PRÁCTICAS DE MECÁNICA
PRÁCTICA 2: CINEMÁTICA
Primera parte, trabajo autónomo

2º Curso, Ingeniería de Organización Industrial

CENTRO UNIVERSITARIO DE LA DEFENSA

Esta práctica trata sobre el estudio cinemático de un mecanismo biela-manivela. Este es un mecanismo muy empleado en la ingeniería mecánica.

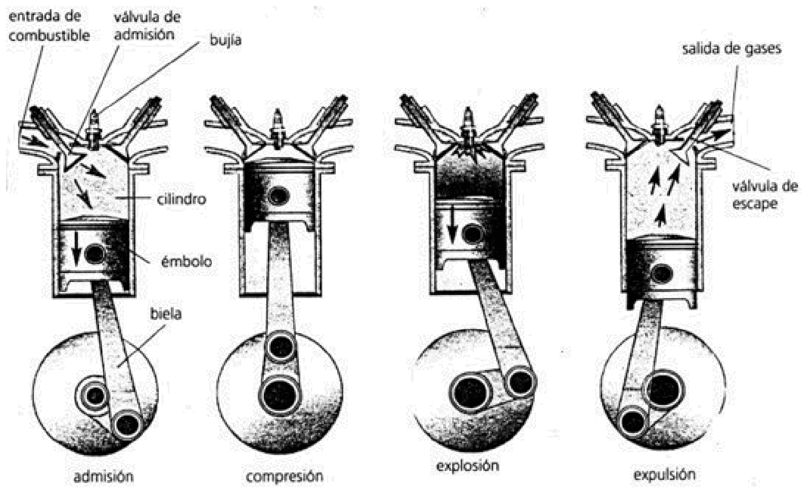
OBJETIVOS DE LA PRÁCTICA

1. Enfrentarse a un problema real de diseño mecánico en ingeniería.
2. Aprender a dividir un problema complejo en problemas más sencillos. Resolver estos problemas aplicando conceptos aprendidos en la asignatura de mecánica.

EL MECANISMO BIELA-MANIVELA

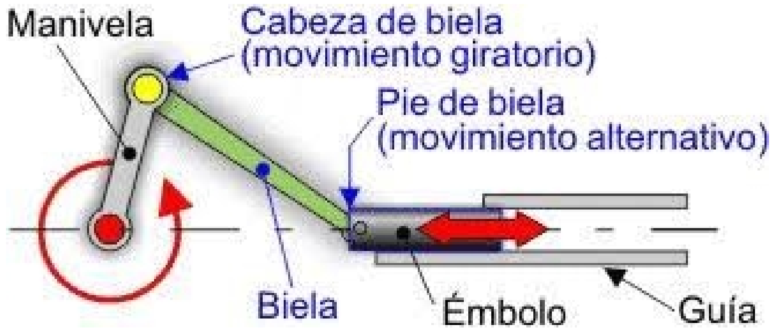
El mecanismo de biela-manivela es un mecanismo que transforma un movimiento circular en un movimiento de traslación o viceversa. Es un mecanismo sencillo constituido por dos barras unidas entre sí por una articulación. Una de ellas, la manivela, realiza un movimiento de rotación en torno a un eje fijo. El extremo no fijo de la manivela se encuentra articulado a la biela, y, por último, el extremo restante de la biela tiene su movimiento restringido a un movimiento rectilíneo oscilatorio. Normalmente ese extremo con movimiento lineal va unido a un pistón o émbolo.

El ejemplo actual más común se encuentra en el motor de combustión interna de un automóvil, en el cual el movimiento lineal del pistón producido por la explosión de la gasolina se transmite a la biela y se convierte en movimiento circular en el cigüeñal que va conectado a las ruedas.



También aparece en locomotoras de vapor, donde la biela recibe el movimiento lineal del pistón y lo transforma en rotación de las ruedas.

En esta práctica se va a estudiar el mecanismo biela-manivela de la figura, donde la manivela AB gira con una velocidad angular constante ω_{AB} **= 1000 rpm, la longitud de la manivela AB es 0,06 m y la de la biela BC 0,16 m.**



DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

Cada frase en negrita implica una instrucción del guion que hay que cumplir.

Copie el archivo “Practica2_alumnos.ipynb” en el escritorio. Abra el navegador "Firefox". A continuación, compruebe que la variable “Iniciar en:” dentro del acceso directo a jupyter-lab apunta hacia el escritorio. Una vez asegurado, pulse en el acceso directo para lanzar la aplicación. Aparecerá como una ventana dentro del navegador. Una vez abierta, vaya al recuadro de la izquierda donde aparece la lista de cuadernos disponibles y seleccione "Practica2_alumnos.ipynb".

