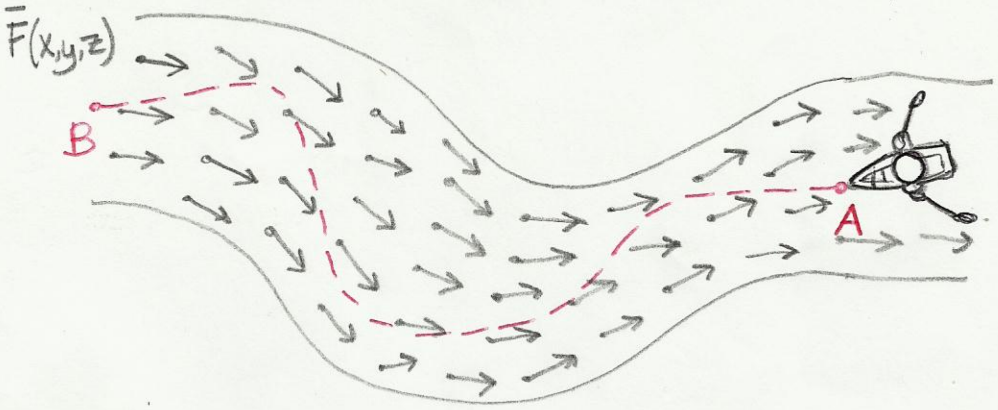
Çizgi (Kontur) İntegrali

Bir dere yatağına üstten bakıyor olalım. Deredeki akıntı, ve bu akıntının sebep olduğu kuvvet, aslen bir vektörel alan oluşturur.



Bir kürekçi, A noktasından hareket ederek kırmızı çizgiyle gösterilen güzergâh (kontur) üzerinden B noktasına gitmeye çalışıyor olsun.

Kürekçinin, akıntının uyguladığı kuvvete karşı yaptığı iş nasıl hesaplanabilir?

İşi hesaplamak için İş = Kuvvet x Yol formülünden yararlanabilir miyiz?

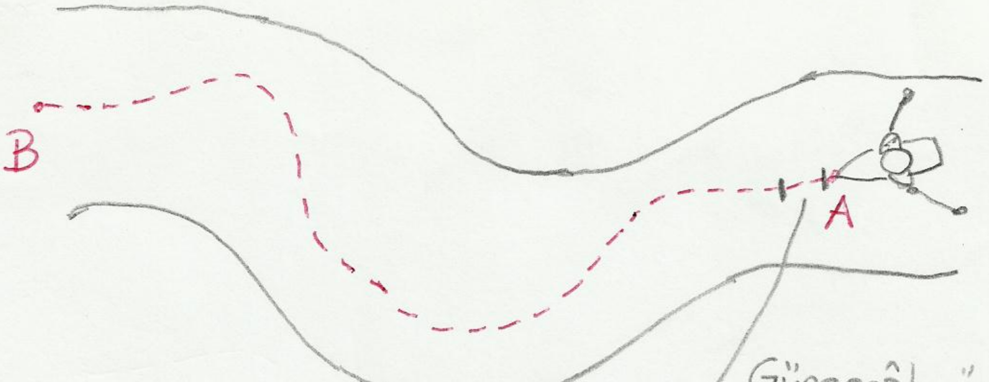
Söz konusu formül, ancak yol boyunca kuvvetin sabit olması ve kuvvetin yola paralel olması durumunda doğrudan (direkt) kullanılabilir. Bizim problemimizde kuvvetin şiddetinin ve yönünün gidilen güzergâh boyunca sabit olmaması dolayısıyla doğrudan kullanılması pek mümkün gözükmemektedir.

Ancak, A ile B arasındaki kırmızı çizgi ile gösterilen güzergâhı "yeteri kadar" küçük parçalara bölersek ...

⇒ "yeteri kadar" küçük parça ile kastedilen:

Her bir parça o kadar küçük olmalı ki, küçük parça boyunca $\bar{F}(x,y,z)$ sabit kabul edilebilsin!...

↙ sabit şiddette ↘ sabit yönde



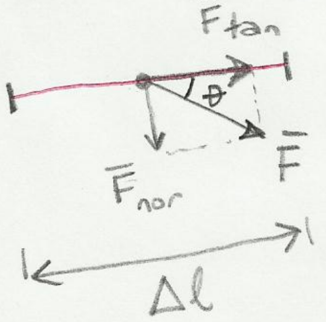
Güzergâh üzerindeki bu küçük parçayı ele alalım.

