Poynting Teoremi

(Elektromanyetik Güç Akışı)

- EM güç, EM dalgalar tarafından taşınır.
- Enerji, alıcılara EM dalgalar ile iletilir.
- Şimdi, dalgaların elektrik ve manyetik alanları ile güç akışı arasındaki ilişkiyi irdeleyeceğiz.
- Maxwell dönel denklemlerini

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla\times\bar{E} &= -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\bar{H} &= \bar{J}+\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} \end{aligned}}$$

ve

$$\boxed{\nabla\cdot(\bar{A}\times\bar{B}) = \bar{B}\cdot(\nabla\times\bar{A})-\bar{A}\cdot(\nabla\times\bar{B})} \qquad (1)$$

vektör özdeşliğini kullanacağız.

- (1)'de $\bar{A}$ yerine $\bar{E}$, $\bar{B}$ yerine $\bar{H}$ yazarsak,

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla\cdot(\bar{E}\times\bar{H}) &= \bar{H}\cdot(\nabla\times\bar{E})-\bar{E}\cdot(\nabla\times\bar{H}) \\ '' \quad &= \bar{H}\cdot\left(-\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\right)-\bar{E}\cdot\left(\bar{J}+\frac{\partial\bar{D}}{\partial t}\right) \end{aligned}} \qquad (2)$$

bulunur.

– ϵ, μ, σ parametreli bir basit ortam alalım. O halde,

$$(3) \quad \boxed{\begin{aligned} \bar{D} &= \epsilon \bar{E} \\ \bar{B} &= \mu \bar{H} \\ \bar{J} &= \sigma \bar{E} \end{aligned}}$$

geçerli olacaktır. ϵ, μ ve σ zamanla da değişmiyor kabul edeceğiz.

– (3)'ü (2) denkleminde kullanalım ve terimlere bakalım:

$$\boxed{\bar{H}\cdot\left(-\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\right) = \bar{H}\cdot\left(-\mu\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu \bar{H}\cdot\bar{H}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu H^2\right)}$$

ve benzer şekilde

$$\boxed{\bar{E}\cdot\left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) = \bar{E}\cdot\left(\epsilon\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon \bar{E}\cdot\bar{E}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon E^2\right)}$$

ve

$$\boxed{\bar{E}\cdot\bar{J} = \bar{E}\cdot(\sigma\bar{E}) = \sigma E^2}$$

elde ederiz. Bunları

$$\nabla\cdot(\bar{E}\times\bar{H}) = \bar{H}\cdot\left(-\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\right) - \bar{E}\cdot\left(\bar{J}+\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) = \bar{H}\cdot\left(-\mu\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}\right) - \bar{E}\cdot\bar{J} - \bar{E}\cdot\left(\epsilon\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\right)$$

denkleminde yerine koyalım.

– Kaynaksız ortam $\boxed{(\bar{J}_s = 0)}$ kabul edildiğine dikkat edilmelidir.

– Denklemin yeni hali:

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla\cdot(\bar{E}\times\bar{H}) &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mu H^2)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon E^2)-\sigma E^2 \\ '' &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu H^2+\frac{1}{2}\epsilon E^2\right)-\sigma E^2\end{aligned}} \qquad (4)$$

– Şimdi her iki tarafın ilgilendiğimiz hacim üzerinde integralini alalım.

$$\boxed{\int_V \nabla\cdot(\bar{E}\times\bar{H})\,dv = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{1}{2}\mu H^2+\frac{1}{2}\epsilon E^2\right)dv-\int_V \sigma E^2\,dv}$$

– Sol tarafta ıraksama teoremini kullanırsak

$$\oint_S(\bar{E}\times\bar{H})\cdot d\bar{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V\frac{1}{2}\mu H^2\,dv-\frac{\partial}{\partial t}\int_V\frac{1}{2}\epsilon E^2\,dv-\int_V\sigma E^2\,dv \qquad (5)$$

– Burada, $\int_V \frac{1}{2}\mu H^2\,dv =$ V'de depolanan manyetik enerji,

$\int_V \frac{1}{2}\epsilon E^2\,dv =$ " " elektrik ",

$\int_V \sigma E^2\,dv =$ V'deki ohmik kayıp.

– (5)'in her iki tarafını −1 ile çarparsak,

$$\boxed{-\oint_S (\bar{E}\times\bar{H})\cdot d\bar{s} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}\mu H^2\, dv + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}\epsilon E^2\, dv + \int_V \sigma E^2\, dv} \qquad (6)$$

bulunur. Burada,

$w_m = \frac{1}{2}\mu H^2 \equiv$ manyetik enerji yoğunluğu,

$w_e = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \equiv$ elektrik enerji yoğunluğu ve

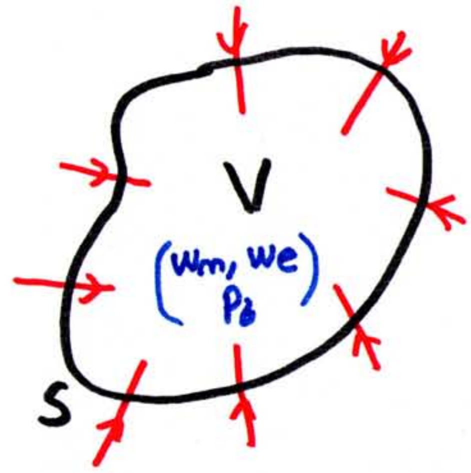
$P_\sigma = \sigma E^2 \equiv$ direnç kaybı güç yoğunluğu

olduğu görülür. Bunlar kullanılırsa,

$$(7) \quad \boxed{-\oint_S (\bar{E}\times\bar{H})\cdot d\bar{s} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V w_m\, dv + \frac{\partial}{\partial t}\int_V w_e\, dv + \int_V P_\sigma\, dv}$$

Güç Denge Denklemi

– $\frac{\partial}{\partial t}$'nin artış hızı olduğu hatırlanarak (7) denklemini sözle aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.



— Herhangi bir anda bir bölgeye giren net toplam güç, o bölgede depolanan elektrik ve manyetik enerjinin artış hızı ile direnç kaybı olan ohmik gücün toplamına eşittir.

$-\oint_S (\overline{E}\times\overline{H})\cdot d\overline{s}$ bölgeye giren güç olduğundan,

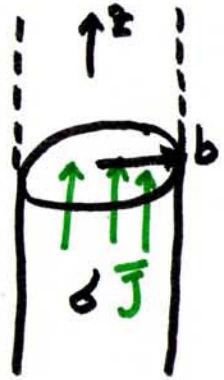
$\boxed{\oint_S (\overline{E}\times\overline{H})\cdot d\overline{s} \text{ bölgeden çıkan güçtür.}}$

— Böylelikle, $\overline{E}\times\overline{H} \equiv$ Birim alan için güç akısı olmalıdır. Bu akış

$$\boxed{\overline{P} \equiv \text{Poynting Vektörü} \equiv \overline{E}\times\overline{H} \quad \text{watt}/m^2}$$

ile verilir. $\overline{P}$ bir EM alanla ilişkili güç yoğunluğu vektörüdür.

— $\boxed{\overline{P}\perp\overline{E} \text{ ve } \overline{P}\perp\overline{H}}$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Örnek: 

Uzun, iletken bir telin yüzeyinde $\overline{P}$'yi bulunuz. İletkenin yarıçapı b, iletkenliği σ'dır ve I doğru akımını taşımaktadır.

Çözüm: I doğru akımı iletkenin kesitine düzgün olarak dağılır. İletkenin eksenini z ekseni alırsak akım yoğunluğunu ve $\overline{E}$ alanını

$$\boxed{\overline{J} = \hat{a}_z \frac{I}{\pi b^2}} \Rightarrow \overline{E} = \frac{\overline{J}}{\sigma} = \frac{I}{\sigma \pi b^2}\,\hat{a}_z$$

yazabiliriz. Ampere yasasından,

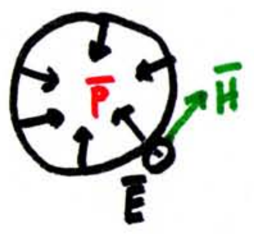
$$\boxed{\oint_c \overline{H} \cdot d\overline{l} = I} \quad \text{ve} \quad \overline{H} = \hat{a}_\phi \frac{I}{2\pi r}$$

elde ederiz. Problemde silindirik simetri olduğundan $\overline{H} = H_\phi(r)\,\hat{a}_\phi$ aldığımıza dikkat ediniz. Tel yüzeyinde,

$$\overline{H}(r=b) = \hat{a}_\phi \frac{I}{2\pi b} \quad \text{A/m} \quad \text{olur.}$$

- Telin yüzeyinde Poynting vektörü

$$\overline{P}(r=b) = \left(\overline{E}\times\overline{H}\right)\Big|_{r=b} = \frac{I}{\sigma\pi b^2}\,\hat{a}_z \times \frac{I}{2\pi b}\,\hat{a}_\phi = \frac{I^2}{2\sigma\pi^2 b^3}\,(-\hat{a}_r)$$



Poynting teoremini sağlamak için,

$$\boxed{\oint_S \overline{E}\times\overline{H}\cdot d\overline{s} = -\int_V \sigma E^2\,dv}$$

olduğunu göstermeliyiz.

- Problem DC olduğundan $\frac{\partial}{\partial t}$ içeren terimler sıfır olur. Sol taraf

$$\oint_S \overline{P}\cdot d\overline{s} = \int_0^l P(-\hat{a}_r)\cdot(\hat{a}_r\,2\pi b\,dz) = -\frac{I^2}{2\sigma\pi^2 b^3}\,2\pi b l = -\underbrace{\frac{I^2 l}{\sigma\pi b^2}}_{R} = -I^2 R$$

bulunur. Sağ taraf ise

$$-\int_V \overline{J}\cdot\overline{E}\,dv = -\frac{I^2}{\sigma\pi^2 b^4}\,\pi b^2 l = -\frac{I^2 l}{\pi\sigma b^2} = -I^2 R$$

olduğundan Poynting teoremi sağlanmıştır.

Örnek: Dalgaboyu 2.5 cm ve maksimum elektrik alanı 12 V/m olan bir düzgün düzlem dalga havada

$$\boxed{\hat{a}_n = \frac{(\hat{a}_y\sqrt{3} - \hat{a}_z)}{2}}$$

yönünde ilerlemektedir.

Manyetik alanın sadece x bileşeni vardır ve bu da $y = z = t = 0$'da yaklaşık olarak 15.9 mA/m'ye eşittir. $\bar{E}$ ve $\bar{H}$'yi bulunuz.

Çözüm: $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$ olduğundan,

$$k = \frac{2\pi}{2.5 \times 10^{-2}} = 80\pi \text{ rad/m}$$ bulunur.

$\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$'dır çünkü soruda dalganın havada ilerlediği belirtilmiştir. O halde

$$\boxed{k = w\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \Rightarrow k = \frac{w}{c} \Rightarrow w = kc$$

— $w = 80\pi \times 3 \times 10^8 = 2.4\pi \times 10^{10}$ rad/s $\Rightarrow f = 1.2 \times 10^{10}$ Hz $= 12$ GHz

— Hem $\bar{E}$, hem de $\bar{H}$ $k\hat{a}_n \cdot \bar{r}$ terimi içerir. Bu terim,

$$k\hat{a}_n \cdot \bar{r} = \frac{80\pi}{2}\left(\sqrt{3}\,\hat{a}_y - \hat{a}_z\right) \cdot \left(x\,\hat{a}_x + y\,\hat{a}_y + z\,\hat{a}_z\right) = 40\pi\left(y\sqrt{3} - z\right)$$ olur.

— Elektrik alanın genliği 12 V/m olduğundan, manyetik alan genliği

$$|\bar{H}| = H = \frac{E}{120\pi} = \frac{12}{120\pi} = \frac{1}{10\pi}$$

bulunur. Şimdi $\tilde{H}$ ve $\bar{H}$ yazılabilir.

$$\boxed{\tilde{H} = \hat{a}_x H e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}} e^{j\theta} = \hat{a}_x \left(\frac{1}{10\pi}\right) e^{-j40\pi(y\sqrt{3}-z)} e^{j\theta}}$$

ve $\bar{H}(y,z,t) = \hat{a}_x \left(\frac{1}{10\pi}\right) \cos\left[2.4\pi \times 10^{10} t - 40\pi(y\sqrt{3} - z) + \theta\right]$

— θ'yı bulmak için $y = z = t = 0$'da $|\bar{H}| = 15.9 \times 10^{-3}$ A/m verisini

kullanacağız: $|\bar{H}(0,0,0)| = 15.9 \times 10^{-3} = \frac{1}{10\pi} \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 0.5$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3} \equiv 60^\circ}$$

– Sonuç olarak

$$\boxed{\overline{H}(x,y,z,t) = \hat{a}_x \left(\frac{1}{10\pi}\right) \cos\left[2.4\pi \times 10^{10} t - 40\pi(y\sqrt{3} - z) + \frac{\pi}{3}\right]}$$

– O halde elektrik alanı

$$\boxed{\overline{E} = \eta\, \overline{H} \times \hat{a}_n}$$

$$'' = 12\,\hat{a}_x \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_y - \frac{1}{2}\hat{a}_z\right) \cos(wt - \overline{k}\cdot\overline{r} + \theta)$$

$$\Rightarrow \overline{E} = (6\sqrt{3}\,\hat{a}_z + 6\,\hat{a}_y) \cos(wt - \overline{k}\cdot\overline{r} + \theta)$$

ve sonuçta

$$\boxed{\overline{E}(y,z,t) = (6\sqrt{3}\,\hat{a}_z + 6\,\hat{a}_y) \cos\left[2.4\pi \times 10^{10} t - 40\pi(y\sqrt{3} - z) + \frac{\pi}{3}\right]}$$

elde edilir.

Örnek: Manyetik olmayan bir ortamda ilerleyen bir düzgün düzlem dalganın elektrik alanı

$$\overline{E}(z,t) = \hat{a}_y\, 1000\, e^{-2.3z} \cos\left(75 \times 10^{7} t - 14.328\, z + \frac{\pi}{3}\right) \quad V/m$$

veriliyor.

a) Ortamın σ ve ϵ_r değerlerini bulunuz.

b) İlgili $\bar{H}(z,t)$ manyetik alanını bulunuz.

Çözüm: Verilen elektrik alanından

a) $\boxed{\alpha = 2.3}$ ve $\boxed{\beta = 14.328}$ bulunur.

$$\boxed{\alpha + j\beta = \gamma = \sqrt{j\omega\mu_0(\sigma + j\omega\epsilon)}}$$ olduğundan

bilinenler yerine konursa

$$(2.3 + j14.328)^2 = j(75\times10^7)(4\pi\times10^{-7})(\sigma + j\omega\epsilon)$$

$$-200 + j65.91 = -(75\times10^7)^2 \cdot (4\pi\times10^{-7}) \cdot \left(\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\right)\epsilon_r + j\sigma\, 4\pi\times10^{-7}(75\times10^7)$$

$$-200 + j65.91 = -6.25\,\epsilon_r + j\sigma\, 942.478$$

$$\Rightarrow \epsilon_r = \frac{200}{6.25} = 32 \quad \text{ve} \quad \sigma = \frac{65.91}{942.478} = 0.07 \quad \text{bulunur.}$$

b) $$\boxed{\tilde{\bar{E}} = \hat{a}_y\, 1000\, e^{-2.3z}\, e^{-j14.328z}\, e^{j\pi/3}}$$ V/m yazılabilir.

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r\epsilon_0 - j\frac{\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\,\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}}}$$

$$\Rightarrow \eta_c = (120\pi)\frac{1}{\sqrt{32 - j\dfrac{0.07}{\left(75\times10^{7}\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\right)}}} = \frac{(120\pi)}{\sqrt{32 - j10.55}} = \frac{120\pi}{\left(33.7\angle{-18.26^\circ}\right)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \eta_c = \frac{120\pi}{5.8\angle{-9.13^\circ}} = 65\angle{9.13^\circ} = \underline{\underline{65\, e^{j0.051\pi}}}\ \Omega$$

O halde,

$$\tilde{\overline{H}} = -\hat{a}_x \frac{1000}{\eta_c} e^{-2.3z} e^{-j14.328z} e^{j\pi/3} = -\hat{a}_x 15.38\, e^{-2.3z} e^{-j14.328z} e^{j\pi/3} e^{-j0.05\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{H} = -\hat{a}_x 15.38\, e^{-2.3z} \cos(wt - 14.328z + 0.2823\pi)\ A/m}$$

— $\overline{E}$ ile $\overline{H}$ arasındaki **faz farkına** dikkat edilmelidir.

— Bunun nedeni **η'nın kompleks olması** veya ortamın **kayıplı** olmasıdır.

Örnek: Bir düzgün düzlem dalga $+z$ yönünde denizin içine doğru ilerlemektedir. Deniz suyu için $\epsilon_r = 72$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 4$ S/m ve $w = 10^8$ ise ve $z = 0$'daki manyetik alan

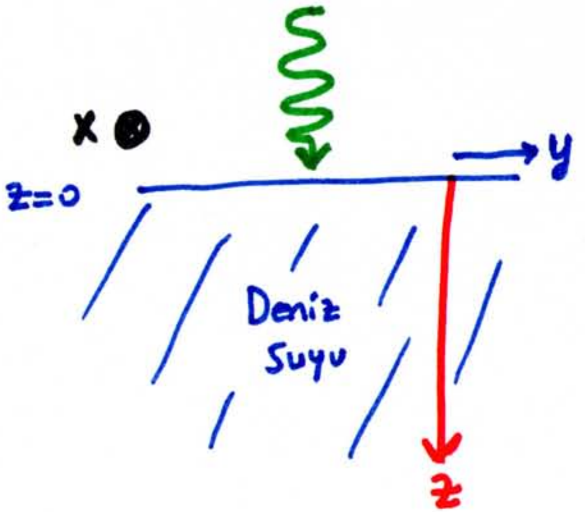
$$\overline{H}(0,t) = \hat{a}_y\, 0.3 \cos 10^8 t \quad A/m$$ veriliyorsa,

a) Deniz suyu için nüfuz derinliğini ve ortam empedansını bulunuz.

b) Denizde $\overline{E}(z,t)$ ve $\overline{H}(z,t)$'yi bulunuz.

c) Bu dalganın Poynting vektörünü hesaplayınız.

Çözüm: Problemin geometrisini anlamak için çizim yapmak yararlıdır.



a) Önce ortamı tanımlayalım.

$$\frac{\sigma}{w\epsilon} = \frac{4}{10^8 \cdot 72 \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}} = 20\pi \gg 1$$

Malzeme $\boxed{\text{İYİ İLETKENDİR.}}$ O halde

$$\boxed{\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \sqrt{\pi \cdot \frac{10^8}{2\pi} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4} = 15.85$$

Ortam empedansı ise

$$\boxed{\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} \cong \sqrt{\frac{j w \mu}{\sigma}} = (1+j)\frac{\alpha}{\sigma} = (1+j)\,3.96 = 5.6\, e^{j\pi/4}\ \Omega}$$

bulunur. O halde nüfuz derinliği

$$\boxed{\delta = \frac{1}{\alpha} = 6.3 \text{ cm}} \qquad \text{olur.}$$

b) $\overline{H}(z,t) = \hat{a}_y\, 0.3\, e^{-15.85 z} \cos(10^8 t - 15.85 z)$ A/m

$$\Rightarrow \tilde{\overline{E}}(z) = \hat{a}_x (0.3)\, \eta_c\, e^{-15.85 z} e^{-j 15.85 z}$$

$$\Rightarrow \overline{E}(z,t) = \hat{a}_x (1.68)\, e^{-15.85 z} \cos\left(10^8 t - 15.85 z + \frac{\pi}{4}\right)$$

c) $\boxed{\overline{P} = \overline{E} \times \overline{H} =} \hat{a}_x (1.68) e^{-15.85 z} \cos\left(10^8 t - 15.85 z + \frac{\pi}{4}\right) \times \hat{a}_y (0.3) e^{-15.85 z} \cos(10^8 t - 15.85 z)$

$$\text{"} = \hat{a}_z (0.504)\, e^{-2\alpha z} \cos\left(wt - \beta z + \frac{\pi}{4}\right) \cos(wt - \beta z)$$

$$\text{"} = \hat{a}_z (0.504) \frac{e^{-2\alpha z}}{2} \left[\cos\left(2wt - 2\beta z + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

çünkü $\boxed{\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]}$

ve sonuçta

$$\boxed{\bar{P} = \hat{a}_z \frac{(0.504)}{2} e^{-2\alpha z}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \underbrace{\cos\left(2wt - 2\beta z + \frac{\pi}{4}\right)}_{\text{zaman ortalaması sıfır!}}\right]}$$

Bunu $\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{\tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}}^*\}$ ile karşılaştıralım.

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\hat{a}_x (1.68)\, e^{-15.85z} e^{-j15.85z} e^{j\pi/4} \times \hat{a}_y (0.3)\, e^{-15.85z} e^{j15.85z}\right\}$$

$$" = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\hat{a}_z (0.504)\, e^{-2\alpha z} e^{j\pi/4}\right\}$$

$$" = \hat{a}_z \frac{0.504}{2} e^{-2\alpha z} \cos\frac{\pi}{4}$$

– Yani $\boxed{\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}}^*\}}$ ortalama (zamanda) Poynting vektörünü vermektedir. Bu konuyla tekrar ilgileneceğiz.

Örnek: $\tilde{\vec{E}} = (\hat{a}_y - j\,\hat{a}_z)\, e^{j\beta x}$ veriliyor. Dalganın kutuplanmasını inceleyiniz.

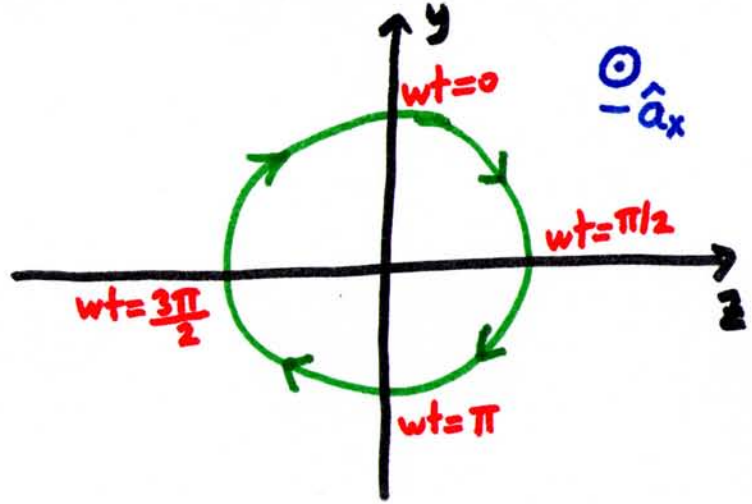
Çözüm: Kutuplanmanın dairesel olduğunu doğrudan söyleyebiliriz.

Zaman bölgesine dönersek,

$$\overline{E} = Re\left\{ \tilde{\overline{E}} e^{jwt} \right\} = Re\left\{ (\hat{a}_y - j\hat{a}_z) e^{jwt} e^{j\beta x} \right\}$$

$$\quad\quad = \hat{a}_y \cos(wt + \beta x) + \hat{a}_z \sin(wt + \beta x)$$

Gelen dalgaya bakarak kutuplanmayı belirlediğimiz için, eksenleri $-x$ yönü bize doğru olacak şekilde aşağıdaki gibi seçer ve $x=0$'da zamana karşı $|\overline{E}|$'nin ucunun grafiğini çizeriz.



Kutuplanma tipi DAİRESEL, yönü ise SAAT YÖNÜ, SOL EL veya NEGATİFTİR.

Anlık ve Ortalama Güç Yoğunlukları

Kayıplı bir ortamda $+z$ yönünde ilerleyen bir dalga düşünelim. Dalganın elektrik alanı x yönünde ise fazörü

$$\boxed{\tilde{\vec{E}} = \hat{a}_x E_x(z) = \hat{a}_x E_0 e^{-\gamma z} = \hat{a}_x E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}}$$

yazılabilir. Bu durumda,

$$\vec{E}(z,t) = \mathrm{Re}\left\{ \tilde{\vec{E}}(z) e^{j\omega t} \right\} = \hat{a}_x E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

ve

$$\boxed{\tilde{\vec{H}}(z) = \hat{a}_y H_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad \text{olur.}}$$

Burada $H_0 = E_0/\eta_c$ olduğundan

$$\tilde{\vec{H}} = \hat{a}_y \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\theta_{\eta_c}}$$

bulunur. Son eşitliği elde etmek için,

$$\boxed{\eta_c = |\eta_c| e^{j\theta_{\eta_c}}}$$

olduğu kullanılmıştır.

- η_c kayıplı ortamın empedansıdır ve kompleks bir sayıdır.

Zaman bölgesinde

$$\boxed{\overline{H}(z,t) = Re\left\{ \tilde{\overline{H}} e^{j\omega t} \right\} = \hat{a}_y \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta_{\eta_c})}$$

yazılır. Frekans ve zaman uzamları arasındaki bu geçiş, sinüzoidal zaman bağımlılığı olan nicelikleri içeren işlem ve/veya denklemler lineer olduğunda geçerlidir.

- Bu işlem, iki sinüzoidal niceliğin çarpımına uygulanırsa hatalı sonuç verir.

- $\boxed{\overline{P} = \overline{E} \times \overline{H}}$ böyle bir işlemdir ve bu yöntemin kullanımına uygun değildir. Bunun nedeni

$$\boxed{Re\left\{ \tilde{\overline{E}} e^{j\omega t} \right\} \times Re\left\{ \tilde{\overline{H}} e^{j\omega t} \right\} \neq Re\left\{ \tilde{\overline{E}} \times \tilde{\overline{H}} e^{j\omega t} \right\}}$$

olmasıdır.

— Anlık Poynting vektörünü düşünelim:

$$\boxed{\overline{P}(z,t) = \overline{E}(z,t) \times \overline{H}(z,t)}$$

$$" \quad = \mathrm{Re}\{\tilde{\overline{E}}\, e^{jwt}\} \times \mathrm{Re}\{\tilde{\overline{H}}\, e^{jwt}\}$$

$$" \quad = \frac{E_o^2}{|\eta_c|} e^{-2\alpha z} \mathrm{Cos}(wt-\beta z)\, \mathrm{Cos}(wt-\beta z-\theta\eta_c)\ \hat{a}_x \times \hat{a}_y$$

$$" \quad = \hat{a}_z \frac{E_o^2}{|\eta_c|} \frac{e^{-2\alpha z}}{2} \left[\mathrm{Cos}(wt-\beta z+wt-\beta z-\theta\eta_c) + \mathrm{Cos}(wt-\beta z-wt+\beta z+\theta\eta_c) \right]$$

$$\boxed{" \quad = \hat{a}_z \frac{E_o^2}{|\eta_c|} \frac{e^{-2\alpha z}}{2} \left[\mathrm{Cos}(2wt-2\beta z-\theta\eta_c) + \mathrm{Cos}(\theta\eta_c) \right] \quad (1)}$$

buluruz. Burada $\mathrm{Cos}x\,\mathrm{Cos}y = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Cos}(x+y) + \mathrm{Cos}(x-y)\right]$ kullandık.

— Öte yandan

$$\mathrm{Re}\{\tilde{\overline{E}} \times \tilde{\overline{H}}\, e^{jwt}\} = \mathrm{Re}\left\{ \hat{a}_z \frac{E_o^2}{|\eta_c|} e^{-2\alpha z} e^{-2j\beta z} e^{-j\theta\eta_c} e^{jwt} \right\}$$

$$\boxed{" \quad = \hat{a}_z \frac{E_o^2}{|\eta_c|} e^{-2\alpha z} \mathrm{Cos}(wt-2\beta z-\theta\eta_c) \quad (2)}$$

– (1) ve (2) birbirine eşit değildir.

– Bir EM dalga için, ortalama güç değeri genellikle anlık değerden daha önemlidir. (1)'den örneğimizin ortalama Poynting vektörü $\bar{P}_{av}(z)$ ifadesi

$$\boxed{\bar{P}_{av}(z) = \frac{1}{T}\int_0^T \bar{P}(z,t)\,dt = \hat{a}_z \frac{E_0^2}{2|\eta_c|} e^{-2\alpha z} \cos\theta_{\eta_c}} \quad W/m^2$$

bulunur. Burada $T = \frac{2\pi}{w} = \frac{1}{f}$ dalganın zaman periyodudur.

– İlk terim, yani

$$\cos(2wt - 2\beta z - \theta_{\eta_c})$$ iki kat frekanslı bir kosinüs fonksiyonudur. Bir periyotta ortalaması sıfırdır.

Şimdi $\bar{A}$ ve $\bar{B}$ kompleks vektörleri için,

$$\boxed{\begin{aligned} Re\{\bar{A}\} &= \frac{1}{2}(A + A^*) \\ Re\{\bar{B}\} &= \frac{1}{2}(B + B^*) \end{aligned}}$$

ve benzer şekilde yazabiliriz.

– Daha sonra

$$\mathcal{R}e\{\bar{A}\} \times \mathcal{R}e\{\bar{B}\} = \frac{1}{2}(\bar{A}+A^*) \times \frac{1}{2}(\bar{B}+\bar{B}^*)$$

$$'' \quad = \frac{1}{4}\left[\bar{A}\times\bar{B} + \bar{A}\times\bar{B}^* + \bar{A}^*\bar{B} + \bar{A}^*\bar{B}^*\right]$$

$$'' \quad = \frac{1}{4}\left\{ [(\bar{A}\times\bar{B}) + (\bar{A}\times\bar{B}^*)] + [(\bar{A}\times\bar{B}) + (\bar{A}\times\bar{B}^*)]^* \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{R}e\{\bar{A}\} \times \mathcal{R}e\{\bar{B}\} = \frac{1}{2}\mathcal{R}e\left\{(\bar{A}\times\bar{B}) + (\bar{A}\times\bar{B}^*)\right\}}$$ bulunur.

Şimdi bu sonucu $\bar{P}(z,t)$ ifadesine uygulayalım.

$$\bar{P}(z,t) = \mathcal{R}e\{\underbrace{\tilde{\bar{E}}(z)e^{jwt}}_{\bar{A}}\} \times \mathcal{R}e\{\underbrace{\tilde{\bar{H}}(z)e^{jwt}}_{\bar{B}}\}$$

$$\Rightarrow \bar{P}(z,t) = \frac{1}{2}\mathcal{R}e\left\{\underbrace{\tilde{\bar{E}}(z)\times\tilde{\bar{H}}(z)e^{2jwt}}_{\text{Zamanda ortalaması sıfırdır.}} + \tilde{\bar{E}}(z)\times\tilde{\bar{H}}^*(z)e^{jwt}e^{-jwt}\right\} \quad (*)$$

- $\overline{P}_{av}(z)$, $\overline{P}(z,t)$ bir periyot üzerinde integrallenip sonuç periyoda bölünerek bulunabilir. Yani

$$\boxed{\overline{P}_{av}(z) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \overline{P}(z,t)\, dt}$$

- Bu yapıldığında (*) denklemindeki ilk terimin ortalaması sıfır bulunur. İkinci terim zaman içermediğinden, bu terimin ortalaması kendisidir. Dolayısıyla,

$$\boxed{\overline{P}_{av}(z) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\tilde{\overline{E}}(z) \times \tilde{\overline{H}}^{*}(z)\right\}}$$

elde edilir. z yönü gelişigüzel seçildiğinden, bu sonuç herhangi bir yönde ilerleyen EM dalga için

$$\boxed{\overline{P}_{av} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\tilde{\overline{E}} \times \tilde{\overline{H}}^{*}\right\}}$$

ortalama Poynting vektörü

yazabiliriz.

Örnek: Bir kısa dikey akım elemanının $(I\,d\ell)$ <u>uzak alanı</u>

$$\tilde{\vec{E}}(R,\theta) = \hat{a}_\theta\, E_\theta(R,\theta) = \hat{a}_\theta \left(\frac{60\pi I\,d\ell}{\lambda R}\,\sin\theta\right) e^{-j\beta R} \qquad (V/m)$$

$$\tilde{\vec{H}}(R,\theta) = \hat{a}_\phi\, \frac{E_\theta(R,\theta)}{\eta_0} = \hat{a}_\phi \left(\frac{I\,d\ell}{2\lambda R}\,\sin\theta\right) e^{-j\beta R} \qquad (A/m)$$

veriliyor. $\lambda = 2\pi/\beta$'dır.

a) Anlık Poynting vektörünün ifadesini bulunuz.

b) Akım elemanı tarafından yayılan toplam ortalama gücü bulunuz.

