

Cap. 4 - DINAMICA DELLE MACCHINE

- 4.1 Analisi statica
- 4.2 Analisi dinamica
- 4.3 Sistemi lineari ad un grado di libertà
- 4.4 Dinamica delle coppie elementari

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 1

4.1 - ANALISI STATICÀ

Si studia la trasmissione delle forze tra i vari membri in funzione delle forze esterne applicate con l'ipotesi di:

- membri rigidi
- masse e inerzie trascurabili ovvero moto a regime assoluto

Sistemi di forze equivalenti

due sistemi di forze sono equivalenti per l'equilibrio di un corpo rigido quando hanno la stessa risultante e lo stesso momento rispetto ad un punto P

Equazioni cardinali della statica

condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un corpo rigido è che il sistema delle forze agenti su di esso abbia risultante nulla e momento nullo rispetto ad un polo qualsiasi P:

$$\sum \mathbf{F}_i = 0$$

$$\sum \mathbf{M}_i^{(P)} = 0$$

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 2

Per il caso piano le equazioni cardinali della statica, scomposte secondo gli assi coordinati, possono anche essere scritte come:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0 \\ \sum F_{iy} = 0 \\ \sum M_i^{(P)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0 \\ \sum M_i^{(A)} = 0 \\ \sum M_i^{(B)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum M_i^{(A)} = 0 \\ \sum M_i^{(B)} = 0 \\ \sum M_i^{(C)} = 0 \end{cases}$$

purché i punti *A*, *B* e *C* siano distinti e non allineati.

Si distinguono:

- *caso ideale* (attriti nulli): le reazioni vincolari sono normali alle superfici a contatto
- *caso reale* (presenza di attriti): per individuare le direzioni delle reazioni vincolari ci si deve riferire a condizioni di moto incipiente

È normalmente opportuno eseguire l'analisi in condizioni ideali prima di operare l'analisi nel caso reale.

Ipotesi comunemente adottate:

- assenza di contatti d'urto
- attrito trascurabile nei contatti di rotolamento
- attrito radente trascurabile nelle cerniere

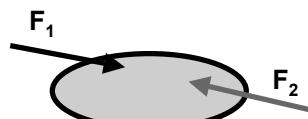
ANALISI STATICÀ: SOLUZIONI GRAFICHE

2 forze: data \mathbf{F}_1 trovare \mathbf{F}_2

per l'equilibrio alla rotazione ($\sum M=0$)

\mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 devono avere la stessa direzione

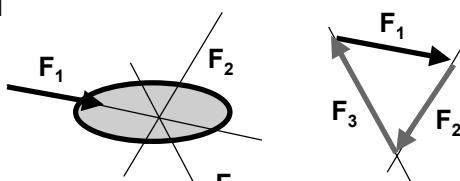
$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$$



3 forze: data \mathbf{F}_1 , la retta d'azione di \mathbf{F}_2 ed il punto di applicazione di \mathbf{F}_3 trovare \mathbf{F}_2 ed \mathbf{F}_3

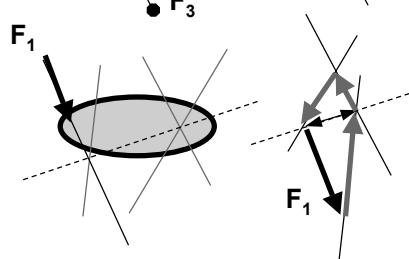
$\sum M=0$ tutte le \mathbf{F} devono essere concorrenti
→ trovo la retta d'azione di \mathbf{F}_3

$\sum F=0$ i vettori \mathbf{F} costituiscono un triangolo chiuso → trovo moduli e versi



4 forze: data \mathbf{F}_1 e le rette d'azione di \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_3 ed \mathbf{F}_4 trovare \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_3 ed \mathbf{F}_4

Si introduce una retta ausiliaria unendo i punti di intersezione delle rette d'azione a due a due; si risolvono due triangoli delle forze, in cui la forza risultante va presa prima in un verso e poi in quello opposto, in quanto le due coppie devono avere risultanti uguali, opposte e con stessa retta d'azione.

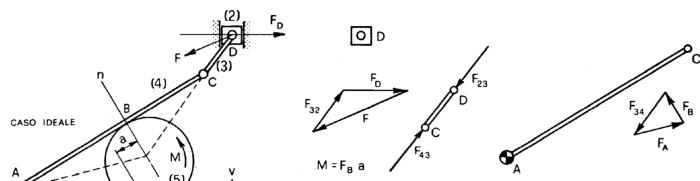


Esempio di soluzione grafica

Assegnata la forza resistente \mathbf{F} trovare il momento motore \mathbf{M} che garantisce l'equilibrio in condizioni reali (solo attrito radente)

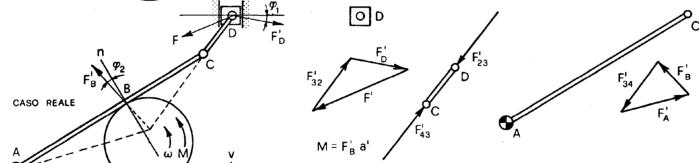
caso ideale

- pattino (3F): F nota, F_D orizz., F_{32} dir (3) $\Rightarrow F_{32}$
- asta 3 (2F): $F_{23} = -F_{32} \Rightarrow F_{43}$
- asta 4 (3F): $F_{34} = -F_{43}$, $F_{54} = F_B$ direz. nota $\Rightarrow F_{14} = F_A$, F_B
- camma: $F_{41} = -F_{14} \Rightarrow M = aF_{41}$



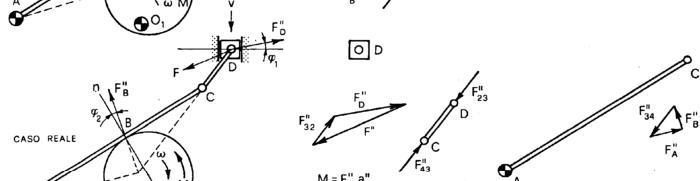
caso reale, moto incipiente \uparrow

noti i fattori di attrito,
si inclinano le reazioni in
modo da opporsi al moto
incipiente del membro cui si
applicano



caso reale, moto incipiente \downarrow

analogo al caso precedente

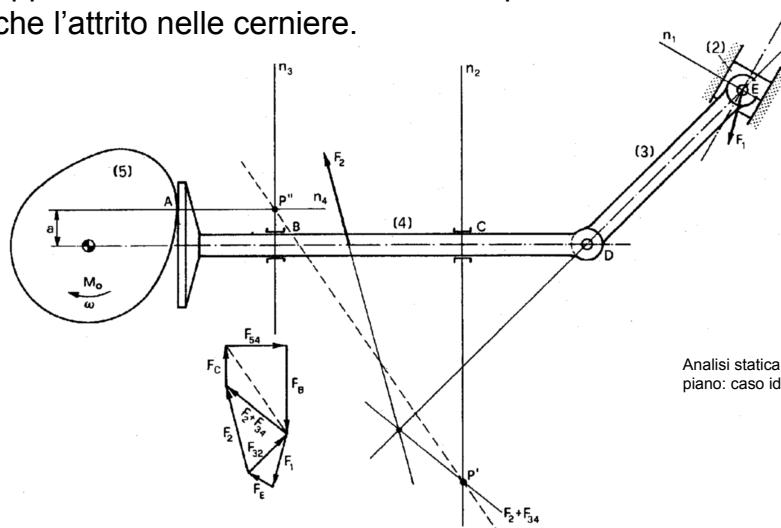


Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 5

Analisi statica: metodo grafico

Esempio di soluzione grafica

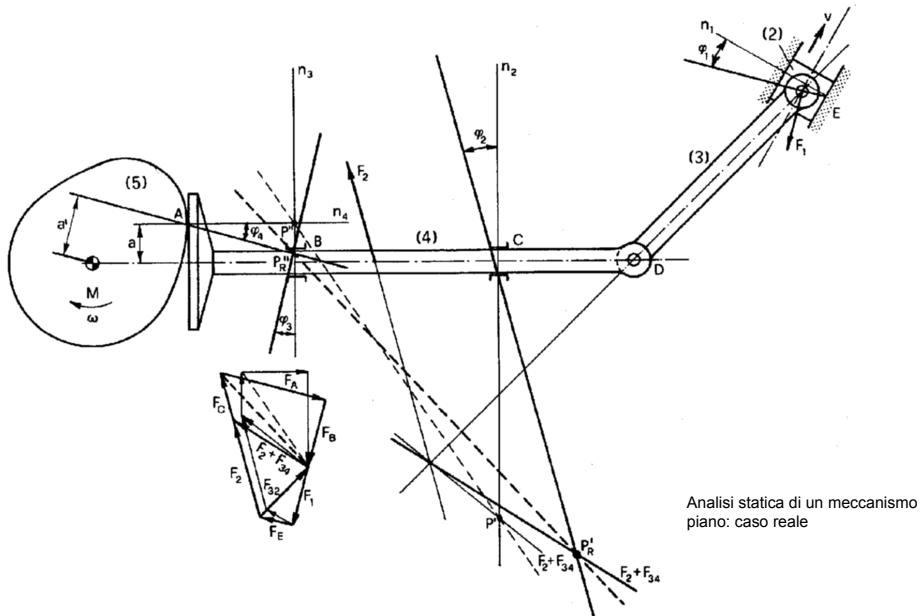
Note le forze \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 , si vuole determinare il momento da applicare alla camma, essendo sempre trascurabili sia le inerzie che l'attrito nelle cerniere.