Parçayı o kadar küçük seçiyoruz ki, güzergâh boyunca $\overline{F}$ sabit

$\overline{F}$: söz konusu küçük parçanın orta noktasında kuvvet vektörü

Küçük parça boyunca ilerlerken, $\overline{F}$'in güzergâha teğet olan bileşenine karşı iş yapılmaktadır.

Δl: küçük parçanın uzunluğu



Bu küçük parça üzerinde artık

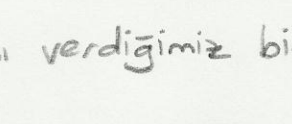
İş = Kuvvet x Yol

formülü doğrudan uygulanabilir !...

$$\Delta W = \left|\overline{F}_{tan}\right| \Delta l$$

Küçük parça üzerinde ilerlemek için yapılan iş

$\overline{\Delta l}$ adını verdiğimiz bir vektör tanımlayalım.



$\overline{\Delta l} = \underbrace{\hat{a}_{tan}}_{\text{güzergâha teğet yönde birim vektör}} \Delta l$ olsun.

$\overline{\Delta l}$'nin şiddeti Δl, güzergâhın uzunluğuna eşit olsun.

Bu tanımla, $\Delta W = |\bar{F}_{tan}|\,\Delta \ell = |\bar{F}| \cos\theta \, \Delta \ell$

$= \bar{F} \cdot \Delta \bar{\ell}$ olarak yazılabilir !...

A'dan B'ye kırmızı çizgili güzergâh üzerinden giderken yapılan toplam iş, güzergâh üzerindeki bütün küçük parçalarda yapılan işlerin toplamı olarak ifade edilebilir.

Yani, $W \cong \sum_i \Delta w_i = \sum_i \bar{F}_i \cdot \Delta \bar{\ell}_i$

Eğer küçük parçalar, sonsuz derecede küçük seçilirse

$$W = \lim_{|\Delta \bar{\ell}_i| \to 0} \sum_i \Delta w_i = \lim_{|\Delta \bar{\ell}_i| \to 0} \sum_i \bar{F}_i \cdot \Delta \bar{\ell}_i$$

$= \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{\ell}$ olarak ifade edilebilir

↑

"A'dan B'ye kontur integrali"

Bu örnekte : $W = \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{\ell}$

skaler değer (Newton . metre)

vektörel alan Kuvvet (Newton)

skaler çarpım

vektör (metre)

Genel olarak: $C = \int_A^B \bar{A} \cdot d\bar{\ell}$

Vektör (Birimi metre)

skaler çarpım

Birimi Kappa.metre ⇐ Birimi Kappa

(Skaler) (Vektörel Alan)

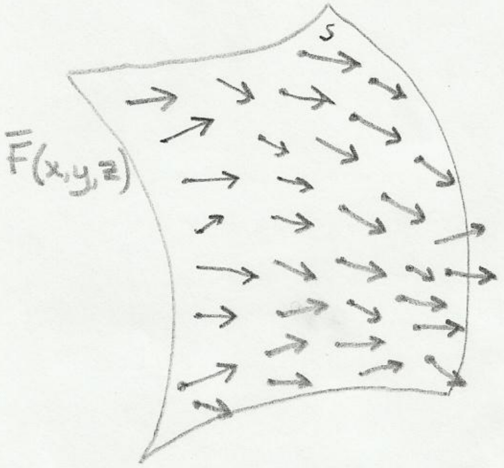
Eğer konturun başlangıç ve bitiş noktaları aynı ise (bir başka deyişle, kontur bir alanı çevreliyor ise) bu durumda kontur integrali

$\oint_c$ işareti ile gösterilir.

c ← c: contour

Yüzey (Alan) İntegrali:

Farklı konumlarda farklı şiddet ve yönlerde değerler alan karmaşık bir vektörel alanın, bombeli bir yüzey üzerinde oluşturduğu "akı" değerini nasıl hesaplarız?



"Akı" nedir?

Akı, bir vektörel alanın bir yüzeyi ne kadar delip geçtiğine dair skaler bir ölçüttür.

Vektörel alanın sabit ve söz konusu yüzeye dik olması durumunda

$$\text{Akı} = \begin{pmatrix}\text{Vektörel} \\ \text{Alanın} \\ \text{Şiddeti}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Yüzey} \\ \text{Alanı}\end{pmatrix}$$

olarak ifade edilebilir!...

Peki yukarıdaki karmaşık problemde Akı = Vektörel Alanın Şiddeti x Yüzey Alanı formülü doğrudan uygulanamayacağına göre, problemin çözümünde nasıl bir yöntem izlenmelidir?

Bombeli S yüzeyini, "yeteri kadar küçük" parçalara bölersek ...

