



CEN- TRO UNIVERSITARIO DE LA DEFENSA

---

**PRÁCTICAS DE MECÁNICA  
PRÁCTICA 1: ESTÁTICA**

**Parte primera, trabajo autónomo**

**2º Curso, Ingeniería de Organización Industrial**

**CENTRO UNIVERSITARIO DE LA DEFENSA**

---

2009

ZARAGOZA

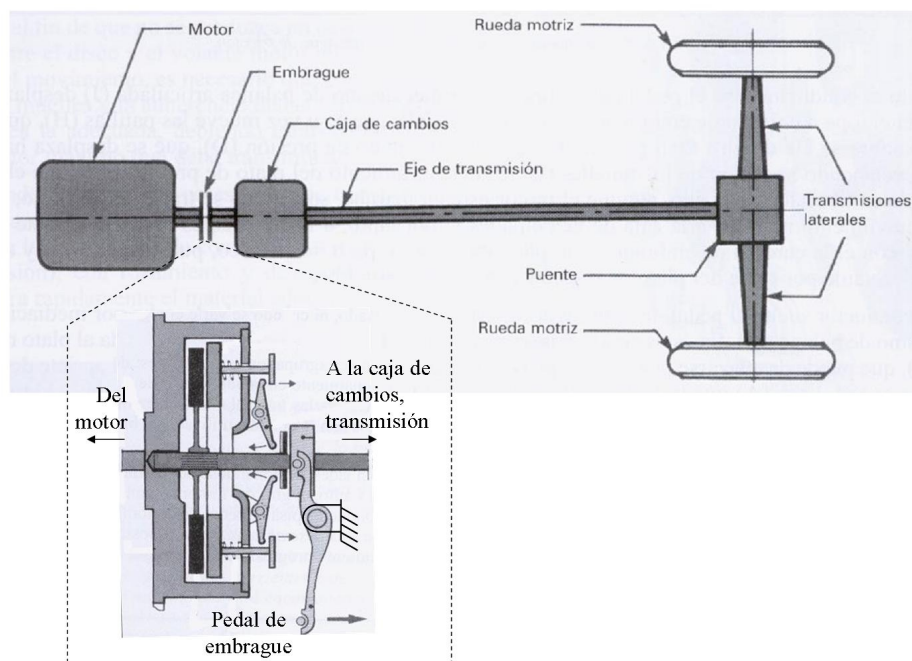
Esta práctica consiste en dimensionar el mecanismo de embrague de un vehículo. Concretamente se pide 1) dimensionar y elegir elementos comerciales del mecanismo (los muelles) y 2) adecuar la fuerza que debe realizar el conductor con el pie modificando la geometría del mecanismo. A continuación se explica el funcionamiento y se proporcionan datos, restricciones de diseño y catálogos de muelles.

### OBJETIVOS DE LA PRÁCTICA

- Enfrentarse a un problema real de diseño mecánico en ingeniería.
- Aprender a dividir un problema complejo en problemas más sencillos. Resolver estos problemas aplicando conceptos aprendidos en la asignatura de mecánica.
- Aprender a buscar los datos en un catálogo en lugar de encontrarlos directamente en el enunciado.
- Aprender a usar un software corriente (cuaderno de *Jupyter*) para realizar cálculos mecánicos de cierta complejidad.

### FUNCIONAMIENTO DE UN EMBRAGUE

Para que el vehículo se desplace, es necesario transmitir el giro del motor a las ruedas. Desde su salida del motor hasta su llegada a las ruedas, el movimiento es transformado por varios mecanismos, de los cuales los más importantes son el embrague, la caja de cambios y el puente trasero (diferencial). El embrague permite desacoplar instantáneamente el motor del resto de la transmisión para poder cambiar de marcha. También, hace la salida más suave, hace posible detener el vehículo sin parar el motor y facilita las operaciones del mismo.



*Figura 1*

El embrague se sitúa entre el volante motor y la caja de cambios (ver figura 1) y es accionado por un pedal que maneja el conductor con su pie izquierdo (menos en los automáticos en los

que el pedal se suprime). Con el pedal suelto el giro del motor se transmite directamente a las ruedas, es decir, el motor está embragado. Cuando el conductor pisa el pedal de embrague el giro del motor no se transmite a las ruedas y se dice que el motor está desembragado. En algunas situaciones, para evitar que el motor se bloquee (cale) o que las ruedas patinen, puede ser interesante operar a “medio embrague” con transmisión parcial del giro del motor a las ruedas (hay deslizamiento entre el embrague y el bloque motor).

