EEM 401 Sayısal Sinyal İşleme

SAYISAL SÜZGEÇLER III

YRD. DOÇ. DR. SELDA GÜNEY

İÇERİK

- FIR Süzgeçlerin Özellikleri
- FIR Süzgeçlerin Tasarımı
- FIR Süzgeç Tasarı Yöntemleri
    1. Pencereleme Yöntemi
    2. Frekans Örnekleme Yöntemi

FIR SÜZGEÇLERİN ÖZELLİKLERİ

FIR süzgeç tasarımı, belirtilen genlik yanıtının doğrudan yaklaşıklığına dayalıdır. Ayrıca, genelde süzgecin doğrusal faza sahip olması istenir.

N. dereceden bir FIR süzgecin tasarımı, ya (N+1)-uzunluklu dürtü yanıtı katsayıları $\{h[n]\}$, ya da frekans yanıtı $|G(e^{jw})|$'nın (N+1) örneği bulunarak yapılabilir. En sık kullanılan FIR süzgeç tasarım yöntemleri şöyledir:

1. Pencerelenmiş Fourier serisi yaklaşımı
2. Frekans örnekleme yaklaşımı
3. Bilgisayar tabanlı optimizasyon yöntemleri

FIR SÜZGEÇLERİN ÖZELLİKLERİ

- FIR süzgeç tasarımı ayrık bir işlemdir.
- Analog bölgede eşdeğer bir FIR süzgeç karşılığı yoktur.
- FIR süzgeç tanımlamaları daha çok zaman bölgesinde yapılır.
- FIR süzgeçlerin iki avantajı kararlılıkları ve lineer fazlı olmalarıdır.
- Aynı özellikleri sağlayan IIR süzgeçlerle kıyasla FIR süzgeçlerin katsayı sayısı (dereceleri) çok daha fazladır.

FIR SÜZGEÇLERİN ÖZELLİKLERİ

- En basit FIR süzgeç Kayan Ortalama (Moving Average (MA)) süzgecidir.
- Sıfırlar birim çemberin üzerinde olduğunda faz bu durumda lineer olmaz.
- Genlik cevabı anlamında oldukça zayıf olan bir alçak geçiren süzgeçtir.
- Bant genişliği yalnızca süzgecin derecesi ile kontrol edilir.
- Modülasyon özelliğiyle başka tür süzgeçlere çevirme yapılabilir.

FIR SÜZGEÇLERİN TASARIMI

Süzgeç katsayıları :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} b_k \cdot x[n-k]$$

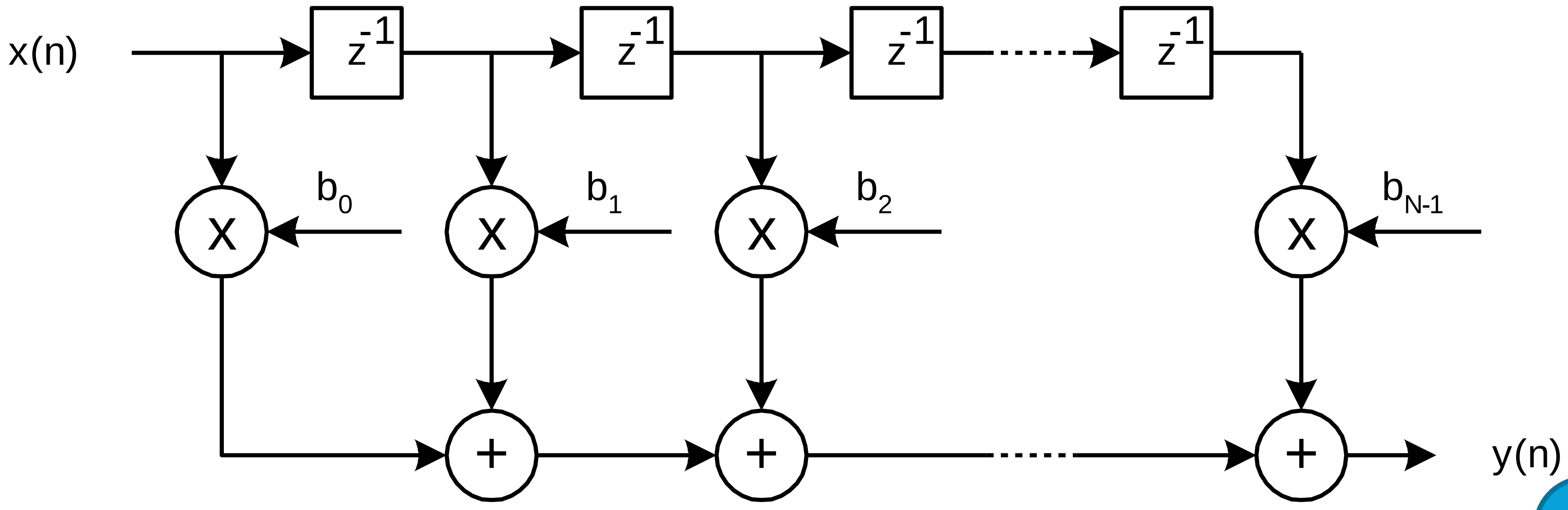
$x[n]$: süzgeç girişi
b_k : süzgeç katsayıları
$y[n]$: süzgeç çıkışı
N : süzgeç katsayı sayısı veya süzgeç derecesi

