EEEN 343 SİNYALLER VE SİSTEMLER

UYGULAMA — 1

Doç. Dr. Aydın KIZILKAYA
Araş. Gör. Adem ÜKTE

1. (PERİYODİKLİK ve PERİYOT BELİRLEME)

Aşağıda işaretlerin periyodik olup olmadığını belirleyiniz. Eğer periyodiklik mevcut ise temel periyodu elde ediniz.

1.1. $x_1(t) = je^{j10t}$

1.2. $x_2(t) = e^{(-1+j)t}$

1.3. $x_3[n] = e^{j7\pi n}$

1.4. $x_4[n] = 2\cos(\pi n/4) + \sin(\pi n/8) - 2\cos(\pi n/2 + \pi/6)$

1.5. $x_5(t) = 2\cos(10t + 1) - \sin(4t - 1)$

1.6. $x_6(t) = \cos(15t)$ olduğuna göre,

1.6.1. $x_6[n] = x_6(nT_S)$ dizisinin periyodik olmasını sağlayacak T_S örnekleme aralığı için gerekli koşulu elde ediniz.

1.6.2. $T_S = 0.1\pi$, *sn* ise $x_6[n]$ dizisinin temel periyodunu bulunuz.

Çözüm:

1.1. $x_1(t) = je^{j10t} = e^{j\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)}$ (PERİYODİK)

$$e^{j\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{j\left(10(t+T_1)+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{j\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)}.e^{j10T_1} \quad \Rightarrow \quad e^{j10T_1} = 1$$

$\Rightarrow \quad 10T_1 = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{\pi}{5}$ sn (temel periyot)

1.2. $x_2(t) = e^{(-1+j)t} = e^{-t}.e^{jt}$

Periyodiklik için; $e^{-t}.e^{jt} = e^{-(t+T_2)}.e^{j(t+T_2)} = e^{-t}.e^{jt}.e^{-T_2}.e^{jT_2}$

$\Rightarrow \quad e^{-T_2}.e^{jT_2} = e^{(-1+j)T_2} = 1 = e^{j2\pi} \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{j2\pi}{j-1}$ olması gerekir.

Ancak $T_2 \in \mathbb{R}$ olması gerektiğinden $x_2(t)$ periyodik değildir.

1.3. $x_3[n] = e^{j7\pi n} \quad \Rightarrow \quad \Omega_3 = 7\pi \quad \Rightarrow \quad N_3 = \frac{2\pi}{\Omega_3}k_3 = \frac{2}{7}k_3$

Temel periyot için $k_3 = 7$ alınır ki $N_3 = 2$ örnek olacaktır.

1.4. $x_4[n] = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{6}\right)$

$$\Omega_{41} = \frac{\pi}{4} \qquad \Omega_{42} = \frac{\pi}{8} \qquad \Omega_{43} = \frac{\pi}{2}$$

$$N_{41} = \frac{2\pi}{\Omega_{41}}k_{41} \quad N_{42} = \frac{2\pi}{\Omega_{42}}k_{42} \quad N_{43} = \frac{2\pi}{\Omega_{43}}k_{43}$$

$$= 8k_{41} \qquad = 16k_{42} \qquad = 4k_{43}$$

Temel periyot için $k_{41} = 1, k_{42} = 1, k_{43} = 1$ alınır ve

$N = \text{ekoç}(N_{41}, N_{42}, N_{43}) = \text{ekoç}(8,16,4) = 16$ örnek olur.

1.5. $x_5(t) = 2\cos(10t+1) - \sin(4t-1)$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\omega_{51} = 10 \qquad \omega_{52} = 4$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$T_{51} = \frac{2\pi}{\omega_{51}} = \frac{\pi}{5} \quad T_{52} = \frac{2\pi}{\omega_{52}} = \frac{\pi}{2}$$

$$T_5 = \text{ekoç}(T_{51}, T_{52}) = \text{ekoç}\left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}\right) = \text{ekoç}\left(\frac{2\pi}{10}, \frac{5\pi}{10}\right) = \frac{\pi}{10}\text{ekoç}(2{,}5) = \pi \text{ sn}$$

1.6.

