Elektrik Potansiyel

Daha önce, buklesi 0 olan bir vektörel alanın, aslında bir skaler alanın gradyantı şeklinde ifade edilebileceğini görmüştük. (Bkz: İki "0" Eşitliğinden Birincisi)

Elektrostatik alan konservatif olduğu için (yani buklesi 0 olduğu için), elektrostatik alanı, bir skaler fonksiyonun gradyantı cinsinden ifade edebiliriz.

$f(x,y,z)$ skaler alan $\Rightarrow$ $\qquad \bar{\nabla}\times\left[\bar{\nabla}f(x,y,z)\right]=0$

* $\bar{\nabla}\times\bar{E}(x,y,z)=0$ olduğuna göre $\bar{E}=\bar{\nabla}f(x,y,z)$ şeklinde yazılabilir.

* $\phi(x,y,z)$ veya $V(x,y,z)$ olarak göstereceğimiz bir fonksiyon (skaler alan tanımlayalım: $\quad \phi(x,y,z)=V(x,y,z)=-f(x,y,z)$

* $\bar{E}(x,y,z)=-\bar{\nabla}\phi(x,y,z)=-\bar{\nabla}V(x,y,z)$

elektrik potansiyel fonksiyonu

Devre Analizinde "Voltaj" olarak isimlendirdiğimiz fonksiyon

$$\underbrace{\bar{E}(x,y,z)}_{\text{Birimi}:\,(V/m)}=-\underbrace{\bar{\nabla}}_{\text{Birimi}:\,m^{-1}}\underbrace{V(x,y,z)}_{\text{Birimi}:\,\text{Volt}}$$

"−" işaretinin anlamı: Skaler bir fonksiyonun gradyantı, fonksiyonun artışı yönündedir.

Dolayısıyla, elektrik alanın yönü, elektrik potansiyelin azaldığı yöndedir.

Bir başka deyişle, elektrik alanın kaynağı olan yüke doğru ilerledikçe elektrik potansiyel artar!...

Eşitlikte, her iki tarafın da P_1-P_2 noktaları arasında kontur integralini alırsak

$$\int_{P_1}^{P_2}\bar{E}(x,y,z)\cdot d\bar{l}=-\int_{P_1}^{P_2}\left[\bar{\nabla}V(x,y,z)\right]\cdot d\bar{l}=-\Big(\underbrace{V(x,y,z)\Big|_{P_2}}_{\substack{V(x,y,z)\ \text{fonksiyonunun}\\ P_2\text{'de aldığı değer}}}-\underbrace{V(x,y,z)\Big|_{P_1}}_{\substack{V(x,y,z)\ \text{fonksiyonunun}\\ P_1\text{'de aldığı değer}}}\Big)$$

$$\Rightarrow V_{P_2}-V_{P_1}=-\int_{P_1}^{P_2}\bar{E}\cdot d\bar{l}\quad (V)$$

Dolayısıyla, elektrik potansiyel fonksiyonu şu şekilde de tanımlanabilir:

$$\frac{W}{q} = -\underbrace{\int_{P_1}^{P_2} \bar{E} \cdot d\bar{l}}\ (J/C) \text{ veya } (V)$$

"P_2 ve P_1 noktaları arasındaki potansiyel fark" : "Birim yükü, P_1 noktasından P_2 noktasına götürmek için" elektrik alana karşı yapılması gereken iş

Önemli Not: Elektrik potansiyel kavramı, aslında "göreceli" bir kavramdır. Yani, iki nokta arasındaki potansiyel farktan söz edilebilir. (Devre analizi derslerinde ve laboratuarlarında hep "devredeki bir nokta ile toprak arasındaki potansiyel farkı" ölçeriz / hesaplarız) Kitabi olarak, aslında tek bir noktanın elektrik potansiyelinden söz edilemez. Eğer ağız alışkanlığı ile tek bir noktanın potansiyelinden söz ediyorsak, aslında burada kastettiğimiz şey, "o nokta ile sonsuz arasındaki potansiyel farktır!...