- **Escriba apellidos y nombre (en este orden) de los integrantes del grupo en la primera celda que es tipo *markdown* y la única de este tipo que será necesario editar.** Para ello, haga doble clic en la celda y añade nombres y grupo. Cuando finalice, debe ejecutar la celda. Esto se pude hacer de tres maneras que ya se explicaron en la *Introducción* a las prácticas:
  (1) clic en el símbolo ▶| situado frente a la celda;
  (2) con la celda seleccionada, clic en el botón ▶Run presente en la barra de herramientas;
  (3) con la celda seleccionada, presionar a la vez las teclas *shift* + *enter*.
- **Al final de la práctica subirá el cuaderno a *Moodle* a través de la *Tarea* definida dentro de la carpeta "Prácticas => Práctica2".**

A lo largo de la práctica se van a realizar cuatro estudios: 1) en primer lugar, se calcula la posición de cada pieza del mecanismo en función del ángulo θ y se realiza una animación de su movimiento; 2) a continuación, se calculan las velocidades y aceleraciones en función del ángulo θ por dos métodos distintos cuyo tiempo de cálculo es muy diferente; 3) se realiza un barrido en los valores de las longitudes de las barras para encontrar una relación entre la geometría del mecanismo y los valores máximos de velocidades y aceleraciones, 4) para acabar, se realiza un estudio adimensional del mecanismo para identificar con más claridad su comportamiento y su dependencia con el cociente entre la longitud de la biela y la de la manivela.

1 Cálculo de posiciones en función del ángulo de la manivela y animación.

- **Ejecute las dos primeras celdas de tipo *code*,** donde se cargan paquetes auxiliares necesarios en esta práctica dedicados al cálculo numérico, la resolución de sistemas de ecuaciones y la creación de gráficos.

- **En la tercera celda de tipo *code* introduzca los valores de la longitud de la manivela, *r*, de la biela, *l*, y la velocidad angular de la manivela *wAB* en unidades**

del SI. El número π se escribe en Python tras la importación del paquete numpy como *pi*. Recuerde que el dato de la velocidad angular se dio en rpm y hay que pasarlo a rad/s **NO UTILICE UNA CALCULADORA, deje que el propio código escrito en *Python* se encarque del cálculo, introduciendo la fórmula que haya que aplicar en la línea que empieza por *wAB*.** Ejecute esta celda.

- En la cuarta celda de tipo *code* se calculan los vectores de posición del punto B desde la referencia fija A ($\vec{r}_{B/A}$), del punto C relativo a B ($\vec{r}_{C/B}$) y los ángulos de la biela ϕ (escrito "phi") con respecto al eje horizontal que pasa por B. El ángulo de la manivela con respecto a la horizontal que pasa por A se representa por θ (escrito "theta") y es la variable de la que dependen las demás. Los valores se guardan en *arrays* (vectores) computacionales con tantos elementos como valores de θ se tomen en el barrido.

- En esta celda se emplea una función de nombre vec_r() que empieza en la línea "def vec_r()". Esta función se encarga de calcular las posiciones $\vec{r}_{B/A}$ y $\vec{r}_{C/B}$ para cada valor de θ. Para ello, hace uso de una variable local denominada "fi" en la que se almacena el valor del ángulo ϕ para cada θ. **Localice la variable e introduzca la expresión que permite calcular su valor que viene dada por la Ec. 4 del cuaderno.** En cuanto a la sintaxis: el seno de un ángulo *x* se escribe *sin(x)*, su coseno *cos(x)*, el arcoseno de un valor *y* se representa por *arcsin(y)* y el índice *n* entre corchetes *[n]* indica que se está trabajando con el valor n-ésimo del barrido sobre theta. Así, las longitudes *r* y *l* son constantes para todo el barrido, de valor único, que no necesitan índice; sin embargo, las variables angulares sí que lo necesitan ya que su valor cambia en cada posición del barrido. En cuanto a las unidades de los ángulos, han de ir en radianes: *sin* y *cos* requieren argumento en radianes y *arcsin* devuelve valor en radianes.

- Ejecute la cuarta celda de tipo *code*. La salida de la cuarta celda da las posiciones del mecanismo para valores theta de 0º y 90º. Compruebe que, para θ = 0º, rBA vale [0.06, 0, 0] y rCB [0.16, 0, 0] (están alineados en horizontal); mientras que, para θ = 90º, rBA vale [0, 0.06, 0] y rCB [0.14832397, -0.06, 0]. Puede haber errores de redondeo manifestados en que números que deberían ser nulos toman valores menores que10^{-14}en valor absoluto.