FIR SÜZGEÇLERİN TASARIMI

Süzgeç denklemi

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} b_k \cdot x[n-k]$$

Süzgeç yapısı :



FIR SÜZGEÇLERİN TASARIMI

Eğer giriş işareti dürtü fonksiyonu ile yer değiştirirse;

$$y[n]=\sum_{k=0}^{N-1} b_k \cdot x[n-k] \quad \Rightarrow \quad y[n]=\sum_{k=0}^{N-1} b_k \delta[n-k]$$

$$\delta[n-k]=\begin{cases} 1 & \text{for } n=k \\ 0 & \text{for } n\neq k \end{cases}$$

$$y[n]=b_0\delta[n]+b_1\delta[n-1]+\cdots+b_k\delta[n-N]$$

$$b_0=h[0]$$

$$b_1=h[1]$$

$$\vdots$$

$$b_k=h[k]$$

Süzgeç katsayıları dürtü cevabının örneklerine eşit olur

$$b_k=h[k]$$

Dürtü yanıtının z dönüşümü ve Fourier dönüşümü aşağıdaki gibi elde edilir :

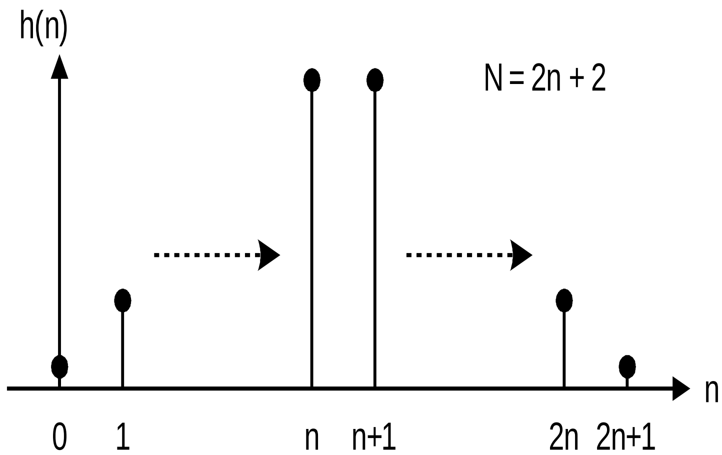
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] z^{-n}$$

$$H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-jn\omega}$$

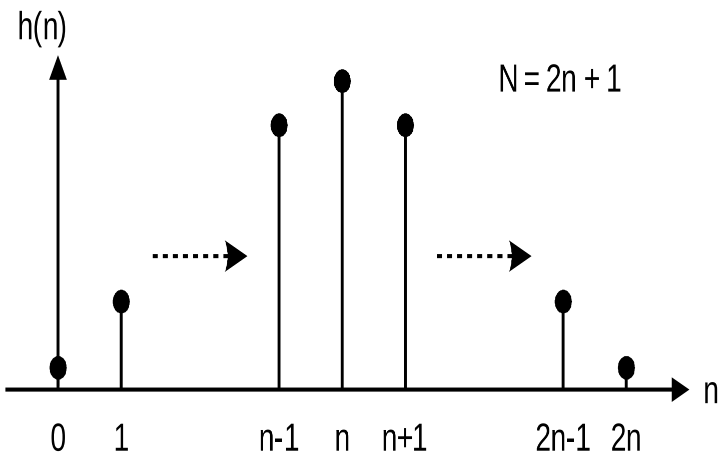
$$H\left(e^{j\omega+2k\pi}\right) = H\left(e^{j\omega}\right)$$

FIR SÜZGEÇLERİN TASARIMI

Dürtü cevabı simetrik olan nedensel FIR süzgeçler doğrusal fazdadır



Çift simetri



Tek simetri

FIR SÜZGEÇLERİN TASARIMI

5 aşamada süzgeç tasarımı gerçekleştirilebilir :

