VEKTÖR ANALİZİ

$$\bar{A} = \hat{a}_{\mathcal{A}}\,\mathcal{A} \qquad (\bar{A} : \text{Vektör})$$

$\hat{a}_{\mathcal{A}}$ → Yön (Birim vektör) ← 1 birim büyüklükte olan vektör

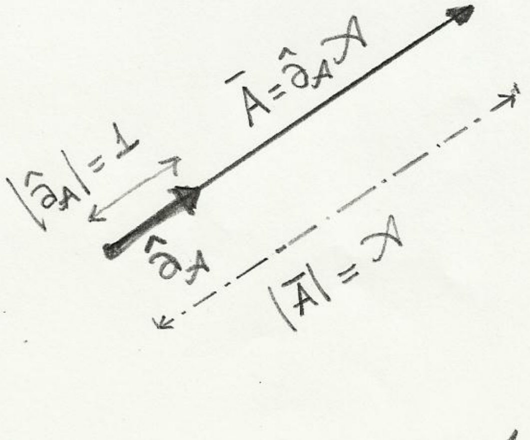
$\mathcal{A}$ → Şiddet (Büyüklük, Genlik) (Skaler)

$$\mathcal{A} = |\bar{A}| \quad \text{ve} \quad \hat{a}_{\mathcal{A}} = \frac{\bar{A}}{|\bar{A}|} = \frac{\bar{A}}{\mathcal{A}}$$

Genel Gösterim / Notasyon:

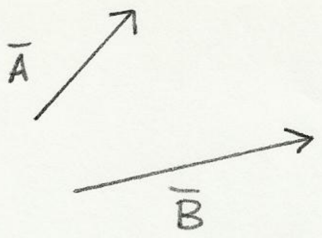
	El Yazısı ile	Kitaplarda
Vektörel Değerler	$\bar{A}$ veya $\vec{A}$ (üzerinde "çizgi" veya "ok")	$\mathbf{A}$ veya $\bar{A}$ veya $\vec{A}$ veya $\underset{\sim}{A}$ ($\mathbf{A}$: kalın (bold) yazı tipi; $\underset{\sim}{A}$: Özellikle matematik kitaplarında)
Birim Vektör	$\hat{a}_{\mathcal{A}}$ (üzerinde "şapka")	$\mathbf{a}_{\mathcal{A}}$ veya $\hat{a}_{\mathcal{A}}$
Skaler Değerler	$\mathcal{A}$ (normal)	$\underline{A}$ (italik (eğik) yazı tipi)

Bir Vektörün Grafiksel Gösterimi



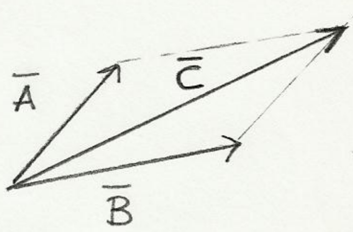
Vektörler Üzerinde Yapılabilecek İşlemler:

① Toplama:

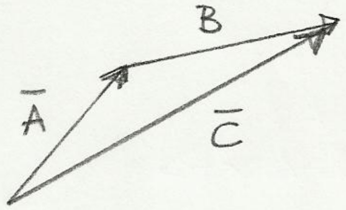


$\bar{C} = \bar{A} + \bar{B} = ?$

a) Paralelkenar Yöntemi



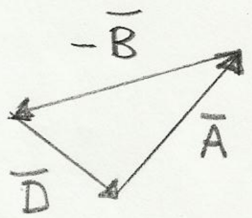
b) Uç Uca Ekleme Yöntemi



② Çıkarma:

$\bar{D} = \bar{A} - \bar{B} = ?$

$\bar{D} = \bar{A} - \bar{B} = \bar{A} + (-\bar{B})$



③ Bir Skaler Değer ile Çarpma

$$\left.\begin{array}{l} k : \text{skaler bir değer} \\ \bar{A} : \text{vektörel bir değer} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{E} = k\bar{A}$$

$\bar{E}$ ↓ Sonuç: Vektörel bir değer

$k\bar{A}$ ↑ Notasyon: Araya hiç bir işaret konulmaz!...

$$\bar{E} = k\bar{A} = k(A\,\hat{a}_A) = \underbrace{(kA)}_{\bar{A}\text{'nın şiddeti } k \text{ kat artar}}\hat{a}_A$$

$\bar{E}$, $\bar{A}$ ↓ $\bar{E}$ ile $\bar{A}$, aynı yöndedir

④ Skaler Çarpım:

$\bar{A}$: vektörel bir büyüklük
$\bar{B}$: vektörel bir büyüklük

$\Rightarrow \quad c = \bar{A} \cdot \bar{B}$

Sonuç: skaler bir değer

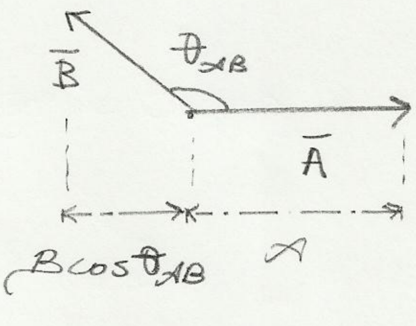
Notasyon: Araya, "." işareti konulur!