⇓

Yani, birim yükü sonsuzdan söz konusu noktaya getirmek için yapılan iş!...

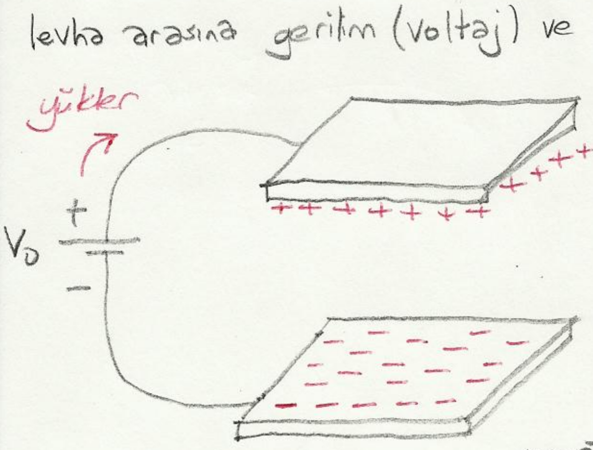
⇓

Noktamıza P_1 dersek : $V_{P_1} = V_{P_1} - V_\infty = -\int_{\infty}^{P_1} \bar{E} \cdot d\bar{l}$ (V/m)

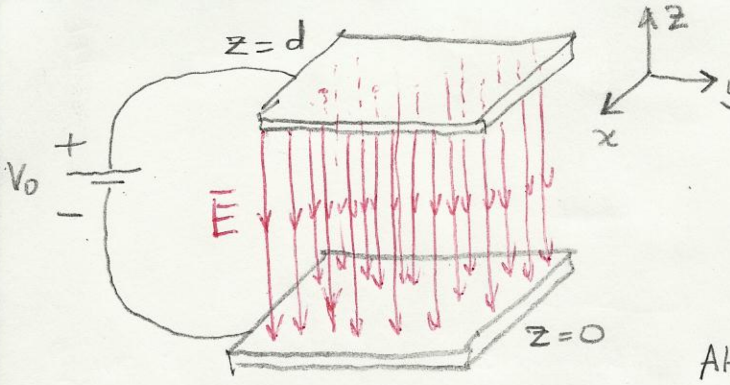
(Not: Devre analizi dersinde de devredeki bir noktanın geriliminden söz ediyorsak; aslında kastettiğimiz şey, o nokta ile toprak arasındaki gerilim farkıdır)

Örnek: Paralel Levha Kapasitör (Kondansatör)

Lise Fizik derslerinden aşina olduğumuz "paralel levha kapasitör", iki tane paralel levha arasına gerilim (voltaj) ve elektrik potansiyel farkı uygulanması ile kurulur.



Levhalara gerilim farkı uygulanınca, gerilimi alçak olan levhadan pozitif yükler koparılarak diğer levhaya gönderilir. Yüklerin korunumu prensibi uyarınca, diğer levhada da eşit miktarda negatif yük açığa çıkar. Üstteki levhada pozitif, alttaki levhada da negatif yükler olacağından; iki levha arasında kalan bölgede bir elektrik alan oluşur. Bu elektrik alan, pozitif yüklü levhanın yüzeyinden dik çıkarak, en kısa yoldan negatif yüklü levhaya dik girecek şekilde oluşacaktır.



Koordinat sistemimizi, şekildeki tanımlarsak; elektrik alan, iki levha arasında kalan bölgede şekilde de görüldüğü gibi $-\hat{a}_z$ yönünde olacaktır.