1) Süzgeç özellikleri belirlenmeli

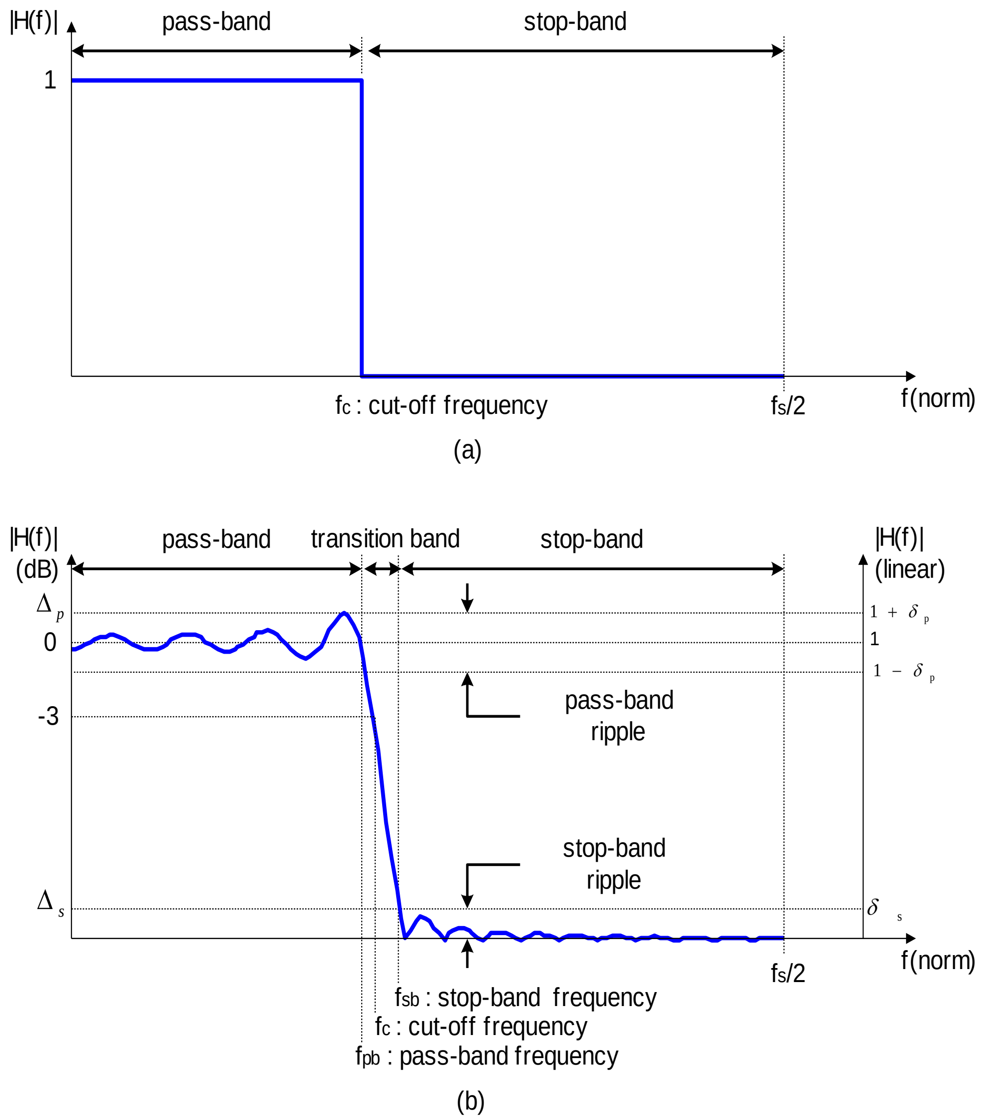
2) Katsayılar hesaplanmalı

3) Süzgeç yapısı belirlenmeli

4) Similasyon yapılmalı (seçimli)

5) Uygulama yapılmalı

1. Adım : Süzgeç özelliklerinin belirlenmesi :



2. Adım: Katsayıların Hesaplanması

Katsayı hesaplamada birçok yöntem kullanılmaktadır. Bunlardan en çok kullanılanları :

1. Pencereleme Yöntemi (Window method)
2. Frekans Örnekleme (Frequency sampling)
3. Parks-McClellan

1. PENCERELEME YÖNTEMİ

Pencereleme işlemi aşağıdaki gibi ifade edilir :

$$h[n] = h_d[n]w[n]$$

İlk adım öncelikle ideal süzgecin kaysayıları hesaplanır :

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\omega)e^{j\omega n}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1\cdot e^{j\omega n}\,d\omega$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2f_c\sin(n\omega_c)}{n\omega_c} & \text{for n} \neq 0 \\ 2f_c & \text{for n} = 0 \end{cases}$$

