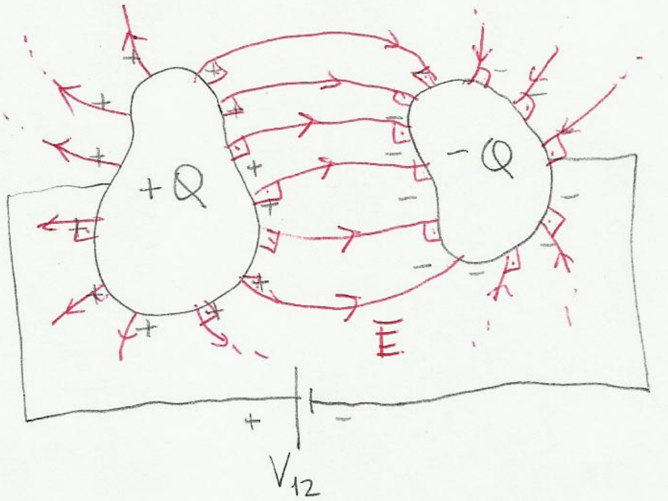
KAPASİTANS VE KAPASİTÖRLER



Şekilde görüldüğü gibi, rastgele şekil ve boyutta iki farklı iletken cisim arasında bir elektrik potansiyel fark oluşturalım. Yüksek gerilim oluşturduğumuz iletkene pozitif yükler hareket edecek; yüklerin korunumu prensibine istinaden de diğer iletkende eşit miktarda negatif yük açığa çıkacaktır. Daha önceki derslerden de bildiğimiz üzere, (iletken cisimlerin içerisinde yük bulunamayacağından ötürü) cisimlerin yüzeylerinde yük yoğunlukları oluşacaktır.

Böyle bir durumda, pozitif yüklü iletkenin yüzeyinden dik çıkacak, negatif yüklü iletkenin yüzeyine dik girecek şekilde bir elektrik alan oluşacaktır.

[Not : Neden dik? İletken - dielektrik arası elektrostatik sınır koşullarından ötürü]

$\bar{E} = -\bar{\nabla} V$ olduğundan, iletkenler arasındaki gerilimi k katına çıkarırsak oluşan elektrik alan da k katına çıkacaktır.

Elektrostatik sınır koşullarından $\bar{D} = \hat{a}_n \rho_s \Rightarrow \bar{E} = \hat{a}_n \dfrac{\rho_s}{\epsilon_0}$ olduğu bulunur.

Dolayısıyla elektrik alanın k katına çıkması, ρ_s'in de k katına çıkması anlamına gelmektedir. Yani $V \propto |\bar{E}| \propto \rho_s$. Bir başka deyişle, $V \propto Q$ olacağından, iletkenler arasındaki gerilimi ne kadar artırırsak, iletkenlerde biriken yük o oranda artar. $\dfrac{Q}{V_{12}}$ oranı, bu yapı için sabittir ve de bu yapının karakteristik bir özelliğidir. Bu orana $\left(C = \dfrac{Q}{V_{12}}\right)$, söz konusu yapının "kapasitansı" (birim voltaj farkı başına yük biriktirme kapasitesinin bir ölçütü olmasından ötürü) adı verilir.

İki iletkenden oluşan her bir yapı için bu oran, karakteristik (o yapıya has) bir değerdir. $\longrightarrow$ $C = \dfrac{Q}{V}$ (Coulomb/Volt) veya (Farad)

* Yapının geometrik özelliklerine,
* İletkenler arasındaki ortamın materyal özelliklerine

bağımlıdır!...

Verilen bir yapının kapasitansı, şu yöntemle hesaplanabilir:

1. Geometriye uygun bir koordinat sistemi seçilir.
2. İletkenler üzerinde +Q ve -Q yükler olduğu varsayılır.
3. Gauss Yasası veya başka bir yöntem ile, iletkenler arasındaki ortamda elektik alan ($\bar{E}$) hesaplanır.
4. +Q yüklü iletken ile -Q yüklü iletken arasındaki potansiyel fark:

$$V_{12} = -\int_{2}^{1} \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

1 → Pozitif yüklü iletken

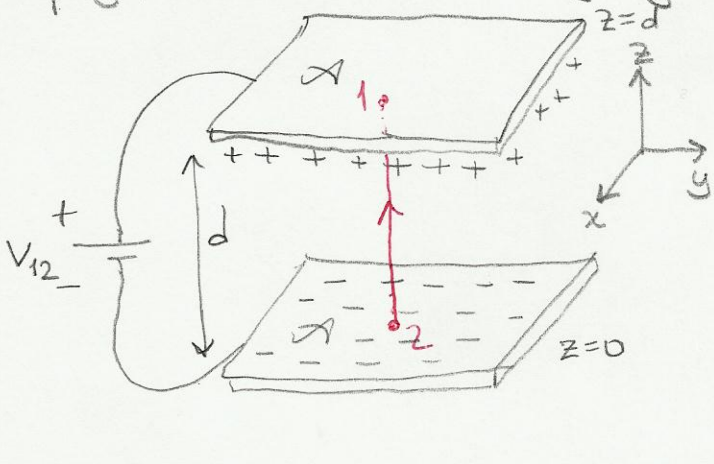
2 → Negatif yüklü iletken

formülü ile hesaplanır.

