

1. Regulador PID

1. Regulador PID	1
1.1. Introducción	2
1.2. Discretización	3
1.2.1. Operador Derivada	3
1.2.2. Discretización por Partes	4
1.3. Efecto Windup	4
1.4. Efecto Bumpless	5
1.5. Ajuste del PID	6
1.5.1. Relación entre ambos métodos:	8
1.5.2. Método de Asignación de Polos.	10
1.5.3. Realimentación con Relé	12
1.5.4. Síntesis Directa	12

1.1. Introducción

El regulador más usado en control de procesos es el PID cuya representación es la siguiente:

$$u(t) = K \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(s) ds + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (1.1)$$

siendo u la variable de control y e la diferencia entre la referencia y la salida.

Se observan, dentro del corchete, tres términos representando la acción P , I y D respectivamente.

La acción proporcional es el control por realimentación más simple que se pueda obtener. De todos modos ya incorpora ventajas en el comportamiento dinámico del sistema en lazo cerrado. Por ejemplo sea un sistema de primer orden

$$Y(s) = \frac{A}{1 + sT} U(s) \quad (1.2)$$

Si se lo realimenta con un regulador P resulta

$$Y(s) = \frac{\frac{KA}{1 + st}}{1 + \frac{KA}{1 + st}} R(s) = \frac{\frac{KA}{1 + st}}{1 + s \frac{t}{1 + KA}} R(s) \quad (1.3)$$

La constante de tiempo en lazo abierto es t , en cambio en lazo cerrado es $\frac{t}{1 + KA}$. Al aumentar K el sistema se hace más rápido. Además la ganancia en lazo abierto es A y en lazo cerrado $\frac{KA}{1 + KA}$. A medida que K aumenta, la ganancia tiende a uno, objetivo buscado en el control.

Sin embargo, solo con $K = \infty$ llegaríamos a ganancia uno es decir que no se tendría error en régimen permanente. En este ejemplo sencillo no habría problema en aumentar la ganancia. Pero en sistemas más complejos aumentar la ganancia implicaría transitorios oscilantes o directamente sistemas inestables.

De aquí surge la idea de la acción integral cuya función es eliminar el error en régimen estacionario. El segundo término de la ecuación (1.1) muestra que esta acción es proporcional a la *integral* del error. Por lo tanto este factor dejará de integrar, es decir se estabilizará, solo cuando el error sea nulo que es el objetivo buscado.

Por último el término D es utilizado para mejorar los transitorios del sistema y el comportamiento frente a perturbaciones. Como lo indica su nombre, su tarea es oponerse a cualquier cambio brusco en el error. Por ejemplo, en los casos en que el error esté próximo al

cero pero variando con una cierta velocidad, el término P no tendría casi efecto pero sí el aporte derivativo.

En muchos controladores comerciales se hace una modificación a este aporte definiéndolo como:

$$D = -K T_d \frac{dy(t)}{dt} \quad (1.4)$$

O sea se lo hace proporcional a la velocidad de cambio de la salida. Esto evita que cuando haya cambios en el valor de referencia se produzcan movimientos abruptos de la salida. De todos modos, en régimen estacionario seguirá teniendo las mismas propiedades que el original.

Cabe notar que cuando la derivada de y es muy alta, por ejemplo en el caso de ruido de alta frecuencia, la acción derivativa puede tener un valor elevado indeseable. En muchos reguladores se recorta este efecto con algún tipo de filtro como el siguiente

$$sT_d \approx \frac{sT_d}{1 + \frac{sT_d}{N}} \quad (1.5)$$

con $N \approx 3 \cdots 20$, que limita el efecto en altas frecuencias

En definitiva, el regulador resulta:

$$U(s) = K \left[bR(s) - Y(s) + \frac{1}{sT_i} (R(s) - Y(s)) - \frac{sT_d}{1 + \frac{sT_d}{N}} Y(s) \right] \quad (1.6)$$

1.2. Discretización

La mayoría de los controladores comerciales están basados en microprocesadores u otros elementos de cálculo digital. Por lo tanto la forma que toma el regulador PID es la de su representación discreta.