1. PENCERELEME YÖNTEMİ

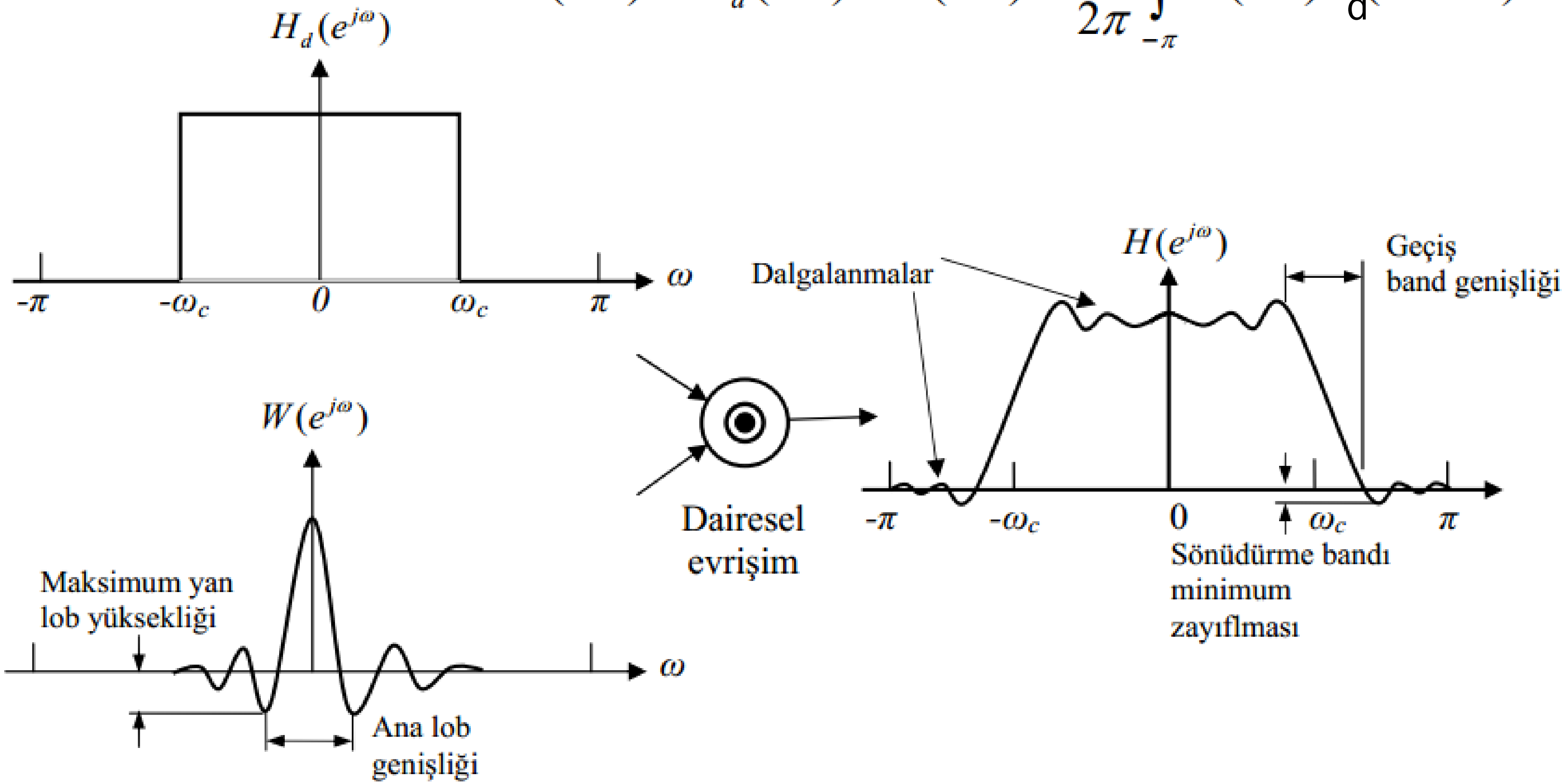
İdeal süzgecin katsayıları aşağıdaki gibi hesaplanır :

```
function hd = ideal_lp(wc, M);
% Ideal alçak geçiren süzgeç hesaplaması
%----------------------------------------
% [hd] = ideal_lp(wc, M)
% hd = 0 ile M-1 arasındaki ideal birim dürtü yanıtı
% wc = radyan cinsinden kesim frekansı
% M = ideal süzgecin uzunluğu
alpha = (M-1) / 2;
n = [0 : 1 : (M-1)];
m = n - alpha + eps; % sıfıra bölme hatasını önlemek için en küçük
sayıyı ekler
hd = sin(wc*m) ./ (pi*m);
```

1. PENCERELEME YÖNTEMİ

$H(e^{jw})$ nedensel sonlu dürtü yanıtlı süzgeç yanıtı, $Hd(e^{jw})$ ve $W(e^{jw})$ pencere yanıtının frekans domeninde dairesel evrişimi sonucu elde edilir.

$$H(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega})\Theta W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} W(e^{j\lambda})H_d(e^{j(\omega-\lambda)})d\lambda$$

