



SAYISAL SÜZGEÇLER II

YRD. DOÇ. DR. SELDA GÜNEY

İÇERİK

- IIR Süzgeçlerin Tasarımı
- Analog Süzgeç Çeşitleri
- Analog Süzgeçten Dönüşüm ile Sayısal Süzgeç Tasarım
 - Değişmez Dürtü Cevabı Yöntemi
 - Çift Doğrusal Dönüşüm

IRR SÜZGEÇLERİN TASARIMI

Sayısal süzgeç tasarımı amaç, verilen bir frekans yanıtını yaklaşık olarak sağlayan gerçekleştirilebilir bir transfer fonksiyonu $G(z)$ elde etmektir.

Çoğu uygulamada sayısal süzgeçlerin tasarımı için genlik ve/veya faz yanıtı belirtilir. Bazı durumlarda, impuls veya basamak yanıtı belirtilebilir.

Pratik çoğu uygulamada, verilen bir genlik yanıtını yaklaşık olarak sağlayan gerçekleştirilebilir bir transfer fonksiyonu elde etmek istenir. Bu nedenle, bu derste biz sadece genlik yaklaşıklığını ele alacağız.

IRR SÜZGEÇLERİN TASARIMI

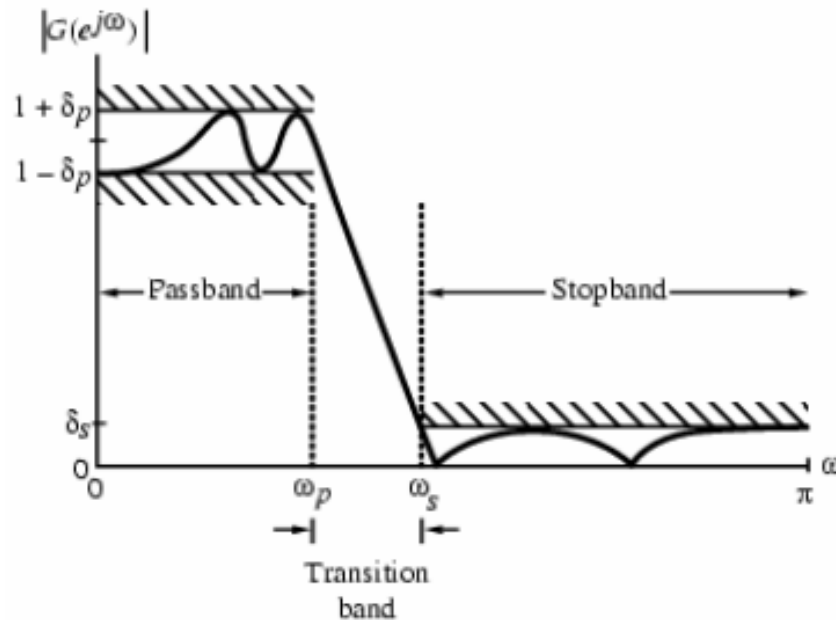
Sayısal Süzgeç Karakteristiklerinin Belirlenmesi :

Dört tür ideal filtreye karşılık gelen dürtü yanıtlarının nedensel olmadıklarından ve sonsuz uzunluklu olduklarından ideal filtreler gerçekleştirilemez.

Pratikte, sayısal bir süzgecin genlik yanıtı geçirme ve söndürme bandında kabul edilebilir toleranslarla belirtilir. Ayrıca, geçirme ve söndürme bantları arasında bir geçiş bandı vardır.

IRR SÜZGEÇLERİN TASARIMI

Örneğin, sayısal alçak geçiren bir süzgecin genlik yanıtı $|G(e^{j\omega})|$ aşağıda gösterilmiştir.



ω_p : geçirme bandı kenar frekansı

ω_s : söndürme bandı kenar frekansı

δ_p : geçirme bandındaki maksimum dalgalanma

δ_s : söndürme bandındaki minimum dalgalanma

IRR SÜZGEÇLERİN TASARIMI

Karakteristikler genelde dB olarak

$$A(\omega) = -20\log_{10} |G(e^{j\omega})|$$

ile tanımlanan kayıp fonksiyonu cinsinden verilir.

Benzer şekilde, dB cinsinden geçirme bandı maksimum dalgalanması α_p ve söndürme bandı minimum zayıflatması α_s

$$\alpha_p = -20\log_{10} (1 - \delta_p)$$

$$\alpha_s = -20\log_{10} (\delta_s)$$

olarak hesaplanır.

IRR SÜZGEÇLERİN TASARIMI

Pratikte, geçirme bandı kenar frekansı F_p ve söndürme bandı kenar frekansı F_s Hz cinsinden belirtilir.

Sayısal süzgeç tasarım formüllerinde geçirme ve söndürme bandı kenar frekansları radyan cinsinden olduğu varsayıldığından Hz cinsinden verilen frekansların radyan cinsinden eşdeğerleri hesaplanmalıdır. Örnekleme frekansının F_T olduğu varsayılırsa, kenar frekansları aşağıdaki eşitlikler kullanılarak hesaplanabilir:

$$\omega_p = \frac{\Omega_p}{F_T} = \frac{2\pi F_p}{F_T} = 2\pi F_p T$$
$$\omega_s = \frac{\Omega_s}{F_T} = \frac{2\pi F_s}{F_T} = 2\pi F_s T$$

IRR SÜZGEÇLERİN TASARIMI

Süzgeç Türünün Seçilmesi :

Belirtilen frekans yanıtı özelliklerini sağlayan transfer fonksiyonu $H(z)$ nedensel bir transfer fonksiyonu olmalıdır.

$$H(z) = \frac{p_0 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_M z^{-M}}{d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_N z^{-N}}, \quad M \leq N$$

Sonsuz dürtü yanıtı (IIR) filtre durumunda transfer fonksiyonu şeklinde gerçel bir rasyonel fonksiyondur. Bu durumda, $H(z)$ kararlı olmanın yanında hesap yükünü en aza indirmek için küçük dereceye (N) sahip olmalıdır.