Analisi statica di un meccanismo piano: caso ideale

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 6

Esempio di soluzione grafica



Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 7

4.2 - ANALISI DINAMICA

Scopo dell'analisi:

- *prevedere il comportamento dinamico del sistema ed eventualmente*
- *modificarlo in conformità a date specifiche*

In questo caso, a differenza dell'analisi cinematica, si studia il moto dei corpi *in relazione alle cause che lo producono*.

In generale la procedura da seguire in questo studio comprenderà:

- la definizione di un *modello fisico* del sistema reale
- la definizione del *modello matematico* che descriva il modello fisico
- il confronto dei risultati analitici con *dati sperimentali*

Il modello fisico può essere:

- a **parametri distribuiti**: massa, elasticità, ecc. sono distribuiti con continuità nello spazio →
eq. differenziali alle derivate parziali
- a **parametri concentrati** massa, elasticità, ecc. sono concentrati in punti definiti dello spazio →
eq. differenziali ordinarie

Inoltre i *sistemi discreti* sono individuati da un numero finito di **gradi di libertà**, mentre i *sistemi continui* sono caratterizzati da un numero infinito di gradi di libertà.

I sistemi sono detti **lineari** se il modello matematico risultante è lineare, **non lineari** altrimenti; nel primo caso la risoluzione è più semplice e vale il principio di sovrapposizione degli effetti.

L'analisi risulta più semplice nel caso di sistemi a **parametri costanti** rispetto al caso di parametri tempo-varianti.

TRANSITORI NEI SISTEMI MECCANICI

Durante il funzionamento delle macchine si verificano sempre delle fasi transitorie, che possono precedere il raggiungimento delle condizioni di regime o di arresto o che si susseguono con una certa periodicità.

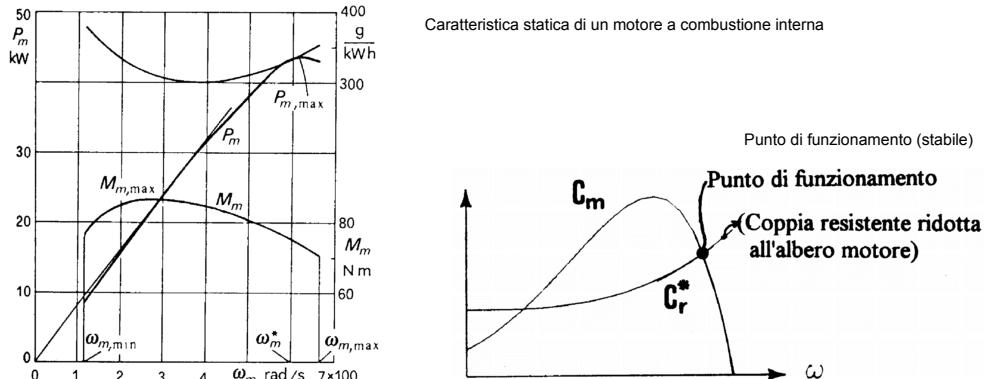
Una macchina si dice a **regime** se la sua energia cinetica è costante, mentre nel caso in cui essa si ripeta con periodo T (ovvero la variazione di energia cinetica sul periodo sia nulla) si dice a **regime periodico**. La periodicità del ciclo è imposta da condizioni esterne quali possono essere la coppia motrice periodica dovuta ad un motore a scoppio, la coppia resistente impulsiva che si manifesta nelle presse, ecc.

A volte si introducono dei *volani* (corpi con elevato momento di inerzia, accumulatori di energia cinetica) per ridurre la variazione di energia cinetica e per regolarizzare il moto.

Lo studio dei transitori consente di:

- analizzare il comportamento dinamico delle macchine
- valutare sforzi e deformazioni anche in presenza di azioni d'inerzia

Se in un modello fisico è possibile trascurare i fenomeni dinamici, le relazioni fra le variabili della potenza assumono il nome di **caratteristiche statiche**. Per esempio, le caratteristiche meccaniche del motore e dell'utilizzatore esprimono l'andamento della coppia (motrice e resistente) in funzione della velocità di rotazione e la loro intersezione determina il *punto di funzionamento* della macchina (che può essere stabile o instabile).

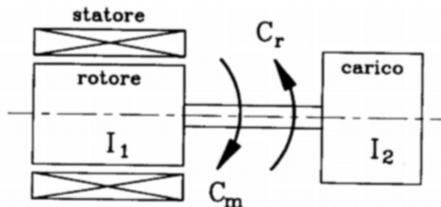


Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 11

Accoppiamento diretto motore-carico

Per la soluzione del problema è necessario conoscere le caratteristiche meccaniche del motore e dell'utilizzatore ed integrare le equazioni del moto.

Per esempio, si consideri il caso di motore ideale ($C_m = \text{cost}$) e coppia resistente viscosa, proporzionale alla velocità ($C_r = k\omega$).



Accoppiamento diretto

$$C_m - C_r = (I_1 + I_2) \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{dt}$$

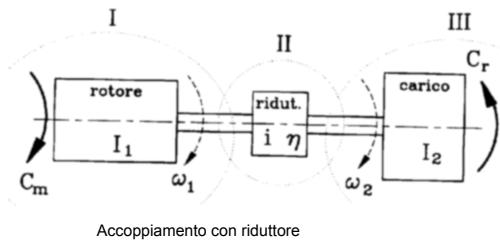
$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{k}{I} \omega = \frac{C_m}{I}$$

Il sistema è del primo ordine; la velocità di regime vale: $\omega_R = \frac{C_m}{k}$
e la legge del moto, con velocità iniziale nulla, è: $\omega = \omega_R \left(1 - e^{-\frac{k}{I} t} \right)$

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 12

Accoppiamento motore-carico con riduttore

Sia interposto tra motore e carico un riduttore di velocità con rapporto di trasmissione $i = \omega_1 / \omega_2$ e rendimento η .

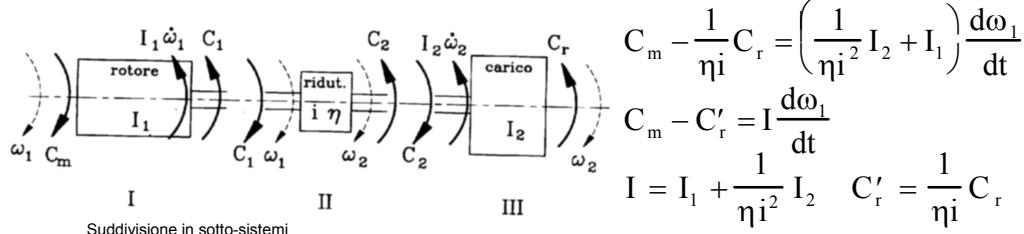


$$\text{I (rotore): } C_m - C_1 = I_1 \frac{d\omega_1}{dt}$$

$$\text{II (riduttore): } C_2 = \eta i C_1$$

$$\text{III (carico): } C_2 - C_r = I_2 \frac{d\omega_2}{dt}$$

Per cui si ottiene:



$$C_m - \frac{1}{\eta i} C_r = \left(\frac{1}{\eta i^2} I_2 + I_1 \right) \frac{d\omega_1}{dt}$$

$$C_m - C'_r = I \frac{d\omega_1}{dt}$$

$$I = I_1 + \frac{1}{\eta i^2} I_2 \quad C'_r = \frac{1}{\eta i} C_r$$

avendo introdotto l'inerzia / ed il carico C'_r , ridotti all'albero motore.

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 13

Accoppiamento motore-carico con frizione

Il carico sia accoppiato al motore tramite un innesto a frizione: il transitorio di avviamento può essere diviso in 2 fasi.