Çözüm: a) $\vec{P}(R,\theta,t) = \vec{E}(R,\theta,t) \times \vec{H}(R,\theta,t)$

$$\text{''} \quad = \mathrm{Re}\left\{\tilde{\vec{E}}(R,\theta)\, e^{j\omega t}\right\} \times \mathrm{Re}\left\{\tilde{\vec{H}}(R,\theta)\, e^{j\omega t}\right\}$$

$$\text{''} \quad = \underbrace{(\hat{a}_\theta \times \hat{a}_\phi)}_{\hat{a}_R}\,(30\pi)\,\frac{I^2\,d\ell^2}{\lambda^2 R^2}\,\sin^2\theta\,\cos^2(\omega t - \beta R) \quad W/m^2$$

b) $$\vec{P}_{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}}^*\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{60\pi I\,d\ell}{\lambda R}\sin\theta\,\frac{I\,d\ell}{2\lambda R}\sin\theta\; e^{j\beta R} e^{-j\beta R}\right\}$$

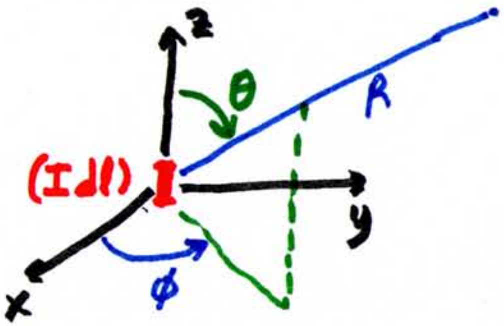
$$(\hat{a}_\theta \times \hat{a}_\phi)$$

$$\overline{P}_{av} = 15\pi \left(\frac{I\,dl}{\lambda R} \sin\theta\right)^2 \hat{a}_R$$

— Toplam yayılan ortalama güç $\overline{P}_{av}(R,\theta)$'nın R yarıçaplı bir küre üzerinde integrali alınarak bulunabilir. Akım elemanını çevreleyen herhangi bir yüzey seçilebilir ve sonuç aynı olurdu. Ancak küre üzerinde integral almak bu örnek için çok daha kolaydır.

$$P_{av_T} = \oint_S \overline{P}_{av}(R,\theta) \cdot \hat{a}_R \, ds$$

$$'' = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left[15 \left(\frac{I\,dl}{\lambda R}\right)^2 \sin^2\theta\right] R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$



$$\Rightarrow \boxed{P_{av_T} = 40\pi^2 \left(\frac{dl}{\lambda}\right)^2 I^2 \text{ Watt}}$$

Örnek: Dairesel kutuplanmış bir dalganın anlık Poynting vektörünün sabit yani zamandan bağımsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\tilde{\bar{E}} = \hat{a}_x E_o e^{-jkz} - j\,\hat{a}_y E_o e^{-jkz}$ alalım. O zaman

$$\tilde{\bar{H}} = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \tilde{\bar{E}} = -\frac{1}{j\omega\mu} \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_o e^{-jkz} & -jE_o e^{-jkz} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{\bar{H}} = -\frac{1}{j\omega\mu} \left[\hat{a}_x (jk)(-j) E_o e^{-jkz} + \hat{a}_y (-jk) E_o e^{-jkz} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{H}} = \hat{a}_x (j) \frac{E_o}{\eta} e^{-jkz} + \hat{a}_y \frac{E_o}{\eta} e^{-jkz}}$$

Zaman bölgesinde ise,

$$\bar{E}(z,t) = \mathcal{R}e\left\{ \tilde{\bar{E}} e^{j\omega t} \right\} = \hat{a}_x E_o \cos(\omega t - kz) + \hat{a}_y E_o \sin(\omega t - kz)$$

$$\bar{H}(z,t) = \mathcal{R}e\left\{ \tilde{\bar{H}} e^{j\omega t} \right\} = -\hat{a}_x \frac{E_o}{\eta} \sin(\omega t - kz) + \hat{a}_y \frac{E_o}{\eta} \cos(\omega t - kz)$$

– Anlık Poynting vektörü ise

$$\bar{P}(z,t) = \Re e\left\{\tilde{\bar{E}}\, e^{jwt}\right\} \times \Re e\left\{\tilde{\bar{H}}\, e^{jwt}\right\} = \bar{E}(z,t) \times \bar{H}(z,t)$$

$$\quad " = \hat{a}_z \left[\frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(wt-kz) + \frac{E_0^2}{\eta} \sin^2(wt-kz)\right]$$

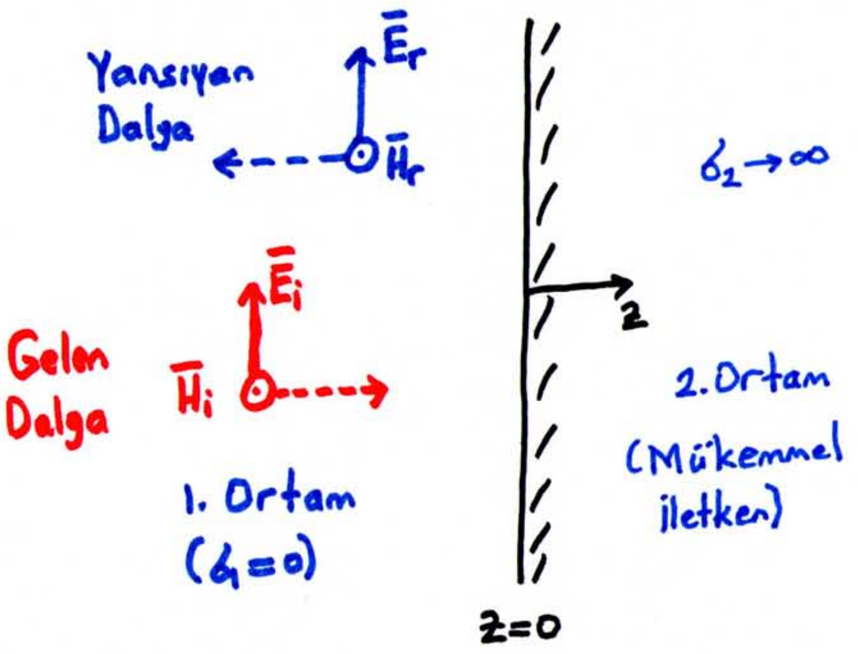
$$\Rightarrow \boxed{\bar{P}(z,t) = \hat{a}_z \frac{E_0^2}{\eta} \quad (W/m^2)}$$

ki bu da zamandan bağımsızdır, yani sabittir.

Düzlem Dalgaların Yansıma ve Kırılması

- Şimdiye kadar düzgün düzlem dalgaların sınırsız, homojen ortamlarda yayılmasını inceledik.
- Gerçekte dalgalar, değişik parametreli birçok ortamdan oluşan bölgelerde yayılırlar.

Düzlem İletken Sınıra Dik Gelen Dalga



$(\bar{E}_i, \bar{H}_i)$ gelen dalgası kayıpsız bir ortamdan $(\sigma_1 = 0)$, mükemmel iletken üzerine gelsin.

Gelen dalganın ilerleme yönünü $+z$ alalım.

- Bildiğimiz gibi mükemmel iletken içinde alan sıfır olacaktır. Yani dalga tümüyle yansır.

- Gelen dalgayı yazalım:

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{\bar{E}}_i(z) &= \hat{a}_x E_{io}\, e^{-jk_1 z} \\ \tilde{\bar{H}}_i(z) &= \hat{a}_y \frac{E_{io}}{\eta_1}\, e^{-jk_1 z}\end{aligned}}$$

- Bu ifadede,

$$\boxed{\begin{aligned} &E_{io} \longrightarrow \text{Genlik} \\ &\eta_1 \longrightarrow \text{1. Ortamın empedansı} \\ &k_1 \longrightarrow \text{1. Ortamın faz sabitidir.}\end{aligned}}$$

- Gelen dalganın Poynting vektörü

$$\boxed{\bar{\mathcal{P}}_i(z) = \bar{E}_i(z) \times \bar{H}_i(z) = \hat{a}_z\, P_i(z)}$$

olur. Yani enerji $+\hat{a}_z$ yönünde gelmektedir.

- Birinci ortamda z'nin değerlerinin negatif olduğuna dikkat edilmelidir.

- 2. Ortamda $\overline{E}_2 = 0$, $\overline{H}_2 = 0$ geçerlidir. Çünkü bu ortam mükemmel iletkendir.
- Sınırdan $z>0$ bölgesine hiçbir dalga iletilemez.
- Enerji $+z$ yönünde kayıpsız bir ortamda ilerlediğinden ve 2. ortama giremediğinden dolayı dalga geri yansıyacaktır.
- Bu gerçek, "dalga bir yansıyan dalgaya neden olur" şeklinde ifade edilir.
- Yansıyan dalga $(\tilde{\overline{E}}_r, \tilde{\overline{H}}_r)$ ise

$$\boxed{\tilde{\overline{E}}_r(z) = \hat{a}_x E_{ro} e^{jk_1 z}}$$

yazılabilir. Bu dalga, $-z$ yönünde ilerlemektedir.

- 1. Ortamdaki toplam elektrik alanı,

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{\overline{E}}_1(z) &= \tilde{\overline{E}}_i(z) + \tilde{\overline{E}}_r(z) \\ &= \hat{a}_x \left(E_{io} e^{-jk_1 z} + E_{ro} e^{jk_1 z}\right) \end{aligned}}$$

bulunur.

– İki ortamın sınırında $\bar{E}$'nin teğet bileşeni süreklidir. Bu nedenle

$$\boxed{\tilde{\bar{E}}_{1t} = 0 = \tilde{\bar{E}}_{2t}}$$

sağlanmalıdır.

– $\bar{E}$'nin tümü sınıra teğet olduğundan

$$\boxed{\begin{aligned} E_{io} + E_{ro} &= E_{2t}(0) = 0 \\ \Rightarrow E_{ro} &= -E_{io} \end{aligned}}$$

buluruz. O halde,

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{\bar{E}}_1(z) &= \hat{a}_x\left(E_{io}e^{-jk_1z} + E_{ro}e^{jk_1z}\right) \\ \text{"} &= \hat{a}_x E_{io}\left(e^{-jk_1z} - e^{jk_1z}\right) \\ \text{"} &= -2\,\hat{a}_x j\, E_{io} \operatorname{Sin} k_1 z \end{aligned}}$$

elde edilir.

– Yansıyan dalganın manyetik alanı $\tilde{\bar{H}}_r$ ise

$$\tilde{\bar{H}}_r = \frac{1}{\eta_1}\,\hat{a}_{n_r} \times \tilde{\bar{E}}_r(z)$$

$$\text{"} = \frac{1}{\eta_1}\,(-\hat{a}_z) \times \tilde{\bar{E}}_r(z)$$

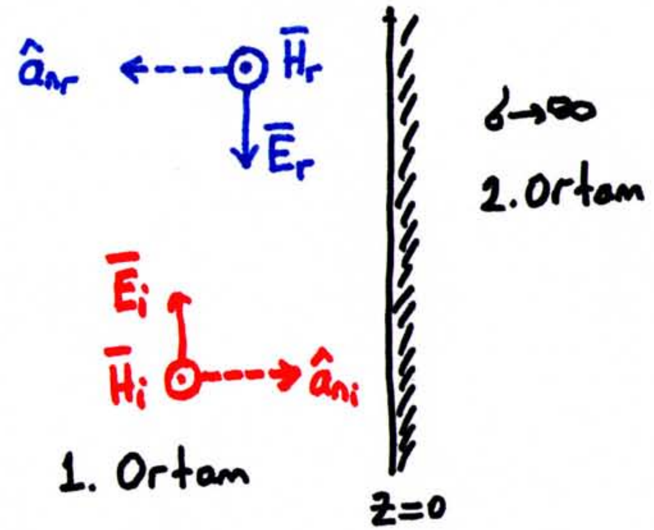
$$\tilde{\bar{H}}_r(z) = -\hat{a}_y \frac{E_{ro}}{\eta_1} e^{jk_1 z} = \hat{a}_y \frac{E_{io}}{\eta_1} e^{jk_1 z}$$

olur. 1. Ortamdaki toplam manyetik alan ise

$$\tilde{\bar{H}}_1(z) = \tilde{\bar{H}}_i(z) + \tilde{\bar{H}}_r(z) = \hat{a}_y \frac{E_{io}}{\eta_1}\left(e^{-jk_1 z} + e^{jk_1 z}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{H}}_1(z) = 2\,\hat{a}_y \frac{E_{io}}{\eta_1} \cos(k_1 z)}$$

— Böylelikle E_{io} pozitif alınırsa vektörlerin gerçek yönleri aşağıdaki gibi olur.



— Görüldüğü gibi $\bar{E}$ ters dönmüş, ancak $\bar{H}$ yönünü değiştirmemiştir.

- Anlık alan vektörlerine bakalım:

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{E}_1(z,t) &= \mathrm{Re}\{\tilde{\overline{E}}_1(z)e^{j\omega t}\} = \hat{a}_x\, 2E_{i0} \sin k_1 z \sin \omega t \\ \overline{H}_1(z,t) &= \mathrm{Re}\{\tilde{\overline{H}}_1(z)e^{j\omega t}\} = \hat{a}_y \frac{2E_{i0}}{\eta_1} \cos k_1 z \cos \omega t \end{aligned}}$$

- Toplam $\overline{E}$ ve $\overline{H}$ **duran dalga** olarak adlandırılır. Çünkü $\overline{E}_1(z,t)$ ve $\overline{H}_1(z,t)$'nin maksimum ve minimumları sınırdan sabit uzaklıklardadır. Bunları inceleyelim:

- $\overline{E}_1(z,t)$'nin sıfırları (veya $\overline{H}_1(z,t)$'nin maksimumları)

$$\sin k_1 z = 0 \Rightarrow k_1 z = -n\pi$$

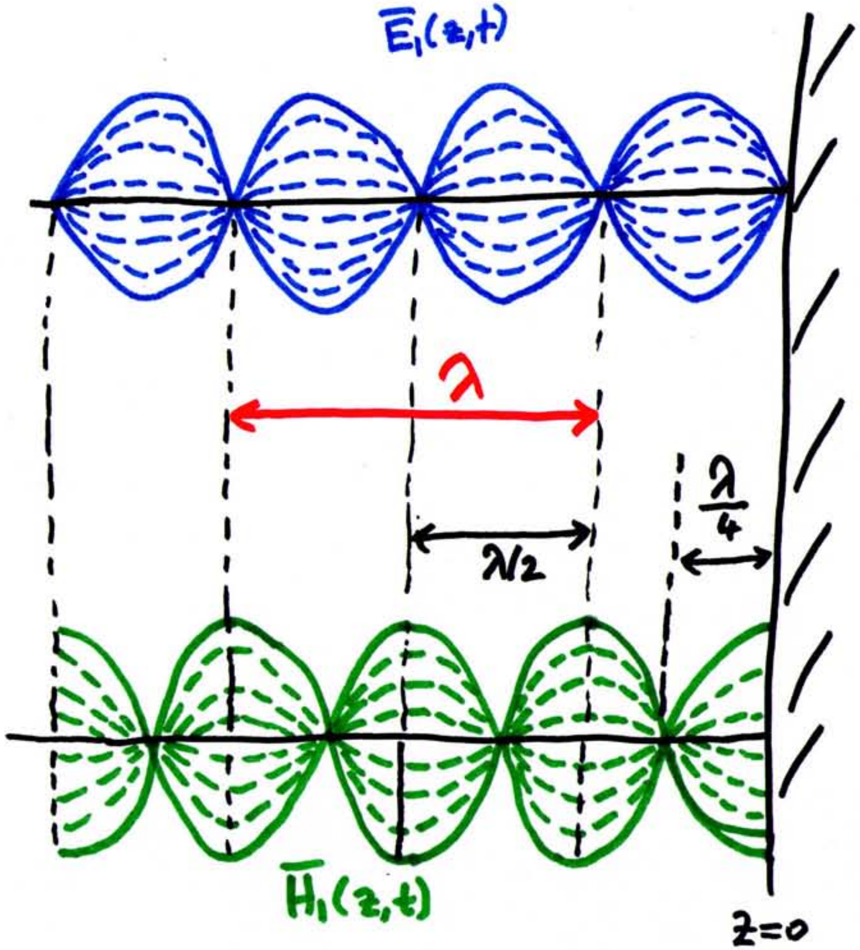
$$\Rightarrow \boxed{z = -n\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

- $\overline{E}_1(z,t)$'nin maksimumları (veya $\overline{H}_1(z,t)$'nin sıfırları)

$$\cos k_1 z = 0 \Rightarrow k_1 z = -(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z = -(2n+1)\frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

- Şimdi 1. ortamda alanları çizelim.



Mükemmel iletken

- Düğüm noktaları sabittir ve hareket etmez.
- Bunlar ilerleyen değil, duran dalgalardır. Ters yönlerde ilerleyen, eşit genlikli iki dalganın toplamından oluşurlar.

GÖZLEMLER

1. E_1 iletken sınırda (teğet) sıfırdır. ($E_{r0} = -E_{i0}$)
[~ V ⟷ kısa devre]

2. H_1 iletken sınırda maksimumdur. ($H_{i0} = H_{r0}$) [~ i ⟷ kısa devre]

3. Duran dalgada $\overline{E}$ ve $\overline{H}$ arasında zamanda 90° faz farkı vardır. Uzayda grafikleri $\frac{\lambda}{4}$ kayıktır.

Örnek: Boş uzayda ilerleyen

$$\boxed{\tilde{\bar{E}}_i = \hat{a}_y E_o \, e^{-j\frac{2\pi}{3}z}}$$

düzgün düzlem dalgası $z=0$'daki mükemmel iletken sınırla karşılaşmaktadır. $E_0 = 1$ V/m alarak,

a) f ve λ'yı bulunuz.

b) $\tilde{\bar{E}}_i$ ve $\tilde{\bar{H}}_i$ fazörlerini yazınız.

c) $\tilde{\bar{E}}_r$ ve $\tilde{\bar{H}}_r$ fazörlerini yazınız.

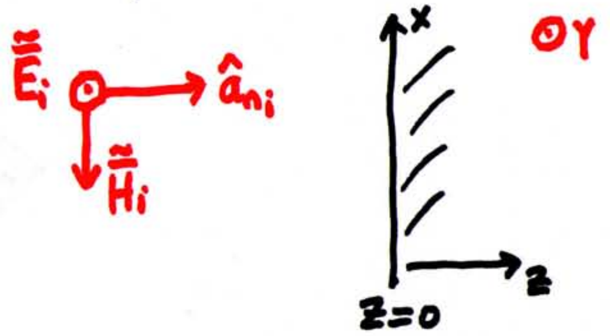
d) Anlık $\bar{E}_i$ ve $\bar{H}_i$ ifadelerini,

e) $\bar{E}_r(z,t)$ ve $\bar{H}_r(z,t)$ ifadelerini,

f) $\bar{E}_{1top}(z,t)$ ve $\bar{H}_{1top}(z,t)$ ifadelerini yazınız.

g) $\bar{E}_{1top}$'un ilk sıfırının (düzlem sınıra en yakın olanı) nerede olduğunu bulunuz.

Çözüm: Önce problem geometrisini çizelim.



a) $\tilde{\vec{E}}_i = \hat{a}_y E_{i0} e^{-jk_1 z} = \hat{a}_y \, 1 \, e^{-j\frac{2\pi}{3}z} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{3} = w\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{w}{c}$

O halde, $w = 2\pi f = kc = \frac{2\pi}{3} \cdot 3 \cdot 10^8 = 2\pi \times 10^8$ rad/s

$\Rightarrow f = \frac{w}{2\pi} = 100$ MHz ve $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^8}{10^8} = 3$ m.

Veya, $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = 3$ m ve $f = \frac{c}{\lambda} = 100$ MHz.

b) $\tilde{\vec{H}}_i(z) = \frac{1}{\eta_0} \hat{a}_z \times \tilde{\vec{E}}_i = \frac{1}{120\pi} \underbrace{\hat{a}_z \times \hat{a}_y}_{-\hat{a}_x} e^{-j\frac{2\pi}{3}z} = -\frac{\hat{a}_x}{120\pi} e^{-j\frac{2\pi}{3}z}$

c) $\tilde{\vec{E}}_r(z) = -\hat{a}_y e^{j\frac{2\pi}{3}z}$

$\Rightarrow \tilde{\vec{H}}_r(z) = \frac{1}{120\pi}(-\hat{a}_z \times -\hat{a}_y) e^{j\frac{2\pi}{3}z} = -\frac{\hat{a}_x}{120\pi} e^{j\frac{2\pi}{3}z}$

d) $\overline{E}_i(z,t) = \hat{a}_y \cos(wt - \frac{2\pi}{3} z)$

$\overline{H}_i(z,t) = \frac{-\hat{a}_x}{120\pi} \cos(wt - \frac{2\pi}{3} z)$

e) $\overline{E}_r(z,t) = -\hat{a}_y \cos(wt + \frac{2\pi}{3} z)$

$\overline{H}_r(z,t) = \frac{-\hat{a}_x}{120\pi} \cos(wt + \frac{2\pi}{3} z)$

f) $\overline{E}_{1top}(z,t) = \overline{E}_i(z,t) + \overline{E}_r(z,t) = \hat{a}_y \left[\cos(wt - \frac{2\pi}{3} z) - \cos(wt + \frac{2\pi}{3} z) \right]$

$\Rightarrow \overline{E}_{1top}(z,t) = 2\hat{a}_y \sin wt \sin \frac{2\pi}{3} z$

Diğer yoldan fazörleri kullanırsak,

$\tilde{\overline{E}}_{1top}(z) = \tilde{\overline{E}}_i(z) + \tilde{\overline{E}}_r(z) = \hat{a}_y \left[e^{-j\frac{2\pi}{3}z} - e^{j\frac{2\pi}{3}z} \right]$

$\quad " \quad = -2j\hat{a}_y \sin \frac{2\pi}{3} z$

$\overline{E}_{1top}(z,t) = Re\left\{ \tilde{\overline{E}}_{1top}(z) e^{jwt} \right\} = Re\left\{ 2\hat{a}_y \sin \frac{2\pi}{3} z \, e^{j(wt - \frac{\pi}{2})} \right\}$

$\quad " \quad = 2\hat{a}_y \sin wt \sin \frac{2\pi}{3} z$

f) $\tilde{\overline{H}}_{1top}(z) = \tilde{\overline{H}}_i(z) + \tilde{\overline{H}}_r(z)$

$$'' = -\frac{\hat{a}_x}{120\pi}\left[e^{-j\frac{2\pi}{3}z} + e^{j\frac{2\pi}{3}z}\right]$$

$$'' = -\frac{\hat{a}_x}{120\pi}\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi}{3}z\right) \qquad (A/m)$$

O halde,

$$\overline{H}_{1top}(z,t) = \mathrm{Re}\left\{\tilde{\overline{H}}_{1top}(z)\, e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{-\frac{\hat{a}_x}{120\pi}\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi}{3}z\right) e^{j\omega t}\right\}$$

$$'' = -\frac{\hat{a}_x}{120\pi}\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi}{3}z\right)\mathrm{Cos}\,\omega t \qquad (A/m)$$

g) ilk sıfır, sınırı saymazsak,

$z = -\frac{\lambda}{2} = -\frac{3}{2}$ m'de oluşur.

Örnek: Bir düzgün düzlem dalganın genliği 120π, frekansı 100 MHz'dir ve katsayısı bilinmeyen bir dielektrik ortamda ($\mu = \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$) ilerlemektedir. Dalga $+z$ yönünde ilerlerken $z=0$'da mükemmel iletken bir sınırla karşılaştığında, manyetik (toplam) alanın ilk minimumu $z=-25$ cm'de oluşmaktadır.

a) Gelen dalganın elektrik alan fazörünü yazınız. $\bar{E}$, x yönündedir.

b) Ortamın bağıl dielektrik katsayısını bulunuz.

c) Gelen dalganın manyetik alan fazörünü yazınız.

d) Yansıyan dalganın elektrik ve manyetik alan fazörünü yazınız.

Çözüm: a) Manyetik alan toplamı iletken sınırda maksimumdur ve ilk minimumu $z = -\frac{\lambda}{4}$'te oluşur. O halde,

$$-\frac{\lambda}{4} = -25 \text{ cm} \Rightarrow \lambda = 100 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = 1 \text{ m}} \quad \text{bulunur.}$$

O halde, $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi$ olur ve elektrik alan fazörü

$$\boxed{\tilde{\bar{E}}_i = \hat{a}_x\,(120\pi)\,e^{-j2\pi z}} \quad (V/m)$$

elde edilir. Şimdi, dielektrik katsayısını bulmalıyız.

b) $\boxed{k = w\sqrt{\mu\epsilon}}$ olduğundan,

$$k = 2\pi = 2\pi \times 10^8 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}\,\sqrt{\epsilon_r}$$

$$\Rightarrow\ 2\pi = \frac{2\pi \times 10^8}{3\times 10^8}\sqrt{\epsilon_r} \Rightarrow \sqrt{\epsilon_r} = 3 \text{ ve}$$

$$\boxed{\epsilon_r = 9}$$ bulunur.

c) Ortam empedansı:

$$\boxed{\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{120\pi}{3} = 40\pi\ \Omega$$

olduğundan, $\tilde{\bar{H}} = \frac{1}{\eta}\,\hat{a}_n \times \tilde{\bar{E}}$ kullanılarak

$$\tilde{\bar{H}} = \frac{1}{40\pi}\,\hat{a}_z \times \hat{a}_x\,(120\pi)\,e^{-j2\pi z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{H}}_i = \hat{a}_y\,(3)\,e^{-j2\pi z}} \quad (A/m) \text{ bulunur.}$$

d) Yansıyan dalgada elektrik alanın ters döndüğünü, manyetik alanın ise aynı yönde kaldığını hatırlayınız.

O halde,

$$\boxed{\tilde{\bar{E}}_r = -\hat{a}_x\,(120\pi)\,e^{j2\pi z}} \quad (V/m)$$

$$\tilde{\bar{H}}_r = \frac{1}{\eta}\,\hat{a}_{n_r} \times \tilde{\bar{E}}_r = \frac{1}{40\pi}\left[(-\hat{a}_z)\times(-\hat{a}_x)\right]120\pi\, e^{j2\pi z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{H}}_r = \hat{a}_y\,(3)\,e^{j2\pi z}} \quad (A/m)$$

Ayrıca,

$$\bar{P}_{iav} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\tilde{\bar{E}}_i \times \tilde{\bar{H}}_i^{*}\right\} = \frac{1}{2}\times(120\pi)\times 3\times\hat{a}_z = \underline{\underline{180\pi\,\hat{a}_z}} \quad (W/m^2)$$

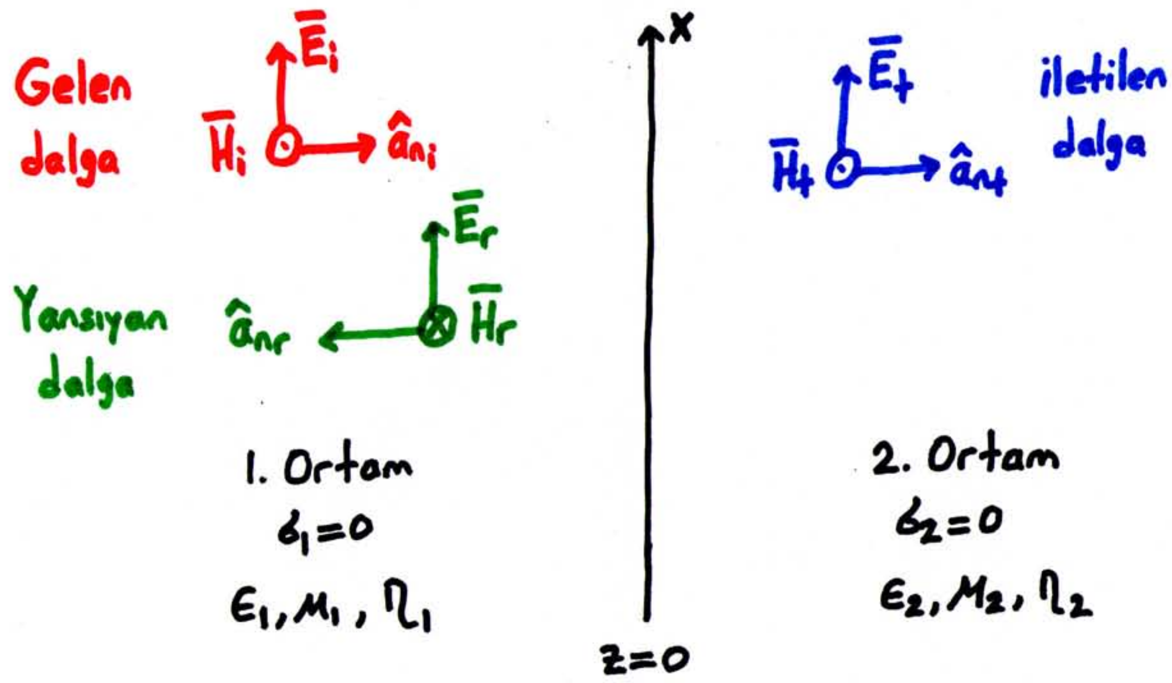
ve

$$\bar{P}_{rav} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\tilde{\bar{E}}_r \times \tilde{\bar{H}}_r^{*}\right\} = \frac{1}{2}\,(120\pi)\times 3\times(-\hat{a}_x)\times(\hat{a}_y)$$

$$'' \quad = \underline{\underline{-180\pi\,\hat{a}_z}} \quad (W/m^2)$$

olur. Böylece 2. ortama iletilen güç sıfırdır. Çünkü yansıyan ortalama güç gelen ortalama güce eşittir.

Dielektrik Sınıra Dik Gelen Dalga



– Dik gelme durumu, gelen dalganın ilerleme yönünü gösteren vektörün sınır yüzeyinin normaline paralel olduğu durumdur.

– Gelen dalgayı yazalım:

$$\tilde{\bar{E}}_i(z) = \hat{a}_x E_{i0} e^{-jk_1 z}$$

$$\tilde{\bar{H}}_i(z) = \hat{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-jk_1 z}$$

$z=0$'daki sınırda ortam süreksizliği olduğundan gelen dalganın bir kısmı ilk ortama yansıyacak, diğer kısmı ise 2. ortama iletilecektir.

a) Yansıyan dalga:

$$\tilde{\bar{E}}_r(z) = \hat{a}_x E_{r0}\, e^{jk_1 z}$$

$$\tilde{\bar{H}}_r(z) = (-\hat{a}_z)\times\frac{1}{\eta_1}\tilde{\bar{E}}_r(z) = -\hat{a}_y \frac{E_{r0}}{\eta_1} e^{jk_1 z}$$

b) İletilen dalga:

$$\tilde{\bar{E}}_t(z) = \hat{a}_x E_{t0}\, e^{-jk_2 z}$$

$$\tilde{\bar{H}}_t(z) = \hat{a}_z \times \frac{1}{\eta_2}\tilde{\bar{E}}_t(z) = \hat{a}_y \frac{E_{t0}}{\eta_2} e^{-jk_2 z}$$

— E_{r0} ve E_{t0}, sırasıyla, yansıyan ve iletilen dalgaların genliğidir.

— $\bar{E}_r$ ve $\bar{E}_t$'nin yönlerini istediğimiz gibi ($\bar{E}_i$'ye paralel) aldığımıza dikkat edilmelidir.

- E_{ro} ve E_{to}'ın işaretlerinin ne olduğu, ilgili iki ortamın parametrelerine bağlı olacaktır.
- E_{ro} ve E_{to}'ın belirlenmesi için iki denkleme ihtiyaç vardır.

Sınır Koşulu: $z=0$'da teğet elektrik ve manyetik alan süreklidir.

$$\tilde{E}_i(0) + \tilde{E}_r(0) = \tilde{E}_t(0) \Rightarrow \boxed{E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \qquad (1)}$$

$$\tilde{H}_i(0) + \tilde{H}_r(0) = \tilde{H}_t(0) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\eta_1}(E_{i0} - E_{r0}) = \frac{E_{t0}}{\eta_2} \qquad (2)}$$

(1) & (2) denklemlerinin ortak çözümü

$$E_{r0} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_{i0} = \Gamma E_{i0}$$

ve

$$E_{t0} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_{i0} = \tau E_{i0}$$

Sonuçlarını verir.

— Burada,

$$\boxed{\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1} = \frac{E_{ro}}{E_{io}} \\ \tau &= \frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1} = \frac{E_{to}}{E_{io}} \end{aligned}}$$

YANSIMA KATSAYISI

İLETİM KATSAYISI

tanımlanmıştır.

— Γ, η_2 ve η_1 değerlerine göre pozitif veya negatif olabilir. τ ise her zaman pozitiftir.

— Ortamlardan biri kayıplı ise bu katsayılar kompleks olur. Bunun sonucu olarak bir faz kayması beklenir.

— Kayıplı ortam varsa, zayıflama sabiti de ilgili alan ifadelerinde kullanılmalıdır.

— 2. Ortam mükemmel iletken ise $\eta_2=0$ olur. Böylece $\Gamma=-1$ ve $\tau=0$ elde edilir. Bu sonuç daha önce bulunanla aynıdır.

– İlk duruma dönersek, birinci ortamdaki toplam alan,

$$\tilde{\bar{E}}_1(z) = \tilde{\bar{E}}_i(z) + \tilde{\bar{E}}_r(z)$$

$$\text{"} = \hat{a}_x E_{i0} \left(e^{-jk_1 z} + \Gamma e^{jk_1 z} \right)$$

$$\text{"} = \hat{a}_x E_{i0} \left[e^{-jk_1 z} + \Gamma \left(e^{jk_1 z} + e^{-jk_1 z} - e^{-jk_1 z} \right) \right]$$

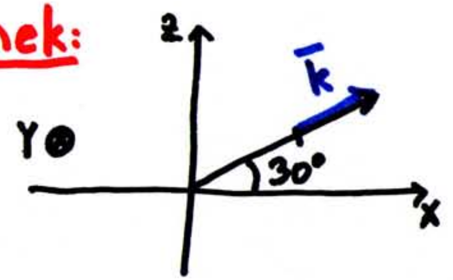
$$\text{"} = \hat{a}_x E_{i0} \left(1+\Gamma \right) e^{-jk_1 z} + \Gamma \left(e^{jk_1 z} - e^{-jk_1 z} \right)$$

$$\Rightarrow \tilde{\bar{E}}_1(z) = \underbrace{\hat{a}_x E_{i0} \tau e^{-jk_1 z}}_{\text{ilerleyen dalga}} + \underbrace{\Gamma 2j \sin k_1 z}_{\text{duran dalga}}$$

– Görüldüğü gibi ilk ortamdaki toplam alan kısmen duran dalga, kısmen ilerleyen dalga yapısındadır.

