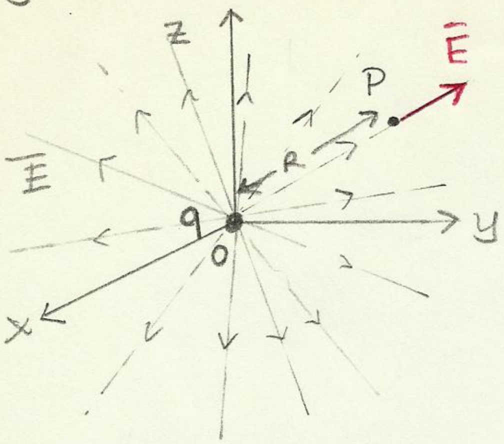
Coulomb Yasası (Devam)

Orijinde bulunan bir yükün sebep olduğu elektrik alan;



Herhangi bir gözlem noktasında (örneğin P) elektrik alan, yükten gözlem noktasına doğru çizilen ışın doğrultusundadır. ⇒ Dolayısıyla radyal yönde

⇒ Yani $\hat{a}_R$ yönünde !...

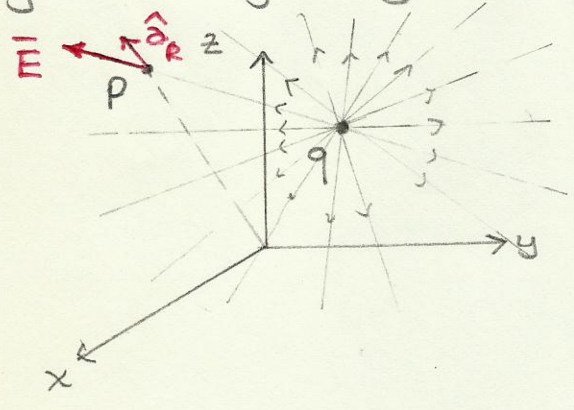
↑ küresel koordinatlardaki $\hat{a}_R$

Bu noktada elektrik alanın şiddeti de Coulomb Yasası ile bulunabilir.

P noktasındaki elektrik alan ⟶ $$\overline{E}(P) = \hat{a}_R E_R = \hat{a}_R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (V/m)$$

R: Yük ile gözlem noktası arasındaki mesafe

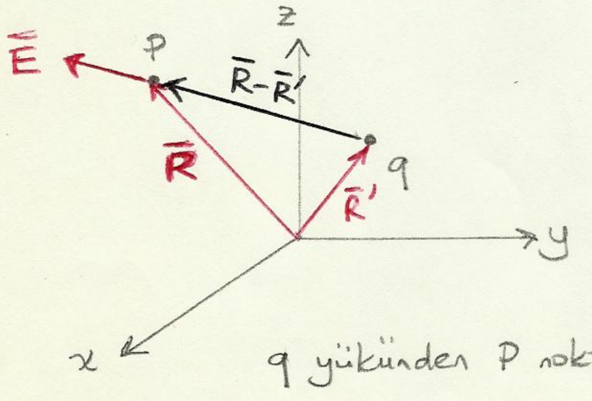
Orijinde bulunmayan bir yükün sebep olduğu elektrik alan :



Herhangi bir gözlem noktasında (örneğin P) elektrik alan, yine yükten gözlem noktasına doğru çizilen ışın doğrultusundadır.

⇒ Ancak bu sefer, şekilde de görüldüğü üzere $\hat{a}_R$ yönünde değildir !...

Peki, bu durumda elektrik alanın yönünü nasıl bulacağız ?



q yükünün bulunduğu noktanın konum vektörüne $\overline{R}'$;

Gözlem noktamız P'nin konum vektörüne de $\overline{R}$ dersek :

q yükünden P noktasına doğru yönlenmiş olan vektör $\overline{R}-\overline{R}'$ olarak ifade edilebilir. P noktasındaki elektrik alan da bu doğrultudadır.

Bu noktada elektrik alan şiddeti de Coulomb Yasası ile bulunabilir.