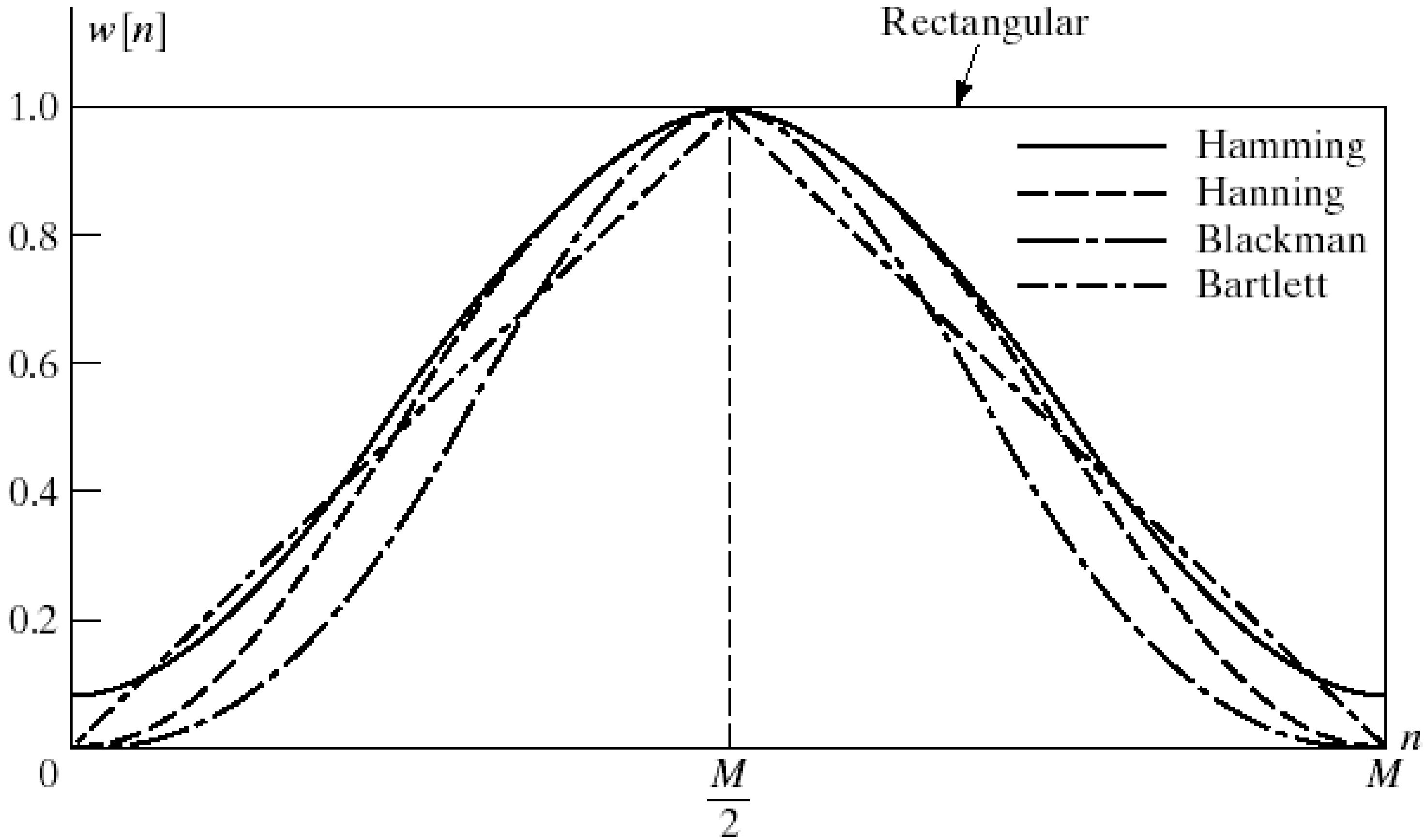


1. PENCERELEME YÖNTEMİ

İkinci aşamada pencere fonksiyonu geçirme fonksiyonu ve durdurma bandı zayıflatma değerlerine göre seçilir

Pencerenin Türü	Ana lob geçiş genişliği	Yan kulak tepesi (dB)
Dikdörtgen	$4\pi/M$	-13
Barlett	$8\pi/M$	-25
Hanning	$8\pi/M$	-31
Hamming	$8\pi/M$	-41
Blackman	$12\pi/M$	-57

1. PENCERELEME YÖNTEMİ



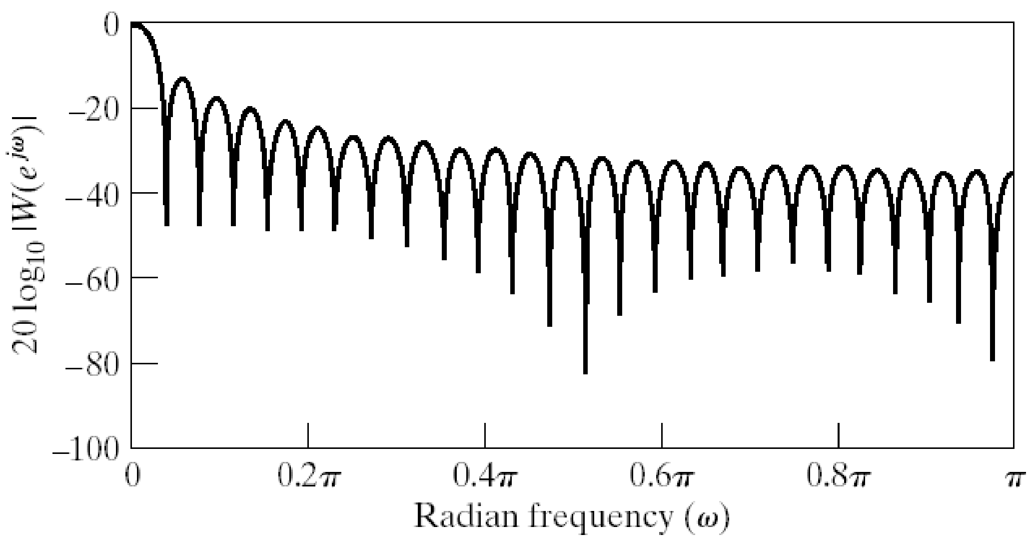
Keskin ana lob

- $4\pi/(M+1)$
- Frekans süreksizliklerinde kesin geçişler

Geniş yan loblar

- Yan lob tepe genliği -13 dB
- Süreksizlik etrafında geniş salınım

En basit pencereleme fonksiyonudur: $w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M \\ 0 & diğerleri \end{cases}$