IRR SÜZGEÇLERİN TASARIMI

En sık kullanılan IIR süzgeç tasarım yöntemi aşağıdaki adımlardan oluşur:

1. Sayısal filtre karakteristikleri prototip bir analog alçak geçiren filtre karakteristiklerine dönüştürülür.
2. Analog alçak geçiren filtre transfer fonksiyonu $H_a(s)$ belirlenir.
3. $H_a(s)$, gerekli sayısal transfer fonksiyonu $G(z)$ 'ye dönüştürülür.

Bu yaklaşımın kullanılmasının nedenleri şöyle sıralanabilir: analog filtre tasarım yöntemleri oldukça gelişmiş olup genelde analitik çözümle sonuçlanırlar. Bu nedenle, analog filtre tasarımı için tablolar mevcuttur. İlave olarak, çoğu uygulama analog sistemlerin sayısal simülasyonunu gerektirmektedir.

ANALOG SÜZGEÇ ÇEŞİTLERİ

En sık kullanılan analog süzgeç çeşitleri :

1. Butterworth Süzgeç
2. Chebyshev Süzgeç
3. Eliptik Süzgeç

Butterworth süzgeç

Geçiş bandında ve durdurma bandında dalgalanma yoktur. Butterworth süzgeç diğer süzgeçlerden farklı olarak, derecesi arttığında durma bandındaki sert düşüş dışında frekans genlik eğrisinde şeklini korur.

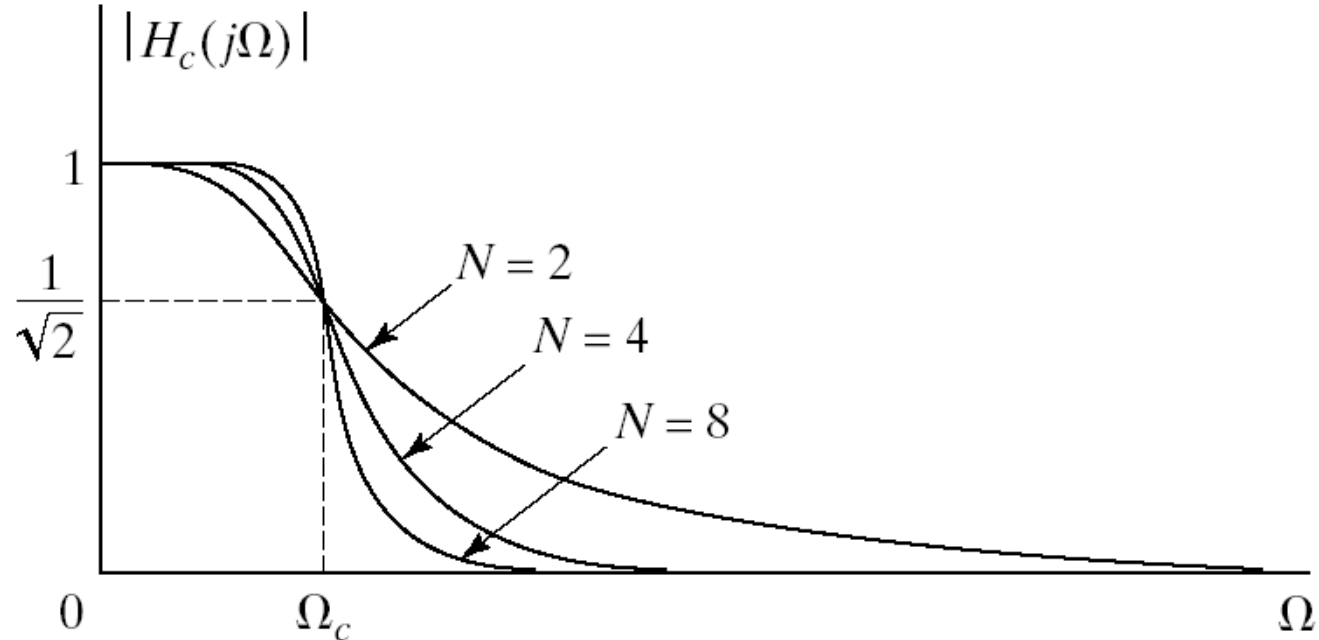
Butterworth süzgeç, Chebyshev ve Eliptik süzgeçlere göre daha geniş geçiş bölgesine (transition region) sahip olduğundan, durma bandı özelliklerinin doğru olarak uygulanabilmesi için yüksek derecelere ihtiyaç duyar. Chebyshev ve Eliptik süzgeçlere göre daha doğrusal bir frekans tepkisine sahiptir.

ANALOG SÜZGEÇ ÇEŞİTLERİ

Alçak Geçiren Butterworth Süzgeç

$$|Ha(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (j\Omega / j\Omega_c)^{2N}}$$

$$|Ha(s)|^2 = \frac{1}{1 + (s / j\Omega_c)^{2N}}$$



$$s_k = (-1)^{1/2N} (j\Omega_c) = \Omega_c e^{(j\pi/2N)(2k+N-1)} \quad \text{for } k = 0, 1, \dots, 2N-1$$

ANALOG SÜZGEÇ ÇEŞİTLERİ

Chebyshev Süzgeç :

Geçirme bandı Butterworth süzgece göre daha dardır ve geçirme (veya durdurma) bandında dalgacıklar vardır.

