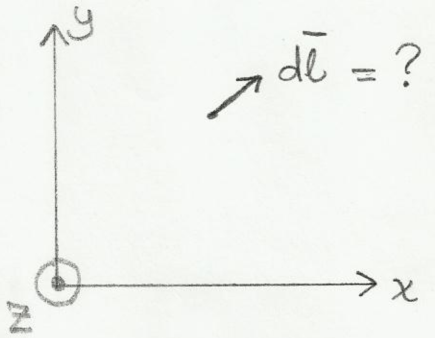
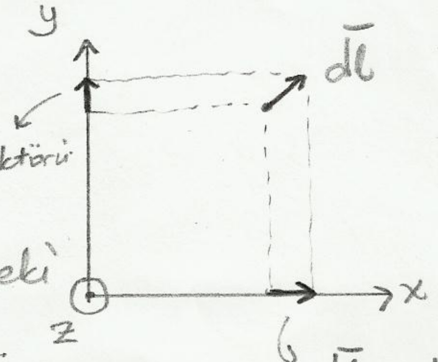
METRİK KATSAYILAR

Şu ana değin, integrallerdeki $d\bar{l}$, $d\bar{s}$ ve dv terimlerini koordinat sistemlerinden bağımsız olarak düşündük. Bu terimleri Kartezyen, Silindirik ve Küresel koordinatlarda nasıl yazabiliriz?

Kartezyen Koordinatlarda:



* Şekildeki gibi xy düzlemi üzerindeki $d\bar{l}$ (diferansiyel uzunluk) vektörü nasıl ifade edilebilir?

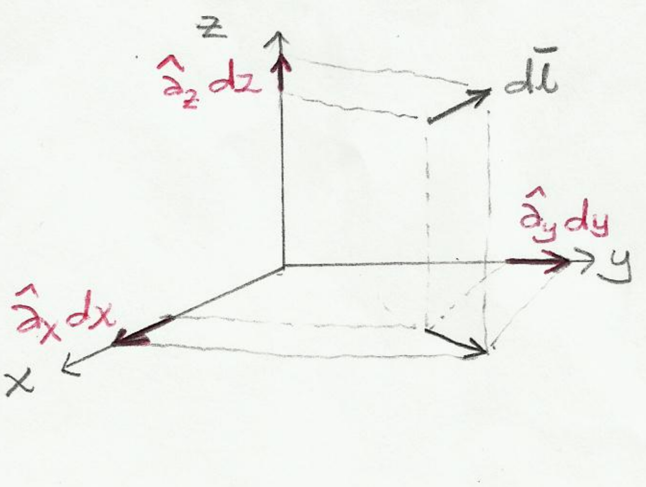


$d\bar{l}$ vektörünün y yönündeki bileşeni: $\hat{a}_y \underbrace{dy}_{\text{y yönünde diferansiyel uzunluk}}$

$d\bar{l}$ vektörünün x yönündeki bileşeni : $\hat{a}_x \underbrace{dx}_{\text{x yönünde diferansiyel uzunluk}}$

$$\Rightarrow d\bar{l} = \hat{a}_x\, dx + \hat{a}_y\, dy$$

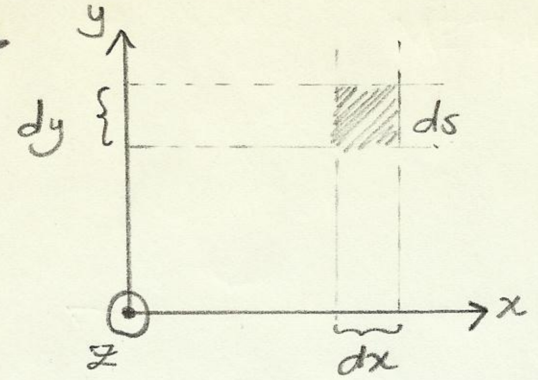
** Peki, şekildeki gibi rastgele yönlenmiş $d\bar{l}$ vektörü nasıl ifade edilebilir?



$$\Rightarrow d\bar{l} = \underbrace{\hat{a}_x\, dx}_{x} + \underbrace{\hat{a}_y\, dy}_{y} + \underbrace{\hat{a}_z\, dz}_{z}$$

$d\bar{l}$ vektörünün x yönündeki bileşeni, y yönündeki bileşeni, z yönündeki bileşeni

***



Şekildeki gibi, xy düzlemi üzerindeki bir diferansiyel yüzeye (ds) ilişkin $d\bar{s}$ vektörü nasıl ifade edilir?