BARLETT PENCERE

Ana lob genişliği

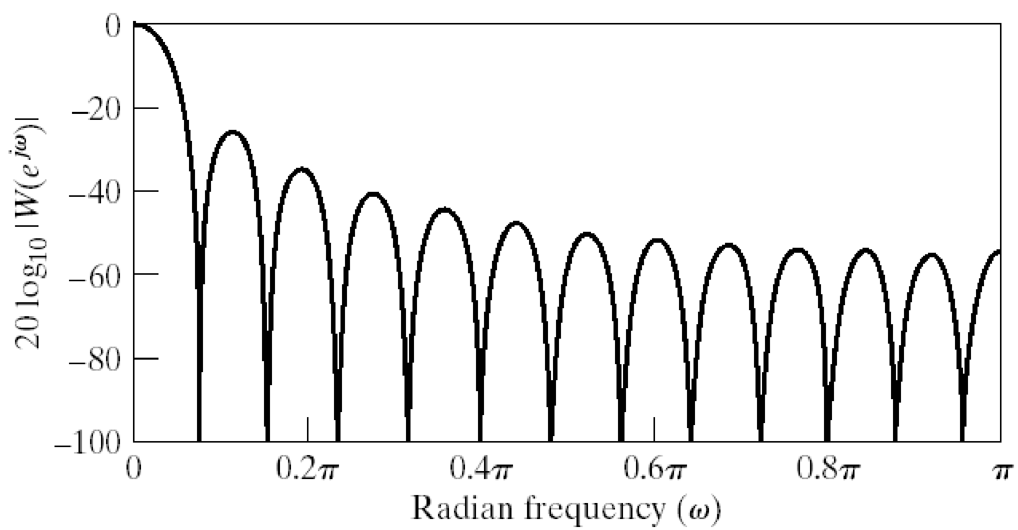
- $8\pi/M$

Yan lob zayıflatması

- -25 dB

Hamming pencereleme fonksiyonu

Denklemi basit



HANNİNG PENCERE

Ana lob

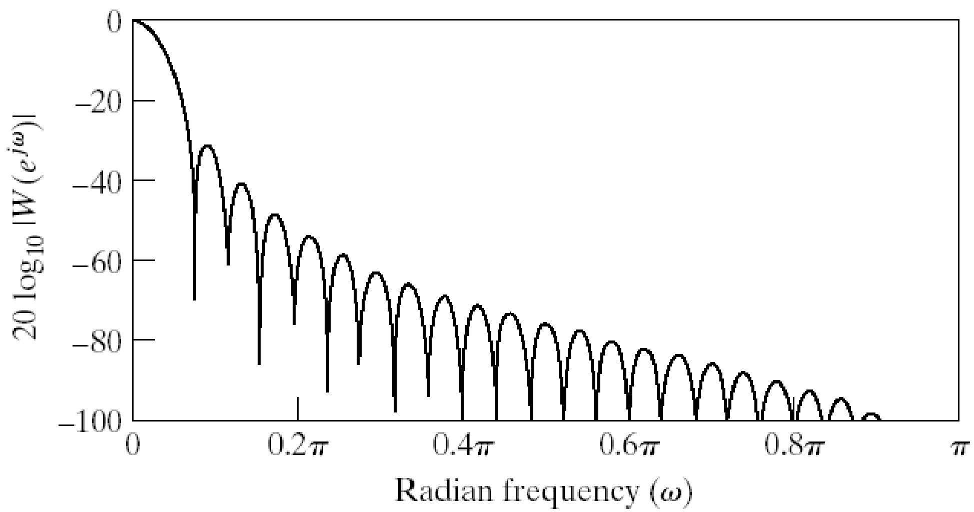
- $8\pi/M$

Yan lob zayıflatması

- -31 dB

Hamming pencerelemenin performansı daha iyi

Hamming pencerelemeden karmaşıklığı iyi



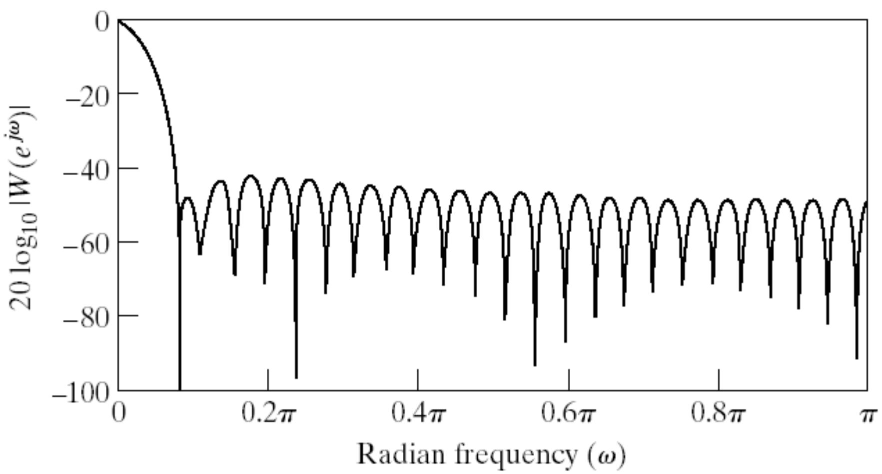
HAMMİNG PENCERE

Ana lob

- $8\pi/M$

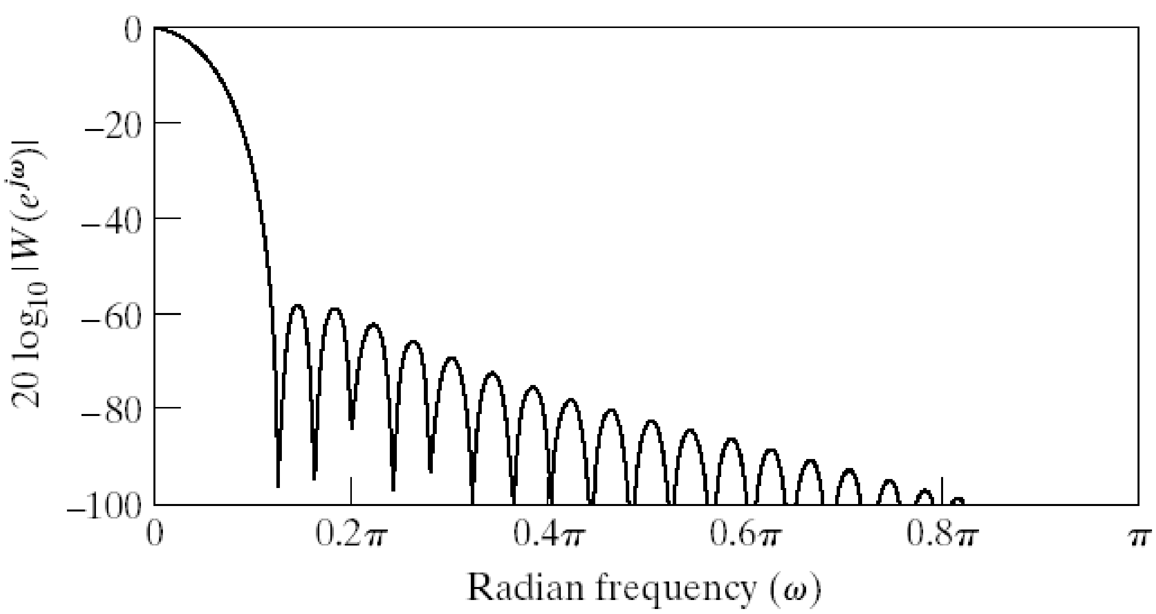
En iyi yan loblar

- -41 dB
- Blackman'den daha basit



BLACKMAN PENCERE

- Ana lob
  - $12\pi/M$
- Yan lobları iyi
  - -57 dB
- Kompleks denkleme sahip



2. FREKANS ÖRNEKLEME METODU

Verilen herhangi bir frekans cevabına karşı düşen dürtü cevabı ifadesi ile hesaplanır:

$$h[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_k W N^{-nk} \quad n=0,\ 1,......,\ N\text{-}1$$

Süzgecin frekans cevabı H(e^{jw}) 'nın 0-2π aralığında eşit aralıklı N örnek seçilir

Bu frekans örneklerinin ters AFD'sinin bulunması ile yöntem tamamlanır.

2. FREKANS ÖRNEKLEME YÖNTEMİ

FIR süzgeç tasarımı için frekans örnekleme yönteminde, frekans tepkisi $H_d(\omega)$, aşağıdaki gibi tanımlanan eşit aralıklı frekans değerlerinde belirtilir

$$\omega_k = \frac{2\pi}{M}(k+\alpha), \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{M-1}{2}, \quad M \text{ tek ise}$$

$$k = 0, 1, \ldots, \frac{M}{2} - 1, \quad M \text{ çift ise}$$

$$\alpha = 0 \text{ veya } \tfrac{1}{2}$$