Bu nedenle, "dot product" adı da verilir.

$\bar{A} \cdot \bar{B} = c = ?$

$|\bar{A}| = \mathcal{A}$; $|\bar{B}| = \mathcal{B}$ ise,

$$c = \bar{A} \cdot \bar{B} = \mathcal{A}\mathcal{B}\cos\underbrace{\theta_{AB}}_{\substack{\bar{A} \text{ ile } \bar{B} \text{ arasındaki açı} \\ (180^\circ\text{'den küçük olan})}} \leftarrow \text{skaler!...}$$



Fiziksel Anlamı:

* $\theta_{AB} = 0^\circ$ veya 180° ise $\bar{A} \cdot \bar{B}$ değeri oldukça büyük olur
* $\theta_{AB} = 90^\circ$ ise, $\bar{A} \cdot \bar{B} = 0$ olur

$\Rightarrow$ Skaler Çarpımın sonucu, iki vektörün birbiri ile ne kadar "çakışık" olduğuna dair bir fikir verir!...

Özellikler:

$\bar{A} \cdot \bar{B} = \bar{B} \cdot \bar{A}$ (Değişme Özelliği)

$\bar{A} \cdot \bar{A} = \mathcal{A}^2$

(5) Vektörel Çarpım:

$\bar{A}$: vektörel bir değer
$\bar{B}$: vektörel bir değer $\Bigg\} \Rightarrow$ $\bar{D} = \bar{A} \times \bar{B}$

Sonuç: Vektörel bir değer

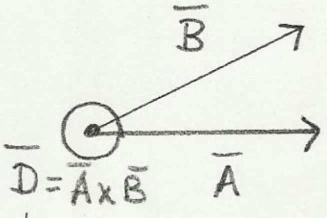
Notasyon: Araya "x" işareti konulur!...

Bu nedenle, "cross product" adı da verilir.

i) $\bar{A} \times \bar{B}$ vektörü, $\bar{A}$ ve $\bar{B}$'nin belirttiği düzlemde bulunmaz!

ii) $\bar{A} \times \bar{B}$ vektörü, $\bar{A}$ ve $\bar{B}$'nin belirttiği düzleme dik olur.

Yönü, "sağ el kuralı" ile bulunur!...



Kağıdın dışına doğru

$\bar{A} \times \bar{B}$'nin yönünü nasıl bulabiliriz?

Yöntem 1: Sağ elimizi, $\bar{A}$'dan $\bar{B}$'ye doğru çevirirken, baş parmağımızın gösterdiği yön, $\bar{A} \times \bar{B}$'nin yönünü verir.

Yöntem 2: Sağ elimizin baş parmağını $\bar{A}$, işaret parmağını da $\bar{B}$ üzerine koyduğumuzda avuç içimizden dışarı doğru olan yön, $\bar{A} \times \bar{B}$'nin yönünü verir.

$$\bar{D} = \bar{A} \times \bar{B} = ?$$

$$\bar{D} = \bar{A} \times \bar{B} = \hat{a}_n \, AB \sin \theta_{AB}$$

$\downarrow$

$\bar{A}$ ve $\bar{B}$ vektörlerinin bulunduğu düzleme dik olan yönde (sağ el kuralı ile bulunan yönde) birim vektör

Fiziksel Anlamı: $\theta_{AB} = 0°$ veya $180°$ ise $\bar{A} \times \bar{B} = 0$ olur.

$\theta_{AB} = 90°$ ise $\bar{A} \times \bar{B}$'nin şiddeti maksimum olur.

$\Rightarrow$ Vektörel Çarpımın sonucu, iki vektörün birbirine ne kadar "dik" olduğuna dair bir fikir verir!...

Özellikler:

$\bar{B} \times \bar{A} \neq \bar{A} \times \bar{B}$ Değişme Özelliği YOK!...