1.2.1. Operador Derivada

Si utilizamos, por ejemplo la aproximación por operador derivada, siendo T el período de muestreo resulta,

$$u_k = K \left[e_k + \frac{T}{T_i} \sum_{j=0}^k e_j + \frac{T_d}{T} (e_k - e_{k-1}) \right] \quad (1.7)$$

del mismo modo en el instante siguiente

$$u_{k-1} = K_p \left[e_{k-1} + k_i \sum_{j=0}^{k-1} e_j + k_d (e_{k-1} - e_{k-2}) \right] \quad (1.8)$$

restando miembro a miembro

$$u_k - u_{k-1} = k_p [e_k - e_{k-1} + k_i e_k + k_d (e_k - 2e_{k-1} + e_{k-2})] \quad (1.9)$$

$$u_k - u_{k-1} = k_p [(1 + k_i + k_d) e_k - (1 + 2k_d) e_{k-1} + k_d e_{k-2}] \quad (1.10)$$

de modo que la función de transferencia en Z queda de la siguiente forma:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} z^{-1} + \mathbf{g} z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (1.11)$$

1.2.2. Discretización por Partes

De la ecuación (1.6), el aporte proporcional

$$P(t) = K (br(t) - y(t)) \quad (1.12)$$

no necesita aproximación

$$P(kT) = K (br(kT) - y(kT)) \quad (1.13)$$

La parte integral se aproxima en adelanto

$$I((k+1)T) = I(kT) + \frac{KT}{T_i} e(kT) \quad (1.14)$$

La parte derivativa,

$$\frac{T_d}{N} \frac{dD}{dt} + D = -KT_d \frac{dy(t)}{dt} \quad (1.15)$$

tomando diferencias hacia atrás, resulta

$$D(kT) = \frac{T_d}{T_d + NT} D((k-1)T) - \frac{KT_d N}{T_d + NT} (y(kT) - y(k-1)) \quad (1.16)$$

Esta aproximación es siempre estable y el polo derivativo tiende a cero con $T_d \rightarrow 0$

El control total es la suma de los tres términos

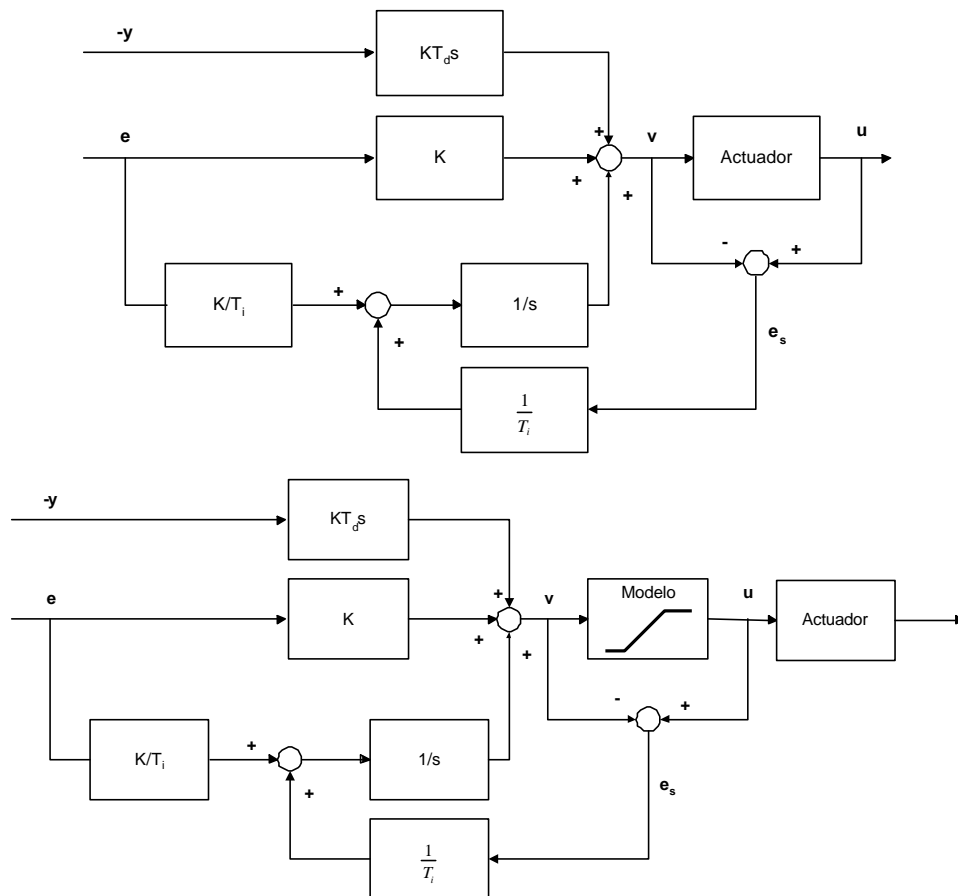
$$u(kT) = P(kT) + I(kT) + D(kT) \quad (1.17)$$

