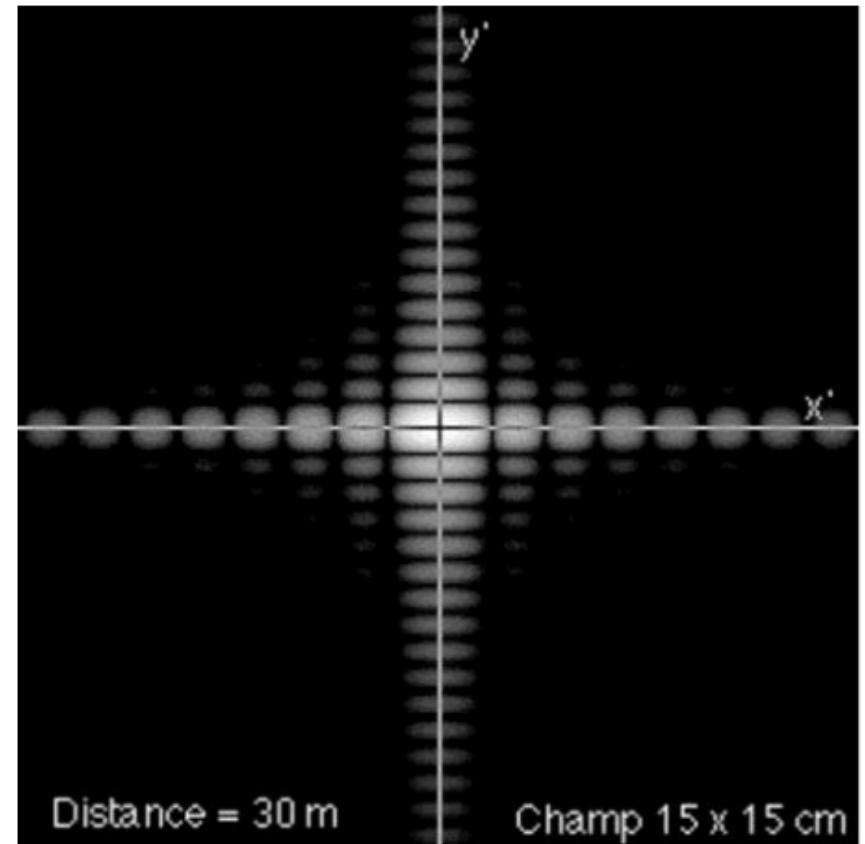
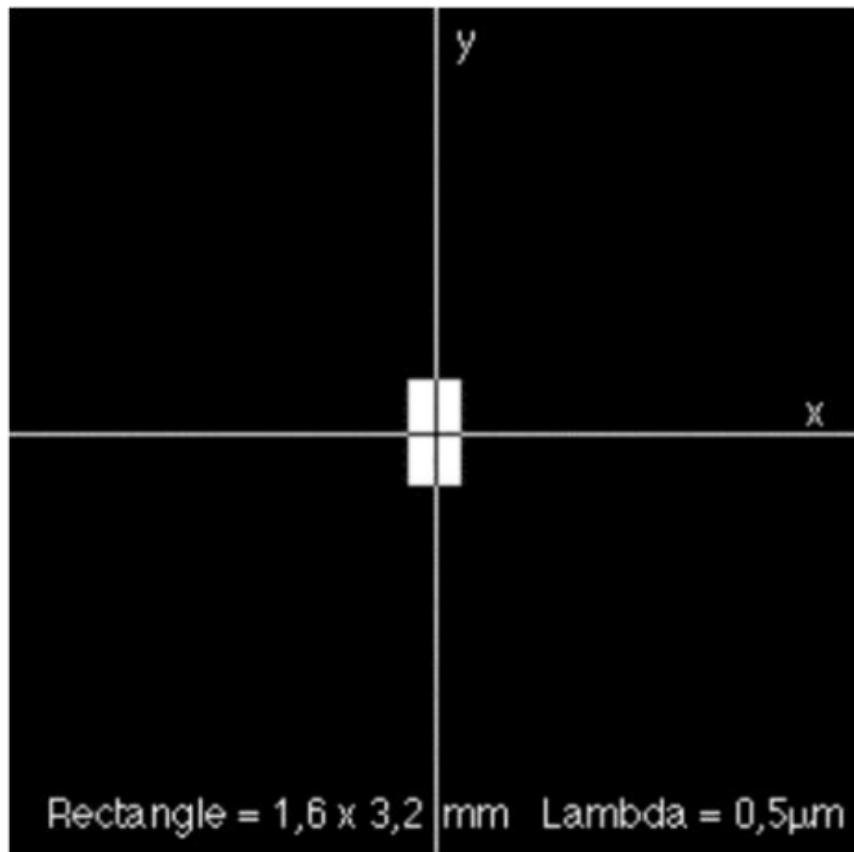
[Internet; Dubois]