$d\bar{s} = \hat{a}_n \, ds \longrightarrow$ yüzey alanı : $dx\,dy$

$\downarrow$

Söz konusu yüzeye dik (normal) yöndeki birim vektör : $\hat{a}_z$

$\Rightarrow d\bar{s} = \hat{a}_z \, dx\, dy$

- Benzer mantıkla, yz düzlemi üzerine çizilen bir diferansiyel yüzey için

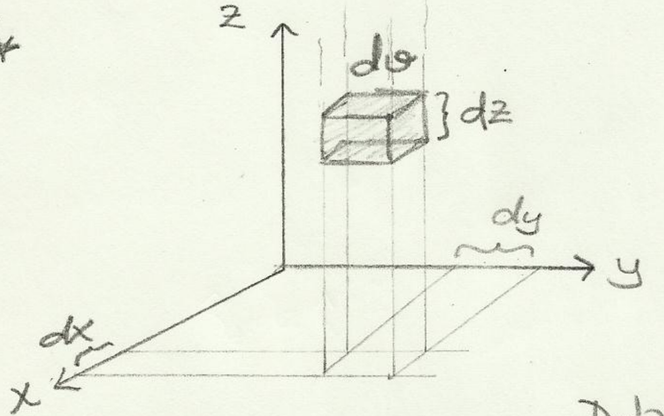
$$d\bar{s} = \hat{a}_x \, dy\, dz$$

- xz düzlemi üzerine çizilen bir diferansiyel yüzey için

$$d\bar{s} = \hat{a}_y \, dx\, dz$$

olarak ifade edilebilir.

****

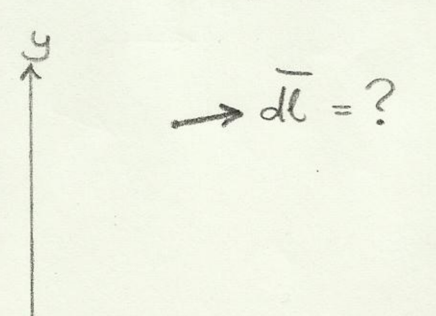


Şekildeki gibi diferansiyel bir hacim (dv) nasıl ifade edilir?

dv, kenarları dx, dy ve dz olan bir dikdörtgenler prizmasıdır. Dolayısıyla $dv = dx\, dy\, dz$

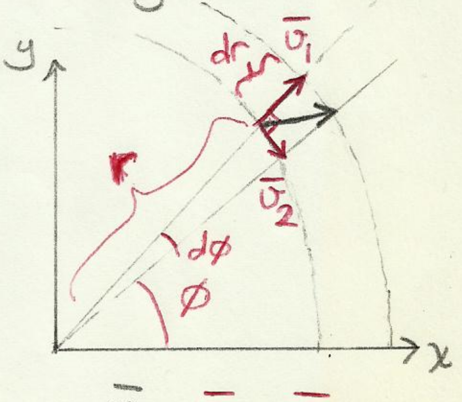
Silindirik Koordinatlarda:

* Şekildeki gibi xy düzlemi üzerindeki bir $d\bar{l}$ vektörü nasıl ifade edilebilir?



$\longrightarrow d\bar{l} = ?$

$\Rightarrow$



$d\bar{l} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$

Şekle bakınca:

$\bar{v}_1$: $d\bar{l}$'nin r yönündeki bileşeni ← $\hat{a}_r$ yönünde

$\bar{v}_2$: $d\bar{l}$'nin ϕ yönündeki bileşeni ← $-\hat{a}_\phi$ yönünde

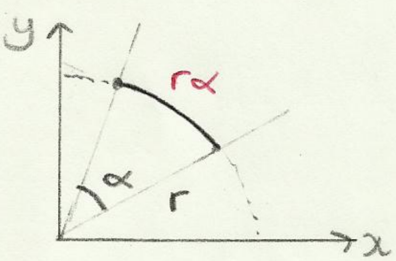
$$\Rightarrow \bar{v}_1 = \hat{a}_r \underbrace{dr}_{\bar{v}_1\text{'in başlangıç ve bitiş noktaları arasındaki mesafe}}$$

ve $$\bar{v}_2 = -\hat{a}_\phi . \underbrace{r\,d\phi}_{v_2\text{'nin başlangıç ve bitiş noktaları arasındaki mesafe}}$$

⇓

Neden $r\,d\phi$?

r yarıçapında, α (radyan) açısı tarafından taranan yayın uzunluğu $r\alpha$'dır!...