1.6.1. $x_6[n] = x_6(nT_s) = \cos(15nT_s)$

$\Rightarrow \quad \Omega_6 = 15T_s \quad \Rightarrow \quad N_6 = \frac{2\pi}{\Omega_6}k_6 = \frac{2\pi}{15T_s}k_6 = \frac{2\pi}{15}\frac{k_6}{T_s}$

$T_s = \frac{2\pi}{15}\frac{k_6}{N_6}$ koşulunun sağlanması gerekir.

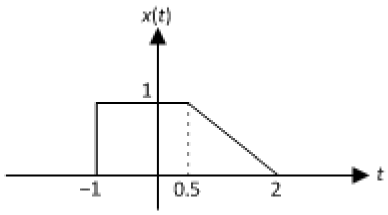
1.6.2. $T_s = 0{,}1\pi$ sn ise

$$N_6 = \frac{2\pi}{15}\frac{k_6}{0{,}1\pi} = \frac{4}{3}k_6$$

Temel periyot için $k_6 = 3$ seçilir ve temel periyot $N_6 = 4$ örnek olur.

---

2. (İŞARET GÖSTERİMLERİ ve İŞARETLER ÜZERİNDEKİ İŞLEMLER)



2.1. Yukarıdaki gibi tanımlanan sürekli-zamanlı bir $x(t)$ işareti ile ilgili olarak

2.1.1. $x(t)$ işaretinin birim basamak fonksiyonu cinsinden analitik ifadesini elde ediniz.

2.1.2. $x(t)$ işaretinin ÇİFT ve TEK kısımlarını elde ediniz ve çiziniz.

2.1.3. $x(t)$ işaretinin enerjisini hesaplayınız.

2.1.4. $x(2-t)$, $x(2t+1)$, $x(4-3t/2)$, $x(t)[\delta(t+3/2)+\delta(t-3/2)]$ işaretlerini çiziniz.

2.1.5. $x(t)$ işareti $T = 4$ temel periyodu ile periyodikleştirilmektedir. Periyodik işareti çiziniz ve bu işaretin ortalama değerini, ortalama gücünü ve etkin değerini hesaplayınız.

2.2. Ayrık-zamanlı $x[n]$ dizisine ilişkin örnek değerleri

$$x[n] = \{-1, 2, 0, \overset{\blacktriangledown}{3}, -7, 6\}$$

olarak verildiğine göre,

2.2.1. $x[n]$ işaretinin birim örnek fonksiyonu cinsinden analitik ifadesini elde ediniz.

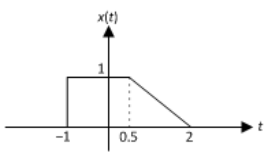
2.2.2. $x[n]$ işaretinin ÇİFT ve TEK kısımlarını elde ediniz.

2.2.3. $x[n]$ işaretinin enerjisini hesaplayınız.

2.2.4. $x[-n+2]$, $x[2n-1]$, $x[n/2+1]$, $x[3n/2+1]$ dizilerini elde ediniz.