Bunun nedeni 2. ortamdan kısmi yansıma olmasıdır.

Örnek:



Bir düzgün düzlem dalganın genliği 120π (V/m), frekansı 1 GHz'dir ve $\bar{k}$ vektörü şekilde gösterildiği gibi x-z düzlemindedir.

Dalganın manyetik alanı $+y$ yönünde ise ve ortam boş uzay ise,

a) Dalganın $\bar{k}$ vektörünü,

b) $\tilde{\bar{E}}$ fazörünü,

c) $\tilde{\bar{H}}$ fazörünü,

d) Ortalama Poynting vektörü $\bar{P}_{av}$'yi bulunuz.

Çözüm: a) Dalga boş uzayda ilerlediğinden,

$$\epsilon = \epsilon_0, \quad \mu = \mu_0 \quad \text{ve} \quad k = w\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{w}{c}$$

ve $$k = \frac{2\pi \times 1 \times 10^9}{3 \times 10^8} = \frac{20\pi}{3} \text{ rad/m}$$

Ayrıca ilerleme yönündeki birim vektör,

$$\boxed{\hat{a}_n = \cos 30^\circ \hat{a}_x + \sin 30^\circ \hat{a}_z = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_x + \frac{1}{2}\hat{a}_z}$$

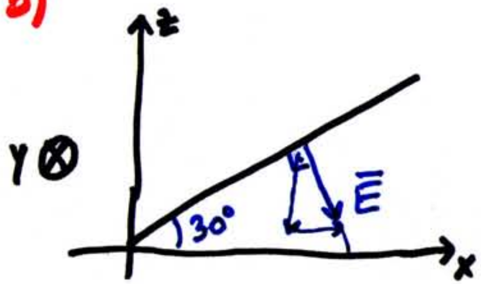
bulunur.

– O halde $\bar{k}$

$$\bar{k} = k\,\hat{a}_n = \frac{20\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{a}_x + \frac{1}{2}\,\hat{a}_z\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{k} = \frac{10\pi}{3}\left(\sqrt{3}\,\hat{a}_x + \hat{a}_z\right)}$$ bulunur.

b)



$$\sin 30° = \frac{E_x}{|E|} \Rightarrow E_x = \frac{1}{2} \times 120\pi = 60\pi$$

$$\cos 30° = -\frac{E_z}{|E|} \Rightarrow E_z = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times 120\pi = 60\pi\sqrt{3}$$

$$\bar{k}\cdot\bar{r} = \frac{10\pi}{3}\left(\sqrt{3}\,\hat{a}_x + \hat{a}_z\right)\cdot\left(x\,\hat{a}_x + y\,\hat{a}_y + z\,\hat{a}_z\right)$$

$$\text{"} = \frac{10\pi}{3}\left(x\sqrt{3} + z\right)$$

O halde $\tilde{\bar{E}}$ fazörünü yazabiliriz:

$$\tilde{\bar{E}} = \left(E_x\,\hat{a}_x + E_z\,\hat{a}_z\right) e^{-j\,\bar{k}\cdot\bar{r}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{E}} = 60\pi\left(\hat{a}_x - \sqrt{3}\,\hat{a}_z\right) e^{-j\frac{10\pi}{3}\left(x\sqrt{3} + z\right)}} \quad (V/m)$$

c) $\tilde{\bar{H}}$'nin $\hat{a}_y$ yönünde olduğunu biliyoruz.

$$\tilde{\bar{H}} = \frac{1}{\eta} |\tilde{\bar{E}}| \, \hat{a}_y \, e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$$

$$\Rightarrow \tilde{\bar{H}} = \hat{a}_y \frac{120\pi}{120\pi} e^{-j\frac{10\pi}{3}(x\sqrt{3}+z)} = \hat{a}_y e^{-j\frac{10\pi}{3}(x\sqrt{3}+z)} \quad (A/m)$$

d) Ortalama Poynting vektörünü yazarsak,

$$\boxed{\bar{P}_{av} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ \tilde{\bar{E}} \times \tilde{\bar{H}}^* \right\}}$$

$$\text{"} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ 60\pi (\hat{a}_x - \sqrt{3}\hat{a}_z) e^{-j[\,]} \times \hat{a}_y e^{+j[\,]} \right\}$$

$$\Rightarrow \bar{P}_{av} = \frac{1}{2} \left\{ 60\pi (\hat{a}_x \times \hat{a}_y) - 60\pi\sqrt{3} (\hat{a}_z \times \hat{a}_y) \right\}$$

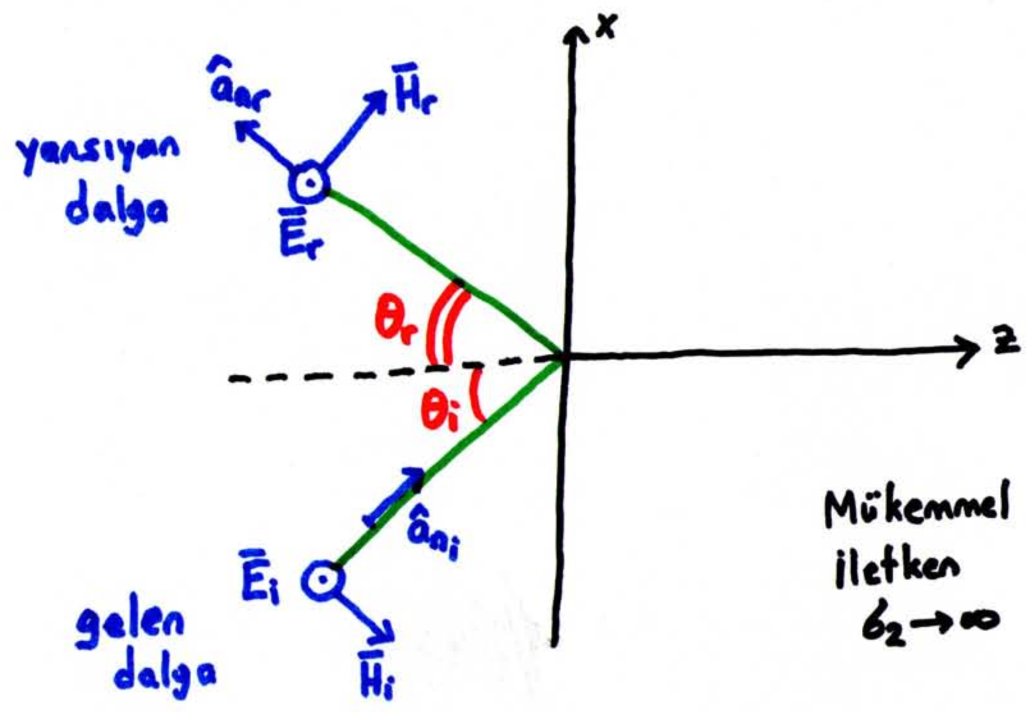
$$\Rightarrow \bar{P}_{av} = \frac{60\pi}{2} \left[\hat{a}_z + \sqrt{3}\hat{a}_x \right] \quad W/m^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{P}_{av} = 60\pi \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_x + \frac{1}{2}\hat{a}_z \right] = 60\pi \, \hat{a}_n \quad W/m^2}$$

Görüldüğü gibi güç, dalga ile aynı yönde ilerlemektedir.

Mükemmel İletken Sınıra Eğik Gelen Dalga

– Bir düzgün düzlem dalga, mükemmel iletken sınıra eğik geldiğinde Yansıyan dalganın davranışı gelen dalganın kutuplanmasına bağlıdır.



Geliş Düzlemi: Gelen dalganın yayılma yönünü gösteren vektör ile sınır yüzey normalini barındıran düzlemdir. Şekilde geliş düzlemi x-z düzlemidir.

- Herhangi bir yönde kutuplanmış olan bir $\bar{E}_i$, HER ZAMAN geliş düzlemine DİK ve PARALEL iki bileşene ayrılabilir.
- Bu nedenle bu iki durumu ayrı inceleyeceğiz.
- Genel durum bu iki durumdan elde edilen sonuçların toplamı (üst üste bindirilmesi) ile bulunabilir.
- Matematiksel olarak

$$\boxed{\bar{E}_i = \bar{E}_{i\perp} + \bar{E}_{i\parallel}}$$

Yazılabildiği ve problemimiz lineer olduğu için,

$$\boxed{\bar{E}_r = \bar{E}_{r\perp} + \bar{E}_{r\parallel}}$$

olacaktır. Burada $\bar{E}_{r\perp}$, $\bar{E}_{i\perp}$ bileşeni için yansıyan dalgadır. Benzer şekilde $\bar{E}_{r\parallel}$, $\bar{E}_{i\parallel}$ için bulunan yansımadır.

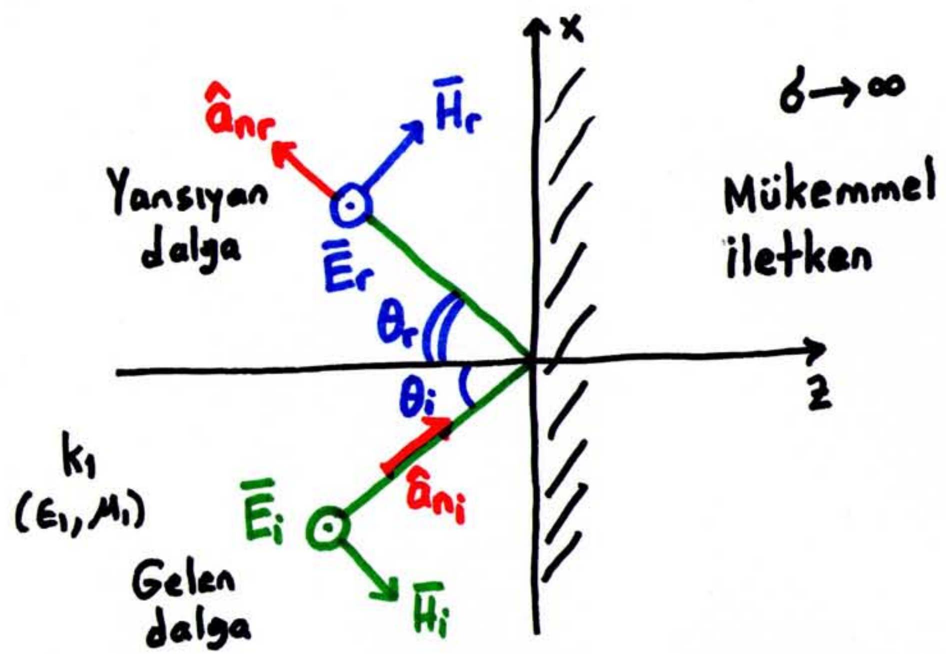
- Toplam alanlar ise

$$\boxed{\bar{E}_T = \bar{E}_i + \bar{E}_r = (\bar{E}_{i\perp} + \bar{E}_{r\perp}) + (\bar{E}_{i\parallel} + \bar{E}_{r\parallel})}$$

ile bulunabilir. Benzer ifadeler manyetik alan için de geçerlidir.

Dik Kutuplama

Yatay kutuplanma ya da $\bar{E}$-kutuplanma olarak da bilinir. Bu durumda $\bar{E}$ geliş düzlemine diktir.



θ_i = Geliş Açısı (Sınır yüzeyinin normalinden ölçülür.)

Gelen alanı yazalım:

$$\boxed{\tilde{\bar{E}}_i(x,z) = \hat{a}_y E_{i0} \, e^{-jk_1 \hat{a}_{ni} \cdot \bar{r}}}$$

Burada $\hat{a}_{ni} = \hat{a}_x \sin\theta_i + \hat{a}_z \cos\theta_i$ ve $\bar{r} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$

olduğundan,

$$\hat{a}_{n_i} \cdot \bar{r} = x \sin\theta_i + z \cos\theta_i$$ bulunur.

O halde,

$$\boxed{\tilde{\bar{E}}_i(x,z) = \hat{a}_y E_{io}\, e^{-jk_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}}$$

$$\tilde{\bar{H}}_i(x,z) = \frac{1}{\eta_1}\hat{a}_{n_i} \times \tilde{\bar{E}}_i(x,z) = \frac{E_{io}}{\eta_1}(-\hat{a}_x\cos\theta_i + \hat{a}_z\sin\theta_i)\, e^{-jk_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

yazılabilir. Yansıyan dalga için

$$\tilde{\bar{E}}_r(x,z) = E_{ro}\, e^{-jk_1 \hat{a}_{n_r}\cdot\bar{r}}\, \hat{a}_y$$

ve

$$\hat{a}_{n_r} = \hat{a}_x \sin\theta_r - \hat{a}_z\cos\theta_r$$

yazılabilir. θ_r yansıma açısıdır. O halde yansıyan dalga

$$\boxed{\tilde{\bar{E}}_r(x,z) = \hat{a}_y E_{ro}\, e^{-jk_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}}$$

olur. $z=0$ yüzeyinde toplam elektrik alanı sıfır olmalıdır. Yani,

$$\boxed{E_i(x,0) + E_r(x,0) = 0}$$ SINIR KOŞULU

$$\Rightarrow \hat{a}_y\left(E_{io}\, e^{-jk_1 x\sin\theta_i} + E_{ro}\, e^{-jk_1 x\sin\theta_r}\right) = 0$$

olmalıdır. Bunun için $\boxed{\theta_r = \theta_i}$ olması gerekir.

- Ayrıca, $\boxed{E_{ro} = -E_{io}}$ olmalıdır.
- Snell Yansıma Yasası

$$\boxed{\text{Geliş Açısı} = \text{Yansıma Açısı}}$$

olarak verilir.

Şimdi $\theta_i = \theta_r = \theta$ alalım.

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\vec{E}}_r(x,z) = -\hat{a}_y E_{io}\, e^{-jk_1(x\sin\theta - z\cos\theta)}}$$

ve ilgili manyetik alan fazörü

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{\vec{H}}_r(x,z) &= \frac{1}{\eta_1}\left[\hat{a}_{n_r} \times \tilde{\vec{E}}_r(x,z)\right] \\ &= \frac{E_{io}}{\eta_1}\left(-\hat{a}_x \cos\theta - \hat{a}_z \sin\theta\right) e^{-jk_1(x\sin\theta - z\cos\theta)} \end{aligned}}$$

- Toplam alan $z<0$ bölgesinde gelen ve yansıyan alanların toplamı ile elde edilir.

$$\tilde{\vec{E}}_1(x,z) = \tilde{\vec{E}}_i(x,z) + \tilde{\vec{E}}_r(x,z)$$

$$= \hat{a}_y E_{io}\left(e^{-jk_1 z\cos\theta} - e^{jk_1 z\cos\theta}\right) e^{-jkx\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\vec{E}}_1(x,z) = -\hat{a}_y\, j2E_{io} \sin(k_1 z\cos\theta)\, e^{-jkx\sin\theta}}$$

ve $$\boxed{\tilde{\overline{H}}_1(x,z) = -\frac{2E_{i0}}{\eta_1}\left[\hat{a}_x \cos\theta \cos(k_1 z\cos\theta)\, e^{-jk_1 x\sin\theta} + \hat{a}_z j \sin\theta \sin(k_1 z\cos\theta)\, e^{-jk_1 x\sin\theta}\right]}$$

Son olarak ortalama Poynting vektörüne bakalım:

$$\overline{P}_{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\tilde{\overline{E}}\times\tilde{\overline{H}}^*\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\Big\{-\hat{a}_y j2E_{i0}\sin(k_1 z\cos\theta)\, e^{-j(k_1 x\sin\theta)}$$

$$\times -\frac{2E_{i0}}{\eta_1}\left[\hat{a}_x \cos\theta\cos(k_1 z\cos\theta)\, e^{jk_1 x\sin\theta} - \hat{a}_z j\sin\theta \sin(k_1 z\cos\theta)\, e^{jk_1 x\sin\theta}\right]\Big\}$$

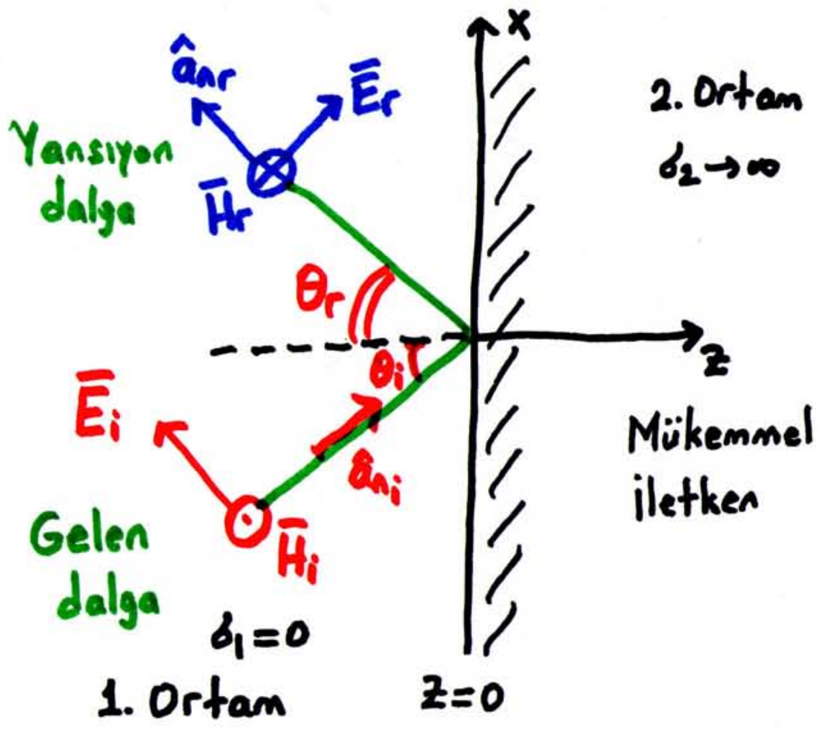
$$\Rightarrow \overline{P}_{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\Big\{\hat{a}_z \underbrace{-j\frac{4E_{i0}^2}{\eta_1}\sin(k_1 z\cos\theta)\cos\theta\cos(k_1 z\cos\theta)}_{\text{Tümüyle SANAL}}$$

$$+\hat{a}_x \frac{4E_{i0}^2}{\eta_1}\sin\theta\sin^2(k_1 z\cos\theta)\Big\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{P}_{av} = \hat{a}_x \frac{2E_{i0}^2}{\eta_1}\sin\theta\sin^2(k_1 z\cos\theta)}$$

- Ortalama güç, +x yönünde iletilmektedir.
- +z yönünde gelen gücün tümü geri yansımaktadır.

Paralel Kutuplanma



- Bu durumda $\bar{E}_i$ ve $\bar{E}_r$ geliş düzlemine paraleldir yani sadece x ve z bileşenleri vardır.
- $\bar{H}_i$ ve $\bar{H}_r$'nin ise sadece y bileşeni vardır.
- $\bar{E}$ ve $\bar{H}$ yön kabullenmelerine dikkat edilmelidir.

$$\tilde{\bar{E}}_i(x,z) = E_{io}\left(\hat{a}_x \cos\theta_i - \hat{a}_z \sin\theta_i\right) e^{-jk_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

$$\tilde{\bar{H}}_i(x,z) = \hat{a}_y \frac{E_{io}}{\eta_1} e^{-jk_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

- Yansıyan dalgaları da yazarsak,

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{\overline{E}}_r(x,z) &= E_{ro}\,(\hat{a}_x \cos\theta_r + \hat{a}_z \sin\theta_r) \\ \tilde{\overline{H}}_r(x,z) &= -\hat{a}_y \frac{E_{ro}}{\eta_1}\, e^{-jk_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)} \end{aligned}}$$

$z=0$'da yani mükemmel iletkenin yüzeyinde teğet elektrik alanı sıfırdır. Teğet bileşen x bileşeni olduğundan,

$$E_{ix}(x,0) + E_{rx}(x,0) = 0$$

$$\Rightarrow E_{io}\cos\theta_i\, e^{-jk_1 x\sin\theta_i} + E_{ro}\cos\theta_r\, e^{-jk_1 x\sin\theta_r} = 0$$

sağlanmalıdır. Bu denklemin her x için sağlanması

$$\boxed{\theta_r = \theta_i} \quad \text{ve} \quad \boxed{E_{ro} = -E_{io}}$$

olması ile mümkündür. Toplam elektrik alanına bakalım:

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{\overline{E}}_1(x,z) &= \overline{E}_i(x,z) + \overline{E}_r(x,z) \\ &= \hat{a}_x E_{io}\cos\theta\left(e^{-jk_1 z\cos\theta} - e^{jk_1 z\cos\theta}\right)e^{-jk_1 x\sin\theta} \\ &\quad -\hat{a}_z E_{io}\sin\theta\left(e^{-jk_1 z\cos\theta} + e^{jk_1 z\cos\theta}\right)e^{-jk_1 x\sin\theta} \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\bar{E}_1(x,z) = -2E_{io}\big[\hat{a}_x\, j \cos\theta \sin(k_1 z\cos\theta) \;+ \\ \hat{a}_z \sin\theta \cos(k_1 z \cos\theta)\big]\, e^{-jk_1 x \sin\theta}\end{aligned}}$$

İlgili manyetik alan ise,

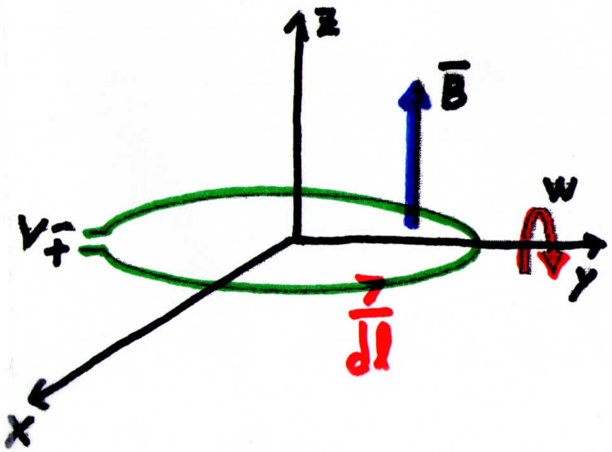
$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{\bar{H}}_1(x,z) &= \tilde{\bar{H}}_i(x,z) + \tilde{\bar{H}}_r(x,z) \\ &= \hat{a}_y \frac{2E_{io}}{\eta_1} \cos(k_1 z\cos\theta)\, e^{-jk_1 x \sin\theta}\end{aligned}}$$

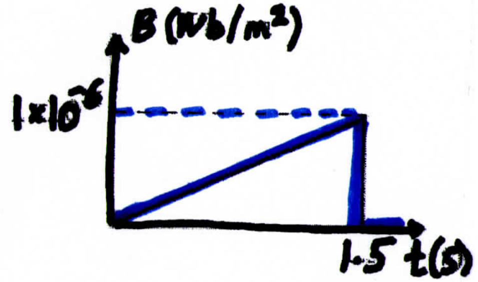
– Toplam alan z yönünde duran dalga özelliklerine sahiptir.

– Ortalama güç x yönünde taşınmaktadır.

– Uygun yere bir iletken sınır daha konarak paralel plaka dalga kılavuzu elde edilebilir. O durumda dalga iki plaka arasında yansıyarak +x yönünde güç taşır.

S.3. [%25] Yarıçapı a=2 m olan Şekil 1'deki çembersel sarım y ekseni dönme ekseni olmak üzere $\omega = 10\pi$ rad/s açısal hızıyla dönmektedir. t=0 anında sarımın x-y düzleminde olduğunu kabul ediniz. Sarımı etkileyen manyetik alan ise +z yönündedir ve tüm sarım alanı için değişimi Şekil 2'de verilmiştir. Gösterilen polariteye göre sarımda indüklenen v voltajını ve döngünün açık uçlarına bağlanan $R = 1$ kΩ dirençten geçen akımı bulunuz. Bu akım manyetik akıdaki değişime karşı nasıl tepki vermektedir?





Çözüm: Bu problemde hem $\bar{B}$ zamanla değişmekte, hem de devre ekseni etrafında dönmektedir. EMF sadece $0 \leq t \leq 1.5$ s için var olacaktır.

$$\boxed{\phi(t) = \int_S \bar{B}(t) \cdot d\bar{s} = \bar{B}(t)\, S \cos\alpha}$$

$$\boxed{S = \pi a^2 = 4\pi} \quad \text{ve} \quad \boxed{\alpha = wt = 10\pi t} \quad \text{olur.}$$

(a.a)

$\overline{B}(t)$'yi yazalım. $\overline{B}(t) = \left(B_1 + \frac{B_2 - B_1}{t_2 - t_1} \cdot t\right) \hat{a}_z$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{B}(t) = \frac{10^{-6}}{3/2} t \, \hat{a}_z = \frac{2}{3} \times 10^{-6} t \, \hat{a}_z \quad (Wb/m^2)}$$

O halde, $\boxed{\phi(t) = \frac{2}{3} \times 10^{-6} t \times 4\pi \times \cos 10\pi t \quad (Wb)}$

ve V'nin polaritesinden dolayı

$$V = -\mathcal{E} = \frac{d\phi}{dt}$$

$$\Rightarrow V = \frac{8\pi}{3} \times 10^{-6} \left[\cos 10\pi t - 10\pi t \sin 10\pi t\right] \quad (V)$$

elde edilir.

Dirençteki akım, $\boxed{i = \frac{V}{R} = \frac{8\pi}{3} \left[\cos 10\pi t - 10\pi t \sin 10\pi t\right] \quad (nA)}$

olarak bulunur. Bu akım, devreden geçen manyetik akının zamanla değişimine direnecek şekilde akar. Akı artıyorsa azaltmaya, azalıyorsa artırmaya çalışır.

Örnek: $\mu = \mu_0$ olan bir ortamda ilerleyen EM dalganın elektrik alanı

$$\overline{E}(y,t) = 72\pi \cos(4\pi \times 10^9 t - 40\pi y)\,\hat{a}_x \quad (V/m)$$

veriliyor.

a) Dalganın ilerleme yönü nedir?

$\boxed{+y}$

b) Dalganın frekansı nedir?

$$\boxed{w = 4\pi \times 10^9 \Rightarrow f = \frac{w}{2\pi} = 2 \times 10^9\ Hz \equiv 2\ GHz}$$

c) Dalganın faz hızı nedir?

$$v_p = \frac{w}{k} = \frac{4\pi \times 10^9}{40\pi} = 1 \times 10^8\ m/s \neq c$$

$\boxed{\text{O HALDE } \epsilon \neq \epsilon_0}$

d) Bu ortam için ϵ_r ve η'yı bulunuz.

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{\epsilon_r}} = 1 \times 10^8 \Rightarrow \sqrt{\epsilon_r} = 3 \Rightarrow \boxed{\epsilon_r = 9}$$

$$\boxed{\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{120\pi}{3} = 40\pi}$$

D.C

e) Dalga boyunu bulunuz.

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}} = \frac{2\pi}{40\pi} = \frac{1}{20}\,m = 0.05\,m \equiv 5\,cm$$

f) Elektrik alan fazörünü yazınız.

$$\boxed{\tilde{\bar{E}}(y) = 72\pi\, e^{-j40\pi y}\, \hat{a}_x \quad (V/m)}$$

g) Manyetik alan fazörünü yazınız.

$$\tilde{\bar{H}} = \frac{1}{\eta}\, \hat{a}_n \times \tilde{\bar{E}} = \frac{1}{40\pi}(\hat{a}_y \times \hat{a}_x)\, 72\pi\, e^{-j40\pi y} = -\hat{a}_z\, \frac{72\pi}{40\pi}\, e^{-j40\pi y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{H}}(y) = 1.8\, e^{-j40\pi y}\, (-\hat{a}_z) \quad (A/m)}$$

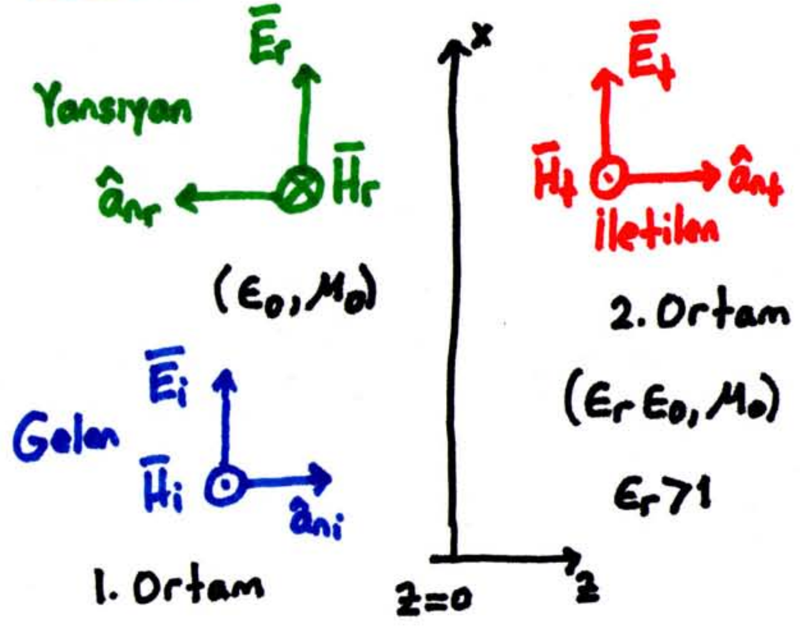
h) Manyetik alanın zaman bölgesi ifadesini bulunuz.

$$\bar{H}(y,t) = Re\left\{ \tilde{\bar{H}}(y)\, e^{j\omega t} \right\} = Re\left\{ -\hat{a}_z\, (1.8)\, e^{-j40\pi y}\, e^{j4\pi \times 10^9 t} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{H}(y,t) = -\hat{a}_z\, (1.8)\, \cos(4\pi \times 10^9 t - 40\pi y) \quad (A/m)}$$

O.D

Örnek:



Şekilde, havadan bir dielektrik ortam üzerine dik gelen bir düzlem dalga gösterilmektedir.

Gelen dalganın genliği 120π V/m'dir ve dalgaboyu 1 m'dir.

Gelen dalganın ortalama gücünün $\frac{4}{9}$'unun geri yansıdığı biliniyor.

a) Gelen dalganın frekansını, dalga sabitini bulunuz.

b) Gelen dalganın elektrik ve manyetik alan fazörlerini yazınız.

c) Yansıma ve iletim katsayılarını bulunuz.

d) İkinci ortamın ϵ_r değeri nedir?

e) Yansıyan ve iletilen elektrik ve manyetik alan fazörlerini yazınız.

f) Gelen, yansıyan ve iletilen dalgalar için $\bar{P}_{av}$ vektörünü hesaplayınız.

Çözüm: **a)** $\lambda = 1\ m \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi$ rad/m.

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times10^8\ m/s}{1\ m} = 3\times10^8\ Hz \equiv \underline{\underline{300\ MHz}}$$

Diğer yolla, $k = w\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{w}{c} \Rightarrow \frac{2\pi f}{c} = 2\pi \Rightarrow \underline{\underline{f = 3\times10^8}}$

b) $\tilde{\bar{E}}_i = \hat{a}_x E_{i0}\, e^{-jkz} \Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{E}}_i = \hat{a}_x (120\pi)\, e^{-j2\pi z} \quad (V/m)}$

$$\tilde{\bar{H}}_i = \frac{1}{\eta_1}\, \hat{a}_{ni} \times \tilde{\bar{E}}_i = \frac{1}{(120\pi)} (\hat{a}_z \times \hat{a}_x)\,(120\pi)\, e^{-j2\pi z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{H}}_i = \hat{a}_y\, e^{-j2\pi z} \quad (A/m)}$$

c) Gelen dalga için ortalama Poynting vektörü:

$$\tilde{\bar{P}}_{iav} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{\tilde{\bar{E}}_i \times \tilde{\bar{H}}_i^*\right\} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{E_{i0} e^{-jkz}\, \hat{a}_x \times \hat{a}_y \frac{E_{i0}^*}{\eta_1} e^{jkz}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{P}_{iav} = \frac{1}{2} \frac{|E_{i0}|^2}{\eta_1}\, \hat{a}_z}$$

Yansıyan dalganın ortalama Poynting vektörüne de bakalım:

$$\tilde{\bar{E}}_r = (\Gamma E_{i0})\, \hat{a}_x\, e^{jkz}$$

$$\tilde{\bar{H}}_r = -\frac{\Gamma E_{i0}}{\eta_1}\, \hat{a}_y\, e^{jkz}$$

O halde,

$$\overline{\mathcal{P}}_{rav} = \frac{1}{2}\,\mathcal{R}e\left\{\tilde{\bar{E}}_r \times \tilde{\bar{H}}_r^{\,*}\right\}$$

$$\quad = \frac{1}{2}\,\mathcal{R}e\left\{(\Gamma E_{io})\,e^{jkz}(\hat{a}_x \times \hat{a}_y)\left(-\frac{\Gamma E_{io}}{\eta_1}\right)^{*} e^{-jkz}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{\mathcal{P}}_{rav} = -\hat{a}_z\,\frac{1}{2}|\Gamma|^2\frac{|E_{io}|^2}{\eta_1}}$$

O zaman soruda verilen güç yansıma oranı,

$$\boxed{\frac{|\overline{\mathcal{P}}_{rav}|}{|\overline{\mathcal{P}}_{iav}|} = |\Gamma|^2 = \frac{4}{9}}$$

bilgisini verir. Şimdi $|\Gamma|^2 = \frac{4}{9}$ ise

$$|\Gamma|^2 = \Gamma^2 = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma = \frac{2}{3} \quad \text{veya} \quad \Gamma = -\frac{2}{3}}$$

elde edilir. Ancak

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_0}{\eta_2 + \eta_0} \quad \text{ve} \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

ayrıca $\varepsilon_r > 1$ olduğundan, $\eta_2 < \eta_0$ olur ve

$$\boxed{\Gamma = -\frac{2}{3}}$$

bulunur.