Alttaki levha $z=0$; üstteki levha da $z=d$ düzleminde bulunuyor olsun. Elektrik alanın birimi, Volt/metre'dir. ⇒ "Yani birim mesafe başına voltaj değişimi". $z=d$'deki levha ile $z=0$'daki levhanın arasında, V_0 kadar gerilim farkı olduğuna göre, iki levha arasında kalan bölgede elektrik alanın şiddeti V_0/d olacaktır. ⇒ Yani iki levha arasında $\bar{E}(x,y,z) = -\hat{a}_z \dfrac{V_0}{d}$ (V/m)

Bizlere, lise fizik derslerinde ezberletilen V/d formülü buradan geliyor.

Öte yandan, iki levha arasındaki bölgede elektrik potansiyel fonksiyonunu ele alalım. Herhangi iki nokta arasındaki elektrik potansiyel, birim yükü ilk noktadan ikinci noktaya götürmek için yapılması gereken iştir.

Örneğin birim yükü $z=0$ düzleminde bulunan (ve levhalar arasındaki bölgede bulunan) bir noktadan, $z=d$ düzleminde bulunan bir noktaya götürmek için V_0 kadar iş yapmamız gerekir. (Çünkü iki levha arasındaki gerilim farkı V_0)

Benzer şekilde, yükü $z=0$'dan $z=d/2$'deki bir noktaya götürmek için $V_0/2$ kadar iş yapmamız gerekir. (Çünkü sabit elektrik alana karşı, yarı mesafe ilerledik.)

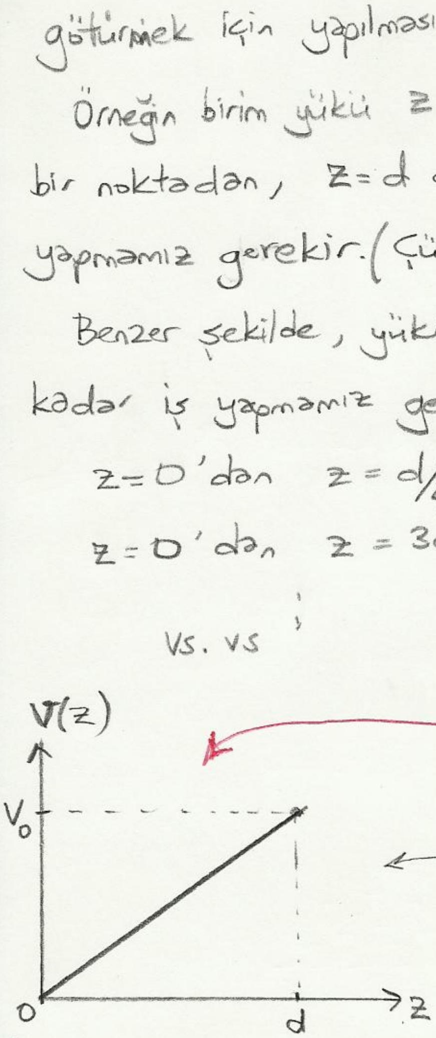
$z=0$'dan $z=d/4$'e ⇒ $V_0/4$

$z=0$'dan $z=3d/4$'e ⇒ $3V_0/4$

⋮

vs. vs

Bir başka deyişle, potansiyel fonksiyonunun z'ye göre grafiğini çizersek lineer bir fonksiyon elde ederiz.



Bu fonksiyonu formülize edelim $V(z) = \underbrace{\dfrac{V_0}{d}}_{\text{Doğrunun eğimi}} z$

z'ye göre lineer değişim

(V, sadece z'ye bağımlı; x ve y'ye bağımlılığı yok!...)

$$\bar{\nabla} V(z) = \left(\hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{V_0}{d} z\right)$$

$$= \hat{a}_z \frac{V_0}{d} \; (V) \text{ bulunur!...}$$

Daha önce de $\overline{E}(x,y,z) = -\hat{a}_z \frac{V_0}{d}$ (V/m) bulmuştuk. $\Rightarrow$ $\overline{E} = -\overline{\nabla} V$ ✓

* Yukarıdaki levhaya doğru (yani elektrik alanın üzerine doğru) gittikçe, elektrik potansiyel artmakta !... (yani +z yönünde)

* Elektrik potansiyelin gradyantı, gerçekten de artış yönünde (yani +z yönünde) çıktı !...