⇒ "yeteri kadar" küçük parça ile kastedilen:

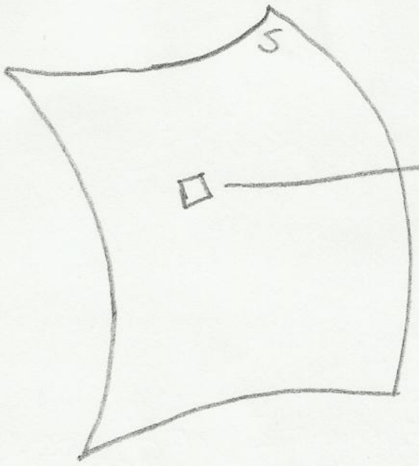
Her bir parça o kadar küçük olmalı ki:

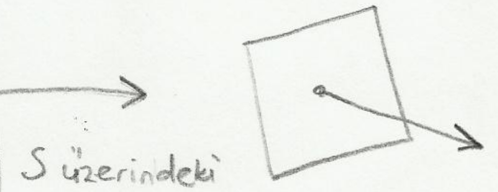
i) Küçük parça bombesiz kabul edilebilsin!...

ii) Küçük parça üzerinde $\bar{F}(x,y,z)$ sabit kabul edilebilsin!...

↓ sabit şiddette

→ sabit yönde





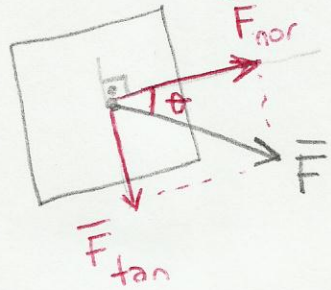
Δs : küçük parçanın yüzey alanı

S üzerindeki bu küçük parçayı ele alalım.

$\bar{F}$: söz konusu küçük parçanın orta noktasında vektörel alanın aldığı değer

Parçayı o kadar küçük seçiyoruz ki, bu yüzey üzerinde her yerde $\bar{F}$ sabit

Küçük parça üzerinde, sadece $\bar{F}$'in dik bileşeni "akı" oluşturur.



$$\text{Akı} = \begin{pmatrix}\text{Vektörel} \\ \text{Alanın} \\ \text{Şiddeti}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Yüzey} \\ \text{Alanı}\end{pmatrix}$$

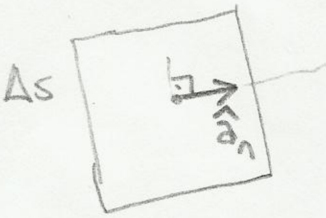
formülü artık direkt uygulanabilir!...

$$\Delta\Phi = \left|\bar{F}_{nor}\right| \Delta s$$

↑

Küçük parça üzerindeki akı

$\Delta\bar{s}$ adını verdiğimiz bir vektör tanımlayalım.



$$\Delta\bar{s} = \underbrace{\hat{a}_n}_{\substack{\text{yüzeye dik yönde} \\ \text{(normal) birim} \\ \text{vektör}}} \Delta s \quad \text{olsun}$$

Δs → $\Delta\bar{s}$'in şiddeti Δs, küçük parçanın yüzey alanı olsun.

Bu tanımla, $\Delta\Phi = \left|\bar{F}_{nor}\right| \Delta s = \left|\bar{F}\right| \cos\theta \, \Delta s = \bar{F} \cdot \Delta\bar{s}$

olarak yazılabilir!...

Bütün S yüzeyi üzerindeki toplam akı, yüzey üzerindeki bütün küçük parçalar üzerindeki akıların toplamı olarak ifade edilebilir.

Yani, $\Phi \cong \sum_i \Delta\Phi_i = \sum_i \bar{F}_i \cdot \Delta\bar{s}_i$

Eğer küçük parçalar, sonsuz derecede küçük seçilirse

$$\Phi = \lim_{|\Delta\bar{s}_i| \to 0} \sum_i \Delta\Phi_i = \lim_{|\Delta\bar{s}_i| \to 0} \sum_i \bar{F}_i \cdot \Delta\bar{s}_i$$

$$= \int_S \bar{F} \cdot d\bar{s}$$ olarak ifade edilebilir.

