



EEM 401 Sayısal İşaret İşleme

z - Dönüşümü III

Yrd. Doç. Dr. Selda GÜNEY

Sabit Katsayılı Fark Denklemleri için Sistem Fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

Sabit Katsayılı Fark Denklemleri için Sistem Fonksiyonu

Örnek :

Nedensel bir ayrık zamanlı DZD sistem şu biçimde tanımlanmaktadır:

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$$

$x[n]$ ve $y[n]$ sistemin giriş ve çıkışını göstermektedir.

- (a) Sistem fonksiyonunu ($H(z)$) bulunuz.
- (b) Sistemin dürtü tepkisini ($h[n]$) bulunuz.
- (c) Sistemin basamak tepkisini ($s[n]$) bulunuz.

Örneğe devam...

a)

$$Y(z) - \frac{3}{4}z^{-1}Y(z) + \frac{1}{8}z^{-2}Y(z) = X(z)$$
$$\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}\right)Y(z) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}}$$
$$= \frac{z^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Örneğe devam...

b)

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} = \frac{c_1}{z - \frac{1}{2}} + \frac{c_2}{z - \frac{1}{4}}$$

$$c_1 = \left. \frac{z}{z - \frac{1}{4}} \right|_{z=1/2} = 2 \qquad c_2 = \left. \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \right|_{z=1/4} = -1$$

$$H(z) = 2 \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{z}{z - \frac{1}{4}} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

$H(z)$ 'nin ters z -dönüşümü alınarak $h[n]$ bulunur.

$$h[n] = \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] u[n]$$

Örneğe devam...

c)

$$x[n] = u[n] \leftrightarrow X(z) = \frac{z}{z-1} \quad |z| > 1$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z^3}{(z-1)(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})} \quad |z| > 1$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z-\frac{1}{2}} + \frac{c_3}{z-\frac{1}{4}}$$

Örneğe devam...

$$c_1 = \left. \frac{z^2}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})} \right|_{z=1} = \frac{8}{3} \quad c_2 = \left. \frac{z^2}{(z - 1)(z - \frac{1}{4})} \right|_{z=1/2} = -2$$

$$c_3 = \left. \frac{z^2}{(z - 1)(z - \frac{1}{2})} \right|_{z=1/4} = \frac{1}{3}$$

$$Y(z) = \frac{8}{3} \frac{z}{z - 1} - 2 \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \frac{z}{z - \frac{1}{4}} \quad |z| > 1$$

$Y(z)$ 'nin ters z -dönüşümü alınarak $y[n]$ elde edilir.

$$y[n] = s[n] = \left[\frac{8}{3} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \right] u[n]$$

Tek Yanlı z - Dönüşümü

Tanım :

Bir $x[n]$ dizisinin tek yanlı z -dönüşümü $X_1(z)$

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Zaman öteleme özelliği :

$x[n] \leftrightarrow X_1(z)$ ise, $m \geq 0$ için

$$x[n-m] \leftrightarrow z^{-m}X_1(z) + z^{-m+1}x[-1] + z^{-m+2}x[-2] + \cdots + x[-m]$$

$$x[n+m] \leftrightarrow z^mX_1(z) - z^mx[0] - z^{m-1}x[1] - \cdots - zx[m-1]$$