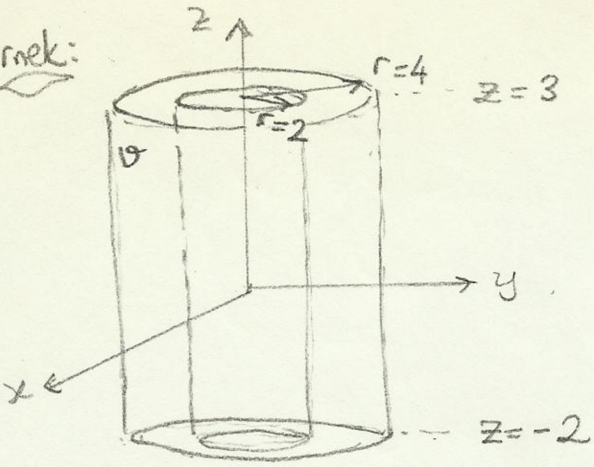
Örnek:



ϑ hacmi

Şekilde görülen silindirik kabuk içerisinde yoğunluğu ρ fonksiyonu ile ifade edilen bir materyal var.

Hacmin tamamı materyal ile dolu olduğuna göre, materyalin toplam kütlesi m nasıl hesaplanır?

$$m = \int_{\vartheta} \rho \, d\vartheta = \int_{\vartheta} \rho \underbrace{r\,dr\,d\phi\,dz}_{\text{Silindirik koordinatlarda } d\vartheta \text{ ifadesi}} = \int_{z=-2}^{3}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{r=2}^{4} \rho\, r\,dr\,d\phi\,dz$$

$m \to g$, $\rho \to g/m^3$, $d\vartheta \to m^3$

Örnek: $R=R_1$ ve $R=R_2$ küreleri arasında kalan bölge (küresel kabuk) içerisinde ρ_ϑ (C/m^3) olarak ifade edilen bir yük yoğunluğu var. Küresel kabuk içerisindeki toplam yük miktarını bulunuz.

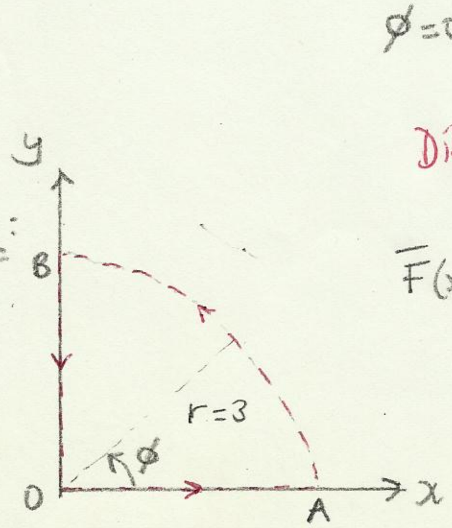
$$Q = \int_{\vartheta} \rho_\vartheta \, d\vartheta = \int_{\vartheta} \rho_\vartheta \underbrace{R^2 \sin\theta \, dR\, d\theta\, d\phi}_{\text{Küresel koordinatlarda } d\vartheta \text{ ifadesi}}$$

$Q \to C$, $\rho_\vartheta \to C/m^3$, $d\vartheta \to m^3$

$$= \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{R=R_1}^{R=R_2} \rho_\vartheta R^2 \sin\theta \, dR\, d\theta\, d\phi$$

Dikkat, θ, 0'dan π'ye!...

Örnek:



$\bar{F}(x,y,z) = \hat{a}_x\, xy - \hat{a}_y\, 2x$ ise $\oint_{OABO} \bar{F}\cdot d\bar{l} = ?$

$$\oint_{OABO} \bar{F}\cdot d\bar{l} = \int_{O}^{A} \bar{F}\cdot d\bar{l} + \int_{A}^{B} \bar{F}\cdot d\bar{l} + \int_{B}^{O} \bar{F}\cdot d\bar{l}$$

OA güzergâhı üzerinde $y=0$.