$\bar{B} \times \bar{A} = -\bar{A} \times \bar{B}$ (Sağ el kuralı ile kolayca görülebilir)

$\bar{A} \times \bar{A} = 0$

Üç veya Daha Fazla Vektörün Çarpımı ile İlgili Örnekler

$$\underset{\text{vektör}}{\bar{A}} \cdot \underbrace{(\bar{B} \times \bar{C})}_{\text{vektör}} \rightarrow \text{Sonuç: skaler}$$

$$\underset{\text{vektör}}{\bar{A}} \times \underbrace{(\bar{B} \times \bar{C})}_{\text{vektör}} \rightarrow \text{Sonuç: vektörel}$$

$$\underbrace{(\bar{A} \times \bar{B})}_{\text{vektör}} \times \underbrace{(\bar{C} \times \bar{D})}_{\text{vektör}} \rightarrow \text{Sonuç: vektörel}$$

$$\underbrace{(\bar{A} \cdot \bar{B})}_{\text{skaler}} \underset{\text{vektör}}{\bar{C}} \rightarrow \text{sonuç: vektörel}$$

Parantezlere ve notasyona çok dikkat etmek gerekir!...

Ortogonal Koordinat Sistemleri

Uygun seçilmiş 3 tane düzlemin kesişim kümesi, uzayda bir "nokta"dır.

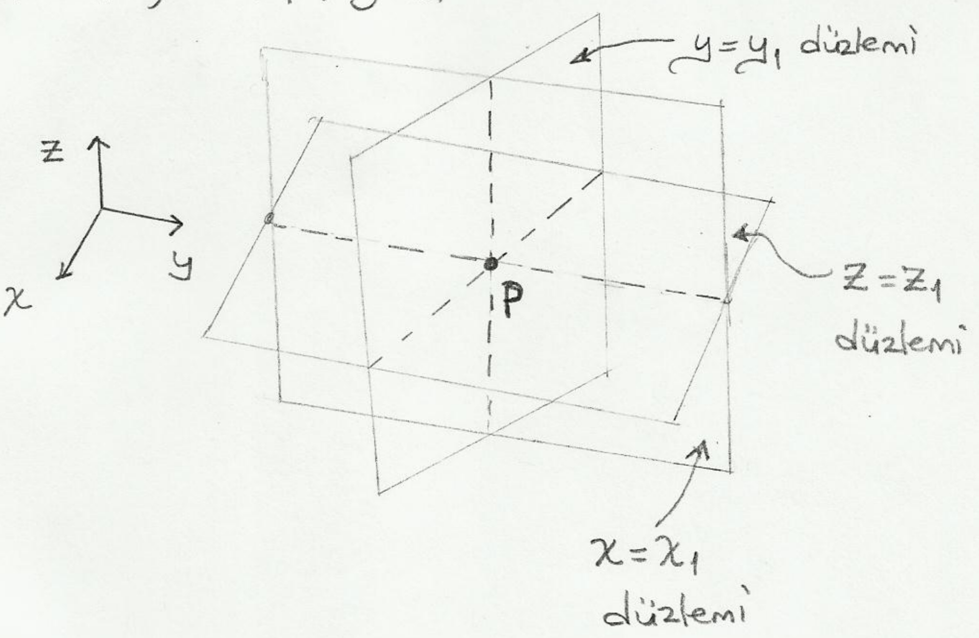
Bu üç düzlemin ikişerli olarak birbiriyle dik kesişmesi durumunda, ilgili koordinat sistemi "ortogonal" olur.

Bir başka deyişle, birbirleriyle ikişerli olarak dik kesişen üç düzlem bulabilirsek; bu düzlemleri kaydırarak uzaydaki bütün noktaları tanımlayabiliriz !...

Kartezyen Koordinat Sistemi

Adını, Descartes'tan almıştır.

$P(x_1, y_1, z_1)$ noktası ; $x = x_1$, $y = y_1$ ve $z = z_1$ düzlemlerinin kesişiminde bulunur.



Her bir yönde birer adet birim vektör tanımlanabilir :

* x yönündeki birim vektör $\hat{a}_x$,
* y $\hat{a}_y$,
* z $\hat{a}_z$ olarak adlandırılır.

<u>Not</u>: Bazı kaynaklarda $\hat{a}_x$, $\hat{a}_y$, $\hat{a}_z$ yerine

$\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ veya

$\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ notasyonu da kullanılmaktadır.

Dolayısıyla, uzaydaki herhangi bir vektör,

$\hat{a}_x$, $\hat{a}_y$ ve $\hat{a}_z$ cinsinden ifade edilebilir.