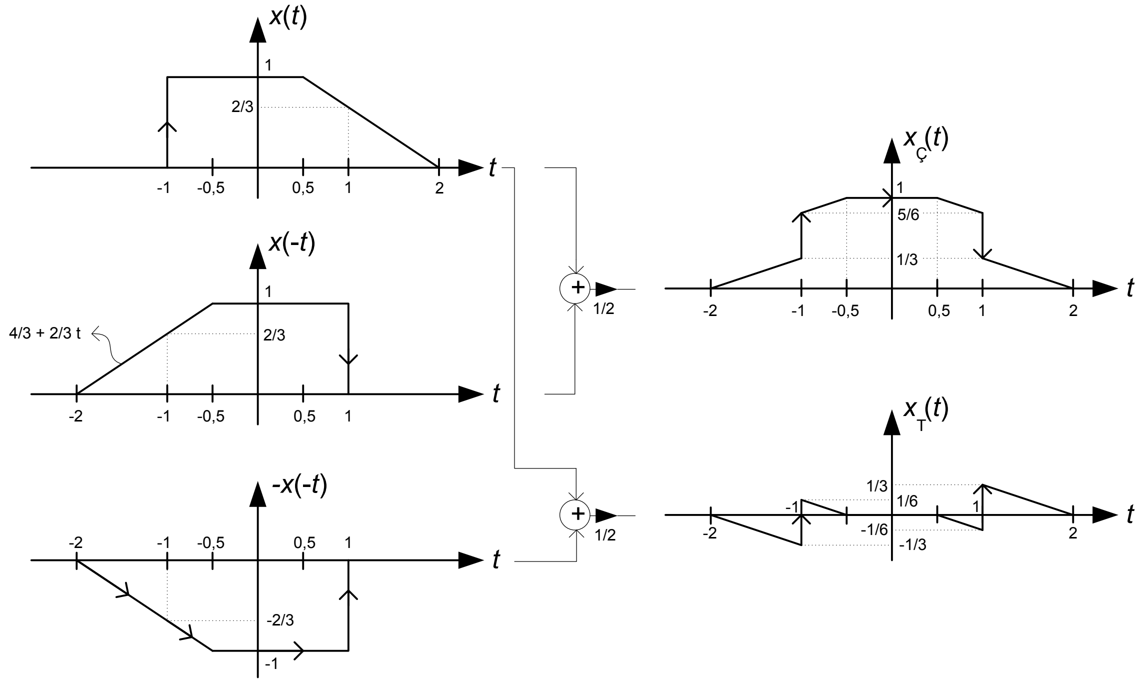
Çözüm:

2.1.



2.1.1. $x(t) = u(t+1) - u(t-0{,}5) + \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}t\right)[u(t-0{,}5) - u(t-2)]$

2.1.2. $x_{Ç}(t)=\frac{x(t)+x(-t)}{2} \quad , \quad x_T(t)=\frac{x(t)-x(-t)}{2}$



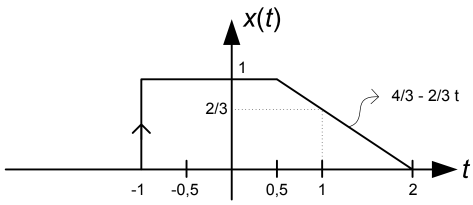
2.1.3. $x(t)$ işaretinin enerjisi;

$$E=\int_{-1}^{2}x^2(t)dt=\int_{-1}^{0,5}1^2dt+\int_{0,5}^{2}\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}t\right)^2dt=1,5+\left(\frac{16}{9}t-\frac{8}{9}t^2+\frac{4}{27}t^3\right)\Big|_{0,5}^{2}$$

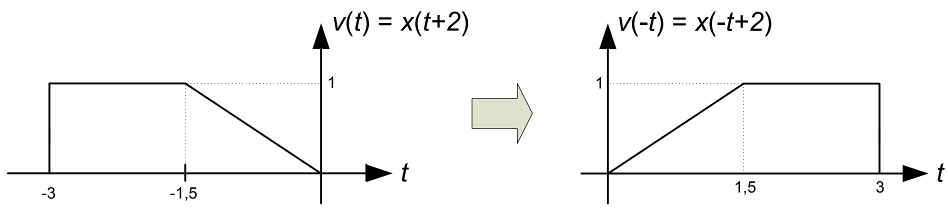
$$=1,5+\frac{32}{9}-\frac{32}{9}+\frac{32}{27}-\frac{8}{9}+\frac{2}{9}-\frac{1}{54}$$

$= 2$ joule (1 Ω'luk direnç üzerinde ortaya çıkardığı enerji olarak düşünülür.)