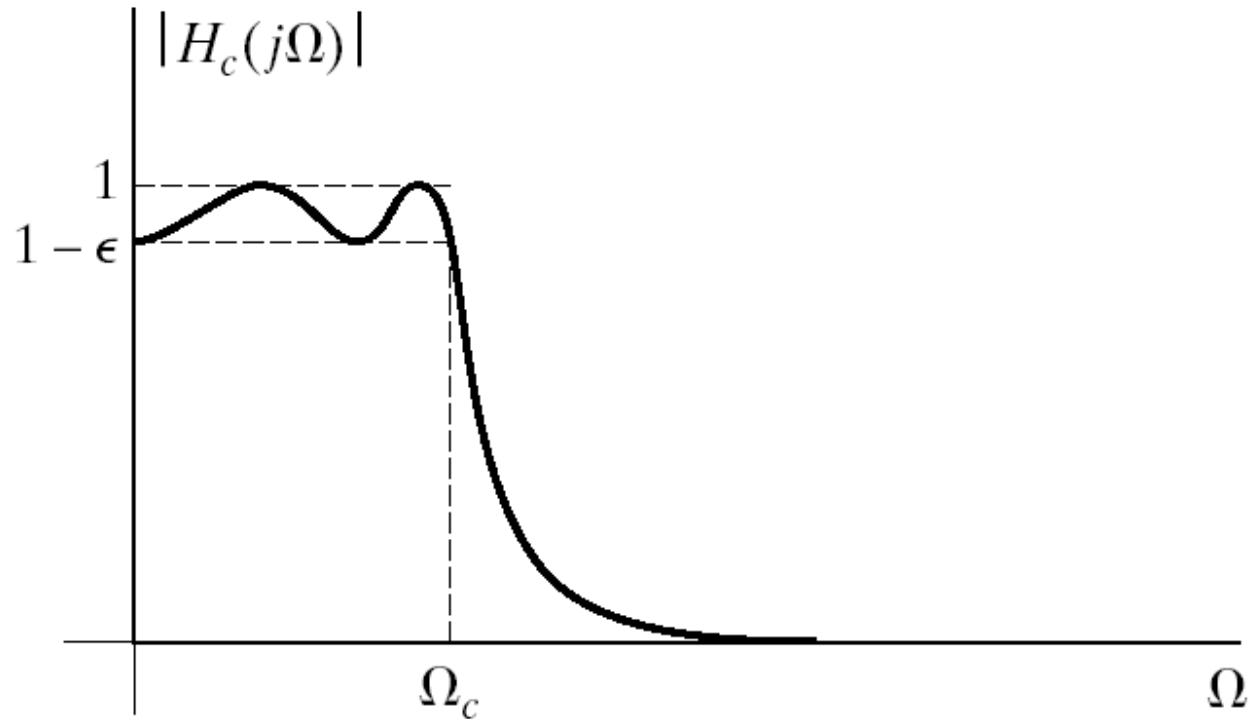
Chebyshev süzgeci mevcut dalgacıklar dışında bu özelliği sayesinde ideal süzgece daha yakındır. Eğer süzgeçte dalgacıklar geçirme bandında ise bu Chebyshev 1. tipi süzgeçtir.

Eğer dalgacıklar durdurma bandında ise Chebyshev 2. tip süzgeç olarak isimlendirilir. Eğer dalgacıklar her iki bantta ise bu durumda ortaya çıkan süzgece Eliptik süzgeç denir. Eliptik süzgeçlerin geçiş bandı iki çeşit süzgeçten de daha kısadır. Dolayısıyla ideale en yakın süzgeçtir. Ancak tasarımı zordur.

ANALOG SÜZGEÇ ÇEŞİTLERİ

Alçak Geçiren Chebyshev Süzgeç :

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 V_N^2(\Omega / \Omega_c)} \quad V_N(x) = \cos(N \cos^{-1} x)$$



ANALOG SÜZGEÇ ÇEŞİTLERİ

Eliptik Süzgeç :