Fresnel Diffraction:



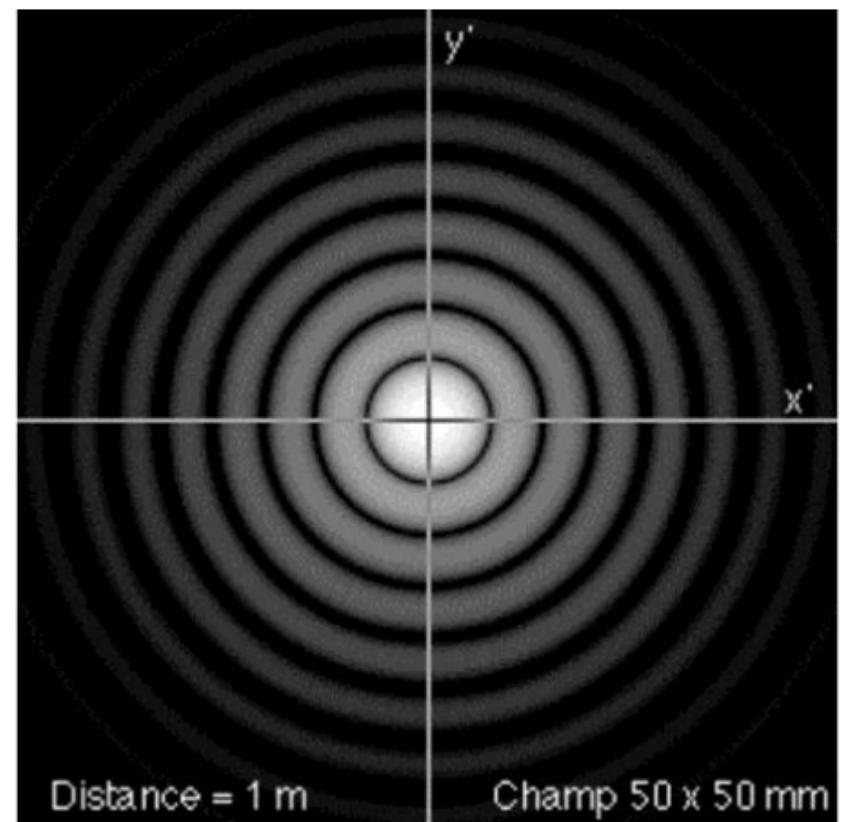
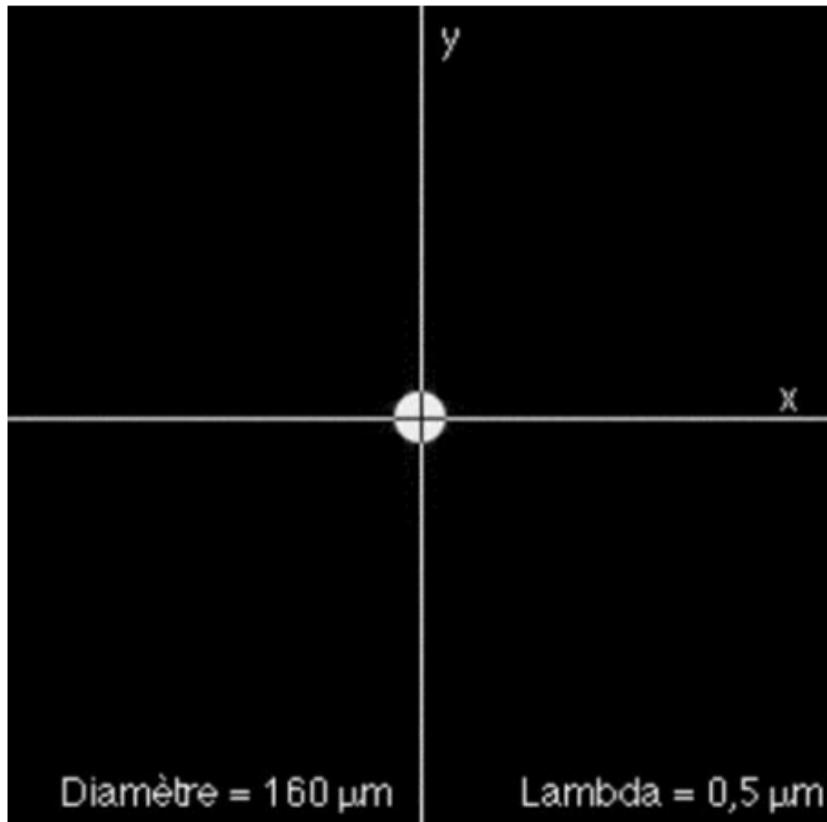
[Internet; Dubois]