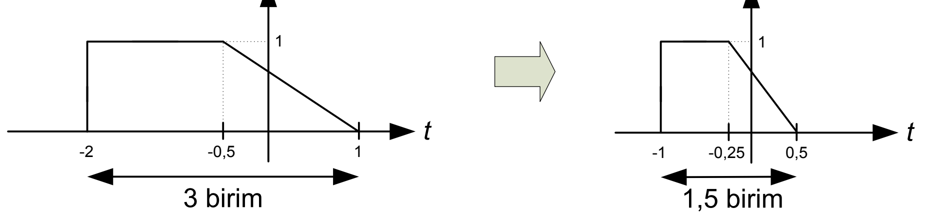
2.1.4.



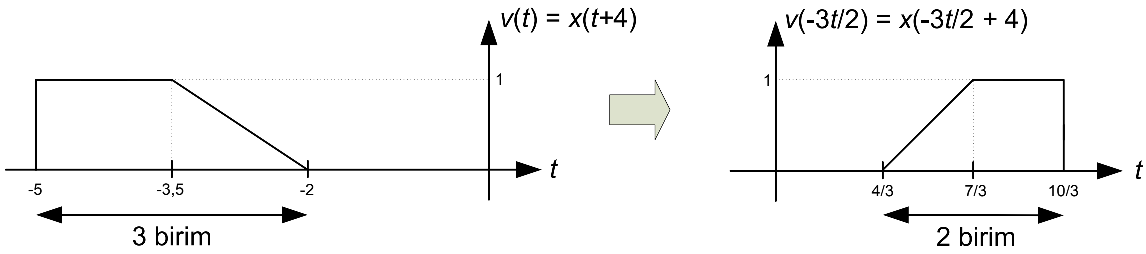
a)



b)



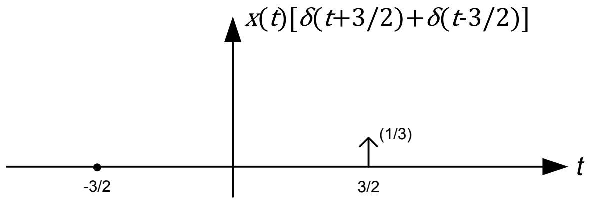
c)



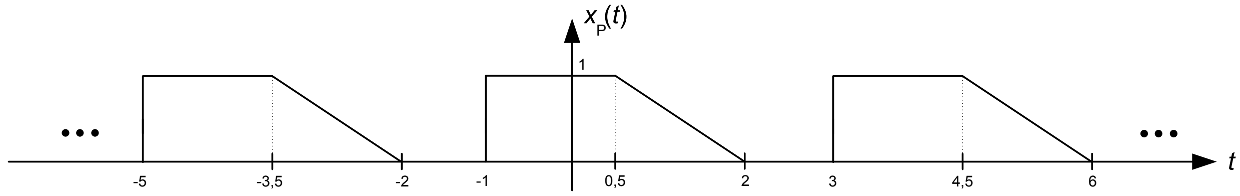
d) $x(t)\left[\delta\left(t+\frac{3}{2}\right)+\delta\left(t-\frac{3}{2}\right)\right]=x\left(-\frac{3}{2}\right)\delta\left(t+\frac{3}{2}\right)+x\left(\frac{3}{2}\right)\delta\left(t-\frac{3}{2}\right)$

$x\left(-\frac{3}{2}\right)=0$, $x\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$

$x(t)\left[\delta\left(t+\frac{3}{2}\right)+\delta\left(t-\frac{3}{2}\right)\right]=\frac{1}{3}\delta\left(t-\frac{3}{2}\right)$



2.1.5.