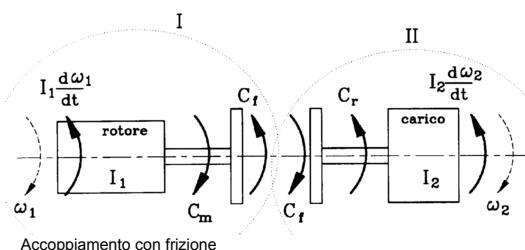
I fase: strisciamento

attraverso la frizione viene trasmessa una coppia C_f che è funzione della posizione del comando di innesto

$$\text{Sottosistema I: } C_m - C_f = I_1 \frac{d\omega_1}{dt} \rightarrow \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{C_m - C_f}{I_1}$$

$$\text{Sottosistema II: } C_f - C_r = I_2 \frac{d\omega_2}{dt} \rightarrow \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{C_f - C_r}{I_2}$$

conoscendo l'andamento di C_m e C_r in funzione del tempo t (o della velocità ω) e la legge di comando della frizione (che influisce sull'andamento di C_f) tramite integrazione si trova $\omega_1 = \omega_1(t)$ e $\omega_2 = \omega_2(t)$ ed il tempo t al quale $\omega_1 = \omega_2$



II fase: aderenza

al termine della fase di strisciamento, l'albero motore e quello condotto ruotano come un corpo unico alla velocità ω

$$C_m - C_r = (I_1 + I_2) \frac{d\omega}{dt}$$

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 14

ANALISI DINAMICA DEI SISTEMI MECCANICI PIANI formulazione newtoniana

Le equazioni del moto di una macchina o meccanismo si possono determinare in base alle equazioni cardinali ed al *terzo principio della dinamica* (azione - reazione):

- si suddivide il sistema da analizzare in singoli membri che si considerano isolati
- ad ognuno di essi si applicano le forze attive e le reattive esercitate dai vincoli
- per ciascuno di essi si scrivono le equazioni cardinali della dinamica che, nel caso di
 - » moto piano
 - » membri rigidi

si riducono alle tre equazioni scalari:

$$\sum F_x = m\ddot{x}_G \quad \sum F_y = m\ddot{y}_G \quad \sum M^G = J_G \ddot{\varphi}$$

- si impone che le forze ed i momenti reattivi esercitati da un vincolo sui due membri da esso collegati siano eguali ed opposti
- si impongono le relazioni di congruenza fra posizioni, velocità e accelerazioni del sistema

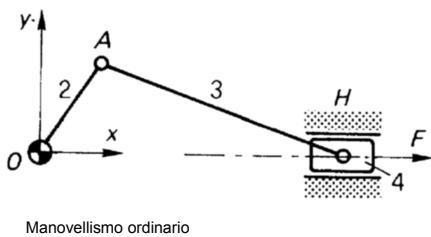
Reazioni che si esercitano nelle coppie cinematiche

Poiché in assenza di attrito le reazioni non compiono lavoro, devono risultare nulle le componenti nelle direzioni in cui sono consentiti gli spostamenti angolari e lineari relativi

Ad esempio sono non nulle :

- nella *coppia rotoidale*
 - » la forza in direzione generica
 - » il momento nelle direzioni normali all'asse di rotazione
- nella *coppia prismatica*
 - » la forza normale all'asse di traslazione
 - » il momento generico
- nella *coppia cilindrica*
 - » la forza normale all'asse di rototraslazione
 - » il momento nelle direzioni normali all'asse di rototraslazione

Es: analisi dinamica di un manovellismo



Manovellismo ordinario

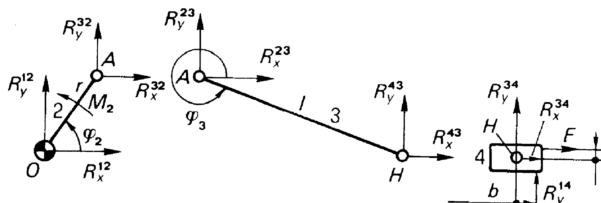


Diagramma di corpo libero

Si considerano separatamente i tre membri rigidi mobili 2, 3 e 4. Oltre alle forze note (coppia motrice M_2 e forza resistente F), si applicano a ciascun membro le reazioni esercitate nelle coppie: sia R^{ij} la forza che il membro i esercita sul membro j .

Le reazioni sono incognite ma la loro direzione e punto di applicazione sono determinati, in assenza di attrito, dalla natura delle coppie:

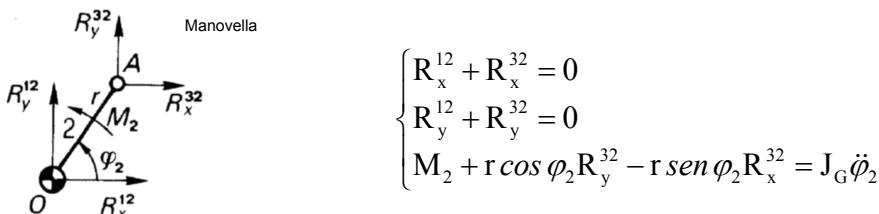
- la reazione nella coppia rotoidale passa per il suo centro geometrico
- la reazione nella coppia prismatico è normale alla direzione di spostamento relativo

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 17

Essendo il moto piano ed i membri rigidi le equazioni cardinali, per ciascun membro, sono:

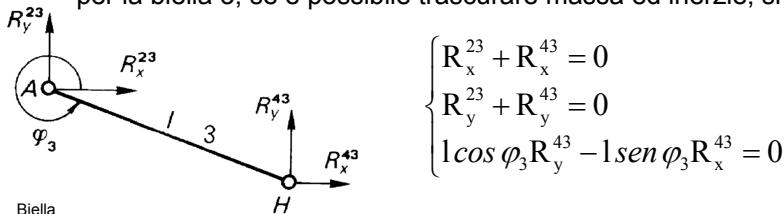
$$\sum F_x = m\ddot{x}_G \quad \sum F_y = m\ddot{y}_G \quad \sum M^G = J_G \ddot{\varphi}$$

- per la manovella 2 si ipotizza di poter assumere il baricentro coincidente con il perno O, per cui: $\ddot{x}_{G2} = \ddot{y}_{G2} = 0$



$$\begin{cases} R_x^{12} + R_x^{32} = 0 \\ R_y^{12} + R_y^{32} = 0 \\ M_2 + r \cos \varphi_2 R_y^{32} - r \sin \varphi_2 R_x^{32} = J_G \ddot{\varphi}_2 \end{cases}$$

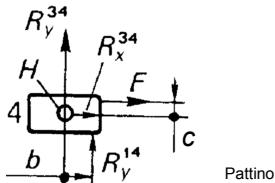
- per la biella 3, se è possibile trascurare massa ed inerzie, si ha:



$$\begin{cases} R_x^{23} + R_x^{43} = 0 \\ R_y^{23} + R_y^{43} = 0 \\ 1 \cos \varphi_3 R_y^{43} - 1 \sin \varphi_3 R_x^{43} = 0 \end{cases}$$

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 18

- per il pattino 4, il vincolo costituito dalla coppia prismatica impone:
 $\ddot{\varphi}_4 = 0$, $\ddot{y}_{G4} = 0$ e, avendo supposto G_4 coincidente con H , si ha:



$$\begin{cases} R_x^{34} + F = m\ddot{x}_H \\ R_y^{14} + R_y^{34} = 0 \\ bR_y^{14} - Fc = 0 \end{cases}$$

- per il terzo principio, di azione e reazione, si ha inoltre:

$$\begin{cases} R_x^{ij} = -R_x^{ji} \\ R_y^{ij} = -R_y^{ji} \end{cases} \quad \text{per } i, j = 2, 3, 4$$

- dall'analisi cinematica si conoscono:

$$\begin{cases} \varphi_3 = \varphi_3(\varphi_2) \\ \ddot{x}_H = \ddot{x}_H(\varphi_2, \dot{\varphi}_2, \ddot{\varphi}_2) \end{cases}$$

- globalmente si hanno 9 equazioni nelle incognite: $R_{12}^x, R_{12}^y, R_{23}^x, R_{23}^y, R_{34}^x, R_{34}^y, R_{14}^y, b, \varphi_2$; il sistema può essere integrato noti $M(t), F(t)$, ed i valori iniziali $\varphi_2(t_0), \dot{\varphi}_2(t_0)$

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 19

Es: analisi dinamica di un aereo in fase di frenatura

Quando l'aereo tocca terra la coda aggancia un filo collegato ad ogni estremità a 2 grandi sacchi di sabbia. L'energia cinetica dell'aereo viene dissipata dai sacchi che strisciano sul terreno.

Si vuole scrivere il modello del moto dell'aereo in frenatura, con analisi di prima approssimazione.



Nonostante la presenza dei due sacchi e la loro inclinazione variabile durante il moto di frenatura, in prima approssimazione si può ricorrere ad un modello semplificato con un solo sacco di sabbia e filo a direzione costante; non si trascura invece l'elasticità del filo, importante nella dinamica del sistema.