O halde,

$$\boxed{\tau = 1+\Gamma = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}}$$

elde edilir.

d) $\Gamma = -\frac{2}{3} = \frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}$ olduğundan, bilinenler yerine konursa,

$$\frac{\frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}}-\eta_0}{\frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}}+\eta_0} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1-\sqrt{\epsilon_r}}{1+\sqrt{\epsilon_r}} = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3-3\sqrt{\epsilon_r} = -2-2\sqrt{\epsilon_r} \Rightarrow \sqrt{\epsilon_r} = 5$$

ve sonuçta,

$$\boxed{\epsilon_r = 25}$$

bulunur.

e) <u>Yansıyan:</u>

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{\bar{E}}_r &= \Gamma E_{i0} e^{jkz}\,\hat{a}_x = (-80\pi)\,e^{j2\pi z}\,\hat{a}_x \quad (V/m) \\ \tilde{\bar{H}}_r &= -\frac{\Gamma E_{i0}}{\eta_1} e^{jkz}\,\hat{a}_y = \frac{2}{3}\,e^{j2\pi z}\,\hat{a}_y \quad (A/m) \end{aligned}}$$

e) iletilen: $\tilde{\bar{E}}_t = \hat{a}_x \tau E_{i0} e^{-jk_2 z}$

Burada $k_2 = w\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r} = w\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}\sqrt{\epsilon_r} = k\sqrt{\epsilon_r} = 2\pi \cdot 5$

$$\Rightarrow \boxed{k_2 = 10\pi}$$

dolayısıyla,
$$\tilde{\bar{E}}_t = \hat{a}_x \frac{1}{3} \times (120\pi) e^{-j10\pi z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{E}}_t = \hat{a}_x (40\pi) e^{-j10\pi z} \quad (V/m)}$$

ve

$$\tilde{\bar{H}}_t = \hat{a}_y \frac{\tau E_{i0}}{\eta_2} e^{-jk_2 z} = \hat{a}_y \left(\frac{\frac{1}{3} \times 120\pi}{(120\pi/5)} \right) e^{-j10\pi z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{H}}_t = \hat{a}_y \left(\frac{5}{3}\right) e^{-j10\pi z} \quad (A/m)}$$

elde edilir.

f) Gelen: $\bar{P}_{iav} = \frac{1}{2} \frac{|E_{i0}|^2}{\eta_1} \hat{a}_z = \frac{1}{2} \frac{(120\pi)^2}{\eta_1} \hat{a}_z$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{P}_{iav} = 60\pi \, \hat{a}_z \quad W/m^2}$$

Yansıyan: $\bar{P}_{rav} = -\hat{a}_z \frac{1}{2} |\Gamma|^2 \frac{|E_{i0}|^2}{\eta_1}$

$$" = -\hat{a}_z \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \frac{(120\pi)^2}{120\pi}$$

$$\Rightarrow \overline{P}_{rav} = -\hat{a}_z \frac{(80\pi)}{3} \quad W/m^2$$

f) İletilen: $\overline{P}_{tav} = \frac{1}{2} \mathcal{R}e\{\tilde{\overline{E}}_t \times \tilde{\overline{H}}_t^*\}$

$$\Rightarrow \overline{P}_{tav} = \frac{1}{2} \mathcal{R}e\left\{\hat{a}_x (40\pi) e^{-j10\pi z} \times \hat{a}_y \left(\frac{5}{3}\right) e^{j10\pi z}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{P}_{tav} = \frac{1}{2} \times (40\pi) \times \frac{5}{3} \hat{a}_z = \frac{100\pi}{3} \hat{a}_z \quad W/m^2}$$

Bulunanlar arasındaki aşağıdaki ilişkiler önemlidir:

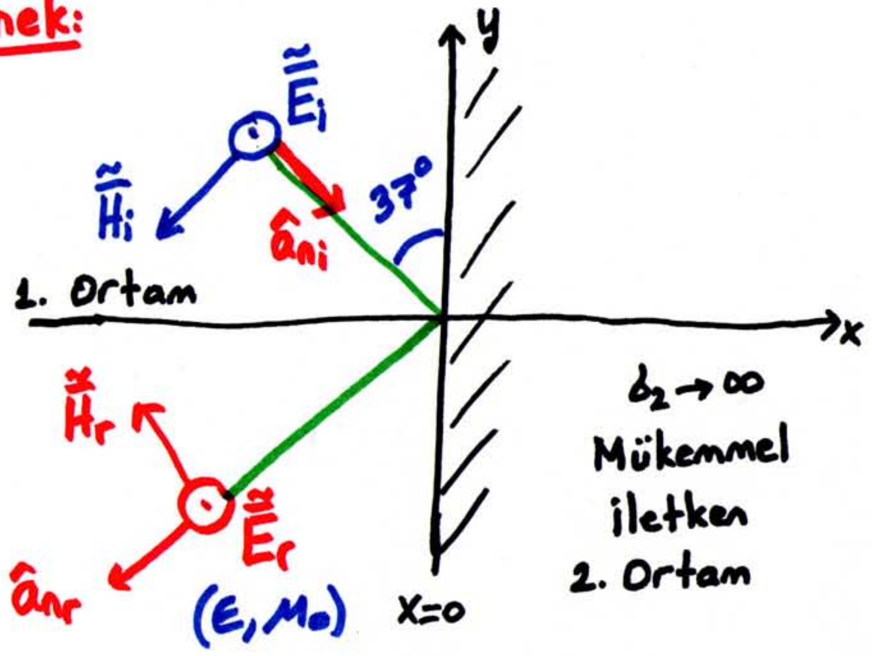
1) $$\frac{|\overline{P}_{rav}|}{|\overline{P}_{iav}|} = \frac{80\pi/3}{60\pi} = \frac{4}{9}$$

2) $$\overline{P}_{tav} = \overline{P}_{iav} \overset{!}{+} \overline{P}_{rav} = \hat{a}_z \left(60\pi - \frac{80\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{P}_{tav} = \frac{180\pi - 80\pi}{3} = \frac{100\pi}{3} \quad W/m^2}$$

Yansıyan gücün "−" işaretli olduğuna ve bu nedenle ünlem ile işaretli işlemin çıkarma değil toplama olduğuna özellikle dikkat edilmelidir.

Örnek:



Şekilde, geliş yönü +y ekseni ile $+37^\circ$ açı yapan dik kutuplanmış bir düzlem dalga x=0'daki mükemmel iletken sınıra gelmektedir. 1. Ortamda ışık hızı 10^8 m/s'dir ve elektrik alan genliği ise 60π V/m'dir.

Gelen dalganın dalga sabiti $k = 20\pi$ rad/m ise,

a) Gelen dalganın frekansı ve dalga boyu nedir? ε_r'yi bulunuz.

b) Gelen dalganın elektrik ve manyetik alan fazörlerini yazınız.

c) Yansıyan " " " " " ".

d) Gelen ve yansıyan dalga için ortalama Poynting vektörünü hesaplayınız.

Çözüm: a) $k = 20\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{20\pi} = 0.1\,m \equiv 10\,cm$

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{10^8}{0.1} = 10^9\,Hz \equiv 1\,GHz$$

Diğer yolla,

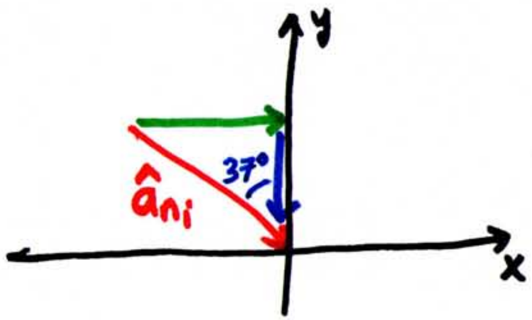
$k = w\sqrt{\epsilon\mu_0} = \frac{2\pi f}{c}\sqrt{\epsilon_r}$ yazılabileceğinden,

$$\sqrt{\epsilon_r} = \frac{k.c}{2\pi f} = \frac{20\pi \times 3\times 10^8}{2\pi \times 10^9} = 3 \Rightarrow \sqrt{\epsilon_r} = 3$$

$$\Rightarrow \epsilon_r = 9$$

b) **Elektrik alanı:** $\tilde{\overline{E}}_i = \hat{a}_z E_{io} e^{-j\overline{k}\cdot\overline{r}} = \hat{a}_z E_{io} e^{-jk\hat{a}_{n_i}\cdot\overline{r}}$

$E_{io} = 60\pi$ veriliyor. Ayrıca,



$$\hat{a}_{ni} = \sin 37°\,\hat{a}_x - \cos 37°\,\hat{a}_y$$

$$\Rightarrow \hat{a}_{ni} = \frac{3}{5}\hat{a}_x - \frac{4}{5}\hat{a}_y$$

$$\Rightarrow \overline{k}\cdot\overline{r} = 20\pi\left(\frac{3}{5}\hat{a}_x - \frac{4}{5}\hat{a}_y\right)\cdot\left(x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z\right)$$

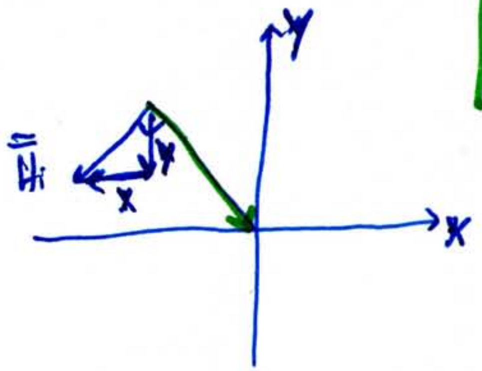
$$\Rightarrow \overline{k}\cdot\overline{r} = 12\pi x - 16\pi y$$

O halde $\boxed{\tilde{\bar{E}}_i = \hat{a}_z\,(60\pi)\,e^{-j4\pi(3x-4y)}}$ (V/m)

Manyetik alan:

$$\tilde{\bar{H}}_i = \frac{1}{\eta}\,\hat{a}_{n_i} \times \tilde{\bar{E}}_i = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{\eta_o}\,\hat{a}_{n_i} \times \tilde{\bar{E}}_i = \frac{3}{120\pi}\left(\frac{3}{5}\hat{a}_x - \frac{4}{5}\hat{a}_y\right) \times \hat{a}_z\,(60\pi)\,e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$$

$$\Rightarrow \tilde{\bar{H}}_i = -0.3\,(3\,\hat{a}_y + 4\,\hat{a}_x)\,e^{-j4\pi(3x-4y)} \quad \text{(A/m)}$$



$$\boxed{\tilde{\bar{H}}_i = |\tilde{\bar{H}}_i|\,(-\sin 53^\circ\,\hat{a}_x - \cos 53^\circ\,\hat{a}_y)\,e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}}$$

$$\Rightarrow \tilde{\bar{H}}_i = \frac{-60\pi \times 3}{120\pi}\left(\frac{4}{5}\hat{a}_x + \frac{3}{5}\hat{a}_y\right)e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{H}}_i = -0.3\,(4\,\hat{a}_x + 3\,\hat{a}_y)\,e^{-j4\pi(3x-4y)} \quad \text{(A/m)}}$$

c) **Elektrik Alan:** $\tilde{\bar{E}}_r = \hat{a}_z\,E_{ro}\,e^{-j4\pi(-3x-4y)}$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{E}}_r = \hat{a}_z\,(-60\pi)\,e^{j4\pi(3x+4y)}} \quad \text{(V/m)}$$

Manyetik Alan: $\tilde{\bar{H}}_r = \frac{1}{\eta}\,\hat{a}_{n_r} \times \tilde{\bar{E}}_r = \frac{3}{120\pi}\left(-\frac{3}{5}\hat{a}_x - \frac{4}{5}\hat{a}_y\right) \times \hat{a}_z\,(-60\pi)\,e^{j4\pi(3x+4y)}$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{H}}_r = -0.3\,(-3\,\hat{a}_y + 4\hat{a}_x)\,e^{j4\pi(3x+4y)}} \quad \text{(A/m)}$$

d) Gelen Alan: $\overline{P}_{iav} = \frac{1}{2} Re\{ \tilde{\overline{E}}_i \times \tilde{\overline{H}}_i^* \}$

$$\Rightarrow \overline{P}_{iav} = \frac{1}{2} Re\left\{ (60\pi)\, e^{-j4\pi(3x-4y)}\, \hat{a}_z \times \left[-0.3\,(4\hat{a}_x + 3\hat{a}_y)\right] e^{j4\pi(3x-4y)} \right\}$$

$$\Rightarrow \overline{P}_{iav} = 9\pi\,(-4\hat{a}_y + 3\hat{a}_x) = \boxed{27\pi\,\hat{a}_x - 36\pi\,\hat{a}_y} \quad (W/m^2)$$

Yansıyan Alan: $\overline{P}_{rav} = \frac{1}{2} Re\{ \tilde{\overline{E}}_r \times \tilde{\overline{H}}_r^* \}$

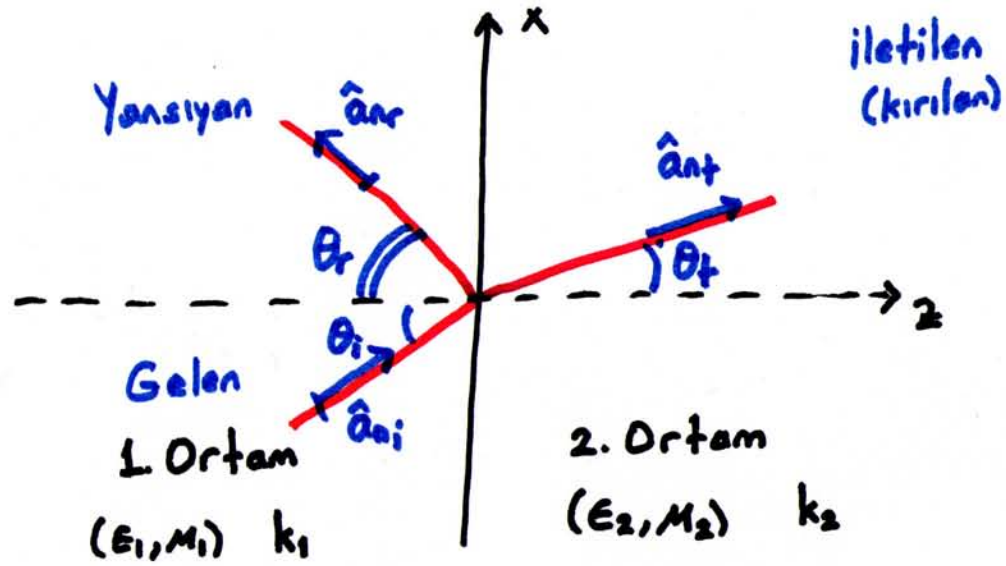
$$\Rightarrow \overline{P}_{rav} = \frac{1}{2} Re\left\{ (-60\pi)\, e^{j4\pi(3x+4y)}\, \hat{a}_z \times \left[0.3\,(3\hat{a}_y - 4\hat{a}_x)\right] e^{-j4\pi(3x+4y)} \right\}$$

$$\Rightarrow \overline{P}_{rav} = 9\pi \cdot (-1) \cdot (+3\hat{a}_x + 4\hat{a}_y) = 9\pi\,(-3\hat{a}_x - 4\hat{a}_y)$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{P}_{rav} = -27\pi\,\hat{a}_x - 36\pi\,\hat{a}_y}$$

Görüldüğü gibi güç x yönünde geri yansımakta, −y yönünde ise yoluna devam etmektedir.

Düzlem Dielektrik Sınıra Eğik Geliş



Gelen: $\tilde{\bar{E}}_i = \bar{E}_{io} \, e^{-jk_1 \hat{a}_{ni} \cdot \bar{r}}$

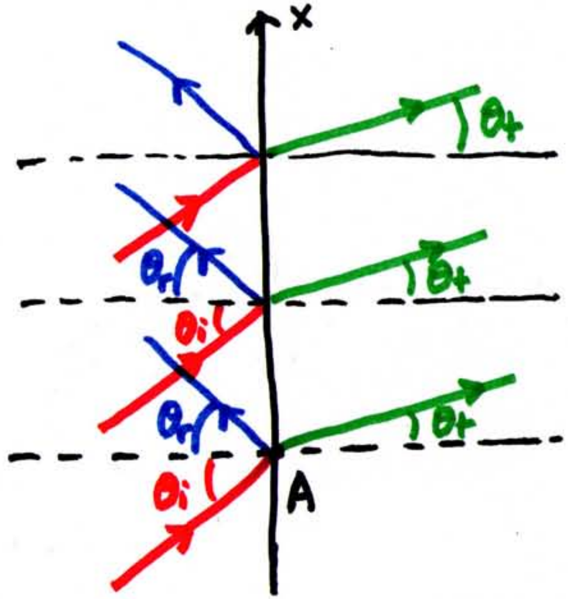
Yansıyan: $\tilde{\bar{E}}_r = \bar{E}_{ro} \, e^{-jk_1 \hat{a}_{nr} \cdot \bar{r}}$

İletilen: $\tilde{\bar{E}}_t = \bar{E}_{to} \, e^{-jk_2 \hat{a}_{nt} \cdot \bar{r}}$

Bilinmeyenler: θ_r, θ_t, $\bar{E}_{ro}$ ve $\bar{E}_{to}$

Şimdi problemin çözümünden önce sınır koşullarını inceleyecek ve nitel bir tartışma yapacağız.

Sınır koşulları her x için sağlanmalıdır.



Daha önce, gelen dalganın yayılma teriminin x yönündeki kısmının,

$$\boxed{e^{-jk_1 \sin\theta_i x}}$$

yansıyan dalganın ilgili teriminin

$$\boxed{e^{-jk_1 \sin\theta_r x}}$$

ve iletilen dalganınkinin

$$\boxed{e^{-jk_2 \sin\theta_t x}}$$

olduğunu görmüştük.

— Şekilde gösterilen A noktası her üç dalga için aynı yayılma terimine (x yönünde) sahip olmaz ise, dalgalar birbirinden ayrılır ve başka bir x noktasında sınır koşulu SAĞLANMAYABİLİR.

— x yönü yayılma terimlerini eşitleyerek

$$k_1 \sin\theta_i = k_1 \sin\theta_r \Rightarrow \theta_r = \theta_i \quad \text{SNELL YANSIMA YASASI}$$

$$k_1 \sin\theta_i = k_2 \sin\theta_t \Rightarrow \frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{k_1}{k_2} \quad \text{SNELL KIRILMA YASASI}$$

elde edilir.

$$\boxed{\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{w\sqrt{\epsilon_1\mu_1}}{w\sqrt{\epsilon_2\mu_2}} = \frac{\sqrt{\epsilon_1\mu_1}}{\sqrt{\epsilon_2\mu_2}}}$$

yazılabilir.

Genellikle manyetik olmayan malzemerle çalıştığımızdan, bu yasa $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ durumu için

$$\boxed{\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}}$$

haline gelir. Eğer birinci ortam boş uzay (veya hava) ise $\epsilon_{r1} = 1$'dir ve

$$\boxed{\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r2}}}}$$

elde edilir.

TAM YANSIMA

Snell kırılma yasasından, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ durumu için

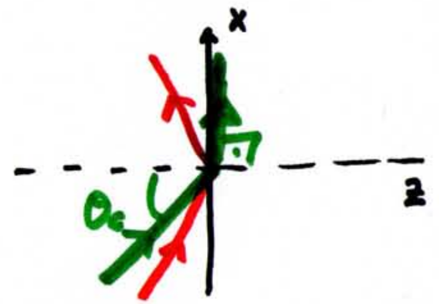
$$\boxed{\sqrt{\epsilon_1}\,\sin\theta_i = \sqrt{\epsilon_2}\,\sin\theta_t}$$

bulmuştuk. Eğer

$$\boxed{\epsilon_1 > \epsilon_2 \Rightarrow \theta_t > \theta_i}$$

olur.

Bu durumda θ_t, θ_i'den önce $\frac{\pi}{2}$'ye (90°) ulaşacaktır. $\theta_t = \frac{\pi}{2}$ olduğunda kırılan dalga sınır yüzeyini yalayarak x ekseni boyunca gider. θ_i daha fazla artarsa kırılan dalga olmaz ve gelen dalga **tamamen yansır.**



Şekilde görüldüğü gibi $\theta_t = \frac{\pi}{2}$ olduğundaki θ_i geliş açısına **kritik açı** denir ve θ_c ile gösterilir.

$$\boxed{\theta_i = \theta_c \Rightarrow \theta_t = \frac{\pi}{2} \quad \text{ve} \quad \sin\theta_t = 1}$$

Bu durumda

$$\boxed{\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{1}{\sin\theta_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}} \Rightarrow \theta_c = \sin^{-1}\sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}}}$$

olur. $\mu_1 = \mu_2 (= \mu_0)$ için $\boxed{\theta_c = \sin^{-1}\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}$ elde edilir.

Şimdi $\theta_i > \theta_c$ durumunda θ_t'yi inceleyelim. Bu durumda,

$$\boxed{\sin\theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_1\mu_1}{\epsilon_2\mu_2}}\sin\theta_i > 1}$$

olur ve θ_t'nin kompleks olmasını gerektirir.

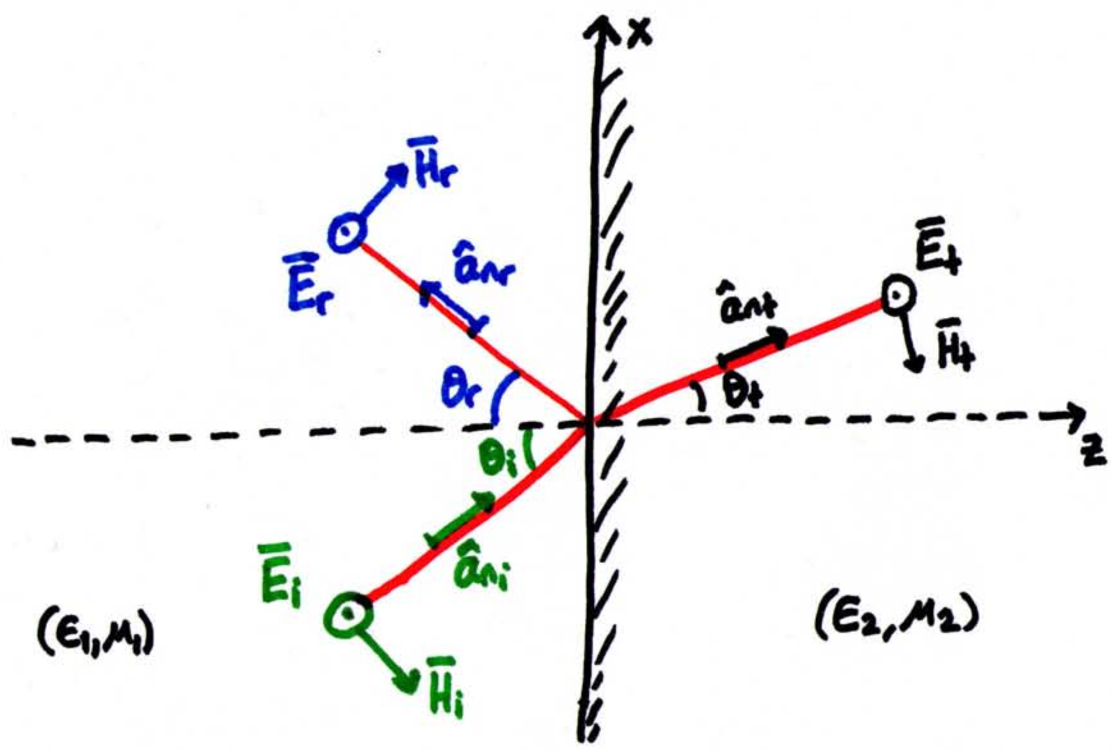
$$\boxed{\cos\theta_t = \sqrt{1-\sin^2\theta_t} = \pm j\sqrt{\sin^2\theta_t - 1} = \pm j\sqrt{\frac{\mu_1\epsilon_1}{\mu_2\epsilon_2}\sin^2\theta_i - 1}}$$

Deneme için $\sin\theta_t = a$ ve $\cos\theta_t = -jb$ alırsak ikinci ortamdaki dalganın yayılım terimi

$$\boxed{\begin{aligned} e^{-jk_2\hat{a}_t\cdot\bar{r}} &= e^{-jk_2\sin\theta_t x}\, e^{-jk_2\cos\theta_t z} \\ {}'' &= e^{-jk_2 a x}\, e^{-k_2 b z} \end{aligned}}$$

bulunur. İkinci ortamda alan sıfır değildir. Dalga x yönünde yayılma terimine, z yönünde ise zayıflama terimine sahiptir. 2. ortamda güç iletimi sıfırdır yani enerjinin tümü geri yansımaktadır. Bu nedenle bu olaya **TAM YANSIMA** adı verilir.

Dik Kutuplanma



Gelen Dalga: $\tilde{\bar{E}}_i(x,z) = \hat{a}_y E_{io}\, e^{-jk_1 \hat{a}_{ni}\cdot \bar{r}} = \hat{a}_y E_{io}\, e^{-jk_1(x \sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$

$$\tilde{\bar{H}}_i(x,z) = \frac{E_{io}}{\eta_1}\left(-\hat{a}_x \cos\theta_i + \hat{a}_z \sin\theta_i\right) e^{-jk_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

Yansıyan Dalga: $\tilde{\bar{E}}_r(x,z) = \hat{a}_y E_{ro}\, e^{-jk_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$

$$\tilde{\bar{H}}_r(x,z) = \frac{E_{ro}}{\eta_1}\left(\hat{a}_x \cos\theta_r + \hat{a}_z \sin\theta_r\right) e^{-jk_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

Kırılan (iletilen) Dalga:

$$\tilde{\vec{E}}_t(x,z) = \hat{a}_y E_{to}\, e^{-jk_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

$$\tilde{\vec{H}}_t(x,z) = \frac{E_{to}}{\eta_2}\left(-\hat{a}_x\cos\theta_t + \hat{a}_z\sin\theta_t\right) e^{-jk_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

Bilinmeyenler: θ_r, θ_t, E_{ro} ve E_{to}

Sınır koşullarının uygulanması daha önce de olduğu gibi Snell yansıma ve kırılma yasalarını verir.

Teğet elektrik ve manyetik alanların sürekliliğinden,

$$\boxed{\begin{aligned} &\tilde{E}_{iy}(x,0) + \tilde{E}_{ry}(x,0) = \tilde{E}_{ty}(x,0) \\ \Rightarrow\ & E_{io}\, e^{-jk_1 x\sin\theta_i} + E_{ro}\, e^{-jk_1 x\sin\theta_r} = E_{to}\, e^{-jk_2 x\sin\theta_t} \end{aligned}}$$

Üstel terimler aynı olmalıdır, bu da

$$k_1\sin\theta_i = k_1\sin\theta_r = k_2\sin\theta_t$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_r = \theta_i \quad \text{ve} \quad \frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{k_1}{k_2}}$$

SNELL yasalarını verir.

— Bunlar sağlandıktan sonra,

$$\boxed{E_{io} + E_{ro} = E_{to} \qquad (1)}$$

olmalıdır. Benzer şekilde $\overline{H}$'nin x bileşeni de sürekli olmalıdır.

$$\boxed{\begin{aligned} &\tilde{H}_{ix}(x,0) + \tilde{H}_{rx}(x,0) = \tilde{H}_{tx}(x,0) \\ \Rightarrow\ &\frac{1}{\eta_1}(-E_{io} + E_{ro}) \cos\theta_i = -\frac{1}{\eta_2} E_{to} \cos\theta_2 \qquad (2) \end{aligned}}$$

(1) ve (2)'nin ortak çözümü

$$E_{ro} = \Gamma_\perp E_{io} = \frac{\eta_2 \cos\theta_i - \eta_1 \cos\theta_t}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} E_{io}$$

ve

$$E_{to} = \tau_\perp E_{io} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} E_{io}$$

verir.

Ayrıca $\boxed{\tau_\perp = 1 + \Gamma_\perp}$ olduğuna dikkat edilmelidir. Bu durum için

$\eta_2' = \dfrac{\eta_1}{\cos\theta_t}$ ve $\eta_1' = \dfrac{\eta_1}{\cos\theta_1}$ alınırsa $\Gamma_\perp = \dfrac{\eta_2' - \eta_1'}{\eta_2' + \eta_1'}$ ve $\tau_\perp = \dfrac{2\eta_2'}{\eta_2' + \eta_1'}$

yazılabildiğine dikkat ediniz.

- Dik gelen dalga için $\theta_i = 0$'dır.
- 2. Ortam mükemmel iletken ise $\eta_2 = 0$ olur. $\Rightarrow \Gamma_\perp = -1$, $\tau_\perp = 0$ bulunur.

Yansımasız Durum

$\Gamma_\perp$'in payı sıfırsa yansıma olmaz. Yani

$$\boxed{\eta_2 \cos\theta_i - \eta_1 \cos\theta_t = 0 \quad \Rightarrow \text{YANSIMA YOKTUR}}$$

Bu durumu sağlayan geliş açısına $\theta_{B\perp}$ (Brewster açısı) diyelim. O halde,

$$\eta_2 \cos\theta_{B\perp} = \eta_1 \cos\theta_t \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta_{B\perp} = \frac{\eta_1}{\eta_2} \cos\theta_t \qquad (2)}$$

ve $\boxed{\cos\theta_t = \sqrt{1 - \sin^2\theta_t} \qquad (3)}$ ifadeleri yazılabilir.

Snell yasasını kullanırsak,

$\sin\theta_t = \frac{k_1}{k_2} \sin\theta_i$ olduğundan $\cos\theta_t = \sqrt{1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} \sin^2\theta_{B\perp}}$ (4) ve

$$\boxed{\cos\theta_{B\perp} = \frac{\eta_1}{\eta_2} \sqrt{1 - \frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2} \sin^2\theta_{B\perp}} \qquad (5)}$$

elde edilir. Şimdi (5)'in her iki tarafının karesini alalım:

$$\Rightarrow \cos^2\theta_{B\perp} = \frac{\eta_1^2}{\eta_2^2} - \frac{\eta_1^2}{\eta_2^2}\frac{\epsilon_1\mu_1}{\epsilon_2\mu_2}\sin^2\theta_{B\perp} = 1 - \sin^2\theta_{B\perp}$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta_{B\perp}\left(1 - \frac{\eta_1^2}{\eta_2^2}\frac{\epsilon_1\mu_1}{\epsilon_2\mu_2}\right) = 1 - \frac{\eta_1^2}{\eta_2^2}$$

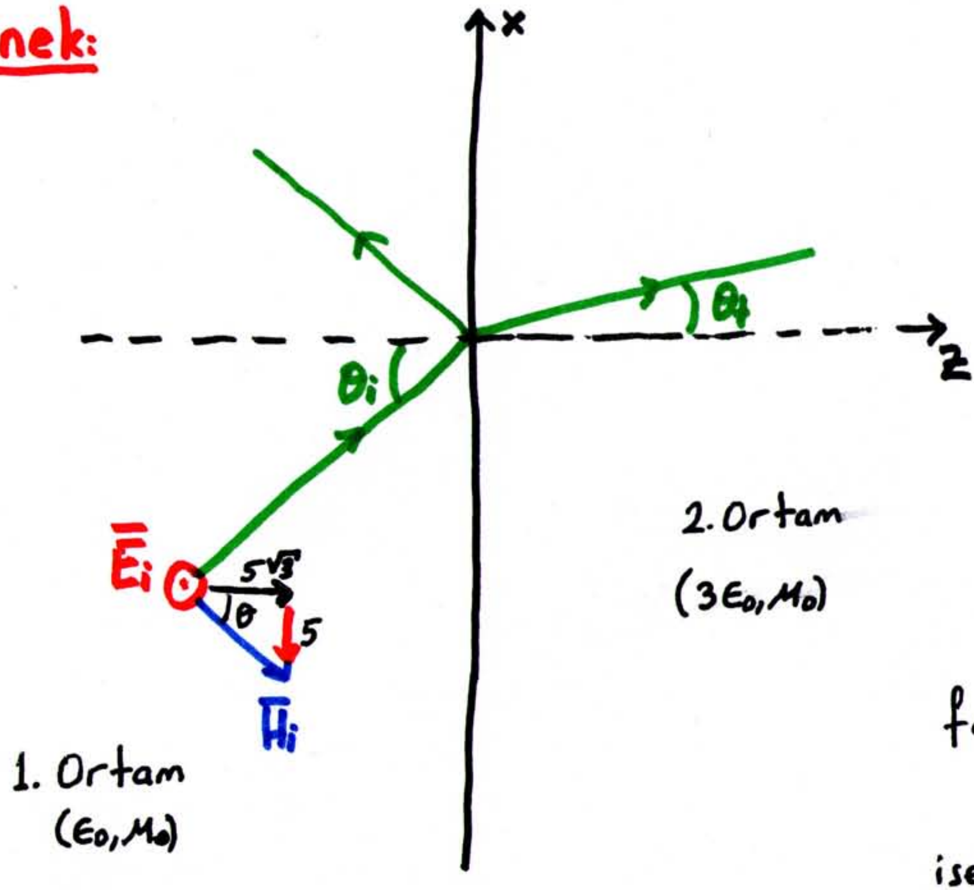
Burada $\frac{\eta_1^2}{\eta_2^2}\frac{\epsilon_1\mu_1}{\epsilon_2\mu_2} = \frac{\mu_1}{\cancel{\epsilon_1}}\frac{\cancel{\epsilon_2}}{\mu_2}\frac{\cancel{\epsilon_1}\mu_1}{\cancel{\epsilon_2}\mu_2}$ ve $\frac{\eta_1^2}{\eta_2^2} = \frac{\mu_1\epsilon_2}{\mu_2\epsilon_1}$ olduğundan,

$$\boxed{\sin^2\theta_{B\perp} = \frac{1 - \mu_1\epsilon_2/\mu_2\epsilon_1}{1 - (\mu_1/\mu_2)^2} \qquad (6)}$$

(6) Brewster, yani yansıma olmayan geliş açısının formülüdür. Eğer $\mu_1 = \mu_2$ ise **Brewster açısı YOKTUR,** yani manyetik olmayan iki ortam söz konusu ise dik kutuplanma durumunda her zaman yansıma olacaktır.