$T = 4$ temel periyodu ile periyodikleştirilmiş $x(t)$ işareti

$$x_{\text{ort}}=\frac{1}{4}\left[\int_{-1}^{0,5}1dt+\int_{0,5}^{2}\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}t\right)dt\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}+\left(\frac{4}{3}t-\frac{t^2}{3}\right)\Big|_{0,5}^{2}\right]=\frac{9}{16}$$

$$P_{\text{ort}}=\frac{1}{4}\left[\int_{-1}^{0,5}1^2dt+\int_{0,5}^{2}\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}t\right)^2dt\right]$$

$$=\frac{1}{4}[2]=\frac{1}{2}\text{ watt}\quad(1\ \Omega'\text{luk yükte açığa çıkan güç})$$

$$x_{\text{rms}}=\sqrt{P_{\text{ort}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

2.2. $$x[n] = \{-1,\ 2,\ 0,\ \overset{\blacktriangledown}{3},\ -7,\ 6\}$$

2.2.1. $x[n] = -\delta[n+3] + 2\delta[n+2] + 3\delta[n] - 7\delta[n-1] + 6\delta[n-2]$

2.2.2. $x_Ç[n] = \frac{x[n]+x[-n]}{2}$, $x_T[n] = \frac{x[n]-x[-n]}{2}$

$x[-n] = \{6,\ -7,\ \overset{\blacktriangledown}{3},\ 0,\ 2,\ -1\}$

$x_Ç[n] = \{-0.5,\ 4,\ -3.5,\ \overset{\blacktriangledown}{3},\ -3.5,\ 4,\ -0.5\}$

$x_T[n] = \{-0.5, -2,\ 3.5,\ \overset{\blacktriangledown}{0},\ -3.5,\ 2,\ 0.5\}$

2.2.3. $x[n]$'nin enerjisi;

$$E = \sum_{n=-3}^{2} x[n]^2 = (-1)^2 + 2^2 + 0^2 + 3^2 + (-7)^2 + 6^2 = 99 \text{ joule}$$

2.2.4. $$x[n] = \{-1,\ 2,\ 0,\ \overset{\blacktriangledown}{3},\ -7,\ 6\}$$

a) $v[n] = x[n+2] = \{-1,\ 2,\ 0,\ 3,\ -7,\ \overset{\blacktriangledown}{6}\}$

$v[-n] = x[-n+2] = \{\overset{\blacktriangledown}{6}, -7,\ 3,\ 0,\ 2, -1\}$

b) $v[n] = x[n-1] = \{-1,\ 2,\ \overset{\blacktriangledown}{0},\ 3,\ -7,\ 6\}$

$\underbrace{v[2n] = x[2n-1]} = \{-1,\ \overset{\blacktriangledown}{0},\ -7\}$

(Decimation – Seyreltme)

c) $v[n] = x[n+1] = \{-1,\ 2,\ 0,\ 3,\ \overset{\blacktriangledown}{-7},\ 6\}$

$\underbrace{v\left[\frac{n}{2}\right] = x\left[\frac{n}{2}+1\right]}$

(Interpolation – Aradeğerleme)

(yazılmasa da olur)

sıfır aradeğerleme; $\{-1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 3,\ 0,\ \overset{\blacktriangledown}{-7},\ 0,\ 6,\ 0\}$

basamak aradeğerleme; $\{-1, -1,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0,\ 3,\ 3,\ \overset{\blacktriangledown}{-7}, -7,\ 6,\ 6\}$

d) $v[n] = x[n+1] = \{-1,\ 2,\ 0,\ 3,\ \overset{\blacktriangledown}{-7},\ 6\}$

$z[n] = v\left[\frac{n}{2}\right] = x\left[\frac{n}{2} + 1\right]$

(yazılmasa da olur)

sıfır aradeğerleme; $\{-1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 3,\ 0,\ \overset{\blacktriangledown}{-7},\ 0,\ 6,\ \overset{\uparrow}{0}\}$

basamak aradeğerleme; $\{-1, -1,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0,\ 3,\ 3,\ \overset{\blacktriangledown}{-7}, -7,\ 6,\ 6\}$