Fraunhofer Diffraction (rectangular aperture):



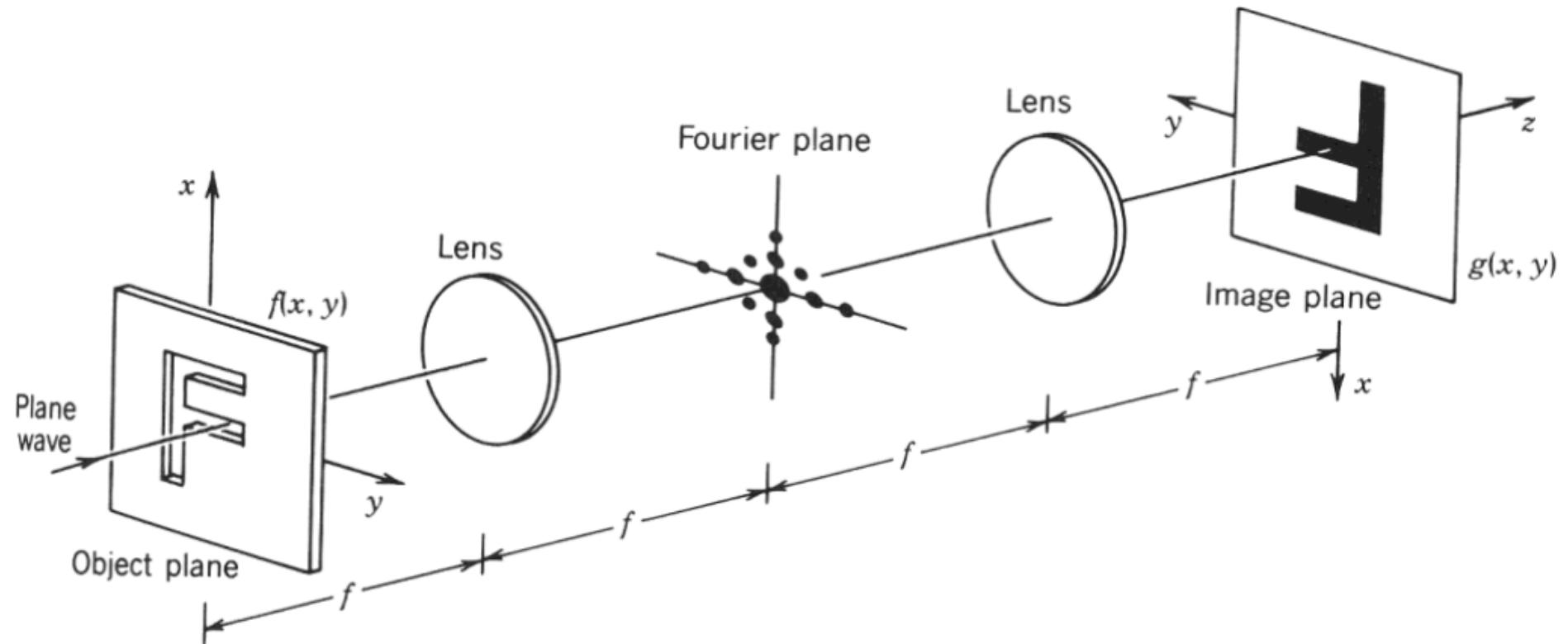
[Internet; Dubois]

Fraunhofer Diffraction (circular aperture):



