



EEM 401 Sayısal Sinyal İşleme

SAYISAL FİLTRELER I

YRD. DOÇ. DR. SELDA GÜNEY

İÇERİK

- Sayısal Filtreler
- Ayırık Zamanlı Sistemlerin Gerçeklemesi
- IIR sistemler için Ağ Yapıları
- FIR sistemler için Ağ Yapıları

SAYISAL FİLTRELER

Avantajları :

- Katsayılar değiştirilerek transfer fonksiyonu değiştirilebilir
- Yüksek güvenilirlik ve doğruluk
- Analog süzgeçlerle gerçekleştirilmeyecek transfer fonksiyonları gerçekleştirilebilir

Dezavantajları:

- Maliyet
- Sürekli enerji kaynağı ihtiyacı

SAYISAL FİLTRELER

Tasarıma göre ikiye ayrılabilir :

1. Tekrarlı (Özyinelemeli, Rekürsif) : Çıkış hem girişin hem çıkışın fonksiyonundan oluşuyorsa

- Faz tepkisi doğrusal değildir.
- Kararlı olması için transfer fonksiyonunun kutupları z domeninde birim daire içinde olmalıdır.

SAYISAL FİLTRELER

2. *Tekrarsız (Özyinelemesiz, Rekürsif olmayan)*: çıkış sadece girişe ve girişin önceki değerlerine bağlı ise

- Doğrusal faz tepkisi
- Kararlı
- Keskin geçişli transfer fonksiyonu elde etmek için tasarımda fazla sayıda geciktirme elemanı kullanmak gerekir.

SAYISAL FİLTRELER

DZD sistemler ikiye ayrılabilir:

1.FIR (Finite duration Impulse Response-Sonlu Süreli Dürtü Tepkisi) Sistemler

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n - k)$$

Genellikle tekrarsız olarak gerçekleştirilirler

2. IIR (Infinite duration Impulse Response-Sonsuz Süreli Dürtü Tepkisi) Sistemler

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n - k)$$

Genellikle tekrarlı olarak gerçekleştirilirler

SAYISAL FİLTRELER

Sayısal filtreleri gerçekleştirme için birçok yöntem vardır. Bunlardan en önemlileri :

1. Doğrudan gerçekleştirme
2. Kanonik form gerçekleştirme
3. Seri (kaskat)gerçekleştirme
4. Paralel gerçekleştirme
5. Basamak gerçekleştirme
6. Kafes gerçekleştirme

AYRIK ZAMANLI SİSTEMLERİN GERÇEKLEMESİ

DZD Ayrik zamanli sistem için sabit katsayili denklem tanımı

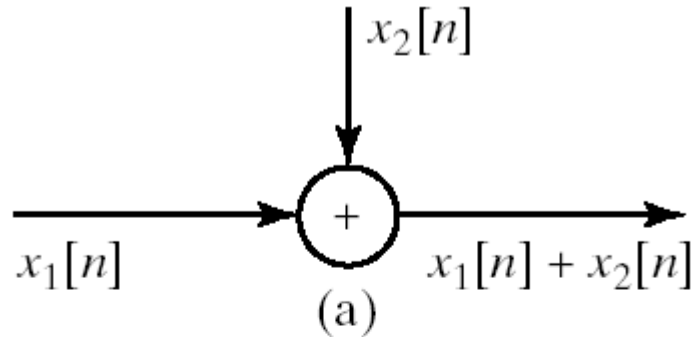
$$\sum_{k=0}^N \hat{a}_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M \hat{b}_k x[n-k]$$

$$y[n] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

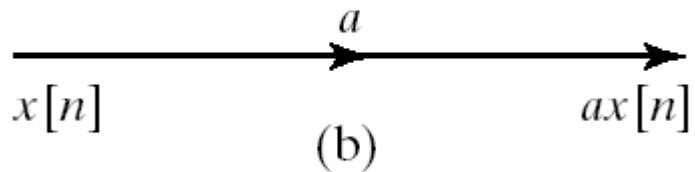
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