- **Cuando haya terminado lo anterior ejecute la celdas quinta y sexta de tipo *code*.** Se corresponden con el epígrafe "ANIMACIÓN DEL MECANISMO" dentro del cuaderno. La última celda puede requerir un tiempo de ejecución más largo que las demás y, al final de su ejecución, mostrará una animación con el movimiento de este mecanismo.

2 Cálculo de velocidades y aceleraciones en función del ángulo de la manivela.

- **Ejecute la celda séptima de tipo *code* y diríjase a la octava para examinarla.** En ella se realiza el cálculo de velocidades del mecanismo mediante dos métodos.

En el PRIMER MÉTODO, iniciado por "def vec_v1():" se aplica la cadena cinemática desde el punto fijo A hasta el punto C que sólo se puede mover en horizontal. Se cumplirá:

$$\vec{v}_C = v_{Cx}\hat{i} = \vec{v}_B + \vec{v}_{C/B} = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\omega}_{BC} \times \vec{r}_{C/B}$$

donde, por tratarse de un mecanismo plano, las velocidades angulares sólo pueden tener componentes no nulas en la tercera dimensión hacia fuera del plano de trabajo. Del mismo modo, las velocidades lineales sólo pueden tener dos componentes no nulas según las dimensiones del plano. La ecuación vectorial anterior, en componentes, da lugar a un sistema de dos ecuaciones (dos componentes) con dos incógnitas: v_{Cx} y $\vec{\omega}_{BC} = \omega_{BC}\hat{k}$. **Introduzca en el cuaderno las expresiones que permiten calcular la velocidad absoluta del punto B y la relativa del punto C con respecto al B como sendos productos vectoriales. Se trata de dos líneas dentro de la función *vec_v1()*, en las que se definen las variables vB y vCB.**

Ayudas:

- La sintaxis del producto vectorial de dos objetos que sean vectores se expresa, mediante el paquete numpy, con el operador *cross*. Así, *a = cross(b,c)* asigna a la variable *a*, el producto vectorial de *b* por *c*.
- En el cuaderno, *omegaAB* es el dato conocido de la velocidad angular de la manivela $\vec{\omega}_{AB}$, constante para todo θ, y por tanto un vector de tres componentes. En cambio, *omegaBC* es una matriz que almacena, para cada valor de θ, el vector *wBC* con las tres componentes de la velocidad angular $\vec{\omega}_{BC}$ (las dos primeras son nulas; y la tercera, *wBCZ*, es una incógnita). Por tanto, en el bucle que calcula las velocidades para cada valor de θ y que comienza por la expresión "for n in range (len(theta)):", se deben calcular los productos vectoriales empleando las variables *omegaAB* y *wBC* (¡Ojo! No *omegaBC*).

Después de operar, hay que resolver el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas mediante el paquete sympy. Las ecuaciones de definen por parejas dentro de un bucle con líneas del tipo *eq1 = Eq(a,b)* que se pueden interpretar como la ecuación simbólica *a = b* que luego se resuelve indicándole los símbolos que son incógnitas a despejar.

En el SEGUNDO MÉTODO, iniciado por "def vec_v2():" se busca despejar el valor de ω_{BC} para, a continuación, aplicar directamente la fórmula de composición de velocidades sin necesidad de despejar ninguna variable, ni de resolver ningún sistema de ecuaciones. Para ello, se parte de la ligadura obtenida dada por la Ec. 4 del cuaderno entre los valores de θ y ϕ que, por ser cierta en todo instante de tiempo, también ha de serlo en sus derivadas temporales y, por definición, la derivada temporal primera de ϕ (el ángulo de la biela) es su velocidad angular ω_{BC}.

- **Ejecute la celda octava de tipo *code* y diríjase a la novena.** En ella se realiza el cálculo de las aceleraciones mediante **dos métodos.**

En el PRIMER MÉTODO, que comienza por "def vec_a1()", se aplica la cadena cinemática desde el punto fijo A hasta el punto C que sólo se puede mover en horizontal. Se tiene:

$$\vec{a}_C = a_{Cx}\hat{i} = \vec{a}_B + \vec{a}_{C/B} = \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A}) + \vec{\omega}_{BC} \times (\vec{\omega}_{BC} \times \vec{r}_{C/B}) + \vec{\alpha}_{BC} \times \vec{r}_{C/B}$$

donde las velocidades angulares se hallaron en el cálculo de las velocidades (paso anterior) y, al descomponer en las dos componentes vectoriales de $\vec{a}_C$, se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: a_{Cx} y $\vec{\alpha}_{BC} = \alpha_{BC}\hat{k}$; la aceleración lineal horizontal del pistón y la aceleración angular de la biela. Por el enunciado, la velocidad angular de la manivela es constante y, por lo tanto, $\alpha_{AB} = 0$. **Introduzca en el cuaderno las expresiones que permiten calcular la aceleración absoluta del punto B (que sólo tiene componente centrípeta) y la componente centrípeta de la aceleración relativa del punto C con respecto al B como sendos dobles productos vectoriales. Se trata de dos líneas dentro de la función *vec_a1()*.** En el cuaderno, *alfaBC* es un vector en el que la tercera componente es una incógnita y las otras dos se anulan.