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 20

Ipotesi:

- sistema unidimensionale
 - » si trascura il moto di rotazione dell'aereo
 - » si considera un solo sacco
- la portaerei viaggia in linea retta a velocità costante
- attrito secco tra sacco e terreno
- attrito trascurabile tra aereo e terreno
- forza del vento sull'aereo proporzionale al quadrato della velocità relativa

Modello:



O il punto della portaerei in cui l'aereo ha agganciato il filo ma non lo ha ancora posto in tensione; è l'origine del riferimento per x_1 e x_2

v_0 è la velocità della portaerei e v_w è la velocità del vento

$v_{1w} = \dot{x}_1 + v_0 + v_w$ velocità dell'aereo relativa al vento

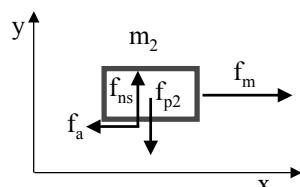
$v_{2n} = \dot{x}_2$ velocità del sacco relativa alla nave

$\xi = x_1 - x_2$ allungamento del cavo

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 21

Considerando i corpi isolati:

il sacco



$$f_m + f_a = m_2 \ddot{x}_2$$

$$f_{ns} - f_{p2} = 0$$

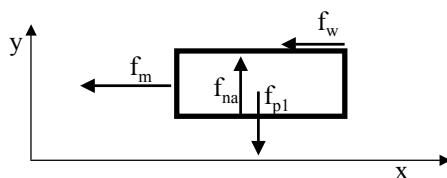
$$f_m = k\xi = k(x_1 - x_2)$$

$$f_a = f_{a0} \operatorname{sign}(-v_{2n}) m_2 g$$

$$f_{p2} = m_2 g$$

$$k(x_1 - x_2) - f_{a0} \operatorname{sign}(\dot{x}_2) m_2 g = m_2 \ddot{x}_2$$

l'aereo



$$f_w = \beta v_{1w}^2 = \beta (\dot{x}_1 + v_0 + v_w)^2$$

$$f_{pl} = m_1 g$$

$$-\beta (\dot{x}_1 + v_0 + v_w)^2 - k(x_1 - x_2) = m_1 \ddot{x}_1$$

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 22

Il modello del sistema risultante è:

$$\begin{cases} k(x_1 - x_2) - f_{a0} \operatorname{sign}(\dot{x}_2) m_2 g = m_2 \ddot{x}_2 \\ -\beta(\dot{x}_1 + v_0 + v_w)^2 - k(x_1 - x_2) = m_1 \ddot{x}_1 \end{cases}$$

il quale è un sistema di 2 equazioni differenziali del secondo ordine da risolvere in $x_1(t)$ e $x_2(t)$:

- a partire dai valori iniziali x_{10} e x_{20} , \dot{x}_{10} e \dot{x}_{20}
- noti i parametri k , f_{a0} , m_2 , β , m_1
- note le condizioni operative v_0 e v_w

Si noti che:

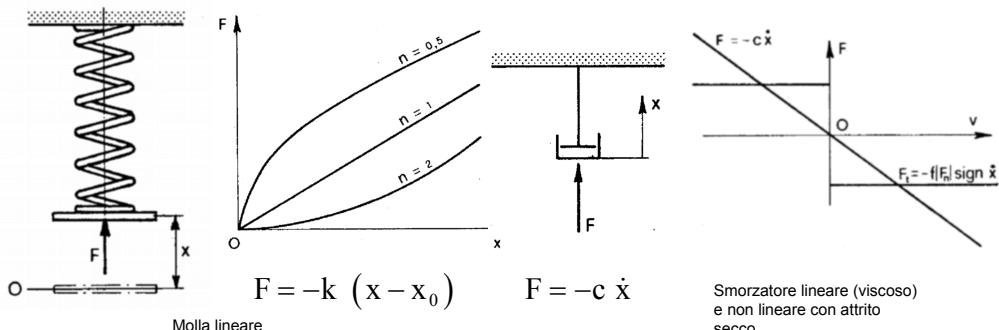
- il modello è *non-lineare*
- il modello presenta *accoppiamenti dinamici*

per cui la soluzione di questo tipo di equazioni differenziali è complessa ed in genere è ottenuta per via numerica

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 23

4.3 - SISTEMI LINEARI AD UN GRADO DI LIBERTÀ'

Il modello fisico dei sistemi reali viene spesso ricavato facendo riferimento a **molle lineari** per l'accumulo di energia potenziale ed a **smorzatori viscosi** per la dissipazione di energia.



In realtà il comportamento dei sistemi reali è spesso non-lineare, ma l'approssimazione è spesso accettabile, almeno nell'intorno del punto di funzionamento.

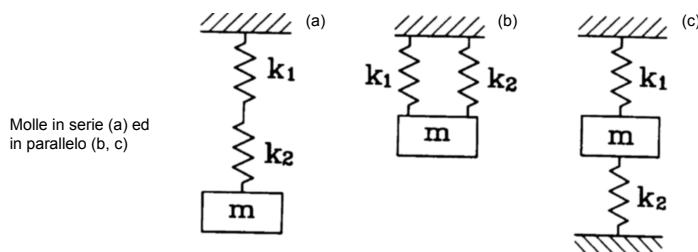
Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 24

Due molle **in serie** sono sottoposte alla stessa forza; per ottenere lo spostamento complessivo, devono essere sommati i singoli spostamenti; per esse la **rigidezza equivalente** vale:

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow \frac{F}{k_{eq}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \Rightarrow \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow k_{eq} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1}$$

Due molle **in parallelo** invece sono sottoposte allo stesso allungamento mentre devono essere sommate le singole forze; per esse la **rigidezza equivalente** vale:

$$F = F_1 + F_2 \quad \longrightarrow \quad k_{eq}x = k_1x + k_2x \quad \longrightarrow \quad k_{eq} = k_1 + k_2$$



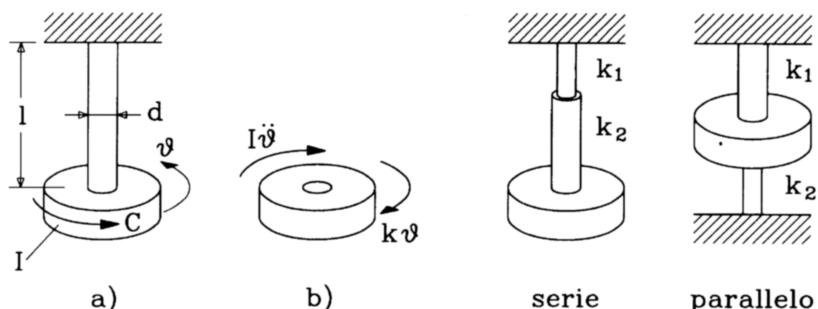
Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 25

Gli stessi concetti possono essere utilizzati per ricavare uno smorzamento equivalente per smorzatori lineari posti in serie o in parallelo.

Considerazioni analoghe possono essere effettuate nel caso delle rotazioni, facendo riferimento a rigidezze e smorzamenti angolari.

$$C = k(g - g_0)$$

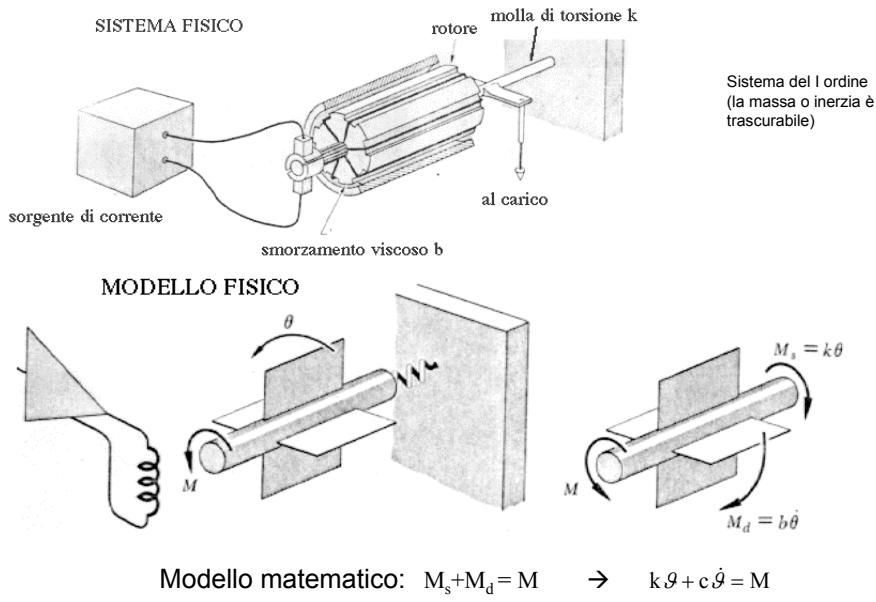
$$C = c \dot{g}$$



Molle di torsione

SISTEMA AD 1 G.D.L. DEL PRIMO ORDINE

sistema molla-smorzatore



Sistema ad 1 g.d.l. del 1° ordine: moto libero

Se si considera il sistema privo di inerzia, il modello matematico risultante è un'equazione differenziale ordinaria, a coefficienti costanti, del primo ordine; in assenza di **forzante** M (e cioè per il **moto libero**) la sua soluzione è del tipo:

$$\theta(t) = C e^{-\frac{k}{c}t}$$

dove la costante C si determina in funzione delle condizioni iniziali:

$$\theta = \theta_0 \text{ per } t = t_0$$

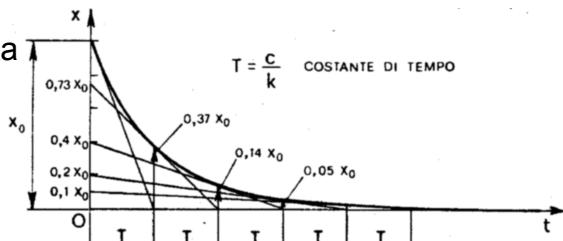
In definitiva la soluzione dell'equazione differenziale vale:

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{t}{T}}$$

dove si è introdotta la **costante di tempo** T :

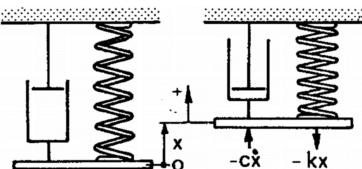
$$T = \frac{c}{k}$$

La costante di tempo T dà un'idea della velocità di risposta del sistema, ovvero quanto tempo impiega ad arrivare a regime: dopo un tempo pari a $3T$, il sistema ha uno scostamento del 5% dallo spostamento di regime.