La figura 2 ilustra las partes del mecanismo de embrague y el movimiento que corresponde a cada una. De un lado, girando solidariamente al motor se encuentran el eje motor, el volante de inercia y el plato de presión. De otro lado, transmitiendo el giro a la caja de cambios y el resto de transmisión están el disco de embrague y el eje de salida. Por último, se tiene el pedal de embrague que es accionado por el conductor.

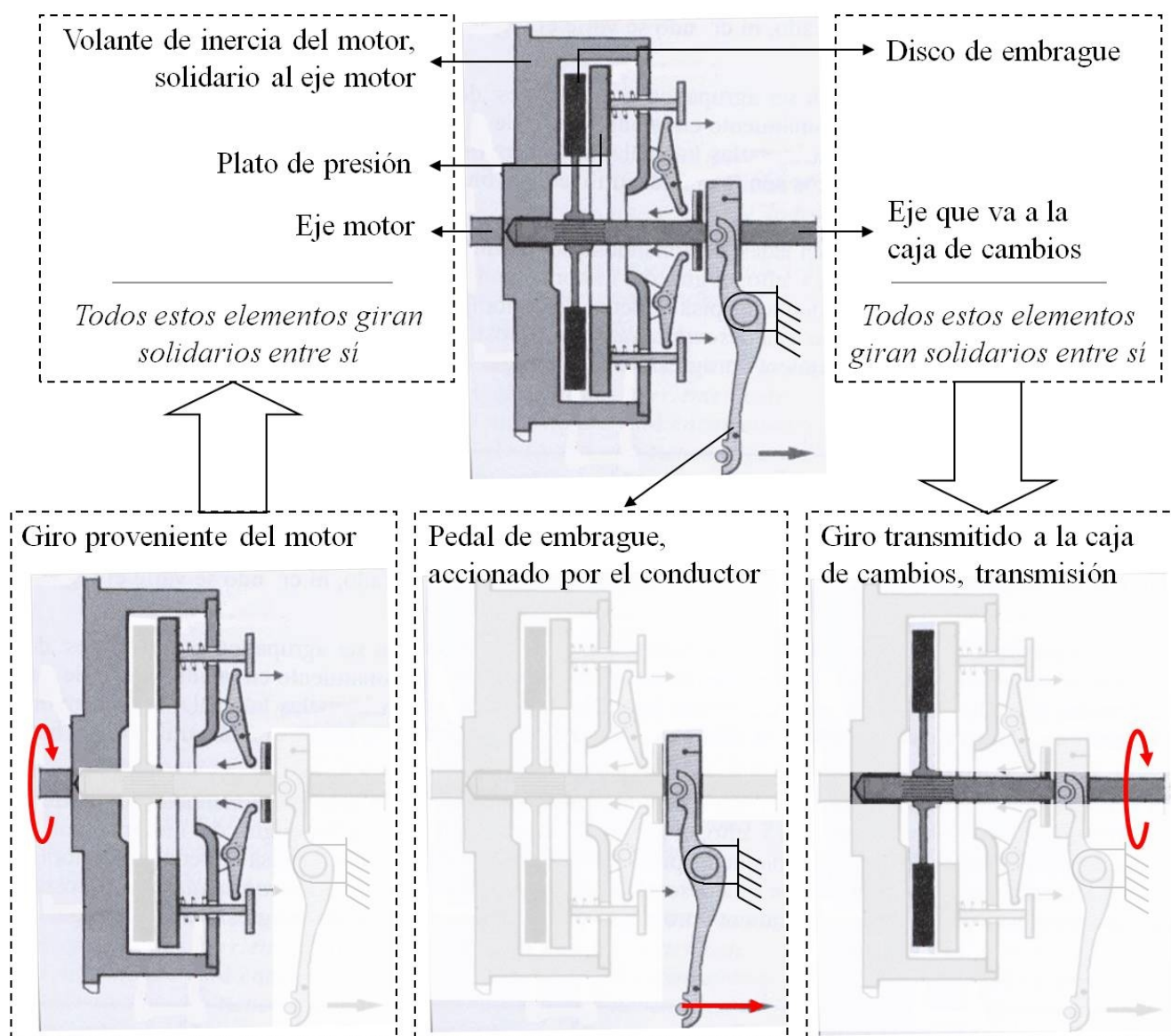


Figura 2

La figura 3 explica el funcionamiento con el motor embragado. Varios muelles helicoidales (se muestra un ejemplo con 4, de los cuáles la vista de sección sólo deja ver 2) empujan el

plato de presión contra el disco de embrague (1). Este último queda aprisionado entre el plato de presión y el volante de inercia, y debido a la fricción termina girando solidario a ellos (2). Así, el giro del motor es transmitido a la caja de cambios y el resto de transmisión (3).