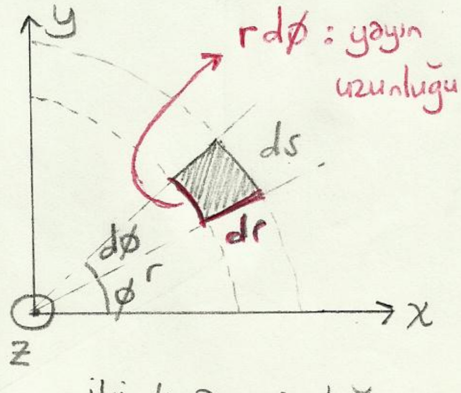


Not: α açısı 2π (radyan) (yani $360°$) ise, yay bir çember olur.

Yayın uzunluğu : $r\alpha = r\,2\pi = \underbrace{2\pi r}_{\text{r yarıçaplı çemberin çevresi !...}}$

Dolayısıyla, r yarıçaplı ve $d\phi$ açısı tarafından taranan yayın uzunluğu $r\,d\phi$'dir. $\Rightarrow$ $d\bar{l} = \hat{a}_r\,dr - \hat{a}_\phi\,r\,d\phi$ olur!...

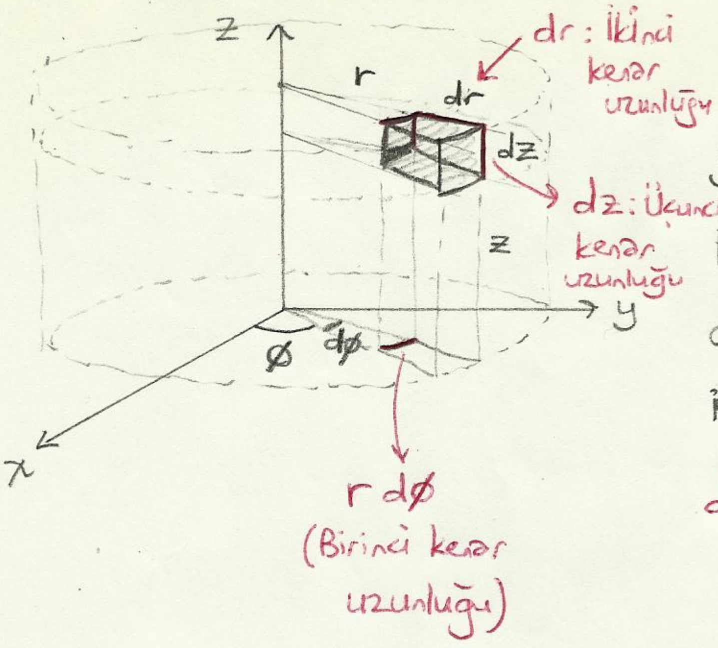
★★ Şekildeki gibi xy düzlemi üzerindeki bir diferansiyel yüzeye (ds) ilişkin $d\bar{s}$ vektörü nasıl ifade edilir?



ds yüzeyi, çok çok küçük olduğu için bir dikdörtgen gibi düşünülebilir. Bu durumda yüzey alanı, iki kenar uzunluğunun çarpımına eşittir.

$$\Rightarrow ds = \underbrace{r\,d\phi}_{\text{Kenar uzunluğu}}\ \underbrace{dr}_{\text{Kenar uzunluğu}} \qquad \Rightarrow d\bar{s} = \underbrace{\hat{a}_n}_{\text{Yüzeye dik birim vektör}}\, r\,dr\,d\phi = \hat{a}_z\, r\,dr\,d\phi$$

*** Peki, şekildeki gibi diferansiyel bir hacim nasıl ifade edilebilir?



dv hacmi, çok küçük olduğu için yaklaşık olarak bir dikdörtgenler prizması olarak düşünülebilir. Dolayısıyla, dv hacmi, üç kenar uzunluğunun çarpımı ile bulunabilir

$$dv = r\,d\phi\,dr\,dz = r\,dr\,d\phi\,dz$$

Sonuç Olarak: Silindirik koordinatlarda $d\bar{l}$, $d\bar{s}$ ve dv terimlerini yazarken $d\phi$'li terimin başına her zaman "r" terimi gelmektedir.

r terimi, silindirik koordinat sistemi için "metrik katsayıdır.

* Metrik katsayının açıklaması :

Kartezyen Koordinatlarda (x, y, z) değişkenlerinin hepsi uzunluk değişkeni olup birimleri "metre" cinsindendir.