ve FIR süzgecin birim örnek tepkisi $h(n)$ için bu eşit aralıklı frekans özelliklerinden çözülür. Yan kulakları düşürmek için süzgecin geçiş bandında frekans özelliklerinin eniyilenmesi(optimizasyonu) arzu edilir. Bu eniyileme, bilgisayar üzerinde Rabiner ve diğerlerinin (1970) gösterdiği doğrusal programlama teknikleri aracılığıyla sayısal olarak gerçekleştirilebilir.

2. FREKANS ÖRNEKLEME YÖNTEMİ

Bu kısımda hesaplamaları basitleştirmek için örneklenen frekans tepki fonksiyonunun temel simetri özelliğinden faydalanılmıştır. Aşağıdaki formülde verildiği gibi FIR süzgecin arzu edilen frekans tepkisiyle başlayalım [kolaylık olması açısından $H_d(\omega)$'daki alt simge atılmıştır].

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

$$H(k+\alpha) \equiv H\left(\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)\right)$$

$$H(k+\alpha) \equiv \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{-j2\pi(k+\alpha)n/M}, \qquad k = 0, 1, \ldots, M-1$$

$$h(n) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} H(k+\alpha)e^{j2\pi(k+\alpha)n/M}, \qquad n = 0, 1, \ldots, M-1$$

2. FREKANS ÖRNEKLEME YÖNTEMİ

$$H(k+\alpha) = H^*(M-k-\alpha)$$

$$H(k+\alpha) = H_r\left(\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)\right)e^{j[\beta\pi/2-2\pi(k+\alpha)(M-1)/2M]}$$

$$G(k+\alpha) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, M-1$$

$$H(k+\alpha) = G(k+\alpha)e^{j\pi k}e^{j[\beta\pi/2-2\pi(k+\alpha)(M-1)/2M]}$$

Örnek :