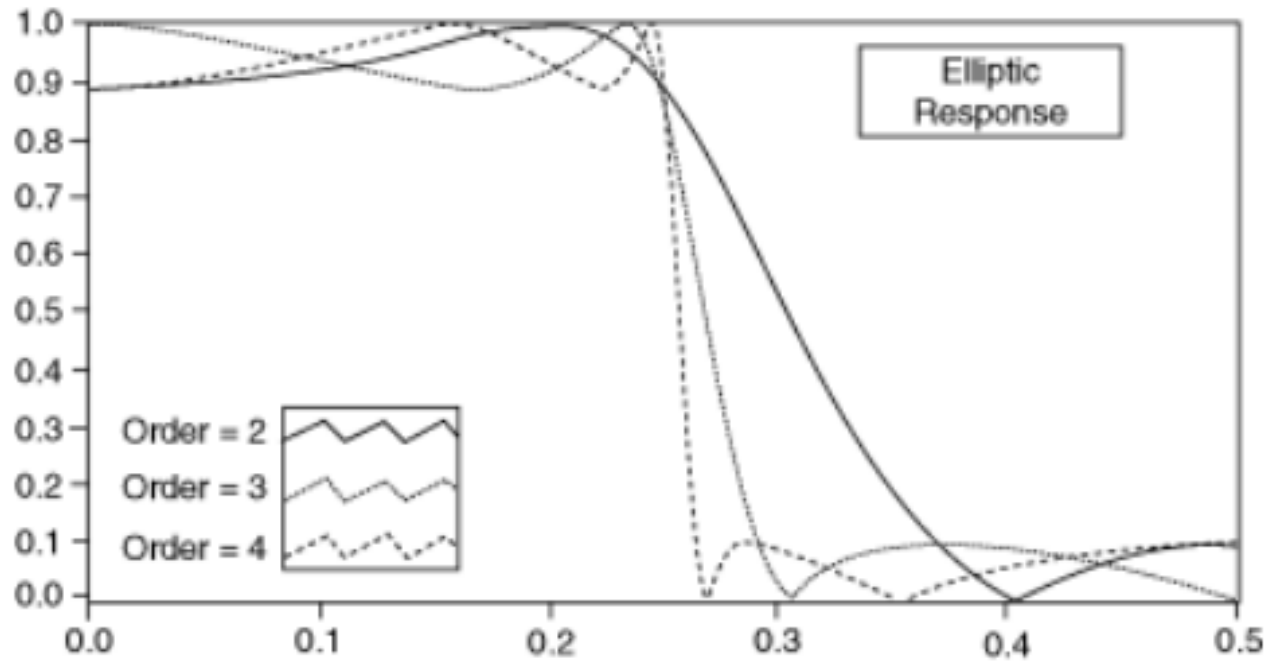
Eliptik süzgeç, geçirme ve durma bandında sayıları birbirinden bağımsız olarak değiştirilebilen, eş dalgacıklar barındıran bir elektronik süzgeç çeşididir.

Aynı dereceden başka bir süzgece göre geçiş bölgesi daha kısadır. Eliptik süzgeç, tanıtılan diğer süzgeçlere bu dalgacıkların karakteristiklerinin değiştirilmesiyle dönüşebilir.

Durma bandındaki dalgacıklar sıfıra yaklaştığında Chebyshev tip1, geçirme bandındaki dalgacıklar sıfıra yaklaştığında Chebyshev tip2, her iki banttaki dalgacıklar sıfıra yaklaştığında da Eliptik süzgeç Butterworth süzgece dönüşebilir.

ANALOG SÜZGEÇ ÇEŞİTLERİ

Alçak Geçiren Eliptik Süzgeç :



IIR Süzgeç Tasarımı: Temel Yaklaşımlar

“a” analog uzayı belirtmek üzere, analog transfer fonksiyonu

$$H_a(s) = \frac{P_a(s)}{D_a(s)}$$

olarak belirtilecektir.

$H_a(s)$ 'den türetilen sayısal transfer fonksiyonu da aşağıdaki gibi temsil edilecektir:

$$G(z) = \frac{P(z)}{D(z)}$$

• $H_a(s)$, $G(z)$ 'ye dönüştürmek, analog frekans yanıtının temel karakteristikleri korunacak şekilde s-uzayından z-uzayına bir dönüşüm uygulamaktır. O halde, dönüşüm kararlı bir analog transfer fonksiyonunu kararlı bir sayısal transfer fonksiyonuna dönüştürmelidir.

ANALOG SÜZGEÇTEN DÖNÜŞÜM İLE SAYISAL SÜZGEÇ TASARIM

IRR sayısal süzgeçler, analog süzgeç yaklaşıklarından sıklıkla aşağıdaki yöntemler kullanılarak elde edilebilir :

1. Değişmez Dürtü Cevabı Yöntemi
2. Çift Doğrusal Dönüşüm
3. Uygunlaştırılmış z-Dönüşümü

1. DEĞİŞMEZ DÜRTÜ CEVABI YÖNTEMİ

Sürekli zaman dürtü cevabının ayırık zamana haritalanması yöntemlerinden biridir.

$$h[n] = T_d h_a(nT_d)$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\frac{\omega}{T_d} + j\frac{2\pi}{T_d}k\right)$$

Eğer sürekli zamanlı süzgeç sınırlı banda sahipse

$$H_a(j\Omega) = 0 \quad |\Omega| \geq \pi / T_d$$

$$H(e^{j\omega}) = H_a\left(j\frac{\omega}{T_d}\right) \quad |\omega| \leq \pi$$

- Ayırık zaman için frekans ω ile gösterilecek olursa
- Sürekli zamanda süzgeçte $\Omega = \omega / T$ yazılarak dönüşüm yapılır.
- Geri dönmek için $\omega = \Omega T$ dönüşümü kullanılır.

1. DEĞİŞMEZ DÜRTÜ CEVABI YÖNTEMİ

Dürtü değişmez yöntemi ile sistem fonksiyonları arasındaki ilişki geliştirilecek olursa transfer fonksiyonun kısmi kesirlere ayrılmış şekli

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

olsun. Buna karşılık gelen dürtü cevabı

$$h_a(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- Ayırık zamanlı süzgecin dürtü cevabı

$$h[n] = T_d h_a(nT_d) = \sum_{k=1}^N T_d A_k e^{s_k n T_d} u[n] = \sum_{k=1}^N T_d A_k (e^{s_k T_d})^n u[n]$$

- Ve sistem fonksiyonu

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{T_d A_k}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}$$

- S domeninde $s=s_k$ kutupları $e^{s_k T_d}$ dönüştürülür.