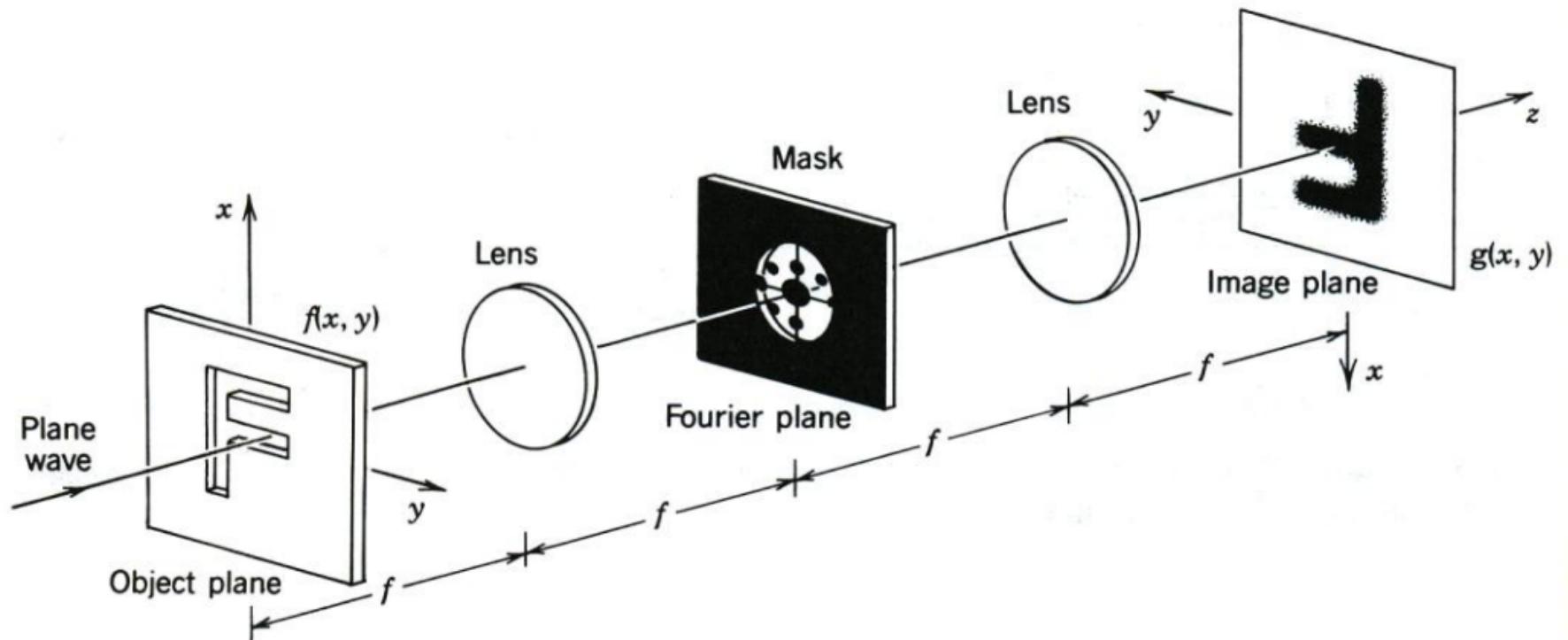
[Internet; Dubois]

The 4-F Imaging System:



[Internet; Dubois]

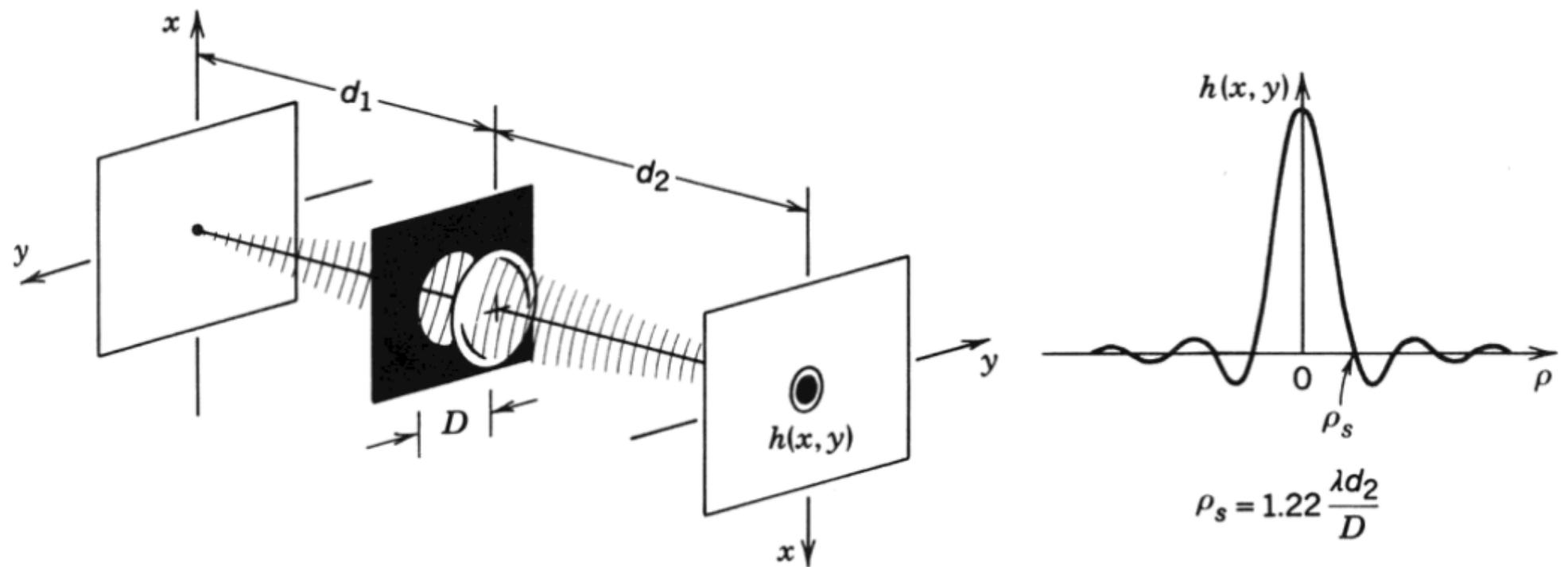
Spatial Filtering:



Reference : “Fundamentals of Photonics” (Wiley Series in Pure and Applied Optics). Bahaa E. A. Saleh, Malvin Carl Teich. John Wiley & Sons, 1st edition (August 15, 1991)

[Internet; Dubois]

Image Formation:

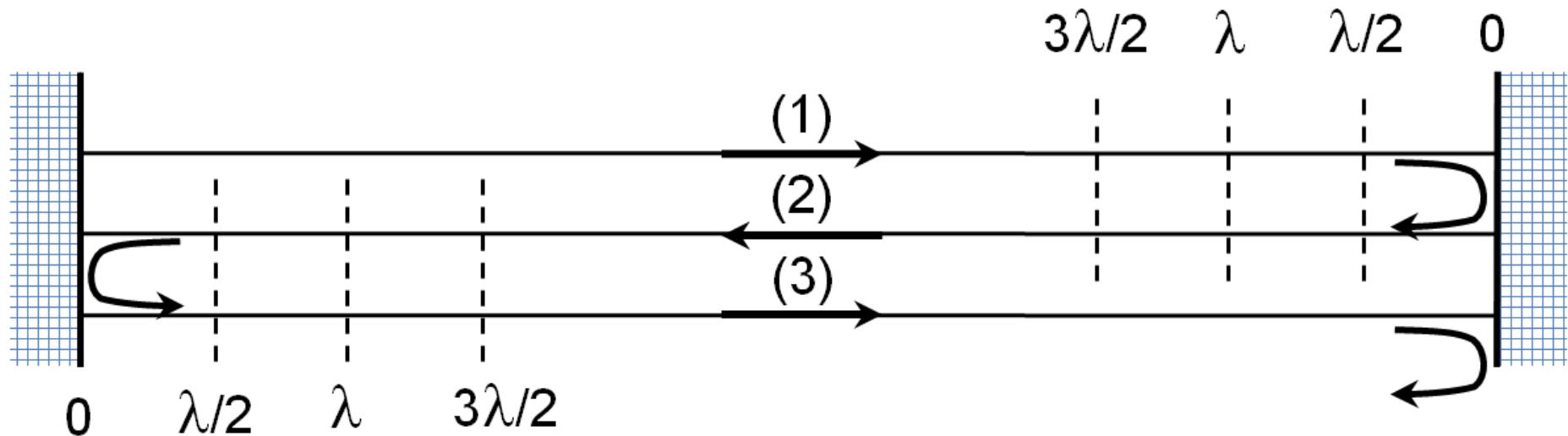


[Internet; Dubois]

Durağan dalga oluşumu (konumuza geri dönelim):

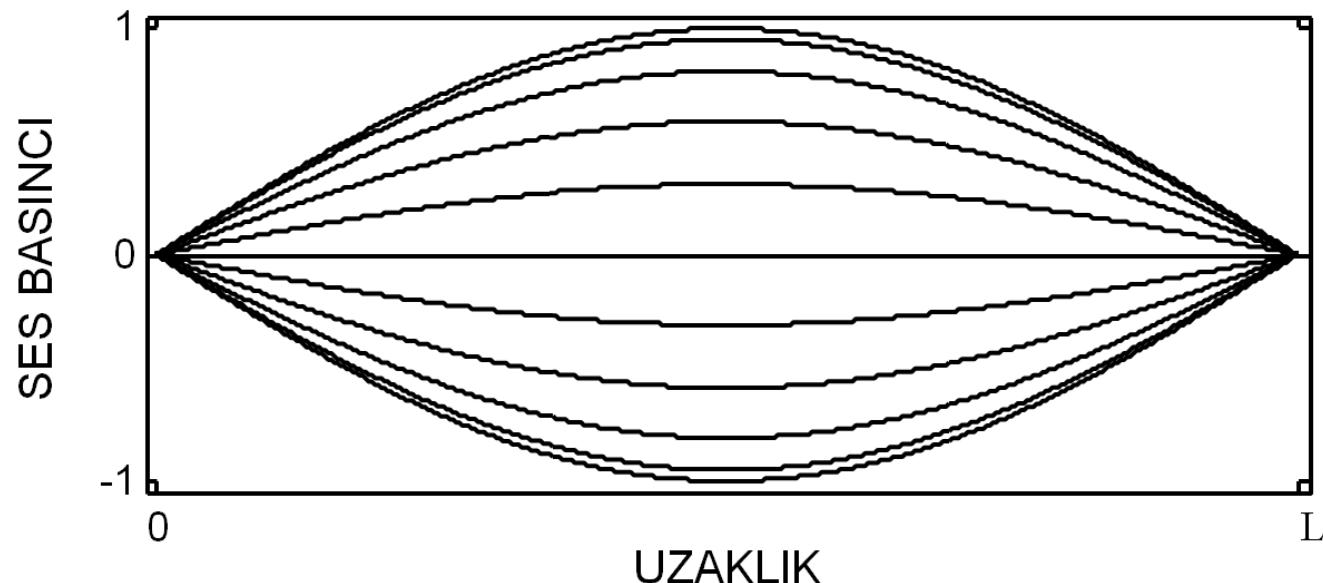
Bir kaynaktan yayılan bir dalganın geri yansımıası sonrasında ortamda ters yönde ilerleyen iki ayrı dalga oluşur. Toplam dalga miktarı bu dalgaların toplamıdır (doğrusal ortamlar için).