Risposta libera del sistema del I ordine

Per i sistemi lineari traslanti con massa trascurabile si ha un comportamento analogo, essendo uguale il modello matematico:



$$-kx - cx = 0$$

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{k}{c}t} = x_0 e^{-\frac{t}{T}} \quad \text{dove } T = \frac{c}{k}$$

Sistema molla-smorzatore lineare (la massa è trascurabile)

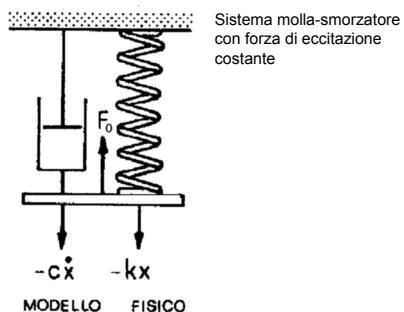
Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 29

Sistema ad 1 g.d.l. del 1° ordine: moto forzato

L'integrale dell'omogenea associata (che definisce il moto libero del sistema) rappresenta la **risposta transitoria**, che si esaurisce nel tempo e dipende dalle condizioni iniziali.

L'integrale particolare, invece, rappresenta la **risposta a regime**, che non dipende dalle condizioni iniziali ed è dello stesso tipo della forzante (poiché il sistema è lineare).

Per esempio, nel caso di una forza di eccitazione F_0 costante (eccitazione a gradino) si trova:



$$-kx - cx + F_0 = 0$$

$$+kx + cx = F_0$$

$$x(t) = x_n + x_f$$

x_n integrale generale dell'omogenea associata

x_f integrale particolare

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{k}{c}t} + C_2$$

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 30

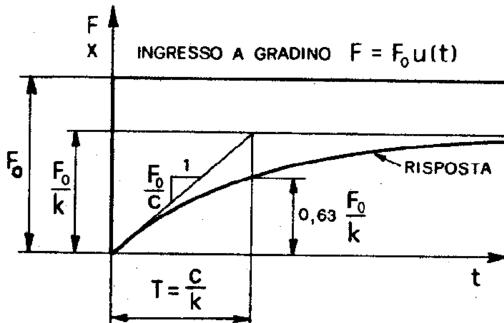
C_2 si determina imponendo che la $x(t)$ soddisfi l'equazione:

$$k(C_1 e^{-\frac{k}{c}t} + C_2) + c(-\frac{k}{c} C_1 e^{-\frac{k}{c}t}) = F_0 \quad \rightarrow \quad kC_2 = F_0 \quad \rightarrow \quad C_2 = \frac{F_0}{k}$$

C_1 si determina imponendo le condizioni iniziali:

$$x_0 = C_1 + \frac{F_0}{k} \quad C_1 = x_0 - \frac{F_0}{k}$$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{k} \right) e^{-\frac{k}{c}t} + \frac{F_0}{k}$$



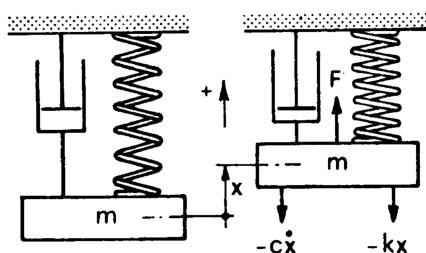
Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 31

SISTEMA AD 1 G.D.L. DEL SECONDO ORDINE sistema massa-molla-smorzatore

Se la massa (o inerzia) del sistema non è trascurabile, si ha un doppio accumulo di energia (potenziale nella molla e cinetica nella massa) e l'equazione del sistema diventa del 2° ordine.

Il modello matematico diventa:

$$-kx - cx + F(t) = m\ddot{x} \quad \rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m}$$



Sistema del II ordine

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \frac{F(t)}{m}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ pulsazione naturale}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \text{ frequenza naturale}$$

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \text{ fattore di smorzamento}$$

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 32

Sistema ad 1 g.d.l. del 2° ordine: moto libero

In assenza di forzante (moto libero) le soluzioni sono del tipo:

$$x = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

dove s_1 ed s_2 si trovano risolvendo l'**equazione caratteristica**:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

per cui a seconda del valore dello smorzamento ζ risulta:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\omega_n^2(\zeta^2 - 1)} \quad \text{per } \zeta > 1 \quad (\text{radici reali})$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\sqrt{\omega_n^2(1 - \zeta^2)} \quad \text{per } \zeta < 1 \quad (\text{radici complesse})$$

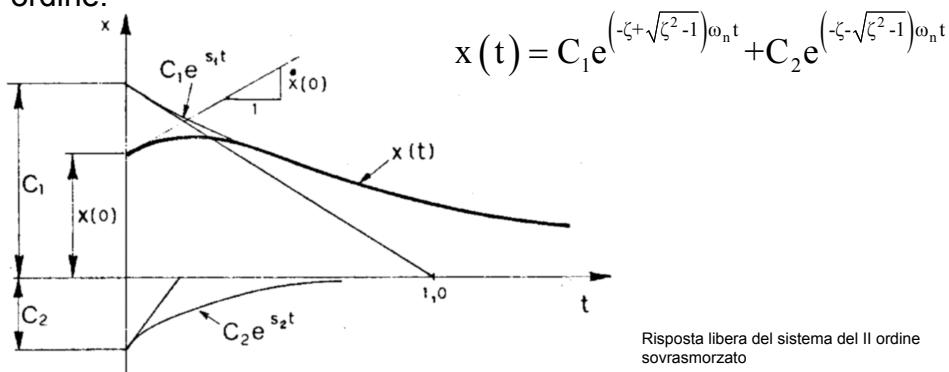
I valori delle costanti C si determinano in base alle condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x_0 = x(0) = C_1 + C_2 \\ \dot{x}_0 = \dot{x}(0) = s_1 C_1 + s_2 C_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{-s_2 x_0 + \dot{x}_0}{s_1 - s_2} \\ C_2 = \frac{-s_1 x_0 + \dot{x}_0}{s_2 - s_1} \end{cases}$$

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 33

$\zeta > 1$ (sistema sovrasmorzato)

Se il sistema è molto smorzato, il moto è definito dalla sovrapposizione di 2 esponenziali decrescenti (ciascuno simile a quello che caratterizza il moto del I ordine); se le radici sono molto distanziate, la seconda radice corrisponde ad un contributo che si attenua molto rapidamente, per cui può essere trascurata, dando origine ad un modello del primo ordine.