1.3. Efecto Windup

Normalmente se introduce otro efecto que es el de *Antireset wind up*. Este mecanismo lo que hace es saturar el término integral en un valor fijado a fin de evitar actuaciones exageradamente grandes. Recuérdese que el PI es intrínsecamente inestable, por lo tanto si integra mucho tiempo tarda en volver a cero. Cuando el error es grande, puede ocurrir que el

actuador se sature, pero el PID continúa integrando y puede llegar a valores muy altos. Cuando el error se reduce, la parte integral también comenzará a reducirse pero desde un valor muy grande. Esto puede llevar mucho tiempo hasta que se logre la estabilidad. Una forma de evitar esto es limitar la salida, otra es solo integrar para errores pequeños.

Si se puede medir la salida real del actuador se puede implementar el siguiente esquema *antwindup*



1.4. Efecto Bumpless

En la práctica se introducen algunas otras modificaciones para hacerlo más robusto. Una de ellas es el llamado efecto *Bumpless* para evitar acciones bruscas de control al pasar de manual a automático.

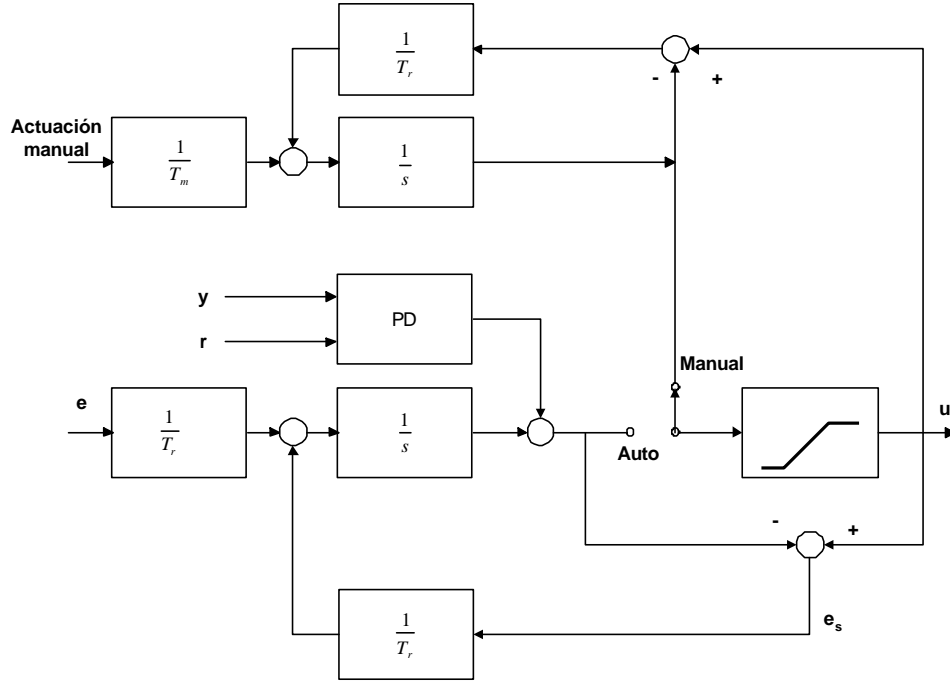


Ilustración 1-1 Pid con Efecto Bumpless

$$u_k = k e_k + \frac{a}{1 - (1 - a) z^{-1}} u_{k-1} \quad (1.18)$$

$$u_k = k \left[1 + \frac{a}{z - 1} \right] e_k = k \left[\frac{z - 1 + a}{z - 1} \right] e_k$$

con lo que resulta un PID. Pero en manual, la actuación será la que se impuesta manualmente y el término b seguirá a u_m de la forma:

$$b_k = \frac{a z^{-1}}{1 - (1 - a) z^{-1}} u_{mk} \quad (1.19)$$

Suponiendo que u_m permanezca constante, b tenderá a este valor. Si al conectar nuevamente el automático no hay error, la actuación coincidirá con el último valor manual sin que haya ningún pico.

$$\begin{cases} u_k = u_{k-1} + e_k - a e_{k-1} \\ u_k = u_m \text{ en manual} \end{cases} \quad (1.20)$$