Herhangi bir $\bar{A}$ vektörü, Kartezyen koordinatlarda aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\underbrace{\bar{A}}_{\substack{\text{üç vektörün} \\ \text{toplamı}}} = \underbrace{\hat{a}_x A_x}_{\substack{\bar{A}\text{'nın } x \\ \text{yönündeki} \\ \text{bileşeni} \\ \downarrow \\ \text{vektör}}} + \underbrace{\hat{a}_y A_y}_{\substack{\bar{A}\text{'nın } y \\ \text{yönündeki} \\ \text{bileşeni} \\ \downarrow \\ \text{vektör}}} + \underbrace{\hat{a}_z A_z}_{\substack{\bar{A}\text{'nın } z \\ \text{yönündeki} \\ \text{bileşeni} \\ \downarrow \\ \text{vektör}}}$$

Not: Buradaki her bir terime dikkat edersek:

$$\underbrace{\underset{\text{vektör}}{\hat{a}_z}\ \underset{\text{skaler}}{A_z}}_{}$$

bir vektör ile bir skalerin çarpımı olduğu için arada herhangi bir işaret yok!...

Vektör İşlemlerinin Kartezyen Koordinatlar Üzerinde Gösterimi:

$\bar{A} = \hat{a}_x A_x + \hat{a}_y A_y + \hat{a}_z A_z$;

$\bar{B} = \hat{a}_x B_x + \hat{a}_y B_y + \hat{a}_z B_z$ ise

* $\bar{A} + \bar{B} = \hat{a}_x (A_x + B_x) + \hat{a}_y (A_y + B_y) + \hat{a}_z (A_z + B_z)$

* $\bar{A} \cdot \bar{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

Sebebi: $\hat{a}_x$, $\hat{a}_y$ ve $\hat{a}_z$ arasındaki ilişki!...

- $\hat{a}_x$, $\hat{a}_y$ ve $\hat{a}_z$ birbirlerine dik olduğu için

$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_y = 0 \quad ; \quad \hat{a}_x \cdot \hat{a}_z = 0 \quad ; \quad \hat{a}_y \cdot \hat{a}_z = 0$$

- $\hat{a}_x$, $\hat{a}_y$ ve $\hat{a}_z$ birim vektör olduğu için

$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_x = |\hat{a}_x|^2 = 1 \ , \quad \hat{a}_y \cdot \hat{a}_y = 1 \ , \quad \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = 1$$

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = (\hat{a}_x A_x + \hat{a}_y A_y + \hat{a}_z A_z) \cdot (\hat{a}_x B_x + \hat{a}_y B_y + \hat{a}_z B_z)$$

$$= \underbrace{(\hat{a}_x \cdot \hat{a}_x)}_{1} A_x B_x + \cancel{\underbrace{(\hat{a}_x \cdot \hat{a}_y)}_{0} A_x B_y} + \cancel{\underbrace{(\hat{a}_x \cdot \hat{a}_z)}_{0} A_x B_z} + \dots$$

✱ $\bar{A} \times \bar{B} = ?$

• Öncelikle, birim vektörler arasındaki ilişkiyi incelemeliyiz.

$$\hat{a}_x \times \hat{a}_y = \hat{a}_z \;;\; \hat{a}_y \times \hat{a}_z = \hat{a}_x \;;\; \hat{a}_z \times \hat{a}_x = \hat{a}_y$$

ve $$\hat{a}_y \times \hat{a}_x = -\hat{a}_z \;;\; \hat{a}_z \times \hat{a}_y = -\hat{a}_x \;;\; \hat{a}_x \times \hat{a}_z = -\hat{a}_y$$

{ ipucu: Kolay hatırlamak için: $x \to y \to z \to x$ $+$ Saat yönü $+$; tersi $-$ }

• Öte yandan, $\hat{a}_x \times \hat{a}_x = 0 \;;\; \hat{a}_y \times \hat{a}_y = 0 \;;\; \hat{a}_z \times \hat{a}_z = 0$

$$\bar{A} \times \bar{B} = (\hat{a}_x A_x + \hat{a}_y A_y + \hat{a}_z A_z) \times (\hat{a}_x B_x + \hat{a}_y B_y + \hat{a}_z B_z)$$

$$= \cancel{\underbrace{(\hat{a}_x \times \hat{a}_x)}_{0} A_x B_x} + \underbrace{(\hat{a}_x \times \hat{a}_y)}_{\hat{a}_z} A_x B_y + \underbrace{(\hat{a}_x \times \hat{a}_z)}_{-\hat{a}_y} A_x B_z +$$

