Silindirik Koordinat Sistemi

Uzaydaki herhangi bir P noktası :

i) Merkez ekseni z ekseni olan ve P noktasından geçen bir silindir;

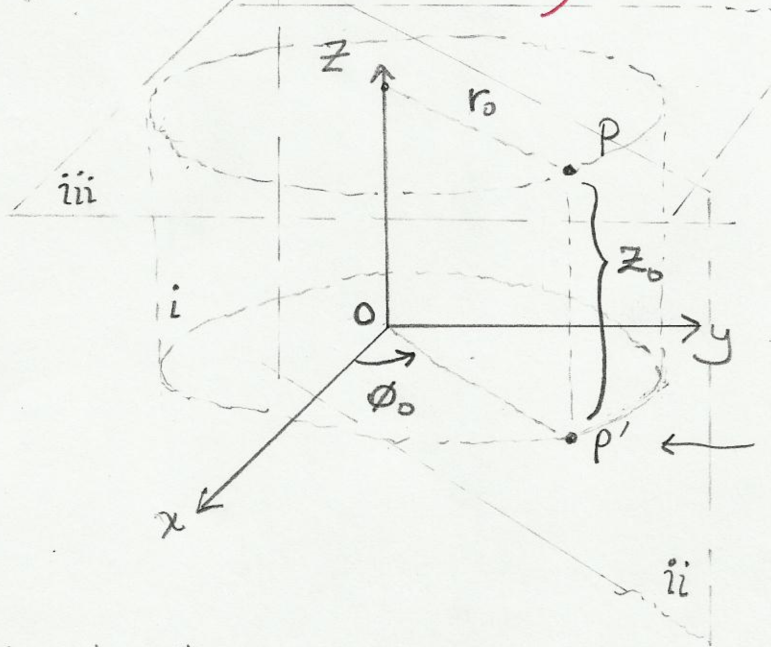
ii) Hem z eksenini kesen, hem de P noktasında geçen bir düzlem; ve

iii) xy düzlemine paralel olan ve P noktasından geçen bir düzlem

olmak üzere 3 adet düzlemin kesişim kümesi olarak ifade edilebilir.

* Bu şekilde tanımlanmış 3 düzlem, uzaydaki her noktada birbirleriyle ikişerli olarak dik kesişir ⇒ Böylece, ortogonal bir koordinat sistemi tanımlanmış olur.

$$\left.\begin{array}{l} \text{i) } r = r_0 \text{ yarıçaplı silindir} \\ \text{ii) } \phi = \phi_0 \text{ düzlemi} \\ \text{iii) } z = z_0 \text{ düzlemi} \end{array}\right\} \text{ ise } P(r_0, \phi_0, z_0) \text{ olarak silindirik koordinatlarda tanımlanabilir.}$$



Bu tanımlar ile :

Bazı kaynaklarda r yerine ρ değişkeni de kullanılmaktadır.

* r_0 değeri, P noktasının z eksenine mesafesidir.
* ϕ_0 değeri, OP' doğru parçasının x ekseni ile yaptığı açıdır.
* z_0 değeri, PP' doğru parçasının uzunluğudur.

$$P(\underbrace{r_0}_{\text{uzunluk}}, \overbrace{\phi_0}^{\text{açı}}, \underbrace{z_0}_{\text{uzunluk}})$$

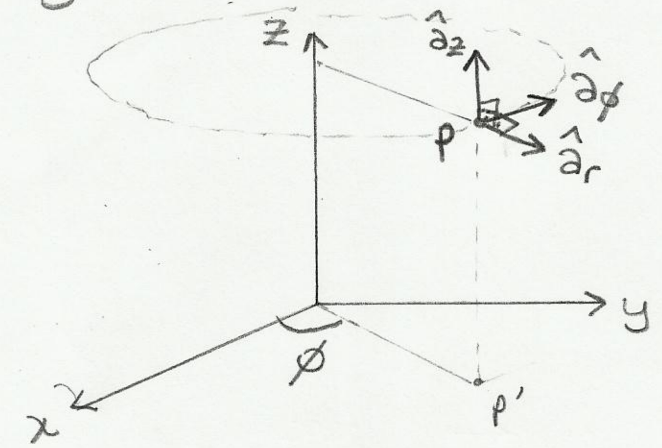
$r_0 \geq 0$, $0 < \phi_0 < 2\pi$ (radyan) , $-\infty < z_0 < \infty$

Hatırlatma: Kartezyen koordinatlarda $P(x_0, y_0, z_0)$ → uzunluk

$-\infty < x_0 < \infty$, $-\infty < y_0 < \infty$, $-\infty < z_0 < \infty$

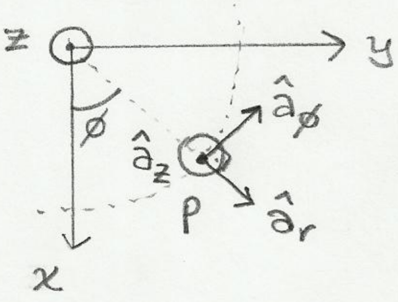
Birim Vektörler:

Her bir yöndeki birim vektör, ilgili değişkenin artışı yönündedir.



