EEM 323
ELECTROMAGNETIC WAVE THEORY II

PHASORS

FAZÖR GÖSTERİMİNİN TANIMI, GEREKÇELERİ VE SAĞLADIĞI KOLAYLIKLAR

2013 – 2014 FALL SEMESTER

Prof. S. Gökhun Tanyer

DEPARTMENT OF ELECTRICAL–ELECTRONICS ENGINEERING
FACULTY OF ENGINEERING, BASKENT UNIVERSITY

Önemli not: Ders notlarındaki şekillerin hazırlanmasında internet ortamından faydalanılmıştır. Özellikle belirtilmeyen tüm şekil, tablo, eşitlik ve denklemler vb. "D. K, Fundamentals of Engineering Electromagnetics, Addison-Wesley Inc." ile "D. K, Field and Wave Electromagnetics, Mc-Graw Hill Inc." kitabından taranarak elde edilmiştir. Alıntıların kaynağına kolay ulaşılabilmesi maksadıyla numarası ve altyazıları da gösterilmektedir.

DERS KİTABI

[1] David Keun Cheng, *Fundamentals of Engineering Electromagnetics*, Addison-Wesley Publishing, Inc., 1993.

veya David Keun Cheng, Çeviri: Adnan Köksal, Birsen Saka, *Mühendislik Elektromanyetiğinin Temelleri – Fundamentals of Engineering Electromagnetics*, Palme Yayınları.

KAYNAK / YARDIMCI KİTAPLAR:

[2] David Keun Cheng, *Field and Wave Electromagnetics*, Addison-Wesley Publishing, Inc. *veya* David Keun Cheng, Çeviri: Mithat İdemen, *Elektromanyetik Alan Teorisinin Temelleri – Field and Wave Electromagnetics*, Literatür Yayıncılık.

[3] Stanley V. Marshall, Richard E. DuBroff, Gabriel G. Skitek, *Electromagnetic Concepts and Applications*, Dördüncü Basım, Prentice Hall International, Inc., 1996.

[4] Joseph A. Edminister, Elektromanyetik, 2. Baskıdan çeviri, Çevirenler: M. Timur Aydemir, E. Afacan, K. C. Nakipoğlu, Schaum's Outlines, McGraw Hill Inc., Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2000.

Kaynakça: Wikipedia.com

FAZÖRLER

TANIM, GEREKÇELER VE SAĞLADIĞI KOLAYLIKLAR

Durgun $\bar{E}$ ($\bar{D}$)

Durgun $\bar{H}$ ($\bar{B}$)

Ayrı denklemler

Benzer ama farklı

$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \neq 0$

$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \neq 0$

Maxwell Denklemleri

$\bar{E}$ ile $\bar{B}$ birleşti.

Tek kural

Sade

Bu sefer $\frac{\partial}{\partial t}$ var!

$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$, $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ her şekilde değişebilir!

İncelemesi zor olabilir.

Bir çözüm, diğer değişimlerde aynen geçerli olamaz.

Her farklı $\frac{\partial}{\partial t}$ için yeniden çözüm gerekir.

Fourier transform

Fourier series

"Tüm değişimler sinüsler cinsinden ifade edilebilir".

Sinüs ailesi için geçerli çözümler temeldir (doğrusallık gerekli).

TANIM: Sinüs ailesi farklı frekans ve faza ait tüm sinüzoidal fonksiyonlar.

Eğer madem tüm fiziksel değişim işaretlerini (sinyalllerini) – Fourier'in dediği gibi – sünüsler halinde ifade edebilir isek, sinüs ailesi için çözüm bulunabilirse, tüm olası diğer fonksiyonlara ait çözümü de bulmuş olacağız.

Bir örnek üzerinden yola çıkalım, incelediğimiz işaret (sinyal) voltaj, akım, elektrik alanı, manyetik alan vb. olabilir.

$$A\cos(\omega t + \theta)$$

Burada;

$\omega = 2\pi f$	Radyan cinsinden **frekans**
f	Hertz cinsinden **frekans**
θ	Radyan cinsinden **Faz**.

Euler'in eşitliklerini bu noktada not edelim (kullanacağız).

$$\cos(wt+\theta) = \frac{1}{2}\left[e^{j(wt+\theta)} + e^{-j(wt+\theta)}\right]$$

$$e^{j(wt+\theta)} = 2\left[\cos(wt+\theta) + j\sin(wt+\theta)\right]$$

$$e^{-j(wt+\theta)} = 2\left[\cos(wt+\theta) - j\sin(wt+\theta)\right]$$

Euler eşitliklerini kullanırsak, işaretimizi tekrar yazabiliriz.

$$A\cos(wt+\theta) = \mathrm{Re}\left[A\, e^{j(wt+\theta)}\right]$$

$$e^{jwt} \cdot e^{j\theta}$$

$$= \mathrm{Re}\left[A\, e^{j\theta}\, e^{jwt}\right]$$

suppress (bastır veya kenara sakla)

Burada **exp(jωt)** fonksiyonunun tüm işaretlerde bulunmasından dolayı, bu katsayıyı bir kenara ayırıp (unutmadan) yazmayabiliriz. Kolaylık sağlayacaktır.

Ancak, yapacağımız tüm işlemlerde (türev, toplama, çıkarma, çarpma, bölme) bu katsayının olduğunu hatırlamalıyız.

Yukarıdaki işaretimizi artık basit bir şekilde FAZÖR gösterimini kullanarak gösterebiliriz. Artık tüm işlemlerimiz ve tekrar tekrar yazacağımız eşitliklerimiz sadeleşecektir.