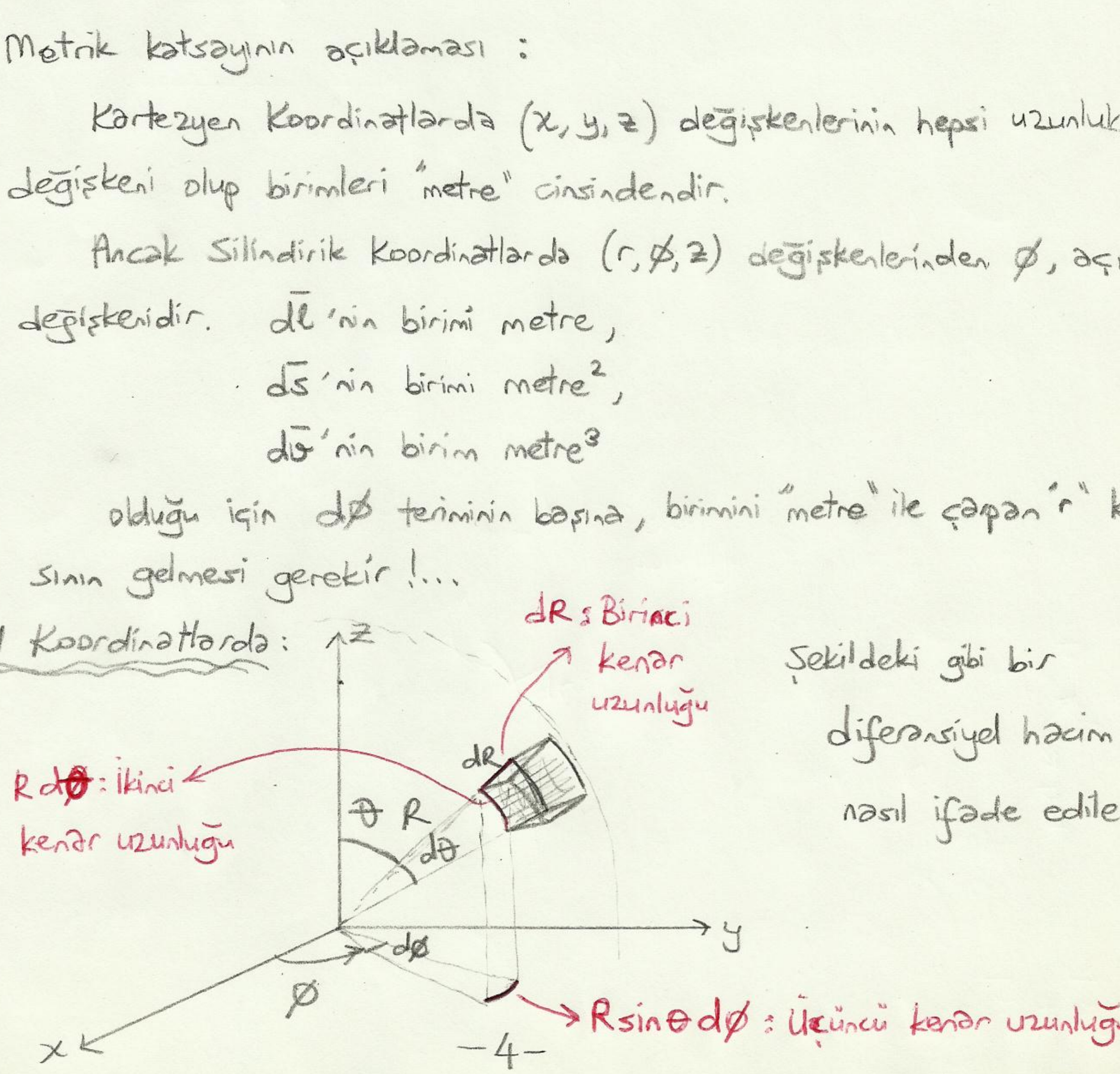
Ancak Silindirik Koordinatlarda (r, ϕ, z) değişkenlerinden ϕ, açı değişkenidir. $d\bar{l}$'nin birimi metre,

$d\bar{s}$'nin birimi metre^2,

$d\bar{v}$'nin birim metre^3

olduğu için $d\phi$ teriminin başına, birimini "metre" ile çarpan "r" katsayısının gelmesi gerekir!...

