EEM 323

ELECTROMAGNETIC WAVE THEORY II

KOORDİNAT DÜZENLERİ / SİSTEMLERİ

(Özet)

2013 – 2014 FALL SEMESTER

Prof. S. Gökhun Tanyer

DEPARTMENT OF ELECTRICAL–ELECTRONICS ENGINEERING

FACULTY OF ENGINEERING, BASKENT UNIVERSITY

Önemli not: Ders notlarındaki şekillerin hazırlanmasında internet ortamından faydalanılmıştır. Özellikle belirtilmeyen tüm şekil, tablo, eşitlik ve denklemler vb. "D. K, Fundamentals of Engineering Electromagnetics, Addison-Wesley Inc." ile "D. K, Field and Wave Electromagnetics, Mc-Graw Hill Inc." kitabından taranarak elde edilmiştir. Alıntıların kaynağına kolay ulaşılabilmesi maksadıyla numarası ve altyazıları da gösterilmektedir.

DERS KİTABI

[1] David Keun Cheng, *Fundamentals of Engineering Electromagnetics*, Addison-Wesley Publishing, Inc., 1993.
veya David Keun Cheng, Çeviri: Adnan Köksal, Birsen Saka, *Mühendislik Elektromanyetiğinin Temelleri – Fundamentals of Engineering Electromagnetics*, Palme Yayınları.

KAYNAK / YARDIMCI KİTAPLAR:

[2] David Keun Cheng, *Field and Wave Electromagnetics*, Addison-Wesley Publishing, Inc. *veya* David Keun Cheng, Çeviri: Mithat İdemen, *Elektromanyetik Alan Teorisinin Temelleri – Field and Wave Electromagnetics*, Literatür Yayıncılık.

[3] Stanley V. Marshall, Richard E. DuBroff, Gabriel G. Skitek, *Electromagnetic Concepts and Applications*, Dördüncü Basım, Prentice Hall International, Inc., 1996.

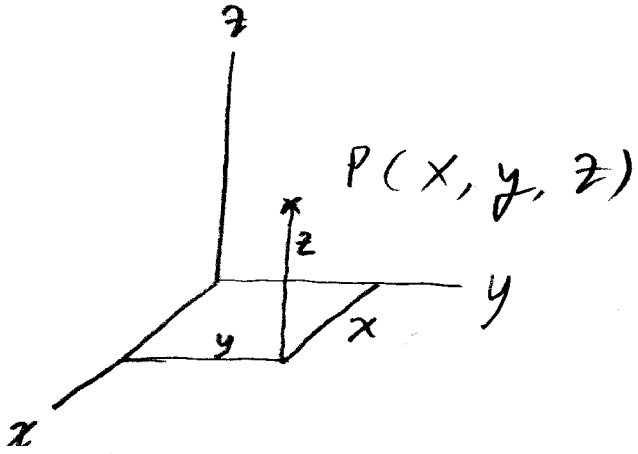
[4] Joseph A. Edminister, Elektromanyetik, 2. Baskıdan çeviri, Çevirenler: M. Timur Aydemir, E. Afacan, K. C. Nakipoğlu, Schaum's Outlines, McGraw Hill Inc., Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2000.

OORDİNAT DÜZENLERİ (SİSTEMLERİ)

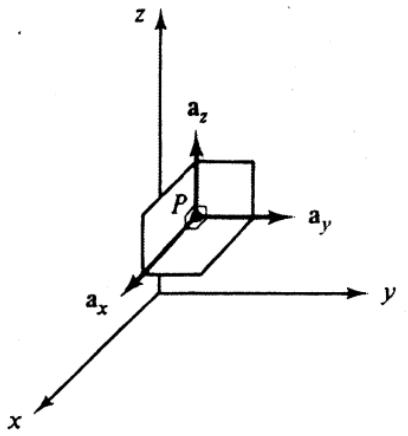
- Kartezyen (x, y, z) veya (i, j, k)
- Silindirik (r, ϕ, z) veya (ρ, ϕ, z)
- Küresel (R, θ, ϕ) veya (r, θ, ϕ)

Cheng'in tercihi

Kartezyen koord.