İzometrik Görünüm

Önemli not: Şekillerden de görülebileceği üzere $\hat{a}_r$, $\hat{a}_\phi$, $\hat{a}_z$ vektörlerinin oryantasyonu her noktada farklıdır.



Üstten Görünüm

Bu tanımlar doğrultusunda: $\hat{a}_r \times \hat{a}_\phi = \hat{a}_z$, $\hat{a}_\phi \times \hat{a}_r = -\hat{a}_z$

$\hat{a}_\phi \times \hat{a}_z = \hat{a}_r$, $\hat{a}_z \times \hat{a}_\phi = -\hat{a}_r$

$\hat{a}_z \times \hat{a}_r = \hat{a}_\phi$, $\hat{a}_r \times \hat{a}_z = -\hat{a}_\phi$

Kolay Hatırlamak için:

$r \rightarrow \phi \rightarrow z \rightarrow r$ +

saat yönü +

tersi −

Birim vektörler her noktada birbirine diktir ⇐ Ortogonalite

$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_\phi = 0$; $\hat{a}_r \cdot \hat{a}_z = 0$; $\hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_z = 0$

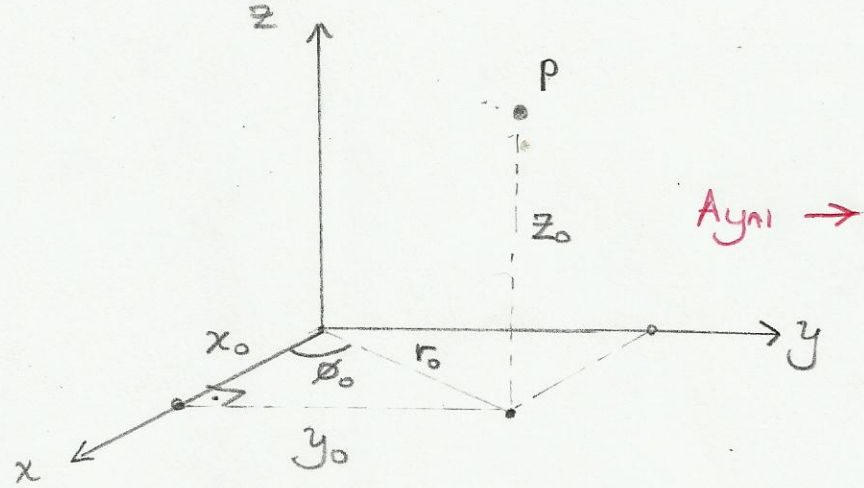
* Dolayısıyla, 3 boyutlu uzaydaki herhangi bir vektör, $\hat{a}_r$, $\hat{a}_\phi$, $\hat{a}_z$ cinsinden ifade edilebilir !...

Silindirik ve Kartezyen Koordinat Sistemleri Arasındaki İlişki

* Uzaydaki her bir P noktası, Kartezyen koordinat sisteminde ifade edilebileceği gibi, Silindirik koordinat sisteminde de ifade edilebilir.

P noktasının Kartezyen koordinatlardaki gösterimi $P(x_o, y_o, z_o)$;

Silindirik " " " $P(r_o, \phi_o, z_o)$ olsun.



$$x_o = r_o \cos \phi_o$$

$$y_o = r_o \sin \phi_o$$

Aynı → $z_o = z_o$

$$r_o = \sqrt{x_o^2 + y_o^2}$$

$$\phi_o = \tan^{-1}\left(\frac{y_o}{x_o}\right)$$

* Öte yandan, uzaydaki herhangi bir $\bar{A}$ vektörü, Kartezyen Koordinat sisteminde ifade edilebileceği gibi, Silindirik koordinat sisteminde de ifade edilebilir.