Eş Potansiyel Yüzeyleri'ne bakacak olursak:

Örneğin, z=0'daki levhanın üzerindeki her noktada potansiyel aynı ($V=0$)

$\Rightarrow$ z=0'daki levha, bir eş potansiyel yüzeyi oluşturur !...

z=d'deki levhanın üzerindeki her noktada da potansiyel aynı ($V=V_0$)

$\Rightarrow$ z=d'deki levha da, başka bir eş potansiyel yüzeyi oluşturur !...

z=d/2'de, her iki levha arasındaki bölgede kalan ve her iki levhaya paralel olan düzlem de, bir eş potansiyel yüzeyi oluşturur. ($V=V_0/2$)

⋮

* Dolayısıyla, iki levha arasında, $\underbrace{\text{levhalara paralel}}_{\text{yani xy düzlemine paralel}}$ sonsuz tane eş potansiyel yüzey çizilebilir

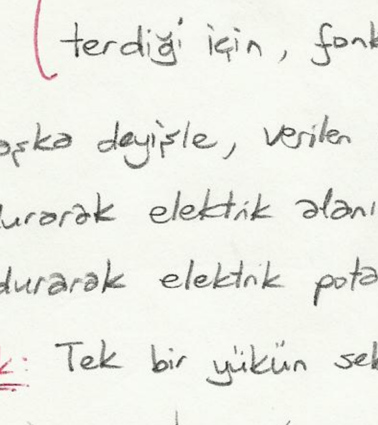
* Elektrik alan, −z yönünde

↳ Elektrik Alan çizgileri ile eş potansiyel yüzeyleri her zaman birbirlerine diktir !...

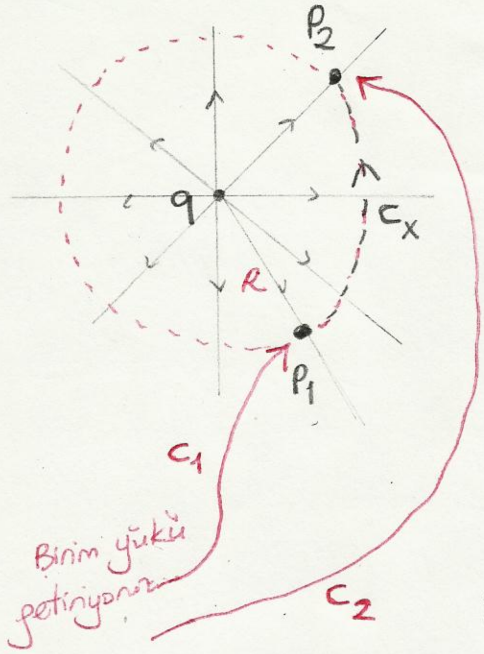
Not: Bu, matematiksel olarak da aslında beklediğimiz bir şeydi. Çünkü elektrik potansiyel fonksiyonunun gradyantı, fonksiyonun maksimum artış yönünü gösterdiği için, fonksiyonun sabit olduğu yüzeye dik olmak zorunda !...

Bir başka deyişle, verilen bir problemde elektrik potansiyel değişimini göz önünde bulundurarak elektrik alanın yönünü; ya da elektrik alanın yönünü göz önünde bulundurarak elektrik potansiyelin değişimini bulabiliriz !...

Örnek: Tek bir yükün sebep olduğu elektrik alan ve elektrik potansiyel



Elektrik alan çizgilerinin, yükten sonsuza doğru olduğunu biliyoruz !...



Birim yükü; sonsuzdan, q yüküne R mesafede bir P_1 noktasına getirmek için yapacağımız işe υ_1 diyelim.

Birim yükü; sonsuzdan, q yüküne R mesafede başka bir P_2 noktasına getirmek için yapacağımız işe de υ_2 diyelim.