Shaum Şekil 1-3(a)



(*a*) Kartezyen

Birim vektörler:

$\hat{a}_x \quad \hat{a}_y \quad \hat{a}_z$

Özellikler:

$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_x = \hat{a}_y \cdot \hat{a}_y = \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = 1$$

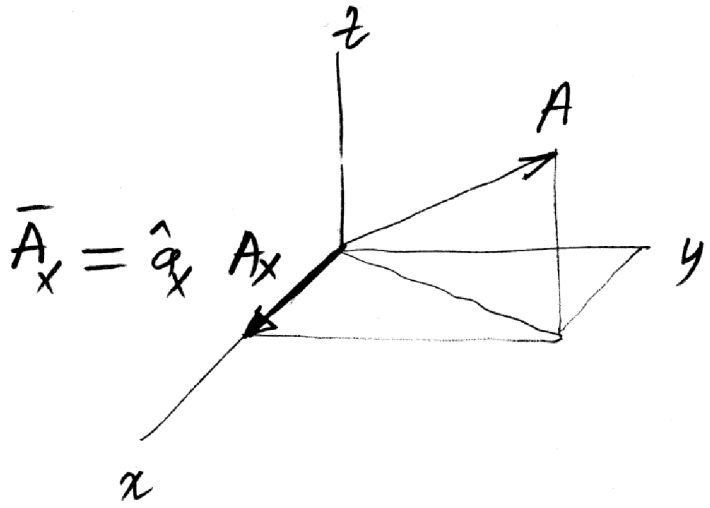
$$\hat{a}_x \times \hat{a}_y = \hat{a}_z$$

$$a_y \times \hat{a}_z = a_x$$

$$\hat{a}_z \times \hat{a}_x = a_y = -\hat{a}_x \times \hat{a}_z$$

Kartezyen Koordinat Sistemi (Düzeni)

$\bar{A}$ vektörünün bileşenlerini bulalım.



$$A_x = \hat{a}_x \cdot \bar{A}$$

$$A_y = \hat{a}_y \cdot \bar{A}$$

$$A_z = \hat{a}_z \cdot \bar{A}$$

$$\bar{A} = \hat{a}_x A_x + \hat{a}_y A_y + \hat{a}_z A_z$$

Benzer şekilde

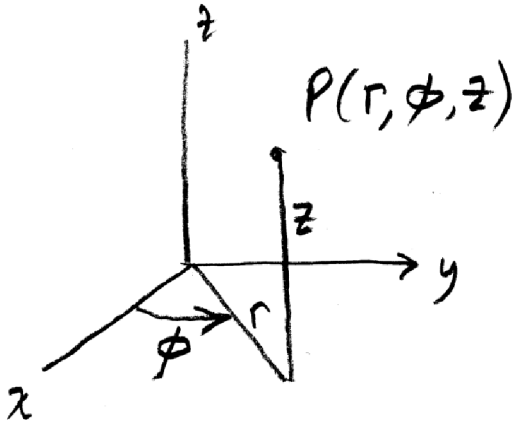
$$\bar{dl} = \hat{a}_x dx + \hat{a}_y dy + \hat{a}_z dz$$

Shaum Serisi 1-5(a)

$$dV = dx\, dy\, dz$$

Silindirik Koordinat Sistemi (Düzeni)

Silindirik koord.



Şekil
1-3(b)

Birim vektörler

$\hat{a}_r$, $\hat{a}_\phi$, $\hat{a}_z$

Şekil
Şekil
1-4(b)

Özellikler

$$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_r = \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_\phi = \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = 1$$

$$\hat{a}_r \times \hat{a}_\phi = \hat{a}_z$$
$$\hat{a}_\phi \times \hat{a}_z = \hat{a}_r$$
$$\hat{a}_z \times \hat{a}_r = \hat{a}_\phi = -\hat{a}_r \times \hat{a}_z$$

$\bar{A}$ vektorunun bileşenini bulalım.