1. DEĞİŞMEZ DÜRTÜ CEVABI YÖNTEMİ

Örnek : Aşağıda tasarlanmak istenen sayısal süzgecin özellikleri verilmiştir. Değişmez dürtü cevabı yöntemini kullanarak analog Butterworth süzgecin derecesi ve kesim frekansını hesaplayınız.
($T_d=1$)

$$\begin{aligned} 0.89125 \leq |H(e^{j\omega})| &\leq 1 & 0 \leq |\omega| \leq 0.2\pi \\ |H(e^{j\omega})| &\leq 0.17783 & 0.3\pi \leq |\omega| \leq \pi \end{aligned}$$

$T_d=1$ için $\omega = \Omega T$ dönüşümü ile analog süzgecin sistem fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} 0.89125 \leq |H(j\Omega)| &\leq 1 & 0 \leq |\Omega| \leq 0.2\pi \\ |H(j\Omega)| &\leq 0.17783 & 0.3\pi \leq |\Omega| \leq \pi \end{aligned}$$

Verilen özelliklerden yararlanarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılır:

$$|H_a(j0.2\pi)| \geq 0.89125 \text{ ve } |H_a(j0.3\pi)| \leq 0.17783$$

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (j\Omega / j\Omega_c)^{2N}}$$

1. DEĞİŞMEZ DÜRTÜ CEVABI YÖNTEMİ

Verilen iki koşulu da sağlayan N ve Ω_c değerleri elde edilir:

$$1 + \left(\frac{0.2\pi}{\Omega_c} \right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.89125} \right)^2 \quad \text{ve} \quad 1 + \left(\frac{0.3\pi}{\Omega_c} \right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.17783} \right)^2$$

$$N = 5.8858 \cong 6 \quad \text{ve} \quad \Omega_c = 0.70474$$

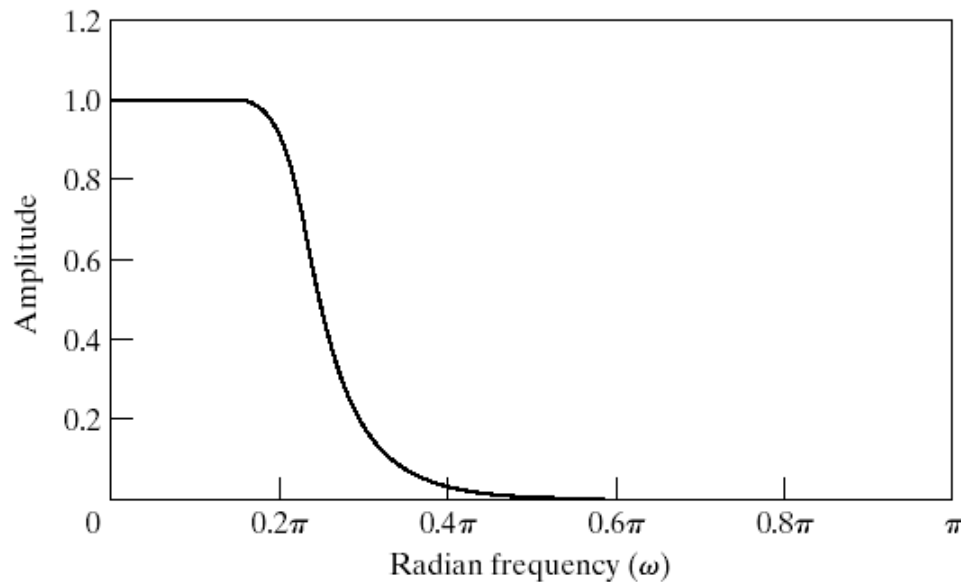
N değeri tam sayı olmalıdır. Özellikleri sağlayacak en yakın tam sayı değerine yuvarlanır. Transfer fonksiyonunun kutupları ise ;

$$s_k = (-1)^{1/12} (j\Omega_c) = \Omega_c e^{(j\pi/12)(2k+11)} \quad \text{for } k = 0, 1, \dots, 11$$

$$H(s) = \frac{0.12093}{(s^2 + 0.364s + 0.4945)(s^2 + 0.9945s + 0.4945)(s^2 + 1.3585s + 0.4945)}$$

1. DEĞİŞMEZ DÜRTÜ CEVABI YÖNTEMİ

$$H(z) = \frac{0.2871 - 0.4466z^{-1}}{1 - 1.2971z^{-1} + 0.6949z^{-2}} + \frac{-2.1428 + 1.1455z^{-1}}{1 - 1.0691z^{-1} + 0.3699z^{-2}} + \frac{1.8557 - 0.6303z^{-1}}{1 - 0.9972z^{-1} + 0.257z^{-2}}$$



2. ÇİFT DOĞRUSAL DÖNÜŞÜM

Değişmez Dürtü yönteminde örtüşme ve kararlılığı etkileyen Faktörlerden dolayı çift doğrusal dönüşüm yöntemi daha sık kullanılmaktadır.

Çift doğrusal dönüşüm (ÇDD) s-uzayındaki bir noktayı z-uzayındaki bir noktaya dönüştürür ve aşağıdaki eşitlikle verilir:

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$

O halde, $G(z)$ ile $H_a(s)$ arasındaki ilişki şöyle olur:

$$G(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)}$$

2. ÇİFT DOĞRUSAL DÖNÜŞÜM

Sayısal filtre tasarımı üç adımdan oluşur:

- (i) $G(z)$ 'nin karakteristiklerine ters ÇDD uygulanıp $Ha(s)$ 'nin karakteristikleri elde edilir
- (ii) $Ha(s)$ belirlenir
- (iii) $Ha(s)$ 'ye ÇDD uygulanıp $G(z)$ belirlenir. Dönüşüm formülündeki T parametresinin etkisi olmadığından, genelde $T = 2$ seçilir.