FAZÖR GÖSTERİMİ

$\boldsymbol{A\cos(\omega t + \theta)}$ yerine $\boldsymbol{Ae^{j\theta}}$

ve hatta daha basiti $\boldsymbol{A\langle\theta}$

Bu noktadan sonra artık, fazör gösterimini tercih edeceğiz. Özellikle belirtilmediği takdirde, $\boldsymbol{A\cos(\omega t + \theta)}$ yerine $\boldsymbol{Ae^{j\theta}}$ kullanacağız.

Fazör kullanımı halinde; türev, toplama, çıkarma, çarpma, bölme işlemlerini inceleyelim. Böylelikle, **exp(jωt)** katsayısını rahatlıkla tüm işlemlerimizde bir kenara ayırabiliriz (yazmayabiliriz).

Fazörlerin kullanımında TÜREV işlemi:

$$Re\left[\frac{d}{dt}\left(Ae^{j\theta}e^{j\omega t}\right)\right] = Re\left(Ae^{j\theta}\,j\omega\, e^{j\omega t}\right)$$

$$= Re\left(\omega A.e^{j(\theta+\pi/2)}\underbrace{e^{j\omega t}}\right)$$

$$= \omega A\cos(\omega t+\theta+\pi/2)$$

etkilenmedi.

Fazörlerin TÜREV işleminin sadece **jω** katsayısının getirilmesi anlamına geldiğini görüyoruz (ne kolay değil mi?).

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{A}_{\text{Fazör}}\Big) = \underbrace{j\omega}_{\text{katsayı}}\ \underbrace{A}_{\text{Fazör}}$$

Fazörlerin çarpılması (bölünmesi):

$$\underbrace{\left(A_1 e^{j\theta_1}\right)\left(A_2 e^{j\theta_2}\right)}_{\text{Fazör çarpımı}} = \underbrace{A_1 A_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)}}_{\substack{\text{Genliklerin çarpımı} \\ \text{fazların toplamı}}}$$

Bir fazör gösterimi, fazörün genliği ve sahip olduğu fazı cinsinden yazılmaktadır.

İki fazörün çarpımının genliği: Genliklerinin çarpımı,

İki fazörün çarpımının fazı: Fazların toplamıdır.

Bu kadar kolay, artık zaman değişkeninin bulunduğu $\boldsymbol{A\cos(\omega t+\theta)}$ ifadesi ile çalışmanın çok daha zor olduğunu, fazörlerin kolaylık sağladığını daha iyi anlıyoruz.

Unuttuğumuz bir konu kaldı. Ya fazörlerin toplama ve çıkarması nasıl yapılacak?

Phasors – Review

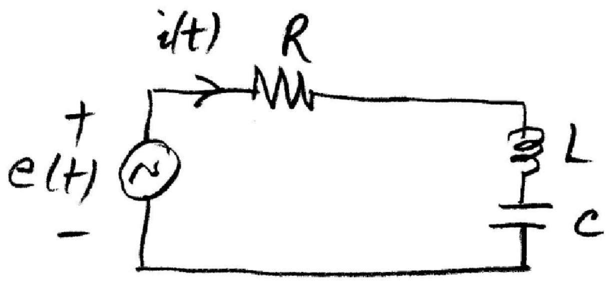
$$i(t) = I \cos(\omega t + \phi)$$

I : amplitude (Amps)
ω : frequency in radians (rad/s)
ϕ ; phase of the current waveform (in radians)

Let us examine the loop equation for a series RLC circuit as an example of inconvenience of sine and cosine functions in the presence of differentiations and integrations.

Assume, an applied voltage

$$e(t) = E \cos(\omega t)$$



Applying Kirchoffs voltage law 2

$$e(t) = v_L(t) + v_R(t) + v_c(t)$$

$$= L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{c}\int i\,dt$$

$$i(t) = I\cos(wt+\phi)$$

$$I\left[-wL\sin(wt+\phi) + R\cos(wt+\phi) + \frac{1}{wC}\sin(wt+\phi)\right] = E\cos wt$$

? How would you solve for I and ϕ?
Is it obvious? Is the solution practical?

Let us now, use phasors! :)

$$e(t) = E\cos(wt) = Re\left[\underbrace{(Ee^{j0})}_{E_s} e^{jwt}\right]$$

$$= Re(E_s e^{jwt})$$

$$i(t) = Re\left[\underbrace{(Ie^{j\phi})}_{I_s} e^{jwt}\right] = Re(I_s e^{jwt})$$

Use phasor 3

$$E_s = E e^{j0} = E$$

$$I_s = I e^{j\phi}$$

$$\frac{di}{dt} = Re\left(jw I_s e^{jwt} \right)$$

$$\int i\,dt = Re\left(\frac{I_s}{jw} e^{jwt} \right)$$

Then (simply)

$$E_s = \left[R + j\left(wL - \frac{1}{wC} \right) \right] I_s$$

$$I_s = E_s \Big/ \left[R + j\left(wL - \frac{1}{wC} \right) \right]$$

ÖDEV

Fazör gösterimi kullanılmış iki farklı işareti (sinyali) inceleyelim.

$$A = ae^{j\theta_A} \quad \text{ve} \quad B = be^{j\theta_B}$$

1.a. Fazörlerin toplamını hem gerçek gösterim ortamında (yani **exp(jωt)** katsayısının bastırılmadığı durumda), hem de fazör gösterimi ortamında hesaplayınız.

1.b. Fazörlerin farkını hem gerçek gösterim ortamında, hem de fazör gösterimi ortamında hesaplayınız.

1.c. www.wikipedia.com adresinde “Phasors” başlığını inceleyiniz. Sunulan videoyu seyrediniz. A ve B maddesinde belirtilen sonuçlarınızı kalem ile çizeceğiniz çizgeler (grafikler) üzerinden açıklayınız.