$$\bar{A} = \hat{a}_r A_r + \hat{a}_\phi A_\phi + \hat{a}_z A_z$$

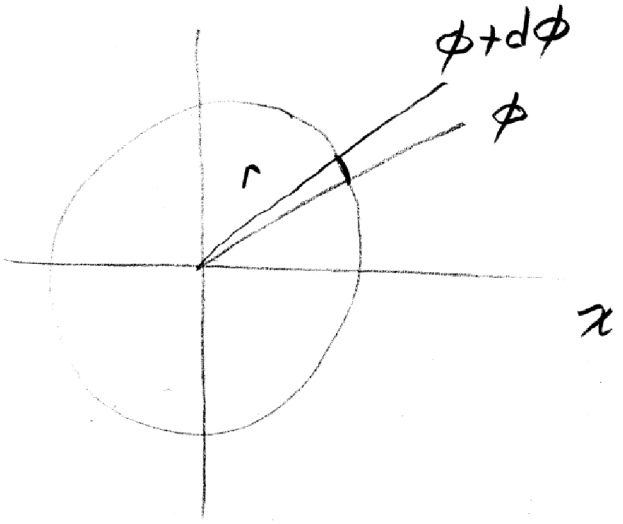
$$A_r = \hat{a}_r \cdot \bar{A}$$

$$A_\phi = \hat{a}_\phi \cdot \bar{A}$$

$$A_z = \hat{a}_z \cdot \bar{A}$$

Benzer şekilde (tanım)

$$d\bar{l} = \hat{a}_r\, dr + \hat{a}_\phi\, (r\, d\phi) + \hat{a}_z\, dz$$



Ödev.

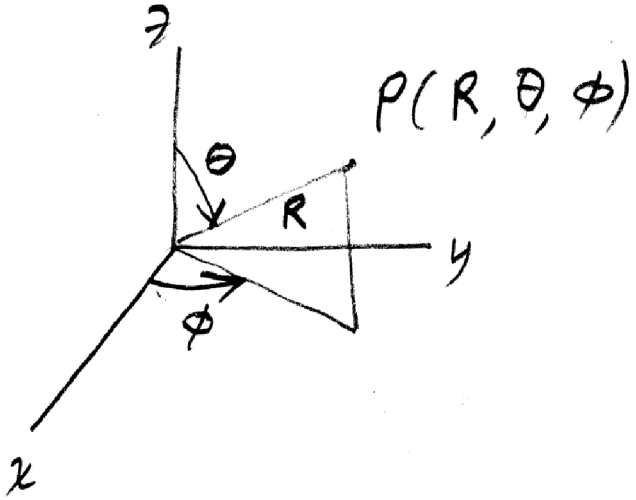
ϕ ile $d\phi+\phi$ arasındaki daire parçasının uzunluğu nedir?

Şekil 1-5 b

$$dv = (dr)(r\,d\phi)(dz)$$

Küresel Koordinat Sistemi (Düzeni)

Küresel koord.



Shaum
1-3(c)

Birim vektörler:

$\hat{a}_R$, $\hat{a}_\theta$, $\hat{a}_\phi$

Shaum
1-4(c)

Özellikler

$$\hat{a}_R \cdot \hat{a}_R = \hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_\theta = \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_\phi$$

$$\hat{a}_R \times \hat{a}_\theta = \hat{a}_\phi$$

$$\hat{a}_\theta \times \hat{a}_\phi = \hat{a}_R$$

$$\hat{a}_\phi \times \hat{a}_R = \hat{a}_\theta = -\hat{a}_R \times \hat{a}_\phi$$

$\bar{A}$ vektörünün bileşenlerini bulalım.

$$\bar{A} = \hat{a}_R A_R + \hat{a}_\theta A_\theta + \hat{a}_\phi A_\phi$$

$$A_R = \hat{a}_R \cdot \bar{A}$$

$$A_\theta = \hat{a}_\theta \cdot \bar{A}$$

$$A_\phi = \hat{a}_\phi \cdot \bar{A}$$

Şekil 1-5(c)

$$d\bar{\ell} = \hat{a}_R\, dR + \hat{a}_\theta (R)\, d\theta + \hat{a}_\phi (R \sin\theta)\, d\phi$$

$$dv = (dR)(R\, d\theta)(R \sin\theta\, d\phi)$$

$$= R^2 \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\phi$$

R

R

R

R

ÖRNEK $\bar{A}.\bar{B}$ yi sadece A ve B nin bileşenleri cinsinden bulunuz.