AYRIK ZAMANLI SİSTEMLERİN GERÇEKLEMESİ

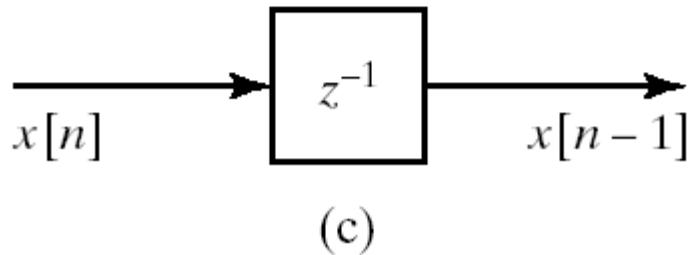
Toplama



Çarpma



Birim Geciktirme

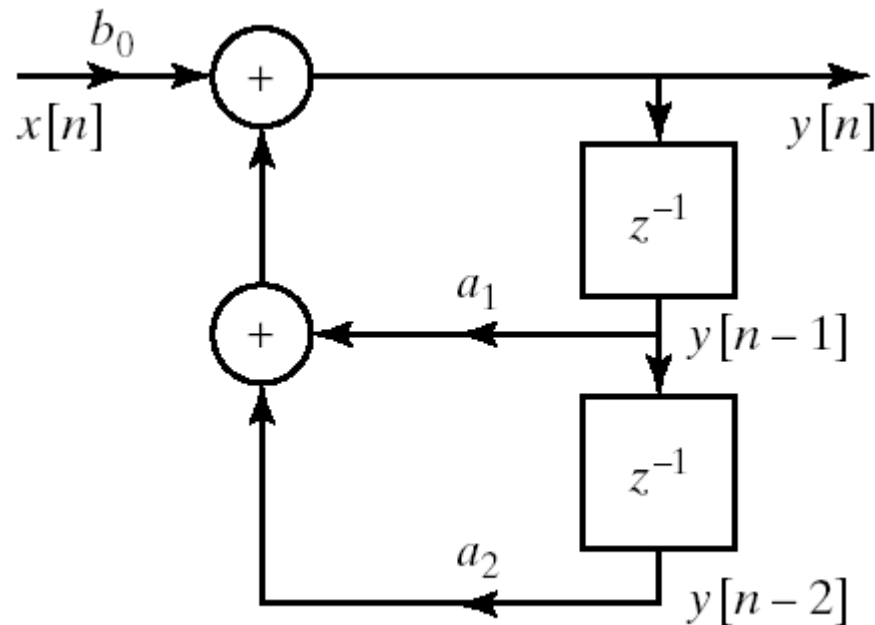


AYRIK ZAMANLI SİSTEMLERİN GERÇEKLEMESİ

Fark
Denklemini

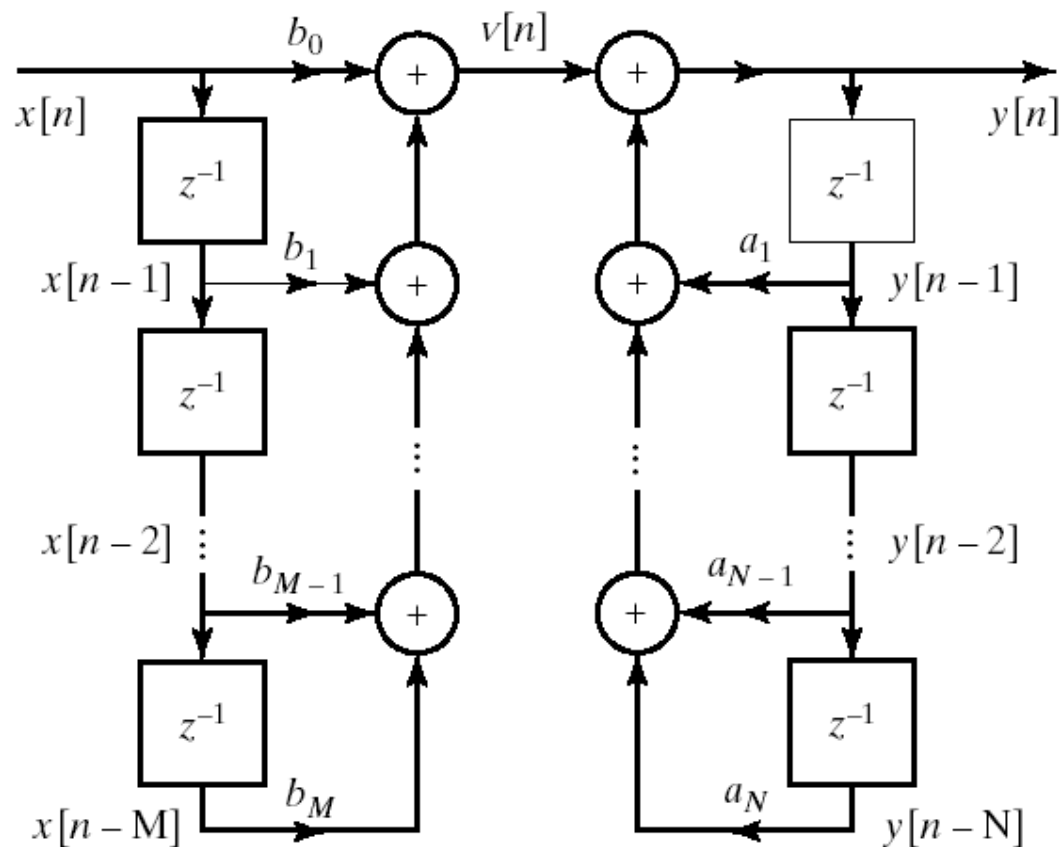
$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n]$$

Blok
Diagramı



IIR SİSTEMLER İÇİN AĞ YAPILARI

Doğrudan Gerçekleştirme :



IIR SİSTEMLER İÇİN AĞ YAPILARI

Transfer fonksiyonu :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

1. Doğrudan gerçekleştirme biçim I :

$$H(z) = H_2(z)H_1(z) = \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right) \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right)$$

$$V(z) = H_1(z)X(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) X(z)$$

$$Y(z) = H_2(z)V(z) = \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right) V(z)$$

$$v[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + v[n]$$

IIR SİSTEMLER İÇİN AĞ YAPILARI

Doğrudan biçim I gerçeeklemesinden doğrudan biçim II gerçeeklemesine dönüştürme adımları :

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right)$$

$$W(z) = H_2(z)X(z) = \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right) X(z)$$