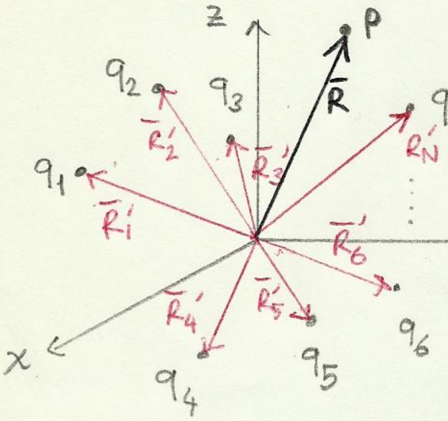
Yani $\quad \bar{E}(P) = \hat{a}_{qP} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R}-\bar{R}'|^2} = \dfrac{\bar{R}-\bar{R}'}{|\bar{R}-\bar{R}'|} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R}-\bar{R}'|^2} = (\bar{R}-\bar{R}') \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R}-\bar{R}'|^3}$ $\quad$ (V/m)

$|\bar{R}-\bar{R}'|$: q yükü ile P noktası arasındaki mesafe

$\hat{a}_{qP}$: q yükünden P noktasına yönlenmiş olan birim vektör:

$(\bar{R}-\bar{R}')$ vektörünün kendi normuna bölünmesi ile bulunabilir $\Rightarrow \hat{a}_{qP} = \dfrac{\bar{R}-\bar{R}'}{|\bar{R}-\bar{R}'|}$

Ayrık Yüklerin Sebep Olduğu Elektrik Alan



$q_1, q_2, \ldots, q_N$ yükleri, konum vektörleri sırasıyla $\bar{R}_1', \bar{R}_2', \bar{R}_3', \ldots, \bar{R}_N'$ olan noktalarda bulunuyor olsun. Bu yüklerin, konum vektörü $\bar{R}$ olan bir P noktasında sebep olduğu elektrik alan, her bir yükün P noktasında sebep olduğu elektrik alanların toplamıdır.

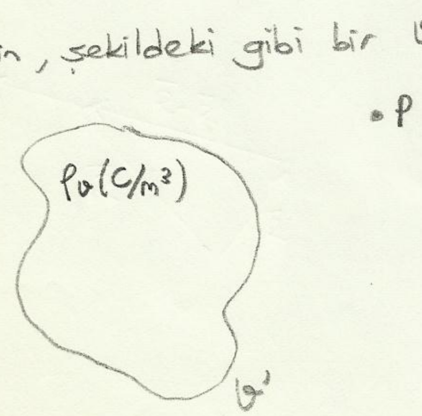
$$\bar{E}(P) = (\bar{R}-\bar{R}_1') \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R}-\bar{R}_1'|^3} + (\bar{R}-\bar{R}_2') \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R}-\bar{R}_2'|^3} + \ldots\ldots + (R-R_N') \frac{q_N}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R}'-\bar{R}_N'|^3}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{N} (\bar{R}-\bar{R}_k') \frac{q_k}{|\bar{R}-\bar{R}_k'|^3} \quad (V/m)$$

Sürekli Yük Dağılımlarının Sebep Olduğu Elektrik Alan

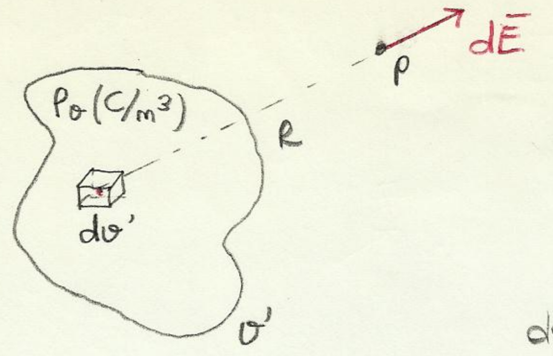
Yükler, bazen de belirli bir bölge içerisinde sürekli bir dağılım (bir yük yoğunluğu fonksiyonu) oluşturuyor olabilir. Bu durumda oluşan elektrik alanı hesaplamak için, yine "sonsuz küçükler hesabı"ndan yararlanabiliriz!...