Küresel Koordinatlarda:



Şekildeki gibi bir diferansiyel hacim nasıl ifade edilebilir?

dv çok küçük olduğu için yaklaşık olarak bir dikdörtgenler prizması gibi düşünülebilir. Bu durumda hacim, üç kenarın uzunluğunun çarpımı şeklinde yazılabilir.

$$dv = \underbrace{dR}_{1.\ Kenar}\ \underbrace{R\,d\theta}_{2.\ Kenar}\ \underbrace{R\sin\theta\,d\phi}_{3.\ Kenar} = R^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

Sonuç olarak: Küresel koordinatlarda $d\bar{l}$, $d\bar{s}$ ve dv terimlerini yazarken:

- $d\theta$'lı terimin başına her zaman "R",
- $d\phi$'li terimin başına ise her zaman "$R\sin\theta$"

terimleri gelmektedir. Bu terimler de küresel koordinat sistemi için "metrik katsayılar"dır.

θ ve ϕ, açı terimleri olduğundan $d\phi$ ve $d\theta$ terimlerinin birimlerini "metre" yapan katsayıların gelmesi, mantıklıdır!...

Özetle:

		Kartezyen Koordinatlar (x,y,z)	Silindirik Koordinatlar (r,ϕ,z)	Küresel Koordinatlar (R,θ,ϕ)
Baz Vektörler	$\hat{a}_{u_1}$	$\hat{a}_x$	$\hat{a}_r$	$\hat{a}_R$
	$\hat{a}_{u_2}$	$\hat{a}_y$	$\hat{a}_\phi$	$\hat{a}_\theta$
	$\hat{a}_{u_3}$	$\hat{a}_z$	$\hat{a}_z$	$\hat{a}_\phi$
Metrik Katsayılar	h_1	1	1	1
	h_2	1	r	R
	h_3	1	1	$R\sin\theta$
Diferansiyel Hacim	dv	$dx\,dy\,dz$	$r\,dr\,d\phi\,dz$	$R^2\sin\theta\,dR\,d\theta\,d\phi$

$\bar{\nabla}$ operatörünün diğer koordinat sistemlerinde ifade edilmesi:

Hatırlayacak olursak $\bar{\nabla}$ operatörü kartezyen koordinat sisteminde $\bar{\nabla} = \left(\hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)$ olarak ifade edilmekteydi.

$\bar{\nabla}$'nın birimi metre^{-1} 'dir. Kartezyen koordinatlarda x, y, z uzunluk değişkenleri olduğundan, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ ve $\frac{\partial}{\partial z}$ terimlerinin birimleri metre^{-1} olmaktadır.

Ancak Silindirik ve Küresel koordinatlarda

$\left(\frac{\partial}{\partial \phi} \text{ terimi}\right)$ $\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \text{ ve } \frac{\partial}{\partial \phi} \text{ terimleri}\right)$ 'nin birimleri metre^{-1} olmayacağından bu terimlerin de başlarına uygun bir şekilde metrik katsayıların gelmesi gerekir!...

Genel olarak:

$$* \ \bar{\nabla} = \left(\hat{a}_{u_1} \frac{\partial}{h_1 \partial u_1} + \hat{a}_{u_2} \frac{\partial}{h_2 \partial u_2} + \hat{a}_{u_3} \frac{\partial}{h_3 \partial u_3}\right)$$

$$** \ \bar{\nabla} . \bar{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_{u_1}) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 h_3 A_{u_2}) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 A_{u_3})\right]$$

↳ Silindirik Koordinatlarda: $\bar{\nabla} . \bar{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r A_r) + \frac{\partial}{\partial \phi}(A_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(r A_z)\right]$

↳ Küresel Koordinatlarda: $\bar{\nabla} . \bar{A} = \frac{1}{R^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial R}(R^2 \sin\theta A_R) + \frac{\partial}{\partial \theta}(R \sin\theta A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi}(R A_\phi)\right]$

$$*** \ \bar{\nabla} \times \bar{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} \hat{a}_{u_1} h_1 & \hat{a}_{u_2} h_2 & \hat{a}_{u_3} h_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_{u_1} & h_2 A_{u_2} & h_3 A_{u_3} \end{vmatrix}$$

↳ Silindirik Koordinatlarda

$$\bar{\nabla} \times \bar{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\phi r & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & r A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

ve Küresel Koordinatlarda

$$\bar{\nabla} \times \bar{A} = \frac{1}{R^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{a}_R & \hat{a}_\theta R & \hat{a}_\phi R\sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_R & R A_\theta & R\sin\theta A_\phi \end{vmatrix}$$