Okul: Başkent Üniversitesi
Bölüm: Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
Dönem: 2003 - 2004 Bahar Dönemi
Ders: Fiz110 - Genel Fizik 2
Dersi Veren: Tofik Mamedov

Dersi Alan: Burak USGURLU <burak@usgurlu.com>

Bu çalışma Creative Commons Alıntı-Gayriticari 3.0 Unported Lisansı ile lisanslı. Lisansın bir kopyasını görebilmek için, http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/ adresini ziyaret edin ya da mektup atın: Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

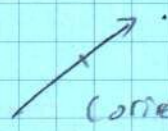
Chap 10

Vectors in Space

Kinds of quantities → Scalar → number (speed, length, potential energy)
→ vector

Vector = number + direction

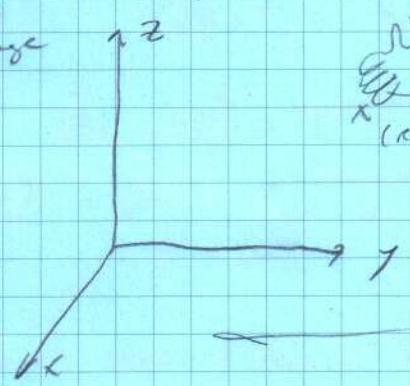
(Force, velocity, moment ...)

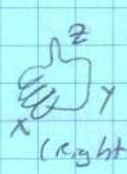
Representation (Geometrical)  (oriented array)

Cartesian System

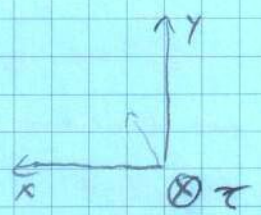
(Right hand system)

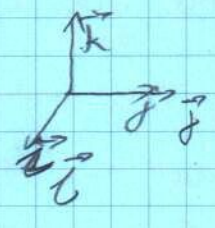
⊙/⊗ out of the page





(Right-hand)





$\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$ are one unit vectors.

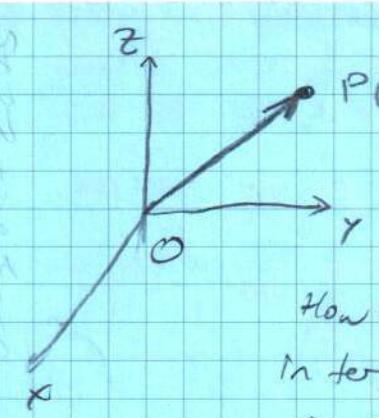
$\vec{i} \neq \vec{j}$

⋮

$\|\vec{i}\| = |\vec{i}| = 1$

the notation of the length of the vector.

vector are equal if they are in the same direction and the same length

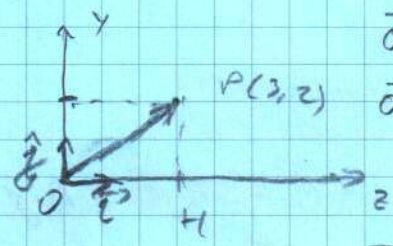


$\vec{OP}$: vector position

How to express $\vec{OP}$ in terms of $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, x, y, z$?

$$\boxed{\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$$

Ex:



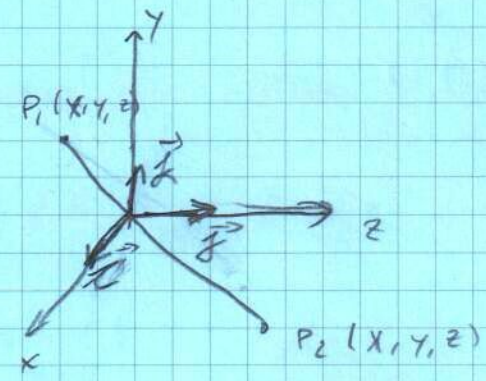
$\vec{OH} = \vec{OH} + \vec{HP}$

$\vec{OH} = +3\vec{i}$

$\vec{HP} = +2\vec{j}$

$\vec{OP} = +3\vec{i} + 2\vec{j}$

$\vec{P_1P_2}$: Connecting point P_1 and P_2



How to express $\vec{P_1P_2}$ in terms of $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

always the second minus the first

Petter	Sara	Gunstein	Persenke
Mat 152	Fiz 104	Mat 210	Bil 102
"	"	"	"
Tekn 102	Bil 102	Bil 106 lab	Bil 162
"	"	"	Atu 102
Fiz 110	Mat 152	Bil 162	"
Fiz 110	"	"	

Carmen
Mat 152
"
Mat 210
"

Fiz 110
"

Length of a vector

Given a vector $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$

x component, y component, z component

$\|\vec{A}\| = |\vec{A}|$: length of $\vec{A}$

$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

Ex: Given 3 points in space

$P_1(3,1,0)$, $P_2(1,-1,2)$, $P_3(0,2,-3)$

Find

1) $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$

2) $\vec{A} = \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_1P_3}$

$\vec{B} = \overrightarrow{P_1P_2} - 2\overrightarrow{P_1P_3}$

3) $|\vec{A}|$, $|\vec{B}| = ?$

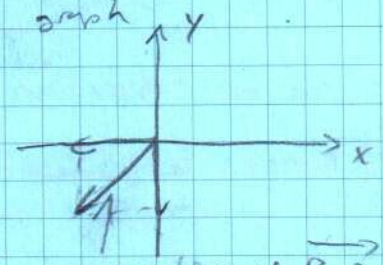
1) $\overrightarrow{P_1P_2} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$

$\overrightarrow{P_1P_3} = -3\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$

2) $A = \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_1P_3}$

$= -5\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

P_1P_2 graph



projection of $\overrightarrow{P_1P_2}$ on to xy plane

$B = \overrightarrow{P_1P_2} - 2\overrightarrow{P_1P_3}$

$= -2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} - 2(-3\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k})$

$= -2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} + 6\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$

$B = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$

3) $\sqrt{25+1+1} = \sqrt{27} = |\vec{A}|$

$\sqrt{16+16+64} = \sqrt{96} = |\vec{B}|$

4) Find a unit vector that is // to $\vec{B}$

$\vec{U} // B$, $|\vec{U}| = 1$

If B is divided into length of B you get a vector parallel or antiparallel to B and with a length 1

$\vec{u} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{4\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}}{4\sqrt{6}}$

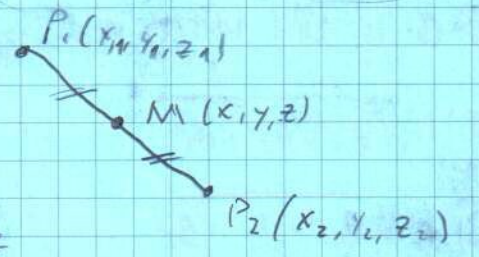
$= \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{k}$

Check

$|\vec{U}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{4}{6}} = 1$

Mid points:

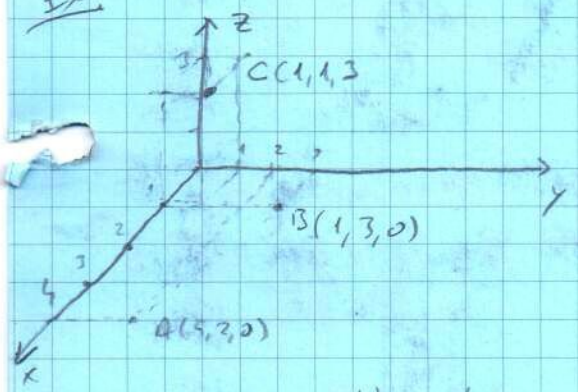


$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$

Ex:



a) ~~Find~~ Find the vector $\vec{CM}$ (M midpoint of side AB)

b) ~~The~~ the vector $\vec{CP}$ (P lies 2/3 of the way from C to M)

c) the vector $\vec{OP}$

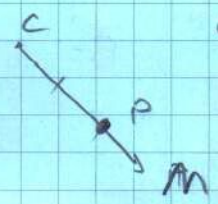
Sol:

a) $M_x = \frac{5}{2}$ $M_y = \frac{5}{2}$ $M_z = 0$

$CM = (\frac{5}{2} - 1)\vec{i} + (\frac{5}{2} - 1)\vec{j} + (0 - 3)\vec{k}$

$CM = \frac{3}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} - 3\vec{k}$

b)



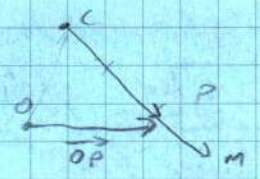
$CP // CM$

$CP = a \cdot CM$

$a = \left|\frac{CP}{CM}\right| = \frac{2}{3}$

$CP = \frac{2}{3} CM \Rightarrow CP = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

c)



$\vec{OC} + \vec{CP} = \vec{OP}$

$\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} + \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} = \vec{OP}$

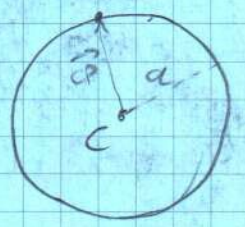
$2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} = \vec{OP}$

$P(2, 2, 1)$

You can always find any vector by sum of two vectors.

Equations of geometrical shapes.

Sphere:



$\vec{CP} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$

$|CP| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = a$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$

(Equation is a relationship between x, y, z)

Ex: Find the center and radius of a sphere of equation:

$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4z + 1 = 0$

Sol: Complete the square

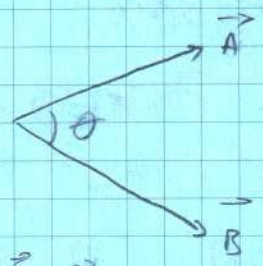
$(x^2 + 3x + \frac{9}{4}) - \frac{9}{4} + (y - 0)^2 + (z^2 - 4z + 4) - 4 + 1 = 0$

$(x + \frac{3}{2})^2 + (y - 0)^2 + (z - 2)^2 = 3 + \frac{9}{4} = \left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2$

centers $C(-\frac{3}{2}, 0, 2)$ radious $\Rightarrow a = \frac{\sqrt{21}}{2}$ units

Multiplication of vectors

1) Dot product = Scalar Product
(result will be scalar number)



$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \underbrace{|\vec{A}|}_{\geq 0}\cdot\underbrace{|\vec{B}|}_{\geq 0}\cdot\cos\theta$$

Properties:

a) $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$

b) $\vec{A}\cdot(m\vec{B}) = m(\vec{A}\cdot\vec{B})$

c) $\vec{A}\cdot(m\vec{B}+n\vec{C}) = m(\vec{A}\cdot\vec{B}) + n(\vec{A}\cdot\vec{C})$

d) $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{A}\perp\vec{B}$

e) $\vec{A}\cdot B \begin{cases} <0 & \text{if } \frac{\pi}{2}<\theta\leq\pi \\ =0 & \text{if } \theta=\pi/2 \\ >0 & \text{if } 0\leq\theta<\pi/2 \end{cases}$

Ex:

$\vec{i}\cdot\vec{i} = |\vec{i}||\vec{i}|\cos 0 = 1$

$\vec{j}\cdot\vec{j} = 1$

$\vec{k}\cdot\vec{k} = 1$

$\vec{i}\cdot\vec{j} = 0$, $\vec{i}\cdot\vec{k} = 0$ $\vec{j}\cdot\vec{k} = 0$

Analytic Expression of the scalar product

$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$

$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})\cdot(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k})$

$= A_xB_x\underbrace{(\vec{i}\cdot\vec{i})}_{1} + A_xB_y\underbrace{(\vec{i}\cdot\vec{j})}_{0} \ldots$

$$\boxed{= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = \vec{A}\cdot\vec{B}}$$

Angel Btwn Vectors.

$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta$

$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$,

$|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}\,\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}}}$$

$\boxed{0\leq\theta\leq\pi \;!!}$

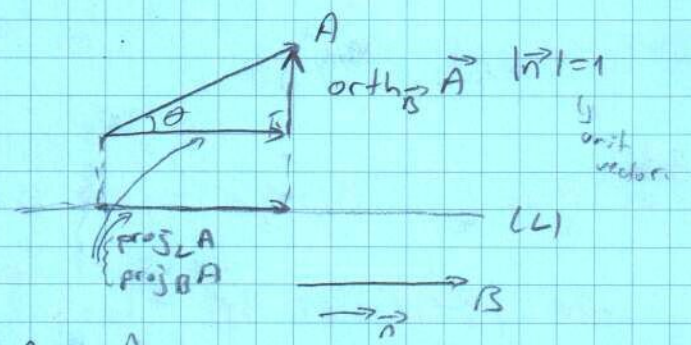
Ex:

Determine the angel btwn the vectors $\vec{A} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$
$\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{k}$

$$\cos\theta = \frac{-1+0-4}{\sqrt{1+1+4}\,\sqrt{1+0+4}}$$

$$\cos\theta = \frac{-5}{\sqrt{6}\sqrt{5}} = \frac{-5}{\sqrt{30}} = -\sqrt{\frac{5}{6}}$$

Projection of a vector onto a line



$\text{proj}_L A = \text{proj}_B A$

$\vec{A} = \text{proj}_{\vec{B}}\vec{A} + \text{orth}_{\vec{B}}\vec{A}$

$\text{proj}_B\vec{A} \parallel \vec{B}$

$\text{proj}_{\vec{B}}\vec{A} = a\vec{B}$

$\text{proj}_B A = b\vec{n}$

$\vec{B} = |\vec{B}|n$

$n = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$

$$\boxed{\text{proj}_{\vec{B}}\vec{A} = |\vec{A}|\cos\theta\cdot\vec{n}} \boxed{= (|\vec{A}|\cdot\vec{n})\vec{n}}$$

$$\boxed{\text{proj}_{\vec{B}}\vec{A} = \frac{(\vec{A}\cdot\vec{B})}{|\vec{B}|^2}\,\vec{B}}$$

$$\boxed{\text{orth}_B\vec{A} = \vec{A} - \text{proj}_{\vec{B}}\vec{A}}$$

$$(\text{proj}_{\vec{B}}A)\cdot(\text{orth}_B\vec{A}) = 0$$

<u>Ex:</u> Given two vectors

$\vec{A} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{B} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$

write $\vec{A}$ as sum of (two) vectors, one $\parallel \vec{B}$, the other $\perp \vec{B}$

$$\text{proj}_{\vec{B}}\vec{A} = \frac{-4}{1+4+4}\cdot\vec{B} = -\frac{4}{9}\vec{B}$$

$$= -\frac{4}{9}\vec{i} + \frac{8}{9}\vec{j} + \frac{8}{9}\vec{k}$$

$$\text{orth}_B\vec{A} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2k + \frac{4}{9}\vec{i} - \frac{8}{9}\vec{j} - \frac{8}{9}\vec{k}$$

$$= \frac{58}{9}\vec{i} + \frac{19}{9}\vec{j} + \frac{10}{9}\vec{k}$$

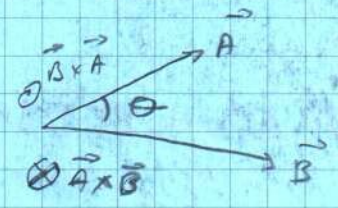
check that the scalar product of proj and orth is (0) zero.

$\text{proj}_B A \cdot \text{orth}_B A \overset{?}{=} 0$ ✓

<u>HW.</u>

1→63 p 794-5

2) Cross Product = Vector Product



$\vec{A}\times\vec{B}$ = vector

$(\vec{A}\times\vec{B}) \perp \vec{A}$, $\perp \vec{B}$

$|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\,\sin\theta$

<u>Properties</u>

a) $\vec{A}\times\vec{B} = -(\vec{B}\times\vec{A})$

b) $\vec{A}\times(m\vec{B}) = m(\vec{A}\times\vec{B})$

c) $\vec{A}\times(m\vec{B} \pm n\vec{C}) = m(\vec{A}\times\vec{B}) \pm n(\vec{A}\times\vec{C})$

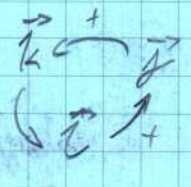
d) $\left.\begin{array}{c}\vec{A}\parallel\vec{B}\\ \text{or}\\ \vec{A}\ \text{anti}\parallel\vec{B}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \vec{A}\times\vec{B} = 0$

<u>ex:</u>

$\vec{i}\times\vec{i} = 0$ $\qquad$ $\vec{i}\times\vec{j} = \overset{>0}{a}\,\vec{k}$

$\vec{j}\times\vec{j} = 0$ $\qquad$ $\vec{i}\cdot\vec{j} = |\vec{i}|\,|\vec{j}|\cdot\cos\frac{\pi}{2}$

$\vec{k}\times\vec{k} = 0$ $\qquad$ $= 1$



<u>Ex:</u> $\vec{A} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $B = -\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

$$A\times B = \cancel{-2ii}^{0} - 2ij + 6ik + ji + \cancel{jj}^{0} - 3jk$$

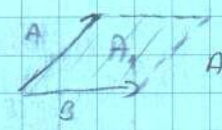
$$= -2k - 6j - k - 3i$$

$$= -3\vec{k} - 3\vec{i} - 6\vec{j}$$

$|\vec{A}\times\vec{B}| = 3\sqrt{6}$ units

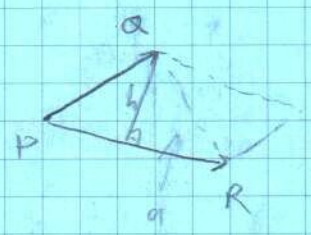
Find the area of the triangle with vertices

$P(1,-1,0)$, $Q(2,1,-1)$, $R(-1,1,2)$



$A_1 = |A \times B|$

Sol



$$a = \frac{|\vec{PR}| \cdot h}{2}$$

$$h = |\vec{PQ}| \sin\theta$$

$$a = \frac{|\vec{PR}|\,|\vec{PQ}| \sin\theta}{2}$$

$$\boxed{a = \frac{|\vec{PR} \times \vec{PQ}|}{2}}$$

area

$\vec{PR} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{PQ} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

H.W

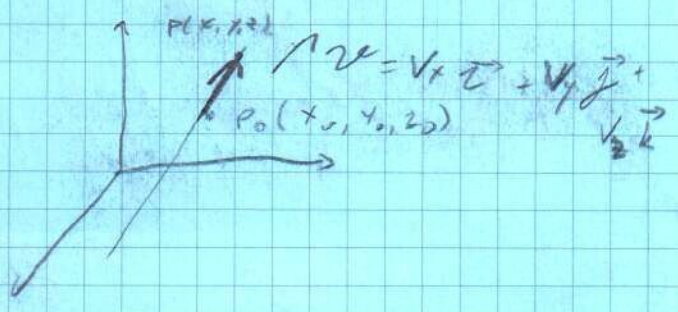
1 → 58 p 805 → 807

Remark:

The volume of the parallelepiped spanned by the vectors $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ is $|(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}| = V = |\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})|$

absolute

Lines and planes in space



What are the parametric equations of (L)?

P_0 and $\vec{V}$: given

$$\vec{P_0P} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$$

Since $P_0P \parallel \vec{V}$

$$\boxed{\vec{P_0P} = t\,\vec{V}}$$ vector equation of (L)

t parameter $(-\infty < t < \infty)$

Parametric equations of (L)

$x - x_0 = v_x t \Rightarrow \boxed{x = x_0 + v_x t}$

$y - y_0 = v_y t \Rightarrow \boxed{y = y_0 + v_y t}$

$z - z_0 = v_z t \Rightarrow \boxed{z = z_0 + v_z t}$

Ex: Find parametric equations of the line (L) through points $(-1,0,2)$ and $(2,1,1)$

Sol: P_0, P_1

Chose $v = \overrightarrow{P_0P_1}$ or any constant x P_0P_1

$P_0P_1 = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

v_x, v_y, v_z

(L): $x = -1 + 3t$, $y = t$, $z = 2 - t$ $(-\infty < t < \infty)$

Does the point $P_2(3,2,1)$ lies on (L)?

$x = -1 + 3y$

$3 = -1 + 6$ $\quad P_2 \notin (L)$

$3 \neq 5$

Remark

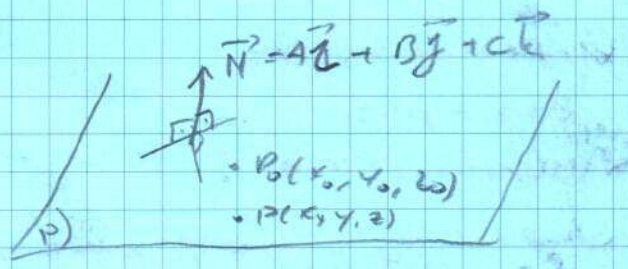
You can switch P_0 and P_1

~~(L): $x = 2 + 3s$~~

H.W

1 → 60 p 815, 815

Equation for a plane in Space



P_0 and $\vec{N}$

Find an equation for the plane (P) through P_0 and perpendicular to $\vec{N}$.

$\overrightarrow{P_0P} = (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k}$

$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{N}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{N} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0}$

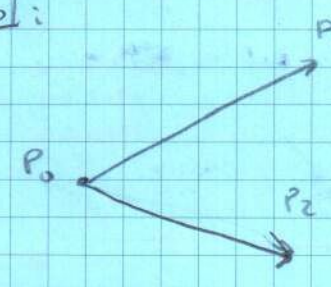
$\Rightarrow \boxed{A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0}$

$\boxed{Ax + By + Cz = D}$

A, B, C are components of a vector perpendicular to plane.

Ex: write an equation for the plane through $(-1,-2,2)$, $(0,0,1)$, $(2,1,2)$. (There is only one plane that passes through three points.)

Sol:



$P_0P_1 = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$P_0P_2 = 3\vec{i} + 3\vec{j}$

Choose $\vec{N} = \overrightarrow{P_0P_2} \times \overrightarrow{P_0P_1}$, $N \perp$ (P) plane

$N = (3\vec{i} + 3\vec{j}) \times (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$

$N = 6(\underbrace{i \times j}_{\vec{k}}) - 3(\underbrace{i \times k}_{-\vec{j}}) + 3(\underbrace{j \times i}_{-\vec{k}}) - 3(\underbrace{j \times k}_{\vec{i}})$

$N = \underbrace{-3}_{A}\vec{i} + \underbrace{3}_{B}\vec{j} + \underbrace{3}_{C}k$

$P: (-3)(x-0) + 3(y-0) + 3(z-1) = 0$

$(0, 0, 1)$ → any point on the plane
$P_x \; P_y \; P_z$

$\boxed{P: A(x-P_x) + B(y-P_y) + C(z-P_z) = 0}$

general plane equation

Skew lines (lines that are not parallel or dont intersect in space)

Ex: Given two lines.

$(L_1): x = 3+2t, \; y = -1+4t, \; z = 2-t \; (-\infty < t < \infty)$

$(L_2): x = 1+4s; \; y = 1+2s, \; z = -3+4s \; (-\infty < s < \infty)$

a) Show that the lines are not parallel

b) Are (L_1) and (L_2) skew or intersecting? If they are intersecting, find where they do.

Sol

a) $\vec{V_1} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k} \; // (L_1)$

$\vec{V_2} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k} \; // (L_2)$

$\vec{A} = a\vec{B}$ when parallel

$\vec{A_x} = a\vec{B_x}$

$\vec{A_y} = a\vec{B_y}$ $\quad \frac{A_x}{B_y} = a$

$\vec{A_z} = a\vec{B_z}$

$\frac{2}{4} \neq \frac{4}{2} \neq \frac{-1}{4}$

$V_1 \not\parallel V_2$

$L_1 \not\parallel L_2$

b) ~~Ana~~ to look for a ~~co~~intersect point

$$\begin{cases} 3+2t = 1+4s \\ -2-3t = -2+4s \\ -1+4t = 1+2s \\ z-1 = -3+4s \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} t=1 \\ s=1 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow z-1 = -3+4\cdot 1$$

$$1 \overset{\checkmark}{=} 1$$

The lines intersect at $(5,3,1)$

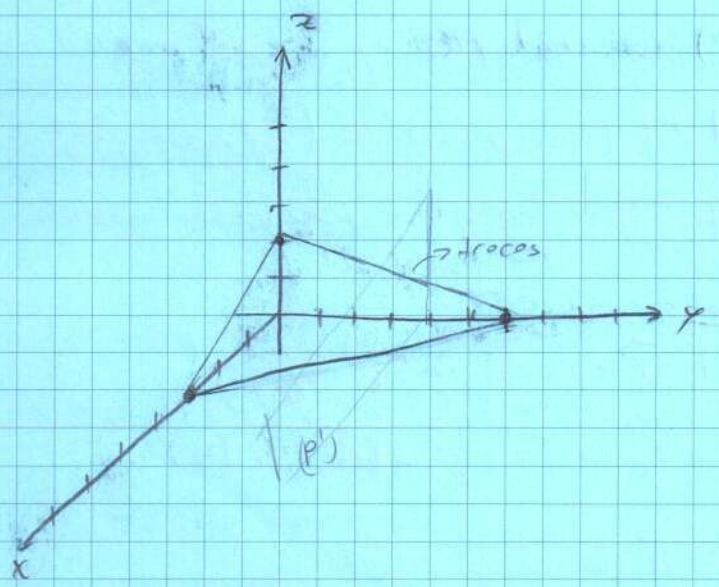
vector product gives a vector perpendicular to ~~cross~~ the vectors.

Section 10.4.

Cylinders and Quadratic Surfaces.

<u>Plane</u> <u>Ex</u>: sketch the graph of the plane $(P): 2x+y+3z=6$

$(P'): y=4$



Find the intersection of (P) with the coordinate axes.

$x=0,\ y=0 \Rightarrow z=2$

$z=0,\ x=0 \Rightarrow y=6$

$y=0,\ z=0 \Rightarrow x=3$

<u>Cylinders</u>:

$x^2+y^2+z^2=9$ = sphere

$z=2$ = plane

~~combination~~: circle

$x^2+y^2+z^2=9,\ z=4 \Rightarrow \emptyset$ no intersection.

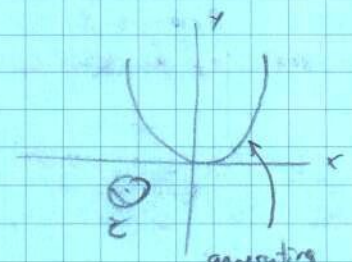
$x^2+y^2+z^2=9,\ z=3 \Rightarrow$ point $(0,0,3)$

(radius 3)

$x=0,\ y=0,\ z=3$

is ~~all~~ point.

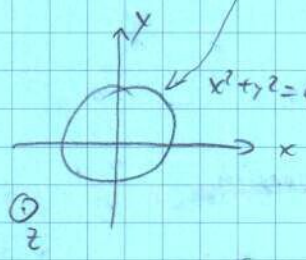
$(0,0,3)$



$y=x^2$: Surface: parabolic cylinder.

generating curve

the sinus function is also a cylinder.



$x^2+y^2=4 \quad z=0$ the circular cylinder. (a tube)

(Some times the name of the curve ~~is~~ + cylinder makes the name of the cylinder)

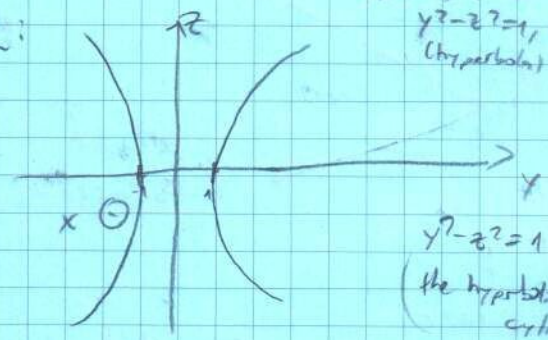
<u>Def</u>: A cylinder is a surface composed of all the <u>lines</u>

① ~~that~~ lie parallel to each other.

② ~~that~~ pass through a given curve

<u>Ex</u>:

Consider the line: $y^2-z^2=1,\ x=0$ (hyperbola)



$y^2-z^2=1$ (the hyperbolic cylinder)

a plane is also a cylinder

Remark A plane is a cylinder for which the generating curve is a line.

the cylinder can be a quadratic form.

Quadratic Surfaces

quadratic term

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+$$

$$Gx+Hy+Jz+K=0$$

general equation of a quadratic surface, the sphere is a special case of quadratic equation.

Ex: Elipsoid: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

$a\neq b\neq c$

or you get a sphere

elipsoid of center (0,0,0)

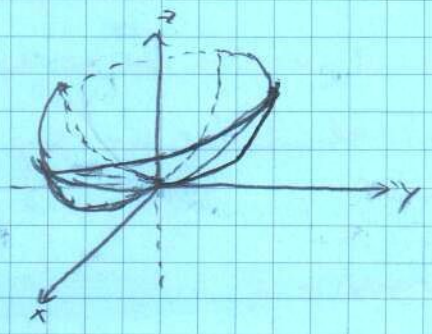
~~Remark~~:

Ex: Eliptic Paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$

Intersection with the xz-plane (y=0):

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c} \Rightarrow z=\frac{c}{a^2}x^2 \quad (c>0)$$



Intersection with the yz-plane (x=0)

$$z=\frac{c}{b^2}y^2$$

Intersection with the xy-plane (z=0)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \qquad (x,y)=(0,0)$$

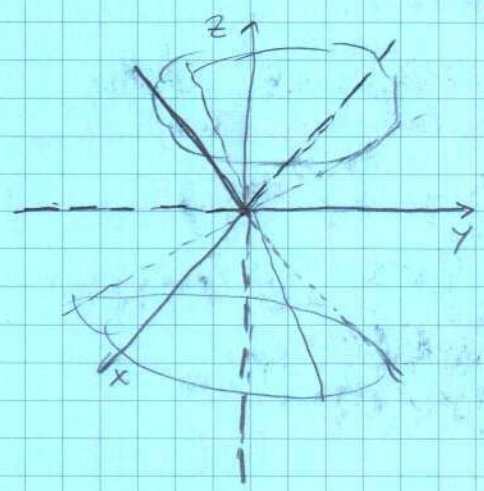
* Eliptic Cone

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

Intersection with y=0

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2} \qquad z^2=c^2\frac{x^2}{a^2}$$

$$z=\pm\frac{c}{a}x$$



Intersection with x=0 $\quad z=\pm\frac{c}{b}y$

Chap 11:

Multivariable Functions.

Functions of two variable

two numbers give one number

(in one variable func. a value of x gives a y)

input $(x,y) \xrightarrow{f} z$ output

$z = f(x,y)$

$(x,y) \in D$: domains

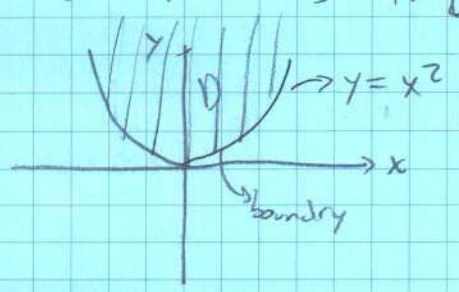
$(z) \in R$ = Range

Ex: $z = f(x,y)$ $D: x^2 = xy$-plane

$= \sin(xy)$ $R = [-1, 1]$

Ex: $z = f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$

$D = \{(x,y) \mid y \geq x^2\}$ $R = [0, \infty)$

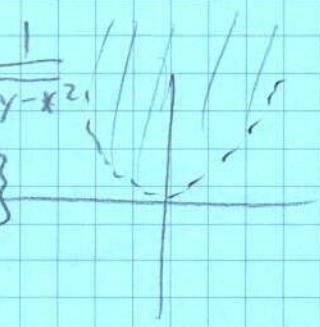


The domains of definition of a function $f(x,y)$ is a region on the xy-plane.

Ex: $z = g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y - x^2}}$

$D = \{(x,y) \mid y > x^2\}$

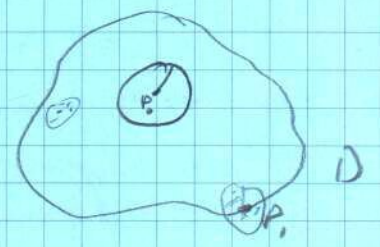
$R = (0, \infty)$



Closed, open, bounded, unbounded Domain;

Definitions

* A point P_0 is an interior point of D if it is the center of a disk that lies entirely on D



* A boundary point P_1 is the center of a disk / Some parts of the disk lie outside of D.
  / and some other points of disk lie inside D.
* The set of the boundary points is the boundry of D.
* When all the boundry points $\in D$, we say that D is closed.
* When all the boundry points $\notin D$, we say that D is open.
* If you can find a disk of fixed radius that contains D, we say that D is bounded. Else we say D is unbounded

Ex: $z = f(x,y) = \frac{y}{x^2}$

a) Find D, R, and the boundary?

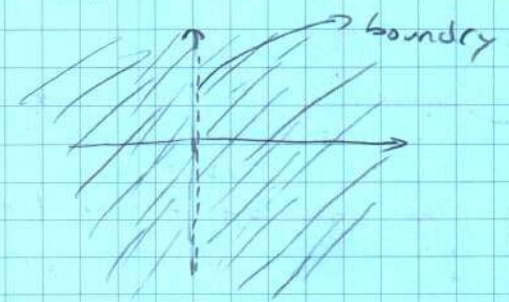
b) Is D open / closed?

c) Is D bounded or unbounded?

Sol:

a) $D = \{(x,y) \mid x=0\}$

D = xy-plane except the y axis.



D is open becase endpoints (boundy) is not in the domain

boundry $x=0$

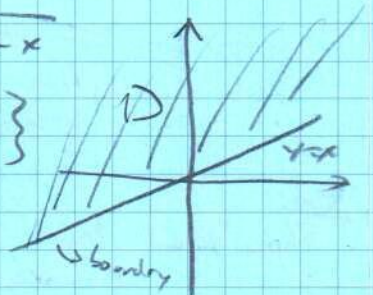
The D is unbounded because D goes to infinity.

$R = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Ex: $z = f(x,y) = \sqrt{y-x}$

a) $D = \{(x,y) \mid y \geq x\}$

$R = [0, \infty)$

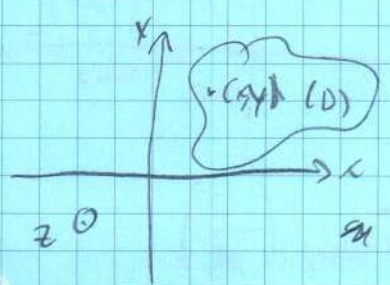


b) $y=x$ is the boundry

D is closed because the boundy $\in D$

c) D is unbounded.

Graph-Level Curves.

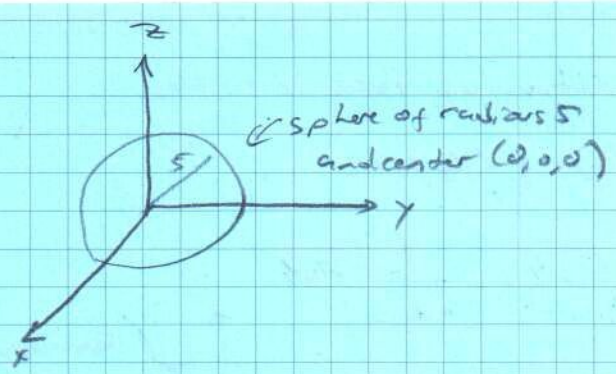


The graph of $z = f(x,y)$ is a surface.

Ex: $z = f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

$z \geq 0 \quad z^2 = 25 - x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 + z^2 = 25$



Level-Curves

The set of points in the xy-plane such $f(x,y) = k$: constant.

↑ level

Ex: $z = f(x,y) = xy$

a) Find D, R

b) Describe the func. level curves

c) Find the boundry

d) Is D open/closed?

Is D bounded/unbounded.

Sol:

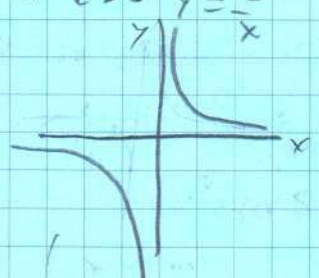
a) $D = \mathbb{R}^2 =$ xy-plane

$R = \mathbb{R}$

b) $f(x,y) = k$

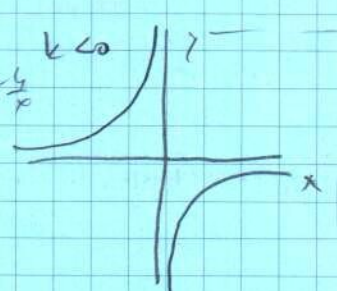
$xy = k$

* $k > 0$ $y = \frac{k}{x}$



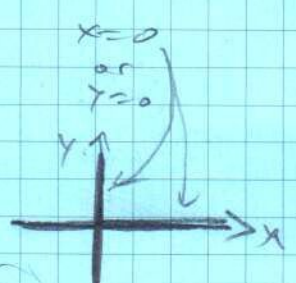
$k < 0$

$y = \frac{k}{x}$



$k = 0$ $xy = 0$

$x = 0$ or $y = 0$



c) No boundray

D is open and unbounded

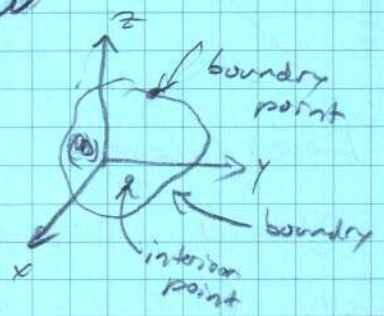
Functions of three Variables

$w = f(x, y, z)$

$(x, y, z) \xrightarrow[\text{Essign}]{f} w$

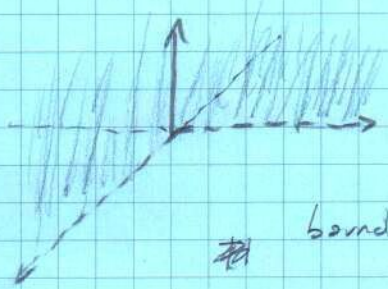
$(x, y, z) \in D$

$w \in R$



Ex: $w = f(x, y, z) = xy \ln z$

$D = \{(x, y, z) \mid z > 0\}$



boundry $\Rightarrow z = 0$ ↳ is a surface

level surfaces:

A level of surfaces is the set of all points $(x, y, z) \in D$ such that

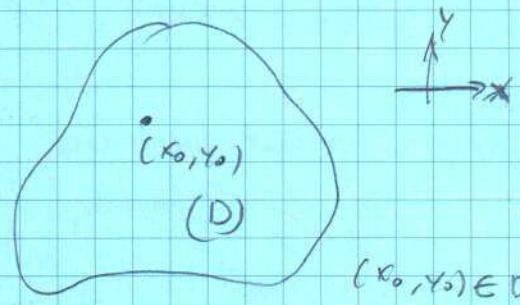
$f(x, y, z) = k$

Ex: $w = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$(w \geq 0)$, $f(x, y, z) = k \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = k$

spheres

Limits and Continuity $(z = f(x, y))$



$(x_0, y_0) \in D$ or $\notin D$

If the value of $f(x, y)$ lies close to a fixed L for all (x, y) close to (x_0, y_0) but not equal to (x_0, y_0)

we say ~~that~~ L is the limit of $f(x, y)$ as (x, y) approaches (x_0, y_0).