SORU: Eğer, yansıyan dalganın da aynı şekilde yansımاسını sağlayacak bir yüzey bulunuyor ise, ne olur?



Şekil. Yansıma nedeniyle ileri–geri dalga hareketlerinde durağan dalga oluşumu.

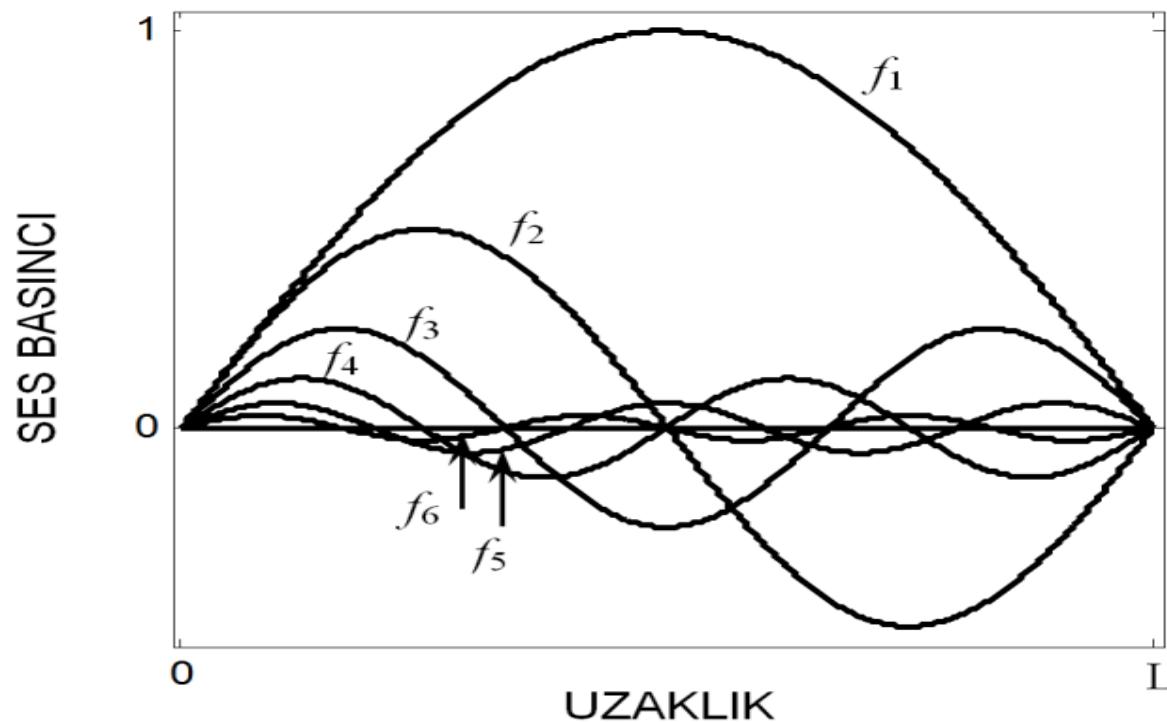
Soru: Eğer, telin uzunluğu L , dalga boyunun iki katı ise ne gözlenir?

Durağan dalga / Durağan dalganın karın bölgesi / Sınır koşulu problemi:

Şekil. Duragan dalga oluşumunda salınımlar, periyodun yarısına ait $t = 0, T/20, 2T/20, 3T/20, \dots T/2$ anlarındaki görünüm.

Soru: Dalga boyu azaltılırsa (veya eşdeğer olarak dalganın frekansı artırılır veya L değeri büyütülür ise NE OLUR?

