EEM 323

ELECTROMAGNETIC WAVE THEORY II

OPERATÖRLER

(Özet)

2013 – 2014 FALL SEMESTER

Prof. S. Gökhun Tanyer

DEPARTMENT OF ELECTRICAL–ELECTRONICS ENGINEERING

FACULTY OF ENGINEERING, BASKENT UNIVERSITY

Önemli not: Ders notlarındaki şekillerin hazırlanmasında internet ortamından faydalanılmıştır. Özellikle belirtilmeyen tüm şekil, tablo, eşitlik ve denklemler vb. "D. K, Fundamentals of Engineering Electromagnetics, Addison-Wesley Inc." ile "D. K, Field and Wave Electromagnetics, Mc-Graw Hill Inc." kitabından taranarak elde edilmiştir. Alıntıların kaynağına kolay ulaşılabilmesi maksadıyla numarası ve altyazıları da gösterilmektedir.

DERS KİTABI

[1] David Keun Cheng, *Fundamentals of Engineering Electromagnetics*, Addison-Wesley Publishing, Inc., 1993.
veya David Keun Cheng, Çeviri: Adnan Köksal, Birsen Saka, *Mühendislik Elektromanyetiğinin Temelleri – Fundamentals of Engineering Electromagnetics*, Palme Yayınları.

KAYNAK / YARDIMCI KİTAPLAR:

[2] David Keun Cheng, *Field and Wave Electromagnetics*, Addison-Wesley Publishing, Inc. *veya* David Keun Cheng, Çeviri: Mithat İdemen, *Elektromanyetik Alan Teorisinin Temelleri – Field and Wave Electromagnetics*, Literatür Yayıncılık.

[3] Stanley V. Marshall, Richard E. DuBroff, Gabriel G. Skitek, *Electromagnetic Concepts and Applications*, Dördüncü Basım, Prentice Hall International, Inc., 1996.

[4] Joseph A. Edminister, Elektromanyetik, 2. Baskıdan çeviri, Çevirenler: M. Timur Aydemir, E. Afacan, K. C. Nakipoğlu, Schaum's Outlines, McGraw Hill Inc., Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2000.

ELEKTROMANYETİK KURAMINDA FAYDALANILAN (İHTİYAÇ DUYULAN MATEMATİKSEL OPERATÖRLER

pp.33

GRADIENT & DIVERGENCE & CURL

scalor field

Gradient ∇V → vector field

maksimum değişim yönü.

vector field

Divergence $\nabla \cdot \bar{A}$ → scalar field

(açılma)

Curl $\nabla \times \bar{A}$ → vector field

(döngü)

Gradient	Artış yönü (gradyant)
Divergence	Iraksama miktarı
Curl / Rotational	Bukle / Dönel

BİR VEKTÖR ALANININ BUKLESİNİN (DÖNELİNİN) HESAPLANMASI (Curl– Rotation)

Hatırlarsak

$$\boxed{\nabla \cdot \bar{F}(\bar{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \bar{F}(\bar{r}) \cdot \bar{ds}}{\Delta V}}$$

$\bar{F}$ vektör alanının $\bar{r}$ ile gösterilen koord. noktasındaki ıraksamasını veriyordu.

Aynı mantık kullanılarak,

$$(\bar{F}(r))\text{ın buklesi} = \oint_c \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{l}$$

diyebiliriz, ama $c = ?$. Hangi güzergah (path) üzerinde tanımlanmalı?

Cevap mümkün olan tümü incelenmeli ve en büyük değer belirlenmeli, yani;

$$\boxed{\underset{\text{curl}}{\text{bukle}}(\bar{F}) = \nabla \times \bar{F}(\bar{r}) \triangleq \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\oint_c \bar{F}(\bar{r}) \cdot \bar{dl}}{\Delta s}}$$

Herhangi bir yönde bükle hesaplanabilir;

$\hat{a}_n \cdot (\nabla \times \bar{F}(r))$: $\hat{a}_n$ yönünde F'in bükle değeridir.

O zaman,

$$\nabla \times \bar{F} = \hat{a}_x (\nabla \times \bar{F})_x + \hat{a}_y (\nabla \times \bar{F})_y + \hat{a}_z (\nabla \times \bar{F})_z$$

$$(\nabla \times \bar{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

$$(\nabla \times \bar{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}$$

$$(\nabla \times \bar{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

$$\boxed{\nabla \times \bar{F} = \hat{a}_x \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \hat{a}_y \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \hat{a}_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)}$$

Daha kolay bir gösterim olarak,

$$\nabla \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

kullanılabilir.