We write $\boxed{\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L}$

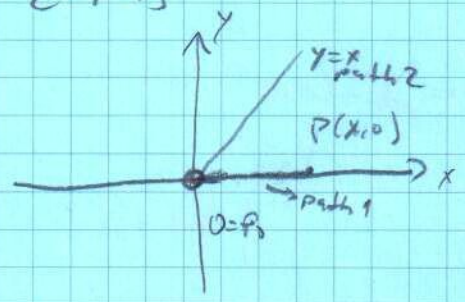
$\boxed{\lim_{P \to P_0} f(x, y) = L}$

Ex: Show that $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2} \right)$

does not exist.

sol:

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$



Path 1: $y = 0$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{(x,0) \to (0,0)} \left(\frac{0}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} (0) = 0 = L_1$$

Path 2: $y=x \Rightarrow \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2x^2}{2x^2} = 1$

$L_2 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} (1) = 1$

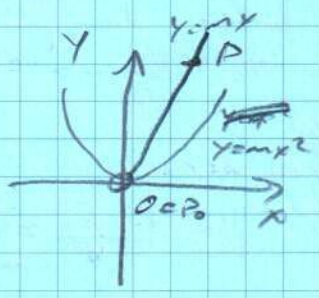
$L_1 \neq L_2 \Rightarrow$ so the limit doesn't exist.

Ex: Does the limit exist?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{2xy}{x^4+y^2}\right)$$

sol:

$D = \{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\}$



Path:

$f(x,y) = \frac{2x^2 mx}{x^4+m^2x^2}$

$= \frac{2mx}{x^2+m^2}$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2mx}{x^2+m^2}\right) = 0$

Path: $(x=0)$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Path:

$\frac{2x^2 \cdot mx^2}{x^4+m^2x^4} = \frac{2m}{1+m^2} = \text{Constant}$ $(m\neq 0)$

So the limit doesn't exist.

Limit $\nexists$ because m can change there will be lots of different limits therefore no limit would exist whatsoever.

Continuity:

a) If $(x_0, y_0) \in D$

If $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L = f(x_0,y_0)$

$\Rightarrow f(x,y)$ is continuous at (x_0,y_0)

b) If $f(x,y)$ is continuous at every point in D, then it is continuous on D.

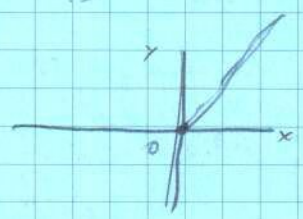
Ex: Given the function

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Is $f(x,y)$ conti. at $(0,0)$

Sol:

$D = \mathbb{R}^2$



$f(0,0) = 0$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} \nexists$

$f(x,y)$ is not continuous at $(0,0)$

Ex:

Evaluate:

a) $\lim_{(x,y)\to(\pi,0)} \left(e^{-2y}\cos 2x\right)$, b) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \left(\frac{2xy+1}{x^2+1}\right)$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(x-y)}{|x|+|y|}$, d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|}$

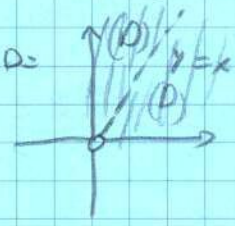
e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{2xy^2}{x^2+y^2}\right)$ f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)$

f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right) \to \frac{0}{0}$

$x\neq 0,\ y\neq 0,\ x\neq y \Rightarrow \frac{x(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = x\frac{\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{y})}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{y}}}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = 0$

D:



H.W. 1→20 p 887 67→70 p 889

27→30 p 887 8→0

35→42 p 888

55→52 p 889

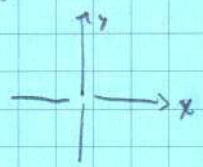
a) $e^0 \underbrace{\cos 2\pi}_{1} = 1$

b) $\lim_{(x,y)\to(-1,-1)} \frac{2xy+1}{x^2+1} = \frac{-2+1}{1+1} = \frac{-1}{2}$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\tan(x-y)}{|x|+|y|}}_{f(x,y)} = \nexists$

path $y=0$ $(x\neq 0)$

$f(x,y) = \frac{\tan x}{|x|}$



$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{|x|} \nexists$

$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{|x|} = \begin{cases} +1, & x\to 0_+ \\ -1, & x\to 0_- \end{cases}$

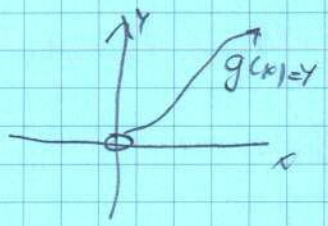
d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|} = \nexists$

$u=xy \Rightarrow \lim_{u\to 0} \frac{u}{|u|} \nexists$

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\left(\frac{2xy^2}{x^2+y^2}\right)}_{f(x,y)}$

$g(0)=0$

path $y=g(x)$, $g(0)=0$



$f(x,y) = \frac{2x\,g^2(x)}{x^2+g^2(x)}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{2xy^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2x\,g^2(x)}{x^2+g^2(x)}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{2x}{\left(\frac{x}{g(x)}\right)^2+1}\right) = \frac{\lim_{x\to 0}(2x)}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{g(x)}\right)^2+1}$

$= \left(\lim_{x\to 0} 2x\right) \times \left(\frac{1}{\frac{1}{\lim_{x\to 0}}+1}\right) = 0$

Ex:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{(xy)^2}$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tan^{-1}\left(\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right)$

Sol

a) $u=xy$

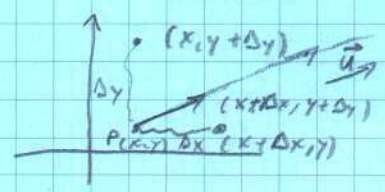
$\lim_{u\to 0} \frac{1-\cos u}{u^2} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{2u} = \frac{1}{2}$

Partial Derivatives.

$y=f(x) \to \frac{\Delta y}{\Delta x}$ rate of change

$z=f(x,y)$

$\frac{\Delta z}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta y}$



rate of change in the i direction

rate of change in the j direction.

Partial derivative with respect to x = Derivative in the i-direction

$$\frac{\partial z}{\partial x} = D_{\vec{i}} f = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y)-f(x_0,y)}{x-x_0}$$

Partial derivative with respect to y = Derivative in the j direction

$$\frac{\partial z}{\partial y} = D_{\vec{j}} f = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}$$

Ex: $z=f(x,y)=xy^2-y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=2xy-2y$$

Ex

$z=f(x,y)=\sin(x^2+y^2)-\frac{x}{y}$

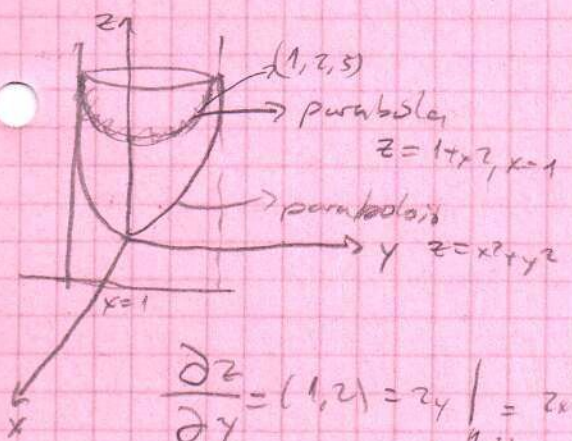
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=2x\cos(x^2+y^2)-\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=2y\cos(x^2+y^2)+\frac{x}{y^2}$$

Ex:

The plane $x=1$ intersects the paraboloid $z=x^2+y^2$ in a parabola

Find the slope of the tangent line to the parabola at $(1,2,5)$



$$\frac{\partial z}{\partial y}=(1,2)=2y\Big|_{(1,2)}=2\times 2=4$$

Remark: $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)=$ the slope of the tangent line to the curve that is intersection of the plane $y=y_0$ and the graph of $z=f(x,y)$

Higher-order derivatives.

$z=f(x,y)$

$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 1st order partial derivatives.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

↳ Second order partial derivatives.

Ex: $f(x,y)=x^2-y+x^4y^2$

Find $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

Sol: $\frac{\partial f}{\partial x}=2x+4y^2x^3$

$\frac{\partial f}{\partial y}=-1+2x^4y$

first order derivatives

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x+4y^2x^3\right)$$

$$=2+12y^2x^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-1+2x^4y\right)$$

$$=8x^3y$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2x+4y^2x^3\right)$$

$$=8yx^3$$

mixed derivatives are always equal if the func. f is cont. and the first derivatives of f are continuous

The mixed-derivative theorem:

If $f(x,y)$ and all its partial derivatives are defined on an open region containing the point (x_0,y_0) and continuous at (x_0,y_0)

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$

Ex: Given $f(x,y) = xy + \frac{e^y}{y^2+1}$

which order of differentiation will calculate $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ faster?

first x then y

sol:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = y = 1$$

Ex:

Find $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ If $f(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)}{1+(y/x)^2} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x)(x^2+y^2)^{-1}\right]$$

$$= 1(x^2+y^2)^{-1} + x(-1)(x^2+y^2)^{-2}(2x)$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2)} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Show that the func $f(x,y) = e^{-2y}\cos 2x$ satisfies the Laplace equation:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2e^{-2y}\sin 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2e^{-2y}\cos 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2e^{-2y}\sin 2x\right)$$

$$= -4e^{-2y}\cos 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-2e^{-2y}\cos 2x\right)$$

$$= 4e^{-2y}\cos 2x \Rightarrow \text{equation} = 0$$

H.w

1 → 54 p 899-900

57-75 p 900-901

Implicit Differentiation:

Ex: Find the value $\frac{\partial z}{\partial x}$ at the point $(1,1,1)$ if the equation

$$xy + z^3x - 2yz = 0 \quad (1)$$

defines z as a function of the independent variables x and y.

sol: $z = f(x,y)$

Differentiate both sides of (1) with respect to partial differentiation.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(xy + z^3x - 2yz\right) = \frac{\partial}{\partial x}(0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy+z^3x-2yz)=\frac{\partial}{\partial x}(0)$$

$$y+\frac{\partial z^3}{\partial x}\cdot x+z^3\frac{\partial x}{\partial x}-2y\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$y+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x+z^3-2y\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

at $(1,1,1)$ $\Rightarrow 1+3\frac{\partial z}{\partial x}+1-2\frac{\partial z}{\partial x}=0$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=-2$$

Ex: Find the value $\frac{\partial x}{\partial z}$ at the point $(1,-1,-3)$ of the equation

$$xz+y\ln x-x^2+5=0$$

defines x as a function of the independent variables y and z.

Sol: $x=f(y,z)$

Differentiate both sides with respect to z:

$$\frac{\partial}{\partial z}(xz+y\ln x-x^2+5)=\frac{\partial}{\partial z}(0)$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}\cdot z+x\underbrace{\frac{\partial z}{\partial z}}_{1}+y\frac{\frac{\partial x}{\partial z}}{x}-2x\frac{\partial x}{\partial z}=0$$

$$\left(z+\frac{y}{x}-2x\right)\frac{\partial x}{\partial z}+x=0$$

$$(-3-1-2)\frac{\partial x}{\partial z}+1=0$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial z}\right|_{(1,-1,-3)}=\frac{1}{6}$$

Ex: Function of 3 variables.

$$w=f(x,y,z)=x^2\cos z-y^2z$$

constant

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2x\cos z$$

and

$$\frac{\partial w}{\partial y}=-2yz$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=-x^2\sin z-y^2$$

Chain Rule

1) $z=f(x,y)$

$\boxed{x=h(t),\ y=k(t)}\Rightarrow$ line

$$\frac{dz}{dt}\quad \frac{\partial z}{\partial x}\ z\ \frac{\partial z}{\partial y}\ \text{top}$$

intermediate variables

$$\frac{dx}{dt}\ t\ \frac{dy}{dt}\ \text{bottom}$$

$$\boxed{\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}}$$

Ex: The temperature on a circular metalic wire is given by

$$T(x,y)=4x^2+4xy+4y^2$$

If the parametric equations of the circle are $x=\cos t$, $y=\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$, find the rate of change of the temperature along the circle at $t=3\pi/4$

H.W

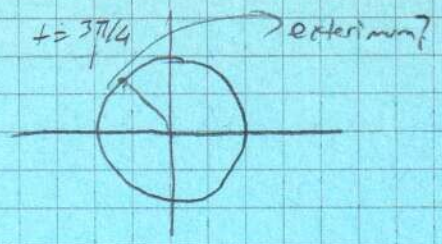
1->54 p 899-900

57-75 p 900-901

1->23 p 908

35->48 p 909

Sol: rate of change -> derivative

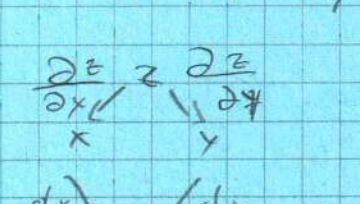


At $t = 3\pi/4$

$\Delta t \to \Delta T \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{dT}{dt}\Big|_{t=3\pi/4}$

$z = T(x,y)$

$x = \cos t \quad y = \sin t$



$$\frac{dz}{dt} = \frac{dT}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= (8x - 4y)(-\sin t) + (-4x + 8y)\cdot(\cos t)$$

$$\frac{dT}{dt} = 4(2\cos t - \sin t)\sin t + 4(-\cos t + 2\sin t)\cos t$$

$t = 3\pi/4 \Rightarrow \cos \to -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin \to \frac{1}{\sqrt{2}}$

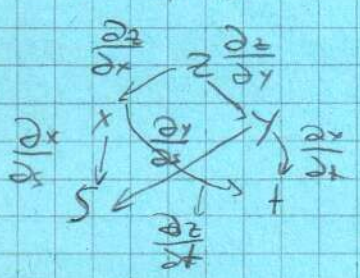
$$\frac{dT}{dt}\Big|_{t=\frac{3\pi}{4}} = -4\left(-\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} + 4$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}) =$$

$$0$$

2) $z = f(x,y)$

$x = h(s,t), \; y = k(s,t)$



$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

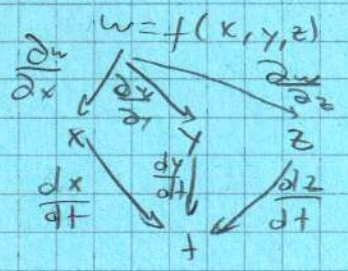
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

3) $w = f(x,y,z)$

$x = h(t) \quad y = k(t) \quad z = l(t)$ — Curve in space

$\Delta t \to \Delta w$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{dw}{dt}$$



$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Ex:

Find $\frac{dw}{dt}$ along the helix $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$

at $t = \frac{\pi}{2}$ if $w = f(x,y,z) = xy + z$

Sol1: $w = \cos t \cdot \sin t + t$

Sol2:

$$\frac{dw}{dt} = y(-\sin t) + x(\cos t) + 1\cdot 1$$

$$= \cos^2 t - \sin^2 t + 1$$

$$\frac{dw}{dt}\Big|_{t=\pi/2} = 0$$

Ex:

Find $\frac{dw}{dt}$ along the line (L):

$x = -2 + 2t, \; y = -4 + 5t, \; z = \frac{\pi}{2}t$

at $t = 1$, if $w = f(x,y,z) = xy + z$

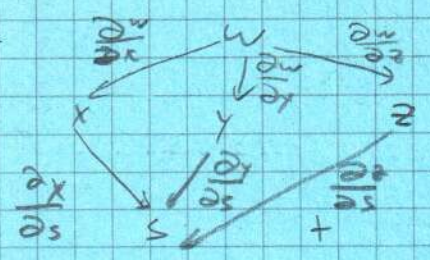
$$\frac{dw}{dt} = y\cdot(2) + x(5) + 1\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2y + 5x + \frac{\pi}{2} \qquad \frac{dw}{dt}\Big|_{t=1} = 2 + t \text{ or } \frac{\pi}{2} = 1/2 + 2$$

4) $w = f(x, y, z)$

$x = h(s,t)$, $y = k(s,t)$, $z = l(s,t)$

(surface in space) stipurametes



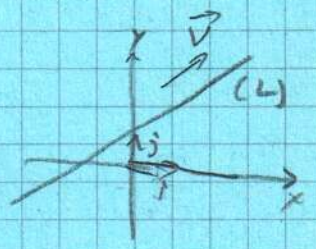
$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}$$

Directional Derivative (cases 1 and 3):

1) $z = f(x, y)$

$$(L) = \begin{cases} x = h(t) = x_0 + v_1 t \\ y = k(t) = y_0 + v_2 t \end{cases}$$



$\vec{v} = v_1 i + v_2 j$ unit vector

$$(D_f)_{\vec{v}} = D_{\vec{v}} f = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$= v_1 \frac{\partial z}{\partial x} + v_2 \frac{\partial z}{\partial y}$$

(a) →

3) $w = f(x, y, z)$

$$(L): \begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \\ z = z_0 + v_3 t \end{cases}$$

$\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$ ↳ unit vector // (L)

$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$: gradient vector

(a)

Gradient vector:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\vec{j}$$

$\Rightarrow D_v f = \nabla f \cdot \vec{v}$ ↳ direction

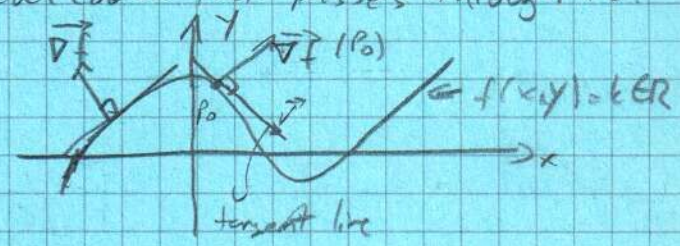
cont. (3)

$\Rightarrow D_{\vec{v}} f = \vec{\nabla f} \cdot \vec{v}$: Directional Derivative

Properties of the Gradient Vector:

1) $z = f(x, y)$

The gradient vector $\vec{\nabla} f(P_0)$ ⊥ level curve that passes through P_0. (Nabla)



Proof:

$D_{\vec{v}} f = 0$

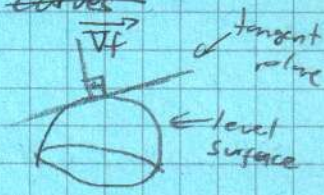
$\Rightarrow \vec{\nabla f} \cdot v = 0$ ($\forall \vec{v}$ // tangent line)

$\Rightarrow \forall f \perp \vec{v}$

2) ~~$w = f(x, y, z)$~~

(a) 2) $w = f(x, y, z)$

(a) $\vec{\nabla f}$ ⊥ level ~~curve~~ surfaces



1) $f(x,y)=z$

(a) $\nabla f \perp$ level curve

(b) $D_{\vec{v}} f = \vec{\nabla} f \cdot \vec{v}$

$\Rightarrow$ Direction of ∇f gives the maximum derivative.

2) $w=f(x,y,z)$

(a) $\nabla f \perp$ level surface

$D_{\vec{v}} f = \nabla f \cdot \vec{v} = |\nabla f| \cdot 1 \cdot \cos\theta$

$\Rightarrow$ Direction of $\vec{\nabla f}$ gives the maximum derivative

$(D_{\vec{v}} f)_{max} = |\vec{\nabla f}|$

$(D_{\vec{v}} f)_{min} = -|\nabla f|$

Ex: a) Find the derivative of $f(x,y)=x^3-xy^2-1$ at $P_0(1,1)$ in the direction of $\vec{u}=2i-3j$.

(b) In which direction does $f(x,y)$ change rapidly at P_0? Determine the equation of the tangent line (at P_0) to the level curve through P_0.

sol:

a) $|\vec{u}|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

$\vec{v}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i}-\frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j}$ $(\vec{v}/\!/\vec{u})$ $(|\vec{v}|=1)$

$\nabla f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$

$\nabla f = (3x^2-y^2)\vec{i}+(-2xy)\vec{j}$

$\vec{\nabla f}(1,1)=2\vec{i}-2\vec{j}$

$D_{\vec{v}} f\Big|_{(1,1)} = \vec{\nabla f}(1,1)\cdot\vec{v} = \frac{4}{\sqrt{13}}+\frac{6}{\sqrt{13}}=\frac{10}{\sqrt{13}}$

b) Direction of the $\nabla f(1,1)=2\vec{i}-2\vec{j}$

c) Normal line at $\vec{\nabla f}$ so the slope is

$\vec{\nabla f}(1,1)=2i-2j$

$m=\frac{-2}{2}=-1$

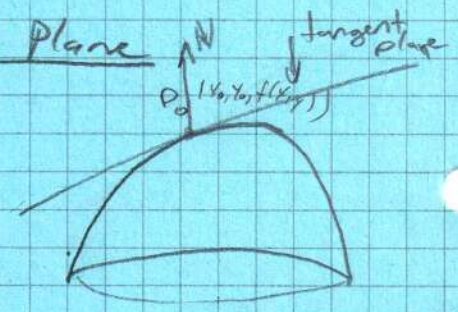
slope of tangent line $\perp$ to $\vec{\nabla f}$ is $(-1)^{-1}=1$

$y-1=1(x-1) \Rightarrow y=x$

the value of the curve is

$f(x,y)=f(1,1)$

Tangent Plane



Theorem:

The $\boxed{\vec{N}=\vec{\nabla f}(x_0,y_0)-\vec{k}}$ $\perp$ tangent plane

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\vec{j}-\vec{k}$

Equation of (P) plane

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

Ex: Find an equation for

a) the tangent plane at $P_0(-0.5,0,0.25)$ to the surface $z=x^2-xy-y^2$

b) the normal line at P_0 to the surface $z=x^2-xy-y^2$

sol: $\frac{\partial f}{\partial x}=2x-y$

$\frac{\partial f}{\partial x}=-x-2y$

$\frac{\partial f}{\partial x}(-0{,}5,0) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-0{,}5,0) = \frac{1}{2}$

$\vec{N} = -\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \vec{k}$

$(P): -(x+\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(y-0) - (z-\frac{1}{4}) = 0$

$(P): -x + \frac{y}{2} - z = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$\boxed{(P): -4x + 2y - 4z = 1}$

b) Choose $\vec{v} = \vec{N}$

$(L): x = -0{,}5 - t$

$y = 0{,}5t$

$z = 0{,}25 - t \quad (-\infty < t < \infty)$

Ex: Find an equation for the tangent plane to the surface $xy + z^3x - 2yz = 0$ at $P_0(1,1,1)$.

sol: x, y are ...?

$z = f(x,y)$ function

$\Rightarrow xy + xf^3(x,y) - 2yf(x,y) = 0$

$\frac{\partial}{\partial x}(xy + xf^3 - 2yf) = 0$

$y + f^3 + x3f^2\frac{\partial f}{\partial x} - 2y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

$1 + 1 + 3\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -2$

$\frac{\partial}{\partial y}(xy + xf^3 - 2yf) = 0$

$x + x3f^2\frac{\partial f}{\partial y} - 2f - 2y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

$\Rightarrow 1 + 3\frac{\partial f}{\partial y} - 2 - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1$

$\vec{N} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

$(P): -2x + y - z = 2$

$(P): -2(x-1) + 1(y-1) - 1(z-1) = 0$

Extreme Values

If $f(x,y)$ has a local extremum at (a,b) and $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}$ exists at (a,b)

then, $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \text{ and } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0}$

$\boxed{\vec{\nabla} f(a,b) = 0}$

$\Downarrow$

$D_{\vec{v}} f = (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{v} = 0$

Critical Points (CP)

A CP is an anterior (point) such that

$\begin{cases} \vec{\nabla} f(CP) = 0 \\ \text{or} \\ \vec{\nabla} f(CP) \nexists \end{cases}$

The only points where a func. $f(x,y)$ can assume extreme values are CP.s or land boundry points.

Saddle point (= CP)

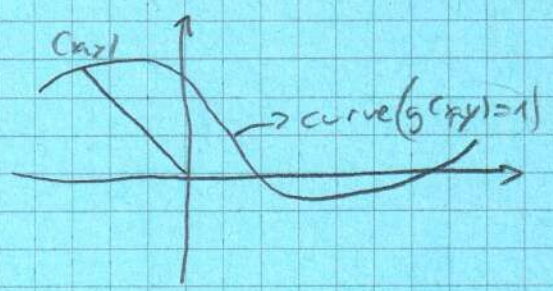
A (SP) is an anterior point (a,b) such that,

$\begin{cases} f(a,b) < f(x,y) \text{ for some points in } D \\ f(a,b) > f(x,y) \text{ " " other points in } D \end{cases}$

Find the point on the curve

$\underbrace{2x^2+xy+2y^2=1}_{\text{Constraint}}$ that are farthest from origin

$f(x,y)=x^2+y^2$ (square of the distance)



Choose

$g(x,y)=2x^2+xy+2x^2$

solve $\begin{cases} \vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \\ g(x,y)=1 \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y)&=1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 2x &= \lambda(4x+y) \\ 2y &= \lambda(x+4y) \\ 2x^2+xy+2y^2&=1 \end{aligned}$$

$2(1-2\lambda)x = \lambda y$ ①

$-\lambda x = 2(2\lambda-1)y$ ②

$2x^2+xy+2y^2=1$ ③

$(x,y) \neq (0,0)$

① $\frac{y}{x} = \frac{2(1-2\lambda)}{\lambda}$ | $\lambda=\frac{2}{5} \Rightarrow$ ②: $y=x$

② $\frac{y}{x} = \frac{-\lambda}{2(2\lambda-1)}$ | ③ $2x^2+x^2+2x^2=1 \to x^2=\frac{1}{5}$

$2^2(1-2\lambda)^2=\lambda^2$

$(2-4\lambda)^2=\lambda^2$

$(2-4\lambda)^2-\lambda^2=0$

$(2-4\lambda-\lambda)(2-4\lambda+\lambda)=0$

$\lambda=\frac{2}{5}$

$\left(-\sqrt{\frac{1}{5}}, -\sqrt{\frac{1}{5}}\right)$

$\left(\sqrt{\frac{1}{5}}, \sqrt{\frac{1}{5}}\right)$

$f(x,y)$

$\frac{2}{5}$ / $\frac{4}{5}$

Infinite Series

Sequences: An infinite sequence of numbers is a function whose domain is N^+

ex $f(x)=e^x$, $D=\mathbb{R}$

If we restrict D to N^+ then we get a sequence like...

$f(1)=e^1$, $f(2)=e^2, \dots, f(n)=e^n$

the graph is a set of points not a curve. in the xy plane

Convention

$\{e^n\}$ $e, e^2, \dots, e^n, \dots$

Ex: $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}: 0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$

$\left\{\frac{(-1)^n(n-1)}{n}\right\}: 0, \frac{1}{2}, \frac{-2}{3}, \dots \to \frac{(-1)^n(n-1)}{n}, \dots$

Convergence - Divergence - Limit

The $\{a_n\}$ converges if $\lim_{n\to\infty} a_n$ exists.

we write $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$

If $\lim_{n\to\infty} a_n \nexists$ we say that the sequence diverges.

Ex: ⓐ $\left\{\frac{n^2-1}{n^2}\right\}$, ⓑ $\{\cos n\}$, ⓒ $\{\ln n\}$

ⓓ $\{\tan^{-1} n\}$

ⓐ $a_n = \frac{n^2-1}{n^2}$, $\lim a_n = 1 \Rightarrow$ sequence converges.

ⓑ $a_n = \cos n$, $\lim \nexists \Rightarrow$ sequence diverges.

ⓒ $a_n = \ln n$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Rightarrow$ " "

ⓓ $a_n = \tan^{-1} n$, $\lim a_n = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ Sequence converges.

L'Hopital's rule $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \times \infty, 1^\infty, \infty^0\right)$

Determine the limits of the following sequences.

ⓐ $\left\{\frac{2^n}{5^n}\right\}$ ⓑ $\left\{\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n\right\}$

ⓒ $\left\{\frac{n^2}{2n-1}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$ ⓓ $\left\{\frac{3^n+4^n+5^n}{5^n}\right\}$

Sol:

ⓐ $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{5^n} = \frac{\infty}{\infty}$ $\quad 2^n = e^{\ln 2^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\ln 2^n}}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2\, e^{\ln 2^n}}{5} = \infty$$

ⓑ $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n \Rightarrow \ln a_n = n \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \to \infty \cdot 0$

$$\ln a_n = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{\frac{1}{n}} \to \frac{0}{0}$$

$$\ln a_n = \frac{\ln(n+1) - \ln(n-1)}{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}}{-1/n^2}$$

$$= \lim \frac{\frac{-2}{(n+1)(n-1)}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{2n^2}{(n+1)(n-1)} = 2 \Rightarrow \lim a_n = e^2$$

$\Rightarrow$ Sequence converges

Frequent Limits:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim n^{1/n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \quad (x > 1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad (\forall x)$$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad (|x| < 1)$$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \infty \quad (x > 1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (x \neq 0)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

Stirling approximation:

n large number $\Rightarrow n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e}$$

Infinite Series

Given a sequence of number $\{a_n\}$, an expression of the form:

$$\rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \rightarrow$$

which is called (a) series.

Remark:

$\{a_n\}: a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ sequence $\rightarrow$ no operation btwn numbers

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ Series $\rightarrow$ there is an operation btwn numbers.

$\uparrow$ short notation.

When the sum $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ exists, we say that the series converges. If the sum is infinity or doesn't exist we say the series diverges.

Ex:

a) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}+\dots=2$ (geometric series)

(convergent series)

b) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}+\dots=\infty$ (harmonic series)

(divergent series)

(goes btwn 1 and 0 so ...)

c) $1-1+1-1+\dots+(-1)^{n-1}+\dots=\nexists$

(divergent series)

Remark: Rearranging the terms of a series is generally invalid.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots+(-1)^{n-1}+\dots=\ln 2$$

(Alternating harmonic series)

same series as above but terms rearranged

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{6}+\dots\neq\ln 2$$

Sum of Series:

» Sequence of Partial Sums:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\dots+a_n+\dots\ ?$$

Answer: Construct the sequence of partial sums, $\{S_n\}$

$S_1=a_1$

$S_2=a_1+a_2$

$S_3=a_1+a_2+a_3$

$\vdots$

$S_n=a_1+a_2+\dots+a_n$

by definition

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n}$$

Ex: Evaluate $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}+\dots$

sol: Sequence of partial sums $\{S_n\}$

$S_1=1=2-\left(\frac{1}{2}\right)^0$

$S_2=1+\frac{1}{2}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^1$

$S_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\vdots$

$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)=2-0=2$$

Geometric Series:

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\underbrace{a}_{a_1}+\underbrace{ar}_{a_2}+\underbrace{ar^2}_{a_3}+\underbrace{ar^3}_{a_4}+\dots+\underbrace{ar^{n-1}}_{a_n}+\dots$$

a: constant

r: ratio

if you divide the term by the previous you always get r.

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots$

geometric series.

$a=\frac{1}{2},\ r=\frac{1}{2}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\dots$

$r=-\frac{1}{2}\quad a=-\frac{1}{2}$

geometric series

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$

$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

r changes the sign

therefore not geometrically!

» Sequence Of Partial Sums:

$S_1=a$

$S_2=a+ar$

$\vdots$

$S_n=a+ar+\dots+ar^{n-1}$

$rS_n=ar+ar^2+\dots+ar^n$

$rS_n-S_n=ar^n-a$

$S_n(r-1)=a(r^n-1)\Rightarrow\boxed{S_n=\frac{a(1-r^n)}{(1-r)}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\lim_{n\to\infty}S_n=\begin{cases}\frac{a}{1-r}, & |r|<1\ (-1<r<1)\\ \text{diverges}, & |r|\geq 1\end{cases}$$

Ex: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a=1,\ r=\frac{1}{2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

Ex: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n = \overset{a}{1} - \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \dots + \left(-\frac{1}{5}\right)^n$

$r = -\frac{1}{5}$

$= \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{5}} = \frac{5}{6}$

Ex: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$

$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(-\frac{1}{5}\right)}_{a}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} \quad r = -\frac{1}{5}$

$= 1 + \frac{-\frac{1}{5}}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Ex: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{5^n}\right)$

$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}}_{2} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}}_{\frac{5}{6}} = \frac{17}{6}$

Reindexation:

$\sum_{n=5}^{\infty} a_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m+4}$

$m = n-4 \qquad n = m+4$

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} ar^m = \frac{a}{1-r}, \ -1<r<1$

$m = n-1$

Telescoping Series:

ⓐ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, ⓑ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

ⓑ $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{A}{(n-0)^2} + \frac{B}{(n-0)} + \frac{C}{(n+1)^2} + \frac{D}{(n+1)}$

$2n+1 = A(n+1)^2 + B(n+1)^2 + Cn^2 + Dn^2(n+1), \forall n$

$n=0: \boxed{1=A}$

$n=1: \boxed{1=C}$

cont. $D=0, B=0$

$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$

Sequence of partial sums $\{S_n\}$

- Extreme values
- Directional derivatives
- tangent plane
- Limit, cont, diff.
- chain rule
- Sequence

$S_1 = 1 - \frac{1}{4}$

$S_2 = \left(1-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) = 1 - \frac{1}{9}$

$S_3 = \left(1-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)$

$= 1 - \frac{1}{16}$

$S_n = \left(1-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$= 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} S_n = 1$

a). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}, \quad a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \Rightarrow 1 = A(n+1) + Bn, \forall n$

$n=0 \Rightarrow 1 = A$

$n=-1 \Rightarrow 1 = -B$

$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Sequence of partial sums $\{S_n\}$

$S_1 = 1 - \frac{1}{2}$

$S_2 = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$

$S_3 = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$

$S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{(n+2)} \Rightarrow 1 = A(n+2) + Bn$

$n=0 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$n=-2 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$

$a_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)}$

$S_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$

$S_2 = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)$

$S_3 = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)$

$S_4 = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\right)$

$S_5 = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{10}-\frac{1}{14}\right)$

$S_n = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{10}-\frac{1}{14}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+2)}\right)$

$S_n = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$

$S_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

Hw

1 → 46 p 632

The nth term test for Divergence

If $\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \neq 0 \\ \text{or} \\ \nexists \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges.

This test is inclusive if

$\lim_{n\to 0} a_n = 0$

Theorem:

$\sum^{\infty} a_n = A, \ \sum_n^{\infty} b_n = B$

$\Rightarrow \sum_n^{\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$

$\sum_n^{\infty} (k a_n) = kA$

Ex: ~~which~~ which series diverge and which series converge? if series converges find the sum.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{5^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{1000n}\right)$

sol: a)

$$a_n = \frac{\cos n\pi}{5^n}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow$ The nth term test is inconclusive

$\cos n\pi = (-1)^n$

$a_n = \frac{(-1)^n}{5^n} = \left(-\frac{1}{5}\right)^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 1\left(-\frac{1}{5}\right)^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$

a geometric series with $r = -\frac{1}{5} \Rightarrow$ convergent

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{5}{6}$$

b) $a_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow$ is inclusive

$a_n = \ln n - \ln(n+1)$

$s_1 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$

$s_2 = (-\ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) = -\ln 3$

$s_n = \ln 1 - \cancel{\ln 2} + (\cancel{\ln 2} - \cancel{\ln 3}) + \dots + (\cancel{\ln n} - \ln n+1)$

$= \ln 1 - \ln n+1 = -\ln n+1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$$

diverges

c) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to 1^\infty$

$\lim_{n\to\infty}$

The Integral Test

let $\{a_n\}$ a sequence of positive terms, suppose $a_n = f(n)$.

If $\begin{cases} f \text{ cont. for } n>N \\ f \text{ positive for } n>N \\ f \text{ decreasing for } n>N \end{cases}$

then $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ and $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$

both converge or both diverge.

Ex: Harmonic Series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

$a_n = \frac{1}{n}$, $f(n) = \frac{1}{n}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

$\begin{cases} f(n) \text{ is cont for } n \geq 1 = N \\ f(n) \text{ is positive for } n \geq 1 \\ f(n) \text{ is decreasing for } n \geq 1 \end{cases}$

evaluate $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} =$

$\left(\begin{array}{l} \text{for } \frac{1}{n^2} = a_n \\ \Sigma \to \text{converges} \end{array}\right)$ $= \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1)$

$= \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$

$\hookrightarrow$ diverges.

so $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverges as well.

$\frac{1}{n^2} \to$ 3 the p-series

2 - series

The p-Series

$$\sum_{n=?}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad (p>0)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$: $\to \frac{1}{2}$ series

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$: $\frac{2}{3}$ series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{converges if } p>1 \\ \text{diverges if } 0<p\le 1 \end{cases}$$

Ex: $\sum_{n=2}^{\infty} = \frac{1}{n^{1,1}} \Rightarrow$ converges

The Direct Comparison Test

$\sum_{n=}^{\infty} b_n$ known

$\sum_{n=}^{\infty} a_n =$ given series(?)

1) If $a_n \le b_n \ \forall n \ge N$ and if $\sum^{\infty} b_n$ converges

$\Rightarrow \sum_{n=}^{\infty} a_n$ converges

2) If $a_n \ge b_n \ \forall n \ge N$ and if $\sum^{\infty} a_n$ ~~converges~~ diverges

$\Rightarrow \sum_{n=}^{\infty} a_n$ diverges.

Ex: Is $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n-3}$ convergent or divergent?

choose:

$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n}$ (1 series) $\rightarrow$ divergent.

a_n

$\forall n > 4$ (N), $n-3 < n$. The series $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n-3}$ diverges by the Direct Comparison Test (2)

$\underbrace{\frac{1}{n-3}}_{a_n} > \underbrace{\frac{1}{n}}_{b_n}$

The Limit Comparison Test

$(\sum b_n$ known, $\sum^{\infty} a_n = ?)$ $(b_n>0, a_n>0)$

1) If $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ and if $\sum^{\infty} b_n$ converges

$\Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ converges

2) If $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ and if $\sum^{\infty} b_n$ diverges $\Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ diverge

3) If $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ $(0<c<\infty)$

$\Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ and $\sum^{\infty} b_n$ both diverge or converge

Ex: Is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n(n^2+4)(n+6)}$ convergent or divergent?

Sol: b_n?

$$a_n = \frac{n^2+3}{n(n^2+4)(n+6)}$$

n large number: $a_n = \frac{n^2}{n\,n^2\,n} = \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{b_n}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (2 series) (convergent

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{n^2(n+3)}{n(n^2+4)(n+6)} = 1 \ (0<1<\infty)$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n(n^2+4)(n+6)}$ converges (3)

The Ratio Test:

$a_n \ge 0 \quad (n>N)$ (the series not all be positive or negative)

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

1) If $\rho < 1 \Rightarrow \sum_{n}^{\infty} a_n$ converges

2) If $\rho > 1 \Rightarrow \sum_{n}^{\infty} a_n$ diverges.