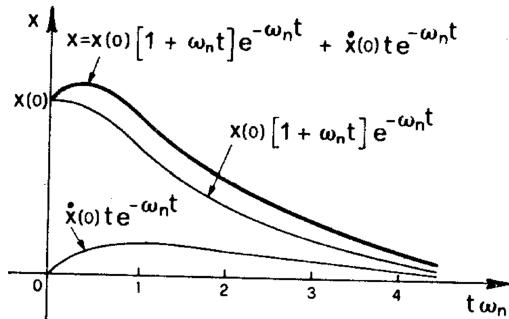


Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 34

$\zeta = 1$ (sistema in condizioni di smorzamento critico)

È una condizione che non si verifica praticamente mai, e anche nel caso si verificasse, si potrebbero adottare le soluzioni analitiche per il caso sottosmorzato o quello sovrasmorzato, approssimando impercettibilmente ζ per difetto o per eccesso; la soluzione esatta si può comunque ricavare:

$$\begin{aligned}\zeta = 1 &\rightarrow \ddot{x} + 2\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \\ s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2 &= 0 \\ (s + \omega_n)^2 &= 0 \quad \rightarrow \quad s_1 = s_2 = -\omega_n \\ x &= C_1 e^{-\omega_n t} + C_2 t e^{-\omega_n t} \\ \begin{cases} C_1 = x_0 \\ C_2 = \dot{x}_0 + \omega_n x_0 \end{cases} &\end{aligned}$$



Risposta libera del sistema del II ordine a smorzamento critico

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 35

$\zeta < 1$ (sistema sottosmorzato)

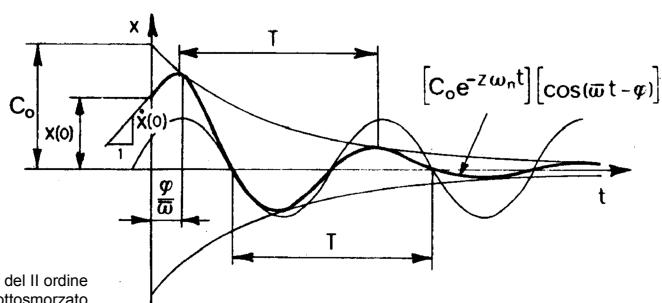
In questo caso la risposta del sistema è costituita da una oscillazione smorzata; infatti, con qualche passaggio e con l'applicazione delle formule di Eulero, si ricava:

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} (C_1 e^{i\bar{\omega}t} + C_2 e^{-i\bar{\omega}t})$$

$$\bar{\omega} = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n$$



$$x(t) = C_0 e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\bar{\omega}t - \varphi)$$



Risposta libera del sistema del II ordine sottosmorzato

I valori di φ e C_0 si determinano dalle condizioni iniziali.

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 36

Sistema ad 1 g.d.l. del 2° ordine: moto forzato gradino di forza - 1

All'integrale generale del sistema omogeneo (soluzione in assenza di forzanti), si sovrappone l'integrale particolare che, essendo il sistema lineare, ha la stessa forma della forzante.

Nel caso di forzante costante (a gradino) di valore F_0 , la legge del moto vale:

Sistemi sovrasmorzati

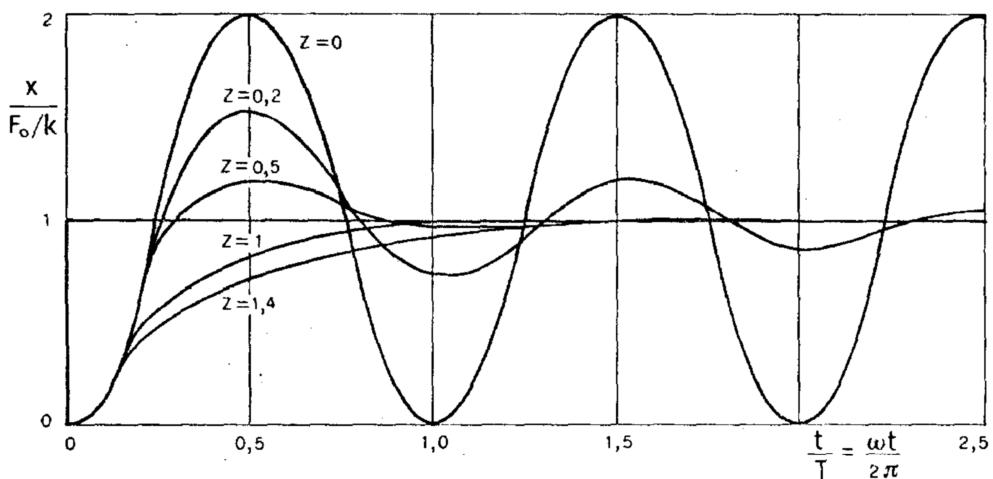
$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + \frac{F_0}{k} = \frac{F_0}{k} \left[1 - C'_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} - C'_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \right]$$

Sistemi sottosmorzati

$$x(t) = C_0 e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\bar{\omega}t - \varphi) + \frac{F_0}{k} = \frac{F_0}{k} \left[1 - C'_0 e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\bar{\omega}t - \varphi) \right]$$

I valori delle costanti si determinano dalle condizioni iniziali.

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 37



Risposta a gradino del sistema del II ordine
(condizioni iniziali di posizione e velocità nulle)

Sistema ad 1 g.d.l. del 2° ordine: moto forzato eccitazione sinusoidale

Nel caso in cui il sistema sia eccitato da una forzante sinusoidale:

$$F(t) = F_0 \sin \omega t$$

di pulsazione ω ed ampiezza F_0 , la legge del moto diventa:

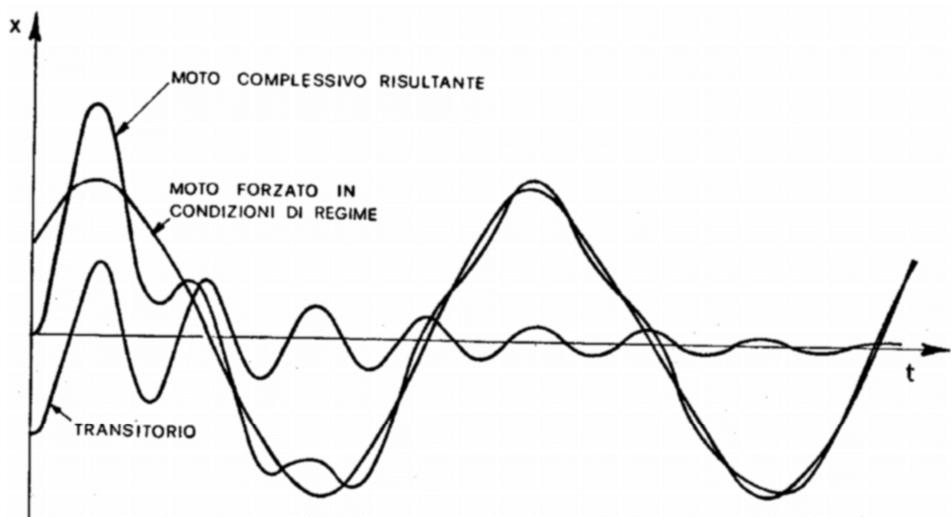
$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

il cui integrale generale è somma dell'integrale generale dell'omogenea associata (già discusso) e di un integrale particolare del stesso tipo della forzante:

$$x(t) = X \sin(\omega t - \psi)$$

Pertanto nel transitorio si ha una sovrapposizione delle due risposte, mentre solo quella di regime persiste nel tempo.

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 39



Risposta temporale del sistema del II ordine

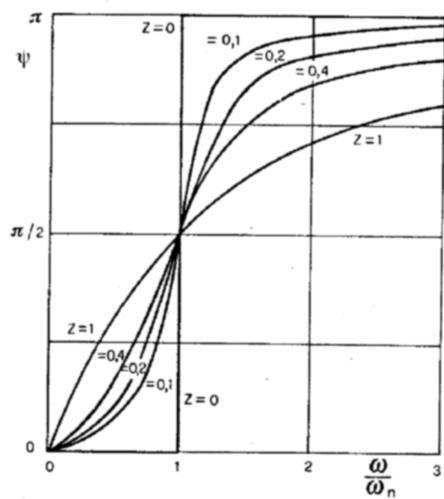
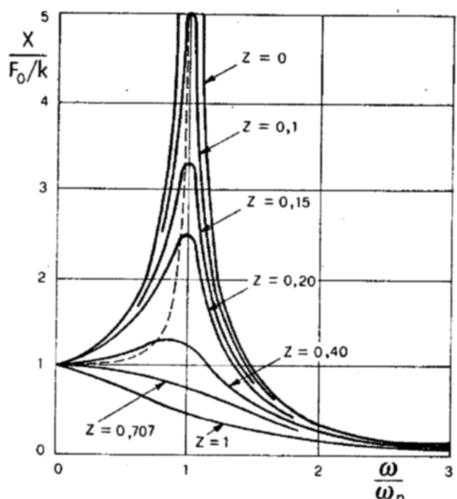
I valori dell'**ampiezza** X e dello **sfasamento** ψ dell'oscillazione di regime dipendono dalla pulsazione dell'eccitazione e valgono:

$$\frac{X}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\tan \psi = \frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Questa coppia di funzioni definisce la **risposta in frequenza** del sistema ed è diagrammata nelle seguenti figure.

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 41



Risposta in frequenza del sistema del II ordine

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 42

F_0/k rappresenta lo spostamento che si avrebbe (a regime) per forzante costante, per cui si chiama *elongazione statica*; tale grandezza, a causa della pulsazione del carico, viene moltiplicata per un *fattore di amplificazione degli spostamenti G, funzione di ω/ω_n e ζ* .

Si nota che tutte le curve, disegnate con ζ a parametro, partono dal valore unitario delle ordinate (caso statico): quelle con $\zeta > 1/\sqrt{2}$ decrescono monotonicamente a zero; quelle con $\zeta < 1/\sqrt{2}$ crescono fino ad un valor massimo pari a:

$$G^* = \frac{X^*}{F_0/k} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

raggiunto in corrispondenza del valore ω^* di ω :

$$\omega^* = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \omega_n$$

Tale picco della risposta si chiama **risonanza** ed è maggiormente evidente per $\zeta \approx 0$, condizione in cui si verifica per $\omega^* \approx \omega_n$; poi la risposta decresce asintoticamente a zero.