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \tag{2–136}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & \mathbf{a}_\phi r & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\phi & A_z \end{vmatrix}, \tag{2–138}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{R^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_R & \mathbf{a}_\theta R & \mathbf{a}_\phi R\sin\theta \\ \dfrac{\partial}{\partial R} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ A_R & RA_\theta & R\sin\theta A_\phi \end{vmatrix}, \tag{2–139}$$

ÖRNEK $\nabla \times \bar{A} = ?$

a) $\bar{A} = \hat{a}_\phi \left(\frac{k}{r}\right)$ k: sabit silindirik koord. düzeni

$$\nabla \times \bar{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{a}_r & r\hat{a}_\phi & \hat{a}_z \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \phi & \partial/\partial z \\ 0 & \cancel{r}\left(\frac{k}{\cancel{r}}\right) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

b) $\bar{A} = \hat{a}_R \, f(R)$: $f(R)$ herhangi bir fonksiyon.

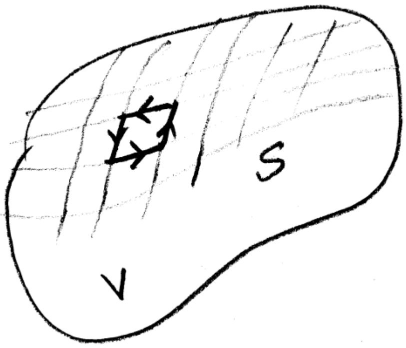
$$\nabla \times \bar{A} = \frac{1}{R\sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{a}_R & R\hat{a}_\theta & R\sin\theta \, \hat{a}_\phi \\ \partial/\partial R & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \phi \\ f(R) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\nabla \times \bar{A} = 0.$

$\Rightarrow$ Buklesiz, dönelsiz, korunumlu

$\Rightarrow$ curl-free, irrotational, conservative.

STOKE YASASI (Stoke's Theorem)



V hacmini saran S yüzeyini alalım.

Yüzey üstündeki bir noktada ΔS_j küçük yüzeyciğini tanımlayalım.

$$\boxed{(\nabla \times \bar{F})_j \triangleq \frac{\oint_{C_j} \bar{F}(\bar{r}) \cdot \bar{dl}}{\Delta S_j}}$$

$$\Rightarrow \oint_{C_j} \bar{F}(\bar{r}) \cdot \bar{dl} = (\nabla \times \bar{F})_j \cdot \Delta S_j$$

$$\underline{+ \text{ diğerleri}} = \underline{+ \text{ diğerleri}}$$

$$0 = \oint_S (\nabla \times \bar{F}) \cdot \bar{ds}$$

$$\boxed{\oint_S (\nabla \times \bar{F}) \cdot \bar{ds} = 0}$$

ÖRNEK

$$\bar{A} = \hat{a}_\phi \left(k/r\right) \qquad \nabla \times \bar{A} = ?$$

$$\nabla \times \bar{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\phi & \hat{a}_z \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \phi & \partial/\partial z \\ 0 & r(k/r) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

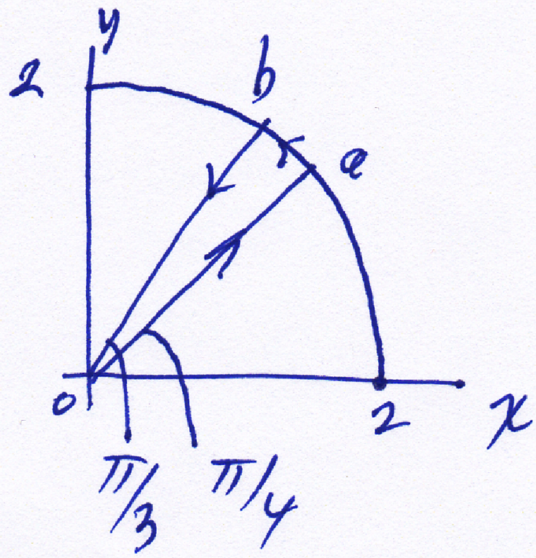
ÖRNEK

$$\bar{A} = \hat{a}_R \, f(R)$$

$$\nabla \times \bar{A} = \frac{1}{R^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{a}_R & \hat{a}_\theta & \hat{a}_\phi \\ \partial/\partial R & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \phi \\ A_R & R\,A_\theta & R\sin\theta\, A_\phi \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{R^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{a}_R & \hat{a}_\theta & \hat{a}_\phi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \phi \\ f(R) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ÖRNEK



$$F(r) = 2r\,\hat{a}_r + 2r\cos\phi\,\hat{a}_\phi$$

(A) $\oint_c \bar{F} \cdot d\bar{l} = ?$

(B) Stoke yasasını gösteriniz.