$$\bar{A} = \hat{a}_x A_x + \hat{a}_y A_y + \hat{a}_z A_z$$

$$\bar{B} = \hat{a}_x B_x + \hat{a}_y B_y + \hat{a}_z B_z$$

$$\bar{A}.\bar{B} = (\hat{a}_x A_x + \hat{a}_y A_y + \hat{a}_z A_z) \cdot (\hat{a}_x B_x + \hat{a}_y B_y + \hat{a}_z B_z)$$

Hatırla $\hat{a}_x \cdot \hat{a}_x = 1$

$$\bar{A}.\bar{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

ÖRNEK $\bar{A} \times \bar{B} = (\hat{a}_x A_x + \hat{a}_y A_y + \hat{a}_z A_z) \times (\hat{a}_x B_x + \hat{a}_y B_y + \hat{a}_z B_z)$

$$= \hat{a}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \hat{a}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \hat{a}_z (A_x B_y - A_y B_x)$$

$$\bar{A} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \neq \bar{B} \times \bar{A}$$

ÖDEV

ÖRNEK $\bar{A} = -\hat{a}_x + \hat{a}_y 2 - \hat{a}_z 2$

(A) $|\bar{A}| = ?$

$$|\bar{A}| = [\bar{A} \cdot \bar{A}]^{1/2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} \Rightarrow |\bar{A}| = 3$$

(B) $\hat{a}_A = ?$

$$\hat{a}_A = \frac{1}{|\bar{A}|} \cdot \bar{A} = \frac{1}{3}\hat{a}_x + \frac{2}{3}\hat{a}_y - \frac{2}{3}\hat{a}_z$$

(C) $\theta_z = ?$ ($\bar{A}$'nın z ekseni ile yaptığı açı)

$$\bar{A} \cdot \hat{a}_z \triangleq A \cos\theta_z \Rightarrow \cos\theta_z = \frac{A_z}{A}$$

$$A_z = \hat{a}_z \cdot (-\hat{a}_x + \hat{a}_y 2 - \hat{a}_z 2) = -2$$

$$\Rightarrow \cos\theta_z = -\frac{2}{3} \Rightarrow \theta_z = 131.8^\circ$$

ÖRNEK $\bar{A} = 5\hat{a}_x - 2\hat{a}_y + \hat{a}_z$

$\bar{B} = \hat{a}_x - 2\hat{a}_y$

(A) $\bar{A} \cdot \bar{B} = 5 + 4 = 9$

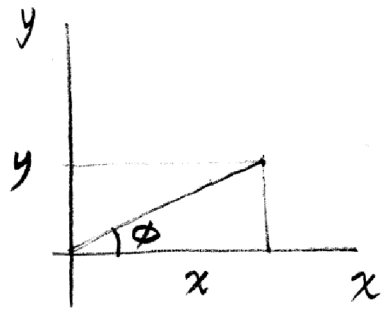
(B) $\bar{A} \times \bar{B} = (5\hat{a}_x - 2\hat{a}_y + \hat{a}_z) \times (\hat{a}_x - 2\hat{a}_y)$

$= 2\hat{a}_x + \hat{a}_y - 8\hat{a}_z$ 8

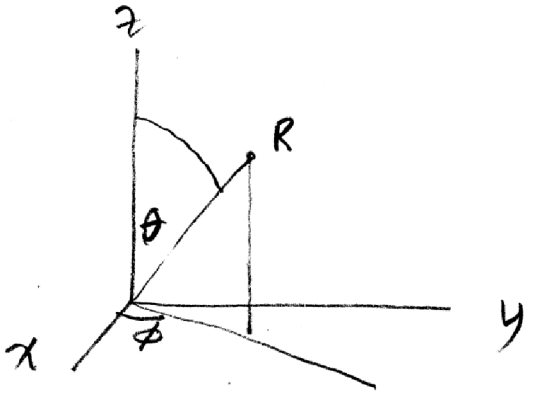
ÖDEV $\theta_{AB} = ?$ $\cos^{-1}(9/\sqrt{150})$