$\underbrace{z[3n] = x\left[\frac{3n}{2} + 1\right]}_{\text{Seyreltme}}$

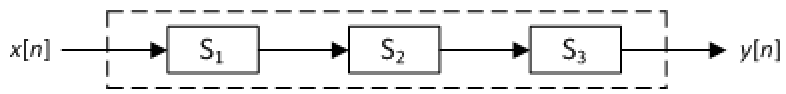
sıfır aradeğerlemesinin seyreltilmişi; $\{2,\ 0, \overset{\blacktriangledown}{-7}\}$

basamak aradeğerlemesinin seyreltilmişi; $\{2,\ 0, \overset{\blacktriangledown}{-7},\ 6\}$

---

3. (SİSTEMLER ve SİSTEM ÖZELLİKLERİ)

3.1. $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2}$ ve $\mathbf{S_3}$ ile tanımlı ayrık-zamanlı sistem blokları aşağıdaki gibi birbirine seri (kas-kat) bağlıdırlar.



i = 1, 2 ve 3 için $x_i[n]$ ve $y_i[n]$ her bir sistemin giriş ve çıkışlarını göstermek üzere her bir sistem için giriş-çıkış ilişkisi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\mathbf{S_1}: y_1[n] = \begin{cases} x_1[n/2], & n \to \text{çift} \\ 0, & n \to \text{tek} \end{cases}$$

$$\mathbf{S_2}: y_2[n] = x_2[n] + \frac{1}{2}x_2[n-1] + \frac{1}{4}x_2[n-2]$$

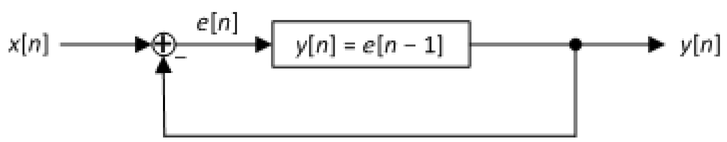
$$\mathbf{S_3}: y_3[n] = x_3[2n]$$

Buna göre, kas-kat sistemin giriş-çıkış ilişkisini ($y[n]$ ile $x[n]$ arasındaki ilişki) elde ediniz. (**Dikkat:** $x_1[n] = x[n]$ ve $y[n] = y_3[n]$'dir)

3.2. Blok diyagramı aşağıdaki gibi verilen geri-beslemeli sistemde $n < 0$ için $y[n] = 0$ olduğu bilindiğine göre,

3.2.1. $x[n] = \delta[n]$ girişi için sistem çıkışı $y[n]$'yi elde ediniz. *(Sistemin birim örnek cevabı)*

3.2.2. $x[n] = u[n]$ girişi için sistem çıkışı $y[n]$'yi elde ediniz. *(Sistemin birim basamak cevabı)*



3.3. Giriş-çıkış ilişkileri aşağıdaki gibi verilen sistemlerin özelliklerini belirleyiniz.

(Sistem özellikleri; (i) Doğrusal mıdır? (ii) Zamanla değişmeyen midir? (iii) Nedensel midir? (iv) BIBO Kararlı mıdır? (v) Hafızalı mıdır?)

3.3.1. $y(t) = x(t)\cos\omega_0 t$

3.3.2. $y(t) = \frac{d}{dt}x(t-1)$

Çözüm:

3.1.

$$\mathbf{S_1}: y_1[n] = \begin{cases} x_1\left[\frac{n}{2}\right] &, \ n \text{ çift ise} \\ 0 &, \ n \text{ tek ise} \end{cases}$$

$$\mathbf{S_2}: y_2[n] = x_2[n] + \frac{1}{2}x_2[n-1] + \frac{1}{4}x_2[n-2]$$

$$\mathbf{S_3}: y_3[n] = x_3[2n]$$

$x_1[n] = x[n]$, $y[n] = y_3[n]$

S_1'in çıkışı $\quad y_1[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] &, \ n \text{ çift ise} \\ 0 &, \ n \text{ tek ise} \end{cases}$