5. Kapasitans, $C = \dfrac{Q}{V_{12}}$ ile bulunur.

[Not: Bulunan sonuç, cismin (yapının) geometrik özellikleri (yani boyutlar, iletkenler arasındaki mesafe, vb.) ve iletkenler arasındaki ortamın dielektrik geçirgenliği (ϵ_r) gibi terimler içerebilir. Ancak Q, V gibi terimler içermemelidir.]

Örnek: Paralel levha kapasitör. Daha önce de incelediğimiz bu yapının kapasitansını hesaplayalım. Levhaların her birinin yüzey alanı $\mathcal{A}$, aralarındaki mesafe d, aralarındaki ortam ise hava (ϵ_0) olsun.



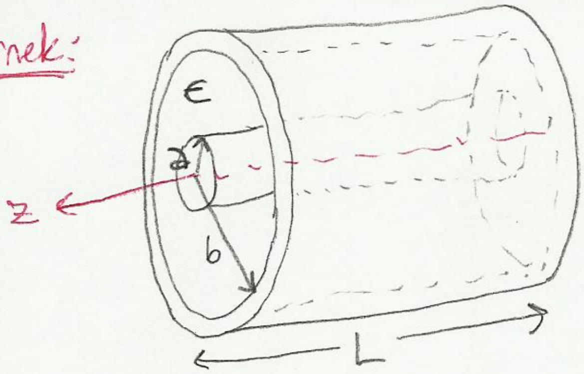
1. Kartezyen Koordinat sistemini seçelim.
2. Üstteki levhada +Q, alttakinde -Q yük varsayalım.
3. İki levha arasındaki elektrik alan

$$\bar{E} = -\hat{a}_z \frac{\rho_s}{\epsilon_0} = -\hat{a}_z \frac{\rho_s \mathcal{A}}{\epsilon_0 \mathcal{A}} = -\hat{a}_z \frac{Q}{\epsilon_0 \mathcal{A}}$$

4. $$V_{12} = -\int_{2}^{1} \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\int_{0}^{d} \left(-\hat{a}_z \frac{Q}{\epsilon_0 \mathcal{A}}\right) \cdot (\hat{a}_z dz) = +\int_{0}^{d} \frac{Q}{\epsilon_0 \mathcal{A}} dz = \frac{Qd}{\epsilon_0 \mathcal{A}}$$

5. $$C = \frac{Q}{V_{12}} = \frac{Q}{\dfrac{Qd}{\epsilon_0 \mathcal{A}}} = \frac{\epsilon_0 \mathcal{A}}{d} \ (F)$$ olarak bulunur!...

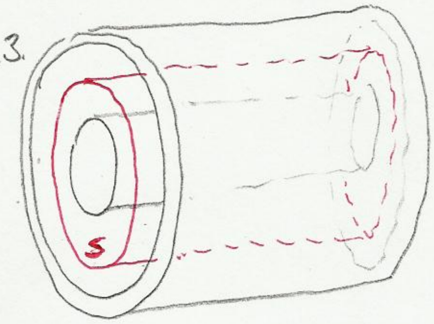
Örnek:



Şekildeki gibi, içte yarıçapı a olan bir iletken, dışta iç yarıçapı b olan bir iletken silindirik kabuktan oluşan bir yapı olsun. İletkenlerin arasında dielektrik sabiti ϵ olan malzeme varsa, yapının kapasitansını bulmaya çalışalım.

1. Silindirik koordinat sistemini seçelim. (z ekseni, silindirlerin merkez ekseni olsun)

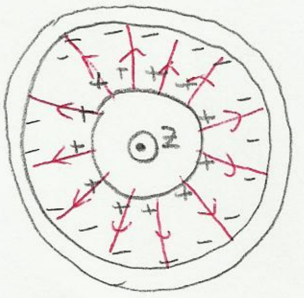
2 ve 3.



İki iletken arasında kalan bölgede, silindirik bir Gauss yüzeyi seçerek elektrik alanı hesaplayalım. (İçteki iletkende $+Q$, dıştaki iletkende $-Q$ yük varsayalım.)

İki iletken arasındaki bölgede $\bar{E} = \hat{a}_r E_r$ şeklinde olacaktır.

Karşıdan görünüm



$$\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{s} = \frac{Q}{\epsilon} \Rightarrow \bar{E} = \hat{a}_r E_r = \hat{a}_r \frac{Q}{2\pi\epsilon L r}$$

4. $$V_{12} = -\int_{r=b}^{r=a} \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\int_b^a \left(\hat{a}_r \frac{Q}{2\pi\epsilon L r}\right) \cdot \left(\hat{a}_r\, dr\right) = -\int_b^a \frac{Q}{2\pi\epsilon L} \frac{dr}{r}$$

$$= -\frac{Q}{2\pi\epsilon L} \int_b^a \frac{dr}{r} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon L} \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{Q}{2\pi\epsilon L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

aradaki ortamın özelliği

Geometrik özellikler

Notlar:

* L artarsa C artar
* $\frac{b}{a}$ artarsa C azalır
* ϵ artarsa C artar

$$C = \frac{Q}{V_{12}} = \frac{\cancel{Q}}{\frac{\cancel{Q}}{2\pi\epsilon L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\left(b/a\right)}$$