— Paralel kutuplanmada bu durumun farklı olduğunu göreceğiz.

Örnek:



Frekansı 600 MHz olan bir düzlem dalga, havadan (ϵ_0, μ_0) gelerek, $(3\epsilon_0, \mu_0)$ parametreli dielektrik üzerine dik olarak gelip, yansımakta ve kırılmaktadır.

Gelen dalganın manyetik alan fazörü

$$\tilde{\bar{H}} = (-5\hat{a}_x + 5\sqrt{3}\hat{a}_z)\, e^{-jk_1 \hat{a}_{ni} \cdot \bar{r}}$$

ise,

a) Dalganın geliş yönünü (θ_i), geliş birim vektörünü $(\hat{a}_{ni})$ ve dalga sabitini bulunuz.

b) Gelen dalganın manyetik ve elektrik alan fazörlerini bulunuz.

c) θ_t ve k_2 nedir? $\hat{a}_{nt}$ ve $\hat{a}_{nr}$'yi yazınız.

d) Yansıyan dalganın elektrik ve manyetik alan fazörlerini yazınız

e) iletilen " " " " " " .

f) Bu geliş açısında hiç yansıma olmaması için diğer herşey aynı iken ikinci ortanın manyetik geçirgenlik katsayısı (μ_r) ne olmalıdır?

Çözüm: a) Şekilden, $\theta + \theta_i = \frac{\pi}{2}$ ve

$\sin\theta = \frac{1}{2}$; $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ \equiv \frac{\pi}{6}$. O halde $\theta_i = \frac{\pi}{3} \equiv 60^\circ$

$\hat{a}_{n_i} = \cos\theta_i \, \hat{a}_z + \sin\theta_i \, \hat{a}_x$ olduğundan,

$$\hat{a}_{n_i} = \frac{1}{2}\hat{a}_z + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_x$$

bulunur.

Dalganın frekansı $f = 600\ MHz \equiv 6\times10^8$'dir. $k_1 = w\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$ olduğundan

$$k_1 = w\sqrt{\mu_1 \epsilon_1} = 2\pi \cdot 6\times10^8 \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{2\pi \times 6\times10^8}{3\times10^8} = 4\pi \ rad/m$$

elde edilir.

b) $\tilde{\vec{H}}_i = 5(\sqrt{3}\,\hat{a}_z - \hat{a}_x)\, e^{-jk_1 \hat{a}_{ni}\cdot\vec{r}} = 5(\sqrt{3}\,\hat{a}_z - \hat{a}_x)\, e^{-j4\pi(\frac{1}{2}\hat{a}_z + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_x)\cdot(x\hat{a}_x + z\hat{a}_z)}$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\vec{H}}_i = 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{a}_z - \frac{1}{2}\,\hat{a}_x\right) e^{-j2\pi(x\sqrt{3}+z)} \qquad (A/m)$$

Ayrica elektrik alan da,

$$\tilde{\vec{E}}_i = \eta_o\, \tilde{\vec{H}}_i \times \hat{a}_{ni} = 120\pi \cdot 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_z - \frac{1}{2}\hat{a}_x\right)\times\left(\frac{1}{2}\hat{a}_z + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_x\right) e^{-jk_1\hat{a}_{ni}\cdot\vec{r}}$$

$$\Rightarrow \tilde{\vec{E}}_i = (1200\pi)\,\hat{a}_y\, e^{-j2\pi(x\sqrt{3}+z)} \qquad (V/m)$$

bulunur. $\tilde{\vec{E}}$ fazörü doğrudan da yazılabilirdi.

c) Snell yasasından

$k_1 \sin\theta_i = k_2 \sin\theta_t$ ve $k_2 = w\sqrt{\epsilon\mu_o}$ 'dır. O halde

$k_2 = \dfrac{6\times10^8 \times 2\pi\sqrt{3}}{3\times10^8} = 4\pi\sqrt{3}$ (rad/m) ve bu Snell yasasında kullanılırsa

$$4\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\pi\sqrt{3}\,\sin\theta_t \Rightarrow \sin\theta_t = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_t = 30^\circ$$ elde edilir.

$$\hat{a}_{nt} = \cos\theta_t\,\hat{a}_z + \sin\theta_t\,\hat{a}_x = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{a}_z + \frac{1}{2}\,\hat{a}_x$$

ve $\hat{a}_{nr} = -\cos\theta_i\,\hat{a}_z + \sin\theta_i\,\hat{a}_x = -\frac{1}{2}\,\hat{a}_z + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{a}_x$ olur.

d) $\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$ ve $\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{120\pi}{\sqrt{3}}$ olduğundan, yansıma

katsayısı hesaplanabilir.

$$\Gamma_\perp = \frac{\eta_2 \cos\theta_i - \eta_1 \cos\theta_t}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} = \frac{(120\pi/\sqrt{3})\frac{1}{2} - (120\pi)\sqrt{3}/2}{(120\pi/\sqrt{3})\frac{1}{2} + (120\pi)\sqrt{3}/2} = \frac{1/\sqrt{3} - \sqrt{3}}{1/\sqrt{3} + \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_\perp = \frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2}}$$

O halde $\tilde{\vec{E}}_r = E_{io} \cdot \Gamma_\perp \, \hat{a}_y \, e^{-jk_1 \hat{a}_{nr} \cdot \vec{r}} = -\frac{1}{2} \times (1200\pi) \hat{a}_y \, e^{-jk_1 \hat{a}_{nr} \cdot \vec{r}}$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\vec{E}}_r = -\hat{a}_y (600\pi) \, e^{-j2\pi(x\sqrt{3} - z)} \quad (V/m)}$$

$$\tilde{\vec{H}}_r = \frac{E_{ro}}{\eta_o} (\cos\theta_i \hat{a}_x + \sin\theta_i \hat{a}_z) \, e^{-jk_1 \hat{a}_{nr} \cdot \vec{r}} = \frac{-600\pi}{120\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{a}_z + \frac{1}{2} \hat{a}_x \right) e^{-jk_1 \hat{a}_{nr} \cdot \vec{r}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\vec{H}}_r = -5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{a}_z + \frac{1}{2} \hat{a}_x \right) e^{-j2\pi(x\sqrt{3} - z)} \quad (A/m)}$$

e) $\boxed{\Gamma_\perp = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tau_\perp = \frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \tilde{\vec{E}}_t = E_{io} \, \tau_\perp \, \hat{a}_y \, e^{-jk_2 \hat{a}_{nt} \cdot \vec{r}} = (1200\pi) \left(\frac{1}{2} \right) \hat{a}_y \, e^{-j4\pi\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{a}_z + \frac{1}{2} \hat{a}_x \right) \cdot \vec{r}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\vec{E}}_t = \hat{a}_y (600\pi)\, e^{-j2\pi(3\hat{a}_z + \sqrt{3}\hat{a}_x)\cdot\vec{r}} = \hat{a}_y (600\pi)\, e^{-j2\pi\sqrt{3}(\sqrt{3}z + x)} \quad (V/m)}$$

İlgili manyetik alan fazörü ise,

$$\tilde{\vec{H}}_t = \tau_\perp \frac{E_{io}}{\eta_2} (\sin\theta_t\, \hat{a}_z - \cos\theta_t\, \hat{a}_x)\, e^{-jk_2 \hat{a}_{nt}\cdot\vec{r}} = \frac{\frac{1}{2}(1200\pi)}{\eta_2} \left(\frac{1}{2}\hat{a}_z - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_x\right) e^{-jk_2 \hat{a}_{nt}\cdot\vec{r}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\vec{H}}_t = 5\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\hat{a}_z - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_x\right) e^{-j2\pi\sqrt{3}(\sqrt{3}z + x)}} \quad (A/m)$$

f) $\mu_2 = \mu_r \mu_0$ olsun

$$\sin^2\theta_{B\perp} = \frac{1 - \mu_1\epsilon_2/\mu_2\epsilon_1}{1 - (\mu_1/\mu_2)^2} \Rightarrow \sin^2 60 = \frac{1 - \mu_0 3\epsilon_0/\mu_r\mu_0\epsilon_0}{1 - (\mu_0/\mu_r\mu_0)^2}$$

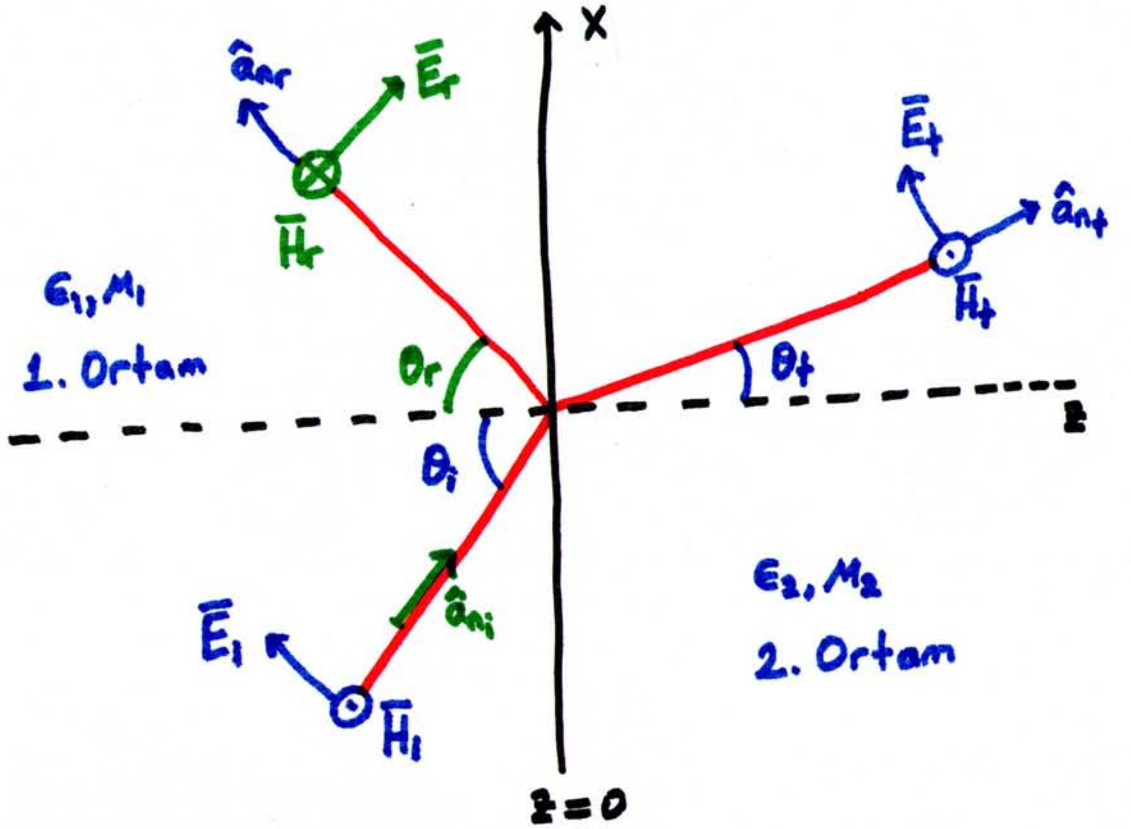
$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1 - 3/\mu_r}{1 - 1/\mu_r^2} = \frac{\mu_r^2 - 3\mu_r}{\mu_r^2 - 1} \Rightarrow 3\mu_r^2 - 3 = 4\mu_r^2 - 12\mu_r$$

$$\Rightarrow \mu_r^2 - 12\mu_r + 3 = 0 \Rightarrow \mu_{r1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4\cdot 3}}{2} = \frac{12 \pm 11.49}{2}$$

$$\Rightarrow \mu_{r_1} = 11.745 \qquad \mu_{r2} = 0.255$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_r = 11.745}$$

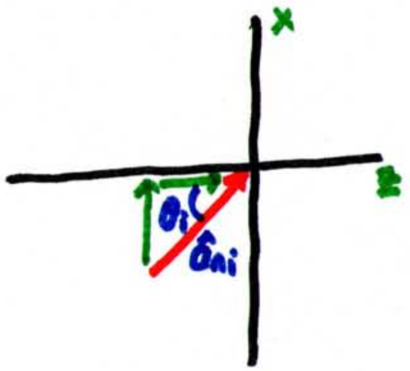
Paralel Kutuplanma



Bu tip kutuplanmada elektrik alanı geliş düzlemine paraleldir, manyetik alan ise geliş düzlemine diktir.

Gelen, yansıyan ve iletilen alanların yön kabullenmelerine dikkat edilmelidir. Bulunacak katsayılar bu kabullenmelere bağlı olacaktır.

Gelen Dalga

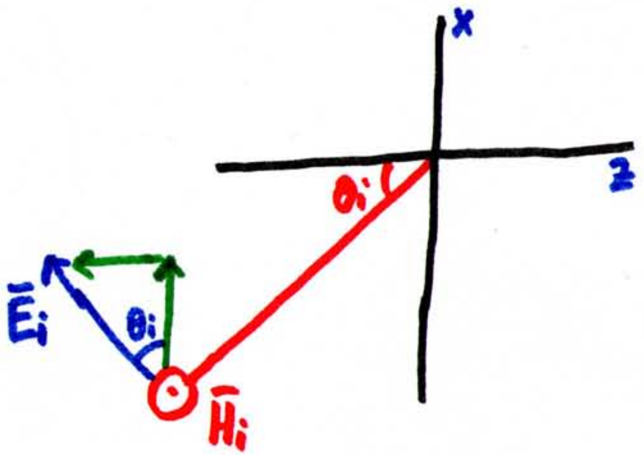


Şekilden,

$\hat{a}_{ni} = \hat{a}_x \sin\theta_i + \hat{a}_z \cos\theta_i$ yazabiliriz. Konum vektörü $\bar{r} = x\,\hat{a}_x + y\,\hat{a}_y + z\,\hat{a}_z$ ile verildiğinden

$\hat{a}_{ni} \cdot \bar{r} = x \sin\theta_i + z\cos\theta_i$

bulunur.



Şekilden yararlanarak gelen dalganın elektrik ve manyetik alan fazörlerini yazabiliriz:

$$\tilde{\bar{E}}_i(x,z) = E_{io}\left(\hat{a}_x \cos\theta_i - \hat{a}_z \sin\theta_i\right) e^{-jk_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

$$\tilde{\bar{H}}_i(x,z) = \frac{E_{io}}{\eta_1}\,\hat{a}_y\, e^{-jk_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

Yansıyan Dalga

Dalga x yönünde yoluna devam edip z yönünde ise yansıdığından,

$\hat{a}_{nr} = \hat{a}_x \sin\theta_r - \hat{a}_z \cos\theta_r$

ve $\hat{a}_{nr} \cdot \bar{r} = x\sin\theta_r - z\cos\theta_r$ yazabiliriz.

Ayrıca,

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{\bar{E}}_r(x,z) &= E_{ro}\left(\hat{a}_x \cos\theta_r + \hat{a}_z \sin\theta_r\right) e^{-jk_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)} \\ \tilde{\bar{H}}_r(x,z) &= -\hat{a}_y \frac{E_{ro}}{\eta_1} e^{-jk_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)} \quad \text{bulunur.}\end{aligned}}$$

İletilen Dalga: Benzer şekilde iletilen alan bileşenleri

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{\bar{E}}_t(x,z) &= E_{to}\left(\hat{a}_x \cos\theta_t - \hat{a}_z \sin\theta_t\right) e^{-jk_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \\ \tilde{\bar{H}}_t(x,z) &= \hat{a}_y \frac{E_{to}}{\eta_2} e^{-jk_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}\end{aligned}}$$

olarak yazılır. Daha önceki dik kutuplanmada olduğu gibi sınır koşulları her x için sağlanmalıdır. Bu nedenle x yönündeki yayılma terimleri aynı olmalıdır, yani

$$k_1 x \sin\theta_i = k_1 x \sin\theta_r = k_2 x \sin\theta_t$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_r = \theta_i \quad , \quad k_1 \sin\theta_i = k_2 \sin\theta_t} \quad \text{SNELL YASALARI}$$

Snell yasaları elde edilir.

Snell yasaları uygulandıktan sonra sınır koşulları

$$\boxed{\begin{aligned} &(E_{io}+E_{ro})\cos\theta_i = E_{to}\cos\theta_t && (1) \\ &\frac{1}{\eta_1}(E_{io}-E_{ro}) = \frac{1}{\eta_2}E_{to} && (2) \end{aligned}}$$

haline gelir. (1) ve (2)'nin ortak çözümü,

$$\boxed{\begin{aligned} \Gamma_{\parallel} &= \frac{E_{ro}}{E_{io}} = \frac{\eta_2\cos\theta_t - \eta_1\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i} \\ \tau_{\parallel} &= \frac{E_{to}}{E_{io}} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i} \end{aligned}}$$

verir. Ayrıca,

$$\boxed{1+\Gamma_{\parallel} = \tau_{\parallel}\left(\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\right)}$$

bulunur.

Bu kutuplanma durumunda Brewster açısına bakalım. Payda sıfır olursa,

$$\boxed{\eta_2 \cos\theta_t = \eta_1 \cos\theta_{B\parallel}} \quad (1)$$

ve

$$\boxed{k_1 \sin\theta_{B\perp} = k_2 \sin\theta_t} \quad (2)$$

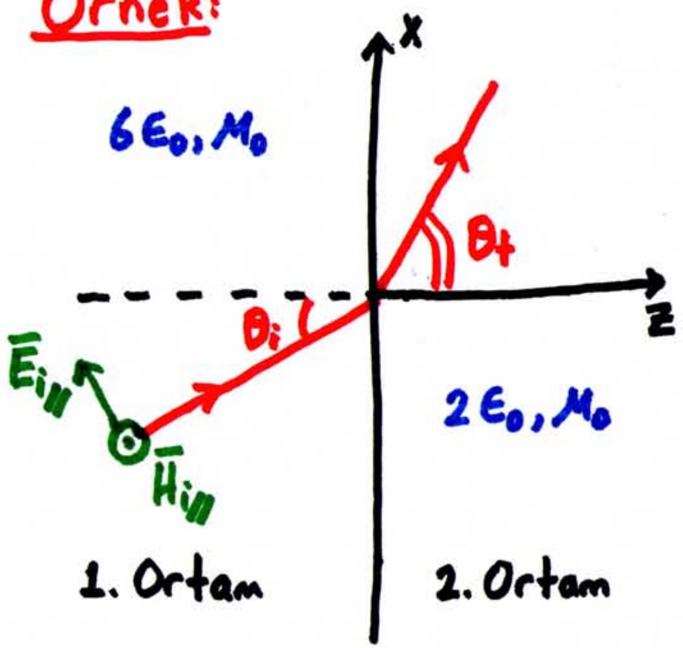
Snell yasası birlikte çözülürse,

$$\boxed{\sin^2\theta_{B\parallel} = \frac{1-\mu_2\epsilon_1/\mu_1\epsilon_2}{1-(\epsilon_1/\epsilon_2)^2}}$$

elde edilir.

İki farklı dielektrik durumu yaygınca karşılaşılan bir durumdur, yani paralel kutuplanmada Brewster açısı vardır.

Örnek:



Bir düzgün düzlem dalga $\epsilon_1 = 6\epsilon_0$, $\mu_1 = \mu_0$ olan bir ortamdan, $\epsilon_2 = 2\epsilon_0$, $\mu_2 = \mu_0$ olan bir ortama şekilde görüldüğü gibi, dik ve paralel kutuplanmış olarak gelmektedir.

a) Kritik açıyı ve Brewster açısını hesaplayınız.

b) Eğer gelen dalganın elektrik alan fazörü

$$\boxed{\tilde{\vec{E}}_i(x,z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_x + \hat{a}_y - \frac{1}{2}\hat{a}_z\right) e^{-jk_1\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z\right)}}$$

ise yansıyan ve iletilen dalgaları bulunuz.

Çözüm: a) Geliş açısı kritik açı (θ_c) olduğunda $\theta_t = \frac{\pi}{2}$ olur. Bunlar Snell yasasında kullanılırsa,

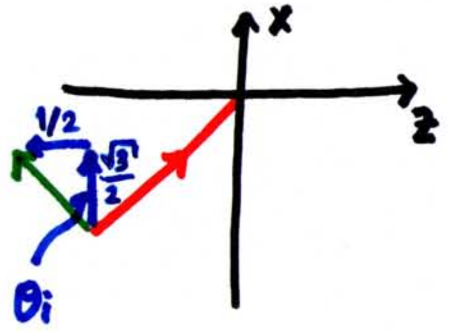
$$\boxed{\sqrt{\epsilon_1}\,\sin\theta_i = \sqrt{\epsilon_2}\,\sin\theta_t}$$

$$\theta_t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_c = \sin^{-1}\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 35.26^\circ$$

Dik bileşen için Brewster açısı yoktur ($\mu_1 = \mu_2$). Paralel bileşen için,

$$\boxed{\theta_{B\parallel} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{2}{2+6}} = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ}$$

b) Yansıyan dalgayı bulmak için önce geliş açısını belirlemeliyiz. $\tilde{\vec{E}}$'den yararlanacağız.



Şekilden,

$$\tilde{\vec{E}}_{//} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_x - \frac{1}{2}\hat{a}_z\right) e^{-jk_1(\;)}$$

$$\tilde{\vec{E}}_{\perp} = \hat{a}_y\, e^{-jk_1(\;)}$$ bileşenleri bulunur.

Yukarıda gösterilen $\tilde{\vec{E}}$ için bileşenler kullanılarak,

$$\boxed{\sin\theta_i = \frac{1}{2}\;,\; \cos\theta_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; \theta_i = 30^\circ}$$

bulunur. Yani dalga $\theta_{B//}$ açısı ile gelmektedir, bu nedenle paralel bileşen hiç yansımayacaktır ($\Gamma_{//}=0$). O halde yansıyan dalgada sadece dik bileşen bulunacaktır ve

$$\boxed{\tilde{\vec{E}}^r(x,z) = \Gamma_{\perp}(\theta_i=30^\circ)\cdot 1\cdot e^{-jk_1\left(\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)}}$$

olarak yazılabilir. Yansıma katsayısı,

$$\Gamma_{\perp}(\theta_i=30^\circ) = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} = \frac{\sqrt{6}\,\cos 30^\circ - \sqrt{2}\,\cos\theta_t}{\sqrt{6}\,\cos 30^\circ + \sqrt{2}\,\cos\theta_t}$$

Snell yasasından,

$$\sqrt{\epsilon_1}\, \sin\theta_i = \sqrt{\epsilon_2}\, \sin\theta_t \Rightarrow \sqrt{6}\, \sin 30^\circ = \sqrt{2}\, \sin\theta_t$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\theta_t = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_t = 60^\circ}$$

veya $\theta_t + \theta_B = 90^\circ$ olduğundan,

$$\theta_t = 90^\circ - \theta_{B\parallel} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

bulunur. Böylece

$$\Gamma_\perp(\theta_i = 30^\circ) = \frac{\sqrt{6}\,(\sqrt{3}/2) - \sqrt{2}\cdot(1/2)}{\sqrt{6}\,(\sqrt{3}/2) + \sqrt{2}\cdot(1/2)} = \frac{3/2 - 1/2}{3/2 + 1/2} = \frac{1}{2}$$

ve buradan da yansıyan dalga

$$\boxed{\tilde{\vec{E}}_r(x,z) = \frac{1}{2}\, e^{-jk_1\left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}z\right)}\, \hat{a}_y}$$

yazılabilir. Bu sonuçtan yararlanılarak, dik kutuplanmış kısım için iletilen (kırılan) dalga da kolaylıkla bulunabilir.

$$\boxed{1 + \Gamma_\perp = \tau_\perp \Rightarrow \tau_\perp = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}}$$

O halde,

$$\tilde{\vec{E}}_{t\perp} = \hat{a}_y\, \tau_\perp(\theta_i=30^\circ)\cdot 1\cdot e^{-jk_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}z\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\vec{E}}_{t\perp} = \hat{a}_y\, \frac{3}{2}\, e^{-jk_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}z\right)}}$$

$\tilde{\vec{E}}_{t\parallel}$ hesabı için $\tau_\parallel$ değerini bulmalıyız.

$$\tau_\parallel = \frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t}(1+\Gamma_\parallel) \quad \text{ve} \quad \Gamma_\parallel = 0 \quad \text{olduğundan}$$

$$\boxed{\tau_\parallel = \frac{\cos 30}{\cos 60} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}}$$

elde edilir. Şimdi $\tilde{\vec{E}}_{t\parallel}$ yazılabilir:

$$\tilde{\vec{E}}_{t\parallel} = \tau_\parallel(\theta_i=30^\circ)\cdot 1\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_z+\frac{1}{2}\hat{a}_x\right)e^{-jk_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}z\right)}$$

ve sonuçta

$$\boxed{\tilde{\vec{E}}_t(x,z) = \tilde{\vec{E}}_{t\parallel}+\tilde{\vec{E}}_{t\perp} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_x+\frac{3}{2}\hat{a}_y-\frac{3}{2}\hat{a}_z\right)e^{-jk_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}z\right)}}$$

bulunur.

Örnek: ε_r'si bilinmeyen ($\mu_r=1$) bir dielektrik ortamda ilerleyen bir düzgün düzlem dalga dik olarak boş uzay sınırına gelmektedir. Eğer gelen dalganın elektrik alan fazörü

$$\tilde{\bar{E}}_i(z) = \hat{a}_y\, 2\cdot 10^{-3}\, e^{-j\beta z} \quad V/m$$

veriliyorsa,

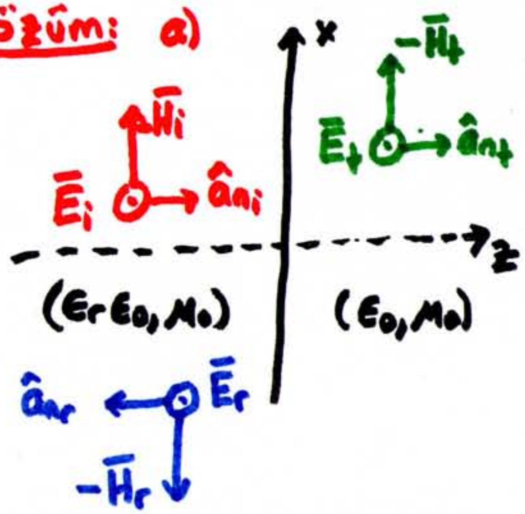
a) Gelen dalganın manyetik alan fazörünü yazınız.

b) Gelen güç yoğunluğunun %9'da 1'i yansıyorsa ε_r'yi bulunuz.

c) Yansıyan ve iletilen elektrik alan fazörlerini bulunuz.

d) Gelen, yansıyan ve iletilen güç yoğunluklarını hesaplayınız.

Çözüm: a)



$$\tilde{\bar{H}}_i = \frac{1}{\eta}\, \hat{a}_{ni} \times \tilde{\bar{E}}_i$$

ve $\eta = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \dfrac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$

ayrıca $\hat{a}_{ni} = \hat{a}_z$ kullanılırsa

$$\tilde{\bar{H}}_i = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{120\pi}\,(\hat{a}_z \times \hat{a}_y)\, 2\cdot 10^{-3}\, e^{-j\beta z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{H}_i = -\hat{a}_x \frac{10^{-3}}{60\pi}\sqrt{\epsilon_r}\, e^{-j\beta z} \quad (A/m)}$$ elde edilir.

b) Her iki ortam kayıpsız olduğundan, Γ reel bir sayıdır ve

$$\frac{|\overline{P}_{ravl}|}{|\overline{P}_{iavl}|} = |\Gamma|^2 = \Gamma^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \boxed{\Gamma = \frac{1}{3} \text{ veya } \Gamma = -\frac{1}{3} \text{ olur.}}$$

$\Gamma = \dfrac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$, $\eta_2 = \eta_0$ ve $\eta_1 = \dfrac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$ olduğundan $\eta_2 > \eta_1$'dir yani

$$\boxed{\Gamma \text{ pozitif olmalıdır.} \Rightarrow \Gamma = \frac{1}{3}}$$

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{\eta_0(1 - 1/\sqrt{\epsilon_r})}{\eta_0(1 + 1/\sqrt{\epsilon_r})} = \frac{\sqrt{\epsilon_r} - 1}{\sqrt{\epsilon_r} + 1} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{\epsilon_r} - 3 = \sqrt{\epsilon_r} + 1 \Rightarrow \sqrt{\epsilon_r} = 2 \Rightarrow \boxed{\epsilon_r = 4}$$ olur.

Ayrıca dik geliş durumu için,

$$\tau = 1 + \Gamma = 1 + \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{4}{3}}$$ bulunur.

c) $\tilde{\vec{E}}_r = \hat{a}_y E_{i0} \Gamma \, e^{j\beta z} = \hat{a}_y \cdot 2\times10^{-3} \times \frac{1}{3} \times e^{j\beta z}$

ve $\beta = w\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0} = \beta_0 \sqrt{\varepsilon_r} = 2\beta_0$ yazılarak

$$\boxed{\tilde{\vec{E}}_r = \hat{a}_y \cdot \frac{2}{3} \cdot 10^{-3} e^{j2\beta_0 z} \quad (V/m)}$$ bulunur.

iletilen dalga da benzer şekilde yazılabilir:

$$\tilde{\vec{E}}_t = \hat{a}_y E_{i0} \tau \, e^{-j\beta_0 z} = \hat{a}_y \, 2\times10^{-3} \times \frac{4}{3} \times e^{-j\beta_0 z} = \hat{a}_y \frac{8}{3} \times 10^{-3} e^{-j\beta_0 z} \quad (V/m)$$

d) $$\overline{P}_{iav} = \frac{1}{2} Re\{\tilde{\vec{E}}_i \times \tilde{\vec{H}}_i^*\} = \frac{4\times10^{-6}}{2\times120\pi} \sqrt{\varepsilon_r} \, \hat{a}_z = \frac{10^{-6}}{30\pi} \hat{a}_z \quad (W/m^2)$$

$$\overline{P}_{rav} = \frac{1}{2} Re\{\tilde{\vec{E}}_r \times \tilde{\vec{H}}_r^*\} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\times10^{-3}\right) \times \left(\frac{2/3\times10^{-3}}{\eta}\right)(-\hat{a}_z) \quad (W/m^2)$$

$$\Rightarrow \overline{P}_{rav} = \frac{10^{-6}}{270\pi}(-\hat{a}_z) \quad (W/m^2)$$

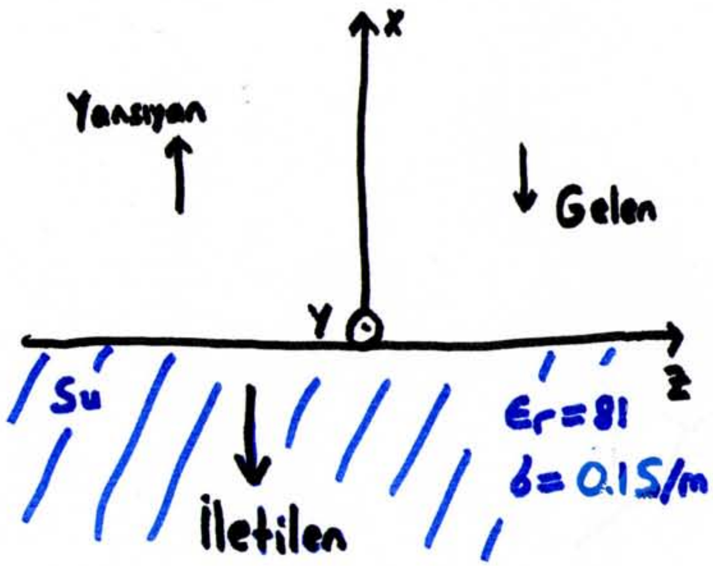
$$\overline{P}_{tav} = \frac{1}{2} Re\{\tilde{\vec{E}}_t \times \tilde{\vec{H}}_t^*\} = \frac{1}{2} \frac{8}{3}\times10^{-3} \times \frac{8\times10^{-3}}{3\times120\pi} = \frac{8\times10^{-6}}{270\pi} \hat{a}_z$$

$\Rightarrow \boxed{\overline{P}_{iav} + \overline{P}_{rav} = \overline{P}_{tav}}$ eşitliği sağlanmaktadır.