$T = 2$ için ters ÇDD formülü kolaylıkla elde edilebilir:

$$z = \frac{1+s}{1-s}$$

2. ÇİFT DOĞRUSAL DÖNÜŞÜM

$s = \sigma_o + j\Omega_o$ yazıp, s ile z arasında yukarıda verilen eşitlikten

$$z = \frac{(1 + \sigma_o) + j\Omega_o}{(1 - \sigma_o) - j\Omega_o} \Rightarrow |z|^2 = \frac{(1 + \sigma_o)^2 + \Omega_o^2}{(1 - \sigma_o)^2 + \Omega_o^2}$$

elde edilir. σ_o 'ın farklı değerleri için z 'nin genlikleri aşağıda verilmiştir.

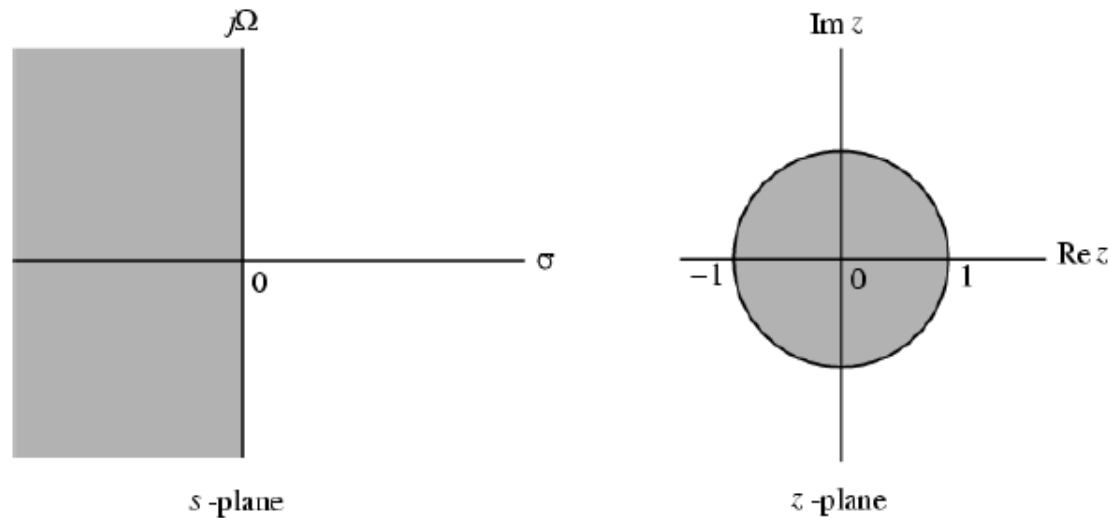
$$\sigma_o = 0 \rightarrow |z| = 1$$

$$\sigma_o < 0 \rightarrow |z| < 1$$

$$\sigma_o > 0 \rightarrow |z| > 1$$

2. ÇİFT DOĞRUSAL DÖNÜŞÜM

Aşağıda gösterildiği gibi, sol yarı s-düzlemi, karmaşık z-düzleminde birim çemberin içine, sağ yarı s-düzlemi birim çemberin dışına, $j\Omega$ -ekseni de birim çembere dönüşmüştür.



s-düzleminde kararlılık koşulu, kutupların sol yarı s-düzleminde, z-düzleminde kararlılık koşulu ise kutupların birim çember içinde olmasıdır. O halde, ÇDD kararlı bir analog transfer fonksiyonunu kararlı bir sayısal transfer fonksiyonuna dönüştürmektedir.

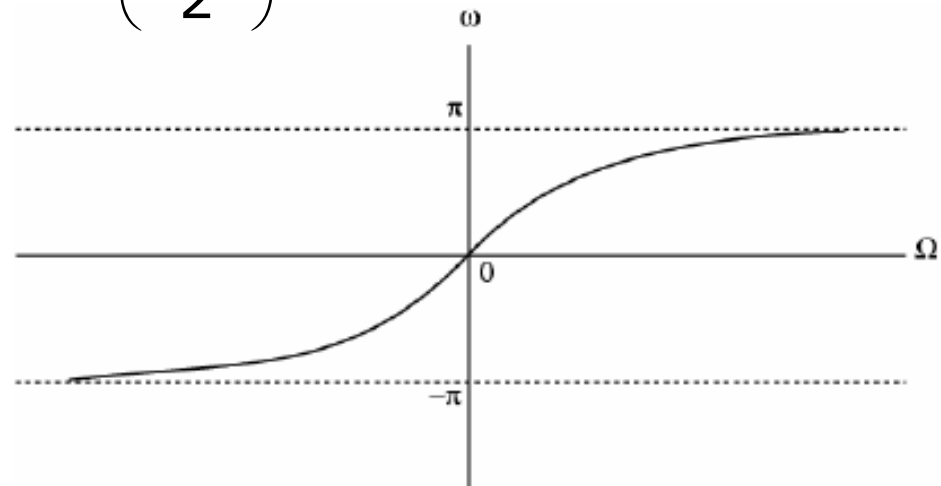
2. ÇİFT DOĞRUSAL DÖNÜŞÜM

Şimdi de analog frekans Ω ile sayısal frekans ω arasındaki ilişkiyi belirleyelim. ÇDD ilişkisinde ($T=2$ için) $s=j\Omega$, $z=e^{j\omega}$ yazılırsa bulunur.