Selenler ('harmonics') /rezonans:



Şekil. Gergin tel üzerinde durağan dalga salınımıları, birinci selen^{*} için frekans ve dalga boyu

f ve λ ise, ($f = v/\lambda$, $\lambda = 2L$) 1 – 6. selenler için;

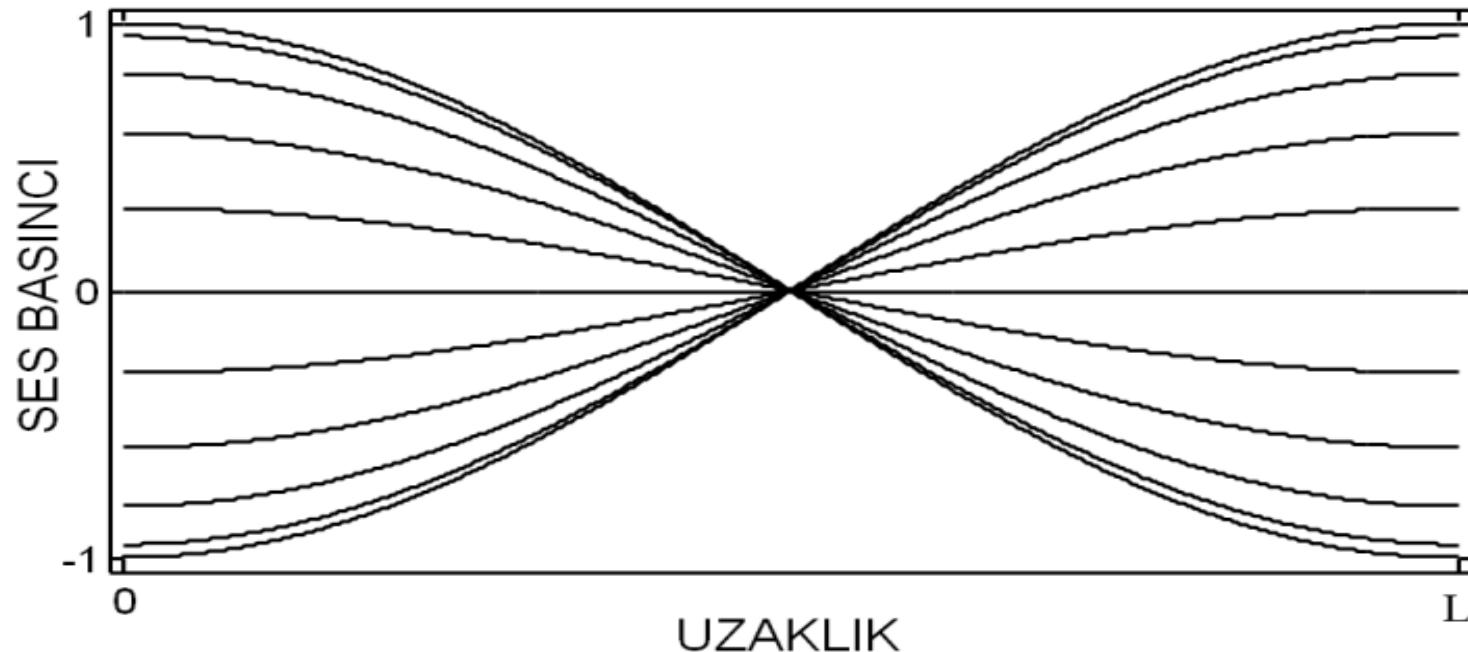
$$f_1 = f, \quad f_2 = 2f, \quad f_3 = 3f, \quad f_4 = 4f, \quad f_5 = 5f, \quad f_6 = 6f,$$

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \lambda/2, \quad \lambda_3 = \lambda/3, \quad \lambda_4 = \lambda/4, \quad \lambda_5 = \lambda/5, \quad \lambda_6 = \lambda/6.$$

ÖDEV (Internet araştırması):