1.5. Ajuste del PID

Existen muchos métodos para el cálculo de K , T_i y T_d ya sea en forma empírica o analítica. Los más clásicos son los métodos de Ziegler-Nichols (1942) tanto a partir de la respuesta al escalón como de la respuesta en frecuencia.

El método de Ziegler-Nichols basado en la respuesta en frecuencia o en cadena cerrada consiste en lo siguiente: Se realimenta la planta con un regulador proporcional aumentando su ganancia hasta que el sistema presente una oscilación no amortiguada.

Se mide la ganancia crítica K_c y el período t_c de las oscilaciones ajustando los parámetros del regulador según la tabla siguiente:

Controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0,5K_c$		
PI	$0,45K_c$	$0,833t_c$	
PID	$0,6K_c$	$0,5t_c$	$0,125t_c$

Tabla 5-II Regulador PID en cadena cerrada

Se observa que en la mayoría de las respuestas óptimas aparecía una oscilación con amortiguamiento $1/4$, es decir que la amplitud de las oscilaciones se reducía a la cuarta parte en un período.

En la regla de Ziegler-Nichols de cadena abierta o de respuesta al escalón, se excita el proceso en cadena abierta con un escalón unitario y se miden sobre la respuesta el tiempo de retardo L y la magnitud a según se ve en la figura y los parámetros del regulador se fijan de acuerdo a la tabla adjunta.

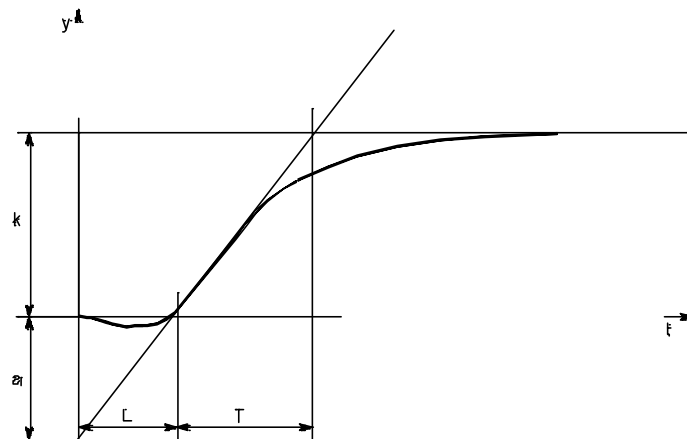


Ilustración 1-2 Ajuste del PID por Ziegler-Nichols en lazo abierto

Controlador	K_p	T_i	T_d
P	$1/a$		
PI	$0,9/a$	$3L$	

PID	$1,2/a$	$2L$	$0,5L$
-----	---------	------	--------

Tabla 5-II Regulador PID en cadena abierta

Estos valores se obtienen de los de la 1ª regla haciendo

$$K_c = \frac{2}{a} \quad (1.21)$$

$$t_c = 4L$$

El criterio de optimización es el mismo que para la 1ª regla.