La figura 4 explica el funcionamiento con el motor desembragado. Primero el conductor pisa el pedal del embrague (1). Éste pivota sobre un punto fijo y transmite en su otro extremo el movimiento a unas palancas intermedias (una palanca por cada muelle). Cada palanca a su vez pivota sobre un punto solidario (2) al mecanismo de embrague (que gira con el movimiento del motor) y en su otro extremo transmite el movimiento al plato de presión (3). Este movimiento es un desplazamiento hacia la derecha, lo que hace que el disco de embrague deje de estar aprisionado y por tanto gire independientemente del motor (4). En este momento se puede cambiar de marcha.

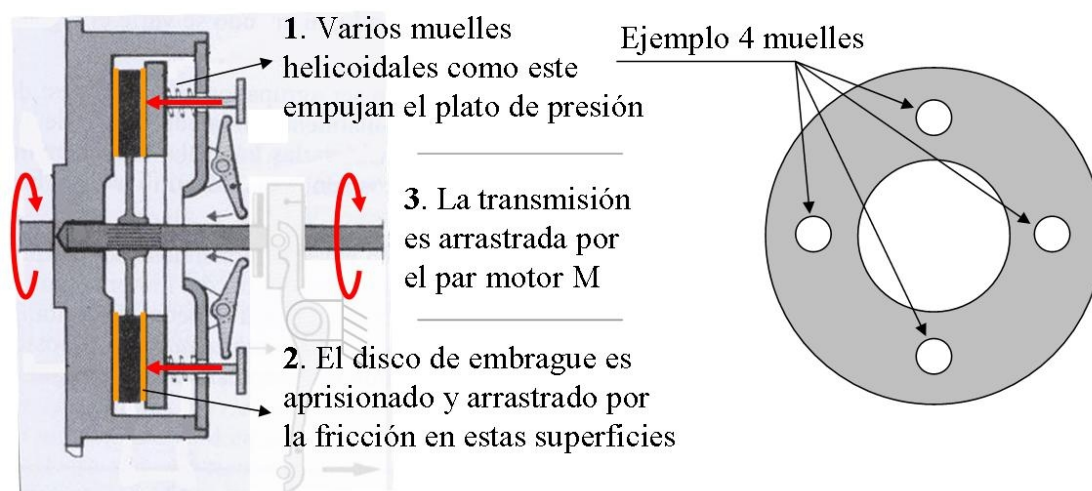


Figura 3

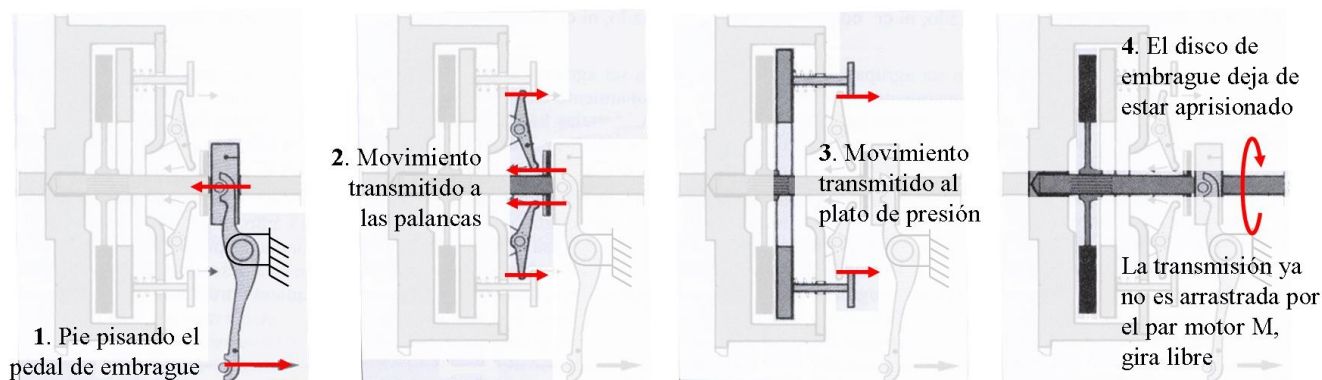


Figura 4

A lo largo de esta práctica se estudiará el equilibrio de fuerzas estático en tres casos: embragado, a medio embrague y desembragado. Aunque el motor gire rápido, los movimientos de embrague y desembrague en sí mismos son lentos en comparación.