Örneğin, şekildeki gibi bir ϑ' hacmini kaplayan bir yük dağılımı olsun. Bu dağılımın herhangi bir P gözlem noktasında sebep olduğu toplam elektrik alanı nasıl bulabiliriz?



* ϑ' hacmi içerisinde küçük hacimler alıp, her bir küçük hacim içerisinde kalan toplam yükün sebep olduğu elektrik alanı bularak; ve ardından bütün bu elektrik alan değerlerini toplayarak!...

ϑ' hacmi içerisindeki yük yoğunluğu: $\rho_v (C/m^3)$



dv' adını vereceğimiz, dikdörtgenler prizması şeklinde küçük bir hacim seçelim. Bu küçük hacim içerisindeki yük miktarı $\rho_v \, dv'$ kadar olacaktır. Bu küçük hacim içerisindeki yüklerin P noktasında sebep olacağı elektrik alana $d\bar{E}$ dersek, $d\bar{E}$ şu şekilde hesaplanabilir:

$$d\bar{E} = \hat{a}_{vP} \frac{\rho_v \, dv'}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$\hat{a}_{vP}$: dv''den P'ye doğru yönlenmiş olan birim vektör

R: dv''nün orta noktasının P'ye olan mesafesi

v' hacmi içerisindeki bütün dv' hacimleri için $d\bar{E}$'leri bulur ve toplarsak:

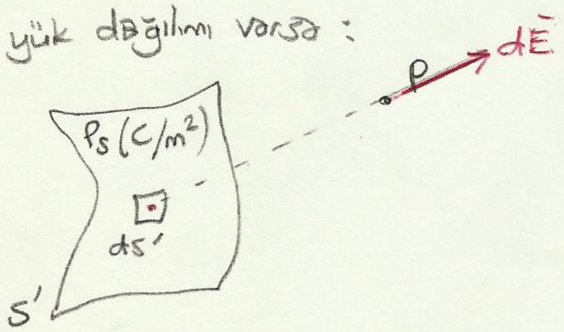
$$\bar{E}(\bar{P}) \cong \sum_i d\bar{E}_i = \hat{a}_{v_i P} \frac{\rho_v \, dv_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2}$$

dv' hacimlerini çok küçük seçersek:

$$\bar{E}(\bar{P}) = \lim_{dv_i \to 0} \sum_i d\bar{E}_i = \int_{v'} d\bar{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \hat{a}_{vP} \frac{\rho_v}{R^2} dv' \quad (V/m)$$

{ Not: ρ_v, uzay koordinatlarına bağlı bir fonksiyon olduğu için bir katsayı gibi integralin dışına çıkartılamaz!... }

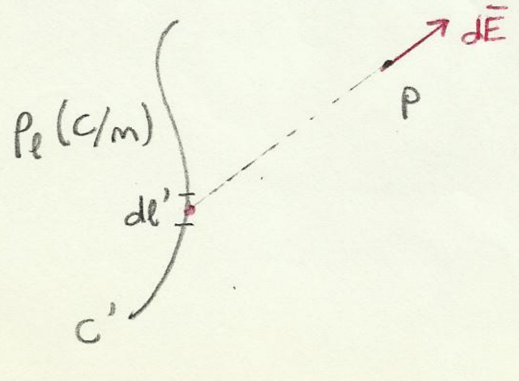
Yükler, her zaman bir hacim içerisinde bulunmuyor olabilir. Örneğin bir yüzeyde, sürekli bir yük dağılımı varsa:



Benzer mantıkla

$$\bar{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{s'} \hat{a}_{sP} \frac{\rho_s}{R^2} ds' \quad (V/m)$$

Ya da yükler, bir eğri (örneğin bir tel parçası) üzerine dağılmış ise:

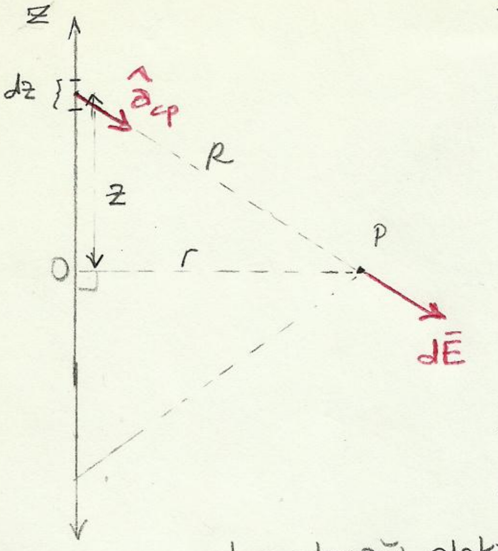


Yine aynı mantıkla

$$\bar{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{c'} \hat{a}_{cP} \frac{\rho_\ell}{R^2} d\ell' \quad (V/m)$$

şeklinde ifade edilip hesaplanabilir.

Örnek: Sonsuz uzunlukta ve düz bir telin üzerinde ρ_l (C/m) sabit bir yük yoğunluğu bulunuyor olsun. Bu yapının sebep olduğu elektrik alanı hesaplayınız.



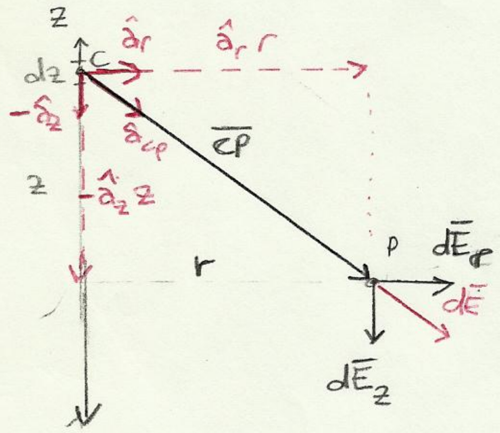
Telin, z ekseni boyunca uzandığını varsayalım. Tele r kadar mesafede herhangi bir P noktasında elektrik alanı bulmaya çalışalım.

Tel üzerinde dz uzunluğunda küçük bir parça seçelim. Bu parçanın orta noktasının P noktasına mesafesi, şekilde görüldüğü üzere $R=\sqrt{z^2+r^2}$ olsun.

Bu küçük parça içerisindeki yüklerin, P noktasında sebep olacağı elektrik alan:

$$d\bar{E} = \hat{a}_{cp}\,\frac{\rho_l\, dz}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \hat{a}_{cp}\,\frac{\rho_l\, dz}{4\pi\epsilon_0 (r^2+z^2)}$$

olacaktır.

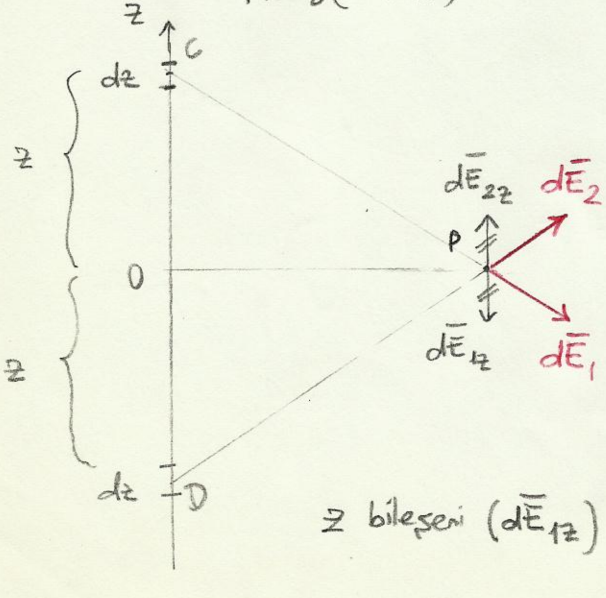


Parçanın orta noktasına C dersek; C'den P'ye yönlenmiş olan $\overline{CP}$ vektörü $\overline{CP} = \hat{a}_r r - \hat{a}_z z$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda $\hat{a}_{cp} = \dfrac{\overline{CP}}{|\overline{CP}|} = \dfrac{\hat{a}_r r - \hat{a}_z z}{(r^2+z^2)^{1/2}}$; ve

$$d\bar{E} = \frac{\rho_l\, dz}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\hat{a}_r r - \hat{a}_z z}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$ olacaktır.