Örnek: Sağ el, dairesel kutuplanmış bir düzgün düzlem dalga havada ilerleyerek şekildeki gibi bir düzgün su yüzeyine dik olarak gelmektedir. Su için $\epsilon_r = 81$ ve $\sigma = 0.1$ S/m alınız. Frekansın 1 GHz ve elektrik alan vektörünün frekans bölgesi ifadesinin

$$\tilde{\bar{E}}_i(x) = E_0\left(\hat{a}_y + \hat{a}_z e^{j\psi}\right) e^{j\beta_0 x} \quad (V/m)$$

olduğu biliniyorsa,



a) $\psi = ?$

b) Gelen dalganın manyetik alan fazörünü bulunuz.

c) Yansıyan dalgayı bulunuz.

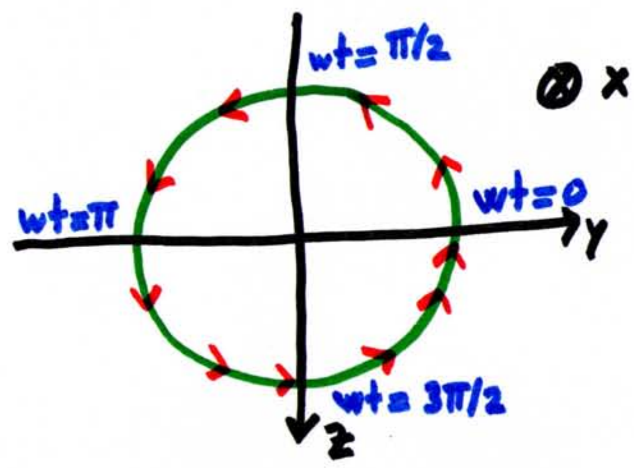
d) İletilen dalgayı bulunuz.

e) Yansıyan ve iletilen dalgaların kutuplanmasını bulunuz.

Çözüm: a) Sağ el (SYT) dairesel kutuplanma için $\psi = \frac{\pi}{2} (\equiv 90°)$ olmalıdır. Bu durumda

$$\vec{\vec{E}}_i = E_0 (\hat{a}_y + j\hat{a}_z) e^{j\beta_0 x}$$ ve zaman bölgesinde de

$$\bar{E}_i = E_0 \hat{a}_y \operatorname{Cos}(wt + \beta_0 x) - E_0 \hat{a}_z \operatorname{Sin}(wt + \beta_0 x)$$



$x = 0$ noktasında elektrik alanı zamana karşı belirlersek, ucunun istenen yönde (SYT) bir daire çizdiğini görürüz. Dalganın $-x$ yönünde ilerlediğine ve gelen dalgaya bakarak kutuplanma belirlediğimize dikkat edilmelidir.

b) $\tilde{\bar{H}}_i = \frac{1}{\eta_o} \hat{a}_n \times \tilde{\bar{E}}_i = \frac{E_o}{120\pi} (-\hat{a}_x) \times (\hat{a}_y + j\hat{a}_z) e^{j\beta_o x}$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{H}}_i = (j\hat{a}_y - \hat{a}_z) \frac{E_o}{\eta_o} e^{j\beta_o x}}$$

c) $\frac{\sigma}{w\epsilon} = \frac{0.1}{2\pi(10^9)\left(\frac{81 \times 10^{-9}}{36\pi}\right)} = \frac{1.8}{81} \ll 1 \Rightarrow$ İYİ DİELEKTRİK

$$\Gamma = \frac{\eta - \eta_o}{\eta + \eta_o} \cong \frac{\sqrt{\mu_o/\epsilon} - \sqrt{\mu_o/\epsilon_o}}{\sqrt{\mu_o/\epsilon} + \sqrt{\mu_o/\epsilon_o}} = \frac{\sqrt{\epsilon_o} - \sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon_o} + \sqrt{\epsilon}} = \frac{1 - \sqrt{\epsilon_r}}{1 + \sqrt{\epsilon_r}} = \frac{1-9}{1+9} = -0.8$$

Gerçekte Γ'nın çok küçük de olsa bir sanal kısmı olacağını hatırlayınız.

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{\bar{E}}_r &= \Gamma E_o (\hat{a}_y + j\hat{a}_z) e^{-j\beta_o x} = -0.8 (\hat{a}_y + j\hat{a}_z) E_o e^{-j\beta_o x} \\ \tilde{\bar{H}}_r &= \frac{-0.8}{120\pi} (\hat{a}_z - j\hat{a}_y) E_o e^{-j\beta_o x} = 2.122 \times 10^{-3} (j\hat{a}_y - \hat{a}_z) E_o e^{-j\beta_o x} \end{aligned}}$$

d) $$\tau = \frac{2\eta}{\eta+\eta_0} \cong \frac{2\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}}}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}}+\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} = \frac{2}{1+\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{2}{1+9} = 0.2 \quad \underline{\underline{(=1+\Gamma)}}$$

O halde iletilen dalgayı yazabiliriz.

$$\tilde{\bar{E}}_t = 0.2\, E_0\,(\hat{a}_y + j\,\hat{a}_z)\, e^{+\gamma x} = 0.2\, E_0\,(\hat{a}_y + j\,\hat{a}_z)\, e^{(\alpha+j\beta)x}$$

$$\tilde{\bar{H}}_t = \frac{0.2\, E_0}{120\pi}\,(\hat{a}_z - j\,\hat{a}_y)\, e^{\gamma x} = 5.3\times10^{-4}(\hat{a}_z - j\,\hat{a}_y)\, E_0\, e^{(\alpha+j\beta)x}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &\cong \frac{6}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} = \frac{10^{-1}}{2}\left(\frac{120\pi}{2}\right) = 2.0944 \quad (Np/m) \\ \beta &\cong w\sqrt{\mu_0\epsilon} = 188.5 \quad (rad/m) \end{aligned}}$$

e) <u>Yansıyan:</u> Dairesel, SY, Sol el, negatif

<u>İletilen:</u> Dairesel, SYT, Sağ el, pozitif

Yansıyan dalgada tüm koşullar aynı kalmakla birlikte dalganın ters yönde ilerlediğine dikkat ediniz. Bu yüzden

Örnek: Boş ve kaynaksız uzayda ilerleyen bir düzgün düzlem dalga için

$$\boxed{\tilde{\vec{E}}(z) = \hat{a}_x\, 10^{-4}(1+j)\, e^{-jkz}}$$

veriliyor. z eksenine dik kesitli ve 20 cm² alanlı bir dikdörtgen alandan geçen ortalama gücü bulunuz.

Çözüm: $\bar{P}_{av} = \frac{1}{2} Re\left\{\tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}}^*\right\} = \hat{a}_z \frac{|\tilde{\vec{E}}|^2}{2\eta_0} = \hat{a}_z \frac{10^{-8}}{120\pi} = 2.653 \times 10^{-11}\, \hat{a}_z \quad (W/m^2)$

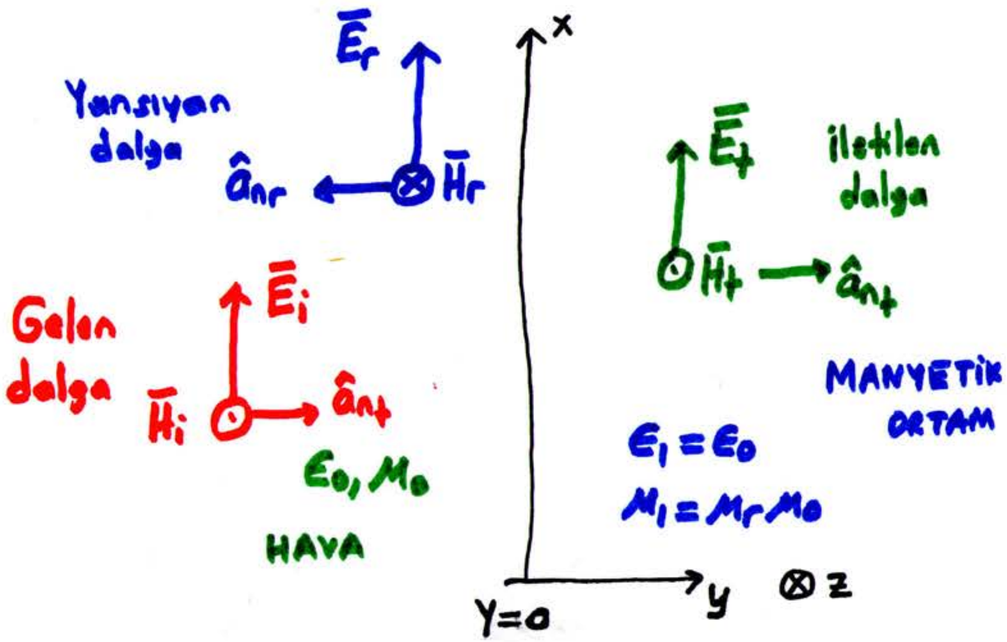
$$P_{av} = \int_S \bar{P}_{av} \cdot d\bar{s} = \bar{P}_{av} \cdot \hat{a}_z\, S = 2.653 \times 10^{-11} \frac{W}{m^2} \cdot 20 (10^{-2})^2\, m^2$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{av} = 5.305 \times 10^{-14}\ W}$$

— Bu durumda $\bar{P}_{av}$ integral alınacak yüzey üzerinde sabit olduğundan, integral alan ile çarpıma indirgenmiştir.

— Alanın birimini m^2'ye çevirdiğimize dikkat ediniz.

S.1. Bir düzgün düzlem dalga havadan, $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\mu_1 = \mu_r \mu_0$ parametrelerine sahip bir ortam üzerine dik olarak gelmektedir. Gelen dalganın ilerleme yönünü y, frekansını 100 MHz, elektrik alanın yönünü x ve genliğini 120π alınız. Bu durumda yansıyan dalganın zamanda ortalama güç yoğunluğu gelen dalganınkinin 16'da 9'udur. İki ortamın sınırı $y=0$ düzlemidir.



a) Gelen dalganın elektrik ve manyetik alan fazörlerini yazınız.

$$\tilde{\bar{E}}_i = \hat{a}_x (120\pi)\, e^{-jk_0 y} \qquad k_0 = \frac{w}{c} = \frac{2\pi \times 100 \times 10^6}{3 \times 10^8} = \frac{2\pi}{3} \ (\text{rad/m})$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{E}}_i = \hat{a}_x (120\pi)\, e^{-j\frac{2\pi}{3} y}}$$

Manyetik alan düzlem dalga bağıntısı ile bulunabilir.

$$\tilde{\bar{H}}_i = \frac{1}{\eta_0}\,\hat{a}_{n_i} \times \tilde{\bar{E}}_i = \frac{1}{120\pi}(\hat{a}_y \times \hat{a}_x)\,120\pi\, e^{-j\frac{2\pi}{3}y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{H}}_i = -\hat{a}_z\, e^{-j\frac{2\pi}{3}z} \quad (A/m)}$$

b) İkinci ortamın bağıl manyetik geçirgenliği nedir?

$\boxed{\dfrac{|\bar{P}_{rav}|}{|\bar{P}_{iav}|} = \dfrac{9}{16} = \Gamma^2}$ soruda verilen bilgidir. O halde

$\Gamma^2 = \dfrac{9}{16} \Rightarrow \boxed{\Gamma = \dfrac{3}{4}}$ veya $\boxed{\Gamma = -\dfrac{3}{4}}$ olabilir. Ancak yansıma katsayısının ifadesine bakarsak,

$$\Gamma = \frac{\eta - \eta_0}{\eta + \eta_0} = \frac{\sqrt{\mu/\epsilon_0} - \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}}{\sqrt{\mu_1/\epsilon_0} + \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} = \frac{\sqrt{\mu_r}\,\eta_0 - \eta_0}{\sqrt{\mu_r}\,\eta_0 + \eta_0} = \frac{\sqrt{\mu_r} - 1}{\sqrt{\mu_r} + 1}$$

İkinci ortam manyetik bir ortam olduğundan $\mu_r > 1$ kabul edelim.

Bu durumda $\Gamma > 0$ olmalıdır yani pozitif kökü seçmeliyiz.

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma = \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{\mu_r} - 1}{\sqrt{\mu_r} + 1}}$$

$\Rightarrow \quad 3\sqrt{\mu_r} + 3 = 4\sqrt{\mu_r} - 4 \Rightarrow \sqrt{\mu_r} = 7$ ve sonuçta

$\boxed{\mu_r = 7^2 = 49}$ olur.

c) Yansıyan ve iletilen dalgaların elektrik ve manyetik alan fazörlerini yazınız.

<u>**Yansıyan:**</u> (b)'de $\Gamma = \frac{3}{4}$ bulmuştuk. O halde,

$$\tilde{\bar{E}}_r = \hat{a}_x \cdot \Gamma \cdot E_{io}\, e^{jk_o y} = \hat{a}_x \left(\tfrac{3}{4}\right)(120\pi)\, e^{j\frac{2\pi}{3}y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{E}}_r = \hat{a}_x\,(90\pi)\, e^{j\frac{2\pi}{3}y} \quad (V/m)}$$ bulunur.

Yansıyan manyetik alan ise,

$$\tilde{\bar{H}}_r = \frac{1}{\eta_o}\,\hat{a}_{n_r} \times \tilde{\bar{E}}_r = \frac{1}{(120\pi)}\,(-\hat{a}_y \times \hat{a}_x)\,(90\pi)\, e^{j\frac{2\pi}{3}y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{H}}_r = +\hat{a}_z \left(\tfrac{3}{4}\right) e^{j\frac{2\pi}{3}y} \quad (A/m)}$$ elde edilir.

<u>**İletilen:**</u>

Şimdi $\Gamma = \frac{3}{4}$ ve $\tau = 1 + \Gamma$ olduğundan,

$$\boxed{\tau = 1 + \Gamma = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}}$$ olur.

İletilen dalga için,

$$\boxed{k = w\sqrt{\mu_1 \epsilon_0}} = w\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\sqrt{\mu_r} = k_0 \cdot 7 = \frac{14\pi}{3} \quad (rad/m)$$

ve
$$\boxed{\eta = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_0}}} = \sqrt{\mu_r}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\mu_r}\,\eta_0 = 7 \cdot 120\pi = 840\pi \ (\Omega)$$
buluruz.

O halde iletilen elektrik alanı,

$$\tilde{\bar{E}}_t = \hat{a}_x \cdot \tau \cdot E_{i0}\, e^{-jky} = \hat{a}_x \left(\frac{7}{4}\right)(120\pi)\, e^{-j7k_0 y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{E}}_t = \hat{a}_x (210\pi)\, e^{-j\frac{14\pi}{3}y} \quad (V/m)}$$
olur.

İletilen manyetik alan ise,

$$\tilde{\bar{H}}_t = \frac{1}{\eta}\,\hat{a}_{nt} \times \tilde{\bar{E}}_t = \frac{1}{7\eta_0}(\hat{a}_y \times \hat{a}_x)\left(\frac{7}{4}\right)(120\pi)\, e^{-j7k_0 y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{H}}_t = -\hat{a}_z \left(\frac{1}{4}\right) e^{-j\frac{14\pi}{3}y} \quad (A/m)}$$
bulunur.

d) Gelen, yansıyan ve iletilen dalgaların zamanda ortalama güç yoğunluğunu bulunuz.

Gelen:
$$\bar{\mathcal{P}}_{iav} = \frac{1}{2}\,Re\{\tilde{\bar{E}}_i \times \tilde{\bar{H}}_i^*\} = \frac{1}{2}\,Re\left\{(120\pi)\,\hat{a}_x \times (-\hat{a}_z)\, e^{-jk_0 y} e^{jk_0 y}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\mathcal{P}}_{iav} = \hat{a}_y (60\pi) \quad (W/m^2)}$$

Yansıyan: $\bar{P}_{rav} = \frac{1}{2} Re\{\tilde{\bar{E}}_r \times \tilde{\bar{H}}_r^*\} = \frac{1}{2} Re\{ 90\pi e^{-jk_o y} (\hat{a}_x \times \hat{a}_z)(\frac{3}{4}) e^{jk_o y}\}$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{P}_{rav} = -\hat{a}_y \frac{270\pi}{8} \quad (W/m^2)}$$

iletilen: $\bar{P}_{tav} = \frac{1}{2} Re\{\tilde{\bar{E}}_t \times \tilde{\bar{H}}_t^*\} = \frac{1}{2} Re\{ (210\pi) e^{-jky} (\hat{a}_x \times (-\hat{a}_z)) (\frac{1}{4}) e^{jky}\}$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{P}_{tav} = \hat{a}_y \left(\frac{210\pi}{8}\right) \quad (W/m^2)}$$

Kontrol edersek,

1) $$\frac{|\bar{P}_{rav}|}{|\bar{P}_{iav}|} = \frac{270\pi/8}{60\pi} = \frac{27}{8 \cdot 6} = \frac{9}{8 \cdot 2} = \boxed{\frac{9}{16} \checkmark}$$

2) $$\bar{P}_{iav} + \bar{P}_{rav} = \left(60\pi - \frac{270\pi}{8}\right)\hat{a}_y = \left(\frac{480\pi - 270\pi}{8}\right)\hat{a}_y = \frac{210\pi}{8}\hat{a}_y$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{P}_{iav} + \bar{P}_{rav} = \bar{P}_{tav} \checkmark}$$

S.2. Kaynaksız boş uzayda ilerleyen bir düzgün düzlem dalganın elektrik alanının fazörü

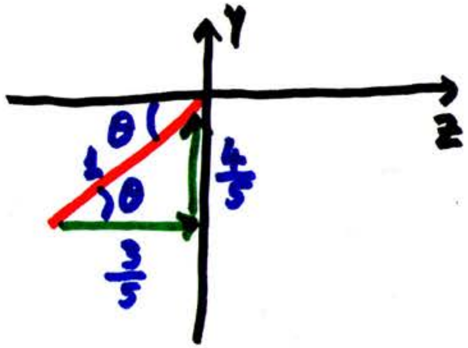
$$\boxed{\tilde{\bar{E}}(y,z) = 5\times10^{-4}\,\eta_0\,\hat{a}_x\, e^{-j(16y+12z)} \quad (V/m)}$$

olarak verilmektedir.

a) Bu dalganın yayılma vektörünün y ekseni ile yaptığı açı nedir?

$\boxed{k\,\hat{a}_n\cdot\bar{r} = 16y+12z}$ $\quad$ $\boxed{k = |\bar{k}| = \sqrt{16^2+12^2} = 20}$

O halde $\hat{a}_n\cdot\bar{r} = \dfrac{16y+12z}{20} = \dfrac{4}{5}y + \dfrac{3}{5}z = \left(\dfrac{4}{5}\hat{a}_y + \dfrac{3}{5}\hat{a}_z\right)\cdot(x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z)$



$\Rightarrow \hat{a}_n = \dfrac{4}{5}\hat{a}_y + \dfrac{3}{5}\hat{a}_z$

$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ ve $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$

$\Rightarrow \boxed{\theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{4}{5}\right) = 53^\circ}$

b) Dalganın yayılma sabitini bulunuz.

(a) şıkkından $\boxed{k = 20 \ (rad/m)}$ ve $\boxed{\bar{k} = 16\,\hat{a}_y + 12\,\hat{a}_z}$ yazılabilir.

c) Dalganın faz hızını hesaplayınız.

Soruda ortam boş uzay verildiğinden,

$$\boxed{v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3\times10^8 \ (m/s)}$$ olur.

d) Dalga boyunu bulunuz.

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{20} = 0.1\pi \quad (m)}$$

e) Dalganın frekansı nedir?

Ortam boş uzay olduğundan $\frac{\lambda}{c} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{3\times10^8}{0.1\pi} = \frac{3}{\pi}\times10^8 \,(Hz)$

veya $\boxed{f = \frac{3}{\pi} \ GHz}$ bulunur.

Veya $k = w\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \Rightarrow w = k.c \Rightarrow f = \frac{k.c}{2\pi}$

$$\Rightarrow \boxed{f = \frac{20\times3\times10^8}{2\pi} = \frac{3}{\pi} \ GHz}$$ olarak da elde edilebilir.

f) Dalganın manyetik alan fazörünü bulunuz.

$$\tilde{\bar{H}} = \frac{1}{\eta_0}\, \hat{a}_n \times \tilde{\bar{E}} = \frac{1}{(\cancel{120\pi})} \left(\frac{4}{5}\hat{a}_y + \frac{3}{5}\hat{a}_z\right) \times \hat{a}_x\, (\cancel{120\pi})\, e^{-j(16y+12z)} \times 5\times10^{-4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{H}} = \left(\frac{3}{5}\hat{a}_y - \frac{4}{5}\hat{a}_z\right) 5\times10^{-4}\, e^{-j(16y+12z)} = 10^{-4}(3\hat{a}_y - 4\hat{a}_z)\, e^{-j(16y+12z)} \quad (A/m)}$$

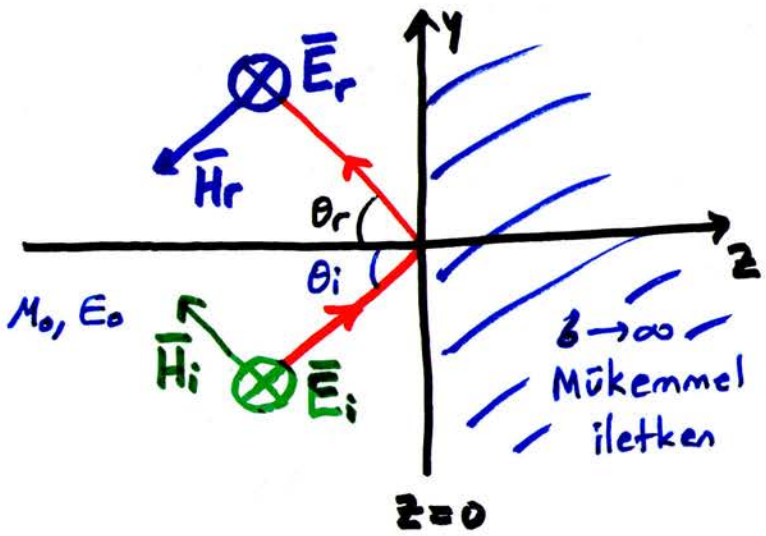
g) Manyetik alanın zaman bölgesi ifadesini bulunuz.

$$w = 2\pi f = 2\pi \times \frac{3}{\pi} \times 10^9 = 6\times10^9 \ (rad/s)$$

$$\bar{H} = \mathrm{Re}\{\tilde{\bar{H}}\, e^{jwt}\} = \mathrm{Re}\{10^{-4}(3\hat{a}_y - 4\hat{a}_z)\, e^{-j(16y+12z)}\, e^{j6\times10^9 t}\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{H}(y,z,t) = 10^{-4}(3\hat{a}_y - 4\hat{a}_z)\, \mathrm{Cos}(6\times10^9 t - 16y - 12z) \quad (A/m)}$$

h) Bu dalga $z=0$'da bir mükemmel iletken bölgenin sınırı ile karşılaşmaktadır. Yansıyan dalganın elektrik alan fazörünü yazınız.



(a) şıkkından $\boxed{\theta = \theta_i = 53^\circ}$ olduğunu biliyoruz.

Dalga $\boxed{\Gamma = -1}$ ile tümden yansıyacaktır.

Ayrıca $\boxed{\hat{a}_{n_i} = \frac{4}{5}\hat{a}_y + \frac{3}{5}\hat{a}_z}$ de hesaplanmıştı. Yani gelen dalga $+y$, $+z$ yönünde ilerlemektedir.

Dalga z yönünde sınırla karşılaştığından z yönünde yansıma olur ancak y yönünde etkilenmeden harekete devam eder. Böylelikle

$$\boxed{\hat{a}_{n_r} = \frac{4}{5}\hat{a}_y - \frac{3}{5}\hat{a}_z}$$

O halde,

$$\boxed{\tilde{\bar{E}}_r = \hat{a}_x \cdot \Gamma \cdot E_{i0} \cdot e^{-jk\hat{a}_{n_r}\cdot\bar{r}} = -5{\times}10^{-4}\eta_0\,\hat{a}_x\,e^{-j(16y-12z)} \quad (V/m)}$$

i) Yansıyan dalganın manyetik alan fazörünü yazınız.

$$\tilde{\bar{H}}_r = \frac{1}{\eta_0}\,\hat{a}_{n_r} \times \tilde{\bar{E}}_r = \frac{1}{\eta_0}\left(\frac{4}{5}\hat{a}_y - \frac{3}{5}\hat{a}_z\right) \times (-\hat{a}_x)\, 5{\times}10^{-4}\eta_0\, e^{-j(16y-12z)}$$

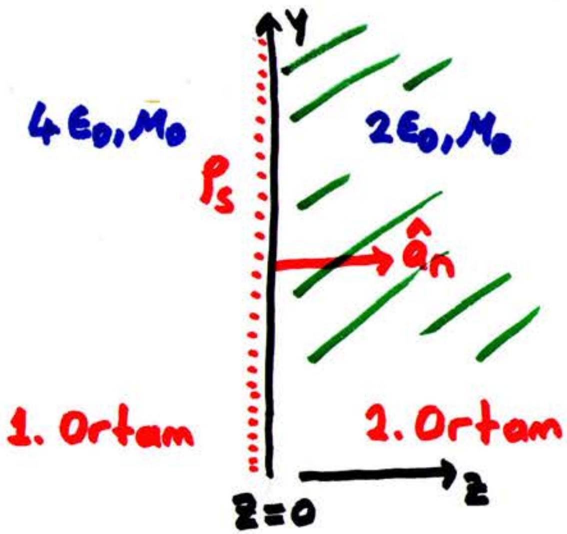
$$\Rightarrow \tilde{\bar{H}}_r = \left(\frac{3}{5}\hat{a}_y + \frac{4}{5}\hat{a}_z\right) 5{\times}10^{-4}\, e^{-j(16y-12z)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{H}}_r = 10^{-4}\left(3\hat{a}_y + 4\hat{a}_z\right) e^{-j(16y-12z)} \quad (A/m)}$$

j) Yansıyan dalganın elektrik ve manyetik alanlarının zaman bölgesi ifadesini yazınız.

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{E}_r(y,z,t) &= Re\{\tilde{\bar{E}}_r e^{j\omega t}\} = -5\times10^{-4}\,\hat{a}_x \cos(6\times10^9 t-16y+12z) \quad (V/m)\\ \bar{H}_r(y,z,t) &= Re\{\tilde{\bar{H}}_r e^{j\omega t}\} = 10^{-4}(3\hat{a}_y+4\hat{a}_z)\cos(6\times10^9 t-16y+12z) \quad (A/m)\end{aligned}}$$

Örnek:



$z=0$ düzlemi şekilde gösterildiği gibi iki dielektrik ortamı birbirinden ayırmaktadır. Sınırdaki yüzey yük yoğunluğu $\rho_s = 2\epsilon_0$ Coul/m² veriliyor.

1. Ortamdaki elektrik alanın sınırdaki değeri

$$\boxed{\bar{E}_1(x,y,0) = 2\,\hat{a}_x + \hat{a}_y + 3\,\hat{a}_z \quad (V/m)}$$ ise

1. Ortamda sınırda $\bar{D}_1$'i ; 2. ortamda sınırda $\bar{D}_2$ ve $\bar{E}_2$'yi bulunuz.

Çözüm: x ve y bileşenleri teğet, z bileşenleri ise normal bileşenlerdir.

Sınırda $\bar{D}_1$'i bularak başlayalım.

$$\bar{D}_1(x,y,0) = \epsilon_1 \bar{E}_1(x,y,0) = 4\epsilon_0 \bar{E}_1(x,y,0) = 4\epsilon_0(2\hat{a}_x + \hat{a}_y + 3\hat{a}_z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{D}_1(x,y,0) = \epsilon_0(8\hat{a}_x + 4\hat{a}_y + 12\hat{a}_z)}$$

i) **Teğet Sınır Koşulu:** Teğet elektrik alanı her zaman süreklidir.

$$\Rightarrow E_{1x}(x,y,0) = E_{2x}(x,y,0) \Rightarrow \boxed{E_{2x}(x,y,0) = 2 \quad (V/m)}$$

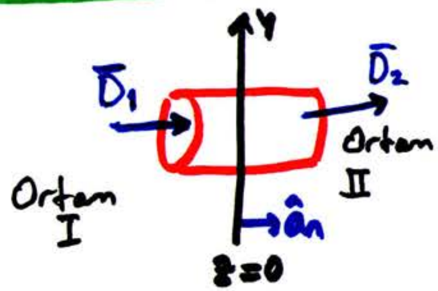
$$\text{ve} \quad D_{2x}(x,y,0) = \epsilon_2 E_{2x}(x,y,0) = 2\epsilon_0 \cdot 2 = 4\epsilon_0 \quad (Coul/m^2)$$

Ayrıca,

$$E_{1y}(x,y,0) = E_{2y}(x,y,0) \Rightarrow \boxed{E_{2y}(x,y,0) = 1 \quad (V/m)}$$

$$\text{ve} \quad D_{2y}(x,y,0) = \epsilon_2 E_{2y}(x,y,0) = 2\epsilon_0 \cdot 1 = 2\epsilon_0 \quad (Coul/m^2)$$

ii) **Normal Sınır Koşulu:**



şekilden, $\hat{a}_n = \hat{a}_z$ ve

$$\boxed{\hat{a}_n \cdot (\bar{D}_2 - \bar{D}_1) = \rho_s}$$ yazılabilir.

$$\Rightarrow \boxed{\hat{a}_z \cdot (\bar{D}_2 - \bar{D}_1) = \rho_s} \Rightarrow \hat{a}_z \cdot \left(2\epsilon_0 \bar{E}_2 - 4\epsilon_0 \bar{E}_1\right) = \rho_s$$

$$\Rightarrow \quad 2\epsilon_0 \, E_{2z}(x,y,0) - 4\epsilon_0 \, E_{1z}(x,y,0) = \rho_s$$

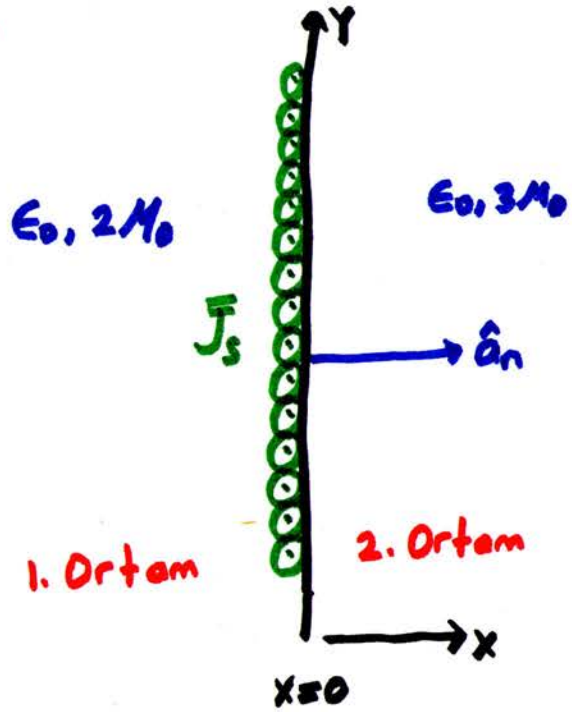
$$\Rightarrow \quad 2\epsilon_0 \, E_{2z}(x,y,0) = 4\epsilon_0 \cdot 3 + 2\epsilon_0 = 14\epsilon_0 \Rightarrow \boxed{E_{2z}(x,y,0) = 7}$$

$$\text{ve} \quad D_{2z}(x,y,0) = 2\epsilon_0 E_{2z}(x,y,0) \Rightarrow \boxed{D_{2z}(x,y,0) = 14\epsilon_0}$$

Bilinenler biraraya getirilerek,

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{E}_2(x,y,0) &= 2\hat{a}_x + \hat{a}_y + 7\hat{a}_z \quad (V/m) \\ \bar{D}_2(x,y,0) &= \epsilon_0 (4\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 14\hat{a}_z) \quad (Coul/m^2) \end{aligned}}$$

Örnek:



$x=0$ düzlemi şekilde gösterildiği gibi iki manyetik ortamı birbirinden ayırmaktadır.

Sınırdaki yüzey akım yoğunluğu

$$\bar{J}_s = 2\hat{a}_z \ A/m$$

veriliyor.

2. Ortamdaki manyetik alanın sınırdaki değeri

$$\boxed{\bar{H}_2(0,y,z) = 2\hat{a}_x + 4\hat{a}_y + \hat{a}_z \quad A/m}$$

ise 1. ortamda sınırda $\bar{H}_1$ ve $\bar{B}_1$'i, ikinci ortamda da $\bar{B}_2$'yi bulunuz.