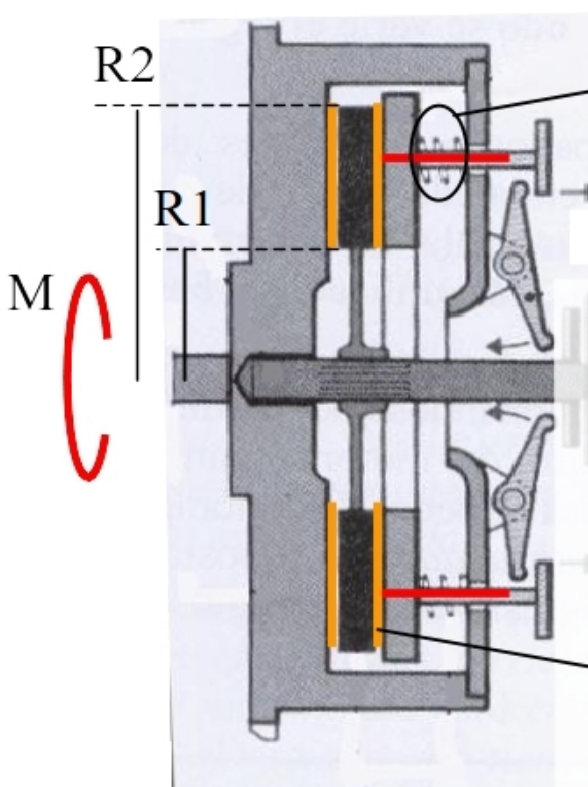


## DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

Abra el cuaderno de *Jupyter* que se le ha proporcionado y siga los siguientes pasos. Cada frase en **negrita** implica una instrucción que se debe cumplir.

- **Escriba apellidos y nombre (en este orden) de los integrantes del grupo en la primera celda del cuaderno que es de tipo *markdown* y la única de este tipo que será necesario editar.** Para ello, haga doble-click en la celda y añada nombres y grupo. Cuando finalice, debe ejecutar la celda. Esto se puede hacer de tres maneras que ya se explicaron en la *Introducción* a las prácticas:
  - (1) clic en el símbolo ► situado frente a la celda;
  - (2) con la celda seleccionada, clic en el botón ►Run presente en la barra de herramientas;
  - (3) con la celda seleccionada, presionar a la vez las teclas *shift + enter*.
- **Al final de la práctica subirá el cuaderno a Moodle a través de la Tarea definida dentro de la carpeta "Prácticas => Práctica1".**
- Como parámetro de referencia en el uso de unidades de fuerza se usará la aceleración de la gravedad. **Investigue cómo se obtiene el valor de la gravedad terrestre estándar y escríbalo con cinco cifras decimales en unidades del SI, en la línea indicada en la primera celda de tipo *code* del cuaderno.**

### 1 Análisis estático del mecanismo embragado



Número de muelles ( $n$ ) = 4

La fuerza en cada muelle ( $F_m$ ) viene dada por:

$$F_m = \frac{3(R_2^2 - R_1^2)}{4n\mu(R_2^3 - R_1^3)} M$$

Mismo coeficiente de fricción en todas las superficies =  $\mu$

En la figura previa se especifican todos los parámetros del problema:  $M$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\mu$ ,  $n$ , y  $F_m$ . Los valores de  $R_1$ ,  $R_2$  se encuentran ya introducidos en la primera celda de tipo *code*.

- **Traduzca los valores de  $R_1$ ,  $R_2$  a unidades SI en la primera celda de tipo *code*** (por ejemplo: en la línea que empieza por "R2\_si =" añada "R2 / 100.0". **Ojo, el resto de fórmulas se introducirán así, haciendo referencias a las variables previamente definidas, NUNCA escribiendo directamente los valores. Es decir "R2 / 100.0", pero no "0.25"**. El motivo es que, de ese modo, si hay que retocar un parámetro, basta con hacerlo en una línea y el programa recalcula todas las variables con el nuevo valor del parámetro al ser ejecutado de nuevo.
- **Ejecute la primera celda de tipo *code***. En la salida debería ver, además del valor que haya introducido para la gravedad estándar un par de líneas tales que  
 El radio exterior del disco de embrague vale 25.0 cm, y el interior 23.0 cm, que traducidos al SI quedarán en 0.25 m y 0.23 m.
- En la segunda celda de tipo *code* se ha introducido el valor del par motor máximo  $M$  que se debe poder transmitir sin que el disco de embrague deslice, en unidades "kg·m"; así como los coeficientes de rozamiento estático y dinámico.
- **Rellene los tres valores de la lista  $M\_si$  dentro de la segunda celda de tipo *code* que se corresponden, respectivamente, con el valor del máximo par motor transmisible con el sistema embragado, el valor del par transmitido cuando se opera a medio embrague transmitiendo un 40% del máximo y el valor del par transmitido cuando el sistema esté desembragado. Las unidades irán en el SI (N·m) cuando el dato que se ha dado iba en kg·m; el valor de la gravedad estándar terrestre, en el SI, sirve para convertir kg en N. La lista se rellena en la línea que, por defecto, aparece como  $M\_si = [ , , ]$  y que representa una lista vacía con tres huecos.**
- **Rellene el valor del número de muelles  $n$  con los que se opera en la línea que empieza por  $n =$  dentro de la segunda celda de tipo *code*.**
- **Ejecute la segunda celda de tipo *code***. Si todo ha ido bien, verá una salida tal que  
 Cuando el sistema esté embragado, habrá que transmitir a las ruedas un par de 245.16625 N.m.  
 Cuando se esté pisando el pedal a medio embrague, habrá que transmitir a las ruedas un par de 98.06650 N.m.  
 Con el pedal pisado a fondo, habrá que transmitir a las ruedas un par de 0.00000 N.m.  
 El número de muelles que ejercen presión sobre el embrague es 4 .  
 El coeficiente de rozamiento estático entre el embrague y el volante motor es 0.28000 .  
 El coeficiente de rozamiento dinámico entre el embrague y el volante motor es 0.22400 .