şekilden de görüldüğü üzere $d\bar{E} = d\bar{E}_r + d\bar{E}_z$ (r ve z yönünde iki bileşenin toplamı) olarak ifade edilebilir.

$$d\bar{E}_r = \frac{\rho_l\, dz\, r\ \hat{a}_r}{4\pi\epsilon_0 (r^2+z^2)^{3/2}} \quad \text{ve} \quad d\bar{E}_z = -\frac{\rho_l\, dz\, z\ \hat{a}_z}{4\pi\epsilon_0 (r^2+z^2)^{3/2}}$$ olacaktır.



Şekilden de görülebileceği gibi, P noktasının tele en yakın noktasına O dersek; orta noktası C olan küçük parça O noktasının +z kadar yukarısındadır.

C noktasının O noktasına göre simetriğine D diyelim ve orta noktası D olan bir diğer küçük parçayı ele alalım.

İlk parçanın sebep olduğu sebep olduğu elektrik alanın z bileşeni ($d\bar{E}_{1z}$) ile, ikinci parçanın sebep olduğu elektrik alan ($d\bar{E}_{2z}$), birbirlerini sadeleştirecektir!...

Dolayısıyla, P noktasında elektrik alan $\hat{a}_r$ yönünde olacaktır. $(\bar{E} = \hat{a}_r E_r)$

⇒ Bir başka deyişle, sonsuz uzunluktaki düz telin sebep olduğu elektrik alan, radyal yöndedir.

* Bu nedenle, $d\bar{E}_z$ bileşenini artık hesaplarımızda göz önünde bulundurmaya gerek yoktur.

Problemde sabit olduğu verildiği için integral dışına çıkarabildik!...

$$\bar{E}(P) = \hat{a}_r E_r = \int d\bar{E}_r = \hat{a}_r \frac{\rho_l r}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(r^2+z^2)^{3/2}} \quad (V/m)$$

$$\Rightarrow \bar{E}(P) = \hat{a}_r \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (V/m)$$

Coulomb Yasası, en basit problemde bile analitik olarak hesaplanması çok zor integrallere sebep verir!...

Gauss Yasası ve Uygulamaları

Coulomb Yasası birçok durumda analitik olarak zor hesaplanan integrallere sebep verdiği için, pratikte Gauss Yasası daha çok kullanım alanı bulmaktadır!..

Gauss Yasası, özellikle:

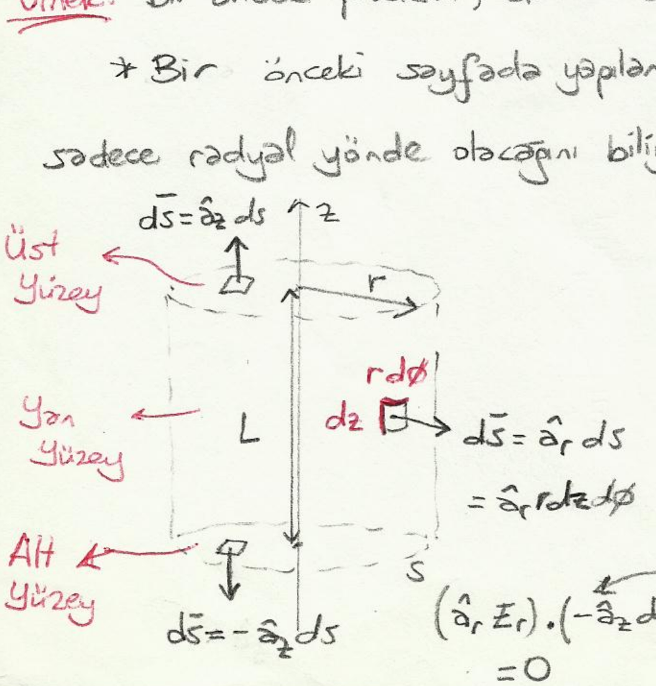
* simetrik,
* elektrik alanın yönünün öngörülebildiği,

problemlerde; ve

* üzerinde elektrik alanın normal bileşeninin sabit olduğu Gauss Yüzeyleri'nin bulunabildiği durumlarda kullanışlıdır!...