$$w[n] = \sum_{k=1}^N a_k w[n-k] + x[n]$$

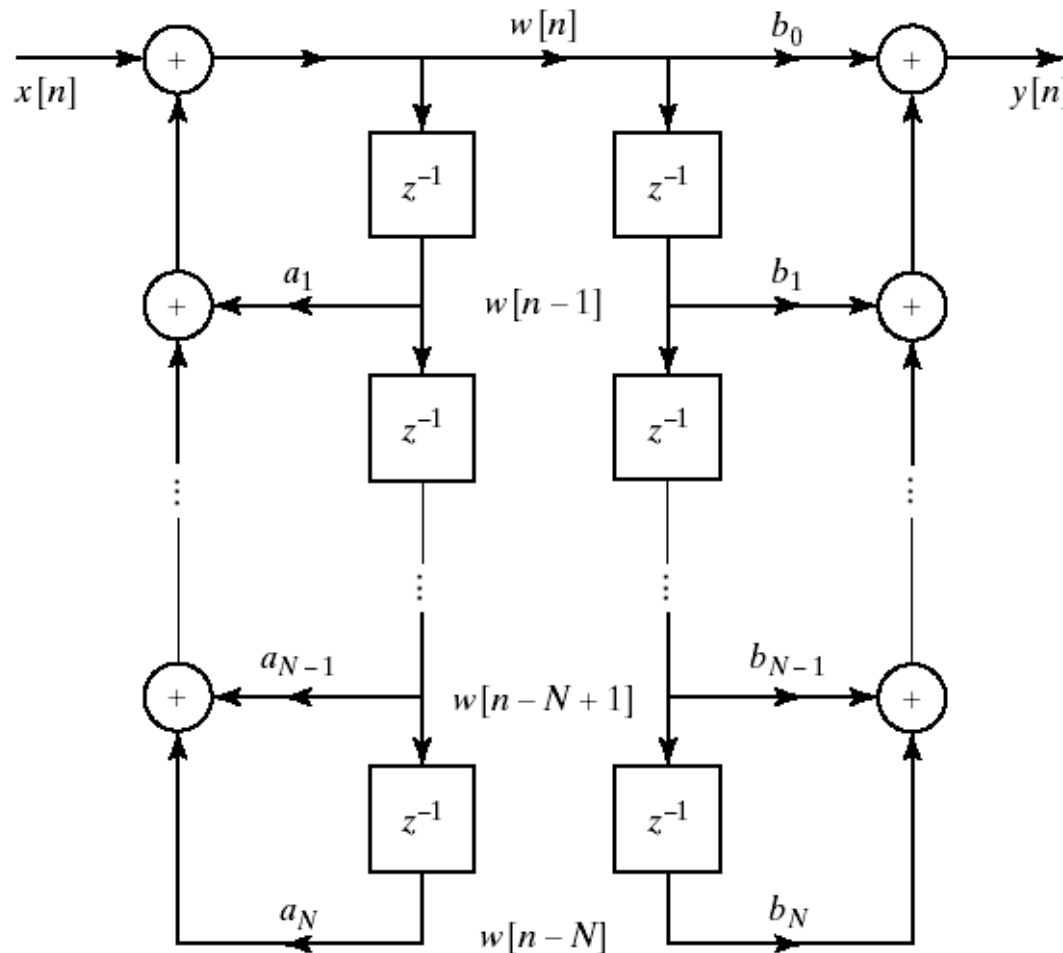
$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k w[n-k]$$

$$Y(z) = H_1(z)W(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) W(z)$$

IIR SİSTEMLER İÇİN AĞ YAPILARI

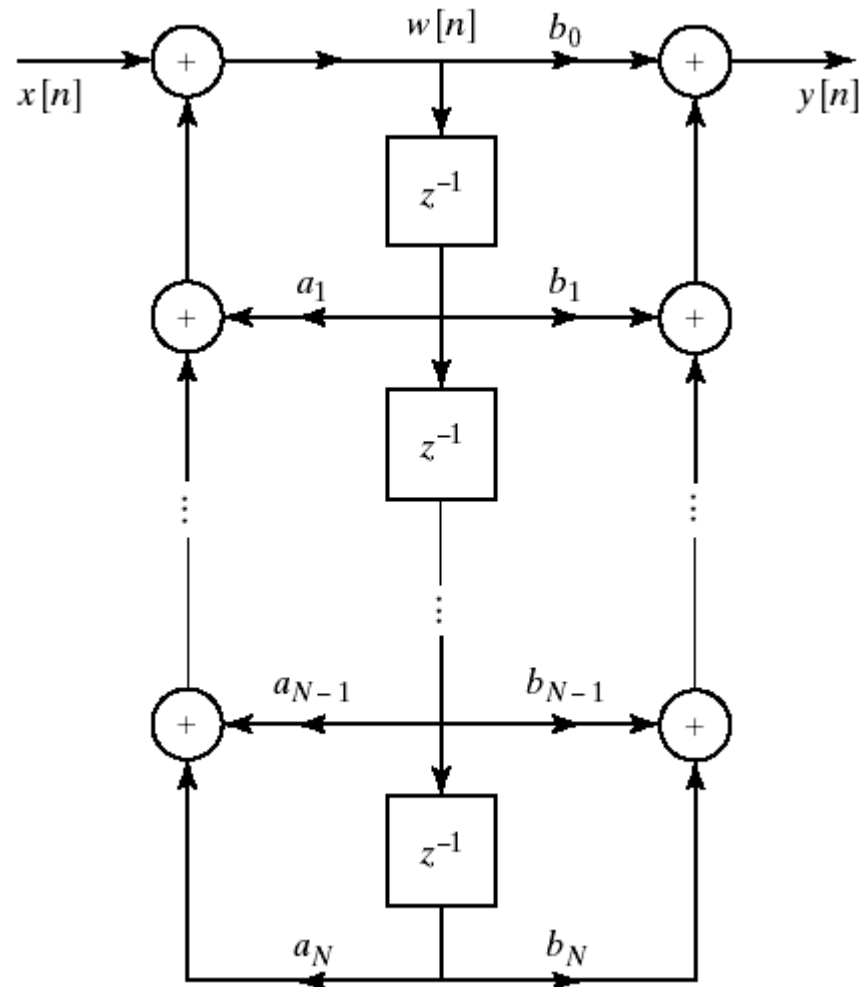
2. Doğrudan gerçekleştirme biçim II (Kanonik Form) :

Kaskat sistemin transfer fonksiyonları değişirse:



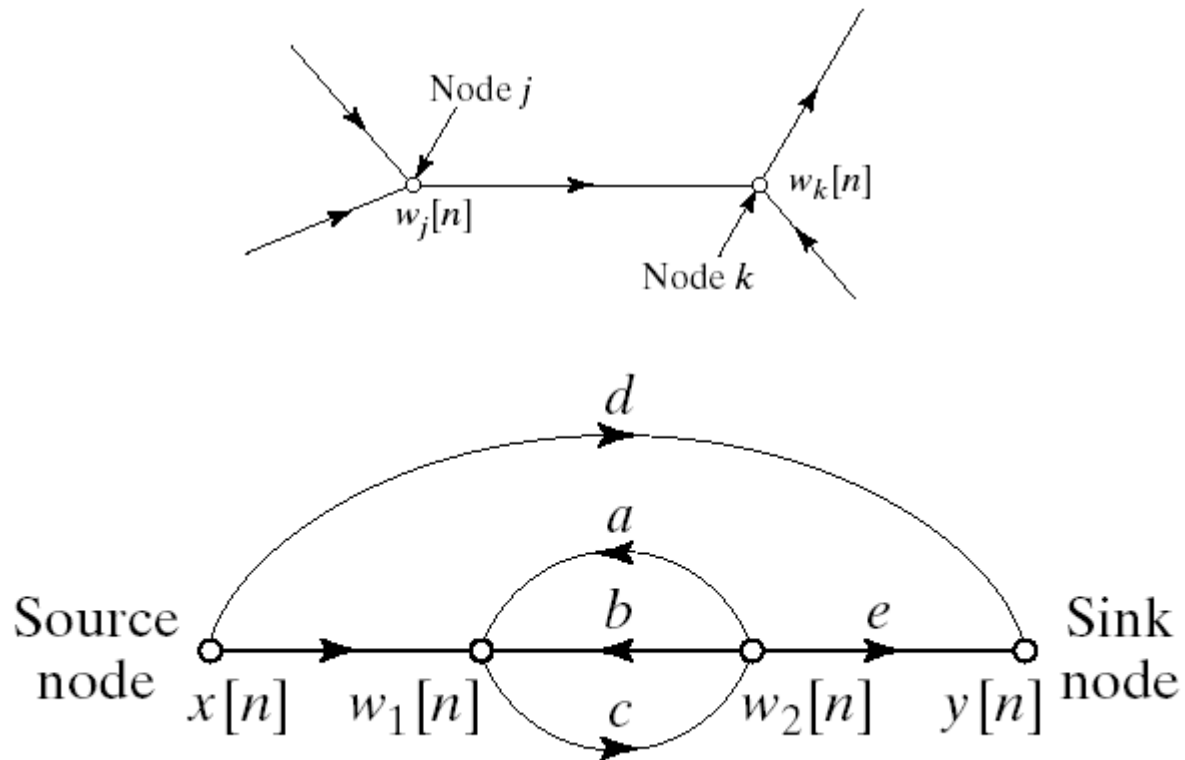
IIR SİSTEMLER İÇİN AĞ YAPILARI

Doğrudan gerçekleştirme biçim II :



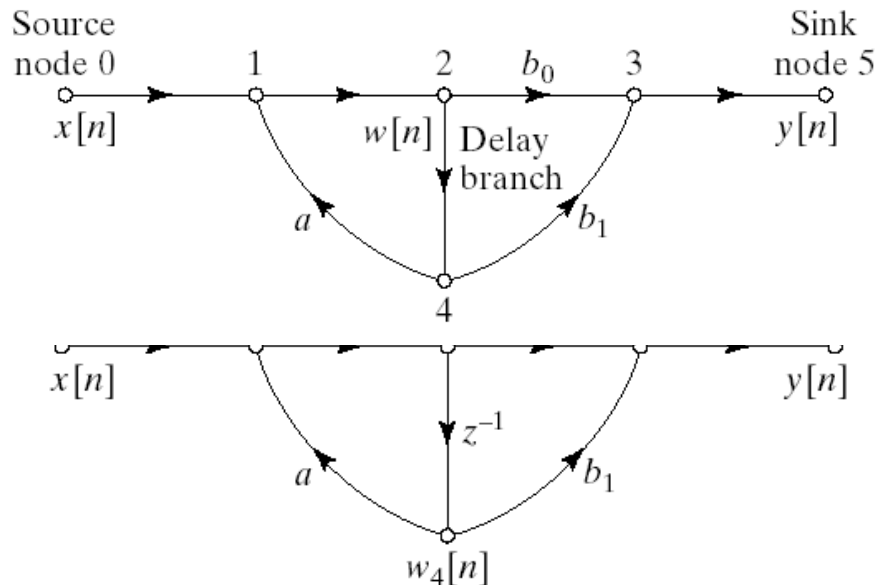
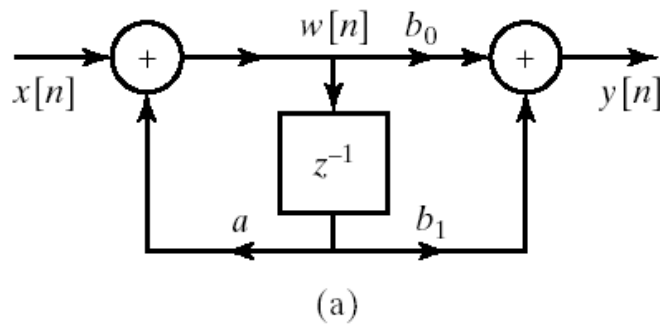
IIR SİSTEMLER İÇİN AĞ YAPILARI

Sinyal Akış şemaları :