A continuación, se estudia el comportamiento de un muelle teórico con constante de recuperación  $k = 10 \text{ DaN/mm}$ . En primer lugar, se calcula el valor que debe tener el rozamiento en cada caso (sistema embragado, a medio embrague y desembragado) para que se transmita el par motor previamente calculado a la transmisión. En un segundo paso, hay que hallar las fuerzas normales que están actuando y distribuir las entre el número de muelles para hallar la fuerza que ejerce cada muelle al intentar expandirse.

- **Rellene las líneas de la tercera celda de tipo `code` en las que se dan los valores de la fuerza ejercida por cada muelle (de tipo normal).** Son las líneas que empiezan por  $F\_m\_si[0] =$  ,  $F\_m\_si[1] =$  y  $F\_m\_si[2] =$ .
- El valor de la constante del muelle teórico se le proporciona como  $k\_teo = 10$ ; pero las unidades son  $DaN/mm$ . **Pase el valor de esa constante a unidades del SI ( $N/m$ ) en la línea de la tercera celda de tipo `code` que verá escrita como  $k\_teo\_si = k\_teo$ .** Le faltan los factores de conversión a esa línea.
- Conocidos los valores de la rigidez  $k$  y de la fuerza  $F_m$  a la que está sometido cada muelle, se evalúa el valor de la compresión necesaria que debería sufrir cada muelle. El cálculo se hace en unidades del SI (variable  $x\_teo\_si$ ), **pase ese valor a milímetros en la línea de la tercera celda de tipo `code` que empieza por  $x\_teo = x\_teo\_si$ .** Le falta el factor de conversión.
- Se da el valor de la holgura (2 milímetros) y se pasa a metros. Su valor indica cuánto se desplaza el plato de presión en la posición desembragada, con respecto a la embragada, para asegurarse de que el disco de embrague quede liberado por completo. **rellene en la tercera celda de tipo `code` la línea que le permite calcular el valor de la compresión máxima que experimentaría el muelle teórico cuando se pisase el pedal de embrague a fondo.**
- **Ejecute la tercera celda de tipo `code`.** En la salida, junto con más líneas, debería obtener algo tal que así  
La fuerza que ejerce cada muelle sobre el volante motor, con el sistema embragado, es 455.77465 N.  
La fuerza que ejerce cada muelle sobre el volante motor, con el sistema a medio embrague, es 227.88733 N.  
...  
...  
Con el sistema embragado, total o parcialmente, el muelle teórico está comprimido 4.55775 mm.  
...