Örnek: Bir önceki problemi, Gauss Yasası ile çözelim.

* Bir önceki sayfada yapılan tartışma ve açıklamaya istinaden, elektrik alanın sadece radyal yönde olacağını biliyoruz. ⇒ $\bar{E} = \hat{a}_r E_r$



Gauss Yüzeyi'ni, merkez ekseni z olan bir silindir olarak seçersek: $\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$ ← silindir içerisinde kalan yük

$$\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{s} = \underbrace{\int \bar{E} \cdot d\bar{s}}_{\text{alt yüzey}} + \underbrace{\int \bar{E} \cdot d\bar{s}}_{\text{üst yüzey}} + \underbrace{\int \bar{E} \cdot d\bar{s}}_{\text{yan yüzey}} = \frac{\rho_l L}{\epsilon_0}$$

$(\hat{a}_r E_r) \cdot (-\hat{a}_z ds) = 0$

$(\hat{a}_r E_r) \cdot (\hat{a}_z ds) = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\int \bar{E}\cdot d\bar{s}}_{\text{yan yüzey}} = \frac{\rho_l L}{\epsilon_0} = \underbrace{\int (\hat{a}_r E_r)\cdot(\hat{a}_r\, r\, dz\, d\phi)}_{\text{yan yüzey}} = \int_{z=0}^{L}\int_{\phi=0}^{2\pi} E_r\, r\, dz\, d\phi$$

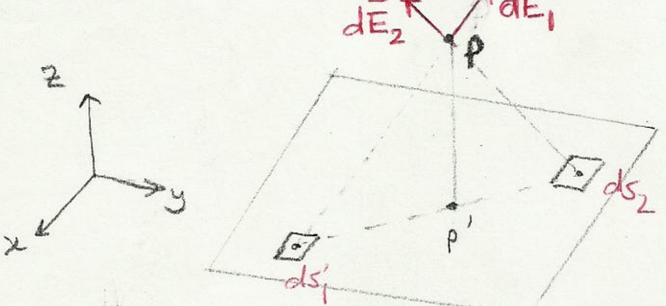
$$\Rightarrow E_r\, 2\pi r L = \frac{\rho_l L}{\epsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$\Rightarrow \bar{E}(P) = \hat{a}_r \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (V/m)$$

tele r kadar mesafedeki bir P noktası

__Örnek__ Sonsuz genişlikteki bir düzlem üzerinde sabit $\rho_s (C/m^2)$'lik bir yük dağılımı bulunuyor olsun. Bu yük dağılımının sebep olduğu elektrik alanı bulunuz.

Söz konusu düzlemi $z=0$ düzlemi olarak seçelim. Şekildeki gibi $z>0$ yarı uzayında bulunan bir P noktasındaki elektrik alanı düşünelim. Bu noktada, ds_1 yüzeyi üzerindeki yüklerin sebep olduğu elektrik alana $d\bar{E}_1$ diyelim. P' noktası, P noktasının $z=0$ düzlemi üzerine izdüşümü olsun. ds_2 de, ds_1 yüzeyinin P' noktasına göre simetriğinde bulunan yüzey olsun. ds_2 yüzeyindeki yüklerin P noktasında sebep olduğu elektrik alana da $d\bar{E}_2$ diyelim.