3) The test is inconclusive if $\rho = 1$.

the root test

$a_n \geq 0 \ (n > N)$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}}$$

1) If $\rho < 1 \Rightarrow \sum_n^\infty a_n$ convergent

2) If $\rho > 1 \Rightarrow \sum_n^\infty a_n$ divergent

3) If $\rho = 0 \Rightarrow$ inconclusive

Ex. Which series converse and which diverge?

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n\sqrt{n}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{1/3}}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh 2n}$ j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh n}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^n + e^{-n}}$

Sol:

b) The series converges by the Ratio test:

$$a_n = \frac{n^{12}}{2^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{12}}{2^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{12}}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^{12}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{12}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$$

f) the series diverges by the root test

$$a_n = \frac{(n!)^n}{(n^n)^2} = \left(\frac{n!}{n^2}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n!}{n^2} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{n^2} = \left(\frac{n-1}{n}\right)(n-2)!$$

$$\rho = \lim \sqrt[n]{a_n} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)}_{1} \times \underbrace{\lim_{n\to\infty}(n-2)!}_{\infty}$$

$$= \infty > 1$$

k) the series converges by the limit comparison test

$$a_n = \frac{2}{e^n + e^{-n}}$$

n large number: $a_n \simeq \frac{2}{e^n}$

choose $b_n = \frac{1}{e^n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n}\right) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{e}\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}}_{\text{geometric series (converges)}}, \quad -1 < r = \frac{1}{e} < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2e^n}{e^n + e^{-n}} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+e^{-2n}}$$

$$= 2 \ (0 < 2 < \infty)$$

c) The series diverges by the integral test

$$a_n = \frac{\ln n}{n} = f(n)$$

$f(n) \begin{cases} \text{Continuous for } n \geq \cancel{0}\,3 \\ \text{positive for } n > 3 \\ \text{decreasing for } n > 3 = N \end{cases}$

$f(x) = \frac{\ln x}{x} = x^{-1}\ln x$

$f'(x) = -x^{-2}\ln x + x^{-2} = x^{-2}(1-\ln x) = 0$

$\Rightarrow x = e$

$f'(x) < 0$ if $x > e = 2,7$

Evaluate $\int_3^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$

$\lim_{b\to\infty} \int_3^b \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_3^b \frac{2}{x}\ln x\,dx$

$= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} [\ln^2 x]_3^b$

$= \infty$

HW

1-60 p 649-650

71-72 p 650

75-76 p 650

Alternating Series

Absolute and Conditional Convergence

Def: A series in which the terms are alternately positive or negative is an alternating series.

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$

Alternating harmonic series

The Alternating Series Test.

$\sum_{n=1}^\infty a_n$ is an alternating series.

Write $\sum_{n=1}^\infty a_n = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} u_n$, $(u_n > 0)$

$(a_1 = u_1,\ a_2 = -u_2,\ a_3 = u_3,\ a_4 = -u_4 \dots)$

$\sum_{n=1}^\infty a_n$ converges if
- * $u_n > 0$
- * u_n decreasing $(u_n > u_{n+1})$
- * $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Ex: $\sum_{n=1}^\infty a_n = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (Alternating harmonic series)

$\Rightarrow u_n = \frac{1}{n} > 0$, $\frac{1}{n}$ decreasing

$\lim \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow$ the series converges.

The Absolute Convergence Test

Given a series $\sum_{n=\dots}^\infty a_n$

If $\sum_{n=\dots}^\infty |a_n|$ converges $\Rightarrow \sum_{n=\dots}^\infty a_n$ converges.

counterexample:

$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converges

but $\sum_{n=1}^\infty \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ diverges.

Absolute and Conditional Convergence

* If $\sum_{n=\dots}^\infty |a_n|$ ($\sum_{n=\dots}^\infty a_n$ converges)

* we say that $\sum_{n=\dots}^\infty a_n$ converges absolutely.

* If $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverges but $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, we say that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges conditionally.

Ex:

* The alternating harmonic series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converges conditionally.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} + \dots \quad (n \geq 1)$$

$r = -\frac{1}{2}$ $(-1 < r < 1) \Rightarrow$ converges

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \left| \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \right| + \dots$$

$r' = \frac{1}{2}$ $(0 < r' < 1) \Rightarrow$ converges absolutly

$\Rightarrow$ If a geometric series converges it also converges absolutely.

Alternating p-series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} \quad (p > 0)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad (p\text{-series})$$

The alternating p-series always converge $(p > 0)$ $\left(u_n = \frac{1}{n^p} > 0, \text{ decreasing and } \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} = \begin{cases} \text{converges absolutly if } p > 1 \\ \text{converges conditionally if } (0 < p \leq 1) \end{cases}$$

Ex: Which of the series are absolutely or conditionally convergent or divergent?

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ ③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^n}$

2) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ ④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ ⑥ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2 3^n}{(2n+1)!}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ⑧ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sqrt[n]{10}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{n+5^n}$ ⑩ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\tan^{-1} n}{n^2+1}$

Steps in solving

→ nth Term Test

→ absolute convergence test. $(\sum |a_n|)$

(Use any test for positive series)

Sol:

1) is an alternating $\frac{1}{2}$-series. $\Rightarrow$ converges conditionally.

2) Diverges by the n-th term test.

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \underbrace{\lim_{n\to\infty} (-1)^n}_{\pm 1} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}_{e^{-1}}$$

$$= \pm \frac{1}{e} \neq 0$$

3) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (test inconclusive)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} - \dots$$

{ not geometric, not positive, not alternating

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \dots$$

geometric series $\left(r = \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$ converges

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow$ also converges.

converges absolutely by the Abs-conv. test

4) $a_n = \frac{\sin n}{n^2}$ $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = 0\right)$

$|a_n| = \frac{|\sin n|}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$

$|\sin n| \le 1 \Rightarrow |a_n| \le b_n$

$\frac{|\sin n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow \sum |a_n|$ converges by the direct comparison test.

$\sum a_n$ converges by the absolute convergence test. (converges absolutely)

5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$: alternating series

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{(-1)^n}_{\pm 1} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)}_{>0}$

$\lim_{n\to\infty} \Rightarrow 0$ test is inconclusive

~~$(-1)\left(\sqrt{2}-1\right) + (1)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$~~

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

a) nth term test $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

b) compare with $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$: $\frac{1}{2}$ series (divergent)

$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2} \left(0 < \frac{1}{2} < \infty\right)$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverges by the limit comparison test

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = ?$

c) use the Alternating series test

$a_n = (-1)^n u_n$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$u_n > 0$, u_n decreasing, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges by the alternating series test.

converges conditionally.

H.W. 1→44 p.658-9
58 p.660
62 p.660

6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2 3^n}{(2n+1)!}$

Steps:

1 → Use the nth-term test (Evaluate $\lim_{n\to\infty} a_n$)

2 → If $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, consider $\sum |a_n|$.

Apply any test for positive series to $\sum |a_n|$.

3 → If $\sum |a_n|$ diverges $\Rightarrow \sum a_n$?

Sol6:

Stirling's formula: $n! \simeq n^n$

when n is a large number:

$a_n \simeq (-1)^n \cdot \frac{n^n 3^n}{(2n+1)^{2n+1}} \simeq \frac{(-1)^n n^{2n} 3^n}{(2n)^{2n+1}}$

$\simeq \frac{(-1)^n n^{2n} 3^n}{2^{2n+1} n^{2n+1}} \simeq \frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (Test inconclusive)

consider $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 3^n}{(2n+1)!}$

APply THe RAtio TEst:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{((n+1)!)^2\, 3^{n+1}}{(2n+3)!} \times \frac{(2n+1)!}{(n!)^2\, 3^n}$$

$$= \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3(n+1)^2}{2(2n+3)(n+1)} = \frac{3}{2}\,\frac{n+1}{(2n+3)}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{a_n} = \frac{3}{4} < 1$$

by the ratio test $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converges.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges absolutely.

8.6 Power Series
(Functional Series)

An expression of the form:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n =$$

$$= c_0 + \overbrace{c_1(x-a)}^{a_1(x)} + \overbrace{c_2(x-a)^2}^{a_2(x)} + \dots + \overbrace{c_n(x-a)^n}^{a_n(x)} + \dots$$

is called a power series centered at $x=a$

Ex:

① $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$

(geometrical power series)

$r(x) = x \Rightarrow -1 < r(x) < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$

when $-1<x<1$ $\quad \text{sum} = \frac{1}{1-x}$

② $1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \dots$

a geometric power series centered $x=2$ $\quad r(x) = -\frac{1}{2}(x-2)$

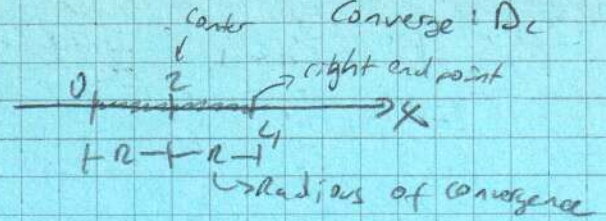
for which value(s) of x does the series converge?

Answer: $-1 < r(x) < 1$

$\Rightarrow -1 < -\frac{1}{2}(x-2) < 1 \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 0 \end{cases}$

$(- \; -)$

D_c: $0 < x < 4 \Rightarrow$ Domain of Converge: D_c



$D_c = (0,4)$ Domain open () in geometrical Series ...

Theorem: There are 3 possibilities for $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ with respect to convergence.

① $0 < R < \infty$ $(R \neq 0, R \neq \infty)$

$\Rightarrow$ the power series converges absolutly on $(a-R, a+R)$.

The series may or may not converge at the endpoints $a-R$, $a+R$.

② $R = 0$ The series converges at $x=a$.

③ The series converges for $-\infty < x < \infty$ $(D_c = \mathbb{R})$

General Procedure

Start by considering $\sum |c_n|\, |x-a|^n$

Then apply the Ratio or Root Test

Ex: Find the domain and radius (of) converges of the following series. What values of x do the series converge absolutely or conditionally?

ⓐ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ ⓑ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{3/2}}$

ⓒ $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ ⓓ $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^n$

ⓔ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n$

Sol a: $|a_n| = \dfrac{|x|^{2n-1}}{2n-1} = u_n(x)$

$$u_{n+1}(x) = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \times \frac{2n-1}{|x|^{2n-1}} =$$

$$= \frac{(2n-1)}{(2n+1)} x^2$$

$$\rho(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = x^2$$

$\Rightarrow \sum |a_n|$ converges by the ratio test if $x^2 < 1$

$\Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow R = 1 - 0 = 1$

$\Rightarrow \sum a_n$ converges on $(-1,1)$; it converges absolutely.

$\underline{x=1}$ $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

$$\sum |a_n| = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$$

Compare with $\sum_{n=1} b_n = \sum \frac{1}{n}$ (divergent)

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum |a_n| = \frac{1}{2n-1}$ diverges by the limit comparison test

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: converges by the alternatin series test.

$a_n = (-1)^{n-1} \underbrace{\left(\frac{1}{2n-1}\right)}_{a_n}$ $\left(a_n > 0,\ a_n \text{ decreasing},\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0\right)$

it converges conditionally

Sol b:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{3/2}}}_{a_n(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{4^{2n+1}}{n^{3/2}}}_{c_n} \left(x - \frac{5}{4}\right)^{2n+1}$$

center $a = 5/4$

$$|a_n(x)| = \frac{|4x-5|^{2n+1}}{n^{3/2}} = u_n(x)$$

Ratio Test:

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{\cancel{|4x-5|^{2n+3}}}{(n+1)^{3/2}} \cdot \frac{n^{3/2}}{\cancel{|4x-5|^{2n+1}}}$$

$$= |4x-5|^2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{3/2}$$

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n} = (4x-5)^2$$

$\Rightarrow \sum |a_n(x)|$ converges by the ratio test.

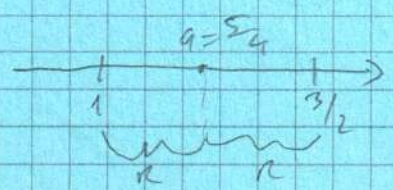
$\forall\ (4x-5)^2 < 1 \Leftrightarrow |4x-5| < 1$

$\Leftrightarrow -1 < 4x - 5 < 1$

$$\begin{cases} -1 < 4x-5 \Rightarrow x > 1 \\ 4x - 5 < 1 \Rightarrow x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$\boxed{1 < x < \frac{3}{2}}$ → condition of convergence

$\Rightarrow \sum c_n a_n(x)$ also converges (absolutely) for $x \in (1, \frac{3}{2})$ (by the absolute convergence test)



$R = \frac{3}{2} - \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$

checking the endpoints for convergence

$x=1$

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n^{3/2}} = -\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}}_{\frac{3}{2}\text{-series converges absolutely}}$$

$x=\frac{3}{2}$

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \Rightarrow \frac{3}{2}\text{-series converges absolutely}$$

$\Rightarrow$ Domain of convergence $D_c = [1, 3/2]$

There is no point where $\sum a_n(x)$ converges conditionally.

Sol C:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n, \quad a=0 \text{ center.}$$

$$|a_n(x)| = u_n(x) = n!\,|x|^n$$

Ratio Test:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \frac{(n+1)!\,\cancel{|x|^{n+1}}}{n!\,\cancel{|x|^n}} = (n+1)\cdot|x|$$

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} (n+1)\,|x| = \begin{cases} \infty, & \forall\, x \neq 0 \\ 0, & \forall\, a=0 \end{cases}$$

$\rho < 1 \Rightarrow \sum |a_n(x)|$ converges at $x=0$ (by the ratio test)

$\Rightarrow \sum a_n(x)$ " at $x=0$ (by the Abs. Conv. Test)

$\Rightarrow D_c = \{0\}, R=0$

ⓐ Term-by-Term differentiation Teorem

ⓑ " " " integration "

ⓒ The series multiplication Teorem

Ex: $1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \dots$

Converges abs. for $0 < x < 4$

$$\Rightarrow \text{The sum}: \frac{1}{1-\left[-\frac{1}{2}(x-2)\right]}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{2}(x-2)} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{2}{x} = 1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \dots$$

$0 < x < 4$

ⓐ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad a-R < x < a+R$

$$f'(x) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}}_{\text{new power series converges absolutely on } (a-R,\, a+R)}, \quad a-R < x < a+R$$

! $\longrightarrow$

(the derivative can be taken as many times as wanted)

ⓑ $\exists f \quad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-a)^n, \quad a-R < t < a+R$

Integrate a to x $(a-R < x < a+R)$

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-a)^n, \quad (a-R < x < a+R)$$

$$\Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1}, \quad (a-R < x < a+R)$$

(c) If $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $-R < x < R$

If $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, $-R' < x < R'$

$$\Rightarrow f(x) \cdot g(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n\right),$$

$\rightarrow \min(R, R') < x < \min(R, R')$

new power series of center $a=0$

Ex:

Given $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-1)^n x^n + \dots$

(a) Find domain and radius of convergence.

Find the sum of the series for $x \in (-R, +R)$?

(b) Show that:

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + \dots + (-1)^n n\, x^{n-1} + \dots, \quad (-R < x < R)$$

Then evaluate $-1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + (-1)^n n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots$

(c) Show that:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad (-R < x < R)$$

then evaluate

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} + \dots$$

Sol a

$a_n(x) = (-1)^n x^n$ It is a geometric series with $r(x) = -x$

The series converges abs. if $-1 < r(x) < 1$

$\Rightarrow -1 < -x < 1 \Rightarrow 1 > x > -1 \Rightarrow \boxed{-1 < x < 1}$

$D_c = (-1, 1)$, $R = 1 - 0 = 1$

Sum: $\frac{1}{1 - r(x)} = \frac{1}{1+x}$

(1) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$, $(-1 < x < 1)$

(b) Apply the term-by-term differentiation theorem to (1)

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + \dots + (-1)^n n x^{n-1} + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

set $x = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{4}{9} = -1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots$$

(c) Integrate from 0 to x $(-1 < x < 1)$:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 + \dots + (-1)^n t^n + \dots, \quad -1 < t < 1$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad -1 < x < 1$$

$$\left[\ln(1+t)\right]_0^x = \ln(1+x) - \ln 1 = \ln(1+x)$$

Taylor and Maclaurin Series

Given a function $f(x)$ How can we replace $f(x)$ by a power series that is equal to $f(x)$ on its domain of convergence?

Answer: If the center is a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}}_{c_n} (x-a)^n, \quad a - R < x < a + R$$

Taylor Series generated by $f(x)$ at $x = a$.

$f^{(0)}(x) = f(x),\ f^{(2)}(x) = f''(x)$ etc.

$f^{(1)}(x) = f'(x)$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

If $a=0$ Then the series will be called a Maclaurin series

<u>Ex</u>: Find the Maclaurin series generated by $f(x) = \cos x$

<u>sol</u>:

$$\cos x = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$f^{0}(0) = \cos 0 = 1$, $f^{(1)}(0) = f'(x) = -\sin x$, $f'(0) = 0$

$f^{(2)}(0) = -\cos x \Rightarrow f^{(2)}(0) = -1$, $f^{(3)}(0) = \sin x \Rightarrow f^{(3)}(0) = 0$

$n = 2i+1$ (odd number): $f^{(2i+1)}(0) = 0$

$n = 2i$ (even number): $f^{(2i)}(0) = (-1)^i$

$$\cos x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i} + \cdots, x \in \mathbb{R}$$

Apply the term by term differentiation theorem:

$$-\sin x = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^i x^{2i-1}}{(2i-1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^{i+1} x^{2i-1}}{(2i-1)!} \quad (i = 1, \ldots, \infty)$$

Maclaurin Series For Some Functions:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad (-1 < x < 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}, \ -1 < x \le 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}, \ -1 < x < 1$$

↑↑↑ Must know these (by heart :)) ↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑

<u>Ex</u>: Find the Taylor series (generated by $f(x)$) $f(x) = \frac{2x+1}{(x-3)(x-2)}$ at $x = -2$ $(a = -2)$

Determine the domain of convergence of series. {some problems in C.D.8}

<u>Sol</u>:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(-2)}{n!}}_{c_n} (x+2)^n$$

Do not use

Split $f(x)$ into sum of (2) partial fractions

$$\frac{2x+1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{3}{x-3} + \frac{(-5)}{x-2}$$

$$* \quad \frac{1}{1-y} = 1+y+y^2+\cdots+y^n+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} y^n, \ -1<y<1$$

$$\frac{7}{x-3} = \frac{7}{-3-2+(x+2)} = \left(-\frac{7}{5}\right)\frac{1}{1-\left(\frac{x+2}{5}\right)}, \text{ set } y=\frac{x+2}{5}$$

$$\frac{7}{x-3} = \left(-\frac{7}{5}\right)\sum_{n=0}^{\infty} y^n = -\frac{7}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+2}{5}\right)^n, \quad -1<\frac{x+2}{5}<1$$

$$\boxed{\frac{7}{x-3} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-7}{5^{n+1}}\right)\cdot(x+2)^n, \ -7<x<3}$$

$$\frac{-5}{x-2} = \frac{-5}{(x+2)-4} = \frac{5}{4-(x+2)} = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{x+2}{4}\right)}$$

$$\text{set } y=\frac{x+2}{4} \Rightarrow = \frac{5}{4}\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{5}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+2}{4}\right)^n$$

$$\boxed{\frac{(-5)}{(x-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{4^{n+1}}(x+2)^n, \quad -7<x<3} \quad \left(-1<\frac{x+2}{4}<1\right)$$

$$\frac{2x+1}{(x-3)(x-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left[\frac{5}{4^{n+1}}-\frac{7}{5^{n+1}}\right]}_{C_n}(x+2)^n, \quad (-6<x<2)$$

Ex: Find Maclaurin series for $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Determine the domain of convergence.

Use $\ln(1+y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^{n+1}}{n+1}, \ -1<y\le 1$

$$f(x) = \underbrace{\ln(1+x)}_{\text{set } y=x} - \underbrace{\ln(1-x)}_{\text{set } y=-x}$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots, \quad -1<x\le 1$$

$$\ln(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots, \quad -1<-x\le 1$$

$$f(x) = 2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right), \quad -1<x<1 \quad \text{intersection}$$

$$f(x) = \sum\frac{2}{2n+1}\cdot x^{2n+1}, \quad -1<x<1 = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Find Taylor series for $f(x)=\sin x$ at $x=\frac{\pi}{2}$ (at $\frac{\pi}{2}$) determine the domain of convergence

$$\sin x = \sum C_n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^n$$

use $\cos y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n}, \ y\in\mathbb{R}$

$$\sin x = \sin\Big[\underbrace{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}_{A}+\underbrace{\frac{\pi}{2}}_{B}\Big] = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

set $y = x-\frac{\pi}{2}$

$$\sin x = \cos y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n}, \ y\in\mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}, \ x\in\mathbb{R}$$

$\sin(A+B) = \sin A\cdot\cos B + \cos A\cdot\sin B$

H.w.

7→34 p681 $\quad -\infty<x-\frac{\pi}{2}<\infty$

45-48, 51 p 682

1-14, 35-42 p 682

Ex:

Find the first three terms of the Maclaurin series for $f(x)=\ln(1+\sin x)$

sol:

$$f(x) = C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4$$

use $\ln(1+y) = y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\cdots \quad -1<y<1$

or

use $f(x) = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots$

set $y=\sin x$ $\quad -1<\sin x<1$

$$\ln(1+\sin x) = \sin x-\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^4 x}{4}+\cdots$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

(--)

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$\sin^2 x = x^2 + \cdots$$

$$\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x = x^3 + \cdots$$

$$\ln(1+\sin x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots\right) - \frac{(x^2 + \cdots)}{2} + \frac{(x^3 + \cdots)}{3} + \cdots$$

$$-1 < \sin x \le 1$$

$$\ln(1+\sin x) = x - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

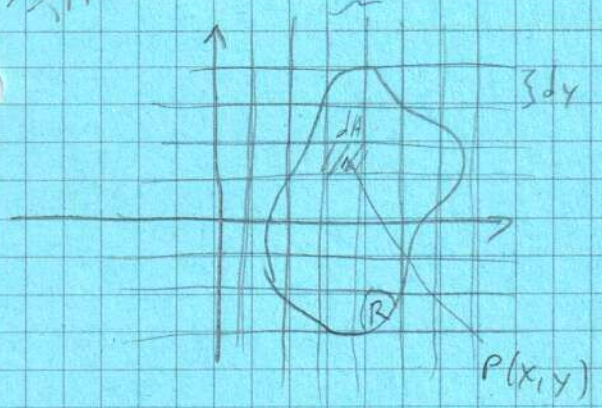
$$\ln(1+\sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots \qquad x \in \mathbb{R},\ x \neq -\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

Multiple Integrals

Double Integrals (Cartesian Coordinates)

Given $f(x,y)$

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \lim_{\Delta A \to 0} f(x,y) \cdot \Delta A$$



$$dA = dx\,dy$$

Ex: Evaluate

$$\int_2^4 \int_1^3 (x^2 y)\, dx\, dy \quad (--)$$

integration is done this way

$$= \int_2^4 \left[\int_1^3 x^2 y\, dx\right] dy = \int_2^4 \left[\frac{y}{3} x^3\right]_1^3 dy$$

$$= \int_2^4 \left(\frac{9}{3} y - \frac{y}{3}\right) dy = \frac{26}{3} \int_2^4 y\, dy = \frac{13}{3}\left[\frac{y^2}{2}\right]_2^4$$

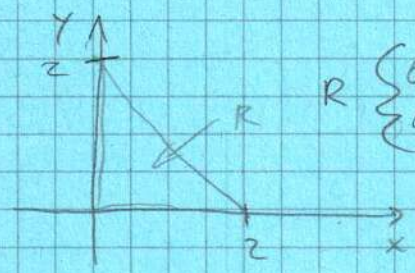
$$= 52$$

Finding the limits of Integration

Description of the region

Ex: Describe the region R in the xy-plane bounded by the lines $x=0$, $y=0$ and $y=-x+2$.

@ Description by vertical sections



$$R \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le -x+2 \end{cases}$$

$\Downarrow$ points inside the region.

In general $R \begin{cases} a \le x \le b \\ g_1(x) \le y \le g_2(x) \end{cases}$

when @ integration in the order

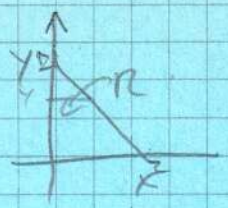
$$\iint_R f(x,y)\, dy\, dx$$

$$\int_a^b \underbrace{\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy\right]}_{F(x)} dx \text{ — scalar}$$

will act as a constant in the first integration.

(to evaluate a double integration you must know the equation of the boundaries...)

(b) description by horizontal sections.



$$R = \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ 0 \le x \le 2-y \end{cases}$$

In general:

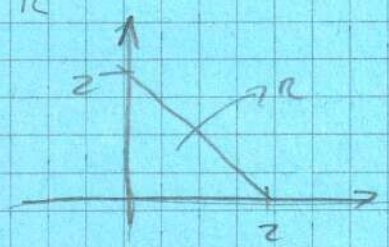
$$R \begin{cases} c \le y < d \\ h_1(y) \le x \le h_2(y) \end{cases}$$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \underbrace{\left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right]}_{G(y)} dy = \text{scalar}$$

keep y constant

Ex: Given $f(x,y) = x^2 y$. Evaluate

$\iint_R f(x,y)\,dA$ over R $x=0, y=0, x=-x+2$



Sol:

$$R \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2-x \end{cases}$$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^2 \int_0^{2-x} x^2 y\,dy\,dx \text{ (vertical section)}$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{x^2 y^2}{2}\right]_0^{2-x} dx = \int_0^2 \frac{x^2(2-x)^2}{2}\,dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^2(4-4x+x^2)}{2}\,dx$$

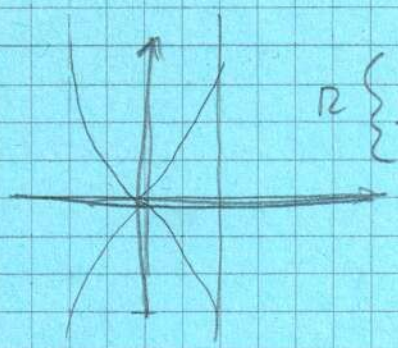
$$= \int_0^2 \frac{4x^2 - 4x^3 + x^4}{2}\,dx = \int_0^2 \frac{5x^2 - 4x^3}{2}\,dx$$

Ex Describe by vertical sections.

the region R bounded by the curves

$y = x^2$, $y = -x^2$, $x = 2$ Then eval.

$$\iint_R (x+y)\,dA$$



$$R \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ -x^2 \le y \le x^2 \end{cases}$$

$$\int_0^2 \int_{-x^2}^{x^2} (x+y)\,dy\,dx = \int_0^2 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{-x^2}^{x^2} dx$$

$$\int_0^2 x(x^2) + \frac{(x^2)^2}{2} - \left(x(-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2}\right)$$

$$= \int_0^2 x^3 + \cancel{\frac{x^4}{2}} + x^3 - \cancel{\frac{x^4}{2}} = \int_0^2 2x^3 = 2\,8 = 16$$

H.W.

1-62 p985-6

65-66 p986

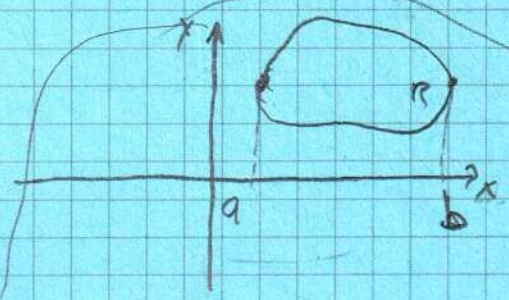
1-42 p992-8

Ex1: Sketch the region of integration R, reverse the order of integration, then evaluate, $I = \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\,dx}{y^4+1}$

Sol cont. ...

Ex: Find the volumes of the solid region bounded by the surface $z = x^2 + y^2$ and bounded below by the triangular region R enclosed by the lines $y = x$, $x = 0$, $y = -x + 2$

Sol Ex1:



$$R \begin{cases} a \le x \le b \\ g_1(x) \le y \le g_2(x) \end{cases}$$

vertical sections

Sol:

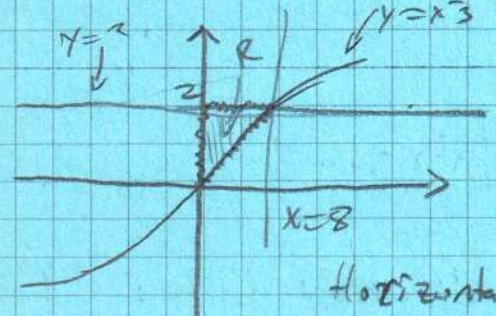
$$R = \begin{cases} 0 \le x \le 8 \\ x^{1/3} \le y \le 2 \end{cases}$$

horizontal sections

reverse the function and the integration to find hard and impossible integrals.

To sketch the region draw the curves $y = x^{1/3}$, $y = 2$.

$$\left(I = \iint \frac{1}{y^4+1}\, dx\, dy \right)$$



Horizontal sections

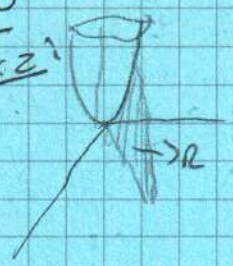
$$R \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ 0 \le x \le y^3 \end{cases} \text{(iterative integrals)}$$

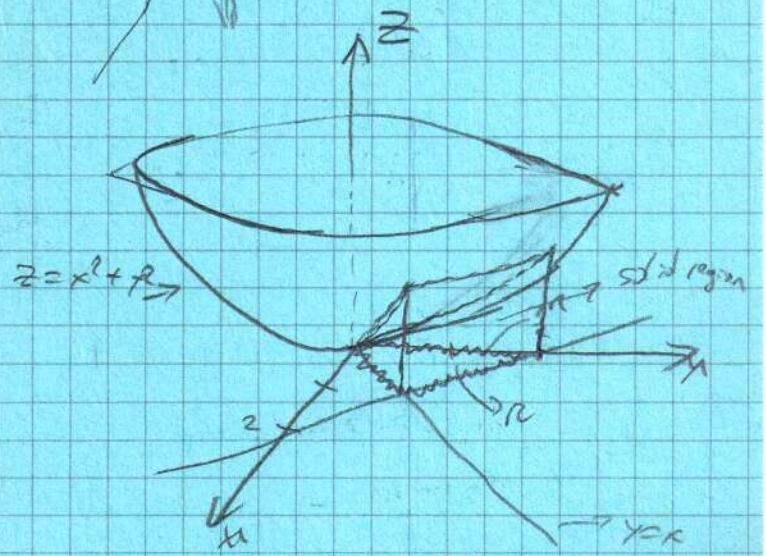
$$I = \int_0^2 \left[\int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\, dx \right] dy$$

$$I = \int_0^2 \left[\int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\, dx \right] dy$$

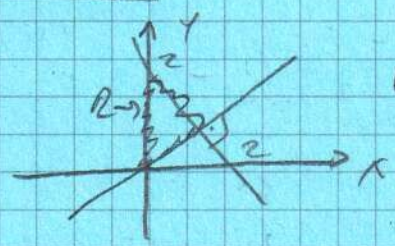
$$I = \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{1}{y^4+1} \cdot y^3\, dy = \frac{1}{4} \left[\ln(y^4+1) \right]_0^2 = \frac{\ln 17}{4}$$

Sol Ex2:





Description of R:



$$R = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le -x+2 \end{cases}$$

$$\text{Volume} = \iint_R z\, dA$$

$$V = \int_0^1 \left[\int_x^{2-x} (x^2 + y^2)\, dy \right] dx$$

$$V = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_x^{2-x} dx$$

$$V = \int_0^1 \left\{ \left[x^2(2-x) + \frac{(2-x)^3}{3} \right] - \left[x^3 + \frac{x^3}{3} \right] \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{8}{3}x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{8}{3} \right) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{3}x\right]_0^1 = \frac{4}{3}\text{ units}^3$$

Ex: Find the volume of the solid region in the first octant ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) bounded by the surface $z = 4 - x^2 y$ and by the coordinate planes.

plane

$z=0$

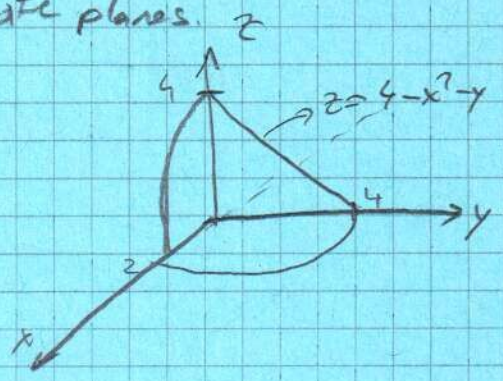
$y = 4 - x^2$

$x=0$

$z = 4 - y$

$y=0$

$z = 4 - x^2$



To sketch the solid region find the traces

$$R \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 - x^2 \end{cases}$$

$$R \begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ 0 \leq x \leq \sqrt{4-y} \end{cases}$$

$$V = \iint_R z \, dA = \int_0^2 \left[\int_0^{4-x^2} (4 - x^2 - y)\, dy\right] dx$$

$$= \int_0^2 \left[(4-x^2)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{4-x^2} dx = V$$

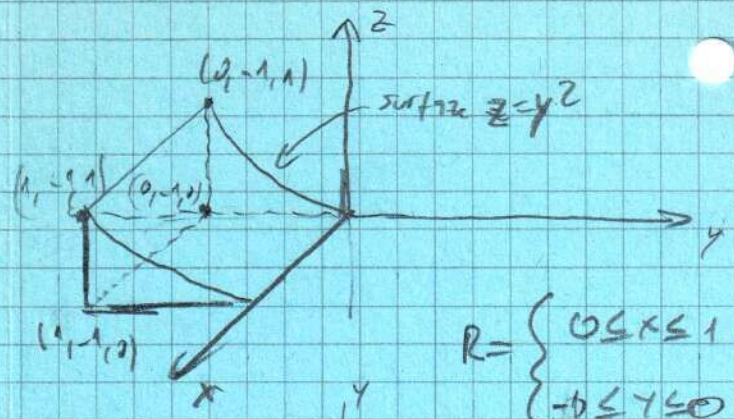
$$V = \int_0^2 \left[(4-x^2)^2 - \frac{(4-x^2)^2}{2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 (4-x^2)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (16 - 8x^2 + x^4)\, dx$$

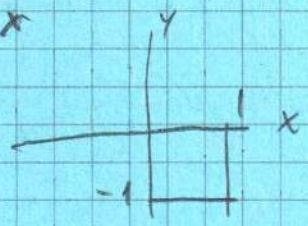
$$= \frac{1}{2}\left(16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{x^5}{5}\right]_0^2$$

$$= \frac{176}{15}\text{ units}^3$$

Ex: Evaluate the volume of the solid region shown in the graph:



$$R = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$$

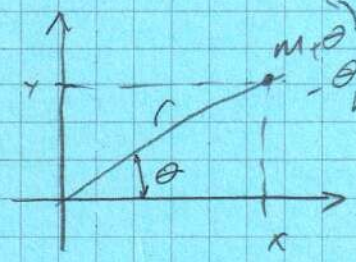


$$V = \iint z \, dA = \int_0^1 \underbrace{\left[\int_{-1}^0 y^2 \, dy\right]}_{\text{constant}} dx$$

$$= \left[\int_{-1}^0 y^2 \, dy\right] \cdot \left(\int_0^1 dx\right) = \left(\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^0 [x]_0^1 = \frac{1}{3}\text{ units}^3$$

Double Integrals in Polar Coordinates:

Polar Coordinates.



(x, y): Cartesian coordinates of M

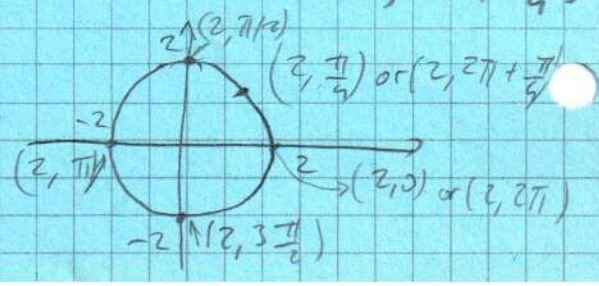
(r, θ): Polar coordinates of M

(r, θ)

r: units of length

θ: radians (rad)

Ex: Draw the point $(r, \theta) = (2, \frac{\pi}{4})$



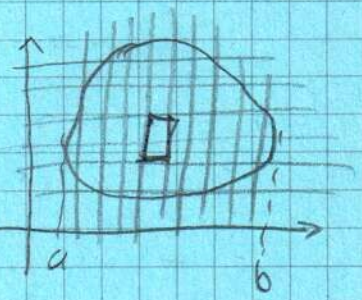
$x = r\cos\theta \qquad r^2 = x^2 + y^2$

$y = r\sin\theta \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$

Integrals in Polar Coordinates.

Cartesian Coordi.

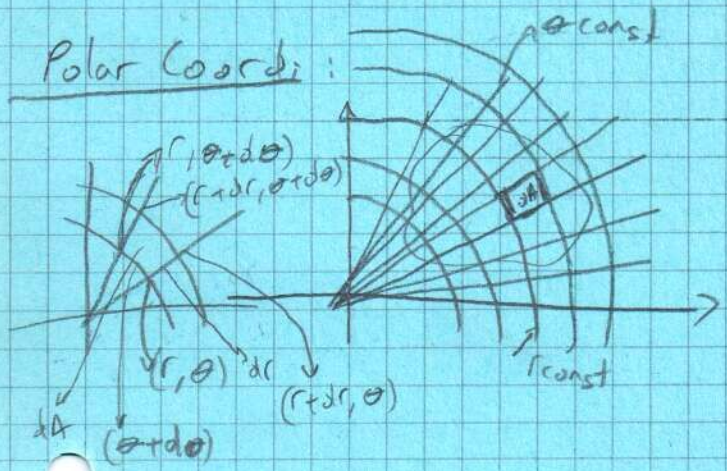
Given $f(x,y)$ and R



$$R\begin{cases} a \le x \le b \\ g_1(x) \le y \le g_2(x) \end{cases}$$

$$\iint_R f\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f\, dy\, dx$$

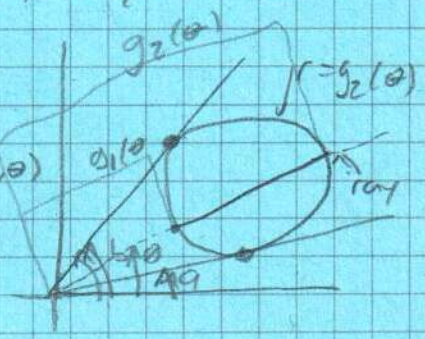
Polar Coordi:



$$dA = r\,dr\,d\theta$$

Description By rays

$$R = \begin{cases} a \le \theta \le b \\ g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta) \end{cases}$$



$$\iint_R f\, dA = \int_a^b \left[\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta)\, r\, dr \right] d\theta$$

Curves in Polar Coordinates.