Genel olarak $\Phi = \int_S \bar{F} \cdot d\bar{l}$

Φ: Skaler Değer (Birimi: kappa. metre^2)

$\bar{F}$: Vektörel Alan (Birimi: Kappa)

$\cdot$: Skaler çarpım

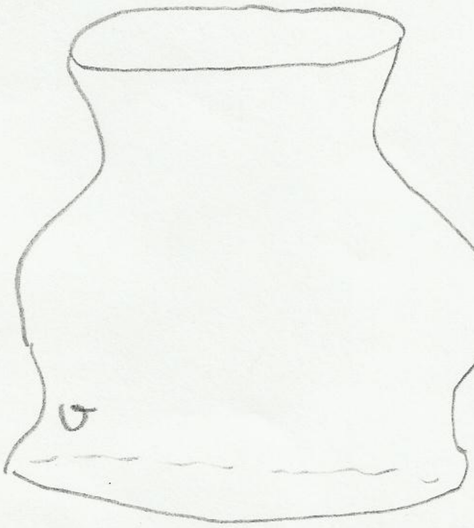
$d\bar{l}$: Vektör (Birimi: metre^2)

Eğer S yüzeyi, bir hacim çevreliyorsa S yüzeyine kapalı yüzey adı verilir; ve Yüzey İntegrali $\oint_S$ işareti ile gösterilir.

$S \to S$: surface

Hacim İntegrali

Yoğunluk bakımından inhomojen bir materyal, karmaşık şekilli bir bidon/varil/fıçı içerisine doldurulmuş olsun. Bidonun içerisindeki toplam materyalin toplam kütlesini nasıl hesaplarız?



Normalde Kütle = Hacim x Yoğunluk ifadesini biliyoruz.

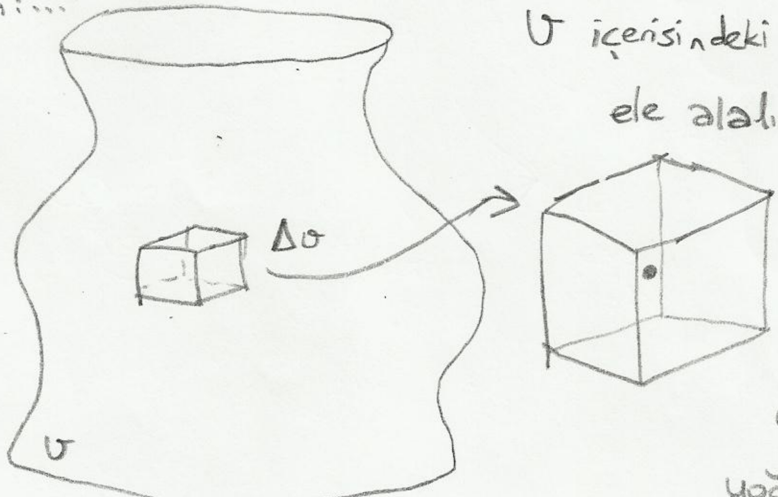
Ancak yukarıdaki karmaşık problemde, bu formül doğrudan kullanılamaz.

Karmaşık υ hacmini "yeteri kadar" küçük parçalara bölersek ...

$\Rightarrow$ "yeteri kadar" küçük parça ile kastedilen:

Her bir parça o kadar küçük olmalı ki, küçük parça içerisinde kalan materyal homojen kabul edilebilsin $\Rightarrow$ küçük parça içerisindeki yoğunluk, sabit kabul edilebilsin!...

$\Delta\upsilon$: küçük parçanın hacmi



υ içerisindeki bu küçük parçayı ele alalım.

d: söz konusu küçük parçanın orta noktasında yoğunluk fonksiyonunun aldığı değer

Parçayı o kadar küçük seçiyoruz ki, bu hacim içerisinde her yerde yoğunluk sabit

Artık Kütle = Hacim x Yoğunluk formülü direkt uygulanabilir.

$$\Delta m = \Delta\upsilon \; d$$

$\uparrow$

Küçük parça içerisindeki materyalin kütlesi

Bütün υ hacmi içerisindeki toplam materyalin toplam kütlesi, bütün küçük parçalar içerisinde kalan materyallerin kütleleri toplamıdır.

$$m \cong \sum_i \Delta m_i = \sum_i d_i \, \Delta\upsilon_i$$

Bütün küçük parçalar, sonsuz derecede küçük seçilirse $m = \lim\limits_{\Delta\upsilon_i \to 0} \sum_i \Delta m_i$

$$= \lim_{\Delta\upsilon_i \to 0} \sum_i d_i \, \Delta\upsilon_i = \int_\upsilon d \; d\upsilon$$

Bu örnekte $m = \int_{v} d \; dv$

Skaler değer (kütle) (Birimi : kg)

Skaler alan (yoğunluk) (Birimi : kg/m^3)

normal çarpım

skaler (hacim) (Birimi : $metre^3$)

Genel olarak

$$g = \int_{v} f \; dv$$

skaler değer (Birimi : Kappa . $metre^3$)

skaler alan (Birimi : Kappa)

normal çarpım

skaler (Birimi : $metre^3$)