$$\begin{aligned} j\Omega &= \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2})} \\ &= \frac{j2\sin(\omega/2)}{2\cos(\omega/2)} = j\tan(\omega/2) \end{aligned}$$

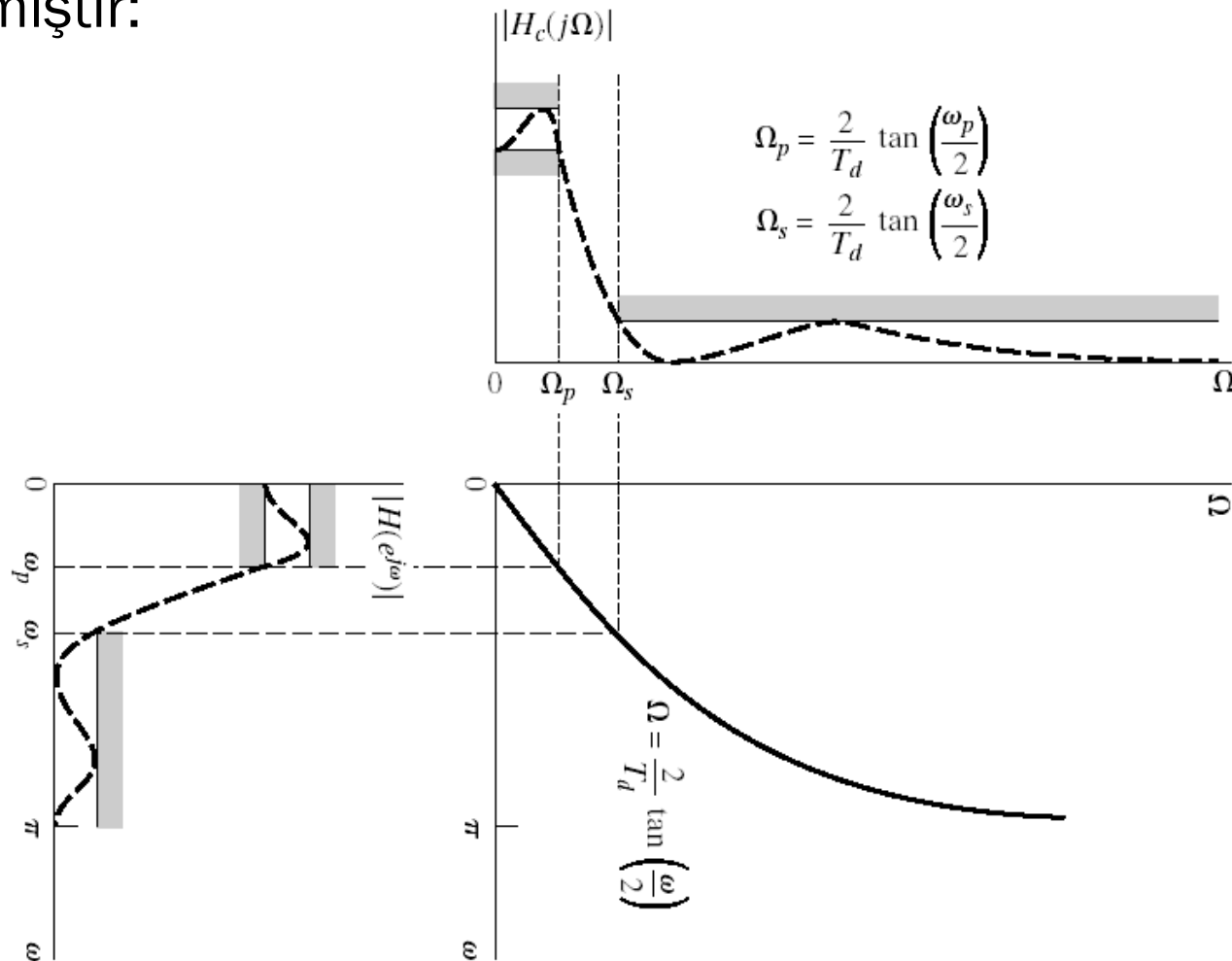
Bu ifade düzenlenirse, $\Omega = \tan(\omega/2)$ elde edilir ve aşağıda gösterildiği gibi aralarında doğrusal olmayan bir ilişki vardır

$$\Omega = \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \text{or} \quad \omega = 2 \arctan\left(\frac{\Omega T_d}{2}\right)$$



2. ÇİFT DOĞRUSAL DÖNÜŞÜM

Analog frekans Ω ile sayısal frekans ω arasındaki doğrusal olmayan ilişki frekans ekseninde FREKANS BÜKMESİ denen bir bozunum oluşturur. Frekans bükmesinin etkisi aşağıda gösterilmiştir:



2. ÇİFT DOĞRUSAL DÖNÜŞÜM

Sayısal filtre tasarımındaki adımlar şöyle özetlenebilir:

1. (ω_p, ω_s) frekanslarına ön bükme işlemi uygulanarak (ters ÇDD kullanarak) analog karşılıkları (Ω_p, Ω_s) bulunur.

$$\Omega = \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \text{or} \quad \omega = 2 \arctan\left(\frac{\Omega T_d}{2}\right)$$

2. Analog filtre tasarlanarak karşılık gelen transfer fonksiyonu $H_a(s)$ elde edilir.

3. $H_a(s)$ 'ye ÇDD uygulanarak sayısal filtreye karşılık gelen transfer fonksiyonu $G(z)$ belirlenir.