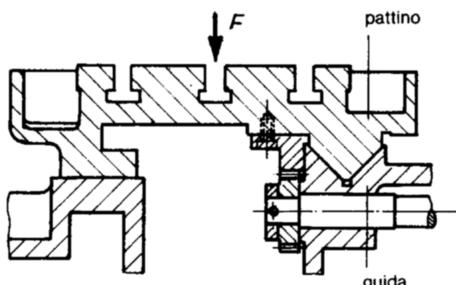
4.4 – DINAMICA DELLE COPPIE ELEMENTARI

Le coppie elementari o inferiori si classificano:

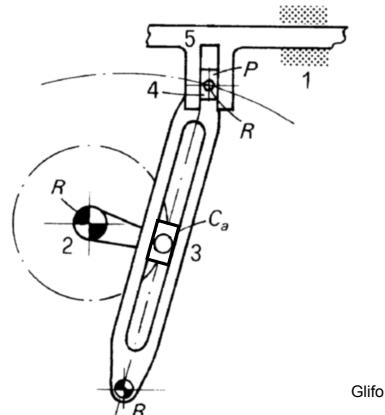
- in base allo **spostamento relativo** tra le parti
 - coppie per moti di traslazione (prismatiche)
 - coppie per moti di rotazione (rotoidali)
 - coppie per moti elicoidali
 - coppie sferiche
- in base alla **natura del contatto**
 - di strisciamento in assenza di lubrificante o con lubrificazione limite
 - di strisciamento in condizioni di lubrificazione fluida
 - di rotolamento
- in base al **tipo di attrito**
 - attrito radente, lubrificazione limite
 - attrito radente, lubrificazione fluida
 - attrito volvente

Coppie prismatiche

- Sono dette **guide** se uno dei membri è solidale al telaio; sono utilizzate per guidare e supportare parti di macchine che devono traslare; il membro mobile si indica come **pattino**
- Sono dette **glifi** se entrambi i membri sono mobili rispetto al telaio



Pattino e guida



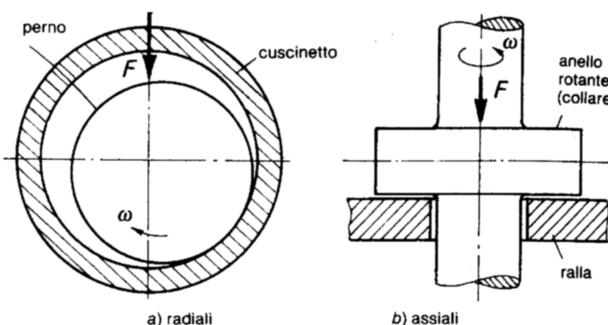
Glifo

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 45

Coppie rotoidali

Sono dette **cuscinetti** e vengono utilizzate per guidare e supportare membri rotanti (alberi):

- *cuscinetti radiali* (o *portanti*): se la forza **F** di contatto è perpendicolare all'asse di rotazione
- *cuscinetti assiali* (o *spingenti*): se la forza **F** di contatto ha la direzione dell'asse di rotazione



Cuscinetti

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 46

Coppie elicoidali

Sono dette **viti** e si dividono in:

- *viti di manovra*: se vengono utilizzate per trasformare moti di rotazione in moti di traslazione o viceversa
- *viti di collegamento*: se servono per realizzare collegamenti smontabili di pezzi diversi

Coppie sferiche

Sono dette **snodi sferici** e sono spesso realizzate attraverso la composizione di tre coppie rotoidali con assi concorrenti.

Vengono utilizzate per trasmettere forze senza trasmettere coppie, oppure per evitare vincoli iperstatici in meccanismi con molti appoggi.

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 47

ATTRITO RADENTE NELLE COPPIE CINEMATICHE

Coppie prismatiche

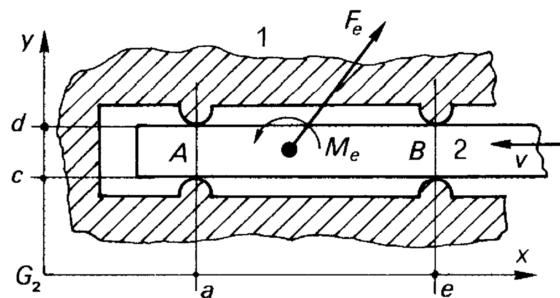
Nel funzionamento reale le dimensioni principali del meccanismo non sono sufficienti a caratterizzare i fenomeni dinamici, come invece avviene nel funzionamento ideale.

Ciò è dovuto dalla non-linearità della relazione dell'attrito:

$$R_t = -f |R_n| \text{sign}(v_r)$$

Per esempio, nel modello più semplice (piano) di coppia prismatica a causa dei giochi si ha un contatto puntiforme in 2 dei 4 possibili punti di contatto.

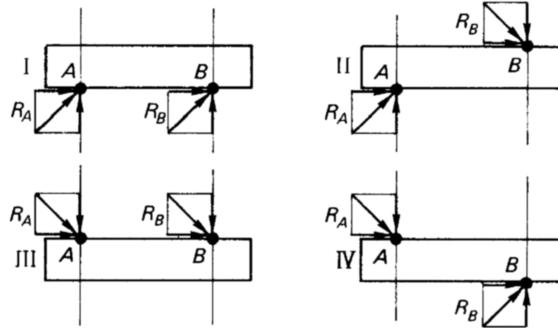
Reazioni nelle coppie prismatiche con attrito



Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 48

Poiché non è possibile stabilire a priori quale delle 4 possibili combinazioni di contatto si instaura, occorre procedere per tentativi: si fa l'ipotesi che si realizzzi una certa condizione di contatto, si scrivono le equazioni di equilibrio (statico o dinamico), si risolvono tali equazioni, determinando i segni delle reazioni ed infine si verifica che questi siano compatibili con il contatto ipotizzato.

In pratica se gli attriti non sono elevati la condizione di contatto coincide con quella del funzionamento ideale; pertanto solitamente si effettua sempre per **prima** l'analisi nel caso ideale, determinando la condizione di contatto (cioè i versi delle reazioni) e si considera solo successivamente il caso reale.



Condizioni possibili di contatto nelle coppie prismatiche con attrito

Coppie rotoidali

Schematizzando il modello come in figura (gioco molto piccolo ed un solo punto di contatto P) la forza reattiva R ha componenti normale R_n e tangenziale R_t tali che:

$$|R_t| = f |R_n|$$

e indicando con φ l'angolo di attrito si ha:

$$|R_n| = |R|\cos(\varphi) \quad |R_t| = |R|\sin(\varphi)$$

La linea d'azione della reazione R ha distanza dal centro della coppia pari a:

$$\rho = r \sin(\varphi)$$

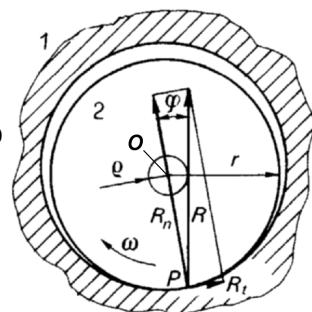
essendo r il raggio della coppia rotoidale; pertanto si può dire che la reazione risulta sempre tangente ad una circonferenza di raggio ρ , chiamata **circonferenza di attrito**.

Il momento perduto per attrito è pari a:

$$M_p = OP \wedge R_t \text{ (ha verso opposto ad } \omega\text{)}$$

$$|M_p| = |R|r \sin(\varphi) = \rho |R|$$

Reazioni nelle coppie rotoidali con attrito



COPPIE ASCIUTTE O CON LUBRIFICAZIONE LIMITE

- Le superfici di contatto sono combacianti (*asciutte*) o separate da una sottile pellicola di lubrificante (*con lubrificazione limite*)
- Sono utilizzate frequentemente nei seguenti casi:
 - se si vogliono esaltare fenomeni di attrito radente: freni, innesti, viti di collegamento, ...
 - se è dannosa la presenza di lubrificante: industria farmaceutica, alimentare...; per ridurre l'attrito si usano rivestimenti di materiali con basso fattore d'attrito e buone proprietà anti-usura (es. teflon)

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 51

COPPIE CON LUBRIFICAZIONE FLUIDA

- La pellicola di lubrificante interposta tra i membri della coppia deve presentare pressioni tali da sopportare le forze agenti sui membri stessi.
- Si può mettere in pressione il fluido lubrificante:
 - per **effetto idrodinamico per strisciamento relativo** quando la viscosità del fluido, unitamente alle condizioni idrodinamiche, crea un campo di pressione nel lubrificante che sostiene la coppia;
 - per **effetto idrodinamico per espulsione** quando la pellicola in pressione nasce nel fluido per contrastare lo schiacciamento dovuto alle superfici della coppia che si avvicinano per carichi pulsanti (*squeeze film*, raro);
 - per **effetto idrostatico** quando il lubrificante è pressurizzato dall'esterno.
- La lubrificazione si dice ibrida quando sono presenti più effetti.