KOORDİNAT SİSTEMİ (DÜZENİ) DÖNÜŞÜMLERİ

Koordinat dönüşümleri



$$x = r\cos\phi$$
$$y = r\sin\phi$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\phi = \tan^{-1}(y/x)$$
$$z = z$$



$$x = (R\sin\theta)\cos\phi$$
$$y = (R\sin\theta)\sin\phi$$
$$z = R\cos\theta$$
$$R = \left[x^2+y^2+z^2\right]^{1/2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{(x^2+y^2)^{1/2}}{z}$$
$$\phi = \tan^{-1}(y/x)$$

$$\begin{bmatrix}\hat{a}_r\\ \hat{a}_\phi\\ \hat{a}_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{a}_x\\ \hat{a}_y\\ \hat{a}_z\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\hat{a}_x\\ \hat{a}_y\\ \hat{a}_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{a}_r\\ \hat{a}_\phi\\ \hat{a}_z\end{bmatrix}$$

Ödev

Küresel / kartezyen dönüşümleri

ÖRNEK

$\bar{A} = \hat{a}_r\,(3\cos\phi) - \hat{a}_\phi\, 2r + \hat{a}_z\, z$ (vektör alanı)

(A) $P(4, 60^\circ, 5)$ noktasında alan değeri = ?

$r = 4$
$\phi = 60^\circ$
$z = 5$

$$\bar{A}(P) = \hat{a}_r\, 3\cos 60 - \hat{a}_\phi\, 2\cdot 4 + \hat{a}_z\, 5$$
$$= (3/2)\hat{a}_r - 8\,\hat{a}_\phi + 5\,\hat{a}_z$$

(B) $\bar{A}(P)$ vektörünü kartezyen koord. gösteriniz.

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60 & -\sin 60 & 0 \\ \sin 60 & \cos 60 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.68 \\ -2.70 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}(P) = \bar{A}_p = \hat{a}_x\, 7.68 - \hat{a}_y\,(2.7) + \hat{a}_z\, 5$$

(C) $P(4, 60^\circ, 5)$ koordinatlarını kartezyende gösteriniz.

$x = r\cos\phi = 4\cos 60$
$y = r\sin\phi = 4\sin 60$
$z = z$

$P(x, y, z)$
$= P(2, 2\sqrt{3}, 5)$

ÖRNEK $P(x,y,z) = P(4,-6,12)$ noktesini küresel koordinatlarda gösteriniz.

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad r = (4^2+6^2+12^2)^{1/2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right] \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{4^2+6^2}}{12}$$

$$\phi = \tan^{-1}(y/x) \qquad \phi = \tan^{-1}(6/4)$$

ÖRNEK $\hat{a}_z$ birim vektörünü küresel koordinatlarda gösteriniz.

$\bar{A} = \hat{a}_z$ olsun.

$$A_r = \hat{a}_r \cdot \bar{A} = \hat{a}_r \cdot \hat{a}_z = \cos\theta$$

$$A_\theta = \hat{a}_\theta \cdot \bar{A} = \hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_z = -\sin\theta$$

$$A_\phi = \hat{a}_\phi \cdot \bar{A} = \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_z = 0$$

$$\hat{a}_z = \hat{a}_r \cos\theta - \hat{a}_\phi \sin\theta$$

ÖDEV Gösteriniz.

$$\hat{a}_\theta = \hat{a}_x \cos\theta\cos\phi + \hat{a}_y \cos\theta\sin\phi - \sin\theta\,\hat{a}_z$$

ÖRNEK $P(x_a, y_a, z_a) = (-1, -2, 3)$

$$f(x,y,z) \triangleq \left[(x-x_a)^2 + (y-y_a)^2 + (z-z_a)^2\right]^{1/2}$$

(A) $$f(x_a y_a z_a) = \left[(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2\right]^{1/2}$$

f; P noktasından olan uzaklığı vermektedir.

(B) $P(r_a, \phi_a, z_a) = ?$

$$r_a = (x_a^2 + y_a^2)^{1/2} = \sqrt{5} \cong 2.24$$

$$\phi_a = \tan^{-1}(y_a/x_a) = \tan^{-1}(2) \cong 4.25 \text{ rad.}$$

(C) $f(r, \phi, z) = ?$

$$x = r\cos\phi$$
$$y = r\sin\phi$$
$$z = z$$

$$f(r,\phi,z) = \left[(r\cos\phi + 1)^2 + (r\sin\phi + 1)^2 + \cdots\right]$$

$$= \left[r^2 + r(2\cos\phi) + r(4\sin\phi) + z^2 - 6z + 14\right]^{1/2}$$

f Skaler alanı gösterimi için kartezyen koord. daha uygun!

12