υ_1 : P_1 noktasının (sonsuza göreceli) elektrik potansiyeli

υ_2 : P_2 " " " " "

Birim yükü P_2 noktasına C_2 konturu üzerinden götürmekle, önce C_1 üzerinden P_1'e, ardından C_x üzerinden P_2'ye götürmek arasında herhangi bir fark yoktur.

$$\upsilon_2 = \upsilon_2 - \upsilon_\infty = -\int_\infty^{P_2} \bar{E}\cdot d\bar{l} = -\int_{C_2} \bar{E}\cdot d\bar{l} \quad \text{veya}$$

$$\upsilon_2 = \upsilon_2 - \upsilon_\infty = -\int_\infty^{P_2} \bar{E}\cdot d\bar{l} = \underbrace{-\int_{C_1} \bar{E}\cdot d\bar{l}}_{\upsilon_1} \underbrace{-\int_{C_x} \bar{E}\cdot d\bar{l}}$$

Eğer şekildeki gibi, elektrik alana her yerde dik olan bir C_x konturu seçilirse, elektrik alana karşı hiç iş yapılmadığı görülür. Dolayısıyla $= 0$

$$\upsilon_2 = \upsilon_1$$

⇒ Bir başka deyişle, yüke eşit mesafedeki noktaların potansiyeli eşittir.

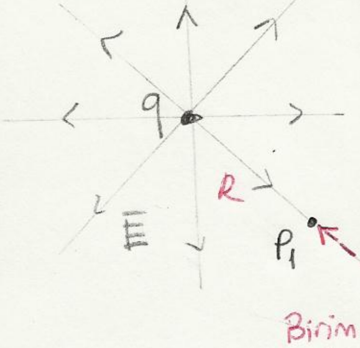
⇒ Yüke eşit mesafedeki noktalar bir küre oluşturur.

⇒ Merkezi yükün bulunduğu nokta olan her bir küre, bir eş potansiyel yüzeyi oluşturur.

Eş Potansiyel Yüzeyleri	Elektrik Alan Çizgileri
Küreler	Merkezden dışa doğru çizgiler

Her yerde birbirleriyle dik kesişirler!...

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 = -\int_\infty^{R} \left(\hat{a}_R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\right)\cdot(\hat{a}_R\, dR) = -\int_\infty^{R} \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R^2}\, dR = \overbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}}^{k}\frac{q}{R} \quad (V)$$



Birim yükü, sonsuzdan bu şekilde getiriyoruz

Bu güzergah üzerinde

$\bar{dl} = \hat{a}_R \, dR$

↑

radyal yönde ilerlediğimiz için

$$\upsilon_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \quad (V)$$

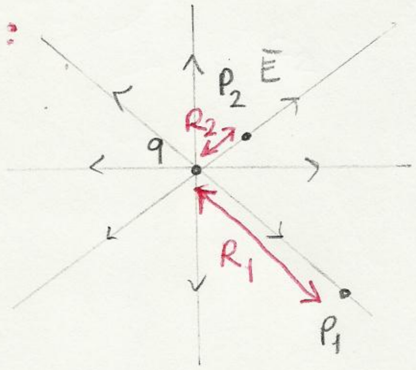
↑

yüke olan mesafe ile ters orantılı.

↑

yüke yaklaştıkça, yani elektrik alanın üzerine doğru gittikçe potansiyel artıyor.