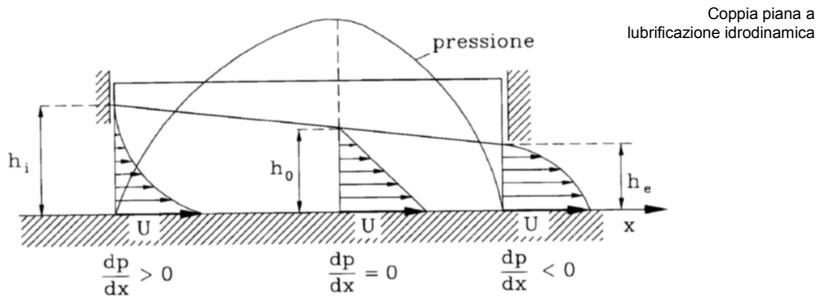
Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 52

Cuscinetti a lubrificazione idrodinamica

La pressione nel lubrificante nasce per effetto del trascinamento di un *fluido viscoso* in un *meato cuneiforme o a scalino*: in questo caso, infatti, nasce un gradiente di pressione tale da assicurare la costanza della portata.

Per creare e mantenere un campo di pressione nel lubrificante è necessario che:

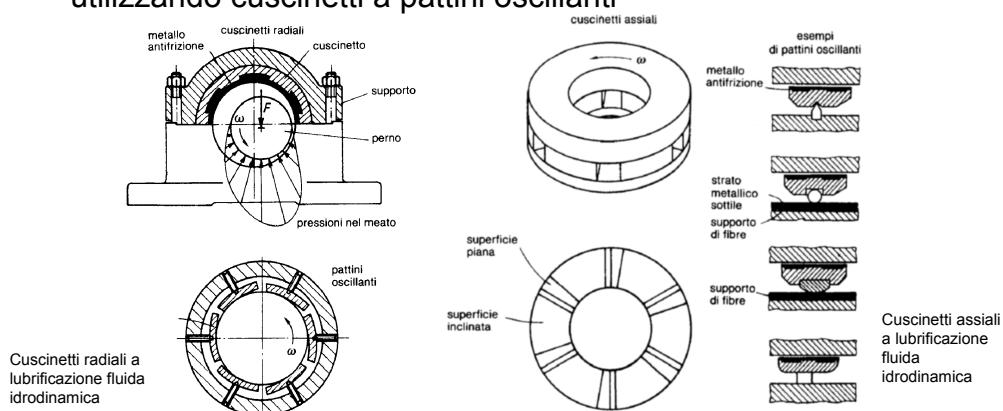
- tra i membri della coppia vi sia un meato ad altezza variabile
- il moto relativo di strisciamento avvenga con velocità sufficiente, tanto più elevata quanto più è alto il carico esterno



Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 53

Le condizioni descritte si verificano naturalmente nei cuscinetti **radiali** per effetto dell'eccentricità del perno nel cuscinetto; per i cuscinetti **assiali** si devono creare artificiosamente le condizioni di meato a sezione variabile:

- suddividendo la ralla in settori con una parte inclinata ed una piana o a gradino
- utilizzando cuscinetti a pattini oscillanti



Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 54

Cuscinetti a lubrificazione idrostatica

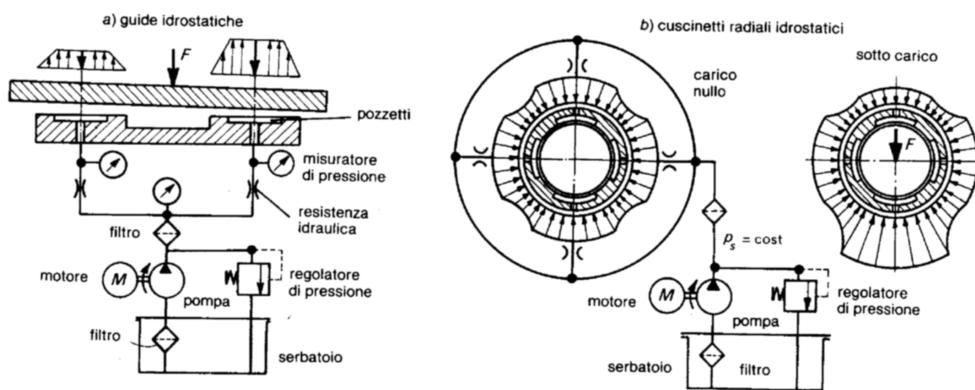
La pressione di sostentamento nel meato è dovuta alla alimentazione esterna di lubrificante in pressione ed alla resistenza che il fluido viscoso incontra per uscire da meati ristretti.

E' richiesto un sistema di alimentazione complesso e costoso. Nei pozzeri il lubrificante raggiunge il valore della pressione, previsto dalla valvola di regolazione, sufficiente per sostenere il carico esterno.

Dove risulta più alto il meato è minore la pressione: si raggiunge una configurazione di equilibrio che si adatta automaticamente al carico esterno.

Le resistenze idrauliche limitano il flusso a ciascun pozzeretto in modo che la pressione in ciascuno di essi possa salire al valore necessario per sostenere il carico.

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 55



Il sistema di alimentazione garantisce la presenza di una pellicola di lubrificante anche in assenza di velocità relativa fra i membri e per meati di forma qualsiasi. Il fenomeno è esaltato dalla presenza di larghi pozzeri con altezza superiore (50-80 volte) a quella dei meati sui gradini.

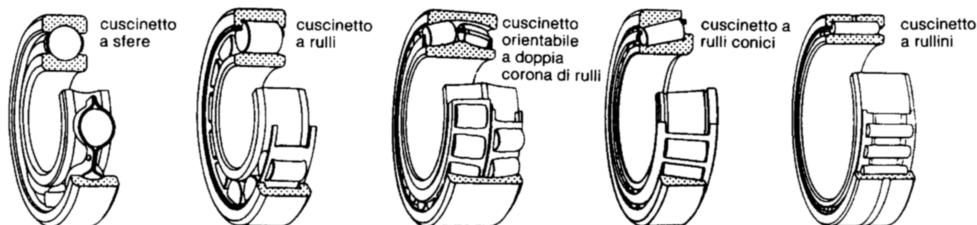
Questo tipo di lubrificazione è realizzabile in tutte le coppie elementari.

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 56

COPPIE ELEMENTARI A ROTOLAMENTO

Si riducono i fenomeni di attrito e di usura interponendo tra i membri della coppia elementi solidi rotolanti: **sfere** o **rulli**.

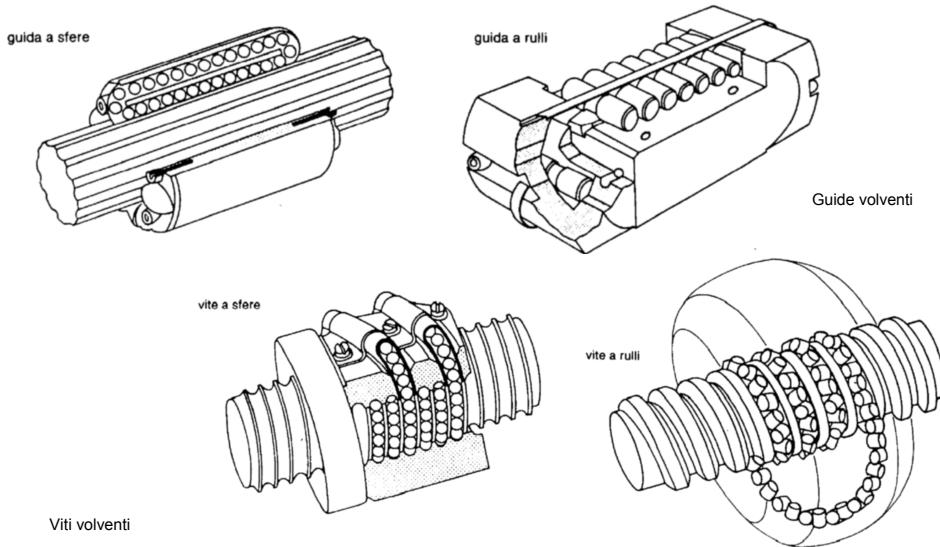
Questa soluzione è stata introdotta verso la fine dell'800 per i cuscinetti: oggi la loro tipologia industriale è unificata in tutto il mondo.



Cuscinetti a rotolamento

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 57

Guide e viti volventi a ricircolo di sfere o rulli sono soluzioni più recenti e non sono ancora unificate.



Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2004/2005 – Cap. 4 - pag. 58