Simetrik birim örnek tepkisine ve aşağıda verilen koşulları taşıyan frekans tepkisine sahip $M = 15$ uzunluğunda doğrusal fazlı FIR süzgecin katsayılarını belirleyiniz.

$$H_r\left(\frac{2\pi k}{15}\right) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, 2, 3 \\ 0.4, & k = 4 \\ 0, & k = 5, 6, 7 \end{cases}$$

$$H(k) = G(k) e^{j\pi k/M}, \qquad k = 0, 1, \ldots, M-1$$

$\alpha = 0$

$$G(k) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right), \qquad G(k) = -G(M-k)$$

$$h(n) = \frac{1}{M}\left\{G(0) + 2\sum_{k=1}^{U} G(k)\cos\frac{2\pi k}{M}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$U = \begin{cases} \frac{M-1}{2}, & M \text{ tek ise} \\ \frac{M}{2} - 1, & M \text{ çift ise} \end{cases}$$

$$H\left(k + \frac{1}{2}\right) = G\left(k + \frac{1}{2}\right) e^{-j\pi/2} e^{j\pi(2k+1)/2M}$$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$$G\left(k + \frac{1}{2}\right) = (-1)^k H_r\left[\frac{2\pi}{M}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$G\left(k + \frac{1}{2}\right) = G\left(M - k - \frac{1}{2}\right)$$

$$h(n) = \frac{2}{M}\sum_{k=0}^{U} G\left(k + \frac{1}{2}\right)\sin\frac{2\pi}{M}\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

2. FREKANS ÖRNEKLEME YÖNTEMİ

$\alpha = 0$

$$H(k) = G(k)e^{j\pi k/M}, \qquad k = 0, 1, \ldots, M-1$$

$$G(k) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right), \qquad G(k) = -G(M-k)$$

$$h(n) = \frac{1}{M}\left\{G(0) + 2\sum_{k=1}^{U} G(k)\cos\frac{2\pi k}{M}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$U = \begin{cases} \frac{M-1}{2}, & M \text{ tek ise} \\ \frac{M}{2} - 1, & M \text{ çift ise} \end{cases}$$

$$H\left(k+\frac{1}{2}\right) = G\left(k+\frac{1}{2}\right)e^{-j\pi/2}e^{j\pi(2k+1)/2M}$$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$$G\left(k+\frac{1}{2}\right) = (-1)^k H_r\left[\frac{2\pi}{M}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$G\left(k+\frac{1}{2}\right) = G\left(M-k-\frac{1}{2}\right)$$

$$h(n) = \frac{2}{M}\sum_{k=0}^{U} G\left(k+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{2\pi}{M}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

2. FREKANS ÖRNEKLEME YÖNTEMİ

$$H(k) = G(k)e^{j\pi/2}e^{j\pi k/M}, \qquad k = 0, 1, \ldots, M-1$$

$\alpha = 0$

$$G(k) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right), \qquad G(k) = G(M-k)$$

$$h(n) = -\frac{2}{M}\sum_{k=1}^{(M-1)/2} G(k)\sin\frac{2\pi k}{M}\left(n+\frac{1}{2}\right), \qquad M \text{ tek ise}$$

$$h(n) = \frac{1}{M}\left\{(-1)^{n+1}G(M/2) - 2\sum_{k=1}^{(M/2)-1} G(k)\sin\frac{2\pi}{M}k\left(n+\frac{1}{2}\right)\right\}, \quad M \text{ çift ise}$$

$$H\left(k+\frac{1}{2}\right) = G\left(k+\frac{1}{2}\right)e^{j\pi(2k+1)/2M}$$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$$G\left(k+\frac{1}{2}\right) = (-1)^k H_r\left[\frac{2\pi}{M}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$G\left(k+\frac{1}{2}\right) = -G\left(M-k-\frac{1}{2}\right); \qquad G(M/2) = 0 \quad M \text{ tek ise}$$

$$h(n) = \frac{2}{M}\sum_{k=0}^{V} G\left(k+\frac{1}{2}\right)\cos\frac{2\pi}{M}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$V = \begin{cases} \frac{M-3}{2}, & M \text{ tek ise} \\ \frac{M}{2}-1, & M \text{ çift ise} \end{cases}$$

Çözüm. $h(n)$ simetrik olduğundan, frekanslar $\alpha = 0$ durumuna karşılık gelecek şekilde seçilir. $h(n)$'yi hesaplamak için Tablo 10.3'deki karşılık gelen formülleri kullanırız. Bu durumda,

$$G(k) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{15}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, 7$$

dir. Bu hesaplamanın sonucu aşağıda verilmektedir.

$$h(0) = h(14) = -0.014112893$$
$$h(1) = h(13) = -0.001945309$$
$$h(2) = h(12) = 0.04000004$$
$$h(3) = h(11) = 0.01223454$$
$$h(4) = h(10) = -0.09138802$$
$$h(5) = h(9) = -0.01808986$$
$$h(6) = h(8) = 0.3133176$$
$$h(7) = 0.52$$

2. FREKANS ÖRNEKLEME YÖNTEMİ