- ÇDD, sadece parçalı sabit değerli genlik yanıtı sayısal filtre tasarımında kullanılabilir.
- Dönüşüm, analog filtrenin faz yanıtını korumaz. Diğer bir deyişle, analog filtrenin faz yanıtı dönüşüm sonunda bozulabilir.

2. ÇİFT DOĞRUSAL DÖNÜŞÜM

Örnek : Aşağıdaki özelliklerde Butterworth süzgeci çift doğrusal dönüşüm yöntemi ile tasarlayınız.

$$0.89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 \quad 0 \leq |\omega| \leq 0.2\pi$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0.17783 \quad 0.3\pi \leq |\omega| \leq \pi$$

1) Ters ÇDD yöntemi ile Ω frekanslarına dönüşüm gerçekleştirilir.

$$0.89125 \leq |H(j\Omega)| \leq 1 \quad 0 \leq |\Omega| \leq \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{0.2\pi}{2}\right)$$

$$|H(j\Omega)| \leq 0.17783 \quad \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{0.3\pi}{2}\right) \leq |\Omega| < \infty$$

2) $T_d=1$ varsayımı altında aşağıdaki transfer fonksiyon analog süzgeç için elde edilir.

$$|Ha(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

2. ÇİFT DOĞRUSAL DÖNÜŞÜM

İstenilen süzgeç özelliklerini sağlaması için aşağıdaki 2 denklem elde edilir :

$$1 + \left(\frac{2 \tan 0.1\pi}{\Omega_c} \right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.89125} \right)^2 \quad \text{ve} \quad 1 + \left(\frac{2 \tan 0.15\pi}{\Omega_c} \right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.17783} \right)^2$$

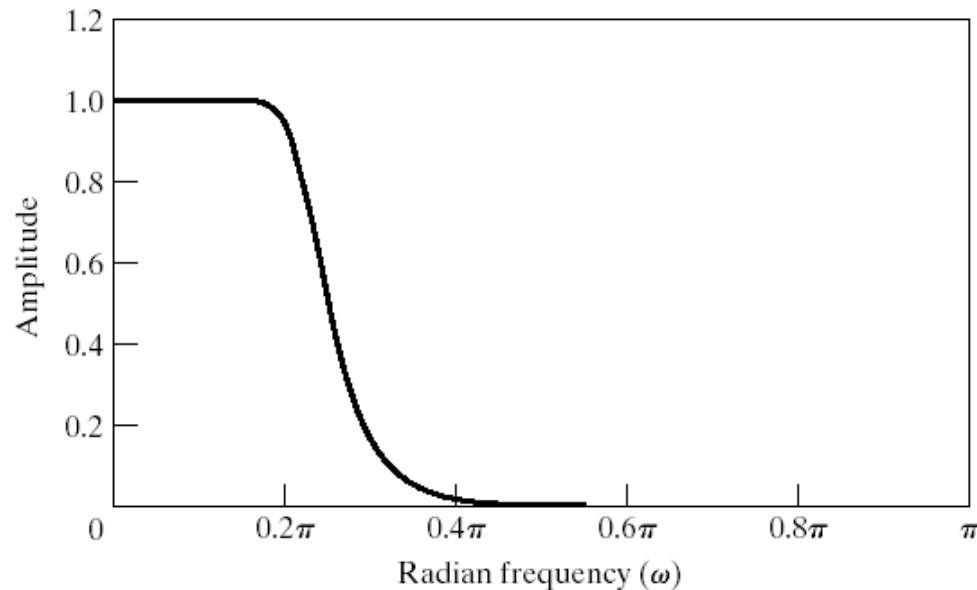
$$N = \frac{\log \left[\left(\left(\frac{1}{0.17783} \right)^2 - 1 \right) / \left(\left(\frac{1}{0.89125} \right)^2 - 1 \right) \right]}{2 \log [\tan(0.15\pi) / \tan(0.1\pi)]} = 5.305 \cong 6 \quad \Omega_c = 0.766$$

$$s_k = (-1)^{1/12} (j\Omega_c) = \Omega_c e^{(j\pi/12)(2k+1)} \quad \text{for } k = 0, 1, \dots, 11$$

2. ÇİFT DOĞRUSAL DÖNÜŞÜM

$$H_c(s) = \frac{0.20238}{(s^2 + 0.3996s + 0.5871)(s^2 + 1.0836s + 0.5871)(s^2 + 1.4802s + 0.5871)}$$

$$H(z) = \frac{0.0007378(1 + z^{-1})^6}{(1 - 1.2686z^{-1} + 0.7051z^{-2})(1 - 1.0106z^{-1} + 0.3583z^{-2})} \\ \times \frac{1}{(1 - 0.9044z^{-1} + 0.2155z^{-2})}$$



2. ÇİFT DOĞRUSAL DÖNÜŞÜM

Örnek: Aşağıda verilen karakteristiklere sahip alçak geçiren Butterworth sayısal filtre tasarlayalım: $\omega_p=0.25\pi$, $\omega_s=0.55\pi$, $\alpha_p=0.5$ dB, $\alpha_s=15$ dB.

$$\Omega_p = \tan(\omega_p / 2) = \tan(0.25\pi / 2) = 0.4142136$$

$$\Omega_s = \tan(\omega_s / 2) = \tan(0.55\pi / 2) = 1.1708496$$