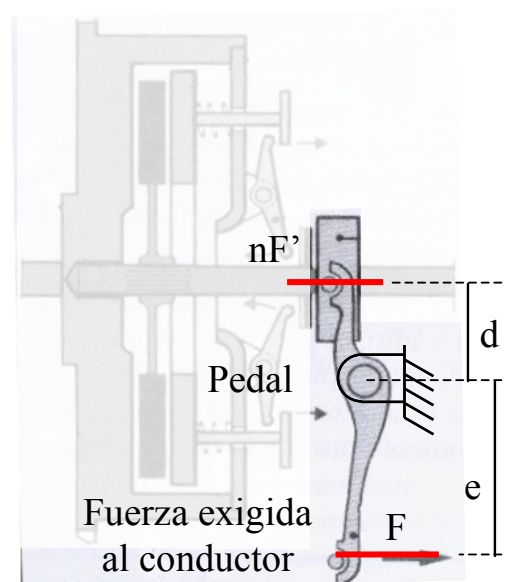
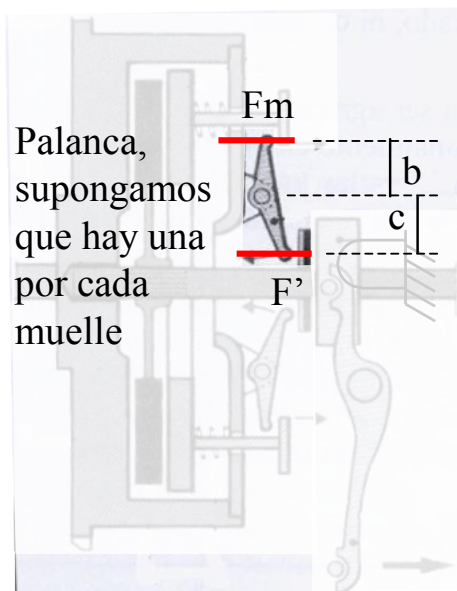
En el siguiente paso, ha de elegir un muelle real de entre los disponibles en un catálogo de la marca "Vanel" que se la ha suministrado. Se han preseleccionado tres modelos distintos que cumplen la condición de que su constante de recuperación real toma un valor próximo al del muelle teórico previamente empleado; es decir, tienen constantes de recuperación próximas a  $10 DaN/mm$ .

- **Abra el archivo 'Catalogo Vanel.pdf' y busque en él las referencias dadas en el cuaderno: C460.600.0420.AP, C.056.150.0198.A y C.174.380.0460.I.** El parámetro "Allowable length" del catálogo indica la longitud mínima más allá de la cual si se comprime el resorte, éste se deformará permanentemente perdiendo sus propiedades elásticas. El parámetro "Block length" es siempre menor que "Allowable length" y se refiere a la longitud del resorte cuando se comprime hasta que todas sus espiras se tocan entre sí.
- **A partir de los datos del catálogo debe rellenar las líneas de la cuarta celda de tipo `code`: longitud en reposo " $L\_reposo$ ", constante elástica " $k$ " y longitud mínima de diseño " $L\_min$ ".** Esto se hará para cada una de las referencias buscadas en el catálogo. A la hora de elegir entre "Allowable length" y "Block

length" como el valor de  $L_{min}$ , tenga en cuenta que si los muelles perdieran sus propiedades elásticas, el sistema dejaría de funcionar como se espera de él y habría que reemplazarlos.

- En la cuarta celda de tipo *code* rellene la línea que empieza por *cte\_transformacion* = con el valor del factor de conversión de *DaN/mm* a *N/m*.
- Escoja uno de los tres muelles del catálogo e indique su elección en la línea de la cuarta celda de tipo *code* que empieza *n\_muelle* =. El muelle elegido debería comprimirse sin sufrir deformaciones no elásticas (que lo dañarían) en todos los regímenes de funcionamiento estudiados (embragado, a medio embrague y desembragado). El número 1 indica el primer muelle, el número 2 el segundo y el número 3 el tercero.
- Ejecute la cuarta celda de tipo *code*.

## 2 Análisis estático del mecanismo en el instante en que se pisa el pedal de embrague.



Se parte de la fuerza  $F_m$  que cada muelle está ejerciendo sobre el plato de presión. Se supone que hay una sola palanca  $b/c$  actuando localmente sobre cada muelle (ver figura de la izquierda). Cuando, al pisar a fondo el pedal de embrague, esta palanca intenta desplazar el plato de presión hacia la derecha, debe vencer la fuerza de compresión inicial que está ejerciendo el muelle sobre el plato de presión hacia la izquierda. Por tanto, sobre un extremo de la palanca actúa, como mínimo,  $F_m$  y sobre el otro  $F'$ , fuerza proveniente del pedal. Las dimensiones de la palanca son conocidas: brazos  $b$ ,  $c$  que inicialmente valen 4cm y 24cm, respectivamente.

- Pase, en la quinta celda de tipo *code*, los valores de  $b$ ,  $c$  a unidades SI. Se hace en las líneas que empiezan por  $b_{si} = b$  y  $c_{si} = c$ . Les faltan los factores de conversión.

El código sigue con el cálculo de la fuerza que la palanca  $b/c$  debe ejercer sobre el muelle en cada caso (en el dibujo de la izquierda estaría representada por  $F_m$ ). Con el sistema embragado esa fuerza debería ser nula, la palanca no intenta sobrecomprimir el muelle; con el



sistema a medio embrague, aunque no se consiga comprimir el muelle, sí que se consigue reducir la normal que ejerce sobre el plato de presión, al actuar en sentido contrario; con el sistema completamente embragado, hay que suministrar la fuerza necesaria para que el muelle reduzca su elongación en la cuantía de la holgura.