Dolayısıyla $\bar{F}(x,y,z) = \hat{a}_x \underbrace{\cancel{xy}}_{0} - \hat{a}_y 2x = -\hat{a}_y 2x$ ve $d\bar{l} = \hat{a}_x dx$

$$\Rightarrow \bar{F}\cdot d\bar{l} = 0 \Rightarrow \int_0^A \bar{F}\cdot d\bar{l} = 0$$

AB güzergâhı üzerinde $x^2+y^2=9$ ve $d\bar{l} = \hat{a}_x dx + \hat{a}_y dy$

$$\Rightarrow \bar{F}\cdot d\bar{l} = (\hat{a}_x xy - \hat{a}_y 2x)\cdot(\hat{a}_x dx + \hat{a}_y dy)$$

$$= xy\,dx - 2x\,dy$$

$$\Rightarrow \int_A^B \bar{F}\cdot d\bar{l} = \int_{?}^{?} xy\,dx - \int_{?}^{?} 2x\,dy = \int_3^0 xy\,dx - \int_0^3 2x\,dy$$

A noktasından B noktasına giderken :

x'in değişimine bakarak karar vermeliyiz !

y'nin değişimine bakarak karar vermeliyiz !

y'yi, x cinsinden ifade etmeliyiz

Burada da, x'i y cinsinden ifade etmeliyiz

$y = \sqrt{9-x^2}$ $\qquad$ $x = \sqrt{9-y^2}$

$$\Rightarrow \int_A^B \bar{F}\cdot d\bar{l} = \int_3^0 x\sqrt{9-x^2}\,dx - \int_0^3 2\sqrt{9-y^2}\,dy$$

BO güzergâhı üzerinde $x=0$

Dolayısıyla $\bar{F}(x,y,z) = \hat{a}_x \underbrace{\cancel{x}y}_{0} - \hat{a}_y \underbrace{\cancel{2x}}_{0} = 0 \Rightarrow \bar{F}\cdot d\bar{l} = 0$

$$\Rightarrow \int_B^0 \bar{F}\cdot d\bar{l} = 0$$

Örnek: Küresel koordinatlarda $\bar{A}$ vektörel alanı, $\bar{A} = \hat{a}_R f(R)$ şeklinde ifade edilebiliyor. [$f(R)$, sadece R değişkenine bağımlı skaler bir fonksiyon]

a) $\bar{A}$'nın irrotasyonel olduğunu gösteriniz !...

İRROTASYONEL $\Leftrightarrow$ $\bar{\nabla}\times\bar{A} = 0$ olmalı.

$$\overline{\nabla}\times\overline{A} = \frac{1}{R^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{a}_R & \hat{a}_\theta R & \hat{a}_\phi R\sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_R & R A_\theta & (R\sin\theta) A_\phi \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{R^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{a}_R & \hat{a}_\theta R & \hat{a}_\phi R\sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ f(R) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \overline{A}\text{, irrotasyoneldir!}$$

$$\begin{matrix} \hat{a}_R & \hat{a}_\theta R & \hat{a}_\phi R\sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \end{matrix}$$

$\hat{a}_\phi R\sin\theta \dfrac{\partial f(R)}{\partial \theta} = 0$, 0 , 0

0 , 0 , $\hat{a}_\theta R \dfrac{\partial f(R)}{\partial \phi} = 0$

f, sadece R'ye bağımlı olduğuna göre, θ'ya göre kısmi türevi 0'dır!...

f, sadece R'ye bağımlı olduğuna göre, ϕ'ye göre kısmi türevi 0'dır!...

b) $\overline{A}$, solenoidal midir?

SOLENOİDAL $\Leftrightarrow$ $\overline{\nabla}\cdot\overline{A} = 0$ olmalı!...

$$\overline{\nabla}\cdot\overline{A} = \frac{1}{R^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\sin\theta A_R\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(R\sin\theta A_\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(R A_\phi\right)\right]$$

ve $\overline{A} = \hat{a}_R \underbrace{f(R)}_{A_R} = \hat{a}_R A_R + \hat{a}_\theta \underbrace{A_\theta}_{0} + \hat{a}_\phi \underbrace{A_\phi}_{0}$

$$\Rightarrow \overline{\nabla}\cdot\overline{A} = \frac{1}{R^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial R}\underbrace{\left(R^2\sin\theta f(R)\right)}\right]$$

Eğer $R^2 f(R)$ teriminin R'ye göre kısmi türevi 0'dan farklıysa $\overline{\nabla}\cdot\overline{A} \neq 0 \Rightarrow \overline{A}$, solenoidal değil!...