ⓐ <u>line</u>: $y = Ax + B$

$y = r\sin\theta, \quad x = r\cos\theta$

$\Rightarrow r\sin\theta = Ar\cos\theta + B$

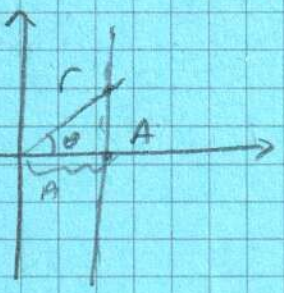
$r(\sin\theta - A\cos\theta) = B$

$$\boxed{r = \frac{B}{\sin\theta - A\cos\theta}}$$

ⓑ $x = A$

$\Rightarrow r\cos\theta = A$

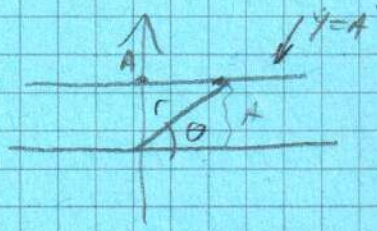
$$\boxed{r = \frac{A}{\cos\theta}}$$



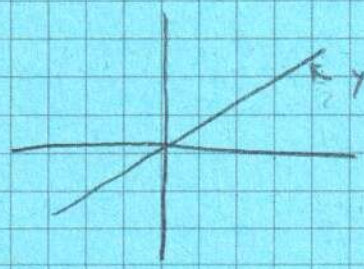
ⓒ $y = A$

$\Rightarrow r\sin\theta = A$

$$\boxed{r = \frac{A}{\sin\theta}}$$



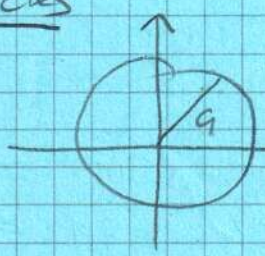
ⓓ



$$\boxed{\theta = \tan^{-1} A}$$

ⓔ

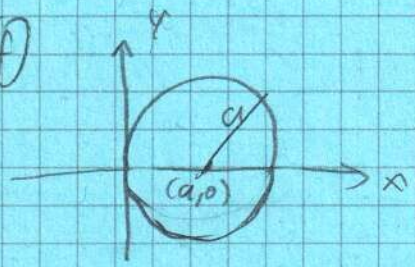
<u>Circles</u>



$x^2 + y^2 = a^2$

$$\boxed{r = a}$$

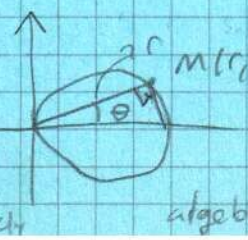
ⓕ



$(x-a)^2 + y^2 = a^2$

$\frac{r}{2a} = \cos\theta$

$$\boxed{r = 2a\cos\theta}$$



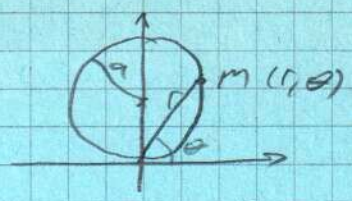
put $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ to find

← geometrically

algebraically

⑨ $x^2+(y-a)^2=a^2$

$\boxed{r=2a\sin\theta}$



Ex: change the cartesian integral into an equivalent polar integral, then evaluate the integral.

Ex 13 p 1005:

$$I=\int_0^2\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dy\,dx$$

Ex 8:

$$\int_0^2\int_0^x y\,dy\,dx$$

Ex 14:

$$\int_0^2\int_{-1\sqrt{1-(y-1)^2}}^{0} xy^2\,dx\,dy$$

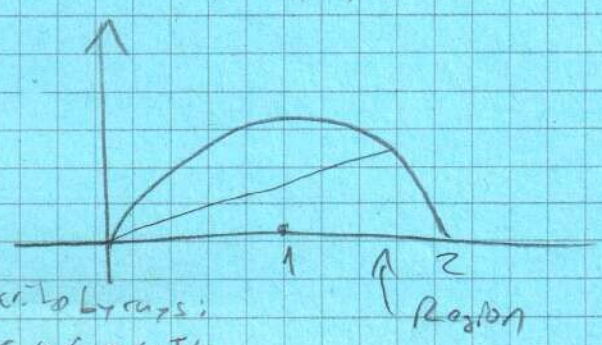
Sol 13:

$$R\begin{cases}0\le x\le 2\\ 0\le y\le\sqrt{1-(x-1)^2}\end{cases}$$ vertical descriptor

draw:

$y=0$ $\quad y=\sqrt{1-(x-1)^2}$

$y^2+(x-1)^2=1$



Describe by rays:

$$R\begin{cases}0\le\theta\le\pi/2\\ 0\le r\le 2\cos\theta\end{cases}$$

$$I=\iint_R 1\,dA=\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{2\cos\theta}\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cancel{r}}\,\cancel{r}\,dr\,d\theta\right]$$

$$=\int_0^{\pi/2}(\cos\theta+\sin\theta)\left(r\right]_0^{2\cos\theta}d\theta$$

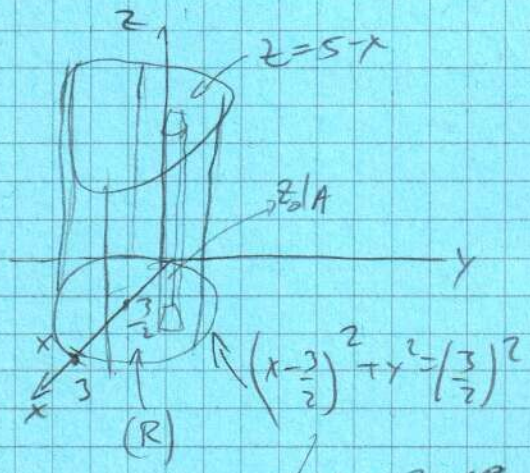
$$=2\int_0^{\pi/2}\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta$$

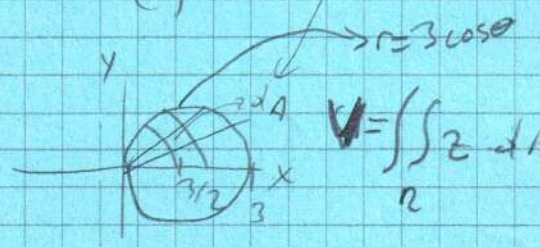
$$I=2\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta+d\theta+2\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$-\left[\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$I=\frac{\pi}{2}+1$$

Ex 16 p 1033 Find the volume of the solid region D that is the right circular cylinder whose base is the circle $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$ and whose top lies in the plane $z=5-x$. Sketch the region D.





$$V=\iint_R z\,dA$$

~~dA = r dr~~ $dA=r\,dr\,d\theta$

$z=5-r\cos\theta$

$$R = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ \underbrace{0}_{g_1(\theta)} \le r \le \underbrace{3\cos\theta}_{g_2(\theta)} \end{cases}$$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \int_0^{3\cos\theta} (5 - r\cos\theta) \cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{3\cos\theta} (5r - \cos\theta \cdot r^2)\,dr \right] d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{5r^2}{2} - \cos\theta \cdot \frac{r^3}{3} \right]_0^{3\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{5(3\cos\theta)^2}{2} - \frac{\cos\theta\,(3\cos\theta)^3}{3}\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\left(\frac{45}{2}\cos^2\theta - 9\cos^4\theta\right)}_{F(\theta)} d\theta$$

$$F(\theta) = \frac{45}{2}\cos^2\theta - 9\cos^2\theta + 9\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta$$

$$= \frac{27}{2}\cos^2\theta + \frac{9}{4}\sin^2 2\theta$$

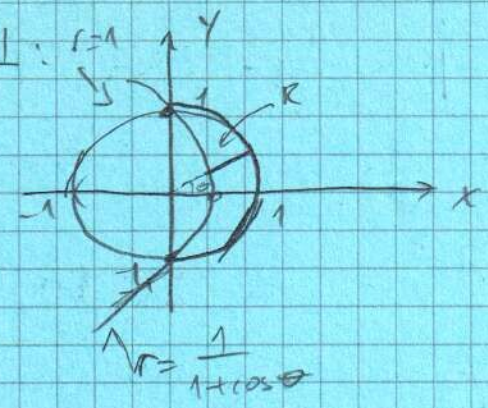
$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 d\theta + \frac{9}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{27}{2}\left[\frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{9}{4}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 4\theta}{8}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{27}{2} + \frac{9}{4}\right] = \frac{63}{8}\pi \text{ units}^3$$

Ex: Find the area of the region inside $r=1$ and to the right of the parabola $r = \frac{1}{1+\cos\theta}$

Sol:



$$R \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{1+\cos\theta} \le r \le 1 \end{cases} \quad \text{Area} = \iint_R dA$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\int_{\frac{1}{1+\cos\theta}}^{1} r\,dr\,d\theta \right]$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\frac{\pi}{2}} d\theta - \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2}$$

$$1+\cos\theta = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \left[\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1\right]$$

$$A = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^4\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta, \quad \alpha = \frac{\theta}{2}$$

$$d\theta = 2\,d\alpha$$

$$A = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^4\alpha \cdot d\alpha$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\left[\tan\alpha + \frac{\tan^3\alpha}{3}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

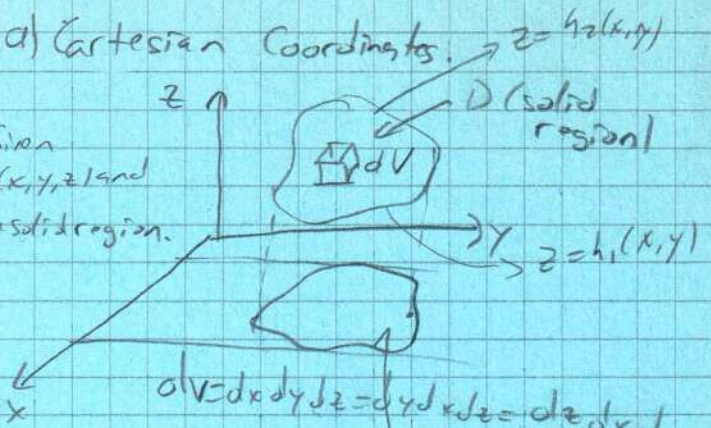
$$A = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\left\{\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(-1 - \frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$A = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) \text{units}^2$$

Triple Integration

a) Cartesian Coordinates.

Given $f(x,y,z)$ and a solid region.



$dV = dx\,dy\,dz = dy\,dx\,dz = dz\,dx\,dy = \ldots$

<u>order</u>: $dz\,dy\,dx$ R (projection of D onto the xy plane)

$$D \begin{cases} a \le x \le b \\ g_1(x) \le y \le g_2(x) \\ h_1(x,y) \le z \le h_2(x,y) \end{cases} \quad R$$

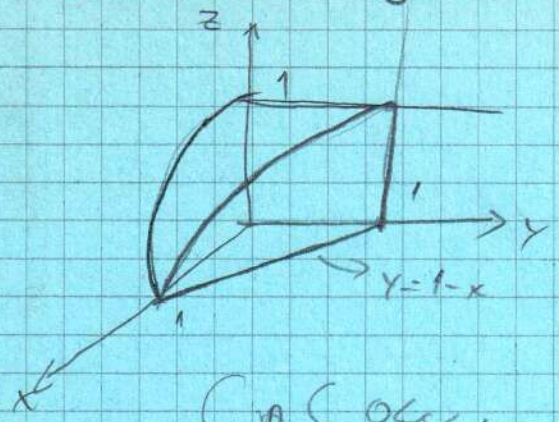
$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \underbrace{\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right)}_{G(x)} dx$$

<u>Ex 26 p 1016</u>: Find the volume of the region in the first octant bounded by the coordinate planes, the plane $y = 1-x$, and the surface $z = \cos(\pi x/2)$, $0 \le x \le 1$

<u>Ex 1 p 1017</u>: Evaluate by changing the order

$$\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz$$

Sketch the solid region:



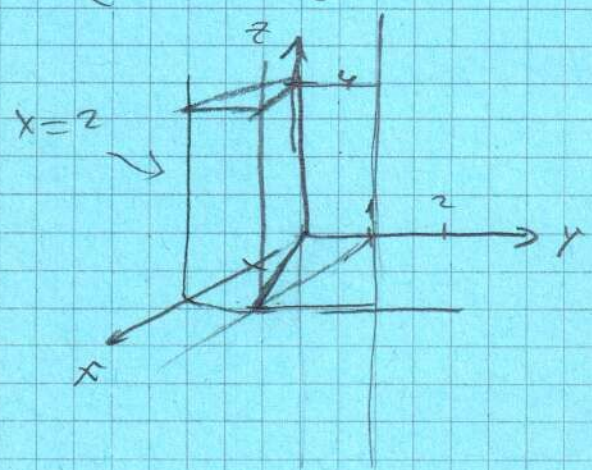
$$D \begin{cases} R \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \end{cases} \\ 0 \le z \le \cos(\pi x) \end{cases}$$

<u>Ex 41 p 1017 sol</u>:

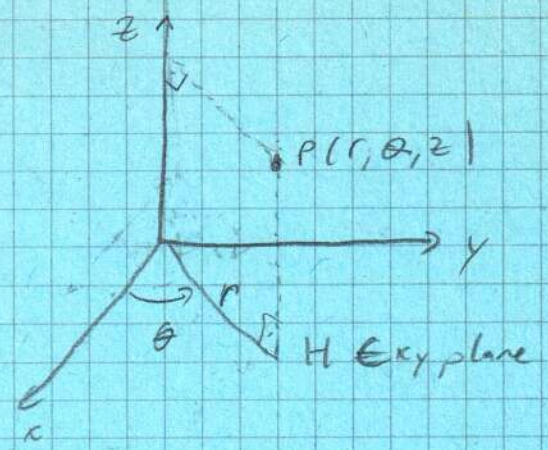
Do it in the order $dz\,dy\,dx$

Sketch the solid region D:

$$D = \begin{cases} 0 \le z \le 4 \\ 0 \le y \le 1 \\ 2y \le x \le 2 \end{cases}$$



Cylindrical Coordinates



(r, θ, z) are cylindrical coordinates of P.

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$z = z$

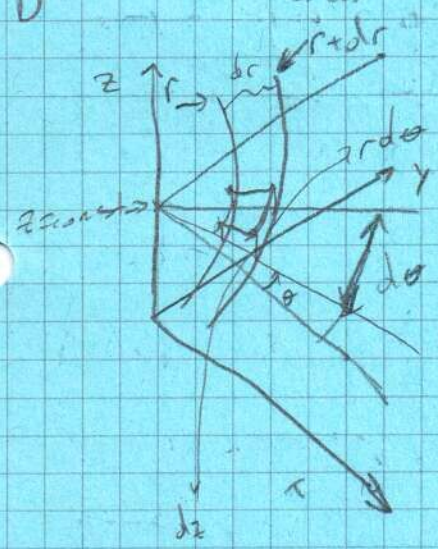
Integration of Cylindrical Coordinates

Given $f(r, \theta, z)$ and a solid region D

$$\iiint_D f \, dV$$

dV: volume element

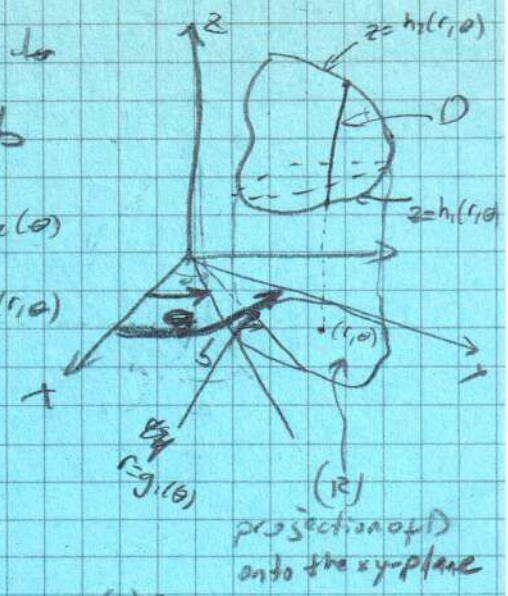
$r = \text{const} \Rightarrow$ cylinder
$\theta = \text{const} \Rightarrow$ vertical
$z = \text{const} \Rightarrow$ horizontal plane



$dV = r\,d\theta \cdot dr \cdot dz$
$= r\,dr\,d\theta\,dz$
$= r\,dz\,dr\,d\theta \Rightarrow$ most used order of integration
$= \ldots$

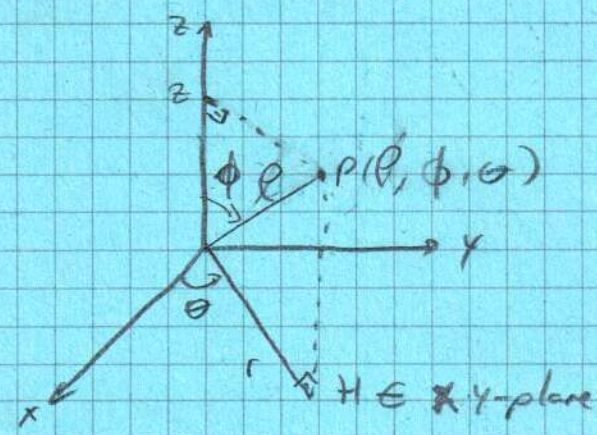
Order $dz\,dr\,d\theta$

$$D \begin{cases} a \le \theta \le b \\ g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta) \\ h_1(r,\theta) \le z \le h_2(r,\theta) \end{cases}$$

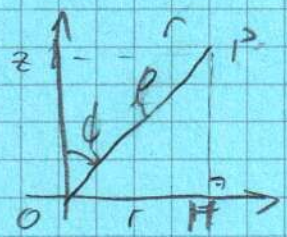


$$\iiint_D f \, dV = \int_a^b \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{h_1(r,\theta)}^{h_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)\, r\, dz \Big] dr\, d\theta$$

Spherical Coordinates



(ρ, ϕ, θ) spherical coordinates of P



$x = r\cos\theta = \rho\sin\phi$

$y = r\sin\theta = \rho\sin\phi\sin\theta$

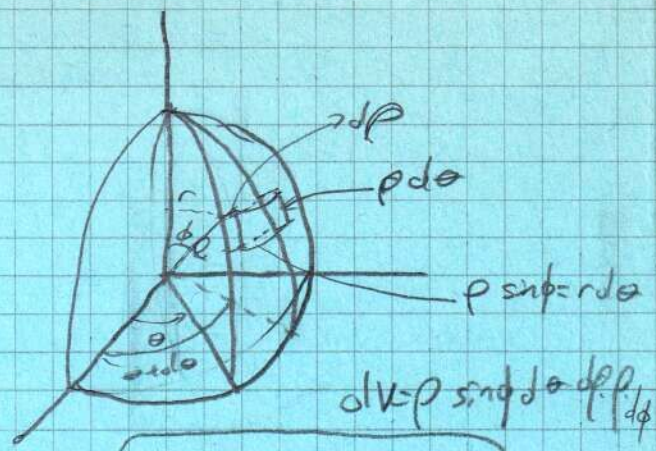
$z = \rho\cos\phi$

$r = \rho\sin\phi$

$\rho = \text{const} = \text{sphere of center } O$

$\phi = \text{const} = \text{cone}$

$\theta = \text{const} = \text{vertical plane}$

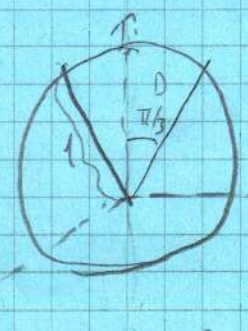


$$\boxed{dV = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta}$$

We will consider the case where the limits of ϕ are 2 constants.

$$D \begin{cases} a \le \theta \le b \\ c \le \phi \le d \\ h_1(\phi,\theta) \le \rho \le h_2(\phi,\theta) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} c \ge 0 \\ d > 0 \end{pmatrix}$$

Ex: Find the volume of the ice-cream cone D cut from the solid sphere $\rho \le 1$ by the cone $\phi = \frac{\pi}{3}$



$$D = \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{3} \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$$

$$V = \iiint_D dV =$$

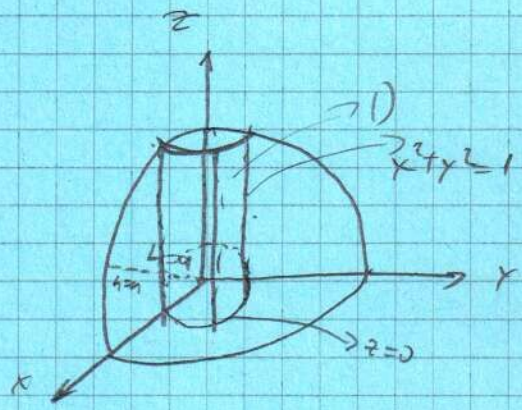
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/3} \sin\phi\, d\phi = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2\pi = \frac{\pi}{3} \text{ units}^3$$

Ex11 p1033: Let D be the region bounded below by the plane $z=0$, above by the sphere $x^2+y^2+z^2=4$ and on the sides by the cylinder $x^2+y^2=1$. Set up the triple integral in the orders $dz\,dr\,d\theta$ and $d\rho\,d\phi\,d\theta$ that gives the volume of D.

Ex12: D is the region bounded by the cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ and above by the paraboloid $z=2-x^2-y^2$. (order $dz\,dr\,d\theta$).

Sol 11:



$dV = r\,dz\,dr\,d\theta$

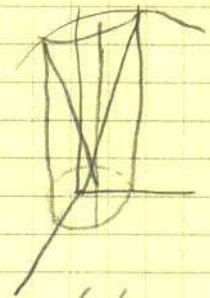
$$D \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le z \le \sqrt{4-r^2} \end{cases}$$

$$V = \iiint dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$d\rho\, d\phi\, d\theta$

$dV = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

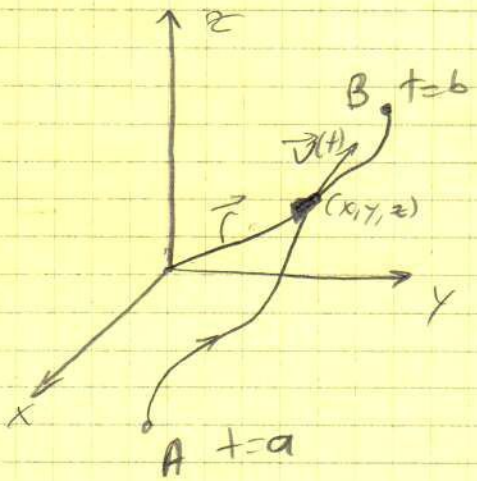
$$D \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \phi \le \\ \le \rho \le \end{cases}$$



Lose Lolop
Top only
gerdiz

Chap 13. Integration in Vector Fields

Parametric Equations of a Curve



$x = g(t),\ y = h(t),\ z = l(t),\ a \le t \le b$

$\Updownarrow$

$\vec{r}(t) = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j} + l(t)\vec{k},\quad a \le t \le b$

vector position

$\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$: velocity

$\vec{v}(t) = \dfrac{dg}{dt}\vec{i} + \dfrac{dh}{dt}\vec{j} + \dfrac{dl}{dt}\vec{k}$

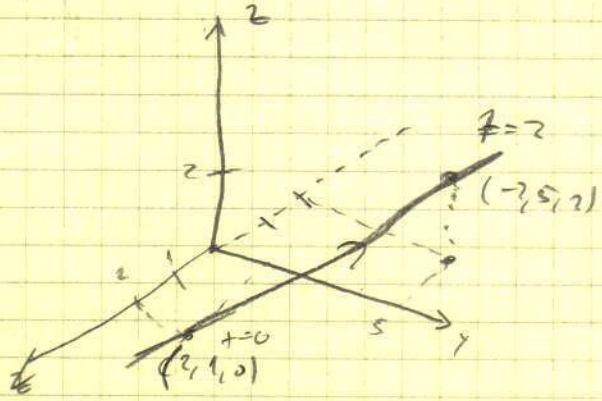
$\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}$: unit vector tangent to the curve at point $P(g(t), h(t), l(t))$

Ex: Sketch the curve

$\vec{r}(t) = (2-2t)\vec{i} + (1+2t)\vec{j} + (t)\vec{k},\ 0 \le t \le 2$

$t=0$: $(x,y,z) = (2,1,0)$

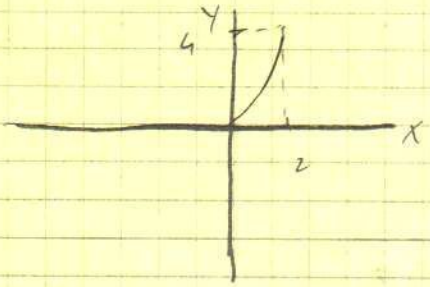
$t=2$: $(x,y,z) = (-2,5,2)$



$\vec{v} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k},\ |\vec{v}| = 3$

$\vec{T} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -\dfrac{2}{3}\vec{i} + \dfrac{2}{3}\vec{j} + \dfrac{1}{3}\vec{k}$

Ex: Parametrize the parabola $y = x^2,\ 0 \le x \le 2$. Find $\vec{T}$ tangent to the parabola at the point $(x,y) = (1,1)$



① $x = t,\ y = t^2,\ 0 \le t \le 2$

② $x = 2t,\ y = 4t^2,\ 0 \le t \le 1$
$(1,1) \to t = 1/2$

③ $x = \ln t,\ y = (\ln t)^2,\ 1 \le t \le e^2$
$(1,1) \to t = e$

④ $x = 2\sin t,\ y = 4\sin^2 t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
$(1,1) \to t = \pi/2$

⑤ $x = \sin t,\ y = \sin^2 t$, ? ✗ can't take this.

if we choose parametrization #2

$$\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + 4t^2\vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = 2\vec{i} + 8t\vec{j}$$

$$\vec{v}(\tfrac{1}{2}) = 2\vec{i} + 4\vec{j}, \quad |\vec{v}| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\vec{T} = \frac{2\vec{i} + 4\vec{j}}{\sqrt{20}} = \frac{\vec{i}}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$$

#3

$$\vec{r}(t) = (\ln t)\vec{i} + (\ln t)^2\vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{i}}{t} + \frac{2}{t}\ln t\,\vec{j} \Rightarrow \vec{v}(e) = \frac{\vec{i}}{e} + \frac{2\vec{j}}{e}$$

$$|\vec{v}(e)| = \sqrt{e^{-2} + 4e^{2}} = \sqrt{5}\,e^{-1}$$

$$\vec{T} = \vec{v}(e)/\sqrt{5}\,e^{-1} = \sqrt{\frac{\vec{i}}{\sqrt{5}} + \frac{2\vec{j}}{\sqrt{5}}}$$

<u>Work</u>

<u>Vector Field</u>

$$\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\vec{i} + N(x,y,z)\vec{j} + P(x,y,z)\vec{k}$$

<u>Ex.</u>

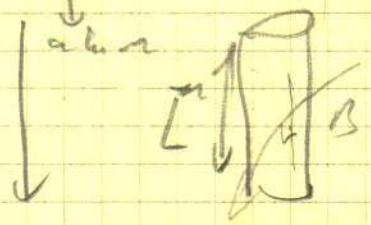
$$F(x,y,z) = (y - x^2)\vec{i} + (z - y)\vec{j} + (x - z^2)\vec{k}$$

$$F(0,0,0) = 0$$

$$\vec{F}(2,0,1) = -4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

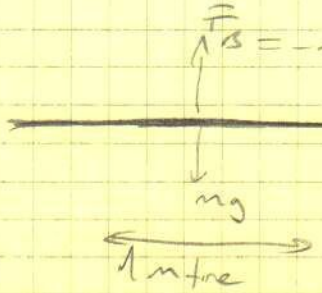
$F = iLB\sin\theta$

akım



$\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}$

$\vec{F}_B = -mg$ $\quad i = 28A$

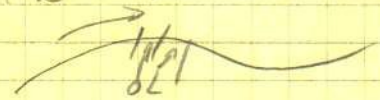


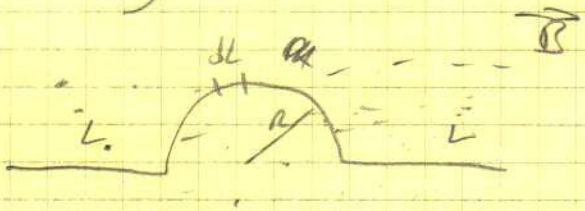
$28 \cdot 1 \cdot B = -mg$

$B = \frac{-mg}{28}$

$d\vec{F} = i\,d\vec{L} \times \vec{B}$

$\vec{F} = \int dF$





$dF = i\,dL \cdot B$

kondansatör (seri-paralel)
(enerji) (yükleme, boşalma)
(zaman)

!! → dielektrik kondansatör

akım direnç (ohm kanunu)
(direnç ötdirenç)

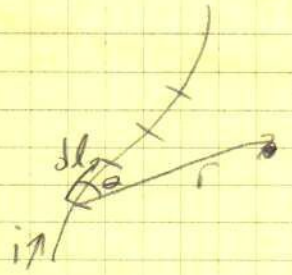
doğru akım kirchoff

~ manyetik alan, manyetik dipolün metrik

$\vec{\mu} = iN\vec{A}$ → manyetik moment

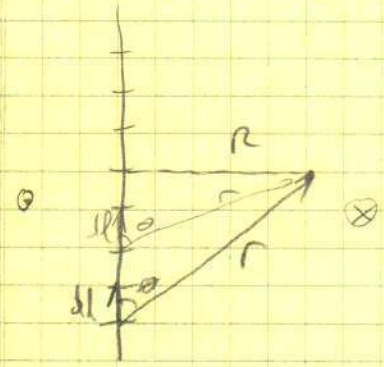
$F = q\vec{v} \times \vec{B}$

Biot-Savart kanunu



$dB = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{i\,dl}{r^2}\sin\theta$ → (Boş uzayın manyetik geçirgenliği)

$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i\,dl \times \vec{r}}{r^3}$



$B_{net,r} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int \frac{\sin\theta}{r^2}\,dl$

Sınav:

(%100) + kirchoff — 2 nokta arası potansiyel fark
Emk = ?

✓ + kondansatör — yükleme, boşalma

+ akımdan ç, akım yoğunluğu, direnç ötdirenç
geometriye bağlı direnç.

+ Dielektrik, sığa, eşdeğer sığa, depolanan enerji
↳ gauss

✓ manyetik alan, kuvvet ve yön ön tespiti
elektrik alan
akım taşıyan bobine etkiyen
manyetik
alan
tork

$V = I \cdot R$

Seri

$R_{Eş} = R_1 + R_2 + \cdots$

$\frac{1}{R_{eş}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots$

$CV = q$

yükleme

$q(t) = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC})$ τ

$V_c = \frac{q}{C} = \mathcal{E}(1 - e^{-t/RC})$

$i = \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right) e^{-t/RC}$

boşaltma

$q = q_0 e^{-t/RC}$

$i = -\left(\frac{q_0}{RC}\right) e^{-t/RC}$

Series: $\frac{1}{C_{eş}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots$

parelel: $C_{eş} = C_1 + C_2 + \cdots$

$\mathcal{E} = -d\phi/dt = N\frac{d\phi_B}{dt}$

$\phi = BA\cos\theta$

yükleme

$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/RC})$

boşalma

$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}$

$\vec{E} \cdot q_0 = \vec{F}$

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q|}{r^2}$

$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot dA = q_{enc}$

ϕ

(K) dielektrik varsa

$V_f - V_i = -\frac{W}{q}$

$V = -\int E\,ds$

Charge Cap

$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC})$ τ

$V_c = \frac{q}{C} = \mathcal{E}(1 - e^{-t/RC})$

$i = \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right) e^{-t/RC}$

discharge Cap

$q = q_0 e^{-t/RC}$

$i = \frac{dq}{dt} = -\left(\frac{q_0}{RC}\right) e^{-t/RC}$

$q = CV$

series: $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots$

parelel: $C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots$

$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$

Akım

$i = \int \vec{J}\,dA$ $J = \frac{i}{A}$

$\rho = \frac{E}{J}$ $R = \rho\frac{L}{A}$

$\rho - \rho_0 = \rho_0 \alpha (T - T_0)$

$J = (ne)\vec{v}_d$

$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$

$= |q| vB\sin\theta$

Force on A current

$F_B = iL \times B$

$= iLB\sin\theta$

Torq on A loop

$\tau = N i a b B \sin\theta$

iki tel arası kuvvet

$F_{ba} = \frac{\mu_0 L i_a i_b}{2\pi d}$

Biot-Savart

$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\,d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$

Amper

$\oint \vec{B}\,d\vec{s} = \mu_0 i$

$\oint B\,ds\cos\theta = \mu_0 i$

Manyetik Akı

$\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$

$\mathcal{E} = N\frac{d\phi_B}{dt}$

$\vec{F}_B = q\vec{V} \times \vec{B}$ → manyetik alan

$\vec{V}$ → hız, q → yük

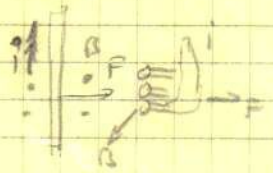
↳ manyetik alanın hareketli yük üstündeki kuvveti

$F_B = |q|\, V B \sin\theta$ → ~~yük~~ hız ile alan arasındaki açı

Manyetik Alandaki Tele Etkiyen Kuvvet

$F_B = iL \times B$

$= iLB\sin\phi$



İki Tel arası Kuvvet

$B_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}$ $\quad F_{ba} = i_b \vec{L} \times \vec{B}_a$

$F_{ba} = i_b L B_a \sin 90 = \frac{\mu_0 L i_a i_b}{2\pi d}$

Telin dışındaki manyetik alan

Biot Savart

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\, d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

Amper Kanunu

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu i$$

$$\oint B \cdot ds \cos\theta = \mu i$$

Manyetik Akı

$$\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

manyetik alan, alan

$$\phi_B = \int B \cdot dA \cos\theta$$

ϕ_B → 1 weber = 1 T m²

akının zamanla değişimi

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$ → den (Faraday) ~~elek~~ endüksiyon yapıyor

N → sarım sayısı

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\phi_B}{dt}$$

Gauss

$$\varepsilon_0 \oint E \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$

E → Elektrik alan, $d\vec{A}$ → alan, q_{enc} → alanın içindeki yük

akı

Coulomb's Law

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2} \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

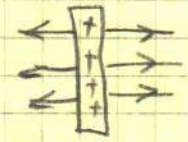
(↳ nokta için)

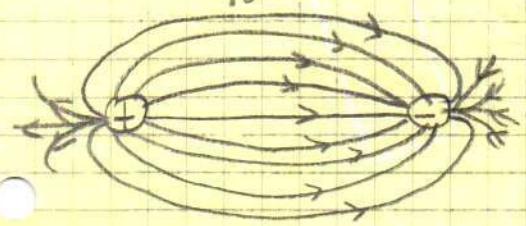
* Küresel iletkenler noktasal gibi davranır.

$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\ C^2/N\cdot m^2$ $\quad \boxed{q = ne}$

Electric Field

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$



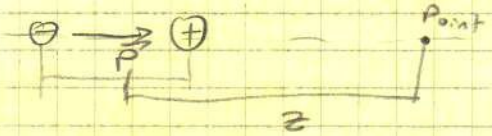


F yerine $\frac{k|q_1||q_2|}{r^2}$ yazarsak noktanın E'sini bulurz.

Electric Field due to a Dipole

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p}{z^3}$$

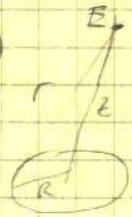
(electric dipole moment)



E due to a Charged Ring

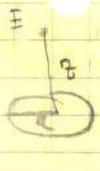
$$E = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}$$

(q: charge of ring)



$$\lambda = \frac{dq}{ds} \qquad \sigma = \frac{dq}{dA}$$

E due to Charged Ring



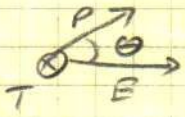
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

A point charge in an E

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Torque on dipole

$$\vec{T} = \vec{p}\times\vec{E}$$



Electric flux through a Gaussian Surface

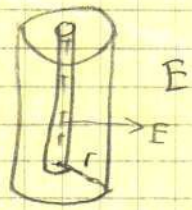
$$\phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

$$\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$ (q: inside the gaussian surface)

E on a conducting surface

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Gaussian Surface: Cylindrical



$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Gaussian Surface: Planar //

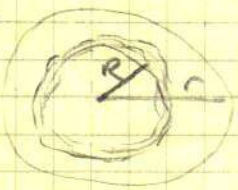
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Gaussian Surface: Spherical

r → gaussian shell

R → charged shell

Shell:



if $r \geq R$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}$$

else if $r < R$

$E = 0$

Sphere:

if $r > R$

the same as shell $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$

else if $r \leq R$

$E = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right) r$ → (the net q inside the sphere is proportional with r)

Electric Potential

$V_f - V_i = -\frac{W}{q}$

$V = -\int E\, ds$

$V = \frac{kq}{r}$ $\quad V = \frac{U}{q_0}$

$U = \frac{k q_1 q_2}{r}$

$E = \frac{-dV}{ds}$

Capacitance

$q = CV$

Series

$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots$

Parallel

$C_{eq} = C_1 + C_2 \dots$

Kapasitor Potansiyeli

$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} C V^2$

Dielektrik ile Gauss Kanunu

$\varepsilon_0 \oint K \vec{E} \cdot d\vec{A} = q$

→ Dielektrik sabiti

Charging A capacitor

$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC})$ $\quad$ Time Constant $\tau = RC$

$i = \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right) e^{-t/RC}$

$V_c = \frac{q}{C} = \mathcal{E}(1 - e^{-t/RC})$

Discharging A Capacitor

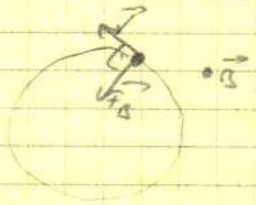
$q = q_0 e^{-t/RC}$

$i = \frac{dq}{dt} = -\left(\frac{q_0}{RC}\right) e^{-t/RC}$

$\vec{F_B} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$ → hareket eden nesnenin manyetik kuvvet.