IIR SİSTEMLER İÇİN AĞ YAPILARI

Doğrudan gerçekleştirme biçim II'nin sinyal akış şeması ile gösterimi



$$w_1[n] = aw_4[n] + x[n]$$

$$w_2[n] = w_1[n]$$

$$w_3[n] = b_0w_2[n] + b_1w_4[n]$$

$$w_4[n] = w_2[n - 1]$$

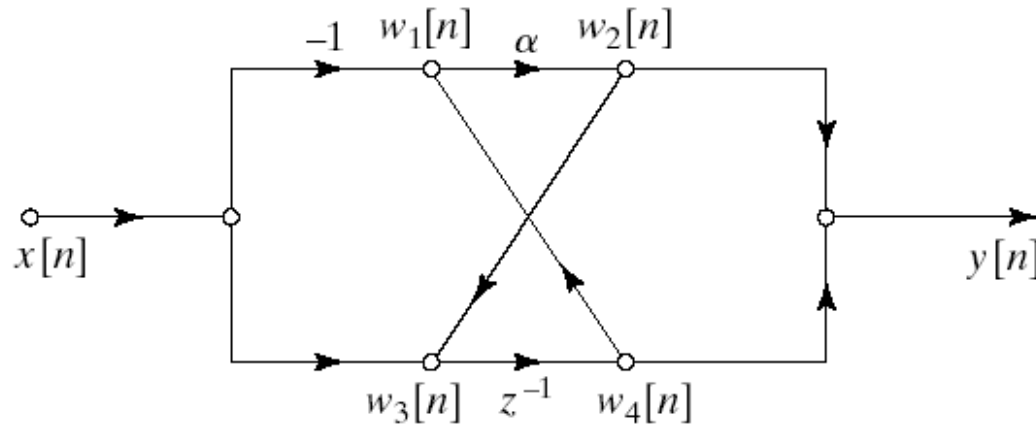
$$y[n] = w_3[n]$$

$$w_1[n] = aw_1[n - 1] + x[n]$$

$$y[n] = b_0w_1[n] + b_1w_1[n - 1]$$

IIR SİSTEMLER İÇİN AĞ YAPILARI

Örnek : sinyal akış şemasından birim dürtü tepkisinin elde edilmesi



$$w_1[n] = w_4[n] - x[n]$$

$$w_2[n] = \alpha w_1[n]$$

$$w_3[n] = w_2[n] + x[n]$$

$$w_4[n] = w_3[n - 1]$$

$$y[n] = w_2[n] + w_4[n]$$

$$W_1(z) = W_4(z) - X(z)$$

$$W_2(z) = \alpha W_1(z)$$

$$W_3(z) = W_2(z) + X(z)$$

$$W_4(z) = W_3(z)z^{-1}$$

$$Y(z) = W_2(z) + W_4(z)$$

$$W_2(z) = \frac{\alpha X(z)(z^{-1} - 1)}{1 - \alpha z^{-1}}$$

$$W_4(z) = \frac{X(z)z^{-1}(1 - \alpha)}{1 - \alpha z^{-1}}$$

$$Y(z) = W_2(z) + W_4(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$$

$$h[n] = \alpha^{n-1}u[n-1] - \alpha^{n+1}u[n]$$

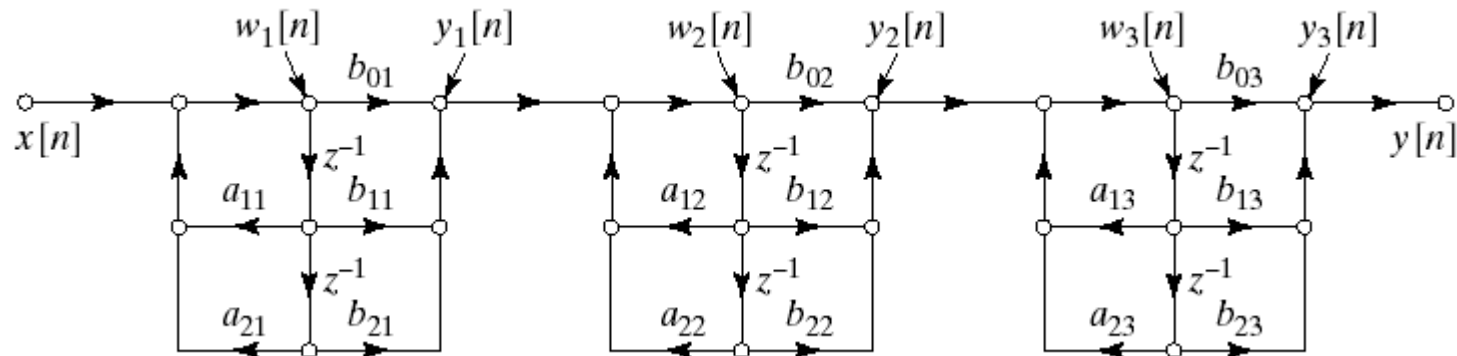
IIR SİSTEMLER İÇİN AĞ YAPILARI

3. Kaskat Biçim

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - f_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - g_k z^{-1}) (1 - g_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - d_k z^{-1}) (1 - d_k^* z^{-1})}$$

İkinci dereceden sistemler için pratiktir

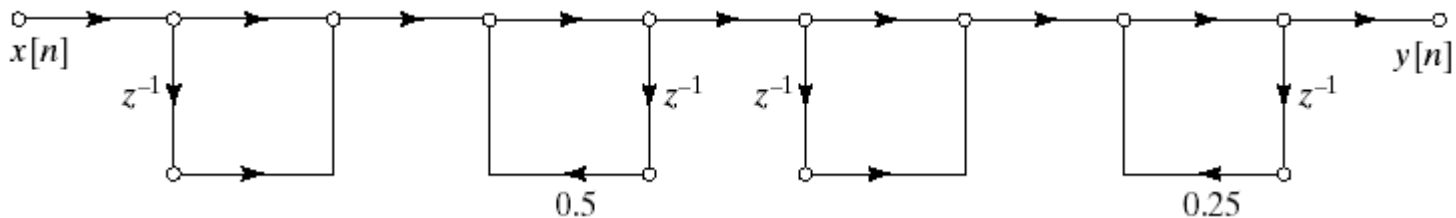
$$H(z) = \prod_{k=1}^{M_1} \frac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}$$



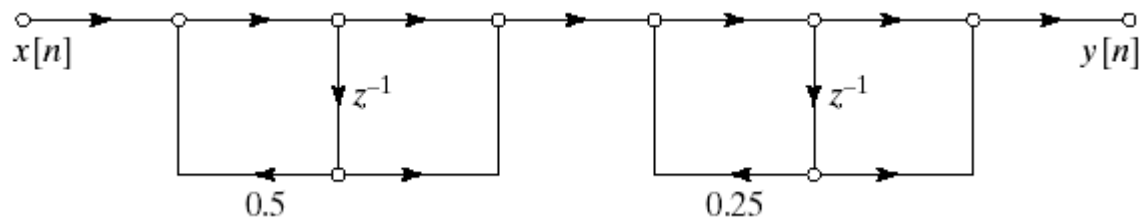
IIR SİSTEMLER İÇİN AĞ YAPILARI

Örnek :
$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}} = \frac{(1 + z^{-1})(1 + z^{-1})}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.25z^{-1})}$$
$$= \frac{(1 + z^{-1})(1 + z^{-1})}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.25z^{-1})}$$