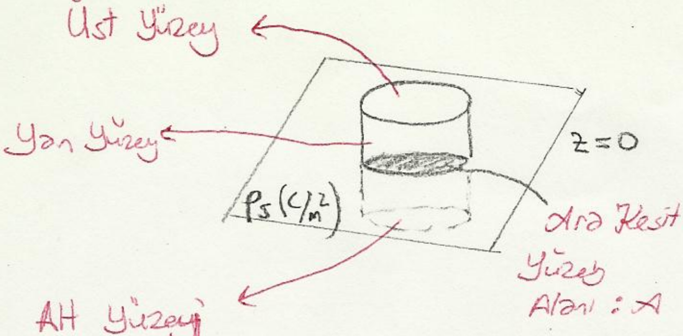
$$d\bar{E}_1 = d\bar{E}_{1x} + d\bar{E}_{1y} + d\bar{E}_{1z} \; ; \; d\bar{E}_2 = d\bar{E}_{2x} + d\bar{E}_{2y} + d\bar{E}_{2z}$$

$$\Rightarrow d\bar{E}_1 + d\bar{E}_2 = \underbrace{d\bar{E}_{1x} + d\bar{E}_{2x}}_{0 \text{ simetriden ötürü}} + \underbrace{d\bar{E}_{1y} + d\bar{E}_{2y}}_{0 \text{ simetriden ötürü}} + \underbrace{d\bar{E}_{1z} + d\bar{E}_{2z}}$$

Dolayısıyla, P noktasında elektrik alan sadece z yönünde olacaktır!...

Benzer mantıkla, $z<0$ yarı uzayında seçilen bir P noktası için de elektrik alan sadece $-z$ yönünde olacaktır!...

Yani $\bar{E} = \begin{cases} \hat{a}_z E_z & ; z>0 \\ -\hat{a}_z E_z & ; z<0 \end{cases}$; Şimdi, üzerinde elektrik akıyı kolaylıkla hesaplayacağımız bir Gauss Yüzeyi seçmeliyiz!...



Gauss Yüzeyi : Üst yarısı $z>0$, alt yarısı $z<0$ yarı uzayında kalacak şekilde; üst ve alt yüzeyleri $z=0$ düzlemine paralel bir silindir.

$$\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{s} = \underbrace{\int \bar{E}\cdot d\bar{s}}_{\text{alt yüzey}} + \underbrace{\int \bar{E}\cdot d\bar{s}}_{\text{üst yüzey}} + \underbrace{\int \bar{E}\cdot d\bar{s}}_{\text{yan yüzey}} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$(-\hat{a}_z E_z)\cdot(-\hat{a}_z ds) = E_z\, ds = E_z\, dx\, dy$$

$$(\hat{a}_z E_z)\cdot(\hat{a}_z ds) = E_z\, ds = E_z\, dx\, dy$$

$$\cancel{(\mp \hat{a}_z E_z)\cdot(\hat{a}_r ds)} = 0$$

Elektrik alan, zaten yan yüzeye paralel olduğu için bu yüzey üzerinde bir akı oluşturmuyor.

$$\Rightarrow \underbrace{2\iint E_z\, dx\, dy}_{E_z A} = \frac{\rho_s A}{\epsilon_0}$$

silindirin ara kesit yüzey alanı

$$\Rightarrow E_z = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \Rightarrow \bar{E} = \begin{cases} \hat{a}_z \dfrac{\rho_s}{2\epsilon_0} & ; z>0 \\ -\hat{a}_z \dfrac{\rho_s}{2\epsilon_0} & ; z<0 \end{cases}$$

<u>Not:</u>

* Noktasal bir yükün sebep olduğu elektrik alanın şiddeti $\propto \dfrac{1}{R^2}$ ← yani mesafenin karesiyle azalıyor !...
* Çizgisel bir yük dağılımının sebep olduğu elektrik alanın şiddeti $\propto \dfrac{1}{R^1} = \dfrac{1}{R}$ ← yani mesafenin kendisi ile azalıyor !...
* Düzlemsel bir yük dağılımının sebep olduğu elektrik alanın şiddeti $\propto \dfrac{1}{R^0} = 1$ ← yani mesafeden bağımsız! ⇒ mesafe ile azalmıyor !...

<u>Not:</u> Bu problemde Gauss Yüzeyi : üst yarısı $z>0$, alt yarısı $z<0$ yarı uzayında kalacak şekilde; üst ve alt yüzeyleri $z=0$ düzlemine paralel bir dikdörtgenler prizması olarak da seçilebilirdi !...