S_2'nin girişi $\quad x_2[n] = y_1[n]$ olduğuna göre

S_2'nin çıkışı $\quad y_2[n] = y_1[n] + \frac{1}{2}y_1[n-1] + \frac{1}{4}y_1[n-2]$

$$= \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] + \frac{1}{4}x\left[\frac{n-2}{2}\right] &, \ n \text{ çift ise} \\ \frac{1}{2}x\left[\frac{n-1}{2}\right] &, \ n \text{ tek ise} \end{cases}$$

S_3'ün girişi $\quad x_3[n] = y_2[n]$

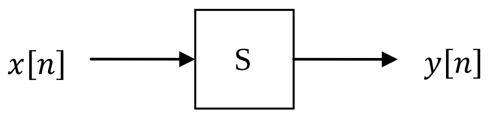
S_3'ün çıkışı $\quad y_3[n] = y_2[2n]$

n'ye tek veya çift sayı da verilse $y_2[2n]$'nin indisi daima çift olacaktır.

Buna göre;

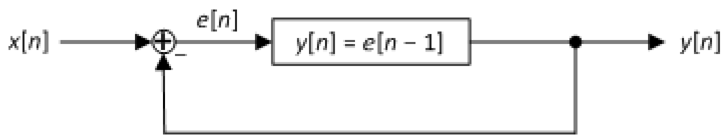
$$y[n] = y_3[n] = x[n] + \frac{1}{4}x[n-1]$$

olacaktır.



$$\mathbf{S}: \ y[n] = x[n] + \frac{1}{4}x[n-1]$$

3.2.



$e[n] = x[n] - y[n] \quad \Rightarrow \quad y[n] = e[n-1] = x[n-1] - y[n-1]$ (Sistemin giriş-çıkış ilişkisi)

$n < 0$ için $y[n] = 0$ bilgisini kullanarak;

3.2.1. $x[n] = \delta[n]$ için

$$y[n] = -y[n-1] + \delta[n-1]$$

$n = 0$ için $y[0] = -\underbrace{y[-1]}_{0} + \underbrace{\delta[-1]}_{0} = 0$

$n = 1$ için $y[1] = -\underbrace{y[0]}_{0} + \underbrace{\delta[0]}_{1} = 1$

$n = 2$ için $y[2] = -y[1] + 0 = -1$

$n = 3$ için $y[3] = -y[2] + 0 = 1$

$n = 4$ için $y[4] = -y[3] + 0 = -1$

$$\vdots$$

Genelleştirilirse;

$$y[n] = -(-1)^n u[n-1]$$

elde edilir ki aslında bu, sistemin impuls cevabı yani sistemin zaman bölgesindeki tanımına (gösterimine) karşı düşer.

3.2.2. $x[n] = u[n]$ için

$$y[n] = -y[n-1] + u[n-1]$$

$n = 0$ için $y[0] = -\underbrace{y[-1]}_{0} + \underbrace{u[-1]}_{0} = 0$

$n = 1$ için $y[1] = -\underbrace{y[0]}_{0} + \underbrace{u[0]}_{1} = 1$

$n = 2$ için $y[2] = -y[1] + 1 = 0$

$n = 3$ için $y[3] = -y[2] + 1 = 1$

$n = 4$ için $y[4] = -y[3] + 1 = 0$

$$\vdots$$

$y[n] = \frac{1}{2}[1 - (-1)^n]u[n]$ (Sistemin birim basamak cevabı)

3.3.