Doğrudan biçim I formunda kaskat :



Doğrudan biçim II formunda kaskat



IIR SİSTEMLER İÇİN AĞ YAPILARI

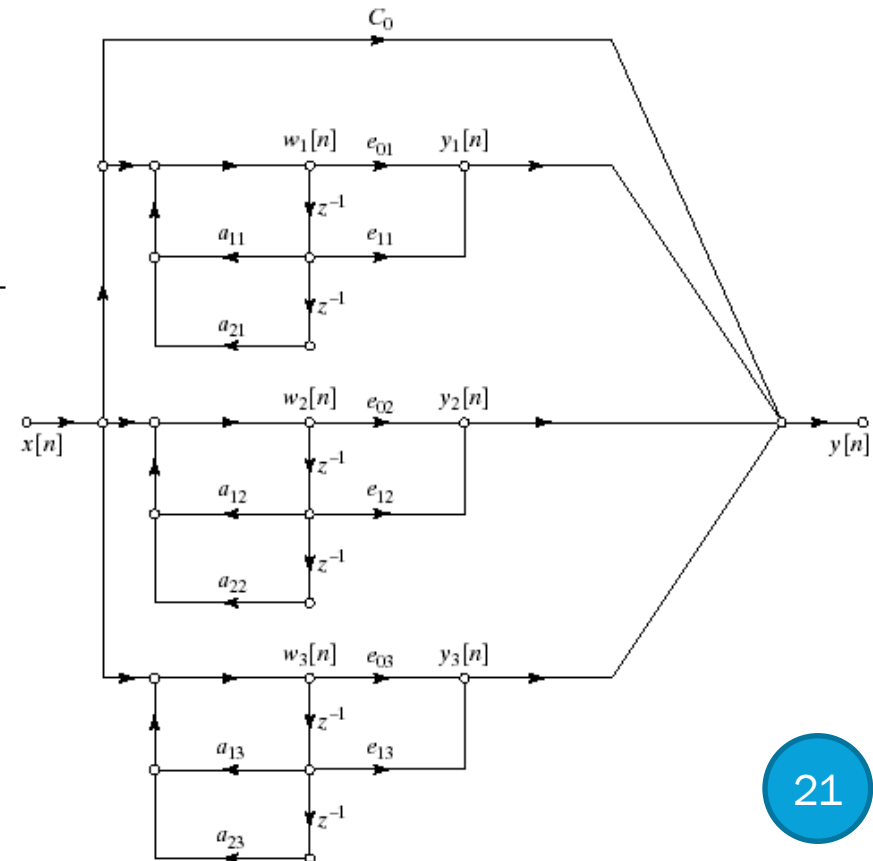
4. Paralel Biçim

Sistem kısmi kesirlere ayrılmış şekilde ifade edilir.

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_p} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_p} \frac{B_k (1 - e_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

Veya gerçel kutuplar ile ifade edilir.

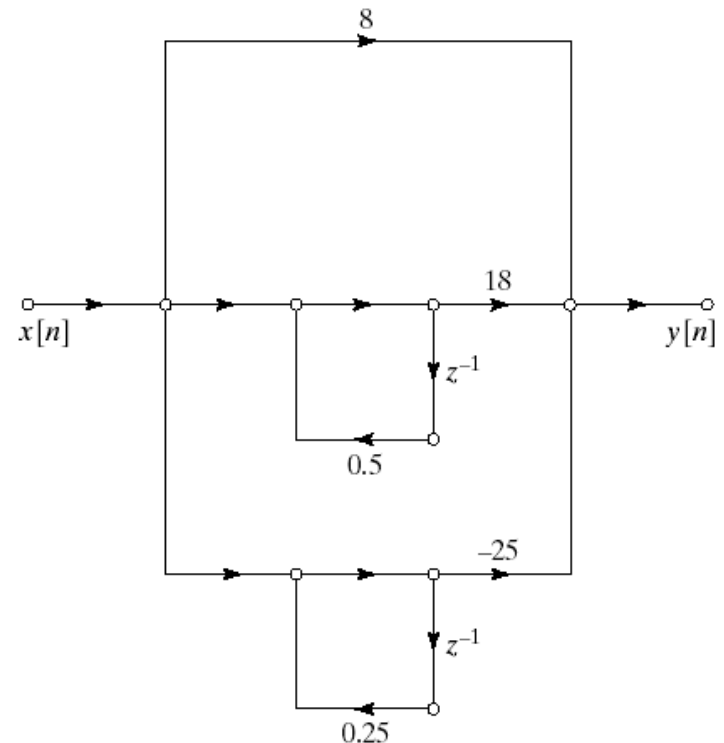
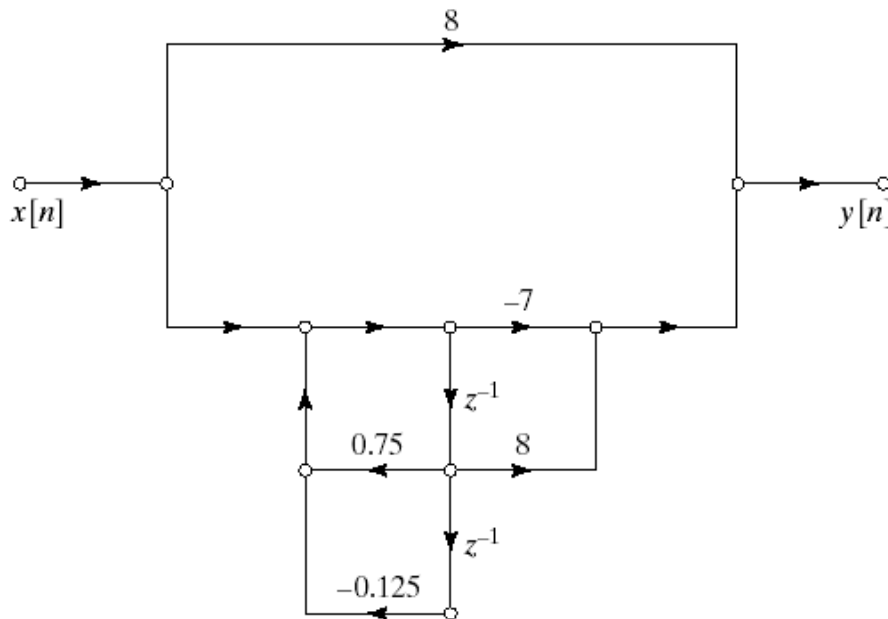
$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{e_{0k} + e_{1k} z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}$$



