# EK- 8 (ÖDEV-5) : EN KISA YOL PROBLEMİ VE ÇÖZÜMÜ

Aşağıda verilen ağ, Karel’in dağıtım yaptığı şehirler ve aralarındaki tüm kullanılabilecek yolları uzaklıkları ile göstermektedir. Birinci şehirden yedinci şehre giden en kısa yolu bulmaya çalışalım.

12

9

6

13

7

9

8

5

8

7

Problem 1 ila 7.düğümler arasındaki tüm yolları tek tek hesaplayarak çözülebilir. Ancak çok büyük bir ağda bu imkânsızlaşır. Bundan dolayı problemi matematik olarak ifade etmeliyiz. Problemi dinamik programlama ile çözmek için önce parçalara ayırmak gerekir. Yöntemdeki genel düşünce, bir aşamanın(parçanın) son düğümlerine olan en kısa (kümülatif) uzaklıkları hesaplamak, sonra bu değerleri, izleyen aşamada girdi olarak kullanmaktır. Bu problem aşağıda gösterildiği gibi üç aşamaya ayrılabilir.

0

7

8

5

f0

f1

f1

7

8

5

12

17

f2

12

f2

f3

21

17

7

9

8

12

13

9

6

**1.aşama:**

2.düğüme en kısa uzaklık =7 km (1.düğümden)

3. düğüme en kısa uzaklık =8km (1.düğümden)

4. düğüme en kısa uzaklık =5 km (1.düğümden)

**2.aşama:**

5 ve 6. düğümlere en kısa toplam uzaklıkları belirliyoruz. 5. düğümü ele alırsak üç rota bulunmaktadır. (2,5), (3,5) ve (4,5) bunlardan en kısası şu şekilde belirlenir:

5.düğüme en kısa uzaklık

Minimum

i =2,3,4

i.düğüme en kısa uzaklık

i.düğümden 5.düğüme olan uzaklık

7 + 12 = 19

8 + 8 = 16

5 + 7 = 12

min

i=2,3,4 444

12(4.düğümden)

6.düğüm için de benzer şekilde;

8 + 9 = 17

5 + 13 = 18

min

i=3,4

17 (3.düğümden)

**3.aşama:** varış düğümüne olan (7.düğüm) tüm yolların toplamı bulunmaktadır.

12 + 9 = 21

17 + 6 = 23

min

i=5,6

21 (5.düğümden)

7. düğüme en kısa uzaklık 21 km’dir. Optimum yolu veren şehirler şu şekilde belirlenir. 3. aşamanın sonucundan hareket ederek 7.düğüm, 5.düğüme bağlanır. Daha sonra 2.aşamanın sonucuna bakılarak 5.düğüm, 4.düğüme bağlanır. Son olarak 1.aşamanın sonucuna bakılarak 4.düğüm, 1. düğüme bağlanır.

Optimum yol 1-----🡪 4-----🡪 5-----🡪 7 yoludur.

Dinamik programlamanın yinelenen hesaplamalarını matematik olarak şu şekilde ifade edebiliriz:

fi (xi ) -----🡪 i. aşamada xi .düğüme en kısa uzaklık,

d(xi-1 ,xi )-----🡪 xi-1 . düğümden xi . düğüme olan uzaklık olarak tanımlanırsa fi  aşağıdaki eşitlik yardımıyla fi-1 den hesaplanır:

fi (xi) = min ( d(xi-1 ,xi ) + fi-1(xi-1 ))

tüm uygun

(xi-1, xi ) yolları

i=1,2,3

Başlangıçta i=1 ve f0 (x0) = 0 olarak alınır. Dinamik programlama terminolojisinde xiden i. aşamada sistemin durumu olarak söz edilir.i. aşamada sistemin durumu, aşamaları birbirine bağlayan bir bilgidir.Durumun uygun bir biçimde tanımlanması, her aşamayı ayrı ayrı hesaplamayı sağlar ve çözümün tüm aşamalar için uygun olmasını garantiler.

İleriye ve geriye doğru yineleme:

Ele alınan örnekteki hesaplamalar birinci aşamadan başlayıp üçüncü aşamaya geçilerek ileriye doğru bir yineleme ile yapılmıştır. Aynı örnek üçüncü aşamadan başlayıp birinci aşamada bitecek şekilde geriye doğru yineleme ile de çözülebilir. Her iki hesaplama da aynı sonucu verecektir. İleriye doğru hesaplama daha mantıklı görünse de dinamik programlama literatüründe daha çok geriye doğru hesaplamanın kullanıldığını görmekteyiz. Bunun nedeni de geriye doğru yinelemenin hesaplama açısından daha etkili olmasıdır. Ele alınan örnek için geriye doğru yineleme denklemi şu şekilde yazılabilir:

fi (xi) = min ( d(xi ,xi+1) + fi+1(xi+1 ))

tüm uygun

(xi ,xi+1 ) yolları

i=1,2,3

bu örnekte x4 = 7 için f4 (x4) =0 alınır. Hesaplamalara ait sıra f3🡪f2🡪f1 şeklindedir.

Şimdi aşamaları geriden başlayarak adım adım izleyelim.

* **3.aşama:**

7. düğüm (x4 = 7), 5. ve 6. düğümlere (x3 = 5 ve 6) sadece bir yolla bağlı olduğundan seçim şu şekilde yapılır:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | d( x3,x4 ) | optimum | çözüm |
| X3 | x4 =7 | f3 (x3) | x4 \* |
| 5 | 9 | 9 | 7 |
| 6 | 6 | 6 | 7 |

* **2.aşama:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | d( x2,x3 ) | +f 3(x3) | optimum | çözüm |
| X2 | X3=5 | X3=6 | f2 (x2) | X3 \* |
| 2 | 12+9=21 | - | 21 | 5 |
| 3 | 8+9=17 | 9+6=15 | 15 | 6 |
| 4 | 7+9=16 | 13+6=19 | 16 | 5 |

* **1.aşama:**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | d( x1,x2 ) | +f 2(x2) |  | optimum | çözüm |
| X1 | X2 =5 | x2=6 | x2=4 | f1 (x1) | X2 \* |
| 1 | 7+21=28 | 8+15=23 | 5+16=21 | 21 | 4 |

Birinci aşamada, birinci şehir dördüncü şehire bağlanıyor. İkinci aşamada optimum çözüm, dördüncü şehrin beşinci şehre bağlandığını gösteriyor. Üçüncü aşamada da beşinci şehir yedinci şehire bağlanıyor. Optimum çözüm (1 – 4 – 5 - 7) numaralı düğümlerden geçmekte ve uzunluğu da 21 km olmaktadır.