$F_B = |q| v B \sin\theta$

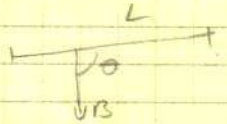
$qvB = \frac{mv^2}{r}$



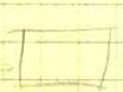
Force on a Current

$\vec{F_B} = i L \times B$

$i L B \sin\theta$



Torq on a Loop



$ab = A$

$\tau = N \cdot i \cdot a \cdot bB\sin\theta = N i A B \sin\theta$

current

number of loops.

Capacitor (Charging)

$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC})$ $\boxed{e^x = \ln x}$!

battery

$i(t) = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right) e^{-t/RC}$

$V_{C(t)} = \frac{q}{C} = \mathcal{E}(1 - e^{-t/RC})$ → V of Cap. during charging

$\boxed{\tau = RC}$

→ 0,63 dolma zamanı

(Discharge)

$q_{(t)} = q_0 e^{-t/RC}$

initial charge

$i_{(t)} = -\left(\frac{q_0}{RC}\right) e^{-t/RC}$

Power

$I^2 \cdot R = P$

$V \cdot I = P$ (of battery)

Paralel Capacitor

v'ler esit

$C_{eq} = C_1 + C_2$

$CV = q$

Serial Capacitor

q'lar esit

$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

Energy Stored in a Capacitor

$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} C V^2$

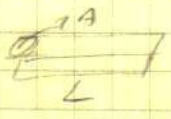
Akım

$i = \int \vec{J}\, d\vec{A}$ (A) $J = \frac{i}{A}$

özdirenç → direnç

$\rho = \frac{E}{J}$ $R = \rho \frac{L}{A}$

(ohm-meter)



özdirencin sıcaklığa göre:

$\rho - \rho_0 = \rho_0 \cdot \alpha (T - T_0)$

depends on the material.

Drift Speed

$\vec{J} = (ne)\vec{v}_d$

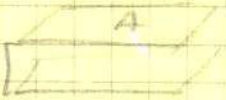
carrier charge density

$\boxed{E = \frac{V}{L}}$ $\boxed{J = \frac{i}{A}}$

$\boxed{i = \frac{dq}{dt}}$

dielectric capacitance

$C = \varepsilon_0 \mathcal{L}$ → A/d



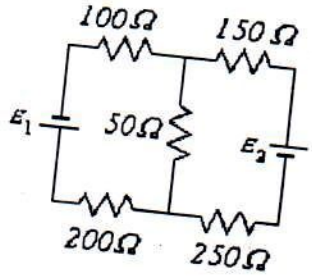
$C = K \cdot \varepsilon_0 \mathcal{L}_1 = K \cdot C_{air}$

6. QUIZ , 02. Şube

YAMLDOV

1. Varyant

03. 05. 2004



1. Direnç değerleri yandaki şekil üzerinde belirtilmiş olan devrede *EMK* 'lar $\varepsilon_1 = 6\,V$ ve $\varepsilon_2 = 9\,V$ olarak veriliyorlar. 50Ω 'luk direncin çektiği gücü hesaplayınız.

2. Merkezleri arasındaki mesafe *50 cm* olan, yalıtılmış iki özdeş [illegible] kuvvetle birbirlerini **çekiyorlar**. Daha sonra bu küreler kısa bir süre için bir [illegible] bağlanıyorlar. Bağlantı teli aradan kaldırıldığında küreler *0.0360 N* luk bir kuvvetle birbirlerini **itiyorlar**. Kürelerin başlangıçta sahip oldukları yük miktarını bulunuz.
(Cevap: $-1\,\mu C$ ve $+3.00\,\mu C$ **veya** $+1.00\,\mu C$ ve $-3.00\,\mu C$).
(Halliday, 6th Ed., Ch.22, **P.7**).

3. Bir Q yükü q ve Q-q olarak iki yüke ayrılıp, birbirlerinden belli bir mesafeye konuluyorlar. q ve Q-q arasındaki elektrostatik itme kuvvetinin *maksimum* olması için, q yükünün nasıl seçilmesi gerekir?
(Cevap: $q = Q/2$). (Halliday, 6th Ed., Ch.22, **P.13**).

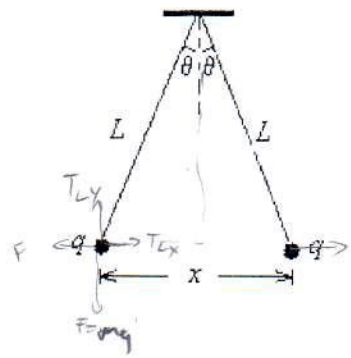
4. Şekilde gösterildiği gibi, her birinin kütlesi m, yükleri q olan iki özdeş küre, L uzunluklu yalıtkan iplerden asılı durmaktadır. θ açısının *küçük değerleri* için $\tan\theta \approx \sin\theta$ olduğuna göre, küreler dengede bulunduklarında

$$x = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\varepsilon_0 mg} \right)^{1/3}$$

olduğunu ispatlayınız.

$L = 120\ cm$, $m = 10\ g$ ve $x = 5\ cm$ ise, q yükünü bulunuz.

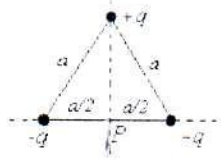
(Cevap: $q = \pm 2.4 \times 10^{-8}\,C$). (Halliday, 6th Ed., Ch.22, **P.15**).



5. Bir metal paranın $+1.0 \times 10^{-7}\,C$ luk bir yükle yüklenmesi, için kaç tane elektronun bu paranı terk etmesi gerekmektedir? (Cevap: 6.3×10^{11}). (Halliday, 6th Ed., Ch.22, **P.23**).

6. Yer yüzeyi yakınında (havasız ortamda-- vakum 'da) bulunan bir elektrona etkiyen *kütle çekim kuvvetini* dengelemek için ikinci bir elektronu birinciye göre nerede yerleştirmek gerekiyor?
(Halliday, 6th Ed., Ch.22, **P.24**).

Fiz 110 "Genel Fizik" **2. Ödev** *09 Mart 2004*

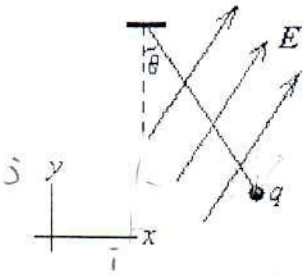


1. Aynı büyüklüklü üç q yükü, a kenar uzunluklu bir eşkenar üçgenin köşelerinde bulunmaktadır. Şekildeki gibi, yüklerden ikisi eksi, diğeri artıdır.

a) Eksi yüklerin ortasında (şekilde gösterilen P noktasında) elektrik alanın büyüklük ve doğrultusunu k, q ve a cinsinden ifade ediniz.

b) P noktasına konulan herhangi bir yüke etkiyen net elektrostatik kuvvetin olmaması için ($F = 0$ olması için) bir $-4q$ yükü nereye konulmalıdır? $+q$ yükü ile P noktası arasındaki uzaklık $1\ m$ olsun.

(Cevap: a) $-\left(\frac{4kq}{3a^2}\right)\vec{j}$; b) (0 m, 2 m). (Serway Ch.23, **P. 63**)

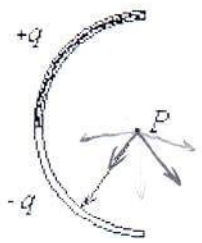


2. Şekilde gösterildiği gibi, $1\ g$ lik bir mantar top ince bir iplikle düzgün bir elektrik alanının bulunduğu bir bölgede asılıyor. $E = (3i - 5j)\cdot 10^5 N/C$ olduğunda top $\theta = 37^o$ de dengede kalıyor.

- topun yükünü ve
- ipteki

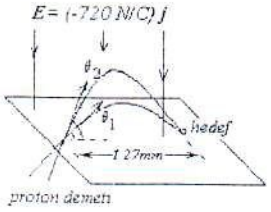
gerilmeyi bulunuz.

(Cevap: $q = 10.9nC$, $T = 5.43\times 10^{-3} N$). (Serway, Ch.23, **P. 55**)



3. Şekilde gösterildiği gibi, ince yalıtkan bir çubuk r yarıçaplı yarım-daire şeklinde bükülüyor. $+q$ yükü yarım dairenin üst kısmına, $-q$ yükü ise alt kısmına düzgün olarak dağıtılıyorlar. Yarım dairenin merkezinde, P noktasında, elektrik alan şiddetini bulunuz.

(Cevap: $q/\pi^2\varepsilon_0 r^2$, dikey aşağı doğru). (Halliday, 6th. Ed Ch.23, **P. 21**)



4. Protonlar düzgün bir $E = -720\ N/C$ elektrik alan bölgesine $v_0 = 9.55\times 10^3 m/s$ ilk hızıyla fırlatılıyorlar. Protonların fırlatıldıkları noktadan yatay olarak $1.27\ mm$ uzaklıktaki bir hedefi vurmaları bekleniyor.

- Vuruşun sağlanacağı iki θ_1 ve θ_2 atış açısını, ve
- Her iki atış için vuruşa kadar geçen süreyi bulunuz.

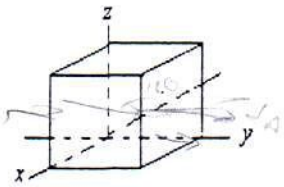
(Cevap: a) 36.9^o, 53.1^o b) $167\ ns$, $221\ ns$). (Serway Ch.23, **P. 53**)

5. R yarıçaplı yüklü diskin merkezinden dik olarak geçen eksen üzerindeki hangi bir noktada elektrik alan şiddeti diskin merkezindeki alan şiddetinin yarısına eşittir?

(Cevap: $R/\sqrt{3}$). (Halliday, 6th. Ed Ch.23, **P. 27**)

Fiz 110 "Genel Fizik" **3. Ödev** **16 Mart 2004**

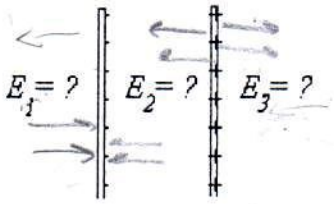
1. Tarafının uzunluğu $1.4\ m$ olan bir küp bir düzgün elektrik alanına konulmuştur. Eğer elektrik alanı **a)** $6.0\,\vec{i}$; **b)** $-2.0\,\vec{j}$; **c)** $-3\,\vec{i}+4.0\vec{k}$ olarak veriliyorlarsa, küpün sağ yüzeyinden geçen akı' yı hesaplayınız. **d)** Her bir durumda, küpten geçen net akı kaçtır?



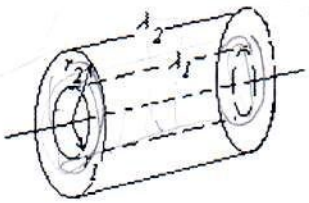
(Cevap: **a)** 0 ; **b)** $-3.92 N\cdot m^2/C$; **c)** 0 ; **d)** bütün durumlar için 0).

(Halliday, 6th Ed., Ch.24, **E. 3**).

2. İki yalıtkan, sonsuz boyutlu, paralel plaka düzgün olarak yüklenmişler. Plakalardan biri artı yüklü olup, yüzeysel yük yoğunluğu $\sigma_+ = 3\mu C/m^2$, ikinci plaka ise eksi yüklüdür ve yüzeysel yük yoğunluğu $\sigma_- = 6\mu C/m^2$ dir. Şekilde gösterilen bölgelerin her birinde elektrik alanını hesaplayınız.



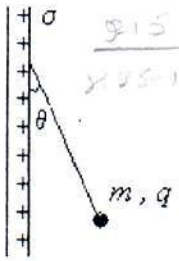
3. İki uzun, aynı eksenli, yüklü silindirlerin yarıçapları $r_1 = 3cm$ ve $r_2 = 6.0cm$ olarak veriliyorlar. İçteki silindirin uzunluk başına düşen yükü $\lambda_1 = 5.0\times10^{-6} C/m$, dıştaki silindirin uzunluk başına düşen yükü ise $\lambda_2 = -7.0\times10^{-6} C/m$ dir. Silindirlerin merkezinden **a)** $r = 4\ cm$ ve **b)** $r = 8\ cm$ mesafede elektrik alanını bulunuz.



(Cevap: **a)** $2.3\times10^6 N/C$, dışa doğru; **b)** $4.5\times10^5 N/C$, içe doğru).

(Halliday, 6th Ed., Ch.24, **P.21**).

4. Kütlesi $m = 1.0\ mg$, yükü $q = 2.0\times10^{-8} C$ olan küçük bir küre, şekilde gösterildiği gibi, yalıtkan bir ip kullanılarak dikey olarak konulmuş, *sonsuz boyutlu, yalıtkan ve homojen yüklü bir düzleme* bağlıdır. Küre dengedeyken ipin dikeyle oluşturduğu açı 30° ise, düzlemin yüzeysel yük yoğunluğu, σ 'yı hesaplayınız.



(Cevap: $5.0 nC/m^2$). (Halliday, 6th Ed., Ch.24, **P.29**).

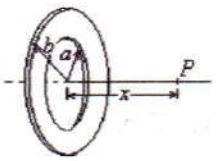
5. Yarıçapı R olan bir yalıtkan küre hacmi boyunca *düzgün olmayacak şekilde* yüklenmiştir. Eğer, küre merkezinden herhangi bir $0 \le r \le R$ mesafesinde hacimce yük yoğunluğu $\rho = Ar/R$ ise (yani, kürenin merkezinden uzaklaştığında hacim başına düşen yük r ye bağlı olacak şekilde değişiyorsa)

- kürenin toplam yükünün $Q = \pi A R^3$ ve
- kürenin *içinde*, merkezden r mesafesinde alan şiddetinin

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^4}r^2$$

olduğunu ispat ediniz. Burada A bir sabit değer, r ise küre merkezinden olan mesafedir.
(Halliday, 6th Ed., Ch.24, **P.4**).

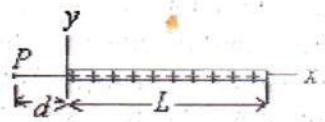
Fiz 110 "Genel Fizik" **4. Ödev** **25 Mart 2004**



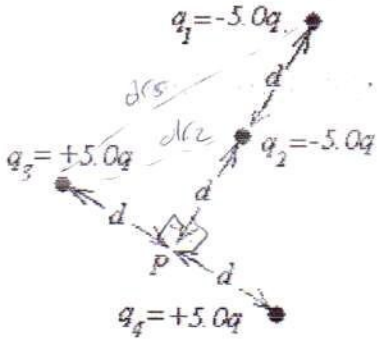
1. Düzgün yüklü halka şeklindeki dairesel levhanın iç yarıçapı a dış yarıçapı b dir. Şekilde gösterilen P noktasında elektriksel potansiyeli yüzeysel yük yoğunluğu σ, a, b ve x cinsinden ifade ediniz. (P noktası merkezden x mesafesinde olup, halka düzlemine dik olarak geçen eksen üzerindedir).

(Cevap: $V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}(\sqrt{x^2+b^2} - \sqrt{x^2+a^2})$). (Serway, Ch.25, **P.41**)

2. Uzunluğu L olan plastik bir çubuğun çizgisel yük yoğunluğu $\lambda = cx$ şeklinde, konumdan konuma değişiyor. Burada c bir pozitif sabit, x ise koordinat başlangıcından olan mesafedir. Şekilde gösterilen P noktasında elektriksel potansiyeli hesaplayınız. Çubuktan sonsuz uzakta $V_\infty = 0$ olarak alınız.



(Cevap: $\frac{c}{4\pi\varepsilon_o}[L - d\ln(1+L/d)]$). (Halliday, 6th Ed. Ch.25, P. 29)



3. Soldaki şekilde gösterilen noktasal yükler grubunun
a) P noktasındaki elektriksel potansiyelini hesaplayınız.
b) Sistemin potansiyel enerjisini nedir?

Cevap: a) $V = 2.5q/4\pi\varepsilon_o d$;

b) $U = \frac{2.5q^2}{4\pi\varepsilon_o d}(15 - 4\sqrt{5} - 5\sqrt{2})$.

4. R yarıçaplı, hacimce yük yoğunluğu düzgün, yalıtkan bir kürenin toplam yükü Q dir. **Kürenin içinde**, küre merkezinden r mesafesinde bulunan noktalarda, alan şiddeti (yani, $\vec{E}$ vektörünün boyu) r ye bağlı olarak $E(r) = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_o R^3}$ şeklinde değişiyor (Gauss kanunundan yararlanıp, kolayca ispat edilir). $r = 0$ noktasında $V_o = 0$ olduğunu varsayıp (yani V nin referans değerini kürenin merkezinde seçip).

a) Kürenin içinde, potansiyeli, V yi, konumun foksiyonu olarak bulunuz, $V(r) = ?$ $r \le R$
b) Kürenin merkezi ve yüzeyi üzerinde bulunan her hangi iki nokta arasındaki potansiyel farkını hesaplayınız.
c) [illegible] sahiptir?

(Halliday, 6th Ed. Ch.25, P.[illegible])

[illegible] (Cevap: büyüklüğü [illegible] N/m, yönü ile aynı ivmenin hareket yönüne ters yönde olup, [illegible] x ekseni ile 135° yapıyor). (Halliday, 6th Ed. Ch.25, E.31)

4. R yarıçaplı, hacimce yük yoğunluğu düzgün, yalıtkan bir kürenin toplam yükü Q dir. **Kürenin içinde**, küre merkezinden r mesafesinde bulunan noktalarda, alan şiddeti (yani, $\vec{E}$ vektörünün boyu) r ye bağlı olarak $E(r) = \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_o R^3}$ şeklinde değişiyor (Gauss kanunundan yararlanıp, kolayca ispat edilir). $r = 0$ noktasında $V_0 = 0$ olduğunu varsayıp (yani V nin referans değerini kürenin merkezinde seçip),

a) Kürenin içinde, potansiyeli, V yi, konumun foksiyonu olarak bulunuz, $V(r)=?\ r \le R$.

b) Kürenin merkezi ve yüzeyi üzerinde bulunan her hangi *ikinci bir nokta* arasındaki potansiyeller farkını hesaplayınız.

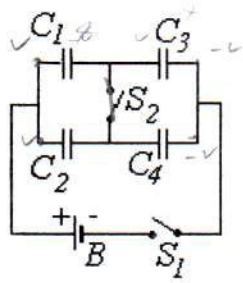
c) Eğer Q yükü pozitif ise merkezdeki mi veya yüzey üzerindeki nokta mı daha yüksek potansiyele sahiptir?

(Halliday, 6thEd. Ch.25, P.8)

5. xy düzlemi üzerinde elektriksel potansiyel her bir (x, y) noktasında $V = (2.0V/m^2)x^2 - (3.0V/m^2)y^2$ ifadesi ile veriliyor. Elektriksel alanın, $(3.0\ m\ ,\ 2.0\ m)$ noktasındaki yönünü ve şiddetini hesaplayınız. (Cevap: büyüklüğü $17\ V/m$, yönü ise saat ibrelerinin hareket yönüne ters yönde olup, "$+x$" ekseni ile $135°$ yapıyor). (Halliday, 6thEd. Ch.25, **E.31**)

Fiz 110 "Genel Fizik" **5. Ödev** $V = \frac{q}{C}$ **08 Nisan 2004**

1. Şekilde gösterilen kondansatörler grubunun *12 V* luk bir batarya tarafından beslendiğini varsayalım.



a) S_1 anahtarının *kapalı* , S_2 anahtarının *açık* ve

b) S_1 ve S_2 anahtarlarının *her ikisinin de kapılı* olduğu durumlarda her bir kondansatörün yükünü bulunuz.

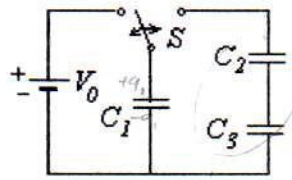
$C_1 = 1.0\ \mu F$, $C_2 = 2.0\ \mu F$, $C_3 = 3.0\ \mu F$, $C_4 = 4.0\ \mu F$ olarak alınız.

(Cevap: a) $q_1 = 9.0\ \mu C$, $q_2 = 16\ \mu C$, $q_3 = 9.0\ \mu C$, $q_4 = 16\ \mu C$;

b) $q_1 = 8.4\ \mu C$, $q_2 = 17\ \mu C$, $q_3 = 11\ \mu C$, $q_4 = 14\ \mu C$).

(Halliday, 6th Ed.., Ch26, **P.20**)

2. Şekildeki devrede S anahtarı "sol" konumda bulunduğunda C_1 kondansatörünün uçlarına V_0 potansiyel farkı uygulanıyor ve C_1 yükleniyor. Başlangıçta C_2 ve C_3 kondansatörleri yüksüzler. Daha sonra S anahtarı sağ konuma geçiriliyor. Kondansatörlerin "son" q_1 , q_2 ve q_3 yüklerini hesaplayınız. (Halliday, 6th Ed. Ch.26, **P. 21**)



(Cevap: $q_1 = \dfrac{C_1C_2 + C_1C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3} C_1V_0$, $q_2 = q_3 = \dfrac{C_2C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3} C_1V_0$.

3. Plakasının yüzölçümü A , plakaları arasındaki mesafe d olan paralel- plakalı kondansatörün uçları arasına V gerilimi uygulanıyor. Daha sonra bu kondansatörü besleyen batarya devreden alınıyor ve *her bir plaka üzerindeki yük miktarını değiştirmeyecek şekilde* plakalar arasındaki mesafe $2d$ 'ye çıkartılıyor.

a) Plakalar arasındaki potansiyel farkının yeni değerini,

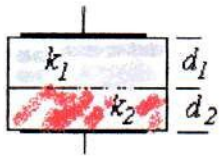
b) Kondansatörde depolanan enerjinin U_i "ilk" ve U_s "son" değerlerini,

c) Plakalar arasındaki mesafeni d den $2d$ 'ye çıkartmak için yapılması gereken işi

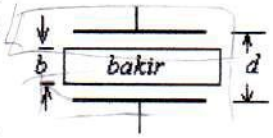
A , d ve V cinsinden ifade ediniz. (Halliday, 6th Ed., Ch.26, **P. 29**)

(Cevap: a) 2V; b) $U_i = \varepsilon_o AV^2 / 2d$, $U_f = 2U_i$; c) $\varepsilon_o AV^2 / 2d$).

4. Dielektrik sabitleri k_1 ve k_2, kalınlıkları d_1 ve d_2 olarak bilinen iki farklı madde ile doldurularak yapılmış olan bir paralel plakalı kondansatörün sığasının, C ' nin, kapasitansları $C_1 = \varepsilon_o A/d_1$ ve $C_2 = \varepsilon_o A/d_2$ olan iki **seri bağlı** kondansatör gibi ele alınabilindiğini, yani şekilde gösterilen kapasitörün sığasının $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ olduğunu ispat ediniz. A kondansatörün plakasının yüzölçümüdür.



5. Kalınlığı b olan bir bakır levha, şekilde gösterildiği gibi, plakasının yüzölçümü A, plakaları arasındaki mesafesi d olan bir paralel plakalı kondansatörün ortasına (plakalara dokunmayacak şekilde) konuluyor.



a) Bakır levha konulduktan sonra aygıtın sığasını hesaplayınız.

b) Eğer plakalar üzerindeki *yük miktarının sabit kalması sağlanırsa*, aygıtın bakır **levha konulmadan önce** ve **levha konulduktan sonra** depoladığı enerjilerin oranı nedir?. $U_{ilk}/ U_{son} = ?$

c) Levhanın plakalar arasına yerleştirilmesi için yapılması gereken iş kaçtır?

(Cevap: $C = \varepsilon_o \dfrac{A}{d-b}$). *(Halliday,* 5th Ed., Ch26, **P.61**).

Fiz 110 "Genel Fizik" **6. Ödev** **20 Nisan 2004**

1. Yarıçapı *10 cm*, yalıtılmış iletken bir küre iki tele bağlanıyor. Tellerden birinden 1 000 002 A şiddetinde bir akım küreye doğru, 1 000 000 A şiddetinde başka bir akım ise küreden dışa doğru geçmektedir. Kürenin potansiyelinin 1000 V olması için gereken zaman süresini hesaplayınız.
(Cevap: 5.5 ms). (Halliday, 6thEd.., Ch27, **P.3**)

2. Bir α - parçacıklar demetinde, her bir parçacık *20 MeV* luk kinetik enerjiye sahiptir. Bu demetin oluşturduğu akım $0.25\mu A$ ise

- *3* saniyelik bir zaman zarfında parçacıkların hareket yönüne dik olarak konulmuş yüzeye çarpan parçacık sayısı kaçtır?
- Her hangi bir zaman anında, demetin *20 cm* uzunluğundaki parçası kaç tane α - parçacık içermektedir?
- Başlangıçta hareketsiz olan α -parçacık potansiyeller farkı kaç olan iki nokta arasında hızlandığında enerjisi *20 MeV* olur?

(α - parçacığın yükü "artı" işaretli olup, elektronun yükünün iki katına eşittir).
(Cevap: a) 2×10^{12}; b) *5000*; c) *10MV*). (Hallyday, 6thEd.., Ch27, **P.9**)

3. R yarıçaplı silindir şekilli bir telden geçen akım yoğunluğu, J, silindir ekseninden olan r mesafesine bağlı olarak

$$J(r) = J_0\left(1-\frac{r}{R}\right)$$

şeklinde veriliyor. Yani, $r = 0$ da akım yoğunluğu maksimum J_0 değerine sahiptir ve telin yüzeyine doğru ($r \to R$) doğrusal olarak azalıyor.
a) Telden geçen akımı J_0 ve telin dik kesit alanı $A = \pi R^2$ cinsinden ifade ediniz.
b) Şimdi, $J(r) = J_0\dfrac{r}{R}$ olduğunu varsayalım. Yani, $r = 0$ da akım yoğunluğu sıfır, telin yüzeyinde ise maksimumdur ($J(R) = J_0$). **a)** şıkkında yaptığınız hesaplamanı tekrarlayınız. Sorunun **a)** ve **b)** şıklarının cevaplarının neden farklı olduğunu açıklayınız.
(Hallyday, 6th Ed., Ch.27, P. 10).

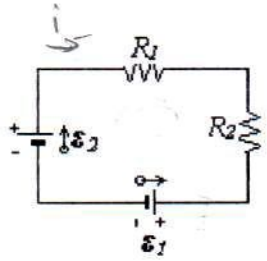
4. Uzunluğu *10 m*, yarıçapı *0.3 mm* olan bir telin uçları arasına *115 V* 'luk bir gerilim uygulandığında, telin dik kesitinden geçen akım yoğunluğu $1.4\times10^4 A/m^2$ oluyor. Telin özdirencini hesaplayınız.
(Cevap: $8.2\times10^{-4}\Omega\cdot m$). (Hallyday, 6thEd.., Ch27, **P.23**).

5. Özdirenci $3.5\times10^{-5}\Omega\cdot m$ olan bir maddeden yapılmış silindir şekilli bir direncin yarıçapı 5.0 mm, uzunluğu ise 2.0 cm'dir. Bu direncin çektiği güç (bir saniyede direnç üzerinde ısıya dönüşen enerji) *1.0 W* olduğuna göre

- direnç üzerinden geçen akım yoğunluğu nedir? $\frac{1}{7}\times10^7$
- direncin uçları arasındaki potansiyel farkı nedir? $\frac{250\pi}{7}$

(Hallyday, 6thEd.., Ch27, **P.42**).

Fiz 110 "Genel Fizik" **7. Ödev** ***29 Nisan 2004***



1. Şekilde gösterilen devrede bataryaların iç dirençlerini ihmal edip
- **a)** devreden geçen akımı;
- **b)** her bir rezistörün (direncin) çektiği gücü ve
- **c)** her bir bataryanın gücünü hesaplayınız.
- **d)** Bataryaların **hangisinin** devreye enerji aktardığını ve **hangisinin** devreden enerji çektiğini (yüklendiğini) belirtiniz.

$\varepsilon_1 = 12.0V$, $\varepsilon_2 = 6.0V$, $R_1 = 4.0\,\Omega$ ve $R_2 = 8.0\,\Omega$ olarak biliniyorlar.

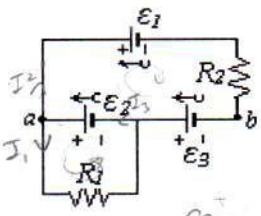
(Cevap: a) $0.5\,A$; b) $P_{R1} = 1.0\,W$; c) $P_{R2} = 2.0\,W$; d) $P_{\varepsilon 1} = 6.0\,W$, *enerji veriyor*; e) $P_{\varepsilon 2} = 3.0\,W$, *enerji çekiyor*). (Hallyday, 6th Ed., Ch.28, **E. 5**).

$\varepsilon_2 - iR_1 - iR_2 - \varepsilon_1 = 0$

$6 - 4\cdot i - 8i - 12 = 0$

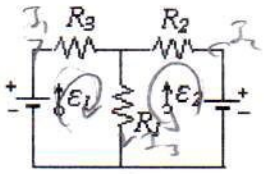
$-6 = 12i$

$-\frac{1}{2} = i = \frac{-6}{12}$



2. Şekilde gösterilen elektrik devresinde her bir dirençten geçen akımı ve a ve b noktaları arasındaki potansiyel farkını hesaplayınız. $\varepsilon_1 = 6.0V$, $\varepsilon_2 = 5.0V$, $\varepsilon_3 = 4.0V$, $R_1 = 100\,\Omega$ ve $R_2 = 50\,\Omega$ olduğunu varsayınız. (Cevap: $i_1 = 50mA$, $i_2 = 60mA$, $V_{ab} = 9.0V$). (Hallyday, 6th Ed., Ch.28, **E. 21**). $-I_1 \cdot R_1 + \varepsilon_2 = 0$

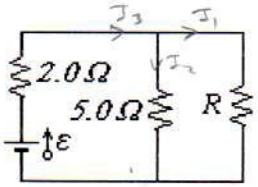
EM $-\varepsilon_1 - I_2 \cdot R_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_2 = 0$



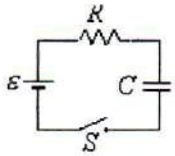
3. Şekilde gösterilen devre elemanları $\varepsilon_1 = 3.00V$, $\varepsilon_2 = 1.00V$, $R_1 = 5.00\,\Omega$, $R_2 = 2.00\,\Omega$, $R_3 = 4.00\,\Omega$ olarak biliniyorlar. Güç kaynakları, ε_1 ve ε_2, ideal bataryalardırlar.

- a) R_1 direncinin çektiği gücü, (R_1 *üzerinde birim zamanda ısıya dönüşen enerjiyi*);
- b) R_2 direncinin çektiği gücü (R_2 *üzerinde birim zamanda ısıya dönüşen enerjiyi*);
- c) R_3 direncinin çektiği gücü (R_2 *üzerinde birim zamanda ısıya dönüşen enerjiyi*);
- d) ε_1 bataryasının gücünü,
- e) ε_2 bataryasının gücünü bulunuz.

(Cevap: a) 0.346 W; b) 0.050 W; c) 0.709 W; d) 1.26 W; e) –0.158 W). (Hallyday, 6th Ed., Ch.28, **P. 31**).



4. Şekilde gösterilen devrede güç kaynağının *EMK*'sı, ε, sabit tutuluyor, fakat R direnci değiştirilebilir. R direnci kaç Ω olduğunda onun devreden çektiği güç (birim zamanda R üzerinde ısıya dönüşen enerji) maksimum olur? Bataryanın ideal olduğun u varsayınız. (Hallyday, 6th Ed., Ch.28, **P. 34**).

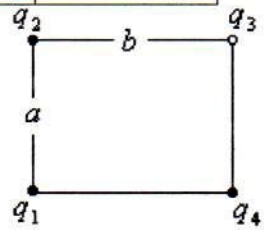


5. $R = 15.0\,k\Omega$'luk bir direnç ve sığası bilinmeyen bir C kondansatörü seri olarak *EMK* 'sı $\varepsilon = 12.0\,V$ olan bir ideal bataryaya seri bağlanıyorlar. Devre anahtarı kapatıldıktan $1.30\mu s$ sonra kondansatörün uçları arasındaki potansiyel farkı artarak $V_C = 5.00\,V$ oluyor.
- a) Devrenin zaman sabitini, τ'yu, hesaplayınız.
- b) Kondansatörün sığasını bulunuz.

(Cevap: a) $2.41\mu s$; b) $161\,pF$). (Hallyday, 6th Ed. Ch 28, **P. 47**).

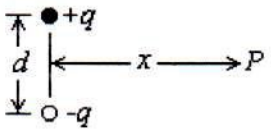
GENEL FİZİK II. **1. ARA SINAV** **Süre: 90 Dakika** **06.04. 2004**

Öğrencinin Adı, Soyadı:				Numarası:		
Sorular	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Notlar	/10	/10	/10	/10	/10	/10

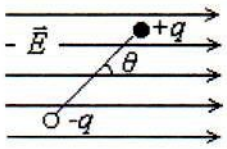


1. Şekildeki gibi dört nokta yük bir dikdörtgenin köşelerinde bulunmaktadır. Dikdörtgenin boyutlarının $a = 30cm$, $b = 40cm$, yüklerin ise $q_1 = 5\mu C$, $q_2 = 10\mu C$, $q_3 = -25\mu C$ ve $q_4 = 16\mu C$ olduğunu varsayıp sol alt köşedeki q_1 yüküne diğer üç yük tarafından uygulanan net elektrostatik kuvveti vektörel olarak bulup, büyüklüğünü hesaplayınız. ($k \equiv 9\times10^9 N\cdot m^2/C^2$).

2. Şekilde bir dipol görülmektedir.

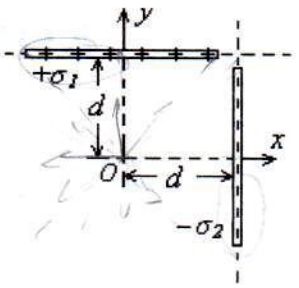


a) Dipolun merkezinden dik olarak geçen eksen üzerindeki P noktasında elektriksel alanı bulunuz. $x>>d$ ***olduğunu varsayarak*** sonucunuzu dipol momenti $\vec{p} = q\vec{d}$ ve x cinsinden ifade ediniz. Burada, x dipol merkezinden P noktasına kadar olan uzaklık; $\vec{d}$-uzunluğu yükler arasındaki mesafeye eşit, yönü ise $-q$ yükünden $+q$ yüküne doğru olan bir vektördür.

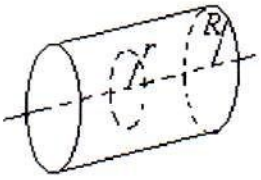


b) q yükü bir elektronun yükünün büyüklüğüne eşit ve $+q$ ve $-q$ yükleri arasındaki uzaklık $d = 10^{-10}$ m olan bir dipol, düzgün bir elektrik alanına konulursa ona etki eden dönme momenti (*tork*) ne olur? $\vec{p}$ ve $\vec{E}$ vektörleri arasındaki açıyı $\theta = 37^o$, alan şiddetini $E = 2.10^3 N/C$ olarak alınız. Elektronun yükü $e = -1.6\times10^{-19} C$

3. Hacimce yük yoğunluğu ρ, yarıçapı R ve uzunluğu ℓ olan uzun düzgün yüklü bir silindirin elektrik alanını **a)** *iç* ($r \le R$) ve **b)** *dış* ($r \ge R$) bölgelerde;
c) silindirin ekseni üzerinde ve $r = 1.5R$ noktalarında hesaplayınız.

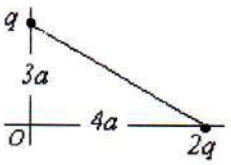


4. Birbirine dik, sonsuz iki plakanın yük yoğunlukları $+\sigma_1$ ve $-\sigma_2$, plakaların şekilde gösterilen O noktasına olan uzaklıkları ise d 'dir. O noktasında toplam elektrik alanın vektörel ifadesini bulup, büyüklüğünü hesaplayınız.



5. Yarıçapı R, hacimce düzgün ρ yük yoğunluğuna sahip uzun bir silindirin dış yüzeyinin potansiyelini V_0 olarak kabul edip, silindir ekseninden $R_1 = 0.5R$ mesafesindeki elektriksel potansiyeli, V_0, R, ρ ve ε_0 cinsinden ifade ediniz. Eğer silindir *iletken* bir maddeden yapılmış olsaydı sonucunuz nasıl değişirdi? Yanıtınızı açıklayınız.

6. Şekilde gösterildiği gibi dik kenar uzunlukları $3a$ ve $4a$ olan bir üçgenin iki köşesine q ve $2q$ yükleri konmuştur.



a) Sistemin elektriksel potansiyel enerjisi nedir?
b) Üçüncü bir $3q$ yükünü sonsuz uzaktan O noktasına getirip koyabilmek için ne kadar iş yapılması gerekir?
c) $3q$ yükü O noktasına getirildiğinde sistemin toplam elektriksel potansiyel enerjisi ne olur?

Fiz 110 "Genel Fizik" **8. Ödev** **07 *Mayıs 2004***

1. Şiddeti *2.6 mT* olan düzgün bir manyetik alana, alan çizgileri ile *23°* lik açı yapacak şekilde firlatılan bir protona etkiyen manyetik kuvvet $6.5\times10^{-17}\,N$ ise

a) protonun hız değerini hesaplayınız.

b) protonun kinetik enerjisini *elektron –volt* cinsinden ifade ediniz.

(Cevap: a) *400 km/s*; b) *835 eV*). (Hallyday, 6th Ed. Ch 29, **E. 3**).

2. Kinetik enerjisi $K = 2.5\ keV$ olan ve yatay doğrultuda hareket eden bir elektron alan şiddeti *10 kV/m*, *yukarıdan aşağıya yönelmiş* bir düzgün **elektrik** alana giriyor:

a) Elektronun *yatay doğrultudaki hareketini sürdürebilmesi* için ***E*** ' nin var olduğu bölgeye, yönü ve şiddetinin *minimum* değeri kaç *Tesla* olan bir manyetik alan uygulanması gerekir? (Ağırlık kuvvetini ihmal ediniz).

b) Şimdi ***E*** ve a)-şıkkında bulduğunuz ***B*** alanlarının **bir arada** varolduklarını düşününüz. Böyle bir alan bölgesine firlatılan bir **proton** bu bölgeyi *ilk hareket doğrultusundan* ***sapmadan*** geçebilir mi? Eğer cevabınız "*EVET*" ise, bunun için hangi koşulların sağlanması gerektiğini belirtiniz.

(Cevap: a) *3.4 x 10⁻⁴ T, manyetik alan yatay düzlem üzerinde, elektronun hızı vektörü yönünde bakıldığında sola doğru;* b) *"EVET", protonun hız değeri elektronun hız değerine eşit olması gerekir*). (Hallyday, 6th Ed. Ch 29, **P 7**).