IIR SİSTEMLER İÇİN AĞ YAPILARI

Örnek : $H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}} = 8 + \frac{18}{(1 - 0.5z^{-1})} - \frac{25}{(1 - 0.25z^{-1})}$

$$H(z) = 8 + \frac{-7 + 8z^{-1}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}}$$



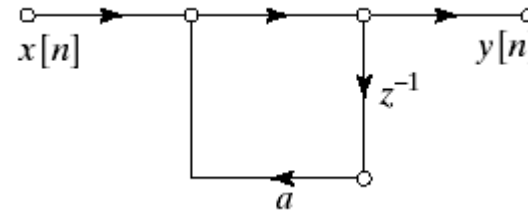
IIR SİSTEMLER İÇİN AĞ YAPILARI

5. Transpoze Biçimi :

Sinyal akış şemasının özelliği gereği transpozsesinin alınması giriş çıkış ilişkisini değiştirmez.

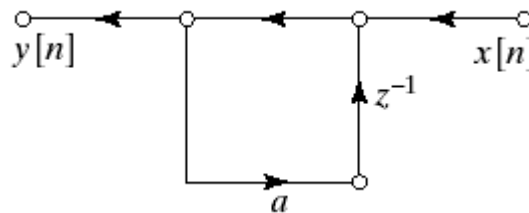
Örnek :

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

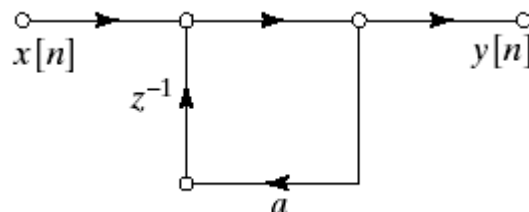


Transpoze

1. Tüm dalların yönünü değiştir.

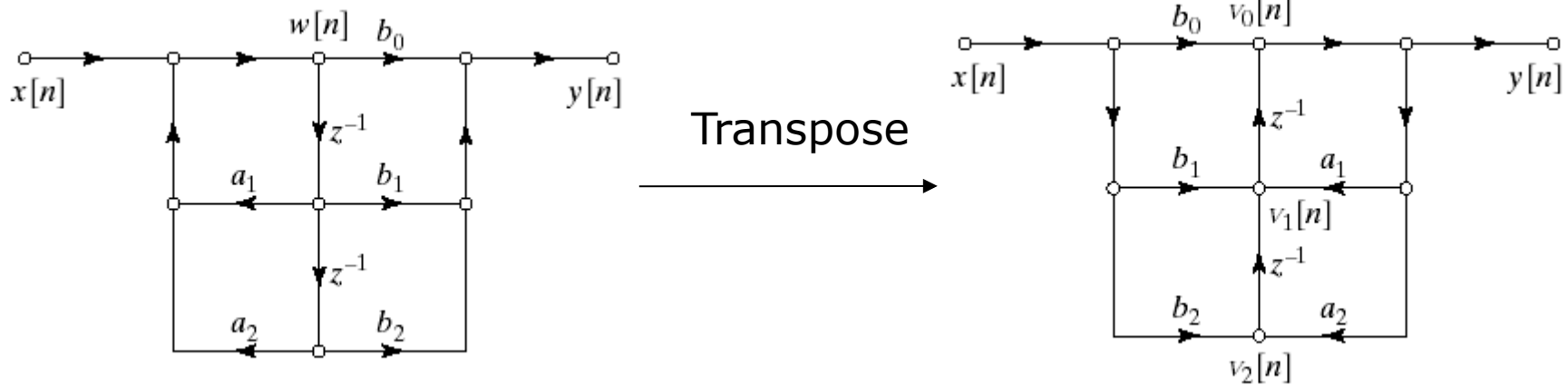


2. Giriş ile çıkışı değiştir. (Ters çevir)



IIR SİSTEMLER İÇİN AĞ YAPILARI

Örnek :

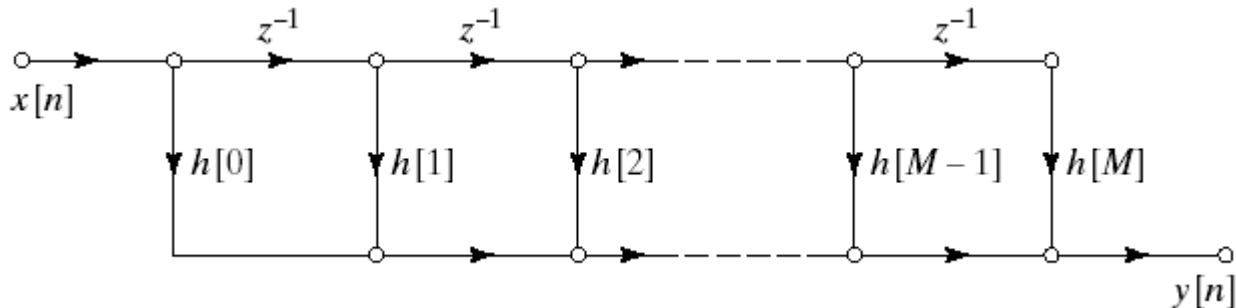


- İki sistemde aynı fark denklemine mi sahiptir?