$oa: \quad d\bar{l} = \hat{a}_r\, dr$

$ab: \quad d\bar{l} = \hat{a}_\phi\, r\,d\phi \Big|_{r=2} = \hat{a}_\phi\, 2\,d\phi$

$bo: \quad d\bar{l} = \hat{a}_r\, dr \leftarrow$ integrali $\int_2^0$ ise

$= -\hat{a}_r\, dr \leftarrow \quad \int_0^2$ ise

$$\int_{oabo} \bar{F}(\bar{r}) \cdot \bar{dl} = \int_0^a \bar{F}(\bar{r})\Big|_{\phi=\pi/4} \cdot (\hat{a}_r\, dl)$$

$$+ \int_a^b \bar{F}(\bar{r})\Big|_{r=2} \cdot (\hat{a}_\phi\, dl)$$

$$+ \int_b^o \bar{F}(\bar{r})\Big|_{\phi=\pi/3} \cdot (-\hat{a}_r\, \bar{dl})$$

$$\oint_c \bar{F}(\bar{r}) \cdot \bar{dl} = \int_0^2 2r\, dr + \int_{\pi/4}^{\pi/3} 8\cos\phi\, d\phi$$

$$+ \int_0^2 (-2r)\, dr$$

$$\oint_c \bar{F} \cdot \bar{dl} = 1.2713$$

B

$$\nabla \times \bar{F}(\bar{r}) = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\phi & \hat{a}_z \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \phi & \partial/\partial z \\ 2r & r(r2\cos\phi) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r}\left[\hat{a}_z\left(\frac{\partial}{\partial r}(2r^2\cos\phi) - 0\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{r}}\hat{a}_z\, 4\cancel{r}\cos\phi = \hat{a}_z\, 4\cos\phi$$

$$\int_S (\nabla \times \bar{F})\cdot d\bar{s} = \int_{\pi/4}^{\pi/3}\int_0^2 \left(\hat{a}_z\, 4\cos\phi\right)\cdot d\bar{s}$$

$$d\bar{s} = \hat{a}_z (dr)(r\,d\phi)$$

$$= 4\int_0^2 r\,dr \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos\phi\, d\phi$$

$$= 1.2713$$

$$\int_S (\nabla \times \bar{F})\cdot d\bar{s} = \oint_C \bar{F}\cdot d\bar{l}$$

ÖDEV

ÖDEV

$$\bar{F} = \hat{a}_x\, 2xy^2 + \hat{a}_z\, yz$$

$$\nabla \times \bar{F} = ?$$

$$\left(\nabla \times \bar{F}\right)\Big|_{(x,y,z)=(1,3,5)} = ?$$

ÖDEV

$$\bar{F} = \hat{a}_R \frac{R}{1+R} + \hat{a}_\theta\, 2R\sin\phi$$

$$\nabla \times \bar{F} = ?$$

$$\left(\nabla \times \bar{F}\right)\Big|_{(R,\theta,\phi)=(3,\pi/4,\,2\pi/7)}$$

HELMHOLTZ YASASI

Iraksama ve Bukle özelliklerine bağlı olarak Vektör alanlarının sınıflandırılması

İfadeler:

IRAKSAMASIZ (Solenoidal)	BUKLESİZ (Irrotational)
$\nabla\cdot\bar{F}=0$	$\nabla\times\bar{F}=0$
Solenoidal	irrotational

1. IRAKSAMASIZ ve BUKLESİZ

$\nabla\cdot\bar{F}=0$ ve $\nabla\times\bar{F}=0$

Solenoidal and irrotational

$\Rightarrow$ Yüksüz ortamda durağan $\bar{E}$

2. IRAKSAMASIZ ve BUKLELİ

$\nabla\cdot\bar{F}=0$ ve $\nabla\times\bar{F}\neq 0$

Solenoidal but not irrotational.

$\Rightarrow$ Akım taşıyan iletkende sabit $\bar{B}$

3. IRAKSAMALI ve BUKLESİZ

$$\nabla \cdot \bar{F} \neq 0 \quad \text{ve} \quad \nabla \times \bar{F} = 0$$

Not solenoidal and irrotational

$\Rightarrow$ Yük bulunan ortamda durağan $\bar{E}$

3. IRAKSAMALI ve BUKLELİ

$$\nabla \cdot \bar{F} \neq 0 \quad \text{ve} \quad \nabla \times \bar{F} \neq 0$$

Neither solenoidal nor irrotational

→ Yük bulunan bir ortamda elektrik alanı ile zamanda değişken manyetik alan.