A partir del valor previo, se puede calcular la fuerza que debe ejercer el pedal sobre cada palanca *b/c*. Esto se hace en la línea de la quinta celda de tipo *code* que empieza por *F\_ped\_si*; que se corresponde con *F'* en el dibujo de la izquierda.

Se continua con el análisis del pedal (figura de la derecha), cuyos brazos *d* y *e*, valen inicialmente 4cm y 21cm, respectivamente y actúa como una palanca.

- **Pase, en la quinta celda de tipo *code*, los valores de *d*, *e* a unidades SI.** Se hace en las líneas que empiezan por *d\_si = d* y *e\_si = e*. Les faltan los factores de conversión.

En el instante de pisar el pedal, en su parte superior recibe el empuje de las *n* palancas *b/c* (una por cada muelle). Por acción y reacción, cada uno de estos empujes tiene un valor *F'*. Por tanto, la fuerza total ejercida sobre el pedal en su parte superior es *n·F'*. En el equilibrio estático (el pedal se mueve despacio), esta fuerza es equilibrada por la fuerza *F* ejercida por el conductor con su pie sobre la parte inferior del pedal.

- **En la quinta celda de tipo *code* calcule por equilibrio estático el valor de *F* en función de *n*, *F'*, *d* y *e*.** Haga esto en la línea que verá escrita como una lista vacía *F\_si = []*. En ella, debe introducir dentro de los corchetes una expresión similar a la empleada en el cálculo de *F\_ped\_si* unas líneas más arriba; pero ahora *F'* es *F\_ped\_si*, *d* es *d\_si*, *e* es *e\_si*, mientras que *n* es *n*. Previamente, se había obtenido *F'* (*F\_ped\_si*) a partir de *b* y *c* (*b\_si* y *c\_si*) y de *Fm* (*F\_p\_si*).
- **Ejecute la quinta celda de tipo *code*.** En la salida, entre otras líneas, debería obtener algunas como

El brazo corto de la palanca mide 4.0 cm. Debería ser  $\geq 3$  cm por restricciones de diseño.

El brazo largo de la palanca mide 20.0 cm.

La suma de las longitudes de los brazos de la palanca es 24.0 cm. Debería valer 24 cm por restricciones de diseño.

La fuerza que ejerce cada palanca sobre cada muelle, con el sistema embragado, vale 0.00000 N.

La fuerza que ejerce cada palanca sobre cada muelle, con el sistema a medio embrague, vale 227.88733 N.

La fuerza que ejerce cada palanca sobre cada muelle, con el sistema desembragado y el pedal pisado a fondo, vale 655.86465 N.

La fuerza que ejerce el pedal sobre cada palanca, con el sistema embragado, vale 0.00000 N.

La fuerza que ejerce el pedal sobre cada palanca, con el sistema a medio embrague, vale 45.57747 N.

La fuerza que ejerce el pedal sobre cada palanca, con el sistema desembragado y el pedal pisado a fondo, vale 131.17293 N.

El brazo corto del pedal mide 4.0 cm. Debería ser  $\geq 4$  cm por restricciones de diseño.

El brazo largo del pedal mide 21.0 cm.

...  
 ...  
 ...  
 ...  
 ...  
 ...

## ANEXO. Como obtener la relación entre la fuerza que ejercen los muelles sobre el plato de presión y el par-motor máximo que se puede transmitir.

Para poder transmitir un par-motor desde el volante de inercia y el disco de presión al disco del embrague (y de este al eje de salida y a las ruedas) es necesario que exista una fuerza de rozamiento estático entre las piezas en contacto que evite el deslizamiento entre ellas. Conviene recordar que, cuando el sistema está embragado, ambas caras del disco de embrague están en contacto con el bloque motor (una con el disco de presión y otra con el volante de inercia) y en ambas actúa el rozamiento.

En el caso limite, es decir, cuando se estudie el valor máximo de par-motor ( $M$ ) que se puede transmitir sin que el embrague deslice respecto al bloque motor, la fuerza de rozamiento entre los discos también alcanzará a su valor máximo:

$$F_r = \mu_s N$$

donde  $\mu_s$  y  $N$  son, respectivamente, el coeficiente de rozamiento estático y la normal entre los discos.