3. Düzgün manyetik alanda dairesel yörünge boyunca dönmekte olan bir protonun kinetik enerjisi *1.0 MeV* dir. Çekirdek deneylerinde

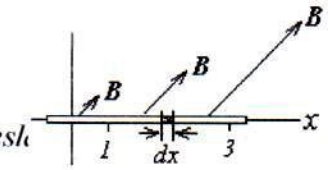
a) Bir α -parçacığının ($q_\alpha = +2e$, $m_\alpha = 4\ a.k.b$),

b) bir deuteron' un ($q_d = +e$, $m_d = 2\ a.k.b$)

bu protonla *aynı yarıçaplı* yörünge üzerinde dönmeleri için **enerjileri ne olmalıdır**?

(Cevap: a) *1.0 MeV*; b) *0.5 MeV*). (Hallyday, 6th Ed. Ch 29, **P 23**).

4. *x*-ekseni üzerinde tutturulmuş uzun bir telden *5 A* lik akım geçmektedir. Telin bulunduğu bölgeye $\boldsymbol{B} = 3\,\boldsymbol{i} + (8\,x^2)\,\boldsymbol{j}$ şeklinde konumdan konuma değişen bir manyetik alan uygulanır. Burada, *x* - *metre*, *B* ise *milli tesla* cinsinden veriliyorlar. İletkenin *x = 1m* ve *x = 3 m* konumları arasındaki (*2 m* uzunluklu) parçasına net olarak etkiyen manyetik kuvveti hesaplayınız.

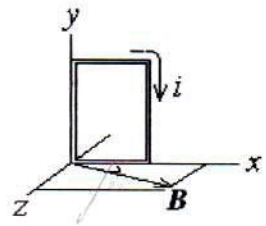


$dF_B = i\,dL \times (B)$

(Cevap: (- *0.35 N*) ***k***). (Hallyday, 5th Ed. Ch 29, **P 51).**

(*İpucu: $\vec{F} = i\vec{L}\times\vec{B}$ formülü manyetik alanın düzgün olduğu durumlarda ve düz tel için geçerlidir. Bu durumda ise **B** değişiyor. Hesaplama yapabilmek için telin küçük parçalardan oluşturulduğunu düşününüz. Her bir parçanın dL uzunluğunu o kadar küçük alınız ki, dL boyunca manyetik alanın değişmesi ihmal edilebilsin*).

5. Şekilde gösterilen *20* sarımdan oluşturulmuş dikdörtgen şekilli halkanın kenar uzunlukları *10 cm* ve *5.0 cm* olarak biliniyorlar. Halka *xy* düzlemi üzerinde olup, uzun kenarı *y* ekseni boyunca menteşelenmiştir. Halkanın bulunduğu bölgeye şiddeti *0.50 T*, yönü ise *x* ekseni ile *30°* açı yapan düzgün bir manyetik alan uygulanıyor. Sarımlardan geçen akım *i = 0.10 A* ise halkaya etkiyen torkun **yönünü** ve **boyunu** bulunuz. (Cevap: *4.3x10⁻³ N·m*, *-y* doğrultusunda). (Hallyday, 6th Ed. Ch 29, **E 39**).



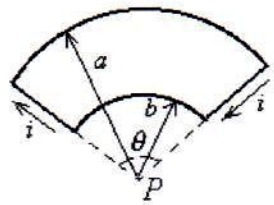
$\tau = N\cdot i\cdot a\cdot b\cdot B\cdot \sin\theta$

$= 20\cdot 0{,}1\cdot 0{,}005\cdot 0{,}5\cdot \sin 30$

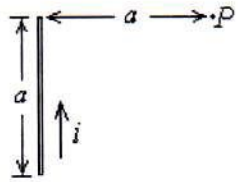
$= \frac{1}{10}\cdot\frac{5}{1000}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4000}$

Fiz 110 "Genel Fizik" **9. Ödev** **17 *May 2002***

1. Şekilde gösterilen devrenin eğri kesimleri a ve b yarıçaplı, ayni merkezli çemberlerin parçaları, düz kesimler ise yarıçapların uzantıları üzerindedirler. Biot ve Savart yasasından yararlanıp P noktasında (eğrilik merkezinde) manyetik alanı, $\boldsymbol{B}$ 'yi, bulunuz.
(Cevap: $B = \mu_0 i\theta(1/b - 1/a)/4\pi$, *sekil düzleminden dısa doğru*).
(Halliday, 6th Ed. Ch 30, **P. 9**).



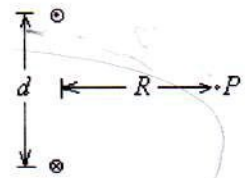
2. Uzunluğu a olan düz telden i akimi geçmektedir. Şekilde gösterilen P noktasında manyetik alanın değerinin $B = \sqrt{2}\mu_0 i / 8\pi a$ olduğunu ispat ediniz..
(Halliday, 6th Ed. Ch 30, **P. 16**).



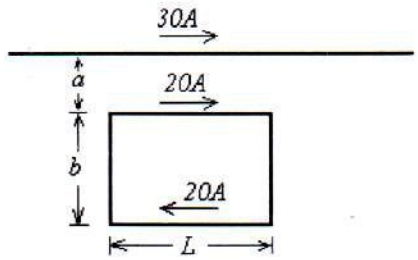
3. Aralarındaki mesafe d olan iki paralel telden, şekilde gösterildiği gibi zıt yönlerde ayni i akimi geçmektedir. Tellerden eşit uzaklıktaki P noktasında manyetik alanın değerinin

$$B = 2\mu_0 i d / \pi(4R^2 + d^2)$$

olduğunu gösteriniz. $\boldsymbol{B}$ 'nin P noktasındaki yönü nedir?
(Cevap: *Sağa doğru*). (Halliday, 5th Ed. Ch 30, **P. 37**).

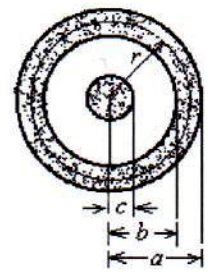


4. Şekilde gösterilen uzun düz telden geçen akim *30 A*, dik dörtken halkadan geçen akim ise *20 A* dir. $a = 1.0$ *cm*, $b = 8.0$ *cm* ve $L = 30$ *cm* ise, halkaya etkiyen eşdeğer manyetik kuvveti hesaplayınız.
(Halliday, 6th Ed. Ch 30, **P. 29).**



5. Geometrik boyutları şekilde belirtilmiş olan bir koaksiyel kablonun içindeki ve dışındaki iletkenlerden **eşit**, fakat bir birlerine **zıt yönde** i akimi geçmektedir. i akimi kablonu oluşturan iletkenlerin kesit alanlarına düzgün (homojen) olarak dağılmıştır. (*Koaksiyel kablo*-- dıs yarıçapı a, iç yarıçapı b olan uzun ***bir iletken boru*** ve bu boru ile ayni eksenli c yarıçaplı silindirik ***bir telden*** oluşturuluyor. Boru ve içteki tel bir birlerinden yalıtılıyorlar). Kablonun merkezi ekseninden olan uzaklığı r olarak işaretleyelim. r 'nin **a)** $r < c$; **b)** $c < r < b$; **c)** $b < r < a$; ve d) $r > a$ olduğu çeşitli belgelerde manyetik alanı bulunuz. Sonuçlarınızı size belli olan durumlarla karsılaştırınız. $0 < r < 3$ *cm* aralığında, $a = 2.0$ *cm*, $b = 1.8$ *cm*, $c = 0.4$ *cm* ve $i = 120$ *A* değerleri için $B(r)$ nin grafiğini inceleyiniz.

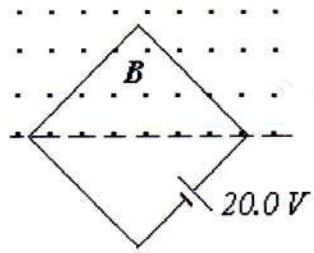
(Cevap: **a)** $\dfrac{\mu_0 i r}{2\pi c^2}$; **b)** $\dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}$; **c)** $\dfrac{\mu_0 i}{2\pi(a^2 - b^2)} \dfrac{a^2 - b^2}{r}$; d) 0)



$\oint B\, ds = \mu_0 i$

$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot i$

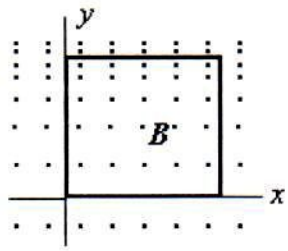
Fiz 110 "Genel Fizik" **10. Ödev** **24 *May 2004***



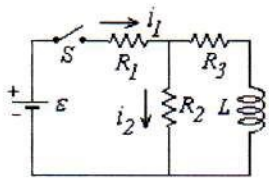
1. Şekilde görüldüğü gibi, kenarının uzunluğu *2.00 m* olan tek sarımlı kare şekilli bir halkanın yarısı, halka düzlemine dik olan düzgün, şekil düzleminden dışa doğru yönelmiş bir manyetik alan içine yerleştirilmiştir. Halka telinin uçları arasına çıkışındaki potansiyel farkı *20.0 V*, iç direnci ihmal edilebilir bir batarya bağlıdır. Eğer manyetik alan $B = 0.0420-0.870t$ şeklinde zamana bağlı olarak değişiyorsa

- devrede indüklenen EMK nı ve
- bataryadan geçen akımın yönünü

bulunuz. Burada, B alanı *tesla*, t zamanı ise *saniye* cinsinden ifade edilmişler. (Cevap: *21.7 V*, saat ibrelerine zıt yönde). (Halliday, 6th Ed. Ch 31, **P. 15**).



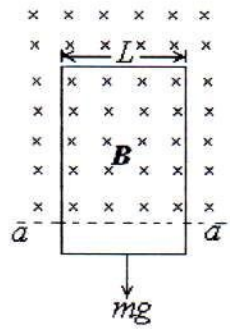
2. Şekilde gösterilen kare şekilli halkanın kenarının uzunluğu *2.0 cm* dir. Bu halka şekil düzleminden dışa doğru yönelmiş, büyüklüğü $B = 4.t^2y$ gibi değişen bir manyetik alana yerleştirilmiştir. $t = 2.5\ s$ olduğunda halkada indüklenen *EMK* nı bulunuz. *EMK* nın yönü nedir? B alanı *tesla*, t zamanı *saniye*, y mesafesi ise *metre* cinsinden ifade ediliyorlar. (Cevap: *80 μV*, yelkovan yönünde). (Halliday, 6th Ed. Ch 31, **P 21**).



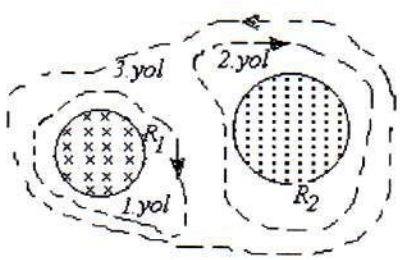
3. Şekilde gösterilen devrede $\varepsilon = 100\ V$, $R_1 = 10.0\ \Omega$, $R_2 = 20.0\ \Omega$, $R_3 = 30.0\ \Omega$ ve $L = 2.00\ H$ olarak biliniyorlar.

- S anahtarı *kapatıldıktan* **a)** hemen sonra ve **b)** uzun bir süre sonra;
- S anahtarı *yeniden açıldıktan* **c)** hemen sonra ve **d)** uzun bir süre sonra

devreden geçen i_1 ve i_2 akımlarını bulunuz.
(Cevap: a) $i_1 = i_2 = 3.33\ A$; b) $i_1 = 4.55\ A$; $i_2 = 2.73\ A$; c) $i_1 = 0$, $i_2 = 1.82\ A$; d) $i_1 = i_2 = 0$). (Halliday, 5th Ed. Ch 31, **P. 69**).



4. Genişliği L, kütlesi m, tellerinin toplam direnci R olarak bilinen uzun, dikdörtgen şekilli bir halka şekil düzlemine dik olan, içe doğru yönelmiş düzgün bir $\boldsymbol{B}$ manyetik alanda *asılı duruyor*. Halka şekil düzlemi üzerindedir ve $\boldsymbol{B}$ alanı sadece *"aa"* çizgisinden üstteki bölgede mevcuttur. Halka serbest bırakıldığında ağırlığından dolayı aşağıya doğru ivmelenir, fakat hızı belli bir v_s limit hızına ulaştıktan sonra ivmesi sıfır oluyor. Havanın sürükleme kuvvetini ihmal edip, halkanın v_s limit hızını bulunuz.
(Cevap: $v_s = mgR/B^2L^2$). (Halliday, 5th Ed. Ch 31, **P 35**).



5. Şekilde gösterilen R_1 ve R_2 bölgelerinin yarıçapları $r_1 = 20.0\ cm$ ve $r_2 = 30.0\ cm$ olarak veriliyorlar. R_1 bölgesinde şekil düzleminden **içe** doğru yönelmiş şiddeti $B_1 = 50.0\ mT$ olan düzgün bir manyetik alan, R_2 bölgesinde ise şekil düzleminden **dışa** doğru şiddeti $B_2 = 75.0\ mT$ olan düzgün bir manyetik alan mevcuttur. Eğer B_2 ve B_2 alanları eşit *8.5 mT/s* hızıyla azalıyorlarsa, şekilde gösterilen *1.*, 2. ve *3.* yolları boyunca $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s}$ integralını hesaplayınız. (*İpucu: Faraday kanunundan yararlanınız*). (Halliday, 6th Ed. Ch 31, **P 32**).

3. QUIZ, 26. 03. 2004

(1.varyant)

1. (40 puan). Küre şeklindeki kapalı bir yüzeyden geçen toplam elektrik akısı $8.6\times10^4 N\cdot m^2/C$ dır.

- Küre içindeki net elektrik yükü ne kadardır?
- Net elektrik akısı $-8.6\times10^4 N\cdot m^2/C$ olsaydı cevabınız nasıl değişirdi?

2. (60 puan). *40 cm* yarıçaplı dolu uzun bir silindirde, hacmi üzere düzgün dağıtılmış, artı yük bulunmaktadır. Silindir ekseninden *10 cm* ve *40 cm* uzaklıklarda elektrik alan şiddetini hesaplayınız. Silindirin hacimce yük yoğunluğu, $\rho = 26\mu C/m^3$ dir.

3. QUIZ, 26. 03. 2004

(2.varyant)

1. (40 puan). $0.462\mu C$ luk nokta yük, bir piramidin içindedir.

- Piramidin yüzeyinden geçen toplam elektrik akısını bulunuz.
- Piramidin içindeki yük $-0.462\mu C$ olsaydı cevabınız nasıl değişirdi?

2. (60 puan). *10 cm* yarıçaplı yalıtkan dolu uzun bir silindir, hacmi boyunca düzgün bir yük yoğunluğuna sahiptir. Silindir ekseninden 5 cm uzakta elektrik alan büyüklüğü $8.6\times10^4 N/C$ ise, *15 cm* uzakta alan şiddeti ne kadar olur?

3. QUIZ, 26. 03. 2004

(3.varyant)

1. (40 puan). Bir kenarı 50 cm olan kübik bir Gauss yüzeyinin merkezinde $1.0\times10^{-6}C$ luk bir nokta yük bulunmaktadır. Bu küpün bir yüzeyinden geçen elektrik akısı nedir?

2. (60 puan). Yarıçapı a olan uzun, iletken bir silindir, aynı eksenli olacak şekilde iç yarıçapı b olan ($b > a$) uzun bir iletken silindir (boru) içine konuluyor. İçteki silindirin uzunluk başına düşen yük $-\lambda$, dıştaki silindirin uzunluk başına düşen yük ise 3λ dır. Gauss yasasını kullanarak

- içteki silindirin içinde,
- silindirler arasındaki bölgede, ve
- silindirlerin dışında

elektrik alanı bulunuz.

3. QUIZ, 26. 03. 2004

(4.varyant)

1. (40 puan). $0.462\mu C$ luk nokta yük, bir küpün içindedir.

- Küpün yüzeyinden geçen toplam elektrik akısını bulunuz.
- Küpün içindeki yük $-0.462\mu C$ olsaydı cevabınız nasıl değişirdi?

2. (60 puan). R yarıçaplı bir kürede, hacmi üzere düzgün dağıtılmış, artı yük bulunmaktadır. Kürenin hacimce yük yoğunluğu ρ ise, $r \le R$ olmak üzere, küre merkezinden r uzaklıkta elektrik alanını ρ, R, ε_0 ve r cinsinden ifade ediniz.

3. QUIZ, 26. 03. 2004

(1.varyant)

1. (40 puan). Silindir şeklindeki kapalı bir yüzeyden geçen toplam elektrik akısı $8.6\times10^4 N\cdot m^2/C$ dır.

- Silindir içindeki net elektrik yükü ne kadardır?
- Net elektrik akısı $-8.6\times10^4 N\cdot m^2/C$ olsaydı cevabınız nasıl değişirdi?

2. (60 puan). *40 cm* yarıçaplı dolu bir kürede, hacmine düzgün olarak dağılmış $26\mu C$ luk artı yük bulunmaktadır. Küre merkezinden *10 cm* ve *40 cm* uzaklıklarda elektrik alan şiddetini hesaplayınız.

3. QUIZ, 26. 03. 2004

(2.varyant)

1. (40 puan). $0.462\mu C$ luk nokta yük, bir piramidin içindedir.

- Piramidin yüzeyinden geçen toplam elektrik akısını bulunuz.
- Piramidin içindeki yük $-0.462\mu C$ olsaydı cevabınız nasıl değişirdi?

2. (60 puan). *10 cm* yarıçaplı yalıtkan bir küre, hacmi boyunca düzgün bir yük yoğunluğuna sahiptir. Küre merkezinden 5 cm uzakta elektrik alan büyüklüğü $8.6\times10^4 N/C$ ise, *15 cm* uzakta ne kadar olur?

3. QUIZ, 26. 03. 2004

(3.varyant)

1. (40 puan). Bir kenarı 50 cm olan kübik bir Gauss yüzeyinin merkezinde $1.0\times10^{-6}C$ luk bir nokta yük bulunmaktadır. Bu küpün bir yüzeyinden geçen elektrik akısı nedir?

2. (60 puan). İletken bir küre, aynı merkezli olacak şekilde daha büyük iletken küresel bir kabuk içine konuluyor. İçteki kürede net $-Q$ yükü, dıştaki kürede ise $+3Q$ yükü bulunmaktadır. Yükler elektrostatik dengededir. Gauss yasasını kullanarak

- içteki kürenin içinde,
- küre ve küresel kabuk arasındaki bölgede, ve
- kürelerin dışında

elektrik alanını bulunuz.

3. QUIZ, 26. 03. 2004

(4.varyant)

1. (40 puan). $0.462\mu C$ luk nokta yük, bir piramidin içindedir.

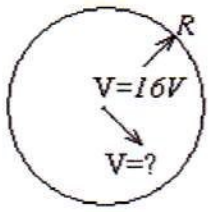
- Piramidin yüzeyinden geçen toplam elektrik akısını bulunuz.
- Piramidin içindeki yük $-0.462\mu C$ olsaydı cevabınız nasıl değişirdi?

2. (60 puan). R yarıçaplı, ρ düzgün yük yoğunluklu uzun silindirik bir yük dağılımı düşünelim. $r \le R$ olmak üzere, eksenden r uzaklıkta elektrik alanını ρ, R, ε_0 ve r cinsinden ifade ediniz.

4. QUIZ , 1. Şube **1. Varyant** **02. 04. 2004**

Hareket etmekte olan bir proton, koordinat başlangıcına konulmuş bir nokta Q yükünün elektrik alanına giriyor. Protonun şekilde gösterilen $\vec{r}_1$ konumundan $\vec{r}_2$ konumuna yer değişmesi sırasında kinetik enerjisinin değişmesini hesaplayınız. $Q = -4\ \mu C$, $r_1 = 2\ m$ ve $r_2 = 1\ m$ olarak veriliyorlar. Protona etkiyen elektrostatik kuvvetin yaptığı iş pozitif mi, negatif mi veya sıfır mı?

4. QUIZ , 1. Şube **2. Varyant** **02. 04. 2004**



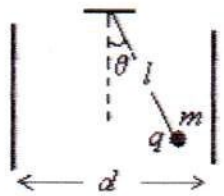
Toplam yükü Q ve yarıçapı R olarak bilinen hacımca düzgün yüklü kürenin merkezindeki potansiyel $16V$ ise, merkezden $R/2$ mesafesinde potansiyel kaç Volt' tur? Potansiyelin referans değerini, yük dağılımından sonsuz uzakta,sıfır olarak alınız, $V_\infty = 0$.

4. QUIZ , 1. Şube **3. Varyant** **02. 04. 2004**

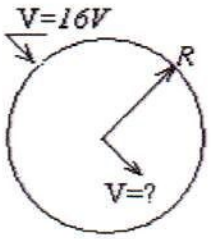
Kütlesi $m = 1.5\ g$, yükü $q = 8.9 \times 10^{-6} C$ olan küçük bir küre, şekilde görüldüğü gibi, dikey konulmuş ve aralarındaki mesafe $d = 5\ cm$ olan iki paralel levhanın tam ortasında, uzunluğu $l = 3\ cm$ olan bir ipte asılıdır. Küre dengede bulunduğunda ipin dikeyle oluşturduğu açı $\theta = 30^o$ ve soldaki plakanın potansiyeli $3V$ ise

a) q yükünün bulunduğu konumda potansiyel kaçtır?

b) Hangi levhanın potansiyeli daha yüksektir ve levhalar arasındaki potansiyel farkı nedir?



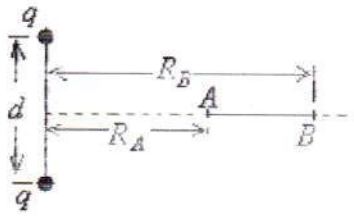
4. QUIZ , 2. Şube **1. Varyant** **02. 04. 2004**



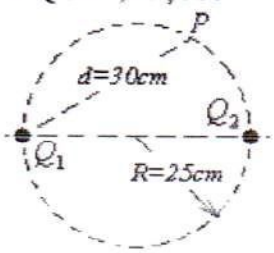
Toplam yükü Q ve yarıçapı R olarak bilinen hacımca düzgün yüklü küre yüzeyinin potansiyeli $16V$ ise, merkezden $R/2$ mesafesinde potansiyel kaç Volt' tur? Potansiyelin referans değerini, yük dağılımından sonsuz uzakta, sıfır olarak alınız, $V_\infty = 0$.

4. QUIZ , 2. Şube **2. Varyant** **02. 04. 2004**

İki özdeş $q = 2 \times 10^{-8} C$ noktasal yük arasındaki uzaklık $d = 0.3\ m$ dir. Bir protonun şekilde gösterilen A noktasından B noktasına yer değişmesi sırasında elektrostatik kuvvetin yaptığı iş kaçtır? ($W_{AB} = ?$). A ve B noktaları, yükleri birleştiren doğru parçasının *ortasından dik olarak geçen* eksen üzerindedirler. R_A ve R_B uzaklıklarını $R_A = 1\ m$ ve $R_B = 1.5\ m$ olarak alınız. (Protonun yükü; $e_p = +1.6 \times 10^{-19} C$);



4. QUIZ , 2. Şube **3. Varyant** **02. 04. 2004**



Yükleri $Q_1 = +24 \times 10^{-2}\ \mu C$ ve $Q_2 = -10 \times 10^{-2}\ \mu C$ olarak bilinen iki nokta yük $R = 25cm$ yarıçaplı bir çemberin çapı üzerinde, karşı karşıya tutturulmuşlar. $q = -0.2 \mu C$ 'luk bir yükü sonsuzdan şekilde gösterilen P noktasına getirmek için uygulanması gereken *dış* kuvvetin yaptığı iş nedir?

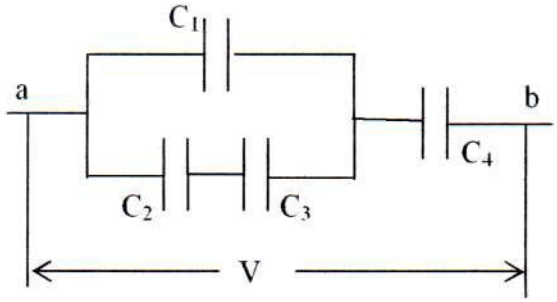
P noktası çember üzerinde olup, "artı" işaretli yükten 30 cm mesafededir.

GENEL FİZİK II
FİZİK 110 ARA SINAVI II
Tarih: 11 Mayıs 2004, **Saat:** 17.00,
Süre: 90 Dakika

1. Şekilde gösterilen devredeki her bir kapasitör paralel plakalı olup, levhalarının yüzeylerinin alanı $A = 100\ cm^2$, aralarındaki uzaklık $d = 0.1\ mm$ olarak biliniyor. Devrenin uçları arasına $V_{ab} = 12\ V$ 'luk bir potansiyel farkı uyguladığında

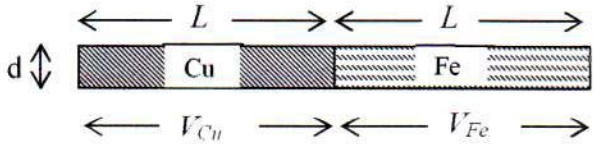
a) Sistemde depolanan enerjiyi hesaplayınız.
b) Devrenin a ve b noktaları arasındaki potansiyel farkı, $V_{ab} = 12V$, sabit tutularak C_1'in plakalarının arası dielektrik sabiti $k = 3.5$ olan bir madde ile doldurulduğunda sistemin enerjisi ne olur?
c) Sorunun b)-*şıkkında anlatıldığı gibi*, C_1'in plakalarının arasını dielektrik madde ile doldurulmak için **yapılması gereken işi** eşdeğer sığa cinsinden ifade ediniz.

($\varepsilon_0 = 9\times10^{-12} C^2/N\cdot m^2$ olarak alınız).



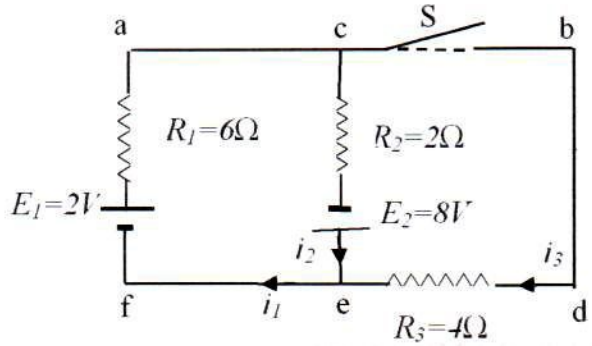
2. Uzunlukları L ve çapları d olan bir bakır tel ile bir demir tel uç uca gelecek şekilde kaynak yapılarak sistemin serbest kalan uçları arasına bir V potansiyel farkı uygulanıyor. Bakır ve demirin özdirençlerini sırasıyla ρ_{Cu} ve ρ_{Fe} olduğunu varsayarak

a) Her bir **telin direncini** ve uçları arasındaki **potansiyel farkını**,
b) Bakır teldeki **akım yoğunluğunu** ve **elektrik alanını** hesap ediniz.



3. Aşağıdaki şekilde verilen devre için

a) S anahtarı açıkken R_1 direnci üzerinden geçen akımı bulunuz.
b) Akımların yönlerini şekil üzerinde belirtildiği gibi seçerek, S anahtarı kapatıldıktan sonra R_1, R_2 ve R_3 dirençlerinden geçen i_1, i_2 ve i_3 akımlarını hesaplayınız.
c) Devrenin a ve e noktaları arasındaki potansiyel farkını (V_{ae}) hesaplayınız.
d) R_3 direnci üzerinde $10\ s$' de ısıya dönüşen enerjiyi hesaplayınız.



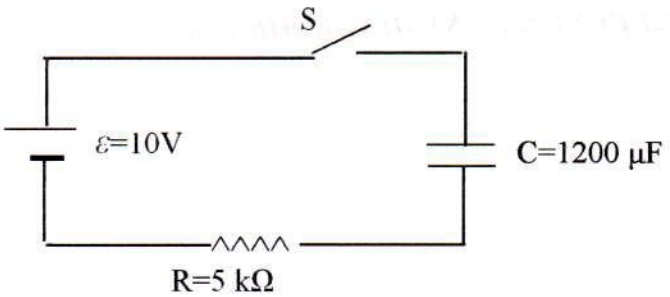
4. Şekilde gösterilen RC devresinde S anahtarının $t = 0$ anında kapatıldığını düşünerek

a) Yükleme devresinin τ zaman sabitini,

b) Akımın $t = 0$ ve $t = \tau / 2$ zaman anındaki değerlerini, ve

c) Kondansatörde birikecek maksimum yükün yarısının birikmesi için gereken süreyi bulunuz.

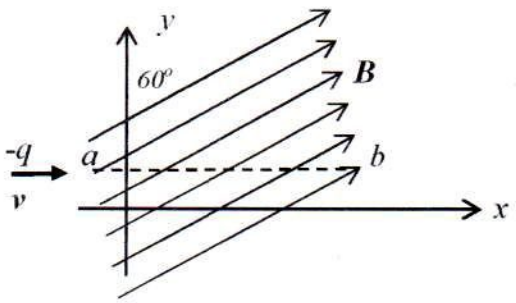
(*İpucu*: Başlangıçta yüksüz ve R direnci üzerinden geçen akım dolayısıyla yüklenmekte olan kondansatörün yükü zamana bağlı olarak $q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-t/\tau})$ şeklinde değişiyor).



5. x-ekseni yönünde hareket etmekte olan **eksi yüklü bir iyon**, xy düzlemi üzerinde y ekseni ile 60° lik bir açı yapan B=*35 mT* şiddetindeki bir manyetik alana giriyor. Manyetik alanın bulunduğu bölgeye, manyetik alana **dik yönde**, şiddeti $E = 7 \cdot 10^4 V/m$ olan bir elektrik alanı uygulandığında iyonun ilk hareket doğrultusundan **sapmadan** *şekilde gösterilen ab yolu üzere* hareket ettiğine göre

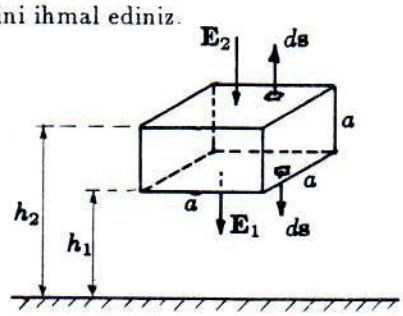
a) Elektrik alanının şekil düzleminden *içe veya dışa* doğru olduğunu tespit ediniz.

b) İyonun hızının büyüklüğünü hesaplayınız.



EK PROBLEMLER

18. Atmosferin belli bir bölgesinde elektrik alanın sabit ve yerin merkezine doğru yönelmiş olduğu deneysel olarak bulunmuştur. 300 m yükseklikte alanın büyüklüğü 60 N/C, 200 m yükseklikte ise 100 N/C 'dır. 200 m ve 300 m yükseklikler arasında bulunan kenarı 100 m olan bir kübün içinde bulunan elektrik yük miktarını bulunuz. Yeryüzünün eğriliğini ihmal ediniz.



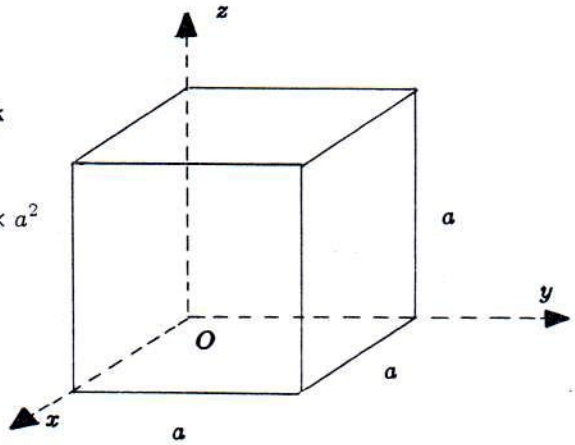
Çözüm : $h_1 = 200$ m, $h_2 = 300$ m, $E_1 = 100$ N/C, $E_2 = 60$ N/C, $a = 100$ m

Kenar uzunluğu a olan küp yüzeyinde Gauss kanunu uygulanırsa, üst yüzeyde $\mathbf{E}_2$ ve $d\mathbf{s}$ ters yönlerde, alt yüzeyde ise $\mathbf{E}_1$ ve $d\mathbf{s}$ aynı yönde ve diğer dört yanal yüzeylerde $\mathbf{E}$ daima $d\mathbf{s}$ 'ye diktir. Bu durumda küp içindeki toplam yük,

$$q = \epsilon_0 \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \epsilon_0\left[-E_2a^2 + E_1a^2\right] = \frac{4\pi\epsilon_0}{4\pi}\left[E_1 - E_2\right]a^2 = \frac{(100-60)\times(100)^2}{4\pi\times 9\times 10^9}$$

$$q = +3,5\times 10^{-6}\ \text{C} \quad \text{olur.}$$

19. E, N/C ve y, m cinsinden olmak üzere elektrik alan a) $\mathbf{E} = (3y\mathbf{j})$ ve b) $\mathbf{E} = [-4\mathbf{i} + (6+3y)\mathbf{j}]$ olarak verilirse, Alıştırma 25–4 'de (Şekil 25–16) verilen küpten geçen net elektrik akısını bulunuz. c) Her bir elektrik alan için kübün içindeki net yük miktarı nedir?



Çözüm : $a = 1,35$ m

a) $\mathbf{E} = (3y\mathbf{j})$ N/C

Kübün yüzeylerinden geçen toplam (net) elektrik akısı,

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = E(y=0)\times a^2 + E(y=a)\times a^2$$
$$= a^2(0+3a) = 3a^2 = 3\times(1,35)^2$$
$$= 7,38\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C} \quad \text{bulunur.}$$

b) $\mathbf{E} = [-4\mathbf{i} + (6+3y)\mathbf{j}]$ N/C

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{S}_1(x=0) + \mathbf{E}\cdot\mathbf{S}_2(x=a) + \mathbf{E}\cdot\mathbf{S}_3(y=0) + \mathbf{E}\cdot\mathbf{S}_4(y=a)$$
$$\Phi_E = [-4\mathbf{i} + (6+3y)\mathbf{j}]\cdot[-a^2\mathbf{i} + a^2\mathbf{i}] + [-4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}]\cdot(-a^2\mathbf{j}) + [-4\mathbf{i} + (6+3a)\mathbf{j}]\cdot(a^2\mathbf{j})$$
$$\Phi_E = 0 - 6a^2 + (6+3a)a^2 = 3a^3 = 7,38\ \text{N}\cdot\text{m}^2/C \text{ 'dır.}$$

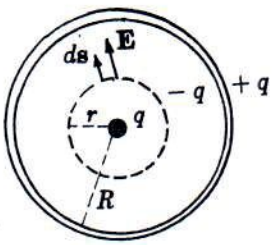
c) Gauss kanununa göre, $\Phi_E = q/\epsilon_0$ dır ve kübün içindeki net yük,

$$q = \epsilon_0\,\Phi_E = \frac{4\,\pi\,\epsilon_0}{4\,\pi}\,\Phi_E = \frac{\Phi_E}{4\,\pi\,k} \quad \text{dır.}$$

Her iki durum için $q = \dfrac{7,38}{4\,\pi\times 9\times 10^9} = 6,53\times 10^{-11}\ \text{C} = +65,3\ \text{pC}$ bulunur.

20. Üzerinde yük bulunmayan, ince, metalik bir küresel kabuğun merkezinde bir q yükü bulunmaktadır. Elektrik alanının a) kabuğun içindeki ve b) kabuğun dışındaki değerini, Gauss kanununu kullanarak, bulunuz. c) Kabuk, q yükünün oluşturduğu alana etki eder mi? d) q 'nın kabuk üzerine bir etkisi var mıdır? e) Eğer kabuğun dışında bulunan bir noktada ikinci bir yük bulunursa, bu yüke bir kuvvet etki eder mi? f) Kabuğun içinde bulunan yüke bir kuvvet etki eder mi? g) Burada Üçüncü Newton kanunu ile bir çelişki söz konusu mudur? Nedenini açıklayınız.

Çözüm :



a) Kabuğun yarıçapı R olsun ve kabuğun içinde r $(< R)$ yarıçaplı küresel Gauss yüzeyi alalım. Küresel simetriden dolayı yüzey üzerinde, $\mathbf{E}$ 'nin yarıçap doğrultusunda ve büyüklüğünün sabit olduğunu görürüz. Yüzey elemanı $d\mathbf{s}$ ile $\mathbf{E}$ birbirlerine paraleldir. Gauss kanunu uygulanırsa,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E \oint ds = E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

olur ve kabuk içindeki alan, $E = kq/r^2$ büyüklüğünde olup yarıçap doğrultusundadır.

b) q nokta yükü, iletken olan kabuğun iç yüzeyinde $-q$ ve dış yüzeyinde $+q$ yükü indükler. a) şıkkında açıklanan nedenlerden ötürü, kabuğun dışındaki herhangi bir noktada $(r > R)$ elektrik alanı yarıçap doğrultusunda olup büyüklüğü $E = kq/r^2$ dir.

c) Hayır

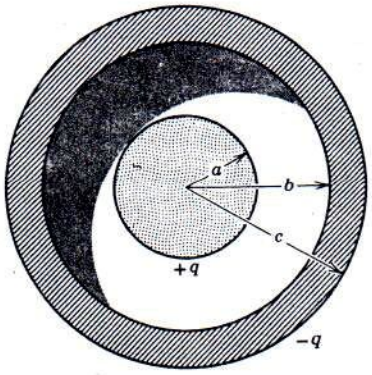
d) b) şıkkında açıklandığı gibi, kabuğun iç ve dış yüzeylerinde yükler indirgenir.

e) b) şıkkında görüldüğü gibi, kabuğun dışında elektrik alanı vardır ve bu alan içine konulacak herhangi bir yük (Q) üzerine etkiyen kuvvet $(\mathbf{F} = Q\mathbf{E})$ vardır.

f) Hayır.

g) Hayır. Merkezde bulunan yük kabuğa ve kabuk da merkezdeki yüke etki eder, fakat herbiri üzerindeki net kuvvet sıfırdır.

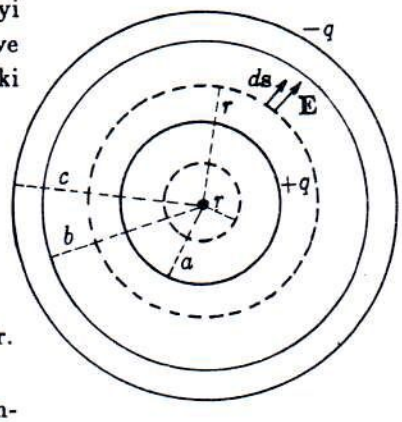
21. Şekil 25−25 'de gösterildiği gibi, iç yarıçapı b ve dış yarıçapı c olan küresel iletken bir kabuğun merkezinde alınan a yarıçaplı küresel bölge içine q yükü düzgün olarak dağıtılmıştır. Dış kabuk $-q$ yükü taşımaktadır. Elektrik alanı $E(r)$ 'yi a) kürenin içinde $(r < a)$, b) kabukla küre arasında $(a < r < b)$, c) kabuğun içinde $(b < r < c)$ ve d) kabuğun dışında $(r > c)$ hesap ediniz. e) Kabuğun iç ve dış yüzeyinde oluşan yükleri bulunuz.