1.5.1. Relación entre ambos métodos:

Cabe aclarar que el método en lazo abierto también es válido para sistemas inestables siempre que la respuesta inicial tenga la forma de la figura. En particular se puede considerar el integrador con retardo siguiente

$$G(s) = \frac{b}{s} e^{-sT} \quad (1.22)$$

que tendrá una respuesta al escalón de la que se obtendrá:

$$L = T$$

$$a = bT \quad (1.23)$$

de acuerdo a la segunda tabla el regulador PID será

$$K = \frac{1,2}{bT} \quad T_i = 2T \quad T_d = \frac{T}{2} \quad (1.24)$$

Si se ensaya de acuerdo al método de respuesta en frecuencia se obtendrá un período de oscilación y una ganancia,

$$t_c = 4T$$

$$k_c = \frac{p}{2bT} \quad (1.25)$$

De acuerdo a esto, el regulador PID será:

$$K = \frac{0,6p}{2bT} \approx \frac{0,94}{bT} \quad T_i = 2T \quad T_d = \frac{T}{2} \quad (1.26)$$

Interpretación

$$\begin{aligned}
 G_r(i \omega_c) &= 0.6 k_c \left[1 + j \left(\omega_c T_d - \frac{1}{\omega_c T_i} \right) \right] \\
 &= 0.6 k_c \left[1 + j \left(\frac{2p}{t_c} 0.12 t_c - \frac{t_c}{2p} \frac{2}{t_c} \right) \right] \\
 &= k_c (0.6 + 0.26 j)
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

es un avance de 23°

Generalización

sea la función de transferencia en lazo abierto

$$G_p(j\omega) = r_p e^{j(p+f_p)} \tag{1.28}$$

queremos ubicar esta respuesta a una determinada frecuencia en un punto

$$B = r_s e^{j(p+f_s)} \tag{1.29}$$

mediante un regulador

$$G_r(j\omega) = r_r e^{jf_r} \tag{1.30}$$

Podríamos hacer el diseño por el método de margen de amplitud es decir que para $\Phi_s = 0$ la amplitud sea $r_s = 1 / A_m$ siendo ésta un margen de amplitud dado. Por lo tanto se debe cumplir:

$$r_s e^{j(p+f_s)} = r_p r_r e^{j(p+f_p+f_r)} \tag{1.31}$$

entonces el regulador será:

$$\begin{cases} r_r = \frac{r_s}{r_p} \\ f_r = f_s - f_p \end{cases} \tag{1.32}$$

la ganancia proporcional es la parte real del regulador

$$k_p = \frac{r_s \cos(f_s - f_p)}{r_p} \tag{1.33}$$

el ángulo estará dado por

$$\omega T_d - \frac{1}{\omega T_i} = \tan(f_s - f_p) \tag{1.34}$$

1.5.2. Método de Asignación de Polos.

sistema de primer orden

$$G_p = \frac{k_p}{1 + s T_l} \quad (1.35)$$

regulador PI

$$G_r = K \left[1 + \frac{1}{s T_i} \right] \quad (1.36)$$

resultando un sistema de segundo orden en lazo cerrado

$$G_c = \frac{G_p G_r}{1 + G_p G_r} \quad (1.37)$$

la ecuación característica será

$$s^2 + s \left(\frac{1}{T_l} + \frac{k_p K}{T_l} \right) + \frac{k_p K}{T_l T_i} = 0 \quad (1.38)$$