$\bar{A}$ vektörü, Kartezyen koordinat sisteminin birim vektörleri cinsinden

$\bar{A} = \hat{a}_x A_x + \hat{a}_y A_y + \hat{a}_z A_z$ şeklinde;

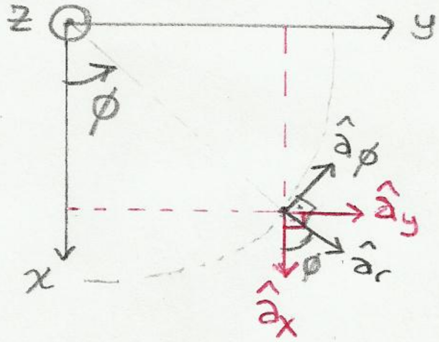
Silindirik koordinat sisteminin birim vektörleri cinsinden ise

$\bar{A} = \underbrace{\hat{a}_r A_r}_{\substack{\bar{A}\text{'nın } r \\ \text{yönündeki} \\ \text{bileşeni}}} + \underbrace{\hat{a}_\phi A_\phi}_{\substack{\bar{A}\text{'nın } \phi \\ \text{yönündeki} \\ \text{bileşeni}}} + \underbrace{\hat{a}_z A_z}_{\substack{\bar{A}\text{'nın } z \\ \text{yönündeki} \\ \text{bileşeni}}}$ şeklinde ifade ediliyor olsun.

A_x, A_y ve A_r, A_ϕ arasındaki ilişki nedir?

z değişkeni her iki koordinat sisteminde aynı şekilde tanımlandığı için ($\hat{a}_z$'ler aynı olduğu için); A_z'ler aynıdır!

$\hat{a}_z$, her iki koordinat sisteminde de aynı olduğu için $\hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_r$ ve $\hat{a}_\phi$ birim vektörlerini inceleyelim.



$$\bar{A} = \hat{a}_x A_x + \hat{a}_y A_y + \hat{a}_z A_z$$

$$\bar{A} = \hat{a}_r A_r + \hat{a}_\phi A_\phi + \hat{a}_z A_z$$

$$A_x = \bar{A} \cdot \hat{a}_x = \left(\hat{a}_r A_r + \hat{a}_\phi A_\phi + \hat{a}_z A_z\right) \cdot \hat{a}_x$$

$$= \left(\hat{a}_r \cdot \hat{a}_x\right) A_r + \left(\hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_x\right) A_\phi + \underbrace{\left(\hat{a}_z \cdot \hat{a}_x\right)}_{0} A_z$$

$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_x = \cos\phi \leftarrow$ aralarındaki açı ϕ olduğu için

$\hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_x = \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \leftarrow$ aralarındaki açı $\phi + \frac{\pi}{2}$ olduğu için

$= -\sin\phi$

Dolayısıyla $A_x = \bar{A} \cdot \hat{a}_x = A_r \cos\phi - A_\phi \sin\phi$ (1)

Benzer bir yaklaşımla:

$$A_y = \bar{A} \cdot \hat{a}_y = \left(\hat{a}_r A_r + \hat{a}_\phi A_\phi + \hat{a}_z A_z\right) \cdot \hat{a}_y$$

$$= \left(\hat{a}_r \cdot \hat{a}_y\right) A_r + \left(\hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_y\right) A_\phi + \underbrace{\left(\hat{a}_z \cdot \hat{a}_y\right)}_{0} A_z$$

$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin\phi$

$\hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_y = \cos\phi$

Dolayısıyla $A_y = \bar{A} \cdot \hat{a}_y = A_r \sin\phi + A_\phi \cos\phi$ (2)

Ayrıca $A_z = A_z$ (3)

Bu 3 denklemi beraber düşünürsek:

$$A_x = A_r \cos\phi - A_\phi \sin\phi$$
$$A_y = A_r \sin\phi + A_\phi \cos\phi$$
$$A_z = A_z$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

← Bu matris denklemi, A_x, A_y, A_z'yi A_r, A_ϕ, A_z cinsinden yazmamızı sağlar.

Soru: A_r, A_ϕ, A_z'yi A_x, A_y, A_z cinsinden nasıl yazabiliriz?

Çözüm 1: Bir önceki yaklaşıma benzer şekilde:

$$A_r = \bar{A} \cdot \hat{a}_r = (\hat{a}_x A_x + \hat{a}_y A_y + \hat{a}_z A_z) \cdot \hat{a}_r$$

$$A_\phi = \bar{A} \cdot \hat{a}_\phi = (\hat{a}_x A_x + \hat{a}_y A_y + \hat{a}_z A_z) \cdot \hat{a}_\phi$$

$$A_z = A_z$$

....

Çözüm 2: Yukarıda elde ettiğimiz T matrisinin tersini (T^{-1}) hesaplarsak

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$