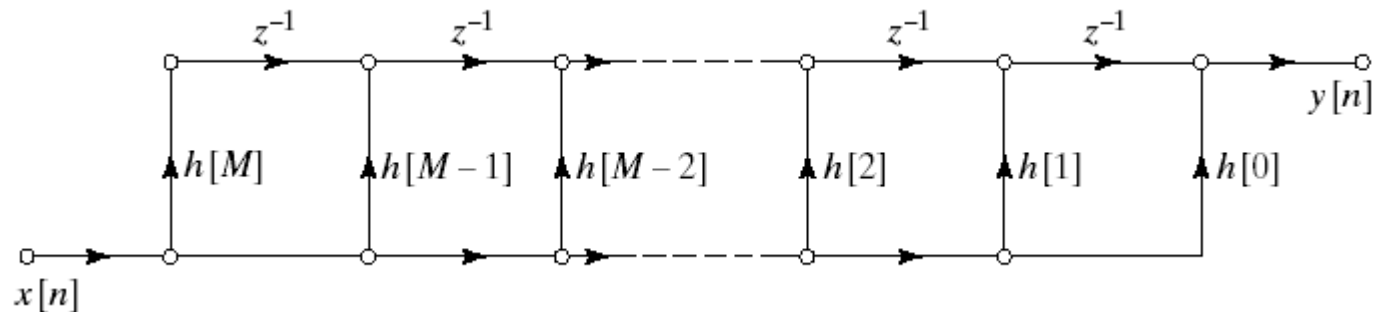
$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

FIR SİSTEMLER İÇİN AĞ YAPILARI

1. Doğrudan biçim I



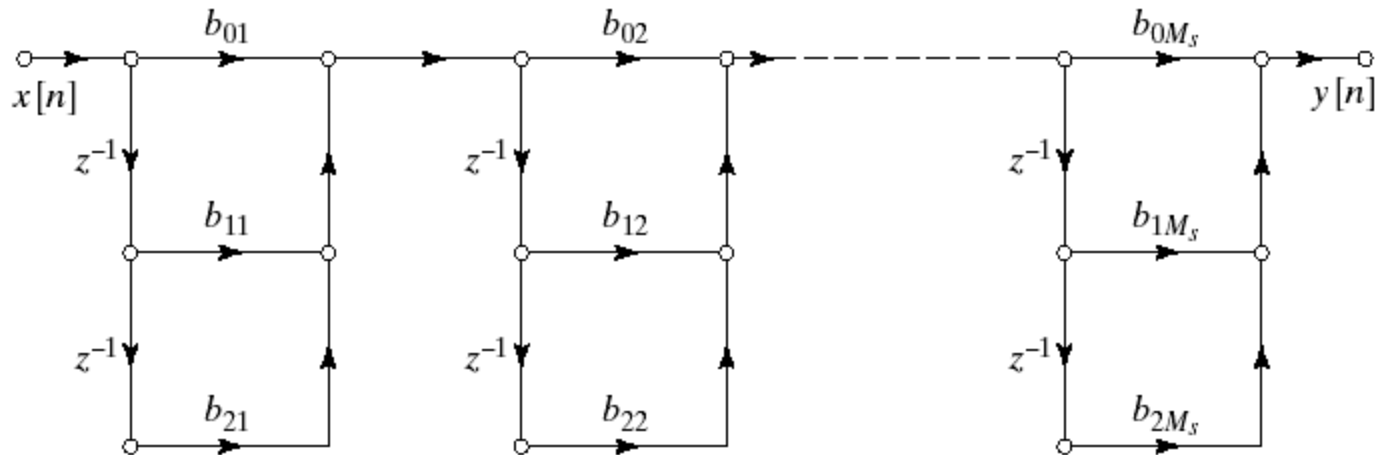
2. Doğrudan biçim II : Doğrudan biçim I'in transpozesi doğrudan biçim II'yi oluşturur.



FIR SİSTEMLER İÇİN AĞ YAPILARI

3. Kaskat Biçim

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[n]z^{-n} = \prod_{k=1}^{M_s} (b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2})$$

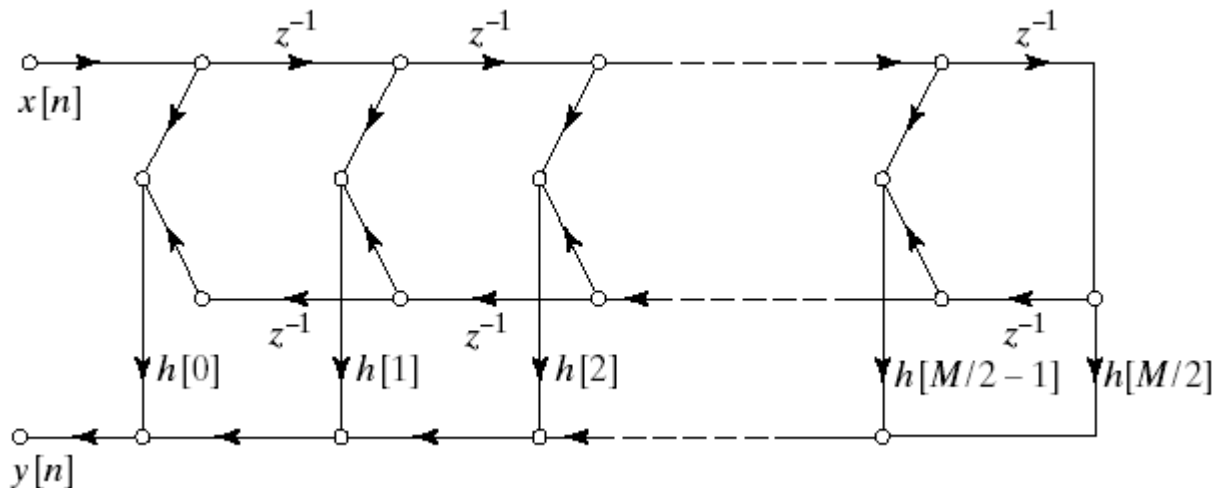


FIR SİSTEMLER İÇİN AĞ YAPILARI

4. Kafes Biçimi

Doğrusal faz formunda olan sonlu cevap sistemleri için uygulanan bir yapıdır. Doğrusal faz formunda olması için $h[n]$ dizisi simetrik olmalıdır.

M çift ise



M tek ise