Örnek :

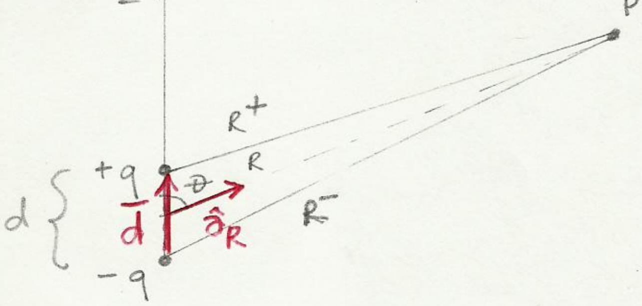


q yüküne R_2 mesafede bulunan bir P_2 noktası ile,
" R_1 " " " P_1 noktası
arasındaki potansiyel fark?

$$\upsilon_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_2} (V); \quad \upsilon_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_1} (V)$$

$$\Rightarrow \upsilon_2 - \upsilon_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) (V) \quad \text{bulunur.}$$

Örnek: Bir elektrik dipol, şekilde de görüldüğü üzere, aralarında küçük bir mesafe (d) bulunan bir $+q$, bir adet de $-q$ yükten oluşan bir yapıdır. (di-pol : di-pole : iki kutup) Söz konusu yapının, kendisine R kadar mesafede bulunan bir noktada oluşturduğu elektrik potansiyeli ve elektrik alanı hesaplayınız. ($R >> d$)



$+q$ ve $-q$ yüklerinin P noktasına mesafelerine sırasıyla R^+ ve R^- diyelim.

P noktasındaki elektrik potansiyel

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^-} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R^+} - \frac{1}{R^-} \right)$$

$R >> d$ olduğu için $R^+ \cong \left(R - \frac{d}{2} \cos\theta \right)$ ve $R^- \cong \left(R + \frac{d}{2} \cos\theta \right)$ olarak yazılabilir.

$$\Rightarrow V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R - \frac{d}{2}\cos\theta} - \frac{1}{R + \frac{d}{2}\cos\theta} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{d\cos\theta}{R^2 - \frac{d^2}{4}\cos^2\theta} \right) \cong \frac{qd\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$-q$ yükünün bulunduğu noktadan $+q$ yükünün bulunduğu noktaya yönlenmiş olan vektöre $\bar{d}$ dersek; $V \cong \frac{q\bar{d} \cdot \hat{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\bar{p} \cdot \hat{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ olarak yazılabilir. $\underset{(C.m)}{\bar{p}} = q\bar{d}$, "dipol moment vektörü" dür.

Dipolün sebep olduğu elektrik alan, $\bar{E} = -\bar{\nabla} V$ ile hesaplanabilir.

Küresel koordinatlarda $\bar{E} = -\bar{\nabla} V = \hat{a}_R \dfrac{\partial V}{\partial R} - \hat{a}_\theta \dfrac{\partial V}{R \partial \theta}$

$$= \hat{a}_R \left(\frac{p \cos\theta}{2\pi\epsilon_0 R^3} \right) + \hat{a}_\theta \left(\frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left(\hat{a}_R \, 2\cos\theta + \hat{a}_\theta \sin\theta \right)$$

Not: Bu örnekte de görüldüğü üzere, Gauss Yasası'nın uygulanamayacağı, Coulomb Yasası'nın da uygulanmasının zor olduğu durumlarda öncelikle elektrik potansiyelin, ardından elektrik alanın hesaplanması mümkündür!...

Sürekli Yük Dağılımlarının Sebep Olduğu Elektrik Potansiyel

Daha önce, sürekli yük dağılımlarının sebep olduğu elektrik alanı hesaplamaktaki mantığa benzer bir yaklaşımla:

Bir v' hacmi içerisindeki ρ_v (C/m^3)'lük yük yoğunluğunun sebep olduğu elektrik potansiyel:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho_v}{R} \, dv' \quad (V)$$

Bir S' yüzeyi üzerindeki ρ_s (C/m^2)'lik yük yoğunluğunun sebep olduğu elektrik potansiyel:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_v}{R} \, ds' \quad (V)$$

Bir C' konturu üzerindeki ρ_l (C/m)'lik yük yoğunluğunun sebep olduğu elektrik potansiyel:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{C'} \frac{\rho_l}{c} \, dl' \quad (V)$$

olarak ifade edilebilir.