Şekil 25−25 Problem 21.

Çözüm :

a) Küresel bölgenin içinde r ($< a$) yarıçaplı Gauss yüzeyi alalım. Küresel simetri nedeni ile $\mathbf{E}$ yarıçap doğrultusundadır ve büyüklüğü yüzey üzerinde sabittir. Bu r yarıçaplı küre içindeki toplam yük miktarı,



$$q' = \frac{q}{\left(\frac{4\pi}{3}a^3\right)} \times \left(\frac{4\pi}{3}r^3\right) = \left(\frac{r}{a}\right)^3 \times q \text{ dır.}$$

Gauss kanunu uygulanırsa, $\mathbf{E}$ 'nin büyüklüğü,

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \frac{q'}{\epsilon_0}, \quad 4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\frac{r}{a}\right)^3 \times q, \quad E = \left(\frac{kq}{a^3}\right) \times r \text{ dır.}$$

b) Küre ile kabuk arasındaki bölgede a) şıkkında verilen nedenlerden ötürü, $\mathbf{E}$ 'nin büyüklüğü $a < r < b$ için $E = kq/r^2$ olur.

c) Kabuk iletken olduğundan içindeki herhangi bir noktada ($b < r < c$) statik şartlarda, $E = 0$ dır.

d) Kabuğun dışındaki bir noktada küresel bir Gauss yüzeyi ($c < r$) seçilirse, bu yüzey içindeki toplam yük $q_{toplam} = +q - q = 0$ olduğundan $c < r$ için $E = 0$ olur.

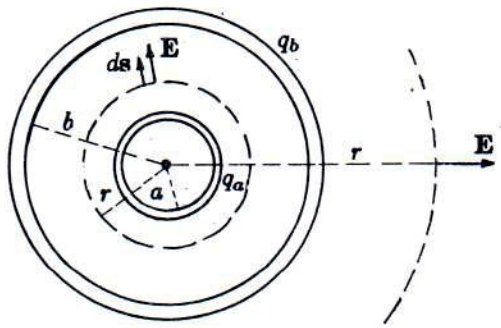
e) Küredeki toplam yük q, iletken kabuğun iç yüzeyinde toplam $-q$ yükü ve dış yüzeyinde toplam $+q$ yükü indirger. Bu durumda kabuğun iç ve dış yüzeylerinde oluşan yükler $q_{\text{iç}} = -q$ ve $q_{\text{dış}} = +q - q = 0$ dır.

22. Yarıçapı a olan iletken küresel bir kabuk üzerinde q_a yükü bulunmaktadır. Aynı merkezli yarıçapı b ($b > a$) olan diğer bir iletken küresel kabuk ise q_b yükünü taşımaktadır. Gauss kanununu kullanarak, yarıçap doğrultusundaki a) $r < a$; b) $a < r < b$; c) $r > b$ noktalarında elektrik alanını bulunuz.

Çözüm :

a) $r < a$ olan bölgede, herhangi bir yük bulunmadığından Gauss kanununa göre, $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = 0$ olur ve burada $E = 0$ bulunur.

b) $a < r < b$ bölgesinde, r yarıçaplı küresel Gauss yüzeyi seçersek, bu yüzey üzerindeki herhangi bir noktada küresel simetriden dolayı, $\mathbf{E}$ yarıçap doğrultusunda olup büyüklüğü yüzey üzerinde sabittir. $\mathbf{E}//d\mathbf{s}$ ve yüzey içindeki toplam yük q_a olduğuna göre, Gauss kanununu uygularsak,

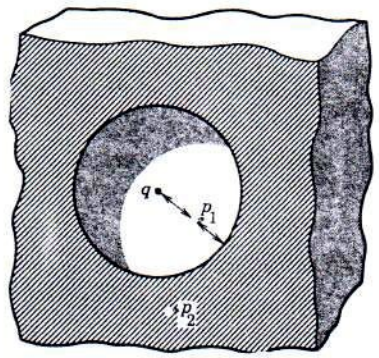


$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \frac{q_a}{\epsilon_0}, \quad E\oint ds = \frac{q_a}{\epsilon_0}$$

$E4\pi r^2 = q_a/\epsilon_0$, $E = kq_a/r^2$ olur ve yarıçap doğrultusundadır.

c) $b < r$ bölgesinde, b) şıkkında yapılan açıklamalar geçerli olup seçilen Gauss yüzeyi içindeki toplam yük $q_a + q_b$ dir. Bu durumda $\mathbf{E}$ 'nin büyüklüğü $E = k(q_a + q_b)/r^2$ olup yönü yarıçap doğrultusundadır.

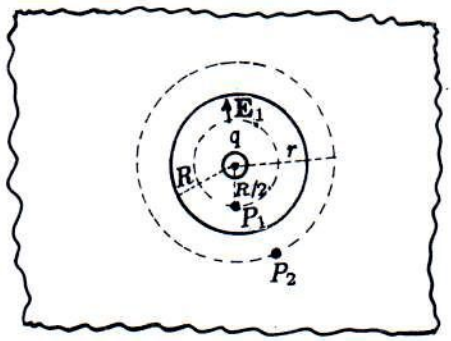
23. Şekil 25–26 'de gösterildiği gibi, bir metal parçasının içinde bulunan yarıçapı 3,0 cm olan küresel bir kovuğun merkezine $1,0 \times 10^{-7}$ C değerinde bir nokta yük yerleştirilmiştir. Gauss kanununu kullanarak, a) merkezle kovuğun yüzeyi arasındaki uzaklığın tam ortasındaki P_1 noktasında ve b) P_2 noktasındaki elektrik alanlarını hesaplayınız.



Şekil 25–26 Problem 23.

Çözüm : $q = 1,0 \times 10^{-7}$ C, $R = 3,0$ cm

a) Kovuğun içinde $R/2$ yarıçaplı bir Gauss küresi alalım. Küre yüzeyinde Gauss kanunu uygulanırsa, yüzeyde küresel simetriden dolayı, **E** 'nin büyüklüğü sabit ve yönü dışarı doğru olup, $\mathbf{E}//d\mathbf{s}$ dir.



$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad E_1 4\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{q}{\epsilon_0},$$

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{4}} = \frac{4kq}{R^2}$$

$$= \frac{4 \times 9 \times 10^9 \times 10^{-7}}{(3 \times 10^{-2})^2} = 4,0 \times 10^6 \text{ N/C 'dır.}$$

P_1 noktasındaki alan dışarı doğru olup büyüklüğü $E_1 = 4,0 \times 10^6$ N/C 'dır.

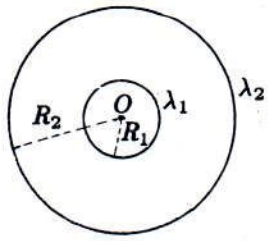
b) Metal, bir iletken olduğundan kovuğun yüzeyinde toplam $-q$ yükü indirgenir. P_2 noktasından geçen kapalı ve r yarıçaplı Gauss küresi içinde toplam yük, $q_{toplam} = q - q = 0$ olur. Bu durumda, Gauss kanunundan $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ olur ve P_2 noktasındaki alanı $E_2 = 0$ olur.

24. Aynı merkezli iki silindirin yarıçapları 3,0 cm ve 6,0 cm 'dir. İç silindirin birim uzunluk başına yükü $5,0 \times 10^{-6}$ C/m 'dir. Dış silindirin birim uzunluk başına yükü ise $-7,0 \times 10^{-6}$ C/m 'dir. Elektrik alanını a) $r = 4,0$ cm ve b) $r = 8,0$ cm noktalarında bulunuz.

Çözüm : $R_1 = 3,0$ cm, $\lambda_1 = 5,0 \times 10^{-6}$ C/m, $R_2 = 6,0$ cm, $\lambda_2 = -7,0 \times 10^{-6}$ C/m

a) $r_1 = 4,0$ cm

İki silindir arasındaki bölgede ($R_1 < r < R_2$), Gauss silindiri alınır ve Gauss kanunu uygulanırsa,



$$E 2\pi r L = \frac{\lambda_1 L}{\epsilon_0}, \quad E = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{2k\lambda_1}{r} \quad \text{olur.}$$

$$r = r_1 \quad \text{için} \quad E_1 = \frac{2k\lambda_1}{r_1} = \frac{2 \times 9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-6}}{4 \times 10^{-2}} = 2,3 \times 10^6 \text{ N/C},$$

yönü yarıçap doğrultusunda ve dışarı doğrudur.

b) $r_2 = 8,0$ cm

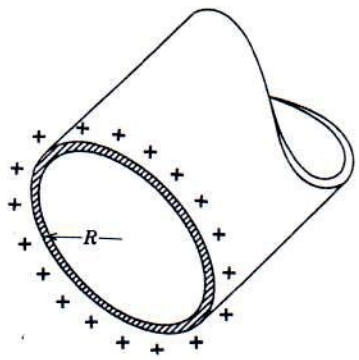
Dıştaki silindirin dışındaki bölgede ($R_2 < r$), a) şıkkındaki uygulama yapılırsa,

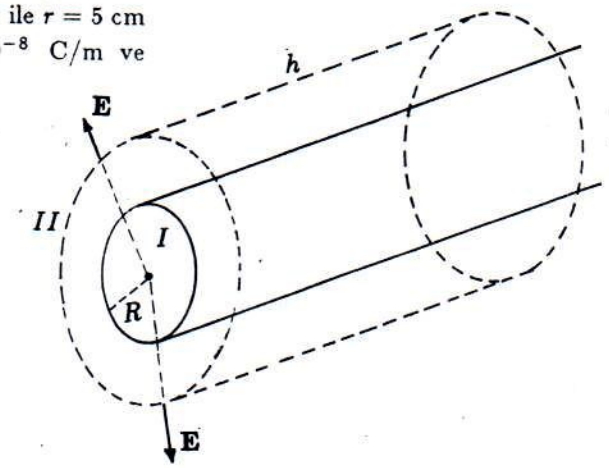
$E = (\lambda_1 + \lambda_2)/(2\pi\epsilon_0 r)$ bulunur. $r = r_2$ için alan,

$$E_2 = \frac{2k(\lambda_1 + \lambda_2)}{r_2} = \frac{2 \times 9 \times 10^9 \times (5 \times 10^{-6} - 7 \times 10^{-6})}{8 \times 10^{-2}} = -4,5 \times 10^5 \text{ N/C 'dır}$$

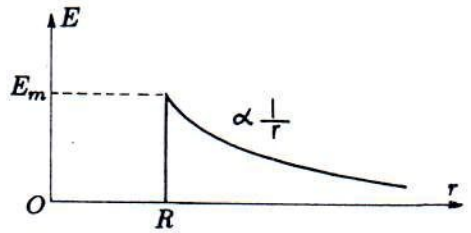
ve $(-)$ işareti yönünün yarıçap doğrultusunda ve içeri doğru olduğunu gösterir.

25. Şekil 25–27 'de R yarıçaplı, ince duvarlı ve yüzeyi üzerinde birim uzunluğunda λ yükü taşıyan metalik bir tüpün kesit verilmiştir. Tüpün ekseninden çeşitli uzaklıklarda, a) $r > R$; b) $r < R$; **E** 'yi veren bağıntıyı çıkarınız. Bulduğunuz sonucun $r = 0$ ile $r = 5$ cm arasındaki grafiğini çiziniz. $\lambda = 2,0 \times 10^{-8}$ C/m ve $R = 3,0$ cm sayısal değerlerini kullanınız.





Şekil 25–27 Problem 25.



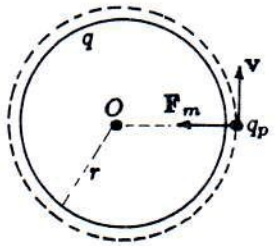
Çözüm : $\lambda = 2,0 \times 10^{-8}$ C/m ,
$R = 3,0$ cm
a) Şekilde gösterilen II nolu bölgede ($r > R$), silindirik simetriden dolayı, taban yarıçapı r $(> R)$ ve yüksekliği h olan bir Gauss silindiri seçelim.

Simetri nedeni ile **E** yarıçap doğrultusundadır. İki tabana ait yüzey elemanları, $d\mathbf{s}$, **E** 'ye dik doğrultuda olduğundan, bu yüzeylerde $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ dır. Silindirin yanal yüzeyinde **E** ve $d\mathbf{s}$ birbirine paraleldir($\mathbf{E}//d\mathbf{s}$). Gauss silindiri içinde kalan metal tüp yüzeyindeki toplam yük, $q = \lambda h$ olduğuna göre, Gauss kanununun uygulanmasından, yanal yüzeyde **E** 'nin büyüklüğü sabit olduğu göz önüne alınarak, $E_{II} 2\pi r h = \lambda h/\epsilon_0$ dır. Buradan $E_{II} = \lambda/(2\pi\epsilon_0 r) = 2k\lambda/r$ bulunur. E 'nin maksimum değeri $r = R$ de olur ve değeri $E_m = (2 \times 9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-8})/3 \times 10^{-2} = 1,2 \times 10^4$ N/C 'dır.
b) Yük metal tüpün dış yüzeyinde dağıldığı için I nolu bölgede yük yoktur. Bu bölgede $(r < R)$ alınacak Gauss yüzeyinin içinde yük dağılım olmadığı için $E_I = 0$ olur.

26. Bir proton, yarıçapı $r = 1,0 \times 10^{-2}$ m olan yüklü bir kürenin hemen dışındaki bir yörüngede, $v = 3,0 \times 10^5$ m/s 'lik hızla dönmektedir. Kürenin yükünü bulunuz.

Çözüm : $v = 3,0 \times 10^5$ m/s , $r = 1,0 \times 10^{-2}$ m , $q_p = +e$

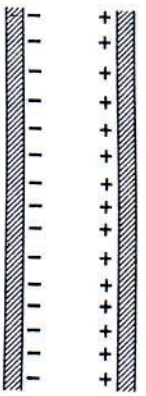
Proton dairesel bir yörüngede olduğuna göre, proton üzerindeki kuvvet merkezcil bir kuvvet olmak zorundadır. Bu kuvvet $+e\mathbf{E}$ olduğu için yörüngede $\mathbf{E}$ alanı merkeze doğru olacak ve buna bağlı olarak küredeki yük $(-)$ işaretli olmak zorundadır. Merkezcil kuvvetin büyüklüğü, $mv^2/r = eE$ olur. Küredeki yük dağılımını düzgün kabul edersek, küresel simetriden ötürü yörüngedeki elektrik alanın büyüklüğü $E = kq/r^2$ olur. Bu durumda, $mv^2/r = keq/r^2$ eşitliğinden küredeki yük miktarı, işareti $(-)$ olması gerektiğine göre ($m = 1,67 \times 10^{-27}$ kg , $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C),



$$q = -\frac{mv^2}{ke}r = -\frac{1,67 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^5)^2 \times 10^{-2}}{9 \times 10^9 \times 1,6 \times 10^{-19}} = -1,0 \times 10^{-9}\ \text{C} \quad \text{olur.}$$

27. Şekil 25–28 'de gösterildiği gibi, iç yüzeylerinde yüzeyce yük yoğunluğu σ ve $-\sigma$ olan iki büyük metal plaka karşı karşıya durmaktadır. $\mathbf{E}$ 'nin değerini

a) plakaların solundaki, b) plakaların arasındaki ve c) plakaların sağındaki bölgelerde hesap ediniz. Plakaların uç bölgelerinde plakaya uzaklıkları plaka boyutlarına göre çok küçük olan noktaları göz önüne almayınız.



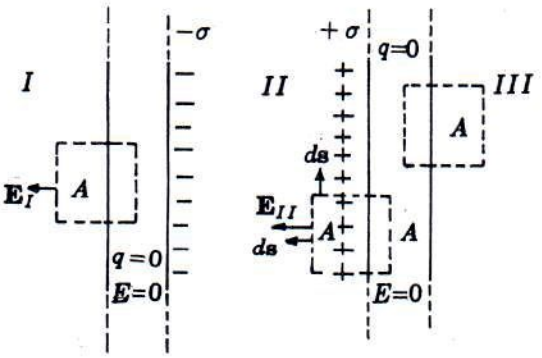
Şekil 25–28 Problem 27.

Çözüm :

a) I nolu bölgede alınan Gauss kübünün içinde yük bulunmadığı için $E_I = 0$ dır.

b) II nolu bölgede Gauss kübü alır ve Problem–13 'ün çözümünü göz önüne alır ve Gauss kanununu uygularsak, $E_{II}A = \sigma A/\epsilon_0$ olur ve buradan $E_{II} = \sigma/\epsilon_0$ olup yönü sola doğrudur.

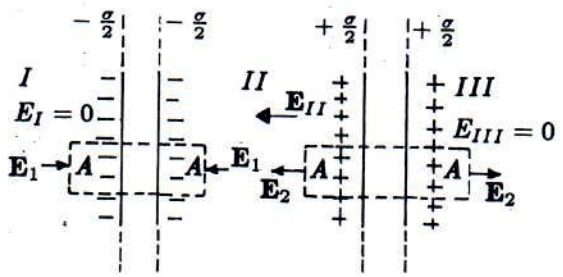
c) a) şıkkında verilen nedenlerden ötürü, $E_{III} = 0$ dır.



<u>İkinci Çözüm :</u>

Plakaların etkileşmesi göz önüne alınmazsa, plakaların her bir yüzeyindeki yüzeyce yük yoğunluğu $\sigma/2$ olur. Alıştırma–17 'nin çözümünde görüldüğü gibi, $\mathbf{E}_1$ ve $\mathbf{E}_2$ alanlarının büyüklükleri $E_1 = E_2 = \sigma/2\epsilon_0$ olur. I nolu bölgede $\mathbf{E}_1$ alanı sağa doğru, $\mathbf{E}_2$ alanı ise sola doğrudur. I nolu bölgedeki net (toplam) alan,

$$\mathbf{E}_I = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = -E_1 + E_2 = 0 \quad \text{olur.}$$



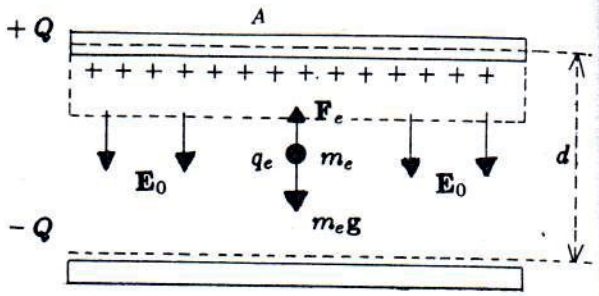
II nolu bölgede her iki alan da sola doğrudur ve toplam alan

$$E_{II} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{olup sola doğrudur.}$$

III nolu bölgede $\mathbf{E}_1$ sola doğru ve $\mathbf{E}_2$ sağa doğru olduğundan toplam alan sıfır olur ($E_{III} = 0$).

28. Dünyanın yer–çekim alanı ve aşağı doğrultuda olan bir elektrik alanı içinde bir elektron hareketsiz durmaktadır. Elektrik alanı, birbirlerine paralel, iki çok geniş ve aralarındaki uzaklık 2,3 cm olan iletken plakalar üzerindeki yükler tarafından oluşturulmuştur. Plakalardaki yüzeysel yük yoğunluğu nedir?

Çözüm : $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg,
$q_e = -e$, $d = 2,3$ cm



Plakaların yüzey alanını A ve her bir plakadaki mutlak yük miktarını Q alalım. Plaka yüzeyleri çok geniş olduğu için aralarındaki bölgede meydana gelen elektrik alanı düzgün kabul edilebilir. Şekilde gösterilen kapalı Gauss yüzeyi seçilir ve yüzeylerden biri üstteki iletken plakanın içinde alınırsa (Plakanın içinde $E = 0$ dır.), Gauss kanunundan

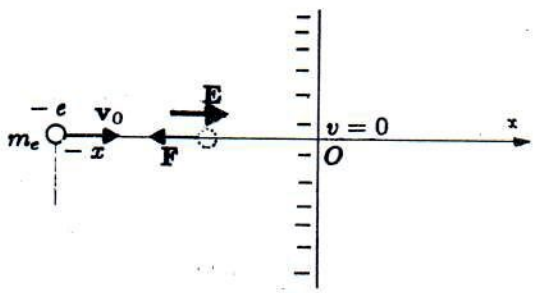
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \qquad E_0 A = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_0 = \frac{Q/A}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

plakalar arasındaki bölgede meydana gelen düzgün elektrik alanın büyüklüğü olur. σ, yüzeysel yük yoğunluğunu ifade eder. Elektron hareketsiz olduğuna göre, üzerine etkiyen net kuvvet sıfırdır. $\mathbf{F}_{net} = \mathbf{F}_E + m_e\mathbf{g} = 0$, $\mathbf{F}_E = -e\mathbf{E}$ olduğuna göre, $-e\mathbf{E} + m\mathbf{g} = 0 \Rightarrow eE = m_e g \quad e(\sigma/\epsilon_0) = m_e g$ olur ve yüzeysel yük yoğunluğu,

$$\sigma = \epsilon_0 \frac{m_e g}{e} = \frac{4\pi\epsilon_0 m_e g}{4\pi e} = \frac{m_e g}{4\pi k e} = \frac{9,11 \times 10^{-31} \times 9,8}{4\pi \times 9 \times 10^9 \times 1,6 \times 10^{-19}} = 4,93 \times 10^{-22}\ \text{C/m}^2 \text{ 'dir.}$$

29. Yüzeyce yük yoğunluğu $-2,0 \times 10^{-6}$ C/m^2 olan bir metal yüzeyi üzerine, 100 eV 'luk elektronlar fırlatılıyor. Elektronlar, yüzeyden ne kadar uzaklıktan fırlatılmalı ki yüzeye ancak ulaşabilsinler?

Çözüm : $K_0 = 100$ eV, $\sigma = -2,0 \times 10^{-6}$ C/m^2



Yüzeydeki yük dağılımının meydana getirdiği elektrik alanı, yüzeye dik doğrultuda ve yüzeye doğru olup büyüklüğü $E = \sigma/\epsilon_0$ dır. Bu alan içindeki elektrona etkiyen kuvvet $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$ dir. Elektronun $-x$ noktasından yüzeye doğru $\mathbf{v}_0$ hızı ile atıldığını kabul edelim. Bu elektron yüzeye geldiği anda hızı sıfır olacaktır.
$\mathbf{F}$ kuvvetinin elektron üzerinde $-x$ noktasından $x = 0$ noktasına kadar yaptığı iş, elektronun kinetik enerjisindeki değişime eşittir (İş–Enerji Teoremi). Bu durumda,

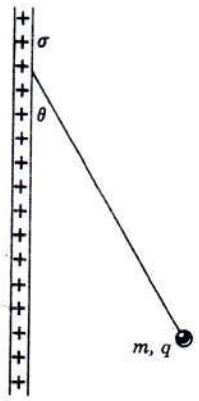
$$W = \int_{-x}^{0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = -\int_{-x}^{0} F\,dx = -\int_{-x}^{0} eE\,dx = -\frac{e\sigma}{\epsilon_0}\int_{-x}^{0} dx$$

$$W = -\frac{e\sigma}{\epsilon_0}x = \Delta K = 0 - K_0 \qquad x = \frac{\epsilon_0 K_0}{e\sigma} = \frac{8,85 \times 10^{-12} \times 100\,e}{e \times 2 \times 10^{-6}}$$

$x = 4,4 \times 10^{-4}$ m $= 0,44$ mm, elektronların fırlatıldığı noktanın yüzeye olan

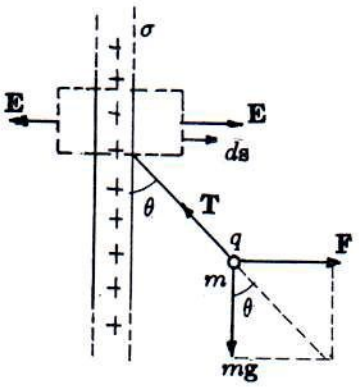
uzaklığı olur.

30. Kütlesi $m = 1,0$ mg olan küçük bir küre, $q = 2,0 \times 10^{-8}$ C 'luk bir yük taşımaktadır. Şekil 25–29 'da gösterildiği gibi, küre, düzgün yüklü olan geniş bir yalıtkan plakaya yer–çekim etkisi altında ipek bir iple asıldığında, plaka ile 30° 'lik bir açı yapmaktadır. Plakanın yüzeyce yük yoğunluğu σ 'yı hesap ediniz.



Şekil 25–29 Problem 30.

Çözüm : $m = 1,0$ mg , $\theta = 30^o$, $q = 2,0 \times 10^{-8}$ C
Problem–27 'nin çözümünde gösterildiği gibi, plakadaki yük dağılımının meydana getirdiği elektrik alanı, plaka düzlemine dik doğrultuda olup büyüklüğü $E = \sigma/2\epsilon_0$ dır. Küreye etkiyen kuvvetler, $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, $m\mathbf{g}$ ve ipin uyguladığı $\mathbf{T}$ gerilim kuvvetleridir. Küre denge konumunda olduğuna göre, $\mathbf{F}+m\mathbf{g}+\mathbf{T} = 0$ dır. Bu durumda $\mathbf{F} + m\mathbf{g} = -\mathbf{T}$ olur ve



$$\tan\theta = \frac{F}{mg} = \frac{q\sigma/2\epsilon_0}{mg} \quad \text{dir.}$$

Bu eşitlikten plakadaki yüzeyce yük yoğunluğu,

$$\sigma = \frac{2mg\epsilon_0 \tan\theta}{q} = \frac{2 \times 10^{-6} \times 9,81 \times 8,85 \times 10^{-12} \tan 30^o}{2 \times 10^{-8}} = 5,0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C/m^2} \quad \text{bulunur.}$$

31. Ernest Rutherford (atomun varlığını deneysel olarak kanıtlayan fizik bilgini) 1911 'de yayınladığı makalesinde "Alfa parçacıklarının büyük açılarda sapmasına neden olan kuvveti, herhangi bir atomu merkezinde $+ze$ kadar nokta yük bulunan ve bu yükün etrafındaki R yarıçaplı küresel bölgede ise düzgün dağılmış $-ze$ kadar elektrik yükünden oluşan bir yapı olarak kabul ettiğimizde, açıklayabiliriz" demiştir. Daha sonra ise atomun merkezinden r kadar uzaklıkta bulunan bir noktada elektrik alanının, $r < R$ için

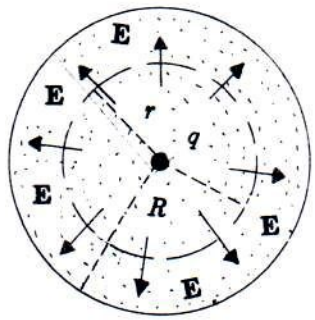
$$E = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right)$$

ile verildiğini ileri sürmüştür. R, atomun yarıçapını göstermektedir. Bu bağıntının doğruluğunu ispat ediniz.

Çözüm : $q = +ze$

$-ze$ yükü, R yarıçaplı küre içine düzgün dağıldığı kabul edildiğinde hacimsel yük yoğunluğu,

$$\rho = \frac{-z\,e}{\left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)} \quad \text{olur.}$$



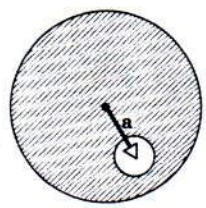
r ($< R$) yarıçaplı küresel Gauss yüzeyi seçilirse, bu yüzeyde küresel simetriden ötürü, elektrik alanı yarıçap doğrultusunda olur ve büyüklüğü sabittir. Gauss kanunu uygulanırsa,

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \frac{q_{net}}{\epsilon_0} \Rightarrow E\,4\,\pi\,r^2 = \frac{1}{\epsilon_0}\left[q + \frac{4\,\pi}{3}\,r^3\,\rho\right]$$

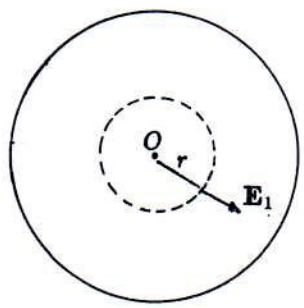
$$E = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\left[\frac{z\,e}{r^2} - \frac{4\,\pi\,r^3}{3r^2}\;\frac{3\,z\,e}{4\,\pi\,R^3}\right] \quad \text{dır ve } r < R \text{ için elektrik alanı,}$$

$$E = \frac{z\,e}{4\,\pi\,\epsilon_0}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right] \quad \text{elde edilir.}$$

32. Küresel bir bölgede, düzgün olarak dağıtılmış birim kacimdeki yük miktarı ρ ile gösterilmektedir. Kürenin merkezine göre küre içindeki herhangi bir P noktasını belirleyen vektör $\mathbf{r}$ olsun. a) P noktasındaki elektrik alanının $\mathbf{E} = (\rho/3\epsilon_0)\mathbf{r}$ olduğunu gösteriniz. b) Küre içinde kürenin merkezine göre $\mathbf{a}$ vektörü ile belirelenen bir nokta etrafında küresel bir kovuk oluşturulmuştur (Şekil 25–30). Üst üste binme ilkesini kullanarak, küresel kovuk içindeki bütün noktalarda elektriksel alanın $\mathbf{E} = (\rho/3\epsilon_0)\mathbf{a}$ (düzgün alan) olduğunu gösteriniz. Görüldüğü gibi, alanın iki değeri de kürenin ve kovuğun yarıçaplarına bağımlı değildir.



Şekil 25–30 Problem 32.

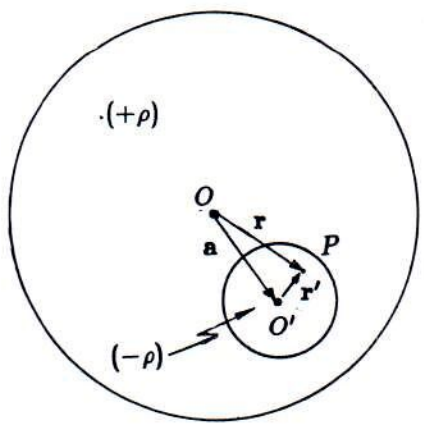


Çözüm :

a) r yarıçaplı küresel Gauss yüzeyi alalım. Bu yüzey içindeki toplam yük, yük yoğunluğu sabit olduğuna göre,

$q_{top} = \rho\,(4\,\pi/3)\,r^3$ olur. Gauss kanunu uygulanırsa, yüzeydeki alanın büyüklüğü,

$$E_1 = \frac{q_{top}}{4\pi r^2\epsilon_0} = \frac{\rho\frac{4\pi}{3}r^3}{4\pi r^2\epsilon_0} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}r \quad \text{olur.}$$



$\mathbf{E}_1$ 'in yönü yarıçap doğrultusundadır ve vektörel yazılımı $\mathbf{E}_1 = (\rho/3\epsilon_0)\,\mathbf{r}$ dır.

b) Boşluğun olması gereken bölgeye yük yoğunluğu $-\rho$ olan yük koyarsak, o bölgede toplam yoğunluk $+\rho - \rho = 0$ olur. Diğer bir deyimle, boşluk yaratılmış olur. Bu durumda kovuk içindeki bir P noktasında iki yük dağılımının ayrı ayrı meydana getirdikleri alanları bulur ve toplarız. $+\rho$ yük dağılımının meydana getirdiği alan, a) şıkkında bulunduğu gibi, O noktasını merkez kabul ederek, $\mathbf{E}_1 = (\rho/3\epsilon_0)\,\mathbf{r}$ olur. $-\rho$ yük dağılımı ise O' noktasını merkez kabul ederek, $\mathbf{E}_2 = -(\rho/3\epsilon_0)\,\mathbf{r}'$ alanını P noktasında meydana getirir. Şekilden görüleceği gibi, $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{a}$ yerine konulursa, P noktasındaki

toplam alan,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\mathbf{r} - \frac{\rho}{3\epsilon_0}(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\mathbf{a} \quad \text{olur.}$$

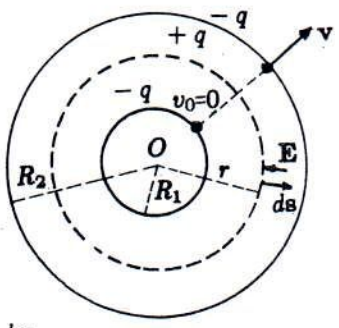
Kovuğun içindeki bütün noktalarda $\mathbf{E}$ düzgün olup $\mathbf{a}$ vektörü doğrultusundadır.

33. Yalnız elektrostatik kuvvetlerin etkisi altında kararlı bir denge durumunun oluşamayacağını ispat ediniz. (Yol gösterme: Bir $\mathbf{E}$ elektrik alanı içinde bulunan bir P noktasına konulan $+q$ yükünün kararlı bir denge durumunda bulunabileceğini kabul ediniz. Gerçekte böyle bir denge oluşmaz. P noktası çevresinde küresel bir Gauss yüzeyi çiziniz. $\mathbf{E}$ 'nin bu yüzey üzerindeki yönünü düşününüz ve Gauss kanununu uygulayınız.)

Çözüm : Uzaydaki bir P noktasının çevresinde hiç bir yük olmadığını varsayalım. Kararlı denge konumu olan P noktasına bir test yükü, q_0, koyalım. P noktasını merkez alarak çok küçük yarıçaplı bir Gauss küresi alalım. Test yükünü P noktasından Gauss küresinin yüzeyine kaydıralım. Eğer, P noktası kararlı denge noktası ise, test yükü üzerinde bu yükü tekrar P noktasına geri getirecek bir kuvvet olmalıdır. Bu kuvvet yarıçap doğrultusunda ve merkeze doğru olacaktır. Bu durumda $\mathbf{E}$ alanı da merkeze doğru olmak zorundadır. Böyle bir $\mathbf{E}$ alanının olabilmesi için Gauss Küresi içinde net $(-)$ yük dağılımı olması gerekir. Bu durum ise başta kabul ettiğimiz varsayıma aykırıdır. Görüldüğü gibi, P noktasında kararlı denge oluşamaz.

34. Aynı merkezli iki küresel iletken kabuğun yarıçapları $R_1 = 0,145$ m ile $R_2 = 0,207$ m 'dir. İç kabuk $-6,00 \times 10^{-8}$ C 'luk yük ile yüklüdür. Bir elektron, iç kabuğun yüzeyini, ihmal edilebilir bir hızla terk etmiştir. İki kabuk arasını boşluk kabul ederek, elektronun dış kabuğa çarptığı andaki hızını bulunuz.

Çözüm : $R_1 = 0,145$ m, $q = -6,00 \times 10^{-8}$ C, $R_2 = 0,207$ m
İki kabuk arasındaki bölgede $(R_1 < r < R_2)$ bir küresel Gauss yüzeyi seçelim. İki kabuk da iletken olduğundan, iç kabukta bulunan yük, $-q$, dış kabuğun iç yüzünde $+q$ ve dış yüzünde $-q$ yükleri indirger. Küresel simetri nedeni ile meydana gelen $\mathbf{E}$ yarıçap doğrultusundadır ve yönü merkeze doğru olur. Gauss yüzeyinde $\mathbf{E}$ 'nin büyüklüğü sabit olup yönü $d\mathbf{s}$ ile ters yöndedir. Gauss yüzeyi içindeki toplam yük $-q$ dır. Gauss kanunu uygulanırsa, elektrik alanın büyüklüğü,



$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -E \oint ds = -E 4\pi r^2 = -\frac{q}{\epsilon_0} \qquad E = \frac{kq}{r^2} \quad \text{olur.}$$

Elektrona bu alan içinde etkiyen kuvvet $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$ dir ve bu kuvvetin yönü $\mathbf{E}$ ile ters yönde olup, yarıçap doğrultusundadır. Bu kuvvetin büyüklüğü, $F = kqe/r^2$ dir. İş–Enerji teoremine göre, bu kuvvetin R_1 'den R_2 'ye kadar elektron üzerinde yaptığı iş, elektronun kinetik enerjisindeki değişime eşittir.

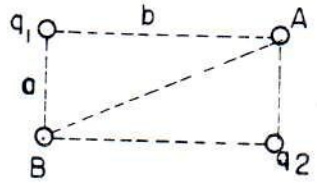
$$W = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_1}^{R_2} F dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{kqe}{r^2} dr = kqe \left(-\frac{1}{r}\Big|_{R_1}^{R_2} \right) = kqe \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] = \Delta K .$$

Elektronun ilk hızı sıfır kabul edildiği için $\Delta K = \frac{1}{2}mv^2$ olur. Bu durumda
$\frac{1}{2}mv^2 = kqe\,[1/R_1 - 1/R_2]$ eşitliğinden, elektronun dış kabuğa çarpmadan hemen önce sahip olduğu hız,

$$v = \sqrt{\frac{2kqe}{m}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} = \sqrt{\frac{2 \times 9 \times 10^9 \times 6 \times 10^{-8} \times 1,6 \times 10^{-19}}{9,1 \times 10^{-31}} \left[\frac{1}{0,145} - \frac{1}{0,207}\right]}$$

$v = 2,0 \times 10^7$ m/s olur ve yönü yarıçap doğrultusundadır.

Çözüm : $a = 5,0$ cm , $b = 15,0$ cm , $q_1 = -5,0\ \mu$C ,
$q_2 = 2,0\ \mu$C



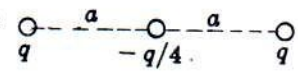
a) A ve B köşelerindeki potansiyeller,

$$V_A = k\left[\frac{q_1}{b} + \frac{q_2}{a}\right] = 9 \times 10^9 \left[-\frac{5 \times 10^{-6}}{15 \times 10^{-2}} + \frac{2 \times 10^{-6}}{5 \times 10^{-2}}\right]$$
$$= 0,6 \times 10^5 \text{ V ve}$$
$$V_B = k\left[\frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{b}\right] = 9 \times 10^9 \left[-\frac{5 \times 10^{-6}}{5 \times 10^{-2}} + \frac{2 \times 10^{-6}}{15 \times 10^{-2}}\right]$$
$$= -7,8 \times 10^5 \text{ V 'dır.}$$

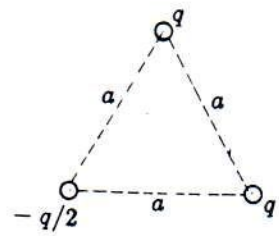
b) $q_3 = 3,0\ \mu$C
q_3 yükü üzerinde yapılan iş, $W = q_3(V_A - V_B) = 3 \times 10^{-6}[0,6 - (-7,8)] \times 10^5 = 2,5$ J olur.
c) q_3 yükü üzerinde yapılan iş pozitiftir. Bu yapılan iş, sistemin potansiyel enerjisinin artmasına neden olmuştur.