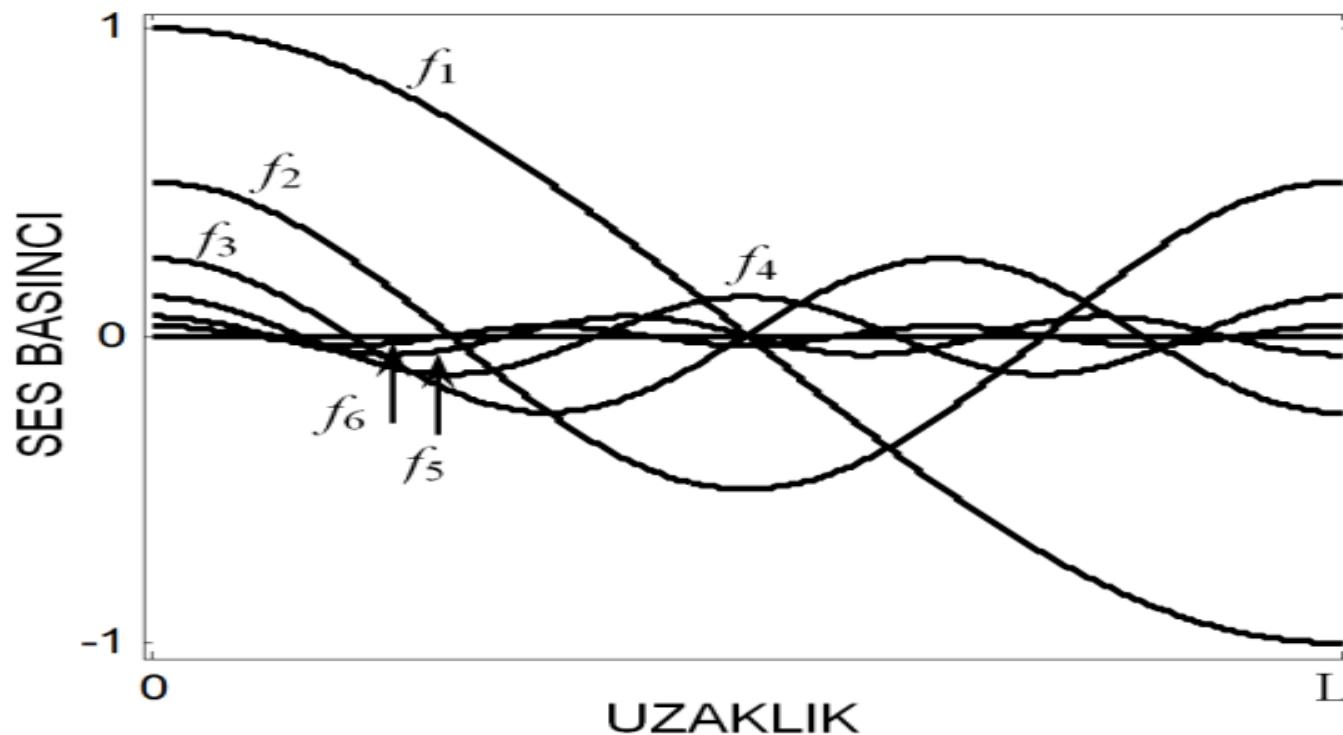
1. Lazerin çalışma prensibi hakkında araştırma yaparak, kendinize ait bir metin hazırlayınız.
2. Lazerin çalışma prensibi ile bu kısımda gördüğümüz; rezonan, duran dalga mekanizmaları ile ilişkisi açıklayınız (kaynaklarınızı belirtiniz).
3. Kaynaklarınızın kağıda baskılarını ekte veriniz.

SORU: Telin iki ucunun sabit olmasından dolayı dalga genliğinin sıfır olmasını bekleriz. Bu yüzden duran dalganın uçları sıfırı verdiği inceledik. Bazı flüt ve ney gibi iki ucu açık üflemeli çalgılarda uçlardaki dalga genliği en yüksek ise, duran dalga oluşumu nasıl mümkün olur? Olur ise farkı var mıdır?



Şekil. Duragan dalga oluşumunda salınımlar, periyodun yarısına ait $t = 0, T/20, 2T/20, 3T/20, \dots T/2$ anlarındaki görünüm.

SORU: Frekansı farklı diğer sinüslere de imkan sağlanır ise NE OLUR?



Şekil. İki ucu kapalı boru içerisinde farklı durağan dalga salınımıları, birinci selen için frekans ve dalga boyu f ve λ ise, ($f = v/\lambda$, $\lambda = 2L$) 1 – 6. selenler için;

$$\begin{aligned} f_1 &= f, & f_2 &= 2f, & f_3 &= 3f, & f_4 &= 4f, & f_5 &= 5f, & f_6 &= 6f, \\ \lambda_1 &= \lambda, & \lambda_2 &= \lambda/2, & \lambda_3 &= \lambda/3, & \lambda_4 &= \lambda/4, & \lambda_5 &= \lambda/5, & \lambda_6 &= \lambda/6. \end{aligned}$$

Ses üretiminde durağan dalganın yeri

Gitar, keman, saz ve ud gibi bir çok telli çalgının tellerinin; farklı kalınlığa, gerginliğe ve (farklı perdelere basıldığında) farklı uzunluklara sahip olabilecek çok esnek yapıda olduğunu olduğunu görüyoruz. Gitar örneği için standart düzene göre ayarlanmış perde değerleri (çok daha farklı düzenlemeler mevcuttur):

BAM TELİ*	PERDE	FREKANS
1 (en üst – en ince)	Mi E4	329.63 Hz
2	Si B3	246.94 Hz
3	Sol G3	196.00 Hz
4	Re D3	146.83 Hz
5	La A2	110.00 Hz
6 (en alt – en kalın)	Mi E2	82.41 Hz