Çözüm: 2. ortamda,

$$\bar{B}_2 = \mu_2 \bar{H}_2 = 3\mu_0 \bar{H}_2 \Rightarrow \boxed{\bar{B}_2(0,y,z) = \mu_0(6\hat{a}_x + 12\hat{a}_y + 3\hat{a}_z) \quad Wb/m^2}$$

bulunur. x-bileşenler normal, y ve z bileşenler ise teğettir.

Normal sınır koşulu: Manyetik alan için $B_{1n}=B_{2n}$'dir.

$$\Rightarrow B_{1x}(0,y,z)=B_{2x}(0,y,z) \Rightarrow \boxed{B_{1x}(0,y,z)=6\mu_0 \quad Wb/m^2}$$

O halde $H_{1x}(0,y,z)=\dfrac{B_{1x}(0,y,z)}{2\mu_0} \Rightarrow \boxed{H_{1x}(0,y,z)=3 \quad A/m}$

Teğet sınır koşulu: Teğet manyetik alan, yüzey akımı kadar süreksizdir.

Gösterilen $\hat{a}_n=\hat{a}_x$ için

$$\boxed{\hat{a}_x \times (\bar{H}_2-\bar{H}_1)\Big|_{x=0}=\bar{J}_s}$$

$$\Rightarrow \hat{a}_x \times \Big[(H_{2x}-H_{1x})\hat{a}_x+(H_{2y}-H_{1y})\hat{a}_y+(H_{2z}-H_{1z})\hat{a}_z\Big]\Big|_{x=0}=2\hat{a}_z$$

$$\Rightarrow \hat{a}_z(H_{2y}-H_{1y})-\hat{a}_y(H_{2z}-H_{1z})=2\hat{a}_z$$ Bileşenleri eşitleyelim.

i) $H_{2z}-H_{1z}=0 \Rightarrow \boxed{H_{1z}=1 \quad A/m}$

$\Rightarrow \boxed{B_{1z}=2\mu_0 \quad Wb/m^2}$

ii) $(H_{2y}-H_{1y})=2 \Rightarrow \boxed{H_{1y}=4-2=2 \quad A/m}$

$\Rightarrow \boxed{B_{1y}=4\mu_0 \quad Wb/m^2}$

Bulunanları derlersek,

$$\boxed{\begin{aligned} &\bar{H}_1 (x=0, y, z) = 3\,\hat{a}_x + 2\,\hat{a}_y + \hat{a}_z \quad (A/m) \\ &\bar{B}_1 (x=0, y, z) = \mu_0 (6\,\hat{a}_x + 4\,\hat{a}_y + 2\,\hat{a}_z) \quad (Wb/m^2) \\ &\bar{B}_2 (x=0, y, z) = \mu_0 (6\,\hat{a}_x + 12\,\hat{a}_y + 3\,\hat{a}_z) \quad (Wb/m^2) \end{aligned}}$$

Örnek: Boş uzayın belli bir bölgesinde $\bar{E} = x^2\,\hat{a}_x + xz\,\sin(\frac{\pi}{2}y)\,\hat{a}_y + e^{-\ln z}\,\hat{a}_z$ olduğu biliniyorsa $(1,1,1)$ noktasındaki yük yoğunluğu nedir?

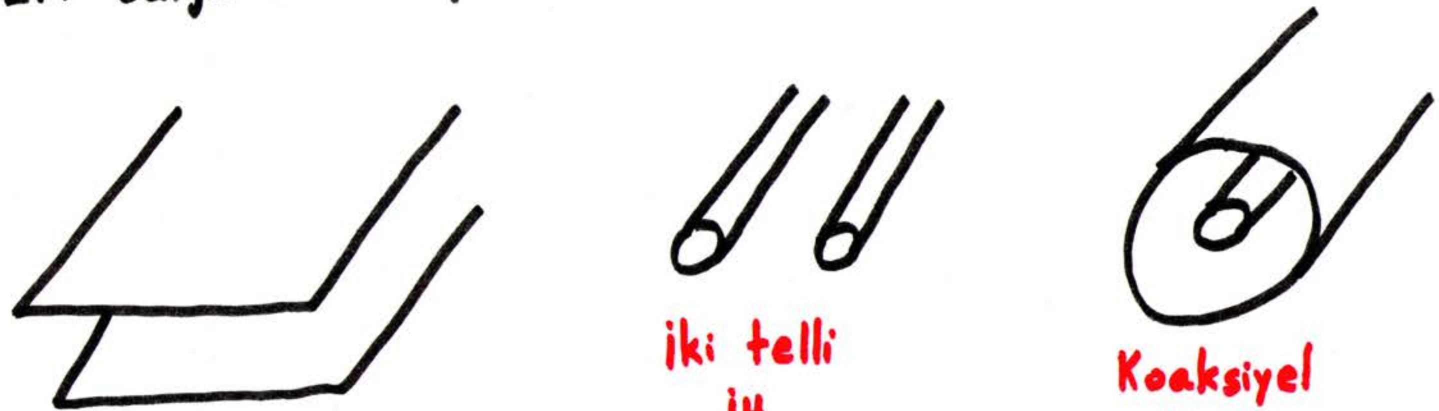
$$\boxed{\rho_v = \nabla \cdot \bar{D}} \Rightarrow \rho_v = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \epsilon_0 \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right]$$

$$\Rightarrow \rho_v = \epsilon_0 \left[(2x) + \frac{\pi}{2} xz \cos(\frac{\pi}{2} y) - \frac{1}{z} e^{-\ln z} \right] \quad Coul/m^2$$

O halde $\boxed{\rho_v (0, y, z) = \epsilon_0 \quad Coul/m^2}$ elde edilir.

İLETİM HATLARI

- Güç ve bilgiyi iki nokta arasında emin bir şekilde aktarmak için kaynak enerjisi yönlendirilmeli veya kılavuzlanmalıdır.
- İH'ları ile kılavuzlanan TEM dalgaları inceleyeceğiz.
- TEM Modunda iletim hattı boyunca $\bar{E} \perp \bar{H} \perp \bar{k}$ olmalıdır. $\bar{k}$, yayılma sabiti vektörüdür.
- TEM dalga destekleyen bazı İH örnekleri aşağıdadır.



Paralel Plakalı İH

iki telli İH

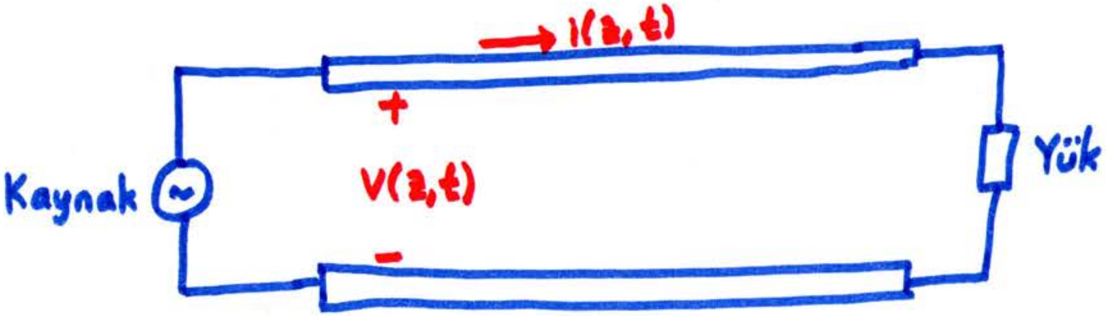
Koaksiyel Kablo

- Dalga boyu devre ve elemanlarına göre çok büyükse, devre toplu elemanlar ile modellenebilir.

— Yüksek frekanslarda İH'larının boyu λ'ya göre küçük değildir. Bazı durumlarda uzunlukları λ'nın birçok katı olabilir. Böyle durumlarda bir İH bir dağıtılmış parametre devresidir ve uzunluğu boyunca dağıtılmış devre elemanları ile modellenmelidir.

— Genel durumda bir İH üzerinde her iki yönde ilerleyen dalgalar vardır, yani duran dalgalar söz konusudur.

— Sonuçta yüksek frekanslarda İH üzerindeki akım ve gerilim, konumun ve zamanın fonksiyonudur, sabit olarak kabul edilemez.



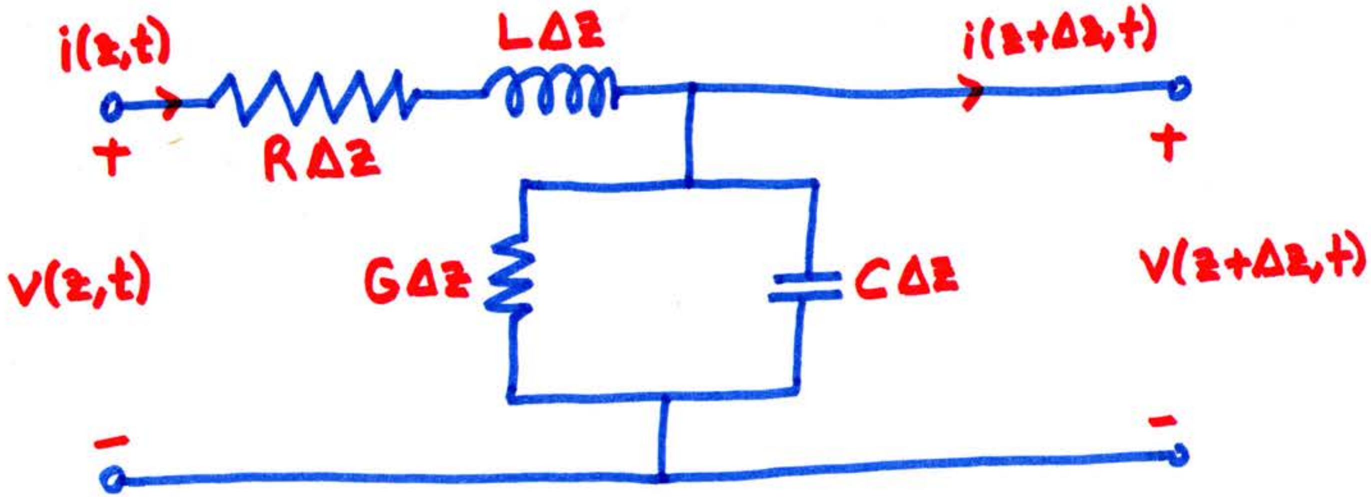
Böyle bir devrenin analizi

1) Alan analizi ile ($\bar{E}$ ve $\bar{H}$ cinsinden) veya

2) Devre analizi ile (i ve v cinsinden) yapılabilir. Böylelikle devre teorisinin basit kavramları da kullanılabilir.

— İH devrelerinin analizinde devre teorisinin kullanılması, TEM modu için V ve i'nin $\bar{E}$ ve $\bar{H}$ cinsinden tek olarak ifade edilebildiği için olanaklıdır.

— Diferansiyel Δz uzunluğunda bir iletim hattı düşünelim. Bu hat, aşağıdaki şekilde görülen R, L, G, C parametreleri ile modellenebilir.



Burada R birim uzunluk başına direnç (iletkenlik kayıpları)

L " " " indüktans

G " " " iletkenlik

(ε) ← C " " " kapasitanstır.

$\bar{J} = \sigma_d \bar{E}$

- İH'ları bu parametrelerle modellenebilir. Bunlar hat boyunca düzgün ve sürekli dağıtılmıştır.
- Parametrelerin yeri değişse de analiz sonucu aynı kalır.
- Analizi Kirchhoff yasaları ile yapacağız.

1) KVY: $V(z,t) - R\Delta z\, i(z,t) - L\Delta z \dfrac{\partial i(z,t)}{\partial t} = V(z+\Delta z, t)$

$$\Rightarrow \frac{V(z,t) - V(z+\Delta z,t)}{\Delta z} = R\, i(z,t) + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

$\Delta z \to 0$ için limit alırsak,

$$\boxed{-\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} = R\, i(z,t) + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \qquad (1)}$$ buluruz.

2) KAY: $i(z,t) - G\Delta z\, V(z+\Delta z,t) - C\Delta z \dfrac{\partial V(z+\Delta z,t)}{\partial t} - i(z+\Delta z,t) = 0$

Her terimi Δz'ye böler ve $\Delta z \to 0$ için limit alırsak,

$$\boxed{-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = G\, V(z,t) + C\frac{\partial V(z,t)}{\partial t} \qquad (2)}$$ elde ederiz.

(1) ve (2) genel iletim hattı denklemleridir.

– Sinüzoidal zaman bağımlılığı olduğu durumda,

$$\boxed{v(z,t) = Re\{V(z)\,e^{jwt}\} \quad , \quad i(z,t) = Re\{I(z)\,e^{jwt}\}}$$

olur ve $V(z)$ ile $I(z)$ kompleks fazörleri

$$-\frac{dV(z)}{dz} = (R+jwL)\,I(z) \qquad (3)$$

$$-\frac{dI(z)}{dz} = (G+jwC)\,V(z) \qquad (4)$$

denklemlerini sağlar.

(3) ve (4) harmonik zamanlı iletim hattı denklemleridir.

– Şimdi (3)'ün her iki tarafının z'ye göre türevini alalım ve (4)'ü kullanalım.

$$-\frac{dV^2}{dz^2} = (R+jwL)\frac{dI}{dz} = -(R+jwL)(G+jwC)\,V(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2V(z)}{dz^2} - (R+jwL)(G+jwC)\,V(z) = 0 \qquad (5)}$$

– Şimdi $\boxed{\gamma^2 = (R+jwL)(G+jwC)}$ tanımlayalım.

– O halde

$$\boxed{\frac{d^2V}{dz^2} - \gamma^2 V = 0} \quad (6)$$

ve (4) denkleminden başlayarak da benzer yolla,

$$\boxed{\frac{d^2I}{dz^2} - \gamma^2 I = 0} \quad (7)$$

– (6) ve (7) bir iletim hattı için dalga denklemleridir.

$\gamma = \sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)} = \alpha + j\beta$ yazılırsa

α : zayıflama sabiti (Np/m)

β : faz sabiti (rad/m)

ve γ da kompleks yayılma sabitidir.

SONSUZ İ.H. Bu durumda çözümler

$$\boxed{\begin{aligned} V(z) &= V^+(z) + V^-(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z} \\ I(z) &= I^+(z) + I^-(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z} \end{aligned}}$$

bulunur. V ile I bağıntılı olduğundan, V_0'larla I_0'lar da birbirleri ile bağıntılıdır. Bu bağımlılığı görmek için

$$-\frac{dV}{dz} = (R+j\omega L)\,I$$ denklemini ele alalım. Buradan,

$$I(z) = -\frac{1}{R+j\omega L}\frac{dV}{dz} = -\frac{1}{R+j\omega L}\left(-\gamma V_0^+ e^{-\gamma z} + \gamma V_0^- e^{\gamma z}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\gamma}{R+j\omega L}\left(V_0^+ e^{-\gamma z} - V_0^- e^{\gamma z}\right) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z}}$$

bulunur. Bu eşitlik her z için sağlanmalıdır. Bu nedenle,

$$\boxed{\frac{V_0^+}{I_0^+} = -\frac{V_0^-}{I_0^-} = \frac{(R+j\omega L)}{\gamma} = \frac{(R+j\omega L)}{\sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}} = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}} = Z_0}$$

Z_0 sadece iletim hattı parametrelerine bağlıdır ve karakteristik empedans veya öz empedans olarak adlandırılır.

- Dikkat edilmelidir ki,

$$\boxed{\frac{V(z)}{I(z)} \neq Z_0 \quad \text{ancak} \quad \frac{V_0^+}{I_0^+} = \frac{V^+}{I^+} = -\frac{V^-}{I^-} = -\frac{V_0^-}{I_0^-} = Z_0 .}$$

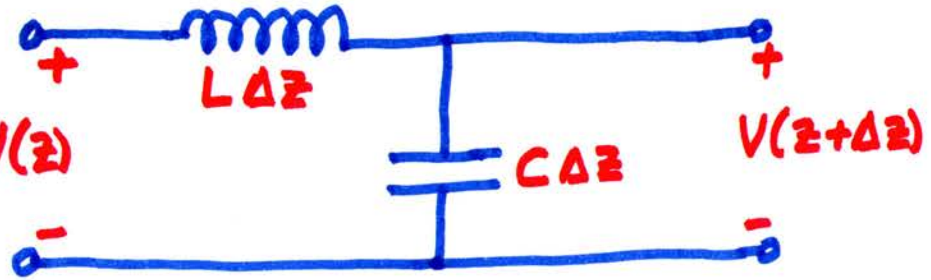
- Bu durumda,

$$\boxed{I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{\gamma z} = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z}}$$ bulunur.

- I_0^- akımının hatta sola doğru aktığı düşünülürse neden işaretinin "+" olması gerektiği daha iyi anlaşılabilir.

KAYIPSIZ İLETİM HATTI:

Eğer hat kayıpsız ise $R=0$ ve $G=0$ olmalıdır. Bu durumda İH modeli aşağıdaki hale dönüşür.



$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(\cancelto{0}{R}+jwL)(\cancelto{0}{G}+jwC)} = jw\sqrt{LC}$$

$\Rightarrow$ i) $\boxed{\alpha = 0 \quad , \quad \beta = w\sqrt{LC}}$

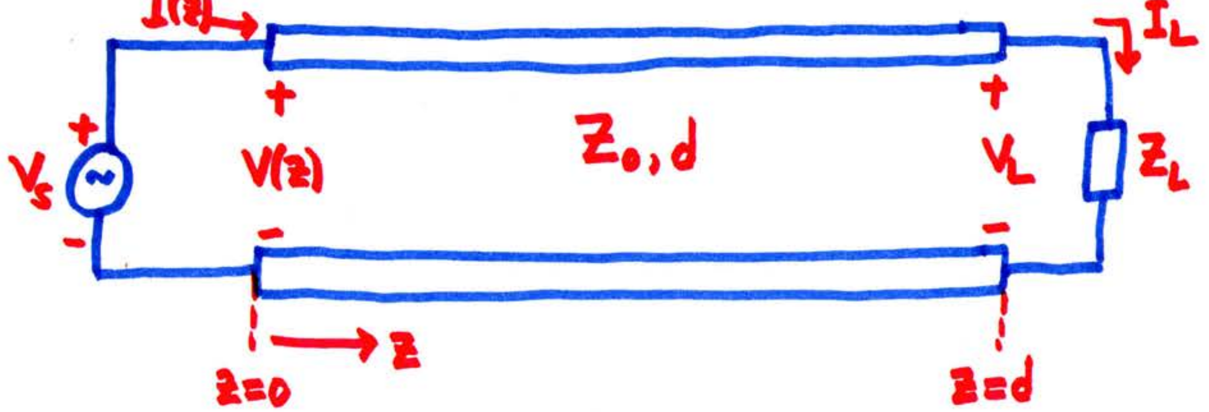
ii) Faz hızı $\boxed{v_p = \frac{w}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ ve bu da frekanstan bağımsız (sabit) olduğundan böyle bir iletim hattı **bozunumsuz** bir ortamdır.

iii) (Karakteristik) Öz Empedans:

$$Z_0 = R_0 + jX_0 = \sqrt{\frac{R + jwL}{G + jwC}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$ ve bu da yine frekanstan bağımsızdır

Aynı zamanda $X_0 = 0$'dır.

YANSIMA KATSAYISI VE EMPEDANS



V_S kaynağı d uzunluğunda bir iletim hattı ile Z_L yüküne bağlanmıştır. Bu devrede $V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z}$ yazılabilir. Burada V_0^+ ve V_0^- sırasıyla $+z$ ve $-z$ yönünde ilerleyen dalgaların $z=0$'daki genlikleridir. Ayrıca,

$$V_L = V(z=d) = V_0^+ e^{-\gamma d} + V_0^- e^{\gamma d} = V_L^+ + V_L^-$$

ve $\quad I_L = I_L^+ + I_L^- = \dfrac{V_L^+}{Z_0} - \dfrac{V_L^-}{Z_0}$ yazılabilir.

– Yükteki yansıma katsayısı

$$\boxed{\Gamma_L = \frac{V_L^-}{V_L^+}}$$

olarak tanımlanır. Yansıma katsayısı için dalgalarda elektrik alanını, iletim hatlarında ise gerilimi kullandığımıza dikkat edilmelidir. Ayrıca,

$$Z_L = \frac{V_L}{I_L} = \frac{V_L^+ + V_L^-}{I_L^+ + I_L^-} = \frac{V_L^+ + V_L^-}{(V_L^+ - V_L^-)/Z_0}$$

Son ifadede payı ve paydayı V_L^-'ye bölelim.

$$\Rightarrow Z_L = Z_0 \frac{1 + \dfrac{V_L^-}{V_L^+}}{1 - \dfrac{V_L^-}{V_L^+}} \Rightarrow \boxed{Z_L = Z_0 \frac{1+\Gamma_L}{1-\Gamma_L}} \qquad (1)$$

(1)'den yararlanarak Γ_L'yi Z_0 ve Z_L cinsinden çözebiliriz.

$$(1-\Gamma_L) Z_L = Z_0 (1+\Gamma_L) \Rightarrow \Gamma_L (Z_L + Z_0) = Z_L - Z_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = |\Gamma_L| e^{j\theta_L}} \qquad (2)$$

1) Yük yansıma katsayısı reel veya kompleks olabilir.

2) $Z_L = Z_0$ ise $\Gamma_L = 0$ olur ve yükte yansıma yoktur.

3) Tüm empedanslar Z_0'a bölünerek normalize bir sistemde çalışılabilir.

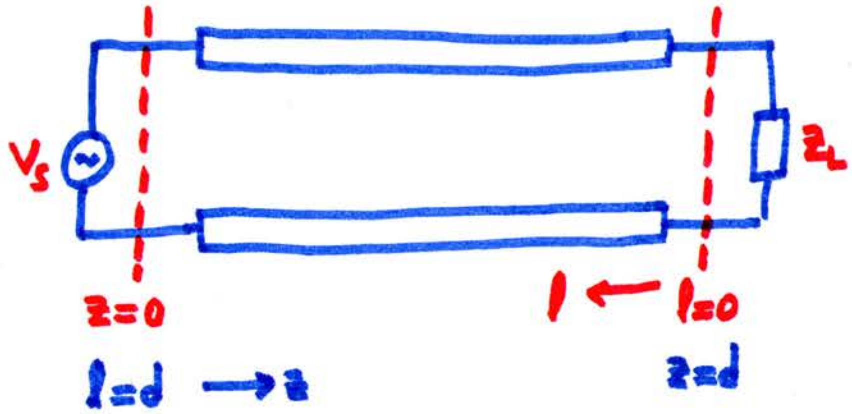
Normalize empedans:

$\bar{Z}_L = \frac{Z_L}{Z_0}$ ile tanımlanır. Bu durumda (1) kullanılırsa,

$$\bar{Z}_L = \frac{1+\Gamma_L}{1-\Gamma_L}$$ elde edilir. (2) denklemi ise

$$\boxed{\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{Z_L/Z_0 - 1}{Z_L/Z_0 + 1} = \frac{\bar{Z}_L - 1}{\bar{Z}_L + 1}}$$ olarak yazılabilir.

— Empedans uyumlama ve devre analizinde genellikle bilinen parametre yükten olan uzaklıktır. Formüllerimizi bu uzaklık cinsinden ifade edeceğiz.



$\boxed{l=d-z}$ olduğu açıktır. O halde, $\boxed{z=d-l \qquad (3)}$

$V(z)=V_0^+e^{-\gamma z}+V_0^-e^{\gamma z}$ olduğundan (3) kullanılarak

$$V(l)=V_0^+e^{-\gamma(d-l)}+V_0^-e^{\gamma(d-l)}=\underbrace{V_0^+e^{-\gamma d}}_{V_L^+}e^{\gamma l}+\underbrace{V_0^-e^{\gamma d}}_{V_L^-}e^{-\gamma l}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(l)=V_L^+e^{\gamma l}+V_L^-e^{-\gamma l} \qquad (4)}$$

elde edilir. l ters yönde ölçüldüğü için + ve − üsteller yer değiştirmiştir. Akım için benzer analiz yapılırsa,

$$\boxed{I(l)=\frac{1}{Z_0}\left(V_L^+e^{\gamma l}-V_L^-e^{-\gamma l}\right)}$$

elde edilir.

Yükten l uzaklıktaki yansıma katsayısı

$$\boxed{\Gamma(l) = \frac{\text{geri dönen gerilim}}{\text{ileri giden gerilim}}}$$

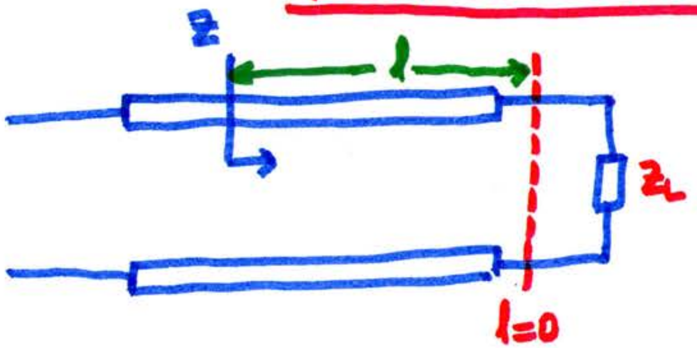
olarak tanımlanır. Bu tanımla

$$\Gamma(l) = \frac{V_L^- e^{-\gamma l}}{V_L^+ e^{\gamma l}} = \frac{V_L^-}{V_L^+} e^{-2\gamma l} = \Gamma_L e^{-2\gamma l} \quad \text{yani}$$

$$\boxed{\Gamma(l) = \Gamma_L e^{-2\gamma l} \qquad (5)}$$

elde edilir. $2\gamma l$ dalganın yüke ulaşıp aynı noktaya dönene kadar ilerlediği elektriksel mesafedir.

Yükten l Uzaklıkta Empedans



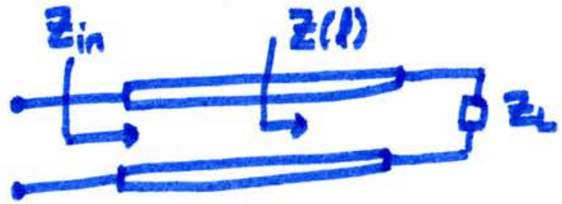
Yükten l uzaklıkta yüke doğru bakıldığında görülen empedansı hesaplayacağız.

$$Z(l) = \frac{V(l)}{I(l)} = \frac{V_L^+ e^{\gamma l} + V_L^- e^{-\gamma l}}{\frac{1}{Z_0}(V_L^+ e^{\gamma l} - V_L^- e^{-\gamma l})} = Z_0 \frac{e^{\gamma l} + \Gamma_L e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} - \Gamma_L e^{-\gamma l}}$$

$$Z(\ell)=Z_0\frac{e^{\gamma\ell}+\left(\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}\right)e^{-\gamma\ell}}{e^{\gamma\ell}-\left(\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}\right)e^{-\gamma\ell}}=Z_0\frac{e^{\gamma\ell}(Z_L+Z_0)+e^{-\gamma\ell}(Z_L-Z_0)}{e^{\gamma\ell}(Z_L+Z_0)-e^{-\gamma\ell}(Z_L-Z_0)}$$

$$''=Z_0\frac{Z_L(e^{\gamma\ell}+e^{-\gamma\ell})+Z_0(e^{\gamma\ell}-e^{-\gamma\ell})}{Z_L(e^{\gamma\ell}-e^{-\gamma\ell})+Z_0(e^{\gamma\ell}+e^{-\gamma\ell})}=Z_0\frac{Z_L\cosh\gamma\ell+Z_0\sinh\gamma\ell}{Z_L\sinh\gamma\ell+Z_0\cosh\gamma\ell}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z(\ell)=Z_0\frac{Z_L+Z_0\tanh\gamma\ell}{Z_0+Z_L\tanh\gamma\ell}\qquad (6)}$$



Kayıpsız hat için

$\gamma=j\beta$ ve $\tanh\gamma\ell=j\dfrac{(e^{j\beta\ell}-e^{-j\beta\ell})/2j}{(e^{j\beta\ell}+e^{-j\beta\ell})/2}=j\tan\beta\ell$ olur ve

bu durumda

$$\boxed{Z(\ell)=Z_0\frac{Z_L+jZ_0\tan\beta\ell}{Z_0+jZ_L\tan\beta\ell}\qquad (7)}$$

elde edilir.

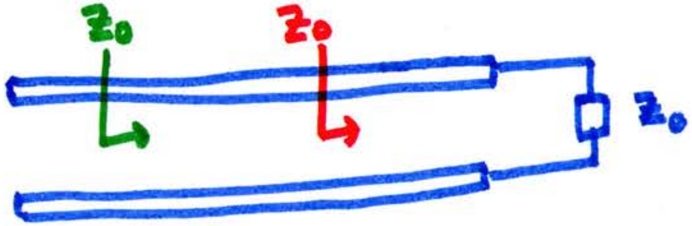
Özel Durumlar

1) $Z_L = Z_0$ (Uyumlu Yük) Bu durumda

$$\boxed{\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 0}$$

olduğundan yansıyan dalga yoktur. Ayrıca,

$$Z(\ell) = Z_0 \frac{Z_0 + j\cancel{Z_0} \tan\beta\ell}{Z_0 + j\cancel{Z_0} \tan\beta\ell} = Z_0$$ (her ℓ için) bulunur.



UYUMLU HAT

2) $\ell = \frac{\lambda}{2}$ olsun. O zaman $\beta\ell = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi$ ve $\tan\beta\ell = \tan\pi = 0$

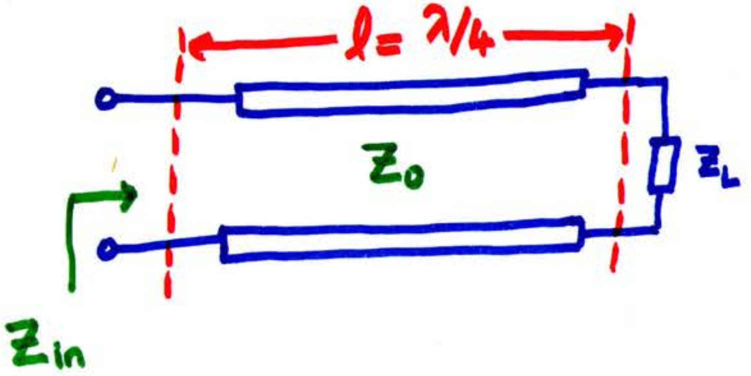
$$\Rightarrow \boxed{Z(\ell) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \cdot 0}{Z_0 + jZ_L \cdot 0} = Z_L}$$

Empedans her $\frac{\lambda}{2}$ mesafede kendini tekrar eder.

$\frac{\lambda}{2}$ veya $n\frac{\lambda}{2}$ uzunluktaki bir hatta Empedans Tekrarlayıcı denir.

3) $l = \frac{\lambda}{4}$: Bu durumda $\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$ ve $\tan\frac{\pi}{2} \to \infty$ bulunur.

$\frac{\lambda}{4}$ uzunluğunda bir iletim hattında girişten yüke bakıldığında görülen empedansı hesaplayalım.

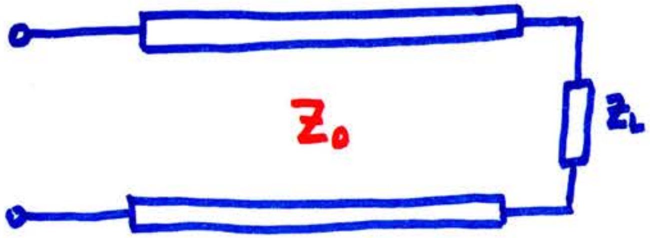


$$Z_{in} = Z\left(\frac{\lambda}{4}\right) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan\beta l}{Z_0 + jZ_L \tan\beta l} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan\frac{\pi}{2}}{Z_0 + jZ_L \tan\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_{in} = Z_0 \frac{jZ_0 \tan\pi/2}{jZ_L \tan\pi/2} = \frac{Z_0^2}{Z_L}}$$

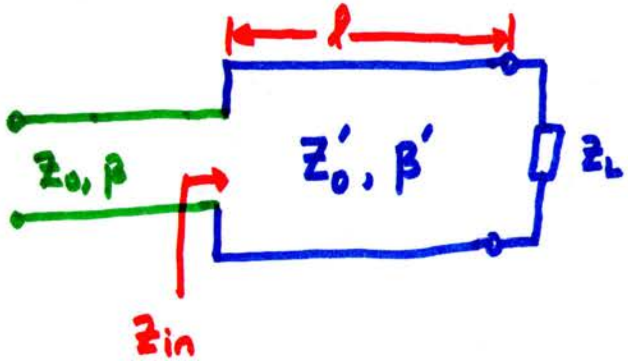
O halde $(2n+1)\frac{\lambda}{4}$ uzunluğundaki bir i.H. empedans evirici olarak davranır.

Çeyrek Dalga Dönüştürücü



Bir i.H. devresinde $Z_L \neq Z_0$ ise hatta yansımalar olacaktır. $\left(\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\right)$

Bu problem, $\frac{\lambda}{4}$ uzunluğunda bir i.H. kullanılarak çözülebilir:



$Z_{in} = Z_0$ olmasını istiyoruz.