28. Birbirlerinden sonlu uzaklıkta bulunan üç nokta yükün oluşturdukları sistemin potansiyel enerjisini sıfır yapan bir düzenek oluşturunuz.

Çözüm :



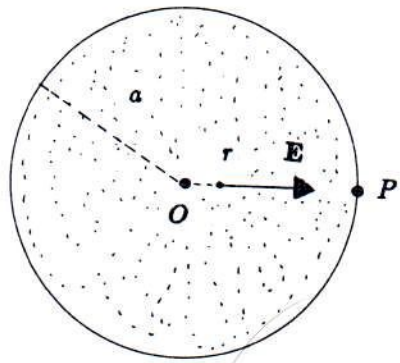
Şekilleri yanda verilen her iki düzenekte de sistemin potansiyel enerjisi sıfır olur.



29. yarıçapı a ve içindeki yük yoğunluğu düzgün olan bir yalıtkan kürenin içinde meydana gelen elektrik alanı, yarıçap doğrultusunda olup büyüklüğü, $E(r) = qr/(4\pi\epsilon_0 a^3)$ dır. q, küre içindeki toplam yük olup r $(< a)$, kürenin merkezinden olan uzaklıktır. Kürenin yüzeyinde bulunan bir noktadaki potansiyel ile kürenin merkezindeki potansiyel arasındaki fark nedir? q yükü pozitif ise, hangi noktadaki potansiyel daha yüksektir?

Çözüm : $\mathbf{E}(r) = \dfrac{kq}{a^3}\mathbf{r}$

Kürenin yüzeyinde alınan P noktasındaki potansiyel ile kürenin merkezi olan O noktasındaki potansiyel arasındaki fark,

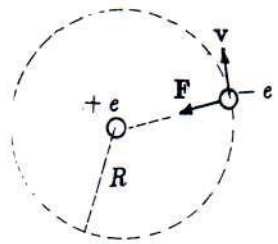


$$V_P - V_O = -\int_0^a \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_0^a E\,dl\cos 0^o$$
$$= -\int_0^a \frac{kq}{a^3} r\,dr = -\frac{kq}{a^3}\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^a = -\frac{kq}{2a^3}a^2$$
$$= -\frac{kq}{2a} \text{ dır.} \qquad q > 0 \text{ için } V_O > V_P \text{ olur.}$$

30. a) Hidrojen atomunun çekirdeğinin ortalama yarıçapı r $(= 5,3\times10^{-11}$ m) olan dairesel yörüngede dolanmakta olan elektronun yörüngesinde oluşturduğu potansiyeli, b) elektron bu yörüngede bulunduğunda hidrojen atomunun potansiyel enerjisini, c) elektronun dairesel bir yörüngede dolandığını ve dairenin merkezinde de hidrojen çekirdeğinin bulunduğunu kabul ederek, elektronun kinetik enerjisini ve d) hidrojen atomunun iyonizasyon enerjisini hesap ediniz. Enerjileri elektron volt cinsinden ifade ediniz.

Çözüm : $R = 5,3 \times 10^{-11}$ m

a) Çekirdeğin elektronun bulunduğu yörüngede oluşturduğu potansiyel,



$$V_R = \frac{ke}{R} = \frac{9 \times 10^9 \times 1,6 \times 10^{-19}}{5,3 \times 10^{-11}} = 27,2 \text{ V 'dır.}$$

b) Atomun potansiyel enerjisi, $U = -eV_R = -27,2$ eV 'dır.

c) Elektron üzerindeki Coluomb kuvveti $(F = ke^2/R^2)$ daima merkeze doğrudur. Öyle ise, bu kuvvet merkezcil bir kuvvettir. $ke^2/R^2 = mv^2/R$. Bu eşitlikten elektronun kinetik enerjisi,

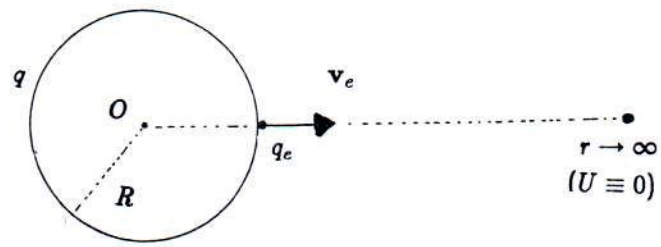
$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{ke^2}{R} = \frac{1}{2}|U| = \frac{1}{2} \times 27,2 = 13,6 \text{ eV 'dır.}$$

d) Atomun toplam enerjisi $E_{top} = K + U = 13,6 - 27,2 = -13,6$ eV olduğuna göre, iyonizasyon enerjisi, $W = -E_{top} = 13,6$ eV olur.

31. Yarıçapı 1,0 cm, toplam yükü $1,6 \times 10^{-15}$ C ve düzgün yük yoğunluğuna sahip olan bir kürenin yüzeyinden bir elektronun kurtulma hızını hesaplayınız. Kütle–çekimini ihmal ediniz.

Çözüm : $R = 1,0$ cm, $q_e = -e$,
$m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg,
$q = 1,6 \times 10^{-15}$ C

Küreden sonsuz uzaklıkta potansiyel enerji sıfır kabul edilirse, sistemin (elektron+küre) potansiyel enerjisindeki değişim elektronun küre yüzeyinden ayrılma anındaki kinetik enerjisine eşittir.



$$\frac{1}{2}m_e v_e^2 = U(r \to \infty) - U(r = R) = 0 - \frac{kq\,q_e}{R} \quad \text{dır}$$

ve elektronun kaçma (kurtulma) hızı,

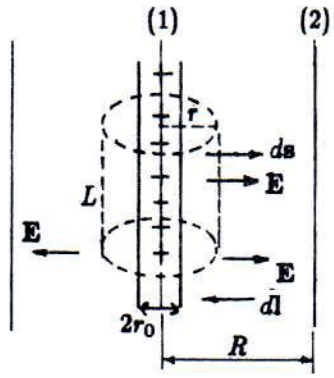
$$v_e = \sqrt{-\frac{2kq\,q_e}{m_e R}} = \sqrt{-\frac{2 \times 9 \times 10^9 \times 1,6 \times 10^{-15} \times (-1,6 \times 10^{-19})}{9,11 \times 10^{-31} \times 1,0 \times 10^{-2}}}$$

$$v_e = 2,25 \times 10^4 \text{ m/s} = 22,5 \text{ km/s} \quad \text{bulunur.}$$

32. Bir Geiger sayacının metal silindirinin çapı 2,0 cm 'dir. Silindirin ekseni boyunca gerilmiş olan telin çapı ise $1,3 \times 10^{-2}$ cm 'dir. Silindir ve tel arasındaki potansiyel farkı 850 V ise, a) telin yüzeyindeki ve b) silindirin yüzeyindeki, elektrik alanını hesap ediniz.

Çözüm : $R = 1,0\,\text{cm}$, $V + 850\,\text{V}$, $2r_0 = 1,3 \times 10^{-2}\,\text{cm}$

a) Silindir ve tel arasındaki bölgede yarıçapı r ve yüksekliği L olan silindir şeklinde bir Gauss yüzeyi seçelim. Aynı zamanda tel üzerindeki boyca yük yoğunluğunu λ alalım. Gauss kanunu uygulanınca,



$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \quad \text{olur.}$$

Yarıçap doğrultusunda olan $\mathbf{E}$ 'nin büyüklüğü $E = \lambda / 2\pi\epsilon_0 r$ olur. 1 ve 2 nolu yüzeyler arasındaki potansiyel farkı,

$$V \equiv V_1 - V_2 = -\int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_2^1 E\, dl \cos 180^0 = \int_2^1 E\, dl \quad \text{olur.}$$

dl, r 'nin azaldığı yönde olduğundan $dl = -dr$ dır. Bu durumda

$$V = -\int_2^1 E\, dr = \int_1^2 E\, dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^{R} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(R/r_0) \quad \text{olur.}$$

Bu eşitlikten $\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} = \dfrac{V}{\ln(R/r_0)}$ olur ve $E = \dfrac{V}{\ln(R/r_0)} \dfrac{1}{r}$ elde edilir.

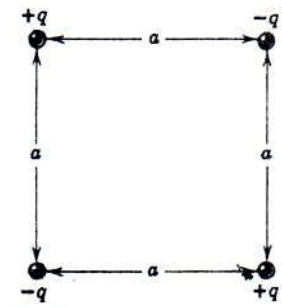
Telin yüzeyindeki $(r = r_0)$ $\mathbf{E}$ alanının büyüklüğü,

$$E = \frac{850}{\ln(2/1,3 \times 10^{-2})} \frac{1}{\frac{1,3}{2} \times 10^{-4}} = 2,6 \times 10^6\ \text{V/m} \quad \text{bulunur.}$$

b) Silindirin yüzeyindeki $(r = R)$ $\mathbf{E}$ alanının büyüklüğü,

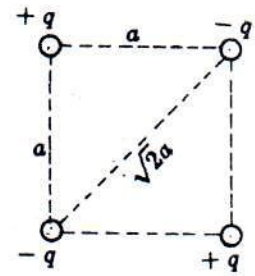
$$E = \frac{850}{\ln(2/1,3 \times 10^{-2})} \frac{1}{1,0 \times 10^{-2}} = 1,7 \times 10^4\ \text{V/m} \quad \text{'dir.}$$

33. Şekil 26–31 'deki yükleri bulundukları noktalara getirmek için gerekli işi bir bağıntı olarak bulunuz.



Şekil 26–31 Problem 33.

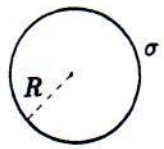
Çözüm : Yükleri bulundukları noktalara getirmek için yapılan iş, sistemin sahip olduğu potansiyel enerjiye eşittir.



$$\begin{aligned} W &= kq^2 \left[-\frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}\,a} - \frac{1}{a} - \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}\,a} - \frac{1}{a} \right] \\ &= \frac{kq^2}{a} \left[-4 + \frac{2}{\sqrt{2}} \right] = -0,21 \frac{q^2}{\epsilon_0 a} \quad \text{dır.} \end{aligned}$$

34. Yeryüzünün net elektrik yükü, yüzeyi üzerinde 1 elektron/m^2 'e eşdeğer olacak şekilde kabul edilirse, a) yeryüzünün potansiyeli nedir? b) Yeryüzünün hemen yakınındaki elektrik alanın değeri nedir?

Çözüm : $\sigma = 1$ elektron/m$^2 = -e$ C/m^2, $R = 6,4 \times 10^6$ m



a) Yeryüzünün potansiyeli,

$$V_R = \frac{k\sigma 4\pi R^2}{R} = -4\pi k e R$$

$$V_R = -4\pi \times 9 \times 10^9 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 6,4 \times 10^6 = -0,12 \text{ V} \quad \text{olur.}$$

b) Hemen yüzeydeki **E** alanının büyüklüğü,

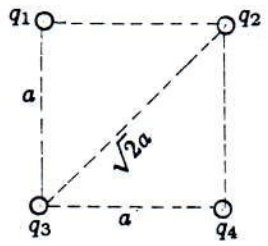
$$E_R = \frac{k\sigma 4\pi R^2}{R^2} = \frac{|V_R|}{R} = \frac{0,12}{6,4 \times 10^6} = 1,9 \times 10^{-8} \text{ V/m 'dır}$$

ve yönü yarıçap doğrultusunda olup yerin merkezine doğrudur.

35. Şekil 26–7 'de verilen yük sisteminin sahip olduğu potansiyel enerjiyi hesap ediniz. Örnek–5 'teki sayısal değerleri kullanınız.

Çözüm : $q_1 = 1,0 \times 10^{-8}$ C, $q_2 = -2,0 \times 10^{-8}$ C, $q_3 = 3,0 \times 10^{-8}$ C, $q_4 = 2,0 \times 10^{-8}$ C, $a = 1,0$ m

Sistemin sahip olduğu potansiyel enerji,



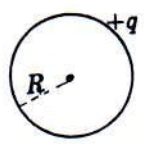
$$U = \frac{k}{a}\left[q_1q_2 + \frac{q_1q_4}{\sqrt{2}} + q_1q_3 + q_2q_4 + \frac{q_2q_3}{\sqrt{2}} + q_3q_4\right]$$

$$U = \frac{9 \times 10^9}{1,0}\left[-2 \times 10^{-16} + \frac{2 \times 10^{-16}}{\sqrt{2}} + 3 \times 10^{-16} - 4 \times 10^{-16} - \frac{6 \times 10^{-16}}{\sqrt{2}} + 6 \times 10^{-16}\right]$$

$$U = 9 \times 10^9 \left[3 - \frac{4}{\sqrt{2}}\right] \times 10^{-16} = 1,5 \times 10^{-7} \text{ J 'dır.}$$

36. Yarıçapı 15 cm olan metal bir kürenin üzerindeki toplam yük $3,0 \times 10^{-8}$ C 'dir. a) Kürenin yüzeyindeki elektrik alanı nedir? b) Kürenin yüzeyindeki elektrik potansiyeli nedir? c) Küre yüzeyinden hangi uzaklıkta potansiyel 500 V 'luk azalma gösterir?

Çözüm : $R = 15$ cm, $q = 3,0 \times 10^{-8}$ C



a) Kürenin yüzeyindeki elektrik alan yarıçap doğrultusunda olup büyüklüğü,

$$E_R = \frac{kq}{R^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-8}}{(15 \times 10^{-2})^2} = 1,2 \times 10^4 \text{ V/m 'dir.}$$

b) Kürenin yüzeyindeki potansiyel,

$$V_R = \frac{kq}{R} = \frac{9 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-8}}{15 \times 10^{-2}} = 1,8 \times 10^3 \text{ V 'dır.}$$

c) Küre yüzeyinden h kadar uzaklıkta potansiyelde 500 V azalma olduğu kabul edilirse,

$V_R - V_{R+h} = 500$ olur ve bu eşitlikten $V_{R+h} = V_R - 500 = 1,8 \times 10^3 - 500 = 1300$ V olur.
$V_{R+h} = kq/(R+h)$ eşitliğinden h uzaklığı,

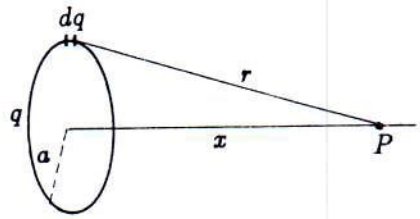
$$h = \frac{kq}{V_{R+h}} - R = \frac{9 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-8}}{1300} - 15 \times 10^{-2} = 5,8 \times 10^{-2} \text{ m} = 5,8 \text{ cm} \quad \text{bulunur.}$$

37. a) Yarıçapı a olan halka şeklinde bir yük sisteminde halka ekseni üzerindeki bir noktada Eş. 26–10 ile hesap edilen potansiyelin,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

ile verildiğini gösteriniz. b) Bu bağıntıdan eksen üzerindeki noktalarda elektrik alanını veren bir ifade çıkarınız. Sonucu Bölüm 24, Örnek–5 ile karşılaştırınız.

Çözüm :
a) Halka üzerinde difransiyel uzunluk, dl, alalım ve dl üzerindeki yükü dq kabul edelim. dq yükü nokta yük olarak düşünülürse, bu yükün P noktasında meydana getirdiği potansiyel, $dV = k\,dq/r$ dır. Halkanın birim uzunluğundaki yük, $q/2\pi a$ dır. dl üzerindeki yük, $dq = (q/2\pi a)dl$ dir. Şekilden de görüldüğü gibi, $r = \sqrt{a^2 + x^2}$ dir ve bu değerler yerlerine konulur ve integral alınırsa,

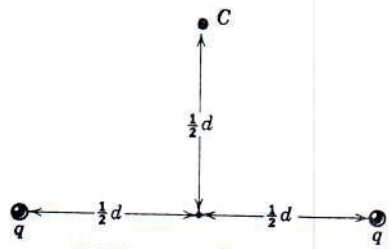


$$\int dV = \int \frac{kq\,dl}{2\pi a\sqrt{a^2 + x^2}}, \qquad V = \frac{kq}{2\pi a\sqrt{a^2 + x^2}} \int_0^{2\pi a} dl = \frac{kq}{2\pi a\sqrt{a^2 + x^2}} 2\pi a = \frac{kq}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad \text{bulunur.}$$

b) x–ekseni boyunca meydana gelen E_x alanı, $E_x = -dV/dx$ dir.

$$E_x = -kq\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(2x)}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{kqx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad \text{dir ve beklenen bir sonuçtur.}$$

38. Şekil 26–32 'de gösterildiği gibi, yerlerine sabitleştirilmiş olan iki yük q $(= 2,0\ \mu\text{C})$ birbirlerinden d $(= 2,0$ cm$)$ kadar uzaklıkta bulunmaktadırlar. a) C noktasındaki elektriksel potansiyeli bulunuz. b) Eğer sonsuz uzaklıktan üçüncü bir q $(= 2,0\ \mu\text{C})$ yükünü C noktasına yavaş yavaş getirecek olursanız, ne kadarlık bir iş yapmış olursunuz? c) Üçüncü yük C noktasında bulunduğunda, sistemin potansiyel enerjisi nedir?



Şekil 26–32 Problem 38.

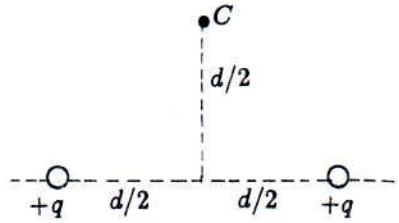
Çözüm : $q = 2,0\ \mu\text{C}$, $d = 2,0$ cm
a) C noktasındaki potansiyel,

$$V_C = \frac{2kq}{\sqrt{2}\,\frac{d}{2}} = \frac{4kq}{\sqrt{2}\,d} = \frac{4 \times 9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-6}}{\sqrt{2} \times 2 \times 10^{-2}} = 2,5 \times 10^6 \text{ V} = 2,5 \text{ MV} \quad \text{'dır.}$$

b) $q = 2,0\ \mu C$

Sonsuzda potansiyel sıfır kabul edildiği için yük üzerine yapılan iş,

$$W = q(V_C - 0) = 2 \times 10^{-6} \times 2,5 \times 10^6 = 5,0 \text{ J 'dır.}$$



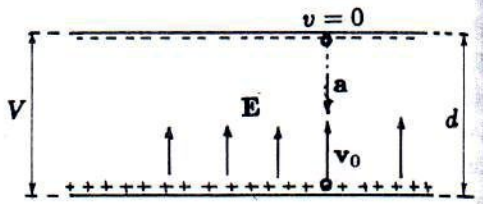
c) Sistemin potansiyel enerjisi yapılan iş kadar artmıştır.

$$U = \frac{kq^2}{d} + W = \frac{9 \times 10^9 \times (2 \times 10^{-6})^2}{2 \times 10^{-2}} + 5 = 6,8 \text{ J 'dır.}$$

39. Birbirlerinden d (= 1,0 cm) uzaklıkta ve aralarında V (= 10 kV) potansiyel farkı bulunan iki paralel düzlem iletkenden birinin yüzeyinden bir elektron diğerine doğru fırlatılmıştır. Eğer elektron ikinci yüzeye ulaştığı anda hızı sıfır oluyorsa, ilk hızı nedir?

Çözüm : $d = 1,0$ cm, $V = 10$ kV

Elektron pozitif yüzeyden negatif yüzeye doğru $\mathbf{v}_0$ hızı ile fırlatılıyor. Plakalar arasındaki $\mathbf{E}$ alanı sabit ve yukarı doğrudur. Bu alan içinde elektrona etkiyen kuvvet $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$ olup elektronun sahip olduğu ivme,



$$\mathbf{a} = \frac{1}{m}\mathbf{F} = -\frac{e}{m}\mathbf{E} \text{ dır.}$$

Görüldüğü gibi, ivme aşağı doğrudur. $\mathbf{E}$ alanının büyüklüğü, $E = V/d$ dır. Bu durumda $\mathbf{a}$ sabittir. Öyle ise $v^2 - v_0^2 = 2ad$ eşitliğinde son hız ($v = 0$) sıfırdır.

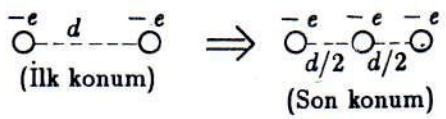
$$0 - v_0^2 = -\frac{2eE}{m}d = -\frac{2eV}{md}d, \qquad v_0^2 = \frac{2eV}{m}$$

Elektronun ilk hızı, $$v_0 = \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 10 \times 10^3}{9,1 \times 10^{-31}}} = 5,9 \times 10^7 \text{ m/s} \quad \text{olur.}$$

40. İki elektron birbirlerinden 2,0 cm kadar uzaklıkta yerlerine sabitleştirilmişlerdir. Başka bir elektron, sonsuz uzaklıktan iki elektronu birleştiren doğrunun orta noktasına nişanlanarak fırlatılmış ve bu noktaya ulaştığında, hızı sıfır olmuştur. Elektronun ilk hızını bulunuz.

Çözüm : $d = 2,0$ cm

Sistemin potansiyel enerjisindeki artma miktarı, sonsuz uzaklıktan atılan elektronun kinetik enerjisine eşittir. $K_0 = U_{son} - U_{ilk}$. Elektronun ilk hızını $\mathbf{v}_0$ kabul edersek,

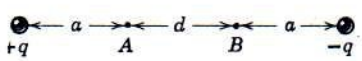


$$K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = ke^2\left[\frac{2}{d/2} + \frac{1}{d} - \frac{1}{d}\right] = \frac{4ke^2}{d}$$

eşitliğinden elektronun ilk hızı,

$$v_0 = \sqrt{\frac{8ke^2}{md}} = \sqrt{\frac{8 \times 9 \times 10^9 \times (1,6 \times 10^{-19})^2}{9,1 \times 10^{-31} \times 2 \times 10^{-2}}} = 318,2 \text{ m/s} = 0,32 \text{ km/s} \quad \text{bulunur.}$$

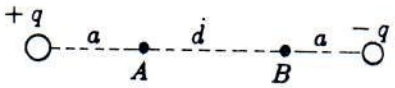
41. Şekil 26−33 'de verilen yük sistemi için a) $(V_A - V_B)$ 'yi veren bir ifade bulunuz. b) Bulduğunuz sonuç $d = 0$, $a = 0$ ve $q = 0$ için beklenen sonuçları verirmi?



Şekil 26−33 Problem 41.

Çözüm :

a) A noktasında potansiyel $V_A = kq/a - kq/(a+d)$ dır.
B noktasındaki potansiyel ise $V_B = kq/(a+d) - kq/a$ dır.
A ve B noktaları arasındaki potansiyel farkı,

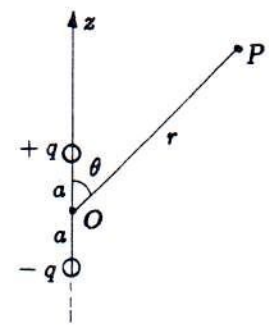


$$V_A - V_B = 2kq\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a+d}\right] = \frac{2kqd}{a(a+d)} \quad \text{olur.}$$

b) $d = 0$ için $V_A - V_B = 0$ dır. Bu sonuç beklenmelidir.
$a = 0$ için $V_A - V_B \to \infty$ dır. Bu sonuç beklenmemelidir. Çünkü, yükler bulundukları noktalarda alan meydana getiremezler. $q = 0$ için $V_A = V_B = 0$ dır Bu sonuç beklenmelidir.

42. Eş. 26−11 'den başlayarak, bir elektrik dipolunun oluşturduğu elektrik alanının yarıçap doğrultusundaki bileşenini (E_r) hesap ediniz. E_r 'nin θ 'ya göre değişimi uygun görünmekte midir?

Çözüm : Eş. 26−11 : $V = p\cos\theta/4\pi\epsilon_0 r^2$ dir ve yarıçap doğrultusundaki elektrik alanının bileşeni,



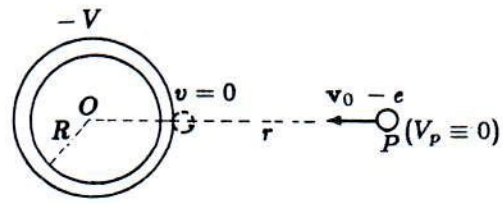
$$E_r = -\frac{dV}{dr} = \frac{2kP\cos\theta}{r^3} \quad \text{bulunur.}$$

$\theta = \pi/2$, $3\pi/2$ için $E_r = 0$. $\theta = 0$ için $E_r = 2kP/r^3$. Kontrol için Bölüm−24 'deki problem çözümlerine bakınız.

43. Yalıtkan bir sap üzerine oturtulmuş, yarıçapı R olan ince bir iletken küresel kabuğun elektriksel potansiyeli−V 'dir. Kürenin merkezinden r kadar uzaklıkta bulunan bir P noktasından ($r \gg R$) bir elektron v_0 ilk hızı ile, kürenin merkezine doğru fırlatılmıştır. Elektronu küresel tabakaya kadar ancak ulaştıracak olan v_0 hızını bulunuz.

Çözüm :

$r \gg R$ olduğundan P noktasında $V_P \equiv 0$ alınır ve elektron kabuğun üzerine geldiğinde hızını sıfır alırsak, potansiyel enerjisindeki değişim başlangıçtaki kinetik enerjiye eşittir.

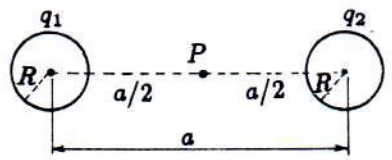


$$\frac{1}{2}mv_0^2 = -e\,[-V - 0] \quad \text{dır}$$

ve buradan elektronun ilk hızı, $v_0 = \sqrt{2eV/m}$ bulunur.

44. Yarıçapları 3,0 cm olan iki metal küre üzerlerinde sırasıyla, düzgün olarak dağıtılmış $1,0 \times 10^{-8}$ C ve $-3,0 \times 10^{-8}$ C değerinde yükler taşımaktadırlar. Eğer küre merkezleri arasındaki uzaklık 2,0 m ise, a) merkezler arasındaki uzaklığın orta noktasındaki potansiyeli ve b) her bir kürenin potansiyelini hesaplayınız.

Çözüm : $R = 3,0\,\text{cm}$, $q_1 = 1,0 \times 10^{-8}\,\text{C}$,
$q_2 = -3,0 \times 10^{-8}\,\text{C}$, $a = 2,0\,\text{m}$



a) P noktasındaki potansiyel,

$$V_P = \frac{kq_1}{a/2} + \frac{kq_2}{a/2} = 9 \times 10^9 \left[\frac{1,0 \times 10^{-8}}{1,0} - \frac{3,0 \times 10^{-8}}{1,0}\right]$$

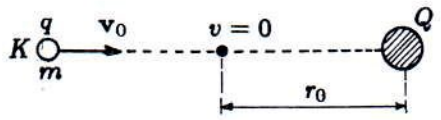
$$V_P = -180,0\,\text{V} \quad \text{olur.}$$

b) $a \gg R$ olduğu için kürelerin etkileşmesini ihmal edebiliriz. Bu durumda

$$V_1 = \frac{kq_1}{R} = \frac{9 \times 10^9 \times 10^{-8}}{3 \times 10^{-2}} = 3000,0\,\text{V} \quad \text{ve} \quad V_2 = \frac{kq_2}{R} = -\frac{9 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-8}}{3 \times 10^{-2}} = -9000,0\,\text{V} \quad \text{olur.}$$

45. Kütlesi m, yükü q (> 0) ve başlangıçtaki kinetik enerjisi K olan bir parçacık, yükü Q olan ağır bir çekirdeğe doğru, başlangıçta birbirlerini etkileyemeyecekleri kadar uzak bir noktadan fırlatılmıştır. Parçacığın hızı bir an için sıfır olduğunda, parçacık çekirdeğe ne kadar yaklaşmıştır? Çekirdeği, hesap yaptığınız sistemde, hareketsiz kabul ediniz.

Çözüm : Parçacığın çekirdeğe r_0 kadar yaklaştığında hızının sıfır olduğunu kabul edelim. Parçacığın başlangıçtaki kinetik enerjisi, sistemin kazandığı potansiyel enerjiye dönüşmüştür. $K = kqQ/r_0$ dır ve buradan $r_o = kqQ/K$ bulunur.



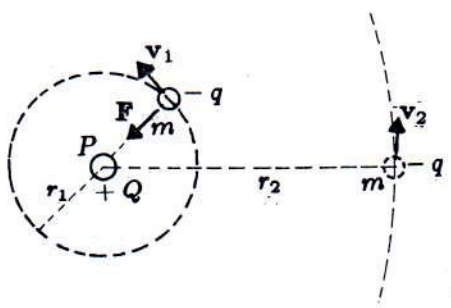
46. Yükü Q (pozitif) olan bir parçacığın P noktasına sabit olarak yerleştirildiğini kabul edelim. Kütlesi m ve yükü $-q$ (negatif) olan ikinci bir parçacık ise merkezi P noktasında olan r_1 yarıçaplı bir çember üzerinde sabit bir hızla dönmektedir. Yine P noktası merkez olmak üzere, ikinci parçacığın üzerinde döndüğü çemberin yarıçapını r_1 'den r_2 'ye çıkarmak için dış kuvvetlerin ikinci parçacık üzerinde yaptıkları işi veren ifadeyi çıkarınız.

Çözüm : İkinci parçacığın üzerindeki Coulomb kuvveti, merkezcil bir kuvvettir. Bu durumda $kqQ/r_1^2 = mv_1^2/r_1$ eşitliğinden

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}\frac{kqQ}{r_1} \quad \text{elde edilir.}$$

Yörünge yarıçapı r_2 olduğundaki kinetik enerji,

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}\frac{kqQ}{r_2} \quad \text{olur.}$$



Parçacık yörüngé değiştirdiğinde, sistemin toplam enerjisindeki değişim, parçacık üzerinde yapılan işe eşittir.

$W = E_2 - E_1$ dir. $E_2 = U_2 + K_2$ ve $E_1 = U_1 + K_1$ olup U_1 ve U_2 sistemin başlangıç ve son durumundaki potansiyel enerjileridir. K_1, K_2 ise parçacığın kinetik enerjileridir.

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}\frac{kqQ}{r_1} = \frac{1}{2}|U_1| \quad \text{dir ve} \quad K_2 = \frac{1}{2}|U_2| \quad \text{dir.}$$

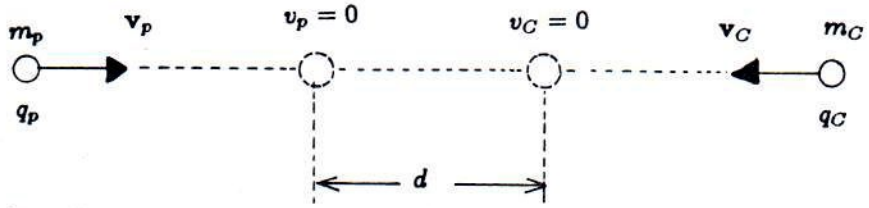
Bu durumda, $W = U_2 + \frac{1}{2}|U_2| - (U_1 + \frac{1}{2}|U_1|)$ olup $U_1 = -\frac{kqQ}{r_1}$ ve $U_2 = -\frac{kqQ}{r_2}$ değerleri yerlerine konulursa,

$$W = -\frac{kqQ}{r_2} + \frac{1}{2}\frac{kqQ}{r_2} - \left[-\frac{kqQ}{r_1} + \frac{1}{2}\frac{kqQ}{r_1}\right] = \frac{kqQ}{2}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] \quad \text{bulunur.}$$

47. Güneşin merkezine yakın bir bölgede, karbon−12 çekirdeği (yük : $6e$) ve bir proton (yük : e), alın alına çarpışma yapacak şekilde, birbirlerine doğru hareket halindedirler. Her birinin enerjisi, bu bölgede parçacıkların sahip olduğu ortalama termal enerji olan 1300 eV 'dır. Parçacıklar, aralarındaki elektrostatik itme kuvveti nedeni ile bir an için durdukları zaman merkezleri arasındaki uzaklık ne olur?

Çözüm : $q_C = +6e$, $q_p = +e$, $K_p = K_C = 1300$ eV

İki parçacık sisteminin başlangıçtaki toplam kinetik enerjisi $(K_p + K_C)$, parçacıklar birbirlerine en yakın uzaklığa gelip durdukları andaki elektriksel potansiyel enerjiye eşittir. $K_p + K_C = kq_pq_C/d$ eşitliğinden parçacıkların arasındaki en yakın uzaklık,

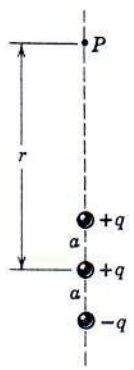


$$d = \frac{kq_pq_C}{K_p + K_C} = \frac{k(+e)(6e)}{K_p + K_C} = \frac{9 \times 10^9 \times 6 \times (1,6 \times 10^{-19})^2}{2 \times 1300 \times (1,6 \times 10^{-19})} = 3,32 \times 10^{-12}\ \text{m} = 3,32 \times 10^{-2}\ {}^{o}\text{A} \quad \text{olur.}$$

48. Şekil 26−34 'deki yük sistemi için, dikey eksen üzerinde $r \gg a$ şartını sağlayan noktalarda potansiyelin,

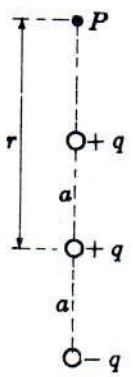
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}\left(1 + \frac{2a}{r}\right)$$

ile verildiğini gösteriniz. Bu beklenen bir sonuç mudur? Açıklayınız. (Yol gösterme: Yük dağılımını çevresinden yalıtılmış bir yük ile bir dipolun toplamı gibi düşününüz.)



Şekil 26−34 Problem 48.

Çözüm : P noktasında her bir nokta yükün meydana getirdiği potansiyellerin cebrik toplamı, o noktadaki potansiyeli verir. Bu durumda, P noktasındaki potansiyel,



$$\begin{aligned} V_p &= kq\left[\frac{1}{r-a} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r+a}\right] \\ &= kq\left[\frac{r(r+a) + (r-a)(r+a) - r(r-a)}{r(r-a)(r+a)}\right] = kq\frac{r^2 + 2ar - a^2}{r(r^2 - a^2)} \quad \text{olur.} \end{aligned}$$

$r \gg a$ şartı sağlanırsa, $V_p = \dfrac{kq}{r}\left[\dfrac{r^2(1 + 2a/r - a^2/r^2)}{r^2(1 - a^2/r^2)}\right]$ dır

ve $\dfrac{a^2}{r^2} \to 0$ yaklaşımı kullanılırsa, $V_p = \dfrac{kq}{r}\left[1 + \dfrac{2a}{r}\right]$ bulunur.

Bu sonuç beklenmelidir. Çünkü, $r \gg a$ için bir dipol ve nokta yükün meydana getirdiği potansiyeller

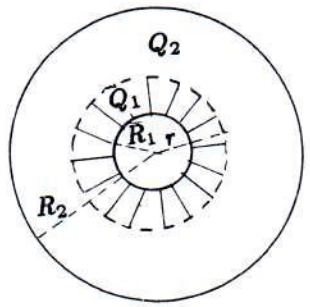
toplanır. $V_p = kp/r^2 + kq/r$ dır. Dipol momenti $p = 2aq$ yerine konulursa,

$$V_p = \frac{k2qa}{r^2} + \frac{kq}{r} = \frac{kq}{r}\left[1 + \frac{2a}{r}\right] \quad \text{bulunur.}$$

49. İçine düzgün olarak yük dağıtılmış olan kalın küresel bir kabuğun iç ve dış yarıçapları R_1 ve R_2 dır. Yarıçaplar $R_2 > R_1$ eşitsizliğini sağlarlar. Sistemin potansiyelini küresel kabuğun merkezinden olan r uzaklığının bir fonksiyonu olarak, aşağıdaki şartları gözönüne alarak, a) $r > R_2$, b) $R_2 > r > R_1$ ve c) $r < R_1$ için hesap ediniz. d) Bu çözümlerin $r = R_2$ ve $r = R_1$ için verdiği sonuçlar aralarında uyumlu mudur?

Çözüm :

a) Küresel kabuğun iç ve dış yarıçapları R_1 ve R_2 $(R_2 > R_1)$ olsun ve düzgün olan hacimsel yük yoğunluğunu ρ kabul edelim. Küresel simetriden dolayı, kabuğun dışındaki bir noktada $(r > R_2)$, potansiyel $V = kq/r$ dir. q ise kabuğun içindeki toplam yük miktarıdır ve



$$q = \rho\frac{4\pi}{3}\left(R_2^3 - R_1^3\right) \quad \text{olur.}$$

$r > R_2$ için potansiyel,

$$V = \frac{4\pi k\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3r} \quad \text{olur.}$$

b) Kabuğun içinde r yarıçaplı bir küre alalım $(R_1 < r < R_2)$. Bu kürenin içinde kalan, şekildeki taralı bölge, yükü Q_1 ve dışında kalan yükü Q_2 kabul edelim. Q_1 yükünün bu alınan r yarıçaplı küre yüzeyinde oluşturduğu potansiyel

$$V_1 = \frac{kQ_1}{r} = \frac{k\rho 4\pi}{3r}(r^3 - R_1^3) \quad \text{olur.}$$

Q_2 yükünün aynı yüzeyde oluşturduğu potansiyel,

$$V_2 = \int_r^{R_2} \frac{k\rho 4\pi r'^2 dr'}{r'} = \frac{4\pi k\rho}{2} r'^2 \Big|_r^{R_2} = \frac{4\pi\rho}{2\times 4\pi\epsilon_0}(R_2^2 - r^2) = \frac{\rho}{2\epsilon_0}(R_2^2 - r^2) \quad \text{olur.}$$

Bu alınan yüzey üzerindeki net potansiyel, $V = V_1 + V_2$ dir.

$$V = \frac{4\pi\rho}{3\times 4\pi\epsilon_0}\frac{(r^3 - R_1^3)}{r} + \frac{\rho}{2\epsilon_0}(R_2^2 - r^2) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left[\frac{3}{2}R_2^2 - \frac{1}{2}r^2 - \frac{R_1^3}{r}\right] \quad \text{dır.}$$

c) $r < R_1$ bölgesinde yük olmadığı için bu bölgede potansiyel sabittir. Bu sabit değer potansiyelin $r = R_1$ yüzeyindeki değerine eşittir. b) şıkkında elde edilen potansiyelde $r = R_1$ değeri konulursa,

$$V(r = R_1) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left[\frac{3}{2}R_2^2 - \frac{1}{2}R_1^2 - \frac{R_1^3}{R_1}\right] = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\left[R_2^2 - R_1^2\right] \quad \text{olur.}$$

d) Yanıt "Evet" olur.