y nuestra condición de diseño dice

$$s^2 + 2 \mathbf{x} \mathbf{w} s + \mathbf{w}^2 = 0 \quad (1.39)$$

el regulador PI resulta

$$K = \frac{2 \mathbf{x} \mathbf{w} T_l - 1}{k_p} \quad (1.40)$$
$$T_i = \frac{2 \mathbf{x} \mathbf{w} T_l - 1}{\mathbf{w}^2 T_l}$$

se puede hacer algo parecido para un sistema de 2do orden

Caso Discreto del Método de Asignación de Polos.

sistema de segundo orden

$$A(z) = z^2 + a_1 z + a_2 \quad (1.41)$$
$$B(z) = b_1 z + b_2$$

regulador PI

$$H_r(z) = \frac{S(z)}{R(z)} \quad (1.42)$$

$$R(z) = (z - 1) R_1(z)$$

una forma genérica sería

$$\begin{aligned} S(z) &= s_0 z^2 + s_1 z + s_2 \\ R(z) &= (z - 1)(z + r_1) \end{aligned} \quad (1.43)$$

la ecuación característica será

$$\begin{aligned} (z^2 + a_1 z + a_2)(z - 1)(z + r_1) + \\ (b_1 z + b_2)(s_0 z^2 + s_1 z + s_2) = 0 \end{aligned} \quad (1.44)$$

que es de cuarto orden.

Se podría especificar un denominador como,

$$P(z) = (z - e^{-awh})^2 (z^2 + p_1 z + p_2) \quad (1.45)$$

donde

$$\begin{aligned} p_1 &= -2 e^{-xwh} \cos(wh\sqrt{1-x^2}) \\ p_2 &= e^{-2xwh} \end{aligned} \quad (1.46)$$

Ejemplo:

$$G_p(s) = \frac{1}{(1+s)(1+0.26s)} \quad (1.47)$$

si el período de muestreo es $h = 0.1$ seg.

$$H_p(z) = \frac{0.0164z + 0.0140}{z^2 - 1.583z + 0.616} \quad (1.48)$$

condición de diseño:

$$x = 0.5 \quad w = 4 \quad a = 1 \quad (1.49)$$

P será

$$P(z) = (z - 0.670)^2 (z^2 - 1.54z + 0.670) \quad (1.50)$$

reemplazando

$$\begin{aligned} r_1 &= -0.407 \\ s_0 &= 6.74 \\ s_1 &= -9.89 \\ s_2 &= 3.61 \end{aligned} \quad (1.51)$$

1.5.3. Realimentación con Relé

Desarrollando en serie de Fourier la salida de un relé, su primer armónico tiene una amplitud de:

$$A_r = \frac{4d}{p} \quad (1.52)$$

si la amplitud de la salida es a , la ganancia a esa frecuencia será

$$G\left(j\frac{2p}{t_c}\right) = -\frac{pa}{4d} \quad (1.53)$$

1.5.4. Síntesis Directa

Una forma simple de calcular un regulador es por medio de una síntesis directa es decir despejar el regulador de la función de transferencia en lazo cerrado. Supóngase un esquema de realimentación en donde la función de transferencia en lazo cerrado es

$$H = \frac{RG}{1 + RG} \quad (1.54)$$

La condición de diseño es que H tenga una forma determinada es decir H es conocida. Por lo tanto se puede despejar R , resultando

$$R = \frac{H}{G(1 - H)} \quad (1.55)$$

No siempre es posible conseguir una forma realizable y simple de R pero en muchos casos puede ser de utilidad.

Otra forma es considerar solo el denominador de H como condición de diseño. Entonces, se tendría

$$H = \frac{N}{M}, R = \frac{S}{T}, G = \frac{B}{A} \quad (1.56)$$

por lo tanto

$$M = T A + S B \quad (1.57)$$

calculando de aquí los coeficientes de T y S que son las incógnitas.