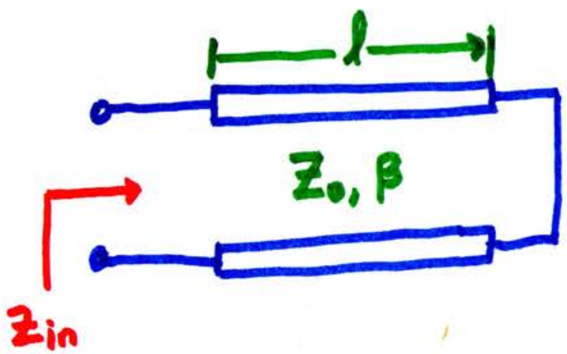
$\boxed{l = \frac{\lambda'}{4}}$ kabul edersek,

$Z_{in} = \frac{Z_0'^2}{Z_L}$ olur. Şimdi bunu Z_0'a eşitleyelim.

$$Z_{in} = Z_0 = \frac{Z_0'^2}{Z_L} \Rightarrow Z_0'^2 = Z_0 Z_L \Rightarrow \boxed{Z_0' = \sqrt{Z_0 Z_L}}$$

Böylece l'yi $\boxed{\frac{\lambda'}{4}}$ ve Z_0''yü Z_0 ve Z_L'nin $\boxed{\text{geometrik ortalaması}}$ seçersek empedans uyumlu hale gelir. Genel olarak $\beta' \neq \beta$ ve $\boxed{\lambda' = \frac{2\pi}{\beta'} \neq \lambda}$ olduğuna dikkat edilmelidir.

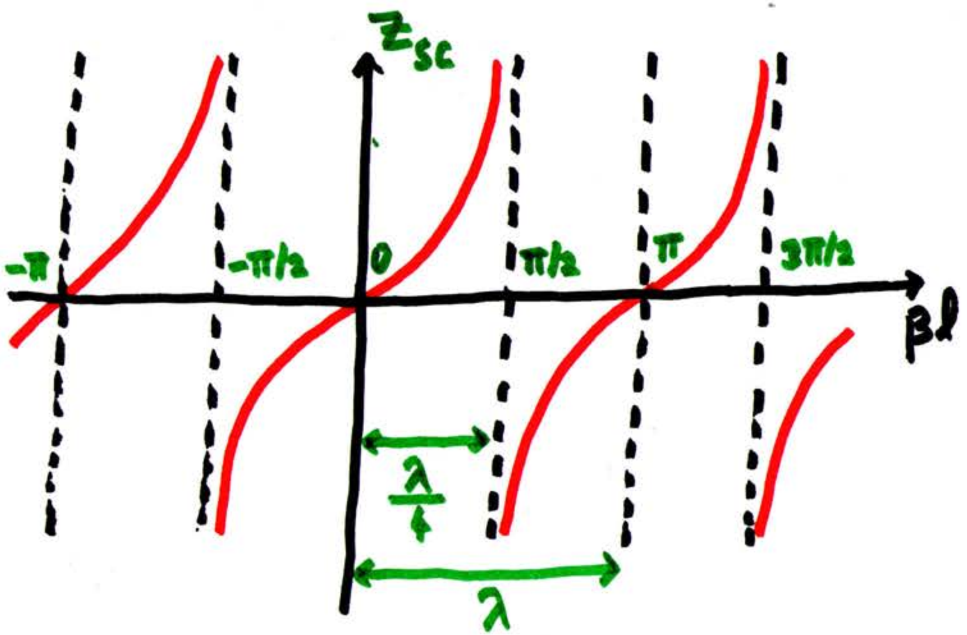
4) Kısa Devre: $Z_L = 0$ alalım.



Bu durumda $Z_{in} = Z(l) = Z_0 \dfrac{\cancel{Z_L}^{\,0} + jZ_0 \tan\beta l}{Z_0 + j\cancel{Z_L}^{\,0} \tan\beta l}$

$\Rightarrow Z_{in} = Z_{sc} = jZ_0 \tan\beta l$

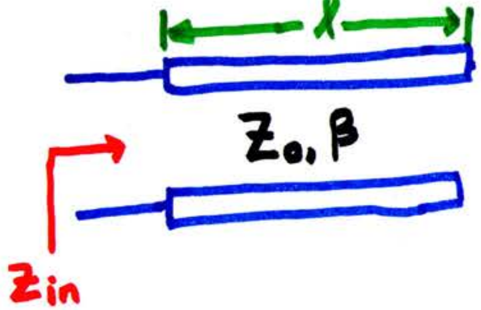
ve $\Gamma = \dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = -1$ bulunur.



- Z_{sc} şekilden de görüldüğü gibi tüm **SANAL** değerleri alır ancak reel kısmı sıfırdır.
- Z_{sc} $\frac{\lambda}{2}$ aralıklarla kendini tekrar eder.

- Z_{sc}'nin yükten $\frac{\lambda}{4}$ uzaklıkta $j\infty$ olduğuna yani açık devre elde edildiğine dikkat ediniz.

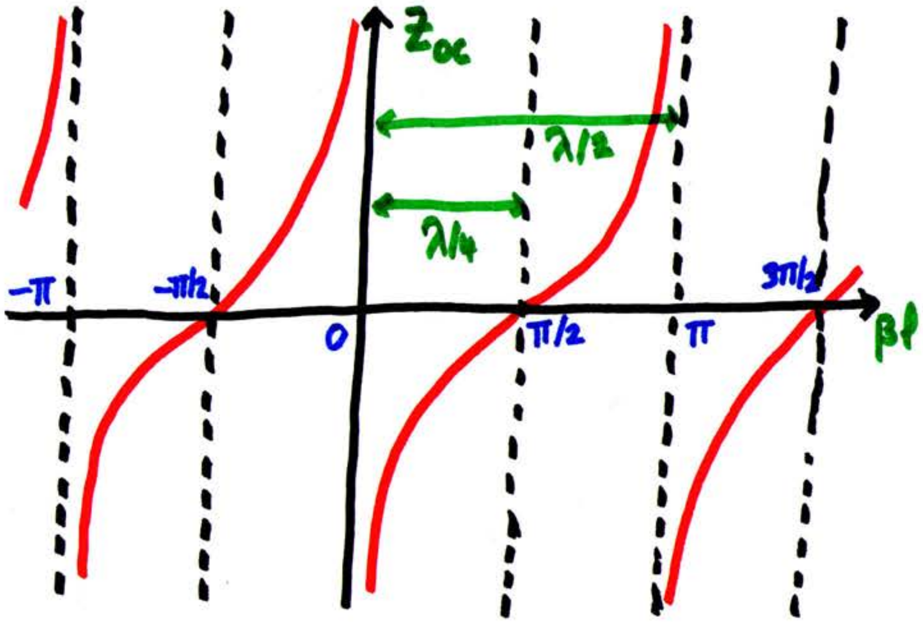
5) AÇIK DEVRE: $Z_L = \infty$



Bu durumda $Z_{in} = Z(l) = Z_o \dfrac{Z_L + jZ_o \tan\beta l}{Z_o + jZ_L \tan\beta l}$

$\Rightarrow Z_{in} = Z_{oc} = -j Z_o \operatorname{Cot} \beta l$

ve $\Gamma = \dfrac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} = 1$



- Z_{oc} de tüm SANAL değerleri alır.
- Z_{oc} her $\frac{\lambda}{2}$'de kendini tekrar eder.
- Yükten $\frac{\lambda}{4}$ mesafede Z_{oc}'nin sıfır olduğuna (kısa devre) dikkat ediniz.

- İ.H'larında $Z_L = 0$ (kısa devre) durumu ile düzlem dalgaların dik olarak bir mükemmel iletken üzerine gelmesi arasındaki benzerliğe dikkat ediniz. E ile V, H ile de I benzer davranır.

Uygulama: Z_0'ın belirlenmesi:

Öz empedansını bilmediğimiz ℓ uzunluğunda bir i.H.'nı kısa ve açık devre ile sonlandırıp her iki durumda giriş empedansını ölçelim.

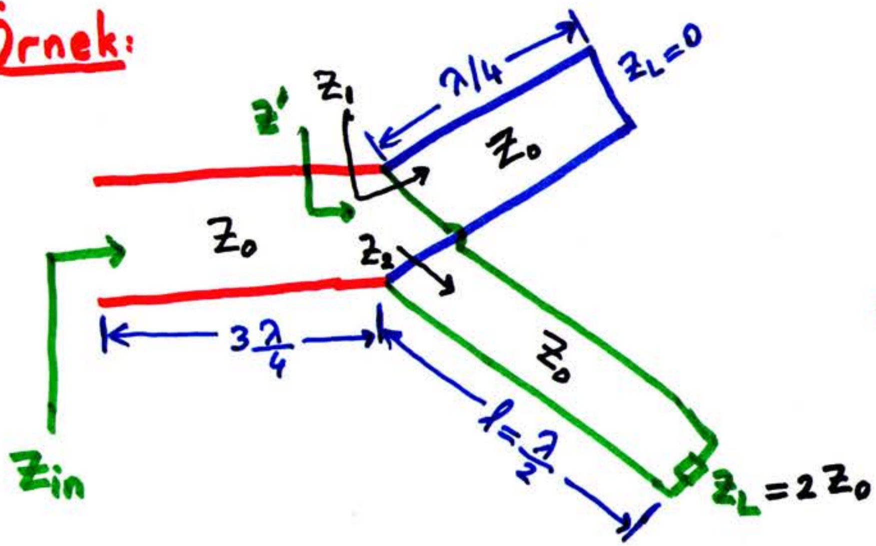
$\boxed{Z_{sc} = j Z_0 \tan\beta\ell}$ ve $\boxed{Z_{oc} = -j Z_0 \cot\beta\ell}$ ölçeriz.

Bunları çarparsak,

$$Z_{sc} Z_{oc} = (j Z_0 \tan\beta\ell)(-j Z_0 \cot\beta\ell) = Z_0^2$$

O halde, $\boxed{Z_0 = \sqrt{Z_{sc} Z_{oc}}}$ olarak bulunabilir.

Örnek:



Şekildeki devrede giriş empedansını bulunuz.

Çözüm: $Z' = Z_1 // Z_2$'dir.

Z_1 ve Z_2'yi belirleyelim.

$$\boxed{Z_1 = \frac{Z_0^2}{Z_L} = \infty}$$ (Açık devre)

$$\boxed{Z_2 = 2Z_0 = Z_L}$$ ($\lambda/2$ hat)

O halde, $Z' = Z_1 // Z_2 = \infty // Z_2 = Z_2 \Rightarrow \boxed{Z' = 2Z_0}$

Şimdi $Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z'}$ çünkü $\frac{3\lambda}{4}$ hat, $\frac{\lambda}{4}$ hat ile aynı davranır.

$$\Rightarrow \boxed{Z_{in} = \frac{Z_0^2}{2Z_0} = \frac{Z_0}{2}}$$

SC yerine OC koyalım. Bu durumda $Z_1 = 0$ olur.

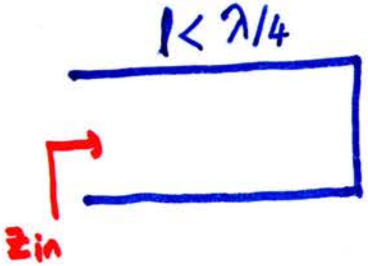
$$\Rightarrow Z' = Z_1 // Z_2 = 0 // Z_2 = 0$$

ve $\boxed{Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z'} = \infty}$ (AÇIK DEVRE) elde edilir.

Devre Elemanı Olarak İletim Hatları

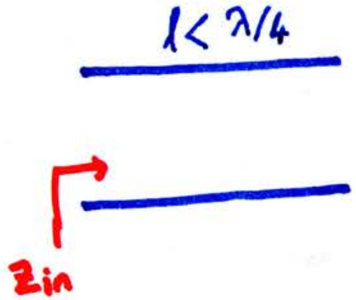
Açık ve kısa devre hatlar kullanılarak mikrodalga frekanslarında gereken reaktif elemanlar elde edilebilir.

1



$$Z_{in} = j Z_0 \overbrace{\tan\beta l}^{>0} \equiv j\omega L \Rightarrow \boxed{L = \frac{Z_0 \tan\beta l}{\omega}}$$

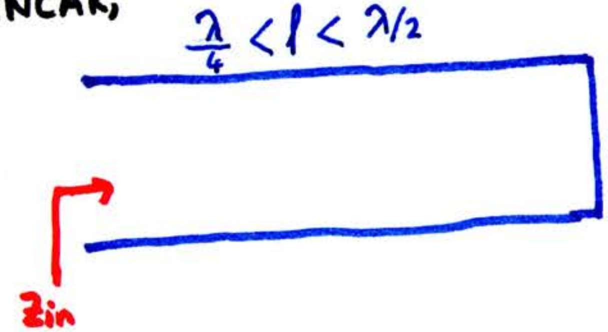
2



$$Z_{in} = -j Z_0 \overbrace{\cot\beta l}^{>0} \equiv \frac{1}{j\omega C} \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{\omega Z_0 \cot\beta l}}$$

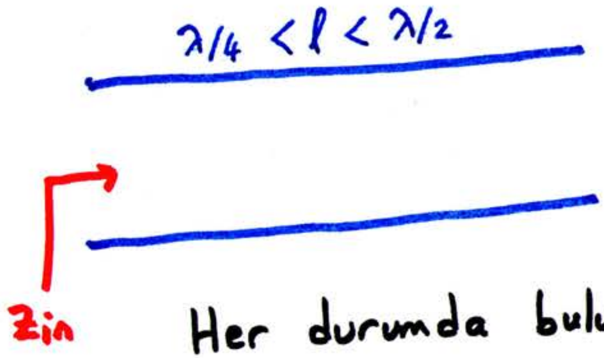
ANCAK,

3



$$Z_{in} = j Z_0 \overbrace{\tan\beta l}^{<0} \equiv \frac{1}{j\omega C} \Rightarrow \boxed{C = \frac{-1}{\omega Z_0 \tan\beta l}}$$

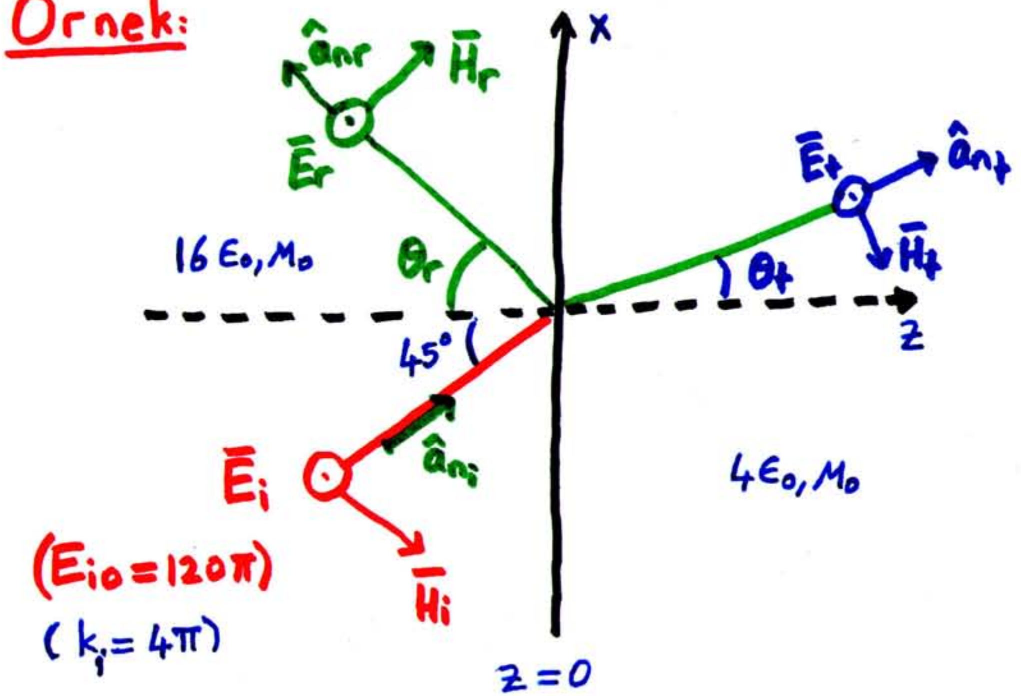
4



$$Z_{in} = -j Z_0 \overbrace{\cot\beta l}^{<0} \equiv j\omega L \Rightarrow \boxed{L = \frac{-Z_0 \cot\beta l}{\omega}}$$

Her durumda bulunan devre elemanının pozitif olması gerektiğine dikkat ediniz. (1) ve (2) çok kısa i.H. verdiğinde (3) ve (4) kullanılabilir.

Örnek:



Şekilde gösterilen durum için, yansıyan ve iletilen alan fazörlerini bulunuz.

Çözüm: Problem, dik kutuplanma durumudur. Yansıyan ve iletilen alanların yön kabullenmelerine dikkat ediniz.

Önce gelen alanı tanımlayalım.

$$\hat{a}_{ni} = \hat{a}_x \sin 45° + \hat{a}_z \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x + \hat{a}_z)$$

$$\boxed{\overline{k}_i = k_i \hat{a}_{ni} = \frac{4\pi}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x + \hat{a}_z)}$$

$$\overline{k}_i \cdot \overline{r} = \frac{4\pi}{\sqrt{2}}(x + z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\overline{E}}_i = \hat{a}_y (120\pi)\, e^{-j\frac{4\pi}{\sqrt{2}}(x+z)} \quad (V/m)}$$

Ayrıca $\eta_1 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{16\epsilon_0}} = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \dfrac{120\pi}{4} = 30\pi \ (\Omega)$ olduğundan,

$$\tilde{\bar{H}}_i = \frac{1}{\eta_1}\, \hat{a}_{n_i} \times \tilde{\bar{E}}_i = \frac{1}{30\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_x + \hat{a}_z) \times \hat{a}_y (120\pi)\, e^{-j\frac{4\pi}{\sqrt{2}}(x+z)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{H}}_i = (-\hat{a}_x + \hat{a}_z)\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right) e^{-j\frac{4\pi}{\sqrt{2}}(x+z)} \qquad (A/m)}$$

$k_1 = 4\pi = w\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} = w\dfrac{4}{c} \Rightarrow w = \dfrac{4\pi . c}{4} = 3\pi \times 10^8 \Rightarrow f = 150$ MHz

ve $\lambda_1 = \dfrac{2\pi}{k_1} = \dfrac{2\pi}{4\pi} = 0.5$ m.

O halde,

$$\boxed{\begin{array}{l} k_2 = w\sqrt{4\epsilon_0 \mu_0} = \pi . c . \dfrac{2}{c} = 2\pi \ (rad/m) \\ \text{ve} \quad \lambda_2 = \dfrac{2\pi}{k_2} = 1 \text{ m} \qquad \text{bulunur.} \end{array}}$$

Yansıyan alan için,

$$\boxed{\hat{a}_{n_r} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_x - \hat{a}_z)}$$

$$\text{ve} \quad \bar{k}_1 \cdot \hat{a}_{n_r} = \frac{4\pi}{\sqrt{2}} (x - z)$$

yazılabilir. Şimdi kırılma açısına bakalım.

Snell yasasından,

$$\boxed{k_1 \operatorname{Sin}\theta_i = k_2 \operatorname{Sin}\theta_t}$$

$$\Rightarrow 4\pi . \operatorname{Sin} 45^\circ = 2\pi \operatorname{Sin}\theta_t \Rightarrow \boxed{\operatorname{Sin}\theta_t = \sqrt{2} \quad (>1)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Cos}\theta_t = \sqrt{1-\operatorname{Sin}^2\theta_t} = \sqrt{1-2} = \sqrt{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Cos}\theta_t = -j}$$

elde edilir. Sonuç olarak, geliş açısı kritik açıdan büyük olmalıdır.

$$\theta_c = \operatorname{Sin}^{-1}\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \operatorname{Sin}^{-1}\sqrt{\frac{4\epsilon_0}{16\epsilon_0}} = \operatorname{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_c = 30^\circ}$$

Gerçekten $\theta_i = 45^\circ > \theta_c = 30^\circ$ 'dir ve dalga tümüyle yansır. Ancak, 2. bölgede alanlar sıfır değildir. Yansıma ve kırılma katsayılarına bakalım.

$$\Gamma_\perp(\theta_i = 45^\circ) = \frac{\eta_2 \operatorname{Cos}\theta_i - \eta_1 \operatorname{Cos}\theta_t}{\eta_2 \operatorname{Cos}\theta_i + \eta_1 \operatorname{Cos}\theta_t} = \frac{(\eta_0/2)\, 1/\sqrt{2} - (\eta_0/4)(-j)}{(\eta_0/2)\, 1/\sqrt{2} + (\eta_0/4)(-j)}$$

$$\boxed{\quad " \quad = \frac{\sqrt{2}+j}{\sqrt{2}-j} = \frac{2+2j\sqrt{2}-1}{3} = \frac{1+2j\sqrt{2}}{3}}$$

O halde, $\boxed{\Gamma_\perp(\theta_i=45^\circ) = 1\, e^{j0.392\pi} \equiv 1\,\angle 70.53^\circ}$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{E}}_r = \hat{a}_y\, E_{io}\, \Gamma_\perp\, e^{-jk_1 \hat{a}_{nr}\cdot\bar{r}} = \hat{a}_y\,(120\pi)\cdot e^{j0.392\pi}\, e^{-j\frac{4\pi}{\sqrt{2}}(x-z)} \quad (V/m)}$$

ve $\tilde{\bar{H}}_r = \dfrac{1}{\eta_1}\, \hat{a}_{nr}\times \tilde{\bar{E}}_r = \dfrac{1}{30\pi}\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(\hat{a}_x-\hat{a}_z)\times\hat{a}_y\,(120\pi)\, e^{j0.392\pi}\, e^{-j\frac{4\pi}{\sqrt{2}}(x-z)}$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{H}}_r = \frac{4}{\sqrt{2}}\,(\hat{a}_x+\hat{a}_z)\, e^{j0.392\pi}\, e^{-j\frac{4\pi}{\sqrt{2}}(x-z)} \quad (A/m)}$$

Görüldüğü gibi gelen güç olduğu gibi yansımaktadır. Ancak alanlarda faz farkı vardır. İletilen alanı bulalım.

$$\boxed{\hat{a}_{nt} = \hat{a}_x\, \sin\theta_t + \hat{a}_z\, \cos\theta_t}$$

$$\Rightarrow \hat{a}_{nt} = \sqrt{2}\,\hat{a}_x - j\,\hat{a}_z = \frac{2}{\sqrt{2}}\,\hat{a}_x - j\,\hat{a}_z$$

$$\Rightarrow k_2\,\hat{a}_{nt}\cdot\bar{r} = \left(\frac{4\pi}{\sqrt{2}}\,\hat{a}_x - j2\pi\,\hat{a}_z\right)\cdot\bar{r} = \frac{4\pi}{\sqrt{2}}\,x - j2\pi z$$

ve $\boxed{\tau_\perp = 1+\Gamma_\perp} \Rightarrow \tau_\perp = \dfrac{2+2j\sqrt{2}}{3} = \dfrac{\sqrt{12}}{3}\,\angle \tan^{-1}(\sqrt{2})$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_\perp = \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{j0.304\pi} \equiv \frac{2}{\sqrt{3}}\,\angle 54.74^\circ}$$

$$\Rightarrow \tilde{\bar{E}}_t = \hat{a}_y \cdot \tau_\perp \cdot E_{i0}\, e^{-j\bar{k}_2 \cdot \bar{r}} = \hat{a}_y \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{j0.304\pi} (120\pi)\, e^{-j\left(\frac{4\pi}{\sqrt{2}}x - j2\pi z\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{E}}_t = \hat{a}_y\, (80\pi\sqrt{3})\, \underbrace{e^{j0.304\pi}\; e^{-j\frac{4\pi}{\sqrt{2}}x}\; e^{-2\pi z}} \qquad (V/m)}$$

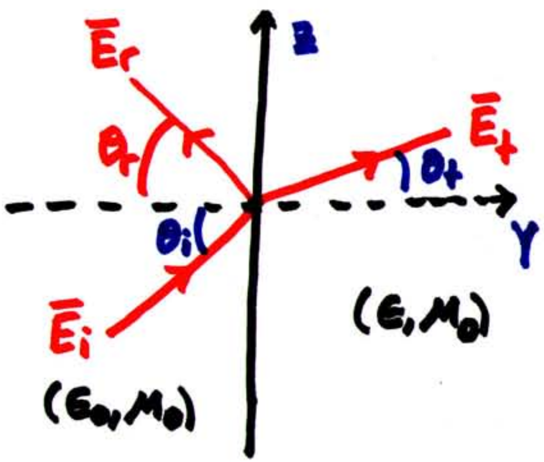
$\tilde{\bar{H}}_t$ ise,

$$\tilde{\bar{H}}_t = \frac{1}{\eta_2}\, \hat{a}_{nt} \times \tilde{\bar{E}}_t = \frac{1}{60\pi}\, (\sqrt{2}\,\hat{a}_x - j\hat{a}_z) \times \hat{a}_y\, (80\pi\sqrt{3})\, (\quad)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\bar{H}}_t = (j\,\hat{a}_x + \sqrt{2}\,\hat{a}_z)\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) e^{j0.304\pi}\; e^{-j\frac{4\pi}{\sqrt{2}}x}\; e^{-2\pi z} \qquad (A/m)}$$

Örnek: Şekilde $y<0$ bölgesi hava (ϵ_0, μ_0), $y>0$ bölgesi ise $\epsilon = 3\epsilon_0, \mu = \mu_0$ olan bir dielektriktir. $y<0$ bölgesinden gelen ve aşağıda verilen elektrik alanına sahip bir dalga $y=0$ sınırına gelmektedir.

$$\bar{E}_i(\bar{r},t) = (4\hat{a}_x - 4\sqrt{3}\,\hat{a}_y + 4\hat{a}_z)\, Cos(wt - 2\pi\sqrt{3}\,y - 6\pi z) \quad (V/m)$$



a) k_y ve k_z'den yararlanarak θ_i geliş açısını bulunuz.

b) Gelen dalga için k dalga sabiti nedir?

c) Dalganın frekansı f'yi bulunuz.

d) $y<0$ bölgesinde λ dalgaboyu nedir?

e) Yansıyan dalga için $\tilde{\bar{E}}_r$ fazörünü bulunuz.

f) $y>0$ bölgesinde dalgaboyu (λ_2) nedir?

g) İletilen dalganın elektrik alanının zaman bölgesi ifadesini bulunuz.

Çözüm: a) Verilen elektrik alanı ifadesinden,

$$\boxed{k_y = 2\pi\sqrt{3}} \quad \text{ve} \quad \boxed{k_z = 6\pi} \quad \text{bulunur.}$$

O halde $k=\sqrt{k_y^2+k_z^2}=\sqrt{(2\pi\sqrt{3})^2+(6\pi)^2}=4\pi\sqrt{3}$ (rad/m) ve

$$\sin\theta_i=\frac{k_z}{k}=\frac{6\pi}{4\pi\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\theta_i=\frac{k_y}{k}=\frac{2\pi\sqrt{3}}{4\pi\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_i=60^\circ\equiv\frac{\pi}{3}}$$

b) (a) şıkkından, $k=4\pi\sqrt{3}$ (rad/m)

c) $k=w\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \Rightarrow 4\pi\sqrt{3}=\frac{w}{c} \Rightarrow \boxed{w=4\pi\sqrt{3}\cdot 3\times10^8}$

$$\Rightarrow f=\frac{w}{2\pi}=6\sqrt{3}\times10^8\ Hz \Rightarrow \boxed{f=600\sqrt{3}\ MHz}$$

d) $\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{4\pi\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{\sqrt{3}}{6}\ (m)}$

e) $\overline{k}_i=2\pi\sqrt{3}\,\hat{a}_y+6\pi\,\hat{a}_z$. Dalga y yönünde yansıyıp, z yönünde yoluna devam etmektedir.

$$\Rightarrow \boxed{\overline{k}_r=-2\pi\sqrt{3}\,\hat{a}_y+6\pi\,\hat{a}_z}$$

$$\overline{k}_r\cdot\overline{r}=-2\pi\sqrt{3}\,y+6\pi z$$

$$\boxed{\tilde{\tilde{E}}_i=\tilde{\tilde{E}}_{i\perp}+\tilde{\tilde{E}}_{i\parallel} \Rightarrow \tilde{\tilde{E}}_{i\perp}=4\,\hat{a}_x\,e^{-j(2\pi\sqrt{3}y+6\pi z)}}$$

$$\boxed{\tilde{\bar{E}}_{i\parallel} = (-4\sqrt{3}\,\hat{a}_y + 4\,\hat{a}_z)\, e^{-j(2\pi\sqrt{3}\,y + 6\pi z)}}$$

Snell yasasından $\theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{k}{k_2}\sin\theta_i\right)$ ve $k_2 = \sqrt{\epsilon_r}\,k = \sqrt{3}\,k$ olduğundan,

$$\boxed{\theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ}$$

$$\Rightarrow \Gamma_\perp = \frac{\eta_2 \cos\theta_i - \eta_1 \cos\theta_t}{\eta_2 \cos\theta_i - \eta_1 \cos\theta_t} = \frac{(1/\sqrt{3})\cdot(1/2) - \sqrt{3}/2}{(1/\sqrt{3})(1/2) + \sqrt{3}/2} = \frac{1-3}{1+3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_\perp = -0.5}$$

$$\Gamma_\parallel = \frac{\eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i} = \frac{(1/\sqrt{3})(\sqrt{3}/2) - 1/2}{(1/\sqrt{3})(\sqrt{3}/2) + 1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_\parallel = 0}$$

Yani dalga Brewster açısında gelmektedir ve sadece dik bileşen yansır.

$$\Rightarrow \tilde{\bar{E}}_r = \tilde{\bar{E}}_{r\perp} = \hat{a}_x\, \Gamma_\perp\, E_{i0}\, e^{-j(-2\pi\sqrt{3}y + 6\pi z)}$$

$$\Rightarrow \tilde{\bar{E}}_r = -2\,\hat{a}_x\, e^{-j(-2\pi\sqrt{3}\,y + 6\pi z)} \quad (V/m)$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{E}_r(\bar{r},t) = -2\,\hat{a}_x \cos(wt - 6\pi z + 2\pi\sqrt{3}\,y) \quad (V/m).}$$

f) $k_2 = w\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_r} \Rightarrow k_2 = \sqrt{3}\,k = 4\pi\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 12\pi$ (rad/m) ve

$$\boxed{\lambda_2 = \frac{2\pi}{k_2} = \frac{1}{6}\ (m)}$$

g) (e) ve (f)'deki sonuçlardan,

$$\boxed{\begin{aligned} \tau_\perp &= 1+\Gamma_\perp = 1-0.5 = 0.5 \\ \tau_{\parallel} &= (1+\Gamma_{\parallel})\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}}$$

Böylelikle iletilen dalgayı yazabiliriz:

$$\tilde{\bar{E}}_{t\perp} = \tau_\perp\,\hat{a}_x\cdot 4\cdot e^{-j12\pi(y\cos\theta_t + z\sin\theta_t)}$$

$$\Rightarrow \tilde{\bar{E}}_{t\perp} = 0.5\,\hat{a}_x\,4\,e^{-j12\pi(y\frac{\sqrt{3}}{2} + z\frac{1}{2})} = 2\,\hat{a}_x\,e^{-j(6\pi\sqrt{3}y + 6\pi z)} \quad (V/m)$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{E}_{t\perp}(\bar{r},t) = 2\,\hat{a}_x\cos(wt - 6\pi\sqrt{3}y - 6\pi z) \quad (V/m)}$$

Paralel bileşenden dolayı iletilen dalga ise,

$$\boxed{\tilde{\bar{E}}_{t\parallel} = \tau_{\parallel}\,|\tilde{\bar{E}}_{i\parallel}|\,(-\hat{a}_y\sin\theta_t + \hat{a}_z\cos\theta_t)\,e^{-j12\pi(y\cos\theta_t + z\sin\theta_t)}}$$

olarak yazılabilir. Değerler yerine konursa,

$$\Rightarrow \tilde{\bar{E}}_{t//} = 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\hat{a}_y \frac{1}{2} + \hat{a}_z \frac{\sqrt{3}}{2}\right) e^{-j(6\pi\sqrt{3}y + 6\pi z)}$$

$$\Rightarrow \bar{E}_{t//} = \frac{8}{\sqrt{3}} \left(-\hat{a}_y \frac{1}{2} + \hat{a}_z \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cos(\omega t - 6\pi\sqrt{3}y - 6\pi z) \quad (V/m)$$

Sonuçta,

$$\boxed{\bar{E}_{t//}(\bar{r},t) = \left(-\hat{a}_y \frac{4}{\sqrt{3}} + \hat{a}_z 4\right) \cos(\omega t - 6\pi\sqrt{3}y - 6\pi z) \quad (V/m)}$$

İkinci ortamdaki toplam iletilen dalga ise,

$$\boxed{\tilde{\bar{E}}_t = \tilde{\bar{E}}_{t\perp} + \tilde{\bar{E}}_{t//}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{E}_t(\bar{r},t) = \left(2\hat{a}_x - \frac{4}{\sqrt{3}}\hat{a}_y + 4\hat{a}_z\right) \cos(\omega t - 6\pi\sqrt{3}y - 6\pi z) \quad (V/m)}$$

olarak elde edilir.

İlgili manyetik alanlar $\frac{1}{\eta} \hat{a}_n \times \tilde{\bar{E}}$ ile frekans bölgesinde hesaplanır ve gerektiğinde zaman bölgesine dönülür.