Esta normal es generada por la compresión de los muelles que actúan sobre el plato de presión, por lo tanto la normal será  $N = n F_m$ , donde  $n$  es el número de muelles y  $F_m$  es la fuerza que produce cada uno de los muelles al estar comprimido.

La anterior fuerza de rozamiento actuando sobre el disco de embrague será la que produzca en dicho disco un momento respecto a su eje de giro igual al momento del par-motor que se quiere transmitir al eje de salida.

Por lo tanto, si se quiere encontrar una relación entre la fuerza que ejerce cada muelle ( $F_m$ ) y el par-motor máximo ( $M$ ) que se puede transmitir, habrá que calcular el momento que realiza la fuerza de rozamiento respecto al eje de giro del disco del embrague.

Ahora bien, para realizar dicho cálculo hay que tener en cuenta que la fuerza de rozamiento es una fuerza distribuida (no puntual) actuando sobre cada punto de la superficie del volante de inercia. Así que para calcular el momento de la fuerza de rozamiento habrá que integrar el momento de la fuerza de rozamiento actuando sobre toda la superficie del disco.

Considérese un diferencial de área ( $dA$ ) de la superficie del disco de embrague, la fuerza de rozamiento ( $dF_r$ ) que actúa sobre ese diferencial de área será:

$$dF_r = \frac{F_r}{A} dA$$

Donde  $A$  es el área total del disco y  $F_r$  la fuerza de rozamiento total que actúa sobre el disco.  $\frac{F_r}{A}$  se

puede ver como una densidad superficial de fuerza de rozamiento.

Tómese un  $dA$  como se muestra en la figura (a una distancia  $r$  del eje de giro, con un espesor en la dirección radial  $dr$  y con un lado en la dirección tangencial definido por un segmento de arco de  $r d\theta$ ). El área de este diferencial de área será:

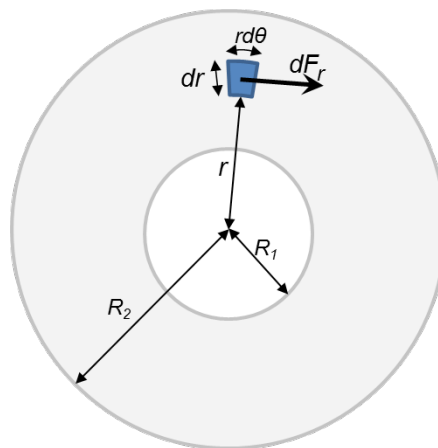
$$dA = r dr d\theta$$

Y la fuerza de rozamiento actuando sobre ella:

$$dF_r = \frac{F_r}{A} r dr d\theta$$

Como este área está a una distancia  $r$  del eje de giro y su fuerza de rozamiento es perpendicular a la dirección radial, el momento respecto al eje de giro de la fuerza de rozamiento que actúa sobre el diferencial de área, en una cara del disco, será:

$$dM = r F_r = \frac{F_r}{A} r^2 dr d\theta$$



Si se quiere obtener el momento total generado por la fuerza de rozamiento, hay que integrar sobre toda la superficie del disco (integral doble tanto en coordenada radial ( $r$ ) como en la angular ( $\theta$ )) y tener en cuenta que el rozamiento actúa por las dos caras del disco (llámense 1 y 2)

$$M = \int dM_1 + \int dM_2 = \frac{2F_r}{A} \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2F_r}{A} \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{3} 2\pi$$

Ahora, téngase en cuenta que el área total de una cara del disco es  $A = \pi (R_2^2 - R_1^2)$ , se puede despejar la fuerza de rozamiento total ejercida sobre el disco de embrague

$$F_r = \frac{3M(R_2^2 - R_1^2)}{4(R_2^3 - R_1^3)}$$

En el caso estático límite, se cumplirá que  $F_r = \mu_s N = \mu_s n F_m$  de donde se puede despejar la fuerza mínima que debe ejercer cada muelle sobre el disco de presión para poder transmitir un par-motor máximo  $M$ :

$$F_m = \frac{3M(R_2^2 - R_1^2)}{4n\mu_s(R_2^3 - R_1^3)}$$

En el caso de operar a medio embrague, habrá deslizamiento entre el disco de embrague y el bloque motor y se cumplirá que  $F_r = \mu_d N = \mu_d n F_m$ . Por lo demás, las expresiones obtenidas son formalmente las mismas, únicamente cambia el valor del par máximo transmisible,  $M$ , que ahora interesa que sea bajo para facilitar este modo de operar.

En el caso de operar con el sistema desembragado, desaparece el contacto entre el disco de embrague y el bloque motor y con él, tanto la fuerza de rozamiento como la fuerza que cada muelle ejerce sobre el disco de presión.