$$\underbrace{(\hat{a}_y \times \hat{a}_x)}_{-\hat{a}_z} A_y B_x + \cancel{\underbrace{(\hat{a}_y \times \hat{a}_y)}_{0} A_y B_y} + \underbrace{(\hat{a}_y \times \hat{a}_z)}_{\hat{a}_x} A_y B_z +$$

$$\underbrace{(\hat{a}_z \times \hat{a}_x)}_{\hat{a}_y} A_z B_x + \underbrace{(\hat{a}_z \times \hat{a}_y)}_{-\hat{a}_x} A_z B_y + \cancel{\underbrace{(\hat{a}_z \times \hat{a}_z)}_{0} A_z B_z}$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y)\,\hat{a}_x + (A_z B_x - A_x B_z)\,\hat{a}_y + (A_x B_y - A_y B_x)\,\hat{a}_z$$

Dikkat edilirse, elde edilen sonucun aşağıdaki matrisin determinantına eşit olduğu görülür. Bir başka deyişle:

$$\bar{A} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$-A_y B_x \hat{a}_z$ $-A_z B_y \hat{a}_x$ $-A_x B_z \hat{a}_y$

$A_y B_z \hat{a}_x$ $A_x B_y \hat{a}_z$ $A_z B_x \hat{a}_y$

* $k\bar{A} = k(\hat{a}_x A_x + \hat{a}_y A_y + \hat{a}_z A_z)$

$$= \underbrace{\hat{a}_x k A_x} + \underbrace{\hat{a}_y k A_y} + \underbrace{\hat{a}_z k A_z}$$

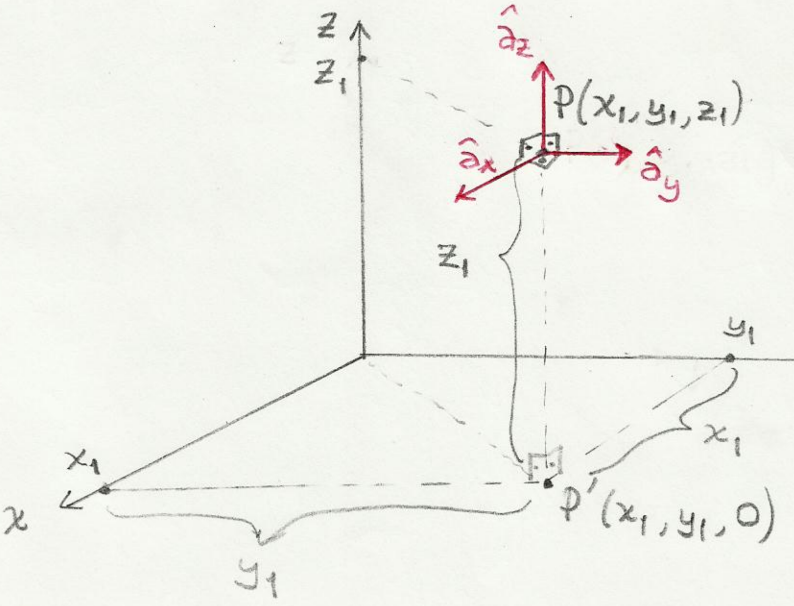
Her bir yöndeki bileşenin şiddeti k katına çıkar } ⇒ $\bar{A}$ vektörünün şiddeti, k katına çıkar.

Sonuç: Uzaydaki herhangi bir nokta,

* xy düzlemine paralel bir düzlem, ← $z = z_1$ düzlemi
* xz düzlemine paralel bir düzlem ve ← $y = y_1$ düzlemi
* yz düzlemine paralel bir düzlemin ← $x = x_1$ düzlemi

kesişim kümesi olarak Kartezyen koordinatlarda ifade edilir.

↳ $P(x_1, y_1, z_1)$ şeklinde gösterilir.



← P noktasının, xy düzlemi ($z = 0$ düzlemi) üzerine izdüşümü

Önemli Notlar: * Birim vektörler ($\hat{a}_x$, $\hat{a}_y$ ve $\hat{a}_z$), uzaydaki her noktada birbirleriyle dik kesişirler.

* Her bir birim vektör, kendi değişkeninin artış yönündedir (örneğin, $\hat{a}_x$ vektörü, x'in arttığı yöndedir).

* $\hat{a}_x$, $\hat{a}_y$ ve $\hat{a}_z$'nin oryantasyonu, uzaydaki her noktada aynıdır (Bu, Kartezyen koordinatlara has bir özellik; diğer koordinat sistemlerindeki birim vektörlerin böyle olmadığını göreceğiz!...)