3.3.1. $y(t) = x(t)\cos\omega_0 t$

(i) <u>Doğrusallık:</u>

$$
\begin{aligned}
x_1(t) \quad &\rightarrow \quad y_1(t) = x_1(t)\cos\omega_0 t \\
x_2(t) \quad &\rightarrow \quad y_2(t) = x_2(t)\cos\omega_0 t \\
x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \quad &\rightarrow \quad y_3(t) = x_3(t)\cos\omega_0 t \\
&\qquad\qquad = \big(ax_1(t) + bx_2(t)\big)\cos\omega_0 t \\
&\qquad\qquad = \underbrace{ax_1(t)\cos\omega_0 t}_{y_1(t)} + \underbrace{bx_2(t)\cos\omega_0 t}_{y_2(t)} \\
&\qquad\qquad = ay_1(t) + by_2(t)
\end{aligned}
$$

olduğundan doğrusaldır.

<u>(ii) Zamanla değişmeme:</u>

$$
\begin{aligned}
x(t) \quad &\rightarrow \quad y(t) \\
x(t - t_0) \quad &\rightarrow \quad y(t - t_0) \quad ? \\
x(t) \quad &\rightarrow \quad y(t) = x(t)\cos\omega_0 t \\
x(t - t_0) \quad &\rightarrow \quad y'(t) = x(t - t_0)\cos\omega_0 t
\end{aligned}
$$

$y'(t) \neq y(t - t_0)$ olduğundan sistem zamanla değişendir.

<u>(iii) Nedensellik:</u>

$$y(t) = x(t)\cos\omega_0 t$$

Sistemin o andaki çıkışı sadece o andaki girişlere bağlı. O yüzden sistem nedensel. Yani girişin gelecekteki değerlerinden bağımsız.

<u>(iv) BIBO Kararlılık:</u>

$|y(t)| = |x(t)\cos\omega_0 t| \leq |x(t)|\underbrace{|cos\,\omega_0 t|}_{1} \leq |x(t)|$ girişin genliği ile sınırlı

O yüzden sistem BIBO kararlıdır.

<u>(v) Hafızalılık:</u>

Sistem sadece anlık giriş değerlerine bağlıdır. O yüzden HAFIZALI değildir.

3.3.2. $y(t) = \frac{d}{dt}x(t-1)$

(i) <u>Doğrusallık:</u>

$$x_1(t) \quad \rightarrow \quad y_1(t) = \frac{d}{dt}x_1(t-1)$$

$$x_2(t) \quad \rightarrow \quad y_2(t) = \frac{d}{dt}x_2(t-1)$$

$$\begin{aligned} x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \quad \rightarrow \quad y_3(t) &= \frac{d}{dt}x_3(t-1) \\ &= \frac{d}{dt}\big(ax_1(t-1) + bx_2(t-1)\big) \\ &= a\underbrace{\frac{d}{dt}x_1(t-1)}_{y_1(t)} + b\underbrace{\frac{d}{dt}x_2(t-1)}_{y_2(t)} \\ &= ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

olduğundan sistem DOĞRUSAL'dır.

<u>(ii) Zamanla değişmezlik:</u>

$$x(t) \quad \rightarrow \quad y(t)$$

$$\underbrace{x(t-t_0)}_{x'(t)} \quad \rightarrow \quad y(t-t_0) \quad ?$$

$y'(t) = \frac{d}{dt}x'(t-1)$

$\quad = \frac{d}{dt}x(t-t_0-1) = y(t-t_0)$ olduğundan sistem ZAMANLA DEĞİŞMEYEN'dir.

<u>(iii) Nedensellik:</u>

Sistem geçmişteki giriş değerlerine bağlı. Gelecekteki giriş değerlerine bağlı değil. O yüzden NEDENSEL'dir.

<u>(iv) BIBO Kararlılık:</u>

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t-1)$$

$x(t) = ku(t)$ gibi sınırlı genlikli bir girişi ele alalım. Yani $t \geq 0$ için $|x(t)| = k$, $t < 0$ için $|x(t)| = 0$'dır.

Bu durumda $y(t) = \frac{d}{dt}\big(ku(t-1)\big) = k\delta(t-1)$ çıkışı $t = 1$'de sonsuz genlikli olur ki sistem KARARSIZ'dır.

<u>(v) Hafızalılık:</u>

Gecikmeden dolayı HAFIZALI'dır.