<u>En el SEGUNDO MÉTODO</u>, que empieza en la línea "def vec_a2():" se busca despejar el valor de α_{BC} para, a continuación, aplicar directamente la fórmula de composición de aceleraciones sin necesidad de despejar ninguna variable, ni de resolver ningún sistema de ecuaciones. Para ello, se parte de la ligadura obtenida en la Ec. 4 del cuaderno entre los valores de θ y ϕ que, por ser cierta en todo instante de tiempo, también ha de serlo en sus derivadas temporales y, por definición, la derivada temporal segunda de ϕ (el ángulo de la biela) es su aceleración angular α_{BC}. E**dite la celda introduciendo las líneas de código necesarias para calcular** α_{BC} y las componentes de $\vec{a}_C$ (siendo *aC[:,0]* la componente en x y *aC[:,1]* la componente en y).

- **Ejecute las celdas novena, décima y undécima de tipo *code.*** La ejecución de la décima es bastante más larga que la de las demás. Con ambos métodos se debe obtener el mismo resultado. Cuando θ = 0º:

vC = [0,0,0]; omegaBC = [0,0,-39.26990817]; aC = [-904.71373677, 0, 0];

alfaBC = [0,0,0].

Cuando θ = 90º:

vC = [-6.28318531,0,0]; omegaBC = [0,0,0]; aC = [266.16343719, 0, 0];

alfaBC = [0,0,4436.05728652].

Donde los valores nulos admitirían errores de redondeo: valores no nulos menores, en valor absoluto, que 10^{-14}.

- **Ejecute las celdas duodécima y decimotercera de tipo *code.*** Producen gráficas con los valores de ϕ, v_c, ω_{BC}, a_c y α_{BC} en función de θ. Se trata de la representación gráfica del barrido sobre un giro completo de la manivela.

3 <u>Influencia de la geometría del mecanismo en los valores máximos de velocidades y aceleraciones</u>

- En la decimocuarta celda tipo *code* se computan los valores máximos de $\omega_{BC}, \alpha_{BC}, v_c$ y a_c, así como el valor mínimo de a_c (en valor absoluto). Para ello, **elija el método más rápido de cálculo entre los dos analizados en los apartados anteriores descomentando la línea correspondiente (línea 21 o línea 22).**

- Ejecute la celda 14 de tipo *code*.

- Ejecute las celdas de tipo *code* que van desde la 15 hasta la 19 inclusive. En ellas se elaboran mapas de colores en los que el eje x representa la longitud de la biela, *l,* el eje y la de la manivela, *r*, y el color indica el valor del extremal estudiado en cada uno de los mapas.

4 Estudio adimensional

- Ejecute las celdas de tipo *code* que van desde al 20 hasta la 22 inclusive. En la celda 20 deberá de nuevo escoger el método de cálculo más rápido, descomentando la línea 22 o la línea 23. Se efectúa un estudio del mecanismo adimensionalizado a través de la longitud de la manivela, *r,* como escala de longitudes (todas las magnitudes que tengan unidades de metros en el SI se dividen por *r*) y el inverso de la velocidad angular de la manivela, ω_{AB}^{-1}, como escala de tiempos (todas las magnitudes que tengan unidades de segundos en el SI se multiplican por ω_{AB}; si la unidad de segundos estuviera dividiendo, se dividiría en lugar de multiplicar). Esto equivale a trabajar con un sistema de medida adaptado al problema en el que la unidad de longitudes es *r* y la unidad de tiempos es ω_{AB}^{-1}.

El estudio adimensional permite reducir el número de parámetros del sistema. Lo verdaderamente relevante, salvo un factor de escala que es un término constante, es el cociente *l/r*, más que los valores por separado de *r* y *l.* Con este análisis se puede buscar la relación entre biela y manivela que más interese para lo que se espera del sistema y asignar las dimensiones finales, que van como factor constante, de acuerdo a limitaciones físicas de espacio disponible y de esfuerzos a soportar por el mecanismo.

Al adimensionalizar, las variables relevantes del problema pasan a tomar valores de orden unidad y es más fácil e instructiva su visualización conjunta sin el problema de que, al ser unas variables mucho mayores que otras tras la introducción de la escala, en las gráficas correspondientes no sea posible apreciar el comportamiento de las variables que toman valores muy pequeños.